

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XXXVIII

FASCICULI 1-2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1962

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

Tomus XXXVIII

Index

- Alkér, T. F.* : Application of the Thermomagnetic Properties of Materials for the Control or Protection of Electric Circuits — Die Anwendung der thermomagnetischen Eigenschaften der Stoffe für die Steuerung und den Schutz von elektrischen Stromkreisen — Utilisation des propriétés ferromagnétiques des matières pour la commande et la protection des circuits électriques — *Алькер Т. Ф.* : Применение термомангнитных свойств материалов для управления или защиты электрических цепей 371
- Béda, D.* : Method of investigation of plastic waves — *Béda, Gy.* : Eine Methode zur Untersuchung von plastischen Wellen — A Method for Investigating the Plastic Wave — Une méthode pour l'examen de l'onde plastique 161
- Csonka, P.* : Some Solutions in Closed Form of Problems on Torsion — Einige Lösungen des Torsionsproblems in geschlossener Form — Quelques solutions finies du problème de torsion — *Чонка, П.* : Некоторые замкнутые по форме решения проблемы кручения 221
- Czibere, T.* : Berechnungsverfahren zum Entwurf radialer Schaufelgitter — Method for Dimensioning Radial Blade Cascades — Méthode pour calculer les dimensions des aubes en grille radiale — *Цибере, Т.* : Методика расчета при проектировании радиальных лопастных решеток 101
- Dischka, Gy. und Hajmásy, T.* : Ermüdungsversuche an Rohrkorden — Fatigue Test of Tyre Cords — L'épreuve de fatigue des fils de corde — *Дирка, Д. и Хаймаш, Т.* : Испытание кордных нитей на усталость 235
- Egri, I., Sinay, G. and Szemes, M.* : Detection of Inclusions in Steel Plates by the Ultrasonic Method and by the Determination of Contraction Work — Untersuchung der Schlackeneinschlüsse von Stahlblechen mit Ultraschall und durch Bestimmung der Brucharbeit — Examen des inclusions non métalliques dans les tôles d'acier par les ultrasons et par détermination du travail de contraction — *Эгри И., Шинац, Г. и Семеш, М.* : Исследование зашлакованности листовой стали ультразвуковым методом посредством определения работы контракции 297
- Erdélyi, I.* : Influence of Centrifugal Fields on the Heat State of Gases. Explanation of Ranque Phenomenon — Wirkung des Zentrifugalkraftfeldes auf den Wärmezustand der Gase. Erklärung der Ranque Erscheinung — Influence de l'intensité du champ centrifuge sur l'état de température des gaz. Explication du phénomène de Ranque — *Эрдеи, И.* : Влияние поля центробежной силы на теплопроводность газов. Объяснение явления Ранке 337
- Fonó, A.* : The Influence of Cooling Blast Furnace Walls on the Price of Pig Iron — Der Einfluß der Kühlung von Hochofenwänden auf den Preis des Roheisens — L'influence du refroidissement des parois du haut fourneau sur le prix de la fonte brute — *Фоно, А.* : Влияние охлаждения стен доменных печей на цену чугуна 467
- Gaal, E.* : Current Distribution of a Strip Line — Stromverteilung an einem Mikrowellen-Bandwellenleiter — Répartition du courant sur les lignes à ruban à microondes — *Гаал, Э.* : Распределение тока на микроволновом ленточном фидере ... 387

<i>Gádor, L.</i> : Controlled Non-Linear Resistors — Steuerung von nichtlinearen Brücken — Ponts non-linéaires contrôlés — <i>Гадор, Л.</i> : Управляемые нелинейные мосты	131
<i>Kubinsky, M.</i> : Die Architektur der Empfangsgebäude bei den europäischen Eisenbahnen (Geschichtlicher Überblick) — The Architecture of European Railway Station-Buildings (Historical Review) — L'architecture des bâtiments de voyageurs de chemin de fer en Europe (Aperçu historique) — <i>Кубински, М.</i> : Архитектура железнодорожных приемных зданий в Европе (Исторический обзор)	431
<i>Lienert, A.</i> : Untersuchung des Leistungsbedarfs von Rührern in Abhängigkeit von ihren geometrischen Größenverhältnissen — Analysis of the Power Consumption of Agitators Depending on their Geometrie Dimension-Ratio — Examen de la consommation d'énergie des agitateurs en fonction des rapports dimensionnels géométriques — <i>Линерт, А.</i> : Исследование потребляемой мощности мешалок в зависимости от соотношений геометрических размеров	319
<i>Litvai, E.</i> : Matrix-algebraische Behandlung von Meßbrücken mit zwei direkt geheizten Heißleitern (Thermistoren) — Matrix-Algebraic Discussion on Measuring Bridges Operating with Two Directly Heated Thermistors — Traitement en algèbre matricielle d'un pont de mesure contenant deux thermistors à chauffage direct — <i>Литвай, Э.</i> : Матрично-алгебраическая трактовка измерительного мостика работающего с двумя термисторами прямого накала	15
<i>Litvai, E.</i> : Dimensionslose Kennlinien von Thermistoren (Heißleitern) und ihre Anwendung — Dimensionless Characteristics of Thermistors and their Application — Les caractéristiques sans dimensions des thermistors et leur application — <i>Литвай, Э.</i> : Безразмерные характеристики термисторов и их применение	265
<i>Milasovszky, B.</i> : The Theoretical Problems of Level Drift Location — Theoretische Fragen der Auslegung von Richtstollen — Questions théoriques du percement des galeries de direction — <i>Милашовски, Б.</i> : Принципиальные вопросы заложения главных штреков	189
<i>Milasovszky, B.</i> : The Location of Level Drifts on the Basis of the Least Absolute Sum Principle — Die Aussteckung der Richtungsstrecken auf Grund des Prinzipes des Absolutbetrag-Minimums — Tracé des galeries de direction selon le principe de minimum de la somme absolue — <i>Милашовски, Б.</i> : Выбор главных штреков по принципу абсолютного минимума сумм	351
<i>Rózsa, L. и Kovács, G.</i> : Деформация контура кругового выреза в упругой плоскости от действия радиальной нагрузки — <i>Rózsa, L.—Kovács, G.</i> : Deformation einer Kreisaußschnittkontur in elastischer Ebene infolge radialer Belastung — Deformation of Circular Opening Outline in Elastic Plane by Radial Load — Déformation des contours d'ouvertures circulaires situées dans un plan, sous l'effet de charges radiales	399
<i>Sasvári, Gy.</i> : Méthode pour calculer la température moyenne de corps de forme quelconque — Ein Verfahren zur Berechnung der Durchschnittstemperatur eines beliebig geformten Körpers — Calculation of the Average Temperature for an Optionally Formed Body — <i>Шашвари, Д.</i> : Метод для определения средней температуры тела любой формы	259
<i>Soare, M. et Niculescu, D. D.</i> : Observations sur la distribution des efforts dans les voiles minces prismatiques et cylindriques — Einige Ergebnisse und Beobachtungen über den Spannungszustand in Zylinderschalen und Faltwerken — Some Results and Observations on the Stress-State in Cylindrical and Folded Shell-Roofs — <i>Соаре, М. и Никулеску, Д. Д.</i> : Некоторые результаты и замечания по состоянию напряженных цилиндрических и призматических оболочек	65
<i>Szendy, K.</i> : Economical Loading of Networks Connected Parallel on two Operating Voltages — Wirtschaftliche Arbeitsweise von zwei miteinander parallelgeschalteten, auf zwei verschiedenen Spannungsniveaus arbeitenden Netzwerken — L'exploitation économique de réseaux connectés en parallèle fonctionnant à deux niveaux de tension — <i>Сенди, К.</i> : Рентабельная эксплуатация двух параллельно соединенных сетей, действующих на двух уровнях напряжения	423

- Szöke, B.* : Die Analyse der einfachen Fallklappenregulierung — Analysis on the Simple Control of a Hinged Flap — Analyse de la régulation par simple clapet — *Сёке, Б.*: Анализ простого золотникового регулирования 3
- Szöke, B.* : A Method for Calculating the Contour of a Circular Form Tool by the Law of Secants — Berechnung des Profils eines runden Formmeissels mit Hilfe des Satzes über die Kreissekanten — Calcul du profil d'un outil de forme circulaire, à l'aide du théorème de la sécante — *Сёке, Б.*: Методика расчета профиля фигурных круглых резцов с помощью теоремы секущих 229
- Uray, V.* : Die Untersuchung der Betriebskenngrößen von Lichtbogenöfen auf Grund des Kreisdiagramms — Investigation on the Operating Characteristics of Arc Furnaces with the Aid of the Circle Diagram — Étude des caractéristiques de la marche d'un four à arc, basée sur le diagramme du cercle — *Урай, В.*: Анализ рабочих характеристик дуговых печей на основе круговой диаграммы 45

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXVIII



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1962

ACTA TECHN. HUNG.

DIE ANALYSE DER EINFACHEN FALLKLAPPEN- REGULIERUNG

B. SZÓKE

[Eingegangen am 20. Februar 1958]

In zahlreichen Zweigen der Bearbeitungsindustrie, so vor allem in der Mühlenindustrie, gebraucht man zur Sicherung des von einer Gosse gespeisten gleichmäßigen Mahlgutausflusses die alte Speiseklappenreguliervorrichtung mit Gewicht- oder Federbelastung. Da diese Art des Walzenstuhl-Speisens den erhöhten Anforderungen nicht genüge leisten konnte, entstanden die auf dem Prinzip der Rückschaltung wirkende, sinnreiche aber wesentlich komplizierte hydromechanische Regulierkonstruktionen, die außer der gleichmäßigen Speisung auch noch andere Arbeitsvorgänge verrichten, wie z. B. die Einschaltung der losgekuppelten Walzen beim Beginn des Produktenlaufes, Abgabe von Signalen etc. [2].

Die einfache Speiseklappenregulierung ist in der Mühlenindustrie, so wie in zahlreichen Gebieten anderer Industriemaschinen, auch heute noch unentbehrlich und daher ist es der Mühe wert, die sich hier abspielenden Regulierungsvorgänge genauer zu erörtern, um die gleichmäßigste Speisung der Vorrichtung verwirklichen zu können.

Bei der Speiseklappenregulierung ist es zu beachten, daß der Druck des Mahlgutes auf die Klappe, als Funktion der Mahlguthöhe, derart charakterisiert ist, wie ihn die JANSSENSche Gleichungen bestimmen, d. h. eine stetig flacher werdende Kurve, die am Boden mit

$$p = s \left(1 - e^{-0,8 \frac{x}{s}} \right),$$

an den Seitenwänden mit $p_s = 0,7p$ Oberflächendruck ausgedrückt werden kann, wobei x der Höhe der Getreidesäule und s der Seitenlänge des Quadratdurchschnittes der Zelle entspricht [3].

Zweck der Regulierung ist zu sichern, daß die gleiche Mahlgutmenge durch den Speisespalt der Speisewalze ströme, die in die Gosse zugeführt wird.

Auf Grund des 1. Bildes ist:

F der Querschnitt der Gosse (unveränderlich)

v_1 die Geschwindigkeit des in die Gosse einfallenden Mahlgutes (veränderlich)

- h die Länge der Speisewalze (unveränderlich)
 e die Breite der Speisespalte an der Speisewalze (veränderlich)
 v_2 die Geschwindigkeit des durch den Speisespalt durchlaufenden Mahlgutes (die bei den meisten Konstruktionen und bei gewissen Mahlproduktarten konstant, bei einigen Ausführungen veränderlich ist)

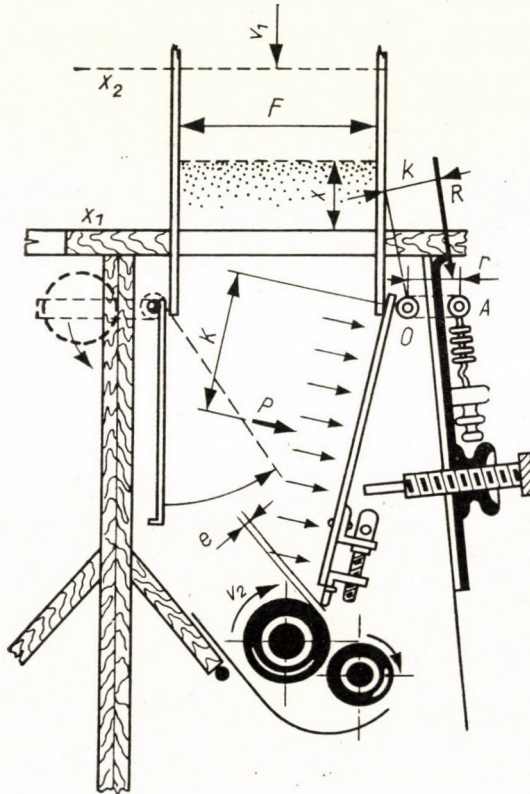


Bild 1. Einfache Speiseklappenregulierung mit Federbelastung

- P Gesamtkraft des Mahlgutes auf die Speiseklappe (veränderlich nach der Höhe des Mahlgutes)
 K Hebelarm der Kraft P bezüglich des Drehpunktes der Speiseklappe (veränderlich nach der Art der Konstruktionslösung)
 R Federkraft (veränderlich als Funktion des Federweges)
 k Hebelarm der Kraft R ebenfalls in bezug auf den Drehpunkt der Speiseklappe (veränderlich den Konstruktionslösungen gemäß)
 c Federkonstante, d. h. die Kraft, die bei der Feder eine Dehnung von 1 mm herbeiführt
 x_1 Das bei der Regulierung verwendete untere Mahlgutniveau
 x_2 Das bei der Regulierung verwendete obere Mahlgutniveau

x Höhe des Mahlgutniveaus, von dem unteren Niveau des Regulierungsabstandes gerechnet

y_1 Ausdehnung der vorgespannten Feder bei geschlossener Speisespalte

y_2 Ausdehnung der Feder bei größter Speisespalte

y Ausdehnung der Feder, vom Stand der Vorspannung gemessen

n Prozentzahl für den Ausdruck von $\frac{x}{x_2 - x_1}$ oder $\frac{y}{y_2 - y_1}$, die im Prozent des Regulierungsabstandes das Steigen des Produktes in der Gosse (bzw. die Ausdehnung der Feder binnen der Distanz $y_1 - y_2$) angibt.

Wenn die Geschwindigkeit v_1 sich aus irgendeinem Grunde verändert, muß die Regulierungsvorrichtung derart wirken, daß weder die überflüssige Auffüllung der Gosse, noch die überflüssige Entleerung ermöglicht wird. Bei laufender Speisung muß das in der Zeiteinheit in die Gosse strömende Mahlgutvolumen dem Volumen gleich sein, das die Speisewalze verläßt, das heißt,

$$Fv_1 = hv_2e, \quad (1)$$

also ist

$$v_2e = \frac{F}{h}v_1. \quad (2)$$

Der Zusammenhang (2) soll bedeuten, daß bei einer Veränderung von v_1 muß die Speisespalte e , oder die Umfangsgeschwindigkeit der Speisewalze v_2 , oder müssen alle beide gleichzeitig geändert werden. Die Umfangsgeschwindigkeit kann auch auf zweierlei Weise geändert werden; durch Veränderung des Durchmessers (Wechselwalze) und durch Veränderung der Umdrehungszahl.

Ist die Umdrehungszahl der Speisewalze und damit ihre Umfangsgeschwindigkeit v_2 bei einem Mahlgut konstant, so erfolgt die Regulierung bloß durch die Einstellung der Speisespalte e und

$$e = \frac{F}{hv_2}v_1, \quad (3)$$

das heißt, die Speisespalte ist im geraden Verhältnis zu der Zuführungsgeschwindigkeit v_1 . Die diesem Zusammenhang entsprechende Gerade

$$e = f_1(v_1)$$

stellt das Bild 2 dar.

Aus der in dem Bilde 1 beschriebenen, einfachsten und bekanntesten Konstruktionslösung geht hervor, daß jeder Größe der Speisespalte e irgendeine Federausdehnung y entspricht, die aus den Abmessungen entweder durch Berechnung oder durch Konstruktion festgestellt werden kann. Die Kurve des Federweges

$$y = f_2(e),$$

die von den Eigentümlichkeiten der Konstruktion abhängt, wurde im Bilde 2 derart dargestellt, daß der Verlängerung der vorgespannten Feder $O_0O = y_1$ eine Sperrstellung $e = 0$ entspreche.

Da der Federweg nur aus der Sperrstellung der Speisespalte beziehungsweise aus dem Vorspannungsweg y_1 berechnet werden soll, daher wird die entstehende Federkraft

$$R = c(y_1 + y) \quad (4)$$

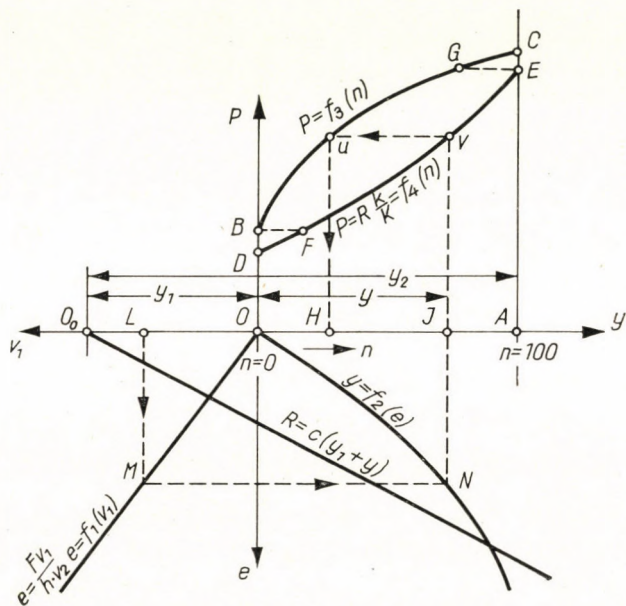


Bild 2. Regulierungsdiagramm

durch die durch den Punkt O_0 laufende Gerade dargestellt.

Die Skala des Federweges y hat eine gleichmäßige Einteilung. Wird der bei der Regulierung zur Verfügung stehende Federweg OA in 100 gleiche Teile eingeteilt, so kann an der Abbildung, bei dem Erreichen irgendeines prozentuellen Wertes des Federweges, die auftretende Federkraft R abgelesen werden.

Der Druck des Mahlproduktes, wie aus der JANSSENSCHEN Theorie bekannt, ist der Mahlprodukt Höhe x nicht proportional, kann aber durch eine mit der Höhenzunahme sich immer mehr verflachenden Kurve

$$P = f(x)$$

dargestellt werden. Wenn die Kurve P als Funktion der bei der Regulierung

zur Verfügung stehenden, auf die Mahlguthöhe bezogenen prozentuellen Höhenzunahme dargestellt werden soll, so bezeichnet die Kurve

$$P = f_3(n)$$

die Druckänderung.

Bekannterweise beruht die Regulierung auf der Bedingung, daß das Moment, das der Mahlproduktdruck auf den Drehpunkt der Fallklappe ausübt, mit dem Moment der Federkraft in Gleichgewicht bleibe.

Aus dem das Gleichgewicht der Momente bestimmenden Zusammenhang

$$PK = Rk \quad (5)$$

folgt, daß im Falle eines Gleichgewichtes

$$P = R \frac{k}{K} = f_4(n) \text{ ist,} \quad (6)$$

das heißt, *das Mahlgutdruck ist dem veränderten Federdruck gleich*. Auch diese Kurve kann in die Abbildung gezeichnet werden. Es soll bemerkt werden, daß binnen der Grenzen, in denen das Verhältnis der Hebelarme k/K als konstant betrachtet werden kann, die Funktion $f_4(n)$ durch eine Gerade dargestellt werden kann.

Aus dem entworfenen Regulierungsbilde können die zusammengehörigen Werte der kontinuierlichen Speisung festgestellt werden, und zwar gehört zu

$v_1 = OL$ Zuführungsgeschwindigkeit

$e = LM$ Speisespalte

$y = OJ$ Federweg (auf der Skala y)

$R \frac{k}{K} = JV$ veränderter Federdruck.

Demnach kann schon aus der Abbildung festgestellt werden, bei welcher Mahlgut-Säulenhöhe diese Lage bei der Regulierung zustande kommt. Denn nach der Gleichung

$$f_3(n) = f_4(n)$$

schneidet die durch den Punkt V laufende Horizontale aus der Kurve $P = f_3(n)$ den Punkt U heraus, der an der Skala n das % OH bestimmt, und durch welchen die Stellung des Mahlgutniveaus an der zur Verfügung stehenden Regulierungshöhe angedeutet wird.

Aus dem Bild können einige wichtige Schlüsse gezogen werden:

1. In dem Bilde 2 kann an den Seiten BC und DE des Kurvenganges $BCED$ zwecks Regulierung nur der Abschnitt in Betracht kommen, der in die durch die Horizontalen BF und GE begrenzte Zone fällt. Nur in dieser Zone liegen diejenigen horizontalen Geraden, die die Seiten BC und DE in den U bzw. V Punkten schneiden, die den entsprechenden prozentuellen Wert n binnen der Skala OA angeben.

2. Wenn die Anfangspunkte B und D der Kurve des Mahlgutdruckes $p = f_3(n)$ und der Kurve des veränderten Federdruckes $R \frac{k}{K} = f_4(n)$ und deren Endpunkte C und E gemein sind, ist der volle Federweg und die volle Regulierungshöhe ausgenützt (Bild 3.).

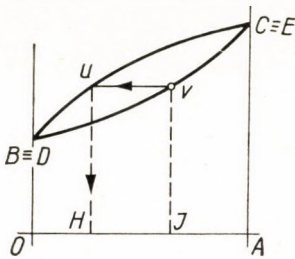


Bild 3. Zusammenfallen der Anfangs- und Endpunkte

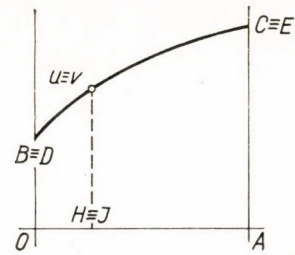


Bild 4. Die zwei Kurven decken sich

3. Decken sich die zwei Kurven, so stimmt während der Regulierung die prozentuelle Änderung des Federweges mit der prozentuellen Änderung der Mahlproduktthöhe überein (Bild 4). Berühren sich die zwei Kurven, so tritt die Übereinstimmung in der Gegend des Berührungspunktes auf, und schneiden sich die erwähnten Kurven in zwei Punkten, so werden die prozentuellen Werte in den zwei Schnittpunkten einander gleich.

4. Ist kein gemeinsamer horizontaler Strahl vorhanden, so ist die Feder zu stark (Bild 5) und öffnet nicht, oder ist sie zu schwach (Bild 6) und schließt nicht.

5. Ist der veränderte Federdruck horizontal und schneidet die Kurve der Kraft P , so gibt es nur einen einzigen Regulierungsstand (Bild 7), wobei eine sehr unruhige Regulierung entsteht, da sie immer dahin trachtet, die einzige stabile Lage sichernde Mahlguthöhe einzustellen. Vergrößert sich die Geschwindigkeit v_1 , so öffnet der Mahlgutdruck P eine zu große Speisespalte e , wodurch sich das Mahlgutniveau zu sehr senkt, und der Federdruck vollkommen schließt. Mit der Höhenzunahme des Mahlgutniveaus wiederholt sich das Spiel in jedem solchem Fall, in welchem v_1 von dem Wert abweicht, der sich auf Grund der Konstruktion des Bildes 2 für den Punkt $J \equiv H$ ergibt.

Das Erwähnte bezieht sich auf den idealen Fall, in dem die Regulierungsvorrichtung vollkommen empfindlich ist. Die Fallklappe öffnet aber bei der Vergrößerung der Mahlproduktgeschwindigkeit v_1 nicht sofort, sondern erst dann, wenn das Mahlgut die Höhe erreicht, bei der sein Überdruck zur Überwindung des Reibungswiderstandes der Regulierungsvorrichtung genügend

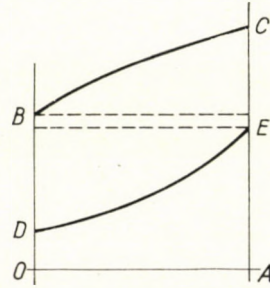
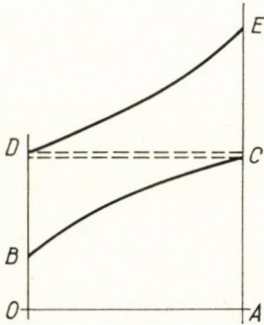


Bild 5. Die Feder ist zu stark, öffnet nicht Bild 6. Die Feder ist zu schwach, schließt nicht

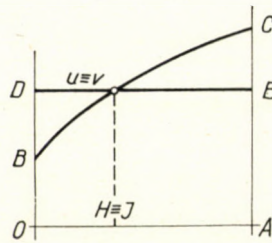


Bild 7. Unruhige Regulierung

groß ist. Es sei angenommen, daß im Bilde 8 ein widerstandsloser, idealer Apparat von dem entsprechenden Stand der Anzeigelinie der zusammengehörigen Punkte U_0 und V_0 mit der Zunahme der Zuführungsgeschwindigkeit sich in den entsprechenden Stand der Anzeigelinie $U-V$ einstellt. Die Unempfindlichkeit des Regulierungsapparates benötigt jedoch einen Kraftüberschuß $\Delta P = U_2 H_2 - U_0 H_0$ zum Ingangsetzen des Ganges, wonach der Regulierungsapparat, entsprechend dem Punkte V_2 , in der im Bild 2 besprochenen Weise, eine größere Spalte öffnet als gewünscht, die zur Tiefsenkung des Mahlgutniveaus führt. Da der Apparat im Bewegungszustand empfindlicher ist, wird das Gleichgewicht nach einigen Ausschwingungen, entsprechend der Anzeigelinie UV , wieder hergestellt.

Bei Verminderung der Zuführungsgeschwindigkeit beginnt der Regulierungsvorgang in der Lage, die der Anzeigelinie $U_1 V_1$ entspricht.

In dem Bild 8 wurde auch eine einer größeren Einfallgeschwindigkeit entsprechende Anzeigelinie $U'_0 V'_0$ dargestellt. Da hier die Druckkurve flacher

verläuft, wird ein größerer Mahlgutniveau-Unterschied benötigt, um das gehörige ΔP zu erreichen, das heißt

$$OH'_2 - OH'_0 > OH_2 - OH_0.$$

Die Druckkurve nähert sich, nach der JANSSENSCHEN Theorie, um so mehr der Geraden, je kleiner der Reibungskoeffizient zwischen dem Mahlgut und der Gossenwand wird.

Die bei den Walzenstühlen verwendeten Glaszuführungsrohre ermöglichen nicht nur die Beobachtung, sie gestalten auch die Regulierung gleich-

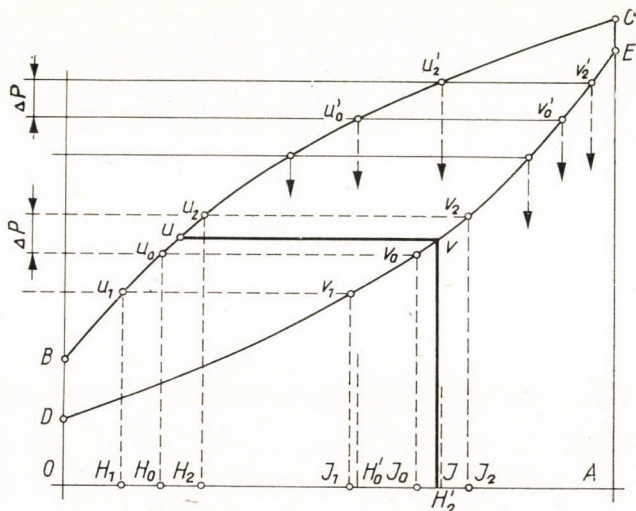


Bild 8. Unempfindlichkeit der Regulierung

mäßiger, da die Unempfindlichkeit bei verschiedenen Mahlgutniveau-Höhen nur im Falle gleichmäßiger Druckzunahme gleichbleibend sein kann.

Aus dem vorstehenden geht hervor, daß im Interesse einer guten Regulierung die richtige Gestaltung des veränderten Federdruckes

$$R \frac{k}{K} = c(y_1 + y) \frac{k}{K} \quad (7)$$

eine besondere Beachtung verdient, die mit der Federkonstante c und der entsprechenden Wahl des Verhältnisses des Vorspannungsweges y_1 und der Hebelarme k/K erreicht werden kann.

Nötigenfalls kann die Federkonstante c , durch Gruppierung von Federn mit verschiedener Stärke, das Verhältnis der Hebelarme, durch die richtige Wahl der Richtung der Federkraft R und des Neigungswinkels des Armes k , auch als Funktion des Federweges y veränderlich gestaltet werden.

In der Praxis haben wir fast immer mit dem Fall zu tun, daß die Federkonstante c und der Arm K einer bestimmten Feder unveränderlich sind [4], somit können lediglich der Arm r und Winkel φ des Hebels (Bild 9) so gewählt werden, daß für den Wert der Gleichung (7)

$$f(\varphi) = (y_1 + y) k \quad (8)$$

eine günstige Kurve erhalten wird.

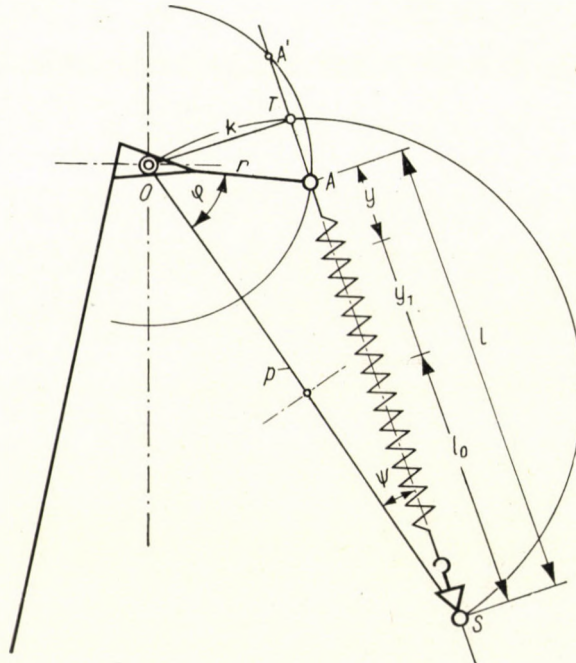


Bild 9. Geometrischer Zusammenhang zwischen der Federausdehnung und dem Hebelarm

In dem Bild 9 ist O der Drehpunkt des Hebels, S der Pol der Feder r die Länge des Hebelarmes, k der augenblickliche Momentarm. Die Entfernung l des Einbindepunktes A vom Pol S enthält die freie Länge l_0 der eventuellen Einbindungsteile, die in die Gerade l der Feder fallen, und die Federausdehnung $y_1 + y$. Das heißt,

$$AS = l = l_0 + y_1 + y. \quad (9)$$

Aus dem Bild 9 ist klar zu erkennen, daß zu jeder Lage des Winkels φ zwei Hebellagen, z. B. A und A' gehören, bei denen der Hebel k derselbe

ist, und die Fußpunkte T , die aus der Veränderung des Winkels φ der Hebelarme k entstehen, sich an dem *Thales-Kreis* mit dem Durchmesser

$$OS = p$$

reihen.

Der Zusammenhang (8) kann aus den Konstruktionsangaben auf folgende Weise bestimmt werden:

Mit den Bezeichnungen des Bildes 9 ist

$$AS = l = \sqrt{p^2 + r^2 - 2pr \cos \varphi}, \quad (10)$$

weiterhin

$$\sin \psi = \frac{r \sin \varphi}{l}$$

und

$$k = p \sin \psi = \frac{pr \sin \varphi}{l}. \quad (11)$$

Die Zusammenhänge (8) und (9) in Betracht gezogen erhalten wir

$$f(\varphi) = (l - l_0) \frac{pr \sin \varphi}{l} = pr \sin \varphi \left(1 - \frac{l_0}{l}\right), \quad (8a)$$

das heißt,

$$f(\varphi) = (y_1 + y) k = pr \sin \varphi \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{p^2 + r^2 - 2pr \cos \varphi}}\right). \quad (8b)$$

Demnach kann die Kurve $f(\varphi)$ auf Grund der Konstruktionsangaben nach (8a) aus der Zeichnung, nach (8b) durch Berechnung leicht bestimmt und die entsprechende Zone ausgewählt werden.

Die Kurve $P = f_3(n)$ hat den Charakter der auf die Längeneinheit des Bodendruckes bezogenen *JANSSENSCHEN* Kurve (Bild 10), deren Gleichung

$$Z = \left(1 - e^{0,8 \frac{x}{s}}\right) \quad (12)$$

ist, und wo x die Säulenhöhe, s die Seitenlänge des Quadratquerschnittes der Zelle bedeutet und der Oberflächendruck am Boden

$$p = sZ;$$

der Oberflächendruck an der Seitenwand

$$p_z = 0,7 sZ$$

beträgt.

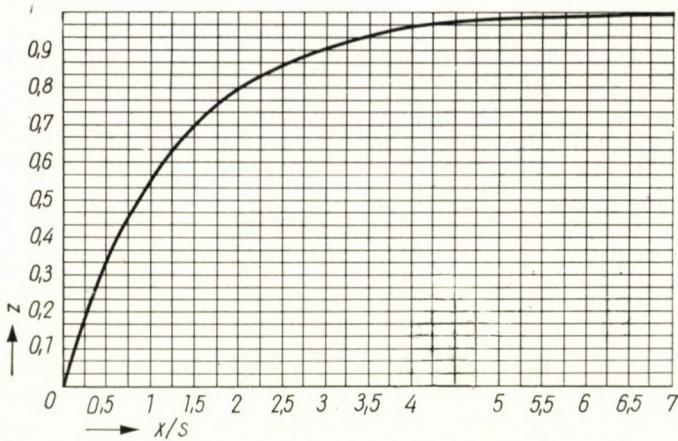


Bild 10. JANSSENSche Kurve zur Berechnung des Boden- und Seitendruckes für Weizen zwischen Holzwänden mit Quadratquerschnitt. x = Mahlguthöhe, s = Seitenlänge des Quadrates, $p = sZ$ (Flächendruck am Boden), $P = s^2Z$ (Bodendruck)

Es kann nur der Charakter dieser Kurve in Betracht gezogen werden, und bei der Aufzeichnung der $f_3(n)$ ist es empfehlenswert, ein oder zwei Punkte durch Messung zu bestimmen.

Die Mitteilungen dienen nicht nur beim Entwurf der einfachen Fallklappenregulierung als Stützpunkte, sie können auch bei den beobachtbaren und manchmal seltsamen Erscheinungen als Erläuterung dienen.

SCHRIFTTUM

1. Ganz-Danubius Werke: Die Entwicklung des Walzenstuhles mit einem kurzen Rückblick auf die Geschichte der Mülerei. Budapest, 1927.
2. ДЕМИДОВ: А. Р.: Мельничные балцевые станки. Walzenstühle der Mühlenindustrie, Versorgungsministerium, Buch und Zeitschrift Verlag, Budapest, 1951.
3. JANSSEN, H. A.: Versuche über Getreidedruck in Silozellen. Zeitschrift d. V. D. J. 1895. S. 1045.
4. SZÓKE, B.: Janssens Theorie über den Getreidedruck der Silozellen und die Fallklappenregulierung. »Malomipar« Budapest, 1956. Szept.

ZUSAMMENFASSUNG

In zahlreichen Betrieben der Bearbeitungsindustrie trachtet man die Gleichmäßigkeit der Speisung mit der einfachen Speiseklappenregulierung zu erreichen, die als eine der ältesten Art der Speisung bezeichnet werden kann. Das manchmal besondere Verhalten dieser Vorrichtung wird auch von vielen Fachleuten für unverständlich gehalten. Vom Autor wird das Graphikon der Zusammenhänge der einfachen Speiseklappenregulierung vorgeführt, das zahlreiche in der Praxis vorkommende Erscheinungen erläutert und beim Entwurf als Stützpunkt dienen kann.

ANALYSIS ON THE SIMPLE CONTROL OF A HINGED FLAP

B. SZÓKE

SUMMARY

In numerous branches of the processing industry, attempts have been made to obtain uniformity of feed controlled by a simple flap, which arrangement might be considered as one of the most ancient methods of feed. Nevertheless, its behaviour is often very particular, and hence, many engineers even consider it to be incomprehensible. The author presents a diagram of the relations governing the regulation by a simple, spring-loaded flap; this diagram explains many phenomena occurring in practice and can also be used as a base for design.

ANALYSE DE LA RÉGULATION PAR SIMPLE CLAPET

B. SZÓKE

RÉSUMÉ

Dans les industries de transformation, on essaie d'assurer l'uniformité de l'alimentation à l'aide d'un simple clapet. Ce système peut être considéré comme une des plus anciennes méthodes d'alimentation, mais son comportement parfois singulier est incompréhensible pour plus d'un spécialistes. L'auteur présente le graphique des relations gouvernant la régulation simple par clapet à ressort; ce diagramme explique de nombreux phénomènes se présentant dans la pratique, et peut aussi servir de base pour les calculs.

АНАЛИЗ ПРОСТОГО ЗОЛОТНИКОВОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Б. СЁКЕ

РЕЗЮМЕ

В ряде областей обрабатывающей промышленности стремятся добиться равномерности питания с помощью простого золотникового регулирования, что можно назвать старейшим методом питания, но его иногда странное поведение многие специалисты считают непонятным. Автор иллюстрирует график зависимостей простого пружинного золотникового регулирования, который объясняет ряд встречающихся на практике явлений и может служить исходной точкой при проектировании.

MATRIX-ALGEBRAISCHE BEHANDLUNG VON MESSBRÜCKEN MIT ZWEI DIREKT GEHEIZTEN HEISSLEITERN (THERMISTOREN)

E. LITVAI

LEHRSTUHL FÜR STRÖMUNGSLEHRE, TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 3. Februar 1959]

1. Einleitung

Unter den mannigfachen Anwendungsmöglichkeiten des Heißleiters [4, 6, 7, 9, 10] verdienen diejenigen besonders beachtet zu werden, bei denen es sich um die Messung physikalischer Größen handelt, deren Veränderung eine Veränderung der Wärmeübergangszahl herbeiführt. Wird der Heißleiter, sehr oft auch *Thermistor* genannt, durch den elektrischen Strom, der diesen durchfließt, auf eine über derjenigen der Umgebung liegende Temperatur erhitzt, wenn es sich also mit anderen Worten ausgedrückt, um einen *direkt geheizten* Heißleiter handelt, ist der Widerstand desselben — wie im Abschnitt 2 in Kürze dargelegt werden soll — außer der zugeführten elektrischen Leistung, den stoffbedingten und geometrischen Eigenschaften des Heißleiters und der Umgebungstemperatur auch von der Wärmeübergangszahl abhängig. Die Änderung der letzteren, wie sie etwa durch die Änderung der Strömungsgeschwindigkeit oder die des Druckes in der Umgebung des Heißleiters herbeigeführt wird, wird sich auf die elektrischen Eigenschaften desselben auswirken. Auf diese Weise läßt sich — mit Hilfe geeigneter Schaltungen — die Messung dieser und anderer Zustandsgrößen auf die Messung elektrischer Größen zurückzuführen. Da aber der Heißleiter auch unter dem Einfluß der Umgebungstemperatur steht, ist eine Temperaturkompensation vorzusehen, damit die erhaltenen Ergebnisse nur die Veränderung der zu messenden Zustandsgrößen erfassen.

Die in vorliegender Abhandlung eingehend geprüfte Schaltung ist eine einfache Wheatstone-Brückenschaltung, in welcher für die Temperaturkompensation ebenfalls ein zweiter, unmittelbar beheizter Heißleiter vorgesehen ist.

Die unmittelbar geheizten Heißleiter sind nichtlineare Elemente, was zu Folge hat, daß sich die Untersuchung des Problems verwickelter gestaltet, insbesondere nachdem mit der elektrischen Zustandsänderung des einen Heißleiters eine solche des anderen einhergeht. Die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den am Strom-Spannungsdiagramm der bei den Heißleiter definierten elektrischen Zustandsvektoren x_1 bzw. x_2 führt — wie im Abschnitt 3 nachgewiesen wird — zu einer inhomogenen, linearen Matrix-Gleichung von

der Form

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b},$$

deren Matrix \mathbf{A} und Vektor \mathbf{b} durch die linearen Elemente der Schaltung eindeutig bestimmt sind. Durch die Einführung eines aktiven, inhomogenen Vierpols wird die Benutzung der Elemente der Vierpoltheorie [1] und eine gewisse Verallgemeinerung des Problems möglich.

Im Abschnitt 4 sollen die Eigenschaften des Matrix-Zusammenhanges, im Abschnitt 5, als eine Anwendung der Methode, die Frage der Temperaturkompensation behandelt werden.

Obzwar durch die Anwendung der Matrix-Arithmetik die Übersichtlichkeit der Ergebnisse durchaus gewährleistet wird, soll der Anschaulichkeit halber die graphische Behandlungsweise überall mit herangezogenen werden.

Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen des Forschungsprogramms über Strömungsgeschwindigkeitmessungen am Lehrstuhl für Strömungslehre der Technischen Universität zu Budapest durchgeführt. Es sei an dieser Stelle Herrn Universitätsprofessor Dr. J. GRUBER, dem Herrn Dozenten Z. HENNYEY (Lehrstuhl für Nachrichtentechnik) und dem Herrn Adjunkten P. BAJCSAY (Lehrstuhl für Mathematik Nr. 5.) für ihre wertvollen Ratschläge mein Dank ausgesprochen.

Bezeichnungen

\mathbf{A}	Matrix der Brückenschaltung (19)
$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$	Elemente der Matrix \mathbf{A} (21)
A	Determinante der Matrix \mathbf{A}
\mathbf{a}	Vektor der inversen Abbildung (50)
a_i, a_u	Komponenten des Vektors \mathbf{a} (58)
B [$^{\circ}\text{K}$]	Energiekonstante des Heißleiters
\mathbf{b}	Vektor der Brückenschaltung (19)
b_i, b_u	Komponenten von \mathbf{b} (22), (43), (44)
C [$^{\circ}\text{K}/\text{W}$]	Leistungsempfindlichkeitskoeffizient des Heißleiters
E [V]	Elektromotorische Kraft
$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_u$	Orthogonale Einheitsvektoren (Abb. 3b)
F [m^2]	Fläche des Heißleiters
\mathbf{I}	Die Einheits-Matrix
i [A]	Stromstärke
i_1 [A]	Der Strom, der den Meß-Heißleiter durchfließt
i_2 [A]	Der Strom, der den Heißleiter für die Temperaturkompensation durchfließt
i_g [A]	Galvanometerstrom
P [W]	Elektrische Leistung
R [Ω]	Elektrischer Widerstand
R_1, R_2, R_3 [Ω]	Konstante Widerstände der Brückenschaltung (Abb. 3a)
R_g [Ω]	Widerstand des Galvanometerzweiges
R_0 [Ω]	Verkürzte Bezeichnung (14)
R_{∞} [Ω]	Charakteristischer Widerstand des Heißleiters (1)
U [V]	Elektrische Spannung
U_1 [V]	Klemmenspannung des Meß-Heißleiters
U_2 [V]	Klemmenspannung des Heißleiters für die Temperaturkompensation
U_g [V]	Galvanometerspannung
U_{01} [V]	Primäre Leerlaufspannung des inhomogenen Vierpols

U_{02} [V]	Sekundäre Leerlaufspannung des inhomogenen Vierpols
\mathbf{W}	Widerstandsmatrix des Vierpols
$W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}$	Elemente der Matrix \mathbf{W}
\mathbf{x}_1	Elektrischer Zustandsvektor des Meß-Heißleiters
\mathbf{x}_2	Elektrischer Zustandsvektor des Heißleiters für die Temperaturkompensation
α [W/m ² °K]	Wärmeübergangszahl des Heißleiters
δ	Winkel an der i, U -Ebene des Heißleiters, interpretiert nach (2)
δ_{11}	Winkel in der Ebene der Vektoren $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_u$, interpretiert nach Bild 5
θ [°K]	Temperatur der Umgebung des Heißleiters
θ_T [°K]	Temperatur des Heißleiters

2. Charakteristische Eigenschaften der Heißleiter

Die grundlegende Eigenschaft der Heißleiter besteht darin, daß bei ihnen der Zusammenhang zwischen dem Widerstand R und der Temperatur θ_T [°K] durch die Formel

$$R = R_\infty e^{\frac{B}{\theta_T}}, \quad (1)$$

in welcher B durch das Material und R_∞ [Ω] außerdem noch durch die geometrischen Abmessungen bedingte Werte darstellen, mit ausreichender Genauigkeit gekennzeichnet werden kann [2, 4].

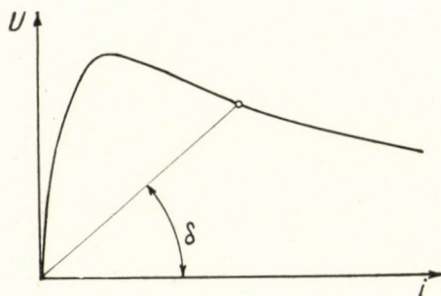


Abb. 1

Ist der Strom i der den Heißleiter durchfließt gering, so besteht zwischen der Temperatur desselben und der der Umgebung kein nennenswerter Unterschied. Bei zunehmender Stromstärke wird durch die Umwandlung der zugeführten elektrischen Energie in Wärme die Differenz $\theta_T - \theta$ beträchtlich, was auch eine beachtliche Änderung im Wert von R nach sich zieht. Der auf diese Weise unmittelbar beheizte Heißleiter, dessen Widerstand also von der Stromstärke abhängt, ist ein nichtlineares Element, da sich sein Widerstand nicht nach dem Ohmschen Gesetz verhält. Zur Charakterisierung seiner elektrischen Eigenschaften sollen daher die im Strom-Spannungsdiagramm aufgetragenen Kennlinien herangezogen werden. In Abb. 1 ist zum Beispiel

die an den Klemmen des Heißeiters bei einem gewissen, unveränderten physikalischen Zustand der Umgebung desselben zu messende Spannung U als Funktion des den Heißeiter durchfließenden, zeitlich konstanten Stromes i , die charakteristisch geformte *statische Kennlinie* dargestellt. Wird von irgendeinem Punkte derselben zum Anfangspunkt des Koordinatensystems eine Gerade gezogen, so schließt diese mit der Achse i den Winkel

$$\delta = \arctg \frac{U}{i} = \arctg R \quad (2)$$

ein, woraus nach (1) ersichtlich ist, daß bei zunehmender Stromstärke eine Erhöhung der Temperatur Θ_T des Heißeiters eintritt.

Die statische Kennlinie läßt sich in analytischer Form mit guter Annäherung angeben, unter der Voraussetzung, daß sich der Heißeiter im thermischen Gleichgewicht befindet, das heißt, daß die zugeführte elektrische Leistung

$$P = Ui \quad (3)$$

der Wärmeleistung, die an die Umgebung abgegeben wird, gleich ist. Es sei ferner vorausgesetzt, daß Strahlung und Wärmeleitung vernachlässigt werden können, und daß die Temperatur im Heißeiter überall gleich ist. Nun läßt sich das thermische Gleichgewicht durch Einführung des weiter unten noch eingehender zu behandelnden Leistungsempfindlichkeitskoeffizienten nach BJÖRK und DAVIDSON [3] durch die Gleichung

$$P = \frac{1}{C} (\Theta_T - \Theta) \quad (4)$$

ausdrücken.

Wird dann Θ_T aus (4) in (1) substituiert, so erhält man den Ausdruck

$$R = R_\infty \cdot e^{\frac{B}{CP+\Theta}}$$

der in den bekannten Formeln

$$i = \sqrt{P/R} \quad (5)$$

$$U = \sqrt{PR} \quad (6)$$

eingesetzt, zur Gleichung der statischen Kennlinie

$$i = \sqrt{P/R_\infty e^{\frac{B}{CP+\Theta}}}; \quad U = \sqrt{P \cdot R_\infty e^{\frac{B}{CP+\Theta}}} \quad (7)$$

mit dem Parameter P führt [3].

Die Form der statischen Kennlinie hängt nach (7) von den Größen C und Θ ab. Der Leistungsempfindlichkeitskoeffizient ist, wenn Gleichung (4) in einer, bei der Diskussion von Wärmeübertragungserscheinungen gebräuchlicheren Form, als

$$P = aF(\Theta_T - \Theta),$$

aufgeschrieben wird, gemäß der Formel

$$C = 1/a F$$

von der *Wärmeübergangszahl* abhängig, die hier mit der Dimension $[W/m^2 \text{ } ^\circ K]$ anwendbar ist. $F[m^2]$ stellt die bezüglich der Wärmeübertragung in Betracht kommende Fläche des Heißleiters dar. a ist von den geometrischen Kennzahlen desselben, folglich von seiner Form und seinen Abmessungen, ferner von den Zustandsgrößen des umgebenden Mediums (Temperatur, Geschwindigkeit, Druck usw.) abhängig; eben aus diesem Grund läßt sich ein Heißleiter zur Messung dieser Zustandsgrößen anwenden. Die Zusammenhänge, die zwischen der Wärmeübergangszahl und den Zustandsgrößen der Umgebung bestehen, werden in den Lehrbüchern, die sich mit Fragen der Wärmeübertragung auseinandersetzen, auf Grund sehr allgemeingültiger Ähnlichkeitskriterien, in dimensionsloser Form behandelt (z. B. [5]). Für unsere Zwecke dürfte es genügen, festzustellen, daß a nicht nur von der Temperatur der Umgebung, sondern auch von Θ_T abhängig ist, da sich um den Thermistor eine dünne, thermische Grenzschicht ausbildet, in der die Temperatur von Θ allmählich auf Θ_T ansteigt. Die Vernachlässigung dieses Umstandes — woraus sich auch die verhältnismäßig einfache Form der Gleichung (7) erklärt — ist in den meisten Fällen zulässig. Die Versuche von BJÖRK und DAVIDSON — in einer aus ruhender, atmosphärischer Luft bestehenden Umgebung — haben für die Richtigkeit dieser Annahme Beweis geführt [3]. Die Annahme, daß $C = \text{konst.}$ ist, ist also entlang einer gegebenen Kennlinie im allgemeinen zulässig.

Unter Beachtung unserer Zielsetzung kann ein Heißleiter folgendermaßen gekennzeichnet werden. Bei einem gewissen Ausgangszustand der Umgebung des Heißleiters kann die statische Kennlinie $i - U$ ermittelt werden. Im Sinne der Obengesagten und der Gleichung (7) läßt sich hierzu ein Θ - und ein C -Wert zuordnen. Es sei nun der Zustand der Umgebung geändert, jedoch in der Weise, daß sich nur Θ ändere, während die übrigen Zustandsgrößen unverändert bleiben. Im neuen Zustand kann die statische Kennlinie unter Zuordnung eines veränderten Θ -Wertes wieder bestimmt werden. Wird das Vorgehen mehrmals wiederholt, so erhält man eine Schar von Kennlinien entsprechend den verschiedenen Werten der Umgebungstemperatur, wobei für jede dieser Kennlinien die Voraussetzung $\Theta = \text{konst.}$ gültig ist. Die Größe

von C kann entlang der einzelnen Kennlinien als gleichbleibend angesehen werden, obzwar sich diese von Kennlinie zu Kennlinie ändern kann, aber — und darauf kommt es an — nur durch die Veränderung der Temperatur. Jedenfalls gehören zu Kennlinien mit nicht allzu unterschiedlichen Θ -Werten annähernd gleiche Werte von C . Die auf diese Weise definierten Kennlinien können Θ -Kennlinien genannt werden. Diese bilden — da der Ausgangszustand durch verschiedene C -Werte charakterisiert sein kann — eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit.

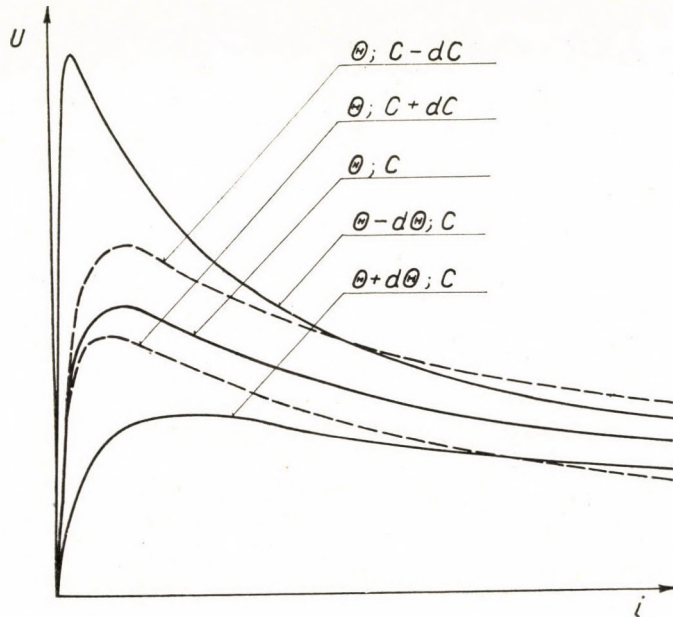


Abb. 2

Unter Zugrundelegung des oben angeführten Ausgangszustandes kann auch eine andere Kennlinienschar definiert werden, bestehend aus Individuen, die in der Weise ermittelt wurden, daß die Temperatur durchgehend in der Höhe des Ausgangswertes gehalten wird, während von den übrigen Zustandsgrößen jeweils die eine oder andere in der Weise variiert wird, daß sich C um einen gewissen Wert ändert. Zur statischen Kennlinie, wie sie im neuen Zustand ermittelt wurde, kann der neue C -Wert zugeordnet werden. Nach mehrmaliger Wiederholung dieser Prozedur erhält man eine Schar von C -Kennlinien für deren Individuen $C = \text{konst.}$ für deren Gesamtheit $\Theta = \text{konst.}$ ist.

In Abb. 2 sind je 3 typische C - und Θ -Kennlinien zu sehen, deren Kennwerte von den für den Ausgangszustand maßgeblichen C - und Θ -Werten um $\pm dC$ bzw. $\pm d\Theta$ abweichen.

Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Kennlinienscharen besteht darin, daß die zu den θ -Kennlinien gehörenden Werte von C — außer dem Ausgangszustand — nur durch die Temperatur determiniert werden, während die C -Werte der C -Kennlinien die übrigen Zustandsgrößen bestimmen.

Die Kennlinien können, falls B und R_∞ bekannt sind, mit Hilfe der Gleichung (7) auch rechnerisch ermittelt werden. In den meisten Fällen wird aber ihre experimentelle Bestimmung erforderlich sein. Die Bestimmung läßt sich, falls die Verwirklichung des Umgebungszustandes auf keinerlei Schwierigkeiten stößt, schnell und verhältnismäßig einfach durchführen [2, 3, 8]. Auf die gleiche Weise können auch die Kennwerte B und R_∞ ermittelt werden. Daß die Kennlinien auch in dimensionsloser Form ausgedrückt werden können [12] soll hier eben nur erwähnt werden.

Die Gleichung (7) hat unter anderen, hier nicht dargelegten Vorteilen auch den Vorzug, daß mit Hilfe derselben die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \theta}{\partial U} \text{ und } \frac{\partial \theta}{\partial i},$$

auf Grund welcher im Abschnitt 5 der **grad** θ -Vektor definiert werden soll, leicht berechnet werden können.

Wird nämlich die sich aus (7) ergebende Gleichung

$$U^2 = PR_\infty \cdot e^{\frac{B}{CP+\theta}}$$

logarithmisch differenziert, so erhält man den Ausdruck

$$2 \frac{dU}{U} = \frac{dP}{P} - B \cdot \frac{CdP + d\theta}{(CP + \theta)^2}.$$

Berücksichtigend, daß

$$dP = U di + i dU,$$

kommt man unter der Voraussetzung $i = \text{konst.}$ also $di = 0$, nach Umformungen zur Gleichung

$$(dU)_{i=\text{konst.}} = - \frac{BU}{(CP + \theta)^2 + BCP} d\theta,$$

welche sich mit Hilfe von (3) in der Form

$$\frac{\partial \theta}{\partial U} = -i \left(\frac{(CP + \theta)^2}{BP} + C \right) \quad (8)$$

anschreiben läßt. Dieser Ausdruck stimmt dem Wesen nach mit der auf einen anderen Weg erhaltenen Formel (50) von BJÖRK und DAVIDSON [3] überein.

Auf eine analoge Weise erhält man, vom Ausdruck

$$i^2 = \frac{P}{R_\infty \cdot e^{\frac{B}{CP+\Theta}}}$$

ausgehend, wenn $U = \text{konst.}$ und $dU = 0$ ist, die Gleichung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i} = U \left(\frac{(CP + \Theta)^2}{BP} - C \right). \quad (9)$$

Es sei nebenbei bemerkt, daß nach dem Obengesagten auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial C}{\partial U} = - \frac{1}{U} \left(\frac{(CP + \Theta)^2}{BP} + C \right) \quad (10)$$

bzw.

$$\frac{\partial C}{\partial i} = \frac{1}{i} \left(\frac{(CP + \Theta)^2}{BP} - C \right) \quad (11)$$

ermittelt werden können.

Hiermit haben wir die von unserem Standpunkt aus wichtigsten Eigenschaften der Heißeiter zusammengefaßt. Die eingehend erörterten C - und Θ -Kennlinien charakterisieren die bei einer bestimmten Umgebung möglichen elektrischen Zustände des Heißeiters. Der faktische elektrische Zustand, der *Arbeitspunkt* des Heißeiters wird von den Gegebenheiten der Schaltung bestimmt, in die derselbe eingebaut wurde.

3. Matrix-Zusammenhang zwischen den elektrischen Zustandsvektoren von zwei Heißeitern

a) Zusammenhänge der einfachen Brückenschaltung

Es soll nun die in Abb. 3a dargestellte Brückenschaltung mit zwei direkt geheizten Heißeitern untersucht werden. Die Widerstände R_1 , R_2 , R_3 und R_g sind konstant. Sie sollen hier als gegeben gelten. In R_1 ist auch der innere Widerstand des Spannungsgenerators mit der elektromotorischen Kraft E mit eingerechnet. Der Wert von R_g soll der Allgemeinheit halber als endlich angesehen werden, aus diesem Grunde muß auch der Galvanometerstrom berücksichtigt werden. Der Heißeiter T_1 wird im weiteren als Fühlerelement fungieren, das der Wirkung der zu messenden physikalischen Zustandsgröße

ausgesetzt ist, während dem Heißleiter T_2 die Rolle der Temperaturkompensation zufällt. Man kann ihnen aber auch eine andere, beliebige Rolle beilegen.

Um die Erscheinungen, die an den beiden Heißleitern vor sich gehen, in anschaulicher Weise darstellen zu können, wird das in Abb. 3b

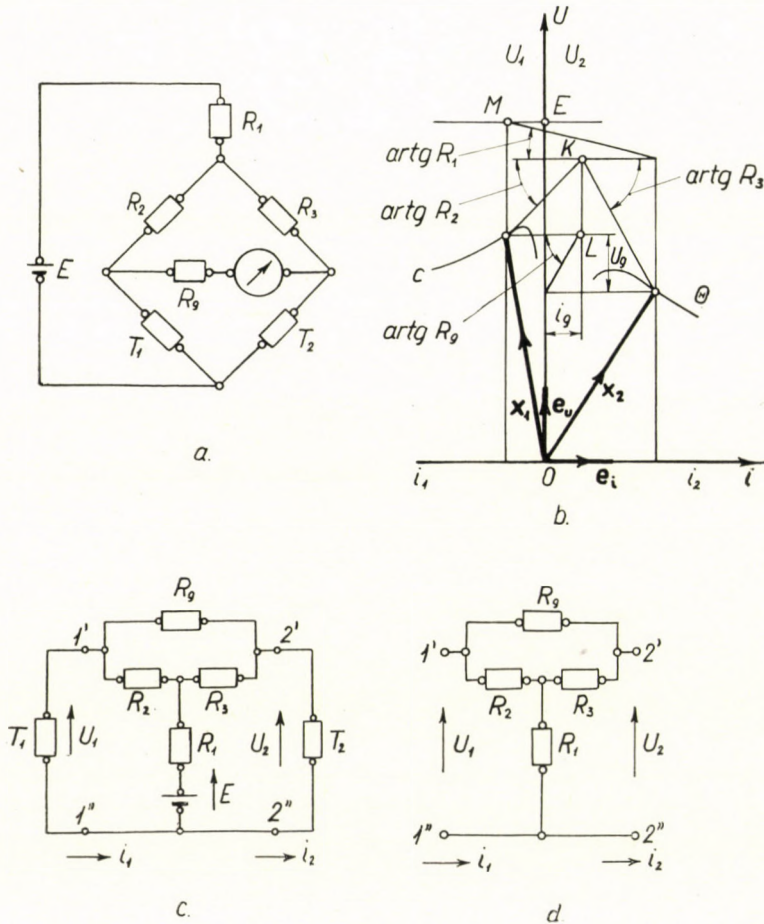


Abb. 3

gezeigte, eigentlich doppelte Koordinatensystem verwendet. In der Ebene i_1, U_1 lassen sich die Kennlinien von T_1 , in der Ebene i_2, U_2 die von T_2 darstellen. Die Unterschiedlichkeit in den positiven Richtungen von i_1 und i_2 könnte aber zu Mißverständnissen führen, es soll daher im weiteren für beide Ebenen die positive Richtung von i_2 als positiv angesehen werden, was zur Folge hat, daß in den weiter unten folgenden Berechnungen nur den negativen i_1 Werten eine reelle, physikalische Bedeutung beigelegt wird.

So kann der elektrische Zustand der Heißeiter mit Hilfe der Einheitsvektoren e_i und e_u , wie sie nach Abb. 3b definiert sind, durch die elektrischen Zustandsvektoren

$$\mathbf{x}_1 = i_1 \mathbf{e}_i + U_1 \mathbf{e}_u \quad (12)$$

bzw.

$$\mathbf{x}_2 = i_2 \mathbf{e}_i + U_2 \mathbf{e}_u \quad (13)$$

charakterisiert werden.

\mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 sind offenbar nicht voneinander unabhängige Werte. Die Dependenz zwischen denselben läßt sich unmittelbar auf Grund der in Abbildung 3b dargestellten Konstruktion ermitteln, wo eine allgemeine Position zu sehen ist. Die Grundlage der Konstruktion bildet der Zusammenhang (2) zwischen den Werten der einzelnen Widerstände und den Winkeln, welchen die Konstruktions-Hilfslinien mit der Geraden $U = konst.$ einschließen. Die Punkte K und L müssen auf einer Vertikalen, der Punkt M muß auf der Geraden $E = konst.$ liegen. Dem Bild kann auch die Galvanometerstromstärke i_g sowie die Galvanometerspannung U_g entnommen werden. Wie es zu sehen ist, läßt sich die Konstruktion in erster Linie im Fall leicht durchführen, wenn man von aufgenommenen Vektoren \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 ausgeht, sie leistet also eher bei der Wahl von E und der Widerstände Hilfe. Da die Lage der Horizontalen, die durch den Punkt »K« geht, unbestimmt ist, läßt sich die Konstruktion von \mathbf{x}_2 zum gegebenen \mathbf{x}_1 erst nach mehrmaligem Probieren durchführen. Wir entscheiden uns daher für die algebraische Ausdrucksweise.

Mit Hilfe der aus Abb. 3b zu entnehmenden geometrischen Zusammenhänge erhält man, allerdings erst nach einer langwierigen Berechnung, unter Heranziehung der aus Dimensionsgründen verkürzten folgenden Bezeichnung

$$R_0^2 = R_1(R_2 + R_3 + R_g) + R_2 R_3 \quad (14)$$

die Gleichungen

$$i_1 = \frac{1}{R_0^2} [(R_g R_3 + R_0^2) i_2 + (R_2 + R_3 + R_g) U_2 - (R_2 + R_3 + R_g) E] \quad (15)$$

$$U_1 = \frac{1}{R_0^2} [R_g(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) i_2 + (R_g R_2 + R_0^2) U_2 - R_g R_2 E], \quad (16)$$

die man kurz

$$i_1 = A_{11} i_2 + A_{12} U_2 + b_i \quad (17)$$

$$U_1 = A_{21} i_2 + A_{22} U_2 + b_u \quad (18)$$

oder noch kürzer in der Form

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A} \mathbf{x}_2 + \mathbf{b} \quad (19)$$

anschreiben kann auf Grund der Definition

$$\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i + b_u \mathbf{e}_u \quad (20)$$

bzw. der Definitionen (12) und (13).

Die Elemente der auf dieser Weise eingeführten Matrix \mathbf{A} werden durch die Formel

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{R_g R_3 + R_0^2}{R_0^2}; & A_{12} &= \frac{R_2 + R_3 + R_g}{R_0^2} \\ A_{21} &= \frac{R_g (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_0^2}; & A_{22} &= \frac{R_g R_2 + R_0^2}{R_0^2} \end{aligned} \quad (21)$$

die Komponenten des Vektors \mathbf{b} durch

$$b_i = -E \frac{R_2 + R_3 + R_g}{R_0^2}; \quad b_u = -E \frac{R_g R_2}{R_0^2} \quad (22)$$

angegeben.

Zwischen den Zustandsvektoren der beiden Heißeiter besteht also ein inhomogener, linearer funktioneller Zusammenhang, wie ihn (19) darstellt, dessen Kennwerte \mathbf{A} und \mathbf{b} durch die fixen und linearen Elemente der Schaltung, also von R_1, R_2, R_3, R_g und E eindeutig bestimmt werden. Die dieser Erkenntnis entspringenden Folgerungen werden durch die weiter unten gegebene Erörterungsweise übersichtlich dargelegt, wobei auch eine Möglichkeit zur Verallgemeinerung gegeben wird.

b) Anwendung der Elemente der Vierpoltheorie

Die in Abb. 3a vorgeführte Brückenschaltung wird durch das Bild in Abbildung 3c ersetzt. Darin werden die beiden Heißeiter untereinander durch einen *inhomogenen oder aktiven*, das heißt, *einen Spannungsgenerator enthaltenden Vierpol* zwischen den Klemmen 1', 1'', 2' und 2'' verbunden. Da die Elemente des Vierpols linear sind, kann das Prinzip der Überlagerung zur Anwendung kommen, es gelten also für U_1 und U_2 die Zusammenhänge

$$U_1 = U_{01} + W_{11} i_1 + W_{12} i_2 \quad (23)$$

$$U_2 = U_{02} + W_{21} i_1 + W_{22} i_2. \quad (24)$$

Die Gleichungen (23) und (24) können folgendermaßen aufgebaut werden. U_{01} stellt die zwischen den Klemmen 1', 1'' meßbare Spannung, U_{02} , diejenige zwischen den Klemmen 2', 2'' dar, wenn $i_2 = i_1 = 0$ ist, das heißt,

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_{01} \\ U_2 &= U_{02} \end{aligned} \right\} i_1 = i_2 = 0. \quad (25, 26)$$

Im vorliegenden Fall ist als Folge der Anordnung der Schaltung

$$U_{01} = U_{02} = E. \quad (27)$$

Indem man (26) ähnliche Ausdrücke anschreibt:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= W_{11} i_1 \\ U_2 &= W_{21} i_1 \end{aligned} \right\} E = i_2 = 0 \quad (28, 29)$$

und

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= W_{12} i_2 \\ U_2 &= W_{22} i_2 \end{aligned} \right\} E = i_1 = 0, \quad (30, 31)$$

können — da $E = 0$ ist — bereits die Ergebnisse der Theorie der homogenen Vierpole benützt werden [1]. Den darin angewandten Ausdrücken entsprechend werden die durch die Zusammenhänge (28) bis (31) definierten

$$\begin{aligned} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{aligned} \quad (32)$$

Widerstände

Primärleerlaufwiderstand

Sekunderkernwiderstand

Primärkernwiderstand

Sekunderleerlaufwiderstand

des homogenen Vierpols nach Abb. 3d und die laut Formel (32) angeordnete Matrix W *Widerstandsmatrix* des Vierpols genannt.

Von den Gleichungen (28) bis (31) ausgehend erhält man für den von uns untersuchten Vierpol nach kurzem Rechnen die Ergebnisse

$$W_{11} = \frac{R_g R_2 + R_0^2}{R_2 + R_3 + R_g}; \quad W_{12} = -\frac{R_0^2}{R_2 + R_3 + R_g} \quad (33, 34)$$

$$W_{21} = \frac{R_0^2}{R_2 + R_3 + R_g}; \quad W_{22} = -\frac{R_g R_3 + R_0^2}{R_2 + R_3 + R_g} \quad (35, 36)$$

Wird i_1 aus (24) ausgedrückt und in (23) eingesetzt, so gelangt man zu den Formeln

$$i_1 = \frac{W_{22}}{W_{21}} i_2 + \frac{1}{W_{21}} U_2 - \frac{U_{02}}{W_{21}} \quad (37)$$

$$U_1 = -\frac{W_{11} W_{22} - W_{12} W_{21}}{W_{21}} i_2 + \frac{W_{11}}{W_{21}} U_2 + U_{01} - \frac{W_{11}}{W_{21}} U_{02}, \quad (38)$$

aus welchen nach Vergleich mit (17) und (18) die Zusammenhänge

$$A_{11} = -\frac{W_{22}}{W_{21}}; \quad A_{12} = \frac{1}{W_{21}} \quad (39, 40)$$

$$A_{21} = -\frac{W_{11}W_{22} - W_{12}W_{21}}{W_{21}}; \quad A_{22} = \frac{W_{11}}{W_{21}} \quad (41, 42)$$

sowie die Gleichungen

$$b_i = -\frac{U_{02}}{U_{21}}; \quad b_u = U_{01} - \frac{W_{11}}{W_{21}} U_{02} \quad (43, 44)$$

resultieren; unter Verwendung von (33) bis (36) erhält man mit den Gleichungen (22) und (23) übereinstimmende Ergebnisse.

Die Gleichungen (39) bis (42) beschreiben die Zusammenhänge zwischen den Elementen der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{W} . Die Umrechnung kann durch Ausdrücken der Elemente von \mathbf{W} als Funktion der Elemente von \mathbf{A} vollständiger gemacht werden. Dies läßt sich ohne Schwierigkeiten bewerkstelligen und führt zu den Formeln

$$W_{11} = \frac{A_{22}}{A_{12}}; \quad W_{12} = -\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}{A_{12}} \quad (45, 46)$$

$$W_{21} = \frac{1}{A_{12}}; \quad W_{22} = -\frac{A_{11}}{A_{12}}. \quad (47, 48)$$

Auf eine ähnliche Weise kann man auch (43) und (44) umrechnen; unter Verwendung von (27), (45) und (47) erhält man die aufschlußreichen Formeln

$$b_i = -EA_{12}; \quad b_u = -E(A_{22} - 1). \quad (49)$$

Da es vorkommen kann, daß bei den Verwendungen auch eine Inversion der Gleichungen vorgenommen zu werden braucht, sollen die Elemente der mit den Gleichungen

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}, \quad (50)$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_1 - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b},$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}$$

definierten, reziproken Matrix \mathbf{A}^{-1} und die Komponenten des Vektors \mathbf{a} ebenfalls angeführt werden. Für die reziproke Matrix ergibt sich die bekannte

Formel

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} -A_{22} & -A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \quad (51)$$

in der

$$A = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} \quad (52)$$

die Determinante der Matrix \mathbf{A} ist, die mit Hilfe der Gleichungen (39) bis (42) in der Form

$$A = -\frac{W_{12}}{W_{21}} \quad (53)$$

angeschrieben werden kann. Der aus (34) und (35) erkennbare, typische Zusammenhang

$$W_{12} = -W_{21} \quad (54)$$

ermöglicht es, mit dem Wert

$$A = 1 \quad (55)$$

zu rechnen, wodurch sich die Berechnung der reziproken Matrixelemente sehr einfach durchführen läßt. Da sich für die Komponenten von \mathbf{a} nach kurzem Rechnen die Gleichungen

$$a_i = \frac{U_{01}}{W_{21}}; \quad a_u = U_{01} \frac{W_{22}}{W_{21}} = U_{02} \frac{W_{12}}{W_{21}} \quad (56)$$

ergeben, können mit den Werten von (33) bis (36) und unter Berücksichtigung von (27) die Ergebnisse

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{R_g R_2 + R_0^2}{R_0^2} & -\frac{R_2 + R_3 + R_g}{R_0^2} \\ \frac{R_g(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}{R_0^2} & \frac{R_g R_3 + R_0^2}{R_0^2} \end{bmatrix} \quad (57)$$

und

$$a_i = E \frac{R_2 + R_3 + R_g}{R_0^2} = E A_{12}; \quad a_u = -E \frac{R_g R_3}{R_0^2} = -E(A_{11} - 1) \quad (58)$$

erhalten werden. Die Transformationen (19) bzw. (50) werden also durch die Elemente der Matrix \mathbf{A} und die elektromotorische Kraft E voll bestimmt.

c) Verallgemeinerung des Problems

Auf Grund des vorstehenden ist es leicht einzusehen, daß mit Hilfe der geschilderten Methode auch komplexere Schaltungen als die dargelegte berechnet werden können. Das geschilderte Verfahren läßt sich gleichermaßen anwenden, wenn mit den Heißeleitern T_1 und T_2 parallel oder in Serie Widerstände geschaltet werden — was zwecks Abänderung der Kennlinien vorteilhaft sein mag —, aber auch, wenn man andere Änderungen vornimmt. Der Zusammenhang zwischen den i, U Ebenen der beiden Heißeleiter bleibt auch

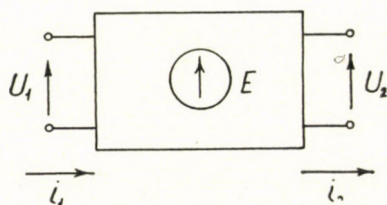


Abb. 4

weiterhin der Matrix-Zusammenhang laut Gleichung (19), nur werden die Elemente von \mathbf{A} bzw. \mathbf{W} , ferner die Komponenten von \mathbf{b} andere Werte annehmen.

Wenn man die linearen Elemente der allgemeinen Schaltung in einem inhomogenen Vierpol nach Abb. 4 zusammenfaßt, lassen sich unsere Ergebnisse wie folgt darlegen. Ein aus linearen Elementen bestehender, inhomogener (das heißt, einen Spannungsgenerator enthaltender) Vierpol bringt zwischen den in der i, U Ebene der an den Polen desselben angelegten Elemente definierten

$$\mathbf{x}_1 = i_1 \mathbf{e}_i + U_1 \mathbf{e}_u,$$

$$\mathbf{x}_2 = i_2 \mathbf{e}_i + U_2 \mathbf{e}_u$$

elektrischen Zustandsvektoren einen inhomogenen linearen Matrix-Zusammenhang von der Form

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}$$

zustande.

Dieser Umstand erleichtert im hohen Maße die Untersuchung der Erscheinungen, insbesondere, wenn die dem Vierpol angeschlossenen Elemente nicht linear sind. Um dies zu illustrieren, sollen im folgenden die Eigenschaften des mit Abb. 3a definierten Vierpols eingehend untersucht werden.

4. Eigenschaften des Matrix-Zusammenhanges

a) Darstellung der Transformation in der i, U Ebene

Der durch Abb. 3a sowie die Gleichungen (21) und (22) definierte Zusammenhang, Transformation, hat aufschlußreiche Eigenschaften.

Es sei die Transformation nach (19) auf den Vektor

$$\mathbf{x}_2 = E\mathbf{e}_u$$

angewendet. Die sich nach kurzem Rechnen unter Berücksichtigung der Zusammenhänge (40), (42) und (50) ergebende Gleichung

$$A E \mathbf{e}_u + \mathbf{b} = E \mathbf{e}_u \quad (59)$$

zeigt, daß der mit dem Zustandsvektor $E\mathbf{e}_u$ gekennzeichnete Punkt der Ebene der Einheitsvektoren \mathbf{e}_i und \mathbf{e}_u einen ortsfesten Punkt der Transformation darstellt. Das besagt, daß die Transformation hinsichtlich der nach Art $\mathbf{x} - E\mathbf{e}_u$ gebildeten Vektoren homogen sein wird — wie das aus der Erweiterung

$$\mathbf{x}_1 - E\mathbf{e}_u = A\mathbf{x}_2 + \mathbf{b} - E\mathbf{e}_u$$

und aus dem von derselben unter Verwendung von (59) resultierenden Zusammenhang

$$\mathbf{x}_1 - E\mathbf{e}_u = A\mathbf{x}_2 + \mathbf{b} - (A E \mathbf{e}_u + \mathbf{b}) = A(\mathbf{x}_2 - E\mathbf{e}_u) \quad (60)$$

hervorgeht. Die Transformation wird also durch die Koordinatenverschiebung mit $E\mathbf{e}_u$ homogenisiert, während A unberührt bleibt.

Es kann nun leicht der Beweis geführt werden, daß die Transformation den Anfangspunkt des ursprünglichen Koordinatensystems (den Vektor $-E\mathbf{e}_u$ des verschobenen Koordinatensystems) in einem Punkt mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_1 - E\mathbf{e}_u = A(-E)\mathbf{e}_u = -EA_{12}\mathbf{e}_i - EA_{22}\mathbf{e}_u,$$

oder wie es daraus folgt, in einem mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_1 = -EA_{12}\mathbf{e}_i - E(A_{22} - 1)\mathbf{e}_u \quad (61)$$

überführt, wodurch teils eine geometrische Erörterung der Elemente der Matrix A nach Abb. 5 möglich wird, zum anderen das transformierte Bild der Achse U_2 (die Gerade b, B, E) ebenfalls angegeben wird. Der Zusammenhang (45) bestimmt den Tangens des Winkels δ_{11} ; durch Vergleich von (61)

mit dem Zusammenhang $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{o} + \mathbf{b}$ werden die Zusammenhänge (49) aufs neue belegt. Durch eine ähnliche, hier nicht detaillierte Berechnung lassen sich von der Untersuchung der reziproken Transformation (50) ausgehend auch die Matrix-Elemente A_{11} und W_{22} auf die im Abb. 5 vorgeführte Weise erörtern, außerdem kann auch das Bild der Achse U_1 (die Gerade EKa) dargestellt werden. Auf Grund von (47) kann die im Bild vorgeführte Interpretation von W_{21} und W_{12} unter Beweis gestellt werden. Es läßt sich ebenfalls nachweisen, daß der Vektor

$$\mathbf{x}_2 = E \frac{A_{22} - 1}{A_{21}} \mathbf{e}_i$$

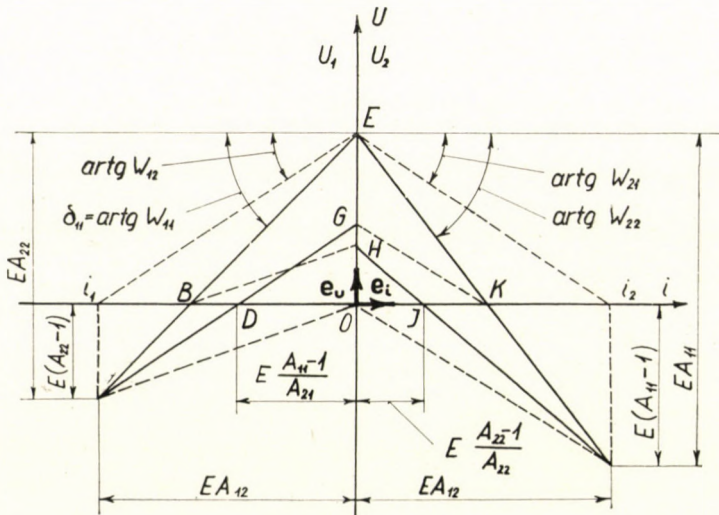


Abb. 5

durch die Transformation in den Vektor

$$\mathbf{x}_1 = -E \frac{A_{11} - 1}{A_{21}} \mathbf{e}_i$$

übergeführt wird und umgekehrt. Da die durch die beiden Vektoren definierten Punkte (J bzw. D) in die Achse i fallen, können mit ihrer Hilfe auch die transformierten Bilder der Achse i gezeichnet werden.

Die Geraden EO und OK , das heißt, das Achsensystem i_2, U_2 gehen also in die Geraden Eb und bG , die Geraden Ea und aH hingegen in die Geraden EO und OB , in das Achsensystem i_1, U_1 über und umgekehrt. E stellt einen Punkt, der sich selbst entspricht, dar, während für Ob , für HB , für JD , für KG und für aO die entsprechenden Punkte sind, und umgekehrt.

Aus den transformierten Bildern der Achsen läßt sich der wichtige Schluß ziehen, daß der Zustandsvektor des Heißeleiters T_1 nur innerhalb des Viereckes $EBDGE$ befindliche, der Zustandsvektor des Heißeleiters T_2 nur innerhalb des Viereckes $EKJHE$ liegende Werte haben kann, da — als Folge des Zusammenhanges zwischen den Zustandsvektoren der beiden Heißeleiter — nur den Zuständen, die innerhalb des genannten Bereiches obwalten, eine physikalische Bedeutung beigelegt werden kann. *Die durch den Vierpol bedingte Schaltung setzt den möglichen Zustandsänderungen bei Heißeleitern Schranken.*

Da die Transformation linear ist, verschieben sich die einzelnen Punkte der Achse U den Geraden Ob bzw. Oa parallel, so ist zum Beispiel die Gerade

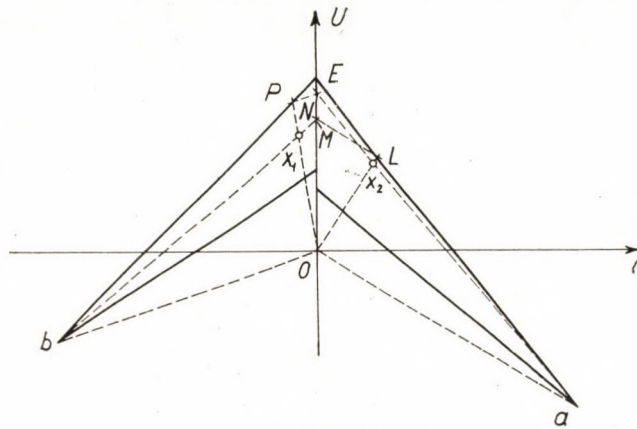


Abb. 6

BH zu bO und GK zu Oa parallel. Darauf beruht auch die in Abb. 6 gezeigte Konstruktion, mittels welcher die zusammengehörenden Vektoren x_1 und x_2 konstruiert werden können. Der Endpunkt des Vektors x_2 wird vom Schnittpunkt der Geraden OL und aN bestimmt. Da laut dem vorstehenden LM und NP entspricht, ergibt der Schnittpunkt der Geraden OP und bM den Endpunkt von x_1 . Die Konstruktion läßt sich übrigens mit Geraden beliebiger Lage durchführen, zur Konstruktion werden die Schnittpunkte dieser und der Geraden Eb , EO und Ba bzw. die diesen Schnittpunkten entsprechenden Punkte herangezogen.

Durch eine von Punkt zu Punkt durchgeführte Konstruktion können auch die transformierten Bilder der in der Ebene des einen Heißeleiters interpretierten Kennlinien bestimmt werden, obzwar man auch in der Weise vorgehen kann, daß die einander entsprechenden Punkte mit Hilfe des transformierten Bildes des in der einen, zum Beispiel in der i_2 , U_2 Ebene aufgenommenen, durch die rechtwinkligen Einheitsvektoren e_i , e_u determinierten

Liniennetzes aufgesucht werden (Abb. 7). Das Element des in der Ebene i_1, U_1 sich ergebenden schiefwinkligen Liniennetzes wird durch die Vektoren

$$\mathbf{Ae}_i = A_{11} \mathbf{e}_i + A_{21} \mathbf{e}_u \quad \text{und} \quad \mathbf{Ae}_u = A_{12} \mathbf{e}_i + A_{22} \mathbf{e}_u$$

bestimmt.

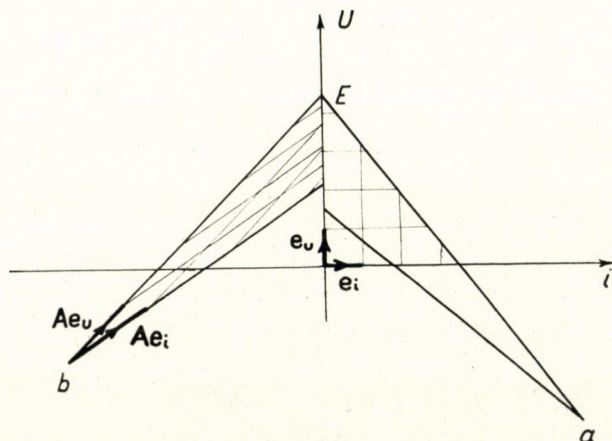


Abb. 7

b) Berechnung der Galvanometerspannung

Die Spannung an den Klemmen des in die Meßbrücke eingeschaltete* Gerätes, kann laut Abbildung 8 durch die Differenz der skalaren Produkten

$$U_g = \mathbf{x}_1^* \mathbf{e}_u - \mathbf{x}_2^* \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_u^* (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (62)$$

angegeben werden. Aus dem Zusammenhang (19) ist jedoch

$$U_g = \mathbf{e}_u^* (\mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b} - \mathbf{x}_2) = \mathbf{e}_u^* (\mathbf{A}\mathbf{x}_2 - \mathbf{I}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}) = \mathbf{e}_u^* [(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}], \quad (63)$$

worin \mathbf{I} die Einheitsmatrix ist. Mit der Bezeichnung

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{U}$$

erhält man schließlich die Gleichung

$$U_g = \mathbf{e}_u^* (\mathbf{U}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}), \quad (64)$$

* Im allgemeinen bedeutet \mathbf{a}^* die Transponierte des Säulenvektors \mathbf{a} . Wenn z. B.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_i \\ a_u \end{bmatrix} \text{ ist, dann ist } \mathbf{a}^* = [a_i, a_u].$$

die besagt, daß — bei einer gegebenen Schaltung — die *Galvanometerspannung durch den einen Zustandsvektor eindeutig bestimmt wird.*

Die anschauliche Erörterungsweise scheint auch hier angebracht zu sein, die hier dadurch verwirklicht wird, daß wir die geometrischen Stellen derjenigen Vektoren \mathbf{x}_2 suchen, für die

$$U_g = \text{konst.}$$

ist. Da

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A_{11} - 1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

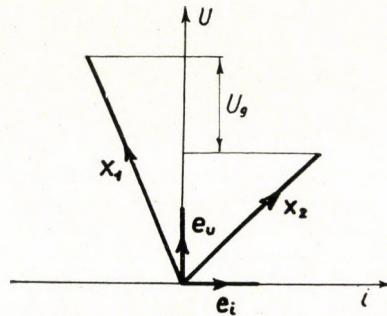


Abb. 8

ist, erhält man durch Entwicklung von (64) mit (49) die Gleichung

$$U_g = A_{21} i_2 + (A_{22} - 1) U_2 - E(A_{22} - 1) \quad (67)$$

oder durch Ausdrücken von U_2 die Gleichung

$$U_2 = -\frac{A_{21}}{A_{22}-1} i_2 + E + \frac{U_g}{A_{22}-1} \quad (68)$$

einer parallelen Geradenschar mit dem Parameter U_g . Es ist leicht einzusehen, daß dem Fall, wo $U_g = 0$ ist, das heißt, dem der *abgeglichenen Brücke* eine Gerade mit der Gleichung

$$U_2 = -\frac{A_{21}}{A_{22}-1} i_2 + E$$

entspricht, dieselbe läuft durch die in Abb. 5 definierten Punkte E und J (Abb. 9). Die Prozedur läßt sich in der Weise wiederholen, daß aus (62) der Ausdruck

$$U_g = \mathbf{e}_u^*(\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}) = \mathbf{e}_u^*[(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1})\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}]$$

gebildet wird. Indem man diesen im Sinne des vorstehenden entwickelt, erhält man die Gleichung

$$U_1 = \frac{A_{21}}{A_{11} - 1} i_1 + E - \frac{U_g}{A_{11} - 1}, \quad (69)$$

also die auf die Ebene i_1, U_1 transformierte Gleichung der Geradenschar (68).

Die Gerade für den Fall $U_g = 0$, geht erwartungsgemäß durch die Punkte E und D .

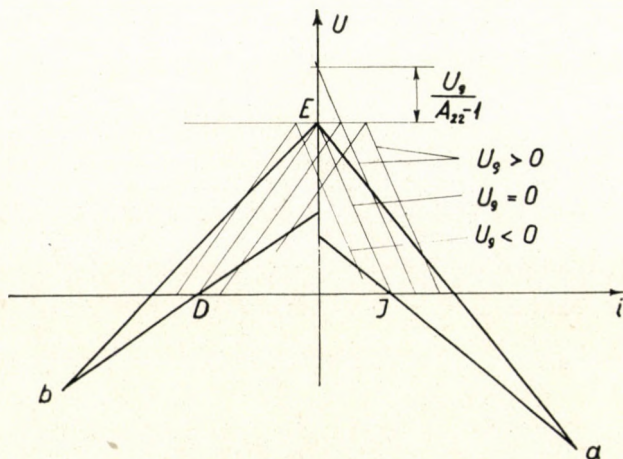


Abb. 9

Die Schnittpunkte der entsprechenden Individuen der beiden Geradenscharen — wie dies bereits nach Durchführung der Substitutionen $i_1 = i_2 = i$ und $U_1 = U_2 = U$ durch die Lösung des Gleichungssystems bestehend aus den Gleichungen (68) und (69) nachgewiesen werden kann — fallen auf die waagerechte Linie $U = E$ (Abb. 9), während die Abszisse i der Schnittpunkte mit Hilfe der Formel

$$i = \frac{U_g}{A_{21}}$$

berechnet werden kann.

Da in den einander entsprechenden Bildern der Geraden $U_g = \text{konst.}$ sich einander entsprechende Punkte befinden, können diese zur Konstruktion der zusammenhängenden Punktenpaare herangezogen werden, da das Bild der durch den Endpunkt des Vektors x_2 laufenden also EJ parallelen Geraden $U_g = \text{konst.}$ und das nach der Abbildung 6 konstruierte Bild der beliebigen, durch den Endpunkt von x_2 laufenden anderen Geraden sich im Endpunkt des Vektors x_1 schneiden.

Die geometrische Auslegung der matrix-algebraischen Erörterungsweise stellt — wie man sieht — in anschaulicher Weise die Eigenschaften des zwischen den i , U Ebenen der Heißeiter bestehenden Zusammenhangs klar dar. Auf Grund des Gesagten können zur Bemessung von Meßbrücken mit Heißeitern den Durchblick erleichternde graphische Verfahren mit herangezogen werden.

5. Theoretische Grundlagen der Temperaturkompensation

a) Zustandsänderungen in den i , U Ebenen

Es ist leicht einzusehen, daß zwischen den Veränderungen dx_1 bzw. px_2 der elektrischen Zustandsvektoren der Heißeiter, die miteinander in einer,

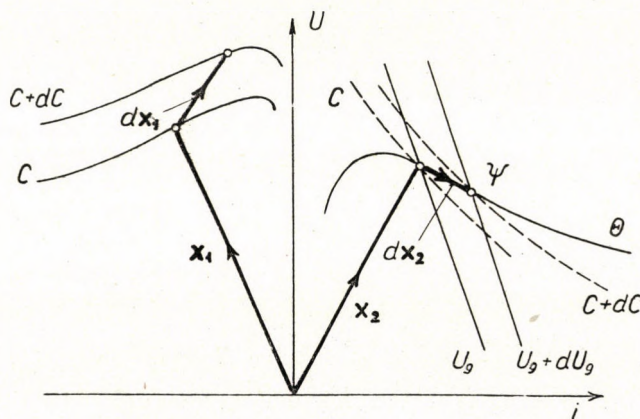


Abb. 10

durch die Gleichung (19) beschriebenen Beziehung stehen, ein linearer homogener Matrix-Zusammenhang von der Form

$$dx_1 = A dx_2 \quad (70)$$

besteht, der übrigens auch für endliche Änderungen Gültigkeit hat. Die Veränderung der Zustandsvektoren kann bei einer gegebenen Schaltung auf physikalische Zustandsänderungen, die sich in der Umgebung der Heißeiter abspielen, zurückgeführt werden. Wird zum Beispiel der Heißeiter T_2 bei konstanter Temperatur θ_2 gehalten, während der Heißeiter T_1 unter Umstände gebracht wird, die eine Änderung des Leistungsempfindlichkeitskoeffizienten C um den Wert dC bewirken, so hat die Richtung des Vektors dx_2 (Abb. 10) in die der Sekante der θ_2 -Kennlinie zu fallen.

Bei der graphischen Behandlung des Problems ist also in der Weise vorzugehen, daß die Kennlinien C und $C + dC$ mit der im vorigen Abschnitt

dargelegten Konstruktion auf die Ebene i_2 , U_2 transformiert werden. Der Punkt ψ , in dem sich das transformierte Bild von $C + dC$ und die Kennlinie θ_2 schneiden, bestimmt bereits eindeutig dx_2 und so ergibt sich auf Grund von (70) auch dx_1 . Werden dann auch die Geraden $U_g = \text{konst.}$ gezeichnet, läßt sich auch die Änderung der Galvanometerspannung wie sie die Zustandsänderung bewirkt, leicht und schnell bestimmen.

Durch Transformation der entsprechenden Kennlinien kann man die Zustandsänderungen auch in der i , U Ebene, des einen Heißleiters voll erfassen.

Eine ähnliche Art der Lösung ist auch im Fall gegeben, daß sich die Umgebungstemperaturen für beide Widerstände um den gleichen Wert $d\theta$

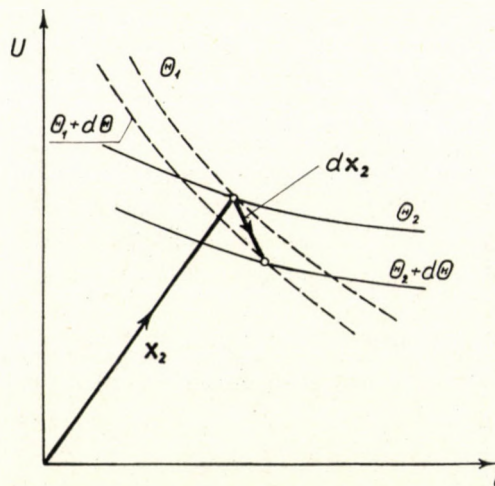


Abb. 11

verändern. Die θ -Kennlinien werden auf die Ebene i_2 , U_2 transformiert. Die Zustandsänderung dx_2 wird durch den Schnittpunkt der Kennlinien für die Temperaturen θ_1 und θ_2 vor der Temperaturänderung, sowie durch den Schnittpunkt der Kennlinien $\theta_1 + d\theta$ und $\theta_2 + d\theta$ bestimmt (Abb. 11).

Offenbar kann die Temperaturkompensation nur dann als realisiert angesehen werden, wenn der Zustandsänderungsvektor dx_2 den Geraden $U_g = \text{konst.}$ parallel ist. In diesem Fall ist nämlich die Galvanometerspannung von den Temperaturänderungen in der Umgebung unabhängig, und hängt nur von den zu messenden physikalischen Zustandsgrößen ab.

b) Bedingungsgleichung der Temperaturkompensation

Unsere auf geometrischer Grundlage beruhenden Überlegungen sollen nun eine mathematische Formulierung erhalten. Zu diesem Zwecke ist es

zweckdienlich in den Ebenen der einzelnen Heißeiter Temperaturgradienten von der Form

$$\mathbf{grad} \theta_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial i_1} \mathbf{e}_i + \frac{\partial \theta_1}{\partial U_1} \mathbf{e}_u \quad (71)$$

bzw.

$$\mathbf{grad} \theta_2 = \frac{\partial \theta_2}{\partial i_2} \mathbf{e}_i + \frac{\partial \theta_2}{\partial U_2} \mathbf{e}_u \quad (72)$$

zu interpretieren. Die einzelnen Komponenten können auf die im Abschnitt 2 erörterte Weise auf Grund der Gleichungen (8) und (9) oder mit Hilfe eines graphischen Verfahrens ermittelt werden. So bestehen zwischen der elektrischen Zustandsänderung und der Temperaturänderung die folgenden Zusammenhänge:

$$d\theta_1 = (\mathbf{grad} \theta_1)^* x d dx_1 \quad (73)$$

und

$$d\theta_2 = (\mathbf{grad} \theta_2)^* dx_2. \quad (74)$$

Spielt sich daher in der Umgebung beider Heißeiter die gleiche Temperaturänderung ab, das heißt $d\theta_1 = d\theta_2$ ist, so erhält man die Gleichung

$$(\mathbf{grad} \theta_1)^* dx_1 = (\mathbf{grad} \theta_2)^* dx_2 \quad (75)$$

oder nach (70)

$$(\mathbf{grad} \theta_1)^* A dx_2 = (\mathbf{grad} \theta_2)^* dx_2 \quad (76)$$

die sich mit Hilfe der transponierten Matrix

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (77)$$

in der Form

$$dx_2^* \mathbf{A}^* \mathbf{grad} \theta_1 = dx_2^* \mathbf{grad} \theta_2 \quad (78)$$

bzw.

$$dx_2^* (\mathbf{A}^* \mathbf{grad} \theta_1 - \mathbf{grad} \theta_2) = 0 \quad (79)$$

anschreiben läßt.

Aus (78) geht unmittelbar hervor, daß der Vektor $\mathbf{A}^* \mathbf{grad} \theta_1$ ein Gradient des auf die Ebene i_2, U_2 transformierten Temperaturfeldes θ_1 darstellt, während (79) besagt, daß die Änderung des Zustandsvektors x_2 zum Vektor $\mathbf{A}^* \mathbf{grad} \theta_1 - \mathbf{grad} \theta_2$ senkrecht vor sich geht. Die Möglichkeit nämlich, daß $\mathbf{A}^* \mathbf{grad} \theta_1 - \mathbf{grad} \theta_2 = 0$ ist, bedeutet, daß in diesem Fall dx_2 unbestimmt, die Meßbrücke instabil wird, also sich in einem Zustand befindet, der zu vermeiden ist.

Nach dem vorstehenden besteht die Bedingung für die Temperaturkompensation darin, daß $d\mathbf{x}_2$ den Geraden $U_g = \text{konst.}$ parallel sein muß. Wird also in (79) $d\mathbf{x}_2$ durch einen zu den Geraden $U_g = \text{konst.}$ parallelen Vektor

$$\mathbf{u} = \frac{A_{22} - 1}{A_{21}} \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_u \quad (80)$$

ersetzt (die Parallelität geht aus (68) hervor), erhält man als Bedingung für die Temperaturkompensation die Gleichung

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{A}^* \text{grad } \theta_1 - \text{grad } \theta_2) = 0. \quad (81)$$

Wird diese auf Grund von (71), (72), (77) und (80) entwickelt, so ergibt sich

$$(A_{11} - 1) \frac{\partial \theta_1}{\partial i_1} + A_{21} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial U_1} - \frac{\partial \theta_2}{\partial U_2} \right) + (A_{22} - 1) \frac{\partial \theta_2}{\partial i_2} = 0. \quad (82)$$

Werden in letztere aus (21) die Elemente von \mathbf{A} eingesetzt, kommt man zu dem äußerst aufschlußreichen Ergebnis

$$R_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial i_1} + (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial U_1} - \frac{\partial \theta_2}{\partial U_2} \right) + R_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial i_2} = 0, \quad (83)$$

aus dem hervorgeht, daß sich die Temperaturkompensation der untersuchten Brückenschaltung durch eine geeignete, der Gleichung (83) entsprechende Wahl der drei Widerstände R_1 , R_2 und R_3 verwirklichen läßt.

Da sich die Vektoren $\text{grad } \theta_1$ und $\text{grad } \theta_2$ — wie es aus den Gleichungen (8) und (9) hervorgeht — in den Ebenen i_1 , U_1 und i_2 , U_2 im allgemeinen von Punkt zu Punkt ändern, wird die Richtung des Vektors $\mathbf{A}^* \text{grad } \theta_1 - \text{grad } \theta_2$ in Zuständen mit jeweils verschiedenen Vektoren \mathbf{x}_2 in der Regel unterschiedlich sein.

Das bedeutet aber, daß die Temperaturkompensation, die auf Grund der Gleichungen (82) und (83) mit den Gradienten $\text{grad } \theta_1$ und $\text{grad } \theta_2$, die zu gewissen Werten der Vektoren \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 gehören, ermittelt wurde, im allgemeinen nur in einer kleinen Umgebung von \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 verwirklicht werden kann. Die Temperaturkompensation ist also in der Regel nicht vollständig bzw. selbsttätig. Es besteht aber die Möglichkeit, den Meßfehler, der als Folge der unzureichenden Kompensation auftritt, auf einem geringen Wert zu halten. Auf die Erörterung der Methoden, die darauf abzielen — obzwar diese auf Grund des Gesagten herausgearbeitet werden können —, sei hier verzichtet.

c) Zahlenbeispiel

Es sei nun die im vorangehenden dargelegte Behandlungsweise anhand eines einfachen Zahlenbeispiels illustriert.

Einfachheitshalber soll angenommen werden, daß die in der Schaltung nach Bild 3a eingesetzten Heißeiter T_1 und T_2 vollkommen gleich sind. Ihre Konstanten, die zum Beispiel die Werte

$$B = 2814^\circ \text{ K und } R_\infty = 2,512 \Omega$$

aufweisen, sind ebenfalls für beide Heißeiter gleich. Nach hier nicht erörterten Messungen sollen die Leistungsempfindlichkeitskoeffizienten bei unbeweglicher atmosphärischer Luft mit der Temperatur $\Theta = 292,6^\circ \text{ K}$ ebenfalls als gleich und mit dem Werte $C = 12235^\circ \text{ K/W}$ angesetzt werden.

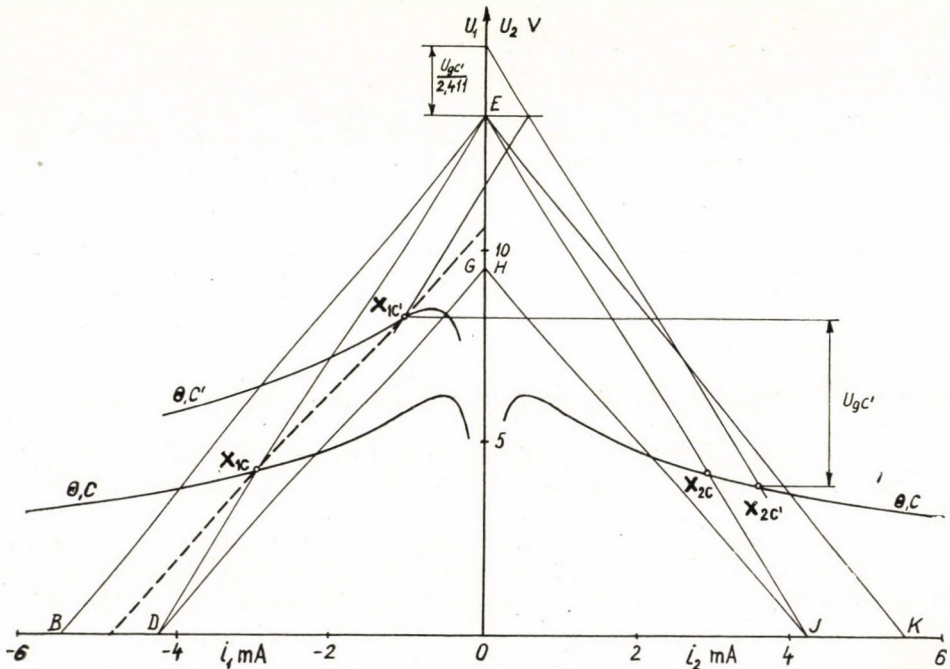


Abb. 12

Einige Daten der Schaltung werden willkürlich gewählt. So wurden als dem Zustand $U_g = 0$ entsprechenden Kennlinien-Punkte, die sich aus den Gleichungen (7) bzw. den oben angeführten Umständen mit den Parameter-Wert $P = 12,92 \text{ mW}$ ergebenden Punkte mit den Koordinaten

$$i_{1C} = -2,916 \text{ mA}; \quad U_{1C} = 4,215 \text{ V}$$

$$i_{2C} = 2,916 \text{ mA}; \quad U_{2C} = 4,215 \text{ V}$$

gewählt (Abb. 12). Ferner sei $E = 13,5 \text{ V}$, der Punkt K in Abb. 3b in dem Fall $U_g = 0$ — mit den Koordinaten $(0 \text{ mA}, 12 \text{ V})$ angegeben.

Aus diesen erhält man die Widerstandswerte $R_1 = 257,20 \Omega$ und $R_2 = R_3 = 2669,8 \Omega$. Der Widerstand des Galvanometerzweiges wird willkürlich zu $R_g = 10\,000 \Omega$ angesetzt.

Nun können aus den Gleichungen (14), (21) und (49) die Elemente der Matrix der Schaltung \mathbf{A} und die Komponenten des Vektors \mathbf{b} berechnet werden:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3,4110 & 0,0013853/\Omega \\ 7676,97 \Omega & 3,4110 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -18,702 \text{ mA} \\ -32,549 \text{ V} \end{bmatrix}.$$

Das im Bild 5 gezeigte Schema ist hier — wegen der Gleichheit von R_2 mit R_3 — in bezug auf die Achse U symmetrisch. Die Aufzeichnung desselben wird dadurch bequemer, daß der Abstand

$$\overline{OB} = \frac{E}{W_{11}} = \frac{EA_{12}}{A_{22}} = \frac{13,5 \cdot 1,385}{3,411} 10^{-3} = 5,482 \text{ mA}$$

ermittelt wird. Danach wird der Punkt K mit den Koordinaten (5,482 mA, 0 V) nach (18) mit dem Resultat

$$A_{21}i_{2K} + A_{22}U_{2K} + b_u = 7676,97 \cdot 5,482 \cdot 10^{-3} - 32,549 = 9,537 \text{ V} = U_{1K} = U_{1G} = U_{1H}$$

in die Punkte G bzw. H transformiert. So können zusammen mit dem sich nach Bild 5 ergebenden Ergebnis

$$\overline{OD} = E \frac{A_{11} - 1}{A_{21}} = 13,5 \frac{3,411 - 1}{7676,97} = 4,239 \text{ mA}$$

die Bereiche $EBDGE$ und $EKJHE$, die die möglichen elektrischen Zustandsänderungen umfassen, konstruiert werden (Bild 12).

Aus unseren anhand des untersuchten Falles gemachten Annahmen geht klar hervor, daß als Folge der vollständigen Identität in den Zuständen der zwei Heißeiter die Vektoren $\text{grad } \Theta$ auch einander gleich sind. Nach unserer Definition bezüglich der Vorzeichens der Werte i besteht aber hier, bei der Erörterung der Temperaturkompensation der Zusammenhang

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i_1} = - \frac{\partial \Theta}{\partial i_2}.$$

So ist auf Grund von (82) — unter Berücksichtigung der Gleichheit von A_{11} und A_{22} — ohne weiteres einzusehen, daß die Temperaturkompensation im untersuchten Fall gegeben ist.

In Abbildung 12 ist die Kennlinie des Heißeiters T_1 zu sehen, die unter Zugrundelegung des Leistungsempfindlichkeitskoeffizienten $C' = 6566^\circ \text{ K/W}$ und ebenfalls mit der Temperatur $292,6^\circ \text{ K}$ berechnet wurde. Wenn man annimmt, daß die Umstände der Wärmeübertragung bei dem Heißeiter T_2 unverändert bleiben, so ist der neue elektrische Zustand durch die in die Abbildung ebenfalls eingezeichneten Punkte $x_{1C'}$ und $x_{2C'}$ charakterisiert. Es wurden daher einige Punkte der Kennlinie des Heißeiters T_2 durch Einsetzung in die Gleichungen (17) und (18) auf die Ebene des Heißeiters T_1 transformiert (gestrichelte Linie). Nach dem Ergebnis der graphischen Interpolation ist der Zustand des Heißeiters mit den Koordinaten $i_{1C'} = -1,082 \text{ mA}$, $U_{1C'} = 8,249 \text{ V}$ charakterisiert. Die Koordinaten $i_{2C'}$ und $U_{2C'}$ erhält man durch Transformation nach Gleichung (50). Mit den Zahlenwerten der reziproken Matrix bzw. mit denjenigen des Vektors \mathbf{a}

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3,4110 & -0,0013853/\Omega \\ -7676,97 \Omega & 3,4110 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 18,702 \text{ mA} \\ -32,549 \text{ V} \end{bmatrix}$$

gelangt man zu den Resultaten

$$i_{2C'} = -3,411 \cdot 1,082 \cdot 10^{-3} - 1,3853 \cdot 8,249 \cdot 10^{-3} + 18,702 \cdot 10^{-3} = 3,587 \text{ mA}$$

$$U_{2C'} = 7676,97 \cdot 1,082 \cdot 10^{-3} + 3,411 \cdot 8,249 - 32,549 = 3,895 \text{ V}.$$

Die Galvanometerspannung beträgt

$$U_{gC'} = U_{1C'} - U_{2C'} = 8,249 - 3,895 = 4,354 \text{ V}.$$

Denselben Wert kann man erhalten mit der von der Ausführung abhängigen Genauigkeit durch die in Abb. 9 vorgeführte Konstruktion.

Auf Grund der Gleichungen (8) und (9) lassen sich auch die zu den Zuständen x_{1C} und x_{2C} gehörenden Temperaturgradienten berechnen. Da

$$P_{1C}' = U_{1C}' \cdot i_{1C}' = 8,249 \cdot 1,082 \cdot 10^{-3} = 8,925 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

$$P_{2C}' = U_{2C}' \cdot i_{2C}' = 3,895 \cdot 3,586 \cdot 10^{-3} = 13,97 \cdot 10^{-3} \text{ W},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial i_1} \right)_{C'} &= U_{1C}' \left(\frac{(C' P_{1C}' + \Theta)^2}{B P_{1C}'} - C' \right) = 8,249 \left(\frac{(6566 \cdot 8,925 \cdot 10^{-3} + 292,6)^2}{2814 \cdot 8,925 \cdot 10^{-3}} - 6566 \right) = \\ &= 8,249 (4910 - 6566) = -13655^\circ \text{ K/A und} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial U_{1C}'} = -i_{1C}' \left(\frac{(C' P_{1C}' + \Theta)^2}{B P_{1C}'} + C' \right) = -1,082 \cdot 10^{-3} (4910 + 6566) = -12,415^\circ \text{ K/V}$$

bzw. indem man mit dem Wert $C = 12235^\circ \text{ K/W}$ in ähnlicher Weise rechnet

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial i_2} \right)_{C'} = -26380^\circ \text{ K/A}, \quad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial U_2} \right)_{C'} = -63,48^\circ \text{ K/V}.$$

Unter wiederholter Berücksichtigung des Vorzeichenwechsels beträgt der Substitutionswert der Gleichung (82)

$$\begin{aligned} (A_{11} - 1) \frac{\partial \Theta}{\partial i_1} + A_{21} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial U_1} - \frac{\partial \Theta}{\partial U_2} \right) + (A_{22} - 1) \frac{\partial \Theta}{\partial i_2} &= (3,411 - 1) \cdot 13\,655 + \\ + 7676,97 \cdot (-12,42 + 63,48) - (3,411 - 1) \cdot 26\,380 &= 361\,110^\circ \text{ K/A}, \end{aligned}$$

in diesem Zustand ist also die Temperaturkompensation nicht verwirklicht.

Der Fehler, der den Ergebnissen des Zahlenbeispiels, der infolge der Anwendung des graphischen Verfahrens und der vorgenommenen Verkürzungen anhaftet, dürfte etwa $\pm 1\%$ betragen.

d) *Schlußfolgerungen*

In den vorangehenden Abschnitten wurde die matrix-algebraische Behandlung von Meßbrücken mit zwei direkt beheizten Heißleitern dargelegt. Die aufgezeigten analytischen und graphischen Methoden erleichtern durch ihre Übersichtlichkeit die Bemessung dieser Meßbrücken. In vorliegender Arbeit konnte nur auf die Grundprinzipien eingegangen werden und die sich ergebenden Probleme wurden bei weitem nicht voll erschöpft.

So dürften z. B., um die Temperaturkompensation für drei Punkte, die sich in den Meßbereichen C und Θ befinden verwirklichen zu können, noch weitere theoretische Untersuchungen durchzuführen sein. Hierzu bedarf es im allgemeinen der Anwendung den Heißleitern parallel geschalteter Widerstände, sind doch die einzelnen Heißleiter beim derzeitigen Stand der Produktionstechnologie nicht ganz gleich, was zur Folge hat, daß die Voraussetzung für die im Zahlenbeispiel vorgenommene Vereinfachung im allgemeinen nicht gegeben ist.

Ein neues Problem entsteht im Falle, daß sich die ursprünglichen und transformierten Kennlinien der Eigenart der Schaltung zufolge in mehreren (in einer immer ungeraden Zahl von) Punkten schneiden. Von den elektrischen Zuständen, die sich hierbei ergeben, sind die faktisch eintretenden auf Grund von Überlegungen der Stabilitätsverhältnisse auszuwählen.

Die Erörterung dieser Probleme würde aber über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinausführen.

SCHRIFTTUM

1. FELDTKELLER, R.: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. Hirzel, Leipzig, 1937.
2. EKELÖF, S., KIHLEBERG, G.: Theory of The Thermistor as An Electric Circuit Element. Acta Polytechnica, Electrical Engineering Series, Vol. 5. No. 11. Göteborg, 1954.
3. BJÖRK, N., DAVIDSON, R.: Small Signal Behaviour of Directly Heated Thermistors. Acta Polytechnica, Electrical Engineering Series. Vol. 6. No. 12. Göteborg, 1955.
4. KANTER, H.: Temperaturabhängige Widerstände. I.—II.—III. ATM. Z-119—3, —4, —5. 1955.
5. GRÖBER, H., ERK, S., GRIGULL, U.: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer, 1955.
6. BROER, L. J. F., HOOGENDOORN, C. J., KORTLEVEN, A.: Some Investigations on Low-Speed Anemometry. Appl. Sci. Res. Sec. A. Vol. 7. 1—13. 1957.
7. HAAS, A.: Temperaturkompensation bei Meßschaltungen mit unabgeglichenen Wheatstone-Brücken. ATM. 260. R 89.—92. 1957. Sept.
8. VARICAK, M.: Oscillographic Measurement of Some Thermistor-Characteristics. Glasnik Mat. Fiz. I Astr. Tom. 12. No. 3. 223—228. Zagreb, 1957.
9. GERGELY, GY., ALMÁSSY, GY., ÁDÁM, J.: The Absolute Measurement of Light Intensity by a Direct-Reading Thermistor Bolometer. Acta Physica Acad. Sci. Hungaricae Tom. VII. Fasc. 1. 463—467. 1957.
10. ALMÁSSY, GY.: A termisztor. (Der Heißleiter) M. T. A. VI. Oszt. Közl. Tom. XX. Fasc. 1—2. 81—91. 1956.
11. ALMÁSSY, GY.: A termisztor jellegzetes tulajdonságai (Die charakteristischen Eigenschaften des Heißleiter). Mérés és Automatika IV. évf., 193—200. 1956.
12. LITVAI, E.: Dimensionslose Kennlinien von Thermistoren und ihre Anwendung. Acta Technica Acad. Sci. Hungaricae. Tom. XXXVIII. Fasc. 3—4. (Im Druck.)

ZUSAMMENFASSUNG

Im Aufsatz werden die Probleme der unabgeglichenen Meßbrücken mit zwei direkt geheizten Heißleitern behandelt; hierbei kommt dem einen Heißleiter die Funktion zu, die zu messende physikalische Größe auf Grund der Änderungen der Wärmeübergangszahl zu fühlen, während der andere dem Zweck der Temperaturkompensation dient. Es wird zwischen dem Strom-Spannungsdiagramm der beiden Heißleiter ein inhomogen linearer Matrix-Zusammenhang aufgestellt, dessen Eigenschaften durch Einführung eines inhomogenen (aktiven) Vierpols unter Zuhilfenahme der Elemente der Vierpoltheorie erörtert werden. Die Eigenschaften des Matrix-Zusammenhanges werden auf Grund einer analytischen und graphischen Untersuchung ermittelt. Als eine Anwendung der Methode wird die Frage der Temperaturkompensation einer Prüfung unterzogen.

MATRIX-ALGEBRAIC DISCUSSION ON MEASURING BRIDGES OPERATING WITH TWO DIRECTLY HEATED THERMISTORS

E. LITVAI

SUMMARY

The problems of unbalanced measuring bridges operating with two directly heated thermistors are discussed; one of the thermistors is designed to register the physical quantity to be measured via variation in the heat transfer coefficient, while the other one is functioning

as a temperature compensator. Between the current-voltage plots of the two thermistors a linear, inhomogeneous matrix-relation is established. The properties of the relation involved are discussed by the introduction of an inhomogeneous (active) quadripole, making use of the elements of the quadripole theory. The properties of the matrix-relation are established by means of analytical and graphical methods. As an application of the method shown, the problems as emerging with temperature compensation are discussed.

TRAITEMENT EN ALGÈBRE MATRICIELLE D'UN PONT DE MESURE CONTENANT DEUX THERMISTORS A CHAUFFAGE DIRECT

E. LITVAI

RÉSUMÉ

L'étude traite le problème des ponts de mesure non équilibrés contenant deux thermistors à chauffage direct, dont l'un sert à détecter la quantité physique mesurée, sur la base des variations du coefficient de transmission, et l'autre sert à la compensation de la température. Entre les diagrammes courant-tension des deux thermistors, une relation matricielle inhomogène et linéaire est établie, dont les caractéristiques sont discutées à l'aide de la théorie des quadripôles, en introduisant un quadripôle inhomogène (actif). Les caractéristiques de la relation matricielle sont déterminées par examen analytique et graphique. La question de la compensation de température est examinée comme une des applications de la méthode.

МАТРИЧНО-АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО МОСТИКА, РАБОТАЮЩЕГО С ДВУМЯ ТЕРМИСТОРАМИ ПРЯМОГО НАКАЛА

Э. ЛИТВАИ

РЕЗЮМЕ

Статья занимается проблемой несбалансированных измерительных мостиков, работающих на двух термисторах прямого накала, у которых один термистор служит в качестве чувствительного органа, измеряющего физическое количество — на основе изменения коэффициента теплопередачи, а другой термистор служит для компенсации температуры. Между диаграммами силы тока и напряжения этих двух термисторов автор определяет неоднородную линейную матричную связь, свойства которой рассматриваются с помощью элементов теории четырехполюсников, введя один неоднородный (активный) четырехполюсный. Свойства матричной связи определяются при помощи аналитического и графического анализа. В качестве приложения данного метода исследуется вопрос компенсации температуры.

DIE UNTERSUCHUNG DER BETRIEBSKENNGRÖSSEN VON LICHTBOGENÖFEN AUF GRUND DES KREISDIAGRAMMS

V. URAY

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 5. Januar 1960]

Einleitung

Im Lichtbogenofen liefert die strahlende Wärme des Lichtbogens den überwiegenden Teil der zum Schmelzen und zum Heißhalten erforderlichen Wärme. Die vom Lichtbogen erzeugte Heizleistung kann in Form der Nutzleistung

$$P_n = I^2 R$$

angeschrieben werden, wo I der Strom, R der Ohmsche Widerstand des Lichtbogens ist.

Die Wärme, die vom durchfließenden Strom im Widerstand des Metallbades erzeugt wird, kann praktisch vernachlässigt werden, da der Widerstand des Metallbades um mehrere Größenordnungen kleiner als der Widerstand des Lichtbogens ist.

Abb. 1a zeigt den Stromkreis eines von der Spannung U gespeisten einphasigen Lichtbogenofens. Der Ohmsche Widerstand der Zuleitungen ist r , ihr induktiver Widerstand ist x , der Widerstand des Lichtbogens ist R . Abb. 1b zeigt das Ersatzschaltbild.

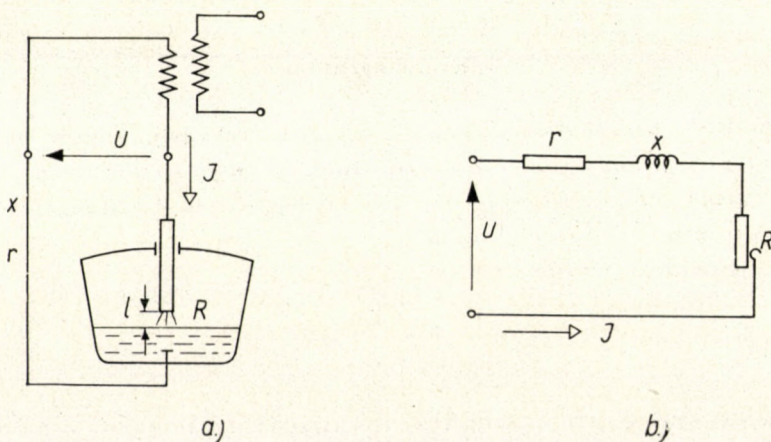


Abb. 1

Bei Kurzschluß ist $R = 0$, der Kurzschlußstrom ist

$$I_k = \frac{U}{z}, \quad (1)$$

wobei

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} \quad (2)$$

ist. Bei Kurzschluß wird keine nutzbare Wärme entwickelt.

Bei Leerlauf ist die Elektrode so weit vom Bad entfernt, daß der Lichtbogen erlischt. In diesem Falle ist der Nutzwiderstand unendlich groß, die Stromstärke ist Null; daher ist die nutzbare Wärme auch in diesem Falle gleich Null.

Im Betriebszustand ziehen wir einen Lichtbogen von einer solchen Länge l , daß die Nutzleistung maximal wird.

Die Impedanz des Stromkreises ist

$$Z = \sqrt{(r + R)^2 + x^2}, \quad (3)$$

seine Stromstärke ist

$$I = \frac{U}{Z}, \quad (4)$$

die Nutzleistung ist

$$P_n = I^2 R, \quad (5)$$

und der Leistungsfaktor wird

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}. \quad (6)$$

Kreisdiagramm

Die Betriebsverhältnisse können an dem Arbeitsdiagramm auf Grund von einfachen geometrischen Zusammenhängen abgelesen werden. Das Diagramm enthält die Endpunkte der den verschiedenen Lichtbogenwiderständen entsprechenden Stromvektoren.

Die komplexe Stromstärke ist

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}. \quad (7)$$

Setzen wir voraus, daß in dem in Abb. 1b skizzierten Stromkreis sich der Widerstand (R) des Lichtbogens ändert. Die senkrecht angenommene reelle Achse sei

zugleich auch die Richtung des Spannungsvektors. Bei dieser Annahme befindet sich der Impedanzvektor links vom Spannungsvektor (Abb. 2).

Wenn sich der Wert von R ändert, bewegt sich der Endpunkt von Z entlang der Geraden e .

Der Impedanzvektor kann in der Form von

$$Z = Ze^{j\varphi}$$

angeschrieben werden, wo

$$Z = \sqrt{(r + R)^2 + x^2}$$

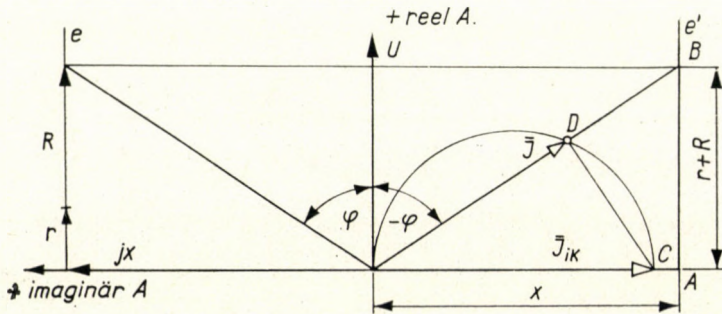


Abb. 2

ist. Daher ist die Stromstärke

$$I = \frac{U}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U}{Z} e^{-j\varphi}. \quad (8)$$

Der Phasenwinkel des Stromes I ist daher gleich dem Phasenwinkel des Vektors Z , aber von entgegengesetztem Vorzeichen, was mit anderen Worten bedeutet, daß der Stromvektor I in die Richtung des auf die rechte Seite gespiegelten Impedanzvektors weist. In Abb. 2 haben wir auch ein derartiges Spiegelbild des Impedanzvektors eingezeichnet. Die theoretische Kurzschlußstromstärke kann in einem solchen Stromkreis zustandekommen, der keinen Ohmschen Widerstand hat, d. h. $r + R = 0$. Größe und Richtung des Stromes ergeben sich aus der Gleichung

$$I_{ik} = \frac{U}{Z} = \frac{U}{jx} = -j \frac{U}{x}, \quad (9)$$

in deren Sinn die Stromstärke waagrecht nach rechts weist; ihr absoluter Wert ist

$$|I_{ik}| = I_{ik} = \frac{U}{x}. \quad (10)$$

Da im Falle eines beliebigen Lichtbogenwiderstandes der Absolutwert der Stromstärke

$$|\mathbf{I}| = I = \frac{U}{Z}$$

ist, kann man anschreiben:

$$\frac{I}{I_{ik}} = \frac{x}{Z}. \quad (11)$$

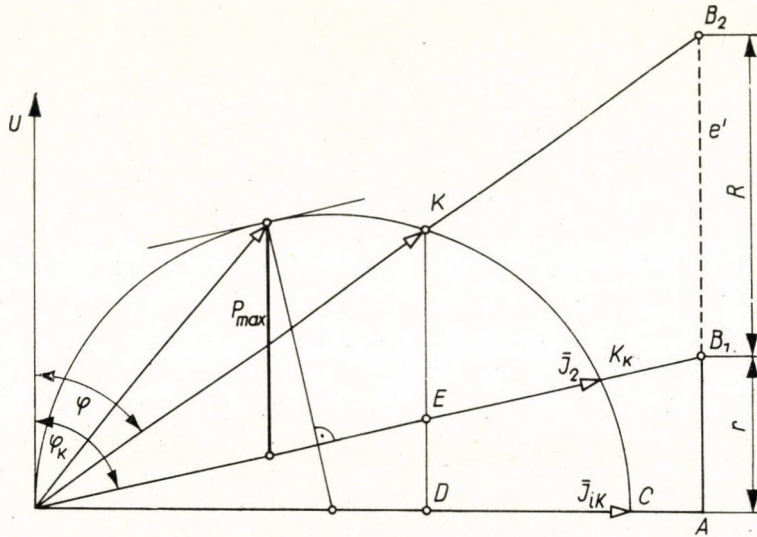


Abb. 3

Fällen wir vom Endpunkt des Vektors I_{ik} eine Senkrechte auf das Spiegelbild des Impedanzvektors. Das so erhaltene $\triangle OCD$ ist ähnlich dem $\triangle OAB$, da zwei ihrer Winkel gleich sind. Deshalb ist

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.$$

Es ist jedoch $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = Z$ und $\overline{OC} = I_{ik}$, und so ist im Sinne von Gl. (11)

$$\overline{OD} = I.$$

Der Vektor \overline{OD} ist daher gerade der Stromvektor \mathbf{I} , da sein Betrag I ist und er in Richtung des gespiegelten Impedanzvektors weist. Wenn sich der Wert von R ändert, so bewegt sich der Endpunkt des gespiegelten Vektors \mathbf{Z} längs der Geraden e . Der Winkel beim Punkt D ist 90° , daher bewegt sich der End-

punkt des Stromvektors auf einem Thaleskreis, dessen Durchmesser eben der ideale Kurzschlußstrom ist. Das Arbeitsdiagramm des von einer konstanten Spannung gespeisten Lichtbogenofens ist also ein Kreis.

Auf Grund des obigen konstruieren wir das Kreisdiagramm wie folgt, wenn wir den Ohmschen und den induktiven Widerstand der Anschlußleitungen kennen: Auf die waagrechte Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems tragen wir im Widerstandsmaßstab den Abstand $x = \overline{OA}$ auf, daran schließen wir in Richtung der vertikalen Achse den Abstand $\overline{AB_1} = r$ an. Die Strecke $\overline{OB_1} = \sqrt{r^2 + x^2} = z$ ergibt die Kurzschlußimpedanz. Den Abstand $\frac{U}{x} = I_{ik} = \overline{OC}$ tragen wir im Strommaßstab auf die waagrechte Achse auf, und damit haben wir den Durchmesser des Kreises erhalten. Mit dem Halbmesser \overline{OC} ziehen wir den Kreis (Abb. 3).

Die Gerade $\overline{OB_1}$ schneidet den Kreis im Punkt K_k . $\overline{OK_k} = I_k$ ist der wirkliche Kurzschlußstrom. Der zum Kurzschlußstrom gehörige Phasenwinkel ist φ_k . Zu einer beliebigen Stromstärke I gehört der Kreispunkt K . Die Verlängerung des Vektors I schneidet die Gerade e' im Punkt B_2 . Der Abstand $\overline{B_1B_2}$ ergibt den Lichtbogenwiderstand (R), der Phasenwinkel ist φ . Mit Rücksicht darauf, daß der Verlust in den Zuleitungen $P_v = I^2 r$ ist, und die Nutzleistung $P_n = I^2 R$ ist, ist \overline{DE} im Leistungsmaßstab der Verlust, der Abstand \overline{DK} die aufgenommene Leistung. Die größte Nutzleistung erhalten wir bei einer Stromstärke, bei der der Abschnitt \overline{EK} am längsten ist. Daher bekommen wir die größte Nutzleistung bei einem solchen aufgenommenen Strom, der dem Berührungspunkt der zum Vektor I_z parallelen Tangente entspricht (Abb. 3).

Die elektrischen Kenngrößen des Lichtbogenofens

1. Scheinleistung ist die schiefe Gerade

$$P_s = UI, \quad (12)$$

deren Richtungstangente — bei beliebig gewähltem Maßstab — durch die angewendete Spannung bestimmt wird (Abb. 4).

2. Blindleistung

$$P_B = xI^2 \quad (13)$$

ist eine Parabel.

Bei der Stromstärke $I = I_{ik}$ ist im Stromkreis nur ein induktiver Widerstand, deswegen schneiden die Kurven der Stromstärke und der Scheinleistung einander bei dieser Stromstärke (Abb. 4).

3. Leistungsfaktor.

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}.$$

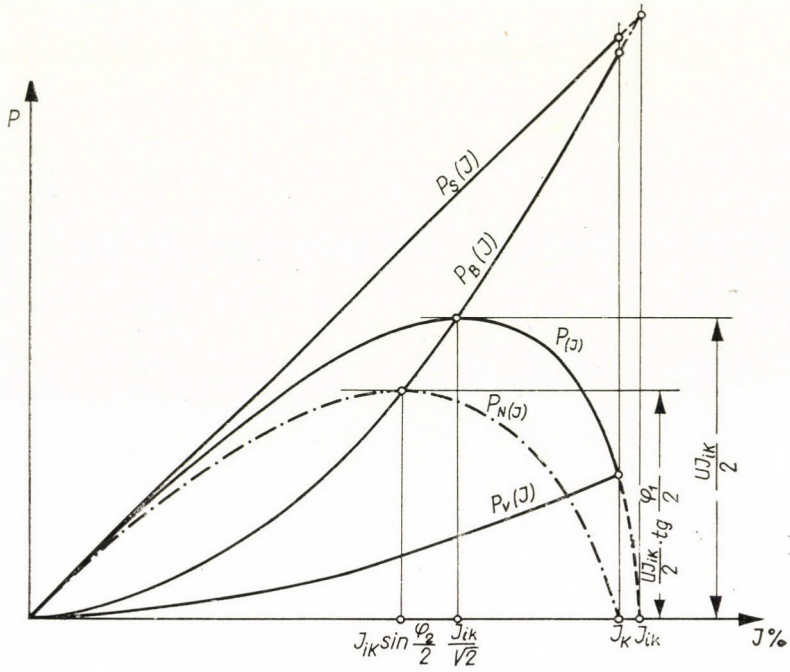


Abb. 4

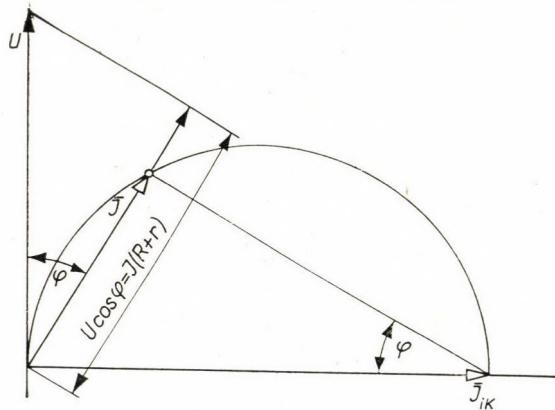


Abb. 5

Auf Grund von Abb. 2 ist jedoch

$$\sin \varphi = \frac{I}{I_{ik}},$$

und daher wird

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_{ik}}\right)^2}. \quad (14)$$

Die Kurve $\cos \varphi(I)$ ist daher eine Ellipse, deren eine Hauptachse gleich $2I_{ik}$ ist, und deren andere Hauptachse zwei Einheiten beträgt (Abb. 6).

4. Wirkleistung.

$$P = UI \cos \varphi .$$

Unter Benützung von Gl. (14) wird

$$P = UI \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_{ik}}\right)^2}$$

bzw.

$$P = \frac{UI}{I_{ik}} \sqrt{I_{ik}^2 - I^2} . \quad (15)$$

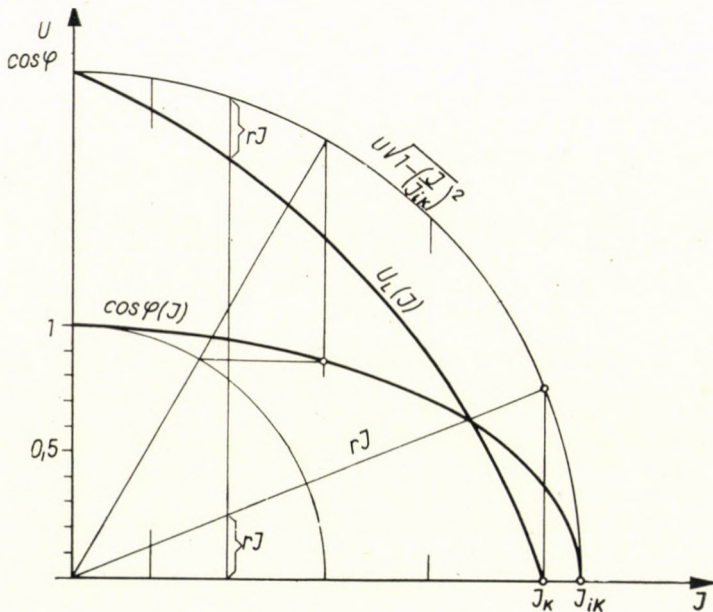


Abb. 8

Die Leistungskurve $P(I)$ ist an den Stellen $I = 0$ und $I = I_{ik}$ Null und hat einen Scheitelpunkt an der Stelle $I = \frac{I_{ik}}{\sqrt{2}}$. An Abb. 7 kann abgelesen werden, daß im Falle einer Stromstärke $I = \frac{I_{ik}}{\sqrt{2}}$ die Leistung $P(I) = P_B(I)$ wird. Bei diesem Strom schneiden sich daher die Kurven (Abb. 4). Der maximale Wert der Leistung wird

$$P_{\max} = \frac{UI_{ik}}{I_{ik}\sqrt{2}} \sqrt{I_{ik}^2 - \frac{I_{ik}^2}{2}} = \frac{UI_{ik}}{2} . \quad (17)$$

5. Verluste.

$$P_v = rI^2. \quad (17)$$

Da bei Kurzschluß keine Nutzleistung abgegeben wird, haben das Diagramm der Verluste und das Diagramm der Leistungen I_k einen gemeinsamen Punkt auf der Ordinate (Abb. 4).

6. Nutzleistung (Abb. 4).

$$P_n = P - P_v = \frac{UI}{I_{ik}} \sqrt{I_{ik}^2 - I^2} - rI^2. \quad (18)$$

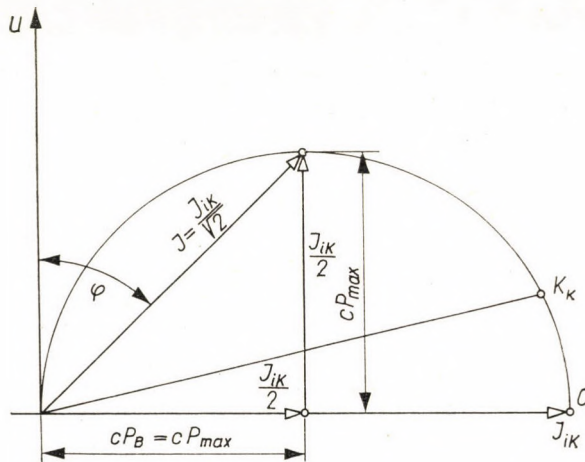


Abb. 7

An dem $\triangle OKC$, Abb. 8, kann abgelesen werden, daß die maximale Nutzleistung bei der Stromstärke

$$I = I_{ik} \sin \frac{\varphi_k}{2} \quad (19)$$

auftritt. Die Diagonale des Rhombus $OFKD$ ist die Stromstärke I , und deshalb halbiert der Stromvektor den Winkel φ_k . Da die Schenkel der Winkel zueinander senkrecht sind, ist der Winkel bei C ebenfalls $\frac{\varphi_k}{2}$. Die Diagonale $\overline{FO'}$ des Deltoids $OFKO'$ ist normal zu I , halbiert diesen Vektor und geht durch den Punkt D . Bei O' ergibt sich der Winkel $\frac{\varphi_k}{2}$.

$\overline{OF} = \overline{DK} = I_{n \max}$ ist die Wirkkomponente des zur maximalen Leistung gehörigen Stromes. Daher ist die maximale Nutzleistung

$$P_{n \max} = UI_{n \max}.$$

Auf Grund von Abb. 5 ist

$$U_L = U \cos \varphi - rI.$$

Unter Beachtung von Gl. (14) wird

$$U_L = U \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_{ik}}\right)^2} - rI. \quad (22)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist eine Ellipse. Die eine Hauptachse dieser Ellipse ist $2I_{ik}$, die andere Hauptachse ist $2U$. Das zweite Glied der rechten Seite ist eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems. Mit einiger Geschicklichkeit können die Maßstäbe k_I und k_U so gewählt werden, daß $k_U U$ [cm] = $k_I I_{ik}$ [cm]. In diesem Fall geht die Ellipse in einen Kreis über, und von diesem Kreis kann die Gerade rI subtrahiert werden (Abb. 6).

Der Einfluß der Größe der Spannung auf den Betrieb des Ofens

Für die Zeit des Niederschmelzens wird eine größere Spannung an den Ofen gelegt, da so ein längerer Lichtbogen gezogen werden kann, und daher die Leistung größer wird. Die größere Leistung ist nötig, um die Zeitdauer des Niederschmelzens möglichst zu verringern.

Es sei U die kleinste Spannung, die folgende Spannungsstufe sei $2U$, die dritte Stufe sei $3U$. Die zu den verschiedenen Spannungen gehörigen Betriebsverhältnisse können an dem Kreisdiagramm abgelesen werden (Abb. 11).

Wie bekannt, bestimmen den theoretischen Kurzschlußstrom der induktive Widerstand des Stromkreises und die angelegte Spannung, daher sind die zu den Spannungen U , $2U$ und $3U$ gehörigen theoretischen Kurzschlußströme der Reihe nach I_{ik} , $2I_{ik}$ und $3I_{ik}$. So sind die Halbmesser der drei Kreisdiagramme der Reihe nach

$$I_{ik}, 2I_{ik}, 3I_{ik}.$$

Im Hinblick darauf, daß der Ohmsche Widerstand (r) und der induktive Widerstand (x) der Zuleitung von der Spannung unabhängig sind, liegen die Kurzschlußpunkte K_{k1} , K_{k2} und K_{k3} auf einer Geraden, mit anderen Worten, der Kurzschlußphasenwinkel (φ_k) hängt nicht von der Spannung ab. Daraus folgt unmittelbar, daß die zur maximalen Leistung gehörigen Kreispunkte K_1 , K_2 und K_3 ebenfalls auf einer Geraden liegen (Abb. 11).

Diejenige Stromstärke, die die beste Ausnutzung des Ofens sichert, ist im Sinne von (19)

$$I = I_{ik} \sin \frac{\varphi_k}{2} = \frac{U}{x} \sin \frac{\varphi_k}{2} .$$

Das bedeutet, daß bei Untersuchung eines gegebenen Ofens für sich allein die Stromstärke, die die maximale Spannung ergibt, allein von der angewendeten Spannung abhängt, und deren lineare Funktion ist.

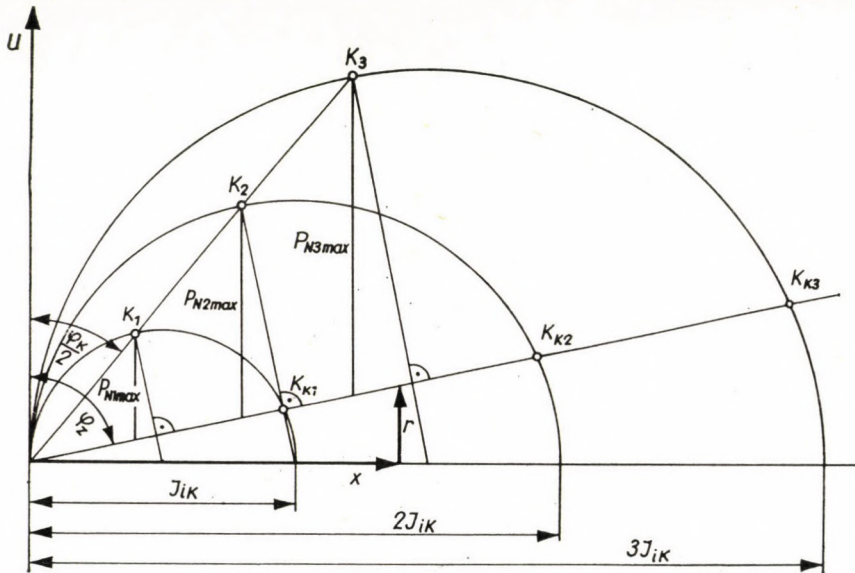


Abb. 11

Ältere Ofentransformatoren wurden mit vier-fünf Spannungsstufen angefertigt. Die vielen Stufen sind theoretisch richtig, weil so die Ansprüche der Technologie restlos befriedigt werden können. Die Praxis hat jedoch gezeigt, daß bei Einzwecköfen auch drei Stufen hinreichend sind, so daß der komplizierte und störanfällige Spannungsumschalter wegfällt; anstelle dessen wird die Primärseite des Ofentransformators in Dreieck, Stern-Dreieck und schließlich in Stern geschaltet.

Der Einfluß des Ofentransformators auf den Betrieb des Lichtbogenofens

Die Wirkung des Ofentransformators kann ebenfalls am einfachsten auf Grund des Kreisdiagramms untersucht werden. Abb. 12 zeigt die Ersatzschaltung des mit dem Transformator zusammengeschalteten Ofens.

Die in Abb. 12 eingezeichneten Widerstände sind der Reihe nach:

- r_1 , der Widerstand der Primärwindung des Transformators,
 x_1 , die Streureaktanz der Primärspule des Transformators,
 R_0 , der die Eisenverluste darstellende Widerstand,
 X_0 , diejenige fiktive Reaktanz, welche die Blindkomponente des Erregerstromes bestimmt,
 $r'_2 = a^2 r_2$, der auf die Primärseite bezogene Widerstand der Sekundärspule,
 $X'_2 = a^2 X_2$, die Streureaktanz der Sekundärspule, auf die Primärseite bezogen,
 $r' = a^2 r$, der auf die Primärseite bezogene Widerstand der Zuleitungen vom Transformator bis zu den Elektroden,
 $X' = a^2 X$, die auf die Primärseite bezogene Reaktanz der Leitungen zwischen Transformator und Elektrode,

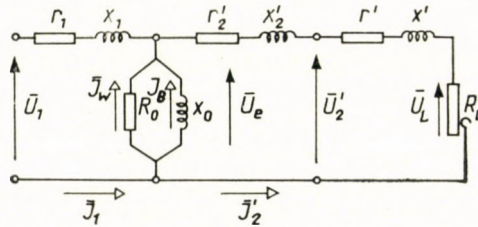


Abb. 12

- $R'_L = a^2 R_L$, der Widerstand des Lichtbogens, auf die Primärseite bezogen,
 U_1 , die primäre Klemmenspannung des Transformators,
 U_e , die induzierte Spannung des Transformators,
 $U'_2 = a U_2$, die auf die Primärseite bezogene Sekundärspannung des Transformators,
 $U'_L = a U_L$, die auf die Primärseite bezogene Lichtbogen-spannung,
 I_1 , Primärstrom,
 $I'_2 = \frac{I_2}{a}$, der auf die Primärseite bezogene Sekundärstrom,
 $I_w = \frac{U_e}{R_0}$, die Wirkkomponente des Erregerstromes,
 $I_B = \frac{U_e}{X_0}$, die Blindkomponente des Erregerstromes.

Im Hinblick darauf, daß im Transformator die induzierte Spannung mit guter Annäherung der Klemmenspannung gleichgesetzt werden kann ($U_e \approx U_1$), kann der Erregerstrom gleich dem Leerlaufstrom (I_0) angenommen werden,

$$I_e = I_0 = \sqrt{I_w^2 + I_B^2},$$

und daher kann im Interesse der Vereinfachung der weiteren Rechnungen die Ersatzschaltung nach Abb. 12 im Sinne von Abb. 13 abgeändert werden.

Zur Aufzeichnung des Kreisdiagramms muß man die charakteristischen Daten des Ofentransformators kennen, d. h., den Windungsverlust (P_w), die prozentuelle Kurzschlußspannung ($\varepsilon^0/0$), den Leerlaufstrom (I_0) und den Eisenverlust (P_e). Wenn diese Angaben nicht zur Verfügung stehen, so können sie mit den bekannten Leerlauf- und Kurzschlußversuchen in einfacher Weise bestimmt werden.

Aus dem Windungsverlust berechnen wir den auf die Primärseite des Transformators bezogenen Gesamtwiderstand:

$$R_T = r_1 + r'_2 = \frac{P_w}{I_{1n}^2}, \quad (23)$$

wo I_{1n} der Primärnennstrom ist.

Die auf die Primärseite des Transformators bezogene Streureaktanz bestimmen wir auf die folgende Weise:

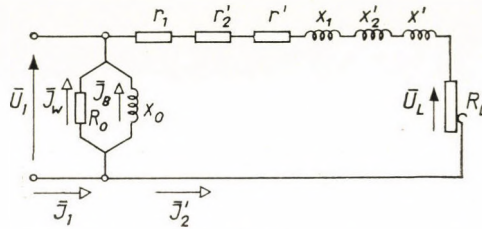


Abb. 13

Die Kurzschlußspannung ist

$$U_k = \sqrt{U_R^2 + U_x^2},$$

und daraus erhält man

$$U_x = \sqrt{U_k^2 - U_R^2},$$

$$U_z = \frac{\varepsilon}{100} U_1,$$

$$U_R = R_T I'_{2n},$$

wo I'_{2n} der auf die Primärseite bezogene sekundäre Nennstrom ist.

Es ergibt sich daher

$$U_x = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{100} U_1\right)^2 - (R_T I'_{2n})^2}.$$

Andererseits ist

$$U_x = I'_{2n}(x_1 + x'_2) = X_T I'_{2n}$$

und schließlich wird

$$X_T = \frac{U_x}{I'_{2n}} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{100}\right)^2 \left(\frac{U_1}{I'_{2n}}\right)^2 - R_T^2}.$$

Die gesamte Reaktanz des Stromkreises ist

$$X = X_T + X',$$

und so ist der theoretische Kurzschlußstrom

$$I'_{ik2} = \frac{U_1}{X}.$$

In Anbetracht der Tatsache, daß der theoretische Kurzschlußstrom den Durchmesser des Kreises ergibt, kann das Kreisdiagramm aufgezeichnet werden (Abb. 14).

Der Primärstrom ist

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}'_2.$$

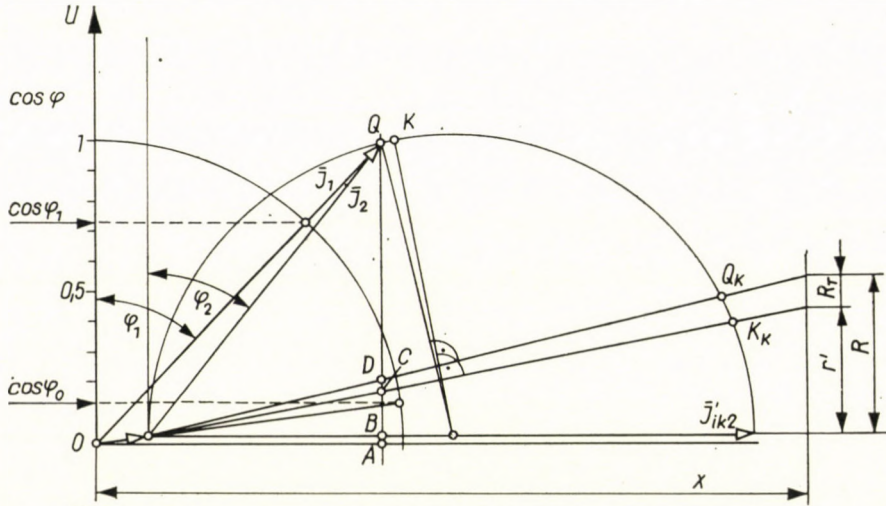


Abb. 14

Daher erhalten wir den Anfangspunkt des Primärstromes, wenn wir zum Anfangspunkt von I'_{ik2} den Leerlaufstromvektor \mathbf{I}_0 richtungs- und maßstabgerecht hinzufügen. Die Größe des Leerlaufstromvektors kennen wir, zur Aufzeichnung benötigen wir noch den Leerlauf-Phasenwinkel.

$$\cos \varphi_0 = \frac{I}{I_0},$$

$$I_w = \frac{P_v}{U_1},$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_v}{U_1 I_0}. \quad (24)$$

Der Gang der Konstruktion kann an Abb. 14 abgelesen werden.

Wegen des induktiven Widerstands des Transformators ist der Durchmesser des Kreises kleiner geworden, deswegen und wegen des Ohmschen Widerstands des Transformators verschieben wir den Kurzschluß-Mittelpunkt (K_k) nach (Q_k).

In das Kreisdiagramm haben wir den zur maximalen Ofenleistung gehörigen I_1 primären und I'_2 sekundären Stromvektor eingezeichnet. In diesem Fall ist die gesamte aufgenommene Leistung, im Leistungsmaßstab gemessen, die Strecke QA , die Nutzleistung ist hingegen durch die Strecke QD gegeben. Die

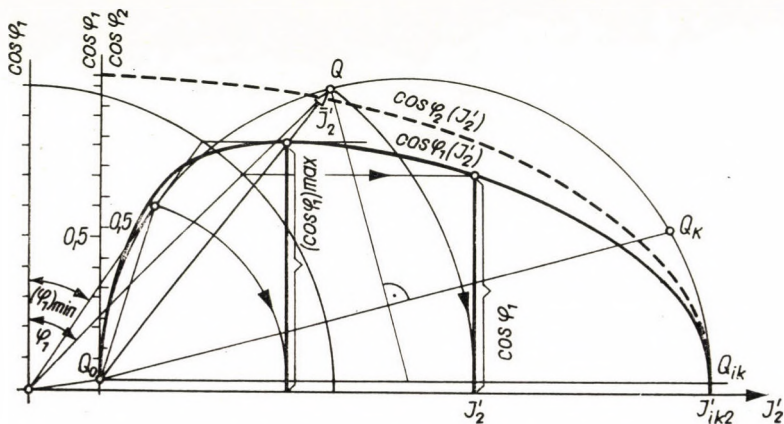


Abb. 15

Verluste können ebenfalls abgelesen werden, es ist nämlich die Strecke \overline{AB} der Leerlaufverlust des Transformators, die Strecke \overline{BC} der Verlust im Widerstand der Leitung, die Strecke \overline{CD} der Windungsverlust des Transformators.

Oben haben wir bereits gesehen (Gl. 14), wie sich $\cos \varphi$ des Ofenstromkreises in Abhängigkeit vom Ofenstrom ändert. Wenn wir die Gleichung in Abhängigkeit von dem auf die Primärseite reduzierten Ofenstrom anschreiben, so ist

$$\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{I'_2}{I_{ik2}}\right)^2}.$$

Sehr interessant und wichtig ist es zu wissen, wie sich der Leistungsfaktor des Primärstromkreises in Abhängigkeit vom Ofenstrom ändert. $\cos \varphi_2(I'_2)$ kann in der üblichen Weise sehr leicht konstruiert werden. In Abb. 15 zeigen wir die Schaulinien der Funktionen $\cos \varphi_2(I'_2)$ und $\cos \varphi_1(I'_2)$. Im einzelnen ist die Konstruktion für den zur größten Nutzleistung des Ofens gehörigen Wert von $\cos \varphi_1(I'_2)$ durchgeführt worden. Der Gang der Konstruktion kann an der Abbildung abgelesen werden. Ebenso kann es abgelesen werden, daß der

Scheitelpunkt der $\cos \varphi_1(I_2)$ -Kurve dort liegt, wo der zum Stromvektor I_2' gehörige Stromvektor I_1 den Kreis eben berührt.

Unter der Wirkung des Ofentransformators ändert sich die Wirkungsgradkurve; der Wirkungsgrad kann auch jetzt mit Hilfe des Kreisdiagramms konstruiert werden (Abb. 16).

Die Strecke Q_0Q_k ($Q_0Q_k = I_k'$) verlängern wir in beiden Richtungen derart, daß sie einerseits die durch den Punkt O gezogene Waagrechte schneidet (Punkt S), andererseits die in dem Abstand $\overline{SS'} = 1$ gezogene Waagrechte

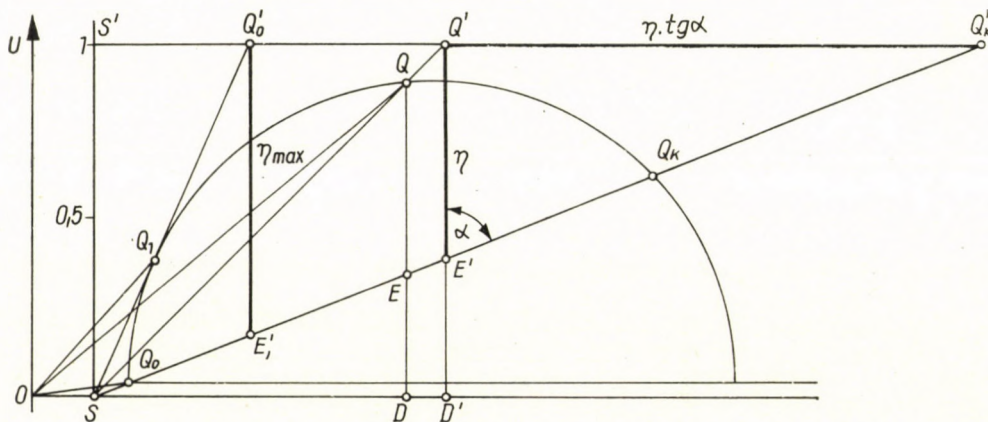


Abb. 16

(Punkt Q_k'). Die Verbindungslinie der Punkte S und Q schneidet die Gerade $S'Q_k'$ in Q' . Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke ist

$$\frac{\overline{QE}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{Q'E'}}{\overline{Q'D'}}$$

Es ist jedoch

$$\overline{QE} = P_n, \overline{QD} = P \quad \text{und} \quad \overline{Q'D'} = 1,$$

daher ist

$$\overline{Q'E'} = \eta.$$

An der Figur kann abgelesen werden, daß $\overline{Q'Q_k'} = \eta \operatorname{tg} \alpha$.

Wenn wir vom Punkt S eine Tangente an den Kreis ziehen — diese Tangente berührt den Kreis im Punkt Q_1 und schneidet die Gerade $S'Q_k'$ im Punkt Q_1' —, so erkennen wir, daß $\overline{Q_1'Q_k'} = \eta_{\max} \operatorname{tg} \alpha$ und daher ist $Q_1'E_1' = \eta_{\max}$.

Wenn wir daher Ofen und Transformator zusammen als eine Einheit untersuchen, so hat die Wirkungsgradkurve ein Maximum. Im Leerlauf und im Kurzschluß ist der Wirkungsgrad selbstverständlich Null. Im Hinblick

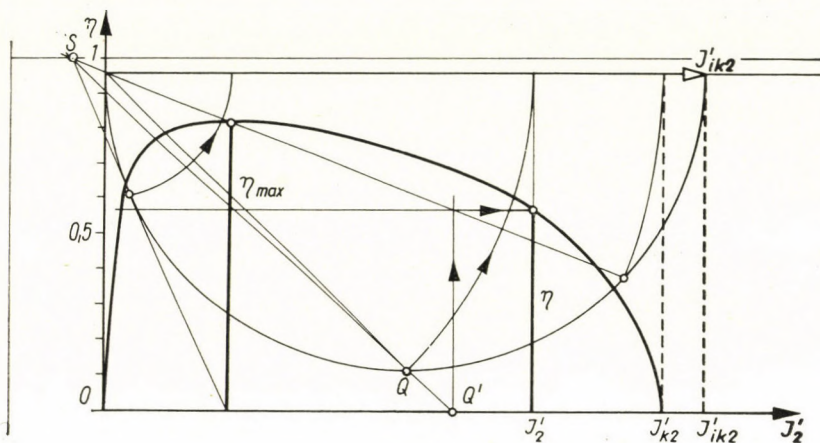


Abb. 17

darauf, daß $\overline{OQ} = I_1$ und $\overline{Q_0Q} = I_L$ ist, kann die Wirkungsgradkurve als Funktion des Stromes I_1 oder des Stromes I_L aufgezeichnet werden. Abb. 17 zeigt die Schaulinie der Funktion $\eta(I_2)$. Aus der Zeichnung ist der zu einer beliebigen Stromstärke $I_2 = \overline{Q_0Q}$ gehörige Wirkungsgradpunkt, des weiteren die Konstruktion von η_{max} ersichtlich. Auf Grund der Abbildung kann der Gang der Konstruktion auch ohne Erklärung verfolgt werden.

Dreiphasenöfen

Die Anschlußleitungen, die Ströme von der Größenordnung von 10^4 Ampère führen, liegen verhältnismäßig nahe zueinander. Deswegen sind die einzelnen Phasen miteinander magnetisch verkoppelt, das heißt, daß die einzelnen Phasen gegenseitig einander Energie abgeben und voneinander Energie aufnehmen. Das Resultat dieses Energieaustauschs ist, daß die Impedanz der einzelnen Phasen scheinbar anwächst oder abnimmt [2]. Im Endergebnis belasten daher die Dreiphasen-Lichtbogenöfen das Netz immer asymmetrisch. Die Betriebsparameter dieser Öfen müssen für jede Phase gesondert bestimmt werden, und die selbsttätige Reguliereinrichtung muß so eingestellt werden, daß jede Phase mit der optimalen Nutzleistung arbeitet.

SCHRIFTTUM

1. PATTANTYUS, Á. I.: Kohászati elektrotechnika I. kötet (Elektrotechnik des Hüttenwesens, Bd. I). Felsőökt. Jegyzetellátó V. 1955.
2. URAY, V.: Háromfázisú ívkemencék üzemi viszonyainak vizsgálata (Untersuchung der Betriebsverhältnisse von Dreiphasen-Lichtbogenöfen). A Nehézipari Műsz. Egyetem Közleményei, II. kötet (Bd. II). Miskolc, 1958.

3. VARGA, S.: *Ívkemencék üzeme és szabályozása* (Betrieb und Regelung von Lichtbogenöfen). Mérn. Továbbképző Intézet, Budapest, 1953.
4. WALTER, F.: *Die Grundlagen der elektrischen Ofenheizung*. Akad. Verlagsges., Leipzig, 1950.
5. WALTER, F.: *Die theoretischen Grundlagen der Wärmeerzeugung im Hochfrequenzofen und Lichtbogenofen*. Archiv f. d. Eisenhüttenwesen 1951, H. 11/12.
6. SOMMER u. POLLACK: *Elektrostahlerzeugung*, Düsseldorf, 1950.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Stromkreis der Lichtbogenöfen enthält außer der konstanten Impedanz der Anschlußleitungen auch den sich mit der Lichtbogenlänge ändernden Lichtbogenwiderstand. Da im Stromkreis des Lichtbogenofens sich nur der Lichtbogenwiderstand — der ein Ohmscher Widerstand ist — ändert, ist das Arbeitsdiagramm des Ofens ein Kreis. In der vorliegenden Arbeit werden die Betriebskenngrößen des Lichtbogenofens — abweichend von der üblichen analytischen Ableitung — aus dem Kreisdiagramm mit Hilfe von einfachen geometrischen Zusammenhängen abgeleitet. Im weiteren werden für die Konstruktion der Leistungsfaktor- und der Wirkungsgradkurve, ebenfalls auf Grund des Kreisdiagramms, einfache graphische Verfahren mitgeteilt.

INVESTIGATION ON THE OPERATING CHARACTERISTICS OF ARC FURNACES WITH THE AID OF THE CIRCLE DIAGRAM

V. URAY

SUMMARY

The circuit of an arc furnace contains the constant impedance of the connection lines and the arc resistance, which latter varies with the length of the arc. Since, in this circuit only the arc resistance — which is purely ohmic — is the variable, the working diagram of the circuit is a circle. The author of the present paper deduces the operating characteristics of the arc furnace from the circle diagram, using simple geometrical considerations, as opposed to the usual analytic deductions. For tracing power factor and efficiency diagrams, a simple method of construction is shown, which is also based on the circle diagram.

ÉTUDE DES CARACTÉRISTIQUES DE LA MARCHE D'UN FOUR A ARC, BASÉE SUR LE DIAGRAMME DU CERCLE

V. URAY

RÉSUMÉ

En plus de l'impédance constante des connexions, le circuit des fours à arc contient la résistance de l'arc variant avec sa longueur. Étant donné que dans le circuit du four à arc, la seule variable est la résistance purement ohmique de l'arc, le diagramme de la marche du four est un cercle. Contrairement au procédé analytique usuel, les paramètres caractérisant la marche du four sont déduits du diagramme du cercle à l'aide de simples considérations géométriques. L'auteur présente, en outre, une méthode graphique simple permettant de tracer, sur la base du diagramme du cercle, les courbes du facteur de puissance et du rendement.

АНАЛИЗ РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДУГОВЫХ ПЕЧЕЙ НА ОСНОВЕ КРУГОВОЙ ДИАГРАММЫ

В. УРАИ

РЕЗЮМЕ

Электрическая цепь дуговых печей кроме постоянного импеданса соединяющих проводников содержит также изменяющееся с длиной дуги сопротивление дуги. Учитывая то обстоятельство, что в цепи дуговой печи переменной является лишь сопротивление дуги (которая представляет собою омическое сопротивление), рабочая диаграмма цепи представляет собою круг. В данной работе рабочие характеристики дуговой печи (в отклонение от обычных аналитических выводов) выводятся из круговой диаграммы с помощью простых геометрических зависимостей. Далее для построения кривых коэффициента мощности и коэффициента полезного действия, демонстрируется простой графический метод, исходящий также из круговой диаграммы.

OBSERVATIONS SUR LA DISTRIBUTION DES EFFORTS DANS LES VOILES MINCES PRISMATIQUES ET CYLINDRIQUES

MIRCEA SOARE et DAN-DRAGOS NICULESCU

BUCAREST

[Manuscrit présenté le 9. III. 1960]

1. Introduction. Hypothèses fondamentales

La détermination de l'état de contrainte dans les voiles minces prismatiques et cylindriques a fait, et fait encore l'objet de nombreuses études dans la littérature, à cause de l'application pratique des voiles dans des domaines très variés.

Nous traiterons spécialement des voiles prismatiques et cylindriques ouverts, utilisés comme toitures de halles industrielles, de salles de sport et d'expositions, etc. . .

L'étude analytique des voiles minces cylindriques présente de grandes difficultés de calcul. Les équations d'équilibre et les relations efforts-déformations peuvent être réduites à une seule équation aux dérivées partielles du 8-ème ordre, linéaire, inhomogène et à coefficients variables. Le seul cas heureux de résolution est constitué par les voiles cylindriques circulaires, où le rayon de courbure étant constant, les coefficients des équations aux dérivées partielles le sont aussi, de sorte qu'il est possible d'utiliser des séries trigonométriques (ou, en général, des séries de fonctions fondamentales rencontrées à l'étude de la vibration des poutres, lorsqu'on tient compte de la masse propre).

Parmi les études analytiques présentant un intérêt pratique, du fait qu'elles aboutissent à des diagrammes, abaques et tableaux, on doit mentionner les ouvrages de RÜDICER et URBAN [19], RABICH [18], MANUEL A. S. C. E. [26], DEHOUSSE [7], JAKOBSEN [16], VLASSOV [23].

Pour d'autres directrices, il existe une solution asymptotique de JAKOBSEN [15], et une solution approximative de HRUBAN pour la parabole [14]; mais aucune des deux ne saurait être considérée comme une résolution complète du problème.

La surface cylindrique apparaît comme la limite d'une surface prismatique, lorsque le nombre des côtés croît indéfiniment et le polygone directeur tend vers la courbe directrice.

Quant au calcul numérique, la théorie des voiles prismatiques peut être appliquée aussi au calcul approximatif des voiles cylindriques quelconques, si l'on remplace la courbe directrice par un polygone inscrit.

1.1 Hypothèses de calcul

A part les hypothèses fondamentales de la théorie des coques, les hypothèses de calcul ci-dessus, spécifiques pour les coques cylindriques et prismatiques, seront examinées dans notre étude:

a) la courbe directrice est remplacée par un polygone d'un nombre défini de côtés, les facettes rectangulaires correspondantes étant rigidement jointées entre elles, sur toute la longueur de la génératrice (plus le nombre des côtés est grand, plus les résultants sont exacts; par contre les calculs sont plus laborieux. Pour les calculs courants, 7 côtés permettent d'obtenir des résultats satisfaisants);

b) chaque facette est soumise à la flexion dans son plan, et les déformations correspondantes se produisent conformément à l'hypothèse des sections planes. Il en résulte, que les contraintes σ_x et les efforts normaux N_x ont une distribution linéaire sur la largeur des facettes (à cette fin il est nécessaire que le rapport $b/l < 1/6$, où b est la largeur de la facette, et l la longueur de la génératrice; en pratique, cette condition est toujours satisfaite par le choix d'au moins cinq facettes);

c) toutes les facettes incapables de résister à la flexion et à la tension le long de la génératrice, peuvent être soumises à la flexion normale à leur plan, dans le sens de leur dimension minimum (la largeur);

d) l'influence des déformations sur la largeur de chaque facette est négligée (hypothèse analogue à celle faisant négliger, dans les cadres, les déformations des barres sous l'action des forces axiales et de cisaillement par rapport à celles produites par les moments fléchissants).

Les hypothèses des points b, c, d sont étroitement liées entre elles, et caractérisent les possibilités de calcul d'un voile prismatique à l'aide des moyens élémentaires de la statique des constructions.

Il existe plusieurs études sur le calcul rigoureux des coques cylindriques, dans lesquelles on considère chaque facette comme un diaphragme pour le travail dans son plan propre, et comme une plaque plane pour les charges transversales.

WERFEL [25] établit des équations canoniques par la méthode des efforts, GOLDENBERG et LEVE par la méthode des déformations [12]. Les études sur la stabilité des voiles minces prismatiques sont dues à GIANGRECO [10].

Aborder ce problème en s'appuyant sur la théorie de l'élasticité représente une tâche très complexe quand il s'agit d'un grand nombre de facettes, de sorte qu'il est pratiquement impossible d'utiliser ce procédé pour des fins pratiques. Par surcroît, il est connu que les différences sont petites en comparaison des résultats fournis par l'hypothèse des sections planes, lorsque la hauteur des facettes est faible par rapport à la portée. Aussi l'emploi de cette dernière hypothèse sera-t-il complètement justifié.

L'hypothèse (c) caractérise les coques prismatiques et cylindriques de longueur moyenne, dont les moments de torsion et de flexion longitudinale et les efforts tranchants correspondants sont tellement petits, qu'ils peuvent être négligés dès le commencement.

Le rapport entre la longueur l de la génératrice et la portée d de la voûte, qui caractérise cette possibilité, présente une variation entre les limites approximatives:

$$1 < \frac{l}{d} < 3.$$

On trouve une intéressante discussion de ce problème dans l'ouvrage de CÎRMIGIU [4].

1.2 Principe de la méthode

Dans le cas des voiles prismatiques, la détermination des inconnues revient à l'intégration d'un système d'équations différentielles. Supposant que la solution générale est connue, les constantes ne doivent être précisées que par des conditions aux tympans; les conditions le long des génératrices marginales sont considérées implicitement, lorsqu'on tient compte du comportement de chaque facette.

En tenant compte des caractéristiques de l'appui sur les tympans, et en utilisant la méthode de la séparation des variables, on peut ramener la résolution du système d'équations différentielles à la résolution d'un système algébrique d'équations linéaires. Pour la simplicité de l'exposé, le cas des voiles prismatiques à appui simple sur les deux tympans sera d'abord traité en détail, le cas général étant indiqué ensuite avec les applications particulières possibles.

Dans ce qui suit, on exposera le mode d'établissement des équations canoniques par la voie statique. Pour le système de base, on a choisi une surface prismatique constituée par une série de facettes articulées entre elles (dans le sens transversal) et ayant, d'après les directions des déplacements recherchés, des liaisons rigides distribuées d'une manière continue le long des arêtes intermédiaires.

La littérature distingue deux méthodes principales, suivant les conditions qui doivent être imposées à ce système de base pour qu'il soit équivalent au système réel.

a) D'après la méthode de VLASSOV, on exprime qu'en chaque point d'une arête, les angles réciproques de rotation de deux facettes voisines sont égaux (la continuité des déformations angulaires) et que les efforts de cisaillement le long de chaque arête sont en équilibre.

b) Une deuxième méthode exposée par GIRKMANN [11], impose au système de base l'égalité des élongations spécifiques ε_x et des angles de rotations réciproques le long de chaque arête.

Pour obtenir les résultats présentés plus loin, on a utilisé la méthode de VLASSOV permettant d'écrire plus simplement le système d'équations.

Quelques éléments nécessaires à l'application de la méthode de VLASSOV sont indiqués dans le chapitre suivant.

2. L'application de la méthode de Vlassov

Chaque facette d'un voile mince prismatique peut être considérée comme une poutre de portée l . Les conditions aux appuis imposent d'avoir $M = 0$ aux extrémités ($x = 0, x = l$), et par suite $\sigma_x = 0$, et $v = 0$ pour les flèches dans le plan des facettes. Les efforts de cisaillement et les déplacements u correspondants le long des génératrices atteindront leur valeur maximum aux extrémités et une valeur nulle dans les sections de moment maximum.

Toutes ces conditions aux limites seront satisfaites si l'on admet pour les inconnues qui interviennent, une variation sinusoïdale et cosinoïdale le long des génératrices.

Fixant l'origine des x à l'une des extrémités des facettes, l'expression des charges extérieures sous forme de série trigonométrique sera:

$$p(x) = \sum p_n \cdot \sin n\pi \frac{x}{l}; \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

Pour simplifier, on peut poser:

$$L = \frac{l}{n\pi} \quad (2)$$

la longueur réduite de la génératrice (correspondant au terme d'ordre n de la série trigonométrique). Dans ce cas, le terme général de l'expression (1) devient:

$$p_n(x) = p_n \cdot \sin \frac{x}{L}. \quad (3)$$

Lors du développement de l'expression des charges en série trigonométrique, les inconnues seront choisies de la même forme, et en nous basant sur le principe de la superposition des effets, nous pourrons étudier séparément l'effet de chaque terme. Ce procédé présente l'avantage qu'il permet la réduction au problème plan.

Les équations canoniques peuvent être établies en utilisant quelques schémas élémentaires de chargement d'une facette, par analogie à l'équation des trois moments de CLAPEYRON.

Vlassov a démontré [23] que le nombre des inconnues de chaque équation est minimum et égal à huit, si l'on adopte la méthode mixte avec M_φ et u comme inconnues.

En considérant:

$$M_\varphi(x) = \sum_n M_n \cdot \sin \frac{x}{L}; \quad u(x) = \sum_n U_n \cos \frac{x}{L} \quad (4)$$

et en se limitant à la n -ième harmonique, le système d'équations canoniques peut être écrit sous forme concentrée:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=k-1}^{i=k+1} r_{k,i}^u \cdot U_i + \sum_{i=k-2}^{i=k+2} r_{k,i}^M \cdot M_i + r_k^p &= 0 \\ \sum_{i=k-2}^{i=k+2} \Theta_{k,i}^u \cdot U_i + \sum_{i=k-1}^{i=k+1} \Theta_{k,i}^M \cdot M_i + \Theta_k^p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Les équations du type (5) ont une signification statique, car elles expriment que les efforts de cisaillement d'une arête sont en équilibre. Les équations du type (6) ont une signification géométrique et expriment la continuité des déformations angulaires transversales.

Les quantités $r^u, r^M, \Theta^u, \Theta^M$ représentent les coefficients d'influence qu'on peut déterminer à l'aide des schémas élémentaires de chargement d'une facette. Voici ces différents schémas:

— $r_{k,i}^u$ représente l'effort de cisaillement dans l'arête k , lorsque l'arête i supporte des déformations longitudinales-unité ($U_i = 1$);

— $r_{k,i}^M$ représente l'effort de cisaillement dans l'arête k , lorsque des moments unité agissent le long de l'arête i ($M_i = 1$);

— $\Theta_{k,i}^u$ représente la rotation produite dans l'arête k , lorsque l'arête i supporte des déformations longitudinales unité ($U_i = 1$);

— $\Theta_{k,i}^M$ représente la rotation dans l'arête k , lorsque des moments unité agissent le long de l'arête i ($M_i = 1$).

Enfin, les termes libres ont les significations suivantes:

— r_k^p est l'effort de cisaillement dans l'arête k , lorsque le voile prismatique est soumis à des charges extérieures.

— Θ_k^p est la rotation de la facette dans la section k , produite par les charges extérieures.

* * *

Une simplification des équations (5) et (6) peut être obtenue par le choix d'autres inconnues. Étant donné qu'entre la contrainte normale longitudinale σ_x et le déplacement longitudinal U subsiste la relation simple

$$\sigma_{xk} = \frac{EU_k}{L} \quad (7)$$

il est plus convenable de choisir σ_{xk} comme nouvelle inconnue. Conformément à l'équation (7), pour un déplacement $U > 0$, on aura $\sigma_x > 0$ (tension).

Par cette substitution, les significations physiques des équations restent les mêmes.

En remplaçant l'index supérieur u par σ , et en multipliant chaque équation statique par $6L$, et chaque équation géométrique par $6E$, on obtient les nouveaux coefficients d'influence du tableau 1; pour simplifier, on a posé $R_k = 6Lr_k^p$.

Ainsi le système (5), (6) devient:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=k-1}^{i=k+1} r_{k,i}^{\sigma} \cdot \sigma_i + \sum_{i=k-2}^{i=k+2} r_{k,i}^M \cdot M_i + 6L \cdot r_k^p = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=k-2}^{i=k+2} \Theta_{k,i}^{\sigma} \cdot \sigma_i + \sum_{i=k-1}^{i=k+1} \Theta_{k,i}^M \cdot M_i + 6E \Theta_k^p = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Comme exemple de l'établissement des équations canoniques, le tableau 2 donne la matrice du système d'équations pour le cas d'un voile prismatique à neuf facettes. Quand il y a deux valeurs, la valeur supérieure correspond à la charge symétrique, et celle inférieure à la charge antisymétrique par rapport à l'axe.

Les équations statiques sont écrites pour toutes les facettes (0, 1, 2 . . . 9) et les équations géométriques pour les arêtes intermédiaires (1, 2 . . . 8). Il faut remarquer que dans cette hypothèse, les arêtes marginales sont considérées comme articulées, les déplacements latéraux étant empêchés.

Si l'on considère que les facettes marginales ont leurs arêtes extrêmes libres de toute liaison, ces facettes ne présentent plus aucune rigidité à la rotation et, par conséquent, les moments de flexion transversaux M_1 et M_{n-1} doivent être considérés nuls. Dans le cas des voiles minces prismatiques à neuf facettes, on supprime la colonne M_1 et la ligne Θ_1^p .

Pour les deux cas, les coefficients d'influence sont donnés dans le Tableau No 1.

* * *

Contrôle des coefficients et des résultats. Comme le calcul des coefficients est assez laborieux, leur vérification s'impose avant de passer à la résolution du système d'équations.

En se basant sur le théorème de la réciprocité des déplacements (Maxwell—Betti), on peut démontrer que les coefficients sont liés par les relations:

$$\left. \begin{aligned} r_{i,k}^{\sigma} &= r_{k,i}^{\sigma} & ; & & \Theta_{ik}^{\sigma} &= \Theta_{k,i}^{\sigma} \\ r_{i,k}^M &= r_{k,i}^M & ; & & \Theta_{ik}^M &= \Theta_{k,i}^M \\ r_{i,k}^M &= -\Theta_{k,i}^{\sigma} & ; & & r_{k,k}^M &= -\Theta_{k,k}^{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Tableau 1
Coefficients d'influence

Coefficients du :	1 ^{er} cadran	$r_{k-1,k}^\sigma = A_k$ $r_{k,k}^\sigma = 2(A_k + A_{k+1})$ $r_{k+1,k}^\sigma = A_{k+1}$	Les termes libres dans les équations de l'équilibre des efforts de cisaillement	$6Lr_k^p = 6L^2 \left(\frac{\Delta N_k^p}{b_k} - \frac{\Delta N_{k+1}^p}{b_{k+1}} \right) = R_k$
	2 ^{ème} cadran	$r_{k-2,k}^M = r_{k,k-2}^M = -\frac{6L^2}{b_{k-1}} \cdot \frac{1}{b_k \sin \varphi_{k-1}}$ $r_{k-1,k}^M = r_{k,k-1}^M = \frac{6L^2}{b_{k-1}} \cdot \frac{1}{b_k \sin \varphi_{k-1}} + \frac{6L^2}{b_k} \left(\frac{\cot \varphi_{k-1} + \cot \varphi_k}{b_k} + \frac{1}{b_{k+1} \sin \varphi_k} \right)$ $r_{k,k}^M = -\frac{6L^2}{b_k} \left(\frac{\cot \varphi_{k-1} + \cot \varphi_k}{b_k} + \frac{1}{b_{k+1} \sin \varphi_k} \right) - \frac{6L^2}{b_{k+1}} \left(\frac{1}{b_k \sin \varphi_k} + \frac{\cot \varphi_k + \cot \varphi_{k+1}}{b_{k+1}} \right)$ $r_{k+1,k}^M = r_{k,k+1}^M = \frac{6L^2}{b_{k+1}} \left(\frac{1}{b_k \sin \varphi_k} + \frac{\cot \varphi_k + \cot \varphi_{k+1}}{b_{k+1}} \right) + \frac{6L^2}{b_{k+2}} \cdot \frac{1}{b_{k+1} \sin \varphi_{k+1}}$ $r_{k+2,k}^M = r_{k,k+2}^M = -\frac{6L^2}{b_{k+2}} \cdot \frac{1}{b_{k+1} \sin \varphi_{k+1}}$		<p align="center">Charges verticales</p> $6Lr_k^p = -6L^2 \left(\frac{P_{k-1}}{b_k} \cdot \frac{\sin \psi_{k-1}}{\sin \varphi_{k-1}} - \frac{P_k}{b_k} \cdot \frac{\sin \psi_{k+1}}{\sin \varphi_k} - \frac{P_k}{b_{k+1}} \cdot \frac{\sin \psi_k}{\sin \varphi_k} + \frac{P_{k+1}}{b_{k+1}} \cdot \frac{\sin \psi_{k+2}}{\sin \varphi_{k+1}} \right)$ <p align="center">Poids propre Neige</p> $P_1 = g_1 b_1 + \frac{1}{2} g_2 b_2 \qquad P_1 = \frac{1}{2} p b_2 \sin \psi_2$ $P_k = \frac{1}{2} (g_k \cdot b_k + g_{k+1} \cdot b_{k+1}) \qquad P_k = \frac{p}{2} (b_k \sin \psi_k + b_{k+1} \sin \psi_{k+1})$
	3 ^e cadran	$\Theta_{i,k}^\sigma = \Theta_{k,i}^\sigma = -r_{k,i}^M = -r_{i,k}^M; \quad \Theta_{k,k}^\sigma = -r_{k,k}^M$		$6E\Theta_k^p = 6 \left(\frac{\Omega_k \cdot C_k}{b_k \cdot I_k} + \frac{\Omega_{k+1} \cdot d_{k+1}}{b_{k+1} \cdot I_{k+1}} \right)$ <p align="center">Poids propre</p> $6E\Theta_k = 3\gamma \left[\left(\frac{b_k}{h_k} \right)^3 \cdot h_k \cdot \sin \psi_k + \left(\frac{b_{k+1}}{h_{k+1}} \right)^3 \cdot h_{k+1} \cdot \sin \psi_{k+1} \right]$ <p align="center">Neige</p> $6E\Theta_k = 3p \left[\left(\frac{b_k}{h_k} \right)^3 \cdot \sin^2 \cdot \psi_k + \left(\frac{b_{k+1}}{h_{k+1}} \right)^3 \cdot \sin^2 \cdot \psi_{k+1} \right]$
	4 ^{ème} cadran	$\Theta_{k-1,k}^M = \Theta_{k,k-1}^M = \frac{b_k}{I_k}$ $\Theta_{k,k}^M = 2 \left(\frac{b_k}{I_k} + \frac{b_{k+1}}{I_{k+1}} \right)$ $\Theta_{k+1,k}^M = \Theta_{k,k+1}^M = \frac{b_{k+1}}{I_{k+1}}$		<p align="center">Les termes libres dans les équations de la continuité des rotations</p>

Note : — Lorsque les arêtes extrêmes (0 et n) sont articulées, et les voisines (1 et n - 1) sont rigides, dans les formules précédentes on aura: $k = 1, 2, 3, \dots (n - 1)$.
 — Lorsque les arêtes extrêmes sont libres, les formules précédentes sont valables pour $k = 2, 3, 4, \dots ((n - 2))$.

Tableau 2
Matrice du système d'équations canoniques

Arête	Contraintes					Moments				Termes libres
	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	M_1	M_2	M_3	M_4	
0	$r_{0,0}^\sigma$	$r_{0,1}^\sigma$				$r_{0,1}^M$	$r_{0,2}^M$			R_0
1	$r_{1,0}^\sigma$	$r_{1,1}^\sigma$	$r_{1,2}^\sigma$			$r_{1,1}^M$	$r_{1,2}^M$	$r_{1,3}^M$		R_1
2		$r_{2,1}^\sigma$	$r_{2,2}^\sigma$	$r_{2,3}^\sigma$		$r_{2,1}^M$	$r_{2,2}^M$	$r_{2,3}^M$	$r_{2,4}^M$	R_2
3			$r_{3,2}^\sigma$	$r_{3,3}^\sigma$	$r_{3,4}^\sigma$	$r_{3,1}^M$	$r_{3,2}^M$	$r_{3,3}^M$	$r_{3,4}^M + r_{3,5}^M$ $r_{3,4}^M - r_{3,5}^M$	R_3
4				$r_{4,3}^\sigma$	$r_{4,4}^\sigma + r_{4,5}^\sigma$ $r_{4,4}^\sigma - r_{4,5}^\sigma$		$r_{4,2}^M$	$r_{4,3}^M + r_{5,3}^M$ $r_{4,3}^M - r_{5,3}^M$	$r_{4,4}^M + r_{4,5}^M$ $r_{4,4}^M - r_{4,5}^M$	R_4 R_4'
1	$\Theta_{1,0}^\sigma$	$\Theta_{1,1}^\sigma$	$\Theta_{1,2}^\sigma$	$\Theta_{1,3}^\sigma$		$\Theta_{1,1}^M$	$\Theta_{1,2}^M$			$6E\Theta_1^p$
2	$\Theta_{2,0}^\sigma$	$\Theta_{2,1}^\sigma$	$\Theta_{2,2}^\sigma$	$\Theta_{2,3}^\sigma$	$\Theta_{2,4}^\sigma$	$\Theta_{2,1}^M$	$\Theta_{2,2}^M$	$\Theta_{2,3}^M$		$6E\Theta_2^p$
3		$\Theta_{3,1}^\sigma$	$\Theta_{3,2}^\sigma$	$\Theta_{3,3}^\sigma$	$\Theta_{3,4}^\sigma + \Theta_{3,5}^\sigma$ $\Theta_{3,4}^\sigma - \Theta_{3,5}^\sigma$		$\Theta_{3,2}^M$	$\Theta_{3,3}^M$	$\Theta_{3,4}^M$	$6E\Theta_3^p$
4			$\Theta_{4,2}^\sigma$	$\Theta_{4,3}^\sigma + \Theta_{5,3}^\sigma$ $\Theta_{4,3}^\sigma - \Theta_{5,3}^\sigma$	$\Theta_{4,4}^\sigma + \Theta_{4,5}^\sigma$ $\Theta_{4,4}^\sigma - \Theta_{4,5}^\sigma$			$\Theta_{4,3}^M$	$\Theta_{4,4}^M + \Theta_{4,5}^M$ $\Theta_{4,4}^M - \Theta_{4,5}^M$	$6E\Theta_4^p$ $6E\Theta_4^p$

	I	II	
	III	IV	

Conformément à ces relations, chacun des quatre quadrants de la matrice (voir Tableau 2) admet sa propre diagonale principale comme axe de symétrie.

De même, en étudiant l'équilibre d'un demi-prisme, on trouve qu'il faut satisfaire les conditions:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=i-2}^{k=i+2} r_{i,k}^M &= - \sum_{k=i-2}^{k=i+2} \theta_{k,i}^\sigma = 0. \\ \sum r_i^p &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (11) \\ (12) \end{array}$$

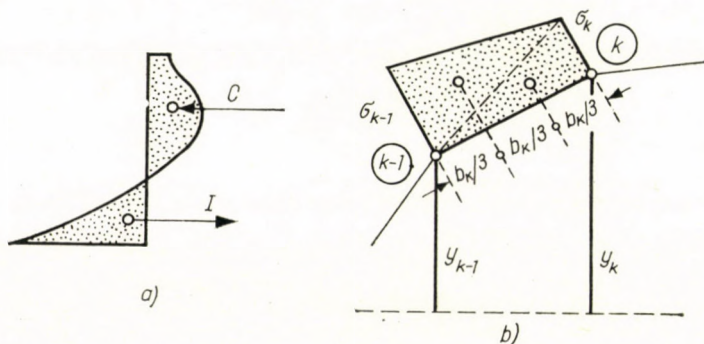


Fig. 1. L'équilibre d'une section transversale: a) les résultantes en compression et tension; b) détermination du moment des efforts intérieurs

Après avoir déterminé les racines, il est recommandé de les vérifier. A cette fin, on peut écrire deux conditions d'équilibre global:

$$\left. \sum_{k=1}^n A_k \cdot \frac{\sigma_{k-1} + \sigma_k}{2} = 0 \right\} (13)$$

$$\left. \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k \left[(\sigma_{k-1} + \sigma_k) y_{k-1} + \frac{1}{3} b_k \cos \psi_k (\sigma_{k-1} + 2\sigma_k) \right] + \mathfrak{M}_x = 0. \right\} (14)$$

($A_k = b_k h_k$ — aire de la section transversale de la facette k .)

L'interprétation de la relation (13) est simple. Faisons une coupe transversale au point $l/2$ et exprimons l'équilibre de la section (fig. 1a). Les seuls efforts qui interviennent sont dus aux contraintes σ_x . La relation (13) est obtenue par projections sur l'axe Ox en tenant compte de ce que les efforts présentent une variation linéaire entre deux arêtes.

D'une manière analogue, la relation (14) exprime que la somme du moment extérieur \mathfrak{M}_x (évalué comme pour une poutre simplement appuyée de portée l) et des moments des efforts intérieurs est nulle. Les ordonnées y sont mesurées par rapport au plan des arêtes extrêmes 0 et n (fig. 1b).

Dans le cas de charges verticales uniformément réparties le long des génératrices, la charge par unité de longueur s'écrit:

$$g = \sum_{k=1}^{n-1} P_k = \frac{4g}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{x}{L} ; (n = 1, 3, 5 \dots) . \quad (15)$$

Le moment de flexion extérieur produit par l'harmonique n est:

$$m_x = \frac{4g L^2}{n\pi} \cdot \sin \frac{x}{L} . \quad (16)$$

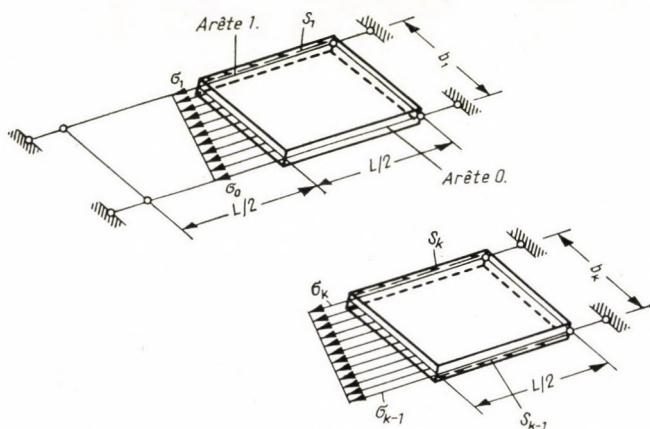


Fig. 2. La déduction des efforts de cisaillement pour la première facette et la facette k

Dans le cas de charges horizontales antisymétriques, l'équation des projections est identiquement satisfaite et l'équation des moments intérieurs devient:

$$\sum_{k=1}^n \sigma_k \left[x_k (A_k + A_{k+1}) + \frac{1}{3} (A_k \cdot b_k \cdot \sin \psi_k - A_{k+1} \cdot b_{k+1} \cdot \sin \psi_{k+1}) \right] + M_x = 0. \quad (17)$$

* * *

Théorie sans moments. Le système d'équations est simplifié dans l'hypothèse suivant laquelle on peut négliger l'influence mutuelle des moments de flexion transversaux et des efforts de cisaillement longitudinaux. Ainsi les comportements longitudinal et transversal du voile prismatique sont considérés séparément.

Un premier groupe de relations peut être obtenu, si l'on considère le premier quadrant seul et les termes libres correspondants; cela représente la solution sans moments d'EHLERS [8].

Un deuxième groupe de relations est obtenu, si on ne considère que le 4^e quadrant et les termes libres correspondants; ceci représente la solution de Clapeyron pour la poutre continue.

* * *

Détermination des efforts $N_{x\varphi} = N_{\varphi x} \equiv S$. Les valeurs des inconnues σ_x et M_φ une fois obtenues par la résolution du système d'équations du tableau 2, il reste encore à déterminer les valeurs des efforts de cisaillement.

De l'équilibre d'un élément de plaque de longueur $\frac{L}{2} = \frac{l}{2n\pi}$ (fig. 2), il résulte:

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= 0 \text{ (bord libre)} \\ S_i &= (\sigma_0 + \sigma_1) \frac{A_1}{2L} \\ S_2 &= S_1 + (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{A_2}{2L} \\ \dots\dots\dots \\ S_k &= S_{k-1} + (\sigma_{k-1} + \sigma_k) \frac{A_k}{2L} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Les autres valeurs statiques résultent des considérations simples relatives aux poutres.

* * *

En marge de ce bref rappel théorique de notions bien connues, on peut étudier des cas extrêmement variés et d'un intérêt pratique tout particulier. Dans le cadre de la présente étude, les auteurs se sont justement proposés d'éclaircir une série d'aspects qui, à leur connaissance, n'ont pas encore été élucidés par la littérature.

Le cas absolument général étant pratiquement impossible à étudier, l'étude a été conduite sur la base des exemples numériques.

Les résultats numériques sont détaillés au 3^e chapitre; le 4^e donne les conclusions et quelques possibilités d'extension des applications.

3. Problèmes étudiés

3.1 Influence de l'allure des courbes directrices

En vue d'apprécier l'influence de l'allure des courbes directrices sur l'état de contrainte dans les coques prismatiques ou cylindriques, l'étude comprend l'analyse comparative de trois types de coques prismatiques à 7 facettes et

poutres de retombée, qui travaillent dans des conditions statiques similaires (mêmes charges et mêmes dimensions géométriques principales), mais ont des courbes directrices différentes, fréquemment utilisées dans la pratique:

- directrice circulaire,
- directrice chaînette,
- directrice parabolique.

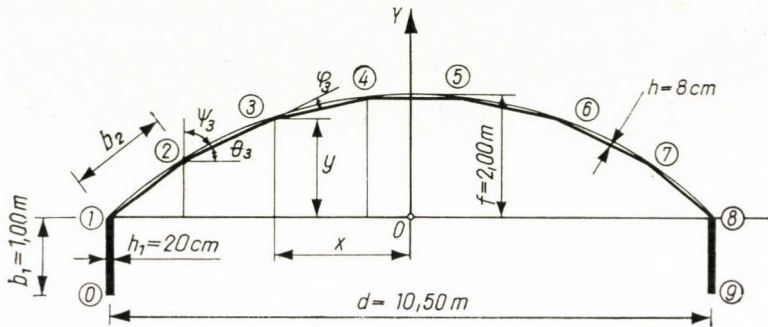


Fig. 3. Les éléments géométriques et dimensionnels de la section transversale

Les éléments communs aux trois types de coques étudiés sont:

a) Les éléments dimensionnels (fig. 3)

- longueur de la génératrice $l = 24 \text{ m}$
- portée de la voûte $d = 10,50 \text{ m}$
- flèche de la directrice $f = 2,00 \text{ m}$
- hauteur de la poutre de retombée $b_1 = 1,00 \text{ m}$
- épaisseur de la poutre de retombée $h_1 = 0,20 \text{ m}$
- épaisseur du voile $h_2 = h_3 = \dots h_5 = 0,08 \text{ m}$

b) les conditions du travail statique

- simple appui sur les tympans
- liaisons articulées le long des arêtes voisines aux arêtes extrêmes (entre les poutres de retombée et la coque).

c) Conditions de chargement:

- poids propre, en considérant le poids spécifique du béton armé: $\gamma = 2400 \text{ kg/m}^3$

Les éléments géométriques dépendants de l'allure de la courbe directrice sont indiqués dans le tableau 3 et la fig. 3 (pour le voile à directrice circulaire voir aussi fig. 4).

Exemple numérique de calcul. Afin de faciliter le développement des calculs à effectuer, on présente l'exemple numérique suivant pour le cas de la coque cylindrique parabolique.

a) Calcul des coefficients d'influence des équations canoniques.

I^{er} Quadrant. Soit à calculer la valeur du terme $r_{k,k}^\sigma$. Conformément au tableau 1: $r_{k,k}^\sigma = 2(A_k + A_{k+1})$ où: A_k — est l'aire des sections transversales des facettes: $A_k = b_k h_k$. En posant: $k = 2$, et prenant les valeurs numériques correspondantes du tableau 3, il vient: $r_{2,2}^\sigma = 2(A_2 + A_3) = 2(h_2 b_2 + h_3 b_3) = 2(8 \times 159,80 + 8 \times 164,80) = 5193,60 \text{ cm}^2$ (voir tableau 6).

II^e Quadrant. Conformément au tableau 1, l'expression de $r_{k,k}^M$ est:

$$r_{k,k}^M = \frac{6L^2}{b_k} \left(\frac{\cot \varphi_{k-1} + \cot \varphi_k}{b_k} + \frac{1}{b_{k+1} \cdot \sin \varphi_k} \right) - \frac{6L^2}{b_{k+1}} \left(\frac{1}{b_k \cdot \sin \varphi_k} + \frac{\cot \varphi_k + \cot \varphi_{k+1}}{b_{k+1}} \right).$$

Tableau 3
Éléments géométriques

Arête	x m	Directrice										
		circulaire	chaînette					parabolique				
		y m	y m	ψ	φ	b m	A m ²	y m	ψ	φ	b m	A m ²
1	5,2500	0	0	—	55°42'56"	1,0000	0,2000	0	—	56°19'49"	1,0000	0,2000
2	3,9205	0,9572	0,9064	55°42'56"	9°47'39"	1,6091	0,1287	0,8847	56°19'49"	8°58'13"	1,5980	0,1270
3	2,4220	1,6822	1,5890	63°30'35"	11°40'56"	1,6466	0,1317	1,5743	65°18'02"	11°27'54"	1,6480	0,1318
4	0,8191	1,9574	1,9534	77°11'31"	12°11'31"	1,6438	0,1315	1,9513	76°45'56"	13°14'04"	1,6460	0,1317
5	-0,8191	1,9574	1,9534	90°	—	1,6382	0,1311	1,9513	90°	—	1,6382	0,1311

A l'aide des valeurs numériques du tableau 3 (toujours pour $k = 2$), on obtient:

$$r_{2 \cdot 2}^M = \frac{-6 L^2}{b_2} \left(\frac{\cot \varphi_1 + \cot \varphi_2}{b_2} + \frac{1}{b_3 \cdot \sin \varphi_2} \right) - \frac{6 L^2}{b_3} \left(\frac{1}{b_2 \sin \varphi_2} + \frac{\cot \varphi_2 + \cot \varphi_3}{b_3} \right) =$$

$$= -4121,27450,$$

où d'après l'expression (2), L vaut:

$$L = \frac{l}{n \pi} = 7,6394 \text{ m.} \quad (n = 1)$$

III^e Quadrant. Les coefficients du III^e quadrant ont la même valeur que ceux du II^e quadrant, mais avec des signes contraires.

IV^e Quadrant. Pour les coefficients du IV^e quadrant, le moment d'inertie de chaque facette est calculé pour 1 cm de largeur de la voûte, et par conséquent: $I_k = h_k^3/12$.

Vu que, pour toutes les facettes de la coque, $h_k = 8$ cm, il vient:

$$I_2 = I_3 = \dots I_5 = \frac{8^3}{12} = 42,6667 \text{ cm}^4.$$

Toujours pour $k = 2$, et tenant compte des valeurs des tableaux 1 et 3, on obtient pour le coefficient

$$\Theta_{kk}^M = 2 \left(\frac{b_k}{I_k} + \frac{b_{k+1}}{I_{k+1}} \right)$$

la valeur:

$$\Theta_{22}^M = 2 \left(\frac{b_2}{I_2} + \frac{b_3}{I_3} \right) = 2 \left(\frac{159,80 + 164,80}{42,6667} \right) = 15,2150 \text{ cm}^{-2}.$$

Termes libres «R_k». P_1 et P_k représentent les forces résultantes des charges qui proviennent du poids propre des facettes, à l'intersection de celles-ci.

Le poids propre des facettes est déterminé à l'aide des expressions suivantes:

$$\text{— pour la poutre de retombée: } g_1 = \frac{4}{\pi} \gamma h_1 = \frac{4 \cdot 2400 \cdot 0,20}{3,14} = 611,4650 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{— pour les facettes de la coque: } g_k = \frac{4}{\pi} \gamma h_k; \text{ pour } k = 2, 3, 4 \dots \text{ on obtient:}$$

$$g_2 = g_3 = g_4 = \frac{4 \cdot 2400 \cdot 0,08}{3,14} = 244,5860 \text{ kg/m}^2.$$

D'après les expressions du tableau 1, les valeurs des résultantes P_1 et P_k sont:

$$P_1 = g_1 b_1 + \frac{1}{2} g_2 b_2 = 611,4650 \cdot 1,00 + \frac{1}{2} \cdot 244,5860 \cdot 1,5980 = 806,8892 \text{ kg/m}$$

$$P_k = \frac{1}{2} (g_k b_k + g_{k+1} \cdot b_{k+1}), \text{ pour } k = 2, 3 \dots \text{ il résulte:}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} 244,5860 (1,5980 + 1,6480) = 396,9630 \text{ kg/m}$$

$$P_3 = \frac{1}{2} 244,5860 (1,6480 + 1,6460) = 402,8331 \text{ kg/m}.$$

A l'aide de ces valeurs, on peut déterminer maintenant les efforts de cisaillement r_k^p , dont l'expression est, conformément au tableau 1 :

$$r_k^p = L \left(\frac{P_{k-1}}{b_k} \cdot \frac{\sin \psi_{k-1}}{\sin \varphi_{k-1}} - \frac{P_k}{b_k} \cdot \frac{\sin \psi_{k+1}}{\sin \varphi_k} - \frac{P_k}{b_{k+1}} \cdot \frac{\sin \psi_k}{\sin \varphi_k} + \frac{P_{k+1}}{b_{k+1}} \cdot \frac{\sin \psi_{k+2}}{\sin \varphi_{k+1}} \right).$$

Pour $k = 2$ on obtient :

$$r_2^p = L \left(\frac{P_1}{b_2} \cdot \frac{\sin \psi_1}{\sin \varphi_1} - \frac{P_2}{b_2} \cdot \frac{\sin \psi_3}{\sin \varphi_2} - \frac{P_2}{b_3} \cdot \frac{\sin \psi_2}{\sin \varphi_2} + \frac{P_3}{b_3} \cdot \frac{\sin \psi_4}{\sin \varphi_3} \right) = 11\,725,3617 \text{ kg/m.}$$

Du terme libre $R_2 = 6 L r_2^p$ il résulte alors

$$R_2 = 6 L r_2^p = 6 \times 7,6394 \times 11\,725,3617 = 537\,448,3700 \text{ kg (voir tableau 6)}$$

Termes libres « $6E \Theta_k^p$ ». Dans l'expression générale :

$$6 E \Theta_k^p = 6 \frac{\Omega_k c_k}{b_k I_k} + \frac{\Omega_{k+1} \cdot d_{k+1}}{b_{k+1} \cdot I_{k+1}}$$

les divers termes ont la signification suivante :

Ω_k aire du diagramme des moments produits sur les facettes b_k par les composantes normales des charges :

$g_k = \cos \Theta_k$, pour l'hypothèse de l'appui simple.

Avec $g_k = \frac{4}{\pi} \gamma h_k$, il vient :

$$\Omega_k = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} g_k \cdot \cos \Theta_k \cdot b_k^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\pi} \cdot h_k \cos \Theta_k \cdot b_k^3.$$

Pour $k = 2$, on obtient :

$$\Omega_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\pi} \cdot h_2 \cdot \cos \Theta_2 \cdot b_2^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2400}{3,14} \cdot 0,08 \cdot 0,83225 \cdot 1,5980^3 = 69,1889 \text{ kgm.}$$

D'une manière analogue, on obtient pour Ω_{k+1} :

$$\Omega_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\pi} \cdot h_3 \cos \Theta_3 b_3^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2400}{3,14} \cdot 0,08 \cdot 0,90851 \cdot 1,6480^3 = 82,8394 \text{ kgm.}$$

c_k et d_k distances entre le centre de gravité de l'aire des moments de la facette k et le noeud k (à gauche), respectivement le noeud $k + 1$ (à droite); particulièrement, dans le cas de charge considéré :

$$c_k = d_k = \frac{b_k}{2}.$$

Pour $k = 2$, il en résulte alors :

$$c_2 = d_2 = \frac{b_2}{2} = 0,7990 \text{ m,}$$

$$d_3 = \frac{b_3}{2} = 0,8240 \text{ m,}$$

$$I_k = \frac{1}{12} \cdot h_k^3 = 42,6667 \text{ cm}^4 \text{ (voir IV}^e \text{ quadrant).}$$

Le terme libre (toujours pour $k = 2$) donne:

$$6 E \Theta_2^p = 6 \frac{\Omega_2 \cdot c_2}{b_2 I_2} + \frac{\Omega_3 \cdot d_3}{b_3 I_3} = 6 \left(\frac{6918,89 \cdot 79,90}{159,80 \cdot 42,6667} + \frac{8283,94 \cdot 82,40}{164,80 \cdot 42,6667} \right) = 1067,3246 \text{ kg/cm}^2 \text{ (voir tableau 6).}$$

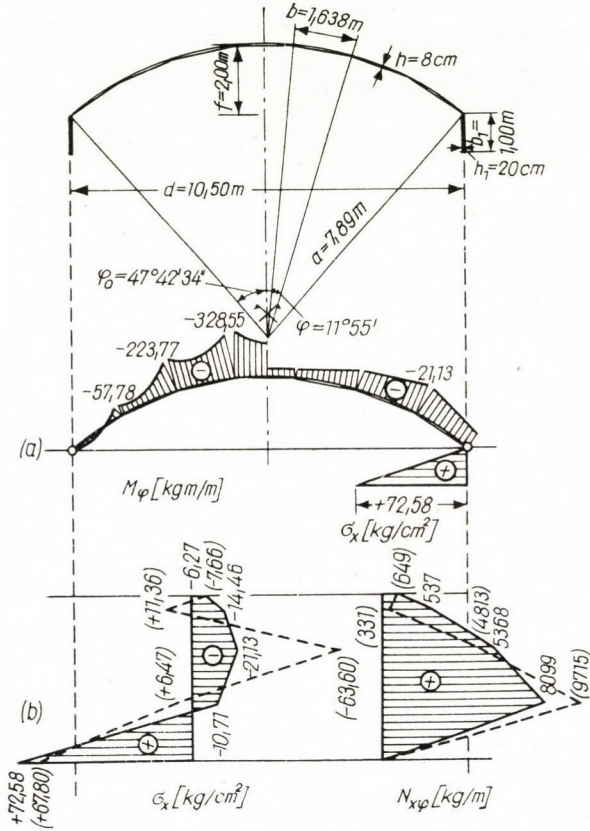


Fig. 4. Directrice circulaire. Diagrammes des moments fléchissants et des contraintes pour le poids propre

- a) Diagramme des moments fléchissants M_φ et des contraintes σ_x
 b) Diagramme des contraintes et des efforts de cisaillement

Les coefficients d'influence, établis conformément aux exemples basés sur le calcul exact suivant la théorie de la flexion, sont vérifiés à l'aide des expressions (11) et (12), les différences obtenues étant négligeables. Ainsi, à la vérification des coefficients du II^e quadrant par exemple (tableau 6), les différences sont

$$r_{02}^M + r_{12}^M + r_{22}^M + r_{32}^M + r_{42}^M = 0,00000$$

$$r_{13}^M + r_{23}^M + r_{33}^M + r_{43}^M + r_{46}^M = 0,00001$$

$$r_{24}^M + r_{34}^M + r_{35}^M + r_{44}^M + r_{45}^M = 0,00000.$$

Les coefficients ont été inscrits dans les matrices des systèmes de 8 équations à 8 inconnues, présentées dans les tableaux 4 à 6, respectivement pour les coques prismatiques à directrices circulaire, chaînette et parabolique.

A l'avant-dernière ligne de ces mêmes tableaux ont été inscrites les racines σ_x et M_φ obtenues par la résolution des systèmes d'équations. Elles satisfont aux conditions de contrôle de l'équilibre global, vérifiées par projection à l'aide de l'expression (13), ainsi qu'aux conditions d'équilibre du moment extérieur et du moment résistant intérieur, conformément à l'expression (14).

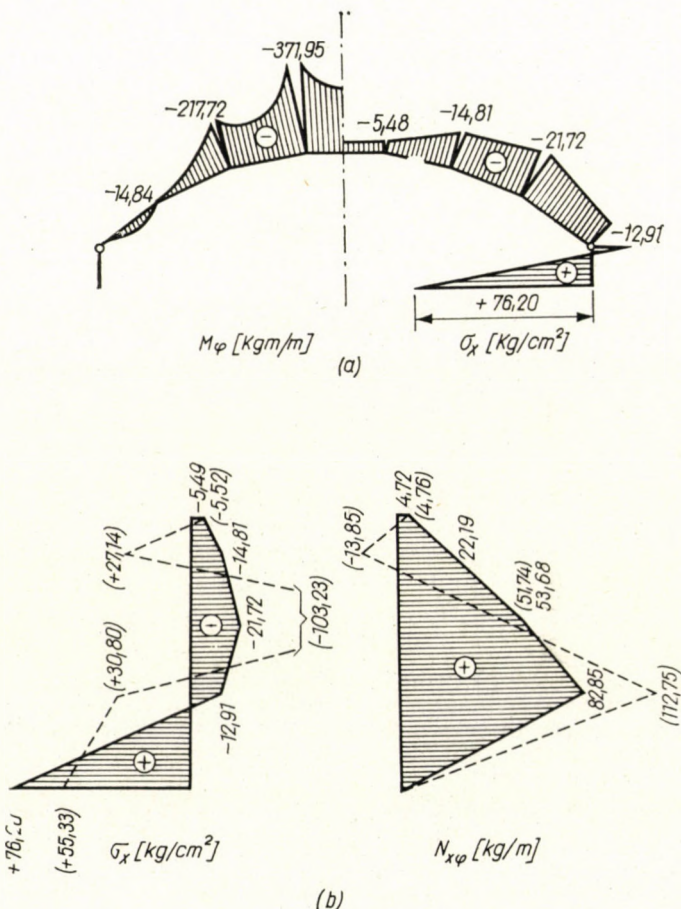


Fig. 5. Directrice chaînette. Diagrammes des moments fléchissants et des contraintes pour le poids propre

- a) Diagramme des moments fléchissants M_φ et des contraintes σ_x
- b) Diagramme des contraintes et des efforts de cisaillement

A la vérification par projection (toujours dans le cas de la coque prismatique parabolique), on a obtenu:

$$\sum_{k=1}^n A_k \cdot \frac{\sigma_{k-1} + \sigma_k}{2} = A_1(\sigma_0 + \sigma_1) + A_2(\sigma_1 + \sigma_2) + A_3(\sigma_2 + \sigma_3) + A_4(\sigma_3 + \sigma_4) + A_5 \sigma_4 = -1,5521 \sim 0,00.$$

De même, la vérification basée sur l'équilibre des moments donne:
— le moment extérieur:

$$M_x = \frac{4gL^2}{\pi} = \frac{4\gamma\Sigma A_k l^2}{\pi^3} = 234 \cdot 635,4885 \text{ kgm}$$

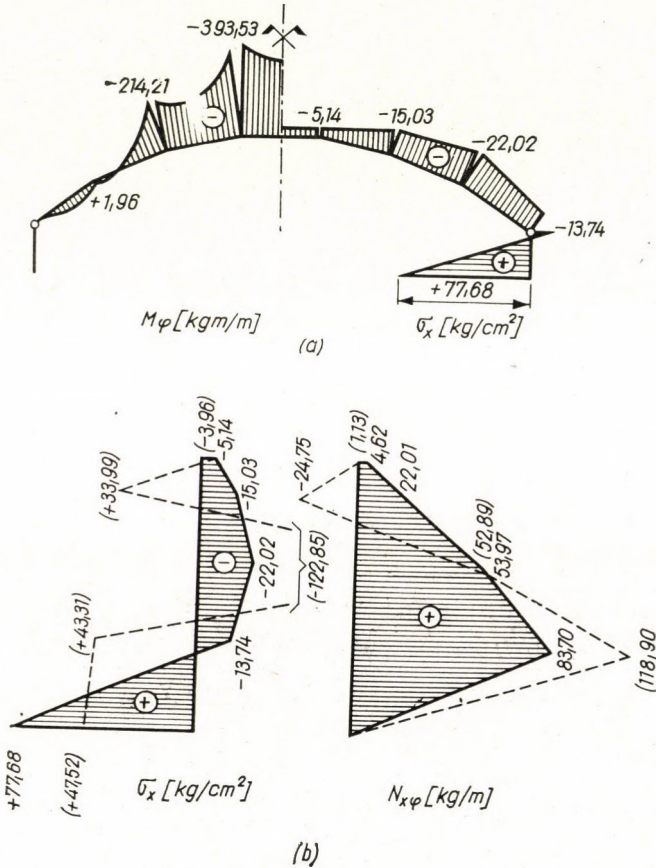


Fig. 6. Directrice parabolique. Diagramme des moments fléchissants et des contraintes pour le poids propre

- a) Diagramme des moments fléchissants M_φ et des contraintes σ_x
b) Diagramme des contraintes et des efforts de cisaillement

— le moment résistant intérieur:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k \left((\sigma_{k-1} + \sigma_k) y_{k-1} + \frac{1}{3} b_k \cos \psi_k (\sigma_{k-1} + 2\sigma_k) \right) = 234 \cdot 695,7322 \text{ kgm.}$$

La différence de l'ordre de 0,02% est évidemment négligeable, de sorte que l'on peut considérer les résultats obtenus comme corrects.

Dans les figures 4 à 6 on a représenté la variation, dans la section transversale, des contraintes et moments obtenus respectivement pour le voile prismatique à directrices circulaire, chaînette et parabolique.

Tableau 4

Directrice circulaire — Matrice du système canonique pour le poids propre

Arête	Contraintes					Moments			Terme libre
	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	M_2	M_3	M_4	
0	4000	2000				-263,38			-284 123,17
1	2000	6621,20	1310,60			1607,47	-631,88		-95 086,44
2		1310,60	5242,40	1310,60		-3212,51	2500,31	-631,88	310 022,18
3			1310,60	5242,40	1310,60	2500,31	-3736,85	1868,42	33 832,14
4				1310,60	6553,00	-631,88	1868,42	-1236,53	35 354,02
2	-263,38	1607,47	-3212,51	2500,31	-631,88	-15,36	-3,84		-1 087,15
3		-631,88	2500,31	-3736,85	1868,42	-3,84	-15,36	-3,84	-1 191,62
4			-631,88	1868,42	-1236,53		-3,84	-19,20	-1 245,95
*	72,58	-10,71	-21,13	-14,46	-6,27	-57,78	-223,77	-328,55	
**	67,80	6,47	-63,60	11,36	-7,67	-58,49	-49,20	-55,06	

* Racines dans la théorie de la flexion.

** Racines dans la théorie sans moments.

Tablea 5

Directrice chaînette — Matrice du système canonique pour le poids propre

Arête	Contraintes					Moments			Termes libres
	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	M_2	M_3	M_4	
0	4000	2000				-263,37			-282 912,77
1	2000	6574,56	1287,28			1916,00	-776,95		-180 294,00
2		1287,28	5209,12	1317,28		-3802,40	2788,70	-638,93	462 338,26
3			1317,28	5264,64	1315,04	2788,70	-3847,43	1835,69	342,91
4				1315,04	6561,76	-638,26	1835,69	-1196,76	522,64
2	263,37	-1916,00	3802,40	-2788,70	638,93	15,26	3,86		1 075,03
3		776,95	-2788,70	3847,43	-1835,76	3,86	15,42	3,85	1 202,34
4			638,93	-1835,69	1196,76		3,85	19,22	1 250,14
*	76,20	-12,91	-21,72	-14,81	-5,48	-14,84	-217,72	-371,95	
**	55,33	30,80	-103,23	27,14	-5,52				

* Racines dans la théorie de la flexion.

** Racines dans la théorie sans moments.

Tableau 6

Directrice parabolique — Matrice du système canonique pour le poids propre

Arête	Contraintes					Moments			Termes libres
	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	M_2	M_3	M_4	
0	4000	2000				-263,30			-282 325,22
1	2000	6556,80	1278,40			2077,44	-853,12		-224 320,94
2		1278,40	5193,60	1318,40		-4121,27	2957,18	-650,05	537 448,37
3			1318,40	5270,40	1316,80	2957,18	-3941,53	1837,46	-11 974,20
4				1316,80	6565,10	-650,05	1837,46	-1187,41	-18 828,08
2	263,30	-2077,44	4121,27	-2957,18	650,05	15,21	3,86		1 067,32
3		853,12	-2957,18	3941,53	-1837,46	3,86	15,44	3,86	1 202,43
4			650,05	-1837,46	1187,41		3,86	19,39	1 250,88
*	77,68	-13,74	-22,02	-15,03	-5,14	1,9606	-214,21	-393,53	
**	47,52	43,31	-122,85	33,91	-3,96				

* Racines dans la théorie de la flexion.

** Racines dans la théorie sans moments.

L'examen des résultats obtenus permet d'établir quelques conclusions:

1°. Dans l'ensemble, le comportement des voiles minces prismatiques est similaire à celui d'une poutre-cloison appuyée aux tympans; la distribution des contraintes σ_x sur la hauteur de la section est semblable à la distribution des contraintes dans les poutres-cloison.

2°. Avec trois points obligés (les naissances et la clef), la parabole a des ordonnées inférieures à celles de la chaînette, et celle-ci se trouve au-dessous du cercle. Il en résulte que le module de résistance de la section circulaire est le plus grand (c'est-à-dire que les contraintes σ_x sont les plus petites), et le module de résistance de la section parabolique est le plus petit (les contraintes σ_x sont par conséquent les plus grandes).

3°. Les moments de flexion transversaux maxima seront d'autant plus petits que la fibre médiane sera plus surhaussée (condition qui, dans le cas étudié, est réalisée par la directrice circulaire).

Il est donc à conclure que l'utilisation des coques cylindriques circulaires a aussi, en dehors de la justification de calcul analytique possible, une justification statique.

* * *

Pour pouvoir évaluer l'exactitude des résultats, les opérations ont été répétées pour des coques à 5 et 7 facettes. Sans exposer les calculs effectués, on a représenté, figure 7, les diagrammes de variation de σ_x et $N_{x\varphi}$ obtenus par

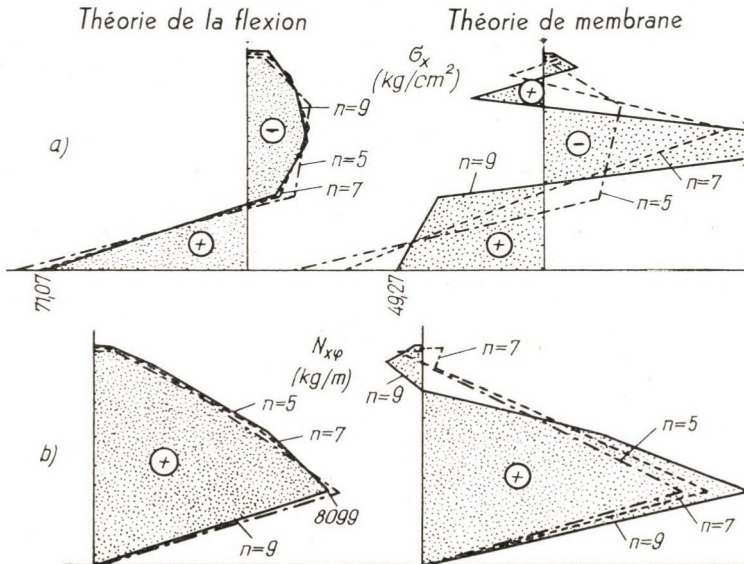


Fig. 7. L'influence du nombre de facettes: a) les contraintes, b) les efforts de cisaillement $N_{x\varphi}$

le calcul, sur base de la théorie de la flexion (à gauche) et de la théorie sans moments (à droite).

Ces diagrammes montrent qu'on peut obtenir des résultats suffisamment exacts par la théorie de la flexion, si la courbe directrice est divisée en 7 facettes.

3.2 L'influence des harmoniques successives

Dans les exemples précédents, nous avons considéré la charge:

$$g_1 = \frac{4g}{\pi} \sin \pi \frac{x}{l}.$$

Avec le développement en série trigonométrique de la charge uniformément distribuée:

$$g = \frac{4g}{\pi} \left(\sin \pi \frac{x}{l} + \frac{1}{3} \sin 3\pi \frac{x}{l} + \dots \right)$$

nous sommes conduits à étudier aussi l'effet de la charge supplémentaire:

$$\left\{ g_3 = \frac{4g}{3\pi} \sin \frac{x}{L} \quad \left(\text{où } L = \frac{l}{3\pi} \right) \right.$$

Par rapport à la première harmonique, la longueur devient 3 fois plus petite. Le coefficient r^M en devient 9 fois plus grand et les termes libres 27 fois plus petits.

L'ordre de grandeur des inconnues peut être immédiatement apprécié, si dans les équations de rotation on néglige les moments et les termes libres, par rapport aux contraintes. Des considérations de proportionnalité font admettre que les inconnues seront 27 fois plus petites, ce qui ne représente que 3,7% de l'influence de la première harmonique. Dans les limites des calculs pratiques de l'ingénieur, une plus grande exactitude ne présente pas d'intérêt particulier.

3.3 L'influence de la rigidité de la poutre de retombée

Pour établir l'influence que la liaison rigide entre la poutre de retombée et la coque prismatique exerce sur l'état général de contrainte, en comparaison avec la situation précédente (3-1 — 3-2) (arêtes articulées), le calcul a été effectué sur la coque prismatique à directrice parabolique, tout en considérant que les résultats en sont valables aussi pour les deux autres types de coques prismatiques, à directrices circulaire et chaînette.

Tableau 7

Directrice parabolique — Matrice du système canonique en cas de liaison rigide entre la poutre et le voile

Arête	Contraintes					Moments				Termes libres
	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	M_1	M_2	M_3	M_4	
0	4000	2000				496,56	-263,30			-282 325,22
1	2000	6556,80	1278,40			-1720,88	2077,44	-853,12		-224 320,94
2		1278,40	5193,60	1318,40		2077,44	-4121,27	2957,18	-650,05	537 448,37
3			1318,40	5270,40	1316,80	-853,12	2957,18	-3941,53	1837,46	-11 974,20
4				1316,80	6565,10		-650,05	1837,46	-1187,41	-18 828,08
1	-496,56	1720,88	-2077,44	853,12		7,79	3,74			485,15
2	263,30	-2077,44	4121,27	-2957,18	650,05	3,74	15,21	3,86		1 067,32
3		853,12	-2957,18	3941,53	-1837,46		3,86	15,44	3,86	1 202,43
4			650,05	-1837,46	1187,41			3,86	19,39	1 250,88
*	47,78	5,68	-11,75	-17,10	-15,14	326,45	316,01	-13,75	-313,49	
**	47,52	43,31	-122,86	33,99	-3,96					

* Racines dans la théorie de la flexion.

** Racines dans la théorie sans moments.

En vue d'obtenir des résultats comparables à ceux des cas précédents, aucune modification ne fut faite aux éléments géométriques, non plus qu'aux conditions de chargement.

Le raidissement des liaisons le long des arêtes 1 et 8 a pour conséquence l'apparition d'une nouvelle inconnue: M_1 , et par suite, d'un nouveau système d'équations à 9 inconnues, dont la matrice est représentée dans le tableau 7.

En ce qui concerne le calcul des coefficients d'influence, plusieurs remarques sont à faire:

— les coefficients des contraintes $\sigma_0 \dots \sigma_4$ du I^{er} quadrant restent les mêmes que ceux antérieurement établis, parce que dans leurs expressions (tableau 1) n'interviennent que les dimensions des facettes;

— les coefficients des moments $M_2 - M_3 - M_4$ du II^e et IV^e quadrant, ainsi que ceux des contraintes sur les arêtes 2—3—4 du III^e et IV^e quadrant, restent les mêmes que ceux précédemment établis (tableau 6), mais il s'y ajoute de nouveaux coefficients liés à la nouvelle inconnue M_1 (II^e et IV^e quadrant) et à l'arête 1 (II^e et IV^e quadrant);

— quant aux termes libres, ils restent de même inchangés, mais pour l'arête 1, le nouveau terme $6E\theta_1^p$ est à ajouter. Les racines σ_x et M_φ du système à 9 équations sont inscrites à l'avant-dernière ligne du tableau 7, et leur variation est représentée par la fig. 8.

En comparant les diagrammes σ_x et M_φ dans les fig. 6 et 8, on peut constater que le raidissement des liaisons entre la poutre de retombée et la coque provoque une modification substantielle et favorable de l'état de contrainte dans la coque:

— ainsi, dans la coque aux liaisons rigides, la valeur des contraintes de tension est réduite à 62% par comparaison à la valeur des contraintes de la coque à liaisons articulées, du fait que la section de la poutre de retombée est entièrement soumise à des contraintes de tension;

— comme le volume des contraintes de compression σ_x est plus grand, les valeurs maxima sont inférieures à celles reçues dans le cas des liaisons articulées, ce qui démontre une meilleure distribution des contraintes, et suppose un meilleur comportement statique de l'ensemble;

— les moments transversaux M_φ présentent de même une allure modifiée, causée par l'apparition des moments d'encastrement;

— les contraintes de cisaillement $N_{x\varphi} = N_{\varphi x} \equiv S$, établies à l'aide des expressions (18), présentent une réduction de plus de 16%;

— tout comme dans l'analyse précédente (3,2), on constate que les contraintes σ_x et $N_{x\varphi}$ établies selon l'hypothèse de la théorie sans moments, diffèrent essentiellement de celles déterminées par le calcul exact dans la théorie de la flexion.

En définitive, on peut conclure que le raidissement des liaisons de la poutre avec la coque a pour conséquence une distribution plus équilibrée des

contraintes, et confère donc à l'ensemble un meilleur comportement statique. Comme de pareilles liaisons se réalisent toujours pour des raisons d'ordre constructif, il est justifié d'en tenir compte dans nos calculs et de dimensionner la coque en conséquence.

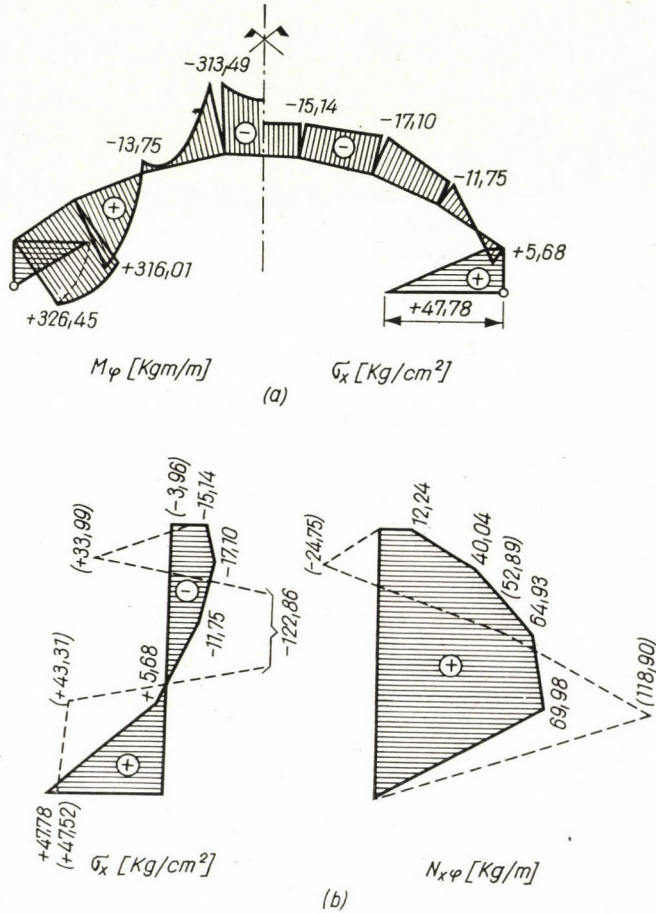


Fig. 8. Directrice parabolique. Diagrammes des moments fléchissants et des contraintes en cas de liaison rigide entre la poutre et le voile

- a) Diagramme des moments fléchissants M_φ et des contraintes σ_x
 b) Diagramme des contraintes et des efforts de cisaillement

3.4 L'action des forces horizontales

De même que dans les cas précédents, la coque parabolique a été choisie comme exemple pour le calcul de l'état de contrainte, dû aux charges horizontales. Les éléments géométriques sont les mêmes, la coque étant à bords libres.

Tableau 8

Directrice parabolique — Matrice du système canonique aux charges horizontales

Arête	Contraintes					Moments			Terme libre
	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	M_2	M_3	M_4	
0	4000	2000				-263,30			-9 247,38
1	2000	6556,80	1278,40			2077,44	-853,12		8 022,57
2		1278,40	5193,60	1318,40		-4121,27	2957,18	-650,05	11 270,01
3			1318,40	5270,40	1316,80	2957,18	-3941,52	2966,58	-982,37
4				1316,80	3944,10	-650,05	2966,58	-5643,91	-9 062,83
2	263,30	-2077,44	4121,27	-2957,18	650,05	15,21	3,86		29,59
3		853,12	-2957,18	3941,52	-2966,58	3,86	15,44	3,86	20,63
4			650,05	-2966,58	5643,91		3,86	11,56	7,23
*	2,32	-1,03	-1,12	-0,72	-0,22	-7,74	-13,66	-8,26	
**	3,25	-1,88	-1,72	0,04	2,28				

* Racines dans la théorie de la flexion.

** Racines dans la théorie sans moments.

Dans l'exemple numérique, la valeur des forces horizontales est égale à 5% du poids propre (dans le rapport $\alpha = \frac{1}{20}$).

Quant au calcul des coefficients d'influence et des termes libres, il faut préciser:

— I^r quadrant: les coefficients d'influence du I^r quadrant restent les mêmes, excepté le coefficient de la contrainte σ_4 ; dans le cas de charges anti-symétriques, la valeur de ce coefficient résulte, d'après le tableau 2, de la différence: $r_{4,4}^\sigma - r_{4,5}^\sigma = 3994,10 \text{ cm}^2$ inscrite dans le tableau 8.

— II^s quadrant: d'une manière analogue, des modifications des coefficients d'influence du moment M_3 et du moment M_4 apparaissent nécessaires par rapport aux coefficients du tableau 6 (voir tableau 2). Leurs valeurs résultent de la différence des coefficients: $r_{4,3}^M - r_{4,6}^M$; $r_{3,4}^M - r_{3,5}^M$ et $r_{4,4}^M - r_{4,5}^M$, établis sous 3.1.

— III^e quadrant: les coefficients sont égaux, mais de signe contraire, par rapport aux coefficients du II^r quadrant.

— IV^e quadrant: excepté le coefficient du moment M_4 , qui résulte de la différence: $\theta_{4,4}^M - \theta_{4,5}^M = 11,5560$ (tableau 8), les autres restent les mêmes que ceux du tableau 6.

— Termes libres R_k : la valeur des forces extérieures intervenant directement dans l'expression de ces termes, il a été nécessaire de les recalculer à l'aide de l'expression du tableau 2:

$$R_k = 6L r_k^p = 6L^2 \left(\frac{\Delta N_k^H}{b_k} - \frac{\Delta N_{k+1}^H}{b_{k+1}} \right).$$

L'expression générale des forces extérieures est:

$$H_k = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \gamma \cdot h_k (b_k + b_{k+1}).$$

Par exemple, pour le noeud $K = 2$, il vient:

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \gamma \cdot h_2 (b_2 + b_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{4}{3,14} \cdot 2400 \cdot 0,08 (1,5980 + 1,6480) = 19,8513 \text{ kg/m}.$$

Les composantes $N_{k,k}$; $N_{k,k+1}$; ... qui agissent dans les plans des facettes k ; $k+1$; ... résultent d'un triangle des efforts (fig. 9), leur expression étant:

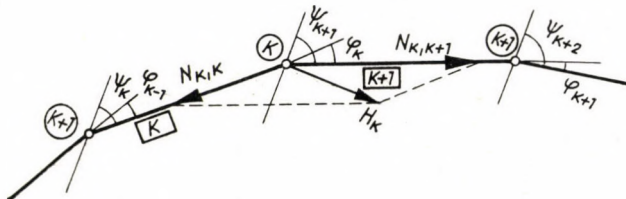


Fig. 9. Le schéma de la décomposition des forces extérieures horizontales

— pour la force du noeud k agissant dans le plan de la facette k :

$$N_{k,k} = \frac{H_k \cdot \cos \varphi_{k+1}}{\sin \varphi_k}$$

— pour la force du noeud k agissant dans le plan de la facette $k + 1$:

$$N_{k,k+1} = \frac{H_k \cdot \cos \varphi_k}{\sin \varphi_{k+1}}$$

— pour la force du noeud $k + 1$ agissant dans le plan de la facette $k + 1$:

$$N_{k+1,k} = \frac{H_{k+1} \cdot \cos \varphi_{k+2}}{\sin \varphi_{k+1}}$$

Par exemple pour le noeud $k = 2$, on obtient:

$$N_{2,2} = \frac{H_2 \cos \varphi_3}{\sin \varphi_2} = - \frac{19,8513 + 0,41786}{0,15586} = -53,2210 \text{ kg/m},$$

$$N_{2,3} = \frac{H_2 \cos \varphi_2}{\sin \varphi_3} = - \frac{19,8513 \times 0,55441}{0,15586} = -70,6131 \text{ kg/m},$$

$$N_{3,2} = \frac{H_3 \cdot \cos \varphi_4}{\sin \varphi_3} = - \frac{20,1386 \times 0,22894}{0,19858} = -23,3396 \text{ kg/m}.$$

Par rapport à l'axe longitudinal du voile, les forces $N_{k,i}$ sont égales, mais de signe contraire:

$$N_{2,1} = -N_{7,8}$$

$$N_{2,3} = -N_{7,6}$$

$$N_{3,2} = -N_{6,7}, \text{ etc.}$$

L'expression des forces ΔN_k^H qui sollicitent les facettes de la coque en flexion dans leur plan, est:

$$\Delta N_k^H = N_{k-1,k} - N_{k,k-1},$$

$$\Delta N_{k+1}^H = N_{k,k+1} - N_{k+1,k} \text{ etc.}$$

Ainsi, pour la facette 2—3 on obtient ($k = 2$):

$$\Delta N_3^H = N_{2,3} - N_{3,2} = -70,6131 + 23,3396 = -47,2735 \text{ kg/m}.$$

Le calcul peut être aisément systématisé, et le calcul des termes libres R_k ne présente aucune difficulté. La vérification, en posant la condition $\Sigma R_k = 0$, est toujours nécessaire.

— Termes libres « $6 E \Theta_k^H$ »: l'expression pour le calcul des termes libres $6 E \Theta_k^H$ est celle que nous avons utilisée dans les calculs précédents (3—1).

L'expression des charges horizontales uniformément réparties étant

$$q_k = a \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \gamma \cdot h_k \cdot \sin \theta_k \text{ (kg/m}^2\text{)}.$$

on obtient, par exemple pour la facette 2—3 ($k = 2$):

$$q_2 = a \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \gamma \cdot h_2 \sin \Theta_2 = \frac{1}{20} \cdot \frac{4}{3,14} \cdot 2400 \cdot 0,08 \cdot 0,55381 = 6,7721 \text{ kg/m}^2.$$

A l'aide de l'expression connue:

$$\Omega_k = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot q_k \cdot b_k^3 \text{ (pour } k = 2), \text{ on obtient:}$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{12} \cdot q_2 b_2^3 = \frac{1}{12} \cdot 6,7721 \cdot 1,5980^3 = 2,3017 \text{ kg/m.}$$

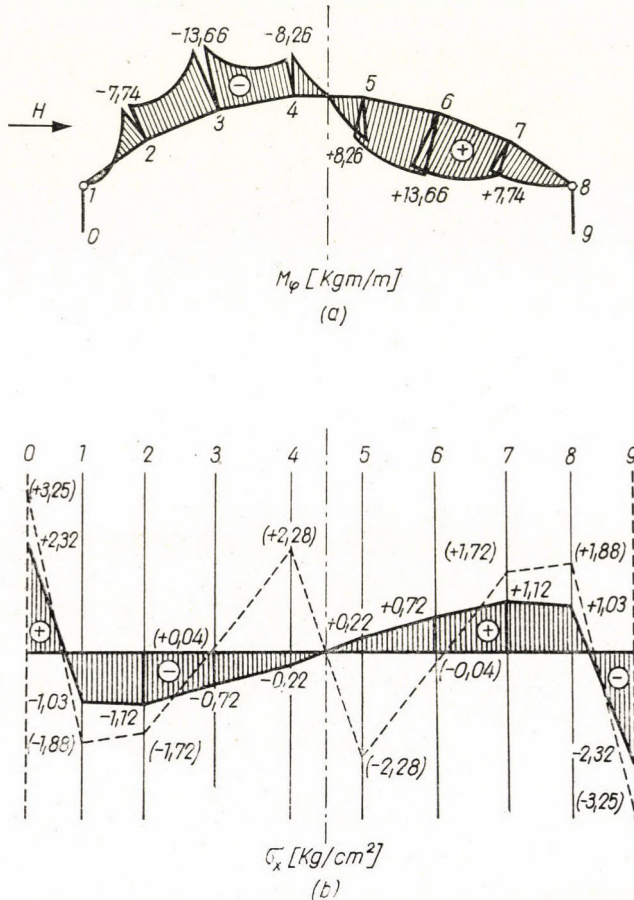


Fig. 10. Directrice parabolique. Diagrammes des moments fléchissants et des contraintes en cas de charges horizontales

- a) Diagramme des moments fléchissants M_φ
 b) Diagramme des contraintes σ_x

Tout comme sous 3.1: $c_k = d_k = \frac{b_k}{2}$ et par conséquent pour $k = 2$, le terme libre sera:

$$6 E \Theta_2^H = 6 \left(\frac{\Omega_2 c_2}{b_2 I_2} + \frac{\Omega_3 d_3}{b_3 I_3} \right).$$

$$6 E \Theta_2^H = 6 \left(\frac{230,17 \cdot 79,90}{159,80 \cdot 42,6667} + \frac{511,24 \cdot 82,40}{164,80 \cdot 42,6667} \right) = 29,5885 \text{ kg/m}^2.$$

La matrice du système à 8 équations linéaires aux racines σ_x et M_φ est inscrite dans le tableau No 8; la variation des moments M_φ et des contraintes σ_x et représentée sur la figure 10.

La vérification des résultats obtenus (σ_x) n'a été effectuée que par la condition d'égalité des moments extérieurs et intérieurs (les équations de projection étant identiquement satisfaites).

Le moment extérieur peut être établi à l'aide de l'expression:

$$\mathfrak{M}_x = a \frac{4 \cdot gL^2}{\pi} = \frac{4 \cdot a \cdot \Sigma A_k \cdot l^2}{\pi^3} = 11731,7744 \text{ kgm.}$$

Le moment intérieur calculé à l'aide de l'expression (17) présente une différence de moins de 43 kgm considérée comme négligeable.

En superposant les diagrammes σ_x des fig. 6 et 10, on peut constater que grâce aux valeurs réduites des contraintes σ_x dues à l'action des forces horizontales, le diagramme σ_x établi pour les charges verticales du poids propre reste pratiquement le même, ce qui indique le comportement favorable des voiles prismatiques aux sollicitations horizontales dues à l'action séismique.

3.5 La différence entre la théorie de la flexion et la théorie sans moments

Pour établir en quelle mesure la théorie sans moments permet la détermination de l'état de contrainte dans les coques prismatiques, les contraintes σ_x de tous les cas étudiés précédemment ont été recalculées à l'aide de la théorie sans moments d'Ehlers.

Les conditions du travail statique et de chargement restent les mêmes dans tous les cas; les groupes de relations obtenues pour le calcul de σ_x sont constitués par les coefficients du I^{er} cadran et les termes libres R_k correspondants.

Les valeurs σ_x établies par la résolution de 5 systèmes à 3 équations pour les trois cas étudiés, sont inscrites à la dernière ligne des tableaux 4 ... 8, et représentées sur les figures 4 à 6 pour le premier, sur la fig. 8 pour le deuxième et sur la fig. 10 pour le troisième cas.

Les racines obtenues satisfont aux conditions d'équilibre global des projections, conformément aux expressions (13) et (14) et aux conditions d'égalité des moments intérieurs et extérieurs, ces derniers étant établis dans l'hypothèse de la poutre à l'aide de l'expression (16).

En examinant la variation des contraintes σ_x établies par la théorie sans moments, en comparaison avec celles déterminées par la théorie de la flexion, on constate des différences appréciables autant sous l'aspect des valeurs que surtout sous l'aspect de la nature des contraintes, l'allure des diagrammes étant profondément différente.

Ce qu'il importe encore de remarquer, c'est que les valeurs des contraintes σ_x établies par la théorie sans moments pour le cas des charges verticales sont identiques, qu'il s'agisse de liaisons articulées le long de l'arête 1, ou de liaisons rigides (voir les tableaux 6 et 7 et les fig. 6 à 8); ceci illustre l'insuffisance de la théorie sans moments, en raison de son incapacité de saisir l'influence du caractère des liaisons entre les facettes des plaques prismatiques.

Les mêmes constatations sont fournies par les contraintes de cisaillement $N_{x\varphi} = N_{\varphi x} \equiv S$ déterminées, à l'aide de l'expression (18), par la théorie de la flexion et la théorie des membranes et représentées sur les figures 4 à 8, pour tous les cas étudiés.

Ces conclusions sont valables pour les charges verticales aussi bien que pour celles horizontales (charges séismiques, du vent etc.).

On peut donc conclure que l'utilisation de la méthode de calcul basée sur la théorie sans moments donne une image inexacte de l'état de contrainte dans les coques prismatiques et cylindriques, et qu'il faut par conséquent adopter le calcul rigoureux de la théorie de la flexion.

Le calcul étant relativement commode et facile à systématiser même dans la théorie de la flexion, on considère que dans l'état de développement actuel des méthodes de calcul et de projection, la simple utilisation de la théorie sans moments nous conduit à des résultats faux pour les coques cylindriques et prismatiques (voir par exemple l'article de R. CARELLI [3]).

4. Conclusions

4.1 Conclusions relatives aux cas étudiés

Les considérations théoriques et les quelques aspects étudiés présentant un intérêt pratique, nous mènent aux conclusions suivantes:

1° — Le procédé de calcul appliqué, fondé sur la théorie rigoureuse de la flexion, est relativement simple et commode et conduit à des résultats corrects qui expriment avec fidélité l'état des contraintes dans les coques cylindriques et prismatiques. Grâce à la systématisation indiquée pour la détermination des coefficients d'influence et l'établissement de la matrice du système d'équations, on considère qu'il peut être utilisé avec succès dans les calculs pratiques des projets.

Un important avantage qu'on doit mentionner, est offert par la possibilité de contrôle permanent et par étapes des coefficients aussi bien que des résultats finaux, ce qui permet d'éviter les erreurs éventuelles constatées, d'une manière bien fâcheuse, à la fin du calcul.

2° — En ce qui concerne les cas pratiques étudiés, plusieurs remarques s'imposent:

— le comportement statique le plus favorable correspond aux coques cylindriques à directrice circulaire, parce que cette directrice présente le plus grand moment d'inertie (la fibre moyenne étant la plus surhaussée);

— pour obtenir des résultats suffisamment exacts, compris entre les limites des approximations couramment admises dans les calculs pratiques des ingénieurs, il est tout à fait suffisant de considérer 7 facettes de la coque;

— de même, il est suffisant de ne considérer, dans les calculs, que la première harmonique du développement en série trigonométrique des charges uniformément distribuées, les résultats obtenus s'inscrivant dans les limites d'exactitude demandées aux calculs pratiques;

— les liaisons rigides entre la poutre de retombée et la coque prismatique contribuent à la distribution plus équilibrée des contraintes en section transversale, et confèrent à l'ensemble un comportement statique favorable;

— les contraintes, relativement réduites, dans le cas des forces horizontales, ne provoquent pas une modification sensible de l'état des contraintes produites par la charge propre, ce qui illustre le comportement favorable des voiles cylindriques et prismatiques sous l'action des forces horizontales.

3° — D'après ce qu'on a illustré comparativement dans tous les cas étudiés, l'état des contraintes calculé suivant la théorie des membranes ne peut pas être considéré comme satisfaisant pour le cas des voiles cylindriques et prismatiques.

En ce qui concerne la courbe directrice, on trouve le fait invraisemblable que de petites variations de la directrice conduisent à de grandes variations et même au changement total de l'état des contraintes.

En second lieu, l'allure même du diagramme ne se maintient en général, lorsque le nombre des facettes est modifié.

Enfin, la théorie des membranes est incapable de tenir compte des liaisons du voile le long des génératrices marginales.

4.2 Extensions possibles de la théorie

La théorie des voiles prismatiques peut être considérablement étendue.

Les résultats théoriques précédents peuvent être aisément étendus à d'autres cas d'appuis sur les tympanes. Les séries trigonométriques correspondant au simple appui représentent un cas particulier des séries de fonctions fondamentales, solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} - \frac{\alpha_n^4}{l^4} X_n = 0$$

rencontrée à l'étude de la vibration des poutres soumises à la flexion, compte tenu de leur masse propre. α_n représente les valeurs propres, déduites des conditions aux limites.

En posant

$$L = \frac{l}{\alpha_n}$$

pour la longueur transformée de la génératrice, le système des équations canoniques et des coefficients d'influence sera écrit de la même manière que dans

le tableau I, si pour α_n on prend la valeur indiquée précédemment, correspondant au cas d'appui [21].

Les études de Vlassov comprennent aussi le cas où le voile cylindrique s'appuie, le long des génératrices, sur deux rangées de poteaux équidistants. Pour cela, il considère chaque rangée de poteaux comme une facette fictive de section nulle et d'une rigidité à la flexion égale à la somme des rigidités des poteaux.

Cette idée peut être étendue immédiatement aux voiles cylindriques et prismatiques ayant des lanternaux en tabatière. En divisant en facettes fictives, la facette qui comprend des tabatières aura des propriétés identiques à la rangée de poteaux du cas précédent.

Enfin, une application d'un intérêt tout particulier est représentée par la précontrainte des coques cylindriques et prismatiques. Quoique ce problème ait fait l'objet de quelques études intéressantes, nous pensons qu'il reste encore, dans ce domaine, des possibilités de nouvelles extensions et de simplifications du procédé de calcul.

RÉSUMÉ

Les auteurs présentent une série de résultats et observations concernant les voiles minces prismatiques et cylindriques, permettant une meilleure connaissance du travail statique. La méthode utilisée de V. Z. VLASSOV est remarquable par la systématisation de l'établissement des équations canoniques et la détermination des efforts et des moments.

Après un court exposé des principes de la méthode, toutes les relations nécessaires étant données sous forme de tableaux, on examine une série d'applications utiles pour la pratique:

- influence de la courbe directrice (cercle, chaînette et parabole),
- influence des harmoniques successives (lors de l'utilisation des séries trigonométriques),
- influence de la rigidité à la rotation de la poutre de retombée,
- comportement du voile sous l'action des charges horizontales,
- comparaison entre la théorie générale de la flexion et la théorie de membrane,
- influence du nombre d'arêtes sur l'exactitude des résultats.

L'étude se termine par un rappel des extensions possibles de la théorie.

EINIGE ERGEBNISSE UND BEOBACHTUNGEN ÜBER DEN SPANNUNGSZUSTAND IN ZYLINDERSCHALEN UND FALTWERKEN

M. SOARE und D. D. NICULESCU, BUCUREȘTI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser berichten über einige Ergebnisse und Beobachtungen über den Spannungszustand in Zylinderschalen und Faltwerken, die zu einem besseren Verständnis ihres statischen Verhaltens beitragen. Die angewandte Methode von VLASSOV zeichnet sich dadurch aus, daß die kanonischen Gleichungen systematisch angeschrieben und daraus die inneren Kräfte und Momente bestimmt werden.

Nach einer kurzen Erörterung der Grundsätze der Methode, wobei die benötigten Beziehungen tabellarisch angeführt werden, wird eine Reihe von Anwendungen untersucht, die für die Praxis vom Interesse sein dürften. Es handelt sich dabei um folgende Anwendungen:

1. Der Einfluß der Leitkurven (Kreis, Kettenlinie, Parabel).

2. Der Einfluß der aufeinanderfolgenden Harmonischen (bei Anwendung von trigonometrischen Reihen).
 3. Der Einfluß der Biegesteifigkeit des Randträgers.
 4. Das Verhalten unter der Wirkung einer waagerechten Belastung.
 5. Vergleich der Biegetheorie zur Membrantheorie.
 6. Der Einfluß der Kantenanzahl auf die Genauigkeit der Ergebnisse.
- Zum Schluß des Aufsatzes werden einige mögliche Erweiterungen der Theorie erwähnt.

SOME RESULTS AND OBSERVATIONS ON THE STRESS-STATE IN CYLINDRICAL AND FOLDED SHELL-ROOFS

M. SOARE and D. D. NICULESCU

SUMMARY

Authors present some results and observations on the stress-state in cylindrical and folded shell-roofs, for a better knowledge of their statical work. The utilized method of V. Z. VLASSOV is remarkable for the systematization of the method of writing the canonic equations and the determination of the inner forces and moments.

After a short presentation of the method's principles, all elements are given in a tabular form, one may examine a series of applications, interesting from the viewpoint of practice:

- influence of the directrix-form (circle, catenary and parabola),
- influence of the successive harmonics (as using trigonometric series),
- influence of the torsional rigidity of the edge beam,
- the statical work of the shell under the action of horizontal forces,
- comparison between the bending and the membrane theory,
- influence of the number of joints on the preciseness of the results.

At the end of the study, a series of possible extensions to the theory are mentioned.

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ЗАМЕЧАНИЯ ПО СОСТОЯНИЮ НАПРЯЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

M. SOARE И Д. НИКУЛЕСКУ

РЕЗЮМЕ

Авторы излагают ряд результатов и замечаний по вопросу тонкостенных призматических и цилиндрических оболочек, представляющих интерес для ознакомления с их статическим поведением. Метод В. З. Власова, примененный авторами, характерен тем, что систематизирует способ записи канонических уравнений и определение усилий и моментов.

После краткого изложения основных положений метода, в котором все данные даются в таблицах, авторы переходят к ряду полезных для практики приложений:

- влияние формы кривых директрис (круговой, цепочкой и параболической);
- влияние последовательных гармоник (при применении тригонометрических рядов);
- влияние жесткости на вращение бортовой балки;
- поведение под воздействием горизонтальных нагрузок;
- сравнение теории изгиба с безмоментной;
- влияние числа кромок на точность результатов.

В заключение исследования, указывается ряд возможных обобщений теорий.

BERECHNUNGSVERFAHREN ZUM ENTWURF RADIALER SCHAUFELGITTER

T. CZIBERE

»GANZ-MÁVAG« LOKOMOTIV-, WAGGON- UND MASCHINENFABRIK, BUDAPEST

[Eingegangen am 20. April 1960]

1. Einleitung

Das Singularitätenverfahren liefert zur Berechnung radialer Schaufelgitter zwei Möglichkeiten. Es kann einerseits die Strömung um die Schaufeln des radialen Schaufelgitters vermöge der KÖNIGSchen Abbildungsfunktion auf die Strömung um die Schaufeln eines geraden Schaufelgitters abgebildet werden. Das gerade Schaufelgitter wird dann den gegebenen Bedingungen entsprechend bestimmt [1, 2, 3]. Es kann aber andererseits dem Berechnungsverfahren auch die direkte Ermittlung der Strömung um die Schaufeln des radialen Gitters zugrundegelegt werden. In unserem nachfolgend dargelegten Verfahren werden wir den zweiten — direkten — Weg einschlagen.

Von den zitierten Arbeiten befaßt sich [1] und [2] mit der Berechnung der »unendlich dünnen« und von der logarithmischen Spirale nur wenig abweichenden Schaufeln von Laufrädern (Konstruktions- oder direkte Aufgabe), bzw. es befaßt sich [2] auch mit der Bestimmung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung um die Schaufeln (Kontroll- bzw. indirekte Aufgabe). Die Arbeiten [3] und [4] behandeln die Bestimmung der Strömungs- und Druckverhältnisse um die Schaufeln radialer Laufräder mit vorgeschriebenen Profilen, und zwar bezieht sich [3] auf Schaufelprofile, deren Skelettlinie von der logarithmischen Spirale nur wenig abweicht, [4] befaßt sich dagegen auch mit Schaufelprofilen, deren Skelettlinie beliebig gewölbt ist.

In dieser Arbeit werden wir ein Berechnungsverfahren für die Lösung des Entwurfes radialer Schaufelgitter angeben (also die Lösung der direkten Aufgabe für Laufräder oder feste Leiträder), wobei die Schaufeln von der logarithmischen Spirale beliebig abweichen (Schaufeln mit beliebig gewölbten Skelettlinien). Zu den gegebenen Ein- und Austrittsverhältnissen der Strömung bezüglich des Schaufelgitters und der gegebenen Schaufelzahl bestimmen wir rechnerisch das radiale Profilvergitter, das die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt. Dieses Verfahren schließt sich eng an unser Berechnungsverfahren für gerade Flügelgitter mit stark gewölbten Profilschaufeln an [5].

Die Singularitätenverteilungen, welche die Schaufelprofile ersetzen, werden wir auch jetzt längs einer in der Nähe der Skelettlinie liegenden Trägerkurve lokalisieren. Diese Trägerkurve kann von der logarithmischen Spirale

beliebig abweichen. Die induzierten Geschwindigkeiten können mit Hilfe der tabellarischen Anordnung, die wir auch in unserer Arbeit [5] angewendet haben, berechnet werden. Die exakte Skelettlinie bestimmen wir auch in diesem Falle durch Iteration. Die Iteration ist durchführbar, da auch im Falle beliebiger Trägerkurven der Singularitäten die entsprechenden induzierten Geschwindigkeiten zahlenmäßig ermittelt werden können. Im Wesentlichen stellt also das hier zu erörternde Berechnungsverfahren eine Erweiterung unseres Verfahrens für gerade Schaufelgitter [5] auf die radialen Schaufelgitter dar.

Zur Lösung des Entwurfsproblems radialer Gitter mit beliebig gewölbten Schaufelprofilen kann [5] nach Zwischenschaltung der erwähnten KÖNIGSchen konformen Abbildung ohne weiteres angewandt werden. Wir wollen aber diese Entwurfsaufgabe unmittelbar an dem radialen Gitter — ohne Verwendung des indirekten Schrittes der KÖNIGSchen Abbildung — lösen.

Bekanntlich ist die Strömung, die sich um die endlich vielen Schaufeln eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich drehenden Laufrades bildet, von einem festen Koordinatensystem aus betrachtet instationär und wirbelfrei, — betrachten wir jedoch die Strömung in bezug auf ein mit den Schaufeln fest verbundenes (relatives) Koordinatensystem, so ist die Strömung stationär und wirbelbehaftet. Wenn sich das Laufrad im Uhrzeigersinne dreht, so gilt für die relative Geschwindigkeit

$$\operatorname{rot} \vec{w} = 2\omega \vec{k}. \quad (1.1)$$

Die Momentaufnahmen der Stromlinien der absoluten Strömung um die Schaufeln des sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \text{konst.}$ drehenden Laufrades sind in verschiedenen Zeitpunkten miteinander kongruent und zueinander nur relativ gedreht. Demnach kann die Untersuchung der instationären absoluten Strömung auf die Untersuchung der Strömungsverhältnisse einer einzigen Momentaufnahme zurückgeführt werden; dies ist aber — zufolge der Wirbelfreiheit der absoluten Strömung — mit potentialtheoretischen Methoden möglich. Aus der — auf diesem Weg — bestimmten absoluten Geschwindigkeit kann die längs des Schaufelprofils auftretende relative Geschwindigkeit w_K berechnet werden. Nach der bekannten Formel

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2} [w_K^2 - (r_K \omega)^2] \quad (1.2)$$

ist dann auch die Druckverteilung längs des Schaufelprofils bestimmt.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten der stationären wirbelfreien Strömung um die Schaufeln des Leitrades bzw. ihrer Schaufelprofile können

die Formeln, die wir für die des Laufrades hergeleitet haben, mit dem speziellen Wert $\omega = 0$ verwendet werden. Es erübrigt sich also im folgenden die gesonderte Behandlung des Leitradproblems.

Bezeichnungen:

$r_1; r_2$	Ein- bzw. Austrittsradien des Schaufelrades
$\Gamma_1; \Gamma_2$	Zirkulation der ein- bzw. austretenden Flüssigkeit
$Q_1; Q_2$	Die der ein- bzw. austretenden Flüssigkeitsmenge charakteristische Quellstärke
N	Anzahl der Schaufeln des Rades
r, φ	Polarkoordinaten
x, y	rechtwinklige Koordinaten
$z = x + iy$	komplexe Koordinaten
S, δ	rechtwinklige, krummlinige Koordinaten längs der Skelettlinie
s	Bogenlänge der singularitätentragenden Kurve
S	Bogenlänge der Skelettlinie des Schaufelprofils
S_K	Bogenlänge der Konturlinie des Schaufelprofils
δ_K	Koordinate der Profilkontur (im Koordinatensystem S, δ längs der Parameterlinie $S = \text{konst.}$)
χ	Neigungswinkel zwischen der Tangente und dem Radiusvektor im polaren System
W	Das komplexe Potential des absoluten Geschwindigkeitsfeldes
\bar{c}	Der konjugiert komplexe Wert der absoluten Geschwindigkeit
ω	Winkelgeschwindigkeit (positiv im Sinne des Uhrzeigers)
$u = r\omega$	Der absolute Betrag der Umlaufgeschwindigkeit
w	Der absolute Betrag der relativen Geschwindigkeit
g	Komplexe Singularitätenverteilung
q, γ	Die Schaufel hydrodynamisch ersetzende Quell-Senken- und Zirkulationsverteilung
Q, Γ	Integral der Verteilungen q, γ längs der Schaufel
$R(\dots), I(\dots)$	Reeller bzw. imaginärer Teil komplexer Funktionen
H	die sogenannte Einflußfunktion
<i>Indices:</i>	
R	für die induzierten Durchschnittsgeschwindigkeiten
r, φ	für Geschwindigkeitskomponente, die mit den entsprechenden Richtungen der Polarkoordinaten übereinstimmen
q, γ	für die durch die q - bzw. γ -Verteilungen induzierten Geschwindigkeiten
n, t	für die normalen bzw. tangentiellen Geschwindigkeitskomponenten
S	für die Werte längs der Skelettlinie
K	für die Werte längs der Konturlinie

2. Geschwindigkeitsfeld des radialen Schaufelgitters

Nach dem klassischen Modell der Strömung durch das radiale Schaufelgitter (Abb. 1) setzt man an Stelle der Schaufel des Schaufelgitters in den am Umfang des Kreises mit dem Halbmesser R in gleichen Abständen verteilten Punkten — deren Anzahl N mit der Schaufelzahl übereinstimmt — konzentrierte Wirbel, deren Stärke Γ der Schaufelzirkulation gleich ist. Ferner befindet sich im Mittelpunkt des Kreises eine Quelle Q_1 ($Q_1 > 0$) — aus welcher die durch das Schaufelrad strömende Flüssigkeitsmenge entspringt — und ein Wirbel Γ_1 , gleich der Zirkulation der in das Schaufelrad eintretenden Flüssigkeit.

Dieses Modell entspricht einem Schaufelrad mit zentrifugalem Durchfluß. Im Falle eines zentripetal durchströmten Schaufelrades ist eine Senke Q_1 ($Q_1 < 0$) im Mittelpunkt angeordnet.

Wenn man in der komplexen Ebene z Wirbeln von der Stärke Γ in N equidistanten Punkten entlang des Umfanges eines Kreises mit dem Halb-

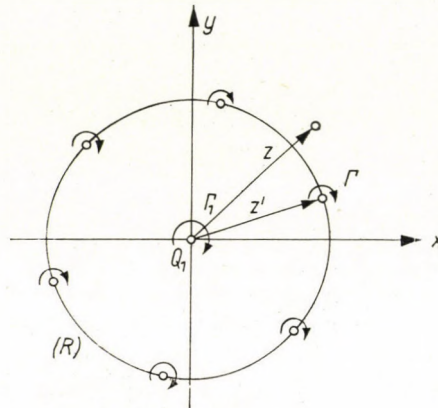


Abb. 1

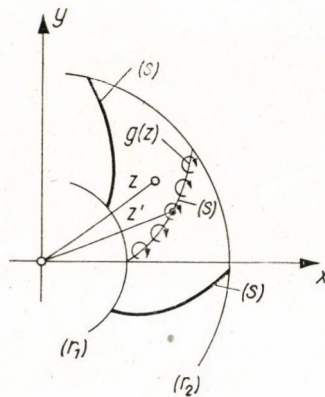


Abb. 2

messer $|z'| = R$ setzt, so ist in einem beliebigen Punkt z das induzierte Potential [6]

$$W_{\Gamma} = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z^N - z'^N). \quad (2.1)$$

Eine wesentlich bessere Näherung wird von einem Modell geliefert, in welchem die Schaufeln durch die komplexen Singularitätenverteilungen $g(z)$ (d. h. Quell-Senken- und Wirbelverteilungen) längs je einer Trägerkurve (s) ersetzt werden (Abb. 2).

Es sollen die Punkte der singularitätentragenden Kurve (s) mit z' , und ein beliebiger Punkt der komplexen Ebene mit z bezeichnet werden. Daraus ergibt sich das durch die komplexen Singularitätenverteilungen $g(z)$ — die die N Schaufeln des Schaufelrades hydrodynamisch ersetzen — induzierte, komplexe Potential:

$$W_g = \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} g(z') \ln(z^N - z'^N) dz'. \quad (2.2)$$

Nach Hinzuaddieren des komplexen Potentials, das von den in den Mittelpunkt lokalisierten Singularitäten Q_1 und I_1 induziert wird, erhält man das komplexe Potential der Strömung durch das radiale Schaufelrad:*

$$W(z) = \frac{Q_1 + iI_1}{2\pi} \ln z + \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} g(z') \ln(z^N - z'^N) dz'. \quad (2.3)$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation nach z die induzierte komplexe Geschwindigkeit

$$\bar{c}(z) = \frac{Q_1 + iI_1}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} g(z') \frac{Nz^{N-1}}{z^N - z'^N} dz'. \quad (2.4)$$

Es sei

$$\bar{c}_1(z) = \frac{Q_1 + iI_1}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (2.5a)$$

und

$$\bar{c}_g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} g(z') \frac{Nz^{N-1}}{z^N - z'^N} dz'. \quad (2.5b)$$

Aus der Gl. (2.5b) ist ersichtlich, daß sich die Geschwindigkeiten beim Überschreiten der Trägerkurve (s) sprunghaft ändern (weil hier $z' = z$).

Nach Abb. 3 wird der Punkt P ($z' = z$) durch einen Kreis mit dem Halbmesser τ ausgeschlossen (τ ist klein). Im Falle des stark (bzw. gestrichelt) gezeichneten Integrationsweges gehört der Punkt P — aus dem Punkt 0 betrachtet — in den Bereich an der linken (bzw. rechten) Seite; demgemäß ergibt sich die induzierte Geschwindigkeit, an der linken (bzw. rechten) Seite von (s). Der Wert des Integrals entlang des stark gezeichneten Kreisbogens sei J_l , entlang des gestrichelten Kreisbogens J_r . Folglich gilt:

* Für den Fall eines rotierenden Schaufelrades (Laufrad) bedeutet die Gleichung (2.3) das komplexe Potential des momentanen Strömungsbildes.

$$\bar{c}_g(z) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{z'=z_1}^{z-\zeta} g(z') \frac{Nz^{N-1}}{z^N - z'^N} dz' + \frac{1}{2\pi} \int_{z'=z+\zeta}^{z_2} g(z') \frac{Nz^{N-1}}{z^N - z'^N} dz' + J_{l,r} \right]$$

wobei z_1 den Eintrittspunkt, z_2 den Austrittspunkt der Singularitätsträgerkurve (s) bedeutet ($|z_1| = r_1$ und $|z_2| = r_2$), und ferner ist $\zeta = \tau e^{i\theta}$. Nun berechnen wir den Wert von J_l :

$$J_l = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{z'=z+\zeta}^{z+\zeta} g(z') \frac{Nz^{N-1}}{z^N - z'^N} dz'.$$

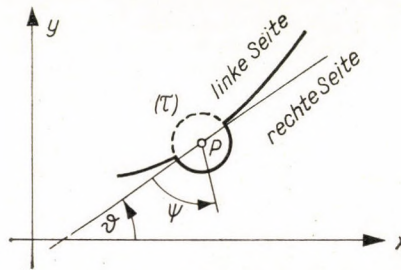


Abb. 3

Es gilt entlang des Kreisbogens mit dem Halbmesser τ :

$$z' = z + \tau e^{i(\theta - \pi + \psi)} \quad dz' = i\tau e^{i(\theta - \pi + \psi)} \cdot d\psi$$

$$z'^N = z^N + Nz^{N-1} \tau e^{i(\theta - \pi + \psi)} + ((\tau^2))^*.$$

Demnach wird

$$J_l = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{g(z)}{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \frac{Nz^{N-1} i\tau e^{i(\theta - \pi + \psi)} d\psi}{z^N - [z^N + Nz^{N-1} \tau e^{i(\theta - \pi + \psi)} + ((\tau^2))^*]} = -i \frac{g(z)}{2}.$$

Analogerweise kann man für den Integralwert J_r anschreiben:

$$J_r = +i \frac{g(z)}{2}.$$

* Das Zeichen $((\tau^2))^*$ bezieht sich auf die Summe, deren Glieder hinsichtlich τ mindestens zweiter Ordnung sind.

Folglich gilt für die in einem Punkt z der Singularitätsträgerkurve (s) induzierte Geschwindigkeit \bar{c}_g :

$$\bar{c}_g(z) = \mp i \frac{g(z)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{z'=z_1}^{z_2} g(z') \frac{Nz^{N-1}}{z^N - z'^N} dz' \quad (2.6)$$

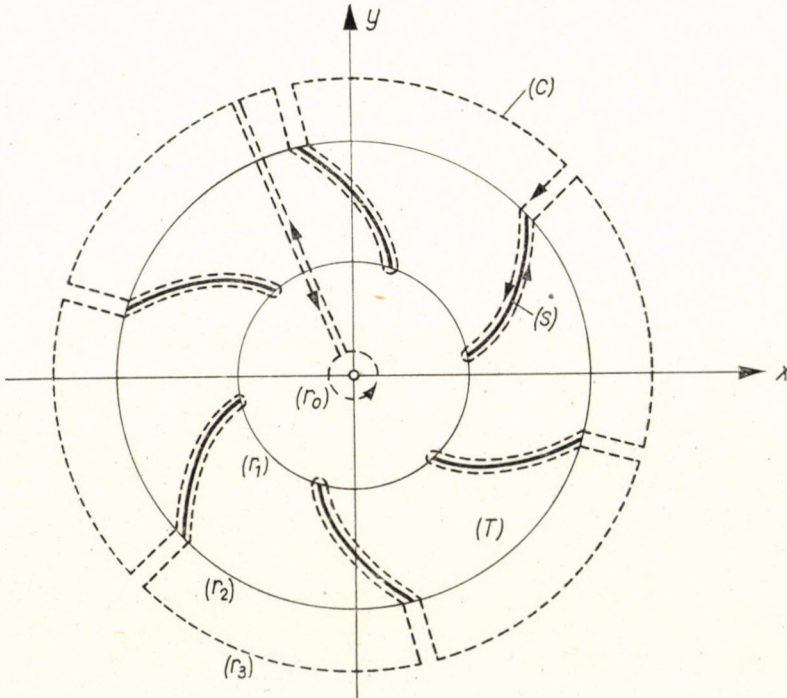


Abb. 4

Das negative (bzw. positive) Vorzeichen bezieht sich auf die linksseitige (bzw. rechtsseitige) Geschwindigkeit. Den durch das zweite Glied des Ausdruckes (2.6) bestimmten Geschwindigkeitswert kann man als die entlang der Trägerkurve (s) induzierte Durchschnittsgeschwindigkeit* benennen.

Nun soll — in Abhängigkeit von der Zirkulations- sowie Quell-Verteilung, welche längs der Singularitätsträgerkurve angeordnet sind — die Formel der komplexen Singularitätenverteilung $g(z)$ bestimmt werden. Zu diesem Zwecke nehmen wir einen Bereich, begrenzt durch den Kreis mit dem Halbmesser r_3 ($r_3 > r_2$). Man kann diesen mehrfach zusammenhängenden Bereich durch die in Abb. 4 skizzierten Aufschnitten einfach zusammenhängend machen,

* Hiemit befolgen wir die Terminologie von Prof. GRUBER.

der von der einzigen geschlossenen Linie (C) berandet ist. In dem so gewonnenen Bereich (T) ist die absolute Strömung quell- und wirbelfrei; folglich ergibt sich nach dem STOKESSchen Satz:

$$G_C = \oint_{(c)} \bar{c}(z') dz' = \Gamma_2 + iQ_2 - \Gamma_1 - iQ_1 + iN \int_{z'=z}^z g(z') dz' = 0. \quad (2.7)$$

Hier bedeutet Q_2 die Flüssigkeitsmenge, welche entlang des Kreises mit dem Halbmesser r_3 aus dem von der Kurve (C) begrenzten Bereich (T) austritt, und Q_1 ist die Flüssigkeitsmenge, welche entlang des Kreises mit dem Halbmesser r_0 in den Bereich (T) eintritt. Da innerhalb dieses Bereichs sich keine Quellen befinden, so muß

$$Q_2 = Q_1$$

gelten. Deshalb erhalten wir aus der Gleichung (2.7) für die, entlang der Singularitätenträgerkurve (s) angeordnete komplexe Singularitätenverteilung $g(z)$ die Formel:

$$\Gamma_2 - \Gamma_1 = -iN \int_{z'=z_1}^{z_2} g(z') dz'.$$

Daraus ergibt sich die Schaufelzirkulation:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{N} = -i \int_{z'=z_1}^{z_2} g(z') dz'. \quad (2.8)$$

Es sei

$$g(z) = [R(g) + iI(g)] e^{-i\varphi}$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma &= -i \int_{z'=z_1}^{z_2} [R(g) + iI(g)] [dr' + ir' d\varphi'] = \\ &= \int_{z'=z_1}^{z_2} [I(g) dr' + R(g) r' d\varphi'] - i \int_{z'=z_1}^{z_2} [R(g) dr' - I(g) r' d\varphi']^*. \end{aligned}$$

* Die mit »oben Strich« bezeichneten Werte sind keine Ableitungen, sie beziehen sich vielmehr auf den laufenden Punkt der Integration. Die erste Ableitung ist folgenderweise bezeichnet:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}$$

Dieser Ausdruck stellt das Linienintegral der Geschwindigkeit dar, wobei das reelle Glied die Zirkulation, und das imaginäre Glied den Durchfluß bedeutet [7]. Deshalb sollen die Bezeichnungen

$$I(g) + R(g) \frac{r}{i} = \gamma \frac{ds}{dr} \quad (2.9a)$$

und

$$R(g) - I(g) \frac{r}{i} = q \frac{ds}{dr} \quad (2.9b)$$

eingeführt werden, in welchen γ und q die Zirkulations- bzw. die Quell-Verteilung entlang der Singularitätsträgerkurve (s) bedeuten. Demzufolge ist

$$\Gamma = \int_{(s)} \gamma ds - i \int_{(s)} q ds.$$

Daraus folgen die Bedingungen für die Zirkulationsverteilung γ längs der Trägerkurve (s)

$$\Gamma = \int_{(s)} \gamma ds \quad (2.10)$$

bzw. für die Quell-Senken-Verteilung q längs (s)

$$\int_{(s)} q ds = 0. \quad (2.11)$$

Auf Grund der Beziehungen:

$$\frac{r}{i} = r \frac{d\varphi}{dr} = \operatorname{tg} \chi \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dr} = \frac{1}{\cos \chi} \quad (2.12)$$

und der Gln. (2.9) erhalten wir

$$R(g) = (q + \gamma \operatorname{tg} \chi) \frac{1}{\cos \chi} \cos^2 \chi = q \cos \chi + \gamma \sin \chi$$

$$I(g) = (\gamma - q \operatorname{tg} \chi) \frac{1}{\cos \chi} \cos^2 \chi = -q \sin \chi + \gamma \cos \chi.$$

Es gilt für die zusätzliche Geschwindigkeitskomponente $\pm i \frac{g(z)}{2}$ entlang der Singularitätsträgerkurve (s):

$$\mp i \frac{g(z)}{2} = \mp \frac{-\gamma + iq}{2} e^{-i(\varphi+\chi)} = \pm \frac{\gamma - iq}{2} e^{-i(\varphi+\chi)}, \quad (2.13)$$

dies aber ist die Konjugierte folgender komplexen Größe:

$$\pm \frac{\gamma + iq}{2} e^{i(\varphi+\chi)}.$$

Mit anderen Worten sind die zusätzlichen Geschwindigkeitskomponenten entlang der Singularitätenträgerkurve:

$$\text{an der linken Seite, tangential: } \gamma/2 \quad \text{normal: } q/2$$

$$\text{an der rechten Seite, tangential: } -\gamma/2 \quad \text{normal: } -q/2.$$

Auf Grund obiger Beziehungen gilt:

$$\begin{aligned} g(z) dz &= (q + i\gamma) e^{-i(\varphi+\chi)} (dr + ir d\varphi) e^{i\varphi} = \\ &= (q + i\gamma) \left(\frac{dr}{ds} - ir \frac{d\varphi}{ds} \right) (dr + ir d\varphi) = (q + i\gamma) ds. \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir aus der Gl. (2.6) die induzierte komplexe Geschwindigkeit entlang der Singularitätenträgerkurve (s):

$$\bar{c}_g(z) = \pm \frac{\gamma - iq}{2} e^{-i(\varphi+\chi)} + \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} (q + i\gamma) \frac{Nz^{N-1}}{z^N - z'^N} ds, \quad (2.14)$$

wobei das obere Vorzeichen für den Wert an der linken, das untere Vorzeichen für den Wert an der rechten Seite der Kurve gilt.

Die Gl. (2.14) dient uns zur späteren direkten Berechnung der am radialen Schaufelgitter auftretenden induzierten Geschwindigkeiten. Vorerst aber wollen wir die Beziehung zwischen den induzierten Geschwindigkeitsfeldern des radialen und des von demselben durch konforme Abbildung gewonnenen geraden Gitters bestimmen. Es soll $\zeta = \xi + i\eta$ die Ebene des geraden Gitters bedeuten, auf die die Ebene des radialen Gitters $z = x + iy$ mittels der KÖNIGSchen Transformation abgebildet wird. Dann gelten die Gleichungen

$$\zeta = \frac{Nt}{2\pi} \ln z \quad (2.15)$$

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \left| \frac{ds_\zeta}{ds} \right| = \frac{Nt}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (2.16)$$

$$q ds = q_\zeta ds_\zeta \quad \gamma ds = \gamma_\zeta ds_\zeta, \quad (2.17)$$

wobei t die Schaufelteilung, q_ζ , γ_ζ Singularitätenverteilungen und ds_ζ das Bogenelement der Trägerkurve im geraden Gitter bedeuten. Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{1}{1 - e^a} = -\frac{1}{2} \left[\operatorname{cth} \frac{a}{2} - 1 \right]$$

und der Gl. (2.15) erhält man:

$$\frac{z^{N-1}}{z^N - z'^N} = \frac{e^{-i\varphi}}{r} \frac{1}{1 - e^{\frac{2\pi}{t}(\zeta' - \zeta)}} = -\frac{e^{-i\varphi}}{2r} \left[\operatorname{cth} \frac{\pi}{t} (\zeta' - \zeta) - 1 \right]. \quad (2.18)$$

Auf Grund der Gln. (2.16—2.18) ergibt sich aus Gl. (2.14) die induzierte komplexe Geschwindigkeit

$$\bar{c}_g(z) = e^{-i\varphi} \frac{Nt}{2\pi r} \left[\pm \frac{\gamma_\zeta - iq_\zeta}{2} e^{-i\zeta} + \frac{1}{2t} \int_{(s_\zeta)} (q_\zeta + i\gamma_\zeta) \left[\operatorname{cth} \frac{\pi}{t} (\zeta - \zeta') + 1 \right] ds_\zeta \right].$$

Bekanntlich kann man die durch das gerade Gitter induzierten Geschwindigkeiten $\bar{c}(\zeta)$ in einem Koordinatensystem mit Achsen senkrecht bzw. parallel zum Gitter (siehe [5]) nach der Gleichung

$$\bar{c}(\zeta) = \pm \frac{\gamma_\zeta - iq_\zeta}{2} e^{-i\theta_\zeta} + \frac{1}{2t} \int_{(s_\zeta)} (q_\zeta + i\gamma_\zeta) \operatorname{cth} \frac{\pi}{t} (\zeta - \zeta') ds_\zeta$$

errechnen, in welcher θ_ζ den Neigungswinkel der Tangente der Singularitäten-trägerkurve (s_ζ) zur Achse ξ bedeutet, wobei dieser Winkel infolge der konformen Abbildung dem Winkel γ gleich ist. Auf Grund der letzten zwei Gleichungen kann man zwischen den Geschwindigkeiten des radialen Gitters

$$\bar{c}_g = (c_{gr} - ic_{g\varphi}) e^{-i\varphi}$$

und denen des geraden Gitters

$$\bar{c} = c_\xi - ic_\eta$$

die folgende Beziehung feststellen:*

$$c_{gr} - ic_{g\varphi} = \frac{Nt}{2\pi r} \left[c_\xi - i \left(c_\eta - \frac{\Gamma}{2t} \right) \right]. \quad (2.19)$$

*Prof. GRUBER nennt die hier erscheinende Komponente $\frac{\Gamma}{2t}$ »kompensierende Geschwindigkeit« [1].

Daraus ist ersichtlich, daß die induzierten Geschwindigkeiten des radialen Gitters auch auf Grund der induzierten Geschwindigkeiten des entsprechenden geraden Gitters bestimmt werden können. In diesem Fall werden erstens die Geschwindigkeiten des geraden Gitters (z. B. mit Hilfe der in [5] bekanntgegebenen tabellarischen Methode) berechnet und nachher werden die des radialen Gitters auf Grund der Gl. (2.19) bestimmt.

3. Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten

Das Integral in der Gl. (2.14) liefert den Wert der sogenannten induzierten Durchschnittsgeschwindigkeit entlang der Singularitätenträgerkurve (s). Nach Einführung der Bezeichnungen:

$$\gamma \frac{ds}{dr} = \gamma^* \quad q \frac{ds}{dr} + q^* \quad (3.1)$$

erhält man die induzierte komplexe Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\bar{c}_R(z) = (c_{Rr} - ic_{R\varphi})e^{-i\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{r'=r_1}^{r_2} (q^* + i\gamma^*) \frac{Nz^{N-1}}{z^N - z'^N} dr'. \quad (3.2)$$

Es sei

$$\frac{Nz^{N-1}}{z^N - z'^N} = e^{-i\varphi} \frac{Nr^{N-1} e^{iN\varphi} (r - r')}{r^N e^{iN\varphi} - r'^N e^{iN\varphi'}} \frac{1}{r - r'} = e^{-i\varphi} H(r, r'; N) \frac{1}{r - r'}$$

wobei H die sogenannte Einflußfunktion:

$$H(r, r'; N) = R(H) + iI(H) = e^{iN\varphi} \frac{Nr^{N-1}(r - r')}{r^N e^{iN\varphi} - r'^N e^{iN\varphi'}} \quad (3.3)$$

bedeutet. Aus den Gleichungen (3.2) und (3.3) erhalten wir für die induzierte Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\bar{c}_R = (c_{Rr} - ic_{R\varphi})e^{-i\varphi} = \frac{e^{-i\varphi}}{2\pi} \int_{r'=r_1}^{r_2} (q^* + i\gamma^*) [R(H) + iI(H)] \frac{dr'}{r - r'}. \quad (3.4)$$

Die Einflußfunktion $H(r, r'; N)$ ist entlang der Kurve (s) überall begrenzt;*

* Nach der BERNOULLI—L'HOSPITALSchen Regel ist

$$\lim_{r' \rightarrow r} H(r, r'; N) = \lim_{\substack{r \rightarrow r' \\ \varphi' \rightarrow \varphi}} \frac{-Nr^{N-1} e^{iN\varphi}}{-Nr'^{N-1} e^{iN\varphi'} - iNr'^N e^{iN\varphi'}} \frac{d\varphi'}{dr'} = \frac{1}{1 + i \frac{r}{r'}} = \frac{1}{1 + i \operatorname{tg} \chi}$$

demzufolge kann man das bei dem geraden Gitter eingeführte Rechenverfahren [5] zur Berechnung der Geschwindigkeit \bar{c}_R verwenden, deren Komponenten — im Polarkoordinatensystem — die folgenden sind:

$$c_{Rqr} = \frac{1}{2\pi} \int_{r'=r_1}^{r_2} q^* R(H) \frac{dr'}{r-r'} \quad (3.5)$$

$$c_{Rq\varphi} = -\frac{1}{2\pi} \int_{r'=r_1}^{r_2} q^* I(H) \frac{dr'}{r-r'} \quad (3.6)$$

$$c_{R\gamma r} = -\frac{1}{2\pi} \int_{r'=r_1}^{r_2} \gamma^* I(H) \frac{dr'}{r-r'} \quad (3.7)$$

$$c_{R\gamma\varphi} = -\frac{1}{2\pi} \int_{r'=r_1}^{r_2} \gamma^* R(H) \frac{dr'}{r-r'}. \quad (3.8)$$

Hiernach ist die induzierte Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{c}_R entlang der Kurve (s):

$$\bar{c}_R = [c_{Rqr} + c_{R\gamma r} - i(c_{Rq\varphi} + c_{R\gamma\varphi})] e^{-i\varphi}. \quad (3.9)$$

Um die Geschwindigkeitskomponenten tabellarisch berechnen zu können, führen wir die Transformation

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{r_2 - r_1}{2} \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (3.10)$$

ein. Ähnlich, wie beim geraden Gitter, erweitern wir nun den Gültigkeitsbereich der Singularitäten q^* und γ^* bzw. der Einflußfunktionen $R(H)$ und $I(H)$ auch auf den Bereich $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Dabei müssen die Singularitäten q^* , γ^* hinsichtlich $\theta = \pi$ zentralsymmetrisch (ungerade) und die Einflußfunktionen achsensymmetrisch (gerade) fortgesetzt werden.

Nach diesen Umformungen erhalten wir die folgenden Integrale für die Komponenten der induzierten Durchschnittsgeschwindigkeit [5]

$$c_{Rqr} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} q^* R(H) \operatorname{ctg} \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' \quad (3.11)$$

$$c_{Rq\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} q^* I(H) \operatorname{ctg} \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' \quad (3.12)$$

$$c_{R\gamma r} = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} \gamma^* I(H) \operatorname{ctg} \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' \quad (3.13)$$

$$c_{R\gamma\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} \gamma^* R(H) \operatorname{ctg} \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta'. \quad (3.14)$$

Die Gln. (3.11—3.14) sind, in ihrem formalen Aufbau, den Gln. der induzierten Geschwindigkeitskomponenten der Einzelschaukel beim geraden Gitter [5] ähnlich; demzufolge kann man die dort ausgearbeitete tabellarische Methode unverändert auch hier anwenden. Deshalb wollen wir — ohne auf Einzelheiten einzugehen — die numerische Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten kurz zusammenfassen.

Es sollen vor allem die Funktionen $R(H)$ und $I(H)$ errechnet werden. Zu diesem Zwecke führen wir die Bezeichnungen

$$\xi_N = r^N \cos N_\varphi \quad \eta_N = r^N \sin N_\varphi \quad X = -\frac{\cos \theta}{2}$$

bzw.

$$M_c = N\xi_N \frac{r_2 - r_1}{r} (X - X') \quad M_s = N\eta_N \frac{r_2 - r_1}{r} (X - X')$$

ein, dann erhalten wir zur numerischen Berechnung der Funktionen $R(H)$ und $I(H)$ aus der Gl. (3.3) folgende Formel:

$$R(H) = \frac{M_c(\xi_N - \xi'_N) + M_s(\eta_N - \eta'_N)}{(\xi_N - \xi'_N)^2 + (\eta_N - \eta'_N)^2} \quad (3.15)$$

$$I(H) = \frac{M_s(\xi_N - \xi'_N) - M_c(\eta_N - \eta'_N)}{(\xi_N - \xi'_N)^2 + (\eta_N - \eta'_N)^2}. \quad (3.16)$$

Bei der numerischen Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten tritt die typische Schwierigkeit wieder auf, daß der Wert von q^* am Nasenpunkt des Profils unendlich groß* ist und daraus sind die überall endlichen Werte der durch q^* induzierten Durchschnittsgeschwindigkeit zu berechnen. Die Formeln (3.11—3.14) werden ähnlicherweise wie beim geraden Gitter [5]

* Im Falle einer abgerundeten Profilnase gilt am Nasenpunkt $q^* \rightarrow \infty$, ähnlich wie die Funktion $1/\sqrt{x}$ wenn $x \rightarrow 0$. (Vgl. beim geraden Gitter.)

umgeformt, und so können sie zur numerischen Berechnung verwendet werden.

$$\begin{aligned}
 c_{Rqr} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^* [R(H) - R(H)_0] \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' - \\
 &\quad - \frac{R(H)_0}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^* \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' \\
 c_{Rq\varphi} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^* [I(H) - I(H)_0] \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' + \\
 &\quad + \frac{I(H)_0}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^* \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' \\
 c_{R\gamma r} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^* [I(H) - I(H)_0] \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' + \\
 &\quad + \frac{I(H)_0}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^* \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' \\
 c_{R\gamma\varphi} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^* [R(H) - R(H)_0] \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' + \\
 &\quad + \frac{R(H)_0}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^* \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta'.
 \end{aligned}$$

Da führen wir — wie beim geraden Gitter — die folgenden Bezeichnungen ein:

$$c_{Eqr} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^* \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' \quad *) \quad (3.17)$$

*) Gleich dem bei dem geraden Gitter angewendeten Verfahren wird c_{Eqr} nach der Formel

$$c_{Eqr} = \frac{B_0}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \left[q^* - B_0 \operatorname{ctg} \frac{\Theta'}{2} \right] \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta'$$

berechnet.

$$c_{E\gamma\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^* \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' \quad (3.18)$$

$$\Delta c_{Rqr} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^* [R(H) - R(H)_0] \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' \quad (3.19)$$

$$\Delta c_{Rq\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} q^* [I(H) - I(H)_0] \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' \quad (3.20)$$

$$\Delta c_{R\gamma r} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^* [I(H) - I(H)_0] \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta' \quad (3.21)$$

$$\Delta c_{R\gamma\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta'=0}^{2\pi} \gamma^* [R(H) - R(H)_0] \operatorname{ctg} \frac{\Theta' - \Theta}{2} d\Theta'. \quad (3.22)$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten werden mit dem beim geraden Gitter verwendeten Verfahren [5] berechnet. Die Tabellen sind ebenso aufgebaut, wie die zur Berechnung der Komponenten u_E und v_E . Auf Grund obiger Ausführungen werden die induzierten Durchschnittsgeschwindigkeits-Komponenten entlang der singularitätenträgenden Kurve (s) mit Hilfe folgender Formeln berechnet:

$$c_{Rqr} = R(H)_0 c_{Eqr} - \Delta c_{Rqr} \quad (3.23)$$

$$c_{Rq\varphi} = -I(H)_0 c_{Eqr} + \Delta c_{Rq\varphi} \quad (3.24)$$

$$c_{R\gamma r} = I(H)_0 c_{E\gamma\varphi} + \Delta c_{R\gamma r} \quad (3.25)$$

$$c_{R\gamma\varphi} = R(H)_0 c_{E\gamma\varphi} + \Delta c_{R\gamma\varphi}. \quad (3.26)$$

Vollständigkeitshalber sollen auch die Formeln für die Komponenten der von der im Mittelpunkt angeordneten Singularität $Q_1 + i\Gamma_1$ hervorgerufenen Geschwindigkeit \bar{c}_1 notiert werden:

$$c_{1r} = \frac{Q_1}{2\pi} \frac{1}{r} \quad c_{1\varphi} = -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

Bemerkung: Der vorliegende Gedankengang bezieht sich auf die Schaufelräder mit zentrifugaler Durchströmung, doch gelten die Beziehungen ohne Abänderungen auch für Schaufelräder mit zentripetaler Durchströmung, wenn man die Bezeichnungen beibehält, nämlich r_1 für den Eintritt und r_2 für den Austritt ($r_1 > r_2$). In diesem Fall muß man die Trägerkurve (s) derart gestalten, daß die Werte r mit zunehmenden φ abnehmen.

4. Transformation der Geschwindigkeitsverteilung

Vor der Behandlung der Bestimmung der Skelettlinien wollen wir die (hydrodynamisch gleichwertige) Transformation der induzierten Geschwindigkeiten längs beider einander von Punkt zu Punkt entsprechenden singularitätentragenden Kurven darstellen. Für die Transformation der normalen und der tangentialen Geschwindigkeitskomponenten entlang der Trägerkurve (s) auf die Trägerkurve (S) gelten die Gleichungen

$$c_n ds = c_n^*(S) dS \quad c_t ds = c_t^*(S) dS \quad (4.1)$$

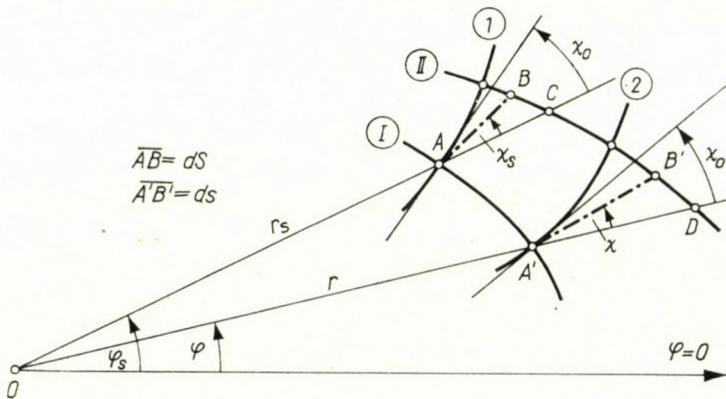


Abb. 5

mit guter Annäherung, falls (s) und (S) zueinander genügend nahe liegen. Diese Annäherung wird durch Iteration für die Bestimmung der singularitätentragenden Skelettlinie, die im folgenden behandelt wird, automatisch korrigiert.

Wir haben die entsprechenden Punkte der Kurven (s) und (S) bei dem geraden Gitter [5] in einem orthogonalen Koordinatensystem mit Achsen normal bzw. parallel zur Sehne einer als Ausgang gewählten* Kurve (s_0) derart untersucht, daß die Abszissen beider einander zugeordneten Punkte gleich waren. In analoger Weise wollen wir durch die zwei Endpunkte der Kurve (s_0) eine logarithmische Spirale legen, und eine orthogonale Trajektorien-schar zu dieser Spirale (ebenfalls logarithmischen Spiralen) annehmen. Wir wollen in diesem orthogonalen krummlinigen Koordinatensystem die einander entsprechenden Punkte der Kurven (s) und (S) derart zuordnen, daß jedes Punktpaar an derselben Trajektorie zu liegen kommt. Das Prinzip dieser Transformation ist aus Abb. 5 ersichtlich. Dem Punkte A' (bzw. B') der Kurve

* Die Richtung der Tangenten der Kurve (s_0) am Eintritts- und am Austrittspunkt ist gleich mit der Richtung der entsprechenden Geschwindigkeiten.

(s) entspricht der Punkt A (bzw. B) an der Kurve (S), d. h. dem Bogenelement $ds = \overline{A'B'}$ der Kurve (s) entspricht nach der Transformation das Bogenelement $dS = \overline{AB}$ der Kurve (S). Die logarithmischen Spiralen 1 und 2 haben denselben Steigungswinkel χ , und ihre Trajektorien sind die logarithmischen Spiralen I und II, an denen die einander entsprechenden Punkte A, A' und B, B' liegen.

Auf Grund der Abb. 5 sind die Gleichungen der logarithmischen Spiralen im Polarkoordinaten:

$$r_I = Ke^{-tg\chi_0\varphi} \quad r_{II} = (K + dK) e^{-tg\chi_0\varphi}. \quad (4.2a, b)$$

Daraus ergibt sich

$$\overline{A'D} = r_{II}(\varphi) - r_I(\varphi) = dK e^{-tg\chi_0\varphi}.$$

In dem elementaren Dreieck $A'B'D$ gilt

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'D}} = \frac{\cos \chi_0}{\cos(\chi - \chi_0)}$$

und daher

$$ds = \overline{A'B'} = \frac{\cos \chi_0}{\cos(\chi - \chi_0)} dK e^{-tg\chi_0\varphi}.$$

Desgleichen gilt es für den Dreieck ABC :

$$dS = \overline{AB} = \frac{\cos \chi_0}{\cos(\chi_s - \chi_0)} dK e^{-tg\chi_0\varphi_s}$$

Daher ist das Verhältnis der einander entsprechenden Bogenelemente

$$\frac{ds}{dS} = \frac{\cos(\chi_s - \chi_0)}{\cos(\chi - \chi_0)} e^{-tg\chi_0(\varphi - \varphi_s)} = \frac{\cos(\chi_s - \chi_0)}{\cos(\chi - \chi_0)} \frac{r}{r_s}; \quad (4.3)$$

dieses Verhältnis ist zur Durchführung der Transformation der entlang der Singularitätenträgerkurve (s) ermittelten induzierten Geschwindigkeiten auf die Kurve (S) nötig.

5. Skelettlinie der Schaufel

Das vorliegende Verfahren zur Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten gilt gleicherweise für stehende und für rotierende Schaufelräder. In den folgenden Ausführungen, in denen wir das Schaufelprofil bestimmen

wollen, besprechen wir den Fall der rotierenden Schaufeln; die gewonnenen Beziehungen werden nun durch die Substitution $\omega = 0$ auch für die stehenden Schaufelräder (Leiträder) anwendbar sein; falls $\omega = 0$ ist, fällt die Absolutströmung mit der Relativströmung zusammen ($w \equiv c$).

Die Skelettlinie des Schaufelprofils soll als eine Stromlinie der relativen Strömung aufgefaßt werden, die die Singularitätenverteilungen q und γ trägt. Die Skelettlinie wird auf Grund der Stromlinienbedingung im relativen System berechnet: entlang der relativen Stromlinie sind die Normalkomponenten der absoluten Geschwindigkeit und der Umlaufgeschwindigkeit ($r\omega$) übereinstimmend. Hierzu ist es notwendig, die entlang der Skelettlinie auftretenden induzierten Geschwindigkeiten zu kennen, die aber unmittelbar nicht bestimmt werden können, da die Bestimmung der Geschwindigkeiten — wie es behandelt wurde — die Kenntnis der singularitätentragenden Kurve (in diesem Fall der Skelettlinie) voraussetzt. Deshalb soll hier — genau wie beim geraden Gitter — die Skelettlinie durch Iteration bestimmt werden. Die Bestimmung der Skelettlinie durch Iteration wird möglich, weil das durch die Singularitätenverteilungen induzierte Geschwindigkeitsfeld berechnet werden kann, unabhängig von der Form der Trägerkurve.

Der Rechnungsgang der Skelettlinie: Längs einer singularitätentragenden Kurve (s_1)* werden die induzierten Geschwindigkeiten bestimmt, und auf Grund der Stromlinienbedingung wird die Stromlinie (S_1), als erste Näherung der Skelettlinie, berechnet. Dann werden die Singularitätenverteilungen q , γ auf die Kurve ($S_1 \equiv s_2$) transformiert, die induzierten Geschwindigkeiten werden längs (s_2) bestimmt und die neue Stromlinie (S_2) wird als zweite Näherung der Skelettlinie berechnet. Diese Iterationsschritte werden soweit fortgesetzt, bis die Kurven (s_i) und (S_i) des i -ten Iterationsschrittes praktisch übereinstimmen. Demzufolge gilt die Gleichung $\lim (s_i) = \lim (S_i) = (S)$ für die Skelettstromlinie der Schaufel. Es soll hier bemerkt werden, daß erfahrungsgemäß durch Annahme einer entsprechenden Ausgangskurve (s_1) im Falle eines Schaufelprofils mit einer von der logarithmischen Spirale wenig abweichenden Skelettlinie bereits der erste, im Falle einer großen Ablenkung meistens der zweite Iterationsschritt schon praktisch genaue Ergebnisse liefert.

In den folgenden Ausführungen wollen wir an Stelle von (s_1), (s_2) ... (s_i) bzw. (S_1), (S_2) ... (S_i) die singularitätentragende Kurve mit (s), und die Skelettlinie mit (S) bezeichnen.

In Abb. 6 sind die entlang der Skelettlinie auftretenden Geschwindigkeiten dargestellt. Die gestrichelte Linie ist die Kurve (s), und die stetige Linie ist die Kurve (S). Die Polarkoordinaten der Punkte der Kurve (s) bzw. (S) werden mit r , φ bzw. r_s , φ_s bezeichnet.

* Die Kurve (s_1) ist keine Stromlinie.

Die Normalkomponente der absoluten Geschwindigkeit entlang der Kurve (S) besteht aus folgenden Gliedern:

a) Normalkomponente der von der im Mittelpunkt angeordneten Singularität $Q_1 + i\Gamma_1$ hervorgerufenen Geschwindigkeit c_1

$$-\frac{Q_1}{2\pi} \frac{\sin \chi_s}{r_s} - \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{\cos \chi_s}{r_s}$$

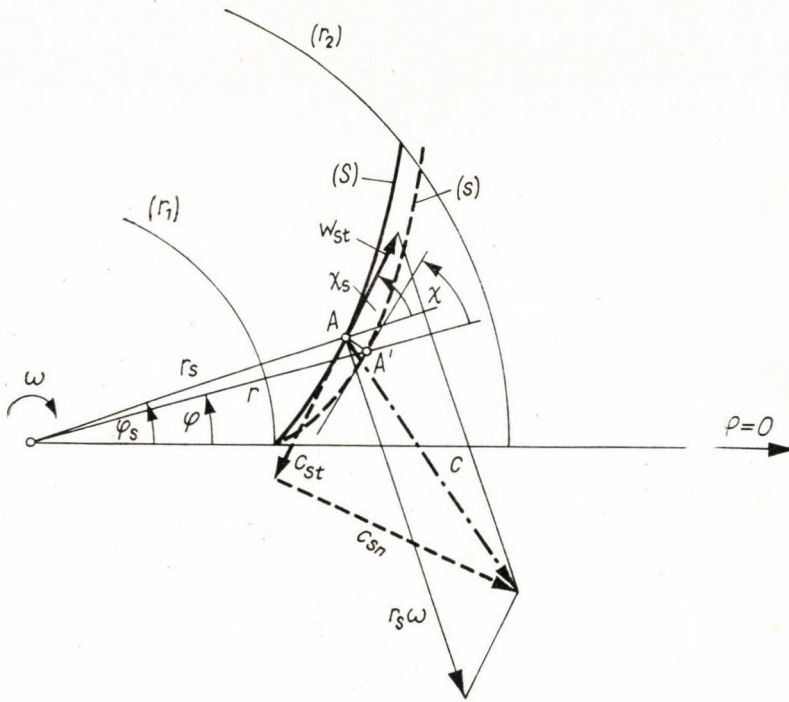


Abb. 6

b) Normalkomponente der induzierten Geschwindigkeit, transformiert von der Kurve (s) auf die Kurve (S):

$$(-c_{Rr} \sin \chi + c_{R\varphi} \cos \chi) \frac{ds}{dS}.$$

c) Es gibt noch — entlang der singularitätentragenden Kurve (s) (d. h. nach der Transformation auch längs der Skelettlinie (S)) — eine andere Normalkomponente (siehe die Ausführungen im Zusammenhange mit der Gl. 2.13). Die ist $q/2$ von entgegengesetzter Richtung an den zwei Seiten der Kurve. Diese Komponente kann demnach keine Durchströmung an der Kurve verursachen; durch sie wird aber die singularitätentragende Stromlinie eine sogenannte Verzweigungstromlinie. Demzufolge kommt diese Komponente in der Gleichung der Stromlinienbedingung nicht in Betracht.

Also läßt sich die Stromlinienbedingung für das relative System folgend formulieren:

$$-\frac{Q_1}{2\pi} \frac{\sin \chi_s}{r_s} - \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{\cos \chi_s}{r_s} + (c_{R\varphi} \cos \chi - c_{Rr} \sin \chi) \frac{\cos(\chi_s - \chi_0)}{\cos(\chi - \chi_0)} \frac{r}{r_s} = -r_s \omega \cos \chi_s.$$

Mit den Bezeichnungen

$$K_Q = \frac{Q_1}{2\pi} \quad K_\Gamma = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \quad (5.1)$$

$$A(r) = \frac{c_{Rr} \operatorname{tg} \chi - c_{R\varphi}}{\cos \chi_0 + \sin \chi_0 \operatorname{tg} \chi} r \quad (5.2)$$

erhält man die oben formulierte Stromlinienbedingung in der Form

$$\operatorname{tg} \chi_s = \frac{r_s^2 \omega - A(r) \cos \chi_0 - K_\Gamma}{K_Q + A(r) \sin \chi_0}. \quad (5.3)$$

Im folgenden bestimmen wir das Wertesystem $r_s = r_s(r)$, $\varphi_s = \varphi_s(r)$ für die Skelettlinie (S) als Funktion des Parameters r — mit der Bedingung, daß die Gl. (5.3) in den Punkten der Skelettlinie (S) erfüllt werden muß.

Nach unseren Voraussetzungen liegen die einander entsprechenden Punkte der Kurven (S) und (s) an derselben logarithmischen Spirale. Demzufolge ist der Wert K für beide einander zugeordneten Punkte A und A' (Abb. 6) derselbe (siehe die Gl. 4.2a); ebenfalls bleibt der Wert dK für beide genannten Punkte gleich, da die Endpunkte B und B' der einander entsprechenden Bogenelemente ebenfalls an derselben logarithmischen Spirale liegen, deren Gleichung die Konstante $K + dK$ enthält (Gl. 4.2b). Daher bleibt der Wert dK/K für die Punkte A und A' infolge der bei der Transformation der Kurve (s) auf die Kurve (S) aufgestellten Zuordnung unverändert.

$$K = r e^{\operatorname{tg} \chi_0 \varphi} = r_s e^{\operatorname{tg} \chi_0 \varphi_s} \quad (5.4)$$

$$dK = [dr + r \operatorname{tg} \chi_0 d\varphi] e^{\operatorname{tg} \chi_0 \varphi} = [dr_s + r_s \operatorname{tg} \chi_0 d\varphi_s] e^{\operatorname{tg} \chi_0 \varphi_s}.$$

Daraus erhalten wir zur Bestimmung der Funktion $r_s = r_s(r)$ die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{r} [1 + \operatorname{tg} \chi_0 \operatorname{tg} \chi] = \frac{dr_s}{r_s} [1 + \operatorname{tg} \chi_0 \operatorname{tg} \chi_s]. \quad (5.5)$$

Setzen wir

$$\frac{1}{r} [1 + \operatorname{tg} \chi_0 \operatorname{tg} \chi] = f(r) \quad (5.6)$$

und formen wir den Klammerausdruck an der rechten Seite der Gl. (5.5) mit Hilfe der Bedingung (5.3) um:

$$1 + \operatorname{tg} \chi_0 \operatorname{tg} \chi_s = \frac{K_0 + r_s^2 \omega \operatorname{tg} \chi_0}{K_Q + A(r) \sin \chi_0} \quad (5.7)$$

wobei

$$K_0 = K_Q - K_I \operatorname{tg} \chi_0.$$

Auf Grund der Gl. (5.5—5.7) erhalten wir die Differentialgleichung

$$[K_Q + A(r) \sin \chi_0] f(r) dr = \left[\frac{K_0}{r_s} + r_s \omega \operatorname{tg} \chi_0 \right] dr_s.$$

Nach Integration ergibt sich die (hinsichtlich r_s implizite) Gleichung

$$K_0 \ln \frac{r_s}{r_1} + (r_s^2 - r_1^2) \frac{\omega}{2} \operatorname{tg} \chi_0 = \int_{r=r_1}^r [K_Q + A(r) \sin \chi_0] f(r) dr \quad (5.8)$$

zur Bestimmung des Wertesystems $r_s(r)$ für die Skelettlinie (S). Nach Durchführung der Integration an der rechten Seite der Gl. (5.8) kann man die Werte r_s als Funktion des Parameters r auf graphischem Wege bestimmen. Zur Bestimmung des Wertesystems $\varphi_s(r)$ für die Skelettlinie ergibt sich aus der Gl. (5.4)

$$\varphi_s(r) = \frac{1}{\operatorname{tg} \chi_0} \ln \frac{r}{r_s(r)} + \varphi(r), \quad (5.9)$$

wobei die Funktion $\varphi(r)$ die Gleichung der Trägerkurve (s) im Polarkoordinatensystem darstellt. Bei der numerischen Berechnung kann die ermittelte Skelettlinie (S) durch Iteration — wie es früher ausgeführt wurde — verbessert werden. Die Iteration kann durch die Wiederholung des bisherigen Teiles des Verfahrens für neue singularitätentragende Kurve durchgeführt werden. Nach der Bestimmung der entsprechend genauen Skelettlinie muß die längs der Skelettlinie auftretende Geschwindigkeitsverteilung berechnet werden, da diese zur Berechnung der geometrischen Daten der Profilkontur notwendig ist.

Entlang der Skelettlinie (S) haben wir die folgenden absoluten Geschwindigkeitskomponenten in der Richtung der Tangenten:

a) Die Tangentialkomponente der von der im Mittelpunkt angeordneten Singularität $Q_1 + i I_1$ hervorgerufenen Geschwindigkeit c_1 :

$$\frac{Q_1}{2\pi} \frac{\cos \chi_s}{r_s} - \frac{I_1}{2\pi} \frac{\sin \chi_s}{r_s}.$$

b) Die Tangentialkomponente der induzierten Geschwindigkeit c_R :

$$[c_{Rr} \cos \chi + c_{R\varphi} \sin \chi] \frac{ds}{dS}.$$

c) Da die Skelettlinie (S) zugleich auch die Singularitätenverteilungen q, γ trägt, tritt noch eine Tangentialkomponente an ihren beiden Seiten auf (s. die Gl. 2.13)

$$\pm \frac{\gamma_s}{2} = \pm \frac{\gamma}{2} \frac{ds}{dS}.$$

Demzufolge ist entlang der Skelettlinie (S) die tangentiale Geschwindigkeitskomponente*

$$c_{St} = \frac{Q_1}{2\pi} \frac{\cos \chi_s}{r_s} - \frac{I_1}{2\pi} \frac{\sin \chi_s}{r_s} + \left[c_{Rr} \cos \chi + c_{R\varphi} \sin \chi \pm \frac{\gamma}{2} \right] \frac{ds}{dS}. \quad (5.10)$$

Auf Grund der Gln. (4.3), (5.1) und (3.1) erhält man

$$c_{St} = \frac{K_Q \cos \chi_s - K_\Gamma \sin \chi_s}{r_s} + \left[c_{Rr} + c_{R\varphi} \operatorname{tg} \chi \pm \frac{\gamma^*}{2} \right] \varepsilon(r, r_s), \quad (5.11)$$

wobei

$$\varepsilon(r, r_s) = \frac{\cos \chi_s + \operatorname{tg} \chi_0 \sin \chi_s}{1 + \operatorname{tg} \chi_0 \operatorname{tg} \chi} \frac{r}{r_s}. \quad (5.12)$$

Die Tangentialkomponente der entlang der Skelettlinie auftretenden relativen Geschwindigkeit ist (Abb. 7)

$$w_{St} = c_{st} + r_s \omega \sin \chi_s$$

und mit Hilfe der Gl. (5.11)

$$w_{St} = \frac{1}{r_s} (K_Q \cos \chi_s - K_\Gamma \sin \chi_s) + r_s \omega \sin \chi_s + \left[c_{Rr} + c_{R\varphi} \operatorname{tg} \chi \pm \frac{\gamma^*}{2} \right] \varepsilon(r, r_s). \quad (5.13)$$

Ferner tritt noch an beiden Seiten der Skelettlinie die von q_s hervorgerufene relative Normalgeschwindigkeit, die — wie bereits erwähnt wurde — den

* In den Gln. (5.10) und (5.11) gilt vor $\gamma^*/2$ das obere Vorzeichen an der linken, das untere Vorzeichen an der rechten Seite der Skelettlinie.

Stromliniencharakter der Skelettlinie nicht beeinträchtigt, da die Größen dieser Geschwindigkeiten an beiden Seiten gleich sind, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen:

$$w_{Sn} = \pm \frac{q_s}{2} = \pm \frac{q}{2} \frac{ds}{dS} = \pm \frac{q^*}{2} \varepsilon(r, r_s). \quad (5.14)$$

6. Konturlinie des Schaufelprofils

In Kenntnis der relativen Geschwindigkeitsverteilung entlang der Skelettlinie kann die Konturlinie des Schaufelprofils bestimmt werden. Diese Linie ist jene Verzweigungsstromlinie der relativen Strömung, welche die Stromlinien

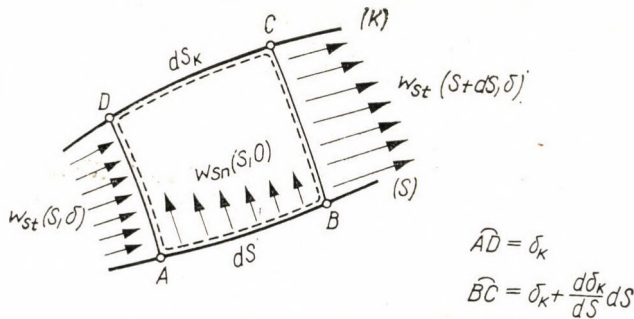


Abb. 7

der durch das Schaufelrad durchströmenden Flüssigkeitsmenge und die Stromlinien, welche von der Quell-Senken-Verteilung q hervorgerufen werden, von einander scheidet.

In Abb. 7 ist ein Profilabschnitt zu sehen, in dem die Skelettlinie mit (S) und die Konturlinie mit (K) bezeichnet ist. Den Punkten A und B an der Skelettlinie in einer Entfernung dS voneinander entsprechen die Punkte D und C an der Konturlinie. Es sei die Profildicke an dem Punkt A mit δ_K bezeichnet, so erhalten wir am Punkt B für die Profildicke (unter Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung)

$$\delta_K + \delta'_K dS = \delta_K + \frac{d\delta_K}{dS} dS.$$

Die weiteren Untersuchungen werden im rechtwinkligen krummlinigen Koordinatensystem S, δ durchgeführt, wobei die positive Richtung von S von dem Nasenpunkt des Profils gegen die Austrittskante zeigt.

Die relative Strömung ist in dem durch die geschlossene (gestrichelte) Linie ABCDA begrenzten Bereich quellenfrei, aber behaftet mit der Rotation

2ω . Demzufolge ist für die geschlossene Kurve $ABCD$ der Durchfluß der relativen Strömung Null:

$$\int_{\delta=0}^{\delta_K} w_{St}(S, \delta) d\delta + w_{Sn}(S, 0) dS - \int_{\delta=0}^{\delta_K + \delta'_K ds} \left[w_{St}(S, \delta) + \frac{\partial w_{St}}{\partial S}(S, \delta) dS \right] d\delta = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$w_{Sn}(S, 0) - w_{St}(S, \delta_K) \frac{d\delta_K}{dS} - \int_{\delta=0}^{\delta_K} \frac{\partial w_{St}}{\partial S} d\delta = 0. \quad (6.1)$$

(Bemerkt sei hier, daß diese Gleichung mit der entsprechenden, bei der Behandlung des Berechnungsverfahrens des geraden Gitters [5] erhaltenen Gleichung übereinstimmt.)

Mit Ausnahme der Punkte der Skelettlinie, ist die Geschwindigkeitsverteilung der sogenannten inneren Strömung innerhalb der Konturlinie des Schaufelprofils überall stetig und differenzierbar. Der Differentialquotient dieser inneren Strömung hat — mit Ausnahme des Nasenpunktes — einen an den beiden Seiten der Skelettlinie verschiedenen endlichen Wert. In dem Nasenpunkt aber ist der Wert von q^* unendlich groß, falls das Profil im Nasenpunkt abgerundet ist. Deshalb gelten für alle inneren Punkte an den beiden Seiten der Skelettlinie — mit Ausnahme des Nasenpunktes — die Gleichungen

$$\frac{\partial w_{St}}{\partial S} = - \frac{\partial w_{Sn}}{\partial \delta} \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial w_{Sn}}{\partial S} = \frac{\partial w_{St}}{\partial \delta} + 2\omega. \quad (6.2b)$$

Nach Einsetzen der Gl. (6.2a) in die Gl. (6.1) und nach Integration erhalten wir

$$w_{Sn}(S, \delta_K) - w_{St}(S, \delta_K) \frac{d\delta_K}{dS} = 0. \quad (6.3)$$

Auf Grund dieser Gleichung wollen wir die Profildickenverteilung δ_k mit Hilfe der Reihenentwicklung von $w_{St}(S, \delta_K)$ und $w_{Sn}(S, \delta_K)$ berechnen.

$$w_{St}(S, \delta_K) = w_{St}(S, 0) + \frac{\partial w_{St}}{\partial \delta}(S, 0) \delta_K + \frac{\partial^2 w_{St}}{\partial \delta^2} \frac{\delta_K^2}{2!} + \dots \quad (6.4a)$$

$$w_{Sn}(S, \delta_K) = w_{Sn}(S, 0) + \frac{\partial w_{Sn}}{\partial \delta}(S, 0) \delta_K + \frac{\partial^2 w_{Sn}}{\partial \delta^2} \frac{\delta_K^2}{2!} + \dots \quad (6.4b)$$

Durch weitere Differentiation erhalten wir die Formeln:

$$\frac{\partial w_{St}}{\partial \delta} (S, 0) = \frac{1}{2} \frac{dq_S}{dS} - 2\omega \quad \frac{\partial w_{Sn}}{\partial \delta} (S, 0) = -\frac{\partial w_{St}}{\partial S} (S, 0)$$

$$\frac{\partial^2 w_{St}}{\partial \delta^2} (S, 0) = -\frac{\partial^2 w_{St}}{\partial S^2} (S, 0) \quad \frac{\partial^2 w_{Sn}}{\partial \delta^2} (S, 0) = -\frac{1}{2} \frac{d^2 q_S}{dS^2}$$

$$\frac{\partial^3 w_{St}}{\partial \delta^3} (S, 0) = -\frac{1}{2} \frac{d^3 q_S}{dS^3} \quad \frac{\partial^3 w_{Sn}}{\partial \delta^3} (S, 0) = \frac{\partial^3 w_{St}}{\partial S^3}$$

Auf diesem Grund wird

$$\begin{aligned} w_{St}(S, \delta_K) = w_{St}(S, 0) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{dq_S}{dS} \delta_K - \frac{d^3 q_S}{dS^3} \frac{\delta_K^3}{3!} + \dots \right\} - \\ - 2\omega \delta_K - \left\{ \frac{\partial^2 w_{St}}{\partial S^2} (S, 0) \frac{\delta_K^2}{2!} - \frac{\partial^4 w_{St}}{\partial S^4} (S, 0) \frac{\delta_K^4}{4!} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (6.5a)$$

$$\begin{aligned} w_{Sn}(S, \delta_K) = \frac{1}{2} \left\{ q_S - \frac{d^2 q_S}{dS^2} \frac{\delta_K^2}{2!} + \frac{d^4 q_S}{dS^4} \frac{\delta_K^4}{4!} - \dots \right\} - \\ - \left\{ \frac{\partial w_{St}}{\partial S} (S, 0) \delta_K - \frac{\partial^3 w_{St}}{\partial S^3} \frac{\delta_K^3}{3!} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6.5b)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gl. (6.3) ein, und integrieren wir nach S , so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{S=0}^S q_S dS - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dq_S}{dS} - 4\omega \right) \frac{\delta_K^2}{2!} - \frac{d^3 q_S}{dS^3} \frac{\delta_K^4}{4!} + \dots \right\} - \\ - \left\{ w_{St}(S, 0) \delta_K - \frac{\partial^2 w_{St}}{\partial S^2} (S, 0) \frac{\delta_K^3}{3!} + \dots \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

zur Bestimmung der Profildickenverteilung δ_k . Indem wir nur die Glieder erster Ordnung gelten lassen, so erhalten wir als erste Näherung

$$\delta_K^{(1)} = \frac{1}{2w_{St}(S, 0)} \int_{S=0}^S q_S dS. \quad (6.7a)$$

Lassen wir in Gl. (6.6) auch die Glieder zweiter Ordnung gelten, dann ergibt sich als Lösung die Näherung zweiter Ordnung

$$\delta_K^{(2)} = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{dq_S}{dS} - 2\omega} \left\{ -w_{St}(S, 0) \pm \sqrt{w_{St}^2(S, 0) + \left[\frac{1}{2} \frac{dq_S}{dS} - 2\omega \right] \int_{S=0}^S q_S dS} \right\}. \quad (6.7b)$$

7. Die Geschwindigkeitsverteilung entlang der Kontur

Im Sinne des STOKESSchen Satzes gilt für die Zirkulation des relativen Geschwindigkeitsfeldes längs der geschlossenen Kurve $ABCD A$ nach der Abb. 7.:

$$w_{St}(S, 0) + w_{Sn}(S, \delta_K) \frac{d\delta_K}{dS} + \int_{\delta=0}^{\delta_K} \frac{\partial w_{Sn}}{\partial S} d\delta - w_K \frac{dS_K}{dS} = 2\omega \delta_K. \quad (7.1)$$

Daraus erhält man mit Hilfe der Gl. (6.2b)

$$w_{Sn}(S, \delta_K) \frac{d\delta_K}{dS} + w_{St}(S, \delta_K) - w_K \frac{dS_K}{dS} = 0 \quad (7.2)$$

und so ergibt sich für w_K

$$w_K = \left[1 + \left(\frac{d\delta_K}{dS} \right)^2 \right] \frac{dS}{dS_K} w_{St}(S, \delta_K). \quad (7.3)$$

In dem rechtwinkligen krummlinigen Koordinatensystem S, δ entlang der Skelettlinie gilt

$$dS_K = \sqrt{dS^2 + d\delta_K^2}$$

und infolgedessen ist

$$w_K = \sqrt{1 + \left(\frac{d\delta_K}{dS} \right)^2} w_{St}(S, \delta_K). \quad (7.4)$$

*) Die Gl. (7.4) — wie auch die Formeln (6.2a) und (6.2b) — wird nur in einem einzigen Punkt, nämlich im Nasenpunkt ungültig.

Bei der numerischen Berechnung kann man die längs der Konturlinie auftretende relative Geschwindigkeit nach Gl. (7.4) mit guter Annäherung bestimmen, wenn die Werte von $w_{St}(S, \delta_K)$ mit Hilfe der aus der Reihe (6.5a) und der Gl. (6.7b) gewonnenen Formel

$$w_{St}(S, \delta_K) \approx w_{St}(S, 0) + \left[\frac{1}{2} \frac{dq_s}{dS} - 2\omega \right] \delta_K = \\ = \sqrt{w_{St}^2(S, 0) + \left[\frac{1}{2} \frac{dq_s}{dS} - 2\omega \right] \int_{s=0}^s q_s dS}$$

und die Werte von $\frac{d\delta_K}{dS}$ mit der Formel

$$\frac{d\delta_K}{dS} \approx \frac{w_{St}(S, 0)}{w_{St}(S, \delta_K)} = \frac{1}{2} \frac{q_s}{w_{St}(S, \delta_K)}$$

berechnet werden.

Aus der so gewonnenen Verteilung der Konturgeschwindigkeit läßt sich die Druckverteilung entlang des Schaufelprofils auf Grund der Gl. (1.15) bestimmen.

SCHRIFTTUM

1. GRUBER, J.: Die Konstruktion von Schaufelsternen mit rückwärts gekrümmter Beschau-
felung. *Periodica Polytechnica*, Budapest (1957) S. 43–49.
2. HOFFMEISTER, M.: Entwicklung von radialen Laufschaufeln unter Benutzung des Singula-
ritätenverfahrens. *Maschinenbautechnik* 8 (1959) S. 77–83.
3. KRÜGER, H.: Ein Verfahren zur Druckverteilung an geraden und radialen Schaufelgittern.
Ing.-Arch. (1958) S. 242–267.
4. ISAY, W. H.: Beitrag zur Potentialströmung durch radiale Schaufelgitter. *Ing.-Arch.* (1954)
S. 203–210.
5. CZIBERE, T.: Berechnungsverfahren zum Entwurf gerader Flügelgitter mit stark gewölbten
Profilschaufeln. *Acta Technica*, XXVIII (1960) Budapest. S. 43–71 (Teil I) und S.
241–280 (Teil II).
6. MÜLLER, W.: *Mathematische Strömungslehre*. Berlin (1928) S. 97.
7. KOTSCHIN, N. I.—KIBEL, I. A.—ROSE, N. W.: *Theoretische Hydromechanik I*. Berlin
(1954) S. 125.

ZUSAMMENFASSUNG

Das dargelegte Berechnungsverfahren dient zum Entwurf radialer Lauf- und Leiträder zwischen parallelen Wänden, falls die Strömungswinkel beim Ein- und Austritt, sowie die Schaufelzahl vorgegeben sind. In der Voraussetzung einer inkompressiblen und reibungsfreien Flüssigkeit kann man die Konturlinie der profilierten Schaufel der Lauf- und Leiträder und die in der Umgebung der Schaufel auftretenden Strömungs- und Druckverhältnisse bestimmen. Dem Berechnungsverfahren ist die komplexe Methode der hydrodynamischen Singularitäten (der Quell-Senken- und Zirkulationsverteilungen) zugrunde gelegt. Die Singularitätenverteilungen werden entlang der Trägerkurven lokalisiert, die durch Iteration die Skelettlinie annähern. Dadurch ergibt sich mit Hilfe dieses Verfahrens eine Annäherung zweiter Ordnung für die Lösung der Entwurfsaufgabe auch für Fälle, wo die Skelettlinie sehr stark von der logarithmischen Spirale abweicht. Bei kleinen Ablenkungen genügt nur einen, bei größeren hingegen zwei Iterationsschritte auszuführen.

METHOD FOR DIMENSIONING RADIAL BLADE CASCADES

T. CZIBERE

SUMMARY

A computing method is developed for dimensioning guide wheels and runners (impellers) with constant blade width, on the basis of known flow conditions on the entry and exit circle, and of given geometric elements and a given number of blades. Assuming a frictionless and incompressible fluid, the profile contour of runners (impellers) and guide wheels can be elaborated, and further, flow and pressure conditions along the profile can be established. The basic idea of the computing procedure is the method of hydrodynamic singularities expressed as a complex function. The singularities are located along curves determined by an iterative method as approximation to the camber line. In this way, a second grade approximation is obtained in solving the problem set up in the introduction. This method proved satisfactory, even when the camberline differed from the logarithmic spiral. In the case of a minute deviation, one step of iteration sufficed; for major deviations, two iterative steps were needed.

MÉTHODE POUR CALCULER
LES DIMENSIONS DES AUBES EN GRILLE RADIALE

T. CZIBERE

RÉSUMÉ

Le procédé permet de calculer les dimensions des roues motrices et conductrices à largeur d'aube constante, quand les conditions d'écoulement à l'entrée et à la sortie, les données géométriques et le nombre d'aubes sont connus. En supposant un fluide incompressible et sans frottement, on parvient à construire le contour du profil d'aube des roues motrices et conductrices, et à définir les conditions d'écoulement et de pression autour des aubes. Le procédé de calcul utilise la méthode des singularités hydrodynamiques (répartitions de source et de circulation) exprimées comme fonctions complexes. Les répartitions des singularités sont disposées le long des courbes développées par des calculs itératifs, comme approximation de la ligne squelette. Le procédé de calcul offre donc une solution d'approximation de second degré du problème, même si la ligne squelette diffère fortement de la spirale logarithmique. En cas de déviations plus faibles, un seul calcul itératif est satisfaisant; pour des déviations plus grandes, deux calculs itératifs suffisent.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ РАДИАЛЬНЫХ ЛОПАСТНЫХ
РЕШЕТОК

Т. ЦИБЕРЕ

РЕЗЮМЕ

Сообщаемая расчетная методика позволяет проектировать радиальное рабочее колесо и неподвижный направляющий аппарат, ограниченные параллельными стенками, если аэродинамический и геометрический режим на выходе и входе лопастного колеса, а также число лопаток заданы. Предполагая жидкость несжимаемой и свободной от трения, можно определить контурные линии профильных вращающихся колес или неподвижных лопастей, а также аэродинамический режим и режим давления, образующиеся вокруг лопастей. При расчете используется комплексный функциональный метод гидродинамических сингулярностей (распределения кипения и циркуляции). Сингулярные распределения размещаются соответствующим образом на кривых, определяющих линию контура итеративным приближением, и эти кривые вследствие итерации стремятся к контурной линии. Вследствие этого расчетная методика дает решение изложенной выше задачи проектирования во втором приближении; даже в случае лопастей с контурной линией, сильно отклоняющейся от логарифмической спирали. В случае небольших отклонений необходимо иметь *одну*, а в случае больших отклонений *две* итерационных степени.

CONTROLLED NON-LINEAR RESISTORS

L. GÁDOR

RESEARCH INSTITUTE OF THE ELECTRICAL INDUSTRY, BUDAPEST

[Manuscript received May 2, 1960]

1. Introduction

One of the utilization methods of non-linearity is based on the fact that it renders a possibility to influence and to control the characteristics of the circuit elements in operation. Controlling exploits the fact that electromagnetic characteristics depend on the operational state, operating point and the operating range, which can be changed without any mechanical movement and without any structural interference.

The task of the present report is to investigate the control of non-linear resistances. Thus an opportunity is offered to construct such circuit elements, the resistance of which can be changed without movable parts.

In the circuit diagrams non-linear resistance is distinguished from the linear one by a crossing.

2. The way of controlling

The competent characteristics of the non-linear element depend on the operating point. The position of the operating point is determined by the loading of the element though it can be determined by an external loading too, which is independent of the main loading.

Main loading is the utilization of the non-linear element deriving from a circuit containing the working load. For instance: main current, main voltage, main flux.

Controlling effect is the external effect by which the operating point of the non-linear element and thus its competent characteristics are influenced. For instance: controlling current, controlling voltage and controlling flux.

The main loading determines the operating point, respectively the range of the characteristic curve of the non-linear element that we are working at.

The controlling effect alters the characteristic curve itself.

As a rule, both effects are present simultaneously: we are working depending on the main loading, at an operating point, respectively at a range of the characteristic curve, which is in turn determined by the controlling effect.

As an example, let us consider a saturated reactor, the characteristic curve of which is the *a* curve of Fig. 1. As a result of a direct current pre-magnetization the characteristic curve passes into curve *b*). That on which section of the one or the other characteristic curve, we are operating at, depends entirely on the amplitude of the current, and alternating voltage, respectively representing the main loading.

As a rule, the non-linear characteristic curve is of a saturated character. By an inside control, a saturated characteristic curve can be utilized in two ways. Considering the example of Fig. 1 again, the fact that while the current varies within wide limits, in the voltage only a slight change takes place,

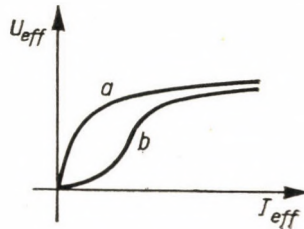


Fig. 1

can be utilized as a stabilizer. On the other hand, we can exploit the quality according to which the current changes intensively on the effect of a comparatively slight change in the voltage.

Similar cases and examples can be found among resistors: the barretter, which stabilizes current, the Zener-diode, which stabilizes voltage and the lightning arrester composed of non-linear resistances which, on the contrary, reacts to a comparatively small increase in voltage by a sudden increase of the current.

The characteristic curve of both inductances and of non-linear resistances can be altered by control.

The controlling of inductances is one of the most important chapters in up to date control engineering; premagnetized choke-coils and the magnetic amplifier developed from it, have found a wide application in automatic controlling and regulating equipments. Its development is far from being completed but the literature of its theory and its practical use could easily make up a library.

This is why in the following magnetic amplifiers are going to be considered from the point of view of general connections and the validity of general statements only. Our attention is going to be concentrated on resistances in the first place.

3. Non-linear resistor

Ohm's law states the proportionality of current and voltage. This is the reason why under the household expression "ohmic resistance" sometimes a resistance of constant value is meant which is in accordance with Ohm's law, sometimes, on the other hand, resistances which are neither inductive nor capacitive.

In order to ensure unambiguity in applying these expressions, in the following we shall use the expression *resistance* for any resistance, be it linear or non-linear, which is neither inductive nor capacitive, at which voltage is used for defeating the drag hindering the movement of the charge carriers and where the product of the instantaneous values of voltage u to be measured at its terminals and of current i flowing through it, has a constant sign and is equal to the power being transformed into Joulean heat.

In the course of the experiments we had been using polycrystalline blocks of silicon carbide base as non-linear resistors. The blocks had been of the same material that are used for lightning arresters and for other non-linear resistors. In order to be able to apply them for such purposes we have developed their home production at the Research Institute of the Electrical Industry too.

In fact, these polycrystalline materials are SiC grains pressed into a solid block by means of suitable binders. The inside resistivity of the grains is in the 1 ohm cm. order of magnitude and is therefore negligible as compared with the resistance of the surface layer of the grains and with the intergranular contact resistance. The intergranular contact resistance depends on voltage and on temperature. Its dependence on voltage is more marked.

The relationship between current and voltage, when applied to practical purposes can be expressed with good approximation in the following form:

$$u = Ai^a, \quad i = Bu^\beta; \quad (1)$$

wherefrom it is obvious that

$$A^\beta B = AB^a = 1 \quad \text{and} \quad a\beta = 1. \quad (2)$$

A , B , a and β here included can be considered as constant for certain sections of the curve.

At higher voltages, the conduction of the binder can no longer be neglected besides the current flowing through the contacting areas of the grains, so within wide limits the constant values can not be regarded as actually constant ones.

In our tests we have applied the non-linear resistor for continuous running which has resulted in our being compelled to restrict the operating range to a comparatively brief starting section of the characteristic curve. Within this range, however, the constants are actually constants with good approximation.

If specific values, *i. e.* field intensity instead of voltage and current density instead of current are chosen to be considered for the investigated samples, A will be in the decimal order, between 30—50, whereas exponent α will be somewhere around 0.3.

4. The qualities of non-linear bridges

As it is going to be seen from forthcoming explanations, the simplest way for effecting the control of non-linear resistances is to apply bridge circuits. We shall, therefore, have a closer look at the qualities and behaviour

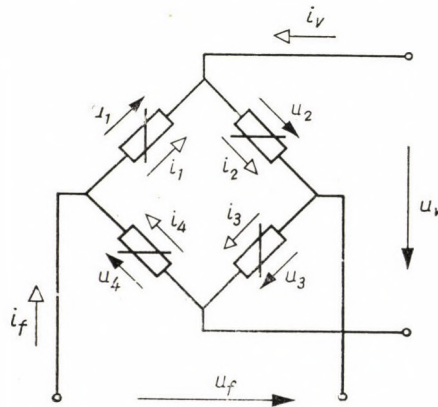


Fig. 2

of bridges built of non-linear elements. We will investigate above all which are the relations equally valid for every bridge circuit independently of the character of the elements and will look up those laws of linear bridges which can not be transposed to non-linear bridges.

If the bridge circuit illustrated by Fig. 2 is composed of linear elements, the balanced bridge will remain balanced in any operational state. Though the currents flowing in the bridge elements will undergo a change upon the effect of the controlling current, i_v will not influence i_f . Quite different is the case with bridges built of non-linear elements. The currents flowing in the elements will alter the resistance of the elements and thus also the resultant resistance of the bridge in the main circuit.

For a linear bridge:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= r_1 i_1 & i_1 &= g_1 u_1 \\
 u_2 &= r_2 i_2 & i_2 &= g_2 u_2 \\
 u_3 &= r_3 i_3 & i_3 &= g_3 u_3 \\
 u_4 &= r_4 i_4 & i_4 &= g_4 u_4
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

In a non-linear bridge resistances, respectively conductances are not constant; some kind of unproportional functionality prevails between u and i

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(i_1) & i_1 &= \varphi_1(u_1) \\ u_2 &= f_2(i_2) & i_2 &= \varphi_2(u_2) \\ u_3 &= f_3(i_3) & i_3 &= \varphi_3(u_3) \\ u_4 &= f_4(i_4) & i_4 &= \varphi_4(u_4) \end{aligned} \quad (4)$$

where f and φ are inverse functions.

Node and loop laws are invariably valid for non-linear bridges as well:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \quad (5)$$

$$i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 0 \quad (6)$$

$$i_f = i_1 - i_4 = i_2 - i_3 \quad (7)$$

$$i_v = -i_1 + i_2 = i_3 - i_4 \quad (8)$$

$$u_f = u_1 + u_2 = -u_3 - u_4 \quad (9)$$

$$u_v = -u_1 - u_4 = u_2 + u_3 \quad (10)$$

$$i_f + i_v = i_2 - i_4 \quad (11)$$

$$i_f - i_v = i_1 - i_3 \quad (12)$$

$$u_f + u_v = u_2 - u_4 \quad (13)$$

$$u_f - u_v = u_1 - u_3. \quad (14)$$

Eqs. (5) to (14) are about voltages and currents only; resistances are not included in them. Therefore it is not motivated that they should have a different shape in a non-linear bridge as compared to a linear one.

The scheme of the linear bridge as per Fig. 3a can be substituted by the scheme of Fig. 3b, where R_1 , R_2 and R_k can be computed from the branch resistances r_1 , r_2 , r_3 and r_4 . From here the inversion formula* is obvious:

$$\left(\frac{u_v}{i_f} \right)_{i_v=0} = \left(\frac{u_f}{i_v} \right)_{i_f=0} = R_k.$$

The proving of the inversion formula makes use of the fact that resistances are constant. Thus the inversion formula cannot be deduced for a non-linear four-pole and is consequently not valid for that.

* The inversion formula was introduced by KIRCHHOFF and used later by WILBERFORCE too (1903). According to this:

$$\left(\frac{xy_0}{x_f} \right)_{x_v=0} = \left(\frac{y_f}{x_v} \right)_{x_f=0}$$

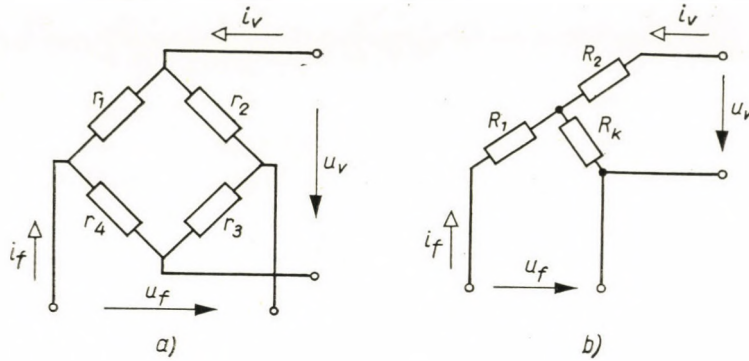


Fig. 3

5. The balancing of non-linear bridges

If in the non-linear bridge of Fig. 2

$$\begin{aligned}
 u_1 = f_1(i_1), & & i_1 = \varphi_1(u_1) \\
 u_2 = f_2(i_2), & \text{ or } & i_2 = \varphi_2(u_2) \\
 u_3 = f_3(i_3), & & i_3 = \varphi_3(u_3),
 \end{aligned} \tag{15}$$

then there is always to be found a $u_4 = f_4(i_4)$ or $i_4 = \varphi_4(u_4)$ function balancing the bridge in the direction f or a usually divergent function $u_4 = f_4'(i_4)$ or $i_4 = \varphi_4'(u_4)$ which balances the bridge in the direction v .

If the bridge is balanced in the direction f , then

$$\text{in case } i_v = 0, \quad u_v = 0.$$

On basis of (8)

$$i_1 = i_2 \quad \text{and} \quad i_2 = i_4. \tag{16}$$

From (10):

$$u_1 = -u_4 \quad \text{and} \quad u_2 = -u_3 \tag{17}$$

i. e.

$$f_1(i_1) = -f_4(i_4), \tag{18}$$

$$f_2(i_2) = -f_3(i_3). \tag{19}$$

Eqs. (18) and (19) define the $u_4 = f_4(i_4)$ function — considering relation (16) — univocally. Namely, if from (19)

$$i_2 = -\varphi_2[f_3(i_3)] = -\varphi_2[f_3(i_4)] = i_1;$$

the value of i_1 is substituted in (18),

$$f_4(i_4) = f_1\{\varphi_2[f_3(i_4)]\}. \quad (20)$$

Owing to the symmetry of the functions, the negative sign occurring twice can be omitted.

The function $f_4'(i_4)$ balancing the bridge in the direction v can be determined in the same way. If the bridge is balanced in the direction v , then, in case

$$i_f = 0, \quad u_f = 0.$$

On basis of (7):

$$i_1 = i_4 \quad \text{and} \quad i_2 = i_3. \quad (21)$$

From (9):

$$u_1 = -u_2 \quad \text{and} \quad u_3 = -u_4, \quad (22)$$

that is

$$f_1(i_1) = -f_2(i_2), \quad (23)$$

$$f_3(i_3) = -f_4(i_4). \quad (24)$$

Taking eq. (21) into consideration, relations (23) and (24) define the $u_4 = -f_4'(i_4)$ function univocally because the value of the function belonging to the arbitrary value of the independent variable i_4 is — like (20) —

$$f_4'(i_4) = f_3\{\varphi_2[f_1(i_4)]\}. \quad (25)$$

Functions $f_4(i_4)$, resp. $f_4'(i_4)$ can be determined with computation if the functions of the other three bridge branches are analytically given and are to be defined by plotting if the above functions are graphically given.

Be for instance

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,5 i_1 \\ u_2 &= 1,5 i_2 \\ u_3 &= 3 i_3^{0,5}. \end{aligned}$$

In this case

$$u_4(i_4) = 0,5 \frac{3 i_4^{0,5}}{1,5} = i_4^{0,5},$$

$$u_4'(i_4) = 3 \left(\frac{0,5 i_4}{1,5} \right)^{0,5} = 1,73 i_4^{0,5}.$$

The plotting of the points of u_4 , resp. u'_4 functions which belong to the same i_4 value, is illustrated by Fig. 4.

The non-linear bridge is balanced both in the direction f and v , if

$$u_4 = f_4(i_4) = f'_4(i_4),$$

that is

$$f_1\{\varphi_2[f_3(i_4)]\} = f_3\{\varphi_2[f_1(i_4)]\}. \quad (26)$$

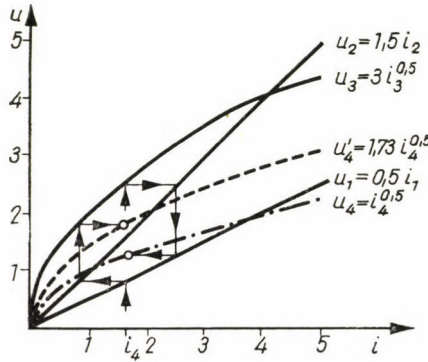


Fig. 4

In this case functions f_4 and f'_4 coincide and the balancing of the bridge in both directions takes place simultaneously. The problem is what are the conditions for equation (26) being prevalent.

Equation (26) will prevail in the case of at least two of the three given functions being identical.

Be $f_1(i) = f_3(i) = f(i)$.

Thus equation (26) will be transformed into an identity and the function of the fourth bridge branch is

$$f_4(i_4) = f\{\varphi_2[f(i_4)]\}. \quad (27)$$

Fig. 5. illustrates the plotting of function $f_4(i_4)$ meeting relation (27). The requirements of equation (26) are met in the case too, if

$$f_1(i) = f_2(i), \text{ resp. if } g_1(u) = g_2(u).$$

Since in this case

$$f_1[\varphi_2(i)] = \varphi_2[f_1(i)] = i,$$

consequently

$$f_4(i_4) = f_1\{\varphi_2[f_3(i_4)]\} = f_3\{\varphi_2[f_1(i_4)]\} = f_3(i_4), \quad (28)$$

in other words the bridge is balanced in both directions if the functions of pairs of adjacent branches are identical.

Of course, a quite similar result can be obtained if

$$f_2(i) = f_3(i), \text{ resp. } g_2(u) = g_3(u),$$

but in this case the functions $f_4(i_4)$ and $f_1(i_4)$ must be identical.

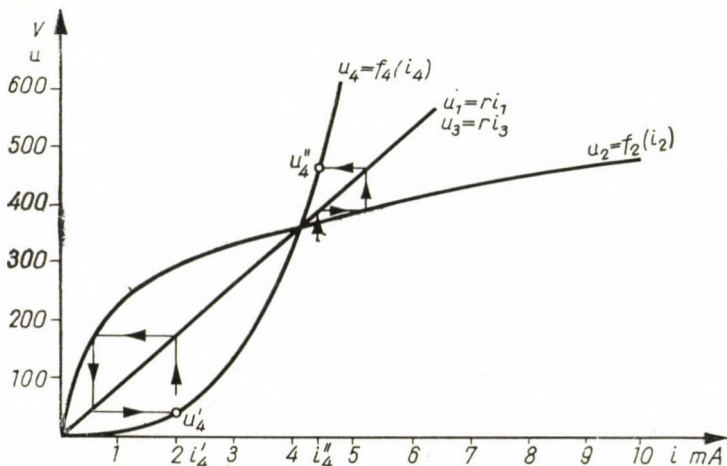


Fig. 5

It is obvious that the aforesaid postulate — the identity of at least two functions of branches — is implied in the case too when three branch-functions are identical:

$$f_1(i) = f_2(i) = f_3(i) = f(i).$$

Thus the fourth function of the branch

$$f_4(i_4) = f\{\varphi[f(i_4)]\} = f(i_4), \tag{29}$$

i. e. the fourth branch of the bridge is identical with the other three.

Equation (26) is met in the case too, the three given functions of the bridge branch are proportional functions:

$$u_1 = a_1 f(i_1), \quad i_1 = \varphi\left(\frac{u_1}{a_1}\right),$$

$$u_2 = a_2 f(i_2), \quad i_2 = \varphi\left(\frac{u_2}{a_2}\right),$$

$$u_3 = a_3 f(i_3), \quad i_3 = \varphi\left(\frac{u_3}{a_3}\right).$$

Thus

$$\begin{aligned} f_4(i_4) &= f_1 \{ \varphi_2 [f_3(i_4)] \} \\ &= a_1 f \left\{ \varphi \left[\frac{a_3 f(i_4)}{a_2} \right] \right\} \\ &= \frac{a_1 a_3}{a_2} f(i_4) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_4(i_4) &= f_3 \{ \varphi_2 [f_1(i_4)] \} \\ &= a_3 f \left\{ \varphi \left[\frac{a_1 f(i_4)}{a_2} \right] \right\} \\ &= \frac{a_1 a_3}{a_2} f(i_4) . \end{aligned}$$

Thus $f_4(i_4) = f'_4(i_4) = a_4 f(i_4)$, where $a_4 = \frac{a_1 a_3}{a_2}$, consequently the fourth bridge branch defined in this way makes the bridge balanced in both directions.

Summing up, it can be stated that the non-linear bridge is balanced in both directions if the relations describing the behaviour of the four bridge branches are proportional functions:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 f(i_1) , \\ u_2 &= a_2 f(i_2) , \\ u_3 &= a_3 f(i_3) , \\ u_4 &= a_4 f(i_4) , \end{aligned}$$

and similarly to the resistances of the proportional balanced bridge, there are the following relations between the factors of proportionality

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} , \quad \frac{a_1}{a_4} = \frac{a_2}{a_3} , \quad \text{resp. } a_1 a_3 = a_2 a_4 . \quad (30)$$

In a balanced non-linear bridge the inversion formula is met in a self-explanatory way, insofar as

$$\left(\frac{u_v}{i_f} \right)_{i_v=0} = \left(\frac{u_f}{i_v} \right)_{i_f=0} = 0 .$$

It is to be noted, however, that the inversion formula is no longer valid for such types of non-linear bridges either, which are composed of proportional functions of the kind described here above, but where $a_1 a_3 \neq a_2 a_4$.

In an unbalanced bridge $(u_v)_{i_v=0} = F_f(i_f)$ and $(u_f)_{i_f=0} = F_v(i_v)$ are functions, the formation of which can be easily determined from the elements of the bridge. These functions might have zero-points, consequently in a certain operational state the bridge too, might be balanced.*

6. The 0-point postulate

As a rule the block diagram of the controlled non-linear unit is the same as the one illustrated on Fig. 6. The variables of the main circuit which are coupled by the non-linear function are x_f and y_f , the variables of the control-

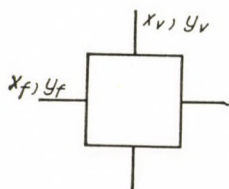


Fig. 6

ling circuit are x_v and y_v . In the case of a premagnetized choke-coil, for instance, x_f stands for the alternating voltage, y_f for the alternating current, x_v is the premagnetizing excitation, whereas y_v represents the flux resulted by it.

As it has already been pointed out, the controlling alters the characteristic curve of the controlled unit as regarded from the main circuit.

Generally we expect the characteristic curve to contain the origo, even when we change it by controlling.

In the following this requirement is going to be called the *0-point postulate*.

For a controlled system the 0-point postulate can then be regarded as satisfied if

$$y_f = 0, \text{ if } x_f = 0,$$

whatever values

$$x_v, y_v, \frac{dx_v}{dt}, \frac{dy_v}{dt} \quad (31)$$

should have at the same time.

The reversed form of this is likewise desirable, *i. e.* we require the characteristic curve of the controlling circuit to include the origo too. Were not this the

* L. GÁDOR: The Loading Capacity of Non-linear Bridges, Acta Technica, Tom. XXVIII. Fasc. 3—4. Budapest, 1960.

case the reaction of the main circuit on the controlling circuit would load the latter in the case too, when there is no controlling effect present.

The block diagram of Fig. 6 is, in fact, a four-pole and in addition a non-linear one. In the case of a linear four-pole, if the 0-point postulate is satisfied for the main circuit according to (31), this necessarily stands for the controlling circuit too as it is to be deduced from the inversion formula. With a non-linear four-pole the case is not the same. The 0-point postulate for the controlling circuit must be separately expressed:

$$y_v = 0, \text{ if } x_v = 0,$$

whatever values

$$x_f, y_f, \frac{dx_f}{dt}, \frac{dy_f}{dt} \quad (32)$$

might have at the same time.

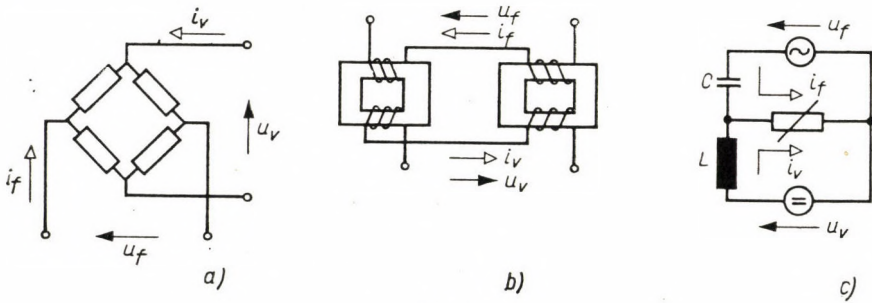


Fig. 7

In two coupled circuits the 0-point requirement can be met in several ways.

According to Fig. 7a the main circuit and the controlling circuit are coupled to each other at two equipotential points. Fig. 7b illustrates a transducer circuit in series where the fundamental harmonics of the voltages coupled opposite each other on the two cores compensate each other. Fig. 7c separates the main circuit and the controlling circuit by filtering according to current types and ensures the satisfaction of the 0-point postulate in this way.

In a balanced bridge the 0-point requirement is met. If a bridge composed of linear elements is balanced in one direction, it is necessarily balanced in the other one too. With a non-linear bridge, the 0-point postulate may be satisfied in only one of the two directions or in the other. In the preceding paragraph we have discussed the conditions at which the bridge is balanced in both directions or — what amounts to the same — the 0-point postulate is met in both directions.

7. The computation of non-linear bridges

For the determination of the operational state of the bridge, the functions of resistance of bridge branches as well as u_f and u_v are usually given; let us look for the branch currents i_1, i_2, i_3, i_4 and for the values of the resultant currents i_f, i_v . In our computation we can start from equations (9) and (10) where the values of u can be substituted by the functions of resistance.

If the functions of resistance of the bridge branches are those of (4), then

$$u_f = f_1(i_1) + f_2(i_2) = -f_3(i_3) - f_4(i_4) \quad (33)$$

$$u_v = f_2(i_2) + f_3(i_3) = -f_1(i_1) - f_4(i_4). \quad (34)$$

If, in addition, we consider the relation of branch currents as under (6), we are offered a possibility to compute branch currents as plotted against the given terminal voltages. The obtained equations include the branch currents in an implicit form. If the given functions of resistance are not too complex, the equations can be solved algebraically but if computation presents unforeseen difficulties, some sort of approximative computation or a graphical solution is deemed necessary.

Let us compute, for instance, the implicit equation containing branch current i_1 . From equation (6):

$$i_2 = i_1 + i_3 - i_4.$$

Substituting in (33)

$$u_f = f_1(i_1) + f_2(i_1 + i_3 - i_4).$$

Subtracting (33) from (34)

$$-u_f + u_v = -f_1(i_1) + f_3(i_3)$$

wherefrom

$$f_3(i_3) = -u + u_v + f_1(i_1)$$

and

$$i_3 = \varphi_3[-u_f + u_v + f_1(i_1)]$$

from (34)

$$f_4(i_4) = -u_v - f_1(i_1),$$

wherefrom

$$i_4 = \varphi_4[-u_v - f_1(i_1)]$$

substituting the values of i_3 and i_4 in expression u_f

$$u_f = f_1(i_1) + f_2\{i_1 + \varphi_3[-u_f + u_v + f_1(i_1)] + \varphi_4[u_v + f_1(i_1)]\}$$

where on the right side of the equation only i_1 is to be seen. In the same way, the implicit equations can be expressed for all the other branch currents:

$$u_f = f_1(i_1) + f_2\{i_1 + \varphi_3[-u_f + u_v + f_1(i_1)] + \varphi_4[u_v + f_1(i_1)]\} \quad (35)$$

$$u_f = f_2(i_2) + f_1\{i_2 + \varphi_4[-u_f - u_v + f_2(i_2)] + \varphi_3[-u_v + f_2(i_2)]\} \quad (36)$$

$$u_f = f_3(i_3) + f_4\{-i_3 + \varphi_1[-u_f + u_v - f_3(i_3)] + \varphi_2[u_v - f_3(i_3)]\} \quad (37)$$

$$u_f = f_4(i_4) + f_3\{-i_4 + \varphi_2[-u_f - u_v - f_4(i_4)] + \varphi_1[-u_v - f_4(i_4)]\} \quad (38)$$

$$u_v = f_1(i_1) + f_4\{-i_1 + \varphi_3[u_f - u_v - f_1(i_1)] + \varphi_2[u_f - f_1(i_1)]\} \quad (39)$$

$$u_v = f_2(i_2) + f_3\{i_2 + \varphi_4[-u_f - u_v + f_2(i_2)] + \varphi_1[-u_f + f_2(i_2)]\} \quad (40)$$

$$u_v = f_3(i_3) + f_2\{i_3 + \varphi_1[u_f - u_v + f_3(i_3)] + \varphi_4[u_f + f_3(i_3)]\} \quad (41)$$

$$u_v = f_4(i_4) + f_1\{-i_4 + \varphi_2[-u_f - u_v - f_4(i_4)] + \varphi_3[-u_f - f_4(i_4)]\}. \quad (42)$$

The first four equations solved for u_f and the second four equations solved for u_v include in turn the values of the branch currents i_1, i_2, i_3, i_4 in an implicit form. In possession of the knowledge the branch currents, bridge currents i_f and i_v can be computed on basis of (7) and (8).

At a practical computation it is sufficient to solve only one equation and to calculate only one branch current. If, supposing, i_1 had already been computed, $u_1 = f_1(i_1)$ would order branch voltage to it and in possession of the terminal voltage values, all the other branch voltages can be obtained, from them branch currents and finally resultant currents can be computed.

8. Symmetric non-linear bridge

Let us construct the bridge from four identically reacting non-linear branches symmetrically in both directions. In this case

$$\begin{aligned} u_1 &= f(i_1), & i_1 &= \varphi(u_1), \\ u_2 &= f(i_2), & i_2 &= \varphi(u_2), \\ u_3 &= f(i_3), & i_3 &= \varphi(u_3), \\ u_4 &= f(i_4), & i_4 &= \varphi(u_4). \end{aligned} \quad (43)$$

Thus equations (35—42) will take the following shape differing from the previous ones only in that aspect that all the f , respectively φ functions are identical in them.

$$u_f = f(i_1) + f\{i_1 + \varphi[-u_f + u_v + f(i_1)] + \varphi[u_v + f(i_1)]\} \quad (44)$$

$$u_f = f(i_2) + f\{i_2 + \varphi[-u_f - u_v + f(i_2)] + \varphi[-u_v + f(i_2)]\} \quad (45)$$

$$u_f = -f(i_3) + f\{-i_3 + \varphi[-u_f + u_v - f(i_3)] + \varphi[u_v - f(i_3)]\} \quad (46)$$

$$u_f = -f(i_4) + f\{-i_4 + \varphi[-u_f - u_v - f(i_4)] + \varphi[-u_v - f(i_4)]\} \quad (47)$$

$$u_v = -f(i_1) + f\{-i_1 + \varphi[u_f - u_v - f(i_1)] + \varphi[u_f - f(i_1)]\} \quad (48)$$

$$u_v = f(i_2) + f\{i_2 + \varphi[-u_f - u_v + f(i_2)] + \varphi[-u_f + f(i_2)]\} \quad (49)$$

$$u_v = f(i_2) + f\{i_3 + \varphi[u_f - u_v + f(i_3)] + \varphi[u_f + f(i_3)]\} \quad (50)$$

$$u_v = -f(i_4) + f\{-i_4 + \varphi[-u_f - u_v - f(i_4)] + \varphi[-u_f - f(i_4)]\}. \quad (51)$$

By comparing (44) and (46), respectively (48) and (50) it will be apparent that instead of i_1 everywhere i_3 is figuring. Hence

$$i_1 = -i_3, \text{ i. e. } i_1 + i_3 = 0. \quad (52)$$

Similarly, if (45) and (47), respectively (49) and (51) are compared

$$i_2 = -i_4, \text{ i. e. } i_2 + i_4 = 0. \quad (53)$$

It can be concluded from the symmetry of the bridge that inverting the sign of u_v it will be branch No. 2 in which as much current will be flowing as had been previously flowing in branch No. 1, and reciprocally, and it will be branch No. 4 in which as much current will be passing as had been passing formerly in branch No. 3 and reciprocally.

As far as the equations are concerned, this above mentioned feature is expressed in a way that equations (44) and (45) for determining i_1 and i_2 and equations (46) and (47) including the branch currents i_3 and i_4 differ from one another in the sign of u_v only.

A similar statement can be made in respect of the main circuit as well: by inverting the sign of u_f it will be the currents i_1 , i_4 and i_2 , i_3 respectively which will exchange roles. This is to be read from the corresponding equations too.

With consideration to (52) and (53), the relations (11) and (12) can be expressed

$$i_f + i_v = 2i_2 = -2i_4$$

$$i_f - i_v = 2i_1 = -2i_3$$

$$i_1 = \frac{i_f - i_v}{2} \quad (54)$$

$$i_2 = \frac{i_f + i_v}{2} \quad (55)$$

Since, however, expressions (52) and (53) can be written for voltages as well

$$f(i_1) + f(i_3) = 0 \quad (56)$$

$$f(i_2) + f(i_4) = 0 \quad (57)$$

From (13) and (14)

$$u_1 = \frac{u_f - u_v}{2} \quad (58)$$

$$u_2 = \frac{u_f + u_v}{2} \quad (59)$$

For a symmetrical bridge, branch currents and resultant currents, expressed by the input voltage, are therefore:

$$i_1 = \varphi \left(\frac{u_f - u_v}{2} \right) \quad (60)$$

$$i_2 = \varphi \left(\frac{u_f + u_v}{2} \right) \quad (61)$$

$$i_f = \varphi \left(\frac{u_f + u_v}{2} \right) + \varphi \left(\frac{u_f - u_v}{2} \right) \quad (62)$$

$$i_v = \varphi \left(\frac{u_f + u_v}{2} \right) - \varphi \left(\frac{u_f - u_v}{2} \right) \quad (63)$$

9. Symmetrical non-linear bridge as controlled resistor

Let us construct the symmetrical non-linear bridge of the non-linear elements characterized by relations (1). Thus the functions of the bridge will take the following shape:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= Ai_1^\alpha & i_1 &= Bu_1^\beta \\
 u_2 &= Ai_2^\alpha & i_2 &= Bu_2^\beta \\
 u_3 &= Ai_3^\alpha & i_3 &= Bu_3^\beta \\
 u_4 &= Ai_4^\alpha & i_4 &= Bu_4^\beta.
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

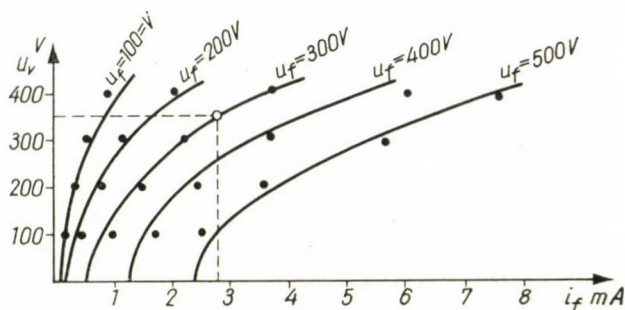


Fig. 8

The branch currents

$$i_1 = B \left(\frac{u_f + u_v}{2} \right) \tag{65}$$

$$i_2 = B \left(\frac{u_f + u_v}{2} \right)^\beta. \tag{66}$$

The resultant currents

$$i_f = B \left[\left(\frac{u_f + u_v}{2} \right)^\beta + \left(\frac{u_f - u_v}{2} \right)^\beta \right] \tag{67}$$

$$i_v = B \left[\left(\frac{u_f + u_v}{2} \right)^\beta - \left(\frac{u_f - u_v}{2} \right)^\beta \right]. \tag{68}$$

The set of curves on Fig. 8 illustrates the main current of the symmetrical non-linear bridge as plotted against the controlling voltage with the main voltage as parameter. The curve presents the computed values but the figure shows the measured points as well. For one branch resistance

$$u = 230i^{0.33},$$

respectively

$$i = 82 \cdot 10^{-9} u^3,$$

where u is to be measured in volts, whereas i in milliamperes, that is

$$A = 230, B = 82 \cdot 10^{-9}, \text{ and}$$

between A and B , respectively α and β relations (2) are prevailing.

When performing the computation, the powers of the negative numbers must also be interpreted. The exponent of the latter is a whole or a fraction determined for the applied type of material by measurement.

At a resistance where there is no inner voltage present, the direction of current and voltage is invariably identical. This is the reason why any form of function is to be interpreted in the following way:

$$|u| = f(|i|)$$

and

$$f(-i) = -f(i).$$

The remanent effects, respectively hysteresis are going to be excluded on the resistance and it is to be supposed that no rectifying action would appear either, *i. e.* the characteristic curve of voltage-current is symmetrical to the axis.

The set of curves proves that within an operating range where heating still permits a continuous running, the statical resistance of the non-linear resistor constructed as a symmetrical bridge can be increased to its four or sixfold by means of the non-linear elements of a given character and with the help of the alteration of the controlling voltage without the need of applying any mechanical influence or movable part.

The drawback of this controlling method is, however, that it offers no power amplification, since the controlling power is of the same magnitude as the controlled one. For the same reason it can be considered with low power circuits only if a resistance variable without movable parts is intended to be applied.

If $u_v = 0$, then

$$i_f = B \left[\left(\frac{u_f}{2} \right)^\beta + \left(\frac{u_f}{2} \right)^\beta \right] = 2^{1-\beta} B u_f^\beta$$

$$u_f = 2^{1-\alpha} A i_f^\alpha. \tag{69}$$

The characteristic curve of the uncontrolled bridge corresponding to eq. (69) can be easily plotted from the characteristic curves of the elements constructing the bridge (Fig. 9). The points of the characteristic curve of the bridge are to be obtained by extending the radius vector drawn on the plane $i-u$ to its double from the origo. Essentially the bridge contains two branches, each of them being built of two series of resistances. From the character-

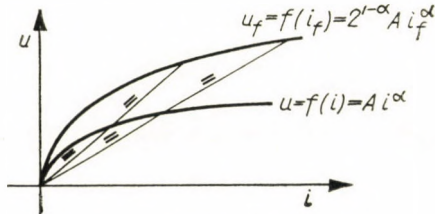


Fig. 9

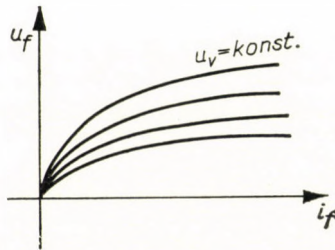


Fig. 10

istic curve of one bridge branch the bridge branch composed of two series resistances is to be obtained in such a way that we perform a doubling in the direction of the ordinate. In order to get the resultant characteristic curve of the whole bridge these two parallel branches have to be doubled again in the direction of the abscissa.

Fig. 10 illustrates the shift of the characteristic curve of the main circuit at different controlling voltages.

The extent of control is characterized by the way the static and dynamic resistance of the main circuit changes as plotted against the controlling voltage. (Compare: the static transconductance of vacuum tubes.)

From (67)

$$\frac{i_f}{u_v} = \frac{B}{2^\beta} [(u_f + u_v)^{\beta-1} - (u_f - u_v)^{\beta-1}]. \tag{70}$$

If $u_v = 0$, then $\frac{\partial i_f}{\partial u_v} = 0$, the curves of Fig. 8 start parallelly with the ordinate; smaller controlling voltages influence the main current to a slight

extent only. The extent of control is increasing if the control voltage is increasing. If we want to achieve an effect with smaller controlling signals, we have to apply bias voltage in the control-circuit.

In case a bias voltage is applied, the control grows sensitive to direction: the controlling signal having the same direction as the bias voltage will increase main current, whereas a controlling signal of an opposite direction would decrease it.

Within a comparatively small range of the operating point the effect can be considered linear; the extent of control is characterized by the value of

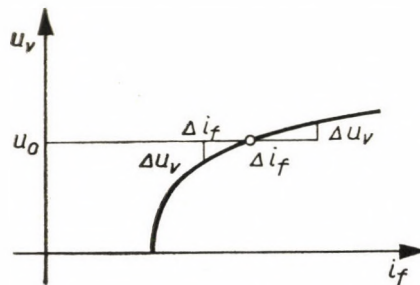


Fig. 11

$\left(\frac{\partial i_f}{\partial u_v}\right)_{u_v=u_0}$ where u_0 stands for the value of the bias voltage applied in the controlling circuit.

Let us compute now the degree of control on basis of the concrete example described above.

$$\frac{\partial i_f}{\partial u_v} = \frac{82 \cdot 10^{-9} \cdot 3}{8} [(u_f + u_v)^2 - (u_f - u_v)^2] = 1,23 \cdot 10^{-7} u_f u_v.$$

Thus the measure of control is proportional to the controlling voltage. If according to Fig. 11, u_0 bias voltage is going to be applied, the controlling voltage Δu_v will result in a proportional Δi_f change in the main current, the direction of the change being dependent on the sign of Δu_v .

In our example

$$\Delta i_f = 1,23 \cdot 10^{-7} u_f u_0 \Delta u_v.$$

Let us choose the operating point on curve $u_f = 300$ V at the point $u_0 = 350$ V:
Thus

$$\Delta i_f = 123 \cdot 10^{-9} \cdot 300 \cdot 350 \cdot \Delta u_v = 0,013 \Delta u_v.$$

Since the value of the main current in the operating point amounts to 2,8 mA, a 10% fluctuation of the controlling voltage results in a 16% change in the value of the main current.

10. Other balanced bridge types

In Chapter 5 we have discussed the conditions for balancing the bridge. Let us briefly survey the different types of a non-linear bridge balanced in both directions.

Fig. 12a illustrates a completely symmetrical bridge. The bridge shown by Fig. 12b is composed of branches reacting like functions of identical types. The characteristic curves of the branches differ but in scale: between the proportionality factors determining the scale a similar relationship can be established that exists between the resistances of the balanced linear bridge. The two opposite bridge branches of Fig. 12c are identical; in accordance with the

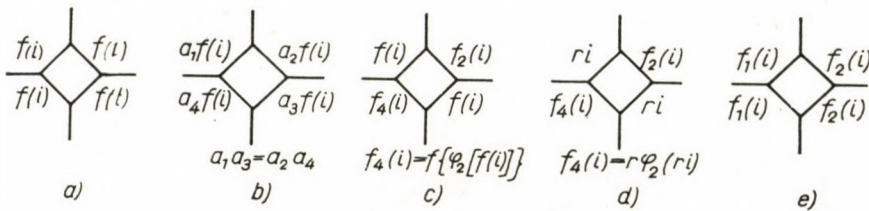


Fig. 12

equation $f_4(i_4) = f\{\varphi_2[f(i_4)]\}$ the non-identical branches are reciprocals of one another in respect to the identical branches. Fig. 12d illustrates a variation of the latter type when the identical bridge branches are ohmic resistances. Finally Fig. 12e shows a non-linear balanced bridge type where the two adjacent branches are identical.

The symmetrical bridge type has been discussed in details in Chapter 8. Its practical application has been demonstrated in Chapter 9.

The points discussed there should be completed by the statement that as a matter of course, the symmetrical bridge presents symmetry in every respect, consequently the extent of control is independent of the direction of the controlling voltage and the behaviour of the bridge undergoes no change provided the main terminals and controlling terminals are exchanged.

In a symmetric bridge the controlling current diminishes the resistance of the main circuit and increases the main current — supposing u_f is constant — provided the characteristic curve of the resistances of the bridge branches — as seen from the i axis — is concave. (Fig. 13a and 13b, Curve No. 1.) In a bridge constructed of linear resistances, there is, of course, no control. (Curve No. 2.) If the characteristic curve of the bridge branch is convex — as regarded from the i axis — the resistance of the main circuit increases or in case the terminal voltage is constant, the current is diminishing. (Curve No. 3.)

In the bridge constructed of resistances of identical types — as seen in Fig. 12b — symmetry gets upset. The degree of control is no longer independent of the sign of the controlling voltage. Nor is the role of the terminals

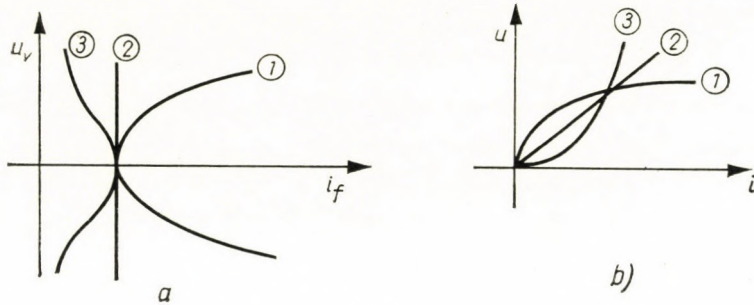


Fig. 13

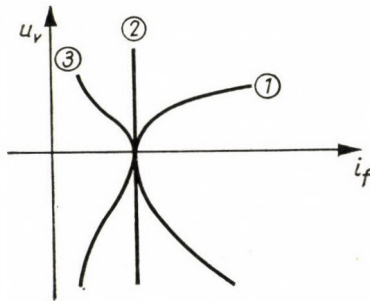


Fig. 14

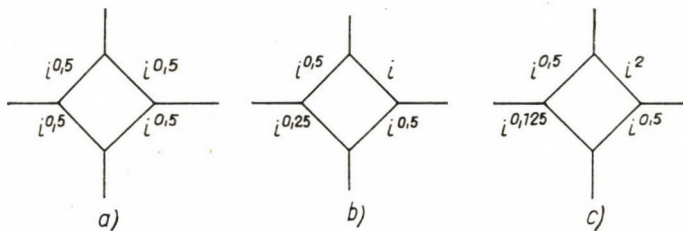


Fig. 15

symmetric any longer: if with identical u_f and u_v the terminals are exchanged, i_f and i_v will not remain unchanged. In its character, the trend of the resistance of the main circuit depends on the characteristic curve of the branch in the same way as before. This is to be seen from Fig. 14 too.

The type illustrated by Fig. 12c has been investigated in two alternatives, using the branch resistances shown by Fig. 15. For the sake of comparison,

we have started from the fully symmetrical bridge again. Fig. 16 presents the no-load characteristic curves of the three different non-linear bridges, whereas Fig. 17 illustrates the three control curves for the case $u_f = \text{constant} = 5 \text{ V}$. As it is to be recognized from the figure, the bridge's behaviour is depending on the direction of the controlling current. In the case of a positive u_v direction the bridge of Fig. 15b and 15c is practically independent of the control, thus the controlling current does not affect the resistance of

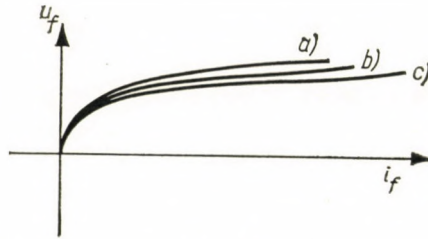


Fig. 16

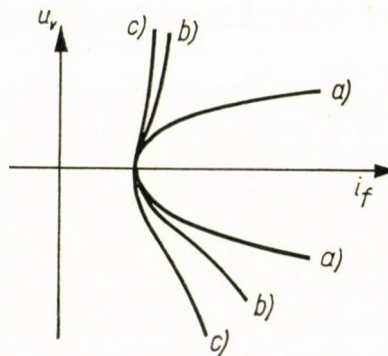


Fig. 17

direction f , while u_v of the negative direction exerts a considerable controlling influence. The behaviour of a non-linear bridge of this type is therefore intensively asymmetrical as far as the direction of the controlling effect is concerned.

The exchange of terminals, however, does not affect the symmetry of the bridge; if directions f and v are changed, the behaviour of the bridge remains unchanged.

Fig. 12d reflects a special case of the latter. It is characterized by the fact that the identical bridge branches 1 and 3 are common ohmic resistances.

In whatever way we are going to choose the other two branches — sticking, of course, to the condition of balancing $f_4(i_4) = r \varphi_2(r i_4)$ — the bridge will behave as a common balanced linear one. Consequently its no-load character-

istic curve is a straight line passing the origo, and the transverse current has no controlling effect on it. The bridge is symmetric for directions f and v too.

The case is remarkable since it illustrates the way by which a linear four-pole could be constructed of non-linear elements. The behaviour of the four-pole presents no clue as to the fact that there are non-linear elements involved.

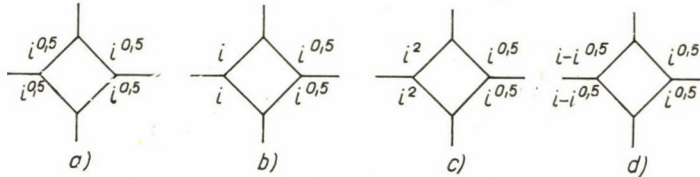


Fig. 18

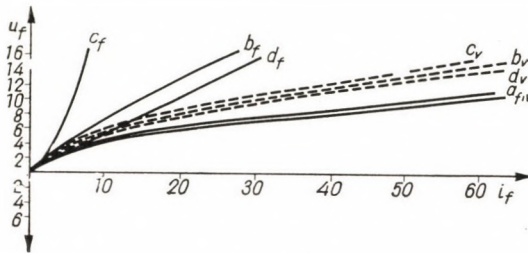


Fig. 19

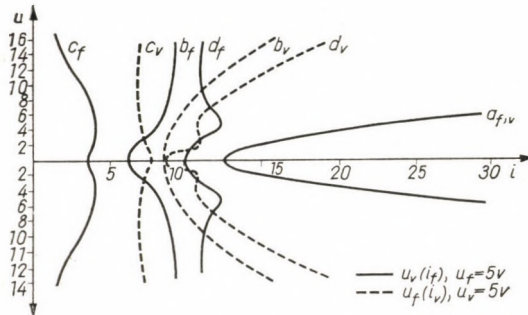


Fig. 20

Fig. 12e shows a bridge type in which two adjacent branches are of the same type. This, again, has been investigated in three alternatives, comparing it with a symmetrical bridge again, in the schemes shown by Fig. 18.

From the construction of the bridge it is apparent that its behaviour will be independent of the signs of u_f , respectively of u_v and that terminals f and v cannot be changed.

Fig. 19 presents the no-load characteristics for both directions, in every scheme. Fig. 20 illustrates the control curves.

The bridge of Fig. 18c shows a characteristic curve intensively non-linear in the direction v , but in spite of this it is controllable to a comparatively slight extent only.

Bridge of Fig. 18d has been constructed in such a way that in the direction f it should react as an ohmic resistance. In spite of this it is controllable.

If $u_v \neq 0$, the characteristic curve of direction f stops to be proportional. Thus an opportunity is offered for transforming an ohmic resistance into a non-linear one by means of control.

Summing up, we can state that with balanced non-linear bridges of different construction quite different cases of control can be realised: resistance can be increased, resistance can be decreased, we can even create a condition at which the resistance decreases in one range and increases within the other (Fig. 20, curve d_f); we can establish an asymmetrical control which is sensitive to direction as far as the controlling current is concerned; we can transform a linear characteristic curve into a non-linear one by means of control and are capable of reversing the procedure too, if so required. All of them are theoretical possibilities only: practically they cannot be realised unless the elements of the required properties are available.

Most effective control is obtained with an entirely symmetrical non-linear bridge. This scheme is, by the way, the simplest one which can be put in practice. In this respect we have measuring results too and they agree with computation well.

11. Characteristic curve and controllability

The controllability of the non-linear resistor is due to its non-linear characteristic curve. The relation of the course of the characteristic curve and the method and extent of control can be most effectively studied on a symmetrical bridge. Here we have to deal with one characteristic curve only, consequently the relation is to be perceived directly. In other types of bridges, the different characteristic curves of the bridge branches either strengthen their effects in a way not very easy to survey or, on the contrary, they act against one another and result in a resultant character without controllability as if they were linear bridges.

According to relation (62) for a symmetrical non-linear bridge

$$i_f = \varphi \left(\frac{u_f + u_v}{2} \right) + \varphi \left(\frac{u_f - u_v}{2} \right).$$

The degree of controllability is the differential quotient of i_f with respect to u_v .

In a linear bridge $\frac{\partial i_f}{\partial u_v} = 0$; the main current is independent of the controlling

voltage. For a symmetrical non-linear bridge:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i_f}{\partial u_v} &= \frac{1}{2} \varphi' \left(\frac{u_f + u_v}{2} \right) - \frac{1}{2} \varphi' \left(\frac{u_f - u_v}{2} \right) = \\ &= \varphi'(u_f + u_v) - \varphi'(u_f - u_v). \end{aligned}$$

The dependence of the main current on the controlling voltage is therefore the difference of the differential quotients formed at the function points being at an u_v distance upward and downward from the operating point (Fig. 21).

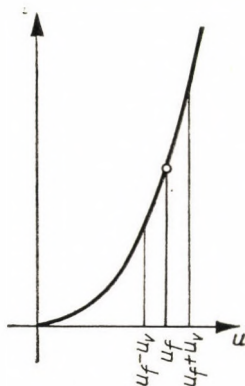


Fig. 21

Since it is about the differentiating of a function, in the forthcoming figures the ordinate will be the i axis and the abscissa will be the u axis — in compliance with the traditional aspect.

The result already mentioned in Chapter 9, namely that the controlling curves $i_f(u_v)$ start perpendicularly to the abscissa: $\frac{\partial i_f}{\partial u_v} = 0$ at the $u_v = 0$ point, becomes apparent from the above relations as well.

The difference of the first differential quotients can be expressed as the definite integral of the second differential quotient, *i. e.*

$$\frac{\partial i_f}{\partial u_v} = \int_{u_f - u_v}^{u_f + u_v} \varphi''(u) du.$$

If on one section of the characteristic curve the second differential quotient is zero everywhere, it means that on that section there is no controllability. It follows from this that it is not only the bridge constructed of linear

resistances in the strictest meaning of the word which is unsuited for control, but on the straight sections of their characteristic curves non-linear elements are unsuited too. While the best part of non-linear problems can be properly discussed and solved by linearization, the condition for the controllability of non-linear resistances lies in the existence of curvature on the characteristic curve, and in the second differential quotient's being different from zero.

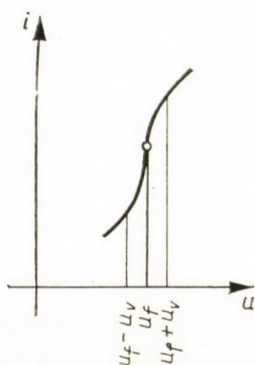


Fig. 22

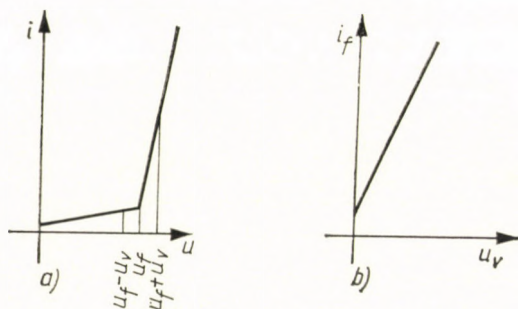


Fig. 23

As a rule every characteristic curve can be regarded as straight within a suitably narrow range. In our case it is just this close environment of the operating point, the environment of $u_v = 0$, where — as we have already pointed out — $\frac{\partial i_f}{\partial u_v} = 0$, and where there is in fact no controllability. The controlling curve starting perpendicularly to the abscissa illustrates that section of the curve which is linear within a narrow range.

The above integral value disappears not only at the straight section of the characteristic curve but in the neighbourhood of the point of inflexion too, provided the course of the curve is symmetrical on either side of it (Fig. 22).

There is controllability present in the case too, if the characteristic curve is composed of straight sections but has a bend which is to be found within the operating range. If the operating point coincides with the bend of the characteristic (Fig. 23a), then $\frac{\partial i_f}{\partial u_v} = \text{constant}$ (Fig. 23b), the directional tangent of the control curve is equal to the difference between the directional tangents of the two straight sections.

If the operating point is not identical with the bend of the characteristic, e.g. it is below same, there will appear no controlling effect until $u_f + u_v$ reaches the bend; from there on the control curve travels with a $\frac{\partial i_f}{\partial u_v} = \text{con-}$

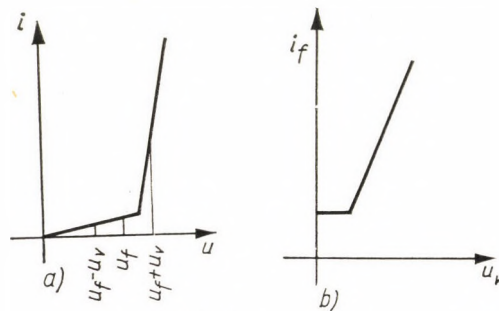


Fig. 24

stant increase. The directional tangent of the control curve will be repeatedly equal to the difference between the directional tangents of the two straight sections.

12. Conclusion

The operational characteristics of non-linear circuit elements are depending on the given operational state. This circumstance is utilized for the controlling of non-linear elements in such a way that the operational state is changed by means of an external control effect, which is completely independent of the main effect. In this way is saturated, for instance, the iron core of a magnetic amplifier or of a premagnetized choke coil. For the saturation external excitation is applied.

In the present report we have studied the behaviour of bridges constructed of non-linear resistors. In a bridge circuit we are capable of creating an additional current load in the non-linear elements of the branches and are thus in a position to change the operational state of the elements. A controlled non-linear bridge is, in fact, a resistor, which can be altered without a movable part, merely by electric influence.

In order to ensure unambiguity in the course of the discussion, some of the notions had to be precisely defined. Non-linear resistance is characterized by the fact that its characteristic curve has an actual curvature or a bend. We have introduced the denotations of main effect and control effect.

Most of the statements are generally valid. Concrete computations and measurements have been performed in the Research Institute of the Electric Industry with SiC base polycrystalline materials developed for lightning arresters and other non-linear elements. The current-voltage relation of these can be expressed with good approximation within the range of loading capacity suited for continuous running, by the formulae $u = Ai^\alpha$ and $i = Bu^\beta$.

The task of the control circuit is to control the main circuit and in the meantime the main circuit reacts to the control circuit. As to the investigated circuits, we have postulated that should any of the circuits be idle running, there must not be any interaction present. In other words, there should appear no voltage from the main circuit in the open control circuit and the reverse. This postulate has been called the 0-point postulate, since in the case this is met, the controlling circuit would alter the characteristic curve of the main circuit without shifting its 0-point.

In a non-linear bridge the postulate of the 0-point is then satisfied if the bridge is balanced in both directions in any operational state. The different balanced types of the bridge can be plotted from the conditions of balancing. From the point of view of control they show different behaviour; moreover we can construct a balanced bridge of non-linear elements which is not controllable at all, on the contrary, it behaves like a linear bridge.

The most favourable control can be achieved with an entirely symmetrical non-linear bridge. The extent of control is determined by the curvature of the characteristic curve: a sharp curvature or a sharp bend with a definite change of direction offers good controllability. This proves that the problem of controlling non-linear resistances can not be tackled with linearization.

What has been said here in connection with the control of non-linear bridges is far from exploring completely this topic. Investigations are being carried out for determining the method by which non-linear resistances could be controlled by means of a transverse control. Another task, among others, is to investigate circuits of alternating current, involving also the problem of time delay in the control and the frequency limit of a. c. control.

An alternating current control not only renders a possibility for changing the resistance of the circuit but in addition it permits modulation, too.

Last but not least, mention should be made of the schemes by which the controlling of the resistances without a movable part might find practical application and could be fruitfully utilized. In this connection voltage dividers, regulating potentiometers, phase shifter bridges, remote-controlled RC-circuits, etc. have to be taken into consideration.

SUMMARY

The operational characteristics of non-linear circuit elements depend on the prevailing working state. The operational state can be altered by an external influence, which is independent from the main effect. Thus an opportunity is given to control non-linear elements. The resistance of a bridge composed of non-linear resistors can be controlled by transversal currents as a result of which a resistance is obtained variable by purely electric interference without the need of applying movable parts. The extent of controllability depends on the curvature of the characteristic curve of the non-linear elements, hence the aforesaid phenomenon cannot be dealt with on basis of the linearization method.

STEUERUNG VON NICHTLINEAREN BRÜCKEN

L. GÁDOR

ZUSAMMENFASSUNG

Die Betriebskennziffern der nichtlinearen Stromkreiselemente sind von dem jeweils vorhandenen Betriebszustand abhängig. Der Betriebszustand kann durch eine äußere von der Hauptinanspruchnahme unabhängige Einwirkung verändert werden, wodurch eine Möglichkeit zur Steuerung der nichtlinearen Elemente gewährleistet wird. Der Widerstand einer aus nichtlinearen Resistoren zusammengesetzten Brücke kann durch Kreuzstrom gesteuert werden, was einen einfach durch elektrische Einwirkung veränderbaren Widerstand ohne bewegliche Bestandteile zur Folge hat. Das Maß der Steuerfähigkeit hängt von der Krümmung der Charakteristik der nichtlinearen Elemente ab, so daß die Erscheinung mit der Methode der Linearisierung nicht behandelt werden kann.

PONTS NON-LINÉAIRES CONTRÔLÉS

L. GÁDOR

RÉSUMÉ

Les caractéristiques de fonctionnement des éléments non-linéaires des circuits sont fonctions de l'état instantané. L'état de fonctionnement peut être modifié aussi par une intervention indépendante de la charge principale, ce qui permet de contrôler les éléments non-linéaires. Un pont composé de résistances non-linéaires peut être contrôlé par un courant transversal, dont le résultat est une résistance sans pièces mobiles, variable seulement à l'aide d'une intervention électrique. L'étendue du contrôle possible dépend de la courbure de la caractéristique des éléments non-linéaires, c'est pourquoi le phénomène ne peut pas être traité par la méthode de la linéarisation.

УПРАВЛЯЕМЫЕ НЕЛИНЕАРНЫЕ МОСТЫ

Л. ГАДОР

РЕЗЮМЕ

Функциями рабочих параметров элементов нелинейных цепей являются рабочие режимы в каждый данный момент. Рабочий режим независимо от главной нагрузки может быть изменен также при внешнем вмешательстве, что дает возможность управлять нелинейными элементами. Сопротивлением моста, собранного из нелинейных резисторов, можно управлять поперечным по направлению током, в результате чего получается сопротивление, которое можно изменять просто электрическим вмешательством без движущейся детали. Степень управляемости зависит от кривизны характеристики нелинейных элементов, вследствие этого явление нельзя рассматривать методом линеаризации.

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛАСТИЧНОЙ ВОЛНЫ*

Д. БЭДА

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ТЯЖЕЛОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ, МИШКОЛЬЦ,
(ВЕНГРИЯ), КАФЕДРА МЕХАНИКИ

(Поступило 15-го июня 1960 г.)

В работе рассматривается такого вида динамическая нагрузка работающих на чистое растяжение (сжатие) призматических стержней, при котором стержень полностью находится в пластичном состоянии.

По этому вопросу в технической литературе дается следующая картина.

Нагрузка, приложенная к призматическому стержню, всюду, во всем стержне изменяет первоначальное напряженное состояние и деформацию. Однако, это изменение наступает немедленно, т. е. в момент приложения нагрузки, только в точке приложения этой нагрузки. В некоторой другой точке стержня (соответственно в непосредственной близости к этой точке) изменение наблюдается тем позднее, чем дальше находится исследуемое место от точки приложения нагрузки. Следовательно, действие нагрузки распространяется в стержне как волна с конечной скоростью, т. е. в качестве т. н. волны нагрузки. Волна нагрузки может создавать в стержне упругое, упруго-пластичное или пластичное состояние.

Вопросы упругой волны уже давно уточнены теорией упругости [4, 6].

Теорию упруго-пластичной волны независимо друг от друга разработали *Рахматулин* (1945), *Тейлор* (1946) и *Карман* (1950) [4]. Эта теория описывает динамическое сжатие (растяжение) призматического стержня при нижеследующих условиях [3]:

а) сечения, перпендикулярные к оси стержня, после деформации остаются плоскими;

б) деформация имеет небольшую величину, и таким образом изменениями размеров стержня можно пренебречь;

в) перемещение в направлении, перпендикулярном к оси стержня, не учитывается;

г) влиянием скорости деформации на связь между аксиальным напряжением и удлинением можно пренебречь.

* Выдержка из диссертации автора на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Условия а), б) и в) приняты и в случае испытаний другого вида. Условие г) означает, что между напряжением (σ) и деформацией (ϵ) при динамической нагрузке также имеет место зависимость $\sigma = \sigma(\epsilon)$, установленная

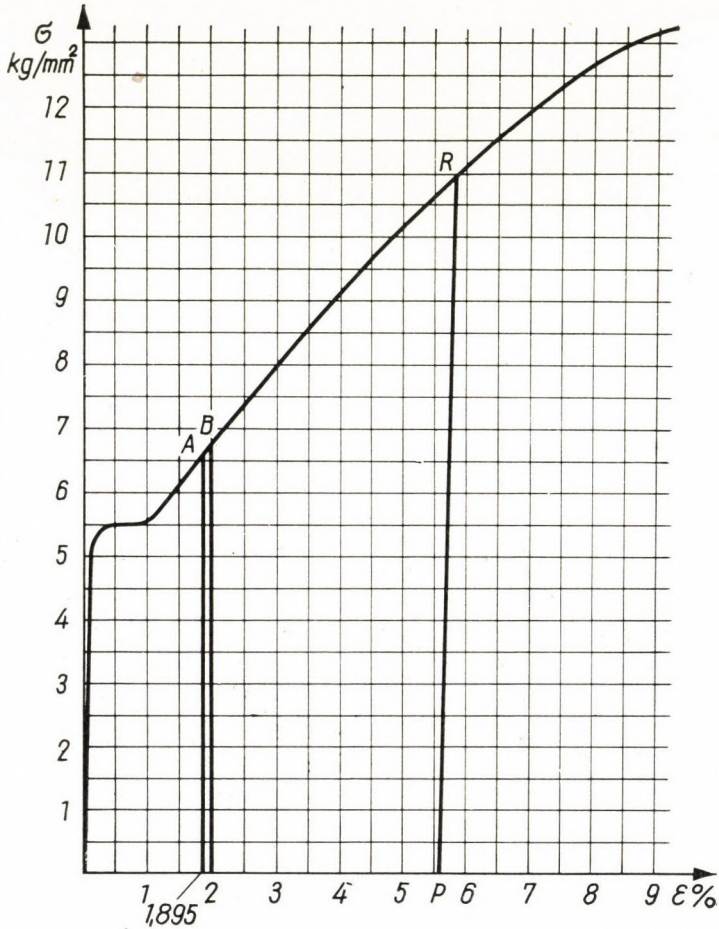


Рис. 1

путем статического испытания на растяжение. Кривая, отображающая такую связь $\sigma = \sigma(\epsilon)$, изображена, например, на рис. 1.

Если при статическом испытании на растяжение нагрузка увеличивается только до точки R кривой $\sigma = \sigma(\epsilon)$ (рис. 1), а затем стержень разгружается, тогда диаграмма будет продолжаться по прямой RP , которая параллельна прямой, изображающей первоначальный упругий участок. Следовательно, разность между максимальным напряжением σ_R , достигнутым при

нагрузке (рис. 1), и напряжением σ , возникающим в процессе разгрузки, линейно связана с разностью соответствующих удлинений ε_R и ε , т. е.:

$$\sigma_R - \sigma = E(\varepsilon_R - \varepsilon),$$

где E — модуль упругости материала.

Подведя итог, можно сказать, что при нагрузке (когда $\frac{\partial|\sigma|}{\partial t} \geq 0$ и в случае условия г) $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ условия являются существенно иными, чем при разгрузке, когда $\frac{\partial|\sigma|}{\partial t} < 0$ и $\sigma_R - \sigma = E(\varepsilon_R - \varepsilon)$, т. е. действителен закон Гука.

Работа занимается лишь явлениями, происходящими при нагрузке, т. е. занимается лишь волной нагрузки.

Исходя из сказанного, система уравнений с частными производными, описывающая динамическое растяжение (сжатие) призматического стержня, имеет вид:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2)$$

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad (3)$$

где v — скорость некоторого сечения стержня. Ось x координат параллельна оси стержня и ее исходная точка совпадает с тем концом стержня, к которому прикладывается нагрузка в момент времени $t = 0$

К системе уравнений (1) — (3) относятся еще граничные и начальные условия, выражающие условия опыта.

Детальное изложение теории упруго-пластичной волны, а также методы опытных исследований и их результаты кроме перечисленных выше работ приведены в следующих трудах: [1, 2, 8, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18].

Условие г), применяемое в теории упругопластической волны, не совпадает с практикой. Поэтому вместо уравнения (3) обычно используется зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, исходящая из данных результатов опытов. $\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ является т. н. скоростью деформации. Введение и использование закона материи $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ см. в трудах [2, 8, 12, 13, 15, 18].

1) Определение задачи

В перечисленных трудах видно, что для вычисления упруго-пластичной волны в обязательном порядке необходимо исходить из закона, правильно выражающего механическое поведение материала. Выполненные расчеты

используют законы материи, полученные на основе различных наблюдений и экспериментов, а в большинстве случаев кривую $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, полученную при опытах статического растяжения (сжатия). В качестве закона материи используется диаграмма $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, рассчитанная на основе распределения остаточного удлинения, или же полученная из измерений на двух концах короткого образца. В последнем случае на основе наблюдений скорость деформации необходимо ввести в качестве новой переменной. Однако, эти способы определения закона материи не удовлетворяют во всех отношениях волновой природе явлений.

При определении закона материи на основе остаточной деформации необходимо исходить из предположения, что в случае, когда скорость деформации является постоянной, тогда кривая $\sigma \sim \varepsilon$ является схожей со статической кривой $\sigma \sim \varepsilon$ и скорость распространения сильной волны [3, 9] может быть вычислена также с помощью формулы $\left| \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|$. Опытным ни одно из этих предположений не доказано. О недочете метода говорили уже Карман, Давс, Кларк и Мелверн [8]. При измерениях с помощью короткого образца, выбранные переменные, собственно говоря, представляют из себя интегральные средние, действительные для всего образца, а не значения, возникающие в некотором данном сечении (или точке) и соответственно в его окружении. Не обеспечено также постоянство скорости деформации [8].

При наблюдениях и в особенности при выводе закона материи выбор переменных ($\sigma, \varepsilon, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}$) по существу является самопроизвольным. Контроль же функциональной связи между переменными, т. е. контроль закона материи производится таким образом не сопоставлением удовлетворяющего опытным условиям решения системы уравнений (1), (2), дополненной законом материи, и измеренного решения, а сравнением распределения расчетных и измеренных остаточных деформаций. Следовательно, необходимо исходить из того, что закон материи является неизвестным и правильное наблюдение явления возможно лишь измерением одного решения, а именно, удовлетворяющего существующим (начальным, граничным) условиям, системы уравнений с частными производными, образованной из уравнений (1), (2) и недостающего закона материи. Исходя из измеренного решения, необходимо исследовать неизвестный закон материи. Явление имеет волновую природу, таким образом рассматриваемая система уравнений с частными производными относится к гиперболическому типу. Мы видели, что в стержне может образоваться сильная или слабая волна [3, 9]. Кривая, соответствующая на плоскости x, t фронту слабой волны, может быть легко определена, однако, в случае сильной волны это наталкивается на большие затруднения. Мы видели также, что кривая $x(t)$ дает скорость распространения $\frac{dx}{dt}$. Следовательно, скорость распространения является производной кривой, соответ-

ствующей в плоскости x, t фронту волны. Кривая же связана с законом материи. Вычисление легче производить в том случае, когда в стержне возникают слабые волны и когда стержень можно принять в качестве полубесконечного стержня.

Следовательно, задача, заключается в следующем:

А) Разработать такой опыт, при котором

α в стержне возникает слабая волна;

β имеется возможность измерить фронт слабой волны;

γ возможно измерить скорость как функцию x и t (так как на основе уравнений (1), (2) исходя из функции $v(t, x)$ скорости, удлинение и напряжение определяются относительно просто).

Б) На основе измерений исследовать возможности и способ вывода закона материи.

2) Экспериментальный метод исследования пластичной волны

Проведенные до сих пор исследования показали, что упругая волна распространяется с большей скоростью, чем пластичная. На статической диаграмме напряжения большинства материалов кроме этого над пределом упругости можно наблюдать одну или несколько точек перелома. Исходя из требования сокращения затруднений при опытах и вычислениях, было желательно, чтобы исследование распространилось только на пластичную волну. Возникновение пластичной волны можно было обеспечить лишь при условии предварительного напряжения образца. Предварительное напряжение было такого размера, что на образце всюду образовались напряжение и удлинение, соответствующие точкам диаграммы напряжений, лежащим за упомянутыми выше точками перелома (см. А) рис. 1).

Данные лентообразного образца:

материал 99,86% Си, остальное примеси,

плотность $\rho = 9,095\% \cdot 10^{-3} \text{ г сек}^2/\text{см}^4$

толщина: 0,1 мм, ширина 10 мм

мерная длина: 950 мм

Статическая диаграмма напряжения материала ленты показана на рис. 1. При испытании на разрыв скорость растяжения была постоянной и составляла 0,055 м/сек.

При испытании один конец ленты (рис. 2) посредством приспособления В соединяется с неподвижной станиной С, а другой конец с помощью диска D нагружается броневым магнитом Е. Целью опыта является экспериментальное определение функции $v = v(t, x)$. В интересах сказанного во время действия нагрузки необходимо замерять скорость нагруженного конца и других сечений ленты (на расстоянии 10, 30 и 50 см от конца).

Изображение скорости отдельных сечений как функции времени (отдельно каждую, но в один и тот же момент времени) получено с помощью катодного осциллоскопа и зафиксировано на фотоснимке.

а) *Нагрузка*

Подвижной частью броневого магнита *E* является диск *D*, а неподвижной — цилиндр *F* (рис. 2), диаметр которого равен диаметру диска.

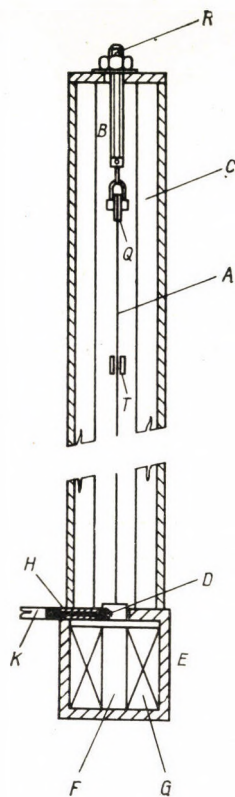


Рис. 2

Диск перемещается под воздействием магнитного поля, создаваемого обмоткой возбуждения *G*. В начале опыта движение диска тормозится цапфой *H*, входящей одним концом в отверстие *I* (рис. 3) в боковой поверхности диска, далее алюминиевой шайбой, прижатой винтом *J* и другим, размещающимся симметрично (рис. 4).

Приложение нагрузки осуществляется таким образом, что на обмотку возбуждения *G* подается напряжение постоянного тока, после чего пусковой механизм *K* (рис. 2) вытягивает цапфу *H* из отверстия диска. Освободив-

шийся таким образом диск совершает ускоряющееся движение до соударения с неподвижной частью *F*, и при этом производит приложение нагрузки, вызывающей динамическое растяжение ленты.

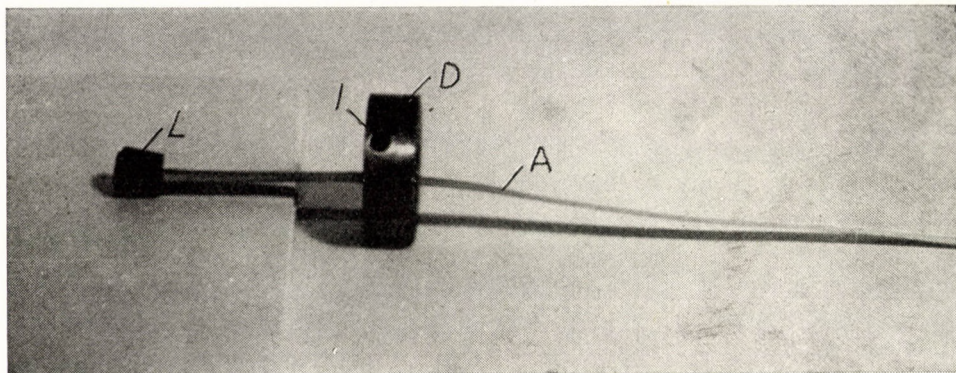


Рис. 3

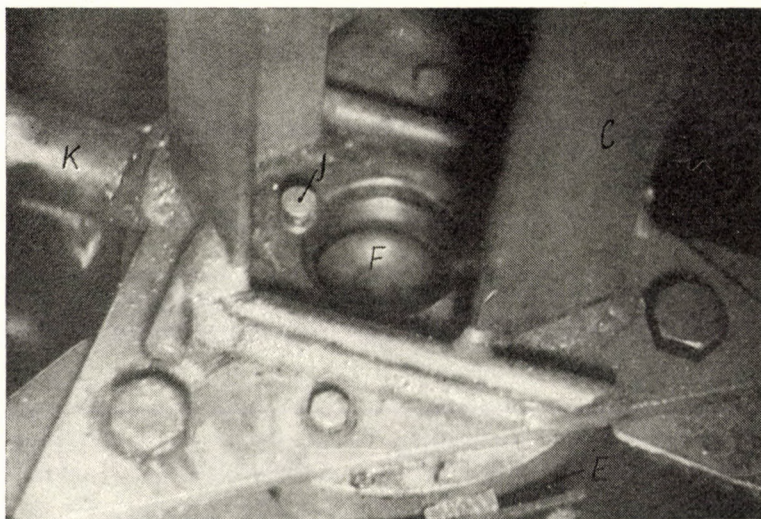


Рис. 4

Этот способ приложения нагрузки, как показывает опыт, возбуждает в ленте слабую волну.

Данные броневое магнита:

диаметр диска	42	мм
его высота	15	мм
вес диска	153,2	г
число витков обмотки возбуждения	250	

сопротивление обмотки возбуждения	0,374	ом
напряжение постоянного тока; подаваемое на обмотку возбуждения	150	в
в исходном положении магнитное тяговое усилие, действующее на диск	8,14	кГ
воздушный зазор в исходном положении (расстояние между подвижной и неподвижной частями)	5,72	мм

б) Измерение скорости

Измерение скорости производится электрически, используя закон Неймана. Согласно закону в движущемся проводнике L возбуждается напряжение

$$U = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l},$$

где \vec{v} — скорость дугового элемента проводника, м/сек;

\vec{B} — магнитная индукция, $\frac{вс}{m^2}$;

$d\vec{l}$ — направленный (векторный) дуговой элемент проводника, м.

Если в однородном магнитном поле перпендикулярно силовым линиям движется прямой проводник длиной l с постоянной скоростью v так, что вектор скорости перпендикулярен к проводнику, то в этом случае имеем:

$$U = Blv.$$

Следовательно, принципиально кусок проводника, например, длиной 10 мм, размещенный перпендикулярно к оси ленты и укрепленный на ленте (т. е. размещающийся в плоскости одного из сечений ленты), также пригоден для определения скорости некоторого сечения стержня.

Конечно, необходимо позаботиться, чтобы кусок провода, служащий для отвода, не мешал бы измерению. Использование одного единственного куска провода дает удовлетворительное решение только в том случае, когда скорость и величина магнитной индукции являются столь высокими, что можно надежно мерить индуцированное напряжение. Индуцированное напряжение можно увеличить также увеличением длины проводника, несмотря на это вместо увеличения длины проводника за пределами ширины ленты выгоднее использовать многовитковую обмотку сечением в виде прямоугольника (рис. 5) Более короткая сторона прямоугольника является меркой. Эта часть приклеивается перпендикулярно к оси ленты в точке измерения. Отвод производится с противоположной стороны. Эта сторона во время измерения не должна входить даже в поле магнитного рассеяния. Правильным выбором размера длинной стороны этого легко добиться.

Однородное магнитное поле создается постоянным магнитом. Этот укрепленный на алюминиевом стержне измерительный магнит T (рис. 6)

укреплен на стержне U , жестко соединенном со станиной C . Этот способ крепления позволяет правильно отрегулировать магнит.

Индукцированное в измерительной обмотке напряжение попадает на четырехканальный предварительный усилитель V . Отсюда усиленные сиг-

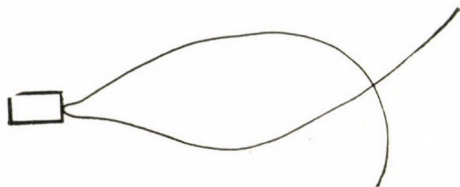


Рис. 5

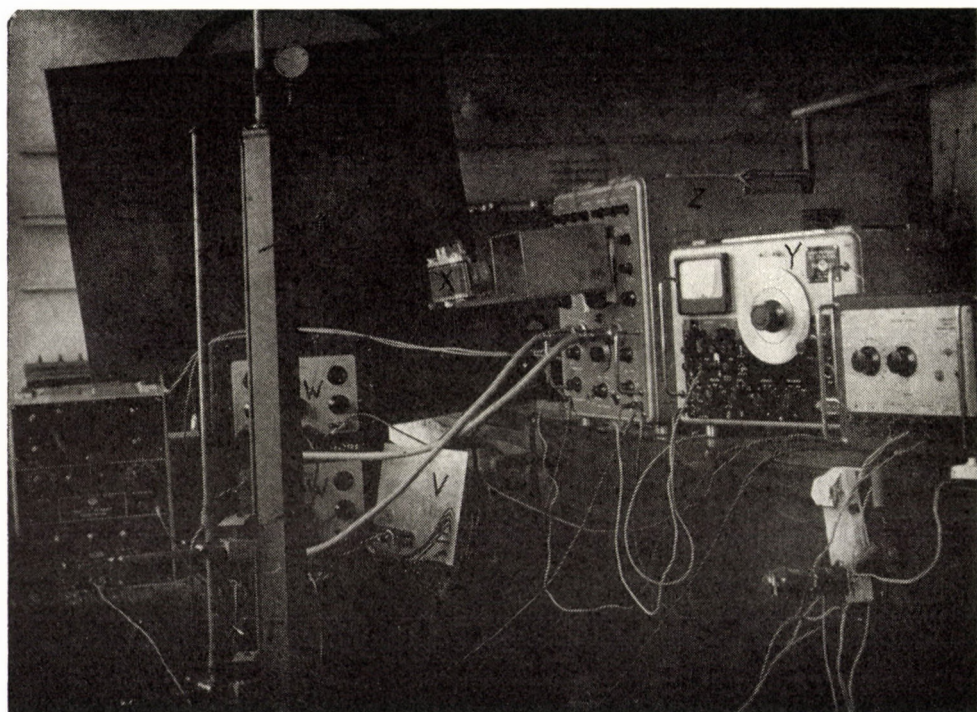


Рис. 6

налы через два электронных выключателя W поступают на двухлучевой катодный осциллоскоп Z (рис. 6). В катодном осциллокопе после дополнительного усиления сигналы поступают на вертикальную пару отклоняющих пластинок катодной трубки. Генератор, подключенный к горизонтальным отклоняющим пластинкам катодной трубки, по сигналу пускового приспособления, принуждает катодные лучи один раз совместно пробежать по экрану с требуемой скоростью.

Электронные выключатели позволяют произвести одновременное исследование четырех явлений на двухлучевом осциллокопе, пригодном для одновременного исследования двух явлений. Кривая, изображающая явление, в таком случае будет не сплошной, а появится в виде пунктира.

Кривая скорость — время отдельных сечений фиксируется с помощью фотоаппарата X, смонтированного на осциллокопе указанным на рис. 6 способом. Направление осей времени обозначается на катодной лампе с помощью натянутой проволоки. Изображение ее (на фотоснимке) представляется черной линией (рис. 7).

Для определения масштаба времени и скорости и, соответственно, напряжения электрического тока служит генератор низкой частоты Y. Для калибровки соответственно диапазону измерений на место отдельных измерительных обмоток (беря их попарно) генератор необходимо питать синусоидально переменным напряжением определенной амплитуды и частоты. Определение масштаба напряжения производится напряжением частотой 1000 гц и в большинстве случаев с амплитудой $2\sqrt{2}$ мв, а определение масштаба времени (при отключении электронного выключателя) напряжением с частотой 10 000 гц. В последнем случае амплитуда не играет роли.

Скорость сечений на расстоянии 10, 30 и 50 см, считая от нагруженного конца ленты, можно непосредственно измерить наклейкой измерительной стороны обмотки на ленту. Однако, измерение скорости конца ленты может производиться только косвенно, с помощью алюминиевой пластинки, соединенной с усеченным конусом L, так как, с одной стороны, правильной работе

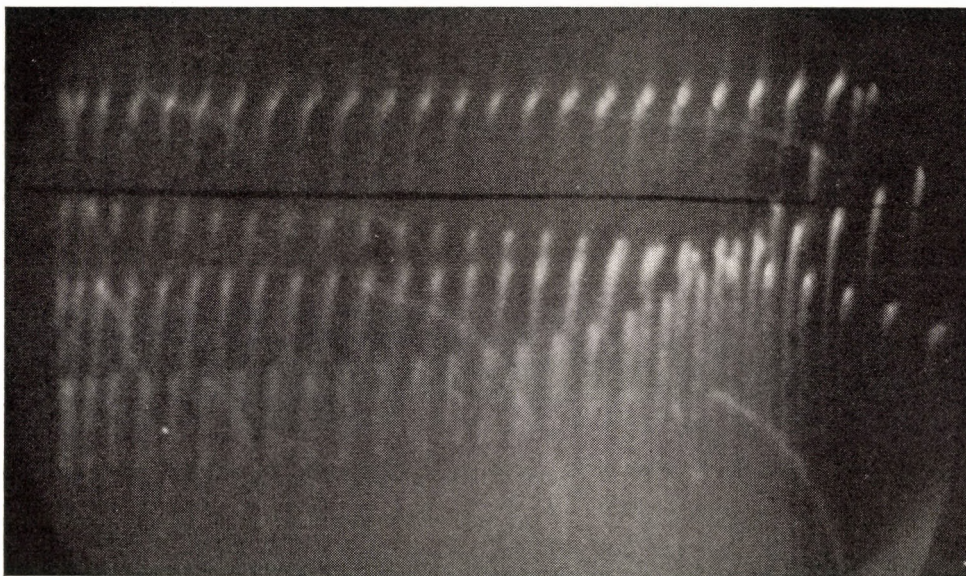


Рис. 7а

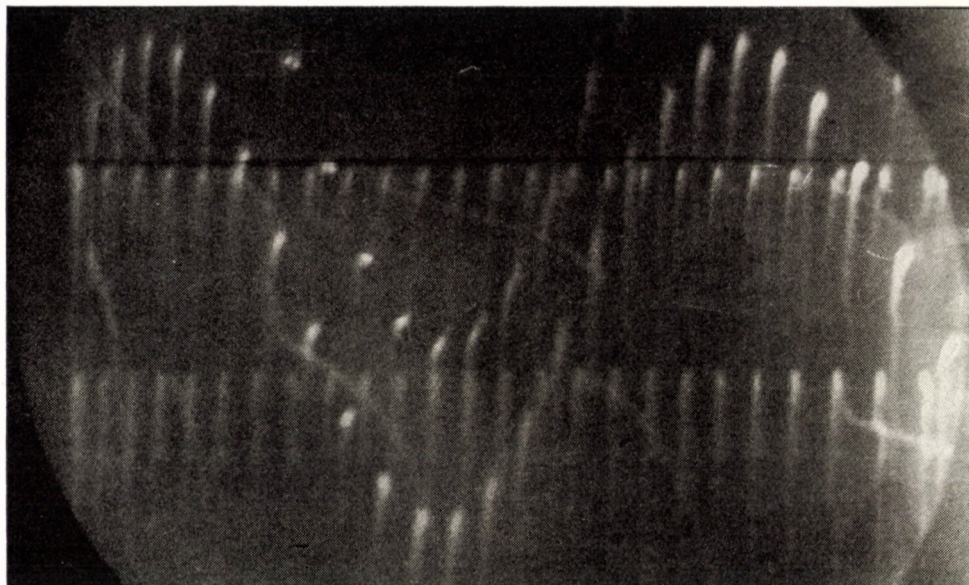


Рис. 76

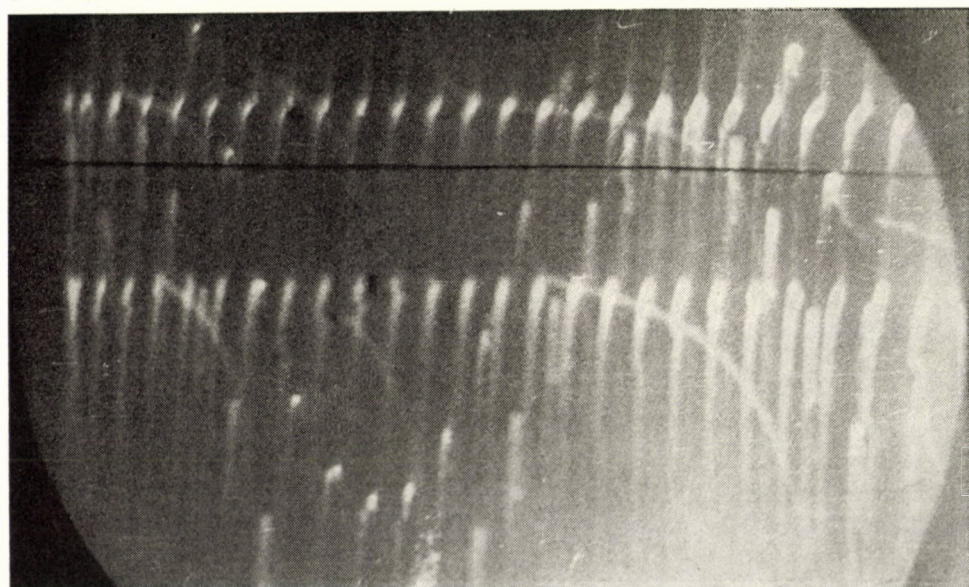


Рис. 76

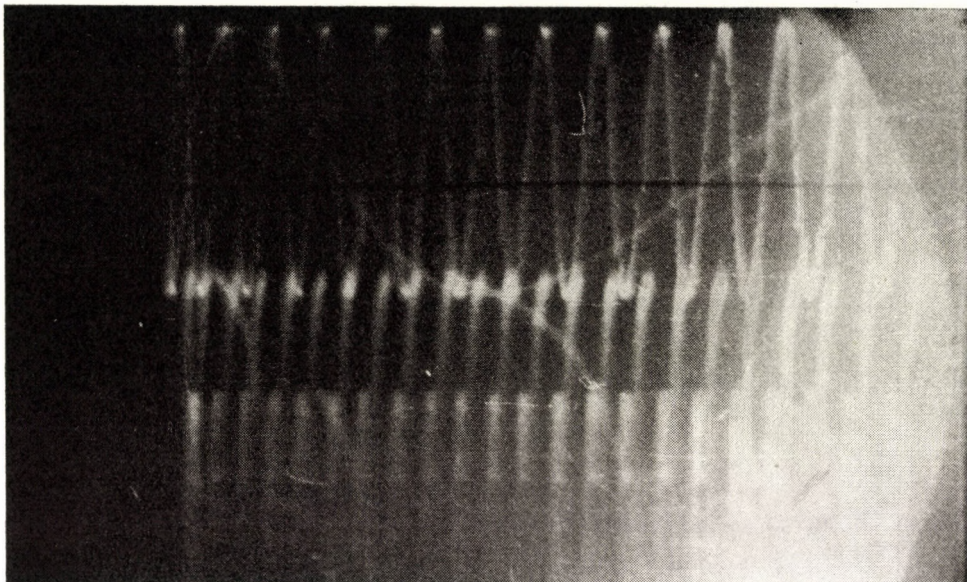


Рис. 7e

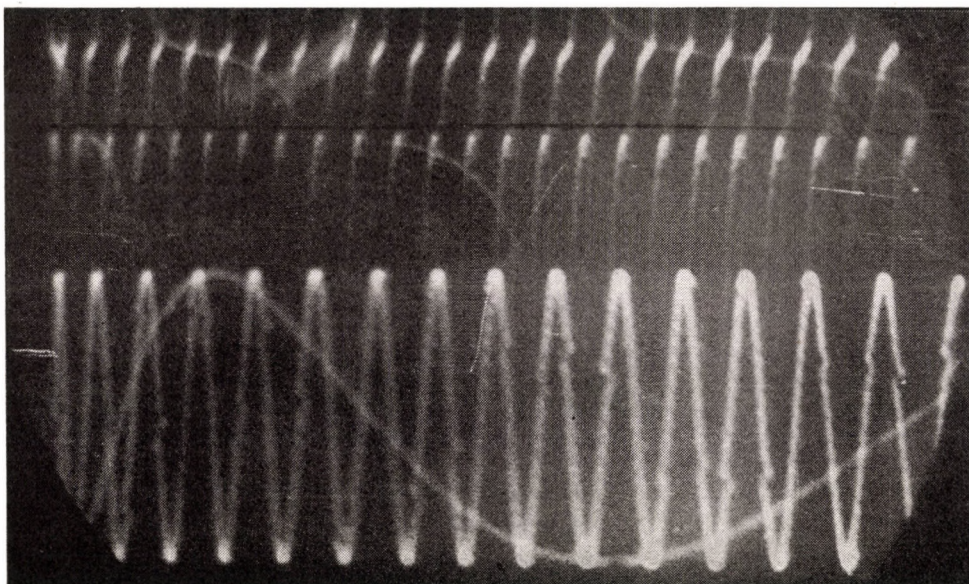


Рис. 7d

измерительной обмотки, размещенной на конце ленты, мешало бы поле рассеяния броневого магнита, а с другой стороны, размещение измерительного магнита в этом месте сталкивалось бы с серьезными затруднениями. На алюминиевой пластинке, соединенной с усеченным конусом, на расстоянии 10 см от усеченного конуса измерительная обмотка была наклеена с таким расчетом, чтобы измерительная обмотка двигалась в магнитном поле измерительного магнита, являющегося общим с измерительной обмоткой на ленте.

Фотоснимки такого опыта, проведенного описанным выше методом, видны на рис. 7. На рис. 7 рисунок а) изображает кривые скорость — время в местах с уже известной координатой (снизу вверх). Рисунки б) и в) служат для определения электрического напряжения, а рисунки г) и е) — для определения масштаба времени.

Описанный метод удовлетворяет требованиям А) пункта 1).

3) Результаты опыта

Если известны масштаб времени и направление оси времени, можно для каждого места измерения построить кривые скорость — время, изображенные на рис. 7/а.

При пуске катодного луча, на экране вырисовывается и небольшой участок оси времени. Этот участок и после перестройки появляется в виде отрезка прямой, а именно, в качестве отрезка оси времени. Точка оси времени с координатой является исходной точкой кривой, если при $t \geq t_i$ $v \equiv 0$, а при $t > t_i$ $v \neq 0$.

Исходная точка кривой скорости с координатой t_i , соответствующая месту измерения с координатой x_i , на плоскости x, t изображается точкой P_i , с координатой x_i, t_i . Эта точка является точкой кривой, изображающей фронт слабой волны. (Начало координат оси времени представляет собой исходную точку кривой скорости, полученной в точке с координатой $x = 0$.) Фронт слабой волны изображен на рис. 8 на основе арифметического среднего значений, измеренных в точках измерения. Цифры, проставленные на рисунках возле точек измерения, обозначают порядковое число замера, а штриховая линия обозначает экстраполированный участок кривой.

Кривые скорость — время $v(t, 0), v(t, 10), v(t, 10), v(t, 30), v(t, 50)$, полученные по ходу экспериментов, изображены на рис. 9; приведенные на рис. различные точки обозначают точки кривых скорость — время, полученных из отдельных экспериментов. В дальнейшем мы будем рассматривать кривые, изображенные сплошной линией. С помощью этих кривых построена функция $v(t, x)$, параметрические кривые которой изображены на рис. 10/а и 10/б. (Рисунки не дают числовых значений скорости, а пропорциональное

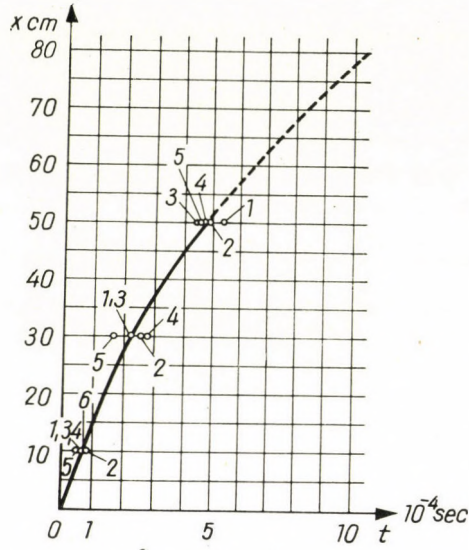


Рис. 8

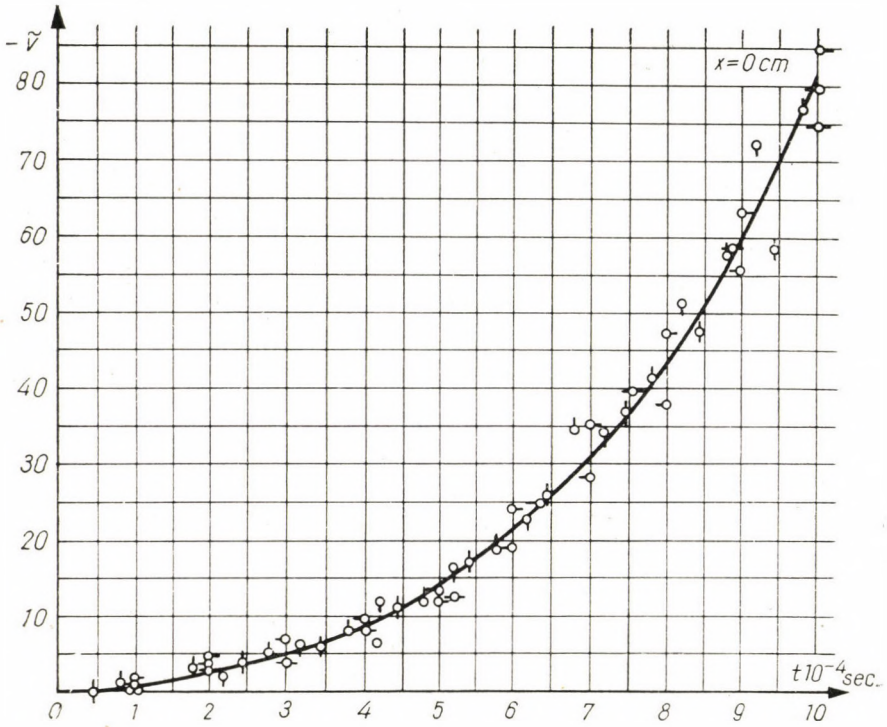


Рис. 9а

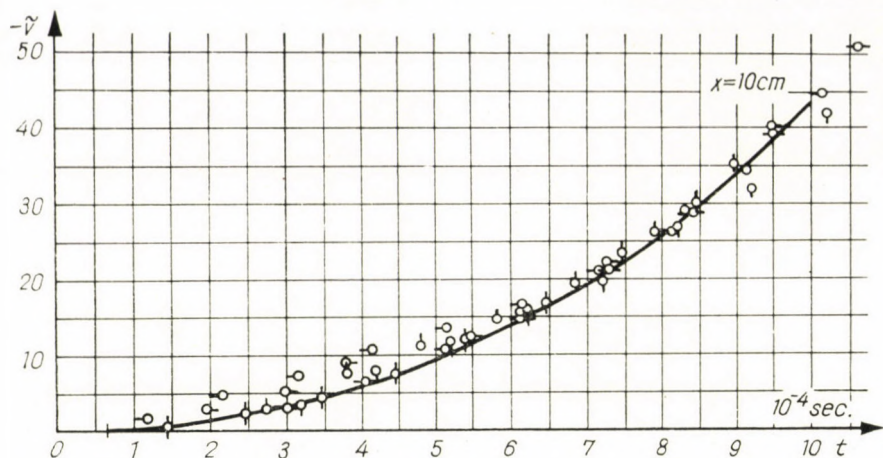


Рис. 9б

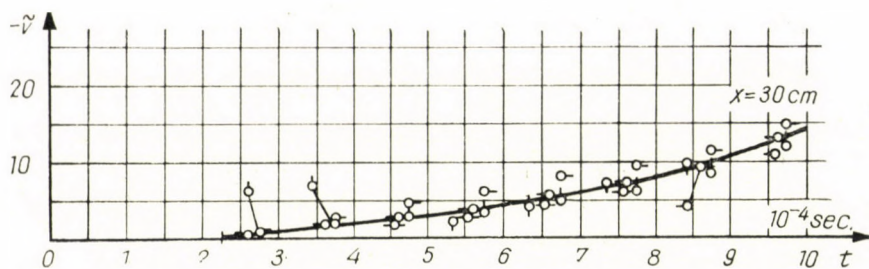


Рис. 9в

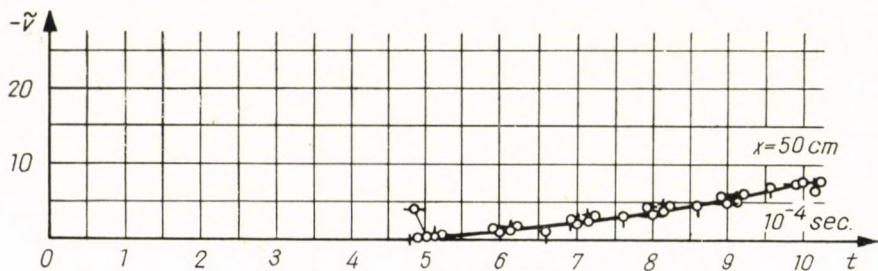


Рис. 9г

им безразмерное число \tilde{v} . $v = \mu \tilde{v}$, где $\mu = 0,864$ см/сек.) Штриховые линии соединяют экстраполированные точки.

Функция время — место напряжения и деформации (соответственно пропорциональные им $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\mu}$ и $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\mu}$) определяется, если известно значение величины \tilde{v} , используя уравнения (1), (2) и исходные и граничные условия.

Исходные и граничные условия являются следующими:

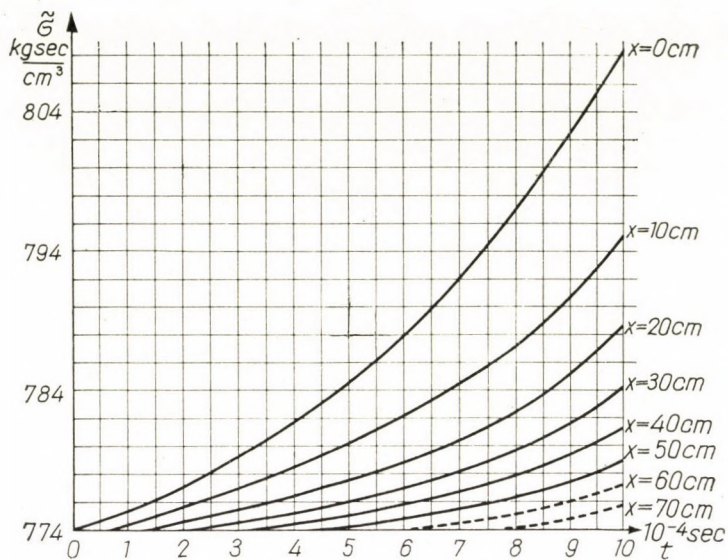


Рис. 10а

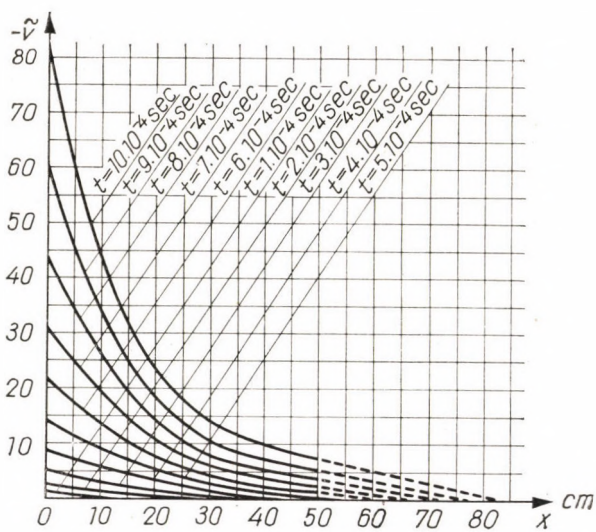


Рис. 10б

Лента подвержена предварительному напряжению, таким образом в момент времени $t = 0$:

$$v = 0 \quad (4)$$

$$\sigma = \sigma_0 = 6,68 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2} \quad (5)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 1,895 \% \quad (6)$$

Один конец ленты движется совместно с диском, следовательно в точке $x = 0$:

$$m \frac{dv(t, 0)}{dt} = F + mg - A\sigma(t, 0), \quad (7)$$

где m — масса диска;

F — магнитное тяговое усилие (функция воздушного зазора);

g — ускорение силы тяжести

A — площадь сечения ленты.

Другой конец ленты неподвижен, следовательно в точке

$$\begin{aligned} \text{имеем} \quad x &= l \\ v &\equiv 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Кривые параметра функции $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(t, x)$ изображены на рис. 11/а, б) а значения функции $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(t, x)$ — на рис. 12/а, б). И здесь штриховые линии обозначают экстраполированные величины.

Подводя итог полученным результатам, можно сделать следующие выводы:

А) в диапазоне измерений наибольшие значения скорости, напряжения и удлинения получаются в точках $x = 0$ и $t = 10 \cdot 10^{-4}$ сек. А именно:

$$v_{\text{макс}} = \mu \dot{v}(10 \cdot 10^{-4}, 0) = 70,4 \text{ см/сек}$$

$$\sigma_{\text{макс}} = \mu \tilde{\sigma}(10 \cdot 10^{-4}, 0) = 6,98 \text{ кг/мм}^2$$

$$\epsilon_{\text{макс}} = \mu \tilde{\epsilon}(10 \cdot 10^{-4}, 0) = 2,0025 \%$$

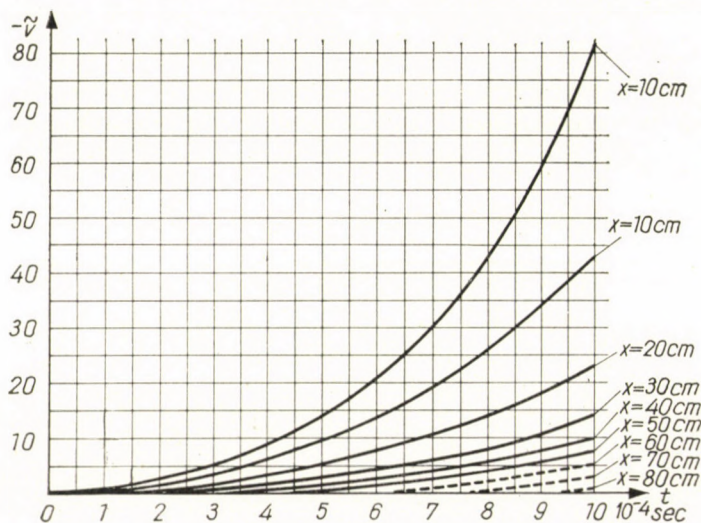


Рис. 11а

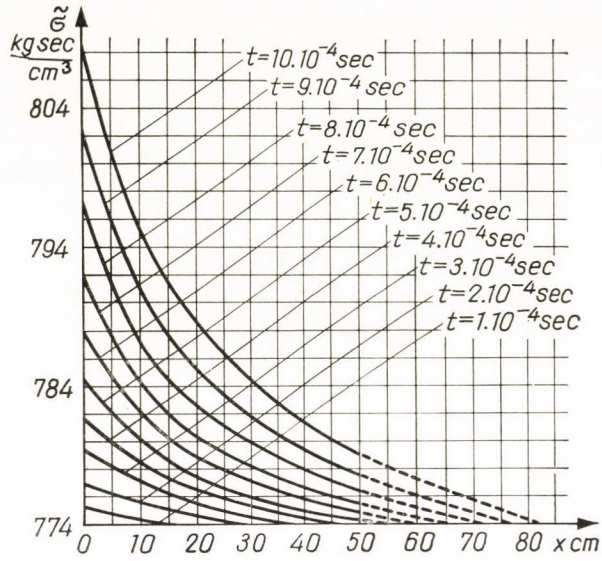


Рис. 116

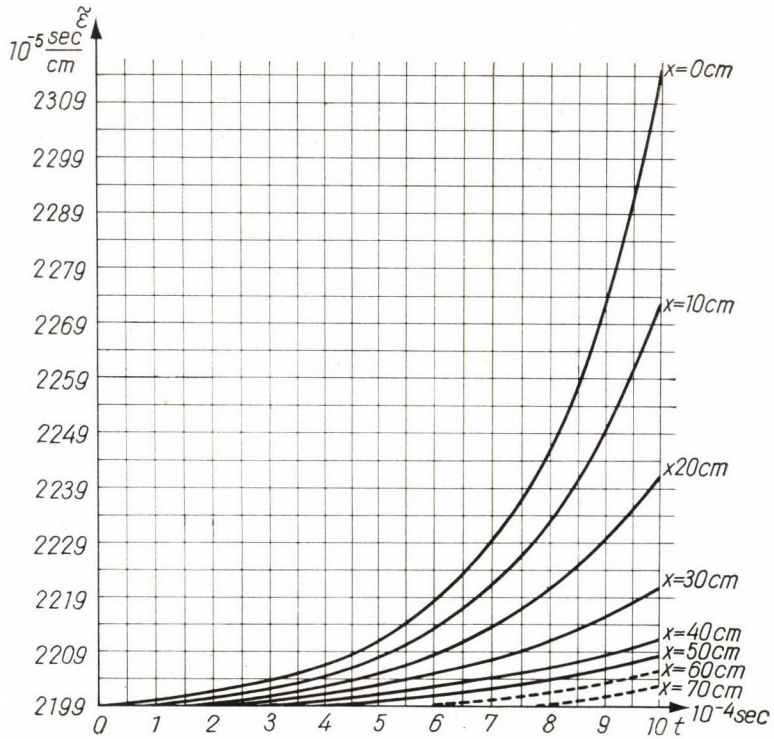


Рис. 12a

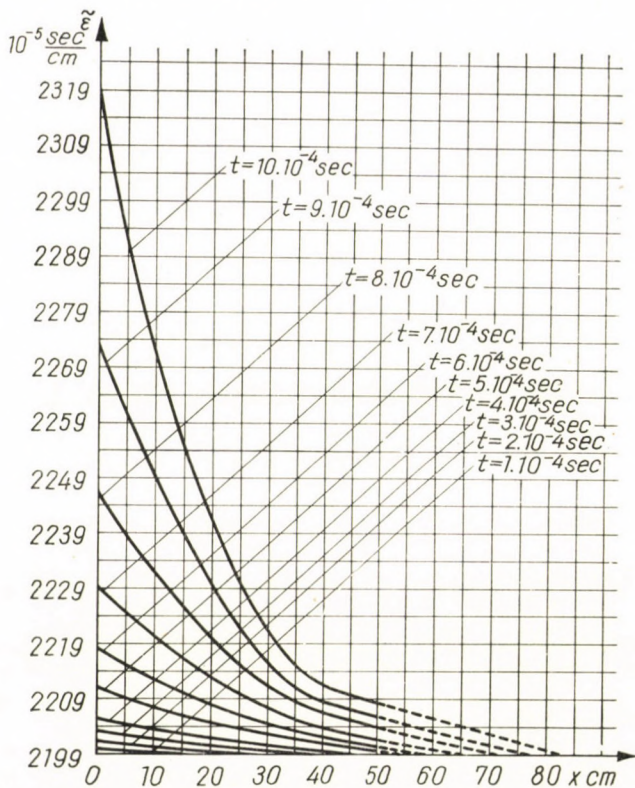


Рис. 126

$\epsilon_{\text{макс}}$ по диаграмме напряжений (рис. 1) соответствует напряжению $\sigma'_{\text{макс}} = 6,82 \text{ кг/мм}^2 < \sigma_{\text{макс}}$;
 Б) при измерении получено

$$\epsilon_0 = 1,895 \% \leq \epsilon \leq 2,0025 \% = \epsilon_{\text{макс}} :$$

Участок статической диаграммы напряжений в этом интервале (участок АБ на рис. 1) с весьма хорошим приближением может быть замещен прямой. Из теории упруго-пластичной волны (при условии, описанном во введении под пунктом г.) следует, что скорость распространения слабого фронта волны a_1 является постоянной, а именно:

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\epsilon}} = 392 \text{ м/сек}; \left(\frac{d\sigma}{d\epsilon} = 1,398 \cdot 10^8 \text{ кг/м}^2 \right).$$

Измерения же показывают, что скорость слабого фронта волны является переменной, а именно:

$t \cdot 10^{-4} \text{сек}$	0	1	2	3	4	5
$a \text{ м/сек}$	1630	1388	1140	927	790,5	707

Между a_1 и a имеет место значительное отклонение по величине и характеру;
 В) при динамической нагрузке ленты максимальная скорость деформации была:

$$\max \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \mu \tilde{\varepsilon}_t(10, 10^{-4}, 0) = 4,29 \frac{1}{\text{сек}},$$

а наименьшая скорость деформации:

$$\min \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \mu \tilde{\varepsilon}_t(0, 0) = 0,0405 \frac{1}{\text{сек}}.$$

так что

$$0,0405 \frac{1}{\text{сек}} \leq \varepsilon_t \leq 4,29 \frac{1}{\text{сек}}.$$

с другой стороны (точка А)):

$$0 \frac{m}{\text{сек}} \leq v \leq 0,704 \frac{m}{\text{сек}}$$

Хотя значения скорости и скорости деформации по сравнению со значениями, имеющими место при динамических нагрузках другого вида, являются небольшими, можно тем не менее установить, что поведение материала отличается от его поведения при статической нагрузке.

Г) На основе оценки проведенных экспериментов можно сделать заключение, что условия динамической нагрузки ленты можно принять идентичными в случае шести проведенных измерений.

4.) Метод определения закона материи

Динамическая деформация ленты (как это было видно выше), пренебрегая собственным весом ленты, описывается совместно с соответствующими начальными и граничными условиями посредством уравнений:

$$\rho v_t = \sigma_x \quad (1)$$

$$v_x = \varepsilon_t \quad (2)$$

$$\Phi = 0 \quad (9)$$

В случае проведенного эксперимента последние выражены уравнениями (4), (5), (6) и (7).

По отношению к временно еще неизвестному закону материи $\Phi = 0$ (на основе общедействительного опыта) уже вперед можно поставить определенные требования. Так, например:

а) функция Φ не зависит от координат t, x ;

б) система уравнений (1), (2) и (9) при любых возможных граничных и начальных условиях на всей своем протяжении является гиперболической (точка 1);

в) фронт сильной или слабой волн, достигнув другой (зажатый) конец ленты, оттуда отражается. Следовательно, существуют прямая и от-

раженная волны и каждая из них имеет конечную отличную от нуля скорость.

Кроме сказанных выше с полным правом можно предполагать, что однозначная функция Φ является почти всюду (за исключением множества размером 0) сплошной и дифференцируемой.

Условие α) означает, что в материальной функции $\Phi = 0$ величины t и x эксплицитно не фигурируют, следовательно Φ является функцией только величин v , σ , ε , а также их производных, а в простейшем случае только производных первого порядка

$$\sigma_t \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \sigma \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \varepsilon_t \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \text{ и } \varepsilon_x \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial x},$$

т. е. закон материи будет иметь вид

$$\Phi(v, \sigma, \varepsilon, \sigma_t, \sigma_x, \varepsilon_t, \varepsilon_x) = 0$$

и является почти всюду сплошным и дифференцируемым.

Из условия β) следует, что в такой области плоскости t, x , где Φ можно дифференцировать, каждую точку секут хотя бы две характеристических кривых [5]. Если любая из них имеет вид $\varphi(t, x) = 0$, или $x = x(s)$, $t = t(s)$, тогда [10] φ удовлетворяет дифференциальное уравнение

$$\varrho \Phi_{\sigma_t} \varphi^3 + \varrho \Phi_{\sigma_x} \varphi_t^2 \varphi_x + \Phi_{\varepsilon_t} \varphi_x^2 + \Phi_{\varepsilon_x} \varphi_x^3 = 0, \quad (10)$$

которое на основе зависимости

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dt}{ds}} = - \frac{\varphi_t}{\varphi_x}$$

можно записать также в следующем виде:

$$-\varrho \Phi_{\sigma_t} \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 + \varrho \Phi_{\sigma_x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \Phi_{\varepsilon_t} \frac{dx}{dt} + \Phi_{\varepsilon_x} = 0. \quad (10-a)$$

Уравнение (10-а) согласно условию β) при любых начальных и граничных условиях в любой точке плоскости t, x должно дать три вещественных корня (три элемента линий).

Условие γ), наконец предписывает, чтобы среди трех вещественных корней хотя бы один был положительным и хотя бы один отрицательным.

На основе этих соображений можно легко показать, например, что закон материи не может иметь вид

$$\Phi(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_t), \quad (11)$$

несмотря на то, что в технической литературе в большинстве случаев предлагается ввести закон материи такого вида [2, 3, 8, 12, 14, 18].

В случае выражения (11) имеем

$$\Phi_{\sigma_x} = \Phi_{\sigma_t} = \Phi_{\varepsilon_x} = 0,$$

следовательно дифференциальное уравнение характеристических кривых будет иметь вид:

$$\Phi_{\varepsilon_t} \varphi_t \varphi_x^2 = 0.$$

Здесь

$$\Phi_{\varepsilon_t} \neq 0$$

поэтому имеем

$$\varphi_x \equiv 0$$

или

$$\varphi_t \equiv 0,$$

т. е. характеристические кривые представляют собою координатные линии.

Следовательно, условие γ) не удовлетворено, так как начальные и граничные условия можно надежно выбрать с таким расчетом, чтобы в области исследований функция Φ была бы всюду дифференцируема и во втором производном неизвестной функции был бы разрыв. Место этого разрыва может быть лишь характеристическая кривая. Этот разрыв одновременно выражает также физическое состояние, скорость распространения которого, таким образом, равна или нулю, или бесконечности.

Аналогичным образом можно показать, что ни одна из функций вида

$$\begin{aligned} \Phi(v, \sigma, \sigma_t) = 0, & \quad \Phi(\sigma, \varepsilon, \sigma_t) = 0, & \quad \Phi(v, \varepsilon, \sigma_t) = 0, \\ \Phi(v, \sigma, \sigma_x) = 0, & \quad \Phi(\sigma, \varepsilon, \sigma_x) = 0, & \quad \Phi(v, \varepsilon, \sigma_x) = 0, \\ \Phi(v, \sigma, \varepsilon_t) = 0, & \quad \Phi(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_t) = 0, & \quad \Phi(v, \sigma, \varepsilon_t) = 0, \\ \Phi(\sigma, \varepsilon, \varepsilon_x) = 0 & \quad \text{и} \quad \Phi(v, \delta, \varepsilon_x) = 0 \end{aligned}$$

не может быть законом материи.

Следуя сказанным, можно показать еще и по приведенным ниже функциям, что ни один из них не может быть законом материи

$$\begin{aligned} \Phi(v, \sigma_x, \varepsilon_x) = 0, & \quad \Phi(\sigma, \sigma_x, \varepsilon_t) = 0, & \quad \Phi(\varepsilon, \sigma_x, \varepsilon_t) = 0, \\ \Phi(v, \sigma_x, \sigma_t) = 0, & \quad \Phi(\varepsilon, \sigma_x, \sigma_t) = 0, & \quad \Phi(v, \varepsilon_x, \varepsilon_t) = 0, \\ \Phi(\sigma, \varepsilon_x, \varepsilon_t) = 0. & \end{aligned}$$

Рассмотрим, например, функцию $\Phi(v, \sigma_x \varepsilon_t, \varepsilon_t) = 0$. В той области, в которой можно дифференцировать функцию Φ , дифференциальным уравнением характеристических кривых (10) будет уравнение:

$$\varphi_x \varphi_t (\rho \Phi_{\sigma_x} \varphi_t + \Phi_{\varepsilon_x} \varphi_x) = 0.$$

Характеристики представляют собою координатные линии, соответственно третья, так как Φ является однозначной функцией, является некоторой кривой. Следовательно, требование γ) не удовлетворено.

Функции $v(t, x)$, $\sigma(t, x)$ и $\varepsilon(t, x)$, определенные изложенным уже ранее способом, удовлетворяют уравнениям (1), (2), (9), (4), (5), (6) и (7).

Между функциями $v(t, x)$, $\sigma(t, x)$, $\varepsilon(t, x)$ и любой из трех их производных можно вывести такую функциональную связь (исключив переменные t, x), независимую от переменных t, x , которая может заполнить роль функции Φ в случае начальных и граничных условий, осуществленных в процессе экспериментов. Однако, из числа полученных таким образом функций сохраняются только те, которые удовлетворяют требованиям α), β) и γ).

Если теперь опыты проводить при иных начальных и граничных условиях и вновь определить функции с тремя переменными сохраненного вида, тогда те, которые не идентичны с полученными на основе предыдущего опыта, не могут быть законами материи. Таким образом, на основе проведенных при достаточно большом количестве различных условий опытов можно получить закон материи.

Если опыт построить так, чтобы наряду с переменными, посредством введения независимой от последних третьей переменной ϑ , производить измерение скорости $v(t, x, \vartheta)$, тогда можно получить Φ в виде функции с четырьмя переменными. Если в этом случае (при условии такого измерения) можно найти такой Φ , который является функцией не четырех, а только трех переменных и эту же функцию Φ можно найти при предыдущих измерениях, тогда с правом можно предполагать, что закон материи имеет три переменных и именно эта функция представляет собою закон материи.

Отыскание закона материи таким способом требует большой затраты времени и энергии и большого числа опытов, проведенных при отличных друг от друга условиях. Определение функций Φ является также затруднительным. Из-за дифференцирования, необходимого при определении σ и ε , сравнение отдельных функций Φ идентичного типа, полученных при различных опытах, может стать неопределенным. Однако, на основе имеющегося в распоряжении опыта (при выполнении относительно небольшого числа вычислений) можно сделать дальнейшие выводы в отношении закона материи, если сверх требований α), β) и γ) будет удовлетворено требование δ), что функция Φ во всем диапазоне исследований дифференцируема.

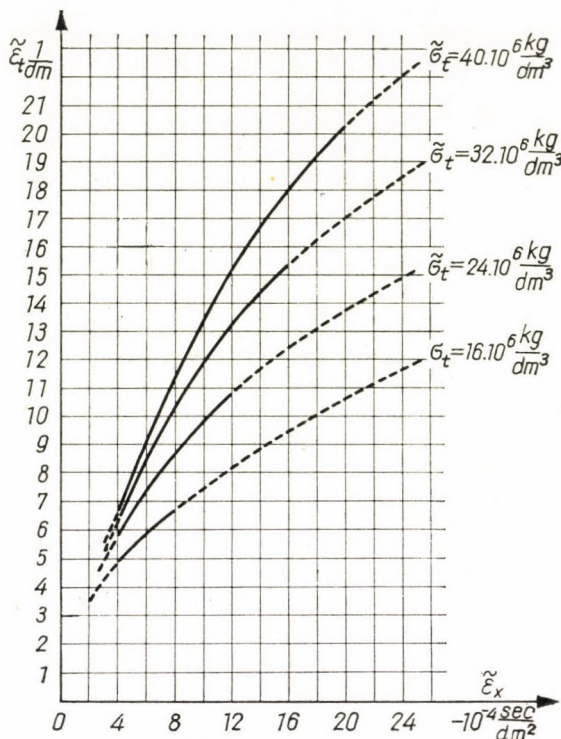


Рис. 13а

Это требование, как известно, позволяет производить расчет фронта волны, соответствующего данным начальным и граничным условиям, а также сопоставление волновых фронтов, полученных при расчете и опытным путем.

В качестве более простого случая можно предположить, что уравнение $\Phi = 0$ является уравнением первой степени, т. е. по a) является лишь функцией

$$v, \sigma, \varepsilon, \sigma_t \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \sigma_x \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

$$\varepsilon_t \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \text{ или } \varepsilon_x \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}.$$

В таком случае измеренная волна, естественно, является слабой волной.

Исследуя еще возможные комбинации перечисленных переменных, таким образом на основе данных проведенных опытов установлено, что

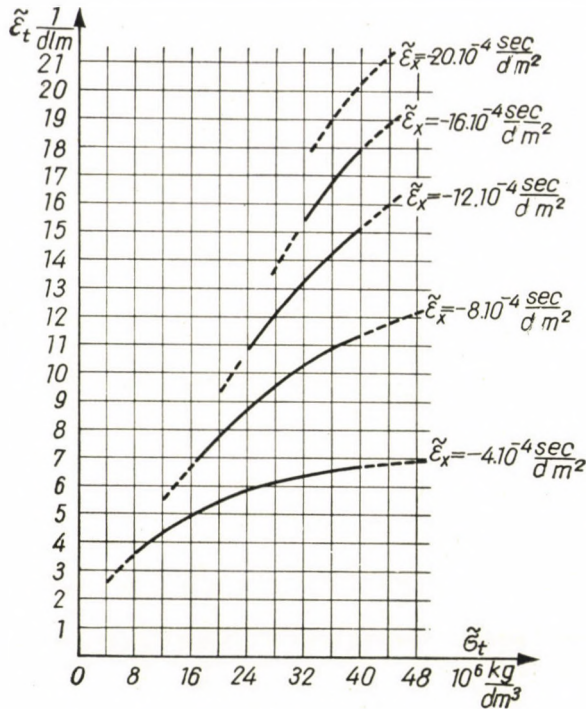


Рис. 13б

законом материи может быть только функция вида

$$\Phi(\sigma_t, \epsilon_t, \epsilon_x) = 0.$$

Эта функция параметральными линиями изображена на рис. 13/а и 13/б.

ЛИТЕРАТУРА

1. ILJUSIN, A. A.: Plasticité. Editions Eyrolles. Paris, 1956.
2. А. А. Ильютин, В. С. Ленский: Сопротивление материалов. Физматгиз 1959.
3. Л. М. Качанов: Основы теории пластичности. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва 1956.
4. KOLSKY, H.: Stress waves in solide. Oxford at the Clarendon Press, 1953.
5. PETROVSKIJ, I. G.: Előadások a parciális differenciálegyenletekről. Akadémiai Kiadó, Budapest 1955.
6. С. Д. Пономарев, В. Л. Бидерман, К. К. Лизарев, В. М. Макушин, Н. Н. Малинин, В. И. Федосьев: Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Машгиз 1952.
7. SAUER, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Springer-Verlag Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1952.
8. SIEBEL, I.: Handbuch der Werkstoffprüfung (II). Springer-Verlag Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
9. В. И. Смирнов: Курс высшей математики (том IV). Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1953.

10. v. KÁRMÁN, T., DUWER, P.: Journal of Applied Physics. Vol. 21. 1950, október, 987—994. о.стр.
11. LEE, E., TUPPER, S.: Journal of Applied Mechanics 21. No. 1. (1954) S. 63—71.
12. LUDWIK, P.: Physikalische Zeitschrift, Jahrgang 10. No. 12. S. 211—417.
13. MALVERN, L. E.: Journal of Applied Mechanics, Vol. 18. (1951) S. 208.
14. NÁDAI, A., MANJOINE, M. J.: Journal of Applied Mechanics, 1941. June. S. 77—91.
15. PRANDTL, L.: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Band. 8. Heft 2. 1928, Apr. S. 85—106.
16. Н. А. Рахматулин: Прикладная математика и механика. Том IX. (1945) 91—100 стр.
17. Н. А. Рахматулин, Ш. С. Шапиро: Прикладная математика и механика. Том XII. 5. 4. (1948) 369—374 стр.
18. TAYLOR, G. I.: J. Instn. civ. Engrs. Band. 8. (1946) S. 486—519.

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается такого вида динамическая нагрузка медной ленты, работающей на чистое растяжение, при которой лента полностью находится в пластичном состоянии. Возникающая в процессе нагрузки пластичная волна во время нагрузки с использованием индукционного закона Неймана может быть прослежена электрическим путем. При этом исследовании скорость становится известной, как функция места и времени.

Вычисление распространения волны невозможно производить без уравнения, описывающего механическое поведение материала, т. е. без закона материи. Исходя из результатов опыта, в работе приводится метод определения закона материи. Приведенный в работе метод независимо от опытов — математическим путем позволяет определить для определенной группы функций то, что выбранная функция не может быть законом материи. В эту группу функций входит, например, обычное выражение $\sigma = \sigma(\epsilon, \epsilon_t)$.

A METHOD FOR INVESTIGATING THE PLASTIC WAVE

GY. BÉDA

SUMMARY

The paper deals with such a dynamic load of a copper ribbon subjected to pure tension during which the ribbon is wholly in the plastic state. The plastic wave arising at loading can be followed electrically, using the induction law of NEUMANN. During this investigation the velocity becomes known as a function of place and time.

It is not possible to calculate the propagation of the wave without knowing the law describing the mechanical behaviour of the material. The author proposes a method for determining the law of the material, which is based on the results of experiments. Independently of the experiments, the proposed method permits to mathematically prove for a certain group of functions that a chosen function cannot be a law describing a material. To this group of functions belongs e. g. the usual $\sigma = \sigma(\epsilon, \epsilon_t)$.

EINE METHODE ZUR UNTERSUCHUNG VON PLASTISCHEN WELLEN

GY. BÉDA

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit befaßt sich mit solchen dynamischen Belastungen eines auf reinen Zug beanspruchten Kupferbandes, bei welcher sich das Band zur Gänze im plastischen Zustand befindet. Die durch die Belastung hervorgerufene plastische Welle kann während der Zeit der Belastung unter Zuhilfenahme des Neumannschen Induktionsgesetzes auf elektrischem Wege verfolgt werden. Bei dieser Untersuchung wird die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit und des Ortes bestimmt.

Die Berechnung der Fortpflanzung der Welle ist ohne Kenntnis der Gleichung, welche das mechanische Verhalten des Materials beschreibt, d. h. des Materialgesetzes, nicht möglich. Auf Versuchsergebnisse gestützt, beschreibt die Arbeit eine Methode zur Bestimmung des Materialgesetzes. Das Verfahren ermöglicht es, unabhängig von Versuch, für eine gewisse Gruppe von Funktionen auf mathematischem Wege festzustellen, daß die gewählte Funktion kein Materialgesetz sein kann. Zu dieser Gruppe der Funktionen gehört z. B. die übliche Funktion $\sigma = \sigma(\varepsilon, \varepsilon_t)$.

UNE MÉTHODE POUR L'EXAMEN DE L'ONDE PLASTIQUE

GY. BÉDA

RÉSUMÉ

L'auteur étudie la charge dynamique d'un ruban de cuivre soumis à une traction pure telle, que le ruban entier soit en état plastique. L'onde plastique engendrée par l'application de la charge peut être suivie électriquement pendant le temps d'application, si on utilise la loi d'induction de Neumann. Par cet examen, la vitesse est déterminée en fonction de l'endroit et du temps.

Le calcul de la propagation de l'onde est impossible sans la connaissance de l'équation décrivant le comportement mécanique du matériau, c'est-à-dire de la loi de plasticité. En se basant sur le résultat des essais, l'auteur présente une méthode de détermination de la loi du matériau. Indépendamment des essais, cette méthode permet d'établir par le calcul, que les fonctions appartenant à un certain groupe de fonctions ne peuvent pas représenter la loi d'un matériau. C'est à ce groupe de fonctions qu'appartient par exemple la loi usuelle $\sigma = \sigma(\varepsilon, \varepsilon_t)$.

THE THEORETICAL PROBLEMS OF LEVEL DRIFT LOCATION

Prof. B. MILASOVSKY

DEPARTMENT OF MINING OF THE TECHNICAL UNIVERSITY MISKOLC, HUNGARY

[Manuscript received September 15, 1960]

In the years 1957 and 1960, three papers dealing with the problems of level drift location were published in the Mining Journal of Hungary [1], [2], [3]. Recently there has been published a very good textbook which too, treated the above problem [4]. MILLER-HAUENFELS, professor of the Leoben Mining Academy, who was far ahead of his time in specialized knowledge, published a book on mine surveying in 1868 [5] and though among the many problems discussed therein the problem of "level drifts" is not expressly mentioned, it points out, how the straight line best fitting a set of points characterized by a certain "scatter" is to be determined. "Es liegt uns somit die Aufgabe vor, zu einem System von Punkten, welche bloß annähernd einer Geraden angehören, die von jenen Punkten am wenigsten abweichende Gerade nach der Methode der kleinsten Quadrate zu finden." Thereby, the exact solution is based upon the method of least squares. The statements of the authors quoted above will be referred to at the proper places later on.

* * *

The optimum location of front entries is of a great practical significance in mining, both technically and economically. That is why it is of importance that the principles permitting to find the most favourable solution be determined.

As it is to be pointed out below, the problem itself as well as the way of its solution is in a close connection with certain notions used in mechanics and in other branches of science. It seems to be indicated, therefore, that this problem be investigated at a closer range.

Definition of level drift. The problem of its location. Basic principles

As it is well known, a level drift in mining represents an adit driven in a straight line with the primary aim of transportation and ventilation. The fact that the drift is to be straight is an evident advantage, as it permits an increase

in transporting capacity and reduces air resistance. It has however the drawback that, as a rule, the drift cannot be located in such a way as to pass throughout in the layer or formation favourable for driving. This is due to two reasons. First, the seam or stratum is never plane in the geometric sense of the word; second, its position in space is usually known approximately only, as a rule by some boring data. In spite of this, it is our aim to make the front entry fit the bed or the favourable stratum as closely as possible.

In the general case, our task is twofold, namely to determine:

1. one point of the axis of the level drift, provided there is no such fixed in advance,

2. the azimuth of the level drift, *i. e.* the angle subtended by a given base direction (to be chosen in the following as the abscissa axis) with the optimum axis of the entry.

The sitting of the level drift "best fitting" the selected layer — more precisely, the fulfilling of conditions 1 and 2 must, of course, be based on some pre-selected principle, stated in mathematical form.

In the first phase of our investigations, we wish to oppose two different principles of location. One principle utilizes the fictitious residuals of the defining points from the level drift which is regarded as an "adjusted straight line", whereas the second principle is based upon the perpendicular distances d of the same defining points from the level drift regarded as the "principal axis" of the moments of inertia. In the first case, we have to find the minimum of a quadratic sum $[q \lambda \lambda]$, whereas in the second, that of a quadratic sum $[pdd]$.

The level reduction of the defining points

We will start from that case of level drift location in which several points $P_1, P_2 \dots P_n$ of the strike of the bed (situated at the required altitude) can be determined by means of borings. Since, however, the bore holes themselves hit the bed or stratum at points $B_1, B_2 \dots B_n$ of different altitudes $z_1, z_2 \dots z_n$, they have to be reduced first to the horizontal plane of the selected z_0 altitude. According to [4], pages 270—271 this reduction can be performed in two different ways. Let us consider one method and let us assume that the drilling B_i reached the selected stratum at a sealevel altitude z_i , the true dip of the stratum in the dip line of B_i being β . In this case, the defining point P_i of z_0 altitude, which corresponds to B_i , is at a horizontal distance t_i from B_i , which can be obtained from the relation

$$\cot \beta = \frac{t_i}{z_0 - z_i}.$$

Thus we are in a position to transform the drilling points $B_1, B_2 \dots B_n$ of different altitudes $z_1, z_2 \dots z_n$ into the defining points $P_1, P_2 \dots P_n$ (of uni-

form altitude z_0) of the artificial strike line by means of the horizontal distances:

$$t_1 = (z_0 - z_1) \cot \beta; t_2 = (z_0 - z_2) \cot \beta; \dots t_n = (z_0 - z_n) \cot \beta.$$

If two bore holes can be coupled, the point of altitude z_0 — as shown by the other method in [4] — can be obtained by means of interpolation too.

The horizontal plane of z_0 altitude intersects the seam or stratum in an irregular curve, in the “natural strike line”, whereas the defining points $P_1, P_2 \dots P_n$ will lie along an “artificial strike line” of z_0 altitude.

In the following it is assumed that the orthogonal coordinates $x_1y_1; x_2y_2; \dots x_ny_n$ of the points $P_1, P_2, \dots P_n$ in the plane of reference of z_0 altitude, are known.

Concerning the level drift to be sited, there is only one pre-requisite, namely that it should fit the above-defined system of points $P_1, P_2 \dots P_n$ as closely as possible. This is the first alternative to be discussed.

The problem of closest fitting. The straight line adjusted to a set of observations. The least square sum of fictitious residuals

Before attacking our problem proper, we wish to illuminate briefly the point as to what is, actually, a “best fitting” straight line?

I had already pointed out previously [6], [7] that even in the literature of adjustment there exist some differences of opinion in this connection. I had tried to expound the reasons for and the ways of eliminating these differences. Though we are in no position to discuss this point here in full, it seems to be desirable to state the following.

Let us assume for the moment that the deviations of the defining points $P_1, P_2 \dots P_n$ from a straight line are unavoidable consequences of observation errors, affecting the coordinates $x_1y_1; x_2y_2; \dots x_ny_n$ of the points, regarded as observation results. By the principle of least-squares adjustment, the best fitting straight line $C_A - A$ in Fig. 1 is that, for which the square sum

$$\sum q \lambda^2 = [q\lambda\lambda] \quad (1)$$

of the residuals $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n$ — as taken in the direction of the ordinates — is minimum. This is what is usually called an “adjusted straight line”; it passes through the centre of gravity C_A of the set of points in any case. The coordinates X_c^A and Y_c^A of the centre of gravity are computed by

$$X_c^A = \frac{[qx]}{[q]} \quad \text{and} \quad Y_c^A = \frac{[qy]}{[q]}. \quad (2)$$

The values $q_1, q_2 \dots q_n$ occurring here are called the fictitious weights of the set of points. They are computed by

$$\frac{1}{q_i} = \frac{1}{P_{yi}} + \tan^2 \alpha_0 \frac{1}{P_{xi}}. \quad (3)$$

In (3) p_{xi} represents the weights of the abscissae x_i , whereas p_{yi} stands for the weights of the ordinates y_i , as regarded observation results. The accuracy of abscissae and ordinates will namely be different in the general case.

The azimuthal angle of the adjusted straight line $C_A - A$ against the abscissa axis is denoted α_A , its slope is consequently $\tan \alpha_A$. In the weight relation (3), the closely approximate value $\tan \alpha_0$ of the latter will be made use of. The calculation of the final slope, *i. e.* the determination of the direction of the adjusted straight line can be considerably simplified by transforming the coordinates $x_i y_i$ of the given points P_i into a new system ξ, η of coordinates which, on the one hand, is parallel to the original coordinate system and passes, on the other hand, through the centre of gravity C_A of the set of defining points. The new coordinates of the set will thus be the following:

$$\begin{aligned} \xi_1^A &= x_1 - x_c^A; \quad \xi_2^A = x_2 - x_c^A; \quad \dots \quad \xi_n^A = x_n - x_c^A \\ \eta_1^A &= y_1 - y_c^A; \quad \eta_2^A = y_2 - y_c^A; \quad \dots \quad \eta_n^A = y_n - y_c^A. \end{aligned} \quad (4)$$

Subsequently the following sums of products are formed:

$$\begin{aligned} \Xi_A &\equiv [q\xi\xi]_A = (q_1 \xi_1^2 + q_2 \xi_2^2 + \dots + q_n \xi_n^2)_A \\ H_A &\equiv [q\eta\eta]_A = (q_1 \eta_1^2 + q_2 \eta_2^2 + \dots + q_n \eta_n^2)_A \\ \Phi_A &\equiv [q\xi\eta]_A = (q_1 \xi_1 \eta_1 + q_2 \xi_2 \eta_2 + \dots + q_n \xi_n \eta_n)_A. \end{aligned} \quad (5)$$

If a straight line passing through the centre of gravity C_A , *i. e.* a "median" is rotated in a full circle, its azimuthal angle will steadily change from $\alpha = 0^\circ$ to $\alpha = 360^\circ$. In consequence the distances λ_α of the points P_i as related to the rotating straight line will also change. This change, as expressed by (7), will be governed by the relation

$$[q\lambda_\alpha \lambda_\alpha] = \Xi_A \tan^2 \alpha - 2 \Phi_A \tan \alpha + H_A. \quad (6)$$

Thus the weighted sum of squares $[q \lambda_\alpha \lambda_\alpha]$ of the values λ_α will assume values between a finite minimum and the positive infinite. The latter is the case if $\alpha = \frac{\pi}{2}$ and $\alpha = \frac{3}{2} \pi$, since the λ are parallel to the ordinate axis and not perpendicular to the straight line. The described process is illustrated by Fig. 2.

The azimuthal angle α_A of the adjusted straight line will be the one for which the sum of squares (6) will be minimum. Applying now the shorter notation of (5), the correct slope will be

$$\tan \alpha_A = \frac{\Phi_A}{\Xi_A} = \frac{[q\xi\eta]_A}{[q\xi\xi]_A}. \quad (7)$$

The deviations λ belonging to the azimuthal angle α_A of the adjusted straight line are called "fictitious residuals". The sum of their weighted squares can be obtained from (6):

$$[q\lambda\lambda]_A = H_A - \Phi_A \tan \alpha_A = [q\eta\eta]_A - \frac{[q\xi\eta]_A^2}{[q\xi\xi]_A}. \quad (8)$$

The value $[q\lambda\lambda]$ is a measure of accuracy of the observations, for in the ideal case when all the observations were without error, all of the defining points would fall along one straight line and $[q\lambda\lambda]_A$ would equal 0.

Relations (7) and (8) represent, consequently, the solution, assuming that the coordinates $x_i y_i$, characterizing the points P_i , are the results of observations affected by unavoidable random errors. The problem is to find the closest-fitting straight line to this plane set of points on the basis of the principle of least squares.

The minimum principle of the sum of squares of perpendicular deviations

The problem of a set of points P_1, P_2, \dots, P_n , of random scatter in a given plane, is somewhat different from the one discussed above. In this case the set of points does not necessarily represent observed values with random errors. The different importance of accuracy of the points P_1, P_2, \dots, P_n is to be expressed by weights p_1, p_2, \dots, p_n .

Our task is to find that straight line, co-planar with the set of points, for which the weighted sum of squares of the perpendicular distances d_1, d_2, \dots, d_n of the points P_i of the weights p_i (Fig. 1) is smallest, *i. e.*:

$$\Sigma p d^2 = [p d d] = \text{minimum}. \quad (9)$$

This is the axis $C - II$, for which the momentum of inertia of the set of points as defined by (9), is minimum.

The same is the case if the main inertia axis has to be determined with respect to the centre of any plane figure instead of a scattered set of points.

Thus we have arrived at the problem of an optimum level drift which is not required to pass through a given origo ([4], page 273) but has to meet the requirement (9) of the minimum momentum of inertia. A level drift of this type is going to be called a no-constraint, or briefly "free" one.

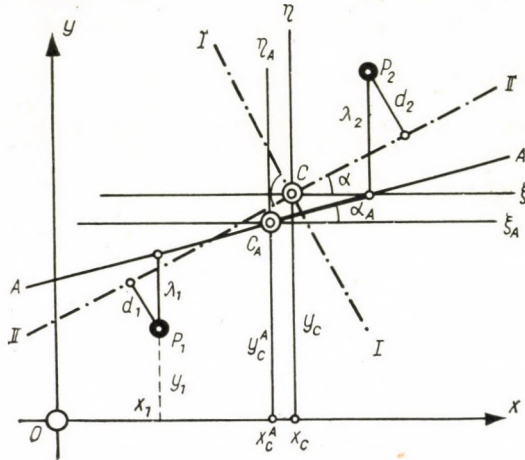


Fig. 1

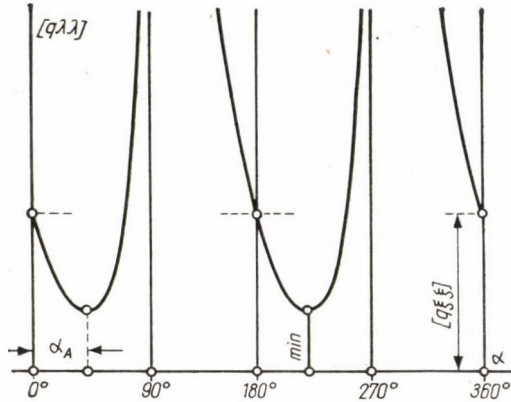


Fig. 2

Alternative A): the determination of the "free" level drift

This time, too, it is best to calculate the coordinates of the centre of gravity *C* of the point set defining the front entry, by

$$x_c = \frac{[P \cdot x]}{[P]} \quad \text{and} \quad y_c = \frac{[P \cdot y]}{[P]} \tag{10}$$

If all the weights p_i are considered equal, it is obvious that the coordinates of the centre simplify to:

$$x_c = \frac{p[x]}{p \cdot n} = \frac{[x]}{n} \quad \text{and} \quad y_c = \frac{p[y]}{p \cdot n} = \frac{[y]}{n}. \quad (10a)$$

In the following, the well-known principles to be listed below will be observed.

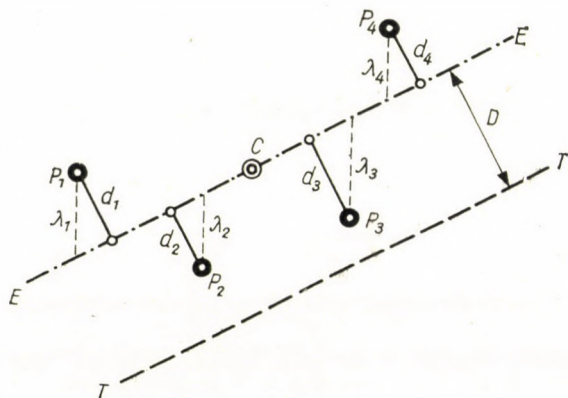


Fig. 3

1. Let us draw a straight line $C - E$ of arbitrary direction through the centre of gravity obtained above. Let us denote the distances of our points P_1, P_2, \dots, P_n from that line by d_1, d_2, \dots, d_n (Fig. 3).

In this case

$$p_1 d_1 + p_2 d_2 + \dots + p_n d_n = [pd] = 0. \quad (11)$$

The “ d ”-s, positioned on opposite sides of the straight line obtain opposite signs. In other words, the so called “primary” or “static moment” of a point set with respect to any of its medians is zero. This statement is true even in case the “ d ” values were measured in a direction identical for all the points, but not perpendicular to the median, as for instance along the vertical in Fig. 3.

However, in the following, we will always consider d distances, normal to the straight line.

The conclusion therefore is that the “free” level drift, on which we had imposed but the condition that the algebraic sum of the distances d of the defining point set be zero, is not defined unequivocally ([4], page 274). There exist an infinite number of axes, fulfilling the above condition (11), because any set of points possess an infinite number of medians.

2. If we rotate in thought an arbitrarily selected median around the centre C , the lengths and directions of the distances “ d ” of the points, from the

rotating straight line will change steadily, whereas the condition $[pd] = 0$ will be valid all the time. While the azimuthal angle of the straight line increases from 0° through 360° , the weighted sum of squares

$$(p_1 d_1^2 + p_2 d_2^2 + \dots + p_n d_n^2) = [pdd] \tag{12}$$

fluctuates periodically between a finite minimum and maximum at a period of 180° , as shown by the sinusoid continuous curve of Fig. 4. Consequently, $[pdd]$ assumes both its minimum and its maximum twice in the course of a full rotation.

3. The sum of squares $[pdd]$ as defined by (12) is called the momentum of inertia of the plane set of points with respect to the axis in question. It is

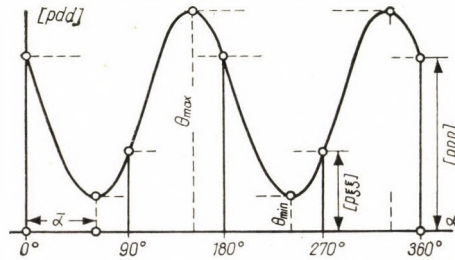


Fig. 4

invariably positive and is a function of the azimuthal angle of the median. Between the momenta of inertia referring to the axis passing through the centre C and to the parallel axis $T - T$ (see Fig. 3) by passing the centre C at the distance D , there exists a very important relationship known as Steiner's theorem:

$$[pt] = [pdd] + [p] D^2 \tag{13}$$

or applying shorter symbols:

$$\theta_T = \theta_C + [p] D^2 \tag{13a}$$

where $t_1, t_2 \dots t_n$ stand for the distances of the given points $P_1, P_2 \dots P_n$ from the axis $T - T$, and $[p] = (p_1 + p_2 + \dots + p_n)$ represents the sum of their weights. In order to avoid confusion in Fig. 3, we refrained from representing the distances t_i . In the case of points of unit weight, $[p]$ is replaced by $(1 + 1 + \dots + 1) = n$, and the relation becomes

$$[t] = [dd] + n \cdot D^2. \tag{13b}$$

Thus the sum of squares $[pdd]$ is always smaller with respect to any median than with respect to the axes parallel to the median in question.

The tangent formula of the double azimuthal angle of the "free" drift

If we intend to perform the siting of a nonfixed drift on the basis of the principle

$$[pdd] = \text{minimum}$$

as already indicated under (9), we have to exclude from our investigation that twofold infinite set of coplanar straight lines which do not pass the centre (10) of the defining point set as given by (10). The optimum drift axis will by all means be one of the medians of the point set.

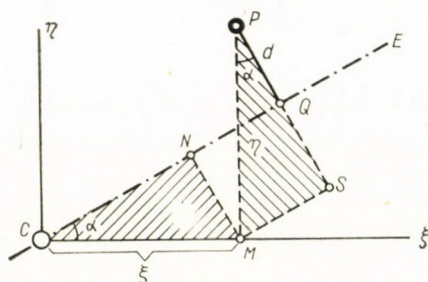


Fig. 5

Since on the basis of (10) the coordinates of the centre C are known, it is desirable and practical to introduce here, too, the new coordinate system ξ, η parallel to the original system x, y . Of course, C is chosen as the origin of this new system too. The coordinates of our points P in the new system are formed like in (4):

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - x_c; & \xi_2 &= x_2 - x_c; & \dots & \xi_n = x_n - x_c \\ \eta_1 &= y_1 - y_c; & \eta_2 &= y_2 - y_c; & \dots & \eta_n = y_n - y_c. \end{aligned} \quad (14)$$

In the following, our task is restricted to the finding of the azimuthal angle of that main axis of inertia which passes through C , and for which the momentum of inertia $\Theta = [pdd]$ is minimum. The relation defining the correct azimuthal angle is given below. Fig. 5 illustrates but one defining point P in the coordinate system ξ, η .

Let the azimuthal angle of some arbitrary assumed median be α . We have to know the perpendicular distance d of the point P from this median. It can be computed from the ξ and η coordinates of the point. This is in fact but a

coordinate transformation, which is illustrated by two hachured rectangular triangles in Fig. 4. Since:

$$PQ = \overline{PR} - \overline{QR} = \overline{PR} - \overline{MN}$$

$$d = \eta \cos a - \xi \sin a \quad (15)$$

its square:

$$d^2 = \eta^2 \cos^2 a - 2\xi\eta \sin a \cos a + \xi^2 \sin^2 a. \quad (16)$$

Thus the momentum of inertia of the whole set of points with respect to the median of the azimuthal angle a , will on applying (12), become

$$\Theta_{CE} = [p\eta\eta] \cos^2 a - [p\xi\eta] \sin 2a + [p\xi\xi] \sin^2 a. \quad (17)$$

We must find now that azimuthal angle a for which Θ_{CE} will be extreme. Consequently, we shall put the first differential quotient of (17) with respect to a equal to 0:

$$\frac{d\Theta_{CE}}{da} = -2[p\eta\eta] \sin a \cos a - 2[p\xi\eta] \cos 2a + 2[p\xi\xi] \sin a \cos a = 0. \quad (18)$$

Hence,

$$- [p\eta\eta] \sin 2a - 2[p\xi\eta] \cos 2a + [p\xi\xi] \sin 2a = 0. \quad (19)$$

Dividing by $\cos 2a$ and after reduction, we have finally

$$\tan 2\bar{a} = \frac{2[p\xi\eta]}{[p\xi\xi] - [p\eta\eta]}. \quad (20)$$

This important relation yields the optimum azimuthal angle of the "free" level drift in the centre system of coordinates ξ, η whose origin coincides with C . Since

$$\tan 2a = \tan (2a + 180^\circ) = \tan 2(a + 90^\circ) \quad (21)$$

for any angle a it is apparent that formula (20) gives in fact, two mutually perpendicular medians; the one $C - I$, is the axis of maximum momentum of inertia, whereas the other, $C - II$, represents the axis of minimum momentum of inertia of the point set. They form the principal axes of the "central ellipse of inertia" of the point set. They are also called central main axes.

In the following, the terms occurring in (20) will be substituted by shorter symbols, as per analogy with (5):

$$[p\xi\xi] = \bar{E}_c \quad [p\eta\eta] = H_c \quad [p\xi\eta] = \Phi_c, \quad (22)$$

where the suffix C refers to the centre of gravity, which is the origin of the coordinate system ξ, η .

Thus instead of (20) we have

$$\tan 2\bar{a} = \frac{2\Phi_c}{\Xi_c - H_c}. \quad (20a)$$

According to the Steiner's theorem, the three sums of products required for (20) can be formed immediately on the basis of the original x, y coordinates of the point set too:

$$\begin{aligned} \Xi_c &\equiv [p\xi\xi] = [pxx] - [p]x_c^2 \\ H_c &\equiv [p\eta\eta] = [pyy] - [p]y_c^2 \\ \Phi_c &\equiv [p\xi\eta] = [pxy] - [p]x_c y_c. \end{aligned} \quad (23)$$

In mechanics, the sums of products Ξ_c and H_c are called the momenta of inertia referring to the ξ, η system, whereas Φ_c is referred to as the centrifugal or deviation momentum. Substituting these into (20), the latter becomes identical with the formula given in [4], page 274:

$$\tan 2\bar{a} = 2 \frac{[pxy] - [p]x_c y_c}{[pxx] - [pyy] - [p](x_c^2 - y_c^2)}. \quad (24)$$

The extreme values of the sum of squares of deviations

The values of the maximum and minimum sums of squares $[pdd]$ with respect to the main axis, of which the minimum is of great significance from our point of view, can now be obtained, if the formula (20) is considered in (17). The latter, however, is transformed by the relations

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{and} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad (25)$$

in the following way:

$$\Theta_{cE} = \frac{1}{2} H(1 + \cos 2a) + \frac{1}{2} \Xi(1 - \cos 2a) - \Phi \sin 2a \quad (26)$$

wherefrom

$$\Theta_{cE} = \frac{H + \Xi}{2} + \frac{H - \Xi}{2} \cos 2a - \Phi \sin 2a \quad (27)$$

further, with the substitutions

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} \quad \text{and} \quad \sin 2\alpha = \frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}} \quad (28)$$

$$\Theta_{cE} = \frac{H + \Xi}{2} + \frac{(H - \Xi) - 2\Phi \cdot \tan 2\alpha}{2\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}. \quad (29)$$

The only task left is to substitute the value of $\tan 2\alpha$ obtained in (20), which substitution results in the two extreme sums of products, *i. e.* the maximum and the minimum momenta of inertia, characterizing the main axis system of the centre of gravity, of the azimuthal angles $\bar{\alpha}$ and $(\bar{\alpha} + 90^\circ)$, respectively

$$\Theta_{\min}^c = \frac{\Xi_c + H_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{H_c - \Xi_c}{2}\right)^2 + \Phi_c^2} \equiv \Theta_{II}^c \equiv [pdd]_{\min}^c \quad (30)$$

$$\Theta_{\max}^c = \frac{\Xi_c + H_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{H_c - \Xi_c}{2}\right)^2 + \Phi_c^2} \equiv \Theta_I^c \equiv [pdd]_{\max}^c. \quad (31)$$

There exists between these extreme values the well-known relationship also suitable for checking the results:

$$\Theta_I + \Theta_{II} = \Xi + H.$$

In accordance with this relation, the sum of the two Θ values referring to any two mutually perpendicular straight lines passing through the common point is constant.

The three tangent formulae for the simple entry azimuth

In spite of its simplicity, the relation (20), determining the optimal axis direction, has the disadvantage that it contains the *double* of the required azimuthal angle instead of directly giving the azimuth. The latter can be obtained from the well-known relation

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (32)$$

whence

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= -\frac{1}{\tan 2\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{\tan^2 2\alpha} + 1} = \\ &= \frac{\Xi_c - H_c}{2\Phi_c} \pm \sqrt{\left(\frac{\Xi_c - H_c}{2\Phi_c}\right)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (33)$$

The square root, having of course two values, we shall get, this time, too, the directional tangents of two mutually perpendicular straight lines. The root formula obtained in this way is, however, much more cumbersome than the one under (20). That is why we will develop two additional formulae for the directional tangents of the main axes.

As a starting point, let us apply the general expression introduced under (17) for the moment of inertia with respect to a median of the azimuthal angle.

$$\Theta = H_c \cos^2 a - 2\Phi_c \sin a \cos a + \Xi_c \sin^2 a. \quad (17a)$$

Let $\tan a = a$; hence,

$$\sin a = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{and} \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \quad (34)$$

Substituting, we have

$$\Theta = \frac{1}{1+a^2} (H_c - 2\Phi_c a + \Xi_c a^2). \quad (35)$$

Let us find the extreme value of Θ with respect to the directional tangent a , as the independent variable:

$$\frac{d\Theta}{da} = \frac{(1+a^2)(-2\Phi_c + 2\Xi_c a) - (H_c - 2\Phi_c a + \Xi_c a^2)2a}{(1+a^2)^2} = 0. \quad (36)$$

Dividing by $\frac{2}{1+a^2}$:

$$\Xi_c \cdot a - \Phi_c - \frac{H_c - 2\Phi_c a + \Xi_c a^2}{1+a^2} a = 0. \quad (37)$$

The directional tangent to be calculated herefrom determines the two main axes of inertia. The fraction in (37) gives — in accordance with (35) — the extreme inertia values $\Theta_I = \Theta_{\max}$ and $\Theta_{II} = \Theta_{\min}$, characterizing the mentioned central main inertia axes. Hence, according to (35) and (37) it follows:

$$\Xi_c \bar{a} - \Phi_c - \Theta_{I,II}^c \cdot \bar{a} = 0, \quad (38)$$

wherefore, the directional tangent of the main axes is:

$$\bar{a} = \tan \bar{a} = \frac{\Phi_c}{\Xi_c - \Theta_{I,II}^c} = \frac{[p\xi\eta]}{[p\xi\xi] - [pdd]_{I,II}}. \quad (39)$$

Another form of the directional tangents of the main axes of inertia may be derived also from (17):

$$\Theta = H_c \cos^2 a - 2\Phi_c \sin a \cos a + \Xi_c \sin^2 a,$$

Introducing the complement \varkappa of a , i. e.

$$\varkappa = 90^\circ - a, \quad (40)$$

giving rise to the substitutions $\cos a = \sin \varkappa$ and $\sin a = \cos \varkappa$, this expression can also be written in the following form:

$$\Theta = H_c \sin^2 \varkappa - 2\Phi_c \sin \varkappa \cos \varkappa + \Xi_c \cos^2 \varkappa. \quad (41)$$

In other words, this means, that the perpendicular distances given under (15) now assume the form

$$d = \eta \sin \varkappa - \xi \cos \varkappa. \quad (42)$$

Let us introduce the following abbreviation:

$$\tan \varkappa = i. \quad (43)$$

Thus $\sin \varkappa = \frac{i}{\sqrt{1+i^2}}$ and $\cos \varkappa = \frac{1}{\sqrt{1+i^2}}$.

Substituting these into (41), we have:

$$\Theta = \frac{1}{1+i^2} (H_c i^2 - 2\Phi_c i + \Xi_c). \quad (44)$$

This time we have to find likewise the extreme value of Θ with respect to i :

$$\frac{d\Theta}{di} = \frac{(1+i^2)(2H_c i - 2\Phi_c) - (H_c i^2 - 2\Phi_c i + \Xi_c) 2i}{(1+i^2)^2} = 0. \quad (45)$$

After dividing by $\{2 : (1+i^2)\}$ we obtain

$$H_c i - \Phi_c - \frac{H_c i^2 - 2\Phi_c i + \Xi_c}{1+i^2} i = 0. \quad (46)$$

The directional tangent $i = \tan \varkappa$ to be calculated from (46) characterizes that position of the principal axis of inertia at which the momentum of inertia given

by (44) assumes the extreme values $\Theta_I = \Theta_{\max}$ and $\Theta_{II} = \Theta_{\min}$. Using the latter, relation (46) will obtain the following form:

$$H_c \bar{i} - \Phi_c - \Theta_{I,II}^c \cdot \bar{i} = 0. \quad (47)$$

Or

$$\bar{i}(H_c - \Theta_{I,II}^c) - \Phi_c = 0.$$

Hence, considering (40) and (43):

$$\bar{i} = \frac{\Phi_c}{H_c - \Theta_{I,II}^c} = \tan \bar{\alpha} = \tan(90^\circ - \bar{\alpha}) = \frac{1}{\tan \bar{\alpha}}. \quad (48)$$

Thus, the directional tangent of the principal axis of inertia can be expressed also in the following form:

$$\tan \bar{\alpha} = \frac{H_c - \Theta_{I,II}^c}{\Phi_c}. \quad (49)$$

Although the expressions (39) and (40) seem to be more direct than expression (20), they are no better than that, since they yield a concrete numerical value for the directional tangent of the optimum axis only through the detour of first calculating Θ_{\min}^c out of (30), which is contained by both formulae.

Parallelism between the adjusted straight line and the optimum axis

Beside the possibility of checking, however, expressions (39) and (49) are nevertheless of some use enabling us to compare the minimum principal axis with the adjusted straight line defined by (7). More precisely: they afford a possibility to establish analytically the conditions of coincidence of the straight lines $C - II$ and $C_A - A$ in Fig. 1. According to Fig. 1, the discrepancy is due to two reasons: the different interpretation of both the centre of gravity and the directional tangent.

What is the condition for (2) and (10) giving identical coordinates of the centre of gravity C ? It is that in the expression (3) of the fictitious weights

$$p_{x_1} = p_{y_1} = p_1; p_{x_2} = p_{y_2} = p_2 \dots p_{x_n} = p_{y_n} = p_n$$

i. e. if the two coordinates which define a point, are equally reliable. This, however, is not at all unlikely in practice, either. In this case

$$q_1 = p_1(1 + \tan^2 \alpha_0); q_2 = p_2(1 + \tan^2 \alpha_0) \dots q_n = p_n(1 + \tan^2 \alpha_0). \quad (50)$$

The circle diagram shown at Fig. 6 serves the graphical comparison of the adjusted straight line defined by (7), with the principal axis as defined by expressions (20), (33), (39) and (49) as well as the comparison of the sums of squares of the corresponding deviation. According to these relations, the position of both straight lines is unequivocally determined with respect to the coordinate system chosen as basis, in the case the sums of products Ξ , H , Φ , enumerated under (5) and (23), are known. These sums of products refer to the chosen orthogonal coordinate system. The diagram is constructed by plotting $\pm\Phi$ against Ξ and H , respectively at a convenient scale. $\pm\Phi$ must thereby be plotted with the correct signs, *i. e.* parallel either to the positive or to the negative half of the abscissa axis. At present, the $\xi\eta$ system with the centre C , as the origin will be considered. Accordingly, in Fig. 6

$$\overline{C,1} = H = [p \eta \eta]; \quad \overline{1,2} = \Xi = [p \xi \xi]; \quad \overline{1,3} = \pm\Phi = \pm [p \xi \eta].$$

In the following, a circle is drawn over the diameter $\overline{C,2} = (H + \Xi)$, with the centre in M .

The construction of relation (20) by means of this circle will proceed as follows: The radius defined by points M and 3 will intersect the circle at point 4. Now the required drift axis is represented by the straight line drawn through points C and 4. Proof: in the triangle (3, M , 1) of Fig. 6

$$\tan 2\bar{\alpha} = \frac{\overline{1,3}}{\frac{\overline{1,2} - \overline{C,1}}{2}} = \frac{2\Phi}{\Xi - H}$$

in exact agreement with relation (20).

Relation (7) can be constructed in the same simple way. Let us draw the straight line connecting points 2 and 3. This will intersect the circle at point 6. The directional angle a_A of the straight line $C-6$ is obtained at once just as expression (7) stipulated by. Proof: the straight lines $C-6$ and $2-6$ are mutually perpendicular so that in the triangle (3, 2, 1)

$$\tan a_A = \frac{\overline{1,3}}{\overline{1,2}} = \frac{\Phi}{\Xi}.$$

The minimum of the sums of squares of the perpendicular deviations "d", *i. e.* $[pdd]_{\min}$ is represented by the section $\overline{3,4}$ of the radius.

Thus

$$[pdd]_{\min} = \overline{3,4}.$$

This value can be compared within the scope of the present diagram with the sums of squares of λ fictitious residuals $[q \lambda \lambda]_{\min}$ only, if all the values $x_i y_i$ can be regarded of equal accuracy, i. e. if $q_1 = q_2 = \dots q_n$. In this case, which is generally realized in practice, the value in question is represented by the distance $\overline{6,7}$. Thus

$$q[\lambda \lambda] = \overline{6,7}.$$

The proof for the construction of the two sums of squares has already been dealt with in detail in [6]; consequently, there is no need to go into that again.

The figure also permits the reading of the directional tangent of the front entry axis, as expressed by (39) since in the triangle (8, 2, 9)

$$\tan \bar{\alpha} = \frac{\overline{8,9}}{\overline{2,9}} = \frac{\overline{1,3}}{\overline{1,2} - \overline{3,8}} = \frac{\Phi}{\Xi - \Theta_{\min}}.$$

Relation (49) is also represented, since in the triangle (11, C, 10):

$$\tan \bar{\alpha} = \frac{\overline{10,11}}{\overline{C,10}} = \frac{\overline{10,3} - \overline{11,3}}{\overline{1,3}} = \frac{H - \Theta_{\min}}{\Phi}.$$

Thus, the diagram of Fig. 6 seems to present the parallelism between the free level drifts as defined by the aforesaid two principles and between the sums of squares therefrom derived more lucidly, than the corresponding analytical relation.

Since the sums of squares are invariably positive, it is obvious on the basis of the comparison of (7) and (39), and still more so on basis of Fig. 6, that in practice the absolute value of (39) will be greater throughout; or, in other words, the adjusted straight line will lie within the acute angle subtended by the abscissa axis on the one hand and by the axis of the entry, as the principal axis of inertia, on the other.

In the course of deriving relations (10) to (51) we have expounded all the points connected with "free" level drifts. Thus the discussion of Alternative A. is considered as completed.

Alternative B): Determination of the fixed level drift

In the case named in the title the front entry to be set along the strike, is fixed by a given origin. For brevity's sake we shall speak of a "fixed" *front entry* only. Beside the constraint represented by the given origin, there prevails unchanged the requirement, that the level drift should fit a given seam as closely as possible.

This time, we shall also assume that at the altitude z_0 of the fixed point F , we know a number n of points of the seam, to be denoted $P_1, P_2 \dots P_n$, given by their plane coordinates $x_1y_1; x_2y_2; \dots x_ny_n$. In their entity, these points determine an artificial strike.

First of all, it is practical to translate the coordinate system x, y in such a way that the origin of the new system x', y' lie at the fixed point F of the level drift. The coordinates of our defining points P_i will be denoted in the new system: $x'_i y'_i$.

Since one of the points of the level drift F , had already been fixed, our task is reduced to the determining of the most favourable azimuthal angle \bar{a} of the drift axis.

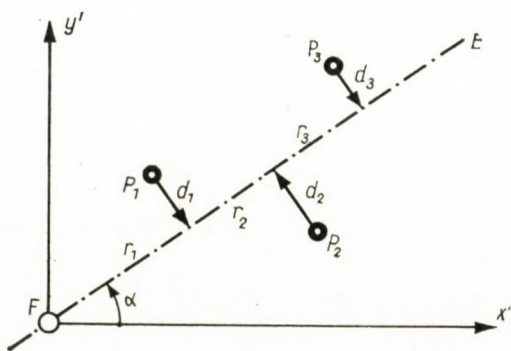


Fig. 7

There stands nothing in the way of applying the former principle, according to which the sum of squares of the perpendicular deviations "d" of the defining points as related to the optimum axis through F , must be minimum. In other words, it is not the axis passing through the centre of gravity of the set of points we are interested in, but the principal axis of minimum inertia which passes through the origin F . However, to illuminate this problem from several sides, we shall re-state our starting principle in a different way, but nonetheless in a form lending itself for mechanical interpretation. According to Fig. 7, the position of our given points $P_1, P_2 \dots P_n$ on the required optimum straight line $F - E$ can be determined as related to the origin F by means of the orthogonal coordinates $r_1, d_1; r_2, d_2, \dots r_n, d_n$, which — as had been already shown in Fig. 5 — depend on the azimuthal angle a of the level drift axis in the following way:

$$d_i = y'_i \cos a - x'_i \sin a \quad (52)$$

$$r_i = x'_i \cos a + y'_i \sin a. \quad (53)$$

Let us follow now the following line of thought: the forces

$$p_1 d_1; p_2 d_2; \dots p_n d_n,$$

proportional to the deviations exert — at the positions $P_1 P_2 \dots P_n$ torques of the lever arms

$$r_1, r_2, \dots r_n$$

around the fixed point F . On opposite sides of the $F - E$ axis, the direction of the forces is opposite. By $p_1, p_2, \dots p_n$ there are denoted constant weight parameters, which, however are not characterized more closely for the time being.

Taking into consideration expressions (52) and (53), the static momentum of any force with respect to the fulcrum F can be expressed in the following way:

$$\begin{aligned} p_i d_i r_i &= p_i (y'_i \cos a - x'_i \sin a) (x'_i \cos a + y'_i \sin a) = \\ &= p_i x'_i y'_i \cos^2 a - p_i x_i'^2 \sin a \cos a + p_i y_i'^2 \sin a \cos a - p_i x'_i y'_i \sin^2 a = \\ &= p_i x'_i y'_i (\cos^2 a - \sin^2 a) - \frac{1}{2} (p_i x_i'^2 - p_i y_i'^2) \sin 2a = \\ &= p_i x'_i y'_i \cos 2a - \frac{1}{2} (p_i x_i'^2 - p_i y_i'^2) \sin 2a. \end{aligned} \quad (54)$$

The azimuthal angle of the optimum $F - E$ axis, fixed by point F , will now be determined by the condition that the momenta of the n forces acting be in equilibrium, *i. e.*

$$M = [pd \cdot r]_i^n = 0. \quad (55)$$

Accordingly performing the summation we have

$$[px' y'] \cos 2a - \frac{1}{2} ([px' x'] - [py' y']) \sin 2a = 0. \quad (56)$$

Hence the expression of the optimal azimuthal angle, in accordance with [4], page 272:

$$\tan 2\bar{\alpha} = \frac{2[px' y']}{[px' x'] - [py' y']} = \frac{2\Phi_F}{\Xi_F - H_F} \quad (57)$$

where, analogously to the expressions (23), we have introduced the following shorter symbols:

$$\Xi_F = [px' x'], H_F = [py' y'], \Phi_F = [px' y']. \quad (58)$$

Thus, on the basis of the momentum theorem, we have obtained a relation for the azimuthal angle of the *fixed* level drift which is of the same structure as the relation characterizing the principal axis of inertia of the defining point set with respect to point F . In this case, however, the coordinates of the points are to be measured from the fixed point F , instead of the centre C of the system as indicated by the suffixes of the symbols used in (58).

*

The momentum theorem given as formula (55) could have been used for determining the axis of the free level drift as well. In this case, however, we should have added the other two fundamental equations of statics:

$$[pd \cos a] = [pd] \cos a = 0 \quad \text{and} \quad [pd \sin a] = [pd] \sin a = 0. \quad (59)$$

That means that the acting forces pd must be resolved each into two perpendicular components. The algebraic sum of the force components of identical direction must equal zero if the force system is to be in equilibrium. From (59) it is obvious that $[pd] = 0$, *i. e.* the forces acting must themselves form a system in equilibrium. In other words, according to (59) the required drift axis must be one of the medians of the defining point set, *i. e.* the drift axis must pass through its centre of gravity. It is therefore expedient to write up the momentum theorem (55) for this centre C . This leads to relation (56) again, with, however the difference that the ξ, η coordinates of the central system would occur instead of $x'y'$; *i. e.*:

$$[p\xi\eta] \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \left([p\xi\xi] - [p\eta\eta] \right) \sin 2\alpha = 0. \quad (56c)$$

It is apparent, therefore, that from this expression we would obtain invariably the result (20).

*

Thus the direction of the optimum axis of the given point set, if the axis has to pass through the fixed point F , is determined by relation (57). Also, the momentum of inertia of the set of points is least with respect to this axis, of all the axes passing through F . It is apparent that the axis of maximum momentum will be perpendicular to this one. The minimum axis, being the subject of our interest, can be calculated as per analogy to (30), *i. e.*:

$$\Theta_{\min}^F = \frac{\Xi_F + H_F}{2} - \sqrt{\left(\frac{H_F - \Xi_F}{2} \right)^2 + \Phi_F^2}. \quad (60)$$

This, however, is no longer an absolute minimum, only a relative one, since — owing to the constraint of passing through F — the $F - II_F$ axis will not coincide with the central principal axis $C - II$; it need not be even parallel to it. In other words: the entry axis $F - II$ does not as a rule, include the centre of gravity C of the defining point set, as seen on Fig. 8. Thus the inequality

$$\Theta_{\min}^F > \Theta_{\min}^C \tag{61}$$

prevails, meaning that the fitting of a fixed level drift to the defining set of points is less accurate than that of a free drift.

The expressions (33), (39) and (49) of the directional tangents can be

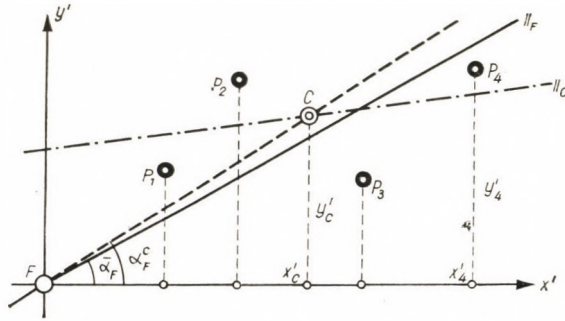


Fig. 8

applied to our straight line $F - II$, too, using of course, the appropriate sums of products: Σ_F, H_F, Φ_F , i. e. :

$$\tan \bar{\alpha}_F = \frac{\Sigma_F - H_F}{2\Phi_F} \pm \sqrt{\left(\frac{\Sigma_F - H_F}{2\Phi_F}\right)^2 + 1} \tag{62}$$

$$\tan \bar{\alpha}_F = \frac{\Phi_F}{\Sigma_F - \Theta_{11}^F} = \frac{H_F - \Theta_{11}^F}{\Phi_F} \tag{63}$$

Notwithstanding, an arrangement of the defining point set $P_1P_2 \dots P_n$, for which the central main axis $C - II$ happens to pass through the fixed point F , i. e. the main axes $F - II_F$ and $C - II_C$ of Fig. 8 coincide, is by no means impossible in principle.

In the exceptional case, the equality

$$\Theta_{11}^F = \Theta_{11}^C \tag{64}$$

holds, and consequently,

$$\tan \bar{\alpha}_F = \tan \bar{\alpha}_C \tag{65}$$

and hence, according to (39), (49) and (63),

$$\frac{\Phi_F}{\Xi_F - \Theta_{II}^F} = \frac{\Phi_c}{\Xi_c - \Theta_{II}^c} \quad (66)$$

and also

$$\frac{H_F - \Theta_{II}^F}{\Phi_F} = \frac{H_c - \Theta_{II}^c}{\Phi_c} \quad (67)$$

Let us now investigate the relation (66) after having substituted $\Theta_{II}^F = \Theta_{II}^c = \Theta_{II}$; in accordance with Steiner's theorem, given under (13), the relation (66) can be expressed in the following way, too:

$$\frac{\Phi_c + [P] x'_c y'_c}{\Xi_c + [P] x_c'^2 - \Theta_{II}} = \frac{\Phi_c}{\Xi_c - \Theta_{II}} \quad (68)$$

Removing the fractions:

$$\Xi_c \Phi_c + [P] \Xi_c x'_c y'_c - \Phi_c \Theta_{II} - [P] \Theta_{II} x'_c y'_c = \Xi_c \Phi_c + [P] \Phi_c x_c'^2 - \Phi_c \Theta_{II}$$

After abbreviations and reductions:

$$(\Xi_c - \Theta_{II}) y'_c = \Phi_c x'_c \quad (69')$$

Or in the form of a proportion

$$\frac{\Phi_c}{\Xi_c - \Theta_{II}^c} = \frac{y'_c}{x'_c} \quad (69)$$

The conclusion is: the mathematical condition of the F -axis' passing also C centre is the realisation of proportion (69) obtained above. According to (67) this can also be expressed in the following form:

$$\frac{H_c - \Theta_{II}^c}{\Phi_c} = \frac{y'_c}{x'_c} \quad (70)$$

Proportions (69) and (70) can be read without any deductions from Fig. 8.

In this connection, let us point out that in [2] the following comment is read with regard to relation (2) of that paper: "We are however, of the opinion, that (instead of $\Sigma dd = \text{minimum}$) it would be much more practical to express the optimal site of the level drift by the condition $\Sigma d = 0$." Thus, in the opinion of the author of [2] the axis of the level drift is determined at once by the fixed point F and by the centre C of the defining point set. In the

light of our relations (60)—(70) and of the explanations connected therewith, this view is not strictly exact. Practically, however, the siting of the drift starting from F , according to

$$\tan \bar{\alpha}_{Fc} \cong \frac{y'_c}{x'_c} \quad (71)$$

may result in an entirely satisfactory approximation [4], page 273.

* * *

It is to be noted here, that the directional tangent of the straight line connecting points F and C is not altered if the fixed point F is also involved — together with the point set $P_1, P_2 \dots P_n$ — into the formation of the centres coordinates x'_c and y'_c according to (10). Thus the following relation is valid:

$$\tan \alpha_{FC} = \frac{[py']}{[px']} = \frac{[py'] + y_F}{[px'] + x_F}. \quad (72)$$

The centre of the set including F would only be shifted from C towards F along the connecting straight line, the ratio of the two distances being: $(p_F : [p])$.

Analogies in the other fields of natural science

We may come across the relation (57) of the tangent of the double azimuthal angle in several fields of science. For instance, in mathematics in connection with the analysis of the general quadratic, in adjustment calculation in connection with the main axes of the error ellipse; in higher geodesy in connection with the azimuths of the main radii of curvature prevailing at a certain point of the level surface, and in statics we meet it not only in connection with the determination of the main axes of inertia, but also when defining the directions of the principal stresses. A formula of the same structure is found in §. 108 of the book [5].

The taking into consideration of local deviations of the strike

So far, we have tacitly assumed that in every point P_i of the defining point set there prevails a strike identical with the general strike to be obtained in the discussed way. This ideal case is illustrated by the thin lines P_1a, P_2b, P_3c of Fig. 9. All of them are parallel to the main strike direction, of the azimuth α . Since, however, in agreement with one of our above statements, the seam or bed does not represent a geometric plane, it is obvious that the constant strike

direction is a somewhat idealized image of reality. It will be much closer to validity if we assume right at the beginning that at the different points $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$, there occur local strike directions of different azimuthal angles $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$. These angles can be determined *e. g.* in the case, when in the neighbourhood there already exists another drift, to the strike we have an exploited area, by means of which the actual strike direction can be determined from point to point. However, in this case there arises the justified requirement that when fixing the axis of the entry, not only the deviations

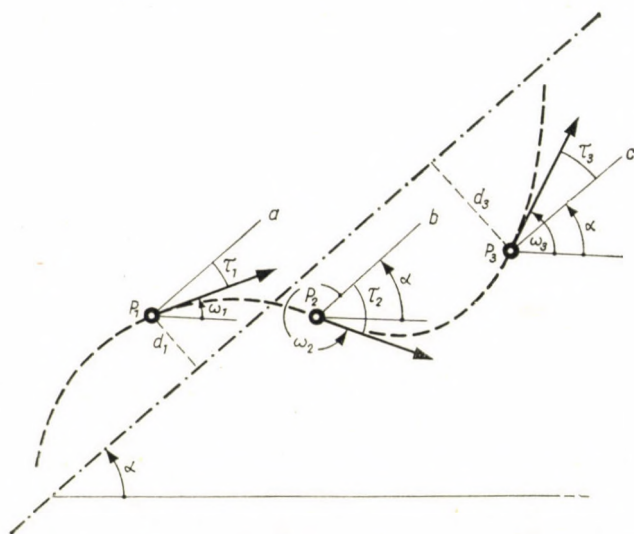


Fig. 9

$d_1, d_2 \dots d_n$ of the defining points, but also the local strike directions $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ be taken into proper consideration. In Fig. 9 the local directions are indicated by thicker arrows. The supposed actual strike is symbolized by a dashed curve.

The influence of the local strike directions on the direction of the drift axis can be taken into consideration by means of the weights $p_1, p_2 \dots p_n$ of the defining points. Up to now, these have not yet been defined. The point at which the azimuthal angle of the local strike ω_i is identical with the azimuthal angle a to be determined, is attributed optimum weight. The greater the deviation of a local azimuthal angle ω_i from a , the less the significance attributable to the point position in question. Finally, $\omega = (a \pm 90^\circ)$, *i. e.* where the local strike is perpendicular to the general strike direction, the weight of the point is considered to be 0, and the point itself is considered as non-existent.

This aspect, however, means that the weights p_i can no longer be treated as constant factors, but as functions of the drifts azimuthal angle a which is

to be determined. Let us denote the deviation of the local strike from the general one by $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n$. Thus according to Fig. 9

$$\tau_1 = \alpha - \omega_1; \quad \tau_2 = \alpha - \omega_2; \quad \dots \tau_n = \alpha - \omega_n \quad (73)$$

where not the sign, but the absolute value of τ is competent. Then, the weight of any defining point can be expressed in the following way:

$$p_i = F(\tau_i) = F(\alpha - \omega_i). \quad (74)$$

In consequence, the value of the weight function for two perpendicular directions of the local strike is known. If the deviation of direction, $\tau = 0$, the relative weight of the defining point is accepted to be $p = 1$. With increasing absolute values of the angle deviation, the weight of the point will continuously decrease, until at $\tau = 90^\circ$ the weight p will be 0. Though we do not know anything else about the required weight relation, it seems to be practical to assume a trigonometric function. The simplest possibility would be a cosine function, since

$$p = \cos \tau \quad (75)$$

and all its positive powers

$$p = \cos^2 \tau, p = \cos^3 \tau, \dots \quad (76)$$

satisfy the two established extreme values.

But the same is true also of the weighting

$$p = (1 - \sin \tau) \quad (77)$$

(see [5] §. 109) and of its powers:

$$p = (1 - \sin \tau)^2, \dots p = (1 - \sin \tau)^m. \quad (78)$$

The aforesaid conditions are also met by relations

$$p = \cot \left(45^\circ + \frac{\tau}{2} \right) \quad (79)$$

and

$$p = \cot^2 \left(45^\circ + \frac{\tau}{2} \right), \dots p = \cot^n \left(45^\circ + \frac{\tau}{2} \right). \quad (80)$$

The enumerated weight relations, however, are of very different sensitivity, for a given value of τ . This is shown on Fig. 10. The figure was constructed

in the following way: from 0° to 90° we plotted the appropriate p -function values against the different $\tau = a - \omega$ angles. As it can be seen from the figure, the weighting according to $\cos \tau$ or even to $\cos^2 \tau$ is insensitive to the comparatively smaller direction deviations of about $10\text{--}20^\circ$ from the main strike direction. The weight functions $(1 - \sin \tau)$ and $\cot \left(45^\circ + \frac{\tau}{2}\right)$ reduce more considerably whereas the weighting according to $\cot^2 \left(45^\circ + \frac{\tau}{2}\right)$ and

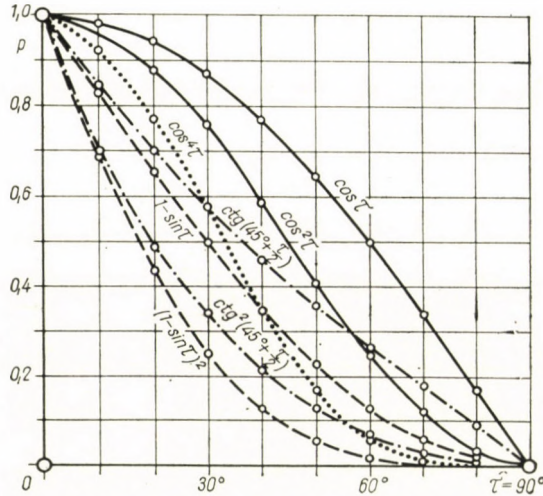


Fig. 10

especially according to $(1 - \sin \tau)^2$ reduce radically the influence of the corresponding deviations “d” upon the final direction of the drift, even at slighter deviations of direction τ . The weight function $(1 - \sin \tau)^2$ for instance, has on Fig. 10 a value of $p = 0,69$ at $\tau = 10^\circ$, thus $\sqrt{p} = 0,83$, i. e. at a strike direction deviation of 10° prevailing at the point P_i in question, it permits 83% of the distance “d” to act ($[pdd] = [\sqrt{p} \cdot d \cdot \sqrt{p} \cdot d]$).

At $\tau = 50^\circ$, $p = 0,05$, $\sqrt{p} = 0,22$, whereas at $\tau = 60^\circ$, $p = 0,02$, $\sqrt{p} = 0,14$, i. e. at $\tau = 50^\circ$ only 22%, at 60° only 14% of the local deviations d is considered, so that finally, this weight function excludes such points from the determination of the entry direction at which the local strike direction diverges from the general strike direction a by an angle $\tau = 70^\circ$ or more.

In case we accepted the weight formula $\cos^2 \tau_i = \cos^2 (a - \omega_i)$ which seems to be much more simple, the azimuthal angle of the fixed drift axis had to be obtained from the minimum of the relation

$$[pdd] = [\cos^2 (a - \omega_i) (y'_i \cos a - x'_i \sin a)^2]. \tag{81}$$

In possession of the weights, the azimuthal angle a is going to be given by expression (20) in the case of a free level drift, also in the case of local strike deviations, whereas in the case of a fixed level drift the angle is invariably supplied by relation (57).

*

In addition to what has been discussed under (74)—(87) we should like to point out the following: The weighting of the values of the defining points according to the different local strike directions gives the possibility of taking into consideration all points P of known coordinates of the artificial strike. It enables us to consider even points at which the local strike direction diverges very intensively from the average strike, due to structural grabens, or horsts. There is no need therefore either to neglect some defining points from our calculations upon individual judgement or to attribute to them an exaggerated influence.

REFERENCES

1. ZAMBÓ, J.: Az irányvágatok telepítése. (The Location of Level Drifts.) Bányászati Lapok, No. 6., 1957.
2. SÜTTI, J.: Az irányvágatok kitzzési szögének meghatározása. (The Determination of the Azimuth of Level Drifts.) Bányászati Lapok, No. 3., 1960.
3. RICHTER, R.: Megjegyzések Sütti J.: "Az irányvágatok kitzzési szögének meghatározása" c. cikkéhez. (Comments on J. Sütti's Study: "The Determination of the Azimuth of Level Drifts"). Bányászati Lapok, No. 3. 1960.
4. ZAMBÓ, J.: Bányászati telepítések analitikája. (Analytics of the Siting of Mining Works.) Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960.
5. VON MILLER-HAUENFELS, A.: Höhere Markscheidekunst. Verlag, Tender & Co. Wien, 1868.
6. MILASOVSKY, B.: Über die exakte Bestimmung der ausgleichenden Geraden. Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Bánya- és Kohómérnöki Osztály Közleményei, Sopron. Vol. XV. 1943. p. 284—322.
7. MILASOVSKY, B.: A Parallel between the Adjusted Straight Line and the Main Inertia Axis of a Plane Point Set. Reprint from Publications of the Faculties of Mining and Geotechnics, XX. Volume, 1959, Technical University Faculties, Sopron, Hungary.

SUMMARY

In mining, by level drift we mean a straight adit the primary aim of which is the removal of the mineral and the air supply. The most favourable location of the head and direction of the level drift is of great significance both technically and economically.

Since beds do not, as a rule, represent a regular plane in the geometric sense of the word, the positions of points determining the strike of the bed, as given by borings, have to be considered as fixed for technical results under the given unalterable natural circumstances.

Whatever dispersion the defining points might have, it will always be justified to establish the axis of the drift on the basis of the $[pdd]$ -minimum condition applying to the perpendicular d deviations. The drift axis thus defined is at the same time the axis of minimum momentum of inertia of the defining point set.

The principle of equilibrium of the torques of plane forces likewise yields the $[pdd]$ -minimum principle.

A mathematically exact consideration of the local deviations of the strike direction when determining the direction of the drift, results in cumbersome and highly impractical relations. Therefore it is recommended to take these into consideration as per relations (85) — (87).

THEORETISCHE FRAGEN DER AUSLEGUNG VON RICHTSTOLLEN

B. MILASOVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Unter Richtstollen versteht man im Bergbau eine in gerader Linie vorgetriebene Strecke, deren Aufgabe in erster Linie der Abtransport des Minerals sowie die Bewetterung ist. Die optimale Bestimmung der Lage und der Richtung des Richtstollens ist sowohl vom technischen als auch vom wirtschaftlichen Standpunkt von großer Wichtigkeit.

Da die Lagerstätten im allgemeinen nicht regelmäßige Ebenen im Sinne der Geometrie sind, müssen im allgemeinen jene Tiefbohrungen, welche das Streichen der Lagerstätten bestimmen, als technische Gegebenheiten unter unabänderlichen natürlichen Bedingungen behandelt werden.

Wie groß immer auch die Streuung der festgelegten Punkte sei, wird es immer angezeigt sein, die Achse des Stollens auf Grund des Prinzips des Minimums [*pdd*] der lotrechten Abweichungen *d* festzulegen. Die so definierte Stollenachse ist zugleich die Achse des minimalen Trägheitsmoments des Punktsystems.

Das Prinzip des Gleichgewichts der Drehmomente der ebenen Kräfte führt ebenfalls auf das [*pdd*]-Prinzip. Die Berücksichtigung der lokalen Abweichungen des Streichens in mathematisch korrekter Form führt auf schwerfällige und unpraktische Beziehungen für die Bestimmung der Stollenrichtung. Deshalb wird empfohlen, diese Abweichungen gemäß den Gl. (85) — (87) zu berücksichtigen.

QUESTIONS THÉORIQUES DU PERCEMENT DES GALERIES DE DIRECTION

B. MILASOVSKY

RÉSUMÉ

Dans les mines, on entend par «galerie de direction» des galeries droites servant en premier lieu au transport du minerai et à la ventilation. L'emplacement et la direction optimum de la galerie de direction sont d'une importance primordiale, du point de vue technique aussi bien que du point de vue économique.

Étant donné que les gîtes ne constituent pas, en général, des plans réguliers dans le sens de la géométrie, il faut traiter en général les sondages déterminant le chassage du plan du gîte, comme les résultats de données techniques de conditions naturelles inchangeables.

Quelle que soit la dispersion des points déterminés, il sera toujours justifié de fixer l'axe de la galerie suivant le principe du minimum *pdd* des écarts normaux *d*. L'axe de la galerie ainsi défini est en même temps l'axe du moment d'inertie minimum du système des points. Le principe de l'équilibre des couples plans conduit aussi au principe des *pdd*.

La considération des déviations locales du chassage sous forme mathématique exacte conduit à des relations compliquées et peu pratiques. Pour cette raison, il est recommandé de considérer ces écarts selon les relations (85) — (87).

ПРИНЦИПАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ЗАЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ШТРЕКОВ

Б. МИЛАШОВСКИ

РЕЗЮМЕ

В горном деле под главными штреками подразумеваются такие корридоры, перво-степенной целью которых является откатка добытой руды, а также вентиляция. Большое значение имеет, как в техническом, так и в экономическом отношении, оптимальное заложение места и направления главного штрека.

Так как залегающие пласты не представляют собою в геометрическом смысле правильную плоскость, то разведочные бурения, которые определяют простирание плоскости пласта, должны рассматриваться как позиции точек, вообще как результаты технических привязок при неизменяемых природных условиях.

Независимо от разброса определенных точек, во всех случаях будет обоснованным фиксировать ось главного штрека на основе принципа минимума отклонений. Таким образом, определенная ось штрека является одновременно и осью минимального инерционного момента системы точек.

Принцип равновесия вращательных моментов плоскостных сил приводит также к принципу [*pdd*].

Математически строгий учет локального отклонения простирания при определении направления штрека является затруднительным и приводит к непрактическим зависимостям. Поэтому последние рекомендуется учитывать на основе зависимостей (85) — (87).

SOME SOLUTIONS IN CLOSED FORM OF PROBLEMS ON TORSION

P. CSONKA
D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF BUILDING SCIENCES OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received October 14, 1960]

The solution in closed form of the problem on torsion of an elastic prismatic bar is only known for some particularly simple cross sections. Some of these cross sections having finite dimensions are the following (Fig. 1): the

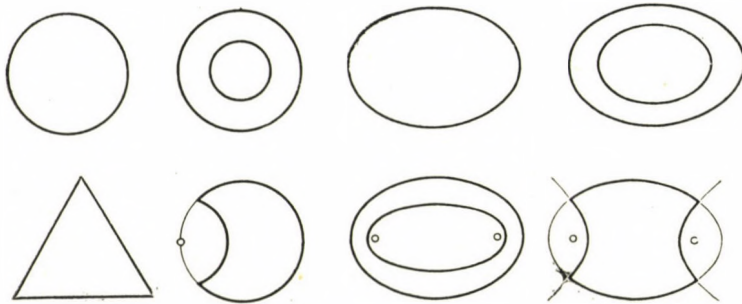


Fig. 1

circle and the annulus, as well as their affined transformatives; the figures bordered by confocal ellipses or hyperbolae, respectively; the circular cross section weakened by a circular arc-like formed notch, and finally, the equilateral triangle.

In the following several forms of cross sections having finite dimensions, bordered by one hyperbolic arc and one or two straight lines, or by more than one hyperbolic arc will be shown; in all these cases the solution of the torsional problem can also be produced in a closed form. The letter symbols figuring in the formulae to be presented have the following meaning: M is the torque moment, G is the modulus of elasticity in shear, ϑ is the angle of twist per unit length, $F = F(x, y)$ is the stress function of torsion, τ_{zx} and τ_{zy} are the x and y directed components of the shearing stress arising on the cross section. Between these stress components and the stress function the following relations hold:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

1. Cross section bordered by one hyperbolic arc and one straight line

The asymptotes of the hyperbolic arc intersect the real axis at an angle of 30° . The bordering straight line is parallel to the imaginary axis of the hyperbola (Fig. 2).

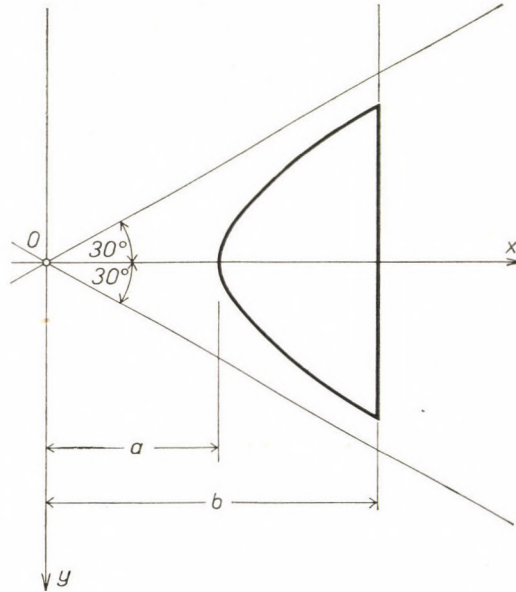


Fig. 2

The equation of the hyperbolic arc is

$$x^2 - 3y^2 - a^2 = 0,$$

while that of the bordering straight line is

$$x - b = 0, \quad b > a.$$

The stress function of the torsion has the form:

$$F = -\frac{G\vartheta}{2b}(x^2 - 3y^2 - a^2)(x - b).$$

If $a = 0$, the cross section in question is transformed into an equilateral triangle.

Remark: Although the solution of the above problem is known from the literature [8], it seemed to be expedient to mention this task also here, for the sake of completeness.

2. Cross section bordered by two hyperbolic arcs

The two hyperbolae have a common centre and a common real axis. The angles between the asymptotes and the real axis of the first hyperbola, as well as that between the asymptotes and the imaginary axis of the second hyperbola are equally 22.5° (Fig. 3).

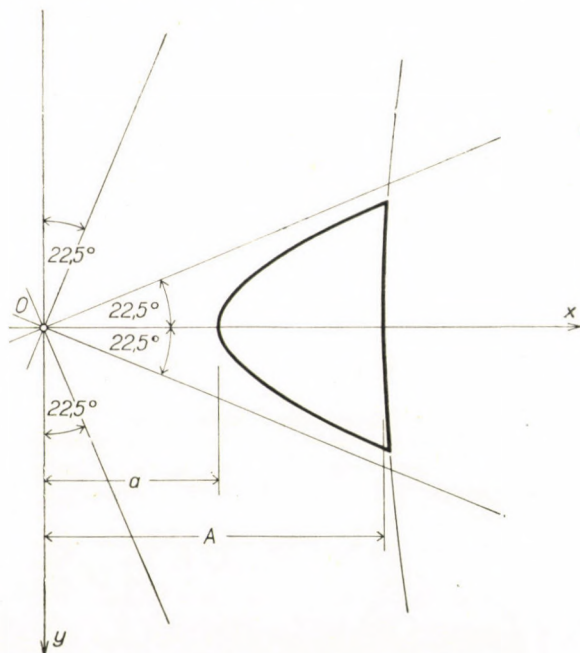


Fig. 3

The equations of the two hyperbolic arcs are

$$x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2} - 1} \right)^2 - a^2 = 0,$$

and

$$x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 - A^2 = 0,$$

respectively, while the stress function of the torsion takes the form

$$F = -\frac{G\vartheta}{2K} \left[x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2} - 1} \right)^2 - a^2 \right] \left[x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 - A^2 \right],$$

where

$$K = -\frac{a^2}{\sqrt{2} + 1} + \frac{A^2}{\sqrt{2} - 1}.$$

3. Cross section bordered by one hyperbolic arc and two straight lines

The cross section to be dealt with is a particular case of the cross section discussed in paragraph 2. This particular case comes into being if $a = 0$.

The two straight lines bordering the cross section intersect each other at the centre of the hyperbola, the angle between them and the real axis of the hyperbola is 22.5° . The asymptotes of the hyperbola and its imaginary axis intersect each other at an angle of 22.5° (Fig. 4).

The equation of the hyperbolic arc is

$$x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2} + 1} \right)^2 - A^2 = 0,$$

the pair of straight lines bordering the cross section, on the other hand, is determined by the equation

$$x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2} - 1} \right)^2 = 0.$$

In this case the stress function of the torsion has the form

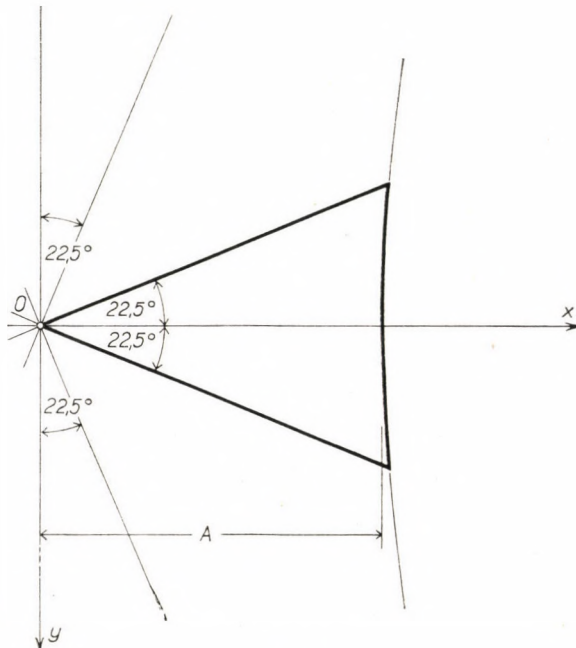


Fig. 4

$$F = -\frac{G\theta}{2K} \left[x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}-1} \right)^2 \right] \left[x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}+1} \right)^2 - A^2 \right],$$

where

$$K = \frac{A^2}{\sqrt{2}-1}.$$

4. Cross section bordered by four hyperbolic arcs

The four hyperbolic arcs are formed by the two branches of two hyperbolae. The axes of symmetry of the two hyperbolae are common, their real axes are normal to each other. The asymptotes intersect the real, as well as the imaginary axes at an angle of 22.5° (Fig. 5).

The equations of the two hyperbolae are

$$x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}+1} \right)^2 - A^2 = 0,$$

and

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}+1} \right)^2 - y^2 + B^2 = 0,$$

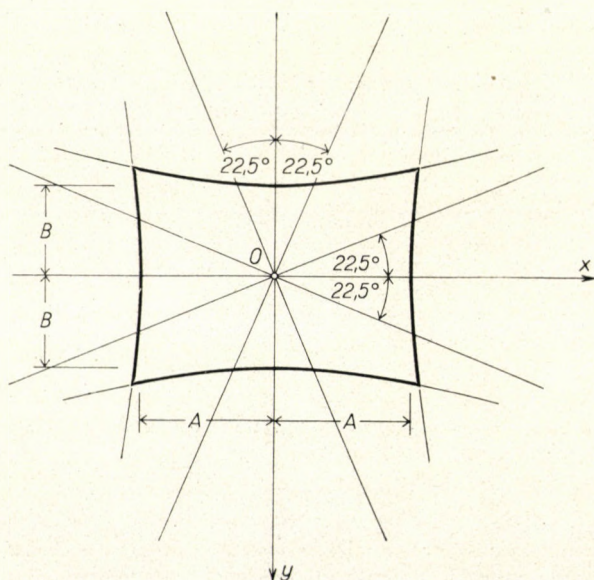


Fig. 5

respectively. In the present case the stress function of the torsion becomes

$$F = -\frac{G\vartheta}{2K} \left[x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2+1}} \right)^2 - A^2 \right] \left[\left(\frac{x}{\sqrt{2+1}} \right)^2 - y^2 + B^2 \right],$$

where

$$K = \frac{A^2 + B^2}{\sqrt{2+1}}.$$

REFERENCES

1. FÖPPL, A.—FÖPPL, L.: Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure, 2. Bd. München—Berlin, Oldenburg (1920).
2. WEBER, C.: Die Lehre der Drehungsfestigkeit (*Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens* Heft 249.) Berlin, Verlag des Vereines deutscher Ingenieure (1921).
3. GEIGER, H.—SCHEEL, K.: Handbuch der Physik, Band 6. Mechanik der elastischen Körper. Berlin, Verlag von Julius Springer (1928).
4. TIMOSHENKO, S. P.: Theory of Elasticity, New York and London, McGraw-Hill Book company, Inc. (1934).
5. ROARK, R.: Formulas for Stress and Strain. 2nd Ed. New York and London, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1943).
6. L'HERMITE, R.: Résistance des Matériaux. Tome 1. Théorie de l'Élasticité et des Structures Élastiques, Paris, Dunod (1954).
7. WEBER, C. und GÜNTHER, W.: Torsionstheorie, Braunschweig-Vieweg, Berliner Akademischer Verlag (1958).
8. YEH KAI-YUAN: The Chinese Journal of Physics 9 (1953), pp. 225—274.

SUMMARY

The solution of the torsional problem of an elastic prismatic bar in a closed form is known only for some simple cross sections. The writer presents in addition to the ones already known some cross sections for which the solution of the torsional problem can also be produced in a closed form. The bordering lines of these cross sections are:

1. one hyperbolic arc and one straight line,
2. two hyperbolic arcs,
3. one hyperbolic arc and two straight lines,
4. four hyperbolic arcs.

In the cases dealt with the stress function of the problem is a rational unbroken function of the third or the fourth degree, respectively.

The published formulae can be used expediently for the solution of analogous problems of hydrodynamics and other tasks.

EINIGE LÖSUNGEN DES TORSIONSPROBLEMS IN GESCHLOSSENER FORM

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Die Lösung des Torsionsproblems eines elastischen prismatischen Stabes ist in geschlossener Form nur für einige einfache Querschnitte bekannt. Der Verfasser gibt — außer den schon bekannten — weitere Querschnitte an, für die die Lösung des Torsionsproblems in geschlossener Form dargestellt werden kann. Die Umgrenzungslinie dieser Querschnitte bilden:

1. einen Hyperbelbogen und eine Gerade,
2. zwei Hyperbelbögen,
3. einen Hyperbelbogen und zwei Geraden,
4. vier Hyperbelbögen.

In den behandelten Fällen ist die Spannungsfunktion des Problems eine rationale ganze Funktion dritten bzw. vierten Grades.

Die mitgeteilten Formeln können auch zur Lösung analoger Strömungs- und anderer Aufgaben zweckmäßig verwendet werden.

QUELQUES SOLUTIONS FINIES DU PROBLÈME DE TORSION

P. CSONKA

RÉSUMÉ

La solution finie du problème de torsion de la barre prismatique élastique n'est connue que pour quelques sections simples. L'auteur présente quelques autres sections pour lesquelles la solution finie du problème de torsion peut être obtenue. Les contours des sections sont les suivants:

- 1) un arc d'hyperbole et une droite,
- 2) deux arcs d'hyperbole,
- 3) un arc d'hyperbole et deux droites,
- 4) quatre arcs d'hyperbole.

Dans les cas examinés, la fonction de tension du problème est un polynôme du troisième, resp. du quatrième degré.

Les formules présentées peuvent également s'utiliser pour la solution de problèmes analogues hydrodynamiques et autres.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМКНУТЫЕ ПО ФОРМЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ КРУЧЕНИЯ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Замкнутое по форме решение проблемы кручения упругого призматического стержня известно всего лишь в случае нескольких простых сечений. Автор (кроме известных уже сечений) иллюстрирует ряд дальнейших таких сечений, в случае которых можно решить проблему сечения в закрытой форме. Пределом этих профильных сечений являются:

1. Гиперболическая дуга и прямая
2. Две гиперболические дуги
3. Гиперболическая дуга и две прямые
4. Четыре гиперболические дуги

В рассмотренных случаях функция напряжения проблемы представляет собою рациональную полную функцию третьего и соответственно четвертого порядка.

Приведенные формулы целесообразно использовать также для решения аналогичных задач движения потока и прочих.

A METHOD FOR CALCULATING THE CONTOUR OF A CIRCULAR FORM TOOL BY THE LAW OF SECANTS

B. SZÓKE

[Manuscript received November 23, 1960]

For a circular form tool not only the *relief angle* α , but also the *rake angle* γ is chosen to be greater than zero, as required by the material of the workpiece. It results from this that the contour of the cross section of the circular tool (Fig. 1) is different from the contour of the workpiece also in the case their axes are parallel.

If

m = radial height of the contour of the workpiece,

f = clearance required for the chips,

d = bore of the tool,

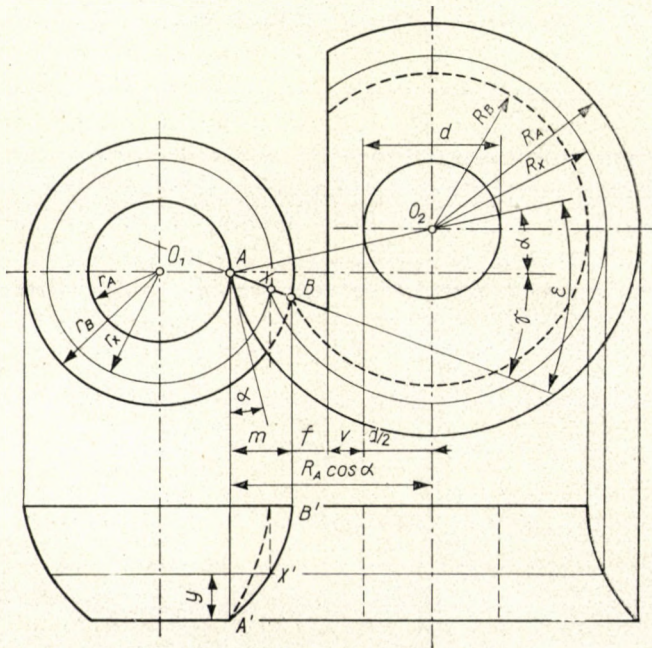


Fig. 1. Design of a circular form tool with relief angle $\alpha \neq 0$ and rake angle $\gamma \neq 0$

the maximum radius of the tool will be, with the notations of Fig. 1,

$$R_A = \frac{1}{\cos \alpha} \left(m + f + v + \frac{d}{2} \right). \quad (1)$$

This relation follows from the relative positions of the workpiece and the tool. It is desirable to get a relief angle α at point A of the tool, lying in the horizontal plane, also when turning the minimum radius r_A of the piece. The tangent to the circle of radius R_A drawn in A and the vertical include the same angle α as the radius AO_2 drawn in A and the horizontal, hence eq. (1) could be written down directly.

The method for constructing the contour of the circular tool which has its axis parallel to that of the piece, is obvious from Fig. 1. But in many cases, determination of the tool radii belonging to the radii of the workpiece is required having an accuracy of 1/1000 mm. The methods published in the literature are very complicated, especially for curved contours. In reality, the method of calculation cannot be less complicate, even in the case of a contour consisting of straight sections, because only in case of the rake angle $\gamma = 0$, do the straight sections on the workpiece correspond also to the straight sections on the tool. If the position of the tool corresponds to that shown in Fig. 1, its front plane AB does not pass through the axis O_1 of the workpiece, but is parallel with it, and, therefore, even in the front cross section of the tool hyperbola sections appear if the workpiece consists of truncated cone sections.

Therefore, independently of the fact as to whether the *given* contour of the piece is formed by straight sections or not, in the interest of accuracy of the calculations it is necessary to carry out the calculations for the *necessary number* of circular sections. For calculating, at an arbitrary location y on the piece, the circular tool radius R_x corresponding to the section of radius r_x , G. I. GRANOVSKI, D. Eng. Sc., recommends the following method [2]:

Using the symbols of Fig. 2, the calculations can be carried out by the following steps:

1. $h_1 = r_A \sin \gamma$
2. $T_1A = r_A \cos \gamma$
3. $\sin \gamma_x = \frac{h_1}{r_x}$
4. $T_1X = r_x \cos \gamma_x$
5. $AX = T_1X - T_1A = r_x \cos \gamma_x - r_A \cos \gamma$.

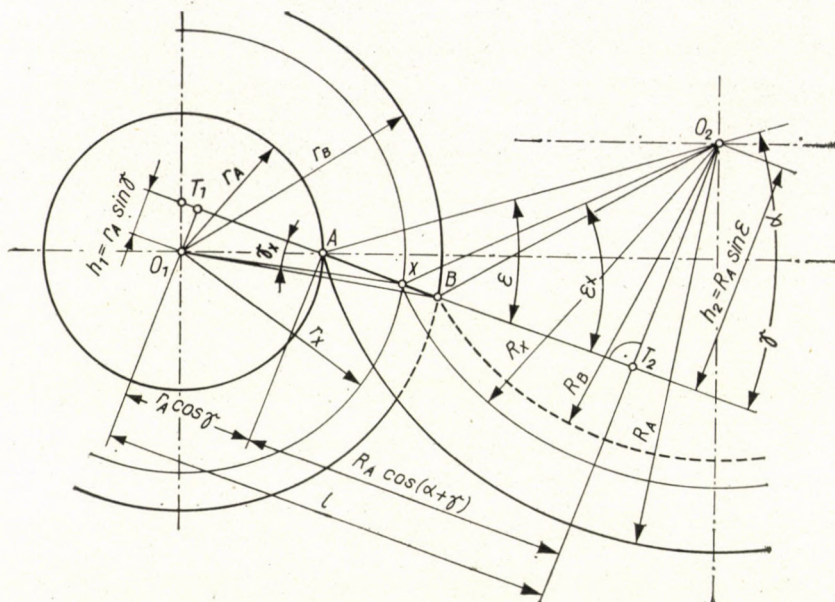


Fig. 2. Geometrical relations in the usual method of calculating the tool radius R_x which belongs to a profile of given radius r_x .

According to (1), R_A is known and thus

$$6. h_2 = R_A \sin(\alpha + \gamma) = R_A \sin \varepsilon$$

$$7. AT_2 = R_A \cos \varepsilon$$

$$8. XT_2 = AT_2 - AX = R_A \cos \varepsilon - (r_x \cos \gamma_x - r_A \cos \gamma)$$

$$9. \operatorname{tg} \varepsilon_x = \frac{h_2}{XT_2}$$

$$10. R_x = \frac{h_2}{\sin \varepsilon_x}$$

Using this method, repeated searching out of the values of the trigonometric functions and of their arguments is needed.

A simpler method is obtained if we introduce the following symbols: According to Fig. 2,

$$l = r_A \cos \gamma + R_A \cos(\alpha + \gamma) \quad (2)$$

which value remains constant during the calculations. The distance $T_1 O_2$ (Fig. 3), also remains constant because from the right triangle $T_1 T_2 O_2$

$$t = \sqrt{l^2 + h_2^2}. \quad (3)$$

the theorem of the sections of the secant can be written as follows:

$$x(2l - x) = t^2 - R_x^2$$

viz.,

$$R_x^2 = t^2 - x(2l - x). \quad (5)$$

After calculating the values t and l which are constant for a given circular tool, the value R_x belonging to a cross section of radius r_x could be calculated in two steps: first, x is calculated according to (4), then from the formula

$$R_x = \sqrt{t^2 - x(2l - x)}. \quad (5a)$$

R_x is obtained. The calculations, including extraction of the square root, are easily carried out with the aid of a table of squares or a simple multiplying machine.

REFERENCES

1. ALEXEJEV, G. A., ARSINOV, V. A., SMOLNYKOV, E. A.: Forgácsoló szerszámok szerkesztése és számítása (Design and Calculation of Cutting Tools). 2nd edition. Nehézipari Könyv- és Folyóiratkiadó, Budapest, 1954. Original title: Расчет и конструирование режущего инструмента. Translated into Hungarian by E. Csányi.
2. GRANOVSKI, G. I.: Shaped cutters. Moscow—Leningrad, Mashgiz, 1947.

SUMMARY

For manufacturing a circular form tool it is often necessary to calculate the exact contour with an accuracy of 1/1000 mm. The known methods of calculation are lengthy, even if the axes of the cutter and of the workpiece are parallel. The calculations are no less complicated if the profile of the workpiece is composed of straight sections.

On the base of geometrical considerations the author shows, that by using the theorem of the sections of secants, a very much simpler method leads to the results than would be the case when using a chain of trigonometrical formulae.

BERECHNUNG DES PROFILS EINES RUNDEN FORMMEISSELS MIT HILFE DES SATZES ÜBER DIE KREISSEKANTEN

B. SZÓKE

ZUSAMMENFASSUNG

Bei Anfertigung eines runden Formmeißels ist es oft nötig, sein genaues Profil mit einer Genauigkeit von Tausendstel Millimeter zu berechnen. Das bekannte Berechnungsverfahren ist auch dann langwierig, wenn die Achsen des Meißels und des Werkstückes parallel sind. Die Berechnung ist nicht weniger kompliziert, wenn das Profil des Werkstücks aus einzelnen geraden Abschnitten besteht.

Auf Grund von geometrischen Überlegungen zeigt der Verfasser, daß durch Anwendung des Satzes über das Produkt der Kreissekantenabschnitte ein wesentlich einfacheres Berechnungsverfahren zum Ziel führt, als wenn man eine Kette von trigonometrischen Formeln verwendet.

**МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПРОФИЛЯ ФИГУРНЫХ КРУГЛЫХ РЕЗЦОВ С ПОМОЩЬЮ
ТЕОРЕМЫ СЕКУЩИХ**

B. СЁКЕ

РЕЗЮМЕ

При изготовлении фигурных круглых резцов часто необходимо вычислить точный профиль с точностью до тысячных долей миллиметра. Известная методика расчета требует много времени даже в том случае, если ось резца и заготовки параллельны между собой. Вычисление не упрощается даже в том случае, если профиль заготовки складывается из прямых участков.

Автор на основе геометрических соображений показывает, что с использованием теоремы произведения сечения секущих получается результат при использовании значительно более простого метода вычисления, чем при использовании тригонометрических методов.

**CALCUL DU PROFIL D'UN OUTIL DE FORME CIRCULAIRE,
À L'AIDE DU THÉORÈME DE LA SÉCANTE**

B. SZÖKE

RÉSUMÉ

Pour produire un outil de forme circulaire, il est souvent nécessaire de calculer le profil avec une précision au millième de millimètre. La méthode courante de calcul reste fastidieuse, même quand l'axe de l'outil et de la pièce sont parallèles, et n'est pas moins compliquée quand le profil de l'outil est composé de sections de droite.

Sur la base de considérations géométriques, l'auteur démontre que par l'application du théorème relatif aux produits des sections d'une sécante du cercle, on a une méthode de calcul bien plus simple qu'en appliquant une chaîne de théorèmes trigonométriques.

ERMÜDUNGSVERSUCHE AN ROHKORDEN

Dr. GY. DISCHKA

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

und

T. HAJMÁSY

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DIE TEXTILINDUSTRIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 17. Februar 1961]

1. Einleitung

Die Kordbeanspruchung im Reifen

Infolge der erhöhten Kraftwagengeschwindigkeit hat die dynamische Beanspruchung der Pneumatikkordeinlagen sowohl in Hinsicht auf die Frequenz als auch auf die Amplitude stark zugenommen.

Die Beanspruchungsverhältnisse des Reifens werden durch die Studien von LOUGHBOROUGH, DAVIES, NONFORE [1] und in der letzteren Zeit von W. KERN [2, 3] immer mehr bekannt. Die Reifendeformation an Personen- resp. Lastkraftwagen wurde von KERN mit Hilfe speziell ausgestalteter und an verschiedenen Stellen des Reifens angeklebter Dehnungsmeßstreifen festgestellt. Auf diese Weise wurde die Wirkung des Abrollens, des Luftdruckes, der Belastung und der Zentrifugalkraftänderung bestimmt. Die Messungen haben bewiesen, daß die durch den Luftdruck verursachten und in der Kordrichtung gemessenen Dehnungen zwischen 0,3 und 1,6% variieren. Er stellte fest, daß vom Standpunkt der Ermüdung die innerste Lage der Seitenwand die meist gefährdete ist. Gegenüber der durch den inneren Luftdruck verursachten ständigen Dehnung tritt hier im Bereich des Aufliegens auf der Fahrbahn wegen der Wirkung des Bahndruckes eine bedeutende Stauchung auf. Dieser Beanspruchung geht eine kleine Dehnung voran und wird von einer etwas größeren gefolgt. Bei Viskosekorden schwanken die Grenzwerte der Deformation in der Kordrichtung zwischen +2 und -4%. Gelegentlich ist auch die Komponente der Reifendeformation senkrecht zur Kordrichtung von großer Bedeutung [3].

Die soeben beschriebene Wechseldeformation hört natürlich nach dem Verlassen der Fahrbahn in dem betreffenden Reifen nicht sofort auf, sondern weist einen gedämpften Verlauf auf. KERN stellte fest, daß die Wechselbeanspruchung auf einen Bruchteil des Umlaufes entfällt. Während eines Umlaufes können, von den Geschwindigkeitsverhältnissen abhängig, zwei resp. drei Beanspruchungszyklen von bedeutender Amplitude beobachtet werden. Bei Wagen mit einer Geschwindigkeit von 100 km pro Stunde ist die Umlauffrequenz 15 Hz, die Beanspruchungsfrequenz liegt jedoch zwischen 60—120 Hz [3].

Aus den Daten KERNs kann man auf die numerischen Werte der in den einzelnen Abschnitten der Kordeinlage auftretenden Deformationen schließen, denn zufolge der Haftbindung folgt der Kordzwirn der Deformation des ihm umgebenden Gummis. Die Bestimmung des Absolutwertes der auf die Kordzwirne wirkenden Belastung stößt jedoch, wegen des stark abweichenden Elastizitätsmoduls des Textilmaterials und des Gummis, sowie auch wegen des zusammengesetzten, mechanisch unbestimmten Deformationsmechanismus des Kord-Gummi-Systems, auf Schwierigkeiten.

Wie die von KERN angeführten Messungen [3] bewiesen, kann die Beanspruchung eines Kordelementes und des umgebenden Gummis — als Textil-Gummi-System — im Laufe des Abrollens, von der gegenüber der Laufbahn eingenommenen Lage abhängig, während eines Umlaufes von sehr verschiedener Richtung, Bedeutung und Größe sein. Die wichtigsten Variationen des momentanen Spannungszustandes sind die folgenden:

1. Zugspannung in der Kordrichtung, Druckspannung in der anderen zum Kord senkrechten Hauptspannungsrichtung.
2. Zugspannung in der Kordrichtung und in der anderen zum Kord senkrechten Hauptspannungsrichtung.
3. Druckspannung in der Kordrichtung, Zugspannung in der anderen zum Kord senkrechten Hauptspannungsrichtung.
4. Druckspannung in der Kordrichtung und in der anderen zum Kord senkrechten Hauptspannungsrichtung.

Zufolge der unberechenbaren dynamischen Beanspruchungen ist grundsätzlich auch ein kurz andauernder und auf eine kleine Strecke beschränkter, dreiachsiger, reiner Zug- oder Druckspannungszustand, resp. ein aus deren Kombination bestehender, zusammengesetzter Spannungszustand vorstellbar. Im nachfolgenden befassen wir uns mit den Fällen 1—4, jedoch ohne detaillierte festigkeitstheoretische Analyse, die hier nicht unsere Aufgabe bildet.

Im 1. Fall dehnt sich das Textil-Gummi-System in die Kordrichtung aus und verkürzt sich in der darauf senkrechten Ebene in beiden Richtungen. Infolge des um mehreren Ordnungsgrößen höheren Elastizitätsmoduls wird das Maß der Dehnung in erster Reihe durch die Korddeformation bestimmt. Die Kontraktion ist besonders in der Richtung der Druckspannung bedeutend.

Im 2. Fall wird die Dehnung in der Kordrichtung durch die in der erwähnten anderen Hauptspannungsrichtung wirkende Zugspannung in bedeutendem Maße beeinflusst. In der dritten Richtung ist die Kontraktion sehr groß. In diesem Beanspruchungszustand können zwischen Gummi und Zwirnkörper bedeutende Spannungen auftreten.

Unter der Wirkung der Druckkraft in der Kordrichtung verkürzt sich im 3. Fall die Kordzwirnstruktur samt dem Gummi und dehnt sich in der senkrechten Ebene aus, besonders in die Richtung der Zugspannung. Infolge dieser Deformation, die in erster Reihe durch die Eigenschaften des Gummis

bestimmt wird, werden die Spiralen des Vorzwirnes wie auch die des Kordzwirnes zusammen gestaucht und — falls die seitlichen Ausdehnungen in den Richtungen der zum Kord senkrechten zwei Hauptspannungen sehr abweichen — verflacht sich der Kordzwirn. Die Formänderung des Kordzwirnes ist also größtenteils eine strukturelle Deformation. Die Inanspruchnahme der Filamente besteht aus dem Biegen auf einen kleinen Krümmungsradius. Wenn zwischen den einzelnen Filamenten die Haftbindung nicht groß genug ist, deren kleinstes Verschieben von einander verhindern zu können, so kommt der Biegebeanspruchung der Filamente noch die zwischen den Fasern auftretende Scheuerbeanspruchung hinzu. Die letztere ist jedoch vermutlich von untergeordneter Bedeutung, solange die etwaige Verbindung zwischen dem Zwirnkörper und dem Einbettungsmaterial, resp. die zwischen den Filamenten unversehrt ist.

Zu gleicher Zeit mit der Ausdehnung in seitliche Richtung tritt zwischen dem Gummi und dem Zwirnkörper eine bedeutende Spannung auf, besonders an jenen Stellen, wo die Deformation des Reifens in senkrechter Ebene zu dem Kord groß ist. Die zwischen dem Gummi und dem Zwirnkörper entstehenden Spannungen (siehe auch die anderen Fälle) trachten einerseits den Kordzwirn selbst vom Gummi abzulösen, andererseits die durch das Impregnierungsmaterial zwischen den Filamenten zustandegebrachten schwächeren Verbindungsstellen aufzulockern. Spalten sich diese Verbindungen an irgendwelchem Punkt des Reifens, so verschieben sich unter Wirkung der weiteren Inanspruchnahme das Gummi und das Textilmaterial, d. h. die bisher gebundenen Filamente bewegen sich voneinander fort. Die zwischen den Filamenten resp. zwischen dem Gummi und dem Textilmaterial auftretende Scheuerbeanspruchung beschleunigt in diesem Falle sehr den Ermüdungsbruch des Kordes. Bei guten Haftbindungen fangen — zufolge der Ermüdung — zuerst die einzelnen Filamente des Kordzwirnes zu reißen an, und nur nachfolgend macht sich eine beträchtliche Scheuerbeanspruchung bemerkbar. Vom Standpunkt der Inanspruchnahme des Textil-Gummi-Systems ist also die Haftbindung zwischen den zwei Komponenten von entscheidender Bedeutung.

Unter Wirkung der Druckspannung in zwei Richtungen verkürzt sich im 4. Fall das Textil-Gummi-System in der Ebene des Druckes — in Kordrichtung und senkrecht dazu — und dehnt sich in der dritten Richtung aus. Das Verkürzen in der Kordrichtung wird von der anderen Druckspannung beeinflusst. In diesem Spannungszustand ist die Deformation der Zwirnstruktur dem 3. Falle ähnlich, obzwar hier das Verflachen des Zwirnes in Querrichtung nicht die Folge der Zugspannung, sondern der Druckspannung ist. Zuzufolge der erwähnten einachsigen Ausdehnung tritt auch zwischen dem Gummi und dem Zwirnkörper eine bedeutende Schubspannung auf.

Die im Zusammenhang mit Fällen 1—4 erwähnten Wirkungen sind besonders an jenen Punkten des Reifens (zum Beispiel an der inneren Seiten-

wand) gefährlich, wo abwechselnd Zug- und Druckspannungszustände in Kordrichtung auftreten, und die relativen Verschiebungen groß sind. Hier kann das Textilmaterial während einer Umlaufperiode von der Dehnungsbeanspruchung mehrmals ganz entlastet werden. Die Wirkung der Druckkraft in der Kordrichtung verursacht das Ausbiegen der Elementarfilamente. Die dem Druck folgende Zugbeanspruchung belastet das Textilmaterial nicht periodisch, sondern stoßweise und verursacht zwischen dem Gummi und dem Textilmaterial eine stoßweise Schubspannung. Die während dieser Perioden auftretenden Biegebeanspruchungen werden von den auf den Kord in senkrechter Ebene wirkenden Spannungen, von der Zwirnkonstruktion und der Drehung bedeutend beeinflusst.

Es ist klar, daß an jener Stelle des Reifens (z. B. äußere Seitenwand), wo die Inanspruchnahme nur in dem Dehnungsgebiet variiert, die Lage der Kordzwirne nicht so ungünstig ist. Hier ist die Biegebeanspruchung der Filamente von untergeordneter Bedeutung, der Kordzwirn wird nicht ganz entlastet, und seine Inanspruchnahme stellt eher eine periodische als eine stoßweise Zugbeanspruchung dar. Da das Gummi — wegen seiner großen Deformationsfähigkeit — der Formänderung des Kordes folgt, kann die Auflockerung der Gummibindung in der Praxis nur durch die auf den Kord in senkrechter Richtung wirkenden Spannungen verursacht werden, was einen viel langsameren Vorgang ergibt als die wechselnde Zug- und Druckbeanspruchung. Somit kann die Scheuerbeanspruchung nur in geringerem Maße auftreten.

Die große Bedeutung der Haftbindung zwischen dem Textilmaterial und dem Gummi wird auch durch die Feststellungen von M. W. WILSON [4] unterstützt, der die bei der Druckbeanspruchung des Textil-Gummi-Systems auftretenden Erscheinungen auf Photographien vorführte. Seiner Erfahrung nach löst sich der Zwirnkörper von dem Einbettungsmaterial unter Wirkung der wiederholten Druckbeanspruchung zuerst entlang der Spirallinie der Vorzwirne.

Der Einfluß der Drehung wird von H. MÜLLER [5] gut veranschaulicht. Er bettete zwei Kordzwirne mit sehr abweichender Drehung in Gummi ein und beobachtete deren Formänderung bei 10%iger Stauchung des Gummikörpers. Er stellte fest, daß beim Kord mit unrichtiger Drahtkonstruktion infolge der Stauchwirkung einige Windungen ausgekrümmt wurden. An diesen Stellen wächst die Reibung, was seiner Meinung nach zur Zermürbung führt. Seine Vermutungen werden durch die auf dem Prüfstand und der Goodrich Dauerprüfmaschine durchgeführten Untersuchungen bestätigt.

Die Lebensdauer und die physikalischen Eigenschaften des in dem Reifen befindlichen Textilmaterials werden auch von der Temperatur beträchtlich beeinflusst. Jede Deformation des Reifens wird von Wärmeentwicklung begleitet. Diese verursacht infolge der kleinen Wärmeleitfähigkeit des Gummis

einen Temperaturanstieg, welcher der Dämpfung der Kord- resp. Filamentdeformation wie auch der Umlaufzahl pro Minute proportional, und der Wärmeleitfähigkeit verkehrt proportional ist [6, 7]. Hierzu kommt noch der Temperaturanstieg, der durch die zwischen der Fahrbahn und der Lauffläche auftretende Reibung verursacht wird.

Die absolute und relative Größe der in dem vorangehenden geschilderten wechselnden Beanspruchungskomponenten hängt von den mechanischen Kennzeichen der Filamente, von dem Aufbau des Kordes, von der Konstruktion des Reifens, von dem inneren Luftdruck, sowie auch von den äußeren Faktoren, wie Wagengewicht, Geschwindigkeits- und Bahnverhältnissen, ab.

2. Kordermüdungsmethoden

Nach den in der Einleitung Geschilderten ist es kaum denkbar, daß die in der Praxis vorkommenden komplexen Beanspruchungsverhältnisse mit einem einzigen Apparat verläßlich nachgeahmt werden können. Diese Aufgabe wird noch dadurch erschwert, daß im Interesse der Beschleunigung der Laboratoriumsprüfungen die Beanspruchungen verstärkt werden müssen. Es ist klar, daß der »Gebrauchswert« des Kordzwirnes — gemäß dem bei den anderen Produkten der Textilindustrie befolgten Wege — nicht mit einer einzigen, in Hinsicht auf die Komponenten undefinierten komplexen Beanspruchung, sondern auf Grund der Prüfungsergebnisse bezüglich der wichtigsten Gebrauchseigenschaften festgestellt wird. Diese Kennzeichen sind die statischen und dynamischen Festigkeits-, Elastizitäts-, Relaxations-, Fließ- und Ermüdungseigenschaften, hauptsächlich bei Gebrauchstemperatur. Von diesen sind die Kennwerte der Widerstandsfähigkeit gegen die Dauerstand- sowie dynamischen und stoßweisen Beanspruchungen besonders wichtig, weil sie mit der Lebensdauer der Reifenkorde in engstem Zusammenhange stehen. Diese Eigenschaften können nur am Rohkord in exakter Weise geprüft werden.

Die Ermüdungsversuche am Rohkord sind auch deshalb zweckmäßig, weil bei der Prüfung des Textil-Gummi-Systems die Beanspruchungen des Kordes oft nicht gut definiert sind, und die Resultate wegen der großen Streuungen statistisch weniger verläßlich sind. Bei der Qualifizierung der Korde auf Grund der Prüfung des Textil-Gummi-Systems wird ein Kennzeichen zugrunde genommen welches den komplexen Einfluß der abweichenden Materialeigenschaften und der speziellen zusammengesetzten Beanspruchung gemeinsam berücksichtigt. Ohne eingehendes Kennen der einzelnen Eigenschaften gibt es keine Möglichkeit, die Qualität des Kordzwirnes systematisch zu verbessern. Man darf auch nicht außer acht lassen, daß an dem Dauer-

prüfapparat für Rohkord die Ermüdungsversuche bei bekannter höherer Temperatur, resp. auch in impregniertem Zustand durchgeführt werden können, was die Beurteilung der Kordqualität weiteren wertvollen Gesichtspunkten bereichern kann.

Auf Grund der ausschließlich an Rohkorden ausgeführten Prüfungen kann man natürlich die Brauchbarkeit des Textil-Gummi-Systems nicht entscheiden, besonders wenn man die Wirkung der Abänderung der Zwirn- resp. Reifenkonstruktion, oder des verwendeten Impregnierungsmaterials, resp. der Gummimischung studieren will. Bei der Druckbeanspruchung des Textil-Gummi-Systems können sich nämlich solche Phänomene abspielen (Auskrümmungen von Vorzwirnwindungen, Spaltung der Haftbindung usw.), die die Brauchbarkeit der respektiven Konstruktion von vornherein ausschließen. In solchen Fällen wird ohne Zweifel die gemeinsame Prüfung des Textil-Gummi-Systems über die Brauchbarkeit des Kordzwerines entscheiden.

Ermüdungsversuche an Rohkorden sind bei gleicher Kordkonstruktion zur Kontrolle der Filamentqualität, wie auch der Technologie des Vor- und Kordzwerines geeignet, vorausgesetzt, daß die Versuche auf Grund der praktisch interessanten Beanspruchungen durchgeführt werden.

Auf Grund der von praktischem Standpunkt aus wichtigsten Charakteristiken kann die Brauchbarkeit der Kordzwirne in dem Falle festgestellt werden, wenn die festgesetzten Minimalwerte der Charakteristiken erreicht werden. Diese Methode wurde von dem Gummi Laboratorium, Leverkusen bei drei auserwählten Prüfungen angewendet.

Die Ermüdungsversuche der Rohkorde werden aus den im 1. Absatz dargelegten Gründen hauptsächlich mit Wechselzugbeanspruchungen [8—21], resp. mit auf eine statische Zugbeanspruchung überlagerten, wiederholten Biegebeanspruchungen [22—25] durchgeführt. Die erstere Beanspruchung wird durch die aus der Literatur wohlbekanntten Apparate von AMSLER und ZWICK [19], ROELIG [9], weiter MESKAT, ROSENBERG und HOFMANN [19, 20, 21]; sowie die letzteren durch den Dunlop Apparat, sowie die Apparate von BUDD [22], GRANT, COUTURIER, RHODES [23], FROMANDI [24] und DISCHKA und HAJMÁSY [25] zustandegebracht. Einige von den letzteren [22—24] entlasten — infolge des Schwingens des Belastungsgewichtes — auf kurze Zeit den Kordzwirn von der statischen Zugbeanspruchung, sodann tritt eine stoßartige Zugbeanspruchung auf. Bei dem Apparat von DISCHKA und HAJMÁSY unterbleibt das Schwingen des Belastungsgewichtes. Mit dem Einschalten eines separaten Hilfsmechanismus kann eine zyklische Entlastung von der Zugbelastung und die darauffolgende stoßartige Beanspruchung verwirklicht werden.

Bei der Dauerprüfung der Kordzwirne wird in der Sowjetunion ein Apparat angewendet, in welchem auf den unendlichen Kordzwirn außer einer ständigen Zugbelastung noch zeitweilig eine Wechseldehnung wirkt.

2.1. Beschreibung des angewendeten Apparates

Auf dem Kordzwinermüdungsapparat von DISCHKA und HAJMÁSY sind die mit wechselbaren Gewichten belasteten 10 Kordzwirne auf fünf Rollen mit gleichem Durchmesser überworfen (Abb. 1a). Diese Rollen sind

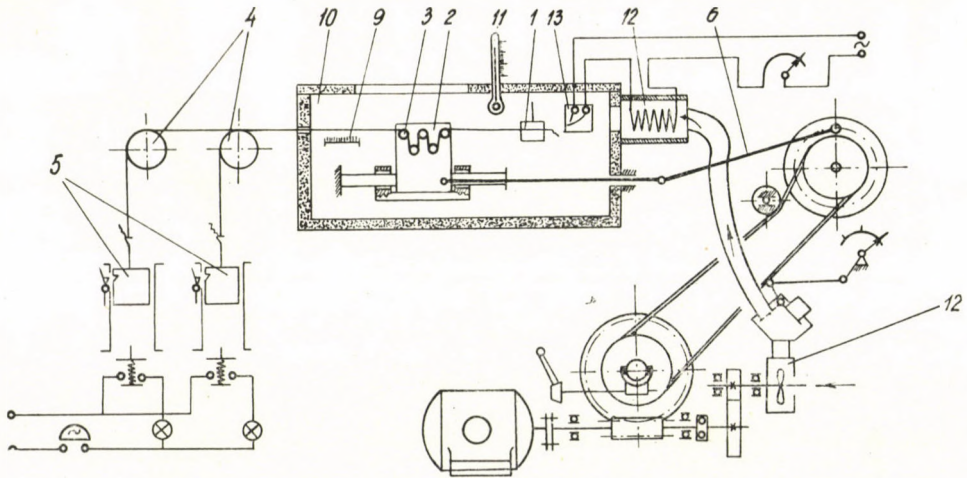


Abb. 1a. Apparat zu den Ermüdungsversuchen von Rohkorden

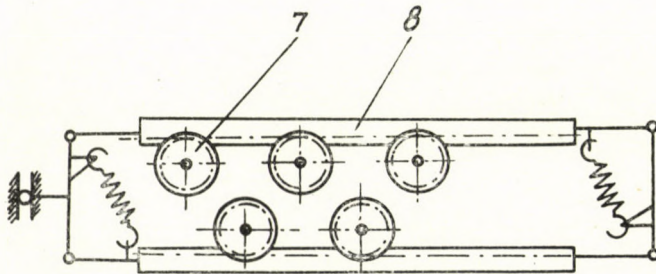


Abb. 1b. Antrieb der Biegerollen

in einem alternierende Bewegung vollführenden Wagen gelagert. Unter Wirkung der Wagenbewegung werden die Garne durch die einzelnen Rollen entgegengesetzt gekrümmt. Die Biegerollen sind derart angetrieben, daß sie an den geprüften Korden, ohne dieselben zu scheuern, abrollen. Scheuerwirkung entsteht zwischen den Filamenten nur infolge der Biegung.

Das eine Ende der zu gleicher Zeit ermüdeten zehn Kordzwirne wird zwischen den Klemmböcken 1 eingespannt, das andere Ende wird über die in dem Wagen 2 gelagerten Rollen 3 geworfen und hinter der entsprechenden Führungsscheibe 4 mit Gewichten 5 belastet. Die statische Zugbeanspruchung kann mit verschiedenen Gewichten von 200 bis 1000 g vorgenommen werden.

Der Wagen mit Biegerollen 2 wird von einem Motor mit Hilfe eines Kurbelmechanismus 6 betrieben. Die Hublänge beträgt 90 mm, und die Zyklenzahl 60/Minute.

Zum möglichen Eliminieren der Reibung zwischen den Biegerollen und den geprüften Kordzwirnen rollen die auf die Achse der Rollen gekeilte Zahnräder 7 an der stehenden Zahnstange 8 ab und treiben die Biegerollen mit einer Umfangsgeschwindigkeit, bei der die Rollen an den stehenden Kordzwirnen praktisch ohne Gleitung abrollen (Abb. 1b).

Die während der Prüfung auftretende Dehnung der Kordzwirne ist an der am Apparat angebrachten Skala 9 abzulesen.

Der Einspannkopf 1 sowie auch der Wagen 2 und auch die auf Biegen in Anspruch genommenen Kordzwirnteile sind in einem wärmeisolierten Schrank 10, in welchem eine höhere Temperatur als die des Zimmers durch die einströmende warme Luft gesichert wird. Zum Zirkulieren der warmen Luft dient ein Thermoventilator 12. Die in dem Schrank herrschende Temperatur wird mit einem Thermometer 11 kontrolliert. Die eingestellte Temperatur wird mit Hilfe des Wärmereglers 13 konstant gehalten.

2.2. Die Inanspruchnahme der Kordzwirne auf dem Apparat

Infolge des oben beschriebenen Antreibens der Rollen ist die Zugbeanspruchung während der Prüfung entlang des Kordes resp. in der Zeit praktisch konstant. Die auf einen Kordabschnitt wirkende Biegebeanspruchung ist zeitweilig alternierend, rechtsgängig, Null, resp. linksgängig.

Die durch eine Biegerolle hervorgerufene Deformation — wenn man die Verzerrung des Garnquerschnittes als konstant betrachtet — wechselt während eines Zyklus zwischen zwei konstanten Extremwerten. Die Häufigkeit der Biegung ändert sich abschnittsweise entlang des Kordes und hängt davon ab, wie viele Rollen auf die betreffende Kordstrecke während eines Zyklus biegender Wirkung ausüben. Die aus der Länge der auf den Biegerollen liegenden Kordstrecken und von der Durchschnittsgeschwindigkeit des Wagens berechnete Beanspruchungsfrequenz ist 12 Hz im Falle eines Rollendurchmessers von 9,5 mm und ungefähr 23 Hz im Falle eines Rollendurchmessers von 5 mm, also bedeutend, obwohl sie unter den von KERN [3] angegebenen Werten bleibt.

Um auf die dominierende Beanspruchung der an dem Apparat geprüften Kordzwirne folgern zu können, wurden Filamente von ermüdetem Viskosekord aus der Umgebung der Bruchstelle genommen und unter dem Mikroskop geprüft. Die meist charakteristischen Bruchbilder werden in den Abbildungen 2, 3 und 4 veranschaulicht. Die Bilder der beschädigten Filamente können gewöhnlich in drei Gruppen eingereiht werden.

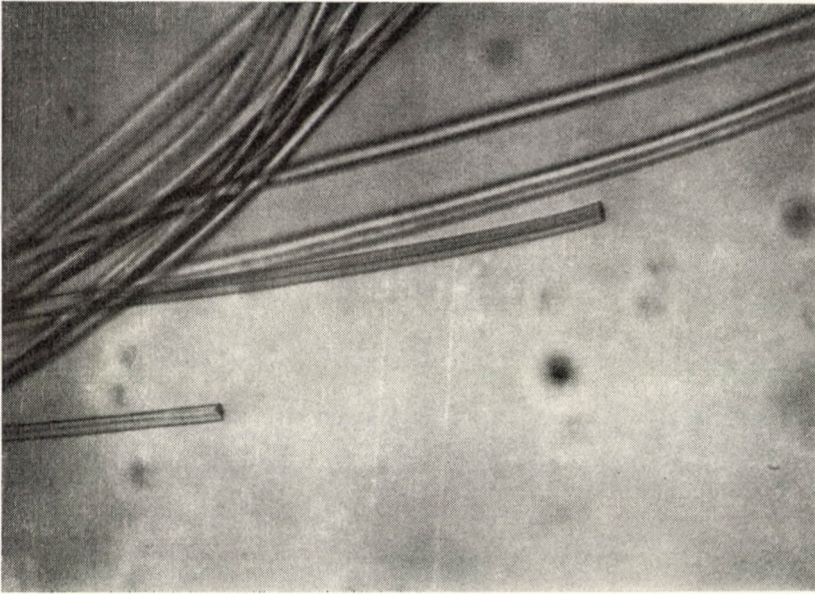


Abb. 2a. Querschnittsbruch bei der Dauerprüfung des Viskosekordes 1650/2, 480/480. (Zugbelastung: 1000 g, Biegerollendurchmesser: 9,5 mm, Temperatur: 80° C)

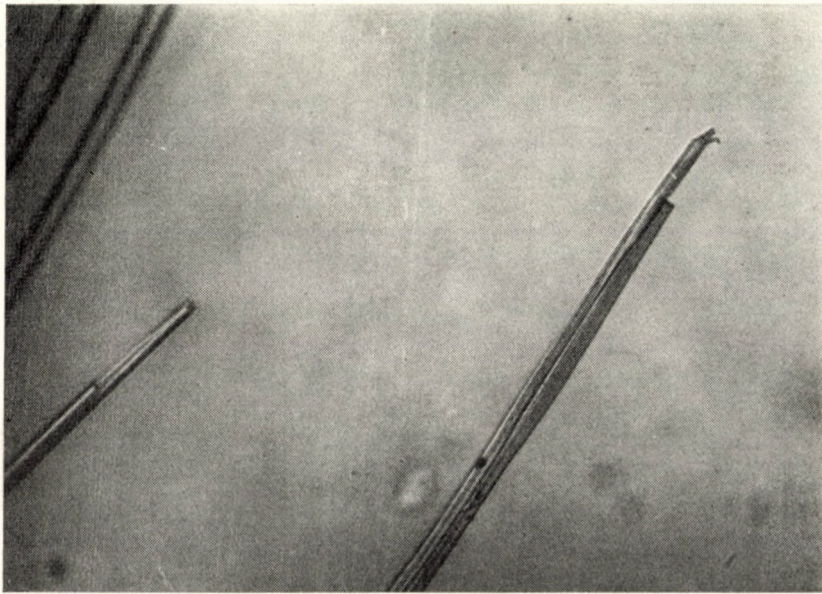


Abb. 2b. Bruch in zwei Querschnitten bei der Dauerprüfung des Viskosekordes 1650/2, (Zugbelastung: 1000 g, Biegerollendurchmesser: 9,5 mm, Temperatur: 80° C)

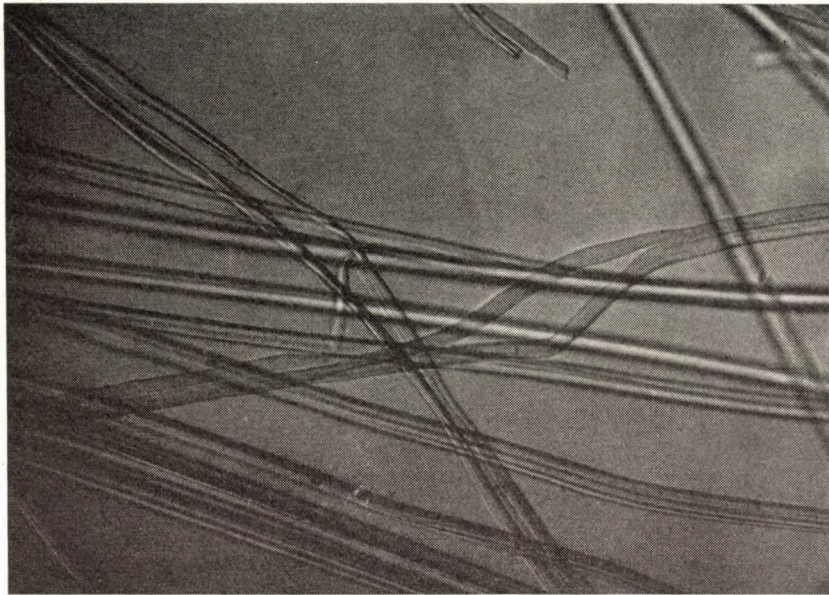


Abb. 3a. Spalten der Filamente in zwei Fibrillenbündel bei der Dauerprüfung des Viskosekordes, 1650/2, 480/480. (Zugbelastung: 1000 g, Biegerollendurchmesser: 9,5 mm, Temperatur: 80° C)



Abb. 3b. Spalten der Filamente in Fibrillenbündel bei der Dauerprüfung des Viskosekordes 1650/2, 480/480. (Zugbelastung: 1000 g, Biegerollendurchmesser: 9,5 mm, Temperatur: 80° C)

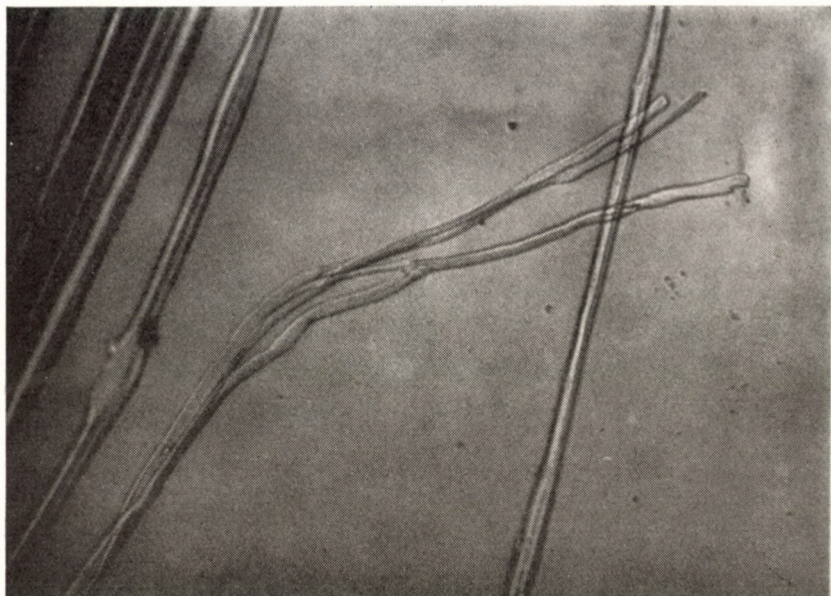


Abb. 4. Fibrillenbildung an dem rechtseitigen, Verschleiß an dem linkseitigen Filament bei der Dauerprüfung des Viskosekordes 1650/2, 480/480. (Zugbelastung: 1000 g, Biegerollendurchmesser: 9,5 mm, Temperatur: 80° C)

Ein Teil der Filamente weist bei der Reißfestigkeitsprüfung resp. bei der wiederholten Zugbeanspruchung Faserenden mit Querschnittsbruch auf. Der Charakter der Reißfläche ist bruchartig (Abb. 2a). In einigen Fällen erfolgt dieser Bruch nicht in einem Querschnitt, sondern das Filament teilt sich in zwei Fibrillenbündel, und diese reißen einzeln und in verschiedenen Querschnitten (Abb. 2b).

Abbildungen 3a und b zeigen Filamente, bei denen der Vorgang der sogenannten Fibrillenbildung beobachtet werden kann. In diesem Falle spalten sich die zwischenmolekularen Bindungen infolge der wiederholten Biegebeanspruchung (Abb. 3a), und die Fibrillen reißen jede für sich (Abb. 3b).

Von der Oberfläche des Fadens in Abb. 4. haben sich kleine Teilchen abgelöst, die dann zermalmt. Dieses Zermalmen ist ein offensichtliches Zeichen der zwischen den Filamenten auftretenden Scheuerbeanspruchung.

An dem DISCHKA—HAJMÁSYschen Apparat macht sich die Beschädigung der Filamente unter Wirkung der auftretenden zusammengesetzten Beanspruchung in der Form von Bruch, Fibrillenbildung und Scheuern bemerklich. In der Regel verursacht die gemeinsame Wirkung dieser Schäden den Bruch des Kordzwirnes. Die angeführten Formen der Beschädigung weisen darauf hin, daß in den Kettenmolekülbündeln des Materials eine achselrechte Zugspannung, und zwischen den Molekülbündeln eine senkrechte Beanspru-

chung resp. Gleitspannung auftritt. Die letzteren trachten, die Zwischenmolekülbindungen zu spalten. Schließlich tritt im Laufe der Inanspruchnahme auch die Scheuerbeanspruchung zwischen den Filamenten auf. Unseren Beobachtungen nach ging im Falle der Biegerollen mit 9,5 mm Durchmesser ungefähr ein Drittel der Filamente infolge Querschnittsbruches zugrunde, und im Falle der Biegerollen mit 5 mm Durchmesser verursachte der Ermüdungsvorgang überwiegend Bruch mit Fibrillenbildung.

Wenn man die in dem Apparat auf die Filamente wirkende zusammengesetzte Beanspruchung mit denen im Reifen auftretenden vergleicht, so kann man feststellen, daß die erstere sämtliche Komponenten der auf die Filamente des Kordzwirnes im Reifen wirkenden praktischen Beanspruchungen enthält. Es kann jedoch zweifelsohne festgestellt werden, daß bezüglich der Richtigkeit der Proportionen zur Zeit nur wenige Daten zur Verfügung stehen. Dies kann nur durch den Vergleich der Prüfungsergebnisse der Ermüdungsversuche mit den praktischen Erfahrungen entschieden werden. Abschnitt 4 enthält einige diesbezügliche Daten.

3. Prüfungsergebnisse

3.1 Verteilung, Streuung und Zuverlässigkeit der Prüfungsergebnisse

Zur Feststellung der Verteilung und der quadratischen Streuung der bis zum Bruch ausgeführten Zyklenzahlen, der Zuverlässigkeit der Mittelwerte und der Zahl der nötigen Messungen wurden zahlreiche Prüfungen an zwei Korden mit Anwendung von einer Biegerollenreihe mit 9,5 mm Durchmesser, bei 80° C, mit 1000 g statischer Belastung durchgeführt. Zur Verkürzung der Prüfungszeit wurden die Prüfungen zu gleicher Zeit auf mehreren Maschinen vorgenommen. Laut unseren Erfahrungen resp. den Messungen von B. BUDD [22] wächst die Streuung mit der Belastung, somit können die erhaltenen Streuungswerte infolge der angewendeten maximalen 1000 g Belastung als Höchstgrenze betrachtet werden.

Auf Grund der bezüglich des Kordes »A« an 17 Maschinen erhaltenen insgesamt $N = 750$, und bezüglich des Kordes »B« an 10 Maschinen durchgeführten $N = 600$ Einzelmessungen, sowie auf Grund der in der Literatur bezüglich ähnlicher Prüfungen gemachten Erfahrungen [22], wurde festgestellt, daß die Zyklenzahl bis zum Bruch eine Gauß-Verteilung aufweist (Abb. 5). Die χ^2 Prüfung ergab für die »A« Verteilung — gegenüber dem zugelassenen 11,0 — den Wert $\chi^2 = 3,9$, und für die »B« Verteilung — gegenüber dem zugelassenen 9,5 — den Wert $\chi^2 = 5,2$. Der Unterschied zwischen den Ordinaten der theoretischen und der beobachteten Verteilung ist also zufällig. Dies ist deshalb beachtenswert, da die Resultate aus an verschiedenen Maschinen ausgeführten Prüfungen stammen.

Außer der Gesamtstreuung wurde auch die Streuung zwischen den Maschinen sowie auch die innerhalb einer Maschine berechnet. Tabelle 1 zeigt die erhaltenen Resultate. Die Streuung zwischen den Maschinen beträgt 10—12%, und die innerhalb einer Maschine 20—25%, somit das zweifache der ersteren. Wenn man 25% als die Streuung der an derselben Maschine geprüften Kordpartie betrachtet und eine 95%ige statistische Sicherheit annimmt, kann man

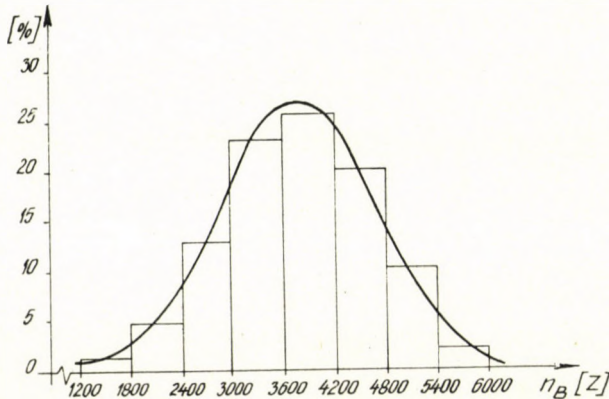


Abb. 5. Verteilung der Zykluszahl bis zum Bruch bei Viskosekord. (Zugbelastung: 1000 g, Biegerollendurchmesser: 9,5 mm, Temperatur: 80° C)

die Zahl der nötigen Messungen feststellen, wenn die gewünschte Genauigkeit des Durchschnittswertes gegeben ist. Somit sind für Durchschnittswert

mit $\pm 5\%$	Genauigkeit	100	Messungen,
mit $\pm 7\%$	„	50	„
mit $\pm 10\%$	„	30	„

nötig.

Tabelle 1

Durchschnittswerte und Streuungsdaten der geprüften Verteilungen

Zeichen des Musters	n_B [Zykluszahl]	S_t [%]	S_1 [%]	S_2 [%]
A	3776	23,0	11,8	19,8
B	1774	26,2	10,9	23,9

n_B = Durchschnittszykluszahl,

S_t = die Gesamtstreuung,

S_1 = die Streuung zwischen den Maschinen,

S_2 = Streuung innerhalb einer Maschine.

Die bisherigen Erfahrungen der Autoren zeigen, daß zum annehmbaren Charakterisieren einer Kordpartie 30 Messungen nötig sind. Dies entspricht in dem besprochenen Fall drei Serien, da der Apparat gleichzeitig 10 Prüfungen ausführt.

Beim Verringern des Biegerollendurchmessers wird auch die Streuung innerhalb der Maschine reduziert. Zum Beispiel bei 5 resp. 9,5 mm Rollendurchmesser ist das Verhältnis der quadratischen Streuungen durchschnittlich 0,8. Zum Vergleich wird erwähnt, daß bei den Prüfungen von B. BUDD [22] die Streuung der auf derselben Maschine bis zum Bruch durchgeführten Zyklenzahlen 27% war, somit etwas höher als der von den Autoren erlangte Höchstgrenzwert.

3.2 Einfluß der Größe der Beanspruchung auf die Prüfungsergebnisse

Die einzelnen Komponenten der durch die Kordermüdungsmaschine zustandegebrachten, zusammengesetzten Beanspruchung: die Zugbelastung, die Biege- und Scheuerbeanspruchung sowie die Temperatur des Prüfraumes, können an dem Apparat geändert werden. Diese Faktoren beeinflussen entscheidend die Prüfungsergebnisse.

3.2.1 Einfluß der Zugbelastung

Zur Feststellung der Wirkung der Zugbelastung wurden Ermüdungsversuche an zwei Viskosekorden von verschiedener Struktur und Draht auf Biegerollen mit 9,5 mm und 5 mm Durchmesser, bei einer Temperatur von

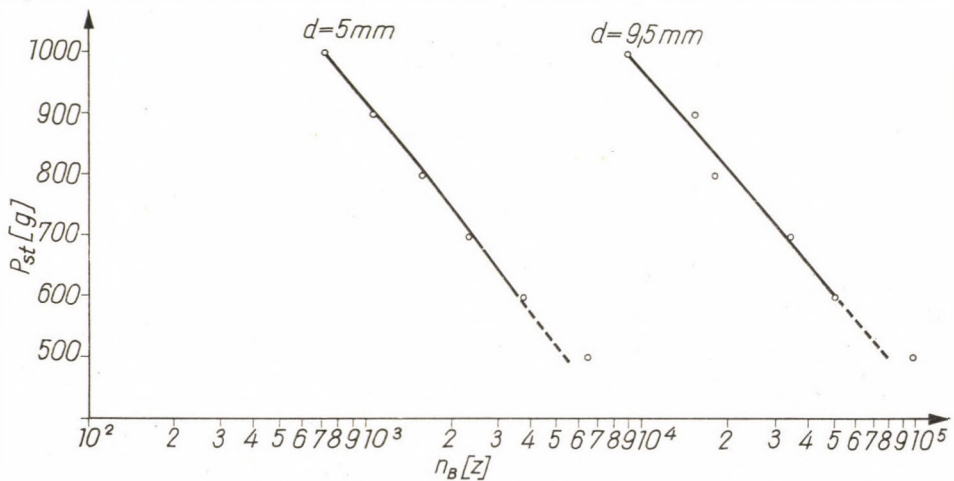


Abb. 6. Wirkung der Dauerstands- und Wechselbiegebeanspruchung auf die Ermüdung des Viskosekordes 1110/2, 550/550. (Temperatur: 80° C)

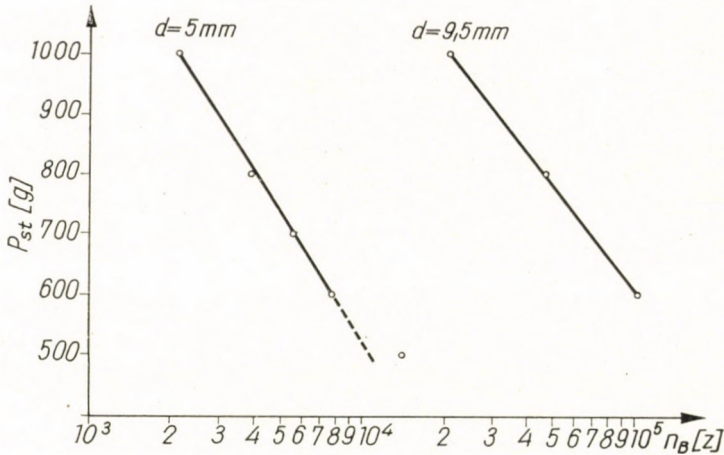


Abb. 7. Wirkung der Dauerstands- und Wechselbiegebeanspruchung auf die Ermüdung des Viskosekordes 1650/2, 480/480. (Temperatur: 80° C)

80° C, mit Anwendung von verschiedenen Zugbelastungen bis zum Bruch ausgeführt. Zwischen der Belastung und der durchschnittlichen Zyklenzahl wurde im Intervall von 600—1000 g ein annähernd logarithmischer Zusammenhang festgestellt (Abb. 6 und 7), der in vollem Zusammenklang mit dem durch W. J. LYONS [26] auf Grund rein theoretischer Erwägungen abgeleiteten Zusammenhänge steht und zwar ist:

$$\ln n_B = A - BP_{st}.$$

A und B sind Konstanten der Gleichung, P_{st} = Zugbelastung, n_B = Beanspruchungszyklenzahl bis zum Bruch bei konstanter Temperatur und Frequenz.

Gleiche Zusammenhänge wurden von GRANT, COUTURIER, RHODES [23] und BUDD [22] festgestellt, obzwar bei den letzteren Versuchen ein gleicher, ausgeprägt logarithmischer Charakter nur bezüglich eines kleineren Intervalles nachgewiesen werden konnte.

Es ist zu bemerken, daß bei den geprüften zwei Viskosekorden die bei 500 g Belastung erhaltenen Zyklenzahlen regelmäßig auch hier höher sind als die auf Grund des obigen logarithmischen Zusammenhanges erwarteten Werte (Abb. 6 und 7).

3.22 Einfluß der Biegebeanspruchung

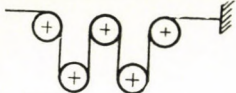
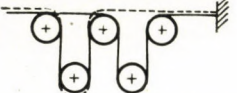
Die Biegebeanspruchung wird in dem Apparat von den in dem Wagen gelagerten fünf angetriebenen Rollen ausgeführt. Die durch eine Rolle verursachte Deformation ist nicht allzusehr groß.

Die Wirkung der Biegebeanspruchung auf die Ermüdung kann grundsätzlich entweder durch Änderung der Größe der Biegedeformation oder der Häufigkeit der Biegebeanspruchung geändert werden. Erstere kann durch die Änderung des Biegerollendurchmessers, die letztere durch Änderung der Zahl der wirksamen Biegerollen erreicht werden.

Tabelle 2 enthält die Resultate der mit Viskosekord mit 5 resp. 3 Rollen von 9,5 mm Durchmesser durchgeführten Prüfungen. Bei Anwendung von 3

Tabelle 2

Einfluß der Biegerollenzahl auf die Ermüdungszyklenzahl der Kordzwirne

Art der Beanspruchung		
Zyklenzahl bis zum Bruch	5770	7398

Rollen wuchs um ungefähr 30% die Zyklenzahl bis zum Bruch. Es ist bemerkenswert, daß die Resultate ganz identisch waren, ob die vorderen oder die hinteren 2 Rollen außer Betrieb gesetzt wurden.

Eine Erhöhung der durch Biegen verursachten Deformation kann durch das Reduzieren der Rollendurchmesser erfolgen. Die Wirkung dieses Verfahrens ist bedeutend. Wenn man anstatt der Rollen mit 9,5 mm Rollen mit 5 mm Durchmesser verwendet, sinkt um mehr als eine Größenordnung die Zyklenzahl bis zum Bruch (Abb. 6 und 7). Die bei 4 Viskosekorden von verschiedener Herkunft und verschiedener Konstruktion mit Biegerollen von 5, resp. 9,5 mm Durchmesser ausgeführten Prüfungen ergaben den Wert von 0,08 als Verhältniszahl der Zyklen bis zum Bruch.

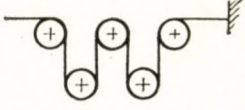
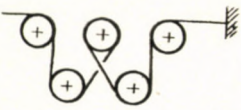
3.23 Einfluß der zwischen den Filamenten auftretenden Scheuerbeanspruchung

Die zwischen den Filamenten auftretende Scheuerbeanspruchung ist nicht nur die Funktion der Zugbeanspruchung, sondern auch die der Häufigkeit der Biegebeanspruchung. Die Größe der Scheuerung kann jedoch mit verschiedenartigem Einziehen des geprüften Kordzwirnes weiter gesteigert werden.

Informationsprüfungen wurden bei Kordzwirnen von 1650 den 2, 480/480 Drehungen pro Meter, mit den auf der Tabelle 3 veranschaulichten dreierlei Einziehen, bei einer Temperatur von 80° C, mit Biegerollen von 9,5 mm Durchmesser und verschiedenen Zugbelastungen ausgeführt. Die Resultate, der mit der normalen Methode und mit abgeändertem Einziehen vollführten Prüfungen können — wegen der aus prüfungstechnischen Gründen abweichenden Zugbelastungen — unmittelbar nicht verglichen werden.

Tabelle 3

Wirkung der Steigerung der Scheuerbeanspruchung zwischen den Filamenten

Art der Beanspruchung	1 (normal)			2	3
					
Zugbelastung (g)	1000	800	600	400	100
Zyklenzahl bis zum Bruch	20964	47382	103666	46584	5200

Bei der normalen Methode konnte die 400 g Zugbelastung wegen der übertriebenen Erhöhung der Prüfungszeit nicht angewendet werden. Die auf Grund der bei Belastungen von 600, 800 und 1000 g erhaltenen Zyklenzahlen zu 400 g errechnete Zyklenzahl ist ungefähr 232 000, somit ungefähr das fünf-fache der mit der zweiten Methode erhaltenen 46 584. Im Falle der dritten Methode ist die Wirkung der Scheuerbeanspruchung noch bedeutender. Der Viskosekord ist also außerordentlich empfindlich gegenüber der mit dem gleichen Kordzwirn vollführten Scheuerbeanspruchung.

3.24 Einfluß der Temperatur

Der im Apparat der Biegebeanspruchung ausgesetzter Kordzwirnenteil ist in einem wärmeisolierten Schrank untergebracht, dessen Temperatur von der Zimmertemperatur (22° C) bis 80° C auf einen beliebigen Wert eingestellt werden kann. In diesem Intervall ist es also möglich, den Einfluß der Temperatur zu studieren.

Auf Grund theoretischer Erwägungen hat W. J. LYONS [26] — bei Anwendung konstanter Spannungsamplitude, Frequenz und konstanter statischer Zugbelastung — zwischen der absoluten Temperatur (T) und der bis zum Bruch verstrichenen Zeit (t_B) den nachfolgenden allgemeinen Zusammenhang abgeleitet:

$$\ln t_B = \frac{A}{T} + B,$$

wo A und B Konstanten sind. BUSSE, LESSIG, LOUGHBOROUGH und LARRICK [27] wie auch WALLER und ROSEVEARE [28] haben den obigen Zusammenhang mit bei verschiedenen Temperaturen ausgeführten Dauerprüfungen bestätigt.

Abb. 8 zeigt die Resultate der mit drei Viskosekorden von verschiedener Herkunft bei 30, 55 und 80° C durchgeführten Messungen. Auf die Abszissenachse des Koordinatensystems wurde der natürliche Logarithmus der Zyklenzahl bis zum Bruch, und auf die Ordinatenachse der Kehrwert der absoluten

Temperatur aufgetragen. Die Meßpunkte liegen entlang der Geraden als Beweis dafür, daß der obige Zusammenhang innerhalb der Grenzen $T = 302^\circ \text{C}$ und 352°C auch in diesem Falle gültig ist.

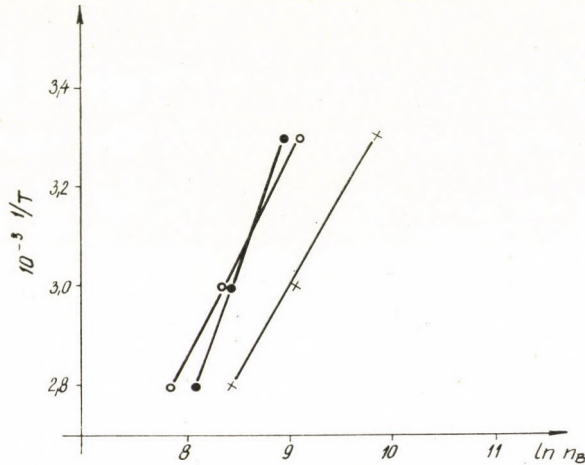


Abb. 8. Zusammenhang zwischen den Kehrwerten der im Prüfraum herrschenden Absoluttemperaturen und den Logarithmen der Zyklenzahlen bis zum Bruch bei Viskosekord. (Zugbelastung: 1000 g, Biegerollendurchmesser: 9,5 mm)

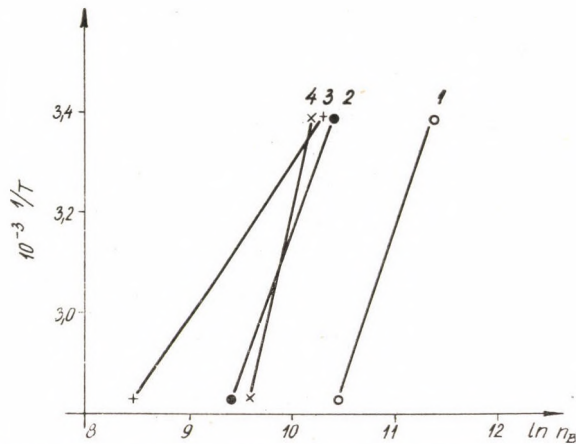


Abb. 9. Wirkung der Temperatur auf die Ermüdung von vier Viskosekorden verschiedener Herkunft. (Zugbelastung: 1000 g, Biegerollendurchmesser: 9,5 mm)

Abb. 9 enthält die Prüfungsergebnisse von 4 Viskosekorden verschiedener Herkunft, bei 22° und 80°C in einem dem vorangehenden ähnlichen Koordinatensystem. Die Temperatur übte auf die einzelnen Fabrikate verschiedenen Einfluß aus. Die Abweichung zwischen den mit 3 und 4 bezeichneten Kordzwrinen ist besonders beachtenswert.

4. Vergleich zwischen den Resultaten der Ermüdungsversuche der Rohkorde bzw. der eingebetteten Korde und der Reifenlaufversuche auf dem Prüfstand

Im Laufe der vergangenen Jahre haben verschiedene Laboratorien internationale Vergleichsprüfungsserien ausgeführt, innerhalb deren Kordzwirne gleicher Konstruktion, jedoch verschiedener Herkunft mit verschiedenen Prüfungsmethoden geprüft wurden; ferner wurden die durch Verwendung dieser Kordzwirne erzeugten Reifen auf dem Prüfstand Laufversuchen unterzogen. Da das Forschungsinstitut für die Textilindustrie in Budapest, mit Hilfe der in diesem Artikel beschriebenen Methode diese Korde gleichfalls prüfte, besteht die Möglichkeit zum Vergleich der Resultate der mit eingebetteten und nicht eingebetteten Kordzwirnen ausgeführten Dauerprüfungen sowie der auf dem Prüfstand erlangten Laufversuche. Die in Tabelle 4 zusammengefaßten Daten sind in der Tabelle des in No. 7, Jahrgang 1960, der Zeitschrift *Plaste und Kautschuk* erschienenen Artikels [29] zu finden, mit Ausnahme der letzten Reihe, die die Resultate des Forschungsinstituts für die Textilindustrie, Budapest, enthält.

(Bei den in der Tabelle 4 aufgezählten Prüfungsmethoden dienen die nachfolgenden Daten als Basis der Bewertung:

Bei dem von dem Institut für Textiltechnologie der Chemiefasern durchgeführten De-Mattia-Test: die Gleichung $P_r = P_0 e^{-\varphi t}$, wo P_r = Restfestigkeit, P_0 = Festigkeit der beanspruchten Probe, φ = charakteristische Konstante, t = Beanspruchungszeit [30].

Bei dem von dem »Sächsisches Kunstseidenwerk« Pirna durchgeführten De-Mattia-Test: Z_{Br} = Zyklen bis Bruch [31].

Bei dem von dem Forschungsinstitut für Gummi- und Plasttechnologie, Gottwaldow, ČSR durchgeführten Goodrich-Test: die Zahl der zerrissenen Korde nach 2 Millionen Zyklen im % der Gesamtkordenzahl in dem Probekörper.

Bei dem von der Leipziger Baumwollspinnerei ausgeführten Goodrich Test: die mit der Gleichung $\varkappa = a - m \log t$ ausgedrückte Gerade, wo: \varkappa = Stauchung und Dehnung (in % der Einspannlänge), t = Zeit bis zum Bruch, m = Steigungsfaktor der Geraden, und der Nulldurchgang der Gerade mit der Abszisse: $\log t_0 = a/m$ [5].

Bei dem von dem Forschungsinstitut für Gummiindustrie, Budapest, ausgeführten Bartha-Test: die aus der Gleichung $(\varepsilon + \mu) \log n = D/P_0 \bar{P} + D$ gewonnenen Konstanten D und P_0 [32].

Bei dem von dem Institut für Textiltechnologie der Chemiefasern durchgeführten Vibrator Test: die nach einer bestimmten Laufzeit gewonnene und in % der ursprünglichen Reißkraft ausgedrückte P_r = Restfestigkeit [33].

Bei den von dem Forschungsinstitut für die Textilindustrie, Budapest, durchgeführten Prüfungen: n_B = Zyklenzahl bis zum Bruch.

Bei den auf dem Prüfstand ausgeführten Prüfungen: der nach 9000 km Laufstrecke am Kord festgestellte, prozentuelle Festigkeitsabfall.)

Tabelle 4

Vergleich der Resultate der mit verschiedenen Methoden ausgeführten Dauerprüfungen, teils au Grund des Artikels in »Plaste und Kautschuk« [29]

Prüfungsmethode	Kennwerte	Bezeichnung des Kordes				Rangkorrelation zwischen dem Apparat und dem Prüfstand
		I.	II.	III.	IV.	
De-Mattia-Test ITC	P_0 (kp) φ (min 10^{-4})	10,7 8	9,73 15	9,6 25	8,0 22	1
	Reihenfolge	1	2	3	4	
De-Mattia-Test SKW	Z_{Br} (Z)	38 000	44 000	16 300	17 100	0,6
	Reihenfolge	2	1	4	3	
Goodrich-Test CSR	Bruchzahl in % nach 2 Mill. Zykl.	16,5	8	16,5	66	0,65
	Reihenfolge	2—3	1	2—3	4	
Goodrich-Test LB	Nulldurchgang $\log t_0$ Tangens m	3,93 4,27	5,18 2,45	3,42 4,62	3,03 5,05	0,8
	Reihenfolge	2	1	3	4	
Bartha-Test FIG	D P_0	2,84 5,6	2,55 6,74	2,33 6,26	2,25 5,72	1
	Reihenfolge	1	2	3	4	
Vibrator-Test (Friedemann)	P_r (%)	80	64	58	89	-0,2
	Reihenfolge	2	3	4	1	
Prüfstand	P_r nach 9000 km (%)	7,4	7,5	12,6	21,3	—
	Reihenfolge	1	2	3	4	
FIT-Test (Dischka—Hajmásy)	n_B (Z)	12 000	8 650	7 030	1 940	1
	Reihenfolge	1	2	3	4	

Ohne auf die einzelnen Prüfungs- und Auswertungsmethoden näher einzugehen — für weitere Mitteilungen siehe den obenerwähnten Artikel [29] — ist zu erwähnen, daß die Resultate der FIT bei 1000 g Zugbelastung mit 9,5 mm Rollendurchmesser und bei einer Temperatur von 80° C, auf Grund von je 30 Einzelprüfungen festgestellt wurden. Tabelle 4 gibt die Zyklenzahl (n_B) bis zum Bruch und die Reihenfolge der Lebensdauer der Korde.

Aus diesen Resultaten geht es hervor, daß die von dem ITC auf dem De-Mattia Apparat, und von dem Budapester FIG auf dem Bartha Apparat, und von dem Budapester FIT auf dem Dischka—Hajmásy Apparat durchgeführten Ermüdungsprüfungen mit den auf dem Prüfstand durchgeführten Laufversuchen übereinstimmende Rangfolge ergaben. Die mit Rohkord durchgeführten Ermüdungsprüfungen haben sogar auch die zwischen den mit III. und IV. bezeichneten Korden den bei den Laufversuchen auf dem Prüfstand erhaltenen großen Unterschiede empfindlich angezeigt. Dies ist im Einklang mit den oben dargelegten theoretischen Vorstellungen der Autoren über die Beanspruchung der in den Korden befindlichen Filamente und deren Zugrunden gehen in den gedehnten, gezerzten und gestauchten Teilen des Reifens.

SCHRIFTTUM

1. LOUGHBOROUGH, D. L., DAVIES, J. M. and NONFORE, G. E.: Canad. J. Res. Sect. 28. 1950. 490.
2. KERN, W.: Kautschuk u. Gummi 8. 1955. 195, 233, 236, 238.
3. KERN, W.: Faserforschung u. Textiltechnik, 11, 1960. 401.
4. WILSON, M. W.: Text. Res. J. 21. 1951. 47.
5. MÜLLER, H.: Faserforschung u. Textiltechnik. 10. 1959. 438.
6. SPRINGER, A.: Gummi Ztg. 55. 1941. 813, 825, 839, 851, 861.
7. KAINRADL, P. und HÄNDLER, F.: Kautschuk u. Gummi 7. 1954. 1. 34.
8. MIEHLICH, W.: Reyon Zellwolle u. a. Chemiefasern 30. 1952. 412.
9. ROELIG, H.: Kautschuk 15. 1939. 7. 32.
10. WAKEHAM, H. and HONOLD, H.: Text. Res. J. 21. 1951. 1.
11. MEYER, K. H. und LOTMAR, W.: Helv. Chem. Acta 1936. 68.
12. BALLOU, J. W. and SILVERMAN, S.: Text. Res. J. 14. 1944. 282.
13. KAINRADL, P. und HÄNDLER, F.: Kautschuk u. Gummi 5. 1952. 3. 22. 38.
14. WEGENER, W.: Melliand T. 31. 1960. 668.
15. BREAZEALE, F. and WHISNANT, J.: J. Appl. Physics 20. 1949. 621.
16. LYONS, W. J. and PRETTYMAN, I. B.: Text. Res. J. 23. 1953. 917.
17. FRENZEL, W. und KITTELMANN, W.: Faserforschung u. Textiltechn. 8. 1957. 222.
18. LARRICK, L.: Textile World, 1945, 95. 107.
19. MESKAT, W. und ROSENBERG, O.: Die Physik der Hochpolymeren Bd. 4. 1956. 235.
20. KAINRADL, P. und HÄNDLER, F.: Faserforschung und Textiltechn. 11, 1960. 408.
21. HOFFMANN, W.: Faserforschung u. Textiltechn. 11. 1960. 433.
22. BUDD, B.: Text. Res. J. 21. 1951. 174.
23. GRANT, J. N., COUTURIER, G. M. and RHODES, M. W.: Text. Res. J. 21. 195. 867.
24. FROMANDI, C.: Kautschuk u. Gummi 2. 1949. 113.
25. DISCHKA, GY., HAJMÁSY, T. und BARTHA, Z.: Budapesti Textilipari Méréstechnikai Konf. 1958.
26. LYONS, W. J.: Text. Res. J. 28. 1958. 127.
27. BUSSE, W. F., LESSIG, E. T., LOUGHBOROUGH, D. L. and LARRICK, L. J.: Journ. Appl. Phys. 13, 1942. 715.
28. WALLER, R. C. and ROSEVEARE, W. E.: Journ. Appl. Phys. 17. 1946. 482.
29. MIECK, K. P.: Plaste u. Kautschuk, 7. 1960. 344.

30. MIECK, K. P.: Faserforschung u. Textiltechnik, 10. 1959. 578.
31. KEIL, A., SCHULZ, S.: Kautschuk u. Gummi, 12. 1959. 211.
32. BARTHA, Z.: Magyar Kémikusok Lapja, 13. 1958. 190.
33. FRIEDEMANN, W.: Faserforschung u. Textiltechnik 9. 1958. 334.

ZUSAMMENFASSUNG

Von den Forschungen über die unter praktischen Umständen auftretenden Deformationen des Reifens ausgehend wurden die Beanspruchungen, die das Zugrundegehen der Kordzwirne, resp. Filamente verursachen, analysiert.

Auf dieser Grundlage wurde ein Ermüdungsapparat konstruiert, in dem auf die Rohkorde eine Dauerstands- und eine Wechselbiegebeanspruchung wirkt, die die sämtlichen maßgebenden Komponenten der praktischen Komplex-Beanspruchungen der in den Reifen befindlichen Kordfilamente enthält.

Aus den aus zahlreichen Daten bestehenden zwei Prüfungsserien wurde festgestellt, daß die Versuchsergebnisse eine Gauss-Verteilung befolgen und ihre quadratische Streuung verhältnismäßig gering ist. Zwischen der Zugbelastung, der Temperatur und der die Lebensdauer der geprüften Kordzwirne ausdrückenden Bruchzyklenzahl sind die durch W. J. LYONS theoretisch abgeleiteten logarithmischen Zusammenhänge auch bezüglich der beschriebenen Ermüdungsmethode gültig.

Nach den mit Kordzwirnen aus verschiedenem Grundstoff, für in Gummi eingebetteten Zustand, in verschiedenen Laboratorien ausgeführten internationalen Vergleichsprüfungen ergab die DE-MATTIA und die BARTHA Methode eine mit dem Laufversuchen auf dem Prüfstand übereinstimmende Rangfolge. Hiermit stimmt die Reihenfolge der von den Autoren mit denselben Korden ausgeführten Ermüdungsprüfungen am DISCHKA—HAJMÁSY Apparat vollkommen überein. Aus diesen Erfahrungen stellen die Autoren die erfolgreiche Anwendbarkeit ihrer Methode beim Vergleich verschiedener Korde mit gleichen Kordkonstruktionen fest.

L'ÉPREUVE DE FATIGUE DES FILS DE CORDE

GY. DISCHKA et T. HAJMÁSY

RÉSUMÉ

En partant des recherches relatifs aux déformations pendant l'usage des pneumatiques, les auteurs ont analysé les tensions qui provoquent la détérioration des fils de corde, c'est-à-dire des filaments.

Sur la base des résultats, les auteurs ont construit un appareil de fatigue pour des corde, dans lequel ceux-ci sont soumis à des charges dynamiques de traction et de flexion contenant tous les composants essentiels de la tension complexe des filaments de corde dans les pneumatiques.

Deux séries d'essais ayant fourni de nombreuses données, ont permis de constater que les résultats suivent la loi de Gauss et que leur dispersion est relativement faible. Les relations logarithmiques déduites théoriquement par W. J. LYONS, qui existent entre l'effort de traction, la température et le nombre des cycles de charges exprimant la durée du fil de corde examiné, sont également valables pour les résultats du procédé de fatigue présenté par les auteurs.

D'après des examens comparatifs internationaux effectués dans divers laboratoires sur des corde de matière première différente, les méthodes de De Mattia et de Bartha donnent un classement identique à celui obtenu au banc d'essai. Le classement d'après les essais de fatigue effectués sur les mêmes cordes par les auteurs, donnent encore des résultats concordants. Cette constatation prouve l'utilité de la méthode employée par les auteurs pour la comparaison des cordes de constructions identiques.

FATIGUE TEST OF TYRE CORDS

GY. DISCHKA and T. HAJMÁSY

SUMMARY

Starting out from researches relative to the deformation of pneumatics under practical conditions, the strains causing the deterioration of cords and filaments respectively were examined.

On this basis such an endurance testing apparatus was constructed, on which non-bedded cords were subjected to dynamic tensile- and bending loads, which contain all the standard components of the practical complex strains of the filaments of cords contained in the pneumatic.

From two test series, consisting of a large number of data, it was established that the results of the tests follow the Gaussian-distribution, and their standard deviation is comparatively low. Between the tensile load, the temperature and the stress cycle-number giving the durability of the examined cords, the logarithmic relations derived theoretically by W. J. LYONS are also valid in connection with the results of the above described endurance method.

According to international comparative tests carried out by various laboratories with cords of different basic material bedded in rubber, the de-Mattia and the Bartha methods gave ranking agreeing with the result of running-test. Thereby, the ranking on basis of the fatigue tests carried out on the same cords by the authors on their apparatus entirely agree. From this experience the authors establish the serviceability of their methods in comparison of identical cord constructions.

ИСПЫТАНИЕ КОРДНЫХ НИТЕЙ НА УСТАЛОСТЬ

Д. ДИШКА и Т. ХАЙМАШИ

РЕЗЮМЕ

Исходя из исследований деформаций, возникающих на пневматиках при практических условиях, производился анализ нагрузок, вызывающих порчу кордных нитей.

На основе этого был создан такой аппарат для испытания на усталость кордной нити, в котором на непокрытые кордные нити действуют динамические растягивающие и изгибающие нагрузки, которые содержат все более или менее значительные слагаемые комплексных практических нагрузок кордных филаментов пневматиков.

На основе серий испытаний, состоящих из большого числа данных по двум показателям, установлено, что результаты испытаний соответствуют распределению Гаусса и рассеяние их является относительно небольшим. Между числом циклов нагрузки, выражающим срок службы исследованной кордной нити, растягивающей нагрузкой и температурой W. J. LYONS теоретическим путем вывел логарифмические зависимости, действительные также для результатов описанного метода испытания на усталость.

На основе сравнительных испытаний международного характера, проведенных на кордных нитях из различного сырья, покрытых резиной, методы de-Mattia и Bartha дали результаты, совпадающие с результатами испытаний на стенде. С этим совпадают данные, полученные при испытании тех же кордных нитей на усталость. Исходя из этого опыта, авторы определяют применимость своих методов для сравнения идентичных кордных конструкций.

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1961. X. 9. — Terjedelem: 22,50 (A/5) ív, 139 ábra

62.54200 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address. The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

INDEX

- Szőke, B.*: Die Analyse der einfachen Fallklappenregulierung — Analysis on the Simple Control of a Hinged Flap — Analyse de la régulation par simple clapet — *Сёке, Б.*: Анализ простого золотникового регулирования 3
- Litvai, E.*: Matrix-algebraische Behandlung von Meßbrücken mit zwei direkt geheizten Heißleitern (Thermistoren) — Matrix-Algebraic Discussion on Measuring Bridges Operating with Two Directly Heated Thermistors — Traitement en algèbre matricielle d'un pont de mesure contenant deux thermistors à chauffage direct — *Литвай, Э.*: Матрично-алгебраическая трактовка измерительного мостика, работающего с двумя термисторами прямого накала 15
- Uray, V.*: Die Untersuchung der Betriebskenngrößen von Lichtbogenöfen auf Grund des Kreisdiagramms — Investigation on the Operating Characteristics of Arc Furnaces with the Aid of the Circle Diagram — Étude des caractéristiques de la marche d'un four à arc, basée sur le diagramme du cercle — *Урай, В.*: Анализ рабочих характеристик дуговых печей на основе круговой диаграммы 45
- Soare, M. et Niculescu, D. D.*: Observations sur la distribution des efforts dans les voiles minces prismatiques et cylindriques — Einige Ergebnisse und Beobachtungen über den Spannungszustand in Zylinderschalen und Faltwerken — Some Results and Observations on the Stress-State in Cylindrical and Folded Shell-Roofs — *Соаре, М. и Никулеску, Д. Д.*: Некоторые результаты и замечания по состоянию напряженных цилиндрических и призматических оболочек 65
- Czibere, T.*: Berechnungsverfahren zum Entwurf radialer Schaufelgitter — Method for Dimensioning Radial Blade Cascades — Méthode pour calculer les dimensions des aubes en grille radiale — *Цибере, Т.*: Методика расчета при проектировании радиальных лопастных решеток 101
- Gádor, L.*: Controlled Non-Linear Resistors — Steuerung von nichtlinearen Brücken — Ponts non-linéaires contrôlés — *Гадор, Л.*: Управляемые нелинейные мосты 131
- Béda, D.*: Method исследование пластичной волны — *Béda, Gy.*: Eine Methode zur Untersuchung von plastischen Wellen — A Method for Investigating the Plastic Wave — Une méthode pour l'examen de l'onde plastique 161
- Milasovszky, B.*: The Theoretical Problems of Level Drift Location — Theoretische Fragen der Auslegung von Richtstollen — Questions théoriques du percement des galeries de direction — *Миласовски, Б.*: Принципиальные вопросы заложения главных штоков 189
- Csonka, P.*: Some Solutions in Closed Form of Problems on Torsion — Einige Lösungen des Torsionsproblems in geschlossener Form — Quelques solutions finies du problème de torsion — *Чонка, П.*: Некоторые замкнутые по форме решения проблемы кручения 221
- Szőke, B.*: A Method for Calculating the Contour of a Circular Form Tool by the Law of Secants — Berechnung des Profils eines runden Formmeißels mit Hilfe des Satzes über die Kreissekanten — Calcul du profil d'un outil de forme circulaire, à l'aide du théorème de la sécante — *Сёке, Б.*: Методика расчета профиля фигурных круглых резцов с помощью теоремы секущих 229
- Dischka, Gy. und Hajmásy, T.*: Ermüdungsversuche an Rohkorden — Fatigue Test of Type Cords — L'épreuve de fatigue des fils de corde — *Диска, Гь. и Хаймаши, Т.*: Испытание кордных нитей на усталость 235

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXVIII

FASCICULI 3—4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1962

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandelsunternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

MÉTHODE POUR CALCULER LA TEMPÉRATURE MOYENNE DE CORPS DE FORME QUELCONQUE

GY. SASVÁRI

CHAIRE DE TECHNOLOGIE CHIMIQUE DE L'UNIVERSITÉ TECHNIQUE DE BUDAPEST

[Manuscrit présenté le 23 février 1960]

Notations

- a diffusivité m^2/sec
 c chaleur spécifique du solide $kcal/kg^{\circ}C$
 d diamètre du cylindre ou de la sphère m
 e base des logarithmes naturels
 F surface de transmission de chaleur m^2
 l longueur de côté du cube ou du prisme m
 q quantité de chaleur transmise par unité de temps et de surface $kcal/m^2h$
 q' quantité de chaleur ayant traversé l'unité de surface en un temps t $kcal/m^2$
 Q quantité de chaleur ayant traversé la surface F en un temps t $kcal$
 s épaisseur de la plaque m
 t temps h
 u température variable dans le temps et dans l'espace $^{\circ}C$
 \bar{u} température moyenne du corps, variable dans le temps $^{\circ}C$
 u_f température de la surface, variable dans le temps $^{\circ}C$
 u_0 température initiale uniforme du corps $^{\circ}C$
 u' température constante du milieu environnant $^{\circ}C$
 V volume du corps m^3
 x abscisse variable du corps, mesurée dans le sens du gradient de température m
 α coefficient de transmission de chaleur $kcal/m^2h^{\circ}C$
 γ poids spécifique (poids volumétrique) du corps kg/m^3
 λ coefficient de conduction thermique $kcal/mh^{\circ}C$

$$\tau = \frac{u_f - u_0}{\bar{u} - u_0}$$

$$Fo = \frac{at}{x^2} \text{ nombre Fourier}$$

$$Nu = \frac{\alpha x}{\lambda} \text{ nombre Nusselt}$$

$$\mathcal{F}o = \frac{F^2 at}{V^2}; \text{ nombre Fourier moyen}$$

$$\mathcal{N}u = \frac{Va}{F\lambda}; \text{ nombre Nusselt moyen}$$

La littérature relative à la transmission de la chaleur donne des méthodes de calcul valables pour les traitements thermiques de longue durée. Dans la plupart des cas technologiques, tels que séchage, traitement thermique dans les fours, etc. . ., la durée du traitement est, de fait, assez longue par rapport aux dimensions du corps, et la nombre FOURIER qui caractérise le processus est d'une valeur relativement élevée.

Mais il y a aussi des processus technologiques nécessitant un traitement thermique de très courte durée, comme chez certains échangeurs spéciaux (pebble heater) ou dans le cas de matériaux à grains traités à l'état flottant ou

fluidisé. Or pour ces processus, la littérature n'offre guère de méthodes de calcul utilisables dans la pratique. C'est cette lacune que la présente étude essayera de combler.

La résolution de l'équation différentielle de Fourier donne la température du corps chauffé, en n'importe quel point de ce corps, après un temps t donné. Mais dans le cas de corps finis, cette résolution ne saurait être ramenée à une forme finie. La fonction exprimant la température, de même que sa première dérivée partielle selon la distance, le gradient de température, renferment une série infinie. On sait cependant que, dans le cas de corps semi-infinis (demi-espace), la première dérivée partielle selon la distance peut s'exprimer sous une forme finie:¹

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_t - u_0}{\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{at}} \quad [^\circ\text{C/m}] \quad (1)$$

On sait aussi qu'au commencement du chauffage, ou en cas de corps de très grandes dimensions, la solution relative au demi-espace peut s'appliquer également à des corps de dimensions finies, si $Fo < 0,2$.

Dans ce cas, si la température de la surface est constante, le gradient de température sur la surface du corps sera, suivant l'équation (1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_f - u_0}{\sqrt{\pi at}} \quad [^\circ\text{C/m}] \quad (2)$$

et la quantité de chaleur transmise par unité de temps et de surface:

$$q = \frac{\lambda(u_f - u_0)}{\sqrt{\pi at}} \quad [\text{kcal/m}^2\text{h}] \quad (3)$$

De l'équation (3) on obtient, par intégration entre les limites 0 et t , la quantité de chaleur ayant traversé l'unité de surface en un temps t :

$$q' = \frac{2\lambda(u_f - u_0)}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{t} \quad [\text{kcal/m}^2] \quad (4)$$

Et la quantité de chaleur ayant traversé la surface F en un temps t sera:

$$Q = \frac{2F\lambda(u_f - u_0)}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{t} \quad [\text{kcal}] \quad (5)$$

S'il n'est pas essentiel de connaître la température en fonction du temps pour tous les points du corps, mais il suffit d'avoir la *température moyenne** du corps après un temps t , on peut procéder de la façon suivante.

* La température moyenne est déterminée par les équations (5) et (6). D'après celles-ci

$$\bar{u} = \frac{Q}{V\gamma c} + u_0$$

La quantité de chaleur ayant traversé la surface F du corps d'un volume V pendant un temps t , est égale à l'élévation du contenu de chaleur du corps.

$$\frac{2F\lambda(u_f - u_0)}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{t} = V\gamma c(\bar{u} - u_0) \quad (6)$$

De l'équation (6), on exprime l'élévation de la température moyenne en un temps t :

$$\bar{u} - u_0 = (u_f - u_0) \frac{2F}{V} \frac{\lambda}{c\gamma} \sqrt{\frac{t}{\pi a}} = (u_f - u_0) \frac{2F}{V} \sqrt{\frac{at}{\pi}} \quad [^\circ\text{C}] \quad (7)$$

Si le corps est immergé dans un milieu de température constante et la température de la surface devient variable dans le temps, alors la quantité de chaleur traversant la surface peut aussi s'exprimer à l'aide du coefficient de transmission de chaleur:

$$q = a (u' - u_f) \quad [\text{kcal/m}^2\text{h}] \quad (8)$$

Le coefficient de transmission convective n'est uniforme sur toute la surface du corps qu'en cas de corps réguliers. Si l'on veut appliquer l'équation (8) à des corps irréguliers, il y faut substituer le coefficient de convection moyen déterminé empiriquement.

Les côtés droits des équations (3) et (8) sont égaux.

$$a(u' - u_f) = \lambda \frac{u_f - u_0}{\sqrt{\pi at}} \quad (9)$$

De l'équation (9), on peut exprimer la différence entre la température du milieu et celle de la surface

$$u' - u_f = (u_f - u_0) \frac{\lambda}{a\sqrt{\pi at}} [^\circ\text{C}] \quad (10)$$

Dans la formule (10), u_f est déjà variable, tandis que u' et u_0 sont constants.

De l'équation (10), on peut exprimer la différence entre la température du milieu et la température initiale du corps, en augmentant de $(u_f - u_0)$ les deux côtés de l'équation:

$$u' - u_0 = (u' - u_f) + (u_f - u_0) = (u_f - u_0) \left(\frac{\lambda}{a\sqrt{\pi at}} + 1 \right) [^\circ\text{C}] \quad (11)$$

En divisant maintenant l'équation (7) par l'équation (11), on élimine l'expression $(u_f - u_0)$, et on obtient la relation

$$\frac{\bar{u} - u_0}{u' - u_0} = \frac{\frac{2F}{V} \sqrt{\frac{at}{\pi}}}{\frac{\lambda}{a\sqrt{\pi at}} + 1} \quad (12)$$

L'équation (12) est la relation cherchée qui, par les dimensions et les constantes physiques du corps exprime, en fonction du temps, le rapport de l'élévation moyenne de la température et de la différence entre la température du milieu et la température initiale du corps. L'expression (12) peut être simplifiée encore, par définition de nombres Fo et Nu modifiés (moyens) de la façon suivante:

$$\mathcal{F}o = \frac{F^2 at}{V^2}, \quad \mathcal{N}u = \frac{Va}{F\lambda} \quad (13)$$

Ce mode de définition des deux nombres sera indiqué par l'emploi de caractères d'écriture dans leur symbole.

En arrangeant à présent le numérateur et en multipliant le numérateur et le dénominateur par F/V , puis par $\sqrt{\pi at}$ d'après les équations (12) et (13), on pourra écrire l'équation (12) sous la forme:

$$\frac{\bar{u} - u_0}{u' - u_0} = \frac{2\mathcal{F}o}{\frac{1}{\mathcal{N}u} + \sqrt{\pi}\mathcal{F}o} \quad (14)$$

La condition $Fo < 0,2$ se rapporte toujours au nombre Fo produit par la moitié de la dimension du corps mesurée dans le sens du flux de chaleur. De la sorte, la limite de validité du nombre Fourier moyen variera suivant la forme du corps, par exemple:

<i>Dénomination</i>	<i>limite de validité</i>
plaque	0,2
cube	0,6
cylindre infini	0,4
cylindre ($d : h = 1 : 1$)	0,6
prisme infini à section carrée	0,4
sphère	0,6

Pour être complet, considérons encore brièvement le cas $Fo > 0,2$, bien que Heiligenstaedt l'eut déjà étudié dans son ouvrage cité dans notre bibliographie. Cet auteur a démontré que le remplacement de la dimension caractéristique du corps par le quotient du volume et de la surface, donne une valeur juste de la température moyenne du corps.

Si $Fo > 0,2$, alors le bilan thermique exprimé par l'élévation moyenne de la température du corps sera:

$$Fa(u' - u_f) = V\gamma c \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (15)$$

Si $Fo > 0,2$, alors la valeur du quotient $\tau = (u' - u_f) : (u' - \bar{u})$ est indépendant du nombre Fo (indépendant du temps), et n'est fonction que du

nombre Nu . De sorte que l'équation (15) pourra aussi s'écrire:

$$F\alpha\tau(u' - \bar{u}) = V\gamma c \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (16)$$

En intégrant l'équation différentielle (16) entre les limites $(u' - u_0)$ et $(u' - \bar{u})$, on obtient la solution:²

$$\frac{u' - \bar{u}}{u' - u_0} = e^{-\frac{F\alpha\tau}{V\gamma c}} \quad (17)$$

L'étude citée exprime la relation sous la forme de l'équation (17), mais celle-ci peut être simplifiée encore. L'exposant figurant au côté droit de l'équation (17) peut aussi s'écrire de la façon suivante:

$$\frac{F\alpha\tau}{V\gamma c} = \frac{F\alpha a\tau}{V\lambda} \quad (18)$$

Le côté droit de l'équation (18) peut être décomposé en deux facteurs et, en outre, multiplié et divisé par le quotient de la surface et du volume:

$$\frac{F}{V} \frac{F\alpha a\tau}{V} \frac{V}{F} \frac{\alpha\tau}{\lambda} = (F\alpha Nu\tau) \quad (19)$$

En substituant l'équation (19) dans l'équation (17), on obtient la relation simple

$$\frac{u' - \bar{u}}{u' - u_0} = e^{-(F\alpha Nu\tau)} \quad (20)$$

De la définition du facteur τ , il s'ensuit que la température de la surface peut se calculer de l'équation ci-dessous:

$$\frac{u' - u_f}{u' - u_0} = \tau e^{-(F\alpha Nu\tau)} \quad (21)$$

Enfin, suivant la définition du facteur τ , et l'équation (21), la différence entre la température de la surface et la température moyenne peut être déterminée de l'expression

$$\frac{u_f - \bar{u}}{u' - u_0} = (1 - \tau) e^{-(F\alpha Nu\tau)} \quad (22)$$

Les valeurs du facteur τ sont données dans l'ouvrage (2).

LITTÉRATURE

1. SCHACK, A.: Der industrielle Wärmeübergang. 1953. Düsseldorf, pp. 35-37.
2. HEILIGENSTAEDT, W.: Ipari kemencék hőtechnikai számításai (Calculs thermotechniques des fours industriels), Műszaki Kiadó, Budapest, 1958. pp. 210-214.

RÉSUMÉ

Dans les cas où il suffit de connaître la température moyenne du corps chauffé, après un temps t , cette température peut toujours être exprimée sous une forme finie, par une fonction dont les variables indépendantes sont les nombres Fourier et Nusselt moyens.

Si $F_0 < 0,2$, alors la relation donnant la température moyenne est une fraction simple; si $F_0 > 0,2$, elle est une formule exponentielle.

A l'aide de la méthode décrite, la température moyenne du corps chauffé peut être déterminée par un calcul unique, sans l'aide de tableaux ou diagrammes dans le premier cas, et avec utilisation d'un seul tableau dans le second.

EIN VERFAHREN ZUR BERECHNUNG DER DURCHSCHNITTSTEMPERATUR
EINES BELIEBIG GEFORMTEN KÖRPERS

GY. SASVÁRI

ZUSAMMENFASSUNG

Wenn die Kenntnis des Mittelwertes der nach dem Ablauf der Zeit t erreichten Temperatur eines sich erwärmenden Körpers hinreichend ist, kann die Durchschnittstemperatur jederzeit in geschlossener Form durch eine Funktion ausgedrückt werden, deren unabhängige Veränderlichen durch die Fourier'schen und Nusselt'schen Kriterien gegeben sind.

Falls $F_0 < 0,2$ ist, ist der die Durchschnittstemperatur bestimmende Zusammenhang ein einfacher Bruch; wogegen im Falle $F_0 > 0,2$ derselbe durch eine Exponentialformel gegeben ist.

Mit Hilfe des geschilderten Verfahrens kann die Durchschnittstemperatur eines sich erwärmenden Körpers mittels einer einzigen Berechnung bestimmt werden. Im ersten Falle ist hiezu weder eine Tabelle noch eine Diagramm, im zweiten Falle dagegen die Zuhilfenahme einer einzigen Tabelle erforderlich.

CALCULATION OF THE AVERAGE TEMPERATURE
FOR AN OPTIONALLY FORMED BODY

GY. SASVÁRI

SUMMARY

If the knowledge of the mean temperature of a warming body arrived at after the time t is sufficient, then the average temperature can always be expressed, in closed form, by a function the independent variables of which are given by Fourier's and Nusselt's average criterions.

For $F_0 < 0,2$ the relation determining the average temperature will be a simple fraction, while for $F_0 > 0,2$ the same is expressed by an exponential formula.

Using the method presented in this paper, the average temperature of a body becoming warm can be computed by one single calculation. In the first case without using any table or diagram, in the second case, however, the use of one single table only is required.

МЕТОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕЛА ЛЮБОЙ ФОРМЫ

Г. ШАШВАРИ

РЕЗЮМЕ

Если достаточно знать среднюю температуру греющегося тела по прошествии времени t , то средняя температура всегда может быть выражена в закрытой форме таким уравнением, независимыми переменными которого являются критерии Фурье и Нуссельта.

Если $F_0 < 0,2$, то средняя температура выражается в виде простой дроби, если же $F_0 > 0,2$ — то экспоненциальной формулы.

При помощи предлагаемого метода средняя температура греющегося тела может быть вычислена одной операцией, в первом случае без применения каких бы то ни было таблиц или диаграмм, во втором случае, применив единственную таблицу.

DIMENSIONSLOSE KENNLINIEN VON THERMISTOREN (HEISSLEITERN) UND IHRE ANWENDUNG

E. LITVAI

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST, LEHRSTUHL FÜR STRÖMUNGSLEHRE

[Eingegangen am 30. März 1960]

1. Einleitung

Unter den vielen Anwendungsmöglichkeiten der Thermistoren [1, 4, 6, 8, 10] verdienen diejenigen Beachtung, die mit der Messung von physikalischen Größen zusammenhängen, deren Veränderung die Wärmeübergangszahl verändert. Wenn der durchfließende elektrische Strom den Thermistor auf eine höhere Temperatur als die Umgebungstemperatur erwärmt, das heißt, wenn der Thermistor direkt geheizt ist, so hängt die Temperatur des Thermistors außer von der zugeführten elektrischen Leistung seinen Werkstoffeigenschaften und seinen Abmessungen sowie der Umgebungstemperatur, auch von der Wärmeübergangszahl ab. In Abschnitt 2 fassen wir diese Fragen kurz zusammen. Auf diese Weise kann die Messung dieser physikalischen Zustandsgrößen, die die Wärmeübergangszahl beeinflussen (Strömungsgeschwindigkeit, Druck usw.), mit Hilfe einer geeigneten Schaltung auf die Messung von elektrischen Größen zurückgeführt werden. Da jedoch der Widerstand eines Thermistors auch von der Umgebungstemperatur abhängt, muß auch für die Temperaturkompensation gesorgt werden, damit die Meßergebnisse wirklich nur von der zu messenden Zustandsgröße abhängen.

Da der direkt geheizte Thermistor ein nichtlineares Element ist, spielen in der Forschungsarbeit zur Entwicklung von derartigen Meßeinrichtungen seine Strom-Spannung-Kennlinie und seine Leistungs-Widerstand-Kennlinie eine grundlegende Rolle [12]. Aber auch die Dimensionierung und die Fabrikation sind unvorstellbar ohne eingehende Kenntnis und Ausnützung der Kennlinien und deren Gesetzmäßigkeiten, da sich die Eigenschaften der Thermistor-Individuen in verhältnismäßig hohem Maße voneinander unterscheiden [7].

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es gerade, die Kennlinien der Thermistoren in einem *einheitlichen, übersichtlichen System* zu behandeln und so die Behandlung derselben zu erleichtern. Der 2. Abschnitt faßt die hauptsächlichsten Eigenschaften der Thermistoren und die üblichen graphischen und analytischen Ausdrucksweisen der Kennlinien kurz zusammen. Im 3. Abschnitt wird die auf die zum *maximalen Spannungspunkt der Strom-Spannung-Kennlinie* gehörenden Werte bezogene *dimensionslose oder relative Kennlinie* eingeführt, mit deren

Hilfe jede *Thermistor-Kennlinie* durch eine einzige — ebenfalls von einem dimensionslosen Parameter abhängige — Kurvenschar abgebildet werden kann. Die Anwendung von logarithmischen Koordinaten bringt weitere Vorteile mit sich: die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Kennlinien und den relativen Kennlinien werden leicht überblickbar. Im 4. Abschnitt werden vier Anwendungsmöglichkeiten, im 5. Abschnitt einige Meßergebnisse besprochen. Die längeren Ableitungen sind als Anhang im 6. Abschnitt zusammengefaßt.

Die vorliegende Arbeit ist an dem Lehrstuhl für Strömungslehre der Technischen Universität Budapest entstanden, im Rahmen eines Forschungsprogramms, das die Messung der Strömungsgeschwindigkeit mit Thermistoren zum Gegenstand hat. Der Verfasser spricht an dieser Stelle dem Leiter des Lehrstuhls Herrn Prof. DR. JOSEF GRUBER, seinen Dank aus.

Bezeichnungen:

B [°K]	Energiekonstante des Thermistors
$b = b(\psi, \beta)$	siehe (18)
C [°K/W]	Leistungsempfindlichkeitskoeffizient des Thermistors
$E_U = E_U(\beta)$	siehe (20)
$E_I = E_I(\beta)$	siehe (21)
$E_R = E_R(\beta)$	siehe (22)
$E_P = E_P(\beta)$	siehe (23)
F	dynamischer Faktor (47)
F_T [m ²]	Oberfläche des Thermistors
F'	siehe (51)
F''	siehe (52)
I [A]	Stromstärke
Nu	Nußelt-Zahl
n	Richtungstangens der Inflexionstangente, siehe (42)
P [W]	elektrische Leistung
Pr	Prandtl-Zahl
R [Ω]	elektrischer Widerstand
R_∞ [Ω]	charakteristischer Widerstand des Thermistors, siehe (1)
Re	Reynolds-Zahl
U [V]	elektrische Spannung
v [m/s]	Strömungsgeschwindigkeit
α [W/m ² °K]	Wärmeübergangszahl
β	dimensionsloser Parameter, siehe (15)
Θ [°K]	Temperatur der Umgebung des Thermistors
Θ_T [°K]	Temperatur des Thermistors

2. Die charakteristischen Eigenschaften der Thermistoren

Es ist die grundlegende Eigenschaft der Thermistore, daß ihr Widerstand R in hohem Maß mit dem Anstieg ihrer Temperatur Θ_T abnimmt. Unter den Näherungsformeln, die den Zusammenhang darstellen, wählen wir im weiteren

$$R = R_\infty \cdot e^{B/\Theta_T} \quad (1)$$

zum Ausgangspunkt [2]. Hier ist B eine vom Werkstoff des Thermistors abhängige, R_∞ eine außerdem noch von der Form des Thermistors abhängige Konstante.

Wenn der den Thermistor durchfließende Strom I klein ist, so unterscheidet sich seine Temperatur nur wenig von der Temperatur Θ der Umgebung. Mit steigender Stromstärke wird jedoch, wegen der Umwandlung der zugeführten elektrischen Energie in Wärmeenergie, der Unterschied $\Theta_T - \Theta$ beträchtlich, was bedeutet, daß sich auch der Wert von R in bedeutendem Maße ändert.

Der auf diese Weise direkt geheizte Thermistor, dessen Widerstand daher von der Stromstärke abhängt, ist kein lineares Element. Zur Kennzeichnung seiner elektrischen Eigenschaften benutzen wir am häufigsten seine im Strom-

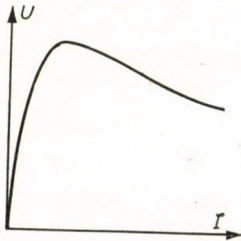


Abb. 1

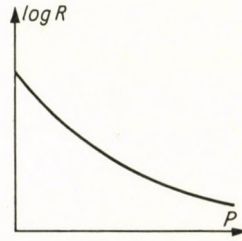


Abb. 2

Spannungsdiagramm dargestellte Kennlinie. Abb. 1 zeigt z. B. die an den Klemmen des Thermistors bei einem bestimmten, unveränderlichen physikalischen Zustand seiner Umgebung meßbare Spannung U als Funktion der durchfließenden, zeitlich konstanten Stromstärke I : die *statische Kennlinie* mit ihrer charakteristischen Form. Die in Abb. 2 gezeigte Widerstand-Leistung-Kennlinie ist ebenfalls zur graphischen Charakterisierung des Thermistors geeignet. Hier ist

$$P = U \cdot I \quad (2)$$

die dem Thermistor zugeführte Leistung.

Zur Angabe der statischen Kennlinie in analytischer Form ist es üblich [3, 4], folgendes anzunehmen:

1. Der Thermistor ist in thermischem Gleichgewicht, d. h. die zugeführte elektrische Leistung ist gleich der der Umgebung abgegebenen Wärmeleistung.
2. Neben dem Wärmeübergang können die Wärmeleitung und die Wärmestrahlung vernachlässigt werden.
3. Im Thermistor ist die Temperatur überall gleich.
4. Die Wärmeübergangszahl ist entlang einer gegebenen Kennlinie überall gleich (sie ändert sich nur vernachlässigbar wenig mit der Temperatur des Thermistors).

Unter diesen Voraussetzungen wird das thermische Gleichgewicht durch die Gleichung

$$P = \frac{1}{C} (\Theta_T - \Theta) \quad (3)$$

ausgedrückt. Hier ist C ($^{\circ}\text{K}/\text{W}$) der *Leistungsempfindlichkeitskoeffizient*, der mit der *Wärmeübergangszahl* a ($\text{W}/\text{m}^2 \text{ } ^{\circ}\text{K}$) und der — jedenfalls schwer meßbaren — Oberfläche F_T (m^2) des Thermistors nach der Gleichung

$$C = \frac{1}{aF_T} \quad (4)$$

zusammenhängt, und dessen Wert deshalb außer von der Größe und der Gestalt des Thermistors noch von den physikalischen Zustandsgrößen der Umgebung abhängig ist [5, 11]. Eben deswegen kann der Thermistor auch zur Messung dieser letzteren herangezogen werden.

Auf Grund von (1) und (3) ist

$$R = R_{\infty} \cdot e^{\frac{B}{CP+\theta}} \quad (5)$$

und wenn man dies in die bekannten Formeln

$$I = \sqrt{P/R}; \quad U = \sqrt{PR} \quad (6)$$

einsetzt, erhält man die durch den Parameter P ausgedrückten Gleichungen

$$I = \sqrt{P/R_{\infty} e^{\frac{B}{CP+\theta}}} \quad (7)$$

$$U = \sqrt{P \cdot R_{\infty} e^{\frac{B}{CP+\theta}}} \quad (8)$$

der statischen Charakteristik [3]. Die Zusammenhänge nach (7) und (8) können folgendermaßen interpretiert werden:

Bei einem gegebenen Ausgangszustand der Umgebung des Thermistors bestimmen wir seine statische $U - I$ -Kennlinie. Hierzu können wir je einen Wert von θ und von C zuordnen. Ändern wir jetzt den Zustand der Umgebung, jedoch so, daß sich nur θ ändert, und die anderen Zustandsgrößen unverändert bleiben. Im neuen Zustand kann wieder die statische Charakteristik bestimmt werden, der der veränderte Wert von θ zugeordnet werden kann. Bei Wiederholung des Verfahrens erhalten wir eine Schar von Charakteristiken, die zu den verschiedenen Umgebungstemperaturen gehören, und für jede einzelne Kurve gilt die Bedingung $\theta = \text{const.}$ Der Wert von C kann entlang der einzelnen Charakteristiken als konstant angenommen werden, obwohl er sich von Charakteristik zu Charakteristik ändern kann, jedoch — und das ist wesentlich — nur infolge der Änderung der Temperatur. Allerdings gehören zu Charakteristiken, deren θ -Werte sich nicht allzu stark unterscheiden, näherungsweise gleiche Werte von C . Die so definierten Kurven können wir θ -Kennlinien nennen. Da ihr Ausgangszustand durch verschiedene Werte von C gekennzeichnet ist, bilden sie eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit.

Wenn wir den vorgenannten Ausgangszustand zu Grunde legen, können wir auch eine zweite Kennlinien-Schar definieren: für jede Kurve dieser Schar

halten wir die Temperatur bis zum Schluß auf der ursprünglichen Höhe, ändern aber die übrigen Zustandsgrößen der Umgebung so, daß C sich um einen bestimmten Betrag ändert. Der im neuen Zustand aufgenommenen statischen Kennlinie können wir den neuen Wert von C zuordnen. Durch Wiederholung des Verfahrens erhalten wir die Schar der C -Kennlinien, für deren Individuen die Bedingungen $C = \text{const}$ und $\theta = \text{const}$ gelten.

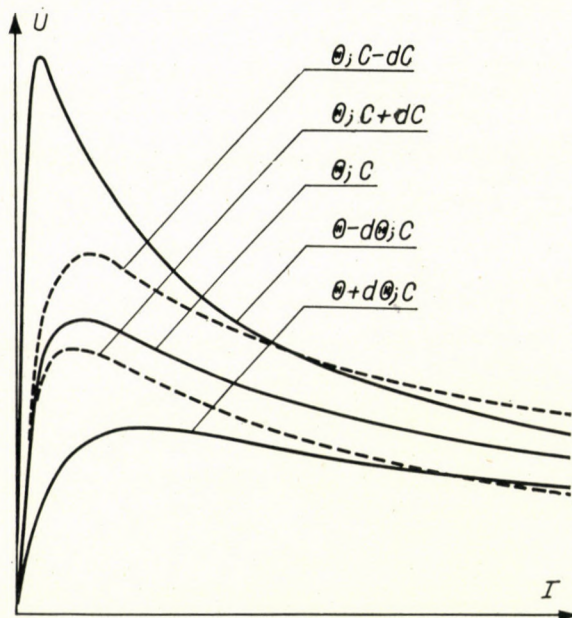


Abb. 3

Abb. 3 zeigt je drei charakteristische C - und θ -Kennlinien, deren Kennwerte von den Werten C und θ , die den Ausgangszustand definieren, um $\pm dC$, bzw. um $\pm d\theta$ abweichen.

Zwischen den beiden Kennlinien-Scharen besteht der wesentliche Unterschied, daß den zu den θ -Kennlinien gehörigen Wert C — außer dem Ausgangszustand — nur die Temperatur bestimmt, während der zu den C -Kennlinien gehörige C -Wert durch die übrigen Zustandsgrößen bestimmt wird.

Offensichtlich können wir beim heutigen Stand der Thermistor-Technologie [7] und auf Grund unserer derzeitigen Kenntnisse über die Wärmeübergangszahl die Kennlinien allein durch Berechnung nicht vorausbestimmen, die Werte von B , R_{∞} und C können nur durch Messung bestimmt werden. Allerdings ist es wünschenswert, die mit der Messung verbundene Arbeit auf das Minimum zu beschränken. Die Einführung der dimensionslosen Kennlinien bietet die Möglichkeit hierfür.

3. Die dimensionslosen Kennlinien

Bezeichnen wir die zu den Punkten maximaler Spannung der einzelnen $U - I$ -Kennlinien gehörigen Spannungs-, Strom-, Widerstands- und Leistungswerte mit U_m , I_m , R_m und P_m . Bilden wir die Verhältniszahlen

$$\frac{U}{U_m} = \eta \quad (9)$$

$$\frac{I}{I_m} = \chi \quad (10)$$

$$\frac{P}{P_m} = \psi \quad (11)$$

$$\frac{R}{R_m} = r. \quad (12)$$

Auf diese Weise definieren wir an Stelle der $U - I$ -Kennlinien die $\eta - \chi$ -, an Stelle der $R - P$ -Kennlinien die $r - \psi$ -, *dimensionslosen oder relativen Kennlinien*, die wir eingehender untersuchen wollen.

Die zum Punkt maximaler Spannung der Kennlinie gehörigen Werte können wir aus der Bedingung

$$\frac{dU}{dI} = \frac{dU/dP}{dI/dP} = 0 \quad (13)$$

bestimmen. Nach Einsetzung des Ergebnisses

$$P_m = \frac{1}{C} \left[\frac{B}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\Theta}{B}} \right) - \Theta \right], \quad (14)$$

das sich nach kurzer Rechnung (*Anhang; a*) ergibt, in die Gleichungen (7) und (8), erhält man die Ausdrücke für U_m und I_m . Nach Einführung der Verhältniszahl

$$\frac{\Theta}{B} = \beta \quad (15)$$

erhält man die Ausdrücke (*Anhang; b*)

$$\eta = \sqrt{\psi \cdot e^{\beta}} \quad (16)$$

und

$$\chi = \sqrt{\frac{\psi}{e^{\beta}}}, \quad (17)$$

in welchen

$$b = 2 \left[\frac{1}{\psi(1 - \sqrt{1 - 4\beta}) + 2\beta} - \frac{1}{1 - \sqrt{1 - 4\beta}} \right] \quad (18)$$

ist.

Ähnlich den Gleichungen (7) und (8), bestimmen diese Gleichungen die Gestalt der relativen Kennlinie in Abhängigkeit vom Parameter ψ . Es ist bemerkenswert, daß laut der Gleichungen (16)—(18) die Gestalt der relativen Kennlinie von den Werten C und R_∞ unabhängig ist, und daß die Stoffeigenschaften von einem einzigen Parameter, dem dimensionslosen Verhältnis

$$\beta = \frac{\Theta}{B}$$

repräsentiert werden. Daher können die $\eta - \chi$ -Kennlinien als einparametrische Kurvenschar mit dem Parameter a dargestellt werden (Abb. 4). Ähnlich ist die Lage bei den $r - \psi$ -Kennlinien (Abb. 5) auf Grund der Verhältniszahl

$$r = \frac{\eta}{\chi} = e^b. \quad (19)$$

Die Werte von η , χ und r , innerhalb der praktisch wichtigen Grenzen, gibt außer den Abb. 4 und 5 auch die *Zahlentafel I* an.

Zur praktischen Anwendung der relativen Kennlinien müssen wir den Zusammenhang zwischen den zum Punkt maximaler Spannung gehörigen Werten und den Konstanten der Gl. (5) kennen. Das im *Anhang; c)* mitgeteilte Verfahren führt zu den Gleichungen

$$U_m / \sqrt{\frac{BR_\infty}{2C}} = \sqrt{(1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta) \cdot e^{\frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}}} = E_U \quad (20)$$

$$I_m / \sqrt{\frac{B}{2CR_\infty}} = \sqrt{(1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta) \cdot e^{-\frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}}} = E_I \quad (21)$$

$$R_m / R_\infty = e^{\frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}} = E_R \quad (22)$$

und zu der aus (14) stammenden Gleichung

$$\frac{2P_m C}{B} = (1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta) = E_p. \quad (23)$$

E_U , E_I , E_R und E_p sind nur Funktionen von β . Ihre im praktisch wichtigen Bereich von β angenommenen Werte können der *Zahlentafel II* oder der Abb. 6 entnommen werden.

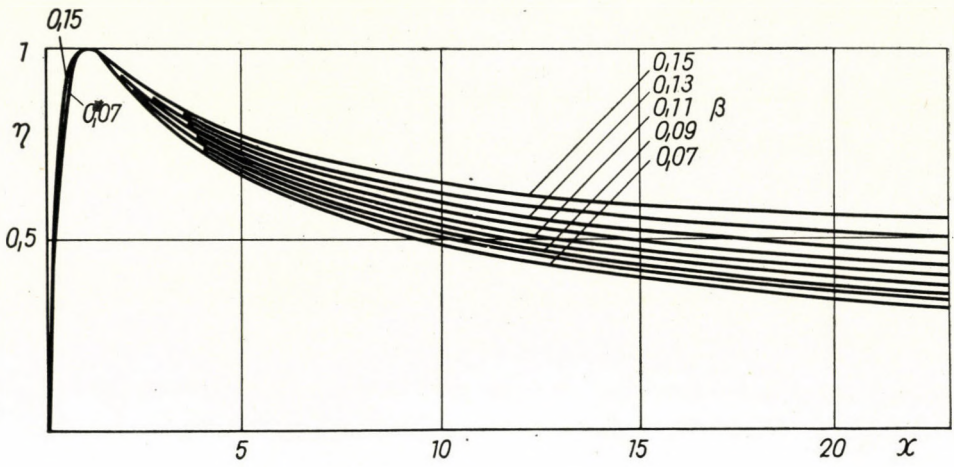


Abb. 4

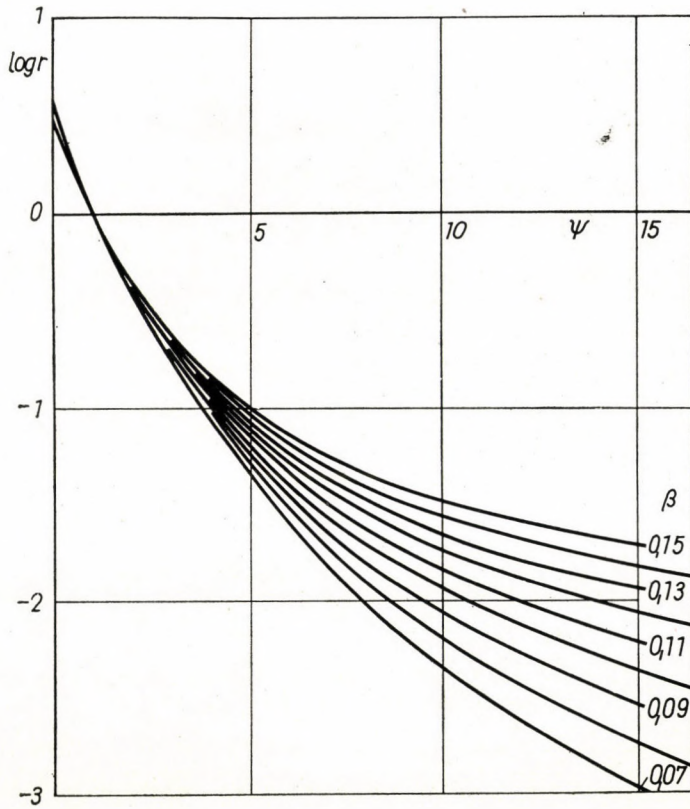


Abb. 5

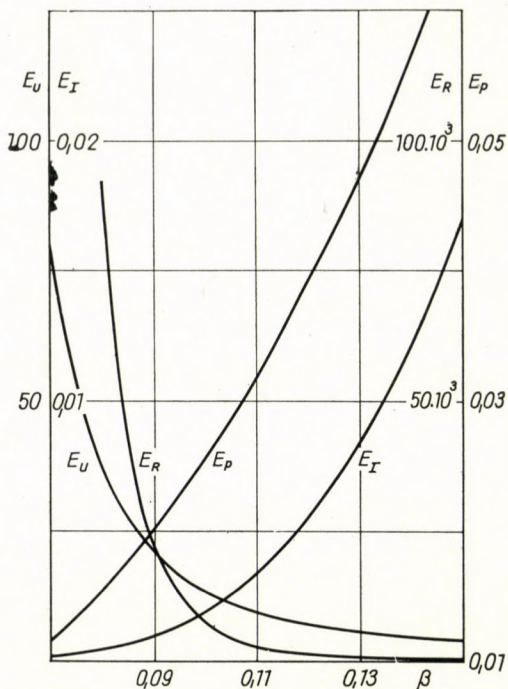


Abb. 6

Aus den obigen Zusammenhängen ist zu ersehen, daß die zur gleichen Umgebungstemperatur gehörigen zwei C_1 - und C_2 -Kennlinien eines Thermistors auf Grund der Beziehungen

$$\frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \tag{24}$$

und

$$\frac{I_{m2}}{I_{m1}} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \tag{25}$$

sowie der gleichen Form von $\eta - \chi$ -Kennlinie — da β konstant ist — *zueinander in affiner Beziehung stehen*; der *Anfangspunkt des Koordinatensystems ist das Zentrum der Affinität*. Entlang der einzelnen Strahlen ist nämlich $R = U/I$ konstant (Abb. 7), und daher folgt aus (12)

$$R_2 = r_2 R_{m2} = r_1 R_{m1} = R_1$$

beziehungsweise aus (22)

$$r_2 = r_1.$$

Auf Grund von (19) und (18) ist jedoch

$$b_1 = b_2 \text{ und } \psi_1 = \psi_2.$$

Hiermit, ferner auf Grund von (6), (11) und (23) wird

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{P_2 R_2}{P_1 R_1}} = \sqrt{\frac{\psi_2 P_{2m}}{\psi_1 P_{1m}}} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \quad (26)$$

und auf Grund von ähnlichen Überlegungen erhalten wir das Ergebnis

$$\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}. \quad (27)$$

Die Zusammenhänge zwischen den θ -Kennlinien sind komplizierter, da mit der Änderung von θ sich auch β ändert. Die Koordinaten des Punktes

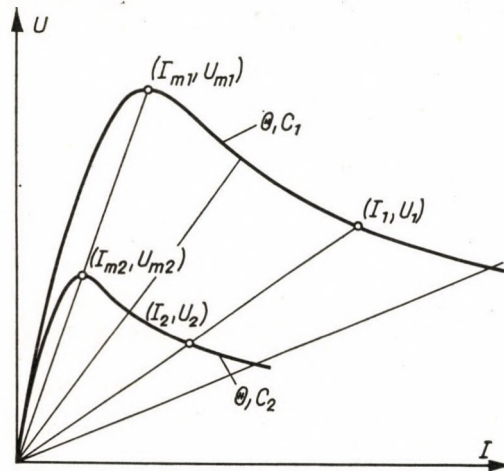


Abb. 7

der maximalen Spannung U_m und I_m liegen auf der durch den Parameter β und die Gleichungen (20) und (21) bestimmten Kurve, außerdem ändert sich auch die Gestalt der $\eta - \chi$ -Kennlinie.

Weitere Vorteile bietet die Darstellung der Kennlinien im *logarithmischen Maßstab*. Auf Grund der aus (16) und (17) abgeleiteten Beziehungen

$$\ln \eta = \frac{1}{2} \ln \psi + \frac{1}{2} b \quad (28)$$

$$\ln \chi = \frac{1}{2} \ln \psi - \frac{1}{2} b \quad (29)$$

sind die für einige β -Werte berechneten Koordinaten der $\log \eta - \log \chi$ Kennlinien in Zahlentafel I enthalten und in Abb. 8 dargestellt.

Entsprechend den bekannten Eigenschaften des logarithmischen Koordinatensystems (z. B. [4]) ergeben die $\log \eta - \log \chi$ -Kennlinien gleichzeitig

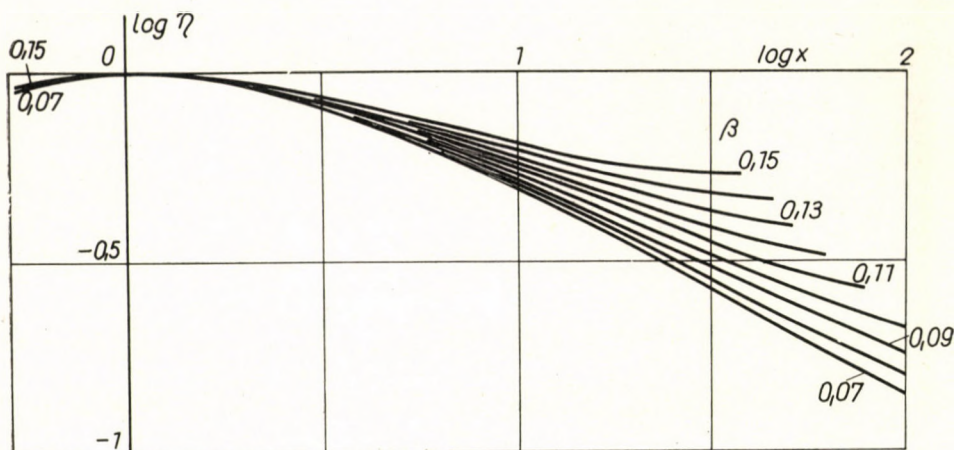


Abb. 8

auch die $\log r - \log \psi$ -Kennlinien. In der Tat, auf die in Abb. 9. a) dargestellte Weise gibt eine gegebene relative $\log \eta - \log \chi$ -Kennlinie (z. B. mit dem Parameter β_1), in dem um 45° verdrehten Koordinatensystem die dem gleichen β_1 entsprechende $\log r - \log \psi$ -Kennlinie.

Aus (28) und (29) folgt, unter Beachtung von (9) und (10),

$$\ln U = \frac{1}{2} \ln \psi + \frac{1}{2} b + \ln U_m = \ln \eta + \ln U_m \tag{30}$$

$$\ln I = \frac{1}{2} \ln \psi - \frac{1}{2} b + \ln I_m = \ln \chi + \ln I_m \tag{31}$$

und diese Beziehungen zeigen, daß die durch das gleiche β gekennzeichneten $\ln U - \ln I$ -Kennlinien — abgesehen von einer Verschiebung um $\ln U_m$ bzw. um $\ln I_m$ — vollkommen kongruent sind mit den zum gleichen β gehörigen $\ln \eta - \ln \chi$ logarithmischen, relativen Kennlinien. Z. B. ist der Abstand zwischen zwei einander entsprechenden Punkten mit gleichem $\beta = \beta_1$ zweier C-Kennlinien, die durch C_1 bzw. C_2 gekennzeichnet sind, mit den Koordinaten

$$\ln U_{c2} - \ln U_{c1} = \frac{1}{2} (\ln C_1 - \ln C_2)$$

bzw. (32)

$$\ln I_{c2} - \ln I_{c1} = \frac{1}{2} (\ln C_1 - \ln C_2)$$

gegeben, die aus (26) und (27) folgen. So ist

$$\overline{A_1 A_2} = \sqrt{(\ln U_{c2} - \ln U_{c1})^2 + (\ln I_{c2} - \ln I_{c1})^2} = \ln C_1 - \ln C_2. \tag{33}$$

Die Verschiebung der zueinander gehörigen Punkte erfolgt entlang der Geraden $\ln R = \text{const.}$ Bei gleichem $C = C_1 = C_2$ unterscheiden sich die Scheitelpunkte

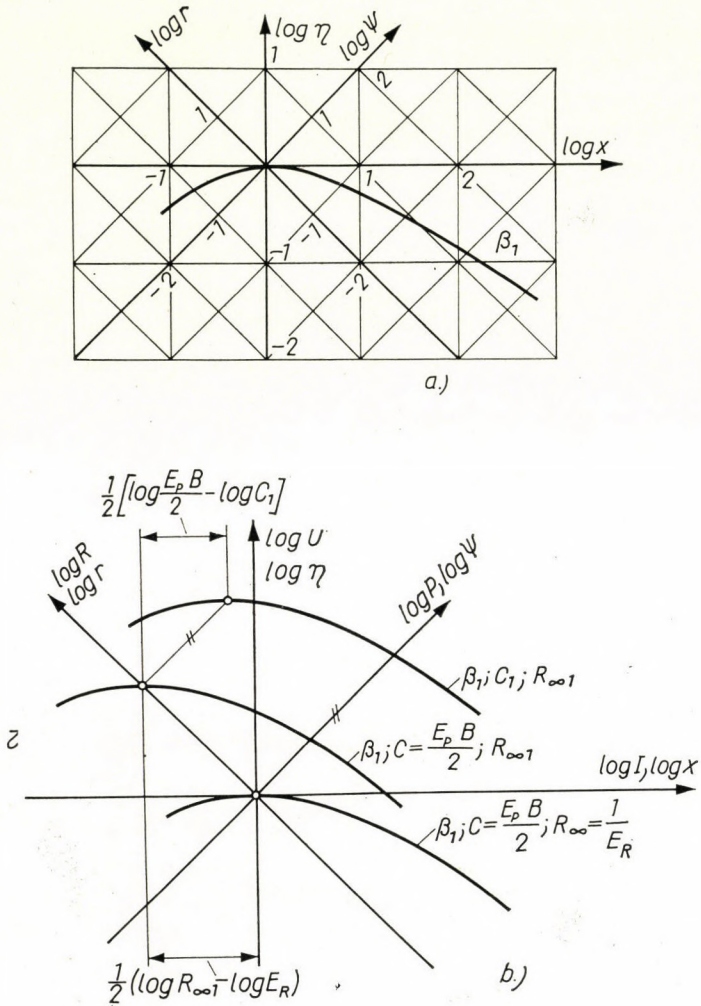


Abb. 9

von zwei, durch β_1 bzw. β_2 charakterisierten Θ -Kennlinien, durch die aus (20) und (21) abgeleitete Verschiebung

$$\ln U_{m\beta 2} - \ln U_{m\beta 1} = \ln E_U(\beta_2) - \ln E_U(\beta_1) \tag{34}$$

bzw.

$$\ln I_{m\beta 2} - \ln I_{m\beta 1} = \ln E_I(\beta_2) - \ln E_I(\beta_1) \tag{35}$$

sowie durch eine Gestaltänderung, die in der $\ln \eta - \ln \chi$ -Ebene abgelesen werden kann.

Das Verschiebungsgesetz für die Scheitelpunkte der Θ -Kennlinien ist in Zahlentafel II und in Abb. 10 festgelegt, wobei $\beta = 0,1$ als Ausgangspunkt

genommen wird, und die Bezeichnungen

$$\Delta \log U_{m\beta} = \log U_{m,\beta} - \log U_{m,\beta=0,1} \quad (36)$$

$$\Delta \log I_{m\beta} = \log I_{m\beta} - \log I_{m,\beta=0,1} \quad (37)$$

eingeführt werden.

Den Zusammenhang zwischen den relativen und den logarithmischen Kennlinien können wir noch von einer anderen Seite beleuchten. Durch Ein-

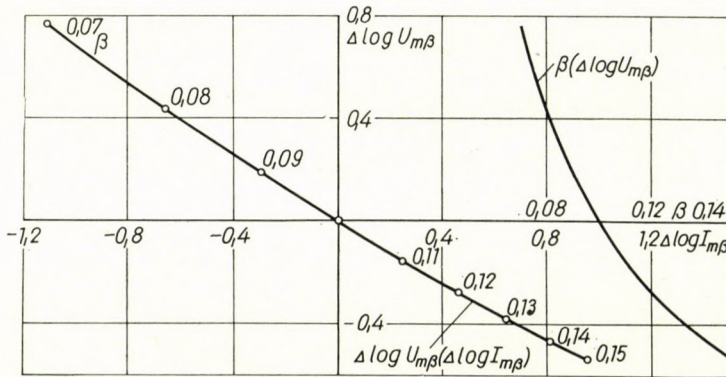


Abb. 10

setzen in die Gleichungen (22) und (23) können wir uns davon überzeugen, daß die Zahlenwerte

$$R_\infty = \frac{1}{E_R}; \quad C = E_p \frac{B}{2} \quad (38)$$

auf Grund des Ergebnisses

$$P_m = 1; \quad R_m = 1$$

die im $\log U - \log I$ -Koordinatensystem dargestellten relativen Kennlinien ergeben.

Durch eine entsprechende Anwendung von (20) und (21) sowie mit Hilfe von (38) und $\log U_{m0} = \log I_{m0} = 0$ erhalten wir

$$\log U_{m1} = \frac{1}{2} [\log R_{\infty 1} + \log E_R] \quad (39)$$

$$\log I_{m1} = -\frac{1}{2} [\log R_{\infty 1} + \log E_R]$$

bzw.

$$\log U_{m1} = \log I_{m1} = \frac{1}{2} \left[\log \left(E_p \frac{B}{2} \right) - \log C_1 \right], \quad (40)$$

wobei wir die relativen Kennlinien mit dem Index 0, die logarithmischen Kennlinien mit dem Index 1 bezeichnen.

Bei Änderung von R_∞ verschiebt sich daher die relative Kennlinie vom Anfangspunkt des $\log U - \log I$ -Koordinatensystems parallel mit den Geraden $P = \text{const}$, im Falle der Änderung von C verschiebt sie sich parallel mit den Geraden $R = \text{const}$ (Abb. 9b). Daher können sämtliche Kennlinien der $\log U - \log I$ Ebene durch die aufeinanderfolgende Anwendung der zwei Arten von Verschiebungen auf die relativen Kennlinien zurückgeführt werden.

Es ist ersichtlich, daß durch die Einführung der dimensionslosen Kennlinien das System der Thermistoren-Kennlinien außerordentlich übersichtlich wird, und auch, daß zugleich seine Anwendung verhältnismäßig einfach wird.

Im folgenden werden in der vorliegenden Arbeit einige Anwendungsmöglichkeiten besprochen.

4. Anwendungen

Im Zusammenhang mit den Kennlinien tauchen zwei grundlegende Probleme auf. Das eine ist die *Konstruktion* einer durch Θ und C charakterisierten *Kennlinie* bei gegebenem B und R_∞ . Die zweite Aufgabe ist die *Auswertung* der gemessenen Kennlinie, d. h. die Bestimmung der Werte von B und R_∞ , die den Thermistor charakterisieren, sowie die Bestimmung des Wertes von C , der den Umständen der Messung entspricht.

a) Konstruktion einer Kennlinie

Was im Zusammenhang mit dieser Aufgabe zu tun ist, ist eigentlich schon im vorigen Abschnitt dargelegt worden, hier ist nur eine kurze Zusammenfassung notwendig.

Bei gegebenem B und R_∞ wird eine zu einem beliebigen Wertepaar Θ und C gehörige Kennlinie so bestimmt, daß nach Berechnung des Parameters

$$\beta = \frac{\Theta}{B} \quad (15)$$

die Koordinaten

$$U_m = \sqrt{\frac{BR_\infty}{2C}} \cdot E_U$$

und

$$I_m = \sqrt{\frac{B}{2R_\infty C}} \cdot E_I$$

aus den der Zahlentafel II oder der Abb. 6 entnommenen Werten E_U und E_I berechnet werden. Die weiteren Punkte der Kennlinie werden im Fall der

Benützung des $U - I$ Koordinatensystems mit den aus Zahlentafel I oder aus Abb. 4 entnommenen Werten η und χ mit Hilfe der Formeln

$$U = U_m \cdot \eta; \quad I = I_m \cdot \chi$$

durch einfache Multiplikation erhalten. Bei Verwendung des $\log U - \log I$ -Koordinatensystems erhalten wir diese Punkte entweder aus den entsprechenden Angaben von Tafel I oder auf Grund von Abb. 8 durch Addition gemäß den Formeln

$$\log U = \log U_m + \log \eta$$

$$\log I = \log I_m + \log \chi.$$

Die $R - P$ -Kennlinien können, nach Berechnung von $R_m = R_\infty \cdot E_R$, aus den entsprechenden Angaben der Zahlentafel II oder Abb. 6, mit Hilfe der Werte r, ψ aus Tafel I, oder aus Abb. 5 mit Hilfe der Formeln

$$R = R_m \cdot r; \quad P = P_m \cdot \psi$$

berechnet werden.

Wie aus dem vorangehenden Abschnitt ersichtlich ist, kann die $\log R - \log P$ -Kennlinie durch die Bestimmung der $\log U - \log I$ -Kennlinie ermittelt werden.

Wenn gleichzeitig mehrere Kennlinien bestimmt werden müssen, ist die Verwendung des $\log U - \log I$ -Koordinatensystems besonders vorteilhaft. Beim Übergang von C_1 zu C_2 muß einfach die Kennlinie C_1 auf Grund der Gleichung (33) in Richtung der P -Achse um den Wert $(\log C_1 - \log C_2)$ verschoben werden. Beim Übergang von θ_1 zu θ_2 muß der Scheitelpunkt der Kennlinie um den Abstand zwischen dem Punkt mit dem Parameter β_1 der Abb. 10 und dem Punkt mit dem Parameter β_2 verschoben werden, und gleichzeitig muß man zur $\eta - \chi$ -Kennlinie mit dem Parameter β_2 übergehen. Mit Hilfe von durchsichtigem Papier können diese Operationen sehr schnell, bequem und mit hinreichender Genauigkeit ausgeführt werden.

b) Auswertung einer gemessenen Kennlinie

Beim heutigen Stande der Technik streuen die Werte B der reihengefertigten Thermistoren $\pm 10\%$, die Werte $R_\infty \pm 25\%$ [7]. Ferner sind unsere Kenntnisse über die Zusammenhänge zwischen der Wärmeübertragungszahl und daher dem Wert C , und den physikalischen Zustandsgrößen der Umgebung noch nicht ausreichend (siehe [5], [11]). Bei Forschungsarbeiten über Apparate mit Thermistoren ist daher Messung der Werte B, R_∞ und C der einzelnen Thermistoren unbedingt notwendig, am zweckmäßigsten durch Aufnahme von Kennlinien.

Die Aufnahme der Kennlinien kann durch Messung des den Thermistor durchfließenden Stromes und der Klemmenspannung erfolgen, wie dies im 2. Abschnitt erwähnt wurde. Die verschiedenen Punkte der Kennlinie werden durch Änderung eines mit dem Thermistor in Reihe geschalteten Widerstandes eingestellt. VARİÇAK [8] empfiehlt eine interessante oszillographische Methode. Während der Aufnahme der Kennlinie müssen die Umgebungstemperatur und die sonstigen Zustandsgrößen, die die Wärmeübertragungsverhältnisse bestimmen, konstant gehalten werden.

Neben der bekannten [1], [4] Methode zur Bestimmung von B und R_∞ — die auf der Messung des sogenannten Kaltwiderstandes ($P \approx 0$) bei verschiedenen Umgebungstemperaturen beruht — können zur Bestimmung von B , R_∞ und C aus den gemessenen Kennlinien zwei Verfahren von BJÖRK

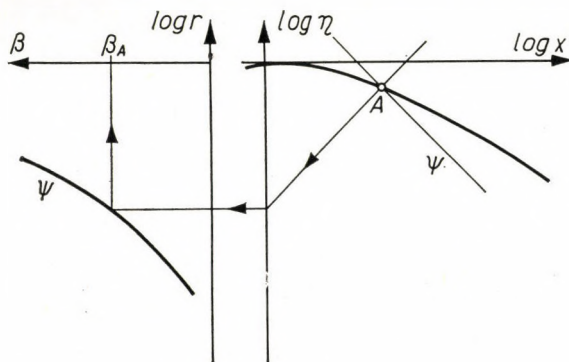


Abb. 11

und DAVIDSON [3] empfohlen werden. Die eine Methode besteht aus der Anwendung von Gl. (5) auf drei gemessene Punkte, und der Lösung des Gleichungssystems mit drei Unbekannten. Die zweite, graphische Methode beruht auf der Messung des Kaltwiderstandes des Thermistors bei der gleichen Temperatur wie die Aufnahme der Kennlinie.

Im weiteren wird eine graphische Methode mitgeteilt, die auch dann angewendet werden kann, wenn wegen geringer Genauigkeit der verfügbaren Meßgeräte oder wegen sonstiger Umstände der Messung (z. B. Schwankung von θ und C) die zur Anwendung der oben aufgezählten Verfahren erforderliche Genauigkeit nicht erreicht werden kann. Diese Methode bietet zugleich eine Möglichkeit zum Ausgleich der gemessenen Punkte.

Die Geraden $\log \psi = \text{const}$ und $\log r = \text{const}$ (Abb. 11), die sich in einem Punkt A des $\log \eta - \log \chi$ -Koordinatensystems schneiden, bestimmen im Sinne der Gleichungen (19) und (18) eindeutig den zu diesem Punkt gehörigen Wert β_A . In der Tat, wenn wir β als Funktion von $\log r$ mit dem Parameter ψ abbilden, so kann β nach Ausführung der in Abb. 11 dargestellten Konstruktion an diesem Hilfsdiagramm abgelesen werden. Wenn wir die Konstruktion

von den Punkten einer zum gleichen β gehörigen $\eta - \chi$ -Kennlinie ausgehend wiederholen, so gelangen wir offensichtlich zu demselben β (Abb. 12).

Wenn wir daher die gemessenen Punkte der Kennlinie im $\log U - \log I$ Koordinatensystem abbilden, ausgleichen und dann so verschieben, daß der Scheitelpunkt der Kennlinie mit dem Anfangspunkt des Koordinatensystems zusammenfällt, so müssen wir mit Hilfe der eben beschriebenen Konstruktion für verschiedene Punkte identische Werte von β erhalten. (Im Sinne des im Zusammenhang mit den Gl. (28)—(31) Gesagten ist die Abbildung im $\log U - \log I$ -Koordinatensystem, abgesehen von der dort erwähnten Verschiebung, gleichwertig mit der Abbildung im $\log \eta - \log \chi$ Koordinatensystem.) Dieses Ergebnis stellt sich aber im allgemeinen nicht ein, vielmehr zeigen die resultierenden β -Werte in Abhängigkeit von $\log r$ steigende oder fallende Tendenz.

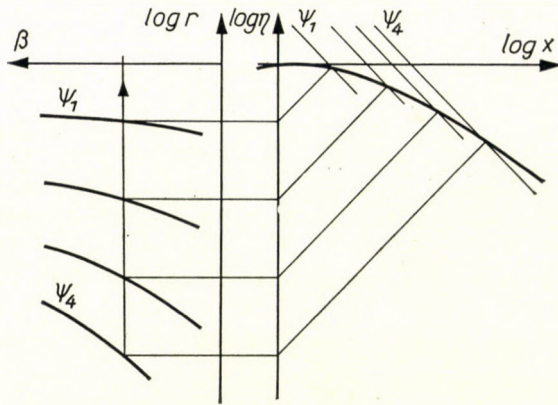


Abb. 12

Die Ursache hiervon ist, daß die gemessene Kennlinie flachen Verlauf zeigt und daß daher ihr Scheitelpunkt, insbesondere dessen Abszisse $\log I_m$, erheblich unsicher und außerdem auch mit Meßfehlern belastet ist. Deswegen verschieben wir die gemessene Kennlinie ein wenig und wiederholen die Konstruktion. Nach einigen Versuchen kann erreicht werden, daß die Ergebnisse sich nur wenig voneinander unterscheiden. Den Durchschnitt der beim letzten Schritt erhaltenen Werte von β kann man als Endergebnis ansehen, aus ihrer Streuung kann auf die Genauigkeit der Auswertung geschlossen werden. Die Konstruktion kann durch Verwendung von durchsichtigem Papier beschleunigt werden.

Selbstverständlich wählen wir für die Konstruktion diejenigen von den verfügbaren Geraden $\psi = \text{const}$, für die die β ($\log r$)-Kurven zur Verfügung stehen. Die Koordinaten der Hilfskurven können aus Tafel I entnommen werden.

Der letzte Schritt der Konstruktion ergibt zugleich auch die verbesserten Werte von U_m und I_m , sowie von P_m und R_m . Mit denselben kann aus (27) R_∞ , und aus (23) kann C berechnet werden.

Das Auswertungsverfahren hat einen ausgleichenden, näherungsweise Charakter. Dieser Charakter kann allgemeiner gemacht werden, wenn es möglich ist, mehrere bei verschiedenen C -Werten, aber bei gleichem Θ aufgenommene Kennlinien des Thermistors auszuwerten, zum Beispiel derart, daß wir den Thermistor zuerst in ruhende Luft und dann in einen Luftstrom von konstanter Geschwindigkeit bringen und zwei Kennlinien aufnehmen. Die auf durchsichtigem Papier im $\log U - \log I$ -Koordinatensystem aufgetragenen Kennlinien versuchen wir mittels Verschiebung parallel zu den Geraden $\log R = \text{const}$ miteinander zur Deckung zu bringen, und gleichen sie so aus. Die Konstruktion kann dann mit dieser ausgeglichenen, vereinigten Kennlinie durchgeführt werden.

Die Genauigkeit des Verfahrens — wie wir dies im folgenden Abschnitt auf Grund der Messungen des Verfassers sehen werden — kann 1% erreichen. Seine Anwendung ist in seiner verhältnismäßigen Schnelligkeit und in seiner Anspruchslosigkeit in Bezug auf die Apparatur begründet.

c) Annähernde analytische Darstellung der Kennlinie

Zweifellos ist es ein Nachteil der bisher behandelten Darstellungsweise der Kennlinien, daß mit ihrer Hilfe die $U - I$ -Kennlinie nur durch einen Parameter ausgedrückt werden kann. Eben deswegen sind diejenigen Näherungsausdrücke sehr nützlich, die einzelne, kürzere oder längere Abschnitte der $U - I$ -Kennlinie *explizit*, in der Form von

$$U = f(I)$$

darstellen.

Im folgenden besprechen wir zwei Näherungsverfahren von BJÖRK und DAVIDSON [3], die auf einer Potenzfunktion bzw. auf einer Reihenentwicklung beruhen. Wir verallgemeinern sie auf Grund der relativen Kennlinien.

Ein Blick auf Abb. 8 überzeugt uns, daß in der $\log \eta - \log \chi$ -Ebene ein beträchtlicher Abschnitt der Kennlinien durch die Tangente im Wendepunkt angenähert werden kann. Durch eine Extremwertberechnung (*Anhang; d*) erhalten wir für den Parameter des Wendepunkts

$$\psi_i = \frac{2\beta}{E_p} \quad (41)$$

und für den Richtungstangens der Wendepunkt tangente

$$\left(\frac{d \ln \eta}{d \ln \chi} \right)_{\psi=\psi_i} = n = \frac{4\beta - 1}{4\beta + 1}. \quad (42)$$

Mit diesen nimmt die Gleichung der Tangente die Gestalt

$$\ln \eta - \ln \eta_i = n (\ln \chi - \ln \chi_i) \quad (43)$$

an, bzw. die annähernde Potenzfunktion nimmt in der η, χ Ebene die Form

$$\eta = \eta_i \left(\frac{\chi}{\chi_i} \right)^n \tag{44}$$

an, wenn wir die Werte für den Wendepunkt mit dem Index i bezeichnen. In η_i und $\ln \chi_i$, sowie η_i und χ_i können aus (28) und (29) berechnet werden

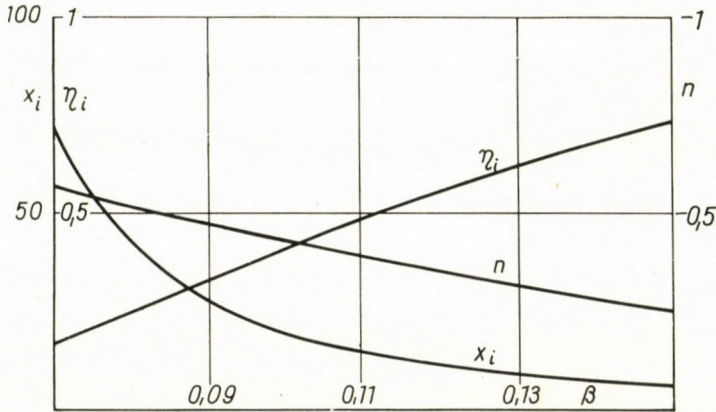


Abb. 13

(Zahlentafel III), η_i und χ_i sowie die Werte von n können auch aus Abb. 13 abgelesen werden. Auf Grund von Abb. 14 kann auch die Genauigkeit der Annäherung grob abgeschätzt werden: der Fehler ist innerhalb 1% in dem annähernd $\pm 0,18$ breiten Bereich von $\log \psi_i$. Daraus kann — am zweckmäßigsten graphisch — derjenige Bereich $\chi_a \leq \chi \leq \chi_f$ bestimmt werden, innerhalb dessen die Näherung angewendet werden kann. Die Werte von χ_a und χ_f sind ebenfalls in Tafel III enthalten.

Es kann leicht bewiesen werden, daß die von BJÖRK und DAVIDSON veröffentlichten Ausdrücke

$$P_i = \frac{\Theta}{C} \tag{45}$$

und

$$n = \frac{4\Theta - B}{4\Theta + B} \tag{46}$$

im wesentlichen mit den Formeln (41) und (42) übereinstimmen, und zwar durch Division von (45) durch P_m bzw. durch Division an der rechten Seite von (46) durch B und durch Anwendung von (23) bzw. durch Einführung von β . Ein Vergleich der beiden Ergebnisse zeigt zugleich den Grad der Verallgemeinerung und die Vorteile der Anwendung der relativen Kennlinien.

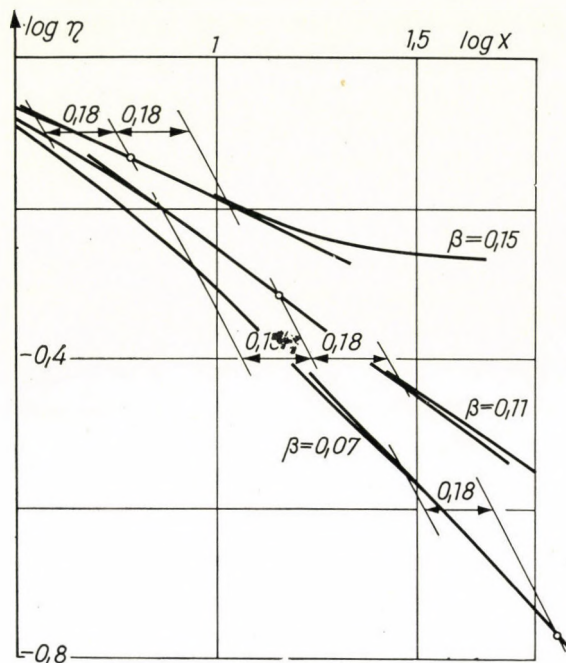


Abb. 14

Es muß erwähnt werden, daß der von EKELÖF und KIHLEBERG [2] eingeführte, und von BJÖRK und DAVIDSON durchgehend gebrauchte *dynamische Faktor* F , der durch

$$F = - \frac{dR/R}{dP/P} \quad (47)$$

definiert ist, auf Grund der Umformung

$$\frac{dR/R}{dP/P} = \frac{dr/r}{d\psi/\psi} = \frac{d \ln r}{d \ln \psi} \quad (48)$$

— abgesehen vom Vorzeichen — mit der Ableitung der $\log r - \log \psi$ -Kennlinien übereinstimmt. Die in der angeführten Quelle mitgeteilte, für die Berechnung geeignete Formel,

$$F = \frac{BCP}{(CP + \Theta)^2} \quad (49)$$

kann nach Umformung in dimensionslose Gestalt leicht in der Form

$$F = \frac{2 \cdot E_p \cdot \psi}{(E_p \psi + 2\beta)^2} \quad (50)$$

geschrieben werden. In ähnlicher Weise können auch die Ausdrücke

$$F' = - \frac{dF/F}{dP/P} = \frac{CP - \Theta}{CP + \Theta} \quad (51)$$

und

$$F'' = - \frac{dF'/F'}{dP/P} = - \frac{2CP\Theta}{(CP)^2 - \Theta^2} \quad (52)$$

auf die Form

$$F' = \frac{E_p \cdot \psi - 2\beta}{E_p \cdot \psi + 2\beta} \quad (53)$$

bzw.

$$F'' = - \frac{4E_p \cdot \beta \cdot \psi}{E_p^2 \psi^2 - 4\beta^2} \quad (54)$$

gebracht werden. Auf Grund dieser beiden letzteren Ausdrücke erhalten wir für die Reihenentwicklung der $\eta - \chi$ -Kennlinien in der Umgebung des Punktes $\eta = 1$, $\chi = 1$, d. h. des Scheitelpunktes, die die erwähnten Autoren im wesentlichen in der Form von

$$\eta = 1 + \frac{F'}{4} (\chi - 1)^2 + \frac{F'}{24} (F' - 2F'' - 6)(\chi - 1)^3 \quad (55)$$

angeben, nach der Substitution $\psi = 1$ und einigen Umformungen das Ergebnis

$$\eta = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{E_p - 2\beta}{E_p + 2\beta} (\chi - 1)^2 + \frac{1}{24} \frac{4\beta E_p - 5E_p^2 + 8\beta^2}{(E_p + 2\beta)^2} (\chi - 1)^3. \quad (56)$$

Die Koeffizienten der Potenzreihe sind also nur von β abhängig.

d) Messung der Wärmeübergangszahl

Eine wichtige Phase der Forschungsarbeit über Meßeinrichtungen mit Thermistoren ist die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen der zu messenden physikalischen Zustandsgröße und dem Leistungsempfindlichkeitskoeffizienten. Dieses Problem gehört im Sinne von Gl. (4) zum Gebiet der Wärmeübertragungslehre, mit der sich ein ausgedehntes Schrifttum beschäftigt (z. B. [5], [11]) und welche diesen Zusammenhang auf Grund von sehr allgemein gültigen Ähnlichkeitskriterien hauptsächlich aus Versuchsergebnissen bestimmt. Wegen der kleinen Abmessungen des Thermistors und seiner mehr oder weniger unregelmäßigen Gestalt können diese jedoch nur näherungsweise angewendet werden. Deswegen sind, unter Berücksichtigung der Grundprinzipien der Wärmeübertragungslehre durchgeführte, weitere Versuche nötig (siehe z. B. [6]).

Der Versuch besteht aus der Veränderung der fraglichen Zustandsgrößen innerhalb entsprechender Grenzen, ihrer Messung und der wiederholten Bestimmung von C . Diese letztere wird im allgemeinen mittels wiederholter Aufnahme der Kennlinie durchgeführt. Wenn jedoch die Umgebungstemperatur während

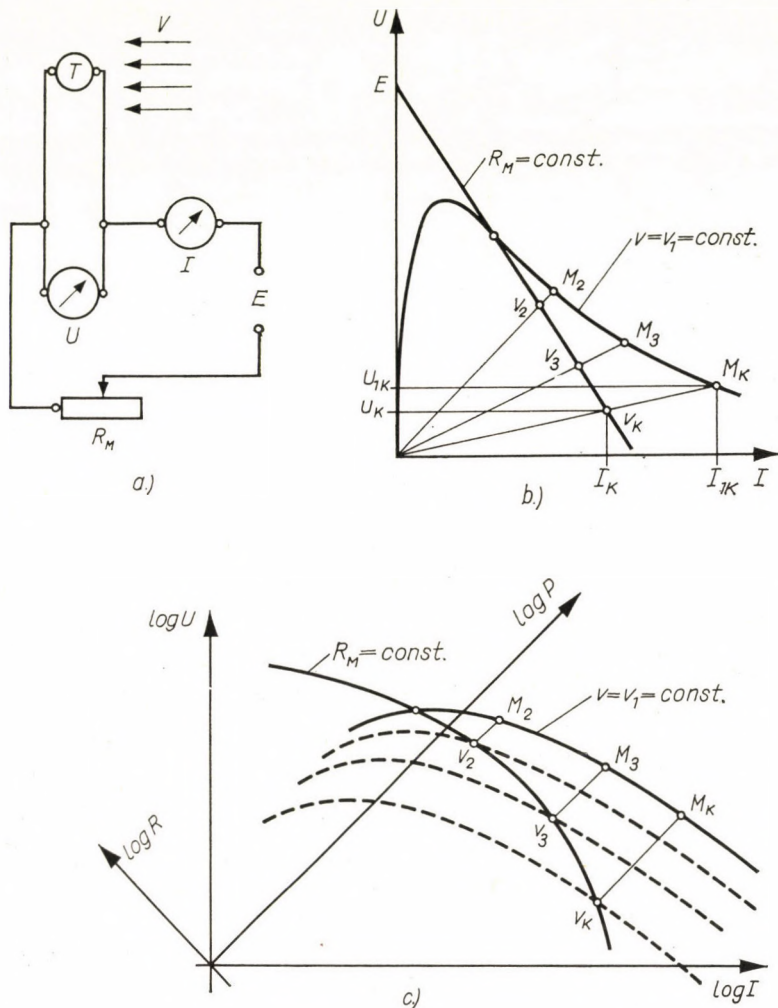


Abb. 15

des Versuchs konstant oder annähernd konstant gehalten werden kann, so kann das Verfahren etwas vereinfacht werden. Die Kennlinien können mittels der Schaltung nach Abb. 15 aufgenommen werden. Es sei z. B. die Strömungsgeschwindigkeit v (m/s) der Umgebung die untersuchte Zustandsgröße. Wegen der Verschiedenheit der Thermistoren ist auf jeden Fall die Aufnahme von min-

destens einer vollständigen Kennlinie notwendig. Dies wird bei Konstanthaltung von v und Veränderung des Widerstandes R_m durchgeführt: wir messen den Strom (I) der den Thermistor T durchfließt, und den Spannungsabfall zwischen seinen Klemmen (U). Dann verändern wir unter Konstanthaltung von R_M den Wert von v innerhalb der gewünschten bzw. möglichen Grenzen und messen U und I .

Auf diese Weise haben wir lediglich je einen Punkt je einer C -Kennlinie bestimmt. Abb. 15. *b*) zeigt den Vorgang in der $U-I$ -Ebene. Bekannt sind die mit $v_1 = \text{const.}$ bezeichnete Kennlinie sowie die Punkte $v_2, v_3, \dots v_k$ der Geraden $R_M = \text{const.}$ Abb. 15. *c*) stellt dasselbe im $\log U - \log I$ Koordinatensystem dar.

Die graphische Auswertung beginnt mit dem unter *b*) beschriebenen Verfahren und so mit der Bestimmung von C_1 . Die Bestimmung von $C_2, C_3 \dots C_k$ mit Hilfe der Punkte $M_2, M_3 \dots M_k$, die sich aus der in Abb. 15. *b*) gezeigten Konstruktion ergeben, kann mittels der Gleichung

$$C_K = C_1 \left(\frac{U_{1K}}{U_K} \right)^2 = C_1 \left(\frac{I_{1k}}{I_k} \right)^2 \quad (57)$$

(die aus (26) bzw. aus (27) folgt), oder einfacher auf Grund von Abb. 15. *c*) mit Hilfe der Gleichung

$$\overline{v_k M_k} = \log C_k - \log C_1 \quad (58)$$

(die sich aus (33) ergibt) erfolgen.

Des weiteren kann der Zusammenhang zwischen v und C direkt oder in dimensionsloser Form abgebildet werden, wie sie in der Wärmeübertragungslehre üblich ist.

Die Auswertung kann natürlich auch numerisch erfolgen, z. B. bei Kenntnis der Konstanten B und R_∞ aus Gl. (7) oder (8).

5. Meßergebnisse

Die im Abschnitt 4 unter *b*) und *d*) mitgeteilten Methoden werden durch die nachfolgenden Meßergebnisse bestätigt.

Die untersuchten zwei Tungsram-Temperaturmeß-Thermistoren, Type 3TH 25 wurden nach Beseitigung ihrer Glashülle in einen Windkanal System N. P. L. gebracht. Die zwei Kennlinien des einen Thermistors wurden bei den Strömungsgeschwindigkeiten $v = 0$ und $v = 8,7 \pm 0,05$ m/s, bei der Temperatur $\theta = 19,8 + 0,2^\circ \text{C}$, mit Hilfe der Schaltung nach Abb. 15. *a*) gemessen. Die Auswertung erfolgte gemäß *b*), Abschnitt 4, mit Hilfe der β ($\log r$) Kurven mit den Parametern $\psi = 2,4, 8$ und 10 (siehe Abb. 12). Die Einheit wurde auf der $\log U$ Achse zu 200 mm, auf der $\log I$ Achse zu 100 mm gewählt.

Nach einigem Probieren ergab sich der Wert von $\beta = 0,107 \pm 0,0005$. Die gemessenen Kennlinien — mit in den Ursprung des Koordinatensystems verschobenem Scheitelpunkten — zeigt Abb. 16. Der Vergleich mit der ebenfalls eingezeichneten $\chi - \eta$ -Kennlinie für $\beta = 0,107$ zeigt, daß die Gesamtgenauigkeit der Aufnahme der Kennlinie und der Auswertung im absteigenden Abschnitt ($\chi > 1$) innerhalb von 3% liegt. Im Abschnitt links vom Scheitelpunkt — der für uns weniger wichtig ist — kann der Fehler wesentlich größer sein.

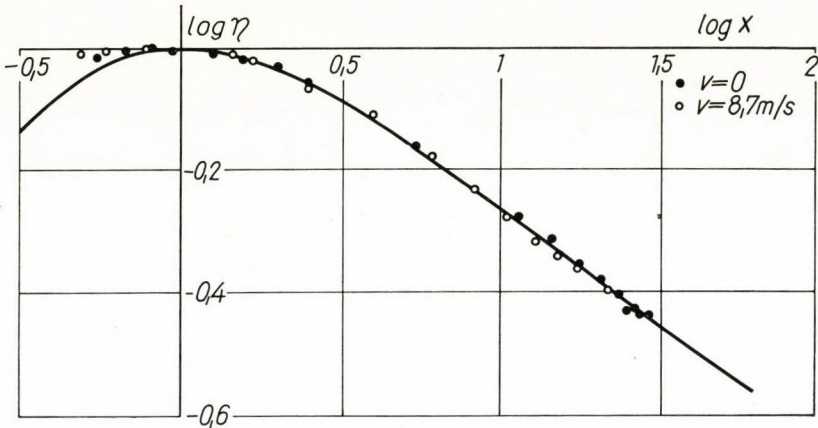


Abb. 16

Für die Konstanten des Thermistors ergeben sich übrigens auf Grund von obigem die Zahlenwerte $B = 2736 \text{ }^\circ\text{K}$ und $R_\infty = 0,896 \text{ } \Omega$.

Die beiden Kennlinien des zweiten Thermistors wurden unter den gleichen Bedingungen aufgenommen wie die des ersten, und dann wurde im Sinne von *d*), Abschnitt 4, bei einem bestimmten, konstanten Wert des in Abb. 15. *a*) definierten Widerstandes R_M die Strömungsgeschwindigkeit der Luft stufenweise geändert. Sämtliche gemessenen Punkte zeigt Abb. 17. Die kontinuierlichen Kurven wurden auf Grund des oben beschriebenen Auswertungsverfahrens eingezeichnet, das zum Ergebnis $\beta = 0,104 \pm 0,0008$ führt. Für den Wert von R_m erhielten wir — wie an der Abbildung abgelesen werden kann — den Wert $12\,020 \text{ } \Omega$.

Den Zusammenhang zwischen dem Leistungsempfindlichkeits-Koeffizienten und der Strömungsgeschwindigkeit, die wir mit dem in Abb. 15. *c*) skizzierten Verfahren erhielten, zeigt Abb. 18.

Die Wärmeübertragungslehre verallgemeinert den Zusammenhang zwischen der Strömungsgeschwindigkeit und der Wärmeübergangszahl in der Form von

$$Nu = f(Re, Pr). \quad (59)$$

Wenn wir auch auf Grund der an einem einzigen Thermistor, innerhalb von

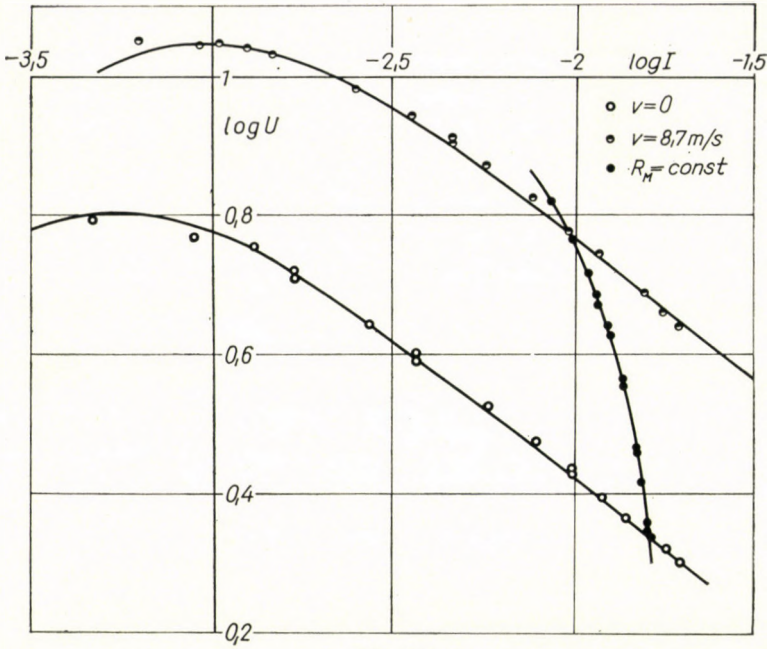


Abb. 17

verhältnismäßig engen Geschwindigkeits- und sonstigen Zustandsgrößen-Grenzen erhaltenen Ergebnisse diese Verallgemeinerung nicht unternehmen können, so ist doch die Darstellung des Zusammenhangs

$$a F_T = f(v) \tag{60}$$

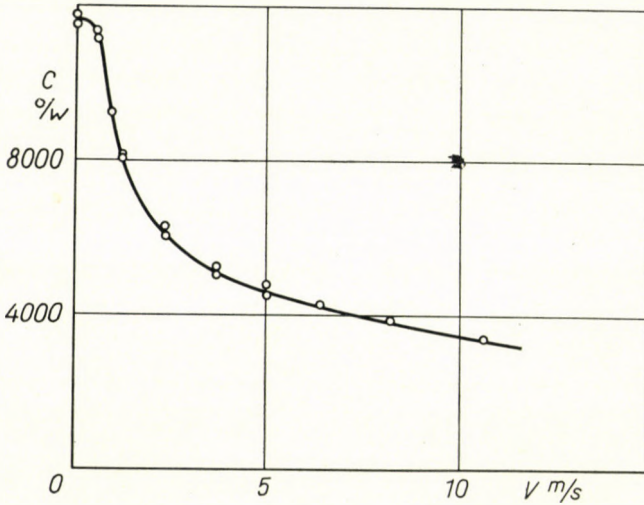


Abb. 18

der zufolge der Umstände der Messung (s. [6]) im wesentlichen der Gleichung (59) entspricht, sehr lehrreich. Auf Grund von (4) zeigt dies im Koordinatensystem mit den Achsen $\log a F = -\log C$ und $\log v$ die Abb. 19. Man sieht, daß sich die Meßpunkte oberhalb der Geschwindigkeit $v = 0,5$ m/s ($\log v = -0,3010$) sich mit einem Fehler von $\pm 3,5\%$ an die Gerade

$$\log C = -0,4 \cdot \log v + 3,945 \quad (61)$$

schmiegen. Daher kann im Bereich der Messung der Zusammenhang zwischen

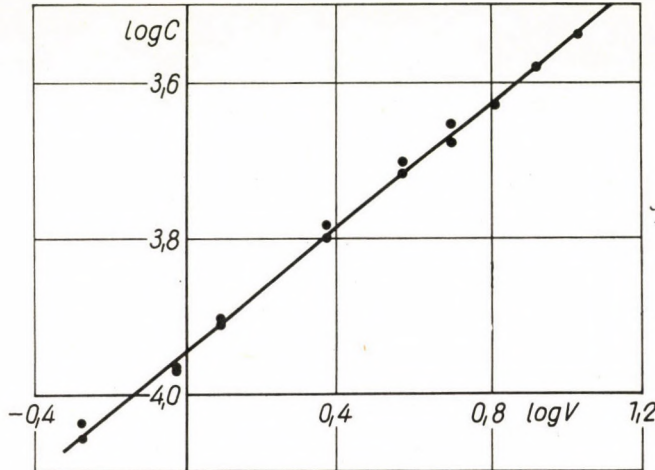


Abb. 19

dem Leistungsempfindlichkeits-Koeffizienten und der Strömungsgeschwindigkeit durch die Formel

$$C = 8810 \cdot v^{-0,4} \quad (62)$$

angenähert werden.

6. Anhang

Nachstehend skizzieren wir den Gedankengang der in den früheren Abschnitten erwähnten längeren Ableitungen.

a) Bestimmung der zum Punkt maximaler Spannung der $U-I$ -Kennlinie gehörigen Leistung.

Das Maximum ist dort möglich, wo die Bedingung

$$\frac{dU}{dI} = \frac{dU/dP}{dI/dP} = 0 \quad (13)$$

erfüllt ist. Auf Grund von (8) ist jedoch

$$\frac{dU}{dP} = \frac{R_{\infty} \cdot e^{\frac{B}{CP+\Theta}}}{2U} \left(1 - \frac{BCP}{(CP+\Theta)^2} \right),$$

daher müssen wir die Gleichung

$$1 - \frac{BCP}{(CP + \Theta)^2} = 0$$

lösen, was zum Ergebnis

$$P_{1,2} = \frac{B - 2\Theta \pm \sqrt{B^2 - 4B\Theta}}{2C}$$

führt. Es kann bewiesen werden, daß der Wurzel Ausdruck negativen Vorzeichens ein Maximum gibt, und so ist die zum Punkt maximaler Spannung gehörige Leistung

$$P_m = P_2 = \frac{1}{C} \left[\frac{B}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\Theta}{B}} \right) - \Theta \right]. \quad (14)$$

b) *Berechnung der dimensionslosen Koordinaten.*

Auf der $U - I$ -Kennlinie kann die der Gl. (14) entsprechende maximale Leistung aus (8) berechnet werden:

$$U_m = \sqrt{P_m \cdot R_\infty \cdot e^{\frac{B}{CP_m + \Theta}}}. \quad (8a)$$

Daher ist

$$\frac{U}{U_m} = \sqrt{\frac{P}{P_m} \cdot e^{\left(\frac{B}{CP + \Theta} - \frac{B}{CP_m + \Theta} \right)}} = \sqrt{\frac{P}{P_m}} \cdot e^b, \quad (8b)$$

wo der Exponent b auf die Form

$$b = \frac{B/P_m}{CP/P_m + \Theta/P_m} - \frac{B/P_m}{C + \Theta/P_m} \quad (8c)$$

gebracht werden kann. Wenn P_m aus (14) in (8c) eingesetzt wird, und wir die Bezeichnungen

$$\frac{\Theta}{B} = \beta \quad (15)$$

und

$$\frac{P}{P_m} = \psi \quad (11)$$

verwenden, so erhalten wir nach Umformung die Ausdrücke

$$b = \frac{\frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta}}{\psi + \frac{2\beta}{1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta}} - \frac{\frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta}}{1 + \frac{2\beta}{1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta}}$$

bzw.

$$b = \frac{2}{\psi(1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta) + 2\beta} - \frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}, \quad (18a)$$

welch letzterer Ausdruck mit (18) übereinstimmt. Daher erhalten wir aus (8b):

$$\eta = \frac{U}{U_m} = \sqrt{\psi} \cdot e^b. \quad (16)$$

Auf vollkommen ähnliche Weise erhalten wir nach Anschreiben von I_m und der Bildung der Verhältniszahl I/I_m das Ergebnis

$$\chi = \frac{I}{I_m} = \sqrt{\frac{\psi}{e^b}} \quad (17)$$

c) *Berechnung der zum Punkt maximaler Spannung gehörigen Ausdrücke.*

Der zum Punkt mit maximaler Spannung gehörige Widerstand ist auf Grund von (5)

$$R_m = R_\infty \cdot e^{\frac{B}{CP_m + \Theta}} = R_\infty \cdot e^{\frac{B/P_m}{C + \Theta/P_m}}, \quad (5a)$$

woraus, wie aus den Gleichungen (8c) und (18a) des vorigen Abschnittes abgelesen werden kann, sowie unter Beachtung des rechtsseitigen, in Abzug zu bringenden Gliedes

$$R_m = R_\infty \cdot e^{\frac{2}{1-\sqrt{1-4\beta}}} \quad (22)$$

folgt. Durch Division von (14) durch B , und nach Einführung von β und Umstellung ergibt sich sofort der Ausdruck

$$\frac{2P_m C}{B} = 1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta. \quad (23)$$

So kommen wir aus der Gl. (8a) des Abschnitts b) unter Verwendung von (23) und (5a) zu dem Ausdruck

$$U_m = \sqrt{P_m \cdot R_\infty \cdot e^{\frac{B}{CP_m + \Theta}}} = \sqrt{\frac{BR_\infty}{2C}} \sqrt{(1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta) \cdot e^{\frac{2}{1-\sqrt{1-4\beta}}}}. \quad (20)$$

Durch eine vollkommen ähnliche Methode erhalten wir auch die Formel

$$I_m = \sqrt{\frac{B}{2CR_\infty}} \cdot \sqrt{(1 - \sqrt{1 - 4\beta} - 2\beta) \cdot e^{-\frac{2}{1-\sqrt{1-4\beta}}}}. \quad (21)$$

d) *Der Wendepunkt der $\log \eta - \log \chi$ -Kennlinie und die Wendepunkt tangente.*

Nach dem im Zusammenhang mit Abb. 9. a) in Abschn. 3 Gesagten können wir den Wendepunkt der $\log \eta - \log \chi$ -Kennlinie auch durch Aufsuchen des Wendepunktes der $\log r - \log \psi$ -Kennlinie erhalten. So erhalten wir aus dem Ausdruck

$$\ln r = b = \frac{2}{E_p \psi + 2\beta} - \frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}, \quad (19a)$$

der aus (19) sowie aus (18) nach Vergleich mit (23) folgt, die Ableitung

$$\frac{d \ln r}{d \ln \psi} = \psi \frac{d \ln r}{d \psi} = \psi \frac{db}{d \psi} = - \frac{2E_p \psi}{(E_p \psi + 2\beta)^2} \quad (63)$$

bzw. für den Wendepunkt die Gleichung

$$\frac{d^2 \ln r}{(d \ln \psi)^2} = \psi \frac{d^2 b}{d \psi^2} = - 2E_p \psi \frac{(E_p \psi + 2\beta)^2 - 2E_p \psi (E_p \psi + 2\beta)}{(E_p \psi + 2\beta)^2} = 0,$$

woraus sich nach kurzer Rechnung als Parameter des Wendepunktes

$$\psi_i = \frac{2\beta}{E_p} \quad (41)$$

ergibt.

Nach Einsetzen von (41) in (63) erhalten wir für den Richtungstangens der Wendepunkt tangente im $\log r - \log \psi$ -Koordinatensystem den Ausdruck

$$\left(\frac{d \ln r}{d \ln \psi} \right)_{\psi=\psi_i} = - \frac{1}{4\beta}. \quad (64)$$

Da sich das $\log r - \log \psi$ -Koordinatensystem aus dem $\log \eta - \log \chi$ -Koordinatensystem durch Drehung um 45° ergibt, kommen wir durch Anwendung des bekannten trigonometrischen Zusammenhangs zum Ergebnis

$$\left(\frac{d \ln \eta}{d \ln \chi} \right)_{\psi=\psi_i} = \frac{1 - \left(\frac{d \ln r}{d \ln \psi} \right)_{\psi=\psi_i}}{1 + \left(\frac{d \ln r}{d \ln \psi} \right)_{\psi=\psi_i}} = \frac{4\beta - 1}{4\beta + 1} = n, \quad (65)$$

das mit (42) übereinstimmt.

Zahlentafel I

$\beta \cdot 10^3$		0	0,2	0,5	0,8	1,5	2	3
0,07	$\log \eta$	0,471	-0,1637	-0,03758	-0,00425	-0,0162	-0,0518	-0,1392
	$\log \chi$		-0,5353	-0,2634	-0,09265	0,1923	0,3528	0,6163
	$\log r$		0,3716	0,22584	0,08840	-0,2084	-0,4046	-0,7554
	η		0,686	0,917	0,9902	0,9633	0,8875	0,7258
	χ		0,2914	0,5580	0,8080	1,557	2,252	4,1325
	r		2,353	1,6815	1,2257	0,6185	0,3941	0,1756
0,08	$\log \eta$	0,477	-0,1623	-0,03683	-0,00415	-0,0157	-0,0493	-0,13125
	$\log \chi$		-0,5362	-0,6242	-0,0928	0,1918	0,3503	0,6084
	$\log r$		0,3733	0,2273	0,0886	-0,2076	-0,3995	-0,7396
	η		0,6872	0,9189	0,9905	0,9643	0,8927	0,7390
	χ		0,2908	0,5442	0,8078	1,5550	2,2400	4,0580
	r		2,3620	1,6880	1,2260	0,6200	0,3984	0,1821
0,09	$\log \eta$	0,483	-0,1611	-0,0363	-0,0040	-0,0153	-0,0468	-0,1236
	$\log \chi$		-0,5379	-0,2647	-0,0929	0,1914	0,3478	0,6007
	$\log r$		0,3768	0,2284	0,0889	-0,2067	-0,3946	-0,7243
	η		0,6900	0,9200	0,9908	0,9650	0,8980	0,7524
	χ		0,2898	0,5437	0,8075	1,5540	2,2265	3,9870
	r		2,3810	1,6920	1,2265	0,6209	0,4032	0,1887
0,10	$\log \eta$	0,489	-0,1589	-0,03568	-0,0039	-0,0149	-0,0445	-0,1159
	$\log \chi$		-0,5401	-0,2653	-0,0930	0,1909	0,3455	0,5930
	$\log r$		0,3812	0,2296	0,0891	-0,2058	-0,3899	-0,7088
	η		0,6937	0,9212	0,9910	0,9663	0,9027	0,7660
	χ		0,2884	0,5428	0,8073	1,5520	2,2150	3,9160
	r		2,4050	1,6965	1,2272	0,6224	0,4074	0,1956
0,11	$\log \eta$	0,497	-0,1563	-0,0350	-0,0037	-0,0144	-0,0412	-0,1080
	$\log \chi$		-0,5428	-0,2660	-0,0932	0,1905	0,3422	0,5851
	$\log r$		0,3865	0,2310	0,0895	-0,2049	-0,3834	-0,6931
	η		0,6980	0,9226	0,9913	0,9671	0,9093	0,7800
	χ		0,2866	0,5420	0,8070	1,5500	2,1985	3,8465
	r		2,4345	1,7020	1,2282	0,6240	0,4136	0,2028
0,12	$\log \eta$	0,505	-0,1540	-0,0341	-0,0036	-0,0138	-0,0397	-0,1009
	$\log \chi$		-0,5450	-0,2669	-0,0933	0,1899	0,3407	0,5781
	$\log r$		0,3910	0,2328	0,0897	-0,2037	-0,3804	-0,6790
	η		0,7014	0,9244	0,9916	0,9688	0,9127	0,7927
	χ		0,2850	0,5410	0,8068	1,5480	2,1910	3,7850
	r		2,4600	1,7090	1,2290	0,6257	0,4165	0,2094
0,13	$\log \eta$	0,513	-0,1511	-0,0333	-0,0035	-0,0129	-0,0373	-0,0936
	$\log \chi$		-0,5480	-0,2677	-0,0934	0,1890	0,3383	0,5707
	$\log r$		0,3969	0,2345	0,0899	-0,2019	-0,3756	-0,6643
	η		0,7061	0,9262	0,9919	0,9709	0,9176	0,8061
	χ		0,2832	0,5398	0,8065	1,5454	2,1790	3,7210
	r		2,4940	1,7127	1,2298	0,6281	0,4211	0,2166
0,14	$\log \eta$	0,522	-0,1485	-0,0324	-0,0033	-0,0121	-0,0351	-0,0865
	$\log \chi$		-0,5505	-0,2686	-0,0936	0,1882	0,3361	0,5636
	$\log r$		0,4021	0,2362	0,0904	-0,2002	-0,3712	-0,6501
	η		0,7100	0,9280	0,9921	0,9725	0,9222	0,8193
	χ		0,2815	0,5389	0,8063	1,5420	2,1675	3,6600
	r		2,5240	1,7225	1,2302	0,6307	0,4255	0,2239
0,15	$\log \eta$	0,532	-0,1459	-0,0315	-0,0032	-0,0113	-0,0331	-0,0794
	$\log \chi$		-0,5531	-0,2695	-0,0937	0,1874	0,3341	0,5565
	$\log r$		0,4072	0,2379	0,0905	-0,1986	-0,3672	-0,6358
	η		0,7148	0,9300	0,9924	0,9743	0,9265	0,8330
	χ		0,2798	0,5377	0,8060	1,5390	2,1575	3,6010
	r		2,5540	1,7298	1,2310	0,6330	0,4294	0,2313

Zahlentafel I (Fortsetzung)

$\beta \setminus \varphi$		4	5	6	8	10	15	20
0,07	log η	-0,2323	-0,3181	-0,3993	-0,5432	-0,6632	-0,8879	-1,0415
	log χ	0,8344	1,0171	1,1775	1,4464	1,6632	2,0641	2,3425
	log r	-1,0666	-1,3352	-1,5768	-1,9896	-2,3264	-2,9520	-3,3840
	η	0,5857	0,4806	0,3987	0,2863	0,2171	0,1294	0,0909
	χ	6,8290	10,403	15,05	27,951	46,05	115,9	220,0
	r	0,0858	0,0462	0,0265	0,0102	0,0047	0,0011	0,0004
0,08	log η	-0,2149	-0,2938	-0,3657	-0,4904	-0,5921	-0,7759	-0,8965
	log χ	0,8171	0,9928	1,1439	1,3936	1,5921	1,9521	2,1975
	log r	-1,0320	-1,2866	-1,5096	-1,8840	-2,1842	-2,7280	-3,0940
	η	0,6096	0,5085	0,4308	0,3093	0,2558	0,1676	0,1269
	χ	6,562	9,832	13,93	24,75	39,10	89,57	157,6
	r	0,0929	0,0517	0,0309	0,0131	0,0654	0,0019	0,0008
0,09	log η	-0,2004	-0,2709	-0,3353	-0,4424	-0,5284	-0,6785	-0,7717
	log χ	0,8025	0,9699	1,1136	1,3456	1,5284	1,8546	2,0727
	log r	-1,0028	-1,2408	-1,4490	-1,7880	-2,0568	-2,5330	-2,8444
	η	0,6304	0,5360	0,4620	0,3611	0,2962	0,2096	0,1692
	χ	6,3460	9,328	12,987	22,162	33,76	71,53	118,2
	r	0,0994	0,0575	0,0356	0,0163	0,0088	0,0029	0,0014
0,10	log η	-0,1859	-0,2488	-0,3072	-0,3980	-0,4700	-0,5904	-0,6620
	log χ	0,7881	0,9478	1,0854	1,3012	1,4700	1,7665	1,9630
	log r	-0,9740	-1,1966	-1,3926	-1,6992	-1,9400	-2,3568	-2,6250
	η	0,6520	0,5640	0,4928	0,3999	0,3388	0,2569	0,2177
	χ	6,140	8,867	12,172	20,008	29,51	58,40	91,82
	r	0,1062	0,0636	0,0405	0,0199	0,0115	0,0044	0,0024
0,11	log η	-0,1719	-0,2282	-0,2759	-0,3570	-0,4170	-0,5127	-0,5665
	log χ	0,7741	0,9272	1,0541	1,2602	1,4170	1,6888	1,8675
	log r	-0,9460	-1,1554	-1,3300	-1,6172	-1,8340	-2,2014	-2,4340
	η	0,6731	0,5912	0,5254	0,4396	0,3828	0,3072	0,2714
	χ	5,9450	8,462	11,333	18,205	26,12	48,83	73,70
	r	0,1132	0,0699	0,0464	0,0241	0,0147	0,0063	0,0037
0,12	log η	-0,1582	-0,2080	-0,2499	-0,3177	-0,3668	-0,4417	-0,4797
	log χ	0,7603	0,9070	1,0281	1,2209	1,3668	1,6178	1,7807
	log r	-0,9184	-1,1150	-1,2780	-1,5386	-1,7336	-2,0594	-2,2604
	η	0,6948	0,6194	0,5624	0,4812	0,4298	0,3618	0,3315
	χ	5,757	8,071	10,665	16,63	23,26	41,48	60,33
	r	0,1207	0,0768	0,0527	0,0289	0,0185	0,0087	0,0055
0,13	log η	-0,1447	-0,1887	-0,2252	-0,2812	-0,3206	-0,3775	-0,4020
	log χ	0,7468	0,8877	1,0034	1,1844	1,3206	1,5536	1,7030
	log r	-0,8914	-1,0764	-1,2286	-1,4656	-1,6412	-1,9310	-2,1050
	η	0,7168	0,6475	0,5952	0,5234	0,4780	0,4194	0,3963
	χ	5,580	7,720	10,080	15,290	20,91	35,77	50,46
	r	0,1284	0,0839	0,0590	0,0342	0,0229	0,0117	0,0079
0,14	log η	-0,1315	-0,1697	-0,2009	-0,2464	-0,2772	-0,3194	-0,3325
	log χ	0,7336	0,8687	0,9791	1,1496	1,2772	1,4955	1,6335
	log r	-0,8650	-1,0384	-1,1800	-1,3960	-1,5544	-1,8148	-1,9660
	η	0,7389	0,6767	0,6297	0,5670	0,5281	0,4793	0,4650
	χ	5,414	7,390	9,53	14,113	18,93	31,30	43,00
	r	0,1365	0,0916	0,0661	0,0402	0,0279	0,0153	0,0108
0,15	log η	-0,1191	-0,1515	-0,1774	-0,2136	-0,2370	-0,2635	-0,2688
	log χ	0,7212	0,8505	0,9556	1,1168	1,2370	1,4396	1,5698
	log r	-0,8402	-1,0020	-1,1330	-1,3304	-1,4740	-1,4030	-1,8386
	η	0,7601	0,7055	0,6645	0,6115	0,5795	0,5451	0,5385
	χ	5,262	7,088	9,027	13,086	17,26	27,52	37,14
	r	0,1444	0,0996	0,0736	0,0467	0,0336	0,0198	0,0145

Zahlentafel II

β	E_U	E_I	E_R	E_P	$\Delta \log U_{m\beta}$	$\Delta \log I_{m\beta}$
0,07	78,680	0,000146	538000	0,0115	0,7672	-1,1114
0,08	37,100	0,000415	89330	0,0154	0,4406	-0,6580
0,09	20,960	0,000954	21960	0,0200	0,1928	-0,2968
0,10	13,445	0,001889	7120	0,0254	0	0
0,11	9,462	0,003350	2825	0,0317	-0,1527	0,2497
0,12	7,103	0,005475	1297	0,0389	-0,2772	0,4622
0,13	5,630	0,008383	671,5	0,0472	-0,3782	0,6472
0,14	4,638	0,01222	379,4	0,0567	-0,4624	0,8110
0,15	3,946	0,01710	230,8	0,0675	-0,5326	0,9568

Zahlentafel III

β	η_i	$\log \eta_i$	$\log \chi_i$	n	η_i	χ_i	χ_a	χ'
0,07	12,17	-0,7717	1,8571	-0,5624	0,1692	71,96	28,3	182
0,08	10,39	-0,6096	1,6264	-0,5150	0,2457	42,30	18,3	97,6
0,09	9,000	-0,4879	1,4421	-0,4705	0,3252	27,67	12,8	60,0
0,10	7,875	-0,3937	1,2899	-0,4285	0,4040	19,48	9,6	39,8
0,11	6,940	-0,3173	1,1587	-0,3886	0,4818	14,40	7,4	28,2
0,12	6,170	-0,2579	1,0471	-0,3513	0,5529	11,16	5,9	21,1
0,13	5,507	-0,2080	0,9489	-0,3157	0,6198	8,885	4,9	16,2
0,14	4,939	-0,1674	0,8610	-0,2820	0,6800	7,265	4,1	12,9
0,15	4,445	-0,1343	0,7822	-0,2500	0,7341	6,055	3,5	10,5

SCHRIFTTUM

1. Tungsram Thermistoren-Katalog, Budapest, 1957.
2. EKELÖF, S., KIHLEBERG, G.: Theory of the Thermistor as an Electric Circuit Element. Acta Polytechnica, Electrical Engineering Series, Vol. 5. No. 11. Göteborg, 1954.
3. BJÖRK, N., DAVIDSON, R.: Small Signal Behaviour of Directly Heated Thermistors. Acta Polytechnica, Electrical Engineering Series. Vol. 6. No. 12. Göteborg, 1955.
4. KANTER, H.: Temperaturabhängige Widerstände. I.—II.—III. ATM. Z—119—3, —4, —5. 1955.
5. GRÖBER, ERK, GRIGULL: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer, 1955.
6. BROER, L. J. F., HOOGENDOORN, C. J., KORTLEVEN, A.: Some Investigations on Low-Speed-Anemometry. Appl. Sci. Res. Sec. A. Vol. 7. 1—13. 1957.

7. ZOMBORY, E.: Termisztorok megválasztása (Auswahl von Thermistoren). Technika, II. 4, April 1958. p. 5. Budapest.
8. VARICAК, M.: Oscillographic Measurement of some Thermistor-Characteristics. Glasnik Mat. Fiz. I Astr. Tom. 12. No. 3. 223—228. Zagreb, 1957.
9. ALMÁSSY, Gy.: A termisztor jellegzetes tulajdonságai (Die charakteristischen Eigenschaften des Thermistors). Mérés és Automatika, IV. 1956. p. 193—200. Budapest.
10. ALMÁSSY, Gy.: A termisztor (Der Thermistor). Magyar Tud. Akadémia VI. Oszt. Közlem. 20. 1—2. 1956. p. 81—91. Budapest.
11. MIHEJEV, M. A.: A hőátadás gyakorlati számításának alapjai (Grundlagen der praktischen Berechnung der Wärmeübertragung). Tankönyvkiadó, Budapest, 1956.
12. LITVAI, E.: Matrixalgebraische Behandlung von Meßbrücken mit zwei direkt geheizten Thermistoren. Acta Technica Acad. Sci Hungaricae Vol. XVIII. Fasc. 1—2.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit hat das Kennlinien-System von direkt geheizten Thermistoren zum Gegenstand und zeigt, daß durch Einführung von relativen Kennlinien, die durch zum Punkt mit maximaler Spannung der Strom-Spannungs-Kennlinie gehörigen Werte dimensionslos hergestellt sind, das Kennlinien-System der Thermistoren in einheitlicher, übersichtlicher Weise behandelt werden kann. Ferner werden Anwendungsmöglichkeiten und Meßergebnisse mitgeteilt.

DIMENSIONSLESS CHARACTERISTICS OF THERMISTORS AND THEIR APPLICATION

E. LITVAI

SUMMARY

The paper deals with the system of characteristics of directly heated thermistors and shows that by introducing the dimensionless (relative) characteristics, related to quantities belonging to the point of maximum voltage of the current-voltage characteristic, the system of characteristics of the thermistor can be treated in an unified and perspicuous way. Possibilities of application and some results of measurement are also dealt with.

LES CARACTÉRISTIQUES SANS DIMENSIONS DES THERMISTORS ET LEUR APPLICATION

E. LITVAI

RÉSUMÉ

L'auteur traite du système des caractéristiques des thermistors à chauffage direct. Il démontre que, par l'introduction de caractéristiques sans dimensions (relatives), rapportées aux valeurs du point à tension maximum de la caractéristique courant-tension, le système des caractéristiques des thermistors peut être traité d'une façon claire et uniforme. L'auteur expose aussi les possibilités d'application et les résultats des mesures effectuées.

БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМИСТОРОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Е. ЛИТВАИ

РЕЗЮМЕ

Статья занимается системой характеристик непосредственно подогреваемых термисторов и показывает, что с введением безразмерных или относительных характеристик, отнесенных к значениям, принадлежащим точке максимального напряжения, характеристики напряжения тока, систему характеристик термисторов можно рассматривать единым и наглядным способом. Сообщаются также возможности применения и результаты измерений.

DETECTION OF INCLUSIONS IN STEEL PLATES BY THE ULTRASONIC METHOD AND BY THE DETERMINATION OF CONTRACTION WORK

I. EGRI

CAND. OF ENG. SC.

CENTRAL MEASUREMENT RESEARCH LABORATORY, BUDAPEST

G. SINAY

RESEARCH INSTITUTE FOR NON-FERROUS METALS, BUDAPEST

and

M. SZEMES

CENTRAL MEASUREMENT RESEARCH LABORATORY, BUDAPEST

1. Introduction

Non-destructive testing of steel plates can be carried out, as it is well-known, only by one of the ultrasonic methods, as the thickness of non-metallic inclusions is generally smaller than one per cent of the thickness of the plate. The geometrical form of the plate limited by two parallel surfaces, as well as the fact that the expected position of flaws in the material is known, are highly favourable from the viewpoint of ultrasonic testing. Nevertheless, ultrasonic testing of plates is only very slowly gaining ground, even in highly industrialized countries. One of the much discussed reasons for this is the frequently encountered difficulty of finding an economical solution for the tests. In order to avoid the handling of material, the usual requirement is that testing should be inserted into the rolling operation and that indication (or eventual registration) of flaws should be automatic, which makes the installation of a relatively complicated equipment necessary, especially if the plates have a rough surface. The other less often admitted reason for the delayed introduction of the ultrasonic method for the testing of plates, is the fact that the rolling mills do not consider this method sufficiently reliable and take it to be in most cases too severe, sometimes, of course not so often, too loose.

One of the authors in a previous publication described [1] an ultrasonic immersion transmission testing method. By this *first signal method*, which can be inserted into the rolling process, indication (and eventual registration) of flaws can be done with comparative ease. This earlier paper, however, did not deal with the problem of how severe or how loose this method of testing could be for practical purposes; a solution of this problem shall be given on the basis of the experiments to be described below.

The results of any non-destructive method of testing may obviously be verified by a destructive test which makes the flaws found by the non-destructive method observable by visual or microscopical examination. With the exception of the largest inclusions, it is not always possible to find each indi-

vidual inclusion indicated by the ultrasonic test, whether the material is broken, whether metallographic sections are being prepared for examination. GILLEMOT suggested to determine the contraction work of the samples in order to check the results obtained by ultrasonic tests. According to GILLEMOT's and SINAY's investigations [2] contraction work, a constant characteristic of the material, decreases in the presence of inclusions and it may be presumed that the value of the decrease depends on the quantity of inclusions in the contracting cross-section.

For the determination of contraction work the test pieces are to be ruptured, whereby it becomes possible to qualify the samples even by a visual examination of the fracture. Thus, two objective methods of testing have been compared during the examinations and a possibility was given to find a correlation between the results of a non-destructive (ultrasonic) and a destructive (determination of contraction work) method of testing and at the same time some information was received on the real value of the subjective examination of the fracture as compared to the objective methods of testing.

2. Description of the ultrasonic test

The ultrasonic test was carried out by the *first signal method*. The schematic arrangement of the equipment is shown in Fig. 1. The pulse modulated electric oscillations generated by the transmitter are transformed into sonic

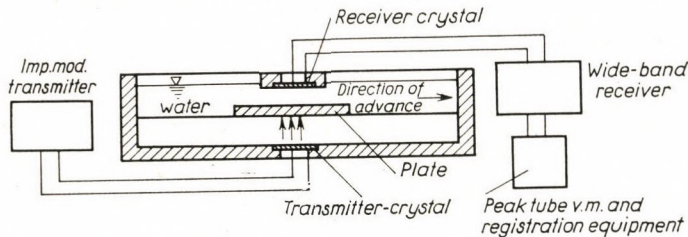


Fig. 1. Block diagram of the *first signal* ultrasonic test method

vibrations by the transducer crystal. The sonic waves reach the receiver crystal through the water layers above and below the immersed plate and through the plate itself, and are transformed by the receiver crystal into electric oscillations. The latter are amplified by the receiver set, and a valve voltmeter at the output of the set indicates the peak value of the voltage in proportion to the pressure of the ultrasonic oscillations arriving to the receiving crystal, thus the valve voltmeter denotes a voltage in proportion to the maximum signal received by the crystal. In an earlier publication [1] there was a discussion: from among the oscillations which follow the impulse of the transmitter crystal the peak-voltmeter indicates only the impulses which reach the receiver crystal

directly and without repeated reflections as these first arriving signals are the strongest. As may be seen from Fig. 1 the direction in which the sonic waves propagate is perpendicular to the plane of the plate, and the plate passes continuously between the crystals in a direction perpendicular to the plane of the figure.

We do not wish to enter into a detailed description of the method, but are referring to the earlier paper [1] where those uncertainties of the measurements which must be taken into account were dealt with. Both experiments and calculations quoted in the above mentioned paper have proved that the uncertainties of the *first signal method* are considerably smaller than those of the only transmission method which may be used for the same purpose: namely the other immersion method, using frequency modulated oscillations. As was discussed in the same paper, the main reason for the above observation may be found in that, that the *first signal method* is not at all sensitive to the variations of the plate thickness and is only slightly sensitive to minor changes in the relative position of the plane of the plate and the sonic beam, which changes are practically unavoidable in immersion tests. The method is further suitable for insertion into the rolling process, can be easily automatized, indication by the voltmeter offers a possibility of continuous registration of results and as water coupling excludes contact between plate and crystals there is no danger of breaking the crystals even in cases when the tested, plates have a rough surface.

If there are inclusions in the plate tested, no oscillations will arrive to the receiver crystal or only a smaller area of the latter will get oscillations, as sonic waves are almost completely reflected by the flaws. According to earlier experiments, inclusions in the plate can be detected if

$$F_{\min} \geq F_{\text{beam}} \cdot b \quad (1)$$

where F_{\min} overall area of inclusions in the plane perpendicular to the sonic beam,

F_{beam} cross-section of the sonic beam used for testing,

b relative uncertainty of measurement.

In the previous tests the maximum relative uncertainty in the measurements carried out with the *first signal method* was $b_{\max} = 0,3$. Now, assuming a statistical distribution of the errors, the b standard relative uncertainty, that is characteristic of the method, may be taken as $b_{\max} / 3 = 0,3 / 3 = 0,1$. Correlation between the two methods for those cases when the limit of rejection in the ultrasonic tests was taken as 10, 15 and 30 per cent, respectively, is discussed in the paragraph dealing with the evaluation of experimental data (Appendix 1). In the experiments the cross-

section of the sonic beam was about 100 mm^2 , so the above limits of rejection, provided there were no uncertainties in the measurements, would correspond to flaws of 10, 15 and 30 mm^2 surface, respectively, where the surface of the flaw means the overall area of flaws within the cross-section of the sonic beam measured in the plane perpendicular to the propagation direction of the beam. The area of the flaws is actually smaller, for uncertainties of measurement get added to the signals, their effect being the most conspicuous at 10% and 15% limits of rejection. This partly explains the fact that a comparatively larger percentage of the material was found defective on the basis of the lower ultrasonic rejection limit in comparison to mechanical tests, simply because in these cases the flaws were too small to influence the value of contraction work. The probability of the occurrence of erroneous bad and good qualifications, respectively, in the case of different rejection limits is discussed in Appendix 1.

Equation (1) is only valid if the sonic transmissivity of inclusions is ~ 0 . Transmissivity can be expressed as the ratio of the pressure amplitudes of the transmitted and incident sonic waves and may be calculated as follows [3]:

$$\frac{P_t}{P_1} \sim \frac{\lambda_2}{m d_2 \pi} \quad (2)$$

where P_1 pressure amplitude of incident sonic waves propagating in the material of the plate (Fig. 2),

P_t pressure amplitude of transmitted sonic waves in the material of the plate

λ_2 wavelength of sound in the material of the inclusion,

m $\varrho_1 \cdot c_1 / \varrho_2 \cdot c_2$, where ϱ_1 is the density of the material of the plate, ϱ_2 the density of the material in the flaw (inclusion); c_1 and c_2 are the propagation velocities of sound in the plate and inclusion, respectively,

d_2 thickness of flaw (inclusion).

Equation (2) shows that transmissivity decreases with the increase of the d_2/λ_2 ratio and of m . The ratio of acoustic impedances (m) is great, if the flaw consists not only of non-metallic inclusions, but also contains a thin

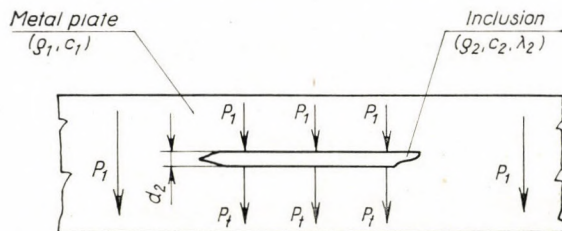


Fig. 2. Pressure amplitude values in a plate with flaw

layer of gas. For instance, if the test frequency is 3 Mc/s ($\lambda_2 = 0,1$ mm), a gas layer of $3 \cdot 10^{-5}$ mm thickness is sufficient to reduce the pressure of the transmitted waves to 1%, while inclusions entirely free of gas layers, consisting only of solid matter, must be of several orders thicker to effect a pressure-decrease of 100 to 1.

It should be noted that a decrease in λ_2 , which would, according to equation (2), help to improve the sensitivity of the test, would at the same time — in the case of the rough surfaced plates tested — increase the uncertainty of the measurement [1] and is, therefore, ineffective.

3. Contraction work

By contraction work, the quantity of work necessary to bring about total deformation resulting in the rupture of a unit volume of material is understood. Contraction work is a characteristic value, which expresses in the form of a single, physically correct quantity the tensile and plastic properties of the material. The conception itself, the equation on which calculations are based, as well as the rules evident in contraction work have been dealt with in detail in another publication [2]. In evaluating contraction work data, it has been shown, that a material having greater contraction work gives, under identical conditions of stress, increased security against fracture. Probable accuracy of the measured quantity for a given case is discussed in Appendix 2.

Contraction work can be determined by the formula

$$A_c = \frac{\delta_e}{3} (\sigma_F + 2\sigma_B) + 4,6 \sigma_B (1 + \delta_e) \lg \frac{1 + \delta_c}{1 + \delta_e} + \sigma_B (1 + \delta_e)^2 \left[\frac{1}{1 + \delta_c} - \frac{1}{1 + \delta_e} \right] \text{ mkg/cm}^3 \quad (3)$$

derived from the general integral:

$$A_c = \int_{L_0}^{L_c} \frac{P \cdot dL}{V_0} = \int_{L_0}^{L_c} \frac{P \cdot dL}{F_0 \cdot L_0} = \int_0^{\delta_c} \sigma d\delta.$$

The following symbols have been used in the formulae:

- P : force
- L_0 : original length
- L_c : strained length
- V_0 : original volume
- F_0 : original cross-section
- σ : stress related to the original cross-section
- σ_B : ultimate tensile strength
- σ_F : yield strength
- δ_e : uniform elongation
- δ_c : contraction elongation, *i. e.* local specific elongation near to the fractured cross-section.

Yield strength and tensile strength are expressed in kg/mm^2 , uniform and contraction elongations are substituted as dimensionless quantities.

Substitution of the different quantities and examination of their effect on contraction work shows that tensile strength appears substantially as a simple multiplying factor and the effect of yield stress is negligible. From among the deformation characteristics uniform elongation — supposed as having its usual values — changes contraction work from 0% to about 20% depending on the value of reduction of area. Reduction of area and the calculated contraction elongation δ_c , respectively, are the decisive factors. Variation of the different quantities appears as a resultant effect in contraction work; if several quantities undergo identical changes their resultant effect will be greater, while if the changes are opposite, contraction work will hardly change or might even remain unchanged.

4. Test material and testing methods

Hot-rolled plates of 14 mm thickness and A 00,21 quality were used for the tests. Their chemical composition was not checked.

For the ultrasonic test the plates were cut into 150×200 mm samples. After the ultrasonic test the plates — the direction of the longitudinal axis of the pieces corresponding with the direction of rolling — were worked into flat-end specimens with a length of 100 mm and a width of 15 mm (See Fig. 3). The number of samples was 184.

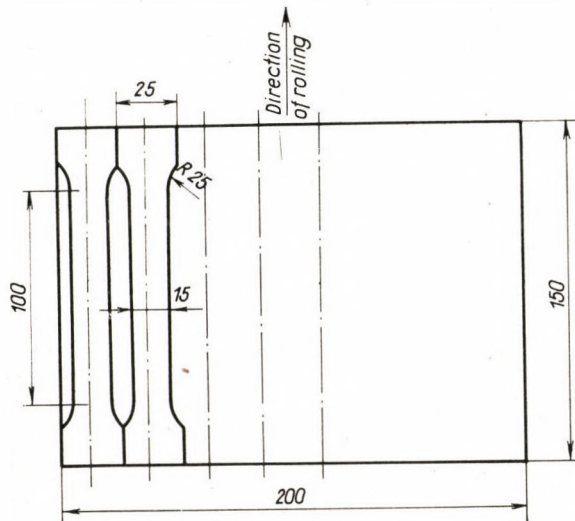


Fig. 3. Project for cutting the test pieces from plates used for ultrasonic testing

As mentioned above the 150×200 mm specimens were tested by the *first signal* ultrasonic method. Measuring was carried out at 3 Mc/s ultrasonic frequency with a beam of about 100 mm^2 cross-section. The results of the ultrasonic test for a flawless plate are presented diagrammatically in Fig. 4 and for a plate with flaws in Fig. 5. (Uh = ultrasonic indication in scale divisions, L = distance from the end of the test piece.)

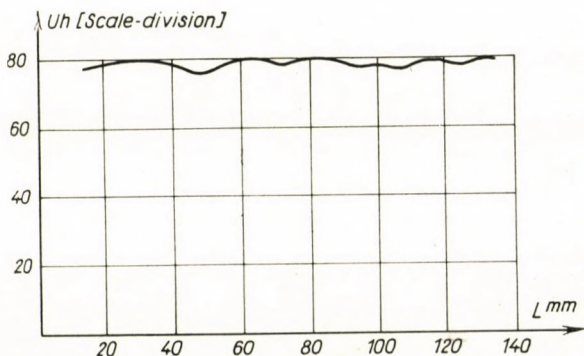


Fig. 4. Ultrasonic indication versus length of test piece from a flawless plate ($A_c = 52,7 \text{ mkg/cm}^3$)

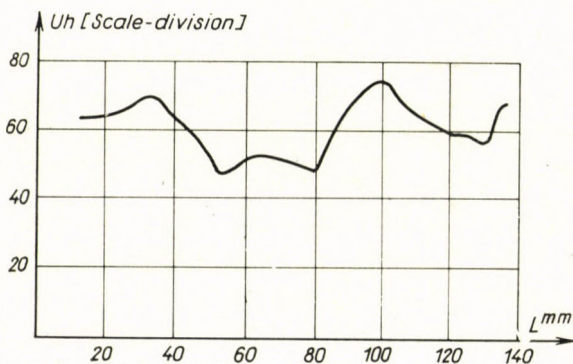


Fig. 5. Ultrasonic indication versus length of test piece from plate with flaws ($A_c = 42,5 \text{ mkg/cm}^3$)

Ultrasonic tests were carried out in the Central Measurement Research Laboratory; the tensile tests were carried out in the Central Material Testing Laboratory of the Csepel Iron and Metal Works and in the Material Testing Laboratory of the Csepel Metal Works, respectively, on tensile test machines of mechanical system at 15 tons loading stage.

Yield strength and tensile strength were determined in the usual way. Uniform elongation was calculated, from the cross-section of that part of the

ruptured test piece which suffered uniform deformation, by the following formula:

$$\delta_e = \frac{F_0 - F_e}{F_e}.$$

In the case of quadrangular cross-sections, reduction of area was determined in the usual way from the data obtained with the slide gauge.

In connection with the mechanical tests the fracture was subjected to visual examination.

5. Flaws in the plates and their effect

From among the test pieces found defective by the tensile tests several samples were taken and examined for inclusions by the Material Testing Laboratory of the Csepel Iron and Metal Works. Analysis showed that the inclusions mostly consisted of silicates, oxides and manganese sulphide were present in smaller quantities. The thickness of these inclusions usually varied between 0,001 and 0,2 mm, their width between 0,01 and 4 mm, while their length varied from quite small values up to about 100 mm. In several cases inclusions were so extensive that the ruptured test piece opened up in layers. Another type of flaw, also quite frequently encountered, was observed near to the surface and was due to overlapping.

Inclusions and flaws appeared in an elongated form — due to the rolling operation — parallel to the direction of rolling.

The effect of the inclusions — depending on the character and magnitude of the flaw — manifests itself in the altered ultrasonic transmissivity and the mechanical properties of the material.

The effect of inclusions on the mechanical properties is due to a changed stress distribution caused by the notch effect resulting in local stress peaks and in three dimensional stress distribution. All this influences very strongly the process and formation of the fracture [4]. On the effect of flaws, in our case, a 10 to 15% increase in yield strength and tensile strength showed, a moderate decrease of uniform elongation was observed, while contraction, which is highly sensitive to changes in overall stress conditions, decreased considerably.

This major decrease in contraction, according to Par. 3, cannot be outbalanced by minor increases in the tensile characteristics, and the contraction work will, therefore, decrease in those test pieces, in which, on account of inclusions, the contraction has failed to attain the average level.

Deformation of test pieces made of plates containing coherent inclusions (which we shall call laminar plates) cannot be expressed by numerical values.

This plates do not fracture along a single cross-section, but the weakest cross-section of each layer breaks separately, thus making the measuring of reduction of area impossible. Neither is it possible to determine the uniform elongation of such plates, as after fracture the layers open up usually resulting in a greater thickness than the initial value.

Surface flaws, usually originating in a surface layer not more than a few tenths of mm thick — affecting thus a reduced area near the flaw only and not the full cross section of the test piece — have no significant influence on mechanical properties.

Changes in mechanical properties due to inclusions are accompanied by a change in the transmissivity for ultrasonic waves. Experience gained during testing showed that the decrease of the transmitted ultrasonic energy only very seldom reached 100%, even for completely opened up test pieces, but more often varied between 50 and 90%. This phenomenon might be explained in two ways. At the given test frequency those inclusions may cause a 100 to 1 pressure reduction in which in addition to the solid inclusion there is a gas layer at least 10^{-5} mm thick or those which in the direction of the beam are unusually thick. Another aspect of the same problem is the following: the phenomenon observed indicates that long inclusions which are completely split up after rupture may be locally broken in the rolled state allowing for direct metallic contacts in these places. This may be attributed to the breaking up of the inclusions in the ingot during the hot-rolling process and to a re-seaming of the separated but not oxidized surfaces of the flaws. Tensile test involves extensive cold-deformation, and due to the above mentioned stress distributions these local seams split up, and after fracture the test piece turns out as an entirely laminar structure.

As, in accordance with the aforesaid, inclusions change on the one hand the mechanical properties and the contraction work of the material, (which may be derived from the mechanical properties), and on the other hand the pressure of the transmitted ultrasonic waves, it seemed obvious that the correlation between these two changes should be investigated.

6. Experimental results

Out of the 184 test pieces investigated in our experiments, 46 proved to be of laminar structure. The ultrasonic test detected the presence of the laminar structure by a very pronounced reduction of indication, while for the reasons given above, the deformation quantities of these test pieces could not be measured. Estimating the imaginary "resultant reduction of area" of the various cross-sections, it may be stated that the contraction work of these test pieces has a small value. We shall not deal in the following with test pieces

containing flaws of this type, as such highly laminar structures do not usually occur in plates of better than A 00,21 quality, used for structural purposes. However, it could be stated with regard to laminar plates that significant indication-reduction was accompanied by small contraction work.

For the remaining 138 test pieces which could be qualified by both tests we calculated, *i. e.* nomographically determined the contraction work and

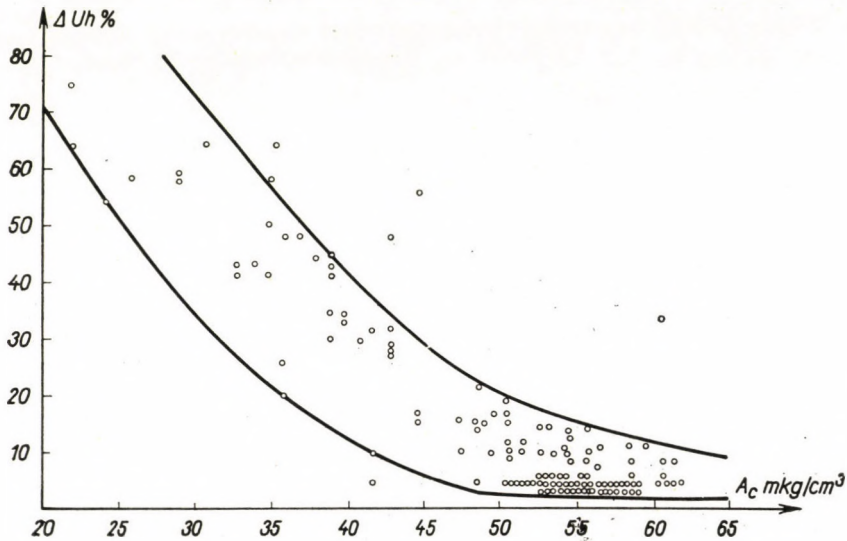


Fig. 6. Ultrasonic indication-decrease versus contraction work (excluded plates with surface flaws). Number of test pieces measured: 128

established its correlation with the ultrasonic test. It was found that with the exception of test pieces with surface flaws there is a definite relation between the result of the two tests.

Out of the ten samples with surface flaws found among the total number investigated, the ultrasonic test indicated the presence of flaws by a 10 to 30% indication-reduction in five, while none showed a decrease in contraction work. The reason for this phenomenon has already been mentioned above in the discussion of the effect of flaws on the contraction work. Test pieces with this particular type of flaws shall be dealt with separately.

Ultrasonic indication-reduction and the value of contraction work for the remaining 128 test pieces are shown in Fig. 6 ($\Delta U h \% =$ ultrasonic indication-reduction in per cent). As may be seen from Fig. 6, with the exception of 6 extremely deviating values, the results are within a band of deviation which narrows down in the direction towards greater contraction work values. Generally the outstanding values refer to test pieces passed by the contrac-

tion work test but rejected by the ultrasonic test, with the exception of one test piece showing the opposite relation. Referring the number of test pieces, for which the measured values are within the deviation band, to the total number of test pieces, we find a 95% agreement between the two qualifying tests and a 91% agreement if the test pieces with surface flaws are also taken into account.

As was mentioned the fractured cross-section of the fractured test pieces were further qualified by visual examination. The result of this subjective test was substantially in good agreement with the results of the mechanical and ultrasonic tests. One does not wish to offer numerical comparisons in this

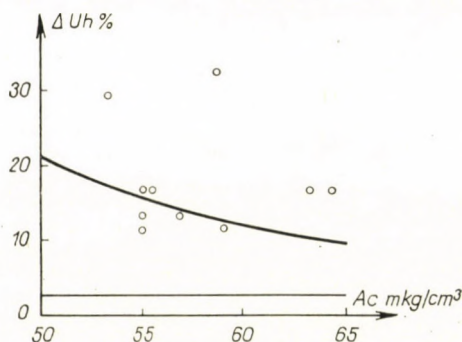


Fig. 7. Ultrasonic indication-decrease versus contraction work in the case of test pieces with surface flaws. Number of test pieces measured: 10

respect, as this type of qualification is not sufficiently objective. We are of the opinion that not only those plates should be considered defective which contain flaws clearly visible but also those with less than average mechanical properties and reduced ultrasonic transmissivity.

Correlation between reduced ultrasonic transmissivity and contraction work for test pieces with surface flaws are shown in Fig. 7. This figure also includes the deviation-band of Fig. 6. Comparison of the two figures shows that the measured values of test pieces with surface flaws are in the range of good quality from the viewpoint of contraction work, and that these values are situated within the band near to the upper limit.

On the basis of earlier experiments, as also those measurements carried out at the Institute for Mechanical Technology of the Technical University Budapest, the opinion was formed that for steels in category "A" (*i. e.* for which only tensile properties but not the chemical composition are guaranteed) if the tests are carried out on unmachined test pieces those should be considered as complying with specifications for which contraction work is at least 50 mkg/cm³. Except the test pieces with surface flaws this requirement was met by 81

of the total investigated quantity. Only for one test piece does the value lie outside the deviation band shown in Fig. 6. The occurrence frequency of the correlated values for 81 test pieces within the deviation band is illustrated in the function of contraction work and ultrasonic indication-decrease by a three-dimensional diagram in Fig. 8. This shows that the most frequently

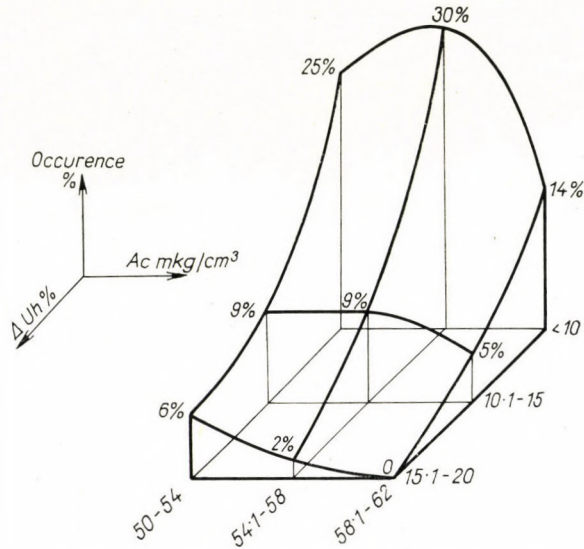


Fig. 8. Occurrence frequency of correlated values versus contraction work and ultrasonic indication-decrease. Number of test pieces measured: 81 ($A_c \geq 50$ mkg/cm³)

Table 1

No. of test piece	Length of inclusion in mm		
	L_1 by ultrasonics	L_2 by slide gauge	$\Delta U_h\%$
1	98	91	60
2	70	61	75
6	65	57	59
7	120	105	62
11	34	26	59
16	48	47	58
17	76	68	49
20	53	45	64
21	75	69	54
28	112	102	96

obtained values — in the case of flawless test pieces — were less than 10% ultrasonic indication-reduction and 54,1 to 58,0 mkg/cm³ contraction work.

Table 1 for some laminar plates shows the L_1 length of the flaw indicated by the ultrasonic test and the L_0 length *i.e.* the length of the flaw visible after the rupture of the test pieces. In addition Table 1 shows the ultrasonic indication-reduction measured at the flaw which is characteristic both for the extent and material of the inclusion.

The fact that the ultrasonic test indicates a length for the flaw being always greater than the length to which the test piece splits up after fracture, and which may be observed visually, points to the not entirely objective nature of qualifications based on visual inspection, though this method may indeed be used quite successfully in a number of cases.

7. Evaluation of experimental results

From the experiments described so far we wished to find answers to the following three questions:

- a) What is the correlation between the results of the non-destructive ultrasonic test and the destructive measurement of contraction work?
- b) How are the ultrasonic tests to be used for the qualification of plates?
- c) Is it to be admitted that the ultrasonic test is too severe for the qualification of plates?

a) As far as the first question is concerned it has already been mentioned in Par. 6 that the values which lie within the deviation band shown in Fig. 6 amount to 95% of all the data which could be evaluated and to 91% if the test pieces with surface flaws are also taken into consideration. With regard to the fact that the small contraction work, estimated for laminarly fractured test pieces, is also associated with an ultrasonic indication-reduction of 50 to 90 and even 100%, it is quite reasonable to state that for the plate material tested an unequivocal correlation exists between the results of the two tests, and that the data obtained by measurements form a continuous deviation band.

b) With respect to qualifications by the ultrasonic test it has already been mentioned in Par. 2 that the standard relative uncertainty of the measurement may be taken for 10%. In order to reduce the possibility of erroneous determination of flaws, for less severe cases a 15% decrease of the indication may be accepted as the lower level for flaw detection (see Appendix 1).

In the aforementioned Par. 6 a value greater than 50 mkg/cm³ was taken as the criterium of good quality, based on the evaluation of contraction work for the given case. In less severe cases 45 mkg/cm³ may be accepted as the lowest limit. The probability of occurrence of erroneous good and bad qualifications respectively, for both cases is discussed in Appendix 2.

The above pairs of values determine two qualification fields, the limits of the one being 10% decrease in ultrasonic indication and 50 mkg/cm³ contraction work, and of the other 15% ultrasonic indication-reduction and 45 mkg/cm³ contraction work. To illustrate the prevailing conditions Fig. 9 shows the deviation band of Fig. 6 together with those fields (I and II) which are determined by the above pairs of values.

Examination of the more rigorous field I shows that (without the samples with surface flaws) 80% of the values obtained with test pieces having a contraction work greater than 50 mkg/cm³ are within field I, and if the test pieces with surface flaws are included then we find 72% of all data within this field. This means that if we accept in the ultrasonic testing of plates a 10% indication-reduction as the lowest limit, 20 and 28% respectively, of test pieces which passed the contraction work test would be rejected.

Looking at another aspect of the problem and examining test pieces with a less than 10% indication-reduction we find that in 93% of the test pieces which passed the ultrasonic test the contraction work was found to be greater than 50 mkg/cm³, or in other words the mechanical test rejected 7% of the plates passed by the ultrasonic test.

Analysing the results for the less rigorous field II we find that 84% of the values of test pieces with a contraction work greater than 45 mkg/cm³ (and 79 percent if samples with surface flaws are also considered) lie in field II, while accepting a 15% indication-reduction as the basis of qualification 92% of the values are above 45 mkg/cm³.

If the rejection limit is lowered to 40 mkg/cm³ contraction work and 30% indication-reduction (Fig. 9, field III) and evaluation is carried out according to the above principles, there is a 95 to 97% agreement between the two types of qualifications.

The above data are tabulated as an appendix to Fig. 9. In this table the first figure (column one) indicating the agreement evaluated on the basis of contraction work, refers to calculations without the test pieces with surface flaws. The second figure refers to calculations in which test pieces with surface flaws are included.

Thus, the agreement between the two types of good qualifications, characteristic of the reliability of the qualification, is 72% in the most severe case when the test pieces with surface flaws are also included (without them it is 80%) and in less severe cases, within the looser limits of the expected accuracy of works' measurements, this agreement increases to 79 and 84 percent, respectively.

Which of the qualification field in question is to be accepted, that is to say which indication-reduction should be considered as rejection limit in the continuous non-destructive ultrasonic testing of plates — that should be decided on the basis of the application to which the plates will be put. So, for instance

plates subjected to great stress should be passed at a 10 per cent, plates used for general engineering purposes at a 15%, while plates finding less important applications at an about 30% indication-reduction. By decreasing the rejection limit the reliability of the qualification increases, while there will be a greater deviation in the mechanical properties of the material passed as good; the material will be less uniform.

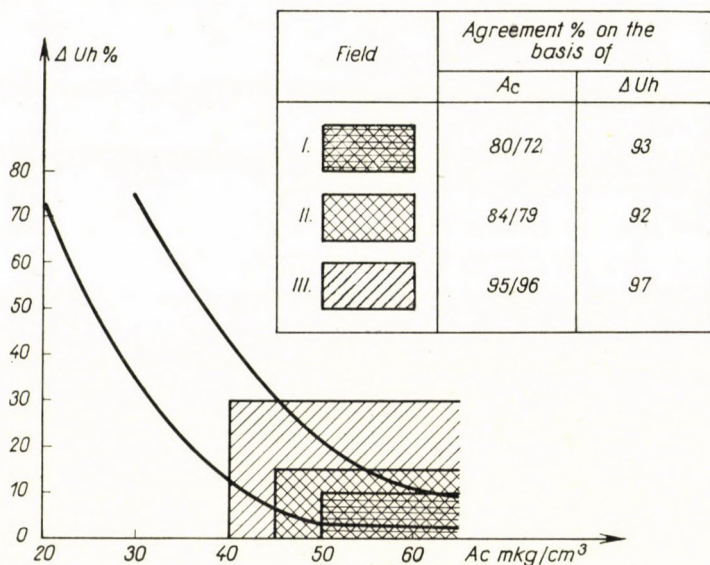


Fig. 9. Deviation band of Fig. 6 with the qualification fields.
 (Field I: $A_c > 50$ mkg/cm³, $\Delta U_h < 10\%$; Field II: $A_c > 45$ mkg/cm³, $\Delta U_h < 15\%$;
 Field III: $A_c > 40$ mkg/cm³, $\Delta U_h < 30\%$)

No general validity should be, of course, attributed to these limits, they are only valid for the type of material tested during experiments and with regard to the considerations mentioned in connection with the tests.

In the case of a given type of plate and knowing the use to which the plate will be put, the manufacturer and the customer have to draw up by common agreement the qualification fields and the limits of rejection.

c) On the basis of the above data it will be easy to answer the question as to whether ultrasonic testing of plates should be considered a too severe or a too loose test method. Usually those tests are considered too severe which reject good test pieces. As may be seen from the data in Par. 7b. this danger is 5 to 28%, depending on the rigorosity of the limitation of the acceptance field and on the decision as to whether pieces with surface flaws should be considered good or bad. It is to be emphasized, however, that introduction of ultrasonic testing offers a possibility for the qualification of the plates into several quality categories [5] and, therefore, pieces only having the lowest

quality will be qualified as "rejects". This reduces the danger of erroneous *rejection*, according to experience, to less than 5%, acceptable in practice. The danger of erroneous *qualification on the good side* is, according to the experiments carried out so far, less than 10% even with rigorous limits of qualification. This, from the point of view of the fairly great severity of the tests, may also be reassuring.

APPENDIX

Calculation of the accuracy of the measurements

1. Accuracy of the ultrasonic method for the determination of flaws

According to the earlier experiments the *first signal method* used for ultrasonic tests involves, in the negative sense, a maximum measuring uncertainty of $\Delta Uh = 30\%$ (1). The one third of this value, 10% is considered the standard measuring uncertainty.

The following may be stated with respect to uncertainties from the viewpoint of the measuring technique involved in the test:

The probability, that some test pieces are qualified erroneously for bad, decreases with increasing the ΔUh limit of rejects: at $\Delta Uh \leq 10\%$ the probability will be 32%, at 15% it amounts to 18%, and at 30% it will be below 1%, supposing a great number of tests.

The probability that test pieces are erroneously qualified as good in consequence of the measuring method, cannot be determined mathematically for the following reasons. Earlier experiments have proved that uncertainties influencing indication in positive sense (such as change of amplification, erroneous reading etc.) may cause a maximum 5% indication increase. A positive error of such extent will only qualify those bad test pieces as good ones, the flaws of which cause a 10–15%, 15–20% and 30–35% (the last in the case of a rejection limit of 30%) indication reduction respectively and the quantity of these cannot obviously be calculated. As a matter of fact their number could not have been significant, partly because the probability of compensating measuring errors — causing an *indication-reduction* more than 5% — was considerably greater, partly because the regular measurement repetition reduced the probability of measuring uncertainties which could result in an *increase of indication*, as there was a statistical fluctuation of these uncertainties in the function of time. It can be stated that on the other hand the main reasons of measuring uncertainties which appear as a *reduction of indication* (a not perfectly plane plate, rough surface) do not change in the function of time, thus cannot be reduced by the repetition of the measurement.

2. Accuracy of the determination of contraction work

GILLEMOT suggested the following formula for the determination of contraction work:

$$A_c = \frac{\delta_e}{3} (\sigma_F + 2\sigma_B) + 4.6\sigma_B (1 + \delta_e) \log \frac{1 + \delta_c}{1 + \delta_e} + \sigma_B (1 + \delta_c)^2 \left[\frac{1}{1 + \delta_c} - \frac{1}{1 + \delta_e} \right].$$

The variance of the contraction work measurement is therefore

$$(dA_c)^2 = \left(\frac{\partial A_c}{\partial \sigma_F} d\sigma_F \right)^2 + \left(\frac{\partial A_c}{\partial \sigma_B} d\sigma_B \right)^2 + \left(\frac{\partial A_c}{\partial \delta_e} d\delta_e \right)^2 + \left(\frac{\partial A_c}{\partial \delta_c} d\delta_c \right)^2.$$

Carrying out partial differentiation:

$$(dA_c)^2 = \left(\frac{\delta_e}{3} d\sigma_F \right)^2 + (u d\sigma_B)^2 + (v d\delta_e)^2 + (w d\delta_c)^2$$

where

$$u = \frac{2\delta_e}{3} + (1 + \delta_e) \left[4.6 \log \frac{1 + \delta_c}{1 + \delta_e} + \frac{1 + \delta_e}{1 + \delta_c} - 1 \right]$$

$$v = \frac{\sigma_F}{3} + \sigma_B \left[4.6 \log \frac{1 + \delta_c}{1 + \delta_e} + 2 \frac{1 + \delta_e}{1 + \delta_c} - 4.9 \right]$$

$$w = \frac{\sigma_B(1 + \delta_e)}{1 + \delta_c} \left[4.6 - \frac{1 + \delta_e}{1 + \delta_c} \right].$$

The relative value of the variance is therefore:

$$\frac{(dA_c)^2}{A_c^2} = \left(\frac{\delta_e \sigma_F}{3A_e} \frac{d\sigma_F}{\sigma_F} \right)^2 + \left(\frac{u\sigma_B}{A_c} \frac{d\sigma_B}{\sigma_B} \right)^2 + \left(\frac{v\delta_e}{A_c} \frac{d\delta_e}{\delta_e} \right)^2 + \left(\frac{w}{A_c} \frac{d\delta_c}{\delta_c} \right)^2.$$

The calculations for a test piece which was qualified as good by the tests was carried out:

$a_0 = 15 \text{ mm} \pm 0.5\%$	$\sigma_B = 39.2 \text{ kg/cm}^2$
$b_0 = 14 \text{ mm} \pm 0.5\%$	$\sigma_F = 26.4 \text{ kg/cm}^2$
$a_e = 13.5 \text{ mm} \pm 1\%$	$\delta_c = 1.7$
$b_e = 12.9 \text{ mm} \pm 1\%$	$\delta_e = 0.2$
$a_c = 9.4 \text{ mm} \pm 0.5\%$	$A_c = 57 \text{ mkg/cm}^3$
$b_c = 9.3 \text{ mm} \pm 0.5\%$	

From these data

$$u = 1.41$$

$$v = -84.7$$

$$w = 72.3$$

Tensile tests were carried out at the Central Material Testing Laboratory of the Csepel Iron and Metal Works. The testing machine measured the P_B and P_F forces with an accuracy of $\pm 1\%$.

The calculation of $\frac{(dA_c)^2}{A_c^2}$ necessitated the calculation of the relative values of the variances of σ_B , σ_F , δ_c and δ_e .

a) Calculation of the relative value of the variance of σ_B and σ_F :

$$\sigma_B = \frac{P_B}{a_0 b_0}$$

$$(d\sigma_B)^2 = \left(\frac{\partial \sigma_B}{\partial P_B} dP_B \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_B}{\partial a_0} da_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma_B}{\partial b_0} db_0 \right)^2.$$

Carrying out partial differentiation

$$(d\sigma_B)^2 = \left(\frac{1}{a_0 b_0} dP_B \right)^2 + \left(\frac{P_B}{a_0^2 b_0} da_0 \right)^2 + \left(\frac{P_B}{a_0 b_0^2} db_0 \right)^2$$

$$\frac{(d\sigma_B)^2}{\sigma_B^2} = \left(\frac{dP_B}{P_B} \right)^2 + \left(\frac{da_0}{a_0} \right)^2 + \left(\frac{db_0}{b_0} \right)^2.$$

The maximum relative error in the measurement of the quantities within the brackets are:

$$\frac{dP_B}{P_B} = 0.01 \quad (\text{measured by the tensile test machine})$$

$$\frac{da_0}{a_0} = 0.005 \quad (\text{measured by the slide gauge})$$

$$\frac{db_0}{b_0} = 0.005 \quad (\text{measured by the slide gauge}).$$

Thus

$$\frac{(d\sigma_B)^2}{\sigma_B^2} = 1.5 \cdot 10^{-4} \quad \text{and} \quad \frac{(d\sigma_F)^2}{\sigma_F^2} = 1.5 \cdot 10^{-4}.$$

b) Calculation of the variance of δ_c

$$\delta_c = \frac{F_0 - F_c}{F_c} = \frac{a_0 b_0}{a_c b_c} - 1$$

$$(d\delta_c)^2 = \left(\frac{\partial \delta_c}{\partial a_c} da_c \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_c}{\partial b_c} db_c \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_c}{\partial a_0} da_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_c}{\partial b_0} db_0 \right)^2$$

$$\left(\frac{d\delta_c}{\delta_c} \right)^2 = \left(\frac{a_0 b_0}{a_0 b_0 - a_c b_c} \right)^2 \left[\left(\frac{da_c}{a_c} \right)^2 + \left(\frac{db_c}{b_c} \right)^2 + \left(\frac{da_0}{a_0} \right)^2 + \left(\frac{db_0}{b_0} \right)^2 \right].$$

As

$$\frac{a_0 b_0}{a_0 b_0 - a_c b_c} = 1.59$$

and

$$\frac{da_c}{a_c} = 0.005 \quad (\text{measured by the slide gauge})$$

$$\frac{db_c}{b_c} = 0.005 \quad (\text{measured by the slide gauge})$$

$$\frac{da_0}{a_0} = 0.005 \quad (\text{measured by the slide gauge})$$

$$\frac{db_0}{b_0} = 0.005 \quad (\text{measured by the slide gauge})$$

thus

$$\frac{d\delta_c}{\delta_c} = 2.52 \cdot 10^{-4}.$$

c) Calculation of the variance of δ_e

$$\delta_e = \frac{F_e - F_0}{F_0} = \frac{a_e b_e}{a_0 b_0} - 1$$

$$(d\delta_e)^2 = \left(\frac{\partial \delta_e}{\partial a_e} da_e \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_e}{\partial b_e} db_e \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_e}{\partial a_0} da_0 \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta_e}{\partial b_0} db_0 \right)^2$$

$$\left(\frac{d\delta_e}{\delta_e} \right)^2 = \left(\frac{a_0 b_0}{a_e b_e - a_0 b_0} \right)^2 \left[\left(\frac{da_e}{a_e} \right)^2 + \left(\frac{db_e}{b_e} \right)^2 + \left(\frac{da_0}{a_0} \right)^2 + \left(\frac{db_0}{b_0} \right)^2 \right].$$

As

$$\frac{a_0 b_0}{a_e b_e - a_0 b_0} = -4.85$$

and

$$\frac{da_e}{a_e} = 0.015 \quad (\text{measured by the slide gauge})$$

$$\frac{db_e}{d_e} = 0.015 \quad (\text{measured by the slide gauge})$$

$$\frac{da_0}{a_0} = 0.005 \quad (\text{measured by the slide gauge})$$

$$\frac{db_0}{b_0} = 0.005 \quad (\text{measured by the slide gauge})$$

thus

$$\frac{(d\delta_e)^2}{\delta_e^2} = 118 \cdot 10^{-4}.$$

Using these data the relative value of the variance of A_c is:

$$\frac{(dA_c)^2}{A_c^2} = 23.7 \cdot 10^{-4}$$

and the relative standard deviation

$$s = \pm \sqrt{\frac{(dA_c)^2}{A_c^2}} = \pm 0.049$$

or expressed in percentage

$$s = \pm 4.9\%.$$

Therefore, the standard deviation in the measuring of contraction work in the case of the above maximum errors for the force and length measurements is 4.9%—5%. As it is known this means an error greater than the standard deviation in 32% of the measurements, assuming a great number of tests.

In our case, both for "good" and "bad" qualifications measuring uncertainties involve but in one direction erroneous qualifications. If for instance $A_c = 50$ mkg/cm³ is taken as the lowest limit and we take the number of measuring data into consideration which lie between 50 and $50 + 5\% = 52.5$ mkg/cm³ (see Fig. 6) and the probability of the correct qualifications based on the values in this range of measurement is taken as 0.6, we find that the probability of erroneous "good" qualification is less than 10%. Carrying out the calculations by similar principles for 45 and 40 mkg/cm³ rejection limits, the value obtained is less than 5%, thus the reliability of "good" qualifications is 90—95%, which is quite satisfactory.

Calculating the probability of erroneous "bad" qualifications the number of measuring data in the 50 and $50 - 5\% = 47.5$ mkg/cm³ range, and an average probability of 0.6 for the reliability of qualifications based on measurements in this range must be taken into consideration.

If calculations are carried out on this basis the probability of erroneous "bad" qualifications is about 10% between the 50 and 45 mkg/cm³ limits and about 15% in the case of the 40 mkg/cm³ limit.

REFERENCES

1. EGRI, I.: Eine Ultraschall-Durchstrahlungsmethode zur Immersionsprüfung von Metallblechen und der Vergleich derselben mit der Frequenzmodulationsmethode. Acta Technica, Tomus XXI. (1958) p. 327—345.
2. GILLEMOT, L., SINAY, G.: Die Brucharbeit als Werkstoffkenngröße. Acta Technica, Tomus XXII. (1958) p. 149—172.
3. GEIGER und SCHEEL: Hb. d. Physik. Band VIII. Trendelenburg: Akustik. S. 671. Berlin. J. Springer Verlag (1927).

4. SIEBEL, E.: Hb. d. Werkstoffprüfung, Band II. S. 40. Berlin. J. Springer Verlag (1939).
5. KOPINECK, H.—KRÄCHTER, H.—RAUTERKUS, W.: Ultraschallprüfung von Erzeugnissen der Eisenschaffenden Industrie in der laufenden Fertigung. Stahl u. Eisen, Band 79 (1959) Nr. 11. S. 786—797.

SUMMARY

With respect to the industrial introduction of the continuous and non-destructive ultrasonic testing of steel plates, one of the most important problems is to determine the reliability of qualification on the basis of this test. The authors used the determination of contraction work for checking the results of tests carried out by the earlier described *first signal* ultrasonic method for testing plates.

Samples taken from A 00.21 quality, 14 mm thick hot-rolled plates were used for the experiments.

The results have shown that — with the exception of test pieces with surface flaws only — if ultrasonic indication is represented as a function of contraction work, 95% of the experimental data can actually be marked within a deviation band which narrows down towards the values characteristic of flawless materials. This proves the existence of an unequivocal correlation between the results of the two tests for the material investigated.

There is a further good agreement between the majority of the visual (subjective) inspections of the fracture of the test pieces and the results of qualifications by the ultrasonic and mechanical method.

Mechanical tests confirm the "good" qualifications of the ultrasonic test depending on the severity of rejection limits to 80—97%, showing that the ultrasonic test cannot be considered as being too severe.

"Bad" qualifications based on the ultrasonic method show a 90% agreement with the qualifications of the mechanical test even in the case of severe quality limitations, therefore the method cannot be considered as being too loose.

The above results show that the ultrasonic *first signal method* is suitable in the case of the plate material tested for the continuous non-destructive testing of steel plates, while the determination of contraction work may serve as a sampling and destructive control method of the first.

UNTERSUCHUNG DER SCHLACKENEINSCHLÜSSE VON STAHLBLECHEN MIT ULTRASCHALL UND DURCH BESTIMMUNG DER BRUCHARBEIT

I. EGRI, G. SINAY und M. SZEMES

ZUSAMMENFASSUNG

Im Zusammenhang mit der industriellen Einführung der kontinuierlichen und zerstörungsfreien Prüfung von Stahlblechen ist eine der wichtigsten Fragen die Klärung der Verlässlichkeit der auf Grund der Prüfung vorgenommenen Bewertung. Die Verfasser haben die Ergebnisse der für Zwecke der Blechprüfung schon früher ausgearbeiteten »Erstsignal-Methode« durch Bestimmung der Brucharbeit überprüft.

Die Versuche wurden an Probekörpern durchgeführt, die 14 mm starken, warm gewalzten Blechen A 00.21 entnommen worden waren.

Die Ergebnisse haben gezeigt, daß — abgesehen von den nur an der Oberfläche fehlerhaften Probekörpern — bei Aufzeichnung der Ultraschall-Ergebnisse in Abhängigkeit von der Brucharbeit, 95% der Meßpunkte innerhalb des real darstellbaren (und in Richtung der Werte für die fehlerfreien Werkstoffe sich verengenden) Streubereichs liegen. Dies beweist, daß im Fall des untersuchten Blechmaterials zwischen den Ergebnissen der beiden Untersuchungen eine eindeutige Beziehung besteht.

Die (subjektive) Bewertung durch Betrachtung der Bruchflächen der Probekörper nach einem Zerreißversuch stimmt großenteils ebenfalls mit den Ergebnissen der Ultraschall- und der mechanischen Bewertung überein.

Die Bewertung »gut« auf Grund der Ultraschallprüfung wird durch die mechanische Prüfung, je nach Strenge der Ausschußgrenze, zu 80—97% bestätigt, was beweist, daß die Ultraschallprüfung nicht zu streng ist.

Die Bewertung »schlecht« auf Grund der Ultraschallprüfung stimmt selbst bei strengen Qualitätsgrenzen zu 90% mit der Bewertung auf Grund der mechanischen Prüfung überein, die Methode ist daher nicht zu nachsichtig.

Die angeführten Ergebnisse zeigen, daß die »Erstsignal«-Ultraschallmethode — für den Fall des untersuchten Blechmaterials — für die kontinuierliche und zerstörungsfreie Prüfung von Stahlblechen, und die Bestimmung der Brucharbeit für die stichprobenweise vorgenommene zerstörungsfreie Kontrolle der Ergebnisse geeignet ist.

EXAMEN DES INCLUSIONS NON MÉTALLIQUES DANS LES TôLES D'ACIER PAR LES ULTRASONS ET PAR DÉTERMINATION DU TRAVAIL DE CONTRACTION

I. EGRI, G. SINAY et M. SZEMES

RÉSUMÉ

L'une des questions les plus importantes que pose l'application industrielle du contrôle continu et non destructif des tôles d'acier par ultrasons, est celle de la sûreté des qualifications basées sur des examens. Par la détermination du travail de contraction, les auteurs ont vérifié les résultats d'examens faits avec la méthode du «premier signal», déjà élaborée pour le contrôle des tôles.

Les essais ont été faits sur des échantillons prélevés des tôles A 00.21 laminées à chaud, de 14 mm d'épaisseur.

Les résultats ont montré qu'en traçant un graphique des indications ultrasonores en fonction du travail de contraction — les pièces n'ayant que des défauts superficiels étant mises à part — 95% des points mesurés se trouvent dans la zone de dispersion (qui se rétrécit vers les valeurs caractérisant ces matériaux sans défaut). Ceci prouve que, pour la tôle examinée, il existe une corrélation univoque entre les résultats des deux examens.

La qualification (subjective) à vue de la surface de rupture des échantillons coïncide aussi, dans une grande mesure, avec les résultats des qualifications ultrasonores et mécaniques.

Les qualifications «bonnes», basées sur l'examen ultrasonore sont confirmées par l'examen mécanique, suivant la rigueur des limites de rejet, pour 80 à 97%, ce qui prouve que l'examen ultrasonore n'est pas trop rigoureux.

Les qualifications «mauvaises» basées sur l'examen ultrasonore sont, même en cas de limites de qualité sévères, confirmées pour 90%, par la qualification suivant les examens mécaniques, donc la méthode ultrasonore n'est pas non plus trop indulgente.

Ces résultats montrent que la méthode ultrasonore du «premier signal» convient — dans le cas des tôles examinées — pour l'examen continu et non destructif, la détermination du travail de contraction étant utilisée pour la vérification destructive de cet examen.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАШЛАКОВАННОСТИ ЛИСТОВОЙ СТАЛИ УЛЬТРАЗВУКОВЫМ МЕТОДОМ И ПОСРЕДСТВОМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАБОТЫ КОНТРАКЦИИ

И. ЭГРИ, Г. ШИНАИ и М. СЕМЕШ

РЕЗЮМЕ

В связи с введением в промышленность непрерывного испытания листовой стали ультразвуком без разрушения материала, одним из важнейших вопросов является выяснение надежности квалификации на основании испытаний. Авторы с помощью определения работы контракции проверили результаты испытаний, проведенных с помощью ультразвукового метода «первого сигнала», разработанного ранее для испытаний листовых материалов.

Испытания проводились на образцах горячекатанной листовой стали толщиной 14 мм сорта А 00.21.

Результаты показывают, что за исключением проб с только поверхностным дефектом, отображая ультразвуковые индикации в функции работы контракции, 95% точек замера размещается внутри реально изобразимой полосы разброса (сужающейся в сторону характеристик материалов, не имеющих порока). Это доказывает, что в случае иссле-

дованной листовой стали, между результатами двух испытаний существует однозначная связь.

Результат осмотра поверхности разрыва проб (субъективная оценка) в преобладающей части совпадает с результатами оценка с помощью ультразвука и механических методов.

«Годность», установленная на основе испытания ультразвуком, в зависимости от строгости пределов брака при механическом испытании подтверждается до 80—97%, что в свою очередь доказывает, что ультразвуковые испытания не являются слишком строгими.

«Негодность», установленная на основе ультразвуковых испытаний, даже в случае строгих пределов качества, на 90% совпадают с данными, установленными механическим путем, следовательно испытания достаточно жестки.

Описанные выше результаты показывают, что ультразвуковой метод «первого сигнала» (в случае испытанного листового материала) подходит для непрерывного испытания листовой стали без ее разрушения, а определение работы контракции подходит для контроля испытаний на выбор с разрушением образца.

UNTERSUCHUNG DES LEISTUNGSBEDARFS VON RÜHRERN IN ABHÄNGIGKEIT VON IHREN GEOMETRISCHEN GRÖSSENVERHÄLTNISSEN

A. LIENERTH

LEHRSTUHL FÜR CHEMISCHES MASCHINENWESEN UND LANDWIRTSCHAFTLICHE INDUSTRIEN,
TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 12. Juli 1960]

Eine der bei den absatzweisen Vorgängen der chemischen Technologie am häufigsten verwendeten Vorrichtungen ist der zylindrische Rührapparat (Abb. 3). Der Energieverbrauch des Rührers, der den Mischvorgang hervorruft, ist eine wichtige Kennzahl dieses Apparates. Das durch die Rührwirkung hervorgerufene Strömungsbild ist äußerst kompliziert, weshalb die die Strömung inkompressibler, zäher Flüssigkeiten charakterisierenden Differentialgleichungen unmittelbar, auf analytischem Wege nicht gelöst werden können. Unter Anwendung der Theoreme der Ähnlichkeitslehre konnte dieses Problem jedoch gelöst werden [1]. An Hand von Versuchen wurde bewiesen, daß die hydrodynamischen Ähnlichkeitskriterien — nämlich die Reynolds- und die Froudezahl — auch für Rührer gültig sind. Ferner wurde nachgewiesen, daß es eine dimensionslose Kennzahl — den sogenannten Widerstands- oder Leistungskoeffizienten — gibt, die eine Funktion der *Re*- und *Fr*-Zahl darstellt und deren Wert bei geometrisch ähnlichen Apparaten für gleiche *Re*- und *Fr*-Zahlen konstant ist. Erst diese Erkenntnis ermöglichte es, den zur Berechnung des Leistungsbedarfs benötigten Widerstandskoeffizienten mit Hilfe von Modellversuchen zu bestimmen und auf Grund des nun bekannten Widerstandskoeffizienten den Leistungsbedarf eines geplanten Apparates mit genügender Genauigkeit zu ermitteln.

Der Leistungsbedarf kann aus den Beziehungen

$$N = \xi \cdot d^5 \cdot n^3 \cdot \rho \quad [\text{mkg/s}] \quad (1)$$

und

$$\xi = f(\text{Re}, \text{Fr}) \quad (2)$$

errechnet werden [1, 2, 3, 4, 5], in denen

N den — bei konstanter Drehzahl *n* meßbaren — Leistungsbedarf des Rührers [mkg/s],

d den charakteristischen Rührerdurchmesser [m],

n die Rührerdrehzahl [U/s],

ρ die Dichte des gerührten Mediums [kgs²/m⁴] und

ξ den Widerstandskoeffizienten bedeuten.

Die Reynoldszahl [3] bzw. die Froudezahl [3] läßt sich durch die Beziehung

$$Re = \frac{d^2 \cdot n \cdot \rho}{\mu} \quad (3)$$

bzw.

$$Fr = \frac{n^2 \cdot d}{g} \quad (4)$$

ausdrücken, worin

μ die dynamische Viskosität der gerührten Flüssigkeit [kgs/m²] und g die Erdbeschleunigung [m/s²] bedeuten.

Der Ähnlichkeitstheorie zufolge stellt Gleichung (2) die Kriterialgleichung des Rührvorganges dar, wobei ξ sowie die Re - und Fr -Zahlen als Ähnlich-

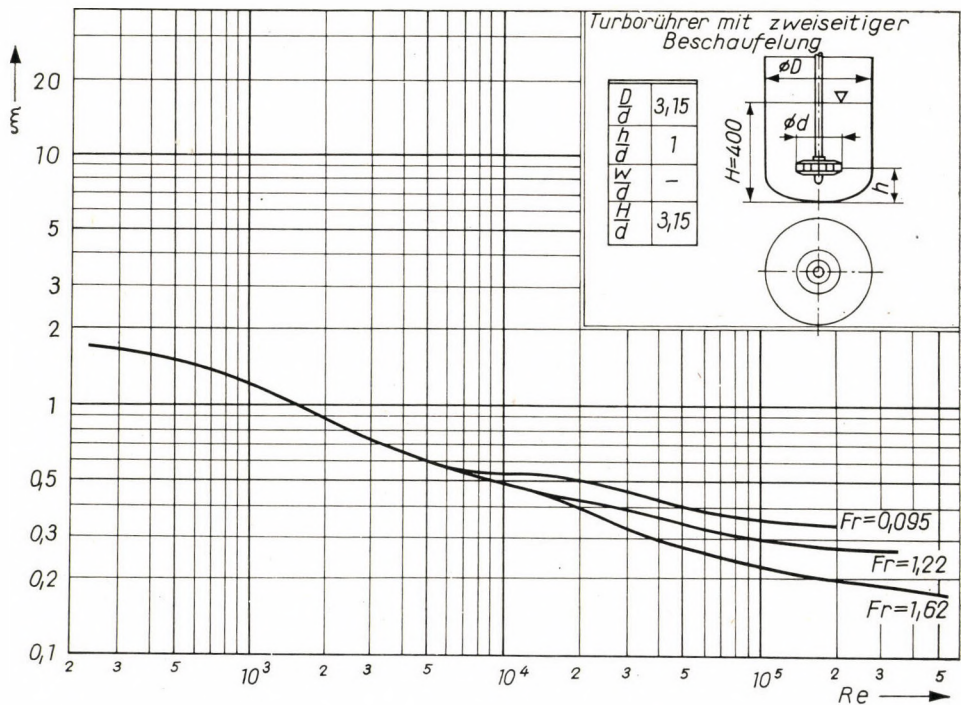


Abb. 1

keitskriterien betrachtet werden können. Der funktionelle Zusammenhang zwischen den Kriterien ist von der Größe des Apparates unabhängig, die Funktion kann daher, wenn nötig, auch an Hand von Messungen an einem kleinen Modellapparat aufgestellt werden.

Hat man die den sämtlichen möglichen Re - und Fr -Zahlen zugehörigen ξ -Werte bestimmt, ist also die Funktion $\xi = f(Re, Fr)$ bekannt, und sind fer-

ner auch alle geometrischen Ähnlichkeitsbedingungen erfüllt, so kann auch der Leistungsbedarf eines größeren Rührapparates rechnerisch ermittelt werden.

Der einzige Nachteil dieser Berechnungsmethode besteht darin, daß die Berechnung selbst ungenau, ja allenfalls unverläßlich wird, wenn die geometrischen Größenverhältnisse des geplanten Apparates mit den in der Fachliteratur mitgeteilten Größenverhältnissen nicht übereinstimmen.

Die in Abb. 1 beispielsweise dargestellte Widerstandskoeffizientenkurve [6] eines Turborührers mit zweiseitiger Beschaufelung ist nur dann gültig, wenn man sich ebenso streng an die in der Abbildung dargestellte Anordnung sowie an die in der Zahlentafel angegebenen Größenverhältnisse (des Modellapparates) hält.

Es taucht nun die Frage auf, wie in jenem Falle gerechnet werden muß, wenn die angegebenen Größenverhältnisse — z. B. infolge maschinenbautechnischer Gegebenheiten — nicht eingehalten werden können, oder wenn die speziellen Bedingungen einer bestimmten chemischen Technologie die Wahl anderer Werte erfordern.

Empirische Zusammenhänge

Mit der Bestimmung der Funktion $\xi = f(Re, Fr)$ für verschiedene Rührer haben sich viele Autoren befaßt. G. G. BROWN [3] allein gibt diese Funktion für 14 verschiedene Rührer bekannt. Wenig ist dagegen über die Funktion

$$\frac{N}{d^5 \cdot n^3 \cdot \rho} = f(Re, Fr, a, \beta \dots \text{ usw.}) \quad (5)$$

d. h. darüber bekannt, wie das Kriterium ξ von den geometrischen Kennzahlen $a, \beta \dots$ usw. des Rührappates abhängt.

Über einen der ersten Versuche berichten WHITE und SUMERFORD [7], die mit einfachen Schaufel- (od. Finger-) Rührern experimentierten.

Für je eine Versuchsfolge blieb der Wert von d konstant, während die Werte von D, H und w geändert wurden. Die genannten Autoren benützten also bei ihren Messungen Rührschaufeln mit konstantem Durchmesser in Behältern verschiedener Durchmesser, bei unterschiedlichen Flüssigkeitshöhen und mit verschiedenen Schaufelbreiten.

Ihren Messungen gemäß gilt

$$\frac{N}{d^5 \cdot n^3 \cdot \rho \cdot D^{1.1} \cdot H^{0.6} \cdot w^{0.3}} = C_x = f(Re), \quad (5)$$

wobei

- d den Rührerdurchmesser,
- n die Rührerdrehzahl,
- ρ die Flüssigkeitsdichte,
- D den Behälterdurchmesser,

H die Höhe des Flüssigkeitsspiegels,
 w die Schaufelbreite,
 C_x eine dimensionslose Kennzahl, die Funktion der Re -Zahl bedeuten.

Die Gültigkeitsgrenzen ihrer Formel geben die Autoren folgendermaßen an:

$$d > \frac{D}{3}; \quad w < \frac{d}{6} \quad \text{und} \quad D < H < 1,5 D.$$

Die Gleichung (6) drückt die ganz eigenartige Gesetzmäßigkeit aus, daß N — im Falle eines bestimmten, konstanten d -Wertes und bei gleichbleibender Drehzahl n — der 1,1-ten Potenz des Behälterdurchmessers, der 0,6ten Potenz der Flüssigkeitshöhe und der 0,3-ten Potenz der Schaufelbreite entsprechend zu- bzw. abnimmt. (Wird ein Rührer eines bestimmten Durchmessers z. B. in einen größeren Behälter versetzt, dann wächst der Leistungsbedarf proportional zur Potenz $(D_1/D)^{1,1}$, wobei D den Durchmesser des ursprünglichen Behälters und D_1 denjenigen des größeren Behälters bedeutet.)

Aus den nun erkannten Gesetzmäßigkeiten lassen sich aber auch weitere Schlüsse ziehen. Die Änderung der Werte D , H und w kann nämlich auch als Erhöhung bzw. Verminderung der Verhältniszahlen D/d , H/d und w/d aufgefaßt werden.

WHITE rief die Änderung dieser Verhältniszahlen auf einseitige Weise hervor, indem er bloß die Werte D , H und w änderte, d dagegen konstant hielt. Dabei ist ein Zusammenhang, der die Beziehung zwischen Ähnlichkeitskriterien und geometrischen Größenverhältnissen ausdrücken soll, offenbar ganz unabhängig davon, ob die Änderung der Größenverhältnisse einseitig durch die Vergrößerung oder Verminderung der einen oder der andern Abmessung hervorgerufen wird. Stehen z. B. alle zusammengehörigen Werte des funktionellen Zusammenhanges

$$N/(d^5 \cdot n^3 \cdot \rho) = f(Re, D/d)$$

zur Verfügung, so hat man die Möglichkeit diesen aufzustellen, wobei seine mathematische Gestalt unabhängig davon bleibt, ob bei den Messungen nur d oder allenfalls bloß D erhöht bzw. vermindert wurde.

Begnügt man sich also mit WHITES Versuchsdaten, gestaltet man jedoch die von ihm aufgestellte Gleichung (6) um, indem man D , H und w als das Produkt aus einer unbekanntem Zahl und d ausdrückt und

$$D = a \cdot d, \quad H = \beta \cdot d, \quad w = \gamma \cdot d$$

setzt, dann erhält man mit diesen Produkten aus Gleichung (6) nach den nöti-

gen Vereinfachungen die Beziehung

$$N = C_x \cdot (\alpha)^{1.1} \cdot (\beta)^{0.6} \cdot (\gamma)^{0.3} \cdot d^5 \cdot n^3 \cdot \rho \quad [\text{mkg/s}], \quad (7)$$

in der

$$\alpha = D/d, \quad \beta = H/d, \quad \gamma = w/d.$$

Auf diese Weise gelangt man zu einem allgemeineren als zu dem von WHITE aufgestellten Zusammenhang, der die Beziehung zwischen N und den Größenverhältnissen ausdrückt.

Auf Grund von Gleichung (6) kann nun berechnet werden, wie sich N mit veränderlichem D bzw. H oder w , ferner wie sich N in Abhängigkeit von d ändert, wenn dabei die Werte von D , H und w konstant bleiben. Diese Gleichung bietet jedoch keine Handhabe zur Entscheidung der Frage, wie sich N in Abhängigkeit von d ändert, wenn sonst alle übrigen Größenverhältnisse — mit Ausnahme von D/d — konstant bleiben. Sind nämlich D , H und w konstant, und wird nur d geändert, so ändert sich mit D/d gleichzeitig auch H/d und w/d . Eben diesen Fall bringt die Formel (6) zum Ausdruck, wobei sie jedoch die eigentlich gestellte Frage offen läßt. Dieser letztere Fall kommt ziemlich häufig vor, da gewöhnlich nur D/d geändert werden muß, während alle übrigen Größenverhältnisse konstant gehalten werden können.

Bei konstant gehaltenem β und γ sowie n , μ und ρ ändern wir nun α , indem wir die Messungen bei unverändertem D -Wert — also stets in demselben Behälter — mit Rührern verschiedener Durchmesser d durchführen. Der für d gemessene Leistungsbedarf soll hierbei mit N , derjenige für d_1 mit N_1 bezeichnet werden. (In Gleichung (7) sind also β und γ konstant, $\alpha = D/d$ bzw. $\alpha_1 = D/d_1$.) Damit erhält man

$$\frac{N_1}{N} = \frac{C_{x1}}{C_x} \cdot \left(\frac{d}{d_1}\right)^{1.1} \cdot \left(\frac{d_1}{d}\right)^5 = \frac{C_{x1}}{C_x} \cdot \left(\frac{d_1}{d}\right)^{3.9}, \quad (8)$$

wobei

C_{x1} = eine der an Hand von d_1 errechneten Re_1 -Zahl zugeordnete dimensionslose Kennzahl und

C_x = eine der an Hand von d errechneten Re -Zahl zugeordnete dimensionslose Kennzahl ist.

Gleichung (8) bringt deutlich die empirisch gesicherte Tatsache zum Ausdruck, daß die Leistungsaufnahme durch die Erhöhung des d -Wertes weitgehend beeinflußt wird.

Im zweiten Fall seien α und γ sowie d , n , ρ und μ konstant und β , d. h. H veränderlich. Mit den obigen Bezeichnungen gilt dann

$$\frac{N_1}{N} = \left(\frac{H_1}{H}\right)^{0.6}. \quad (9)$$

Ähnliche Zusammenhänge finden wir in KASSATKINS Mitteilungen [1] auf Grund der Messungen von KAFAROW. Laut KASSATKIN gilt:

$$\frac{N}{d^5 \cdot n^3 \cdot \rho} = \rho \cdot \xi^{0.7} \quad (10)$$

$$\varphi = \left(\frac{D}{3d} \right)^{1.1} \cdot \left(\frac{H}{3d} \right)^{0.6} \cdot \left(\frac{4w}{d} \right)^{0.3} \quad (11)$$

und

$$\xi_0 = f(Re). \quad (12)$$

wobei ξ_0 den Widerstandskoeffizienten bedeutet.

Für ξ_0 ergeben sich — in Abhängigkeit von der Re -Zahl — für verschiedene Rührer jeweils auch unterschiedliche Kurven. Die verschiedenen Funktionskurven $\xi_0 = f(Re)$ erhielt KAFAROW an Hand von Messungen mit bestimmten Verhältniszahlen D/d , H/d , w/d .

Für Schaufelrührer schreiben sich diese Verhältniszahlen zu

$$\alpha_0 = D/d = 3; \quad \beta_0 = H/d = 3 \quad \text{und} \quad \gamma_0 = w/d = 1/4.$$

Ersetzt man die Zahlen in Gleichung (11) durch die die Verhältniszahlen kennzeichnenden Ausdrücke, so erhält man für Gleichung (10) die Form

$$N = \xi_0 \cdot d^5 \cdot n^3 \cdot \varphi \cdot \left(\frac{D}{\alpha_0 \cdot d} \right)^{1.1} \cdot \left(\frac{H}{\beta_0 \cdot d} \right)^{0.6} \cdot \left(\frac{w}{\gamma_0 \cdot d} \right)^{0.3} \quad [\text{mkg/s}]. \quad (13)$$

Werden die vorgeschriebenen Verhältniszahlen eingehalten, d. h. wird $D/d = \alpha_0$, $H/d = \beta_0$ und $w/d = \gamma_0$, dann können die Klammerausdrücke offenbar der Einheit gleichgesetzt werden, somit gilt also

$$N = \xi_0 \cdot d^5 \cdot n^3 \cdot \rho. \quad (13a)$$

Will man nun die Änderung von N — laut Formel (13) — bei konstantem D , n , ρ und μ ferner für $H/d = \beta_0$ und $w/d = \gamma_0$ aber bei veränderlichem d untersuchen, dann hat man mit den früher eingeführten Bezeichnungen

$$\frac{N_1}{N} = \frac{\xi_{01}}{\xi_0} \cdot \frac{d_1^5}{d^5} \cdot \left(\frac{d}{d_1} \right)^{1.1} = \frac{\xi_{01}}{\xi_0} \cdot \left(\frac{d_1}{d} \right)^{3.9}, \quad (14)$$

wobei

ξ_{01} = ein der an Hand von d_1 errechneten Re_1 -Zahl zugeordneter Widerstandskoeffizient und

ξ_0 = ein der an Hand von d errechneten Re -Zahl zugeordneter Widerstandskoeffizient ist.

Das Ergebnis stimmt mit der Formel von WHITE überein. Ähnlich führt die Änderung von H zu den gleichen Ergebnissen. Bedauerlicherweise wird aber auf die Ungenauigkeit dieser Berechnungsmethode von keinem der Autoren hingewiesen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß aus den Quellenwerken der Fachliteratur weder die Größe dieser Ungenauigkeit hervorgeht, noch unmittelbare Meßergebnisse zur Verfügung stehen und daß es schließlich ganz dahingestellt bleibt, ob die mitgeteilten Zusammenhänge auch für Rührer anderer Bauart gültig sind oder nicht.

Versuche mit Schaufelrührern

Unsere Versuche wurden an zwei verschiedenen großen Apparaten (in einem kleineren und in einem größeren) durchgeführt. — Die Größenverhältnisse des kleineren — mit »0« bezeichneten — Apparates waren:

$$D/d = 2,96 \text{ und } H/d = 3,54.$$

Die Größenverhältnisse des größeren — mit »1« bezeichneten — Apparates dagegen

$$D/d = 1,93 \text{ und } H/d = 2,725.$$

Der Rührer ist in Abb. 2 dargestellt. Die für den Rührer charakteristischen Größenverhältnisse w/d und h/d , sowie die Größenverhältnisse des Behälters (die Behältergestalt) waren in beiden Fällen dieselben.

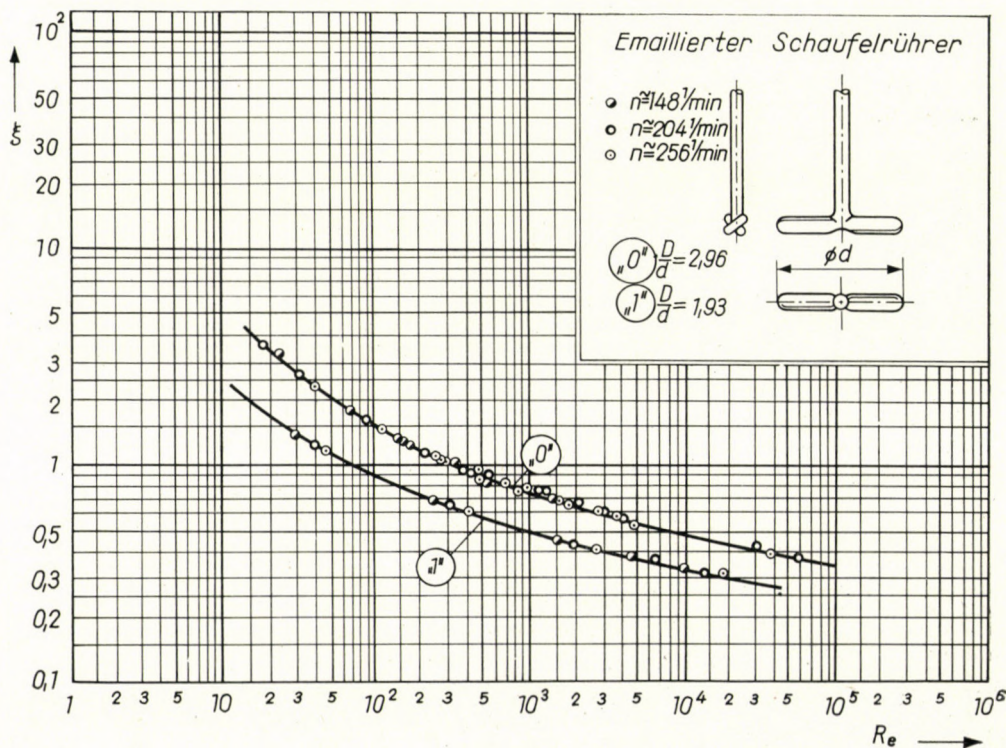


Abb.

Unsere Messungen erstreckten sich auf die Bestimmung des Leistungsbedarfs und der Drehzahl des Rührers, sowie auf die Ermittlung der Viskosität und der Dichte der Flüssigkeit. Die Meßmethode selbst wurde schon in einer früher veröffentlichten Arbeit [8] ausführlich beschrieben. Für den mit »0« bzw. mit »1« bezeichneten Apparat wurde die Funktionskurve

$$\frac{N}{d^5 \cdot n^3 \cdot \rho} = f(Re) \quad (15)$$

auf Grund der gewonnenen Meßwerte rechnerisch ermittelt. Die Meßergebnisse sind in der Zahlentafel I zusammengefaßt, während die Meßpunkte in Abb. 2 graphisch dargestellt sind. Die Streuung der Meßpunkte war sehr gering.

Die Meßpunkte wurden jeweils auf Grund von vier gemessenen Größen aufgetragen, wobei es — laut unseren Meßerfahrungen — genügte, bloß eine der vier Größen falsch zu messen, um den aufgetragenen Meßpunkt — weit über oder unter die sonst kontinuierlich verlaufenden Kurve — zu verlagern. In vielen Fällen wurde mit Viskositäts- und Drehzahlenwerten gearbeitet, die dieselbe *Re*-Zahl ergaben. Der Theorie gemäß sind derselben *Re*-Zahl auch gleiche Werte von $N/(d^5 \cdot n^3 \cdot \rho)$ zugeordnet. [Siehe Gleichung (15).] Dieser Satz wurde durch die Meßergebnisse in vollem Umfang bestätigt.

Die Auswertung der Messungen geschah nach folgender Methode. Es wurde die Beziehung

$$\psi = \frac{N_1}{N_0} \quad (16)$$

eingeführt.

N_0 stellt den Leistungsbedarf eines Rührers in einem Behälter mit dem Durchmesser D dar, wenn $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$... usw. ist.

N_1 stellt den Leistungsbedarf eines Rührers in einem Behälter von gleich großem Durchmesser D dar, wenn $\alpha \neq \alpha_0$, $\beta \neq \beta_0$... usw. ist.

Die Rührerdrehzahl, die Dichte und Viskosität der gerührten Flüssigkeit, die Rührerform (der Rührertyp) sind in beiden Fällen natürlich gleich.

Der Behälterdurchmesser D sei 770 mm, $\alpha = \alpha_0 = 2,96$ und $\beta = \beta_0 = 3,54$. Der Durchmesser des dem vorgeschriebenen Größenverhältnis entsprechenden Rührers sei $d = 0,770/2,96 = 0,26$ m, die Höhe des vorgeschriebenen Flüssigkeitsspiegels $H = 920$ mm. Der Durchmesser des willkürlich gewählten Rührers sei $d_1 = 0,4$ m (Abb. 3: Apparat »b«); $\alpha_0 \neq \alpha_1 = 0,770/0,4 = 1,93$. Die Höhe des gewählten Flüssigkeitsspiegels sei $H_1 = 1\ 090$ mm; $\beta_0 \neq \beta_1 = 1,09/0,4 = 2,725$.

Für die Bestimmung von N_0 (für $D = 770$ mm, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ und $\gamma = \gamma_0$) gilt die Beziehung

$$N_0 = \xi_0 \cdot d^5 \cdot n^3 \cdot \rho,$$

in der

$\xi_0 = \xi$ ein der mit einem $d = 0,26$ m errechneten *Re*-Zahl zugeordneter Widerstandskoeffizient ist. (ξ_0 kann von der mit »0« bezeichneten Kurve abgelesen werden, siehe Abb. 2.)

Nun soll N_1 bestimmt werden. N_1 stellt den Leistungsbedarf des Rührers in einem Behälter mit dem Durchmesser $D = 770$ mm dar, wenn $\alpha = \alpha_1 = 1,93$ und $\beta = \beta_1 = 2,725$, die übrigen Größenverhältnisse dagegen den vorgeschriebenen Werten gleich sind.

Zahlentafel I

Messungsnummer	n [U/min]	Re	N [mkg/s]	ξ
59	202	16,75	0,5	$\xi_0 = 3,68$
62	254	21,6	0,87	3,25
58	145	64,5	0,09	1,83
63	252	106	0,38	1,47
64	201	213	0,15	1,16
4	256	440	0,25	0,94
17	255	486	0,23	0,89
18	255	680	0,21	0,82
23	256	833	0,2	0,78
24	256	1 460	0,18	0,71
48	146	2 065	0,032	0,664
50	253	3 480	0,14	0,59
51	255	4 800	0,13	0,534
69	204	29 800	0,069	0,43
70	257	37 400	0,12	0,386
72	203	57 300	0,054	0,373
213	149	27,9	21,68	$\xi_1 = 1,42$
215	198	38,6	43,8	1,23
214	244	46,6	75,5	1,125
201	147	231	10,12	0,7
203	202	304	24,65	0,66
202	250	392	42,9	0,6
206	151	1 500	7,19	0,462
204	204	1 880	16,1	0,418
205	255	2 530	30,4	0,409
208	150	4 620	5,76	0,383
209	204	6 100	14,28	0,376
212	160	9 900	4,97	0,332
210	204	13 550	12,3	0,32
211	255	16 850	24,2	0,329

Laut Gleichung (13) gilt

$$N_1 = \xi_{01} \cdot d_1^5 \cdot n^3 \cdot \rho \cdot \left(\frac{D_1/d_1}{2,96} \right)^{1,1} \cdot \left(\frac{H_1 d_1}{3,54} \right)^{0,6} \text{ [mkg/s]}, \quad (17)$$

wobei

ξ_{01} = ein der an Hand von $d_1 = 0,4$ m errechneten Re -Zahl zugeordneter Widerstandskoeffizient.

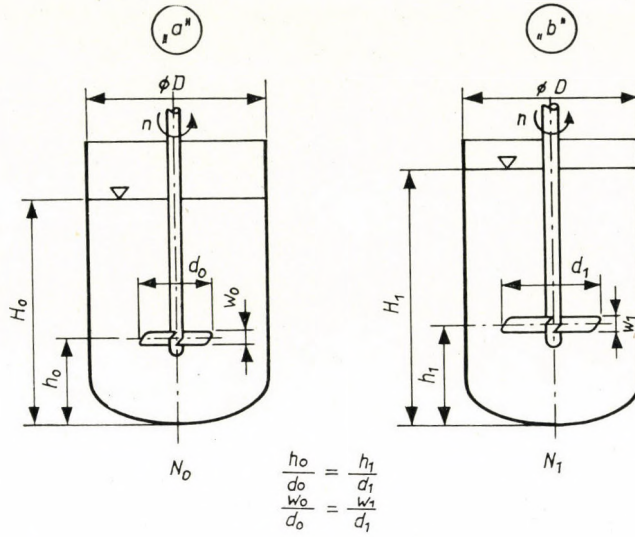


Abb. 3

(ξ_{01} kann von der mit »0« bezeichneten Kurve abgelesen werden, siehe Abb. 2.)
 Schließlich schreibt sich der Quotient aus N_1 und N_0 zu

$$\psi = \frac{N_1}{N_0} = \frac{\xi_{01}}{\xi_0} \cdot \left(\frac{d_1}{d}\right)^5 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{2,96}\right)^{1,1} \cdot \left(\frac{\beta_1}{3,54}\right)^{0,6} \quad (18)$$

N_1 und N_0 wurden an Hand von Messungen bestimmt. Aus N_1 und N_0 wurde der Faktor ψ ermittelt; die Zahlentafel II enthält mithin gemessene ψ -Werte.

Die Meßwerte von ψ in Abhängigkeit von Re_0 sind in Abb. 4 aufgetragen.

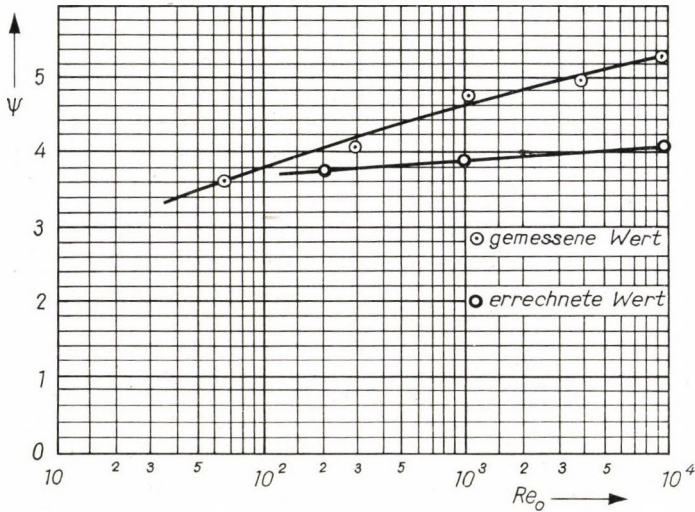


Abb. 4

Die gemessenen und errechneten ψ -Werte sollen nun miteinander verglichen werden. Die gemessenen ψ -Werte können aus Abb. 4 abgelesen werden, während sich die errechneten Werte mit Hilfe der Gleichung (18) ermitteln lassen.

Laut Gleichung (18) gilt nämlich

$$\psi = \frac{\xi_{01}}{\xi_0} \cdot \left(\frac{0,4}{0,26}\right)^5 \cdot \left(\frac{1,93}{2,96}\right)^{1,1} \cdot \left(\frac{2,725}{3,54}\right)^{0,6} = \frac{\xi_{01}}{\xi_0} \cdot 4,58. \quad (19)$$

ψ wurde für $Re_0 = 200; 1\ 000$ und $10\ 000$ ermittelt. Für $Re_0 = 200$ gelten folgende Werte:

$$\xi_{01} = 0,94$$

$$\xi_0 = 1,2$$

$$\xi_{01}/\xi_0 = 0,783$$

$$\psi = 3,585.$$

Für $Re_0 = 1000$ gilt:

$$\xi_{01}/\xi_0 = 0,838 \text{ und}$$

$$\psi = 3,84.$$

Für $Re_0 = 10\ 000$ gilt schließlich:

$$\psi = 0,886 \cdot 4,58 = 4,06.$$

Zahlentafel II

n [U/min]	μ [cP]	Re_0	N_1 [mkg/s]	N_0 [mkg/s]	$\psi = \frac{N_1}{N_0}$
200	3200	66,7	27,5	7,6	3,62
200	725	294	19,35	4,2	4,6
200	200	1040	14,8	3,1	4,77
250	60	3960	23,1	4,64	4,98
400	43	9600	84,5	15,9	5,31

Bei niedrigen Reynoldszahlen ist der Unterschied zwischen den gemessenen und den errechneten Werten sehr gering. Mit steigender Re -Zahl wächst auch der Unterschied zwischen den beiden Werten und beträgt z. B. bei $Re_0 = 10\ 000$ rund 25%.

Versuche mit Turborührern

Es wurden auch Versuche mit Turborührern mit zweiseitiger Beschauung (geschweifte Schaufeln) durchgeführt (siehe Abb. 5).

Die Versuche wurden in einem zylinderförmigen Behälter mit gewölbtem Boden und mit einem Durchmesser $D = 400$ mm durchgeführt. Als Versuchsm Medien wurden Dampfzylinderöl, Zuckerlösung und Wasser verwendet. Der Rührerdurchmesser D betrug 127 mm, die Rührerdrehzahl $n = 674$ U/min. Die Fr -Zahl war während der Versuche konstant, und zwar $Fr = 1,62$. Die Messungen erfolgten bei drei verschiedenen Flüssigkeitshöhenverhältnissen

$$\beta = 2,36; 4,32; 5,2.$$

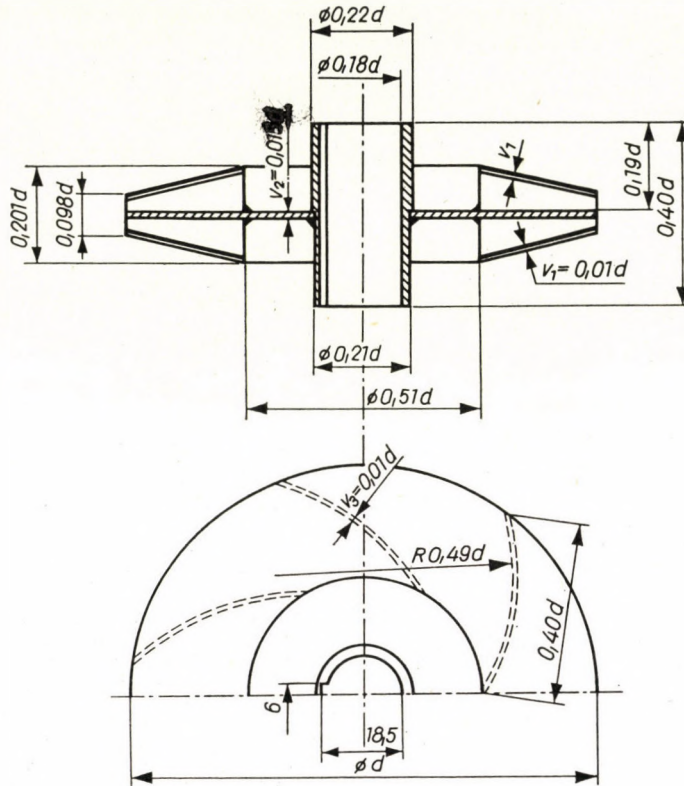


Abb. 5

Die Meßergebnisse sind in den Zahlentafeln III. a—c) zusammengefaßt, die Meßpunkte in Abb. 6 graphisch dargestellt.

In Abb. 6 sind die den ξ -Werten entsprechenden Punkte eingetragen, auch findet sich dort die für den Wert $\beta = 3,15$ ermittelte ξ -Kurve [6].

Die Kurvenäste gehen von einem gemeinsamen Punkt aus und entfernen sich allmählich voneinander, sind aber von annähernd gleicher Form. Ihre eigenartige Ordnung läßt darauf schließen, daß es möglich sein muß, die Kurvenschar durch eine entsprechende mathematische Formel auszudrücken.

Die zwischen den einzelnen Kurven bestehende mathematische Beziehung wurde schrittweise abgeleitet, und zwar wurde zuerst der Faktor ψ in Abhängigkeit von der Re -Zahl für verschiedene β -Werte ermittelt:

$$\psi = \frac{N_1}{N_0},$$

wobei

$$N_1 = \xi_1 \cdot d^5 \cdot n^3 \cdot \varrho \quad \text{und} \quad N_0 = \xi_0 \cdot d^5 \cdot n^3 \cdot \varrho.$$

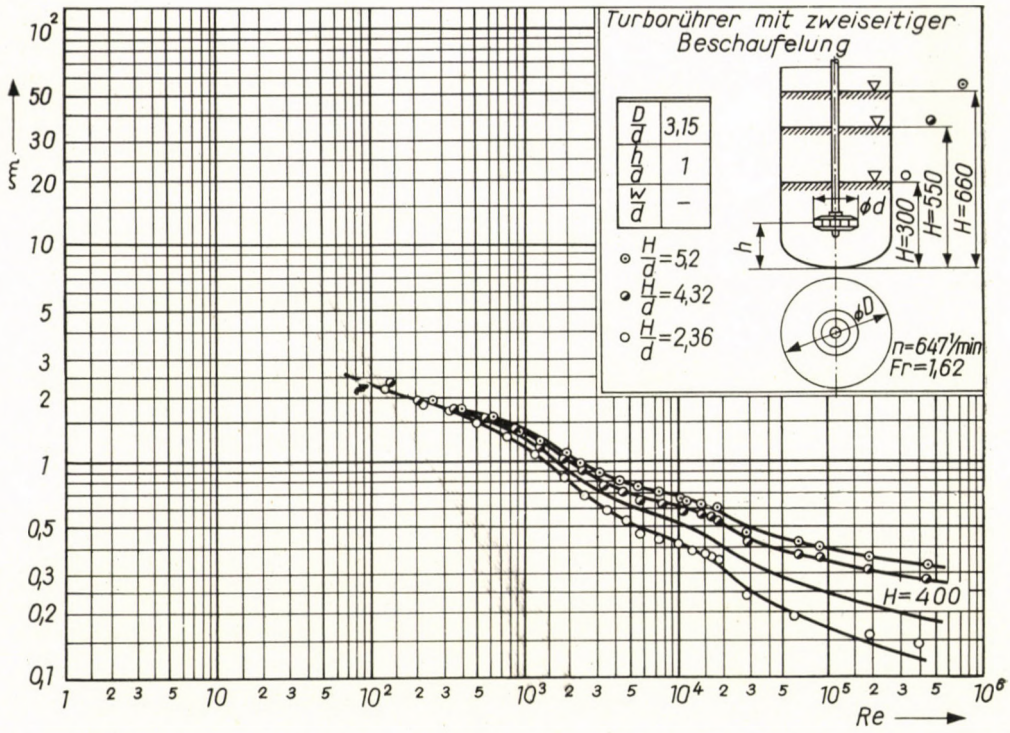


Abb. 6

Zahlentafel IIIa

$H = 300 \text{ mm}$		$h = 127 \text{ mm}$		$d = 127 \text{ mm}$		$n = 674 \text{ U/min}$	
Re	μ [cP]	ρ [$\frac{\text{kgs}^2}{\text{m}^4}$]	N [$\frac{\text{mkg}}{\text{s}}$]	ξ	Messungsnummer		
118,7	1420	95,1	8,96	2,01	90		
309,0	540	94,08	7,40	1,68	92		
720,0	230	93,37	5,59	1,28	94		
1 842,0	89	92,45	3,63	0,84	96		
3 386,0	48	91,64	2,53	0,59	98		
5 658,0	28,5	90,92	1,95	0,45	100		
9 815,0	16,3	90,21	1,74	0,41	102		
14 830,0	10,7	89,5	1,59	0,38	104		
17 730,0	8,9	88,99	1,45	0,35	106		
57 610,0	3,6	116,2	1,04	0,18	168		
183 700,0	0,98	101,7	0,73	0,15	180		

Zahlentafel III/b

$H = 550 \text{ mm}$		$h = 127 \text{ mm}$		$d = 127 \text{ mm}$		$n = 674 \text{ U/min}$	
Re	μ [cP]	$\frac{\rho}{\left[\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4} \right]}$	$\frac{N}{\left[\frac{\text{m kg}}{\text{s}} \right]}$	ξ	Messungs- nummer		
132,7	1270	94,90	10,67	2,39	125		
344,6	485	93,98	7,83	1,76	127		
853,3	194	93,17	6,16	1,40	129		
1 855,0	89	92,45	4,51	1,02	131		
3 259,0	50	91,64	3,49	0,78	133		
5 600,0	29	90,92	2,87	0,66	135		
10 750,0	15	90,11	2,51	0,58	137		
15 951,1	10	89,29	2,34	0,55	139		
28 900,0	7,2	116,8	2,38	0,42	158		
83 180,0	2,48	115,5	2,01	0,36	170		
421 600,0	0,42	99,84	1,33	0,28	182		

Zahlentafel III/c

$H = 660 \text{ mm}$		$h = 127 \text{ mm}$		$d = 127 \text{ mm}$		$n = 674 \text{ U/min}$	
Re	μ [cP]	$\frac{\rho}{\left[\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4} \right]}$	$\frac{N}{\left[\frac{\text{m kg}}{\text{s}} \right]}$	ξ	Messungs- nummer		
284,4	900	94,39	8,64	1,94	142		
616,7	270	93,47	7,10	1,60	144		
1 330,0	124	92,76	5,42	1,24	146		
2 336,0	70	92,04	4,27	0,98	148		
4 172,0	39	91,33	3,50	0,80	150		
7 188,0	22,5	90,62	3,06	0,70	152		
11 460,0	14	89,90	2,79	0,65	154		
17 980,0	8,8	88,99	2,53	0,60	156		
60 700,0	3,4	116	2,37	0,43	163		
183 700,0	0,98	101,7	1,69	0,35	175		

(N_1 bedeutet den dem Größenverhältnis β_1 , N_0 den dem Größenverhältnis β_0 zugeordneten Leistungsbedarf.) Da hinsichtlich ihres Leistungsbedarfes in gleichen Medien arbeitende Rührer mit gleichem Durchmesser und gleicher Drehzahl verglichen werden, ist das Produkt aus ($d^5 \cdot n^3 \cdot \rho$) in beiden Fällen

gleich, und es wird

$$\psi = \frac{\xi_1}{\xi_0} .$$

Die Werte von ξ_1 und ξ_0 können aus den Funktionskurven in Abb. 6 abgelesen werden.

Die Funktionskurven

$$\psi = f(\beta/\beta_0, Re)$$

wurden — im halblogarithmischen Koordinatensystem — in Abb. 7 graphisch

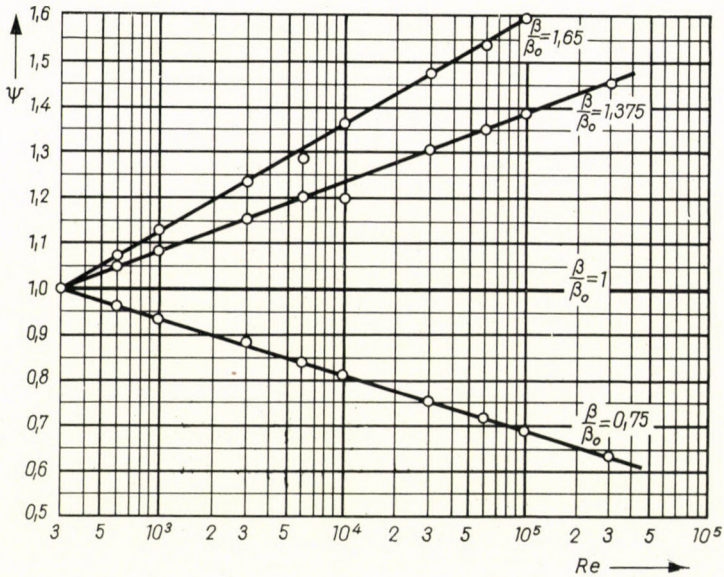


Abb. 7

dargestellt. Die ψ -Werte liegen praktisch auf Geraden, die sich in einem bestimmten Punkt schneiden.

Die mathematische Formel der Funktionen lautet

$$\psi = A + B \cdot \log Re ; \tag{20}$$

für $Re = 300$ gilt

$$\psi = 1 \text{ also } A = 1 - B \cdot 2,477 ,$$

woraus

$$\psi = 1 + B(\log Re - 2,477) \tag{21}$$

wird.

Der Wert des Faktors B wurde fallweise ermittelt und die Funktion $B = f(\beta/\beta_0)$ in das halblogarithmische Koordinatensystem eingezeichnet (siehe Abb. 8). Die aufgetragenen Punkte liegen auf einer Geraden. Die Gerade

$\beta/\beta_0 = 1$ geht durch den Punkt $B = 0$, somit lautet die Gleichung dieser Funktion

$$B = A_1 \cdot \log \frac{\beta}{\beta_0}, \quad (22)$$

wobei

$$A_1 = 1,08.$$

Die Gleichung (22) in den Ausdruck (21) eingesetzt ergibt:

$$\psi = 1 + 1,08 \cdot \log \frac{\beta}{\beta_0} \cdot (\log Re - 2,477). \quad (23)$$

Nach unseren Versuchen ist die Gleichung (23) nur dann gültig, wenn bloß der Wert von β geändert, sonst der aller geometrischen Größenverhältnisse unverändert gelassen werden.

Der Faktor ψ ist ein Quotient, der aus den — dem willkürlich gewählten

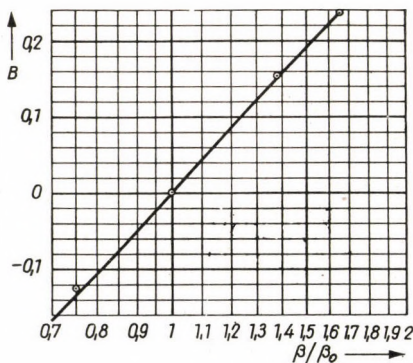


Abb. 8

Wert $\beta \neq \beta_0$ und dem Wert $\beta_0 = 3,15$ zugehörigen — Widerstandskoeffizienten gebildet wird.

Um die Gleichung (23) aufstellen zu können, genügt es, zwei Konstanten durch Messungen zu ermitteln, doch kann ohne weitere Versuche nicht behauptet werden, daß diese verhältnismäßig einfache mathematische Form auch für andere Rührer gültig ist.

Die Konstanten der Gleichung (23) wurden für den Wert $Fr = 1,62$ ermittelt. Mutmaßlich beeinflusst die Fr -Zahl weder die Form dieser Gleichung noch deren Zahlenkonstanten in erheblichem Maße.

SCHRIFTTUM

1. KASZATKIN, A. G.: *Alapműveletek, gépek és készülékek a vegyiparban.* (»Chemische Verfahrenstechnik«), (Übers. a. d. Russ.) Budapest, 1953.
2. BÜCHE, W.: »Leistungsbedarf von Rührwerken.« *V. D. I. Ztschr.* **81**, 1065 (1937).

3. RUSHTON, J. H.—COSTICH, E. W.—EVERETT, H. J.: »Power Characteristics of Mixing Impellers« Part I.—II. *Chem. Engng. Progr.* **46**, 395, 467 (1950).
4. BROWN, G. G.: *Unit Operations*. New York, 1950.
5. COULSON, J. M.—RICHARDSON, J. F.: *Chemical Engineering*. Vol. II. London, 1956.
6. VIMMER, L.: »Szabványos keverőelemek ellenállástényezőinek vizsgálata, kismintában.« (Modellversuch zur Bestimmung der Widerstandsbeiwerte von genormten Turbo- und Propeller-Rührern.) *M. Kém. Lapja* **15**, 463 (1960).
7. WHITE, B. L.—SUMERFORD, S. D.: »New Data on Design of Simple Paddle Agitators.« *Chem. and Met. Engng.* **43**, 370 (1936).
8. LIENERTH, A.: »Keverőelemek teljesítményszükségletének mérése kismintában és üzemi méretű készületekn.« (Die Messung des Leistungsbedarfs von Rührern an Modell- und Großapparaten.) *M. Kém. Lapja* **12**, 308 (1957).

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird die Berechnung des Leistungsbedarfs von Rührern, oder genauer die Wirkung der geometrischen Größenverhältnisse auf ihren Leistungsbedarf behandelt.

Laut der Meßergebnisse kann die für Schaufelrührer angeführte Berechnungsmethode bei niedrigen *Re*-Zahlen akzeptiert werden, wogegen sich bei höheren *Re*-Zahlen schon eine größere Ungenauigkeit bemerkbar macht.

Auf Grund der mit Turborührern durchgeführten Messungen läßt sich feststellen, daß sich die in der Fachliteratur mitgeteilten einfachen, aus Produkten von Potenzen bestehenden Zusammenhänge [Gleichungen (6) und (11)] zur Charakterisierung der Wirkung der Größenverhältnisse nicht in jedem Falle eignen. Mit dem Turborührer wurde die Wirkung der Verhältniszahl H/d (ein geometrisches Simplex) untersucht. Die Wirkung der Verhältniszahl H/d kann durch die in dieser Arbeit mitgeteilte Beziehung definiert werden.

Beide Untersuchungsfälle haben gezeigt, daß die Wirkung der Größenverhältnisse weitgehend von der *Re*-Zahl abhängt und mit steigender *Re*-Zahl wächst. Die in der Fachliteratur mitgeteilten Zusammenhänge berücksichtigen zwar die *Re*-Zahl, doch wird die Abhängigkeit von dieser in den erwähnten Verfahren ziemlich ungenau beschrieben (Abb. 4).

Die Verschiedenheit der Rührerformen und der Umstand, daß der Unterschied sowohl in der Rührerform als auch in der verursachten Strömung sehr groß sein kann, erschwert die Aufstellung eines allgemein gültigen Zusammenhanges in erheblichem Maße. Unserer Meinung nach läßt sich ein mathematischer Zusammenhang für die Wirkung der Größenverhältnisse — in verlässlicher Weise — nur fallweise, d. h. jeweils nur für einen Rührertyp ermitteln.

ANALYSIS OF THE POWER CONSUMPTION OF AGITATORS
DEPENDING ON THEIR GEOMETRIC DIMENSION-RATIOS

A. LIENERTH

SUMMARY

The computation of the power consumption of agitators, more exactly, the effect of geometric dimension-ratios was examined in this present paper.

On the basis of measurements it was stated that the computation method applied for paddle agitators might be acceptable if Reynolds numbers are small, while in the case of higher Reynolds numbers a greater inaccuracy could be noticed.

Taking our measurements carried out with turbine agitators, it was found that the simple correlations taken from referring literature, which merely consist of products of power numbers [Equations (6) and (11)] are not adequate when the effect of dimension-ratios must be determined. The effect of the ratio H/d , a geometric simplex has been established by the correlation demonstrated in this paper.

In both examined cases it was shown, that the effect of dimension-ratios largely depends on the Reynolds number and increases when the Reynolds number increases. Although by all correlations cited in literature the Reynolds number was taken into consideration, the dependence of the Reynolds number is not exactly described in those procedures (see Fig. 4).

It is rather difficult to give any generally valid correlation because of the variety of agitator-shapes, and further because the difference in shape as well as in the flowpattern caused by mixing can be great enough. Our opinion is, that a reliable mathematical correlation for the effect of dimension-ratios can only be attained if determined for each agitator type separately.

EXAMEN DE LA CONSOMMATION D'ÉNERGIE DES AGITATEURS EN FONCTION DES RAPPORTS DIMENSIONNELS GÉOMÉTRIQUES

A. LIENERTH

RÉSUMÉ

L'article étudie le calcul de la consommation d'énergie des agitateurs, ou plus exactement l'effet de leurs rapports dimensionnels géométriques.

Les mesures effectuées permettent de constater, que le procédé de calcul généralement donné pour les agitateurs à bras (paddle-mixer) est admissible pour les nombres Re de faible valeur, tandis que pour les nombres Re plus grands, l'inexactitude est aussi plus grande, et continue à croître progressivement avec l'augmentation du nombre Re .

D'après les résultats de nos mesures faites sur des turbo-agitateurs, on peut établir que les relations simples formées par le produit des puissances [équations (6) et (11)] ne conviennent pas toujours pour la description de l'effet des rapports dimensionnels. Avec le turbo-agitateur, nous avons examiné l'effet du rapport H/d (rapport dimensionnel géométrique). L'effet du rapport H/d peut être calculé par la relation donnée dans l'étude.

Dans les deux cas examinés, nous avons trouvé que l'effet du rapport H/d dépend du nombre Re , et augmente fortement en raison de l'accroissement de ce dernier. Les relations données par la littérature tiennent compte du nombre Re , mais les procédés qui y sont présentés décrivent d'une façon inexacte la dépendance du rapport H/d de ce nombre (figure 4).

L'établissement d'une relation de validité générale est rendu particulièrement difficile du fait que les agitateurs sont de formes variées, de sorte qu'il peut y avoir des différences considérables dans l'écoulement produit.

D'après l'auteur, la relation mathématique décrivant l'effet examiné ne saurait être établie d'une façon sûre que pour des cas concrets, c'est-à-dire pour un type d'agitateur donné.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТРЕБЛЯЕМОЙ МОЩНОСТИ МЕШАЛОК В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СООТНОШЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ

А. ЛИНЕРТ

РЕЗЮМЕ

В работе дается расчет потребляемой мощности мешалок или точнее влияния соотношений геометрических размеров.

На основании измерений можно утверждать, что сообщенный метод расчета рычажных мешалок приемлим при малых значениях Re , а при возрастающих значениях Re неточность больше и возрастает соответственно с увеличением числа Re .

Основываясь на измерениях, проведенных на турбомешалках, можно сделать вывод, что сообщенные в литературе зависимости, состоящие из просто перемножаемых степеней [уравнения (6) и (11)], не всегда пригодны для описания влияния соотношения размеров. С турбомешалкой было исследовано геометрическое симплекс/влияние соотношения уровня жидкости с числом пропорциональности H/d . Влияние соотношения H/d может быть описано с помощью зависимости, сообщенной в работе.

В двух исследованных случаях сделан вывод, что влияние соотношений размеров в значительной мере зависит от числа Re и сильно возрастает с увеличением числа Re . Приведенные в литературе зависимости учитывают число Re , но сообщенные методы неточно описывают зависимость от числа Re (рис. 4).

Разработка зависимости, справедливой для всех случаев, необычайно затруднена тем обстоятельством, что мешалки имеют различную форму и что возможна большая разница между созданным движением потока.

По мнению автора математическая зависимость, описывающая влияние, наверняка может быть определена лишь от случая к случаю, т. е. относительно того или иного типа мешалок.

INFLUENCE OF CENTRIFUGAL FIELDS ON THE HEAT-STATE OF GASES. EXPLANATION OF THE RANQUE PHENOMENON

I. ERDÉLYI

CAND. OF ENG. SC.

THERMOENERGETICAL DESIGN BUREAU, BUDAPEST

[Manuscript received September 5, 1960]

Examination of the influence of centrifugal fields on the heat-state of gases in their micro-states

Among the various fields gravitation influences the heat-states of gases (and vapours) only in meteorological dimensions and relations. With the dimensions occurring in thermodynamical practice, gravitation may generally be neglected. The influence of fields becomes, however, interesting also for technical practice if they amount to the multiple of gravitation. A manifold of gravitational acceleration can be easily attained, for instance, by rotation. As regards heat-state, we are primarily interested in the temperature — or rather the temperature-gradient — arising in fields. Let us, therefore, examine how the temperature-gradient of a system changes as a function of field-acceleration.

Notations	Units of measure in the MKSA system
a acceleration	m/s^2
v velocity	m/s
s distance	m
t time	s
ω angular velocity	$1/s$
T absolute temperature	$^{\circ}K$
R gas constant	$J/kg^{\circ}K$

The starting point of our computations for the determination of the temperature-gradient in a centrifugal field will be the simplified mechanical theory of heat. According to this, heat is a mixed sort of energy composed of the heat-motions of molecules (or rather of the kinetic energies of these motions.) Now we are going to examine only the translational heat-motion of the molecules and the influences of centrifugal fields on this motion. Results so obtained will then be applied by means of proportioning to the temperature of the complete system.

Let us consider a molecule in a centrifugal field. It performs its translational heat-motion in the direction of the perpendicular of the field, *i. e.* — geometrically — in a radial direction. If there were no field present the velocity of the heat-motion of the molecule would remain constant. For a

given temperature T and in accordance with the mechanical theory of heat, this constant velocity would be [1]

$$v = \sqrt{3RT}. \quad (1)$$

The examined molecule is, however, (like all other molecules) exposed to the acceleration a of the field which affects its velocity. Let us now examine the influence of the acceleration a of the field on the motion of the molecule. Its velocity increases in the direction of the acceleration and decreases in the opposite direction. Provided no other influences are at play, the effect of the field on the molecule will therefore be an increase of its "temperature" as measured by its translational velocity if the molecule advances in the direction of acceleration and a decrease if it moves in the opposite direction.

Computing this change in temperature, let us start from the equation of molecular velocity, expressed in terms of acceleration. According to this, for a motion in the direction of the acceleration

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt$$

whence

$$v - v_0 = at$$

or

$$v = v_0 + at. \quad (2)$$

If the molecule advances in the direction opposite to that of acceleration, the equation will assume the following form:

$$v = v_0 - at.$$

Another starting equation will be that of the distance. According to it,

$$ds = v \cdot dt.$$

Integrating and substituting the former equation, we obtain

$$\int_0^s ds = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

i. e.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2,$$

hence

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2as}}{a}. \quad (3)$$

Comparing equations 2 and 3 we obtain

$$v^2 - v_0^2 = 2as.$$

Substituting the aforementioned expression (1) of velocity $v = \sqrt{3RT}$ we obtain

$$3RT - 3RT_0 = 2as$$

hence

$$s = \frac{3}{2a} \cdot R \cdot (T - T_0).$$

Applying this equation to $T - T_0 = 1^\circ$, we obtain

$$s = \frac{3R}{2a}.$$

This is the normal distance which, in a field with acceleration a , is necessary to produce a change in the velocity of the molecule equal to that computed on the basis of formula (1) for a temperature difference of 1° . The reciprocal of this expression is the translational temperature-gradient:

$$\text{grad } T_{tr} = \frac{2a}{3R}. \quad (4)$$

Let us see now a numerical example. Centrifugal field is to be created by admitting air tangentially through a nozzle with sonic speed into a tube,

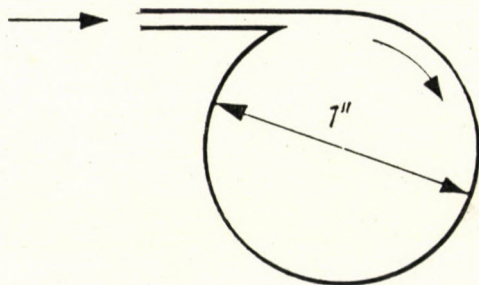


Fig. 1

as shown in Fig. 1. Air, thus admitted, will perform rotating motion so that its molecules will be exposed to centrifugal acceleration.

Initial temperature of the inflowing air before expansion is assumed to be

$$T = 293,16 \text{ }^\circ\text{K},$$

its other characteristics being:

$$R = 287 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$$

and

$$\kappa = 1,4.$$

With the above data the sonic velocity (according to our assumption the velocity of the inflow) will be [2]

$$v = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa + 1} RT}$$

i. e.

$$v = 312 \text{ m/s}$$

and so, for the centrifugal acceleration acting upon the air molecules in the tube (which — according to Fig. 1 — has a radius of $r = 12,7 \text{ mm}$) we obtain

$$a = \frac{v^2}{r} = 7,68 \cdot 10^6 \text{ m/s}^2 \quad (5)$$

i. e. a value almost a million times higher than the gravitational acceleration g .

If, for the purpose of rough approximation, this acceleration is regarded as constant along a shorter section of the radius and is substituted into formula (4), the translational temperature gradient amounts to

$$\text{grad } T_{tr} = \frac{2}{3} \frac{a}{R} = \frac{2}{3} \frac{7,68 \cdot 10^6}{287} = 17850 \text{ }^\circ/\text{m} = 17,850 \text{ }^\circ/\text{mm}. \quad (6)$$

The result obtained represents the change in air-temperature per mm of radius in a rotating space if only the kinetic energy inherent in the translational motion of molecules is taken into account. We are, however, dealing with air, *i. e.* a diatomic gas and a temperature of such magnitude that the molecules perform also a rotating motion. The above temperature difference must therefore be reduced according to the ratio between the translational degrees of freedom and the total number of degrees of freedom.* This means a reduction at the rate of $3/7$, so that the temperature-gradient will be

$$\text{grad } T = \frac{3}{7} \text{grad } T_{tr} = \frac{3}{7} 17,85 = 7,6 \text{ }^\circ/\text{mm} [3].$$

The temperature of air rotating in the tube will, therefore, rise in our example by $7,6^\circ$ per mm of the radius from the centre towards the wall.

It can be seen from the example that, in a centrifugal field, the effect discussed above can produce temperature differences amounting to the order of 10° per mm of the radius. Mounting a diverging part (a diffuser) on the inlet orifice and thereby increasing the velocity of inflow above sonic velocity, the temperature gradient can be raised still further.

Such phenomenon has already been observed in the so-called Ranque or Hilsch-vortex tube. [4], [5].

* The number of translational degrees of freedom is 3, that of the degrees of freedom due to rotation is 2. To these 5 we have to add the energy corresponding to the member $p dv$ of enthalpy too. This means the addition of 2 degrees of freedom since we are not dealing with a closed medium but one streaming at a steady flow. Together with the 2 virtual degrees of freedom corresponding to the member $p dv$, the total number of the degrees of freedom will thus amount to 7.

Description of the Ranque phenomenon

This phenomenon, described by the French engineer RANQUE (1933) consists of the following:

If, through a nozzle, gas is admitted tangentially into a tube and if a throttle-diaphragm is mounted in the tube near the nozzle as shown in Fig. 2, that part of the gas which passes through the orifice of the diaphragm will be considerably cooler, while that carried off at the opposite end of the tube will be considerably warmer than the introduced gas. The sole aim of the throttle-diaphragm is to separate that part of the rotating gas which is streaming along the geometrical axis of the tube, from that part which is streaming at the periphery. The phenomenon described by RANQUE can therefore be formulated as follows: gas rotating in a Ranque tube is cooler near its geometrical axis and warmer along its wall than at the point of admission [4], [5].

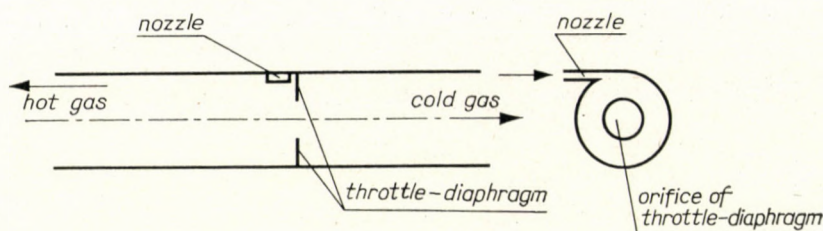


Fig. 2

Apart from RANQUE, this phenomenon has been investigated and described by many other authors (*e. g.* HILSCH) and is therefore known under several names. The phenomenon aroused great interest at that time: because of the simplicity of the equipment, several attempts were made to use it for cooling purposes. Such experiments were also carried out at the Technical University of Budapest. What is of interest for our present purposes is the fact that, according to the results, temperature differences of 30—90° C were produced in tubes of 1/4—1" diameter in which the introduced air was divided into two equal parts. Such differences are in good agreement with the temperature-gradient of 7,6 °/mm as obtained with rough approximation in our preceding example. True, the expansion of gas contributes to cooling, while friction along the tube wall to warming, but these phenomena do not explain the observed wide temperature differences. On the other hand, the aforesaid effect, arising in a centrifugal field, can — in itself — produce the wide differences in question and may, therefore, explain the RANQUE phenomenon.

The above considerations justify a detailed investigation with the molecular mechanical method into the phenomenon which occurs in the Ranque tube. Let me now discuss in detail the tangential inflow to the Ranque tube, its velocity and acceleration in the tube, and other factors influencing grad T .

Investigation of velocity and acceleration in the Ranque tube

According to formula (4), the temperature-gradient is directly proportional to the centrifugal acceleration a

$$\text{grad } T_{tr} = \frac{2}{3} \frac{a}{R},$$

while centrifugal acceleration is, according to formula (5), proportional to the square of inflow velocity v^2

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

If, therefore, the temperature gradient is to be increased, gas has to stream into the tube at the highest possible velocity. In our example we com-

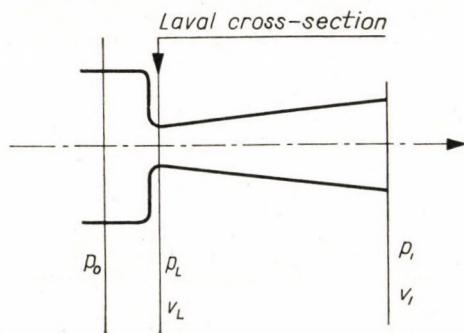


Fig. 3

puted the temperature gradient with a rough approximation and neglected certain factors. For the velocity of tangentially inflowing gas we obtained sonic velocity referred to the inflow surface. However, inflow velocities above sonic speed can be attained by providing a diffuser to the inlet orifice. Let us now examine this problem.

If we fix a diffuser to the inflow nozzle, the velocity at the end of the diffuser will be obtained from the following formula [6]:

$$v_1 = 2 \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa - 1} RT_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]} \quad (7)$$

where p_0 means the initial pressure of gas before the nozzle and p_1 is the pressure in the space behind the diffuser (Fig. 3).

As can be seen, the velocity v_1 after the diffuser depends, among others, on the pressure ratio p_1/p_0 , while it is independent of the absolute values of the pressures. The temperature gradient depends, as has been noted, on the velocity of inflow, while the latter depends on the pressure ratio p_1/p_0 as appa-

rent from formula (7). If, therefore, the temperature gradient is to be increased, it is expedient to reduce the pressure ratio p_1/p_0 as much as possible.

Reduction of the pressure ratio p_1/p_0 involves, however, increase in the outflow cross-section of the diffuser. This may cause certain constructional difficulties, because of the small dimensions employed in the experiments, and thus constitutes an indirect limit for the reduction of the pressure ratio p_1/p_0 .

Let us now examine conditions of acceleration in the Ranque tube. Investigators, having so far failed to ascertain the changes of velocity along the radius, had to resort to assumptions. In my investigations I start from

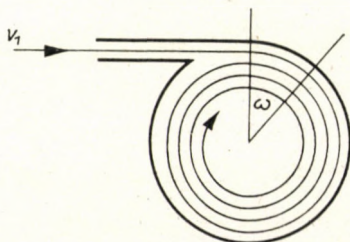


Fig. 4

the assumption that gas, streaming in tangentially with a velocity of v_1 , retains its original angular velocity while spiralling towards the geometrical axis of the tube. In general, investigators worked with this assumption (Fig. 4). I shall return to this question later.

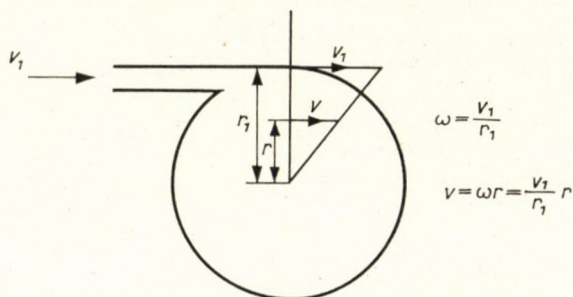


Fig. 5

If v_1 means the inflow velocity of gas and r_1 the radius of the tube, the angular velocity of the gas rotating in the tube will be

$$\omega = \frac{v_1}{r_1}$$

which, according to the aforesaid, is constant all along the spiral line (Fig. 5). At any point of the radius, then

$$v = \omega r$$

Substituting the expression of ω into this formula, we obtain

$$v = \omega r = \frac{v_1}{r_1} r.$$

The general expression of centrifugal acceleration is, thus,

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v_1^2}{r_1^2} r.$$

Substituting this into formula (4) the temperature gradient can be derived, and by integrating it we obtain the temperature-difference along the radius:

$$\begin{aligned} \Delta T_{tr} &= \int_0^{r_1} \frac{2}{3R} \frac{v_1^2}{r_1^2} r dr = \\ &= \frac{2}{3R} \frac{v_1^2}{r_1^2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{r_1} \\ \Delta T_{tr} &= \frac{v_1^2}{3R}. \end{aligned} \quad (8)$$

As indicated by the index "tr", the above temperature difference applies only to the so-called translational temperature of the molecules. If we want to find the gradient in the temperature of the complete system, in our case in the thermodynamic temperature after total equalization, we have according to the law of the equipartition of energy, to multiply the above values by

$$\frac{3}{f+2} \quad (9)$$

where the figure 3 is the number of the translational degrees of freedom, f means the number of all degrees of freedom, and the figure 2 represents the two virtual degrees of freedom corresponding to the member $p dv$, since we are dealing with a gas streaming at a steady flow. The above fraction reflects the fact that the enthalpy difference arising at 3 translational degrees of freedom is divided among $f+2$ degrees of freedom after equalization.

Temperature difference induced by centrifugal acceleration will therefore be

$$\Delta T = \frac{3}{f+2} \Delta T_{tr} = \frac{3}{f+2} \frac{v_1^2}{3R}. \quad (10)$$

Substituting formula (7) for v_1 into this equation, we obtain

$$\Delta T = \frac{3}{f+2} \frac{1}{3R} \frac{2\kappa}{\kappa-1} RT_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

$$\Delta T = \frac{2}{f+2} \frac{\kappa}{\kappa-1} T_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right].$$

Substituting $f = \frac{2}{\kappa-1}$ into this formula and regrouping it we obtain

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{2}{\frac{2}{\kappa-1} + 2} \frac{\kappa}{\kappa-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

$$\frac{\Delta T}{T_0} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \quad (11)$$

The temperature difference ΔT attainable in the Ranque tube is, as can be seen, directly proportional to T_0 , *i. e.* the absolute temperature of gas before the nozzle. In the above formula T_0 is transferred to the denominator so that the right side of the equation yields the ratio $\Delta T/T_0$ which, interestingly, depends only on the pressure ratio p_1/p_0 and on the factor κ .

Computing ratio $\Delta T/T_0$ for various values of κ and p_1/p_0 , we obtain the following table and diagram respectively:

Table showing ratio $\frac{\Delta T}{T_0}$ for various values of p_1/p_0 and κ

p_1/p_0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1,05	0,1039	0,0739	0,0558	0,0425	0,0324
1,4	0,482	0,3686	0,291	0,2304	0,1897
1,66	0,5997	0,4727	0,3804	0,3053	0,2409

The value 1,05 for κ refers to butane, the molecules of which are composed of 14 atoms.

From this diagram we can draw the following conclusions:

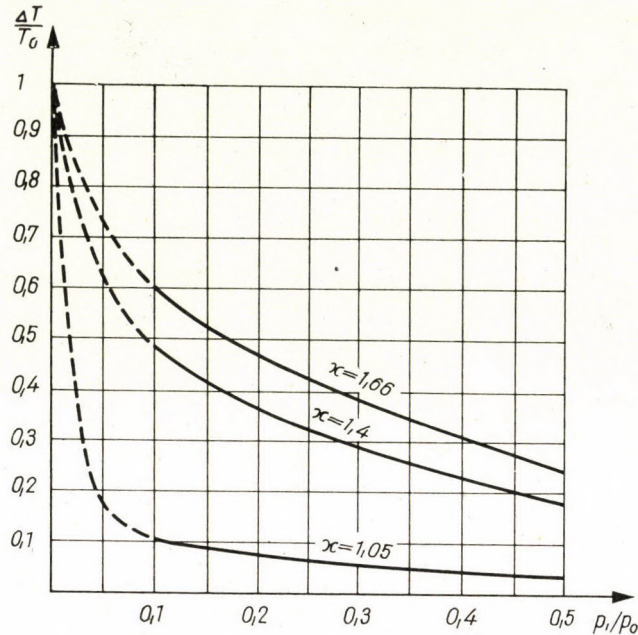


Fig. 6

Results of investigation

The dimensions of the RANQUE tube do not appear in formula (11), so that the temperature difference arising in the tube is independent of the diameter.

The temperature difference ΔT is proportional to T_0 , the absolute temperature of gas at the inflow. This means that the temperature difference will be greater in the case of gases with a higher, and smaller in that of gases with a lower inflow temperature. This makes it difficult to produce very low temperatures in a Ranque tube.

The temperature difference is independent of the absolute pressures of gas and depends only on the ratio of pressures before and after the tube. The lowering of this ratio, however desirable, is limited by constructional difficulties arising especially in the case of small tube dimensions.

The temperature difference changes inversely to the atomic number (the number of atoms composing a molecule) of the gas applied. For achieving greater temperature differences it is therefore expedient to use one-atom gases.

In the foregoing we have discussed the temperature-gradient or rather the temperature difference arising in a Ranque tube. This temperature difference occurs between the wall and the geometrical axis of the tube and is proportionally distributed along the radius. Gas, carried off from the Ranque

tube, was divided into two streams and the two streams were measured by the investigators. Consequently, it was not the maximum temperature along the geometrical axis, but the average temperature of the outflowing mixtures that was measured. In fact they measured the average temperature of a mixture of gas-layers with different temperatures both in the gas-stream rotating near the axis and in the one near the periphery. The difference in temperature between the mixtures is obviously less than the actual total temperature difference arising in the tube. In a theoretical case, and if gas is divided into two equal parts, the difference between the average temperature of the gas carried off at the periphery and that carried off at the geometrical axis will

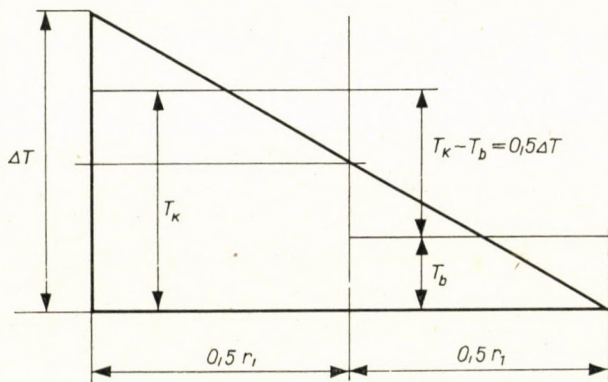


Fig. 7

only be $0,5 \Delta T$, *i. e.* half the temperature difference arising between the tube wall and the tube axis (Fig. 7).

In Fig. 6 the curves showing the values of $\Delta T/T_0$ attainable for varying pressure ratios are extrapolated up to the point of the ratio $p_1/p_0 = 0$. If p_1/p_0 is assumed to be zero, all these curves converge to the point $\Delta T/T_0 = 1$ and are independent of factor κ . The employment of a diffuser with an outflow cross-section enabling p_1/p_0 to become less than $0,1$ is difficult and may become even impossible. It is for this reason that this section of the curves is represented by broken lines.

Although the pressure ratio $p_1/p_0 = 0$ and the corresponding $\Delta T/T_0 = 1$ are of theoretical interest only, it is still worth examining them in detail. The point of interest in this case is that if one succeeded in constructing a diffuser (through which gas is flowing into the Ranque tube) that would enable the realization of pressure ratio $p_1/p_0 = 0$ (which is impossible), the temperature along the geometrical axis of the Ranque tube would be 0°K independent of the parameters of gas.

It should be noted that friction losses have been overlooked in our investigations. It has been assumed that the phase and the number of the degrees

of freedom of the gas remain unchanged. The latter is of special importance since, at lower temperatures, the degrees of freedom of gases "freeze" successively, causing the factor $\frac{3}{f+2}$ to increase in value. This, on the other hand, leads — at lower temperatures — to an increase in the temperature gradient which arises in the centrifugal field. This is of considerable interest because it means that, instead of the restraining and limiting effect frequently produced

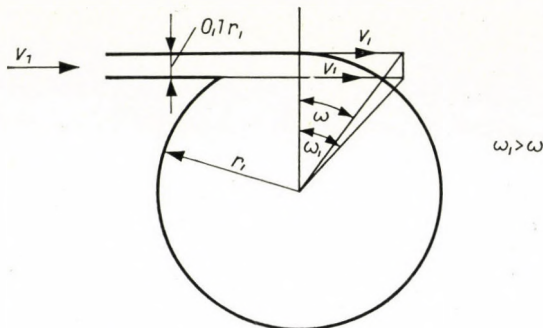


Fig. 8

by nature, we are dealing here with an effect which, through the "freezing" of the degrees of freedom, promotes a further reduction of temperature.

We have enumerated the ways of increasing the temperature difference attainable in the Ranque tube. There exists one more factor which, according to experiences, increases the above-calculated temperature difference still further.

It was assumed in the foregoing that the angular velocity ω , arising at the inflow, remained constant along the radius. It has, however, been observed that the peripheral velocity may be constant along the cross-section of the nozzle (Fig. 8). If this is so, the angular velocity of gas rotating in the tube would first increase so that the centrifugal acceleration would be higher than hitherto assumed.

If, in a Ranque tube with radius r_1 , the radial dimension of the inlet orifice amounts to $0,1 r_1$ — which means that the peripheral velocity r_1 remains constant along one tenth of the radius — the curves of Fig. 6 change into those of Fig. 9, resulting in still higher values for $\Delta T/T_0$. When drawing the curves of Fig. 9 friction losses were again neglected.

As already mentioned, attempts to ascertain the conditions of acceleration in the Ranque tube, *i. e.* to determine changes in velocity along the radius, have to our knowledge remained unseccessful because of the small dimensions of the tubes used by investigators. In the above computations we have, therefore, started from the assumption (generally made by authors) that the gas

streaming in tangentially and spiralling towards the geometrical axis of the tube retains its original angular velocity. Contrary to this assumption, certain theoretical considerations lead to the conclusion that angular velocity increases

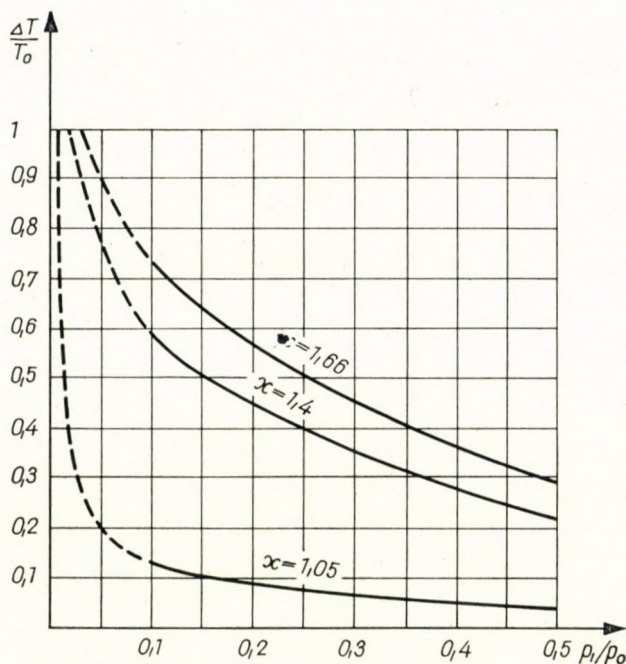


Fig. 9

towards the geometrical axis of the tube which possibly involves a further increase in the temperature gradient produced by the effect described. I shall return to this problem in a later study which will, among others, present a comparison of known experimental results with values computed on the basis of the effect described. As will be seen, experiments and computations produce equal results.

REFERENCES

1. SCHMIDT, E.: Thermodynamik. 6th edition. 1956. Springer-Verlag, Berlin, p. 24.
2. SCHMIDT, E.: Thermodynamik. p. 267.
3. ERDÉLYI, I.: Chapters on the Mechanical Theory of Heat. Acta Technica. Tomus XXVII. Fasciculi 1—2. Budapest, 1959, p. 142.
4. FULTON: Ranque's tube. Journal of the ASRE. May, 1950.
5. WEBSTER, D. S.: An Analysis of the Hilsch Vortex Tube. Journal of the ASRE, Febr. 1950.
6. SCHMIDT, E.: Thermodynamik, p. 264.

SUMMARY

The heat state of gases in a centrifugal field has been examined. As shown by the calculations, an acceleration rate of 10^7 g can be achieved in such a field. Such accelerations lead to temperature gradients above 10^9 /mm. This effect can be used to explain the phenomenon

occurring in Ranque's tube. Ways and means are investigated to achieve higher temperature differences in the Ranque tube. The temperature difference is independent of the measures of the tube and the pressure of the gas at the inlet, but depends on factor κ , on the ratio of gas-pressure before and after the tube, as well as on the absolute temperature of the gas at the inlet.

WIRKUNG DES ZENTRIFUGALKRAFTFELDES
AUF DEN WÄRMEZUSTAND DER GASE.
ERKLÄRUNG DER RANQUE ERSCHEINUNG

I. ERDÉLYI

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser unterscheidet den Wärmezustand der Gase im Zentrifugalkraftfeld. Wie die Berechnungen zeigen, können in solchem Kraftfeld sogar Beschleunigungswerte von 10^7 g erreicht werden. So große Beschleunigungen verursachen Temperaturgradienten von über $10^\circ/\text{mm}$. Dieser Effekt ist geeignet, die bei der Ranqueschen Röhre auftretende Erscheinung zu erklären. Danach wird unter Verwendung des beschriebenen Effektes der Weg und die Möglichkeit gesucht, je größere Temperaturdifferenzen in der Ranqueschen Röhre zu verwirklichen. Es wird festgestellt, daß die erreichbare Temperaturdifferenz von den Abmessungen der Röhre und vom Druck des einströmenden Gases unabhängig ist, dagegen vom Faktor κ , ferner vom Verhältnis des Gasdruckes vor und nach der Röhre und von der absoluten Temperatur des Gases beim Eintritt beeinflusst wird.

INFLUENCE DE L'INTENSITÉ DU CHAMP CENTRIFUGE
SUR L'ÉTAT DE TEMPÉRATURE DES GAZ.
EXPLICATION DU PHÉNOMÈNE DE RANQUE

I. ERDÉLYI

RÉSUMÉ

L'auteur étudie l'état de température des gaz dans un champ de forces centrifuges. Il ressort des calculs, que dans un tel champ, on peut obtenir jusqu'à des valeurs d'accélération de 10^7 g, qui produisent des gradients de température supérieurs à $10^\circ/\text{mm}$. Cet effet peut servir d'explication au phénomène observé dans les tubes Ranque. Par utilisation de l'effet décrit, l'auteur recherche les modes et possibilités de produire la plus grande différence de température dans les tubes Ranque. Il constate que cet écart de température est indépendant des dimensions du tube et de la pression du gaz à l'entrée, mais dépend du facteur, du rapport de la pression de gaz avant l'entrée et après sa sortie du tube, ainsi que de la température absolue du gaz avant son admission.

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ НА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ГАЗОВ.
ОБЪЯСНЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ РАНКИ

И. ЭРДЕЛИ.

РЕЗЮМЕ

Автор исследует теплопроводность газов в поле центробежной силы. Расчеты указывают на возможность получения в таких полях ускорения порядка 10^7 g. При таких ускорениях температурные градиенты превышают величину $10^\circ/\text{мм}$. Этот эффект пригоден для объяснения явления, наблюдаемого в трубе Ранки. Затем с помощью упомянутого здесь эффекта изыскиваются способы и возможности получения наиболее высоких температурных градиентов в трубе Ранки. Установлено, что достижимая разность температур независима от размеров трубы и от давления поступающего газа; зависима в то же время от коэффициента и от соотношения давлений газа до и после трубы, а также от абсолютной температуры газа до его поступления в трубу.

THE LOCATION OF LEVEL DRIFTS ON THE BASIS OF THE LEAST ABSOLUTE SUM PRINCIPLE

B. MILASOVSKY

D. ENG. SC.

TECHNICAL UNIVERSITY IN MISKOLC

[Manuscript received November 11, 1960]

As it is well known, the adits driven in a straight line in subsurface mine working, are called level drifts. Their primary purpose is to provide for mass transportation and for ventilation. Their location is decisively influenced by the requirement that specific production costs must be as low as possible. When siting these drifts, due attention is paid to geological conditions as well as to the physical and mechanical properties of the rocks.

Thus the practical significance of front entries is indeed very great and this is why the problem of their optimum setting has become the object of many analytical investigations in the past few years ([1, 2, 3, 4, 5]).

Since the strike, dip and thickness of the beds and seams are generally variable, the level drift necessarily straight, can by no means pass throughout in a given layer. In the case of a drift to the strike, it is our aim that the axis of the entry be fitting the natural strike of the bed or seam as close as possible, in the required sea level altitude z_0 . However, the natural strike line is far from being known in its full extension consequently, it is to be assumed here that the position of the seam in question is to be defined by means of a number n of boreholes. These holes have to be in the immediate neighbourhood of the adit to be driven. The orthogonal co-ordinates of the intercepts of the investigated seam with the perpendicular boreholes are known. These boreholes $B_1, B_2, \dots B_n$ have, however, hit the seam in question at different altitudes $z_1, z_2, \dots z_n$. Consequently, the co-ordinates of the intercepts have to be first reduced to the level z_0 of the drift to be located. For this reduction there are indicated two ways on page 271. of [4]. As a result of the reduction, we obtain points $P_1, P_2, \dots P_n$ in the horizontal plane of z_0 altitude, the co-ordinates of which are: $x_1y_1, x_2y_2, \dots x_ny_n$. In the following, these points are to be called "defining points". They define an artificial strike, which is to be approximated by the level drift to be sited as close as possible.

The principles of location

There are several principles by which the requirement of fitting can be expressed in mathematical form. In a former study [5] on the same problem, we had investigated the principle: $[q \lambda \lambda] = \text{minimum}$ of adjustment in its application to the level drift as an adjusted straight line. The positions of the points P_i , however, which define the artificial strike and are characterized by the co-ordinates x_i, y_i , are subject to errors of measurements of a slighter extent only. These point positions mostly reflect natural (geological) and technical constraints.

As a result of this, we have discussed $[pdd] = \text{minimum}$ as a second principle. It was by of the latter that we reached the conclusion that the optimum drift axis, in fact, the one for which the momentum of inertia of the plot $P_1 P_2 \dots P_n$ is minimum value. Whatever dispersion the defining plot may have, the optimum direction of the level drift is always unambiguously determined by the $[pdd]$ -minimum principle.

In addition, we have stated that the principle $[prd] = 0$, expressing the equilibrium of the momenta of the planar forces p_1, p_2, \dots, p_n , yields the same value for the directional tangent of the front entry, as did the principle $[pdd] = \text{minimum}$.

It is a well known fact that the condition $[pd] = 0$ is fulfilled by any median of the planar point set. It expresses the equilibrium of the static momenta of planar forces. Thus, in case of a free level drift this principle may supply innumerable solutions. It has been stated, on the other hand, that in case of a "fixed" entry, which must pass through the point F , fixed in advance, the median defined by the principle $[pd] = 0$ and passing through the fixed point F , is not the optimum entry axis.

The minimum principle of the absolute sums of the perpendicular deviations d

After the principles investigated in [5] we intend to discuss in detail the minimum principle of the absolute sums of the perpendicular deviations from the front entry, *i. e.*

$$[|pd|] = \text{minimum} \quad (1)$$

likewise with respect of its application to the location of level drifts.

1. Fixed level drifts

Unlike the order followed in [5], the case of the level drift fixed by the point F is to be discussed first, since this seems to be the more informative case here.

For the azimuthal angle $a = a_1$, of point P_1 of the co-ordinates x'_1 and y'_1 , where

$$\tan a_1 = \frac{y'_1}{x'_1}; \quad \sin a_1 = \frac{y'_1}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}}; \quad \cos a_1 = \frac{x'_1}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}}. \quad (5)$$

The weights p of (3) can be neglected here, as constant factors. Let us multiply and divide the right side of (4) at point P_1 by $s_1 = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}$:

$$\varphi = \left| \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} \left(\frac{y'_1}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}} \cos a - \frac{x'_1}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}} \sin a \right) \right| \quad (6)$$

or in accordance with (5)

$$\varphi = s_1 |\sin a_1 \cos a - \cos a_1 \sin a| \quad (7)$$

$$\varphi = s_1 |\sin(a_1 - a)|. \quad (8)$$

Let us form now the quotient of differences of function (8) at a :

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta a} = \frac{s_1 |\sin(a_1 - a - \Delta a)| - s_1 |\sin(a_1 - a)|}{\Delta a}. \quad (9)$$

The same at $a = a_1$:

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta a_{a=a_1}} = \frac{s_1 |\sin(-\Delta a)|}{\Delta a} = \frac{s_1 |-\sin \Delta a|}{\Delta a} = \frac{s_1 |\sin \Delta a|}{\Delta a} \quad (10)$$

where the negative sign on the right side has been omitted, since this is an absolute value function. Depending on whether Δa is made to approach zero from the positive or negative side, there exist two possibilities.

The first case arises if $\Delta a > 0$: then, on the right side of (10),

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta a}{\Delta a} = +1 \quad (11)$$

thus

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta a} = +s_1 = +\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}. \quad (12)$$

In the second case, if $\Delta a < 0$, then

$$\lim_{\Delta a = 0} \frac{\sin \Delta a}{\Delta a} = -1 \quad (13)$$

thus

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta a} = -s_1 = -\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}. \quad (14)$$

Consequently, we have for the quotient $\frac{s_1 |\sin \Delta a|}{\Delta a}$ on the basis of (12) and (14)

that if we approach 0 from the positive side, the derivative will be $+s_1$, whereas in case 0 is being approached from the negative side the derivative will amount to: $-s_1$. The sign of the quotient depends on the sign of the denominator, since the numerator being an absolute value, is always positive. The two derivatives of (12) and (14) are not identical at the point x_1, y_1 whereby it has been proved that the absolute-value function of (3) will have as many break-points as there are defining points. In the break-points, the function (3) is indifferently differentiated.

Of course, there exists always the possibility of computing the function values $[|pd|]$ belonging to any azimuthal angle and plotting them in an ortho-

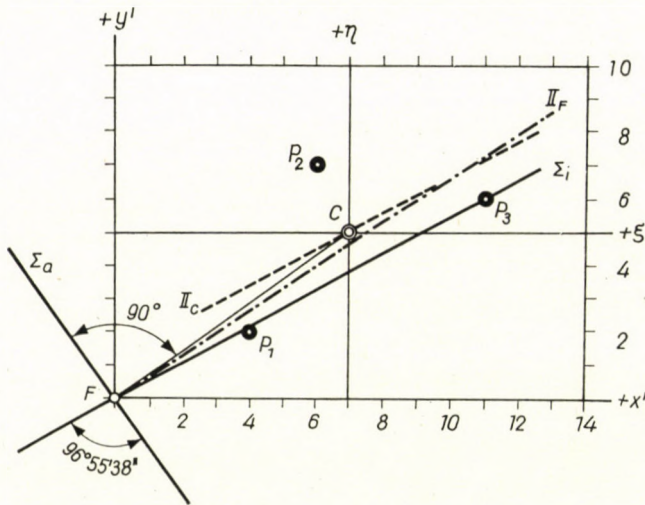


Fig. 2

gonal co-ordinate system against the azimuthal angles. The smallest ordinate of the broken curve, obtained in this way, will yield the azimuthal angle of the optimum axis. This azimuthal angle will be identical with that of one of the defining points. It will be this point, which will have to be passed by the axis of the drift fixed to F . Thus the minimum axis fixed to a point of constraint will pass not only point F , but one of the defining points P as well. In order to determine the optimum entry direction, it is necessary in principle to investigate all the possible straight lines $F - P_1, F - P_2, \dots F - P_n$ in turn. In practice, however, it will not be necessary to examine all the possible alternatives, since the inspection of the figure itself will indicate the straight lines for which the absolute sum $[|pd|]$ is evidently high. These will then be excluded from further investigation.

Let us investigate now numerically — as an example — the simple case of Fig. 2. This figure shows only 3 defining points P_1, P_2 and P_3 beside the

Table I
Particulars for the plot of Fig. 2
 Formation of the sums of product Ξ , H and Φ

Serial Number	From Point F		$x'x'$	$y'y'$	$x'y'$	From Centre C				
	x'	y'				$\xi\xi$	$\eta\eta$	$\xi\eta$		
	+	+	+	+	+					
1	4	2	16	4	8	-3	-3	+ 9	+ 9	+ 9
2	6	7	36	49	42	-1	+2	+ 1	+ 4	- 2
3	11	6	121	36	66	+4	+1	+16	+ 1	+ 4
	21	15	173	89	116	0	0	+26	+14	+11
Centre of gravity	7	5	Ξ_F	H_F	Φ_F			Ξ_c	H_c	Φ_c
C	x_c	y_c								

fixed point F . For the sake of illustration, they present an intensive "dispersion", highly improbable in practice.

In our table I we have indicated the co-ordinates x'_i, y'_i of the three points in the orthogonal system through F and have also shown their co-ordinates ξ_i, η_i in the system whose origin coincides with centre of gravity C and whose axes are parallel to the former one. The sums of the co-ordinates, as well as the sums of products $x'^2, y'^2, x'y', \xi^2, \eta^2$ and $\xi\eta$, serving a comparison to be performed later on, have also been listed. All the three points have been attributed unit weights so that the co-ordinates of their centre of gravity C in the $x'y'$ system are $x_c = +7,00, y_c = +5,00$.

With the increase of the azimuthal angle α our rotating straight line fixed to point F will pass point 1, then point 2, it will then pass the centre of gravity C and finally point 3. At points 1., 2. and 3., the function curve has break-points, but there are no breaks in this case at the centre of gravity C since it is not a defining point, but a fictitious one.

Our Table II includes the directional tangents, azimuthal angles, sinus and cosinus values of the straight line at these characteristic points.

It is by these and by the co-ordinates of Table I that the perpendicular distances of these points can be calculated to the characteristic positions of the straight line.

$$\begin{aligned}
 d_1 &= y'_1 \cos a_1 - x'_1 \sin a_1 \\
 d_2 &= y'_2 \cos a_2 - x'_2 \sin a_2 \\
 d_3 &= y'_3 \cos a_3 - x'_3 \sin a_3.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

This is shown in Table III.

Table II

Particulars for the four investigated straight lines of the fixed entry of Fig. 2

Axis direction	$\tan \alpha$	α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$F \rightarrow 1$	2 : 4	26°33'54''	0,894 43	0,447 21
$F \rightarrow 3$	6 : 11	28°36'38''	0,877 89	0,478 86
$F \rightarrow C$	5 : 7	35°32'16''	0,813 72	0,581 25
$F \rightarrow 2$	7 : 6	49°23'56''	0,650 77	0,759 27

Table III

Formations of the absolute sums of d of the four investigated straight lines

Axis Direction	Serial Number of the Point	$y' \cos \alpha - x' \sin \alpha = d$	$[[d_i]]$
$F \rightarrow 1$	1	1,788 85—1,788 85	0,000 00
	2	6,261 01—2,683 26	+3,577 75
	3	5,366 58—4,919 31	+0,447 27
$F \rightarrow 3$	1	1,755 78—1,915 44	—0,159 66
	2	6,145 23—2,873 16	+3,272 07
	3	5,267 40—5,267 40	0,000 00
$F \rightarrow C$	1	1,627 46—2,324 96	—0,697 50
	2	5,696 11—3,487 44	+2,208 67
	3	4,882 38—6,393 64	—1,511 26
$F \rightarrow 2$	1	1,301 54—3,073 08	—1,735 54
	2	4,555 50—4,555 50	0,000 00
	3	3,904 62—8,351 97	—4,447 35

The d values indicated in Table III have been calculated by (15) with respect of the axes $F \rightarrow 1$, $F \rightarrow 3$, $F \rightarrow C$ and $F \rightarrow 2$ of our example. The absolute sums $[[d]]$ of the distances were listed in the appropriately headed column on the extreme right for each direction. From Table III it is to be seen that this absolute sum (3,431 73)-is minimum for that axis which passes through the origo F and through point 3. In any other direction, this absolute sum is higher. Thus according to the table:

in direction	$[[d]]$	α
$F \rightarrow 1$	4,025 02	26°33'54''
$F \rightarrow C$	4,417 43	35 32 16
$F \rightarrow 2$	6,182 89	49 23 56.

All these numerical values $[|d|]$ as well as the values of the absolute sum function at different angles α , as well as their changes, are illustrated in Fig. 3.

Since the straight line $F \rightarrow C$ passes through the centre of gravity of the defining plot 1, 2, 3, . . . , it is obvious that with respect to this "median"

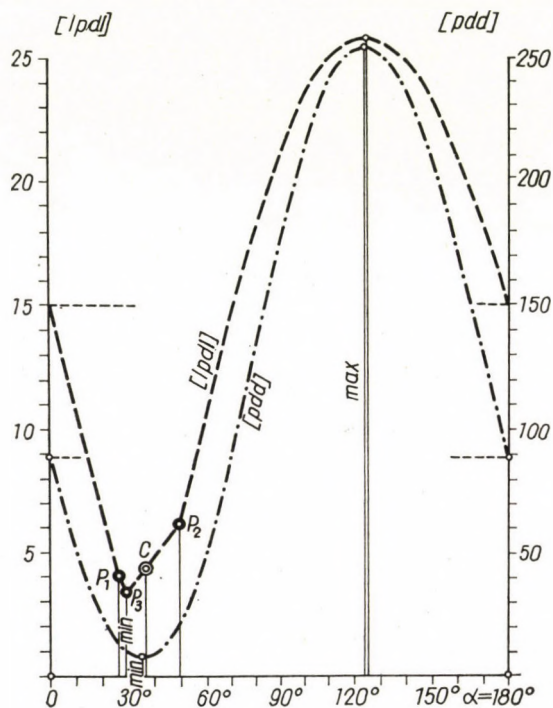


Fig. 3

as well as to any other one — the algebraic sum of the deviations d will theoretically equal zero. Practically, it will equal in dependence on the accuracy of the calculation:

$$-0,69750 + 2,20867 - 1,51126 = -0,00009 \quad (16)$$

i. e. the deviation is quite slight.

Curve $[|d|]$ has breaks at the azimuthal angles of points 1, 2, 3, but at the azimuthal angle of the centre of gravity C , as well as in the sections between these three points, it is free of break. For the azimuthal angles above $49^{\circ}23'56''$ or below $26^{\circ}33'54''$, according to Table II. the distances "d" of all the three points will be of identical sign, thus, apart from the sign, their absolute sum will equal their algebraic sum; consequently, the function can be differentiated everywhere except the broken sector mentioned. As a result the sum $[|pd|]$ can

Table IV

The maximum of the absolute sum $[|d|]$ and its straight line

$\alpha = 125^{\circ}32'16''$		$\cos \alpha = -0,581\ 24$	$\sin \alpha = +0,813\ 73$
Serial Number of the Point	$y' \cos \alpha - x' \sin \alpha = d$		$[d]$
1	-1,162 48—3,254 92	= - 4,417 40	25,806 93
2	-4,068 68—4,882 38	= - 8,951 06	
3	-3,487 44—8,951 03	= -12,438 47	
1, 2, 3	$[y'] \cos \alpha - [x'] \sin \alpha$		$[d]$
	$= 15 \cdot \cos \alpha - 21 \cdot \sin \alpha$		-25,806 93
	$= -8,718 60—17,088 33$		

be calculated with the exception of the break zone in a more direct way too. With this restriction it holds that:

$$[|pd|] \equiv [pd]$$

$$[p_i(|y'_i \cos \alpha - x'_i \sin \alpha|)] \equiv [p_i y'_i] \cos \alpha - [p_i x'_i] \sin \alpha \tag{17}$$

furthermore

$$p_1(y'_1 \cos \alpha - x'_1 \sin \alpha) + p_2(x'_2 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha) + p_3(y'_3 \cos \alpha - x'_3 \sin \alpha) \equiv (p_1 y'_1 + p_2 y'_2 + p_3 y'_3) \cos \alpha - (p_1 x'_1 + p_2 x'_2 + p_3 x'_3) \sin \alpha. \tag{17a}$$

The minimum of the absolute-sum function $[|pd|]$ is in the broken zone; its maximum, however, will be found outside this zone. Thus the azimuthal angle of the maximum can be obtained by differentiating the sum function

$$[pd] = [py'] \cos \alpha - [px'] \sin \alpha \tag{18}$$

with respect to the azimuthal angle α as the independent variable, let the first differential quotient equal zero; i. e.

$$\frac{d[|pd|]}{d\alpha} = - [py'] \sin \alpha - [px'] \cos \alpha = 0 \tag{19}$$

wherefrom the directional tangent of the straight line corresponding to the maximum is

$$-\tan \bar{\alpha} \equiv \tan(180^{\circ} - \bar{\alpha}) = \frac{[px']}{[py']}. \tag{20}$$

In order to check the nature of the extreme let us form the second derivative

of the function:

$$\begin{aligned} \frac{d^2[pd]}{d\alpha^2} &= -[py'] \cos \alpha + [px'] \sin \alpha = \\ &= -[py'] \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} + [px'] \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Substituting the directional tangent (20) obtained from the first differential quotient, *i. e.*

$$\tan \bar{\alpha} = -\frac{[px']}{[py']}.$$

We have:

$$\begin{aligned} \frac{d^2[pd]}{d\alpha^2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{[px']^2}{[py']^2}}} \left\{ -[py'] + [px'] \left(-\frac{[px']}{[py']} \right) \right\} = \\ &= \frac{-[py']}{\sqrt{[px']^2 + [py']^2}} \cdot \frac{[px']^2 + [py']^2}{[py']}. \end{aligned} \quad (22')$$

Finally, the required second differential quotient:

$$\frac{d^2[pd]}{d\alpha^2} = -\sqrt{[px']^2 + [py']^2} < 0. \quad (22)$$

Its value being smaller than 0 proves that the maximum of the sum function is in fact situated at the azimuthal angle yielded by (20).

Using the data of our present example of unit weights, relation (20) will yield the following result:

$$\tan(180^\circ - \bar{\alpha}) = \frac{[x']}{[y']} = \frac{21}{15} = +1,400000 \quad (23)$$

hence

$$(180^\circ - \bar{\alpha}) = 54^\circ 27' 44'' \quad (24)$$

thus the azimuthal angle of the straight line belonging to the maximum is

$$\bar{\alpha} = 125^\circ 32' 16''. \quad (25)$$

In order to calculate the value of the maximum proper, it is expedient to express the sum function of (18):

$$[pd] = [py'] \cos \bar{\alpha} - [px'] \sin \bar{\alpha}$$

in the following form:

$$[pd] = [py'] \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \bar{\alpha}}} - [px'] \frac{\tan \bar{\alpha}}{\sqrt{1 + \tan^2 \bar{\alpha}}}. \quad (26)$$

After factoring out, substituting

$$\tan \bar{\alpha} = -\frac{[px']}{[py']}$$

as the directional tangent of the maximum axis, and reducing the required maximum becomes:

$$[pd]_{\max} = \sqrt{[px']^2 + [py']^2}. \quad (27)$$

In our example of unit weights we have:

$$[x'] = +21; [x']^2 = 441 \quad (28)$$

$$[y'] = +15; [y']^2 = 225.$$

Thus

$$[d]_{\max} = \sqrt{441 + 225} = \sqrt{666} = \pm 25,807 \text{ 00} \quad (29)$$

For the sake of checking let us calculate now the value of the maximum of the sum function $[pd]$ in table IV, according to both alternatives of the relation (17). The azimuthal angle corresponding to the maximum will be with regard to (25):

$$\alpha = 125^\circ 32' 16''.$$

According to the third line of our Table II, the azimuthal angle of the straight line $F \rightarrow C$, which passes through the centre of gravity, is $\alpha = 35^\circ 32' 16''$. In expression (25) we have just seen that the maximum of $[pd]$ appears at $\alpha = 125^\circ 32' 16''$, *i. e.* this is the straight line which passes through point F and is exactly perpendicular to the median $F \rightarrow C$. This is no mere coincidence, but a necessity.

The directional tangent of the median $F \rightarrow C$ passing through the origin is, namely:

$$\tan \alpha_{FC} = \frac{y'_c}{x'_c} = \frac{[y']}{[x']}. \quad (30)$$

On the other hand, the directional tangent of the maximum of the function is according to (20):

$$\tan \bar{\alpha} = - \frac{[x']}{[y']}$$

or, in other words

$$\tan \bar{\alpha} = - \frac{1}{\text{tg } \alpha_{FC}} = \tan (\alpha_{FC} + 90^\circ). \quad (31)$$

This latter equation expresses a well known trigonometric theorem. It is therefore to be considered proven, that the axis of the maximum of the absolute sum function, which passes through the origin, is perpendicular to the median $F - C$.

The minimum of the $[|pd|]$ function, on the other hand, is not necessarily situated at the azimuthal angle of the median passing through the origin — as we have just seen — but at the 0-value of some of the distances d .

Consequently, the axes of the minimum and maximum of the $[|pd|]$ absolute sum function are, as a rule, not perpendicular. In the case of our example, which has chosen so as to show a striking dispersion, the deviation of the difference of the azimuthal angles of the two axes from a right angle amounts — as it is going to be shown — to $29' 23''$, *i. e.* to nearly half a degree. The main axes yielded by the $[pdd]$ principle, on the other hand, — as it has been stated under (20) of [5] — are invariably perpendicular to each other.

In the case of our present example, the minimum of function $[pd]$ occurs at the azimuthal angle of the straight line $F-3$, ($a = 28^\circ 36' 38''$) *i. e.* taking into consideration (25) the axis directions of the two extreme values subtend an angle of

$$125^\circ 32' 16'' - 28^\circ 36' 38'' = 96^\circ 55' 38''. \quad (32)$$

This is shown on Fig. 2. too.

The value of the sum function for any azimuthal angle can be obtained in the differentiable intervals according to

$$[pd] = [py'] \cos a - [px'] \sin a. \quad (33)$$

The calculation of the function values prevailing at the break points has been demonstrated in table III. Accordingly the function curve $[pd]$ of the fictitious example of Fig. 2. is illustrated by Fig. 3. The three break-points of the curve are marked 1, 2 and 3, referring to points 1, 2 and 3 of Fig. 2. The minimum of the function is presented by the ordinate of Point 3: it amounts to 3,431 73, corresponding to an abscissa value of $a = 28^\circ 36' 38''$. The ordinate referring to the centre of gravity with $a = 35^\circ 32' 16''$ is however already higher: 4,417 43. The function attains its maximum at $a = (35^\circ 32' 16'' + 90^\circ) = 125^\circ 32' 16''$, where it amounts to 25,807 00. These accurate data are taken from our tables; the curve of Fig. 3. obviously presents approximate values only.

For the sake of comparison it seems to be indicated to apply also the $[pdd]$ -minimum principle mentioned under (9) of [5] to our numerical example. In other words, we have to find the azimuthal angles of the main inertia axes of the set of altogether three points passing through F and through the centre of gravity C .

The sums of products of the co-ordinates in both of our parallel co-ordinate systems, passing through F on the one hand and through C on the other, will be denoted by the brief symbols already used in [5]. Thus:

$$\begin{aligned} [p x'x'] &= \Xi_F; & [py'y'] &= H_F; & [px'y'] &= \Phi_F \\ [p \xi\xi] &= \Xi_C; & [p \eta\eta] &= H_C; & [p \xi\eta] &= \Phi_C \\ [pdd]_{\min} &= \Theta_2 & [pdd]_{\max} &= \Theta_1. \end{aligned} \quad (34)$$

According to the relation (57) in [5] as well as to the data of Table I., the azimuthal angles a and $(\bar{a} + 90^\circ)$ of the main inertia axes in the origin F , can be obtained in the following way:

$$\tan 2\bar{a} = \frac{2 \Phi_F}{\Xi_F - H_F} = \frac{2 \cdot 116}{173 - 89} = 2,761904. \quad (35)$$

Consequently, the azimuthal angle of the $F-II$ axis of the relative $[pdd]$ minimum is:

$$a = 35^\circ 02' 53'' \quad (36)$$

whereas the $F-I$ axis of the maximum will be obviously perpendicular to this one.

The relative extreme values of the sum of squares $[pdd]$ for these axes will have to be calculated — as it is known — by

$$\Theta_{II, I}^F = \frac{\Sigma_F + H_F}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\Sigma_F - H_F}{2}\right)^2 + \Phi_F^2} \quad (37)$$

Hence

$$\Theta_{II}^F \equiv \Theta_{\min}^F = + 7,631 \quad \text{and} \quad \Theta_I^F \equiv \Theta_{\max}^F = + 254,369. \quad (38)$$

Their sum is:

$$\Theta_{II}^F + \Theta_I^F = \Sigma_F + H_F = + 262,000. \quad (39)$$

The azimuthal angle of the $F - C$ median, on the other hand, is according to Table III.:

$$a_{FC} = 35^\circ 32' 16''. \quad (40)$$

We have already stated in connection with (15) and Table III. that the minimum axis $F - II$ does not have to pass through the centre of gravity C of the defining point set, neither does it have to coincide with the median $F \rightarrow C$. According to (40) and (36) the deviation of the straight lines $F - C$ and $F - II$ is

$$35^\circ 32' 16'' - 35^\circ 02' 53'' = 0^\circ 29' 23''. \quad (41)$$

This comparatively great deviation, amounting to almost half a degree, is the result of the great scatter of the point set assumed in our example.

Let us form now — for the sake of comparison — also the azimuthal angle of the “central” main axis system passing through the centre of gravity.

$$\tan 2\alpha_c = \frac{2\Phi_c}{\Sigma_c - H_c} = \frac{2 \cdot 11}{26 - 14} = 1,833333. \quad (42)$$

Hence

$$\alpha_c = 30^\circ 41' 41''. \quad (43)$$

This axis, having an azimuthal angle α , represent the absolute minimum of the inertia value; the central main axis of the maximum is perpendicular to the former one.

The corresponding extreme values are, by

$$\Theta_{II, I}^c = \frac{\Sigma_c + H_c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\Sigma_c - H_c}{2}\right)^2 + \Phi_c^2} \quad (44)$$

$$\Theta_{II}^c = + 7,470 \quad \text{and} \quad \Theta_I^c = + 32,530. \quad (45)$$

Their sum is:

$$\Theta_{II}^c + \Theta_I^c = \Sigma_c + H_c = 40,000. \quad (46)$$

The difference between the two minima is no more than:

$$\Theta_{II}^F - \Theta_{II}^c = 7,631 - 7,470 = 0,161. \quad (47)$$

The direction deviation of the two corresponding main axes is likewise but half a degree, as it has been stated in (41).

The weighted sum of squares $[pdd]$ for straight lines of any azimuthal angle α , passing through the origin is to be determined according to formula (17) of [5]:

$$\Theta_{FE} \equiv [pdd] = [px'x'] \sin^2 \alpha - [px'y'] \sin 2\alpha + [py'y'] \cos^2 \alpha. \quad (48)$$

Fig. 3. also shows this function. It was constructed for the sake of comparison with the absolute sum function (49):

$$[|pd|] = [p(|y' \cos \alpha - x' \sin \alpha|)]. \quad (49)$$

The square-sum function expressed in (48) can be differentiated everywhere, because it has no breaks. Its maximum ordinate amounts to 254,369, *i. e.* it is ten times the maximum (25,807) of the absolute sum. This is the reason why $[pdd]$ has been plotted to one-tenth scale on the figure.

The diagram shows lucidly that there is an important difference as to the minimum positions of the two types of function. Namely in accordance with our above calculations

$$\bar{\alpha} - \alpha_3 = 35^\circ 02' 53'' - 28^\circ 36' 38'' = +6^\circ 26' 15''. \quad (50)$$

To wit, the minimum straight line of the absolute value function is — as it could be seen — the straight line marked $F - \Sigma_i$, the azimuthal angle of which is $\alpha_3 = 28^\circ 36' 38''$. In our present example this straight line connects the origin with point 3. In Fig. 2. it has been drawn with a full line. Table III. shows that for this straight line, the absolute-sum minimum

$$[|pd|]_{\min} = 3,431\ 73 \text{ (at } \alpha = 28^\circ 36' 38''). \quad (51)$$

For the same straight line, however, the square sum of $[pdd]_{\min}$ will according to (48) be:

$$\Theta_{F_3} = 173 \cdot \overline{0,478\ 86^2} - 2 \cdot 116 \cdot 0,877\ 89 \cdot 0,478\ 86 + 89 \cdot \overline{0,877\ 89^2} = +10,732\ 058 \quad (52)$$

This is, however perceptibly more than

$$\Theta_{II}^F = \Theta_{\min}^F = +7,631$$

obtained under (38) for the main axis of inertia through the origin.

On the inspection of Fig. 2., this minimum axis $F - 3$ of the absolute sum appears rather strange, since it hardly fits our ideas concerning the "most plausible" straight line. The straight line $F - II_F$ of the $[pdd]$ — minimum principle, however, is thoroughly plausible. According to our calculations the *absolute sum* of the distances d for the straight line $[pdd]_{\min}$ is:

$$[|pd|] = 4,349\ 67 \text{ (at } \bar{\alpha} = 35^\circ 02' 53''). \quad (53)$$

This is more than the value 3,431 73, occurring above. The position of the maximum of the two graphs of Fig. 3. differs on the other hand, only

$$125^\circ 32' 16'' - 125^\circ 02' 53'' = 0^\circ 29' 23'' \quad (54)$$

at present. According to our analysis, this divergence is exactly the same as that of the origin-median from the minimum axis through the origin. Both main inertia axes are apparently perpendicular to each other, whereas in (31) we have proved that the axis of the maximum of $[pd]$ is perpendicular to the median $F - C$ rather than to the minimum axis $F - 3$ of the origin (Fig. 2).

2. The case of the free level drift

Here not only the direction of the drift axis, but also one of its points, has to be fixed. Unlike the case of the fixed drift recently discussed, there are two unknown data here — instead of the single one of the former case — to be determined. If the equation of the axis in question is expressed in the form

$$y = mx + b \quad (55)$$

the directional tangent m and the value b will have to be determined as intercepts on the ordinate axis; the determination is to be done by the principle discussed here, namely that the weighted distances of the defining points from the straight line must yield the minimum absolute sum.

If we keep on denoting the orthogonal plane co-ordinates of any defining point P by x and y , then the distance d of this point from the straight line can be expressed in the following form:

$$d = \frac{y - mx - b}{\sqrt{1 + m^2}}. \quad (56)$$

In the case of n such points, the absolute sum of the weighted distances will be:

$$[|pd|] = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} (p_1|y_1 - mx_1 - b| + p_2|y_2 - mx_2 - b| + \dots + p_n|y_n - mx_n - b|). \quad (57)$$

This is the two-variable function, of the variables m and b , the minimum of which has to be determined. Since, however, this is a function of absolute values, this cannot be done by differentiation, as discussed in our analysis from (3)—(14).

Yet, the problem is considerably simplified by the very fact established in connection with the straight line fixed to a point of constraint. It is namely invariably true that the minimum of $[|pd|]$ will appear at that directional tangent, which is defined by two given points. As a rule, we presume n such points. Thus the absolute value of $[|pd|]$ has to be investigated for a number

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \quad (58)$$

of straight lines.

Theoretically, the equation of the straight line passing through the two points should be expressed in the usual form for each of the $\binom{n}{2}$ cases:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1). \quad (59)$$

Since this is derived from (55), the absolute sum of the deviations “ d ” from the straight line in question will have to be formed by using (57). In this way, $\frac{n}{2}$ absolute sums are obtained. The smallest of them will be the one which — in accordance with our principle — characterizes the most favourable axis direction.

In reality, however, there is no need to form all variations, since the arrangement of the defining points P_1, P_2, \dots, P_n will show right at the beginning the straight lines for which the optimum is likely.

Let us have now another look at Fig. 2. Let us now assume point F as the fourth defining point of the “free” drift. These four points will define

$$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6 \quad (60)$$

directional tangents *i. e.* there are altogether six possible alternatives which we shall have to investigate by using relations (59), (55) and (57). Since the

calculations are of elementary character, no details will be indicated. We have restricted ourselves to present the results only:

Direction	$\tan \alpha = m$	$[[d]]$
$F \rightarrow P_1$	+1 : 2	4,02
$F \rightarrow P_2$	+7 : 6	6,18
$F \rightarrow P_3$	+6 : 11	3,43
$P_1 \rightarrow P_2$	+5 : 2	7,98
$P_1 \rightarrow P_3$	+4 : 7	3,60
$P_2 \rightarrow P_3$	-1 : 5	13,33

(61)

Hence, the smallest absolute sum is 3,43. This belongs to straight line $F - P_3$. In conformity with our principle, the optimum axis will pass through points F and P_3 also in the case of the free level drift assumed in our example, just as it did in the case of the entry fixed by F .

It is apparent from the figure that there was no need to investigate the directions $P_1 - P_2$ and $P_2 - P_3$. These directions can by no means be of interest, since the connected deviations d are evidently high.

As we have seen, for the least square-sum principle of [5], the optimum axis of the level drift must pass through the centre of gravity of the given set of points P_i . In the case of the absolute-sum-minimum principle, however, the situation is quite different; in the present case, the medians have lost their minimum property. For the sake of illustration, let us examine now the position of the $F - C$ median which seems to be the most favourable one. Let us start from Fig. 2.

According to the figure, the co-ordinates of the centre of gravity C of the system consisting of P_1 , P_2 , and P_3 of equal weight are $x_c = +7,00$, and $y_c = +5,00$. The co-ordinates of the centre of gravity C_4 of the four-point system, completed by F as the fourth free point, will be:

$$x_{c_4} = +5,25 \text{ and } y_{c_4} = +3,75. \quad (62)$$

As compared to C , the new centre of gravity C_4 has shifted along the median $C \rightarrow F$ in the direction of F . The directional tangent of the straight $F - C$ is according to the figure

$$\tan \alpha_{FC} = + \frac{5}{7}. \quad (63)$$

That of the straight line $F \rightarrow C_4$ is likewise according to (62)

$$\tan \alpha_{F-C_4} = \frac{y_{c_4}}{x_{c_4}} = \frac{3,75}{5,25} = + \frac{5}{7}. \quad (64)$$

Consequently the two medians coincide; their equation in the $x'y'$ system is

$$y' = mx' + b = \frac{5}{7}x' + 0. \quad (65)$$

The minimum of the absolute sum with respect to this median will thus be:

$$\begin{aligned} [|d|] &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} (|y_{p1} - mx_{p1} - 0| + |y_{p2} - mx_{p2} - 0| + |y_{p3} - mx_{p3} - 0|) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{7}\right)^2}} \left(\left| 2 - \frac{5}{7} \cdot 4 \right| + \left| 7 - \frac{5}{7} \cdot 6 \right| + \left| 6 - \frac{5}{7} \cdot 11 \right| \right) = \\ &= \frac{1}{1,23} (|0,86| + |2,72| + |1,86|) = |4,42|. \end{aligned} \quad (66)$$

This is evidently more than $[|d|] = 3,43$ established for the straight line $F - P_3$ which we found to be the optimum one. In other words, this median $F - C$ can by no means represent the optimum axis. The same applies, however, to any other median of our demonstration. As another median, let us investigate now the main inertia axis of the four-point system. This axis is of a minimum character. Its azimuthal angle can be obtained from expression (20) of [5]. The corresponding sums of products $[\xi\xi]$, $[\eta\eta]$ and $[\xi\eta]$ must refer to the perpendicular axis system ξ, η passing through the centre of gravity C_4

$$\tan 2\alpha = \frac{2[\xi\eta]_{c_4}}{[\xi\xi]_{c_4} - [\eta\eta]_{c_4}} = \frac{2 \cdot 37,25}{62,75 - 32,75} = + 2,483\ 333 \quad (67)$$

hence

$$2\bar{\alpha} = 68^\circ 03' 58''.$$

Thus,

$$\bar{\alpha} = 34^\circ 01' 59''$$

and the directional tangent is:

$$m = \tan \bar{\alpha} = +0,675\ 348.$$

The main inertia axis having a directional tangent m passes through the centre of gravity C_4 , consequently its equation in the $x'y'$ system is

$$\begin{aligned} y' - y'_{C_4} &= m(x' - x'_{C_4}) \\ y' - 3,75 &= 0,675(x' - 5,25) \\ y' &= 0,675 \cdot x' + 0,206. \end{aligned}$$

Thus the intercept of the straight line on the y' axis is:

$$b = + 0,206.$$

By means of these data, the absolute sum of the deviations d relative to the four-point system's own minimum main inertia axis can be calculated by (57):

$$[|d|] = |4,55|.$$

The values measured directly on Fig. 2. would yield $|4,54|$. This can be considered as a control.

Thus, from the point of view of the absolute sum of the deviations d , the axis of the minimum momentum of inertia does not represent the most favourable straight line. In the present case, it is invariably the straight line $F - P_3$ which has to be considered as the optimum axis of the absolute-sum principle.

REFERENCES

1. ZAMBÓ, J.: The setting of front entries. (Az irányvágatok telepítése). In the Hungarian Mining Journal = Bányászati Lapok, Copy No. 6., 1957.
2. SÜTTI, J.: The determination of the azimuthal setting angle of front entries. (Az irányvágatok kitűzési szögének meghatározása). In the Hungarian Mining Journal, Copy No. 3., 1960.
3. RICHTER, R.: Comments on Ing. Juraj SÜTTI's paper: "The determination of the azimuthal setting angles of front entries." In the Hungarian Mining Journal, Copy No. 3., 1960.
4. ZAMBÓ, J.: Analytics of Mining Settings. (Bányászati Telepítések analitikája.) Technical Publishers, Budapest, 1960. (Műszaki Könyvkiadó, Budapest).
5. MILASOVSKY, B.: The Theoretical Problems of Level Drift Location. Acta Technica 38 (1962), 189/219.

SUMMARY

1. Unlike the least square-sum principle discussed in [5], the principle of the least absolute sum of perpendicular deviations does not yield an exact relationship for determining either the numerical value of the absolute minimum or the optimum azimuthal angle of the level drift.

2. The axis of the drift fixed by point F passes through one of the defining points P_i . The axis of the free drift is, in fact, a straight line connecting two defining points. In the case of a free entry, (n) possible axes have to be investigated theoretically for given n number of points. This is performed by comparing the respective absolute sums.

3. In the case of the absolute-sum principle, the centre of gravity of the given point set and its medians play no role whatsoever.

4. According to (3) the main axis of the minimum inertia momentum of the point set does not represent the optimum axis either.

5. The straight line of the absolute-sum minimum seems to be an economically more favourable solution than the main axis of inertia.

DIE AUSSTECKUNG DER RICHTUNGSSTRECKEN AUF GRUND DES PRINZIPS DES ABSOLUTBETRAG-MINIMUMS

B. MILASOVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

1. Das Minimumprinzip des Absolutbetrages der orthogonalen Abweichungen d ergibt — im Gegensatz zu dem im Aufsatz [5] behandelten Minimumprinzip der Quadratsummen — keine eindeutige und geschlossene Beziehung sowohl für den optimalen Richtungswinkel der Streckenachse, noch für den absoluten Minimumswert von $[|pd|]$ selbst.

2. Die durch einen vorgegebenen Punkt F bedingte Streckenachse wird auch irgendeinen der Bestimmungspunkte P_i enthalten. Die Achse der »freien« Strecke aber wird *zwei* der Bestimmungspunkte miteinander verbinden. Im Falle der freien Strecke sind also bei n Bestimmungspunkten P_i theoretisch $\binom{n}{2}$ mögliche Achsen durch Vergleichung der entsprechenden Absolutsummen zu diskutieren.

3. Beim Prinzip $[[pd]] = \text{Minimum der Absolutwerte spielen Schwerlinien und Schwerpunkt der gegebenen Punktgruppe überhaupt keine Rolle.}$

4. Im Sinne des vorigen Punktes 3. braucht auch die optimale Streckenachse von $[[pd]]_{\min}$ mit der Trägheitshauptachse von $[pdd]_{\min}$ nicht zusammenfallen.

5. Von den beiden Streckenachsen des vorigen Punktes 4. scheint jene des Absolutbetrages $[[pd]]_{\min}$ die wirtschaftlichere zu sein.

TRACÉ DES GALERIES DE DIRECTION SELON LE PRINCIPE DE MINIMUM DE LA SOMME ABSOLUE

B. MILASOVSKY

RÉSUMÉ

1. Contrairement au principe de minimum de la somme carrée (5), le principe de minimum de la somme absolue des déviations perpendiculaires en fournit une relation déterminée univoque ni pour le calcul de l'angle de direction optimum de l'axe de la voie, ni pour la détermination de la valeur numérique du minimum absolu.

2. L'axe de la voie, contenant comme élément fixe le point F , traverse un point déterminant P_i . L'axe d'une voie libre n'étant qu'une droite reliant deux points déterminants, en cas de voie libre à n points donnés, il faut examiner les cas de $\binom{n}{2}$ axes possibles en principe, en comparant entre elles les sommes absolues correspondantes.

3. Le centre de gravité et les lignes de gravité du groupe de points donnée ne jouent aucun rôle, en ce qui concerne le principe de la somme absolue.

4. En vertu de 3., l'axe principal du moment d'inertie minimum du groupe de points ne représente pas, non plus, l'axe optimum.

5. La droite du minimum de la somme absolue semble offrir une solution plus favorable, du point de vue économique, par rapport à l'axe principal d'inertie.

ВЫБОР ГЛАВНЫХ ШТРЕКОВ ПО ПРИНЦИПУ АБСОЛЮТНОГО МИНИМУМА СУММ

Б. МИЛАШОВСКИ

РЕЗЮМЕ

1. Принцип минимума абсолютных сумм перпендикулярных расхождений, в отличие от принципа минимума сумм квадратов, рассматриваемого в [5], не дает однозначной замкнутой зависимости ни для определения оптимального угла направления оси штрека, ни для определения числового значения абсолютного минимума.

2. Привязанная к точке F ось штрека проходит через некоторую определяющую точку P_i . Ось свободного штрека — ничто иное, как прямая, связывающая некоторые две определяющие точки. Таким образом, в случае свободного штрека при n заданных точек теоретически имеем $\binom{n}{2}$ возможных осей, которые должны быть исследованы путем сравнения соответствующих абсолютных сумм.

3. Центр тяжести и ось тяжести заданной группы точек в случае принципа абсолютных сумм никакой роли не играют.

4. По смыслу 3. главная ось минимального момента инерции группы точек не обозначает оптимальной оси.

5. Прямая минимума абсолютных сумм в хозяйственном отношении кажется более выгодным решением, чем главная ось инерции.

APPLICATION OF THE THERMOMAGNETIC PROPERTIES OF MATERIALS TO THE CONTROL OR PROTECTION OF ELECTRIC CIRCUITS

T. F. ALKÉR

RESEARCH INSTITUTE OF THE HUNGARIAN POST OFFICE

[Manuscript received November 24, 1960]

Introduction

Most ferromagnetic materials show a considerable sensitivity towards changes in temperature. In any given object consisting of a uniform ferromagnetic substance, magnetic properties, including permeability, flux density, tractive force etc., depend on thermic conditions, provided all other factors, such as magnetic field strength, mechanical stress etc. are unchanged. This correlation may be widely and successfully utilized for the solution of problems presented by modern engineering practice, particularly where the reliable operation, the opening and closing of electric circuits are required or current and voltage have to be controlled.

In most ferromagnetic materials reactions produced by thermomagnetic processes are, to a very large extent rather reliable and stable, thus making them particularly suited for practical application in automatically operated devices. Even after a very large number of repetitions of the same thermomagnetic procedure, the same resultant phenomena will be observed almost entirely independently of the length of time between the repetitions.

In the following some of the theoretical aspects and experimental results and the possible practical application of thermomagnetic reactions will be discussed.

I. Theory

It is a well known fact that comparatively small variations in temperature may produce rather substantial changes in permeabilities and, consequently, in flux densities or magnetic inductions of objects consisting of ferromagnetic materials. This is particularly valid in the vicinity of the Curie temperature where the response of permeability to temperature is usually the largest. A temperature difference of a few centigrades only may in this range result in a decrease of the magnetic flux density reducing it to an extremely small fraction of its original value. A similar increase in magnetic flux density can be observed with negative temperature differences. Presented diagrammatically, the temperature *vs.* magnetic flux density, or magnetic induction curve usually shows a very sharp decline in the vicinity of the Curie point,

which can be retraced when the temperature is lowered. The slope of the curve depends on the material applied.

Just below, at and above the Curie temperature permeability is very nearly equal to unity, *i. e.* magnetic flux density B closely approaches the value of the magnetic field strength, H . Thus it may be stated that in these regions of temperature $B \sim H$. As the magnetic tractive force is a function of the square of flux density, *i. e.* $P_M = f(B^2)$, this will undergo a very sub-

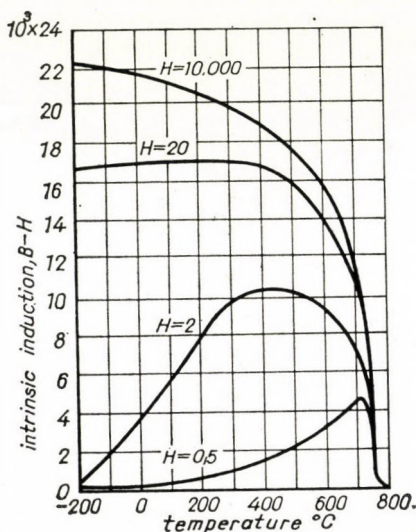


Fig. 1

stantial decrease at such temperatures, because in this region the originally ferromagnetic material will adopt paramagnetic properties.

The correlation between temperature and flux density is different and characteristic for each ferromagnetic material and alloy. The same may be stated about the Curie temperatures too; generally the Curie temperature will be determined by the chemical composition of the alloy. The range of the Curie points of the various ferromagnetic materials covers any temperature from very low (-20°C) temperatures up to $+1120^{\circ}\text{C}$. Any temperature value for instance, between -20°C and 900°C corresponds to the Curie point of one or several iron—nickel—chromium alloys, depending on the proportion of the components.

Generally deviations from the flux density at low temperature increase with increasing temperature but there are numerous exceptions. The curves described by the temperature vs. permeability functions are not independent of the magnetic field strength applied. In the case of iron (1), for instance, the various field strength may roughly be grouped into three different categories (see Fig. 1). 1. $H < 20$ oersteds.

When subjected to such comparatively weak fields, induction will first increase with increasing temperature and after passing through a maximum, will drop to a low value at the Curie point. The slope of this increase, however, varies with the field strength applied.

2. $H = 20$ oersteds.

Up to nearly 500°C the temperature-induction ratio may be considered — with some small neglect — fairly constant. At higher temperatures it begins to decline and the drop becomes most abrupt above 700°C .

3. $H > 20$ oersteds.

Curves in this range are monotonous and characterized by an accelerated decrease in induction followed by an even more abrupt drop in the immediate vicinity of the Curie temperature.

In all three cases, however, it is only the slope of the curve and not the Curie temperature itself that depends on the value of the field strength. The

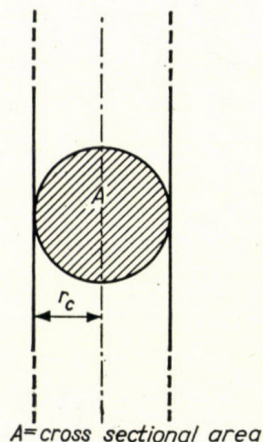


Fig. 2

Curie point itself is independent of the field strength, *e. g.* that of iron is always at 770°C .

After having reached or passed the Curie temperature these same curves can be retraced by merely lowering the temperature.

Changes in permeability and, consequently, in magnetic induction and tractive force produced by the conduction or abduction of heat can be utilized in the design of devices suitable to protect, operate or control electric circuits.

In order to find the relations between the heat conducted and the resulting changes in magnetic properties, let us consider a ferromagnetic cylinder of infinite length and of a radius r_c (see Fig. 2.). Let us assume that heat is conducted to every point of its surface uniformly and simultaneously. To simplify these considerations it may be assumed that the length of the cylinder is infi-

nite, thus heat abduction across the top and the base surfaces may be neglected. As, however, heat is usually very rapidly absorbed by ferromagnetic substances and the cross-sectional area of the cylinder is supposed to be small, neglectation of heat abduction across the cross-sectional surfaces does not involve any major inaccuracy.

It is also assumed that heat flows to the cylinder continuously and uniformly and that the heat source keeps the flow up until each point of the cylinder reaches the temperature of the heat source, when a state of equilibrium sets in between the heat source, the cylinder and its environment.

If the temperature of an arbitrary point within the cylinder is t centigrades and the temperature is at all points of the cylinder t_s after the heat flow has ceased, *i. e.* a state of equilibrium has been reached, the difference between these temperatures is $\vartheta = t - t_s$. Distribution of the temperature within the cylinder during the heat flow can be expressed as a function of the distance from the axis of the cylinder and of the time elapsed by the following partial differential equation:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \quad (1)$$

where r is the distance of the point from the axis of the cylinder, τ the time and a a constant, which is a function of the thermic properties (heat conductivity, etc.) of the material.

Boundary conditions in our case are as follows:

1. prior to the time $\tau = 0$, that is, prior to the commencement of the heat flow all points of the cylinder are at the same low initial temperature, t_i ;
2. $t_i \ll t_s$, where t_s is the temperature of the heat source;
3. at the end of the heat flow, *i. e.* theoretically at $\tau = \infty$, all points of the cylinder are at the same temperature.

The solution of this partial differential equation (1) will be a function of two variables: namely of the distance and of the time: $\vartheta(r, \tau)$. This function, ϑ , may be assumed as the product of two independent functions one of the distance, or of the variable r only, $R(r)$, and another a function of the time, τ , only, $T(\tau)$, when

$$\vartheta(r, \tau) = a \cdot R(r) \cdot T(\tau). \quad (2)$$

Equ. (2) thus represents the general solution of Equ. (1).

Substituting these functions, Equ. (1) can be written as

$$T'(\tau) \cdot R(r) = a \cdot \left[R''(r) \cdot T(\tau) + \frac{1}{r} \cdot R'(r) \cdot T(\tau) \right]. \quad (3)$$

By dividing both sides of Equation (3) by $R(r) \cdot T(\tau)$, we have

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = a \cdot \left[\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \cdot \frac{R'(r)}{R(r)} \right]. \quad (3a)$$

If τ is varied in Equ. (3a), the right side of the equation will be unaltered, and if r is varied, the left side of the equation will remain unchanged. Hence it follows that both sides of the equation have to be equal to the same constant.

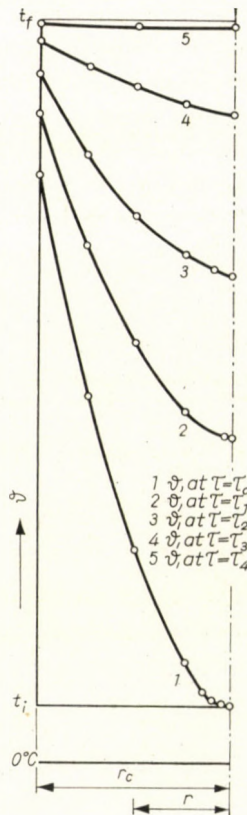


Fig. 3

Let this constant be $-\lambda^2$, then the solution of Equ. (1) will be

$$\vartheta(r, \tau) = c \cdot a \cdot I_0(\lambda, r) \cdot e^{-\lambda^2 \tau} \quad (4)$$

where I_0 is a Bessel function of 0 order and c an integration constant.

The value of c as deduced from boundary conditions is

$$c = t_i - t_s$$

and thus after having substituted c in Equation (4) we obtain

$$\vartheta(r, t) = a \cdot (t_i - t_f) \cdot I_c(\lambda \cdot r) \cdot e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (5)$$

The temperature of any point of the cylinder at any given time during the heat flow can be determined from Equ. (5) by determining ϑ , since t_s is constant. Thus the temperature distribution in the cylinder can be derived for all values of τ . The variation of the temperature distribution in the cylinder with time as evaluated from Equ. (5) is shown in Fig. 3.¹

The magnetic flux for each point of known temperature may be determined from the temperature vs. flux density curve, with the proper magnetic field-strength as parameter. For this purpose the curves of Fig. 1. should be applied in the case of iron. Thus the resultant flux density B , can be computed for the whole cross-sectional area of the cylinder. This makes it possible to calculate if necessary the magnetic tractive force too.

For objects of other non-cylindrical shapes the same considerations have to be applied when computing magnetic induction. In such cases, however, Equ. 1 has to be replaced by the more general form of

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right).$$

The solution of this partial differential equation for the conditions set of the case under consideration makes possible the determination and averaging of the temperature distribution at all points of the object. From this again the flux densities and, if so needed, the tractive forces can be determined as seen above in the case of a cylinder.

II. Experiments and results

A number of experiments were carried out in order to select the materials which might be successfully applied in practice. For the material to be suitable for application the following fundamental conditions must be fulfilled:

1. Stability both of Curie point and of the slope of the temperature vs. permeability relation below it.
2. Adequate shape of the temperature vs. permeability diagram and the required abrupt decrease of permeability in the vicinity of the Curie temperature.
3. Sufficiently large magnetic tractive force.

Experiments have shown that certain ferromagnetic alloys are unfit for such purposes. The reason for this was their failure to fulfill the first condition, namely stability of the Curie temperature. Cooled and sufficient time allowed for at least partial recrystallization after having first reached the Curie point, reheating has shown the Curie point no longer at its previous value. Repetition of this procedure gave Curie points higher of increasingly higher values. It was also found, however, that if not enough time for recrystallization was allowed, no noticeable difference could be observed in the Curie temperature; but if hours or days elapsed between the heatings, the rise has been considerable at

each repeated heating. It was also found, that the Curie point of alloys of higher permeability increased more at each reheating than that of alloys with lower permeability.

As the purpose of our experiments was to select suitable materials for practical application, consequently at least for the present these alloys had to be ruled out. Alloys behaving in that way are the various kinds of Permalloy,

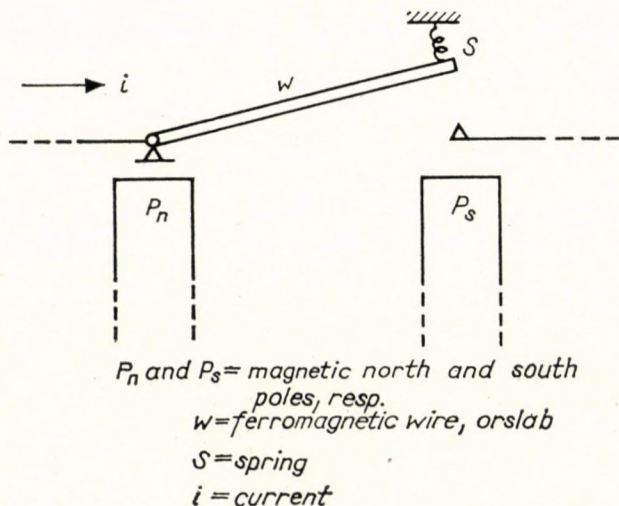


Fig. 4

Invar and, in general the heat-treated iron-nickel alloys. No proper explanation is as yet known for this phenomenon, which is now under investigation.

Experiments, devised with the intention to find suitable materials were carried out along two different lines: 1. the influence of temperature upon the magnetic tractive force and 2. the influence of temperature upon inductivity. The heat-transducer is based on this second principle.

In the first case the experimental device was an electric circuit, a section of which consisted of a ferromagnetic wire, which was kept in its place by the tractive force of an outside magnetic field only (see Fig. 4.). In the first experiments the sample investigated was a slab of $1,3 \times 0,3$ mm cross-sectional area, cut from a telephone receiver membrane; the heating power was an alternating current of 50 c-ps, taken from the power supply network, but this time the temperature of the slab was not yet measured. When the slab became white hot at a current of 7,25 A, it was released and broke the circuit by falling down.

A Permalloy slab of $0,18$ mm² cross-sectional area, when similarly tested due to its relatively low Curie temperature was released without changing its colour. Here the effect mentioned above, and later generally observed on

annealed alloys appeared, because at first this slab was released at 2,1 A, but when the test was repeated several times, the releasing current gradually increased to 2,5 A. However, as the temperature was not tested at that time, the significance of this occurrence was not yet recognized.

In order to be able to read the temperature a new experimental arrangement was designed. The slab under investigation was provided with a coil of copper wire and another somewhat shorter slab was closely attached to it.

A heating coil was wound around the two slabs and the heating current was again supplied from the power network. The purpose of the thin copper wire coil was to indicate the temperature calculated from the difference between the resistance of the coil at low ambient temperature and at higher temperatures. Thus it was found that the Curie temperature of the different kinds of Permalloys measured for the first time varied between 270 and 310° C. Repeating the experiment with the same slab, the Curie point of the Permalloy originally at 270° C rose to 552° C after a period sufficiently long for at least partial recrystallization. By repeated reheating and recrystallization the temperature finally reached a point of well over 700° C, which, however, could not be read off, as heat had destroyed the insulation of the reading coil. The same phenomena occurred when other types of Permalloys with different Curie points were tested in a similar way.

The Curie temperature of nickel slabs was 360° C and this was found to be perfectly stable regardless of the number of repeated heatings.

Invar slabs behaved in the same way as the Permalloy slabs. The first Curie temperature was 278° C, numerous repeated heatings with ample time for recrystallization in between raised the Curie point to 356° C; no further rise after this was observed.

An annealed iron-nickel alloy was also found to have an unstable Curie temperature which in this case too increased after each recrystallization period.

Experiments carried out with iron-nickel-chromium alloys of various compositions have shown perfect agreement with data known from the literature [1] *i. e.*, the percentage of the respective components had determined the value of the Curie temperature of these alloys. Three such different compositions were actually tried producing Curie temperatures of 160, 85 and 25° C respectively, as was to be expected from their compositions.

Next experiments were carried out to determine the influence of temperature on inductivity. Ferromagnetic cores were heated and the resulting changes in the electromagnetic performance of the coils were observed.

In the experiments with heat transducers the arrangement was provided with ferrite cores. The samples were ferrite core-transformers, around which two coils were wound. Although the cores chosen were comparatively small, the coils were arranged in such a way as to eliminate as much as possible the closing of the induction lines through air, and allowing only for closing through

the magnetic core. The number and size of the windings on the coils were identical. The impedance at a frequency of one kilocycle was measured during the heating period. Results are shown in Fig. 5. It is noteworthy that while inductivity practically disappears in the vicinity of the Curie temperature, the effective a. c. resistance, though decreasing, is still not quite negligible in this

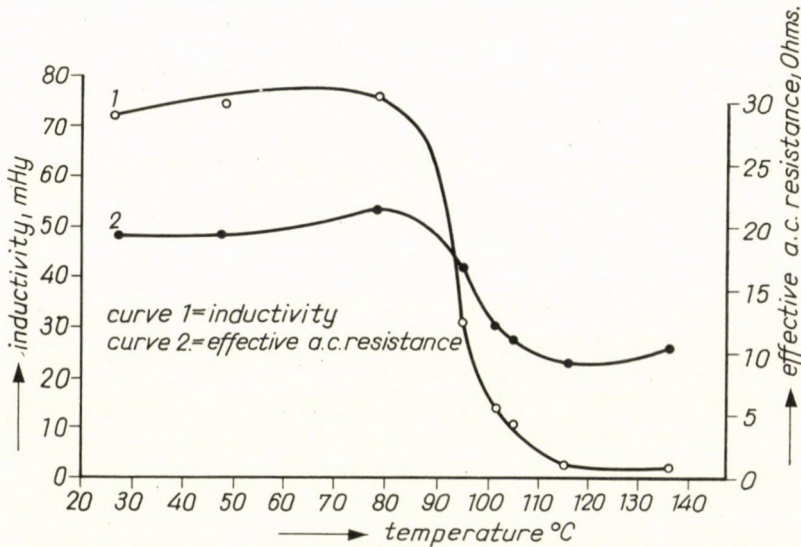


Fig. 5

region and begins to rise again with a further increase in temperature. The change in impedance lags however, somewhat behind the temperature readings (not visible on the diagram). This lag is due to the fact that during the heating period only the temperature of the oil bath in which the transformer was heated was tested and not that of the core itself. In support of this assumption it was first observed that whereas water bubbles from the insulation of the coil should have appeared at 110—115°C, they became visible in the glass container only when the temperature read off rose to 135°C.

Later it has been experimentally proved that this lag is due to a difference of temperature between the oil bath and the ferrite core.

The impedance of the same transformer was tested again but this time with an alternating current of 110 cps. This time the curves underwent some changes but their main characteristics remained (see Fig. 6.). A repeated series of measurements corroborated these results.

A ferrite core transformer was tested, with the aim of determining the relation between secondary current and temperature whilst the primary current was kept constant. Results are shown in Fig. 7. A Curie temperature of 140°C was obtained for the ferrite core.

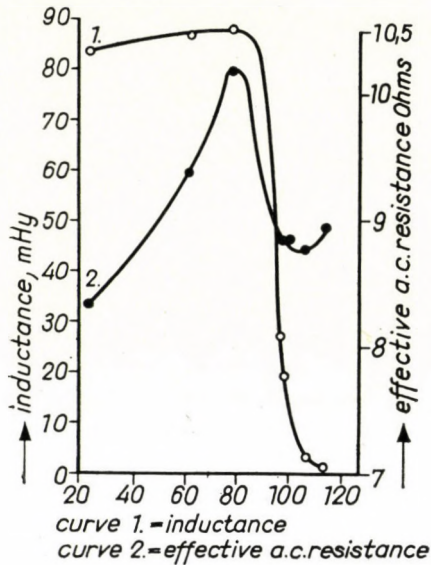


Fig. 6

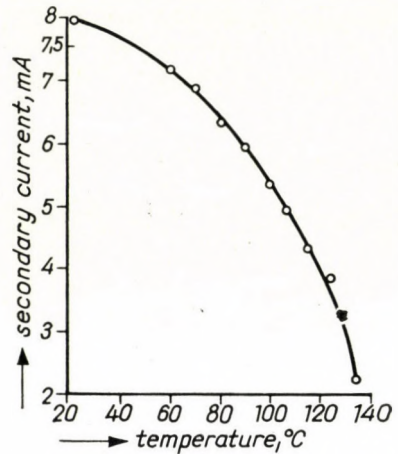


Fig. 7

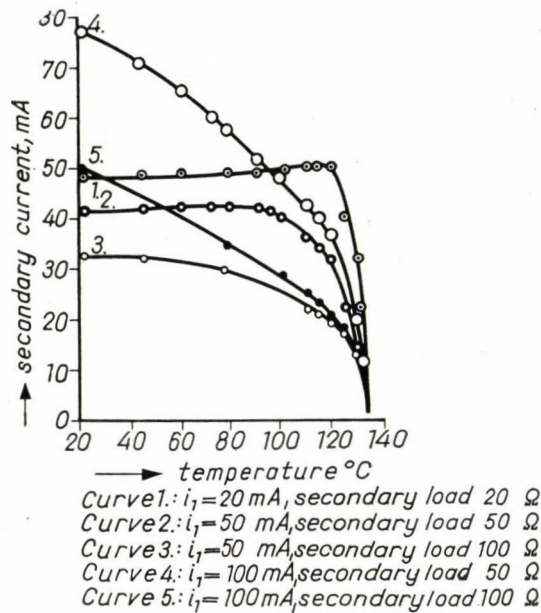


Fig. 8

The influence of different loads in the secondary circuit at constant primary current values was also investigated. It was proved that in the vicinity of the Curie temperature the smaller the load the more abrupt is the

breakdown in the secondary current. Higher loads result in a monotonous decline in the temperature *vs.* secondary current curve (see Fig. 8.).

Another transformer of ferrite core was tested and the Curie temperature of the core was found to be at 102°C . This transformer too was placed into an oil bath. A constant primary current of 50 cps. was supplied by the power-network; the secondary current was rectified and it operated, *i. e.* opened and closed, relays at predetermined current values. Over a period of more than a year the set was operated intermittently, and though occasionally the interval

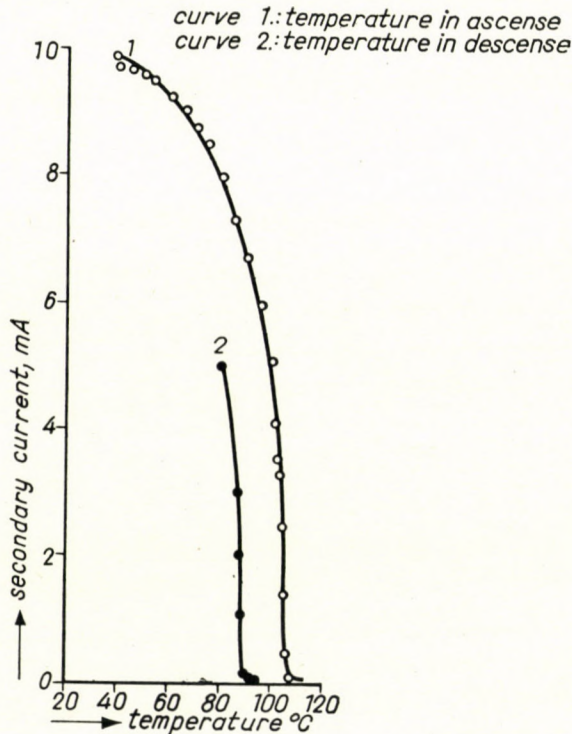


Fig. 9

between two such operations have exceeded a month or more, no changes have occurred in the Curie point of the core, nor in the operation of the relays. The temperature *vs.* secondary current diagrams (see Fig. 9.) were found to be identical each time.

There is a visible difference of nearly 17°C between the descending and the ascending branches of the curve. It is known that metallurgical changes, such as change in phase or in the order of atoms, or a change in the solid solubility of some component may cause a temperature lag, *i. e.* the temperature at which magnetization disappears on heating is not the same as the one at which it reappears on cooling. These two branches unite again at the temper-

ature that has produced the above changes in the metallurgical state. In the experimentally obtained curves, however, the descending and ascending branches never meet, thus proving that the lag observed is due to some other cause and not to metallurgical changes.

Another proof for the lag having been caused by the difference in temperature between the oil bath and the core only, is that while the Curie temperature for this particular type of ferrite is given at 102°C in the literature, a Curie point of 107°C was read off the diagram.

In order to prove that when the temperature is measured directly on the core the curve shows no separate ascending and descending branches, an experiment

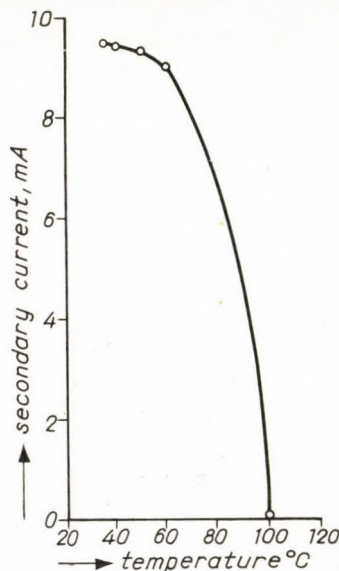


Fig. 10

riment was carried out with the temperature being actually measured on the core. The points thus obtained (see Fig. 10.) show no difference between the descending and ascending branch. Each temperature corresponds to only one single value of the secondary current, regardless of the direction of the approach. This proof thus established has been corroborated by numerous similar experiments.

The main results derived from these experiments are:

1. the Curie temperature of ferrites and of most other ferromagnetic materials is constant and stable, no variation can be observed either during continuous or intermittent tests;

2. some heat-treated or annealed alloys, including Permalloy and Invar, show, however, a tendency to change their Curie points, *i. e.* at each heating

an increase may be observed in the case of intermittent operation, provided the time between the heatings is long enough for recrystallization to take place;

3. no hysteresis of the permeability or magnetic induction *vs.* temperature can be observed in the case of ferrite cores of heat transducers or in most other ferromagnetic materials or alloys, that is, the same temperatures correspond to the same values of flux density;

4. the magnitude of the load in the secondary circuit of a heat transducer exercises a very considerable influence upon the shape of the temperature *vs.* magnetic induction curve, but not on the Curie point itself.

III. Some design aspects and possible practical applications

Relations upon which the design of sets operated by thermomagnetism can be based are given above. For design purposes it is necessary to know the Curie temperature of the ferromagnetic material applied and the temperature *vs.* permeability relation within the temperature limits concerned, as well as the influence of the magnetic field strength on this relation. In possession of these data the distribution of temperature within the ferromagnetic object and the consequent variations in flux density and in tractive force or, — as in case of the heat-transducer — in inductance may be derived.

Opening and closing, or protection of electric circuits can be performed with the arrangement shown in Fig. 4. Magnetization of a circuit $P_n - W - P_s$ closes the electric circuit, whereas demagnetization opens it. The application of a spring S alters the numerical values, because in this case the circuit can be closed only if the magnetic tractive force, P_M , overcomes the opposing pulling force of the spring, P_s , or: $P_M > P_s$.

The magnetic tractive force depends on the square of the flux density, B^2 and this again varies with temperature. Temperature distribution within the object — in case of a cylinder — can be computed from Equ. (5) and by an essentially similar method for bodies of non-cylindrical shape. For any known values of temperature the related flux densities can be read off from the curves, similar to those in Fig. 1. Thus an average value for the magnetic induction over the total cross-sectional area, B_{ave} , can be determined.

The tractive force will then be:

$$P_M = f(B^2) = \left(\frac{B_{ave}}{5 \cdot 10^3} \right)^2 \cdot A = \left(\frac{B_{ave}}{5 \cdot 10^3} \right)^2 \cdot r_c^2 \cdot \pi.$$

The lower limit of the tractive force is determined by the relation $P_M > P_s$. r_c can be expressed from the above equation as

$$r_c = \frac{5 \cdot 10^3}{B_{ave}} \cdot \sqrt{\frac{P_M}{\pi}}.$$

Such a set can also be designed so that the spring force P_s shall close the electric circuit and the magnetic tractive force, P_M shall break it. When due to the increase of temperature magnetization disappears P_S will again predominate and close the circuit.

The two opposite tractive forces, P_M and P_S resp. may also be chosen in such a way that not all the points of the whole cross-sectional area will necessarily reach the Curie temperature. Temperature increase weakens magnetization and tractive force; this weakening may, under certain circumstances, be sufficient for the operation required. Thus it is not always necessary that all, or even any of the points in the cross-sectional area shall reach Curie temperature. This is particularly useful when higher temperatures might endanger parts of the electrical equipment (insulation, etc.), or when explosive gases are present, etc. Another possible solution is offered by the choice of some ferromagnetic substance with low Curie temperature; in this case, however, care must be taken that the influence of heat sources not involved in the operation shall be avoided.

The above considerations may of course be applied to the design of heat transducers with the single difference that in this case the relation between B_{ave} and the mutual inductance between the two coils, M , has to be taken into consideration. It is essential that coupling through air between the two coils shall be very small, preferably shall approach zero. Besides the geometrical dimensions this condition too helps to determine the frequency to be allotted. The influence of the load in the secondary circuit upon the temperature *vs.* flux density relation should neither be neglected in the design.

Two main forms of application of the principle of ferromagnetism are utilized, as already mentioned: 1. influence of the temperature on the tractive force and 2. influence of the temperature on inductivity. Both of these can find wide fields of application, some of which shall be mentioned in the following.

In non-destructive material testing the principle can be applied for the determination of the Curie temperature of various ferromagnetic metals and alloys. Such an apparatus is already in operation in the laboratory of an iron and steel mill and works according to expectations.

In measuring technics the most important fields of application appear to be at present the stabilization of currents and voltages in measuring instruments or temperature compensation and also, if properly designed, for protection against breakdowns caused by high voltage or current, respectively.

In the electric power-supply industry the protection of machinery, such as generators, transformers, etc., in hydraulic power plants protection against short-circuits or over-load, as well as the telemetering of motors and generators all may benefit from the reliable uncomplicated solutions offered by this principle.

In other fields of industry and transportation, the telemetering and protection of electric motors of machine tools, of tramway (streetcar) motors, of electric railway engines, can be well carried out by the application of this procedure.

Bimetallic units of insufficient capacity may too be replaced by thermomagnetic devices.

The widest field of application is offered in automation: such as 1. temperature control and regulation in general, including nuclear power processes 2. the control of teleheating systems in the case of Curie temperatures between 15 and 25° C; 3. temperature stabilization of gases for gas-analysers if the design allows an accuracy of $\pm 1^\circ$ C; 4. control of boiler water temperatures, e.g. in steamships; 5. control of vapour temperature in boilers; 6. in the operation of multicircuit-type alarm signalling equipments; 7. in automatic time-members; 8. in telemetering the temperatures in the bearings of revolving engines and machines; 9. in telemetering temperatures in general, including cooling water in power plants, in autocars, boilers, etc.; 10. in the centralized control systems of illumination and in a number of other important control systems.

Conclusions

A principle has been worked out and discussed which is suitable for practical application where the automatic control of electric currents and voltages by heat is required. Its reliability and stability were investigated and the basic aspects for the design of such apparatus established. Two possible alternatives for practical applications were treated: of the temperature-influenced tractive force and of inductivity.

Acknowledgements

The author wishes to thank his partners in this work: Dr. CH. P. KOVÁCS and L. RÉGENI, also T. GYÖRY and E. SCHALK for their helpful suggestions concerning the mathematical treatment of the subject.

REFERENCES

1. BOZORTH, R.: *Ferromagnetism* (Van Nostrand, New York, 1958).
2. VENSKOVSKY, S. V.: *Modern Magnetism* (in Hungarian, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956).

SUMMARY

Certain temperature dependent properties of ferromagnetic materials, especially those observed in the vicinity of the Curie point, are reviewed. Temperature distribution in a cylindrical solid body heated by its environment uniformly and simultaneously at every point of its surface, is discussed. This serves as a starting point for the study of the relationship between heating and flux density and thus of the correlation with changes in magnetic stress. Experiments aiming at the choice of materials suited for practical application are described and conclusions are drawn for the various ferromagnetic materials and alloys. The possibility of the practical application and the basic design of safety and control (heat transducer) devices are treated. The author mentions those fields in industry in which the successful use of such devices might be expected.

DIE ANWENDUNG DER THERMOMAGNETISCHEN EIGENSCHAFTEN
DER STOFFE FÜR DIE STEUERUNG
UND DEN SCHUTZ VON ELEKTRISCHEN STROMKREISEN

T. F. ALKÉR

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser beschreibt jene Eigenschaften der ferromagnetischen Substanzen welche von der Temperatur abhängig sind und welche sich besonders in der Nähe des Curie Punktes ändern. Er behandelt die Verteilung der Temperatur in einem zylindrischen festen Körper welcher durch seine Umgebung an jedem Punkte seiner Oberfläche auf einmal und gleichmäßig erwärmt wird. Von diesem Beispiel ausgehend untersucht er den Zusammenhang zwischen Erwärmung und Fluxusdichte und demzufolge mit den Änderungen der magnetischen Ziehkraft, und beschreibt Versuche welche die Auswahl von Stoffen für praktische Anwendung zielten, sowohl als auch die daraus gezogenen Schlußfolgerungen betreffend die verschiedenen ferromagnetischen Substanzen und Legierungen. Er befaßt sich am Ende mit den Möglichkeiten der praktischen Anwendung von Sicherheits- und Kontrolleinrichtungen (Wärmetransduktoren) und mit den Grundprinzipien des Entwurfes solcher Einrichtungen. Es werden zum Schlusse jene Gebiete der Industrie erwähnt, in welchen solche Vorrichtungen erwartungsgemäss erfolgreich angewendet werden könnten.

UTILISATION DES PROPRIÉTÉS FERROMAGNÉTIQUES DES MATIÈRES
POUR LA COMMANDE ET LA PROTECTION DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

T. F. ALKÉR

RÉSUMÉ

En introduction, l'auteur fait connaître certaines propriétés des matières ferromagnétiques variant avec la température, variation qui s'observe surtout au voisinage de la température de Curie. Il examine ensuite la répartition de la température dans un corps cylindrique plein, que l'ambiance réchauffe simultanément d'une façon continue et uniforme sur tous les points de la surface. Il étudie ensuite les rapports qui existent entre les variations du réchauffement et de la densité de flux, et donc de la force de traction magnétique, rend compte des recherches faites en vue du choix de matières appropriées pour l'utilisation pratique, et en expose les résultats concernant les différents matériaux et alliages ferromagnétiques. L'auteur examine enfin les possibilités d'application des dispositifs de protection, resp. de réglage (transducteurs thermiques), ainsi que les principes fondamentaux à observer dans leur calcul. Pour terminer, l'auteur passe en revue les divers domaines de l'industrie ou de tels dispositifs pourraient être utilisés avec avantage.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕРМОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ
ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ИЛИ ЗАЩИТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Р. Ф. АЛКЕР

РЕЗЮМЕ

Введение знакомит с термозависимой природой свойств ферромагнитных материалов, наблюдающейся главным образом в районе температуры Кюри. Рассматривается распределение температур в сплошном цилиндрическом теле, все точки поверхности которого непрерывно и равномерно обогреваются окружающей средой. Исходя из этого, исследуются зависимости, существующие между нагревом и плотностью потока и тем самым изменением силой магнитного притяжения; статья знакомит с опытами, проведенными в целях отыскания материалов, пригодных для практического применения, с заключениями, сделанными на основании опытов с различными ферромагнитными материалами и сплавами. Рассматриваются основные принципы проектирования и практические возможности, применения предохранителей и регуляторов (тепловых дросселей). Упомянуется о тех областях промышленности, где такие устройства могли бы применяться с ожидаемым успехом.

CURRENT DISTRIBUTION ON A STRIP LINE*

E. GAÁL
CAND. TECHN. SCI.

[Manuscript received December 1, 1960]

1. Introduction

Many problems in microwave technique can be advantageously solved by using strip lines [1, 2, 3]. The use of strip lines results in considerably reduced circuit dimensions and simplified manufacturing processes.

A simplified theory of microstrip transmission lines was given by F. ASSADOURIAN and E. RIMAI [4]. The rigorous determination of strip-line characteristics was given by E. G. BLACK and T. J. HIGGINS [5].

In this paper the determination of current distribution on strip lines is discussed. A solution, based on the Maxwell equations, is found. From the current distribution characteristic impedance of the strip line can be calculated.

2. Current distribution on the strip

A simplified arrangement shown in Fig. 1 will be examined for a strip of finite width b and negligible thickness. The distance between the strip and ground plane is h and the ground plane is supposed to be of infinite width.

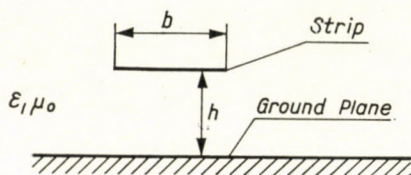


Fig. 1. Cross section of a strip line

The space is filled with a homogenous dielectric, having a dielectric constant ϵ and permeability μ_0 . The strip line is considered as being infinitely long.

In the transverse electromagnetic (TEM) mode, current flows in the line only in the direction of propagation. Thus, the total current can be built up

* This paper was written by T. BERCELI, compiled from the early deceased E. GAÁL's dissertation [7].

by placing current lines with different amplitudes side by side. Current distribution is determined by assuming that the electric field intensity created by these current lines is perpendicular to the conductor.

First, the image of the strip with respect to the ground plane is considered. Because of symmetry, amplitude distribution of the current lines on the image will be the same as that on the strip with the only difference that they have opposite directions. Further on, analysis is made for the case of a

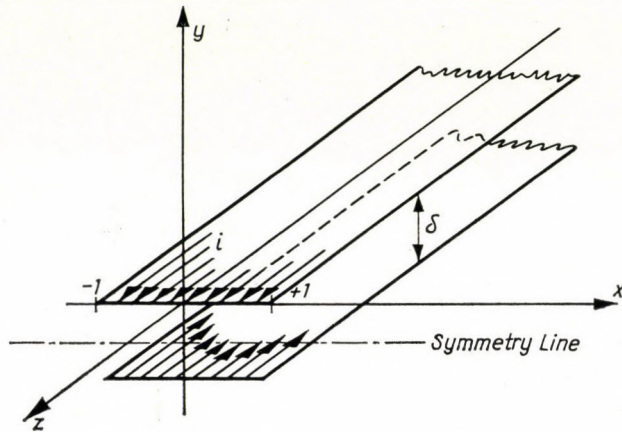


Fig. 2. Symmetrical line and co-ordinate system

symmetric line obtained by this image method. Current distribution on this line is determined by the use of the Maxwell equations and assuming TEM mode of propagation. A singular integral equation is obtained, which, for a given case, can be solved by using e. g. an iteration method.

Fig. 2 shows a coordinate system with the symmetric line, which is likewise considered as being infinitely long. The unit length on the co-ordinate axes will be taken as equal to the half of the strip width. The distance between the strip and its image is marked by δ . From Figs. 1 and 2 δ can be expressed in terms of the width of the strip and its distance to the ground plane as

$$\delta = \frac{4h}{b}. \quad (1)$$

Hereby, the values of distances will be obtained as dimensionless quantities.

As a time function the current has a sinusoidal form. Consequently, the wave equation for the Hertz vector is

$$\nabla^2 \mathbf{Z}e^{-j\beta z} + \beta^2 \mathbf{Z}e^{-j\beta z} = \frac{j}{\omega\epsilon} \mathbf{i}e^{-j\beta z} \quad (2)$$

where \mathbf{Z} is the Hertz vector, \mathbf{i} is the current-density vector, β is the phase constant and ω is the angular frequency.

Current lines are assumed to be only in the direction of the axis z . Therefore,

$$\mathbf{i} = i(x, y) \mathbf{n}_z \quad (3)$$

where \mathbf{n}_z is the unit vector in direction z .

The differential operator ∇^2 can be rewritten in the form

$$\nabla^2 = \nabla_{x,y}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_{x,y}^2 - \beta^2. \quad (4)$$

By substituting (4) into (2) one obtains

$$\nabla_{x,y}^2 \mathbf{Z} = \frac{j}{\omega \epsilon} \mathbf{i} \mathbf{n}_z. \quad (5)$$

The Hertz vector is likewise in the direction z , thus

$$\mathbf{Z} = Z(x, y) \mathbf{n}_z. \quad (6)$$

Eq. (5) is then reduced to a scalar equation

$$\nabla_{x,y}^2 Z = \frac{j}{\omega \epsilon} i. \quad (7)$$

According to potential theory the solution of this equation is

$$Z(x, y) = - \frac{j}{2\pi\omega\epsilon} \int_F i \ln r \, dF \quad (8)$$

where

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (9)$$

Hence r is the distance of the examined point to the current line when x, y and ξ, η are the co-ordinates of this point and those of the current line, respectively. F is the region of integration, which, in this case, is the entire cross section of the line. The differential dF can be expressed in terms of the co-ordinate differentials as

$$dF = d\xi \, d\eta. \quad (10)$$

Since the Hertz vector is known, electric field intensity is given by

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Z}) + \beta^2 \mathbf{Z} = -j\beta \nabla_{x,y} \mathbf{Z}. \quad (11)$$

By substituting Eq. (8) into Eq. (11) one obtains

$$\mathbf{E} = - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \int_F i \nabla_{x,y} (\ln r) \, dF. \quad (12)$$

Here

$$\nabla_{x,y} \ln r = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{n}_x + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{n}_y \right] \quad (13)$$

where \mathbf{n}_x and \mathbf{n}_y are the unit vectors in directions x and y .

As strip thickness is considered as being infinitely small, current density can be expressed in the form

$$i(\xi, \eta) = i(\xi) [\Delta(\eta) - \Delta(\eta + \delta)]$$

where $i(\xi) = 0$ when $|\xi| > 1$. (14)

In Eq. (14) $\Delta(\eta)$ is the Dirac delta function.

From Eqs. (12), (13) and (14) the electric field intensity is obtained in the form

$$\mathbf{E}(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \int_{-1}^{+1} i(\xi) \left[\frac{1}{r_1} \left(\frac{\partial r_1}{\partial x} \mathbf{n}_x + \frac{\partial r_1}{\partial y} \mathbf{n}_y \right) - \frac{1}{r_2} \left(\frac{\partial r_2}{\partial x} \mathbf{n}_x + \frac{\partial r_2}{\partial y} \mathbf{n}_y \right) \right] d\xi \quad (15)$$

where r_1 and r_2 are the distances between the examined point and the current

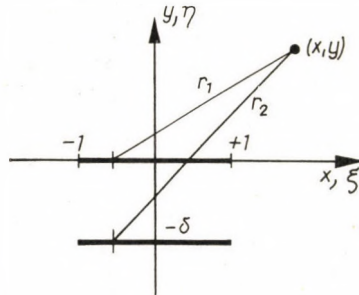


Fig. 3. To the determination of the distances between the examined point and current lines

lines of conductor 1 and 2, respectively. (See Fig. 3.) The distances are expressed in terms of the coordinates as

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= [(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2} \\ r_2 &= [(x - \xi)^2 + (y + \delta)^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

For the electric field component in direction x we obtain

$$E_x = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \int_{-1}^{+1} i(\xi) \left[\frac{x - \xi}{r_1^2} - \frac{x - \xi}{r_2^2} \right] d\xi. \quad (17)$$

The tangential field component on the conductor surface is zero, *i. e.*

$$E_x = 0 \text{ when } |x| < 1 \text{ and } y = 0 \text{ or } y = -\delta. \quad (18)$$

Taking into account Eq. (18), for the current distribution from (16) and (17) one obtains a singular integral equation in the form of

$$\int_{-1}^{+1} i(\xi) \left[\frac{1}{x - \xi} - \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + \delta^2} \right] d\xi = 0 \quad (19)$$

in the region $|x| < 1$.

3. The solution of the integral equation

The integral equation is solved by using iteration method. Eq. (19) is written in the form

$$\int_{-1}^{+1} i(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi = \int_{-1}^{+1} i(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + \delta^2} d\xi. \quad (20)$$

Now $i_1(\xi)$ is interpreted as being

$$\int_{-1}^{+1} i_1(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi = 0. \quad (21)$$

Physically this represents the current distribution for the case when the distance between the two conductors is infinite ($\delta = \infty$).

Now let $G_n(x)$ be

$$G_n(x) = \int_{-1}^{+1} i_n(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + \delta^2} d\xi. \quad (22)$$

Physically $G_n(x)$ is proportional to the electric field which is parallel with the conductor surfaces and is created on the surface of the first conductor by the second one when the current distribution in the second conductor is $i_n(\xi)$.

Then $i_{n+1}(\xi)$ is obtained from

$$\int_{-1}^{+1} i_{n+1}(\xi) \frac{1}{x - \xi} d\xi = G_n(x). \quad (23)$$

Physically $i_{n+1}(\xi)$ represents a current distribution which would be obtained in the conductor if in the opposite conductor the current distribution were $i_n(\xi)$.

Current-distribution functions $i_n(\xi)$ are ever more approaching the desired function $i(\xi)$. The proof of the convergence will be omitted here.

In the following the iteration will be performed in only two steps, because already this yields a satisfactory result.

The solution of Eq. (21) is [6]

$$i_1(\xi) = \frac{I}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (24)$$

where I is the total current in the strip.

By substituting (24) into (22) one obtains

$$G_1(x) = \frac{I}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + \delta^2} d\xi. \quad (25)$$

By substituting $\xi = \cos \varphi$ one has

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \frac{I}{\pi} \int_0^\pi \frac{x - \cos \varphi}{(x - \cos \varphi)^2 + \delta^2} d\varphi = \\ &= \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x - \cos \varphi}{(x - \cos \varphi)^2 + \delta^2} d\varphi. \end{aligned} \quad (26)$$

To calculate this function the integration will be extended over the closed curve shown by a dashed line in Fig. 4. The value of the line integral on the

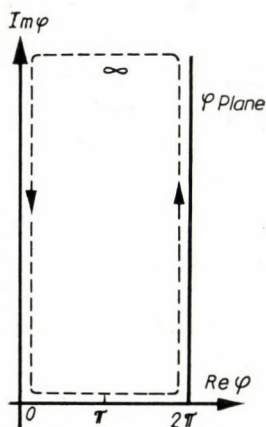


Fig. 4. Line of integration

upper side of the rectangle becomes zero when this side tends to infinity. The integrals on the right and left sides of the rectangle have equal absolute values,

but their signs are opposite. Thus, the value of the integral over the entire curve is equal to the line integral on the lower side of the rectangle.

The first-order poles of the integrand are

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \arccos(x + j\delta) \\ \varphi_2 &= \arccos(x - j\delta).\end{aligned}\quad (27)$$

The poles are placed at points where

$$\left. \begin{aligned}\operatorname{Im} \varphi_1 > 0, & \quad 0 < \operatorname{Re} \varphi_1 < 2\pi \\ \operatorname{Im} \varphi_2 > 0, & \quad 0 < \operatorname{Re} \varphi_2 < 2\pi\end{aligned} \right\} \quad (28)$$

If $\delta \neq 0$, then no pole is on the line of integration. By the use of the residuum theorem the result of integration is

$$G_1(x) = Ij \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin \varphi_1} + \frac{1}{\sin \varphi_2} \right] = -I \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{1 - (x - j\delta)^2}}. \quad (29)$$

For numerical evaluations an approximate formula is given for $G_1(x)$. According to Eq. (29), $G_1(x)$ is a limited, odd function in the $|x| < 1$ region. Therefore, $G_1(x)$ is approximated by a third-order odd polynome

$$G_1(x) \cong I(Ax^3 + Bx). \quad (30)$$

The constants A and B should be so chosen that the approximation yields exact values at $|x| = 0.6$ and $|x| = 1$.

With $G_1(x)$ already determined, $i_2(\xi)$ is obtained from (23) in the form

$$\int_{-1}^{+1} \frac{i_2(\xi)}{x - \xi} d\xi = G_1(x). \quad (31)$$

The solution of this equation is [6]

$$i_2(\xi) = \frac{I}{\pi\sqrt{1 - \xi^2}} - \frac{1}{\pi^2\sqrt{1 - \xi^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{G_1(x)}{\xi - x} \sqrt{1 - x^2} dx. \quad (32)$$

Taking into account the approximation (30) for $G_1(x)$, the solution of the integral in Eq. (32) can be obtained as

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \frac{G_1(x)}{\xi - x} \sqrt{1 - x^2} dx &\approx I \int_{-1}^{+1} \frac{Ax^3 + Bx}{\xi - x} \sqrt{1 - x^2} dx = \\ &= I\pi \left[A\xi^4 + \left(B - \frac{A}{2} \right) \xi^2 - \left(\frac{A}{8} + \frac{B}{2} \right) \right].\end{aligned}\quad (33)$$

Hence, the current distribution on the strip is

$$i_2(\xi) = \frac{I}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \left[-A\xi^4 + \left(\frac{A}{2} - B \right) \xi^2 + \frac{A}{8} + \frac{B}{2} + 1 \right]. \quad (34)$$

According to the formula obtained, when current intensity on the edge of the strip is becoming infinite the integral of its square will be unlimited. The explanation of this result is given by the fact that the thickness of the strip has been neglected.

4. Current distribution on the ground plane

Current distribution on the ground plane can be determined from the current distribution on the strip. The electric field on the ground plane is oriented in the direction of the y axis, and its value is, according to Eq. (15)

$$E_y = \frac{\delta}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \int_{-1}^{+1} i(\xi) \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + \frac{\delta^2}{4}}. \quad (35)$$

Magnetic field strength, as a function of the electric field, is given by

$$H_x = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} E_y. \quad (36)$$

Hence, the current distribution on the ground-plane surface is

$$i_a(x) = (H_x)_{y=-\delta/2} = \frac{\delta}{2\pi} \int_{-1}^{+1} i(\xi) \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + \frac{\delta^2}{4}}. \quad (37)$$

5. Characteristic impedance

From current distribution, characteristic impedance of a strip line can be determined as follows. First, the characteristic impedance of the symmetric line is determined as the ratio of line voltage to line current. To derive a strip line from the symmetric line, a conducting surface, *i. e.* the ground plane is placed in the median plane of the symmetric line. As this plane is an equipotential surface, field distribution remains undisturbed. Therefore, characteristic impedance of the strip line is equal to the half of the characteristic impedance of the symmetric line, as line voltage is halved and line current remains unchanged. According to Eq. (15), characteristic impedance of the strip line is

then obtained as

$$K = \frac{1}{2} \frac{1}{I} \int_{-\delta}^0 E_y dy = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{I} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \int_{-1}^{+1} i(\xi) \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + \delta^2}}{\xi} d\xi. \quad (38)$$

6. Example

The approximate expression of $G_1(x)$ for the case when $b/h = 3$, according to Eqs. (29) and (30), is

$$G(x) \approx I(-0,03x^3 + 0,293x).$$

From Eq. (34) the current distribution on the strip can be expressed as

$$i_2(\xi) = \frac{I}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} (0,03 \xi^4 - 0,308 \xi^2 + 1,143).$$

The current distribution is shown in Fig. 5. This figure also shows the current distribution for $\delta = \infty$ and the level of a uniform distribution for the same total current. The uni-

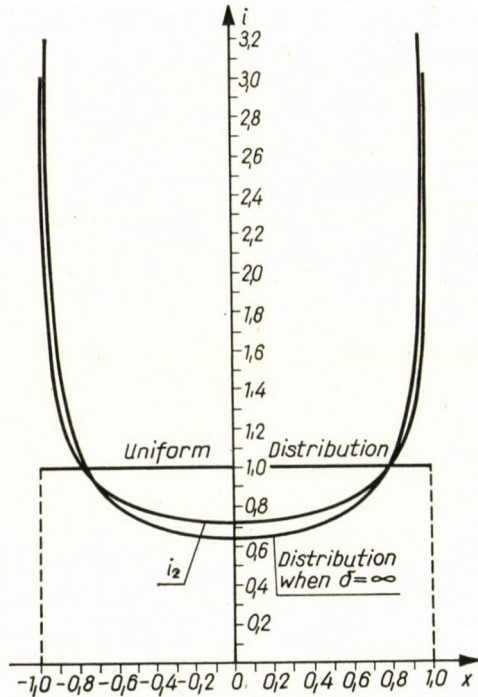


Fig. 5. Current distribution on the strip

form distribution is represented at a unit height and the different current values are expressed in this unit.

The current distribution on the ground plane is obtained from that on the strip. By using Eq. (37) one obtains

$$i_a(x) = \frac{2}{3\pi^2} I \int_{-1}^{+1} \frac{0,03 \xi^4 - 0,308 \xi^2 + 1,143}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + \frac{4}{9}}.$$

Fig. 6 shows this distribution. It also shows the current-density level obtained for the case when the same total current is uniformly distributed over an area corresponding to the strip

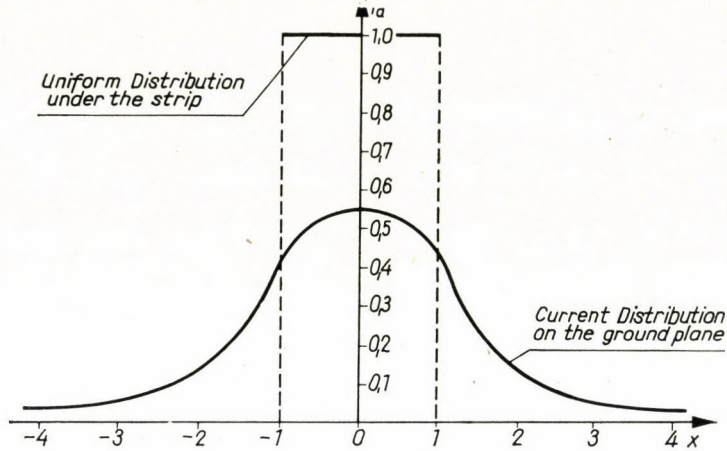


Fig. 6. Current distribution on the ground plane

width. The level of the uniformly distributed current is taken as a unity and current levels on the ground plane are plotted accordingly.

Characteristic impedance of the strip line can be calculated knowing the current distribution on the strip. By a numerical integration of Eq. (38) one obtains

$$K = 70 \text{ ohms.}$$

When the value thus obtained is compared to that for an imagined strip line with a uniform current distribution, one obtains

$$\frac{K}{K'} = \frac{70}{120 \pi \frac{1}{3}} = 0,555.$$

The value of the characteristic impedance as obtained from the current distribution, agrees with the exact value given by conformal transformation.

REFERENCES

1. GRIEG, D. D., ENGELMANN, H. F.: "Microstrip — A New Transmission Technique for the Kilomegacycle Range", Proceedings of the Institute of Radio Engineers, Dec. 1952, pp. 1644—1650.
2. KOSTRIZA, J. A.: "Microstrip Components", Proceedings of the Institute of Radio Engineers, Dec. 1952, pp. 1658—1663.
3. "Symposium on Microwave Strip Circuits", IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, March, 1955.
4. ASSADOURIAN, F., RIMAI, E.: "Simplified Theory of Microstrip Transmission Systems", Proceedings of the Institute of Radio Engineers, Dec. 1952, pp. 1651—1657.
5. BLACK, K. G., HIGGINS, T. J.: "Rigorous Determination of the Parameters of Microstrip Transmission Lines", IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, March, 1955, pp. 93—113.
6. SCHMEIDLER, W.: "Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik." Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G., Leipzig, 1950.
7. GAÁL, E.: "Mikrohullámú szalagvonalak." Dissertation for candidature. 1956. Library of the Hungarian Academy of Sciences.

SUMMARY

Determination of the current distribution on microwave strip lines is discussed. The calculations based on the Maxwell equations yield a singular integral equation which is solved by using iteration. From current distribution, characteristic impedance of the strip line can also be calculated.

STROMVERTEILUNG AN EINEM MIKROWELLEN-BANDWELLENLEITER

E. GAÁL

ZUSAMMENFASSUNG

Im Aufsatz wird die an einem Mikrowellen-Bandwellenleiter entstehende Stromverteilung behandelt. Ausgehend von den MAXWELLSchen Gleichungen, erhält man als Resultat der Berechnung eine singuläre Integralgleichung, deren Lösung durch Iteration gefunden wird. In Kenntnis der Stromverteilung kann auch der Wellenwiderstand des Bandwellenleiters errechnet werden.

RÉPARTITION DU COURANT SUR LES LIGNES À RUBAN À MICROONDES

E. GAÁL

RÉSUMÉ

L'article traite de la détermination de la répartition du courant sur les lignes à ruban à microondes. Le calcul partant des équations de Maxwell donne comme résultat une équation intégrale singulière, dont la solution s'obtient par itération. En connaissance de la répartition du courant, l'impédance caractéristique de la ligne à ruban peut être également calculée.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА НА МИКРОВОЛНОВОМ ЛЕНТОЧНОМ ФИДЕРЕ

Э. ГААЛ

РЕЗЮМЕ

Статья занимается определением образующегося на микроволновых ленточных фидерах распределения тока. В результате расчета, исходящего из уравнений Максвелла, предлагается сингулярное интегральное уравнение, решение которого происходит с помощью итерации. При известном распределении тока может быть вычислено и волновое сопротивление ленточного фидера.

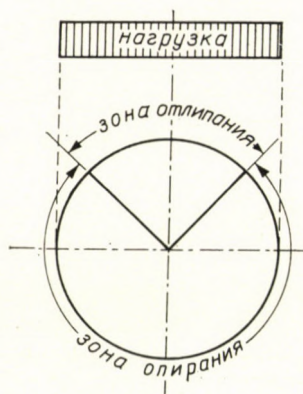
ДЕФОРМАЦИЯ КОНТУРА КРУГОВОГО ВЫРЕЗА В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ ОТ ДЕЙСТВИЯ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

канд. техн. наук Л. РОЖА и Г. КОВАЧ
БЮРО ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ ШОССЕЙНЫХ И ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ, БУДАПЕШТ

(Поступило 13-го декабря 1960 года)

1. Введение

Обделка тоннеля, строящегося под уровнем грунтовых вод часто выбирается по круговому сечению. Обделки тоннелей городских метрополитенов глубокого заложения имеют почти исключительно такое сечение. Исследования по статической работе обделки тоннеля показали, что порода, окружающая обделку, является не только средой, передающей нагрузку на



Фиг. 1

обделку, но также и опорой на определенном участке окружности. Обделка круглого сечения с этой точки зрения может быть разделена на две части: на участок отлипания, где обделка тоннеля от действия породы, деформируясь, перемещается во внутрь и на нагружающую зону, где обделка тоннеля опирается на окружающие ее породы (фиг. 1).

От действия деформации участок обделки в зоне отлипания прижимается к породе, окружающей тоннель, и там возбуждает силы реакции. Конечно, для образования этой работы сил необходимо тщательное нагнетание вокруг тоннельной обделки, то есть заполнение зазоров, образующихся в ходе проходки. При строительстве тоннелей с целью уменьшения горного давления, приходится увеличивать также грузоподъемность тоннельных обделок.

Обделка тоннеля должна быть рассчитана по современным методам как кольцо в упругой среде. Такие методы расчета разработаны авторами *Гореликом, Бодровым и Маттери, Зурабовым, Бугаевой* и т. д. [1, 2, 3]. По этим методам расчета упругие свойства грунта характеризовались на основе гипотезы Винклера коэффициентом постели, то есть предполагалось, что имеет место зависимость

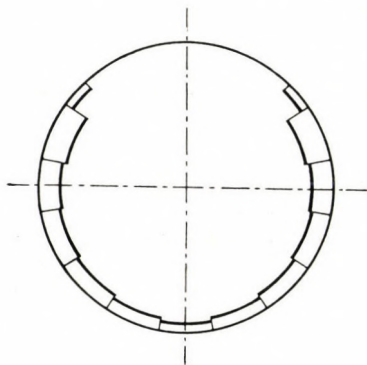
$$p = cy,$$

где p — нагрузка;

c — коэффициент постели;

y — перемещение от действия нагрузки.

Но коэффициент постели не является физической характеристикой грунта; зависит, например, и от нагрузки, и от величины, и от формы нагружающего тела, поэтому применение его зависит от ряда субъективных фак-



Фиг. 2

торов. Во избежание применения методов расчета с коэффициентом постели и для учета упругого основания на основе физических характеристик грунта (модуль упругости E и μ коэффициент Пуассона) *С. А. Орлов* [5] разработал новый метод расчета. Суть нового метода заключается в том, что он вместо гипотезы Винклера с помощью теории упругости анализирует условия деформации вокруг кругового выреза с радиусом r в бесконечном пространстве, то есть он исходит из предположений, что

а) порода, окружающая обделку тоннеля, однородна, изотропна и совершенно эластична,

б) тоннель находится на такой глубине, что порода, окружающая его, может рассматриваться в любом направлении бесконечной,

в) в плоскости, перпендикулярной поперечному сечению кругового выреза, деформация невозможна, следовательно задача сводится к плоской деформации.

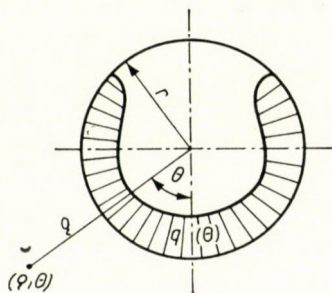
С. А. Орлов дал решение в форме ряда Фурье. Практическое применение данного решения затрудняется из-за медленной сходимости ряда Фурье. Авторы настоящей работы разработали метод расчета, предоставляющий решение в конечной форме. Метод расчета заключается в том, что напряжения и деформации, возникающие в окружности кольца, производятся в конечной форме и вместо ряда Фурье дается конечная формула. Нагрузка от постели, передающаяся от тоннеля на породу может быть приближена постепенно, путем накладывания равномерно-распределенных нагрузок, то есть с помощью ступенчатой схемы (фиг. 2).

2. Основные зависимости

Зададим любую радиальную нагрузку, симметричную вертикальной оси вдоль кругового выреза радиусом r в бесконечном пространстве (фиг. 3). Это можно решить с помощью следующего ряда Фурье:

$$q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \theta. \quad (1)$$

Рассмотрим в точках плоскости напряжения и перемещения от действия нагрузки $q(\theta)$. Как известно из литературы [4], [5] функция напря-



Фиг. 3

жения в таких случаях может быть найдена по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \theta) = & b_0 r^2 \ln \left(\frac{\rho}{r} \right) + b_1 r \rho \theta \sin \theta + b_1' r \rho \ln \left(\frac{\rho}{r} \right) \cos \theta + d_1 r^3 \rho^{-1} \cos \theta + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (b_n r^n \rho^{-n+2} + d_n r^{n+2} \rho^{-n}) \cos n \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $b_0, b_1, b_1', d_1, b_n, d_n$ — постоянные.

Если известна функция $\varphi(\rho, \Theta)$, $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau$ можно определить с помощью [3, 4, 5] следующих основных зависимостей:

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2}, \quad (3)$$

$$\rho_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2}, \quad (4)$$

$$\tau = - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right). \quad (5)$$

Вышеуказанные компоненты должны удовлетворить уравнению совместности

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) (\sigma_\rho + \sigma_\theta) = 0 \quad (6)$$

и нижеследующим граничным условиям:

- 1) если $\rho = r$, радиальное напряжение равняется нагрузке,
если $\rho = \infty$, радиальное напряжение равняется нулю, то есть

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(r, \Theta) &= -q(\Theta), \\ \sigma_\rho(\infty, \Theta) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

- 2) если $\rho = \infty$, касательное напряжение равняется нулю, следовательно:

$$\sigma_\theta(\infty, \Theta) = 0 \quad (8)$$

- 3) на местах $\rho = r$ и $\rho = \infty$ передвигающие напряжения не образуются и, таким образом

$$\left. \begin{aligned} \tau(r, \Theta) &= 0, \\ \tau(\infty, \Theta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

С помощью физических уравнений теории упругости мы можем определить зависимость между напряжениями и перемещениями. Для этой цели будем пользоваться обобщенным законом Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{1 + \mu}{E} [\sigma_\rho - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1 + \mu}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)], \\ \varepsilon_{\rho\theta} &= \frac{1 + \mu}{E} [2\tau], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где E модуль упругости и μ коэффициент Пуассона. Перемещения точек плоскости, а также u радиальные и v касательные компоненты перемещения могут быть получены путем решения системы дифференциальных уравнений Коши:

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad (11)$$

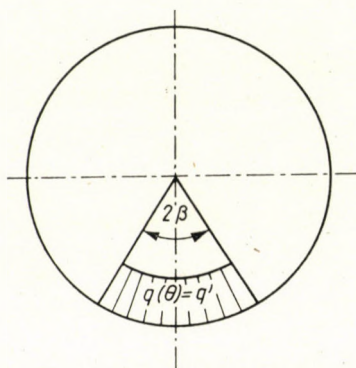
$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right), \quad (12)$$

$$\varepsilon_{\rho\theta} = \frac{\partial v}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \left(v - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \quad (13)$$

Зная u и v может быть определено перемещение от усилий, передающихся через обделку тоннелей.

3. Решение задачи в конечной форме при ступенчатой равномерно-распределенной нагрузке

Рассматриваем случай, когда радиальная постоянная нагрузка, симметрична относительно вертикальной оси, приложена вдоль участка кругового выреза радиусом r . (Фиг. 4.)



Фиг. 4

Граничные условия, описанные в (7), (8), (9), в этом случае изменяются:

$$\sigma_{\rho}(r, \theta) = \begin{cases} -q', & \text{если } \theta < \beta, \\ 0, & \text{если } \theta > \beta, \end{cases} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho}(\infty, \theta) &= 0; & \tau(r, \theta) &= 0; \\ \sigma_{\theta}(\infty, \theta) &= 0; & \tau(\infty, \theta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

С применением результатов С. А. Орлова постоянные в (2) приобретают следующие значения:

$$\begin{aligned} b_0 &= -\frac{q'}{\pi} \beta; & b'_1 &= \frac{q'}{\pi} \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \sin \beta; \\ b_1 &= -\frac{q'}{\pi} \sin \beta; & d_1 &= \frac{q'}{\pi} \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} \sin \beta; \\ b_n &= \frac{q'}{\pi} \frac{\sin n \beta}{n(n-1)}; & d_n &= -\frac{q'}{\pi} \frac{\sin n \beta}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Подставив эти величины, функция напряжения $\varphi(\varrho, \Theta)$ можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho, \Theta) &= \frac{q'}{\pi} \left\{ -r^2 \beta \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) + \left[-r \sigma \Theta \sin \Theta + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} r \varrho \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) \cos \Theta + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} \frac{r^3}{\varrho} \cos \Theta \right] \sin \beta + \\ &+ \left. \sum_{n=2}^{\infty} \left(r^n \varrho^{-(n-2)} \frac{\sin n \beta \cos n \Theta}{n(n-1)} - r^{n+2} \varrho^{-n} \frac{\sin n \beta \cos n \Theta}{n(n+1)} \right) \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Таким образом, функция напряжения образуется как сумма выражений в закрытой форме бесконечного ряда.

Так как мы ищем функцию $\varphi(\varrho, \Theta)$ в конечной форме, то должна быть определена сумма бесконечного ряда, фигурирующего в функции. С этой целью рассматриваем нижеследующие специальные ряды Фурье: (17)

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \sin n \beta \cos n \Theta, & S_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \sin n \beta \sin n \Theta, \\ C_{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \cos n \Theta}{n-1}, & S_{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \sin n \Theta}{n-1}, \\ C_n &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \cos n \Theta}{n}, & S_n &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \sin n \Theta}{n}, \\ C_{n+1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \cos n \Theta}{n+1}, & S_{n+1} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \sin n \Theta}{n+1}, \\ C_{(n-1)n} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \cos n \Theta}{(n-1)n}, & S_{(n-1)n} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \sin n \Theta}{(n-1)n}, \\ C_{n(n+1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \cos n \Theta}{n(n+1)}, & S_{n(n+1)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin n \beta \sin n \Theta}{n(n+1)}, \end{aligned} \right\} (17)$$

Утверждаем и доказываем, что сумма бесконечных рядов с помощью нижеследующих суммирующих формул может быть произведена в конечной форме: (6)

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos nz = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - R^2}{1 - 2R \cos z + R^2} - 1 \right], \text{ если } |R| < 1 \\ \bar{c}_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n} = \left[\ln \frac{1}{\sqrt{1 - 2R \cos z + R^2}} \right], \text{ если } \begin{cases} 0 < z < 2\pi \\ R^2 \leq 1 \end{cases} \\ \bar{s}_1(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n \sin nz = \left[\frac{R \sin z}{1 - 2R \cos z + R^2} \right], \text{ если } |R| < 1 \\ \bar{s}_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n} = \left[\text{arc tg} \frac{R \sin z}{1 - R \cos z} \right], \text{ если } \begin{cases} 0 < z < 2\pi \\ R^2 \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

а в случае $R = 1$

$$\left. \begin{aligned} \bar{c}_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos z}{n} = -\frac{1}{2} \ln \left(2 \sin \frac{z}{2} \right)^2, \text{ если } -\pi < z < \pi \\ \bar{s}_n(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n} = \begin{cases} -\frac{z - \pi}{2}, \text{ если } 0 < z < \pi \\ -\frac{z + \pi}{2}, \text{ если } -\pi < z < 0 \end{cases} \end{aligned} \right\}. \quad (18a)$$

Первым шагом доказательства можно легко убедиться в том, что

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

и

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Формулы в двух последних рядах (17) могут быть выражены предыдущими следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} C_{(n-1)n} &= C_{n-1} - C_n & \text{и} & & S_{(n-1)n} &= S_{n-1} - S_n, \\ C_{n(n+1)} &= C_n - C_{n+1} & \text{и} & & S_{n(n+1)} &= S_n - S_{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Таким образом, в дальнейшем мы должны заниматься только выражениями в первых четырех рядах (17)

Применяя элементарные формулы,

$$\sin n\beta \cos n\theta = \frac{1}{2} [\sin(\theta + \beta) - \sin n(\theta - \beta)]$$

$$\sin n\beta \sin n\theta = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \beta) - \cos n(\theta + \beta)]$$

а также, вводя обозначения:

$$(\theta + \beta) = y; \quad (\theta - \beta) = x$$

получим зависимости

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} \sin n\beta \cos n\theta &= \frac{1}{2} [\sin ny - \sin nx], \\ \sin n\beta \sin n\theta &= \frac{1}{2} [\cos nx - \cos ny]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Подставив (20) в (17), станет ясным, что рассматриваемые выражения, несмотря на переменные x и y могут быть разложены на суммы одинаковой формы. Обозначим переменные x и y с целью упрощения письменной работы, знаком z . В дальнейшем будет достаточно рассматривать нижеследующие суммы (21)

$$\left. \begin{aligned} c_1(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \cos nz; & s_1(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \sin nz; \\ c_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n-1}; & s_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n-1}; \\ c_n(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n}; & s_n(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n}; \\ c_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n+1}; & s_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

С использованием (18) станет очевидным, что произведение $c_1(z)$, $c_n(z)$, а также $s_1(z)$ и $s_n(z)$ в конечной форме можно решить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} c_1(z) &= \bar{c}_1(z) - R \cos z; & s_1(z) &= \bar{s}(z) - R \sin z; \\ c_n(z) &= \bar{c}_n(z) - R \cos z; & s_n(z) &= \bar{s}_n(z) - R \sin z. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Далее:

$$\begin{aligned} c_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} R^{n+1} \frac{\cos(n+1)z}{n} = \\ &= R \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left[\frac{\cos nz}{n} \cos z - \frac{\sin nz}{n} \sin z \right], \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} c_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\cos nz}{n+1} = \sum_{n=3}^{\infty} R^{n-1} \frac{\cos(n-1)z}{n} = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=3}^{\infty} R^n \frac{\cos(n-1)z}{n} = \frac{1}{R} \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\cos(n-1)z}{n} - \left(R + R^2 \frac{\cos z}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left[\frac{\cos nz}{n} \cos z + \frac{\sin nz}{n} \sin z \right] - \left[\frac{R}{2} \cos z + 1 \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} c_{n-1}(z) &= R[\bar{c}_n(z) \cos z - \bar{s}_n(\sin z)], \\ c_{n+1}(z) &= \frac{1}{R} [\bar{c}_n(z) \cos z + \bar{s}_n(z) \sin z] - \left[\frac{R}{2} \cos z + 1 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} s_{n-1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} R^{n+1} \frac{\sin(n+1)z}{n} = \\ &= R \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left[\frac{\sin nz}{n} \cos z + \frac{\cos nz}{n} \sin z \right], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} s_{n+1}(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{\sin nz}{n-1} = \sum_{n=3}^{\infty} R^{n-1} \frac{\sin(n-1)z}{n} = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=3}^{\infty} R^n \frac{\sin(n-1)z}{n} = \frac{1}{R} \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^n \frac{\sin(n-1)z}{n} - R^2 \frac{\sin z}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left[\frac{\sin nz}{n} \cos z - \frac{\cos nz}{n} \sin z \right] - \left[\frac{R}{2} \sin z \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} s_{n-1}(z) &= R[\bar{s}(z) \cos z + \bar{c}_n(z) \sin z] \\ s_{n+1}(z) &= \frac{1}{R} [\bar{s}_n(z) \cos z - \bar{c}_n(z) \sin z] - \left[\frac{R}{2} \sin z \right]. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

После этого сумма рядов Фурье, записанных в (17) на основе (21), (22), (23) и (24) будет следующей:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{2} [s_1(y) - s_1(x)] = \frac{1}{2} [\bar{s}_1(y) - \bar{s}_1(x) - R(\sin y - \sin x)], \\
 C_{n-1} &= \frac{1}{2} [s_{n-1}(y) - s_{n-1}(x)] = \frac{R}{2} [(\bar{s}_n(y) \cos y - \bar{s}_n(x) \cos x) + \\
 &\quad + (\bar{c}_n(y) \sin y - \bar{c}_n(x) \sin x)], \\
 C_n &= \frac{1}{2} [s_n(y) - s_n(x)] = \frac{1}{2} [\bar{s}_n(y) - \bar{s}_n(x) - R(\sin y - \sin x)], \\
 C_{n+1} &= \frac{1}{2} [s_{n+1}(y) - s_{n+1}(x)] = \frac{1}{2R} [(\bar{s}_n(y) \cos y - \bar{s}_n(x) \cos x) - \\
 &\quad - (\bar{c}_n(y) \sin y - \bar{c}_n(x) \sin x)] - \frac{R}{4} [\sin y - \sin x], \\
 S_1 &= \frac{1}{2} [c_1(x) - c_1(y)] = \frac{R}{2} [\bar{c}_1(x) - \bar{c}_1(y) - R(\cos x - \cos y)], \\
 S_{n-1} &= \frac{1}{2} [c_{n-1}(x) - c_{n-1}(y)] - \frac{1}{2} [(\bar{c}_n(x) \cos x - \bar{c}_n(y) \cos y) - \\
 &\quad - (\bar{s}_n(x) \sin x - \bar{s}_n(y) \sin y)], \\
 S_n &= \frac{1}{2} [c_n(x) - c_n(y)] = \frac{1}{2} [(\bar{c}_n(x) - \bar{c}_n(y) - R(\cos x - \cos y))], \\
 S_{n+1} &= \frac{1}{2} [c_{n+1}(x) - c_{n+1}(y)] = \frac{1}{2R} [(\bar{c}_n(x) \cos x - \bar{c}_n(y) \cos y) + \\
 &\quad + (\bar{s}_n(x) \sin x - \bar{s}_n(y) \sin y)] - \frac{R}{4} [\cos x - \cos y].
 \end{aligned} \tag{25}$$

Теперь с учетом вышеизложенных не представляет трудности написать функцию $\varphi(\varrho, \Theta)$ в (16) в конечной форме. Ибо, если в дальнейшем введем обозначение $R = \frac{r}{\varrho}$, то имеем

$$\begin{aligned}
 \varphi(\varrho, \Theta) &= \frac{q'}{\pi} \left\{ -r^2 \beta \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) + \left(-r \varrho \Theta \sin \Theta + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} r \varrho \ln \left(\frac{\varrho}{r} \right) \cos \Theta + \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)} \frac{r}{\varrho} \cos \Theta \right) \sin \beta + \\
 &\quad \left. + \varrho^2 C_{n(n-1)} - r^2 C_{n(n+1)} \right\} \tag{26}
 \end{aligned}$$

Таким образом, с помощью использованных выше зависимостей удалось выразить функцию напряжения в конечной форме.

С помощью функции напряжения мы можем определить конечную формулу σ_ρ , σ_θ и τ . После выполнения всех действий получим значения напряжений:

$$\sigma_\rho = \frac{q'}{\pi} \left\{ R \left[-R\beta + \left(\frac{1-R^2}{2} \cdot \frac{1-2\mu}{1-\mu} - 2 \right) \sin \beta \cos \Theta \right] - \right. \\ \left. - [(1-R^2)C_1 + 2C_n] \right\}, \quad (27)$$

$$\sigma_\theta = \frac{q'}{\pi} \left\{ R \left[R\beta + \left(\frac{1+R^2}{2} \cdot \frac{1-2\mu}{1-\mu} \right) \sin \beta \cos \Theta \right] + \right. \\ \left. + [(1-R^2)C_1 - 2C_n] \right\}, \quad (28)$$

$$\tau = \frac{q'}{\pi} (1-R^2) \left\{ \frac{R}{2} \left(\frac{1-2\mu}{1-\mu} \right) \sin \beta \cos \Theta - S_1 \right\}. \quad (29)$$

А также

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = \frac{q'}{\pi} \left\{ R \frac{\sin \beta \cos \Theta}{\mu-1} - 4C_n \right\}. \quad (30)$$

Функции σ_ρ , σ_θ и τ удовлетворяют (14), (15) условиям окружности. О выполнении условий окружности в (14) с использованием (18а) и (25) можем легко убедиться, так как в этом случае $\rho = r$ или $R = 1$, следовательно:

$$\sigma_\rho(r, \Theta) = \begin{cases} \frac{q'}{\pi} \left\{ -\beta - 2 \sin \beta \cos \Theta - \right. \\ \left. - \left[\frac{\pi-y}{2} + \frac{x-\pi}{2} - (\sin y - \sin x) \right] \right\}, & \text{если } x > 0, \\ \frac{q'}{\pi} \left\{ -\beta - 2 \sin \beta \cos \Theta - \right. \\ \left. - \left[\frac{\pi-y}{2} + \frac{x+\pi}{2} - (\sin y - \sin x) \right] \right\}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

где

$$(\Theta + \beta) = y; \quad (\Theta - \beta) = x.$$

После выполнения действий

$$\sigma_{\varrho}(r, \Theta) = \begin{cases} \frac{q'}{\pi} \{ -\beta - 2 \sin \beta \cos \Theta + \beta + [\sin(\beta - \Theta) + \\ + \sin(\beta + \Theta)] \} = 0, \text{ если } \beta < \Theta, \\ \frac{q'}{\pi} \{ -\beta - 2 \sin \beta \cos \Theta - \pi + \beta + [\sin(\beta - \Theta) + \\ + \sin(\beta + \Theta)] \} = -q', \text{ если } \beta > \Theta. \end{cases}$$

Выполнение заданных по (15) условий станет очевидным, если учтем, что

в случае $\varrho = \infty$ $R = 0$ следовательно $C_1 = C_n = S_1 = 0$

в случае $\varrho = r$ $R = 1$ следовательно $(1 - R^2) = 0$

Характеристики деформации точек плоскости ε_{ϱ} ; ε_{Θ} ; $\varepsilon_{\varrho\Theta}$ получаем, подставив функции (27), (28), (29), (30) в (10)

$$\varepsilon_{\varrho} = - \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ R \left[R\beta + \frac{1}{2(1 - \mu)} \left((3 - 4\mu) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (1 - 2\mu) R^2 \right) \sin \beta \cos \Theta \right] + (1 - R^2) C_1 + 2(1 - 2\mu) C_n \right\}, \quad (31)$$

$$\varepsilon_{\Theta} = \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ R \left[R\beta + \frac{1}{2(1 - \mu)} \left(1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (1 - 2\mu) R^2 \right) \sin \beta \cos \Theta + (1 - R^2) C_1 - 2(1 - 2\mu) C_n \right] \right\}, \quad (32)$$

$$\varepsilon_{\varrho\Theta} = \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} (1 - R^2) \left\{ R \left(\frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} \right) \sin \beta \sin \Theta - 2S_1 \right\}. \quad (33)$$

Зная функции перемещения (31), (32), (33) точек плоскости u и v , (11), (12) получаются как результат решения системы дифференциальных уравнений Коши.

$$u = \int \varepsilon_{\varrho} d\varrho + F_1(\Theta) = \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ r \left[R\beta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2(1 - \mu)} \left(\frac{1 - 2\mu}{2} R^2 - (3 - 4\mu) \ln \varrho \right) \sin \beta \cos \Theta \right] + \right. \\ \left. + (3 - 4\mu) \varrho C_{n-1} - 2(1 - 2\mu) \varrho C_n - r R C_{n+1} \right\} + F_1(\Theta), \quad (34)$$

$$v = \int (\varrho \varepsilon_{\theta} - u) d\theta + F_2(\varrho) = \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ r \left[\frac{1}{2(1 - \mu)} \left(\frac{1 - 2\mu}{2} R^2 + (3 - 4\mu) \ln \varrho + 1 \right) \sin \beta \sin \theta \right] - (3 - 4\mu) \varrho S_{n-1} + 4(1 - \mu) \varrho S_n - r R S_{n+1} \right\} - \int F_1(\theta) d\theta + F_2(\varrho), \quad (35)$$

где $F_1(\theta)$ и $F_2(\varrho)$ являются функциями интегрирования. Далее на основе (13)

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} (1 - R^2) \left\{ \frac{1 - 2\mu}{1 - \mu} R \sin \beta \sin \theta - 2S_1 \right\} + \frac{1}{\varrho} \left(\int F_1(\theta) d\theta + F_1'(\theta) \right) + F_2'(\varrho) - \frac{1}{\varrho} F_2(\varrho), \quad (36)$$

С целью определения функции интегрирования $r_1'(\theta)$ и $F_2(\varrho)$, фигурирующих в функциях u и v , сравним формы $\varepsilon_{\theta\theta}$, заданные в (33) и (36). Из сравнения следует, что

$$\frac{1}{\varrho} \left(\int F_1(\theta) d\theta + F_1'(\theta) \right) + F_2'(\varrho) - \frac{1}{\varrho} F_2(\varrho) = 0. \quad (37)$$

Если уравнение (37) умножим на ϱ и продифференцируем сначала по θ а потом по ϱ , тогда получим дифференциальные уравнения:

$$F_1''(\theta) + F_1(\theta) = 0, \quad (38)$$

$$\varrho F_2''(\varrho) = 0, \quad (39)$$

решение (38) и (39) дает функции интегрирования:

$$F_1(\theta) = K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta,$$

и

$$F_2(\varrho) = K_3 \varrho + K_4.$$

Если определенные величины $F_1(\theta)$ и $F_2(\varrho)$ впишем в (34) и (35), тогда u и v

$$u = \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ r \left[R\beta + \frac{1}{2(1 - \mu)} \left(\frac{1 - 2\mu}{2} R^2 - (3 - 4\mu) \ln \varrho \right) \sin \beta \cos \theta \right] + (3 - 4\mu) \varrho C_{n-1} - 2(1 - 2\mu) \varrho - C_n r R C_{n+1} \right\} + K_1 \cos \theta + K_2 \sin \theta,$$

$$v = \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ r \left[\frac{1}{2(1 - \mu)} \left(\frac{1 - 2\mu}{2} R^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (3 - 4\mu) \ln \varrho + 1 \right) \sin \beta \sin \Theta \right] - (3 - 4\mu) \varrho S_{n-1} + \right. \\ \left. + 4(1 - \mu) \varrho S_n - rRS_{n+1} \right\} - K_1 \sin \Theta + K_2 \cos \Theta + K_3 \varrho + K_4.$$

так как функцию нагрузки $q(\Theta)$ принимаем симметричной вертикальной оси, то необходимо, чтобы

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=0} = 0,$$

и на месте $\Theta = 0$

$$v(\varrho, 0) = 0$$

было удовлетворено, но это может иметь место только при

$$K_2 = 0,$$

$$K_3 \varrho + K_4 = 0.$$

Следовательно,

$$u = \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} r\beta R + \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ \frac{r}{2(1 - \mu)} \left[\frac{1 - 2\mu}{2} R^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - (3 - 4\mu) \ln \varrho + C'_1 \right] \sin \beta \cos \Theta + (3 - 4\mu) \varrho C_{n-1} - \right. \\ \left. - 2(1 - 2\mu) \varrho C_n - rRC_{n+1} \right\}, \\ v = \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \cdot \frac{r[(1 - 2\mu) R^2 + 1]}{2(1 - \mu)} - \sin n\beta \cdot \sin \Theta \\ - \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ \frac{r}{2(1 - \mu)} \left[\frac{1 - 2\mu}{2} R^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - (3 - 4\mu) \ln \varrho + C'_1 \right] \sin \beta \sin \Theta - (3 - 4\mu) \varrho S_{n-1} + \right. \\ \left. + 4(1 - \mu) \varrho S_n - rRS_{n+1} \right\}.$$

Если рассмотрим перемещения вдоль любых кругов постоянного радиуса $\varrho = \text{const}$, то увидим, что каждая точка контура перемещается и как жесткое тело z и как u_0, v_0 относительное перемещение, получаемое вслед-

ствие деформации. Следовательно, центр круга перемещается в направлении результирующей нагрузки на величину

$$Z = - \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ \frac{r}{2(1 - \mu)} \left[\frac{1 - 2\mu}{2} R^2 - (3 - 4\mu) \ln \varrho + C_1' \right] \sin \beta \right\}$$

А относительно круга постоянного радиуса $\varrho = \text{const}$, принятого в ненагруженном состоянии, делает нижеследующие относительные перемещения:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ rR\beta + (3 - 4\mu) \varrho C_{n-1} - \right. \\ &\quad \left. - 2(1 - 2\mu) \varrho C_n - rRC_{n+1} \right\}, \\ v_0 &= \frac{(1 + \mu) q'}{E\pi} \left\{ \frac{r[(1 - 2\mu) R^2 + 1]}{2(1 - \mu)} \sin \beta \sin \Theta - \right. \\ &\quad \left. - (3 - 4\mu) \varrho S_{n-1} + 4(1 - \mu) \varrho S_n - rS_{n+1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Перемещение, как жесткое тело, не имеет никакой связи с работой конструкции и поэтому им можно пренебречь и заниматься только относительными перемещениями.

4. Линии влияния перемещений

Рассмотрим вкратце специальный случай относительных перемещений, когда вдоль кругового отверстия действует сосредоточенная сила P , то есть с использованием зависимостей

$$q' = \frac{P}{2r\beta}, \text{ где } \beta \rightarrow 0$$

а величины u_0 и v_0 будут следующие:

$$\begin{aligned} u_0 &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{(1 + \mu) P}{2ER\pi} \left\{ R^2 + (3 - 4\mu) \frac{C_{n-1}}{\beta} - \right. \\ &\quad \left. - 2(1 - 2\mu) \frac{C_n}{\beta} - R^2 \frac{C_{n+1}}{\beta} \right\}, \\ v_0 &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{(1 + \mu) P}{2ER\pi} \left\{ \frac{R[(1 - 2\mu)] R^2 + 1}{2(1 - \mu)} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \sin \Theta - \right. \\ &\quad \left. - (3 - 4\mu) \frac{S_{n-1}}{\beta} + 4(1 - \mu) \frac{S_n}{\beta} - R^2 \frac{S_{n+1}}{\beta} \right\}. \end{aligned}$$

Известно, что

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin \beta}{\beta} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin n\beta}{\beta} = n.$$

Таким образом, с использованием (22), (23) и (24)

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{C_{n-1}}{\beta} &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{\infty} R \frac{\sin n\beta \cos n\theta}{\beta(n-1)} = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} R^n \frac{n}{n-1} \cos n\theta = c_1(\theta) + c_{n-1}(\theta). \end{aligned}$$

Таким же образом

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{C_n}{\beta} &= c_1(\theta), \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{C_{n+1}}{\beta} &= c_1(\theta) - c_{n+1}(\theta), \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{S_{n-1}}{\beta} &= s_1(\theta) + s_{n-1}(\theta), \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{S_n}{\beta} &= s_1(\theta), \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{S_{n+1}}{\beta} &= s_1(\theta) - s_{n+1}(\theta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{(1 + \mu)P}{2ER\pi} \left\{ R^2 + (1 - R^2) c_1(\theta) + (3 - 4\mu) c_{n-1}(\theta) + \right. \\ &\quad \left. + R^2 c_{n+1}(\theta) \right\}, \\ v_0 &= \frac{(1 + \mu)P}{2ER\pi} \left\{ \frac{R[(1 - 2\mu)R^2 + 1]}{2(1 - \mu)} \sin \theta + (1 - R^2) s_1(\theta) - \right. \\ &\quad \left. - (3 - 4\mu) s_{n-1}(\theta) + R^2 s_{n+1}(\theta) \right\}. \end{aligned}$$

Для инженерной практики в первую очередь имеют значения величины относительных перемещений вдоль окружности кругового выреза. Следовательно, нас интересуют в первую очередь величины функций u_0 ; v_0 в местах $\varrho = r$ то есть $R = 1$. Они могут быть записаны с использованием (18а) и (25) в следующей конечной форме по дуге $2r\beta$ в случае равномерно

распределенной нагрузки

$$\begin{aligned}
 u_0|_{\varrho=r} = & \frac{(1+\mu)q'r}{E\pi} \left\{ \beta + (1-2\mu) \left[(y-\pi) \sin^2 \frac{y}{2} - \xi \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \right] - \right. \\
 & - (1-\mu) \left[(\sin y) \ln \left(2 \sin \frac{y}{2} \right)^2 - (\sin x) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 \right] + \\
 & \left. + \frac{5-8\mu}{4} [\sin y - \sin x] \right\}, \quad (41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_0|_{\varrho=r} = & \frac{(1+\mu)q'r}{E\pi} \left\{ \sin \beta \sin \Theta - 2(1-\mu) \left[\left(\sin^2 \frac{x}{2} \right) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 - \right. \right. \\
 & - \left. \left(\sin^2 \frac{y}{2} \right) \ln \left(2 \sin \frac{y}{2} \right)^2 \right] - \frac{1-2\mu}{2} [\xi \sin x - (y-\pi) \sin y] - \\
 & \left. - \frac{7-8\mu}{4} [\cos x - \cos y] \right\}, \quad (42)
 \end{aligned}$$

где

$$\xi = \begin{cases} (x - \pi) & \text{если } x > 0, \\ (x + \pi) & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

и

$$y = (\Theta + \beta); \quad x = (\Theta - \beta).$$

Далее с применением (18а), (23) и (24) в случае сосредоточенной нагрузки

$$\begin{aligned}
 U_0|_{\varrho=r} = & - \frac{(1+\mu)P}{2E\pi} \left\{ \left[2(1-\mu) \ln \left(2 \sin \frac{\Theta}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \cos \Theta + \right. \\
 & \left. + (1+2\mu)(\pi - \Theta) \sin \Theta \right\}. \quad (43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_0|_{\varrho=r} = & \frac{(1+\mu)P}{2E\pi} \left\{ \left[2(1-\mu) \ln \left(2 \sin \frac{\Theta}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \sin \Theta + \right. \\
 & \left. + (1-2\mu)(\pi - \Theta) \cos \Theta \right\}. \quad (44)
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы перемещения могли быть записаны по линиям влияния, рассмотрим, по дуге $2r\beta$ перемещения от равномерно распределенной нагрузки с единичной результирующей, то есть от $q = \frac{1}{2r\beta}$. Подставляя в выражения (41), (42), получим, что

$$\eta = u_0|_{e=r} = \frac{(1+\mu)}{2E\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta} \left[(1-2\mu) \left((y-\pi) \sin^2 \frac{y}{2} - \xi \sin^2 \frac{x}{2} \right) - (1-\mu) (\sin y) \ln \left(2 \sin \frac{y}{2} \right)^2 - (\sin x) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right)^2 + \frac{5-8\mu}{4} (\sin y - \sin x) \right] \right\}, \quad (45)$$

$$\zeta = v_0|_{e=r} = \frac{(1+\mu)}{2E\pi} \left\{ \frac{\sin \beta}{\beta} \sin \Theta - \frac{1}{\beta} \left[2(1-\mu) \left(\left(\sin^2 \frac{x}{2} \right) \ln \left(2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)^2 - \left(\sin^2 \frac{y}{2} \right) \ln \left(2 \sin \frac{y}{2} \right)^2 \right) + \frac{1-2\mu}{2} (\xi \sin x - (y-\pi) \sin y) + \frac{7-8\mu}{4} (\cos x - \cos y) \right] \right\}, \quad (46)$$

где

$$\xi = \begin{cases} (x-\pi) \text{ ha } x > 0 \\ (x+\pi) \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$

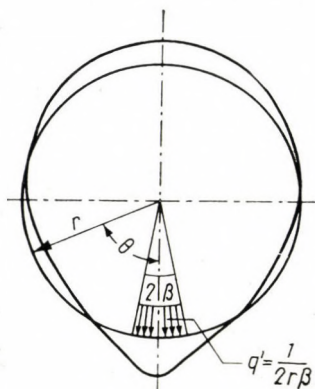
и

$$y = (\Theta + \beta); \quad x = (\Theta - \beta).$$

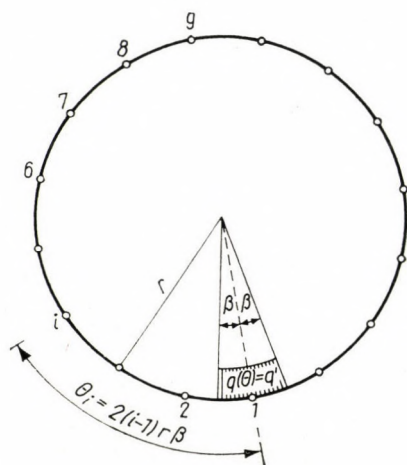
Ниже рассчитаем величины η при $\beta = 11^\circ 30'$ и $\mu = 0,3$ на точках круговой кривой, изображенных на фиг. 6.

Для сравнения ординат линий влияния публикуем величины, рассчитанные по С. А. Орлову с помощью бесконечного ряда, и точные величины на основе конечного выражения, определенного нами.

Схемы перемещения, определенные из вышеизложенных формул (фиг. 5), можем рассматривать, как частные линии влияния, относящиеся к любой точке кругового выреза.



Фиг. 4



Фиг. 5

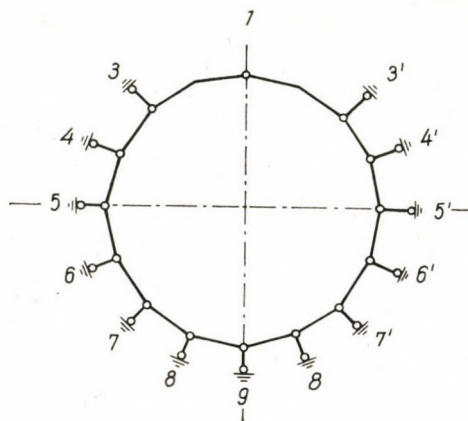
Таблица 1.

θ		0°	$22^\circ 30'$	45°	$67^\circ 30'$	90°	$112^\circ 30'$	135°	$157^\circ 30'$	180°
η_k		η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9
приближенные значения η при учете « n » членов ряда	$n = 8$	+ 1,31	+ 0,39	— 0,08	— 0,22	— 0,11	+ 0,04	+ 0,30	+ 0,42	+ 0,52
	$n = 16$	+ 1,43	+ 0,34	— 0,09	— 0,21	— 0,13	+ 0,06	+ 0,28	+ 0,44	+ 0,50
	$n = 32$	+ 1,37	+ 0,36	— 0,09	— 0,20	— 0,12	+ 0,06	+ 0,28	+ 0,44	+ 0,50
	$n = 64$	+ 1,38	+ 0,35	— 0,09	— 0,20	— 0,12	+ 0,06	+ 0,28	+ 0,44	+ 0,50
точные величины η		+ 1,3873	+ 0,3517	— 0,0892	— 0,2052	— 0,1117	+ 0,0636	+ 0,2766	+ 0,4389	+ 0,5000

Из таблицы видно, что даже при учете 64 членов Фурье имеются значительные отклонения от точных величин.

5. Практическое применение расчета для тоннельных обделок

Таблица (1) пригодна также при расчете круговых обделок приближенных к 16-ти угольному многоугольнику в упругой окружающей среде на основе физических характеристик (E, μ) породы, окружающей тоннель. Основную систему в этом случае можем принять за трехшарнирную арку, опирающуюся на шарнирную цепь, подпертую упругими стержнями (фиг. 7).



Фиг. 6

Система канонических уравнений на основе метода сил:

$$\begin{aligned} a_{11} M_1 + a_{13} M_3 + a_{14} M_4 + \dots + a_{19} M_9 + a_{10} &= 0 \\ a_{31} M_1 + a_{33} M_3 + a_{34} M_4 + \dots + a_{39} M_9 + a_{30} &= 0 \\ \vdots & \\ a_{91} M_1 + a_{93} M_3 + a_{94} M_4 + \dots + a_{99} M_9 + a_{90} &= 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты системы уравнений в случае $(EJ) = \text{constans}$

$$(a_{ik}) = \int M_i M_k ds + \frac{J}{F} \sum N_i N_k + EJ \sum \frac{u_i R_k}{D}$$

Надо обратить особое внимание на последний член, выражающий работу основания. Подпирающие силы вдоль окружности обозначены R , а соответствующие перемещения — u .

в следующем виде

$$\mathbf{H} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1,2756 & 0,4153 & 0,1874 & 0,2337 & 0,3883 & 0,5025 & 0,2766 \\ 0,4153 & 1,6639 & 0,7906 & 0,4108 & 0,2337 & 0,1649 & 0,0636 \\ 0,1874 & 0,7906 & 1,8873 & 0,7906 & 0,1874 & -0,1416 & -0,1117 \\ 0,2337 & 0,4108 & 0,7906 & 1,6639 & 0,4153 & -0,2009 & -0,2052 \\ 0,3883 & 0,2337 & 0,1874 & 0,4153 & 1,2756 & 0,1465 & -0,0892 \\ 0,5025 & 0,1649 & -0,1416 & -0,2009 & 0,1465 & 1,2981 & 0,3517 \\ 0,5532 & 0,1272 & -0,2234 & -0,4104 & -0,1784 & 0,7034 & 2,7746 \end{bmatrix}$$

Имея в виду, что матрица-столбец \mathbf{u} , выражающая перемещение, должна быть определена из подпирающих сил, возникающих от единичных моментов, действующих в узлах основной системы и от внешней нагрузки, целесообразно обозначить ее индексом. Индексы « i » и « 0 » обозначают, от каких нагрузок возникают — от единичных или внешних, и в какой точке они действуют.

Таким образом, предыдущее выражение примет вид

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_i$$

и

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_0$$

Выражение в матричной форме имеет следующий вид

$$\sum \mathbf{u}_i R_k = \mathbf{u}_i^* \mathbf{r}_k$$

или

$$\sum \mathbf{u}_0 R_0 = \mathbf{u}_0^* \mathbf{r}_0$$

Следовательно, член в системе канонических уравнений коэффициентов, выражающий работу постели грунта, можем определить, если строчную матрицу (транспонированную матрицу-столбец) умножим на колонную матрицу сил \mathbf{r} , приложенных в точке « k » от действия единичной пары моментов или наружной нагрузки.

В заключении авторы выражают благодарность математику Ласло Кольману за ценную помощь в контроле выводов и проведении числовых расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Под ред. В. П. Волкова: Тоннели, Москва 1945
2. К. Сечи: Тоннелестроение (конспект на венгерском языке). 1960
3. С. С. Давидов: Расчет и проектирование подземных конструкций. Москва 1950
4. Тимошенко: Теория упругости. 1935
5. С. А. Орлов: Расчет конструкций, лежащих на контуре кругового выреза в плоскости. Исследования по теории сооружений. Выпуск VI. Москва 1954
6. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва 1951

РЕЗЮМЕ

Обделка тоннелей, построенных под уровнем грунтовой воды часто выбирается с круговым сечением. По современному методу она рассчитывается как кольцо в упругой среде. Упругое основание учитывается коэффициентом постели. Но коэффициент постели не является физической характеристикой грунта, он зависит от формы и размера нагружающего тела, от нагрузки и т. д.

Обделка тоннеля от действия нагрузки деформируется; с этой точки зрения мы можем различать две зоны: зону отлипания, где обделка перемещается во внутрь и нагружающую зону, где тоннель опирается на окружающий грунт.

Метод С. А. Орлова, разработанный на основе теории упругости определяет напряжения и деформации от действия радиальных нагрузок вдоль кругового отверстия с помощью рядов Фурье.

Но из-за медленной сходимости рядов Фурье точные величины не могут быть получены даже при учете 64 членов. Работа авторов устраняет огромное количество расчетов и предоставляет новое решение, выводя конечные выражения для определения напряжений и деформаций. Таким образом, деформационная работа обделки удобнее может быть рассчитана с учетом физических характеристик грунта (коэффициент Пуассона μ и модуль упругости E).

В статье даются схемы перемещения кольца, приближенного к 16-ти угольнику а также его величины в табличной форме, сравнивая точные величины с приближенными, полученными с помощью рядов Фурье.

DEFORMATION EINER KREISAUSSCHNITTKONTUR IN ELASTISCHER EBENE
INFOLGE RADIALER BELASTUNG

L. RÓZSA und G. KOVÁCS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Auskleidung von unter dem Grundwasserspiegel gebauten Tunneln wird oft mit Kreisquerschnitt gewählt. Die Tunnelmauerung ist nach zeitgemäßer Methode als ein in elastisches Medium gebetteter Ring zu bemessen. Die Bettungsziffer ist aber keine bodenphysikalische Kennzahl; sie hängt von Form und Größe des zu belastenden Körpers, von der Belastung, usw. ab.

Durch die Wirkung der Belastung deformiert sich die Tunnelmauerung. In diesem Zustande können wir zwei Zonen unterscheiden: die von Absonderung, wo sich die Mauerung nach innen bewegt und die »belastende« Zone, wo sich die Mauerung auf das umliegende Gestein stützt. Die auf Grund der Elastizitätstheorie ausgearbeitete Orlov'sche Methode nähert die durch radiale Belastung entstandenen Spannungen und Deformationen mit Hilfe von Fourier-Reihen an.

Infolge der langsamen Konvergenz der Fourier-Reihen können genaue Werte auch mit Berücksichtigung von 64 Gliedern nicht erzielt werden.

Die Arbeit der Verfasser verringert den Rechenaufwand in bedeutendem Maße und bietet eine neue Lösung, die endliche Werte für Spannungen sowie Deformationen liefert. Dadurch kann die Deformationsarbeit der Tunnelausmauerung durch Berücksichtigung von physikalischen Kennzahlen (Poisson'scher Koeffizient μ , Elastizitätsmodul E) des umgebenden Gesteines einfacher berechnet werden.

Der Aufsatz gibt die Bewegungsdiagramme des mit dem 16-seitigen Vieleck angenäherten Ringes an und vergleicht die Werte desjenigen im Falle beider Lösungen: die eine mit endlichen, und die andere mit den annähernden Werten (Fourier-Reihen).

DEFORMATION OF CIRCULAR OPENING OUTLINE IN ELASTIC PLANE BY RADIAL LOAD

L. RÓZSA and G. KOVÁCS

SUMMARY

Tunnel linings under groundwater usually have a circular cross-section. According to up-to-date calculation methods they might be considered as ring, bedded into an elastic media. Elastic bedding is taken into consideration by a bedding coefficient. But bedding coefficient is not a soil physics characteristic; it depends on the shape and size of loading body, on load, and so on.

Under load the tunnel lining becomes deformed; in this state we may distinguish two sections on the lining: that of parting, where the lining is displaced inward by and that of loading, where the tunnel bears up against the surrounding media.

The Orlov method, elaborated on the basis of the theory of elasticity determines strain and deformation from radial load along the circular opening outline with the help of Fourier's series. But, due to the slow convergence of Fourier's series exact values can not be obtained, even if we take 64 members of them into consideration. The authors' proposal eliminates computation work of immense volume and affords a new solution derivating finite values for the determination of the stress and deformation. By this method the strain work of tunnel lining may be calculated by taking the physical characteristics of surrounding media into consideration (Poisson's ratio μ , Young's modulus E).

The paper expounds displacement diagrams of ring, approached by 16-angled polygons, and a tabulated chart to make a comparison between its values obtained by the two methods (that of with finite expressions and that of approximating ones by the Fourier's series).

DÉFORMATION DES CONTOURS D'OUVERTURES CIRCULAIRES SITUÉES DANS UN PLAN, SOUS L'EFFET DE CHARGES RADIALES

L. RÓZSA et G. KOVÁCS

RÉSUMÉ

Le parement des tunnels construits sous une nappe aquifère est souvent choisi de section circulaire. Actuellement, pour établir les dimensions du parement, on l'assimile à un anneau inséré dans un milieu élastique. Le radier élastique est déterminé au moyen du coefficient de radier. Mais ce dernier n'est pas une caractéristique de la physique du sol, et dépend de la forme et de la grandeur de la masse de chargement, de l'intensité de la charge, etc. . .

Le parement du tunnel se déforme sous l'action de la charge. De ce point de vue, on peut distinguer deux secteurs du parement: le secteur de détachement, où le parement se déplace vers l'intérieur, et le secteur de charge où le tunnel s'appuie sur les roches environnantes. Le procédé d'Orlov, basé sur la théorie de l'élasticité, procède par approximation au moyen d'une série Fourier, pour déterminer l'effort et les déformations provenant des charges radiales qui agissent le long des ouvertures de forme circulaire.

Même en considérant 64 membres, on ne peut obtenir de valeurs exactes, à cause de la lente convergence des séries Fourier. L'étude élimine le travail considérable de calcul, et donne un nouveau mode de solution permettant d'obtenir des valeurs finies pour les efforts aussi bien que pour les déformations. De cette manière, le travail de déformation du parement du tunnel peut être calculé plus rapidement, compte tenu des caractéristiques physiques de la roche environnante (coefficient de Poisson, module d'élasticité E).

L'étude fait connaître le diagramme de déplacement de l'anneau assimilé à un polygone de 16 côtés, et compare les valeurs calculées avec les séries infinies connues de la littérature, et celles de la fonction de forme finie, élaborée par les auteurs.

ECONOMICAL LOADING OF NETWORKS CONNECTED PARALLEL ON TWO OPERATING VOLTAGES

CH. SZENDY

D. ENG. SC.

POWER STATIONS ENGINEERING INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received December 16, 1960]

Superimposed transmission lines may be connected parallel to the network operating on a lower voltage level. The impedance angles in networks and in the transformers connecting them are usually different. Therefore, the current distribution cannot produce minimum loss in the whole system containing the original and superimposed networks. However, the line-losses can be reduced by means of regulating transformers installed at different points of the network connections. The following method enables us to determine

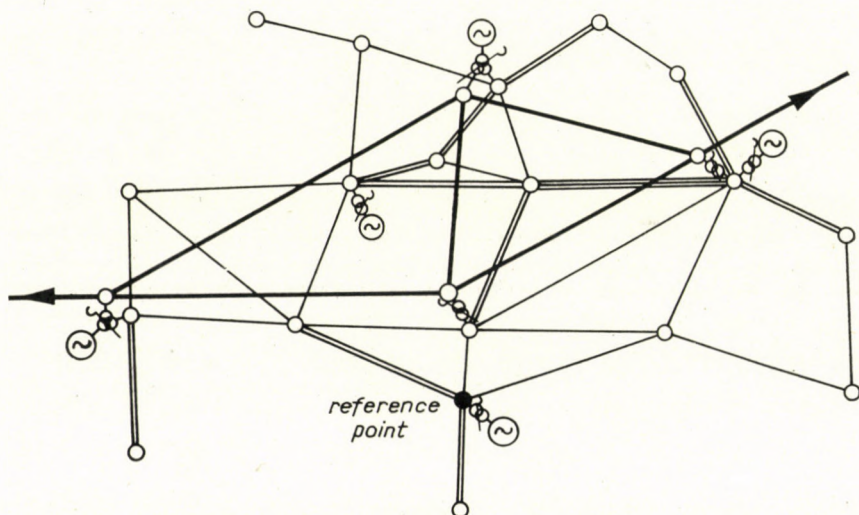


Fig. 1

the voltage of the regulating transformers. The overall economy of the transmission system can be achieved by these regulating voltages.

In Fig. 1 the original and the superimposed networks are connected by transformers 1, 2, \dots , k which contain the regulating units. The regulating transformers can be substituted by series-voltage generators which take energy from the network like a shunt load. This shunt load can be neglected

with respect to the ordinary network loads connected to the individual node points. If, on the contrary, the shunt load of the regulating transformers has sufficiently high values, it must be taken into account by means of iterations.

The task is to evaluate the series-voltages rises $u_{S1}, u_{S2}, \dots, u_{Sk}$ of the regulating transformers 1, 2, \dots , k at the joining points of the two networks. (This is an arbitrary alternative because the regulating transformers may be installed anywhere in the network.) Not only the magnitudes of the series voltages but also their angles are important to achieve a minimum of line losses, so that the use of complex voltages is necessary for this purpose. The individual components can be expressed in a matrix form. In the whole system, sources and load are concentrated only in the node points. The source currents have positive, the load currents negative signs (i_1, i_2, \dots, i_m). The node voltages (u_1, u_2, \dots, u_m), related to a common, well-chosen reference point, can be expressed from the node currents by means of the network impedances. Supplementing the above-mentioned relation between node voltages and currents with the impressed series voltages and currents, we can determine the relations of the whole system. The node values are distinguished by index N , the series values by index S . The matrix equation is:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N &= \mathbf{Z}_{NN} \mathbf{i}_N + \mathbf{Z}_{NS} \mathbf{i}_S \\ \mathbf{u}_S &= \mathbf{Z}_{SN} \mathbf{i}_N + \mathbf{Z}_{SS} \mathbf{i}_S. \end{aligned} \quad (1)$$

\mathbf{i}_S is the matrix of the currents through the regulating transformer, where sign is positive if current flows from the lower voltage network to the higher voltage network,

\mathbf{Z}_{NN} is the matrix of self impedance between the node voltages and currents,

\mathbf{Z}_{SS} is the matrix of self impedance between the series voltages and currents,

\mathbf{Z}_{NS} is the matrix of mutual impedances between the node voltages and series currents,

\mathbf{Z}_{SN} the matrix of mutual impedance between the series voltages and node currents.

The following relations may be written for these impedance matrices:

$$\mathbf{Z}_{NN} = \mathbf{Z}_{NN}^*, \quad \mathbf{Z}_{SN} = \mathbf{Z}_{NS}^*, \quad \mathbf{Z}_{SS} = \mathbf{Z}_{SS}^*$$

(Sign * means the transposed matrix.)

Arranging Eq. (1), we obtain the following form:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N &= \mathbf{Z} \mathbf{i}_N + \mathbf{K} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{i}_S &= -\mathbf{K}^* \mathbf{i}_N + \mathbf{Y} \mathbf{u}_S, \end{aligned} \quad (2)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{Z}_{NN} - \mathbf{Z}_{NS} \mathbf{Z}_{SS}^{-1} \mathbf{Z}_{SN} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{Z}_{NS} \mathbf{Z}_{SS}^{-1} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{Z}_{SS}^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

The voltages are related to a reference point, so that the line losses can be expressed in the following form:

$$S_L = P_L + jQ_L = \bar{\mathbf{i}}_N^* \mathbf{u}_N + \bar{\mathbf{i}}_S^* \mathbf{u}_S.$$

The dash above the letters means conjugate values.)

S_L , P_L and Q_L are the complex, active, and reactive power losses respectively. Substituting Eq. (2) into the loss formula, we obtain

$$S_L = \bar{\mathbf{i}}_N^* \mathbf{Z} \mathbf{i}_N + \bar{\mathbf{i}}_N^* \mathbf{K} \mathbf{u}_S - \bar{\mathbf{i}}_N^* \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}_S + \mathbf{u}_S^* \mathbf{Y}^* \mathbf{u}_S \quad (4)$$

where matrices \mathbf{Z} , \mathbf{K} , \mathbf{Y} can be divided into two parts. One contains the real, the other the imaginary components. So

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{R} + j\mathbf{X} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{F} + j\mathbf{H} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{G} + j\mathbf{B}. \end{aligned} \quad (5)$$

In the arbitrary co-ordinate system, the real parts of voltages \mathbf{u}_N , \mathbf{u}_S , and currents \mathbf{i}_N , \mathbf{i}_S are denoted by \mathbf{u}_{Nd} , \mathbf{u}_{Sd} , and \mathbf{i}_{Nd} , \mathbf{i}_{Sd} , the imaginary parts by \mathbf{u}_{Nq} , \mathbf{u}_{Sq} , and \mathbf{i}_{Nq} , \mathbf{i}_{Sq} , therefore

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N &= \mathbf{u}_{Nd} + j\mathbf{u}_{Nq} \\ \mathbf{u}_S &= \mathbf{u}_{Sd} + j\mathbf{u}_{Sq} \\ \mathbf{i}_N &= \mathbf{i}_{Nd} + j\mathbf{i}_{Nq} \\ \mathbf{i}_S &= \mathbf{i}_{Sd} + j\mathbf{i}_{Sq}. \end{aligned} \quad (6)$$

Hence, the active power loss may be written in the following form, considering the symmetry of matrices \mathbf{R} , \mathbf{X} , \mathbf{G} , and \mathbf{B} .

$$\begin{aligned} P_L &= \mathbf{i}_{Nd}^* \mathbf{R} \mathbf{i}_{Nd} + \mathbf{i}_{Nq}^* \mathbf{R} \mathbf{i}_{Nq} + 2 \mathbf{u}_{Sd}^* \mathbf{H}^* \mathbf{i}_{Nq} - 2 \mathbf{u}_{Sq}^* \mathbf{H}^* \mathbf{i}_{Nd} + \\ &\quad + \mathbf{u}_{Sd}^* \mathbf{G} \mathbf{u}_{Sd} + \mathbf{u}_{Sq}^* \mathbf{G} \mathbf{u}_{Sq}. \end{aligned} \quad (7)$$

The condition of loss minimum belonging to series voltages ($\mathbf{u}_S = \mathbf{u}_{Sd} + j\mathbf{u}_{Sq}$) may be formulated as

$$\mathbf{grad} P_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_L}{\partial u_{S1,d}} \\ \vdots \\ \frac{\partial P_L}{\partial u_{Sk,d}} \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{u}_{Sd}$$

$$\mathbf{grad} P_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_L}{\partial u_{S1,q}} \\ \vdots \\ \frac{\partial P_L}{\partial u_{Sk,q}} \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{u}_{Sq}$$
(8)

On the basis of this condition we can derive from loss equation (7) the following form, assuming that the node current vector \mathbf{i}_N is independent of the series voltage vector \mathbf{u}_S :

$$\mathbf{H}^* \mathbf{i}_{Nq} + \mathbf{G} \mathbf{u}_{Sd} = 0$$

$$-\mathbf{H}^* \mathbf{i}_{Nd} + \mathbf{G} \mathbf{u}_{Sq} = 0.$$

These equations may be reduced on basis of Eq. (6), and — after arrangement — the *minimum loss condition* may be formulated as

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{G}^{-1} j \mathbf{H}^* \mathbf{i}_N. \quad (9)$$

In Eq. (9) the components of matrices \mathbf{G} and \mathbf{H} can be obtained by means of a network analyser as shown in Fig. 2. For instance, the component $H_{S2,3}$ can be determined by using the circuit shown in the figure. In this circuit the regulating transformer is represented by e. m. f. \mathbf{u}_{S2} connected in series to the

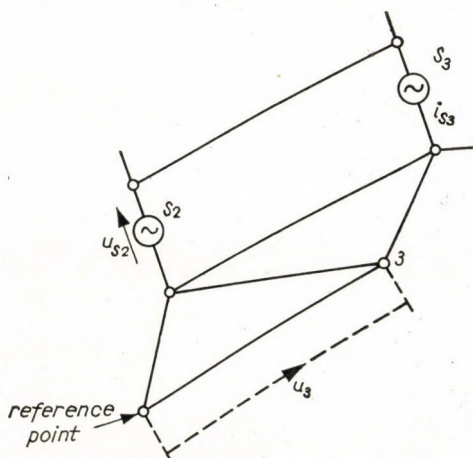


Fig. 2

network. At the same time, the e. m. f. or the other regulating transformer is zero. The measurement of the potential difference between node point 3 and the reference point gives the constant $H_{S_2,3}$. So

$$H_{S_2,3} = \frac{u_3 \sin \psi_{3,S_2}}{u_{S_2}}$$

where ψ_{3,S_2} is the phase angle between the vector u_{S_2} and u_3 (See Fig. 3).

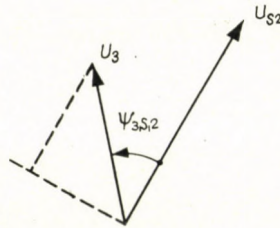


Fig. 3

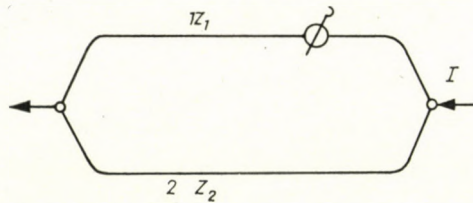


Fig. 4

Similarly the component G_{S_3,S_2} is obtained by supplying voltage u_{S_2} in place of S_2 and measuring the current i_{S_3} in the regulating transformer S_3 .

Hence

$$G_{S_3,S_2} = \frac{i_{S_3} \cos \psi_{S_3,S_2}}{u_{S_2}}$$

where ψ_{S_3,S_2} is the phase angle between the vector u_{S_2} , i_{S_3} .

Example :

In a simple case, represented in Fig. 4, there are two branches. The impedances Z_1 and Z_2 are in the two branches. So the constant H can be determined as before, i. e. by inserting the e. m. f. into one of the branches (Fig. 4).

Therefore, in the impedance diagram, as shown in Fig. 5, the constant H can be expressed as a quotient of distances D and Z :

$$H = \frac{D}{Z}.$$

The conductivity of the circuit, consisting of the branches 1 and 2,

$$G = \frac{R}{Z^2}.$$

From Eq. (9) the regulating voltage is obviously:

$$u_s = \frac{H}{G} I = \frac{A_1}{A} XjI$$

where X is the reactance of the mesh 1—2

A_1 and A are the areas of triangle OMQ and OMN , represented in Fig. 5.

I is the supply current.

Further, from Fig. 5 the regulating voltage can be determined:

$$u_s = \frac{r_1 x_2 - r_2 x_1}{(r_1 + r_2)(x_1 + x_2)} (x_1 + x_2) jI.$$

The phase angle between the regulating voltage u_s and the supply current I is 90° (Fig. 6). Therefore, the problem can be solved only with regulating transformers which control the

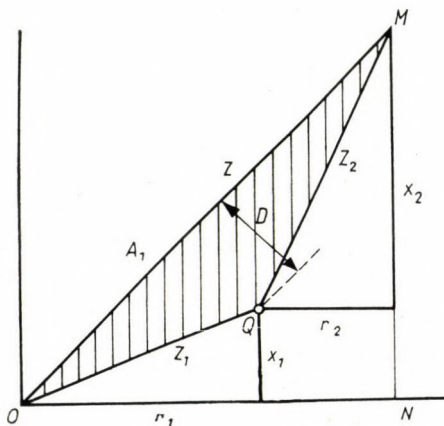


Fig. 5

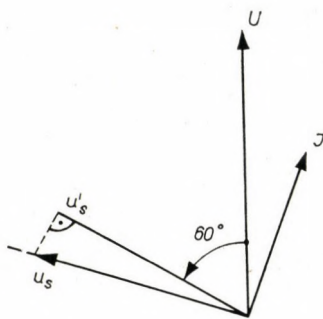


Fig. 6

phase angle also. If the phase angle between the regulating voltage and the terminal voltage is 60° , the regulating voltage is the projection of voltage u_s which is equal to voltage u_s (see Fig. 6).

SUMMARY

The line losses of networks connected parallel can be reduced by the suitable application of regulating transformers. The criterion of minimum loss may be formulated by means of resistive voltage matrix u_s . This can be determined by network matrices G and H as measured by a network analyser.

WIRTSCHAFTLICHE ARBEITSWEISE VON ZWEI MITEINANDER
PARALLELGESCHALTETEN, AUF ZWEI VERSCHIEDENEN
SPANNUNGSNIVEAUS ARBEITENDEN NETZWERKEN

K. SZENDY

ZUSAMMENFASSUNG

Es ist möglich die Leitungsverluste von parallelgeschalteten Netzwerken durch die Aufstellung von entsprechenden Regeltransformatoren herabzusetzen. Das Verlustminimum kann mittels einer resistiven Spannungsmatrix u_s erfasst werden. Dieser Wert kann mit Hilfe von Matrixen G und H die an Netzmodellen meßbar sind, errechnet werden.

L'EXPLOITATION ÉCONOMIQUE DE RÉSEAUX CONNECTÉS EN PARALLÈLE,
FONCTIONNANT À DEUX NIVEAUX DE TENSION

Ch. SZENDY

RÉSUMÉ

La perte en ligne des réseaux connectés en parallèle peut être réduite par l'application appropriée de transformateurs de réglage. La plus petite perte peut être définie par la matrice de tension résistive u_s . Cette valeur peut être déterminée à l'aide de matrices G et H mesurables par un analyseur de réseau.

РЕНТАБЕЛЬНАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ
СЕТЕЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ДВУХ УРОВНЯХ
НАПРЯЖЕНИЯ

К. СЕНДИ

РЕЗЮМЕ

Потери в проводах параллельно соединенных сетей могут быть снижены путем соответствующего применения регулирующих трансформаторов. Наименьшие потери u_s определимы посредством резистивной матрицы напряжения. Это значение может быть определено с помощью матриц G и H , замеримых сетевой моделью.

DIE ARCHITEKTUR DER EMPFANGSGEBÄUDE BEI DEN EUROPÄISCHEN EISENBAHNEN

(GESCHICHTLICHER ÜBERBLICK)

M. KUBINSZKY

HOCHSCHULE FÜR FORSTINGENIEURE, LEHRSTUHL FÜR BAUWESEN, SOPRON

[Eingegangen am 16. Februar 1961]

Der Aufsatz wünscht mit der Behandlung der Empfangsgebäude einen Teil der Geschichte europäischer Architektur zu beleuchten. Das viel umstrittene 19. Jahrhundert wurde wegen der Unselbständigkeit seiner Baustile von der Kunstgeschichte bis zur jüngsten Zeit kaum gewürdigt, obwohl wir heute schon feststellen müssen, daß der Ausgangspunkt vieler wertvoller Merkmale unserer eigenen Epoche gerade in diesem, von vielen noch immer unterschätztem Zeitalter zu finden ist. Es herrschte auch allgemein die Auffassung, daß im 19. Jahrhundert nur einzelne, mit besonderen Fähigkeiten begabte, allgemein bekannte Baumeister wahre Kunstwerke schufen. PEVSNER dagegen stellt in seinem Buch »Europäische Architektur« fest: »wo das 19. Jahrhundert zu wirklich brauchbaren Lösungen gelangte, handelt es sich nicht um Leistungen bestimmter namhafter Architekten, sondern um einen zum mindesten dem Anschein nach anonymen Entwicklungsprozeß«. Die Geschichte gewisser Hochbauten der Eisenbahnen will nachfolgend eben diesen Entwicklungsprozeß am Beispiel eines jener Zweckbauten erläutern, welche für die Gesamtentwicklung im 19. und auch im frühen 20. Jahrhundert charakteristisch waren.

Das Thema muß mit der Berücksichtigung der Wechselbeziehungen zwischen Funktion, Konstruktion und Bauform behandelt werden. Die Funktion wurde von Anfang an auch bei den Eisenbahnhochbauten von den praktischen Bedürfnissen bestimmt. Zwischen den vielen neuen Bauaufgaben des 19. Jahrhunderts können wir aber kaum noch eine finden, wo sich die Funktion, der rapiden Entwicklung der allgemeinen Technik folgend, ebenso schnell und so prägnant entwickelte. Aber auch die Entwicklung der Baukonstruktion spielt — besonders bei den großen Bahnhofshallen — eine wichtige Rolle und führt außerdem zu einer völlig neuen architektonischen Behandlung des umbauten Raumes. Neben der der Funktion entsprechenden Grundrißbildung und der neuen Raumgestaltung muß man aber auch die allgemeinen Formströmungen in Betracht ziehen, weil jene, oft fast ausschließlich beobachtet, und dadurch zu einem falschen Urteil führend, doch auf die ganze Entwicklung der Architektur charakteristisch waren.

Die wirtschaftliche, politische und gesellschaftliche Entwicklung, besonders aber mit diesen eng verbunden jene der Technik, — in engerem Sinne die Eisenbahntechnik — beeinflusste stark die rasche Veränderung der Bedürfnisse, weshalb wir auch die flüchtige Behandlung dieser Umstände an einigen Teilen nicht entbehren können. In der Funktion, der Konstruktion und der Form der Empfangsgebäude aber bestehen unter anderem auch angesichts ihrer Größenordnung beträchtliche Unterschiede. Die vollkommene Übersicht verlangt die gemeinsame Behandlung der Großstadtbahnhöfe, der mittelgroßen Stationen und auch jene der kleinen Anlagen, wenn nicht gar Haltestellen. Bis die kleineren Bahnhofsgebäude oft in größeren Mengen, manchmal auch mittels Typenplänen gebaut wurden, sind sie nicht so vielfältig wie die größeren Anlagen. Bei den ganz großen Werken können wir oft eine sich den jeweiligen Umständen anpassende und daher einmalige, für das ganze dennoch charakteristische Lösung finden. Dies ist der Grund dafür, nicht ihre Größe allein, daß die Bedeutung der Großstadtbahnhöfe angesichts unserer baugeschichtlichen Betrachtungen erhöht ist. Wegen der besseren Übersicht wurde die Einteilung der einzelnen Kapitel so gewählt, daß sie jeweils einen Zeitraum umfassen, der womöglich nicht nur in der Kunst- und Architekturgeschichte, sondern auch technisch, politisch und wirtschaftlich betrachtet eine möglichst selbständige Einheit bildet.

I. Der Anfang

1830—1850

Die Eisenbahn gelangt nach einer jahrhundertlangen, anonymen Entwicklung am Anfang des 19. Jahrhunderts in den Mittelpunkt des Interesses. Die plötzliche Entwicklung der Industrie am Anfang des Kapitalismus beschleunigte das Suchen nach der Traktion durch eine Kraftmaschine. Nachdem um 1820 in England die ersten schon brauchbaren Dampflokomotiven erscheinen, kommt der Eisenbahnbau in Aufschwung. Die schnell aufkommende Eisenproduktion verschafft die Gegebenheiten für die Schienen- und Maschinenfabrikation. Am Kontinent baut man zuerst nur noch einzelne Linien, in England entsteht indessen schon der Anfang eines ganzen Eisenbahnnetzes. Die schnelle und starke technische Entwicklung zeigt sich nicht nur in der zunehmenden Bautätigkeit, sondern bald auch in der Vervollkommnung der bereits bestehenden Anlagen. Die Lokomotiven werden durch stärkere ersetzt, die Waggons, welche am Anfang der Diligence glichen, werden den Erfordernissen des schnelleren Verkehrs angepaßt. Mit der Leistung der Lokomotiven wächst die Länge der Züge und damit auch jene der Bahnhöfe. Die Bahnhöfe jener ersten Epoche können mit dem ständigen Zuwachsen, der öfteren Erweiterung, mit einem fast dynamischen Zustand charakterisiert werden. Auch die Einrichtungen der ersten Bahnhöfe sind vielfältig, die verschiedenen Anlagen

zeigen die Unsicherheit der Anfangsperiode. Weichen werden häufig mit Drehscheiben und Schiebebühnen ersetzt, welche jedoch einen Fließverkehr auch innerhalb des Bahnhofes noch nicht erlauben. Die ersten 20 Jahre, die als Anfang betrachtet werden können, beweisen aber eindeutig die Unentbehrlichkeit der Eisenbahn, und führen in technischer Hinsicht aus der Epoche der Versuche heraus. I. J. 1850 verfügt Europa bereits über etwa 20 000 km Eisenbahnlinien, wovon fast die Hälfte auf England entfällt. Zu dieser Länge gehören etwa 700 Bahnhöfe, welche dem großen Aufschwung des Eisenbahnbaues in der nächsten Epoche als Grundlage dienen.

Der allgemeine Baustil am Anfang des 19. Jahrhunderts war der Klassizismus. In England sind zur gleichen Zeit auch Gebäude entstanden, welche den Eindruck der Renaissance weckten. Das Wiederaufleben der mittelalterlichen Formenwelt, — was später allgemein zur Romantik führt, — ist ebenfalls zu verzeichnen. Italien hat die Führerschaft in der Baukunst an England abtreten müssen, wo sich jetzt die allgemeine europäische Entwicklung entfaltet. Die Einheit der Bauformen wird aber stärker als je von nationalen Strömungen befärbt, in Frankreich ist der Stil »François I«, in Deutschland der »Rundbogenstil« usw. bekannt.

Der Bahnhof ist der Nachfolger der Postkutschen-Herberge. Die Bahnhöfe werden anfangs ebenfalls in bestimmten Entfernungen gebaut, wenn sie auch etwas größer sind, als es an der Landstraße üblich war. Der Bahnhof verdiente wahrlich seinen Namen, die ersten Anlagen waren umzaunt und oft auch umbaut. Die Gesamtanlage spiegelte am Anfang meistens die eigene Auffassung des Erbauers, erst allmählich entwickelten sich die besten und brauchbarsten Lösungen.

Die Anordnung des Empfangsgebäudes schmiegt sich der des Bahnhofes an. So finden wir schon am Anfang die grundsätzlichen Anlagen, die später weiterentwickelt worden sind. Als es noch kein zusammenhängendes Eisenbahnnetz gab, war natürlich die Anzahl der Kopfbahnhöfe relativ höher, ein Teil davon blieb auch beim Weiterbau in dieser Form erhalten. Außer den Endpunkten der Linien baute man bei Städten mit Vorliebe Kopfbahnhöfe, die betrieblichen Nachteile erkannte man damals noch nicht.

Am Anfang baute man aber auch im Falle eines Kopfbahnhofes das Empfangsgebäude häufig abseits der Gleise (Abb. 1), da man den großen Vorteil, der sich aus der Kopfanlage bei der möglichen schienenfreien Führung der Passagiere ergibt, damals noch nicht benötigte. Bald mußte aber eine Trennung der ankommenden und abfahrenden Reisenden in Betracht gezogen werden, und das Empfangsgebäude wurde demnach in zwei Teile gesondert, neben den Gleisen des Kopfbahnhofes angelegt. Die Trennung der Reisenden war damit gelöst, auch waren damit schon zwei Gleise in unmittelbarer Verbindung mit dem seitlichen Bahnsteig. Die symmetrische Teilung der Gebäude, die meistens auch schon wegen architektonischer Gründe gefordert wurde,

ergab aber auf der Ankunftsseite meistens überflüssig umbauten Raum. Die Teilung war auch dem Betrieb ungünstig. Die nächste Stufe der Entwicklung brachte darum den Kopfbahnsteig, der die beiden Teile zusammenfaßte. Diese Grundrißlösung baute man mehrere Jahrzehnte lang, sie ist heute noch bei mehreren großen Kopfbahnhöfen europäischer Großstädte anzutreffen. Wo der Bahnhof von der Stirnseite her zugänglich war, setzte sich allmählich die eigentliche Lösung des Kopfbahnhofsgebäude-Grundrisses durch: man versetzte das Empfangsgebäude quer vor die Gleisanlage. Gewiß konnte diese Lösung erst nach einer bestimmten Größenordnung verwirklicht werden, als die Gleisanlage selbst schon die nötige Breite besaß, welche der Länge des Vorbaues entsprach. Schon 1847 wählte LEONCE RAYNAUD beim ersten Pariser Gare du Nord jene Lösung. Später, als die Ansprüche gegenüber dem Empfangsgebäude anstiegen, baute man auch noch seitliche, neben den Gleisen liegende Flügel, so daß sich eine U-förmige Anlage bildete. Obwohl schon FRIEDRICH BÜRKLEIN und der erwähnte REYNAUD jene Anlagen vor 1850 verwirklichten, kamen sie erst in der späteren Entwicklung zur vollen Geltung. Die oben großzügig geschilderten Anlagen weisen in Einzelheiten aber starke Abweichungen voneinander auf, je nach dem, wie sie sich den jeweiligen Gegebenheiten anpassen. Die vollkommene Lösung: das Zungenbahnsteig-System wurde in der Anfangszeit noch nicht erreicht.

Bei den Durchgangsbahnhöfen weisen jene mit mehrstöckiger Anlage, das heißt Unter- oder Überführung des Reisendenverkehrs an den Gleisen, große Vorteile auf. Diese Möglichkeit wurde aber erst später erkannt und erst vor der Jahrhundertwende allmählich verbreitet (Abb. 2). Die Durchgangsbahnhöfe weisen daher meistens ganz einfach seitlich gelegene Empfangsgebäude auf, bloß bei Geländegegebenheiten zog man andere Lösungen vor, die aber nicht als typisch angesehen werden können.

Das funktionelle Problem kann an einigen frühen Beispielen verfolgt werden. Am Endpunkt der berühmten Manchester—Liverpool Bahn, am Bahnhof *Liverpool Crown Street* (1830) baute man nach den Ideen von George STEPHENSON das seitwärtsliegende Empfangsgebäude, mit der zur Gleisrichtung parallelen Eingangsrichtung. Die Anlage hat in ihrer Primitivität doch etwas Natürliches an sich. Hingegen wurden auch noch später naive Formationen erwogen, so z. B. in München, wo Baumeister HIMBSEL die Gleisanlage der symmetrischen, klassizistischen Architektur anpassen wollte. Fast zur gleichen Zeit finden wir aber in England schon groß angelegte Einrichtungen, so z. B. jene der G. W. R. vom berühmten Eisenbahningenieur I. K. BRUNEL erbaut. Auch die Beziehung des Empfangsgebäudes zur Halle ist sehr interessant. In *Derby Trijunct-Station* (1839) stand eine 137 Meter lange, selbständige Halle, parallel zum Empfangsgebäude, in *Birmingham* sowie in *Brünn* hingegen baute man das Empfangsgebäude zur Stirnseite der Halle. In *Ver-sailles* (1837) und *Zürich* (1847) baute man zwei Hallen nebeneinander und ver-

band sie mit einer Schauffassade. In Gloggnitz sehen wir auf den Abbildungen einen kurzen verbindenden Steg zwischen beiden. Eine architektonisch auffallend vollkommene Lösung schuf der *Wiener Gloggnitzer Bahnhof* (1841), indem er die Halle mit dem zweigeschossigen Vorgebäude unter ein gemeinsames Dach brachte.

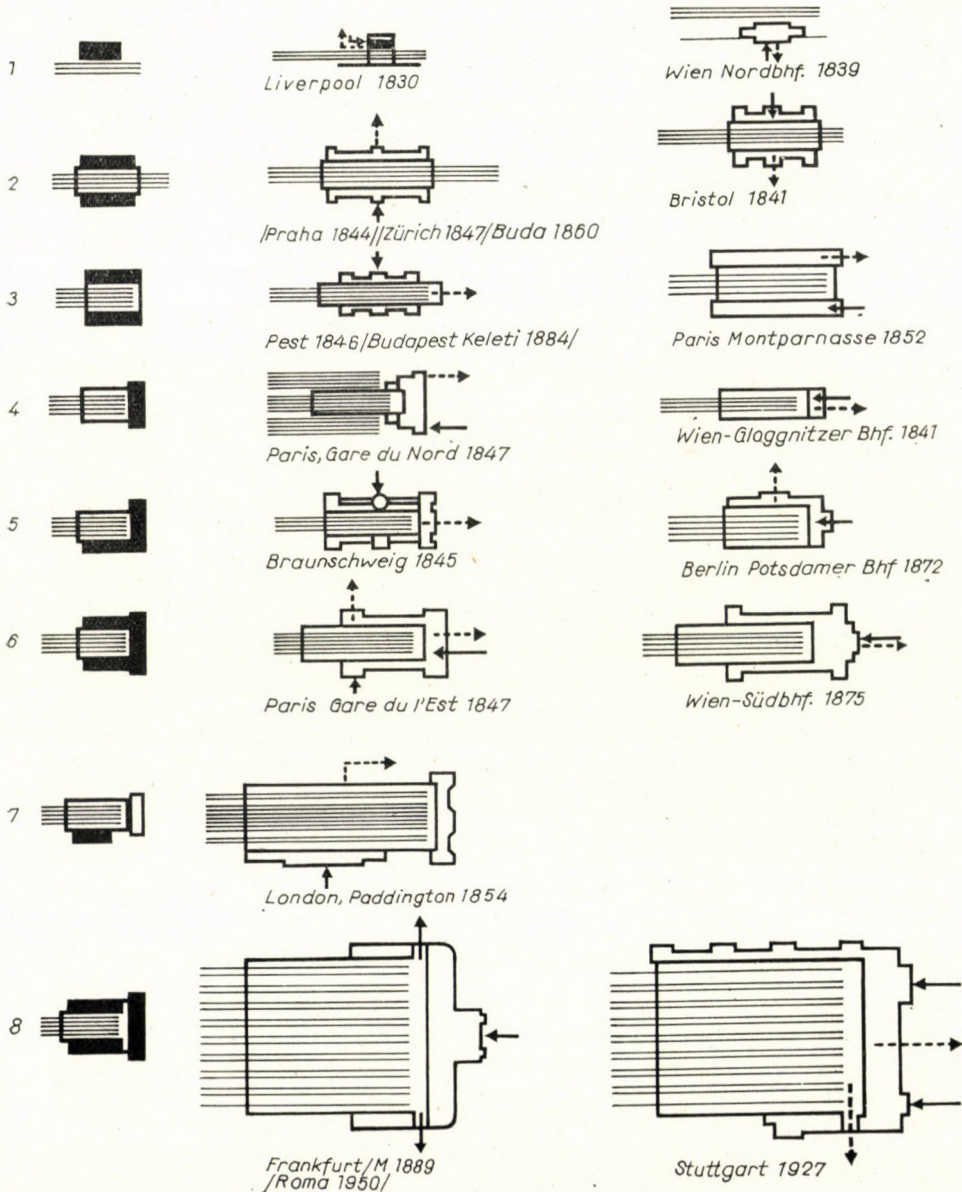


Abb. 1. Die Entwicklung des Kopfbahnhofes (Erste Reihe: Schematische Darstellung. Zweite Reihe: Eingeschossige Anordnungen. Dritte Reihe: Mehrgeschossige Anordnungen)

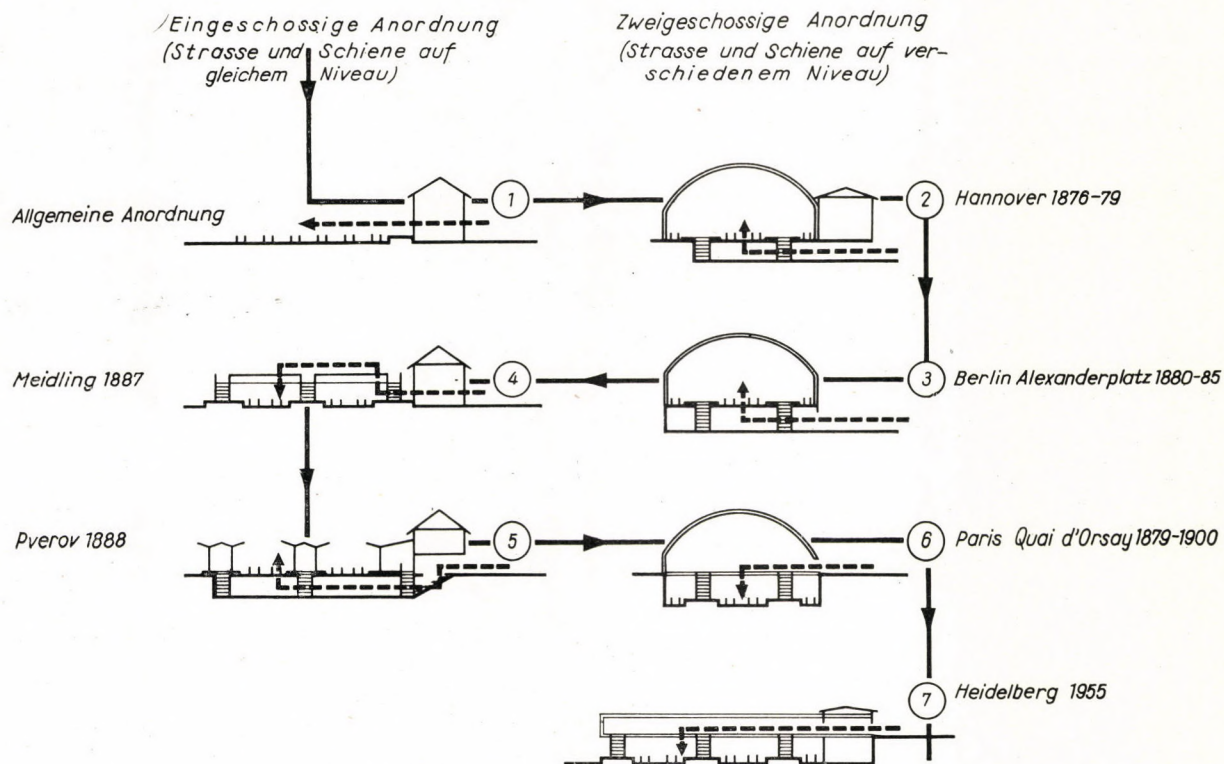


Abb. 2. Die Entwicklung des Empfangsgebäudes an Durchgangsbahnhöfen

Die Anfänge im Eisenbahnbau fallen zeitlich mit den neuen Eisenkonstruktionen im Baugewerbe zusammen. Besonders bei den Hallen konnten jene nicht nur angewendet, sondern auch weiterentwickelt werden. Im Anfang verwendete man zu den Hallenkonstruktionen oft noch Holz (*Liverpool Crown Street, London Nine Elms, 1835, Nürnberg, 1835*). Am *Sächsischen Bahnhof zu Leipzig* (1837) schuf man eine Tonnenhalle mit seltsamer Raumgestaltung, was um so beachtenswerter ist, als die früheren Anlagen eher als offene Dach-

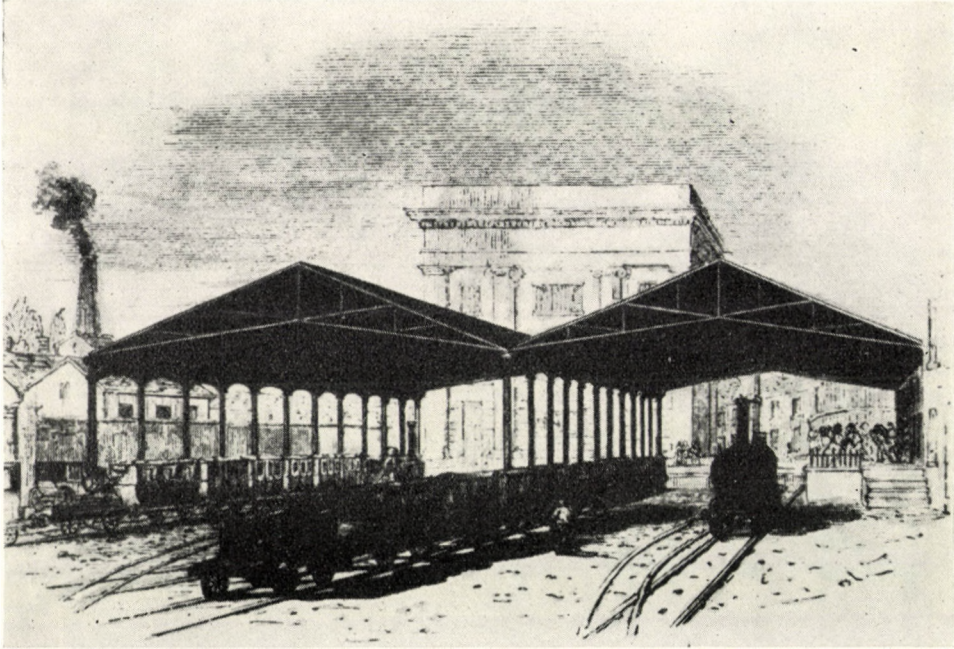


Abb. 3. Birmingham Curzon Street Station (1838). Frühes Beispiel der eisernen Dachkonstruktion, mit englischen Bindern. Konstruktion von Robert Stephenson

stühle zu bezeichnen sind. Die dreischiffige Halle zu Kassel ist ein schöner Zweckbau, welcher bei den ungarischen Bahnen nachgeahmt wurde. Eine künstlerische Lösung zeigt zum erstenmal die von Brunel geschaffene Halle zu Bristol (*Bahnhof Temple Meads, 1841*). Die wesentlichste Errungenschaft auf diesem Gebiete war aber die 1847 erbaute Bahnhofshalle BÜRKLEINS am neuen *Münchener Bahnhof*, mit einer lichten Weite von 28 Metern. Auf einer Länge von 110 Meter sind 24 Hauptbinder System Emy angeordnet.

In England hat man schon früh Eisenkonstruktionen zum Hallenbau verwendet (Abb. 3), welche dem Konstruktionsprinzip entsprechend zum Teil aus Guß- und zum Teil aus Schmiedeeisen angefertigt wurden, da es Flußstahl erst in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts in größeren Mengen gab. POLONCEAU, der Erfinder der nach ihm benannten Binderform wandte jene bei den Bauten der Versailler Bahn an mehreren Gebäuden an.



Abb. 4. London Euston (1838). Klassizistischer Portikus von Philip Hardwick

Die Formgestaltung dagegen ist das Merkmal des Empfangsgebäudes geblieben.

Am Anfang der »Eisenbahn-Architektur« steht der Portikus von *London Euston* (1838) (Abb. 4). Hier wurde der Gedanke des neuen Stadttorens in Stein gehaut. Derselbe Architekt, PHILIP HARDWICK, der sehr bezeichnenderweise bei der Bahngesellschaft angestellt war, schuf auch andere Gebäude für die Gesellschaft, so auch den würfelartigen Block zu *Birmingham*. FRANCIS

THOMPSON behandelt die klassizistischen Formen freizügiger (*Chester*, 1848), er entwarf die frühen Veranden am Bahnsteig kleinerer Mittelstationen (*Bangor*, *Abergele*, *Holywell*). Zum englischen Regency-Stil zählt sein niedliches Gebäude von *Wingfield*. Dagegen schuf DAVID MOCCATA, — der ebenso wie THOMPSON ein Schüler SOANES war, in Brighton (1840—41) ein Kopfbahnhofgebäude größeren Ausmaßes.

In Wien wird der Klassizismus neben den Gleisen am stattlichem ersten *Nordbahnhof* (1839) vom Architekten JÜNGLING vertreten. Ein anschauliches



Abb. 5. Pest (1846). Fortschrittliches Bahnhofsgebäude von Matthias Zitterbarth d. J.

Beispiel für den Symmetriedrang des Klassizismus sehen wir bei den *Gloggnitzer* und *Raaber Bahnhöfen*, die als einander gegenüberliegende Endpunkte zweier Linien zu einer großangelegten Bebauung verschmolzen wurden. Die klassizistischen Formen sind in Mailand und Brünn auch in den Hallen zu erkennen gewesen. Hier sind auch noch die Gebäude von *Prag* (1844) und vom zweiten *Braunschweiger Bahnhof* (1846, Carl Theodor OTTMER) zu erwähnen. Der erste *Pester Bahnhof* (1846) (Abb. 5), ein Werk des jüngeren Matthias ZITTERBARTH, galt zur Zeit als eine der vorzüglichsten Anlagen.

Von England her verbreiteten sich schon zu dieser Zeit die romantischen Bauformen, welche mit der anfänglichen Eisenbahntechnik eigentlich — wenigstens kurzfristig — in gutem Einklang waren. Beim schon erwähnten Bahnhof

Bristol sowie bei anderen englischen Empfangsgebäuden gelangten die mittelalterlichen Teilformen zu voller Geltung und wurden auch am Kontinent schnell verbreitet (*Braunschweigs erster Bahnhof, Nürnberg Bahnhof am Frauenthor*, 1850). In Leipzig bauten verschiedene Gesellschaften ihre Bahnhöfe nebeneinander, welche eine malerische architektonische Gesamtwirkung erzielten.



Abb. 6. München (1847). Friedrich Bürkleins Empfangsgebäude im »Rundbogenstil«

Aber auch in dieser Hinsicht müssen wir an erster Stelle auf den *Münchener Bau BÜCKLEINS* hinweisen, welcher mit seinem sogenannten Rundbogenstil eigentlich eine deutsche Abart des Romantizismus war (Abb. 6). Seine Massenproportionen sind dem Pariser Gare de l'Est ähnlich, welcher zur selben Zeit in Bau genommen wurde.

Wenn auch diese Anfangsperiode noch nicht zum Ausbau der großen Anlagen gelangt ist, schuf sie dennoch die wesentlichsten Merkmale zur Architektur der Eisenbahnen und schuf damit zum Aufschwung, der bald einsetzen sollte, die technischen Grundlagen.

II. Die Entwicklung

1850—1914

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts gelangt die Eisenbahn zur vollen Entwicklung. Es schließt sich das europäische Eisenbahnnetz; die Gebirge werden durchstoßen und durchquert, der eiserne Schienenstrang findet überallhin seinen Weg. Die Eisenbahn hat im Verkehr eine monopole

Lage. Zur Jahrhundertwende zählt die Gesamtlänge der europäischen Bahnen um 800 000 km. Dem Maß des Verkehrs gemäß entwickelt sich auch die Eisenbahntechnik. Die Dampflokomotive erreicht ihren technischen Höhepunkt und am Ende der Periode stehen bereits die ersten Linien mit elektrischer Zuförderung im Dienst. Auch die Triebwagen mit Verbrennungsmotoren werden schon erprobt. Die Geschwindigkeit und Kapazität der Züge wächst rasch. Neben den großen Personenbahnhöfen treten die Rangier- und Frachtbahnhöfe in den Vordergrund. Alles wird ständig vergrößert und ausgebreitet. Es werden Sicherungsanlagen geschaffen. Die ersten internationalen Expreßzüge durchqueren den Kontinent.

Diese Entwicklung der Eisenbahntechnik rückte auch an die Gebäude mit erhöhten Forderungen heran. Es mußte ein Bauprogramm von bisher nicht geahnten Maßen bewältigt werden. Nur das Wohnungsbauprogramm, welches aber zur Gänze der Bauspekulation überlassen wurde, kann mit dem der Eisenbahnen verglichen werden: Eine Fülle von Bauten mit gleicher Bestimmung. Die Unsicherheit in der Grundrißgestaltung der Anfangszeit ist überwunden, es gibt immer mehr gute Beispiele, welche Schule machen. Es werden die betrieblichen Nachteile des Kopfbahnhofes erkannt und es werden auch bei größeren Anlagen Durchgangsbahnhöfe angestrebt. Die Anlagen mit getrennten Straßen- und Gleis-Niveaus beziehungsweise jene mit Unter- oder Überführung des Passagierverkehrs zu den Bahnsteigen werden von den siebziger Jahren an verbreitet. Zugleich mit dieser Errungenschaft treffen wir den Inselbahnsteig an, welcher durch Passagiertunnels und von hier aufwärtsführenden Treppen erreicht wird. Bei Kopfbahnhofanlagen werden zungenhafte Mittelbahnsteige gebaut, welche es ermöglichen, daß — mittels den sie verbindenden Kopf- oder Querbahnsteigen — jedes Gleis unmittelbar erreicht werden kann.

Es muß auch noch der Drang der Großstädte nach einem Zentralbahnhof erwähnt werden, weil die Zerstückelung in Teilanlagen bereits beim Umsteige- bzw. Umladeverkehr Schwierigkeiten und Unzulänglichkeiten bereitet. Meistens sind aber die Anlagen schon dermaßen ausgebaut, daß die größten der Städte den kostspieligen Umbau nicht mehr ermöglichen, die Städte zweiter Größenordnung jedoch können noch mit zentralliegenden Hauptbahnhöfen versorgt werden. (Stuttgart, Leipzig, Milano usw.)

*

Am meisten wird die Bautätigkeit der Eisenbahnen in dieser Zeit durch die Typenbauten charakterisiert. Es wurden im allgemeinen 4—5 Größenordnungen der Empfangsgebäude entwickelt. Die Grundrisse und die Baumaße, sowie das verwendete Material wurde stets den örtlichen Gegebenheiten angepaßt, doch ist eben wegen des gemeinsamen Zwecks eine Ähnlichkeit feststellbar. Da die kleineren Stationsgebäude meist auch Wohnungen für das Personal

aufbieten mußten, kann man die Bauaufgabe fast immer in drei Funktionen trennen: die Lokalitäten der Reisenden; jene des Betriebes und die abgetrennt angelegten Wohnräumlichkeiten. Der erste Teil bestand bei den kleinen Anlagen wenigstens aus dem Vorzimmer, Warteraum mit Schalter, zum zweiten gehörten die Amtszimmer des Vorstandes, der Fahrdienstraum mit Telegraphen und Fahrkartenausfertigung, oft aber selbst der angebaute Güterschuppen bzw. andere Betriebslokalitäten. Die Wohnungen wurden meistens im zweiten Geschoß untergebracht (zwar wurden in einigen Ländern, so in Ungarn, ebenerdige Typengebäude bevorzugt).

Die Teilung der Eisenbahnhochbauten in Größenordnungen und die Serienbauweise reichten in die Mitte des letzten Jahrhunderts zurück. Fast alle Eisenbahnunternehmungen haben sich dieser bedient. Es seien hier als Beispiel einige ungarische Bahnen erwähnt. An den Linien der Theißbahn wurden ebenerdige Gebäude für den kleinsten Bedarf in den Bauproportionen des ungarischen Landhauses gebaut (*Fegyvernek*), während die nächsten drei Größenordnungen verschiedene zweigeschössige Entwürfe in Anspruch nahmen (*Kaba*, (Abb. 7), *Mezőberény*, *Karcag*). Stationen der Größe von *Püspökladány* erhielten ein ganz stattliches Gebäude. Selbst die Gebäude der Stadtbahnhöfe (*Miskolc*, *Debrecen* usw.) wurden mittels vereinheitlichter Pläne gelöst. Es muß hervorgehoben werden, daß sämtliche Bauten dieser Größenordnungen auch reich mit den Formen der mitteleuropäischen Romantik verziert worden sind und zum großen Teil noch heute bestehen. Die Theißbahn baute selbst die hölzernen freistehenden Hallen serienmäßig (Abb. 8). Die Südbahn entwickelte ihre Typenskizzen für ihre ungarischen Linien gesondert von jenen, welche sie auf den österreichischen bzw. norditalienischen Linien erbauen ließ. Bei der Südbahn sind die Gebäude in drei Klassen eingeordnet worden. Diese zeigen aber keinerlei Zierden auf, sind lediglich als reine Zweckbauten behandelt. Die ungarischen Staatsbahnen entwickelten ebenfalls kurz nach ihrem Entstehen ihre Klassen-Serie, welche auch von anderen ungarischen Privatbahnen übernommen wurde. Die Grundrißlösungen blieben lange gültig, wurden aber betreffs der Fassadenausbildung öfters den sich veränderten Anforderungen angepaßt.

Die Bautypen erlaubten so in Ungarn wie in fast allen Ländern Europas in den Jahren des großen Eisenbahnbaues eine enorme Bauaufgabe zu lösen, welche mangels entsprechender Fachkräfte ohne diese Maßnahmen kaum befriedigend hätte gelöst werden können. Mit diesem Erfolg aber bahnte sie eine Entwicklung in der Baugeschichte an, welche erst im 20. Jahrhundert zu allgemeiner und voller Geltung gelangen konnte.

*

Die Bahnhofshalle bildete, wie wir es schon in der vorherigen Zeitperiode gesehen haben, stets den Kern der Personenverkehrsanlage. Infolge des Auf-

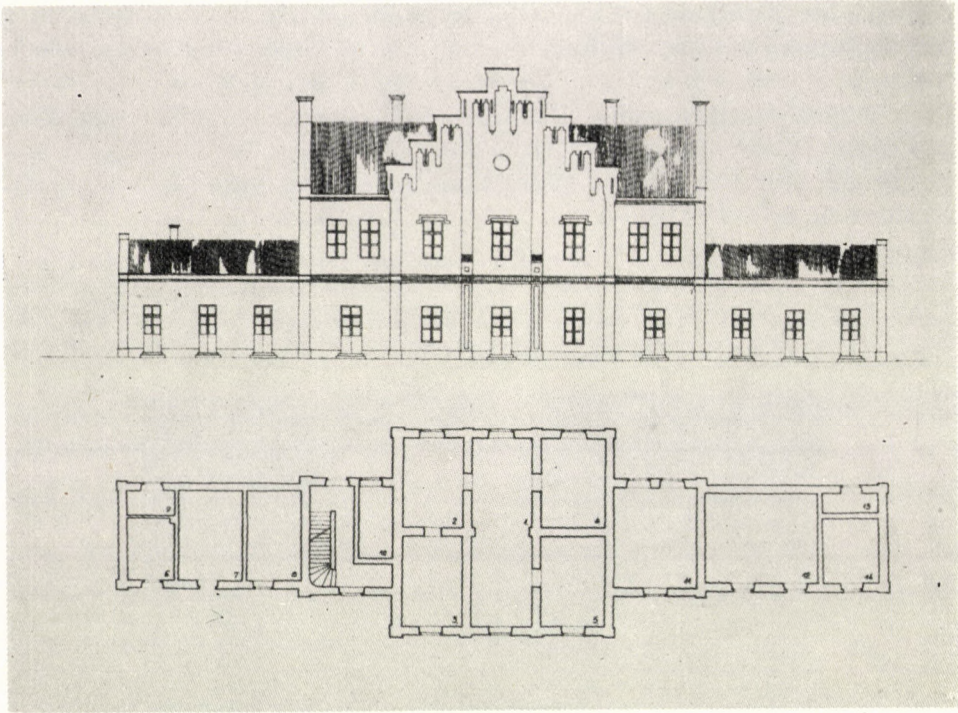


Abb. 7. Typisiertes Empfangsgebäude der ungarischen Theißbahn (Tiszavidéki Vasút) 1858

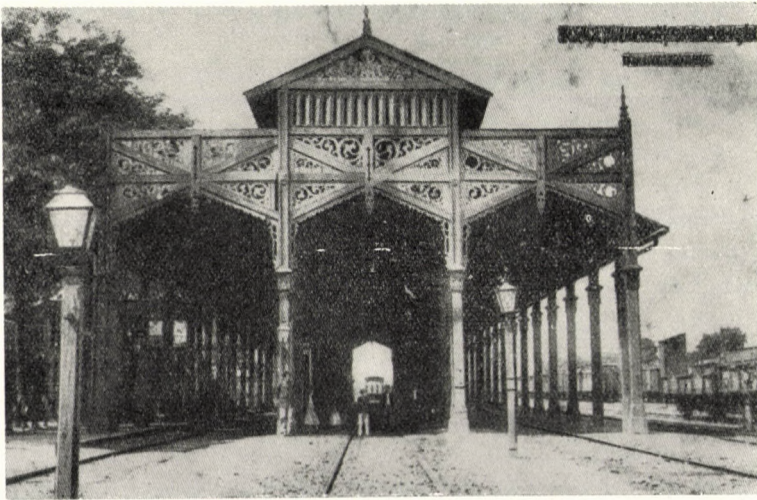


Abb. 8. Hölzerne Halle der ungarischen Theißbahn (1858)

schwunges der Stahlindustrie konnte in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts und am Anfang des 20. Jahrhunderts eine Entwicklung entstehen, die nicht bloß in konstruktiver Hinsicht neuere Lösungen mit sich brachte, sondern auch eine grundsätzlich andere Raumgestaltung gebär und damit zum Keim einer neuen Architektur wurde. Da wir die Geschichte der Eisenbauten hinsichtlich der architektonischen Entwicklung betrachten, müssen wir den Bahnhofshallen und ihrer Entwicklung in dieser Zeitperiode besondere Aufmerksamkeit widmen.

Mit Holzbindern baute noch 1851—52 LEWIS CUBBIT sein Meisterwerk, *London King's Cross*. Die Hauptbinder der zweischiffig Angelegten, tonnenartigen Hallen sind mit dem System DE L'ORME konstruiert worden. CUBBIT

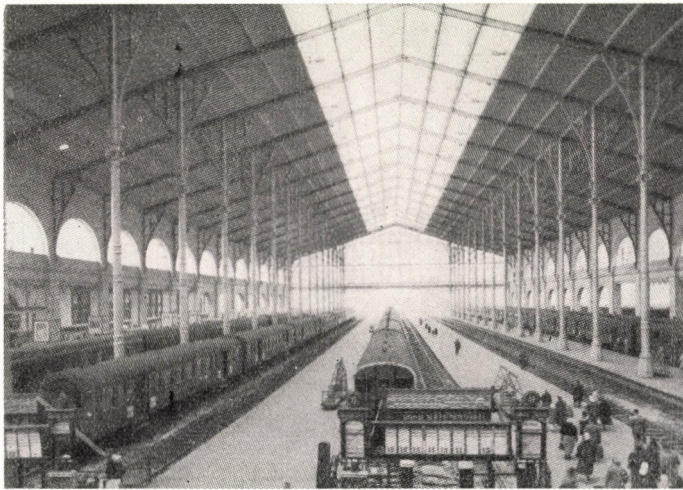


Abb. 9. Paris, Gare du Nord (1861—69). Architekt: J. I. Hittorf, Ingenieur: Raymond

ist angeblich bei der Moskauer Reitschule, einer der größten Holzhallen der Welt, zu seinem Werk inspiriert worden. Eine einmalig interessante Anlage bedeutete der *Stuttgarter Neue Bahnhof* (1863—1868), dessen zwei Hallen mit Holzfachwerk durch einen ausragenden Flügel des Empfangsgebäudes gespaltet waren. Noch 1912 baute man den Bahnhof von Kopenhagen mit einem Stephans-Dach, welches aber, obgleich es sonst beliebt war, sich bei den Eisenbahnbauten nicht durchsetzen konnte. Bei kleineren Bahnhöfen, wo man früher häufig selbststehende kleinere Holzhallen anlegte, schützte man nunmehr die Reisenden bloß mit einer Veranda, welche über dem Bahnsteig vor dem Empfangsgebäude allgemein angelegt wurde. Solche Einrichtungen, welche billiger waren als die — wenn auch primitiven — Holzhallen, sind bis heute allgemein verbreitet.

Unter den Eisendächern und den sich rasch verbreitenden Stahlkonstruktionen waren am Anfang die Polonceau-Binder am häufigsten. Bei den zwei

Hallen von *Köln* (1859) verwendete man eine verstärkte Abart, wozu noch die interessante Anordnung kam, daß die Binder nicht auf ein Mauerwerk, sondern auf gußeiserne Stützen verlagert waren, eine Anordnung, aus der sich langsam die Rahmenkonstruktionen entwickelt haben. Die Dachkonstruktion der Bahnhöfe *Paris Austerlitz* und *Orléans* wurden von POLONCEAU selbst entworfen, beim letzteren überbrückte er die lichte Weite von 53 Metern mit einer Doppelbinder-Anordnung. Auch beim mittleren Schiff des zweiten *Pariser Gare du Nord* (1861—69) (Abb. 9) verwendete der Ingenieur REYMOND dasselbe System. Der berühmte Ingenieur FLACHAT bediente sich ähnlichen Prinzipes beim *Pariser Gare Montparnasse* (1850—52). Aber auch in Österreich wurden ähnliche Anordnungen durch WILHELM FLATTICH beim Südbahnhof angelegt. Den *Budapester Nyugati pu.* (1874—77) hat der bekannte französische Konstrukteur GUSTAV EIFFEL entworfen. Polygonale, sichelartige Binder mit aufgespanntem Zugband wurden in England beim Bahnhof *Birmingham New Street Station* (1854) bei einer Spannweite von 64 Metern und vom Ingenieur JOHN HAWKSHAW für die Londoner Bahnhöfe *Charing Cross* (1862—64) und *Cannon Street* (1863—66) verwendet. In Berlin für die Halle des ersten *Schlesischen Bahnhofes* (1869—71), in *München* für die Erweiterung des Hauptbahnhofes (1876—84) mit einer vorgelegten vierschiffigen Halle und in Österreich beim *Wiener Nordwestbahnhof* (1870—73), schließlich in *Triest* (1883) verwendete man ebenfalls sichelartige Dachbinder.

Eine seltsame Lösung bietet der *Londoner Paddington Bahnhof* (1852—54), der erste in der Reihe der großen, mit Stahl konstruierten englischen Bahnhofshallen. Die dreischiffige Dachanlage ruht auf gekrümmten Vollwandträgern. Die Reihe der Binder wurde, um die einheitliche Raumgestaltung zu verfrischen, mit kreuzgewölbartigen Unterbrechungen in drei Abschnitte geteilt. In England trifft man häufig mehrschiffige Stahldächer über in Krümmung liegenden Gleisanlagen. Die so räumlich gekrümmten Dächer ergeben, dank dem Lichteffect der vielverglasten Dachhaut, eine ganz sonderbare und eigenartige Raumwirkung (*Brighton, York, New Castle Central* Abb. 10).

Der nächste Schritt in der Entwicklung der Stahlkonstruktionen führte zum Rahmenwerk. Das Zugband, welches die innere Raumwirkung doch nachteilig beeinflusste, konnte durch andersartige Fixierung des Raumes entbehrt oder aber auch unsichtbar versenkt werden. Da sich aber die Rahmenbinder oft schon kurz über dem Bodenniveau seitwärts schwangen, wurde eine noch seltsamere Raumwirkung erzielt. 1868 hielt bereits der *Londoner St. Pancras Bahnhof* den Rekord der Spannweite für Stahlkonstruktionen, mit 73,1 Metern den er erst 20 Jahre später an die Maschinenhalle der Pariser Weltausstellung abtreten mußte. Der spitzbogenartig endende Rahmen ist ein statisch unbestimmter Zweigelenkbogen, mit Unterflur-Zugband. Bald brachte aber die Entwicklung eher die statisch bestimmten Dreigelenkbogen in den Vordergrund, welche sich hauptsächlich in Deutschland großer Beliebtheit erfreuen

konnten. Man baute vor dem ersten Weltkrieg dort eine ganze Reihe dieser Anlagen. In Berlin wurden bei den großen Hallen des *Anhalter Bahnhofes* (1872—80), des *Stettiner Bahnhofes* (1876) und den Hallen der *Stadtbahn* (1880—85), sowie bei der zweiten Halle des *Schlesischen Bahnhofes* Dreigelenkbogen angewendet. Auch die Bahnhöfe in *Saarburg*, *Dresden Hauptbahnhof* (1897), *Frankfurt (Main)* (1885—87), der *Hamburger Hauptbahnhof* (1904—06), sowie zahlreiche andere Anlagen wurden mit ähnlichem Prinzip, wenn auch mit teilweisen Abänderungen gelöst. Besonders in Dresden und Hamburg gelangte man infolge zweigeschössiger Anordnungen zu seltsamen, aber großzügigen Lösungen. Natürlich wurden auch außer Deutschland Rahmenwerke für Eisenbahnhallen in Dreigelenkbauweise hergestellt, so beim Bahnhof zu *Prag*, *Lemberg*, usw.

Schon vor der Jahrhundertwende wurden statt der kostspieligen großen einschiffigen Hallenanordnungen jene mit mehreren aneinandergliederten kleineren Hallen bevorzugt. Außer einigen schon erwähnten sei noch die größte Anlage Europas, der *Leipziger Hauptbahnhof* beachtet (1906—1915), wo sechs, und der ihm kaum nachstehende *Mailänder Bahnhof* (1913—1930), bei welchem fünf Hallenschiffe nebeneinander gereiht wurden.

Was die Entwicklung in kaum 60—80 Jahren, die zwischen der kleinen Liverpooleser Holzhalle und diesen Großstadtbahnhöfen liegen, hervorgebracht hat, kann man veranschaulichen, wenn man weiß, daß gegenüber den etwa 400 m² von Liverpool die Anlage in Leipzig 60 000 m² bedeckt.

*

Das Aufblühen des *romantischen Stiles* bei den mitteleuropäischen Eisenbahnen fällt in die fünfziger und sechziger Jahre. Auch ganz große Anlagen bedienten sich der Formenwelt des Mittelalters, um jene zum Schmuck jener Bauten zu benützen, welche der modernsten Technik dienten: ein durchaus bezeichnender Zug in der Architektur des 19. Jahrhunderts. Einige Jahre später schon führte diese Auffassung zu neueren Formen der älteren Baustile, zur Renaissance usw. Es kam zu einer Reihenfolge verschiedener Moden, bis zuletzt Architekten und Publikum nach etwas ganz Neuem drängten.

Unter den deutschen *romantischen Bauten* müssen wir *Emden* (1856—63) und *Breslau* (Wroclaw) erwähnen. Bei Emden trägt die Fassade noch deutliche Zeichen des Rundbogenstils, die Bauproportionen machen aber den Eindruck einer völlig ruhigen Architektur. Breslau dagegen ist in seiner Wirkung dynamisch. Einer der größten romantischen Bahnhöfe ist der erste *Schlesische Bahnhof* zu Berlin, mit seinen zwei stämmigen Ecktürmen. Eine späte Blüte der romantischen Formenauffassung war der *Stettiner Bahnhof* (1876) zu Berlin, von THEODOR STEIN, mit dem einzigartigen, gekrümmten Gesims. In Österreich baute MORITZ LÖHR für die Kaiserin-Elisabeth-Bahn den *Wiener Westbahnhof* (1858) und andere Stationsgebäude auf der Strecke. Ganz überziert,

aber in der Grundlage sämtliche Fehler des früheren Bahnhofes wiederholend wurde von THEODOR HOFFMANN der zweite *Wiener Nordbahnhof* (1858—1865) gebaut. Das Gebäude ähnelt eher einer sonderlichen Ritterburg als einem

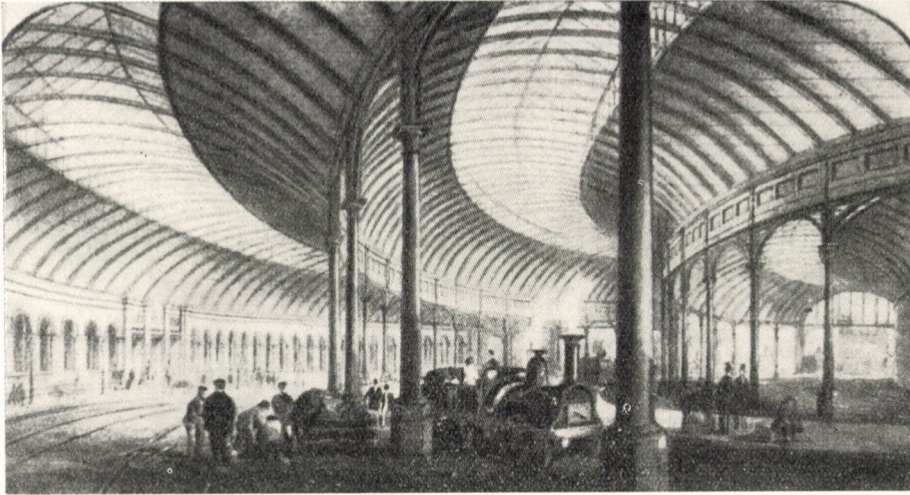


Abb. 10. New Castle Central Station (1850). Die gekrümmten Hallenschiffe und das oben einflutende Licht geben eine für das 19. Jahrhundert charakteristische Raumwirkung



Abb. 11. Leningrad (Petersburg), Finnländischer Bahnhof, um 1870

Zweckbau. Die Gebäude von *Stanislaw, Kolomyja, Snyatin, Tschernowtzy* usw. sind auch auf diese Jahre zurückzuführen. Ein interessanter Bau ist der Finnländische Bahnhof in *Leningrad* (Abb. 11). Zwischen den stockhohen Eckpavillons zieht sich der ebenerdige Mitteltrakt, in der Hauptachse steht der gotische Eingang. Dies Baustil war bei einigen russischen Eisenbahnen heimisch.

In England durchführt man in den fünfziger-sechziger Jahren vielerorts schon den zweiten Umbau. Vom englischen Beispiel wird jetzt hauptsächlich Amerika erfaßt, der europäische Kontinent geht schon seine eigenen Wege. Auch der markanteste Zug der neueren englischen Bahnhöfe findet in Europa keinen Nachklang. Im Inselreich werden nämlich mit den neuen stahlkonstruierten Hallen im allgemeinen große Hotels gebaut, die vor die Halle gesetzt, jene völlig verdecken. Das 19. Jahrhundert versteckte hier seinen wahren Wert hinter Schauffassaden und behinderte damit auch die Entfaltung der richtigen Funktion für den Großstadtbahnhof. Die Abfertigung der Reisenden erfolgt vielerorts noch immer seitwärts der Gleisanlagen, was bei den großen Längen schon sehr verwirrend wirkt. Bei den Gleisanlagen aber sparte man nicht: King's Cross fertigte täglich nur 13 Züge ab und besaß dazu 8 Gleispaare! Man war also auf den kommenden Aufschwung gefaßt und vorbereitet, man baute endgültige Anlagen. *Paddington* (1852) und *St. Pancras* (1868; Barlow und Ordish) waren die größten und bedeutendsten unter den vielen, zu dieser Zeit erbauten Londoner Bahnhöfen. In Frankreich dagegen verdeckt das Empfangsgebäude nicht die Halle, es will sie ergänzen. Schon beim Pariser *Gare de l'Est* zeigt die in der Fassade erscheinende Stirnwand der Halle diese Tendenz, und dies zeigt sich auch beim *Gare Montparnasse* (1850—52, VICTOR LENOIR, EUGÉNE FLACHAT) und hauptsächlich beim *Gare du Nord* (1861—63), welcher nach den Plänen des namhaften Architekten J. I. HITTORF erbaut wurde. Sehr bezeichnend sind für die sechziger-siebziger Jahre die außer der Stadt errichteten Empfangsgebäude, welche mit ihrer markanten Dachform die Architektur des II. Imperiums charakterisieren (*Nizza* usw.). Auch in anderen Ländern zeigte sich der französische Einfluß (*Genf-Cornavin*, *Budapest Nyugati pu.* (Abb. 12)). Die offene Loggia des *Baseler Zentralbahnhofes* (1860), die Fassade des *Stuttgarter Neuen Bahnhofes* (1863—68) (Abb. 13) und der von WANER erbaute *Züricher Hauptbahnhof* (1865—71) zeigen ebenfalls die allgemein gewordene Renaissance. In *Würzburg* entstanden in Kürze zwei charakteristische Bauten, der erste 1854, der zweite zehn Jahre später. In Berlin bauten WEISE und SCHMIEDT 1868—72 den neuen *Potsdamer Bahnhof*. Da die Gleise aus städtebaulichen Gründen über dem Niveau der Straßen lagen, führte eine prunkhafte Stiege zu den Bahnsteigen. Auch andere Berliner Bahnhofsbauten wurden in Angriff genommen, nachdem der Abriß der alten Stadtmauern neue Möglichkeiten zur Erweiterung schuf. Eine der modernsten Anlagen in seiner Zeit war der Anhalter Bahnhof (1872—80), seine Räumlichkeiten umzingelten die Gleisanlagen. Auch die Abmessungen galten lange als ein Rekord in Deutschland, die verglaste Halle war 62,5 m breit und 34,3 m hoch und mit den neuesten Errungenschaften (hydraulischer Gepäckaufzug usw.) eingerichtet. Bei den Durchgangsbahnhöfen war es der *Hannoversche Hauptbahnhof* (1875—81., H. STIER), welcher zuerst unter den großen Bahnhöfen die funktionellen Vorteile einer zweigeschössigen Anlage voll ausnützte.

Aus der zentral gelegenen Vorhalle führten 3 Personen- und 2 Gepäcktunnels unter die Gleise, von ihnen wieder konnten die Passagiere mittels Treppen auf die noch mit einer Halle überdeckten Bahnsteige gelangen. Nach kaum fünfzig Jahren der Entwicklung erreichte hier eine Anlage den Grad, welcher den heutigen Anforderungen nach noch immer als vollwertige Lösung gelten kann.



Abb. 12. Budapest Nyugati pályaudvar (1874—77). Der Bau zeigt die Formen der zeitgenössischen französischen Architektur

Auch in Wien blühte die neue Renaissance. Die namhaften Architekten der Südbahn, WILHELM FLATTICH und FRANZ WILHELM schufen den schönen *Südbahnhof* (1869—74), wobei eigentlich die Grundlösung des alten Gloggnitzer Bahnhofes beibehalten wurde. Auch die *Franz-Josephsbahn* und die *Nordwestbahn* verwendeten diesen Stil. In Prag baute SCHLIMP (1872) neuerdings ein Siegestor als Fassadenschmuck zum Nordwestbahnhof. Außer dem alten London Euston stand ein solches bereits in *Bruxelles* vor dem *Gare du Midi*. In Italien ist der schöne Bau des Bahnhofes *Porta Nuova* zu *Turin* zu erwähnen, die Fassade wurde auch nach der Modernisierung 1954 beibehalten. *Genova* und *Roma* blieben aber düstere Exemplare dieser Bauepoche. Charakteristisch dagegen ist der Leningrader Bahnhof in *Moskau*.

In Budapest bauten die ungarischen Staatsbahnen ihren Zentralbahnhof (*Budapest Keleti pu.*, 1881—84), nach den Plänen von GY. ROCHLITZ im Renaissance-Stil. Die Halle schuf der namhafte Ingenieur FEKETEHAZY. Die im Aufschwung stehende Hauptstadt Ungarns sah im Bau ein nationales Ereignis.

In den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts wendete man sich, als einem letzten Versuch, der vermischten Anwendung der alten Bauformen zu, man hoffte vielleicht damit den bisher vergebens gesuchten Einklang zwischen Konstruktion-Funktion und Form wieder herstellen zu können.

In diese Periode fallen die großen deutschen Bahnhöfe des wirtschaftlichen Aufschwungs vor dem ersten Weltkrieg. In *Frankfurt a. Main* bauten EGGERT und FAUST (1879—88) den Hauptbahnhof mit 18 Gleisen. Die Raum-



Hauptbahnhof Stuttgart

Abb. 13. Stuttgart, Neuer Bahnhof (1863—68). Hier bedient sich der Historismus der Formen der Renaissance

wirkung der Halle mit dem stählernen Fachwerk der drei riesigen Hallenschiffe ist bezaubernd. Nach dem Äußeren ist aber der Bahnhof in *Köln* noch viel bezeichnender. Hier wurde laut der Pläne von FRENTZEN (1891—94) in unmittelbarer Nähe des Domes ein für die Epoche recht bezeichnender Bau gefertigt. Die asymmetrische Anlage hatte zwei Bogen an der Fassade, mit verzierten Kuppeln gekrönt. Der Turm mit seinen 44 Metern trug auch seine volle Dekoration und konkurrierte mit den benachbarten Türmen des Domes. In Dresden (1892—98, GIESE und WEIDNER) kam es zu einer halben Kopfanlage, mit verschiedenen inneren Gleichhöhen, also zu einer wahrhaft funk-

tionellen Anlage. Einen funktionellen Fortschritt bot immerhin auch der *Hamburger Hauptbahnhof* (1903—06, SÜSSENGUTH und MEDLING). Die Lokalitäten des Empfangsgebäudes wurden vor der Halle brückenmäßig über die Gleise gelagert. Der Eingang zu diesem Übergang erfolgte bei der zweigeschossigen Anlage in Straßenniveau, es handelt sich hier also um einen gesenkten Bahnhof. Die Anlage legt Zeugnis von einer wahrlich großen Konzeption dar und galt als Muster für modernste Bahnhofsanlagen unserer Zeit.

In *Amsterdam* baute der berühmte Architekt P. J. H. CUYPERS seine *Centraal Station* (1881—89), eine mit künstlerischer Begabung ausgearbeitete Leistung in einer wüsten Epoche. Die Spätzeit des Historismus trug aber auch anderswo ihre Früchte. In *Luzern* und *Basel* (SBB-Bahnhof), in Rumänien zu *Ploesti* und *Bukarest*, in Böhmen am Bahnhof zu *Pilsen* und in *Moskau* beim *Kursker Bahnhof* sieht man die bewährten Anlagen, architektonisch nach Mode geschmückt.

In Ungarn ist auch zu dieser Zeit ein Aufschwung in der Bautätigkeit der Staatsbahnen zu verzeichnen. Hier ist es FERENC PFAFF, der mit seinen Mitarbeitern ein Dutzend der mittelgroßen Bauten schuf. Die meisten von ihnen geben auch heute noch den allgemeinen Charakter der ungarischen Bahnhofsgebäude. In *Győr* erweiterte er das alte romantische Empfangsgebäude, in *Füzesabony*, *Cegléd*, *Debrecen*, *Miskolc*, *Szeged* und *Pécs* schuf er Neubauten. Seine größte Anlage steht in *Zagreb* (jetzt Jugoslawien). Beinahe immer kam PFAFF auf die gleiche Gliederung der Baumassen zurück, in der Mitte und an den Ecken wuchtigere Baumassen, mit niedrigeren, aber längeren verbunden. Immerhin gelang es ihm, den Charakter des Empfangsgebäudes zu prägen.

Am Ende des Jahrhunderts ist bereits ein Drang nach einer neuen Architektur zu verzeichnen. Die Bemühungen ergeben in formeller Hinsicht meistens sonderbare, oft groteske Resultate, in konstruktiver wie funktioneller Hinsicht aber ist eine unaufhaltsame Entwicklung zu verzeichnen. Jetzt zum ersten Mal kann man bei der sogenannten Schule von Chicago auch von einer Rückwirkung der amerikanischen Architektur auf Europa sprechen. Natürlich baut man oft noch immer mit den traditionellen Formen des Historismus, denn jeder Errungenschaft folgte auch ein Rückschlag.

In *Tours* (1895—98) und am *Quai d'Orsay* in Paris (1897—1900) (Abb. 14), baut VICTOR LALOUX seine Bahnhöfe. Die Stirnansicht des ersteren mit seinen großen halbkreisartigen Stirnfenstern ist wahrhaftig »modern« zu jener Zeit, während der andere in seiner Gestaltung als eine zweigeschossige Halle erwähnenswert ist. Eines der auffallendsten Werke der Zeit ist die Detailreiche Fassade des Bahnhofes zu *Antwerpen* (1898—1905), von LOUIS DE LA CENSERIE. Sie läßt bereits die Revolution der Jahrhundertwende erkennen.

Zu den wichtigsten Beispielen der Wiener Sezession zählt man heute die *Stadtbahn-Stationsgebäude* von OTTO WAGNER (1896). WAGNER schuf alle



Abb. 14. Paris, Gare du Quai d'Orsay (1897—1900). Der Architekt Victor Laloux schmiegte seinen Bau mit spätteklektischen Formen in das Pariser Stadtbild

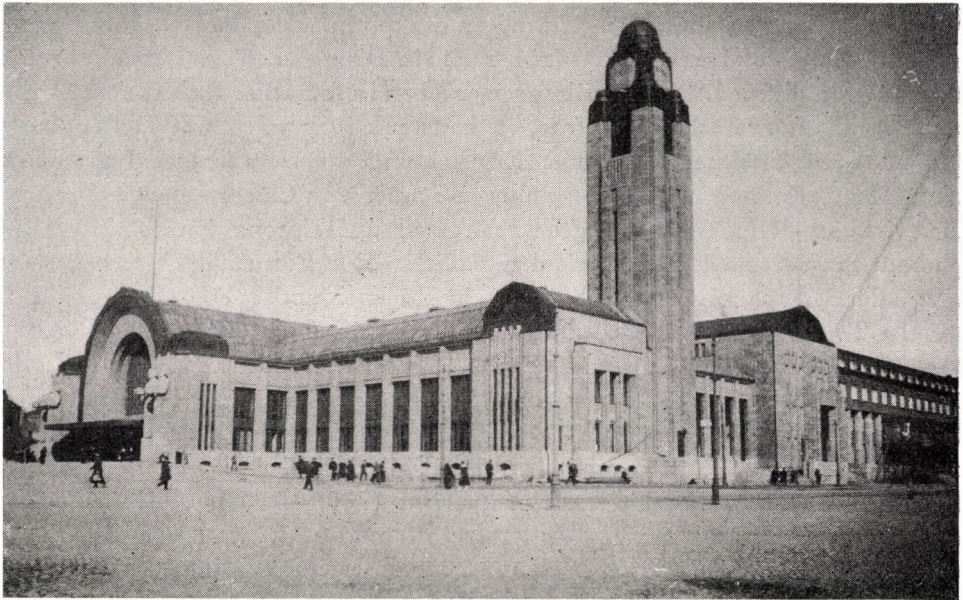


Abb. 15. Helsinki (1908—1922). Eliel Saarinen schuf mit seinem Bahnhofsgebäude ein Musterbild der Sezession

Bauten der Stadtbahn, einschließlich der Stützmauern und Viadukte. Die Baugestaltung zeigt einen Puritanismus, die Baumassen eine Bescheidenheit und Zweckmäßigkeit. Bei einigen kleineren Bauten wird WAGNER kühn: seine Karlsplatz-Haltestelle steht nicht den *Pariser Stadtbahn*-Gebäuden von GUIMARD nach.

Die Wiener Sezession spiegelt sich auch in den Bahnhöfen von *Klagenfurt*, im *Prager Hauptbahnhof* (1901—1909, FANTA und GREGOR). Der wich-



Abb. 16. Stuttgart (1911—1927). Der Hauptbahnhof von Schoeler und Bonatz war jahrzehntelang richtungweisend. Bild mit dem bezeichnenden seitlichen Vorplatz zur Bewältigung des Straßenverkehrs nach dem zweiten Weltkrieg

tigste Bau der Zeit ist aber jener von Helsinki (1908—1922, Abb. 15), entworfen von ELIEL SAARINEN. Die gut ausgeglichenen Baumassen sind ebenso beachtenswert, wie die innere Raumgestaltung. Zur »sachlichen« Architektur, welche dem deutschen Jugendstil folgte, rechnet man den *Karlsruher Bahnhof* (1908—13) (A. Stürzenacker) und den *Basler Badischen Bahnhof* (1910—13, KARL MOSER). Diese Bauten haben auch die Grundrißlösungen den modernen Anforderungen angepaßt, sowohl bezüglich der Größe der Räumlichkeiten als auch ihrer zweckmäßigen Aneinanderreihung. Es ist ein ständiges Abnehmen der Grundfläche der Wartesäle zugunsten der Vorhallen zu verzeichnen, was auf einen immer fließenderen Passagierverkehr deutet.

Am Ende der Epoche stehen die Hauptbahnhöfe von *Leipzig* (1902—16, LOSSOW und KÜHNE) und *Stuttgart* (1911—17, SCHOELER und BONATZ) (Abb. 16).

Leipzig ist der größte seiner Art in Europa. Das vor der sechsschiffigen Halle stehende Hauptgebäude ist mehrgeschossig, der Passagierverkehr benötigt selber zwei davon. Auch waren zwei Vorhallen nötig — die nach den damals noch abgetrennten sächsischen und preußischen Bahnen geteilt waren. In Stuttgart dagegen sind die Eingänge nach dem Nah- und Fernverkehr getrennt worden, und dies ist auch durch die Größe ihrer Baumasse versinnlicht. Die Bauformen von Leipzig zeigen die Übergangszeit, Stuttgart muß zu der heutigen Architektur gerechnet werden.

III. Die Ergänzung

1914—1945

Die klassische Zeit des Eisenbahnbaues ist vorbei. Nachdem das europäische Eisenbahnnetz voll ausgebaut wurde, richtet sich nun die Verkehrspolitik auf eine Rationalisierung des Betriebes, welche auch durch die den Krieg folgende Wirtschaftslage erfordert wird. Es werden Material- und Personenbeschränkungen angestrebt. Beide üben ihre Wirkung auch auf die Bautätigkeit und Architektur aus.

Die architektonische Entwicklung, welche kurz vor dem ersten Weltkrieg schon den Durchbruch zu der vollkommen modernen Baugestaltung erzielen konnte, gelangt einige Jahre ins Stocken. Der Expressionismus und der wiederauflebende Historismus verzögern das Verbreiten der modernen Bauformen. Doch ist der Fortschritt der neuen Architektur unaufhaltsam. Dies kann bei den Eisenbahnbauten zwischen den zwei Weltkriegen gut beobachtet werden.

Die Zeit des Hallenbaues bei den Bahnhöfen ist ebenfalls vorbei. Es werden nur noch Bahnsteige mit Dächern entwickelt, welche sich den Möglichkeiten des Stahlbetonbaues fügen. Die Aufmerksamkeit wird bei Neubauten voll auf das Funktionieren gerichtet. Die Fahrgäste müssen kurz und stockungsfrei geführt werden. Die Gebäude dieser Epoche entwickelten den Typus des modernen, wirtschaftlichen und schönen Empfangsgebäudes.

Der Bahnhof *Barcelona Termino* (1922), (Abb. 17) sowie viele Bauten der italienischen Eisenbahnen — unter ihnen auch der bekannte *Mailänder Hauptbahnhof* (1913—1930, U. STACCHINI) — beweisen den Rückschlag des Historismus nach dem ersten Weltkrieg. Der Historismus erfreut sich des Neubarocks, selbst RÖTTCHER, der namhafte Architekt der Empfangsgebäude, der in Theorie und Praxis die Grundrißlösung des modernen Empfangsgebäudes weitgehendst gefördert hat, bedient sich dieser Formen (*Köln-Deutz*, 1912—1924). In Deutschland gelangt auch der sogenannte Heimatstil besonders bei kleineren Gebäuden zur Geltung.

Bald dringen aber die neuen Bauformen durch. In England baut CHARLES HOLDEN für die Londoner Stadtbahn die Bahnhöfe *Arnos Grove* (1932) und



Abb. 17. Barcelona-Termino (1923). Das Nachklingen des Historismus

Uxbridge (1939), sie sind eine Manifestation des neuen Stils. In Deutschland ist *Meissen* (1928, MIRUS und KREIS) für die Frühzeit charakteristisch. Der Bahnhof *Friedrichshafen* (1930—32) bedeutet die Lösung einer Spezialaufgabe, *Düsseldorf* (Abb. 18), *Oberhausen* und *Beuthen* vertreten die größten deutschen Bahnhofsgebäude dieser Zeit und gehen den von Stuttgart angedeuteten Weg weiter. Der Umbau des Genfer Bahnhofes *Cornavin* (1927—33, FLEGENHEIMER und NAGER) bedeutet eine weitere Stufe in der Entwicklung. Besonders die Bahnsteigdächer verschiedener Formen, mit geschweißter Konstruktion sind nennenswert. Die schweizer Bahnen entwickeln Bahnsteigdächer in Holz, Stahl und später auch in Stahlbetonkonstruktion. Das kleine Gebäude in *Flüelen* zeigt eine gelungene und charakteristische Anlage in den Jahren des zweiten Weltkrieges.

Beim Umbau des *Bukarester Nordbahnhofes* wurden die Bahnsteige mit Stahldächern überdacht, dem Bahnhof schließt sich das moderne Verwaltungsgebäude an. In Frankreich baut man den *Gare de l'Est* um. Der funktionelle Grundriß wird — wie auch beim Genfer Umbau — schon mit dem Verkehr des Bahnhofvorplatzes in Einklang gebracht, ein überaus typischer Wesenszug in einer Zeit, wo die Eisenbahn schon den zunehmenden motorisierten Straßenverkehr berücksichtigen muß. Die Lösung des Bahnhofsgebäudes *Versailles Chantiers* (1931—33, A. VENTRE) verwirklicht den Typ der Anlagen mit brük-

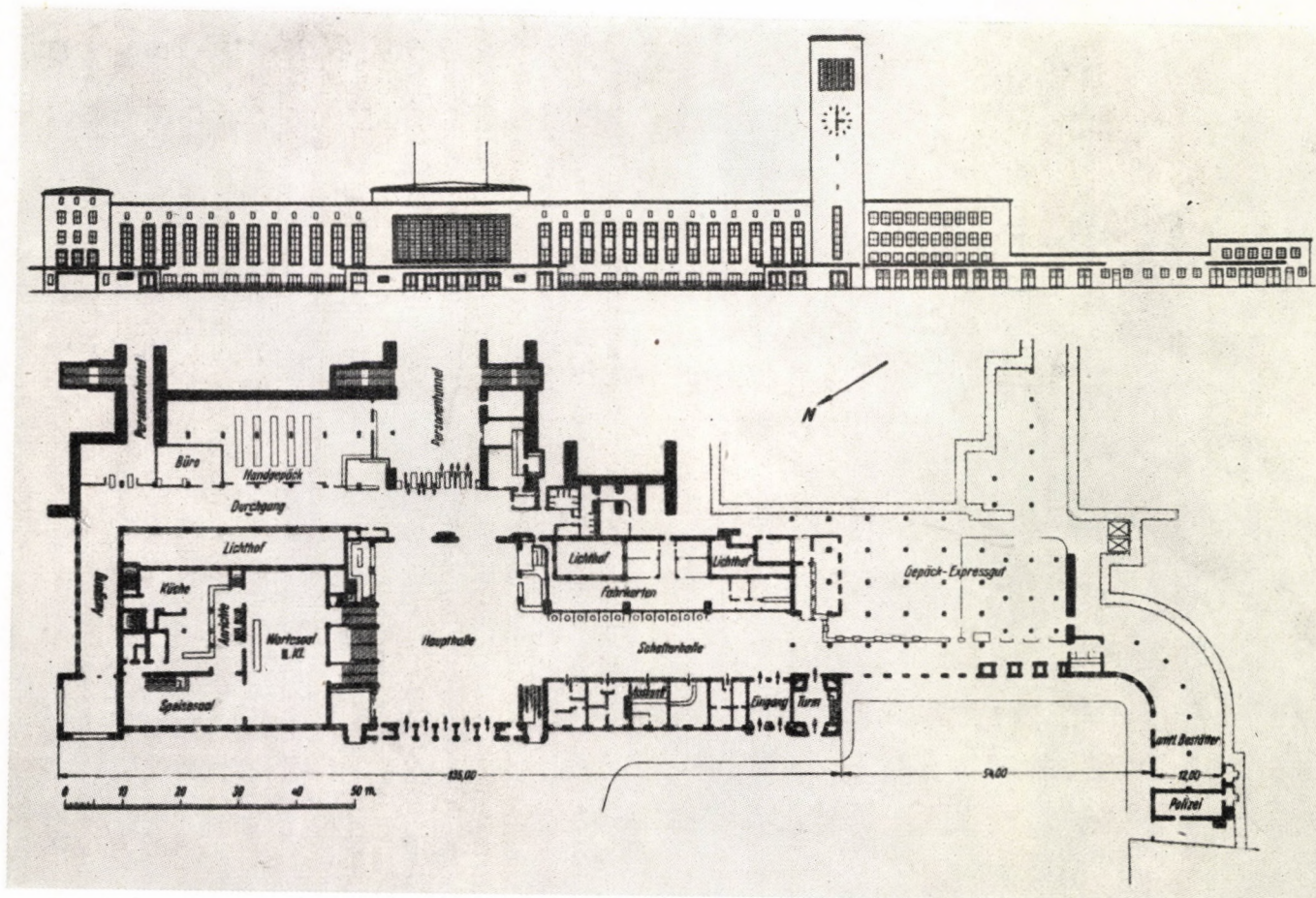


Abb. 18. Düsseldorf (1933). Charakteristischer Großstadtbahnhof der »Ergänzungszeit« zwischen den beiden Weltkriegen
(Von Architekten Kruger und Behnes)

kenartigem Querbahnsteig. Es ist nennenswert, daß hier zum erstenmal auch der Stellwerksraum in die architektonische Gesamtausbildung einbezogen wurde. *Caen* (1936, PACON), *Brest* und *Le Havre* (V. CASSEN) sind nennenswerte Empfangsgebäude der französischen Eisenbahnen. Interessant, daß in Frankreich zu dieser Zeit noch zwei Hallen aus Stahlbeton errichtet worden sind: jene von *Le Havre-Maritime* und die in *Reims* (1930—34, M. LEMAREC). Zwar

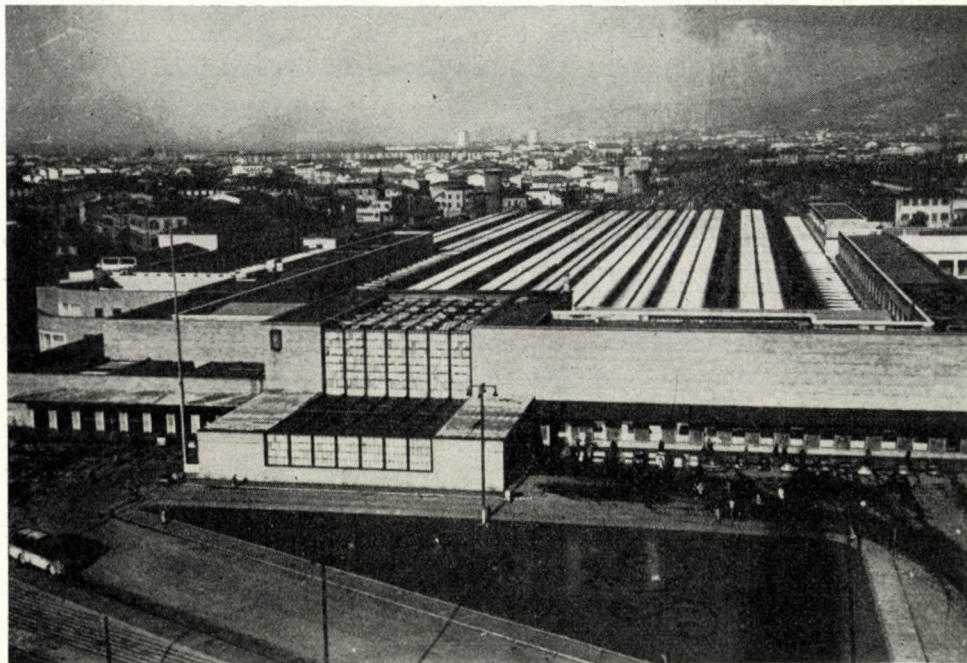


Abb. 19. Firenze, Stazione Sta Maria Novella (1936). Die Architekten (Micheluzzi und seine Mitarbeiter) schufen den »modernen Bahnhof«

kommen ihre Abmessungen denen des 19. Jahrhunderts nicht nach, dennoch bedeuten sie im Zeitalter des Bahnsteigdaches eine abgeordnete Lösung. Besondere Aufmerksamkeit verdienen die Bauten in Italien. ANGIOLO MAZZONI schafft drei moderne Empfangsgebäude: *Reggio Emilia* (1936), *Siena* (1936) und *Trento* (1937). Der Grundriß ist besonders bei Siena beachtenswert. Unter einem zusammenfassenden Dach stehen getrennt die Gebäudeteile, die Funktion ist voll entwickelt. Die größte Bedeutung aber kommt in Italien derzeit dem Stationsgebäude *Firenze* (1936, MICHELUZZI und Mitarbeiter) zu (Abb. 19). Der Fortschritt bezieht sich hier hauptsächlich auf die moderne Form und Konstruktion.

Den Konstruktivismus der vierziger Jahre spiegeln die Amsterdamer Empfangsgebäude SCHELLINGS: *Amstel* (1939) und *Muidenpoort* (1940). Während letzteres eine Lösung auf einem speziellen Grundstück verwirklicht, ist

beim Gebäude Amstel eine funktionelle Zusammenfassung des Empfangsgebäudes mit dem Bahnhofsvorplatz und den Bahnsteigen erreicht worden. Dies deutet bereits auf die Eisenbahn-Architektur der Zeit nach 1945. Die fast zur Gänze verglaste Schalterhalle zeigt rein und deutlich die Konstruktion.

Beachtenswerte Leistungen dieser Epoche sind in fast allen Ländern Europas noch anzutreffen. Vielleicht muß noch der erste Bau des Schwarzmeerbadeortes *Sotschi*, der streng stereometrische Bau des finnischen Empfangsgebäudes *Tampere* (1933—38, E. SEPPÄLÄ), VAN DE VELDES *Blankenberg Station* in Belgien (1936) und der Umbau des dänischen Bahnhofes *Fridericia* (1936), bei welchen die Überbrückung der Gleise mit einem scheunenartigen Satteldach gelöst wurde, erwähnt werden.

Es muß in dieser Epoche zuletzt noch auf die vielen Gebäude in ganz Europa hingewiesen werden, welche als Haltestellen und kleine Empfangsgebäude den Stil der Landhäuser nachgeahmt haben. Die Bauten der neugebauten *Tölz-Langgries* Linie und der umgebauten *Müglitzthalbahnstrecken* (1940, SPRÖGGEL) zeigen diese Bauart am Anfang und am Ende dieser Bauepoche. Auch in Ungarn wurde der eigene Heimatstil gefördert, so an der Linie südlich vom Balaton und an einigen Neubauten in Siebenbürgen, während des zweiten Weltkrieges.

Der Wiederaufbau

1945—

Die Zerstörungen des zweiten Weltkrieges fügten den Eisenbahnen einen großen Schaden zu. Auf den vom Krieg getroffenen Gebieten ist der größte Teil des Gebäudebestandes zerstört oder beschädigt worden. Der Wiederaufbau, der bis in unsere Tage reicht, verlangt eine Bautätigkeit, welche die Maße der Baukonjunktur im 19. Jahrhundert, der großen Zeit des Eisenbahnbaues, teilweise vielleicht noch übertrifft. Der Wiederaufbau bezieht sich nämlich in erster Linie auf große Anlagen, die im Kriege besonders zu leiden hatten. Im Laufe dieser Tätigkeit wird allen jenen Errungenschaften Rechnung getragen, die in den letzten Jahrzehnten sich bei den einzelnen Bauten bewährt hatten. Es wird heute wirtschaftlicher gebaut als früher. Die allgemeine Rekonstruktion der Bahnen verlangt eine Verbesserung auch jener Anlagen, die den Verwüstungen des Krieges entgingen. Das ebenfalls dringende Großstadtproblem ist schwer zu lösen, man strebt wenigstens eine Koordinierung der verschiedenen Verkehrsteilnehmer an.

Es kann nicht unsere Aufgabe sein, hier eine Zusammenfassung über den heutigen Stand der Architektur und ihre aktuellen Probleme zu geben, die Zeit seit dem zweiten Weltkrieg wird nur der Gesamtübersicht halber kurz besprochen. Es muß hier aber dennoch erwähnt werden, daß in der letzten Zeit auch in der modernen Architektur sich bestimmte Differenzierungen bemerkbar

machen. Es gibt eine Tendenz, die dem organischen Bauen nachstrebt und eine, die an den strengeren stereometrischen Formen festhält. Daneben ist der noch immer nachklingende Historismus nicht zu übersehen. In konstruktiver Hinsicht tragen die Möglichkeiten, welche durch die neue Bautechnik gewährleistet wurden, — das Vorfabrikieren, der Spannbeton, die Kunststoffe, die stark mechanisierten Baumethoden usw. — zu einem Fortschritt bei.

Beim Bau der neuen Empfangsgebäude muß auf einige besondere Merkmale hingewiesen werden. Als Folge des angewachsenen Straßenverkehrs wird der Bahnhofsvorplatz nun fast zum Schwerpunkt der Gesamtanlage. Der Bahnsteig ist in funktioneller Hinsicht bereits früher ein gelöstes Problem, hier wird jetzt konstruktionell verbessert. Man nützt die Möglichkeiten der neuen Technik aber selbst am Gebäude aus, und baut z. B. Vorhallen mit großen verglasten Flächen, die Licht in den inneren Raum werfen.

Speziell, aber für die Entwicklung dennoch charakteristisch sind die Bahnhöfe *Macon* in Frankreich, wo die Eisenbahn und der Autobusverkehr ein gemeinsames Empfangsgebäude besitzen, ferner die Haltestelle *Gatwick Airport* bei London, wo die Flugpassagiere direkt vom Empfangsgebäude des Flughafens zu den Bahnsteigen gelangen. Es sind auch Pläne angefertigt worden, bei denen ein direkter Kontakt zwischen den Passagieren des individuellen Straßenverkehrs und den Bahnsteigen besteht. Diese Tendenz wird auch mit dem PKW-Versand gefördert.

Abgesehen von diesen, in die Zukunft zeigenden Lösungen müssen die vielfältigen Anlagen der »konventionellen« Empfangsgebäude kurz überblickt werden. In der Sowjetunion baute man nach dem zweiten Weltkrieg in kurzer Folge eine große Menge neuer Bahnhöfe. In *Odessa* (1952, L. M. TSCUPRIN und V. V. BERESNITZKIJ) wurde mit dem kleineren neuen Gebäude die Kapazität des älteren um 65% übertroffen. Das Gebäude bedient mit einem L-förmigen Grundriß einen Kopfbahnhof, bei welchem der Fern- oder der Nahverkehr zur Gänze getrennt sind. In der Sowjetunion müssen bei den zu befahrenden großen Distanzen für die Fernreisenden besondere Räumlichkeiten angebracht werden. So kann man überall an größeren Bahnhöfen Warteräume für Kinder und Mütter, ferner Schlaf- und Ruheräume antreffen. *Charkov* (1952, G. I. WOLOSINOFF) wurde nach mehreren Wettbewerben wiederaufgebaut. Die besonders sorgfältig ausgestatteten Innenräume müssen bei *Kursk* (1952, I. G. JAWEIN) erwähnt werden. Das Empfangsgebäude von *Stalingrad* (1954, A. V. KUROWSKI), (Abb. 20) zeigt die Tradition des russischen Klassizismus. Dem angewachsenen Verkehr am Schwarzen Meer passen sich die neuen Empfangsgebäude der Badeorte an (*Sotschi, Simferopol, Suhumi* usw.). In der Sowjetunion trifft man auch häufig Inselbahnhöfe an, bei welchen die Empfangsgebäude in mittlerer Lage durch Passagiertunnels erreicht werden können (*Orel, Smolensk, Losowaja*). Wegen ihrer allgemein bekannten, sorgfältigen und prächtigen architektonischen Ausstattung müssen die Haltestellen der



Abb. 20. Stalingrad (1954). Der Wiederaufbau des Bahnhofes im Sinne des russischen Klassizismus



Abb. 21. Roma, Termini (1950). Das Gebäude von Montuori, Calini und ihren Mitarbeitern ist eines der anerkanntesten architektonischen Leistungen nach dem zweiten Weltkrieg

Moskauer Untergrundbahn erwähnt werden, zwar zählen sie nicht unmittelbar zu den von uns behandelten Empfangsgebäuden. Das größte Aufsehen in architektonischer Hinsicht erregte zwischen den Bahnhofsbauten der Nachkriegszeit der neue Bahnhof *Termini zu Rom* (1950, MONTUORI, CALINI und Mitarbeiter, Abb. 21). Den Schwerpunkt bildet der querstehende hohe Hauptblock, aus dem die verglaste Vorhalle und das kleinere Restaurant herausragen. Die Gleisanlagen werden — wie bei großen Anlagen mit vielen Büroräumen bereits allgemein — U-förmig umzingelt. Wie in Rom, wurde auch der Plan zum neuen *Venediger Bahnhof* mit Hilfe von Wettbewerben entwickelt. *Foggia, Verona, Padova* sind ebenfalls nennenswerte italienische Neubauten. In der Deutschen Demokratischen Republik wurde der stark beschädigte *Leipziger Hauptbahnhof* modernisiert wiederaufgebaut. Außerdem kam es zur Rekonstruktion mehrerer Empfangsgebäude (*Dessau, Magdeburg* usw.). In der Bundesrepublik wurde in *Heidelberg* (1955, CONRADI) ein Neubau geschaffen, bei welchem besonders die Bahnsteigüberdachung und der brückenartige Querbahnsteig zu beachten sind. Die Architektur der wiederhergestellten Bahnhöfe in *Köln, München* (Abb. 22), *Bochum* usw. sind ebenfalls nennenswert. In Frankreich wurde unlängst das Empfangsgebäude *Amiens* (1946—56, A. PERRET) beendet. In den zerstörten Atlantik-Häfen wurden schön ausgestattete neue Empfangsgebäude errichtet. Von den neueren Bauten sind außerdem *Angers St. Loud* und *Poitiers* (1958, PEIRANI) zu erwähnen. In den Niederlanden baute SCHELLING zwei neuere Gebäude: *Enschede* und *Hengelo* (1951). Beachtenswerter ist die Anlage des neuen Gebäudes zu *Eindhoven* (1958, VAN DER GAAST). Die Fassade ist ganz verglast, hinter ihr sind die Räumlichkeiten in zwei Geschoßen angeordnet. Die Tschechoslowakei baute in *Pardubice* einen modernen Neubau, mit einer langgestreckten Schalterhalle. In Ungarn sind neben mehreren kleineren Empfangsgebäuden, welche allgemein eine rationelle Grundrißlösung aufweisen, *Nyíregyháza* (1949, GILYÉN—ZAHRADNICZKY), *Székesfehérvár* (1951, KELEMEN), *Hatvan* (1956, NAGY—FÉLIX) und *Győr* (ÉHN—VASS—DIANÓCZKY) zu erwähnen. Jeder dieser vier größeren Bauten befolgt eigene Wege, um zu einer guten Lösung der Bauten an mittelgroßen Bahnhöfen zu gelangen.

Den ästhetischen und technischen Fortschritt der Nachkriegszeit kann man am besten bei den Bahnsteigdächern beobachten, wo eine sprunghafte Entwicklung zu verzeichnen ist. Die Anzahl der reinen Stahlkonstruktionen bleibt weiter hinter denen mit Stahlbeton. Am *Pariser Austerlitz-Bahnhof* wurde eine auf Stahlstützen ruhende Überdachung mit aufgehängter Aluminiumverkleidung geschaffen. An der Haltestelle des *Gatwick-Airport* baute man zweistützig, aber schlank mit Stahl. Die Dachflächen sind vollverglast und daher ist der ganze Bahnsteig mit Licht durchdrungen. In *Winterthur-Grüze* (Abb. 23) wurde während der Aufrechterhaltung des Verkehres eine der sonderhaftesten Bahnsteigüberdachungen geschaffen. Man wählte als Tragele-



Abb. 22. München Hbf. (1953). Die in ihrer Einfachheit ansprechende Schalterhalle

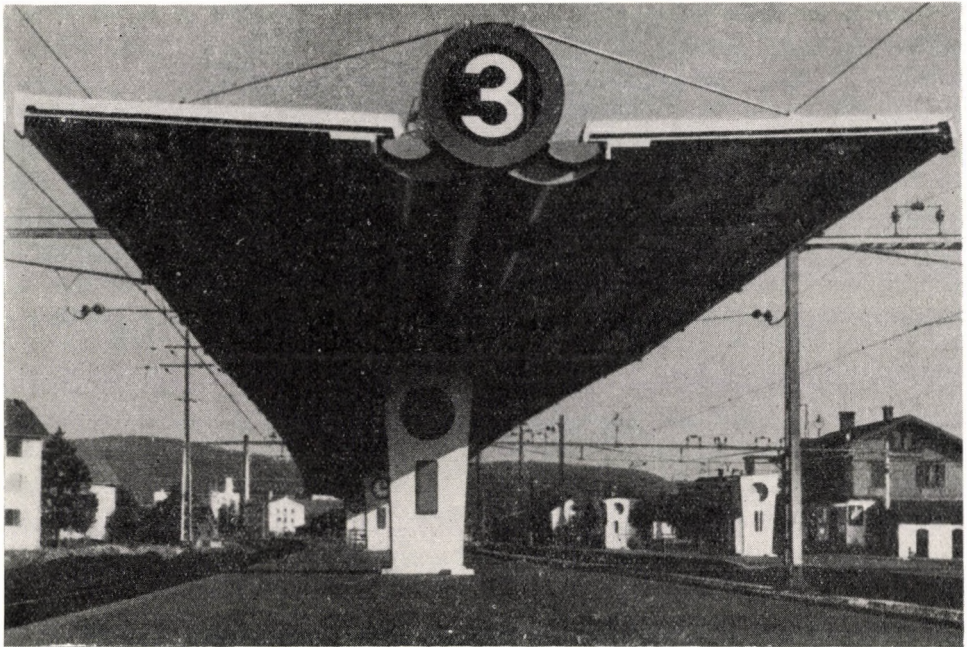


Abb. 23. Winterthur-Grüze (1954). Vorfabrizierte Bahnsteigüberdachung mit weitgespanntem Mitteltragwerk zur Erlangung von möglichst freien Bahnsteigflächen. Die Konstruktion von Ing. Hilfiker konnte während des Betriebs erbaut werden

ment eine Stahlröhre mit einem Durchmesser von 1,25 m, um auch die Treppen am Bahnsteig bei der einstützigen Anordnung überbrücken zu können. So hat das Dach mit 90 m Gesamtlänge nur drei Stützpfeiler. Die Dachflächen sind auf das Tragrohr aufgestellte bzw. aufgehängte Stahlbeton-Fertigelemente. Ebenfalls fortschrittlich sind die Bahnsteigüberdachungen in *Heidelberg* und *Rotterdam Centraal Station*, wo man mit Spannbeton eine früher unerreichbar geschwungene Form erzielen konnte. Die neuesten technischen Errungenschaften aber, welche die Überspannung großer Weiten wieder wirtschaftlich machen, rücken die Möglichkeit einer Fortsetzung des Hallenbaues neuerdings ins Blickfeld. Dies hat sich beim Wettbewerbsplan Nervis zum Neapeler Bahnhof gezeigt.

*

Die Hochbauten der Eisenbahnen und unter ihnen die Empfangsgebäude zeigen bei ihrer Entwicklung in funktioneller Hinsicht eigene Probleme, welche wir kurz geschildert haben. In konstruktiver Hinsicht dagegen ging das Problem bereits über die Begrenzungen des Eisenbahnhochbaues hinaus; es war für die Hallenbauten und viele Zweckbauten des 19.—20. Jahrhunderts allgemein charakteristisch. Die Entwicklung der Eisen-, Stahl- und Stahlbetonkonstruktionen ist ein Wesenszug der ganzen Architektur der letzten 150 Jahre. Was aber den Baustil anbelangt, bezieht sich dieser nicht mehr auf einen Kreis bestimmter Bauten, sondern auf die ganze Architektur. Und diese ist besonders zur Zeit der besprochenen Eisenbahngebäude bezeichnend, weil sie sich in jener Epoche vom Klassizismus über zahlreiche Strömungen bis zu der neuesten Baukunst entwickelt hat.

SCHRIFTTUM*

Umfassende Werke :

- Carroll L. V. MEEKS: The railway station. An architectural history. (London, The Architectural Press 1957.)
- Edmund HEUSINGER von Waldegg: Atlas zu dem Handbuch für spezielle Eisenbahn-Technik. Erster Band. Der Eisenbahnbau (Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann 1871).
- Paul von RÖLL: Enzyklopädie des Eisenbahnwesens. (Berlin 1912—13) Band 4: »Empfangsgebäude«, Band 6.: »Hallen«.
- R. CAMPANINI: Edifici dei trasporti (Documenti de architettura composizione e tecnicamoderna). Editore Vallardi Milano, 1945).
- Vincenzo LENA: Le grandi stazioni per viaggiatori. (Urbanistica ed architettura ferroviaria) (Mitteilungen in Fortsetzungen in den Nummern der Zeitschrift *Ingegneria ferroviaria* 1953. 10., 1953. 11., 1954. 2. und 1954 3.).
- FODOR Jenő: Vasúti épületek (Felvételi épületek). (A mérnöki továbbképző Intézet kiadványai, E. 37. sz., 1949.), sowie die umgearbeitete Neu-Auflage: FODOR Jenő—MANGEL János. Vasúti felvételi és áruforgalmi épületek (Közlekedési Kiadó, 1953).

* Das Schrifttum zu der geschichtlichen Behandlung der Eisenbahnbauten muß hauptsächlich aus einzelnen kurzen Abhandlungen und Angaben gesammelt werden, welche sich eher in eisenbahntechnischen Zeitschriften, seltener in jenen für die Architektur finden lassen. Umfassenden Überblick gewährleisten bisher nur einzelne Arbeiten, bei denen aber im allgemeinen der Akzent auf der Behandlung der Bauten ihres eigenen Landes liegt.

Wichtigere Teilarbeiten :

- (*Deutschland*) H. RÖTTCHER: Empfangsgebäude der Personenbahnhöfe (Berlin, 1933).
 Berlin und seine Eisenbahnen I—II. (Verlag von Julius Springer, Berlin, 1896).
 RICHARD SPRÖGGE: Hochbauten der Eisenbahn (Springer Verlag, 1954.)
- (*Großbritannien*) CHRISTIAN BARMAN: An introduction to railway architecture (London: Art and Technics: 1950).
- (*Österreich*) HERMANN STRACH: Geschichte der Eisenbahnen der Österreichisch-Ungarischen Monarchie. I—IV. Band. (Wien—Teschen—Leipzig. 1898.)
 (Besonders im II. Band: ERNST REITLER: Bahnhofsanlagen, und HARTWIG FISCHEL: Hochbau).
- (*Schweiz*) Ein Jahrhundert Schweizer Bahnen 1847—1947. (Verlag Hubert et Co. Ag, Frauenfeld). Zweiter Band. III. Hochbauten.
- (*Sowjetunion*) G. P. ZAPOROSHTZEV—Sz. I. JAKUSIN: Nowje shelesnodaroshnje woksali (Transsheldorisdät).**
- (*Ungarn*) Das Eisenbahnwesen in Ungarn seit 1867. D. JULIUS PERNER: Hochbau. (HERMANN STRACH: Geschichte der Eisenbahnen der Österreichisch-Ungarischen Monarchie. III. Band).
 Vasúti felvételi épületek tervbemutatója. Uvaterv, 1956. Manuskript.

Zeitschriften :

Архитектура СССР
 Architectural Review
 Eisenbahntechnische Rundschau
 Ingegneria ferroviaria
 Közlekedéstudományi Szemle
 Magyar Mérnök és Építész Egylet Közlönye
 Organ für die Fortschritte im Eisenbahnwesen
 Railway Gazette
 Revue Generale des chemins de fer
 Zeitschrift für Bauwesen
 Zentralblatt der Bauverwaltung, usw., usw.

Foto-Nachweis

DB: 13, 16, 22.
 F. S. Italia: 19, 21.
 NS: 25.
 RENFE: 17.
 SNCF: 9, 14.

Die anderen Bilder stammen aus der Sammlung des Autors.

ZUSAMMENFASSUNG

Die seit der Mitte des 19. Jahrhunderts eingesetzte große architektonische Entwicklung — die über die Stilbestrebungen des Eklektizismus und der Sezession hindurch in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts an den zeitgemäßen Schöpfungen unseres Zeitalters anlangte — kann an den Zweckbauten und Gebäuden, die die technische Entwicklung des Zeitalters begleiteten, anschaulich verfolgt werden. Aus diesem Grunde soll der vorliegende Aufsatz, der die Darlegung der historischen Entwicklung der Bahnhofsgebäude zum Gegenstand hat, einen noch unaufgearbeiteten Teil der von 1830 bis in unsere Tage reichenden architektonischen Entwicklung durch eine Analyse der Funktion, der Konstruktion und der Formgestaltung beleuchten.

Die Entwicklung der Kopfbahnhofsgebäude nach der Funktion und gleichzeitig nach der Größenordnung wird sowohl für die Eingeschoß- wie auch Zweigeschoßanlagen in Abb. 1

* Г. П. Запорожцев, С. И. Якушин: Новые железнодорожные вокзалы (Трансжелдориздат).

veranschaulicht. Die Entwicklung der Empfangsgebäude der Durchgangsbahnhöfe ist aus Abb. 2 ersichtlich.

Die Entwicklung der Baukonstruktionen des 19. und 20. Jahrhunderts wird in den Bahnhofshallen treu widerspiegelt. Zu Beginn bedeuteten die Holzhallen die allgemeine Lösung. Die Verbreitung des Streckstahles spiegelt sich in den Schöpfungen der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts wider, während das 20. Jahrhundert im Zeichen der Eisenbetonkonstruktionen steht. Die Konstruktion übte auch auf die Formgestaltung eine Rückwirkung aus, wobei die Hallenkonstruktionen nach der Jahrhundertwende durch die verschiedenen Dachkonstruktionen abgelöst wurden.

Die Formentwicklung spiegelt bei den Bahnhofshallen und den Bahnsteig-Dachkonstruktionen die konstruktive Zweckmäßigkeit wider, während der übrige Teil des Empfangsgebäudes im 19. Jahrhundert im Zeichen der Stilbestrebungen des Klassizismus, der Romantik und des Eklektizismus stand. Die funktionalistisch-konstruktivistische Architektur unseres Zeitalters schuf bereits während des ersten Weltkrieges und in der nachfolgenden Zeit namhafte Bahnhöfe. Während der 15 Jahre, die dem zweiten Weltkrieg folgten, wurden im Rahmen des großzügigen Wiederaufbaus mehrere Bahnhofsgebäude geschaffen, die vortreffliche Beispiele der Architektur unseres Zeitalters vertreten.

THE ARCHITECTURE OF EUROPEAN RAILWAY STATION-BUILDINGS

(Historical review)

M. KUBINSZKY

SUMMARY

The extensive architectural development which had its beginning in the middle of the 19th century, after going through such styles as the eclecticism and secession, reached to the so-called "modern" works in the first half of the 20th century. The sequence of this development visibly appears in buildings and edifices, serving purposes which arose parallel with the technical development taking place during this period. The historical review of railway station-buildings — being the subject of this paper — aims to elucidate a so far not elaborated section of the architectural development, which took place from 1830 up to our present days, by analysing the functional, structural and formal development of the buildings in question.

The *functional* and at the same time dimensional development of terminus-station buildings is illustrated in *Fig. 1* for the one and two-level arrangements. The development of transit station buildings is to be seen in *Fig. 2*.

The *development of building structures*, which took place in the 19th and 20th centuries, is truly reflected by station-halls. In the beginning, halls built of timber were a general solution. The spread of section-steel appears in works set up in the second half of the past century, while the 20th century is characterized by reinforced concrete structures. The structural development also reacted on the formal one; after the turn of the century hall structures were replaced by different kinds of roofing.

In the 19th century the formal development of train station-halls reflects the strive after structural expediency, while the other parts of station-buildings still wore upon themselves the marks of classic, romantic and eclectic styles. The architecture of the 20th century, led by functional and structural ideas, has already created remarkable railway stations during World War I and subsequently to it. During the 15 years since World War II, within the scope of the large-scale reconstruction, several station-buildings have been created which might be considered as being eminent examples of modern architectural work.

L'ARCHITECTURE DES BÂTIMENTS DE VOYAGEURS DE CHEMIN DE FER EN EUROPE

(Aperçu historique)

M. KUBINSZKY

RÉSUMÉ

Au cours de son développement intense depuis la moitié du siècle dernier, l'architecture a passé d'abord par les recherches de style éclectiques et sécessionnaires pour aboutir, dans la première moitié du XX^e siècle, aux créations dites «modernes» de notre temps. Ce développement peut être suivi à la trace sur les bâtiments et constructions utilitaires reflétant les progrès

techniques de l'époque. C'est dans ce sens que l'étude, offrant un aperçu historique de l'architecture des bâtiments de voyageurs de chemin de fer, espère faire oeuvre utile en analysant l'évolution de la fonction, de la structure et de la forme de ces bâtiments depuis 1830 jusqu'à nos jours.

L'évolution *fonctionnelle*, en même temps que les changements de dimensions des gares de tête de ligne, sont illustrés sur la figure 1, pour les dispositions à un et à deux niveaux de ces bâtiments. Les phases du développement des bâtiments de voyageurs des gares de passage sont visibles sur la figure 2.

Le développement de la *structure* aux XIX^e et XX^e siècles est bien reflété par les halles de gares. Au début, les halles en bois représentaient la solution générale. L'utilisation étendue de l'acier laminé se traduit par les constructions de la seconde moitié du siècle dernier, tandis que le XX^e siècle est marqué par la généralisation des constructions en béton armé. La structure de la construction réagit à son tour à la forme: depuis le tournant du siècle, les constructions de halls ont été remplacées par les différentes toitures.

Quant à l'évolution *formelle*, celle-ci reflète l'utilité de la construction dans le cas des halles de gares et des toitures de quais. Au XIX^e siècle, les autres parties des bâtiments de voyageurs portent l'empreinte des styles classique, romantique et éclectique. L'architecture fonctionnaliste-constructiviste de notre époque a déjà créé des gares fort remarquables à l'époque de la première guerre mondiale, ainsi que dans la période suivante. Les reconstructions de grande envergure qui ont eu lieu au cours des 15 années écoulées depuis la seconde guerre mondiale, ont enfin donné naissance à plusieurs bâtiments de voyageurs constituant de beaux exemples de l'architecture de notre époque.

АРХИТЕКТУРА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ПРИЕМНЫХ ЗДАНИЙ В ЕВРОПЕ (Исторический обзор)

М. КУБИНСКИ

РЕЗЮМЕ

Начавшийся в середине 19-го века расцвет архитектуры (который, пройдя искания стилей эклектики и сецессии, в первой половине 20-го века достиг решений, названных современностью стилем «модерн») наглядно проследим на примере тех целесообразных сооружений и зданий, которые сопровождали техническое развитие века. Поэтому автор в данной работе, на примере ознакомления с историей развития железнодорожных приемных зданий, желает осветить необработанный до сих пор период развития архитектуры от 1830-го года до наших дней, путем анализа развития назначения, конструкции и формы.

Функциональное и одновременно размерное развитие зданий головных вокзалов одноэтажного, а также двухэтажного решения показано на рис. 1. Формирование приемных зданий проходных вокзалов видно на рис. 2.

Развитие строительных конструкций за 19 и 20 вв. нашло верное отражение в залах приема поездов. Вначале деревянные конструкции означали общеприемлемое решение. Распространение прокатной стали во второй половине прошлого века отражается в решениях того времени, тогда как 20 век характерен железобетоном. Конструкции оказали влияние и на форму и с началом нового века ангарные конструкции уступают место различным крышам.

Развитие формы в случаях залов приема поездов и перронных крыш отражает конструктивную целесообразность, в остальных же частях приемные здания в 19 веке стояли под знаком стремления стилей классицизма, романтики и эклектики. Современная (функционально-конструктивная) архитектура уже во время первой мировой войны и в последующий период создала знаменитые вокзалы. За прошедшие после второй мировой войны 15 лет, в рамках восстановления, проведенного в больших масштабах, осуществлено несколько таких станционных зданий, которые представляют собою отличные примеры архитектуры нашего века.

THE INFLUENCE OF COOLING BLAST FURNACE WALLS ON THE PRICE OF PIG IRON

A. FONÓ

D. ENG. SC.

CORR. MEMBER OF THE HUNG. ACADEMY OF SC.

[Manuscript received March 6, 1961]

Blast furnace walls are cooled, because the resistance of the available wall material at temperatures high enough for economical operation is not sufficient to withstand the wear caused by the descending column and other factors. Cooling is usually performed by water being sprayed on the outer surface or by circulation or evaporation of water in built-in cooling elements.

In the following we shall investigate the effects of cooling and the factors influencing economy.

The surface temperature of the refractory lining adjacent to the interior of the furnace is approximately equal to the temperature of the adjacent inner space. Due to the removal of heat, the temperature in the wall drops towards the exterior. The more heat is removed, the steeper the temperature drop; and the steeper the temperature drop, the nearer to the interior is that layer of the lining the temperature of which the material is able to resist practically for long. This means that by increasing the quantity of removed heat, a reduction in the thickness of the layer with a temperature higher than the resistance limit of the lining is achieved, hence the thickness of the lining worn off during unit time also decreases. If more heat is removed the life of the refractory lining increases.

The heat removed must be replaced thus causing a rise in the coke consumption of the blast furnace. Cooling of the wall will be economic if the sum of the cost of wall abrasion and of the cost of coke consumption is a minimum.

Fig. 1 shows the cross section of a furnace wall element investigated and serves to illustrate the above said. Cooling is provided either at the outer surface of the wall of thickness b_k , or within the wall at a distance b_o from the inner surface. The inner surface temperature of the wall in the zone examined is T_b . The refractory lining is considered as being, up to a temperature T_a practically permanently resistant to mechanical and chemical attack. This temperature is lower by $\Delta T = T_b - T_a$ than the temperature of the inner surface at the point investigated.

Let us suppose that H_2 is the quantity of heat the removal of which ensures the greatest economy. This quantity of heat can be removed either at

a temperature T_{k2} from the outer surface or at a temperature T_{v2} by the cooling element located further inwards.

When this quantity of heat is removed temperature of the refractory lining reaches the value T_a at a distance s_2 from the inner surface. Thus s_2 is the thickness of the not sufficiently resistant layer.

If we wish to economize on additional coke consumption of the furnace and remove less heat: H_3 , thus if we maintain a temperature T_{k3} at the outer furnace surface or T_{v3} at the internal cooling element, the thickness of the

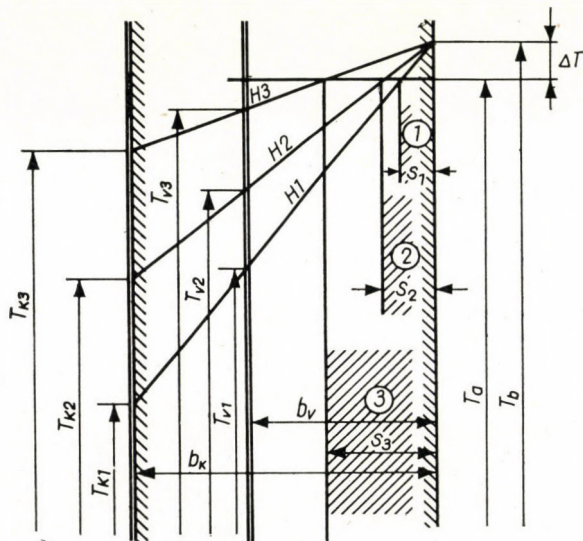


Fig. 1

lining layer subjected to abrasion S_3 will be greater than before, thus abrasion of the wall will progress more rapidly. On the other hand, if wall abrasion per unit time is reduced to s_1 , the quantity of removed heat increases to H_1 , corresponding to the cooling temperature T_{v1} .

The quantity of heat removed across the wall is proportional to the temperature difference and inversely proportional to the thickness of the wall layer between the two places having different temperatures.

$$H = K \frac{T_b - T_v}{b_v} \quad (1)$$

where K is a proportionality factor depending on the dimensions and on the characteristics of the lining material. K is taken as a constant, neglecting the variation of the heat conduction coefficient with temperature. The effect of this neglect diminishes with the wall thickness.

The thickness of the layer less resistant to abrasion is according to Fig. 1

$$s = ab_v \frac{T_b - T_a}{T_b - T_v} \quad (2)$$

where a is a proportionality factor.

From the above

$$s = aK \frac{T_b - T_a}{H} \quad (3)$$

If As is the cost related to abrasion per unit time, and BH the cost related to heat consumption per unit time, the total cost will be:

$$F = As + BH.$$

Here the minimum of this value is of interest.

$$F = aK \frac{T_b - T_a}{H} A + HB.$$

Heat consumption H for which the total cost F is minimum, is given by

$$\frac{dF}{dH} = 0 \quad AaK \frac{T_b - T_a}{H^2} = B$$

hence

$$H_{\text{opt}} = \left[\frac{A}{B} aK(T_b - T_a) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

The minimum total cost is

$$\begin{aligned} F_{\text{min}} &= AaK \frac{T_b - T_a}{\left[\frac{A}{B} aK(T_b - T_a) \right]^{\frac{1}{2}}} + B \left[\frac{A}{B} aK(T_b - T_a) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= [ABaK(T_b - T_a)]^{\frac{1}{2}} + [ABaK(T_b - T_a)]^{\frac{1}{2}} \\ F_{\text{min}} &= 2[ABaK(T_b - T_a)]^{\frac{1}{2}} \quad (5) \end{aligned}$$

The total cost is minimum when the two types of costs are equal.

The investigations carried out so far show that under optimum conditions the total cost related to wall abrasion and to cooling is influenced by the square root of the temperature difference, *i. e.* by $(T_b - T_a)^{1/2} = \Delta T^{1/2}$. Therefore, if a more expensive refractory material but resistant to a higher temperature T_{al} is available, it is justified to pay for it such part of the total cost of cooling and lining, as can be saved in the proportion of $\left(\frac{T_b - T_{al}}{T_b - T_a} \right)^{\frac{1}{2}}$.

The most economic conditions cannot be maintained permanently, because during the progression of wall abrasion both the wall thickness and the removed heat change within such wide limits, that it is practically impossible to maintain optimum conditions for a prolonged time.

Compression strength, and — according to HARDERS [1] first of all the modulus of elasticity at the temperature under consideration will provide information about the temperature T_a characteristic of the wear-resistant — mainly of the abrasion-resistant — property of the refractory material.

Fig. 2 shows the compressive strength of several possible refractory lining materials as a function of temperature, according to OGNEUPORI [2].

Fig. 3 shows the modulus of elasticity of a refractory material as a function of temperature, according to the paper by HARDERS. This shows that when exceeding 1000°C , the compressive strength of the lining materials used to-day rapidly drops to nearly zero and that the modulus of elasticity is *e. g.*, at 1200° only one fifth of the value found at 800°C .

As long as there are no more reliable data on the variation of abrasion resistance and of wear with temperature, for preliminary estimations, the value of T_a can be put at $1000\text{--}1100^\circ\text{C}$.

In the interior of a blast furnace the wall surface temperature in the hottest zone is usually between 1200 and 1400°C , thus $(T_b - T_a)^{1/2}$ is between 10 and 20.

The constants needed for the calculations can be determined for a given blast furnace, if during operation, the reduction of wall thickness is measured in drilled holes and if for the furnace, operating always under almost identical conditions, the values of coke consumption are recorded. It will be useful to record the values for zones of different temperatures and to carry out the calculations by zones.

From (1) and (4) at optimum conditions

$$H = K \frac{T_b - T_v}{b} = \left[\frac{A}{B} aK(T_b - T_a) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

From this

$$\frac{T_b - T_v}{b} = \left[\frac{A}{B} \frac{a}{K} (T_b - T_a) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

It would be desirable to change the cooling temperature T_v , following the decrease of the wall thickness b , so that $\frac{T_b - T_v}{b}$ should remain approximately constant. This can not be achieved, because if we consider even generation of saturated steam up to 5 at. abs. pressure, the temperature of the cooling medium in the cooling element can be varied only between approx. 30°C and

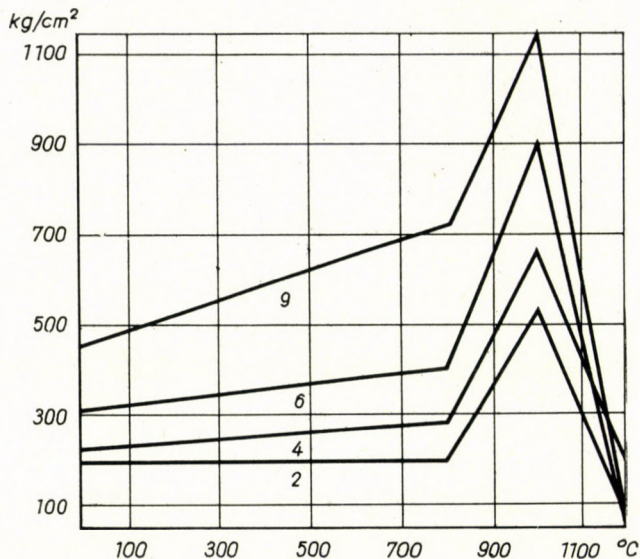


Fig. 2

150° C, which allows for a relative regulation, with an inner wall temperature of 1300° C, of $\frac{1300 - 150}{1300 - 30} \cong 0,90$ whilst the wall thickness might drop to 20% of its original value. The repeated displacement of the cooling elements during

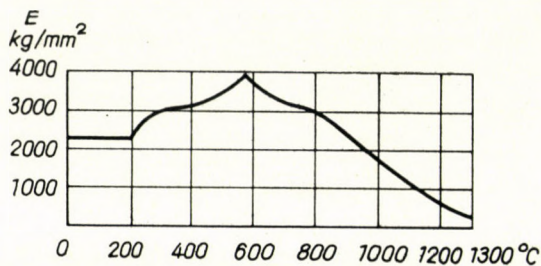


Fig. 3

operation is difficult to solve and the fact must be taken into account that the wall thickness decreases and the quantity of removed heat increases, which has to be replaced by coke consumption.

According to the above s is the thickness of that refractory lining layer which is not sufficiently resistant. The thickness s is proportional to the wall

abrasion during unit time, hence with the variation of wall thickness b , viz.,

$$s = \frac{db}{dt} \text{ where } t \text{ is the time of operation in hours.}$$

$$s = ab \frac{T_b - T_a}{T_b - T_v} = bc \text{ and}$$

$$c = a \frac{T_b - T_a}{T_b - T_v} = \text{const.}$$

if small variations in the cooling medium and in the average heat conduction coefficient are left out of consideration.

$$\text{From this, } \frac{db}{b} = cdt$$

$$\left[\ln b \right]_{b_1}^{b_2} = \left[-ct \right]_0^t + \text{const}$$

$$\ln \frac{b_2}{b_1} = -ct + \text{const}$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{e^{ct}} + \text{const.}$$

If $t = 0$; $b_2 = b_1$, thus $\text{const} = 0$ and

$$b_2 = \frac{b_1}{e^{ct}} \quad (6)$$

Here b_1 is the initial wall thickness and b_2 the reduced wall thickness after time t .

Using the above relations and calculating previously with arbitrarily chosen constants, the changed conditions during operation can be illustrated by an example (Fig. 4).

It can be seen, that in accordance with the exponential law, the wall thickness decreases first rapidly and then more and more slowly, and that the heat consumption — being inversely proportional to the wall thickness — gradually rises at an increasing rate.

Knowing the basic relations, we may examine the total cost involved in cooling the wall of a blast furnace during the working period between two rebuildings of the wall. The results of this examination will supply information about the time of operation after which it may be justified to reconstruct the furnace wall.

It is justified to stop furnace operation for the reconstruction of the wall when the total cost is minimum. The costs to be compared are the sum of F_1 ,

cost of increased coke consumption due to cooling and other cooling costs, and of F_2 cost of relining and the time loss connected with it, *i. e.* the total costs $F_1 + F_2$, per unit operating time. If the duration of one working period is t hours, then

$$F_1 = \int_0^t BH dt = BK \int_0^t \frac{T_b - T_v}{b_v} dt$$

from (6)
$$b_v = \frac{b_1}{e^{ct}}$$

$$F_1 = BK \frac{T_b - T_v}{b_1} \int_0^t e^{ct} dt = BK \frac{T_b - T_v}{b_1} \left[\frac{1}{c} e^{ct} \right]_0^t + \text{Const.}$$

$$F_1 = BK \frac{T_b - T_v}{b_1 c} [e^{ct} - 1] + \text{Const.}$$

if $t = 0$, $F_1 = 0$, hence $\text{Const.} = 0$.

The average cost per hour is

$$\frac{F_1 + F_2}{t} = \frac{BK \frac{T_b - T_v}{b_1 c} [e^{ct} - 1] + F_2}{t} \quad (7)$$

For the calculation and checking of the time t which will give the extreme value of the total cost, the equation deduced from

$$\frac{d}{dt} \frac{F_1 + F_2}{t} = 0$$

may be used:

$$BK \frac{T_b - T_v}{b_1 c} \cdot \frac{tce^{ct} - e^{ct} + 1}{t^2} = \frac{F_2}{t^2}$$

$$e^{ct}(tc - 1) + 1 = \frac{F_2 b_1 c}{BK(T_b - T_v)}$$

$$t = \left\{ \left[\frac{F_2 b_1 c}{BK(T_b - T_v)} - 1 \right] \frac{1}{e^{ct}} + 1 \right\} \frac{1}{c} \quad (8)$$

For the above relations the values of the constants must be determined.

The most important item of the cost connected with the cooling of the wall is the price of the additional coke needed to cover the heat removed. At the high temperature prevailing in the furnace the coke burns to CO and the blast furnace gas leaving the furnace may be utilized. 1/3 of the heating value of the coke is utilized inside the blast furnace and 2/3 of it outside by means of the blast furnace gas. The heating value unit of the furnace gas has

a lower money value than that of the coke, because it can produce only lower temperatures, but on the other hand blast furnace gas has some valuable properties, first of all of being practically sulphur-free. Considering these facts, the money value of the blast furnace gas is now stabilized at about 10 fillérs/1000 kcal. The price of blast furnace coke is 105 fillérs/kg for a calorific value of 7200 kcal/kg, of which approx. 4800 kcal à 10 fillérs/1000 kcal, thus 48 fillérs, is the part of the gas. For the 2400 kcal of 1 kg of coke used in the furnace 57 fillérs/kg remain. The price of the heat used in the furnace is thus $\frac{57}{2,4} = 23,6$ fillérs/1000 kcal; 57 fillérs/kg is 54,4% of 105 fillérs price of the coke.

The quantity of heat removed from the blast furnace has to be valued at this price, if means for the convenient utilization of the blast furnace gas have been provided for. To this must be added the various other expenses, such as procuring of water, its treatment, pumping, operation of the cooling elements and their maintenance.

In the example examined, the price of the heat removed from a new blast furnace by the cooling water was measured and calculated by the

above method as being	378,-Ft/h
and the cost of pumping etc.	70,-Ft/h
	Total cost 448,-Ft/h

From (1) and (6)

$$BH = BK \frac{T_b - T_v}{b_1} e^{ct} \quad (9)$$

at the time $t = 0$

$$BH = BK \frac{T_b - T_v}{b_1} = 378,-.$$

From (7)

$$\frac{F_1}{t} = \frac{BK}{t} \frac{T_b - T_v}{b_1 c} [e^{ct} - 1] + 70$$

$$\frac{F_1}{t} = \frac{378}{t} \frac{e^{ct} - 1}{c} + 70.$$

In the example investigated, the wall thickness decreased after 20 000 hours to 1/5 of its original, hence

$$\frac{l}{5} = \frac{l}{e^{20000 c}}$$

$$20000 c = \frac{\log 5}{\log e} \quad c = 0,0000805$$

$$\frac{F_1}{t} = \frac{378}{t} \frac{e^{\frac{80,5}{10^6} t} - 1}{\frac{80,5}{10^6}} + 70 = 4,76 \cdot 10^6 \frac{e^{\frac{80,5}{10^6} t} - 1}{t} + 70.$$

The expenses F_2 related to re-lining are practically independent of the time the lining had been in operation. These expenses consist, on the one hand, of the direct cost of lining reconstruction: material, labour, overhead costs. In the investigated case they amount to about $3 \cdot 10^6$ Ft. Furthermore, wall reconstruction should be charged by the economical effects of a 45 days shut down. The value of these can be estimated by considering that the investment costs of such a whole blast furnace plant amount to about $800 \cdot 10^6$ Ft and must be written off, e.g. during 200 000 operating hours, thus 4000 Ft per hour of not utilized amortization also charges the reconstruction time of

$$\begin{array}{ll} 45 \cdot 24 = 1080 \text{ hours, thus} & 4,32 \cdot 10^6 \text{ Ft} \\ \text{adding the above} & \underline{3,00 \cdot 10^6 \text{ Ft}} \\ \text{hence} & F_2 = 7,32 \cdot 10^6 \text{ Ft} \end{array}$$

is the total cost in the case of our example, which charges one relining

With the above constants, when producing e.g. 10 t/h gray pig iron and stopping the working of the furnace after t hours of operation, the average total charges of wall cooling and lining reconstruction per 1 t of pig iron are according to (7)

$$\frac{1}{10} \frac{F_1 + F_2}{t} = -\frac{10^6}{t} \left\{ 0,476 \left[e^{\frac{80,5}{10^6} t} - 1 \right] + 0,732 \right\} + 7$$

This is illustrated by Fig. 5, which shows that with increasing time t between two relinings the cooling and wall wear costs per unit quantity of produced pig iron decrease first rapidly then remain in the vicinity of the value for the most economic operation and finally rise steeply.

This means that compared to the operation resulting in minimum cost per hour prolongation of the operating time leads to surplus expenses without surplus production, i. e. blast furnace coke is wasted during the additional time. Saving this we save imported blast furnace coke. According to published data the costs of wall cooling and wall abrasion are 4—13% of the cost of pig iron production. Fig. 5 explains why there are such large discrepancies between the data found in literature: they are a consequence of the difference between the times one lining was used.

In the example quoted all costs considered are minimum if the blast furnace is stopped for relining, after 15 000 hours. But if e.g., it is instead stopped after 40 000 hours, the average cost per ton of pig iron is 2,6 times larger than in the former case; with other words, 1,6 times the inevitable cost is not utilized. The part of the blast furnace coke of the total costs is increased to 4,6 times its optimum value, consequently the wasted coke is 3,6 times the inevitable quantity. This shows also that if blast furnace gas consumption has been planned for economic operation, such a surplus quantity of gas is produced, which can be used only for boiler firing, where its value is already less than 10 fillérs/1000 kcal.

In the example, in the most favourable case of 15 000 operating hours, the total cost related to wall cooling and relining is 4,35% of the estimated price, 2700 Ft/t, of the gray pig iron, while it will be 11,4% for an operating period of 40 000 hours.

The cost of coke consumption related to pig iron, if the blast furnace gas is perfectly utilized, rises from the optimum 60,— Ft/t to 282,— Ft/t, thus the superfluous additional consumption will be 222,— Ft/t of pig iron. But if for a part of this additional consumption we cannot utilize the blast furnace gas, then according to the above, the coke consumption cost of this part must be increased by $\frac{100}{54,4} = 1,84$ times.

As for the quantity of pig iron, the time used for production is $\frac{15\ 000}{16\ 080} = 0,934$ part of the time if there is an interruption of 1080 hours after 15 000 hours of running, while in the case of stopping the furnace after 40 000 hours, there is production during

$$\frac{40\ 000}{41\ 080} = 0,974 \text{ part of the time.}$$

The difference is 0,974—0,934, i. e. the annual pig iron production drops by 4%. This has been taken into account already in the calculation of the capital cost of the blast furnace plant.

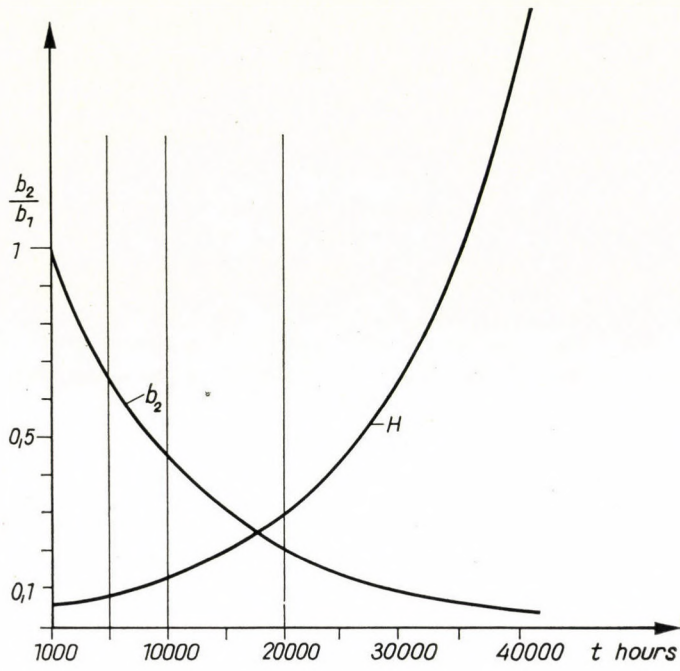


Fig. 4

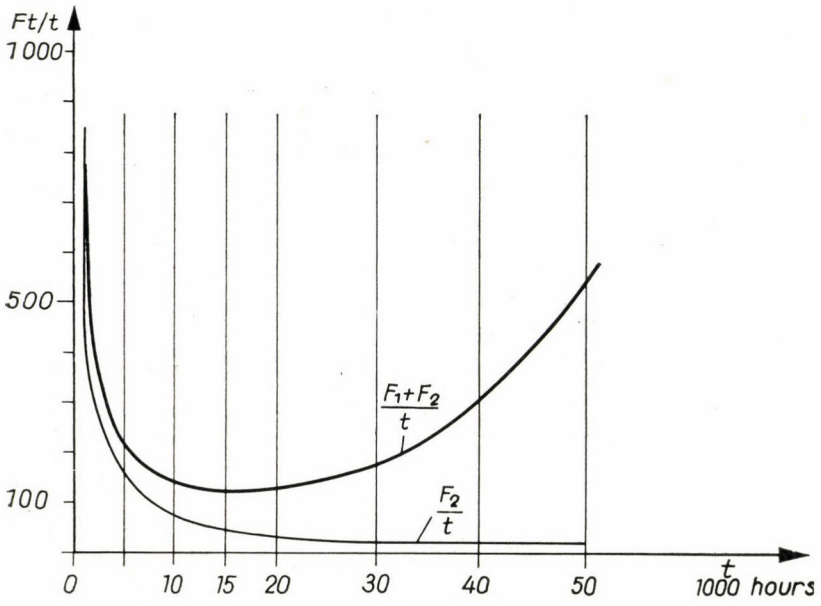


Fig. 5

All these results are so surprising that after checking the initial data and the calculation, one should search for a change in the conditions, in order to attain more favourable results with the working method in use today. We must consider that the cooling water or the steam is warmer when removing an increased quantity of heat, which fact would reduce the removed quantity of heat. This question has been investigated above and we have found the difference to be 10% in the most extreme case, thus it might cause a deviation of $\pm 5\%$ at most.

We must also consider the possibility of the deposits on the furnace wall reducing the removed quantity of heat. But this would neither to be of decisive influence.

In order to deal economically with the heat to be removed, the idea of utilizing the heat has arisen. From the point of view of utilization the heat can be removed in the most economic manner by producing low-pressure steam, e. g. heat might be removed producing saturated steam of 5 at. abs at a temperature of 150° C. Naturally, removal of heat from the furnace wall and the utilization of the heat outside the blast furnace can never be as economic as leaving the heat in the furnace.

The question of the economy of steam production can be settled by calculating whether the total cost of the installation needed for perfect safety of wall cooling and its operation is lower than the cost of similar low-pressure steam produced from high-pressure steam with the aid of a counter-pressure or of an extraction turbine when the high pressure steam is generated in a near-by modern power plant burning cheap fuel.

It follows from the present report that from the point of view of furnace wall construction, it is justified to bring with a new lining the place of heat removal nearer to the hot inner space. This would reduce the wall thickness in the calculations because the wall abrasion per unit time is proportional to the wall thickness if initially the wall is too thick, it will be anyhow reduced in a short time according to Fig. 4, and will have little influence on the total economical time of operation. Large consumption of heat appears only after an increased thinning of the wall.

REFERENCES

1. HARDERS: Feuerfestkunde, 1960. p. 132 and 134.
2. Огнеупоры (орган Гос. Комитета Совета Министров СССР черной металлургии) 1956, №2 стр. 87

SUMMARY

The most important items in the production cost of pig iron are the price of the consumed heat, produced by burning blast furnace coke, and the reconstruction costs of the refractory lining of the furnace wall. In order to increase the fire-resistance of the lining material, the wall is cooled. The heat removed by cooling is replaced by burning blast furnace coke. Between the fuel consumption data available in literature there are discrepancies amounting to 10% of the total coke consumption for pig iron production. The paper points out the causes for these

discrepancies and by this it shows possibilities of preventing the additional consumption which might add up to 10%. Stopping the operation of the furnace for relining when the quantity of heat removed through the wall gradually thinned by abrasion, exceeds the economic limit, might achieve this purpose. A method is shown for calculating the most economical limit value.

DER EINFLUSS DER KÜHLUNG VON HOCHOFENWÄNDEN AUF DEN PREIS DES ROHEISENS

A. FONÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Den größten Anteil an den Gesteungskosten des Roheisens haben die Kosten der verbrauchten, durch Verfeuerung von Hochofenkoks erzeugten Wärme und die Kosten für die Erneuerung der feuerfesten Auskleidung des Hochofens. Zur Erhöhung der Feuerfestigkeit des Auskleidungsmaterials wird die Wand des Hochofens gekühlt. Die durch die Kühlung entzogene Wärme wird durch die Verfeuerung von Hochofenkoks ersetzt. Die im Schrifttum auffindbaren Angaben über den Heizmaterialverbrauch im Zusammenhang mit der Wandkühlung des Hochofens weichen voneinander um bis zu 10% des gesamten Koksverbrauches für die Roheisenerzeugung ab. Die vorliegende Arbeit weist auf die Ursachen dieser Abweichungen hin und zeigt Möglichkeiten auf, diesem bis zu 10% betragenden Mehrverbrauch vorzubeugen: es ist angezeigt, den Hochofen zwecks Neuausmauerung abzustellen, wenn die Wärmemenge, welche durch die infolge der Abnutzung fortschreitend dünner werdenden Wände hinausströmt, den wirtschaftlichen Grenzwert überschreitet. Ein Verfahren für die Berechnung des wirtschaftlichsten Grenzwerts wird mitgeteilt.

L'INFLUENCE DU REFROIDISSEMENT DES PAROIS DU HAUT FOURNEAU SUR LE PRIX DE LA FONTE BRUTE

A. FONÓ

RÉSUMÉ

La majeure partie du prix de revient de la fonte brute est constituée par le prix de la chaleur utilisée, produite par la combustion de coke, ainsi que par le coût du renouvellement du revêtement réfractaire du haut fourneau. Pour augmenter la résistance à la chaleur du matériau de revêtement, on refroidit les parois, la chaleur enlevée par le refroidissement étant remplacée par combustion de coke. Entre les données communiquées dans la littérature, concernant la consommation de combustibles en vue du refroidissement des parois, on trouve des écarts allant jusqu'à 10% de la consommation totale de coke. L'auteur traite des causes de ces écarts, et indique les moyens d'éviter l'excès de consommation allant jusqu'à 10%. Si la quantité de chaleur enlevée à travers la paroi, amincie progressivement par l'usure, dépasse la valeur limite économique, on arrête le haut fourneau pour en renouveler le revêtement. Pour terminer, l'auteur donne une méthode de calcul de la valeur limite la plus économique.

ВЛИЯНИЕ ОХЛАЖДЕНИЕ СТЕН ДОМЕННЫХ ПЕЧЕЙ НА ЦЕНУ ЧУГУНА

А. ФОНО

РЕЗЮМЕ

Наиболее значительными составляющими расходов по производству чугуна являются стоимость расходуемого тепла, полученного путем сжигания кокса, и расходы по обновлению огнеупорного материала футеровки стен доменных печей. Для повышения жаропрочности материала футеровки стены охлаждаются. Тепло, унесенное охлаждением, возмещают путем сжигания доменного кокса. По литературным данным расход топлива, связанный с охлаждением стен доменных печей, составляет до 10% общего расхода кокса на производство чугуна. Настоящее исследование указывает на причины расхождения и тем самым на возможности предотвращения 10-ти %-ного перерасхода, и указывает также на то, что домену следует останавливать для перекладки стен, если уходящее по утончившимся вследствие износа стенам тепло количественно превысит границу рентабельности. Метод для расчета границы рентабельности.

INDEX

- Sasvári, Gy.* : Méthode pour calculer la température moyenne de corps de forme quelconque — Ein Verfahren zur Berechnung der Durchschnittstemperatur eines beliebig geformten Körpers — Calculation of the Average Temperature for an Optionally Formed Body — Шаувару Д.: Метод для определения средней температуры тела любой формы 259
- Litvai, E.* : Dimensionslose Kennlinien von Thermistoren (Heißeleitern) und ihre Anwendung — Dimensionless Characteristics of Thermistors and their Application — Les caractéristiques sans dimensions des thermistors et leur application — Литвай Е.: Безразмерные характеристики термисторов и их применение 265
- Egri, I., Sinay, G. and Szemes, M.* : Detection of Inclusions in Steel Plates by the Ultrasonic Method and by the Determination of Contraction Work — Untersuchung der Schlackeneinschlüsse von Stahlblechen mit Ultraschall und durch Bestimmung der Brucharbeit — Examen des inclusions non métalliques dans les tôles d'acier par les ultrasons et par détermination du travail de contraction — Эгри И., Шинау Г. и Семеш М.: Исследование зашлакованности листовой стали ультразвуковым методом и посредством определения работы контракции 297
- Lienert, A.* : Untersuchung des Leistungsbedarfs von Rührern in Abhängigkeit von ihren geometrischen Größenverhältnissen — Analysis of the Power Consumption of Agitators Depending on their Geometric Dimension-Ratio — Examen de la consommation d'énergie des agitateurs en fonction des rapports dimensionnels géométriques — Линерт А.: Исследование потребляемой мощности мешалок в зависимости от соотношений геометрических размеров 319
- Erdélyi, I.* : Influence of Centrifugal Fields on the Heat State of Gases. Explanation of Ranque Phenomenon — Wirkung des Zentrifugalkraftfeldes auf den Wärmezustand der Gase. Erklärung der Ranque Erscheinung — Influence de l'intensité du champ centrifuge sur l'état de température des gaz. Explication du phénomène de Ranque — Эрдеи И.: Влияние поля центробежной силы на теплопроводность газов. Объяснение явления Ранке 337
- Milasovszky, B.* : The Location of Level Drifts on the Basis of the Least Absolute Sum Principle — Die Aussteckung der Richtungsstrecken auf Grund des Prinzipes des Absolutbetrag-Minimums — Tracé des galeries de direction selon le principe de minimum de la somme absolue — Милашовски Б.: Выбор главных штреков по принципу абсолютного минимума сумм 351
- Alkér, T. F.* : Application of the Thermomagnetic Properties of Materials for the Control or Protection of Electric Circuits — Die Anwendung der thermomagnetischen Eigenschaften der Stoffe für die Steuerung und den Schutz von elektrischen Stromkreisen — Utilisation des propriétés ferromagnétiques des matières pour la commande et la protection des circuits électriques — Алькер Т. Ф.: Применение термоманнитных свойств материалов для управления или защиты электрических цепей 371
- Gaal, E.* : Current Distribution of a Strip Line — Stromverteilung an einem Mikrowellen-Bandwellenleiter — Répartition du courant sur les lignes à ruban à microondes — Гаал Э.: Распределение тока на микроволновом ленточном фидере 387

- Рожса, Л. и Ковач, Г.* : Деформация контура кругового выреза в упругой плоскости от действия радиальной нагрузки — *Rózsa, L. — Kovács, G.* : Deformation einer Kreis-ausschnittkontur in elastischer Ebene infolge radialer Belastung — Deformation of Circular Opening Outline in Elastic Plane by Radial Load — Déformation des contours d'ouvertures circulaires situées dans un plan, sous l'effet de charges radiales 399
- Szendy, K.* : Economical Loading of Networks Connected Parallel on two Operating Voltages — Wirtschaftliche Arbeitsweise von zwei miteinander parallelgeschalteten, auf zwei verschiedenen Spannungsniveaus arbeitenden Netzwerken — L'exploitation économique de réseaux connectés en parallèle fonctionnant à deux niveaux de tension — *Сенди К.* : Рентабельная эксплуатация двух параллельно соединенных сетей, действующих на двух уровнях напряжения 423
- Kubinszky, M.* : Die Architektur der Empfangsgebäude bei den europäischen Eisenbahnen (Geschichtlicher Überblick) — The Architecture of European Railway Station-Buildings (Historical Review) — L'architecture des bâtiments de voyageurs de chemin de fer en Europe (Aperçu historique) — *Кубински М.* : Архитектура железнодорожных приемных зданий в Европе (Исторический обзор) 431
- Fonó, A.* : The Influence of Cooling Blast Furnace Walls on the Price of Pig Iron — Der Einfluß der Kühlung von Hochofenwänden auf den Preis des Roheisens — L'influence du refroidissement des parois du haut fourneau sur le prix de la fonte brute — *Фоно, А.* : Влияние охлаждения стен доменных печей на цену чугуна 467

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1962. I. 9. — Terjedelem: 19,50 (A/5) ív, 105 ábra

1962.54650 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica

Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

