

2076

# ACTA TECHNICA

## ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT.

A. GELEJI

TOMUS XXXIX

FASCICULI 1—2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST  
1962

ACTA TECHN. HUNG.



# ACTA TECHNICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

I N D E X

*Acta Technica*  
Tomus XXXIX

- Apor, K.* : Система кривых регулирования русла рек. Часть I. Расчет длины, род кривых — *Apor, K.* : Das System der Flußbett-Regulierungskurven I. Berechnung der Kurvenlängen; Arten der Kurven — The System of River-Bed Regulation Curves I. Calculation of Curve Length; Types of Curves — Le système des courbes de régularisation des lits de rivière I. Calcul de la longueur des courbes; types de courbes ..... 385
- Bodrogai, J.* : Eine neue, genauere Methode zur Bestimmung der Brucharbeit — Determination of Fracture Energy by a New, More Precise Method — Méthode nouvelle et plus précise pour la détermination du travail de rupture — *Бодрогаи, И.* : Новый более точный метод определения работы излома ..... 411
- Du Castel, F.* : Le rôle du processus de réflexion partielle dans la propagation des ondes — Die Rolle des Prozesses der teilweisen Reflexion in der Wellenfortpflanzung — The Role of the Partial Reflexion Process in the Wave Propagation — *Дю Кастель, Ф.* : Роль процесса частичного отражения в распространении волн ..... 179
- Csonka, P.* : Specially Shaped Membrane Shells on a Base Comprising an Equilateral Triangle — Besonders geformte Membranschalen über einem regelmäßigen Dreieckgrundriß — Voiles minces de forme spéciale construits sur une base en triangle régulier — *Чонка, П.* : Мембранные оболочки специальной формы над основанием в виде правильного треугольника ..... 187
- Domes, O.* : Study of the Limit-Irregularities of Combed Flax-Sliver — Studium über die Grenzunregelmäßigkeiten der Flachskammzugbänder — Étude de l'irrégularité limite des rubans de lin peignés — *Домеш, О.* : Исследование граничной неровности чесанных льняных лент ..... 285
- Fekete, Gy.* : Bau und Betrieb der neuen Schiffe der ungarischen Binnenschiffahrt und Donau-Seeschiffahrt — The Building and the Operation of the New Hungarian Ships for Inland and for Danube-Sea Traffic — Construction et exploitation de nouveaux bâtiments destinés à la navigation intérieure et à la navigation danubo-maritime — *Фекете, Д.* : Строительство и эксплуатация новых судов внутреннего и дунайско-морского судоходства ..... 299
- Feltham, P.* : Creep of Metals — Das Kriechen der Metalle — Le fluage des métaux — *Фельтам, Ф.* : Ползучесть металлов ..... 243
- Geszti, P. O.* : Some Zero Sequence Type Problems of Networks — Einige Probleme des Nullsystems in elektrischen Netzen — Quelques problèmes des réseaux nuls — *Гестти, П.* : Несколько проблем, связанных с вопросами схем нулевой последовательности ..... 427
- Klimov, B.* : Zur Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen bei gewisser antimetrischer und einseitiger Belastung — On the Calculation of Double-Curved Shells under Certain Symmetric and Antimetric Loads — Calcul des voiles minces à double courbure en cas de charges antimétriques et unilatérales — *Климов, Б.* : К расчету оболочек двойкой кривизны при определенной антисимметричной и односторонней нагрузке ..... 265



- Korach, M. und Sasvári, G.* : Die Trocknung in der Keramik — Drying in the Ceramic Industry — Le séchage en céramique — *Корах, М. и Шашварти, Д.* : Сушка в керамической промышленности ..... 195
- Kovács, K. P.* : Untersuchung der transienten Vorgänge von Asynchronmotoren mit Hilfe von Analogrechnern — Investigation of Transient Phenomena in Asynchronous Motors with Analogue Computer — Études des phénomènes transitoires dans les moteurs asynchrones, par machine à calculer analogue — *Ковач, К. П.* : Исследование неустановившихся процессов асинхронного двигателя на аналоговой счетной машине ..... 215
- Lévai, I.* : Herstellung von Stirnradgetrieben mit elliptischem Wälzzyylinder — The Production of Spur Gears with Elliptical Rolling Cylinders — La fabrication des engrenages droits à circonférence primitive elliptique — *Леваи, И.* : Производство эллиптических лобовых зубчатых колес ..... 95
- Preszler, L.* : Berechnung der Strömung für ein radiales Laufrad mit stark gewölbter Beschauflung — Calculation of Intensively Curved Revolving Circular Grids — Calcul de persiennes tournantes à squelette de forte courbure — *Преслер, Л.* : Расчет вращающейся круговой решетки большой кривизны ..... 43
- Prohászka, J.* : Änderungen des Wärmeausdehnungskoeffizienten von kaltverformten Metallen im Verlaufe des Weichglühens — Variation of the Coefficient of the Thermal Expansion of Cold-Worked Metals during Annealing — Changement du coefficient de dilatation thermique des métaux écrouis, au cours du recuit — *Прохаска, Й.* : Изменение коэффициента теплового расширения холоднодеформированных металлов при отжиге ..... 349
- Prosin, A. B.* : Дальние связи на ультракоротких волнах — *Prosin, A. W.* : Fernverbindungen mit ultrakurzen Wellen — VHF-Links for Great Distance — Télécommunications à ondes ultracourtes ..... 165
- Reuss, E.* : Berechnung der Brucharbeit aus dem Torsionsversuch am zylindrischen Probestab — Calculation of the Work of Fracture on the Basis of the Torsional Test Diagramm of a Cylindric Test Bar — Calcul du travail de rupture par essai de torsion d'une éprouvette cylindrique — *Реус, Э.* : Расчет работы излома на основе испытания на кручение цилиндрического образца ..... 259
- Rohonyi, W.* : Über die Grenzen der Endübersetzungen doppelt gebundener Getriebe bei schnellaufenden Werkzeugmaschinen — Limits for the Total Transmission Ratio of Double-Linked Gear Trains — Limites des rapports totaux des trains d'engrenages à couplage double des machines-outils de grande vitesse — *Рохони, В.* : Пределы конечных передач двухстыкового приводного устройства быстроходных станков ..... 67
- Schay, G., Nagy, L. Gy. and Szekrényesy, T.* : Influence of the Water Contents of Adsorbents and Organic Liquids on the Adsorption of Liquids — Der Einfluß des Wassergehalts von Adsorbentien und organischen Flüssigkeiten auf die Adsorption von Flüssigkeiten — L'influence de la teneur en eau des adsorbants et des liquides organiques sur l'adsorption des liquides — *Шай, Г., Надь, Д. Л. и Секренеш, Т.* : Влияние воды, содержащейся в адсорбентах или органических жидкостях, на адсорбцию жидкостей ..... 461
- Schleicher, A.* : Data on the History of Metallurgy in Hungary VII. Hungary, the Cradle of the So-Called European Amalgamation — Beiträge zur Geschichte des Hüttenwesens in Ungarn VII. Ungarn als die Wiege der sog. europäischen Amalgamation — Contribution à l'histoire de la métallurgie en Hongrie VII. La Hongrie, berceau de l'amalgamation dite européenne — *Шлейхер, А.* : К истории металлургии в Венгрии, VII. Венгрия как колыбель так называемой европейской амальгамации ..... 441
- Szántó, I. S.* : X-ray Investigation of Yield-Phenomena in Steels with a New Method of Evaluation — Röntgen-Untersuchung der Fließgrenzenerscheinungen im Stahl mittels einer neuen Auswertungsmethode der Gitterverzerrungen — Examen radiographique des phénomènes à la limite d'écoulement de l'acier selon une



- nouvelle méthode d'évaluation des distorsions du réseau — Санто, И. Ш.: Рентгенографическое исследование явлений предела текучести стали с помощью нового метода индикации искажения решетки ..... 367
- Szidarovszky, J.* : Natural Vibration of a Bar under Axial Force, Taking into Consideration the Effect of Shearing Force and Rotatory Inertia — Eigenquerschwingungen eines auf Druck beanspruchten Stabes mit Rücksicht auf den Einfluß der Schubkraft und Rotationsträgheit — Vibration propre d'une barre soumise à une charge axiale, compte tenu de l'inertie de rotation — Сидаровский, Я.: Собственные колебания стержня, нагруженного силами, действующими вдоль оси, учитывая инерцию вращения ..... 29
- Сифоров, В. И.: К теории каналов радиосвязи со случайно изменяющимся параметрами — Siforow, W. I.: On the Theory of Radiochannels with Randomly Varying Parameters — Sur la théorie des radiocanaux à paramètres aléatoires... 135
- Szöke, B.* : Beitrag zur Entstehung von technischen Irrtümern — Study on Some Sources of Technical Errors — Sur les causes de quelques erreurs techniques — Сёке, Б.: К возникновению технических ошибок ..... 3
- Terplán, Z. und Lévai, I.* : Beitrag zur Berechnung von Gleitlagern mit Öl- oder Fettschmierung — Study on the Methods of Calculation for Sliding Bearings Lubricated by Oil and Grease — Remarques concernant le calcul des paliers lisses lubrifiés à l'huile et à la graisse — Терплан, З. и Леваи, И.: Замечания к расчету подшипников скольжения, работающих на масляной и жировой смазке ..... 329
- Вамош, Т. и Гертлер, Я.: Методы приближенного расчета потерь в электрических сетях и расчет влияния некоторых измерений в сети — Vámos, T. und Gertler, J.: Näherungen in den Berechnungsverfahren für Netzverluste und Berechnung des Einflusses von einzelnen Veränderungen des Netzes — Approximations in the Calculating Methods for Network Losses and Calculation of the Influence of some Network Variables — Approximations dans les méthodes de calcul des pertes de réseau, et calcul de l'influence de certaines variations du réseau ..... 451
- Vasvári, F.* : Investigation of the Initial Phase of Cavitation Damage — Untersuchung des Anfangsstadiums der Zerstörung durch Kavitation — Examen de la phase initiale de la destruction par cavitation — Вашвари, Ф.: Исследование начального состояния кавитационного разрушения ..... 101
- Замбо, Я.: Оптимальное место заложения шахтных стволов в случае крутопадающих пластов — Zambó, J.: Die optimale Lage von Bergwerksschächten bei starkfallenden Lagerstätten — The Optimum Emplacement of Shafts for Steep Deposits — L'emplacement optimum des puits de mine aux gisements raides..... 123





ACTA  
TECHNICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXIX



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1962





# BEITRAG ZUR ENTSTEHUNG VON TECHNISCHEN IRRTÜMERN

B. SZÓKE

[Eingegangen am 14. Februar 1958]

Die Naturgesetze, unveränderlich und vom Einfluß des menschlichen Geistes unabhängig, können vom Menschen nur über den Umweg der Irrtümer schrittweise entdeckt werden. Zwar erscheint die Behandlung dieser Frage als ein höchst interessantes und dankbares Thema an Hand eines Wissenschaftszweiges oder durch Verfolgung der Entwicklung gewisser spezieller technischer Errungenschaften, doch glaubt der Verfasser, daß es günstiger ist, zur Erörterung logischer Verfehlungen den Weg der Darstellung einzelner äußerst einfacher Fälle einzuschlagen, die er im alltäglichen Leben der technischen Tätigkeit persönlich beobachten konnte.

## I. Irrtümer im Lichte der Kombinatorik

### 1. Unzulänglicher Gedankengang infolge Vernachlässigung

Bekannterweise beruht das »Endergebnis« meistens auf mehreren Ursachen, und hierbei ist nicht nur die Anzahl und die Gruppierung der Dinge entscheidend, sondern auch die Reihenfolge der damit verbundenen Ereignisse oder Tätigkeiten. Hierüber schrieb JACOB BERNOULLI (1654—1705) [1] wie folgt:

»Da aber die Menge der Dinge, welche zur Hervorbringung einer Erscheinung oder eines Ereignisses zusammenwirken, oft eine so große und so verschiedenartige ist, daß die Erforschung aller Wege, auf welchem ihre Zusammensetzung oder Vermischung geschehen bzw. nicht geschehen kann, den größten Schwierigkeiten begegnet, so ist es nicht zu verwundern, daß selbst die klügsten und umsichtigsten Menschen in keinen Fehler öfter verfallen, als in denjenigen, welcher in der Logik *'die ungenügende Aufzählung der Teile'* genannt wird. Daher nehme ich keinen Anstand zu behaupten, daß dieser Fehler fast die einzige Quelle von unendlich vielen der schwerwiegendsten Irrtümer ist, welche wir in unseren Überlegungen, um die Dinge zu erkennen oder zu verwerten, täglich begehen.«

### 2. Die Konsequenz als Permutation der Grundursachen

Permutationen, die als je eine Gesamtheit von Elementen einer bestimmten Anzahl nur in der Reihenfolge dieser Elemente voneinander abweichen, gewinnen sofort einen praktischen Sinn, falls man zwischen den Dingen einen



Zusammenhang voraussetzt und die Reihenfolge als ein räumliches oder zeitliches Hintereinander auffaßt.

Es sollen in Bild 1 die Permutationen von zwei Elementen für drei verschiedene Fälle dargestellt werden. Die Verbindung der Elemente ist in Bild 1a als gegenseitige Lage von zwei Latten, in Bild 1b als Befahren des Weges zwischen zwei Punkten, in Bild 1c als Ineinanderlegen des Wassers und des Tiegels dargestellt.

Nun wollen wir auf die Permutation von drei Elementen übergehen, indem wir zum Bilde 1c als drittes Element gebrannten Kalk zusetzen. Der

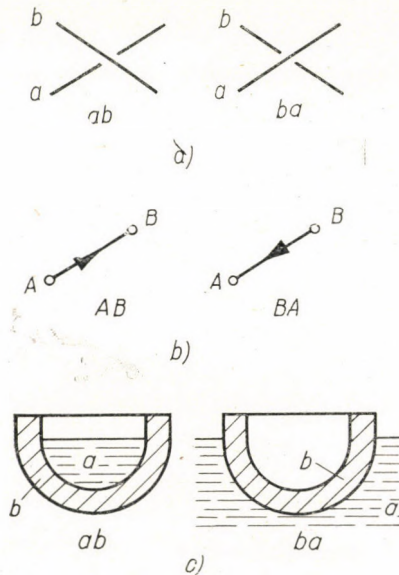
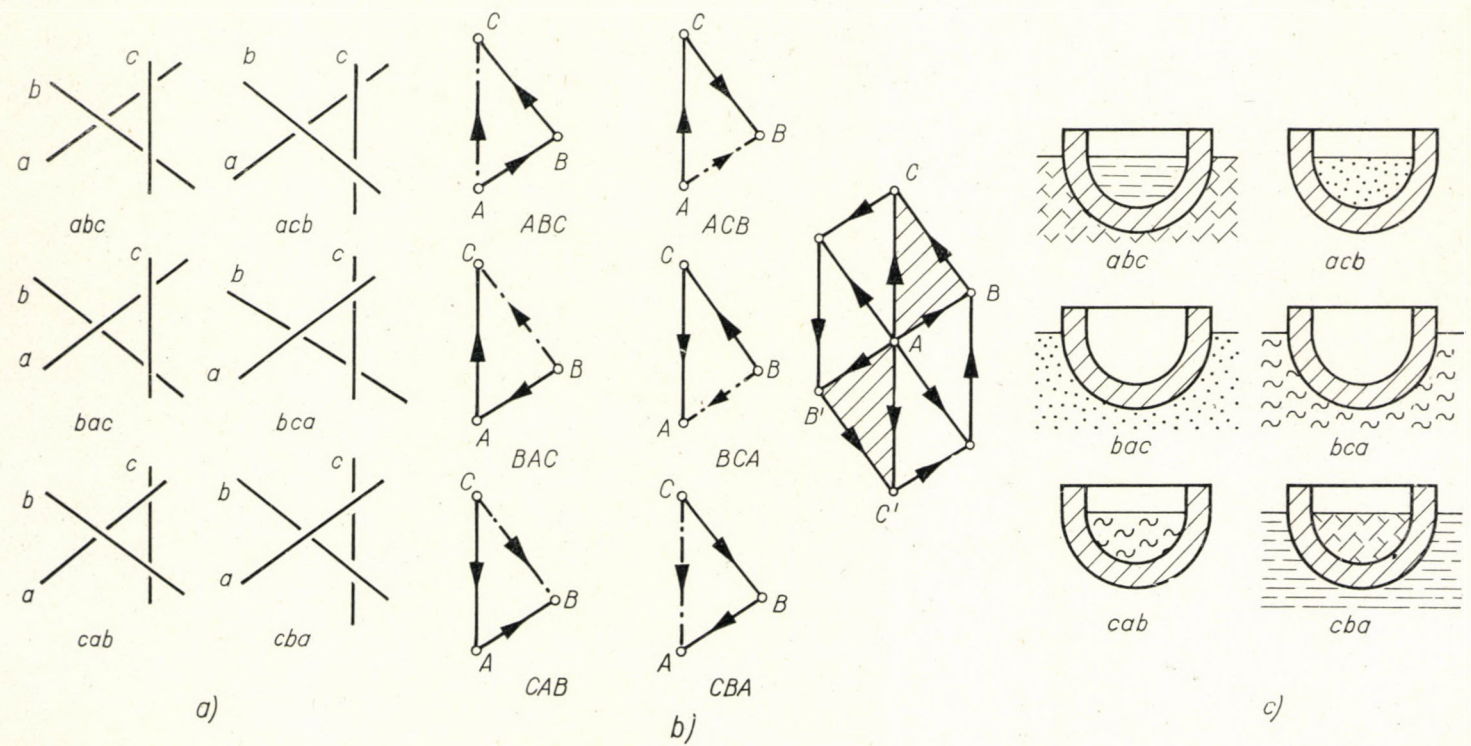


Bild 1. Sinngemäße Anwendung von kombinatorischen Beziehungen konkreter Begriffe

- a) Lage von 2 Latten übereinander;  $ab$  = auf Latte  $a$  kommt die Latte  $b$
- b) Befahrung der Punkte;  $AB$  = Weg von  $A$  nach  $B$
- c) Ineinandersetzung;  $ab$  = Füllen von Wasser  $a$  in den Tiegel  $b$

Reihenfolge soll dadurch ein bestimmter Sinn zugesprochen werden, daß wir beim Zusetzen von wenig Wasser zum gebrannten Kalk: Kalkmehl ( $ac$ ), — dagegen beim Zusetzen von wenig Kalk zum Wasser: Kalkmilch ( $ca$ ) gewinnen. (Die Wichtigkeit der Reihenfolge ist in der Praxis gleichfalls offenkundig; z. B. wenn man Bordeaux-Brühe verfertigt, so erhält man eine bessere Bindefähigkeit, wenn man Kupfervitriol in die Kalkmilch schüttet und nicht umgekehrt.) In Bild 2c bedeuten die punktierten Teile Kalkmehl, die wellig gestrichelten Teile Kalkmilch.

In Bild 2a ist die Permutation als gegenseitige Lage von drei Latten, in Abbildung 2b als geometrische Summierung von drei Vektoren zu verstehen. Der Wert  $P_n = n!$  bedeutet die Anzahl der Lagen der Latten bzw. die Zahl



**Bild 2. Gruppen als Permutation von 3 Elementen**  
 a) Gegenseitige Lage von 3 Latten  
 b) Permutation als Resultierende von Vektoren  
 c) Dreiergruppen von Wasser, Tiegel und Kalk



der resultierenden Vektoren. Wenn wir die Wegvektoren unabhängig von der Lage der gegebenen Punkte abbilden wollen, so können wir das Befahren der drei Punkte als Permutation mit Hilfe eines Dreieckpaares  $ABC$  und  $AB'C'$ , die zum Punkte  $A$  als Spiegelbilder gezeichnet sind, darstellen; wir können auch ein affines Bild des regelmäßigen Sechsecks, oder aber die Halbmesser (als Strahlenbüschel) zu den Eckpunkten des Sechsecks aufzeichnen.

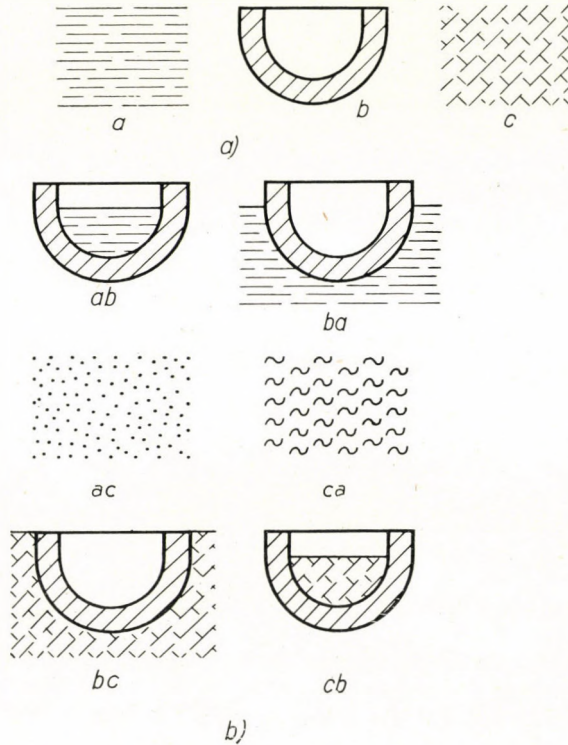


Bild 3. Darstellung der Variationen 1. und 2. Klasse von 3 Elementen

- a) Variationen 1. Klasse: die Elemente selbst  
 b) Variation 2. Klasse

Aus der Betrachtung der in Bild 2c dargestellten Kombination kann man die sehr wichtige Folgerung ziehen, daß die Permutation der Elemente keine Gewähr dafür bietet, daß wir das Ergebnis in zweckmäßiger Weise erreichen. Wenn wir z. B. Kalkmich im Tiegel bereiten wollen, so heißt es gemäß der Formel  $cab$ , die Kalkmilch vorerst — eventuell in einem viel größeren Gefäß — zu verfertigen und von hier in den Tiegel zu füllen. Das rationelle Verfahren hingegen wäre, die Kalkmilch in dem Tiegel zu verfertigen, d. h. nach der Variation 2<sup>ter</sup> Klasse ( $ab$ ) erst Wasser in den Tiegel zu füllen (Bild 3) und den Kalk  $c$  als drittes Element der Gruppe nachher zuzusetzen. Also ist



es eine Forderung der rationellen Untersuchung, im Laufe der Bildung der Gruppen auch auf die einzelnen Variationen der niedrigeren Klasse einzugehen.

Diese Forderung zu erfüllen ist aber schwieriger als sie aufzustellen.

Nehmen wir z. B. nur 2 Elemente. Mit diesen haben wir 2 Variationen erster Klasse und weitere 2 Variationen zweiter Klasse, insgesamt 4 Variationen. Diese vier Variationen sollen als eine Vierergruppe zur Bildung weiterer Kombinationen herangezogen werden; nun bilden wir aus den derart entstandenen 4 »Elementen« die möglichen Variationen, als das Produkt aus der Anzahl der Kombinationen und der Anzahl der Permutationen der Klassenzahl wie folgt:

$$V_4^1 = 1! C_4^1 = 1! \binom{4}{1} = 1 \times 4 = 4$$

$$V_4^2 = 2! C_4^2 = 2! \binom{4}{2} = 2 \times 6 = 12$$

$$V_4^3 = 3! C_4^3 = 3! \binom{4}{3} = 6 \times 4 = 24$$

$$V_4^4 = 4! C_4^4 = 4! \binom{4}{4} = 24 \times 1 = 24$$

64

d. h. die zweite Serie bietet uns schon die Fülle von 64 Fällen.

In der nächsten Gruppe, mit 3 Urelementen, ist die Zahl der Variationen  $3 + 6 + 6 = 15$ ; aus diesen Elementen ist die Zahl der Variationen in der zweiten Serie 3 554 627 472 075. Rechnen wir nur eine Sekunde zur Bildung einer Variation, so beträgt die notwendige Arbeitszeit mehr als 112 716 Kalenderjahre. Dies genügt, den eingangs zitierten Gedankengang des berühmten Mathematikers zu beleuchten.

### 3. Einige technische Irrtümer einfacher Natur in Verbindung mit dem Kreis

In der Praxis des Maschinenbaues ist einer der häufigsten Fälle einer Kombination aus drei Elementen der Kreis, wo man nämlich die Kreisebene, die Umfangslinie und den Mittelpunkt miteinander in die eindeutig bestimmte gegenseitige Beziehung zu bringen hat.

#### a) Der Mittelpunkt als zum Umfang und der Umfang als zum Mittelpunkt gehöriges Element

Gelegentlich konnte ich in einer Fabrikswerkstätte beobachten, wie ein Schlosser sich bemühte, eine einige mm starke Materialschicht von dem Umfang einer Nockenrolle von 2 m Durchmesser und 1/2 m Breite durch Feilen abzuarbeiten. Ich erhielt vom Meister die Aufklärung, daß die Arbeitsfläche gegenüber dem Bohrungsmittelpunkt irrtümlich verschoben sei (Bild 4). Nachher teilte er noch mit, daß die Bohrung nur vorgebohrt, also nicht in endgültiger







jüngst redigierten Lehrbüchern aufzufinden ist. In dem oben angeführten Beispiel war die unrichtig gewählte Reihenfolge nur Ursache eines unwirtschaftlichen Verfahrens, ohne aber einen Fehler hervorzurufen. In unserem neuen Beispiel aber handelt es sich um eine technisch fehlerhafte Ausführung.

In Bild 5 ist die prinzipielle Anordnung des Einstellmechanismus, den wir einer Kritik unterziehen wollen, dargestellt. In der Abbildung ist  $A_1$  das rechtsseitige und  $A_2$  das linksseitige fixe Lager der schnell-laufenden Walze. Ferner ist  $B_1$  das rechtsseitige,  $B_2$  das linksseitige Schwenklager der langsam-

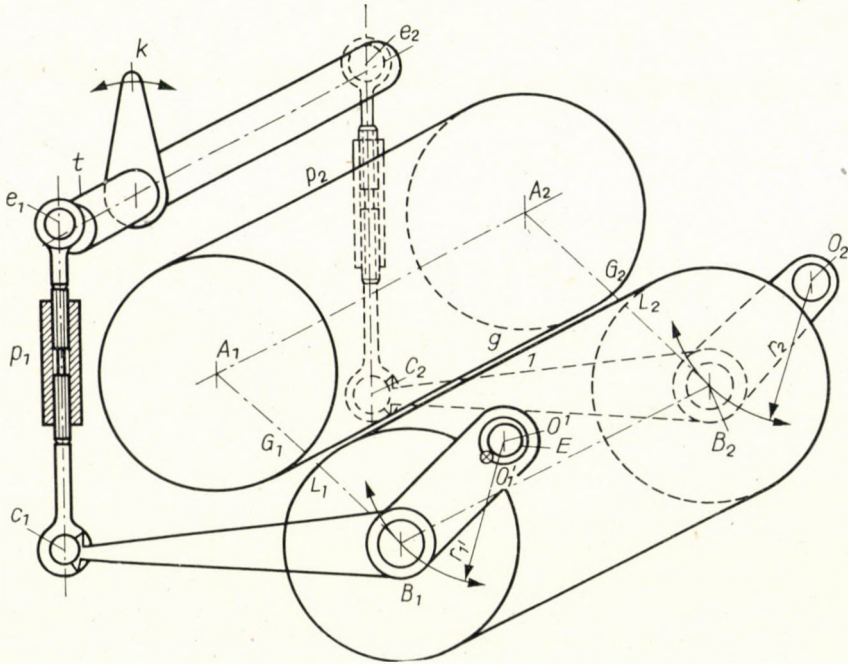


Bild 5. Der übliche Reguliermechanismus zur Einstellung der Walzenspalte an einem Mahlwalzstuhl

laufenden Walze. Die Zapfen  $O_1$  und  $O_2$  als Drehpunkte der Schwenkbewegung sind in den Seitenwänden des Walzenstuhles festgehalten.

Diese Walze läßt sich um die, in den Seitenrahmen des Walzenstuhls befestigten Drehzapfen  $O_1$  und  $O_2$  schwenken. Der Einstellmechanismus besteht aus einem Gestängewerk, derart ausgebildet, daß durch Verstellung des Stellhebels  $k$  die an den beiden Enden der Welle  $t$  montierten Exzenter  $e_1$  und  $e_2$  verstellt werden; bei dieser Verstellung werden durch Vermittlung der Gelenke  $C_1$  und  $C_2$ , und der an die Lager  $B_1$  und  $B_2$  angeschlossenen Schwenkarme diese Lager mit verstellt. Bezeichnenderweise lassen sich dabei die Lager  $B_1$  und  $B_2$  gleichzeitig umstellen; da aber die Verbindungsstangen  $p_1$  und  $p_2$  (mit Hilfe



einer Feinregelung) einzeln verstellt werden können, kann man nebenbei die Stellung der Lager  $B_1$  und  $B_2$  voneinander unabhängig fein nachregulieren.

Die richtige Einstellung beruht auf der Bedingung, daß die durch die Punkte  $L_1, L_2$  bestimmte Zylinder-Erzeugende  $l$  der langsam-laufenden Walze immer eine parallele Lage mit der durch die Punkte  $G_1$  und  $G_2$  bestimmten Zylinder-Erzeugenden  $g$  der schnell-laufenden Walze einnehmen soll, und zwar durch Bildung einer voraus bestimmten Spalte zwischen beiden Erzeugenden, auch wenn die Spalte praktisch gleich Null sei. Da nun aber infolge Fertigungs- und Montierungs-Fehler die Drehzapfen  $O_1$  und  $O_2$  niemals gleich-achsig liegen, d. h., die Verbindungslinie der Drehpunkte der Schwenkbewe-

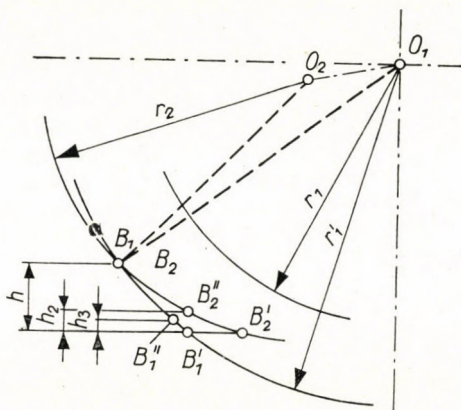


Bild 6. Schematische Darstellung der fehlerhaften Funktion des Reguliermechanismus

gung keine Parallele zur Achse  $A_1$  und  $A_2$  darstellt, so kann der Einstellmechanismus die oben genau bestimmte geometrische Lage der Erzeugenden nicht herstellen.

In Bild 6 sind die geometrischen Relationen der Einstellung in einer, zur Achse des feststehenden Walzenzylinders senkrechten Bildebene dargestellt. Ferner wollen wir voraussetzen, daß in der angenommenen und angebildeten Einstellung die schwenkbare Walze eine Lage einnimmt, in welcher infolge einer entsprechenden Schwenkung des Lagers  $B_2$  mit dem Halbmesser  $r_2 = O_2B_2$  um den Drehpunkt  $O_2$  die Spalte zwischen den Punkten  $G_2$  und  $L_2$  das richtige Maß besitzt. Da aber infolge unserer Ausgangsbedingung das Bild des Drehpunktes  $O_1$  nicht mit dem Bilde des Drehpunktes  $O_2$  zusammenfällt, so wird auch der mit dem Halbmesser  $r_1 = r_2$  bestimmte Punkt  $B_1$ , infolge der Schwenkung um den Drehpunkt  $O_1$  niemals mit dem Bilde des Punktes  $B_2$  zusammenfallen. Nun wird in der Fabrikationspraxis diese Fertigungsunge- nauigkeit dadurch behoben, daß man in die Bohrung, die als Schwenksitz des



mit zwei Hebelarmen ausgebildeten Lagern  $B_1$  dient, eine Exzenterhülse  $E$  mit dem Exzentrizitätshalbmesser  $O_1 O'_1$  einbaut (s. Bild 5), wobei es durch entsprechende Bestimmung der Exzentrizität und durch Einsetzen der Exzenterhülse in die richtige Lage erreicht werden kann, daß sich der Halbmesser  $r_1$  als Schwenkhebellänge ändert, und das Maß  $r'_1$  annimmt (Bild 6), das gerade ausreicht, um den Mittelpunkt  $B_1$  mit dem anderen Mittelpunkt  $B_2$  in Deckung zu bringen; mit anderen Worten wird hierdurch die Parallelität zwischen den Walzenachsen bzw. den Erzeugenden  $g$  und  $l$  hergestellt. *In der gewohnheitsmäßigen Praxis pflegt man in dieser Lage die Exzenterhülse am Lager festzuhalten, damit sie ihre Lage, die man als richtig festgestellt hat, nicht mehr ändert.*

Nun müssen wir untersuchen, wie der Mechanismus funktioniert, wenn man die Exzenterzapfenwelle  $t$  umstellt. Beide Seiten des Gestänges erfahren eine Senkung vom Ausmaß  $h$ , wodurch der Lagermittelpunkt  $B_1$  um den Drehpunkt  $O_1$  entlang eines Kreisbogens mit dem Halbmesser  $r'_1$  in den Punkt  $B'_1$ , und der Lagermittelpunkt  $B_2$  entlang eines Kreisbogens mit dem Halbmesser  $r_2$  in den Punkt  $B'_2$  geschwenkt wird: mit anderen Worten, *die neue Lage der Achse der schwenkbaren Walze ist mit der früheren nicht parallel.* Nun muß der Müller versuchen, mit Hilfe der Feineinstellung den Mittelpunkt  $B'_2$  um den Abstand  $h_2$  in die Lage  $B''_2$ , und eventuell noch um einen Abstand  $h_3$  den Punkt  $B'_1$  in die Lage  $B''_1$  zu bringen, doch wird hierdurch nichts an dem wesentlichen Umstand geändert, daß es infolge der Längendifferenz zwischen den beiden Schwenkarmen, die durch die falsche Befestigungsweise der Exzenterhülse hervorgerufen wurde, *prinzipiell außer der hierfür ursprünglich eingestellten Lage keine einzige andere Lage mehr gibt, in der die Punkte  $B_1$  und  $B_2$  in Deckung kommen, d. h., die gewünschte Parallelität der Achsen sichern könnten.*

Die richtige Lösung des Problems besteht darin, daß man durch Einbau der Exzenterhülse nicht die Schwenkarmlänge verändert, sondern bewirkt, daß der Drehpunkt  $O_1$  in seine richtige Lage, d. h. in die Achse des anderen Drehpunktes  $O_2$  gebracht werde; mit anderen Worten, *die Exzenterhülse darf nicht an das Lager, sondern sie muß an den versetzten Zapfen  $O_1$  befestigt werden.*

Um das früher angeführte Gleichnis wieder anzuwenden, kann gesagt werden, daß der oben geschilderte Irrtum dem Falle ähnlich ist, wo jemand zur Erzeugung von Kalkmilch nicht ein wenig Kalk dem Wasser zusetzt, sondern ein wenig Wasser dem Kalk beimischt und folglich Kalkmehl anstatt Kalkmilch gewinnt.

Zurückkommend auf das Problem des richtigen Einstellmechanismus zur Regulierung der Spalte in Mahlwalzstühlen soll hier bemerkt werden, daß infolge von Schleiffehlern (Entstehen von Hyperboloid-Rotationsflächen an Stelle eines Kreiszyinders) allgemein zwei Exzenterhülsen notwendig sind; bei dieser Lösung ist es vorteilhaft, wenn eine Exzenterhülse verstellbar an einen der Wellenzapfen und die andere fest an den gegenüber liegenden anderen Zapfen befestigt wird.



c) Drehzapfen des Schutzgitters an Pressen

Die unrichtige Lagerung eines Drehpunktes infolge von falschen Vorstellungen hat bei Mahlwalzenstühlen nur die Wirkung, die Qualität des Mahlproduktes herabzusetzen; eine ähnliche Fehlkonstruktion aber z. B. bei Exzen-

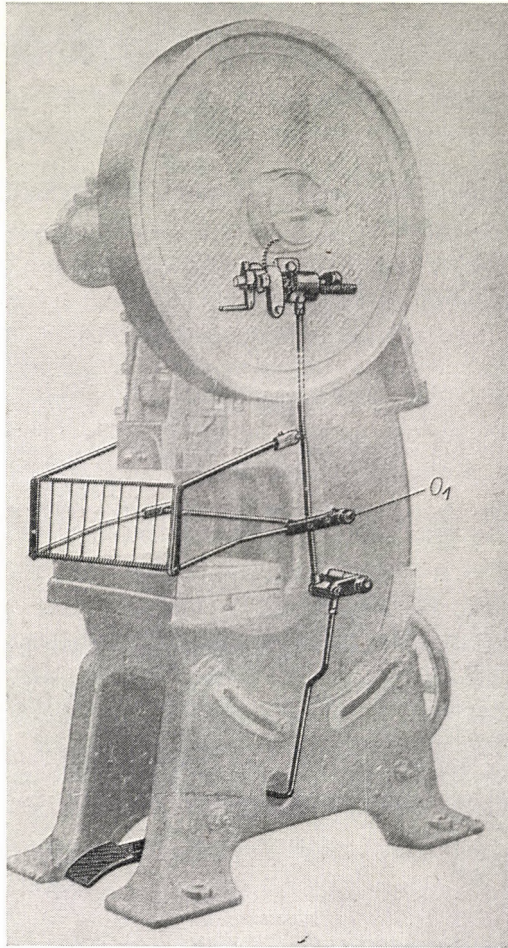


Bild 7. Handschutzkorb an einer Exzenterpresse

terpressen, insbesondere bei der Ausführung des Schutzkorbes (Bild 7) hat ausgesprochen *das Risiko einer Unfallgefahr* zur Folge.

Der Verfasser hatte Gelegenheit bei gewissen Maschinentypen die folgenden Fehler zu entdecken.

1. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Bohrungen  $O_1$  (rechts) und  $O_2$  (links) an dem Maschinenständer, die berufen sind, die Zapfen der



Schwinghebel aufzunehmen, hat nicht einer dem Tisch parallelen Geraden entsprochen, weil die Bohrungen mit der Hand, oder bestenfalls an einer einfachen Bohrmaschine mit verschiedener Einstellung hergestellt wurden.

2. Die Schwenkbewegung der beiden Schwenkarme (des rechtsseitigen und des linksseitigen) war voneinander unabhängig, u. zw. um je einen Drehzapfen, die aber keinesfalls koaxial waren.

So kam es vor, daß an gewissen Stellen des Korbes das Dazwischengeräten der Hand oder der Finger nicht die gewünschte Wirkung erzielte, d. h. die Maschine nicht zum Stillstand brachte. Vermutlich muß man in diesem Mangel den Grund finden, weshalb diese Lösung oft Widerstand seitens der Arbeiter hervorruft. Dieser Fehler kann nur behoben werden, wenn man die zwei Bohrungen koaxial und dem Tisch achsenparallel mit Hilfe eines Horizontalbohrwerkes ausführt, und die Schwenkarme an eine schwenkbare Welle, die durchgehend in beiden Bohrungen gelagert ist, anschließen läßt.

#### d) Die Genauigkeit der Kreislinie von Zapfen und Bohrung

Bei Anfängern der technischen Praxis ist einer der häufigst vorkommenden Fehler, daß die Genauigkeit der makrogeometrischen Kreisgestalt eines Zapfens oder einer Welle nur mittels einer Schublehre oder einer Mikrometerschraube, und die einer Bohrung nur mittels eines Lochzirkels oder Innenmikrometers kontrolliert, bzw. auf Grund der Gleichheit der Durchmesser bewertet wird.

Ein Fachmann, der keine Ahnung von dem kreisähnlichen Bogenvieleck (Pseudo Kreis) hat (Bild 8), worauf zuerst REULAUX hinwies, kennt auch den Gegensatz nicht, der sich darin äußert, daß zwar die Summe der Halbmesser von je zwei einander gegenüberliegenden Kreispunkten, gemessen von einem festen Mittelpunkt, verläßlich einen konstanten Durchmesser ergibt, aber im Falle einer konvexen Kurve bedeutet der konstante Abstand zwischen je zwei miteinander parallelen Tangenten von gegenüber liegenden Punkten noch lange nicht, daß die Kurve mit einem Kreis identisch ist [3].

Das in Bild 8 dargestellte Bogenvieleck besteht aus der Kombination von Bogenpaaren mit paarweise gemeinsamen Mittelpunkten, obwohl mit verschiedenen Halbmessern, aber mit Scheitelwinkeln als Zentriwinkeln. Bei Aufzeichnung dieses Bogenvielecks muß man darauf achten, daß der letzte Mittelpunkt  $O_5$  auf der ersten Geraden  $\overline{AO_1}$  zu liegen kommt, und daß das Maß des letzten Halbmessers  $R_5$  entsprechend sei. Auf der Strecke  $\overline{AO_1}$  muß ein Punkt  $O_5$  gesucht werden, für den

$$\overline{O_5O_1} + R_1 = \overline{O_5O_4} + R_4 \quad \text{gilt.}$$

Dies kann erreicht werden, wenn man auf die Verlängerung des ersten Halbmessers  $\overline{AO_1}$  den Abstand  $\overline{AO'_4} = R_4$  aufträgt und nachher mit Hilfe der Hal-



bierungslinie der Strecke  $\overline{O'_4O_4}$  den Punkt  $O_5$  an der verlängerten Linie  $\overline{AA_1}$  als Schnittpunkt gewinnt.

Allgemein können die einzelnen Bogenstrecken des unrundern Gleichdicks vom Kreisbogen abweichen.

In der Praxis ist einer der häufigsten Fälle das Bogendreieck, das beim spitzenlosen Schleifen entsteht, oder auch wenn man leicht deformierbare Teile in einem Dreibackenfutter einspannt; ferner gibt es ovale Formen, die bei fehlerhafter Lagerung der Hauptspindel, oder an einem nicht ausgewuchtet

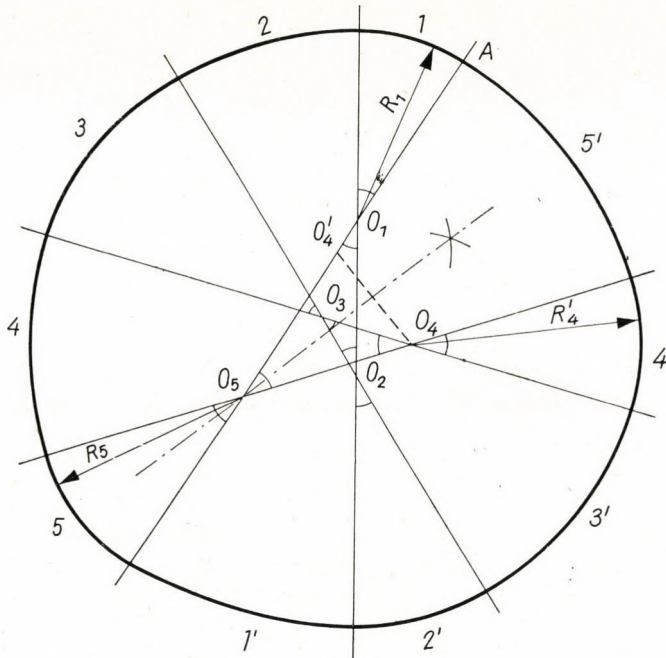


Bild 8. Gleichdick als Pseudokreis

rotierenden Arbeitsstück entstehen; in solchen Fällen wird oft eine falsche Meßmethode angewendet [4], u. zw. — man läßt das Bogendreieck zwischen 2 Polen drehen, anstatt das Stück zwischen einem Prisma und einer Meßspitze zu kontrollieren (Bild 9) — man kontrolliert einen ovalen Querschnitt in einem Prisma, anstatt einer direkten Messung der Durchmesser zwischen 2 Polen (Bild 10).

Ähnlicherweise kann man die Unrundheit von gleichweiten Bohrungen nicht durch Messen der Durchmesser, sondern nur mit Hilfe dreieckiger Prismen, und die Ovalität nur mit der Zwei-Polen Messung nachweisen.

Wie bereits erwähnt, beruhen diese Irrtümer auf der falschen Voraussetzung, daß der Gleichdick unbedingt einen Kreisquerschnitt verkörpert; im

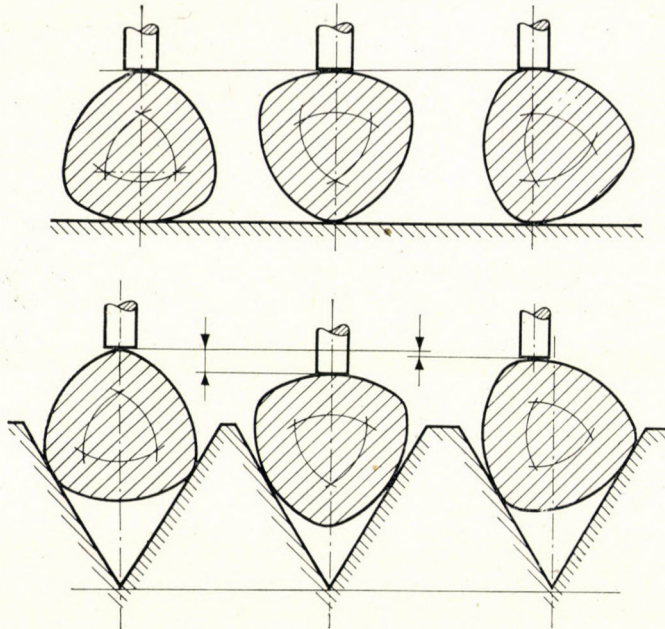


Bild 9. Irrtümliche und richtige Messung eines Bogendreiecks

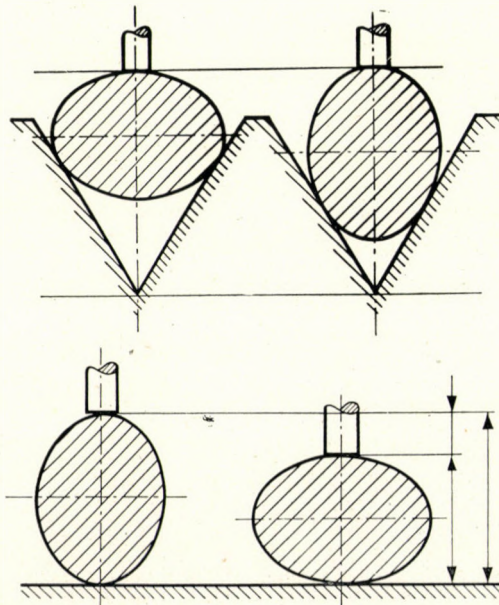


Bild 10. Irrtümliche und richtige Messung eines Ovals



Gegenteil, sowohl die gleichdicke Welle wie auch die gleichweite Bohrung können alle möglichen vieleckartigen Formen annehmen.

Wenn wir nun nach den subjektiven Ursachen fragen, durch die die »irrtümlichen Kombinationen« ausgelöst werden, so müssen wir auf die psychologische Analogie des physikalischen Trägheitsgesetzes und auf ein momentanes Versagen des seelischen Zustandes hinweisen.

## II. Das Trägheitsgesetz als Hemmungsfaktor

Falsche Urteilsbildung hat ihren Ursprung in der irrtümlichen Auffassung, daß alles was bis nun (im Raum oder in der Zeit) bestand, auch ferner unverändert bestehen kann. Diese Erscheinung kann als Eingebungswirkung

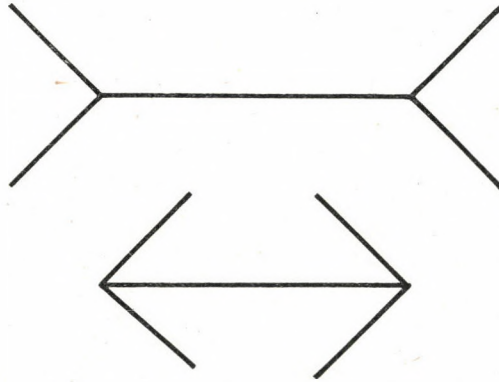


Bild 11. Optische Sinnesstörung zur Darstellung der Eingebung der Dominante

der Wiederholungen bezeichnet werden; dies kann mangels einer objektiven Kontrolltätigkeit genau so zu Irrtümern führen, wie eine breite Gruppe von optischen Täuschungen.

Man setzt an die Endpunkte einer Linienstrecke je einen Pfeil als ein Paar von schrägen Geraden. Ist nun die Lage der Pfeile dadurch gekennzeichnet, daß sich die Schwenkel von der Mitte des optischen Wahrnehmungsfeldes gegen die Endpunkte nähern, so erscheint die Strecke kürzer; im entgegengesetzten Fall, wenn die Schenkelpaare sich von den Endpunkten entfernend auseinandergehen, erscheint die Strecke länger (Bild 11). Man könnte diese Erscheinung als Eingebung der Dominante bezeichnen. Die Verallgemeinerung von Wiederholungen, die die einzelnen Teile charakterisieren, ist anschaulich im Bilde 12 beispielsweise dargestellt; die konzentrischen Kreise bestehen hier aus einzelnen abgetrennten Bogenstücken, die gleich schief zum Halbmesser





Bild 12. Optische Sinnestäuschung zur Darstellung der Eingebung durch Wiederholung

angelegt sind; es entsteht eine Sinnestäuschung; wir verallgemeinern nämlich die schiefe Lage auf die Gesamtheit der konzentrischen Kreise und wir bilden uns ein, eine Spirale zu sehen.

### 1. Eingebung der Wiederholungen

#### a) Wiederholung in der Zeit

Die sich in aufeinander folgenden Zeitintervallen wiederholenden Erscheinungen verführen den Menschen dazu, einen speziellen Fall gleichfalls als allgemeingültig zu erkennen. Hier folgt ein ganz einfacher Fall als Beispiel. Die Fabrik, wo ich Mitarbeiter war, bestellte bei einer Gießerei eine größere Riemenscheibe mit 8 Speichen. Ich riet der Einkaufsabteilung, man sollte die Gießerei in einem besonderem Brief und durch Sendung der entsprechenden Zeichnungen, ferner durch nachdrückliche persönliche Weisungen auf den Umstand aufmerksam machen, daß es sich um ein 8 Speichen-Rad handelt, weil diese Gießerei schon seit langer Zeit nur 6-Speichen-Räder erzeugt hat, und es war zu befürchten, daß man auch diese Bestellung mit 6 Speichen ausführen wird. Meine böse Ahnung wurde trotz der getroffenen Verfügungen durch die Tatsachen bestätigt.



### b) Wiederholung im Raum

Diese Ursache des Irrtums ist ähnlicher Natur wie bei der Betrachtung des Bildes 12, wenn man bei Beurteilung der Oldham-Kupplung die Vorstellung gelten läßt, daß »alle drei Scheiben sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit drehen«. Diese Auffassung ist sogar in dem ansonst verdienstvollerweise anerkannten Lehrbuch der »Maschinenelemente« vertreten [7]; es soll hier bemerkt werden, daß diese Behauptung zwar auf die zwei seitlichen Triebsscheiben zutreffend ist, nicht aber auf die mittlere Scheibe, die eine ganz verschiedene Bewegung ausführt. In der Abbildung 13 ist zu sehen, daß nach einer Drehung um den Winkel  $\varphi$  der antreibenden Scheibe, wenn die horizontale Nut  $u_1$  die neue Lage  $u'_1$  einnimmt, auch in der angetriebenen Scheibe die vertikale Nut  $u_2$  in die neue Lage  $u'_2$  ebenfalls um den Winkel  $\varphi$  verdreht verlegt wird. Gleichzeitig verlegt sich der Mittelpunkt  $S$  der mittleren Ausgleichsscheibe aus der Lage  $S \equiv O_2$ , entlang eines Kreisbogens mit dem Durchmesser  $e$  in die Lage  $S'$ , indem diese Scheibe um den Drehpunkt  $O_0$  eine Drehung um den Winkel  $2\varphi$  ausführt. So beträgt die Winkelgeschwindigkeit der Ausgleichsscheibe  $2\omega$ , wenn die Winkelgeschwindigkeit der Wellen  $\omega$  ist. Angenommen, daß der Schwerpunkt der Ausgleichsscheibe, deren Masse  $m$  ist, mit dem Mittelpunkt derselben zusammenfällt, so ist die auftretende Zentrifugalkraft:

$$C = m \frac{e}{2} (2\omega)^2 = 2m \cdot e \cdot \omega^2$$

deren Komponenten

$$C_1 = C \sin \varphi = 2m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi,$$

und (um eine Phasendifferenz von  $\pi/2$  verschoben):

$$C_2 = C \cos \varphi = 2m \cdot e \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi$$

sind, die die eine bzw. die andere Kupplungsscheibe belasten. Die Kraftschwingung der Komponenten, die in der Ausgleichsscheibe auftritt, erreicht während einer Umdrehung der Welle 2 Maxima an der einen und 2 Maxima an der anderen Kupplungsscheibe (insgesamt vier).

In der theoretischen Betrachtung der Getriebelehre entspricht der Ausgleichsscheibe der Oldhamschen Scheibenkupplung der umlaufende Querschlitten und das Cardansche Kreisscheibenpaar. Um die weiteren üblichen falschen Vorstellungen zu zerstreuen, sei hier bemerkt, daß in allen diesen Ausgleichselementen nur der Mittelpunkt  $S$  eine Kreislinie beschreibt; die Punkte entlang der Mittellinien der Geradfürungen beschreiben Pascalsche Kurven (Conchoiden) bezogen auf die Pole  $O_1$ , bzw.  $O_2$  als Punkte des Kreises vom Durchmesser  $e$ .

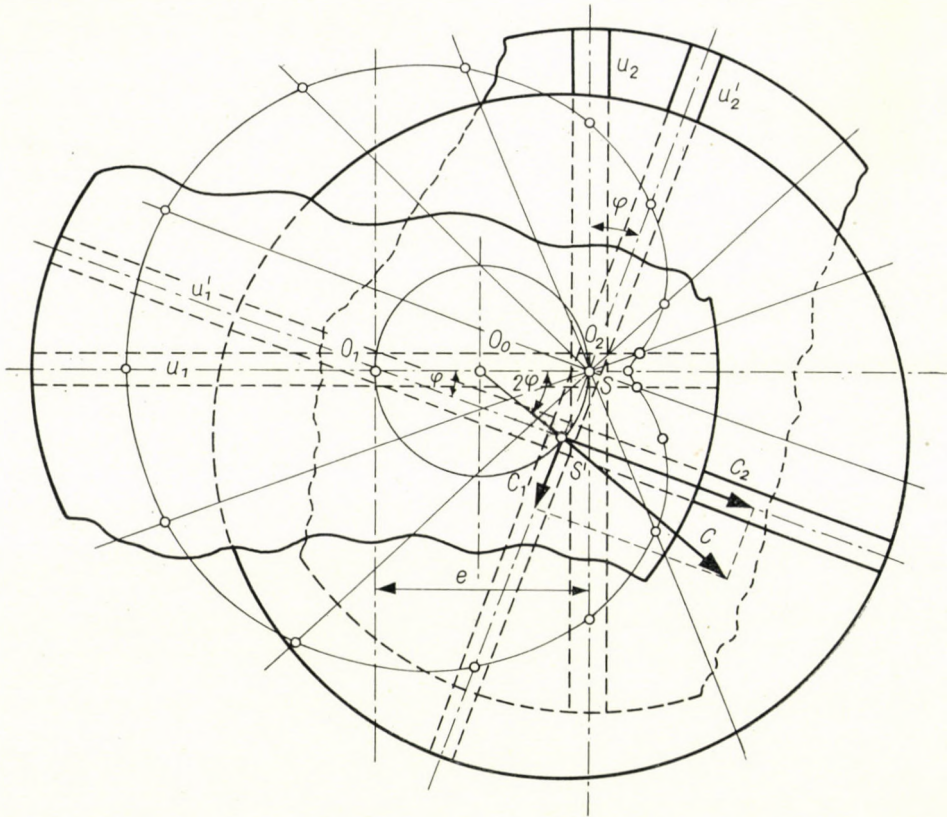


Bild 13. Die Oldham-Kupplung; Bewegung der Ausgleichsscheibe

## 2. Verwechslung der Begriffe

Wenn ein allgemeiner Begriff sehr oft mit einem anderen Begriff in Verbindung tritt, so ist man manchmal geneigt, den allgemeinen Begriff z. B. als Ursache zu erkennen, ohne der wahren Ursache nachzuforschen.

### a) Steigerung des Trägheitsmomentes an Stelle des Widerstandsmomentes

Als ein treffendes Beispiel hierfür kann ich über einen Fall berichten, den ich von meinem geehrten Professor und Freund dr. Gustav SZABÓ erfahren habe. Als junger Ingenieur ist er darauf aufmerksam geworden, daß sein Vorgesetzter durch die Erhöhung des Trägheitsmomentes (durch Materialzugabe) einen Träger — anstatt ihn zu stärken — schwächte. Dieser Irrtum soll hier als Beispiel einer »bedingten Fehlleistung«, da der Mißerfolg von bestimmten extremen Werten bedingt ist, unter Aufdeckung der mathematischen Zusammenhänge, näher beleuchtet werden:



Man will einen durch Biegung belasteten Träger mit dem Querschnitt von der Breite  $a$  und Höhe  $b$  derart stärken, daß man das Trägheitsmoment durch Zugabe eines symmetrischen Querschnittansatzes steigert, wobei die Breite des Ansatzes  $c < a$  und die neue Gesamthöhe des Querschnittes  $x > b$  ist (Bild 14). Der Anfangswert des Trägheitsmomentes ist

$$I_1 = \frac{ab^3}{12}$$

der erhöhte Wert:

$$I_2 = \frac{(a-c)b^3}{12} + \frac{cx^3}{12};$$

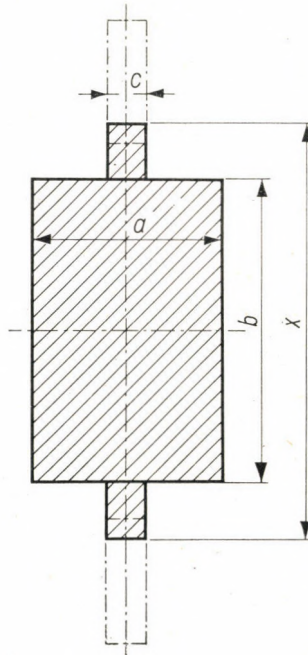


Bild 14. Schwächung eines gebogenen Trägers anstatt seiner beabsichtigten Stärkung

hingegen war der ursprüngliche Wert des Widerstandsmomentes:

$$W_1 = \frac{ab^2}{6}$$

und der geänderte Wert

$$W_2 = \frac{(a-c)b^2}{6x} + \frac{cx^2}{6},$$

also eine Veränderliche, die bei einem bestimmten Wert von  $x$  einen extremen Wert annimmt.

Bei Betrachtung von

$$\frac{dW_2}{dx} = - \frac{(a-c)b^3}{6x^2} + \frac{cx}{3} = 0$$

kann man sehen, daß an der Stelle

$$x = b \sqrt[3]{\frac{a-c}{2c}}$$

der Wert  $W_2$  ein Minimum erreicht, da hier (nämlich mit diesem ausgezeichneten  $x$ -Wert) der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2 W_2}{dx^2} = \frac{(a-c)b^3}{3x^3} + \frac{c}{3}$$

den Wert  $+c$  annimmt. Setzen wir  $c = \frac{a}{n}$ , so ist bei dem extremen Wert von  $W_2$ :

$$x = b \sqrt[3]{\frac{n-1}{2}};$$

d. h. für Fälle  $n > 3$  ist es sehr fraglich, ob der Versuch, abzuhelfen, Erfolg haben könnte.

Nehmen wir z. B.  $c = a/5$ , so haben wir

$$x = b \sqrt[3]{2} = 1,26 b;$$

mit anderen Worten, sogar bei einer Erhöhung des Wertes  $b$  um mehr als 25% ist der neue Zustand noch immer schwächer als der Ausgangszustand.

Interessant ist die Antwort auf die Frage, welcher ist der Wert der Erhöhung  $x$ , bei dem, der Gleichung

$$\frac{(a-c)b^3}{6x} + \frac{cx^2}{6} = \frac{ab^2}{6}$$

entsprechend, zumindest die Güte des Anfangszustandes wieder erreicht wird.

Nach entsprechender Umordnung:

$$x^3 - \frac{ab^2}{c} x + \frac{(a-c)}{c} b^3 = 0.$$



Wir wissen, daß der Wert  $x = b$  dieser Gleichung dritten Grades unbedingt genügt, da dies dem Originalzustand (ohne Querschnittzugabe) entspricht. Wenn wir mit dem Wurzelfaktor  $(x - b)$  dividieren, so erhalten wir die Gleichung

$$cx^2 + cbx + (c - a)b^2 = 0$$

zweiten Grades; daraus ergibt sich für die Wurzel

$$x = \frac{-cb \pm \sqrt{c^2 b^2 - 4c(c-a)b^2}}{2c}.$$

Da nach unserer Grundbedingung  $c < a$  ist, so nimmt die für uns interessante positive Wurzel die folgende Gestalt an:

$$x = \frac{b(\sqrt{4ac - 3c^2} - c)}{2c}.$$

Durch Einsetzen des Wertes  $c = a/n$ ,

$$x = \frac{b}{2} (\sqrt{4n - 3} - 1).$$

Für den Fall unseres Beispiels  $n = 5$  ist

$$x = \frac{b}{2} (\sqrt{17} - 1) = \frac{b}{2} \cdot 3,12 = 1,56 b,$$

d. h., die Höhe  $b$  sollte um mehr als die Hälfte erhöht werden, um eine Widerstandsfähigkeit, die der ursprünglichen gleich ist, zu erreichen.

#### b) Trockenzentrifuge mit vertikalen Schaufelreihen

Der Verfasser hatte Gelegenheit, die eigentümliche Konstruktion und Funktion einer an eine Getreide-Waschanlage angeschlossenen Trockenzentrifuge zu beobachten.

Die Maschinenbauer befolgten das Prinzip der möglichst großen Fläche nach dem Beispiel der wärmetechnischen Trockner. Man vergrößerte die gelochte Mantelfläche und verwendete mehrere, vertikal angeordnete Schaufelreihen.

Demgegenüber kam ich durch Analyse der Erscheinungen zur Überzeugung, daß die große Anzahl der Schaufelreihen nur geeignet ist, die Getreidekörner allzu rasch aus der Trommel abzuführen (Bild 15a); deshalb habe ich die Anzahl der Reihen vermindert, und den Abstand zwischen den vertikalen Reihen vergrößert (Bild 15b).

In der Abbildung bedeutet die stetig ausgezogene Kurve die Bahn, die das Korn durchläuft, wenn es die Schaufel der Zentrifuge mit der absoluten

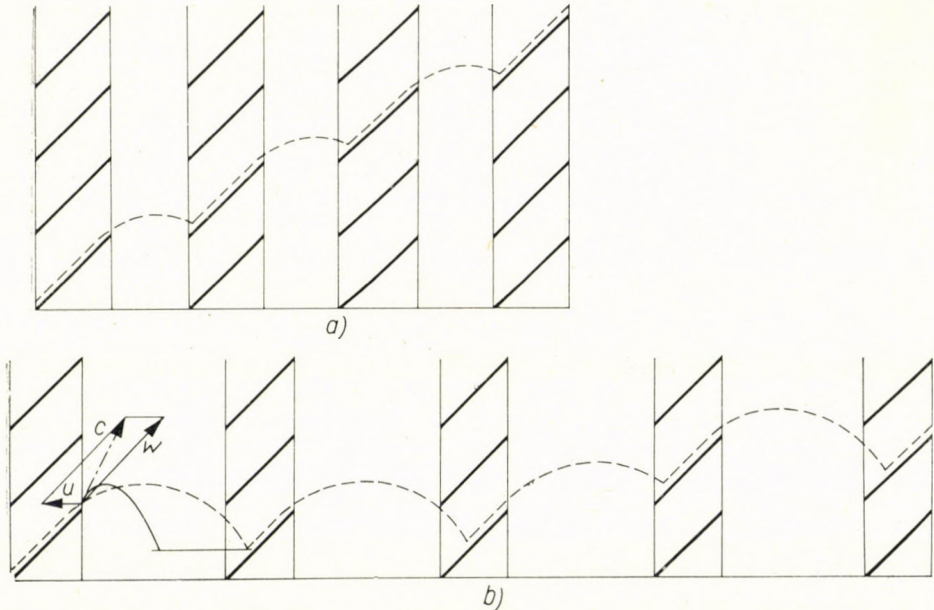


Bild 15. Abgewickeltes Bild der Schaufelreihen an einer Getreidewäscher-Trommelzentrifuge  
 a) dichte Reihen  
 b) gelockerte Reihen

Geschwindigkeit  $c$  verläßt (bei der Umlaufgeschwindigkeit  $u$  und einer relativen Geschwindigkeit  $w$ ), wobei es vorkommen kann, daß das Korn an den gelockten Mantel stößt. Für einen Beobachter, der sich als »Mitfahrer« mit der Trommel bewegt, ergibt sich die als gestrichelte Linie gezeichnete relative Bahn des Kornes. Der Verfasser folgte damit der Vorstellung, daß durch Verminderung der Schaufelreihen das Korn länger in der Trommel verweilt, weil es langsamer von Schaufel zu Schaufel steigt, die Körner stoßen sich öfter an die Mantelfläche, die Dauer der Luftströmung wird verlängert, der Trockenvorgang wird wirksamer. Dieses Prinzip führte zur Herabsetzung der Baumaße, des Gewichtes und des Raumbedarfs, und machte eine marktfähige Preisgestaltung möglich. Der neue Typ wies eine bedeutend bessere Trockenleistung auf, so daß die Maschine auch am Weltmarkt zur Geltung kam; diese Trommelkonstruktion bewährt sich seit drei Jahrzehnten in der neuen Ausführung, ohne Abänderung.

### c) Umfangskraft

Ein bezeichnendes Beispiel der irrtümlichen Denkweise, nach welcher man an Stelle eines genau erfaßbaren Begriffes einen fiktiven verallgemeinerten Begriff setzt, ist der Fall, wenn man beim Bau von Transmissionen nicht mit der effektiv auftretenden Kraft, sondern nur mit der theoretischen Umfangs-



kraft rechnet. In den Lehrbüchern der Maschinenelemente wird die Umfangskraft  $P$  an der getriebenen Riemenscheibe als die skalare Differenz der Zugkräfte  $T_1$  (im gespannten Trum) und  $T_2$  (im lockeren Trum) angegeben anstatt der vektoriellen Resultierenden derselben (Bild 16); sicherlich ist eine lange Reihe von bedeutenden technischen Objekten dieser Klasse verwirklicht worden, deren Bauer niemals der effektiv wirkenden Resultierenden

$$\vec{Q} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

das geringste Augenmerk schenkten, wobei diese Kraft niemals durch den Mittelpunkt wirkt, sondern seitlich davon und immer ein Drehmoment  $M = Q \cdot r$  hervorruft.

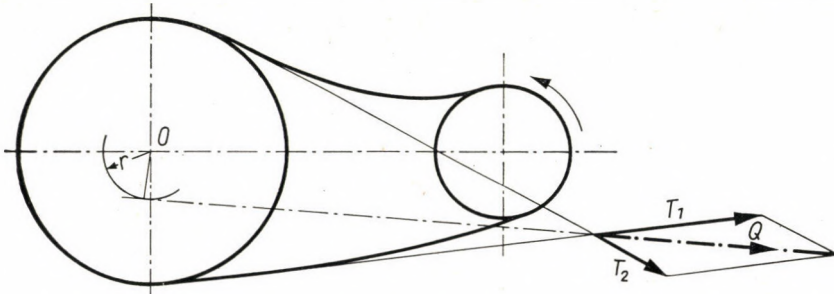


Bild 16. Die Resultierende der Zugkräfte (im gespannten und im lockeren Trum) einer angetriebenen Riemenscheibe trifft nicht in den Mittelpunkt  $O$  und sie bildet ein Drehmoment

Diese Begriffsverwechslung vereinfacht, wie bekannt, den Berechnungsgang bei den üblichen Entwurfsarbeiten und verursacht keinen Fehler. Doch ist diese unreelle Vorstellung nicht geeignet, mit ihrer Hilfe gewisse Erscheinungen zu analysieren, wie dies vom Verfasser an einem anderen Ort [5] erörtert wurde.

### III. Einfluß des Seelenzustandes

Der Seelenzustand spielt eine wichtige Rolle bei jeder menschlichen Tätigkeit und auch wir müssen damit bei jeder Analyse der Irrtümer von Technikern rechnen. Im Rahmen dieses Artikels muß es genügen, ein einziges persönliches Erfahrungsbeispiel anzuführen.

Im Jahre 1950 forschte ich — aus lauter Neugierde — den Ursachen der Entstehung von Ausschußstücken in einer Prototypenfabrik nach, um sie zu analysieren. Bei Betrachtung eines ansonsten besonders fein ausgearbeiteten Bestandteiles hatte ich den Eindruck, daß er ohne Zweifel von geschickten und fachkundigen Händen gefertigt wurde, und daß der Betreffende den Irrtum bei der ersten oberflächlichen Betrachtung der Zeichnung nur unter dem Einfluß eines besonders aufgeregten Seelenzustandes begehen konnte.



Der Dreher war erst seit kurzem bei der Unternehmung tätig, und ich war ihm erst diesmal begegnet. Ich zeigte ihm das Stück und stellte die Frage, wodurch er eigentlich in so eine Aufregung geriet, daß er diesem Irrtum nicht begegnen konnte, und verlangte eine aufrichtige Antwort; er erklärte, daß er vor Arbeitsbeginn mit dem Entlohnungsbeamten einen Streit hatte und beschloß, noch am selben Tag diesen Posten zu verlassen. Es gelang mir, ihn davon abzuhalten.

Meine Auffassung über die Entstehung des Ausschusses hat sich schlagenderweise als richtig erwiesen: der Mann, namens P. Tapasztó, ist noch heute einer der besten Arbeiter der Fabrik und bekleidet als geschätzter Fachmann einen wichtigen Posten.

Jedenfalls enthält die väterliche Mahnung: »der gute Zimmermann mißt zweimal, bis er einmal haut«, — ein beträchtliches Stück von Urweisheit.

#### IV. Verallgemeinerung von Faustregeln

Wir begegnen im Gebiete der technisch-wissenschaftlichen Forschungstätigkeit auf Schritt und Tritt Verallgemeinerungen, wo man eine Reihe von *bekannt* Ursachen oder Faktoren wissentlich außer acht läßt (Gesetz des freien Falles). Wenn nachher das gewonnene Resultat bei richtiger Abwägung der Vereinfachung verwendet wird, dann kann man die praktische Abweichung des Ergebnisses nicht als Irrtum bezeichnen.

Man kann so einen Fehler oft ganz genau nachweisen, z. B. wenn man die Umgebung eines Kurvenpunktes mit Hilfe des Krümmungskreises analysiert.

Oft werden aber Methoden der Annäherung angewendet, wo man bereits bei Annahme der wirkenden Ursachen irrtümlich vorgeht.

#### *Verzahnungswerkzeuge für Stirnräder mit Schrägverzahnung*

Es kommt vor, daß wir Beispielen der falschen Voraussetzungen in der Verfertigung der Verzahnungswerkzeuge für schrägverzahnte Stirnräder begegnen.

##### *a) Falsche Anwendung des Normalprofils*

Die Berührungslinie des Fräasers und der Zahnflanken ist (bei Schrägverzahnung) immer eine Raumkurve, gleichviel, ob man einen Profilscheibenfräser oder einen Fingerfräser verwendet [8]; die Voraussetzung, daß die Meridiankurve des Werkzeuges dem »Nomalprofil« der Verzahnung entsprechen soll, ist also unbedingt falsch, man kann diesen Meridianschnitt nicht mit einer Evolvente darstellen, bei welcher der Werkzeug-Eingriffswinkel ein-



fach als die Projektion des Eingriffswinkels im Stirnprofil auf die Normalebene angenommen werden könnte [7].

### b) Die Theorie der »idealen Zähnezahl«

Wir finden auf Schritt und Tritt in den Lehrbüchern die Theorie der »idealen« Zähnezahl, wo der Fachmann die Verfertigung des Verzahnungswerkzeuges für schrägverzahnte Stirnräder behandelt, doch birgt diese Theorie eine Reihe von irrtümlichen Voraussetzungen in sich.

Das Verzahnungswerkzeug ist eigentlich eine Hüllfläche einer Schar von Rotations-Hyperboloiden [8]; es ist also geometrisch falsch, den Meridianschnitt als eine einfache Evolvente zu betrachten. Die Annäherung wird keinesfalls besser, wenn man als Grundkreis der vermeintlichen Evolvente den Krümmungskreis der Ellipse annimmt, der im Normalschnitt des Grundkreises zum Vorschein kommt, und zugleich zu diesem »idealen« Grundkreis eine »ideale« Zähnezahl zuordnet. Bei den Verzahnungen mit größerem Modul, bzw. in Fällen, wo ein besonders feiner Genauigkeitsgrad gefordert wird, treten die entstandenen Fehler stark in Erscheinung.

### SCHRIFTTUM

1. BERNOULLI, J.: *Ars conjectandi*. Basel 1713. Wahrscheinlichkeitsrechnung, erster und zweiter Teil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner, Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann 1899.
2. SZÓKE, B.: »Malomhengersizékek munkarés beállítójának egyik szokásos szerkezeti hibája« *Malomipar* Jg. 1957. S. 9. (Ein üblicher Konstruktionsfehler an Mahlwalzstühlen in dem Einstellmechanismus der Spaltregulierung).
3. RADEMACHER, H. u. TOEPLITZ, O.: *Von Zahlen und Figuren*. II. Auflage. Verlag von Julius Springer, Berlin 1933.
4. KLINGER, R.: *Messen und Prüfen im Maschinenbau*. Schweizer Druck- und Verlagshaus Zürich 8.
5. SZÓKE, B.: *Dynamics of Gears with Feather Keys*. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, Tom XXI Fasciculi 1—2, Budapest 1958. und *The Engineers Digest* Vol. XIX No. 8, London 1958.
6. SZÓKE, B.: »A retesz lehetséges terhelései.« *Gép.* Jg. 1958. Nr. 4. S. 144 (Die möglichen Belastungsfälle des Flachkeils.)
7. HERMANN, M.: »Gépelemek« Budapest 1924 (Maschinenelemente).
8. SZÓKE, B.: *Das richtige Profil des Fingerfräasers für Kammwalzen*. *Werkstattstechnik*, 1924. S. 417.

### ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser bietet — im Lichte der Kombinatorik — ein anschauliches Bild, wie eigentlich durch unzulängliche Berücksichtigung der wirkenden Ursachen bzw. durch Vertauschen der Operationsreihenfolge technische Irrtümer entstehen können.

Wenn wir den Ursachen nachforschen, durch die die »Kombinations-Irrtümer ausgelöst werden«, so sollten diese teils in einer psychologischen Analogie zum physikalischen Trägheitsgesetz, teils in dem momentanen Seelenzustand gesucht werden.

Indem der Verfasser gewisse einfache Irrtümer analysiert, zeigt er die Fälle, die auf Vertauschung der Reihenfolge, Verwechslung der Begriffe, ferner auf die Eingebung zeitlicher und räumlicher Wiederholung und Verallgemeinerung von Annäherungs-Beziehungen als Fehlerquellen zurückgeführt werden können.

## STUDY ON SOME SOURCES OF TECHNICAL ERRORS

B. SZŐKE

## SUMMARY

By a method of combinations, the author exposes the possibilities of errors partly in consequence of causes that have not been adequately taken into consideration, partly by a confused sequence of operations.

When investigating the causes that can lead to erroneous combinations, one may think of some psychological analogy to the physical law of inertia, or of some disturbed state of mind.

The author deals with some simple cases of errors committed by technicians and succeeds in revealing by an analytical method some special causes, such as the subversed sequence of operations, the effect of notions misunderstood, further some suggestions originating from accustomed repetitions, or from an erroneous generalization of approximative interconnections.

## SUR LES CAUSES DE QUELQUES ERREURS TECHNIQUES

B. SZŐKE

## RESUME

L'auteur recourt au calcul combinatoire, pour montrer comment la supputation insuffisante des causes efficientes, ou l'intervertissement de l'ordre des opérations peut conduire à des erreurs.

Les causes provoquant les erreurs de combinaison doivent être cherchées, d'une part par analogie avec la loi d'inertie de la physique, et d'autre part, dans l'état psychique momentané du sujet.

L'auteur, analysant quelques cas d'erreurs simples commises dans le domaine technique, signale les cas d'intervertissement de l'ordre des opérations et de confusion des concepts, ainsi que certaines suggestions dues aux répétitions dans le temps et dans l'espace, et enfin les erreurs par généralisation de relations approximatives.

## К ВОЗНИКНОВЕНИЮ ТЕХНИЧЕСКИХ ОШИБОК

Б. СЁКЕ

## РЕЗЮМЕ

Комбинаторика в освещении автора наглядно показывает, каким образом может привести к ошибке недостаточный учет отдельных действующих причин или же порядковая перестановка операции.

Исследуя причины «вызывающие ошибки при включении», их необходимо искать, с одной стороны, в аналогии физических законов инерции, а с другой стороны, в душевном состоянии в данный момент.

Анализом простых ошибок в технической области автор указывает на случаи порядковой перестановки, перестановки понятий, а также на внушаемость повторений во времени и пространстве и ошибки, происходящие из обобщения приближенных соотношений.





# NATURAL VIBRATION OF A BAR UNDER AXIAL FORCE, TAKING INTO CONSIDERATION THE EFFECT OF SHEARING FORCE AND ROTATORY INERTIA

J. SZIDAROVSKY

"UVATERV" HIGHWAY AND RAILROAD PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received July 21, 1959]

## Introduction

When the angular frequency of a vibrating bar is determined, in general, the effect of shearing force and rotatory inertia is left out of account. Both effects are small as is proved by the investigation of their order of quantity [1]. Numerical evaluation of the effect of shearing force does not encounter difficulties, when the flexural rigidity of bar is constant [2].

In the following the natural modes of lateral vibration of an axially loaded two hinged bar with a constant section will be determined with due regard to the effect of shearing force and rotatory inertia. This method may be applied to other boundary conditions, too.

The force of inertia and the shearing force are to be determined on the bar simultaneously deflected by bending moment and shearing force, so to say the investigation is performed on the shape of the deflected bar.

On the other hand, the rotatory inertia is deducted from the deflection in consequence of the bending moment only, because the shearing force merely causes deflection and no slope.

## 1. Relation between internal forces and deflection

If the bar is stressed in longitudinal direction by forces acting on

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

the change in length is very small, compared to the length of the bar; its effect is negligible. Similarly the effect, in consequence of the displacement of an elementary length of bar into the axial direction, is also left out of account. This investigation refers, however, only to small deformations when the effect of this displacement is very small.

The deflection, perpendicular to static condition, is to be determined.



Deflection caused by bending moment is

$$\eta_M = - \iint \frac{M}{EJ} dx dx, \quad (1,1)$$

and that owing to shearing force is

$$\eta_T = \int \frac{T}{EA} dx, \quad (1,2)$$

in which

$$T = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad (1,3)$$

and the equivalent area for solid web girder is

$$A = \frac{G_\rho F}{E}.$$

Where  $G$  is the modulus of elasticity in shear,  $\rho$  is a coefficient, and  $A$  is the gross area.

When the bar is a latticed strut, a similar relation may be deduced.

The total deflection caused by simultaneous action of bending moment and shearing force from Eqs. (1,1) and (1,2), is

$$y = \eta_M + \eta_T = - \iint \frac{M}{EJ} dx dx + \int \frac{T}{EA} dx. \quad (1,4)$$

## 2. State of equilibrium

Static forces are substituted for mass forces according to d'Alembert principle and in such a state the bar is assumed as being in equilibrium. In this case the sum of the vertical projection of all the forces acting on an elementary length of bar, and of the change in shearing force is zero.

Area of bar being  $A$  and its density  $\gamma$ , so mass force acting on a  $dx$  length is

$$dr_\mu = - \gamma F \frac{\partial^2}{\partial t^2} y dx. \quad (2,1)$$

If the moment of inertia is  $I$ , the change in shearing force along the  $dx$  length caused by rotatory inertia, is

$$dr_\varphi = \gamma I \frac{\partial^4}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} \eta dx. \quad (2,2)$$

As the change in the angular velocity is

$$\frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial t} \eta;$$

the angular acceleration is

$$\frac{\partial^3}{\partial x \cdot \partial t^2} \eta.$$

Thus the rotatory inertia along the  $dx$  length is

$$\gamma I \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \cdot \partial t^2} dx,$$

and so its first derivate according to  $x$  is  $dr_\varphi$ , as above.

The change in shearing force reckoned by  $M$  internal bending moment, is

$$dr_M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} M dx. \quad (2,3)$$

The change in shearing force caused by the bending moment due to  $P$  compressive force, is

$$dr_p = -P \frac{\partial^2}{\partial x^2} y dx. \quad (2,4)$$

As the sum of all the vertical forces acting on  $dx$  length is zero, so

$$dr_u + dr_\varphi + dr_M + dr_p = 0.$$

After substituting into Eqs. (1,1)—(2,4) and dividing by  $-dx$ , the

$$\gamma F \frac{\partial^2}{\partial t^2} y - \gamma I \frac{\partial^4}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} \eta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} M + P \frac{\partial^2}{\partial x^2} y = 0 \quad (2,5)$$

differential equation is deducted.

### 3. Solution of the differential equation

In case the  $\gamma$ ,  $F$ ,  $P$ ,  $I$  and  $A$  quantities are assumed as being constants, the partial differential-equation under (2,5) may be solved using the method of separation of variables. For this purpose, the symbol

$$z = EJ \eta = - \iint M dx dx = w(x) \cdot v(t) = w \cdot v \quad (3,1)$$

is applied in which  $w(x)$  is a function of only  $x$ , and  $v(t)$  that of only  $t$ .



Substituting Eqs. (1,1), (1,3), (1,4) and (3,1) into Equ. (2,5), the

$$w^{IV} \cdot v \left(1 - \frac{P}{EA}\right) + \frac{P}{EI} w'' \cdot v + \frac{\gamma F}{EI} w \cdot v'' - \frac{\gamma}{E} \left(\frac{F}{A} + 1\right) w'' \cdot v'' = 0 \quad (3,21)$$

differential equation is obtained.

The separation of variables results in the

$$\frac{w^{IV} v \left(1 - \frac{P}{EA}\right) + \frac{P}{EI} w''}{\frac{\gamma F}{EI} w - \frac{\gamma}{E} \left(\frac{F}{A} + 1\right) w''} = - \frac{v''}{v} = \omega^2 \quad (3,22)$$

relation. As the first terms of this relation is independent of  $t$ , the second of  $x$ , so  $\omega^2$  is independent of both variables, consequently it is a constant.

From Equ. (3,22) two differential equations are deduced:

$$v'' + \omega^2 v = 0 \quad (3,31)$$

and

$$w^{IV} \left(1 - \frac{P}{EA}\right) + w'' \left(\frac{P}{EI} + \frac{\gamma \omega^2}{E} \frac{F + A}{A}\right) - w \frac{\gamma F \omega^2}{EI} = 0. \quad (3,41)$$

The general solution of Equ. (3,31) is

$$v = a \sin(a + \omega t), \quad (3,32)$$

in which  $a$  and  $a$  are integration constants, and  $\omega$  is the natural frequency of the vibrating bar.

The general solution of Equ. (3,41) is

$$w = b_1 \sinh \kappa_1 x + b_2 \cosh \kappa_1 x + b_3 \sin \kappa_2 x + b_4 \cos \kappa_2 x,$$

or in another form, based on Reference [4],

$$w = c_1 \sinh(\varphi_1 + \kappa_1 x) + c_2 \sin(\varphi_2 + \kappa_2 x), \quad (3,42)$$

in which  $c_1, c_2$  and  $\varphi_1, \varphi_2$  are integration constants, and

$$\kappa_1 = \sqrt{\sqrt{c^4 + k^4} - c^2} \quad (3,43)$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\sqrt{c^4 + k^4} + c^2}. \quad (3,44)$$

Furthermore,

$$2c^2 = \frac{\frac{P}{EI} + \frac{\gamma\omega^2}{EA}(F+A)}{1 - \frac{P}{EA}}, \quad (3,45)$$

$$k^4 = \frac{\gamma F \omega^2}{EI \left(1 - \frac{P}{EA}\right)}. \quad (3,46)$$

Based on Eqs. (3,42), (3,1) and (3,32)

$$\begin{aligned} - \iint \frac{M}{EI} dx dx &= - \frac{w}{EI} a \sin(a + \omega t) = \\ &= \left[ - \frac{ac_1}{EI} \sinh(\varphi_1 + \kappa_1 x) - \frac{ac_2}{EI} \sin(\varphi_2 + \kappa_2 x) \right] \sin(a + \omega t) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \int \frac{M'}{EA} dx &= \frac{M}{EA} = \frac{w''}{EA} a \sin(a + \omega t) = \\ &= \left[ \frac{ac_1 \kappa_1^2}{EA} \sinh(\varphi_1 + \kappa_1 x) - \frac{ac_2 \kappa_2^2}{EA} \sin(\varphi_2 + \kappa_2 x) \right] \sin(a + \omega t) \end{aligned}$$

thus the function for deflection of the bar obtained from Eqs. (1,3) and (1,4) is

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \left\{ - \iint \frac{M}{EI} dx dx + \int \frac{M'}{EA} dx \right\} = \left\{ \frac{w}{EI} - \frac{w''}{EA} \right\} \sin(a + \omega t) = \\ &= \left[ D_1 \left( - \frac{1}{EI} + \frac{\kappa_1^2}{EA} \right) \sinh(\varphi_1 + \kappa_1 x) + \right. \\ &\quad \left. + D_2 \left( - \frac{1}{EI} - \frac{\kappa_2^2}{EA} \right) \sin(\varphi_2 + \kappa_2 x) \right] \sin(a + \omega t) \end{aligned}$$

where

$$D_1 = c_1 a$$

and

$$D_2 = c_2 a. \quad (3,5)$$

The slope is

$$\begin{aligned} y'(x_1 t) &= \left[ D_1 \kappa_1 \left( - \frac{1}{EI} + \frac{\kappa_1^2}{EA} \right) \cosh(\varphi_1 + \kappa_1 x) + \right. \\ &\quad \left. + D_2 \kappa_2 \left( - \frac{1}{EI} - \frac{\kappa_2^2}{EA} \right) \cos(\varphi_2 + \kappa_2 x) \right] \sin(a + \omega t). \end{aligned} \quad (3,61)$$



Slope of the butt is given for analysing frames and continuous girders

$$\bar{y}'(x_1 t) = -\frac{1}{EI} [D_1 \kappa_1 \cosh(\varphi_1 + \kappa_1 x) + D_2 \kappa_2 \cos(\varphi_2 + \kappa_2 x)] \sin(a + \omega t). \quad (3,62)$$

The bending moment from Eqs. (3,1), (3,32) is

$$M(x, t) = [D_1 \kappa_1^2 \sinh(\varphi_1 + \kappa_1 x) - D_2 \kappa_2^2 \sin(\varphi_2 + \kappa_2 x)] \sin(a + \omega t). \quad (3,7)$$

And finally the shearing force is

$$T(x_1 t) = [D_1 \kappa_1^3 \cosh(\varphi_1 + \kappa_1 x) - D_2 \kappa_2^2 \cos(\varphi_2 + \kappa_2 x)] \sin(a + \omega t). \quad (3,8)$$

The integration constants are to be determined for optional boundary conditions based on Eqs. (3,5)—(3,8) and when the boundary conditions are homogeneous those proper values for  $\kappa_1$ , and  $\kappa_2$  may be derived when Equ. (3,5) results in a non-trivial solution for the deflection function. In the knowledge of these, the values for  $\omega$  may be determined, too.

#### 4. Natural vibration of a two-hinged bar

As neither bending moment nor deflection into  $x$  axis may arise at the end of a two-hinged bar, so the boundary conditions are

$$y(0, t) = 0, \quad (4,11)$$

$$M(0, t) = 0,$$

$$y(l, t) = 0, \quad (4,12)$$

$$M(l, t) = 0.$$

After substituting conditions under (4,11) into Eqs. (3,5) and (3,7), the relation

$$\frac{D_1}{D_2} = -\frac{A + I\kappa_2^2}{A - I\kappa_1^2} \frac{\sin \varphi_2}{\sinh \varphi_1} = \frac{\kappa_2 \sin \varphi_2}{\kappa_1^2 \sinh \varphi_1} \quad (4,2)$$

are obtained.

Since

$$A \neq 0$$

so

$$-\frac{A + I\kappa_2^2}{A - I\kappa_1^2} = \frac{\kappa_2^2 + \frac{A}{I}}{\kappa_1^2 - \frac{A}{I}} \neq \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}$$

and, therefore, the relation under (4,2) may come into being in that case when

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sinh \varphi_1} = 0.$$

But from the above mentioned conditions

$$\sinh \varphi_1 \neq \infty$$

so

$$\sin \varphi_2 = \varphi_2 = 0. \quad (4,31)$$

From (3,7) the value of bending moment at  $x = 0$  may be zero, if either

$$\sinh \varphi_1 = \varphi_1 = 0$$

or

$$D_1 = 0.$$

In the first case, that is to say when  $\varphi_1 = 0$ , from boundary conditions under (4,12):

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\kappa_2^2 + \frac{A}{I}}{\kappa_1^2 - \frac{A}{I}} \cdot \frac{\sin \kappa_2 l}{\sinh \kappa_1 l} = \frac{\kappa_2^2 \sin \kappa_2 l}{\kappa_1^2 \sinh \kappa_1 l}. \quad (4,32)$$

A consideration, similar to the above one, results the value of

$$\sin \kappa_2 l = 0.$$

This being substituted into (4,32)

$$D_1 = 0 \quad (4,33)$$

result is obtained.

It is proved that the value of  $D_1$  is zero in every case.

But is  $D_1 = 0$  from Eqs. (3,7), (4,12) and (4,32)

$$\sin \kappa_2 l = 0 \quad (4,34)$$

from which

$$\kappa_2 = \frac{\nu\pi}{l}. \quad (4,35)$$

This latter being substituted into Equ. (3,44)

$$k_v^4 = \frac{\nu^4 \pi^4}{l^4} - 2C_v^2 \frac{\nu^2 \pi}{l^2} \quad (4,36)$$



and after Eqs. (3,45) and (3,46) are substituted into the

$$\frac{\gamma F \omega_v^2}{EI \left(1 - \frac{P}{EA}\right)} = \frac{\nu^4 \pi^4}{l^4} - \left[ \frac{P}{EI \left(1 - \frac{P}{EA}\right)} + \frac{\gamma \omega_n^2}{EA \left(1 - \frac{P}{EA}\right)} (F + A) \right] \frac{\nu^2 \pi^2}{l^2} \quad (4,37)$$

relation is obtained, in which the footnote refers to the order of natural frequency.

From (4,37) the natural frequency of order  $\nu$  is

$$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{\frac{\nu^2 \pi^2 EI}{l^2} - P \left(1 + \frac{\nu^2 \pi^2 EI}{AEI^2}\right)}{F \left(1 + \frac{\nu^2 \pi^2 EI}{EAl^2}\right) + \frac{\nu^2 \pi^2 I}{l^2}}}. \quad (4,41)$$

If the effect of shearing force (see reference [3] pp. 140—141) is taken into consideration the critical load of the self same bar, is

$$P_{cr\nu} = \frac{\nu^2 \pi^2}{l^2} \frac{EI}{1 + \frac{\nu^2 \pi^2 EI}{EAl^2}}. \quad (4,51)$$

This latter being substituted into Equ. (4,41)

$$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\gamma}} \sqrt{\frac{P_{cr,\nu} - P}{F + \frac{P_{cr\nu}}{E}}}. \quad (4,42)$$

In case when the mass of unit length is marked  $\mu$ , so to say

$$\mu = F\gamma \quad (4,52)$$

$$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{P_{cr,\nu} - P}{1 + \frac{P_{cr\nu}}{EF}}}. \quad (4,43)$$

As the normal stress caused by the critical load is

$$\sigma_{cr\nu} = \frac{P_{cr\nu}}{F}, \quad (4,53)$$

the natural frequency is

$$\omega_v = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{P_{cr,v} - P}{1 + \frac{\sigma_{cr,v}}{E}}} \quad (4,44)$$

In case the effect of shearing force is neglected, Equ. (4,44) is valid; and so

$$\bar{\omega}_v = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{P_{E,v} - P}{1 + \frac{P_{E,v}}{EF}}} \quad (4,61)$$

as

$$\sigma_{E,v} = \sigma_{cr,v} = \frac{P_{cr,v}}{F} = \frac{P_{E,v}}{F} = \frac{\pi^2 \nu^2 E}{\lambda^2}$$

and thus the natural frequency is

$$\bar{\omega}_v = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{P_{E,v} - P}{1 + \frac{\nu^2 \pi^2}{\lambda^2}}} \quad (4,62)$$

When the effect of shearing force is taken into account and that of rotation is neglected, the natural frequency from reference [2] is

$$\omega_v^* = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{P_{cr,v} - P} \quad (4,7)$$

On the other hand, when the effect of both shearing force and rotatory inertia is neglected (from reference [1] pp. 375.)

$$\omega_v^* = \frac{\nu\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{Pl^2}{\nu^2 EI \pi^2}} = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{P_{E,v} - P} \quad (4,8)$$

Eqs. (4,43) and (4,7) show the fact — contrary to Equ. (4,8) — that the succeeding natural frequencies increase, not in the ratio of the square of integers, but get closer to each other (see Table II).

### 5. Example

The natural frequencies of a steel joist I.40. are to be developed. This joist is a two hinged bar under 42 t axial force, with 5,00 m span. Vibration is possible only in the plane  $y - y$  owing to constructional reasons (Fig. 2.).



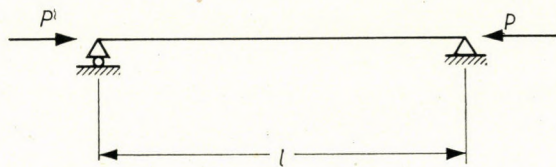


Fig. 1

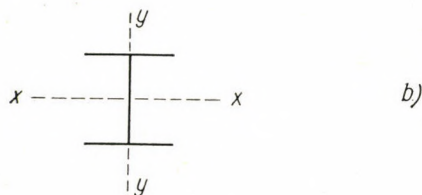
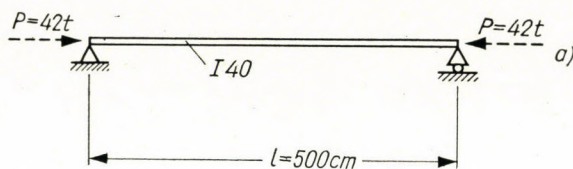


Fig. 2

## Data

$$\mu = 0.933 \text{ g cm}^{-2} \text{ sec}^{-2}$$

$$l = 500 \text{ cm,}$$

$$F = 118 \text{ cm}^2,$$

$$I = I_x = 29,210 \text{ cm}^4,$$

$$A = 22.1 \text{ cm}^2 = \frac{G}{A} F_{\text{web}},$$

If the effect of shearing force is taken into account, the critical load from Equ. (4,51) is

$$P_{cr,v} = \frac{\nu^2 \pi^2 EI}{l^2 \left( 1 + \frac{\nu^2 \pi^2 I}{Al^2} \right)} = 2420 \frac{\nu^2}{1 + 0.052 \nu^2}.$$

Furthermore,

$$\frac{\pi}{l\sqrt{\mu}} = \frac{3.14}{500\sqrt{0.944}} = 6.47 \cdot 10^{-3} \text{ g}^{-1} \text{ cm sec}^{-2},$$

from Equ. (4,53)

$$\frac{\sigma_{cr,v}}{E} = \frac{P_{cr,v}}{EF} = \frac{2420}{2100 \cdot 118} \frac{\nu^2}{1 + 0.052 \nu^2} = 0.976 \cdot 10^{-2} \frac{\nu^2}{1 + 0.052 \nu^2}$$

These values substituted into Equ. (4.43), the natural frequency is

$$\omega_{v,p} = 6.47 \cdot 10^{-3} \nu \sqrt{\frac{2420 \frac{\nu^2}{1 + 0.052 \nu^2} - 42}{1 + 0.00976 \frac{\nu^2}{1 + 0.052 \nu^2}}}$$

In Table I the column No. 2 gives values for different orders of natural frequencies. If no compressive force acts on it,

Table I

| $\nu$ | Angular frequencies  |            |                         |  |                               |  |   |  |
|-------|--|------------|-------------------------|--|-------------------------------|--|---|--|
|       | Bar under compression                                      |            | Bar with no compression |  |                               |  |   |  |
|       | With consideration of effect of shear and rotatory inertia |            | Shear is neglected      |  | Rotatory inertia is neglected |  | Both shear and rotatory inertia are neglected |  |
|       | $\omega_{vp}$  | $\omega_p$ | $\bar{\omega}_p$        | $100 \frac{\bar{\omega}_p - \omega_p}{\omega_p}$ | $\omega_p^*$                  | $100 \frac{\omega_p^* - \omega_p}{\omega_p}$ | $\bar{\omega}_p^*$                            | $100 \frac{\bar{\omega}_p^* - \omega_p}{\omega_p}$ |
| 1     | 0.306  | 0.309      | 0.316                   | 2  | 0.310                         | 0.3  | 0.318   | 3  |
| 2     | 1.138  | 1.140      | 1.254                   | 10   | 1.156                         | 1  | 1.272   | 12   |
| 3     | 2.295  | 2.298      | 2.778                   | 21   | 2.360                         | 2  | 2.862   | 28   |
| 4     | 3.608  | 3.612      | 4.88                    | 35   | 3.76                          | 4  | 5.09  | 41   |
| 5     | 4.98   | 4.98       | 7.55                    | 51   | 5.25                          | 5  | 7.95  | 59   |
| 6     | 6.37   | 6.37       | 10.80                   | 69   | 6.75                          | 6  | 11.45   | 86   |
| 7     | 7.79   | 7.79       | 14.62                   | 87   | 8.27                          | 6  | 15.58   | 100  |
| 8     | 9.16   | 9.16       | 19.02                   | 107  | 9.78                          | 7  | 20.35   | 122  |
| 9     | 10.54  | 10.54      | 24.00                   | 128  | 11.24                         | 7  | 25.76   | 144  |
| 10    | 11.84  | 11.84      | 29.55                   | 149  | 12.82                         | 8  | 31.8  | 169  |

Table II

| $\nu$ | $\frac{\omega_p}{\omega_1}$ |
|-------|-----------------------------|
| 1     | 1                           |
| 2     | 3.69                        |
| 3     | 7.45                        |
| 4     | 11.7                        |
| 5     | 16.1                        |
| 6     | 20.6                        |
| 7     | 25.2                        |
| 8     | 29.6                        |
| 9     | 34.2                        |
| 10    | 38.4                        |



$$\omega_\nu = 6.47 \cdot 10^{-3} \nu \sqrt{\frac{2420 \frac{\nu^2}{1 + 0.052 \nu^2}}{1 + 0.00976 \frac{\nu^2}{1 + 0.052 \nu^2}}} = 6.47 \cdot 10^{-3} \nu^2 \sqrt{\frac{2420}{1 + 0.06176 \nu^2}} \approx$$

$$\approx 0.318 \nu^2 \sqrt{\frac{1}{1 + 0.062 \nu^2}}.$$

Its figures are shown in column No. 3 of Table I.

Table II indicates the ratios of higher orders of natural frequencies to the first one. These substantially differ from square of integers.

If the effect of the shearing force is neglected from Equ. (4,61)

$$\bar{\omega}_\nu = 6.47 \cdot 10^{-3} \nu \sqrt{\frac{2420 \nu^2}{1 + 0.00976 \nu^2}} = 0.318 \nu^2 \sqrt{\frac{1}{1 + 0.00976 \nu^2}}$$

as

$$P_{\epsilon, \nu} = \frac{\nu^2 \pi^2 EJ}{l^2} = 2420 \nu^2 t.$$

In Table I column No. 4 shows the numerical result, and column No. 5 the effect of neglect, in percentage.

In case the effect of shearing force is taken into account and that of rotatory inertia is neglected, from Equ. (4,7)

$$\omega_\nu^* = 6.47 \cdot 10^{-3} \nu \sqrt{\frac{2420 \nu^2}{1 + 0.052 \nu^2}} = 0.318 \nu^2 \sqrt{\frac{1}{1 + 0.052 \nu^2}}$$

In table I column No. 6 shows the frequencies and No. 7 the effect of neglect, in percentage.

Finally, when the effect of both the shearing force and the rotatory inertia is neglected, from Equ. (4,8)

$$\bar{\omega}_\nu^* = 6.47 \cdot 10^{-3} \nu \sqrt{2420^2} = 0.318 \nu^2.$$

Column No. 8 indicates the natural frequencies reckoned, and column No. 9 the effect of neglect, in percentage.

The numerical results clearly show that when calculating natural frequencies of higher order the effect of shearing force and rotatory inertia should not be neglected.

#### REFERENCES

1. TIMOSHENKO, S.: *Vibration Problems in Engineering*, Van Nostrand, New York, 1954.
2. SZIDAROVSKY, J.: *Natural Vibration of a Bar under Effect of Shear*, Acta Technica, Tom. XXXI. Fasc. 1-2. Budapest.
3. TIMOSHENKO, S.: *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1936.
4. EMDE, F.: *Tafeln elementarer Funktionen*, Teubner, Leipzig, 1948.

#### SUMMARY

This paper deduces the differential equation of the natural vibration of a bar under axial force, if the effect of shearing force and rotatory inertia is taken into account, furthermore, gives a solution if the section is constant and finally presents a simple formula for a two hinged bar.

The numerical example shows the errors owing to the neglect of effects of shearing force and rotatory inertial (Table I). According to this example, these effects should not be neglected at all when natural frequencies of higher order are calculated.

EIGENQUERSCHWINGUNGEN EINES AUF DRUCK BEANSPRUCHTEN  
STABES MIT RÜCKSICHT AUF DEN EINFLUSS  
DER SCHUBKRAFT UND ROTATIONSTRÄGHEIT

J. SZIDAROVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegende Arbeit bestimmt die allgemeine Differentialgleichung der Eigenquerschwingungen eines auf Druck beanspruchten Stabes mit Rücksicht auf den Einfluß der Schubkraft und Rotationsträgheit, weiterhin wird die Differentialgleichung gelöst für den Fall, wenn der Querschnitt eine Konstante ist, und schließlich wird eine einfache Formel gegeben für einen Träger auf zwei Stützen.

Das numerische Beispiel zeigt den Fehler, der entsteht, wenn der Einfluß der Schubkraft und Rotationsträgheit vernachlässigt wird (Tafel I). Nach dem Beispiel darf dieser Einfluß bei der Bestimmung von Eigenquerschwingungen höherer Ordnung nicht vernachlässigt werden.

VIBRATION PROPRE D'UNE BARRE SOUMISE A UNE CHARGE AXIALE,  
COMPTE TENU DE L'INERTIE DE ROTATION

J. SZIDAROVSKY

RESUME

L'auteur déduit l'équation différentielle fondamentale de la vibration propre d'une barre comprimée, tenant compte de l'effet de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation. Il résout l'équation pour le cas d'une section constante, et déduit ensuite une formule simple pour la vibration propre des barres à deux articulations.

Un exemple numérique montre l'erreur à laquelle on s'expose en négligeant l'effet de l'effort tranchant et de l'inertie de rotation. D'après l'exemple, ces effets ne sauraient être aucunement négligés lors de la détermination de vibrations de plus haute fréquence.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО СИЛАМИ,  
ДЕЙСТВУЮЩИМИ ВДОЛЬ ОСИ, УЧИТЫВАЯ ИНЕРЦИЮ ВРАЩЕНИЯ

Я. СИДАРОВСКИ

РЕЗЮМЕ

В работе выводится основное дифференциальное уравнение, учитывающее также влияние срезающего усилия и инерции вращения собственных колебаний сжатого стержня, затем это уравнение решается для случая неизменного профиля и, наконец, для собственных колебаний стержня с двумя шарнирами выводит простое уравнение.

На приведенном числовом примере демонстрируется, что какова ошибка в случае упущения срезающего усилия и, соответственно, инерции вращения. Из числовых примеров видно, что при определении колебаний высшего порядка этими факторами нельзя пренебрегать.





# BERECHNUNG DER STRÖMUNG FÜR EIN RADIALES LAUFRAD MIT STARK GEWÖLBTER BESCHAUFELUNG\*

L. PRESZLER

LEHRSTUHL FÜR STRÖMUNGSLEHRE, TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST

[Eingegangen am 2. Dezember, 1960]

Zur richtigen Gestaltung der Laufräder von neuzeitlichen Strömungsmaschinen ist die Kenntnis der Strömung um die Schaufeln unentbehrlich. Die Änderung der Relativgeschwindigkeit längs der Schaufelkontur gibt einen Aufschluß über die zu erwartenden Verzögerungen, während durch die Verhinderung der unzulässigen Geschwindigkeitserniedrigungen die den Wirkungsgrad des Laufrades beeinträchtigenden Ablösungen der Strömung vermieden werden können. Bei der Ausbildung von neuen Laufrädern dürfte es im Großteil der Fälle vom Vorteil sein, wenn wir außer der Strömung um die Schaufeln auch die zu erwartende Verteilung der Geschwindigkeit zwischen zwei Schaufeln — das heißt, in jedem Punkt der Laufradebene — bestimmen können. Eine besondere Bedeutung kommt diesem Umstand zu, wenn das strömende Medium auch körnige Stoffe befördert, wenn also das Laufrad einem hochgradigen Verschleiß ausgesetzt ist, da die Bahn der Teilchen nur in Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung des befördernden Mediums berechnet werden kann.

Die zur Berechnung von Laufrädern mit großer Lieferzahl und Druckzahl (mit vorwärts gekrümmter Beschau felung), das heißt, die zur Berechnung eines aus stark gewölbten Schaufeln bestehenden Gitters geeigneten theoretischen Rechenverfahren [1, 2, 3] sind in dem Maße langwierig, daß ihre Anwendung in der Praxis äußerst schwierig, wenn gar nicht unmöglich ist. Ein Teil dieser Theorien kann trotz der Schwerfälligkeit nicht den Vorteil bieten, die Strömung auch außer der Schaufelkontur berechnen zu können, während die leichter zu handhabenden Theorien nur rohe Annäherungen verheißen.

Das im nachstehenden beschriebene Rechenverfahren soll zur Dimensionierung von rotierenden Kreisgittern, die aus Schaufeln mit stark gewölbten Skelettlinien bestehen, ein verhältnismäßig schnell durchführbares Annäherungsverfahren bieten.

Mit besonderer Rücksicht darauf, daß zur Verringerung der Strömungsverluste bei Laufrädern mit stark gewölbter Beschau felung im allgemeinen

\* Auszug aus der Dissertation des Verfassers: »Berechnung eines aus stark gewölbten Schaufeln bestehenden Gitters.«



Profilschaufeln verwendet werden, bezieht sich die Theorie auf die Untersuchung von Strömungen um Schaufeln endlicher Dicke, wobei sie selbstredend auch den Fall der unendlich dünnen Beschauflung (Blechschaufeln) mit einschließt [4].

Die Berechnung — die von der Voraussetzung eines idealen Mediums ausgeht — wird zweckmäßigerweise nicht in der Ebene des Laufrades durchgeführt, vielmehr wird das Kreisgitter mit Hilfe der bekannten Abbildungs-

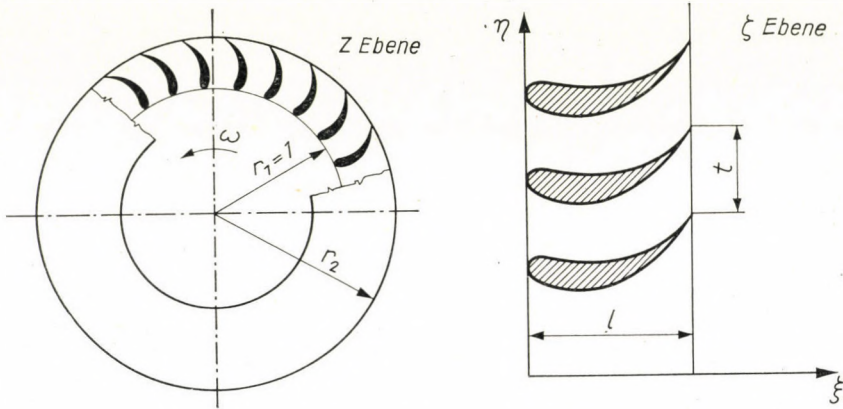


Bild 1

funktion (5) auf ein gerades Gitter abgebildet, und die weiteren Untersuchungen werden an diesem geraden Gitter vorgenommen.

Die Abbildungsfunktion lautet:

$$\frac{nt}{2\pi} \ln z = \zeta,$$

wo  $n$  die Schaufelzahl bedeutet, während die Bedeutung der übrigen Symbole aus Bild 1. hervorgeht, wobei  $r_1 = 1$  ist.

Durch die Abbildungsfunktion werden die Kreise in senkrechte Geraden, die Strahlen in waagerechte Geraden übergeführt.

Da die Untersuchung der relativen Strömung sogar bei der störenden Wirkung, da diese wirbelbehaftet ist, als vorteilhafter erscheint, soll zunächst die Wirbelverteilung in der Ebene des Laufrades ( $z$ ) und in der Bildebene ( $\zeta$ ) berechnet werden.

Ausgehend von der Stromfunktion  $\psi$ , und bei Voraussetzung einer ebenen Strömung, ergibt sich die Wirbelstärke in der Ebene  $z$  zu

$$[\text{rot } \mathbf{w}]_z = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}.$$

Da

$$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad w_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{ist,}$$

erhalten wir somit:

$$[\text{rot } \mathbf{w}]_z = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Delta \psi.$$

Es ist jedoch

$$\text{rot } \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{c} - \text{rot } \mathbf{u},$$

$$\text{rot } \mathbf{c} = 0 \quad (\text{nach Voraussetzung})$$

und

$$\text{rot } \mathbf{u} = 2 \omega,$$

woraus sich

$$[\Delta \psi]_z = 2 \omega$$

ergibt, wo

$\mathbf{w}$  den Vektor der relativen Geschwindigkeit,

$\mathbf{u}$  den Vektor der Umfangsgeschwindigkeit,

$\mathbf{c}$  den Vektor der absoluten Geschwindigkeit und

$\omega$  den Vektor der Winkelgeschwindigkeit

darstellen.

Die Stromfunktion kann auch auf die Ebene  $\zeta$  bezogen werden, und wir können die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$w_\xi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad w_\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}.$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir:

$$[\text{rot } \mathbf{w}]_\zeta = \frac{dw_\eta}{d\xi} - \frac{\partial w_\xi}{\partial \eta},$$

woraus sich ergibt:

$$[\Delta \psi]_\zeta = [-\text{rot } \mathbf{w}]_\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}.$$

Wie bekannt, gilt für eine konforme Abbildung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right),$$

somit ist

$$(\Delta \psi)_\zeta = 2\omega \frac{4\pi^2}{n^2 t^2} e^{\frac{4\pi}{nt} \cdot \xi}.$$



Die Wirbelstärke ist somit nur in der Ebene  $z$  konstant, hingegen ändert sie sich nach der Abbildung (in der Ebene  $\zeta$ ) proportional dem Quadrat des Absolutbetrages des Differentialquotienten der Abbildungsfunktion. (Bei  $\xi = \text{konst.}$ , das heißt, in den lotrechten Zonen, ist die Wirbelstärke konstant.)

In Kenntnis der Beziehung, die zwischen dem rotierenden Kreisgitter und dem durch Abbildung erhaltenen geraden Gitter besteht, wollen wir unsere

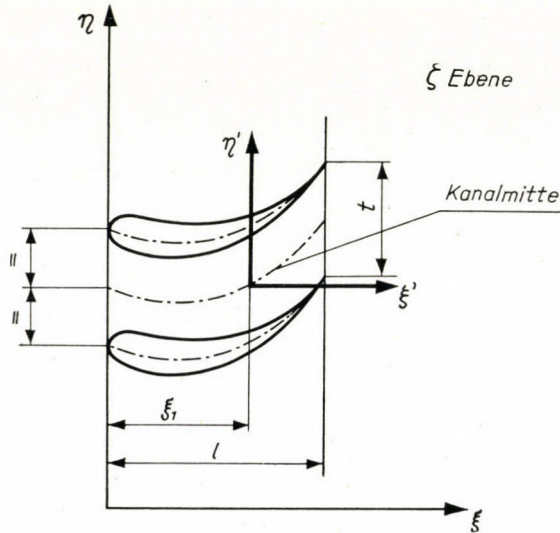


Bild 2

weiteren Betrachtungen auf das ruhende, gerade Gitter beziehen.

Das Vektorfeld mit den Komponenten  $w_\xi$  und  $w_\eta$  kann als ein Geschwindigkeitsfeld eines physikalisch nicht realisierbaren Strombildes aufgefaßt werden.

Die Verteilung zwischen zwei Schaufeln der Geschwindigkeitskomponenten  $\xi$  und  $\eta$  der Geschwindigkeit  $w$  kann näherungsweise mit einem Polynom zweiten Grades ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} w_\xi &= a_1 + b_1 \eta' + c_1 \eta'^2 \\ w_\eta &= a_2 + b_2 \eta' + c_2 \eta'^2, \end{aligned}$$

wobei die Bedeutung von  $\eta'$  am Bild 2 abgelesen werden kann.

Die Koeffizienten und die Richtungstangente der Skelettlinie — insgesamt 7 Unbekannte — die Funktionen von  $\xi$  darstellen, können aus den in der Ebene  $z$  geltenden physikalischen Bedingungen sowie aus der Beziehung zwischen den Ebenen  $z$  und  $\zeta$  bestimmt werden.

Wir wollen aus der Zirkulationsverteilung  $\gamma = \frac{d\Gamma_e}{d\xi}$  als einer Funktion von  $\xi$  ausgehen. (Die Verteilung kann auch als eine Funktion des Radius ange-

nommen werden, doch könnte letztere gleichfalls auf eine  $\xi$ -Funktion zurückgeführt werden.) Gleichweise nehmen wir auch die Quellsenkenverteilung  $q = \frac{dQ_e}{d\xi}$  auf (siehe Bild 3).

Die Schaufeln werden durch die an der noch unbekanntem Skelettlinie untergebrachte unendliche Wirbelreihe ersetzt. Die Profildicke ergibt sich ebenfalls aus der an der Skelettlinie untergebrachten Quellsenkenverteilung. Wären die Koordinaten der Skelettlinie bekannt, so könnte die durch die auf dieser Linie gegebene Zirkulations- und Quellsenkenverteilung induzierte Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt der Ebene bestimmt werden.

Die auf der Skelettlinie verteilten gesamten Singularitäten sind:

$$\Gamma e = \int_0^{\xi_2} \frac{d\Gamma e}{d\xi} d\xi,$$

$$Q_e = \int_0^{\xi_2} \frac{dQ_e}{d\xi} d\xi = 0,$$

da das Profil geschlossen ist. Dabei ist

$$\xi_2 = \frac{nt}{2\pi} \ln r_2.$$

Die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten beruht auf den konjugierten Geschwindigkeiten, die durch die auf der imaginären Achse der  $\zeta$  Ebene untergebrachte unendliche Wirbel- bzw. Quellsenkenreihe induziert sind. Diese konjugierten Geschwindigkeiten sind nach [6]

$$w_\Gamma^* = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{\pi}{t} \operatorname{cth} \frac{\pi\zeta}{t},$$

$$w_Q^* = \frac{Q}{2\pi} \frac{\pi}{t} \operatorname{cth} \frac{\pi\zeta}{t}.$$

Zur Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten wollen wir zunächst die die Singularitäten tragende Linie bestimmen.

Aus den physikalischen Bedingungen ergeben sich folgende Aussagen:

1. Die in der Zeiteinheit zwischen zwei Schaufeln durchfließende Flüssigkeitsmenge ist von dem Radius bzw. in der Ebene  $\zeta$  von den Koordinaten  $\xi$  unabhängig, das heißt,

$$\frac{Q}{nh} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} w_\xi(\eta') d\eta' - \int_0^\xi q(\xi) d\xi,$$



wobei  $Q$  die das Laufrad durchströmende Flüssigkeitsmenge in  $m^3/s$ ,  $n$  die Schaufelzahl und  $h$  die Breite des Laufrades in  $m$  angibt (Bild 5).

Setzt man in diese Gleichung den Ausdruck für  $w_\xi$  ein, so erhalten wir nach Integration:

$$\frac{Q}{nh} = t \left( a_1 + \frac{c_1}{12} t^2 \right) - \int_0^\xi q(\xi) d\xi.$$

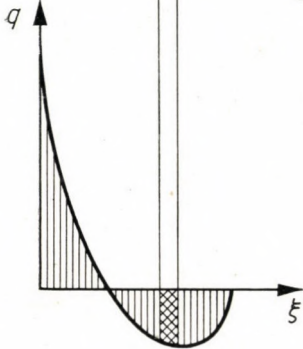
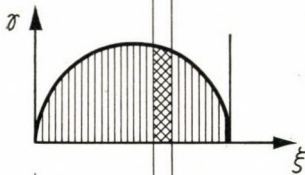
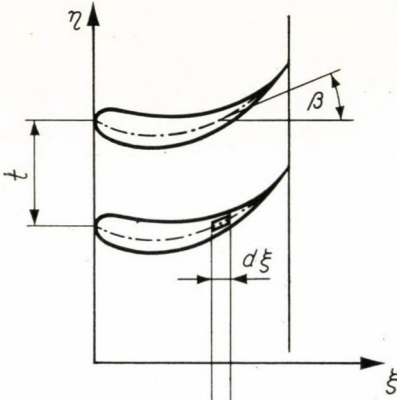


Bild 3

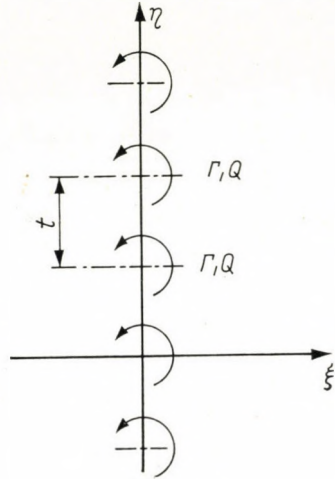


Bild 4

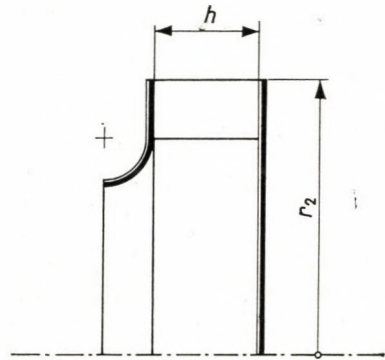


Bild 5

2. Durch Berücksichtigung des Stokeschen Satzes können wir das Linienintegral für die geschlossene Linie in Bild 6 anschreiben, wobei wir berücksichtigen, daß sich die Wirbelstärke in der Ebene  $\zeta$  bei  $\xi = \text{konst.}$  nicht ändert,

hingegen bei Änderung von  $\xi$  dem Quadrat des Absolutbetrages des Differentialquotienten der Abbildungsfunktion proportional ist.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{t}{2} \int [w_\eta(\eta')]_\xi d\eta' - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [w_\eta(\eta')]_{\xi(0)} d\eta' + \int_{s(0)}^{s(\xi)} w_{dt} ds - \int_{s(0)}^{s(\xi)} w_{st} ds = \\
 & = \int_F (\text{rot } \mathbf{w})_\xi dF = -2\omega t \int_0^\xi \left( \frac{2\pi}{nt} e^{\frac{2\pi}{nt} \xi} \right)^2 d\xi,
 \end{aligned}$$

wobei  $w_{dt}$  und  $w_{st}$  die zur Skelettlinie parallelen Komponenten der Relativ-

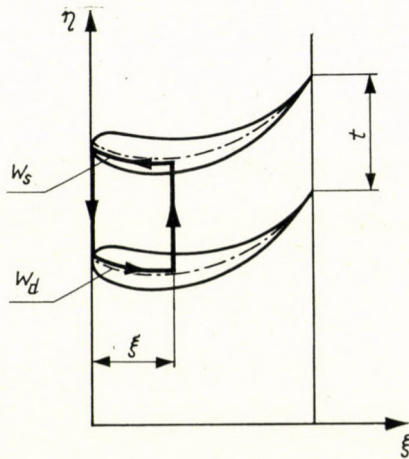


Bild 6

geschwindigkeit an der Druck- bzw. Saugseite der Schaufel und  $s$  die Koordinate entlang der Skelettlinie bedeuten.

Setzen wir den Ausdruck für  $w_\eta$  ein, so erhalten wir:

$$\left( a_2 + \frac{c_2}{12} t^2 \right)_\xi = \left( a_2 + \frac{c_2}{12} t^2 \right)_{\xi(0)} + \frac{1}{t} \int_0^\xi \gamma(\xi) d\xi - 2\omega \frac{\pi}{nt} \left( e^{\frac{4\pi}{nt} \xi} - 1 \right).$$

3. Eine dritte und vierte Beziehung kann aus der ursprünglich angenommenen Verteilung der Schaufelzirkulation bzw. der Quellsenken:

$$\gamma = \frac{d\Gamma_e}{d\xi} \quad q = \frac{dQ_e}{d\xi}$$

wie folgt erhalten werden:

Auf beiden Seiten der die Singularitäten tragenden Linie gibt es tangentielle (Index  $t$ ) und normale (Index  $n$ ) Geschwindigkeitskomponenten (Bild 7).



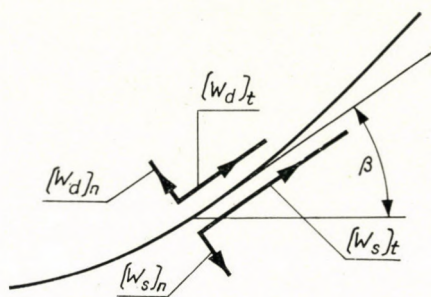


Bild 7

Die Normalkomponenten sind entlang der Skelettlinie einander gleich, somit ergibt sich

$$dQ_e = q d\xi = 2w_n ds = 2w_n \frac{ds}{d\xi} d\xi,$$

ferner

$$q = 2w_n \frac{ds}{d\xi} = \frac{2w_n}{\cos\beta}$$

und

$$w_n = \frac{q}{2} \cos\beta.$$

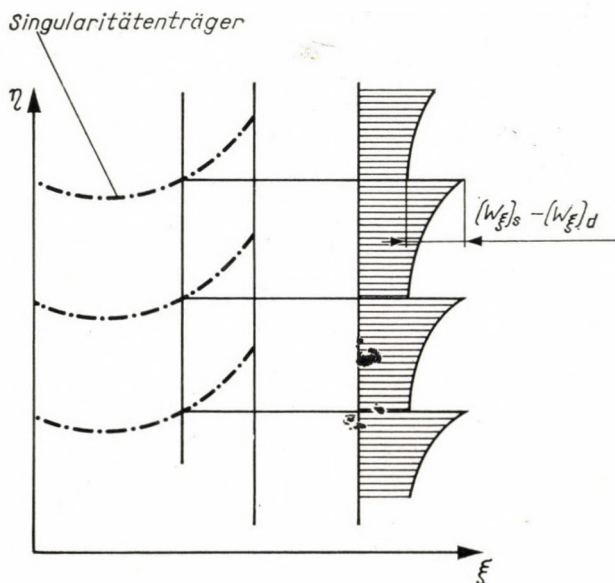


Bild 8

Dabei bedeutet  $\beta$  den Winkel, den die Tangente der Skelettlinie und die  $\xi$ -Achse einschließen.

Die Relativgeschwindigkeit ändert sich stetig zwischen den Schaufeln, jedoch unstetig an den Singularitätenträgern (Bild 8).

Der Sprung der  $\xi$ -Komponente der Relativgeschwindigkeit ist

$$(w_{\xi})_s - (w_{\xi})_d = w_{st} \cos \beta + \frac{q}{2} \cos \beta \sin \beta - \left( w_{dt} \cos \beta - \frac{q}{2} \cos \beta \sin \beta \right).$$

Da jedoch

$$\gamma = (w_{st} - w_{dt}) \frac{ds}{d\xi} = \frac{w_{st} - w_{dt}}{\cos \beta}$$

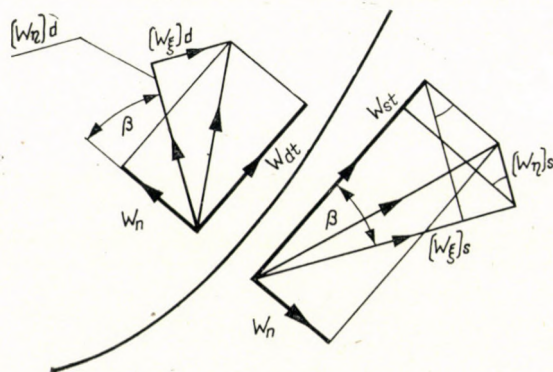


Bild 9

ist, so erhalten wir nach Einsetzen von

$$w_{\xi} = a_1 + b_1 \eta' + c_1 \eta'^2$$

und nach den erforderlichen Umstellungen:

$$b_1 = \frac{1}{t} (\gamma + q \operatorname{tg} \beta) \cos^2 \beta.$$

4. Auf die gleiche Weise kann der Sprung der  $\eta$ -Komponenten angedeutet werden, woraus sich die Beziehung

$$b_2 = \frac{1}{t} (\gamma \operatorname{tg} \beta - q) \cos^2 \beta$$

ergibt.

5. Es kann auch der Wert von  $\operatorname{tg} \beta$  durch die Geschwindigkeitskomponenten ausgedrückt werden. Nach Bild 9 ist

$$(w_{\xi})_s \sin \beta - (w_{\eta})_s \cos \beta = w_n = \frac{q}{2} \cos \beta$$



und

$$(w_\eta)_d \cos \beta - (w_\xi)_d \sin \beta = w_n = \frac{q}{2} \cos \beta.$$

Hieraus ergibt sich

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(w_\eta)_d + (w_\eta)_s}{(w_\xi)_d + (w_\xi)_s}$$

bzw.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_2 + c_2 \frac{t^2}{4}}{a_1 + c_1 \frac{t^2}{4}}.$$

Zur Bestimmung der sieben Ubekanntem ( $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  und  $\operatorname{tg} \beta$ ) reichen die bisher angeschriebenen fünf Gleichungen nicht aus. An Stelle der Aufsuchung der noch ausstehenden zwei Gleichungen wollen wir die Bestimmung von  $c_1$  und  $c_2$  auf einem anderen Wege versuchen.

Entwickeln wir die Komponenten der Geschwindigkeit entlang der zwischen den Skelettlinien in der Mitte verlaufenden Linie (siehe Bild 2) nach  $\eta$  in eine Taylorreihe, so ergibt es sich, daß die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades ( $c_1$  und  $c_2$ ) eben die Hälfte der zweiten partialen Ableitungen nach  $\eta$  der Geschwindigkeitskomponenten betragen, das heißt,

$$c_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_\xi}{\partial \eta^2} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_\eta}{\partial \eta^2}.$$

Zur Berechnung der Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  müssen zunächst diese partialen Ableitungen ermittelt werden.

Wie bekannt, ist die Konjugierte der durch die aus Bild 10 ersichtliche unendliche Wirbelreihe induzierten Geschwindigkeit

$$w_F^* = \frac{\Gamma}{2i\pi} \frac{\pi}{t} \operatorname{cth} \frac{\pi \zeta}{t}.$$

Durch Einführung der Bezeichnung

$$\zeta^* = \frac{\pi \zeta}{t}$$

erhalten wir:

$$\operatorname{cth} \zeta^* = \frac{e^{\zeta^*} + e^{-\zeta^*}}{e^{\zeta^*} - e^{-\zeta^*}} = \frac{e^{\zeta^*} e^{i\eta^*} + e^{-\zeta^*} e^{-i\eta^*}}{e^{\zeta^*} e^{i\eta^*} - e^{-\zeta^*} e^{-i\eta^*}}.$$

Durch Verwendung der Eulerschen Beziehung und nach den nötigen Umstellungen erhalten wir:

$$\operatorname{cth} \zeta^* = \frac{\operatorname{ch} \zeta^* \operatorname{sh} \zeta^* - i \sin \eta^* \cos \eta^*}{\operatorname{ch}^2 \zeta^* - \cos^2 \eta^*}.$$

Da jedoch

$$w_{\Gamma}^* = w_{\xi} - iw_{\eta} = \frac{\Gamma}{2t} \left[ \frac{\sin\eta^* \cos\eta^*}{\cos^2\eta^* - \operatorname{ch}^2\xi^*} - i \frac{\operatorname{ch}\xi^* \operatorname{sh}\xi^*}{\operatorname{ch}^2\xi^* - \cos^2\eta^*} \right]$$

ist, so erhalten wir für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$w_{\xi} = -\frac{\Gamma}{4t} \frac{\sin 2\eta^*}{\operatorname{ch}^2\xi^* - \cos^2\eta^*}$$

und

$$w_{\eta} = \frac{\Gamma}{4t} \frac{\operatorname{ch} 2\xi^*}{\operatorname{ch}^2\xi^* - \cos^2\eta^*}.$$

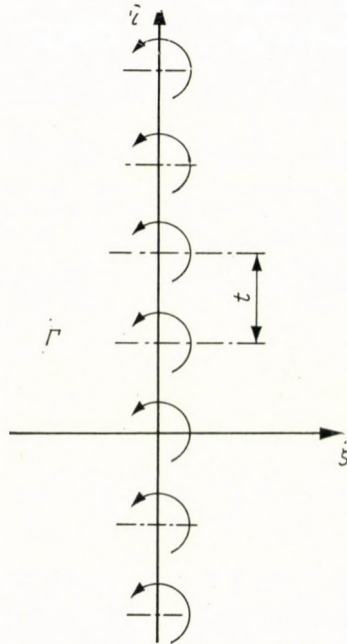


Bild 10

Die ersten partiellen Ableitungen nach  $\eta^*$  sind:

$$\frac{\partial w_{\xi}}{\partial \eta^*} = -\frac{\Gamma}{4t} \frac{2\cos 2\eta^*(\operatorname{ch}^2\xi^* - \cos^2\eta^*) - \sin^2 2\eta^*}{(\operatorname{ch}^2\xi^* - \cos^2\eta^*)^2}$$

bzw.

$$\frac{\partial w_{\eta}}{\partial \eta^*} = -\frac{\Gamma}{4t} \frac{\sin 2\eta^* \operatorname{sh} 2\xi^*}{(\operatorname{ch}^2\xi^* - \cos^2\eta^*)^2}.$$



Die zweiten partialen Ableitungen sind

$$\frac{\partial^2 w_\eta}{\partial \eta^{*2}} = - \frac{\Gamma}{4t} \frac{2\text{sh}2\xi^* [\cos 2\eta^* (\text{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*) - \sin^2 2\eta^*]}{(\text{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*)^3}$$

und

$$\frac{\partial^2 w_\xi}{\partial \eta^{*2}} = \frac{\Gamma}{4t} \frac{(\text{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*) [-4\sin 2\eta^* (\text{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*) - 3\sin 4\eta^*] + 2\sin^3 2\eta^*}{(\text{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*)^3}.$$

Da aber

$$\xi^* = \frac{\pi \zeta}{t} (\xi + i\eta),$$

und andererseits

$$\zeta^* = \xi^* + i\eta^*$$

ist, erhalten wir somit

$$\xi^* = \frac{\pi}{t} \xi$$

und

$$\eta^* = \frac{\pi}{t} \eta.$$

Wir wollen noch die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$F_1 = - \frac{2\text{sh}2\xi^* [\cos 2\eta^* (\text{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*) - \sin^2 2\eta^*]}{(\text{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*)^3}$$

bzw.

$$F_2 = - \frac{(\text{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*) [-4\sin 2\eta^* (\text{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*) - 3\sin 4\eta^*] + 2\sin^3 2\eta^*}{(\text{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*)^3},$$

und können somit die Differentialquotienten der durch die Wirbelreihe induzierten Geschwindigkeiten in folgender Form ausdrücken:

$$\frac{\partial^2 w_\xi}{\partial \eta^2} = \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{\Gamma}{4t} F_2$$

und

$$\frac{\partial^2 w_\eta}{\partial \eta^2} = \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{\Gamma}{4t} F_1.$$

Zur Bestimmung der induzierten Geschwindigkeit der Quellsenkenverteilung wollen wir noch die Konjugierte der durch eine unendliche Quellen-

reihe von der Intensität  $Q$  und einer dem Bild entsprechender Anordnung induzierten Geschwindigkeit anschreiben:

$$w_Q^* = \frac{Q}{2\pi} \frac{\pi}{t} \operatorname{cth} \frac{\pi \zeta}{t}.$$

Da aber

$$\begin{aligned} w_Q^* &= w_{\xi Q} - iw_{\eta Q} = \frac{Q}{2\pi} \frac{\pi}{t} \frac{\operatorname{ch} \xi^* \operatorname{sh} \xi^* - i \sin \eta^* \cos \eta^*}{\operatorname{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*} = \\ &= \frac{Q}{2\pi} \left[ \frac{\operatorname{ch} \xi^* \operatorname{sh} \xi^*}{\operatorname{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*} - i \frac{\sin \eta^* \cos \eta^*}{\operatorname{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*} \right] \end{aligned}$$

ist, so folgt hieraus, daß

$$w_{\xi Q} = \frac{Q}{4t} \frac{\operatorname{sh} 2\xi^*}{\operatorname{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*}$$

bzw.

$$w_{\eta Q} = \frac{Q}{4t} \frac{\sin 2\eta^*}{\operatorname{ch}^2 \xi^* - \cos^2 \eta^*}$$

ist.

Werden diese mit den durch die Wirbelreihe induzierten Geschwindigkeitskomponenten verglichen, so erhalten wir:

$$w_{\xi Q} = \frac{Q}{\Gamma} w_{\eta \Gamma}$$

und

$$w_{\eta Q} = -\frac{Q}{\Gamma} w_{\xi \Gamma}.$$

Für die zweiten partialen Ableitungen der durch die Quellenreihe induzierten Geschwindigkeitskomponenten erhalten wir somit:

$$\frac{\partial^2 w_{\xi}}{\partial \eta^2} = \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{Q}{4t} F_1$$

und

$$\frac{\partial^2 w_{\eta}}{\partial \eta^2} = \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{Q}{4t} (-F_2).$$

Es genügt somit, die Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  nur einmal zu berechnen (in einem Diagramm zu konstruieren, siehe Bild 11 und 12), da mit ihrer Hilfe die zweiten partialen Differentialquotiente nach  $\eta$  der sowohl durch die



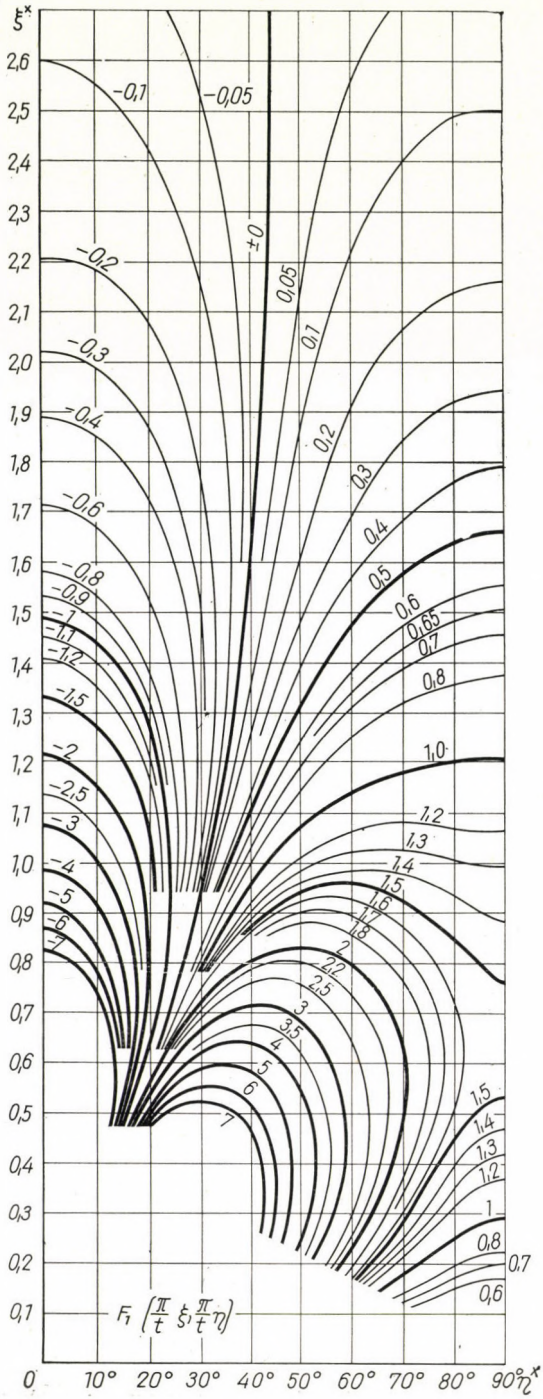


Bild 11

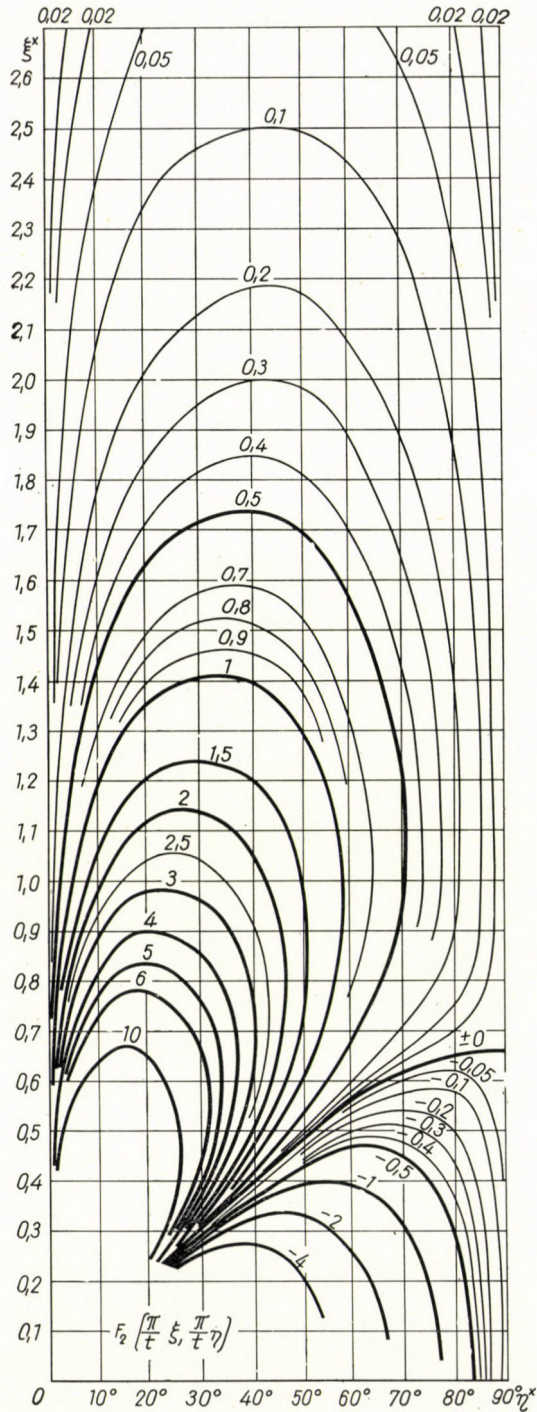


Bild 12



Wirbelreihe wie auch durch die Quellenreihe induzierten Geschwindigkeitskomponenten berechnet werden können.

Da die zweiten partialen Ableitungen das Zweifache der  $c$ -Werte ergeben, können die für uns benötigten  $c$ -Werte unmittelbar berechnet werden.

Die Werte von  $c'_1$  und  $c'_2$  ergeben sich aus der Wirbelreihe zu

$$c'_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{I}{4t} F_2$$

und

$$c'_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{I}{4t} F_1.$$

Aus der Quellenreihe ergeben sich die Werte von  $c''_1$  und  $c''_2$  zu

$$c''_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{Q}{4t} F_1$$

und

$$c''_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{Q}{4t} (-F_2).$$

Die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  beziehen sich aber auf die gleichzeitige Wirkung der Wirbel- bzw. Quellenreihe, das heißt

$$c_1 = c'_1 + c''_1$$

bzw.

$$c_2 = c'_2 + c''_2.$$

In der Wirklichkeit besteht das Schaufelgitter nicht aus einer Quellen- bzw. Wirbelreihe, vielmehr besteht es — entsprechend der an dem Singularitätenträger angenommenen Wirbel- und Zirkulationsverteilung — aus einer unendlichen Reihe von Wirbeln bzw. Quellen elementarer Intensität, die in Abhängigkeit von der Gestalt der Trägerlinie gegeneinander verschoben sind.

Bei der Berechnung der Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  muß die Wirkung der elementaren Wirbel- bzw. Quellenreihen durch Integration bestimmt werden. Diese Werte werden für die Mittellinie zwischen den Singularitätenträgern berechnet. Für die aus Bild 2 ersichtliche Anordnung des Koordinatensystems ist die Integration an der Stelle  $\xi_1$  der Mittellinie über die Grenzen —  $\xi_1$  bzw.  $(l - \xi_1)$  auszuführen. Somit erhalten wir

$$c'_1(\xi_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{1}{4t} \int_{-\xi_1}^{l-\xi_1} \gamma(\xi') F_2 d\xi'$$

und

$$c'_2(\xi_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{1}{4t} \int_{-\xi_1}^{l-\xi_1} \gamma(\xi') F_1 d\xi'.$$

Ferner ergibt sich:

$$c_1''(\xi_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{1}{4t} \int_{-\xi_1}^{t-\xi_1} q(\xi') F_1 d\xi'$$

und

$$c_2''(\xi_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{t} \right)^2 \frac{1}{4t} \int_{-\xi_1}^{t-\xi_1} q(\xi') (-F_2) d\xi'.$$

Die unter dem Integralzeichen stehenden Werte  $F_1$  und  $F_2$  müssen selbstredend entsprechend der relativen Lage des zu untersuchenden Punktes (Punkt der Mittellinie mit Abszissenwert  $\xi_1$ ) zu den elementaren Wirbelreihen in Rechnung gezogen werden.

Die vorstehenden Beziehungen ermöglichen, die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  für den Fall zu ermitteln, daß der Singularitätsträger, an dem die Wirbel und die Quellsenken untergebracht worden sind, bekannt ist. Et ist somit notwendig, diese Linie, zumindest in erster Annäherung, zu bestimmen.

Zunächst setzen wir  $c_1$  und  $c_2$  gleich Null, und die Trägerlinie wird in linearer Näherung ermittelt. An der Trägerlinie werden sodann die Wirbeln und Quellsenken verteilt, womit  $c_1$  und  $c_2$  in Abhängigkeit von  $\xi$  näherungsweise bestimmt werden können.

Nach erfolgter Bestimmung der Unbekannten kann die zweite Näherung des Singularitätsträgers konstruiert und die Geschwindigkeitsverteilung in der vollen Kanalbreite bestimmt werden.

Prinzipiell kann die Näherung in der Weise weiter verfeinert werden, daß die Zirkulations- und Quellsenkenverteilung nunmehr auf den korrigierten Singularitätsträger aufgetragen werden, und die Geschwindigkeitskomponenten nun mit den derart bestimmten Werten von  $c_1$  und  $c_2$  und mit den korrigierten Unbekannten wieder berechnet werden. Doch wird diese Verfeinerung in der Praxis nicht mehr benötigt.

In Kenntnis des Verlaufes der Trägerlinie kann die Schaufeldicke (die von der Quellsenkenverteilung abhängt) auf Grund der nachstehenden Überlegung berechnet werden:

An der untersuchten Stelle  $\xi$  ist die Hälfte der den Quellen entspringenden Flüssigkeitsmenge gleich dem Integral der  $\xi$ -Komponente der relativen Geschwindigkeit, wobei die Grenzen des Integrals einerseits die Mittellinie, andererseits eben die gesuchte Schaufeldicke sind. Das heißt,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\xi} q(\xi) d\xi = \int_{\eta'_{ks}}^{\frac{t}{2}} w_{\xi} d\eta' - \int_{-\frac{t}{2}}^{\eta'_{ka}} w_{\xi} d\eta',$$



wo  $\eta_{ks}$  den Abstand des Konturpunktes der Saugseite von der Kanalmitte und  $\eta_{kd}$  den Abstand des Konturpunktes der Druckseite von der Kanalmitte bedeuten.

Durch Einsetzen des Ausdruckes

$$w_{\xi} = a_1 + b_1 \eta' + c_1 \eta'^2$$

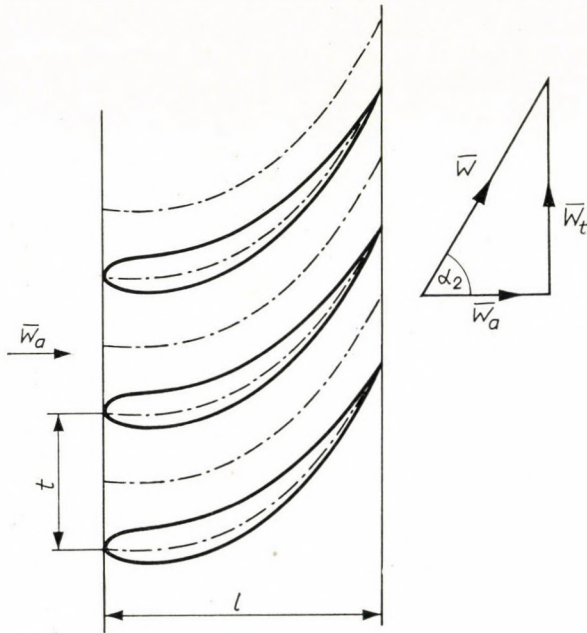


Bild 13

und nach Durchführung der Integration erhalten wir:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\xi} q(\xi) d\xi = \frac{Q(\xi)}{2} = \frac{t}{2} \left( a_1 + b_1 \frac{t}{4} + c_1 \frac{t^2}{12} \right) - \eta'_{ks} \left( a_1 + \frac{b_1}{2} \eta'_{ks} + \frac{c_1}{3} \eta'^2_{ks} \right).$$

In ähnlicher Weise erhalten wir für die Druckseite:

$$\frac{Q(\xi)}{2} = \frac{t}{2} \left( a_1 - b_1 \frac{t}{4} + c_1 \frac{t^2}{12} \right) + \eta'_{kd} \left( a_1 + \frac{b_1}{2} \eta'_{kd} + \frac{c_1}{3} \eta'^2_{kd} \right).$$

Die Lösungen dieser Gleichungen können (mit Hilfe der Integralkurve der  $\xi$ -Komponente der Relativgeschwindigkeit) auf graphischem Wege unschwer ermittelt werden.

Das geschilderte Rechenverfahren wurde an einem — aus meßtechnischen Gründen einfacheren — stehenden Schaufelgitter geprüft.

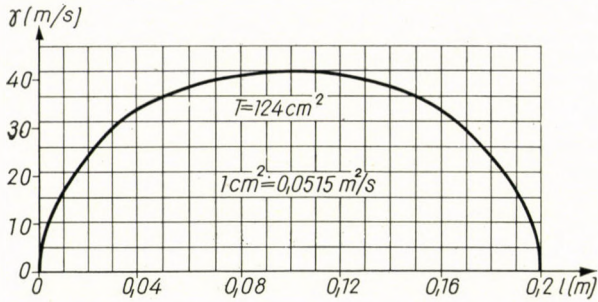


Bild 14

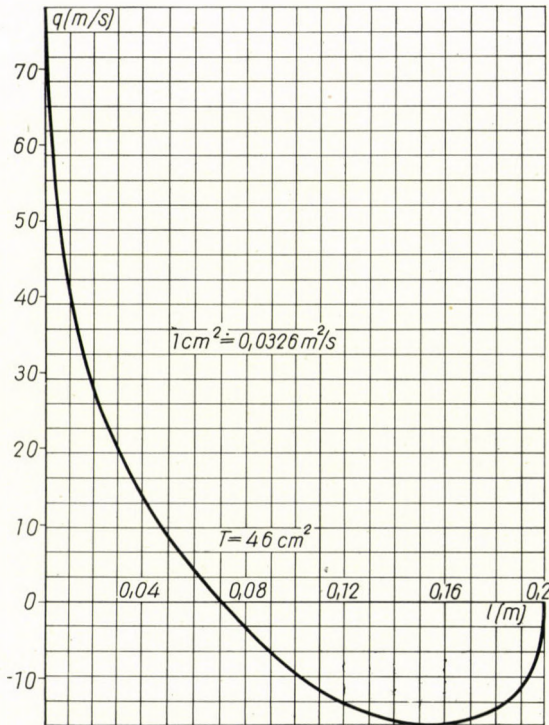


Bild 15

Es wurde ein Gitter für die folgenden Ausgangswerte berechnet:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0 & t = 0,1 \text{ m} \\ \alpha_2 = 60^\circ & l = 0,2 \text{ m.} \end{array}$$

Die Zirkulationsverteilung ist in Bild 14, die Quellenstärkenverteilung in Bild 15 angegeben.



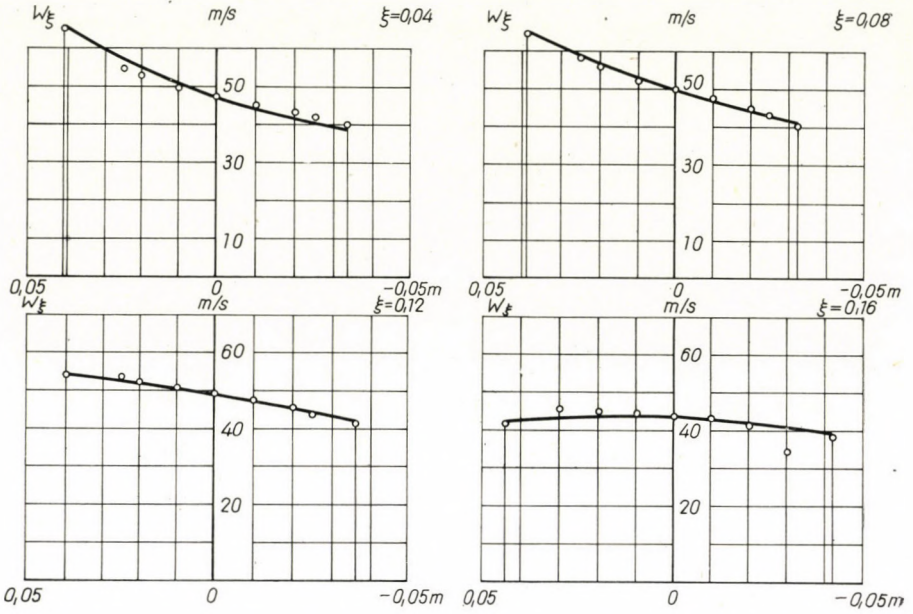


Bild 16

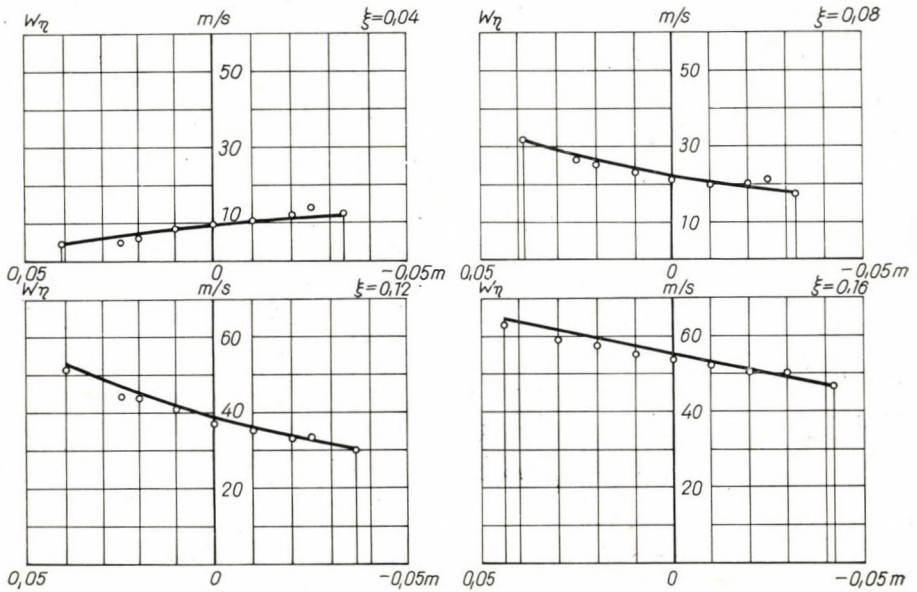


Bild 17

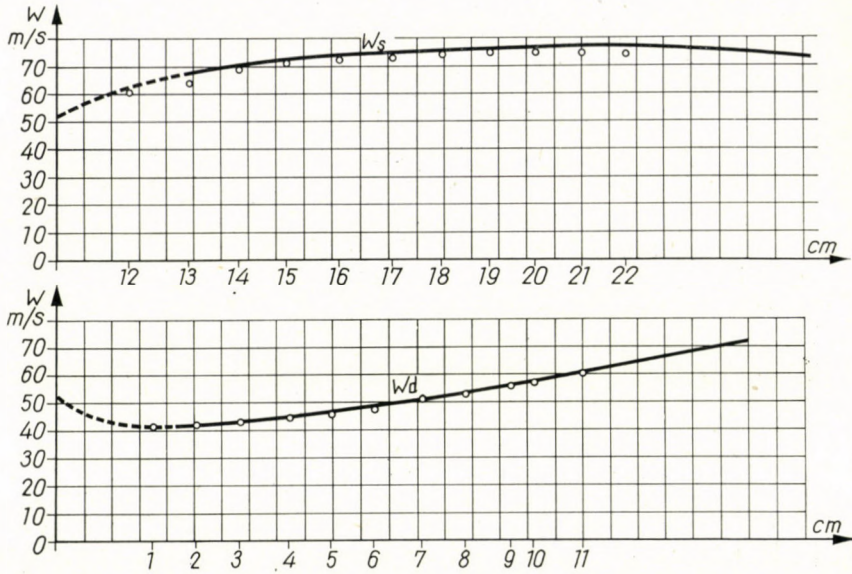


Bild 18

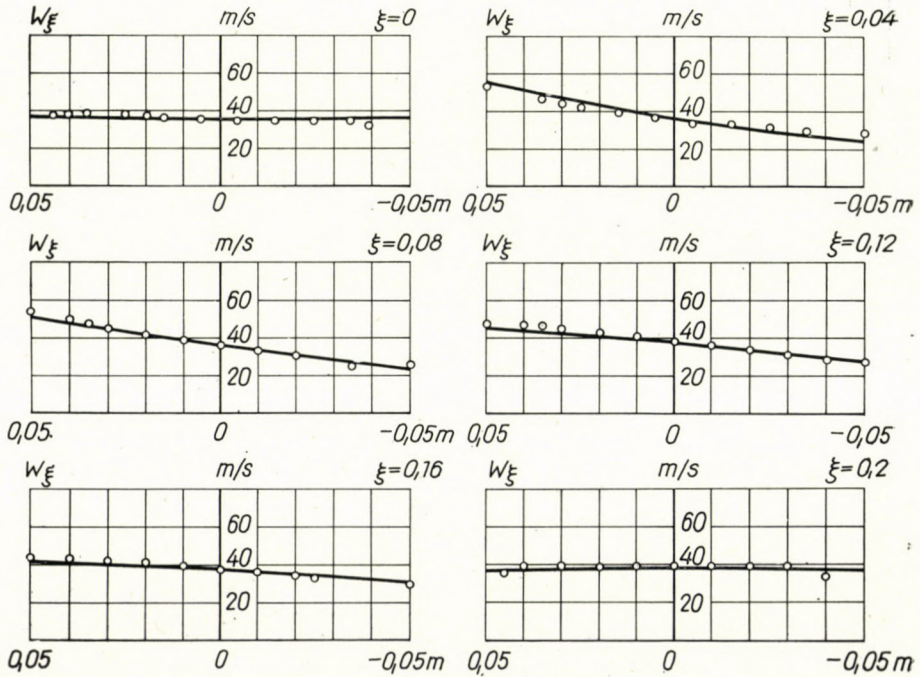


Bild 19



Das Gitter wurde in einen vertikal angeordneten Windkanal eingebaut. Die Geschwindigkeitsverteilung zwischen den Schaufeln wurde mit Hilfe einer Zylindersonde in verschiedenen Querschnitten des Kanals gemessen. Die Richtung der Geschwindigkeit konnte mittels eines an der Sonde befestigten Nonius an einer Kreisteilung abgelesen werden. Die Sonde konnte mit Hilfe

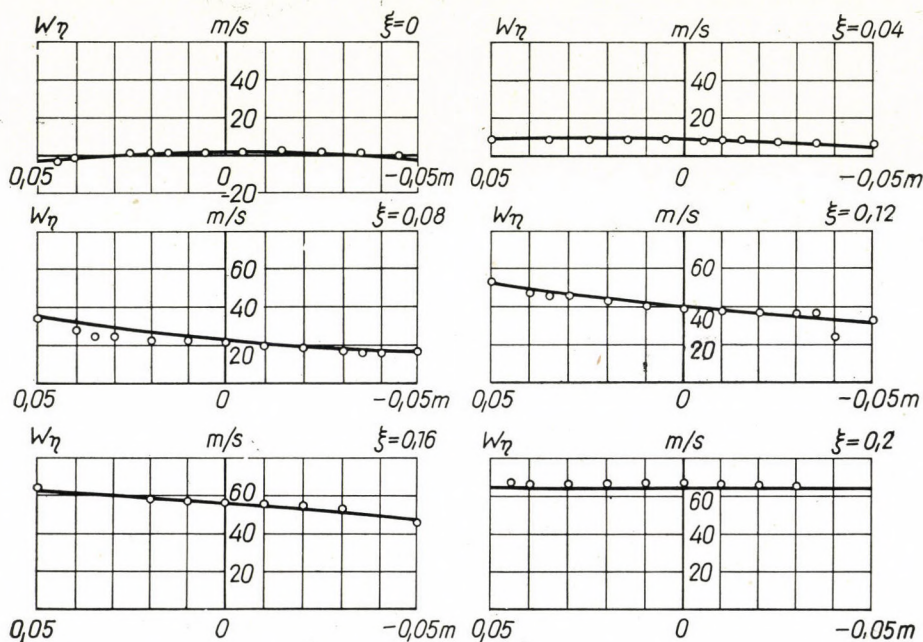


Bild 20

einer Spindel mit flachgängigem Gewinde in zwei Richtungen verstellt werden. In Anbetracht dessen, daß die Sonde in der Nähe der Wand keine richtigen Werte liefert, wurde die Geschwindigkeit an der Schaufeloberfläche aus dem an mehreren Punkten der Schaufeloberfläche gemessenen statischen Druck berechnet. Zu diesem Zwecke wurden in einer der aus Kunststoff gegossenen Schaufel Röhren zur Druckentnahme untergebracht.

In den Bildern 16 und 17 sind die gemessenen und die mit Hilfe des mitgeteilten Verfahrens berechneten Geschwindigkeitskomponenten in verschiedenen Querschnitten des Kanals angeführt. Die gemessenen Werte wurden mit Kreisen bezeichnet.

Die Änderung der Relativgeschwindigkeit entlang der Druckseite und Saugseite der Schaufel ist in Bild 18 dargestellt.

Die Geschwindigkeitsverteilung wurde auch zwischen den Schaufeln eines aus Blechschaufeln bestehenden Gitters gemessen. Die Abmessungen und die Anordnung dieser Schaufeln waren die gleichen wie im ersten Fall. Die Ergebnisse sind in Bild 19 und 20 dargestellt.



Werden die gemessenen und die berechneten Werte miteinander verglichen, so läßt es sich feststellen, daß die zweite Näherung des Verfahrens bereits recht genaue Werte liefert, und daß es in der Praxis keiner weiteren Verfeinerung des Verfahrens bedarf.

#### SCHRIFTTUM

1. WU-CHUNG-HUA—BROWN A. CURTIS: A theory of the Direct in Inverse Problems of Compressible Flow Past Cascade of Arbitrary Airfoils. *Journal of the Aeronautical Sciences*, **19**, (1952) 183.
2. ACKERT, J.: Zum Entwurf dichtstehender Schaufelgitter. — *Schweizerische Bauzeitung* **120**, (1942) 103.
3. STANITZ, J.: Approximate Design Method for Highsolidity Blade Elements in Compressors and Turbines. — *NACA TN 1951*, 2408.
4. DR. GRUBER, J.: Die Konstruktion der Schaufelgitter bestehen aus unendlich dünnen, stark gewölbten, dicht stehenden Schaufeln. (Vortrag, 1959.)
5. BETZ, A.: Konforme Abbildung, Berlin, 1948, 214.
6. SCHOLZ, N.: Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern. — *VDI-Forschungsheft*, 1954, 442

#### ZUSAMMENFASSUNG

Im vorliegenden Aufsatz wird zur Berechnung eines aus stark gewölbten Schaufeln bestehenden Gitters ein verhältnismäßig einfaches und hinreichend genaues Näherungsverfahren beschrieben. Die Geschwindigkeitsverteilung zwischen den Schaufeln wird durch Polynome zweiten Grades angenähert. Die Konstanten und die Koeffizienten ersten Grades dieser Polynome werden aus den physikalischen Bedingungen berechnet. Zur Bestimmung der Koeffizienten der Glieder zweiten Grades werden die Geschwindigkeitskomponenten entlang der Kanalmitte in eine Taylorreihe entwickelt. Die Berechnung der dabei nötigen zweiten partialen Ableitung der induzierten Geschwindigkeitskomponenten werden durch Diagramme erleichtert, in denen die auf die Einheitswirbel- bzw. Einheitsquellenreihen bezogenen Ableitungen dargestellt sind.

Durch Wiederholung des Rechenganges kann die Kontur einer Schaufel mit endlicher Dicke auch genauer berechnet werden.

Die Brauchbarkeit der Ergebnisse einer zweiten Näherung wurde durch die durchgeführten Messungen bekräftigt.

#### CALCULATION OF INTENSIVELY CURVED REVOLVING CIRCULAR GRIDS

L. PREZLER

#### SUMMARY

The calculation dealt with presents a fairly approximate and relatively easily treatable method for dimensioning grids the skeleton of which is intensively curved. The velocity distribution between the vanes is approached by a polynome of the second order. The constant as well as the coefficient of the linear term is determined from equations to be set up on the base of physical conditions.

By this the line bearing the singularity can be taken as being known in the first approximation.

Coefficients belonging to terms of the second order can be obtained from velocity components by expanding these on the centre line of the channel into a TAYLOR series. The computation of the here figuring derivatives of the second order is facilitated by diagrams presenting the second partial derivatives of the velocity components, induced by previously determined series of vortexes or sources of unit intensity, respectively.

Taking the vortex and source intensities into consideration, the coefficients of the quadratic terms can be computed.

The accuracy of the procedure dealt with might be increased. This can be achieved so, that the shape of the line bearing the singularity should be approximated, repeatedly.



## CALCUL DE PERSIENNES TOURNANTES A SQUELETTE DE FORTE COURBURE

L. PREZLER

## RÉSUMÉ

Le procédé de calcul présenté offre une méthode relativement facile pour le dimensionnement des persiennes à ligne squelette fortement courbée. La répartition de la vitesse entre les aubes est approchée par un polynôme du second degré. La constante et le coefficient du membre linéaire sont déterminés à partir des équations basées sur les conditions physiques.

Ainsi, a ligne supportant la singularité peut être considérée comme connue en première approximation.

Les coefficients des membres du second degré peuvent être obtenus à l'aide des composantes de vitesse développées en une série TAYLOR le long de la ligne médiane du canal. Le calcul des dérivées du second degré est facilité par les diagrammes représentant les dérivées partielles du second degré des composantes de vitesse induites par la série infinie de tourbillons resp. de sources d'une intensité unitaire, déterminée à l'avance.

En considérant les intensités du tourbillon et de la source, on peut obtenir les coefficients des membres carrés par intégration graphique.

L'exactitude du procédé peut être augmentée par l'approximation réitérée de la forme de la ligne supportant la singularité.

## РАСЧЕТ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КРУГОВОЙ РЕШЕТКИ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

Л. ПРЕСЛЕР

## РЕЗЮМЕ

Приведенный метод расчета допускает хорошее приближение, относительно легко применим для расчета размеров решеток с каркасной линией большой кривизны. Приближенное определение распределения скорости между лопатками ведется с помощью полинома второй степени. Постоянная и коэффициент линейного члена определяются из уравнений, записываемых на основании физических условий.

Этим несущая сингулярность линия в первом приближении может считаться известной.

Коэффициенты членов второй степени могут быть получены из компонентов скорости, извлеченных по медиане канала посредством ряда Тэйлора. Вычисление фигурирующих здесь производных второго порядка облегчается диаграммами, показывающими вторые частные производные составляющих скорости, индуцированных рядом источников, т. е. рядом заранее определенных бесконечных завихрений единичной силы.

Приняв во внимание силы завихрений и источников, вычислимы путем графического интегрирования коэффициенты квадратных членов.

Точность метода может быть увеличена путем повторного приближения к конфигурации линии несущей сингулярность.

# ÜBER DIE GRENZEN DER ENDÜBERSETZUNGEN DOPPELT GEBUNDENER GETRIEBE BEI SCHNELLAUFENDEN WERKZEUGMASCHINEN

W. ROHONYI

CLUJ, RUMÄNIEN

[Eingegangen am 13. Juli 1960]

Die Gesetze, denen die doppelt gebundenen Getriebe folgen, die Ausführungsmöglichkeit dieser Getriebe und ihre Vor- und Nachteile sind bereits verschiedentlich beschrieben worden [1, 2, 3]. Bei richtiger Auswahl ergeben sich wesentliche Raum- und Materialersparungen. In allen bisherigen Arbeiten wurden jedoch nur die Getriebe behandelt, die vorwiegend ins Langsame treiben. Bei diesen Getrieben ist die Antriebsdrehzahl  $n_1$  größer als das geometrische Mittel aus der höchsten ( $n_{31}$ ) und niedrigsten ( $n_{32}$ ) Abtriebsdrehzahl:

$$n_1 > \sqrt{n_{31} \cdot n_{32}} \text{ mit } z = 4, 6, 8, 9, 12. \quad (1)$$

Für die Berechnung solcher Getriebe gelten folgende Grundsätze:

1. Wegen der Übersetzung ins Langsame sind die Räder der jeweils treibenden Welle kleiner als die getriebenen, also nehmen die Achsabstände zu (Bild 1).

$$A_{12} < A_{23} \text{ bzw. } (z_1 + z_2) < (z_2 + z_3). \quad (2)$$

2. Die extremen Gesamtübersetzungen entstehen durch kreuzweise Kombination der Räder 1—2—5—6 bzw. 4—5—2—3, während die dazwischenliegenden Übersetzungen durch Schalten der links- oder rechtseitigen Räder 1—2—3 bzw. 4—5—6 erzielt wird.

3. In Übereinstimmung mit Punkt 1 gelten für die Teilübersetzungen die Stufensprungbedingungen:\*

$$\varphi_1 = \varphi^m = \frac{u_1}{u_2}; \quad \varphi_2 = \varphi^n = \frac{u_4}{u_3} \text{ mit } m > n \quad (3)$$

(Bild 2). Bei vierstufigen Getrieben ist  $m = 2$  und  $n = 1$ , bei sechs- und neunstufigen  $m = 2$  und  $n = 2$ .

\* In diesem Aufsatz wird das Übersetzungsverhältnis (kurz Übersetzung genannt) eines Räderpaares als Durchmesser Verhältnis der treibenden Rades zum getriebenen Rad definiert und mit »u« bezeichnet. Die Endübersetzung ist das Produkt der Teilübersetzungen.



4. Die Achsabstandbedingungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} 2 A_{12} &= d_1 + d_2 = d_4 + d_5 \\ 2 A_{23} &= d_2 + d_3 = d_5 + d_6 \end{aligned} \quad (4)$$

Die derart berechneten Getriebe weisen im ersten Teilgetriebe einen kleinen Achsabstand und großen Stufensprung und im zweiten Teilgetriebe

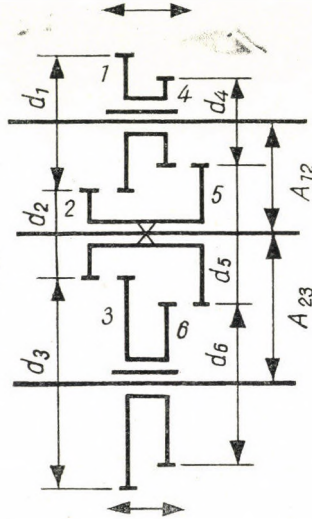


Bild 1

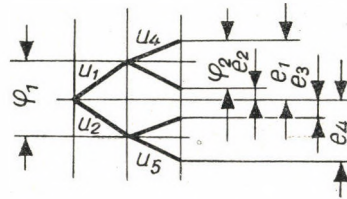


Bild 2

einen großen Achsabstand und kleinen Stufensprung auf. Sie entsprechen also in ihrem Drehzahlbild *nicht* den Grundsätzen, nach denen ungebundene Getriebe zweckmäßig ausgeführt werden.

Für moderne, schnellaufende Universal-Werkzeugmaschinen (zum Beispiel bei schnellaufenden Leichtmetall-Drehbänken, etc.) kommen jedoch oft Getriebe in Frage, bei denen die Drehzahlen vom Antrieb zur Abtriebswelle hin ansteigen. Ein Beispiel dafür ist das Hauptgetriebe der tschechoslowakischen Feindrehbank Zbrojovka TOS, Modell SV 18 R. Bei diesen ins Schnelle treibenden Getrieben ist die wichtige Voraussetzung des Punktes 1 nicht erfüllt,

folglich versagen die darauf beruhenden Berechnungsverfahren. Im folgenden wird deshalb auf die Berechnung von ins Schnelle treibenden Getrieben mit doppelter Bindung näher eingegangen.

### 1. Ableitung der Ausdrücke der Teilübersetzungen vierstufiger Rumpfgetriebe

Wenn doppelt gebundene Getriebe ins Schnelle treiben, kehrt sich die Bedingung (1) um, und es gilt:

$$n_1 < \sqrt{n_{31} \cdot n_{32}}. \quad (1a)$$

Infolge der von Welle zu Welle wachsenden Drehzahlen nehmen die Abmessungen der Zahnräder und damit die Achsabstände zum Abtrieb hin ab.

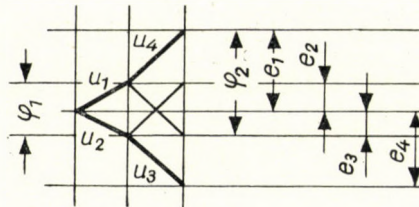


Bild 3

Bei konstantem Durchmesserunterschied der Räder bedeuten aber abnehmende Achsabstände zunehmende Stufensprünge. Deshalb wird das Aufbaunetz gegenüber den ins Langsame übersetzenden Getrieben ein umgekehrtes Aussehen haben; es zeigt mit zunehmendem Stufensprung die normale Struktur (Bild 3):

$$\varphi_1 = \varphi^m = \frac{u_1}{u_2}; \quad \varphi_2 = \varphi^n = \frac{u_4}{u_3} \quad \text{mit } m < n. \quad (3a)$$

Bei einem vierstufigen Getriebe, für das  $m = 1$  und  $n = 2$  ist, ergibt sich damit die Reihenfolge der Endübersetzungen:

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 \cdot u_4 \\ e_2 &= u_2 \cdot u_4 \\ e_3 &= u_1 \cdot u_3 \\ e_4 &= u_2 \cdot u_3. \end{aligned} \quad (5)$$



Aus den Achsabstandsbedingungen, Gl. (4), folgt:

$$\frac{1 + u_1}{1 + u_2} = \frac{1 + \frac{1}{u_3}}{1 + \frac{1}{u_4}}. \quad (4a)$$

In dieser Beziehung werden  $u_2$ ,  $u_3$  und  $u_4$  durch  $u_1$ ,  $\varphi$  und  $e_1$  ausgedrückt. Damit ergibt sich

$$\frac{1 + u_1}{1 + \frac{u_1}{\varphi}} = \frac{1 + \frac{\varphi^2}{u_4}}{1 + \frac{u_1}{e_1}} = \frac{1 + \frac{u_1 \varphi^2}{e_1}}{1 + \frac{u_1}{e_1}}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und unter Benutzung von (3a) und (5) kann man die Teilübersetzungen  $u_1$  als Funktionen von  $e_1$  und  $\varphi$  ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= e_1 \frac{1 - \varphi}{\varphi - \varphi^2} + \frac{\varphi^3 - \varphi}{\varphi - \varphi^2} = \frac{e_1}{\varphi} - (\varphi + 1) \\ \text{und daraus folgt:} \\ u_2 &= \frac{u_1}{\varphi}; \quad u_3 = \frac{u_4}{\varphi^2} = \frac{e_1}{u_1 \varphi^2}; \quad u_4 = \frac{e_1}{u_1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

## 2. Bestimmung der Endübersetzungen der Rumpfgetriebe und erweiterten Getriebe

Zur Bestimmung der Teilübersetzungen muß man also die Werte  $e_1$  und  $\varphi$  wählen. Bei der Auswahl der obersten Endübersetzungen  $e_1$  ist aber zu beachten, daß die Teilübersetzungen gewisse Grenzwerte nicht überschreiten dürfen. In einem früheren Aufsatz des Verfassers [4] wurde diese Frage für eine größte Übersetzung ins Schnelle von 2 : 1 untersucht und festgestellt, daß diese Bedingungen im allgemeinen zu Widersprüchen führen, daß es also im allgemeinen wenige oder keine Lösungen gibt. In einem späteren Aufsatz des Verfassers [5] wurde, gemäß dem Vorschlag von H. OPITZ, die größte Grenzübersetzung ins Schnelle zu 3 : 1 festgelegt. In beiden Fällen blieben die kleinsten Übersetzungen ins Langsame wie üblich 1 : 4.

Bei dieser Erweiterung der Grenzen für die Übersetzung ins Schnelle sind die vorigen Widersprüche verschwunden und konnten viele praktische Getriebe gefunden werden. Der erwähnte Aufsatz enthält in tabellarischer Form die numerischen Werte aller Parameter dieser praktisch ausführbaren

doppelt gebundenen Getriebe ( $u_1, u_2, u_3, u_4, e_1$ ) bei den drei praktisch wichtigsten Stufensprüngen ( $\varphi = 1,12, 1,26$  und  $1,41$ ) der Normreihen.

Im gegenwärtigen Aufsatz soll das gesamte Anwendungsgebiet der doppelt gebundenen Getriebe für die größte Teilübersetzung ins Schnelle zwischen den Grenzen  $u_1 = 2 : 1$  und  $u_1 = 3 : 1$  untersucht werden, wenn die kleinste Übersetzung ins Langsame unverändert bleibt, also

$$u_2 \geq \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad u_3 \geq \frac{1}{4}.$$

2.1. Methode der Berechnung vierstufiger Rumpfgetriebe  $m = 1, n = 2$

1.  $2 \leq u_1 \leq 3$

Aus Gleichungen (6) berechnet man folgenderweise die erste Grenzbedingung für die größte Endübersetzung:

$$u_1 = \frac{e_1}{\varphi} - (\varphi + 1)$$

daraus

$$e_1 = u_1 \varphi + \varphi + \varphi^2. \tag{7}$$

Es leuchtet ein, daß bei jedem Stufensprung  $\varphi$  ein Höchstwert von  $u_1$  (größte Teilübersetzung ins Schnelle) auch einen Höchstwert von  $e_1$  bestimmt, also hat die größte Endübersetzung folgende obere Grenze:

$$e_1 \leq u_1 \varphi + \varphi + \varphi^2. \tag{8}$$

2.  $u_2 \geq \frac{1}{4}$

Aus  $u_2 = \frac{u_1}{\varphi} = \frac{e_1}{\varphi^2} - \frac{\varphi + 1}{\varphi}$  folgt die zweite Grenzbedingung für die

größte Endübersetzung:

$$e_1 = u_2 \varphi^2 + \varphi + \varphi^2. \tag{9}$$

Ein Kleinstwert von  $u_2 \left( \geq \frac{1}{4} \right)$  wird bei jedem Stufensprung  $\varphi$  einen Kleinstwert von  $e_1$  bestimmen, also hat die größte Endübersetzung folgende untere Grenze:

$$e_1 \geq u_2 \varphi^2 + \varphi + \varphi^2. \tag{10}$$

3.  $u_3 \geq \frac{1}{4}$

Aus

$$u_3 = \frac{e_1}{u_1 \varphi^2}$$



berechnet man die dritte Grenzbedingung für die größte Endübersetzung wie folgt:

$$u_3 = \frac{e_1}{\varphi e_1 - \varphi^2(\varphi + 1)},$$

daraus

$$e_1 = \frac{\varphi^2(\varphi + 1)}{\varphi - \frac{1}{u_3}}. \quad (11)$$

Es ist zu ersehen, daß dieser Ausdruck nur für  $\varphi > \frac{1}{u_3}$ , also bei  $\varphi > 4$ , einen positiven Wert hat. Diese Grenzbedingung fällt also fort.

$$4. \quad 2 \leq u_4 \leq 3$$

Aus

$$u_4 = \frac{e_1}{u_1}$$

folgt die vierte Grenzbedingung für die größte Endübersetzung:

$$u_4 = \frac{e_1}{\frac{e_1}{\varphi} - (\varphi + 1)} = \frac{\varphi e_1}{e_1 - \varphi(\varphi + 1)},$$

daraus

$$e_1 = \frac{\varphi(\varphi + 1)}{1 - \frac{\varphi}{u_4}}. \quad (12)$$

Da  $u_4$  einen Höchstwert bedeutet, wird der Bruch bei jedem Stufensprung  $\varphi$  einen Kleinstwert darstellen, also hat die größte Endübersetzung folgende untere Grenze:

$$e_1 \geq \frac{\varphi(\varphi + 1)}{1 - \frac{\varphi}{u_4}}. \quad (13)$$

2.2. Anwendung der Ungleichungen (8), (10), (13) für die Stufensprünge  $\varphi = 1,12, 1,26, 1,41$  bei  $m = 1, n = 2$

Setzt man in den Ungleichungen (8), (10) und (13) die Werte der drei obigen Stufensprünge ein, so erhält man die Grenzen der wählbaren Werte der größten Endübersetzungen. Diese Werte beziehungsweise Ausdrücke in Abhängigkeit von  $u_1$  und  $u_4$  zeigt uns Tabelle 1.

**Tabelle 1**

Grenzen der wählbaren Werte der größten Endübersetzungen  $e_1$  bei  $m = 1, n = 2$

|                                      | $\varphi = 1,12$                             | $\varphi = 1,26$                             | $\varphi = 1,41$                             |
|--------------------------------------|--|--|--|
| 1. Grenzbedingung<br>(obere Grenze)  | $e_1 \leq 1,12 u_1 + 2,38$                   | $e_1 \leq 1,26 u_1 + 2,84$                   | $e_1 \leq 1,41 u_1 + 3,41$                   |
| 2. Grenzbedingung<br>(untere Grenze) | $e_1 \geq 2,69$                              | $e_1 \geq 3,235$                             | $e_1 \geq 3,91$                              |
| 3. Grenzbedingung                    | nicht brauchbar (negativ)                    |  |  |
| 4. Grenzbedingung<br>(untere Grenze) | $e_1 \geq \frac{2,38}{1 - \frac{1,12}{u_4}}$ | $e_1 \geq \frac{2,84}{1 - \frac{1,26}{u_4}}$ | $e_1 \geq \frac{3,41}{1 - \frac{1,41}{u_4}}$ |

Der gewählte Wert der obersten Endübersetzung  $e_1$  muß zwischen der oberen und der nächsten unteren Grenze liegen. Grenzbedingungen, die Widersprüche bedeuten, fallen natürlich fort.

Nehmen wir nun für alle unseren weiteren Berechnungen folgende Normwerte der Übersetzungen zwischen 2 : 1 und 3 : 1 in Betracht:

**Tabelle 2**

Normwerte der größten Teilübersetzungen ins Schnelle  $u_1$  und  $u_4$  zwischen 2 : 1 und 3 : 1

|   |      |      |      |      |      |      |   |
|---|------|------|------|------|------|------|---|
| 2 | 2,11 | 2,24 | 2,37 | 2,51 | 2,66 | 2,82 | 3 |
|---|------|------|------|------|------|------|---|

Setzt man hintereinander die größten Teilübersetzungen gemäß Tabelle 2 in die Ausdrücke der Grenzen der Endübersetzungen laut Tabelle 1 ein, so erhält man, gemäß Tabelle 3, für die Stufensprünge  $\varphi = 1,12, 1,26$  und  $1,41$  folgende größte Endübersetzungen  $e_1$ : Untersuchen wir diese Tabelle. Es leuchtet ein, daß bei allen drei Stufensprüngen  $\varphi = 1,12, 1,26$  und  $1,41$  die erste und vierte Grenzbedingung in Widerspruch zu der mit dicker Linie begrenzten Zone steht. Das heißt, daß es im Gebiete links von der dicken Grenzlinie *keine* doppelt gebundenen, ins Schnelle treibenden Normgetriebe gibt. Die Werte der ersten Teilübersetzungen  $u_1$ , welche diese unbrauchbare Getriebezone begrenzen, sind folgende:

|     |                  |                         |
|-----|------------------|-------------------------|
| für | $\varphi = 1,12$ | $2 \leq u_1 \leq 2,24$  |
|     | $\varphi = 1,26$ | $2 \leq u_1 \leq 2,51$  |
|     | $\varphi = 1,41$ | $2 \leq u_1 \leq 2,82.$ |



Tabelle 3

Größte Endübersetzungen der vierstufigen Rumpfgetriebe mit  $m = 1$  und  $n = 2$ 

|                  |                              |      |       |      |      |      |      |      |      |
|------------------|------------------------------|------|-------|------|------|------|------|------|------|
| $\varphi = 1,12$ | $u_1 =$                      | 2    | 2,11  | 2,24 | 2,37 | 2,51 | 2,66 | 2,82 | 3    |
|                  | 1. Grenzbedingung $e_1 \leq$ | 4,62 | 4,74  | 4,89 | 5,04 | 5,19 | 5,36 | 5,54 | 5,74 |
|                  | 2. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 2,69 | 2,69  | 2,69 | 2,69 | 2,69 | 2,69 | 2,69 | 2,69 |
|                  | 4. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 5,40 | 5,07  | 4,76 | 4,52 | 4,30 | 4,12 | 3,95 | 3,74 |
|                  | $*u_4 = \frac{e_1}{u_1} =$   | 2,31 | 2,24  | 2,18 | 2,12 | 2,06 | 2,01 | 1,96 | 1,91 |
| $\varphi = 1,26$ | 1. Grenzbedingung $e_1 \leq$ | 5,36 | 5,50  | 5,66 | 5,82 | 6,00 | 6,19 | 6,39 | 6,62 |
|                  | 2. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 3,23 | 3,23  | 3,23 | 3,23 | 3,23 | 3,23 | 3,23 | 3,23 |
|                  | 4. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 7,70 | 7,09  | 6,52 | 6,08 | 5,72 | 5,53 | 5,15 | 4,92 |
|                  | $*u_4 = \frac{e_1}{u_1} =$   | 2,72 | 2,62  | 2,53 | 2,45 | 2,39 | 2,32 | 2,26 | 2,21 |
| $\varphi = 1,41$ | 1. Grenzbedingung $e_1 \leq$ | 6,23 | 6,39  | 6,57 | 6,75 | 6,95 | 7,16 | 7,39 | 7,64 |
|                  | 2. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 3,91 | 3,91  | 3,91 | 3,91 | 3,91 | 3,91 | 3,91 | 3,91 |
|                  | 4. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 11,5 | 10,27 | 9,22 | 8,42 | 7,78 | 7,26 | 6,82 | 6,44 |
|                  | $*u_4 = \frac{e_1}{u_1} =$   | 3,11 | 3,03  | 2,93 | 2,85 | 2,77 | 2,69 | 2,62 | 2,54 |

\* Bei der ersten Grenzbedingung für  $e_1$ .Von diesen Grenzen bis  $u_1 = 3$ , also zwischen den Werten

$$\begin{aligned} \text{bei} \quad \varphi = 1,12 & \quad 2,24 \leq u_1 \leq 3 \\ \varphi = 1,26 & \quad 2,51 \leq u_1 \leq 3 \\ \varphi = 1,41 & \quad 2,82 \leq u_1 \leq 3 \end{aligned}$$

gibt es brauchbare Lösungen, weil hier die vierte Grenzbedingung kleiner ist als die erste, die obere Grenze höher ist als die untere. Die zweite Grenzbedingung sagt nichts neues aus, ihre Forderung ist in der ersten und vierten inbegriffen.

Dieselbe Gesetzmäßigkeit zeigen auch die Werte der vierten Teilübersetzung  $u_4$  (bei der ersten Grenzbedingung berechnet). In der unbrauchbaren Grenzzone ist bei allen drei Stufensprüngen  $u_4 < u_1$ . Dies bedeutet einen zweiten Widerspruch, weil der Wert von  $u_1$ , als größer Wert der Übersetzungen

ins Schnelle, die Grenzbedingung ist. Überall in der brauchbaren Zone ist  $u_4 m < u_1$ , also ist die Grenzbedingung befriedigt.

In der Tabelle 4 haben wir die Normwerte der größten Endübersetzungen  $e_1$  zusammengestellt, die der ersten und vierten Grenzbedingung entsprechen.

Tabelle 4

Normwerte der größten Endübersetzungen  $e_1$  der vierstufigen Rumpfgetriebe bei  $m = 1$  und  $n = 2$

|                  | $u_1$ | 2,24 | 2,37 | 2,51 | 2,66 | 2,82 | 3    |      |
|------------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\varphi = 1,12$ | $e_1$ |      |      |      |      | 3,98 | 3,98 |      |
|                  |       |      |      |      | 4,22 | 4,22 | 4,22 | 4,22 |
|                  |       |      |      | 4,47 | 4,47 | 4,47 | 4,47 | 4,47 |
|                  |       | 4,73 | 4,73 | 4,73 | 4,73 | 4,73 | 4,73 | 4,73 |
|                  |       |      | 5,01 | 5,01 | 5,01 | 5,01 | 5,01 | 5,01 |
|                  |       |      |      |      |      | 5,31 | 5,31 | 5,31 |
|                  |       |      |      |      |      |      |      | 5,62 |
| $\varphi = 1,26$ | $e_1$ |      |      |      |      |      | 5    |      |
|                  |       |      |      |      |      | 5,31 | 5,31 |      |
|                  |       |      |      |      |      | 5,62 | 5,62 | 5,62 |
|                  |       |      |      | 5,90 | 5,90 | 5,59 | 5,90 | 5,90 |
|                  |       |      |      |      |      | 6,31 | 6,31 | 6,31 |
|                  |       |      |      |      |      |      |      | 6,68 |
|                  |       |      |      |      |      |      |      | 6,68 |
| $\varphi = 1,41$ | $e_1$ |      |      |      |      |      | 6,68 |      |
|                  |       |      |      |      |      | 7,08 | 7,08 |      |
|                  |       |      |      |      |      |      | 7,50 |      |

Auf Grund dieser Normwerte der Endübersetzungen  $e_1$  und bei verschiedenen Stufensprüngen  $\varphi$  kann man, gemäß Gleichungen (6), die Teilübersetzungen berechnen, die allerdings keine Normwerte sind.

Tabelle 5 zeigt diese für die Normwerte von  $e_1$  berechneten Übersetzungen  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . Neben jeder Übersetzung in der Tabelle stehen zwei Exponenten der Grundreihe  $\varphi_0 = 1,06$ , im Sinne folgender Ungleichung

$$\varphi_0^{p_1} \leq u \leq \varphi_0^{p_2}.$$



Also soll bei  $e_1 = 5,9$   $u_1$  den Wert 2,48 haben. Neben dieser Teilübersetzung finden wir zwei Wertepaare von  $p$ , und zwar:

$$13-14 \text{ und } 15-16.$$

Das heißt:

$$1,06^{13-14} < 2,48 < 1,06^{15-16}.$$

Diese Werte von  $p$  werden wir bei der grafischen Darstellung brauchen (Drehzahlbild).

Tabelle 5

*Teilübersetzungen der vierstufigen Rumpfgetriebe  
mit  $m = 1$ ,  $n = 2$  für verschiedene Stufensprünge  $\varphi$*

|                  | $e_1$            | $p$  | $u_1$ | $p$   | $u_2$ | $p$   | $u_3$ | $p$   | $u_4$ | $p$   |
|------------------|------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\varphi = 1,12$ | 3,98             | 24   | 1,43  | 6—7   | 1,28  | 4—5   | 2,20  | 13—14 | 2,78  | 17—18 |
|                  | 4,22             | 25   | 1,64  | 8—9   | 1,46  | 6—7   | 2,04  | 12—13 | 2,57  | 16—17 |
|                  | 4,47             | 26   | 1,87  | 10—11 | 1,67  | 8—9   | 1,90  | 11—12 | 2,39  | 15—16 |
|                  | 4,73             | 27   | 2,10  | 12—13 | 1,87  | 10—11 | 1,78  | 10    | 2,25  | 14—15 |
|                  | 5,01             | 28   | 2,43  | 15—16 | 2,09  | 12—13 | 1,70  | 9—10  | 2,14  | 13—14 |
|                  | 5,31             | 29   | 2,62  | 16—17 | 2,34  | 14—15 | 1,61  | 8—9   | 2,03  | 12—13 |
|                  | 5,62             | 30   | 2,90  | 18—19 | 2,59  | 16—17 | 1,54  | 7—8   | 1,94  | 11—12 |
|                  | $\varphi = 1,26$ | 5    | 28    | 1,71  | 9—10  | 1,35  | 5—6   | 1,85  | 10—11 | 2,93  |
| 5,31             |                  | 29   | 1,96  | 11—12 | 1,55  | 7—8   | 1,71  | 9—10  | 2,70  | 17—18 |
| 5,62             |                  | 30   | 2,20  | 13—14 | 1,75  | 9—10  | 1,61  | 8—9   | 2,55  | 16—17 |
| 5,90             |                  | 31   | 2,48  | 15—16 | 1,96  | 11—12 | 1,52  | 7—8   | 2,40  | 15—16 |
| 6,31             |                  | 32   | 2,74  | 17—18 | 2,18  | 13—14 | 1,45  | 6—7   | 2,30  | 14—15 |
| 6,68             |                  | 33   | 3,04  | 19—20 | 2,41  | 15—16 | 1,39  | 5—6   | 2,20  | 13—14 |
| $\varphi = 1,41$ |                  | 6,68 | 33    | 2,33  | 14—15 | 1,65  | 8—9   | 1,43  | 6—7   | 2,86  |
|                  | 7,08             | 34   | 2,61  | 16—17 | 1,85  | 10—11 | 1,36  | 5—6   | 2,71  | 17—18 |
|                  | 7,50             | 35   | 2,90  | 18—19 | 2,06  | 12—13 | 1,29  | 4—5   | 2,58  | 16—17 |

### 3.1. Berechnung der erweiterten Getriebe

In diesem Abschnitt sollen die Teilübersetzungen der 6, 8, 9 und 12stufigen doppelt gebundenen Dreiwellengetriebe berechnet werden. Vorher muß aber anhand der im Bild 4 dargestellten Aufbaunetze dieser Getriebe festgestellt werden, welche Exponenten  $m$  und  $n$  auftreten können. Im Bild 4 sind

Tabelle 6

Mögliche und vorteilhafte Kombinationen von  $m$  und  $n$

|              | m | n | m | n | m | n | m | n | m | n | m | n |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2 \times 3$ | 1 | 2 | 1 | 4 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $3 \times 2$ | 1 | 3 | 2 | 3 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $3 \times 3$ | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 6 | 2 | 6 |   |   |   |   |
| $3 \times 4$ | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 6 | 2 | 6 | 1 | 9 | 2 | 9 |
| $2 \times 4$ | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 6 |   |   |   |   |   |   |
| $4 \times 2$ | 1 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 |   |   |   |   |   |   |
| $4 \times 3$ | 1 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 1 | 8 | 2 | 8 | 3 | 8 |

die Übersetzungen der doppelt gebundenen Rumpfgetriebe fett ausgezogen. Tabelle 6 zeigt diese möglichen Kombinationen der Werte  $m$  und  $n$ .

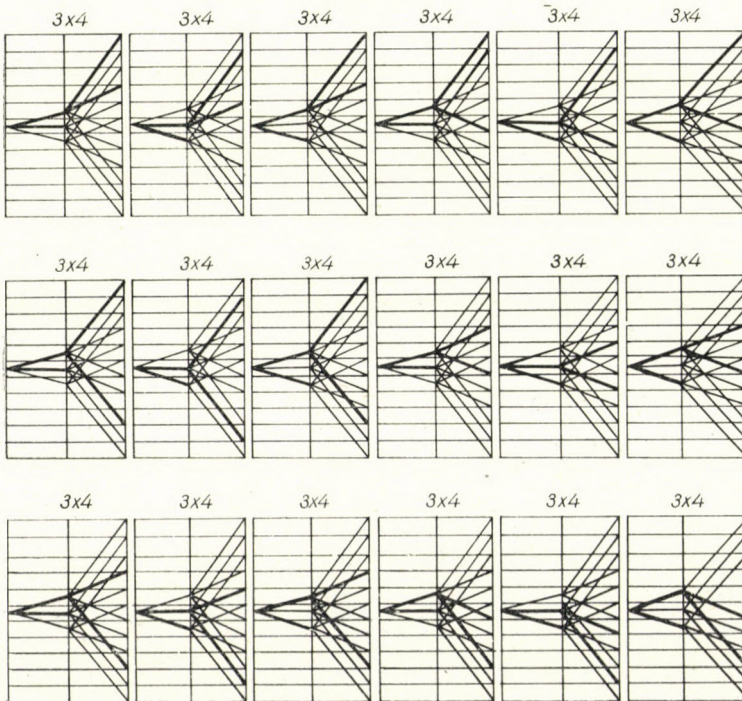


Bild 4a



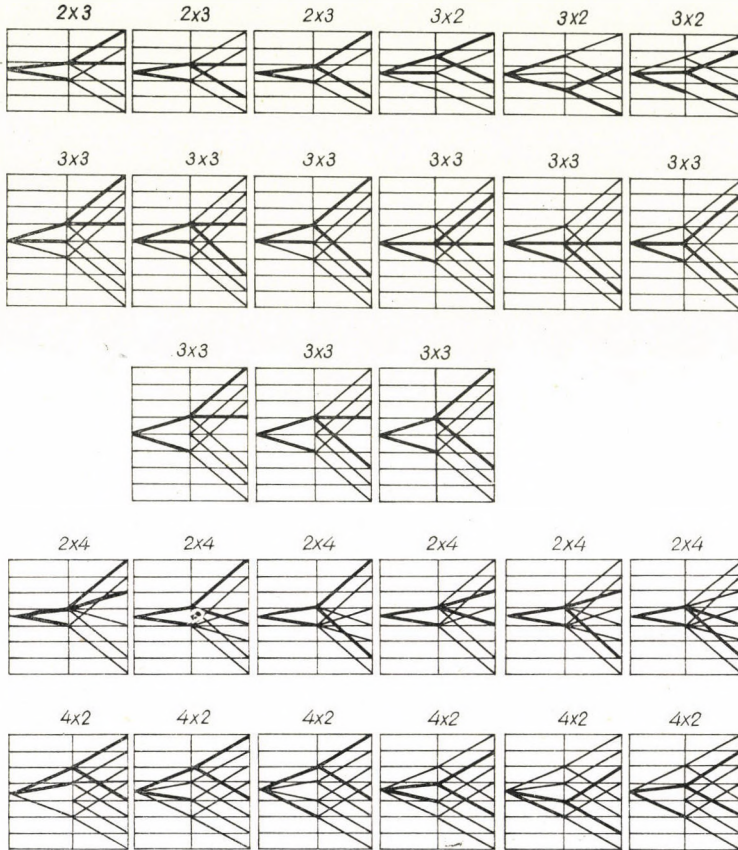


Bild 4b

Die günstigsten Wertepaare von  $m$  und  $n$  sind die, welche die kleinsten Beträge haben und voneinander am wenigsten abweichen. Sie lassen sich aus der Tabelle ablesen:

1. bei  $6 = 2.3$  und  $8 = 2.4$  Stufen:  $m = 1$ ;  $n = 2$ ;
2. bei  $6 = 3.2$ ,  $9 = 3.3$  und  $12 = 3.4$  Stufen:  $m = 2$ ;  $n = 3$ ;
3. bei  $8 = 4.2$  und  $12 = 4.5$  Stufen:  $m = 3$ ;  $n = 4$ .

Nun folgt die Berechnung der Teilübersetzungen des Rumpfgetriebes für die soeben ausgewählten günstigen Exponentenpaare.

### 3.2. Methode der Berechnung der erweiterten Getriebe $m = 1$ und $n = 2$

Gemäß dem Bilde 4 und Tabelle 6 kann man die  $6 = 2.3$ stufigen und  $8 = 2.4$ stufigen Getriebe als vierstufige Rumpfgetriebe behandeln, da auch für diese bereits  $m = 1$  und  $n = 2$  gilt. Es ist also keine Neuberechnung nötig.

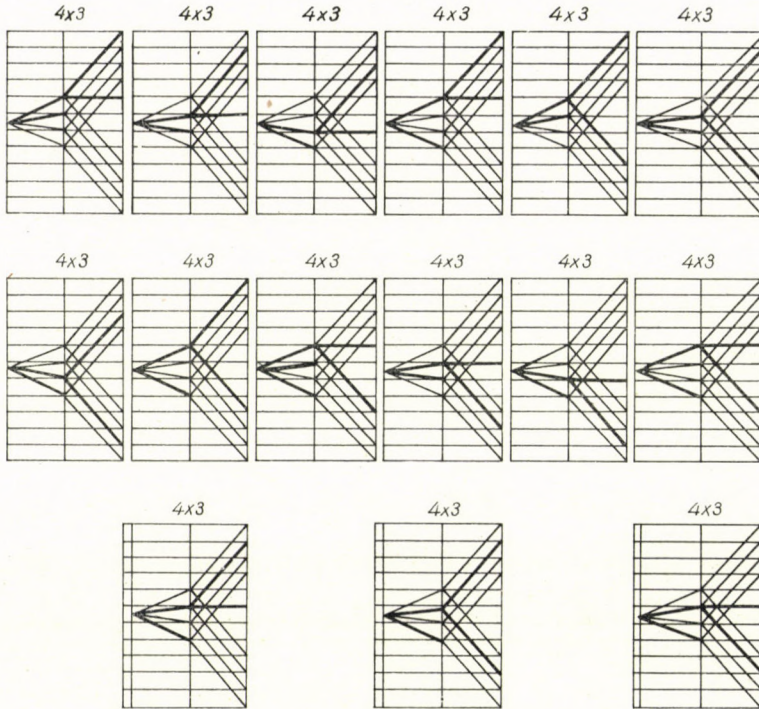


Bild 4c

Bei dem ersten Fall ( $6 = 2.3$ ) muß man dem zweiten Teilgetriebe noch eine Übersetzung, im zweiten Fall ( $8 = 2.4$ ) noch zwei Übersetzungen zufügen. Dabei muß man zwei Grundbedingungen erfüllen:

1. die Teilübersetzungen im zweiten Teilgetriebe müssen eine geometrische Reihe bilden mit dem Stufensprung

$$\varphi_1 = \varphi^n = \varphi^2 ;$$

2. die Lage der Teilübersetzung im Drehzahlbild ist so zu wählen, daß die der vorigen Berechnung zugrundegelegten Grenzen

$$\frac{1}{4} \leq u_5 \leq 3, \quad \frac{1}{4} \leq u_6 \leq 3$$

nicht überschritten werden. Auf diese Frage werden wir noch im Rahmen eines Beispiels zurückkommen.



### 3.3. Methode der Berechnung der erweiterten Getriebe für $m = 2$ und $n = 3$

Bei den Getrieben mit  $m = 2$ ,  $n = 3$  gelten folgende Ausgangsbedingungen:

$$u_1 = u_2 \varphi^m = u_2 \varphi^2$$

$$u_4 = u_3 \varphi^n = u_3 \varphi^3$$

die Endübersetzungen aus Gleichung (5) bezogen auf das Rumpfgetriebe sowie die Achsabstandsbedingungen laut Gleichung (4a). Unter Anwendung der vorher angewendeten Methode kann man die erste Teilübersetzung  $u_1$  durch Substitution als Funktion von  $e_1$  und  $\varphi$  ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= e_1 \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^3 - \varphi^2} - \frac{\varphi^5 - \varphi^2}{\varphi^3 - \varphi^2} \\ \text{und daraus} \\ u_2 &= \frac{u_1}{\varphi^2}; u_3 = \frac{e_1}{u_1 \varphi^3}; u_4 = \frac{e_1}{u_1} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die freie Wählbarkeit der Größen  $e_1$  und  $\varphi$  wird wiederum durch die Grenzen der Teilübersetzungen eingeschränkt, und zwar ergeben sich folgende allgemeine Bedingungen:

$$1. \quad 2 \leq u_1 \leq 3$$

Aus Gleichungen (14) berechnet man die erste Grenzbedingung für die erste Endübersetzung folgenderweise:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^3 - \varphi^2} - \frac{\varphi^5 - \varphi^2}{\varphi^3 - \varphi^2} \quad \text{und daraus} \\ e_1 &= u_1 \frac{\varphi^3 - \varphi^2}{\varphi^2 - 1} + \frac{\varphi^5 - \varphi^2}{\varphi^2 - 1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Man sieht, daß bei jedem Stufensprung ein Höchstwert von  $u_1$  (größte Teilübersetzung ins Schnelle) auch einen Höchstwert von  $e_1$  bestimmt, also hat die größte Endübersetzung folgende obere Grenze:

$$e_1 \geq \frac{u_1(\varphi^2 - \varphi^2) + \varphi^5 - \varphi^2}{\varphi^2 - 1}. \quad (16)$$

$$2. \quad u_2 \geq -\frac{1}{4}$$

Aus

$$u_2 = \frac{u_1}{\varphi^2} = e_1 \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2(\varphi^2 - \varphi^2)} - \frac{\varphi^5 - \varphi^2}{\varphi^2(\varphi^3 - \varphi^2)}$$

folgt die zweite Grenzbedingung für die größte Endübersetzung:

$$e_1 = \frac{u_2 \varphi^2 (\varphi^3 - \varphi^2) + (\varphi^5 - \varphi^2)}{\varphi^2 - 1} . \quad (17)$$

Ein Kleinstwert von  $u_2 \left( \geq \frac{1}{4} \right)$  wird bei jedem Stufensprung einen Kleinstwert von  $e_1$  bestimmen, also hat die größte Endübersetzung folgende untere Grenze:

$$e_1 \geq \frac{\varphi^5 (u_2 + 1) - u_2 \varphi^4 - \varphi^2}{\varphi^2 - 1} . \quad (18)$$

3.  $u_3 \geq \frac{1}{4}$

Aus

$$u_3 = \frac{e_1}{u_1 \varphi^3}$$

berechnet man die dritte Grenzbedingung für die größte Endübersetzung wie folgt:

$$u_3 = \frac{e_1}{\varphi^3 \left( e_1 \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^3 - \varphi^2} - \frac{\varphi^5 - \varphi^2}{\varphi^3 - \varphi^2} \right)} \quad (19)$$

$$e_1 = \frac{\varphi^3 (\varphi^5 - \varphi^2)}{\varphi^3 (\varphi^2 - 1) - \frac{\varphi^3 - \varphi^2}{u_3}} .$$

Es leuchtet ein, daß dieser Ausdruck nur für

$$\varphi^3 (\varphi^2 - 1) > \frac{\varphi^3 - \varphi^2}{u_3} \text{ also für}$$

$$\varphi^2 + \varphi > \frac{1}{u_3} = 4 \text{ einen positiven Wert haben}$$

kann. Folglich fällt diese Grenzbedingung fort ( $\varphi_{\text{max}} = 1,41$ ).

4.  $2 \leq u_4 \leq 3$

Aus

$$u_4 = \frac{e_1}{u_1}$$

folgt die vierte Grenzbedingung für die größte Endübersetzung:

$$u_4 = \frac{e_1}{e_1 \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^3 - \varphi^2} - \frac{\varphi^5 - \varphi^2}{\varphi^3 - \varphi^2}} , \text{ daraus } e_1 = \frac{\varphi^5 - \varphi^2}{\varphi^2 - 1 - \frac{\varphi^3 - \varphi^2}{u_4}} . \quad (20)$$



Da  $u_4$  einen Höchstwert bedeutet, wird der Bruch bei jedem Stufensprung einen Kleinstwert darstellen, also hat die größte Endübersetzung folgende untere Grenze:

$$e_1 \geq \frac{\varphi^5 - \varphi^2}{\varphi^2 - 1 - \frac{\varphi^3 - \varphi^2}{u_4}} \quad (21)$$

3.3.1. Anwendung der Ungleichungen (16), (18), (21) für die Stufensprünge  $\varphi = 1,12, 1,26, 1,41$  bei  $m = 2, n = 3$

Setzt man in die Ungleichungen (16), (18) und (21) die Werte der drei obigen Stufensprünge ein, so erhält man die Grenzen der wählbaren Werte der größten Endübersetzungen. Diese Werte beziehungsweise Ausdrücke in Abhängigkeit von  $u_1$  und  $u_4$  zeigt uns Tabelle 7.

Tabelle 7  
Ausdrücke und Werte der Grenzen  
der größten Endübersetzungen  $e_1$  bei  $m = 2, n = 3$

|                                   | $\varphi = 1,12$                             | $\varphi = 1,26$                             | $\varphi = 1,41$                             |
|-----------------------------------|--|--|--|
| 1. Grenzbedingung (obere Grenze)  | $e_1 \leq \frac{u_1}{1,56} + 2,04$           | $e_1 \leq \frac{u_1}{1,38} + 2,73$           | $e_1 \leq \frac{u_1}{1,22} + 3,64$           |
| 2. Grenzbedingung (untere Grenze) | $e_1 \geq 2,24$                              | $e_1 \geq 3,016$                             | $e_1 \geq 4,05$                              |
| 3. Grenzbedingung                 | n i c h t b r a u c h b a r (negativ)        |  |  |
| 4. Grenzbedingung (untere Grenze) | $e_1 \geq \frac{3,19}{1,56 - \frac{1}{u_4}}$ | $e_1 \geq \frac{3,77}{1,38 - \frac{1}{u_4}}$ | $e_1 \geq \frac{4,44}{1,22 - \frac{1}{u_4}}$ |

Der gewählte Wert der obersten Endübersetzung  $e_1$  muß zwischen der oberen und der nächsten unteren Grenze liegen. Die dritte Grenzbedingung fällt natürlich fort.

Setzt man nacheinander die größten Teilübersetzungen  $u_1$ , gemäß der Tabelle 2, in die Ausdrücke der Grenzen der Endübersetzungen laut Tabelle 7 ein, so erhält man für die Stufensprünge  $\varphi = 1,12, 1,26$  und  $1,41$  folgende größte Endübersetzungen  $e_1$ , gemäß der Tabelle 8.

Falls wir nun diese Tabelle untersuchen, wird ersichtlich, daß die Situation gegenüber der Tabelle 3 eine andere ist. Bei  $\varphi = 1,12$  ist kein Widerspruch zwischen der ersten und vierten Grenzbedingung. Es muß also bei  $u_1 = 2$  die Bedingung  $u_4 \leq u_1$  gelten (bei der ersten Grenzbedingung für  $e_1$ ). Das ist tatsächlich der Fall. Bei  $\varphi = 1,25$  zwischen  $2,11 \leq u_1 \leq 3$  und bei

Tabelle 8

Größte Endübersetzungen der Rumpfgetriebe mit  $m = 2$  und  $n = 3$

|                  | $u_1$                        | 2     | 2,11  | 2,24  | 2,37  | 2,51  | 2,66  | 2,82  | 3     |
|------------------|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\varphi = 1,12$ | 1. Grenzbedingung $e_1 \leq$ | 3,32  | 3,39  | 3,47  | 3,56  | 3,65  | 3,74  | 3,85  | 3,97  |
|                  | 2. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 2,24  | 2,24  | 2,24  | 2,24  | 2,24  | 2,24  | 2,24  | 2,24  |
|                  | 4. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 3,01  | 2,94  | 2,87  | 2,8   | 2,74  | 2,69  | 2,65  | 2,6   |
|                  | * $u_4 = \frac{e_1}{u_1}$    | 1,66  | 1,62  | 1,55  | 1,50  | 1,45  | 1,40  | 1,36  | 1,315 |
| $\varphi = 1,26$ | 1. Grenzbedingung $e_1 \leq$ | 4,18  | 4,26  | 4,35  | 4,45  | 4,55  | 4,66  | 4,77  | 4,92  |
|                  | 2. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 3,016 | 3,016 | 3,016 | 3,016 | 3,016 | 3,016 | 3,016 | 3,016 |
|                  | 4. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 4,28  | 4,16  | 4,04  | 3,93  | 3,84  | 3,76  | 3,68  | 3,6   |
|                  | * $u_4 = \frac{e_1}{u_1}$    | 2,09  | 2,02  | 1,94  | 1,87  | 1,81  | 1,75  | 1,69  | 1,64  |
| $\varphi = 1,41$ | 1. Grenzbedingung $e_1 \leq$ | 5,28  | 5,37  | 5,47  | 5,58  | 5,7   | 5,82  | 5,95  | 6,10  |
|                  | 2. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 4,05  | 4,05  | 4,05  | 4,05  | 4,05  | 4,05  | 4,05  | 4,05  |
|                  | 4. Grenzbedingung $e_1 \geq$ | 6,16  | 5,95  | 5,74  | 5,55  | 5,40  | 5,26  | 5,12  | 5     |
|                  | * $u_4 = \frac{e_1}{u_1}$    | 2,62  | 2,55  | 2,44  | 2,35  | 2,27  | 2,19  | 2,11  | 2,03  |

\* Berechnet für die erste Grenzbedingung für  $e_1$ .

$\varphi = 1,41$  zwischen  $2,37 \leq u_1 \leq 3$  gibt es keinen Widerspruch. Die Werte der vierten Teilübersetzung  $u_4$  (bei der ersten Grenzbedingung für  $e_1$ ) zeigten dieselbe Situation, da in diesem Gebiet  $u_4 < u_1$ . Die fette Linie der Tabelle 8 teilt das Gesamtgebiet in zwei Zonen. Links ist die Zone ohne Lösungen.

In Tabelle 9 haben wir die Normwerte der größten Endübersetzungen  $e_1$ , die der ersten und vierten Grenzbedingung entsprechen, zusammengestellt.

Es ist zu bemerken, daß es bei  $\varphi=1,41$  und  $u_1=2,37$ , obzwar die erste und die vierte Grenzbedingungen sich nicht widersprechen, keine Lösung gibt, weil zwischen 5,55 und 5,58 kein Normwert ist.

Auf Grund dieser Normwerte der Endübersetzungen  $e_1$  bei verschiedenen Stufensprüngen  $\varphi$  kann man, gemäß der Gleichungen (14), die Teilübersetzungen berechnen. Wie schon betont, werden dieselben keine Normwerte mehr darstellen.



Tabelle 9

Normwerte der größten Endübersetzungen  $e_1$  der Rumpfgetriebe bei  $m = 2, n = 3$

| $u_1$            | 2    | 2,11 | 2,24 | 2,37 | 2,51 | 2,66 | 2,82 | 3    |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\varphi = 1,12$ |      |      |      |      |      |      | 2,66 | 2,66 |
|                  |      |      |      | 2,82 | 2,82 | 2,82 | 2,82 | 2,82 |
|                  | 3    | 3    | 3    | 3    | 3    | 3    | 3    | 3    |
|                  | 3,16 | 3,16 | 3,16 | 3,16 | 3,16 | 3,16 | 3,16 | 3,16 |
|                  |      | 3,35 | 3,35 | 3,35 | 3,35 | 3,35 | 3,35 | 3,35 |
|                  |      |      |      | 3,55 | 3,55 | 3,55 | 3,55 | 3,55 |
|                  |      |      |      |      |      |      | 3,76 | 3,76 |
| $\varphi = 1,26$ |      |      |      |      |      |      |      | 3,55 |
|                  |      |      |      |      |      | 3,76 | 3,76 | 3,76 |
|                  |      |      |      | 4    | 4    | 4    | 4    | 4    |
|                  |      | 4,22 | 4,22 | 4,22 | 4,22 | 4,22 | 4,22 | 4,22 |
|                  |      |      |      |      | 4,47 | 4,47 | 4,47 | 4,47 |
|                  |      |      |      |      |      |      | 4,73 | 4,73 |
| $\varphi = 1,41$ |      |      |      |      |      |      |      | 5    |
|                  |      |      |      |      |      | 5,3  | 5,3  | 5,3  |
|                  |      |      |      |      | 5,62 | 5,62 | 5,62 | 5,62 |
|                  |      |      |      |      |      |      |      | 6    |

Tabelle 10 zeigt die Werte der Übersetzungen  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , die für die Normwerte der ersten größten Endübersetzungen berechnet sind.

### 3.4. Methode zur Berechnung der erweiterten Getriebe mit $m = 3$ und $n = 4$

Bei der Berechnung der Getriebe mit  $m = 3, n = 4$  geht man von folgenden Bedingungen aus:

$$u_1 = u_2 \varphi^n = u_2 \varphi^3$$

$$u_4 = u_3 \varphi^n = u_3 \varphi^4,$$

Tabelle 10

Teilübersetzungen der Rumpfgetriebe (der erweiterten Getriebe) mit  $m = 2, n = 3$ , für verschiedene Stufensprünge

|                  | $e_1$  | $u_1$ | $u_2$     | $u_3$     | $u_4$       |
|------------------|--------|-------|-----------|-----------|-------------|
| $\varphi = 1,12$ | 2,51   | 1,00  | 1 : 1,26  | 1,68      | 2,51        |
|                  | 2,66   | 1,27  | 1,01      | 1,49      | 2,10        |
|                  | 2,82   | 1,53  | 1,21      | 1,30      | 1,84        |
|                  | 3,00   | 1,85  | 1,48      | 1,13      | 1,62        |
|                  | 3,16   | 2,12  | 1,68      | 1,04      | 1,49        |
|                  | 3,35   | 2,45  | 1,95      | 1 : 1,03  | 1,37        |
|                  | 3,55   | 2,80  | 2,22      | 1 : 1,075 | 1,27        |
| $\varphi = 1,26$ | 3,55   | 1,23  | 1 : 1,39  | 1,55      | 2,89        |
|                  | 3,76   | 1,43  | 1 : 1,10  | 1,31      | 2,63        |
|                  | 4,00   | 1,76  | 1,11      | 1,13      | 2,27        |
|                  | 4,22   | 2,06  | 1,305     | 1,02      | 2,05        |
|                  | 4,47   | 2,40  | 1,52      | 1 : 1,02  | 1,86        |
|                  | 4,73   | 2,78  | 1,76      | 1 : 1,16  | 1,71        |
| $\varphi = 1,41$ | (5,00) | 1,66  | 1 : 1,205 | 1,065     | <b>3,00</b> |
|                  | 5,30   | 2,02  | 1,01      | 1 : 1,06  | 2,63        |
|                  | 5,62   | 2,41  | 1,205     | 1 : 1,21  | 2,33        |
|                  | 6,00   | 2,88  | 1,43      | 1 : 1,34  | 2,08        |

von den Endübersetzungen, Gleichung (5), sowie von der Achsabstandsbedingung, Gleichung (4a). In bekannter Weise werden die vier Teilübersetzungen des vierstufigen Rumpfgetriebes berechnet:

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= e_1 \frac{\varphi^3 - 1}{\varphi^4 - \varphi^3} - \frac{\varphi^7 - \varphi^3}{\varphi^4 - \varphi^3} \\
 u_2 &= \frac{u_1}{\varphi^3}; u_3 = \frac{e_1}{u_1 \varphi^4}; u_4 = \frac{e_1}{u_1}
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$



Für die Wahl von  $e_1$  und  $\varphi$  gelten wieder die aus den Grenzübersetzungen berechneten Bedingungen:

$$1. \quad 2 \leq u_1 \leq 3$$

Aus Gleichungen (22) berechnet man folgenderweise die erste Grenzbedingung für die erste Endübersetzung:

$$u_1 = e_1 \frac{\varphi^3 - 1}{\varphi^4 - \varphi^3} - \frac{\varphi^7 - \varphi^3}{\varphi^4 - \varphi^3}$$

und daraus

$$e_1 = u_1 \frac{\varphi^4 - \varphi^3}{\varphi^3 - 1} + \frac{\varphi^7 - \varphi^3}{\varphi^3 - 1}. \quad (23)$$

Da bei jedem Stufensprung ein Höchstwert von  $u_1$  (größte Teilübersetzung ins Schnelle) auch einen Höchstwert von  $e_1$  bestimmt, hat die größte Endübersetzung folgende obere Grenze:

$$e_1 \leq \frac{u_1(\varphi^4 - \varphi^3) + \varphi^7 - \varphi^3}{\varphi^3 - 1}. \quad (24)$$

$$2. \quad u_2 \geq \frac{1}{4}$$

Aus

$$u_2 = \frac{u_1}{\varphi^3} = e_1 \frac{\varphi^3 - 1}{\varphi^3(\varphi^4 - \varphi^3)} - \frac{\varphi^7 \pm \varphi^3}{\varphi^3(\varphi^4 - \varphi^3)}$$

folgt die zweite Grenzbedingung für die größte Endübersetzung:

$$e_1 = \frac{u_2 \varphi^3(\varphi^4 - \varphi^3) + (\varphi^7 - \varphi^3)}{\varphi^3 - 1}. \quad (25)$$

Ein Kleinstwert von  $u_2 \left( \geq \frac{1}{4} \right)$  wird bei jedem Stufensprung einen Kleinstwert von  $e_1$  bestimmen, somit hat die größte Endübersetzung folgende untere Grenze:

$$e_1 \geq \frac{\varphi^7(u_2 + 1) - u_2 \varphi^6 - \varphi^3}{\varphi^3 - 1}. \quad (26)$$

$$3. \quad u_3 \geq \frac{1}{4}$$

Aus

$$u_3 = \frac{e_1}{u_1 \varphi^4}$$

berechnet sich die dritte Grenzbedingung für die größte Endübersetzung wie folgt:

$$u_3 = \frac{e_1}{\varphi^4 \left( e_1 \frac{\varphi^3 - 1}{\varphi^4 - \varphi^3} - \frac{\varphi^7 - \varphi^3}{\varphi^4 - \varphi^3} \right)}$$

und daraus

$$e_1 = \frac{\varphi^4(\varphi^7 - \varphi^3)}{\varphi^4(\varphi^3 - 1) - \frac{\varphi^4 - \varphi^3}{u_3}} \quad (27)$$

Es ist einleuchtend, daß dieser Ausdruck nur für

$$\varphi^4(\varphi^3 - 1) > \frac{\varphi^4 - \varphi^3}{u_3}$$

also für

$$\varphi^3 + \varphi^2 + \varphi > 4$$

einen positiven Wert haben kann. Daraus folgt, daß es für  $\varphi = 1,26$  und  $\varphi = 1,41$  für die obere Grenze auch eine dritte Grenzbedingung gibt und zwar:

$$e_1 \leq \frac{\varphi^4(\varphi^7 - \varphi^3)}{\varphi^4(\varphi^3 - 1) - \frac{\varphi^4 - \varphi^3}{u_3}} \quad (28)$$

Für  $\varphi = 1,12$  gibt es keine positive Lösung, also auch keine dritte Grenzbedingung.

$$4. \quad 2 \leq u_4 \leq 3$$

Aus

$$u_4 = \frac{e_1}{u_1}$$

folgt die vierte Grenzbedingung für die größte Endübersetzung:

$$u_4 = \frac{e_1}{e_1 \frac{\varphi^3 - 1}{\varphi^4 - \varphi^3} - \frac{\varphi^7 - \varphi^3}{\varphi^4 - \varphi^3}}$$

und daraus

$$e_1 = \frac{\varphi^7 - \varphi^3}{\varphi^3 - 1 - \frac{\varphi^4 - \varphi^3}{u_4}} \quad (29)$$



Nachdem  $u_4$  einen Höchstwert bedeutet, wird der Bruch bei jedem Stufensprung einen Kleinstwert darstellen, also hat die größte Endübersetzung folgende untere Grenze:

$$e_1 \geq \frac{\varphi^7 - \varphi^3}{\varphi^3 - 1 - \frac{\varphi^4 - \varphi^3}{u_4}} \quad (30)$$

3.4.1. Anwendung der Ungleichungen (24), (26), (28), (30) für die Stufensprünge  $\varphi = 1,12, 1,26, 1,41$ , bei  $m = 3, n = 4$

Tabelle 11

Ausdrücke und Werte der größten Endübersetzungen  $e_1$  bei  $m = 3$  und  $n = 4$

|                                   | $\varphi = 1,12$                             | $\varphi = 1,26$                              | $\varphi = 1,41$                              |
|-----------------------------------|--|---|---|
| 1. Grenzbedingung (obere Grenze)  | $e_1 \leq \frac{u}{2,28} + 2,02$             | $e_1 \leq \frac{u_1}{1,925} + 3,04$           | $e_1 \leq \frac{u_1}{1,545} + 4,65$           |
| 2. Grenzbedingung (untere Grenze) | $e_1 \geq 2,17$                              | $e_1 \geq 3,44$                               | $e_1 \geq 5,1$                                |
| 3. Grenzbedingung (obere Grenze)  | unbrauchbar                                  | $e_1 \leq 17,3$                               | $e_1 \leq 13,15$                              |
| 4. Grenzbedingung (untere Grenze) | $e_1 \geq \frac{4,61}{2,28 - \frac{1}{u_4}}$ | $e_1 \geq \frac{5,84}{1,925 - \frac{1}{u_4}}$ | $e_1 \geq \frac{7,18}{1,545 - \frac{1}{u_4}}$ |

In derselben Weise, wie im Punkt 3. 4. 1., setzten wir die Werte der drei Stufensprünge in die obigen Ungleichungen ein, damit man die Grenzen der wählbaren Werte der größten Endübersetzungen erhält. Tabelle 11 zeigt die Ergebnisse dieser Berechnungen.

Der gewählte Wert der obersten Endübersetzung  $e_1$  muß zwischen der oberen und der nächsten unteren Grenze liegen. Die dritte Grenzbedingung fällt bei  $\varphi = 1,12$  natürlich fort. Bei  $\varphi = 1,26$  und  $\varphi = 1,41$  ist die dritte Grenzbedingung durch die erste überholt, da selbst bei  $u_1 = 3$  die erste Grenzbedingung kleinere Werte gibt als die dritte.

Setzt man nacheinander die größten Teilübersetzungen  $u_1$ , gemäß der Tabelle 2, in die Ausdrücke der Grenzen der Endübersetzungen ein, so erhält man, laut der Tabelle 12, folgende größte Endübersetzungen  $e_1$ .

Bei der Untersuchung dieser Tabelle ersieht man, daß bei  $\varphi = 1,12$  ebenso wie bei  $m = 2, n = 3$ , auch hier kein Widerspruch entsteht. Es gibt also über  $u_1 = 2$  für jeden Wert von  $u_1$  eine Lösung.

Es ist klar, daß in allen drei Fällen ( $\varphi = 1,12, 1,26, 1,41$ ) die zweite Grenzbedingung von der vierten überholt wird; sie fällt also aus. Ebenso fällt

Tabelle 12

Größte Endübersetzungen der Rumpfgetriebe mit  $m = 3, n = 4$

| $u_1$            |                              | 2                     | 2,11  | 2,24  | 2,37  | 2,51  | 2,66  | 2,82  | 3,00  |  |
|------------------|------------------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|
| $\varphi = 1,12$ | 1. Grenzbedingung<br>$e_1 <$ | 2,90                  | 2,945 | 3     | 3,1   | 3,18  | 3,19  | 3,26  | 3,33  |  |
|                  | 2. Grenzbedingung<br>$e_1 >$ | 2,17                  | 2,17  | 2,17  | 2,17  | 2,17  | 2,17  | 2,17  | 2,17  |  |
|                  | 3. Grenzbedingung<br>$e_1 <$ | unbrauchbar (negativ) |       |       |       |       |       |       |       |  |
|                  | 4. Grenzbedingung<br>$e_1 >$ | 2,59                  | 2,55  | 2,51  | 2,48  | 2,45  | 2,42  | 2,40  | 2,32  |  |
|                  | * $u_4 = \frac{e_1}{u_1}$    | 1,45                  | 1,40  | 1,34  | 1,31  | 1,24  | 1,12  | 1,155 | 1,118 |  |
| $\varphi = 1,26$ | 1. Grenzbedingung<br>$e_1 <$ | 4,06                  | 4,14  | 4,205 | 4,25  | 4,345 | 4,422 | 4,505 | 4,58  |  |
|                  | 2. Grenzbedingung<br>$e_1 >$ | 3,44                  | 3,44  | 3,44  | 3,44  | 3,44  | 3,44  | 3,44  | 3,44  |  |
|                  | 3. Grenzbedingung<br>$e_1 <$ | 17,3                  | 17,3  | 17,3  | 17,3  | 17,3  | 17,3  | 17,3  | 17,3  |  |
|                  | 4. Grenzbedingung<br>$e_1 >$ | 4,1                   | 4,01  | 3,95  | 3,88  | 3,82  | 3,77  | 3,71  | 3,67  |  |
|                  | * $u_4 = \frac{e_1}{u_1}$    | 2,03                  | 1,95  | 1,86  | 1,79  | 1,72  | 1,66  | 1,59  | 1,52  |  |
| $\varphi = 1,41$ | 1. Grenzbedingung<br>$e_1 <$ | 5,94                  | 6,01  | 6,10  | 6,18  | 6,27  | 6,37  | 6,47  | 6,59  |  |
|                  | 2. Grenzbedingung<br>$e_1 >$ | 5,106                 | 5,106 | 5,106 | 5,106 | 5,106 | 5,106 | 5,106 | 6,106 |  |
|                  | 3. Grenzbedingung<br>$e_1 <$ | 13,15                 | 13,15 | 13,15 | 13,15 | 13,15 | 13,15 | 13,15 | 13,15 |  |
|                  | 4. Grenzbedingung<br>$e_1 >$ | 6,87                  | 6,7   | 6,54  | 6,38  | 6,26  | 6,15  | 6,03  | 5,92  |  |
|                  | * $u_4 = \frac{e_1}{u_1}$    | 2,97                  | 2,85  | 2,72  | 2,61  | 2,5   | 2,395 | 2,3   | 2,20  |  |

\* Berechnet bei der ersten Grenzbedingung für  $e_1$ .

die dritte Grenzbedingung bei  $\varphi = 1,26$  und  $\varphi = 1,41$  aus, wie schon oben erwähnt wurde.

Bei  $\varphi = 1,26$  gibt es zwischen  $2,11 \leq u_1 \leq 3$  für jedes  $u_4$  eine Lösung (fette Linie). Bei  $\varphi = 1,41$  gibt es nur 3 Lösungen, weil zwischen  $2 \leq u_1 \leq 2,66$  Widerspruch herrscht: die vierte Grenzbedingung gibt höhere Grenze als die erste. Auf dasselbe weist auch die Änderung der Werte von  $u_4$ , die von  $u_1 = 2,51$  an kleiner sind als die jeweilige gemeinsame Grenze für  $u_1$  und  $u_4$ .



In der Tabelle 13 sind die Normwerte der größten Endübersetzungen  $e_1$ , die der ersten und vierten Grenzbedingung entsprechen, zusammengestellt.

Tabelle 13

Normwerte der größten Endübersetzungen  $e_1$  der Rumpfgetriebe bei  $m = 3$ ,  $n = 4$

| $u_1$            | 2    | 2,11 | 2,24 | 2,37 | 2,51 | 2,66 | 2,82 | 3    |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\varphi = 1,12$ |      |      |      |      |      |      |      | 2,37 |
|                  |      | 2,51 | 2,51 | 2,51 | 2,51 | 2,51 | 2,51 | 2,51 |
|                  | 2,66 | 2,66 | 2,66 | 2,66 | 2,66 | 2,66 | 2,66 | 2,66 |
|                  | 2,82 | 2,82 | 2,82 | 2,82 | 2,82 | 2,82 | 2,82 | 2,82 |
|                  |      |      |      |      | 3,00 | 3,00 | 3,00 | 3,00 |
|                  |      |      |      |      |      |      | 3,16 | 3,16 |
| $\varphi = 1,26$ |      |      |      |      |      |      | 3,76 | 3,76 |
|                  |      | 4    | 4    | 4    | 4    | 4    | 4    | 4    |
|                  |      |      |      | 4,22 | 4,22 | 4,22 | 4,22 | 4,22 |
|                  |      |      |      |      |      |      | 4,47 | 4,47 |
| $\varphi = 1,41$ |      |      |      |      |      |      |      | 5,17 |
|                  |      |      |      |      |      | 6,31 | 6,31 | 6,31 |

Auf Grund dieser Normwerte der Endübersetzungen  $e_1$  bei verschiedenen Stufensprüngen  $\varphi$  kann man, gemäß den Gleichungen (22), die Teilübersetzungen berechnen. Dieselben sind natürlich keine Normwerte.

Tabelle 14 zeigt die Werte der Übersetzungen  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  und  $u_4$ , die für die Normwerte der größten Endübersetzung berechnet wurden.

#### 4. Anwendung der Tabellen 1 bis 14

Die Berechnung der erweiterten Getriebe soll an Hand der Tabellen an einem Beispiel erläutert werden. Zu berechnen ist ein 12stufiges, doppelt gebundenes Getriebe mit der Struktur  $12 = 4.3$  und dem Stufensprung  $\varphi = 1,26$ . Als größte Endübersetzung wird

$$e_1 = 4,22 = 1,06^{25}$$

gewählt (Tabelle 13 und 5).

Tabelle 14

Teilübersetzungen der Rumpfgetriebe (der erweiterten Getriebe) mit  $m = 3, n = 4$ , für verschiedene Stufensprünge  $\varphi$

|                  | $e_1$ | $u_1$     | $u_2$     | $u_3$     | $u_4$ |
|------------------|-------|-----------|-----------|-----------|-------|
| $\varphi = 1,12$ | 2,37  | 1 : 1,125 | 1 : 1,59  | 1,57      | 2,67  |
|                  | 2,51  | 1,23      | 1 : 1,145 | 1,23      | 2,04  |
|                  | 2,66  | 1,58      | 1,12      | 1,025     | 1,685 |
|                  | 2,82  | 1,98      | 1,405     | 1 : 1,15  | 1,43  |
|                  | 3,00  | 2,40      | 1,705     | 1 : 1,305 | 1,25  |
|                  | 3,16  | 2,75      | 1,975     | 1 : 1,425 | 1,135 |
| $\varphi = 1,26$ | 3,76  | 1,36      | 1 : 1,47  | 1,1       | 2,77  |
|                  | 4,00  | 1,83      | 1 : 1,09  | 1 : 1,15  | 2,19  |
|                  | 4,22  | 2,25      | 1,12      | 1 : 1,34  | 1,87  |
|                  | 4,47  | 2,74      | 1,37      | 1 : 1,53  | 1,64  |
| $\varphi = 1,41$ | 5,96  | 2,00      | 1 : 1,41  | 1 : 1,34  | 2,98  |
|                  | 6,31  | 2,54      | 1 : 1,11  | 1 : 1,615 | 2,48  |

Die Tabelle 6 ergibt als Stufensprungexponenten des Getriebes  $m = 3, n = 4$ , so daß die Teilübersetzungen aus Tabelle 14 ersichtlich sind:

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= 2,25 = 1,06^{14} \\
 u_2 &= 1,12 = 1,06^2 & \varphi_1 &= \frac{u_1}{u_2} = \varphi^3 \\
 u_3 &= 1 : 1,34 = 1 : 1,06^5 \\
 u_4 &= 1,87 = 1,06^{11} & \varphi_2 &= \frac{u_4}{u_3} = \varphi^4.
 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Mit diesen Angaben wird zunächst das Drehzahlbild des Rumpfgetriebes gezeichnet (in Bild 5 ausgezogen). Die Teilübersetzungen sind keine Normübersetzungen, so daß es sich empfiehlt,  $u_1 \dots u_4$  in Potenzen der Grundreihe mit  $\varphi_0 = 1,06$  auszudrücken. Der erste Teil des Rumpfgetriebes hat den Stufensprung  $\varphi_1 = \varphi^3$ . Deshalb hat das erweiterte Getriebe in den vier Stufen seines ersten Teiles den Sprung  $\varphi$  und es wird

$$\varphi = \frac{u_1}{u_6} = \frac{u_6}{u_5} = \frac{u_5}{u_2} = \varphi_0^4 \quad (32)$$

$$\varphi_0^4 = 1,06^4 = 1,26.$$



Aus (31) ergibt sich damit

$$u_5 = 1,06^6 = 1,41; u_6 = 1,06^{10} = 1,72$$

Der zweite Teil des erweiterten Getriebes ist dreistufig. Das Rumpfgetriebe hat in seinem zweiten Teil den Sprung  $\varphi_2 = \varphi^4$ , so daß die Erweiterungsübersetzung  $u_7$  zwischen diesen beiden Stufen keinen Platz findet (Bild 5). Diese

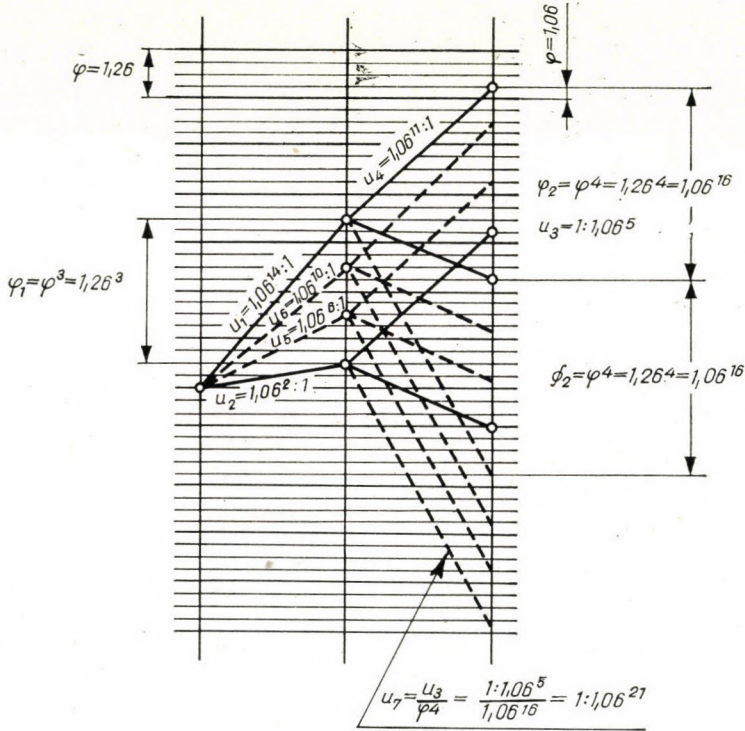


Bild 5

letzte Übersetzung muß deshalb mit dem Sprung des zweiten Teilgetriebes ( $\varphi^4$ ) ins Langsame treiben:

$$\varphi_2 = \frac{u_4}{u_3} = \frac{u_3}{u_7} = \varphi_0^{16}. \tag{33}$$

Darum folgt mit (31):

$$u_7 = 1 : 3 \cdot 38 < 4.$$

Alle Erweiterungsstufen sind mit gestrichelten Linien in Bild 5 eingetragen. Man sieht, daß die Grenzen für die Teilübersetzungen überall eingehalten

sind:

$$u_1 = 2,25 < 3$$

ist die größte und

$$u_7 = \frac{1}{3,38} > \frac{1}{4}$$

ist die kleinste auftretende Übersetzung.

#### SCHRIFTTUM

1. SCHLESINGER: Die Werkzeugmaschinen. Springer-Verlag Berlin 1936.
2. GERMAR: Die Getriebe für Normdrehzahlen. Springer-Verlag, Berlin 1932.
3. RITTER: Zahnradgetriebe. Leeman, Zürich 1950.
4. ROHONYI: Gép. Budapest, 1957, Nr. 4.
5. ROHONYI: Industrie-Anzeiger, Ausgabe »Werkzeugmaschine und Fertigungstechnik«. Verlag Girardet, Essen. No. 30, 1959.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Die bekannten Berechnungsverfahren für den Aufbau doppelt gebundener Stirnradgetriebe versagen bei Getrieben, die ins Schnelle treiben, z. B. bei Hauptantrieben von Leichtmetalldrehbänken. In der Arbeit werden Ausdrücke für die Übersetzungen solcher Getriebe abgeleitet, und zwar für den Bereich der Teilübersetzungen zwischen 2 : 1 und 3 : 1 ins Schnelle, bei kleinster Teilübersetzung ins Langsame von 1 : 4 und unter Berücksichtigung der genormten Stufensprünge. Die gefundenen Resultate werden tabellarisch zusammengefaßt und ihre Anwendung wird an einem Beispiel erläutert. Mit dem neuen Berechnungsverfahren konnten viele praktisch anwendbare Getriebe gefunden werden.

#### LIMITS FOR THE TOTAL TRANSMISSION RATIO OF DOUBLE-LINKED GEAR TRAINS

W. ROHONYI

#### SUMMARY

The known methods for the design of double-linked spur gear drives are insufficient for accelerating gear trains, e. g. for headstocks of light metal lathes. The author derives expressions for the transmission ratios of such drives having partial accelerating ratios between 2 : 1 and 3 : 1 and partial slowing-down ratios until 1 : 4, taking into account the standardized ratios between steps of final speed. The results are shown in tables and their use is illustrated by an example. With the new method it was possible to find many drives of practical use.

#### LIMITES DES RAPPORTS TOTAUX DES TRAINS D'ENGRENAGES A COUPLAGE DOUBLE DES MACHINES-OUTILS DE GRANDE VITESSE

W. ROHONYI

#### RESUME

Les méthodes connues de calcul des trains d'engrenages à couplage double ne peuvent pas être utilisées pour les trains accélérants, par exemple pour les commandes de broches des tours pour métaux légers. L'auteur déduit les expressions pour les modifications de tels trains,



à modifications partielles d'accélération, comprises entre 2 : 1 et 3 : 1 et à modifications partielles de décélération jusqu'à 1 : 4, en tenant compte des intervalles de vitesses finales normalisées. Les résultats sont réunis en tableaux et illustrés par un exemple numérique. La nouvelle méthode de calcul a permis l'application de nombreux trains d'engrenages utilisables dans la pratique.

## ПРЕДЕЛЫ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕДАЧ ДВУХСТЫКОВОГО ПРИВОДНОГО УСТРОЙСТВА БЫСТРОХОДНЫХ СТАНКОВ

В. РОХОНИ

### РЕЗЮМЕ

Известные методы расчета двухстыковых приводов с торцевыми колесами не применимы к ускоряющим приводам, например, к главным приводам токарных станков для легких металлов. Автор выводит выражения для приспособления таких приводов при частичном приспособлении ускорения 2:1 и 3:1 или минимального замедления 1:4, принимая во внимание начальное число оборотов в соответствии со стандартной ступенчатостью. Результаты сведены в таблицы, и по применению их приведен пример. С помощью нового метода удалось найти много применимых в практике приводов.

# HERSTELLUNG VON STIRNRADGETRIEBEN MIT ELLIPTISCHEM WÄLZZYLINDER

I. LÉVAI

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE,  
LEHRSTUHL FÜR MASCHINENELEMENTE, MISKOLC (UNGARN)

[Eingegangen am 13. April 1961]

Bei der Bearbeitung von Stirnradgetrieben nach dem Abwälzverfahren muß das Walzzentroid ohne Gleiten am Teilungszylinder (entlang der Teilungslinie) des Werkzeuges abgewälzt werden.

Unter den von der Zahnradmaschine für das Abwälzen gebotenen Möglichkeiten stehen folgende zur Verfügung: die gleichbleibende Winkelgeschwindigkeit des Tisches und eine konstante, tangentielle Geschwindigkeit, die dem Abwälzen der kreisförmigen Räder entspricht. Sollen nicht kreisförmige Räder abgewälzt werden, ist eine zusätzliche Bewegung erforderlich, die von Fall zu Fall eigens zu diesem Zweck zu ermitteln ist. Diese zusätzlichen Bewegungen können mit einfachen oder Kurven-Getrieben ausgeführt werden, die am Tisch oder Werkzeughalter montiert sind.

In der vorliegenden Abhandlung wird die Verzahnung eines elliptischen Zylinders unter Heranziehung eines Abwälz-Werkzeuges mit gradliniger Kante dargelegt.

Die Ellipse mit der kleinen Achse  $\mu$  und der großen Achse  $\lambda$  soll ohne Gleiten entlang der Teilungslinie des Werkzeuges I—I abgewälzt werden (Abb. 1). Die Ausgangsstellung des Abwälzens ist durch die Gerade II—II gekennzeichnet. Dieselbe verläuft senkrecht zur Geraden I—I und sie fällt zu Beginn des Abwälzens mit der großen Achse der Ellipse überein. In Abb. 1 ist die Ellipse infolge des Abwälzens bereits um den Winkel  $\varepsilon$  verdreht dargestellt. Die große Achse nimmt die mit II'—II' bezeichnete Lage ein.

Nach Aufstellung des Koordinatensystems  $x, y$  nach Abb. 1 läßt sich die parametrische Gleichung wie folgt anschreiben:

$$x = \lambda \cos \varphi; \quad y = \mu \sin \varphi.$$

Zwischen der Zustandsgröße  $\varphi$  und der Winkelverdrehung  $\varepsilon$  ist folgender Zusammenhang zu finden (die Gerade I—I als die Tangente der Ellipse):

$$\operatorname{ctg} \varepsilon = - \frac{dy}{dx} = - \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\mu \cos \varphi}{\lambda \sin \varphi},$$



woraus

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mu}{\lambda} \operatorname{tg} \varepsilon. \quad (1)$$

Der Abstand ( $\varrho$ ) des Mittelpunktes 0 der Ellipse von der Geraden I—I ist aus folgender Gleichung errechenbar:

$$\frac{\varrho}{\cos \varepsilon} = \frac{\lambda}{\cos \varphi} = \lambda \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

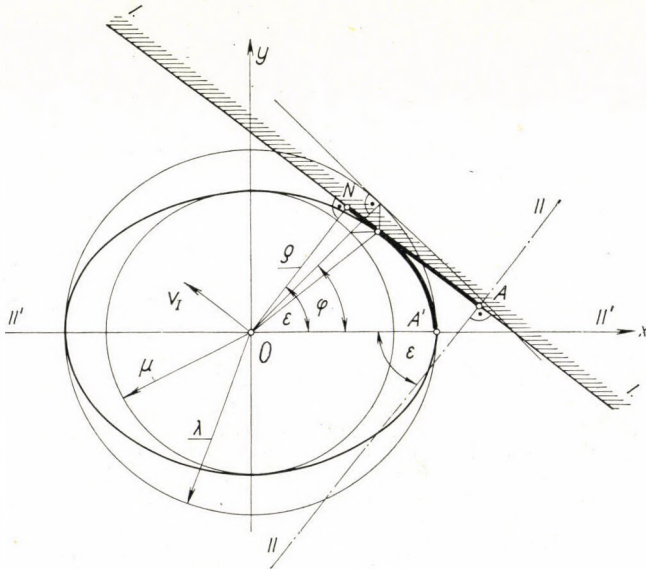


Abb. 1. Abwälzen einer Ellipse entlang einer Geraden

Durch Einsetzen von (1) erhält man

$$\varrho = \lambda \cos \varepsilon \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \operatorname{tg}^2 \varepsilon} = \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varepsilon + \mu^2 \sin^2 \varepsilon}. \quad (2)$$

Es sei angenommen, daß bei der Verzahnung sich die elliptische Scheibe zusammen mit dem Tisch der Maschine mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \text{const.}$  dreht. Im Falle eines Abwälzens ohne Gleiten muß die Geschwindigkeit des Punktes 0 der Ellipse in Richtung I—I

$$v_1 = \varrho \omega = \varrho \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3)$$

sein, wo  $t$  die Zeit bedeutet.

Auf Grund von (3) läßt sich die Bewegung des Mittelpunktes 0 in Richtung I—I durch die Gleichung

$$\overline{AN} = \int_{A'}^N ds = \int_0^t v_1 dt = \int_0^\varepsilon \varrho d\varepsilon$$

erfassen, die nach Einsetzen von (2) die folgende Form annimmt:

$$\int_{A'}^N ds = \int_0^\varepsilon \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varepsilon + \mu^2 \sin^2 \varepsilon} d\varepsilon. \quad (4)$$

Während sich also die elliptische Scheibe zusammen mit dem Tisch der Maschine — von der Geraden II—II ausgehend — um den Winkel  $\varepsilon$  verdreht, muß die relative Verschiebung des Mittelpunktes der Ellipse in Richtung der Teilungslinie des Werkzeuges (der Geraden I—I) in der gleichen Zeit dem Wert  $\int_{A'}^N ds$  gleich sein.

Dieser Weg läßt sich aber auch in folgender Form anschreiben:

$$\int_{A'}^N ds = R\varepsilon + \int_0^\varepsilon \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varepsilon + \mu^2 \sin^2 \varepsilon} d\varepsilon - R\varepsilon.$$

Das erste Glied der rechten Seite, die Fortbewegung  $R\varepsilon$  ( $R = \text{const.}$ ) kann an der Zahnradwälzmaschine unmittelbar ausgeführt werden. Dieser ist noch die vom zweiten und dritten Glied der rechten Seite beschriebene zusätzliche Bewegung hinzuzufügen. Diese muß die elliptische Scheibe in der Richtung der Teilungslinie (I—I) des Werkzeuges bewegen, wobei die Größe dieser Bewegung als Funktion der Winkelverdrehung  $\varepsilon$  durch folgende Gleichung ausgedrückt wird:

$$\int_0^\varepsilon \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varepsilon + \mu^2 \sin^2 \varepsilon} d\varepsilon - R\varepsilon. \quad (5)$$

Diese zusätzliche Bewegung läßt sich am zweckdienlichsten unter Verwendung einer *Nockenscheibe* ausführen. Diese Nockenscheibe kann am vorteilhaftesten unter Berücksichtigung folgender Gesichtspunkte ausgelegt werden:

1. Die Nockenscheibe soll durch eine gerade Stange geführt werden, d. h., dieselbe soll überall konvex sein.

2. Die Nockenscheibe soll eine in sich zurückkehrende Kurve sein. Zu diesem Zweck ist die Konstante  $R$  im zweiten Glied des Ausdruckes (5) der folgenden Gleichung entsprechend zu wählen:

$$2R\pi = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varepsilon + \mu^2 \sin^2 \varepsilon} d\varepsilon.$$



Da dies eben der Umfang der elliptischen Scheibe ist, wird die Bewegung des Tisches in der Weise eingestellt, als ob eine Kreisscheibe mit dem Halbmesser  $R$  und einem Umfang gleich dem der Ellipse verzahnt werden sollte.

Zum Abwälzen der Ellipse ist es — außer der tangentiellen Bewegung des Scheibemittelpunktes in Richtung (I—I) — auch erforderlich, daß sich der Mittelpunkt der elliptischen Scheibe von der Teilungslinie des Werkzeuges in einem der Winkelverdrehung  $\varepsilon$  entsprechenden Abstand  $\varrho$  befindet. Diese Aufgabe läßt sich mit Hilfe einer mit dem Zentroid der zu verzahnenden

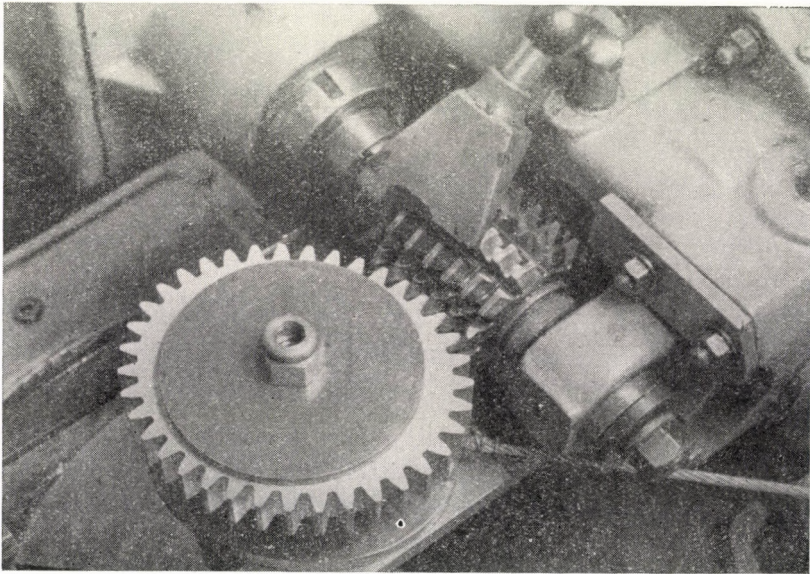


Abb. 2. Verzahnungsvorrichtung

elliptischen Scheibe kongruenten Nockenscheibe, der sogenannten *Führungsscheibe* lösen. Mit anderen Worten ausgedrückt, ist die Führungsscheibe die rollende Ellipse.

Eine zur Verzahnung der elliptischen Scheibe geeignete Vorrichtung ist in Abbildung 2 zu sehen. Die zuverzahnende elliptische Scheibe ist auf einer Achse fixiert. Auf derselben Achse ist eine Führungsscheibe und eine Nockenscheibe angebracht.

In Abb. 3 wird die Ausführungsform der Vorrichtung, in Abb. 4 die verzahnte elliptische Scheibe dargestellt. Die technischen Daten derselben sind wie folgt: Zähnezahl:  $z = 37$ , Modul:  $m = 5$  mm, relative Außermittigkeit der Ellipse: 0,5.

Bei geeigneter Wahl der Führungs- und Nockenscheiben lassen sich mit der Vorrichtung beliebige Scheiben mit nicht kreisförmiger, konvexer Rollkurve verzahnen.



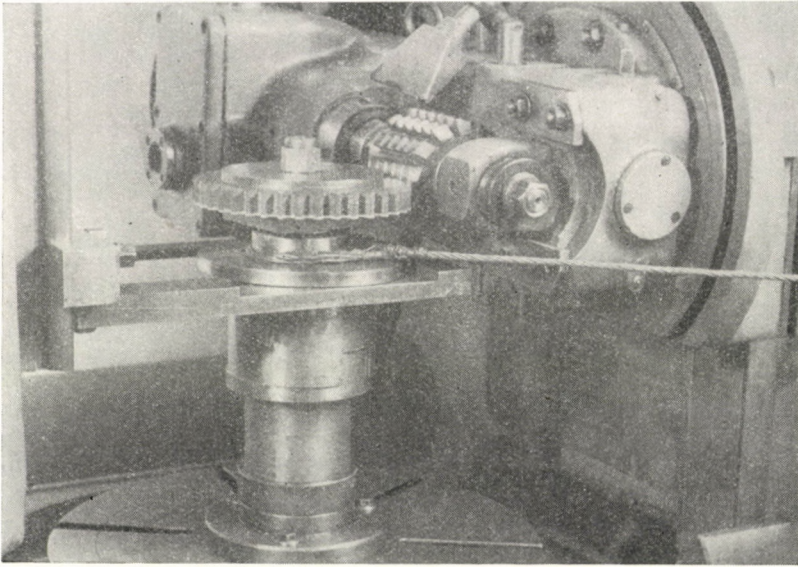


Abb. 3. Verzahnung eines elliptischen Rades

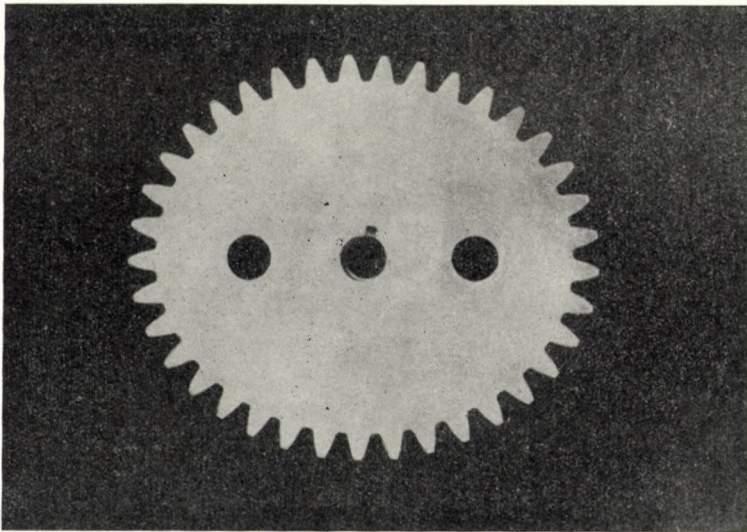


Abb. 4. Verzahntes elliptisches Rad,  $z = 37$ ,  $m = 5$

#### SCHRIFTTUM

Z. TERPLÁN: Mechanismen; im Verlag für Lehrbücher, Budapest, 1959. (In ungarischer Sprache.)



## ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die Zusatzvorrichtung beschrieben, deren es bedarf, um Zahnräder mit elliptischem Zylinder mittels einer mit Zahnstange oder Abwälzfräser arbeitenden Verzahnungsmaschine herstellen zu können.

Aus der Analyse des Abwälzvorganges geht hervor, daß, angetrieben durch eine Oldhamsche Kupplung, die an den Tisch der Verzahnungsmaschine montiert ist, eine Nockenscheibe, die sich an ein gerades Blatt anlehnt, die vorgeschriebene Bewegung auszuführen vermag. Das herzustellende Zahnrad wird während der Verdrehung des Rades durch die Nockenscheibe und zu gleicher Zeit durch eine mit der abwälzenden Ellipse kongruente Führungsscheibe in der Weise bewegt, daß die elliptische Gleitkurve des Zahnrades entlang der Teilungslinie des Werkzeuges ohne Gleiten abrollt.

## THE PRODUCTION OF SPUR GEARS WITH ELLIPTICAL ROLLING CYLINDERS

I. LÉVAI

## SUMMARY

The construction of an additional device needed for the gearing of gears having an elliptic cylinder on a gearing machine operated with a rack or a rolling device is described. The analysis of the rolling process shows, that with a cam wheel supported by a straight plate driven through an Oldham clutch mounted on the desk of the gearing machine the prescribed movement could be effected. The cam wheel together with the guide roller which are congruent with the ellipse rolling along, will move the gear to be made during the turning round of the wheel in such a manner, that the elliptic rolling curve of the latter will roll down along the pitch line of the tool without slippage.

## LA FABRICATION DES ENGRENAGES DROITS A CIRCONFERENCE PRIMITIVE ELLIPTIQUE

I. LÉVAI

## RESUME

L'auteur décrit l'appareil auxiliaire utilisé pour le taillage, sur machine à outil-crémalière ou à fraise-mère, d'engrenages droits à circonférence primitive elliptique. L'analyse du roulement elliptique montre qu'une came commandée par un accouplement d'Oldham monté sur la table de la machine, et s'appuyant sur une plaque droite, réalise le mouvement demandé. La came fait avancer l'engrenage à tailler ensemble avec un disque de guidage congruent avec l'ellipse roulante, d'une façon telle que sa courbe primitive elliptique roule sans glissement sur la ligne de référence de l'outil.

## ПРОИЗВОДСТВО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЛОБОВЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

И. ЛЕВАИ

## РЕЗЮМЕ

Автор описывает вспомогательное приспособление, необходимое при нарезке венца зубчатых колес с эллиптическим цилиндром на зубофрезерных станках с зубчатой рейкой или обдирочной фрезой. Анализ обкатки эллипса показывает, что кулачковая шайба, приводимая от стола зубофрезерного станка посредством муфты Ольдхама, опирающейся на плоскость, осуществляет предписанное движение. Кулачковая шайба одновременно с ведущей шайбой, конгруэнтной катящемуся эллипсу, за время оборота колеса перемещает нарезаемое колесо таким образом, что его эллиптическая кривая качения без скольжения катится по делительной линии инструмента.

# INVESTIGATION OF THE INITIAL PHASE OF CAVITATION DAMAGE\*

F. VASVÁRI

CHAIR OF ELECTRICAL ENGINEERING MATERIALS TECHNOLOGY,  
BUDAPEST TECHNICAL UNIVERSITY

[Manuscript received April 20, 1961]

## I. Introduction

The mechanism of cavitation has theoretically been investigated by many authors (RAYLEIGH, CREWDSON etc.). Microstructural investigations were also frequently carried out (BOETCHER, WHEELER), but as for electron microscopic investigations, only allusions can be found. Several authors have pointed to this deficiency (KERMABON, WEIL, CONLI, etc.).

Subsequently, those parts of a larger series of experimental results [1] will be published which, based mainly on electron microscopic investigations, supply information on the development of the initial phase of cavitation attack and at the same time will complete our knowledge on the mechanism of cavitation.

The experiments refer to the very first stage of the cavitation attack on the surface, when the surface of the material structure was exposed to destructive action for such a short time that no destructive effect whatsoever could be observed with the naked eye.

## II. Test methods, apparatus

Cavitation was produced on the surface of a specimen attached to the end of a nickel tube, brought into oscillation by magnetostriction (Fig. 1). At a frequency of 6500 Hz the apparatus could produce an amplitude of  $A = 0.084$  mm.

The polished specimens were attacked for 5—10 seconds, during which time their surface was exposed 30—60,000 times to the action of the collapsing bubbles. The surfaces which still showed no visible traces of deterioration were immediately washed with alcohol and protected against oxidation by a collodion film. The subsequent investigations were carried out at the Micromorphology Department of the Technical Physics Institute of the Hungarian Academy of Sciences, where light micrographs were made. From the surface of the object collodion replicas were prepared and these thin, transparent pieces of film were examined with transparent light (phase contrast or plastic illu-

\* Extract from a Thesis for obtaining the degree of Candidate of Sc., submitted to the Hungarian Academy of Sc.



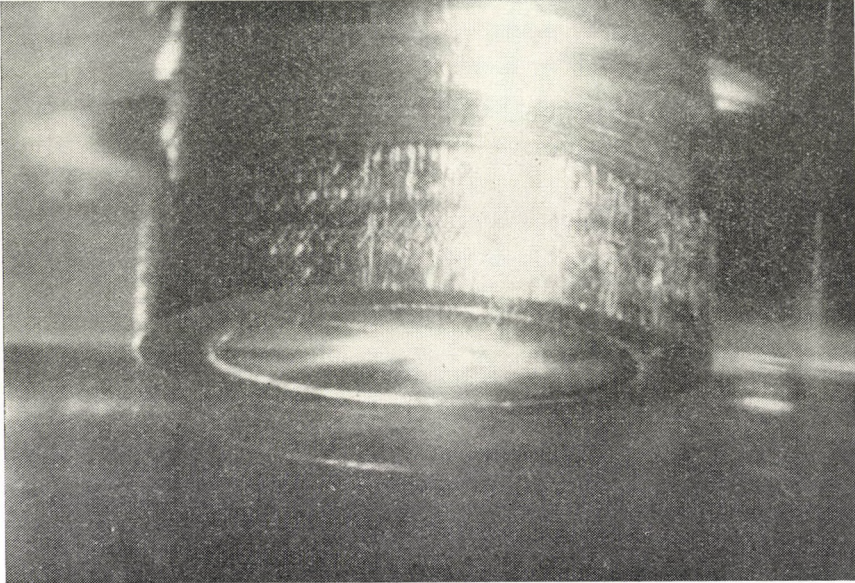


Fig. 1. Magnetostrictive specimen during cavitation (4,6 $\times$ )

mination with 3 D condensor). In Hungary, this method was introduced by Dr. B. LOVAS [13].

With the aid of the surface replicas prepared from the specimens, electron micrographs were made from selected areas at 7000—20,000  $\times$  magnification.

The following materials were tested:

- a) Pure metals: Gold, Aluminium, Copper.
- b) Structural materials:

Cast Bronze (Bz-ö 12, Hungarian Standard MSZ 710) Structural Cast Iron with steadit network, C = 3.29—3.31%, Si = 1.44—1.68%, Mn = 0.66—1.06%, P = 0.393—0.684% (Öv. 22, Hung. Std. MSZ 2591) Stainless Steel, Cr = 18%, Ni = 8% (Kor 5, Hung. Std. MSZ 4360) Steel C = 0.5% (A 60.11, Hung. Std. MSZ 111), either without heat treatment, or normalized, or hardened.

### III. Results of investigations

- a) *The action of magnetostrictive cavitation-erosion on the surface of pure metals*

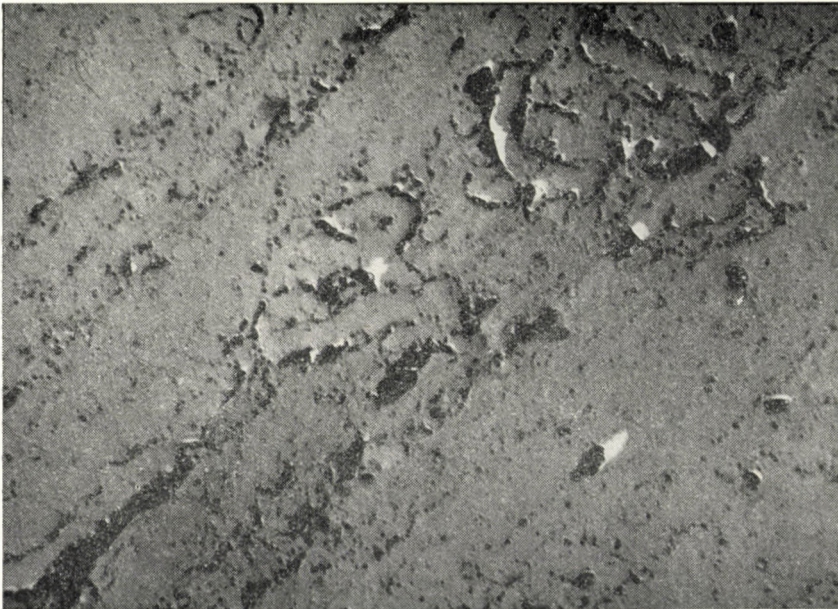
#### *Gold*

Fig. 2 shows that the beginning surface cracks (order of magnitude 0.00005 mm) presumably develop along the polishing lines. These cracks are re-welded along the traces of the bubbles (0.0005 mm) but under high pressure action cracks start around these traces. On Fig. 3 the impacts have reached





*Fig. 2.* Surface of gold specimen attacked for 5 sec (16 600 $\times$ )



*Fig. 3.* Same as Fig. 2, another part of the surface (16 600 $\times$ )



each other and are no longer able to weld the surface cracks, but cracks of the order of 0.0002 mm develop as well as pits of the same order as the traces of impacts.

In order to analyse the progress in depth of the pits, a 0.02 mm layer was polished off the damaged surface and the cracks beneath the eliminated layer were observed, so as to ascertain the depth of penetration of the destruction. On Fig. 4 intercrystalline cracks appear and star-like cracks on the crystal surface starting from traces of melting, which did not reach the crystal boundary yet. Dimension of the cracks is 0.0002 mm, thus here already multiple impact action may have reached the surface and torn the material out to such a depth. On Fig. 5 can be seen longer cracks along the crystal. Cracking in the vicinity of the crater on the whole length of the long, acicular crystal structure may have taken place as a consequence of the impacts and of the rearrangement together with the melting action of the heat and with heat conduction.

### *Aluminium*

Traces of impacts on the surface of 0.001 mm dia. and less, surrounded by cracks, are shown on Figs. 6 and 7. The 0.00005 mm wide crack develops on the crystal boundary if the impact occurs near to it; the craters of 0.001—0.002 mm develop at the point of denser pitting and long, 0.0001 mm wide cracks start from them.

### *Copper*

On Figs. 8 and 9 there are, in addition to the melting cracks around the traces of impacts, also conspicuous long, 0.0002 mm wide cracks along the crystal boundaries.

#### *b) The destructive effect of magnetostrictive cavitation on the surface of structural materials*

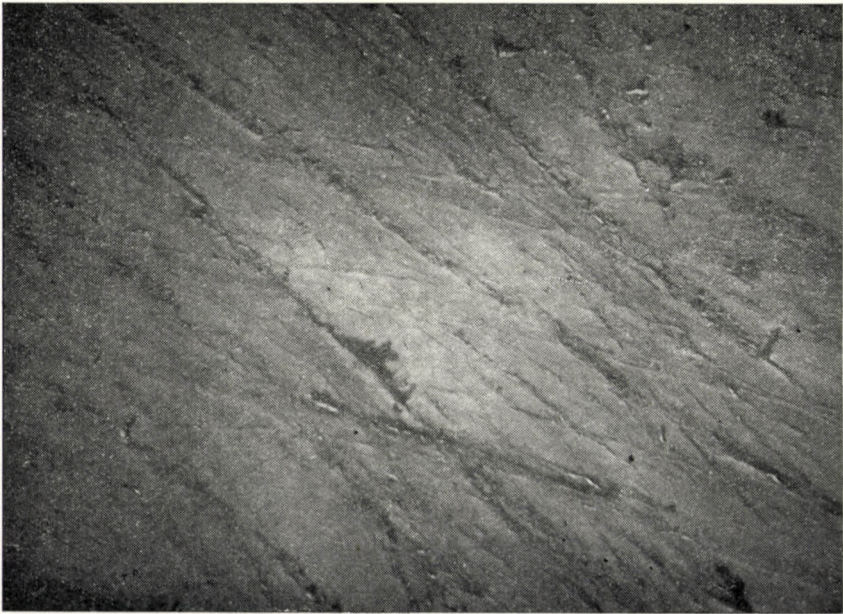
### *Bronze*

This material is well known for its inhomogeneous structure. The elements of the structure behave differently, according to whether the thermal pricking, which is smaller than the dimension of the crystal, has reached a softer or a harder surface. Figs. 10 and 11 show on a harder surface the craters of 0.01 mm surrounded by cracks as observed before, while Figs. 12 and 13 show long cracks widening from 0.0001 mm to 0.0006 mm which have developed to the softer parts. From these, numerous 0.0003 mm wide micro-cracks branch off.





*Fig. 4.* Surface of a gold specimen attacked for 5 sec, after elimination of a 0,02 mm surface layer (8000 $\times$ )

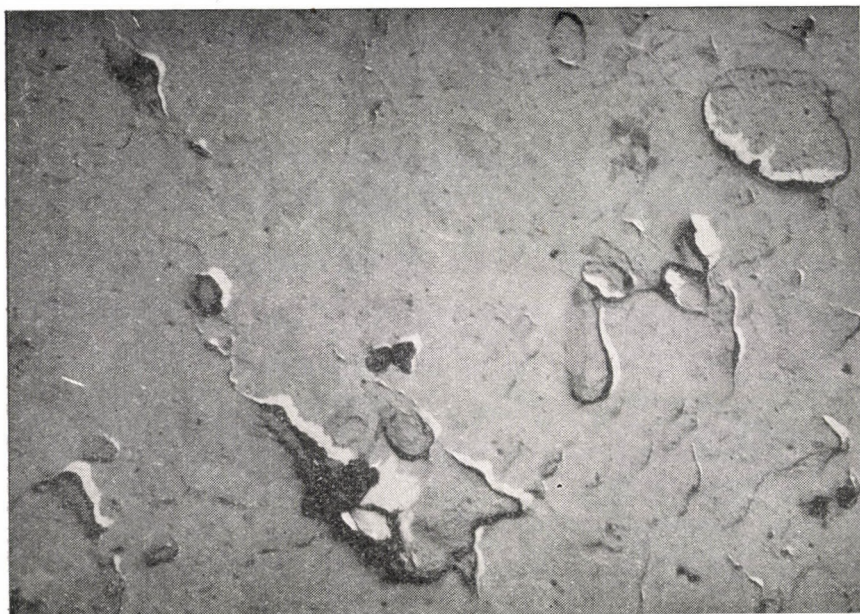


*Fig. 5.* Same as Fig. 4, another part of the surface (5100 $\times$ )





*Fig. 6.* Surface of aluminium specimen attacked for 5 sec (11 300 $\times$ )



*Fig. 7.* Same as Fig. 6, another part of the surface (11 300 $\times$ )





*Fig. 8.* Surface of a copper specimen attacked for 5 sec (4700 $\times$ )



*Fig. 9.* Same as Fig. 8, another part of the surface (4700 $\times$ )





*Fig. 10.* Surface of a bronze specimen, attacked for 8 sec (12 600 $\times$ )

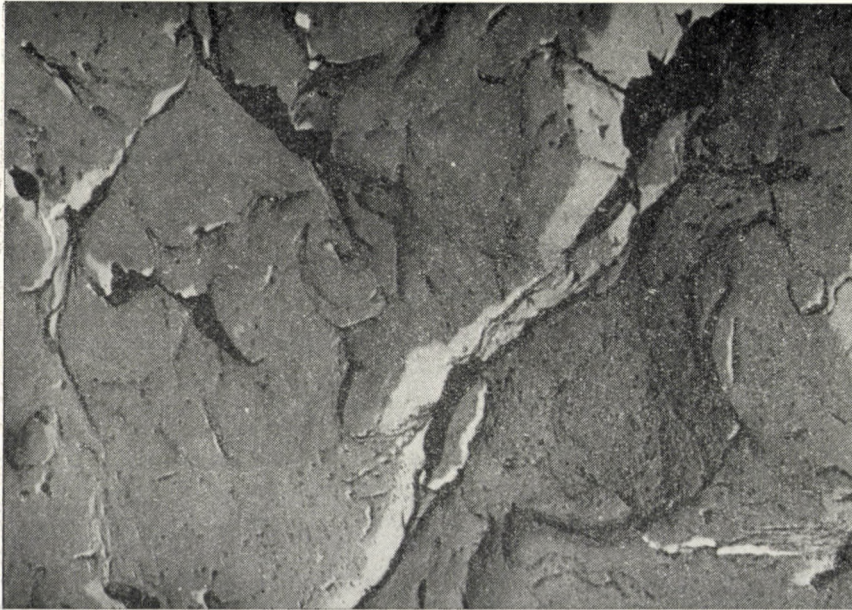


*Fig. 11.* Same as Fig. 10, another part of the surface (12 600 $\times$ )





*Fig. 12.* Same as Fig. 10, another part of the surface (12 600 $\times$ )



*Fig. 13.* Same as Fig. 10, another part of the surface (12 600 $\times$ )



*Cast iron*

On Fig. 14 the impact traces having the usual dimensions are well in evidence. It is interesting to note that on this photograph the dark spots on the impact traces are those of oxide, which proves that a quick oxidation process accompanied the cavitation. Besides, the 0.0001 mm wide cracks along the crystal boundaries, there are also cracks of 0.00002 mm on the crystals themselves.

*Kor 5*

The traces of impacts surrounded by cracks are well in evidence on this material also (Figs. 15, 16). The larger cracks develop along the crystal boundaries. The width of the cracks around the traces of impact is 0.00001 mm, and obviously they merge only with difficulty into larger cracks of usual dimension.

*Steel with 0.5% C*

The thermal prickings not only cause structural rearrangement, but around the traces of usual size, broader ditches can be seen which converge

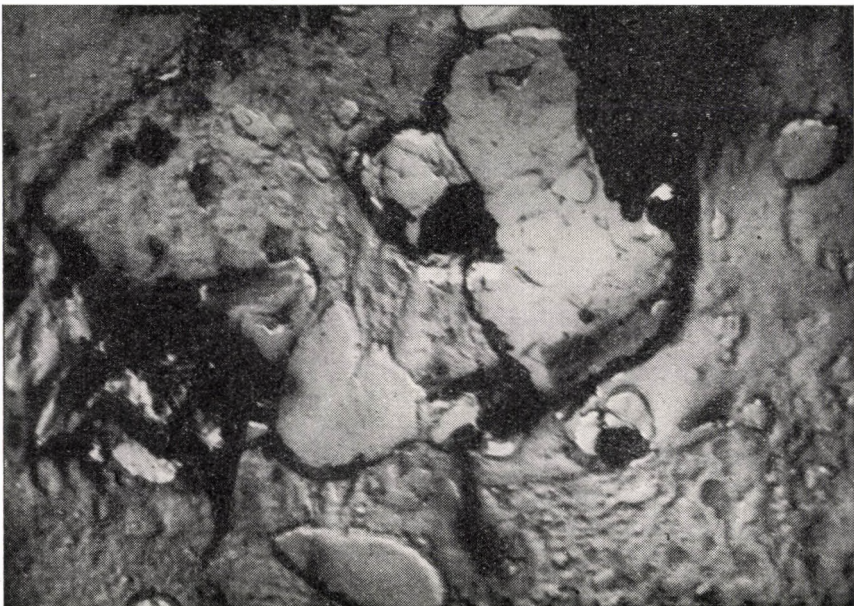
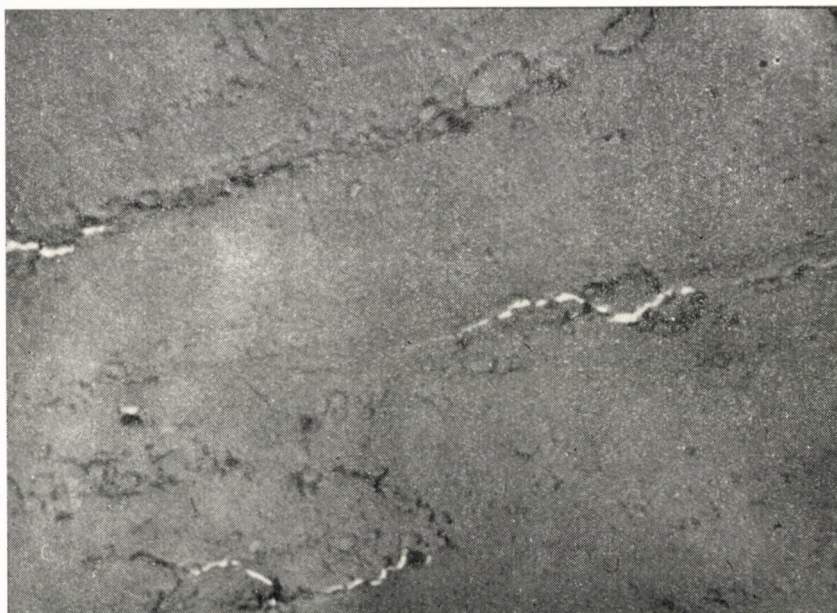
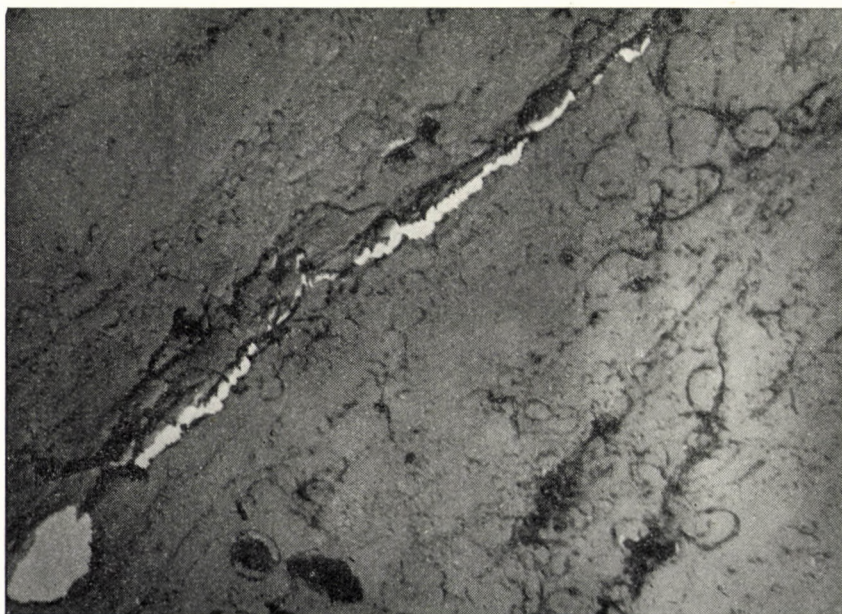


Fig. 14. Surface of cast iron attacked for 4 sec (16 000 $\times$ )





*Fig. 15.* Surface of Kor 5 stainless steel, attacked for 10 sec (16 000 $\times$ )



*Fig. 16.* Same as Fig. 15, another part of the surface (8000 $\times$ )



into cracks along the crystal boundaries. On Fig. 17 there are not only cracks along the crystal boundaries, but also a hitherto nonobserved "spongy" structure where quite small traces of oxidation appears, which points to inhomogeneity within one crystallite. The 0.0003 mm wide cracks of the crystal surface widen along the crystal boundary to 0.0001 mm. On the surface of the normalized steel (heated and slowly cooled in air) clearly appear (Fig. 18) the cracks along the crystal boundary, the cracks on the impact limits within the grain showing the local melting of the crystal surface, and also traces of oxidation (Fig. 19). On the surface of the hardened steel (*e. g.* Figs. 20 and 21), there appears an oriented series of cracks which had developed in the direction of the crystal arrangement due to heat treatment, as well as crystal boundary cracks. On Fig. 22, one can observe on the surface exposed to repeated impacts the individual molten traces of impacts on a part of the material surrounded by annular cracks, which part would quickly fall out in case of further destructive action (dia. approx. 0.004 mm).

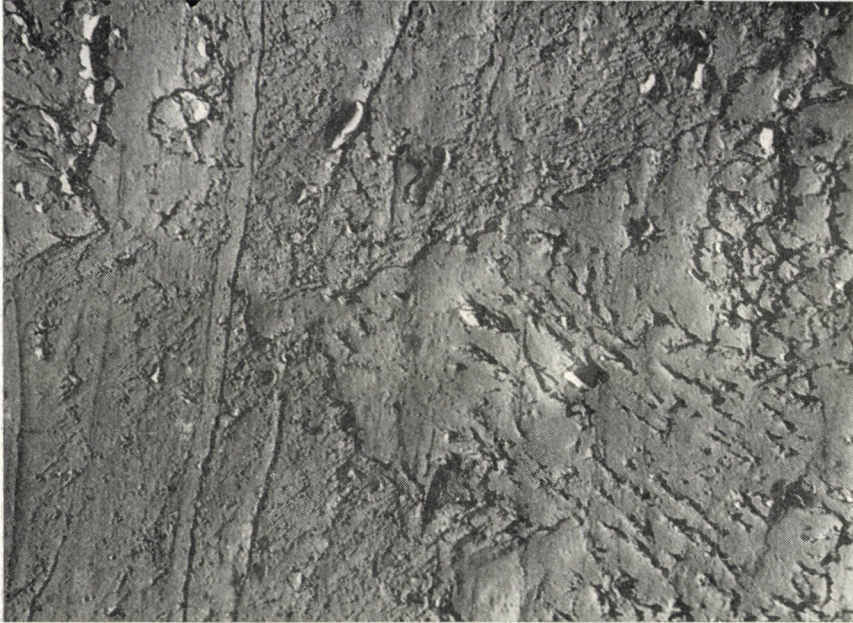
#### *Summary of experience*

On the surface of all material structures similar traces can be observed, therefore, they are independent of material quality and can originate from the cavitation impacts only. The traces permit the conclusion that in the magnetostrictive apparatus the surface of the material is subjected to impacts of

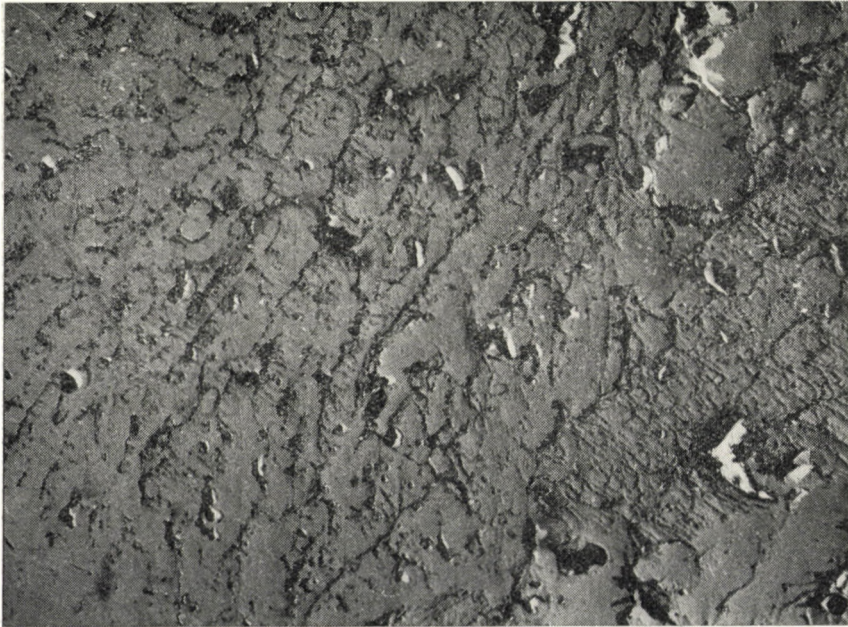


Fig. 17. Surface of carbon steel A 60.11 attacked for 6 sec (14 400 $\times$ )



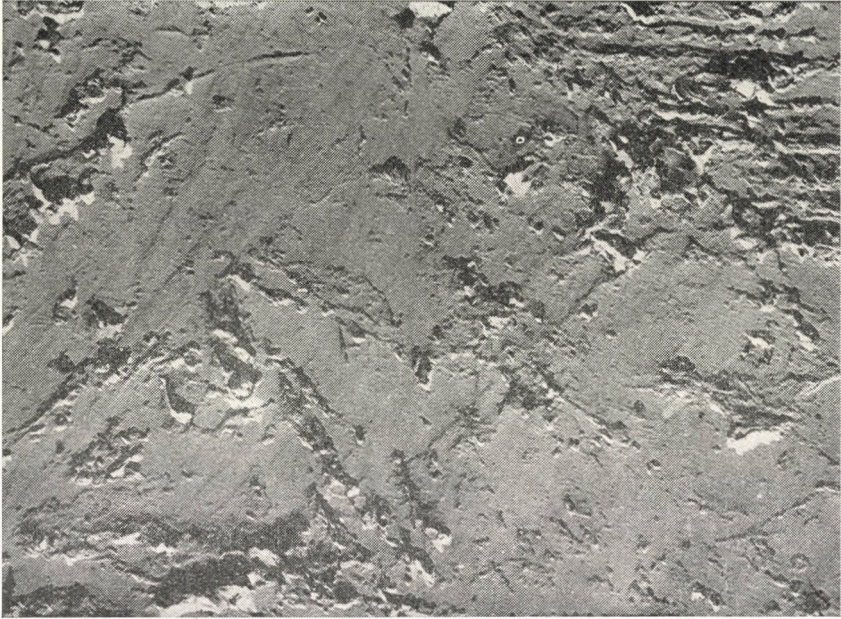


*Fig. 18.* Surface of normalized carbon steel A 60.11 attacked for 6 sec (13 300 $\times$ )

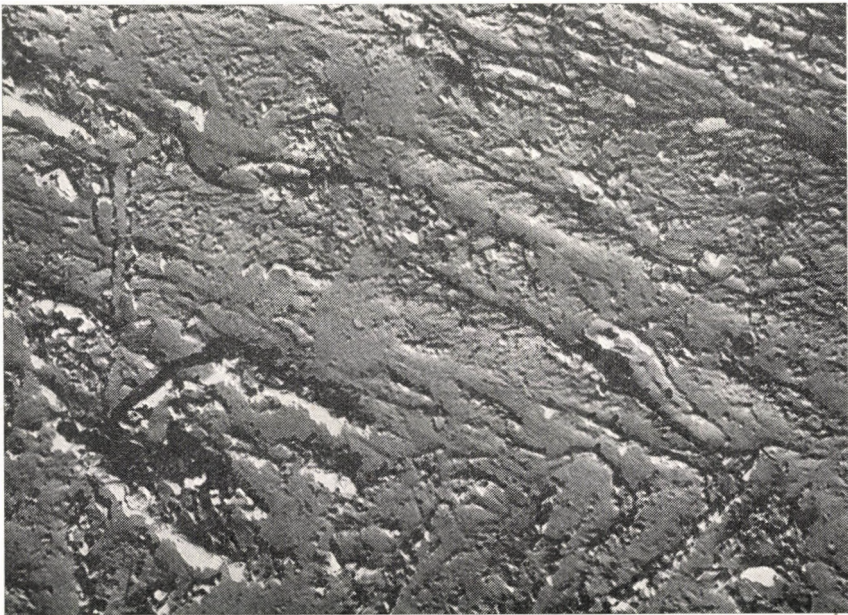


*Fig. 19.* Same as Fig. 18, another part of the surface (12 600 $\times$ )





*Fig. 20.* Surface of hardened carbon steel A 60.11 attacked for 6 sec (12 000 $\times$ )



*Fig. 21.* Same as Fig. 20, another part of the surface (12 600 $\times$ )



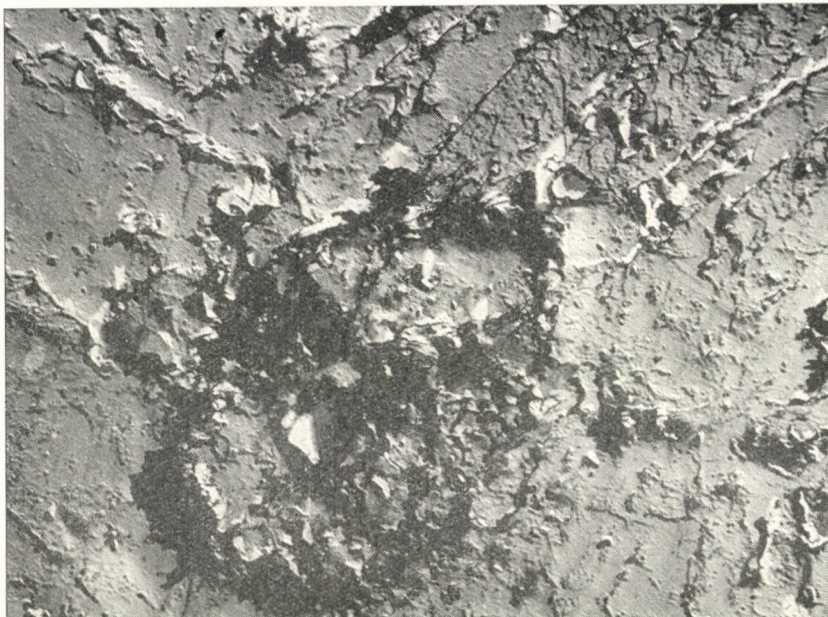


Fig. 22. Same as Fig. 20, another part of the surface (12 600 $\times$ )

approx. 0.5—1.0  $\mu\text{m}$  dia., at these points the material melts and the point of impact is surrounded by a crack of 0.05  $\mu\text{m}$  width. Along the crystal boundaries, these cracks unite into cracks of 0.1  $\mu\text{m}$  and on the action of further impacts they widen to 0.6—1.0  $\mu\text{m}$ . With materials which resist better to cavitation (*e. g.* Kor 5) the dimensions of the cracks are smaller (0.01  $\mu\text{m}$ ), therefore, the larger cracks do not develop and under a subsequent heat action, the haircracks may reweld.

KORNFELD [2] ascribes the development of cavitation damage to the destructive action of water impact brought about by high-speed water drops piercing the bubbles. If the view of Kornfeld is accepted, the dimensions of the areas surrounded by cracks on the material surface permit to conclude that the dimension of the water drops piercing the bubble is 0.5—1.0  $\mu\text{m}$ . The initial size of the bubbles and their size before explosion is larger by several orders of magnitude.

The bubble is heated by compression and locally heats the surface of the material, subsequently this surface suffers a mechanical shock and quick cooling. It is highly probable that this action produces the drop-shaped annular cracking, the value of pressure and temperature obtained from approximate calculations support these observations. (As for the calculation of the temperature and of the pressure rise, cf. the Appendix.)



#### IV. Comparison of the result with the data in literature

The assumed mechanism of the initial phase of destruction appears to disagree with the data reporting a prolongation of the incubation time by cathodic protection of the attacked surface [3, 4, 5, 6].

But if one considers that the liquid particles are electrically charged by friction [7], which charge is certainly strengthened while the particle is traversing the hot gas bubble containing perhaps ionized gas, it is clear that the ionized liquid particles can be slowed down by an antagonistic electrical field and thus the initial action of the water impact can be delayed. The water drops are different in size and carry different charges, therefore, a part of them will certainly reach the surface of the material and there cause damage, thus roughening of the surface is started, although at a slower rate. Of course, further experiments are required for detailed investigation of this phenomenon and of the relation between the cathodic protection and the current density.

This explanation of the phenomenon also leaves room for those theories which ascribe cavitation destruction to the ions penetrating into the metallic surface [3, 8, 9].

#### V. Conclusions

Investigation of the start of cavitation destruction by electron microscopic enlargement of the formations developing on the surface of the material leads to the conclusion that the development of micro-cracks on the surface is due to the ionized water drops penetrating the bubbles on the surface and causing, thus, mechanical impact on the hot surface of the material, with the simultaneous sudden cooling.

We may conclude on the dimensions of the ionized water drops from the areas surrounded by cracks and as their size is 0.5—1.0  $\mu\text{m}$ , the drops can be slowed down for a time or deviated from the surface by an electric field. This explains why the starting of damage can be delayed by cathodic protection.

#### VI. Appendix

##### *Calculation of the temperature of the cavitation bubble and of the shock pressure rise in its surrounding*

RAYLEIGH [10] assumes isothermal compression of the bubble. The bubble photographs of KNAPP show oscillations of the bubble, and on the base of his measures and of the theory of HEYS, CREWDSON [11] established the modified Rayleigh formulae. These calculations may be completed by the establishments of KORNFELD [2] who observed the oscillations of the bubble surfaces and ascribed the destruction to the water drops piercing the bubble — a view which is supported by the electron micrographs.

The variation of pressure on the magnetostrictive test specimen is computed by NOLTINGK and NEPPIRAS [12].

The equation established by the latter cannot be solved mathematically (the author assumed some constants and computed numerical examples with the aid of a differential analyser) and neither would it be possible in this place to undertake the solution of the equation of the real polytropic change of state, even its establishment would only have the character of an approximation, the exponent of the polytropic change of state not being known (it is impossible to follow the variation of heat transfer conditions during the extraordinarily rapid phenomenon). Therefore, only an approximate calculation will be made, based on the Rayleigh relation modified for a supposed adiabatic compression.

If it is assumed that the wall of a bubble with radius  $R$  moves with the velocity  $U$  in an infinite mass of water, the velocity of motion  $u$  at an arbitrary distance  $r$  will be, according to the law of continuity,

$$ur^2 = UR^2$$

and

$$\frac{u}{U} = \frac{R^2}{r^2}.$$

The whole kinetic energy of the medium of specific mass  $\rho$  will be

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_R^{\infty} u^2 4\pi r^2 dr = 2\pi \rho U^2 R^3. \quad (1)$$

If the compression of the bubble has started at an initial radius  $R_0$ , the work performed until the radius is  $R$  will be

$$E_p = \frac{4\pi p}{3} (R_0^3 - R^3) \quad (2)$$

where  $p$  is the pressure at an infinite distance.

From the equality of works, the instantaneous velocity of the bubble wall is

$$U^2 = \frac{2}{3} \frac{\rho}{\rho} \left[ \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 - 1 \right] \quad (3)$$

in case the pressure inside the bubble is zero.

But the gas in the bubble which has an initial pressure  $p_0$  is adiabatically compressed ( $\kappa$  = the ratio of the specific heats). The basic equation for the velocity of the bubble wall is modified as follows:

$$U^2 = \frac{2}{3} \frac{p}{\rho} \left( \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) - \frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho} \frac{R_0^3}{R^3} \left[ \frac{\left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(\kappa-1)} - 1}{\kappa - 1} \right]. \quad (4)$$

Hence, the velocity of the bubble wall is only a function of the ratio of the radii (Fig. 23),

$$x = \frac{R_0}{R}.$$

The shape of the bubble can remain stable so long as  $U$  is monotonously increasing (so long as the acceleration is positive). As soon as deceleration starts, the shape of the bubble cannot remain stable, because of the bubble surface locally deviating from spherical shape brought about by the surface oscillations observed by Kornfeld. It is at this time that flattening and piercing by the liquid jet are most likely to occur.

Maximum collapsing speed is obtained where

$$\frac{d(U^2)}{dx} = 0.$$



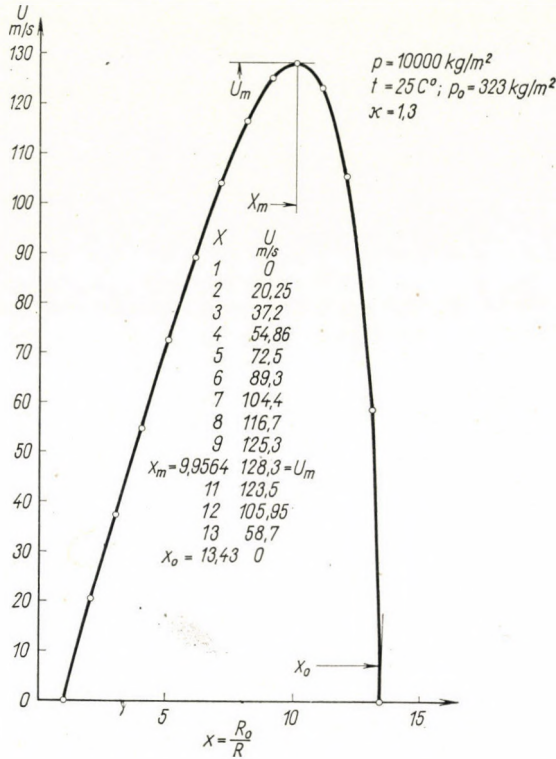


Fig. 23. Velocity of bubble wall as a function of bubble diameter ratio

The values belonging to this place will be distinguished by an index  $m$  from the variable values; after differentiation and rearrangement,

$$X_m = \left[ \frac{(\kappa - 1) \frac{P}{P_0} + 1}{\kappa} \right]^{\frac{1}{3(\kappa-1)}} \quad (5)$$

Substituting this into the basic relation (4) and introducing the symbol

$$\Theta = \left[ \frac{(\kappa - 1) \frac{P}{P_0} + 1}{\kappa} \right]$$

the following expression is obtained for the maximum velocity:

$$U_m^2 = \frac{2}{3} \frac{P}{\rho} \left[ \Theta^{\frac{1}{\kappa-1}} - 1 - \frac{P_0}{P} \Theta^{\frac{1}{\kappa-1}} \left( \frac{\Theta - 1}{\kappa - 1} \right) \right] \quad [\text{m/sec}]^2 \quad (6)$$

Consequently, the maximum velocity depends essentially on the pressure of the surrounding, the initial pressure of the bubble (thus principally it depends on the temperature of the water) and on the exponent of the change of state.

The water jet piercing the bubble traverses it at a maximum speed  $U_m$ . Assuming that the bubbles on the surface of a magnetostrictive oscillator are of semi-spherical shape and that the velocity of the oscillator can be neglected with respect to  $U_m$  (which is true within 2%), the pressure rise at collision,  $p_{\bar{u}}$ , can be calculated according to KORNFIELD:

$$p_{\bar{u}} = \frac{K}{c} U_m^2 \text{ [kg/cm}^2\text{]} \quad (7)$$

where  $K$  is the modulus of elasticity of the liquid ( $K = 20 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$  for water) and  $c$  is the velocity of sound ( $c = 1500 \text{ m/sec}$  in water).

If it is assumed that the crystal surface at the place of impact has already taken the temperature of the steam bubble over, then the wall temperature can be determined from the temperature of the bubble. The temperature of the bubble is

$$T = T_0 \kappa_m^{3(K-1)} = T_0 \Theta \quad (8)$$

where  $T_0$  is the initial temperature of the bubble in  $^{\circ}\text{K}$ .

Table I contains the results calculated from Eqs. (6–8). The surrounding pressure was taken to be 1 atm. abs., the exponent of adiabatic expansion for steam saturated at the temperature of water was taken as  $\kappa = 1.3$  and  $= 1.4$ , respectively, while  $p_0$  is the pressure in the bubble.

Table I

| Values of $p_{\bar{u}}$ , atm. abs. |   |      |      |      |     |
|-------------------------------------|---|------|------|------|-----|
|                                     | $t$ $^{\circ}\text{C}$ (temperature of the water) |      |      |      |     |
|                                     | 10  | 20   | 30   | 40   | 50  |
| $\kappa = 1.3$                      | 7000  | 2700 | 1110 | 532  | 284 |
| $\kappa = 1.4$                      | 3030  | 1430 | 715  | 397  | 237 |
| Values of $T$ , $^{\circ}\text{K}$  |   |      |      |      |     |
| $\kappa = 1.3$                      | 5470  | 3050 | 1850 | 1200 | 842 |
| $\kappa = 1.4$                      | 6700  | 3720 | 2220 | 1400 | 970 |

$p = 10,000 \text{ kg/m}^2$ ;  $\varrho$  is a function of temperature  
 $p_0$  = pressure of saturated steam, as a function of temperature  
 $K = 20 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$   
 $c = 1500 \text{ m/sec}$   
 for water steam  $\kappa = 1.3$ ; for air  $\kappa = 1.4$

The table shows that for a water temperature between 20 and 30  $^{\circ}\text{C}$  and for  $\kappa = 1.3$  (in the case of steam) the temperature of the bubble can be found between 1557 and 2757  $^{\circ}\text{C}$ , the value of impact pressure is between 1110 and 2700 atm. The usual structural materials are not able to resist to such values.



## BIBLIOGRAPHY

1. DR. VASVÁRI, F.: Újabb adatok a fémek kavitációs roncsolási elméletéhez (New data relative to the theory of cavitation destruction of metals). Thesis for obtaining the degree of Candidate of Techn. Sc. Budapest, 1961.
2. KORNFIELD: Elastizität und Festigkeit von Flüssigkeiten. VT. Berlin, 1952, p. 80—108.
3. PETRACCHI, G.: Intorno all'interpretazione del processo di corrosione per cavitazione. La Metallurgia Italiana, 1949, p. 6. Investigation of cavitation corrosion. Engineers Digest, 1949, p. 314—316.
4. NECHLEBA: Das Problem der Kavitation. Publication No. 4, Techn. Hochschule Dresden, 1953, 54.
5. WHEELER, W. H.: Mechanism of cavitation Erosion Cavitation in Hydrodynamics. London, Stationary Office, 1956, No. 21, p. 1—31.
6. ERDMANN, F.—JESSNITZER: Werkstoffverhalten bei Kavitation. Journées de la Corrosion Dechema, Frankfurt, 1954.
7. LENARD, P.: Die Wasserfallelektrizität und über die Oberflächenbeschaffenheit der Flüssigkeiten. Annales Phys. Lpz. 47. 1915, p. 463—524.
8. TAYLOR, I.: Cavitation pitting by instantaneous chemical action from impacts. ASME Paper, -A-109, 1954, p. 11.
9. WHEELER, W. H.: Identification of Metals by Cavitation. Trans. ASME, p. 184—194, 1960, March.
10. RAYLEIGH: On the Pressure Developed in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity. Philosophical Magazine, Series 4, Vol. 34, p. 94—98, 1917.
11. CREWDSON, E.: Impingement Attack in Turbines. Water Power, 1953 April, Vol. 5, p. 146—150.
12. NOLTINGK, B. E.—NEPPIRAS, E. A.: Cavitation produced by Ultrasonics. The Proceedings of the Physical Society, London, Section B, 1950 Sept., p. 674—685.
13. DR. LOVAS, B.: Oberflächenuntersuchung mit dem Abdruckverfahren bei D-Kondensator- und Phasenkontrast-Beleuchtung. Mikroskopie, Band 15., Heft 11/12.

## SUMMARY

The paper contributes new ideas, based on electron microscopic investigations, to the research on the mechanism of cavitation.

The aim of his work was to investigate the initial phase of cavitation destruction. Therefore, the tested materials (pure metals, structural steel and Kor 5 stainless steel) were attacked at 6500 Hz in a magnetostrictive apparatus for 5—10 sec only. After attack, no trace of destruction could be detected with the naked eye, but on using the electron microscope, 0,00001—0,00005 mm wide and later on widening cracks were apparent as well as circular craters pointing to thermal stresses and subsequent quick cooling.

These phenomena confirm that the mechanism of cavitation involves the piercing of the ionized heated bubbles by water and that the subsequent quick surface cooling also plays an active part.

UNTERSUCHUNG DES ANFANGSSTADIUMS  
DER ZERSTÖRUNG DURCH KAVITATION

F. VASVÁRI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit ergänzt die Untersuchungen über den Mechanismus der Kavitation durch neue Gedanken, die auf elektronenmikroskopischen Untersuchungen beruhen.

Ziel der Arbeit war die Untersuchung des Anfangsstadiums der Zerstörung durch Kavitation. Die untersuchten Werkstoffe (reine Metalle, Konstruktionswerkstoffe und rostfreier Stahl Kor 5) wurden deshalb nur für die kurze Zeit von 5—10 sec in einer magnetostruktiven Einrichtung bei 6500 Hz Frequenz der Zerstörung ausgesetzt. Nachher waren mit freiem Auge keinerlei Spuren von Anfressungen wahrzunehmen, mit dem Elektronenmikroskop waren jedoch schon 0,00001—0,00005 mm weite Risse nachweisbar, welche sich später erweiterten,

sowie kreisförmige Krater, die auf thermische Beanspruchungen und nachfolgende schnelle Abkühlung hindeuten.

Diese Erscheinungen bestätigen das Zerreißen der ionisierten und erhitzten Blasen durch Wasser und die Rolle der nachfolgenden schnellen Oberflächenabkühlung.

## EXAMEN DE LA PHASE INITIALE DE LA DESTRUCTION PAR CAVITATION

F. VASVÁRI

### RESUME

L'auteur complète les recherches sur le mécanisme de la cavitation par quelques idées nouvelles basées sur des examens au microscope électronique.

L'étude se proposant l'examen de la phase initiale de la destruction par cavitation, les matériaux examinés (métaux purs, matériaux de construction et acier inoxydable Kor 5) n'étaient exposés que pendant 5 à 10 secondes à la destruction, dans un appareil à magnétostriction fonctionnant à la fréquence de 6500 Hz. Après l'essai, aucune trace de destruction n'était visible à l'œil nu, par contre, le microscope électronique révélait des fissures de l'ordre de 0,00001—0,00005 mm qui s'élargissaient plus tard, ainsi que des cratères circulaires indiquant des efforts thermiques suivis d'un refroidissement subite.

Ces phénomènes confirment la crevaisson, par l'eau, des bulles ionisées et chauffées, et le rôle que le refroidissement rapide consécutif de la surface joue dans le mécanisme de la cavitation.

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ КАВИТАЦИОННОГО РАЗРУШЕНИЯ

Ф. ВАШВАРИ

### РЕЗЮМЕ

Работа дополняет исследования механизма кавитации новыми замыслами, на основе электронно-микроскопического анализа.

Ставилась цель исследовать начальное состояние кавитационного разрушения. Поэтому исследуемые материалы (чистые металлы, конструкционные материалы и нержавеющая сталь марки Кор. 5) были подвергнуты лишь кратковременному разрушающему воздействию магнестрикционной установки при частоте 6500 гц в течение 5—10 сек. После разрушения никаких видимых на глаз следов разрушения замечено небыло; при рассмотрении же под электронным микроскопом были обнаружены мелкие (порядка 0,00001—0,00005 мм) трещины, склонные к расширению, и кругообразные кратеры, указывающие на тепловые нагрузки с последующим быстрым охлаждением.

Эти явления подтверждают, что в механизме кавитации играет роль вода, разрывающая ионизированные и нагретые пузыри с последующим быстрым охлаждением поверхности.





# ОПТИМАЛЬНОЕ МЕСТО ЗАЛОЖЕНИЯ ШАХТНЫХ СТВолов В СЛУЧАЕ КРУТОПАДАЮЩИХ ПЛАСТОВ

Проф. Я. ЗАМБО  
член-корр. АН Венгрии

[Получено 5. мая 1961 г.]

При выборе места заложения шахтных стволов или норм шахтных стволов большую роль играют геологическое месторождение и рельеф дневной поверхности. Из числа различных видов геологического строения месторождения теперь выберем тот типичный случай, при котором угольные или рудные пласты имеют крутое падение, а залегание пластов практически является равномерным, то есть, возможность залегания почти неизменна, но простираение месторождения может изменяться. Сначала исходим из предположения, что дневная поверхность района представляет собой горизонтальную плоскость. При таких условиях или же в случае такого вида геологического строения месторождения выбор оптимального места заложения шахтного ствола можно производить при помощи математического анализа.

После зафиксирования типа геологического строения месторождения принимаем также и размеры шахтного поля. Пусть распространение шахтного поля по простираению будет —  $A$ , а глубина разработки —  $H$ . Характерные показатели разработки: высота этажа, т. е. расстояние между смежными этажами  $h$  — ; ствол вертикален, а число этажей будет

$$\frac{H}{h} = N.$$

Место расположения шахтного ствола, эвентуально пары шахтных стволов, считается оптимальным, если затраты, связанные с местом заложения шахтных сволов имеют некоторый минимум. От места заложения шахтных стволов зависят, в первую очередь, затраты по транспортировке людей и материалов, а также часть капитальных вложений.

Под понятием затрат по транспортировке людей подразумеваются затраты по механизированной доставке рабочих от устья ствола до конечной станции людского транспорта и обратно. В затраты по откатке, вентиляции, откачке и от потерь энергии в энергоподводящих линиях. В интересах однообразия сюда включили даже расходы по содержанию.



На вышеописанном месторождении, при данных условиях разработки и дневной поверхности, которую можно принять в качестве горизонтальной плоскости, с местом расположения шахтного ствола связаны лишь затраты по капиталовложению и по устройству капитальных квершлагов.

Следует принять во внимание дальше то обстоятельство, что в зависимости от места расположения шахтного ствола изменяется и качество оставленного в предохранительных целиках запасов полезных ископаемых.

Принимаем удельную стоимость транспортировки людей и материалов в *фор/тм*, иными словами расходы в форинтах на участок длиной  $l$  м и  $1$  т продукции, что обозначим через  $\sum crk$ . Если центр тяжести промышленных запасов полезных ископаемых данной выемочной площади находится на определенном расстоянии от шахтного ствола, тогда выявляющиеся при отработке площади затраты по транспортировке людей и материалов можно выразить следующей зависимостью:

$$K = Ql \sum crk$$

где  $Q$  — промышленные запасы полезных ископаемых на данной выемочной площади;

$l$  — длина дороги между шахтным стволом и центром тяжести промышленных запасов, на которой производится транспортировка людей и материалов.

Выражение  $\sum crk$  можно разложить, и получим

|                       | $c$ | $r$             | $k$   | $crk$              |
|-----------------------|-----|-----------------|-------|--------------------|
| Транспортировка людей | 2   | $\frac{1}{vq}$  | $k_k$ | $\frac{2k_k}{vq}$  |
| Откатка               | 1   | 1               | $k_b$ | $k_b$              |
| Вентиляция            | 2   | $\frac{1}{q_0}$ | $k_l$ | $\frac{2k_l}{q_0}$ |
| Сткачка               | 1   | $\frac{1}{q_0}$ | $k_v$ | $\frac{k_v}{q_0}$  |
| Энергопотери          | 1   | $\frac{1}{q_0}$ | $k_e$ | $\frac{k_e}{q_0}$  |
| Содержание            | 2   | $\frac{1}{q_0}$ | $k_f$ | $\frac{2k_f}{q_0}$ |

Следовательно, имеем:

$$\sum crk = \frac{2k_k}{vq} + k_b + \frac{1}{q_0} (2k_l + k_v + k_e + k_f).$$

$c = 1$  в том случае, если транспортировка людей и материалов производится только в направлении к стволу или только в направлении к выемочному полю.  $c = 2$  в том случае, если речь идет о движении туда и обратно.  $v$  — скорость транспортировки людей,  $м/ч$   $5v$   $Vq$  — подземная производительность рабочего,  $т/человекодень$ ;  $q_0$  — производственная мощность шахты (рудника),  $т/сутки$ ;  $k_k$  — средняя заработная плата,  $фоп/ч$ ;  $k_b$  — удельная стоимость откатки,  $фоп/тм$ ;  $k_1, k_v, k_e, k_f$  — удельные стоимости вентиляции, откачки, энергопотерь и содержания,  $фоп$  в  $м$  в сутки. Следовательно, последние удельные затраты, представляют собой затраты в сутки на участок длиной в один метр.

Сумма капиталовложений проведения капитальных квершлагов определяется просто умножением длин участков капитальных квершлагов на удельную стоимость проведения в  $1 м$  ( $k_d$ ).

Обозначим через  $Q_p$  количество оставленных в предохранительных целиках запасов полезных ископаемых. Его роль в наших уравнениях может быть двойной. В обоих случаях учитываемые затраты выражаются следующей зависимостью

$$K_p = Q_p k_p.$$

В первом случае  $k_p$  выражает удельное капиталовложение, которое падает на  $1 т$  добытых запасов в случае заложенной шахты при аналогичных условиях. В другом случае исходим из предположения, что временно оставленные в целиках запасы будут действительно отработаны. Естественно, это обстоятельство повышает удельную производственную стоимость, таким образом  $k_p$  в этом случае выражает этот прирост удельных затрат.

Определение оптимального места заложения шахтных стволов или пар шахтных стволов можно производить в два перехода. Сначала определяется линия падения, по которой во второй переход отмечается оптимальная точка.

Оптимальной линией падения будет считаться линия, при заложении по которой линии шахтного ствола затраты по транспортировке людей и материалов по простиранию будут наименьшими.

Выберем произвольную линию падения (рис. 1). Предположим, что она от биссектрисы линии падения промышленных запасов шахтного поля находится на произвольном расстоянии  $X$ . Если ствол сечет любую из точек этой произвольно выбранной линии падения, то общую сумму затрат по транспортировке людей и материалов по простиранию можно выразить следующей зависимостью:

$$K_e = Q_0 \left\{ \left( \frac{A}{2} + X \right) \left( \frac{A}{4} + \frac{X}{2} \right) B + \left( \frac{A}{2} - X \right) \left( \frac{A}{4} - \frac{X}{2} \right) B \right\} \cdot \sum cr_c k_c,$$



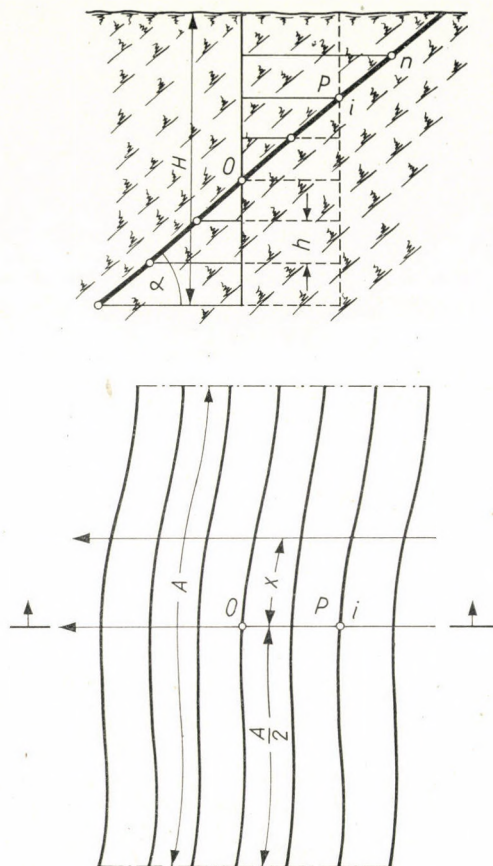


Рис. 1

где  $Q_0$  — количество добываемых с  $1 \text{ м}^2$  пласта запасов полезного ископаемого в тоннах.

Зависимость можно записать и в следующем виде

$$K_c = Q_0 B \left( \frac{A^2}{4} + X^2 \right) \sum cr_c k_c.$$

Из этого же выражения следует, что общая сумма затрат на транспортировку материалов по простиранию будет наименьшей при пересечении шахтным стволом залегания на биссектрисе линии падения промышленных запасов шахтного поля.

В виду того, что первый член правой стороны последней зависимости имеет оптимальную величину, т. е. он представляет соответствующие биссектрисе линии падения затраты ( $K_{c0}$ ), можно записать

$$K_c = K_{c0} + Q_0 BX^2 \sum cr_c k_c = K_{c0} + cX^2.$$

Следовательно, имеется простое подтверждение того, что сумма затрат по транспортировке материалов возрастает параболически в том случае, если место заложения ствола удаляется в любом направлении от биссектрисы линии падения промышленных запасов полезных ископаемых шахтного поля.

Во втором переходе следует найти ту точку сечения линии падения, которая точка будет соответствовать наименьшей сумме затрат по транспортировке людей и материалов по направлению квершлага, а также проходки капитальных квершлагов — для данного места завершения шахтного ствола.

Пусть число шахтных этажей будет нечетным числом  $N = 2n + 1$ . Предположим, что шахтный ствол сечет пласт в одной из отделяющих этажи линий. Исходя из вышесказанных запишем общую сумму затрат по транспортировке людей и материалов по направлению квершлага при условии, что шахтный ствол сечет пласт в любой точке биссектрисы линии падения

$$K_k = \frac{Ah Q_0}{\sin \alpha} (\sum c r_k k_k + k_d) \sum l,$$

где  $\sum l$  — общая длина капитальных квершлагов, соответствующая произвольной точке.

Произвольно выбранная точка ( $P$ ) представляет собою точку  $i$  — ного порядка от начальной или разделительной по полам точки ( $O$ ). Общую длину капитальных квершлагов можно принять в качестве суммы арифметической прогрессии. Как первый член, так и разность прогрессий равняются  $h \cotg \alpha$ . В виду того, что произвольное место заложения ствола нами выбрано в точке  $P$ , количество членов прогрессии, т. е. количество капитальных квершлагов в кровле  $n - i$ , а в подошве —  $n + i$ . В соответствии с этим можно записать

$$\sum l = \frac{1}{2} h \cotg \alpha \{ (n - i)(n - i + 1) + (n + i)(n + i + 1) \}.$$

Выполнив арифметические действия и подставив обратно в уравнение, получим

$$K_k = \frac{Ah^2 Q_0 \cotg \alpha}{\sin \alpha} n(n + 1) (\sum c r_k k_k + k_d) + i^2 \cdot \frac{Ah^2 Q_0 \cotg \alpha}{\sin \alpha} (\sum c r_k k_k).$$

Из этого следует, что затраты по транспортировке в направлении к квершлагу имеют минимум в том случае, если  $i = 0$ , т. е. если шахтный ствол сечет пласт в среднем этажном штреке.



Первый член последней зависимости представляет собой соответствующие специальной точке затраты ( $K_{k0}$ ), поэтому можно записать:

$$K_k = K_{k0} + \delta_k i^2 = \delta_k (n^2 + n + i^2).$$

В этом случае также имеем простое подтверждение, что затраты по транспортировке в направлении квершлага возрастают пропорционально с  $i^2$  в том случае, если точка сечения шахтного ствола линии падения вместо оптимальной точки находится в точке  $i$ . Таким образом, параболическое изменение действительно и здесь.

Если количество этажей является четным числом, тогда количество оптимальных точек будет два, т. к. имеется две точки, которые одинаково удовлетворяют критерии средней точки.

Теперь сложим относящиеся к произвольно выбранной точке затраты по транспортировке в направлениях линий простирания и квершлага.

$$K = K_c + K_k = K_0 + cX^2 + \delta_k i^2.$$

Эта зависимость является уравнением диапазона пространственных кривых. Кривые высекаются из плоскости эллиптического параболоида плоскостями, параллельными оси  $K$  и проходящими через принятые теперь прямые и отделяющие этажи линии простирания. Естественно, из этого следует, что представляющие равные затраты точки располагаются в плоскости пласта по окружности эллипса. Принимая значение  $K$ , определяется и уравнение принадлежащего к нему эллипса.

$$[K = K_c + K_k = K_0 + cX^2 + \delta_k i^2.]$$

При определении оптимального места заложения шахтного ствола до сих пор учитывались лишь затраты по транспортировке людей и материалов, а также по проходке капитальных квершлагов. Следовательно, определенное таким образом место заложения не является еще окончательным, т. к. оставленные в предохранительных целиках запасы полезных ископаемых также играют известную роль.

Соответствующие определенному в зависимости от затрат по транспортировке в направлениях линий простирания и квершлагов месту заложения шахтного ствола ( $O$ ) запасы полезных ископаемых предохранительных целиков можно опроектировать обычным путем. Обозначим их через  $Q_{p0}$ . Дополнительные затраты будут

$$K_{p0} = Q_{p0} k_p.$$

При пересечении пласта шахтным стволом в произвольно выбранной точке  $i$  по восстанию пласта, дополнительные затраты по предохранительному целику в этом случае будут:

$$K_p = K_{p0} + K_{p0} (c_1 i^2 - c_2 i).$$

Коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  можно просто определить по рис. 2. В случае двух произвольно выбранных точек сечения определяются соответствующие им запасы предохранительного целика. Таким образом, получим два уравнения, при помощи которых можно вычислить коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$ .

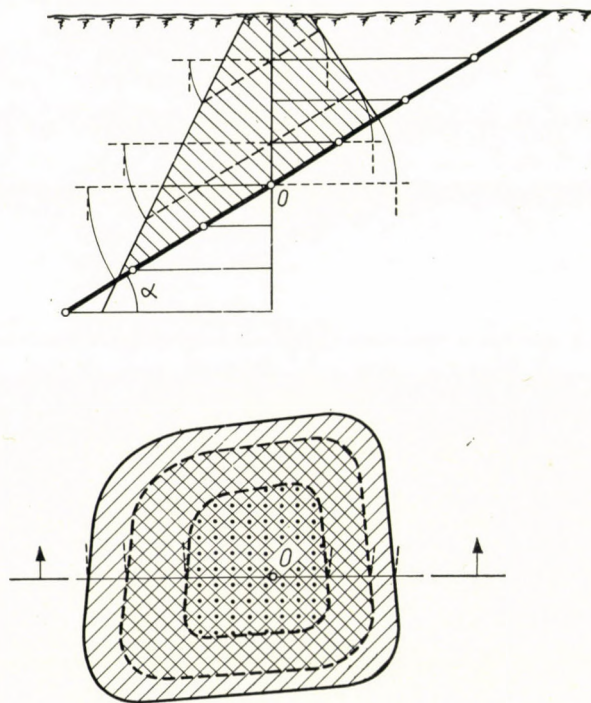


Рис. 2

Дополнительные расходы по предохранительному целику относятся к затратам по транспортировке по квершлагу, поэтому они складываются с полученной до сих пор суммой

$$K_{kp} = K_k + K_p = K_k + K_{p0} + (\delta_k + c_1 K_{p0}) i^2 - c_2 K_{p0} i.$$

В результате определения предельного значения можно установить, что затраты по транспортировке в направлении линий квершлага имеет минимум, если значение  $i$  стоит ближе всего к выражению

$$i_0 = \frac{c_2 K_{p0}}{2(\delta_k + c_1 K_{p0})}.$$

Этим, собственно говоря, мы отметили на биссектрисе линии падения точку, в которой пласт сечет заложенный в оптимальной точке шахтный ствол.



В приведенных зависимостях фигурируют три различные удельные затраты:  $\Sigma crk$ ;  $k_d$  и  $k_p$ . Значение  $\Sigma crk$  удельных затрат по транспортировке людей и материалов фигурирует за весь срок службы шахты (рудника). Затраты по проходке капитальных квершлагов появляются при проходке отдельных капитальных квершлагов. Так как проходка капитальных квершлагов производится почти за все время работы шахты (рудника), эти затраты можно считать также более или менее равномерно распределенными.

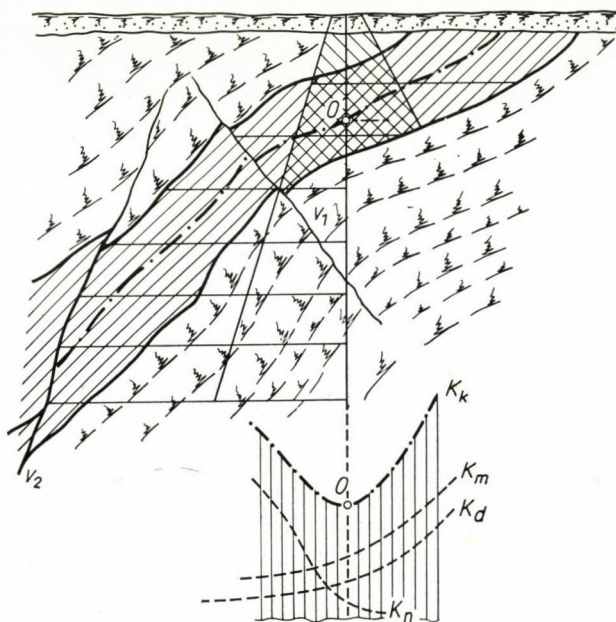


Рис. 3

Дополнительные расходы по оставленным в предохранительных целиках запасам появляются, как правило, в последней фазе работы шахты (рудника). Затраты следует согласовать также и во времени, поэтому для этой цели необходимо воспользоваться известными зависимостями исчисления сложных процентов или рент. В нашем случае это значит, что появляющиеся в последней фазе срока службы шахты (рудника) дополнительные расходы, в качестве ренты последней фазы, замещаются рентой, отнесенной ко всему сроку работы шахты (рудника).

Месторождения, отвечающие фиксированным в предисловии условиям, не являются бытовыми, но бывают месторождения, практически приемлемо удовлетворяющие указанным условиям. Однако, целесообразно производить теоретические исследования даже в том случае, если указанные условия удовлетворяются только в грубом приближении, т. к. этим можно получить предварительную ориентацию.

Графический способ может дать результат в случае месторождений, даже приближенно неудовлетворяющих условия. Однако, безразлично о каком месторождении идет речь, биссектриса линии падения всегда является оптимальной линией падения, но, разумеется, только тогда, если падение месторождения можно определить однозначно. По оптимальной линии падения графическим способом определяется оптимальная тока сечения (рис. 3). На рисунке обозначенный через  $V_2$  сброс представляет границу шахтного поля.

При нашем методе мы принимаем несколько мест расположения шахтных стволов. Все три рода затрат калькулируются от случая к случаю, а именно: сумма затрат на транспортировку людей и материалов ( $K_m$ ), капиталовложение квершлага ( $K_d$ ) и соответствующие оставленным в предохранительных целиках запасам дополнительные расходы ( $K_p$ ). Затраты на транспортировку людей и материалов, из-за их неправильного характера, калькулируются отдельно по этажам. Калькуляционные вычисления производятся по следующим зависимостям:

$$K_m = \sum_{i=1}^{i=N} (Q_i l_i \sum c r_{ki} k_{ki})$$

$$K_d = \sum_{i=1}^{i=N} Q_i k_{di} \sum l_i$$

$$K_p = Q_{pi} k_{pi},$$

где  $Q_i$  — вообще обрабатываемые запасы ископаемых этажа.

Удельные затраты  $\sum c r k$  и  $k_d$  до известной степени зависят от длины. Это обстоятельство не было принято во внимание при аналитическом решении только в том случае, когда затраты, при отделении от оптимальной точки, возрастают по параболе. Однако, этим пренебрежением только незначительно искажаются принципиальные зависимости. Это искажение уже не будет лишним при графическом методе решения, т. к. при калькуляции соответствующих различным местам заложения шахтных стволов затрат, его можно принимать во внимание. Можно учитывать также и другие обстоятельства. Такими могут быть: а) в кровли могут находиться отличные от почвы горные породы; б) проходя вглубь земли, возрастают горное давление и температура горных пород и т. д. Изложенные могут влиять на все три рода затрат.

Определенное на основании минимума подземных затрат оптимальное место заложения шахтных стволов может изменяться по причине условий земной поверхности. Может иметь место и такой случай, когда определенное по минимуму подземных затрат место заложения шахтного ствола на дневной поверхности, из-за объективных причин, не будет подходить. Другой раз можно найти более подходящие, с точки зрения капиталовложения



места заложения шахтного ствола, чем место, определенное минимумом подземных затрат. При таких случаях сумма капиталовложений, которые могут прийти в расчет надземных альтернатив, накладывается на подземные затраты, соответствующие местам отдельных альтернатив. При этом место заложения шахтного ствола определяется минимумом суммы подземных и надземных затрат. Разумеется, затраты надземных капиталовложений и в данном случае координируются во времени с подземными затратами по правилам исчисления сложных процентов, эвентуально рент. Практика вообще показывает, что более благоприятными надземными условиями модифицируется определенное на основании минимума подземных затрат место заложения шахтного ствола только в том случае, если более выгодное место располагается недалеко от определенного на основании минимума подземных затрат места заложения. Ибо подземные затраты возрастают в районе оптимальной точки в меньшей мере, а подальше от нее — сильнее.

#### ЛИТЕРАТУРА

- ZAMBÓ, J.: Location of the main shaft and time lost in underground travel. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. Budapest. 1958. Tom. 19. Fasc. 3/4.  
 ZAMBÓ, J.: Location of the shaft, shape and extension of its working area. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. Budapest. 1958. Tom. 20. Fasc. 1/2.  
 ZAMBÓ, J.: Bányászati telepítések analitikája. (Аналитика заложения горных объектов). Budapest, 1960. Műszaki Könyvkiadó.

#### РЕЗЮМЕ

К связанным с местом заложения шахтных стволов затратам следует отнести и затраты по транспортировке людей и материалов (воды, воздуха, энергии), а также известные затраты по содержанию и капиталовложения. С местом расположения шахтных стволов связаны также и оставленные в предохранительных целиках запасы полезных ископаемых.

При крутопадающих пластах автором выражаются затраты, связанные с местом заложения шахтных стволов, через общую зависимость и, таким образом, оптимум им определяется на основании функциональной зависимости. В правильных или в принимаемые правильными случаях изменение затрат характеризуется поверхностью эллиптического параболоида.

Для принятых правильными месторождений можно найти математические формулы. В случаях неправильных месторождений можно установить только пропорции. Однако, выводы, сделанные для правильных месторождений, действительны и для неправильных месторождений.

#### DIE OPTIMALE LAGE VON BERGWERKSSCHÄCHTEN BEI STARKFALLENDEN LAGERSTÄTTEN

J. ZAMBÓ

#### ZUSAMMENFASSUNG

Zu den mit der Lage eines Schachts zusammenhängenden Kosten gehören diejenigen für den Personenverkehr und die für Gütertransport (Material, Wasser, Luft, Energie), sowie gewisse Instandhaltungs- und Investitionskosten. Mit der Placierung des Schachts hängt auch das in den Schutzpfeilern gebundene Vermögen an Erz zusammen.

Für den Fall von starkfallenden Lagerstätten stellt der Verfaßer allgemein gültige Funktionen für die mit der Lage des Schachts zusammenhängenden Kosten auf und leitet so mathematisch das Optimum ab. In regelmäßigen Fällen, wird die Änderung der Kosten durch ein elliptisches Paraboloid ausgedrückt.

Für die als regulär angenommenen Vorkommen können mathematische Formeln gefunden werden. Die für reguläre Vorkommen ableitbaren Schlußfolgerungen sind jedoch auch für irreguläre Vorkommen gültig.

## THE OPTIMUM EMPLACEMENT OF SHAFTS FOR STEEP DEPOSITS

J. ZAMBÓ

### SUMMARY

Amongst the costs related to the emplacement of a shaft belong those for the transport of persons and of goods (material, water, air, energy), as well as certain investment and maintenance costs. To the emplacement of the shaft is related also the ore capital tied up in the protection pillars.

In the case of steep deposits the author expresses the costs connected with the emplacement of the shaft by a generally valid function, and analytically derives the optimum. For regular cases or cases which can be accepted as such, the variation of costs is expressed by an elliptical paraboloid.

For the deposits assumed to be regular, mathematical formulae can be found. In the case of irregular deposits only proportions can be given, but the conclusions drawn for regular deposits are valid also for the irregular ones.

## L'EMPLACEMENT OPTIMUM DES PUIITS DE MINE AUX GISEMENTS RAIDES

J. ZAMBÓ

### RESUME

Parmi les frais dépendant de l'emplacement d'un puits, il faut compter ceux du trafic (personnes) et du transport (matières, eau, air, énergie), ainsi que certains frais d'entretien et d'investissement. La valeur du minerai immobilisé sous forme de cloisons est également en rapport avec l'emplacement du puits.

Pour les gisements raides, l'auteur exprime les frais relatifs à l'emplacement du puits par une fonction générale, et déduit l'optimum par la voie mathématique. Pour des cas réguliers ou pouvant être admis comme tels, la variation des frais est caractérisée par une surface paraboloidé elliptique.

Pour les gisements supposés réguliers, on peut trouver des formules mathématiques. En cas de gisements irréguliers, on ne peut établir que des proportions, mais les conclusions valables en cas de gisements réguliers sont également valables pour ces derniers.





# К ТЕОРИИ КАНАЛОВ РАДИОСВЯЗИ СО СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ\*

В. И. СИФОРОВ

Член-корр. Академии наук СССР, Москва

## Введение

Одной из важнейших проблем техники связи является проблема повышения пропускной способности каналов связи. Ее разрешению посвящено большое количество работ. Классическими исследованиями *Котельникова* [1], [2], *Шеннона* [3], [4], *Колмогорова* [5], *Элайса* [6], *Фейнштейна* [7] и многих других ученых развита теория помехоустойчивости и пропускной способности каналов связи.

Однако многие важные и трудные проблемы общей теории помехоустойчивости и пропускной способности еще не разрешены. Одной из них является проблема пропускной способности каналов связи со случайными изменениями параметров.

В каналах радиосвязи, основанных на использовании дальнейшего тропосферного и ионосферного распространения ультракоротких волн, а также в обычных коротковолновых радиоканалах, применяемых для магистральной связи, имеют место случайные изменения параметров. Влияние этих флюктуаций выражается в том, что посылаемые радиопередатчиком сигналы модулируются по амплитуде и фазе по случайному закону во времени. Кроме того, как известно, в подобных каналах радиосвязи имеет место многолучевое распространение радиоволн, причем каждый луч подвергается как случайным амплитудным изменениям, так и случайным изменениям времени его распространения. Такого рода флюктуации понижают пропускную способность каналов связи.

В последнее время появился ряд работ, посвященных проблеме повышения помехоустойчивости и пропускной способности каналов радиосвязи со случайными изменениями параметров. К этим работам относятся исследования *Овсеевича* и *Пинскера* [8], посвященные оценке пропускной способности однолучевых каналов связи со случайно изменяющимся коэффициентом передачи напряжения, исследования *Прайса* и *Грина* [9], в которых дается описание и результаты испытаний системы связи «*Rake*», предназначенной для повышения помехоустойчивости каналов связи с много-

\* Доклад на Коллоквиум по радиорелейной связи, состоявшемся в ноябре м-це 1959 г. в Будапеште.



лучевым распространением, работы *Сифорова* [10], [11], посвященные анализу пропускной способности каналов радиосвязи со случайно изменяющимися параметрами, и ряд других.

Следует, однако отметить, что построение теории помехоустойчивости и пропускной способности каналов связи со случайно изменяющимися параметрами, и в частности, создание теории помехоустойчивости и пропускной способности каналов связи с многолучевым распространением, находится еще в начальной стадии.

В настоящей работе излагаются некоторые результаты проведенных автором исследований пропускной способности каналов радиосвязи с многолучевым распространением волн.

### § 1. Классификация каналов связи и их параметры

Каналы связи со случайными изменениями параметров можно классифицировать по различным признакам. Одним из таких признаков является количество лучей при распространении волн от входа к выходу канала.

В однолучевых каналах связи распространение волн происходит одним лучом, который, вообще говоря, может подвергаться случайным флуктуациям поглощения и времени распространения.

В многолучевых каналах связи распространение волн от входа к выходу канала происходит несколькими лучами, причем каждый из этих лучей может также подвергаться случайным изменениям поглощения и времени распространения. Многолучевые каналы различаются по количеству лучей. Возможны двухлучевые, трехлучевые, а также  $k$  — лучевые каналы, где  $k$  — любое целое число.

Множество разнообразных каналов связи со случайными изменениями параметров можно расположить в порядке возрастающей их сложности. Простейшим из них является однолучевой канал, в котором поглощение луча является случайной функцией времени. Оценка пропускной способности такого канала связи дана в работе *Овсеевича* и *Пинскера* [8].

Следующим, в порядке возрастания сложности, является однолучевой канал, в котором время распространения волны от входа к выходу изменяется по случайному закону. Далее следует однолучевой канал, поглощение и время распространения волн в котором изменяются по статистически независимым или связанным случайным законам во времени.

Среди двухлучевых каналов существуют каналы, в которых один луч не подвергается никаким изменениям, а другой испытывает случайные изменения поглощения или случайные изменения времени распространения. Возможны такие каналы, где при неизменном первом луче второй луч подвержен как случайным изменениям поглощения, так и времени распрост-



Ранения, совершающимся независимо или коррелированно. Наконец, возможны двухлучевые каналы со случайными изменениями времени распространения волн каждого луча или с одновременными статистически независимыми или зависимыми случайными изменениями как поглощения, так и времени распространения того и другого луча.

Аналогично трехлучевые и вообще многолучевые каналы можно расположить в порядке их возрастающей сложности.

Нам представляется, что наряду с исследованием пропускной способности и помехоустойчивости многолучевых каналов в общем виде, целесообразно дать анализ отдельных частных видов приведенных выше каналов. Некоторые из этих видов исследуются в данной работе.

Классификацию каналов связи со случайными изменениями параметров целесообразно производить не только по их структуре, в смысле количества лучей и характера случайных изменений каждого луча, но также и по их свойствам и, прежде всего, по такому важнейшему показателю как пропускная способность.

Мы полагаем, что наряду с общим понятием пропускной способности по Шеннону [3] целесообразно ввести еще ряд параметров, более полно характеризующих канал связи со случайными изменениями его свойств.

Важнейшим из таких понятий является собственная пропускная способность канала, под которой мы будем понимать предел, к которому стремится пропускная способность, когда мощность передаваемого через него полезного сигнала неограниченно возрастает.

Иначе говоря, собственная пропускная способность канала связи представляет собою наибольшую возможную его пропускную способность, которую можно получить при использовании достаточно большой мощности полезного сигнала и наивыгоднейшем его кодировании.

В обычных каналах с постоянными параметрами и аддитивно действующими помехами пропускная способность неограниченно возрастает при возрастании мощности полезных сигналов. Это положение непосредственно следует из формулы Шаннона для пропускной способности:

$$C = \Delta f \log_2 \left( 1 + \frac{P_c}{P_m} \right), \quad (1)$$

где  $\Delta f$  — полоса частот канала,  $P_c$  — мощность полезного сигнала, а  $P_m$  — мощность аддитивно накладывающегося флюктуационного шума. В самом деле, при  $P_c \rightarrow \infty$  и постоянных значениях  $\Delta f$  и  $P_m$  величина  $C$  неограниченно возрастает.

В каналах со случайно изменяющимися параметрами, как это доказывается ниже, при неограниченном возрастании мощности полезного сигнала пропускная способность может либо неограниченно возрастать, либо стре-



миться к определенному пределу в зависимости от типа канала и его структуры.

Условимся каналы со случайными изменениями параметров, в которых пропускная способность при неограниченном возрастании мощности полезных сигналов также неограниченно возрастает, называть каналами первого рода, а каналы, в которых при тех же условиях пропускная способность стремится к определенному пределу, — каналами второго рода. Ниже мы найдем необходимое и достаточное условие принадлежности заданного многолучевого канала к тому или иному роду в этом смысле.

Другое важное понятие, как нам представляется, — это условная пропускная способность, под которой мы, вообще говоря, будем понимать наибольшую возможную скорость передачи информации через данный канал со сколь угодно малой частотой вызванных помехами ошибок при выполнении определенных условий. Так, например, если структура многолучевого канала неизвестна и если в качестве входного сигнала взять распределение по нормальному закону флюктуации с равномерным распределением мощности по спектру, то мы получим условную пропускную способность  $C_y$ , которая будет меньше или в крайнем случае равна пропускной способности по Шеннону.

Введенная выше собственная пропускная способность может быть также условной или безусловной. Безусловная собственная пропускная способность канала представляет собой наибольшую возможную его пропускную способность, которая получается при самом невыгоднейшем выборе всех определяющих ее величин, т. е. с учетом выбора невыгоднейшего кодирования входного сигнала для нейтрализации многолучевых свойств и неравномерного распределения мощности внутренних помех по спектру, с учетом выбора достаточно большой мощности полезного сигнала и т. д.

Условная собственная пропускная способность канала связи представляет собой его собственную пропускную способность, которая получается при выполнении определенных условий, например, при отсутствии нейтрализации многолучевых свойств канала и применении в качестве входного сигнала нормальных флюктуаций с равномерным распределением мощности по спектру. Параметр

$$\eta_y = \frac{C_y}{C},$$

т. е. отношение условной пропускной способности к безусловной характеризует, в какой мере наложение тех или иных условий влияет на пропускную способность. Если параметр  $\eta_y$  близок к единице, то выполнение поставленных условий не приводит к заметному понижению пропускной способности.

## § 2. Пропускная способность при медленных изменениях параметров

Пропускная способность канала связи с постоянными параметрами при наличии аддитивно накладывающихся флюктуационных помех выражается формулой (1).

Предположим, что в канале имеют место медленные случайные изменения его параметров. Тогда мощность сигнала  $P_c$  будет медленно меняющейся функцией времени  $P_c(t)$ . При таком достаточно медленном изменении мощности  $P_c$  всегда можно выбрать промежуток времени  $\Delta t$ , в течение которого: 1) мощность  $P_c$  остается практически постоянной. 2) путем выбора соответствующего кодирования можно обеспечить скорость передачи информации, достаточно близкую к пропускной способности  $C$ . Поэтому в данном случае мы можем полагать, что через рассматриваемый канал возможна передача информации со скоростью  $C$ , выражающейся приблизительно формулой (1) и являющейся медленно меняющейся функцией времени.

Полагая

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{P_c}{P_{c \text{ med.}}} \\ \beta &= \frac{P_{s \text{ med.}}}{P_m} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $P_{c \text{ med.}}$  — средняя мощность сигнала, взятая за весьма большой промежуток времени, формулу (1) можно представить в виде

$$C = \Delta f \cdot \log_2(1 + \beta Z).$$

При отсутствии случайных изменений параметров канала и наличии в нем средней мощности сигнала  $P_{c \text{ med.}}$  пропускная способность  $C_0$  в соответствии с формулой (1) будет:

$$C_0 = \Delta f \cdot \log_2(1 + \beta).$$

Составляя отношение  $\frac{C}{C_0}$ , получим:

$$x = \frac{C}{C_0} = \frac{\log_2(1 + \beta Z)}{\log_2(1 + \beta)} = \frac{\ln(1 + \beta Z)}{\ln(1 + \beta)} = \varphi(z). \quad (3)$$

Обозначим через  $P(x)$  плотность распределения вероятностей величины  $x$ , которая согласно (3) является функцией случайной величины  $Z$ .

Математическое ожидание величины  $x$ , равное отношению возможной средней скорости  $C_{\text{med.}}$  передачи информации через рассматриваемый канал



со случайно изменяющимися параметрами и пропускной способности  $C_0$ , которая может быть получена в канале с постоянными параметрами при той же средней мощности сигнала, будет

$$\eta = \frac{C_{\text{med}}}{C_0} = \int_0^{\infty} xp(x) dx = F(\beta). \quad (4)$$

Применим формулы (3) и (4) к каналу связи, в котором передаваемый сигнал расщепляется на большое количество лучей, причем колебательные процессы в каждом луче подвергаются случайным изменениям по фазе, а затем складываются. Как известно распределение вероятностей амплитуды сигнала на выходе такого канала подчиняется закону Релея.

Плотность распределения вероятности величины  $a = \frac{E_m}{E_{m0}}$ , где  $E_m$  — случайная амплитуда поля сигнала, а  $E_{m0}$  — наивероятнейшая амплитуда этого поля, будет

$$p_E(a) = ae^{-\frac{1}{2}a^2}.$$

Полагая

$$Z = f(a) = \frac{1}{2} a^2,$$

где  $Z$  — величина, пропорциональная мощности полезного сигнала, найдем плотность распределения вероятностей  $q(z)$  этой величины  $z$ .

В соответствии с известной формулой теории вероятностей будем иметь

$$q(z) = \left[ \frac{p_E(a)}{f'(a)} \right]_{a=\Phi(z)}, \quad (5)$$

где  $\Phi(z)$  — функция, обратная функции  $f(a)$ , равная  $\sqrt{2z}$ .

Подставляя сюда развернутые выражения для функций  $p_E(a)$ ,  $f(a)$  и  $\Phi(z)$ , получим:

$$q(z) = e^{-Z}.$$

Так как математическое ожидание величины  $z$

$$M(z) = \int_0^{\infty} zq(z) dz = \int_0^{\infty} ze^{-z} dz = 1,$$

то эта величина  $z$  представляет собой отношение случайной мощности сигнала  $P_c$  к средней его мощности  $P_{c,\text{med}}$ , т. е. выражается первой формулой (2).

Плотность распределения вероятностей  $p(x)$  величины  $x$  [см. формулу (3)] будет

$$p(x) = \left[ \frac{q(z)}{\varphi'(z)} \right]_{z=\theta(x)},$$

где  $\theta(x)$  — функция, обратная функции  $\varphi(z)$  и равная в соответствии с формулой (3)

$$\Theta(x) = \frac{1}{\beta} [e^{x \ln(1+\beta)} - 1].$$

Подставляя в формулу для  $p(x)$  развернутые выражения функций  $q(z)$  [формула (5)],  $\varphi(z)$  [формула (3)] и  $\theta(x)$ , получим

$$p(x) = \frac{\ln(1+\beta)}{\beta} e^{\frac{1}{\beta}} [(1+\beta)^x \cdot e^{-\frac{1}{\beta}(1+\beta)^x}]$$

и, согласно (4), будем иметь

$$\eta = \frac{C_{\text{med}}}{C_0} = \frac{\ln(1+\beta)}{\beta} e^{\frac{1}{\beta}} \int_0^{\infty} x(1+\beta)^x e^{-\frac{1}{\beta}(1+\beta)^x} dx.$$

Вводя подстановку

$$y = \frac{(1+\beta)^x}{\beta},$$

получим

$$\eta = \frac{e^{\frac{1}{\beta}}}{\ln(1+\beta)} \cdot \int_{\frac{1}{\beta}}^{\infty} [\ln(\beta y)] \cdot e^{-y} dy$$

или, интегрируя по частям, будем иметь

$$\eta = \frac{e^{\frac{1}{\beta}}}{\ln(1+\beta)} \cdot \int_{\frac{1}{\beta}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Так как

$$\int_{\frac{1}{\beta}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = -Ei\left(-\frac{1}{\beta}\right),$$

то

$$\eta = \frac{C_{\text{med}}}{C_0} = \frac{e^{\frac{1}{\beta}} Ei\left(-\frac{1}{\beta}\right)}{\ln(1+\beta)}. \quad (6)$$



Формула (6) дает возможность вычислить нижний предел пропускной способности  $C_{med}$  для рассмотренного канала связи с медленными случайными изменениями параметров, если известны пропускная способность  $C_0$  канала с постоянными параметрами и величина  $\beta$  [см. формулу (2)], равная отношению средней мощности сигнала к мощности помех.

На фиг. 1 дана построенная по формуле (6) зависимость коэффициента  $\eta$  от параметра  $\beta$ . Из этого графика видно, что коэффициент  $\eta$  при изменении  $\beta$  от 0 до  $\infty$  сначала убывает от 1 до 0,83, а затем возрастает и стремится к 1. Отсюда следует, что нижний предел коэффициента  $\eta$  уменьшения пропуск-

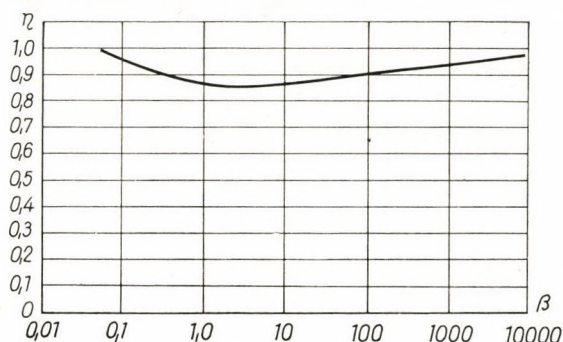


Рис. 1. Зависимость коэффициента уменьшения пропускной способности от отношения мощности сигнала к помехе

ной способности канала с медленными изменениями амплитуды по закону Релея всегда больше 0,83. Иначе говоря, в данном случае пропускная способность канала связи вследствие случайного изменения его параметров понижается не более чем на 17% при любом отношении сигнала к шуму.

### § 3. Условия получения высокой пропускной способности

В настоящем разделе находятся условия, которым должен удовлетворять многолучевой канал связи со случайными изменениями параметров для того, чтобы его пропускная способность была весьма высокой при низком уровне аддитивных помех.

Пусть на входе канала связи со случайными изменениями параметров действует полезный сигнал

$$x = f(t). \quad (7)$$

с частотным спектром, лежащим в полосе частот  $\Delta f$ , равной полосе канала.

Согласно теореме Котельникова сигнал  $x = f(t)$  за промежуток времени  $T$  вполне характеризуется  $n$  дискретными его значениями

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

взятыми в моменты времени

$$t_1, t_2, \dots, t_n,$$

где

$$n = 2T\Delta f. \quad (8)$$

Предполагая, что в канале связи имеет место многолучевое распространение волн, причем каждый луч подвергается случайным изменениям амплитуды и времени распространения, полезный сигнал  $y$  на выходе канала при отсутствии аддитивных помех можно представить в виде

$$y = \left[ \sum_{i=1}^k \alpha_i f(t - \tau_i) \right]_{\Phi}, \quad (9)$$

где  $\alpha_i$  — случайная величина, характеризующая изменение амплитуды  $i$  — того луча,  $\tau_i$  — случайное время распространения  $i$  — того луча,  $k$  — количество лучей, а индекс  $\Phi$  указывает на то, что из всех составляющих спектра суммы  $\Sigma$  выделяются лишь те, которые лежат в полосе частот  $\Delta f$ .

Величины  $\alpha_i$  и  $\tau_i$  являются случайными функциями времени. Пусть спектр частот величины  $\alpha_i$  лежит в пределах от 0 до  $(\Delta_i F)_a$  герц, а величины  $\tau_i$  — от 0 до  $(\Delta_i F)_\tau$  герц.

По теореме Котельникова величина  $\alpha_i$  за промежуток времени  $T$  вполне характеризуется

$$N_{i\alpha} = 2T(\Delta_i F)_a \quad (10)$$

дискретными ее значениями, а величина  $\tau_i$  — соответственно

$$N_{i\tau} = 2T(\Delta_i F)_\tau \quad (11)$$

дискретными значениями.

Количество дискретных значений, характеризующих совокупность величин  $\alpha_i$  и  $\tau_i$ , будет

$$N_i = N_{i\alpha} + N_{i\tau} = 2T [(\Delta_i F)_a + (\Delta_i F)_\tau],$$

а количество дискретных значений, характеризующих множество величин  $\alpha_i$  и  $\tau_i$ , для всех  $k$  — лучей канала, будет

$$N_{i\text{общ}} = \sum_{i=1}^k N_i = 2T \sum_{i=1}^k [(\Delta_i F)_a + (\Delta_i F)_\tau]. \quad (13)$$

Рассмотрим составляющую  $y_i$  входного сигнала  $y$ , обусловленную  $i$ -тым лучом

$$y_i = [\alpha_i f(t - \tau)]_{\Phi}$$

в моменты времени

$$t_1 - t_0, t_2 - t_0, \dots, t_n - t_0, \quad (14)$$

где  $t_0 = \text{const.}$



Выберем величины  $t_0$  и  $T$  так, чтобы практически весь выходной сигнал  $y$ , обусловленный наложением всех лучей, действовал в течение промежутка времени  $T$ , а за его пределами этот сигнал был бы ничтожно мал. Для выполнения этого условия величина  $T$ , очевидно, должна быть достаточно велика.

Согласно теореме Котельникова значение функции  $f(t - \tau_i)$ , взятое в любой из моментов времени (14), однозначно определяется совокупностью  $n$  значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Так как количество дискретных значений, характеризующих совокупность величин  $a_i$  и  $\tau_i$ , согласно (12), равно  $N_i$ , то общее количество дискретных значений, от которых зависит составляющая  $y_i$  выходного сигнала, обусловленная  $i$ -тым лучом, будет равно  $n + N_i$ .

Аналогично для  $j$ -того луча общее количество дискретных значений, которыми он определяется, будет равно  $n + N_j$ . Здесь первые  $n$  значений те же, что и для  $i$ -того луча, а последние  $N_j$  значений отличны от соответствующих значений  $i$ -того луча.

В соответствии с этим общее количество дискретных значений, от которых зависит выходной сигнал (9), будет равно

$$n + \sum_{i=1}^k N_i = n + \sum_{i=1}^k (N_{ia} + N_{iz}). \quad (15)$$

Предположим, что выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^k N_i < n. \quad (16)$$

Выберем из общего количества  $n$  значений входного сигнала (7)

$$n - \sum_{i=1}^k N_i$$

значений для передачи полезной информации, а остальным  $\sum_{i=1}^k N_i$  величинам придадим постоянные значения. Будем считать эти значения известными на выходном конце исследуемого канала связи.

По теореме Котельникова выходной сигнал  $y$  [см. формулу (9)] полностью определяется совокупностью  $n$  дискретных значений. Каждое из этих значений может быть найдено путем непосредственного или косвенного измерения выходного сигнала. С другой стороны, каждое из этих значений является известной функцией от  $n - \sum_{i=1}^k N_i$  неизвестных значений входного сигнала, избранных для передачи полезной информации,  $\sum_{i=1}^k N_i$  известных постоянных значений входного сигнала и  $\sum_{i=1}^k N_i$  неизвестных значений, характеризующих случайно изменяющиеся свойства канала связи.

Таким образом, при выполнении неравенства (16) и избранном способе передачи информации мы можем составить  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными, решая которые, получим все  $n - \sum_{i=1}^k N_i$  значений входного сигнала, избранных для передачи полезной информации, и все  $\sum_{i=1}^k N_i$  значений, характеризующих случайно изменяющиеся свойства  $k$ -лучевого канала.

В пределах выбранной идеализации, заключающейся в принятии ограниченных частотных спектров входного и выходного сигналов, а также случайных изменений параметров канала при точном определении  $n$  значений выходного сигнала, в результате решения указанной системы уравнений, мы получим точные значения всех  $n - \sum_{i=1}^k N_i$  величин входного сигнала.

Отсюда следует, что в пределах выбранной идеализации и соблюдении сформулированных выше условий через рассматриваемый канал связи можно передавать неограниченное количество информации. Иначе говоря, пропускная способность канала связи получается бесконечно большой. Такого рода каналы связи мы условились называть каналами первого рода.

Подставляя в неравенство (16), соотношения (8) и (13), получим

$$\sum_{i=1}^k [(A_i F)_a + (A_i F)_c] < \Delta f. \quad (17)$$

Левая часть неравенства (17) представляет собой общую ширину полосы частотных спектров всех статистически независимых случайных изменений параметров многолучевого канала связи, а правая часть — полосу пропускания частот этого канала.

Поэтому, исходя из найденного условия (17), можем считать доказанной следующую теорему:

**Т е о р е м а.** Если общая ширина полосы частотных спектров статистически независимых случайных изменений амплитуд и длительностей распространения сигналов во всех лучах канала с конечным числом лучей меньше его полосы пропускания частот, то при неограниченном понижении уровня аддитивных помех пропускная способность канала неограниченно возрастает.

Таким образом, в отличие от обычного случая простого аддитивного наложения флюктуационных помех, наличие дополнительных шумовых компонент в спектре передаваемого полезного сигнала, вызванных случайными изменениями параметров, не ограничивает пропускной способности канала. Это объясняется тем, что в данном случае дополнительные шумовые компоненты спектра имеют сильную коррелятивную связь.



Если неравенство (17) не выполняется, т. е.

$$\sum_{i=1}^k \Delta_i F)_i + (\Delta_i F)_i] \geq 1 \quad f \quad (18)$$

или

$$\sum_{i=1}^k N_i \geq n, \quad (19)$$

то в указанной выше системе  $n$  уравнений количество неизвестных будет больше или равно  $n$ . Поэтому в данном случае при выделении любого количества значений входного сигнала из общего их числа  $n$  для передачи полезной информации эти значения не могут быть точно определены даже при полном отсутствии аддитивных помех.

Отсюда следует, что при невыполнении неравенства (17) пропускная способность канала стремится к конечной величине, если уровень аддитивных помех неограниченно понижается. Такого рода каналы мы условились называть каналами второго рода. При выполнении же условия (17), когда пропускная способность стремится к бесконечности при неограниченном понижении уровня аддитивных помех, рассматриваемый канал будет принадлежать к каналам первого рода.

Из изложенного ясно, что неравенство (17) является необходимым и достаточным условием принадлежности исследуемого канала к каналам первого рода.

Если между параметрами  $a_i$  и  $\tau_i$  при  $1 \leq i \leq k$  существует статистическая связь, то общее количество дискретных значений, характеризующих это множество параметров, будет, вообще говоря, меньше  $\sum_{i=1}^k N_i$  [см. формулу (13)]. Исходя из этого, легко убедиться, что при наличии статистической связи между случайными изменениями параметров канала условие (17), также как и прежде, будет являться достаточным, но перестанет быть необходимым. Иначе говоря, в этом случае при выполнении условия (17) канал связи будет принадлежать к каналам первого рода, а при его невыполнении о принадлежности канала к тому или иному роду нельзя сделать никаких заключений.

Следует отметить, что сделанный выше вывод о неограниченной пропускной способности верен лишь для принятой идеализации об ограниченных частотных спектрах случайных изменений параметров канала и случайных изменений полезного сигнала. При других более близких к действительности идеализациях, учитывающих неограниченность частотных спектров случайных изменений параметров и другие факторы, пропускная способность при неограниченном понижении уровня помех для всех приведенных выше типов каналов оказывается конечной. Однако и здесь для каналов с достаточно медленными случайными изменениями поглощения



и времени распространения при не слишком большом количестве лучей пропускная способность получается весьма большой. Она оказывается значительно больше пропускной способности, рассчитанной по обычным формулам для каналов с постоянными параметрами и эквивалентными флюктуационными помехами.

На основе приведенного анализа можно сформулировать следующие основные свойства каналов со случайно изменяющимися параметрами, вытекающие из доказанной выше теоремы и неравенств (17) и (18).

1. Многолучевые каналы связи с достаточно медленными случайными изменениями поглощения и продолжительности распространения волн в каждом луче принадлежат к каналам первого рода, т. е. имеют весьма высокую пропускную способность при низком уровне аддитивных помех.

2. При увеличении скорости изменения параметров канала и увеличении числа его лучей, начиная с некоторого места, имеет место скачкообразное изменение его свойств, заключающееся, в частности, в весьма резком понижении пропускной способности. В процессе такого рода изменений происходит скачкообразный переход канала первого рода в канал второго рода.

3. При расширении полосы частот многолучевого канала с заданным постоянным числом лучей и заданными скоростями изменений его параметров, начиная с некоторого значения полосы, происходит скачкообразный переход канала второго рода в канал первого рода, что соответствует резкому повышению пропускной способности.

В частности, при соединении двух каналов второго рода с весьма ограниченными пропускными способностями и обладающими полосами пропускания частот  $\Delta_1 f$  и  $\Delta_2 f$  в общий канал с суммарной полосой  $\Delta_1 f + \Delta_2 f$  оказывается возможным получить канал первого рода, обладающий весьма высокой пропускной способностью.

#### § 4. Пропускная способность каналов со случайными изменениями поглощения

В настоящем разделе рассматривается задача об определении нижней границы пропускной способности однолучевого канала связи, в котором поглощение волн является случайной функцией времени при одновременном действии аддитивных флюктуационных помех.

В работе *Овсеви́ча и Пинскера* [8] дается оценка пропускной способности однолучевого канала со случайно изменяющимся поглощением на основе общего математического выражения Шеннона — *Колмогорова* [5] для количества информации одного случайного объекта относительно другого.



Здесь дается исследование нижней границы пропускной способности на основе предложенного В. А. Котельниковым способа компенсации случайных изменений поглощения, основанного на выделении части спектра канала для измерения случайных параметров поглощения и использования найденных параметров для компенсации, возникающей в канале паразитной амплитудной модуляции.

На фиг. 2 приведена диаграмма, иллюстрирующая использование частотного спектра исследуемого канала. Здесь  $\Delta f$  — полная полоса частот канала;  $\Delta_0 f$  — полоса частот измерительного канала, предназначенного

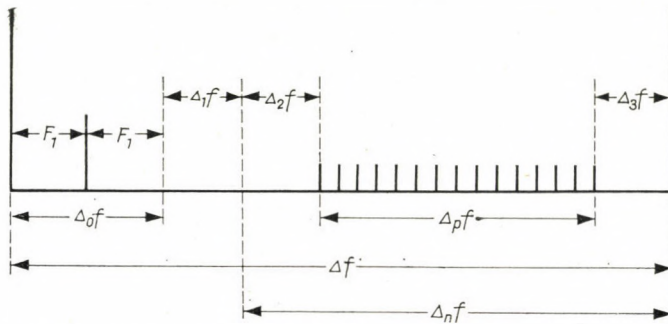


Рис. 2. Диаграмма, иллюстрирующая использование частотного спектра канала

для определения случайных параметров поглощения;  $\Delta pf$  — рабочая полоса частот, в которой расположены составляющие сигнала, несущие полезную информацию;  $\Delta nf$  — полоса частот приемника полезных информационных сигналов;  $F_1$  — наивысшая частота модуляции, вызванной случайными изменениями поглощения;  $\Delta_1 f$ ,  $\Delta_2 f$  и  $\Delta_3 f$  — защитные полосы частот.

Выходной рабочий сигнал  $y$  для рассматриваемого канала без нарушения общности можно представить в виде:

$$y = (1 + a)x + \gamma, \quad (20)$$

где  $x$  — сигнал на входе канала,  $a$  — случайная величина, характеризующая изменения поглощения и  $\gamma$  — аддитивные помехи.

Все входящие в эту формулу величины являются случайными функциями времени. При этом величины  $x$ ,  $a$  и  $\gamma$  статистически независимы друг от друга их математические ожидания равны нулю, т. е.

$$Ma = Mx = My = 0. \quad (21)$$

Обозначим сигнал на входе измерительного канала через  $x_0$ , полагая при этом, что он представляет собой гармоническую функцию времени с постоянной амплитудой и частотой, расположенной посередине полосы измерительного канала.

Средние значения квадратов величин  $x$ ,  $x_0$  и  $\gamma$ , взятые за достаточно большой промежуток времени, т. е. величины  $\bar{x}^2$ ,  $\bar{x}_0^2$  и  $\bar{\gamma}^2$  в некотором масштабе соответственно выражают мощности полезного сигнала, измерительного сигнала и аддитивных помех.

Предположим, что входящий сигнал измерительного канала подводится к идеальному безынерционному линейному детектору. Тогда при отсутствии аддитивных помех в измерительном канале и при условии, что в частотном спектре случайной величины  $a$  не содержится частот, превышающих  $F$ , после детектирования мы получим напряжение в некотором масштабе точно равное  $1 + a$ .

В действительности, вследствие наличия аддитивных помех в измерительном канале, а также из-за того, что в спектре случайной величины  $a$  содержатся частоты, более высокие, чем  $F_1$ , выходное напряжение детектора будет равно

$$1 + a + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — случайная функция времени.

Если мощность аддитивных помех мала по сравнению с мощностью измерительного сигнала и почти весь энергетический спектр величины  $a$  сосредоточен в диапазоне частот от 0 до  $F_1$ , то величина  $\varepsilon$  будет в среднем много меньше величины  $a$ .

Допустим, что обратная величина по отношению к выходному напряжению детектора измерительного канала используется для амплитудной модуляции выходного рабочего сигнала  $y$ . Тогда в результате модуляции мы получим сигнал

$$x' = \frac{y}{1 + a + \varepsilon} = \frac{(1 + a)x + \gamma}{1 + a + \varepsilon}.$$

В частном случае, когда аддитивные помехи отсутствуют и спектр частот величины  $a$  не содержит составляющих с частотами, более высокими, чем  $F_1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  и  $x' = x$ , т. е. в этом случае применение такого рода модуляции позволяет точно восстановить передаваемый сигнал  $x$ , что соответствует бесконечно большой пропускной способности исследуемого канала. Этот вывод находится в согласии с доказанным нами ранее положением о том, что при  $F_1 < \Delta f$  рассматриваемый канал относится к каналам первого рода.

Если величины  $\gamma$  и  $\varepsilon$  отличаются от нуля, то погрешность  $\Delta$  при определении входного сигнала  $x$  рассмотренным способом будет

$$\Delta = x' - x = \frac{(1 + a)x + \gamma}{1 + a + \varepsilon} - x.$$



Предполагая, что аддитивные помехи весьма слабы по сравнению с полезными сигналами и мощность всех составляющих с частотами  $F > F_1$  в энергетическом спектре величины  $\alpha$  весьма мала по сравнению с мощностью полного энергетического спектра этой величины, можем считать в среднем  $|\gamma| \ll 1$  и  $|\varepsilon| \ll 1$ .

Разлагая выражение для погрешности  $\Delta$  в ряд по степеням  $\gamma$  и  $\varepsilon$  и отбрасывая малые величины высших порядков, получим

$$\Delta = -\frac{\varepsilon x}{1 + \alpha} + \frac{\gamma}{1 + \alpha}.$$

Так как величины  $x$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  и  $\gamma$  статистически независимы и математическое ожидание каждой из них равно нулю, то

$$M\Delta = 0.$$

Дисперсия погрешности  $\Delta$  будет:

$$D\Delta = M(\Delta - M\Delta)^2 = M\Delta^2 = M\left(-\frac{\varepsilon x}{1 + \alpha} + \frac{\gamma}{1 + \alpha}\right)^2$$

или после преобразований

$$D\Delta = M\left[\frac{\gamma^2 - 2\gamma\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2}{(1 + \alpha)^2}\right].$$

Применяя теоремы о математическом ожидании суммы и произведения случайных величин, имея в виду при этом, что величины  $\gamma^2 - 2\gamma\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2$  и  $\frac{1}{(1 + \alpha)^2}$  статистически независимы и учитывая соотношение (21), получим

$$D\Delta = K(\overline{\gamma^2 + \varepsilon^2 x^2}), \quad (22)$$

где

$$K = M\left[\frac{1}{(1 + \alpha)^2}\right]. \quad (23)$$

Так как при  $|\alpha| < 1$

$$\frac{1}{(1 + \alpha)^2} = 1 - 2\alpha + 3\alpha^2 - 4\alpha^3 + 5\alpha^4 - \dots$$

и  $M\alpha = 0$ , то

$$K = 1 + 3\bar{\alpha}^2 - 4\bar{\alpha}^3 + 5\bar{\alpha}^4 - \dots$$

Если выполняется неравенство

$$|\alpha| < \frac{3}{4}, \quad (24)$$

то члены знакопеременного ряда для величины  $K$  убывают, и мы можем написать

$$K < K_0,$$

где

$$K_0 = 1 + 3\bar{\alpha}^2. \quad (25)$$

Следовательно, при выполнении условия (24) справедливо соотношение:

$$D \Delta < (1 + 3\bar{\alpha}^2)(\bar{\gamma}^2 + \bar{\varepsilon}^2 \bar{x}^2). \quad (26)$$

Найдем теперь развернутое выражение для величины  $\bar{\varepsilon}^2$ , входящей в формулы (22) и (26) для дисперсии  $DF$ , исходя из рассмотрения процессов, происходящих в измерительном канале.

Обозначим через  $G(F)$  спектральную плотность величины  $\alpha$ . Тогда будем иметь

$$\int_0^{\infty} G(F) dF = \bar{\alpha}^2, \quad (27)$$

где  $\bar{\alpha}^2$  представляет собой интенсивность флюктуаций случайной величины  $\alpha$ .

Интенсивность флюктуаций для части спектра в области частот от  $F_1$  до  $\infty$  будет

$$\int_{F_1}^{\infty} G(F) dF = \beta \bar{\alpha}^2, \quad (28)$$

где  $\beta$  представляет собой отношение интенсивности флюктуаций компонентов спектра величины  $\alpha$  с частотами выше  $F_1$  к интенсивности флюктуаций во всем спектре частот от 0 до  $\infty$ .

Если спектральная плотность изменяется по нормальному закону

$$G = G_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{F}{F_0}\right)^2},$$

то

$$\int_0^{\infty} G(F) dF = \sqrt{\frac{\pi}{2}} G_0 F_0,$$

а

$$\int_{F_1}^{\infty} G(F) dF = G_0 F_0 \int_{\frac{F_1}{F_0}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2} dz.$$



Так как при  $\frac{F_1}{F_0} \gg 1$

$$\int_{\frac{F_1}{F_0}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \approx \frac{1}{\left(\frac{F_1}{F_0}\right)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{F_0}\right)^2},$$

то

$$\int_{F_1}^{\infty} G(F) dF \approx \frac{G_0 F_0^2}{F_1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{F_0}\right)^2}.$$

Подставляя эти соотношения в (27) и (28), найдем

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{F_0}{F_1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{F_0}\right)^2}. \quad (29)$$

Эта формула позволяет, зная частоты  $F_0$  и  $F_1$ , вычислить величину  $\beta$ .

В соответствии с ранее принятыми обозначениями  $\bar{x}_0^2$  представляет собой в некотором масштабе мощность измерительного сигнала. Мощность аддитивных помех в полосе  $\Delta_0 f$  измерительного канала будет равна  $\frac{\Delta_0 f}{\Delta_n f} \gamma^2$  (см. фиг. 2).

Общая мощность боковых частот, возникающих вследствие модуляции измерительного сигнала случайно изменяющимся во времени поглощением, будет равна  $\bar{a}^2 \bar{x}_0^2$ . Часть этой мощности, обусловленная боковыми частотами, лежащими вне полосы  $\Delta_0 f$  измерительного канала, будет, очевидно, равна  $\beta \bar{a}^2 \bar{x}_0^2$ .

Представим каждую компоненту спектра аддитивных помех в полосе измерительного канала в виде суммы двух составляющих. Первую из них выберем так, чтобы она была синфазна и изменялась бы по величине с частотой, равной разности частот взятой компоненты и полезного измерительного сигнала. Вторая составляющая будет в квадратуре с измерительным сигналом — она будет изменяться по величине с той же самой разностной частотой, но со сдвигом фазы по этой разностной частоте на  $90^\circ$ . Такое разложение соответствует представлению вращающегося с разностной частотой вектора помехи  $AD$  в виде суммы двух изменяющихся по своей длине перпендикулярных друг к другу векторов  $AB$  и  $AC$  со сдвигом фаз в  $90^\circ$  по разностной частоте (фиг. 3).

Квадратурная составляющая не играет практически никакой роли при детектировании, так как она лишь изменяет фазу высокой частоты изме-

рительного сигнала, а синфазная составляющая вызывает паразитную амплитудную модуляцию.

Так как мощности указанных двух составляющих одинаковы, то общая мощность всех синфазных составляющих в полосе  $\Delta_0 f$  будет равна половине ранее найденной мощности, т. е. будет равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta_0 f}{\Delta_n f} \cdot \bar{\gamma}^2.$$

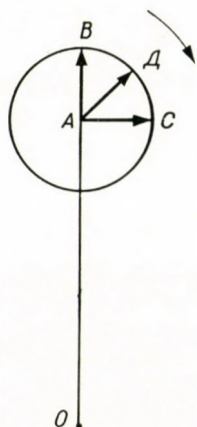


Рис. 3. Векторная диаграмма, иллюстрирующая разложение вектора помехи на синфазную и квадратурную составляющие

Учитывая изложенное, среднее значение квадрата величины  $\epsilon$  можно представить так

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{\beta \bar{\alpha}^2 \bar{x}_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_0 f}{\Delta_n f} \bar{\gamma}^2}{\bar{x}_0^2}. \quad (30)$$

Подставляя это выражение для  $\bar{\epsilon}^2$  в формулу (22), получим

$$D\Delta = K \left[ \bar{\gamma}^2 + \left( \beta \bar{\alpha}^2 \bar{x}_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_0 f}{\Delta_n f} \bar{\gamma}^2 \right) \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}_0^2} \right]. \quad (31)$$

Погрешность  $\Delta$  можно рассматривать как помеху, аддитивно накладывающуюся на полезный рабочий сигнал  $x$ . Ее дисперсия  $D\Delta$  в некотором масштабе изображает среднюю мощность этой помехи.

Вообще говоря, случайная погрешность  $\Delta$  и полезный сигнал  $x$  являются статистически зависимыми величинами. Их частотные спектры перекрываются лишь частично. Распределение вероятностей погрешности  $\Delta$  при нормальном гауссовом распределении полезного сигнала  $x$ , вообще говоря, отличается от нормального.



Наиболее опасной аддитивной помехой в максимальной мере, снижающей пропускную способность канала, является, как известно, помеха, статистически независимая от полезного сигнала, с частотным спектром в полосе этого сигнала и распределенная по нормальному гауссовому закону.

Поэтому, если вычислить пропускную способность для этих наиболее тяжелых условий, то истинная пропускная способность исследуемого канала будет больше вычисленной. Иначе говоря, полагая, что имеют место указанные наиболее тяжелые условия и применяя обычную формулу Шеннона

$$C = \Delta_p f \log_2 \left( 1 + \frac{P'_c}{P'_m} \right), \quad (32)$$

где  $P'_c$  и  $P'_m$  — соответственно средние мощности полезного сигнала и помехи, мы найдем нижнюю границу пропускной способности исследуемого канала.

Полагая в (32)  $\frac{P'_c}{P'_m} \gg 1$  и подставляя вместо  $P'_c$  величину  $\bar{x}^2$ , а вместо  $P'_m$  — величину  $D\Delta$ , получим нижнюю границу пропускной способности  $C_H$  в виде

$$C_H = \Delta_p f \cdot \log_2 \left\{ \frac{\bar{x}^2}{K \left[ \bar{\gamma}^2 + \left( \beta \bar{\alpha}^2 \bar{x}_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\Delta_0 f}{\Delta_n f} \bar{\gamma}^2 \right) \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}_0^2} \right]} \right\}. \quad (33)$$

В частном случае, когда аддитивные помехи отсутствуют,  $\bar{\gamma}^2 = 0$  и формула (33) приобретает вид

$$C_H = \Delta_p f \cdot \log_2 \frac{1}{K \beta \bar{\alpha}^2}. \quad (34)$$

Эта формула вместе с (23), (27) и (28) дает возможность вычислить нижний предел собственной пропускной способности исследуемого канала.

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^2 + \bar{x}_0^2 &= P_c \\ \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}_0^2} &= \delta \end{aligned} \right\}, \quad (35)$$

где  $P_c$  — общая мощность полезного сигнала, а  $\delta$  — отношение мощности рабочего сигнала к мощности измерительного сигнала, получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^2 &= \frac{\delta P_c}{1 + \delta} \\ \bar{x}_0^2 &= \frac{P_c}{1 + \delta} \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \Delta'f &= \Delta_n f + \Delta_0 f \\ a &= \frac{\Delta_0 f}{\Delta'f}, \end{aligned} \quad (37)$$

полагая, что  $P_m$  — мощность аддитивных шумов в полосе  $\Delta'f$ , найдем

$$\gamma^2 = (1 - a) P_m. \quad (38)$$

Вводя отношение мощностей

$$b = \frac{P_c}{P_m} \quad (39)$$

и принимая во внимание (36), (37) и (38), формулу (33) можно представить в виде

$$C_H = \Delta_p f \log_2 A, \quad (40)$$

где

$$A = \frac{b\delta}{K \left[ (1 - a) + \left( 1 - \frac{a}{2} + \beta \bar{a}^2 b \right) \delta + \frac{1}{2} a \delta^2 \right]}. \quad (41)$$

Найдем максимальное значение величины  $A$  при изменении  $\delta$ . Составляя производную  $\frac{dA}{d\delta}$ , приравнивая ее нулю и решая получившееся уравнение относительно  $\delta$ , получим

$$\delta = \sqrt{\frac{2(1 - a)}{a}}. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (41), найдем:

$$A_{\max} = \frac{b}{K \left( 1 - \frac{a}{2} + \sqrt{2a(1 - a)} + \beta \bar{a}^2 b \right)}. \quad (43)$$

При  $a \ll 1$  формула (43) принимает вид

$$A_{\max} \approx \frac{b}{K(1 + \beta \bar{a}^2 b)}. \quad (44)$$

Из отношений (40), (43) и (44) видно, что если выполняется неравенство

$$\bar{a}^2 \beta b \ll 1, \quad (45)$$



то случайные изменения поглощения в исследуемом канале связи практически не играют никакой роли и нижняя граница пропускной способности определяется уровнем аддитивных помех. В этом случае

$$C_H = \Delta_p f \log_2 \frac{b}{K \left[ 1 - \frac{a}{2} + \sqrt{2a(1-a)} \right]}. \quad (46)$$

Если же имеет место неравенство

$$\bar{a}^2 \beta b \gg 1, \quad (47)$$

то, наоборот, аддитивные помехи в канале не играют практически никакой роли и нижняя граница пропускной способности определяется флуктуациями поглощения. В этом случае нижняя граница пропускной способности выражается формулой (34).

Найдем теперь нижнюю границу собственной пропускной способности для случая, когда спектральная плотность случайного изменения поглощения изменяется по нормальному закону. Полагая, что каждая из защитных полос  $\Delta_1 f$ ,  $\Delta_2 f$  и  $\Delta_3 f$  (физ. 2) равна  $F_1$ , согласно (29) и (34), будем иметь

$$C_H = (\Delta f - 5F_1) \log_2 \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{K\bar{a}^2} \cdot \frac{F_1}{F_0} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^2} \right]$$

или

$$C_H = (\Delta f - 5F_1) \left\{ \log_2 \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{K\bar{a}^2} \cdot \frac{F_1}{F_0} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{F_1}{F_0}\right)^2 \log_2 e \right\}.$$

При  $\frac{F_1}{F_0} \gg 1$  первый член в фигурных скобках много меньше второго члена. Поэтому

$$C_H = \left( \frac{1}{2} \log_2 e \right) \left( \frac{F_1}{F_0} \right)^2 (\Delta f - 5F_1).$$

Найдем максимальное значение величины  $C_H$  при изменении  $F_1$ . Составляя производную  $\frac{\partial C_H}{\partial F_1}$ , приравнивая ее нулю и решая получившееся уравнение относительно  $F_1$ , получим

$$F_1 = \frac{2}{15} \Delta f.$$

Подставляя это соотношение в формулу для  $C_H$ , найдем

$$C_{H\text{-max.}} = 4,26 \cdot 10^{-3} \Delta f \left( \frac{\Delta f}{F_0} \right)^2.$$

Полагая здесь, например,  $F_0 = 10$  гц,  $\Delta f \equiv 10^4$  гц, получим  $C_{H, \text{max.}} = 4.26 \cdot 10^7$  двоичных единиц в секунду или 4260 двоичных единиц в секунду на один герц полосы частот канала. Этот пример показывает, что собственная пропускная способность однолучевого канала связи с медленными случайными изменениями поглощения, спектральная плотность которых распределена по нормальному закону, весьма велика.

Следует, однако, отметить, что вследствие ограниченности величины  $\alpha$  определенными пределами (например,  $|\alpha| < 1$ ), убывание спектральной плотности этой величины с ростом частоты будет более медленным по сравнению с нормальным законом и собственная пропускная способность, поэтому будет менее вычисленной. Но она все же оказывается весьма высокой.

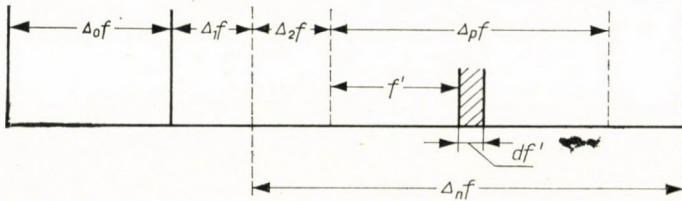


Рис. 4. Частотный спектр информационных сигналов

В приведенном выше анализе мы полагали, что нижняя граница пропускной способности исследуемого канала определяется действием аддитивных помех в полосах измерительного и рабочего каналов, а также отбрасыванием боковых частот, отстоящих от несущей частоты измерительного сигнала более, чем на  $F_1$ .

Кроме этих причин, вообще говоря, имеют место еще следующие эффекты: 1) попадание боковых частот информационных сигналов в полосу  $\Delta_0 f$  измерительного канала, 2) попадание боковых частот измерительного сигнала в полосу  $\Delta_n f$  приемного канала информационных сигналов, 3) отбрасывание боковых частот информационных сигналов, расположенных вне полосы  $\Delta_n f$ .

Следует отметить, что при надлежащем выборе защитных полос  $\Delta_1 f$ ,  $\Delta_2 f$  и  $\Delta_3 f$  указанные три эффекта оказывают весьма малое влияние на нижнюю границу пропускной способности и ими можно пренебречь.

Для количественного определения степени влияния указанных дополнительных эффектов на нижнюю границу пропускной способности найдем общую мощность боковых частот, возникающих вокруг каждой компоненты информационных сигналов и попадающих в полосу измерительного канала.

Обозначим через  $\bar{u}^2$  мощность полезных информационных сигналов, отнесенную к единице полосы частот. Тогда мощность боковых частот, обусловленных флюктуациями случайного поглощения информационных сиг-



налов в полосе  $df'$  (фиг. 4) и попадающих в полосу измерительного канала  $\Delta_0 f$  будет равна  $\frac{1}{2} \beta \bar{\alpha}^2 \bar{u}^2 df'$ , где  $\beta$  определяется из формул (27) и (28) с заменой в них величины  $F_1$  на  $f' + F_2$ , где  $F_2 = \Delta_1 f + \Delta_2 f$ . Общая мощность  $P_y$  боковых частот, попадающих в полосу измерительного канала  $\Delta_0 f$  и обусловленных паразитной амплитудной модуляцией всех информационных сигналов, будет

$$P_y = \int_0^{\Delta_0 f} \frac{1}{2} \beta(f' + F_2) \bar{\alpha}^2 \bar{u}^2 df' \approx \\ \approx \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 \bar{u}^2 \int_0^{\infty} \beta(f' + F_2) df'.$$

Согласно (29)

$$\beta(f' + F_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{F_0}{f' + F_2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{f' + F_2}{F_0} \right)^2}.$$

Подставляя это соотношение в формулу для  $P_y$ , найдем

$$P_y = \frac{1}{2} \bar{\alpha}^2 \bar{u}^2 \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{F_0}{f' + F_2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{f' + F_2}{F_0} \right)^2} df' < \\ < \frac{\bar{\alpha}^2 \bar{u}^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{F_0}{F_2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{f' + F_2}{F_0} \right)^2} df'.$$

Так как

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{f' + F_2}{F_0} \right)^2} df' = F_0 \int_{\frac{F_2}{F_0}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} \cdot dx \approx \frac{F_0^2}{F_2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{F_2}{F_0} \right)^2},$$

то

$$P_y < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \bar{\alpha}^2 \cdot \bar{u}^2 \frac{F_0^3}{F_2^2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{F_2}{F_0} \right)^2}.$$

Мощность  $P_\Phi$  боковых частот, лежащих вне полосы  $\Delta_0 f$  измерительного канала и обусловленных паразитной амплитудной модуляцией измерительного сигнала, как это было показано выше, выражается формулой

$$P_\Phi = \beta(F_1) \bar{\alpha}^2 \bar{x}_0^2.$$

Принимая во внимание, что

$$\bar{u}^2 = \frac{\bar{x}^2}{\Delta_p f},$$

составляя отношение  $\frac{P_y}{P_\Phi}$  и учитывая при этом соотношения (29) и (35), получим

$$\frac{P_y}{P_\Phi} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\Delta_p d} \cdot \frac{F_1 F_0^2}{F_2^2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{F_2^2 - F_1^2}{F_0^2} \right)}. \quad (48)$$

Полагая здесь  $F_2 = 2F_1$ , что соответствует выбору защитных полос  $\Delta_1 f = F_1$  и  $\Delta_2 f = F_1$ , найдем

$$\frac{P_y}{P_\Phi} < \frac{1}{8} \cdot \frac{\delta}{\Delta_p f} \cdot \frac{F_0^2}{F_1} \cdot e^{-\frac{3}{2} \left( \frac{F_1}{F_0} \right)^2}. \quad (49)$$

Подставляя численные значения для величин, входящих в формулу (49), легко убедиться, что даже при относительно небольшом превышении отношения  $\frac{F_1}{F_0}$  по сравнению с единицей, удовлетворяется неравенство  $\frac{P_y}{P_\Phi} \ll 1$ . Это обозначает, что при указанном выше выборе защитных полос эффектом попадания боковых частот информационных сигналов в полосу измерительного канала можно пренебречь.

Для оценки влияния эффекта попадания боковых частот измерительного сигнала в полосу  $\Delta_n f$  приемного канала информационных сигналов найдем отношение мощностей  $\frac{P_{y1}}{P_\Delta}$ , где  $P_{y1}$  — мощность боковых частот измерительного сигнала в полосе  $\Delta_n f$ , а  $P_\Delta$  — ранее найденная мощность эквивалентных аддитивных помех, равная  $D\Delta$  [формула (31)].

Полагая в формуле (31)  $\bar{\gamma}^2 = 0$ , что соответствует отсутствию аддитивных помех, получим

$$P_\Delta = K\beta(F_1) \bar{\alpha}^2 \bar{x}^2.$$

Мощность  $P_{y1}$ , очевидно, будет

$$P_{y1} = \frac{1}{2} \beta(F_1 + \Delta_1 f) \bar{\alpha}^2 \bar{x}_0^2.$$

Отсюда отношение мощностей

$$\frac{P_{y1}}{P_\Delta} = \frac{1}{2K\delta} \cdot \frac{\beta(F_1 + \Delta_1 f)}{\beta(F_1)}.$$



или, принимая во внимание (29), найдем

$$\frac{P_{y1}}{P_{\Delta}} = \frac{1}{2K\delta} \cdot \frac{F_1}{F_1 + \Delta_1 f} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{F_1 + \Delta_1}{F_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{F_1^2}{F_0^2}}. \quad (50)$$

Полагая здесь  $\Delta_1 f = F_1$ , получим

$$\frac{P_{y1}}{P_{\Delta}} = \frac{1}{4K\delta} \cdot e^{-\frac{3}{2} \left( \frac{F_1}{F_0} \right)^2} \quad (51)$$

Подставляя численные значения для величин, входящих в эту формулу, легко убедиться, что даже при относительно небольших превышениях отношения  $\frac{F_1}{F_0}$  по сравнению с единицей, удовлетворяется неравенство  $\frac{P_{y1}}{P_0} \ll 1$ . Это обозначает, что при указанном выше выборе защитных полос эффектом попадания боковых частот измерительного сигнала в полосу пропускания частот приемного канала информационных сигналов также можно пренебречь.

Для оценки влияния эффекта отбрасывания боковых частот информационных сигналов, расположенных вне полосы  $\Delta_n f$ , найдем отношение мощностей  $\frac{P_y}{P_{\Delta}}$ , где  $P_{y2}$  — мощность боковых частот информационных сигналов, лежащих вне полосы  $\Delta_n f$ .

Аналогично ранее выведенному выражению для  $P_y$  при  $\Delta_2 f = \Delta_3 f$  будем иметь

$$P_{y2} = \int_0^{\infty} \beta(f' + \Delta_2 f) \cdot \bar{a}^2 \bar{u}^2 df'.$$

Преобразовывая этот интеграл также как и интеграл для  $P_y$ , получим

$$P_{y2} < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{a}_2 \bar{u}_2 \frac{F_0^3}{(\Delta_2 f)^2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_2}{F_0} \right)^2}.$$

Принимая во внимание, что

$$\bar{u}^2 = \frac{\bar{x}^2}{\Delta_p f}$$

составляя отношение  $\frac{P_{y2}}{P_{\Delta}}$  и учитывая при этом соотношение (29), получим

$$\frac{P_{y2}}{P_{\Delta}} < \frac{1}{K} \cdot \frac{F_1}{\Delta_p f} \left( \frac{F_0}{\Delta_2 f} \right)^2 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta_2 f}{F_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{F_1}{F_0} \right)^2}.$$

Полагая здесь  $\Delta_2 f = F$ , найдем:

$$\frac{P_{y2}}{P_\Phi} < \frac{F_0^2}{KF_1 \Delta_p f} . \quad (52)$$

Если  $F_1 > F_0$  и  $\Delta_p f \gg F_0$ , то  $\frac{P_1}{P_\Phi} \ll 1$ . Это обозначает, что при указан-

ном выше выборе защитных полос эффектом отбрасывания боковых частот информационных сигналов, расположенных вне полосы  $\Delta_n f$  приемного канала, также можно пренебречь.

Таким образом, ранее найденные формулы (40) — (46) для нижней границы пропускной способности, а также формула (34) для нижней границы собственной пропускной способности исследуемого канала оказываются справедливыми с учетом всех шести рассмотренных эффектов.

Обращаясь к формулам (40) и (43) и принимая во внимание, что с расширением полосы частот  $\Delta_0 f$  измерительного канала величина  $\alpha$  [формула (37)] возрастает, а величина  $\beta$  [формула (28)] убывает, легко найти зависимость  $A_{max}$  ( $a$ ), а следовательно, и  $C_H(a)$ . Исследование этих зависимостей показало, что с расширением полосы частот  $\Delta_0 f$  измерительного канала нижняя граница пропускной способности  $C_H$  сначала возрастает, достигает максимума, а затем убывает. Чем ниже уровень аддитивных помех, т. е. чем больше величина  $b$  [формула (39)], тем более широкую полосу измерительного канала необходимо выбирать для получения  $C_{H,max}$ . При сравнительно высоких уровнях аддитивных помех полоса частот измерительного канала должна выбираться достаточно узкой.

На основании изложенного можно сформулировать следующие основные свойства однолучевых каналов со случайным изменением поглощения.

1. Однолучевые каналы связи со случайным изменением поглощения имеют весьма высокую собственную пропускную способность. Нижняя граница этой пропускной способности [формула (34)] тем выше, чем быстрее убывает спектральная плотность случайных изменений поглощения с ростом частоты. Увеличение скорости изменений флуктуаций поглощения приводит к понижению нижней границы пропускной способности канала.

2. При одновременном действии аддитивных помех и флуктуаций поглощения нижняя граница пропускной способности, вообще говоря, определяется совместным действием этих помех [формулы (40) — (43)]. При выполнении неравенства (45) она определяется аддитивными помехами, а при соблюдении условия (47) — флуктуациями поглощения.

3. Для частотной компенсации вредного влияния флуктуаций поглощения можно использовать выделение части спектра для измерения случайных параметров поглощения. Чем ниже уровень аддитивных помех, тем более широкую полосу измерительного канала необходимо выбирать для



получения наиболее высокой скорости передачи информации. При расширении полосы частот измерительного канала необходимо повышать отношение мощностей управляющего и информационного сигналов [формулы (35) и (42)].

4. При надлежащем выборе защитных полос, отделяющих измерительную часть канала от его информационной части, нижняя граница пропускной способности в основном определяется эффектами действия аддитивных помех в измерительном и информационном частях канала, а также отбрасыванием боковых частот, возникающих вследствие паразитной амплитудной модуляции измерительного сигнала и лежащих вне полосы измерительной части канала. Всеми остальными эффектами можно пренебречь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Котельников, О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. Материалы по радиосвязи к первому Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции связи. Всесоюзный энергетический комитет, 1933, 1—19.
2. В. А. Котельников, Теория потенциальной помехоустойчивости. Госэнергоиздат, 1956.
3. С. Е. SHANNON and W. WEAVER, The mathematical Theory of Communication, The University of Illinois Press, 1949, 3—89.
4. С. Е. SHANNON, The Zero Error Capacity of a Noisy Channel, IRE Transactions, Vol. IT-2. No. 3, September 1956.
5. А. Н. Колмогоров, Теория передачи информации. М., изд-во АН СССР, 1956.
6. Р. ELIAS, Predictive Coding, IRE Transactions on Information Theory, Vol. IT-1, No1, 1955.
7. А. FEINSTEIN, A new basic theorem of Information Theory, IRE Transactions, PGIT-4, 1954, p. p. 2—22.
8. И. А. Овсевич и М. С. Пинскер, Оценка пропускной способности канала связи, параметры которого являются случайными функциями времени. «Радиотехника», 1957, № 10.
9. R. PRICE and P. E. GREEN, An. Antimultipath Communication System (Rake) Report on XII General Assembly V. R. S. I., Com VI. Boulder, 1957.
10. В. И. Сифоров, О пропускной способности каналов со случайными изменениями параметров. Материалы XII Генеральной ассамблеи Международного радионаучного союза. Документ № 273, Комиссия VI, Боулдер (США), август 1957 г.
11. В. И. Сифоров, Об условиях получения высокой пропускной способности каналов связи со случайными изменениями параметров. Электросвязь, 1958, № 1.

#### РЕЗЮМЕ

Каналы связи со случайными изменениями параметров классифицируются на каналы первого и второго рода по их пропускной способности при низком уровне аддитивных помех. Введены понятия о собственной пропускной способности и условной пропускной способности канала.

Доказано, что при медленных случайных изменениях параметров многолучевого канала пропускная способность падает не более, чем на 17 процентов при любом отношении сигнала к шуму.

Найдено условие получения высокой пропускной способности канала с многолучевым распространением волн при низком уровне аддитивных помех. Доказано, что если общая ширина полосы частотных спектров всех случайно изменяющихся параметров многолучевого канала меньше его полосы пропускной частот, то при неограниченном понижении уровня аддитивных помех его пропускная способность неограниченно возрастает.



Определена нижняя граница пропускной способности канала со случайными изменениями поглощения при одновременном действии аддитивных помех.

Показано, что однолучевые каналы со случайным изменением поглощения имеют весьма высокую собственную пропускную способность.

## ZUR THEORIE DER FUNKKANÄLE MIT STOCHASTISCHEN KENNGRÖSSEN

W. I. SIFOROV

### ZUSAMMENFASSUNG

Die Funkkanäle mit stochastischen Schwankungen der Kenngrößen werden gemäß ihrer Kanalkapazität bei niedrigem Pegel der additiven Geräusche in Kanäle erster und zweiter Art klassifiziert. Die Begriffe der Eigenkanalkapazität und bedingter Kanalkapazität werden eingeführt. Es wird gezeigt, daß bei langsamen zufälligen Änderungen der Kennwerte des Mehrstrahlkanals die Kanalkapazität bei beliebigem Signal/Rausch-Verhältnis höchstens um 17% abnimmt.

Die Bedingung der Gewinnung hoher Kanalkapazität eines Kanals mit Mehrstrahlfortpflanzung der Wellen bei niedrigem Pegel der additiven Geräusche wird gefunden. Es wird gezeigt, daß wenn die gesamte Bandbreite der Frequenzspektra aller stochastisch schwankenden Kenngrößen des Mehrstrahlkanals kleiner als sein Frequenzdurchlassband ist, so wird bei unbeschränkter Herabsetzung des Pegels der additiven Geräusche die Kanalkapazität unbeschränkt zunehmen.

Die untere Grenze der Kanalkapazität bei stochastischen Änderungen der Dämpfung und gleichzeitiger Wirkung additiver Geräusche wird bestimmt. Es wird gezeigt, daß Einstrahlkanäle mit stochastischen Änderungen der Dämpfung eine sehr hohe Eigenkanalkapazität haben.

## ON THE THEORY OF RADIOCHANNELS WITH RANDOMLY VARYING PARAMETERS

V. I. SIFOROV

### SUMMARY

The radiochannels with randomly varying parameters are classified on the basis of their information capacity for a low level of additive noises into channels of the first and second kind. The notions of proper and conditional channel capacity are introduced. It was demonstrated that for low random variations of the multibeam channel parameters the channel capacity was reduced by not more than 17% for any signal-noise ratio.

The condition for obtaining a high channel capacity in the case of multibeam wave propagation for low-level additive noises was found. It was proved that if the whole bandwidth of the frequency spectra of all randomly varying parameters of the multibeam channel was less than the frequency passband of the channel, the channel capacity rose unrestricted, when the level of the additive noises was lowered to zero.

A lower limit was determined for the capacity of a channel with random variations of its attenuation and simultaneous presence of additive noises.

It was demonstrated that one-beam channels with random variations of their attenuation have a very high proper channel capacity.

## SUR LA THEORIE DES RADIOCANALUX A PARAMETRES ALEATOIRES

V. I. SIFOROV

### RESUME

Les radiocanaux à paramètres aléatoires sont classés en deux catégories, selon leur capacité en cas d'un faible niveau des bruits additifs. L'auteur introduit les notions de capacité propre et de capacité conditionnelle des canaux. Il démontre qu'en cas de variations aléatoires



des paramètres du canal à trajets multiples, la capacité du canal diminue tout au plus de 17%, pour un rapport signal/bruit quelconque.

L'auteur détermine la condition d'obtention d'une grande capacité de canal en cas de propagation d'ondes à trajets multiples, à un faible niveau des bruits additifs. Il démontre que si la largeur de bande du canal dépasse la largeur de bande totale, dans laquelle tous les paramètres du canal à trajets multiples présentent une variation aléatoire, la capacité du canal augmente infiniment en cas de l'abaissement illimité du niveau des bruits additifs.

L'étude détermine la limite inférieure de la capacité d'un canal, quand l'absorption varie aléatoirement et les bruits additifs exercent simultanément leur effet.

L'auteur démontre enfin que les canaux à trajet unique ont une très grande capacité propre quand l'absorption présente une variation aléatoire.

# ДАЛЬНИЕ СВЯЗИ НА УЛЬТРАКОРОТКИХ ВОЛНАХ\*

А. В. ПРОСИН

ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ АКАДЕМИИ НАУК СССР, МОСКВА

## **I. Некоторые вопросы теории радиорелейных линий связи с дальним тропосферным распространением УКВ**

1. В последнее время благодаря успешному развитию радиотехники и электроники и весьма обширным экспериментальным исследованиям по изучению величины и структуры электромагнитного поля ультракоротких волн (УКВ) в дальней зоне стало возможным построение радиорелейных линий, использующих дальнее тропосферное распространение УКВ.

Применение для радиорелейной связи нового вида распространения УКВ дает возможность увеличить расстояние между ретрансляционными станциями радиорелейных линий с 40—60 км до 200—500 км. При построении же радиорелейных линий в малодоступных областях (морские пространства, озера, горные области и т. д.) или на местности, представляющей большие трудности для проведения строительных и монтажных работ, использование дальнего тропосферного распространения УКВ является одним из средств для передачи телевидения и многоканальной телефонии на большие расстояния.

Проектирование и строительство линий связи, работающих за пределами горизонта, требуют проведения специальных теоретических и экспериментальных исследований по вопросам, связанным с определением искажений передаваемых сигналов при различного рода модуляциях, расчетом мощности на входе приемного устройства, учетом потерь в усилении антенн, исследованием статистических свойств принимаемых сигналов, изучением вопросов разнесенного приема и т. п. Сложность проведения указанных исследований заключается в том, что суммарный сигнал на входе приемника обуславливается различными механизмами дальнего тропосферного распространения УКВ, которые могут действовать как раздельно, так и одновременно.

Изучению различных сложных явлений, имеющих место при дальнем тропосферном распространении УКВ, посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов (работы *Б. А. Введенского*, *А. М. Обухова*, *В. И. Сифорова*, *В. А. Красильникова*, *А. Г. Аренберга*, *Г. С. Горелика*,

\* Доклад на Коллоквиум по радиорелейной связи, состоявшемся в ноябре м-це 1959 г. в Будапеште



В. А. Смирнова, В. Н. Троцкого, А. И. Калинина, С. В. Бородича, О. И. Яковлева и других в Советском Союзе, работы Букера, Гордона, Бекмана, Нортон, Беттенкура, Вилларса, Вайскопфа, Стераса, Буллингтона, Мегоу, Райса, Картиса и других за рубежом). Однако до настоящего времени почти не исследовались искажения сигналов, возникающих при передачах импульсов, телевидения и многоканальной телефонии. Недостаточно разработаны и методы расчета мощности в месте приема при использовании ненаправленных и остронаправленных антенн.

Излагаемые в первой части доклада результаты исследований посвящены, главным образом, установлению количественных соотношений, которые связывают величины искажений передаваемых сигналов, возникающие в процессе многолучевого распространения радиоволн или вследствие неоднородностей и несогласованностей линий передачи при частотной модуляции, а также средние значения и статистические характеристики принимаемых сигналов далеко за горизонтом, с параметрами радиорелейных линий и статистическими параметрами среды распространения. Анализ отмеченных вопросов проводился на основе теорий рассеяния и отражения УКВ на объемных и слоистых неоднородностях диэлектрической проницаемости воздуха.

2. В теории рассеяния радиоволн на неоднородностях диэлектрической проницаемости воздуха основной величиной, определяющей мощность на входе приемника, является эффективное сечение рассеяния (коэффициент рассеяния). Коэффициент рассеяния, в свою очередь, функционально связан с корреляционной функцией и энергетическим спектром турбулентных неоднородностей тропосферы. В ИРЭ АН СССР было введено обобщенное выражение для класса корреляционных функций турбулентных неоднородностей воздуха, которое для изотропной турбулентности записывается следующим образом:

$$B(\varrho) = \overline{(\Delta\varepsilon)^2} \frac{2^{(1-p)}}{\Gamma(p)} \cdot \left(\frac{\varrho}{l}\right)^p K_p\left(\frac{\varrho}{l}\right), \quad (1)$$

где  $\overline{(\Delta\varepsilon)^2}$  — интенсивность флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха,  $\varrho$  — расстояние между двумя точками в турбулентном потоке, в которых рассматриваются пульсации диэлектрической проницаемости,  $K_p$  — модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда),  $\Gamma$  — гамма функция,  $l$  — масштаб турбулентных неоднородностей.

Для анизотропной турбулентности следует в (1) положить:

$$\frac{\varrho}{l} = \left[ \left(\frac{x}{l_{Г1}}\right)^2 + \left(\frac{y}{l_{Г2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{l_B}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2)$$



где  $l_{Г1}$ ,  $l_{Г2}$ ,  $l_B$  — средние размеры турбулентных неоднородностей соответственно в направлении средней скорости ветра, направлении, нормальном к направлению ветра, и в вертикальном измерении.

Из анализа выражения (1) можно заключить, что почти все корреляционные функции, которые использовались до сих пор в различных вариантах теории рассеяния, являются частным случаем функции (1). Например,

при подстановке в (1) значений  $P = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ , 1 получаются функции корреляции,

которые использовались соответственно в работах В. А. Красильникова (корреляционная функция, соответствующая закону двух третей А. Н. Колмогорова, А. М. Обухова), Букера—Гордона (экспоненциальная функция корреляции), Стераса, Вилларса—Вайскопфа и Нортон. Следовательно, функция (1) дает возможность эффективно сравнивать между собой различные теории рассеяния.

3. В реальной атмосфере с течением времени меняются условия возникновения и существования турбулентного потока. Кроме того, в ней существует совокупность турбулентных и слоистых неоднородностей диэлектрической проницаемости воздуха, причем слоистые неоднородности непрерывно разрушаются турбулентным движением воздуха. При этих условиях и функция корреляции и энергетический спектр турбулентных неоднородностей, а также характер изменения интенсивности флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха с высотой, изменяются с течением времени.

Поэтому исследование средних значений сигнала (и других параметров) следует производить с таким расчетом, чтобы конечный результат давал возможность проанализировать в общем виде зависимость мощности рассеяния (и других параметров) от статистических параметров среды распространения.

На основании (1) и произвольной степенной зависимости от высоты была разработана обобщенная методика расчета мощности рассеяния при использовании ненаправленных антенн для случаев изотропной и анизотропной турбулентности тропосферы. В результате была получена инженерная формула для расчета мощности рассеяния в месте приема, которая в общем виде имеет вид:

$$\left. \frac{P}{P_{сн}} = \frac{\Gamma(p+1,5)}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\sqrt{2^{(2p+3)} - 1}}{\pi^{(2p-0,5)}} \cdot \frac{2^{(3n-2p-1)} C K R}{(2p+n+2)(2p+n+1)} \cdot \frac{\lambda^{(2p-1)} R_Э^{(2p+n+1)}}{d^{2(p+n)} (1-q)^{2(p+n+1)}} \right\} (3)$$



Здесь  $P_{сн}$  — мощность в свободном пространстве,  
 $K$  — коэффициент, учитывающий отражение радиоволн от поверхности земли,  
 $\lambda$  — длина излучаемой волны,  
 $R_{э}$  — эффективный радиус земли,  
 $d$  — расстояние между передатчиком и приемником,

$q$  — множитель, характеризующий зависимость мощности рассеяния от высоты подвеса передающей и приемной антенн,  $n$  — показатель спада интенсивности флуктуаций диэлектрической проницаемости воздуха с высотой,  $R$  — метеорологический параметр для анизотропной турбулентности, который зависит от вида корреляционной функции турбулентных неоднородностей, их средних размеров в различных направлениях и угла между направлением средней скорости ветра и плоскостью большого круга.

При  $l_{r1} = l_{r2} = l_r$  параметр  $R$  будет равен:

$$R = \frac{1}{l_r^{2p} \cdot r^{(2p+1)}} \quad (4)$$

Формула (3) дает удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными во всем диапазоне УКВ при  $p = 1$ ,  $n = 2$  и  $r = 0,6$ . В диапазоне дециметровых и метровых волн формула (3) справедлива также при  $p = 0,5$ ,  $n = 2$ ,  $r = 0,6 - 1$ . Разброс экспериментальных данных, имеющий место при исследованиях дальнего тропосферного распространения УКВ, также легко объясняется (3). Так, например, при  $n = 2$ ,  $r = 0,6$  для этого достаточно изменить индекс  $p$  от  $\frac{1}{3}$  до 1. Значения параметров  $p$ ,  $r$  и  $n$ , при которых (3) дает удовлетворительные результаты, наблюдаются экспериментально.

4. В радиорелейных линиях связи, использующих дальнее тропосферное распространение УКВ, для передачи широкой полосы частот (передача телевидения, импульсов очень малой длительности и многоканальной телефонии) используются антенны с очень большим коэффициентом направленности.

При применении таких антенн геометрические размеры их получаются настолько большими, что нарушается синфазное и равномерное по амплитуде распределение поля в рабочей поверхности антенны. Это приводит к уменьшению реального коэффициента усиления антенны по сравнению с теоретическим, вычисленным в предположении плоской волны. При значительных размерах антенн это уменьшение усиления антенн (потери в усилении антенн) может быть весьма существенным, и его необходимо учитывать при расчете линий связи.



С целью определения мощности рассеяния и потерь в усилении антенн при применении остронаправленных антенн была разработана обобщенная методика расчета мощности рассеяния. На основании этой методики было установлено, что для направленных антенн мощность рассеяния в месте приема будет равна:

$$\frac{P_H}{P_{сп}} = \frac{P}{P_{сп}} \cdot F, \quad (5)$$

где  $P$  — мощность рассеяния в месте приема для случая ненаправленных антенн,  $F$  — множитель, определяющий зависимость мощности рассеяния от направленности передающей и приемной антенн. При применении ненаправленных антенн  $F = 1$ . С увеличением направленности антенн этот множитель существенно меньше единицы. Величина обратная  $F$  определяет потери в усилении, которые имеют место при использовании остронаправленных антенн.

В ИРЭ АН СССР подробно исследованы зависимости мощности рассеяния при использовании остронаправленных антенн и потерь в усилении антенн от статистических характеристик турбулентной тропосферы, от реальной формы диаграмм направленности антенн, от различных случаев ориентации осей антенн относительно горизонта и от раздельного влияния направленности антенн в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Для всех перечисленных случаев получены простые формулы, позволяющие проводить инженерные расчеты  $P_H$ .

5. При создании поля за горизонтом даже в случае ненаправленных антенн участвует не весь объем рассеяния, расположенный выше касательных плоскостей к горизонту, проведенных из передатчика и приемника, а лишь его эффективная часть. Следовательно, сама атмосфера обладает определенной направленностью как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. Рассеянная энергия как бы размазана в пространстве и поступает на приемную антенну под определенными углами. Исходя из равенства углов размазывания рассеянной энергии и угловой ширины диаграмм направленности антенн, в работе были определены предельные размеры передающей и приемной антенн, при которых реализуется величина их теоретического усиления, и их зависимость от статистических параметров турбулентной среды.

6. При дальнем тропосферном распространении УКВ амплитуда и фаза сигнала в месте приема подвержены случайным флуктуациям во времени. Поэтому при проектировании радиорелейных линий связи необходимо знать не только средние значения сигналов в месте приема, но и их статистические характеристики. Статистический характер поля на входе приемного устройства достаточно удовлетворительно описывается моделью рассеяния радиоволн на блуждающих неоднородностях в атмосфере, рассмотренной в



работах Райса и Г. С. Горелика, где исследованы статистические характеристики поля в месте приема при передаче через тропосферу синусоидальной волны.

На основе этой модели были рассмотрены вопросы передачи через тропосферу ультракоротких волн, модулированных по частоте многоканальным сообщением.

В результате исследования получены выражения для функции корреляции и энергетического спектра частотно-модулированного колебания в месте приема. При анализе полученных выражений было установлено, что если соблюдается неравенство:

$$\frac{\Delta\omega_{mэ}}{\omega_0} \geq 2 \frac{\sqrt{\bar{v}^2}}{C_1} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (6)$$

где  $\Delta\omega_{mэ}$  — угловая эффективная девиация частоты,  $\sqrt{\bar{v}^2}$  — эффективная скорость движения рассеивателей,  $\theta$  — угол рассеяния,  $\omega_0$  — угловая несущая частота,  $C_1$  — скорость света в свободном пространстве, то функция корреляции и энергетический спектр рассеянного сигнала на входе приемника практически не будет отличаться от соответствующих характеристик исходного частотно-модулированного колебания.

7. В радиорелейных линиях связи, использующих как дальнее тропосферное распространение УКВ, так и распространение УКВ в пределах прямой видимости, может иметь место многолучевое распространение радиоволн. Это явление обуславливается рассеянием или отражением радиоволн от различного рода объемных и слоистых неоднородностей диэлектрической проницаемости воздуха, а также отражением радиоволн от поверхности земли. Аналогичная картина многолучевости возникает в волноводных линиях передачи и антенных фидерах, где вследствие их неоднородности или несогласованности с нагрузками также появляются отраженные волны.

В результате многолучевого распространения сигнал на входе приемника будет являться суперпозицией двух или большего количества колебаний, причем, в общем случае отраженные волны могут быть когерентными или некогерентными.

При воздействии на приемник нескольких колебаний, модулированных по частоте одним и тем же многоканальным сообщением, но сдвинутых по фазе друг относительно друга вследствие различия во времени распространения, возникают нелинейные искажения передаваемого сообщения. Очевидно, что методика расчета перекрестных помех для всех отмеченных выше случаев должна быть единой. Отличие будет состоять лишь в определении амплитуд и времен запаздывания отдельных лучей.

В ИРЭ АН СССР была предложена единая методика расчета мощности перекрестных шумов, возникающих в многоканальных радиорелей-



ных линиях связи с частотной модуляцией и уплотнением каналов по частоте вследствие перечисленных выше причин. Анализ перекрестных шумов проводился для двух наиболее важных для практики случаев, а именно для случая, когда на вход приемника воздействуют два соизмеримых по амплитуде колебания, и для случая, когда в точку приема поступает основная волна и совокупность отраженных волн, причем интенсивность каждого отраженного луча мала по сравнению с интенсивностью основного луча. При разработке общего метода расчета перекрестных шумов использовался метод корреляционного анализа.

В результате исследований были получены инженерные формулы и построены номограммы, позволяющие определять психометрическую мощность шумов в отдельных каналах системы связи. Расчетные выражения справедливы в общем случае для когерентных и некогерентных отраженных колебаний.

8. При использовании в линиях дальней связи остронаправленных антенн с шириной луча менее одного градуса время задержки отраженного луча относительно основного будет весьма малым. Аналогичная картина имеет место и в сравнительно коротких линиях передачи.

Малая величина задержки отраженного колебания относительно основного дала возможность разработать простую методику расчета перекрестных шумов, основанную на замене среды распространения или линии передачи эквивалентным четырехполосником. На основании этой методики было получено следующее выражение:

$$P_{\text{шц}} = 10^9 \frac{\Delta F_k K_n^2}{\Delta F} [4y_1 e^{(4b_{cp} - 2b_{k2})} + 24y_2 e^{(6b_{cp} - 2b_{k3})}]_{\text{ГнБТ}}, \quad (7)$$

где  $b_{k2}$  и  $b_{k3}$  — затухание нелинейности соответственно по второй и третьей гармоникам являются функцией девиации частоты, задержки отраженного луча относительно основного, коэффициентов отражения и ряда других параметров. Формула (7) справедлива в том случае, когда максимальная девиация частоты, обусловленная многоканальным сообщением, будет меньше величины, обратной двойному времени задержки отраженного луча относительно основного.

## II. Исследование накопления шумов и замираний в радиорелейных линиях связи, работающих в пределах прямой видимости

1. В нашей стране проводится широкое строительство радиорелейных линий, работающих в пределах прямой видимости.

В связи с этим перед советскими учеными возникает необходимость решения ряда сложных теоретических и экспериментальных проблем. Одной



из таких проблем является исследование стохастического накопления флуктуационных шумов в этих радиорелейных линиях. Сложность этой проблемы заключается в том, что амплитуды сигнала в местах приема и мощности шумов, вносимых отдельными участками линии, не постоянны, а колеблются по случайному закону в зависимости от метеорологических условий.

Проводимые в широком масштабе изыскания по данной проблеме можно разделить на три части:

- а) Экспериментальное изучение статистических свойств амплитуд сигнала в местах приема.
- б) Теоретическое исследование свойств радиорелейной линии в целом, если статистические характеристики амплитуд сигнала известны.
- в) Разработка методики инженерного расчета радиорелейных линий с учетом накопления шумов.

Работа, проводимая по этой проблеме, была посвящена, главным образом, определению статистических свойств радиорелейной линии с частотной модуляцией и частотным уплотнением каналов по известным характеристикам ее отдельных участков, а также созданию приближенных методов расчета накопления шумов с учетом неидентичности участков и корреляции между замираниями на соседних участках.

2. Основная задача теории накопления шумов состоит в том, чтобы оценить закон распределения вероятностей мощности шума на выходе линии. Математически задача сводится к тому, чтобы найти распределение суммы случайных величин, если закон распределения этих величин известен.

Данную задачу часто приходится решать при условиях, не позволяющих применять центральную предельную теорему Ляпунова о сходимости распределения суммы случайных величин к нормальному закону.

Сначала анализ накопления шумов проводился в предположении, что замирания на соседних участках независимы. Было получено решение задачи для случая, когда амплитуда напряженности поля распределена по релеевскому закону. При этом был применен метод характеристических функций. Было установлено, что функция распределения мощности шума в телефонном канале может быть выражена в виде:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}nt}}{t} \sin \left[ xt + \frac{nt}{2} (2C - 1) + \frac{nt}{2} \ln \frac{t}{2} \right] dt, \quad (1)$$

где  $F(x)$  — вероятность того, что мощность шума не превышает  $x$ ,  $n$  — число участков,  $C$  — постоянная Эйлера,  $C \equiv 0,577 \dots$ ,  $t$  — переменная интегрирования.

Анализ формулы (1) показывает, что релеевский закон распределения амплитуды напряженности поля является невыгодным с точки зрения накопления шумов, в том смысле, что ширина кривой плотности вероятностей с ростом  $n$  растет приблизительно пропорционально  $n$ .

Следует напомнить, что в случае применимости центральной предельной теоремы, эта величина увеличивалась бы в  $\sqrt{n}$  раз при прочих равных условиях.

3. Следующим этапом работы по данной проблеме являлось исследование процесса накопления шумов при законах распределения напряженности поля, отличных от релеевского.

Для инженерных расчетов целесообразно аппроксимировать законы распределения мощности шума, вносимого участками линии. Хорошие результаты дает семейство вида:

$$F(z) = 1 - \frac{bS(z)}{z^a}, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  — константы;  $S(z) \rightarrow 1$ , если  $z \rightarrow \infty$ . Функция  $S(z)$  и параметр  $a$  определяют поведение закона  $F(z)$  при небольших  $z$ . В областях больших  $z$  функция  $F(z)$  целиком определяется параметром  $a$ .

Для случая, когда параметр  $a$  меньше двух, было получено решение задачи с помощью теории устойчивых законов распределения вероятностей. Теория устойчивых законов позволила установить, что исходный закон (2) распределения мощности шума на одном участке и предельный закон распределения мощности шума на выходе линии имеют одинаковую асимптотику. При этом, предполагая, что замирания на соседних участках независимы и участки идентичны, функцию распределения мощности шума в телефонном канале можно представить в виде:

$$F_n(z) \approx 1 - \frac{nb}{[z - (n - n^{1/a})a]^a}, \quad \text{если } 2 > a > 1, \quad (3)$$

$$F_n(z) \approx 1 - \frac{nb}{z - bn \ln n}, \quad \text{если } a = 1, \quad (4)$$

$$F_n(z) \approx 1 - \frac{nb}{z^a}, \quad \text{если } a < 1. \quad (5)$$

Здесь  $n$  — число участков,  $b$  — средняя мощность шума, вносимого одним участком линии.

4. Как было указано, формулы (3), (4) и (5) основаны на сходстве асимптотик исходного и предельного распределений. Для объяснения



физики этого явления в работе было проведено исследование качественных свойств процесса накопления шумов.

Анализ показал, что при весьма широких условиях, накладываемых на законы распределения напряженности поля и шума в радиорелейных линиях, нарушения норм на шум в телефонном канале происходят, главным образом, за счет «выброса» шума на одном участке, в то время, как шум, накопленный в остальной части линии, сравнительно невелик. При этом закон распределения суммарного шума, вносимого всеми участками, асимптотически совпадает с законом распределения максимального значения шума, вносимого тем участком, на котором случайно имеет место наиболее глубокое замирание.

Задача о соотношении между законом распределения суммы случайных величин и законом распределения их максимального значения возникает не только в радиорелейных линиях, но вообще при сравнительном анализе радиотехнических систем, основные показатели которых определяются либо суммой случайных величин, либо их максимальным значением.

Поэтому в работе исследовались условия, при которых эти законы асимптотически совпадают. Если случайные величины одинаково распределены и независимы, то условия заключаются в том, чтобы выполнялось соотношение  $p'(z) = 0(p(z))$ , и, кроме того, можно было выбрать функцию  $u(z)$  такую, что  $u(z) = 0(z)$ ,  $u p'(z) = 0(p(z))$  и  $p(u) = 0\left(\frac{1}{z}\right)$ . Здесь  $p(z)$  — плотность вероятностей случайных величин,  $p'(z)$  — ее производная. Практически наиболее существенным условием является условие  $p'(z) = 0(p(z))$ .

5. Для того, чтобы проверить, выполняется ли это условие на практике, было произведено исследование 118 экспериментальных кривых распределения напряженности поля, снятых за длительное время в различных странах мира. Изучалось поведение опытных кривых в пределах значений сигнала, ниже которых сигнал падал в течение 10%, 0,1% времени наблюдения. Из 118 кривых не было ни одной, для которой указанное выше условие не было выполнено. Поскольку плотность вероятностей мощности шума, вносимого участками радиорелейной линии, удовлетворяет последнему условию, то для приближенной оценки закона распределения суммарного шума на выходе линии можно использовать его близость к закону распределения максимального шума, который находится элементарно.

Это исследование, во-первых, подтвердило правильность асимптотических формул (3), (4) и (5), полученных с помощью устойчивых законов, и, во-вторых, позволило аналогичную формулу для случая, когда параметр  $a$  больше двух, но число участков  $n$  невелико. Эта формула имеет вид:

$$F_n(z) \approx 1 - \frac{nb}{[z - (n-1)a]^a} . \quad (6)$$



На основе этого анализа были получены аналогичные формулы и для случая, когда участки неидентичны. При этом функцию распределения мощности шума в телефонном канале можно оценивать формулой

$$F_n(z) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{[z - (\sum_{k=1}^n a_k - a'_k)]^{\alpha_k}}, \quad (1 \leq K \leq n) \quad (7)$$

где  $a'_k = a_k$ , если  $\alpha_k \geq 2$ ;  $a'_k = \left[1 - \frac{n^{1/\alpha}}{n}\right] a_k$ , если  $1 < \alpha_k < 2$ ;

$a'_k = b_k \ln n$ , если  $\alpha_k = 1$ ;  $a'_k = 0$ , если  $\alpha_k < 1$ .

Формулы (3) — (7) могут быть использованы для расчета радиорелейной линии по нормам, рекомендованным МККР в 1954 г. Согласно этим рекомендациям псофометрическая мощность шума в телефонном канале на выходе радиорелейной линии длиной 2500 км должна быть меньше 10 000 *пвт* в течение не менее 99% времени.

Моделирование накопления шумов показывает, что при этом расчете формула (3) — (7) дают ошибку меньше 2 *дб*.

При проектировании радиорелейных линий некоторые участки зачастую приходится выбирать короче расчетных. За счет этого можно удлинять другие участки или уменьшать высоты антенных опор. Изменять параметры участков следует таким образом, чтобы величина  $F_n(z_1)$ , определяемая формулой (7), не изменялась. Здесь  $z_1$  — норма на мощность шума в телефонном канале.

6. На работу радиорелейных линий, для которых допустимое значение мощности шума лежит выше порога улучшения ЧМ, влияет расстановка амплитудных ограничителей. С этой целью рассматривались линии, в которых ограничение сигнала по амплитуде производится не на каждой промежуточной станции, а через одну, две и т. д. станции.

Было произведено теоретико-вероятностное исследование всех возможных состояний таких линий, на основе которого показано, что ограничение сигнала по амплитуде желательно производить на каждой станции. Однако, если для соседних участков случаи глубоких замираний (при которых сигнал падает ниже порога улучшения ЧМ) независимы, то количество и качество ограничителей не имеет существенного значения. Это, разумеется, не относится к тем ограничителям, которые установлены перед демодуляторами.

7. С целью проверки приближенных методов расчета была разработана методика и производилось моделирование накопления шумов на универсальной цифровой вычислительной машине. Сущность моделирования заключается в том, что машина многократно воспроизводит совокупность случайных величин с такими же статистическими свойствами, какие имеют



шумы в радиорелейной линии, и статистически оценивает закон распределения суммы этих величин. Проверка приближенных формул дала хорошие результаты. Кроме того, моделирование позволило осуществить проверку приближенных формул для расчета накопления шумов с учетом корреляции между замираниями на соседних участках.

8. Следующим этапом работы являлось исследование процесса накопления шумов с учетом корреляции замираний сигналов на соседних участках радиолинии. Трудность изучения вопроса о корреляции заключается в том, что обычные методы статистики для анализа многомерных законов распределения при изучении метеорологических явлений неэффективны из-за недостатка статистического материала. Поэтому дальнейшее развитие данной проблемы невозможно без создания упрощенных схем процесса замираний с учетом их корреляции на соседних участках.

Проводился анализ ряда таких схем и разрабатывалась методика статистического эксперимента и расчета шумов в радиорелейных линиях по этим схемам. При анализе предполагалось, что замирания в радиорелейных линиях большой протяженности описываются простыми цепями Маркова. Для расчета радиорелейной линии с учетом фактора корреляции была применена такая простая цепь Маркова, при которой напряженности поля на соседних участках либо совпадают, либо независимы. При такой идеализации в линии всегда можно выделить серии со случайными числом участков, на которых сигналы изменяются синхронно, в то время как на участках различных серий сигналы изменяются независимо друг от друга. Параметры такой схемы, которые необходимо знать для расчета линии, определяются по двум характеристикам  $\beta(z)$  и  $z(z)$ , получаемым непосредственно из статистического эксперимента. Функция  $\beta(z)$  представляет собой вероятность неравенства  $x > z$ , где  $x$  мощность шума, вносимого одним участком линии. Функция  $z(z)$  — коэффициент корреляции между случайными событиями на соседних участках, заключающимися в превышении мощностями вносимых шумов уровня  $z$ .

Выведены формулы для расчета накопления шумов с помощью этих характеристик. Как показало моделирование, этот метод дает хорошие результаты, если  $z(z) \approx \text{const} = r_0$ . Расчетные формулы в этом случае аналогичны (3), (4), (5) и (6), но отличаются от последних тем, что в них вместо  $n$  стоит величина  $n(1 - r_0)$ , вместо  $a$  стоит величина  $\frac{a}{1 - r_0}$  и вместо  $b$  величина

$$b(1 - r_0) \sum_{k=1}^n K^a r_0^k.$$

Настоящая работа выполнена в ИРЭ АН СССР под руководством члена-корреспондента АН СССР В. И. Сифорова. Исследования, изложен-



ные в первой части настоящего доклада, выполнены автором, а исследования, представленные во второй части, проведены кандидатом технических наук Ю. Б. Синдлером.

### РЕЗЮМЕ

Доклад посвящен рассмотрению некоторых вопросов расчета радиорелейных линий связи, работающих в пределах прямой видимости, и радиолиний с дальним тропосферным распространением ультракоротких волн. Доклад состоит из двух частей.

Результаты исследований, излагаемые в первой части доклада, посвящены главным образом установлению количественных соотношений, которые связывают величины искажений передаваемых сигналов, возникающие в процессе многолучевого распространения радиоволн или вследствие неоднородностей и несогласованностей линии передачи при частотной модуляции, а также средние значения и статистические характеристики принимаемых сигналов далеко за горизонтом, с параметрами радиорелейных линий и статистическими параметрами среды распространения. Анализ отмеченных вопросов проводился на основе теорий рассеяния и отражения ультракоротких волн на объемных и слоистых неоднородностях диэлектрической проницаемости воздуха.

Во второй части доклада излагается теория стохастического накопления флуктуационных шумов и замираний в радиорелейных линиях связи с частотной модуляцией и уплотнением каналов по частоте. В результате исследований были оценены законы распределения вероятностей мощности шума на выходе радиорелейной линии связи.

### FERNVERBINDUNGEN MIT ULTRAKURZEN WELLEN

A. W. PROSIN

#### ZUSAMMENFASSUNG

Der Vortrag behandelt einige Fragen der Berechnung von Richtfunklinien, welche mit direkter Sicht arbeiten, und von Funklinien mit troposphärischer Fortpflanzung ultrakurzer Wellen über den Horizont. Der Vortrag ist in zwei Teile gegliedert.

Die im ersten Teil dargelegten Forschungsergebnisse beziehen sich vorwiegend auf die Feststellung quantitativer Beziehungen, welche einerseits zwischen den bei der Mehrstrahlenfortpflanzung der Radiowellen oder infolge von Inhomogenitäten und Anpassungsfehlern der Übertragungslinien bei Frequenzmodulation entstehenden Verzerrungen der übertragenen Signale bzw. den Mittelwerten und statistischen Kennwerten der über den Horizont empfangenen Signale und andererseits den Kenngrößen der Richtfunklinien wie auch den statistischen Kennwerten des Fortpflanzungsmediums bestehen. Die erwähnten Fragen wurden auf Grund der Theorie der Streuung und Reflexion von UK-Wellen an volumenhaften und geschichteten Inhomogenitäten der Dielektrizitätskonstante der Luft analysiert.

Im zweiten Teil wird die Theorie der stochastischen Anhäufung von Fluktuationsgeräuschen und von Schwankungen der Empfangsfeldstärke in frequenzmodulierten Richtfunk-Frequenzmultiplexsystemen erörtert. Als Ergebnis der Untersuchungen wurden die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geräuschleistung am Ausgange der Richtfunklinie ausgewertet.

### VHF-LINKS FOR GREAT DISTANCE

A. V. PROSIN

#### SUMMARY

The paper deals with some questions on the calculation of radiolinks working under conditions of direct visibility and of radiolines with over the horizon propagation of VHF-waves. The paper is divided into two parts.

The results of the investigations described in the first part mainly concern the determination of quantitative relations existing between distortions of the transmitted signals due



to inhomogenities, and mismatch of transmission lines in case of frequency modulation or arising during multibeam propagation of radiowaves, or of the mean values and statistical characteristics of signals received beyond the horizon, and the parameters of the radiolines and the statistical parameters of the propagation medium. These questions were analysed on the basis of the theory of scattering and reflexion of the VHF-waves on volumetric and stratified inhomogenities of the air permittivity.

In the second part the theory of random accumulation of fluctuation noises and fadings in FM—FDM radiorelay lines is exposed. As a result of the investigation, the probability distribution laws of the noise power at the output of the radiorelay line were evaluated.

## TELECOMMUNICATIONS A ONDES ULTRA-COURTES

A. V. PROSINE

### RESUME

L'auteur traite de quelques questions relatives au calcul des faisceaux hertziens travaillant dans les conditions de visibilité directe, et aux liaisons troposphériques. Le travail est divisé en deux parties.

Les résultats de recherches communiqués dans la première partie concernent surtout la détermination des relations quantitatives, qui existent entre distorsions des signaux transmis (distorsions dues soit à la propagation des ondes par plusieurs rayons, soit aux inhomogénéités ou au désaccord des lignes de transmission à modulation de fréquence), valeurs moyennes et caractéristiques statistiques des signaux reçus en liaison transhorizon, d'une part, et paramètres des faisceaux hertziens et paramètres statistiques du milieu de propagation d'autre part. Ces questions ont été analysées à la base de la théorie de la dispersion et réflexion des ondes ultra-courtes sur les inhomogénéités volumétriques et stratifiées de la permittivité de l'air.

Dans la seconde partie du travail, l'auteur décrit la théorie de l'accumulation aléatoire des bruits de fluctuation et des fadings dans les faisceaux hertziens à modulation de fréquence et à multiplexage par répartition en fréquence. Les études ont permis l'évaluation des lois de répartition des probabilités de la puissance du bruit, à la sortie du faisceau hertzien.

# LE ROLE DU PROCESSUS DE REFLEXION PARTIELLE DANS LA PROPAGATION DES ONDES\*

Fr. du CASTEL

CENTRE NATIONAL D'ÉTUDES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS (FRANCE)

[Manuscrit présenté le 8 mai 1961]

## I. Phénomène de réflexion partielle en milieu irrégulier

I—1. — Considérons un élément de surface  $s$ , où se produit une discontinuité des caractéristiques du milieu de propagation — (figure 1). A cette discontinuité correspond un coefficient de réflexion partielle en amplitude  $\varrho$ .

Un rayonnement incident, de longueur d'onde  $\lambda$ , renvoie dans une direction donnée  $2\alpha$  un certain rayonnement réfléchi. Si  $l$  est la dimension horizontale moyenne de la surface et  $h$  la hauteur correspondant à la courbure de cette surface, on peut définir une surface efficace de réflexion dans la direction  $2\alpha$  égale à :

$$\sigma = \frac{l^2}{8h} \frac{\Lambda}{2}$$

$\Lambda$  étant la longueur d'onde d'espace dans la direction  $2\alpha$ , soit pour des angles petits  $\Lambda = \lambda/\alpha$ .

Cette surface efficace est définie par une cohérence de phase entre le rayonnement réfléchi aux divers points de la surface, soit par une condition analogue au critère de Rayleigh d'une surface rugueuse, telle que  $\Lambda < 16h$ .

Un raisonnement analogue à la théorie des antennes conduit alors à exprimer la puissance réfléchie dans la direction  $2\alpha$  par la surface  $s$ , en fonction de la puissance incidente  $p_0$ , par :

$$p = p_0 \frac{4\pi}{\Lambda^2} \sigma^2 \varrho^2.$$

I—2. — Considérons maintenant un ensemble d'irrégularités telles que  $s$ , distribuées dans un feuillet de surface  $S$ , de dimension  $L$  et d'épaisseur  $H$  (figure 2).

Pour calculer la puissance totale réfléchie par le feuillet, on devra considérer séparément les éléments  $s$  donnant une contribution de termes en phase et ceux correspondant à des termes à phase incohérente.

\* Conférence faite en novembre 1959, au Colloque des Liaisons Hertziennes.



Si  $z(r)$  représente la fonction de distribution verticale des irrégularités  $s$ , considérées comme ponctuelles et repérées par leur distance horizontale  $r$  à un point central de la surface  $S$ , le terme de phase correspond à une fonction

$$\gamma(r) = \exp [-j 2 K z(r)]$$

avec  $K = 2 \pi / \lambda$ .

Cette fonction étant cissoïdale, on peut, quelque soit la forme exacte de  $z(r)$ , donner une valeur approchée de sa valeur moyenne égale à

$$\gamma = \frac{\sin 2 K H}{2 K H}.$$

D'autre part, le nombre d'éléments réfléchissants qui intervient sera sensiblement égal à  $S/s$ .

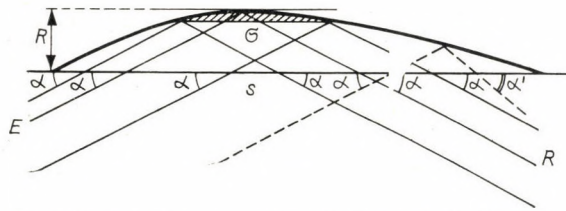


Fig. 1. Réflexion par une surface de discontinuité élémentaire

Pour la contribution provenant des termes en phase, les puissances élémentaires réfléchies s'ajoutent linéairement, et la puissance totale réfléchie par la surface  $S$  est égale à

$$P_s = p \frac{S^2}{s^2} \gamma^2.$$

Cette réflexion est cohérente; il s'agit d'une *réflexion spéculaire* qui se produit dans un angle solide  $\omega$  autour d'une direction de réflexion égale à la direction d'incidence. Les ouvertures, longitudinale et transversale, du faisceau réfléchi ont pour valeurs:

$$\varphi = \frac{\lambda}{L} \quad \psi = \frac{\lambda}{L}.$$

Notons que le passage du cas de l'onde plane au cas de l'onde sphérique (émission et réception à distance finie  $D$ ) et la condition de cohérence de phase du rayonnement introduisent une ellipse de Fresnel de dimensions longitudinale et transversale,

$$L_0 = \frac{\sqrt{\lambda D}}{a} \quad l_0 = \sqrt{\lambda D}.$$

Si la surface de l'ellipse est plus petite que  $S$ , c'est sa valeur qui devra être introduite au lieu de  $S$  dans l'expression de la puissance de réflexion spéculaire.

Pour la contribution provenant des termes à phase incohérente, les puissances réfléchies s'ajoutent quadratiquement, et la puissance totale

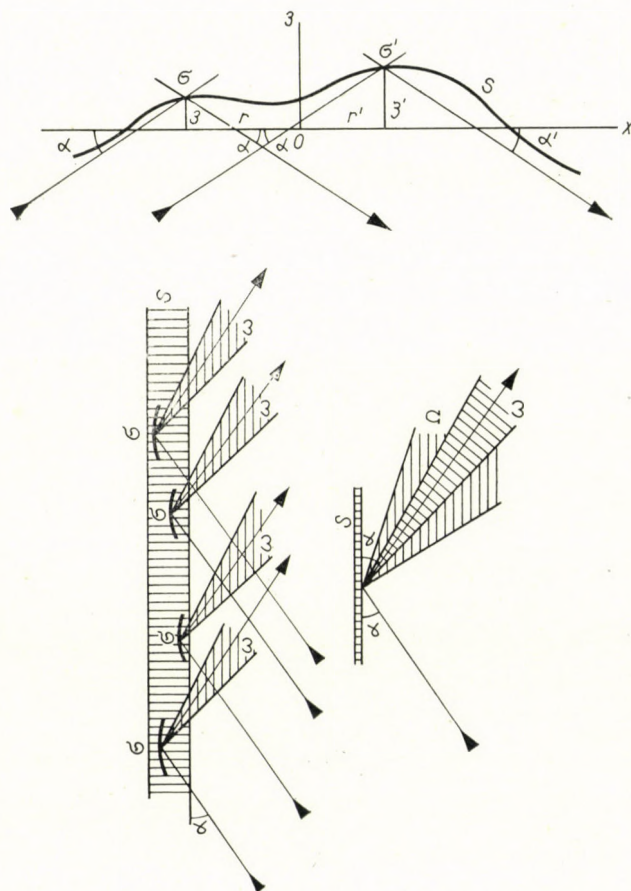


Fig. 2. Réflexion spéculaire et réflexion diffuse par un feuillet irrégulier

réfléchi par la surface  $S$  est égale à

$$P_d = p \frac{S}{s} (1 - \gamma^2)$$

(le dernier terme s'introduit car la puissance spéculaire est implicitement comprise dans le raisonnement précédent).

Cette réflexion est incohérente; il s'agit d'une *réflexion diffuse* qui se produit dans un angle solide  $\Omega$ , (supérieur à  $\omega$ ) égal à l'angle de réflexion de



chacune des surfaces élémentaires  $s$ . Les ouvertures, longitudinale et transversale, du faisceau réfléchi ont pour valeurs

$$\Phi = \frac{A}{1} \quad \Psi = \frac{\lambda}{1}.$$

Notons que le passage du cas de l'onde plane au cas de l'onde sphérique peut introduire une limitation de la surface  $S$ , par une condition d'inclinaison maximale des éléments réfléchissants. A un angle limite  $\tau = H/l$  correspond une dimension transversale

$$l'_0 = D\alpha \frac{H}{1}.$$

## II. Application à la propagation throposphérique transhorizon

II—1. — Dans le cas de la propagation dans la troposphère, les analyses expérimentales de la structure fine de l'indice de réfraction par réfractomètre, et des considérations physiques sur les régimes d'écoulement de l'air (laminaire ou turbulent) conduisent à considérer l'existence de feuillets stables de stratification séparant des couches turbulentes [2].

Ces feuillets pourraient correspondre à une discontinuité  $g$  du gradient de l'indice de réfraction. Leur surface présenterait des irrégularités primaires, liées à l'influence de la turbulence des couches adjacentes, et des irrégularités de plus grandes dimensions, liées aux mouvements verticaux de l'atmosphère (figure 3).

On est alors conduit à une expression du coefficient de réflexion partielle égal à

$$\rho = g \frac{\lambda}{8\pi\alpha^3}$$

et, dans les cas les plus usuels des liaisons throposphériques transhorizon, à considérer les inégalités  $l'_0 < l_0 < L < L_0$ . Les expressions des puissances réfléchies, spéculaires et diffuses, prennent alors les formes:

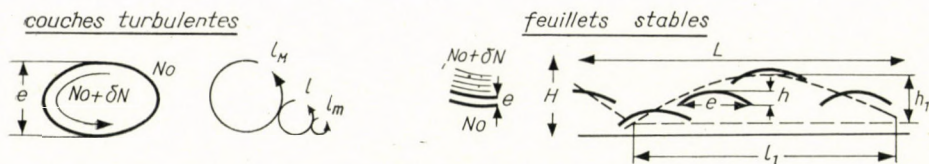
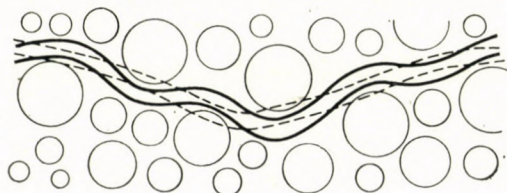
$$P_s = P_0 g^2 \frac{\lambda^3}{D\alpha^6} F_s$$

$$P_d = P_0 g^2 \frac{\lambda^2}{D\alpha^5} F_d,$$

$P_0$  étant la puissance correspondant à la propagation en espace libre, et  $F_s$  et  $F_d$  étant des facteurs géométriques, fonctions des dimensions des feuillets et de leurs irrégularités.

Rappelons que dans les hypothèses classiques de la diffusion turbulente on est conduit à une puissance diffusée de la forme

$$P' = P_0 g'^2 \frac{\lambda}{D\alpha^5} F'$$



|             |                                       |  |               |                                       |                                     |
|-------------|---------------------------------------|--|---------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| Tourbillons | $l \text{ qq} \cdot 10 \text{ m}$     | $\delta N \text{ q} \cdot \text{q} \cdot IN$ | Discontinuité | $\delta N \text{ qq} \cdot 10^{-2} N$ | $e \text{ qq} \cdot 10 \text{ cm}$  |
| Spectre     | $S(l) \sim g^2 l^5$                   |  | Dimensions    | $L \text{ qq} \cdot 10 \text{ Km}$    | $H \text{ qq} \cdot 10 \text{ m}$   |
| ou          | $\sim g^2 \frac{l^{11/3}}{l_0^{1/3}}$ |  | Irregularités | $l \text{ qq} \cdot 10 \text{ m}$     | $h \text{ qq} \cdot 1 \text{ m}$    |
|             |                                       |  |               | $l_1 \text{ qq} \cdot 1 \text{ Km}$   | $h_1 \text{ qq} \cdot 10 \text{ m}$ |

Fig. 3. Feuilletts stables et couches turbulentes dans la troposphère

II—2. — Dans le phénomène complexe de la propagation transhorizon doivent intervenir l'un ou l'autre des processus, suivant la nature plus ou moins stratifiée de l'atmosphère à l'instant considéré et suivant la valeur respective des puissances diffusées par les couches turbulentes et des puissances réfléchies par les feuillets stables.

Cette intervention de phénomènes différents est nécessaire à l'interprétation des observations expérimentales, lesquelles mettent en évidence l'influence d'un paramètre donné sous forme statistique et non sous forme certaine [3]. Il en est ainsi par exemple de l'influence de la longueur d'onde sur une liaison transhorizon, où le rapport des affaiblissements de propagation moyens apparaît proportionnel à  $\lambda$ , à  $\lambda^2$  ou à  $\lambda^3$  suivant les instants considérés, ce qui correspond à l'intervention de l'un ou l'autre des phénomènes, comme



le montrent les expressions précédentes. Il en est de même lorsqu'on étudie d'autres paramètres tels que l'influence de la distance, l'amplitude ou la vitesse des fluctuations, la sélectivité en fréquence ou dans l'espace du phénomène de propagation. L'étude complète des phénomènes met, en effet, en évidence des lois différentes pour chacun d'eux (figure 4). Notons d'ailleurs que, suivant la fréquence, la distance ou les conditions météorologiques, l'un ou l'autre des processus de propagation aura tendance à être prépondérant.

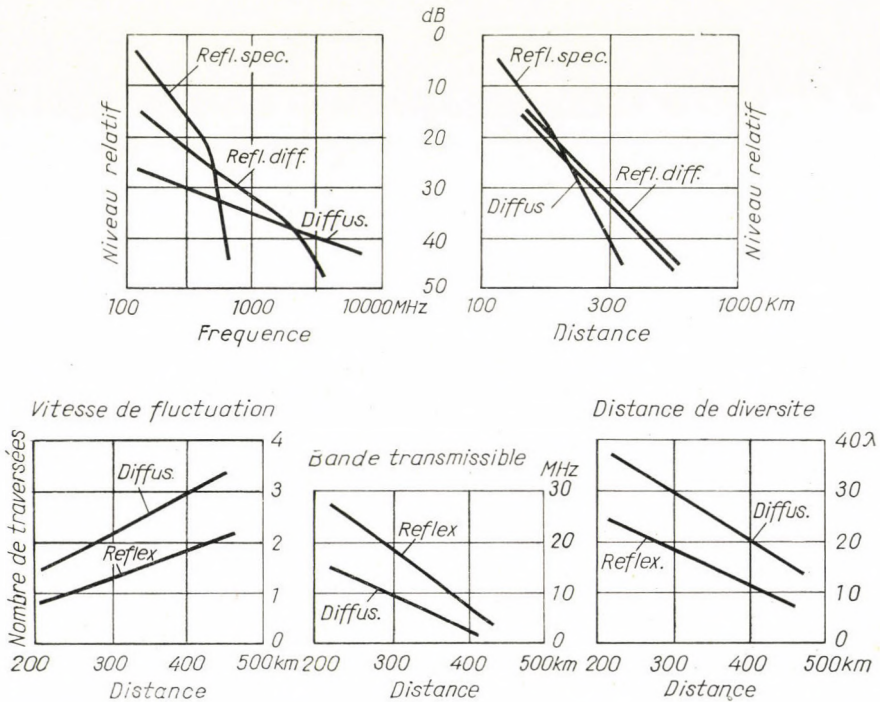


Fig. 4. Variation des paramètres de propagation dans les divers processus

Mais la nécessaire intervention de l'ensemble de ces processus, pour interpréter le phénomène de propagation transhorizon, apparaît encore plus nettement dans les études expérimentales de la structure instantanée du phénomène. C'est le cas notamment des études de structure spatiale instantanée, par balayage rapide d'un lobe d'antenne, qui montrent suivant les cas une origine localisée du phénomène (processus de réflexion) ou une origine diffuse (phénomène de diffusion). C'est aussi le cas des études de structure fréquentielle instantanée, par balayage rapide d'une gamme de fréquence qui permettent, par une analyse spectrale, la mise en évidence de l'intervention d'un volume d'atmosphère (phénomène de diffusion) ou de l'intervention d'une ou plusieurs surfaces (phénomène de réflexion) [4].

Ainsi la considération d'un processus de réflexion partielle, associée à un processus de diffusion, permet de donner une vue complète de la propagation troposphérique transhorizon [5]. Une application des mêmes principes pourrait être faite à certains problèmes de propagation ionosphérique, correspondant à la structure stratifiée de certaines couches, récemment mises en évidence.

#### BIBLIOGRAPHIE

1

1. F. DU CASTEL, P. MISMÉ, A. SPIZZICHINO, J. VOGÉ, «Réflexions partielles dans l'atmosphère et propagation à grande distance», Éd. Rev. Optique, Paris 1960.
2. P. MISMÉ, «Quelques aspects de la radiométéorologie et de la radioclimatologie», Ann. Télécomm., de. 1960.
3. F. DU CASTEL, «Résultats expérimentaux en propagation troposphérique transhorizon», Ann. Télécomm., dec. 1960.
4. V. BIGGI, F. DU CASTEL, J. C. SIMON, A. SPIZZICHINO, «Étude expérimentale de la structure fréquentielle instantanée de la propagation en milieu hétérogène», Ann. Télécomm., déc. 1960.
5. F. DU CASTEL, «Propagation troposphérique et faisceaux hertziens transhorizon», Éd. Chiron, Paris, 1961.

#### SOMMAIRE

L'étude de la réflexion partielle d'un rayonnement incident, sur une surface de discontinuité atmosphérique de nature irrégulière, met en évidence un terme de réflexion spéculaire et un terme de réflexion diffuse.

L'application de cette étude au cas de feuillets stables de la troposphère, coexistants avec des couches turbulentes, conduit à une vue synthétique du phénomène de propagation troposphérique transhorizon. L'intervention de l'un et l'autre des processus de réflexion partielle et de diffusion permet de rendre compte de l'ensemble des observations expérimentales.

Dans l'étude des phénomènes de propagation radioélectrique dans l'atmosphère, considérée comme milieu inhomogène, on s'est surtout attaché, jusqu'à une date récente, à l'analyse d'un processus de diffusion des ondes par les hétérogénéités du milieu. Mais les résultats expérimentaux ne paraissent pas toujours en accord avec les conclusions théoriques correspondant à ce processus. Aussi certains auteurs, et notamment l'équipe française du C.N.E.T. [1], se sont-ils appliqués à l'analyse d'un processus de réflexion partielle du rayonnement.

#### DIE ROLLE DES PROZESSES DER TEILWEISEN REFLEXION IN DER WELLENFORTPFLANZUNG

F. du CASTEL

#### ZUSAMMENFASSUNG

Durch die Untersuchung der teilweisen Reflexion des auf die unregelmäßige Fläche einer atmosphärischen Diskontinuität einfallenden Strahles wird das Vorhandensein einer Spiegelkomponente und einer Komponente diffuser Reflexion gezeigt.

Die Anwendung dieser Untersuchung auf den Fall der mit turbulenten Schichten gleichzeitig bestehenden stabilen Schichten der Troposphäre führt zu einer synthetischen Auffassung der Erscheinung der transhorizontalen troposphärischen Wellenfortpflanzung. Durch die Berücksichtigung der Wirkungen sowohl der teilweisen Spiegelung wie der Streuung, wird die Erfassung der Gesamtheit der experimentellen Beobachtungen ermöglicht.



## THE ROLE OF THE PARTIAL REFLEXION PROCESS IN THE WAVE PROPAGATION

F. du CASTEL

### SUMMARY

The investigation of the partial reflexion of a beam incident on an irregular surface of atmospheric discontinuity showed the existence of a specular reflexion term and of a diffuse one.

The application of this investigation to the case of stable tropospheric layers coexistent with turbulent strata led to a synthetic view of the transhorizon tropospheric propagation. The consideration of both the partial reflexion term and the diffuse reflexion term allowed for the evaluation of the whole of the experimental observations.

## РОЛЬ ПРОЦЕССА ЧАСТИЧНОГО ОТРАЖЕНИЯ В РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН

Ф. ДЮ КАСТЕЛЬ

### РЕЗЮМЕ

Исследование процесса частичного отражения луча, падающего на нерегулярную поверхность атмосферной неоднородности, показывает наличие зеркальной и диффузной составляющих отражения.

Приложение этого исследования к случаю устойчивых полос тропосферы, сосуществующих с турбулентными слоями, приводит к синтетическому рассмотрению явления тропосферного распространения волн за горизонтом. При учете действия процессов как частичного отражения, так и диффузии возможно оценить совокупности экспериментальных наблюдений.

# SPECIALLY SHAPED MEMBRANE SHELLS ON A BASE COMPRISING AN EQUILATERAL TRIANGLE

P. CSONKA

D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF BUILDING SCIENCES  
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received May 17, 1961]

## 1. Introduction

In the following membrane shells will be dealt with, the vertical edge arches of which do not resist lateral compression.

## 2. Fundamentals

The following investigation is to be carried out either in an orthogonal or in a cylindrical system of co-ordinates, shown in Figs. 1 and 2. The radius of the circle inscribed into the triangular base is to be marked by the letter symbol  $a$ . As loads, only vertical distributed forces will be taken into consideration. The specific value of these, related to the area of the planar projection of the shell, is to be denoted by the letter symbol  $Z$ .

The value  $Z$  of the load is regarded as positive, if the load acts in the direction of the positive branch of the  $z$  axis. In this case Pucher's differential equation of the shell problem will take the following form:

$$f_{xx} F_{yy} - 2f_{xy} F_{xy} + f_{yy} F_{xx} + Z = 0. \quad (1)$$

In the above formula  $z = f(x, y)$  denotes the ordinates of the middle surface of the shell;  $F = F(x, y)$  signifies the so-called stress function of the shell, while the foot-indices indicate the derivatives according to the variables  $x$  and  $y$ .

Between the  $x, y$  directed projected membrane forces  $n_x, n_{xy}, n_y$  and the stress function the following relations hold:

$$n_x = F_{yy}, \quad n_{xy} = -F_{xy}, \quad n_y = F_{xx}. \quad (2)$$

From the very first it has been stipulated, that the edge beams do not bear lateral compression, consequently, the stress function must be along the edge line constant, or at most varying linearly.



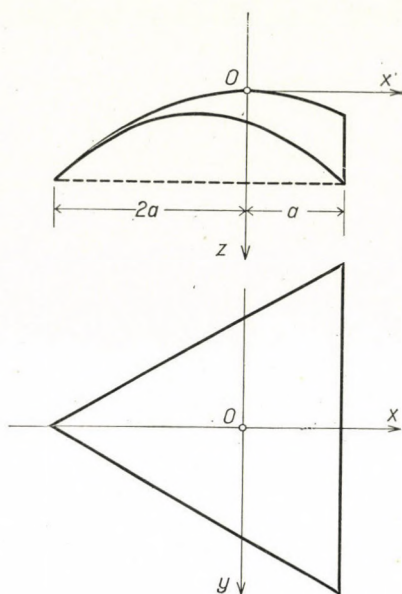


Fig. 1. The orthogonal system of co-ordinates  $0(x, y, z)$

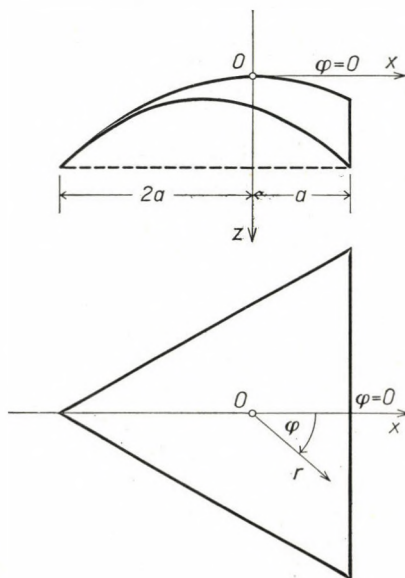


Fig. 2. The cylindrical system of co-ordinates  $0(r, \varphi, z)$

The simplest function corresponding to the above boundary condition can be produced, if the three to zero reduced equations characterizing the three lateral edges of the ground plan are multiplied with each other:

$$F = -C \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(\frac{y}{a} - \frac{\sqrt{3}x}{3a} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \left(\frac{y}{a} + \frac{\sqrt{3}x}{3a} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$C = \text{const.}$$

After reduction:

$$F = -C \left(\frac{x^3}{3a^3} - \frac{xy^2}{a^3} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{4}{3}\right). \quad (3)$$

In the following this function is to be chosen as stress function, and the form of the shell will be determined, depending on the load, so that each of its points should precisely correspond to differential equation (1).

Replacing stress function (3) into formulae (2), the projected membrane forces belonging to all shells to be dealt with here, can be expressed uniformly by the following formulae

$$\left. \begin{aligned} n_x &= -\frac{2C}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right), \\ n_{xy} &= -\frac{2C}{a^2} \cdot \frac{y}{a}, \\ n_y &= -\frac{2C}{a^2} \left(1 + \frac{x}{a}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

### 3. The form of the middle surface

Replacing function (3) into differential equation (1), the latter can be written as follows:

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) f_{xx} + 2 \frac{y}{a} f_{xy} + \left(1 + \frac{x}{a}\right) f_{yy} = \frac{Za^2}{2C}. \quad (5)$$

In the following some solutions of the above differential equation, belonging to different simple load functions  $Z$ , will be presented.

The *homogeneous equation* that can be attached to the differential equation in question has innumerable solutions. Two relatively simple solutions are to be found in Table 1.



Table 1

Some solutions of the homogeneous differential equation

| No | z | z  |
|----|---|--|
| 1  | 0 | $\varrho^3 \sin 3\varphi$  |
| 2  | 0 | $14 \varrho^6 - 8(\varrho^3 \cos 3\varphi)^2 + 15 \varrho^2 (\varrho^3 \cos 3\varphi) + 30 \varrho^4 + 40 (\varrho^3 \cos 3\varphi)$ |

In the above formula

$$\varrho = \frac{r}{a},$$

and according to this

$$\varrho^3 \cos 3\varphi = \frac{1}{a^3} (x^3 - 3xy^2),$$

$$\varrho^3 \sin 3\varphi = \frac{1}{a^3} (3x^2y - y^3).$$

Some particular solutions of the *inhomogeneous equation* belonging to different simple cases of loading are to be seen in Table 2.

Table 2

Some solutions of the inhomogeneous differential equation

| NO | z                                     | z   |
|----|---------------------------------------|---|
| 1  | 1                                     | $\frac{\varrho^2}{8}$   |
| 2  | $\varrho^2$                           | $-\frac{\varrho^3 \cos 3\varphi}{24}$                             |
| 3  | $\varrho^4$                           | $\frac{7\varrho^6}{360} - \frac{(\varrho^3 \cos 3\varphi)^2}{90}$ |
| 4  | $\varrho^3 \cos 3\varphi$             | $-\frac{\varrho^4}{16} - \frac{\varrho^3 \cos 3\varphi}{12}$      |
| 5  | $\varrho^3 \sin 3\varphi$             | $\frac{\varrho^2}{32} (\varrho^3 \cos 3\varphi)$                  |
| 6  | $\varrho^2 (\varrho^3 \cos 3\varphi)$ | $\frac{\varrho^6}{120} - \frac{(\varrho^3 \cos 3\varphi)^2}{60}$  |
| 7  | $\varrho^2 (\varrho^3 \sin 3\varphi)$ | $-\frac{(\varrho^3 \cos 3\varphi) (\varrho^3 \sin 3\varphi)}{60}$ |

#### 4. Two particular cases

In the following two particular cases will be presented as a linear combination of the results introduced in paragraph 3. In the first case the shell is shaped symmetrically, in the second asymmetrically.

##### *First case*

The load function of the shell should be the polynome

$$Z = A + B \varrho^2. \quad (6)$$

In compliance with this and using data presented in the first and second horizontal row of Table 2, the equation characterizing the middle surface of the shell can be set up as follows:

$$z = \frac{Aa^4}{C} \cdot \frac{\varrho^2}{8} - \frac{Ba^4}{C} \cdot \frac{\varrho^3 \cos 3\varphi}{24}.$$

Turning to orthogonal co-ordinates:

$$z = \frac{Aa^4}{C} \cdot \frac{x^2 + y^2}{8a} - \frac{Ba^4}{C} \cdot \frac{x^3 - 3xy^2}{24a^3}.$$

The edge lines of the middle surface of the shell in question, as well as the vertical sections of this middle surface parallel to the edge arches, are parabolas, the axes of which are vertical.

The form of the shell corresponding to the values

$$\frac{A}{C} = \frac{2.547}{a^3}, \quad \frac{B}{C} = \frac{0.532}{a^3}$$

is to be seen in Fig. 3. The values of the constants figuring here were determined on the base of the stipulation that the rise of the edge arches should be equal to a third of their span, while the dead load of the plate of the shell at its centre and at its corners should precisely coincide with the value resulting from formula (6).

##### *Second case*

The specific value of the load acting on the shell related to the area of the planar projection of the shell should be

$$Z = A = \text{const.}$$



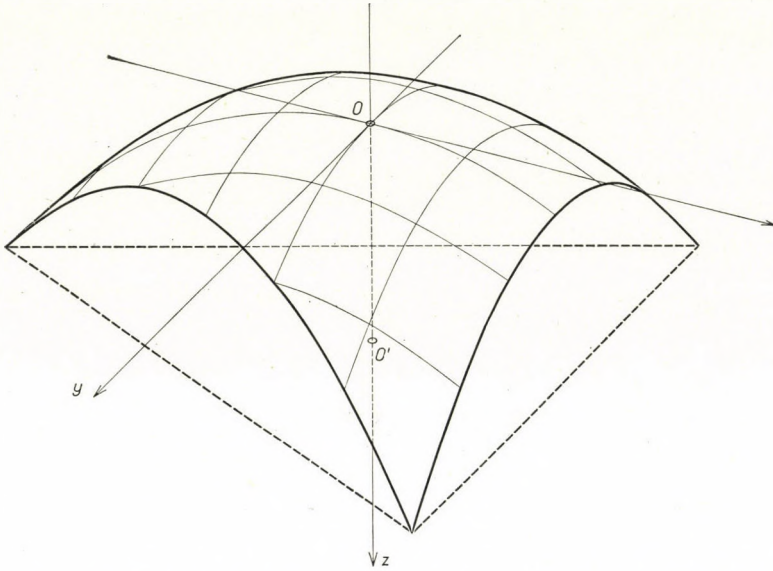


Fig. 3. Symmetrical shell constructed over an equilateral triangular basis

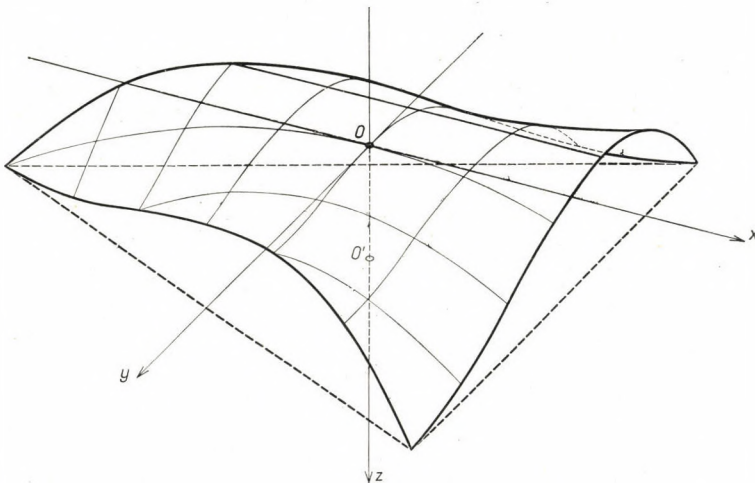


Fig. 4. Asymmetrical shell constructed over an equilateral triangular basis

Now, the equation characterizing the middle surface of the shell can be set up using data to be found in the first horizontal rows of Tables 1 and 2:

$$z = \frac{Aa^4}{C} \cdot \frac{\varrho^2}{8} + \frac{Ba^4}{C} \cdot \varrho^3 \sin 3\varphi.$$

Expressed with orthogonal co-ordinates:

$$z = \frac{Aa^4}{C} \cdot \frac{x^2 + y^2}{8a^2} + \frac{Ba^4}{C} \cdot \frac{3x^2y - y^3}{a^3}$$

The intersections of the middle surface of this shell with the vertical bisecting planes of the angles of the triangular base, are parabolas of the second degree, having vertical axes.

In the case

$$\frac{A}{C} = \frac{3}{2a^3}, \quad \frac{B}{C} = \frac{\sqrt{3}}{16a^3}$$

the middle surface of the shell takes the form to be seen in Fig. 4. As the form of the edge arches differs to a considerable degree from the funicular curve of the forces affecting the edge arch, large bending moments arise in the edge arch.

The presented asymmetrically formed shell can be used expediently, when the particular shaping of the building should demonstrate some dynamism or some extraordinary aim should be expressed. The shell in question can also be used for buildings serving as an advertising medium.

#### REFERENCES

1. SZMODITS, K.: Spherical Shell over a Base Comprising a Regular Triangle (in Hungarian). *Magyar Építőipar* 7 (1958), pp. 167—168.
2. CSONKA, P.: Paraboloid of Revolution over Equilateral Triangle Basis. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.*, Tomus XXIX., Fasc. 3—4., pp. 313—332 (1960).
3. CSONKA, P.: Calculation of Paraboloid Shells of Revolution on a Base Comprising a Regular Triangle or Hexagon by the Relaxation Method. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.* Tomus XXXI., Fasc. 3—4., pp. 343—357 (1960).
4. CSONKA, P.: Two Methods of Calculation of Paraboloid Shells of Revolution over a Regular Triangular Base. Proceedings. *The Indian Concrete Journal* 33 (1959), pp. 411—416.
5. CSONKA, P.: Some Remarks on the Calculation of Paraboloid Shells of Revolution over a Regular Triangular Base. *The Indian Concrete Journal*. In print.

#### SUMMARY

The paper deals with membrane shells over an equilateral triangular basis, supported by vertical edge arches which do not bear lateral compression. In the method described the stress function of these shells is fixed in advance, and the shape of the middle surface is determined, so that Pucher's differential equation of the shell problem should be satisfied in each of its points. Consequently, the method applied for the solution of the problem is a so-called inverse procedure.

In the paper the solutions of some simple cases of loading are presented in tables. These tables can also be used expediently for complex loading cases. Concerning the use of these tables two practical examples are presented.



BESONDERS GEFORMTE MEMBRANSCHALEN  
 ÜBER EINEM REGELMÄSSIGEN DREIECKGRUNDRISS

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz behandelt über einem regelmäßigen Dreieckgrundriß konstruierte Membranschalen, die sich auf gegen Seitendruck widerstandslose vertikale Randbögen stützen. Bei dem im Aufsätze beschriebenen Verfahren wird die Spannungsfunktion der Schale im vorhinein angenommen, und die Mittelfläche der Schale von der Belastung abhängig derart gestaltet, daß sie die Pucher'sche Differentialgleichung des Schalenproblems in jedem Punkte befriedige. Das zur Lösung des Problems benützte Verfahren ist daher eine sogenannte inverse Methode.

In dem Bericht ist die Lösung des Problems für einige einfache Belastungsfälle in Tafeln zusammengefaßt. Diese Tafeln können auch in komplexen Belastungsfällen zweckmäßig benützt werden. Bezüglich ihrer Anwendung sind im Aufsätze zwei praktische Beispiele vorgeführt.

VOILES MINCES DE FORME SPECIALE  
 CONSTRUITS SUR UNE BASE EN TRIANGLE REGULIER

P. CSONKA

RESUME

L'auteur étudie des voiles minces construits sur une base en triangle régulier et s'appuyant sur des arcs de rives non résistants à des pressions latérales. L'étude choisit la fonction de tension des voiles, et détermine la forme de la surface moyenne en fonction de la charge d'une façon telle, que l'équation différentielle de Pucher, relative au problème du voile, soit satisfaite en chaque point. La méthode utilisée pour la solution du problème est donc le procédé dit inverse.

La solution du problème est donnée pour quelques cas de charge simples, sous forme de tableaux, qui peuvent être également utilisés avec avantage en cas de charge plus complexes. Deux exemples pratiques illustrant le mode d'application de ces tableaux terminent l'étude.

МЕМБРАННЫЕ ОБОЛОЧКИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ НАД ОСНОВАНИЕМ  
 В ВИДЕ ПРАВИЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются такие мембранные оболочки, построенные над основанием в виде правильного треугольника, которые опираются на краевые дуги, не сопротивляющиеся боковым давлениям. В работе заранее выводятся функции напряжения оболочек, и форма средней поверхности в зависимости от нагружаемости оболочки определяется так, что дифференциальное уравнение Пухера проблемы оболочки удовлетворяется во всех точках. Следовательно, используемый для решения задачи метод представляет собой так называемый инверсный метод.

Данные решения задачи для нескольких простых случаев нагрузки в работе сведены в форме таблиц. Эти таблицы можно соответствующим образом использовать также в случае сложных нагрузок. Для демонстрации использования этих таблиц приведено два практических примера.

# DIE TROCKNUNG IN DER KERAMIK\*

M. KORACH

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

und

G. SASVÁRI

TECHNISCH-CHEMISCHES FORSCHUNGSINSTITUT  
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

## 1. Einleitung

Die Rohstoffe der keramischen Industrie werden feucht gemahlen und die Formgebung geschieht auch größtenteils in feuchtem Zustand entweder in Form einer Gießmasse oder eines plastischen Materials. Die Art der Formgebung bedingt die dazu nötige Wassermenge. Das überflüssige Wasser muß sowohl aus dem Trommelschlicker wie auch aus dem geformten Rohprodukt entfernt werden. Die Entwässerung stellt also bei beiden Herstellungsphasen einen wichtigen Vorgang dar.

## 2. Begriff der Trocknung

Unter Trocknung versteht man die Entfernung der flüssigen Phase aus einem heterogenen, dispersen und kohärenten System durch Verdunstung. Wenn die flüssige Komponente aus dem dispersen System ohne Änderung seines Aggregatzustandes entfernt wird, so spricht man von Entwässerung. Wenn schließlich die flüssige Komponente aus nicht konsistenten Systemen, z. B. aus echten oder kolloiden Lösungen in Form von Dampf ausgetrieben wird, dann heißt der Vorgang Eindampfung. Die Trocknung und Eindampfung erfordern infolge der Verdampfungswärme mehr Energie als die Entwässerung, jedoch kann auf ihre Anwendung in vielen Fällen, z. B. bei der Trocknung von feuchtgeformten Formkörpern, wie im Falle der Keramik, in industriellem Maßstab nicht verzichtet werden.

## 3. Grundtypen der Trocknung

Die einzelnen Trocknungsarten werden durch die Form der Wärmeübertragung bedingt. In der keramischen Industrie wird am häufigsten die *Lufttrocknung* angewendet. Bei dieser Trocknungsart ist die trocknende Sub-

\* Vorgetragen auf der Konferenz für Trocknung am 22. Nov. 1960. in Budapest.



stanz Freiluft, vorgewärmte Luft oder Rauchgas, und der Vorgang besteht darin, daß das zu trocknende Material oder der zu trocknende Körper in strömendem Gas gehalten wird. Das Gas übergibt seinen Wärmehalt konvektiv dem zu trocknenden Körper und sättigt sich zu gleicher Zeit mit dem Dampf der zu verflüchtigenden Flüssigkeit.

Eine zweite, in der Industrie — zwar nicht in der Keramik — manchmal angewendete Trocknungsart ist die *Vakuumtrocknung*. Diese wird besonders bei der Trocknung von temperaturempfindlichen Trockengütern gebraucht. Hier wird der Wärmeübergang im allgemeinen entweder durch Kontakte Anwärmung erreicht, oder erwärmt man die Dämpfe der flüssigen Komponente und der Wärmeübergang geht auf konvektivem Wege vor sich. In letztem Fall ist der Wärmeübergang infolge der schlechten Konvektion der verdünnten Dämpfe sehr träge.

Trüben, Schlicker und feuchte körnige Materialien können durch *Kontakt-trocknung* vorteilhaft getrocknet werden, bei welcher das zu trocknende Material mit einer zweckmäßig erwärmten Oberfläche in Berührung kommt. Die Kontakt-trocknung kann — wie schon erwähnt — unter Vakuum oder bei normalem Druck erfolgen.

Schließlich soll noch die *Trocknung unter Druck* erwähnt werden, welche zwar in der Keramik nicht gebräuchlich ist, aber in vielen Industrien mit Erfolg angewendet wird.

Für all die erwähnten Trocknungsarten ist es charakteristisch, daß die Wärme von der Oberfläche dem Körperinneren zuströmt, im Körper also ein Wärmegradient besteht und die Trocknung in den einzelnen Schichten des Körpers in verschiedenen Zeitpunkten erfolgt.

Die *Strahlungstrocknung*, die auch in der Keramik Anwendung findet, ist von den erwähnten Trocknungsarten grundsätzlich verschieden, sie ermöglicht einen wesentlich schnelleren Wärmeübergang, erhöht aber eben dadurch den Wert des Wärmegradienten. Demzufolge ist sie nur bei der Trocknung von dünnen Körpern, wie z. B. Rohglasuren, Überzügen, usw. gut brauchbar. Die durch Strahlung erreichbare und auf die Oberflächeneinheit bezogene Energiedichte ist um fast zwei Größenordnungen größer als bei der konvektiven Lufttrocknung. So erfolgt die Trocknung schnell und die Abmessungen der Apparatur verringern sich bedeutend.

Bei geeigneter Auswahl der Strahlungswellenlänge kann die Penetrationstiefe erhöht werden. Unter Penetrationstiefe versteht man die von der Oberfläche gerechnete und zu dieser senkrechte Entfernung, bei der die Intensität der Strahlung 0 wird.

In der Praxis hat sich die Strahlungswellenlänge von 1—2  $\mu$  am besten bewährt. Diese Wellenlänge wird vom schwarzen oder grauen Körper bei 2000° C mit maximaler Intensität ausgestrahlt, und ist ca. das Doppelte jener des sichtbaren roten Lichtes.



Um den Vergleich zu ermöglichen, sind hierfolgend die erreichbaren Energiedichten der drei Haupt-Trocknungstypen angeführt:

|                                  |                           |
|----------------------------------|---------------------------|
| Konvektive Lufttrocknung . . . . | 420 kcal/hcm <sup>2</sup> |
| Kontakttrocknung . . . . .       | 17 000 „                  |
| Strahlungstrocknung . . . . .    | 21 000 „                  |

Eine neue Trocknungsart ist die *dielektrische Trocknung*. Es ist wohl bekannt, daß sich in einem Dielektrikum zwischen den Kondensatorplatten eines Hochfrequenz-Stromkreises der dielektrische Stromverlust im Innern des Körpers in Wärme umwandelt. Wenn das elektrische Feld zwischen den Platten gleichmäßig ist, so ist die Wärmeentwicklung in der Zeiteinheit in jedem Punkte des Dielektrikums ebenfalls gleichmäßig, und es entsteht kein Wärme-gradient. Bei dieser Art der Erwärmung spielt foglich die Wärmeleitung keine Rolle. Wenn das Dielektrikum der zu trocknende Körper selbst ist, so erfolgt die Trocknung in jedem Punkte des Körpers gleichzeitig. Der Prozeß geht rasch vor sich, da die naturgemäß langsame Wärmeleitung ausgeschaltet wurde. Zum Beispiel ist zur Erwärmung eines Holzblockes von 20 cm Durchmesser um 100° C bei kontaktem Wärmeübergang eine Zeitdauer von 10 Stunden notwendig. Bei dielektrischer Erwärmung wird derselbe Effekt in 5 Minuten erreicht. Die Geschwindigkeit der Wärmeerzeugung kann bei diesem Prozeß zwischen weiten Grenzen variiert werden. In der Praxis arbeitet man meistens mit einer Leistung von 1—2 W/cm<sup>3</sup>, aber auch 100 W/cm<sup>3</sup> ist erreichbar. Diese Trocknungsart kann in Ungarn bei den heutigen Stromkosten noch nicht wirtschaftlich durchgeführt werden.

#### 4. Die die Trocknung beeinflussenden physikalischen Faktoren

##### a) Der Druck

Der Druck ist bei der Trocknung ein entscheidender Faktor, und seine entsprechende Anwendung könnte in der Trocknungstechnik neue Wege eröffnen. Wie bereits erwähnt, kann die Trocknung sowohl bei Unter- wie bei Überdruck erfolgen. In der Betriebspraxis erfolgt die Lufttrocknung meist bei atmosphärischem Druck.

Auf den ersten Blick erscheint die Wirkung der Druckerhöhung auf die Trocknung ungünstig, da sie die Verdampfung der flüssigen Komponente erschwert. Die Anwendung des erhöhten Druckes kann aber auch auf solche Weise erfolgen, daß der zu trocknende Körper erst bei erhöhtem Druck, z. B. in gesättigtem Dampf weit über 100° C erwärmt wird — wobei der Wassergehalt noch nicht siedet — und nachher, bei allmählicher Abnahme des Druckes, erfolgt die Trocknung rasch und gleichmäßig ohne jedwede weitere Wärmeaufnahme. In der Holzindustrie wird dieses Prinzip seit langem angewandt.



Die zu trocknenden Holzblöcke werden in Autoklaven in gesättigter Dampf-atmosphäre bis auf 160° C erwärmt. Hiernach wird der Druck allmählich bis auf Atmosphärendruck herabgesetzt, und inzwischen sinkt der Feuchtigkeitsgehalt des Holzes bis auf ca. 1/3 des Originalwertes. Zweifellos ist im Falle von keramischen Rohformlingen, bei welchen nicht, wie im Falle des Holzes, der Feststoff die Flüssigkeit einschließt, sondern die Flüssigkeit die festen Körner umgibt, diese Trocknungsweise eine viel heiklere Aufgabe. Trotzdem halten wir diesbezügliche Experimente auch in der Keramik für nicht aussichtslos.

### b) Die Temperatur

Es kann im allgemeinen behauptet werden, daß sich die Trocknung um so wirtschaftlicher und schneller gestaltet, je höher die angewendete Temperatur ist. Dies ist anhand des  $i-x$ -Diagrammes (Enthalpie-Feuchtigkeitsgehalt-Diagramm) unmittelbar ersichtlich. Die erhöhte Temperatur ist auch für die sich im trocknenden Körper selbst abspielenden Vorgänge günstig, da die Viskosität der Flüssigkeitskomponente mit der Temperatur rapid und die Oberflächenspannung, welche die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit ebenfalls in hohem Maße beeinflußt, nur langsam abnimmt. Die Strömungsgeschwindigkeit ist nämlich der Oberflächenspannung gerade und der dynamischen Viskosität umgekehrt proportional, und so verursacht die Erhöhung der Temperatur auch eine Zunahme der Strömungsgeschwindigkeit.

Die Eindampfung von Trüben, oder die Trocknung von Massebrocken kann bei beliebiger Temperatur vorgenommen werden, da die Deformation oder die Zerbröckelung des Trockengutes hier nicht schädlich ist. Demzufolge kann die Temperatur den Siedepunkt der Flüssigkeitskomponente überschreiten. Anders ist der Fall bei Formkörpern. Hier muß die Temperatur jederzeit unterhalb des Siedepunktes gehalten werden, wenn das Trockengut unbeschädigt bleiben soll.

### c) Relative Geschwindigkeit der strömenden Trocknungsgase

Diese spielt vor allem bei der Lufttrocknung von Rohformlingen eine entscheidende Rolle.

Die Lewis-Regel sagt aus:

$$a = c_p \sigma. \quad (1)$$

Hierbei ist

$\sigma$  die Verdampfungszahl  $\text{kg}/\text{m}^2\text{h}$ ,

$a$  die Wärmeübergangszahl  $\text{kcal}/\text{m}^2\text{hC}^\circ$ ,

$c_p$  die spezifische Wärme des Dampfes bei konstantem Druck  $\text{kcal}/\text{kg}^\circ\text{C}$



Es ist weiterhin aus der Ähnlichkeitstheorie bekannt, daß bei der konvektiven Wärmeübertragung die Wärmeübergangszahl in folgender Form ausgedrückt werden kann:

$$\alpha = kPe^n \frac{\lambda}{l} \equiv k \left( \frac{lv}{a} \right)^n \frac{\lambda}{l}. \quad (2)$$

Hierbei ist

$\alpha$  die Wärmeübergangszahl kcal/m<sup>2</sup>h°C

$Pe$  die Peclet-sche Kennzahl

$v$  die relative Strömungsgeschwindigkeit m/h

$l$  der hydraulische Durchmesser des Strömungsquerschnitts m

$a$  die Temperaturleitzahl der Grenzschicht (des Gases) m<sup>2</sup>/h

$\lambda$  die Wärmeleitzahl der Grenzschicht kcal/mh°C

$n$  der von der Körperform abhängige Exponent

$k$  ein Zahlenfaktor

Aus den Formeln (1) und (2) ist ersichtlich, daß wenn die Strömungsgeschwindigkeit gering ist, so ist sowohl die Wärmeübergangszahl wie auch die Verdampfungszahl klein und der Verdampfungsvorgang langsam. Im stehenden oder sich nur langsam bewegenden Gas wird der sich an der Oberfläche bildende Dampf durch die Diffusion nur sehr langsam entfernt, bei größerer Geschwindigkeit tritt aber an Stelle der Diffusion die viel wirksamere Konvektion. Im Interesse des Trocknungswirkungsgrades soll aber das vorgewärmte Rauchgas oder die vorgewärmte Luft nur in der Nähe des gesättigten Zustandes aus dem Trockner abgeführt werden. Bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten kann dies nur so verwirklicht werden, wenn eine Rezirkulation angewendet wird, d. h. die Gase passieren den Trockenraum mehrmals und verlassen ihn endgültig nur dann, wenn der entsprechende Sättigungsgrad erreicht ist. Die Koexistenz der entsprechenden Strömungsgeschwindigkeit und des zweckmäßigen Sättigungsgrades kann auf diese Weise gut erreicht werden.

Dieses Prinzip kann außer durch Rezirkulation auch im Wege des Gegenstromes verwirklicht werden, und zwar in Tunnel- und Kanaltrocknern. Bei diesen Trocknertypen spielt die richtige Regelung der Gasströmung eine besonders wichtige Rolle.

## 5. Die Entwässerungsmethoden der keramischen Industrie

### a) Masseherstellung

In der Feinkeramik und in einigen Zweigen der Grobkeramik wird die Masse auf feuchtem Wege in Mahltrommeln gemahlen. Aus letzteren wird die Masse in Form eines 20—25% Feststoff enthaltenden Schlickes abgeführt. Je nachdem, ob die Formgebung aus plastischer Masse oder aus trockener,



pulverisierter Masse durch Pressen erfolgt, erfolgt die Entfernung des Wassergehaltes auf verschiedene Weisen. Zur Herstellung der plastischen Masse genügt das Filterpressen, die Erzeugung der Preßmasse macht jedoch das Trocknen erforderlich. In den meisten feinkeramischen Betrieben wird auch noch heute so gearbeitet, daß der ganze Schlick durch Filterpressen durchgetrieben und der Anteil der Preßmasse auch auf diese Weise behandelt wird. Die plastischen Preßkuchen werden in Etagetrocknern oder auf Etagewagen gelagert in Kanaltrocknern getrocknet. Eine andere modernere Trocknungsart ist die Anwendung von *Drehtrommel-Vakuumtrocknern*. Statt letzterer kann auch das Eindampfen mittels einer geheizten Tauchtrommel angewendet werden, in der Form, daß in den im Rührgefäß befindlichen Schlick eine langsam rotierende Metalltrommel eintaucht, deren Temperatur etwas über 100° C liegt. Die anhaftende, dünne Schlickschicht trocknet zu Staub, und bevor noch die eingetrocknete Schicht auf dem langsam rotierenden Mantel das Niveau des Schlickers wieder erreichen würde, wird sie von der Zylinderoberfläche durch ein Schabmesser entfernt. Diese Methode ist zwar wirtschaftlich, jedoch ziemlich langsam. Zur Erreichung einer größeren Leistung kann die moderne *Zerstäubungstrocknung* angewendet werden. Bei dieser wird der Schlicker in einem Zerstäuber (z. B. mechanischer Hochdruckzerstäuber) zerstäubt, und der so entstandene Suspensionsnebel entweder in Gegenstrom oder in Gleichstrom in vorgewärmter Luft oder in gereinigtem Rauchgas eingetrocknet.

Auf den ersten Blick müßte das Eindampfen in Tauchtrommel wärmetechnisch günstiger erscheinen als die Zerstäubungstrocknung, da bei voriger die viel wirksamere kontakt Wärmeübertragung wirkt, und bei letzterer die wesentlich trägere Konvektion. Wenn aber die Suspensionstropfen genügend klein sind, so kann auch die Konvektion zu einer sehr wirksamen Methode werden.

Die Verhältnisse der Wärmeübertragung an der Oberfläche der Tropfen werden am besten mit dem Verhalten einer Kugel angenähert, die sich in einem laminaren Gasstrom erwärmt. Bei einer solchen Kugel hat die Wärmeübergangszahl nach Ranz und Marshall folgende Form:

$$\alpha = (2,0 + 0,6 Re^{0,5} Pr^{0,33}) \frac{\lambda}{d} \equiv \left[ 2,0 + 0,6 \left( \frac{vd}{\nu} \right)^{0,5} \left( \frac{\nu}{a} \right)^{0,33} \right] \frac{\lambda}{d} \quad (3)$$

wobei

*Re* die Reynoldssche Kennzahl

*Pr* die Prandtl'sche Kennzahl

*v* die Strömungsgeschwindigkeit, m/sec

$\lambda$  die Wärmeleitzahl der Grenzschicht (Gas), kcal/mh°C

*d* den Durchmesser des schwebenden Tropfens, m

$\nu$  die kinematische Viskosität der Grenzschicht, m<sup>2</sup>/h bedeutet.



Betrachtet man die obige Formel, so ist es deutlich erkennbar, daß der Ausdruck in Klammer immer größer als 2 ist, und der Quotient der Wärmeleitfähigkeit und des Tropfendurchmessers, da die Wärmeleitfähigkeit größer als  $2 \times 10^{-2}$  kcal/m<sup>2</sup>h°C, und der Tropfendurchmesser kleiner als  $10^{-3}$  ist in Größenordnung ungefähr  $10^2$  kcal/m<sup>2</sup>h°C beträgt. Hieraus folgt, daß der Wert der Wärmeübergangszahl in Abhängigkeit vom Tropfendurchmesser zwischen 100 und 1000 kcal/m<sup>2</sup>h°C liegt.

Der Wirkungsgrad einer Zerstäubungs-Trockenanlage ist umso besser, je größer das Temperaturgefälle des Trockengases, d. h. je höher die anfängliche Gastemperatur ist. In der keramischen Industrie kann man bei beiden Methoden ruhig Temperaturen über 100° C anwenden.

#### *b) Die Trocknung geformter Gegenstände*

Dieser Prozeß erfordert, vor allem bei größeren Körpern, besondere Sorgfalt. Das geformte keramische Rohprodukt stellt im allgemeinen einen Körper kolloidkapillarer Struktur und schwacher Kohäsion dar, der nur durch das unter Wirkung des Wassers entstehende Gel gebunden und in seiner Form erhalten bleibt. Diese Struktur bedingt in entscheidender Weise die möglichen Arten der Wasserentfernung, und der Prozeß ist hier heikler als bei zwar kolloidkapillaren, aber konsistenten Stoffen, wie z. B. beim Holz. Die Trocknung kolloidkapillarer Körper besteht aus mehreren Teilvorgängen und die richtige Behandlung ist bei jedem Teilvorgang verschieden. Es ist bekannt, daß der trocknende keramische Rohkörper am Anfang der Trocknung schwindet. Die Schwindung kann in Abhängigkeit der Qualität der plastischen Komponente linear bis zu 10% betragen. Der trocknende Körper enthält auch nach der Schwindung noch reichlich Wasser, praktisch sind seine Poren noch immer mit Wasser gefüllt. Die Trocknung schreitet also weiter vor, jedoch ohne Schwindung. Die Oberfläche des Körpers bleibt feucht, und das beweist, daß in den Kapillaren das Wasser an die Oberfläche strömt. Der Körper ist aber nicht imstande, seinen gesamten Wassergehalt an seiner Oberfläche verdampfen zu lassen. Den Beobachtungen gemäß ist die Oberfläche des Körpers nach Entweichen ungefähr der Hälfte des Wassergehaltes nicht mehr feucht. Das Wasserniveau wandert jetzt in das Innere der Poren, hier erfolgt die Verdampfung, und der entstehende Dampf kann nun nicht mehr durch Konvektion entfernt werden, wie an der Oberfläche, sondern nur durch eine ziemlich träge Diffusion die Poren entlang. Wenn auch dieser zweite Teilprozeß beendet ist, dann ist der Körper praktisch trocken. An der Oberfläche der den Körper bildenden Körner haftet auch in diesem Zustand noch eine Wasserschicht von ca.  $0,05 \mu$  Stärke, die aus ungefähr 60 molekularen Wasserschichten besteht. Durch weitere Erwärmung wird auch diese letzte Spur des Wassers entfernt.



Dies hat jedoch keinen praktischen Sinn mehr, da es sich hier nur mehr um einige Promille des Trockengewichtes handelt, und da im weiteren der Körper diese Wassermenge an der Freiluft aus deren Feuchtigkeitsgehalt sofort wieder aufnimmt (Gleichgewichtsfeuchtigkeit). In der keramischen Industrie gilt ein Formkörper als trocken, wenn sein Wassergehalt 3—4% Gewichtsprozent nicht überschreitet.

Die Erfahrung zeigt, daß bei der Überschreitung einer bestimmten Wärmebelastung der trocknende Körper in der ersten Trocknungsetappe, also in der Periode der Schwindung, sich deformiert und reißt. Die Reißgefahr ist besonders gegen Ende der Schwindungsperiode groß, als der Körper seine Plastizität bereits rapid verliert. Wenn die Trocknung so geführt wird, daß sich die Oberflächenschicht des Körpers in geschwundenem Zustand befindet, das Körperinnere jedoch noch nicht, dann verliert die Oberfläche ihre Plastizität früher als das Körperinnere, und es bilden sich Oberflächenrisse. Die Lage verschlechtert sich noch, wenn sich das Körperinnere noch in der Schwindungsperiode befindet, die Oberflächenschicht aber bereits die zweite Periode überschritten hat, und das kapillare Wasserniveau die Oberfläche verläßt. Die Oberflächenschicht ist in diesem Falle schon vollkommen spröde und die Ribbildung ist unvermeidlich. Deshalb soll der Trocknungsablauf immer so geregelt werden, daß sich der Körper seinen ganzen Querschnitt entlang in derselben Trocknungsetappe befinde.

Erfahrungsgemäß hat die Trocknung kolloid-kapillarer Körper drei Phasen, und zwar mit fortschreitender Trocknung der Reihe nach die Schwindungsphase, in welcher sämtliche Poren mit Wasser gefüllt sind, die Phase der kapillaren Flüssigkeitsströmung, in welcher die Oberfläche des Körpers noch feucht ist, und schließlich die Phase der Dampfdiffusion, in welcher die Oberfläche schon trocken ist. In der ersten und zweiten Phase wandert das Wasser durch die Kapillargefäße in flüssiger Form an die Oberfläche, die Verdunstung erfolgt folglich an der Oberfläche, in der dritten Phase verdampft das Wasser im Körperinneren und verläßt den Körper in Dampfform durch molekulare Diffusion, welche in den Kapillargefäßen erfolgt.

Obige Einteilung beruht auf der Erfahrung. Die einzelnen Phasen sind nicht scharf getrennt, und die physikalischen Vorgänge der einzelnen Phasen sind auch heute noch nicht genügend geklärt. Die Berechnung des zeitlichen und örtlichen Verlaufs der Trocknung kann unserem heutigen Wissen nach noch nicht exakt ausgeführt werden. Um trotzdem rechnerische Resultate zu erlangen, muß man aus einem stark vereinfachten Modell ausgehen, und sich auf Grund dessen mit annähernd berechneten Ergebnissen begnügen. Im folgenden Teil vorliegender Arbeit wollen wir uns mit der Frage der Berechnung befassen. Wir werden unser Modell so wählen, daß sich die erfahrungsmäßigen Vorgänge womöglich mit Gleichungen elementarer Form erfassen lassen.



## 6. Die Diffusionsgleichungen der Trocknung

In der Fachliteratur wird die Flüssigkeitswanderung, die während der Trocknung im Innern des kolloid-kapillaren Körpers vor sich geht, meistens nach dem Muster der Diffusionsgeschwindigkeit formuliert. Dieses Muster ist das I. Ficksche Gesetz, welches sich auf die molekulare Gasdiffusion bezieht:

$$\frac{dV}{dt} = -D \frac{\partial C}{\partial x} \text{ [kg/m}^2 \text{ s]}. \quad (4)$$

Hierbei bedeutet

$V$  das durch den wirksamen Querschnitt diffundierende Gasvolumen  
m<sup>3</sup>/m<sup>2</sup>

$t$  die Zeit, s

$D$  die Diffusionskonstante, m<sup>2</sup>/s

$C$  die Konzentration der diffundierenden Komponente, m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>

$x$  die Länge

In der Fachliteratur wird die Geschwindigkeit der Flüssigkeitswanderung in folgender, mit (4) analoger Form ausgedrückt:

$$W = -Fk \frac{S}{V} \frac{d\left(\frac{s}{S}\right)}{dx} \text{ [kg/s]}. \quad (5)$$

Hierbei ist

$W$  die in der Zeiteinheit den wirksamen Querschnitt durchströmende Wassermenge, kg/s

$F$  Querschnitt des Körpers senkrecht zur Strömungsrichtung, m<sup>2</sup>

$S$  das Trockengewicht des Körpers, kg

$V$  das Volumen des Körpers, m<sup>3</sup>

$s$  der Wassergehalt des Körpers, kg

$k$  die Feuchtigkeitsleitfähigkeit, m<sup>2</sup>/s

$x$  die Strömungstrecke, m

Unseres Erachtens erfaßt Gleichung (5) das wirkliche physikalische Geschehen nur formell. Die Feuchtigkeitsleitfähigkeit variiert in den einzelnen Trocknungsabschnitten und hängt nicht nur von jenen Faktoren ab, die die molekulare Diffusion normalerweise beeinflussen, also von der Temperatur und dem Druck, sondern auch von der individuellen Struktur des trocknenden Körpers und vor allem auch von der Zeit. Die Autoren, die diese Formel gebrauchen, bemerken auch selbst, daß die Feuchtigkeitsleitfähigkeit von sehr vielen Faktoren abhängig ist, und ihre Bestimmung ist nur von Fall zu Fall experimentell möglich. Wenn aber ein entscheidender Faktor der den Vorgang



beschreibenden Formel für jeden einzelnen Körper und für jeden einzelnen Trockenvorgang von Fall zu Fall empirisch bestimmt werden muß, dann ist dieser Koeffizient und mit ihm die Formel selbst von geringem Wert.

## 7. Der erste Trocknungsabschnitt

Im folgenden Teil unserer Arbeit wird von Gleichung (5) kein Gebrauch gemacht. Vielmehr wird versucht, für jede typische Trocknungsphase ein entsprechendes vereinfachtes Modell zu finden, anhand dessen der betreffende physikalische Vorgang durch elementare, wohlbekannte Gleichungen erfaßt werden kann. Die Berechnungen werden sich auf die Bestimmung von Trocknungsarbeit und Trocknungszeit beschränken. Unter Trocknungsarbeit verstehen wir hier nur die Arbeit, die zur Bewegung des Wassergehaltes nötig ist. Der Energiebedarf der Verdampfung gehört also nicht hierher.

Im ersten Trocknungsabschnitt verdunstet der Flüssigkeitsgehalt an der Oberfläche und der Körper schwindet. Es tritt an die Stelle des sich entfernenden Wassers keine Luft, der Körper ist vollkommen mit Wasser gesättigt, aber der Wasser enthaltende Hohlraum verringert sich.

Betrachten wir jetzt das Entgegengesetzte dieses Vorganges. Wenn eine kolloid-kapillare Masse, z. B. Ton, Wasser aufnimmt, so entfernen sich die im trockenen Zustand sich berührenden Teilchen voneinander, und es dringt zwischen sie Wasser ein. Im ersten Trocknungsabschnitt erfolgt das Umgekehrte. Die Teilchen rücken näher aneinander, bis jedes mit jedem umgebenden Teilchen in Berührung kommt. Mehrere Forscher, vor allem WESTMAN und von TERZAGHI, haben den Druck gemessen, mit dem die Quellung eines sich mit Wasser berührenden Tonkörpers verhindert werden kann. Westman fand für diesen Druck im Falle von Kaolinen 70—100, von Bindetonen 175 kg/cm<sup>2</sup>. Terzaghi stellte ebenfalls fest, daß der die Quellung verhindernde Druck in Abhängigkeit von der Kornverteilung und anderen physikalischen Eigenschaften bei Tonen ca. 100—200 kg/cm<sup>2</sup> beträgt. Weiterhin stellte Westman fest, daß sich das Wasser aus plastischen, gequellten Tonkörpern auspressen läßt, und der dazu benötigte Druck mit der Volumenverminderung logarithmisch wächst. J. STARK untersuchte die Quellung verschiedener Tonsorten in Abhängigkeit von der Zeit und fand, daß die Quellung um so langsamer vor sich geht, je feiner die Kornverteilung ist.

Die Messungen von WESTMAN und TERZAGHI ermöglichen die annähernde Berechnung der Quellungsarbeit. Wenn nämlich der notwendige Druck mit der Volumenverminderung logarithmisch zunimmt, so kann diese Tatsache mit folgender Differentialgleichung erfaßt werden:

$$\frac{dp}{dv} = kp. \quad (6)$$



Da die untere und obere Grenze des Druckes bekannt ist, kann aus Gleichung (6) der Faktor  $k$  bestimmt werden. Dazu braucht man nur die Gleichung (6) zwischen den Druckgrenzen  $p_0$  und  $p$  zu integrieren:

$$\ln \frac{P}{p_0} = k \Delta v. \quad (7)$$

Die Volumenänderung ergibt sich aus dem Produkt des Körpervolumens und des räumlichen Ausdehnungskoeffizienten der Quellung. Meistens ist nur die lineare Ausdehnung bekannt, d. h. deren Koeffizient. Wenn die räumliche Ausdehnung unter 30% des Trockenkörpervolumens bleibt, dann beträgt der räumliche Ausdehnungskoeffizient der Quellung annähernd das Dreifache des linearen Ausdehnungskoeffizienten. Folglich ist die Volumenverminderung:

$$\Delta V = 3 a V. \quad (8)$$

Hierbei ist

$V$  das Volumen des feuchten Körpers,  $m^3$

$a$  der lineare Ausdehnungskoeffizient der Quellung,  $m/m$

Zur Berechnung der Volumarbeit ist es zweckmäßig, die Gleichung (7) in Exponentialform umzuschreiben:

$$p = p_0 e^{k \Delta v}. \quad (9)$$

Aus Gl. (8) und (9) gelangt man durch direkte Integrierung zur Volumarbeit:

$$L = p_0 \int_0^{3aV} e^{k \Delta v} dv = \frac{p_0}{k} (e^{3akV} - 1) [\text{m/kg}]. \quad (10)$$

Setzt man die Meßergebnisse WESTMANS in Gl. (10) ein, so ergibt sich die Volumarbeit bei einem feuchten Tonkörper von 1 lit Volumen zu 70,5 mkg, und der durchschnittliche Druck zu  $3,52 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^2$ , also zu ungefähr 35,2 at.

In Kenntnis der Volumarbeit versuchen wir jetzt, die physikalische Ursache der Quellung ausfindig zu machen. Da bei der Quellung sich die Teilchen voneinander entfernen, und sich die kapillaren Gefäße des Körpers dadurch ausdehnen, kann die Oberflächenspannung keinesfalls den Grund der Quellung darstellen. Die hier wirkende Kraft ist im Vergleich zur Oberflächenspannung entgegengesetzter Richtung und überwindet dieselbe. Nach der Ausschaltung der kapillaren Oberflächenspannung kann es noch zwei solche Mechanismen geben, die zur Quellung führen können. Der erste dieser ist der osmotische Druck, der bei der kolloidalen Lösung der feinsten Teilchen auf-



tritt, der zweite ist die elektrostatische Abstoßung der Teilchen infolge des Oberflächenpotentials, das an der Grenzfläche des dispergierten Stoffes und der Flüssigkeit auftritt.

Erst soll die auf dem osmotischen Druck beruhende Möglichkeit untersucht werden. Den osmotischen Druck in kolloiden Lösungen oder sehr feinkörnigen Suspensionen hat EINSTEIN mit folgender Formel beschrieben:

$$\Delta p = nkT. \quad (11)$$

Hierbei ist

- $n$  die Zahl der in der Volumeinheit schwebenden Teilchen,  $m^{-3}$
- $k$  entspricht der Boltzmannschen Konstanten,  $\text{mkg}/^\circ\text{K}$
- $T$  die absolute Temperatur,  $^\circ\text{K}$

Setzen wir in Gleichung (11) folgende numerische Werte ein:

|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| Porenhalt des Körpers . . . . .       | 0,4 $\text{m}^3/\text{m}^3$                     |
| Volumgewicht der Teilchen . . . . .   | 2700 $\text{kg}/\text{m}^3$                     |
| Temperatur . . . . .                  | 300 $^\circ\text{K}$                            |
| Gewicht eines Teilchens . . . . .     | $3,14 \cdot 10^{-21} \text{ kg}$                |
| Zahlenwert der Konstanten $k$ . . . . | $1,4 \cdot 10^{-24} \text{ mkg}/^\circ\text{K}$ |

Obige Zahlenwerte entsprechen einem fetten Bindeton. Der so berechnete osmotische Druck ergibt sich zu  $346 \text{ kg}/\text{m}^2$ , ist also um drei Größenordnungen geringer als der mittlere Druck, der aus der Volumarbeit berechnet wurde. Hieraus kann gefolgert werden, daß der eventuell auftretende osmotische Druck als Ursache der Quellung keinesfalls ausreichend ist.

Nehmen wir nunmehr an, daß die Quellung durch das an der Grenzfläche auftretende Potential verursacht wird. Die Abstoßkraft zwischen den einzelnen Teilchen wird durch das Coulombsche Gesetz ausgedrückt:

$$P = \frac{e^2}{\epsilon x^2} \quad [\text{dyn}]. \quad (12)$$

Hierbei ist

- $e$  die gleiche Ladung aller Teilchen, ESE
- $x$  die Entfernung der Massenmittelpunkte der Teilchen, cm
- $\epsilon$  die Dielektrizitätskonstante

Die elementare Arbeit, welche obige Kraft auf dem Wege  $dx$  leisten kann, wird mit folgender Differentialgleichung beschrieben:

$$dl = \frac{e^2}{\epsilon} \frac{dx}{x^2} \quad [\text{erg}]. \quad (13)$$

Die tatsächliche Strecke, entlang welcher die Kraft wirkt, kann mit Hilfe des Teilchenradius und des linearen Ausdehnungskoeffizienten der Quellung ausgedrückt werden, und beträgt  $a r$ , wobei  $r$  der durchschnittliche Teilchenradius ist. Man gelangt zu der entlang der Strecke  $a r$  geleisteten Arbeit durch Integrieren der Differentialgleichung (13) zwischen den Grenzen  $r$  und  $r(1 + a)$ :

$$l = \frac{e^2}{\varepsilon} \int_r^{r(1+a)} \frac{dx}{x^2} = \frac{ae^2}{(1+a)\varepsilon r}. \quad (14)$$

Die elektrische Ladung der einzelnen Teilchen ist unbekannt und ihre Messung schwierig. Bekannt ist aber das Oberflächenpotential der suspendierten Tonteilchen. Es beträgt durchschnittlich  $6 \cdot 10^{-2}$  V, d. h.  $2 \cdot 10^{-4}$  ESE Spannungseinheiten. Die Ladung eines Teilchens läßt sich mit Hilfe des Oberflächenpotentials, der dielektrischen Konstanten der dispergierenden Flüssigkeit und mit dem Radius des Teilchens in folgender Form ausdrücken:

$$e = \zeta \varepsilon r \text{ [ESE]}. \quad (15)$$

Hierbei ist

$\zeta$  das kinetische Oberflächenpotential, ESE.

Gleichung (15) in Gleichung (14) eingesetzt führt zu:

$$l = \frac{a\zeta^2 \varepsilon r}{1+a} \text{ [erg]}. \quad (16)$$

Die Berechnung der Abstoßkraft, die zwischen zahlreichen Teilchen gleichzeitig auftritt, ist ein Vielkörper-Problem und kann exakt nicht ausgeführt werden. Die Lage wird durch die Annahme vereinfacht, daß der betrachtete Körper aus Teilchenpaaren besteht. Die Gesamtarbeit der Quellung wird so berechnet, als ob sie einfach aus der Summe der einzelnen elementaren Abstoßarbeiten der Teilchenpaare bestünde. Die Anzahl der Teilchenpaare des Körpers beträgt;

$$N = \frac{V}{2,5 \cdot \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 8r^3(1+a)^3} = \frac{V}{9,4(1+a)^3 r^3}. \quad (17)$$

Hierbei ist

$V$  das Volumen des feuchten Körpers,  $\text{cm}^3$

$1/6 \sqrt{0,5} \cdot 8 r^3$  ist das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders von der Kantenlänge  $2r$ , von denen 5 einem kugelförmigen Teilchen entsprechen. (Dabei wird angenommen, daß die als kugelförmig betrachteten Teilchen das Körpervolumen ein tetraedrisches Raumgitter formend ausfüllen.)



Die gesamte Quellungsarbeit, d. h. im umgekehrten Sinn die Arbeit, die zur Auspressung des Wassergehaltes eines gequollenen Tonkörpers notwendig ist, ergibt sich als Produkt aus den Gleichungen (16) und (17) zu:

$$L = 0 \cdot 106 \frac{V a \zeta^2 \varepsilon}{(1 + a)^4 r^2} \quad [\text{erg}]. \quad (18)$$

Setzen wir in Gleichung (18) die hier folgenden Zahlenwerte ein:

|   |                        |
|---|------------------------|
| kinetisches Potential .....               | $2 \cdot 10^{-4}$ ESE  |
| Dielektrizitätskonstante .....            | 80                     |
| Radius des Montmorillonitteilchens ....   | $6 \cdot 10^{-7}$ cm   |
| Körpervolumen .....                       | $10^3$ cm <sup>3</sup> |
| linearer Dehnungskoeffizient der Quellung | $10^{-1}$ cm/cm,       |

so ergibt Gleichung (18) für die Gesamtarbeit rund 3 *mkg*. Vergleicht man diesen Wert mit der oben berechneten Volumarbeit, so erscheint er um mehr als eine Größenordnung zu niedrig. Gebraucht man aber Gleichung (18) zur Berechnung des Teilchenradius, der zur obengegebenen Volumarbeit führt, so ergibt sich ca. 7 Å. Damit ist schon die Dicke einer Kristallgitterschicht der Tonminerale erreicht. Dieses Berechnungsergebnis läßt die Folgerung zu — sie ist jedoch kein Beweis dafür —, daß falls die Ursache für die Quellung die Coulombsche Abstoßkraft ist, so ihre Wirkung nicht im Abrücken der einzelnen Teilchen voneinander, sondern in der Erweiterung der Gitterschichtabstände in den Tonmineralen selbst besteht.

### 8. Der zweite Trocknungsabschnitt

Im zweiten Abschnitt der Trocknung erfolgt die Verdampfung des flüssigen Anteils ebenfalls an der Oberfläche, das Volumen des Körpers bleibt jedoch unverändert. An Stelle des sich entfernenden Wassers tritt jetzt die Luft. Offensichtlich wird in diesem Abschnitt die Strömung des Wassers durch die Saugwirkung der die Kapillaren abschließenden Menisken verursacht.

Die Wirkung der Oberflächenspannung in den Kapillaren kann wiederum durch zwei Mechanismen erklärt werden. Beim ersten besteht im trocknenden Körper ein Wärmegradient und das Wasser strömt in den Kapillaren in Richtung nach der geringeren Temperatur. Beim zweiten besteht kein Wärmegradient, die Kapillargefäße des Körpers haben aber verschiedene Durchmesser.

#### a) Im Körper besteht ein Wärmegradient

Im trocknenden Körper tritt in jedem Fall ein Wärmegradient auf, wenn am Anfang der Trocknung der feuchte Körper und die trocknende Substanz, z. B. die Trockenluft, dieselbe Temperatur besitzen. Die Verdunstung an der

Oberfläche verursacht eine Abkühlung und infolgedessen tritt ein Wärmegradient auf.

Die Oberflächenspannung hängt im Sinne des Eötvösschen Gesetzes von der Temperatur ab. Die Oberflächenspannung verringert sich mit wachsender Temperatur und wird schließlich bei der kritischen Temperatur gleich Null. Die Änderung der Oberflächenspannung des Wassers erfolgt zwischen 0—100°C mit der Temperaturänderung fast linear, folglich wird bei der Berechnung nicht die Oberflächenspannung selbst, sondern deren Wärmegradient angewendet, den wir mit  $\delta$  bezeichnen werden. Die Wassersäule, die das Kapillargefäß vom Durchmesser  $d$  ausfüllt, wird an beiden Enden durch Menisken begrenzt, deren Temperaturunterschied  $\Delta t$  beträgt. Der durch diesen Temperaturunterschied bedingte Spannungsunterschied zwischen den zwei Menisken beträgt:

$$\Delta\sigma = \Delta t \cdot \delta \text{ [kg/m]}. \quad (19)$$

Hierbei ist

$\sigma$  die Oberflächenspannung, kg/m

Der kapillare Druck, der durch den Temperaturunterschied  $\Delta t$  entsteht, kann auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$\Delta p = \Delta t \delta d \pi \frac{4}{d^2 \pi} \equiv \frac{4 \Delta t \delta}{d} \text{ [kg/m}^2\text{]}. \quad (20)$$

Dem mit Gleichung (20) erfaßten kapillaren Druck wirkt der Widerstandsdruck nach Poiseuille entgegen, und zwar:

$$\Delta p = 32 \frac{\nu \gamma}{g} v_0 \frac{l}{d^2} \text{ [kg/m}^2\text{]}. \quad (21)$$

Hierbei ist

$\nu$  die kinematische Viskosität, m<sup>2</sup>/s

$\gamma$  das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, kg/m<sup>3</sup>

$g$  die Erdbeschleunigung, 9,81 m/s<sup>2</sup>

$v_0$  die Strömungsgeschwindigkeit, m/s

$l$  die Länge der Kapillaren, m

$d$  der Durchmesser der Kapillaren, m

Da der Kapillardruck und der Poiseuillesche Widerstand in Gleichgewicht sein müssen, ist die Strömungsgeschwindigkeit mangels einer Beschleunigung gleichmäßig, und so kann die Gl. (21) in folgender Form geschrieben werden:

$$\Delta p = 32 \frac{\nu \gamma l^2}{g d^2 \tau} \text{ [kg/m}^2\text{]}. \quad (22)$$



Hierbei ist

$$v_0 \frac{l}{\tau}$$

$\tau$  die Zeit.

Da während der Trocknung die Länge der im Kapillargefäß strömenden Wassersäule ständig abnimmt, nimmt auch der Druck ab. Den zeitlichen Mittelwert des Druckes erhält man wie folgt:

$$\overline{\Delta p} = 32 \frac{\nu\gamma}{gd^2 \tau} \int_0^l l^2 dl \cong 10 \frac{\nu\gamma l^2}{gd^2 \tau} \quad [\text{kg/m}^2]. \quad (23)$$

Im Sinne des Mechanismus bleibt der eine Meniskus an der Mündung des Kapillargefäßes haften, der andere aber wandert der Verkürzung der Wassersäule entsprechend der Kapillare entlang. Da in der Kapillare der Länge nach ein Wärmegradient herrscht, wird sich die Temperatur des zweiten Meniskus ständig ändern. Vom Verlauf dieser Temperatur wissen wir nichts und ihre Messung ist fast unausführbar. Wir werden die Temperaturänderung dadurch berücksichtigen, daß wir das arithmetische Mittel der Temperaturdifferenz, d. h. ihre Hälfte, verwenden werden.

Da der kapillare Druck und der Widerstand, wie schon erwähnt, in Gleichgewicht stehen, kann die Gleichheit der beiden wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{2\Delta t\delta}{d} = 10 \frac{\nu\gamma l^2}{gd^2 \tau}. \quad (24)$$

Durch Umformung der Gl. (24) beträgt die Zeit der vollständigen Entleerung der Kapillaren:

$$\tau = 5 \frac{\nu\gamma l^2}{gd\Delta t\delta} \quad [\text{s}]. \quad (25)$$

Setzen wir in Gl. (25) folgende Zahlenwerte ein:

|   |            |                      |                   |
|---|------------|----------------------|-------------------|
| Teilchendruckmesser .....   | $d$        | $6 \cdot 10^{-9}$    | m                 |
| Temperaturunterschied .....                                       | $\Delta t$ | 15                   | °C                |
| Spezifisches Gewicht des Wassers ...                              | $\gamma$   | $10^3$               | kg/m <sup>3</sup> |
| Länge der Kapillare .....   | $l$        | $5 \cdot 10^{-2}$    | m                 |
| Erdbeschleunigung .....   | $g$        | 9,81                 | m/s <sup>2</sup>  |
| Kinematische Viskosität des Wassers<br>bei 20° C .....            | $\nu$      | $10^{-6}$            | m <sup>2</sup> /s |
| Temperaturgradient der Oberflächen-<br>spannung des Wassers ..... | $\delta$   | $1,72 \cdot 10^{-5}$ | kg/m°C            |

so ergibt Gleichung (25) für die Zeit der Entleerung der Kapillare  $8,1 \cdot 10^5$  sec, d. h. 222 Stunden, oder 9 Tage. Diese Zeit erscheint auf den ersten Blick zu lang, man darf jedoch nicht vergessen, daß in der Praxis auch die fettesten Tonsorten einen beträchtlichen Anteil an wesentlich größeren Körnern als die berücksichtigten besitzen, infolge derer zum Teil auch größere Kapillaren entstehen können. Die rißfreie Trocknung von z. B. Ziegeln, die aus Fetton hergestellt sind, beansprucht trotz des größeren Korngehaltes Tage, so daß das erhaltene Resultat der Größenordnung nach zutreffen kann.

Die Entwässerungsarbeit läßt sich entweder aus der linken oder aus der rechten Seite der Gl. (24) berechnen, wenn man die dort befindlichen Ausdrücke, die die Dimension eines Druckes besitzen, mit dem Volumen der entfernten Wassermenge multipliziert. Die Entwässerungsarbeit ist demnach mit der rechten Seite der Gl. (24) ausgedrückt:

$$L = 10 \frac{W \gamma l^2}{g d^2 \tau} \quad [\text{m kg}] \quad (26)$$

oder mit der linken Seite derselben Gleichung ausgedrückt:

$$L = 2 \frac{W \Delta t \delta}{d} \quad [\text{m kg}]. \quad (27)$$

Hierbei ist  $W$  das abgeführte Wasservolumen in  $\text{m}^3$ .

Gl. (26) ist lehrreicher, da aus ihr klar hervorgeht, daß die Entwässerungsarbeit um so größer wird, in je kürzerer Zeit sie geleistet wird. Die abgeführte Wassermenge hängt also nicht von der Größe der geleisteten Arbeit, sondern vom Produkt aus der Arbeit und der Zeit, d. h. von der Wirkung ab.

Wenn wir in Gl. (26) und (27) dieselben Zahlenwerte wie bei Gl. (25) einsetzen, so ergibt sich diese Arbeit zu  $86 \text{ mkg/lit}$ , oder in Wärmemenge umgerechnet:  $0,2 \text{ kcal/lit}$ . Die Arbeit ist also verglichen mit dem Wärmebedarf der Verdampfung verschwindend klein.

#### b) Im Körper besteht kein Wärmegradient

In dem physikalischen Modell, das diesem Mechanismus zugrunde liegt bilden die Kapillaren untereinander kommunizierende Gefäße. Die kommunizierenden Kapillaren sind ungleichen Durchmessers. Der Gesamtquerschnitt der den Körper in der Strömungsrichtung durchsetzenden Kapillaren kann offensichtlich so halbiert werden, daß die eine Hälfte aus all den Kapillarquerschnitten, die kleiner als der Durchschnitt, und die andere Hälfte aus all den Kapillarquerschnitten, die größer als der Durchschnitt sind, besteht. Wenn die Kornverteilung und damit auch die wahrscheinliche Kapillarver-



teilung eines Tones bekannt ist, so kann der durchschnittliche Durchmesser der beiden oben beschriebenen Kapillarengruppen ebenfalls bestimmt werden.

Es soll  $d_1$  den durchschnittlichen Durchmesser der kleineren, und  $d_2$  den der größeren Kapillarengruppe bedeuten. In diesem Fall beträgt der Druckunterschied, der durch den Oberflächenspannungsunterschied in den Menisken der kommunizierenden Kapillaren entsteht, analog zur Gl. (20):

$$\Delta p = 4\sigma \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) \quad [\text{kg/m}^2]. \quad (28)$$

Der zeitliche Mittelwert des kapillaren Widerstandes ist in diesem Fall zur Gl. (21) analog:

$$\Delta p = 32 \frac{\nu \gamma l^2}{g \tau} \left( \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} \right) \quad [\text{kg/m}^2]. \quad (29)$$

Da der Kapillardruck laut Gl. (28) und der Widerstand laut Gl. (29) in Gleichgewicht stehen, können diese gleichgesetzt werden, und analog zu dem Verfahren, das wir bei Gl. (24) gebrauchten, kann auch hier die Entleerungszeit in folgender Form bestimmt werden:

$$\tau = 8 \frac{\nu \gamma l^2}{g \sigma} \frac{\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} \quad [\text{s}]. \quad (30)$$

Wenn wir in Gl. (30) für  $d_1$   $5 \cdot 10^{-9}$  m und für  $d_2$   $7 \cdot 10^{-9}$  m und für alle anderen Faktoren dieselben Werte wie bei Gl. (25) einsetzen, so ergibt sich für die Entleerungszeit  $1,14 \cdot 10^6$  sec, d. h. 320 Stunden, oder rund 14 Tage. Dieser Mechanismus führt also der Größenordnung nach zum selben Resultat wie der erste.

Wenn man jetzt die Entwässerungsarbeit dieses Mechanismus analog zur Gl. (26) und (27) berechnet, so ergibt sich dafür  $840$  *mkg/lit* und in Wärmemengen umgerechnet nahezu  $2$  *kcal/lit*. Der Arbeitsbedarf bei diesem Mechanismus ist also ungefähr das Zehnfache des ersten, bleibt aber mit dem Energiebedarf der Verdampfung verglichen noch immer vernachlässigbar.

### 9. Der dritte Trocknungsabschnitt

Im dritten Trocknungsabschnitt ziehen sich die Wassermenisken in das Körperinnere zurück, und die Verdampfung erfolgt ebenfalls im Inneren des Körpers. Die Körperoberfläche ist trocken und warm. Der im Körperinneren

entstehende Dampf kann durch die jetzt schon mit Luft gefüllten Kapillaren offensichtlich nur im Wege der molekularen Diffusion entweichen.

Der zeitliche Verlauf dieser Diffusion könnte auf Grund der Gleichung (4) leicht berechnet werden, aber da die Diffusionsgeschwindigkeit unter den Eigenschaften des Festkörpers nur von der Länge der Kapillargefäße abhängt, und von deren Durchmesser unabhängig ist, und da sämtliche anderen bestimmenden Faktoren, also der Konzentrationsunterschied und die Diffusionskonstante nicht Stoffeigenschaften des Körpers, sondern des Wassers sind, das in allen Trockenvorgängen das gleiche bleibt, würde die Berechnung nur das Verhalten des Wassers charakterisieren.

#### SCHRIFTTUM

1. STARK, J.: Physikalisch-technische Untersuchung keramischer Kaoline. Leipzig, 1922.
2. VON TERZAGHI, K.: S. B. Akad. Wiss. Wien, Klasse IIa, Bd. 132 (1924). S. 105.
3. WESTMAN, A. E. R.: J. Amer. Ceram. Soc. Bd. 12 (1929). S. 585; Bd. 15 (1932). S. 552; Bd. 16 (1933). S. 256; Bd. 17 (1934). S. 128.
4. SALMANG, H.: Die physikalischen und chemischen Grundlagen der Keramik. Berlin, 1954.
5. KRISCHER, O., KRÖLL, K.: Trocknungstechnik. I. Bd. Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik. Berlin, 1956.
6. HIRSCH, M.: Die Trockentechnik. Grundlagen, Berechnung, Ausführung und Betrieb der Trockeneinrichtungen. 2. Aufl. Berlin, 1932.
7. LIKOV, A. V.: A szárítás elmélete. Budapest. 1952.
8. BUZÁGH, A.: Kolloidika. Budapest. 1951.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Nach der Definition der Trocknung werden die Grundtypen derselben angeführt. Nachher befaßt sich die Arbeit mit den die Trocknung beeinflussenden Faktoren. Sie untersucht die Rolle des Druckes, der Temperatur und der relativen Strömungsgeschwindigkeit der Trockengase. Es werden die in der keramischen Industrie gebräuchlichen Trocknungsarten und die diesbezüglichen weiteren Entwicklungsmöglichkeiten beschrieben.

Im weiteren befaßt sich die Arbeit mit der Berechnungsmöglichkeit des Trockenvorganges.

Es werden die physikalischen Vorgänge der drei Trocknungsabschnitte abgeleitet, und die so erhaltenen Formeln durch Einsetzen von geeigneten Zahlenwerten geprüft.

#### DRYING IN THE CERAMIC INDUSTRY

M. KORACH<sup>†</sup> and GY. SASVÁRI

#### SUMMARY

After giving the definition of drying, the authors deal with its basic types and with the factors influencing the process. The influence of pressure, temperature and of the relative flow velocity of the drying medium are investigated. The drying methods used in the ceramic industry and the possibilities of development are discussed.

After this, the possibilities in calculating the drying process are dealt with. The physical equations governing the three phases of drying are established and the formulae are checked by substituting numerical values.



## LE SECHAGE EN CERAMIQUE

M. KORACH et GY. SASVÁRI

## RESUME

Après la définition du séchage, les auteurs en font connaître les types fondamentaux, ainsi que les facteurs ayant une influence sur la marche du processus. L'examen du rôle de la pression, de la température, de la vitesse d'écoulement relative des gaz de séchage est suivi de la description des modes de séchage utilisés dans l'industrie de la céramique, et des possibilités de perfectionnement des procédés.

Les auteurs examinent ensuite la possibilité du calcul du processus de séchage. Ils déduisent les relations physiques des trois phases du séchage, et contrôlent les formules ainsi reçues en y substituant des valeurs numériques.

## СУШКА В КЕРАМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

M. KOPACH и Д. ШАШВАРИ

## РЕЗЮМЕ

Авторы после определения понятия сушки знакомят с основными типами ее, затем приводят факторы, влияющие на ход сушки. Далее авторы занимаются влиянием давления, температуры и относительной скорости движения потока сушильного агента. Знакомят с методами сушки, применяемыми в керамической промышленности, а также с возможностями развития в этой области.

В дальнейшем авторы рассматривают возможности расчета процесса сушки. Вводятся физические зависимости, управляющие тремя периодами сушки, и полученные таким образом формулы проверяются подстановкой соответствующих цифровых данных.

# UNTERSUCHUNG DER TRANSIENTEN VORGÄNGE VON ASYNCHRONMOTOREN MIT HILFE VON ANALOGRECHNERN

K. P. KOVÁCS

KORRESP. MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 10. August 1961]

## 1. Einleitung

Die Anwendung von Analogrechnern zur Untersuchung des Betriebes von Asynchronmotoren bildete in neuerer Zeit den Gegenstand mehrerer Aufsätze [1, 2, 3].

In diesen Aufsätzen wurde die Differentialgleichung des Motors meistens in Matrixform angeschrieben und einfachheitshalber wurde von der Zweiphasenmaschine ausgegangen. Oft scheint es, eben wegen der gewählten Methode, als ob das Anschreiben der Differentialgleichungen eine schwierige Aufgabe wäre, obwohl die Schreibweise der Dreiphasengrößen mit Hilfe von Vektoren aus der Fachliteratur wohl bekannt ist, wobei die Resultate in einfacher Weise erreicht werden können [3, 4].

In diesem Aufsatz wird im allgemeinen die Abbildung des Asynchronmotors auf dem Analogrechner behandelt. Hierzu wird der Begriff der in der ausländischen Fachliteratur neuerlich üblichen Strukturbilder eingeführt. Außer den gewöhnlichen Asynchronmotoren wird auch die Abbildung auf Analogrechnern der Schrittschaltung und des im Läufer mit asymmetrischem Impedanzsystem belasteten Schleifringmotors behandelt, bzw. werden die dazugehörigen Strukturbilder aufgebaut.

## 2. Einheit des Analogrechners und Begriff des Strukturbildes

Die Rechnungseinheiten der Analogrechner bzw. deren Aufbau werden als bekannt vorausgesetzt. Es ist ja bekannt, daß die Grundeinheiten des Analogrechners dazu geeignet sind, die elektrische Analogie der Summe, der Differenz, des Produktes oder des Quotienten zweier oder mehrerer veränderlicher Größen zu erzeugen, bzw. das Integral und den Differentialquotienten irgendeiner Funktion ebenfalls durch Erzeugung der elektrischen Analogie abzubilden. Natürlich gehört auch die Multiplikation mit irgendeinem konstanten Koeffizienten in den Bereich der mit dem Analogrechner durchführbaren Grundrechnungsarten.

Wie bekannt, verrichten die modernen Analogrechner die obigen Berechnungen für jedwede Funktion mit Hilfe von elektronischen Mitteln, wobei



das Ergebnis in der Regel als eine den Vorgang beschreibende Ausgangsspannung in Funktion der Zeit erhalten wird, die mittels Oszillographen oder irgendeines anderen Schreibapparates aufgezeichnet wird. Die Analogrechner-technik ermöglicht die Berücksichtigung nicht-linearer Beziehungen durch Anwendung von sogenannten Funktionsgeneratoren. In diese Kategorie gehört auch die Berücksichtigung der Sättigung und der toten Zone. Nachdem die zur Abbildung der einzelnen Rechenoperationen dienenden Elemente der Rechenmaschine gewisse Operationen vereinen können (z. B. kann die Summierung und das Integrieren in einer Einheit erfolgen), ist es nötig, den Aufbau des angewendeten Analogrechners zu kennen, um für die gegebene Rechenmaschine den Zusammenschluß der Einheiten vorschreiben, das Schaltschema aufzeichnen zu können. Wenn man jedoch den Zusammenschluß der Glieder des Analogrechners unabhängig von dem Typ und vom Fabrikat der benützten Analogmaschine im allgemeinen, prinzipiell zu behandeln wünscht, dann ist es zweckmäßig, das sog. Strukturbild zu gebrauchen, in welchem der Zusammenschluß der einzelnen Analog-Elemente in der Weise angegeben wird, daß es auf jedweden konkreten Analogrechner einfach übertragen werden kann. Das Aufzeichnen des Strukturbildes hat außer der Allgemeinheit — bei richtiger Anwendung — auch noch den entscheidenden Vorteil gegenüber dem konkreten Schaltschema, daß die sich im abzubildenden Apparat oder in der Maschine abspielenden physikalischen Vorgänge im Strukturbild klar zum Augenschein kommen, und sogar die einzelnen Teile des Apparates bzw. der Maschine gesondert aufzufinden sind. Im Falle des Asynchronmotors können z. B. dem Strukturbild die Ständer- bzw. Läufergrößen oder die induzierten Spannungen, Momente usw. gesondert entnommen werden. Da es gewünscht wird, daß auf Grund des Strukturbildes die Zusammenschaltung der Analogmaschine unabhängig vom gewählten System angegeben werden könne, sollen im Strukturbild die einzelnen Operationseinheiten anstatt der bei Schalt-schemen üblichen Sinnbilder mit anderen Symbolen bezeichnet werden, da man ja im voraus nicht wissen kann, wie die einzelnen Elemente des gebrauchten Rechners aufgebaut sind (wieviel Summationseinheiten z. B. ein Integrator im konkreten Fall enthalten wird, usw.). Aus diesem Grunde werden auch hier, hauptsächlich nach den deutschen Literaturquellen [1, 5], im Strukturbild zur Bezeichnung der einzelnen Operationseinheiten von den Bezeichnungen der üblichen Schaltbilder abweichende bzw. teilweise abweichende Symbole gewählt. Abb. 1 zeigt diese Symbole. Demgemäß wird die Summierung durch einen Kreis bezeichnet, die nach diesem Kreis zeigenden Pfeile bezeichnen die Summanden, der abgehende Pfeil die Summe. Im Falle von Subtraktion wird neben den Pfeilen der Summanden das negative Vorzeichen gesetzt. Das Symbol eines Koeffizientenelementes ist ein kleines Rechteck mit in Längsrichtung eingezeichnete Linie, wobei der eingeschriebene Buchstabe oder Zahl den Wert des Koeffizienten bedeutet. Das Symbol der Integrier-Einheit ist ein kleines



Rechteck mit eingezeichneter Diagonale. Die Multiplizier-Einheit wird mit einem kleinen Rechteck mit eingezeichnetem Kreis symbolisiert, wobei der Multiplikator und Multiplikand mit je einem nach innen zeigenden Pfeil, und das Produkt mit einem abgehenden Pfeil bezeichnet wird.

Nach obiger Darlegung der Symbole des Strukturbildes kann nun auf die Anschreibung der Gleichungen des Asynchron-Schleifringmotors und auf die Aufzeichnung des Strukturbildes zur Berechnung gewisser transienten Vorgänge des Asynchronmotors mit Analogrechner übergegangen werden.

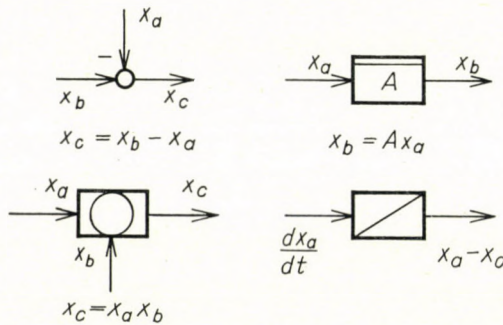


Abb. 1

### 3. Differentialgleichungen des Dreiphasen-Asynchron-Schleifringmotors

Wir gehen aus den aus der Fachliteratur [3] bekannten Gleichungen des Asynchronmotors aus. Die Spannungsgleichung des Ständers ist im ruhenden Koordinatensystem

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt}, \tag{1}$$

wobei

$$\bar{u}_s = \frac{2}{3} (U_a + \bar{a}u_b + \bar{a}^2 u_c), \tag{2}$$

$$\bar{i}_s = \frac{2}{3} (i_a + \bar{a}i_b + \bar{a}^2 i_c), \tag{3}$$

$$\bar{\psi}_s = \frac{2}{3} (\psi_a + \bar{a}\psi_b + \bar{a}^2 \psi_c). \tag{4}$$

Die Differentialgleichung des Läufers im an den Läufer gebundenen Koordinatensystem ist

$$\bar{u}_r = \bar{i}_r R_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt}, \tag{5}$$



wobei

$$\bar{u}_r = \frac{2}{3} (u_{ra} + \bar{a}u_{rb} + \bar{a}^2 u_{rc}), \quad (6)$$

$$\bar{i}_r = \frac{2}{3} (i_{ra} + \bar{a}i_{rb} + \bar{a}^2 i_{rc}), \quad (7)$$

$$\bar{\psi}_r = \frac{2}{3} (\psi_{ra} + \bar{a}\psi_{rb} + \bar{a}^2 \psi_{rc}). \quad (8)$$

Es sei angenommen, daß die an den Ständer gelegte Spannung eine symmetrische Dreiphasenspannung ist, und demnach

$$\bar{u}_s = U_s e^{j\omega_1 t} \text{ ist,} \quad (9)$$

wo  $\omega_1$  die synchrone Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

Beim symmetrischen Dreiphasenmotor hat weder der Ständer noch der Läufer eine Vorzugsrichtung, weshalb sowohl die Anschreibung der Gleichungen wie auch die Aufarbeitung für die Rechenmaschine dadurch vereinfacht werden können, daß die Spannungsgleichungen (1) und (5) in das mit der Spannung synchron umlaufende Koordinatensystem Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  transformiert werden. Demnach ist

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} + j\omega_1 \bar{\psi}_s \quad (1')$$

$$\bar{u}_r = \bar{i}_r R_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt} + js\omega_1 \bar{\psi}_s, \quad (5')$$

wo  $s$  der Momentanwert des Schlupfes ist.

Es soll nur darauf geachtet werden, daß in den Gleichungen (1') und (5') wie auch im Laufe der späteren Erörterungen in diesem Kapitel  $\bar{u}_s$ ,  $\bar{i}_s$  und  $\bar{\psi}_s$  bzw.  $\bar{u}_r$ ,  $\bar{i}_r$  und  $\bar{\psi}_r$  in synchron umlaufenden Koordinaten zu verstehen sind.

Zu den beiden Spannungsgleichungen schließt sich als dritte die elektromechanische Momentgleichung an. Demnach ist

$$- \Theta \omega_1 \frac{ds}{dt} + M = \frac{3}{2} \text{Im}(\bar{\psi}_s^* \bar{i}_s), \quad (10)$$

wo  $\Theta$  das Trägheitsmoment des Motorläufers und der damit mechanisch verbundenen angetriebenen Elemente,

$M$  das mechanische Gegenmoment bedeutet.

Mit dem Stern über der komplexen Größe wurde der konjugierte Wert bezeichnet. Nachdem die derzeit bekannten Lösungsformen der Analogrechen-

maschinen mit reellen Veränderlichen arbeiten, sollen die in den Gleichungen (1') und (5') vorkommenden komplexen Zahlen in ihre reellen und imaginären Teile zerlegt werden. Hiermit wird sich zwar die Zahl der Spannungsgleichungen verdoppeln, demgegenüber werden aber die Gleichungen zur Rechnung mittels Analogrechner unmittelbar geeignet sein. Die Zerlegung kann in der bekannten Weise folgendermaßen erfolgen:

$$\bar{u}_s = u_\alpha + ju_\beta; \quad \bar{u}_r = u_{r\alpha} + ju_{r\beta}, \quad (11)$$

$$\bar{i}_s = i_\alpha + ji_\beta; \quad \bar{i}_r = i_{r\alpha} + ji_{r\beta}, \quad (12)$$

$$\bar{\psi}_s = \psi_\alpha + j\psi_\beta; \quad \bar{\psi}_r = \psi_{r\alpha} + j\psi_{r\beta}. \quad (13)$$

Zwischen den Flüssen und Strömen ist der Zusammenhang durch folgende Beziehungen gegeben:

$$\bar{\psi}_s = \bar{i}_s L_s + \bar{i}_r L_m \quad (14)$$

$$\bar{\psi}_r = \bar{i}_s L_m + \bar{i}_r L_r \quad (15)$$

bzw. laut (11), (12) und (13) in reelle und imaginäre Teile zerlegt:

$$\left. \begin{aligned} \psi_\alpha &= i_\alpha L_s + i_{r\alpha} L_m; & \psi_\beta &= i_\beta L_s + i_{r\beta} L_m \\ \psi_{r\alpha} &= i_\alpha L_m + i_{r\alpha} L_r; & \psi_{r\beta} &= i_\beta L_m + i_{r\beta} L_r \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

In den Gleichungen (16) bezeichnet  $L_m$  den gegenseitigen Induktivitätsfaktor und  $L_s = L_m + L_{s\sigma}$  bzw.  $L_r = L_m + L_{r\sigma}$ , wo  $L_{s\sigma}$  und  $L_{r\sigma}$  die Streuinduktivität des Ständers bzw. des Läufers bedeutet.

Nun werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$L'_s = L_{s\sigma} + \frac{L_m L_{r\sigma}}{L_m + L_{r\sigma}}, \quad (17)$$

$$L'_r = L_{r\sigma} + \frac{L_m L_{s\sigma}}{L_m + L_{s\sigma}}. \quad (18)$$

$L'_s$  und  $L'_r$  bezeichnen die sogenannte transiente Induktivität des Asynchronmotors vom Ständer bzw. Läufer aus gesehen. Wie aus Beziehungen (17) und (18) ersichtlich ist, können die transienten Reaktanzen  $X'_s = \omega_1 L'_s$  und  $X'_r = \omega_1 L'_r$  an der vom Wirkwiderstand befreiten Maschine beim stationären Kurzschluß einmal ständerseitig gespeist und läuferseitig kurzgeschlossen, das andere Mal mit dreiphasig gespeistem Läufer und kurzgeschlossenen Ständerklemmen gemessen werden. Bei Schleifringmaschinen ist praktisch  $L'_s \cong L'_r$ .



Es werden ferner die sog. Kopplungsfaktoren eingeführt [3], und zwar

$$k_s = \frac{L_m}{L_s} \quad \text{und} \quad k_r = \frac{L_m}{L_r}.$$

Schließlich wird angenommen, daß in den Läuferkreis des Schleifringmotors ein äußerer symmetrischer Dreiphasen-Regelwiderstand eingeschaltet wird, bei welchem der Gesamtwiderstand des Läuferkreises pro Phase  $(1 + r)R_r$  beträgt. Von regeltechnischem Standpunkt aus soll der Wert von  $r$  auf eine im voraus bestimmte Weise geändert werden, damit bei einer gegebenen Momentänderung z. B. die Drehzahl (der Schlupf) unverändert bleibe. Im gegebenen Fall beträgt die Klemmenspannung des Läufers

$$\bar{u}_r = \bar{i}_r r R_r.$$

Nach Einführung dieser Bezeichnungen bzw. Begriffe können die reellen und imaginären Teile der Ständer- und bzw. Läuferströme auf Grund der Gleichungen (16) mit den Flüssen in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\left. \begin{aligned} i_\alpha &= \frac{1}{L'_s} (\psi_\alpha - k_r \psi_{r\alpha}); & i_\beta &= \frac{1}{L'_s} (\psi_\beta - k_r \psi_{r\beta}) \\ i_{r\alpha} &= \frac{1}{L'_r} (\psi_{r\alpha} - k_s \psi_\alpha); & i_{r\beta} &= \frac{1}{L'_r} (\psi_{r\beta} - k_s \psi_\beta) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Unter Benützung der in den Gl. (19) gegebenen Werte der Ströme soll nun das Differentialgleichungssystem des Motors — nach Zerlegung in reelle und imaginäre Teile der Gl. (1'), (5') und (10) — angeschrieben werden, wobei noch folgende Kürzungen angewendet werden:

$$\tau = \omega_1 t; \quad U'_s = U_s / \omega_1; \quad A = \frac{3}{2} \frac{k_r}{\omega_1 \Theta X'_s};$$

$$m = M / \Theta \omega_1^2.$$

Hiernach ergibt sich das Gleichungssystem zu:

$$\frac{d\psi_\alpha}{d\tau} = U'_s - \frac{R_s}{X'_s} (\psi_\alpha - k_r \psi_{r\alpha}) + \psi_\beta, \quad (20a)$$

$$\frac{d\psi_\beta}{d\tau} = -\frac{R_s}{X'_s} (\psi_\beta - k_r \psi_{r\beta}) - \psi_\alpha, \quad (20b)$$

$$\frac{d\psi_{ra}}{d\tau} = - (1 + r) \frac{R_r}{X'_r} (\psi_{ra} - k_s \psi_a) + s\psi_{r\beta}, \quad (20c)$$

$$\frac{d\psi_{r\beta}}{d\tau} = - (1 + r) \frac{R_r}{X'_r} (\psi_{r\beta} - k_s \psi_\beta) - s\psi_{ra}, \quad (20d)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = A(\psi_a \psi_{r\beta} - \psi_\beta \psi_{ra}) + m. \quad (20e)$$

Das Gleichungssystem (20) ist zur Rechnung mit dem Analogrechner unmittelbar geeignet.

#### 4. Schaltung des Analogrechners zur Bestimmung der Anlaß-Transienten

Da es zweckmäßig ist, das Strukturbild vorerst für einen etwas einfacheren Fall aufzuzeichnen, werden die bei nicht allzu kleinen Asynchronmaschinen üblichen Vernachlässigungen angewendet: der Wirkwiderstand des Ständers wird vernachlässigt ( $R_s = 0$ ) und es wird angenommen, daß der Effektivwert der symmetrischen Dreiphasen-Klemmenspannung während des Vorganges konstant bleibt. Außerdem soll der Fall untersucht werden, bei welchem der Motor durch plötzliche Dreiphasige Anlegung der Ständer-Klemmenspannung angelassen wird, und der Wert des in den Läuferkreis geschalteten dreiphasigen Wirkwiderstandes ( $rR_r$ ) während der Beschleunigung nicht geändert wird. Schließlich soll vorläufig reine Massenbeschleunigung angenommen werden, wenn also  $m = 0$  ist.

Unter diesen Bedingungen  $\left( \frac{d\psi_a}{d\tau} = \frac{d\psi_\beta}{d\tau} = 0; m = 0 \text{ und } r = \text{konstant} \right)$  erhält man aus dem Gleichungssystem (20) das folgende Gleichungssystem:

$$0 = U'_s + \psi_\beta, \quad (21a)$$

$$0 = \psi_a, \quad (21b)$$

$$\frac{d\psi_{ra}}{d\tau} = - (1 + r) \frac{R_r}{X'_r} \psi_{ra} + s\psi_{r\beta}, \quad (21c)$$

$$\frac{d\psi_{r\beta}}{d\tau} = - (1 + r) \frac{R_r}{X'_r} (\psi_{r\beta} + k_s U'_s) - s\psi_{ra}, \quad (21d)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = AU'_s \psi_{ra}. \quad (21e)$$



Das Strukturbild des mit dem Gleichungssystem (21) beschriebenen Asynchronmotors bzw. die Schaltung des Analogrechners ist in Abb. 2 dargestellt. Wird in die auf diese Weise geschaltete Analogmaschine als Störgröße

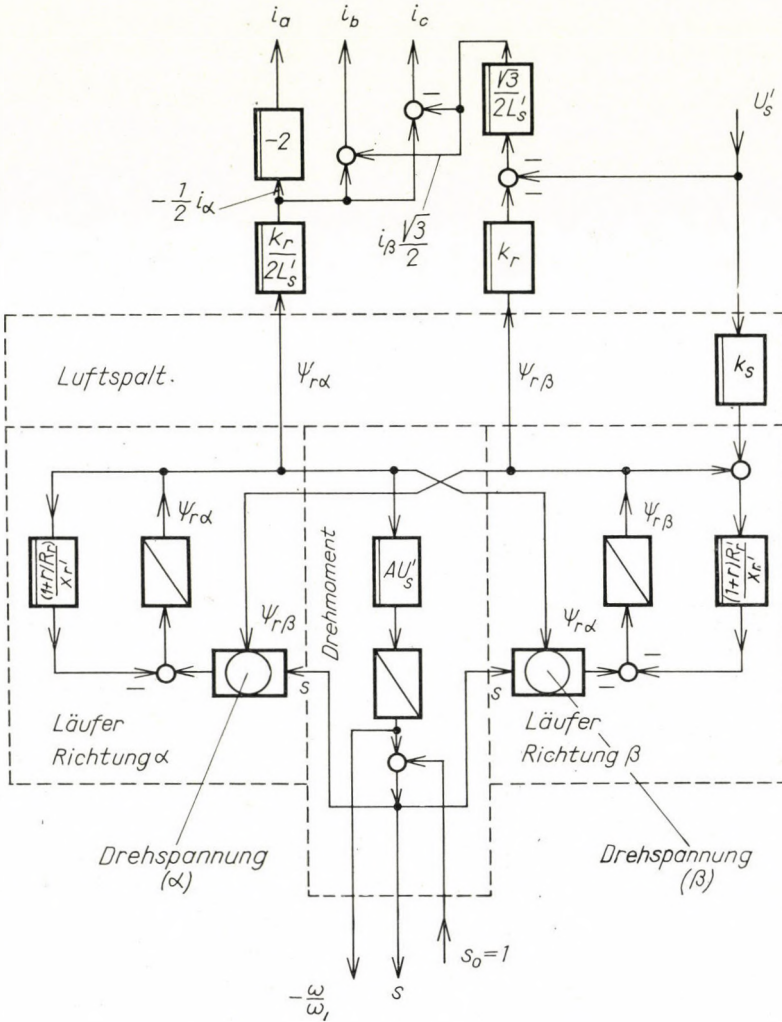


Abb. 2

die Spannung  $U'_s$  plötzlich eingeschaltet, so liefert die Funktion  $s = s(\tau)$  den mechanischen transienten Vorgang des Anlaufes, was vom Schreibapparat registriert werden kann. Nachdem der Wirkwiderstand des Ständers vernachlässigt und von einer Dreiphasen-Klemmenspannung mit konstantem Wert ausgegangen wurde, mißt  $U'_s = U_s/\omega_1$  gleichzeitig auch den Wert des Ständer-

flusses. Somit wird selbstverständlich die Ständerspannung bzw. der Ständerfluß von der einzigen Größe  $U'_s$  dargestellt.

Bei Anwendung der obigen Vereinfachungen ist zur Untersuchung der elektrischen und mechanischen Transienten des Asynchronmotors ein Analogrechner nötig, der 4 Koeffizienten-, 4 Summations-, 2 Multiplikations- und 3 Integralglieder enthält, es werden daher nicht allzu hohe Forderungen gegenüber der Analogmaschine gestellt. Zur unmittelbaren Ablesung der dreiphasigen Phasenströme sind — wie weiter unten gezeigt werden soll — noch weitere 4 Koeffizienten und 3 Summienglieder erforderlich. Das in Abb. 2 dargestellte Strukturbild veranschaulicht deutlich, daß nicht nur das Schalt-schema des Analogrechners, sondern auch die einzelnen physikalischen Vorgänge, ja sogar die Verteilung dieser physikalischen Vorgänge auf die einzelnen Maschinenteile hieraus ersichtlich sind. In der Abbildung wurden die zur Erzeugung der Spannungen in Richtung  $\alpha$  und  $\beta$  des Läufers dienenden Analogteile, und separat die Drehspannungsquelle, sowie die Analogie des elektromechanischen Zusammenhanges abgegrenzt. Der Luftspalt enthält diesmal den einzigen Koeffizienten  $k_s$ , da der einzige Ständerfluß, der auf den Läufer wirkt,  $\psi_\beta = -U'_s$  ist. Die Ständergrößen (außer den Strömen) sind durch  $U'_s$  dargestellt. Es ist erwähnenswert, daß die Phasenströme des Drehstrommotors in Kenntnis der Flüsse  $\psi_{ra}$  und  $\psi_{r\beta}$  mit Hilfe einiger Koeffizienten- und Summienglieder mittels des Analogrechners ebenfalls erhalten werden können. Laut der bekannten Beziehungen [3] sind nämlich die drei Phasenströme:

$$\begin{aligned} i_a &= i_a, \\ i_b &= -\frac{1}{2} i_a + \frac{\sqrt{3}}{2} i_\beta, \\ i_c &= -\frac{1}{2} i_a - \frac{\sqrt{3}}{2} i_\beta. \end{aligned} \tag{22}$$

Andererseits erhält man auf Grund der Beziehungen (19) im angenommenen Beispiel:

$$i_a = -\frac{k_r}{L'_s} \psi_{ra}; \quad i_\beta = -\frac{1}{L'_s} (U'_s + kr \psi_{r\beta}). \tag{19'}$$

Hieraus ergibt sich

$$-\frac{1}{2} i_a = \frac{kr}{2L'_s} \psi_{ra} \tag{23}$$

und

$$\frac{\sqrt{3}}{2} i_\beta = \frac{\sqrt{3}}{2L'_s} (-U'_s - kr \psi_{r\beta}). \tag{24}$$



Da laut des Strukturbildes  $\psi_{ra}$  und  $\psi_{r\beta}$  im Analogrechner erscheinen, erhält man nach entsprechenden Summierungen und Koeffizienten-Multiplikationen die Werte von  $\left(-\frac{1}{2} i_a\right)$  und  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} i_\beta\right)$ . In Kenntnis von  $(-i_{a/2})$  und  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} i_\beta\right)$  erhält man durch Summierungen auf Grund der Gleichungen (22) die Werte von  $\bar{i}_a, i_b$  und  $i_c$  (siehe Abb. 2).

Laut Gleichungen (19') sind  $i_a$  und  $i_\beta$  dem Analogrechner ebenfalls zu entnehmen, wobei am Schirm eines Kathoden-Oszilloskops auch der Stromvektor  $\bar{i}_s = i_a + j i_\beta$  erzeugt werden kann.

Das hier Gesagte ist natürlich auch auf den Fall eines Käfigläufermotors ohne weiteres anwendbar, nur ist in diesem Fall  $r = 0$  und kann  $L'_r$  vom Läufer aus mit Kurzschlußmessung nicht bestimmt werden, sondern muß dieser Wert durch Berechnung ermittelt werden.

### 5. Allgemeines Strukturbild des Asynchronmotors

In Abb. 3 wurde das Strukturbild des Asynchronmotors auf Grund des Gleichungssystems (20) aufgezeichnet. Da für den Analogrechner im allgemeinen und in erster Reihe die Untersuchung regeltechnischer Fragen begründet ist, wurde beim allgemeinen Strukturbild der Koeffizient des Läuferwiderstandes  $(1 + r)$  nicht als konstant betrachtet, sondern als eine von unserer Entscheidung abhängig regelbare Größe, bei deren plötzlicher Änderung der Analogrechner doch richtig ansprechen soll. Deswegen wird die Multiplikation mit  $(1 + r)$  durch Vermittlung eines Funktionsmultiplikators durchgeführt. Mit dieser Anlagschaltung kann z. B. die Funktionsbeziehung  $r = f(m)$  festgestellt werden, falls gewünscht wird, daß z. B. bei veränderlichem Moment der Schlupf ( $s$ ) konstant bleibe. Die Anlaßtransienten des Asynchronmotors können mit dem nach Abb. 3 geschalteten Analogrechner auch unter solchen Bedingungen untersucht werden, daß das Anlassen mit einem bestimmten äußeren Widerstand, also bei einem bestimmten Wert  $(1 + r)$  erfolgt und während des Anlaufes bei Erreichung eines vorgeschriebenen Drehzahlwertes der äußere Widerstand des Läuferkreises teilweise oder vollkommen ausgeschaltet wird. Es ist klar, daß sich diesem Fall der Wert von  $(1 + r)$  sprunghaft ändert, so daß nur der Funktions-Multiplikator diesen Teil der Maschinenanalogie richtig wiedergibt.

Die bisherigen Ergebnisse zusammenfassend kann folgendes gesagt werden:

Die Differentialgleichungen des Asynchronmotors wurden bei Anwendung der dreiphasigen Raumvektoren in einer aus der Literatur bekannten, sehr einfachen und übersichtlichen Form erhalten. Die in der Fachliteratur

zu diesem Zwecke meistens benützte Matrizenrechnung war nicht nötig. Die Dreiphasengrößen konnten mit Hilfe des Analogrechners unmittelbar erhalten werden. Der Zeitmaßstab wurde zwecks guter Beobachtung der schnellen Vor-

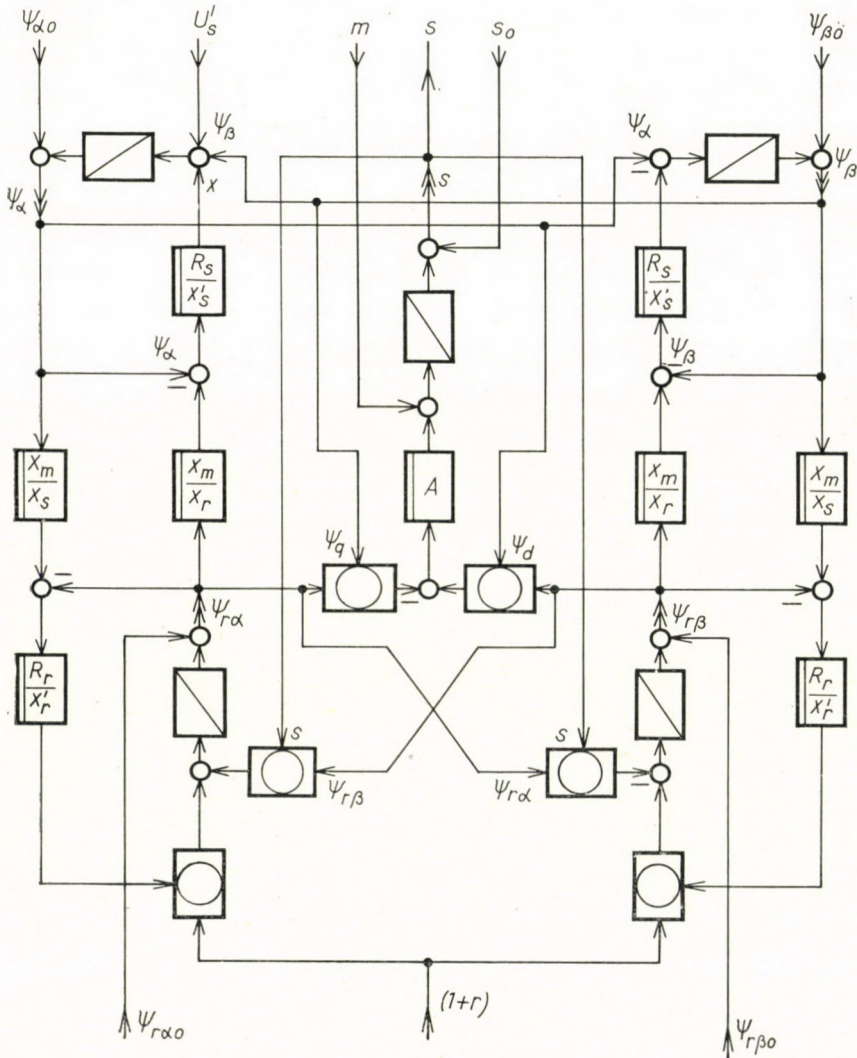


Abb. 3

gänge auf das  $\omega_1 = 314$ -fache ausgedehnt. Deswegen haben die Spannungen in den Gleichungen bzw. im Strukturbild Voltsec- (Fluß-) Dimension, beziehungsweise erscheinen die elektromechanischen Gleichungen in einer dimensionslosen Form. Sämtliche Gleichungen wurden im mit der Ständerspannung syn-



chron umlaufenden Koordinatensystem angeschrieben, wodurch sämtliche Größen im stationären Zustand Gleichspannungen bzw. Gleichströme, im transienten Zustand aber sich in der Zeit ändernde Gleichstromgrößen sind. Beim angewandten Verfahren bedeutet der Umstand einen Vorteil, daß die Maschinen im Strukturbild bzw. im Analogrechner mit ihren natürlichen (durch Kurzschluß- und Leerlaufmessung unmittelbar erhaltbaren) Maschinenkonstanten erscheinen.

Im folgenden wird die Analogabbildung der Schrittschaltung des Asynchronmotors dargelegt.

### 6. Abbildung der Schrittschaltung der Asynchronmotoren mit Analogrechner

Wie bekannt, wird die Schrittschaltung [3], [4] zur langsamen Umdrehung der Käfigläufermotoren benützt. Das Wesen dieses Verfahrens besteht

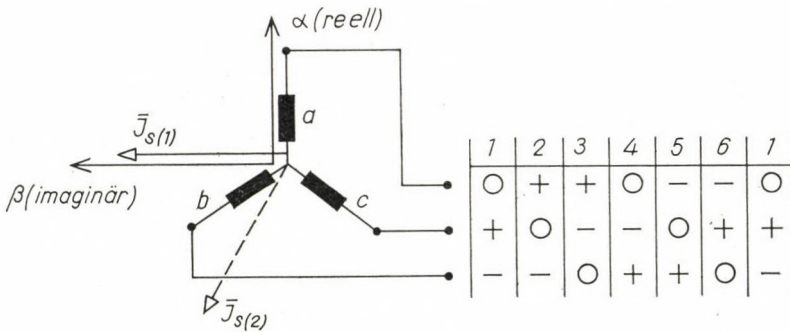


Abb. 4

darin, daß an zwei Klemmen des Motors ein Gleichstrom gelegt wird (siehe Abb. 4). In stationärem Zustand durchdringt der Gleichfluß auch den Läufer. Wird nun der Gleichstrom mit Hilfe eines Umschalters bei der Klemme der einen Phase unterbrochen und auf die Ausführung der anderen Phase umgeschaltet (z. B. von *c* auf *a*), so wird die Erregung um  $60^\circ$  im Raum verdreht und das verschwindende frühere Magnetfeld schließt mit dem entstehenden neuen Magnetfeld einen Winkel ein, wodurch ein Moment entsteht, das den Läufer, von den mechanischen Umständen abhängig, um einen bestimmten Winkel verdreht. Werden die Umschaltungen zyklisch fortgesetzt, so kann der Motor in ständiger langsamer Drehung gehalten werden. Abb. 4 zeigt auch die Reihenfolge des zyklischen Wechsels der Klemmen. Die Berechnung der Momentverhältnisse dieser Schaltung ist verhältnismäßig einfach, wenn die Berechnung für Ruhezustand erfolgt [3], [4]. Soll jedoch auch die Bewegung berücksichtigt werden, dann ist es zweckmäßig, den Analogrechner in Anspruch zu

nehmen. Diesmal wird das an den Ständer gebundene Koordinatensystem angewandt. Dementsprechend sind die Grundgleichungen

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} \quad (25)$$

$$\bar{u}_r = 0 = \bar{i}_r R_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt} - j\omega\bar{\psi}_r \quad (26)$$

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} = -M + \frac{3}{2} \operatorname{Im}(\bar{\psi}_s^* \bar{i}_s) \quad (27)$$

Auch für diesen Fall, wird die Zerlegung in Richtungen  $\alpha$  und  $\beta$  angewandt und das ruhende Koordinatensystem derart gewählt, daß die reelle Richtung  $\alpha$  in Richtung der Phasenwicklung  $\alpha$  des Ständers, wogegen  $\beta$  zu dieser normal zeigen soll (siehe Abb. 4).

Es werden folgende Substitutionen vorgenommen:

$$M/\Theta = m \quad \text{und} \quad \frac{3}{2} \frac{k_r}{\Theta L'_s} = C,$$

wodurch man bei Anwendung der Gleichungen (25), (26), (27) und (19) zum folgenden Gleichungssystem gelangt:

$$\frac{d\psi_\alpha}{dt} = u_\alpha + \frac{R_s}{L'_s} (-\psi_\alpha + k_r \psi_{r\alpha}) \quad (28a)$$

$$\frac{d\psi_\beta}{dt} = u_\beta + \frac{R_s}{L'_s} (-\psi_\beta + k_r \psi_{r\beta}) \quad (28b)$$

$$\frac{d\psi_{r\alpha}}{dt} = \frac{R_r}{L'_r} (-\psi_{r\alpha} + k_s \psi_\alpha) - \omega\psi_{r\beta} \quad (28c)$$

$$\frac{d\psi_{r\beta}}{dt} = \frac{R_r}{L'_r} (-\psi_{r\beta} + k_s \psi_\beta) + \omega\psi_{r\alpha} \quad (28d)$$

und schließlich die elektromechanische Beziehung:

$$\frac{d\omega}{dt} = C(\psi_\beta \psi_{r\alpha} - \psi_\alpha \psi_{r\beta}) - m \quad (28e)$$

Die Schaltung des Analogrechners bzw. das Strukturbild ist in Abb. 5 dargestellt. Nachdem die Werte  $\omega\psi_{r\beta}$  bzw.  $\omega\psi_{r\alpha}$  der Läufer-Drehspannung wegen der kleinen Winkelgeschwindigkeit gewöhnlich niedrig sind, können die





Abb. 4 die erste Anlegung der Spannung an den Endpunkten der Phasen *b* und *c* erfolgte, können die ersten Spannungskomponenten in folgender Weise bestimmt werden. Falls der stationäre Wert des Erreger-Gleichstromes mit  $I_g$  bezeichnet wird, sind die drei Phasenspannungen der Reihe nach:

$$\begin{aligned} u_a &= 0 \\ u_b &= I_g R_s \\ u_c &= -I_g R_s, \end{aligned}$$

woraus

$$\bar{u}_s = \frac{2}{3} (0 + \bar{a}I_g R_s - a^2 I_g R_s) = j \frac{2}{\sqrt{3}} I_g R_s.$$

Nachdem  $u_\alpha = \text{Re}(\bar{u}_s)$  und  $u_\beta = \text{Im}(\bar{u}_s)$  ist, wird bei der ersten Spannungsanlegung:

$$u_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad u_\beta = \frac{2}{\sqrt{3}} I_g R_s.$$

Nach der ersten Umschaltung des Zyklus wurde, wie aus Abb. 4 hervorgeht, der positive Pol vom Endpunkt der Phase *c* in den Endpunkt der Phase *a* verlegt. Die Komponenten der zweiten Spannung können in ähnlicher Weise wie vorher berechnet werden:

$$\begin{aligned} u_a &= -I_g R_s \\ u_b &= I_g R_s \\ u_c &= 0, \end{aligned}$$

somit

$$\bar{u}_s = \frac{2}{3} (-I_g R_s + \bar{a}I_g R_s + 0) = I_g R_s (\bar{a} - 1),$$

woraus

$$u_\alpha = \text{Re}(\bar{u}_s) = -I_g R_s; \quad u_\beta = \text{Im}(\bar{u}_s) = \frac{1}{\sqrt{3}} I_g R_s.$$

Wird die Berechnung für den gesamten Zyklus fortgesetzt, erhält man, im Einklang mit Abb. 4, die folgenden, in Tabelle I zusammengestellten Multiplikatoren der Spannung  $I_g R_s$ :

Tabelle I

| Position     | 1            | 2            | 3             | 4             | 5             | 6            | 1            |
|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|---------------|--------------|--------------|
| ( <i>a</i> ) | 0            | -1           | -1            | 0             | 1             | 1            | 0            |
| ( <i>β</i> ) | $2/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ | $-1/\sqrt{3}$ | $-2/\sqrt{3}$ | $-1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ | $2/\sqrt{3}$ |



Zu dem Zwecke, daß die Werte  $u_\alpha$  und  $u_\beta$  in der den obigen Zyklen entsprechenden Reihenfolge, Größe, und in den durch die Rechenmaschine feststellbaren zweckmäßigsten Zeitabständen dem Analogrechner zugeführt werden können, wird die in Abb. 6 dargestellte Doppelschaltvorrichtung angewandt.

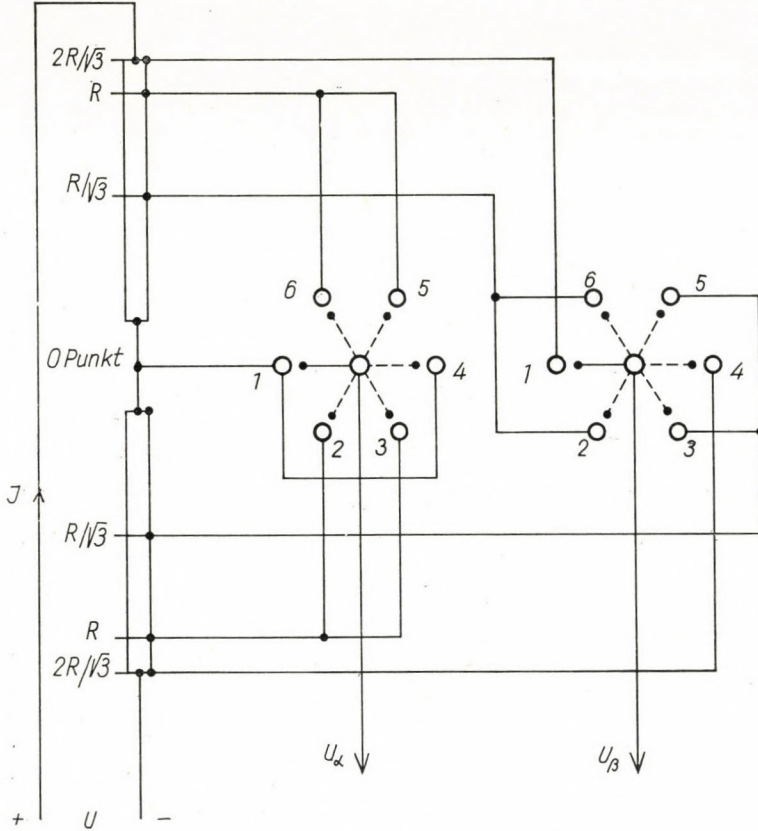


Abb. 6

Wie aus Abb. 6 hervorgeht, wurden am Doppelspannungsteiler die Anzapfungen derart bestimmt, daß die erforderlichen Spannungsabfälle nach Größe und Richtung abzutasten seien. Die Spannungsteiler werden von einer Gleichstromquelle genügender Größe mit der Spannung vom konstanten Wert  $U = 2IR$  gespeist. Der Wert dieser Spannung wurde dem zu wählenden Maßstab gemäß so festgestellt, daß  $IR = kI_gR_s$  sei, wo  $k$  der Spannungsmaßstab des Analogrechners ist.

Die Umschaltungen auf Kontakte 2—3—4—5—6—1 der untereinander synchron bewegten Arme der beiden Umschalter  $\alpha$  und  $\beta$  entsprechen

dem Zyklus der Schrittschaltung. Da die Winkelgeschwindigkeit des Läufers am Ausgang der Analogmaschine erscheint, wogegen die Werte  $m$  und  $U$  verschieden eingestellt werden können, ist es möglich, die Wirkung der Ständer-spannung, wie auch die der Geschwindigkeit der Zyklen und der Größe des Gegenmomentes zu untersuchen. Die Berücksichtigung der Sättigung wird in einem besonderen Aufsatz behandelt.

Als letztes Beispiel wird das Strukturbild des am Läufer mittels asymmetrischen Impedanzsystems geregelten Schleifring-Asynchronmotors bestimmt.

### 7. Untersuchung des Asynchronmotors im Falle eines in den Läuferkreis geschalteten asymmetrischen Impedanzsystems

Laut Abb. 7 wurden in den Läuferkreis des Schleifringmotors je Phase die operatorischen Impedanzen

$$\left. \begin{aligned} Z_a(p) &= R_a + pL_a \\ Z_b(p) &= R_b + pL_b \\ Z_c(p) &= R_c + pL_c \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

geschaltet und vorläufig das Symbol  $p \overset{\wedge}{=} d/dt$  angewandt. Zu Beginn seien nochmals die Spannungsgleichungen der Maschine angeschrieben. Da jedoch diesmal die Asymmetrie sich im Läuferkreis befindet, wird das an den Läufer gebundene, mit der jeweiligen Winkelgeschwindigkeit des Läufers umlaufende Koordinatensystem gebraucht. Die reelle Achse dieses Koordinatensystems fällt mit der Achse der Phase  $a$  der Läuferwicklung zusammen (siehe Abb. 7).

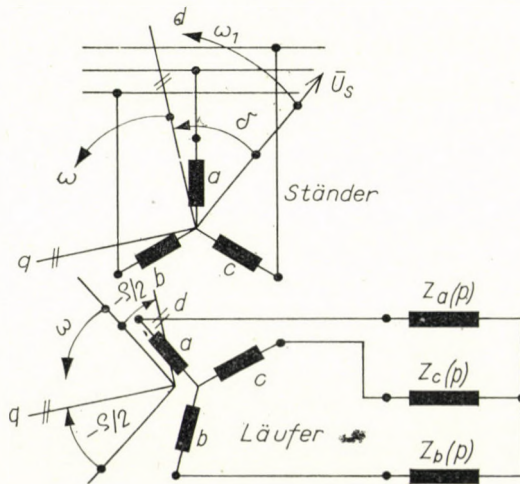


Abb. 7



Das aus der Fachliteratur bekannte Gleichungssystem [3] ist (in umlaufenden Koordinaten):

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} + j\omega\bar{\psi}_s \quad (30)$$

$$\bar{u}_r = \bar{i}_r R_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt} \quad (31)$$

und

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} = -M + \frac{3}{2} \operatorname{Im}(\bar{\psi}_s^* \bar{i}_s). \quad (32)$$

Zur Zerlegung der Gleichung in reelle (der Richtung  $d$ ) und imaginäre Teile (der Richtung  $q$ ) ist es nötig, vorerst die Verhältnisse des äußeren Läuferstromkreises zu untersuchen.

Einfachheitshalber werden im folgenden die drei operatorischen äußeren Impedanzen durch  $Z_a$ ,  $Z_b$  und  $Z_c$  bezeichnet, und der ohmsche Teil der Impedanz auf den inneren Wirkwiderstand des Läufers, der induktive Teil dagegen auf die Streuinduktivität der Läuferwicklung bezogen, daher ist

$$\left. \begin{aligned} R_a &= r_a R_r \\ R_b &= r_b R_r \\ R_c &= r_c R_r \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

und

$$\left. \begin{aligned} L_a &= l_a L_{r\sigma} \\ L_b &= l_b L_{r\sigma} \\ L_c &= l_c L_{r\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Die in den Gleichungen (33) und (34) vorkommenden Koeffizienten  $r_a$ ,  $r_b$  und  $r_c$  bzw.  $l_a$ ,  $l_b$  und  $l_c$  zeigen Wievielfache die ohmschen bzw. induktiven Teile der äußeren Phasenimpedanzen des inneren Wirkwiderstandes bzw. der Streuinduktivität sind. Wie bereits erwähnt wurde, wird hier ein mit dem Läufer mitlaufendes Koordinatensystem angewandt, dessen Winkelgeschwindigkeit jeweils der momentanen Winkelgeschwindigkeit des Läufers gleich ist. Die reelle Achse dieses Koordinatensystem wurde in Richtung der Phasenspule  $a$  des Läufers angenommen. Im gegenwärtigen Fall werden jedoch, wie im nachfolgenden gezeigt wird, die einfachsten Beziehungen dann erhalten, wenn die reelle Achse des an den Läufer gebundenen Koordinatensystems zur Richtung der Phasenspule  $a$  im von den äußeren Wirkwiderständen bzw. Induktivitäten abhängigen Maße verdreht wird.

### 7.1 Bestimmung der neuen Richtungen des Koordinatensystems

Bei den weiteren Berechnungen wird als einzige Vereinfachung angenommen, daß

$$R_a/L_a = R_b/L_b = R_c/L_c$$

bzw.

$$R_a : R_b : R_c = L_a : L_b : L_c$$

ist. Durch diese Bedingung wird zwar die Allgemeinheit der Behandlung etwas eingeschränkt, im Gegenfall jedoch sind die Berechnungen sehr zeitraubend.

Zur Bestimmung der Richtung des neuen Koordinatensystems seien zunächst die Gleichungen der Läufer-Klemmenspannung je Phase angeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} u_{ra} + i_{ra} Z_a &= 0 \\ u_{rb} + i_{rb} Z_b &= 0 \\ u_{rc} + i_{rc} Z_c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Nun wird der Vektor der Läufer-Klemmenspannung angeschrieben (siehe Beziehung (6)) und in Betracht gezogen, daß nach [4]

$$\left. \begin{aligned} i_{ra} = \operatorname{Re}(\bar{i}_r) &= \frac{\bar{i}_r + \bar{i}_r^*}{2} \\ i_{rb} = \operatorname{Re}(\bar{a}^2 \bar{i}_r) &= \frac{\bar{a}^2 \bar{i}_r + \bar{a} \bar{i}_r^*}{2} \\ i_{rc} = \operatorname{Re}(\bar{a} \bar{i}_r) &= \frac{\bar{a} \bar{i}_r + \bar{a}^2 \bar{i}_r^*}{2} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Aus Gleichungen (6), (35) und (36) erhält man

$$-\bar{u}_r = \frac{2}{3} \left[ \frac{\bar{i}_r + \bar{i}_r^*}{2} Z_a + \bar{a} \frac{\bar{a}^2 \bar{i}_r + \bar{a} \bar{i}_r^*}{2} Z_b + \bar{a}^2 \frac{\bar{a} \bar{i}_r + \bar{a}^2 \bar{i}_r^*}{2} Z_c \right] \quad (37)$$

und hieraus

$$-\bar{u}_r = \bar{i}_r \frac{Z_a + Z_b + Z_c}{3} + \bar{i}_r^* \frac{Z_a + \bar{a} Z_b + \bar{a}^2 Z_c}{3} \quad (38)$$

Aus der Theorie der symmetrischen Komponenten ist es bekannt, daß in der Beziehung (38) der Multiplikator von  $\bar{i}_r$  die Nullkomponente des asymmetrischen Impedanzsystems, bzw. der Multiplikator von  $\bar{i}_r^*$  die Gegenkomponente ist. Somit erhält man, bei Berücksichtigung der Gleichungen (33), (34) und (35) für die Null-Impedanz des äußeren Impedanzsystems:

$$Z_0 = \frac{Z_a + Z_b + Z_c}{3} = R_r \frac{r_a + r_b + r_c}{3} + pL_{r\sigma} \frac{l_a + l_b + l_c}{3}$$

bzw.

$$Z_0 = r_0 R_r + p l_0 L_{r\sigma}, \quad (39)$$



und für die Gegenimpedanz des äußeren Impedanzsystems:

$$\bar{Z}_2 = \frac{Z_a + \bar{a}^2 Z_b + \bar{a} Z_c}{3} = R_r \frac{r_a + \bar{a}^2 r_b + \bar{a} r_c}{3} + pL_{r\sigma} \frac{l_a + \bar{a}^2 l_b + \bar{a} l_c}{2}$$

bzw.

$$\bar{Z}_2 = r_2 e^{-j\varrho} R_r + p l_2 e^{-j\lambda} L_{r\sigma}, \quad (40)$$

wo im ersten Glied

$$r_2 = \frac{1}{3} \sqrt{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 - (r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c)}$$

und

$$\varrho = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{r_b - r_c}{r_a - \frac{r_b + r_c}{2}},$$

im zweiten Glied

$$l_2 = \frac{1}{3} \sqrt{l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 - (l_a l_b + l_a l_c + l_b l_c)}$$

und

$$\lambda = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{l_b - l_c}{l_a - \frac{l_b + l_c}{2}}$$

ist. Da aber angenommen wurde, daß

$$r_a : r_b : r_c = l_a : l_b : l_c,$$

so ist

$$\varrho = \lambda. \quad (41)$$

Die Beziehung (38) wird nun unter Berücksichtigung der Gleichungen (39), (40) und (41) nochmals angeschrieben:

$$-\bar{u}_r = \bar{i}_r (r_0 R_r + p l_0 L_{r\sigma}) + \bar{i}_r^* e^{-j\varrho} (r_2 R_r + p l_2 L_{r\sigma}) \quad (42)$$

oder mit Absonderung der ohmschen und induktiven Teile

$$-\bar{u}_r = [\bar{i}_r r_0 + \bar{i}_r^* e^{-j\varrho} r_2] R_r + [\bar{i}_r l_0 + \bar{i}_r^* e^{-j\varrho} l_2] p L_{r\sigma}. \quad (43)$$

Schließlich erhält man durch Umschreibung der Gleichung (43) mit ihren Komponenten:

$$-(u_{rd} + j u_{rq}) = [(i_{rd} + j i_{rq}) r_0 + (i_{rd} - j i_{rq}) e^{-j\varrho} r_2] R_r + \\ + [(i_{rd} + j i_{rq}) l_0 + (i_{rd} - j i_{rq}) e^{-j\varrho} l_2] p L_{r\sigma}. \quad (44)$$

Aus Beziehung (44) ist ersichtlich, daß wegen des Multiplikators  $e^{-j\varrho}$  sowohl die Spannungsgleichungen für Richtung  $d$  wie auch jene für Richtung  $q$  Stromkomponenten der Richtung  $d$  und  $q$  gleichzeitig enthalten werden. Die Zerlegung in Richtungen  $d$  und  $q$  vereinfacht die Behandlung jedoch nur in dem Fall, wenn hierdurch die Spannungsgleichung für Richtung  $d$  nur Stromkomponenten der Richtung  $d$ , und die Spannungsgleichung für Richtung  $q$  nur Stromkomponenten der Richtung  $q$  enthält. Deswegen wird die ursprüngliche, im umlaufenden Koordinatensystem angeschriebene Beziehung (43) in ein Koordinatensystem transformiert, das ebenfalls an den Läufer gebunden ist, jedoch mit der reellen Achse ( $d$ ) des ursprünglichen Koordinatensystems (Achse der Läuferphasenspule  $a$ ) den konstanten Winkel  $\varepsilon$  einschließt. Wird ein Transformationswinkel  $\varepsilon$  gefunden, bei welchem das neue Koordinatensystem die obige Forderung befriedigt, dann lohnt es sich, die Spannungsgleichungen (30), (31) und (32) in diesem neuen Koordinatensystem anzuschreiben.

Gleichung (42) wird in einem um den Winkel  $\varepsilon$  in positiver Richtung verdrehten Koordinatensystem angeschrieben. Im weiteren sind die Spannungen und Ströme bereits im neuen Koordinatensystem angeschriebene Werte. Einfachheitshalber wurden jedoch zur Untersuchung der transformierten Größen keine besonderen Bezeichnungen angewandt, es sei nur ein für allemal bemerkt, daß die im weiteren Teil dieses Abschnittes vorkommenden elektrischen Größen in einem zum ursprünglichen Koordinatensystem um den Winkel  $\varepsilon$  verdrehten Koordinatensystem zu verstehen sind. Nach der Transformation gelangt man zur folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned}
 -\bar{u}_r e^{j\varepsilon} &= [\bar{i}_r e^{j\varepsilon} r_0 + \bar{i}_r^* e^{-j\varepsilon} e^{-j\varrho} r_2] R_r + \\
 &+ [\bar{i}_r e^{j\varepsilon} l_0 + \bar{i}_r^* e^{-j\varepsilon} e^{-j\varrho} l_2] pL_{r\sigma}.
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

Wie aus Gleichung (45) hervorgeht, erhält man nach der Substitution  $\varepsilon = -\varrho/2$  die folgende Form:

$$-\bar{u}_r = [\bar{i}_r r_0 + \bar{i}_r^* r_2] R_r + [\bar{i}_r l_0 + \bar{i}_r^* l_2] pL_{r\sigma}.
 \tag{46}$$

Nach Absonderung der reellen und imaginären Teile der Gleichung (46) kann festgestellt werden, daß man zum Ziel gelangt ist. In diesem Fall ist nämlich

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned}
 u_{rd} &= -i_{rd} [(r_0 + r_2) R_r + (l_0 + l_2) pL_{r\sigma}] \\
 u_{rq} &= -i_{rq} [(r_0 - r_2) R_r + (l_0 - l_2) pL_{r\sigma}]
 \end{aligned} \right\}
 \tag{47}$$

oder bei Durchführung der Substitutionen

$$\begin{aligned}
 r_0 + r_2 &= r_d; & r_0 - r_2 &= r_q \\
 l_0 + l_2 &= l_d; & l_0 - l_2 &= l_q
 \end{aligned}$$



erhält man

$$\left. \begin{aligned} u_{rd} &= -i_{rd}(r_d R_d + l_d p L_{r\sigma}) \\ u_{rq} &= -i_{rq}(r_q R_r + l_q p L_{r\sigma}) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Die im Gleichungssystem (48) dargestellte Zerlegung ist jedoch nur in einem solchen Koordinatensystem gültig, das zur magnetischen Achse der Phasenspule  $a$  des Läufers um den konstanten Winkel

$$\varepsilon = -\varrho/2 = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{r_b - r_c}{r_a - \frac{r_b + r_c}{2}}$$

verdreht ist (siehe Abb. 7).

## 7.2 Spannungsgleichungen

Werden die Spannungsgleichungen (30), (31) und (32) in ein ebenfalls um den Winkel  $\varepsilon = -\varrho/2$  verdrehtes Koordinatensystem transformiert, dann entsteht in der Form der Gleichungen gar keine Änderung, man muß nur zur Kenntnis nehmen, daß die darin vorkommenden sämtlichen elektrischen bzw. magnetischen Größen im neuen Koordinatensystem zu verstehen sind. Durch Beziehung (48) wird übrigens die Tatsache ausgedrückt, daß das in den äußeren Stromkreis des Läufers geschaltete dreiphasige asymmetrische Impedanzsystem in ein zweiphasiges (Richtungen  $d$  und  $q$ ) asymmetrisches Impedanzsystem umgewandelt wurde. Mit anderen Worten: es wurden in Richtung  $d$  der Wirkwiderstand  $r_d R_r$  und die Induktivität  $l_d L_{r\sigma}$  und in Richtung  $q$  der Wirkwiderstand  $r_q R_r$  und die Induktivität  $l_q L_{r\sigma}$  eingeschaltet. Ähnlich den Gleichungen (16) erhält man die folgenden Beziehungen für die Flußverketzung:

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= i_d L_s + i_{rd} L_m; & \psi_q &= i_q L_s + i_{rq} L_m \\ \psi_{rd} &= i_d L_m + i_{rd} [L_m + (1 + l_d) L_{r\sigma}]; & \psi_{rq} &= i_q L_m + i_{rq} [L_m + (1 + l_q) L_{r\sigma}]. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Oder mit der Substitution

$$L_m + (1 + l_d) L_{r\sigma} = L_{rd}$$

und

$$L_m + (1 + l_q) L_{r\sigma} = L_{rq}$$

gelangt man zu

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= i_d L_s + i_{rd} L_m; & \psi_q &= i_q L_s + i_{rq} L_m \\ \psi_{rd} &= i_d L_m + i_{rd} L_{rd}; & \psi_{rq} &= i_q L_m + i_{rq} L_{rq}, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

woraus

$$\begin{aligned}
 i_d &= \frac{1}{L'_d} (\psi_d - k_{rd} \psi_{rd}); & i_q &= \frac{1}{L'_q} (\psi_q - k_{rq} \psi_{rq}) \\
 i_{rd} &= \frac{1}{L'_{rd}} (\psi_{rd} - k_s \psi_d); & i_{rq} &= \frac{1}{L'_{rq}} (\psi_{rq} - k_s \psi_q).
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

In Beziehung (51) sind die Verkettungsfaktoren:

$$k_s = \frac{L_m}{L_s}; \quad k_{rd} = \frac{L_m}{L'_{rd}}; \quad k_{rq} = \frac{L_m}{L'_{rq}}$$

und die transienten Induktivitäten:

$$\left. \begin{aligned}
 L'_d &= L_{s\sigma} + \frac{L_m L_{r\sigma} (1 + l_d)}{L_m + L_{r\sigma} (1 + l_d)} \\
 L'_q &= L_{s\sigma} + \frac{L_m L_{r\sigma} (1 + l_q)}{L_m + L_{r\sigma} (1 + l_q)}
 \end{aligned} \right\}
 \tag{52}$$

$$\left. \begin{aligned}
 L'_{rd} &= L_{r\sigma} (1 + l_d) + \frac{L_m L_{s\sigma}}{L_m + L_{s\sigma}} \\
 L'_{rq} &= L_{r\sigma} (1 + l_q) + \frac{L_m L_{s\sigma}}{L_m + L_{s\sigma}}
 \end{aligned} \right\}.
 \tag{53}$$

In Kenntnis der Beziehungen (41), (52) und (53) können die Gleichungen (30), (31) und (32) in eine für die Berechnung mit Analogrechnern bestgeeignete Form umgeschrieben werden. (Ähnlich wie Gleichungen (20).) Da jedoch diesmal ein an den Läufer gebundenes Koordinatensystem benutzt wird, wogegen die an den Ständer gelegte Spannung eine symmetrische Dreiphasenspannung ist, deren Vektor  $\bar{u}_s = U_s e^{j\omega t}$  ist, muß diese Spannung in Läuferkoordinaten umgeschrieben werden. Wird der jeweilige Winkel zwischen dem Vektor der Ständerspannung und der Richtung  $d$  des Läufers (reelle Richtung, welche von der Richtung der Läuferphase  $a$  um den Winkel  $\varepsilon = -\varrho/2$  abweicht) mit  $\delta$  bezeichnet, dann erhält man in Läuferkoordinaten:

$$\bar{u}_s = U_s e^{-j\delta}.
 \tag{54}$$

Der Winkel  $\delta$  hat nur dann einen konstanten Wert, wenn der Läufer mit der Ständerspannung synchron umläuft. Aus (54) geht hervor, daß

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned}
 u_d &= \text{Re}(\bar{u}_s) = U_s \cos \delta \\
 u_q &= \text{Im}(\bar{u}_s) = -U_s \sin \delta \text{ ist.}
 \end{aligned} \right\}
 \tag{55}$$



Zwischen dem Winkel  $\delta$  und der jeweiligen Winkelgeschwindigkeit des Läufers besteht die folgende Beziehung [3]:

$$\omega = \omega_1 + \frac{d\delta}{dt}, \quad (56)$$

woraus sich nach Teilung mit  $\omega_1$

$$\omega/\omega_1 = \omega' = 1 + \frac{d\delta}{dt} \quad (57)$$

ergibt.

In Kenntnis der Beziehungen (55), (56) und (57), und bei Anwendung folgender Abkürzungen

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_1 t; & u_d/\omega_1 &= u'_d; & u_q/\omega_1 &= u'_q; & \omega/\omega_1 &= \omega'; \\ A &= \frac{3}{2X'_q \omega_1 \Theta}; & B &= \frac{3}{2X'_d \omega_1 \Theta}; & m &= \frac{M}{\omega_1^2 \Theta}; \\ D &= \frac{R_r(1+r_d)}{X'_{rd}}; & Q &= \frac{R_r(1+r_q)}{X'_{rq}}. \end{aligned}$$

gelangt man zum nachfolgenden Gleichungssystem:

$$\frac{d\psi_d}{d\tau} = U'_s \cos \delta + \frac{R_s}{X'_d} (-\psi_d + k_{rd} \psi_{rd}) - \omega' \psi_q \quad (58a)$$

$$\frac{d\psi_q}{d\tau} = -U'_s \sin \delta + \frac{R_s}{X'_q} (-\psi_q + k_{rq} \psi_{rq}) + \omega' \psi_d \quad (58b)$$

$$\frac{d\psi_{rd}}{d\tau} = D (-\psi_{rd} + k_s \psi_d) \quad (58c)$$

$$\frac{d\psi_{rq}}{d\tau} = Q (-\psi_{rq} + k_s \psi_q) \quad (58d)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega'}{d\tau} &= \frac{d^2 \delta}{d\tau^2} = -m - A(-\psi_q + k_{rq} \psi_{rq}) \psi_d + \\ &+ B(-\psi_d + k_{rd} \psi_{rd}) \psi_q. \end{aligned} \quad (58e)$$

### 7.3 Das Strukturbild

Das auf Grund des Gleichungssystems (58) aufgezeichnete Strukturbild ist in Abb. 8 dargestellt. Über den Aufbau des Strukturbildes braucht man nicht viel zu sagen. Einige besondere Fragen bedürfen jedoch einer Erörterung. Vorerst sei von der Erzeugung der Spannungskomponenten  $U'_s \cos \delta$

und  $(-U'_s \sin \delta)$  so viel erwähnt, daß eine aus der Literatur [6] bekannte Schaltung angewandt wurde, die in Kenntnis von  $d\delta/d\tau$  zugleich die mit  $\cos \delta$  und mit  $(-\sin \delta)$  verhältnismäßige Größen wiedergibt. Zu dieser Ope-

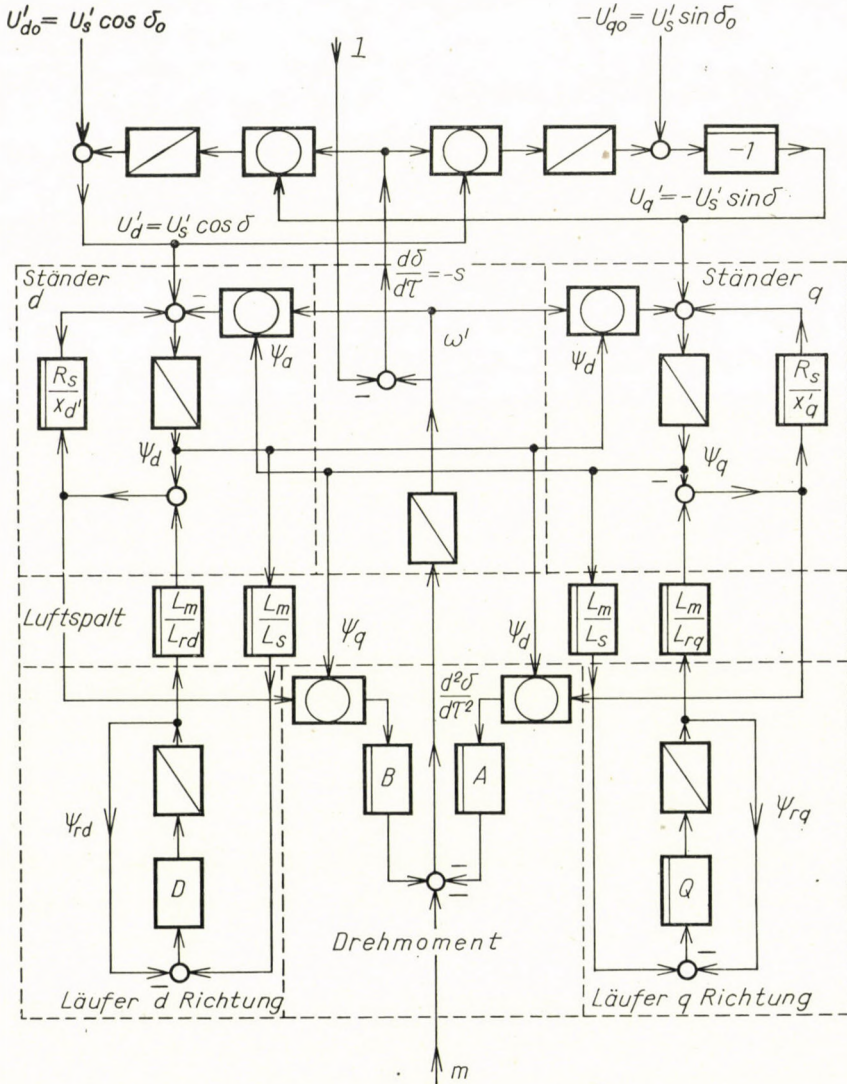


Abb. 8

ration sind 2 Integral- und 2 Multiplikationsglieder nötig. Wird die Maschine im Ruhezustand auf die Dreiphasenspannung gelegt, so entspricht dieser Operation an der Rechenmaschine die plötzliche Einschaltung der Störgrößen  $(U'_s \cos \delta_0)$  und  $(-U'_s \sin \delta_0)$ . Der Winkel  $\delta_0$  stellt den Winkel dar, den die



Richtung  $d$  des im Ruhezustand befindlichen Läufers im Augenblick der Einschaltung mit der in diesem Moment eingenommenen Lage des Vektors der umlaufenden Spannung einschließt. Nachdem im Augenblick der Einschaltung  $\omega' = 0$  ist, erhalten die Multiplizierglieder der die Winkelfunktion erzeugenden Schaltung außer der obigen Störgröße (Spannungen) auch den Multiplikator  $(-1)$ . Dies bedeutet physikalisch, daß es im bewegten Koordinatensystem so erscheint, als ob der Läufer in negativer Richtung mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\omega'$  umliefe, d. h. als ob sein Schlupf  $s = 1$  ( $-s = -1$ ) wäre.

In dem praktisch eher vorkommenden Fall, bei welchem im Läuferkreis nur ein asymmetrisches Wirkwiderstandssystem eingeschaltet ist, wenn also

$$L'_d = L'_q = L'_s; \quad L_{rd} = L_{rq} = L_r; \quad l_d = l_q = 0 \text{ ist,}$$

wird die Wirkung des asymmetrischen Widerstandssystems durch die Größen

$$D = \frac{R_r}{X'_r} (1 + r_d) \quad (59)$$

und

$$Q = \frac{R_r}{X'_r} (1 + r_q) \quad (60)$$

dargestellt. Wenn z. B. während der Regelung nur der Widerstand einer Läuferphase sprunghaft geändert wird, dann tritt die sprunghaft Änderung der Richtung des Koordinatensystems, und damit zugleich die sprunghaft Änderung von  $r_d$  und  $r_q$  ein. Die numerischen Beziehungen werden hier nicht verfolgt, es sei nur bemerkt, daß zur Bestimmung der Änderungen des Absolutwertes und des Winkels die graphische Darstellung als die zweckmäßigste erscheint.

Zusammengefaßt kann festgestellt werden, daß die vektorielle Schreibweise der Gleichungen es ermöglicht, die Zerlegung nach Richtungen  $a$  und  $\beta$  bzw. für den Läufer nach Richtungen  $d$  und  $q$  auch in verwickelten Fällen anzuwenden um somit die Gleichungen für die Aufarbeitung mit Analogrechnern geeignet zu gestalten.

#### SCHRIFTTUM

1. HANNAKAM, L.: Übergangsverhalten des Drehstrom-Schleifringläufers. Regelungstechnik 1959.
2. BURC, F. A. W.: An Electrical Transmission Shaft and its Stability etc. Delft Waltman, 1961.
3. KOVÁCS, K. P.—RÁ CZ, I.: Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen. Budapest, Akademie Verlag, 1959.
4. KOVÁCS, K. P.: Symmetrische Komponenten der Momentanwerte, oder Vektoren etc. Archiv f. Elektrotechnik, 1960.
5. AMMON, W.—SCHNEIDER, G.: Beispiele zur Lösung technischer Probleme mit den Analogrechnern. Elektronische Rechenanlagen, 1958.
6. DIETRICH, E.: Elektronische Analogrechner. München, Oldenbourg, 1960.

## ZUSAMMENFASSUNG

In dem Aufsatz wird auf Grund der raumvektoriellen Schreibweise der Differentialgleichungen des dreiphasigen Asynchronmotors die Programmierung an Analogrechnern für folgende Fälle ausgearbeitet bzw. das benötigte Strukturbild entworfen:

a) Anlaufvorgang; b) Schrittschaltung; c) mit asymmetrischem Impedanzsystem läufergeregelter Schleifringläufermotor.

Zur Lösung dieser Aufgaben werden nur einfache Koordinatentransformationen und die Auflösung komplexer Größen in reelle und imaginäre Teile benötigt.

INVESTIGATION OF TRANSIENT PHENOMENA  
IN ASYNCHRONOUS MOTORS WITH ANALOGUE COMPUTER

K. P. KOVÁCS

## SUMMARY

In the paper the programming for analogue computers of the phenomena in asynchronous machines and the construction of the necessary flow diagrams are shown, on the base of the space vectorial form of the differential equation for three-phase asynchronous motors. The following cases are dealt with:

a) Acceleration; b) stepping connection; c) slip-ring motor controlled by an asymmetric system of impedances.

For the solution of these problems only simple coordinate transformations and the decomposition of complex quantities into real and imaginary parts are needed.

ETUDES DES PHENOMENES TRANSITOIRES  
DANS LES MOTEURS ASYNCHRONES,  
PAR MACHINE A CALCULER ANALOGUE

K. P. KOVÁCS

## RESUME

En partant de la forme vectorielle spatiale des équations différentielles des moteurs asynchrones triphasés, l'auteur fait connaître la programmation des phénomènes se déroulant dans le moteur, et la construction des diagrammes de structure nécessaires, pour les cas suivants:

a) Processus d'accélération; b) connexion pas-à-pas; c) moteur à bagues réglé sur son rotor par un système d'impédances asymétriques.

Pour résoudre ces problèmes, on n'a besoin que de transformations de coordonnées simples, et de la décomposition de quantités complexes en parties réelles et imaginaires.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ АСИНХРОННОГО  
ДВИГАТЕЛЯ НА АНАЛОГНОЙ СЧЕТНОЙ МАШИНЕ

К. П. КОВАЧ

## РЕЗЮМЕ

Исходя из метода пространственно-векторного описывания дифференциальных уравнений трехфазных асинхронных двигателей, в работе показано программирование счетной машины способом аналогии и составление необходимых структурных изображений в следующих случаях:

а) ускоряющий процесс; б) ступенчатое включение; в) регулируемый на роторе асимметричной системой кажущегося сопротивления двигателя контактными кольцами.

При решении задачи было необходимо всего лишь преобразовать координаты и разложить комплексные количества на активные и реактивные составляющие.





# CREEP OF METALS\*

P. FELTHAM, D. Sc.

THE UNIVERSITY, LEEDS, ENGLAND

## Introduction

It is now generally accepted that creep, or flow, observable in metals subjected to constant stresses results from a dynamic balance between work-hardening and recovery, one tending to strengthen the metal, the other to reduce its resistance to further plastic deformation. These opposing processes can be separated and studied more or less in isolation, *e. g.* by taking advantage of the fact that at sufficiently low temperatures work-hardening may be pronounced, yet recovery virtually absent. That recovery after cold-work, induced for example by annealing at elevated temperatures, facilitates further cold-working is of course well known from technical metal-working operations, such as the cold-rolling of sheet or the drawing of wire. In these applications periods characterised by high rates of work-hardening alternate with intervals in which the rates of softening are high; in creep, by contrast, hardening and recovery occur simultaneously. As a rule plastic deformation cannot therefore be described adequately only in terms of increments of stress and strain, recovery necessitates the introduction of time and temperature as new, additional variables.

Thus the strain increment  $d\varepsilon$  of a wire, due to an increase of the tensile stress by  $d\sigma$ , will also depend upon the length of time during which the stress increment is allowed to act, as well as on the temperature,  $T$ . One may represent this formally by writing:

$$d\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial\sigma}{\partial T} dT + \frac{\partial\sigma}{\partial t} dt, \quad (1)$$

which reduces to the well known stress/strain relation

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = \chi \quad (2)$$

\* Delivered August 5, 1961, in the Hungarian Academy of Sciences Budapest.



if the contribution due to recovery, represented by the last two terms of eq. (1), is negligible compared with that characterised by the coefficient of work-hardening,  $\chi$ . In general eq. (1) is not integrable, but if it is applied to conventional creep tests carried out at constant stress and temperature, the temperature variation (which affects the elastic constants of the metal) as well as  $d\sigma$  are zero, and it simplifies to

$$d\varepsilon/dt = -(1/\chi)\partial\sigma/\partial t. \quad (3)$$

Eq. (3) shows clearly the unity between the rate of work-hardening  $\chi$  and the rate of isothermal recovery  $-\partial\sigma/\partial t$ . In the present form it is rather general, and probably applicable to all work-hardening solids.

At the next, higher level of development it then becomes necessary to study the modes of work-hardening and isothermal recovery specific to metals. As these phenomena are not independent of one another — both determining and in turn being determined by the kinetics of dislocations — the problem of correlating them into a quantitative theory of the cybernetics of creep arises.

The main object of the present paper is to examine how far recent experimental techniques, particularly electron transmission microscopy, and modern theories on the nature of work-hardening and recovery, have made advances towards this goal possible. Apart from passing reference to alloys we shall deal with pure metals. Although much useful knowledge has been accumulated about structures desirable in alloys having high creep strength, and a deeper insight into the problem is rapidly being attained as a result of the application of advanced experimental techniques, the interpretations of many important features are still rather controversial, and attempts to discuss them might lead us here too far into speculation.

### Dislocation kinetics

Detailed accounts of the basic properties of dislocations exist [1, 2], and we shall deal only with those having a direct bearing on our problem, *i. e.* the particularization of the parameters in eq. (2) for the case of metals. As a first step we imagine a crystal cube of side  $L$ , containing one edge dislocation of Burgers vector  $b$ , subjected to a shear stress  $\tau$ , as shown in fig. 1. If the dislocation passes through the crystal the strain is  $b/L$  while, with more than one dislocation moving in a similar manner simultaneously, the strain is  $(L^2 \rho)/(bL)$ , where  $\rho$  is the density of similar moving dislocations per unit area, perpendicular to the glide plane. The shear rate will be  $L\rho b/t_L$ ,  $t_L$  being the average time required for a dislocation to traverse the crystal. On writing for the mean velocity of such dislocations  $\bar{v} = L/t_L$  the creep rate in shear becomes

$$d\gamma/dt = \rho b\bar{v}. \quad (4)$$

Although the model of a crystal used in deriving eq. (4) is not realistic, it has the merit of facilitating in a broad manner the introduction of dislocation-induced slip, and of throwing into relief the two important variables affecting the creep rate of the crystal; basically eq. (3) and (4) are equivalent. In a real crystal dislocations will exist in general on several intersecting glide systems, and any given dislocation will have to cut through a "forest" of others intersecting its glide plane, in the process of traversing the crystal.

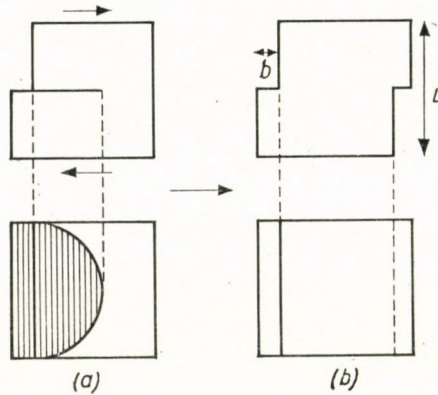


Fig. 1. Partial (a) and complete (b) passage of an edge dislocation of Burgers vector  $b$  through a crystal cube of side  $L$

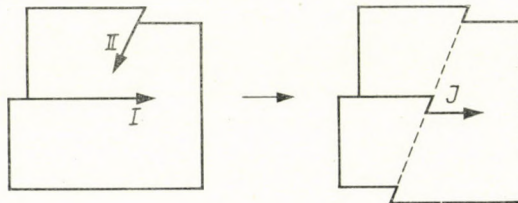


Fig. 2. Intersection of dislocations resulting in the formation of jogs

As a consequence the dislocation will become "jogged" as shown in fig. 2. Although the jog is essentially a small piece of edge dislocation connecting two segments of the original dislocation which have become displaced through slip on an intersecting slip plane, it will not move as readily as a longer edge dislocation because (a) if it moves out of the plane of the paper, as the dislocation loop containing it expands under an increasing shear stress, the derangement of the crystal lattice at the corners of the Z-shaped imperfection of which it is a part will exercise a temperature dependent frictional force on the dislocation containing the jog [3], while (b) if it moves in the plane of the paper, say from left to right, thus causing the lower part of the dislocation to "climb" up to the upper segment, it must either generate vacancies or await



the arrival of vacancies diffusing to it from the body of the crystal [1]. Dislocation displacements of this type, in which point defects are released or absorbed, are known as "non-conservative"; "conservative" displacements are those in which point defects are not involved, *e. g.* that of a jog perpendicular to the plane of the paper in fig. 2. As a result of the drag on dislocations exercised by jogs the migration velocity of dislocations will depend on stress and temperature, the movement of jogs being a thermally activated process.

Edge dislocations cannot then leave their slip planes and move to parallel ones except non-conservatively: by climb. Screw dislocations, however, can move to adjacent or intersecting slip planes conservatively, and this ease of transfer from one slip plane to another probably has as a consequence the well known wavy appearance of slip bands observable, for example, in alpha-iron. In face-centred cubic metals such "crossslip" by screw dislocations is more difficult because the glide dislocations dissociate into adjacent half-dislocations which can crossslip only under high stresses. Sufficiently high stresses are probably attained only in regions where screw dislocations of opposite signs approach one another closely [4]. Eventually they may interact and mutually annihilate. As we shall see, the consequent decrease in the density of the dislocation distribution is a form of recovery. In general the interacting dislocations would be jogged, so that they would experience a strongly temperature-dependent drag; for jogs trapped on screw dislocations may be able to move with the dislocation only non-conservatively [5], by generating or absorbing point defects, primarily vacancies.

Apart from the formation of jogs, dislocation intersection also results in the appearance of "debris", such as small prismatic (jogged) dislocation loops and bunches of point defects.\* Both can contribute to the anchoring of dislocations [6, 7]. We shall refer to these effects later, after having discussed the magnitudes of the activation energies of creep which could reasonably be expected if the drag of jogs on migrating dislocations were rate determining.

### Activation energies

Considerations of the kinetics of jogged dislocations are generally based on models of the type shown in fig. 4 [7, 8, 9], which shows a dislocation lying in the plane of the paper, subjected to a shear stress  $\tau$ . The dislocation behaves somewhat like an elastic string with a constant line tension  $U$ , which exerts a force on the jogs which are impeding its movement. For example, if the Burgers vector of the dislocation is along  $F$ , so that the dislocation is almost purely

\* The mechanism of formation of such defects in work-hardening has been considered by FELTHAM [8]; abundant evidence of the generation of small loops during plastic deformation has been obtained by transmission electron micrography in recent years. Some loops of this type are visible near "A" in fig. 3a.



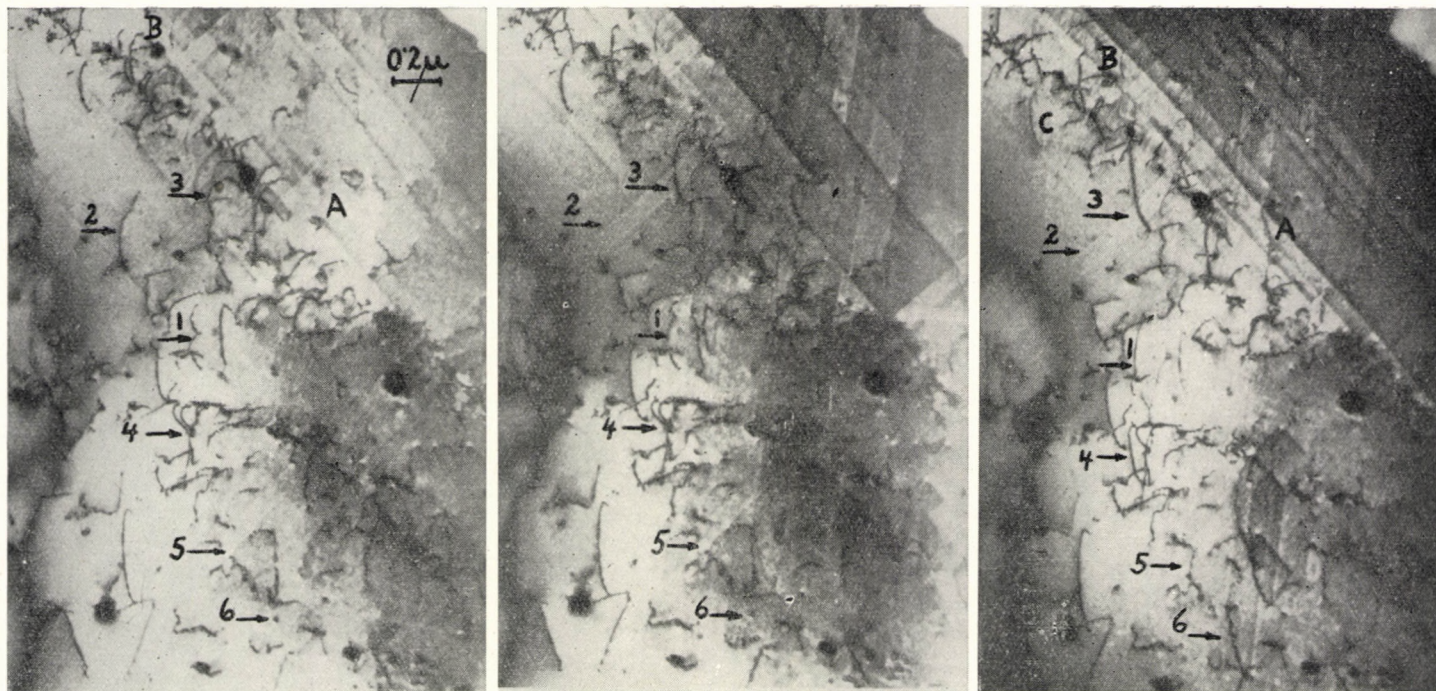


Fig. 3. A sequence of electron transmission micrographs of a thin foil of oxygen-free high-conductivity copper (99.99%), prepared from polycrystalline strip which had crept 10% at 500 °C *in vacuo* at a stress of 475 kg/cm<sup>2</sup>, attaining a steady strain rate of  $2.7 \times 10^{-5}$  per second. Interval between consecutive exposures approximately 30 seconds; temperature of foil not determined. Movement of dislocations impeded by jogs is discernible near arrows marked 1, 2, 3 and 4; dislocations near 5 and 6 in fig. 3c appear to be held up by "debris". Jogged loops visible near A in fig. 3a contract and vanish; a nest of small loops near B displays stability. Jerky movement of the loop at C in fig. 3c during exposure suggests strong pinning of the loop at its extremities, where it meets the surface of the foil



“edge”, then the component of force in the direction along  $F$ , *i. e.* for easy, conservative movement of the jog, will be equal to  $U(\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$ , while the force perpendicular to  $F$ , tending to move the jog non-conservatively against a higher energy barrier, will be much smaller, amounting to only  $U(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$ . Clearly, therefore, the jog will move conservatively.

If, on the other hand, the dislocation were not of the “edge” but of the “screw” type, then non-conservative movement of the jog, now along  $F$ , would occur only if  $\cos \theta_1$  and  $\cos \theta_2$  were almost equal; otherwise the jog would run off sideways until it was either annihilated on encountering an elementary jog of opposite sign, or stopped on reaching parts of the dislocation which are of mixed edge/screw type. It is apparent from these considerations that the most likely positions on dislocations for the accumulation of jogs will be segments of the mixed type. The displacement of jogs in such regions would necessitate the formation or absorption of vacancies, and the dislocation would simultaneously glide and climb. What appears to be jog-controlled dislocation movement of this type is apparent at “1” in the transmission electron micrographs of a thin copper foil (fig. 3a, b, c) which had been prepared from a sheet which had crept at 500 °C in vacuo up to a tensile strain of 10%, and was subsequently allowed to cool under load (475 kg/cm<sup>2</sup>). The movement of the “jog” is seen to be accompanied by a gradual displacement of the dislocation to the left. The foil was not intentionally stressed while in the microscope; the movement of the dislocation was induced primarily by slight buckling of the foil due to contaminating surface films formed during observation.\*

It is easily shown [11] that in a configuration represented by fig. 4 the energy barrier to jog migration, and hence to dislocation movement, is given by

$$E(\tau) = H - \tau b^2 l, \quad (5)$$

where  $H$  is the height of the barrier in the absence of the resolved shear stress  $\tau$ , and  $l$  the characteristic spacing between the jog under consideration and the adjacent locking points, as indicated in fig. 4. Dislocations pinned at several points in this manner can be observed quite frequently in thin foils, *e. g.* at “1”, “2” and “3” in fig. 3\* and, somewhat off centre, in the upper part of fig. 5.

\* In how far the distribution of dislocations in thin films is characteristic of the dislocation pattern in the bulk metal from which the film was prepared is still controversial. Dislocations are attracted to the surface by image forces [1, 10], analogous to those experienced by electric line charges close to a conductor. Screw dislocations, particularly in body-centred cubic metals in which they are not dissociated into partials, would be expected to escape readily through the surface of clean thin foils.

\* The two L-shaped junctions at “3” in fig. 3a, and the gradual opening up of an empty space between them, observable in fig. 3b and 3c, suggest that a screw dislocation on a (111) plane with Burgers vector  $[1\bar{1}0]$  has intersected an edge dislocation on a (111) plane with opposite Burgers vector  $[\bar{1}10]$ ; movement of the vertical dislocation facilitates mutual, partial annihilation, indicated by the widening of the gap between the junctions. It should be noted that while segments of dislocations have thus been lost, the upper dislocation has grown in length in the time between the exposures of fig. 3a and 3c.



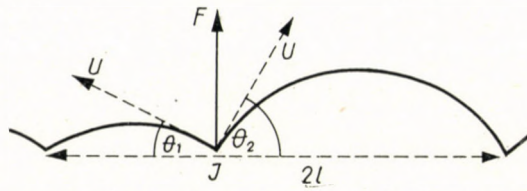


Fig. 4. Forces acting on a jog due to the components of the line tension  $U$  of the dislocation. At a constant shear stress the curvatures of both arcs are approximately equal

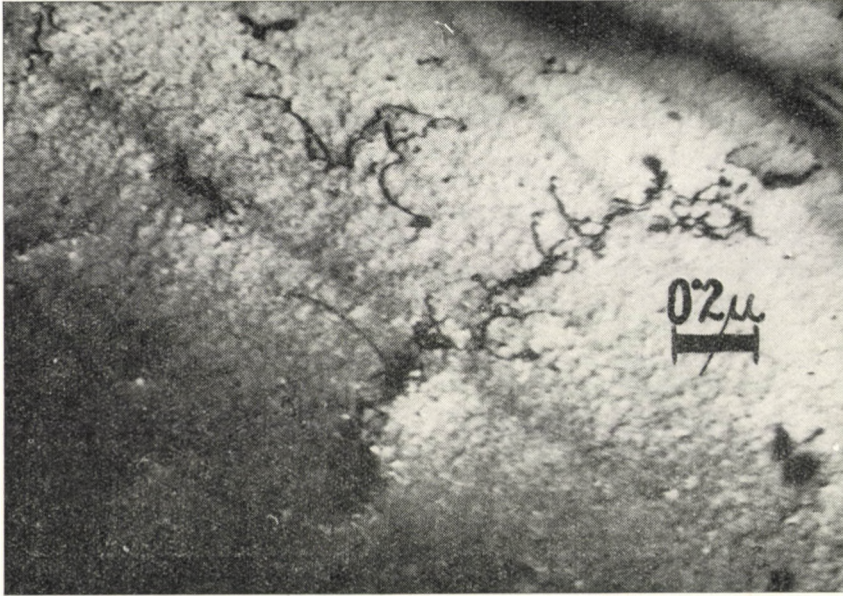


Fig. 5. Transmission electron micrograph of o.f.h.c. copper foil after creep *in vacuo* at 500 °C;  $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$  per second,  $\epsilon = 3.5\%$ ,  $\sigma = 381$  kg/cm<sup>2</sup>. A sub-boundary terminated on the left by a dense nest of dislocations is seen in the lower part of the picture, and strongly segmented dislocations on the left in the upper part

A useful form of eq. (5) is

$$E(\tau) = H[1 - (\tau/\tau_0)], \quad \tau_0 = H/lb^2. \quad (6)$$

The significance of  $\tau_0$  may be seen by referring to the velocity of the jog, which may be expressed by the usual rate equation embodying a Boltzmann term:

$$v_j = \nu b \exp \left\{ -H[1 - (\tau/\tau_0)]/kT \right\}, \quad (7)$$

in which  $\nu$  is an atomic frequency of order  $10^{11}$  per second,  $k$  Boltzmann's constant, and  $T$  the temperature expressed in °K. It is apparent from the vanishing of the exponent, if  $\tau = \tau_0$ , that  $\tau_0$  represents the shear stress, resolved



in the slip plane and in the slip direction, at which the jog (and hence the dislocation containing it) would move without the assistance of heat; numerically it is probably close to the low temperature flow stress of the crystal.

In order to discuss the significance of  $H$  eq. (6) is best rewritten in the form

$$\tau = \tau_0[1 - m(kT/H)], \quad m = \ln(\nu b/v_j). \quad (8)$$

Making the reasonable assumption that with a readily observable creep rate jogs must run along dislocation segments of the order of one micron in length in a few seconds, *i. e.* taking  $v_j$  equal to about  $10^{-5}$  cm/sec, then with  $b = 3 \cdot 10^{-8}$  cm one obtains

$$m \simeq 20.$$

This value would vary by only  $\pm 10\%$  if  $v_j$  were assumed either larger or smaller by a factor of 10. On taking the value  $H = 1.3$  ev observed by FELTHAM and MEAKIN [5] in the creep of 99.99% oxygen free high-conductivity copper as an example, one finds that the bracketted term in eq. (8) approaches zero at about 480 °C, implying that a 1.3 ev barrier should cease to provide creep strength at that temperature. In fact, FELTHAM and MEAKIN find that at about 500 °C the activation energy begins to rise steeply with increasing temperature, eventually attaining a value equal to that of volume self-diffusion (2.1 ev) close to 700 °C. SHERBY, LYTTON and DORN [12] found similarly that  $H$  in pure aluminium increased from about 0.1 to 1.0 times the activation energy of self-diffusion by a number of steps in the interval 77 to 880 °K. These, and similar results are a clear indication that more than one value of  $H$ , and hence more than one mechanism of creep can occur and must be considered, as indicated by our analysis.

In agreement with the above GLEN [13] observed creep in cadmium single crystals at 1–5 °K, the value of  $H$  being very low: approximately 0.1 ev. The extent of creep was limited, as in the case of logarithmic creep observed by FELTHAM [11] in copper and alpha-brasses in the range 77–300 °K, where values of  $H$  were of the order of 0.3 ev. The former type of creep could be due to restricted displacements of dislocations facilitated by the conservative migration of jogs in "screws"; the latter to similar displacements arising from the conservative movement of jogs in edge dislocations [11]. Higher values of  $H$ , approximately equal to those of the activation energies for vacancy formation, vacancy migration and self-diffusion can be expected from other climb and glide mechanisms, as discussed in some detail\* by FELTHAM and

\* The mode of migration of jogs in mixed dislocations at low stresses and high temperatures has not yet been studied exhaustively. On mixed parts the jog cannot move conservatively either radially or circumferentially. Several possibilities arise. If, for example, the jog migrates, by alternate steps in both these directions, producing vacancies by non-conservative glide and then absorbing them by climb, the activation energy would be equal to the sum of that for vacancy formation and vacancy migration, *i. e.* close to that for volume self-diffusion.

MEAKIN [5]. They consider in particular that the value of  $H = 1.3$  ev, discussed above, arises from the climb of dislocations in a vacancy supersaturation, the latter resulting from the adsorption of vacancies to dislocations. The observed magnitude of  $H$  is in fact close to the activation energy of vacancy migration in copper, as would be expected from the proposed mechanism. Some support for the view that vacancies are strongly bound to edge (and probably mixed) dislocations will be reviewed later.

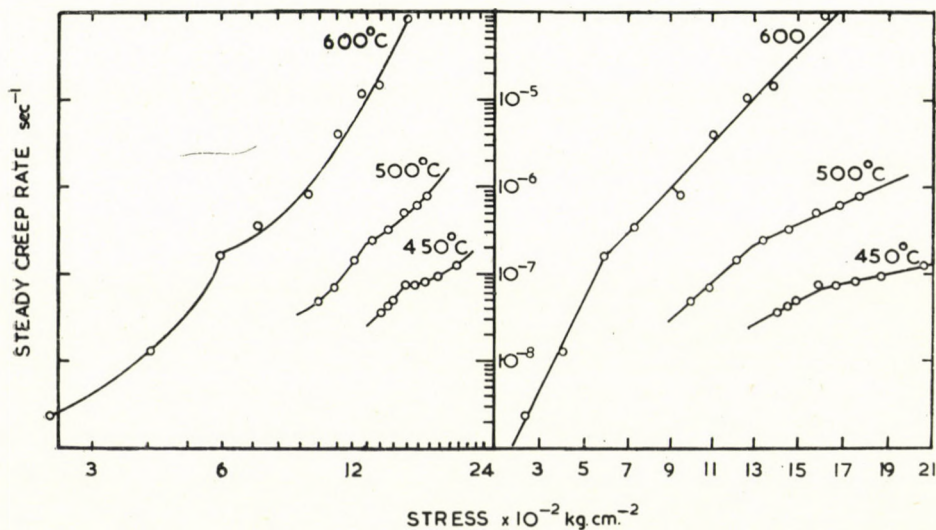


Fig. 6. The steady creep of face-centred cubic cobalt (99.99%) polycrystals *in vacuo*, after prior anneal at 700°C *in situ*. The breaks in the curves in the log/log and semi-log representation denote points of transition from one to another rate controlling mechanism. (After T. Myers [15])

If two or more interdependent rate processes occur simultaneously, *e. g.* one leading to intragranular and one to intergranular recovery, then whichever of the two is the slower one at any given temperature and stress combination will control the creep rate. Changes in the stress or temperature may sometimes lead to a change in the creep mechanism. This has been observed in copper [5], alpha-brasses [14] and f. c. c. cobalt [15], and appears to be quite common (Fig. 6).

### Work-hardening and recovery

The traditional belief that the mesh size of the dislocation network was in some way a measure of the resistance of a metal to plastic deformation has been vindicated by recent researches; a correlation between hardness and the dimensions of "blocks" [16] can be regarded as established. The networks



appear to be stabilized by dislocation nodes, locked dislocations of the Cottrell—Lomer type,\* by jogs, and by the pinning effect arising from the interaction of the dislocations with point defects, notably vacancies [6], and impurities.

The role of the network dimensions on the critical resolved shear stress at which a crystal will begin to deform is apparent from the relation

$$\tau \simeq Gb/\lambda, \quad (10)$$

suggested by recent treatments of work-hardening [8, 19]. Here  $G$  is the shear modulus,  $b$  the Burgers vector of glide dislocations, and  $\lambda$  a length characterizing the network dimensions, approximately equal to the most probable spacing between network nodes.\*\*

Work-hardening must therefore lead to a diminution of  $\lambda$ , while, conversely, recovery must lead to a displacement of the distribution of network lengths to larger values. On using the approximate relation between the tensile flow stress of a polycrystal,  $\sigma$ , and the resolved shear stress of the grains,  $\tau$  [1],

$$\sigma = c \tau, \quad 2 < c < 3,$$

in conjunction with eq. (10), we obtain

$$\partial\sigma/\partial t = (-cGb/\lambda^2) \partial\lambda/\partial t. \quad (11)$$

With eq. (3) the isothermal creep rate becomes

$$d\varepsilon/dt = (cGb/\lambda^2\chi) \partial\lambda/\partial t, \quad (12)$$

where  $\partial\lambda/\partial t$  represents the rate of increase of the characteristic mesh dimension which would be observed if the metal were held isothermally at constant strain. In order to solve eq. (12) this rate would have to be expressed in terms of the jog velocity, which we assume to determine the velocity of dislocations. It would also be necessary to know how  $\chi$  varies with  $\lambda$ ,  $t$  and  $T$ .

\* The formation of COTTRELL—LOMER locks at intersections of edge dislocations in face-centred cubic metals has been studied by transmission electron microscopy by WHEELAN [17]; similar reactions in body-centred metals have also been investigated [18]. Straight dislocations, which appear to be of the Cottrell—Lomer type, also appear to stabilize dislocation networks developing in creep (Fig. 7).

\*\* Strictly, one should consider all the segments complying with the equations  $\tau + \tau_i = Gb/\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , where  $\tau_i$  is the magnitude of the internal stress field near the  $i$ -th segment, due to the presence of neighbouring dislocations. However,  $\tau_i$  can be either positive or negative, so that on summing both sides over all  $i$ -s, and taking means, one can expect all  $\tau_i$ -s to cancel out very nearly, leaving us with eq. (10).

### Steady state creep

The problem simplifies somewhat if one considers only the steady stage of creep, which is observed at high temperatures after the initial stage of decelerating, transient deformation. One then has the additional condition

$$d^2 \epsilon / dt^2 = 0, \tag{13}$$

which implies that the rates of hardening and recovery attained as a result of the preceding structural changes are equal, so that the metal is neither hardening nor softening in the course of time. The "equilibrium" values of  $\chi$  and  $\lambda$ , in principle obtainable from eq. (12) and (13), are no longer function of the time  $t$ . We shall denote them by  $\chi_e$  and  $\lambda_e$ , remembering that they still depend on  $T$ . The rate of growth of  $\lambda_e$  will be assumed to be determined by  $v_j$ , and we shall make the simple assumption that

$$\partial \lambda / \partial t = v_j. \tag{14}$$

Writing  $\dot{\epsilon}$  for the equilibrium creep rate, eq. (12)—(14) yield, together with eq. (5) and (7):

$$\dot{\epsilon} = (cG/\lambda_e^2 \chi_e) b \{ \nu b \exp [-(H - q\sigma)/kT] \} \tag{15}$$

where

$$q = b^2 t_e / c.$$

On comparing eq. (15) and (4) we see that  $G/\lambda_e^2 \chi_e$  is a measure of the dislocation density. With reasonable values of the parameters, *e. g.*  $G/\chi_e = 50$  and  $\lambda_e = 3 \times 10^{-4}$  cm it is found to equal approximately  $10^9$  per  $\text{cm}^2$ , which is of the right order of magnitude. Taking  $c = 2$ ,  $b^2 = 5 \times 10^{-16}$   $\text{cm}^2$  and  $\nu = 10^{11}/\text{sec}$ , the pre-exponential term in eq. (15):

$$A(T) \equiv cGb^2/\lambda_e^2 \chi_e$$

is equal to  $10^5$  per second, which is of the same order as was determined by FELTHAM and MEAKIN [5] in the creep of copper at 700 °C, where  $H$  was found to be close to the activation energy of volume self-diffusion.\* The functional dependence of the steady strain rate on stress and temperature is also in good agreement with observations [5, 14, 15].

\* The assumption expressed by eq. (14) is probably quite realistic if the jog moves with the dislocation radially, and not along the dislocation loop, *i. e.* for non-conservative displacements on screw dislocations. The activation energy would be equal to that of self-diffusion, as observed in the creep of copper referred to.



Dislocations in the denser "tangles" in fig. 3, 5 and 7 are in general smooth over length of only about  $5 \times 10^{-6}$  cm, indicating values of  $l_e$  of this order. Again, agreement with lengths for a number of f. c. c. metals, deduced from high-temperature creep data is very satisfactory [20]. A problem which has not yet been fully elucidated is the pronounced temperature dependence of  $l_e$ :

$$l_e = l_0 \exp(-Q/kT), \quad Q \simeq 2.5 kT_m, \quad l_0 = \text{const.}, \quad (16)$$

where  $T_m$ (°K) is the melting temperature. This relation would be reasonable if the concentration of jogs or/and other pinning points on dislocations were

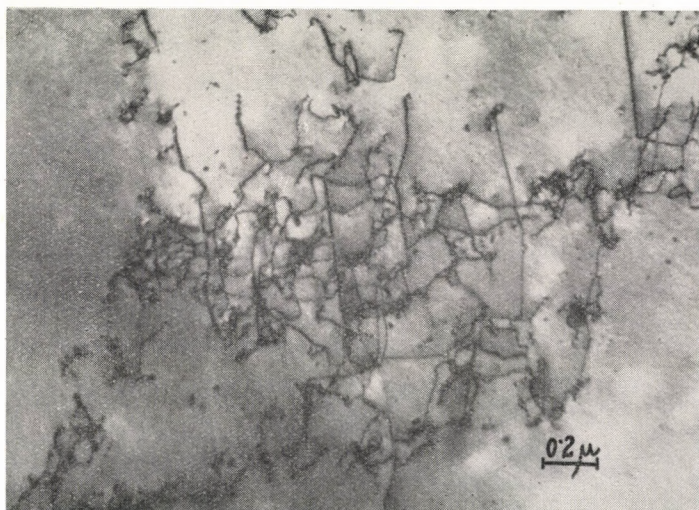


Fig. 7. Complex network in o. f. h. c. copper foil showing dislocation loops and "debris". Some of the long almost vertical dislocations are probably non-slip dislocations of the Cottrell—Lomer type [17], but this was not checked by selected area electron diffraction

controlled by a "binding" energy  $Q$ . FRIEDEL [7] shows that vacancies will be bound to edge dislocations with an energy

$$W = -\frac{9}{16\pi^2} \frac{1 + \mu}{1 - \mu} Gb^3, \quad (17)$$

where  $\mu$  is Poisson's ratio. For copper he finds  $W = -0.35$  ev, the absolute value of which is close to that of  $Q$  (0.25—0.31 ev) obtained from creep data [5, 20]. On taking  $-W$  for copper equal to 0.30 ev, and using this as standard, eq. (17) yields the values of  $W$  shown in Table I. along with corresponding ones of  $Q$  derived from creep results [5, 20]. The good agreement suggests that, while the frictional drag of jogs is determined by  $H$  (eq. 15),

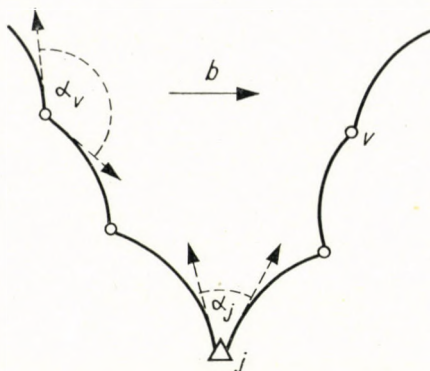


Fig. 8. A jog trapped on the screw part of a dislocation pinned by adsorbed vacancies. The force on the jog ( $j$ ) exceeds that on the vacancies ( $v$ )

the concentration of vacancies on dislocations determines  $l$ . Pinning may thus take place as shown in fig. 8.

Table I

Binding energies ( $-W$ ) calculated from eq. (17), and corresponding activation energies (eq. (16)) determined from creep data for a number of face-centred cubic metals (20)

|    | $-W(\text{ev})$ | $Q(\text{ev})$ |
|----|-----------------|----------------|
| Al | 0.22            | 0.20*          |
| Co | 0.48            | 0.47**         |
| Cu | 0.30            | 0.30           |
| Fe | 0.40            | 0.38           |
| Pb | 0.12            | 0.12           |
| Ni | 0.42            | 0.37           |

\* Value uncertain

\*\* From reference [15].

### Creep fracture

Detailed observations of metals during creep, particularly by high-temperature microscopy [21], seem to indicate that damage which eventually leads to creep fracture develops continuously throughout the creep process. It does in fact appear to be induced by the deformation mechanism, as is also indicated by the relation frequently observed to apply to metals and alloys [5, 22]:

$$\dot{\epsilon} = \epsilon_0/t_{fr}$$



where  $\dot{\epsilon}$  is the equilibrium creep rate,  $t_{ff}$  the time to fracture, and  $\epsilon_0$  a constant having the dimensions of a strain. A process of dislocation "disintegration" resulting in the formation of small dislocation loops is often observed in electron transmission micrographs of thin foils which have crept. Some contract and disappear, *e. g.* at "A" in fig. 3; occasionally however clusters of very small loops are observed, which have considerable stability, such as at "B" in fig. 3. Nucleation and growth of holes may be particularly favoured at such spots, or in the dense tangles at subboundaries and boundaries, visible, for example, near the lower edge in fig. 5. Once nucleated, crack propagation may be favoured by some form of "Griffith" criterion. However, more specific conclusions on creeps fracture can emerge only from further work.

### Conclusions

It may be concluded that the development leading to eq. (12), in which recent work-hardening theory was utilized, is useful in pointing to the effects of sub-structure dimensions and stabilization on the equilibrium creep rate. Further, experimental and theoretical work, supported by recent direct observations of dislocations in thin metal foils by transmission electron microscopy, lends support to the assumption that the drag of jogs and of absorbed point defects determines the migration velocity of dislocations and, hence, the creep rate. The discussion also shows that a number of problems still require considerable further study. These include the characteristics of the dislocation networks developing during creep, the various modes of dislocation pinning, and details of the mechanisms of creep fracture.

Considerable further advances can be expected to become possible as the theory of diffraction contrasts in thin foils is developed and, probably within the next few years, when new types of electron microscopes will facilitate the observation of dislocations in foils a few microns thick. A systematic study of the effect of alloying on creep [23] should, with the assistance of modern techniques, such as scanning x-ray micro-analysis, electron microscopy and diffraction, also prove particularly fruitful.

\*

I am indebted to MR. R. SINCLAIR, who took the electron micrographs reproduced in this paper.

### REFERENCES

1. COTTRELL, A. H.: *Dislocations and Plastic Flow in Crystals*, Oxford 1955.
2. NABARRO, F. R. N.: *Advances in Physics*, **1** (1952) 269.
3. MADDIN, R. and COTTRELL, A. H.: *Phil. Mag.*, **46** (1955) 735.



4. FELTHAM, P.: *Phil. Mag.*, In the press.
5. FELTHAM, P. and MEAKIN, J. D.: *Acta Met.*, **7** (1959) 614.
6. COTTRELL, A. H.: *Vacancies and Other Point Defects in Metals and Alloys (Symposium)*, London 1958.
7. FRIEDEL, J.: *Les Dislocations*, Paris 1956.
8. FELTHAM, P.: *Phil. Mag.*, **6** (1961) 209.
9. SEEGER, A.: *Phil. Mag.*, **46** (1955) 1194.
10. KOEHLER, J. S.: *Phys. Rev.*, **60** (1941) 397.
11. FELTHAM, P.: *Phil. Mag.*, **6** (1961) 259.
12. SHERBY, O. D., LYTTON, J. L. and DORN, J. E.: *Acta Met.*, **5** (1957) 219.
13. GLEN, J. W.: *Phil. Mag.*, **1** (1956) 400.
14. FELTHAM, P. and COPLEY, G. J.: *Phil. Mag.*, **5** (1960) 649.
15. MYERS, T.: Private communication.
16. SHCHERBAKOV, V. N., NAGOVITSINA, L. N. and OSIPOV, I. S.: *Fiz. Met. Metalloved.* **9** (1960) 510.
17. WHELAN, M. J.: *Proc. Roy. Soc. A*, **249** (1958) 114.
18. CARRINGTON, W., HALE, K. F. and MCLEAN, D.: *Proc. Roy. Soc. A*, **259** (1960) 203.
19. MOTT, N. F.: *Trans. Met. Soc. Amer. Inst. Met. Eng.*, **213** (1960) 962.
20. FELTHAM, P.: *Phil. Mag.*, **2** (1957) 584.
21. LOZINSKY, M. G.: *High Temperature Metallography*, London 1961. *Izzó Fémek Metallográfiai Vizsgálata Vákuumban*, Budapest 1960.
22. FELTHAM, P.: *Symposium on Structural Processes in Creep (Institute of Metals)*, London 1961.
23. KORNILOV, I. I., MINTS, R. S. and ONOPRIENKO, S. D.: *Dokl. Ak. Nauk SSSR*, **88** (1953) 683.

#### SUMMARY

The theoretical foundations of the creep of metals are critically examined in the light of advances made possible by the direct observation of dislocations in thin foils of metals by transmission electron microscopy in the last few years. The generally accepted concept that creep results from a dynamic balance between work-hardening and recovery is utilized, in conjunction with recent interpretations of both processes, in deriving an equation for the high-temperature equilibrium creep rate. Some of the major problems still awaiting elucidation are outlined.

#### DAS KRIECHEN DER METALLE

P. FELTHAM

#### ZUSAMMENFASSUNG

Die theoretischen Grundlagen des Kriechens der Metalle werden im Licht der Fortschritte kritisch untersucht, die die direkte Beobachtung von Dislokationen in Metallfolien mittels elektronenmikroskopischer Durchleuchtung in den letzten Jahren ermöglicht hat. Die allgemein anerkannte Vorstellung, wonach das Kriechen durch eine dynamische Wechselwirkung zwischen Verfestigung und Erholung verursacht wird, sowie neuere Erklärungen für beide Vorgänge werden herangezogen, um eine Gleichung für die Kriechgeschwindigkeit bei hoher Temperatur abzuleiten. Einige der hauptsächlichsten Probleme, welche auf Klärung warten, werden besprochen.

#### LE FLUAGE DES METAUX

P. FELTHAM

#### RESUME

L'observation directe, par microscope électronique, des dislocations dans les feuilles métalliques minces a apporté, ces dernières années, de nouveaux résultats qui ont servi de base à l'auteur dans son analyse critique des fondements théoriques du fluage des métaux.



L'hypothèse généralement admise, suivant laquelle le fluage résulterait d'un équilibre dynamique entre l'écroutissage et la restauration est utilisée, avec une interprétation nouvelle des deux processus, pour établir une équation de la vitesse de fluage de l'équilibre, à haute température. L'auteur esquisse enfin quelques problèmes essentiels qui attendent encore d'être élucidés.

## ПОЛЗУЧЕСТЬ МЕТАЛЛОВ

П. ФЕЛЬТАМ

### РЕЗЮМЕ

Статья критически анализирует теоретические основы ползучести металлов на основе результатов непосредственных наблюдений дислокации в тонких металлических фольгах с помощью электронного микроскопа.

Уравнение для установившейся скорости ползучести при высоких температурах выводится из общепринятого представления, что ползучесть является результатом динамического равновесия при возврате и упрочнении. Вывод учитывал современные представления о возврате и упрочнении.

Автор дал контуры некоторых важных проблем, требующих уточнения.

# BERECHNUNG DER BRUCHARBEIT AUS DEM TORSIONSVERSUCH AM ZYLINDRISCHEN PROBESTAB

E. REUSS

DOKTOR DER TECHN. WISSENSCHAFTEN  
LEHRSTUHL FÜR TECHNISCHE MECHANIK, TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 5. Oktober 1961]

Die allumfassende Bedeutung der Energie spricht entschieden dafür, die Brucharbeit eingehend zu untersuchen. GILLEMOT und SINAY haben in einem Aufsatz [1] die Brucharbeit von Zerreißversuchsprobestäben behandelt. Nun wollen wir eine Methode der Berechnung der Brucharbeit aus dem Torsionsversuch am zylindrischen Probestab ableiten.

Um die spezifische Formänderungsarbeit in einem Punkt »P« eines Körpers zu bestimmen, berechnet man für ein um diesen Punkt willkürlich bestimmtes Volumen den Grenzwert des aus der Brucharbeit und dem Volumen gebildeten Quotienten für den Fall, wenn das bestimmte Volumen in den Punkt »P« zusammengezogen wird.

Die Brucharbeit ist gleich dem Wert der spezifischen Formänderungsarbeit zu Beginn und am Ausgangspunkt des Bruchvorganges.

Erfahrungsgemäß nimmt der Bruch bei einem Torsionsversuch seinen Anfang immer an irgendeinem Punkt der Oberfläche des Körpers. Bei einem Versuch an einem zylindrischen Probestab ist der Wert der Formänderungsarbeit in jedem beliebigen Punkt der Mantelfläche derselbe. Diese Arbeit soll aus dem Torsionsdiagramm errechnet werden.

Im Torsionsdiagramm ist der funktionsmäßige Zusammenhang zwischen dem Torsionsmoment  $M$  und dem relativen Verdrehungswinkel  $\varphi$  zweier Querschnittsebenen des Probestabs festgelegt. Der Durchschnittswert der im ganzen Stab angehäuften Formänderungsarbeit ist als der Quotient der Arbeitsfläche  $L_1$  und des Volumens  $V$  des geprüften Stababschnittes von der Länge  $l$  definiert. Es wird aber nicht der Durchschnittswert der Formänderungsarbeit für den ganzen Stab, sondern der Wert der in der Oberflächenschicht angehäuften Arbeit benötigt.

Ein von Á. NÁDAI mitgeteiltes Verfahren bietet die Möglichkeit, den Umfangswert der Schubspannung aus dem  $\varphi - M$  Diagramm zu errechnen. Der Abstand zwischen den obenerwähnten zwei Querschnitten soll als Meßlänge mit  $l$  bezeichnet werden. So ist

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l} \quad (1)$$



der spezifische Verdrehungswinkel — in Bogenmaß — pro Längeneinheit, und es gilt nach NÁDAI [2] für die Schubspannung:

$$\tau = \frac{1}{2\pi r^3} \left( \vartheta \frac{dM}{d\vartheta} + 3M \right), \quad (2)$$

und für die Brucharbeit an der Oberfläche:

$$A = \int_0^{\gamma_t} \tau d\gamma, \quad (3)$$

wo

$$d\gamma = rd\vartheta \quad (4)$$

das Winkeländerungselement ist. Der Index  $t$  bei  $\gamma$  bedeutet — auch bei weiter unten bezeichneten Größen — einen im Zeitpunkt des Bruches gültigen Wert.

Aus Gl. [2]...[4] ergibt sich:

$$A = \frac{1}{2\pi r^2} \int_0^{\vartheta_t} \left( \vartheta \frac{dM}{d\vartheta} + 3M \right) d\vartheta. \quad (5)$$

Nach partieller Integration des ersten Gliedes:

$$\int_0^{\vartheta_t} \vartheta \frac{dM}{d\vartheta} d\vartheta = [\vartheta M]_0^{\vartheta_t} - \int_0^{\vartheta_t} M d\vartheta$$

und in die Gl. [5] eingesetzt:

$$A = \frac{1}{2\pi r^2} \left( \vartheta_t M_t + 2 \int_0^{\vartheta_t} M d\vartheta \right). \quad (6)$$

Mit Hilfe der Gl. [1] wird an Stelle von  $\vartheta$  der Ausdruck mit  $\varphi$  eingesetzt:

$$A = \frac{1}{\pi l r^2} \left( \frac{1}{2} \varphi_t M_t + \int_0^{\varphi_t} M d\varphi \right),$$

( $\pi r^2 l$ ) ist das Volumen  $V$  der Probestabes innerhalb der Meßlänge  $l$ , daher ist

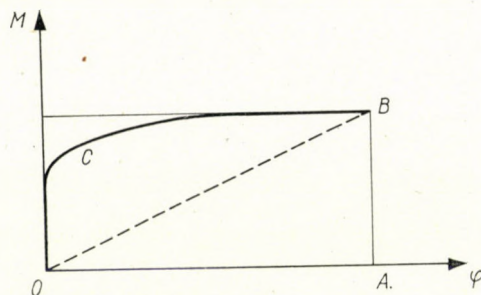
$$A = \frac{1}{V} \left( \int_0^{\varphi_t} M d\varphi + \frac{1}{2} \varphi_t M_t \right). \quad (7)$$

An der rechten Seite der obigen Formel bedeutet das erste Glied die Diagrammfläche OABCO unterhalb der Kurve ( $\varphi - M$ ), d. h. die innerhalb der Meßlänge  $l$  angehäuften Formänderungsarbeit  $L_1$  des ganzen Stabes. Das zweite Glied stellt die Arbeitsfläche  $L_2$  (als die Dreieckfläche OABO) dar. Mit anderen Worten

$$A = \frac{L_1 + L_2}{V}. \quad (8)$$

Für spröde Körper gilt:

$$L = \frac{1}{2} \varphi_t M_t$$



und für plastische Körper:

$$L = \varphi_t M_t.$$

In einheitlicher Schreibweise gilt:

$$A = \frac{\alpha \varphi_t M_t}{V},$$

wobei der Faktor  $\alpha = 1$  für spröde und  $\alpha = 1,5$  für idealplastische Körper beträgt.

Diesbezüglich soll auf die Angaben von WYSS [3] hingewiesen werden. Zur Beurteilung der Qualität von Drahtseilelementen wird die spezifische Torsionsarbeit angewendet, die wir hier durch  $L_1/V$  bezeichnen. Nach WYSS ist die Fläche  $L_1$  des Torsionsdiagramms annähernd  $M_t \varphi_t$ . Demgemäß ist  $\alpha$  annähernd 1,5; mit anderen Worten weichen die Werte der Torsionsarbeit von der Brucharbeit einheitlich um den Faktor 1,5 ab. Es kann festgestellt werden, daß die Brucharbeit — zwar unbewußt — zur Qualifizierung der einzelnen Drähte im Drahtseil schon seit längerer Zeit bei Unterdrückung des Faktors 1,5 herangezogen wurde.

In der Tabelle 6 des Buches von WYSS werden für die spezifische Torsionsarbeit  $L_1/V$  einzelner Drähte Werte zwischen 33,7—100 mkp/cm<sup>2</sup> angegeben, woraus sich Werte von 50,5—150 mkp/cm<sup>2</sup> für die Brucharbeit ergeben.



Wie man sieht, ist die Errechnung der Brucharbeit aus dem Torsionsversuch äußerst einfach. Wahrscheinlich haben GILLEMOT und SINAY (s. S. 172 von [1], Zusammenfassung) bereits vorausgesetzt, daß die Brucharbeit vom Spannungszustand abhängig sei, und daher nicht erwartet werden könne, daß der aus dem Torsionsversuch gewonnene Wert der Brucharbeit mit jenem aus dem Zerreiversuch übereinstimmen soll. Ein Unterschied kann noch daher entstehen, daß die Eigenschaften des Materials in der Nähe der Stabachse von denen an der Oberfläche abweichen. Ein Vorteil des Torsionsversuches besteht darin, daß dabei eine gut definierte, homogene Formänderung in der Oberflächenschicht auftritt; ein Nachteil ist es aber, daß diese Schicht unvermeidlich den Wirkungen der Bearbeitung ausgesetzt war.

#### SCHRIFTTUM

1. L. GILLEMOT und G. SINAY: Die Brucharbeit als Werkstoffkenngre. Acta Technica XXII. 1958. p. 149—172.
2. A. NDAI: Plasticity. McGraw-Hill, New York, London, 1931. p. 126—128.
3. TH. WYSS: Stahldrahtseile der Transport- und Förderanlagen. Schweizer Druck- und Verlagshaus A. G. Zürich, 1957.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Im Werk von A. NDAI ist eine Methode zur Errechnung der an der Mantelfläche des Probestabes entstehenden Spannung aus dem Torsionsversuch mitgeteilt. Auf dieser Grundlage wird in dieser Arbeit ein Verfahren angegeben, mittels dessen die spezifische Brucharbeit an der Mantelfläche des Probestabes berechnet werden kann. Man erhält die spezifische Brucharbeit, wenn man die Arbeitsfläche des Torsionsdiagramms und die halbe Fläche des das Diagramm umfassenden Rechtecks summiert und diese Summe durch das Volumen des der Prüfung unterworfenen Teils des Stabes dividiert.

#### CALCULATION OF THE WORK OF FRACTURE ON THE BASIS OF THE TORSIONAL TEST DIAGRAM OF A CYLINDRICAL TEST BAR

E. REUSS

#### SUMMARY

In the book of NDAI [1] a method is given for the calculation of the surface stress of a test bar under torsional test. On this basis, the author has found a method for computing the specific work of fracture on the cylindrical surface of the test bar. The value of the specific work of fracture is obtained as the sum of the area of the diagram and the half surface of the enclosing rectangle, referring it to the volume of the tested portion of the bar.

CALCUL DU TRAVAIL DE RUPTURE PAR ESSAI DE TENSION  
D'UNE EPROUVETTE CYLINDRIQUE

E. REUSS

## RESUME

Á. NÁDAI avait déjà donné une méthode pour calculer les tensions engendrées à la surface latérale d'une éprouvette cylindrique soumise à un essai de torsion. Sur cette base, l'auteur présente un procédé de calcul du travail spécifique de rupture à la surface cylindrique de l'éprouvette. La valeur du travail spécifique de rupture est obtenue par addition de l'aire du diagramme de torsion exprimée en travail, et de la demi-surface du rectangle qui le renferme, leur somme étant divisée ensuite par le volume de la partie mesurée de l'éprouvette.

РАСЧЕТ РАБОТЫ РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ИСПЫТАНИЯ НА КРУЧЕНИЕ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

Э. РЕУС

## РЕЗЮМЕ

Арпадом Надаи разработан метод вычисления напряжений, возникающих на поверхности цилиндрического образца, используя данные испытания на кручение. Исходя из этого, в данной работе описывается метод для вычисления удельной работы разрушения на поверхности образца. Удельная работа разрушения получается сложением площади диаграммы кручения, выраженной в работе, и половины площади прямоугольника, включающего в себе диаграмму, и эту сумму разделить на объем замеренной части образца.





## INDEX

- Szöke, B.*: Beitrag zur Entstehung von technischen Irrtümern — Study on Some Sources of Technical Errors — Sur les causes de quelques erreurs techniques — *Сёке, Б.*: К возникновению технических ошибок ..... 3
- Szidarovszky, J.*: Natural Vibration of a Bar under Axial Force, Taking into Consideration the Effect of Shearing Force and Rotatory Inertia — Eigenquerschwingungen eines auf Druck beanspruchten Stabes mit Rücksicht auf den Einfluß der Schubkraft und Rotationsträgheit — Vibration propre d'une barre soumise à une charge axiale, compte tenu de l'inertie de rotation — *Сидаровски, Я.*: Собственные колебания стержня, нагруженного силами, действующими вдоль оси, учитывая инерцию вращения ..... 29
- Preszler, L.*: Berechnung der Strömung für ein radiales Laufrad mit stark gewölbter Beschau felung — Calculation of Intensively Curved Revolving Circular Grids — Calcul de persiennes tournantes à squelette de forte courbure — Расчет вращающейся круговой решетки большой кривизны ..... 43
- Rohonyi, W.*: Über die Grenzen der Endübersetzungen doppelt gebundener Getriebe bei schnellaufenden Werkzeugmaschinen — Limits for the Total Transmission Ratio of Double-Linked Gear Trains — Limites des rapports totaux des trains d'engrenages à couplage double des machines-outils de grande vitesse — *Рохони, В.*: Пределы конечных передач двухстыкового приводного устройства быстроходных станков ..... 67
- Lévai, I.*: Herstellung von Stirnradgetrieben mit elliptischem Wälzylinder — The Production of Spur Gears with Elliptical Rolling Cylinders — La fabrication des engrenages droits à circonférence primitive elliptique — *Левай, И.*: Производство эллиптических лобовых зубчатых колес ..... 95
- Vasvári, F.*: Investigation of the Initial Phase of Cavitation Damage — Untersuchung des Anfangsstadiums der Zerstörung durch Kavitation — Examen de la phase initiale de la destruction par cavitation — *Вашвари, Ф.*: Исследование начального состояния кавитационного разрушения ..... 101
- Замбо, Я.*: Оптимальное место заложения шахтных стволов в случае крутопадающих пластов — *Zambó, J.*: Die optimale Lage von Bergwerksschächten bei starkfallenden Lagerstätten — The Optimum Emplacement of Shafts for Steep Deposits — L'emplacement optimum des puits de mine aux gisements raides ..... 123
- Сифоров, В. И.*: К теории каналов радиосвязи со случайно изменяющимися параметрами — *Siforow, W. I.*: Zur Theorie der Funkkanäle mit stochastischen Kenngrößen — On the Theory of Radiochannels with Randomly Varying Parameters — Sur la théorie des radiocanaux à paramètres aléatoires ..... 135
- Просин, А. В.*: Дальние связи на ультракоротких волнах — *Prosin, A. W.*: Fernverbindungen mit ultrakurzen Wellen — VHF-Links for Great Distance — Télécommunications à ondes ultracourtes ..... 165



- Du Castel, F.*: Le rôle du processus de reflexion partielle dans la propagation des ondes — Die Rolle des Prozesses der teilweisen Reflexion in der Wellenfortpflanzung — The Role of the Partial Reflexion Process in the Wave Propagation — *Дю Кастель, Ф.*: Роль процесса частичного отражения в распространении волн ..... 179
- Csonka, P.*: Specially Shaped Membrane Shells on a Base Comprising an Equilateral Triangle — Besonders geformte Membranschalen über einem regelmäßigen Dreieckgrundriß — Voiles minces de forme spéciale construits sur une base en triangle régulier — *Чонка, П.*: Мембранные оболочки специальной формы над основанием в виде правильного треугольника ..... 187
- Korach, M. und Sasvári, G.*: Die Trocknung in der Keramik — Drying in the Ceramic Industry — Le séchage en céramique — *Корах, М. и Шашвари, Д.*: Сушка в керамической промышленности ..... 195
- Kovács, K. P.*: Untersuchung der transienten Vorgänge von Asynchronmotoren mit Hilfe von Analogrechnern — Investigation of Transient Phenomena in Asynchronous Motors with Analogue Computer — Études des phénomènes transitoires dans les moteurs asynchrones, par machine à calculer analogue — *Ковач, К. П.*: Исследование неустановившихся процессов асинхронного двигателя на аналогичной счетной машине ..... 215
- Feltham, P.*: Creep of Metals — Das Kriechen der Metalle — Le fluage des métaux — *Фельтам, П.*: Ползучесть металлов ..... 243
- Reuss, E.*: Berechnung der Brucharbeit aus dem Torsionsversuch am zylindrischen Probestab — Calculation of the Work of Fracture on the Basis of the Torsional Test Diagram of a Cylindrical Test Bar — Calcul du travail de rupture par essai de tension d'une éprouvette cylindrique — *Реус, Э.*: Расчет работы разрушения на основе испытания на кручение цилиндрического образца ..... 259

*Printed in Hungary*

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1962. II. 27. — Terjedelem: 23,25 (A/5) ív, 105 ábra

---

1962.54957 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György





The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica*  
*Budapest V., Nádor u. 7.*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

*Acta Technica*  
*Budapest V., Nádor u. 7.*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

*Acta Technica*  
*Budapest V., Nádor u. 7.*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.



66, -Ft

ACTA  
TECHNICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXIX

FASCICULI 3—4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1962

ACTA TECHN. HUNG.



# ACTA TECHNICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandelsunternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

# ZUR BERECHNUNG VON DOPPELT GEKRÜMMTEN SCHALEN BEI GEWISSER ANTIMETRISCHER UND EINSEITIGER BELASTUNG

Dr. B. KLIMOV

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN  
LEIPZIG

[Eingegangen am 7. Dezember 1960]

## Einleitung

Die doppelt gekrümmten Schalen berechnet man normalerweise für eine über die gesamte Schalenfläche gleichmäßig verteilte Last. Inzwischen ist es klar geworden, daß sowohl die einseitige (z. B. die Schneelast), als auch die antimetrische Belastung (die Windbelastung nach den Bauvorschriften einiger Länder) — analog den Verhältnissen bei bogenartigen Konstruktionen — einen gefährlicheren Belastungsfall darstellen können, als die über die gesamte Fläche der Schale gleichmäßig verteilte Last.

Die Berechnung für antimetrische und einseitige Belastung ist auch deshalb wichtig, weil bei diesen in einem Teil der Schale Zugspannungen vorkommen oder vorkommen können.

Die einseitige Belastung der doppelt gekrümmten flachen Schalen bei rechteckigem Grundriß hat WLASOW [1] mit doppelt trigonometrischen unendlichen Reihen gelöst, wobei die Spannungsfunktion durch folgende Reihe gegeben ist (Biegetheorie).

$$F(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b}. \quad (1)$$

Es war ferner vorausgesetzt worden, daß die Schale an den vier Rändern gelenkig, vertikal starr und horizontal verschieblich gelagert ist (Bild 1). Das bedeutet praktisch, daß die Ränder nur tangentielle Kräfte aufnehmen, und die Schnittkräfte normal zu den Rändern Nullwerte haben. Die Randbedingungen sind folglich folgende:

$$\text{für } x = \pm a \quad v = N_x = M_x = w = 0 \quad (2)$$

$$y = \pm b \quad u = N_y = M_y = w = 0.$$

Die Membranspannungen lassen sich in doppelt gekrümmten flachen Schalen unter Flächenlasten aus folgender Spannungsfunktion ableiten, worin

$$k_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -Z(x, y) \quad (3)$$

$k_1$  und  $k_2$  die Hauptkrümmungen der Schale sind.



Im Falle des elliptischen Paraboloids (Bild 1) erhält man am Rande folgende Werte der Schnittkräfte

$$\text{für } x = \pm a \quad N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

$$\text{für } y = \pm b \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Setzt man diese Werte in die Grundgleichung (3) ein, erhält man

$$\text{für } x = \pm a \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = - \frac{Z(x, y)}{k_2} \quad (6)$$

$$\text{für } y = \pm b \quad N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - \frac{Z(x, y)}{k_1}. \quad (7)$$

Das heißt bei  $Z = \text{konstant}$ : wenn die normal zum Rand stehenden Membrankräfte Nullwerte annehmen, werden die ihnen zugeordneten (konjugierten) Schnittkräfte konstant und haben dabei Maximalwerte (6) und (7).



Bild 1. Elliptisches Paraboloid und Koordinatensystem

Aber die Spannungsfunktion (1), angewendet für Membranspannungen, die die Randbedingungen (2) erfüllt, gibt dann nicht nur für die Randwerte (4) und (5), sondern auch für (6) und (7) Nullwerte. Das ist ein Widerspruch. Deshalb entwickle ich hier eine Lösung, die sowohl die Randwerte (4) und (5) erfüllt als auch die Beziehungen (6) und (7). Die vertikale Belastung nehme ich in der Form (17) an.

## 2. Einseitige und antimetrische Belastung der Schale

Die einseitige Belastung der Schale kann man als Summe von gleichmäßig verteilter Belastung und antimetrischer Last erhalten (Bild 2). Der Belastungsfall der über die gesamte Schalenfläche gleichmäßig verteilten Belastung ist von mehrere Verfassern bereits gelöst worden. Die Lösung ist auch in den vorliegenden Arbeiten [2] und [3] zu finden. Somit ist die Aufgabe auf den Fall der antimetrischen Belastung zurückgeführt worden. Die einfachste Lösung der Grundgleichung (3) im Falle einer antimetrischen gleichmäßig verteilten Belastung erhält man, wenn man die

Belastung in eine Fourier-Reihe mit  $\sin \frac{n\pi x}{a}$  oder  $\sin \frac{n\pi y}{b}$  zerlegt. Eine solche Näherung wird auch mit der Ausgangsvoraussetzung eines stetigen

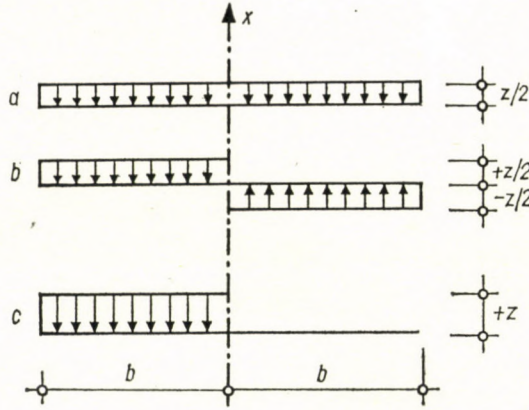


Bild 2. Einseitige Belastung als Summe von symmetrischer und antisymmetrischer Belastung

Verlaufes der Belastung übereinstimmen, wie es bei der Herleitung der Grundgleichung (3) geschehen ist. In diesem Falle bekommt man als Lösung der Differentialgleichung (3) folgende Spannungs-Funktion

$$F(x,y) = - \frac{4a^2 b^2 Z}{\pi^3 f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} - 1 \right) \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (8)$$

falls die x-Achse die Antimetrieachse der Belastung ist.

Es ist leicht zu beweisen, daß die Funktion (8) die Differentialgleichung (3) und die Randbedingungen (4)–(5) für Konstante Z befriedigt. Aber die konjugierten Randbedingungen (7) erfüllt diese Funktion nicht und ebenso (6) nur in grober Annäherung. Von solchen Nachteilen sind auch die Lösungen 4 und auch 5 für eine über die gesamte Schalenfläche gleichmäßig verteilte Belastung nicht frei.

Eine Unstetigkeit der Belastung (beim Belastungssprung) macht gewisse mathematische Schwierigkeiten, die man aber leicht umgehen kann.

Wir nehmen ein elliptisches Paraboloid (Bild 3) mit antisymmetrischer Belastung und zerschneiden die Schale in zwei Halbschalen. Der Schnitt geht durch die Antimetrieachse. Weil die zwei Halbschalen die gleiche Form aufweisen (die Hauptkrümmungen sind gleich) und die Belastung gleich groß ist, aber umgekehrtes Vorzeichen hat, so wird, wenn man den Spannungszustand der einen Halbschale kennt, der Spannungszustand der zweiten die gleiche Größe haben, aber mit umgekehrtem Vorzeichen. Die Schubkräfte müssen an



der Stoßstelle der Halbschalen die Gleichgewichtsbedingungen befriedigen; die Normalkräfte hingegen werden nur dann im Gleichgewicht stehen, wenn sie gleich Null sind. Auf diese Weise haben die so erhaltenen Halbschalen entlang der Schnittlinie keinen Seitendruck.

*Diesen Satz kann man nicht nur auf Schalen des elliptischen Paraboloids, sondern auf alle Schalen von symmetrischer Form mit antimetrischer Last anwen-*

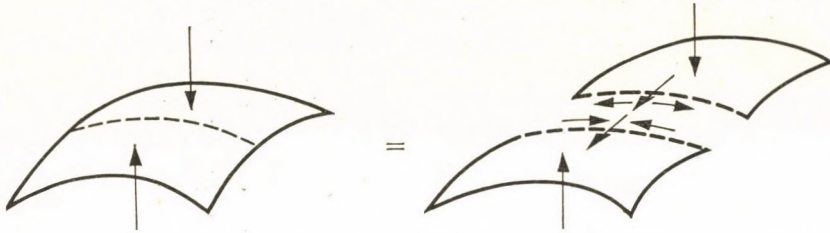


Bild 3. Zerlegung der Schale bei antimetrischer Belastung in zwei symmetrisch belastete Halbschalen

den. Außerdem kann man dieses Theorem auf alle symmetrischen Körper von beliebiger Form mit antimetrischer Last erweitern. Auch in diesem Falle gilt, daß in der Antimetrieebene keine zur Antimetrieebene normal stehenden Kräfte auftreten. Dieser Satz führt somit das Problem der antimetrischen Belastung auf die bereits gelöste Aufgabe der gleichmäßig verteilten Belastung zurück, weil für eine Halbschale die Randbedingungen auch für den Rand, der in der Antimetrieebene liegt, bekannt sind.

### 3. Die Lösung der Aufgabe für das elliptische Paraboloid bei antimetrischer Belastung

Es wird ein elliptisches Paraboloid angenommen, welches durch folgende Gleichung bestimmt sei:

$$z = f \left( \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} \right).$$

Bei dem im Bild 1 dargestellten Koordinatensystem und den angegebenen Bezeichnungen wird die Krümmung in den nachstehenden Gleichungen mit einer Genauigkeit zweiten Grades bestimmt.

$$k_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r_a} = \frac{f}{a^2} \quad (9)$$

$$k_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r_b} = \frac{f}{b^2} \quad (10)$$

$$k_3 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0. \quad (11)$$

Bild 4 zeigt ein Flächenelement aus der Mittelfläche mit der darauf einwirkenden Kräften. In dem man die Werte von einer Kleinheit zweiten Grades vernachlässigt, können die Vektoren  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $S_{xy}$  und  $S_{yx}$  mit ihren Projektionen

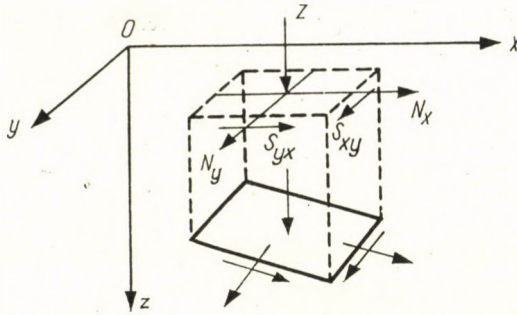


Bild 4. Flächeneinheit der Mittelfläche

auf der  $xy$ -Ebene eingesetzt werden. Die drei Gleichgewichtsbedingungen der Kräftekomponenten ergeben in diesem Falle

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + Y = 0 \quad (13)$$

$$k_1 N_x + k_2 N_y + 3k_3 S_{xy} + Z(x, y) = 0. \quad (14)$$

Wenn es keine Belastung in tangentialer Richtung gibt, d. h. wenn diese gleich Null sind, ist

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Die Gleichungen (12) und (13) werden bei Einführung der Spannungsfunktion  $F(x, y)$  durch die folgenden Gleichungen identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ N_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ S_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (15)$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in Gleichung (14) ergibt sich im Zusammen-



hang mit (11)

$$k_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + Z(x,y) = 0. \quad (16)$$

Weil  $k_1, k_2 > 0$ , ist diese Gleichung von elliptischem Typus.

Die vertikale Belastung nehmen wir in folgender Form an:

$$Z(x,y) = p_0 \left( 1 + C_1 \frac{x^2}{a^2} + C_2 \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (17)$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  konstant sind, die den Verlauf der Belastung bestimmen. Ihre Werte können positiv und negativ sein. Sind sie gleich Null, dann bekommt man die gleichmäßig verteilte Belastung.

Mit diesem Gesetz läßt sich Schnee- und Windbelastung leicht beschreiben.

Die Grundgleichung (16) nimmt mit (17) jetzt die Gestalt an:

$$\frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - \frac{p_0}{f} \left( 1 + C_1 \frac{x^2}{a^2} + C_2 \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (18)$$

oder

$$m^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2, \quad (19)$$

wobei die Beiwerte folgende Bedeutung haben

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ a_1 &= - \frac{p_0}{f} a^2 \\ a_2 &= - \frac{p_0}{f} C_1 \\ a_3 &= - \frac{p_0}{f} C_2 \frac{a^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Für die Spannungsfunktion stellen wir die Bedingung, daß sie am Rand Null sein soll

$$x = \pm a, y = \pm b : F = 0. \quad (21)$$

$F_p$  soll eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung sein, welche ganz beliebige Randbedingungen erfüllt. Bilden wir die Differenz

$$F - F_p = F_0 \quad (22)$$

und setzen diese in die inhomogene Gleichung ein, dann sehen wir, daß  $F_0$  die homogene Gleichung und die folgende Randbedingung erfüllt

$$F_0|_{\text{Rand}} = F|_{\text{Rand}} - F_p|_{\text{Rand}} \quad (23)$$

wobei

$$F_p|_{y=0} = 0, \quad F_p|_{y=b} = 0 \quad (24)$$

und an den anderen Rändern keine Bedingungen gestellt werden. So ist das Problem auf die Lösung der homogenen Gleichung zurückgeführt. Aus (23) sieht man, daß es zweckmäßig ist, eine solche partikuläre Lösung zu wählen, welche diese einfachen Randbedingungen erfüllt und die inhomogene Gleichung befriedigt.

### Partikuläre Lösung

Als partikuläre Lösung nehmen wir ein Polynom vierten Grades mit unbestimmten Koeffizienten

$$\begin{aligned} F_p = & A_1 y^4 + A_2 x^4 + A_3 x y^3 + A_4 x^3 y + A_5 x^2 y^2 + \\ & + A_6 y^3 + A_7 x^3 + A_8 x y^2 + A_9 x^2 y + A_{10} y^2 + \\ & + A_{11} x^2 + A_{12} x y + A_{13} y + A_{14} x + A_{15}. \end{aligned} \quad (25)$$

Die unbekanntenen Beiwerte werden durch die Bedingung (24) bestimmt.

Aus  $F_p = 0$  für  $y = 0$  erhält man

$$A_2 = A_7 = A_{11} = A_{14} = A_{15} = 0. \quad (26)$$

Und die zweite Bedingung von (24) gibt uns folgende Gleichung

$$\begin{aligned} F_p = & A_1 b^4 + A_3 b^3 x + A_4 b x^3 + A_5 b^2 x^2 + A_6 b^3 + A_8 b^2 x + \\ & + A_9 b x^2 + A_{10} b^2 + A_{12} b x + A_{13} b. \end{aligned}$$

Das ist nur dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned} A_1 b^4 + A_6 b^3 + A_{10} b^2 + A_{13} b &= 0 \\ A_3 b^3 + A_8 b^2 + A_{12} b &= 0 \\ A_4 b &= 0 \\ A_5 b^2 + A_9 b &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Weitere Gleichungen erhalten wir aus der Bedingung, daß  $F_p$  auch die inhomogene Gleichung befriedigen soll. So erhält man



$$12 A_1 y^2 + 6 A_3 x y + 2 A_5 x^2 + 6 A_6 y + 2 A_8 x + 2 A_{10} + m^2 \\ (2 A_5 y^2 + 2 A_9 y) = a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2.$$

Durch Vergleich der Beiwerte erhält man folgende weiteren linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} 12 A_1 + 2 m^2 A_5 &= a_3 \\ 2 A_5 &= a_2 \\ 2 A_{10} &= a_1 \\ 6 A_3 &= 0 \\ 2 A_6 + 2 m^2 A_9 &= 0 \\ 2 A_8 &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Daraus erhält man  $A_3 = A_8 = 0$ .

Aus dem Gleichungssystem (26), (27) und (28) erhält man dann folgende Werte der unbestimmten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_3 - m^2 a_2}{12} \\ A_5 &= \frac{a_2}{2} \\ A_6 &= \frac{m^2 a_2 b}{6} \\ A_9 &= -\frac{a_2 b}{2} \\ A_{10} &= \frac{a_1}{2} \\ A_{13} &= -\frac{a_1 b}{2} - \frac{b^3}{12} (m^2 a_2 + a_3) \end{aligned} \tag{29}$$

$$A_2 = A_3 = A_4 = A_7 = A_8 = A_{11} = A_{12} = A_{14} = A_{15} = 0.$$

Und die partikuläre Lösung wird folgendermaßen angeschrieben

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{a_3 - m^2 a_2}{12} y^4 + \frac{a_2}{2} x^2 y^2 + \frac{m^2 a_2 b}{6} y^3 - \frac{a_2 b}{2} x^2 y + \\ &+ \frac{a_1}{2} y^2 - \left[ \frac{a_1 b}{2} + \frac{b^3}{12} (m^2 a_2 + a_3) \right] y. \end{aligned} \tag{30}$$

## Lösung der homogenen Gleichung

Jetzt lösen wir die homogene Gleichung

$$m^2 \cdot \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} = 0 \quad (31)$$

mit den Randbedingungen

$$R_0|_{\text{Rand}} = F|_{\text{Rand}} - F_p|_{\text{Rand}=0}. \quad (32)$$

Dabei ist für  $y = 0$ ,  $y = b$ 

$$F_0|_{\text{Rand}} = 0.$$

Und für  $x = \pm a$ 

$$F_0|_{\text{Rand}} = \frac{m^2 a_2 - a_3}{12} y^4 - a_2 \cdot \frac{a^2 y^2}{2} - \frac{m^2 a_2 b y^3}{6} + \\ + \frac{a_2 b a^2}{2} y - \frac{a_1}{2} y^2 + \left[ \frac{a_1 b}{2} + \frac{b^3}{12} (m^2 a_2 + a_3) \right] y$$

oder

$$F_0|_{\text{Rand}} = Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy \quad (33)$$

für  $x = \pm a$ .

Die Beiwerte sind dabei:

$$A = \frac{m^2 a_2 - a_3}{12} \\ B = -\frac{m^2 a_2 b}{6} \\ C = -\frac{a_2 a^2}{2} - \frac{a_1}{2} \\ D = \frac{a_2 b a^2}{2} + \frac{a_1 b}{2} + \frac{b^3}{12} (m^2 a_2 + a_3). \quad (34)$$

Zur Lösung der homogenen Gleichung benutzen wir unendliche Fourier-Reihen

$$F_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (35)$$

wobei

$$\frac{b}{2} \beta_n = \int_0^b (Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (36)$$

ist.



Nach mehrmaliger partieller Integration bekommt man den  $\beta_n$ -Wert:

$$\beta_n + \frac{2b^2}{n^3 \pi^3} [(12 Ab^2 + 6Bb + 2C) \cos n\pi - 2C] + \\ + 48 A \frac{b^4}{n^5 \pi^5} (1 - \cos n\pi). \quad (37)$$

### Allgemeine Lösung

Im Blick auf (22) wird das allgemeine Integral der inhomogenen Gleichung folgendermaßen angeschrieben:

$$F = F_p + F_0 = \frac{P_0}{f} \frac{a^2}{b^2} \frac{C_1 - C_2}{12} y^4 - \frac{P_0 C_1}{2f} x^2 y^2 - \frac{a^2 P_0 C_1}{6bf} y^3 + \\ + \frac{b}{2} \cdot \frac{P_0 c_1}{f} x^2 y - \frac{P_0 a^2}{2f} \cdot y^2 + \frac{P_0 b^2 b}{f} \left( \frac{1}{2} + \frac{C_1}{12} + \right. \\ \left. + \frac{C_2}{12} \right) y + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (38)$$

wobei

$$\beta_n = \frac{2a^2 b^2 P_0}{\pi^3 n^3 f} [(1 + C_1 + C_2) \cos n\pi - (1 + C_1)] + \\ + \frac{4(C_2 - C_1) P_0 a^2 b^2}{n^5 \pi^5 f} (1 - \cos n\pi). \quad (39)$$

### 4. Membrankräfte der Schale bei antisymmetrischer Belastung

Kennt man die Spannungsfunktion (38), so bekommt man auf Grund der Beziehung (15) die Membrankräfte folgendermaßen:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{P_0}{f} \cdot \frac{a^2}{b^2} (C_1 - C_2) y^2 - \frac{P_0 C_1}{f} x^2 - \\ - \frac{P_0 a^2 C_1}{bf} y - \frac{P_0 a^2}{f} - \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (40)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{p_0 C_1}{f} y^2 + \frac{b p_0 C_1}{f} y +$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (41)$$

$$S_{xy} = S_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial_x \partial_y} = \frac{2p_0 C_1}{f} xy - \frac{b p_0 C_1}{f} x -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{n^2 \pi^2}{ab} \cdot \frac{\sin h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (42)$$

### 5. Membrankräfte im Falle einer antimetrischen gleichmäßig verteilten Last

Im Falle gleichmäßig verteilter Belastung setzt man  $C_1 = C_2 = 0$  und erhält:

Spannungsfunktion

$$F = -\frac{p_0 a^2}{2f} y^2 + \frac{p_0 a^2 b}{2f} y + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cosh n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (43)$$

und  $\beta_n$  bei  $n = 1, 3, 5 \dots$

$$\beta_n = -\frac{4a^2 b^2 p_0}{n^3 \pi^3 f}. \quad (44)$$

Normalkräfte:

$$N_x = -\frac{p_0 a^2}{f} - \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (45)$$

$$N_y = \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \beta_n \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (46)$$

Schubkräfte:

$$S_{xy} = S_{yx} = -\frac{\pi^2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n n^2 \frac{\sin h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (47)$$



### 6. Der Fall der symmetrischen Belastung

Um die Ausdrücke für die Membrankräfte bei einseitiger Belastung zu erhalten, ist es erwünscht, die Ausdrücke für die Schnittkräfte für symmetrische Belastung in ähnlicher Form wie bei antimetrischer zu entwickeln.

Die Einzelheiten werden weggelassen, weil sie auf analogem Wege wie oben ermittelt werden. Es folgen die Endformeln für die Spannungsfunktion.

Im Falle einer symmetrischen Last nach (17) erhält man folgenden Ausdruck für die Spannungsfunktion:

$$\begin{aligned}
 F = & -\frac{p_0}{f} \left[ \frac{a^2}{b^2} \frac{C_2 - C_1}{12} y^4 + \frac{a^2 + a^2 C_1}{2} y^2 - \frac{C_1 b^2}{2} x^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{C_1}{2} x^2 y^2 - \frac{a^2 b^2}{2} \left( 1 - \frac{C_2 - 5C_1}{6} \right) \right] - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \beta_n \frac{\cos h \cdot \frac{n\pi x}{2a}}{\cosh h \cdot \frac{n\pi}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2b},
 \end{aligned} \quad (48)$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \beta_n = & -\frac{p_0 a^2}{f} \left[ \frac{C_2 - C_1}{12} \cdot \frac{4n^4 \pi^4 - 192 n^2 \pi^2 + 1536 b^2}{n^5 \pi^5} + \right. \\
 & \left. + \frac{2n^2 \pi^2 - 16}{n^3 \pi^3} b^2 (1 + 2C_1) - \frac{2b^2}{n\pi} \left( 1 + \frac{C_2 + 11C_1}{6} \right) \right] \sin \frac{n\pi}{a}.
 \end{aligned} \quad (49)$$

Im Falle  $C_1 = C_2 = 0$  (für den Fall gleichmäßig verteilter Last) erhält man:

$$\beta_n = -\frac{p_0 a^2}{f} \left( \frac{2n^2 \pi^2 b^2 - 16b^2}{n^3 \pi^3} - \frac{2b^2}{n\pi} \right) = \frac{p_0 a^2}{f} \cdot \frac{16b^2}{n^3 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{a} \quad (50)$$

und die Spannungsfunktion für diesen Belastungsfall ist

$$\begin{aligned}
 F = & -\frac{p_0 a^2}{2f} (y^2 - b^2) - \\
 & -\frac{16p_0 a^2 b^2}{f\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{a}}{n^3} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{2a}}{\cosh \frac{n\pi}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2b}.
 \end{aligned} \quad (51)$$

Auf Grund der Spannungsfunktion (48) erhält man für symmetrische Belastung nach (17) folgende Werte für die Membrankräfte:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{p_0}{f} \left[ \frac{a^2}{b^2} (C_2 - C_1) y^2 + (1 + C_1) a^2 + C_1 x^2 \right] +$$

$$+ \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \beta_n \frac{n^2 \pi^2}{4b^2} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{2a}}{\cosh \frac{n\pi}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (52)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{p_0}{f} (y^2 - b^2) C_1 -$$

$$- \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \beta_n \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{2a}}{\cosh \frac{n\pi}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (53)$$

$$S_{xy} = S_{yx} = - \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \beta_n \frac{n^2 \pi^2}{4ab} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{2a}}{\cosh \frac{n\pi}{2}} \cdot \sin \frac{n\pi y}{2b}, \quad (54)$$

wobei man den Beiwert  $\beta_n$  nach (49) berechnet.

Für gleichmäßig verteilte Belastung ergibt sich

$$\beta_n = \frac{16p_0 a^2 b^2}{f\pi^3} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3} \quad (55)$$

$$N_x = -\frac{p_0 a^2}{f} + \frac{p_0 a^2}{f} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{2a}}{\cosh \frac{n\pi}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (56)$$

$$N_y = -\frac{p_0 b^2}{f} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \frac{\cosh \frac{n\pi x}{2a}}{\cosh \frac{n\pi}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (57)$$

$$S_{xy} = S_{yx} = -\frac{p_0 ab}{f} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{2a}}{\cosh \frac{n\pi}{2}} \cdot \sin \frac{n\pi y}{2b}. \quad (58)$$



### 7. Einseitige Belastung der Schalenfläche

Addiert man die Kräfte von antimetrischer und symmetrischer Belastung, so bekommt man die Ausdrücke für die Membrankräfte bei einseitiger Belastung von der Größe  $p_0$  für die belastete Schalenhälfte wie folgt:

$$N_x = -\frac{p_0 a^2}{f} + \frac{p_0 a^2}{2f} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ \frac{p_0 a^2}{2f} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \frac{\cos h \frac{n\pi x}{2a}}{\cos h \frac{n\pi}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2b}$$
(59)

$$N_y = -\frac{p_0 b^2}{2f} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{n\pi}{2} \frac{\cos h \frac{n\pi x}{2a}}{\cos h \frac{n\pi}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right)$$
(60)

$$S_{xy} = S_{yx} = -\frac{p_0 ab}{f} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\sin h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \cos \frac{n\pi y}{b} + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{n\pi}{2} \frac{\sin h \frac{x\pi x}{2a}}{\cos h \frac{n\pi}{2}} \sin \frac{n\pi y}{2b} \right).$$
(61)

Und für den unbelasteten Bereich:

$$N_x = -\frac{p_0 a^2}{2f} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} - \right.$$

$$\left. - \sin \frac{n\pi}{2} \frac{\cos h \frac{n\pi x}{2a}}{\cos h \frac{n\pi}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right)$$
(62)

$$N_y = -\frac{n_0 b^2}{2f} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{n\pi}{2} \frac{\cos h \frac{n\pi x}{2a}}{\cos h \frac{n\pi}{2}} \cos \frac{n\pi y}{2b} - \frac{\cos h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (63)$$

$$S_{xy} = \frac{ab p_0}{f} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\sin h \frac{n\pi x}{a}}{\cos h n\pi} \cos \frac{n\pi y}{b} - \sin \frac{n\pi}{2} \frac{\sin h \frac{n\pi x}{2a}}{\cos h \frac{n\pi}{2}} \sin \frac{n\pi y}{2b} \right). \quad (64)$$

### 8. Die Konvergenz der entwickelten Reihen

Die Analyse von unendlichen Reihen für Membrankräfte zeigt, daß die hier erhaltenen Reihen rasch konvergieren. Das Zahlenbeispiel hat auch gezeigt, daß es für Punkte im Inneren der Schalenfläche genügt, nur ein oder zwei Glieder der Reihe zu nehmen. Die etwas schlechtere Konvergenz am Schalenrand besitzt keine praktische Bedeutung, weil die Randwerte durch die Ausgangsgleichungen schon bestimmt sind. Die Reihe zur Bestimmung der Schubkräfte konvergiert ebenfalls rasch, und sie divergiert nur für die Eckpunkte. Diese Schwierigkeit kann man umgehen, wenn man die maximalen Schubkräfte entweder in der Nähe der Eckpunkte (Girkmann) oder mit Hilfe von Differenzgleichungen [2] berechnet. Die maximalen Schubkräfte kann man auch aus den allgemeinen statischen Verhältnissen bestimmen (GMÜR, PUCHER und andere). Wegen der raschen Konvergenz genügt es für die Praxis, bei einseitiger Belastung nur das erste Glied zu berücksichtigen (für Punkte im Innern der Schalenfläche). So erhält man dann folgende Ausdrücke:

$$N_x \cong \mp \frac{p_0 a^2}{2f} \left( 1 - \frac{4}{11,592 \pi} \cos h \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) - \frac{p_0 a^2}{2f} \left( 1 - \frac{4}{\pi} \frac{\cos h \frac{\pi x}{2a}}{2,510} \cos \frac{\pi y}{2b} \right) \quad (65)$$





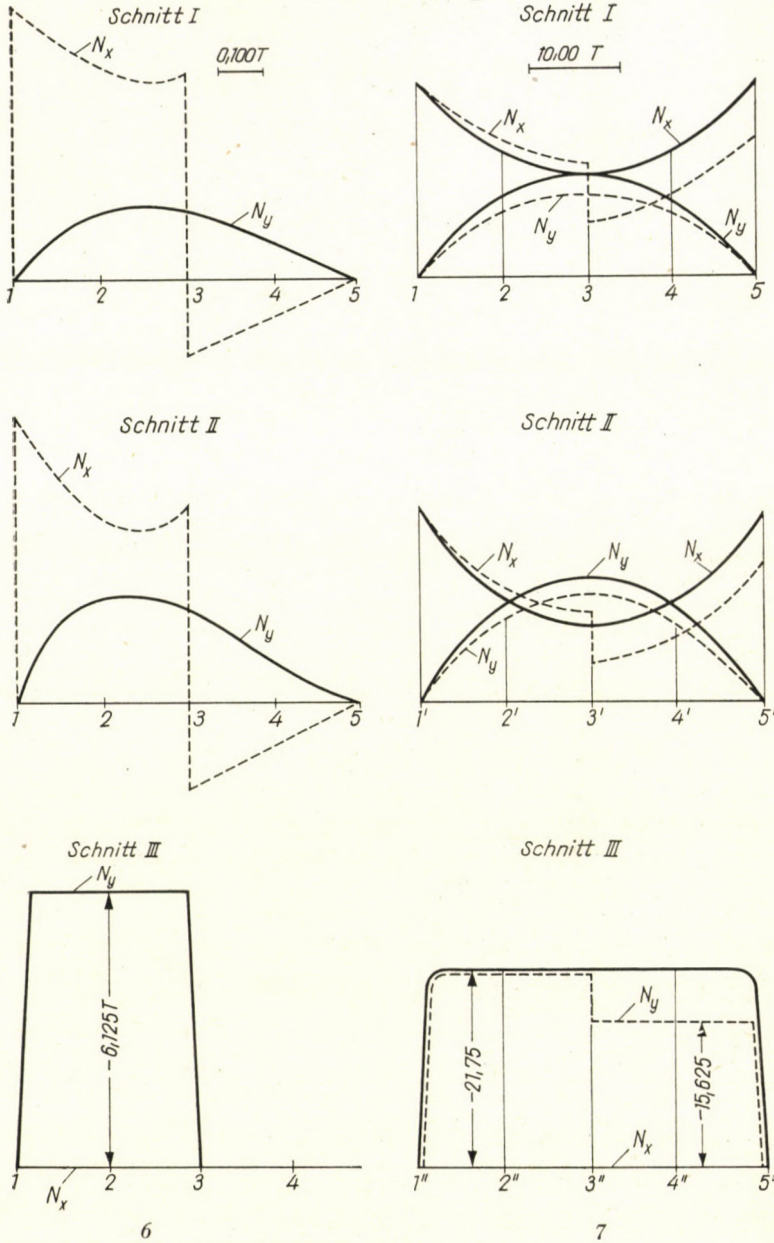


Bild 6.  $N_x$  und  $N_y$ -Werte in den Schnitten I, II. und III bei einseitiger Belastung  $p = 0,100 \text{ Mp/m}^2$

Bild 7. Verlauf der Membrankräfte  $N_x$  und  $N_y$  in den Schnitten I, II und III

- a) volle Linie — infolge Eigengewicht und Nutzlast über die gesamte Schalenfläche
- b) gestrichelte Linie — infolge Eigengewicht über die gesamte Schalenfläche und Nutzlast nur auf der Hälfte der Schalenfläche



Die Normalkräfte sind für folgende Belastungsfälle berechnet worden:

a) Einseitige Belastung infolge

$$p = 0,100 \text{ Mp/m}^2 \text{ für die Schnitte I, II und III}$$

$$\text{für } x = 0, x = +\frac{a}{2} \text{ und } x = +a - \text{(Bild 6)}$$

b) Belastung der gesamten Schale mit ständiger Last und Nutzlast

$$g + p = 0,350 \text{ Mp/m}^2 \text{ für die Schnitte I, II und III}$$

(Bild 7 — voll ausgezogene Linien.)

c) Belastung der gesamten Schale mit ständiger Last und Nutzlast nur auf der einen Hälfte der Schale

$$(y = 0, \text{ bis } y = +b)$$

(Bild 7 — gestrichelte Linie.)

#### SCHRIFTTUM

1. WLASOW, Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie Verlag Berlin, 1958
2. KLIMOV, Tafeln zur Berechnung des flachen elliptischen Paraboloids, Beton- und Stahlbetonbau, 1959/1
3. KLIMOV, Zur Berechnung des elliptischen Paraboloids über viereckigen Grundriß (ungarisch) Magyar Építőipar, 1960/9 Budapest
4. HRUBAN, Biegetheorie der Translationsflächen und ihre Anwendung im Hallenbau, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus VII, 1953
5. GIRKMANN, Flächentragwerke. Springer-Verlag Wien, 1956

#### ZUSAMMENFASSUNG

Eine Analyse der erhaltenen Formeln für antimetrische und einseitige Belastung und auch eine Analyse der Ergebnisse des Zahlenbeispiels und des zugehörigen Diagrammes zeigen, daß eine einseitige Belastung durch eine Nutzlast (neben der ständigen Last) für gewisse Verhältnisse  $\frac{P}{g}$  im weniger belasteten Bereich einer Schale Zugspannungen hervorzurufen vermag. Die Kenntnis dieser Zugspannungen ist besonders bei Schalen aus Stahlbeton wichtig.

Ferner ist es wichtig, daß eine einseitige Nutzlast bei den Normalkräften eine gewisse Umordnung der inneren Kräfte hervorruft. So sind zum Beispiel im angeführten Zahlenbeispiel die Werte von  $N_x$  im Innern der Schalenfläche um etwa 20% größer, und die  $N_y$ -Kräfte etwa 20% kleiner als die entsprechenden Werte bei der über die gesamte Schalenfläche gleichmäßig verteilten Belastung  $g + p$ . Diese Umordnung der inneren Schalenkräfte wächst mit der Vergrößerung der Nutzlast im Verhältnis zur ständigen Last. Darum wird eine Untersuchung für einseitige Nutzlast bei großen Spannweiten notwendig. Es ist auch wichtig zu bemerken, daß sich die  $N_x$ -Kräfte bei einseitiger Belastung ( $y = 0, y = +b$ ) am Belastungssprung sprunghaft ändern.



## ON THE CALCULATION OF DOUBLE-CURVED SHELLS UNDER CERTAIN SYMMETRIC AND ANTIMETRIC LOADS

B. KLIMOW

## SUMMARY

On the base of the theory of membranes, the author develops formulae for the calculation of the elliptic paraboloid under antimetric and unilateral load. The theorem proved, that in symmetrically-shaped shells under antimetric load, there are no forces in the antimetry plane at right angles to it. Hence, the problem of antimetric load is reduced to the already solved one of full load, because for each half-shell the boundary conditions are known for the boundary in the antimetry plane too. This is true for all symmetrical shell shapes.

The forces in a section due to one-sided load are found in known manner by the superposition of the symmetric and of the antimetric parts of the load. The series which are used here converge well, and for points inside the shell it is sufficient to use the first member of the series.

The formulae show that for certain ratios of the load to the deadweight a one-sided load can call forth tensile stresses in the other half-shell.

Finally, a numerical example shows the forces in the sections for different loads. The numerical example confirms the above mentioned. Therefore, in case of relatively high load — and also for wide-span shells — it is necessary to investigate the case of one-sided load

## CALCUL DES VOILES MINCES A DOUBLE COURBURE EN CAS DE CHARGES ANTIMETRIQUES ET UNILATERALES

B. KLIMOW

## RESUME

En partant de la théorie des membranes, l'auteur développe des formules pour le calcul du parabolôide elliptique soumis à des charges antimétriques et unilatérales. L'auteur formule ensuite un théorème, suivant lequel la charge antimétrique des voiles symétriques ne fait pas naître de forces normales au plan d'antimétrie. Par là, le problème des charges antimétriques est ramené à celui, déjà résolu, des charges pleines, parce que les conditions au pourtour valables pour chaque demi-voile sont également connues pour le bord situé dans le plan d'antimétrie. Cette constatation est valable pour toutes les formes de voiles symétriques.

Les forces produites dans les sections par les charges unilatérales, sont trouvées par la méthode connue de la superposition des forces dues aux charges symétriques et antimétriques.

Les séries utilisées convergeant vite, il suffit d'utiliser le premier membre de la série pour les points intérieurs du voile.

Les formules présentées montrent, qu'à certains rapports de la charge utile à la charge permanente, la charge utile unilatérale peut engendrer des contraintes de traction dans l'autre moitié du voile.

Pour terminer, l'auteur donne un exemple numérique montrant les valeurs des forces produites dans chaque section, pour les divers cas de charges. L'exemple numérique confirme ce qui précède. Pour des charges utiles relativement élevées — et pour des voiles de grande portée il faut donc étudier aussi le cas de la charge unilatérale.



К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ОПРЕДЕЛЕННОЙ  
АНТИМЕТРИЧНОЙ И ОДНОСТОРОННЕЙ НАГРУЗКЕ

Б. КЛИМОВ

## РЕЗЮМЕ

В прилагаемой работе дан вывод формул для расчета оболочек двоякой кривизны типа эллиптического параболоида по безмоментной теории на антисимметрическое и одностороннее нагружение оболочки. При этом установлено, что во всех симметричных оболочках при антисимметричном нагружении в плоскости антисимметрии нет сил, нормальных к этой плоскости. Разрезая оболочку по линии антисимметрии нагружения, мы получаем две полуоболочки с известными кривыми условиями по четырем сторонам. Таким образом проблема оболочки при антисимметричном нагружении сводится к расчету полуоболочки, т. е. известной задаче.

Мембранное усилие вследствие одностороннего нагружения определено известным способом путем сложения симметричной и антисимметричной нагрузки. Как для антисимметричного, так и для одностороннего нагружения выведена формула в виде простых рядов, которые для точек внутри контура имеют прекрасную сходимость.

Приведена также приближенная формула для определения мембранных усилий при нагружении оболочки односторонней нагрузкой.

Полученные формулы показывают, что при известных соотношениях полезной и постоянной нагрузок, одностороннее нагружение оболочки полезной нагрузкой может вызвать в менее нагруженной части растягивающие напряжения.

В конце статьи дан числовой пример и определены мембранные усилия для различных случаев нагружения. Числовой пример подтвердил сказанное выше.

Таким образом, при относительно большой полезной нагрузке, а также при большепролетных сооружениях необходимо учитывать одностороннее нагружение оболочки.

# STUDY OF THE LIMIT-IRREGULARITIES OF COMBED FLAX-SLIVER

O. DOMES

TEXTILE RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST, HUNGARY

[Manuscript received January 12, 1961]

The cross-sectional mass-irregularity constitutes the essential quality index of the semi-finished and finished product (sliver, roving, yarn) of the Textile Industry. The sliver produced by Carding and the yarns produced therefrom have — according to the theoretical argumentation of MARTINDALE [1] — an accidental fibre distribution.

Slivers produced on intermittent Combers have, according to writers opinion, no accidental fibre distribution. In the tuft detached during a combing cycle the fibre distribution is accidental, but it is no longer in the sliver formed by overlapping, since the extent of the latter is susceptible to influence.

The obtainable best irregularity values for slivers and yarns with accidental fibre distribution have been cast into mathematical form by MARTINDALE [1]. Accordingly the percent mass-irregularity in a limitation case is

$$CV_{\text{lim}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\bar{n}}} (\%), \quad (1)$$

where  $\bar{n}$  = sliver,  $v$  = number of fibres found in average in one cross-section of the yarn. The constant varies according to the raw material, and depends on the fineness dispersion of the fibre :

$$\text{const} = \sqrt{10000 + CV_f^2}. \quad (2)$$

Since it is rather complicated to establish the fineness disperions ( $CV_f$ ) of the fibre, generally the dispersion of the fibre diameter ( $CV_D$ ) is determined, and the  $CV_f$  required to determine the constant is calculated from the following relation:

$$CV_f = 2CV_D \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{2} CV_D^2}{1 + CV_D^2}}. \quad (3)$$

The average fibre number can be determined from the fineness of the fibre and the fineness quotient of the product:

$$\bar{n} = \frac{Nm \text{ fibre}}{Nm \text{ sliver or yarn}}. \quad (4)$$



By reason of the following argumentation, relation (1) is not suitable to determine the mass-irregularity of slivers produced on intermittent Combers.

By way of introduction some ideas have to be cleared:

a) By the denomination "weight profile curve of the combed sliver" the continuous curve drawn with the ordinate proportional to the weight of  $\Delta x$

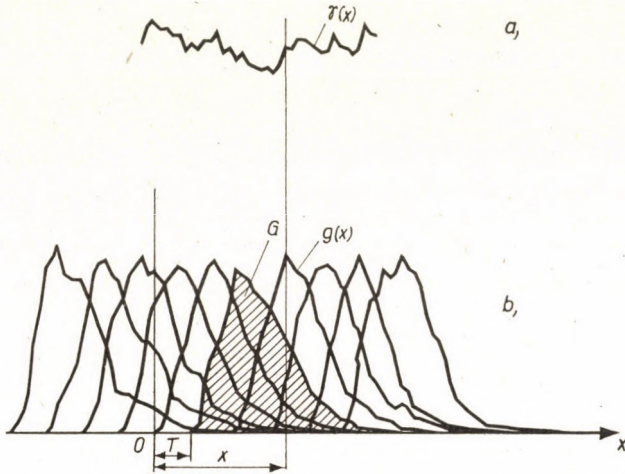


Fig. 1

long sliver pieces consecutive along the longitudinal axis of the sliver is to be understood (Fig. 1 a), which actually shows the weight-fluctuation of the  $\Delta x$  long pieces  $[\gamma(x)]$ .

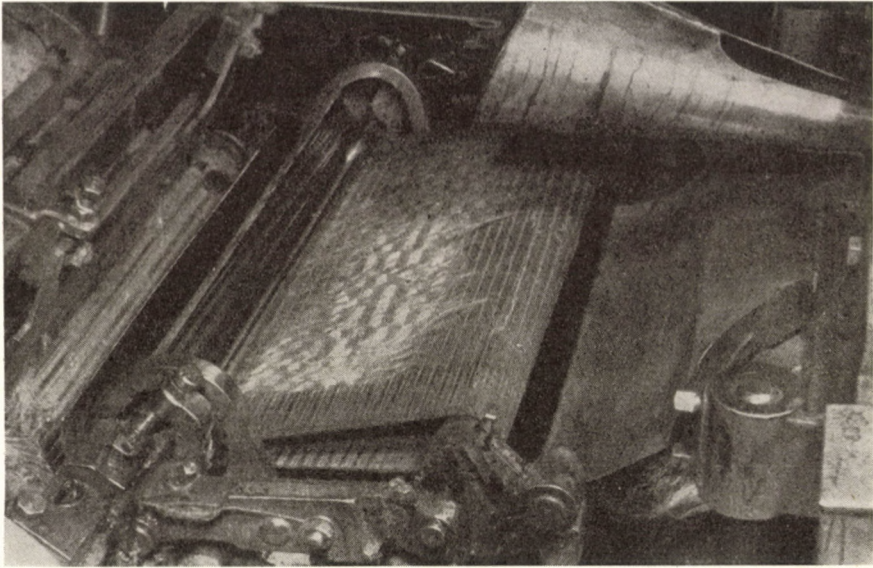
b) By the denomination "weight profile curve of the detached tuft" the curve drawn with the ordinate values proportional to the weight of the  $\Delta x$  long intercepts of the tuft detached and combed within one combing cycle is to be understood  $[g(x)]$ , (Fig. 1 b).

On the intermittent combing machines the sliver formation is carried out by the overlapping of the consecutively combed and detached tufts, then by condensing the web originating therefrom (Fig. 2, Fig. 3).

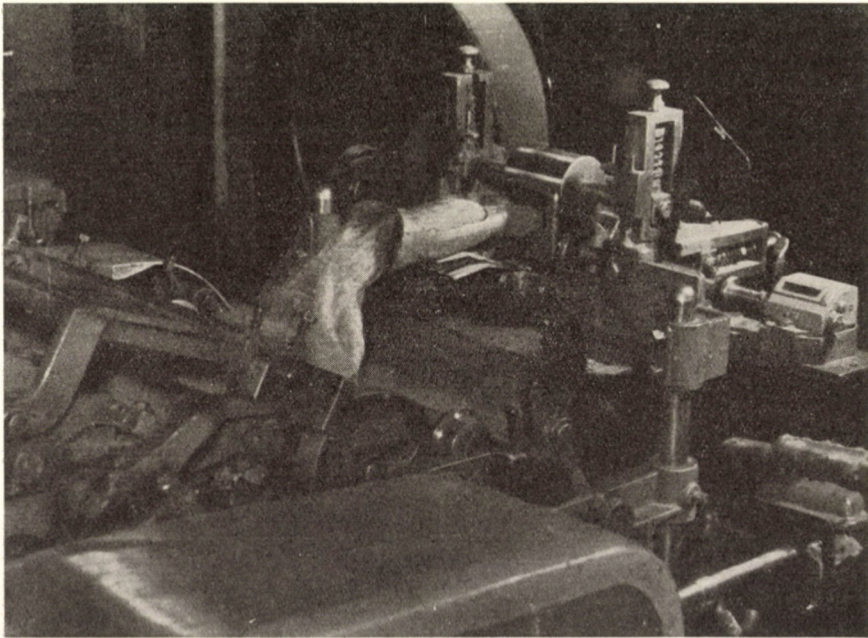
This argumentation is built up beginning from the weight profile curve (a) of the combed sliver shown on Fig. 1 and the overlapable sequence of the weight profile curves of the detachable tuft forming the weight profile curve of the sliver.

A datum line ( $x$ ) is suited to the longitudinal axis of the sliver, as starting point of which (0) a point corresponding to a fixed but otherwise optional cross-section of the sliver is chosen. The distance of any optional cross-section of the sliver should be denoted by  $x$  starting from point "0". The meaning of axis  $x$  should be taken as opposed to the progression of the sliver. This means that





*Fig. 2.* Detached tuft in outspread condition



*Fig. 3.* Condensing of web with funnel and rolls



the cross-section leaving the machine will later have a higher  $x$  coordinate. The weights relative to the corresponding  $\Delta x$ -es are shown perpendicular to axis  $x$ .

In the above coordinate system  $g(x)$  should denote the weight profile curve of the optional detached tuft building the sliver. Taking  $g(x)$  curve as a frequency function, its average value is "m" and its dispersion  $\sigma$ .

$G$  should denote the space below the weight profile curve of the detached tuft, which is equal to the weight of the detached tuft.

$T$  should denote the distance of two consecutive starting points of the detached tuft, which distance can be considered as constant.

In order to facilitate the mathematical analysis it is to be assumed, that

a) each detached tuft has identical weight and this is equal to the average value,  $G$ , of the actual tuft weights.

b) The weight profile curve of each detached tuft has an identical  $\sigma$  dispersion.

c) The average values of the individual weight profile curves follow each other at " $T$ " distance.

d) The "0" point will subsequently be placed to the average value of the weight profile curve of a detached tuft.

From the assumptions c) and d) it follows that the distance from "0" point of the average values of the individual weight profile curves of the detached tuft is  $KT$ , where  $K = \infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty$ .  $\gamma(x)$  to denote the weight profile curve of the combed sliver (Fig. 1a), which is the total of the detached tuft parts to be found in the  $\Delta x$  length.

Therefore,

$$\gamma(x) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} g_k(x), \quad (5)$$

where  $g_k(x)$  is the weight profile curve of the  $KT$  average value detached tuft.

Approximating the detached tuft weight profile curves by the  $G$  space,  $\sigma$  dispersion and  $KT$  average value normal density curves (Gauss curve)

$$g_k(x) \approx g_k^*(x) = \frac{\bar{G}}{\sigma} \varphi \left( \frac{x - KT}{\sigma} \right), \quad (6)$$

where  $\varphi(x)$  is the density function of the standardized normal distribution.

The curve formed from the  $g_k^*(x)$  curves

$$\gamma^*(x) = \frac{\bar{G}}{\sigma} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \varphi \left( \frac{x - KT}{\sigma} \right) \approx \gamma(x) \quad (7)$$

gives the approximation of the sliver weight profile curve  $\gamma(x)$  (Fig. 4).

Since curve  $\gamma^*(x)$  is difficult to treat and the calculation of its values is very lengthy, a further approximation is applied. The  $\gamma(x)$  curve — on basis of Fig. 2 — by the cosine curve

$$\gamma^*(x) \approx \gamma_1(x) = C + A \cos \frac{2\pi}{T} x \quad (8)$$

the periodic length of which is obviously equal to the average value distance  $T$  of the weight profile curve of two adjoining detached tufts.

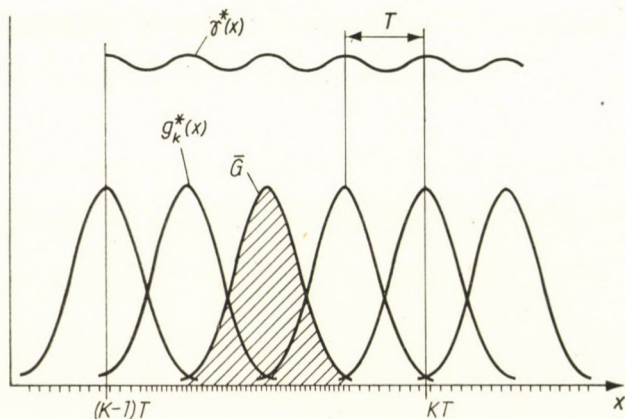


Fig. 4

The determination of the values of function  $\gamma_1(x)$  is considerably easier. In the next move the  $C$  and  $A$  constants have to be determined.

The determination of values  $C$  and  $A$  is carried out as follows:

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}^*$$

and let be

$$A = \frac{\max \gamma^*(x) - \min \gamma^*(x)}{2}$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T \gamma_1(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ C + A \cos \frac{2\pi}{T} x \right] dx = \\ &= \frac{1}{T} \left[ Cx + \frac{AT}{2} \sin \frac{2\pi}{T} x \right]_0^T = C \end{aligned} \quad (9)$$

$$\bar{\gamma}^* = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2RT} \int_{-RT}^{RT} \gamma^*(x) dx = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2RT} \frac{\bar{G}}{\sigma} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \int_{-RT}^{RT} \varphi \left( \frac{x - KT}{\sigma} \right) dx.$$



The total space between limits  $-RT$  and  $RT$  comprises — for symmetrical reasons — just as many units as the number of apexes falling within these limits. (The apex falling onto two limits is to be regarded as one.) In view of this consideration one can write

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \int_{-RT}^{RT} \varphi \left( \frac{x - KT}{\sigma} \right) dx = 2R,$$

thus

$$\bar{\gamma}^* = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2RT} \bar{G} 2R = \frac{\bar{G}}{T}. \quad (10)$$

As

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}^*$$

is the average value of the approximating curve

$$C = \frac{\bar{G}}{T}. \quad (11)$$

When determining the value of “ $A$ ” it is easily conceivable that the maximum loci fall on to the apexes of the Gauss curves, while the minimum loci fall into the midpoint of the distance between two apexes. The maximum ordinate differences can be arrived at by calculating the  $\gamma^*(x)$  curve value on loci “0” and “ $T/2$ ”, then by taking the absolute value of the difference of the two values, *i. e.*

$$A = \frac{\gamma^*(0) - \gamma^*\left(\frac{T}{2}\right)}{2} \quad (12)$$

$$\gamma^*(0) = \frac{\bar{G}}{\sigma} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \varphi \left( \frac{0 - KT}{\sigma} \right) = \frac{\bar{G}}{\sigma} \left[ \varphi(0) + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \varphi \left( \frac{KT}{\sigma} \right) \right] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \gamma^*\left(\frac{T}{2}\right) &= \frac{\bar{G}}{\sigma} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \varphi \left( \frac{\frac{T}{2} - KT}{\sigma} \right) = \frac{\bar{G}}{\sigma} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \varphi \left( \frac{T - 2KT}{2\sigma} \right) = \\ &= \frac{2\bar{G}}{\sigma} \sum_{K=0}^{\infty} \varphi \left( \frac{(2K + 1)T}{2\sigma} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

By utilizing relations (13) and (14)

$$A = \frac{\bar{G}}{2\sigma} \left[ \varphi(0) + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \varphi \left( \frac{KT}{\sigma} \right) - 2 \sum_{K=0}^{\infty} \varphi \left( \frac{KT}{\sigma} + \frac{T}{2\sigma} \right) \right]. \quad (15)$$

Thus the value of any  $\frac{T}{\sigma}$  parameter can be calculated with the help of  $A$ , the  $\varphi(x)$  Gauss-curve table.

By substituting relations  $C$  and  $A$  (expressions 11 and 15) into the  $\gamma_1(x)$  equation:

$$\gamma_1(x) = \bar{G} \left\{ \frac{1}{T} + \frac{1}{\sigma} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \varphi \left( \frac{KT}{\sigma} \right) - \varphi \left( \frac{KT}{\sigma} + \frac{T}{2\sigma} \right) \right] - \frac{\varphi(0)}{2} \right\}. \quad (16)$$

This function approximates the weight profile curve of the theoretical sliver made by overlapping the Gauss-curves, and thereby also the weight profile curve of the actual  $\gamma(x)$  sliver.

The sliver characteristics can also be determined from the equation of the weight profile curve ( $\gamma_1(x)$ ) of the theoretically combed sliver, noted while performing the  $a)$ — $d)$  assumptions. The average value of the weight profile curve of the theoretically combed sliver agrees with the average value of the weight profile curve of the actually combed sliver,

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma} = \frac{\bar{G}}{T}$$

where  $G$  = the average weight of the detached tuft

$T$  = delivery distance.

The weight profile curve of the theoretically combed sliver is a cosine curve. Its variance has been determined by integrating the square of the deviations from the average within a periodic length and the value thus obtained divided by the periodic length.

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [\gamma_1(x) - \bar{\gamma}_1]^2 dx. \quad (17)$$

By substituting  $\gamma_1(x)$  from relation (8) and  $\bar{\gamma}_1$  from relation (9)

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( A \cos \frac{2\pi}{T} x \right)^2 dx = \frac{A^2}{T} \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi}{T} x dx = \\ &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{T} x}{2} dx = \frac{A^2}{T} \left[ \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \frac{T}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{T} x \right]_0^T = \frac{A^2}{2}. \end{aligned} \quad (18)$$



The dispersion of the weight profile curve of the theoretically combed sliver  $\gamma_1(x)$  can be obtained by dividing the amplitude ( $A$ ) with square root two:

$$\sigma_1 = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0,71 A. \quad (19)$$

The value of the percent dispersion is

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{\gamma}_1} 100 = 71 \frac{AT}{G}. \quad (20)$$

The linear irregularity of the weight profile curve of the theoretically combed sliver:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T |\gamma_1(x) - \bar{\gamma}_1| dx = \frac{1}{T} \int_0^T \left| A \cos \frac{2\pi}{T} x \right| dx = \\ &= \frac{4A}{T} \int_0^{T/4} \cos \frac{2\pi}{T} x dx = \frac{4A}{T} \left| \frac{T}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T} x \right|_0^{T/4} = \frac{2A}{\pi}. \end{aligned} \quad (21)$$

The  $\frac{2}{\pi}$  value is approximately 0,636, thus

$$U_1 = 0,636 A. \quad (22)$$

The percent linear deviation of the theoretically combed sliver:

$$CU_1 = \frac{U_1}{\bar{\gamma}_1} 100 = 63,6 \frac{AT}{G}. \quad (23)$$

The relation between the percent square and linear deviation of the theoretically combed sliver:

$$CV_1 = 1,11 CU_1$$

and

$$CU_1 = 0,9 CV_1. \quad (24)$$

On Fig. 5. the irregularities ( $CV_1$ ) of a theoretically combed sliver of identical fibre length frequency, and accidental fibre distribution ( $CV_{slix}$ ) is shown in the function of the sliver weight. The actual sliver weight profile curve can be approximated better if the suppositions, that the weights of the detached tufts are constant, are omitted. Then the approximating function  $\gamma^*(x)$  will alter to the effect that all its components

$$\frac{1}{\sigma} \varphi \left( \frac{x - KT}{\sigma} \right)$$

will figure with a different  $G_k$  weight. As a consequence  $\gamma^*(x)$  will no longer be a curve of strict periodic and constant amplitude, despite the fact that the average values of the individual tufts will follow each other at an equal  $T$  distance.

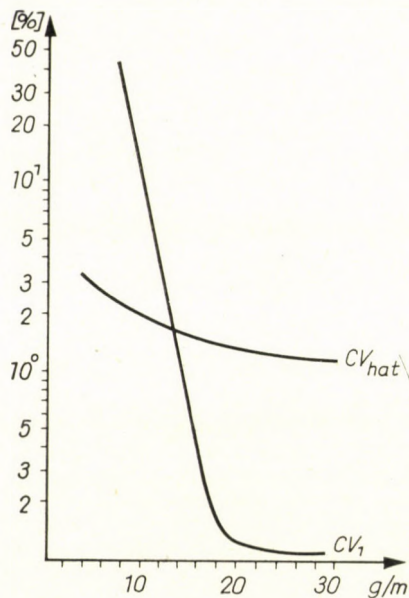


Fig. 5

The chosen function will be substituted by  $\gamma_2(x)$  approximating curve,  $\gamma_1(x)$  being one of its factors. Its other factor  $\frac{G}{\bar{G}}$  is a random variable.

$$\gamma_2(x) = \frac{G}{\bar{G}} \gamma_1(x) = G \left( \frac{1}{T} + A_2 \cos \frac{2\pi}{T} x \right), \quad (25)$$

where

$$A_2 = \frac{A}{\bar{G}}. \quad (26)$$

In expression (25) the two factors of function  $\gamma_2(x)$  are considered as independent. In this way the average value of the product of the two factors can be made the product of the average values. The same is valid for the product of the square of the two factors, *viz.*:

$$\gamma_2 = \left( \frac{G}{\bar{G}} \right) \bar{\gamma}_1 = \frac{\bar{G}}{G} \cdot \frac{\bar{G}}{T} = \frac{\bar{G}}{T} \quad (27)$$



or

$$\bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}^* = \bar{\gamma}. \quad (28)$$

On the basis of relations (27) and (28) the variance of function  $\gamma_2(x)$  can be arrived at as follows:

$$\sigma_2^2 = \bar{\gamma}_2^2 - \bar{\gamma}_2^2 = \frac{\sigma_G^2 + \bar{G}^2}{\bar{G}^2} \left[ \sigma_1^2 + \frac{\bar{G}^2}{T^2} \right] - \frac{\bar{G}^2}{T^2} = \sigma_1^2 + \frac{\sigma_G^2}{\bar{G}^2} \left[ \sigma_1^2 + \frac{\bar{G}^2}{T^2} \right]. \quad (29)$$

The percent dispersion of the detached tuft weights are marked by  $CV_G$

$$CV_G = \frac{\sigma_G}{\bar{G}} 100 \quad (30)$$

and it will be 
$$\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \frac{CV_G^2}{10^4} \left[ \sigma_1^2 + \frac{\bar{G}^2}{T^2} \right].$$

The value of the percent dispersion of the approximate function  $\gamma_2(x)$  is accordingly

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{\gamma}_2} 100 = \sqrt{CV_1^2 + CV_G^2 \left[ \frac{CV_1^2}{10^4} + 1 \right]}. \quad (31)$$

The percent dispersion value of the approximate function  $\gamma_2(x)$  can be calculated on the basis of relation (31) with the help of  $CV_1$  and the knowledge of the percent dispersion ( $CV_G$ ) of the weights of the detached tufts.

The irregularity ( $CV_1$ ) of the theoretically combed sliver with equal fibre length frequency and accidental distribution ( $CV_{six}$ ), and the irregularity ( $CV_2$ ) of the theoretically combed sliver made from detached tufts with varying weight, are shown on in the function of sliver weight.

The practical applicability of the theoretical derivations are proved by the results of combing tests. Soviet and Belgian hackling tow and flax tow mixed with laps were processed on Texima Combing Machine into combed sliver with different sliver weight. By testing with the Yarn Irregularity Measuring Apparatus the short-distance linear mass-irregularities of these slivers were established. By determining the characteristics of the mixture, and of the tufts detached on the Combers, the Martindale relation ( $CV_{six}$ ) as well as writer's relations ( $CV_1, CV_2$ ) were calculated. On showing the calculated values, it can be seen that curve ( $M$ ) of the measured values and curve  $CV_2$  of relation (31) approximate each other very well.

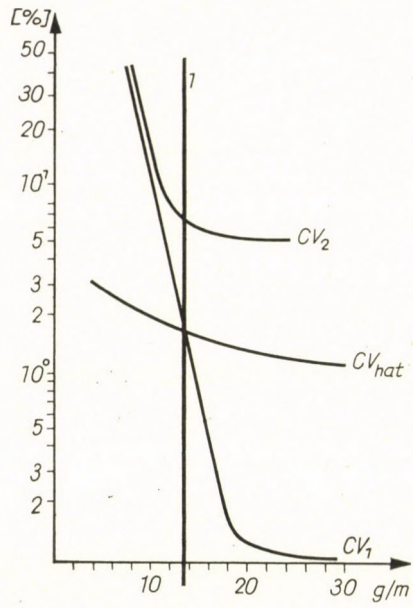


Fig. 6

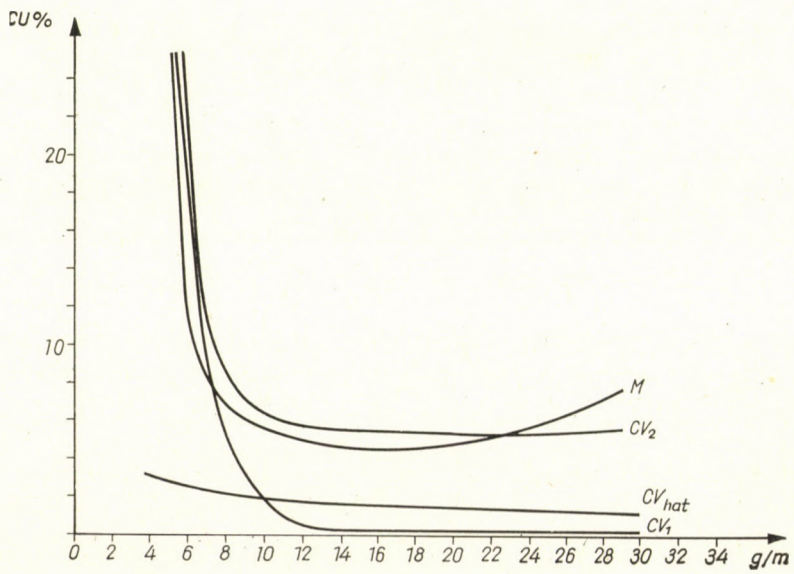


Fig. 7



## REFERENCE

MARTINDALE, J. T. I. 1945. T. 35.

## SUMMARY

Based on writer's mathematical derivations it can be established that the irregularity ( $CV_{six}$ ) determined by MARTINDALE for slivers with accidental fibre distribution is not valid either for theoretically produced or for actually intermittently combed slivers.

As the irregularity of the combed slivers produced on intermittent combers is higher than the irregularity of the detached tufts of the theoretical intermittently combed slivers, mainly due to the weight dispersion ( $CV_G$ ), if

$$CV_{lim} > CV_G$$

the irregularity of the combed slivers is lower with the accidentally distributed slivers, if

$$CV_{lim} < CV_G$$

the combed sliver always has a higher irregularity than the accidentally distributed sliver (section to the right of the straight marked 1). In the range falling to the left from straight marked 1. the irregularity of the combed sliver is — even in case of theoretically detached tuft weight profile curve — in each instance higher than the limit-irregularity ( $CV_{six}$ ). In this section the high cross-sectional mass-fluctuation, which — due to small overlapping — regularly arises from the weight profile form of the detached tuft, comes into prominence.

When examining the irregularity of the intermittently formed combed slivers, it is more advisable to use relation

$$CV_2 = \sqrt{\frac{A^2 T^2}{2\bar{G}^2} 10^4 + CV_G^2 \left( \frac{A^2 T^2}{2\bar{G}^2} + 1 \right)}$$

instead of the Martindale limit-irregularity.

In the above relation

$A$  — is calculated from expression (15),

$T$  = delivery distance (distance between the average values of the detached tuft),

$\bar{G}$  = average weight of the detached tufts,

$CV_G$  = percent dispersion of the weight of the detached tuft.

## STUDIUM ÜBER DIE GRENZUNREGELMÄSSIGKEITEN DER FLACHSKAMMZUGBÄNDER

O. DOMES

### ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund mathematischer Ableitungen kann man feststellen, daß die von MARTINDALE festgestellte Unregelmäßigkeit ( $CV_{Grenz}$ ) der Bänder mit zufälliger Faseranordnung weder für die auf theoretischem Wege erzeugten, noch für die in Wirklichkeit absatzweise angelegten Kammzugbänder gültig ist.

Da die Ungleichmäßigkeit der auf dem Flachskammstuhl erzeugten Kammzugbänder von der Ungleichmäßigkeit der auf theoretischem Wege erzeugten absatzweise angelegten Kammzugbänder hauptsächlich nur wegen der Gewichtsstandardabweichung ( $CV_G$ ) abweicht, für

$$CV_{Grenz} > CV_G$$

ist die Unregelmäßigkeit des Kammzugbandes kleiner, für

$$CV_{Grenz} < CV_G$$

größer als bei den Bändern mit zufälliger Faseranordnung. (Teil nach rechts von der Gerade 1.) Die Unregelmäßigkeit des auf dem Gebiet nach links von der Gerade 1 gekämmten Bandes ist sogar im Falle der Gewichtprofilkurve eines theoretischen Abtrennungskammbartes in allen Fällen höher als die Grenzunregelmäßigkeit ( $CV_{\text{Grenz}}$ ). Wegen der kleinen Überlappungen tritt auf diesem Intervall die aus der Form des Gewichtspröfils des Abtrennungskammbartes gesetzmäßig entstehende Massenschwankung mit großem Querschnitt in den Vordergrund.

Bei der Prüfung der Unregelmäßigkeit der abstandsweise angelegten Kammzüge ist es daher zweckmäßig, anstatt der Martindaleschen Grenzunregelmäßigkeit die Relation

$$CV_2 = \sqrt{\frac{A^2 T^2}{2\bar{G}^2} 10^4 + CV_G^2 \left( \frac{A^2 T^2}{2\bar{G}^2} + 1 \right)}$$

anzuwenden, wobei

$A$  — aus dem Ausdruck (15) berechnet werden kann,

$T$  = Weiterleitungsabstand (Abstand zwischen den Durchschnittswerten des Abtrennungskammbartes),

$\bar{G}$  = Durchschnittsgewicht der Abtrennungsbärte,

$CV_G$  = Prozentuelle Standardabweichung des Abtrennungskammbartgewichtes.

## ETUDE DE L'IRREGULARITE LIMITE DES RUBANS DE LIN PEIGNES

O. DOMES

### RESUME

L'auteur prouve que l'irrégularité des rubans à fibres disposées au hasard, déterminée par MARTINDALE ( $CV_{\text{lim}}$ ), n'est valable ni pour les rubans peignés produits par le procédé théorique, ni pour ceux produits par l'action intermittente réelle.

Étant donné que la plus grande irrégularité que les rubans peignés produits sur des peigneuses à action intermittente présentent en comparaison des rubans peignés produits théoriquement, est due surtout à la dispersion de poids des barbes de séparation ( $CV_G$ ), si

$$CV_{\text{lim}} > CV_G$$

L'irrégularité des rubans peignés reste inférieure à celle du ruban à fibres disposées au hasard et si

$$CV_{\text{lim}} < CV_G$$

le ruban peigné présente toujours une irrégularité plus grande que le ruban ayant une disposition au hasard (partie à droite de la ligne 1). Dans le domaine situé à gauche de la ligne 1, l'irrégularité du ruban peigné dépasse toujours l'irrégularité limite ( $CV_{\text{lim}}$ ), même en cas d'une courbe de distribution de poids correspondant à des barbes de séparation théoriques. En raison des petits recouvrements, la forte fluctuation sectionnelle de la masse, produite nécessairement par la distribution de poids de la barbe de séparation, est déjà mise en évidence sur cette section.

A l'examen de l'irrégularité des rubans peignés produits par action intermittente, il est donc indiqué de remplacer l'irrégularité limite de Martindale par la relation

$$CV_2 = \sqrt{\frac{A^2 T^2}{2\bar{G}^2} 10^4 + CV_G^2 \left( \frac{A^2 T^2}{2\bar{G}^2} + 1 \right)}$$

où

$A$  est calculé de l'équation (15),

$T$  = la distance de transport (distance entre les valeurs moyennes des barbes de séparation)

$\bar{G}$  = le poids moyen des barbes de séparation

$CV_G$  = la dispersion en pourcent du poids des barbes de séparation.



## ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЧНОЙ НЕРОВНОТЫ ЧЕСАННЫХ ЛЬНЯНЫХ ЛЕНТ

O. ДОМЕШ

## РЕЗЮМЕ

На основании проведенных математических выводов, можно установить, что неровнота ( $CV_{\text{гран}}$ ) лент со случайным расположением нитей, определенная Мартиндалем, не действительна ни для созданных теоретически, ни для реальных, созданных участками чесанных лент.

Поскольку неровнота чесанных лент, изготовленных на прерывных чесальных машинах, превышает неровноту теоретически созданных прерывистых чесанных лент, главным образом из-за разброса веса ( $CV_G$ ) штапеля, если

$$CV_{\text{гран}} > CV_G$$

неровнота чесанной ленты меньше, чем ленты случайного расположения, если же

$$CV_{\text{гран}} < CV_G$$

чесанная лента всегда более неровна, чем лента случайного расположения. (Участок справа от прямой 1.) На протяжении области, расположенной слева от прямой 1, неровнота чесанной ленты во всех случаях больше граничной неровноты ( $CV_{\text{гран}}$ ), даже при теоретической профильной кривой веса отделения штапеля. На этом участке уже выдвигается на первый план колебание массы крупного профиля, законно возникающее из формы профиля веса отделяющегося штапеля из-за малых нахлесток.

Таким образом, при исследовании неровноты чесанных лент, созданных участками, вместо граничной неровноты Мартиндала целесообразно пользоваться зависимостью

$$CV_2 = \sqrt{\frac{A^2 T^2}{2G^2} 10^4 + CV_G^2 \left( \frac{A^2 T^2}{2G^2} + 1 \right)},$$

где  $A$  — вычисляется по уравнению (15);

$T$  — передаточное расстояние (расстояние между средними значениями штапеля отделения);

$G$  — средний вес штапелей отделения;

$CV_G$  — процентное выражение разброса веса штапелей отделения.

# BAU UND BETRIEB DER NEUEN SCHIFFE DER UNGARISCHEN BINNENSCHIFFFAHRT UND DONAU-SEESCHIFFFAHRT

GY. FEKETE

DONAUKOMMISSION, BUDAPEST

[Eingegangen am 15. März 1961]

Die ungarische Schifffahrt und der ungarische Schiffbau können auf eine schöne Vergangenheit zurückblicken. Diese Vergangenheit bietet sowohl beim Bau wie auch beim Betrieb der Schiffe eine breite Basis zur weitgehenden Verwertung der gesammelten Erfahrungen. Die Schiffstypen wurden stets und in erster Linie durch die nautischen Gegebenheiten der von der ungarischen Schifffahrt befahrenen Wasserstraßen sowie die Warenströmungsrichtungen und Ansprüche der einzelnen Warengattungen bestimmt. Bei der Entwicklung des heutigen Schiffsparkes, aber auch bei der Auswahl der Gesichtspunkte, die beim Entwurf und Bau der neuen Schiffe zu verfolgen sind, geben die natürlichen Gegebenheiten, die baulichen Möglichkeiten sowie die an die neuen Schiffe gestellten technisch-ökonomischen und nautischen Ansprüche den größten Ausschlag.

## Gesichtspunkte für die Ausbildung von neuen Schiffen

Die bedeutendsten Gesichtspunkte, die beim Entwurf von neuen Schiffen zu beachten sind, können — wenn auch nicht in jedem Falle in der Reihenfolge der Wichtigkeit — wie folgt aufgeführt werden:

1. *Die Parameter der Wasserstraße:* Wassertiefen, Krümmungsradien, Breite der Wasserstraße (des Schifffahrtsweges), Lichtraumprofil der Brücken (Breite, Höhe), Lichtraumprofil und Stückzahl der Schleusen (Länge, Breite, Schwellentiefe).

2. *Die aus der Bestimmung also in meisten Fällen aus den Transporterfordernissen gegebenen Ansprüche und zwar:* Selbstfahrer oder Kahn, Fracht- oder Passagierschiff, Flußschiff, Seeschiff, Fluß-Seeschiff oder Binnenseeschiff, Massengut- oder Stückgutfrachter, Trockenfrachter oder Tankschiff, Spezialschiff (z. B. Kühlschiff), Betriebsfahrzeug (Wohnschiff, Werkstattschiff, Ponton usw.).

3. *Die nautischen Forderungen,* die in erster Linie mit Punkt 1. im Zusammenhang stehen, ergänzt durch die Forderung nach guter Steuerfähigkeit und Kursstabilität.



4. *Die Umschlags- und Lagerungsforderungen:* nach Warengattungen, Verpackungsarten usw.

5. *Die betrieblichen Forderungen:* Geschwindigkeit, Fahrstrecke usw.;

6. *Die Forderungen an die Betriebssicherheit:* Erfüllung der Vorschriften der Klassifizierungsgesellschaften sowie der Behörden.

7. *Soziale Forderungen zur Erfüllung der Ansprüche* der Besatzung und der Fahrgäste.

8. *Ökonomische (im Grunde genommen betriebstechnische) Forderungen:* günstige spezifische Baukosten, günstige spezifische Treibstoffkosten, günstiger spezifischer Eigengewichtsindex, günstige spezifische Besatzungszahl, günstige spezifische Gesamt-Betriebskosten.

Als Vorbedingungen zur Erfüllung der aufgeführten wichtigeren Forderungen melden sich die Konstruktionskapazität, Schiffbaukapazität sowie die durch fertigungstechnologische, Materialverwendungs- und behördliche Vorschriften gegebenen Möglichkeiten als Parameter, welche die Erfüllung der Ansprüche und Forderungen mehr oder weniger bestimmen.

Die eingehende Behandlung aller Parameter würde den Umfang dieses Aufsatzes außerordentlich vergrößern, und darum möchte ich nur einige — für den Verkehr wichtige — Fragengruppen untersuchen. Im weiteren Verlauf meiner Ausführungen gebe ich die technische Charakteristik einiger neuer Typen der ungarischen Schiffbauindustrie mit ihren Übersichtszeichnungen und schließlich werde ich durch eine systematische Untersuchung der Betriebsfaktoren ausgeführter Schiffe die Entwicklung des spezifischen Eigengewichtes von verschiedenen Schiffstypen, den Vergleich der Betriebsindexzahlen von Motor- und Dampfschiffen sowie die Entwicklung der gesamten spezifischen Selbstkosten verschiedener Schiffstypen behandeln.

Vor Beginn der eigentlichen Behandlung des angeführten Materials wird es aber nicht uninteressant sein, zu betrachten, in welcher Weise der Bestand der ungarischen Schifffahrt — aus dem Gesamtbestand die mit eigenem Antrieb versehenen Schiffe herausgegriffen — mit Binnenschiffen versorgt wurde. Auf Abb. 1 ist jahrzehntweise der Bau oder Ankauf von Schiffen für einheimische Zwecke dargestellt, enthält also nicht die für ausländische Rechnung gebauten Einheiten, deren Anzahl besonders während des letzten Jahrzehntes die Größenordnung 100 erreichte. Außerdem muß ich noch darauf hinweisen, daß die Anzahl der Schiffe und ihre Gesamtleistungsziffer in einem bestimmten Jahr nicht mit der der bis zu dem Zeitpunkt gebauten Schiffe identisch ist, denn es waren schon wegen der inzwischen erfolgten Ausmusterungen und anderer Umstände nicht alle Einheiten im Betrieb.

Das Anwachsen war — sowohl nach Stückzahl wie auch nach Pferdestärken — zwischen 1891—1900 und 1911—1920 am größten, und ergab in jedem der beiden Jahrzehnte etwa je 20 000 PS. Die Beschaffungen der Jahrzehnte 1931—1940 und 1941—1950 erreichten nur etwa die Hälfte davon.



Das Anwachsen des ungarischen Schiffbestandes erhielt besonders in den letzten Jahren einen größeren Aufschwung, aber der neueste Bestand konnte in der Abbildung noch nicht dargestellt werden.

Abb. 1 zeigt deutlich, wie die um die Mitte des vorigen Jahrhunderts noch auf ausländischen Werften gebauten Schiffe in immer größerem Maße durch Fahrzeuge einheimischer Herkunft ersetzt wurden. Die Abbildung gibt auch darüber Auskunft, daß die ungarische Schifffahrt bis 1910 ausschließlich nur Dampfschiffe verwendete, während von diesem Zeitpunkt an der Bau von Motorschiffen immer mehr in den Vordergrund trat, bis nach den 40er Jahren kein einziges für die ungarische Schifffahrt gebautes Dampfschiff mehr verzeichnet werden konnte. Der Vorstoß der Motorschiffe hat seine Erklärung in ihren günstigen Betriebskosten sowie ihrer Betriebsbereitschaft.

Die mit eigenem Antrieb versehenen Schiffe sind betreffs ihrer Typen sehr verschieden, und wir können nur bei einigen Typen von einer größeren Zahl identischer Schiffe reden. Bei den antriebslosen Schiffen, den Kähnen, war die Lage schon früher günstiger, denn die für die einzelnen Wasserstraßen gebauten Typen wurden in größeren Stückzahlen angeschafft.

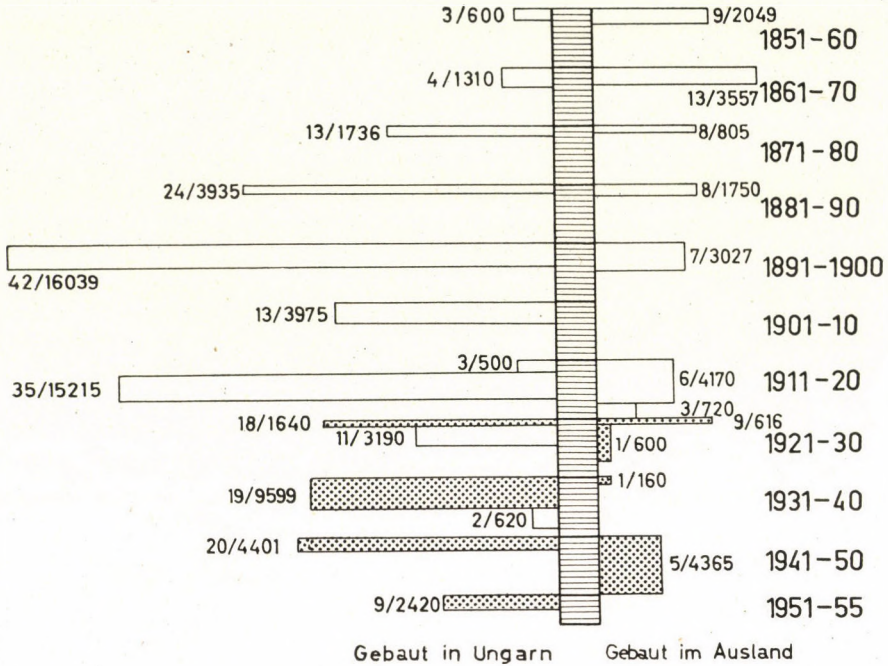
Mit Rücksicht darauf, daß den überwiegenden Teil der Leistung der ungarischen Wassertransporte die Flußschifffahrt und nicht die Binnensee-, Donau-See- und Seeschifffahrt liefert, und auch in der Flußrelation die Donau die Hauptrolle spielt, wird es nicht uninteressant sein, sich mit den Eigenschaften und Parametern, die auf den Bau neuer Schiffe auswirken, vertraut zu machen.

Unter den ungarischen Wasserstraßen ist also an erster Stelle die Donau zu erwähnen als eine Wasserstraße von größter Bedeutung für den Wasserverkehr dieses Landes, der aber auch für die internationale Großschifffahrt in einer Länge von 2379 km befahrbar ist. Der Verkehr auf der Theiß ist schon bedeutend geringer; auf dem Balatonsee ist der Fahrgastverkehr vorherrschend. Größere Beachtung verdient noch der unmittelbare, also ohne Umladen befahrbare Donau-Seeverkehr, welcher die Hauptstadt Budapest zum Teil über den Donau- und zum Teil über den Seeweg mit den Häfen des Nahen Ostens verbindet.

Von den aufgeführten Wasserstraßen und Schifffahrtslinien ist bezüglich des Volumens der Warentransporte — wie schon erwähnt — für die ungarische Schifffahrt der Donauverkehr der bedeutendste und daher war bei der Entwicklung der Donauschiffstypen bisher eine Praxis, Schiffe zu bauen, die eine Fahrt über die ganze schiffbare Länge der Donau ermöglichen. Daher bestimmten in erster Linie die Eigenschaften des Donau-Wasserweges die an die Schiffe gestellten Forderungen.

Bei der Entwicklung der neuen Schiffe müssen außer den bestehenden Gegebenheiten auch diejenigen Wasserstraßen-Lichtraumprofile berücksichtigt werden, welche von den Donaustaaten in einer von der Donaukommission





Zeichenerklärung:

- Dampfschiffe
- ▤ Motorschiffe
- ┆ Einem Schiff entsprechende Länge
- 200 PS

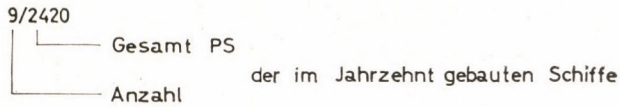


Abb. 1

unterbreiteten Empfehlung als in der Zukunft zu sichernde Größen angenommen wurden. Bis zur Verwirklichung der großzügigen Regelungspläne und besonders bis zur geplanten Kanalisierung von einzelnen Donauabschnitten müssen aber beim Bau neuer Schiffe die gegenwärtig bestehenden Wasserstraßenverhältnisse in der Weise berücksichtigt werden, daß die Schiffe den heutigen und möglichst auch den zukünftigen Anforderungen und Wasserstraßeneigenschaften entsprechen sollen. Für die Zukunft sind allerdings die

in der Empfehlung zusammengefaßten Lichtraumprofile bestimmend, welche — für die bisher angenommene Strecke Devin—Sulina — wie folgt zusammengefaßt werden können:

A) *Kleinste Wassertiefen*

|   |                 |
|---|-----------------|
| Zwischen Devin und Brăila                       |                 |
| im ersten Arbeitstakt mindestens .....          | 25 dm           |
| im zweiten Arbeitstakt mindestens .....         | 35 dm           |
| Zwischen Brăila und Sulina (auf der sogenannten |                 |
| See-Donau) mindestens .....                     | 73 dm (24 Fuß). |

Diese Wassertiefen sind von dem durch die Donaukommission bestimmten »niedrigsten Schiffahrts- und Regulierungs-Wasserstand« gemessen. Dieser Wasserstand entspricht im Durchschnitt von 25 Jahren einer Haltbarkeit von 94% im Jahr.

B) *Kleinste Breite des Schiffahrtsweges*

|   |       |
|---|-------|
| Zwischen Devin und Gönyü mindestens .....   | 150 m |
| Zwischen Gönyü und Sulina mindestens .....  | 180 m |
| In Krümmungen sollen diese Maße auf 200 m vergrößert werden, während auf besonders schwierigen Streckenabschnitten die Breite |       |
| zwischen Devin und Gönyü auf .....  | 120 m |
| zwischen Gönyü und Sulina auf .....   | 150 m |
| vermindert werden kann.   |       |

Auf felsigen sowie außerordentlich schwierigen Streckenabschnitten — entsprechend den morphologischen Umständen — mindestens .....

100 m

Diese Lichtraummaße sind nicht gültig für die Seitenkanäle, für den Sulina-Kanal sowie für den Eisernen Tor-Kanal.

C) *Kleinste Krümmungshalbmesser*

|   |        |
|---|--------|
| Zwischen Devin und Sulina mindestens .....  | 1000 m |
| Unter ungünstigen geologischen und topografischen Umständen ausnahmsweise gestattet ..... | 750 m  |

D) *Lichtraumprofile von Brücken*

a) *Lichte Breite*

|   |             |
|---|-------------|
| Zwischen Devin und der Draumündung mindestens | 100 (80) m  |
| Flußabwärts der Draumündung mindestens .....  | 150 (120) m |
| (Zahlen in Klammern gelten für Bogenbrücken). |             |



b) *Lichte Höhe**Auf der freien Flußstrecke*

zwischen Devin und Brăila mindestens ..... 9,50 m

gemessen über dem angenommenen »hohen Schiffahrts-Wasserstand«, also einem Wasserstand von 1% Haltbarkeit im Jahr, im Durchschnitt von 25 Jahren.

*Auf den kanalisierten Flußstrecken* außerdem mindestens 10,00 m über der normalen Stauhöhe.\*

E) *Abmessungen von Schleusen*

Auf der Donau sollen ausschließlich nur Doppelschleusen gebaut werden mit folgenden Abmessungen:

|                                  |                             |
|----------------------------------|-----------------------------|
| Zwischen Devin und Gönyü .....   | 230 × 24 × 4,5 m            |
| Zwischen Gönyü und Budapest .... | (260—310) × (32—34) × 4,5 m |
| Flußabwärts von Budapest .....   | 310 × (32—34) × 4,5 m       |

(Zahlen in Klammern geben Grenzwerte an; die optimalen Abmessungen sind bei dem ausführlichen Entwurf zu bestimmen).

F) *Lichte Höhe unter Kabelüberführungen*

|  |        |
|--|--------|
| bei Niederspannungs-Überführungen mindestens ..... | 16,5 m |
| bei Hochspannungs-Überführungen mindestens .....   | 19,0 m |

gemessen über dem »hohen Schiffahrts-Wasserstand«.

Auf der Donau werden in der Zukunft als Folge der geplanten und zum Teil schon im Bau befindlichen Wasserbauarbeiten zur Sicherung der oben angeführten Profilabmessungen weit bessere Schiffahrtsbedingungen entstehen. Weil aber gegenwärtig für die internationale Donauschiffahrt — und darunter auch für die im internationalen Verkehr teilnehmenden ungarischen Schiffe — die Kataraktenstrecke und besonders der Eiserne Tor-Kanal einen »engen Querschnitt« bildet, muß bis zu der Zeit, bis die der oben angeführten Empfehlung entsprechenden Arbeiten auf der ganzen Donaustrecke verwirklicht werden, mit Beschränkungen, die den verschiedenen Streckeneigenschaften der Donau entsprechen, gerechnet werden. Eben deshalb — und hier streife ich schon nautische Forderungen — wird bei der ungarischen Schiffahrt das Hauptaugenmerk auf die Entwicklung solcher Schiffstypen gerichtet, welche möglichst auf allen Streckenabschnitten eingesetzt werden können. Als Bei-

\* Die normale Stauhöhe wird definiert als höchster Betriebswasserstand.



spiel möchte ich erwähnen, daß im Hinblick auf den Fahrwiderstand die Form des Schiffskörpers bei Schiffen mit eigenem Antrieb von der Wassergeschwindigkeit der Kataraktenstrecke bestimmt wird, wie auch die Hauptabmessungen von den Eigenschaften dieser Strecke abhängen.

Dasselbe gilt natürlich auch für die geschleppten Kähne. Gegenüber den anderen europäischen Wasserstraßen und besonders auf den verschiedenen Kanalsystemen üblichen Schiffstypen mußten aus diesem Grunde auf der Donau verhältnismäßig schlanke Schiffe mit geringem Tiefgang entwickelt werden.

Die Forderung an Geschwindigkeit hängt bei Schleppschiffen stark mit der aus der Praxis entstandenen Reisegeschwindigkeit zusammen, welche auf einem charakteristischen Abschnitt, der Mittleren Donau, mit einem Schleppzug üblicher Größe belastet, bei der Talfahrt im Durchschnitt etwa 15—16 km/h, bei der Bergfahrt etwa 4—6 km/h beträgt. Größere Geschwindigkeiten werden bei Fahrgastschiffen, Donau-Seeschiffen sowie den selbstfahrenden Frachtschiffen gefordert; bei der Erfüllung der Forderung nach größerer Geschwindigkeit muß aber auch die Widerstandsvergrößerung als Folge der geringen Wassertiefen der Donau in Rechnung gezogen werden.

Den Tiefgang begrenzen die an einigen Stellen bei Niedrigwasser auftretenden Furte mit ihren ungenügenden Wassertiefen, aber auch hier in erster Linie der Eiserne Tor-Kanal, wo z. B. die Wassertiefe, die einen Tiefgang von 2,20 m ermöglicht, im Jahr durchschnittlich nur 272 Tage dauert. Wenn wir also die verhältnismäßig günstige Ausnutzung der Tragfähigkeit unseres Schiffsparkes anstreben — und das ist eine ökonomische Forderung ersten Ranges —, können wir gut verstehen, warum wir bei den neuen Schiffstypen kleinere Tiefgänge bei größeren Schiffslängen antreffen. Die Länge hat aber auch ihre Grenzen, und zwar mit einem praktisch auf 80—85 m festgelegten Grenzwert, weil mit längeren Einheiten die Fahrt auf den krümmungsreichen Abschnitten der Oberen Donau und nichtdestoweniger auf den Katarakten mit ihren ebenfalls ungünstigen Krümmungshalbmessern sehr umständlich wäre.

Das Ergebnis der Arbeit der Konstrukteure zur Erzielung einer höchstmöglichen Tragfähigkeit bei kleinstmöglichem Tiefgang zeigt sich z. B. im neuen 1000 tonnen-Schleppkahn, der vollbeladen einen Tiefgang von 21 Dezimetern besitzt. Bei einem Niedrigwasser, das einen Tiefgang von 15 dm ermöglicht, können mit diesem Kahn noch 685 t befördert werden, während z. B. ein 700 t-Kahn alter Bauart bei demselben Tiefgang nur 370 t trägt.

Bei der Konstruktion der Schiffe muß einer guten Manövrierfähigkeit besondere Beachtung geschenkt werden, weil auf den Flußstrecken mit starker Strömung, und in erster Linie im Eisernen Tor-Kanal, wo die Strömungsgeschwindigkeit einen Wert von 16 km/h erreicht bei einer Minimalbreite der Fahrstraße, die vorzügliche Steuerfähigkeit und Kursstabilität für die Sicher-



heit der Schiffsführung von ausschlaggebender Bedeutung ist. Diesen Forderungen entsprechen die für die Untere Donau gebauten oder auch dorthin fahrenden Schiffstypen in jeder Hinsicht; bei Schiffen mit eigenem Antrieb wird neuerdings die Ruderanlage System Hitzler, bei Schleppkähnen das Balanceruder bzw. bei einigen Typen ebenfalls ein Dreiflächenruder verwendet.

Die Erfüllung dieser Forderungen ist die Aufgabe der Konstrukteure, Ingenieure und Werk tätigen der ungarischen Schiffbauindustrie. Der ungarische Schiffbau entwickelte sich besonders in den 15 Jahren nach der Befreiung in außerordentlichem Maße, welcher Umstand neben der immer stärker anwachsenden Bautätigkeit für einheimische Verwendung in erster Linie den sehr zahlreichen, für Exportzwecke bestimmten Fahrzeugen zu verdanken ist. Unsere Schiffswerften wenden bei einer die ökonomischen und zweckmäßigen Beziehungen des Betriebes weitgehend beachtenden Konstruktion die neuzeitlichsten Fertigungstechnologien an und sind dadurch auch mit Ländern, welche eine weit größere Schiffbauindustrie besitzen, konkurrenzfähig. Die Schiffskörper werden in Sektionen und größtenteils — bei einigen Typen ausschließlich — in geschweißter Ausführung gebaut.

Im letzten Jahrzehnt wurden mit der Typisierung der Schiffsmaschinen auf Grund einheitlicher Grundsätze für die größeren Schiffe Dieselmotoren Fabrikat Ganz und Láng, und bei Einheiten mit kleinerem Leistungsbedarf Dieselmotoren Fabrikat Csepel verwendet. Erhebliche Arbeit bedeutete die Sicherung der Hilfsmaschinen für den ungarischen Schiffbau aus einheimischer Produktion. Dasselbe gilt auch für die Schiffsausrüstung. Auf diesem Gebiet ist aber die Lage insofern schwieriger, als wir bis heute noch keine Schiffsausrüstungsfirma besitzen und daher die Werften selbst ihren Bedarf an Ausrüstungsgegenständen (z. B. Rudermaschinen, Bootsdavits, Ankerwinden usw.) entwickeln und herstellen müssen.

Bei den neuen Schiffen wird auch die Automatisierung nicht vernachlässigt und bei mehreren Typen besteht eine Fernsteuerung der Maschinenanlage von der Kommandobrücke aus.

Es kommen auch neuzeitliche navigatorische Hilfsmittel zur Verwendung, wie Lokatoranlagen (Radar), Ultraschall-Tiefenmesser (Echolot) und moderne Funkanlagen. Es können auch noch die Verstärkeranlagen zur Befehlsübermittlung sowie die Bordfernsprecher erwähnt werden. Die Bordfunkanlagen sind zum Teil ausländischer Herkunft, werden aber in stets zunehmendem Maße von einheimischen Geräten abgelöst und können in allen herkömmlichen Betriebsarten verwendet werden. Die Bordfunkanlagen werden von einem ganzen Netz an Land aufgestellter stationärer Sende- und Empfangsanlagen bedient und ergänzt, welche die Verbindung zwischen den Schiffen und der Fahrdienstleitung (Dispatcherzentrale) der Schifffahrt sowie einigen wichtigeren Häfen und Agentien aufrechterhalten. Das in den Häfen des Balatonsees errichtete Sende- und Empfangsanlagennetz verrichtet neben der Abwicklung



des Schiffsverkehrs eine sehr wichtige Aufgabe im Sturmwarnungsdienst und besonders beim Sturm, wo es nicht nur der Sicherheit der Schifffahrt, sondern oft auch der Rettung von Menschenleben dient.

Die Donau-Seeschiffe sind durch ihre Bordfunkanlagen dauernd in Verbindung mit dem Sitz der Reederei sowie mit den Unterwegs- und Zielhäfen und können sich sowohl durch zeitige Ankündigung der Einlaufzeit als auch durch Empfang der erforderlichen Anweisungen neuzeitliche Betriebsbedingungen sichern.

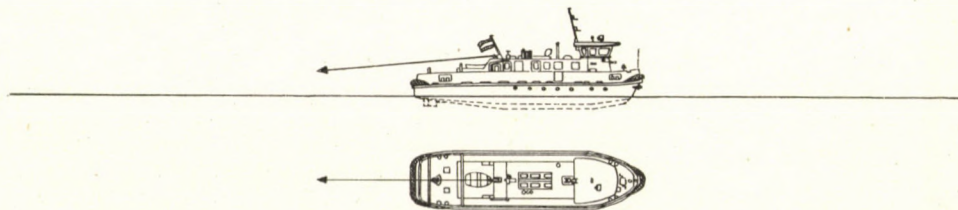
Neben den Geräten, welche eine Verbindung über größere Entfernungen sicherstellen, werden bei den neuen Schiffen auch die frequenzmodulierten Radiotelephonanlagen verwendet. Da der Umgang mit diesen Geräten keine besonderen Kenntnisse voraussetzt, bietet ihre Aufstellung auf Schiffen keine Schwierigkeiten. Diese Geräte haben sich besonders im Kurzstrecken- und Bugsierdienst außerordentlich gut bewährt.

### Neue Schiffstypen der ungarischen Schiffbauindustrie

Nach der allgemeinen Betrachtung der Grundlagen will ich nun die technischen Eigenschaften der neuen Schiffstypen der ungarischen Schiffbauindustrie erläutern.

#### 200 PS Hafenschlepper (Abb. 2)

Auf der Werft der »MAHART« Ungarische Schifffahrts-A. G. für eigene Rechnung gebaut. Verwendung in größeren Binnenhäfen für Bugsieren von Schleppkähnen, außerdem auch im Nahverkehr. Der vollständig geschweißte Schiffskörper ist zwecks leichter Unterhaltung in Knickspantenbauweise hergestellt, so daß in der Beplattung keine doppelt gekrümmten Platten vorkommen. Schanzkleid und Aufbauten sind ebenfalls vollständig geschweißt. Die Hauptmaschinenanlage besteht aus einem Dieselmotor Fabrikat Láng, Typ 6 LD 200, direkt umsteuerbar; Leistung 210 PS bei 750 Umdr/min mit Untersetzung 2 : 1 auf die Schiffschraube. Die Hauptmaschine kann aus dem



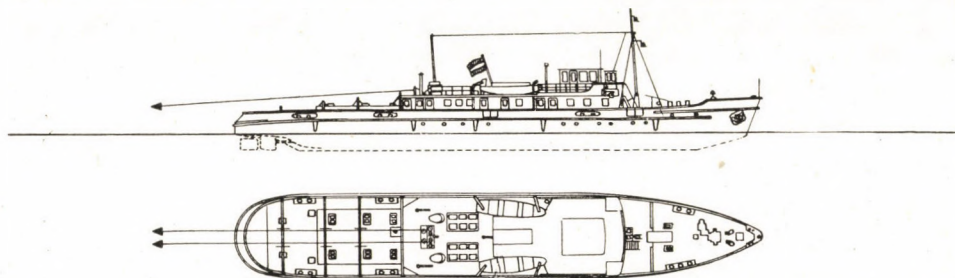
200 PS HAFENSCHLEPPER



Ruderhaus ferngesteuert werden. Die Ruderanlage besteht aus einem Kort-Düsenruder mit Handantrieb. Neben einem halbautomatischen Schlepphaken für den Bugsierdienst ist auch eine handbetriebene Schleppwinde mit Seilbremse vorhanden. Die elektrische Anlage ist auf Wechselstrom ausgelegt.

### 800/1200 PS Doppelschrauben-Schleppmotorschiff (Abb. 3)

Von der Schiffswerft Balatonfüred am Balatonsee gebaut für die Ungarische Schifffahrts-A. G. »MAHART«. Standardtyp der ungarischen Donauschifffahrt, kann auf der ganzen schiffbaren Länge der Donau eingesetzt werden. Trossenzug an der Seilbremse etwa 9 t. Der in Sektionen gebaute Schiffskörper ist in kombinierter Schweiß- und Nietbauweise hergestellt, Schanzkleid



800-1200 PS DOPPELSCHRAUBEN - SCHLEPPMOTORSCHIFF

Abb. 3

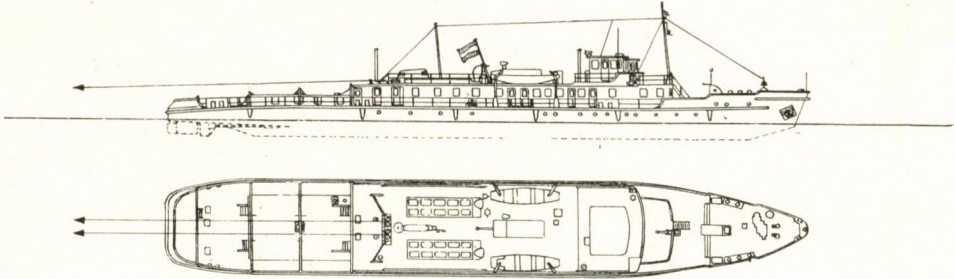
und Aufbauten sind geschweißt. Die Hauptmaschinenanlage besteht aus zwei Dieselmotoren Fabrikat Láng, Typ 6 LD 315, direkt umsteuerbar, mit einer Leistung von 400 PS bei 350 Umdr/min. Die beiden Kaplan-Schrauben arbeiten in Kort-Düsen. Einige Schiffe der Serie werden Láng-Dieselmotoren Typ 6 LD 315 mit Aufladung und einer Leistung von je 600 PS erhalten, um die Schleppleistung zu erhöhen. Die Ruderanlage besteht aus einem Zweiflächen-Balanceruder mit Handantrieb. Als Schleppereinrichtung ist eine Seilwinde System Simmering eingebaut. Die elektrische Anlage wird mit Gleichstrom betrieben, für spätere Ausführungen ist Wechselstrom geplant. Die Besatzungsunterkünfte weisen besonders hohen Komfort auf.

### 1600 PS Kataraktenschlepper (Abb. 4)

Von der Schiffswerft der »MAHART« für eigene Rechnung gebaut und für den Dienst auf der besonders schwierigen Kataraktenstrecke bestimmt. Trossenzug an der Seilbremse 17 t. Der teilweise in Sektionen gebaute Schiffskörper ist in kombinierter Schweiß- und Nietbauweise hergestellt; die Auf-



bauten sind geschweißt. Hauptmaschinen: zwei direkt umsteuerbare Dieselmotoren Typ Láng 8 LD 315 mit Aufladung, Leistung je 800 PS bei 350 Umdr/min. Die Schrauben arbeiten in Kort-Düsen; die Ruderanlage ist nach dem System Hitzler mit Handantrieb gebaut. Die übrigen Einrichtungen ent-



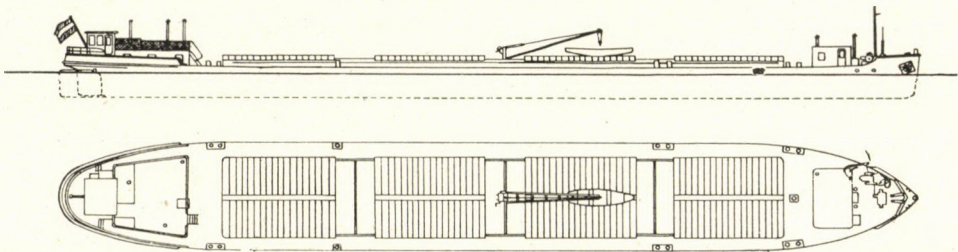
1600 PS KATARAKTENSCHLEPPER

Abb. 4

sprechen jenen der 800 PS-Motorschlepper in entsprechend verstärkter Ausführung. Das Schiff ist eines der stärksten Motorschiffe auf der ganzen Donau.

#### 1000 tonnen-Schleppkahn (Abb. 5)

Für die »MAHART« gebaut von der Schiffswerft Balatonfüred. Hauptsächlich für den Massenguttransport (Kohlen, Erz, Getreide) bestimmt, aber auch für Stückgutladungen geeignet. Kann auf der ganzen schiffbaren Länge



1000 t - SCHLEPPKAHN

Abb. 5

der Donau eingesetzt werden. Der in Sektionen gebaute, vollständig geschweißte Schiffskörper ist in 4 Laderäume aufgeteilt, die durch besonders große Luken zugänglich sind. Die Luken können durch stählerne Lukendeckel abgedeckt werden. Einzelne Kähne sind mit Rolldeckeln ausgerüstet. Zur Behandlung



von Stückgut ist ein Bordkran von 1,5 t Tragfähigkeit und Handantrieb vorgesehen. Im Vorschiff ist die Wohnung des Matrosen, im Achterschiff die des Steuermannes (beide mit Familie) vorgesehen. Die Ruderanlage besteht aus einem Dreiflächen-Balanceruder mit Handantrieb; die Ankerwinde wird durch einen Einzylinder-Dieselmotor Typ MIB angetrieben. Die Wohnräume sind mit elektrischer Beleuchtung (teilweise Leuchtstoffröhren) von einer Akkumulatorenbatterie ausgerüstet.

### 1000 tonnen-Tankschlepp (Abb. 6)

Für die »MAHART« gebaut von der Schiffswerft Balatonfüred. Für den Transport von Erdöl und Erdölprodukten bestimmt, kann auf der ganzen schiffbaren Länge der Donau verwendet werden. Der nach dem Längsspantensystem gebaute Rumpf ist in Sektionbauweise vollständig geschweißt hergestellt, und ist durch ein Längsschott und mehrere Querschotte in 12 Ladeöl-

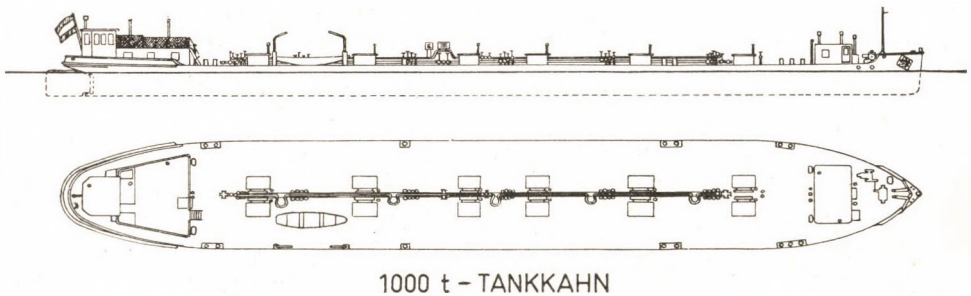


Abb. 6

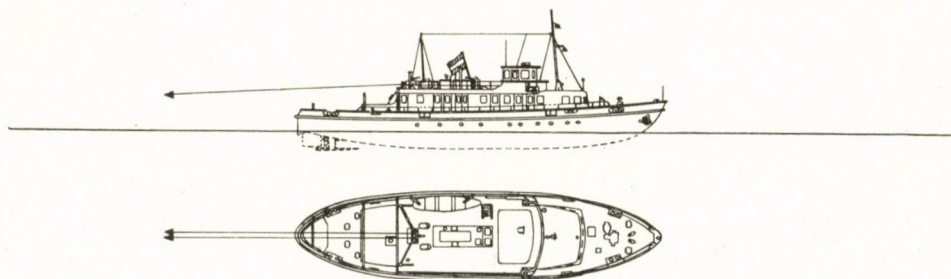
tanks aufgeteilt. Die Tanks sind außer den üblichen Rohrleitungen zum Füllen, Entleeren, Belüften und Peilen außerdem noch mit Heizschlangen zum Anwärmen der Ladung ausgerüstet. Die Wohnräume sind von den Tanks durch Kofferdämme getrennt. Die Ruderanlage besteht aus einem Balanceruder mit Handantrieb. Die übrige Ausrüstung sowie die Wohnräume sind nach dem Prinzip des 1000tonnen-Kahnes gehalten.

### 600 PS-Eisbrecher-Schlepper (Abb. 7)

Gebaut von der Schiffswerft Balatonfüred für die ungarische Wasserstraßendirektion. Verwendung während der Eismonate als Eisbrecher, übrigens als Schleppmotorschiff im Dienste der Donauregulierung. Der für Eisbrecherzwecke außerordentlich stark gebaute Schiffskörper ist vollständig geschweißt. Beim Entwurf des Linienrisses wurden die mit den Neubau-



Eisbrechern der DDR gesammelten Erfahrungen weitgehend verwertet und für die Verhältnisse der Donau abgestimmt. Die Hauptmaschinenanlage besteht aus einem direkt umsteuerbaren Sechszylinder-Viertakt-Dieselmotor Fabrikat Láng, Typ 6 LD 315 RF mit Aufladung und einer Leistung von 600 PS bei 310 Umdr/min, und Fernsteuerung von der Kommandobrücke aus. Die Schlepp-



600 PS - EISBRECHER - SCHLEPPER

Abb. 7

einrichtung besteht aus einer Schleppwinde System Simmering sowie den üblichen Zusatzeinrichtungen. Dieser Eisbrecher ist das erste ungarische Schiff mit hydraulischer Fernsteuerung der Hauptmaschinenanlage.

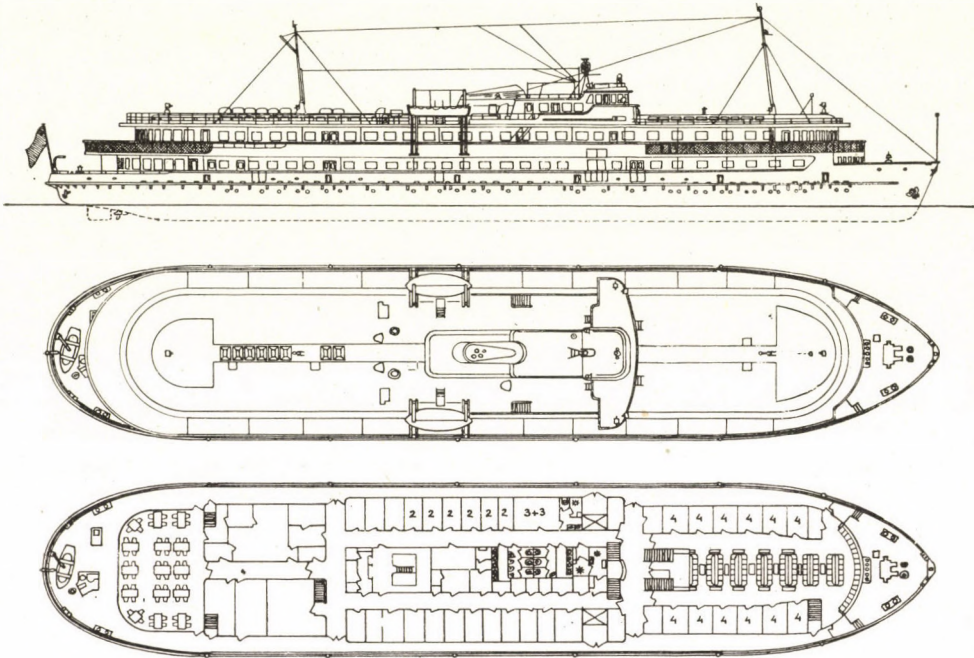
#### 800 PS Fahrgast-Motorschiff (Abb. 8)

Erbaut von der Schiffswerft Óbuda in Budapest; für den Export bestimmt. Doppelschraubenschiff mit zwei Decks; Verwendungszweck: Langstrecken-Passagierfahrten auf Flüssen und Binnenseen. Fahrgastzahl 315, davon 81 in der Ersten, 138 in der Zweiten Klasse, sowie 96 Sitzplätze für Kurzstreckenpassagiere. Besatzung 54 Mann. Die Hauptmaschinenanlage besteht aus zwei Dieselmotoren Typ 8 NVD 36 vom Schwermaschinenbau Karl Liebknecht, Magdeburg. Die umfangreiche elektrische Anlage arbeitet mit Wechselstrom; die Hauptmaschinenanlage besitzt hydraulische Fernsteuerung von der Kommandobrücke aus. Der Schiffskörper mit Tunnelheck ist vollständig geschweißt, Ruderhaus und Schornstein sind aus Leichtmetall gebaut.

#### 1200 PS Schubschiff (Abb. 9)

Ebenfalls ein Exporttyp der Schiffswerft Óbuda. Der Schiffskörper ist speziell für die Forderungen des Schiebendienstes entworfen und in Sektionen vollständig geschweißt hergestellt; die Aufbauten sind aus Leichtmetall gebaut. Die Hauptmaschinenanlage besteht aus zwei Dieselmotoren des SKL Magde-

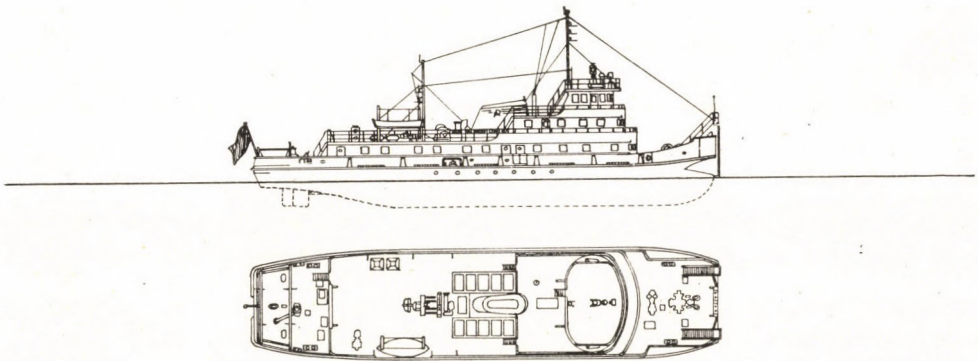




800 PS FAHRGAST - MOTORSCHIFF

Abb. 8

burg, Typ 8 NVD 48 mit je 670 PS bei 360 Umdr/min und elektrischer Fernsteuerung. Die elektrische Anlage wird mit Wechselstrom betrieben. Die Ruderanlage besteht zwecks Erzielung der beim Schiebendienst erforderlichen bestmög-



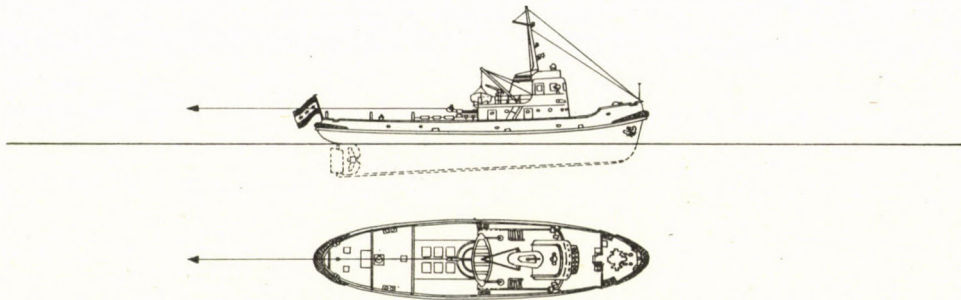
1200 PS SCHUBSCHIFF

Abb. 9

lichen Manövriereigenschaften aus Kort-Düsenrudern mit elektrischem Antrieb. Das Schiff kann auch zum Schleppen verwendet werden; zu diesem Zweck ist an Oberdeck ein halbautomatischer Schlepphaken mit einer starken Seilwinde eingebaut. Eine Radaranlage vervollständigt die neuzeitliche Ausrüstung dieses Schiffes. Obwohl dieser Schiffstyp für Exportzwecke gebaut ist, muß hier erwähnt werden, daß auch die ungarische Donauschiffahrt die schon vor Jahrzehnten einmal begonnenen Versuche mit der Schubschiffahrt nunmehr reaktivieren will.

#### 600 PS Hafenschlepper (Abb. 10)

Exporttyp der Schiffswerft Óbuda; Verwendung in Seehäfen zum Bugieren von Seeschiffen. Kann auch zum Lenzen leckgewordener Schiffe sowie als Feuerlöschboot eingesetzt werden, zu diesem Zweck sind Hochleistungspumpen und zwei Strahlkanonen (Monitore) an Bord. Der Schiffskörper wurde



600 PS HAFENSCHLEPPER

Abb. 10

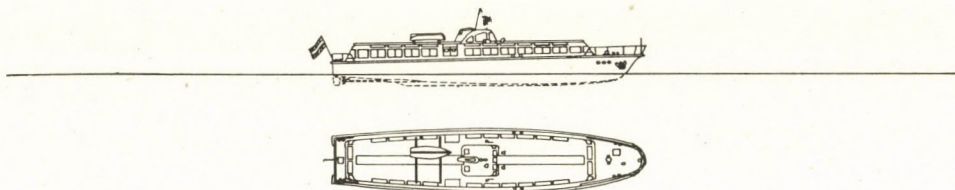
auf Wunsch des Auftraggebers in einer kombinierten Niet- und Schweißbauweise, das Ruderhaus aus Leichtmetall hergestellt. Die Hauptmaschinenanlage besteht aus einem Láng-Dieselmotor Typ 8 LD 315 mit 660 PS bei 280 Umdr/min, welcher direkt mit einem Verstellpropeller Typ KaMeWa gekuppelt ist. Die Ruderanlage besitzt hydraulischen Antrieb. Geplant ist eine Weiterentwicklung dieses Typs mit einem aufgeladenen Hauptmotor von 800 PS und Fernsteuerung sowie Kort-Düsenruder.

#### Hydrobus für 150 Fahrgäste (Abb. 11)

Für die »MAHART« sowie für den Export gebaut von der Donau-Werft in Vác. Außer einzelnen Teilen der Maschinenanlage vollständig aus der Aluminiumlegierung »Nautal« gebaut. Der Schiffskörper ist genietet, der Aufbau teilweise geschweißt. Die Hauptmaschinenanlage besteht aus zwei schnell-



laufenden Sechszylinder-Dieselmotoren der Firma Csepel, Typ D 613, mit je 85 PS bei 1800 Umdr/min und angebautem Wendegertriebe. Die Fernsteuerung der Maschinenanlage arbeitet nach einem kombinierten System: die Drehzahlregulierung der Motoren erfolgt auf mechanischem Wege über ein Gestänge;



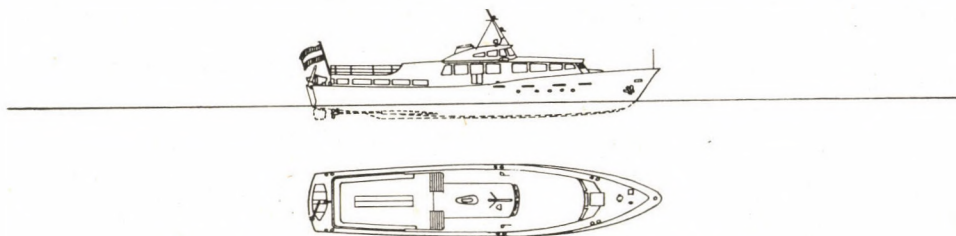
HYDROBUS FÜR 150 FAHRGÄSTE

Abb. 11

die Wendgetriebe werden mit Luftdruck betätigt. Die Ruderanlage besteht aus einem Zweiflächen-Balanceruder mit Handantrieb. Diese Schiffe sind für den Fahrgast-Nahverkehr auf Flüssen und Binnenseen bestimmt.

*Küsten-Hydrobus für 180 Fahrgäste (Abb. 12)*

Gebaut von der Donau-Werft in Vác. Für Küstenverwendung entworfen, kann im Bäderdienst besonders günstig verwendet werden. Einsatz auf Flüssen



KÜSTEN-HYDROBUS FÜR 180 FAHRGÄSTE

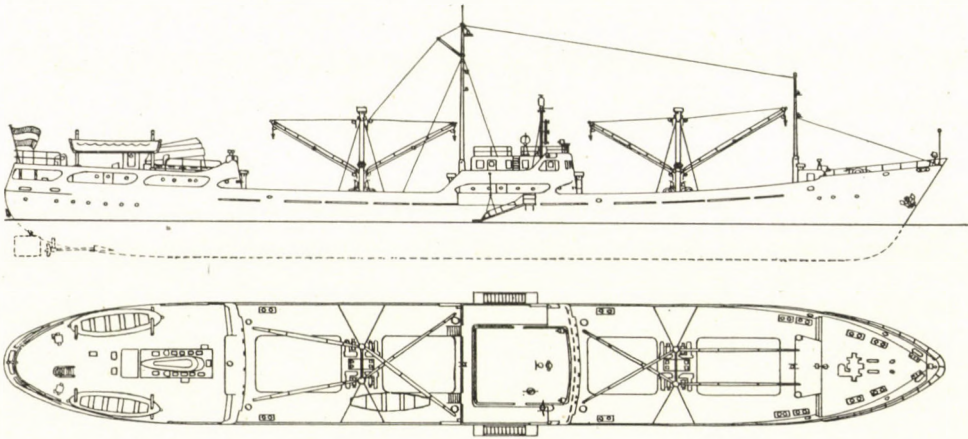
Abb. 12

und Binnenseen auch für längere Fahrten möglich. Ebenfalls vollständig aus »Nautal« erbaut. Beim Bau wurde von der Schweißung unter Schutzgas (Argon) weitgehend Verwendung gemacht. Die Hauptmaschinenanlage besteht aus zwei schnelllaufenden Dieselmotoren von der Waggonfabrik »Wilhelm Pieck« in Győr, Typ 6 JS 13,5, mit einer Leistung von insgesamt 270 PS und Fernsteuerung. Im vorderen Teil des Aufbaues ist ein Rauchsalon, darunter im Schiffskörper sind die Mannschaftskammern untergebracht; über dem halbversenk-

ten achteren Fahrgastraum befindet sich ein Promenadendeck. Das Schiff ist z. Zt. das größte Leichtmetall-Wasserfahrzeug auf der ganzen Welt.

### 1300 DWT Donau-Seeschiff (Abb. 13)

Für die Ungarische Donau-Seeschiffahrts-A. G. gebaut von der Schiffswerft »Gheorghiu-Dej« in Budapest. Eindeck-Trockenfrachter mit zwei Schrauben. Die äußere Form des Schiffes wird charakterisiert durch den weit ausfallenden Vorsteven, die kurze, halbversenkte Back, die Kommandobrücke



1300 DWT DONAU-SEESCHIFF

Abb. 13

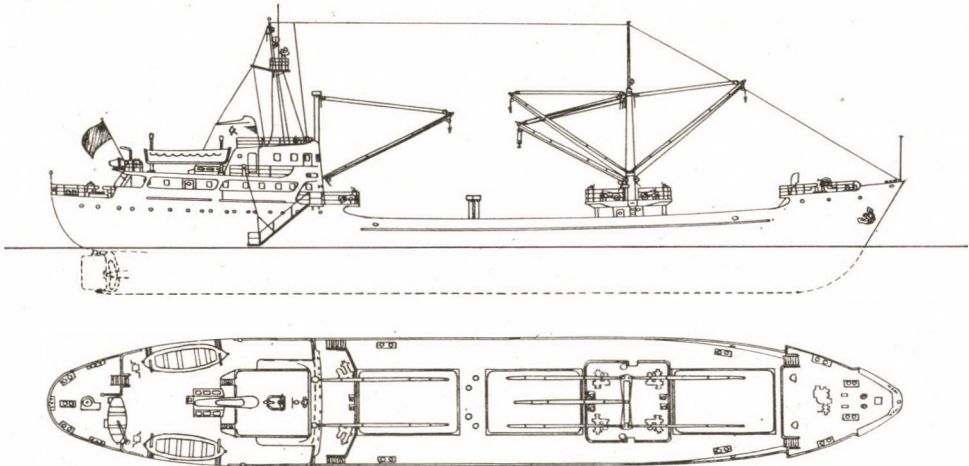
mittschiffs und Maschinenanlage achtern. Die Aufbauten sind zwecks Erleichterung der Durchfahrt unter den Donaubrücken besonders niedrig gehalten, Signal- und Lademasten sind zum Niederlegen eingerichtet. Der Schiffskörper ist teilweise in Sektionen gebaut und vollständig geschweißt. Der Doppelboden erstreckt sich über die ganze Schiffslänge. Vom 8. Schiff der Serie an wird die Bodenkonstruktion nach dem Längsspanntensystem gebaut. Das erste Schiff besaß noch genietete Leichtmetallaufbauten um damit Erfahrungen im Donau-Seebetrieb zu sammeln, diejenigen der übrigen sind aus Stahl geschweißt. Die Hauptmaschinenanlage besteht aus zwei Láng-Dieselmotoren Typ 8 LD 315 RF mit Aufladung von insgesamt 1600 PS Leistung. Die Rudéranlage ist ein Dreiflächen-Hitzler-Ruder mit hydraulischem Antrieb, welche der Forderung nach einer besonders guten Manövrierfähigkeit auf der Donau voll entspricht. Das Schiff besitzt vier Laderäume mit vier Luken und der üblichen Lukenabdeckung; die Ausrüstung mit Lukendeckeln System MacGregor ist vorgesehen. An Ladegeräten stehen für jede Luke je zwei Ladebäume von 2,5 t



Tragkraft zur Verfügung, welche an zwei Paar Lademasten befestigt sind. Für jeden Ladebaum ist eine elektrische Ladewinde vorgesehen. Weitere Schiffe der Serie sollen mit Bordkränen statt der Ladebäume geliefert werden. Die Schiffe sind mit neuzeitlichen Navigationshilfsmitteln, wie vollständige Funkanlage, Funkpeilgerät, Echolot und Radar ausgerüstet. Die Schiffe verrichten einen regelmäßigen Liniendienst zwischen Budapest und den Häfen von Libanon und der Vereinigten Arabischen Republik.

*1200/1500 DWT See-Frachtmotorschiff (Abb. 14)*

Exporttyp der Schiffswerft »Gheorghiu-Dej« in Budapest. Für die große Küstenfahrt entworfen, aber auch für Hochseeverwendung geeignet. Ein-



1200/1500 DWT SEE-FRACHTMOTORSCHEIF

*Abb. 14*

schrauben-Eindeck-Trockenfrachter in vollständig geschweißter Sektionsbauweise, verstärkt für die Fahrt in Eis. Kommandobrücke und Maschine achtern. Die Maschinenanlage besteht aus einem Achtzylinder-Viertakt-Dieselmotor der Firma Láng, Typ 8 LD 315 RF mit Aufladung und einer Leistung von 1000 PS bei 400 Umdr/min und hydraulischer Fernsteuerung von der Brücke. Besatzung 27 Mann. Drei Laderäume und drei Luken mit Lukendeckeln System MacGregor. Auf dem Windenhaus zwischen der 1. und 2. Luke steht ein Zweibeinmast mit vier 2,5 t- und einem 10 t-Ladebaum. Zwei weitere 2,5 t-Ladebäume sind an Lademasten in der Brückenfront aufgehängt. Jeder 2,5 t-Ladebaum hat eine eigene elektrische Ladewinde.



### Anwendung von einigen wirtschaftlichen Indices bei den neuen Schiffstypen

Nun will ich einige Erfahrungen des Schiffsbetriebes bei der ungarischen Schifffahrt behandeln. Da der Umfang des Materials die ausführliche Besprechung aller in Frage kommenden Probleme verbietet, werde ich mich nur mit denjenigen Fragen befassen, welche die Ökonomie des Betriebes besonders beeinflussen.

Wie ich schon eingangs erwähnte, ist die ungarische Schifffahrt von der Beschaffung von Dampfschiffen vollständig abgegangen; trotzdem müssen aber die noch in beträchtlicher Zahl vorhandenen Dampfschiffe vorläufig — bis zu ihrer Ausmusterung und Ersatz durch moderne Motorschiffe — im Dienst behalten werden. In den früheren Jahrzehnten, als die einheimischen Ölvorkommen noch nicht genügend erforscht waren, und Ungarn in seiner Ölversorgung auf die Einfuhr angewiesen war, wurden die meisten Schiffe mit Kohle aus eigenen Beständen gefahren und nur einige wenige Schiffe waren zum Verfeuern von ausländischem Heizöl eingerichtet. Heute ist die Lage schon anders, und da die Ölversorgung der Schifffahrt aus den einheimischen Quellen gelöst werden konnte, kann der Vergleich zwischen den beiden Feuerungsarten ohne Rücksichtnahme auf besondere Umstände gezogen werden.

Die vergleichenden Untersuchungen, welche heute nur mehr eine die verflossene Lage anzeigende Bedeutung haben, zeigen (Abb. 15), daß, bezogen auf den ganzen Dampfschiffspark und unter Annahme der einzelnen Zeiger als Einheit bei den Dampfschiffen, sich für die Motorschiffe folgende charakteristischen Indexzahlen errechnen lassen:

|   |      |
|---|------|
| A) Besatzung/100 Ps .....                   | 0,49 |
| Besatzung/10 000 kilat* .....               | 0,79 |
| Besatzung/1 000 000 Warentonnenkm .....     | 0,75 |
| B) Betriebsstoffkosten/1000 kilat .....     | 0,48 |
| Betriebsstoffkosten/1000 Warentonnenkm .... | 0,45 |
| C) Gesamtselbstkosten/1 kilat .....         | 0,53 |

Bei der Untersuchung der Gesamtselbstkosten der Schifffahrt können die auftretenden Kosten durch die Anwendung einheitlicher Methoden auf die charakteristische Betriebsleistungseinheit des betreffenden Schiffstyps bezogen werden. Wenn wir die in Indexzahlen ausgedrückten Kosten bei Schlepsschiffen auf 1 PS-Fahrtstunde bzw. bei Fluß- und Binnensee-Fahrgastschiffen auf

\* kilat = die Abkürzung von »Kilometeranhangstonnen«, ist eine Einheit, welche in der Donauschifffahrt den einheitlichen Vergleich der Transportleistungen auf in Hinsicht auf die Navigation verschiedenen schwierigen Streckenabschnitten ermöglicht, und welche im Grunde genommen einen virtualen Tonnenkilometer gegenüber dem »geographischen« Tonnenkilometer bedeutet.



1 Fahrtgast-Fahrstunde abstimmen, können die in den Abbildungen 16, 17 und 18 dargestellten Zusammenhänge zwischen dem Selbstkostenindex und der Leistung (in PS) bzw. der Fahrgastzahl ermittelt werden. In den Abbildungen befinden sich die den Angaben der untersuchten Einheiten entsprechen-

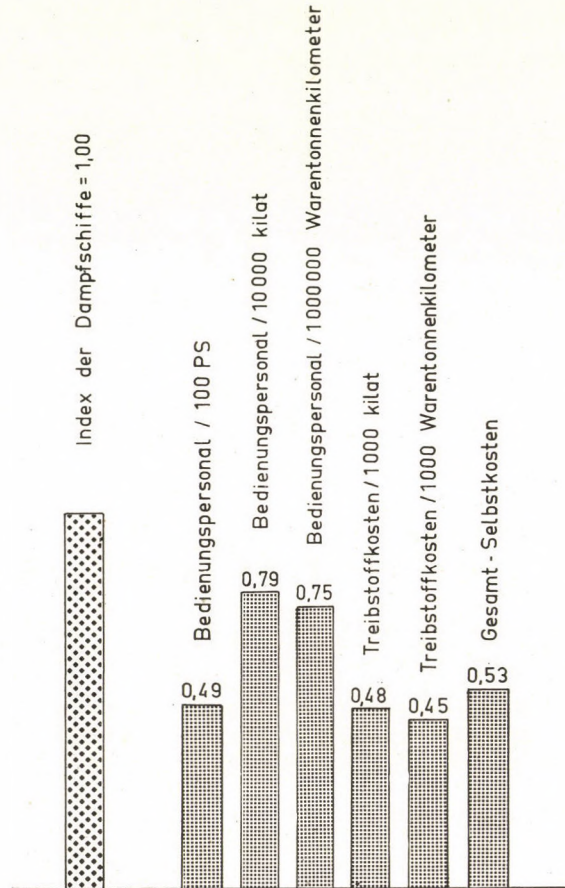


Abb. 15

den Punkte innerhalb der Begrenzungslinien der verschiedenartig gerasterten Gebiete. Das Einzeichnen der Kurven erfolgte unter Inbetrachtung der Verteilung der Punkte innerhalb der einzelnen Gebiete.

Aus Abb. 16 ist ersichtlich, daß der spezifische Selbstkostenindex der Dampfschiffe bei wachsenden Leistungen steil abfällt. Das ist auch selbstverständlich, denn ein bedeutender Teil der ständigen Kostenfaktoren des Betriebes (wie z. B. die Besatzungszahl) ist ja bei Einheiten sowohl mit kleinerer als auch mit größerer Leistung — innerhalb der auf Flüssen üblichen Grö-

Benordnungen — beinahe gleich. Ein interessanter Umstand zeigt sich beim Studium der Kurven darin, daß der spezifische Selbstkostenindex der mit Ölföuerung ausgerüsteten Dampfschiffe größer ist als jener der Schiffe mit Kohlenföuerung bei sonst gleicher Leistung. Dieser Umstand weist darauf hin,

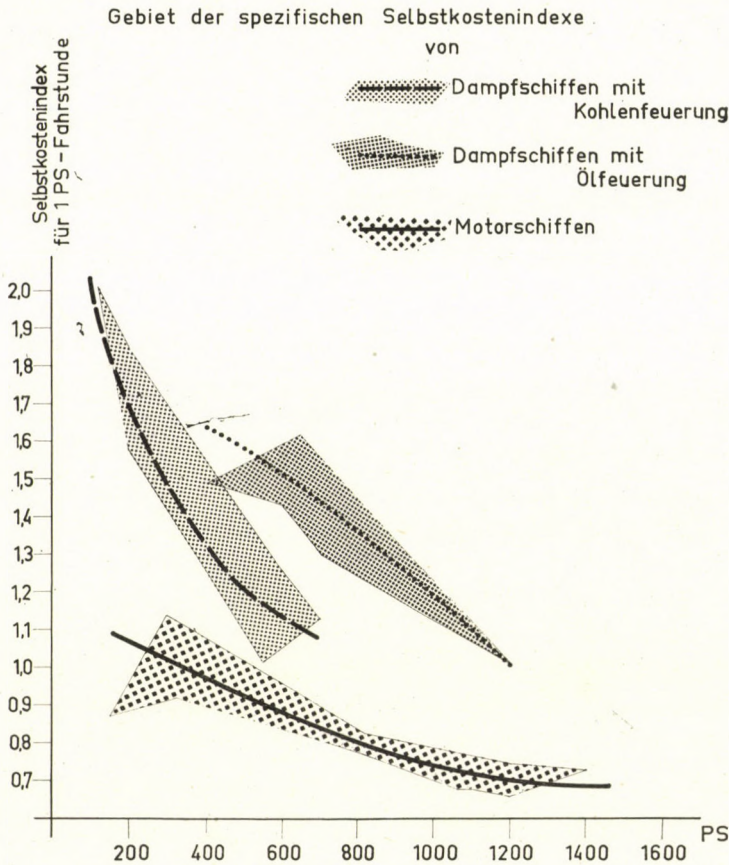


Abb. 16

daß der Umbau von Dampfschiffen von Kohle auf Ölföuerung entgegen den früheren Ansichten nicht gerechtfertigt ist, denn der auf 1 PS-Fahrtstunde entfallende Kostenindex ist — trotz der leichten Bedienung und des kleineren spezifischen Brennstoffverbrauchs dem Gewicht nach — bedeutend höher als beim Dampftrieb mit Kohlenföuerung. Der Erkennung dieses Umstandes ist es zuzuschreiben, daß die früher geplanten Umbauten, eben auf Grund der Betriebserfahrungen, nicht ausgeführt werden.

Die spezifische Selbstkostenindex-Kurve der Motorschiffe verflacht bei Typen mit einer Leistung von 800 PS und darüber; die neuen Schiffe werden



schon mit Rücksicht darauf mit 800, 1200, sowie für den schweren Katarakten-dienst mit 1600 PS Leistung gebaut. Für weniger frequentierte Wasserstraßen und besonders zur Förderung von Kurzstrecken-Schleppzügen innerhalb der Landesgrenzen, wobei die aus einer kleineren Anzahl von Kähnen zusammen-gestellten Schleppzüge wirtschaftlicher sind, sollen auch 400 PS-Schlepp-motorschiffe gebaut werden.

In Abb. 17 sind die auf 1 Fahrgastfahrtstunde entfallenden spezifischen Selbstkostenindexe und die Leistung in PS, bezogen auf die Fahrgastzahl für die Fluß-Fahrgastschiffe, dargestellt. Bei wachsender Fahrgastzahl und eben-falls steigender Maschinenleistung weist die Kurve eine abfallende Tendenz auf. Die Verflachung beginnt bei etwa 750—800 Fahrgästen und weist damit darauf hin, daß in der Linienfahrt auf Flüssen Schiffe von ähnlicher Fahrgast-zahl wirtschaftlich sind. Beim Einzeichnen der Leistungskurve konnte auf die mit »a« und »b« bezeichneten beiden Schiffe nicht Rücksicht genommen werden, da »a« ein für Sonderzwecke dienendes, sog. Promenadenschiff darstellt, wäh-rend durch »b« ein sehr veraltetes (inzwischen ausgemustertes) Schiff ver-treten ist.

Das Ergebnis der Untersuchung der spezifischen Selbstkosten der Balat-onsee-Fahrgastschiffe ist in Abb. 18 graphisch dargestellt. Die Selbstkosten-index-Kurve der Dampfschiffe spricht sozusagen für sich selbst und zeigt, daß die Selbstkosten des Dampfbetriebes die Motorschiffe auch hier um das zwei-oder mehrfache übertreffen. Bei der Auswertung der Kurve der Motorschiffe kann man den wirtschaftlichen Schiffstyp an jenem Punkt bestimmen, wo die Kurve der Selbstkostenindexe stark zu verflachen anfängt, also bei einer Fahr-gastzahl von etwa 150—200. Die beiden Endpunkte der Kurve der Motor-schiffe werden einerseits von einem einmaligen, für 35 Fahrgäste gebauten Schiff, und andererseits von einem ebenfalls für Promenadenfahrten eingesetzten 600-Personen-Schiff (auch ein Einzelbau) gebildet. Diese Schiffe konnten also im Verlauf der allgemeinen Untersuchungen und bei der Typenbestimmung nicht in Betracht gezogen werden. Die betriebswirtschaftlichen Untersuchungen rechtfertigen und bestätigen die Beschaffung der gegenwärtig im Serienbau stehenden, für 150 Fahrgäste ausgelegten Motorschiffe vom Typ »Hydrobus«, welche sich auf den Schifffahrtslinien der Balatonsee sowie in den in ihrem Charakter mit jenen vergleichbaren kürzeren Flußfahrten als außerordentlich wirtschaftliche Fahrzeuge erwiesen. Der Bau von Schiffen mit einer größeren Fahrgastzahl für den Balatonsee kann nur bei Auftreten von besonderen Erfordernissen oder für Spezialzwecke in Erwägung gezogen werden.

Unter den Faktoren, welche die Selbstkosten der Schifffahrt bestimmen, spielt das *Eigengewicht* der Schiffe eine bedeutende Rolle. Das Eigengewicht muß das Schiff zusammen mit der zahlenden Fracht, aber als »totes Gewicht« mitschleppen. Wenn wir nun das Verhältnis des Eigengewichtes zur Trag-fähigkeit des Schiffsparkes sowie die gesamte Warentonnenkilometerleistung



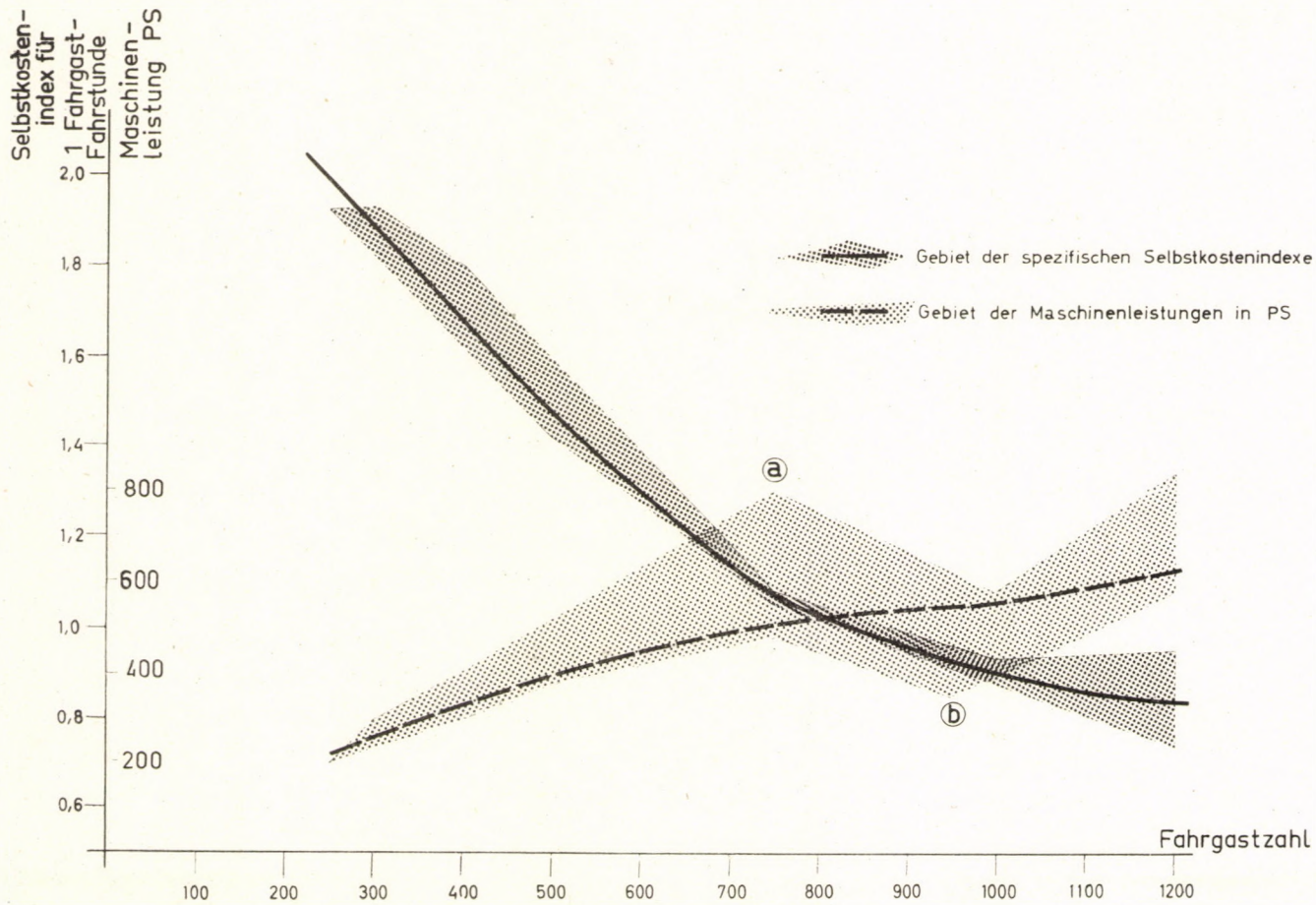


Abb. 17



Selbstkostenindex  
für 1 Fahrgast-Fahrstunde

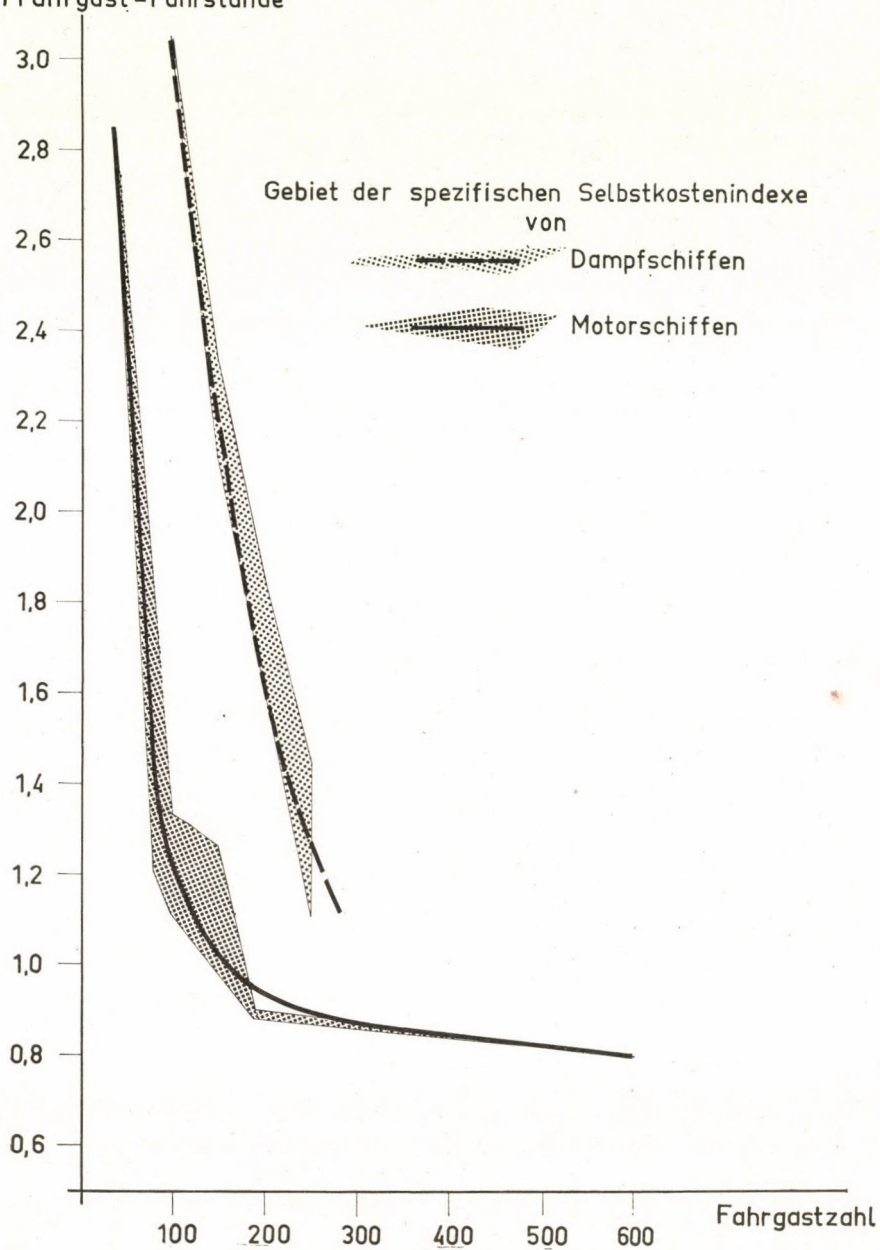


Abb. 18

der Schifffahrt betrachten, so ist selbstverständlich, daß die nützlichen Waren-tonnenkilometer um so weniger mit »unnützlichen« Eigengewichtstonnenkilo-metern belastet werden, je kleiner der Betrag des auf 1 t Tragfähigkeit entfallen-den Eigengewichtes der Schiffe ist. Dasselbe gilt auch für Schiffe mit eigenem Antrieb, wobei die Verringerung des auf die Leistungseinheit entfallenden spezifischen Eigengewichtes in Hinsicht auf die Wirtschaftlichkeit des Betriebes eine Rolle spielt.

Es wird lehrreich sein, das Problem der Entwicklung des Eigengewichtes bei einigen charakteristischen Schiffstypen etwas näher zu untersuchen. Die

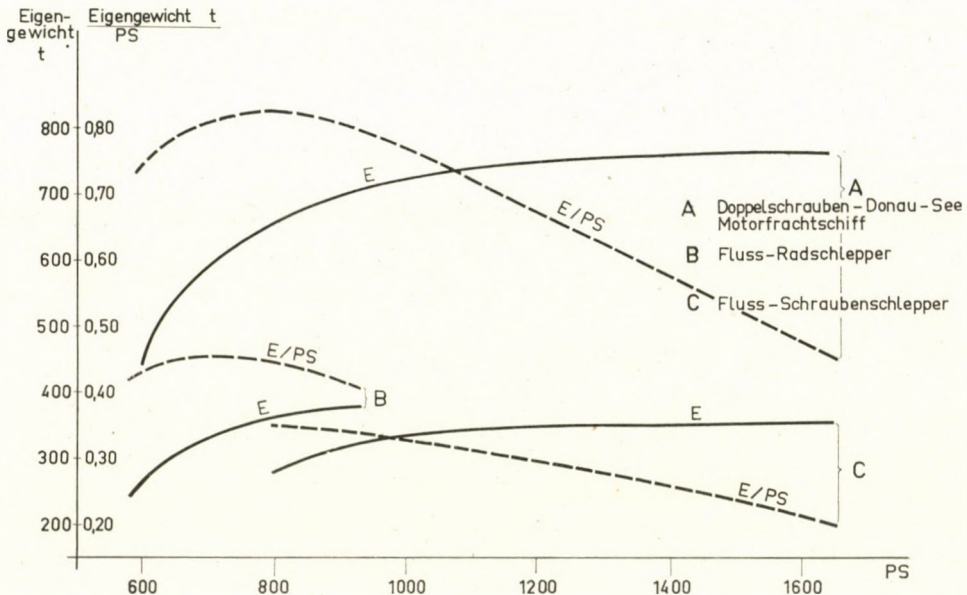


Abb. 19

Kurven des absoluten Eigengewichtes und des auf die PS-Leistung bezogenen, also spezifischen Eigengewichtes sind gesondert für Schleppschiffe mit Schraubenantrieb, für Seitenradschlepper sowie für Donau-See-Frachtmotorschiffe in Abb. 19 dargestellt. Es kann festgestellt werden, daß, obgleich mit wachsender Maschinenleistung natürlich auch das Eigengewicht ansteigt, das spezifische Eigengewicht bei den neuen Schiffen doch eine günstig abfallende Tendenz aufweist. Besonders auffallend zeigt sich das bei den Schleppschiffen mit Schraubenantrieb, wo gegenüber dem spezifischen Wert von 0,345 t/PS des 820 PS-Schleppmotorschiffes, Baujahr 1941, dieser Zahlenwert bei dem 1960 gebauten 1600 PS-Kataraktenschlepper auf nur 0,217 abgesunken ist. Das bedeutet, daß sich das spezifische Eigengewicht um rund 37% verringerte, welcher Pro-



zentsatz, bezogen auf die nützliche Warentonnenleistung des Schleppschiffsparkes, eine bedeutende Ersparnis und dadurch einen wirtschaftlichen Erfolg bedeutet.

Bei den Radschleppern, deren Bau noch vorläufig wegen der geringen Wassertiefen in den Niedrigwasserperioden der Donau erforderlich ist, kann in diesen Indexzahlen ebenfalls eine Verringerung nachgewiesen werden. So beträgt z. B. das spezifische Eigengewicht eines 1907 erbauten 680 PS-Seitenradschleppers 0,452 t/PS gegenüber 0,417 eines 900 PS-Schiffes aus 1940. Die Abnahme beträgt rund 8%; im Vergleich mit den Schraubenschleppern zwar weniger bedeutend, aber doch eine Besserung.

Bei den Donau-Seeschiffen können wir in der Beziehung des spezifischen Eigengewichtes auf die Maschinenleistung ebenfalls eine bedeutende Abnahme beobachten. Beim Vergleich des 1960 gebauten Schiffes mit 1600 PS und 0,475 t/PS spezifischem Eigengewicht und des 800 PS-Schiffes aus 1939 mit 0,825 t/PS ergibt sich, daß das neue — zwar gleichzeitig stärkere — Schiff einen Abgang von 42% gegenüber dem älteren aufweist; sein spezifisches Eigengewicht beträgt nur 58% des Vergleichsschiffes. Auch erhalten wir ein günstiges Bild bei den neuen Donau-Seeschiffen, wenn wir das Eigengewicht auf die Tragfähigkeit beziehen. In diesem Fall beträgt das spezifische Eigengewicht beim 1960 gebauten, rund 1300 t tragenden Schiff nur 0,58 t/t, gegenüber dem Wert von 1,12 t/t beim 1934 gebauten Schiff mit 400 t Tragfähigkeit. Es konnte also im Laufe eines Vierteljahrhundertes — in erster Linie durch die Typenveränderung und Kapazitätsvergrößerung und weiterhin durch die Anwendung der neuen Technologie sowie neuzeitlicher Verfahren — eine Verringerung des spezifischen Wertes um 48% erreicht werden.

Die Entwicklung des Eigengewichtes sowie des spezifischen Eigengewichtes bezogen auf die Tragfähigkeit bei Schleppkähnen ist in Abb. 20 dargestellt. Bei den Trockenfracht-Kähnen kann nur von einer aus der Tragfähigkeitsvergrößerung fließenden spezifischen Eigengewichtsabnahme gesprochen werden. Bei der Untersuchung der Tankkähne zeigte sich jedoch eine günstige Entwicklung in den Zahlenwerten des spezifischen Eigengewichts, in erster Linie als Folge der geschweißten Ausführung. So hat z. B. ein im Jahre 1942 gebauter Tankkahn mit rund 1000 t Tragfähigkeit ein spezifisches Eigengewicht von 0,253 t/t, während die 1959 gebauten, rund 1050 t tragenden neuen Tankkähne den um 17% niedrigeren Zahlenwert von 0,211 t/t aufweisen. Wenn wir noch dazu bedenken, daß der neue Kahn als Folge einer neuzeitlichen Schiffsform und der Schweißung seine volle Tragfähigkeit schon bei 2,10 m Tiefgang, gegenüber 2,30 m des älteren Kahnes erreicht, können wir ermessen, welche Erfolge eine neuzeitliche technische Lösung sowohl in nautischer wie auch in ökonomischer — also betrieblicher — Beziehung in sich birgt.

Zum Schluß möchte ich betonen, daß ich nicht die Absicht haben konnte, den im Titel bezeichneten Fragenkomplex in allen Einzelheiten zu behandeln,



denn die weitverzweigte, und doch in unzähligen Beziehungen zusammenhängende, komplexe Eigenart der Probleme ermöglicht auf keine Weise den Wunsch nach Vollständigkeit im Rahmen einer kurzen Ausführung. Ich muß auch darauf hinweisen, daß die indexhafte Behandlung der aus dem Schiffahrtsbetrieb entnommenen statistischen Zahlenwerte in einzelnen Fällen zu unumgänglichen Näherungswerten führen kann, was besonders bei den Selbstkostenuntersuchungen nicht außer acht gelassen werden darf. An Hand der herausgegriffenen Beispiele und der Abbildungen können aber doch diejenigen

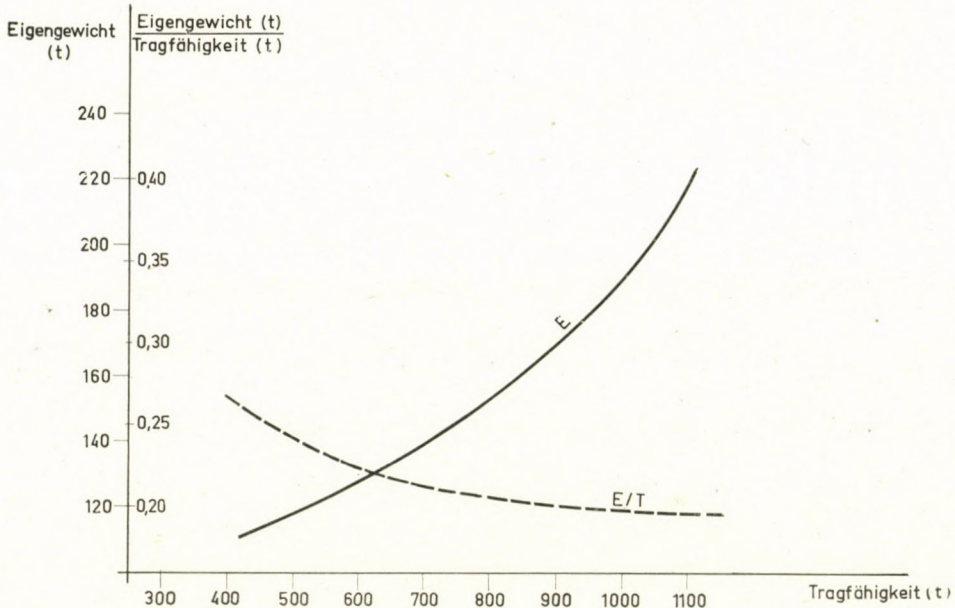


Abb. 20

Gebiete bestimmt werden, innerhalb derer die für die einzelnen Wasserstraßen und Dienstzweige ein wirtschaftliches Optimum bedeutenden neuen Schiffstypen zu suchen sind. Diese begrenzten Gebiete dürfen selbstverständlich nur als erste Annäherung betrachtet werden, denn es folgt aus der statischen Eigenschaft der verwendeten statistischen Zahlenwerte, daß infolge der neuen Schiffahrtsumstände, der neuen Warenströmungsrichtungen und nicht zuletzt der Indienststellung einer stets wachsenden Zahl neuer Einheiten die Neuauswertung und Revision der Zahlenwerte sowie der Ergebnisse der Untersuchungen erforderlich ist. Es steht aber außer Zweifel, daß die Verfolgung der Betriebsangaben der Schiffahrt, die Aufdeckung der technischen und wirtschaftlichen Zusammenhänge zur vertieften Forschung und Verwendung der neuen Technik sowie zur Einführung neuer Forschungsmethoden führt. All dies wirkt sich auch im Schiffbau günstig aus, indem es den Konstrukteuren in der Wahl



der günstigsten neuen Schiffstypen den Weg weist und der Schifffahrt die Anwendung jener technischen Lösungen, welche die günstigsten Betriebsergebnisse liefern, ermöglicht.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser beschäftigt sich in seiner Ausführung systematisch mit den Gesichtspunkten, welche beim Entwurf der neuen Schiffe zu beachten sind. Er gibt einen kurzen Rückblick auf die sich über ein ganzes Jahrhundert erstreckende Entwicklung des ungarischen Schifffarkes. Beim Entwurf und Betrieb der Schiffe weist er nach einer allgemeinen Erläuterung der gegenwärtigen Gegebenheiten darauf hin, daß über die Beachtung der gegenwärtigen Lage hinaus schon heute die zukünftigen Wasserstraßen-Gegebenheiten beachtet werden müssen. Weiterhin gibt er die technischen Daten sowie Übersichtszeichnungen von 13 neuen ungarischen Schiffen, beschäftigt sich mit der indexmäßigen Gegenüberstellung einiger betriebswirtschaftlicher Charakteristiken von neuen Motorschiffen und den alten Dampfschiffen und geht dann auf die Vorführung der auf die charakteristischen Betriebsleistungseinheiten bezogenen, also spezifischen Selbstkostenindexe über. Als Ergebnis der Selbstkostenuntersuchungen können in den vorgeführten Abbildungen diejenigen Gebiete ermittelt werden, in denen die für bestimmte Wasserstraßen und Verwendungszwecke ein Optimum bildenden neuen Schiffstypen zu suchen sind. Danach zeigt der Verfasser graphisch und zum Teil auch zahlenmäßig die Entwicklung des spezifischen Eigengewichtes der Schiffe und weist auf die auf dem Gebiet der Verminderung des spezifischen Eigengewichtes bei den neuen Schiffen gegenüber den älteren erreichten Erfolge hin.

Die Beobachtung der Betriebsergebnisse der Schifffahrt sowie die Untersuchung der technischen und ökonomischen Zusammenhänge führt zur immer weiteren Erforschung und Anwendung der neuen Technik sowie zur Einführung von neuen Forschungsmethoden und zeigt ihre günstige Wirkung auch im Schiffbau, indem sie den Konstrukteuren bei der Wahl der optimalen Typen sowie zur Anwendung von technischen Lösungen, welche die günstigsten Betriebsergebnisse bieten, den Weg weist.

#### THE BUILDING AND THE OPERATION OF THE NEW HUNGARIAN SHIPS FOR INLAND AND FOR DANUBE-SEA TRAFFIC

GY. FEKETE

#### SUMMARY

The author discusses and classifies the points of view governing the design of new ships. A short review is presented of a century of development of the fleet of Hungarian power-driven ships. After a general review of present conditions for the design and for the operation of the ships, the author points out that already now the future characteristics of waterways must be considered. 13 new Hungarian ships are presented, together with their characteristic drawings. After that, the indexes characterizing certain parameters of the operating economics of the old steamships and of the new motor ships are dealt with, as well as graphics giving the relations between the specific cost (per unit operating performance) indexes. As a result of the examination of costs the graphics permit the finding of those fields for which the new types of ships can be used which will give an economic optimum for the various waterways and services. The development of the specific dead weight is shown — graphically and partly numerically — pointing to the results attained in the field of reduction of dead weight with the newly built ships, as compared with the older ones.

The observation of the operating data shipping and unveiling of the economic relations leads to an ever increasing research into, and utilization of the new technique, to the introduction of new methods of analysis and all this has a favourable influence also on shipbuilding. Thus leading the designers to selecting the most favourable types and to the use of the technical solutions giving the most favourable operating results.



CONSTRUCTION ET EXPLOITATION DE NOUVEAUX BATIMENTS DESTINES  
A LA NAVIGATION INTERIEURE ET A LA NAVIGATION DANUBO-MARITIME

CY. FEKETE

## RESUME

L'auteur étudie et systématise les principes à observer lors de l'établissement des projets de construction de nouveaux bâtiments. Il présente d'abord un aperçu englobant un siècle de développement des bâtiments en Hongrie et, après un exposé général des conditions actuelles dans le domaine de l'établissement de projets de construction et de l'exploitation des bâtiments, rappelle que l'on doit d'ores et déjà tenir compte des conditions futures de la navigation sur les voies d'eau intérieures. Il donne la description technique et les dessins schématiques de 13 nouveaux bâtiments hongrois et compare ensuite certains indices économiques caractérisant l'exploitation des vieux bâtiments à vapeur à ceux des nouveaux bâtiments à moteur. Ceci est suivi des graphiques des rapports entre les indices spécifiques des prix de revient, reflétés en unités d'exploitation, des différents types de bâtiments. En conséquence de l'analyse du prix de revient, on peut établir, sur la base des graphiques présentés, les domaines où il convient de chercher les nouveaux types de bâtiments offrant l'optimum des conditions économiques requises du point de vue de la voie navigable et de la tâche données. L'auteur esquisse ensuite graphiquement, et en partie numériquement, l'évolution de la part du poids propre des bâtiments, mettant en évidence les résultats obtenus par la réduction de ce poids dans les bâtiments de construction récente par rapport aux anciens bâtiments.

L'examen des résultats de l'exploitation de la navigation et la mise en évidence des rapports entre les indices techniques et économiques conduisent à la recherche et à l'application des techniques nouvelles ainsi qu'à l'introduction de nouvelles méthodes d'analyse, et influencent favorablement la construction des bâtiments, car ils indiquent au constructeur la voie à suivre dans le choix des types de bâtiments les plus avantageux et dans l'application des solutions techniques garantissant les meilleurs résultats dans le domaine de l'exploitation.

СТРОИТЕЛЬСТВО И ЭКСПЛУАТАЦИЯ НОВЫХ СУДОВ ВНУТРЕННЕГО  
И ДУНАЙСКО-МОРСКОГО СУДОХОДСТВА

Д. ФЕКЕТЕ

## РЕЗЮМЕ

Автор излагает и систематизирует принципы, которых необходимо придерживаться при проектировании новых судов. Дается краткое историческое описание развития флота с машинными двигателями в Венгрии в течение одного столетия. По поводу проектирования и эксплуатации судов после общего изложения настоящих условий говорится, что уже сейчас следует учитывать будущие условия плавания по водным путям. В дальнейшем дается техническое описание и общая схема тринадцати новых венгерских судов, после чего рассматриваются некоторые экономические зависимости между новыми судами с моторными двигателями и старыми судами с паровыми двигателями, дается сравнение их экономических показателей, а затем следует графическая иллюстрация зависимости между удельными индексами себестоимости, отраженными в эксплуатационных единицах различных типов судов. В результате анализа себестоимости на основе графиков можно определить области, в пределах которых возможно установить для отдельных водных путей и в зависимости от применения типы судов, являющихся оптимальными с экономической точки зрения. Далее показываются графически и частично в числовом выражении изменения удельного собственного веса судов в области снижения этого веса на судах новой конструкции, ссылаясь на результаты, достигнутые по отношению к прежним.

Наблюдения за эксплуатационными данными судоходства, вскрытие технических и экономических зависимостей приводят все более к глубокому поиску и применению новой техники, к введению новых методов анализа и выгодно влияют на судостроение, поскольку указывают конструкторам направление в отношении выбора наиболее подходящих типов судов и применения технических решений, дающих наиболее выгодные эксплуатационные результаты.





# BEITRAG ZUR BERECHNUNG VON GLEITLAGERN MIT ÖL- ODER FETTSCHMIERUNG

Prof. Dr. Z. TERPLÁN  
KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

und

Dr. I. LÉVAI

LEHRSTUHL FÜR MASCHINENELEMENTE, TECHNISCHE HOCHSCHULE DER SCHWERINDUSTRIE,  
MISKOLC

[Eingegangen am 23. März 1961]

## I

Zeitgemäße Gleitlager sollen gleichzeitig den folgenden Anforderungen entsprechen:

- Der gelagerte Wellenzapfen soll sich mechanisch starr verhalten.
- Der Reibungskoeffizient soll möglichst klein sein.
- Es darf in den Halteperioden oder während der Beschleunigung bzw. Verlangsamung unter Wirkung des Oberflächendruckes keine bleibende Formänderung auftreten.
- Die Kühlfläche soll entsprechend groß sein.
- Es muß stets ein minimales Spiel vorhanden sein (Grundbedingung der Flüssigkeitsschmierung).

Im folgenden wollen wir den Fall von Gleitlagern mit Spiel behandeln, deren radiale Belastung als Funktion der Zeit  $t$  unverändert bleibt.

Wir finden in der ungarischen Fachliteratur über Gleitlager [1, 3] die theoretischen und praktischen Formeln der Zusammenhänge zwischen den

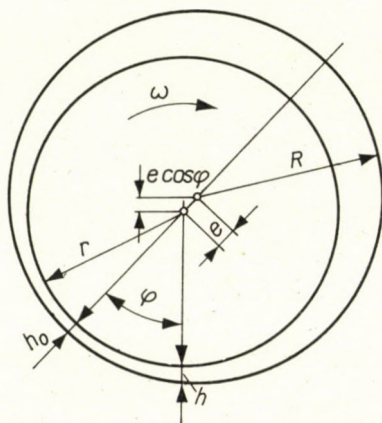


Abb. 1. Exzentrische Lage des Wellenzapfens

verschiedenen Kennwerten dieser Lager. Dies sind die folgenden (s. Abb. 1):

a) Spiel:  $J = D - d$ .

b) Relatives Spiel:  $\psi = \frac{D - d}{d} = \frac{J}{d} = \frac{R - r}{r} = \frac{\Delta r}{r}$ .



- c) Relative Exzentrizität:  $\varepsilon = e/\Delta r$ .
- d) Relatives Spaltmaß:  $h/\Delta r = 1 - \varepsilon \cos \varphi$ .
- e) Relative Ölschichtstärke:  $h_0/\Delta r = 1 - \varepsilon = \delta$ .
- f) Lagerkennzahl:  $\Phi = \bar{p} \psi/\eta\omega = \Phi(\varepsilon, \varphi)$ .
- g) Reibungskoeffizient in zweierlei Form:

$$\mu = C(\varepsilon, \varphi_1) \psi = K(\varepsilon, \varphi_1) \sqrt{\frac{\eta\omega}{\bar{p}}} \quad (1)$$

Gebräuchlich sind für die Größen in a)–g) die folgenden Zeichen:  $D$  – Durchmesser der Lagerbohrung;  $d$  – Durchmesser des gelagerten Zapfens;  $R$  – Halbmesser der Lagerbohrung;  $r$  – Halbmesser des Zapfens;  $\Delta r$  – Halbmesserdifferenz zwischen  $R$  und  $r$ ;  $e$  – Exzentrizität zwischen dem Lagerbohrungsmittelpunkt und Zapfenmittelpunkt während des Laufens;  $\varphi$  – Polarkoordinate;  $h_0$  – kleinste Spaltweite;  $\bar{p}$  – Druckmittelwert;  $\eta$  – Viskosität des Schmiermittels;  $\omega$  – Winkelgeschwindigkeit des Zapfens.

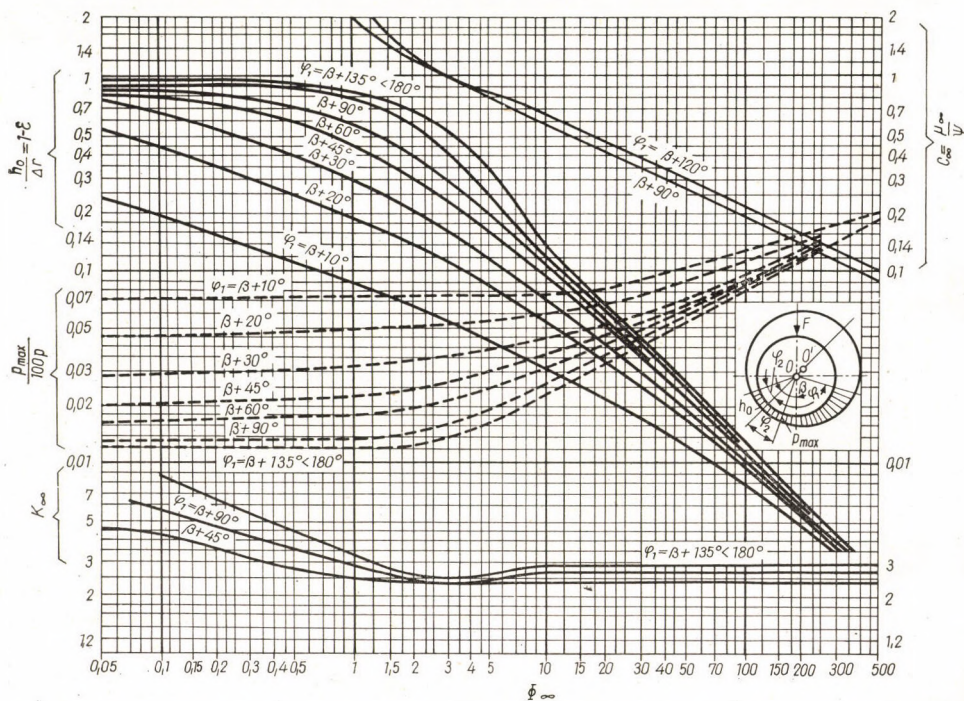


Abb. 2. Änderung der relativen Dicke der Ölschicht und Änderung der Koeffizienten der Reibungszahl als Funktion der Lagerkennzahl (modifiziertes ten BOSCH-Diagramm)

Am besten werden die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Kennwerten der Schmieröle durch die von TEN BOSCH aufgestellten Kurven [4] dargestellt (Abb. 2). Nun haben wir die ursprünglichen Koordinaten für die von uns bevorzugten Lagerkennzahlen umgerechnet. Daher mußte auch die



Funktion  $K$ , d. h. die sogenannte Reibungszahl, gegenüber dem TEN BOSCHSchen Diagramm abgeändert werden.

Es muß noch betont werden, daß auch der Wert von  $\Phi$  gemäß des Längenmaßes  $l$  veränderlich ist, eben infolge des Druckmittelwertes  $\bar{p}$ , welcher in der Formel für die Lagerkennzahl vorkommt ( $\bar{p} = F/dl$ , wo  $F$  = die radiale Belastung ist). Die Abszisse in Abb. 2 trägt die »Lagerkennzahl« für ein unendlich langes Lager. Wenn wir also diese Kurven verwenden wollen, so muß vorerst der zur endlichen Lagerlänge berechnete  $\Phi$ -Wert auf das unendlich lange Lager umgerechnet werden.

Es soll  $\Phi_l$  die Kennziffer für eine endliche Lagerlänge, und  $\Phi_\infty$  die Kennziffer für eine unendliche Lagerlänge bedeuten. Eine schnelle Umrechnung ist möglich mit Hilfe der Kurven in Abb. 3, die wir ebenfalls durch Umrechnung aus einem TEN BOSCHSchen Diagramm gewonnen haben, um eine für den Rechnungsgang vorteilhaftere Kurvenschar zu erhalten.

Demnach kann in Kenntnis des Wertes

$$\Phi_l = \frac{\bar{p}\psi^2}{\eta\omega} \quad (2)$$

(was auch als SOMMERFELDSche Zahl bekannt ist) der Wert  $f_l$  dem Diagramm in Abb. 3 als Funktion von  $l/d$  entnommen, und auf Grund der Formel  $\Phi_\infty = f_l \Phi_l$  die Kennzahl für den Fall des »unendlichen« leicht berechnet werden.

Die Dimensionen ( $d$  und  $l$ ) der Gleitlager ergeben sich bei bekannter Belastung  $F$ , und bei Annahme des Wertes  $\bar{p}$  und der Verhältniszahl  $l/d$ , in einfacher Weise. Es müssen noch die Maße  $d$  und  $l$  auf Festigkeit kontrolliert werden, doch können diese Werte durch die bereits bestimmten Dimensionen der Welle oder eines mitwirkenden Maschinenelementes beeinflusst werden.

In der uns bekannten Literatur wird zunächst entweder *das relative Spiel* ( $\psi$ ) oder *der Reibungskoeffizient* ( $\mu$ ) im voraus gewählt. Bei beiden Methoden ist der eigentliche Zweck die *Feststellung der wahrscheinlichen Lagertemperatur*, um alle Lagermerkmale zu fixieren, und die Richtigkeit der gewählten Ausgangswerte zu kontrollieren. Nachdem man die Lagerkennwerte festgestellt hat, ist es noch üblich, *die Passung von Zapfen und Lager* und gegebenenfalls *die Art der Oberflächenbearbeitung* anzugeben.

Im folgenden wollen wir den Gedankengang zur Berechnung eines ölgeschmierten Gleitlagers mit unveränderlicher Drehzahl und bei gleichbleibender Belastung derart zusammenfassen, daß dabei alle bekannten Faktoren dieses Maschinenelementes mit in Betracht gezogen seien.

1. Als erster Schritt erfolgt nun die Wahl des mittleren Lagerdruckes  $\bar{p}$  mit Rücksicht auf die konstruktive Lage, die Beschaffenheit und die wahrscheinliche Betriebsart (Tab. 1).



In Abhängigkeit der von dem Gleitlager erfordernten Genauigkeit wollen wir aus der in der Fachliteratur [2] empfohlenen Passungs-Auswahl (H7/g6, f7, e8, d8, b8, a9 oder d9) die richtige Passung wählen.

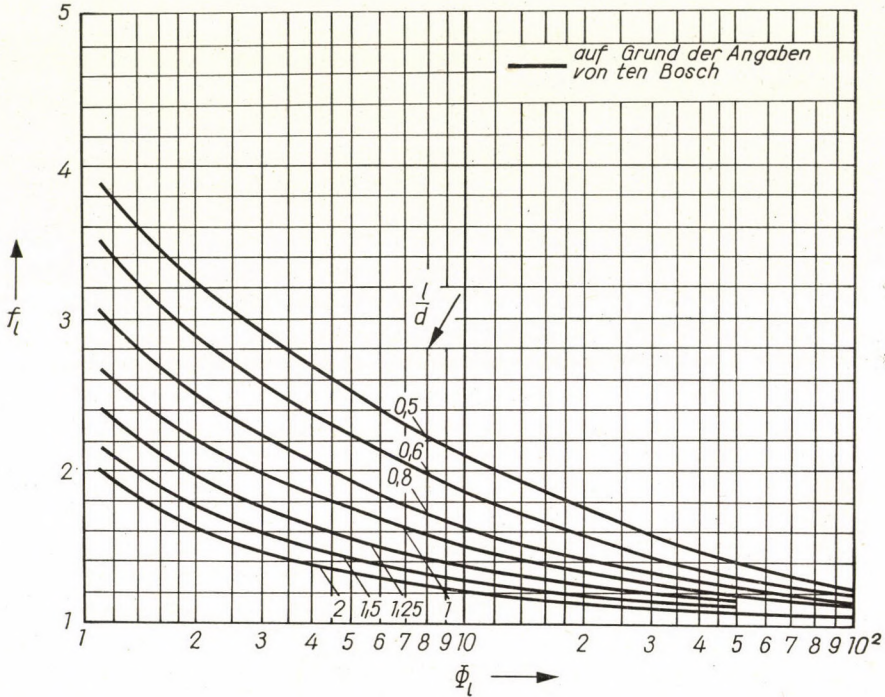


Abb. 3. Umrechnung von der Lagerkennzahl endlicher Länge auf Werte der Kennzahl der unendlichen Länge (modifiziertes ten BOSCH-Diagramm)

2. Mit der gewählten Passung ist laut Abb. 4 das Maß  $2 \Delta r$  bereits gegeben, und auch das relative Spiel

$$\psi = \frac{2\Delta r}{d}$$

zu berechnen.

Im Sinne der Normvorschriften bezieht sich dieses relative Spiel auf  $20^\circ\text{C}$  als Normaltemperatur. Nun entsteht aber im Lager bei gleicher Umdrehungszahl und unveränderter Belastung eine höhere Temperatur. Es ist aber zweckmäßig, das sogenannte kalte Spiel  $\psi_{20^\circ\text{C}}$  auf das warme Spiel umzurechnen.

Diese Umrechnung kann nach der Methode FINDEISEN [6] erfolgen. In Abb. 5 ist die Änderung der Halbmesser des Zapfens und der Lagerbohrung als Funktion der Temperatur dargestellt. Die abweichende thermische Ausdehnung ist teils auf die Verschiedenheit des Konstruktionsmaterials, teils auf die Verschiedenheit der Wärmeabfuhr zurückzuführen.

**Tabelle 1**  
Angaben zum Entwerfen von Gleitlagern

| Maschinentype                                | Lagertype        | $\bar{p}$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\eta$    |                                      |
|--|------------------|---------------------------------|-----------|--------------------------------------|
|  |                  |                                 | °E        | kg s/cm <sup>2</sup> 10 <sup>8</sup> |
| Kraftfahrzeuge und<br>Flugzeuge              | Hauptlager       | 60...120                        | 1,8       | 7...8                                |
|  | Kurbelzapfen     | 110...250                       | 1,8       | 7...8                                |
|  | Kolbenbolzen     | 160...360                       | 1,8       | 7...8                                |
| Viertakt-Motor                               | Hauptlager       | 50...90                         | 3,5...10  | 20...65                              |
|  | Kurbelzapfen     | 100...130                       | 3,5...10  | 20...65                              |
|  | Kolbenbolzen     | 130...160                       | 3,5...10  | 20...65                              |
| Zweitakt-Motor                               | Hauptlager       | 40...60                         | 3,5...9   | 20...61                              |
|  | Kurbelzapfen     | 70...100                        | 3,5...9   | 20...61                              |
|  | Kolbenbolzen     | 90...130                        | 3,5...9   | 20...61                              |
| Schiffs-Dampfmaschine                        | Hauptlager       | 40                              | 3,5       | 20                                   |
|  | Kurbelzapfen     | 45                              | 6,2       | 40                                   |
|  | Kreuzkopfbolzen  | 110                             | 4,7       | 30                                   |
| Stabile Dampfmaschine,<br>langsamlaufend     | Hauptlager       | 30                              | 9,0       | 60                                   |
|  | Kurbelzapfen     | 110                             | 12,0      | 80                                   |
|  | Kreuzkopfbolzen  | 130                             | 9,0       | 60                                   |
| Stabile Dampfmaschine,<br>schnelllaufend     | Hauptlager       | 20                              | 2,5       | 15                                   |
|  | Kurbelzapfen     | 45                              | 4,7       | 30                                   |
|  | Kreuzkopfbolzen  | 130                             | 4,0       | 25                                   |
| Kolbenpumpe und<br>Kompressor                | Hauptlager       | 20                              | 4,7...12  | 30...80                              |
|  | Kurbelzapfen     | 45                              | 4,7...12  | 30...80                              |
|  | Kreuzkopfbolzen  | 70                              | 4,7...12  | 30...80                              |
| Dampflokomotive                              | Triebwelle       | 100                             | 15        | 100                                  |
|  | Schubstangenkopf | 140                             | 6,2       | 40                                   |
|  | Kreuzkopfbolzen  | 280                             | 4,7       | 30                                   |
| Eisenbahnwaggon                              | Achslager        | 40                              | 15        | 100                                  |
| Dampfturbine                                 | Hauptlager       | 7...20                          | 1,2...2,7 | 2...16                               |
| Generator, Elektromotor,<br>Zentrifugalpumpe | Rotorlager       | 7...14                          | 4,0       | 25                                   |
| Webstuhl                                     | Spindel          | 0,1                             | 1,2       | 2                                    |
| Werkzeugmaschine                             | Hauptlager       | 21                              | 6,2       | 40                                   |
| Exzenterpresse, Schere                       | Hauptlager       | 280                             | 15        | 100                                  |
| Walzwerk                                     | Hauptlager       | 560                             | 15        | 100                                  |



Mit den Bezeichnungen der Abb. 5 kann geschrieben werden:

$$\psi_{20^\circ \text{C}} = \frac{J_{\max} + J_{\min}}{2 d_0} \quad \text{und} \quad \psi_{\vartheta} = \frac{J'_{\max} + J'_{\min}}{2 d'_0},$$

wo  $\psi_{\vartheta}$  das relative Spiel im Betrieb, d. h. bei der Betriebstemperatur  $\vartheta$  bedeutet.

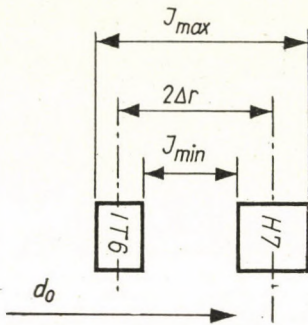


Abb. 4. Bestimmung des effektiven Spielmittelwertes aus den Toleranzfeldern

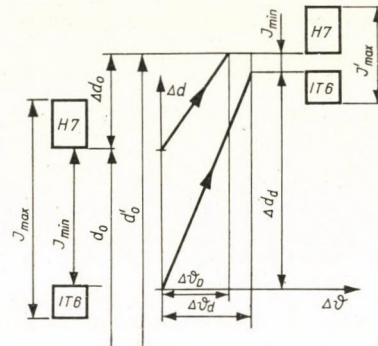


Abb. 5. Änderung der Durchmesserwerte für Zapfen bzw. für Bohrung, als Funktion der Temperatur

Aus Abb. 5 folgt noch der Zusammenhang:

$$d'_0 = d_0 + \Delta d_D;$$

$$J'_{\max} = J_{\max} + \Delta d_D - \Delta d_d;$$

$$J'_{\min} = J_{\min} + \Delta d_D - \Delta d_d;$$

und daraus:

$$\psi_{\vartheta} = \frac{J_{\max} + J_{\min} + 2 \Delta d_D - 2 \Delta d_d}{2(d_0 + \Delta d_D)} \approx \frac{J_{\max} + J_{\min}}{2 d_0} + \frac{\Delta d_D - \Delta d_d}{d_0}.$$

Es gilt für die Durchmesseränderung  $\Delta d$  allgemein:

$$\Delta d = \beta d_0 \frac{\Delta \vartheta}{100},$$

wo  $\beta$  den linearen Wärmeausdehnungs-Koeffizienten in  $\mu\text{m}/^\circ\text{C}$  für 100 mm Länge bedeutet.

Es gilt also für  $\psi_{\vartheta}$ :

$$\psi_{\vartheta} = \psi_{20^\circ \text{C}} - \frac{\beta_d \Delta \vartheta_d - \beta_D \vartheta_D}{100} = \psi_{20^\circ \text{C}} - \psi_s.$$

In der Fachliteratur wird auf Grund von Versuchen für  $\psi_s$  die folgende vereinfachte Formel angenommen [1]:

$$\psi_s = S(\vartheta - 20^\circ \text{C}) 10^{-6}, \quad (3)$$

wo für  $S$ , je nach dem Konstruktionsmaterial der Lagerteile, der Wert aus Tab. 2 entnommen wird.

Wir können also umrechnen:

$$\psi = \psi_{20^\circ \text{C}} - \psi_s. \quad (4)$$

Tabelle 2

Werte des Faktors *S* für verschiedene Lagermetalle und verschiedene Bauarten

| Konstruktionsmaterial<br>der Lagerbüchse oder<br>Lagermetallausguß | Einbaustelle aus                             |  |                                 |                         |  |
|--|--|--|---------------------------------|-------------------------|--|
|  | Stahl oder Grauguß                           |  |                                 | Leichtmetall            |  |
|  | Dünnwandiges<br>Lagergehäuse,<br>Stangenkopf | Dickwandiges<br>Lagergehäuse,<br>Gußstück mit<br>freier Wärme-<br>Ausdehnung | Schweres<br>Gußstück<br>starres | Dünnwandiges<br>Gehäuse | Dickwandiges<br>Gehäuse mit<br>freier Wärme-<br>Ausdehnung |
| Aluminium-Legierungen  |  |  |                                 |                         |  |
| Al—Cu—Mg   | 16...18                                      | 22...24  | 27...29                         |                         |  |
| Al—Cu  | 16...18                                      | 22...24  | 27...29                         |                         |  |
| Al—Si  | 13...14                                      | 19...22  | 24...27                         |                         |  |
| Al—Mg  | 19...10                                      | 25...26  | 30...31                         | 0...4                   | 5...6  |
| Al—Mg—Mn   | 19...20                                      | 25...26  | 30...31                         |                         |  |
| Ks-280   | 12   | 18   | 23                              |                         |  |
| Magnesium-Legierungen  | 19   | 25   | 30                              |                         |  |
| Zinnbronzen  |  |  |                                 |                         |  |
| ÖBz 20   | 12   | 18   | 23                              |                         |  |
| ÖBzz 10  | 11,5   | 17,5   | 22,5                            |                         |  |
| ÖBz 6  | 11   | 17   | 22                              |                         |  |
| Aluminiumbronze  | 11   | 17   | 22                              |                         |  |
| Messing  | 13   | 19   | 24                              |                         |  |
| Rotguß   | 12   | 17,9   | 23                              |                         |  |
| Zinnlegierte Lager-<br>metalle                                     |  |  |                                 |                         |  |
| 90% Sn   | 17   | 22,8   | 28                              |                         |  |
| 80% Sn   | 17   | 21,7   | 27                              |                         |  |
| 40% Sn   | 16,5   | 22,4   | 27,5                            |                         |  |
| 5% Sn  | 18   | 24,3   | 29                              |                         |  |
| Lagermetall  | 27   | 33   | 38                              |                         |  |
| Bleibronzen  |  |  |                                 |                         |  |
| PbBz 5   | 12   | 17,9   | 23                              |                         |  |
| PbBz 13  | 12   | 18,3   | 23                              |                         |  |
| PbBz 20  | 12   | 18,2   | 23                              |                         |  |
| PbBz 25  | 12,5   | 18,6   | 23,5                            |                         |  |
| Zinkgußlegierung   | 20...24                                      | 26...30  | 31...35                         | 3...4                   | 6...7  |
| Stahl  | 5  | 11   | 16                              |                         |  |
| Gußeisen   | 3...4  | 9...10   | 15                              |                         |  |
| Kunststoff   | 34...44                                      | 40...50  | 45...55                         | 18...28                 | 24...34  |



In der Gleichung (3) ist  $\vartheta$  die wahrscheinliche Temperatur der Schmier-schicht (= Lagertemperatur), welche bei hoher Umdrehungszahl und hoher Belastung 70...80° C erreichen kann.

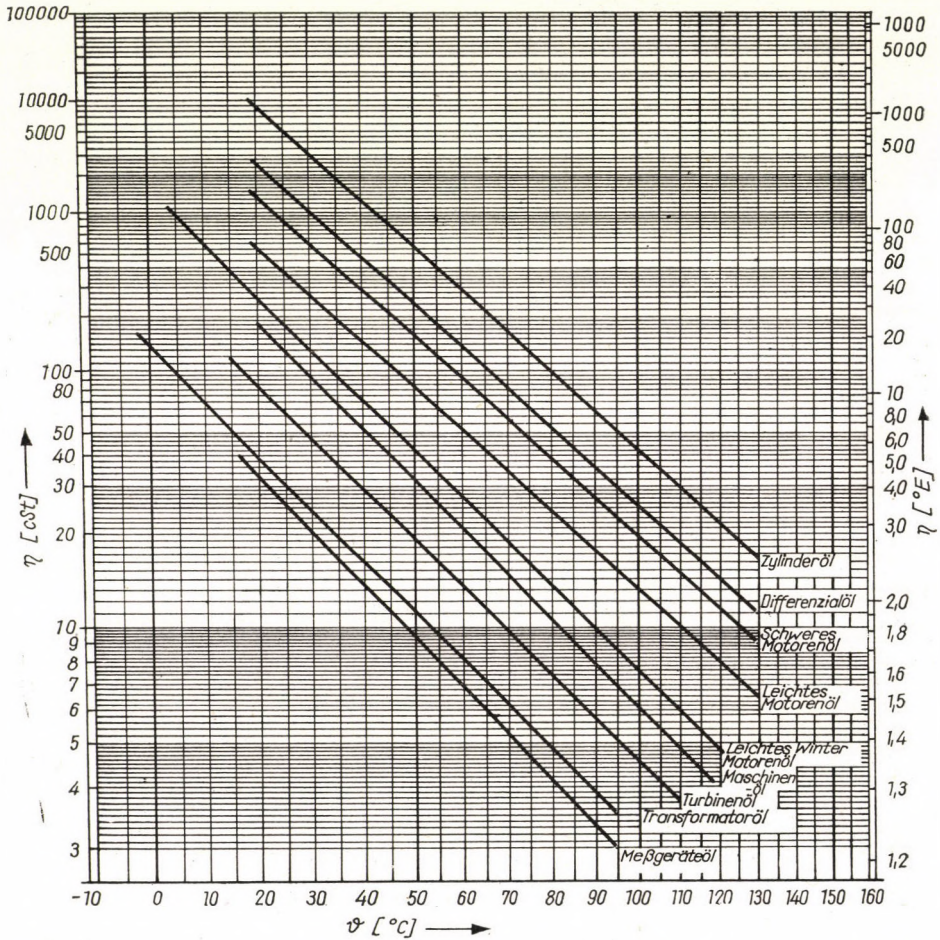


Abb. 6. Änderung der Viskositätszahl von ungarischen Mineralölsorten als Funktion der Temperatur

3. Zur angenommenen Lagertemperatur wählen wir den Schmierstoff aus Abb. 6. Nun sind die Werte  $\bar{p}$ ,  $\psi$ ,  $\eta$  und  $\omega$  bekannt, d. h. die Lagerkennzahl  $\Phi_l$  kann aus Gleichung (2) berechnet und auf  $\Phi_{\infty}$  umgerechnet werden. Aus Abb. 2 erhalten wir die Faktoren  $C_{\infty}$  und  $K_{\infty}$  als Funktionen von  $\Phi_{\infty}$ , weiter die Werte  $\delta$  bzw.  $\varepsilon$ .



4. *Wir kontrollieren die Annahme von  $\vartheta$ .* Die Schmierschichttemperatur ergibt sich aus der Wärmegleichgewichts-Bedingung des Lagers. Die Wärmeleistung des Lagers ergibt sich zu:

$$P_{\mu} = \mu F r \omega \text{ [kg cm/s]}.$$

Davon wird mit dem abfließenden *Schmieröl* die folgende Wärmeleistung abgeführt:

$$P_1 = 42\,700 c \gamma q(\vartheta - \vartheta_0) \text{ [kg cm/s]},$$

und gleichzeitig ist die durch die Welle bzw. den Lagerkörper *abgeleitete* Wärmeleistung:

$$P_2 = \alpha dl(\vartheta - \vartheta') \text{ [kg cm/s]}.$$

Hier ist  $c = 0,48 + 0,0007(\vartheta - 100^{\circ} \text{C})$  die *spezifische* Wärme des Schmieröls in [kcal/kg °C]; weiter ist

$$\gamma = [\gamma_{20^{\circ} \text{C}} - 0,00065(\vartheta - 20^{\circ} \text{C})] 10^{-3},$$

das spezifische Gewicht des Öls in [kg/cm<sup>3</sup>] beträgt

$$\gamma_{20^{\circ} \text{C}} \approx 0,894 \text{ kg/dm}^3.$$

Ferner kann  $q = q^* l d$  aus dem Diagramm laut [1] bzw. [7] berechnet werden (s. Abb. 7), und für den Wärmeleitungskoeffizienten  $\alpha$  [kg/cm s °C] gelten folgende Angaben:

|                     |       |
|---------------------|-------|
| in leichten Lagern  | 0,16; |
| in mittleren Lagern | 0,25; |
| in schweren Lagern  | 0,44. |

$\vartheta_0$  ist die Temperatur des zugeführten Öls,  $\vartheta'$  ist die Temperatur der Umgebung in °C.

Im Falle des Wärmegleichgewichtes ist:

$$P_{\mu} = P_1 + P_2,$$

d. h.

$$\mu F r \omega = 42\,700 c \gamma q(\vartheta - \vartheta_0) + \alpha dl(\vartheta - \vartheta'),$$

bzw. mit den bekannten Bezeichnungen laut [7]:

$$\frac{\mu/\psi}{q^*/r\omega\psi} = \left(42700 c \gamma + \frac{\alpha}{q^*}\right) \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\bar{P}} + \frac{\alpha}{q^*} \frac{\vartheta_0 - \vartheta'}{\bar{P}}. \quad (5)$$

Der Zähler und der Nenner an der linken Seite lassen sich bei gegebenen Werten  $d, l, \Phi_l$  aus Abb. 7. [1], [7] ablesen, und auf der rechten Seite ist nur  $\vartheta$  unbekannt, also kann diese Temperatur errechnet werden.



Ist  $\vartheta$  als Ergebnis dieser Berechnung höher als die angenommene Betriebstemperatur, so ist man gezwungen, eine künstliche Lagerkühlung vorzunehmen. Ist sie aber kleiner, so bedeutet das nur soviel, daß man die effektive Lagertemperatur zwischen dem angenommenen und dem berechneten Wert zu erwarten hat.

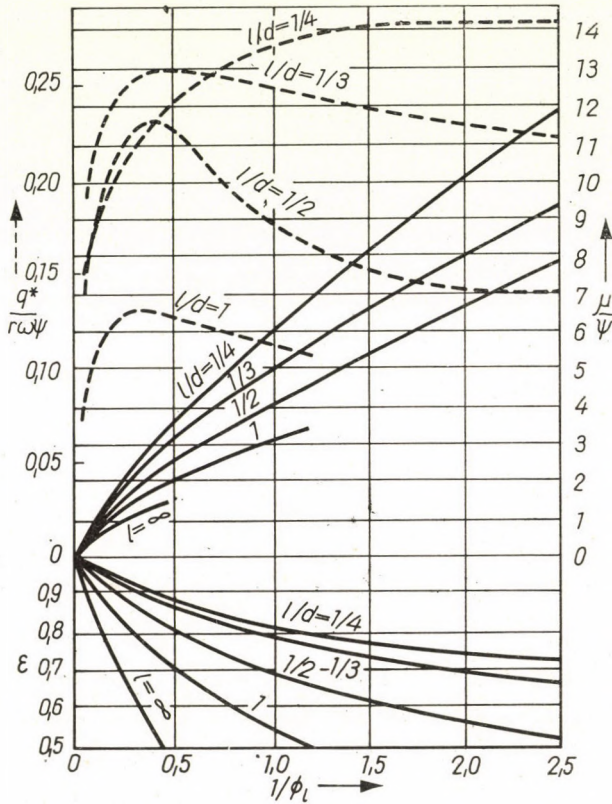


Abb. 7. Die Veränderlichen  $\mu/\psi$  und  $q^*/r\omega\psi$  als Funktionen von  $1/\phi_l$

5. Aus dem Diagramm von TEN BOSCH (Abb. 2) kann man den Wert  $\epsilon$  ablesen und aus der Gl. (1) die kleinste Ölschicht  $h_0$  berechnen. Aus der Fachliteratur (Abb. 8) ist es bekannt, daß das Maß  $h_0$  größer sein muß als die Summe der Oberflächenunebenheiten von Zapfen und Lager. Dies bietet einen Anhaltspunkt zur Bestimmung des erwünschten Wertes von  $h_q$  für die Oberflächenrauheit, der aber meistens feiner ist als das zur gewählten Passung normmäßig vorgeschriebene Maß.

• Es sollen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  die Oberflächenunebenheit des Zapfens bzw. des Lagers bedeuten, so gilt für den Grenzfall:

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_0.$$

Für das Maß von  $h_0$  ist es gebräuchlich, die Teilung  $\delta_1 = h_0/3$  vorzuschreiben, um die Bearbeitung des Zapfens zu erleichtern. Ist nun einmal der Wert  $\delta_1$  und auch  $\delta_2$  festgestellt, so kann man auf Grund der Angaben der Fachliteratur [8] die Kennzahlen der Oberflächenrauheit  $h_{q1}$  bzw.  $h_{q2}$  berechnen (Abb. 9).

*Beispiel 1.* Wir wollen die Kennzahlen eines Lagers mit den folgenden Ausgangsdaten berechnen:  $F = 2000 \text{ kg}$ ,  $n = 1000/\text{min}$ ,  $\bar{p} = 80 \text{ kg/cm}^2$  (Tab. 1), und  $l/d \approx 1$ .

Auf Grund von  $\bar{p} = F/l d$  und  $l = d$  ergibt sich

$$d = \sqrt{\frac{F}{\bar{p}}} = \sqrt{\frac{2000}{80}} \text{ cm} = 5 \text{ cm} = 50 \text{ mm}.$$

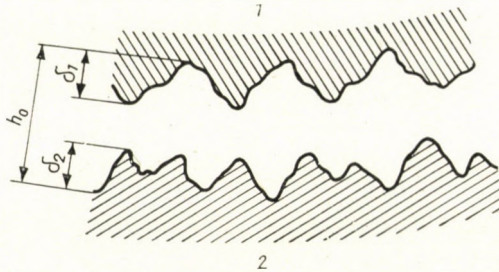


Abb. 8. Grenze kleinsten Spaltmaßes

Die gewählte Passung sei **H7/e8**, d. h.

$$\varnothing 50 \text{ H7} = \varnothing 50 + \begin{matrix} 0,025 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\varnothing 50 \text{ e8} = \varnothing 50 - \begin{matrix} 0,050 \\ 0,089 \end{matrix}$$

Es ist also die mittlere Durchmesserabweichung:

$$2 \Delta r = \left( \frac{0,025}{2} + \frac{0,050 + 0,089}{2} \right) \text{ mm} = 0,0825 \text{ mm},$$

und das relative Spiel:

$$\psi_{20^\circ \text{C}} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{0,04125}{25} \approx 0,00165 = 1,65\text{‰}.$$

Als Lagertemperatur soll  $\vartheta = 60^\circ \text{C}$  angenommen werden. Wenn wir als Lagermetall Messing verwenden, so ist aus Tab. 2 der Wert  $S = 19$  zu entnehmen, und auf Grund der Gl. (3) ergibt sich:

$$\varphi_s = S(\vartheta - 20^\circ \text{C})10^{-6} = 19(60 - 20)10^{-6} = 760 \cdot 10^{-6} = 0,76\text{‰},$$

d. h. laut Gl. (4):

$$\varphi_\vartheta = \varphi_{20^\circ \text{C}} - \varphi_s = (1,65 - 0,76)\text{‰} = 0,89\text{‰},$$

und das mittlere Spiel in Betrieb bei Temperatur  $\vartheta$ :

$$\Delta r_\vartheta = \varphi_\vartheta r = 0,89 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \text{ mm} = 22,25 \cdot 10^{-3} \text{ mm} = 22,25 \mu\text{m}.$$

Das gewählte Schmieröl soll bei  $\vartheta = 60^\circ \text{C}$  einen Viskositätskoeffizienten  $\eta = 4^\circ \text{E} \approx 0,26 \cdot 10^{-6} \text{ kgs/cm}^2$  haben. Also haben wir mit Gl. (2):

$$\Phi_l = \frac{\bar{p}\psi^2}{\eta\omega} = \frac{80 \cdot 0,89^2 \cdot 10^{-6}}{0,26 \cdot 10^{-6} \cdot 104,5} = 2,32;$$



Aus Abb. 3 ergibt sich zu diesem  $\Phi_l$  Wert die Zahl  $f_l = 2,1$ , und daher ist  $\Phi_\infty = f_l \Phi_l = 2,1 \cdot 2,32 = 4,87$ .

Aus Abb. 2 findet man die relative Ölschichtdicke  $\delta$  als Funktion von  $\Phi_\infty$  zu dem Parameter  $\beta + 90^\circ$ :

$$\delta = \frac{h_0}{\Delta r_\beta} = 1 - \varepsilon = 0,27 \text{ und } \varepsilon = 0,73 ,$$

und ferner noch

$$h_0 = \delta \Delta r_\beta = 0,27 \cdot 22,25 \mu\text{m} = 6 \mu\text{m}.$$

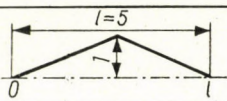
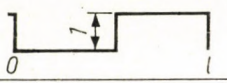
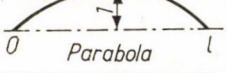

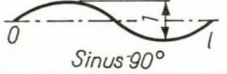
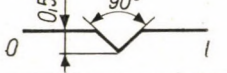


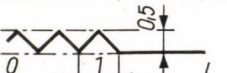

|    |   | $\delta_1, \delta_2$ | $h_q$ |
|----|---|----------------------|-------|
| 1  |    | 1                    | 0,289 |
| 2  |    | 1                    | 0,5   |
| 3  |    | 1                    | 0,299 |
| 4  |    | 1                    | 0,299 |
| 5  |    | 1                    | 0,354 |
| 6  |   | 0,5                  | 0,119 |
| 7  |  | 0,1                  | 0,011 |
| 8  |  | 1                    | 0,298 |
| 9  |  | 0,5                  | 0,161 |
| 10 |  | 0,312                | 0,104 |

Abb. 9. Die Werte  $\delta_1$  und  $\delta_2$  von verschiedenen Oberflächenunebenheiten

Wir wollen die Beschaffenheit der Oberflächenunebenheit gemäß der 9. Reihe der Abb. 9 wählen und schreiben daher:

$$h_{q1} + h_{q2} < \frac{0,161}{0,5} h_0 = \frac{0,161 \cdot 6}{0,5} \mu\text{m} \approx 1,94 \mu\text{m}.$$

Dementsprechend könnte man sowohl für den Zapfen wie auch für die Bohrung

$$\sqrt[0,8]{\dots}$$

vorschreiben. Um aber mit der notwendigen Sicherheit zu verfahren, wollen wir folgendes vorschreiben:

für den Zapfen; 0,4 für die Bohrung; 0,8.

Zur der gewählten Passung wird das »Grad fein« laut Vorschriften der Norm MSZ 9655-59 R »Oberflächenrauheit für die ISA/T Qualitäten« inhaltlich entsprechen.

Die Oberflächen der Gleitlager müssen demgemäß einer Feinbearbeitung unterzogen werden.

Aus Abb. 2 kann man ebenfalls zum Parameter  $\beta + 90^\circ$  auch den Wert  $C_\infty \approx 0,89$  ablesen. Die *Reibungszahl* ist nun zu einem Lager endlicher Länge:

$$C_l = f_l C_\infty = 2,1 \cdot 0,89 = 1,87$$

und hieraus ergibt sich die linke Seite der Gl. 5:

$$\frac{\mu/\varphi}{q^*/r \omega \psi} = \frac{C_l}{q^*/r \omega \varphi} = \frac{1,87}{0,128} = 14,6,$$

wobei der Wert  $q^*/r \omega \varphi$  als Funktion  $f(1/\Phi_l)$  für den Fall  $l = d$  aus Abb. 7 gefunden wurde. Zum Rechnungsgang benötigen wir noch die folgenden Werte:

$$c = 0,48 + 0,0007(60 - 100) \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \approx 0,452 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}};$$

$$\gamma = [0,894 - 0,00065(60 - 20)]10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} = 0,868 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}.$$

Unsere weiteren Annahmen sind:  $\vartheta' = 20^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta_0 = 40^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 0,25 \text{ kg/cm s}^\circ\text{C}$ , und so ergibt sich aus Gl. (5)  $\vartheta = 76^\circ\text{C}$ ; da diese Temperatur die angenommene um  $6^\circ\text{C}$  übersteigt, ist eine Lagertemperatur zwischen diesen Grenzen zu erwarten. Natürlich erfordert eine Differenz von  $6^\circ\text{C}$  keine Wiederholung der Berechnung, schließlich ist eine Lagertemperatur von  $76^\circ\text{C}$  auch noch erlaubt.

## II

Um nun auf die Dimensionierung von *fettgeschmierten* Lagern zu kommen, muß festgestellt werden, daß uns heute noch keine zeitgemäße theoretische Grundlage bekannt ist, welche eine praktische Berechnung ermöglichen dürfte. Man kann die hydrodynamische Theorie des Schmiervorganges nur mit gewissen Einschränkungen auf die Fettschmierung anwenden, da die *rheologischen Eigenschaften* der Schmierfette von der *Newtonschen* Gesetzmäßigkeit der Schmieröle [9] stark abweichen.

Die Deformations-Erscheinungen und die Fließvorgänge einzelner Stoffe bilden den Gegenstand der *Rheologie*. Die rheologischen Untersuchungen beziehen sich auf die Feststellung des rheologischen Verhaltens als Funktion der wirkenden Kraft, der Formänderung und der Zeit.

Der Widerstand des Stoffes gegen Deformationskräfte ist die *Konsistenz*. Bei Schmierfetten ist die obere Grenze der Konsistenz der Tropfpunkt. Zur Messung der Konsistenz unterhalb des Tropfpunktes dient die *Penetration*. Je größer die Penetrationstiefe, um so weicher ist das Schmierfett.



Das Fließen von Schmierfetten kann mit Hilfe der sogenannten BINGHAM-schen Geraden (Abb. 10) dargestellt werden [10], [11]. Man sieht, daß das Fließen erst bei einer bestimmten Belastung  $\tau_0$  beginnt. Die Gleichung dieser Geraden ist:

$$\tau - \tau_0 = \eta \frac{du}{dy},$$

wo  $\tau$  als die auftretende Schubspannung,  $\tau_0$  als die Schubspannung bei dem unteren Fließpunkt, beide in  $\text{kg/cm}^2$  zu verstehen sind;  $du/dy$  ist der Geschwindigkeitsgradient in  $\text{cm/s cm}$ .

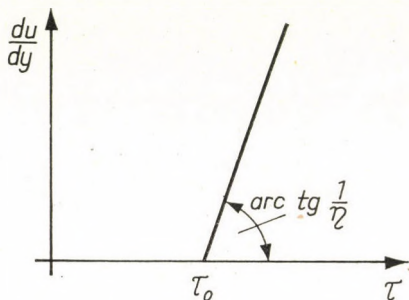


Abb. 10. Die BINGHAM'sche Gerade

Es soll nun die Gleichung der BINGHAM'schen Geraden in die hydrodynamische Grundgleichung

$$dp \, dy - d\tau \, dx = 0$$

substituiert werden; ferner soll unter Annahme einer benetzten Zapfenoberfläche die Differentialgleichung auf Grund der hydrodynamischen Voraussetzungen gelöst werden; wir wollen hier nur das Ergebnis der ganzen Ableitung mitteilen, u. zw. kann man für die spezifische Reibungskraft pro cm Länge des Lagers anschreiben:

$$S_1 = \frac{F \mu}{b} = \eta \frac{U}{\psi} \Theta + 2 r \pi \tau_0,$$

wo  $U$  die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens,  $\Theta$  den durch Integration erhaltenen Funktionswert bedeutet.

Das erste Glied der rechten Seite ist für viskose Flüssigkeiten aus der hydrodynamischen Theorie der Schmierung bekannt, das zweite Glied ist der Kraftzuschuß im Falle der Fettschmierung.

Die Formel (2) der Lagerkennzahl kann nun auch bei Schmierfett verwendet werden. Die bisher bekannten Messungen haben nämlich erwiesen, daß

die Richtungstangente der BINGHAMSchen Geraden mit guter Annäherung dem Reziprokwert der Viskositätskoeffizienten gleichgestellt werden kann. Diese Annäherung könnte mit dem Wert  $\varepsilon$  aus Abb. 2 kontrolliert werden, doch stehen derartige Messungen noch aus.

Wenn man sich also mit der Berechnung auf Basis der BINGHAMSchen

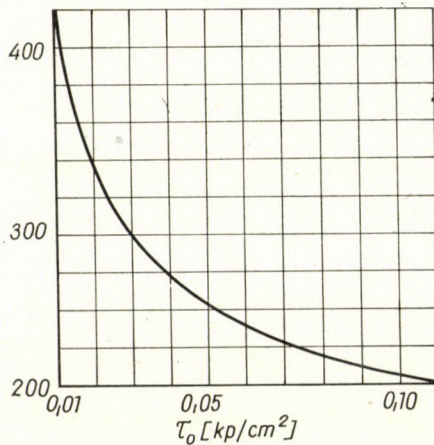


Abb. 11.  $\tau$ -Werte als Funktion der Penetration bei 25° C nach ten Bosch'schen Angaben

Geraden begnügt, so kann der Reibungskoeffizient aus folgender Gleichung berechnet werden:

$$\mu = \frac{S_1}{F_1} = \frac{\eta \frac{U}{\psi} \Theta + 2r \pi \tau_0}{2r \bar{p}} = \frac{\eta \frac{U}{\psi} \Theta}{2r \bar{p}} + \pi \frac{\tau_0}{\bar{p}},$$

und durch Umformung bei Anwendung der Lagerkennzahl:

$$\mu = f_l C_\infty \psi + \pi \frac{\tau_0}{\bar{p}}. \quad (6)$$

Der Abb. 11 kann man den Wert  $\tau_0$  als Funktion der Penetration entnehmen.

*Beispiel 2.* Wir wollen die Kennwerte eines fettgeschmierten Lagers auf Grund der folgenden Ausgangsangaben errechnen:  $F_{\max} = 10\,000$  kg;  $n = 120/\text{min}$ ;  $d = 140$  mm;  $l = 80$  mm.

Mit Rücksicht auf die zu erwartenden großen dynamischen Effekte soll als Zapfenmaterial der Chromvanadiumstahl CrV 135 (nach ungarischer Normbezeichnung) gewählt werden; das Material des Lagers sei Zinnbronze der Qualität Bz. ö. 12 K (laut ungarischer Norm MSZ 710).

Die mittlere Lagerbelastung ist

$$\bar{p} = \frac{F_{\max}}{dl} = \frac{10000}{14,8} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 89 \text{ kg/cm}^2.$$



Als Passung sei H7/e 8, d. h.

$$\varnothing 140 \text{ H7} = \varnothing 140 \begin{matrix} + 0,0040 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\varnothing 140 \text{ e} = \varnothing 140 \begin{matrix} - 0,085 \\ - 0,148 \end{matrix}$$

gewählt.

Der Spielmittelwert:

$$\Delta r = \frac{0,040 + 0,085 + 0,148}{4} = 0,0682 \text{ mm.}$$

Das Mittel des relativen Spiels:

$$\psi_{20^\circ\text{C}} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{0,0682}{70} = 0,974 \cdot 10^{-3} = 0,974\%$$

Wir wählen  $\theta = 80^\circ\text{C}$  als Betriebstemperatur. Aus Tab. 2 können wir  $S = 11,5$  wählen  
Daher ist

$$\psi_s = S(\theta - 20^\circ\text{C})10^{-6} = 11,5(30 - 20)10^{-6} = 0,690/_{00},$$

und gemäß Gl. (4):

$$\psi_{\delta} = \psi_{20^\circ\text{C}} - \psi_s = (0,974 - 0,69)0/_{00} = 0,2840/_{00};$$

daraus erhalten wir den mittleren Wert des Spieles im Betriebszustand:

$$\Delta r_{\delta} = \psi_{\delta} r = 0,284 \cdot 10^{-3} \cdot 70 \text{ mm} = 0,0198 \text{ mm} = 19,8 \mu\text{m.}$$

Als Schmierfett soll die Sorte (gemäß ung. Norm MSz 13170) gewählt werden, die mit Kalkbasis bei  $25^\circ\text{C}$  eine Penetration von 180 ... 225 aufweist und dessen Schmierölkompone-  
nente mit folgenden Kennzahlen gekennzeichnet ist: Maschinenöl Nr. 40;  $\eta_{50^\circ\text{C}} \approx 6^\circ\text{E} \approx$   
 $\approx 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ kg s/cm}^2$ , d. h.  $\eta_{80^\circ\text{C}} = 2,2^\circ\text{E} \approx 0,11 \cdot 10^{-6} \text{ kg s/cm}^2$ . Es ergibt sich die Lager-  
kennzahl

$$\Phi_l = \frac{\bar{p}\psi_{\delta}^2}{\eta\omega} = \frac{89 \cdot 0,284^2 \cdot 10^{-6}}{0,11 \cdot 10^{-6} \cdot 12,5} = 5,24.$$

Hierzu finden wir aus dem Diagramm in Abb. 3 durch Interpolation bei  $l/d = 0,57$   
den Wert  $f_l \approx 2,3$  und daher:

$$\Phi_{\infty} = f_l \Phi_l = 2,3 \cdot 5,24 = 12,1.$$

Aus Abb. 2 kann man bei  $\Phi_{\infty} = 12,1$  und bei  $\varphi_1 = \beta + 135^\circ$ .

$$\delta = \frac{h_0}{\Delta r_{\delta}} = 1 - \varepsilon \approx 0,12, \text{ d. h. } \varepsilon = 0,88$$

ablesen. Mit Rücksicht auf die dynamische Wirkung ist  $\varepsilon > 0,5$  der erwünschte Fall.

Das kleinste Spaltmaß ist

$$h_0 = \delta \Delta r_{\delta} = 0,12 \cdot 19,8 \mu\text{m} = 2,38 \mu\text{m.}$$

Bei der Annahme, daß die Oberflächentextur den Angaben der Zeile 9 in Abb. 9 ent-  
spricht, gilt:

$$h_{q_1} + h_{q_2} < \frac{0,161}{0,5} h_0 = \frac{0,161 \cdot 2,38}{0,5} \mu\text{m} = 0,765 \mu\text{m.}$$

Die folgende Bedingung scheint die entsprechende Sicherung zu bieten:

$$\sqrt[0,2]{\nabla\nabla\nabla\nabla}$$

für den Zapfen: für das Lager:

$$\sqrt[0,4]{\nabla\nabla\nabla}$$

Bei dieser Passungswahl müssen wir feststellen, daß die »feine Stufe« aus der ung. Norm MSZ 9655-59 R »Oberflächen-Rauheit bei ISA IT Qualitäten« diesen Anforderungen nicht entspricht; es gilt, eine feinere Rauheit vorzuschreiben.

Zur Kontrolle des angenommenen Wertes  $\vartheta$  gilt als Ausgangspunkt nicht der obere Wert  $F_{\max}$ , vielmehr der Mittelwert  $F_m$ . Nehmen wir an, daß  $F_m = F_{\max}/5 = 2000 \text{ kp}$ , so ist auch  $\bar{p}_m = \bar{p}/5 = 18 \text{ kg/cm}^2$ . Daher ist die mittlere Lagerkennzahl  $(\Phi_l)_5 = \Phi_l/5 = 1,05$  und aus Abb. 3 ist bei  $l/d = 0,57$  der Wert  $f_l = 3,7$ ; daraus ist  $(\Phi_\infty)_m = f_l (\Phi_l)_m = 3,7 \cdot 1,05 = 3,8$  und aus Abb. 2 ist  $C_\infty \approx 0,95$ . Aus Abb. 11 wird mit Rücksicht auf die höhere Temperatur zu einer Penetration von 225 der Wert  $\tau_0 = 0,084 \text{ kg/cm}^2$  entnommen.

Also gilt gemäß Gl. (6) für den Reibungskoeffizienten:

$$\mu = f_l C_\infty \psi + \pi \frac{\tau_0}{P_m} = 3,7 \cdot 0,95 \cdot 0,284 \cdot 10^{-3} + \pi \frac{0,084}{18} = 0,01565.$$

Daraus ergibt sich bei einer Gleichgewichtsbedingung zwischen Wärmeentstehung und Wärmeabgabe:

$$P_\mu = \mu F_m r \omega = P_2 = \alpha dl(\vartheta - \vartheta')$$

und mit der Annahme von

$$\alpha = 0,44 \text{ kg/cm s } ^\circ\text{C}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta' + \frac{\mu F_m r \omega}{\alpha dl} = 20^\circ\text{C} + 0,01565 \frac{2 \cdot 10^3 \text{ kg/cm} \cdot 12,6/\text{s}}{0,44 \text{ kg/cm s } ^\circ\text{C} \cdot 14,8 \text{ cm}^2} = \\ &= (20 + 56,5)^\circ\text{C} = 76,5^\circ\text{C}, \end{aligned}$$

d. h. eine Temperatur, die wenig von der vorausgesetzten Temperatur von  $80^\circ\text{C}$  abweicht.

Aus dieser Kalkulation läßt sich die Konsequenz ziehen, daß auch bei einer Fettschmierung die sogenannte »reine Flüssigkeitsreibung« in Erscheinung treten kann, vorausgesetzt, daß wir für einen *fortlaufenden Nachschub* des Schmiermittels sorgen und wenn wir eine Lagerkennzahl wählen, welche zur Technologie der Oberflächenbearbeitung gut paßt.

#### SCHRIFTTUM

1. CZÉGI, J.: Handbuch der Gleitlager. B. I. (In ungarischer Sprache: Siklócsapágy kézikönyve I.) Budapest, 1953
2. VÖRÖS, I.: Maschinenelemente II. (In ungarischer Sprache: Gépelemek II.) Budapest, 1961
3. TERPLÁN, Z.: Maschinenelemente II. (In ungarischer Sprache: Gépelemek. II.) Miskolc, 1955
4. TEN BOSCH, M.: Berechnung der Maschinenelemente. Berlin, 1951
5. MILOWITZ, K.: Auslegung, Bemessung und Gestaltung betriebsicherer Gleitlager. Konstruktion. 11. Jg. 1955. H2.
6. FINDEISEN, F.: Neuzeitliche Maschinenelemente. B. I. Zürich, 1950.
7. CSN O2 3090 »Richtlinien für die Berechnung der Gleitlager und Schalen« (In tschechischer Sprache: Směrnice pro výpočty kluzných ložisek a pouzder. Úřad pro normalizaci. 1952.)
8. KISS, G.: Messungen der feinbearbeiteten Flächen. (In ungarischer Sprache: Finomfelületi mérések.) Budapest, 1953
9. DÉKÁNY, I.: Rheologische Probleme der Gleitlager mit Fettschmierung. (In ungarischer Sprache: A zsírkénésű csúszócsapágyak reológiai problémái. Kandidátusi disszertáció.) Budapest, 1957
10. CSÚRÖS, Z.: Kunststoffe. (In ungarischer Sprache: Műanyagok.) Budapest, 1955
11. KODNIR, D. S.: Die Berechnung der Tragfähigkeit der Gleitlager. (In russischer Sprache.) Moskau, 1948
12. VARGA, J.: Bewegliche Passungen bei den Gleitlagern. (In ungarischer Sprache: Mozgó illesztések különös tekintettel a siklócsapágyakra.) GÉP, Budapest, 1950



13. TERPLÁN, Z.—HERCZEG, I.: Maschinenzeichnen. B. II. (In ungarischer Sprache: Géprajz II.) Miskolc, 1954
14. TERPLÁN, Z.—LÉVAI, I.: Bemerkungen zur Berechnung der Gleitlager. (In ungarischer Sprache: Néhány megjegyzés a siklócsapágyak méretezéséhez.) Járművek—Mezőgazdasági gépek. Budapest 3. Jg. 1956. H. 7
15. LÉVAI, I.: Die Berechnung der Gleitlager mit Fettschmierung durch die hydrodynamische Theorie. (In ungarischer Sprache: Zsírkenésű siklócsapágyak számítása a hidrodinamikai elmélet alapján.) GÉP. Budapest 11. Jg. 1959 H. 6.
16. LÉVAI, I.: Richtlinien der Berechnung der Gleitlager mit Fettschmierung. (In ungarischer Sprache: Zsírkenésű siklócsapágyak méretezésének irányelvei.) Tanulmány a DIMÁVAG Gépgyár számára. Miskolc, 1957

### ZUSAMMENFASSUNG

Die Fachbücher, in denen der zeitgemäße Berechnungsgang von Gleitlagern behandelt wird, vernachlässigen meistens den Weg, mit praktischen Beispielen zu zeigen, wie die vielen Diagramme nützlich verwenden können.

In dieser Arbeit wird zumeist unter Berufung auf die Angaben der deutschen und der ungarischen Fachliteratur teils die Folge der Berechnungsmethoden zusammengefasst, teils werden Beispiele angeführt, um die praktische Verwendbarkeit dieser Methoden nachzuweisen. Es werden dabei die besonderen Vorschriften der Oberflächenrauheit in den Rechnungsgang mit einbezogen. Die Untersuchungsergebnisse der Verfasser weisen darauf hin, daß bei dem Bau von Gleitlagern eine feinere Oberflächenausbildung erheischt wird als die sonst üblichen, normmäßigen Qualitäten.

### STUDY ON THE METHODS OF CALCULATION FOR SLIDING BEARINGS LUBRICATED BY OIL AND GREASE

Z. TERPLÁN and I. LÉVAI

#### SUMMARY

Examples are seldom given in most of the textbooks dealing with the calculating methods of sliding bearings, that would prove the advantages of the use of many diagrams.

In this paper, the authors condensed the well known methods of calculation mainly on the basis of data gathered from German and Hungarian sources; they also present some examples of calculations in order to show how these methods could be applied in practice. In addition, specifications on surface roughness are included in the scheme. As a result of these investigations it proved to be necessary to finish bearing surfaces to a greater accuracy than the qualities specified in standards.

### REMARQUES CONCERNANT LE CALCUL DES PALIERS LISSES LUBRIFIÉS A L'HUILE ET A LA GRAISSE

Z. TERPLÁN et I. LÉVAI

#### RESUME

Les ouvrages consacrés au calcul des paliers lisses donnent très rarement des exemples concrets, qui permettraient l'application des nombreux diagrammes présentant une grande utilité.

Sur la base de données puisées surtout dans les littératures allemande et hongroise, l'étude récapitule d'abord les principales phases des procédés de calcul en question, puis illustre, à l'aide d'exemples numériques, l'application pratique de ces méthodes. Les auteurs étendent aussi les calculs aux prescriptions spéciales relatives à la rugosité de la surface des paliers lisses. D'après les résultats de leurs recherches, les surfaces des paliers lisses nécessitent un usinage de précision supérieure à celle exigée par les normes.

ЗАМЕЧАНИЯ К РАСЧЕТУ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ, РАБОТАЮЩИХ  
НА МАСЛЯНОЙ И ЖИРОВОЙ СМАЗКЕ

З. ТЕРПЛАН и И. ЛЕВАИ

## РЕЗЮМЕ

В специальных книгах по современному расчету подшипников скольжения лишь изредка приводятся конкретные примеры и указания по применению большого числа диаграмм. Настоящая работа, используя главным образом немецкие и венгерские литературные источники, с одной стороны, подытоживает основное направление хода расчетов, а с другой, на числовом примере демонстрирует применимость этого метода. Наряду с этим авторы распространяют расчеты также и на поверхностную шероховатость подшипников скольжения. Согласно исследованиям, в пределах условий выбранного типа сопряжения поверхностей, подшипники качения требуют по сравнению с обычно назначаемой более тонкой обработки.





# ÄNDERUNGEN DES WÄRMEAUSDEHNUNGS- KOEFFIZIENTEN VON KALTVERFORMTEN METALLEN IM VERLAUFE DES WEICHGLÜHENS

J. PROHÁSZKA

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN  
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR TECHNISCHE PHYSIK DER UNGARISCHEN AKADEMIE  
DER WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 28. März 1961]

## 1. Einleitung

Im nachstehenden veröffentlichen wir eine Versuchsserie, auf Grund derer wir festgestellt haben, in welchem Maße sich der Wärmeausdehnungskoeffizient des kaltverformten Aluminiums, Silbers und Nickels, gemessen bei der ersten Erhitzung nach der Kaltverformung, von dem bei der zweiten Erhitzung desselben Probestückes gemessenen Wärmeausdehnungskoeffizienten unterscheidet. Diese Änderung des Wärmeausdehnungskoeffizienten steht in engster Beziehung mit der altbekannten Tatsache, daß sich die Dichte bzw. das spezifische Volumen der Metalle im Laufe der Kaltverformung und der Erholung und Rekristallisation verändert.

Diese Erscheinung wurde bereits vor beinahe 100 Jahren beobachtet, und seither wurden die Änderungen der spezifischen Volumina der verschiedenen Metalle von manchen Forschern gemessen [1—6]. Die Mehrzahl dieser Veröffentlichungen beschränkte sich jedoch nur darauf, die Größen dieser Veränderungen vor und nach der Kaltverformung bzw. der Glühe mitzuteilen. Es ist aber bei der Erforschung der Erscheinungen nicht gleichgültig, bei welcher Temperatur, bis zu welchem Maße die Änderung während der Glühe stattfindet. Auf Grund der durchgeführten Versuche wurde es möglich, die Abhängigkeit der Volumenänderung von der Temperatur zu ermitteln. Auf Grund der Auslegung der Versuchsergebnisse wird auch die Frage geklärt, in welcher Weise eine Beziehung zwischen den auf Grund der gemessenen Wärmeausdehnungen berechneten Volumenänderungen und den Kristallgitterkennzahlen hergestellt werden kann.

## 2. Die bei den Messungen verwendeten Stoffe

Im Laufe der Messungen wurden drei Stoffe handelsüblicher Qualität, namentlich Silber, Aluminium und Nickel verwendet. Alle drei Stoffe wurden einer spektroskopischen Analyse unterzogen und die Verunreinigungen, deren Linien sich mit einer höheren Intensität meldeten, wurden mit Hilfe der übli-



chen Methoden der chemischen Analyse bestimmt. Die Ergebnisse der spektroskopischen Analyse sind in Tabelle Ia, die der chemischen Analyse in Tabelle Ib enthalten.

Tabelle Ia

Ergebnisse der spektroskopischen Analyse:

| Silber |     | Aluminium |     | Nickel |     |
|--------|-----|-----------|-----|--------|-----|
| Fe     | 2   | Ni        | 3   | Mn     | 3   |
| Cu     | 1,5 | Si        | 1,5 | Cr     | 2   |
| Al     | 1   | Cu        | 1,5 | Mg     | 2   |
| Si     | 1   | Mg        | 1,5 | C      | 2   |
| Mg     | 1   | Fe        | 1   | Si     | 2   |
| Pb     | 1   | Cr        | 1   | Cu     | 2   |
| Ni     | 0,5 | Mn        | 1   | Co     | 1,5 |
|        |     | Pb        | 0,5 | Fe     | 1,5 |

Die Ziffern hinter den analysierten Verunreinigungen sind für die Intensität der Linien des betreffenden Elements kennzeichnend.

Tabelle Ib

Ergebnisse der chemischen Analyse:

| Silber   | Aluminium | Nickel   |
|----------|-----------|----------|
| Fe 0,06% | Ni 2,05%  | Mn 1,20% |
|          | Si 0,07%  | Cr 0,01% |

### 3. Experimentelles

Aus den drei verschiedenen Stoffen wurden Stäbe mit 4 mm Durchmesser nach den üblichen Drahtziehverfahren gezogen. Nach erfolgtem Zug wurden alle drei Stoffe in einem Mischgas aus Wasserstoff und Stickstoff weichgeglüht, um die Wirkungen der plastischen Verformung während des Drahtziehens zu beseitigen. Ag und Ni wurden bei 900° C und Al bei 500° C zwei Stunden hindurch weichgeglüht.

Von den weichgeglühten Stäben aller drei Stoffe wurden je vier Stück von etwa 20 cm Länge abgeschnitten und in einer Zerreißmaschine um 5, 10 bzw. 20% gestreckt. Das vierte Stück wurde bis zum Bruch gestreckt. Aus diesen verschiedenartig gestreckten Stäben wurden Probestücke von 5 cm Länge hergestellt, die dann in einem Differentialdilatometer System Chevenard zur Messung des Wärmeausdehnungskoeffizienten verwendet wurden.

Das obgenannte Dilatometer registriert das Wärmeausdehnungsdiagramm photographisch, wodurch eine Auswertung von höchster Genauigkeit ermöglicht wird. Bei der Messung des Wärmeausdehnungskoeffizienten wurde der Ofen stets mit der gleichen Geschwindigkeit von 200° je Stunde aufgeheizt. Von jedem Probestück wurden nacheinander zwei Wärmeausdehnungsdiagramme gefertigt, wobei das erste den für den kaltverformten Zustand, das

zweite den für den weichgeglühten Zustand charakteristischen Wert der Wärmeausdehnung ergab.

Aus den Resten der gestreckten Stäbe wurden Stücke von 2 cm Länge abgeschnitten und in einen Ofen gelegt, der mit der gleichen Geschwindigkeit wie der des Dilatometers aufgeheizt wurde. Bei bestimmten Temperaturen des Weichglühens wurde jedem Stoff, bei jeder Dehnungsstufe, je 1 Probestück entnommen. Es wurde die Härte dieser Probestücke gemessen, um das Maß ermitteln zu können, bis zu dem die Rekristallisation der unterschiedlich gestreckten Probestücke bei der jeweiligen Temperatur fortgeschritten war [7].

#### 4. Versuchsergebnisse

Auf Grund der mit dem Dilatometer verfertigten Wärmeausdehnungsdiagramme wurden von 100° C aufwärts für Temperaturinkremente von je 50° C die Wärmeausdehnungskoeffizienten,  $\alpha$ , und die den jeweiligen Temperaturen entsprechenden Gesamtdehnungen  $\Delta l(t) = l_0 \int_{100}^t \alpha(t) dt$  gemessen. In dieser Gleichung bedeutet  $t$  die Temperatur in °C und  $l_0$  die ursprüngliche Länge des im Dilatometer geprüften Probestückes.

Die Ausgangstemperatur von 100° C wurde aus dem Grunde gewählt, weil zwischen dem im Ofen des Dilatometers untergebrachten Probestück und dem zur Registrierung der Temperatur dienenden Etalon eine Temperaturdifferenz besteht, da sie im Verlaufe der Messungen in übereinander gesetzten Quarzröhren im waagerechten Ofen angebracht sind, und da — solange diese Temperaturdifferenz keinen konstanten Wert erreicht — die aus der Kurve berechneten Werte eine hohe Ungenauigkeit aufweisen. Diese Ungenauigkeit wird bei etwa 100° C aufgehoben, und von dieser Temperatur an liefert das Wärmeausdehnungsdiagramm zuverlässige Werte. Die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Röhren beträgt etwa 10° C. Dies wurde bei der Angabe der Temperatur in Rechnung gezogen. Der Wärmeausdehnungskoeffizient ist der Tangente der konstruierten Kurve proportional. Aus diesem Grunde kann der Wärmeausdehnungskoeffizient bei Konstanz der erwähnten Temperaturdifferenz genau gemessen werden.

Die Differenz zwischen den Gesamtausdehnungen, gemessen bei der ersten und zweiten Erhitzung, ergibt den Wert, um den die lineare Dimension des kaltverformten Probestückes im Vergleich zu dem weichgeglühten Probestück verändert wurde. An dieser Stellen wollen wir bemerken, daß bei der ersten Glühe das Weichglühen nicht vollständig vor sich geht. Ungeachtet dessen messen wir bei der zweiten Erhitzung die für den weichgeglühten Zustand charakteristische Wärmeausdehnung, da im fraglichen Temperaturintervall, bei der zweiten Erhitzung, in den untersuchten Metallen keine solche



Änderung stattfindet, die den Wärmeausdehnungskoeffizienten im Vergleich zu dem des weichgeglühten Metalls verändern würde.

Wird die derart erhaltene Längenänderung,  $\Delta l$ , durch die ursprüngliche Länge des Probekörpers,  $l_0$ , dividiert, so erhalten wir die auf die Längeneinheit

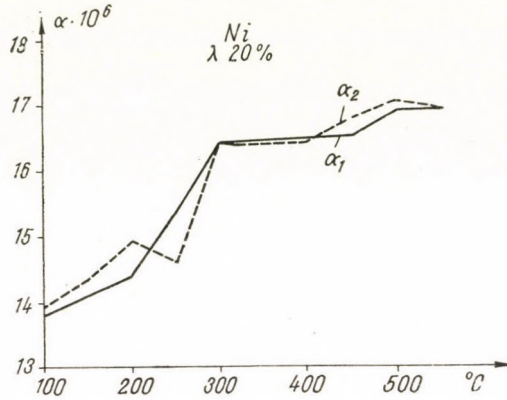


Abb. 1a. Wärmeausdehnungskoeffizient des bis zu 20% gestreckten Probestückes aus Nickel

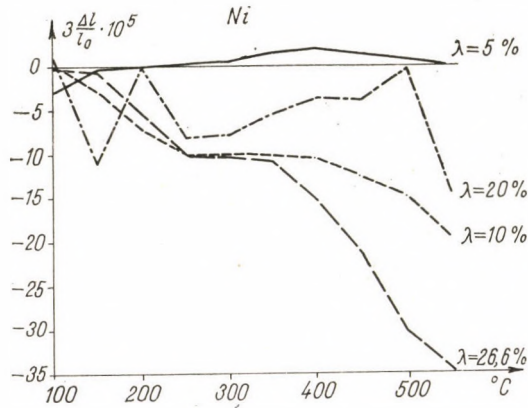


Abb. 1b. Änderungen des spezifischen Volumens der in verschiedenem Maße gestreckten 4 Probestücke aus Nickel in der Funktion der Temperatur

entfallende spezifische Längenänderung. Mit Hilfe dieses  $\Delta l/l_0$ -Wertes kann zu jeder Temperatur auch die spezifische Volumenänderung angegeben werden, die gleich  $3 \Delta l/l_0$  ist. Aus diesem Wert wird die effektive Gesamtvolumenänderung erhalten, indem die spezifische Volumenänderung mit dem ursprünglichen Volumen des Probekörpers,  $V_0$  (auf Zimmertemperatur bezogen), multipliziert wird.

Tabelle II  
 Meßergebnisse für das Nickel

| $\lambda$<br>% | Temperatur<br>°C | $a_1 \cdot 10^6$<br>Grad <sup>-1</sup> | $a_2 \cdot 10^6$<br>Grad <sup>-1</sup> | $(a_2 - a_1) \cdot 10^6$<br>Grad <sup>-1</sup> | $\frac{a_2 - a_1}{a_2} \cdot 100$<br>% | $\Delta l \cdot 10^3$<br>mm | $\frac{\Delta l}{l_0} \cdot 10^5$ | $3 \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 10^5$ |
|----------------|------------------|--|--|--|--|-----------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 5              | 100              | 13,82                                  | 13,88                                  | 0,06   | 0,43                                   | 0,39                        | 0,78                              | 2,34                                |
|                | 150              | 14,34                                  | 14,30                                  | 0,04*  | 0,28*                                  | 0,15                        | 0,30                              | 0,90                                |
|                | 200              | 14,91                                  | 14,98                                  | 0,07   | 0,47                                   | 0,00                        | 0,00                              | 0,00                                |
|                | 250              | 15,55                                  | 15,59                                  | 0,04   | 0,26                                   | 0,06*                       | 0,10*                             | 0,30*                               |
|                | 300              | 16,51                                  | 16,40                                  | 0,11*  | 0,67*                                  | 0,15*                       | 0,30*                             | 0,90*                               |
|                | 350              | 16,46                                  | 16,46                                  | 0,00   | 0,00                                   | 0,44*                       | 0,88*                             | 2,64*                               |
|                | 400              | 16,40                                  | 16,48                                  | 0,08   | 0,49                                   | 0,56*                       | 1,12*                             | 3,36*                               |
|                | 450              | 16,79                                  | 16,79                                  | 0,00   | 0,00                                   | 0,43*                       | 0,85*                             | 2,55*                               |
|                | 500              | 16,90                                  | 16,95                                  | 0,05   | 0,30                                   | 0,25*                       | 0,51*                             | 1,53*                               |
|                | 550              | 16,47                                  | 16,68                                  | 0,21   | 1,26                                   | 0,02                        | 0,04                              | 0,12                                |
| 10             | 100              | 13,82                                  | 13,43                                  | 0,39*  | 2,90*                                  | 0,08*                       | 0,17*                             | 0,51*                               |
|                | 150              | 14,20                                  | 14,50                                  | 0,30   | 2,06                                   | 0,55                        | 1,09                              | 3,27                                |
|                | 200              | 14,80                                  | 14,98                                  | 0,18   | 1,21                                   | 1,19                        | 2,38                              | 7,14                                |
|                | 250              | 15,43                                  | 15,55                                  | 0,08   | 0,77                                   | 1,72                        | 3,44                              | 10,32                               |
|                | 300              | 16,32                                  | 16,20                                  | 0,12*  | 0,74*                                  | 1,68                        | 3,37                              | 10,11                               |
|                | 350              | 16,53                                  | 16,71                                  | 0,18   | 1,07                                   | 1,75                        | 3,50                              | 10,50                               |
|                | 400              | 16,35                                  | 16,43                                  | 0,18   | 1,10                                   | 1,85                        | 3,71                              | 11,13                               |
|                | 450              | 16,57                                  | 16,73                                  | 0,16   | 0,96                                   | 2,09                        | 4,18                              | 12,54                               |
|                | 500              | 16,87                                  | 17,03                                  | 0,16   | 0,94                                   | 2,50                        | 5,00                              | 15,00                               |
|                | 550              | 16,51                                  | 16,53                                  | 0,02   | 0,12                                   | 3,26                        | 6,53                              | 19,59                               |
| 20             | 100              | 13,82                                  | 13,82                                  | 0,00   | 0,00                                   | 0,17*                       | 0,34*                             | 1,02*                               |
|                | 150              | 14,11                                  | 14,33                                  | 0,22   | 1,53                                   | 2,09                        | 4,18                              | 12,54                               |
|                | 200              | 14,74                                  | 14,91                                  | 0,17   | 1,14                                   | 0,12                        | 0,24                              | 0,72                                |
|                | 250              | 15,41                                  | 14,56                                  | 0,15   | 1,03                                   | 1,43                        | 2,86                              | 8,58                                |
|                | 300              | 16,47                                  | 16,44                                  | 0,03*  | 0,18*                                  | 1,36                        | 2,73                              | 8,19                                |
|                | 350              | 16,48                                  | 16,42                                  | 0,06*  | 0,36*                                  | 0,85                        | 1,70                              | 5,10                                |
|                | 400              | 16,52                                  | 16,37                                  | 0,15*  | 0,92*                                  | 0,71                        | 1,43                              | 4,29                                |
|                | 450              | 16,52                                  | 16,76                                  | 0,24   | 1,43                                   | 0,75                        | 1,49                              | 4,47                                |
|                | 500              | 16,81                                  | 17,03                                  | 0,22   | 1,29                                   | 0,17                        | 0,34                              | 1,02                                |
|                | 550              | 16,84                                  | 16,87                                  | 0,03   | 0,18                                   | 2,45                        | 4,90                              | 14,70                               |
| 26,6           | 100              | 13,90                                  | 13,90                                  | 0,00   | 0,00                                   | 0,09                        | 0,18                              | 0,54                                |
|                | 150              | 14,11                                  | 14,34                                  | 0,23   | 1,60                                   | 0,19                        | 0,38                              | 1,14                                |
|                | 200              | 14,69                                  | 14,96                                  | 0,27   | 1,81                                   | 0,94                        | 1,86                              | 5,58                                |
|                | 250              | 15,32                                  | 15,55                                  | 0,23   | 1,48                                   | 1,72                        | 3,43                              | 10,29                               |
|                | 300              | 16,44                                  | 16,39                                  | 0,05*  | 0,31*                                  | 1,81                        | 3,62                              | 10,80                               |
|                | 350              | 16,23                                  | 16,26                                  | 0,03   | 0,19                                   | 1,93                        | 3,86                              | 11,52                               |
|                | 400              | 16,12                                  | 16,38                                  | 0,26   | 1,59                                   | 2,53                        | 5,07                              | 15,21                               |
|                | 450              | 16,10                                  | 16,79                                  | 0,69   | 4,11                                   | 3,73                        | 7,44                              | 22,32                               |
|                | 500              | 16,38                                  | 16,96                                  | 0,58   | 3,42                                   | 5,08                        | 10,16                             | 30,39                               |
|                | 550              | 16,53                                  | 16,79                                  | 0,26   | 1,55                                   | 5,72                        | 11,44                             | 34,26                               |

\* Bezeichnet alle Werte, welche bei der ersten Erhitzung, im Vergleich zur zweiten, nicht eine Kontraktion, sondern eine Ausdehnung bedeuten.

Die Differenz zwischen den bei der ersten und zweiten Erhitzung gemessenen Wärmeausdehnungskoeffizienten,  $a_1$  bzw.  $a_2$ , ist für die Änderung des kaltverformten Probekörpers im Vergleich zu dem weichgeglühten Probe-



körper ebenfalls charakteristisch. Aus diesem Grunde wurden auch die Werte  $a_2 - a_1$  ermittelt, und es wurde auch berechnet, wieviel Prozent diese Differenz zwischen den Wärmeausdehnungskoeffizienten des bei der zweiten Erhitzung gemessenen Wärmeausdehnungskoeffizienten ausmacht.

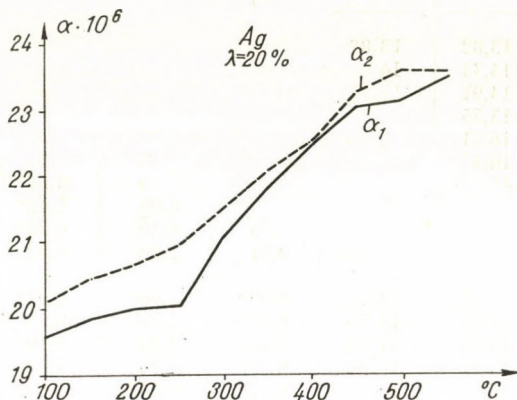


Abb. 2a. Wärmeausdehnungskoeffizient des bis zu 20% gestreckten Probestückes aus Silber

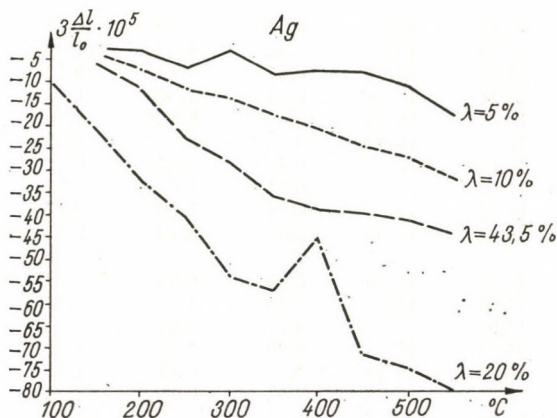


Abb. 2b. Änderungen des spezifischen Volumens der in verschiedenem Maße gestreckten 4 Probestücke aus Silber in der Funktion der Temperatur

Die erwähnten Größen wurden bei jedem Stoff ermittelt, und ihre Werte für die einzelnen Stoffe wollen wir im folgenden anführen.

Der Meßbereich des Nickels erstreckte sich über 100—550° C. Die spezifische Dehnung des bis zum Bruch gestreckten Probekörpers betrug 26,6%. Die Meßergebnisse sind in Tabelle II enthalten. Einige Daten wurden in der Abbildungsserie 1 auch graphisch dargestellt. Sowohl aus der Tabelle wie auch

Tabelle III  
Meßergebnisse für das Silber

| $\lambda$<br>% | Temperatur<br>°C | $\alpha_1 \cdot 10^6$<br>Grad <sup>-1</sup> | $\alpha_2 \cdot 10^6$<br>Grad <sup>-1</sup> | $(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot 10^6$<br>Grad <sup>-1</sup> | $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2} \cdot 100$<br>% | $\Delta l \cdot 10^3$<br>mm | $\frac{\Delta l}{l_0} \cdot 10^5$ | $3 \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 10^5$ |
|----------------|------------------|---|---|--|---|-----------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 5              | 100              | 20,26                                       | 20,16                                       | 0,10*  | 0,50*   | 0,02                        | 0,04                              | 0,12                                |
|                | 150              | 20,47                                       | 20,52                                       | 0,05   | 0,24  | 0,45                        | 0,90                              | 2,70                                |
|                | 200              | 20,54                                       | 20,67                                       | 0,13   | 0,63  | 0,66                        | 1,32                              | 3,96                                |
|                | 250              | 21,02                                       | 20,94                                       | 0,08*  | 0,38*   | 1,18                        | 2,35                              | 7,05                                |
|                | 300              | 21,54                                       | 21,45                                       | 0,09*  | 0,42*   | 0,51                        | 1,02                              | 3,06                                |
|                | 350              | 22,14                                       | 22,14                                       | 0,00   | 0,00  | 1,36                        | 2,71                              | 8,13                                |
|                | 400              | 22,65                                       | 22,65                                       | 0,00   | 0,00  | 1,30                        | 2,60                              | 7,80                                |
|                | 450              | 23,18                                       | 23,36                                       | 0,18   | 0,77  | 1,31                        | 2,64                              | 7,92                                |
|                | 500              | 23,46                                       | 23,98                                       | 0,52   | 2,18  | 1,96                        | 3,91                              | 11,73                               |
|                | 550              | 23,43                                       | 23,47                                       | 0,04   | 0,17  | 3,14                        | 6,28                              | 18,84                               |
| 10             | 100              | 19,91                                       | 20,26                                       | 0,35   | 1,72  | 0,04                        | 0,08                              | 0,24                                |
|                | 150              | 20,28                                       | 20,52                                       | 0,24   | 1,17  | 0,60                        | 1,20                              | 3,60                                |
|                | 200              | 20,54                                       | 20,76                                       | 0,22   | 1,06  | 1,21                        | 2,43                              | 7,29                                |
|                | 250              | 20,90                                       | 21,15                                       | 0,25   | 1,18  | 1,89                        | 3,94                              | 11,82                               |
|                | 300              | 21,45                                       | 21,45                                       | 0,00   | 0,00  | 2,29                        | 4,58                              | 13,74                               |
|                | 350              | 21,93                                       | 22,09                                       | 0,16   | 0,72  | 2,99                        | 5,96                              | 17,88                               |
|                | 400              | 22,48                                       | 22,65                                       | 0,17   | 0,75  | 3,41                        | 6,83                              | 20,49                               |
|                | 450              | 23,09                                       | 23,50                                       | 0,41   | 1,74  | 4,16                        | 8,30                              | 24,90                               |
|                | 500              | 23,21                                       | 23,80                                       | 0,59   | 2,48  | 4,54                        | 9,07                              | 27,21                               |
|                | 550              | 23,32                                       | 23,54                                       | 0,22   | 0,94  | 5,34                        | 10,68                             | 32,04                               |
| 20             | 100              | 19,59                                       | 20,11                                       | 0,52   | 2,58  | 1,98                        | 3,95                              | 11,85                               |
|                | 150              | 19,73                                       | 20,47                                       | 0,74   | 3,62  | 3,66                        | 7,29                              | 21,87                               |
|                | 200              | 19,95                                       | 20,63                                       | 0,68   | 3,29  | 5,37                        | 10,74                             | 32,33                               |
|                | 250              | 20,01                                       | 20,98                                       | 0,97   | 4,63  | 7,00                        | 13,97                             | 41,91                               |
|                | 300              | 21,17                                       | 21,54                                       | 0,37   | 1,72  | 9,14                        | 18,26                             | 54,78                               |
|                | 350              | 21,84                                       | 22,09                                       | 0,25   | 1,13  | 9,54                        | 19,01                             | 57,03                               |
|                | 400              | 22,48                                       | 22,52                                       | 0,04   | 0,18  | 7,57                        | 15,11                             | 45,33                               |
|                | 450              | 23,05                                       | 23,27                                       | 0,22   | 0,94  | 12,21                       | 24,43                             | 73,29                               |
|                | 500              | 23,17                                       | 23,58                                       | 0,41   | 1,74  | 12,45                       | 24,85                             | 74,55                               |
|                | 550              | 23,43                                       | 23,36                                       | 0,07*  | 0,30*   | 13,50                       | 26,90                             | 80,70                               |
| 43,5           | 100              | 19,87                                       | 20,01                                       | 0,14   | 0,70  | 0,21                        | 0,40                              | 1,20                                |
|                | 150              | 19,98                                       | 20,33                                       | 0,35   | 1,72  | 1,09                        | 2,20                              | 6,60                                |
|                | 200              | 20,06                                       | 20,54                                       | 0,48   | 2,34  | 1,96                        | 3,91                              | 11,73                               |
|                | 250              | 20,58                                       | 20,94                                       | 0,36   | 1,72  | 3,85                        | 7,68                              | 23,04                               |
|                | 300              | 20,47                                       | 21,33                                       | 0,86   | 4,03  | 4,82                        | 9,64                              | 28,92                               |
|                | 350              | 21,65                                       | 22,09                                       | 0,44   | 1,99  | 6,00                        | 11,98                             | 35,94                               |
|                | 400              | 22,23                                       | 22,39                                       | 0,16   | 0,72  | 6,34                        | 12,69                             | 38,07                               |
|                | 450              | 22,93                                       | 23,14                                       | 0,21   | 0,91  | 6,62                        | 13,24                             | 39,72                               |
|                | 500              | 23,21                                       | 23,58                                       | 0,37   | 1,57  | 6,92                        | 13,84                             | 41,52                               |
|                | 550              | 23,25                                       | 23,29                                       | 0,04   | 0,17  | 7,41                        | 14,82                             | 44,46                               |

\* Bezeichnet alle Werte, welche bei der ersten Erhitzung, im Vergleich zur zweiten, nicht eine Kontraktion, sondern eine Ausdehnung bedeuten.

aus den Diagrammen geht hervor, daß die Volumenverringerung der kaltverformten Probekörper in diesem Temperaturintervall in zwei Abschnitte zerlegt werden kann. Der erste Abschnitt erstreckt sich über 100—300° C. In diesem Abschnitt liegt eine bedeutende Volumenänderung vor. Im zweiten



Abschnitt wurde ebenfalls eine große Volumenänderung gemessen. Dieser zweite Abschnitt beginnt bei etwa 350° C und reicht bis zur oberen Meßgrenze. Der zweite Abschnitt wird von dem ersten durch einen Übergangabschnitt getrennt, in dem die Volumenänderung des Probekörpers unbedeutend ist.

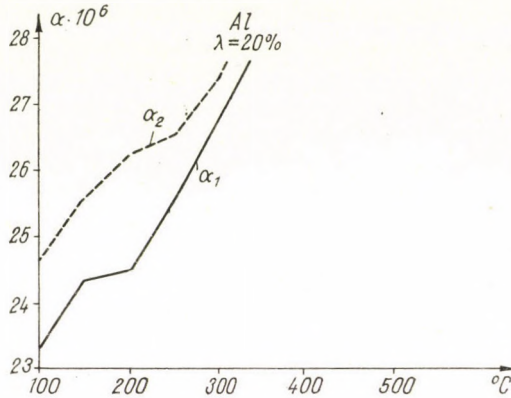


Abb. 3a. Wärmeausdehnungskoeffizient des bis zu 20% gestreckten Probestückes aus Aluminium

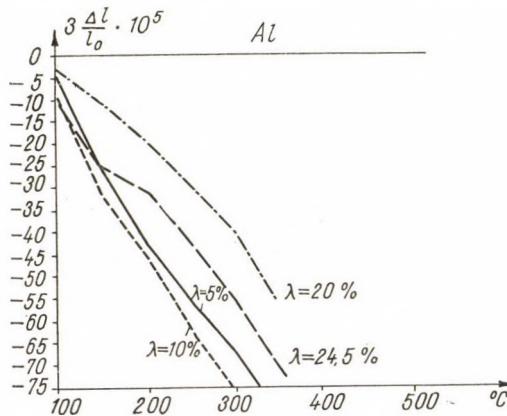


Abb. 3b. Änderungen des spezifischen Volumens der in verschiedenem Maße gestreckten 4 Probestücke aus Aluminium in der Funktion der Temperatur

Im allgemeinen nimmt die Kontraktion des Probekörpers in beiden Abschnitten mit dem Ausmaß der Kaltverformung zu. Dies gilt insbesondere für den zweiten Abschnitt.

Der Meßbereich des Silbers war dem des Nickels gleich. Die spezifische Dehnung des bis zum Bruch gestreckten Probekörpers betrug 43,5%. Es wur-

den Ergebnisse erhalten, die denen des Nickels ähnlich sind. Im allgemeinen können auch hier zwei Abschnitte beobachtet werden, mit Eigenschaften, die nach Ausweis der Tabelle III und der Abbildungsserie 2 denen der früher erwähnten Abschnitte ähnlich sind.

Der Meßbereich des Aluminiums erstreckte sich über das Temperaturintervall von 100—300° C. Die spezifische Dehnung des bis zum Bruch gestreckten Probekörpers betrug 24,5%. Im Gegensatz zu den beiden ersteren Metallen war hier die Volumenverringerng des Probekörpers stetig. Wie aus Tabelle IV und der Abbildungsserie 3 hervorgeht, wurden hier keine gesonderten Abschnitte vorgefunden.

Tabelle IV  
Meßergebnisse für das Aluminium

| $\lambda$<br>% | Temperatur<br>°C | $\alpha_1 \cdot 10^6$<br>Grad <sup>-1</sup> | $\alpha_2 \cdot 10^6$<br>Grad <sup>-1</sup> | $(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot 10^6$<br>Grad <sup>-1</sup> | $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2} \cdot 100$<br>% | $\Delta l \cdot 10^3$<br>mm | $\frac{\Delta l}{l_0} \cdot 10^3$ | $3 \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 10^5$ |
|----------------|------------------|---|---|--|---|-----------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 5              | 100              | 23,49                                       | 23,19                                       | 0,30*  | 1,29*   | 1,02                        | 2,04                              | 6,12                                |
|                | 150              | 24,11                                       | 25,12                                       | 1,01   | 4,03  | 4,55                        | 9,10                              | 27,30                               |
|                | 200              | 24,50                                       | 25,70                                       | 1,20   | 4,66  | 7,23                        | 14,46                             | 43,28                               |
|                | 250              | 25,93                                       | 26,65                                       | 0,72   | 2,70  | 9,39                        | 18,78                             | 56,24                               |
|                | 300              | 27,09                                       | 28,02                                       | 0,93   | 3,31  | 11,24                       | 22,48                             | 67,44                               |
|                | 350              | 27,65                                       | 29,16                                       | 1,51   | 5,19  | 14,40                       | 28,80                             | 86,40                               |
| 10             | 100              | 23,49                                       | 24,62                                       | 1,13   | 4,58  | 1,55                        | 3,10                              | 9,30                                |
|                | 150              | 24,43                                       | 25,37                                       | 0,94   | 3,70  | 5,46                        | 10,92                             | 32,76                               |
|                | 200              | 25,02                                       | 26,08                                       | 1,06   | 4,07  | 7,69                        | 15,38                             | 46,14                               |
|                | 250              | 25,93                                       | 26,78                                       | 0,85   | 3,18  | 10,55                       | 21,10                             | 63,30                               |
|                | 300              | 27,21                                       | 27,88                                       | 0,67   | 2,40  | 12,82                       | 25,64                             | 76,92                               |
|                | 350              | 28,03                                       | 29,48                                       | 1,45   | 4,91  | 15,68                       | 31,38                             | 94,14                               |
| 20             | 100              | 23,28                                       | 24,75                                       | 1,47   | 5,94  | 0,57*                       | 1,14*                             | 3,42*                               |
|                | 150              | 24,32                                       | 25,63                                       | 1,31   | 5,11  | 1,83                        | 3,66                              | 10,98                               |
|                | 200              | 24,50                                       | 26,21                                       | 1,71   | 6,52  | 3,19                        | 6,38                              | 19,14                               |
|                | 250              | 25,70                                       | 26,40                                       | 1,70   | 5,79  | 4,99                        | 9,98                              | 29,94                               |
|                | 300              | 26,84                                       | 27,47                                       | 0,63   | 2,29  | 6,69                        | 13,38                             | 40,04                               |
|                | 350              | 28,03                                       | 28,86                                       | 0,83   | 2,87  | 9,38                        | 18,76                             | 56,18                               |
| 24,5           | 100              | 23,70                                       | 24,14                                       | 0,44   | 1,82  | 1,79                        | 3,58                              | 10,74                               |
|                | 150              | 24,54                                       | 25,12                                       | 0,58   | 2,31  | 4,11                        | 8,22                              | 24,66                               |
|                | 200              | 25,02                                       | 25,82                                       | 0,80   | 3,09  | 5,18                        | 10,36                             | 31,08                               |
|                | 250              | 25,81                                       | 26,65                                       | 0,84   | 3,14  | 7,29                        | 14,58                             | 43,74                               |
|                | 300              | 27,61                                       | 27,74                                       | 0,13   | 0,47  | 9,46                        | 18,92                             | 56,76                               |
|                | 350              | 29,01                                       | 29,16                                       | 0,15   | 0,52  | 11,71                       | 23,42                             | 70,26                               |

\* Bezeichnet alle Werte, welche bei der ersten Erhitzung, im Vergleich zur zweiten, nicht eine Kontraktion, sondern eine Ausdehnung bedeuten.

Wegen der Oxydation konnten die Meßbereiche des Silbers und des Nickels nicht mehr erweitert werden. Wegen der Bildung einer Oxydschicht setzt sich die Längenänderung in dem höheren Temperaturbereich aus zwei



Teilen zusammen, d. h. aus der Wärmeausdehnung und der zunehmenden Ver-  
zunderung. Hierdurch wurde der Meßgrenze eine obere Grenze gesetzt. Bei dem  
Aluminium wollten wir den Vorgang im gleichen Stadium der Rekristallisation  
abstellen. So ergab sich die Grenze von 350° C.

Als Zusammenfassung der Versuchsergebnisse bezüglich der drei kubisch  
flächenzentrierten Metalle lassen sich die folgenden Feststellungen machen:

1. Der Wärmeausdehnungskoeffizient ist bei der ersten Erhitzung nach  
der Kaltverformung kleiner als bei der zweiten Erhitzung.

2. Die Verringerung des Wärmeausdehnungskoeffizienten ist im allge-  
meinen um so größer, je größer das Ausmaß der Kaltverformung ist. Bezüglich  
des Ausmaßes der Verformung ist die Reihenfolge nicht ideal, ein Umstand,  
der aller Wahrscheinlichkeit nach dadurch bedingt wird, daß die Rekristal-  
lisation der unterschiedlich verformten Probekörper bis zur fraglichen Tem-  
peratur nicht im gleichen Maß vorgeschritten war.

3. Die Verringerung des Wärmeausdehnungskoeffizienten (bei der ersten  
Erhitzung) ist nicht konstant, vielmehr ändert sie sich beim Nickel und Silber  
über zwei bestimmte Abschnitte zwischen 0 und 4%. Beim Aluminium fehlt  
der erste Abschnitt. Beim Aluminium erreichte die maximale Kontraktion  
6,5%.

4. Die im Laufe der Glühe gemessene spezifische Volumenverringering  
betrug bei allen drei Metallen der Größenordnung nach  $10^{-4}$ . Die größte  
Änderung wurde beim Aluminium, die kleinste beim Nickel beobachtet.  
Werden diese Verringerungen des spezifischen Volumens auf die mehr üblichen  
Änderungen der Wichte umgerechnet:

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{G}{V_0 \left(1 + 3 \frac{\Delta l}{l_0}\right)} = \frac{\gamma_0}{1 + 3 \frac{\Delta l}{l_0}}$$

(in der Gleichung bezeichnet  $\gamma_0$  das spezifische Gewicht im weichgeglühten  
Zustande), so erhalten wir, daß das spezifische Gewicht des Nickels um 0,03%,  
das des Silbers um 0,08% und das des Aluminiums um 0,1% bei der Glühe  
zunahm.

## 5. Diskussion

In einem früheren Aufsatz wurde die Änderung der Dichte von KAHL-  
BAUM und STURM dem Umstand zugeschrieben, daß die Porosität der Metalle  
im Laufe der Kaltverformung verändert wird [1]. Später wurde von ALKINS [2]  
erwähnt, daß die im Laufe der Glühe stattfindende Änderung der Dichte auf  
das Verschwinden der elastischen Spannungen zurückzuführen wäre, ohne  
jedoch diese Meinung begründet zu haben. Von MASING [8] wurde eine ganze



Abhandlung dem Beweise gewidmet, daß das Gesamtvolumen eines homogenen und elastisch isotropen Körpers durch die inneren Spannungen nicht verändert werden kann. Dieser Auffassung stimmt auch BORELIUS [9] bei, und die gleiche Auffassung spiegelt sich auch im Buche von BURGERS [10] wider. MASIMA und SACHS [3] haben bei der Glühe von kaltverformtem Messing gleicherweise eine Volumenabnahme in zwei Abschnitten beobachtet. Im ersten Abschnitt führen sie die Volumenabnahme auf das Verschwinden der inneren Spannungen zurück, wobei sie bemerken, daß es bisher nicht gelang, eine zufriedenstellende Erklärung für diese Erscheinung zu finden. Im zweiten Abschnitt wird die Abnahme des Volumens nach der Meinung genannter Autoren durch die Rekristallisation bedingt. Als Maximum der Zunahme des spezifischen Gewichts wurde 0,03% festgestellt. Von TAMARU [4] wurden verschiedene kaltverformte Probekörper aus Eisen und Stahl untersucht. Es wurde dabei 0,1% als maximale Zunahme des spezifischen Gewichtes gemessen. Auch dieser Autor erblickt die Ursache der Volumenabnahme im Verschwinden der inneren Spannungen. Von MAIER [5] wurde auf thermodynamischer Grundlage die Schlußfolgerung gezogen, daß das kaltverformte Metall in zwei Phasen vorliegt. Die erste Phase wurde lediglich elastisch deformiert, und ihre Dichte liegt unter der des unverformten Metalls, während die Dichte der zweiten Phase eine höhere Dichte als das weichgeglühte Metall besitzt. Die Menge dieser zweiten Phase ist verhältnismäßig geringer, wobei die Korngrenzen und Mosaikblockgrenzen vom Autor hierher gezählt werden. CLAREBROUGH und seine Mitarbeiter [6] haben kaltverformtes Nickel untersucht. Ihre Meßergebnisse stimmen mit den unserigen gut überein. Die Abnahme des Volumens im ersten Abschnitt wird auf das Verschwinden der während der plastischen Verformung entstandenen Leerstellen des Gitters zurückgeführt, während im zweiten Abschnitt nach diesen Forschern der Grund für die Abnahme des Volumens in einer Verringerung der Versetzungsdichte liegen dürfte.

Man ersieht aus den Ergebnissen der bis zur Zeit durchgeführten Untersuchungen, daß von den meisten Forschern als Grund für die im ersten Abschnitt beobachtete Abnahme des Volumens das Verschwinden der inneren Spannungen angegeben wird, während die im zweiten Abschnitt eintretende Volumenverringerung auf die Rekristallisation zurückgeführt wird. Auch wir teilen die Ansicht, daß im ersten Abschnitt die inneren Spannungen in der Tat verschwinden, und daß im zweiten Abschnitt die Rekristallisation stattfindet. In der Folge wollen wir versuchen, diese Auffassung zu rechtfertigen, zunächst wollen wir aber im Anschluß an die Annahmen von Clarebrough und seinen Mitarbeitern einige Tatsachen erwähnen, die mit ihrer Auffassung nicht in Einklang gebracht werden können.

Wir haben keinen Grund, an der Versetzungstheorie der plastischen Verformung zu zweifeln. Wenn aber nach dieser Theorie eine Versetzung auf einer Gleitebene ein Gebiet durchstreift und wenn während ihrer Bewegung eine die



Gleitebene durchstoßende Versetzung durchkreuzt, so entsteht unter gewissen Bedingungen eine Leerstelle im Gitter oder aber gerät ein Atom in eine interstitielle Lage. Welcher von diesen Vorgängen eintritt, hängt von der gegenseitigen Beziehung der sich bewegenden und der festen Versetzungen ab [11, 12]. Es taucht unmittelbar die Frage auf, ob die Anzahl der Leerstellen und die der interstitiellen Atome in einem so hohen Maße zugunsten der Leerstellen verschoben werden kann. Es ist wohl möglich, daß die Anzahl der Leerstellen etwas höher liegt, doch dürfte ein so großer Unterschied unwahrscheinlich sein. Bei der Volumenabnahme wird nämlich eine der Menge der interstitiellen Atome entsprechende Anzahl von Leerstellen, infolge der Vereinigung mit den interstitiellen Atomen, aufgehoben, und so kommt ihnen bei der Abnahme des Volumens keine Rolle zu. Es ist leicht einzusehen, daß bei der Vereinigung einer Leerstelle und eines interstitiellen Atoms keine Volumenänderung stattfindet, da doch beide aufgehoben werden. Zum Beweise dieser Aussage wollen wir eine Gitterstruktur annehmen, die nur eine Leerstelle und ein interstitielles Atom enthält, sonst aber ideal ist. Nun wollen wir im Gedanken beide Gitterstörungen mit je einer Hülle umgeben, die sich von diesen in einem Abstand befinden, wo die Gitterordnung bereits vollkommen ist, wo also die Atome regelmäßige undeformierte Gitterstellen besetzen. (In der Nähe der Leerstelle und des interstitiellen Atoms liegt nämlich eine bedeutende elastische Deformation vor.) Entfernen wir nun im Gedanken das interstitielle Atom aus seiner Hülle, so wird auch in dieser Hülle eine vollkommene Gitterordnung vorherrschen, ohne daß dabei irgendeine Änderung im Gitter stattgefunden hätte. Als zweite Stufe wollen wir nun das überflüssig gewordene Atom in die Leerstelle setzen, wodurch auch innerhalb dieser Hülle eine vollkommene Gitterordnung hergestellt worden ist, ohne daß dabei außerhalb der beiden Hüllen, d. h. innerhalb des Kristallvolumens, irgendeine Störung stattgefunden hätte. Es könnte vielleicht noch angenommen werden, daß vorerst die Leerstellen verschwinden, doch sollte dann mit dem Verschwinden der interstitiellen Atome eine Zunahme des Volumens beobachtet werden.

Bei der durch die Leerstellen bedingten Volumenabnahme kann angenommen werden, daß bei den im gleichen Maße verformten Metallen mit gleicher Gitterstruktur, also auch bei den kubisch flächenzentrierten Ni und Ag, ungefähr die gleiche Anzahl an Leerstellen entsteht, so daß der spezifische Wert der Volumenverringering bei beiden Metallen der gleiche ist. Der absolute Betrag der Volumenverringering sollte dagegen der Gitterkonstante proportional sein. Aus unseren Meßergebnissen kann jedoch festgestellt werden, daß die spezifische Volumenverringering beim Silber viel höher als die des Nickels liegt.

Wenn wir die für die betreffenden Metalle kennzeichnenden und bei den elastischen Verformungen und Spannungen eine wesentliche Rolle führenden Stoffkonstanten, die Elastizitätskoeffizienten, miteinander vergleichen, so kön-



nen wir feststellen, daß der Elastizitätskoeffizient des Silbers etwa die Hälfte des des Nickels beträgt [13]. Wird also in beiden Metallen etwa der gleiche Spannungszustand vorausgesetzt, so muß beim Silber eine doppelt so große Formänderung als beim Nickel beobachtet werden. Dies wurde von uns gemessen, und aus diesem Grund behaupten wir, daß die Ursache der Volumenverringerung zum Großteil im Verschwinden der inneren Spannungen zu suchen ist.

Es gibt aber auch eine andere Tatsache, wodurch die unterschiedliche Größe der durch die verschiedenartigen, doch gleich großen Eigenspannungen bedingten Volumenänderung unterstützt wird, namentlich der Umstand, daß

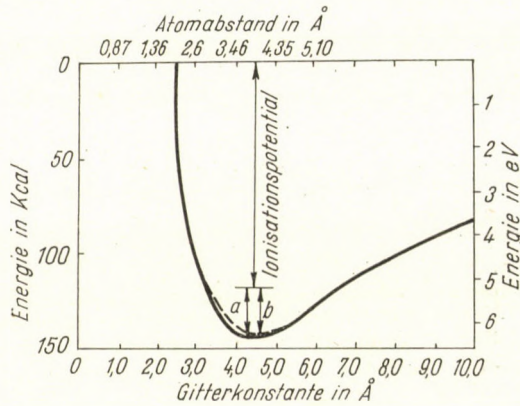


Abb. 4. Energie des Natriumkristalls in der Funktion der Gitterkonstante

die Kristallenergie eine asymmetrische Funktion des Gitterabstandes darstellt, wie es auch aus Abb. 4 hervorgeht [15]. Diese Abbildung stellt die Gitterenergie des Natriums in Abhängigkeit von der Gitterkonstante dar, doch ist der Verlauf der Kurve für alle Kristalle charakteristisch. Die Kurve kann in der Weise interpretiert werden, daß durch eine bestimmte Zugspannung,  $\sigma_z$ , eine größere Änderung der Gitterkonstante als durch eine gleich große Druckspannung,  $\sigma_d$ , hervorgerufen wird. Da bei den inneren Spannungen die Zug- und Druckspannungen von gleicher Größe sind, muß das Volumen unter der Wirkung der inneren Spannungen aus dem Grunde zunehmen, da durch die Druckspannung eine geringere Volumenänderung als durch die Zugspannung bedingt wird.

Wenn also in einem festen Körper, dessen Energie sich in Abhängigkeit von der Gitterkonstante nach Abb. 4 ändert, die Eigenspannungen verschwinden, so muß der Differentialeffekt eine Kontraktion des Körpers ergeben.

Die dritte Argumentation, die für die volumverändernde Wirkung der Eigenspannungen spricht, beruht auf dem folgenden gittergeometrischen Bilde. Bei den kubisch flächenzentrierten Metallen wird die dichteste Packung



der Atome vorausgesetzt. Dies bedeutet aber, daß jedes Atom 12 Nachbaratome besitzt. Mit diesen 12 nächststehenden Atomen steht das betreffende Atom im Kontakt. Eine noch dichtere Packung ist unmöglich. In der Oktaederebene der kubisch flächenzentrierten Metalle, d. h. in der (111) Ebene sind die Atome auf die bereits erwähnte Weise am dichtesten gepackt.

Es ist allgemein üblich, bei Näherungsrechnungen die Atome im Gitter als starre Kugeln zu betrachten. Wir wollen nun untersuchen, wie sich das Volumen des aus als starr betrachteten Atomkugeln bestehenden Gitters unter der Wirkung der beiden verschiedenen Belastungen ändert. Die Belastungsspannung wollen wir uns in der Weise vorstellen, daß ihr Vektor einer ausgezeichneten Gitterrichtung parallel ist.

Wir wollen vorerst die Formänderung und Volumenänderung des Gitters unter der Wirkung der Zugspannung ins Auge fassen. Wählen wir uns im Gitter ein aus vier Atomen bestehendes, unbelastetes, regelmäßiges Tetraeder, dessen Grundfläche in der (111) Ebene liegt, so daß die von dem Scheitelpunkt auf die Grundfläche gefällte Senkrechte der Richtung [111] parallel ist. Jedes Atom des Tetraeders berührt die anderen drei Atome in der Kantenhalbierenden. Die Kantenlänge des Tetraeders ist offenbar dem Atomdurchmesser gleich. Die kubisch flächenzentrierten Metalle können auch in der Weise vorgestellt werden, daß sie aus derartigen Tetraedern aufgebaut sind, es genügt somit, nur die Volumenänderung eines solchen Tetraeders zu untersuchen.

In unbelastetem Zustande beträgt das Volumen dieses Tetraeders:

$$V_0 = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3,$$

wobei  $a$  den Atomdurchmesser bezeichnet.

Nehmen wir an, daß unter der Wirkung einer bestimmten Zugspannung,  $\sigma_z$ , deren Richtung mit einer Kante des Tetraeders, mit der Richtung [110] parallel ist, die mit der Spannung parallele Kante sich auf die Länge  $a(1 + \lambda)$  dehnt. Wir setzen dabei voraus, daß die übrigen Kantenlängen des Tetraeders, zur Erhaltung der dichtesten Packung, unverändert bleiben. Auf diese Weise wird die Basisfläche des Tetraeders zu einem gleichschenkligen Dreieck deformiert, wobei auch die Höhe des Tetraeders verringert wird. Das Volumen des unter der Wirkung dieser Belastung deformierten Tetraeders beträgt:

$$V_z = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 (1 + \lambda) \sqrt{2 - \frac{1}{2} (1 + \lambda)^2} \sqrt{1 - \frac{1}{4 \left[ 1 - \frac{1}{4} (1 + \lambda)^2 \right]}}, \quad (2)$$

wobei  $a$  den Atomdurchmesser und  $\lambda$  die spezifische Dehnung bedeutet. Diese Funktion ergibt für die in Betracht kommenden  $\lambda$ -Werte stets höhere Werte



als die Beziehung 1, das heißt, das Volumen nimmt beim Zuge zu. Bei der Kompression soll die Druckspannung der Richtung [111] parallel sein, und die Höhe des Tetraeders,  $h_0$ , soll sich auf den Wert  $h_0(1 - \lambda)$  vermindern, wobei  $h_0$  die Höhe des unbelasteten Tetraeders bezeichnet. Bei dieser Belastung bleibt die Basisfläche des Tetraeders ein gleichseitiges Dreieck, doch nehmen die drei Kanten in der Basisfläche zu. Die Länge der übrigen drei Kanten bleibt nach unserer Voraussetzung unverändert. Das Volumen des derart deformierten Tetraeders beträgt:

$$V_d = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3(1 - \lambda) [3 - 2(1 - \lambda)^2]. \quad (3)$$

(Die Bezeichnungen sind die gleichen wie oben.) Bei geringen  $\lambda$ -Werten gibt auch diese Funktion stets höhere Werte für das Volumen. Werden also die

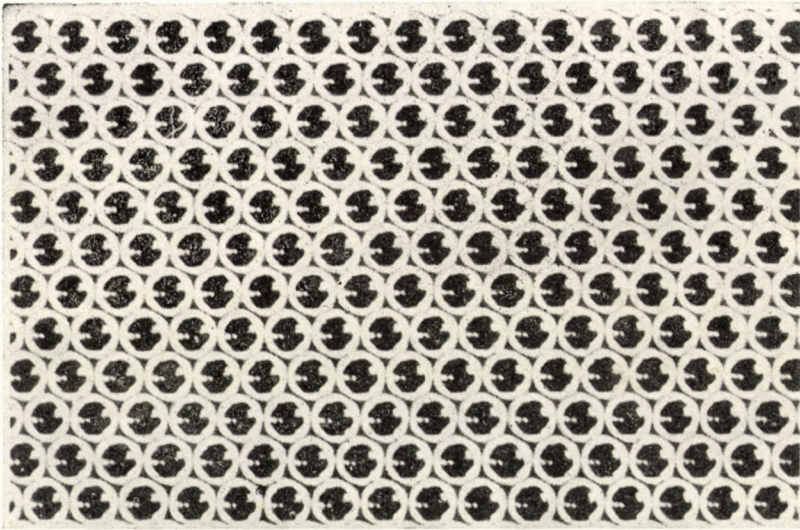


Abb. 5a. Blasenmodell eines zweidimensionalen Idealgitters

Atome als starre Kugeln betrachtet, so wird bei den flächenzentrierten kubischen und hexagonalen Metallen dichtester Packung sowohl durch den Druck wie auch den Zug eine Zunahme des Volumens bewirkt. Das ist aber auch selbstverständlich, da das Hauptkennzeichen dieser Metalle eben ihre dichteste Raumfüllung ist. Wird diese Ordnung auf irgendeine Weise gestört, so wird die Raumfüllung loser, und das Volumen muß zunehmen.

Das ist selbstredend lediglich eine grobe Annäherung, wenn jedoch Eigenspannungen in der Tat existieren, so muß sich neben dem elastischen auch dieser Effekt offenbaren. Dies weist darauf hin, daß die durch Eigenspannungen belasteten Metalle ein größeres Volumen als die spannungsfreien Metalle haben,



und wenn die Eigenspannungen im Laufe des Weichglühens verschwinden, so müssen die Metalle kontrahieren.

Die bei der Rekristallisation eintretende Volumenverringerung kann einfacher interpretiert werden. Wenn nämlich ein Metall plastisch verformt wird, so nimmt die Dichte der Versetzungen zu [11], wogegen sie bei der Rekristalli-

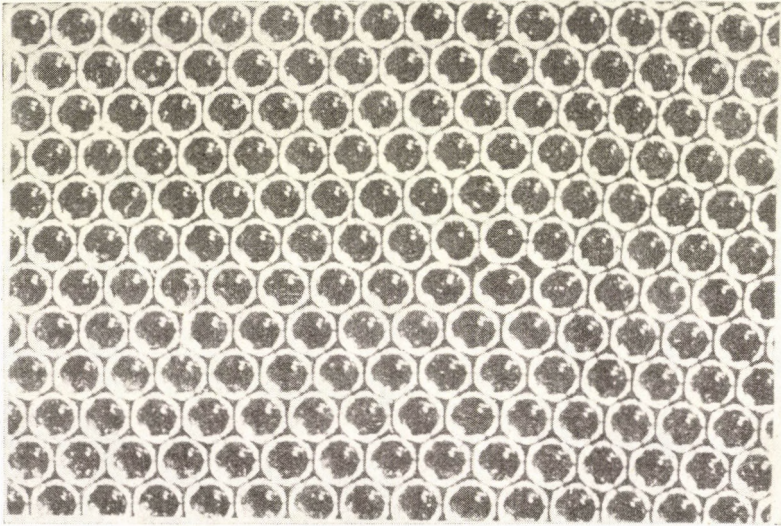


Abb. 5b. Versetzung im Gitter eines zweidimensionalen Blasenmodells ( $d = 1,9$  mm)

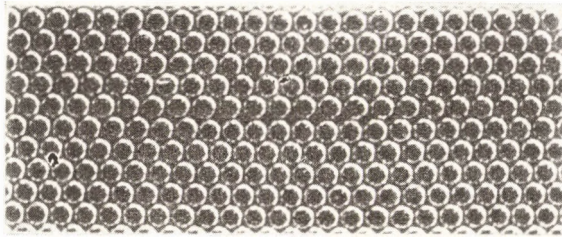


Abb. 5c. Wie Abb. 5b, aber der Blasendurchmesser 0,76 mm (Alle drei Abb. nach BRAGG and NYE [16])

sation abnimmt. Die volumvergrößernde Wirkung der Versetzung ist von der Richtung der Spannung unabhängig. In der Abbildungsserie 5 werden drei Bilder vorgeführt. Abb. 5a stellt ein zweidimensionales vollkommenes Gitter dar. Die einzelnen Atome sind durch Seifenblasen vertreten. Gegen die Mitte der Abb. 5b ist eine Versetzung vorhanden, und es läßt sich in der Abbildung gut beobachten, daß im Mittelpunkt der Versetzung ein großer Hohlraum vorhanden ist. Abb. 5c stellt gleichfalls ein zweidimensionales Blasenmodell mit einer Versetzung dar. Im Vergleich zum vorigen Modell besteht die Änderung



lediglich darin, daß hier die Blasen bedeutend geringer sind, wodurch die Starrheit der Atome veranschaulicht werden kann. Je starrer die Atome sind, um so größer ist die durch eine Versetzung herbeigeführte Volumenvergrößerung. Bei der Rekristallisation entstehen in den kaltverformten Metallen neue Gitterpunkte und neue Kristallkeime, die dann anwachsen. Die neu gebildeten Kristallite enthalten wesentlich weniger Fehlerrordnungen, und die im Laufe der Kaltverformung entstandenen Versetzungen verschwinden. Die beobachtete Volumenverringernng bzw. Abnahme des Wärmeausdehnungskoeffizienten wird durch diese Erscheinung bedingt.

## SCHRIFTTUM

1. KAHLBAUM, G. und STURM, W.: Zeitschr. f. Anorg. Chem. 46 (1905) 217.
2. ALKINS, W. E.: J. Inst. Metals 23. (1920) 381.
3. MASIMA, M. und SACHS, G.: Z. Physik 45. (1929) 666.
4. TAMARU, K.: Sci Rep. Tohoku Imp. Univ. 19. (1930) 437.
5. MAIER, C. C.: Trans. A. I. M. E. Inst. Met. Div. 122. (1936) 121.
6. CLAREBROUGH, I. M., HARGREAVES, M. E. and WEST, G.: Phil. Mag. (1956) 528.
7. RICHARDS, T. LL., PUGH, S. F. and STOKES, H. I.: Acta Met. 4. (1956) 75.
8. MASING, G.: Wiss. Veröff. Siemens Konzern. 2. (1922) 497.
9. BORELIUS, G.: Grundlagen des Metallischen Zustandes. Handbuch der Metallphysik Band I. Teil II. Herausgegeben von G. Masing Springer 1935.
10. BURGERS, W. G.: Rekristallisation, Verformter Zustand und Erholung. Handbuch der Metallphysik Band II. Herausgegeben von G. Masing Springer 1941.
11. COTTRELL, A. H.: Dislocations and Plastic Flow in Crystals. Clarendon Press 1953.
12. READ, W. T.: Dislocations in Crystals. McGraw Hill 1953.
13. VERŐ, J.: Általános metallográfia I., II. Akadémiai Kiadó Budapest, 1956.
14. MASING, G.: Lehrbuch der allgemeinen Metallkunde. Springer 1950.
15. UMANSZKIJ, J. SZ., FINKELSTEIN, B. H., BLANTER, M. N.: A metallográfia fizikai alapjai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
16. BRAGG, W. L. and NYE: Proc. Roy. Soc. 190. (1947) 474.

## ZUSAMMENFASSUNG

Es ist bei einigen Metallen festgestellt worden, daß sich der Wärmeausdehnungskoeffizient unter Einwirkung der Kaltverformung verändert. Der Wärmeausdehnungskoeffizient der drei untersuchten kubisch flächenzentrierten Metalle ist den Messungen nach kleiner im kaltverformten als im weichgeglühten Zustand. Die maximale Verringerung des Wärmeausdehnungskoeffizienten beträgt 4–6%. Die aus dieser Verringerung berechnete Volumenänderung erhöht das spezifische Gewicht des Silbers um 0,08%, das des Aluminiums um 0,1% und das des Nickels um 0,03%. Die Volumenverringernng ist teilweise dem Verschwinden der Eigenspannungen, teilweise aber der im Laufe der Rekristallisation stattfindenden Verringerung der Versetzungsdichte zuzuschreiben. Die volumenerweiternde Wirkung der Eigenspannungen ist auf kristallgeometrischer Basis ausgelegt worden.



VARIATION OF THE COEFFICIENT OF THERMAL EXPANSION  
OF COLD-WORKED METALS DURING ANNEALING

J. PROHÁSZKA

## SUMMARY

It has been observed that the coefficient of thermal expansion of some metals changes under the influence of cold working. According to the measurements made by the author, the coefficient of thermal expansion of the three cold-worked metals having a face-centered cubic structure which were investigated, is smaller in the cold-worked state than after annealing. The maximum reduction of the coefficient of expansion is between 4 and 6%. The variation of volume calculated from this reduction increases the specific weight of Ag by 0.08%, of Al by 0.1% and of Ni by 0.03%. The reduction of volume is ascribed partly to the disappearance of the internal stresses, partly to the reduction in dislocation density during recrystallization. The volume-increasing action of the internal stresses is explained by consideration on the basis of geometry of the structure.

CHANGEMENT DU COEFFICIENT DE DILATATION THERMIQUE DES METAUX  
ECROUIS, AU COURS DU RECUIT

J. PROHÁSZKA

## RESUME

L'auteur a constaté que le coefficient de dilatation thermique de certains métaux change sous l'effet de l'érouissage. Suivant les mesures faites par l'auteur, le coefficient de dilatation des trois métaux examinés à réseau cubique, à faces centrées, est plus petit après érouissage qu'à l'état recuit. La réduction maximum du coefficient de dilatation est de 4 à 6%. Le changement de volume calculé à partir de cette réduction augmente le poids spécifique de l'Ag de 0,08%, de l'Al de 0,1%, et du Ni de 0,03%. La réduction du volume peut être attribuée en partie à la disparition des tensions internes, et en partie à la diminution de la densité des dislocations. L'augmentation de volume due à l'effet des tensions internes est interprétée sur la base de la géométrie du réseau.

ИЗМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООВОГО РАСШИРЕНИЯ ХОЛОДНО-  
ДЕФОРМИРОВАННЫХ МЕТАЛЛОВ ПРИ ОТЖИГЕ

Й. ПРОХАСКА

## РЕЗЮМЕ

Для нескольких металлов установлено, что под воздействием холодной деформации изменяется коэффициент теплового расширения. На основе данных измерений на трех исследованных холоднодеформированных поверхностях коэффициент теплового расширения металла с центрированной кубической решеткой меньше чем в отожженном состоянии. Максимальное уменьшение коэффициента расширения находится в пределах 4—6%. Изменение объема (при расчете на основе этого коэффициента) увеличивает удельный вес Ag на 0,08%, Al на 0,1% и Ni на 0,03%. Уменьшение объемного веса можно отнести за счет ликвидации внутренних напряжений, частично же за счет уменьшения дислокационной плотности, происходящего в процессе рекристаллизации. Увеличивающее объем действие внутренних напряжений трактуется на основе геометрии решетки.



# X-RAY INVESTIGATION OF YIELD-PHENOMENA IN STEELS WITH A NEW METHOD OF EVALUATION

I. S. SZÁNTÓ\*

CANDIDATE OF THE TECHNICAL SCIENCES

( INSTITUTE OF MECHANICAL TECHNOLOGY, BUDAPEST TECHNICAL UNIVERSITY

[Manuscript received, March 31, 1961]

## Survey of problem to be solved

X-ray diffractometry is known to be the only method by means of which, besides changes in stress values, also the state of stress conditions can be determined. The question as to whether X-ray study of metals and alloys makes it possible to follow the transition from the zone of the elastic to that of the plastic range, or — in a given case — to observe the yield-phenomenon of crystalline materials, has been asked ever since the widespread adoption of X-ray diffraction measurements. So far, no unequivocal solution of the problem has been found, and literature contains numerous more or less contradictory reports in this respect.

SMITH and WOOD [1] were among the first who performed important X-ray work in this connection. They pointed to two essential features concerning the limit load between elastic and plastic ranges: (i) This limit is at the stage where the lattice strain ceases to be proportional to the applied stress or, in other words, where the mechanical characteristics of the material cease to be constant. (ii) The other peculiar property of loads exceeding the yield point is that they cause a residual strain which will remain in the material even after the stress has ceased.

These findings were, of course, results of a macroscopic view since also the phenomena observed tensometrically had been of a similar nature. Basing their measurements on the shift of the (310)-interference line peaks, SMITH and WOOD used steel-material in their experiments.

Although the principles underlying these observations were undoubtedly correct, the quantitative determination of stresses on the evidence of peak shifts, and especially the computation of yield stresses from them, is open to justified criticism.

It is known that, if determined tensometrically, all crystallites existing in a compact metallic body contribute to the strain, irrespective of the orientation of the measurement. Strain so determined represents the mean value of the strains occurred in differently oriented individual anisotropic crystals,

\* Present address: Research Institute of Technical Physics, Hungarian Academy of Sciences, Budapest.



whereas each of the X-rays of different wave-lengths, being reflected selectively, yield only data regarding correspondingly oriented deformations. This is why, for instance, the term "Cr-crystallites" has been adopted in literature, a term indicating the fact that only these crystallites are able to reflect Cr- $K_{\alpha}$  radiation or, in other words, that such rays reveal data about these crystallites only. It follows that it is always a certain crystallite group of preferred orien-

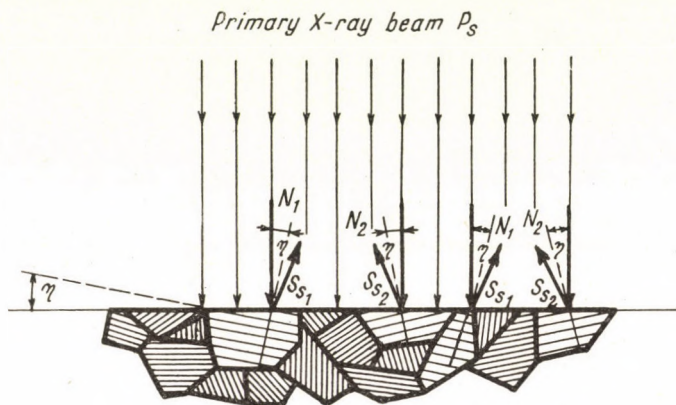


Fig. 1. Formation of indicator crystallites, due to selective reflection

tation, *i. e.* only a certain share of the metal particles, which is responsible for the reflection of a given ray. Therefore, back reflection patterns will not reveal changes in the distance between the atomic planes of the crystallites unless the  $N$  normal of the planes forms precisely such  $\eta$  angle with the incident  $P_s$  primary X-ray beam as satisfies the criterion of reflectibility. Conditions of this kind are shown in Fig. 1. Hence, the orientation along which the mean value of lattice strains can be measured is determined by the wave-length of the applied X-ray and by its angle of incidence. Since this value represents the average strain in a certain direction only, it cannot be expected to be identical with the mean value of all strains measured mechanically.

To eliminate this discrepancy MÖLLER and MARTIN [2] introduced the "Roentgen values" of  $E$  and  $\nu$  which exceed the values of the macroscopically measured elastic characteristics of the material by 10 to 25 per cent. However, this expedient has no universal validity: it gives satisfactory results for certain cases only and leaves the fundamental weakness of the procedure unremedied since its formulae of stresses are based on the theories of isotropic elasticity which do not apply to most polycrystalline aggregates. Of the engineering materials occurring in practice only the alloys with aluminium [3] or tungsten [4] matrix are exceptions in this respect inasmuch as they comply with the requirement of isotropy.



The inaccuracy of yield-point values computed from the shift of line peaks is, therefore, principally due to the fact that a change in the value of  $E$  occurs not merely at the transition into the range of plastic strains but may be occasioned by a great many other factors as well. The value of  $E$  depends mostly on orientation (WEERTS [5]) and changes also according to the type of the load (ZENER [6]; VACHER, LISS and MEBS, [7]). Although, of recent, MACHERAUCH and MÜLLER [8] have contested the latter statement, they have failed to bring the problem nearer to solution. Moreover, these authors refuse to regard GREENOUGH's model [9] concerning the yield-phenomenon of crystals as being experimentally proved: they maintain that X-ray measurements allow but an approximate determination of the actual surface stress condition (which makes the very X-ray back reflection possible). It is suggested by them that the particles of the examined polycrystalline aggregate reveal pronounced anisotropy of work-hardening [10].

In view of so many open questions it is not surprising that there was a disagreement also among those investigators who were dealing with directly the relationship between lattice strain and stress. Relying on experimental evidence, WOOD [11] reports that the proportionality limit based on (211)-reflections in steels coincides with the macroscopic yield point. GLOCKER and HASENMAIER [12], on the other hand, concluded from the line-peak shift of the same reflections that proportionality ceased already at loads amounting to 75 per cent of the macroscopic yield stress. It was found also by GARROD [13] that residual lattice strains existed in specimens after unloading even though the preceding load had not reached the macroscopic yield point. Our own experiments have yielded similar results [14].

All this goes to show that, according to numerous observations, the sub-microscopic yield point of steels — which depends on experimental conditions — is reached at different macroscopical stresses. It would seem from the experiments that the value of the yield point depends on the wave-length of the applied rays, and so it would follow that the mechanical properties of materials depend on whether we use soft or hard radiations. The difference, as observed in our case, seems therefore to be due to the above-mentioned dependence on orientation caused by selective reflection, as also to a difference in the penetration power of differently hard radiation. It is for the latter reason that the irradiated surface layer from which the average value of lattice strain is derived has a different thickness.

Discrepancies may be occasioned by other factors, also. Owing to the fact that the individual crystallites of the aggregate are differently oriented, and partly also to the fact that the mechanical characteristics of the inter-crystalline substance at the grain boundaries deviate from those of the matrix, not all crystallites begin to be deformed or yield simultaneously, and it is not exactly the same external load which give rise to deformation and/or



yield. It is hence submicroscopically not possible to draw a sharp line between stresses causing simultaneous elastic and plastic deformations [14] because plastic strain does not take place at the same time in all crystallites. There exists an intermediate state in which one part of the crystallites is still elastically, another part already plastically deformed. If external load ceases during this state, the plastically deformed crystallites prevent the complete disappearance of lattice distortion also in those crystallites which have suffered elastic deformation only. An elastic residual stress will remain in the latter, while the direction of the stress will be reversed in the plastically deformed lattice volume. These residual "hidden" elastic stresses become thus stabilized by the plastic strain of a part of the crystallites.

All these experiments are based on the measurement of line-peak shifts. Evaluation so performed is not unobjectionable, and most of the values so obtained are contradictory. Uncertainty in this respect is further enhanced by the fact that it is almost impossible to distinguish distortions due to mechanical stresses from those simultaneous lattice deformations which, under the effect of the cold-working, may be caused by processes of segregation or precipitation, and manifest themselves likewise through a shift of the line peaks.

Led by such considerations, certain authors conceived the idea that it might be possible to record yield phenomena on the evidence of a broadening of the interference lines.

Earlier authors (WEYER and PFARR [15], SMITH and WOOD [16], GREENOUGH [17]) were of the opinion that, while a certain broadening of the interference lines reflected by elastically deformed aggregates was conceivable, experimental methods were not sufficiently sensitive for the adequate measurement of this effect.

Now that the simultaneous occurrence of elasto-plastic deformations has been experimentally verified, the determination of yield phenomena on the evidence of line broadening has come into the foreground, and this the more so as — in the meantime — X-ray recording technique has rapidly advanced, and measurements have become very much more sensitive than before. It is safe to assume that stresses giving rise to macroscopically elastic strains result not only in a shift of the line peaks but also in a broadening of the interference lines. It is likewise to be expected that stresses, raised by plastic deformations, will not only broaden the lines but shift their peaks as well.

It was pointed out by GREENOUGH [17] that, in order to be able to interpret atomic movements accompanying plastic deformations, it was desirable to find also mathematical formulae for the exact description of phenomena occurring in crystalline structures. This has the necessary consequence that the distribution of intensities, as seen in the X-ray patterns, ought to be the base of evaluation, since it is more suitable for a comprehensive interpretation



of the phenomena than, separately, either the calculation of line-peak shifts or that of line broadening (SZÁNTÓ [18]). Of course, changes in the line profile may be due also to other additional causes than lattice distortion associated with the yield phenomenon. Such causes were discussed in detail by BRASSE and MÖLLER [4, 19]. The author, too, has analysed the causes of profile changes on several occasions [14, 20].

Our present work had the only object to ascertain whether the recently introduced method of evaluation (for a detailed discussion of the underlying principles see our earlier communication [21]) which made it possible to determine the stress conditions by means of deformation indices, could be used for a more exact description of the processes at the yield point of steels than those obtainable by the customary methods. It was justified to hope so since the employment of deformation indices, by means of using both connected partial factors, enables us to take into account peak shifts on the one hand and profile changes (*i. e.* line broadening) on the other. The mechanism of deformation can thus be characterized by  $p(d)$ -functions expressing the distribution of probability density, the so-called *lattice-distortion spectra* [22]. Such functions make it possible to treat correlations mathematically (though by approximations only) and enable to produce quantitative data.

## Experimental

### *Material used*

Table I shows the composition and mechanical data of the steel used in our experiments. It had a comparatively high yield point and an almost pure perlitic structure. Chemical analyses were made in the Chemical Department of the Research Institute of the Iron Industry, while mechanical and X-ray diffraction measurements were performed in the Laboratory of the Department for Mechanical Technology of the Budapest Technical University. It was by electropolishing treatment that the surface of the test plates (cross section =  $0.5 \times 10.0$  mm) was prepared. Table II shows the determination of lattice parameters existing in the unloaded initial state. We had to calculate these parameters as reference values for X-ray strain measurements. The lattice parameters are expressed in true Ångström units so that the figures, as given in the Table, are already corrected in respect of the error inherent in the kX-unit, *i. e.* that of SIEGBAHN's system. The tendency of the line profiles to become broader made it advisable to use radiations of different wave-lengths. It enabled us to determine, within the same test piece, the  $d$ -parameters of several atomic plane "families", each measured in a different direction. The reference value, *i. e.* that expressing the measure  $a$  of the unit cell of the base metal Fe, was obtained after having taken into account the uncertainty



of the measurement as characterized by the value  $\pm \Delta a$  as also after having weighted all  $d_{hkl}$  data.

Table I

*Chemical and mechanical characteristics of the steel used in the experiments*

| Sign of steel  | Chemical composition % |            |            |                    |            | Preliminary heat treatment   |
|----------------|------------------------|------------|------------|--------------------|------------|--|
|                | C                      | Si         | Mn         | Cr                 | Fe         |  |
| A <sub>2</sub> | 0.76                   | 0.19       | 0.56       | traces             | residual   | Annealing at 600° C for 40 minutes <i>in vacuo</i><br>Cooling, together with that of furnace |
|                | Rolling                |            |            |                    |            |  |
|                | lengthwise             |            |            | crosswise          |            |  |
|                | $\sigma_F$             | $\sigma_B$ | $\delta$ % | $\sigma_F$         | $\sigma_B$ | $\delta$ %   |
|                | kp/mm <sup>2</sup>     |            |            | kp/mm <sup>2</sup> |            |  |
| 70.4           | 85.9                   | 11.5       | 60.1       | 71.5               | 11.6       |  |

Mechanical test was performed by means of a microtensile test-machine, system Chevenard, type MI-34

Table II

*Determination of lattice parameters in stress-free (annealed) condition*

| X-ray applied   | (hkl) | $\eta$      | $d_{hkl}$ Å | $a$ Å  | $\pm \Delta a \cdot 10^4$<br>Å |
|-----------------|-------|-------------|-------------|--------|--------------------------------|
| Co—K $\alpha_1$ | (310) | 9° 15' 38"  | 0.90626     | 2.8656 | 0.13                           |
| Cr—K $\alpha_1$ | (211) | 11° 57' 40" | 1.17023     | 2.8659 | 0.22                           |
| Fe—K $\beta$    | (310) | 14° 14' 27" | 0.90614     | 2.8652 | 0.20                           |

Weighted balancing of lattice parameter  $a$

$$a^+ = \frac{\frac{1}{0.13} \cdot 2.8656 + \frac{1}{0.22} \cdot 2.8659 + \frac{1}{0.20} \cdot 2.8652}{7.7 + 4.5 + 5.0} = 2.8655_6 \text{ Å}$$

Hence

$$d_{310}^+ = \frac{a^+}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = \frac{2.8655_6}{\sqrt{10}} = 0.90625 \text{ Å}$$

### *Bending etalon device*

Our object was to create a state of well-defined uniaxial stress in the surface layer of the plates which had a rectangular cross section. The device, serving this purpose, had to satisfy the following requirements:

- (1) It had to cause a direct bending of the test piece.

(2) It had to ensure the same stress along the entire test piece, irrespective of space and time.

(3) It had to be capable of being continuously adjusted for a step-by-step increase of the stress.

(4) It had to be suitable for the direct measurement of maximum stresses arising in the extreme fibres.

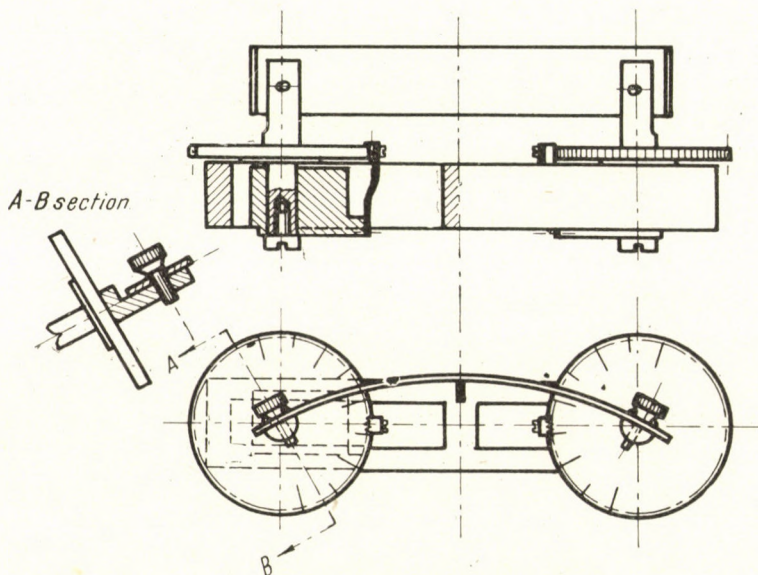


Fig. 2. General arrangement of bending device

The device illustrated in Fig. 2 meets these requirements: it ensures screwed clamping fitted to the plane of bending, and allows free movement in the guide faces for the bearings of the pinion discs which supply the bending moment.

Since only couples of forces acted upon the two ends of the specimens, it was possible to obtain unchanged bending moment in all cross sections of the test plates and fix it at any time in a given position by means of the spring pins of the pinion discs (Fig. 3). Carefully milled tothing made an evenly graded increase of the loading stages possible.

A photograph of the bending device, ready for use, is shown in Fig. 4.

It follows from the theorem of NAVIER—BERNOULLI that, in the elastic range, the relation between the maximum stress ( $\sigma_{\max}$ ), arising in the extreme fibre, and the radius  $\rho$  of the bending curvature can be expressed by the formula:

$$\sigma_{\max} = E \cdot \frac{v}{2} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (1)$$



where  $v$  = the thickness of the test plate and  $E$  = Young's modulus. Seeing that these two data are known and remain constant for any given test piece, measurement of the curvature enabled us to determine the stress in the sur-

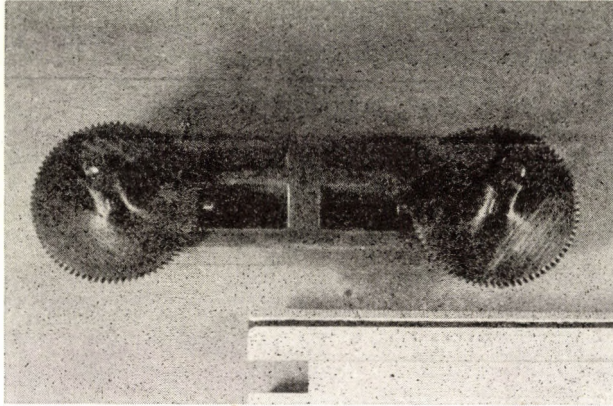


Fig. 3. Bottom-view photograph of bending device (dimensions indicated by slide-rule scale)

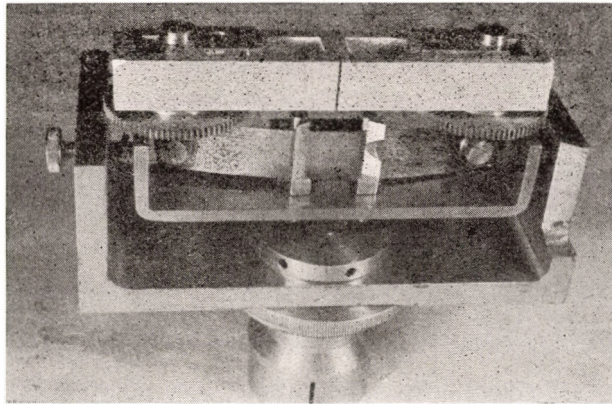


Fig. 4. Bending device with clamped specimen, ready for use

face layer without having to provide our instrument with tensometer or dynamometer.

If we want to apply the formula to the range of plastic deformations up to the limit load of uniform strain, it is — according to NÁDAI [23] — necessary to take into account strain hardening, furthermore that portion of the plate-thickness ( $e_0$ ) along which the proportionality, characterized by the modulus  $E$ , still obtains in the cross section of the test piece — at least in first approximation (Fig. 5).

Without giving its deduction, we present the formula which can be used for the determination of  $e_0$  :

$$e_0 = \frac{v}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{E(\sigma_1 - \sigma_F)}{\sigma_E \cdot E_p}} \quad (2)$$

where  $\sigma_1$  = stress above the yield point;

$\sigma_F$  = yield stress;

$E_p$  = measure of the rate-of-strain hardening.

With increasing loads, the common range of elastic and plastic strains covers larger and larger portions of the cross section, and the value of  $e_0$

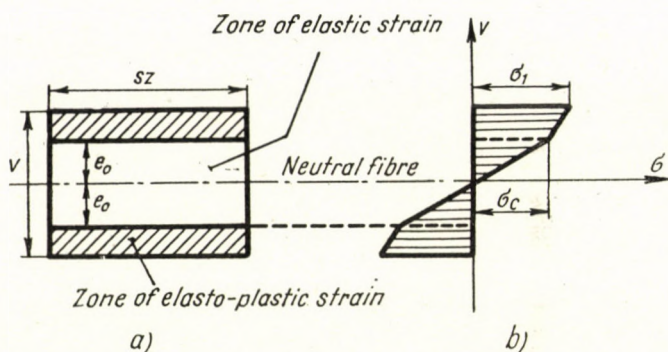


Fig. 5. a) Ranges of elastic and elasto-plastic strains  
b) Stress-distribution along cross section of the bent plate

becomes less and less. Numerical data in this connection are given in Fig. 6. For reasons of symmetry, only the stress distribution in respect of the extended half of the plate is presented; the neutral fibre coincides with the abscissa. On account of the phenomenon of strain hardening (so termed from a macroscopic point of view), the lattice distortion and the stress arising in the extreme fibre will be less than what could be expected according to Equation (1). Decrease in the gradient towards the extreme fibre is favourable for the purposes of X-ray measurement because it occurs in a layer close to the surface. Provided the depth of the irradiated layer does not exceed the value  $\left(\frac{v}{2} - e_0\right)$ , stress in the examined volume of the material will be considerably more homogeneous than in the deeper layers, so that the measurement of lattice distortions will become more reliable.



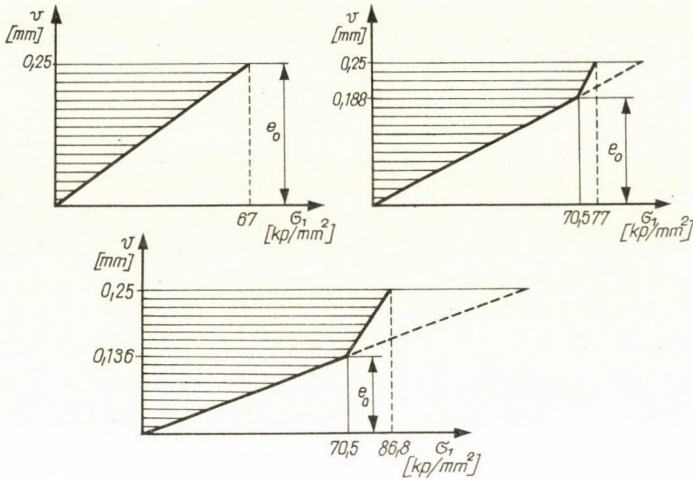


Fig. 6. Distribution of stresses, in respect of different curvatures, along the half cross section

### Performance of measurements and results

Save the last — eleventh — stage, the tests were performed in a stressed condition with monotonously increasing loads. The gradual stepping up of the load was achieved by means of the bending etalon device: the consecutive stages are shown in Table III. It is for the reasons explained in connection with Fig. 6 that the stress-equivalents of load-stages 9 and 10 are placed in brackets. The volume irradiated by the X-ray beam was the zone of extreme fibres exposed to maximum tension.

Three series of measurements are presented. It was the classic technique of recording, as introduced by GISEN, GLOCKER and OSSWALD [24], which we employed in those arrangements where the primary X-ray beam was perpendicular or fell at a  $45^\circ$  angle of incidence. The patterns taken at a  $52^\circ$  angle of incidence were obtained with the modified method of SCHAAL [25], in a so-called “duplex” arrangement. Further details regarding experimental conditions, as well as the full description of the new method of evaluation, *i. e.* characterization with deformation indices, are contained in earlier reports [14, 22].

Results obtained in the course of the investigations are assembled in Figs. 7, 8 and 9. They contain, moreover, the corresponding series of the deformation indices. The consecutive load-stages are numbered on purpose because the figures measured indicate states of deformation and not stresses.

It should be noted that the X-ray patterns in respect of the 2nd loading stage of the first two series could not be evaluated and had to be left out of the table on account of a subsequently observed technical error. In the last

**Table III**  
*Adjustment of bending device*

| Loading stage No. | Position of pinion disc | Radius of curvature mms | ( $\sigma_{\max}$ ) bending kp/mm <sup>2</sup> | Notes                                      |
|-------------------|-------------------------|-------------------------|--|--|
| 1                 | 0                       | $\infty$                | 0  |  |
| 2                 | 1                       | 544                     | 9.7  |  |
| 3                 | 2                       | 272                     | 19.3   |  |
| 4                 | 3                       | 182                     | 28.9   |  |
| 5                 | 4                       | 136                     | 38.5   |  |
| 6                 | 5                       | 109                     | 48.2   |  |
| 7                 | 6                       | 91                      | 57.7   |  |
| 8                 | 7                       | 87                      | 67.4   |  |
| 9                 | 8                       | 68                      | (77.2)   |  |
| 10                | 9                       | 61                      | (86.8)   |  |
| 11                | —                       | —                       | 0  | Unloaded state after cessation of strength |

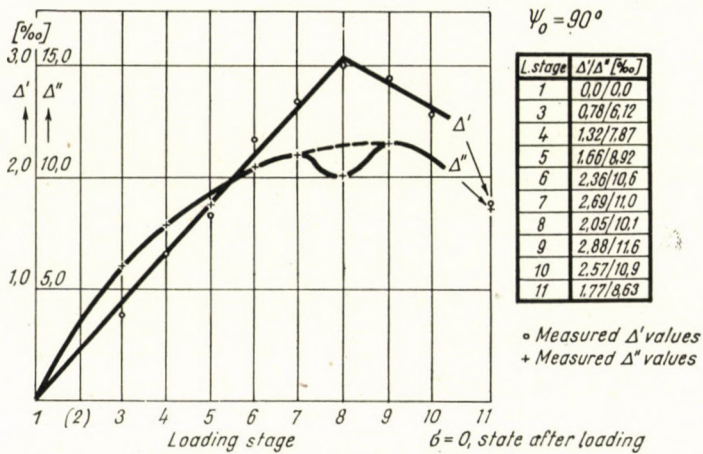


Fig. 7. Changes in the value of deformation indices caused by increasing stresses (angle of incidence  $\psi_0 = 90^\circ$  of primary beam)

series, it seemed sufficient to make analyses at every second loading stage only. Loading stage No. 11 means the unloaded state which follows the maximum strength. It was in this condition that we tried to determine residual elastic distortions due to plastic deformation.



The results make it evident that the characterization of lattice-distortion spectra with deformation indices is suitable for revealing significant changes in the stress condition of differently loaded specimens. Identical changes

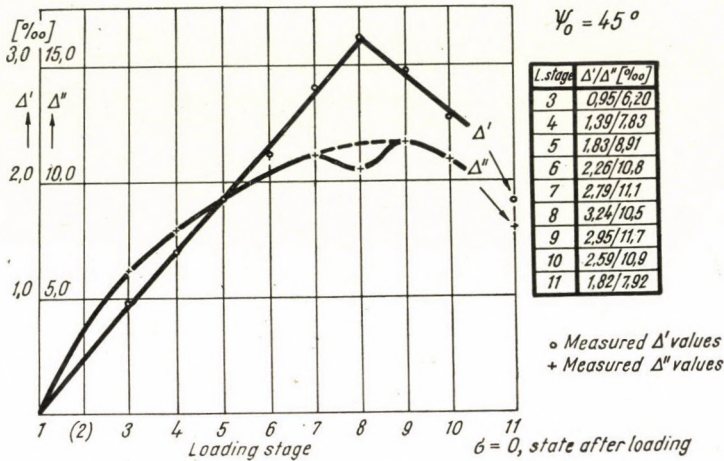


Fig. 8. Changes in the value of deformation indices caused by increasing stresses (angle of incidence  $\psi_0 = 45^\circ$  of primary beam)

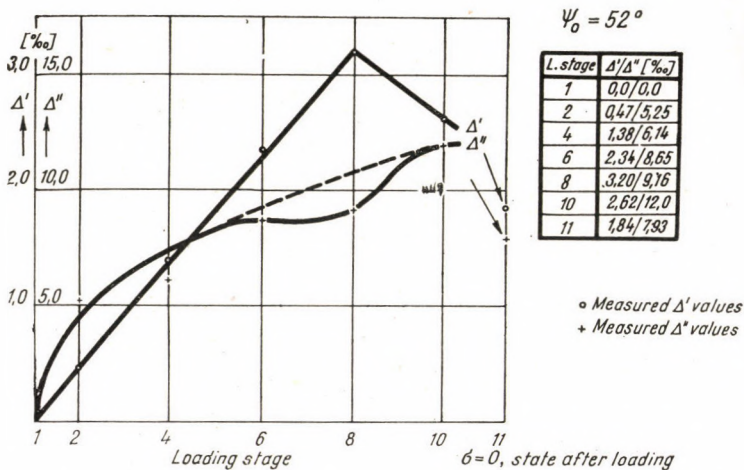


Fig. 9. Changes in the value of deformation indices as functions of increasing stresses, obtained from X-ray patterns produced with an angle of incidence  $\psi_0 = 52^\circ$  (position of invariance)

in the stress do not induce changes of the same extent in both partial factors of the deformation indices. It can be clearly seen in Figs. 7—9 that, approaching the stress limit  $\sigma_F$ ,  $\Delta'$  is still increasing while the value of  $\Delta''$  is already tending to diminish. That the values of the two connected indices do not change

at the same rate is no drawback: on the contrary, it helps in defining the state in question more clearly. We have coined the term "yield-record anomaly" for this phenomenon.

If we considered  $\Delta'$  alone we should not be able to tell that the limit of permissible load has been reached, for  $\Delta'$  — *i. e.* specific main deformation — is still increasing. Nor would, on the other hand, the sole consideration of the line profile and the partial factor  $\Delta''$  alone tell us whether its lower value indicates smaller stress or a decrease in the number of coherently reflecting crystallites.

It is only the simultaneous consideration of  $\Delta'$  and  $\Delta''$  which shows more precise values of the deformation of the specimen under test and gives fairly accurate information as to the extent to which the mass phenomenon in the crystallites, *i. e.* the change of the polycrystallite aggregate from the elastic to the plastic range of strains, had progressed.

#### *Accuracy of measurements*

There exists a difference between the two partial factors not only as regards the course of their respective curves but also in respect of absolute values. Given the same scale of loads,  $\Delta''$  covers a much wider range of values than  $\Delta'$ . Since, however, the uncertainty-band of  $\Delta''$ -measurements is many times as wide as that of  $\Delta'$ , we felt justified in making the scale of the  $\Delta'$ -ordinate larger than that of the  $\Delta''$ -ordinate. Such enlargement of the scale makes changes in the indices clearer and is, besides, perfectly reasonable seeing that indications given by  $\Delta'$  are at least three times as sensitive as those by  $\Delta''$ .

Considerations of limited space do not allow to expatiate here upon discussions regarding errors: according to them, measurements showed unequivocally that a change of about 0.048 to 0.050 per mille in the value of  $\Delta'$  corresponds to an uniaxial stress-difference of 1 kg/mm<sup>2</sup>. The same unit stress-difference occasioned a change of 0.16 per mille in the value of  $\Delta''$ . The band of error of the second partial factor was found to be 1.2 per mille on an average, and this gives  $\Delta\sigma \cong |7.5| \text{kg/mm}^2$  as the unsafety of stress measurements. Hence, the index  $\Delta''$  alone does not suffice for a precise determination of stress conditions, whereas the partial factor  $\Delta'$ , in itself, is a reliable index for stresses which induce only elastic strains in the major part of the crystallites.

#### **Conclusions**

In contradiction to GLOCKER's recently published statement [26], it has been found that residual stresses of first order give rise not only to a shift of line peaks but to a simultaneous broadening of the lines, *i. e.* to a change in line profile, as well. It is precisely a synthesis of the two effects which



enables us to obtain more reliable observations in the critical range of yield phenomena.

Analysis of the changes in the two deformation indices makes it possible to draw up a scheme concerning the features of polycrystalline aggregates

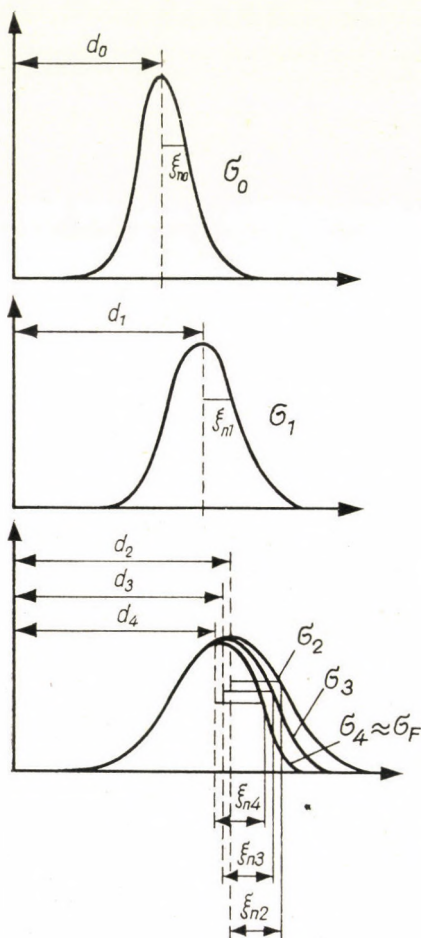


Fig. 10. Scheme of changing lattice-distortion spectra  $p(d)$  as a function of different parameters  $\sigma$  (for the physical interpretation of the yield-record anomaly)

during the successive phases of increasing loads, as can be seen from the lattice-distortion spectra  $p(d)$  in Fig. 10.

The distribution  $p(d)$ , belonging to the initial unloaded state  $\sigma_0$ , can be expressed by an expected most probable lattice parameter  $\bar{d}_0$  and a form factor  $\xi_{n0}$ . As indicated by the increasing values of  $\Delta'$  and  $\Delta''$ , increasing loads  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  give rise to corresponding increases in the values of the lattice

parameter and the factor  $\xi_n$ . Stresses of the order  $\sigma_3$ , and especially those of the order  $\sigma_4$ , *i. e.* those corresponding to the macroscopic flow stresses  $\sigma_F$ , do no longer effect a further shift or broadening of the spectrum  $p(d)$ : the latter becomes even somewhat sharper again, as can be seen from the diagrams. The corresponding values of  $\xi_{n3}$  and  $\xi_{n4}$  are actually lower than  $\xi_{n2}$ , while the decrease of  $d_3$  and  $d_4$  is apparent only. It is because of the asymmetric decrease in spread that the median line of the distribution curve appears to have shifted backward.

This is the phenomenon, observable by the X-ray method, we have termed *yield-record anomaly*, and it can be interpreted physically in the following manner: The distances  $d$  between the preferred atomic planes, *i. e.* those which characterize the indicator crystallites, become wider and wider until the range at which the strength of the examined lattice volume approaches the plastic strain limit. Viewed submicroscopically, there exists no steep yield-stress limit: more and more individual crystallites of the aggregate begin to glide, preferably those the value  $d$  of which shows the greatest deviation from  $d_v$ , *i. e.* from the mean distance or, in other words, which have suffered the relatively greatest elastic deformation. Gliding becomes a mass phenomenon which manifests itself in the probability distribution  $p(d)$  by a diminution of the upper scatter zone. Those crystallites which have undergone the relatively greatest deformation are no longer in a position to reflect: they cannot satisfy the necessary and sufficient conditions of diffraction measurement. Only those crystallites within the aggregate remain in the steadily decreasing group of elastically deformed grains which have  $d$ -values with small deviations (spread), so that the distribution  $p(d)$  becomes sharper. It is, thus, the specimen affected by mechanical working strength which — even before reaching the macroscopic  $\sigma_F$ -limit — reveals, in X-ray patterns, any diminution of  $\xi_n$  and this causes a local slope in the  $\Delta'$ -curve, while the apparent reduction of the mean value of  $d$  manifests itself in the decrease of the partial factor  $\Delta'$ , although later.

Sharpening of the line profile and the corresponding reduction in the value of  $\Delta'$  in the case of bending stresses beyond the macroscopic yield point are moreover due to the fact that the  $d$ -distribution appears to be comparatively more homogeneous in the irradiated surface layer. It can be seen from Figs. 5 and 6 that the gradient of stress distribution shows a trend to becoming less steep towards the extreme fibres.

The value of  $\Delta'$  which expresses the local inhomogeneity of deformation may increase once more under the effect of stresses exceeding  $\sigma_F$ . To draw inferences from this to the equivalent stress state would, however, lead to unreliable results.

It is worthy of note that the elevated background level — which points to the appearance of plastic strains in X-ray patterns — remains unchanged



even when the line profile resharpenes near the yield point. This, too, supplies an easily perceptible effect for a better distinction between actually very small and reduced elastic distortion (the reduction of the latter being due to plastic deformation), as well as between the corresponding stress conditions.

The results obtained from measurements at loading stage No. 11 have to be discussed separately. Deformation indices at this stage showed the unloaded state after cessation of loading. The results of measurements performed in this condition pointed to the existence of elastic strains although they ought to have vanished after the lifting of the load. Since the previously applied loads had brought the specimens into, or beyond, the range of the yield point, part of their lattice structure suffered a plastic deformation: subsequent unloading made no difference in this respect so that the hidden elastic distortions appeared to have been preserved. The deformation indices, measured after unloading, had an order of magnitude which corresponded to those of test pieces at the previous loading stages 4 and 5. The measurement performed at stage 11 indicated, therefore, an imaginary state as though there had still existed a considerable bending stress in the extreme fibres of the already unloaded specimens. The data yielded by the X-ray method were strikingly borne out by the observation that, once the clamping had ceased, the test plates realized, without force, a shape of such curvature as — according to Table III — had been first observed at the above-mentioned loading stages *i. e.* during the loaded state before the beginning of the macroscopic yield process.

## REFERENCES

1. SMITH, S. L., WOOD, W. A.: Proc. Roy. Soc. *A* 181 (1942) 72
2. MÖLLER, H., MARTIN, G.: Mitt. KWI. Eisenforschg. 21 (1939) 261
3. HANSTOCK, R. F., LLOYD, E. H.: Proc. Inst. Mech. Engrs, London, 157 (1947) 52
4. BRASSE, F., MÖLLER, H.: Arch. Eisenhüttenwes. 29 (1958) 757
5. WEERTS, J.: Z. Metallkde, 25 (1933) 101
6. ZENER, C.: Z. Metallkde, 50 (1959) 3
7. VACHER, H. C.—LISS, R.—MEBS, R. W.: Acta Metallurg. 4 (1956) 532
8. MACHERAUCH, E.—MÜLLER, P.: Arch. Eisenhüttenwes. 29 (1958) 257
9. GREENOUGH, G. B.: Proc. Roy. Soc. *A* 197 (1949) 556
10. MACHERAUCH, E.—MÜLLER, P.: Z. Metallkde, 51 (1960) 514
11. WOOD, W. A.: Proc. Roy. Soc. *A* 192 (1948) 218
12. GLOCKER, R.—HASENMAYER, H.: Z. VDI, 84 (1940) 825
13. GARROD, R. I.: Nature, London, 165 (1950) 241
14. SZÁNTÓ, I.: Rácsdeformációk spektrumának indikálása (Characterization of lattice-distortion spectra), 1959, Budapest, Theses. (In Hungarian)
15. WEVER, F.—PFARR, B.: Mitt. KWI. Eisenforschg. 15 (1933) 137
16. SMITH, S. L.—WOOD, W. A.: Proc. Roy. Soc. *A* 176 (1940) 398
17. GREENOUGH, G. B.: Progress in Metal Physics 3 (1952) 176
18. SZÁNTÓ, I.: Fécek rácsszerkezeti változásainak mérése (Measurement of structural changes in the space lattice of metals) Published (in Hungarian) by the Institute for Postgraduate Training for Engineers (1955), Budapest, 70
19. BRASSE, F.—MÖLLER, H.: Arch. Eisenhüttenwes. 30 (1959) 685
20. SZÁNTÓ, I. S.: Period. Polytechn. *M* 1/3. (1957) 175



21. SZÁNTÓ, I. S.: Freiburger Forschungshefte, *B 50* (1960) 52
22. SZÁNTÓ, I. S.: Acta Techn. XXXII. 1-2. (1961) 65
23. NÁDAI, A.: Theory of flow and fracture of solids, 2. ed. New York—Toronto—London, McGraw-Hill, (1950)
24. GISEN, F.—GLOCKER, R.—OSSWALD, E.: Zeitschr. techn. Phys. 17 (1936) 145
25. SCHAAL, A.: Schweizer Archiv, 19 (1953) 211
26. GLOCKER, R.: Materialprüfung mit Röntgenstrahlen, 4. Ausg. Springer (1958) 347

### SUMMARY

The question whether X-ray methods are suitable for the recording of yield-phenomena in crystalline materials and, more generally, for the study of the transition from the range of elastic into that of plastic strains has been a battleground of controversies for a long time. After a survey and critical analysis of the contradictory reports an attempt is made to interpret the submicroscopic process, occurring at the yield point of steels, in a manner more suitable than that usually employed. This is done by using a new method of evaluation which determines the state of stress by means of deformation indices. Experiments in which the shift of the peak of the (310) interference lines as also changes in the line profile and the level of background scatter are simultaneously taken into account, prove that the partial factors in respect of the same state do not change identically under the action of the same loads. The value of  $\Delta'$  has been found to be still increasing in the range of the yield point when that of the other partial factor  $\Delta''$  was already diminishing. This effect, termed "*yield-record anomaly*", is interpreted from a statistical aspect of the mechanism responsible for deformations in polycrystalline aggregates.

### RÖNTGEN-UNTERSUCHUNG DER FLIESSGRENZENERSCHEINUNGEN IM STAHL MITTELS EINER NEUEN AUSWERTUNGSMETHODE DER GITTERVERZERRUNGEN

I. S. SZÁNTÓ

### ZUSAMMENFASSUNG

Es ist eine seit langem umstrittene Frage, ob die Fließerscheinungen der kristallinen Körper beziehungsweise im allgemeinen der Übergang aus der Zone der elastischen in die der plastischen Formänderung durch Röntgenmeßmethoden registrierbar sind. Nach kritischer Erörterung der einander widersprechenden Ergebnisse, die in der Literatur zu finden sind, versucht der Verfasser, den submikroskopischen Vorgang im Fließgrenzenbereich der Stähle mittels einer neuen Methode zu beschreiben, die hierfür geeigneter ist als die bisherigen. Er benützt das von ihm ausgearbeitete neue Auswertungsverfahren: die Bestimmung des Spannungszustandes durch Deformationsindexe. Bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Verschiebung des Maximumpunktes der gemessenen Interferenzlinie (310) der Röntgenogramme sowie ihrer Profiländerung bzw. der diffusen Grundstreuung, ist aus den Versuchen festzustellen, daß die auf denselben Zustand bezüglichen Teilalküle unter der Wirkung von gleichen Belastungsänderungen sich nicht auf dieselbe Weise ändern. In der Zone der das Fließen auslösenden Beanspruchung nimmt  $\Delta'$  noch zu, während das zugehörige  $\Delta''$  schon eine rückgängige Tendenz aufweist. Vom Verfasser wird dieser *Fließgrenzenanomalie* genannte Effekt auf Grund der statistischen Auffassung des Verformungsmechanismus des polykristallinen Materials erklärt.



## EXAMEN RADIOGRAPHIQUE DES PHENOMENES A LA LIMITE D'ECOULEMENT DE L'ACIER SELON UNE NOUVELLE METHODE D'EVALUATION DES DISTORSIONS DU RESEAU

I. S. SZÁNTÓ

### RESUME

La question est discutée depuis longtemps: est-ce que l'on peut mesurer par des méthodes radiographiques les phénomènes de fluage des corps cristallins, et en général le passage de la zone des déformations élastiques à la zone des déformations plastiques. Après une analyse critique des résultats contradictoires publiés, l'auteur essaie de décrire le processus sub-microscopique à la limite d'écoulement d'une façon plus appropriée que celle en usage jusqu'ici. A ces fins il utilise sa nouvelle méthode d'évaluation, la détermination de l'état des tensions par des indices de déformation. En tenant compte simultanément du décalage du maximum et du changement de profile des lignes d'interférence (310) des radiogrammes et de la dispersion diffuse du fond, on peut déduire des essais que les valeurs partielles relatives au même état ne changent pas de la même façon sous l'action de variations de charge de la même grandeur. Dans la zone des tensions qui font commencer le fluage  $\Delta'$  croît encore, quand  $\Delta''$  correspondant a déjà une tendance rétrograde. Ce phénomène, dénommé *anomalie de la limite d'écoulement*, est expliqué par l'auteur sur la base d'un traitement statistique du mécanisme de la déformation de la matière polycristalline.

## РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЙ ПРЕДЕЛА ТЕКУЧЕСТИ СТАЛИ С ПОМОЩЬЮ НОВОГО МЕТОДА ИНДИКАЦИИ ИСКАЖЕНИЯ РЕШЕТКИ

И. Ш. САНТО

### РЕЗЮМЕ

Уже давно оспаривается вопрос: возможно ли регистрировать с помощью рентгеновских методов явления текучести кристаллических тел, соответственно вообще переход из состояния упругости в зону пластической деформации. После критического анализа противоречивых результатов, приведенных литературой по этой теме, автор делает попытку дать описание субмикроскопических явлений, протекающих в зоне предела текучести сталей, более подходящим чем до сих пор методом. Для этой цели используется разработанный автором новый метод оценки, а именно определение состояния напряжения с помощью индексов деформации. Одновременно учитывая сдвиг вершин линий интерференции рентгенограмм (310) и изменение профиля, соответственно уровень почернения, обусловленный фоном, на основе опытов можно определить, что относящиеся к одному и тому же состоянию частные калкули при воздействии идентичного изменения нагрузки изменяются не идентично. В зоне нагрузки, вызывающей течение,  $\Delta'$  еще возрастает, в то же время  $\Delta''$  уже показывает тенденцию спада. Этот эффект, названный аномалией предела текучести, трактуется автором на основе статистического взгляда механизма деформации поликристаллического множества.

# СИСТЕМА КРИВЫХ РЕГУЛИРОВАНИЯ РУСЛА РЕК ЧАСТЬ 1. РАСЧЕТ ДЛИНЫ, РОД КРИВЫХ

К. АПОР

[ПОСТУПИЛО 13 АПРЕЛЯ 1961 Г.]

## Предисловие

Кривые регулирования русла рек названы советским профессором М. В. Потановым синусоидами (см. С. Т. Алтюнин: рис. 10 на стр. 137 книги «Регулирование русла рек», 1956). С названием синусоида мы встречаемся даже у французского инженера Фарга для той части спиральной волюты, выраженной в форме интегрированного уравнения, которая может быть использована для целей регулирования русла.

Уже на первый взгляд видно, что в горных районах река создает свое русло так называемое «здоровое» русло по синусоидным кривым, но это русло необходимо стабилизировать от дегенерации путем укрепляющих берега и регулирующих сооружений.

Ранее было установлено, что регулирование рек невозможно решить при помощи дуги одного единственного радиуса кривизны проектирования изгибов при регулировании русла, и поэтому использовалась корзиночная кривая от инфлекссионной точки до сурфлекссионной точки с уменьшающимся радиусом кривизны. От сурфлекссионной точки до следующей инфлекссионной точки увеличивались радиусы корзиночной кривой.

Характеристика кругления (или корзиночная кривая, или же директрисная синусоида) является единственно правильным методом выражения в радианах угла отклонения по направлению инфлекссионных касательных.

## I. Вычисление длины дуги кривой по касательной и хорде

Данные значения длин: хорда кривой  $a$ , касательные  $b$  и  $c$  (см. рис. 1). Эти длины определяют один треугольник и позволяют предварительно вычислить длину дуги синусоидной кривой, которую можно построить в треугольнике. Первоочередная важность этой операции проявляется при определении линии регулирования горных рек, так как быстрое изменение русла горных рек в большинстве случаев делает невозможным исполнение оригинальных планов без каких-либо изменений. В таких случаях план



необходимо модифицировать на месте, и кривую регулирования необходимо построить вновь в соответствии с изменившимся положением и на основе этого построить регулирующее сооружение.

## II. Длина дуги — как функция хорды и касательных

Длина дуги будет:

$$l = f(a, b, c),$$

то есть является функцией сторон  $a, b, c$  треугольника.

$$l > a,$$

но

$$l < b + c.$$

Для вычисления длины дуги мною установлены следующие методы:

$$1.) l = a + \Delta_1,$$

то есть длину дуги можно вычислить в качестве продолженной длины хорды.

$$2.) l = \frac{a + b + c}{2} - \Delta_2$$

как сокращенная длина половины боковых итогов.

1. Длина дуги, как продолженная хорда.

$$l < a \left[ 1 + \frac{b + c + a}{a} \right].$$

$a$

$$l = a \left[ 1 + \frac{b + c - a}{\frac{b + c}{2}} x_1 \right] = a(1 + \Delta_1).$$

Исходя из данных сегмента круга единичного радиуса

$$x_1 = \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1}{1 + 1 - \sqrt{1}},$$

так как

$$\frac{\pi}{2} : \sqrt{2} = \frac{3,14159}{2 \cdot 1,414}$$

является коэффициентом, указывающим отношение сегмента круга к хорде. Из этого числа необходимо вычесть единицу, так как в нашей основной формуле выявляя  $a$ , 1 уже присутствует с положительным значением. Эту разность же необходимо разделить на  $(1 + 1 - \sqrt{2})$ , что является числом вычитанной хорды из суммы числа длины касательных сегмента единичного радиуса, так сказать, является разностью сегмента единичного радиуса  $b + c - a$ , и поэтому при подстановке становится числителем.

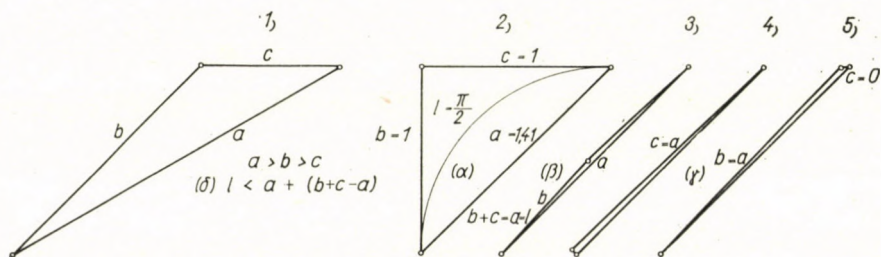


Рис. 1

Весь метод является обратной операцией основной формулы за упущением  $\frac{b+c}{2}$ , так как  $\frac{1+1}{2} = 1$  не изменяет значение ни в качестве делителя, ни в качестве множителя.

1. а) В крайнем случае формула длины дуги, отнесенная к хорде.

Исследуем, каким образом удовлетворяет формула приведенное выше условие  $a$  (см. рис. 1. 2).

$$a = \sqrt{2}, \quad b = 1, \quad c = 1 \quad l = ?$$

$$a = \left[ 1 + \frac{b+c-a}{a} \cdot \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1}{1+1-\sqrt{2}} \right].$$

После подстановки имеем

$$l = \sqrt{2} \left[ 1 + \frac{1+1-\sqrt{2}}{1+1} \cdot \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1}{1+1-\sqrt{2}} \right]$$

$$l = \sqrt{2} \left[ 1 + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1 \right] = \frac{\pi}{2}.$$



Каким образом удовлетворяется условие  $\beta$ ?

Укорачивается  $b + c$ , треугольник превращается в прямую

$$b + c = a$$

$$\beta) \quad l = a \left[ 1 + \frac{b + c - a}{\frac{b + c}{2}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1}{1 + 1 - \sqrt{2}} \right].$$

Если

$$b + c = a,$$

тогда

$$b + c - a = 0,$$

слагаемое формулы сокращается до 0 и остается лишь  $l = a [1] = a$  (см. рис. 1. 3).

1. б) *Вычисление* для крайних случаев длины дуги, отнесенной к хорде

$$x_1 = \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1}{1 + 1 - \sqrt{2}} = ?$$

$$N_{\lg} 9,2764\ 869 = \overline{0,1\ 890\ 135 = x_1}.$$

Сокращая коэффициенты, получаем

$$\begin{aligned} l &= a \left[ 1 + \frac{b + c - a}{\frac{b + c}{2}} \cdot 0,189 \right] = \\ &= 1,41 \left[ 1 + \frac{0,586}{1} \cdot 0,189 \right] = 1,41 [1 + 0,111] = \\ &= 1,571 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

2. Длина дуги, как укороченная длина суммы касательных и хорды

$$l < \frac{2}{3} (a + b + c).$$

Однако, если за основу принять касательные и хорду сегмента единичного радиуса, тогда это действие сужается еще больше, как известно

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\sqrt{2} + 1 + 1}{2}$$

алгебраически

$$l < \frac{a + b + c}{2},$$

так как в числовом выражении имеем

$$1,57 < \frac{1,41 + 1 + 1}{2} < \frac{3,41}{2} < 1,71.$$

Следовательно, из этого количества  $\frac{a + b + c}{2}$  необходимо вычитать некоторое небольшое количество  $\Delta_2$  или же

$$l = \frac{a + b + c}{2} - \Delta_2 \cdot X_{II},$$

$\Delta_2$  является также функцией количеств  $a, b, c$ ,

$$\Delta_2 = f(a, b, c)$$

и для этого наиболее подходящим является количество  $b + c - a$ , известное уже из вышесказанных, поэтому

$$l = \frac{a + b + c}{2} - (b + c - a) x_{II},$$

$$x_{II} = \frac{\frac{1 + 1 + \sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2}}{1 + 1 - \sqrt{2}} = 0,232\ 693.$$

Сокращая коэффициенты, имеем

$$l = \frac{a + b + c}{2} - (b + c - a) 0,233. \quad (2)$$



### III. Длина дуги тангентоида и эллипса

Анализ общих принципов регулирования рек требует вычисления длины дуги синусоидной кривой, определенной касательными и хордой эллиптического сегмента. Определенное мною  $a$  есть большая сторона некоторого общего треугольника,  $b$  — меньшая сторона,  $c$  — наименьшая сторона; необходимо в обязательном порядке преобразование формулы. Следовательно, в дальнейшем полудлину большой оси я буду обозначать через  $a_e$ , а через  $b_e$  — полудлину малой оси. Поэтому определенную мною методику вычисления могу использовать лишь в том случае, когда  $a = \sqrt{a_e^2 + b_e^2}$ , (см. рис. II), так как эта гипотенуза, соединяющая концы полуосей эллипса, в то же время  $b = a_e$ , так как последний равен большему катету и, наконец,  $c = b_e$ , так как последний равен меньшему катету.

После сказанных выше длина дуги тангентоида, выражая по полудлинам осей эллипса, будет:

1. Отнеся к диагонали

$$l_1 = \sqrt{a_e^2 + b_e^2} \cdot \left( 1 + \frac{a_e + b_e - \sqrt{a_e^2 + b_e^2}}{\frac{a_e + b_e}{2}} \cdot 0,189 \right). \quad (3)$$

2. Отнеся к половине суммы диагонали и катетов, имеем

$$l_2 = \frac{\sqrt{a_e^2 + b_e^2} + a_e + b_e}{2} - (a_e + b_e - \sqrt{a_e^2 + b_e^2}) \cdot 0,233. \quad (4)$$

Условия, подробно изложенные выше под пунктами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , действительны также и для этих формул с измененными обозначениями.

В данной главе я изменил название синусоида, так как кривая, построенная на основе прямоугольных касательных, имеет тангентоидный характер. Как это видно из числовых примеров, длина дуги очень хорошо приближается к длине дуги эллипса.

$\sigma$ . По Хютте длина дуги эллипса

$$U = \pi(a+b) \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 \frac{1}{64} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^4 + \frac{1}{256} \left( \frac{a-b}{a+b} \right) + \dots \right] = \pi(a+b) x.$$

Для вычисления  $\pi(a+b)$  используем следующие данные

|                     |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{a-b}{a+b} =$ | 0,1    | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
| $x =$               | 1,0025 | 1,0100 | 1,0226 | 1,0404 | 1,0635 | 1,0922 | 1,1267 | 1,1677 | 1,2155 | 1,2732 |

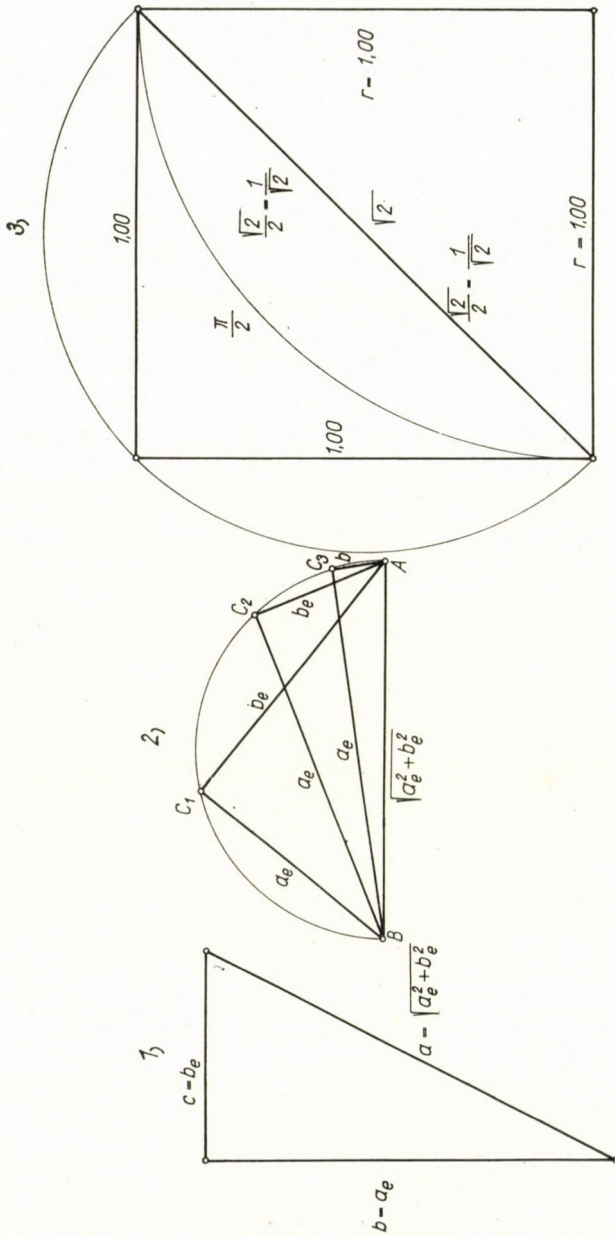


Рис. 11



Приведенная выше формула в предельном случае  $l = a$ , то есть также в случае круга дает удовлетворительный результат, так как тогда  $a.) l = \pi(a + a) = \pi \cdot 2a$ , или же является кругом, радиус которого равен  $a$ ;  $x = 1$ ;  $\frac{a - a}{a + a} = 0$ , следовательно  $x = 1$ . Из этого следует, что  $a$  и  $b$  обозначают полудлину осей. А если же  $b = 0$ , тогда  $\frac{a - b}{a + b} = \frac{a}{a} = 1$ ,  $x = 1,2732$ ,  $v = \pi a$ ,  $1,2732 = 4a$ . Так как на основе предыдущих выводов длина дуги равна четвертой части длины дуги всей кривой,  $l_3 = \frac{v}{4}$ , поэтому в предельном случае  $a.)$  имеем  $l_3 = \frac{\pi \cdot 2 \cdot a}{4} = \frac{\pi}{2} a$ ; а в предельном случае  $\beta) l_3 = \frac{4a}{4} = a$ .

Следовательно, по Хютте в обоих случаях  $a$  и  $b$  означает полудлины осей, то есть

$$a_{\text{Хютте}} = a_e$$

и

$$b_{\text{Хютте}} = b_e.$$

#### 4. Формула длины дуги

$$l_4 = \sqrt{a_e^2 + b_e^2} \left[ 1 + \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1 \right) \frac{b_e}{a_e} \right]$$

имеет аналогичное строение с формулой пункта 1.).

Для предельных случаев имеем.

Если  $a.) b_e = a_e$ , т. е. в случае круга

$$l_4 = \sqrt{2a_e^2} \left[ 1 + \left( \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1 \right) \frac{a_e}{a_e} \right] = \sqrt{2} a_e \left[ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right] = a_e \frac{\pi}{2}.$$

Если  $\beta.) b_e = 0$ , тогда имеем

$$l_4 = \sqrt{a_e^2} \cdot \left[ 1 + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1 \right] \frac{0}{a_e} = a_e.$$

Преимущество коэффициента  $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1$ , то есть  $1,11072 - 1 = 0,11072$  или сокращенно  $0,1107$  состоит в том, что его можно точно установить на логарифмической линейке, поэтому

$$a.) l_4 = \sqrt{a_e^2 + a_e^2} \left[ 1 + 0,1107 \frac{a_e}{a_e} \right] = \sqrt{2} a_e [1,1107] = a_e \cdot 1,571 = a_e \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\beta.) b_e = 0 \quad l_4 = \sqrt{a_e^2 + 0} \left[ 1 + 0,1107 \frac{0}{a} \right] = a.$$

Промежуточная длина дуги всегда короче длины дуги под пунктами 1. и 2., превышающими длину дуги эллипса. Формула дает длину дуги некоторого эллипсоида на границе тангенстоида, так как директрисой является касательная  $a_e$ . Хотя можно принять в качестве тангенстоида из-за прямо-

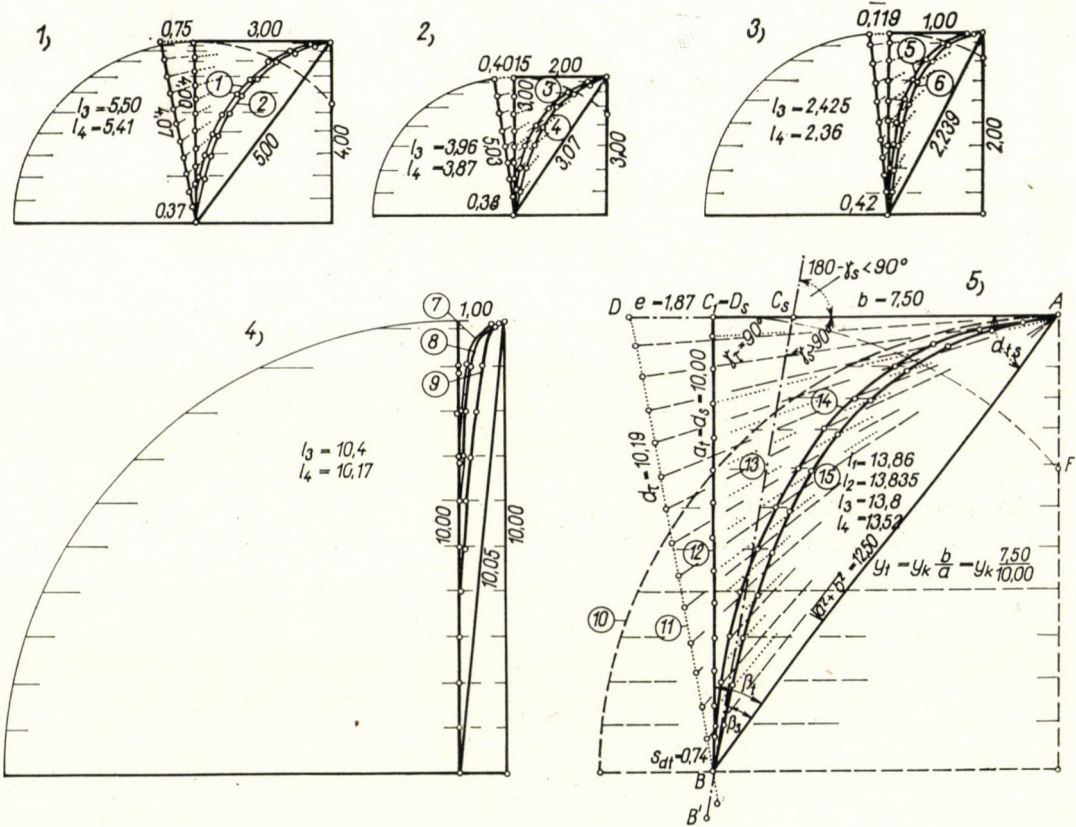


Рис. III

- |  |  |
|--|--|
| (4) (3) (5) (14) Тангенстоида и эллипс | (10) Круг тангенстоидной генитрикс   |
| (2) (4) (6) (7) (15) Синусоида         | (11) Тангенстоидная директриса   |
| (8) Тангенстоида                       | (12) Касательная тангенстоида совпадает с директрисой координированной синусоиды |
| (9) Эллипс                             | (13) Касательная синусоида   |

угольного треугольника, несмотря на это по сравнению с предыдущим принимает синусоидный характер. Поэтому является координированным к тангенстоидам синусоидом (см. рис. III).



#### IV. а. Практические числовые примеры для вычисления длины дуги кривых

Ниже будет дано применение описанных выше четырех видов вычисления. Порядковый номер задачи обозначается арабскими цифрами и рядом с цифрой в скобках даны порядковые номера использованной формулы также арабскими цифрами от (1) до (4) — следующим образом.

$$l_1 = \sqrt{a_e^2 + b_e^2} \cdot \left[ 1 + \frac{a_e + b_e - \sqrt{a_e^2 + b_e^2}}{2} \cdot 0,189 \right] \quad (1)$$

$$l_2 = \frac{\sqrt{a_e^2 + b_e^2} + a_e + b_e}{2} - (a_e + b_e - \sqrt{a_e^2 + b_e^2}) \cdot 0,233 \quad (2)$$

$$l_3 = \frac{V}{4} = \pi(a_e + b_e)x \quad (\text{Используя приведенную выше формулу.}) \quad (4)$$

$$l_4 = \sqrt{a_e^2 + b_e^2} \cdot \left( 1 + 0,1107 \cdot \frac{b_e}{a_e} \right). \quad (5)$$

Синусоида, координированная к тангентоиду по (1) и (2).

а) Числовые примеры (см. рис. III).

1.

$$a_e = 4, \quad b_e = 3 \quad l = ?$$

$$\sqrt{a_e^2 + b_e^2} = 5 \quad (1)$$

$$l_1 = 5 \left[ 1 + \frac{4+3-5}{3,5} \cdot 0,189 \right] = 5,54$$

$$l_2 = \frac{5+4+3}{2} \cdot (4+3-5) \cdot 0,233 = 5,534 \quad (2)$$

$$\frac{a_e - b_e}{a_e + b_e} = \frac{1}{7} = 0,143 \quad [x = (1,0100 - 1,0025)]. \quad 0,143 + 1 = \quad (3)$$

$$0,0075 \cdot 0,143 + 1 = 1,00357$$

$$V = \pi(4 + 3) \cdot 1,00357 = 22,015$$

$$l_3 = \frac{V}{4} = \frac{22,015}{4} = 5,504$$

$$l_4 = 5 \cdot \left( 1 + 0 \cdot 1107 \cdot \frac{3}{4} \right) = 5,41 \quad (4)$$

2.

$$a_e = 3, \quad b_e = 2 \quad \sqrt{a_e^2 + b_e^2} = 3,61$$

$$l_1 = 3,61 \left( 1 + \frac{3+2-3,61}{2,5} \cdot 0,189 \right) = 3,98 \quad (1)$$

$$l_2 = \frac{3,61 + 3 + 2}{2} - 1,39 \cdot 0,233 = 3,987 \quad (2)$$

$$\frac{a_e - b_e}{a_e + b_e} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad x = 1,0100 \quad V = \pi(3+2) \cdot 1,0100 = 3,14 \cdot 1,01 = 15,85 \quad (3)$$

$$l_3 = \frac{15,85}{4} = 3,96$$

$$l^4 = 3 \cdot (1 + 0,1107 \cdot 2/3) = 3,87. \quad (4)$$

3.

$$a_e = 2, \quad b_e = 1, \quad \sqrt{a_e^2 + b_e^2} = 2,239$$

$$l_1 = 2,239 \left( 1 + \frac{2+1-2,239}{\frac{2+1}{2}} \cdot 0,189 \right) = 2,452. \quad (1)$$

$$l_2 = \frac{2,239 + 2 + 1}{2} - (2 + 1 - 2,239) \cdot 0,233 = 2,4423 \quad (2)$$

$$\frac{a_e - b_e}{a_e + b_e} = \frac{1}{3} = 0,3333 \quad \begin{array}{r} 1,0404 \\ -1,0226 \\ \hline 0,0078 \end{array} \quad 0,0078 \cdot \frac{1}{3} = 0,0026 \quad \begin{array}{r} 1,0226 \\ +0,0026 \\ \hline 1,0252 \end{array} \quad (3)$$

$$V = (2+1) \cdot 1,0252 = 9,7$$

$$l_3 = \frac{V}{4} = \frac{9,7}{4} = 2,425$$

$$l_4 = 2,24 \left( 1 + 0,1107 \cdot \frac{2}{3} \right) = 2,36. \quad (4)$$

4.

$$a_e = 10, \quad b_e = 1 \quad \sqrt{a_e^2 + b_e^2} = 10,05$$

$$l_1 = 10,05 \left( 1 + \frac{10+1-10,05}{\frac{10+1}{2}} \cdot 0,189 \right) = 10,305 \quad (1)$$

$$l_2 = \frac{10,05 + 10 + 1}{2} - (10 + 1 - 10,05) \cdot 0,233 = 10,305 \quad (2)$$

$$\frac{a_e - b_e}{a_e + b_e} = \frac{9}{11} = 0,818 \quad \begin{array}{r} 1,2155 \\ -1,1677 \\ \hline 0,0478 \end{array} \quad 0,0478 \cdot 0,818 = 0,0391 \quad \begin{array}{r} 1,1677 \\ + 0,0391 \\ \hline 1,2068 \end{array} \quad (3)$$



$$l_4 = 10,05 \left( 1 + 0,1107 \frac{1}{10} \right) = 10,17 \quad (4)$$

$$V = \pi \cdot 11 \cdot 1,2068 = 41,6 \quad l_3 = \frac{41,6}{4} = 10,4.$$

Вычисления производились с помощью логарифмической линейки. Используя семизначные логарифмы, точность можно повысить, но выполнение вычислений будет более сложным и потребует больше времени. Необходимую точность определяют местные условия.

#### IV. б. Разбивка кривых

Разбивка синусоиды уже описана мною в работе, опубликованной в журнале *Acta Technica Academiae Hungarica* в статье, упомянутой в введении настоящей статьи. Поскольку читатели данной моей работы не читали эту статью, то здесь я кратко излагаю сведения, необходимые для понимания кривых. — К группе синусоидных кривых отнесены мною те кривые, внешний угол которых между касательной  $a$  и касательной  $b$  равен  $180^\circ - \alpha < 90^\circ$ . Если же  $180^\circ - \alpha_t \geq 90^\circ$ , тогда кривая относится к группе тангентионных кривых (см. рис. III. 5). Если же  $180^\circ - \alpha_s = \frac{90^\circ}{2}$ , что является случаем правильной синусной кривой, этот эффект отражается между синусоидными и бисинусоидными кривыми, для которых последних действительно  $180^\circ - \alpha < \frac{90^\circ}{2}$ . Последние имеют важную роль при регулировании горных рек. Следовательно, эллипс приближается лучше всего к тангентиондам.

Для разбивки кривых должен быть данным треугольник ABC, в котором хорда кривой  $\sqrt{a_e^2 - b_e^2}$ , где  $a_e$  — длинная касательная,  $b_e$  — короткая касательная. По длинам сторон вычисляется длина кривой, и эти данные для случаев 1, 2, 3, 4 сведены в таблицу под пунктом б. Вычисление по пункту 5 выполняется следующим образом

$$a_e = 10,00, \quad b_e = 7,50, \quad l = ?$$

$$\sqrt{a_e^2 - b_e^2} = 12,50 \quad (1)$$

$$l_1 = 12,5 \left( 1 + \frac{10 + 7,5 - 12,5}{\frac{17,2}{2}} \cdot 0,189 \right) = 13,87$$

$$l_2 = \frac{12,5 + 17,5}{2} - (17,5 - 12,5) \cdot 0,233 = 13,835 \quad (2)$$

Табл. 1

б) Сравнение результатов числовых пример

| 1     | 2           |         | 3                 |                   |                   |               | 4                             |         |         | 5                  |         |         | 6            |                             |
|-------|-------------|---------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------|-------------------------------|---------|---------|--------------------|---------|---------|--------------|-----------------------------|
|       | Задача      |         | Данные длины дуги |                   |                   |               | Отклонение по отношению к (1) |         |         | Отклонение в ‰ (1) |         |         |              | Примечание                  |
|       | №№<br>п. п. | стороны |                   | (1)<br>Тангентоид | (2)<br>Тангентоид | (3)<br>Эллипс | (4)<br>Координир.<br>синусоид | (1)-(2) | (1)-(3) | (1)-(4)            | (1)-(2) | (1)-(3) |              |                             |
| $a_e$ |             | $b_e$   |                   |                   |                   |               |                               |         |         |                    |         |         |              |                             |
| 1     | 4           | 3       | 5,54              | 5,534             | 5,504             | 5,41          | 0,006                         | 0,036   | 0,13    | 1,072              | 6,5     | 23,45   | См. рис. III |                             |
| 2     | 3           | 2       | 3,98              | 3,981             | 3,96              | 3,87          | -0,001                        | 0,02    | 0,11    | -0,025             | 5,03    | 27,6    |              |                             |
| 3     | 2           | 1       | 2,452             | 2,4423            | 2,425             | 2,36          | 0,0097                        | 0,027   | 0,092   | 0,0395             | 1,1     | 37,5    |              |                             |
| 4     | 10          | 1       | 10,305            | 10,305            | 10,4              | 10,17         | 0,0                           | -0,095  | 0,135   | 0,0                | -0,87   | 13,1    |              |                             |
| 5     | 10          | 7,5     | 13,86             | 13,835            | 13,8              | 13,52         | 0,025                         | 0,06    | 0,14    | 0,18               | 0,433   | 9,79    |              | Вычисление дано в IV. главе |



$$l_3 = \frac{V}{4} \quad V = \pi \cdot 17,5 \cdot x \frac{a_e - b_e}{a_e + b_e} = \frac{10 - 7,5}{17,5} = \frac{2,5}{17,5} = 0,143 \quad (3)$$

$$V = \pi \cdot 17,5 \cdot 1,0057 = 55,2$$

$$l_3 = \frac{55,2}{4} = 13,8 \quad 0,1|0,2 \quad x = \frac{1,0025}{0,0032} \quad 1,0100 \quad 0,0075 \cdot 0,043 = 0,032$$

$$\frac{1,0057}{1,0057}$$

$$l_4 = 12,5 \left( 1 + 0,1107 \frac{7,5}{10} \right) = 13,52. \quad (4)$$

После вычисления длины дуги следует вычисление места и длины директрисы  $d$ . Нижней точкой директрисы является точка  $B$ , которая одновременно является нижней точкой длиной касательной  $a$ . Верхней точкой директрисы является точка  $D$  и от верхней точки  $C$  длиной касательной находится на расстоянии  $e$ . Расстояние  $e$  является также функцией сторон  $a$ ,  $b$  и  $\sqrt{a^2 + b^2}$  треугольника  $ABC$ .<sup>1</sup>

$$e = f(a, b, \sqrt{a^2 + b^2})$$

или же

$$e = b (\sqrt{a^2 + b^2} - a) \frac{b}{a}$$

так как

$$a = 10, \quad b = 7,5$$

поэтому

$$e = (\sqrt{10^2 + 7,5^2} - 10) \frac{7,5}{10} = 1,87.$$

Верхняя точка директрисы, то есть точка  $D$ , находится на таком расстоянии от точки  $C$ . Поэтому вычисляется также длина  $d_t$  директрисы, так как

$$d_t = \sqrt{a^2 + e^2} = \sqrt{10^2 + 1,87^2} = 10,19.$$

Директрису необходимо разбить на расстояния  $S_{d_t}$  друг от друга направляющих реперов, или же на чертеже на направляющие точки. Это получается с помощью выражения

$$S_{d_t} = \frac{d_t}{l_t} = \frac{10,19}{13,8} = 0,74.$$

На прямых между точками, разбитыми на 13,8 частей, разбитыми на месте колами, обозначенными на чертеже нулевыми кружками и точкой  $A$ , размещаются точки стационарования  $S_t = 1,00$ . Правильность построения доказывается тем, что ординаты  $y_t$  тангенстоида совпадают с ординатами  $y_e = y_k \frac{2}{a}$  эллипса.

Директриса координированного к тангенстоиду синусоида совпадает с касательной тангенстоида, следовательно длина ее известна. Расстояние между направляющими его точками будет

$$S_t = \frac{d_s}{l_s} = \frac{a}{l_s} = \frac{10,00}{13,52} = 0,74.$$

Эти же вычисления выполняются также для рис. III. 1, 2, 3, 4.

$$e = (\sqrt{a^2 + b^2} - a) \frac{b}{2}, \quad d_t = \sqrt{a^2 + e^2} \quad S_{d_t} = \frac{d_t}{l_t}, \quad S_s = \frac{d_s}{l}$$

$$1. a = 4, b = 3, l_3 = 5,504, l_4 = 5,41$$

$$e = (5 - 4) \frac{3}{4} = 0,87 \quad d_t = \sqrt{16 + 0,75^2} = \sqrt{16,561} = 4,07 \quad S_{d_t} = \frac{4,07}{5,504} = \\ = 0,74 \quad s_s = \frac{4}{5,41} = 0,74$$

$$2. a = 3, b = 2, \sqrt{a^2 + b^2} = 3,61 \quad l_3 = 3,96, l_4 = 3,87$$

$$e = (3,61 - 3) \frac{2}{3} = 0,4075 \quad d_t = \sqrt{9 + 4,075^2} = \sqrt{9,166} = 3,03 \quad S_{d_t} = \frac{3,03}{3,96} = \\ = 0,765 \quad S_s = \frac{2}{2,36} = 0,775$$

$$3. a = 2, b = 1 \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 2,239, l_3 = 2,425, l_4 = 2,36$$

$$e = (2,239 - 2) \frac{1}{2} = 0,119 \quad d_t = \sqrt{4 + 0,119} = \sqrt{4,01} = 2,00 \quad S_{d_t} = \frac{2}{2,425} = \\ = 0,825 \quad S_s = \frac{2}{2,36} = 0,845$$

$$4. a = 10, b = 1 \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 10,05 \quad l_3 = 10,4 \quad l_4 = 10,17$$

$$e = (10,05 - 10) \frac{1}{10} = 0,005 \quad d_t = \sqrt{100 + 0,005^2} = 10,00 \quad S_{d_t} = \frac{10}{10,11} = \\ = 0,962 \quad S_s = \frac{10}{10,17} = 0,983$$

Ради простоты вместо  $a_e$  в выражениях фигурирует  $a$ , а вместо  $b_e$  фигурирует  $b$ .

На рис. III. 1—3 тангентоида совпадает с эллипсом.

Разность между тангентоидой и синусоидой бросается в глаза на рис. III. 5 не только потому, что касательная тангентоиды является перпендикулярной, а касательная синусоиды наклонной, но и потому, что точка В представляет собою инфлекссионную точку тангентоиды и является лишь касательной точкой синусоиды. Инфлекссионная точки синусоиды лежит ниже.

Точка А является нижней сурфлекссионной точкой эллипса.

Эллипс как кривая регулирования реки не разбивается. Тангентоида, приближающаяся к эллипсу и являющаяся почти идентичной в пределах погрешностей построения, играет роль при картографировании стержня горных рек. При регулировании русла по всему течению равнинных рек полностью также не фигурирует, а только частично. Однако, глубокое детальное изложение было крайне необходимо, так как является фокусом эллипса и без всяких затруднений можно использовать в качестве фокуса для идентичной тангентоиды и можно перевести из тангентоиды в качестве фокуса синусоиды, выведенной из генетрикссы. Во избежание недо-



розумений необходимо подчеркнуть, что выведенная синусоида ни в коем случае не идентична с описанной выше координированной синусоидой, ведь отличным является уравнение длины дуги последнего.

### V. Фокус синусной кривой, выведенной из тангентида

Сравнение правильной синусной линии, выведенной из дуги, как из генетрикса, и приближенной синусоиды сообщено мною в тетради № 3—4 тома 25 журнала Acta Technica. Я в указанной статье не имел возможности заниматься фокусом, так как моя задача состояла исключительно в изложении разбивки. Однако, в теперешней моей работе я рассматриваю систему кривых регулирования рек и, как это будет видно в дальнейшем, при определении линии регулирования безразлично положение синусоиды и ее фокуса. На рис. III. 1—5 построение фокуса происходит просто, так как с помощью касательной длиной  $a$  — как с радиусом, построив дугу, она также сечет в фокусе полуось длиной  $a$ . Из фокуса при усвоении элементарных знаний был построен эллипс. Однако, в данном случае эллипс приближенный с помощью тангентида, разбитой из директрисы, и редукцией  $\frac{a}{b}$  ординат дуги, построенной в качестве генетрикса я проверил точность хорошо приближающуюся к эллиптическим размерам. Также для проверки можно использовать и фокус. На рис. III. 1—4 фокус находится на продолжении генетриксного круга на сечении с полуосью  $a$ . Уже из рисунков видно, что чем меньше меньшая полуось  $b$ , тем ближе лежит фокус  $F$  к точке  $A$ , которая обозначена на рис. III. 5. Отношение  $\frac{a}{b} = 0,1$  рис. III. 4. является уже столь малым, что фокус уже трудно построить на рисунке. С точки зрения регулирования реки необходимо определить расстояние  $A - F = f$ . Это расстояние  $f = a - \sqrt{a^2 - b^2}$  при вычислении для рис. III. 1—5 имеет следующие значения:

1.  $a = 4; b = 3; \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} = 3,64 \quad 4 - 3,64 = 1,36 = f_1$
2.  $a = 3; b = 2; \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} = 2,24 \quad 3 - 2,24 = 0,86 = f_2$
3.  $a = 2; b = 1; \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} = 1,73 \quad 2 - 1,73 = 0,27 = f_3$
4.  $a = 10; b = 1; \sqrt{100 - 1} = \sqrt{99} = 9,95 \quad 10 - 9,95 = 0,05 = f_4$
5.  $a = 10; b = 7,5; \sqrt{100 - 56} = \sqrt{44} = 6,65 \quad 10 - 6,65 = 3,35 = f_5$

Эти расстояния на рисунках ради простоты не даны в цифровом выражении. Место фокуса на оси  $a$  обозначено нулевым кружочком.



На рис. IV кроме этого из дуги отображены тангентоида и узкий эллипс, совпадающие с эллипсом в качестве генетрикса для построения синусных кривых, выведенных из последнего. Упомянутые для различия называю синусными кривыми, а не синусоидами, потому что они имеют общую инфлекссионную касательную и угол между ними и горизонтальной абсциссой  $X$  равен  $45^\circ$ . Последнее необходимо построить потому, что фокусное расстояние эллипса равно фокусному расстоянию синусных кривых, построенных из эллипсов, как генетрикс.

Между вычисленными на рис. IV генетриксными длинами и длинами дуг синусных кривых имеет место линейная зависимость, которая отображена на графике и для значений длины дуги промежуточных синусных кривых дает очень хорошо приближенные величины. Так, например, синусная кривая, выведенная из генетрикса с длиной дуги  $l_g = 12,0$ , при изменении на графике дает значение  $l_g = 15,85$ . Это же вычисляя по сторонам, получаем

$$a = \sqrt{12,0^2 + 10^2} = 15,63; \quad b = 14,14; \quad c = 12 - 10 = 2,0$$

$$bg_1 = 15,63 \left( 1 + \frac{16,14 - 15,63}{7,07} \cdot 0,189 \right) = 15,88$$

$$l_{s2} = \frac{15,63 + 14,14 + 2,00}{2} - 0,51 \cdot 0,233 = 15,771.$$

Уравнение синусной кривой  $y = \sin x$  в этом виде выражает нормальную синусную линию, генетрикса которой представляет собой сектор, а между касательной в инфлекссионной точке и осью абсцисс  $x$  имеется угол равный  $45^\circ$ . Треугольник, в котором размещается нормальная линия синуса имеет следующий вид: длинная сторона треугольника, или же хорда линии синуса  $a = \sqrt{15,7^2 + 10^2} = 18,6$ ; длинная касательная  $b = 14,14$ ; короткая касательная  $c = 15,708 - 10,00 = 5,708 = c$ ; длина дуги линии синуса  $l = 19,10$ ; фокусное расстояние вершины  $f = 10,00$ , или же расстояние вершины  $f = 10,00$ , или же расстояние до центра круга  $r$  — радиус круга. Длина дуги синусной кривой с короткой дугой, выведенной из тангентойды или же совпадающего с ней эллипса:  $a = \sqrt{13,8^2 + 10^2} = 17,05$ ;  $b = 14,14$ ;  $c = 13,8 - 10 = 3,80$ ; длина дуги  $l = 17,36$ ; фокусное расстояние в вершине  $f = 3,35$ . Хорда синусной кривой, выведенной из сплюсченного эллипса  $a = \sqrt{10,4^2 + 10^2} = 14,35$ ;  $b = 14,14$ ;  $c = 10,4 - 10,00 = 0,40$ ; длина дуги  $l = 14,50$ ; фокусное расстояние в вершине  $f = 0,05$ .

Кроме того, можно построить ряд различных синусных кривых  $c < 5,708$ , для которых  $l < 19,10$  и  $f < 10,0$ . Фокусное расстояние в вершине можно определить для вычисления длины дуги генетриксных эллипсов, так как, отлагая их на оси абсцисс, можно найти геометрическое место ординат фокусов, которые на рис. IV и V, как это видно, находятся между 10,00 и 15,708. На рис. 4 видно, что в случае уменьшения длины дуги генетрикса  $l_g$ , если  $l_g = 10,4$ , а фокусное расстояние  $f_e = 0,05$  при  $l_g = 13,8$ ,  $f_1 = 3,35$  и, наконец, если длина дуги круга  $l_k = 15,7$ , тогда  $f_k = 10,00$ , или же фокус совпадает с центром круга. Однако, эти ординаты фокуса отложены вниз от оси абсцисс, находящиеся на верхней высоте, т. е. 10,00. В то же время с нижней абсциссы до графика длины дуги можно отмерить также и длину дуг синусных кривых. — Следовательно, область синусных кривых, относящихся к касательной  $45^\circ$ , является относительно короткой, и размещается на абсциссе длиной 5,708, но только нормальные и в данном случае лишь синусные кривые короче 19,10 или же длиной от 19,10 до 10,00. Поэтому эти синусные кривые я называю неполными. Их характерной особенностью является то, что с укорочением длины дуги укорачивается также и фокусное расстояние, но не линейно, как длина синусных кривых, а по другой закономерности. Область синусных кривых также общей касательной в  $45^\circ$ , но длиннее 19,10 содержит бесконечно большое количество единиц.



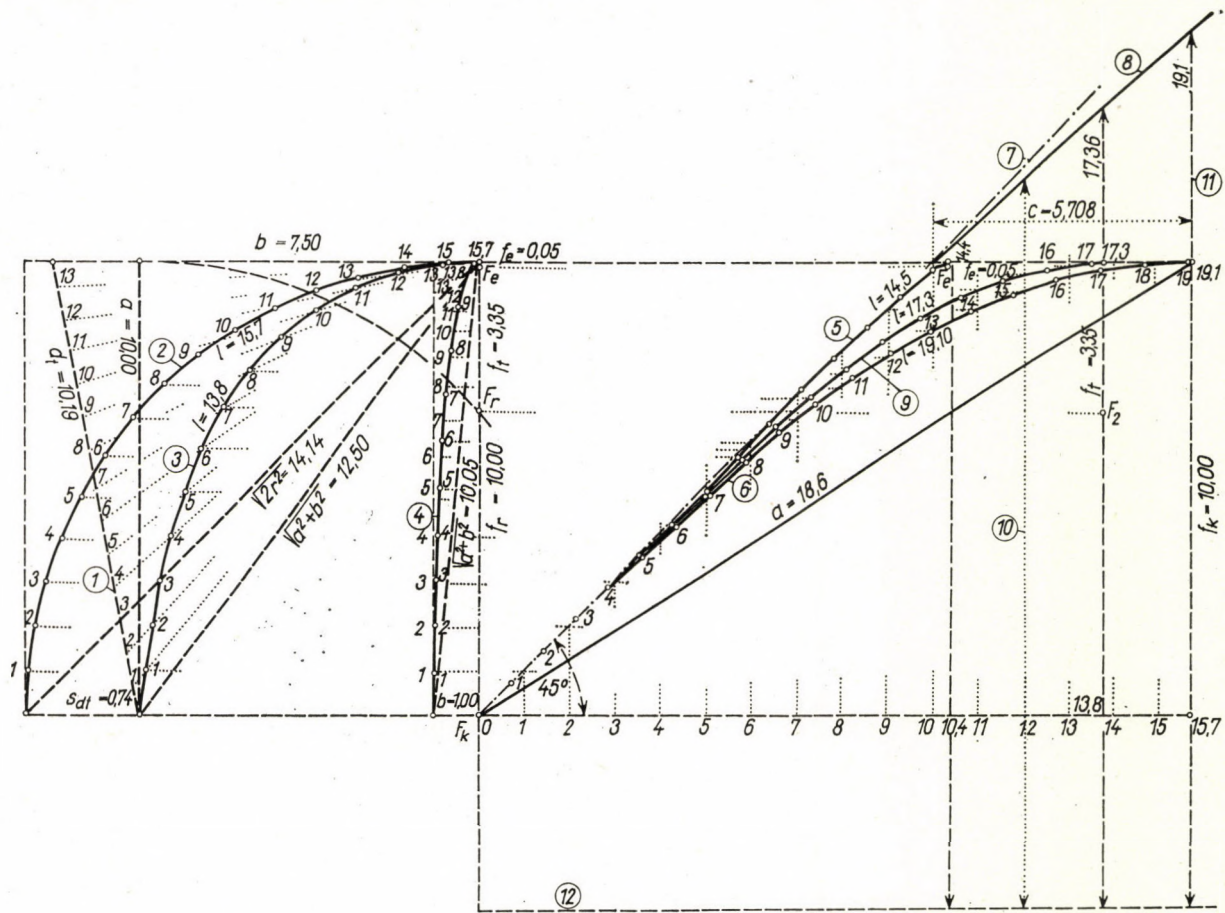


Рис. IV

- (1) Директриса тангентида (2) Директриса дуги (3) Генитриса тангентида (4) Эллипсная генитриса, выведенная из дуги (5) Синусные кривые, выведенные из эллипса (6) Правильная синусная линия, выведенная из дуги (7) Общая касательная синусных кривых (8) График длины дуги (9) Из тангентида (10) Синусная кривая, — выведенная из генитриксной длины дуги 12,00, измеренной на абсциссе, — при измерении на ординате равна 15,85 длины дуги (11) Длина дуги синусной кривой, считая от генитриксной длины дуги, как ордината  $y$ , измеренная с абсциссы  $x$ .

Рассмотрение названных мною неполными синусными кривыми кривых с точки зрения регулирования рек является важным, так как регулирование рек в особенности в горных районах нельзя решить так просто, как строительство железнодорожных линий или же строительство каналов на равнине, и местные условия в отдельных случаях принуждают проектирующего инженера принять такую неполную синусную кривую, и инженер должен решить в связи с этим новые задачи.

Для вычисления фокусного расстояния неполной синусной кривой подходит формула

$$f_g = f_g = a - \sqrt{a^2 - b^2},$$

исходящая из генитриксного эллипса; но сначала необходимо вычислить длины дуги генитрикссы, используя которые в качестве абсцисс, ординаты фокусных расстояний при измерении вниз с верхней абсциссы получается фокусная кривая в виде эллипса, которая изображена на рис. V. При использовании уравнения генитриксных эллипсов

$$l = \sqrt{a^2 + b^2} = \left( 1 + \frac{a + b - \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{a + b}{2}} \cdot 0,189 \right).$$

получаем

$$0.) \quad a = 10,00; \quad b = 0; \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{100} = 10 \quad l_0 = 10 \left( 1 + \frac{10 - 10}{\frac{10}{2}} \cdot 0,189 \right) = 10,00$$

$$f^0 = 10 - \sqrt{10^2 - 0} = 0$$

$$1.) \quad a = 10,00; \quad b = 1,00; \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 1^2} = 10,05$$

$$l_1 = 10,05 \left( 1 + \frac{11 - 10,05}{5,5} \cdot 0,189 \right) = 10,2$$

$$f_1 = 10 - \sqrt{10^2 - 1,0^2} = 0,05$$

$$2.) \quad a = 10,00; \quad b = 2,00; \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 2^2} = 10,2$$

$$l_2 = 10,2 \left( 1 + \frac{12 - 10,2}{6} \cdot 0,189 \right) = 10,78$$

$$f_2 = 10 - \sqrt{10^2 - 2^2} = 0,2$$

$$3.) \quad a = 10,00; \quad b = 3,00; \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10,0^2 + 3,0^2} = 10,44$$

$$l_3 = 10,44 \left( 1 + \frac{10 + 3 - 10,4}{\frac{10 + 3}{2}} \cdot 0,189 \right) = 11,23$$

$$f_3 = 10 - \sqrt{10^2 - 3^2} = 0,45$$





$$4.) \quad a = 10,00; b = 4,00; \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10,75$$

$$l_4 = 10,75 \left( 1 + \frac{14 - 10,75}{7} \cdot 0,189 \right) = 11,70$$

$$f_4 = 10 - \sqrt{10^2 - 4^2} = 0,82$$

$$5.) \quad a = 10,00; b = 5,00; \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{125} = 11,17$$

$$l_5 = 11,17 \left( 1 + \frac{15 - 11,17}{7,5} \cdot 0,189 \right) = 12,23$$

$$f_5 = 10 - \sqrt{10^2 - 5^2} = 1,34$$

$$6.) \quad a = 10,00; b = 6,00; \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{136} = 11,65$$

$$l_6 = 11,65 \left( 1 + \frac{16 - 11,65}{8} \cdot 0,189 \right) = 12,85$$

$$f_6 = 10 - \sqrt{10^2 - 6^2} = 2,00$$

$$7.) \quad a = 10,00; b = 7,00; \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{149} = 12,2$$

$$l_7 = 12,2 \left( 1 + \frac{17 - 12,2}{8,5} \cdot 0,189 \right) = 13,50$$

$$f_7 = 10 - \sqrt{10^2 - 7^2} = 2,85$$

$$8.) \quad a = 10,00; b = 8,00; \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{164} = 12,8$$

$$l_8 = 12,8 \left( 1 + \frac{18 - 12,8}{9} \cdot 0,189 \right) = 14,11$$

$$f_8 = 10 - \sqrt{10^2 - 8^2} = 4,00$$

$$9.) \quad a = 10,00; b = 9,00; \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{181} = 13,45$$

$$l_9 = 13,45 \left( 1 + \frac{19 - 13,45}{9,5} \cdot 0,189 \right) = 14,96$$

$$f_9 = 10 - \sqrt{10^2 - 9^2} = 5,64$$

$$9.5.) \quad a = 10,00; b = 9,50; \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 9,5^2} = 13,8$$

$$l_{9,5} = 13,8 \left( 1 + \frac{19,5 - 13,8}{9,8} \cdot 0,189 \right) = 15,3$$

$$f_{9,5} = 10 - \sqrt{10^2 - 9^2} = 6,84$$

$$10.) \quad a = 10,00; b = 10,00; \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14,1$$

$$l_{10} = 14,1 \left( 1 + \frac{20 - 14,1}{10} \cdot 0,189 \right) = 15,71 = \frac{\pi}{2}$$

$$f_{10} = 10 - \sqrt{10^2 - 10^2} = 10 - 0 = 10,00$$



Результаты вычислений сведены в табл. 2.

Табл. 2

| Индекс  | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 9,5  | 10    |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $x$     | 0,00 | 0,20 | 0,78 | 1,23 | 1,70 | 2,23 | 2,83 | 3,50 | 4,11 | 4,96 | 5,30 | 5,71  |
| $y=f_n$ | 0,00 | 0,05 | 0,20 | 0,45 | 0,82 | 1,34 | 2,00 | 2,85 | 4,00 | 5,64 | 6,84 | 10,00 |

Отлагая данные таблицы, то есть значения  $x$ , на левой стороне рис. V — на абсциссе фокусных расстояний, а соответствующие значения  $y$  вниз от оси абсцисс, получается ординатная кривая фокусных расстояний.

Как это видно на рис., тормозящая близость фокусных расстояний с точки зрения регулирования рек имеет место лишь в случае длин  $c < 5,708$  (см. рис. IV). Это значение, естественно, действительно только в случае  $b = 14,14$ , то есть в случае постоянной величины касательной, ведь уже впрямь установлено, что угол наклона касательной по отношению к горизонтали равен  $45^\circ$ . Значение  $c$ , соответствующее найденным отклоняющим значениям  $b$  измерений в полевых условиях, при отнесении к данному рисунку представляет собою простую задачу пропорциональности.

На оси абсцисс фокусных расстояний находим размер  $c$  (см. рис. V), затем строим перпендикуляр и от нижней горизонтальной линии или же вверх от оси абсцисс синусных кривых до линии ординаты длины дуги получаем удовлетворительно приближенное значение длины дуги синусной кривой.

Когда  $c = 5,708$ , тогда фокусное расстояние попадает в центр генитриксного круга и уже не опасно, и с точки зрения регулирования рек не требуется специальных строительных модификаций.

Сильно упростилось бы регулирование рек, если бы близость фокуса не вызывала бы особых затруднений. Русло, получающееся вследствие местных условий, если оно является «здоровым», тогда его необходимо принять, даже в том случае, когда неполной является линия синуса и нежелательна близость фокуса, так как в горных районах перенесение русла путем черпания или выемки хотя технически возможно, но экономически нецелесообразно. В узких долинах горных районов пашни непропорционально дороги вследствие той простой причины, что пашен в горных районах мало и их плодородие вследствие удобрения шламом при весенних паводках сильно повышается. Таким образом понятно, что в 1910-х годах цены на куплю-продажу сложились так, что в области Бачка, то есть на равнине, цена за хольд первоклассной пашни (5,27 десятин) составляла 800 крон (242,5 рублей в тогдашних рублях), а в области Марамарош хольд кукурузных земель стоил 2000 крон (606 рублей), и владелец не желал продавать свои земли.



Неполные синусные кривые можно вывести только из эллипса — как из генитрикса и как мы это видели выше большая ось эллипсной генитрикса ( $a$ ) является вертикальной, а меньшая ось ( $b$ ) горизонтальной. Однако, когда это из-за наращивания  $b$  эллипса превращалось в круговую генитриксу, тогда фокус окончательно входил в центра круга.

## VI. Неполные тангенсные кривые

Для этого у нас имеется два метода. По первому методу генитрикса кривой представляет собою сегмент, изображенный на рис. V. Если построение кривой предполагается производить по известному для синусных кривых методу, тогда это возможно лишь так, если единица деления сегмента генитрикса укорачивается до  $\frac{\pi}{2n}$ .

Можно поступить и так, что единицы генитриксного круга  $\frac{\pi}{2}$ , то есть единицы 1,00 используем, начиная от 1 до 15,7, но в этом случае абсциссу длиной 20,00 возможно получить только так, если единица его деления не равна 1,00, а  $\frac{20}{15,7} = 1,272$ .

Здесь необходимо подчеркнуть, что эти тангенсные кривые необходимо строго отличить от уже известных тангентоидных кривых. Если сектор возможно было бы разделить на бесконечно малые части и на оси абсцисс можно было отложить бесконечно большое число 1,00, тогда мы получили бы построение правильной тангенсной кривой.

Другим методом, служащим для построения генитрикса, является метод, при котором генитрикса тангенсной кривой представляет собою не кривую, а эллипс, большая ось которого  $a$  размещается на оси абсцисс, совместно с фокусами и в какой степени увеличивается ось  $a$  по сравнению к  $b$ , которая теперь постоянная, в такой степени увеличивается длина дуги генитриксного эллипса и вследствие этого также длина дуги неполной тангенсной кривой. На рис. VI из круговой генитрикса построена эллипсная генитрикса и из нее неполная тангенсная кривая.

Длина дуги неполной тангенсной кривой, измеренной после генитриксного построения по данным измерения равна 26,90. Исходя из треугольника, образованного плечом  $a$  и касательными  $b$  и  $c$ ,  $c = 14,10$ ;  $b = 14,14$ ;  $a = \sqrt{10^2 + 24,10} = \sqrt{100 + 580} = \sqrt{680} = 26,1$  и на основе их длина дуги будет  $l = a \left( 1 + \frac{b+c-a}{2} \cdot 0,189 \right) = 26,1 \left( 1 + \frac{2,14}{14,12} \cdot 0,189 = 26,1 \right) 1 + 0,0286 = (26,10286) = 26,90$  и это значение совпадает со значением, полученными при измерении длины.





Определяя директрису неполной тангенсной кривой длиной до точки  $O$  неполной тангенсной кривой от конца продленной длины  $c_a = l = 26,90$  касательно  $c$  получим  $26,90 - 24,20 = 2,70$ ; По рис. VI длина директрисы равна

$$d = \sqrt{2,7 + 10^2} = \sqrt{107,3} = 10,35$$

Единица деления стационарированной директрисы равна

$$s_d = \frac{10,35}{26,9} = 0,386.$$

Неполные тангенттоидные кривые с точки зрения регулирования рек являются наиболее подходящими кривыми. Фокус всегда находится далеко и изгиб является слабым и не мешает движению масс воды.

Однако на месте в редчайшем случае имеется такая форма русла. Наиболее неблагоприятным положением является положение в горных районах, где образование русла происходит быстро и большей частью в нежелательной форме и степени. Образовать совершенно новое русло искусственным способом черпанием или же отводом масс воды здесь невозможно, так как отчуждение граничит почти что с невозможностью из-за исключительно высоких цен на землю. Здесь необходимо удовлетвориться так называемым «здоровым» руслом.

Большого успеха можно добиться в нижних течениях, где преобразование происходит не быстро, и отчуждение уже осуществлено и предвидимое преобразование русла будет фиксировано каменным отвалом, который будет размещен заранее вперед на еще незатронутом месте.

В горных районах каменный отвал быстрым течением горной реки был бы смыт и поэтому этот метод нельзя применить. Но невзирая на это, в случае крупных наводнений образование русла в долинах горных районов в случае нерегулированных рек является совершенно неопределенным.

#### РЕЗЮМЕ

В целях взаимного контроля разработано два новых не требующих выполнения специальных измерений метода для вычисления длины кривых регулирования русла рек по заданным касательным и хорде. Эти методы, а также разбивка кривых демонстрируется на практических числовых примерах. Работа описывает фокусы кривых, которые если находятся в русле вызывают нежелательные движения воды. В природных условиях при данных обстоятельствах это можно наблюдать на месте, при проектировании же предварительно необходимо проследить за тем, чтобы русло было освобождено от фокуса. Для этого наиболее подходящим является используемая в качестве кривой регулирования русла рек гипертангенттоида, фокус которой размещается на самой кривой.



DAS SYSTEM DER FLUSSBETTREGULIERUNGSKURVEN  
I. BERECHUNG DER KURVENLÄNGEN; ARTEN DER KURVEN

K. APOR

## ZUSAMMENFASSUNG

Zwecks wechselseitiger Kontrolle wurden zwei neue Verfahren für Berechnung der Länge von Flußbett-Regulierungskurven aus gegebenen Tangenten und gegebener Sehne ausgearbeitet, welche keine besonderen Messungen erfordern. Die Berechnungsverfahren sowie die Absteckung der Kurven werden an praktischen numerischen Beispielen gezeigt. Die Arbeit befaßt sich mit den Brennpunkten der Kurven, deren Lage im Flußbett unerwünschte Wasserbewegungen verursachen kann. In der Natur kann dies als Folge von gegebenen Umständen an Ort und Stelle beobachtet werden, bei der Projektierung muß jedoch von vornherein darauf geachtet werden, daß das Bett von den Brennpunkten freigemacht wird. Hiefür ist am geeignetsten die als Flußregulierungskurve verwendete Hypertangentoide, deren Brennpunkt auf der Kurve selbst liegt.

THE SYSTEM OF RIVER-BED REGULATION CURVES  
I. CALCULATION OF CURVE LENGTH; TYPES OF CURVES

K. APOR

## SUMMARY

For the purpose of mutual control, two methods for calculating, on the base of given tangents and chord, the length of the river-bed regulation curve were elaborated, which do not require separate measurements. These methods as well as the pegging out of the curve are shown on practical, numerical examples. The paper deals with the focuses of the curves which may cause unwanted water movements if situated in the bed. In nature this can be observed in situ as a consequence of given conditions, but in working out projects care must be taken to relieve the bed from the focus. For this the hypertangentoïd used as a river regulation curve is best suited, the focus of which is on the curve itself.

LE SYSTEME DES COURBES DE REGULARISATION DES LITS DE RIVIERE  
I. CALCUL DE LA LONGUEUR DES COURBES; TYPES DE COURBES

K. APOR

## RESUME

Pour calculer la longueur des courbes de régularisation des lits de rivière, l'auteur établit deux nouvelles méthodes de contrôle respectif à partir des tangentes et de la corde données. Ces méthodes ne nécessitent pas de mesures spéciales. Les calculs, ainsi que le jalonnement des courbes sont illustrés par des exemples numériques pratiques. L'auteur traite ensuite des foyers des courbes, lesquels peuvent causer des mouvements d'eau indésirables, quand ils sont situés dans le lit. Dans les conditions naturelles, ce phénomène peut être observé sur place, mais dès l'étude des projets, il faut prendre soin de libérer le lit du foyer. Pour y arriver, on se sert de préférence de l'hypertangentoïde utilisée comme courbe de régularisation des rivières, son foyer étant situé sur la courbe elle-même.

# EINE NEUE, GENAUERE METHODE ZUR BESTIMMUNG DER BRUCHARBEIT

J. BODROGAI

CSEPEL EISEN- und METALLWERKE, ABTEILUNG FÜR MATERIALPRÜFUNG, BUDAPEST

[Eingegangen am 17. April 1961]

Unter Brucharbeit versteht man die Arbeit, die in dem Elementarvolumen der Bruchstelle eines in irgendeiner Weise mechanisch zerstörten Werkstoffes bis zum Moment des Bruches aufgespeichert und auf die Volumeinheit bezogen wird. Der vorliegende Aufsatz zeigt, daß die genaue Berechnung der Brucharbeit aus dem Zerreiversuch eines Rundprobestabes schwierig ist, und er beschreibt eine neue, genauere Methode.

## Die Berechnung der Arbeit aus dem Zerreiversuch des Rundprobestabes

Die angenäherte Spannungsverteilung im kleinsten Querschnitt von dem eingeschnürten Rundprobestab ist aus der Literatur bekannt [3] [4]. Die auf theoretischem Wege abgeleiteten und experimentell gewonnenen, übereinstimmenden Formeln beschreiben die Längs-  $\sigma_l$ , Radial-  $\sigma_r$ , und Tangentialhauptspannungen  $\sigma_t$  folgendermaßen:

$$\sigma_l = 2\tau \left( 1 + \frac{r_0^2 - r^2}{2\varrho_0 r_0} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_r = 2\tau \left( \frac{r_0^2 - r^2}{2\varrho_0 r_0} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_t = \sigma_r. \quad (3)$$

In diesen Gleichungen ist  $r$  die Radialkoordinate ( $r < r_0$  Abb. 1), und  $\tau$  ist die Hauptschubspannung, die man annäherungsweise durch die Anwendung der Formel

$$\sigma'_0 = \frac{P}{r_0^2 \pi}$$

folgenderweise berechnen kann:

$$2\tau = \frac{\sigma'_0}{1 + \frac{r_0}{4\varrho_0}}. \quad (4)$$



Abb. 2 stellt die mit den Formeln (1)—(4) berechnete Spannungsverteilung in dem am meisten eingeschnürten Querschnitt von einem Probestab mit  $d = 20$  mm Ausgangsdurchmesser dar, in dem dem Bruch vorangehenden Moment. Das Material des Probestabes ist normalisierter Stahl C35 (MSZ 61, entspricht DIN 1667.).

Man untersuche die an der voraussichtlichen Stelle des Bruches in dem Elementarvolumen sich aufspeichernde Arbeit, während sich der kleinste

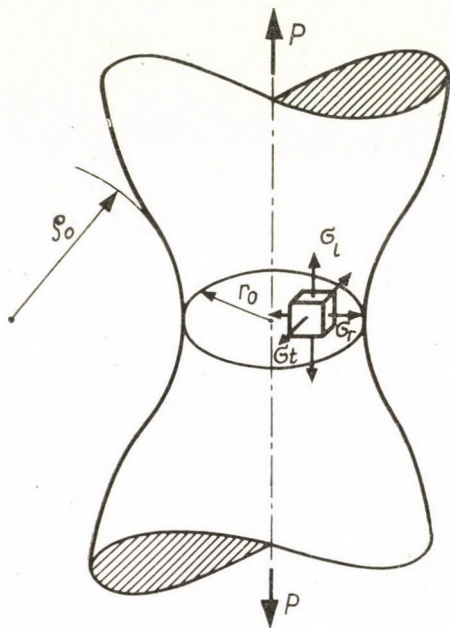


Abb. 1.  
Die Spannungen des eingeschnürten  
Rundprobestabes

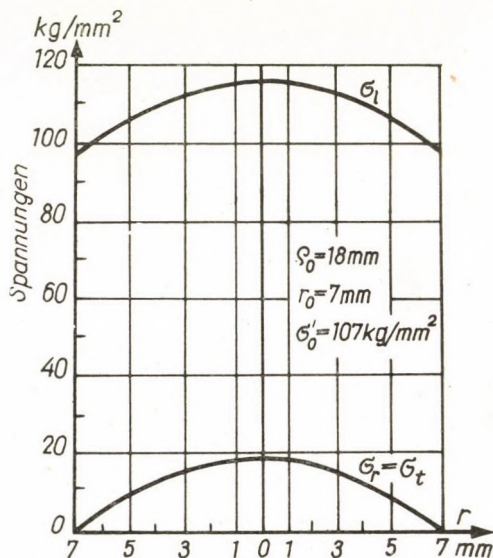


Abb. 2. Die Spannungsverteilung des kleinsten Querschnittes im Moment des Bruches. (Material des Probestücks ist: C35, Ausgangsdurchmesser:  $d = 20$  mm)

Querschnitt  $F_0$  um ein wenig auf  $F'$  vermindert! Das Elementarvolumen soll nach der Abb. 3 ausgewählt werden. In dieser Phase der Dehnung des Probestabes kommt das Elementarprisma der Stabachse näher, seine Abmessungen werden in der Querrichtung kleiner und in der Längsrichtung größer. Inzwischen leisten alle drei Hauptspannungen eine Arbeit. (Während der Minderung des Querschnittes von  $F_0$  auf  $F'$  nehmen wir die Spannungen für konstant an.) Die Summa der Teilarbeiten ist:

$$\Delta L = \Delta L_l + \Delta L_r + \Delta L_t. \quad (5)$$

Das Vorzeichen des ersten Gliedes ist positiv, das der beiden anderen aber

negativ; denn die Kräfte und die Bewegungen haben entgegengesetzte Vorzeichen.

Betrachten wir jetzt die in dem Elementarzylinder mit der sehr kleinen Länge  $dl$ , dem Querschnitt  $F_0$ , also in dem Volumen  $V_0 = F_0 dl$  aufgespeicherte Arbeit  $L$ , während sich der Querschnitt  $F_0$  wieder auf  $F'$  vermindert!

$$L = \sum_{V_0} (\Delta L_l + \Delta L_r + \Delta L_t).$$

Da

$$\Delta L_l = r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot \sigma_l \cdot \lambda \quad (6)$$

ist, beträgt die in dem Volumen  $V_0$  aufgespeicherte Arbeit  $L_l$  nach der Ein-

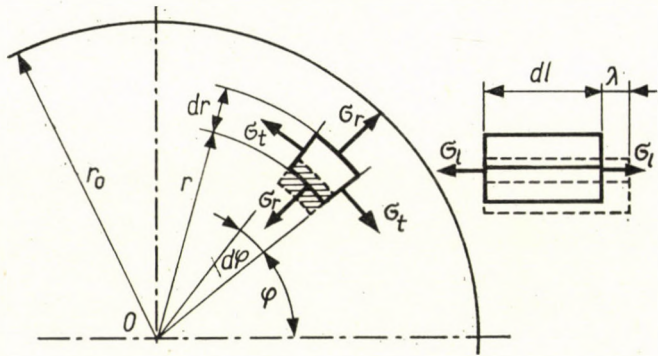


Abb. 3. Zur Berechnung der Arbeit der Spannungen (Probekörper mit Kreisquerschnitt)

setzung der zum Querschnitt  $F_0$  gehörigen Werte  $r_0$ ,  $\varrho_0$  und  $\sigma'_0$ , sowie der Formeln (1) (4) und der Funktion  $\lambda = \lambda(r)$

$$L_l = \frac{\sigma'_0}{1 + \frac{r_0}{4\varrho_0}} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{r_0^2 - r^2}{2\varrho_0 r_0} \right) r \cdot \lambda(r) \cdot dr \cdot d\varphi. \quad (7)$$

Bezeichnet man die beiden anderen Arbeiten, so ist

$$L_r = \sum_{V_0} \Delta L_r \quad \text{und} \quad L_t = \sum_{V_0} \Delta L_t.$$

Da  $\varrho_0$  schwer meßbar und die Funktion  $\lambda = \lambda(r)$  unbekannt ist, berechnet man den Wert von  $L_l$  näherungsweise, mit den nachstehenden Voraussetzungen:

$$\sigma_l = \sigma_l(r) \approx \sigma'_0 = \text{konstant}$$

$$\lambda = \lambda(r) \approx \frac{F_0 - F'}{F'} dl. \quad (8)$$



Damit ist

$$L_t = \sigma'_0 \frac{F_0 - F'}{F'} dl \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} r dr d\varphi = \sigma'_0 \frac{F_0 - F'}{F'} \cdot F_0 dl.$$

Teilt man den Wert von  $L_t$  durch das geprüfte Volumen  $V_0$  und führt man die »effektive Dehnung«

$$\delta_E = \frac{\lambda}{dl} = \frac{F_0 - F'}{F'} \quad (9)$$

(siehe [5]) ein, so kann man schreiben:

$$\frac{L_t}{V_0} = \sigma'_0 \delta_E.$$

Die auf die Volumeinheit bezogene ganze Arbeit ist:

$$\frac{L}{V_0} = \sigma'_0 \delta_E + \frac{1}{V_0} (L_r + L_t). \quad (10)$$

Das erste Glied der rechten Seite kann man vom Anfang an bis zum Ende des Zerreiversuches, obwohl nur näherungsweise, aber bequem errechnen. Für die Berechnung des zweiten Gliedes gibt es zur Zeit keine den Ansprüchen der Praxis entsprechende, genügend genaue Methode. Die in der Literatur [2, 5] angewendete Annäherung  $L \approx L_t$  ist, wie man das im weiteren sehen wird, sehr grob; ohne die Teilarbeiten  $L_r$  und  $L_t$  zu kennen, kann man also nur die folgende Ungleichheit mit Gewißheit anschreiben:

$$L < L_t.$$

#### Die Bestimmung der Arbeit aus dem Zerreiversuch des dünnwandigen Rohres

Die Kontraktion der Zerreiprobestbe mit Kreisringquerschnitt zeigt sich im Außendurchmesser ebenso wie in der Wanddicke. Abb. 4 stellt ein dünnwandiges Rohr in der Umgebung des am meisten eingeschnürten Querschnittes dar ( $s_0 \ll r_0$ ). Um die Spannungen zu studieren, wählen wir ein Teilchen mit einem Elementarvolumen in der dargestellten Weise aus. Die Wanddicke  $s_0$  kann in dieser Umgebung mit guter Annäherung als konstant ange-

nommen werden. Bei dem ausgewählten Element wirken Radialspannungen weder auf die innere noch auf die äußere Oberfläche, wegen der kleinen Wanddicke braucht man mit keinen Radialspannungen zu rechnen:

$$\sigma_r = 0.$$

Das Gleichgewicht des Elementes wird durch die Gleichheit der Resul-

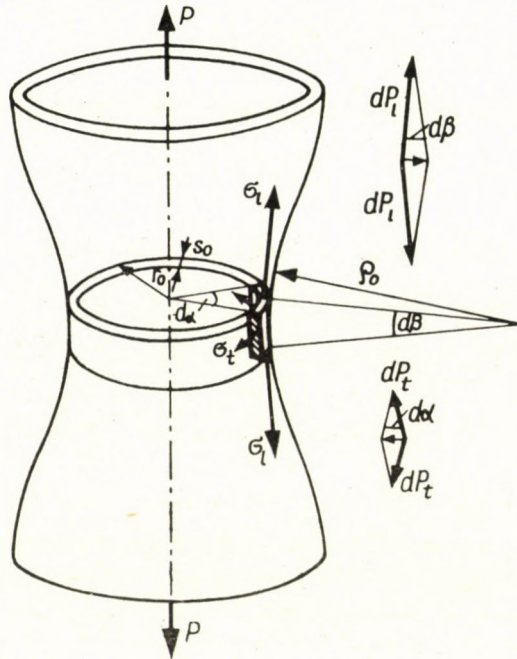


Abb. 4. Die Spannungen des dünnwandigen Rohres während des Zugversuches

tanten der von den Tangentialspannungen herrührenden Kräfte

$$dP_t = \sigma_t \cdot s_0 \cdot \varrho_0 \cdot d\beta$$

in der Horizontalebene, und aus den Längsspannungen berechneten Kräfte

$$dP_l = \sigma_l \cdot s_0 \cdot r_0 \cdot da$$

in der Vertikalebene, gesichert.  $da$  und  $d\beta$  sind kleine Winkel, darum ist:

$$dP_t \cdot da = dP_l \cdot d\beta.$$



Nach Einsetzung und Umformung kann man schreiben:

$$\sigma_l = \frac{r_0}{\varrho_0} \sigma_t. \quad (11)$$

Da man  $\sigma_l$  als den Quotienten der Zugkraft  $P$  und des kleinsten Querschnittes berechnen kann, ist der Spannungszustand bekannt.

Man berechne die sich im Elementarvolumen des Werkstoffes aufspeichernde Arbeit an der voraussichtlichen Stelle des Bruches, die durch

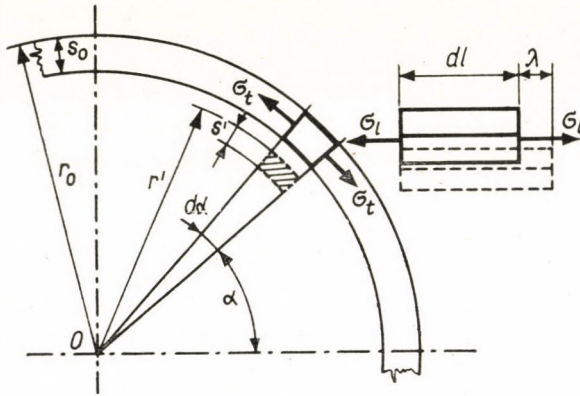


Abb. 5. Zur Berechnung der Arbeit der Spannungen (Dünnwandiger Rohrprobekörper)

die Spannungen geleistet wird, während sich der kleinste Querschnitt  $F_0$  und  $F'$  vermindert (Abb. 5). (Die Spannungen nehmen wir in dieser Elementarphase der Deformation als konstant an.) Die zum Querschnitt  $F_0$  gehörigen Werte  $r_0$ ,  $s_0$  und  $\sigma_l = \sigma'_0 = P/F_0$  eingesetzt, summieren wir die Teilarbeiten über das ganze Volumen  $V_0 = F_0 dl$

$$L = \sigma'_0 s_0 r_0 \lambda \int_0^{2\pi} d\varphi - \sigma_t s_0 dl (r_0 - r') \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Nach Integration durch das Volumen geteilt und mit den Bezeichnungen

$$\delta_E = \frac{\lambda}{dl} = \frac{F_0 - F'}{F'} \quad \text{und} \quad \delta_R = \frac{r_0 - r'}{r_0}$$

( $\delta_R$  ist »Radiusverminderung«) kann man schreiben:

$$\frac{L}{V_0} = \sigma'_0 \delta_E - \sigma_t \delta_R. \quad (12)$$

Der Ausdruck der Brucharbeit  $A_d$  beträgt auf den ganzen Zerreiversuch erstreckt:

$$A_d = A_l + A_t = \int_0^{\delta_{EG}} \sigma'_0 d\delta_E - \int_{\delta_{RG}}^{\delta_{RC}} \sigma_t d\delta_R. \quad (13)$$

(In den Integrationsgrenzen weist Index  $G$  auf die Grenze der Gleichmaßdehnung und Index  $C$  auf den Bruchzustand hin.)

### Versuchsergebnisse

Die Arbeit der Längsspannungen kann man in Kenntnis des Zusammenhanges  $\sigma'_0 = f(\delta_E)$  berechnen. Diese Funktion wird dadurch dargestellt, daß

| Typ | $\phi D$ | $\phi d$ | $l$ | $L$ |
|-----|----------|----------|-----|-----|
| A   | 22       | 18       | 65  | 100 |
| B   | 20       | 19       | 65  | 100 |
| C   | 20       | 10       | 100 | 130 |

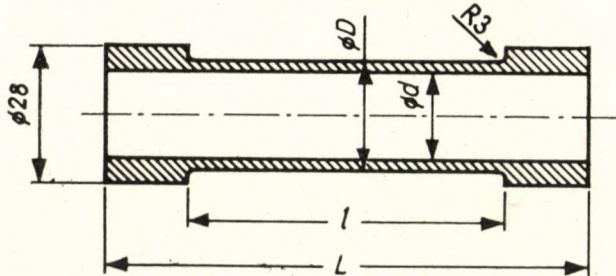


Abb. 6. Die Abmessungen der zu den Untersuchungen verwendeten Rohrprobestbe

man die in den verschiedenen Phasen des Versuchs gemessene Zugkraft durch den Anfangsquerschnitt teilt ( $\sigma'_0 = P/F_0$ ), und den dazu gehörigen Wert von  $\delta_E$  (9) berechnet. Die Messung des äußeren Durchmessers bereitet keine Sorgen, aber es ist erwünscht, die Änderung der Wanddicke mit einer die unmittelbaren Messungen ersetzenden anderen Methode zu verfolgen.

In den nachstehenden Auseinandersetzungen wird die effektive Dehnung  $\delta_E$  gebraucht und die »fiktive Dehnung«  $\delta_F$  eingeführt, letztere aus der Änderung des äußeren Durchmessers des Probestabes folgendermaßen berechnet:

$$\delta_F = \frac{(2r_0)^2 - (2r')^2}{(2r')^2} = \frac{d_0^2 - d'^2}{d'^2}. \quad (14)$$

Unsere Messungen beweisen, daß ein bestimmter, einfacher Zusammenhang



zwischen der jeweiligen fiktiven Dehnung und der effektiven Dehnung besteht. Probestäbe, die von den verschiedenen Stellen eines Stangenstahles C35 genommen wurden, haben wir in den verschiedenen Phasen des Zerreiversuches entlastet und die Werte  $\delta_E$  und  $\delta_F$  des kleinsten Querschnittes miteinander verglichen. Die Gestalt der zu der Messungsserie gebrauchten Probestäbe stellt

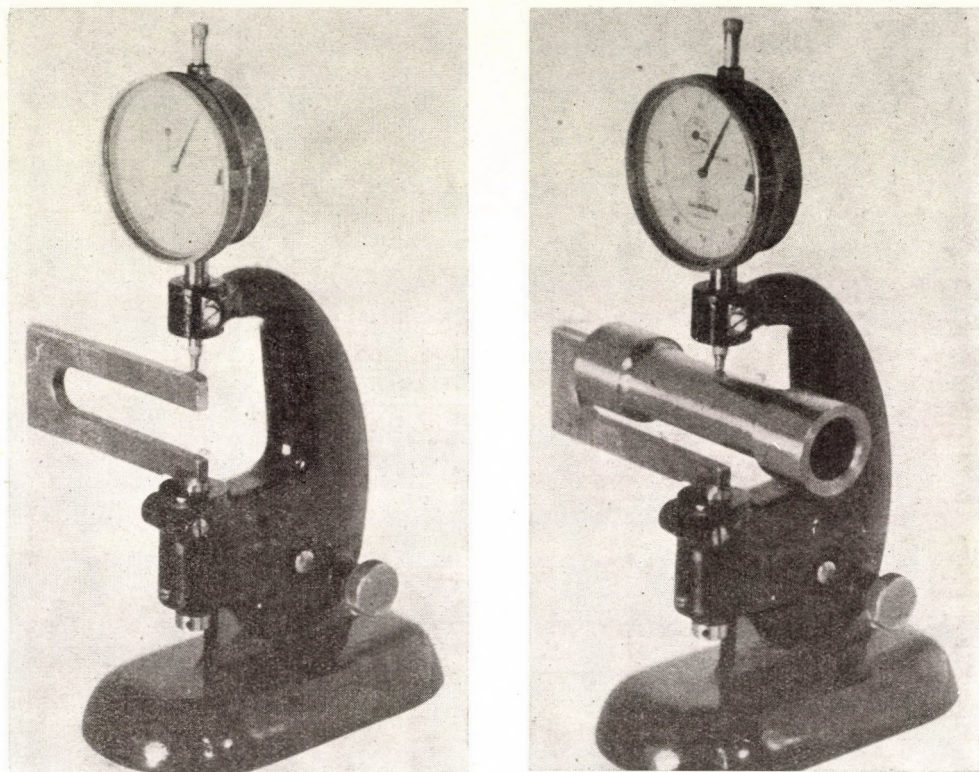


Abb. 7. Die Messung der Wanddicke der Rohrprobestäbe

Abb. 6 dar. Die äußere Oberfläche wurde durch Schleifen, die innere Oberfläche der Bohrung bei Typ A und C mit einer Reibahle und bei Typ B durch Schleifen glatt bearbeitet. Nach den Entlastungen wurden die Probestäbe von der Einspannvorrichtung herausgenommen und die Wanddicke des kleinsten Querschnittes wurde mit einer Meßuhr mit 1/100 mm Einteilung gemessen (Abb. 7). Die Wertpaare  $\delta_F - \delta_E$  werden, in Diagramme aufgetragen, in Abb. 8 und 9 gezeigt. In der Abb. 10 ist die Kurve  $\delta_E - \delta_F$  eines aus legiertem Aluminium (Al-Mg-Si MSZ 3714) angefertigten Probestabes Typ A zu sehen.

Nach der Darstellung der Funktion  $\delta_E = g(\delta_F)$  kann man also die Arbeit der Spannung  $\sigma_I$  aus dem Zerreiversuch einfach bestimmen. Man mißt den zusammengehörigen Durchmesser  $d' = 2r'$  und die Zugkraft  $P$ , daraus berech-



net man nach Formel (14) die fiktive und mittels der aufgenommenen Funktion  $\delta_E = g(\delta_F)$  die effektive Dehnung, zuletzt teilt man die Zugkraft durch den Anfangsquerschnitt  $F_0(\sigma_0)$ . Unsere Zerreißversuche mit Probestäben Typ B

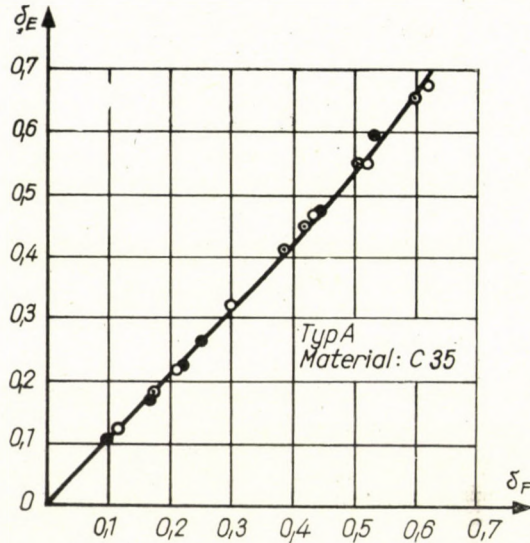


Abb. 8

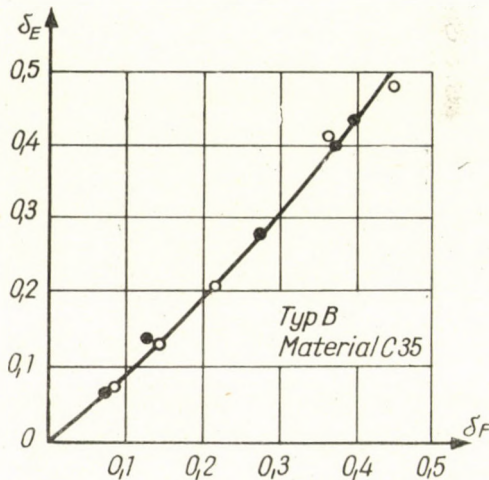


Abb. 9

ergaben ähnliche Kurven, wie sie in Abb. 11 dargestellt wurden. Die Arbeit — die Fläche unter der Kurve — kann durch annähernde Integration, zum Beispiel mittels der Simpsonschen Regel berechnet werden.



Durch Integration nach  $\delta_R$  der in Koordinaten  $\sigma_t - \delta_R$  aufgetragenen Kurve ergibt sich die Arbeit der Tangentialspannungen. Da der zur Berechnung von  $\sigma_t$  notwendige Radius  $\varrho_0$  praktisch sehr schwer meßbar ist, rechnen wir näherungsweise.

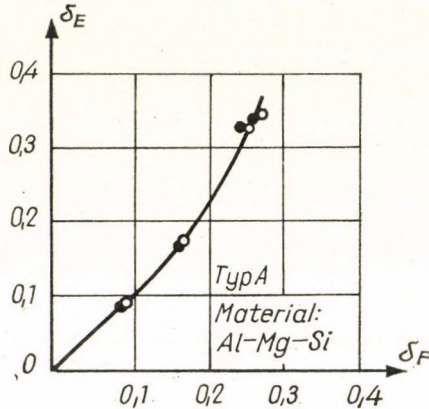


Abb. 8-9-10. Der Zusammenhang zwischen den fiktiven und effektiven Dehnungen beim Zugversuch von Rohrprobestäben

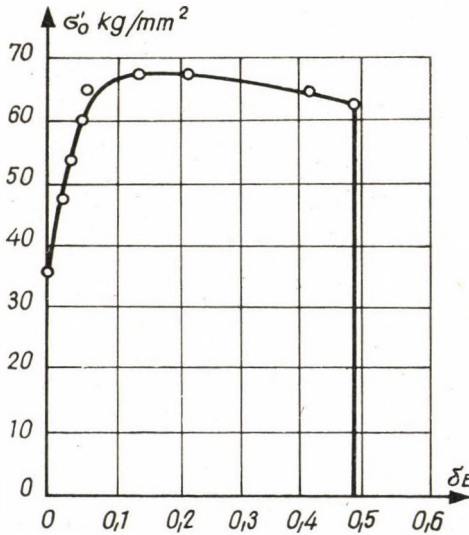


Abb. 11. Zur Berechnung der Arbeit der Längsspannungen. Die Arbeit  $A_1$  ist gleich der Fläche unter der Kurve.

Vor allem informieren wir uns von dem im Moment des Bruches herrschenden Verhältnis  $\sigma_l/\sigma_t$ . Nach den an dünnwandigen C35 Stahl-, Kupfer-, Aluminiumlegierung- und Messingrohren durchgeführten Zerreißversuchen haben wir den Radius  $\varrho_0$  durch Anpassung von Radiusschablonen gemessen.

Trotz der Ungenauigkeit dieser Methode konnte man feststellen, daß  $\varrho_0$  immer das Mehrfache von  $r_0$  ist. (An Stahlprobestäben haben wir den Wert  $r_0/\varrho_0 \approx 0,1$  gemessen).

Mit der Prüfung der im kleinsten Querschnitt auftretenden Dehnungen ergibt sich ein Ergebnis von befriedigender Genauigkeit. Für die Messungen wurden vor dem Moment des Bruches entlastete Probestäbe Typ B angewendet. Um den Umfang des kleinsten Querschnittes (gürtelmäßig) wurde

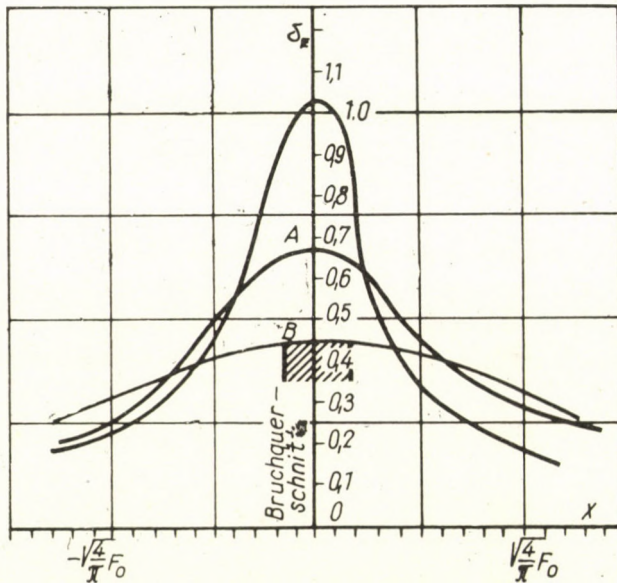


Abb. 12. Die Änderung der effektiven Dehnung längs der Stabachse von Rundstäben sowie von Probestäben Typ A und B, im Moment des Bruches

ein Dehnungsmeßstreifen St4 Typ: A 12 (USA) mit einer Meßbasis von  $2 \times 25$  mm angeklebt und der Probestab wurde mit einer ansteigenden Zugkraft bis zu 50% der der Entlastung vorangehenden Beanspruchung belastet. (Als Dehnungsmeßbrücke wurde ein Gerät ORION-EMG TYPE: 2353 gebraucht). Aus den zusammengehörigen Zugkraft-Tangentialdehnung Wertpaaren wurden die Quotienten  $\sigma_l/\sigma_t$  berechnet und auf den der Entlastung vorangehenden Zustand extrapoliert. (Den Messungen nach ist  $\sigma_t$  infolge der Zunahme des Radius  $\varrho_0$  nicht einmal im Bereich der elastischen Spannungen der Zugkraft vollkommen proportional).

Die Genauigkeit dieses Versuches hängt beträchtlich davon ab, in welcher Phase des Versuches es gelungen ist, die Entlastung »vor dem Moment des Bruches« zu verwirklichen. Auf den Bruch kann man nämlich nur aus der Gestalt der Diagramme von an ähnlichen Probestäben durchgeführten Zerreiß-



versuchen schließen. Eine weitere Fehlerquelle ist, daß der Querschnitt des Probestabes an der Anklebestelle des Dehnungsmeßstreifens der Längsachse entlang veränderlich ist. Von der Kleinheit dieses Fehlers bietet Abb. 12 einige Information, wo die Änderungen der effektiven Dehnungen längs der Achse von Rundprobestäben sowie von Proben Typ A und B, alle aus Material C35 im Moment des Bruches miteinander verglichen wurden. Der schraffierte Teil bedeutet die Breite des Dehnungsmeßstreifens. Die Dehnung  $\delta_E$  vom Probestab Typ B ist auf dieser Strecke ziemlich gleichmäßig,  $\delta_F$  ist kleiner als  $\delta_E$  und ihm nahe proportional (siehe Abb. 9), man kann also auch den äußeren Durchmesser als nahe konstant betrachten.

Als Ergebnis der durchgeführten Dehnungsprüfungen — übereinstimmend mit den Messungen von  $\varrho_0$  beschränkter Genauigkeit — ergab sich für den dem Bruch vorangehenden Zustand  $\sigma_t = 0,0527 \sigma_t$ . Zwischen der Grenze der Gleichmaßdehnung und dem Bruch wächst die Tangentialspannung von dem Wert 0 auf den Maximalwert an; rechnet man in diesem Bereich mit der Größe

$$\sigma_t = \frac{\sigma_{t \max}}{2} = \text{konstant},$$

so bekommt man die Arbeit von  $\sigma_t$  näherungsweise. Die nachstehende Tabelle vergleicht die im Laufe des Zerreiversuches in der Volumeinheit der Bruchstelle aufgespeicherten Teilarbeiten.

|   | $A_t$<br>mkg/cm <sup>3</sup> | $A_t$<br>mkg/cm <sup>3</sup> | $\frac{A_t}{A_t} \cdot 100$<br>% |
|---|------------------------------|------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 25,5                         | 0,147                        | 0,577                            |
| 2 | 28,0                         | 0,088                        | 0,314                            |
| 3 | 30,9                         | 0,205                        | 0,665                            |

Abb. 13 stellt den Zusammenhang zwischen den effektiven Dehnungen und den Arbeiten  $A_t$  der Längsspannungen von Probestäben mit verschiedener relativer Wanddicke, in Abhängigkeit von dem aus den Ausgangsgrößen  $s_0$  und  $r_0$  berechneten Quotienten

$$k = \frac{s_0}{r_0 + s_0}$$

dar. Die an der Stelle  $k = 0,5$  eingezeichneten, mit vollen Rundstäben gewonnenen Meßpunkte dienen zum Vergleich der Ergebnisse; bei der Konstruktion der Kurven wurden diese nicht benützt. Die beiden auf die Stelle  $k = 0$  (d. h.

$s_0 \ll r_0$ ) extrapolierten Kurven konvergieren gegen einen ausdrücklichen Grenzwert. Da die Radialspannungen in dünnwandigen Rohrprobestäben (wenn  $k \rightarrow 0$ ) vernachlässigbar sind, und die Arbeit der Längsspannungen klein ist, ergibt die in dieser Weise konstruierte und auf die Stelle  $k = 0$  extrapolierte Kurve — mit guter Näherung — die Brucharbeit des Werkstoffes.

In dem wesentlichen Unterschied der an den Stellen  $k = 0$  und  $k = 0,5$  erhaltenen  $A_I$ -Werte ist die Rolle der Arbeit der Radial- und Tangential-

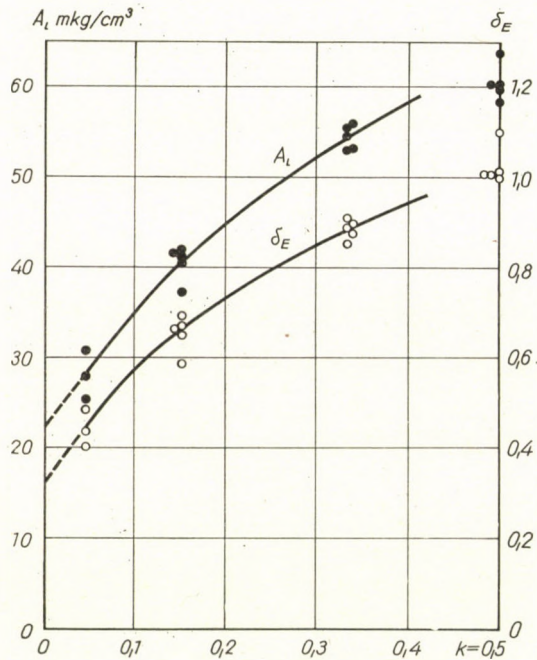


Abb. 13. Die Änderung der effektiven Dehnung und der Arbeit  $A_I$  in Abhängigkeit von dem Quotienten  $k$ . Der annähernde Wert der Brucharbeit ergibt sich durch Extrapolation der Kurve  $A_I$  an der Stelle  $k = 0$

spannungen anscheinend von keiner entscheidenden Bedeutung. Zur Begründung der Differenz müßte man auch die Genauigkeit der bei der Berechnung der Arbeit  $A_I$  gebrauchten Voraussetzung (8) kennen. Die Klärung dieses Problems ist nicht das Ziel der vorliegenden Arbeit; diese Frage bedarf noch weiterer Untersuchungen.

\*

Ich danke Herrn Dr. Paul RÉTI, Kandidat der technischen Wissenschaften, daß ich meine Versuche in dem Labor der von ihm geleiteten Abteilung durchführen durfte.



## ZUSAMMENFASSUNG

Zur einfachen und genauen Bestimmung der Brucharbeit von Werkstoffen ist der Zerreiversuch der Rundprobestbe wegen des im Laufe des Versuchs ständig veränderlichen Spannungszustandes des Probestcks nicht geeignet. Bei dem Zugversuch von dünnwandigen Rohrprobestäben tritt keine beträchtliche Radialspannung auf, und die Arbeit der Tangentialspannungen ist vernachlässigbar klein. Deswegen kann die Arbeit der Längsspannungen — mit guter Näherung — der Brucharbeit gleich gesetzt werden. Die »effektive Dehnung« ( $\delta_E$ ), die zur Berechnung der Brucharbeit notwendig ist, und aus den Abmessungen des kleinsten Querschnittes berechenbar ist, kann man beim Zugversuch von Rohrprobestäben auch aus der Änderung des äußeren Durchmessers ( $\delta_F$ ) einfach gewinnen, wenn man die Beziehung zwischen  $\delta_E$  und  $\delta_F$  in einem vorherigen Versuch bestimmt.

## SCHRIFTTUM

1. SIEBEL, E.: Die Prüfung der metallischen Werkstoffe. (Berlin, 1955)
2. SAPOSNYIKOV, N. A.: Fmek mechanikai vizsglata. (Budapest, 1950) (*Шапошников, Н. А.: Механические испытания металлов.*)
3. SIEBEL, E.—SCHWAIGERER, S.: Arch. Eisenhttenw. Bd. 19. (1948) S. 145
4. Давиденков, Н. Н.—Спиридонова, Н. И.: Заводская лаборатория. 1945. XI. 6.
5. GILLEMOT, L.—SINAY, G.: Die Brucharbeit als Werkstoffkenngre. Acta Technica Tom. XXII. Fasc. 1—2. (1958) p. 149—173
6. RTI, P. (Redakteur): Vorlesungen des I. Kongresses fr Materialprfung. (Manuskript ungarisch.) Budapest 1960. p. 193—237

## DETERMINATION OF FRACTURE ENERGY BY A NEW, MORE PRECISE METHOD

J. BODROGAI

## SUMMARY

The tensile test carried out with a circular specimen is not suitable for the simple and precise determination of fracture energy, because of the continuous variation of the state of stress during the test. During the tension test of a thin-walled tubular specimen no noticeable radial stress appears, while the work of the tangential stresses is negligible. Therefore, the fracture energy is well approximated by the work of the axial stresses. On tension testing of tubular specimens, the "effective elongation" ( $\delta_E$ ), needed for determining the fracture energy, and which can be calculated from the data of the smallest cross section, can be obtained in a simple way also from the variation of the outer diameter ( $\delta_F$ ) if the relation between  $\delta_E$  and  $\delta_F$  is determined by a preliminary test.

## METHODE NOUVELLE ET PLUS PRECISE POUR LA DETERMINATION DU TRAVAIL DE RUPTURE

J. BODROGAI

## RESUME

Les essais de traction effectués sur des éprouvettes de section circulaire ne se prêtent pas  la détermination exacte et simple du travail de rupture des matériaux de construction, par suite du changement continu de l'état de tension de l'éprouvette au cours de l'essai. Lors de la traction d'une éprouvette tubulaire  paroi mince, il n'y a pas de contrainte radiale appréciable, et le travail des contraintes tangentiells est négligeable. En conséquence, le travail des contraintes axiales peut être considéré comme une bonne approximation du travail de rupture. A l'essai des éprouvettes tubulaires, «l'allongement effectif» ( $\delta_E$ ), nécessaire pour le calcul du travail de rupture et pouvant être obtenu des valeurs de la section minimum, peut être obtenu des valeurs de la section minimum, peut être aussi calculé  partir du changement du diamètre extérieur ( $\delta_F$ ), si le rapport entre  $\delta_E$  et  $\delta_F$  a été déterminé par un essai préalable.

## НОВЫЙ БОЛЕЕ ТОЧНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАБОТЫ ИЗЛОМА

И. БОДРОГАИ

## РЕЗЮМЕ

Испытание на разрыв круглого образца из-за переменного состояния напряжения в процессе опыта не подходит для простого и точного определения работы излома конструкционных материалов. При разрыве тонкостенных трубчатых образцов не возникают значительные радиальные напряжения, а работа тангенциальных напряжений пренебрежительно мала. Поэтому работа напряжений по продольной оси с хорошим приближением может быть принята равной работе излома. «Эффективное растяжение» ( $\delta_E$ ), необходимое для вычисления работы излома и определяемое по данным наименьшего сечения, при разрыве образцов трубчатого сечения можно получить по изменению внешнего диаметра ( $\delta_F$ ), если зависимость между  $\delta_E$  и  $\delta_F$  определена уже на основе предыдущего опыта.





# SOME ZERO SEQUENCE TYPE PROBLEMS OF NETWORKS

O. P. GESZTI  
D. ENG. SC.

POWER RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received April 28, 1961]

Below the author discusses some out of the ordinary problems which are presented by practice. The difficulties are usually related to the zero sequence network.

A. The simplified circuit diagram of a big grid transformer station is shown in Fig. 1. Two transformers are in parallel connection between the 120 and 220 kV bus-bars. One is a two-winding transformer in star-star connection, the other is also star-star connected on the 120 and 220 kV sides, but in addition it has a tertiary delta-winding to which a synchronous-condenser is connected.

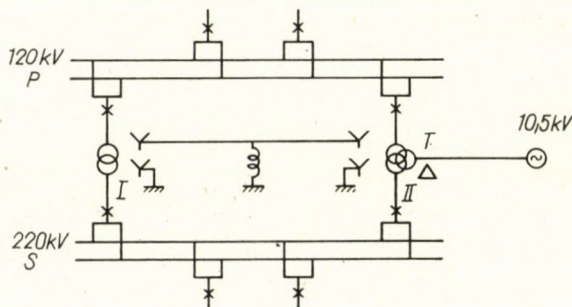


Fig. 1

The 120 kV neutral points of the two transformers are grounded through a common ground short-circuit limiting reactor. The problem is to find the equivalent circuit diagram of the transformers for the zero sequence network, for operating conditions, when

- a) the transformers are parallel-connected on the 120 kV (P, primary) side, the connection of the 220 kV (S, secondary) side is arbitrary,
- b) the transformers are not parallel-connected on the primary side.

The equivalent circuit diagram of a two-winding star-star connected transformer grounded on both sides, — neglecting the excitation branch, — is as it is well-known, a series impedance in all of the three phase-sequence net-



works, which is equal to the short-circuit impedance of the transformer. The three-winding transformer can be substituted by a self-impedance star, in which the values can be calculated from the three short-circuit voltages of the transformer. It is expedient to base the calculation on the overall (or on the one third) power of the two transformers and of the phase voltage of the primary side. In this case the value of the reactor in relative units has to be multiplied as usual by three. Under *a*) operating conditions the equivalent zero sequence circuit can be easily made (Fig. 2). The difference between this and

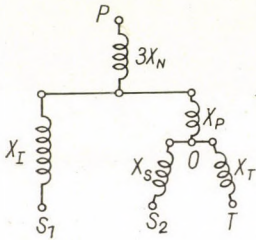


Fig. 2

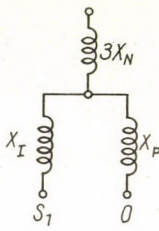


Fig. 3

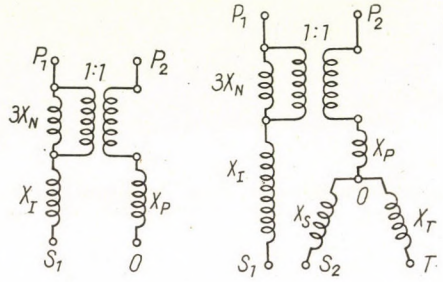


Fig. 4

the customary star-delta connection case is, that the grounding reactor is in series with the joint terminals on the primary side of the impedances substituting the transformers.

Fig. 2 can be used for solving problem b). The star between the points  $S_1-P-O$ , created by  $X_I$ ,  $X_P$  and  $3 X_N$  self-impedances can be regarded as two, at their ends connected lines with self-impedances  $X_I$  and  $X_P$ , respectively and with  $3 X_N$  mutual impedance. In this case, however, the connection

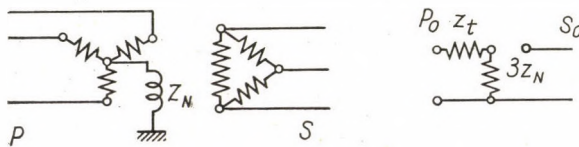


Fig. 5

on the *P*- (primary) side can be subdivided into  $P_1$  and  $P_2$ . The conversion of this part is shown in Fig. 3 and the final connection of the two transformers on Fig. 4. This circuit diagram makes a correct substitution possible when the transformers operate separately both on the primary and secondary sides, but with a common neutral-point reactor.



B) There is a demand for the construction of an equivalent circuit diagram for the star-delta connected transformer with grounded neutral-point, when a  $Z_n$  impedance is connected to one corner of the delta. In the zero sequence network this is very similar to another case of the star-delta transformer when a  $Z_n$  impedance is connected on the star-side in between the neutral-point and the ground (Figs. 5 and 6).

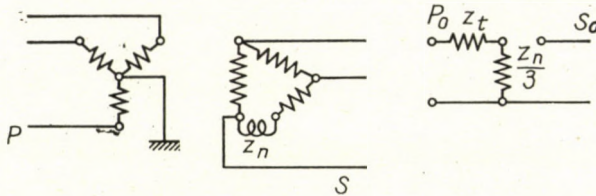


Fig. 6

The figures show the general circuit-diagram as well as the equivalent zero-sequence circuit-diagram for both cases. (In Fig. 5  $Z_n$  is in relative units, based on kVA/phase and phase voltage on the star side. In Fig. 6  $Z_n$  is based on kVA/phase and line voltage on the delta side.  $Z_t$  is the drop of the transformer.)

The problem was solved for the transformer shown by the circuit diagram of Fig. 7.  $Z_n$  impedance is connected to the  $bc$  phase of the delta side.

Fig. 7a shows the positive directions of the currents and the voltage vectors. (The arrow from its end to its point means a voltage-rise. With one-sided equations the voltage-drops have a negative sign in the positive direction of the current, because voltage-rises are taken as positive.) We marked the values of the delta side with a comma, and the line voltages with a double index (e. g.  $U_{bc} = U_c - U_b$ ). When on the two sides of the transformer the operating conditions are symmetrical ( $Z_n = 0$ ), the absolute values of the line voltages are equal. The neutral-point of the transformer is grounded without impedance. To avoid misunderstanding we marked the vector-diagrams of the positive and negative phase-sequence voltages and currents on Figs. 7b, 7c, 7d and 7e in symmetrical operating conditions. The excitation impedance of the transformer is taken as infinite. The equations for the delta side are written in relative units (using one third of the kVA/phase and line voltage values as bases), with  $bc$  phase as reference. The transformer is excited from the star side by a voltage, which has all three voltage-components. In the equivalent circuit diagram  $Z_t$  drop-impedance is formed not on the star side, but is concentrated on the delta side. The three self-impedances:

$$Z_{bc} = Z_t + Z_n \text{ and } Z_{ca} = Z_{ab} = Z_t.$$

Writing the fundamental equations of the symmetrical components for



the asymmetrical delta we obtain:

$$\begin{aligned}
 U'_{bc1} &= U'_{bcg1} - I'_{bc1} Z_{11} - I'_{bc2} Z_{12} - I'_{bc0} Z_{10} \\
 U'_{bc2} &= U'_{bcg2} - I'_{bc1} Z_{21} - I'_{bc2} Z_{22} - I'_{bc0} Z_{20} \\
 U'_{bc0} &= 0 = U'_{bcg0} - I'_{bc1} Z_{01} - I'_{bc2} Z_{02} - I'_{bc0} Z_{00} .
 \end{aligned}$$

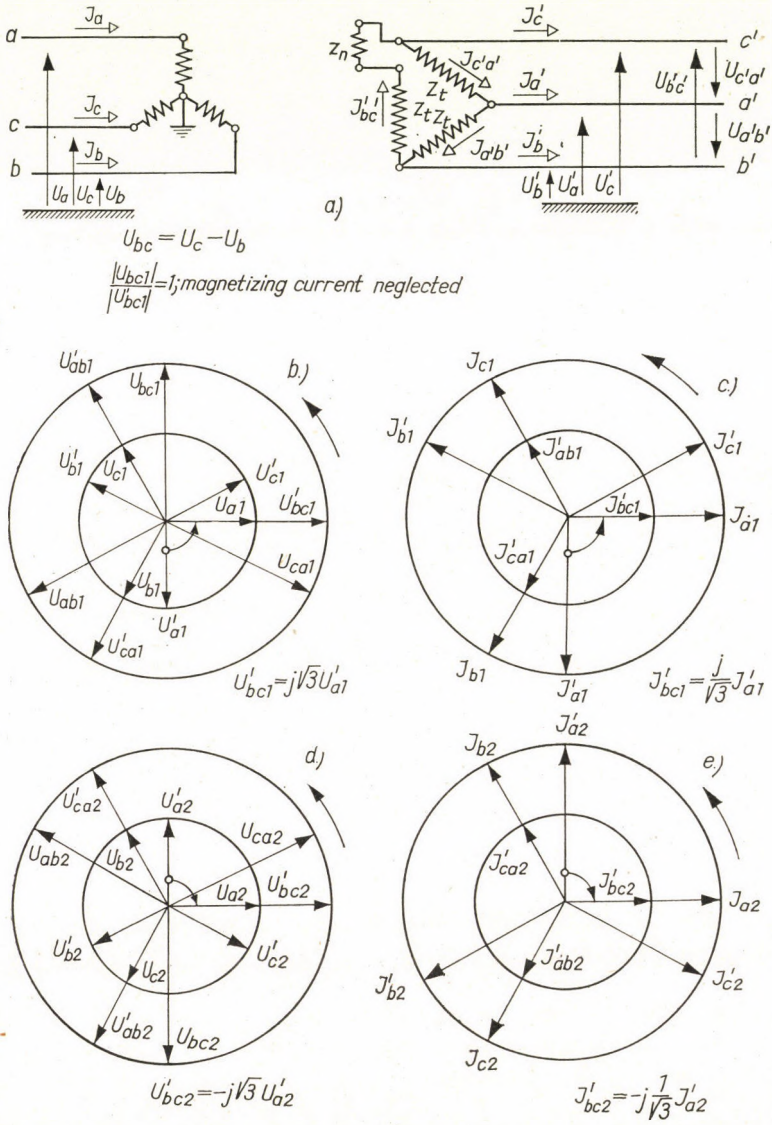


Fig. 7

On the left side we find the components of the  $bc$  reference (terminal) voltage. It can be seen that the value of the zero-sequence voltage is zero, which is quite obvious as we are dealing here with a line voltage. On the right side the three components of the inserted electromotive force are:  $U'_{bcg1}$ ,  $U'_{bcg2}$  and  $U'_{bcg0}$ . The impedances in the equations contain the self-, and mutual impedances of the three different sequence networks.

Expressing  $I'_{bc0}$  from the last equation:

$$I'_{bc0} = \frac{1}{Z_{00}} [U'_{bcg0} - I'_{bc1} Z_{01} - I'_{bc2} Z_{02}]$$

and substituting it into the first two equations:

$$U'_{bc1} = \left[ U'_{bcg1} - U'_{bcg0} \frac{Z_{10}}{Z_{00}} \right] - I'_{bc1} \left[ Z_{11} - \frac{Z_{10} Z_{01}}{Z_{00}} \right] - I'_{bc2} \left[ Z_{12} - \frac{Z_{10} Z_{02}}{Z_{00}} \right]$$

$$U'_{bc2} = \left[ U'_{bcg2} - U'_{bcg0} \frac{Z_{20}}{Z_{00}} \right] - I'_{bc1} \left[ Z_{21} - \frac{Z_{20} Z_{01}}{Z_{00}} \right] - I'_{bc2} \left[ Z_{22} - \frac{Z_{20} Z_{02}}{Z_{00}} \right].$$

Using the relations of Fig. 7 and changing over to the phase quantities

$$U'_{a1} = -\frac{j}{\sqrt{3}} \left[ U'_{bcg1} - U'_{bcg0} \frac{Z_{10}}{Z_{00}} \right] - I'_{a1} \frac{1}{3} \left[ Z_{11} - \frac{Z_{10} Z_{01}}{Z_{00}} \right] + I'_{a2} \frac{1}{3} \left[ Z_{12} - \frac{Z_{10} Z_{02}}{Z_{00}} \right]$$

$$U'_{a2} = \frac{j}{\sqrt{3}} \left[ U'_{bcg2} - U'_{bcg0} \frac{Z_{20}}{Z_{00}} \right] + I'_{a1} \frac{1}{3} \left[ Z_{21} - \frac{Z_{20} Z_{01}}{Z_{00}} \right] - I'_{a2} \frac{1}{3} \left[ Z_{22} - \frac{Z_{20} Z_{02}}{Z_{00}} \right]$$

$$I'_{bc0} = \frac{1}{Z_{00}} \left[ U'_{bcg0} - j \frac{I'_{a1}}{\sqrt{3}} Z_{01} + j \frac{I'_{a2}}{\sqrt{3}} Z_{02} \right].$$

The impedances are now substituted taking into account that they are self-impedances (there is no mutual influence between them) and that in two



phases the self-impedances are equal:

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_{00} = \frac{1}{3} [Z_{bc} + Z_{ca} + Z_{ab}] = Z_t + \frac{Z_n}{3}$$

$$Z_{12} = Z_{20} = Z_{01} = \frac{1}{3} [Z_{bc} + a^2 Z_{ca} + a Z_{ab}] = \frac{Z_n}{3}$$

$$Z_{21} = Z_{10} = Z_{02} = \frac{1}{3} [Z_{bc} + a Z_{ca} + a^2 Z_{ab}] = \frac{Z_n}{3}.$$

For a more convenient way of writing,  $\frac{Z_n}{3} = \Delta Z$ . Considering that

$$\frac{U'_{bcg1}}{\sqrt{3}} = U_{a1}$$

$$\frac{U'_{bcg2}}{\sqrt{3}} = U_{a2}$$

and

$$U'_{bcg0} = \sqrt{3} \cdot U_{a0}$$

the three voltage equations are:

$$U'_{a1} = -jU_{a1} + \frac{j}{\sqrt{3}} \Delta Z \left[ \frac{U'_{bcg0}}{Z_t + \Delta Z} \right] - I'_{a1} \frac{1}{3} \left[ Z_t + \Delta Z - \frac{\Delta Z^2}{Z_t + \Delta Z} \right] +$$

$$+ I'_{a2} \frac{1}{3} \left[ \Delta Z - \frac{\Delta Z^2}{Z_t + \Delta Z} \right]$$

$$U'_{a2} = jU_{a2} - \frac{j}{\sqrt{3}} \Delta Z \left[ \frac{U'_{bcg0}}{Z_t + \Delta Z} \right] + I'_{a1} \frac{1}{3} \left[ \Delta Z - \frac{\Delta Z^2}{Z_t + \Delta Z} \right] -$$

$$- I'_{a2} \frac{1}{3} \left[ Z_t + \Delta Z - \frac{\Delta Z^2}{Z_t + \Delta Z} \right]$$

$$0 = U'_{bcg0} - \frac{j}{\sqrt{3}} [I'_{a1} - I'_{a2}] - I'_{bc0} [Z_t + \Delta Z].$$

On the basis of the last three equations the equivalent circuit diagram of Fig. 8 can be drawn. On the left side of the figure, at the terminals of the

star side are the current and voltage components of the star side. The positive sequence values are rotated by “ $j$ ” in one direction, the negative sequence values in the other direction, by ideal transformers. There is no phase rotating-transformer in the zero sequence network. With respect to the delta side; in the positive and negative sequence networks there are phase voltages and line currents, in the zero sequence network line voltages and delta currents. (Therefore a  $\sqrt{3}$  transformation is necessary in the direction of the lower base-voltages.)

In the zero sequence network  $\frac{U'_{bcg0}}{Z_t + \Delta Z}$  current leads to a  $\frac{U'_{bcg0}}{Z_t + \Delta Z} \cdot \Delta Z$  voltage drop in the positive direction of the current. This voltage drop, after transformation by  $\frac{\sqrt{3}}{j}$  value and the change of the terminals, causes a  $\frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \Delta Z \cdot \frac{U'_{bcg0}}{Z_t + \Delta Z}$  voltage rise in the positive sequence network. As the effect in the negative sequence network is of the same extent but of opposite sign, change of the terminals is not necessary here.

The positive sequence current  $I'_{a1}$  through the same transformer is rotated in the direction of  $-j$ .

The real component of the ratio decreases the voltage and increases the current progressing from the zero sequence towards the positive sequence network, or increases the voltage and decreases the current when progressing from the positive sequence towards the zero sequence network. Thus  $I'_{a1}$  corresponds to  $\frac{I'_{a1}}{\sqrt{3}}$  in the zero sequence network. This current is of opposite direction through  $\Delta Z$ , compared with  $I'_{bc0}$ . This would represent a voltage rise (positive sign), but as it has to be multiplied by the above-mentioned  $-j$ , the result will be  $-\frac{j \cdot \Delta Z}{3} \cdot I'_{a1}$ . The situation is similar between the negative and zero sequence networks too, with changed sign. Between the zero sequence network on the one hand and the positive and negative sequence networks on the other, there is no other mutual influence. With respect to the mutual influence of the positive and negative sequence networks, an evaluation of the  $\Delta Z$  impedance in the secondary circuit of the  $\frac{j}{\sqrt{3}}$  transformer is necessary. It is easy to calculate that a  $Z$  impedance in the secondary circuit of a certain transformer having  $T/\tau$  ratio, appears on the primary side with the value of  $\Delta Z_{pr} = \Delta Z \frac{1}{T \cdot \hat{T}}$ . Thus it does not depend on the angular rotation of the ratio, but depends only on the square of the absolute value of the ratio. In the present this impedance is  $\frac{\Delta Z}{3}$ , both for the positive and the negative sequence



network. According to our equation, the mutual impedance of the positive and negative sequence networks is  $\left[ \frac{\Delta Z}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta Z^2}{Z_t + \Delta Z} \right]$ . Subtracting from this the value  $\frac{\Delta Z}{3}$ , we have  $-\frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta Z^2}{Z_t + \Delta Z}$ , which can be taken into consideration by transformers having a 1 : 1 ratio and by changing the terminals.

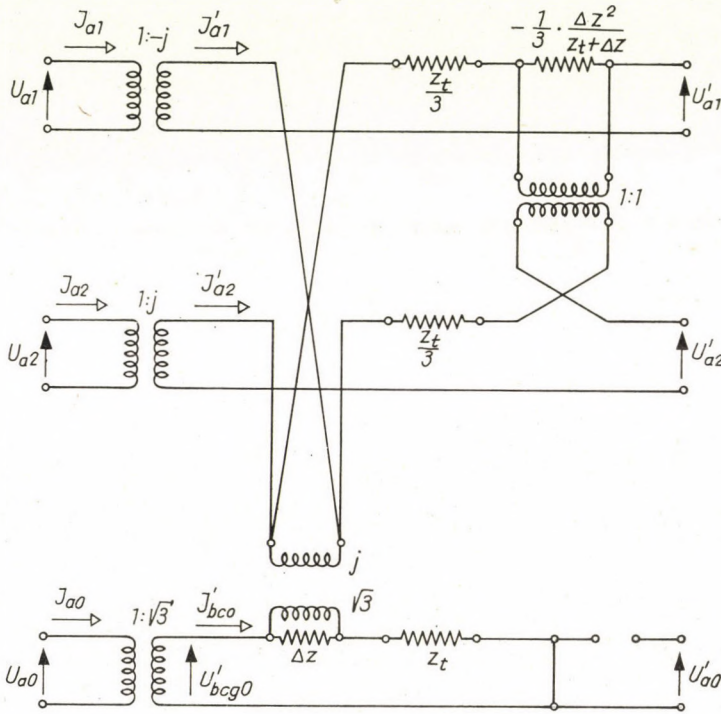


Fig. 8

We should like to remind the reader that we calculated the impedances on the basis of line voltages. Where line currents flow through these impedances (on a 3 times lower voltage-level), there is a  $\frac{1}{3}$  factor for the impedances in the positive and negative sequence networks. In the case of delta currents there is no  $\frac{1}{3}$  factor.

If the feed voltage of the star side has only a positive sequence component, — which is the normal case of operation, — it is possible to introduce certain simplifications. In this case  $U_{a2} = 0$  and  $U_{a0} = U'_{bc0} = 0$ .

Thus the equations are:

$$U'_{a1} = -jU_{a1} - I'_{a1} \frac{1}{3} \left[ Z_t + \Delta Z - \frac{\Delta Z^2}{Z_t + \Delta Z} \right] + I'_{a2} \frac{1}{3} \left[ \Delta Z - \frac{\Delta Z^2}{Z_t + \Delta Z} \right]$$

$$U'_{a2} = I'_{a1} \frac{1}{3} \left[ \Delta Z - \frac{\Delta Z^2}{Z_t + \Delta Z} \right] - I'_{a2} \frac{1}{3} \left[ Z_t + \Delta Z - \frac{\Delta Z^2}{Z_t + \Delta Z} \right]$$

and in the closed delta the current

$$I'_{bc0} = -\frac{j}{\sqrt{3}} \frac{\Delta Z}{Z_t + \Delta Z} [I'_{a1} - I'_{a2}]$$

will flow.

Only the positive and negative sequence networks are shown in Fig. 9.

It may be mentioned in connection with Fig. 9 that the  $\frac{1}{-j}$  transformer

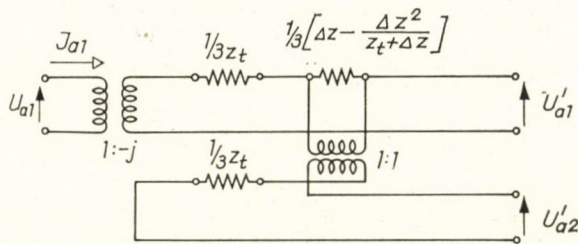


Fig. 9

is now not absolutely necessary and it is more practical to calculate on the basis of phase voltages, when the  $\frac{1}{3}$  factor before the impedances disappears.

Furthermore, it should be mentioned that after conversion the mutual impedance in Fig. 9 is  $\frac{\Delta Z \cdot Z_t}{\Delta Z + Z_t}$ , thus representing a parallel connection of  $Z_t$  and  $\Delta Z$ . In this case there is also a zero sequence current in the closed circuit, according to the above equation.

C) On the transmission lines of effectively grounded high-voltage networks, with up-to-date lightning protection and quick operating short-circuit relays, single-phase earth faults appear in 95 and more per cent. Great single-phase earth fault currents are highly disadvantageous from the viewpoint of circuit-breaking, ground-potentials and owing to their influence on telecommunication lines. Increase of the positive sequence impedance of the equipments would be a very effective short-circuit limiting method, but has the disadvantage of reducing the stability of the power system. This decreases the full util-



ization of the system, which used up huge investments, thus causing significant loss of capital on the one hand, on the other it increases the voltage drop of the normal operation and causes more effective, and reactive power loss. The requirements of the short-circuit limiting and the normal working conditions can be fulfilled simultaneously by a limiting equipment which has small positive sequence impedance (reactance) and big zero sequence impedance (natur-

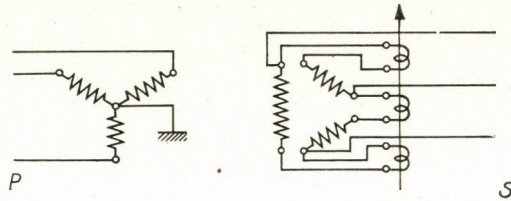


Fig. 10

ally within the limitations of the existing conditions of the effectively grounded neutral-point network), namely

$$\frac{X_0}{X_1} \leq 3.$$

Such a solution is offered by the arrangement of Fig. 5. This solution is very favourable, because  $Z_n$  impedance in a symmetrical network and under symmetrical loading conditions is free of voltage and current and thus has no losses either. It is loaded only at single-, and double-phase earth faults, for the operation time of the protection. Thus it is favourable both from the viewpoint of investments and losses. Its drawback is firstly that in the case of steep-fronted travelling waves the stress of the neutral point of the transformer increases, which may create a delicate situation especially when a star-point regulator is used.

The circuit shown in Fig. 10 is equivalent to the one of Fig. 5, with the difference that the above-mentioned favourable effect, — namely that the zero sequence impedance should be greater than the positive sequence one, — can be achieved with three reactors, placed in the corners of the delta and coiled together trifilarly. In this way, there is no resultant flux in the coils in the presence of positive sequence currents and there is no voltage drop in the three coils. (Neglecting an insignificant value, calculated from the mutual leakage flux of the conductors.) Fluxes caused by zero sequence currents however add up so that for the zero sequence the equivalent circuit diagram of Fig. 10 is equal with that of Fig. 6. (By regarding the joint effect of the 3 reactors as equal to  $Z_n$ , because in the zero sequence circuit the 3 reactors are in series

connection.) It can be achieved that in the case of the positive sequence only the leakage reactance of the transformer and in the case of zero sequence an additional reactor will be connected to the equivalent circuit diagram.

In comparison with the case introduced by Fig. 5, the neutral point is here rigidly grounded so that the stress of the neutral point of the transformer is more favourable.

On the other hand the current flows through the reactors during working conditions too. Thus there is a constant loss of power and owing to continuous operation the dimensions of the reactors must be increased.

Comparing on the one hand the circuits of Fig. 10 and Fig. 6 respectively, and on the other that of Fig. 5 with respect to the zero sequence network, the following can be stated.

If  $S_{tr3}$ (kVA) three-phase power of the transformer and  $Z_t$  drop of the transformer are given, the value of  $Z_{na}(\Omega)$  in the delta, converted to relative unit or to percentage, is

$$\frac{Z_{na}}{3} \% = \frac{Z_{na}(\Omega)}{3} \cdot \frac{S_{tr3}(\text{kVA})}{3} \cdot \frac{1}{U_{\Delta}(\text{kV})^2} \cdot \frac{1}{10}$$

if  $U_{\Delta}$ (kV) is the nominal line voltage of the transformer on the delta side, (in per cent according to Fig. 6b)

If  $U_Y$ (kV) is the nominal phase voltage on the star side, then  $Z_n(\Omega)$ , connected between the neutral-point and the ground, in percentage is:

$$3Z_{nb}(\%) = 3 \cdot Z_{nb}(\Omega) \cdot \frac{S_{tr3}(\text{kVA})}{3} \cdot \frac{1}{U_Y(\text{kV})^2} \cdot \frac{1}{10}$$

In the case of a given transformer the two solutions are equal from the point of view of the zero sequence impedance on the basic frequency, when

$$Z_t + \frac{Z_{na}}{3} = Z_t + 3Z_{nb}$$

or

$$\begin{aligned} \frac{Z_{na}(\Omega)}{3} \cdot \frac{S_{tr3}(\text{kVA})}{3} \cdot \frac{1}{U_{\Delta}(\text{kV})^2} \cdot \frac{1}{10} &= \\ = 3Z_{nb}(\Omega) \cdot \frac{S_{tr3}(\text{kVA})}{3} \cdot \frac{1}{U_Y(\text{kV})^2} \cdot \frac{1}{10} \end{aligned}$$

from which

$$Z_{na}(\Omega) = 9 \left[ \frac{U_{\Delta}(\text{kV})}{U_Y(\text{kV})} \right]^2 \cdot Z_{nb}(\Omega)$$



e. g. when for a certain transformer  $U_A = 10.5$  kV and  $U_Y = 76.2$  kV (line voltage = 132 kV), then

$$Z_{na}(\Omega) = 0.171 \cdot Z_{nb}(\Omega)$$

Calculation of economy has to be made for each case independently and is not covered by this paper.

#### REFERENCES

1. GESZTI, O. P.—KOVÁCS, P. K.—VAJTA, M.: Symmetrical Components. Bp. 1957. Akadémiai Kiadó.
2. WAGNER, C. F.—EVANS, R. D.: Symmetrical Components. New York, 1933. McGraw Hill Co.
3. CLARKE, E.: Circuit Analysis of A. C. Power Systems, Vol. I—II. New York, 1951. John Wiley.

#### SUMMARY

The author introduces some problems of practical significance.

A) The equivalent circuit diagram of three-winding and two-winding transformers in the zero sequence network, when the star points of a winding of both transformers are connected to a common reactor, but all the transformer-terminals are connected to separate bus-bars.

B) The effect of the self-impedance  $Z_n$  placed in the delta-winding of a two-winding star-delta transformer with a grounded neutral-point on the equivalent circuit diagram in the cases of positive, negative and zero sequence networks.

C) The effect of three reactors placed in the delta winding of a two-winding effectively grounded star-delta transformer on the short-circuit currents, if the reactors are coiled trifilarly. In this way there is no limiting effect with respect to the positive sequence currents, but in the case of zero sequence currents the current limiting effect of the reactors is considerable.

#### EINIGE PROBLEME DES NULLSYSTEMS IN ELEKTRISCHEN NETZEN

P. O. GESZTI

#### ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser bespricht einige in der Praxis aufgetauchte Probleme.

a) Ersatzschaltung von Transformatoren mit drei und mit zwei Wicklungen im Nullsystem, wenn die Sternpunkte je einer Wicklung der beiden Transformatoren an eine gemeinsame Drosselspule angeschlossen sind, sämtliche Klemmen der Transformatoren aber an gesondert betriebene Sammelschienen angeschlossen sind.

b) Die Wirkung einer Selbstimpedanz  $Z_n$  in der Dreieckwicklung eines Stern-Dreiecktransformators mit zwei Wicklungen und geerdetem Nullpunkt auf die Ersatzschaltung im Netz des Mitsystems, des Gegensystems und des Nullsystems.

c) Der Einfluß von drei, in das Dreieck eines wirkungsvoll geerdeten Stern-Dreiecktransformators geschalteten Drosselspulen auf die Kurzschlußströme, wenn die Drosselspulen trifilar gewickelt sind, wodurch sie im Fall von Strömen des Mitsystems keine Drosselwirkung ausüben, bei Durchgang von Strömen des Nullsystems jedoch wirkungsvoll drosseln.



## QUELQUES PROBLEMES DES RESEAUX NULS

P. O. GESZTI

## RESUME

L'auteur expose les problèmes suivants se présentant dans la pratique:

a) schéma équivalent de transformateurs à trois et à deux enroulements dans le réseau nul, quand les points neutres de chaque enroulement de deux transformateurs sont reliés à une bobine de réactance commune, toutes les bornes des transformateurs étant, par contre, reliées à des barres omnibus exploitées séparément;

b) influence sur le schéma équivalent d'une self-impédance  $Z_n$  placée dans l'enroulement en triangle d'un transformateur étoile-triangle à deux enroulements et à point neutre mis à la terre, pour les réseaux positif, négatif et nul;

c) influence sur les courants de court-circuit de trois bobines de réactance placées dans le triangle d'un transformateur à deux enroulements étoile-triangle avec mise à la terre efficace, quand les bobines de réactance sont à enroulement trifilaire, et par suite n'ont pas d'influence réductrice sur les courants à succession directe, mais exercent une influence réductrice efficace en cas de passage de courants nuls.

НЕСКОЛЬКО ПРОБЛЕМ, СВЯЗАННЫХ С ВОПРОСАМИ СХЕМ НУЛЕВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

П. О. ГЕСТИ

## РЕЗЮМЕ

Автор описывает несколько проблем, встречающихся в практике.

a) Схема замещения двухобмоточного и трехобмоточного трансформатора в сети нулевой последовательности для случая, если нейтраль одной — одной обмотки двух трансформаторов присоединяется к общему реактору, но все зажимы трансформаторов соединяются с отдельно работающими сборными шинами.

b) Влияние собственного импеданса  $Z_n$ , включенного в сторону треугольника двухобмоточного трансформатора с заземленной нейтралью, с соединением звезда/треугольник на сеть прямой, обратной и нулевой последовательности.

в) Влияние трех реакторов, включенных в сторону треугольника двухобмоточного трансформатора с соединением звезда с заземленным нулем — треугольник, на токи короткого замыкания для случая, если реакторы намотаны трифиллярно, вследствие чего в случае токов прямой последовательности они не демпфируют, но в случае прохождения токов нулевой последовательности оказывают действенный дроссельный эффект.





# DATA ON THE HISTORY OF METALLURGY IN HUNGARY\*

## VII.

### HUNGARY, THE CRADLE OF THE SO-CALLED EUROPEAN AMALGAMATION\*\*

A. SCHLEICHER

D. ENG. SC. h. e.

[Manuscript received May 8, 1961]

Amalgamation, *i. e.* the recovery of precious metals from their ores by means of mercury, is a process of long standing, probably of Minor Asian or Egyptian origin [1]. Together with hydraulic ground breaking, as used by the Romans, amalgamation was presumably employed in Spain also; even data contained in one and the same source are, by the way, contradictory concerning its European origin [2]. It is in any case certain that the process of BARBA was essentially modified and improved by the nobleman IGNÁCZ BORN in 1784 at Selmec in Hungary [2]. This process, as modified and elaborated at the end of the 18th century, is called "European amalgamation" and the intent here is to discuss its history in Hungary.

BORN, the inventor of the process, though living in Vienna and for some time in Prague, declared himself a Hungarian: "Yes, I hail from Károlyfehérvár and am a Hungarian from Transylvania." He was later raised to the rank of a Hungarian nobleman in acknowledgement of his achievements. Besides, as will be shown, the entire process was evolved in former Hungarian territory and with the co-operation of Hungarian collaborators.

It was due to such antecedents that one of the tools used for amalgamation in Hungary came to be called "*Hungarian bowl*" in the English technical literature [3], although the correct term is not bowl but "*pan*" ([2], p. 147) notwithstanding the fact that KIRKE ROSE [17], too, uses the word "*bowl*" in his book. Another term adopted by authors writing in the English language is "*Hungarian riffle*" [4].

\* In this series the following papers of the author have so far been published: History of Non-Ferrous Metallurgy in the Mátra Mountains; Acta Techn. Acad. Sci. Hung. 2 (1951) 3/42 — Data on the Use of Brass in the Late Middle Ages and on the Beginning of Wire Drawing in Europe; *ibid.* 7 (1953) 225/231 — Restoration of a Blast Furnace Built in Hungary in 1813; *ibid.* 8 (1954) 425/433 — First Industrial Production of Tellurium; *ibid.* 9 (1954) 213/222 (all in German). — Manufacture of Pig Iron from High-Alumina Ores in the 18th Century; *ibid.* 18 (1957) 422/431 — Project of Blast Furnace and Blast Engine, Dated from 1816; *ibid.* 20 (1958) 137/143 (the last two in English).

\*\* Condensed from a detailed paper of the author, published in Hungarian in the Transactions of the Engineering Section of the Hung. Acad. of Sci. 29 (1960) 407/416



Amalgamation, as discovered in 1609 and performed in Chile by the monk ALONZO BARBA, the so-called Caso process (one that is presumably no longer used anywhere), consisted of the following: a crude burden of high grade ore composed chiefly of pure silver and silver chloride to which sodium chloride had been added was heated in copper kettles to boiling point; the copper wall of the kettle acted as reagent and decomposed the silver chloride while producing cuprichloride, the latter cuprochloride performed the chlorination of the silver. The amalgam, produced by the addition of mercury, was then eliminated by washing.

This method was later essentially modified by BORN: before amalgamating the ore in copper kettles or pans, he subjected it to a chloridizing roasting with common salt [5]. This process was first used at Szklenó, a village about 12 km NNW of Selmec, a town which used to belong to pre-war Hungary and now bears the Czechoslovak name Banská Štiavnica ([2], p. 79). BORN applied this process on a grand scale in 1784, and its success attracted several foreign experts who arrived to study the new method in 1786.

Details of the process are described in BORN's book [5] and have, since, been discussed in several treatises, so that we can dispense here of giving one more description thereof. We wish to refer to only one, more or less, forgotten source: "Theorie der Amalgamation" written by DON FAUSTO D'ELHUYAR, General Manager of the Royal Spanish Mines in America, who was an eye witness of the experiments at Szklenó and wrote down his observations in two bulky essays [6].

A passage from this source [6] will show the significance that was attached to the process at the time: "The first employment of amalgamation caused a great stir all over Europe. Experts of metallurgy hastened to Hungary from every country in order to become acquainted with the process, and — prompted by confidence in the famous inventor — all the princes concerned delegated their representatives capable of appreciating the work. First, the Spaniards saw nothing new in amalgamation. Yet, the results of the very first experiments performed according to Herr BORN's own method convinced them of the superiority of the new process over that employed in America, *e. g.* saving of time and mercury, etc. . . . I must say I was amazed at the regularity and accuracy of the operation. . . . All the metallurgists assembled at Szklenó were unanimous in declaring that the new process was highly satisfactory in each respect."

The equipment of the Szklenó works, besides being described in BORN's book [5] which has since also been published in French, is described in our source [6] and in other detailed accounts as well.

It should be noted that ANTHONY RUPRECHT, professor of chemistry at the then highly reputed mining college of Selmec, performed a decisively important work in connection with the erection of the experimental plant at Szklenó; the execution of the experiments and the perfection of the process. He recognized, for example, that a pulverization of the ore accelerated the process and increased the amount of recovery; he emphasized the importance of a correct



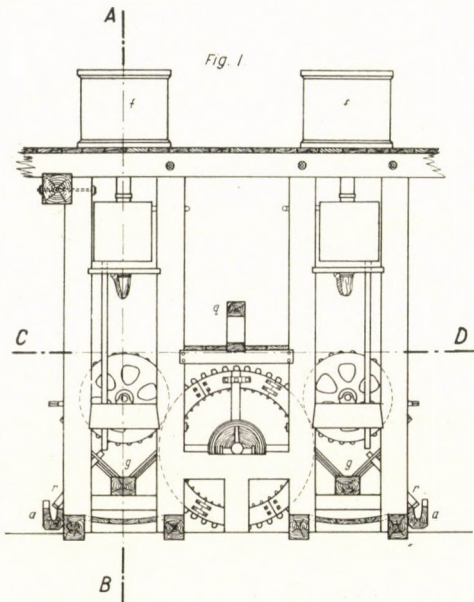


Fig. 1

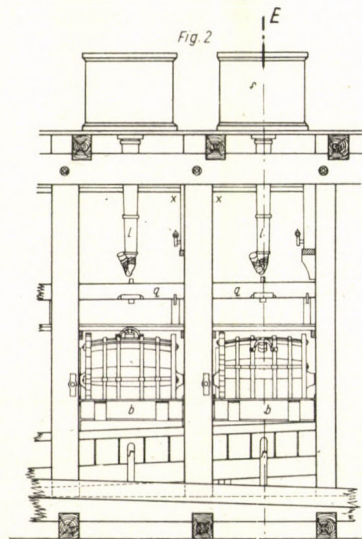
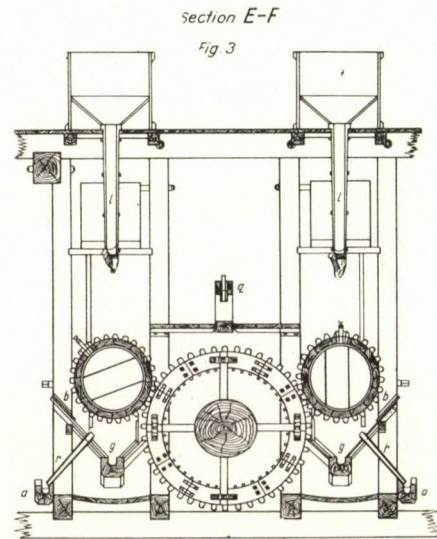
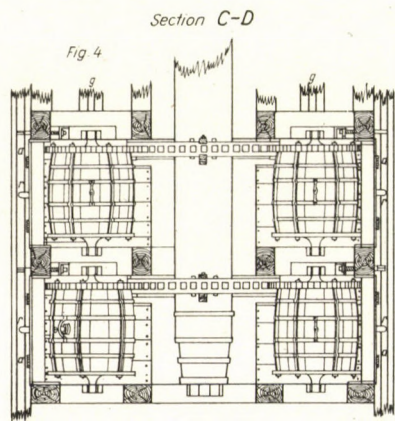


Fig. 2



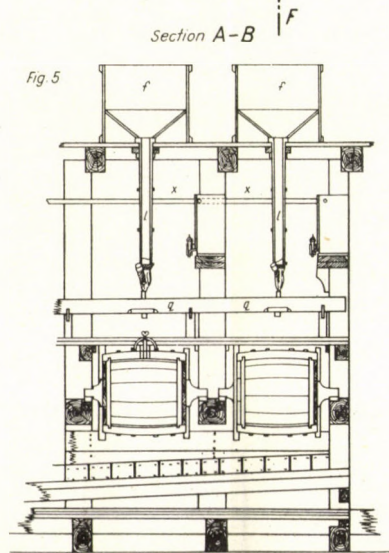
section E-F

Fig. 3



Section C-D

Fig. 4



Section A-B

Fig. 5

Scale



1 saxony ell = 0.5664 m

Device for amalgamation with four amalgamation drums





proportion of ore and water, *i. e.* the pulpy phase of the burden. He increased the recovery of gold by means of double roasting and repeated amalgamations. It was RUPRECHT who replaced the copper pans by barrels rotating around a vertical axle.

The concept of performing amalgamation in barrels was further elaborated in subsequent years; our figures 1 to 5 will present an approximate idea of the evolution in this respect, as also of the later equipments. The drawings represent the amalgamating apparatuses as used at Freiberg in Saxony and at Aranyidka in Hungary: their arrangement differs from RUPRECHT's original device in that the amalgamating barrels rotate around a horizontal and not a vertical axle. The drawings do not require much explanation. The burden, emerging from the loading box *f*, goes through the conduit *l* and reaches the barrel at its mouth. In order to obtain a homogeneous mass, the burden is rotated without mercury during 2 hours at a speed of 14 to 16 r. p. m. Mercury is then added to the barrels from a special container through a wooden conduit *q*.

The experts assembled at Szklenó for the performance of the experiments expressed the unanimous opinion that the witnessed method, known today as "*European amalgamation*", would replace the process of smelting everywhere\* [8]. Traditional smelting was actually ousted by the new process here and there for a longer or shorter period, but it failed to strike roots — perhaps according to the principle "*Nemo est propheta in patria sua*". Even the experimental plant of Szklenó was abandoned and demolished in 1793. Another plant, erected in Hungary for the amalgamation of black copper, was likewise shortlived. The chief reason why the new method failed to become popular was that the recovery of gold from the comparatively rich Hungarian ores was 40 to 50 per cent less by means of amalgamation than by smelting. The question of amalgamation was once more discussed at the national conference of Selmec in 1816: the problem of amalgamation that had fallen into disrepute 20 years before was approached with a certain reserve, and it was decided to start fresh experiments at the Mining Academy of Selmec. We are ignorant of their results, nor do we know for sure whether they were undertaken at all.

The unsatisfactory results were, as has been noted, due to the unfavourable recovery of gold by amalgamation, although results in respect of silver were decidedly good. According to the report of WINKLER [7], the "*Hungarian process*" seen at Szklenó was promptly adopted at Freiberg in Saxony, and the only difference was that, upon the advice of GELLERT, copper kettles

\* The minutes drawn up there, were confirmed by A. RUPRECHT, professor at the Selmec Academy of Mining; M. PODA, former professor at Selmec; I. BORN; TREBRA mining manager, Zellerfeld; J. FERBER, Berlin; J. F. CHARPENTIER, mining councillor at Freiberg, Saxony; J. HANKINS, London; O. HENKEL, Norwegian assessor of mines, Kongsberg; DON FAUSTO D'ELHUYAR, general manager, Mexico. It is noteworthy fact that LAVOISIER joined the company in 1790 [12]. See also J. PERCY's data in this respect [13].



were replaced by the cheaper wooden barrels exactly as had already been suggested by RUPRECHT.

It is a fact that, in order to recover silver from the grey copper ore of Aranyidka which contained a minimum of gold, the Hungarian mining authorities erected a plant at this place in 1829 (according to FALLER [14], in 1824) which was to employ the "European amalgamation" method. A similar plant was established at Szomolnok for the withdrawal of silver from black copper. It was much later, in 1865, that an amalgamation plant was erected at Ravaszpatak on the analogy of the works of Aranyidka. It was given up in 1883 to be replaced by the amalgamating process of DESIGNOLLE which, too, soon came into disuse [14].

The process of amalgamation, as modified and first employed on a large scale in Hungary, did not become known in Germany until 1790 when GELLERT ([2], p. 152) built the first amalgamation plant at Halsbrücke where silver ores were first roasted under chlorination and then amalgamated in wooden barrels. The statement in our source ([2.], pp. 79 and 152) that it was from Halsbrücke that the new process spread first to other parts of Germany and then to Hungary, Russia and America is evidently erroneous since — as has been shown — Germany adopted it from Hungary. According to TAFEL—WAFENMANN ([2], p. 79), the second plant in Germany to adopt the new method, that of Mansfeld, did not begin to employ it until 1826.

The visit of prominent foreign experts who at Szklenó witnessed the experiments brought much credit to Hungary and the old mining academy of Selmec, (continued in our days as a university at Miskolc) also in another respect. The assembled experts founded there a society under the title "Societät der Bergbaukunde", the first known international association concerned with mining. Its purpose was "to collect and communicate to the members everything that appeared to promote the cause of mining in the widest sense of the term, so that the members may utilize such information at home, for the benefit of the states and humanity in general". The organization of the society extended to the whole of Europe including Russia, as well as to America.\*

As regards "European amalgamation", we have to point out two errors of SCHNABEL, the prominent German metallurgist [16]. According to him, "BORN introduced the method of chloridizing roasting for silver ores and associated it at Selmec in Hungary with amalgamation in copper vessels (Caso-process)". This statement has to be corrected inasmuch as BORN performed only his laboratory experiments and tests in the Court Pharmacy of Vienna, whereas all "field work" and practical experiments were made in Hungary, mostly with the very efficient collaboration of RUPRECHT. Although the

\* The Society had local boards of directors in Vienna, Berlin, Freiberg, Zellerfeld (Harz), Lausanne, Stockholm, Copenhagen, Venice, Paris, London, Kongsberg (Norway), Madrid, Santa Fé di Bogota (South America), Mexico, St. Petersburg.



“European amalgamation” is similar to the Caso process in more than one respect, the two methods are nevertheless essentially different.

IGNATIUS BORN, the inventor of the new process, was — in his time — a prominent personage of the Austro-Hungarian Monarchy which, then, used to be simply called the Austrian Empire. His life and activities have been described by several authors [9 to 13]. The first to commemorate BORN's activities was PEZZL whose book appeared in 1792 [8]. WINKLER's work [7] deals chiefly with the process and contains but few personal references. This work is of primary importance for the history of amalgamation in Europe. WINKLER calls BORN's process an arcanum or elixir. There are several passages in the work in which BORN's process is expressly mentioned as a Hungarian invention. WINKLER's book gives the year of the conference at Szklenó as 1796; this is obviously a mere misprint, the correct date being 1786.

Not much is known about the lecture read in Vienna by CURTER [9] in 1892 at the meeting of the Association of Austrian Engineers and Architects to commemorate the 100th anniversary of BORN's death (he deceased in 1791). CURTER had finished his studies at the Mining Academy of Selmec, became a lecturer there in 1850, and occupied the chair of analytic chemistry and physics from 1856 to 1868. CURTER, too, concerned himself with problems of amalgamation, and his mixing apparatus was tried out in Transylvania and subsequently transferred to Körmöcbánya in (the then) Upper Hungary. It was C. V. ERNST [10] who published a monograph in CURTER's memory. The same author wrote a detailed book on BORN [11]: the problem of amalgamation is discussed mostly in outlines only; he, too, refers to the gathering at Szklenó and gives its date likewise erroneously as 1783. ERNST relates that Emperor Joseph II had promised BORN a premium on the savings to be achieved by his invention and that the inventor was then cheated by the Vienna court and received nothing. The matter of this premium is mentioned in documents that are kept in the archives of minery at Selmecbánya.

Hungary possesses a number of relics of metallurgical interest. We want to restrict ourselves to referring only to the *Mill of Selmec* and *László's amalgamator*.

Fig. 6 shows SCHNABEL's [16] illustration of the Mill of Selmec. There were always two such mills in joint operation. The whole contrivance consisted, essentially, of a cauldron-like vessel of cast iron and a wooden rotor *c* with its interior hollowed out funnel-like, so suspended from the iron bars *rr* above the vessel for it to be able to rotate in it. There were 20 radially arranged iron teeth at the lower end of the rotating piece. The latter was driven either by cranks (as in the drawing) or by means of geared transmission. The mercury was at the bottom of the vessel. The gold-containing pulp flowed through channel *a* to the funnel-shaped cavity of the rotor. It passed from here to the space between the rotor and the vessel where the teeth of the revolving piece, immersed in mercury, performed a thorough mixing; the mass passed thereafter through channel *d* into the second mill where amalgamation of the gold was continued. Apart from the large stamp mill at Kerpenyes (Transylvania), the Hungarian government maintained 128 mills of the described type there, and also at Nagybánya and Selmec.

The percentage of gold recovered by means of László's amalgamator (manufactured by the Gruson Works of Magdeburg—Buckau) was satisfactory, and machinery of this type was used at the turn of the century in several places of Transylvania. Its structure is shown in Figs. 7 and 8. Two mills had to work



conjointly in this case also, the lower one performing the task of secondary amalgamation and the collection of the amalgam. The apparatus consisted of a cast-iron pan *a* into which mercury was poured, and the mixer *b* which,

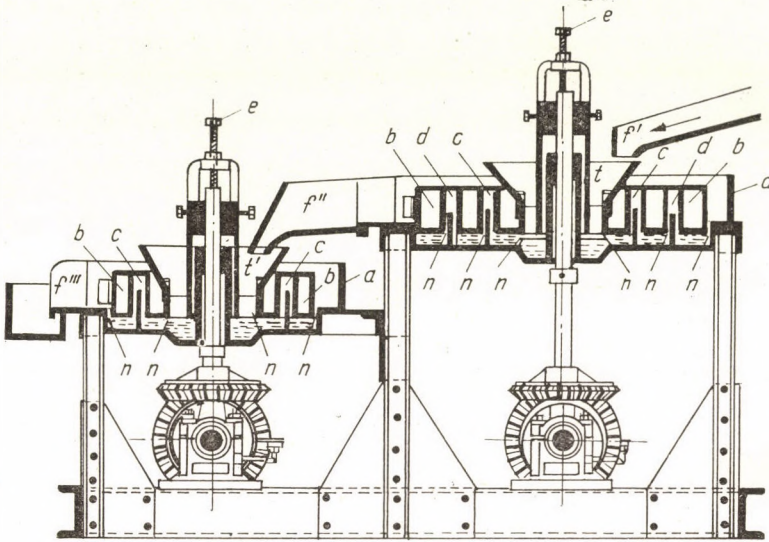


Fig. 6

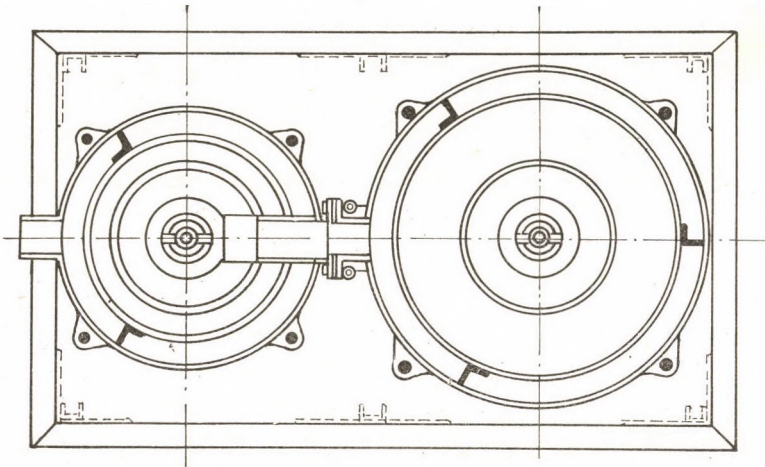


Fig. 7

made likewise of cast iron and composed of several parts, rotated in the pan. An iron ring *c* was loosely placed in the smaller pan, and iron rings *c* and *d* were in the larger pan. These rings formed cells in the pans in order to prevent the escape of the gold particles to be amalgamated. The lower aspect of the

rings showed excisions through which mercury could freely flow. The mixer *b* could be adjusted by means of screw *e*. Pulp, coming from the stamp mill flowed through riffle *f* into the funnel *t*, hence to the first cell formed by ring *c*, then to the third cell and finally through riffle *f'* to the second mill. The pulp went in this case through all the stages as in the first mill, with the sole exception that it had to pass through a single ring *c* only. The gold particles were thoroughly mixed with mercury by means of the iron teeth *n* preventing the accumulation of excessive concentrates which might have blocked the appara-

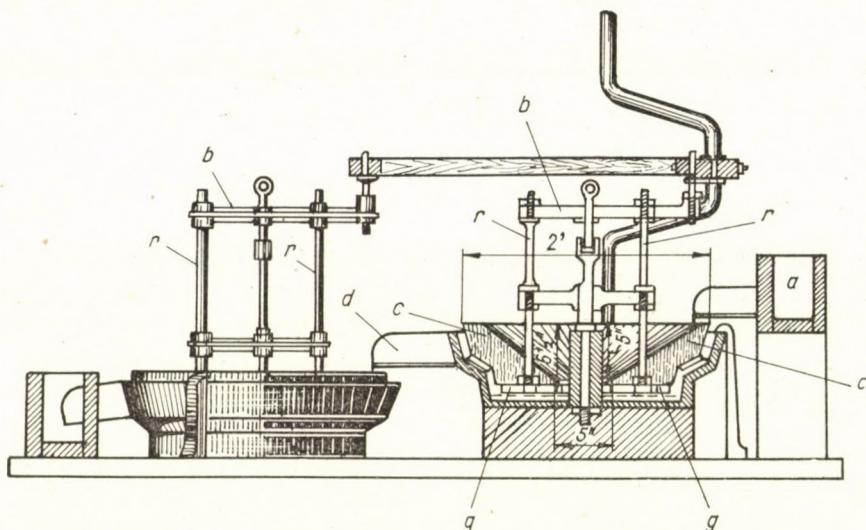


Fig. 8

tus. Owing to their high specific weight, the gold corpuscles were arrested by rings *c* and *d*, and forced to remain in the apparatus for a certain length of time [2].

#### REFERENCES AND NOTES

1. LIPPMANN, E. O. von : Entstehung und Ausbreitung der Alchemie; zur älteren Geschichte der Metalle, Berlin, J. Springer, 1919. 602 pp.
2. TAFEL, W.: Lehrbuch der Metallhüttenkunde, 2nd ed., published by K. WAGENMANN, Vol. I., Leipzig, 1951. While, according to a statement on p. 2, AVICENNA referred to amalgamation in the 11th century, and amalgamation in barrels is said to have been fairly advanced in Germany at the time of AGRICOLA (about 1550), p. 79 contains the statement that amalgamation — performed with BARBA's technique — was not adopted in Europe until 1640. WINKLER [7], on p. 2 of his work, affirms that 200 years had elapsed between the end of the 16th and the 18th century, *i. e.* the time when BORN's method, the so-called European amalgamation, brought amalgamation once more into the foreground of interest. It is obvious that available data are rather contradictory which justifies us in not going farther back in our investigations than the end of the 18th century.
3. TÓTH, B.: Curiosa Hungarica, Budapest, 2nd ed., Athaenum, 1907, p. 123 (Hungarian).



4. EGGLESTON, TH.: *The Metallurgy of Silver, Gold and Mercury in the United States*. Vol. II, 458 pp. John Wiles and Sons, New York, 1890.
5. BORN, I. EDLER *von*: *Ueber das Anquicken der gold- und silberhaltigen Erze, Rohsteine, Schwarzkupfer und Huettenspeise*. Wien, 1786 bey Christian Friedrich Wappler.
6. BORN—TREBRA: *Bergbaukunde*, Vol. I, 1789, pp. 238/263; Vol. II, 1790, pp. 200/296, Leipzig, bey Georg Joachim Goeschen.
7. WINKLER, K. A.: *Die europäische Amalgamation der Silbererze und silberhaltigen Hüttenprodukte*. Freiberg, Verlag von I. G. Engelhardt, 1833, p. 4.
8. PEZZL, J.: *Lebensbeschreibungen des Fürsten Raimund Montekukuli, des Fürsten Wenzel Liechtenstein und des Hofrates Ignaz v. Born*. Wien, 1792. This book is good evidence of Born's eminent position in Vienna, since his life is reviewed together with that of the princes. At the same time, the work makes it obvious that Born had many adversaries in Vienna who tried to thwart the realization of his new process of amalgamation.
9. Österr. Zeitschr. f. Berg- und Hüttenwesen. 40 (1892), Beilage Vereins-Mitteilungen, 11th year, 1892, p. 31. Searching the archives of the library in the Technical University at Sopron, we failed to discover the text of that lecture on Born which was announced in this periodical.
10. Österr. Zeitschr. f. Berg- und Hüttenwesen 41 (1893), Vereins-Mitteilungen, 12 (1893), pp. 47/48
11. ERNST, C. V.: *Ignaz von Born. Berg- und Hüttenmännisches Jahrbuch der k. k. Bergakademien zu Leoben und Pöfibram und der kön. ung. Bergakademie zu Schemnitz*. Vol. XLV, Wien, Manzschcr Verlag, 1897, pp. 1/20
12. PROSZT, J.: *A selmeci bányászati akadémia, mint a kémiai tudományos kutatás bölcsője hazánkban* ("The Mining Academy of Selmec as the cradle of scientific research work of chemistry in our country"), Sopron, 1938 (Hungarian)
13. PERCY, J.: *Die Metallurgie des Silbers und Goldes*. Übersetzt von C. Rammelsberg. Braunschweig, Friedr. Vieweg und Sohn, 1881, 131 pp.
14. FALLER, G.: *A selmeci m. k. bányász- és erdész akadémia évszázados fennállásának emlékkönyve 1770—1870* ("Memorial volume for the 100th anniversary of the foundation of the Royal Hungarian Academy of Mining and Forestry at Selmec, 1770—1870"). Selmec, 1871, Joerges Ág., 257 pp. (Hungarian)
15. SZÉKI, J.: *Kurze Entwicklungsgeschichte des Metallhüttenwesens in Ungarn*. Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung. Sopron. Vol. X/3 (1938), pp. 460/462
16. SCHNABEL, C.: *Handbuch der Metallhüttenkunde*. Vol. I, 2nd ed., Berlin, 1901, 876 pp.
17. The mill of Selmec and László's amalgamator are also mentioned in other sources as "the best known up-to-date machines of this kind." See T. KIRKE—ROSE: *The Metallurgy of Gold*, 5th ed., London, Ch. Griffin and Co., 1906. This work contains a drawing of the Selmec mill on p. 163: it was borrowed from the French version of Schnabel's book [16] which shows that the machinery at Selmec was referred to in three world-know languages.

#### SUMMARY

The essay presents data concerning the beginnings of the so-called European amalgamation as collected from literature and, to a smaller extent, from various archives. More detailed data could probably be found in the mining archives at Selmec, in the Cameral Court Library of Vienna and perhaps in the library of the mine board at Nagybánya. The information, as offered in the essay, is nevertheless sufficient to prove that Hungarian metallurgists and other Hungarian scientists had a lion's share in the development of the so-called European amalgamation and, generally, in the utilization and modernization of amalgamating processes.

BEITRÄGE ZUR GESCHICHTE DES HÜTTENWESENS IN UNGARN. VII.  
UNGARN ALS DIE WIEGE DER SOG. EUROPÄISCHEN AMALGAMATION

A. SCHLEICHER

## ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wurden die auf den Anfang der sog. europäischen Amalgamation bezüglichen literarischen und zu einem geringeren Teil archivatischen Daten zusammengefaßt. Bezüglich der letzteren dürften sich weitere — vermutlicherweise viel ausführlichere — Daten in dem Wiener Hofkammer-Archiv vorfinden. Die mitgeteilten Daten sprechen jedoch an und für sich dafür, daß die ungarischen Fachleute an der Entwicklung der sog. europäischen Amalgamation und im allgemeinen an der Anwendung und Verbesserung der Amalgamationsmethoden und -vorrichtungen auch in Weltrelation einen tätigen und bedeutsamen Anteil nahmen.

CONTRIBUTION A L'HISTOIRE DE LA METALLURGIE EN HONGRIE VII.  
LA HONGRIE, BERCEAU DE L'AMALGAMATION DITE EUROPEENNE

A. SCHLEICHER

## RESUME

L'auteur réunit des données sur les débuts de l'amalgamation européenne, puisées dans la littérature et, en moindre partie, dans les archives. Une documentation bien plus riche sur le même sujet pourrait être recueillie, selon l'auteur, aux Archives de la Chambre royale de Vienne. Toutefois, les données publiées suffisent déjà, à elles seules, pour démontrer le rôle actif et important que les spécialistes hongrois avaient joué, sur le plan mondial, dans le développement de l'amalgamation européenne, ainsi que dans l'application et l'innovation des méthodes et installations d'amalgamation en général.

К ИСТОРИИ МЕТАЛЛУРГИИ В ВЕНГРИИ.  
VII. ВЕНГРИЯ КАК КОЛЫБЕЛЬ ТАК НАЗЫВАЕМОЙ ЕВРОПЕЙСКОЙ АМАЛЬГАМАЦИИ

А. ШЛЕЙХЕР

## РЕЗЮМЕ

Нами выше сделан обзор литературных и в небольшой мере архивных данных, собранных по теме начала т. н. европейской амальгамации, в отношении которой другие, вероятно значительно более пространные данные могли бы быть найдены в венском придворном палатном архиве. Однако, сообщенные данные сами по себе достаточны для доказательства того, что венгерские специалисты приняли большое участие в развитии т. н. европейской амальгамации, и вообще в применении и развитии методов и оборудования амальгамации в мировом масштабе.





# МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА ПОТЕРЬ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ И РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ НЕКОТОРЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В СЕТИ

Т. ВАМОШ  
КАНД. ТЕХН. НАУК

и

Я. ГЕРТЛЕР  
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
БУДАПЕШТ

[Поступило 19 мая 1961 г.]

## 1. Введение

Исходное уравнение методов расчета сетевых потерь:

$$P_v = \operatorname{Re} \mathbf{i}^* \mathbf{Z} \mathbf{i} \quad (1)$$

где  $P_v$  — потери в сети [Мвт];

$\mathbf{Z}$  — матрица взаимных сопротивлений трехфазной сети [ом];

$\mathbf{i}$  — комплексный вектор узлового тока сети [ка].

(Транспонированные значения обозначены штрихом, транспонированные сопряженные — звездой, а просто сопряженные — сверху чертой)

Матрица  $\mathbf{Z}$  получается из соотношения:

$$\mathbf{Z}_{\text{пр}} = \mathbf{Y}_{\text{пр}}^{-1}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{Y}_{\text{пр}}$  — матрица проводимостей, приведенная к одному узлу сети, которая получается из полной матрицы проводимостей путем вычеркивания строки и столбца данного узла.

Элементы матрицы  $\mathbf{Y}$ , находящиеся вне главной диагонали, суть проводимости между соответствующими узлами, а элементы главной диагонали — суть проводимости узла (суммы проводимостей всех ветвей, сходящихся в данный узел с отрицательным знаком). Матрица  $\mathbf{Z}_{\text{пр}}$  при этом дополняется строкой и столбцом, состоящими из 0 элементов, что приведет к  $\mathbf{Z}$  матрице для дальнейших расчетов.

Чтобы упростить расчеты, надо сложить все потребительские токи из узловых токов и привести к генераторным. Расчет ведется не с токами, а с полезными генераторными мощностями. Уравнение преобразования:

$$\mathbf{i} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}, \text{ т. е. } \mathbf{i}^* = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{T}^* \quad (3)$$



где если  $n$  число всех узлов, и  $m$  число генераторных узлов, ( $m \leq n$ ),

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{E}_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{E}_2} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{\bar{\sigma}_m}{\bar{E}_m} \\ -\frac{k_{m+1}\bar{\sigma}_1}{\bar{E}_1} & -\frac{k_{m+1}\bar{\sigma}_2}{\bar{E}_2} & \dots & \dots & -\frac{k_{m+1}\bar{\sigma}_m}{\bar{E}_m} \\ -\frac{k_{m+2}\bar{\sigma}_1}{\bar{E}_1} & -\frac{k_{m+2}\bar{\sigma}_2}{\bar{E}_2} & \dots & \dots & -\frac{k_{m+2}\bar{\sigma}_m}{\bar{E}_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{k_n\bar{\sigma}_1}{\bar{E}_1} & -\frac{k_n\bar{\sigma}_2}{\bar{E}_2} & \dots & \dots & -\frac{k_n\bar{\sigma}_m}{\bar{E}_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(m \times m) \\ -\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}' \\ (n-m) \times m \end{bmatrix} \text{Diag} \left( \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{E}_i} \right)_{(m \times m)}$$

В матрице  $\mathbf{T}$   $\mathbf{k}$  — вектор комплексных составляющих распределения тока :

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{m+1} \\ k_{m+2} \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad \left( I_{m+i} = -k_{m+i} \sum_{i=1}^m I_i; \quad \sum_{m+1}^n k = +1 \right)$$

$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix}$  — вектор комплексного напряжения генераторных узлов

$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{bmatrix}$  — элементы этого вектора характеризуют отношение полезной и реактивной мощности в генераторных узлах

$$\sigma_i = 1 + j \frac{Q_i}{P_i}$$

( $Q_i$  — реактивная мощность)

на основании (1) и (3)

$$P_v = \text{Re} \{ \mathbf{p}' \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{p} \}. \tag{4}$$

С помощью обозначения  $\mathbf{T}^* \mathbf{Z} \mathbf{T} = \mathbf{A}$  получим новую несимметричную, комплексную матрицу. У нас вместо получившего на практике наибольшее распространение метода В-постоянных, применяется равноценная, но более удобная симметричная  $\mathbf{B}$  матрица, которая имеет вид:

$$\mathbf{B} = \frac{\operatorname{Re} \mathbf{A} + \operatorname{Re} \mathbf{A}'}{2}.$$

Итак получим известную формулу:

$$P_v = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} \quad (5)$$

На практике вместо  $\mathbf{Z}$  расчет ведется с ее вещественной частью (что допустимо, см. пункт 2.) и матрицу  $\mathbf{T}$  (величины  $\kappa$ ,  $E$  и  $\sigma$ ) считают постоянной. Иногда упускают мнимую часть матрицы  $T$ . Исходная матрица  $\mathbf{Z}$  фиксирует одно состояние сети, изменение состояния (напр. отключение) может быть только с помощью совершенно новой матрицы  $\mathbf{B}$ .

## 2. Влияние упускания мнимой части матрицы сети

В этом пункте ради полноты докажем два общеизвестных соотношения. С одной стороны, покажем, что если для расчета  $\mathbf{B}$  при умножении  $\mathbf{T}^* \mathbf{Z} \mathbf{T}$  принимать во внимание только вещественную часть  $\mathbf{Z}$ , то получим точное решение.

Ибо:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathbf{A} &= \operatorname{Re}(\mathbf{T}^* \mathbf{Z} \mathbf{T}) = \mathbf{T}'_{re} \mathbf{Z}_{re} \mathbf{T}_{re} + \mathbf{T}'_{im} \mathbf{Z}_{re} \mathbf{T}_{im} - \mathbf{T}'_{re} \mathbf{Z}_{im} \mathbf{T}_{im} + \mathbf{T}'_{im} \mathbf{Z}_{im} \mathbf{T}_{re} = \quad (6) \\ &= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4 \end{aligned}$$

и

$$\mathbf{A}'_1 = \mathbf{A}_1; \mathbf{A}'_2 = \mathbf{A}_2; \mathbf{A}'_3 = \mathbf{A}_4,$$

следовательно

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} (\operatorname{Re} \mathbf{A} + \operatorname{Re} \mathbf{A}') = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2. \quad (7)$$

Если теперь принимать во внимание только вещественную часть  $\mathbf{Z}$ , то есть считать с

$$\operatorname{Re}(\mathbf{T}^* \mathbf{Z}_{re} \mathbf{T}) = \mathbf{T}'_{re} \mathbf{Z}_{re} \mathbf{T}_{re} + \mathbf{T}'_{im} \mathbf{Z}_{re} \mathbf{T}_{im} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2,$$

получим одинаковые результаты.



Следовательно

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{T}^* \mathbf{Z}_{\text{re}} \mathbf{T}\}, \quad (8)$$

из вышесказанного следует, что если пренебречь мнимой частью  $\mathbf{T}$ , то есть с приближением

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}'_{\text{re}} \mathbf{Z}_{\text{re}} \mathbf{T}_{\text{re}},$$

ошибка будет

$$\mathbf{T}'_{\text{im}} \mathbf{Z}_{\text{re}} \mathbf{T}_{\text{im}}.$$

С другой стороны, если элементы матрицы проводимостей  $\mathbf{Y}_{\text{np}}$ :

$$(Y_{\text{np}})_{ij} = \frac{1}{r_{ij} + ix_{ij}} = \frac{1}{r_{ij}} \frac{1}{1 + \psi_{ij}^2}, \quad (9)$$

где  $r_{ij}$  — активное сопротивление  $ij$ -той ветви сети;

$x_{ij}$  — реактивное сопротивление  $ij$ -той ветви;

$$\psi_{ij} = x_{ij}/r_{ij}$$

и предположим, что  $\psi$  по сети везде одинакова

$$\psi_{ij} = \text{idem} \quad i, j = 1 \dots n,$$

то вещественную часть матрицы взаимных сопротивлений можно точно рассчитать по сети, содержащей только вещественные элементы, ибо при этом:

$$\mathbf{Y}_{\text{np}} = \frac{1 - i\psi}{1 + \psi^2} \mathbf{G}_{\text{np}}, \quad (G_{\text{np}})_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} \quad (10)$$

итак

$$\mathbf{Z}_{\text{np}} = (\mathbf{Y}_{\text{np}})^{-1} = \frac{1 + \psi^2}{1 - i\psi} (\mathbf{G}_{\text{np}})^{-1} = (1 + i\psi) \cdot (\mathbf{G}_{\text{np}})^{-1}.$$

$$\operatorname{Re} \mathbf{Z}_{\text{np}} = \mathbf{G}_{\text{np}}^{-1}. \quad (11)$$

Если значение  $\psi$  какого-то значительного элемента (напр. передающая большую энергию длинная линия) отклоняется от своего обычного значения по сети, влияние такого отклонения можно оценить по сказанным в пункте 3. Вообще рассмотрение такого случая может дать оценку самой большой ошибки, которая может быть допущена в ходе расчетов.

### 3. Влияние измерений в сети

Если изменится сопротивление одной ветви  $Y_{pr}$ , то оно повлечет за собой изменение матриц  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Y}_r$  в четырех местах, а именно значений  $Y_{pr}$ ,  $Y_{rp}$ ,  $Y_{pp}$  и  $Y_{rr}$ . Если  $Y_{pr}$  переходит в  $(1 + \alpha)Y_{pr}$ ,

$$\mathbf{Y}_{\text{пр, изм}} = \mathbf{Y}_{\text{пр}} - \alpha Y_{pr} \mathbf{u} \mathbf{u}', \quad (12)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ r \end{matrix}$$

А вообще поскольку [1]:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{x} \mathbf{y}')^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x})(\mathbf{y}' \mathbf{A}^{-1})}{1 + \mathbf{y}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\text{пр, изм}} &= (\mathbf{Y}_{\text{пр, изм}})^{-1} = \mathbf{Z}_{\text{пр}} - \frac{\alpha Y_{pr}}{1 + \alpha Y_{pr}(2Z_{pr} - Z_{pp} - Z_{rr})} \mathbf{F}_{\text{пр}} = \\ &= \mathbf{Z}_{\text{пр}} - \beta \cdot \mathbf{F}_{\text{пр}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\mathbf{Y}_{\text{пр}} = (Y_{kl})$$

$$\mathbf{Z}_{\text{пр}} = (Z_{kl})$$

$\mathbf{Z} = (Z_{kl})$  дополнив строкой и столбom, состоящими из 0-элементов

$$\mathbf{F}_{\text{пр}} = (F_{kl}) = [(Z_{kp} - Z_{kr})(Z_{lr} - Z_{lp})]$$

$\mathbf{F} = (F_{kl})$  дополнив строкой и столбom, состоящими из 0-элементов.

Вышеприведенные соотношения действительны и тогда, когда один (напр.  $r$ ) конец ветви  $Y_{pr}$  суть точка приведения. Тогда конечно

$$Z_{pr} = Z_{rr} = Z_{kr} = Z_{lr} = 0.$$

Разность преобразованной матрицы  $\mathbf{B}$  и исходной матрицы будет

$$\Delta \mathbf{B} = \text{Re} \{ \mathbf{T}^* \Delta \mathbf{Z}_{re} \mathbf{T} \}, \text{ где } \Delta \mathbf{Z}_{re} = \text{Re} \{ \mathbf{Z}_{\text{изм}} - \mathbf{Z} \} = \text{Re} \{ -\beta \cdot \mathbf{F} \}. \quad (15)$$



Изменение градиента сетевых потерь:

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_{\text{изм}} - \mathbf{g} = 2 \Delta \mathbf{B} \mathbf{p} \quad (16)$$

$$\text{где } g_i = \frac{\partial P_v}{\partial P_i}$$

изменение сетевых потерь:

$$\Delta P_v = \mathbf{p}' \Delta \mathbf{B} \mathbf{p}. \quad (17)$$

На основании вышеприведенных, если отдельные элементы сети изменятся, то, используя результаты, полученные по исходному состоянию сети, влияние изменений можно легко рассчитать и на маломощных вычислительных машинах.  $\Delta \mathbf{B}$  можно определить по (14) и (15), а дальнейшие части расчета ведутся аналогично с исходными расчетами, упуская лишь самые сложные части расчета новых постоянных  $B$ .

С точки зрения оценки теперь мы имеем также более наглядную картину.

Если  $\beta \mathbf{F} = \gamma \mathbf{Z}$ , то все приведенные величины изменятся на коэффициент  $\gamma$ , что позволит в некоторой степени оценить влияние упрощений. Легко произвести оценку порядка величины, если для матрицы  $\mathbf{F}$  имеется лишь несколько весомых элементов. Один такой элемент (если его индексы  $s$  и  $t$ ) изменит отдельные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  на величину

$$\delta A_{ij} = \beta T^*_{is} F_{st} T_{tj}.$$

Отсюда сразу можно сделать выводы об изменении  $\mathbf{g}$  и  $P_v$ . Самым характерным является изменение  $\mathbf{g}$ , потому что если расходы на увеличении целой системы составляют  $\lambda \left[ \frac{P_b}{\text{МВт час}} \right]$  и расходы на увеличении отдельных электростанций составляют  $\lambda_0$ , то, приняв во внимание потери в сети, имеем

$$\lambda = \lambda_{0i} \frac{1}{1 - g_i} \approx \lambda_{0i} (1 + g_i). \quad (13)$$

Это означает, что изменение в сети можно оценить непосредственно по ухудшению экономичности системы.

#### 4. Влияние изменения распределения нагрузок

В этом случае видоизменяется вектор  $\mathbf{k}$  матрицы  $T$ . Изменение во всех случаях таково, что соотношение

$$\sum_{s=m+1}^n k_s = +1$$

остаётся в силе.

Мы рассмотрим два важных случая:

а) Изменится соотношение потребления потребителя  $p$  и остальные потребители равномерно компенсируют изменение

$$\left. \begin{aligned} k_p \text{ изм} &= (1 + \alpha)k_p & (\alpha - \text{комплексная}) \\ k_r \text{ изм} &= (1 - \beta)k_r & r = m + 1, m + 2 \dots n \\ & & \neq p \\ \alpha k_p &= \beta \sum_{r \neq p} k_r \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Поскольку

$$\mathbf{B} = \text{Re}\{\mathbf{T}^* \mathbf{R} \mathbf{T}\}, \quad \text{где } \mathbf{R} = \text{Re}\{\mathbf{Z}\}$$

$$B_{ij} = \text{Re} \left\{ \frac{\sigma_i}{E_i} \cdot \frac{\bar{\sigma}_j}{E_j} \cdot \left[ R_{ij} - \sum_s k_s R_{is} - \sum_s \bar{k}_s R_{js} + \sum_s \sum_r k_s \bar{k}_r R_{sr} \right] \right\} \quad (20)$$

А изменение этой величины:

$$\begin{aligned} \delta B_{ij} &= \text{Re} \left\{ \frac{\sigma_i}{E_i} \cdot \frac{\bar{\sigma}_j}{E_j} \cdot \left[ \alpha k_p \left( -R_{ip} + \sum_s \bar{k}_s R_{ps} - \right. \right. \right. \\ &- \frac{1}{1 - k_p} \sum_{r \neq p} k_r \left( -R_{ir} + \sum_s \bar{k}_s R_{rs} \right) \left. \left. \left. + \bar{\alpha} \bar{k}_p \left( -R_{jp} + \sum_s k_s R_{ps} - \right. \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. \left. \frac{1}{1 - \bar{k}_p} \sum_{r \neq p} \bar{k}_r \left( -R_{jr} + \sum_s k_s R_{rs} \right) \right) \right] \right\} + \frac{\sigma_i}{E_i} \cdot \frac{\bar{\sigma}_j}{E_j} \cdot \\ &\cdot \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot k_p \cdot \bar{k}_p \left[ R_{pp} - \frac{1}{1 - k_p} \sum_{r \neq p} k_r R_{pr} - \frac{1}{1 - \bar{k}_p} \sum_{r \neq p} \bar{k}_r R_{pr} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{1 - k_p} \cdot \frac{1}{1 - \bar{k}_p} \sum_{r \neq p} \sum_{s \neq p} k_r \bar{k}_s R_{rs} \right] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Чтобы оценить порядок величин, расчёт ведется с вещественной частью  $k$  и малыми второго порядка (если  $\alpha$  и  $\beta$  значительно меньше 1) пренебрегаем

$$\begin{aligned} \delta B_{ij} \approx \text{Re} \left\{ \frac{\sigma_i}{E_i} \cdot \frac{\bar{\sigma}_j}{E_j} \cdot \alpha \cdot k_p \left[ -R_{ip} - R_{jp} + 2 \sum_s k_s R_{ps} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{1 - k_p} \sum_{r \neq p} k_r \left( -R_{ir} - R_{jr} + 2 \sum_s k_s R_{rs} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда расчет выведенных из  $B$  значений можно вести подобно предыдущим.



Если упрощения  $\alpha > 1$  сделать нельзя, то расчет надо вести по (21)  
 б) Изменение  $r$ -ного потребителя компенсирует потребитель  $t$ .

$$k_{p \text{ изм}} = (1 + \alpha) k_p \quad k_{t \text{ изм}} = (1 - \beta) k_t \quad \alpha k_p = \beta k_t$$

$\alpha$  и  $\beta$  — комплексные величины.

Из (20)

$$\begin{aligned} \delta B_{ij} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sigma_i}{E_i} \cdot \frac{\bar{\sigma}_j}{\bar{E}_j} \left[ \alpha k_p \left( -R_{pi} + R_{ti} + \sum_s k_s (R_{ps} - R_{ts}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\alpha} k_p \left( -R_{pj} + R_{tj} + \sum_s k_s (R_{ps} - R_{ts}) \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_i}{E_i} \cdot \frac{\bar{\sigma}_j}{\bar{E}_j} \cdot \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot k_p k_p (R_{pp} - 2R_{tp} + R_{tt}) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для оценки порядка величин результата расчет ведем с вещественной частью  $k$  и малыми второго порядка пренебрегаем.

$$\begin{aligned} \delta B_{ij} \approx \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sigma_i}{E_i} \cdot \frac{\bar{\sigma}_j}{\bar{E}_j} \cdot \alpha \cdot k_p \left[ -R_{pi} - R_{pj} + R_{ti} + R_{tj} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_s k_s (R_{ps} - R_{ts}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

### 5. Влияние изменения напряжения генераторного узла и отношения полезной и реактивной мощности

Влияние этих двух показателей появляется совершенно аналогичным образом (каждое в форме диагональной матрицы), что позволяет их рассматривать аналогичными уравнениями.

Если изменившийся узел есть  $p$  и  $i \neq p$ ;  $j \neq p$  то  $A_{ij}$ ,  $A_{ji}$ , итак  $B_{ij}$  останется неизменным. Если  $i = p$  и

$$\begin{aligned} \sigma_{p \text{ изм}} = (1 + \alpha) \sigma_p \quad \text{т. е.} \quad E_{p \text{ изм}} = \frac{E_p}{1 + \beta} \quad \text{итак} \\ \bar{\sigma}_{p \text{ изм}} = (1 + \bar{\alpha}) \bar{\sigma}_p \quad \text{т. е.} \quad \bar{E}_{p \text{ изм}} = \frac{\bar{E}_p}{1 + \beta} \end{aligned}$$

( $\alpha$  и  $\beta$  могут быть и комплексными), то

$$\begin{aligned} \delta A_{pj} = \alpha A_{pj} \quad \text{т. е.} \quad \delta A_{pj} = \beta A_{pj} \\ \delta A_{jp} = \bar{\alpha} \cdot A_{jp} \quad \delta A_{jp} = \bar{\beta} A_{jp} \\ \delta A_{pp} = (\alpha + \bar{\alpha} + \alpha \bar{\alpha}) A_{pp} \quad \delta A_{pp} = (\beta + \bar{\beta} + \beta \bar{\beta}) A_{pp} \end{aligned} \quad (25)$$

Если  $\alpha$ , или  $\beta$  малы, то

$$\delta A_{pp} = (\alpha + \bar{\alpha}) A_{pp} \quad \delta A_{pp} = (\beta + \bar{\beta}) A_{pp} \quad (26)$$

итак

$$\begin{aligned} \delta B_{pj} &= \frac{1}{2} [Re\{\alpha A_{pj}\} + Re\{\bar{\alpha} A_{jp}\}] = \\ &= \frac{1}{2} [\alpha^{re} (A_{pj}^{re} + A_{jp}^{re}) - \alpha^{im} (A_{pj}^{im} - A_{jp}^{im})] \\ \delta B_{pj} &= \frac{1}{2} [Re\{\beta A_{pj}\} + Re\{\bar{\beta} A_{jp}\}] = \\ &= \frac{1}{2} [\beta^{re} (A_{pj}^{re} + A_{jp}^{re}) - \beta^{im} (A_{pj}^{im} - A_{jp}^{im})] \\ \delta B_{pp} &= Re\{(\alpha + \bar{\alpha}) A_{pp}\} = 2\alpha^{re} A_{pp}^{re} \\ \delta B_{pp} &= Re\{(\beta + \bar{\beta}) A_{pp}\} = 2\beta^{re} A_{pp}^{re} \end{aligned} \quad (27)$$

поскольку

$$g_r = 2 \sum_j B_{jr} P_j$$

суть изменение приращений

$$\left. \begin{aligned} \delta g_r &= 2\delta B_{pr} P_p \quad \text{если } r \neq p, \text{ и} \\ \delta g_p &= 2 \sum_j \delta B_{jp} P_j \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. BODEWIG: Matrix Calculus, North-Holland Pub. Amsterdam, 1959
2. KRON, G.: Tensorial Analysis of Integrated Transmission Systems. The Six Basic Reference Frames. (I.) Transactions AIEE, Vol. 70, Pt. II. 1951. pp. 1239—48

#### РЕЗЮМЕ

Методы расчета потерь в сетях принимают многие переменные системы за постоянные. Наше сообщение предлагает способы для расчёта и оценки влияния изменений в сети, далее указывается метод, который позволяет, исходя из расчетов экономического распределения нагрузок для одного основного случая, рассчитать новое состояние сети, используя при этом прежние данные.



NÄHERUNGEN IN DEN BERECHNUNGSVERFAHREN FÜR NETZVERLUSTE  
UND BERECHNUNG DES EINFLUSSES VON EINZELNEN VERÄNDERUNGEN  
DES NETZES

T. VÁMOS und J. GERTLER

ZUSAMMENFASSUNG

Die Berechnungsverfahren für Netzverluste nehmen mehrere veränderliche Größen des Systems als konstant an. Die Arbeit bringt Schätzungen und Berechnungen welche es ermöglichen, die Wirkung der verschiedenen Netzveränderlichen zu bewerten bzw. aus den Berechnungen der wirtschaftlichen Lastverteilung für einen Grundfall den neuen Zustand unter Benützung der ursprünglichen Daten zu berechnen.

APPROXIMATIONS IN THE CALCULATING METHODS FOR NETWORK LOSSES  
AND CALCULATION OF THE INFLUENCE OF SOME NETWORK VARIABLES

T. VÁMOS and J. GERTLER

SUMMARY

For calculating the losses in power networks several quantities varying in the system are assumed to be constant. The paper gives estimates and calculations for appreciating the influence of the different variations in the network and for calculating the new state from the calculations of economical load distribution for a basic case, while using the previous data.

APPROXIMATIONS DANS LES METHODES DE CALCUL DES PERTES DE RESEAU,  
ET CALCUL DE L'INFLUENCE DE CERTAINES VARIATIONS DU RESEAU

T. VÁMOS et J. GERTLER

RESUME

Les méthodes de calcul des pertes de réseau prennent comme constantes plusieurs valeurs variables dans le système. L'étude donne des approximations et calculs permettant d'évaluer l'action des différents changements dans le réseau et de déterminer l'état nouveau à partir des calculs de la répartition économique des charges, effectués pour un cas de base, en utilisant les données antérieures.

# INFLUENCE OF THE WATER CONTENTS OF ADSORBENTS AND ORGANIC LIQUIDS ON THE ADSORPTION OF LIQUIDS\*

G. SCHAY

MEMBER OF THE ACADEMY OF SC.

L. GY. NAGY and T. SZEKRÉNYESY

[Manuscript received June 5, 1961]

The removal of the moisture contents of liquids and gases — especially if this water content is small — can be efficiently carried out by adsorptive fixing of the water.

In the course of our investigations in connection with the adsorption of liquid mixtures and pure liquids on solid surfaces, the problem of the water contents of the adsorbents and of the liquids always rose, this being a factor influencing the phenomenon in question very strongly. In the following the influence of water contents on adsorption will be discussed.

## 1. The influence of the moisture contents on the heat of wetting

Wetting of the solid-gas boundary surface is connected with a heat effect. At wetting, generally a solid-gas and a liquid-gas interface disappears and a solid-liquid interface appears. The immersion which will here be discussed is a special case of wetting, where the free liquid surface does not change, the solid-gas interface disappears only.

The immersion heat is the difference of the total surface enthalpies before and after immersion:

$$Q = F \cdot (h_{sl} - h_s) \text{ cal/g}$$

where

$F$  = specific surface area of the solid,  $\text{cm}^2/\text{g}$

$h_{sl}$  = enthalpy of the solid-liquid interface  $\text{cal}/\text{cm}^2$

$h_s$  = enthalpy of the free solid surface,  $\text{cal}/\text{cm}^2$

In the cases here in question, the immersion heat effect is of the order of 10 cal/g. Reckoning with 1 g of adsorbent and 1—2% accuracy, the required sensitivity of the calorimeter is about 0.1 cal. According to given possibilities, an adiabatic method and temperature sensing by a thermo pile was chosen.

\* Extract from a paper read on November 22, 1960 at the Conference on Drying of the Hungarian Academy of Sciences.



The calorimeter vessel (Fig. 1) was a special Dewar flask with an evacuated double-walled ground-in plug. This plug also served for introducing and holding the following appliances: thermo pile [1], adsorbent holder and stirrer [2], heating resistor [3] and liquid inlet pipe [4]. The same pipe served to pump dry, hot air through the calorimeter before the measurements.

The water equivalent was determined by electric heating. Heating time

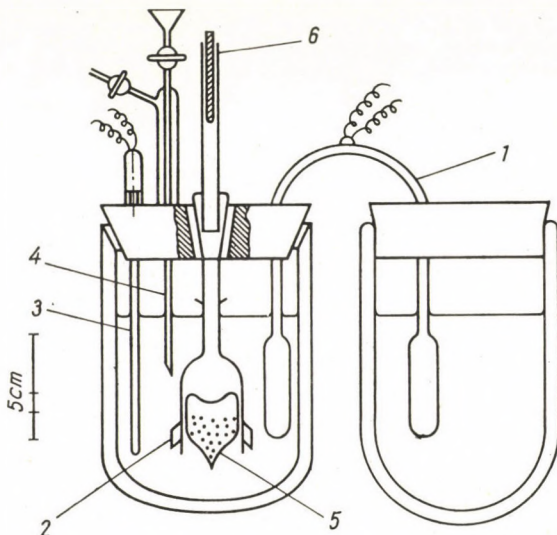


Fig. 1. Calorimeter for measuring heats of immersion

was measured with the aid of an automatically controlled stop watch, heating voltage and current by the compensation method.

The thermo pile consisted of ten pairs of copper-constantan elements. Its cold junction was placed in a Dewar flask similar to the measuring vessel (Fig. 1). The variation of the electromotive force of the thermo pile was measured with a mirror galvanometer of  $5 \cdot 10^{-7}$  V useful sensitivity.

The stirrer was motorically driven at constant revolution (about 100/min). The data of the calorimeter are shown in Table I.

Table I

|                                  |                            |
|----------------------------------|----------------------------|
| Heat capacity of the calorimeter | approx.<br>200 cal/degree  |
| Temperature sensitivity          | $0.5 \cdot 10^{-3}$ degree |
| Thermal sensitivity              | 0.1 cal                    |
| Heater power                     | appr. 1 W                  |

Differences in the previous life of one and the same kind of adsorbent or foreign matters mostly water, only present on the surface even in traces, considerably influence  $h_s$  and also  $h_{st}$ . Table II shows the values of immersion heats measured on silica gel of the same specific surface area (540 m<sup>2</sup>/g, determined by gas adsorption).

Table II

*Immersion heat (cal/g) on a silica gel (540 m<sup>2</sup>/g) at 25° C*

|   | Old    | Fresh |
|---|--------|-------|
|   | drying |       |
| Water                                   | 16.5   | 22.8  |
| Ethanol                                 | 21.3   | 23.9  |
| Methanol                                | 25.3   | 28.7  |
| Benzene (analytically pure, commercial) | 16.6   | 22.5  |

The first column refers to silica gel dried several weeks before the measurements were taken and stored in a glass flask with a ground-in plug and in an exsiccator, the second column refers to silica gel dried in the same way (at 120° C for 12 hours), but immediately before the measurements. Obviously the differences in the history of the adsorbent — caused in the present case by the uptake of a certain amount of water — may considerably influence the value of the measured immersion heat, without any change in the size of the surface area. At known surface area, the specific immersion heat (cal/m<sup>2</sup>) is a valuable characteristic, if we want to examine how different preparatory treatments influence the quality of the surface of the adsorbent.

The commercial "analytically pure" chemicals cannot be used directly for investigations on liquid adsorption. First of all, the water content must be reduced to such an extent that it will not influence the adsorption and the analysis. This is an extremely strict requirement which cannot be achieved by lengthy procedures.

Naturally, the glass vessels, used for storing the liquids and for the whole work itself, must also be thoroughly dried. It is generally experienced that the last traces of water can be eliminated only by energetic methods. In our case even 0.1 mg of water in any vessel was not to be tolerated, because of its selective adsorption. Therefore after the usual cleaning, the vessels were dried at 300° C for one day.

The influence of the presence of water can be best demonstrated by the following results of wetting heat measurements: taking the immersion heat of water on silica gel as 100%, the immersion heat of benzene amounts to 20—25%



according to the data in literature [3], while 90—100% was found for commercial "analytically pure" benzene (water content 0.02%), 65% benzene distilled once over metallic sodium (water content 0.011%), 44% for four times distilled benzene (water content 0.002%) and finally 36% for fractionally frozen and four times distilled benzene (water content 0.001 weight %).

Finally the following method was adopted for reducing the water contents of benzene:

1. distillation over phosphorus pentoxide,
2. fractional freezing out,
3. four times distillation over metallic sodium.

The immersion heat on silica gel of the benzene treated in this way was 30—36% of the immersion heat of water. Its melting point agreed with the value given by literature (5.532° C), which was checked with a calibrated platinum resistance thermometer. Its refractive index was  $n_D^{25} = 1.49794$  (literature: 1.49890). The water contents were measured using the Karl Fischer method. The immersion heats of the benzene specimens with various water contents are summarized in Table III.

Table III

| Degree of purification<br>(pure water)  | Water contents<br>(weight %)<br>(100) | Immersion heat<br>in % of the value<br>measured for water<br>(100%) |
|---|---------------------------------------|---|
| Benzene, commercial analytically pure   | appr.<br>0.02                         | 95—100  |
| 1 times distilled over Na   | 0.011                                 | 65  |
| 4 times distilled over Na   | 0.002                                 | 44  |
| fractionally frozen out<br>+4 times distilled over Na }<br>distilled over P <sub>4</sub> O <sub>5</sub> +<br>fractionally frozen out + }<br>4 times distilled over Na } | 0.001                                 | 36  |
| "pure benzene" (from literature)  | appr. 0.000                           | 30—36   |
|   |                                       | 20—25   |

## 2. The influence of water contents on the adsorption of liquid mixtures

In the literature from time to time we encounter experimental results and conclusions according to which the specific adsorption  $\chi_x = H^\circ(x^\circ - x)$  characterizing the adsorption equilibrium of binary liquid mixtures on solid surfaces depends on the relative amount of the adsorbent. Here

$H^\circ$  is the amount of the original mixture (mmole/g ads.)

$x^\circ$  the initial mole fraction of the mixture

$x$  the equilibrium mole fraction of the mixture.

It was shown that the mentioned dependence only appears if the mixture is not really a binary one (in most cases the third component is water) or if the adsorbent is not dry [4].

Figs. 2 and 3 show the influence of the water contents of the adsorbent.

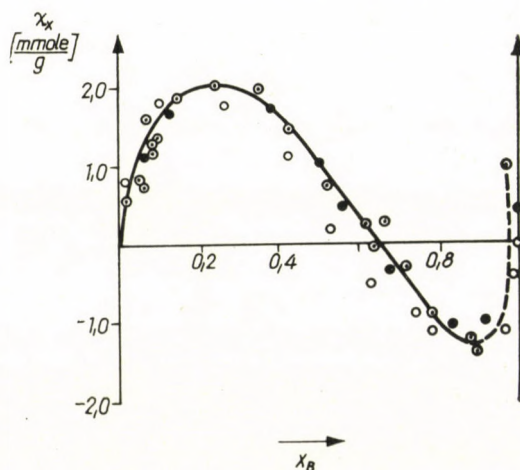


Fig. 2. Adsorption isotherm of benzene-ethanol mixtures on activated carbon, at 25°C  
 ◐ : carbon of 2.6% moisture contents, ○ : carbon dried at 120°C for 24 hours, ● : carbon of 2.6% moisture content

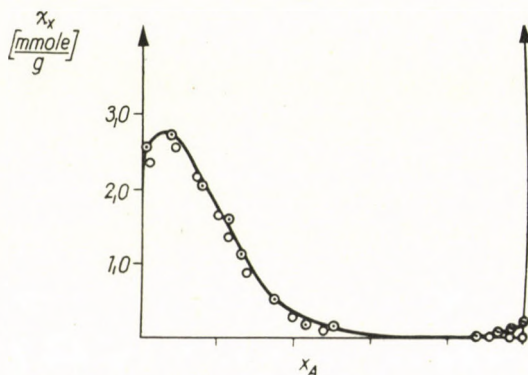


Fig. 3. Adsorption isotherm of acetic acid-water mixtures on activated carbon at 25°C  
 ◐ : activated carbon with 1.6% moisture contents, ○ : dried at 120°C for 24 hours

The relatively small moisture contents of the adsorbent considerably distort the shape of the diagram, especially the extreme right-hand part of it. This effect is very important *e.g.* in the case of the graphical determination of surface area [2], because for this purpose usually only the intermediate, linear part is measured, from which the disturbing effect of the moisture contents cannot be ascertained.



If "analytically pure" absolute ethanol or benzene is agitated with silica gel or active carbon, their refractive index changes and this can be traced to a change of their water contents. In the case of a mixture the change in the refractive index due to adsorption cannot be separated from that arising from the variation of the moisture contents. What is observed is the combined result of both effects and if the specific adsorption is computed from this, the effect of the moisture contents is not taken into account and, therefore, the  $H^\circ(x^\circ - x)$  calculated in this way depends on the amount of the adsorbent. The change in concentration ( $x^\circ - x$ ) was measured interferometrically ( $\Delta n = 2 \cdot 10^{-6}$ ) or with a heatable optical-cube immersion refractometer ( $\Delta n = 2 \cdot 10^{-5}$ ).

Table IV shows the change of refractive index caused by "Nuxit A" brand dry carbon activated with zinc chloride and by silica gel, respectively, in industrial analytically pure absolute alcohol and in benzene. Furthermore, the table shows those fictitious adsorbed amounts  $H^\circ(x^\circ - x)$ , to which would correspond these refractive index changes if measured on blank alcohol-benzene mixtures.

$G^\circ$  = the initial quantity of mixture (g),

$\Delta n$  = change of refractive index.

Table IV

| Alcohol<br>$G^\circ$ | Active carbon<br>(g) | $\Delta n \cdot 10^5$ | $H^\circ(x^\circ - x)$ | Benzene<br>$G^\circ$ | Active carbon<br>(g) | $\Delta n \cdot 10^5$ | $H^\circ(x^\circ - x)$ |
|----------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|
| 8                    | 0.8                  | +43                   | 0.70                   | 9                    | 0.8                  | -32                   | 0.30                   |
| 8                    | 2.4                  | +98                   | 0.54                   | 9                    | 2.4                  | -47                   | 0.14                   |
| 8                    | 3.2                  | +139                  | 0.57                   | 9                    | 3.2                  | -61                   | 0.16                   |
| Alcohol              | Silica gel<br>(g)    |                       |                        | Benzene              | Silica gel<br>(g)    |                       |                        |
| 8                    | 0.5                  | +75                   | 1.9                    | 9                    | 0.5                  | —                     | —                      |
| 8                    | 1.2                  | 156                   | 1.7                    | 9                    | 1.2                  | -5                    | 0.03                   |

### 3. The adsorption of systems partially miscible with water

The isotherms of the butyl alcohol—water and of the amyl alcohol—water systems for that range of concentrations where the alcohol is dissolved in the water, measured on activated carbon (extracted Nuxit A) are conform to Type I of BRUNAUER—DEMING—TELLER [5] (Fig. 4). For isotherms measured in the alcoholic phase data in literature was not found.

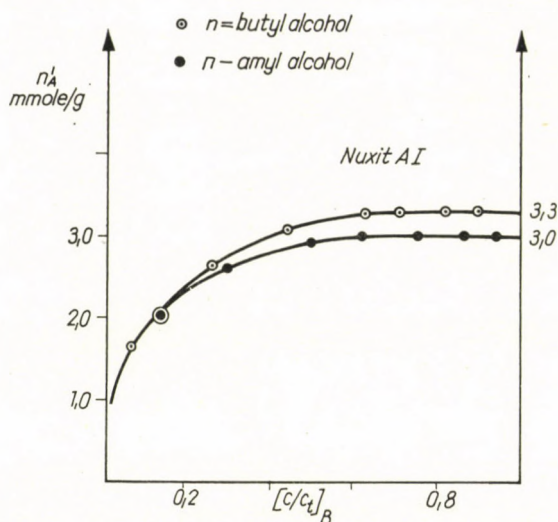


Fig. 4. Individual adsorption isotherms of n-butyl alcohol and of n-amyl alcohol on activated carbon (Nuxit A I) at 25°C;  $c$ : mole concentration of butyl alcohol (of amyl alcohol) in water;  $c_t$ : mole concentration of butyl alcohol (of amyl alcohol) on saturation in water;  $n'_A$ : surface mole number of butyl alcohol (amyl alcohol) mmole/g.

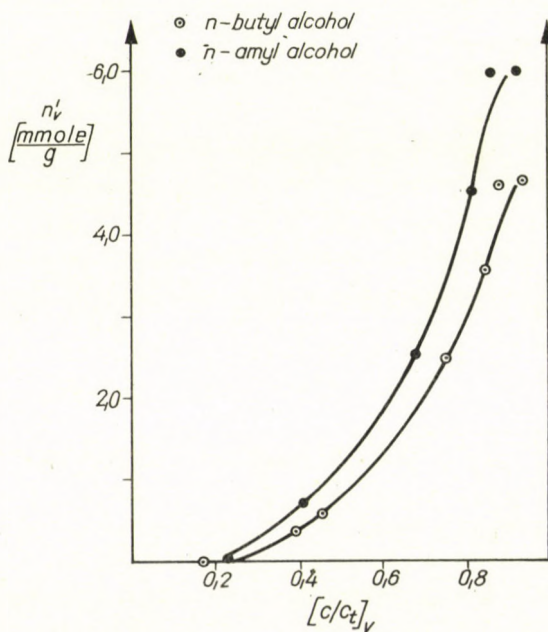


Fig. 5. Individual adsorption isotherms of n-butyl alcohol-water and of n-amyl alcohol-water mixtures on activated carbon (Nuxit A. I.);  $c$ : mole concentration of water in butyl alcohol and in amyl alcohol;  $c_t$ : mole concentration of water on saturation in butyl alcohol and in amyl alcohol;  $n'_v$ : surface mole number of water, mmole/g.



According to the measurements of the authors these parts of the isotherms conform in shape to type III of B. D. T. (Fig. 5), notwithstanding the fact that the heat of immersion measured with the pure components on activated carbon is always smaller for water than for alcohols. (Cf. Table V.)

Table V  
Immersion heats for various carbon types

|                          | (6)<br>activated<br>carbon | (7)<br>activated<br>carbon | (8)<br>graphite     | (9)<br>graphite | (10)<br>non-porous<br>carbon<br>black |
|--------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------|-----------------|---------------------------------------|
|                          | cal/g                      |                            | erg/cm <sup>2</sup> |                 |                                       |
| Water                    | —                          | 12.4                       | 32.2                | 64              | 122                                   |
| Methyl alcohol           | 25.7                       | 30.2                       | —                   | —               | } appr. 250                           |
| Ethyl alcohol            | 27.0                       | 28.4                       | —                   | —               |                                       |
| <i>n</i> -Propyl alcohol | 26.5                       | —                          | —                   | 95              |                                       |
| <i>n</i> -Butyl alcohol  | 27.0                       | —                          | 114                 | —               |                                       |
| <i>i</i> -Butyl alcohol  | 23.0                       | —                          | 115                 | —               |                                       |
| <i>t</i> -Butyl alcohol  | 20.2                       | —                          | 102                 | —               |                                       |
| <i>n</i> -Amyl alcohol   | —                          | —                          | 120                 | —               |                                       |

On the basis of the different character of the two accessible sections of the isotherms the following may be stated: on the aqueous side, where a small amount of alcohol is dissolved in water, the adsorption is strongly positive from the beginning, even traces of alcohol can be practically removed from the aqueous system. On the other hand, however (small amounts of water in alcohol), for the least water concentrations there is no measurable adsorption, the water contents of the alcohol cannot be reduced beyond a certain limit in this way.

The adsorption isotherm of water vapour on carbon black or activated carbon also corresponds to type III of B. D. T. The isotherm is characterized by practically no adsorption until about 0.2 relative pressure, then rises with a steep and concave slope to the value corresponding to a monolayer, then at 0.5—0.7 relative pressure capillary condensation sets in, *i.e.* multi-molecular adsorption. DUBININ and coworkers [11] carried out numerous experiments on this subject and they explain the character of this isotherm in the following way: the force field of the carbon surface is not sufficiently strong for the adsorption of the water vapour molecules of given kinetic energy, but on the oxides always present on the carbon surface, adsorption centres develop. Above a certain relative pressure the water molecules fixed in this way bind further ones by hydrogen bonding and adsorption islands are formed.

It may be assumed that in addition to the formal similarity of the isotherms of water adsorption from the condensed and from the vapour phase there also exists an essential analogy between the two mechanisms of adsorption.

## REFERENCES

1. SCHAY, G., NAGY, L. GY., SZEKRÉNYESY, T.: M. Kém. Folyóirat, 66 (1960) 271.
2. SCHAY, G., NAGY, L. GY., SZEKRÉNYESY, T.: Period. Polytechn., Vol. 4. No. 2. (1960)
3. HARKINS, W. D., DAHLSTROM, R.: Ind. Eng. Chem. 22. 897. (1930)
4. NAGY, L. GY., SCHAY, G.: M. Kém. Folyóirat, 66. 31 (1960)
5. ERDEY-GRÚZ, T., SCHAY, G.: Elméleti Fizikai Kémia II. vol. Tankönyvkiadó, 1951, p. 322
6. MILLER, N. F., HEINEMANN H., MC CARTER, W. S. W.: Ind. Eng. Chem. 42. 151. (1950)
7. BRUNAUER, S.: Physical Adsorption of Gases and Vapours. Ed. Princeton, 1945
8. HEALY, F. H., CHESSICK, J. K., ZETTMAYER, A. C., YOUNG, G. J.: J. Phys. Chem., 58. 887. (1954)
9. BOYD, G. E., LIVINGSTONE, H. K.: J. Am. Chem. Soc. 64. 2387, (1942)
10. KISELEV, A.: Dokl. Akad. Nauk, 89, 113, 1/3 (1953)
11. DUBININ, M. M., ZAVERINA, E. D., SERPINSKY, V. V.: J. Chem. Soc., 1760, (1955)

## SUMMARY

The moisture contents of liquids and gases can be efficiently eliminated by adsorption. Traces of moisture contained in the adsorbents as well as in the liquids considerably influence the adsorption equilibrium established on the solid-liquid interface. As for the influence of the water on the equilibrium, the following was to be found:

1.  $10^{-2}$ – $10^{-3}\%$  of water in nonpolar organic solvents had still a measurable influence on the heat of immersion.
2. Water contained in the adsorbents to the order of 1% considerably changes the adsorption isotherms of liquid mixtures.
3. It is impossible to eliminate on activated carbon by adsorption the last traces of water from organic solvents which are but partially miscible with water.

DER EINFLUSS DES WASSERGEHALTS VON ADSORBENZIEEN UND ORGANISCHEN FLÜSSIGKEITEN AUF DIE ADSORPTION VON FLÜSSIGKEITEN

G. SCHAY, L. GY. NAGY, T. SZEKRÉNYESY

## ZUSAMMENFASSUNG

Der Feuchtigkeitsgehalt von Flüssigkeiten und Gasen kann mit gutem Wirkungsgrad durch Adsorption entfernt werden. Spuren von Feuchtigkeit in den Adsorbentien bzw. den Flüssigkeiten beeinflussen stark das Adsorptionsgleichgewicht, das an der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und festem Körper entsteht. Über den Einfluß des Wassers auf das Gleichgewicht wurden folgende Feststellungen gemacht:

1.  $10^{-2}$ – $10^{-3}\%$  Wassergehalt in apolaren organischen Lösungsmitteln beeinflusst noch meßbar die Größe der Tauchwärme.
2. Wassergehalt von Adsorbentien in der Größenordnung von 1% verändert in starkem Maße die Adsorptionsisotherme von Flüssigkeitsgemischen.
3. Es ist nicht möglich, mit Hilfe von Aktivkohle als Adsorbens die letzten Spuren von Wasser aus organischen Lösungsmitteln die mit Wasser begrenzt mischbar sind zu entfernen.



## L'INFLUENCE DE LA TENEUR EN EAU DES ADSORBANTS ET DES LIQUIDES ORGANIQUES SUR L'ADSORPTION DES LIQUIDES

G. SCHAY, L. G. NAGY, T. SZEKRÉNYESY

## RESUME

La teneur en humidité des liquides et des gaz peut être bien éliminée par adsorption. Des traces d'humidité dans les adsorbants ou dans les liquides influencent considérablement l'équilibre d'adsorption s'établissant à la surface limite solide—liquide. Quant à l'influence de l'eau sur l'équilibre, on peut établir:

1. Une teneur en eau de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-3}\%$  des solvants organiques apolaires influence encore la valeur de la chaleur d'immersion d'une façon mesurable.

2. Une teneur en eau de l'ordre de 1% des adsorbants modifie l'isotherme d'adsorption des mélanges de liquides.

3. L'élimination des dernières traces d'eau des solvants organiques se mélangeant avec l'eau dans une mesure limitée, n'est pas possible avec le charbon actif utilisé comme adsorbant.

## ВЛИЯНИЕ ВОДЫ, СОДЕРЖАЩЕЙСЯ В АДСОРБЕНТАХ ИЛИ ОРГАНИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЯХ, НА АДСОРБЦИЮ ЖИДКОСТЕЙ

Г. ШАЙ, Д. Л. НАДЬ и Т. СЕКРЕНЬЕШИ

## РЕЗЮМЕ

Влагу из жидкостей и газов в достаточной степени можно удалить с помощью адсорбции. Присутствие следов влаги в адсорбентах и жидкостях в значительной мере влияет на равновесие адсорбции, устанавливающееся на границе твердое тело—жидкость. В отношении влияния воды на равновесие можно установить, что:

1. Влияние на теплоту окузания влажности порядка  $10^{-2}$ — $10^{-3}\%$ , в аполярных органических растворителях еще может быть измерено;

2. Влажность адсорбентов порядка 1% значительно изменяет адсорбционную изотерму жидкостных смесей;

3. Из органических растворителей, неограниченно растворяющихся в воде, невяз можно удалить последние следы воды с помощью активного угля в качестве адсорбента

## INDEX

- Klimov, B.* : Zur Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen bei gewisser antimetrischer und einseitiger Belastung — On the Calculation of Double-Curved Shells under Certain Symmetric and Antimetric Loads — Calcul des voiles minces à double courbure en cas de charges antimétriques et unilatérales — *Климов, Б.*: К расчету оболочек двоякой кривизны при определенной антиметричной и односторонней нагрузке ..... 265
- Domes, O.* : Study of the Limit-Irregularities of Combed Flax-Sliver — Studium über die Grenzunregelmäßigkeiten der Flachskammzugbänder — Étude de l'irrégularité limite des rubans de lin peignés — *Домеш, О.*: Исследование о граничной неровноте чесанных льняных лент ..... 285
- Fekete, Gy.* : Bau und Betrieb der neuen Schiffe der ungarischen Binnenschiffahrt und Donau-Seeschiffahrt — The Building and the Operation of the New Hungarian Ships for Inland and for Danube-Sea Traffic — Construction et exploitation de nouveaux bâtiments navires destinés à la navigation intérieure et à la navigation danubio-maritime — *Фекете, Д.*: Строительство и эксплуатация новых судов внутреннего и дунайско-морского судоходства ..... 299
- Terplán, Z. und Lévai, I.* : Beitrag zur Berechnung von Gleitlagern mit Öl- oder Fettschmierung — Study on the Methods of Calculation for Sliding Bearings Lubricated by Oil and Grease — Remarques concernant le calcul des paliers lisses lubrifiés à l'huile et à la graisse — *Терплан, З. и Леваи, И.*: Замечания к расчету подшипников скольжения, работающих на масляной и жировой смазке ..... 329
- Prohászka, J.* : Änderungen des Wärmeausdehnungskoeffizienten von kaltverformten Metallen im Verlaufe des Weichglühens — Variation of the Coefficient of the Thermal Expansion of Cold-Worked Metals during Annealing — Changement du coefficient de dilatation thermique des métaux écrouis, au cours du recuit — *Прохаска, Й.*: Изменение коэффициента теплового расширения холоднодеформированных металлов при отжиге ..... 349
- Szántó, I. S.* : X-ray Investigation of Yield-Phenomena in Steels with a New Method of Evaluation — Röntgen-Untersuchung der Fließgrenzenercheinungen im Stahl mittels einer neuen Auswertungsmethode der Gitterverzerrungen — Examen radiographique des phénomènes à la limite d'écoulement de l'acier selon une nouvelle méthode d'évaluation des distorsions du réseau — *Санто, И. Ш.*: Рентгенографическое исследование явлений предела текучести стали с помощью нового метода индикации искажения решетки ..... 367
- Apor, K.* : Система кривых регулирования русла рек. Часть 1. Расчет длины, род кривых — *Apor, K.* : Das System der Flußbett-Regulierungskurven I. Berechnung der Kurvenlängen; Arten der Kurven — The System of River-Bed Regulation Curves I. Calculation of Curve Length; Types of Curves — Le système des courbes de régularisation des lits de rivière I. Calcul de la longueur des courbes; types de courbes ..... 385
- Bodrogai, J.* : Eine neue, genauere Methode zur Bestimmung der Brucharbeit — Determination of Fracture Energy by a New, More Precise Method — Méthode nouvelle et plus précise pour la détermination du travail de rupture — *Бодрогаи, Й.*: Новый более точный метод определения работы излома ..... 411



- Geszti, P. O.* : Some Zero Sequence Type Problems of Networks — Einige Probleme des Nullsystems in elektrischen Netzen — Quelques problèmes des réseaux nuls — *Гесту, П. О.*: Несколько проблем, связанных с вопросами схем нулевой последовательности ..... 427
- Schleicher, A.* : Data on the History of Metallurgy in Hungary VII. Hungary, the Cradle of the So-Called European Amalgamation — Beiträge zur Geschichte des Hüttenwesens in Ungarn VII. Ungarn als die Wiege der sog. europäischen Amalgamation — Contribution à l'histoire de la métallurgie en Hongrie VII. La Hongrie, berceau de l'amalgamation dite européenne — *Шлейхер, А.*: К истории металлургии в Венгрии, VII. Венгрия как колыбель так называемой европейской амальгамации ..... 441
- Вамош, Т.* и *Гертлер, Я.*: Методы приближенного расчета потерь в электрических сетях и расчет влияния некоторых измерений в сети — *Vámos, T. und Gertler, J.* : Näherungen in den Berechnungsverfahren für Netzverluste und Berechnung des Einflusses von einzelnen Veränderungen des Netzes — Approximations in the Calculating Methods for Network Losses and Calculation of the Influence of some Network Variables — Approximations dans les méthodes de calcul des pertes de réseau, et calcul de l'influence de certaines variations du réseau ..... 451
- Schay, G., Nagy, L. Gy. and Szekrényesy, T.* : Influence of the Water Contents of Adsorbents and Organic Liquids on the Adsorption of Liquids — Der Einfluß des Wassergehalts von Adsorbentien und organischen Flüssigkeiten auf die Adsorption von Flüssigkeiten — L'influence de la teneur en eau des adsorbants et des liquides organiques sur l'adsorption des liquides — *Шай, Г., Надь, Д. Л.* и *Секренеш, Т.*: Влияние воды, содержащейся в адсорбентах или органических жидкостях, на адсорбцию жидкостей ..... 461

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address. The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.



