

# ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXVII

FASCICULI 1—2

*SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA*  
TOMUS 3 FASCICULI 1—2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST  
1961

ACTA TECHN. HUNG.

# ACTA TECHNICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

# ACTA TECHNICA

Tomus XXXVII

## SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA

Tomus 3

### INDEX

- Alpár, Gy.* : Compensation de la détermination simultanée de latitude, de la longitude et de l'azimut géographiques — Über die Ausgleichung der gleichzeitigen Breiten-, Längen- und Azimuthbestimmung — On the Adjustment of Simultaneously Determined Geographical Longitude, Latitude and Azimuth — *Альпар Д.* : Об уравнивании результатов одновременного определения географической широты, долготы и азимута ..... 341
- Bacsák, Gy.* : Überblick über das Klima der Äquatorialzone — A Review of the Climate of the Equatorial Zone — Aperçu sur le climat de la région équatoriale — *Бачак, Дь.* : Обзор климата экваториальной зоны ..... 375
- Barta, G.* : The Connection between the Excentricity of the Geomagnetic Field and the Triaxiality of the Earth — Der Zusammenhang der Exzentrizität des erdmagnetischen Feldes mit der Dreiachsigkeit der Erde — Corrélation entre l'excentricité du champ magnétique terrestre et la triaxialité du globe — *Барта, Дь.* : Связь эксцентричности геомагнитного поля с трехосностью Земли ..... 211
- Csatkai, D.* : Steigerung der Genauigkeit bei der Bestimmung der Komparationsverbesserung in der Nivellierung — Improving the Accuracy of the Calibration Correction of Levelling — Augmentation de la précision dans la correction d'étalonnage du nivellement — *Чаткаи, Д.* : Повышение точности при определении компарационной поправки нивелирования ..... 357
- Egyed, L.* : The Internal Energies of the Earth as Revealed in the Course of Evolution of Natural Sciences — Die inneren Energien der Erde im Lichte der Entwicklung der Naturwissenschaften — Les énergies internes de la Terre et leur rapport avec le développement des sciences naturelles — *Эдьед, Л.* : Внутренние энергии Земли и их связь с развитием естествознания ..... 427
- Гзовский, М. В.* : Тектонофизика и прогноз землетрясений — *Gzowski, M. W.* : Tectonophysik und die Voraussage von Erdbeben — Tectonophysics and the Forecast of earthquakes — Tectonophysique et prognostique des tremblements de terre .. 435
- Halmos, F.* : L'examen de la division des cercles montés dans les théodolites de capacité faible et moyenne — Prüfung der Kreisteilung kleiner und mittlerer Theodolite im eingebauten Zustand — Circle Graduation Test of Small and Medium Theodolites in the Case of Built-in Circles — *Халмош, Ф.* : Проверка кругового деления теодолитов малых и средних размеров во встроеном его состоянии ..... 23
- Hankó, G.* : Einpassen der Radialtriangulation in das geodätische System — The Fitting in of the Geodetical Radial Triangulation to a System — Le rattachement de la triangulation radiale à un système géodésique — *Ханко, Г.* : Подгонка радиальной триангуляции к системе геодезии ..... 457
- Hazay, I.* : Untersuchungen zur Anwendung der Gauß-Krügerschen Abbildung in Ungarn — Investigations on the Application of the Gauss-Krüger Projection Method in Hungary — Recherches sur l'application en Hongrie du système de représentation de Gauss-Krüger — *Хазай, И.* : Исследования в области применения метода отображения по Гауссу и Крюгеру в Венгрии ..... 91

<i>Hazay, I.</i> : Polygonale Knotenpunktsysteme — On Polygonal Nodal Systems — Des systèmes polygonaux de points nodaux — <i>Хазай, И.</i> : Системы полигональных узловых точек .....	323
<i>Hoványi, L.</i> : Auswahl der für die Ausgleichung eines Diagonalsystems reiner Streckenmessungen günstigsten Bedingungsgleichung — On the Determination of the Condition Equation to the Best Advantage of Adjustment in a Diagonal System Defined Purely by Lengths Measurements — Établissement de l'équation de condition la plus favorable du point de vue de la compensation, dans un système quadrilatéral aux côtés mesurés — <i>Ховани, Л.</i> : Определение уравнения условия наиболее благоприятного с точки зрения уравнивания, в диагональной системе чистого измерения длины .....	3
<i>Ховани, Л.</i> : Уравнивание соединительных треугольников по принципу линейно-угловой «сети» — <i>Hoványi, L.</i> : Die Ausgleichung eines Basenentwicklungsdreiecks als Kombination von Winkel- und Streckenmeßnetzen — The Adjustment of Extension Triangles by a Combination of the Adjustments of Trilateration and Triangulation Networks — Compensation du triangle de rattachement par combinaison des réseaux de trilatération et de triangulation .....	309
<i>Ledersteger, K.</i> : Neue Forschungen zur Theorie der heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren — New Studies Concerning the Theory of Heterogeneous Spheroidal Figures of Equilibrium — Nouvelles recherches sur la théorie des figures d'équilibre sphéroïdes hétérogènes — <i>Ледерштегер, К.</i> : Новые исследования к теории гетерогенных сферональных фигур равновесия .....	121
<i>Milasovszky, B.</i> : On the Adjustment of the Base Quadrilateral — Über die Ausgleichung des Basisvierecks — La compensation des quadrilatères de base — <i>Милашовски, Б.</i> : Уравнивание четырехугольника базисной линии .....	139
<i>Sénás, G.</i> : Case History of a Complex Geophysical Prospecting over a Highly-disturbed Structure (the Mecsek Mountains) — Ergebnisse einer komplexen geophysikalischen Prospektion in einem besonders komplizierten Gebiet: das Mecsekgebirge — Résultats de recherches géophysiques complexes effectués sur un territoire de structure particulièrement compliquée. La montagne Mecsek — <i>Сенаш, Д.</i> : Результаты комплексной геофизической разведки, проведенной на территории особенно сложной структуры. Горы Мечек .....	47
<i>Tarczy-Hornoch, A.</i> : Über die Berechnung des räumlichen Rückwärtseinschnittes — On the Solution of the Problem of Spatial Three-point Resection — Sur la solution du recoupment spatial — <i>Тарци-Горнох, А.</i> : О решении пространственной обратной засечки .....	175
<i>Tarczy-Hornoch, A.</i> : Bericht des Observatoriums bei Nagycenk (Ungarn) über die Ergebnisse der Erdstromregistrierungen in den beiden Halbjahren 1959 — Report on the Nagycenk Observatory (Hungary) on the Results of Earth Current Recordings in the Two Halfyears of 1959 — Rapport de l'Observatoire de Nagycenk (Hongrie) sur les résultats des enregistrements de courants telluriques dans les deux semestres de 1959 — <i>Тарци-Горнох, А.</i> : Отчет обсерватории Надьценк (Венгрия) о результатах регистрирования земных токов в обоих полугодиях 1959 г. ....	229
<i>Zilahi-Sebess, L.</i> : On the Geomagnetic Quadrupole-Field — Über das geomagnetische Quadrupol-Feld — Sur le champ quadrupôle géomagnétique — <i>Зилахи-Шебеш, Л.</i> : Об изучении поля геомагнитного квадруполья .....	403
Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livres — Обзор книг .....	309

ACTA  
TECHNICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS  
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT  
A. GELEJI

TOMUS XXXVII

*SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA*  
TOMUS 3



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1961

ACTA TECHN. HUNG.



# AUSWAHL DER FÜR DIE AUSGLEICHUNG EINES DIAGONALSYSTEMS REINER STRECKENMESSUNGEN GÜNSTIGSTEN BEDINGUNGSGLEICHUNG\*

L. HOVÁNYI

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN  
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 5. Februar, 1959]

Die Bedingungsgleichungen der reinen Trilaterationsnetze ergeben sich aus den zentralen und diagonalen Systemen, die im Netz inbegriffen sind, und bekanntlich läßt sich für ein jedes solches System je eine Bedingungsgleichung aufschreiben.

In einem zentralen System sagt die Bedingungsgleichung aus, daß die Summe der mit den ausgeglichenen Längen der Seiten berechneten Winkel  $360^\circ$  ergeben soll.

Folglich, nach Abb. 1:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 360^\circ = 0. \quad (1)$$

In einem diagonalen System kann die Bedingungsgleichung prinzipiell für einen beliebigen Eckpunkt aufgeschrieben werden. Hier sagt die Bedingungsgleichung aus, daß unter den mit den ausgeglichenen Werten der Seitenlängen berechneten Winkeln an den einzelnen Eckpunkten keine Widersprüche bestehen dürfen. Z. B., für Punkt *A* in Abb. 2:

$$a_1 + a_2 - a_3 = 0. \quad (2)$$

Für die Aufschreibung der Bedingungsgleichungen können wir — wie gesagt — ebensogut auch die Eckpunkte *B*, *C* und *D* auswählen, da die erforderliche Rechenarbeit für alle Eckpunkte dieselbe ist. Jedoch warf TÁRCZY-HORNOCH ([1], p. 192, Absatz 2) die Frage auf, für welchen Eckpunkt man die Bedingungsgleichung aufschreiben soll, um die größtmögliche Genauigkeit zu erhalten. Einer direkten Aufforderung TÁRCZY-HORNOCHS folgend, wollen wir im vorliegenden kurzen Aufsatz die seinerseits aufgeworfene Frage der günstigsten Bedingungsgleichung für die Ausgleichung eines reinen Streckennetzes behandeln.

Der Lösung der Aufgabe legen wir der Einfachheit halber HAMMERS Ergebnisse zugrunde, obzwar in der Literatur auch schon bessere Resultate vorliegen [vgl. [2], Beziehungen (5) auf S. 586 und (8) und (9) auf S. 587],

\* Auszug aus der Dissertation zur Erlangung der Kandidatenwürde.

weil wir aus diesen zu den relativ einfachsten Beziehungen zur Beweisung unserer Annahmen geraten. Wir wollen zuerst die Änderungen sämtlicher, in der diagonalen Konfiguration von Abb. 2 auftretenden Winkel in Abhän-

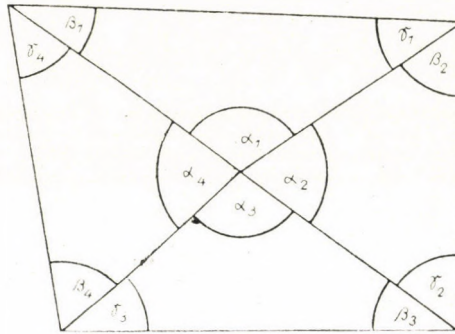


Abb. 1

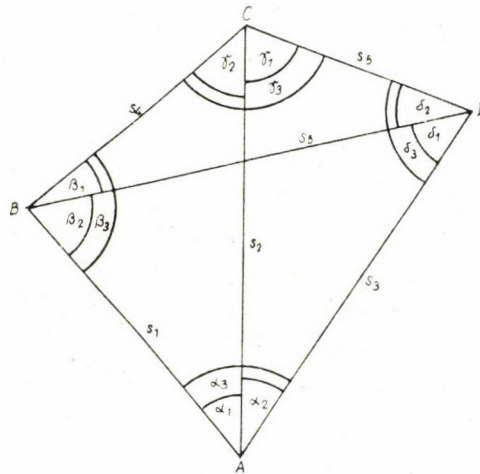


Abb. 2

gigkeit von den Längenänderungen  $ds$  mittels der von HAMMER gegebenen Formel ausdrücken (vgl. [3], Beziehung 29, S. 526) und wollen gleichzeitig für die Eckpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  die linearen Verbesserungsgleichungen aufschreiben. Folglich haben die Winkeländerungen  $da$  der Winkel  $a$  die Form

$$da_1 = \left( \frac{\text{ctg } \beta_3 + \text{ctg } \gamma_2}{s_4} \right) ds_4 - \left( \frac{\text{ctg } \beta_3}{s_1} \right) ds_1 - \left( \frac{\text{ctg } \gamma_2}{s_2} \right) ds_2 \quad (3)$$

$$da_2 = \left( \frac{\text{ctg } \gamma_1 + \text{ctg } \delta_3}{s_5} \right) ds_5 - \left( \frac{\text{ctg } \gamma_1}{s_2} \right) ds_2 - \left( \frac{\text{ctg } \delta_3}{s_3} \right) ds_3 \quad (4)$$

$$da_3 = \left( \frac{\text{ctg } \beta_2 + \text{ctg } \delta_1}{s_6} \right) ds_6 - \left( \frac{\text{ctg } \beta_2}{s_1} \right) ds_1 - \left( \frac{\text{ctg } \delta_1}{s_3} \right) ds_3. \quad (5)$$



In den Zusammenhängen bedeuten die  $s$  die gemessenen Längen, die  $ds$  deren Veränderungen und die Winkel  $\alpha$  die aus den gemessenen Längen berechneten annähernden Winkelwerte.

Die übliche Bezeichnung der Meßwerte mit Kommas, sowie die Bezeichnung der aus den Meßwerten berechneten annähernden Winkelwerte mit Nullindizes wollen wir — mit Ausnahme der Winkelwerte in den Absolutgliedern — der einfacheren Bezeichnung zulieb unterlassen. In Kenntnis der genäherten Winkelwerte und deren Veränderung erhält unsere Gleichung (2) die Form

$$a_{1,0} + da_1 + a_{2,0} + da_2 - a_{3,0} - da_3 = 0. \quad (6)$$

Geordnet heißt das

$$da_1 + da_2 - da_3 + (a_{1,0} + a_{2,0} - a_{3,0}) = 0. \quad (7)$$

In dieser letzteren Formel ist der Klammerausdruck das Absolutglied. Wenn wir nun die in Funktion der Längenänderungen  $ds$  bzw. der Längenverbesserungen  $v$  ausgedrückten Werte der Winkelveränderungen  $da_1$ ,  $da_2$  und  $da_3$  in unsere Gleichung (7) einsetzen, so erhalten wir die übliche Form der linearen Verbesserungsgleichung. Nach Ausführung dieser Schritte erhält man die lineare Verbesserungsgleichung für den Punkt  $A$  mit dem in Bogensekunden ausgedrückten Widerspruch wie folgt:

Punkt  $A$ :

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left( \frac{-\text{ctg } \beta_3 + \text{ctg } \beta_2}{s_1} \right) v_1 + \varrho'' \left( \frac{-\text{ctg } \gamma_2 - \text{ctg } \gamma_1}{s_2} \right) v_2 + \varrho'' \left( \frac{-\text{ctg } \delta_3 + \text{ctg } \delta_1}{s_3} \right) v_3 + \\ & + \varrho'' \left( \frac{\text{ctg } \beta_3 + \text{ctg } \gamma_2}{s_4} \right) v_4 + \varrho'' \left( \frac{\text{ctg } \gamma_1 + \text{ctg } \delta_3}{s_5} \right) v_5 + \varrho'' \left( \frac{-\text{ctg } \beta_2 - \text{ctg } \delta_1}{s_6} \right) v_6 + \\ & + (a_{1,0} + a_{2,0} - a_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Analog ergeben sich die Winkeländerungen  $d\beta$  der Winkel  $\beta$ :

$$d\beta_1 = \left( \frac{\text{ctg } \gamma_3 + \text{ctg } \delta_2}{s_5} \right) ds_5 - \left( \frac{\text{ctg } \gamma_3}{s_4} \right) ds_4 - \left( \frac{\text{ctg } \delta_2}{s_6} \right) ds_6 \quad (9)$$

$$d\beta_2 = \left( \frac{\text{ctg } \delta_1 + \text{ctg } \alpha_3}{s_3} \right) ds_3 - \left( \frac{\text{ctg } \delta_1}{s_6} \right) ds_6 - \left( \frac{\text{ctg } \alpha_3}{s_1} \right) ds_1 \quad (10)$$

$$d\beta_3 = \left( \frac{\text{ctg } \alpha_1 + \text{ctg } \gamma_2}{s_2} \right) ds_2 - \left( \frac{\text{ctg } \gamma_2}{s_4} \right) ds_4 - \left( \frac{\text{ctg } \alpha_1}{s_1} \right) ds_1 \quad (11)$$

Die lineare Verbesserungsgleichung für Punkt *B* lautet

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} a_3 + \operatorname{ctg} a_1}{s_1} \right) v_1 + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} \gamma_2 - \operatorname{ctg} a_1}{s_2} \right) v_2 + \\ & + \varrho'' \left( \frac{\operatorname{ctg} \delta_1 + \operatorname{ctg} a_3}{s_3} \right) v_3 + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} \gamma_3 + \operatorname{ctg} \gamma_2}{s_4} \right) v_4 + \varrho'' \left( \frac{\operatorname{ctg} \gamma_3 + \operatorname{ctg} \delta_2}{s_5} \right) v_5 + \\ & + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} \delta_2 - \operatorname{ctg} \delta_1}{s_6} \right) v_6 + (\beta_{1,0} + \beta_{2,0} - \beta_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Die Winkelveränderungen  $d\gamma$  und die lineare Verbesserungsgleichung für Punkt *C*:

$$d\gamma_1 = \left( \frac{\operatorname{ctg} a_2 + \operatorname{ctg} \delta_3}{s_3} \right) ds_3 - \left( \frac{\operatorname{ctg} a_2}{s_2} \right) ds_2 - \left( \frac{\operatorname{ctg} \delta_3}{s_5} \right) ds_5 \quad (13)$$

$$d\gamma_2 = \left( \frac{\operatorname{ctg} a_1 + \operatorname{ctg} \beta_3}{s_1} \right) ds_1 - \left( \frac{\operatorname{ctg} a_1}{s_2} \right) ds_2 - \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta_3}{s_4} \right) ds_4 \quad (14)$$

$$d\gamma_3 = \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \delta_2}{s_6} \right) ds_6 - \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{s_4} \right) ds_4 - \left( \frac{\operatorname{ctg} \delta_2}{s_5} \right) ds_5. \quad (15)$$

C)

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left( \frac{\operatorname{ctg} a_1 + \operatorname{ctg} \beta_3}{s_1} \right) v_1 + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} a_2 - \operatorname{ctg} a_1}{s_2} \right) v_2 + \varrho'' \left( \frac{\operatorname{ctg} a_2 + \operatorname{ctg} \delta_3}{s_3} \right) v_3 + \\ & + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} \beta_1}{s_4} \right) v_4 + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} \delta_3 + \operatorname{ctg} \delta_2}{s_5} \right) v_5 + \\ & + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \delta_2}{s_6} \right) v_6 + (\gamma_{1,0} + \gamma_{2,0} - \gamma_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Für die Winkel  $\delta$ :

$$d\delta_1 = \left( \frac{\operatorname{ctg} a_3 + \operatorname{ctg} \beta_2}{s_1} \right) ds_1 - \left( \frac{\operatorname{ctg} a_3}{s_3} \right) ds_3 - \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta_2}{s_6} \right) ds_6 \quad (17)$$

$$d\delta_2 = \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \gamma_3}{s_4} \right) ds_4 - \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{s_5} \right) ds_5 - \left( \frac{\operatorname{ctg} \gamma_3}{s_5} \right) ds_5 \quad (18)$$

$$d\delta_3 = \left( \frac{\operatorname{ctg} a_2 + \operatorname{ctg} \gamma_1}{s_2} \right) ds_2 - \left( \frac{\operatorname{ctg} a_2}{s_3} \right) ds_3 - \left( \frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{s_5} \right) ds_5. \quad (19)$$

D)

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left( \frac{\operatorname{ctg} a_3 + \operatorname{ctg} \beta_2}{s_1} \right) v_1 + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} a_2 - \operatorname{ctg} \gamma_1}{s_2} \right) v_2 + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} a_3 + \operatorname{ctg} a_2}{s_3} \right) v_3 + \\ & + \varrho'' \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \gamma_3}{s_4} \right) v_4 + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} \gamma_3 + \operatorname{ctg} \gamma_1}{s_5} \right) v_5 + \\ & + \varrho'' \left( \frac{-\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2}{s_6} \right) v_6 + (\delta_{1,0} + \delta_{2,0} - \delta_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Wir wollen nun für den in Abb. 3 dargestellten Fall die Koeffizienten der linearen Verbesserungsgleichungen (8), (12), (16) und (20) ermitteln und die-

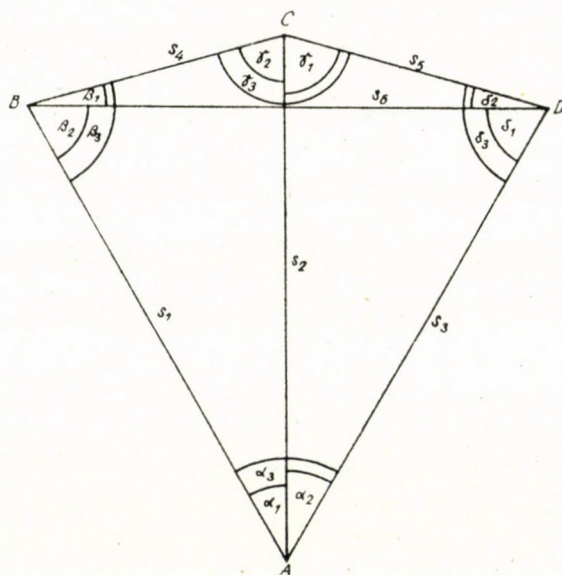


Abb. 3

selbe in Tabelle I zusammenfassen. Daraufgehend können wir die Lösung unserer eigentlichen Aufgabe unternehmen.

Unsere Angaben sind die folgenden:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \delta_2 = 15^\circ \\ a_1 &= a_2 = 30^\circ \\ a_3 &= \beta_2 = \delta_1 = 60^\circ \\ \beta_3 &= \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_3 = 75^\circ \\ \gamma_3 &= 150^\circ \\ s_1 &= s_2 = s_3 = s_6 = s \\ s_4 &= s_5 = 0,51763 s.\end{aligned}$$

In Abhängigkeit davon, für welchen Eckpunkt wir die Bedingungsgleichungen aufschreiben, variieren die bei den gleichen Verbesserungen stehenden Koeffizienten in Tabelle I innerhalb der Grenzen der Berechnungsschärfe zueinander proportionell. Man merke jedoch, daß die Konfiguration der Abb. 1 eine theoretische, sozusagen ausgeglichene ist. Im praktischen Falle, wo es sich nicht um eine ausgeglichene Konfiguration handelt, d. h. wo auch noch ein Wider-

Tabelle I

	A	B	C	D
	$\frac{g''}{s}$			
$a_1$	0,3094	1,1547	2,0000	1,1547
$a_2$	-0,5358	-2,0000	-3,4642	-2,0000
$a_3$	0,3094	1,1547	2,0000	1,1547
$a_4$	1,0353	3,8638	6,6924	3,8638
$a_5$	1,0353	3,8638	6,6924	3,8638
$a_6$	-1,1547	-4,3095	-7,4642	-4,3095

spruch besteht, hört die proportionelle Änderung der Koeffizienten innerhalb der Rechnungsschärfe auf, da die Koeffizienten der linearen Verbesserungsgleichungen aus Meßwerten berechnete Näherungswerte darstellen, und deshalb die bei den gleichen Verbesserungen stehenden Koeffizienten mit kleineren oder größeren Fehlern behaftet sind. Unter den vier linearen Gleichungen, die sich für die vier Eckpunkte ergeben, wird offenbar diejenige am günstigsten sein, bei welcher die aus den Meßwerten ermittelten Koeffizienten am mindesten von den aus den ausgeglichenen Werten berechneten abweichen. Genauer gesprochen, werden die Ergebnisse der Ausgleichung durch die wahren Fehler der Koeffizienten in diesem Falle am mindesten beeinflusst. Nämlich wirken sich in den Koeffizienten dieser günstigsten linearen Verbesserungsgleichung die Fehler, die bei der Ausdrückung der Winkeländerungen in Funktion der Längenänderungen durch die Vernachlässigung der höheren Glieder der Taylorschen Reihenentwicklung begangen werden, mit kleinstem Gewicht aus. Selbstredend sind die wahren Fehler der Längen unbekannt, und deshalb gehen wir durch die Einführung des mittleren Fehlers  $\pm \mu$  der einzelnen Messung von den wahren Fehlern der Koeffizienten auf ihre mittleren Fehler über, um eine Vergleichung vornehmen zu können.

Wir wollen bei unserer Untersuchung aus den Koeffizienten der linearen Verbesserungsgleichung (8) des Eckpunktes  $A$  ausgehen. Wir wollen vorangehend bemerken, daß es für den Zweck der Vergleichung vollkommen hinreicht, wenn nur die mittleren Fehler der Koeffizienten der linearen Verbesserungsgleichungen für die Eckpunkte  $A$  und  $C$  betrachtet werden.

*Eckpunkt A.* In Gleichung (8) lautet der Koeffizient  $a_{1,a}$  neben der Verbesserung  $\mu_1$ :

$$a_{1,a} = \varrho \left( \frac{-\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} \beta_2}{s_1} \right). \quad (21)$$

Die Änderung  $da_{1,a}$  des Koeffizienten  $a_{1,a}$  drücken wir, in Anbetracht dessen, daß die Winkel von den Längen abhängig sind, zunächst einmal als Funktion

der Änderungen der Winkel  $\beta_2$  und  $\beta_3$  sowie der Länge  $s_1$  aus:

$$da_{1,a} = \varrho \left\{ \left( + \frac{1}{s_1 \sin^2 \beta_3} d\beta_3 + \frac{\text{ctg } \beta_3}{s_1^2} ds_1 - \frac{1}{s_1 \sin^2 \beta_2} d\beta_2 - \frac{\text{ctg } \beta_2}{s_1^2} ds_1 \right) \right\}. \quad (22)$$

Die Winkeländerungen  $d\beta_2$  und  $d\beta_3$  sind durch die Gleichungen (10) und (11) gegeben, so wird durch ihre Einsetzung in (22) die Veränderung  $da_{1,a}$  des Koeffizienten  $a_{1,a}$  als allein von den Längenänderungen abhängig, wie folgt erhalten:

$$da_{1,a} = \varrho \left[ \frac{1}{s_1 \sin^2 \beta_3} \left\{ \left( \frac{\text{ctg } a_1 + \text{ctg } \gamma_2}{s_2} \right) ds_2 - \left( \frac{\text{ctg } \gamma_2}{s_4} \right) ds_4 - \left( \frac{\text{ctg } a_1}{s_1} \right) ds_1 \right\} + \left( \frac{\text{ctg } \beta_3}{s_1^2} \right) ds_1 - \frac{1}{s_1 \sin^2 \beta_2} \left\{ \left( \frac{\text{ctg } \delta_1 + \text{ctg } a_3}{s_3} \right) ds_3 - \left( \frac{\text{ctg } \delta_1}{s_6} \right) ds_6 - \left( \frac{\text{ctg } a_3}{s_1} \right) ds_1 - \left( \frac{\text{ctg } \beta_2}{s_1^2} \right) ds_1 \right\} \right].$$

Geordnet:

$$da_{1,a} = \varrho \left\{ \frac{1}{s_1^2} \left( - \frac{\text{ctg } a_1}{\sin^2 \beta_3} + \text{ctg } \beta_3 + \frac{\text{ctg } a_3}{\sin^2 \beta_2} - \text{ctg } \beta_2 \right) ds_1 + \frac{1}{s_1 s_2} \left( \frac{\text{ctg } a_1 + \text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} \right) ds_2 - \frac{1}{s_1 s_3} \left( \frac{\text{ctg } \delta_1 + \text{ctg } a_3}{\sin^2 \beta_2} \right) ds_3 - \frac{1}{s_1 s_4} \left( \frac{\text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} \right) ds_4 + \frac{1}{s_1 s_6} \left( \frac{\text{ctg } \delta_1}{\sin^2 \beta_2} \right) ds_6 \right\}. \quad (23)$$

Unter Bezeichnung des mittleren Fehlers der einzelnen Messung durch  $\pm \mu$  erhalten wir für den mittleren Fehler  $\pm \mu_{a_{1,a}}$  des Koeffizienten  $a_{1,a}$  die folgende Beziehung:

$$\mu_{a_{1,a}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_1^2} \left( - \frac{\text{ctg } a_1}{\sin^2 \beta_3} + \text{ctg } \beta_3 + \frac{\text{ctg } a_3}{\sin^2 \beta_2} - \text{ctg } \beta_2 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_1 s_2} \left( \frac{\text{ctg } a_1 + \text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ - \frac{1}{s_1 s_3} \left( \frac{\text{ctg } \delta_1 + \text{ctg } a_3}{\sin^2 \beta_2} \right) \right\}^2 + \left\{ - \frac{1}{s_1 s_4} \left( \frac{\text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_1 s_6} \left( \frac{\text{ctg } \delta_1}{\sin^2 \beta_2} \right) \right\}^2 \right]}. \quad (24)$$

Laut Gleichung (8) wird sich der mittlere Fehler  $\pm \mu_{a_{2,a}}$  der Koeffizienten

$$a_{2,a} = \varrho \left( \frac{- \text{ctg } \gamma_2 - \text{ctg } \gamma_1}{s_2} \right)$$

neben der Verbesserung  $v_2$  in ähnlicher Weise, durch Anwendung der Gleichungen (13) und (14) folgend gestalten:

$$\mu_{a_2,a} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_2 s_1} \left( \frac{\text{ctg } a_1 + \text{ctg } \beta_3}{\sin^2 \gamma_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2^2} \left( -\frac{\text{ctg } a_1}{\sin^2 \gamma_2} + \text{ctg } \gamma_2 - \frac{\text{ctg } a_2}{\sin^2 \gamma_1} + \text{ctg } \gamma_1 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_3} \left( \frac{\text{ctg } a_2 + \text{ctg } \delta_3}{\sin^2 \gamma_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_4} \left( -\frac{\text{ctg } \beta_3}{\sin^2 \gamma_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_5} \left( -\frac{\text{ctg } \delta_3}{\sin^2 \gamma_1} \right) \right\}^2 \right]} \quad (25)$$

Der mittlere Fehler  $\pm \mu_{a_3,a}$  des Koeffizienten

$$a_{3,a} = \varrho \left( \frac{-\text{ctg } \delta_3 + \text{ctg } \delta_1}{s_3} \right)$$

bei der Verbesserung  $v_3$  in Gleichung (8) beträgt

$$\mu_{a_3,a} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_3 s_1} \left( -\frac{\text{ctg } a_3 + \text{ctg } \beta_2}{\sin^2 \delta_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3 s_2} \left( \frac{\text{ctg } a_2 + \text{ctg } \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3^2} \left( -\frac{\text{ctg } a_2}{\sin^2 \delta_3} + \text{ctg } \delta_3 + \frac{\text{ctg } a_3}{\sin^2 \delta_1} - \text{ctg } \delta_1 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3 s_5} \left( -\frac{\text{ctg } \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3 s_6} \left( \frac{\text{ctg } \beta_2}{\sin^2 \delta_1} \right) \right\}^2 \right]} \quad (26)$$

Für den Koeffizienten

$$a_{4,a} = \varrho \left( \frac{\text{ctg } \beta_3 + \text{ctg } \gamma_2}{s_4} \right)$$

haben wir

$$\mu_{a_4,a} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_4 s_1} \left( \frac{\text{ctg } a_1}{\sin^2 \beta_3} - \frac{\text{ctg } \beta_3 + \text{ctg } a_1}{\sin^2 \gamma_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_4 s_2} \left( \frac{\text{ctg } a_1}{\sin^2 \gamma_2} - \frac{\text{ctg } \gamma_2 + \text{ctg } a_1}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_4^2} \left( \frac{\text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} - \text{ctg } \beta_3 + \frac{\text{ctg } \beta_3}{\sin^2 \gamma_2} - \text{ctg } \gamma_2 \right) \right\}^2 \right]} \quad (27)$$

Für den Koeffizienten

$$a_{5,a} = \varrho \left( \frac{\text{ctg } \gamma_1 + \text{ctg } \delta_3}{s_5} \right)$$

steht

$$\mu_{a_{5,a}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_5 s_2} \left( \frac{\text{ctg } a_2}{\sin^2 \gamma_1} - \frac{\text{ctg } \gamma_1 + \text{ctg } a_2}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_5 s_3} \left( \frac{\text{ctg } a_2}{\sin^2 \delta_3} - \frac{\text{ctg } \delta_3 + \text{ctg } a_2}{\sin^2 \gamma_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_5^2} \left( \frac{\text{ctg } \delta_3}{\sin^2 \gamma_1} - \text{ctg } \gamma_1 + \frac{\text{ctg } \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} - \text{ctg } \delta_3 \right) \right\}^2 \right]} \quad (28)$$

und für den Koeffizienten

$$a_{6,a} = \varrho \left( \frac{-\text{ctg } \beta_2 - \text{ctg } \delta_1}{s_6} \right)$$

haben wir

$$\mu_{a_{6,a}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_6 s_1} \left( -\frac{\text{ctg } a_3}{\sin^2 \beta_2} + \frac{\text{ctg } \beta_2 + \text{ctg } a_3}{\sin^2 \delta_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_6 s_3} \left( -\frac{\text{ctg } a_3}{\sin^2 \delta_1} + \frac{\text{ctg } \delta_1 + \text{ctg } a_3}{\sin^2 \beta_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_6^2} \left( -\frac{\text{ctg } \delta_1}{\sin^2 \beta_2} + \text{ctg } \beta_2 - \frac{\text{ctg } \beta_2}{\sin^2 \delta_1} + \text{ctg } \delta_1 \right) \right\}^2 \right]} \quad (29)$$

*Eckpunkt C.* Der mittlere Fehler  $\pm \mu_{a_{1,\gamma}}$  des Koeffizienten

$$a_{1,\gamma} = \varrho \left( \frac{\text{ctg } a_1 + \text{ctg } \beta_3}{s_1} \right)$$

bei der Verbesserung  $v_1$  in der linearen Verbesserungsgleichung (16) ist

$$\mu_{a_{1,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_1^2} \left( \frac{\text{ctg } \beta_3}{\sin^2 a_1} - \text{ctg } a_1 + \frac{\text{ctg } a_1}{\sin^2 \beta_3} - \text{ctg } \beta_3 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_1 s_2} \left( \frac{\text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 a_1} - \frac{\text{ctg } \gamma_2 + \text{ctg } a_1}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_1 s_4} \left( -\frac{\text{ctg } \beta_3 + \text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 a_1} + \frac{\text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 \right]} \quad (30)$$

Der mittlere Fehler des Koeffizienten

$$a_{2,\gamma} = \varrho \left( \frac{-\operatorname{ctg} a_2 - \operatorname{ctg} a_1}{s_2} \right)$$

beträgt

$$\mu_{a_{2,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_2 s_1} \left( -\frac{\operatorname{ctg} \beta_3}{\sin^2 a_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2^2} \left( -\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 a_2} + \operatorname{ctg} a_2 - \frac{\operatorname{ctg} \gamma_2}{\sin^2 a_1} + \operatorname{ctg} a_1 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_3} \left( -\frac{\operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 a_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_4} \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} \gamma_2}{\sin^2 a_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_5} \left( \frac{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 a_2} \right) \right\}^2 \right]} \quad (31)$$

Der mittlere Fehler des Koeffizienten

$$a_{3,\gamma} = \varrho \left( \frac{\operatorname{ctg} a_2 + \operatorname{ctg} \delta_3}{s_3} \right)$$

ist

$$\mu_{a_{3,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_3 s_2} \left( \frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 a_2} - \frac{\operatorname{ctg} a_2 + \operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3^2} \left( \frac{\operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 a_2} - \operatorname{ctg} a_2 + \frac{\operatorname{ctg} a_2}{\sin^2 \delta_3} - \operatorname{ctg} \delta_3 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3 s_5} \left( -\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 a_2} + \frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 \right]} \quad (32)$$

Der mittlere Fehler des Koeffizienten

$$a_{4,\gamma} = \varrho \left( \frac{-\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} \beta_1}{s_4} \right)$$

ist

$$\mu_{a_{4,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_4 s_1} \left( -\frac{\operatorname{ctg} a_1}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_4 s_2} \left( \frac{\operatorname{ctg} \gamma_2 + \operatorname{ctg} a_1}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_4^2} \left( -\frac{\operatorname{ctg} \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} + \operatorname{ctg} \beta_3 + \frac{\operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \beta_1} - \operatorname{ctg} \beta_1 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_4 s_5} \left( -\frac{\operatorname{ctg} \gamma_3 + \operatorname{ctg} \delta_2}{\sin^2 \beta_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_4 s_6} \left( \frac{\operatorname{ctg} \delta_2}{\sin^2 \beta_1} \right) \right\}^2 \right]} \quad (33)$$



Der mittlere Fehler des Koeffizienten

$$a_{5,\gamma} = \varrho \left( \frac{-\operatorname{ctg} \delta_3 + \operatorname{ctg} \delta_2}{s_5} \right)$$

ist

$$\mu_{a_{5,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_5 s_2} \left( \frac{\operatorname{ctg} a_2 + \operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_5 s_3} \left( -\frac{\operatorname{ctg} a_2}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_5 s_4} \left( -\frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \delta_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_5^2} \left( -\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} + \operatorname{ctg} \delta_3 + \frac{\operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \delta_2} - \operatorname{ctg} \delta_2 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_5 s_6} \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{\sin^2 \delta_2} \right) \right\}^2 \right]} \quad (34)$$

Der mittlere Fehler des Koeffizienten

$$a_{6,\gamma} = \varrho \left( \frac{-\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \delta_2}{s_6} \right)$$

beträgt

$$\mu_{a_{6,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[ \left\{ \frac{1}{s_6 s_4} \left( -\frac{\operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \beta_1} + \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \delta_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_6 s_5} \left( \frac{\operatorname{ctg} \gamma_3 + \operatorname{ctg} \delta_2}{\sin^2 \beta_1} - \frac{\operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \delta_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_6^2} \left( -\frac{\operatorname{ctg} \delta_2}{\sin^2 \beta_1} + \operatorname{ctg} \beta_1 - \frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{\sin^2 \delta_2} + \operatorname{ctg} \delta_2 \right) \right\}^2 \right]} \quad (35)$$

Wir haben durch die Beziehungen (24)–(35) die mittleren Fehler aller Koeffizienten der beiden Verbesserungsgleichungen der Eckpunkte *A* und *C* angegeben. Wir wollen erwähnen, daß die derart erhaltenen mittleren Fehler der Koeffizienten selbst mit je einem mittleren Fehler behaftet sind, da ja die rechts stehenden Glieder teils Meßwerte, teils aus solchen berechnete Näherungswerte darstellen. Die Ermittlung dieser letzteren annähernden Fehler würde jedoch allzuweit führen und uns der Lösung unseres Problems praktisch nicht näherbringen. Wir wollen des weiteren erwähnen, daß man einen Teil der rechts unter dem Wurzelzeichen stehenden Glieder durch die Einsetzung der entsprechenden Koeffizientenwerte auf eine einfachere Form reduzieren könnte, jedoch ist die von uns angegebene Form — wie wir sehen werden — einleuchtender. Falls wir nämlich die quadratischen Glieder unter den Wurzelzeichen betrachten, so stellt sich heraus, daß in den Ausdrücken der mittleren Fehler der Koeffizienten die Winkel neben den einzelnen Koeffizienten überwiegend im Nenner als Argumente des Sinus-Quadrats stehen, wogegen sie im Zähler als Cotangens-Argumente vorkommen, folglich wird bei spitzen Winkeln

ler mittlere Fehler des entsprechenden Koeffizienten sehr groß. Offenbar werden daher in den vier linearen Verbesserungsgleichungen diejenigen Koeffizienten verhältnismäßig sehr ungenau, die aus spitzen Winkeln berechnet werden, so daß man aus den vier Verbesserungsgleichungen am zweckmäßigsten diejenige auswählen wird, deren Koeffizienten sich unter Vermeidung von spitzen Winkeln berechnen lassen.

Wir wollen nun die obigen Ausführungen und Ableitungen im Lichte des Falles der Abb. 3 betrachten. Wir wollen mittels der Beziehungen (24) — (35) sämtliche mittleren Fehler der Koeffizienten berechnen und tabellieren, unter gleichzeitiger Angabe der relativen Fehler der Koeffizienten.

Tabelle II

Eckpunkt		$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
A	$a_a$	$0,3094 \frac{Q''}{s}$	-0,5358	0,3094	1,0353	1,0353	-1,1547
	$\mu_{a_1}$	$3,13 \frac{\mu Q''}{s^2}$	4,46	3,13	0,8	0,8	1,15
	Rel. Fehler	$10,1 \frac{\mu}{s}$	8,3	10,1	0,8	0,8	1,0
C	$a_\gamma$	$2,0000 \frac{Q''}{s}$	-3,4642	2,0000	6,6924	6,6924	-7,4642
	$\mu_{a_\gamma}$	$3,85 \frac{\mu Q''}{s^2}$	6,19	3,85	190,4	190,4	184,2
	Rel. Fehler	$1,90 \frac{\mu}{s}$	1,8	1,9	28,4	28,4	24,6

Es ist aus Tabelle II ersichtlich, daß die ersten drei Koeffizienten der linearen Verbesserungsgleichung für Eckpunkt A ungenauer sind als die entsprechenden Koeffizienten der Gleichung für Eckpunkt C. Jedoch sind für die Ausgleichung nicht diese, sondern die restlichen drei Koeffizienten  $a_4$ ,  $a_5$  und  $a_6$  ausschlaggebend, da deren relative Fehler für Eckpunkt A recht günstig im Vergleich mit Eckpunkt C ausfallen. Was nämlich die Ausgleichung betrifft, spielen bei der Berechnung von  $[aa]$ , d. h. der Quadratsumme der Koeffizienten, die großen Koeffizienten (in unserem Falle also  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_6$ ) die wichtigste Rolle. Wenn diese Koeffizienten sehr genau sind, sind  $[aa]$  und auch die Korrelate  $k$  viel genauer.

Zu einem strengen Beweis des obigen Gedankenganges sollte man aus dem wahren Fehler  $d [aa]$  der Quadratsumme  $[aa]$  der Koeffizienten  $a$  ausgehen, d. h. aus demjenigen wahren Fehler, der in der Quadratsumme der Koeffizienten durch die wahren Fehler der Längen verursacht wird. Wir

wollen betrachten, wie sich dies für die Koeffizienten der linearen Verbesserungsgleichung des Eckpunktes  $A$  gestaltet.

Bekanntlich ist

$$[a_a a_a] = a_{1,a}^2 + a_{2,a}^2 + a_{3,a}^2 + a_{4,a}^2 + a_{5,a}^2 + a_{6,a}^2.$$

Die Ableitung heißt

$$d[a_a a_a] = 2(a_{1,a} da_{1,a} + a_{2,a} da_{2,a} + a_{3,a} da_{3,a} + a_{4,a} da_{4,a} + a_{5,a} da_{5,a} + a_{6,a} da_{6,a}). \quad (36)$$

Wenn wir nun die Veränderungen  $da_a$  der Koeffizienten  $a_a$  als Funktionen der Längenänderungen  $ds$  ausdrücken und in (36) einsetzen, so erhalten wir die Änderung  $d[a_a a_a]$  der Quadratsummen  $[a_a a_a]$  der Koeffizienten  $a_a$  als Funktion der Längenänderungen  $ds$ . Unter Einführung des mittleren Fehlers  $\pm \mu$  der einzelnen Messung können wir dann zur Bestimmung des mittleren Fehlers  $\mu [a_a a_a]$  der Quadratsumme der Koeffizienten übergehen.

Man betrachte Gleichung (23). Darin ist die Änderung  $da_{1a}$  des Koeffizienten  $a_{1a}$  als Funktion der Längenänderungen ausgedrückt. Wenn wir nun im nächsten Schritt auch in Gleichungen (25), (26), (27), (28) und (29) abermals zu den wahren Fehlern der entsprechenden Koeffizienten zurückkehren würden, und die derart erhaltenen wahren Fehler der Koeffizienten in (36) einsetzen würden, um dann auf die mittleren Fehler überzugehen, so würden wir für  $\mu_{[aa aa]}$  eine mehr als hundert Teiglieder enthaltende Beziehung erhalten. Man würde selbstredend auch bei der Ermittlung des mittleren Fehlers  $\mu_{[a_\gamma a_\gamma]}$  für den Eckpunkt  $C$  auf analoge Weise verfahren müssen.

Es ist aus der obigen qualitativen Beschreibung ersichtlich, daß die Berechnung der mittleren Fehler der Quadratsummen der Koeffizienten ein außerordentlich kompliziertes Ergebnis liefern würde, weshalb wir von deren eingehenden Besprechung absehen, da unsere Bemerkungen über die Genauigkeit der Quadratsumme der Koeffizienten auch ohne diese strenge Beweisführung einleuchten.

Wir wollen uns nun mit den Aussagen über die relative Genauigkeit der Korrelate  $k$  befassen. Im Falle der Bedingungsgleichung für Eckpunkt  $A$  ist die Korrelate

$$k_a = - \frac{l_a}{[a_a a_a]}.$$

Die Ableitung lautet

$$dk_a = \frac{l_a}{[a_a a_a]^2} d[a_a a_a]. \quad (37)$$

Wir können dabei das Absolutglied  $l_a$  offenbar als fehlerfrei betrachten, da dessen Genauigkeit nur durch die Abrundungsungenauigkeit der letzten Ziffer der Logarithmen- bzw. Funktionentafel beeinträchtigt wird, und selbst diese läßt sich durch die Auswahl der günstigsten Funktionenform (vgl. [4], Kapitel D) praktisch eliminieren. In der vorangehenden Gleichung (37) auf die mitt-

leren Fehler übergehend und  $k_a$  einsetzend, haben wir

$$\mu_{k_a} \doteq \frac{l_a}{[a_a a_a]} \cdot \frac{\mu[a_a a_a]}{[a_a a_a]} \doteq k_a \frac{\mu[a_a a_a]}{[a_a a_a]}$$

und dementsprechend

$$\frac{\mu_{k_a}}{k_a} \doteq \frac{\mu[a_a a_a]}{[a_a a_a]} \quad (38)$$

Es ist ersichtlich, daß der relative Fehler der Korrelate praktisch dem relativen Fehler der Quadratsumme der Koeffizienten gleich ist, so daß mit der Zunahme der Genauigkeit der Koeffizienten auch die Genauigkeit der Korrelate in der erwähnten Proportion zunimmt.

Wir können folglich als Ergebnis unserer Untersuchung zusammenfassend feststellen: Unter den linearen Verbesserungsgleichungen, die sich auf die vier Eckpunkte eines diagonalen Vierecks beziehen, soll man am zweckmäßigsten diejenige anwenden, welche das kleinste Absolutglied enthält, da sich deren  $a$  Koeffizienten vom Gesichtspunkte der Ausgleichung am zweckmäßigsten, d. h. unter Vermeidung von spitzen Winkeln, berechnen lassen.

Wir wollen nun ein Rechenbeispiel ins Auge fassen (Abb. 4). Die Meßergebnisse sind wie folgt:

$$\begin{array}{ll} s_1 = 2246,2 \text{ m} & s_4 = 2263,2 \text{ m} \\ s_2 = 3320,2 \text{ m} & s_5 = 1282,0 \text{ m} \\ s_3 = 4290,8 \text{ m} & s_6 = 3541,3 \text{ m} \end{array}$$

Wir schreiben die Bedingungsgleichungen zuerst für Eckpunkt  $A$ , dann für Eckpunkt  $C$  auf. Die linearen Verbesserungsgleichungen laut (8) und (16) sowie die Verbesserungen lauten wie folgt.

Für Eckpunkt  $A$ :

$$+ 2,995 v_1 - 11,280 v_2 + 9,297 v_3 + 92,155 v_4 + 84,163 v_5 - 91,952 v_6 + 50,778'' = 0$$

$$k_a = - \frac{l_a}{[a_a a_a]} = - \frac{50,778}{24253,8} = - 0,0020936 .$$

Die Verbesserungen:

$$\begin{array}{ll} v_1 = - 0,0063 \text{ m} & v_4 = - 0,1929 \text{ m} \\ v_2 = + 0,0236 \text{ m} & v_5 = - 0,1762 \text{ m} \\ v_3 = - 0,0195 \text{ m} & v_6 = + 0,1925 \text{ m} \end{array}$$

Für Eckpunkt  $C$ :

$$+ 91,46 v_1 - 341,9 v_2 + 281,7 v_3 + 2588,7 v_4 + 2346,3 v_5 - 2582,6 v_6 + 1479'',754 = 0$$

$$k_\gamma = - \frac{l_\gamma}{[a_\gamma a_\gamma]} = - \frac{1479,754}{19080931} = - 0,000077551 .$$

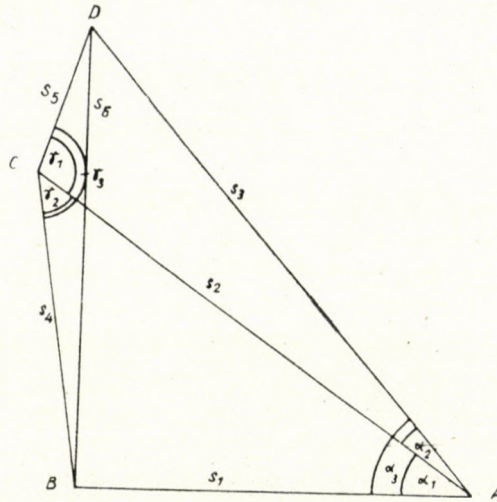


Abb. 4

Die Verbesserungen:

- $v_1 = -0,0071 \text{ m}$
- $v_2 = +0,0265 \text{ m}$
- $v_3 = -0,0218 \text{ m}$
- $v_4 = -0,2008 \text{ m}$
- $v_5 = -0,1820 \text{ m}$
- $v_6 = -0,2003 \text{ m}$ .

Wir wollen nun betrachten, welche Widersprüche die mittels der ausgeglichenen Längen berechneten Winkel aufweisen.

Mit den bei Eckpunkt A erhaltenen Verbesserungen:

$a_1 = 42^\circ 46' 39'', 542$	$\gamma_1 = 132^\circ 26' 19'', 738$
$a_2 = 12^\circ 44' 11'', 678$	$\gamma_2 = 42^\circ 23' 06'', 024$
$a_1 + a_2 = 55^\circ 30' 51'', 220$	$\gamma_1 + \gamma_2 = 174^\circ 49' 25'', 762$
$-a_3 = 55^\circ 30' 51'', 224$	$-\gamma_3 = 174^\circ 49' 26'', 454$
$l_a = -0'', 004$	$l_\gamma = -0'', 692$

Mit den bei Eckpunkt C erhaltenen Verbesserungen :

$a_1 = 42^\circ 46' 38'', 604$	$\gamma_1 = 132^\circ 26' 19'', 634$
$a_2 = 12^\circ 44' 11'', 514$	$\gamma_2 = 42^\circ 23' 05'', 694$
$a_1 + a_2 = 55^\circ 30' 50'', 118$	$\gamma_1 + \gamma_2 = 174^\circ 49' 25'', 328$
$-a_3 = 55^\circ 30' 52'', 116$	$-\gamma_3 = 174^\circ 50' 26'', 528$
$l_a = -1'', 998$	$l_\gamma = -61'', 200$

Es ist aus dem mitgeteilten Beispiel ersichtlich, daß falls man zur Ausgleichung

die lineare Verbesserungsgleichung für Eckpunkt  $C$ , d. h. diejenige mit den größeren Widersprüchen anwendet, selbst nach der Ausgleichung ein recht beträchtlicher Fehler zurückbleibt. In diesem Falle kann man daher nur durch wiederholte Ausgleichung ein entsprechendes Ergebnis erzielen, wogegen ein solches mit der Bedingung für Eckpunkt  $A$ , die das kleinste Absolutglied enthält, sofort erreicht wird.

Wir wollen im Zusammenhang mit dem angegebenen Rechenbeispiel bemerken, daß es im wesentlichen einem Rechenbeispiel von SCHUMANN entspricht, bei welchem eine Dehnung zur Kolometer-Größe und einige Abänderungen in den letzten Ziffern vorgenommen worden sind (vgl. [5], Beispiel I, S. 12). Ich habe dieses Beispiel mit Absicht ausgewählt, da SCHUMANN im Zusammenhang damit auf die günstigste Seitenbedingungsgleichung der Diagonalviereckkonfiguration mit Winkelmessung hinweist (Vgl. [5], S. 15, Absatz c.) wobei unter den linearen Verbesserungsgleichungen diejenige am zweckmäßigsten erscheint, bei welcher das Absolutglied am größten ist. Als Kontrolle gebraucht SCHUMANN im Zusammenhang mit dem angeführten Rechenbeispiel eben die ungünstigen, also — mit unseren Bezeichnungen — die für die Eckpunkte  $B$ ,  $C$  und  $D$  gültigen linearen Verbesserungsgleichungen. Selbstverständlich gibt sein Beispiel, was die Kontrolle anbelangt, kein reelles Bild, da er die Längen mit Zehntelmillimeter-Genauigkeit angibt, wogegen die Verbesserungen in der Größenordnung von Tausendstelmmillimetern oder darunter liegen; so ist es auch einleuchtend, warum er die Ungültigkeit des ZAHARIAESchen Satzes (6) bei diagonalen Konfigurationen mit ausschließlicher Streckenmessung nicht erkannte.

Der Gedanke der Auswahl der günstigsten Bedingungsgleichung ist übrigens bereits vor SCHUMANN aufgeworfen worden, jedoch ist mir persönlich die Idee dieser Untersuchung — wie eingangs erwähnt — von TÁRCZY-HORNOCH zugegangen.

Wir wollen hier bemerken, daß der ZAHARIAESche Satz teilweise auch für rein durch Streckenmessungen bestimmte diagonale Konfigurationen gilt, falls man die Winkel mit dem Zusammenhang  $\log \sin \frac{x}{2}$  berechnen würde, da in diesem Falle, nach der Logarithmenmethode von TÁRCZY-HORNOCH [1, 7], in die Koeffizienten die Tabellardifferenzen der Sinusfunktionen der halben Winkel eingehen. Da sich bei spitzen Winkeln offenbar große Tabellardifferenzen ergeben, wären diese durch die Ungewißheit der Abrundung günstig beeinflusst, wogegen sich die großen Fehler der spitzen Winkel wesentlich ungünstiger auswirken würden, da die große Tabellardifferenz nur eine sehr kleine Winkeländerung zuläßt.

Wir wollen abschließend betrachten, wie sich aus den Bedingungsgleichungen der vier Eckpunkte die günstigste, d. h. diejenige mit dem kleinsten Absolutglied, auswählen läßt.

Wir wollen deshalb für die Eckpunkte *A* und *B* der Konfiguration in Abb. 5 die beiden linearen Verbesserungsgleichungen anhand einer von Krüger

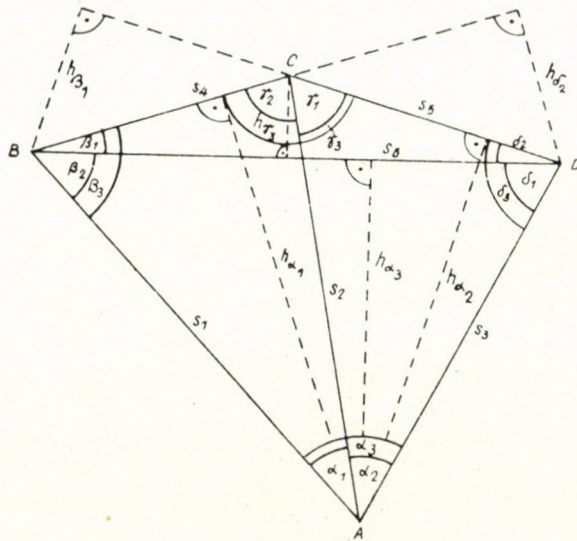


Abb. 5

angegebenen Beziehung (vgl. [8], S. 4, Beziehung (8)) anschreiben. Folglich steht für Eckpunkt *A*:

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left( -\frac{\cos \beta_3}{h_{a_1}} + \frac{\cos \beta_2}{h_{a_3}} \right) v_1 + \varrho'' \left( -\frac{\cos \gamma_2}{h_{a_1}} - \frac{\cos \gamma_1}{h_{a_2}} \right) v_2 + \\ & + \varrho'' \left( -\frac{\cos \delta_3}{h_{a_2}} + \frac{\cos \delta_1}{h_{a_3}} \right) v_3 + \varrho'' \left( \frac{1}{h_{a_1}} \right) v_4 + \varrho'' \left( \frac{1}{h_{a_2}} \right) v_5 - \\ & - \varrho'' \left( \frac{1}{h_{a_3}} \right) v_6 + (a_{1,0} + a_{2,0} - a_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Für Eckpunkt *B*:

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left( \frac{-\cos \alpha_3}{h_{\beta_2}} + \frac{\cos \alpha_1}{h_{\beta_3}} \right) v_1 - \varrho'' \left( \frac{1}{h_{\beta_3}} \right) v_2 + \varrho'' \left( \frac{1}{h_{\beta_2}} \right) v_3 + \\ & + \varrho'' \left( \frac{-\cos \gamma_3}{h_{\beta_1}} + \frac{\cos \gamma_2}{h_{\beta_3}} \right) v_4 + \varrho'' \left( \frac{1}{h_{\beta_1}} \right) v_5 + \varrho'' \left( \frac{-\cos \delta_2}{h_{\beta_1}} - \right. \\ & \left. - \frac{\cos \delta_1}{h_{\beta_2}} \right) v_6 + (\beta_{1,0} + \beta_{2,0} - \beta_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Die üblichen Bezeichnungen  $(\alpha_{1,0} + \alpha_{2,0} - \alpha_{3,0}) = l_a$  und  $(\beta_{1,0} + \beta_{2,0} - \beta_{3,0}) = l_\beta$  einführend, erhalten wir aus den Gleichungen (39) und (40)

$$\frac{|a_{5,a}|}{|a_{5,\beta}|} = \frac{|h_{\beta_1}|}{|h_{a_1}|} = \frac{|l_a|}{|l_\beta|}. \quad (41)$$

Es ist einleuchtend, daß die Koeffizienten den zu den Winkeln gehörenden Dreieckshöhen umgekehrt proportional sind. Selbstredend darf man bei der Bestimmung des Verhältnisses nur solche Koeffizienten auswählen, die zur Verbesserung jener gemeinsamen Seite der beiden Dreiecke gehören, welche den Winkeln gegenüber liegt. Offenbar ist  $s_5$  in den Dreiecken  $ACD$  und  $BCD$  jene gemeinsame Seite, die gegenüber den Winkeln  $\alpha_2$  und  $\beta_1$  liegt. Selbstverständlich ergibt das Verhältnis der Koeffizienten — wenn man die Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung bei der Reihenentwicklung außer acht läßt — sofort auch das Verhältnis der Absolutglieder, so daß man im Falle der Abb. 5 leicht einsieht, daß in der Bedingungsgleichung für Eckpunkt  $A$  das Absolutglied kleiner wird als in der Gleichung für Eckpunkt  $B$ .

Wenn wir nun für die Eckpunkte  $A$  und  $C$  feststellen wollen, welches Absolutglied größer ist, so können wir das Verhältnis der Koeffizienten der Verbesserungen neben der Seite  $s_6$  bilden, da diese Seite den Dreiecken  $ABD$  und  $BCD$  gemeinsam ist. Mit Hilfe der Dreieckshöhen  $h_{a_3}$  und  $h_{\gamma_3}$  die zu den Winkeln gegenüber der gemeinsamen Seite  $s_6$  gehören, erhalten wir

$$\frac{|h_{\gamma_3}|}{|h_{a_3}|} = \frac{|l_a|}{|l_\gamma|}. \quad (42)$$

Weiterhin für Eckpunkte  $A$  und  $D$ :

$$\frac{|h_{\delta_2}|}{|h_{a_1}|} = \frac{|l_a|}{|l_\delta|}. \quad (43)$$

Aus den Gleichungen (41), (42), (43) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} |l_a| &= \frac{|h_{\beta_1}|}{|h_{a_3}|} |l_\beta| \\ |l_a| &= \frac{|h_{\gamma_3}|}{|h_{a_3}|} |l_\gamma| \\ |l_a| &= \frac{|h_{\delta_2}|}{|h_{a_1}|} |l_\delta| \end{aligned} \right\} \quad (44)$$



folglich

$$|l_\alpha| = \frac{|h_{\beta_1}|}{|h_{\alpha_2}|} \cdot |l_\beta| = \frac{|h_{\gamma_3}|}{|h_{\alpha_3}|} \cdot |l_\gamma| = \frac{|h_{\delta_2}|}{|h_{\alpha_1}|} \cdot |l_\delta|. \quad (45)$$

Anhand der gefundenen Beziehung läßt sich die Frage des kleinsten Widerspruches graphisch recht einfach lösen. Praktisch ist es meistens auch nicht einmal notwendig, die entsprechenden Dreieckshöhen aufzuzeichnen, da man anstatt der Dreieckshöhen auch die Flächeninhalte gegenüberstellen, und so die Frage nach dem kleinsten Absolutglied praktisch meistens aus der Anschauung beantworten kann, um so mehr, als das Problem praktisch nur bei spitzen Winkeln, d. h. bei der Kombination von Dreiecken sehr kleiner und sehr großer Flächeninhalte eine zu beachtende Bedeutung hat.

#### SCHRIFTTUM

1. TÁRCZY-HORNOCH, A.: A hosszhálózatok kiegyenlítéséről. (Über die Ausgleichung von Streckennetzen.) Földméréstani Közlemények. Nr. 4, 1953.
2. Geodéziai kézikönyv (Handbuch der Geodäsie, Bd. I.). Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó 1956.
3. HAMMER, E.: Zur Ausgleichung von Streckennetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen. 1911. Heft 19.
4. HOVÁNYI, L.: Hosszhálózatok feltételes mérések módszere szerinti kiegyenlítéséről. (Über die Ausgleichung von Streckennetzen mittels der Methode der bedingten Messungen.) Kandidatendissertation. Eingereicht zur Ungarischen Akademie der Wissenschaften in 1955.
5. SCHUMANN, R.: Zur Ausgleichung von Liniennetzen. Mitteilung a. d. Markscheidewesen. 1909. Heft 11.
6. HELMERT, F. R.: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zweite Auflage 1907. S. 518.
7. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die Ausgleichung von Streckennetzen. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Bd. VIII. p. 399—424.
8. KRÜGER, L.: Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte. Veröffentlichung d. K. Pr. Geod. Instituts. N. F. No. 34.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz gibt eine strenge Lösung der Frage, welche Bedingungsgleichung unter den vieren, die sich für die vier Eckpunkte eines Diagonalviereckes ergeben, vom Gesichtspunkte der Ausgleichung als die günstigste anzuwenden ist.

Nach den Untersuchungen ist es am zweckmäßigsten, bei der Aufschreibung der Bedingungsgleichung des diagonalen Systems aus demjenigen Eckpunkt auszugehen, welcher den kleinsten Wert des Absolutgliedes ergibt, da sich die Koeffizienten eben dieser Gleichung für die Ausgleichung am zweckmäßigsten, also unter Vermeidung der spitzen Winkel berechnen lassen. Die günstigste Bedingungsgleichung läßt sich für jenen Eckpunkt aufschreiben, dessen Winkelwerte zu den Dreiecken größten Inhaltes gehören.

Als Abschluß gibt Verfasser ein praktisches Rechenbeispiel, und gibt dann sehr einfach anwendbare Beziehungen zur Feststellung des günstigsten Eckpunktes an.

ON THE DETERMINATION OF THE CONDITION EQUATION  
TO THE BEST ADVANTAGE OF ADJUSTMENT  
IN A DIAGONAL SYSTEM DEFINED PURELY  
BY LENGTH MEASUREMENTS

L. HOVÁNYI

SUMMARY

The paper gives a rigorous solution of the problem as to which of the condition equations belonging to each of the four apices of a diagonal quadrangle is most advantageous from the point of view of adjustment.

As a result of the investigation, the apex generating the condition equation containing the least absolute term is seen to be most expedient, because the coefficients of this equation can be computed to the best advantage of adjustment, by avoiding the utilization of acute angles. The most advantageous condition equation belongs to the apex whose angles subtend the triangles of greatest surface.

The paper contains a numerical example and presents some simple relations for finding the most advantageous apex.

ÉTABLISSEMENT DE L'ÉQUATION DE CONDITION LA PLUS FAVORABLE  
DU POINT DE VUE DE LA COMPENSATION, DANS UN SYSTÈME  
QUADRILATÉRAL AUX CÔTÉS MESURÉS

L. HOVÁNYI

RÉSUMÉ

Par une démonstration stricte, l'étude établit celui des quatre sommets du quadrilatère à deux diagonales, pour lequel l'équation de condition peut s'écrire le plus favorablement du point de vue de la compensation.

D'après les recherches de l'auteur, pour écrire l'équation de condition du système quadrilatéral, il est préférable de choisir le sommet où le terme absolu présente la plus petite valeur. Les coefficients de cette équation peuvent, en effet, être calculés sans les angles aigus, donc le plus favorablement du point de vue de la compensation. L'équation de condition la plus favorable peut s'écrire pour le sommet où les angles appartiennent aux triangles ayant la plus grande surface.

Pour terminer, l'auteur présente un exemple numérique pratique, puis donne des relations très simples pour l'établissement du sommet le plus favorable.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ УСЛОВИЯ НАИБОЛЕЕ БЛАГОПРИЯТНОГО  
С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ УРАВНИВАНИЯ, В ДИАГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ЧИСТОГО  
ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИНЫ

Л. ХОВАНИ

РЕЗЮМЕ

В работе дается строгое доказательство того, что с точки зрения уравнивания, для которого из четырех угловых точек ромбического четырехугольника выгоднее всего записать уравнение условия.

Согласно исследованиям для выведения уравнения условия диагональной системы целесообразно выбрать ту угловую точку, у которой для чистого члена получается наиболее выгодное значение, так как коэффициент этого уравнения можно вычислить с точки зрения уравнивания наиболее выгодно, избегая при этом острых углов. Наиболее выгодные уравнения условия можно вывести для той угловой точки, у которой прилежащие углы соответствуют треугольникам с наибольшей площадью.

В работе в заключение сообщается практический числовой пример, затем приводятся легкие в обращении зависимости для определения наиболее благоприятной угловой точки.

# L'EXAMEN DE LA DIVISION DES CERCLES MONTÉS DANS LES THÉODOLITES DE CAPACITÉ FAIBLE ET MOYENNE

F. HALMOS

LABORATOIRE DE RECHERCHES GÉODÉSIQUES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE, SOPRON

[Manuscrit présenté le 21 janvier 1960]

A l'examen du rendement des théodolites, il importe de déterminer la qualité et la précision de la division des cercles. Quand on examine les instruments et surtout leurs prototypes, le contrôle des cercles fait selon les méthodes habituelles permettent aussi de découvrir d'autres sources d'erreurs, défauts et déficiences de l'instrument étudié. Ainsi, à partir des données des mesures, on peut déterminer l'excentricité du cercle, le pouvoir de pointage de la lunette, la précision de la lecture, la stabilité et la qualité des systèmes d'axes et d'autres organes de l'instrument, le rendement dans les conditions de laboratoire, etc. . . La détermination de tous ces facteurs exigerait autrement des études longues et fastidieuses. Par contre, les nombreuses mesures de laboratoire faites en vue de l'examen du cercle peuvent non seulement offrir les données caractérisant sa précision, mais aussi permettre l'examen des problèmes de détail que nous venons de mentionner. Du point de vue économique, on a intérêt à grouper ainsi les examens, surtout quand le contrôle des instruments se fait en masse (dans les laboratoires des fabriques d'instruments de précision, etc. . .), quitte à procéder éventuellement à l'examen plus détaillé de certains problèmes. Naturellement, les corrections préalables qui peuvent être nécessaires pour l'examen de la division, ne doivent pas être négligées.

Comme preuve de ce que des observations faites dans certains buts peuvent aider à la solution d'autres problèmes particuliers, citons l'étude récemment parue du Dr. Lajos HOMORÓDI [1], où les résultats d'anciennes triangulations exécutées avec un instrument donné sont utilisés pour la détermination des chiffres caractérisant la précision de la division des cercles. Inversement, les mesures expérimentales faites en vue du contrôle des divisions peuvent, et doivent même permettre de déterminer de nombreux facteurs caractérisant l'instrument. En considérant le problème sous cet aspect, les quelques heures consacrées à l'examen de la division des cercles d'un instrument paraîtront donc moins longues et fastidieuses, cet examen donnant aussi réponse à plusieurs autres problèmes.

En vue d'intensifier les progrès, déjà importants, de l'industrie hongroise des instruments de précision, le Laboratoire de Recherches Géodésiques de

l'Académie des Sciences effectue des examens spéciaux sur les instruments géodésiques fabriqués par les usines MOM et Gamma. Dans les examens effectués sur les prototypes aussi bien que sur les instruments fabriqués en série, celui de la division des cercles occupe une place importante. L'étude approfondie du sujet nécessite aussi de voir de plus près les conditions dans lesquelles s'effectue la production des cercles. En général, les cercles montés dans les instruments géodésiques sont faits par les différents procédés de reproduction utilisant un *cercle étalon*, dont la précision devient dès lors une des caractéristiques de la qualité du cercle fabriqué. Aussi les diverses fabriques d'instruments de précision cherchent-elles à apporter à la production du cercle étalon le plus de soins possible. Considérées dans un sens plus restreint, les méthodes productives de fabrication des cercles peuvent se ranger en quatre catégories:

a) Le *procédé de reproduction* proprement dit, comportant un cercle étalon et un cercle à diviser fixés sur un axe commun, des microscopes, et des dispositifs pour la mise au point et la gravure. A l'aide du microscope, on procède d'abord au pointage d'une division donnée du cercle étalon, puis on reporte directement les traits de division sur le cercle à diviser, à l'aide du bras mobile du dispositif à graver se déplaçant avec le microscope. Un grand inconvénient de ce procédé est que la fatigue de l'opérateur influe fortement sur la précision, de sorte que les intervalles de division du cercle sont d'une précision assez variable.

b) Dans le *procédé mécanique*, le cercle étalon proprement dit est remplacé par une couronne dentée mue par un segment denté, chaque déplacement correspondant à la valeur de ce dernier. Le cercle étalon tourne autour du même axe que le cercle à diviser, et quand le détournement correspondant à la valeur du segment a eu lieu, le dispositif de rotation est bloqué, et le burin à graver entre en action. L'ensemble du processus peut être automatisé. Depuis un certain temps, on remplace le segment denté par un excentrique et un cliquet d'arrêt. La division des cercles se fait le plus souvent par ce procédé.

c) Dans le *procédé photographique*, le cercle divisé est la copie du cercle étalon, obtenue par voie photographique. Ce procédé, si on le veut économique et d'une précision suffisante, ne peut s'appliquer que sur verre. La surface du cercle à diviser est enduite d'une matière photosensible (qui peut être aussi une matière synthétique), sur laquelle vient se placer le cercle étalon de même dimension. Si on éclaire celui-ci par une forte source lumineuse, la couche photosensible permet de reproduire photographiquement les divisions du cercle étalon sur le cercle à diviser. De tous les procédés jusqu'à présent connus, celui-ci est le plus simple et le moins onéreux. Aussi, les recherches relatives à la division des cercles, faites dans ce sens, pourront-elles avoir, un jour ou l'autre, la plus grande importance. Toutefois, si le procédé photographique permet d'éliminer certaines sources d'erreurs par rapport aux procédés plus anciens (marche irrégulière du mécanisme, etc. . .), il en introduit, en revanche, quel-

ques autres nouvelles, dont la première consiste dans la contraction irrégulière de la couche photosensible, dont la valeur peut atteindre, selon l'expérience, jusqu'à 1" ou 2". C'est là la cause restreignant l'application du procédé à la division des cercles des théodolites de capacité moyenne. Si l'on considère, en outre, que le cercle étalon comporte aussi des erreurs de division, et que le procédé technique recèle des sources d'erreurs à son tour, on doit admettre que l'exécution de ce procédé oblige à de grands soins l'opérateur ne voulant pas dépasser la limite admise. Cependant, la diminution possible de la contraction de la couche émulsive permet pratiquement d'obtenir un procédé très bon marché, rapide et économique.

d) Le *procédé de division photoélectrique*, expérimenté par la maison Lellmann et Polter, est encore au stade d'essai. Ce procédé s'apparente, par son principe, au procédé de reproduction proprement dit. Il en diffère en ce que le réglage de la division s'y effectue non plus à vue, mais à l'aide d'une cellule photoélectrique, et que le travail de l'opérateur est remplacé par une commande mécanique. Quand un trait de division du cercle fortement éclairé par transparence passe devant la fente à lumière, la cellule photoélectrique ne recevant plus de courant ralentit automatiquement la marche de l'appareil pendant quelques secondes, permettant ainsi au burin à graver d'entrer en action. Après un temps déterminé, la fente à lumière ayant déjà dépassé le trait de division, et la pleine lumière tombant de nouveau sur la cellule photoélectrique, celle-ci redonne au mécanisme sa vitesse de fonctionnement initiale. L'inconvénient du procédé est qu'en cas de traits de division de différentes épaisseurs, la précision diminue considérablement.

En Hongrie, l'usine MOM emploie le procédé photographique pour la division des cercles de ses théodolites type Te—D1. Aussi croyons-nous que dans le cadre de l'examen des nouveaux instruments hongrois, il ne sera pas sans intérêt d'étudier ce procédé d'une manière quelque peu approfondie.

Les défauts du procédé photographique, les principales sources d'erreurs inhérentes à la matière et au montage des cercles peuvent se résumer comme suit:

1) Comme nous l'avons déjà dit, le principal défaut tient à la contraction inégale et non calculable de la couche photosensible. C'est là sans doute la plus importante source d'erreurs, dont l'effet doit être réduit, par la voie technique, au strict minimum, si l'on veut arriver à de bons résultats. Le choix convenable de la couche de gélatine constitue le problème essentiel. Le cercle produit des décalages de caractère local, non calculables, de la division. La substance de la gélatine et l'exécution technique du procédé ne sont généralement pas connues du grand public.

2) Dans le procédé photographique, il importe que la surface du cercle étalon et du cercle à diviser, superposés lors de la reproduction, soit parfaitement plane, car les défauts de surface d'un ordre de grandeur microscopique

peuvent déjà fortement altérer la précision. D'après nos examens, si par suite des défauts de surface, les deux plans forment entre eux un certain angle  $\delta$ , et si l'erreur qui en résulte ne doit dépasser  $1''$ ,  $\delta \leq 15'$ , condition facilement réalisable. Avec une précision de 0,01 seconde à réaliser,  $\delta \leq 9''$ , ce qui signifie pratiquement que la finition de la surface doit être faite avec une précision d'au moins  $\pm 5$  microns, en cas d'un cercle de 50 mm de diamètre. L'erreur ne saurait être éliminée par réglage dans l'instrument ([2], p. 49), car avec l'inclinaison du cercle à l'angle voulu, la distance des microscopes de lecture se modifie, et il se produit ainsi une erreur de run spéciale ([3], pp. 103—112, [4], pp. 1—16, [12], pp. 424—428).

Par suite d'un défaut éventuel d'inclinaison  $\delta$ , le cercle reproduit par voie photographique se déforme en une ellipse légèrement aplatie. L'effet s'en

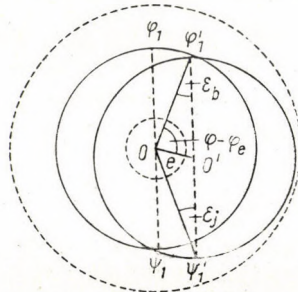


Fig. 1

montrant aussitôt dans la nette différence de contraste des traits de division, on peut constater sans examen spécial si le cercle se prête ou non au montage.

3) L'excentricité comme source d'erreur. En principe, on distingue trois sortes de défauts d'excentricité, qui résultent de ce que le centre géométrique du cercle et le centre des divisions n'ont pas coïncidé lors de la division soit du cercle étalon, soit du cercle à diviser, soit des deux. À considérer le cercle divisé, il n'y a aucune différence entre les deux premiers défauts. Soit  $O$  le centre géométrique de la lame de verre, conformément à la figure 1 (la circonférence du cercle est marquée en traits discontinus),  $O'$  le centre effectif des traits de division, et  $r$  le rayon du cercle. En cas d'un défaut d'excentricité  $e$ , si la lecture se fait à un point  $\varphi$  donné du cercle, et si  $\varphi_e$  est la direction de l'excentricité, l'erreur qui en résulte sera:

$$\sin \varepsilon = + \frac{e}{r} \sin (\varphi - \varphi_e) \quad (1)$$

et

$$\varphi = \varphi' + \varepsilon \quad (2)$$

Avec l'emploi de deux dispositifs de lecture diamétraux, et en prenant  $e$  avec une faible valeur, on obtient l'égalité suivante (fig. 1):

$$\varepsilon_b'' = \varrho'' \frac{e}{r} \sin(\varphi - \varphi_e)$$

$$\varepsilon_j'' = \varrho'' \frac{e}{r} \sin(\varphi - \varphi_e)$$

et

$$\psi = 180^\circ + \varphi$$

donc

$$\varepsilon_b'' = -\varepsilon_j'' \quad (3)$$

c'est-à-dire l'erreur s'élimine dans la moyenne arithmétique des deux lectures. Si l'on désigne par  $E$  l'excentricité du cercle étalon, et par  $\varphi_E$  sa direction, leur effet conjugué s'exprimera de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon'' &= \varrho'' \frac{e}{r} \sin(\varphi - \varphi_e) + \varrho'' \frac{E}{r} \sin(\varphi - \varphi_E) = \\ &= \frac{\varrho''}{r} (e \sin(\varphi - \varphi_e) + E \sin(\varphi - \varphi_E)). \end{aligned} \quad (4)$$

On suppose les rayons des deux cercles identiques. Ici encore, l'erreur s'élimine en cas d'application de deux dispositifs de lecture diamétraux, c'est-à-dire par la mesure en deux positions de lunettes, qui peut les remplacer.

Pratiquement, le centrage du cercle doit être effectué, lors du montage dans l'instrument, d'une façon telle que l'axe principal coïncide avec  $0'$ , c'est-à-dire on applique une excentricité artificielle de même grandeur que l'excentricité originale  $e$ , mais de direction contraire ( $180^\circ + \varphi_e$ ). Cette opération est d'ailleurs tacitement exécutée lors du montage, car le centrage du cercle et son contrôle sont faits, en définitive, à l'aide des traits de division. Ainsi, c'est toujours sur le centre géométrique des traits de division que l'on effectue le centrage, qui élimine en même temps l'erreur ou les erreurs plus haut mentionnées. En définitive, on ne saurait même pas parler de cercle divisé excentriquement, puisque le centre effectif est désigné par le centre des traits de division, et si le montage est effectué sur ce point, le cercle ne comportera pas de défauts. Ceux-ci se produiront seulement si ce n'est pas le centre des traits de division qui est admis comme point de rotation lors du centrage, et si le point de rotation ne coïncide pas avec l'axe principal.

De plus, dans les centrages effectués de cette manière, on élimine inconsciemment une partie des erreurs de division, fait dont on peut aussi fournir la

preuve théorique. Mathématiquement parlant, on produit artificiellement un effet d'excentricité de même grandeur, mais de signe contraire que la valeur de la courbe des erreurs de division (qui est de caractère sinusoïdal), déterminée en tenant compte des membres de la série Fourier exprimant les erreurs périodiques. En principe, on peut le faire, puisque la courbe des erreurs de division et l'erreur due à l'excentricité sont, l'une et l'autre, de caractère sinusoïdal. Naturellement, seul le premier membre de la série Fourier, composée de plusieurs ondes sinusoïdales, saurait être ainsi éliminé dans une certaine mesure. Les ondes superposées de la série Fourier exprimant les erreurs de la division ne peuvent, en effet, être observées que par la vue. Donc, en désignant cette excentricité artificielle par  $E_c$ , et sa direction par  $\varphi_{E_c}$ , on peut écrire:

$$\varepsilon''_{E_c} = \varrho'' \frac{E_c}{r} \sin(\varphi - \varphi_{E_c}) = - \{ a_0 + a_1 \sin(\varphi + A_1) + a_2 \sin(2\varphi + A_2) + a_3 \sin(3\varphi + A_3) + \dots \} = - \Delta\varphi]_0^{360^\circ} \quad (5)$$

(comme il ne s'agit pas d'erreur diamétrale, les erreurs de division concernant le cercle total peuvent être caractérisées par cette forme de la série Fourier).

Mathématiquement, le problème signifie que l'erreur des divisions sur  $n$  points du cercle étant connues, on cherche les inconnues correspondantes de l'excentricité artificielle ( $E_c, \varphi_{E_c}$ ), de sorte que la somme des carrés des différences entre la courbe sinusoïdale traduisant l'excentricité, et la courbe des erreurs de division soit un minimum, naturellement dans l'intervalle allant de 0 à 360°.

En définitive, si l'on admet pour base le centre géométrique des traits de division, on peut éliminer l'effet de tous les défauts d'excentricité par le centrage, et une solution mécanique équivalant à un problème de minimum conditionné permet aussi de diminuer dans une certaine mesure, au cours de l'opération, certaines erreurs de la division des cercles.

4) Les *erreurs du cercle étalon* sont reportées intégralement sur le nouveau cercle. Dans ce sens, tous les défauts de la production du cercle étalon seront reproduits, comme par ex. les défauts d'excentricité produits lors de la division du cercle étalon, les erreurs dues au flottement de l'axe principal de la machine à diviser (et qui se ramènent soit aux défauts de construction de l'axe, soit à la répartition inégale des poids des différentes parties de la machine, soit enfin aux secousses irrégulières se produisant au cours de la graduation, et qui peuvent être sensiblement réduites par application de supports élastiques en caoutchouc, etc. .), les écarts dûs au parallélisme imparfait du plan des deux cercles, les erreurs régulières et irrégulières produites par les effets thermiques et d'autres modifications, etc. . . Pour la fabrication des cercles étalons, on emploie la méthode mécanique (vu qu'il s'agit de cercles de précision), et dans



ce domaine, chaque fabrique d'instruments de précision s'efforce évidemment de réaliser le plus de perfectionnements possibles.

5) Après le montage du cercle dans l'instrument, il peut encore se produire un *défaut optique*, qui tient à ce que la lumière projetée n'arrive pas directement du cercle aux microscopes, mais traverse d'abord une couche de baume du Canada, une lame aux surfaces plan-parallèles et plusieurs systèmes optiques précédant le microscope de lecture. Si, par exemple, la lame plan-parallèle comporte un défaut de polissage, le décalage des traits de division qui en résulte dans le microscope de lecture s'exprimera, en unité d'angle, par l'équation suivante (nous laissons de côté ici la déduction mathématique, pour laquelle voir [2], p. 860, éq. 25):

$$\Delta\varphi_l = \varrho \left\{ \frac{d_0}{r} \sin \alpha_1 \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - 1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} + \sin^2 \alpha_1} \left( 1 + \frac{r}{d_0} \sin \alpha_1 \right) \right\} \sin(\varphi - \varphi_0) - \frac{\varrho}{2} \sin^2 \alpha_1 \left( \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - 1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} + \sin^2 \alpha_1} \right) \sin 2(\varphi - \varphi_0) \quad (6)$$

où  $d_0$  est l'épaisseur de la lame de verre,  $\alpha_1$  le défaut de polissage en unité angulaire,  $n$  l'indice de réfraction du verre,  $\varphi$  l'endroit de la lecture du cercle et  $r$  le rayon du cercle. Avec l'application de deux dispositifs de lecture, les valeurs de  $\varphi$  affectées d'indices impairs sont éliminées, de sorte que l'erreur diamétrale qui en résulte peut s'exprimer par l'équation suivante:

$$\Delta\varphi_{l, \text{diam}} = -\frac{\varrho}{2} \sin^2 \alpha_1 \left( \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - 1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} + \sin^2 \alpha_1} \right) \sin 2(\varphi - \varphi_0) \quad (7)$$

Si l'on calcule avec la valeur extrême  $(\varphi - \varphi_0) = 45^\circ$  et l'indice de réfraction moyen  $n = 1,6$  pour le verre et l'air, alors avec  $\alpha_1 = 10'$ , l'importance de l'erreur sera d'environ  $0,7''$ , ce qui veut dire que chez les instruments de haute précision, le polissage doit être réalisé avec une précision de quelques minutes si l'on veut rester à l'intérieur de la limite d'erreur admise. Chez certains instruments, la lumière ne traverse pas la lame de verre, de sorte qu'il ne faut pas compter avec son effet.

6) On ne doit pas non plus négliger l'effet qui se manifeste au cours des processus physiques se déroulant dans le verre. On sait que le verre est un liquide surfondu de structure moléculaire, amorphe. Entre  $500^\circ$  et  $1000^\circ$  C il passe progressivement de l'état liquide à l'état solide, ce qui entraîne une forte augmentation du frottement intérieur des molécules, qui perdent leur mobilité et se raidissent dans une position désordonnée. Cependant, cet état amorphe des molécules n'est pas durable, car une lente transformation structurale

(appelée cristallisation) s'opère en elles, tendant à un état stable exempt de tensions. Cette tension intérieure du verre entraîne naturellement la déformation de la surface extérieure, et peut devenir une source d'erreurs de caractère régulier des traits de division. Ce phénomène, bien connu en physique sous le nom de vieillissement, nous interdit d'utiliser pour l'usage optique des verres insuffisamment mûris. Pour éviter les erreurs qui en résultent, on a recours au vieillissement thermique, c'est-à-dire à la maturation produite sous l'effet de la chaleur. On y arrive en réchauffant et refroidissant plusieurs fois le verre destiné à l'usage technique, par quoi on réalise l'équilibre artificiel des molécules. Le procédé photographique comporte le grand avantage de ne nécessiter, lors de la copie des divisions, aucune sollicitation mécanique (la gravure de la surface entraînant aussi des modifications structurales).

Par le vieillissement artificiel, on arrive donc à diminuer les tensions dues au mouvement intérieur des molécules, mais il existe, en outre, des forces extérieures agissant sur la surface du verre, qui subit des changements de forme sous leur effet. Les tensions produisent à la longue une déformation plastique dans le verre, et il est à supposer que d'autres forces peu importantes mais d'un effet constant, peuvent aussi entraîner, au cours des années, des modifications de la surface. Un effet de force de ce genre peut se produire par exemple lors de la fixation du limbe dans le théodolite, car il est difficile d'assurer sur chaque point du cercle en effet de force identique.

Les examens effectués par MÜHLIG ([5], p. 477) sur des cercles en métal ont démontré que cette sorte de déformation peut causer des erreurs de division de plusieurs secondes sur le cercle, et ces erreurs font penser généralement à des déformations elliptiques. Dans ses études récemment parues ([6], [7]), FR. B. ORDING examinant les théodolites Wild T2, T3 et Zeiss Th 40, lancés il y a 15 à 20 ans, arrive à la conclusion que les erreurs de division des cercles ne sont pas de caractère constant, et que les cercles plus récents sont meilleurs que les anciens, fabriqués dans des conditions analogues ([7], p. 58). De toute façon, ces erreurs permettent de conclure que les déformations produites par les tensions moléculaires, aussi bien que celles dues à l'action de forces extérieures, augmentent les erreurs de division des cercles. Pour connaître l'ordre de grandeur que représentent les unes et les autres, il faudrait disposer des résultats d'examens continus s'échelonnant sur plusieurs années. Les erreurs relevées par ORDING peuvent être mises d'autant plus facilement sur le compte de ces derniers facteurs, que les instruments examinés sortaient des usines pendant la guerre, quand les circonstances ne permettaient sans doute pas une trop grande circonspection dans la production de la matière des cercles et l'établissement de leur division.

D'ailleurs, l'effet inégal des forces peut être éliminé au montage des cercles aussi bien que lors du centrage, si la vis de serrage n'exerce pas son action directement sur le cercle, ou par l'intermédiaire d'une petite plaque de

serrage, mais toute la force agit sur une bague métallique, chaque point de la lame de verre étant alors probablement soumis à une charge identique. Dans les nouveaux théodolites MOM Te—D1, nous avons déjà adopté cette solution.

\*

Après l'examen critique du procédé de reproduction photographique des cercles, nous présentons quelques résultats d'examens faits sur les cercles des théodolites MOM type Te—D1. Le dispositif de mesure a été analogue à celui décrit sous [8]. Il nous faut cependant souligner ici un détail que nous croyons essentiel. On sait que la plus petite lecture par estimation du théodolite Te—D1 est  $0,1' = 6''$ , suffisante tout au plus pour nous fournir des valeurs d'orientation sur des erreurs de division probablement bien plus petites [9]. Aussi avons-nous cru nécessaire de diminuer l'erreur d'estimation du théodolite en remplaçant le micromètre original par un nouveau micromètre, constitué par un disque auxiliaire gradué permettant la lecture de la seconde. Nous avons procédé, avec le nouveau micromètre, à des mesures expérimentales relatives à la précision de la mise au point et de la lecture. Sur base des 300 observations effectuées, nous avons obtenu  $\pm 1,48'' = 1,50''$  pour l'erreur moyenne de la mise au point et de la lecture effectuées une seule fois. A l'examen de la division selon HEUVELINK, nous avons adopté une disposition de mesure permettant de réduire les erreurs de visée et de lecture au minimum. Dans ce but, nous avons, en chaque position de cercle, répété deux fois la mesure angulaire directe (de  $0$  à  $180^\circ$ ) et celle de retour (de  $180$  à  $0^\circ$ ) dans les deux positions de lunette, et répété en outre, une fois, toutes les lectures. Nous avons procédé ainsi en vue d'abord de réduire l'erreur moyenne, des mesures, et ensuite parce qu'il s'offrait ainsi une possibilité de déterminer l'erreur moyenne à partir des deux mesures aller et retour, effectuées séparément. L'erreur moyenne ainsi déterminée est donc exempte de l'erreur du changement d'angle produite éventuellement entre les mesures aller et retour, ainsi que des erreurs inhérentes aux valeurs mesurées en une seule position de lunette (dans la littérature, on trouve aussi des études où l'erreur moyenne de la mesure est calculée de la différence des deux positions de lunettes [10]). Ainsi, comme le prouvent aussi nos résultats ci-dessous, nous avons réussi à ramener l'erreur moyenne des angles audessous de  $\pm 1''$ . Nous avons effectué les observations en quatre séries, conformément aux prescriptions, en veillant avec soin à l'uniformité de la vitesse des mesures, et à la constance de l'angle fixé. Nos examens nous ont en effet montré, que si l'on ne prend pas soin de la stabilité de l'instrument examiné et des collimateurs, il suffit de leur déplacement transversal de  $\pm 0,01$  mm pour produire dans l'angle fixé, d'un côté de 3 mètres, une erreur de  $1''$  environ. D'ailleurs, les mêmes examens prouvent aussi qu'il vaut mieux ne pas trop rapprocher les collimateurs de l'instrument, car chaque petit déplacement pro-

duira un effet d'autant plus grand dans l'angle fixé (avec une distance de 0,3 m des collimateurs, un déplacement de  $\pm 0,01$  mm entraînera un défaut d'angle d'env.  $\pm 10''$ ).

En cas d'application de mires, WERMANN [11] se basant sur ses examens, recommande l'emploi d'un éclairage artificiel, au lieu de la lumière naturelle. Ses expériences faites avec des sources lumineuses de diverses couleurs l'ont en outre convaincu, que la lumière verte est la plus favorable pour l'oeil et pour la visée. Indépendamment de lui, nous utilisons à notre tour, depuis plusieurs années, un éclairage jaune-vert, que nous croyons d'ailleurs le plus favorable pour toutes autres sortes de mesures expérimentales.

Sans vouloir traiter ici de la méthode de HEUVELINK, exposée en détail dans la littérature hongroise ([12], pp. 418—424), nous rappelons seulement les relations les plus importantes utilisées dans les calculs:

a) la série Fourier utilisée:

$$\Delta\varphi = a \sin(2\varphi + A) + b \sin(4\varphi + B) + c \sin(6\varphi + C) \quad (8)$$

b) les relations connues pour la détermination des coefficients de la série Fourier:

$$\operatorname{tg}(i\beta + K) = - \frac{[(p-a) \sin 2i\varphi]^*}{[(p-a) \cos 2i\varphi]} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, K = A, B, C, \dots, \beta = 45^\circ \quad (9)$$

c'est-à-dire

$$k = \frac{[(p-a) \sin 2i\varphi]}{n \sin i\beta \sin(i\beta + K)} = - \frac{[(p-a) \cos 2i\varphi]}{n \sin i\beta \cos(i\beta + K)} \\ i = 1, 2, 3, \dots, K = A, B, C, \dots, \beta = 45^\circ \quad (9a)$$

c) pour le calcul de l'erreur moyenne, nous avons utilisé les relations suivantes:

Pour la détermination de l'erreur moyenne des mesures angulaires:

$$\mu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[dd]}{n'} - \frac{[d]^2}{n'^2}} \quad (10)$$

(où  $d$  est la différence de deux mesures, et  $n$  le nombre d'angles figurant dans le calcul).

Pour la détermination des erreurs moyennes totales et accidentelles:

$$(M^i)^2 = \frac{[v^i v^i]}{n - s - 2i} \quad (11a)$$

et

$$\tau^i = \pm \sqrt{\frac{(M^i)^2}{2} - \frac{\mu^2}{r}} \quad (11b)$$

\* Il est plus conséquent de marquer au lieu de  $p$  avec  $\alpha'_i$  ([3], [12]).

( $r$  étant le nombre de mesures angulaires effectuées dans une position de cercle). Notons que la détermination des valeurs  $\tau$  n'est pas entièrement exacte, parce qu'en raison des erreurs de division de caractère régulier, l'erreur moyenne totale de la division, caractérisant l'angle, ne devrait pas être calculée avec la valeur  $\tau\sqrt{2}$  ([3], p. 130).

Pour le calcul de l'erreur moyenne des coefficients de la série Fourier ([8], équations (17) et (18)) ou ([13], p. 247):

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{M_{\rho^\circ}}{a\sqrt{n}}, & M_B &= \frac{M_{\rho^\circ}}{b\sqrt{2n}}, & M_C &= \frac{M_{\rho^\circ}}{c\sqrt{n}}, & \dots \\ M_a &= \frac{M}{\sqrt{n}}, & M_b &= \frac{M}{\sqrt{2n}}, & M_c &= \frac{M}{\sqrt{n}}, & \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Pour savoir en quelle mesure les valeurs des erreurs diamétrales données par l'équation (8) sont exactes, on a besoin de connaître leur erreur moyenne. Pour la détermination, on a intérêt à partir de l'équation (8), en substituant à la place des valeurs  $A, B, C \dots$  et  $a, b, c \dots$  des inconnues  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \dots$ , indépendantes les unes des autres du point de vue de la détermination ([12], équation (4)):

$$\begin{aligned} A &= \text{arc tg} \left( -\frac{x_2}{x_1} \right) - \beta, & a &= \frac{1}{2 \sin \beta} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ B &= \text{arc tg} \left( -\frac{y_2}{y_1} \right) - 2\beta, & b &= \frac{1}{2 \sin 2\beta} \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ C &= \text{arc tg} \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) - 3\beta, & c &= \frac{1}{2 \sin 3\beta} \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \\ & \vdots & & \vdots \end{aligned} \quad (13)$$

Donc

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{1}{2 \sin \beta} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin \left\{ 2\varphi + \text{arc tg} \left( -\frac{x_2}{x_1} \right) - \beta \right\} + \\ &+ \frac{1}{2 \sin 2\beta} \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \sin \left\{ 4\varphi + \text{arc tg} \left( -\frac{y_2}{y_1} \right) - 2\beta \right\} + \\ &+ \frac{1}{2 \sin 3\beta} \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \sin \left\{ 6\varphi + \text{arc tg} \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) - 3\beta \right\} + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Formons les différentielles partielles selon chaque variable:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x_1} &= \frac{1}{2 \sin \beta} \left\{ \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \sin \left( 2\varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( -\frac{x_2}{x_1} \right) - \beta \right) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos \left( 2\varphi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( -\frac{x_2}{x_1} \right) - \beta \right) \frac{1}{1 + \left( -\frac{x_2}{x_1} \right)^2} \cdot \frac{x_2}{x_1^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \beta} \{ \cos(\beta + A) \sin(2\varphi + A) + \sin(\beta + A) \cos(2\varphi + A) \} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \beta} \sin \{ 2(\varphi + A) + \beta \} \end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x_2} &= \frac{1}{2 \sin \beta} \cos \{ 2(\varphi + A) + \beta \}, \\ \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y_1} &= \frac{1}{2 \sin 2\beta} \sin \{ 2(2\varphi + B) + 2\beta \}, \\ \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y_2} &= \frac{1}{2 \sin 2\beta} \cos \{ 2(2\varphi + B) + 2\beta \}, \\ \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial z_1} &= \frac{1}{2 \sin 3\beta} \sin \{ 2(3\varphi + C) + 3\beta \}, \\ \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial z_2} &= \frac{1}{2 \sin 3\beta} \cos \{ 2(3\varphi + C) + 3\beta \}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{15}$$

Puisque

$$M_{x_1} = M_{x_2} = M_{y_1} = M_{y_2} = M_{z_1} = M_{z_2} = M \sqrt{\frac{2}{n}} \tag{16}$$

En utilisant les différentielles ci-dessus, on obtient, pour le carré de l'erreur moyenne des erreurs diamétrales, la relation suivante:

$$\begin{aligned} M_{\Delta \varphi}^2 &= \left( \frac{1}{2 \sin \beta} \sin \{ 2(\varphi + A) + \beta \} \right)^2 \frac{2M^2}{n} + \\ &+ \left( \frac{1}{2 \sin \beta} \cos \{ 2(\varphi + A) + \beta \} \right)^2 \frac{2M^2}{n} + \\ &+ \left( \frac{1}{2 \sin 2\beta} \sin \{ 2(2\varphi + B) + 2\beta \} \right)^2 \frac{2M^2}{n} + \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{1}{2 \sin 2\beta} \cos \{2(2\varphi + B) + 2\beta\} \right)^2 \frac{2M^2}{n} + \\
 & + \dots = \frac{M^2}{2n} \left( \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 2\beta} + \frac{1}{\sin^2 3\beta} + \dots \right) \quad (17)
 \end{aligned}$$

Si  $\beta = 45^\circ$ , alors

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{2}, \quad \sin^2 2\beta = 1, \quad \sin^2 3\beta = \frac{1}{2}, \quad \dots$$

En tenant compte de trois membres de la série Fourier:

$$M_{\Delta\varphi}^2 = \frac{M^2}{2n} \left( \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{5M^2}{2n}, \quad (18)$$

c'est-à-dire

$$M_{\Delta\varphi} = \pm M \sqrt{\frac{5}{2n}}, \quad (18a)$$

Dans notre cas ( $n = 36$ )

$$M_{\Delta\varphi} \doteq \pm \frac{M}{4} \quad (18b)$$

La relation (18a) a été aussi déduite par une autre voie ([13], p. 248), et dans ce sens, la concordance des deux résultats fournit la preuve que, pour les valeurs  $A, B, C, \dots, a, b, c, \dots$  la condition de THIELE déduite pour les fonctions indépendantes reste valable ([3], p. 151).

La formule (17) permet de calculer l'erreur moyenne de l'erreur diamétrale pour un angle  $\beta$  donné. Elle prouve aussi que l'exactitude de la détermination de  $\Delta\varphi$  dépend nettement de la grandeur de  $\beta$ , l'augmentation de  $\beta$  entraîne celle de l'exactitude de la valeur de  $M_{\Delta\varphi}$ , et inversement, sa diminution va de pair avec celle de son exactitude. Sur base de la relation (17), on peut calculer la limite, pour  $\beta$ , qu'il convient de ne pas abaisser si l'on veut déterminer  $M_{\Delta\varphi}$  avec une précision suffisante. En définitive, il s'agirait ici d'un problème de minimum, mais les valeurs calculables en tenant compte des trois premiers membres de la série Fourier sont bien plus démonstratives:

si	$\beta = 90^\circ$	alors	$M_{\Delta\varphi} \doteq 0,2 M$
	$60^\circ$		$0,2 M$
	$45^\circ$		$0,25 M$
	$30^\circ$		$0,3 M$
	$20^\circ$		$0,4 M$
	$10^\circ$		$0,8 M$

c'est-à-dire, d'après les valeurs ci-dessus,  $\beta$  ne doit pas être inférieur, autant que possible, à  $30^\circ$ . En cas de  $\beta = 45^\circ$ , et  $n = 36$ , la valeur caractérisant la précision de  $\Delta\varphi$  peut être estimée, d'après l'équation (23b), au quart de l'erreur moyenne totale. En général, l'erreur moyenne de l'erreur diamétrale dépend de la grandeur de  $M$ .

Par la formule de l'erreur moyenne ([14], p. 613, form. 14), on peut déduire que la précision de la valeur de l'erreur moyenne totale est:

$$\mu_M \doteq \pm 0,12 M \quad (19)$$

ce qui équivaut, dans notre cas, au dixième env. de la valeur déterminée.

Dans l'évaluation pratique des résultats du contrôle de la division, le calcul des valeurs  $[(p - a) \cos 2\varphi]$ ,  $[(p - a) \sin 2\varphi]$ , ... etc., représente un

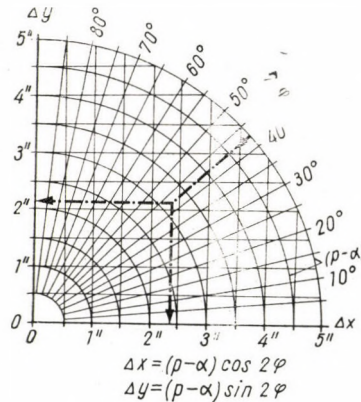


Fig. 2

travail fastidieux. Pour faciliter ce travail, JOCHMANN [2] fait appel aux analyseurs harmoniques [16], tandis que WERMANN [11] établit, sur la base de relations de l'analyse harmonique, des schémas correspondants aux différents cas, destinés à simplifier le calcul ([17], pp. 618—621, ou [18], pp. 384—388). Aux pages 240—250 de [13], on trouve des tableaux numériques établis pour les fonctions circulaires, mais les produits ci-dessus doivent être encore calculés.

Remarquons que si la première de ces méthodes nécessite des dispositifs spéciaux, la seconde exige un travail assez long pour l'établissement des différents schémas. Nous avons trouvé un grand avantage à utiliser la nomographie dans nos calculs ([15], p. 95). Nous nous sommes servis du nomogramme très simple représenté sur la figure 2, qui permettait d'obtenir les valeurs cherchées avec une précision suffisante pour nos calculs. En partant de 0, on reporte les



valeurs d'angles de  $0$  à  $90^\circ$  sur un papier millimétrique, puis on trace les axes de coordonnées. Sur l'un des axes on peut alors obtenir, conformément aux ordres de grandeur probables, la valeur  $[(p - a) \cos 2i\varphi]$ , et sur l'autre, la valeur  $[(p - a) \sin 2i\varphi]$ , si les secteurs de cercles inscrits indiquent les valeurs  $[(p - a)]$ . Comme dans nos calculs, la valeur  $(p - a)$  ne dépasse pas  $5''$ , nous l'avons admise comme valeur limite. Dans nos examens, les valeurs  $2i\varphi$  et  $(p - a)$  étant connues, tous les produits peuvent être très rapidement calculés au moyen du diagramme représenté sur la figure 2. A l'aide d'un nomogramme aux dimensions convenables, chaque valeur peut être déterminée avec une précision allant jusqu'à trois décimales, ce qui suffit toujours pour nos calculs.

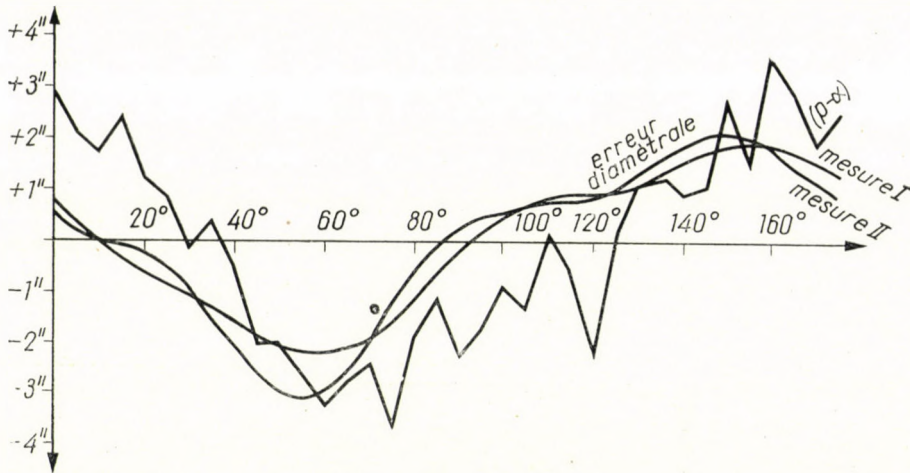


Fig. 3

Nous ajoutons que jusqu'à la fin, nous avons effectué tous nos calculs au moyen de nomogrammes et d'une règle à calculer, excepté les seules additions faites sur la machine à calculer. Le problème se simplifie particulièrement par l'utilisation de ce nomogramme, car la construction proprement dite ne consiste ici qu'à tracer les traits de division et les cercles, et à numéroter les valeurs des coordonnées.

Les résultats du contrôle de la division du théodolite MOM Te—D1 No. 564 562 ont été résumés dans le tableau I et sur la figure 3. Nous avons procédé à deux reprises au contrôle du même instrument, et la concordance des résultats nous fournit les signes les plus probables de la précision de nos mesures. Contrairement à nos examens précédents, nous avons aussi tenu compte du quatrième membre de la série Fourier, bien qu'il soit, dans la plupart des cas, d'une valeur absolument négligeable. D'après la courbe  $(p - a)$ , on peut déjà constater que l'amplitude extrême des erreurs diamétrales se situera entre

$\pm 2,0''$  et  $\pm 2,5''$ , ce qui indique aussi l'amplitude du membre principal. L'allure de la courbe Fourier permet d'établir que les longues périodes dominent dans l'instrument examiné, c'est-à-dire qu'il s'agit surtout d'erreurs de division de caractère régulier, tandis que celles d'un caractère accidentel sont sensiblement moindres. D'après la courbe  $(p - a)$ , les parties du cercle allant de  $0$  à  $35^\circ$  et de  $120$  à  $180^\circ$  correspondent à la phase positive, et celle allant de  $35$  à  $120^\circ$  à la phase négative. La courbe des erreurs diamétrales compensées présente approximativement la même allure. Cependant, l'importance de l'erreur est sensiblement inférieure à la plus petite lecture effective de l'instrument. De toute façon, l'erreur moyenne totale de l'ordre de  $\pm 1,5''$ , et l'erreur moyenne accidentelle de  $\pm 0,7''$ , permettent de conclure que chez l'instrument en question dominent les erreurs périodiques de caractère régulier, inhérentes en partie à la technique du procédé photographique. Mais on peut admettre que pour les cercles d'instruments de capacité moyenne, cette précision est tout à fait suffisante.

Notre ancien examen qualificatif du même cercle [9] a donné des résultats identiques quant à la période du premier membre, mais en raison de l'inexactitude des anciennes mesures, seule l'amplitude du premier membre était identique, les autres étaient assez incertaines. (Il faudrait partout ajouter  $\pm 180^\circ$  à la période, à cause du signe négatif des membres  $a, b, c$ , qui n'influence d'ailleurs pas la série Fourier, puisque le changement de signe de l'un des multiplicateurs et le changement de  $180^\circ$  de la période reviennent au même.)

Des recherches faites sur un autre théodolite Te—D1 (No. 567 279) donnent des résultats encore meilleurs (voir tableau I et figure 3). L'erreur moyenne totale  $y$  est de  $\pm 0,8''$ , et l'erreur moyenne accidentelle de  $\pm 0,2''$ . La courbe  $(p - a)$  indique, ici encore, la présence de périodes longues et aussi plus courtes. L'allure de la courbe  $(p - a)$  et l'amplitude de la courbe Fourier, ainsi que les erreurs moyennes permettent de constater que ce cercle est parmi les meilleurs de tous ceux examinés.

En comparant les résultats de l'examen des théodolites MOM Te—D1 à ceux relatifs à d'autres instruments, on peut établir que les cercles en question répondent parfaitement au but qui leur a été fixé. D'autre part, si l'instrument va être perfectionné en théodolite permettant la lecture de la seconde et l'erreur des cercles divisés ne dépassera pas cet ordre de grandeur. l'effet des erreurs de longue période s'éliminera entièrement par les mesures effectuées en 4 tours. Dans la mesure d'angles de faible ouverture (de  $0$  à  $30^\circ$ ), les erreurs de division sont probablement éliminées en un seul tour, si ce ne sont pas les erreurs de courte période qui dominent.

A considérer l'erreur moyenne totale, de l'ordre de  $\pm 0,6-0,8''$ , et l'erreur moyenne accidentelle, de l'ordre de  $\pm 0,3-0,5''$ , obtenus par WERMANN [11] pour des théodolites universels permettant la lecture (par estimation) de  $0,1''$ , — ainsi que les valeurs de  $\tau = \pm 1,11''$ , resp.  $\tau''' = \pm 0,39''$ , cal-

culées par ORDING [6] pour des théodolites Wild T2, on peut constater que les cercles examinés de nos théodolites de type Te—D1 sortent avec honneur de la comparaison. Pour savoir en quelle mesure ces cercles conserveront leur qualité après un long usage, d'autres examens approfondis seront nécessaires.

La présente étude se proposait, comme but, l'examen détaillé des cercles en question, s'il s'agit de l'examen en masse d'instruments fabriqués en série,

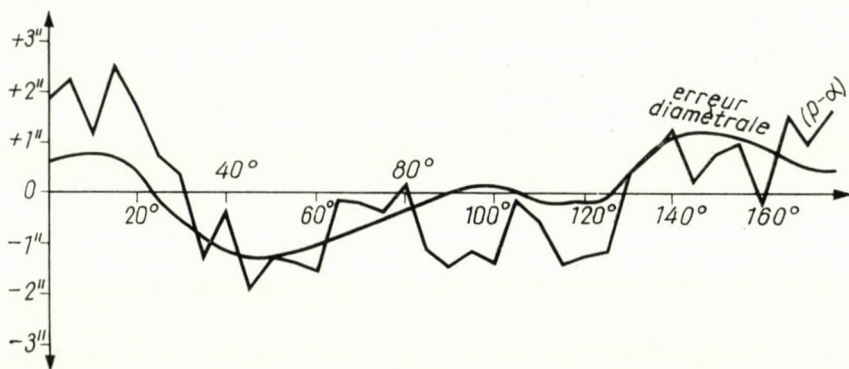


Fig. 4

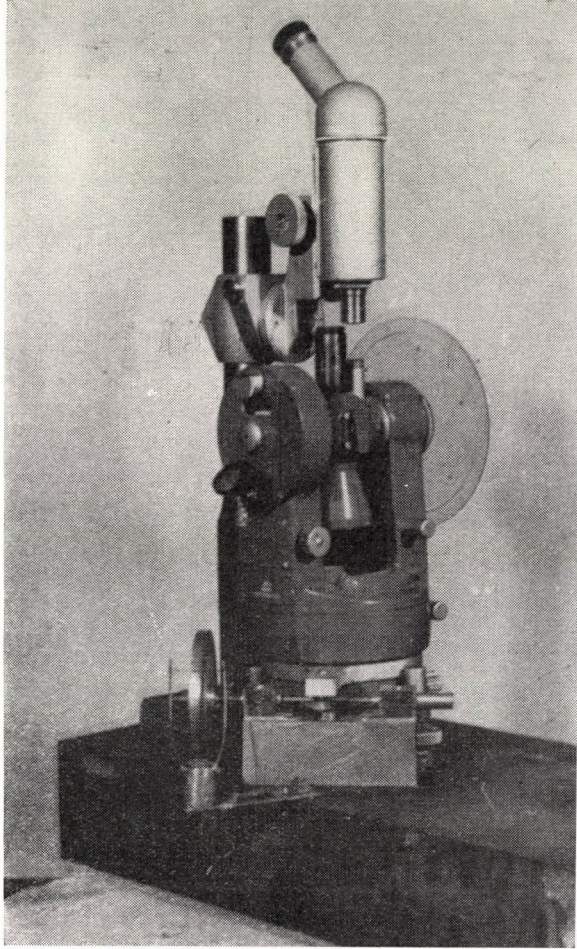
L'emploi de la même méthode peut être recommandé à cause de sa grande utilité (pour l'examen d'autres erreurs et défauts) avec, tout au plus, un espacement par  $10^\circ$  (au lieu de 5) des mesures. Même ainsi, la courbe  $(p - \alpha)$  en dira déjà assez long sur la précision du cercle. Pour des examens plus détaillés, on peut se servir éventuellement des nomogrammes mentionnés pour déterminer par la seule règle à calculer) les erreurs moyennes totale et accidentelle caractérisant la division du cercle examiné. Par une telle application des mesures, la méthode proposée se révèle économique et avantageuse même pour les contrôles effectués à l'usine.

L'examen de la division du cercle à l'état monté importe précisément, à notre avis, parce que les données de la précision ainsi déterminées se rapportent aux conditions dans lesquelles l'instrument, et donc le cercle, sont utilisés au cours des mesures pratiques.

\*

Nous avons aussi effectué des recherches relatives au cercle des théodolites Gamma Te—E. L'examen selon la méthode de Heuvelink ne saurait être appliqué ici, la valeur de lecture de l'instrument étant de  $30''$  (microscope à estimation). Pour réaliser le contrôle du cercle monté dans l'instrument, il nous a paru utile d'utiliser un dispositif permettant la mesure directe des intervalles de la division. Nous avons employé à cette fin un microscope muni d'une vis

micrométrique, construit par le mécanicien Antal BUMMER, et représenté sur la figure 5 (monté sur un théodolite MOM Te—D1). Le dispositif comporte, en principe, le microscope et la vis micrométrique montés sur une plaque de fer commune, et la lunette, mise en position verticale, du théodolite. Le microscope de lecture est remplacé par un microscope de plus fort grossissement, mis sur



*Fig. 5*

le trajet lumineux du dispositif de lecture. La vis micrométrique sert à imprimer à un bras rendu solidaire avec le limbe, un mouvement de rotation de valeur correspondante à un intervalle de la division. Par un réglage convenable du bras, on peut faire coïncider une division donnée du limbe avec la plaque du réticule. Il importe de mesurer chaque intervalle de division avec la même section de la vis micrométrique, car ainsi les défauts du filet se reflèteront d'une

façon identique dans toutes les valeurs. Nous avons répété les mesures de chaque intervalle à cinq reprises, pour réduire ainsi les erreurs de mesure au minimum. Les examens ont été faits en général de  $10^\circ$  en  $10^\circ$  pour chaque instrument, sur toute la circonférence du cercle. D'après les moyennes arithmétiques de 5 mesures obtenues pour la même position de cercle, nous avons déterminé les erreurs moyennes qui variaient, en général, de  $\pm 0,5$  à  $1,2$  unité exprimée par la division du tambour, ce qui signifie, avec la longueur de bras donnée, un écart de l'ordre de  $\pm 0,6'' - 1,4''$ .

Lors du calcul des résultats des mesures, nous avons procédé de la façon suivante: nous avons, en chaque position de mesure, calculé la moyenne arithmétique des cinq mesures  $((\varphi_{i+1} - \varphi_i)')$ , puis déterminé l'excentricité du limbe à partir de ces moyennes, et procédé à la correction des mesures ([19], pp. 397-400). Ce procédé peut s'exprimer par la formule:

$$(\varphi_{i+1} - \varphi_i)' - a \cos \varphi_i - b \sin \varphi_i = a' \quad (20)$$

où  $\varphi_i$  signifie le premier trait de division,  $\varphi_{i+1}$  le trait de division suivant, et  $b$  les valeurs d'excentricité déterminées par compensation, dans les directions de  $0^\circ$  et de  $90^\circ$ . En prenant la moyenne arithmétique ( $a$ ) des valeurs  $a'$  ainsi corrigées, calculons les différences  $(a - a')$ , pour obtenir les valeurs numériques comprenant les erreurs de mesure et de division. Dans les résultats calculés à partir de la moyenne arithmétique de 5 observations, l'erreur de mesure peut être supposée absolument négligeable. Si l'on compte, en plus, qu'il est satisfait à la condition de  $360^\circ$  pour la totalité des divisions, on peut considérer les résultats obtenus comme caractéristiques de la précision des intervalles.

Étant donné que, dans le cas présent, seule nous intéresse la valeur qualitative caractérisant la division du cercle, pour la déterminer, nous utilisons la relation exprimant l'erreur moyenne totale, connue aussi de la méthode de Heuvelink:

$$M^2 = \frac{[vv]}{n - 1} \quad (21)$$

où

$$[vv] = [(a - a')^2] \quad (21a)$$

et l'erreur moyenne totale de l'intervalle de division:

$$\tau = \pm \sqrt{M^2 - \mu^2} \quad (22)$$

où

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2kn}}$$

( $d$  étant la différence des mesures,  $k$  le nombre de répétitions effectuées dans la même position de cercle, et  $n$  le nombre des intervalles de division examinés).

L'erreur moyenne accidentelle des intervalles de division, calculée en tenant compte des deux premiers membres de la série Fourier, sera

$$\tau' = \pm \sqrt{M'^2 - \mu^2} \quad (23)$$

si

$$M'^2 = \frac{[v'v']}{n-1-2} \quad (23a)$$

où

$$[v'v'] = [vv] - \frac{2}{n} [(a-a') \cos 2\varphi]^2 - \frac{2}{n} [(a-a') \sin 2\varphi]^2, \quad (23b)$$

La considération d'autres membres de la série Fourier ne présente plus aucun intérêt du point de vue de notre examen, la précision de la mesure étant déjà de l'ordre de 1".

Les résultats des examens de différents théodolites type Te—E de l'Usine Gamma sont contenus dans le tableau II. D'après ces résultats, l'erreur moyenne accidentelle de la division des instruments examinés est de l'ordre de  $\pm 1,6''$ . Afin de savoir si cette erreur des divisions se répétait sur les différents points du cercle avec un caractère régulier, nous avons effectué des examens de laboratoire plus étendus pour un angle de grandeur donnée. Les résultats calculés, ainsi que les données obtenues à l'aide du microscope montrent que cette erreur n'entraîne pas de décalages de divisions du caractère régulier, s'étendant sur de longues périodes.

Ce qui précède, nous permet de constater que les cercles montés dans les théodolites Gamma Te—E répondent aux exigences. Soulignons cependant que la présente étude ne se proposait de déterminer que les valeurs numériques d'un caractère qualitatif, en vue surtout de savoir si les cercles répondent toujours au but recherché, une fois montés dans l'instrument.

Tableau II

No. d'ordre	Instrument	Erreur moyenne totale		Erreur moyenne de la mesure $\mu$	Erreur moyenne totale	Erreur moyenne accidentelle
		$M$	$M'$		des intervalles de division	
				$\tau$	$\tau'$	
1.	Gamma Te-E (No. 21336)	$\pm 1,85''$	$\pm 1,80''$	$\pm 0,88''$	$\pm 1,62''$	$\pm 1,59''$
2.	Gamma Te-E (No. 21356)	$\pm 2,38''$	$\pm 2,20''$	$\pm 1,25''$	$\pm 2,01''$	$\pm 1,86''$
3.	Gamma Te-E (No. 21346)	$\pm 2,19''$	$\pm 2,09''$	$\pm 1,17''$	$\pm 1,87''$	$\pm 1,79''$

Tableau I

No. d'ordre	Instrument	Coefficients de la série Fourier et leur erreur moyenne								Erreur moyenne des mesures des angles	Erreurs moyennes totales et accidentelles de la division					Erreur totale $M$	Erreur moyenne des erreurs diamétrales $\pm M_{\Delta\varphi''}$
		$A \pm M_A$	$B \pm M_B$	$C \pm M_C$	$D \pm M_D$	$a \pm M_a$	$b \pm M_b$	$c \pm M_c$	$d \pm M_d$		$\tau$ $\pm$ "	$\tau'$ $\pm$ "	$\tau''$ $\pm$ "	$\tau'''$ $\pm$ "	$\tau''''$ $\pm$ "		
1.	MOM Te-D1 mesure I. (No. 564562)	161°10' $\pm 10,4^\circ$	69°40' $\pm 60,0^\circ$	230°50' $\pm 83,5^\circ$	357°00' $\pm 400,0^\circ$	+1,86" $\pm 0,36''$	+0,25" $\pm 0,25''$	+0,24" $\pm 0,36''$	+0,04" $\pm 0,25''$	$\pm 0,77''$	-1,49	0,60	0,56	0,55	0,57	0,14	0,62
2.	MOM Te-D1 mesure II. (No. 564562)	162°30' $\pm 10,6^\circ$	67°10' $\pm 35,6^\circ$	279°0' $\pm 39,5^\circ$	189°0' $\pm 203,8^\circ$	+2,07" $\pm 0,42''$	+0,45" $\pm 0,30''$	+0,49" $\pm 0,42''$	+0,11" $\pm 0,30''$	$\pm 0,80''$	1,82	0,92	0,81	0,73	0,75	2,53	0,73
3.	MOM Te-D1 (No. 567279)	146°30' $\pm 12,2^\circ$	96°30' $\pm 27,5^\circ$	308°40' $\pm 34,1^\circ$	0°0' $\pm 44,2^\circ$	+0,92" $\pm 0,20''$	+0,30" $\pm 0,13''$	+0,30" $\pm 0,20''$	+0,18" $\pm 0,13''$	$\pm 0,70''$	0,80	0,42	0,37	0,28	0,20	1,18	0,34





## BIBLIOGRAPHIE

1. HOMORÓDI, L.: Egy teodolit körosztásának vizsgálata (Examen de la division du cercle d'un théodolite), Geodézia és Kartográfia, Budapest, 1957.
2. JOCHMANN, H.: Die Kreisteilfehler der Horizontalkreise neuer Gradteilung von Präzisions-theodoliten moderner Bauart. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, 1955/56, fasc. 5, et 1956/57, fasc. 1.
3. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Felsőgeodézia I. (Géodésie supérieure, I.). Note universitaire, Sopron, 1953.
4. TÁRCZY-HORNOCH, A.: A run-hiba meghatározásáról (De la détermination du run). Geodéziai Közöny, Budapest, 1930.
5. MÜHLIG, F.: Untersuchung eines Teilkreises nach zwei Methoden und Aufklärung der dabei aufgetretenen Widersprüche. Z. f. Instrumentenkunde, 1933.
6. ORDING, FR. B.: Sind die Glaskreise der neuen Theodolite genügend stabil? Det KGL. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter, Trondheim, 1954, no. 2.
7. ORDING, FR. B.: Die Teilkreisgenauigkeit moderner Theodolite. Det KGL. Videnskabers Selskabs Forhandling. Trondheim, 1955, no. 11.
8. Felsőrendű teodolitok körosztásának vizsgálata (Examen de la graduation du cercle de théodolites d'ordre supérieur). Geodézia és Kartográfia, Budapest, 1956.
9. ALPÁR, GY.—HALMOS, F.—SOMOGYI, J.: Beszámoló egyes új magyar műszerek vizsgálatáról (Compte rendu de l'examen de quelques nouveaux instruments de fabrication hongroises), Geodézia és Kartográfia, Budapest, 1959.
10. HEUVELINK, H. I.: Die Prüfung der Kreisteilungen von Theodoliten und Universalinstrumenten. Z. f. Instrumentenkunde, 1925, pp. 70—84.
11. WERMANN, G.: Kreisteilungsuntersuchungen (Kritische Betrachtung des Heuvelink-Verfahrens). Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr 18, München, 1957.
12. HAZAY, I.: Geodéziai Kézikönyv, I. kötet (Traité de Géodésie, Vol. I.). Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1956.
13. JORDAN (EGGERT) KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. IV.: Mathematische Geodäsie. Stuttgart, 1958.
14. JORDAN-EGGERT: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. I.: Ausgleichsrechnung. Stuttgart, 1948.
15. PENTKOVSKI, M. V.: Nomográfia. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.
16. BAER, H.: Genauigkeitsuntersuchungen am harmonischen Analysator Mader-Ott. Z. f. Instrumentenkunde, 1937.
17. BRONSTEIN, I. N.—SEMENDIAIEV, K. A.: Matematikai zsebkönyv (Précis de mathématiques). Múvelt Nép Kiadó, Budapest, 1955.
18. SMIRNOV, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. II. Berlin, 1955.
19. JORDAN-EGGERT (BERROTH): Handbuch der Vermessungskunde, Bd. II.: Feld- und Landmessung. Stuttgart, 1950.

## RÉSUMÉ

L'auteur présente l'examen de la division des cercles des théodolites MOM Te-D1, de 6", et Gamma Te-E. La première partie de l'étude traite des sources d'erreurs inhérentes au procédé de reproduction photographique des cercles, puis examine les possibilités d'éliminer les erreurs de division, lors des opérations de centrage. Selon les constatations de l'auteur, le membre principal de la série Fourier appliquée peut être éliminé en principe par le centrage, et l'effet des erreurs de division de caractère régulier peut être diminué par un faible déplacement convenable du centre. Comme le centrage du cercle s'opère, de toute façon, en tenant compte des traits de division existants, l'effet des erreurs de division est considéré, bien qu'inconsciemment, lors du réglage. Par la suite, l'auteur prouve que les constantes de la série Fourier déterminée par compensation ( $A, B, C, \dots a, b, c, \dots$ ) sont des quantités indépendantes, et ainsi la condition de Thiele déduite pour les fonctions indépendantes est donc valable pour elles. Il déduit ensuite l'erreur moyenne et la précision de l'erreur diamétrale (équations 18 et 19).

Les résultats de l'examen des cercles des théodolites MOM Te-D1 sont résumés au tableau I et sur les figures 3—4, ceux obtenus pour les théodolites Gamma Te-E étant contenus par le tableau II. Pour effectuer ses observations, l'auteur a utilisé des dispositifs spéciaux.

## PRÜFUNG DER KREISTEILUNG KLEINER UND MITTLERER THEODOLITE IM EINGEBAUTEN ZUSTAND

F. HALMOS

### ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser schildert die Prüfung der Kreisteilung des 6-Sekunden-Theodolits Typ MOM Te—D1 und des Theodolits Typ Gamma Te—E. Im ersten Teil befaßt sich die Studie mit den Fehlerquellen des fotografischen Kreiskopierverfahrens; danach wird die Frage behandelt, wie die Kreisteilungsfehler bei den Zentrierungen unschädlich gemacht werden können. Es wird festgestellt, daß das Leitglied der angewandten Fourier-Reihe im Prinzip mit dem Zentrierungsverfahren eliminiert werden kann und es im allgemeinen möglich ist, die Wirkung der systematischen Fehler der Kreisteilung mittels einer geringen und entsprechenden Verschiebung des Mittelpunktes zu vermindern. Nachdem das Zentrieren des Kreises ohnedies anhand der gegebenen Teilstriche erfolgt, wird beim Justieren die Wirkung der Teilungsfehler — wenn auch unbewußt — in Betracht gezogen, selbst wenn diese nicht bekannt sind. Des weiteren beweist die Studie, daß die durch Ausgleichung bestimmten Konstante der Fourierschen Reihe ( $A, B, C, \dots a, b, c, \dots$ ) voneinander unabhängige Größen sind, weshalb auf diese die für die sogenannten freien Funktionen abgeleitete Thielesche Bedingung gültig ist. Es wird auch der mittlere Fehler des Durchmesserfehlers, sowie dessen Zuverlässigkeit abgeleitet (Gleichungen 18 und 19).

Abbildungen 3 und 4, sowie Tabelle I enthalten die Ergebnisse der Kreisprüfungen an Theodoliten Typ MOM Te—D1, Tabelle II die an Theodoliten Typ Gamma Te—E. Zur Ableitung wurden spezielle Einrichtungen verwendet.

## CIRCLE GRADUATION TEST OF SMALL AND MEDIUM THEODOLITES IN THE CASE OF BUILT-IN CIRCLES

F. HALMOS

### SUMMARY

Author discusses the circle graduation tests of the 6-second theodolite type MOM Te—D1 and of the theodolite type Gamma Te—E. The first part of the study is dealing with the sources of error of circle photocopying processes, then treats the question of how circle graduation errors can be compensated in the course of centering. Author points out that the leading term of the applied Fourier series can be eliminated, in principle, by a centering operation, and on the whole, the effect of systematic circle graduation errors can be minimized by a small and suitable displacement of the central point. As in the centering of the circle the given division lines are considered, anyhow, the effect of the graduation errors is unconsciously considered in adjustment, even if those errors themselves are unknown. The study proves that the constants of the Fourier series determined by means of adjustment ( $A, B, C, \dots a, b, c, \dots$ ) are mutually independent values, therefore Thiele's condition derived for the so-called free functions, obtains to them. The mean error of the diameter error as well as its reliability are derived too (equations 18 and 19).

Figs. 3 and 4 as well as Table I show the circle test results on theodolites of the type MOM Te—D1, whereas Table II show those on theodolites of the type Gamma Te—E. The readings are taken with special equipment.

## ПРОВЕРКА КРУГОВОГО ДЕЛЕНИЯ ТЕОДОЛИТОВ МАЛЫХ И СРЕДНИХ РАЗМЕРОВ ВО ВСТРОЕННОМ ЕГО СОСТОЯНИИ

Ф. ХАЛМОШ

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе дается проверка круговых делений теодолитов типа MOM Te—D1, 6" и теодолитов типа Гамма Te—E. В первой части работы рассматриваются источники погрешностей метода кругового фотокопирования, а затем изучается вопрос ликвидации ошибок круговых делений при центрирующих процессах. Устанавливается

принципиальная возможность исключения главного члена применяемого ряда Фурье посредством центрировки; влияние ошибок систематического характера круговых делений в основном уменьшается соответствующим незначительным смещением центра. Ввиду того, что при центрировке круга процесс выполняется во всяком случае с учетом имеющихся черточек деления, это значит, что эффект погрешностей в делениях, даже при неизвестных их величинах, хотя и бессознательно, но учитывается при выполнении урегулировки. В дальнейшем автор доказывает, что постоянные ряда Фурье ( $A, B, C, \dots, a, b, c, \dots$ ), определенные путем уравнивания, являются независимыми друг от друга величинами, поэтому в их отношении действительно условие Тиле, выведенное для так называемых свободных функций. Излагается вывод средней ошибки диаметра и оценка его надежности (уравнения 18 и 19).

Результаты проверки круговых делений для теодолитов типа MOM Те—Д1 показаны на фиг. 3 и 4 и в таблице I, а для теодолитов типа Гамма Те—Е — в таблице II. При выполнении наблюдений применялись специальные устройства.



# CASE HISTORY OF A COMPLEX GEOPHYSICAL PROSPECTING OVER A HIGHLY-DISTURBED STRUCTURE (THE MECSEK MOUNTAINS)

GY. SZÉNÁS

CAND. OF ENG. SC.

[Manuscript received February 11, 1960]

## Introduction

The *Mecsek* Mountains are a range of hills and low mountains in the southern part of *Hungary*, in the corner of the *Danube* and *Drave* rivers. They extend on the surface in a length of about 50 km in a SW—NE direction. The main bulk rises to an average height of 300—600 m above sea level, against the surrounding undulating topography, the latter's average height above the sea level being 120—180 m. The western part of the forest-covered range consists chiefly of *Permian* and *Triassic* rocks; the more ragged and structurally more disturbed eastern part comprises a continuous series of sedimentary formations ranging from the *Triassic* to the lower *Cretaceous*, as well as *Cretaceous* and *Miocene* extrusive rocks, and is covered on the margins by clastic sediments of the *Neogene* (Fig. 1).

The stratigraphical relationships of the *Mecsek* Mountains can be traced to Southern *Transylvania*, though some Alpine elements can be recognized as well. The western part consists structurally of an *anticline*, open to the west, the eastern part of a closed *perisyncline* and of an *overthrust belt*. The most characteristic feature of the range is its exceedingly disturbed structural style.

The most important mineral deposit of the *Mecsek* is the lower *Jurassic* (Liassic) coal. The coal deposits, according to our present knowledge, follow the line of contact between the Western and the Eastern *Mecsek* and the overthrust belt of the eastern part.

As to the origin of the range, the dominating conception at present is that the sedimentation took place in a basin having a shape similar to that of the present surface extension of the *Mecsek*; its upfolding was essentially the result of two violent tectonical movements (after the lower *Cretaceous* and the lower *Pannonian*, resp.).

The coal deposits are considered to be autochthonous and paralic, formed in the neighbourhood of the ancient *Rhaetic* shoreline.

Attention was directed to the geology of the Mecsek by the presence of the coal deposits. The same reason is responsible for a systematical and thorough geophysical exploration in recent years. This exploration was needed to yield

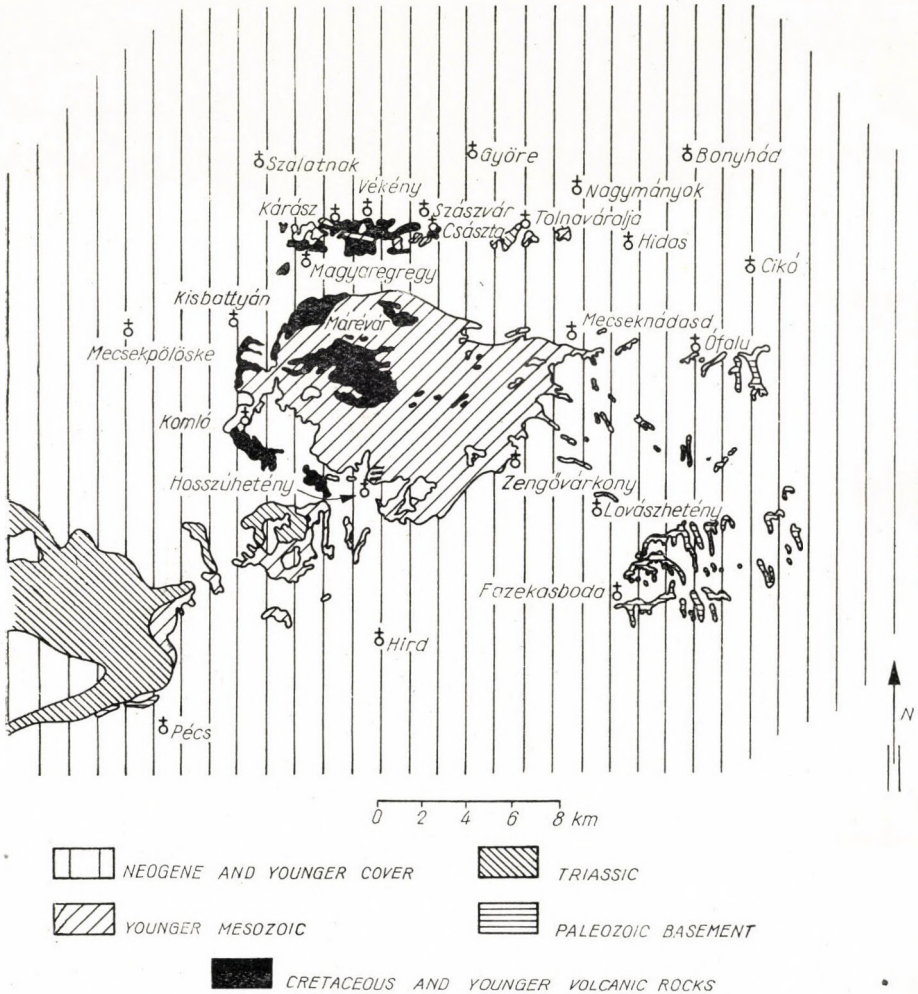


Fig. 1. Geological map of the Eastern Mecsek (geophysically contrasted formations)

reliable data for the *location* of deep drillings serving a reasonable estimation of the coal reserves.

In this paper the author wishes to give an account of the results of geophysical exploration in the Mecsek Mountains and also to sum up the scientific results which exceed the scope of prospecting in the narrow sense. The geophysical exploration encompassed the Eastern Mecsek and its marginal

regions. The following statements refer to the Eastern Mecsek, which will be termed Mecsek for short.

Structurally, the Mecsek is one of the most complicated parts of Hungary. It is not necessary even for readers not acquainted with the limitations of geophysical methods, to dwell upon the fact that the geological structure of the Mecsek does not show any physical and geometrical regularity (“*model*”), which would as a rule be required in the planning of geophysical exploration (Fig. 2).

Nevertheless, we have aimed at furnishing such quantitative and qualitative data of the Mecsek, which could be expected from up-to-date geophysics.

In the 20th century, geological exploration—on account of the immense need of the industry for raw materials—cannot dispense with geophysical methods. This does not mean that any geophysical method can be applied at any place. The success frequently depends on the nature of the territory and the method chosen. Thus, in planning the geophysical exploration of the Mecsek, a thorough analysis of the geophysical methods had to be made, with regard to their application on the one hand, and to their interpretation on the other. This analysis has furnished some conclusions which may claim to be regarded as general rules, as their validity extends beyond the special Mecsek problems.

*One of the chief aims of the present paper is to present these conclusions and basic principles.*

### **An outline of the geological exploration of the Mecsek Mountains**

The rich coal deposits of the Mecsek were under exploitation as early as the first decades of the 19th century. Accordingly, scientific interest soon turned to the Mecsek. The early geological publications concerning the Mecsek are at the same time the first sources of geological knowledge of Hungary [33].

The first detailed geological mapping of the mountains was done by the geologists J. BÖCKH and K. HOFMANN [6—7] in the years 1872—76. The mapping of the northwestern Neogene area is linked with the names of L. TELEGD-RÓTH and J. MATTYASOVSKY [33].

E. VADÁSZ has begun the reambulation of the mountains in 1910 with, among others, the purpose of unifying the previous works. The result of his work is the monography “*A Mecsek-hegység*”, published in 1935 and containing a geological colour map of 1 to 75,000 scale [33] (Fig. 1).

Within the area of the mountains, geological investigations have been and still are under way in recent years [34]. Of these, the most significant one is a reambulation to 1 : 5,000 scale made by the *Hungarian State Geological Institute*.

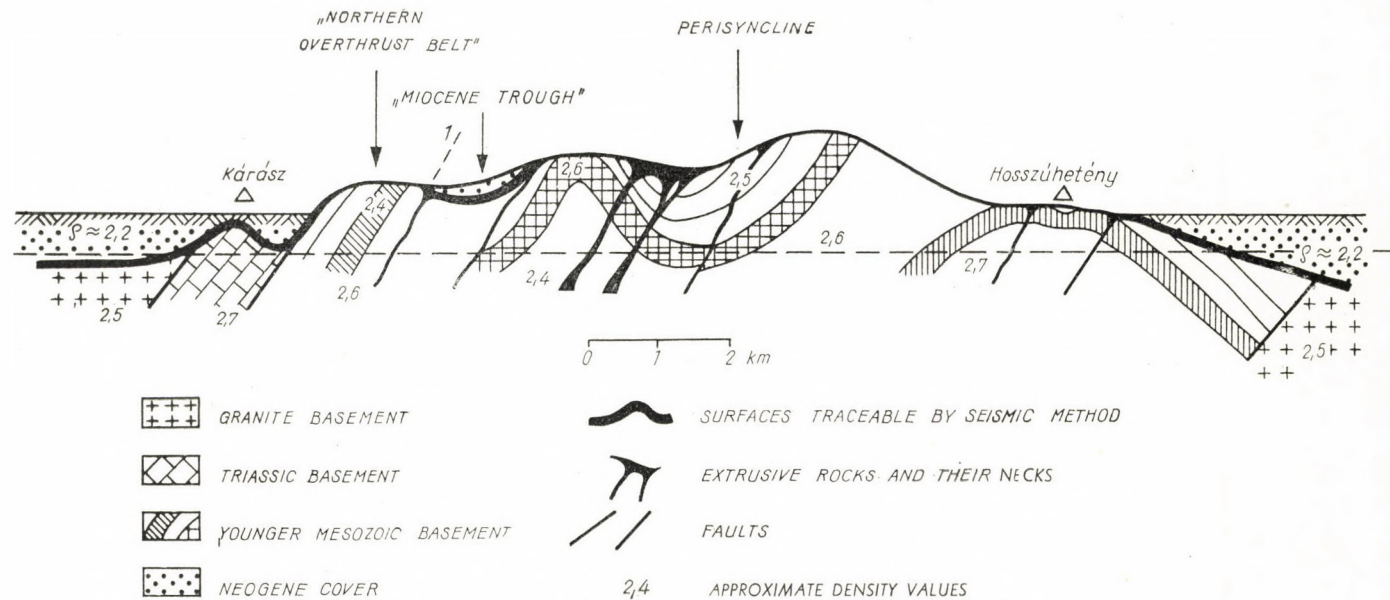


Fig. 2. A characteristic generalized cross section of the Eastern Mecsek, vertical exaggeration about twofold



## The history of the geophysical exploration of the Mecsek Mountains

About 90% of the geophysical investigations within the area had the direct or indirect purpose of locating the coal deposits. The remaining 10%, the investigations of other kinds, were directed towards the discovery of ore deposits or had no special purpose of finding raw materials. Another distinction, more fitting to our purpose, is that of 1. *local* and 2. *regional investigations* (Table 1).

### 1. *Investigations of local character*

These were a) aimed at the structural relations of some smaller geological units, or b) were of experimental character, having not the goal of prospecting for mineral deposits (Fig. 3).

a) A field-party of the *Hungarian "Roland Eötvös" State Geophysical Institute* (hereafter termed GI) made geomagnetic investigations around Magyaregregy in 1952 in order to discover the continuation of the magnetite mass in the neighbouring Márévár Valley [30]. This problem has not been solved by the investigation so far. Above the valley, on the trachydolerite sheet, L. EGYED has in that same year pointed out two magnetic maxima of small extension but of very high magnitude (20 000  $\gamma$ ). A boring penetrating in 1953 to a depth of 45 m found neither magnetite, nor meteoric iron, nor any traces of mineralization, which could have explained the "needle-like" maxima, only more or less weathered trachydolerite. It is not impossible that the two maxima came to exist by the magnetizing effect of a violent stroke of lightning in the trachydolerite. The geomagnetic investigations continued in 1953 around Zengővárkony [31] to discover the structural circumstances of the poor ore deposits in this area. This iron ore has a low susceptibility; therefore the geomagnetic survey is unsuitable to its direct detection.

A geoelectric field party of the GI carried out a resistivity survey at Komló, around Shaft No. 3, in 1955, and at the twin shaft at Zobák, in 1956 [24—25]. In the first case, the lower boundary of the andesite sheet and its center of eruption could be successfully located; the second survey discovered a rock body probably parallel to the bedding of the coal formation.

In 1955 and 1956, the GI succeeded in detecting the lateral extension and the lower boundary of the andesite cover by a geomagnetic survey [17].

b) Around Pécs (Orfű, Tettye), an experimental geoelectric (mainly inductive) survey was made in 1952, in order to improve the water supply of the town. The experiment was, in the end, unsuccessful, because the amount of the karst-water demonstrated was insignificant in comparison with the immense limestone masses containing the karst cavities [22].

A similar survey was made by the GI in 1953 for the Pécs Coke Works [11]; in 1954, around the three transformer stations at Komló [12]; then,

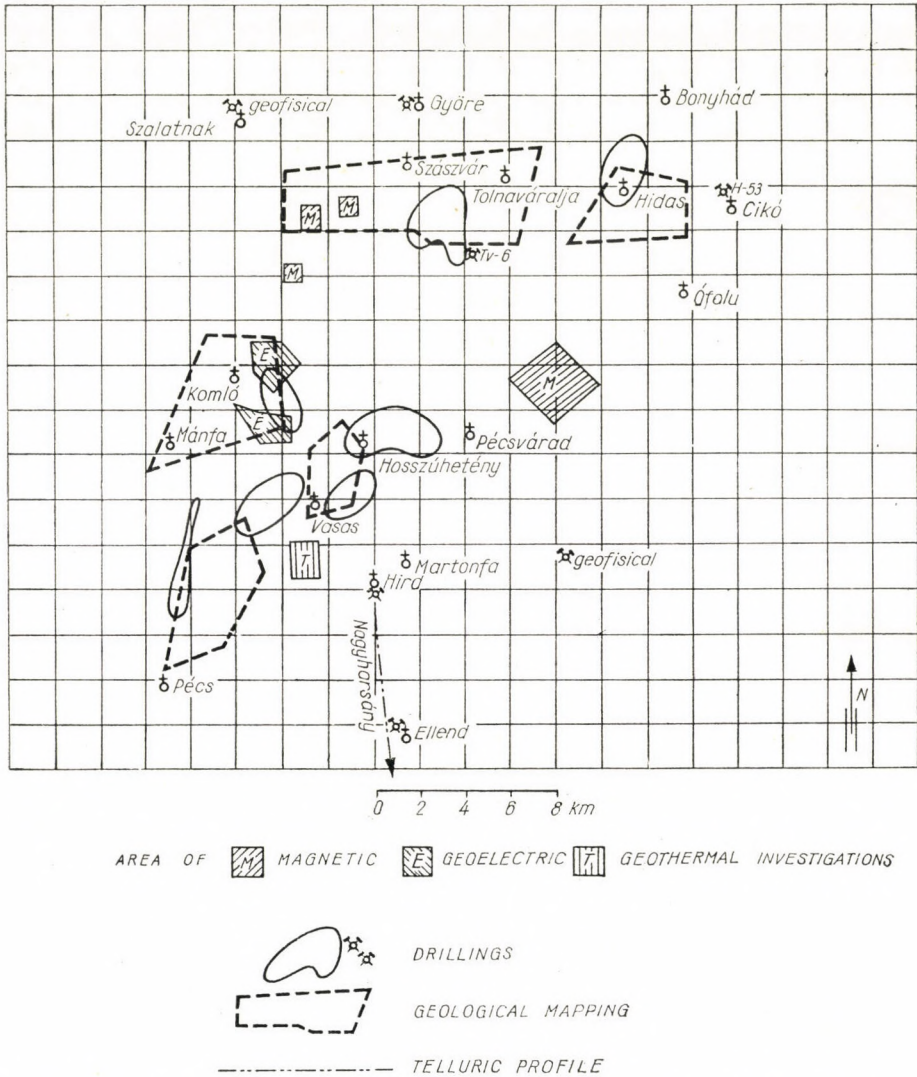


Fig. 3. The local geophysical (and other) investigations in the Eastern Mecsek

along the 120 kV power transmission line planned between Pécs and Szedres, the conductivity of the soil and the mutual potential were measured.

In 1953, on the S rim of the mountains, experimental (methodological) geothermal measurements were made by the GI, in order to decide whether the great structural lines, *i. e.* the boundaries of rock masses of different heat conductivity, could be determined by a geothermal survey. These measurements closed with promising results.

## 2. Regional investigations

The regional investigations can also be divided into two groups according to whether a) they were extended to the area of the mountains to complete the survey-network of other than coal-prospecting measurements, or b) their sole aim was to delineate the overall structure of the mountains, as the frame of coal-deposition.

a) The primary purpose of the geomagnetic measurements published in Reports Nos. 6 and 9 of the *Hungarian—American Oil Company* (MAORT) [14, 16] (Figs. 4, 7) and of the gravity measurements [15, 18] mentioned in Reports No. 7 (torsion balance) and No. 46 (Heiland gravimeter) was oil-prospecting. After having surveyed that part of the Pannonian Basin which surrounds the Mecsek, the measurements had to be extended, for the sake of completeness and better interpretability of the data, to the area of the Mecsek Mountains.

A field-party of the GI, equipped with a Nörsgaard gravimeter, made a survey in the area of Pécsvárad, Mohács, Villány and Űszög in 1952, likewise with the purpose of oil-prospecting [21].

b) In 1955 and 1956, another field-party of the GI, equipped with a Heiland gravimeter, made their investigations already with the only task of detecting the structure of the Mecsek ([26, 27], — Figs. 5, 8). Their main purpose was to facilitate the interpretation of the simultaneous seismic work.

Through these investigations the gravity "white spot" finally disappeared from the area of the perisyncline, although the isoanomal map indicates here no more than some big faults striking out to the surface and the 35 mgal maximum near the summit of the Zengő. On *basement outcrops* not even qualitative statements can be expected from gravity investigations concerning the subsurface structures.

In 1955 a regional experimental telluric survey was made between the Mecsek and Villány Mountains along a seismic profile [5]. Both surveys furnished agreeing data. The coincidence indicates that, in some places (*in basins*), the rather expensive seismic measurements can be substituted by the far cheaper telluric survey.

The regional structural investigation on the largest scale, made with up-to-date equipment and advanced views, was the *seismic (refraction)* survey ([1, 2, 3, 10, 28], Fig. 6). It began in 1953 around Pécs, initiated by M. PÁLOS. In the beginning the survey had a local character, since it would have appeared too daring to claim other purposes than an as far as possible detailed detection of the local structures of certain areas.

Later, however—to such a measure as the complicated *model* of the Mecsek began to take a more and more definite shape,—the original scope of the work became narrower in one sense, and broader in another. The direct task of the seismic survey was limited to the determination of the boundary of the Neogene against the basement. On the other hand, a broad perspective was opened by the conviction—becoming more and more firm in the course of the survey—that the seismic refraction survey is suitable for the large-scale regional detecting of the overall structure, especially of the marginal structural conditions. The corresponding investigations were made by the GI from 1953 to 1956 on the marginal area of the Mesozoic perisyncline, roughly following the shoreline of the late Neogene sea (Figs. 1, 6).

The investigations performed in an unusually rough terrain enriched our previous knowledge about the structure of the Mecsek by several new features. The structural picture, as complemented with the new elements, could be disclosed only after the large-scale investigations of the mountains has been completed, *i. e.* after the exploration has reached a certain degree (Figs. 3, 4, 5, 6), and the individual data have been subjected to the required unification. It is this unification that I will endeavour in the following.

First, however, we will examine those basic geological and physical principles, which were regarded as directives in the planning and execution of the exploration. Furthermore, I should like to explain those guiding principles which led to the results to be published hereafter.

### General geological and geophysical features of the Mecsek Mountains

The coal deposits can be classified in general (from the point of view of deposition) into two types:

1. *base* deposits,
2. *intermediate* deposits.

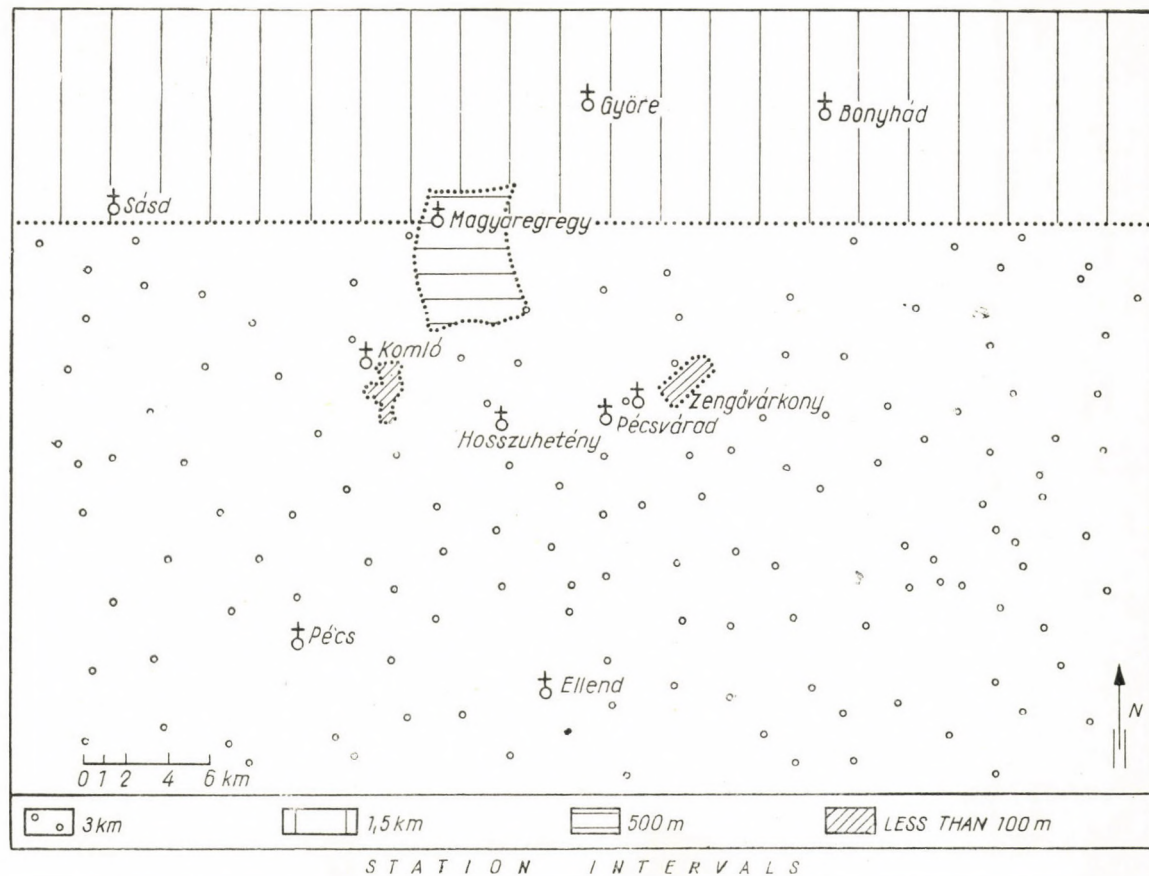


Fig. 4. The station spacing of the geomagnetic surveys in the Mecsek and surroundings

1. The base deposits are situated mostly on the bottom of a transgression sequence, somewhat over the *basement*.\*

Generally there is a great difference in physical properties (density, elasticity) between the underlying basement rock and the overlying coal formation. This difference is the greater, the longer the time elapsed between the emersion of the basement and the transgression.

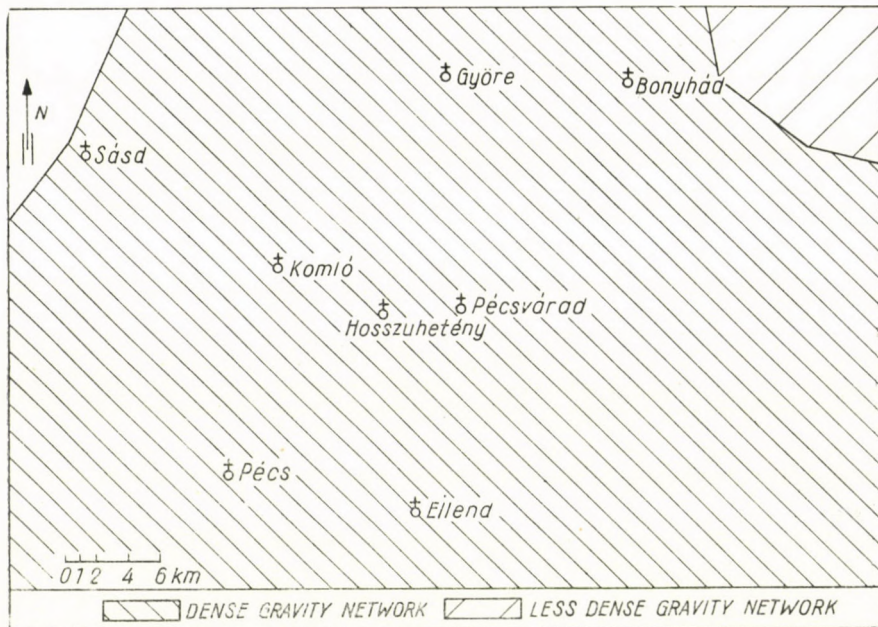


Fig. 5. Gravity station spacing in the Mecsek and surroundings

2. The intermediate coal seams are interbedded in a sequence of continuous, though oscillating sedimentation. As to the physical constants, usually there is no sharp contrast between the underlying and overlying beds.

The Lias coal deposits of the Mecsek are of the intermediate type.

The coal deposits were formed in the lower Liassic—according to the conception dominating at present—along the then existing shoreline of the Granite—Permian—Triassic basement. The whole area emerged during the Cretaceous. Some parts never have been inundated since then; but others, mostly the marginal zones, were submerged from the Helvetian stage of the Miocene to the upper Pannonian stage of the Pliocene; these areas feature, in our days, marine Neogene sediments (coarse limestone, sandstone, marl, clay)

\* The term *basement* is applied to each sequence which is overlain unconformably by sediments considerably less consolidated.

Geophysically, we may distinguish three basement surfaces in the Mecsek:

1. The Carboniferous granite-phyllite basement.
2. The top of the Granite—Permian—Triassic complex.
3. The younger Mesozoic itself is the basement of the Neogene, beginning with the Helvetian.

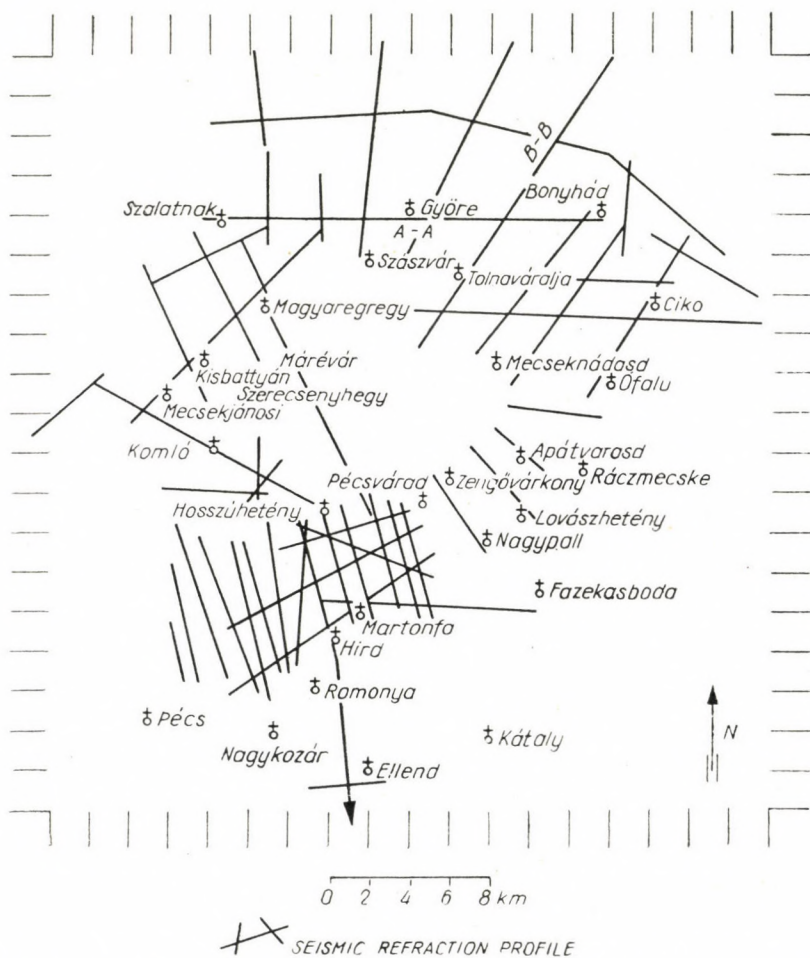


Fig. 6. Seismic refraction profiles on the marginal area of the Eastern Mecsek

The unconformity being the boundary between the basement and cover means as a rule that the rocks separated by it differ essentially in physical properties. In general, this difference is the greater the longer the gap of sedimentation lasted. A boundary surface characterized by a gap, *i. e.* by an unconformity, is most promising as to the most essential requirement of the geophysical prospecting—a sudden change in physical properties.

The unconformities in the Mecsek are not all of equal value for the geophysical measurements.

The granite basement was inundated by the Triassic sea either directly, or after the sedimentation of the Permian sandstones of terrestrial origin. Thus, not only a wide hiatus, but also a great petrographical difference exists between



Fig. 7. The anomalies of the vertical magnetic intensity in the Eastern Mecsek (after SCHEFFER)

the granite basement and its cover,—the latter being either the Permian sandstone or the lower Triassic (Seisian).

The physical properties of the granite, however—although it is the oldest rock in the area—do not widely differ from those of the Permian and Triassic rocks; in fact—as the tables show—its density and seismic velocity never reach those of some Triassic rocks (and other Mesozoic rocks younger than Triassic). Between the emergence of the granitic—Permian—Triassic basement and the beginning of the next sedimentation (*Rhaetic*) there was a hiatus lasting no longer than a few stages. The sedimentation, which had ended in the middle Triassic, recommenced in the Rhaetic. Recently, a continuous

sedimentation *i. e.* the presence of Noric and Karnic sediments has been assumed, but since this is not proved, I will not refer to it in the following.

The younger sedimentation which began in the Rhaetic (including also the coal deposits) has come to an end in the Cretaceous period. Subsequently,

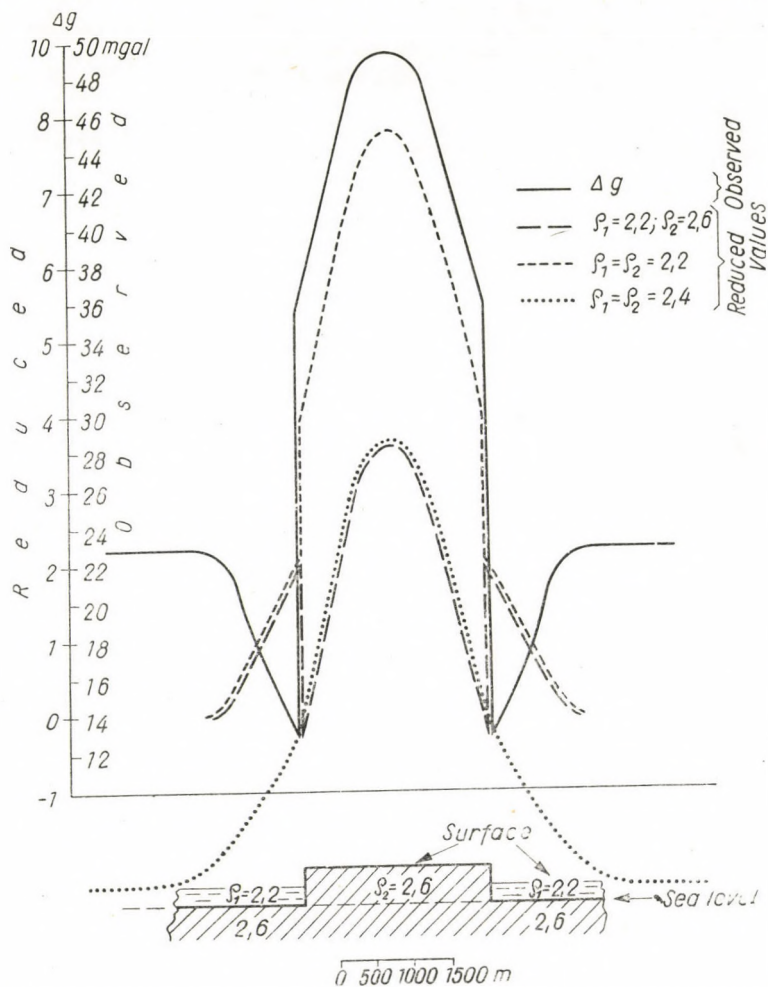


Fig. 8. Principle of the gravity investigation of a "Basement Outcrop"

the area became a theatre of violent tectonical movements (folding, faulting) and volcanic activities; it was at that time that the perisyncline, *i. e.* the Eastern Mecsek, was upfolded. All this has changed the undisturbed position of the beds, favourable for geophysical exploration, and affected the rocks in such a manner that now we must take into consideration a new factor,—uneven compression.



Table 1

The geophysical investigations made in the Eastern Mecsek and the marginal area

Year of investigation	Regional explorations								Local prospecting							
	geomagnetic measurements		gravity measurements		geoelectric (telluric) measurements		seismic measurements		geomagnetic measurements		seismic measurements		geoelectric measurements		miscellaneous and experimental measurements	
	purpose	locality	purpose	locality	purpose	locality	purpose	locality	purpose	locality	purpose	locality	purpose	locality	purpose	locality
1935 .....	Oil	Mecsek and marginal area														
1940—49 .....			Oil	Mecsek marginal area												
1952 .....			Oil	Pécs-várad, Mohács, Villány					iron ore	Magyar-egregy			water-supply	Orfű—Tettye		
1953 .....									iron ore	Zengő-várkony	Coal	S margin	water-supply, power transmission line	Pécs, Komló, Szedres	geothermal experiment	S margin
1954 .....											Coal	S margin, Komló				
1955 .....			Coal	S margin Komló	Basin exploration	between Mecsek-Villány			andesite cover	Komló area	Coal	Komló area	andesite boundary	Komló shaft 3.		
1956 .....			Coal	N margin Zengő			Coal	N. margin, E. part of the S. margin	andesite cover	Komló area			trachydolerite	Zobák twin shaft		
1959 .....	national network	Eastern Mecsek					region. expl.	S. margin "miocene trough" perisyncl.								

Coal from 1953 on, resistivity, SP, PP and  $\gamma\gamma$  logging in boreholes



**Table 2***The density of some rocks of the Eastern Mecsek*

Rock	Locality	Density in g/cm <sup>3</sup>			Investigator
		minimum value	maximum value	average value	
Neogene formation	Marginal area	1.9	2.3	2.0	Gábor Szabó with Nettleton and Egyed method
Cretaceous trachydolerite	Komló	2.29	3.2	2.69—2.79	Mihály Szalay, József Balogh
Lower Liassic sandstone cover of the coal formation	Komló	2.30	2.86	2.50—2.53	„
Lower Liassic shale	Komló	2.68	2.84	2.75—2.78	„
Lower Liassic clay marl	Hosszúhetény	2.46	2.87	2.59—2.78	„
Coal	Komló Kossuth shaft	1.2	1.8	1.30—1.50	„
Triassic limestone	Szalatnak			2.78	Gyula Kilczér
Granite	Fazekasboda			2.47	„

The situation is fully different above the last hiatus, under the Neogene formations.

The Neogene cover was formed long after the strong Cretaceous movements mentioned have ceased and when the emerged perisyncline has formed an island in the Miocene sea.

Between the Neogene cover and its basement (whatever be it) there exists a wide hiatus (at least upper Cretaceous, Eocene, lower Miocene). Therefore, the physical constants of the Neogene cover sharply differ from those of its basement. Besides, the formations of the Neogene cover are much less disturbed than any older formation, and—at least geophysically—they are, in a first approximation, generally homogeneous and isotropic.

Now, if—considering the above said—we evaluate the unconformity horizons of the Mecsek, the following can be stated:

1. The Granite—Permian, the Permian—Triassic, the Granite—Triassic boundaries represent sharp geological differences.

2. The Triassic—younger Mesozoic (including Rhaetic) boundary does not represent, in principle, a sharp geological difference, especially if the Noric and Karnic should be present.

Table 3

*The magnetic susceptibility of some rocks of the Eastern Mecsek*

Rock	Locality	Volume	Momentum	Mag-	Investigator
		cm <sup>3</sup>	m	netic susceptibility K 10 <sup>3</sup>	
		of the investigated sample			
Light grey, fresh andesite tuff with amphibole needles	Komló	2,560	0.001537	2,219	Károly Molnár
Compact, fresh biotite-amphibole andesite	..	1,625	0.001398	3,495	..
Compact, foliated biotite-amphibole andesite	..	4,400	0.001365	2,236	..
Compact, typical biotite-amphibole andesite	..	3,695	0.001442	4,738	..
Compact, typical biotite-amphibole andesite	..	1,550	0.006553	2,694	..
Light-coloured andesite tuff with amphibole needles	..	980	0.001633	4,098	..
Andesite tuff with amphibole needles and some pumice	..	5,255	0.004160	764	..
Light-coloured amphibole andesite with pumice	..	1,585	0.003362	4,389	..
Reddish, weathered andesite with some amphibole needles and pumice	..	2,050	0.001567	0000	..

3. The younger Mesozoic—Neogene boundary represents a sharp geological difference.

4. The boundary between the Neogene and its basement, whatever that be, represents similarly a sharp geological difference.

Let us examine now, with the eye of the geophysicist, on the basis of laboratory and field measurements, how these geological differences will be reflected in physical properties (Tables 3, 4).

1. The discontinuity at the granite to Permian boundary is not sharp; the Permian—Triassic discontinuity is sharp, but the parameters do not increase downwards (stratigraphically); the case is the same with the Granite—Triassic discontinuity.

2. The Middle Triassic—younger Mesozoic discontinuity is sharp, because the Middle Triassic is closed by the compact limestone of the Anisic stage or by the dark grey foliated marl of the Ladinic stage (the so-called Wengen

Table 4

*The seismic velocity of some rocks and formations of the Eastern Mecsek*

Group, system and stage		Rock	Seismic velocity m/s	Seismic velocity of formation m/s	Investigato-
Sedimentary rocks					
pleistocene		sand, loess	700—2,800		Hungarian State "Roland Eötvös" Geophysical Institute Seismic Party No 1
Neogene	Pannonian	clay, marl, sandstone	1,800—2,800	700—2,800	
	Tortonian Helvetian				
Mesozoic	middle Liassic	calcareous marl	2,900—4,900	2,800—4,900	
	lower Liassic	marl and sand- stone cover of the coal for- mation	3,400—4,600		
3,100—3,900 2,800—3,100					
Younger	Rhaetic	sandstone	3,400—3,800		
Triassic	Ladinian Anisian	slate limestone	5,200—5,800	5,200—5,800	
	Permian	red sandstone	4,400—4,500	4,400—4,500	
Paleozoic	Carboniferous?	shale	5,800	5,800	

## Igneous rocks

	Miocene	andesite	4,300—4,400	4,000—4,600	Hungarian State "Roland Eötvös" Geophysical Institute Seismic Party No 1
	lower Cretaceous	trachydolerite	4,000—4,400		
	pre-Carboniferous?	granite	4,400—4,600		

shale); on the other hand, the Rhaetic and the lower Jurassic (so-called Gresten) coal formations are characterized by clastic facies.

3. The younger Mesozoic—Neogene discontinuity is similarly sharp,—sharper than any of the above-mentioned.

4. The discontinuity between the Neogene and any older basement is throughout sharp.

After the Helvetian, and chiefly after the lower Pannonian, violent tectonic movements have occurred again. It was then that the northern overthrust belt was thrust upon the Neogene sediments. The Neogene sedimentary rocks



Fig. 9. BOUGUER-anomaly map of the Eastern Mecsek.

have, however, with the exception of the named belt and of the southern thrust zone, kept their comparatively undisturbed position. They cover in this manner, in a few hundred metres thickness, a basement which—though petrographically as well as physically rather manifold—is throughout sharply contrasting the Neogene (see Tables 3, 4).

From the above-said it clearly follows that:

1. The granite basement can never be detected by any geophysical method *beside* or *under* some of the young Mesozoic, or extrusive rocks, Permian sandstones and *under* Triassic limestones.

2. The younger Mesozoic rocks (including the coal formations) can be distinguished between themselves neither in the depth, nor on the surface; where they contact the granite or the Permian sandstone, even the distinguishing of the complex as a whole is uncertain.

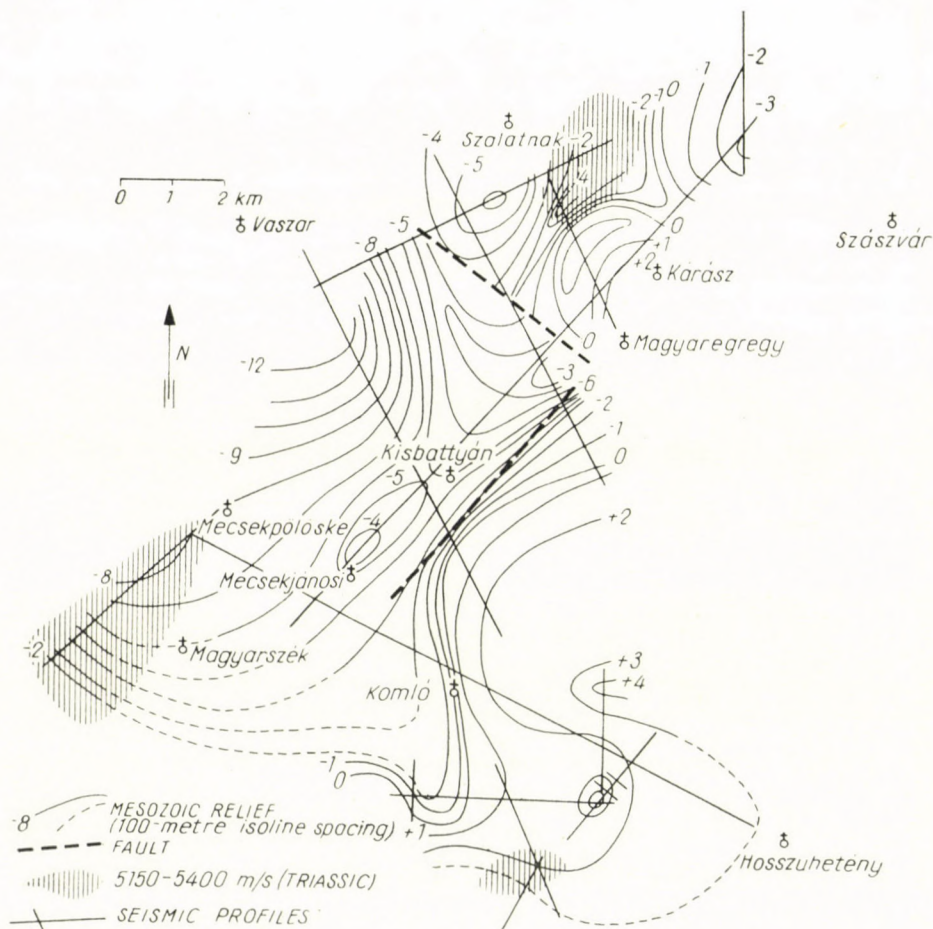


Fig. 10. Contour map of the buried Mesozoic relief in the Komló area (after ÁDÁM—KILCZER)

3. The middle Triassic limestone can be detected, according to our experiences, *beside or under any other formation*; with the exception of the Carboniferous (?) (shale) formation found recently, and only in a single place (Györe, drilling No. 1).

4. *Under the Neogene, every other formation can be traced*,—within the above-mentioned limits—*i. e.* the Neogene can be distinguished from any other formation.

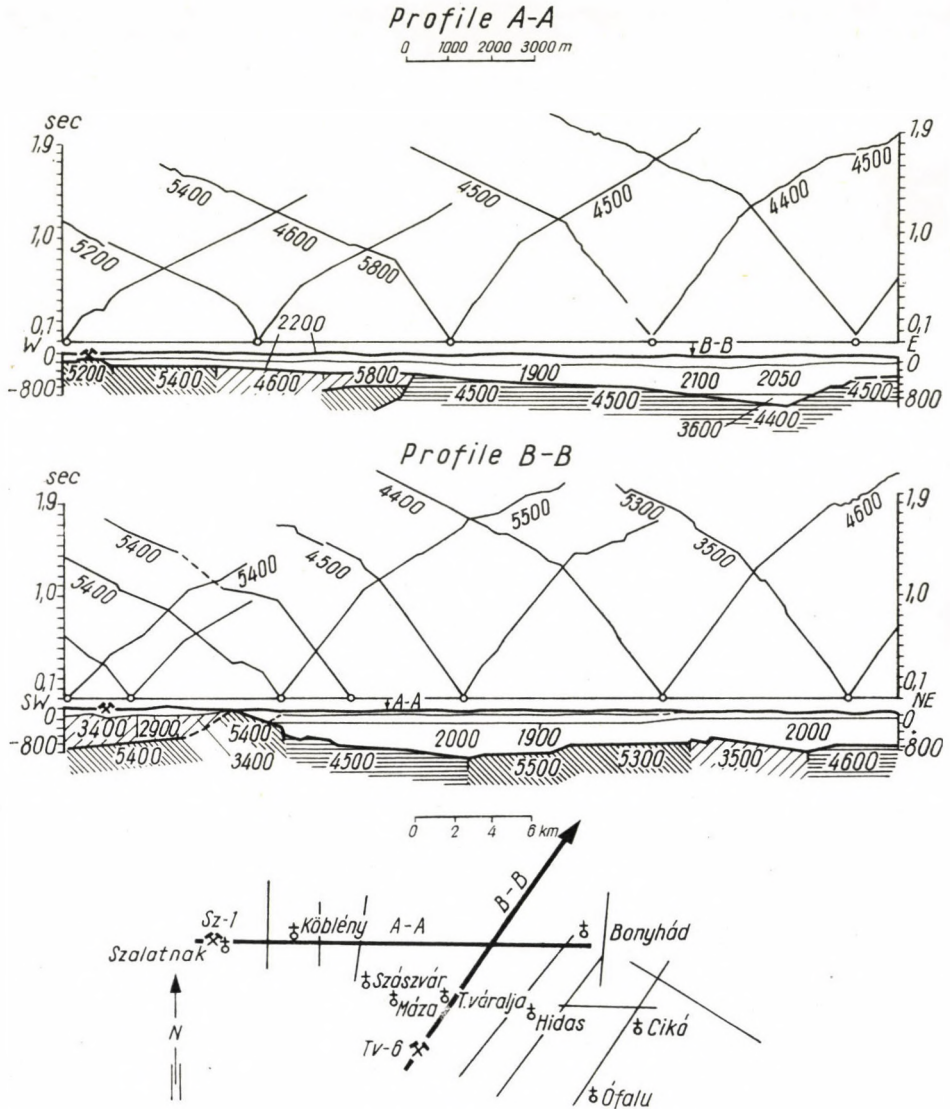


Fig. 11. Seismic refraction travel-time curves interpreted on the northern margin of the Eastern Mecsek (numbers are true velocities in m/s)

Consequently, the only reasonable goal of the geophysical exploration in the Mecsek Mountains is the determination of the basement depth beneath the Neogene, or in other terms, of the thickness of the Neogene. This can be accomplished, qualitatively and quantitatively, by seismic—and eventually perhaps by geoelectric—methods (Figs. 8, 9, 12).



The exploration, of course, may throw a light upon other details, too, thereby complementing perhaps the whole structural picture, but this cannot and may not be expected in advance.

As to the position of the coal seams proper, no geophysical surface method can furnish any information. Still, the application of geophysical exploration

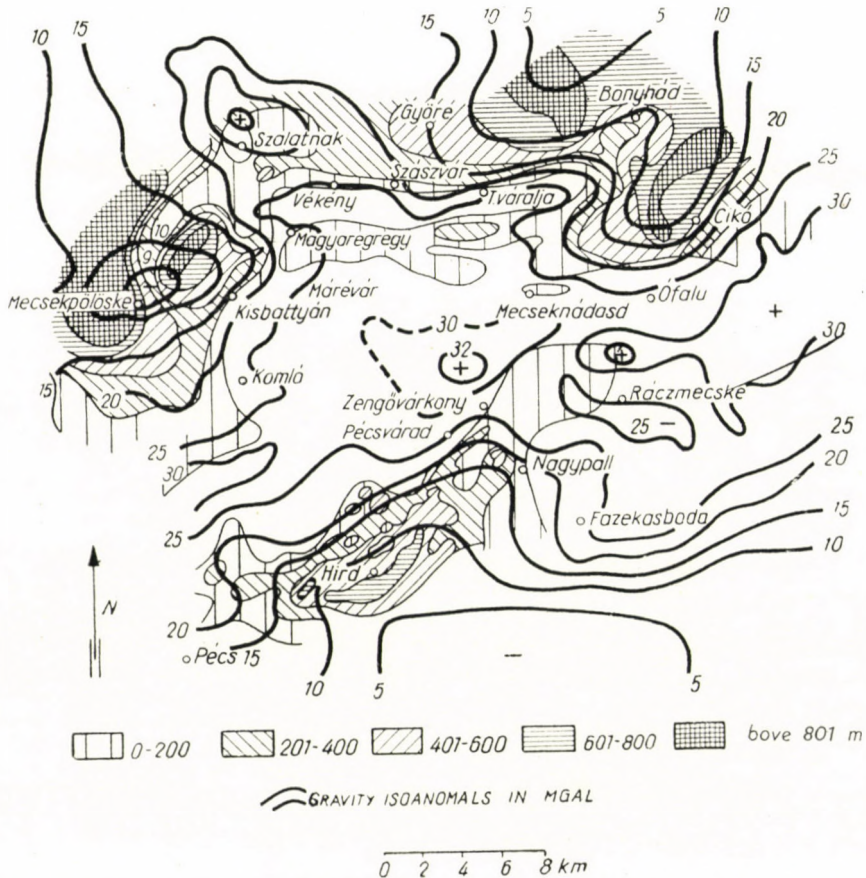


Fig. 12. Contour map of the buried basement relief on the margins of the Eastern Mecsek Datum level +100 m

is rendered necessary and economical, by the very fact that the Neogene is that formation covering the coal deposits which is of the most varying thickness. Deep drillings can by no means be spared, but we obtain a more solid base for the planning of their depth and for their location, if we have a preliminary knowledge of the thickness of the Neogene. Moreover, the general structural knowledge is improved, and a more exact basis for the theoretical elements of coal-prospecting is given by geophysical exploration.

As it has been stated already, the task which can be set as an aim for the geophysical prospecting in the Mecsek coal mine district is the tracing of the boundary of the Neogene against its basement (whatever that be). This problem arises where rocks older than Neogene are covered by Neogene sediments, like on the peripheral parts of the mountains and in the northern overthrust belt, in the so-called "*Miocene trough*".

In choosing the site of geophysical prospecting, the structure, the stratigraphical and petrographical build of the area were evidently the main factors.

The maps show that the seismic profiles surround the Mesozoic perisyncline like it was embraced, in its time, by the Neogene sea. The gravitational and geomagnetic measurements, by their nature, were arranged network-like.

The area covered by the seismic lines can be divided into three major parts:

1. *The southern margin,*
2. *the western margin of the perisyncline,* and
3. *the surroundings of the northern overthrust belt* (the northern foreland and the so-called "*Miocene trough*").

#### **The basic principles of the geomagnetic prospecting in the Mecsek**

We cannot speak of any geomagnetic survey in the Mecsek in the proper sense of the word—in the sense we speak of gravity and seismic prospecting. The already mentioned vertical intensity map at hand (Fig. 7) was prepared during an earlier oil-prospecting campaign of the MAORT, with the purpose to obtain the relative values of the local anomalies for the interpretation of investigations in other areas, *i. e.* to be able to make a comparison between the anomalies in the basin and those on basement outcrops; further between those over sedimentary and igneous rocks, respectively. The values indicated on the map are referred to the Zalaegerszeg base point. A country-wide synthesis of the results of different geomagnetic measurements as well as the survey of a network of 500 m station spacing are, at the closure of this manuscript, under course. A more accurate geomagnetic pattern of the Mecsek, fitting into the country-wide network, can be established only after completion of these measurements.

All this, however, may not hinder our endeavour to give a rough idea about the basic principles, not so much of the application, as of the interpretation of geomagnetic survey results.

In the Mecsek, at Zengővárkony, a poor limonitic iron-ore deposit was formed at the contact of a middle Jurassic limestone and a trachydolerite having pierced it. Although our informations about the susceptibility of the Mecsek rocks are very scarce so far, yet it seems to be evident from the investigations that trachydolerite has a higher susceptibility than the iron ore at

Zengővárkony. Consequently, if we do wish to make a geomagnetic prospecting in this area, it cannot be anything else than a structural investigation—the tracing of the contact surface.

Trachydolerite is abundant in augite, olivine and other dark ingredients. On this account, its susceptibility is rather high. The same can be said of phonolite and of the younger andesite at Komló (Table 3).

It is evident that, on the vertical intensity map, these high-susceptibility rocks are sharply separated from the sedimentary rocks (Fig. 7).

The susceptibility of the trachydolerite is, however, not so high as to warrant the 20,000 gamma relative maximum at Magyaregregy, observed by L. Egyed in 1952. It was obvious to seek for a connection between the magnetite rock mass of unknown origin found in the neighbouring Márévár valley and this anomaly of extraordinary high value.

A detailed geomagnetic survey [30] and a subsequent drilling were made to clear up this problem, but without any success as yet.

The drilling itself penetrated a weathered, somewhat pyritic, then gradually fresher trachydolerite down to 45 m depth, where it stopped, since it ought to have met the disturbing mass actually at 5 m. No explanation for the high maximum is given by the trachydolerite cores. It is possible that it was effected by a strong lightning stroke. The electric current of the lightning, frequently of the order of 20,000—30,000 *A*, creates a strong magnetic field, magnetizing the surrounding rocks. This can be observed especially on basic rocks of summits and hilltops exposed to lightning strokes; sometimes even anomalous magnetic polarization is produced.

Now let us have a glance at the susceptibility of granite and extrusive rocks. It is known, that the plutonic facies are more susceptible than extrusive, porphyric ones. Also it is known, that no strict direct proportionality exists between magnetic susceptibility and basicity. Granite is much more acidic than trachydolerite, therefore the latter is more susceptible on account of its mineral composition. It is quite intelligible that, while the area of the trachydolerite-phonolite sheet is indicated by a local  $\Delta Z$  maximum of 400 gammas, the local anomalies in the granite area—even on the actual exposure—decrease to an order of 10 gammas, *i. e.* lower than in the sedimentary area.

SE of Püspöklak we observe a value of 200 gamma again. Here—though within the granite area—the granite does not crop out to the surface any more. From this we may conclude a local accumulation of some magnetic material, or simply the fact that the elastic sediments of the Neogene cover have a higher susceptibility than granite; in such areas the value of the anomalies is, in a first approximation, proportional to the thickness of the Neogene cover.

A few more words ought to be said about the pattern of the anomalies. The overall anomaly map (Fig. 7) shows an orientation in a NW—SE direction

and another one perpendicular to the former. The NE—SW trend has a well-known structural significance in the Hungarian Basin, but no unambiguous explanation can be given, on the basis of our present knowledge, for the NW—SE trend in the Mecsek.

The highest vertical intensity value (400 gammas) occurs on the eastern rim of the volcanic cover of the perisyncline. This maximum is bordered on the NW by a belt of minima. This suggests to the observer that the whole volcanic mass is a magnetic body plunging obliquely into the deep towards NW, having its southern pole near the surface. Had not this measurement been executed with such a wide station spacing (Fig. 4), we might conclude with more right upon the position of volcanic dykes and, in general, of the main mass of extruded lava stuck in the deep. A survey of denser mesh will enable us also to establish a connexion between the thickness of the lava cover and the anomalies.

#### The basic principles of the gravity exploration in the Mecsek

It is a geophysical fact that the anomalies of the gravity field of the Earth, as measured on the surface, are determined by the density distribution of the rocks composing the crust. On the other hand, it is a geological fact that the density distribution is more uniform in the depth and less uniform nearer the surface. A gravity anomaly can be observed along an equipotential surface, if two adjoining bodies have different densities, and if this difference exceeds the sensitivity level of the gravimeter.

In the big basins, in the usual areas of oil-prospecting, *i. e.* of the application of the gravity method in our country, at the height of the sea level, to which we reduce our measurements, the lateral variation of density is negligible. It can be assumed, namely, that the dip of the strata near the surface is very gentle, and that the density difference in the equipotential surface never reaches the value of about  $0.15 \text{ g/cm}^3$  required in this depth as a condition of observability.

If the Bouguer reduction is carried out either with average densities obtained by the Nettleton procedure, or with a value changing from place to place according to the actual density conditions, the gravity anomalies will reflect the effects of buried structures under the datum level; a local maximum of the anomaly will refer to a rock of a density higher than the surroundings which generally corresponds to an elevated position. This elevated rock can be an uplifted basement block, but it can also be a fold consisting of rocks of a density higher than the overlying rocks.

It would be a rather limited view to think that the gravitational method can be applied in sedimentary basins only. The Mecsek itself proves the opposite (Fig. 8). If we try to find a geological term for the Mecsek, as opposing it

to the former one (*sedimentary basin*), we may apply the term "*basement outcrop*".

The two categories differ, geologically, in a significant measure. Evidently they must differ geophysically, too.

We must examine in the case of basement outcrops in general and in the case of the Mecsek in particular

1. whether it is necessary, and

2. whether it is possible to detect subsurface structural features by geophysical (gravity) methods.

1. It is not questionable that one can imagine—and especially for the Mecsek—such reasons which require the investigation of the deeper structures in the basement outcrop area. Not to mention others, such a reason is *e. g.* the requirement to determine the depth of the granite or Triassic (limestone) basement under the perisyncline, as the absolute depth limit of coal mining.

2. As to the possibility of geophysical detection of the deep structure of such areas, this needs a detailed discussion.

Let us consider Fig. 8 and try to apply the Bouguer reduction in the same way as we did in the sedimentary basin. It is obvious that—if we apply the principle of reduction mechanically—we ought to make our computation with varying average densities, according to the rocks underlying the stations of the individual observed values.

Let us suppose that we carried out the Bouguer reduction with these local density values. Since on the figure we have taken up a very special case of the bottom of the Neogene just coinciding with the sea level, then, if the density determination was correct, the  $\Delta g$  maximum constructed out of the observed values, indicating the basement outcrop, will become disturbed by the reduction, eventually to the degree of contradicting the geological relations. Thus the only information, namely the outcrop boundary that we may and do expect from the gravity investigations in the basement-outcrop area, becomes uncertain.

Consequently, in areas like this, the Bouguer anomaly has a meaning which gives no answer to our problems. Nevertheless, the Bouguer reduction cannot be omitted because a connection with the surrounding gravity network is still necessary.

A suitable solution is to carry out the Bouguer reduction, using the average density value of the surrounding sedimentary basin (see figure), instead of varying, locally valid density values. In this case we obtain a Bouguer anomaly fitting into the surrounding gravity network, but—because of the reduction with a density value smaller than the actual one—the anomaly will be exaggerated above the outcrop: indicating, however, in this way exactly that which—according to our above definition—can be expected from the gravity investigations in an area of a basement outcrop: the contours of the exposure.

*i. e.* the surface contact of the basement with the covering formations pinching out on its flanks (Fig. 9).

In the Mecsek the Bouguer reduction could in principle be very useful in giving information about the deep structural conditions. We have mentioned that the knowledge of the depth of the granite or Triassic basement, or at least a qualitative knowledge of its changes, would be extremely useful. But the basement is too deeply seated, under or beside rocks too little different in density (Table 3), to dominate in the gravity pattern. On the gravity map, nothing suggestive of the basement depth—or of the deep structure in general—can be seen; the gravity picture presents an integrated effect of the chaotic subsurface geology.

From this point of view, no difference exists between the application of varying and constant density values. This cannot be helped, as a matter of course, by the computation of higher derivatives, either.

As a consequence, the task of gravity investigations had to be narrowed down in the Mecsek case to a qualitative tracing of the basin rim and of the deepening of the basin.

### The basic principles of seismic prospecting in the Mecsek

Among others, it is clear from the preceding chapter that the gravity isoanomal maps (Bouguer anomaly maps) merely reflect the density distribution pattern, which can be correlated with the geological structure only under very favourable circumstances and even then only qualitatively.

Now we are going to discuss a geophysical method, which endeavours a formal, geometrical detection of the structure of the geological unit investigated. This is the *seismic* method.

The different procedures of the seismic method (reflexion, refraction) determine the geometrical data of the geological formations; the spatial position of the formation boundaries.

In addition, by the refraction procedure we can determine the velocity of the compressional waves (hereafter, for short: seismic velocity) propagating in the different formations (hereafter, for short, without regard to the sedimentary or other origin of the formation: layers). Further, from the seismic velocities, with some restrictions, we can conclude upon the material constitution of the layers.

Consequently, the seismic procedures can be applied to the prospecting of such mineral deposits, as are directly connected with a geological formation of determinable depth, shape and substance or have a geometrical connection with the same.

We must distinguish between "*basin sediments*" and areas of "*basement outcrops*".

In the basin, the seismic velocity of the individual layers remains constant for kilometres, because the conditions of sedimentation of the basin were almost homogeneous. The size—at least the vertical size—of the small local irregularities (*e. g.* lenses) falls into the order of the seismic wave-length, and is consequently negligible. Thus, if we neglect the small local irregularities, the near-horizontal layers of the basin can—in a first approximation—be considered as homogeneous and isotropic.

Geophysically, we can consider the basement under the basin sediments just as homogeneous and isotropic, and the more so, the deeper it lies. This statement refers, in the first place, to one and the same stratigraphical unit (*e. g.* Triassic); but, on account of the uniformizing effect of the high pressure of the overburden there is, in practice, no substantial difference in certain physical properties between two basement members highly differing stratigraphically as well as petrographically.

In the basin, the seismic velocity is a characteristic, at least in a basement to cover relation. The horizontal or near-horizontal boundaries of some—seismically homogeneous—layers of the cover do not necessarily coincide with stratigraphical or petrographical boundaries; this, however, can be duly explained by the special construction of the Hungarian Basin, by the *nature of sedimentation* of the basin sediments [29]. Even here, these boundaries lie near each other; according to the experiences they are parallel, and the velocity range of the complex usually sharply differs from that of the basement. For example, the seismic velocity of the Neogene sediments of the Hungarian Basin varies between 2,000 m/sec and 4,000 m/sec; in general, it increases with age and depth (what, in the given area, means the same). The velocity of the basement members, on the other hand, is usually higher than 5,000 m/sec (under a certain depth).

Let us examine how the case stands in the areas of the basement outcrops. These areas are such parts of the country where, even quite recently, there occurred some relatively intense geological activity. The boundary line of the basin and of the basement represents, sometimes, a structural line or an ancient shoreline. Since the sedimentation of the basins is most capricious in the littoral regions, it is evident that the littoral facies are more variegated than the open-sea ones. This is in our country valid in the first line for rocks older than Sarmatian, because the sea became, after the Sarmatian stage, so much dismembered that even the basin itself was full of shorelines.

Nevertheless, in places where the basement is shallow and is composed of 2—3—geologically and physically well-defined—kinds of rock, the seismic velocity can be almost unambiguously characteristic of the material.

In the Mecsek, the general pattern described here can be complemented to the effect that the area, during its geological history, was the stage of very violent tectonical and volcanic activity on at least two occasions. The younger of these movements has produced overthrusts; the layers were displaced from their original horizontal or near-horizontal position, became anisotropic, were folded and in places were thrust over younger layers. This itself suggests that, in numerous places in the sequence, the values of physical constants will not vary monotonously with depth, though this is a requirement with most of the geophysical methods. The disturbed rocks traversed by volcanic dikes, and lying under a volcanic cover, evidently do not favour geophysical exploration, the application of which requires a simplification of the actual situation.

Our task will evidently be facilitated, if we reduce it so as to be able to apply the more usual and in our country almost routine basin exploration.

If we want to find areas in the Mecsek, to which we can apply this simple procedure, we must eliminate beforehand from our considerations all those parts where the folded, broken and imbricated basement actually reaches the surface. Thus only the inner and marginal basins of the Mecsek remain, differing from the big basins only in size.

It was by these considerations that we reduced the seismic exploration of the Mecsek to the perisyncline margins, to the foreland and to the so-called "Miocene trough" (Fig. 6).

The size difference mentioned is an important factor to consider when choosing the seismic procedure to be applied. This circumstance, in itself, makes the refraction procedure preferable to the reflexion one, since, at the time of the exploration discussed, we had yet no high-frequency seismic equipment, nearly indispensable for shallow reflexion exploration. Besides, neither the basin sediments, nor the marginal parts of the basins are favourable to the reflexion procedure,\* which is too sensitive of any kind of irregular bedding, lenticular facies, loose, energy-absorbing near-surface beds, etc.

Thus we chose, for the seismic exploration, the refraction procedure and only a few experiments were made with the reflexion method, especially in the open basin, farther off the margins (southern foreland).

Previously we have mentioned that the seismic velocity can, in certain cases, be characteristic of the material. The question arises, therefore, whether we can expect, in the Mecsek, a distinction of the individual rocks by their seismic velocities. The data derived from numerous drilling cores of numerous borings were compared with the results of our investigations, and we are obliged to give a negative answer to the question, as raised in this form. As it is shown also by the data of Table 4, the seismic velocity of the individual rocks varies

\* The proper application areas for reflexion seismics are the large extended table-lands, more or less free of disturbances.



within a wide range (from place to place). On the other hand, the velocity of several different rocks may be the same. A simple geological explanation for this phenomenon is that the mountains were affected by violent and diverse tectonical processes.

A physical explanation is also easily found.

Seismic refraction measurements determine nothing else than velocity interfaces. These do not always represent stratigraphic (petrographic) breaks, and *vice versa*, stratigraphic (petrographic) breaks are not necessarily velocity interfaces as well.

In case of a sequence formed by continuous sedimentation, the cause for this is partly that the stratigraphical horizon can be established only with some uncertainty; and partly, that the change in the physical *properties* defining the velocity does not always coincide with the change of the paleontological character deciding the delimitation of the horizon.

The concept of velocity interface is consequently not identical with the concept of stratigraphic, petrographic break. The probability of their coincidence is the greater, the greater the stratigraphic, petrographic difference is between the rock masses in question.

In the Mecsek, the individual rocks cannot be recognized on the basis of their seismic velocities, but larger units will be characterized by more or less sharp velocity boundaries.

The velocity range of the Loess to Miocene cover complex lies between 700 and 2,800 m/sec. The velocity range of the younger Mesozoic, including the Rhaetic, extends from 2,800 to 4,900 m/sec. According to our present experience, a rock of velocity higher than 5,000 m/sec can be only Triassic limestone or Carboniferous shale.

Between 4,000 and 5,000 m/sec lie the igneous and metamorphic rocks, including the basement granite. With the exception of the Permian sandstone (of subordinate significance in the Eastern Mecsek) this is the only velocity range which overlaps that of the sedimentary (younger Mesozoic) rocks. This causes generally no uncertainty, if the proper geological considerations are applied.

Finally, the purpose of seismic exploration may be formulated just like that of exploration in general: to trace the boundary between the Neogene cover and the underlying basement, whatever it be. This problem can be solved in almost every case.

It must be noted that the velocity contrast between basement and cover is sharpest if the cover is directly underlain by Triassic limestone. The petrographical identification is certain only in this case, since—according to our present knowledge—with the exception of the recently discovered, but still disputed Carboniferous shale, this is the only rock in the Mecsek the seismic velocity of which exceeds that of all other rocks.

### The results of geophysical exploration according to areal units

The exploration area of the Mecsek can, as mentioned, be divided into three units. These are:

1. *The southern margin,*
2. *the western marginal region of the perisyncline,*
3. *the region of the northern overthrust belt.*

This is the natural geographical and geological division of the Eastern Mecsek. The chronological order of the refraction measurements of the GI also reflects this division.

In the picture given by the exploration, the results of seismic refraction surveys are, of course, predominant.

#### 1. *The southern margin*

The southern belt follows the axis Pécs—Hird—Pécsvárad—Apátvarasd—Ófalu (Fig. 1). On its western part, the entire sequence of layers from the middle Triassic to the middle Liassic—steeply dipping towards S—crops out. On its eastern part, the middle and lower Liassic form a gentle anticline, plunging towards the SE under Neogene beds and *thrust* under the Neogene beds, over the granite exposed at Fazekasboda.

An ancient drilling has found phyllite in 320 m depth on the southern margin near Pécs—Meszestelep. Since the granite, with the phyllite as a metamorphic mantle, has been known for long in Pécs in the form of a “Schuppe”, and furthermore, since it is cropping out on the surface in the same strike also at Lovászhetény, it seemed reasonable to assume that the submerged granite is, along the line Meszestelep—Lovászhetény—Rácmecske, in a structural position to form, as it were, a dam against the younger Mesozoic, dipping steeply towards the SE, including the coal deposits. This means, at the same time, that this granite upswell formed the absolute SE limit of Liassic coal exploitation.

Let us see what the geophysical picture suggests in this respect.

The area in question lies, on the gravity map (Fig. 9), in the 15 to 25 mgals range. The arrangement of isogams does not directly indicate a deep fault in this area, but it does not contradict it either. The zones of big faults are indicated in general by the gravity isoanomalies condensing parallel with the fault. The lack of a condensation of isogam lines—as *e. g.* in the present case—speaks not necessarily against a deep fault, since the density of the younger rocks leaning against the fault plane is very close to that of the granite.

The same applies to the geomagnetic pattern (Fig. 7). In the area under discussion, the big maxima, irregular and sudden changes to be seen in the area

of the volcanic cover are no more present. The magnetic anomaly varies between 50 and 70 gammas. If a diagram of frequency of anomaly values were prepared for the  $\Delta Z$  anomalies of the Mecsek, one could see that the latter values are the most frequent ones. The  $\Delta Z$  isolines, therefore, have no particular quantitative or qualitative significance in this zone. They follow, roughly, the SW—NE strike of the southern margin.

Consequently, the same can be said about the geomagnetic pattern as could be about the gravitational one: it neither confirms, nor contradicts the assumption of a fault at the granite margin.

When the seismic (refraction) method came into the foreground in the course of further investigations, obviously the hypothesis mentioned had to be chosen as a working hypothesis, exactly because the other geophysical methods failed in settling the question.

This working hypothesis has not proved correct, but it yielded very useful teachings. We had to recognize—on the basis of a drilling (V—2) made during the survey—that the velocities of the granite and of the overlying marl covering the coal sequence are sometimes nearly the same (4,600—4,700 m/sec).

The identical velocity of two so extended and important rocks directed our attention already here to the necessity of being very careful when endeavouring to assign seismic velocities in the usual way to rock types in the Mecsek.

There is a single interface which appears definitely and without any doubt everywhere in the results of the seismic survey. This is the Basement-Neogene boundary (Fig. 12).

We would be too cautious, however, if we did not appraise such information as exceeded our modestly set goal, but which was nonetheless evident.

Such is *e. g.* the role of the Triassic limestone. It was mentioned already that the seismic velocity of the middle Triassic limestone exceeds that of all the other rocks of the Mecsek, with a single exception (Carboniferous shale). Thus it was possible to detect the Middle Triassic limestone under younger Mesozoic members in a section of the southern marginal zone between Martonfa and Nagykozár.

The presence of Triassic limestone here is evidence in itself that the granitic basement, in this part of the southern marginal zone, lies deeper than was assumed according to the drilling at *Meszestelep*. Consequently, the sedimentation in the Mecsek eventually extended farther south than the present Mesozoic margin of the mountains. On account of the overlapping velocities, however, this point cannot be decided quite exactly by geophysical methods. It cannot be told—and therefore it is indicated on Fig. 15 with a question mark—whether the rocks in the range between 4,000 m/sec and 5,000 m/sec represent, to the most part, the southern granitic or in general—Palaeozoic

margin of the Mecsek, or younger Mesozoic members of the same velocity, or an alternation of both due to overthrusting.\*

The conditions on the eastern part of the southern margin are simpler than on the western part. Here the SE flank of the gentle middle Liassic anticline, already mentioned, plunges under Neogene sediments, a little north of the Pécs—Budapest highway, and—disregarding one or two Schuppe-like exposures—continues up to the granitic margin in the line Lovászhetény—Rácmecske, under Neogene beds, finally thrust upon the granitic margin. In the surroundings of Zengővárkony, lower Cretaceous and upper Jurassic (both imbricated) also occur under the Neogene.

The main task of the seismic exploration, here, too, is the same as everywhere else: the tracing of the boundary between the Neogene and the basement. This was easy to solve (Fig. 12). It was not possible, however, to determine the surface of the lower Liassic cover of the coal formation probably present under the middle Liassic limestone, *i. e.*, to obtain a subdivision of the younger Mesozoic formation. Moreover, also the boundary between the granite and the younger Mesozoic is rather uncertain, because the seismic velocities of the lower Cretaceous, upper Jurassic, middle and lower Liassic, and the granite, are overlapping in this area.

In planning the depth of a drilling for the coal deposits, the thickness of three formations has to be considered,—that of the Neogene cover, of the middle Liassic limestone and of the lower Liassic (*Gryphaea*) beds. Our investigations show that, of these, the Neogene—although of a very uneven thickness—is generally comparatively thin (Fig. 12). Its thickness has been determined by the seismic survey in the area Pécsvárad—Nagypall—Lovászhetény—Apátvarasd, *i. e.* all over the southeastern margin zone. In this way the places where the younger Mesozoic is nearest the surface, *i. e.* where a drilling is most economical, have been pointed out.

It must be emphasized that the thickness of the Neogene formation of the southeastern margin is smaller than expected. It exceeds 100 m only in a few places, although a thickness of several hundred metres could be supposed with rights before the survey.

## 2. *The western margin of the perisyncline*

The strike of the coal measures changes for N at the Petőfi shaft near Vasas. The formation is interrupted, in strike, by the lower Cretaceous trachydolerite phonolite and Miocene andesite having broken through fissures striking NW—SE between Hosszúhetény and Komló. Around Komló, the lower

\* In the time—interval between the closure of the manuscript and the appearance, there occurred some new results, which contradict to the probability of the presence of Triassic, in the S margin.

Liassic cover of the coal formation crops out from under the andesite cover, with a strike of NW, then W.

On the northern part of the area, the average dip of the lower Liassic sequence is towards the NE and E; on the southern part (where the detailed geophysical, mainly seismic investigations took place) it is towards the S, SE.

In the N, W and S, each side of the basement-complex is bordered by a big fault, the so-called "main faults". E of the andesite block, around Beta Shaft, the coal deposits lie at a shallow depth; the seams are exploited here by surface mining.

On the eastern margin of the area, around the villages Kisbattyán and Jánosipuszta, younger Jurassic and lower Cretaceous formations can be found along with trachydolerite. These formations belong to the perisyncline, centering at Kisújbánya, containing also an older Jurassic sequence.

On the western margin of the perisyncline a small anticline is known, with middle Jurassic (Dogger) limestone in its core. The local fold may be designated by the villages Márévár, Szerecsenyhegy, Jánosipuszta and Komló.

The exploration task was the usual here, too: the determination of the boundary between the Neogene and the Mesozoic, and within that the strike and at least the approximate throw of the main faults.

These requirements could not be met, for reasons previously discussed, by the geomagnetic and gravitational investigations alone. This does not imply that there were no such measurements in this area; in fact, a local detailed geomagnetic survey was made, too.

Let us sum up the results of these investigations.

The geomagnetic measurements reflect, on the whole, the fact alluded to previously, that the volcanic cover is remarkable for its high anomaly values (Fig. 7). Being aware of the relatively high magnetic susceptibility of the trachydolerite, this is nothing surprising. Rather more surprising would be the marked structural lines of NW—SE strike, indicated by the geomagnetic map, not fitting our geological ideas; however the wide station spacing of the survey warns us against any structural conclusions.

Nevertheless, the lava flow could eventually surge through faults of such orientation. Beside the geological investigations, it is exactly by the geomagnetic anomaly pattern, that this is to be assumed.

As to the details of the results: a maximum region up to 400 gammas is found NW of Pécsvárad, embraced from the NW by a minimum (0—10 gammas). On the W end of the "northern overthrust belt", the anomalies rise again to over 100 gammas, then, on the W part of the northern foreground, a zone of 20—70 gammas appears.

To the N of Magyaregregy there appear values of +130 gammas, near Szalatnak of +70 gammas. In the region of the large gravity minimum (and

Neogene depression) at Mecsekpölöske, W of Komló (Figs. 9 and 12), values of +100—+120 gammas can be seen.

All this indicates that, where the effect of volcanic rocks is not dominating the geomagnetic pattern, the thickness of the Neogene cover is in a certain relation with the magnitude of the anomalies.

In the region of the andesite cover at Komló (around Shaft III), the location of the eruption pipes and the lower boundary of the volcanic cover has been considerably well established by a detailed geomagnetic survey of close station spacing.

The gravity map (Fig. 9) indicates very well, in this area, the large Neogene depression W of Komló (at Mecsekpölöske) and everywhere parallels the average local strike.

The outstanding values of this region are the following. Maxima: 1 km ENE of Komló, +25 mgals; 2 km SSE of Magyarország, +23.5 mgals; near Magyareregny and Kárász, +29 mgals.

Minima: 1.5 km N of Mecsekpölöske, +9 mgal. This is the beginning of the belt of minima, embracing the perisyncline from NW and N and outlining the "Miocene trough" on N.

A map of the residual anomalies of this area has also been prepared. The separation of the disturbing masses situated on the surface and in the deep is, however, so uncertain and complicated here, that the residual anomaly map does not say more either than the Bouguer anomaly map; although no more is expected even from the latter than a qualitative indication of the relief of the Neogene-Mesozoic boundary, furthermore an indication of the sinking of the Mesozoic under the Neogene. This expectation was met by the gravity exploration—by the application of a constant density value.

Table 5

*The electrical resistivities of some rocks and minerals of the Eastern Mecsek*

Rock	Locality	Resistivity in Ohm/m			Investigator
		minimum value	maximum value	average value	
Cretaceous trachyolerite	Komló	11	315	36—176	Mihály Szalay— József Balogh
Lower Liassic covering the coal formation	..	6	71	18—20	..
Lower Liassic shale	..	9	550	18—19	..
Lower Liassic clay marl	Hosszúhetény	4	164	6—43	..
Lower Liassic coal	Komló, Kossuth shaft	1.2	1-8	1.3—1.5	..

A geoelectrical resistivity survey was also made over the andesite cover SSE of Komló, which is hindering strongly the mining operations [24]. In this way it was possible to trace the lower boundary of the andesite cover, *i. e.* the variation of the thickness of the cover. Local structural investigations by the geoelectrical method were carried out by the GI also in the surroundings of the twin shaft at Zobák.

These investigations are very useful for the appointment of places most suitable for establishing shafts, and are made upon the basis of resistivity differences of at least one order of magnitude (Table 5).

It can be stated that the essential purpose of the exploration—the tracing of the boundary between the Mesozoic and the Neogene—was met best and in a mainly quantitative way by the seismic refraction method (Fig. 10).

The contour map visible on Fig. 10 represents the Mesozoic basement relief in such a generalized way as is permitted by the density of the profile network, in harmony with the purpose of the exploration.

On this map the so-called “western main fault”, along which a change in strike in the deep, hitherto unknown, has been determined, appears strikingly.

The seismic work had to overcome many difficulties in this area—nearly touching the limits of impossibility—on account of the rough terrain, bad roads, engineering structures, mining works, etc. Also the geological conditions are extraordinarily confused. Therefore every result published from this area (and from the area to be discussed in the next chapter) may be regarded only as a feature of a rough sketch. This sketch—no matter how much this seems contradictory to our basic principles—is correct, in the first place, in a qualitative sense only and may sometimes deviate from reality in small, local details.

### 3. The region of the “northern overthrust belt”

The “northern overthrust belt” is the previously strongly folded northern Mesozoic margin of the Mecsek; it is overthrust from the N to the S upon a basin filled by Neogene sediments, the so-called “*Miocene trough*” (Fig. 2), which separates it from the Mesozoic perisyncline. Its rocks are identical with those of the perisyncline, but much more deformed.

The rocks of the overthrust belt include also Triassic limestone. We have no exact knowledge of its presence under the perisyncline. E. VADÁSZ assumes (verbal information) that there is no Triassic limestone on the bottom of the Mesozoic of the perisyncline.

At the northern margin of the perisyncline, a rock of a velocity of 5,400 m/sec has been detected by the seismic survey. On the basis of analogies we assume it to be Triassic limestone. On the same spot (about 8 km from Tolnaváralja towards SW) a drilling (TV—6) reached Rhaetic sandstone in 991 m depth. Under this the presence of Triassic limestone is probable, or at least possible. Later on we shall return to this question.

The overthrust belt sinks, in the line Vékény—Császta—Tolnaváralja—Nagymányok, with a sharp break under the Pannonian and loess.

The region of the northern overthrust belt of the Mecsek confronts the geophysical exploration with the most interesting, but, at the same time, most difficult task.

In the area of the exposure of the overthrust belt—in accordance with our basic principles—the geophysical, especially seismic exploration had no purpose. Nevertheless, geomagnetic and gravity investigations were made in this area.

On the geomagnetic map (Fig. 7), in the region of the volcanic cover of the belt there are seen higher values (100—120 gammas) than in the immediate surroundings, but these never reach the values of 400 gammas like the volcanic cover of the perisyncline. Therefrom we may conclude upon the absence of eruption centres of larger extension in the deep. One might rather think that the northern part of the once extended lava was thrust together on the surface, in an arrangement which follows the W—E strike of the belt. The coked coal at Szászvár proves however that we are not entitled to fully refuse the presence of pipes.

The arrangement of magnetic anomalies does not follow the strike of the local structure. No conclusion whatsoever can be drawn of this, however, since the survey—on account of its too large station intervals—cannot be used for detailed structural interpretations.

The magnetic values in the southern and northern foreground of the belt are the already mentioned meaningless, so-called “most frequent” values. Neither their magnitude nor their areal distribution permits any geological interpretation. On the contrary, they nearly upset our earlier, cautiously formulated principle: “*The magnitudes of the magnetic anomalies are, in a first approximation, proportional to the thickness of the Neogene cover.*” Namely, the gravity maximum at Szalatnak coincides with a small local magnetic maximum. At present it is known already that the gravitational maximum is caused by a middle Triassic dark, bituminous, calcite-veined limestone block in 80 m depth under the surface, which is certainly of no high magnetic susceptibility: above it, however, the Neogene cover thins out considerably. It is not impossible, of course, that there are some volcanic rocks or rock shreds around this limestone block in the depth.

Much more is shown by the gravity map (Fig. 9). The western part of the belt is actually embraced by a 25 mgal isoanomal. At Máza, where the belt plunges under young sediments, this line shows an inward bend (toward the S) and embraces the belt again where it crops out at Nagymányok toward the E, comprising the coal formation and Triassic members, among others.

It appears that this 25 mgal isoanomal line follows the assumed arrangement of the coal deposits not only here, but also in the areas discussed in the



foregoing two chapters. Indeed, it evidently follows that line or zone which was a shoreline twice during the geological history: during the deposition of the coal and after the Neogene transgression.

It is very difficult to draw a palaeogeographical conclusion from the gravity picture. The isoanomal map reflects the present state of the geological pattern, with a combined effect of all disturbing masses. If the palaeogeographical features of a certain past period are so characteristic or durable that they dominate even in the present density distribution, then the isoanomal map may actually have a palaeogeographical significance. This, however, seldom occurs. In our case it is much more apt to say that the 25-mgal isogam line, or the value band indicated by  $25 \pm 2$  mgals roughly follows the surface contact line of the Mesozoic and Neogene.

The gravity investigations have, however, some other results, by which they approach—in this area only—the efficiency of the seismic method, reduced here to a qualitative degree. We allude to the high maximum at Szalatnak (+20—35 mgals) and to the minimum (+8 mgals) between Bonyhád and Cikó.

The gravity maximum at Szalatnak, falling actually into the basin area, has such a high value and is so limited and definite in shape as well as in extension, that before it has been corroborated by the seismic survey and identified by drilling, it was interpreted—solely on the basis of the gravity map—to be a near-surface Triassic limestone block [2, 26].

The great minimum between Bonyhád and Cikó suggested the assumption that it is due to a large depression filled by Neogene sediments (Fig. 12). This was confirmed by the seismic survey and by drillings as well.

In the region of the “Miocene trough”, the regional arrangement of the Bouguer anomalies indicates the depression. Higher-derivative calculations—partly ready, partly under way—may, perhaps, throw a light upon finer structural details, *e. g.* upon the relief of the bottom of the “Miocene trough”. This is, however, very doubtful, since the regional effect of the basement is so intense, and moreover, the density distribution of the surface sediments so variable that the slight superposed distortions caused by the uneven relief of the trough-bottom necessarily remain hopelessly insignificant in comparison to other effects.

The seismic investigations [28] have been efficient and informative in this area. A rock of a velocity of 5,200 m/sec was determined in the area of the Szalatnak gravity maximum in 100 m depth. This rock was interpreted—by its velocity—as Triassic limestone: in fact, the drilling carried out by the GI, yielded a middle Triassic (Anisic), nearly black, bituminous, calcite-veined limestone core from 80 m depth.

This rock seems to be—according to the seismic survey—a block or a part of a “Schuppe” surrounded from all sides by a rock of a velocity of

4,600 m/sec. Analogies from the neighbourhood of Komló suggest that this velocity represents young Mesozoic rocks leaning against the Triassic block.

In a distance of 7 kms to the E, the drilling at Györe, sunk two years after the survey (in 1958), reached Jurassic rocks in the depth predicted by seismics (the same drilling found a rock regarded as Carboniferous shale under the Jurassic and Triassic members).

It is very remarkable that the velocity of 4600 m/sec can be detected in a length of 13—14 km along the strike between Szászvár and Bonyhád (in a depth of 400—800 m). This velocity indicates most probably granite if not the marls of the complex covering the coal deposits. The latter, however, —especially in the northern zone of imbrication—can hardly be imagined in such an extension.

More probable is the assumption, that it is the granite basement of the Mecsek—or, as it can be generalized from the drilling at Györe: the Paleozoic basement—which lies under the Neogene sediments (and eventually under younger Mesozoic members); consequently that the northern Paleozoic ramp assumed ere long probably begins already very near the margin of the *overthrust belt* (Fig. 11, profile A—A).

Dipwards, about in the height of Szekszárd, apparently another “Schuppe”, by its velocity of Triassic limestone, is wedged in, but much larger in size than the one penetrated by the water drilling Szekszárd III; still further N another rock with a velocity of 3,500 m/sec suggests again a younger Mesozoic or eventually older Neogene (Fig. 11, profile B—B).

All this indicates that the basin bottom of the Neogene, in the northern marginal area of the Mecsek, is stratigraphically by far not uniform, being probably Paleozoic in its bulk, and interrupted dipwards by oblong striking Mesozoic “Schuppen”.

An interesting result was found at Váralja in the southern foreground of the overthrust belt. Here, namely, the presumably productive Mesozoic appeared on the bottom of the “Miocene trough”—according to the seismic survey—in a depth much less than expected (about 200 m) (Fig. 11).

The statements of the seismic survey have been justified by the deep-drilling TV—6.

The *overthrust belt* apparently thins out on the eastern part of the “Miocene trough”. In a distance of 2 km to the N from Mecseknádasd, only Triassic limestone (5,600 m/sec) lies under the Neogene sediments in a larger mass. Around Mecseknádasd, however, the Neogene is underlain again by younger Mesozoic (39—4,100 m/sec), which extends in the deep—tapering off to the N—towards Cikó (drilling H—53).

A velocity of 5,400 m/sec has been established on the southern margin of the “Miocene trough” under the younger Mesozoic (Fig. 11). It is probable that the surface of the Triassic limestone is indicated by this velocity.

From the presence of the Triassic limestone it may be concluded that this rock exists also farther S, under the perisyncline. An experiment was made in order to determine its depth; actually, nothing more could be established than that the Triassic limestone under the perisyncline—if any—cannot be nearer the surface than 3,900 m.

It is an open question as to how the younger Mesozoic of the Mecsek facies continues towards NE in the depth. It is known that an oil-prospecting drilling at Kiskőrös penetrated a Lias-Dogger formation, interwoven by trachydolerite, of a facies identical with that of the Mecsek, in a depth of 1,400 m. Consequently it is correct to suppose that the granitic basement sinks down N, NW of Ófalu, and the Mesozoic sediments, settled in this depression, continue without interruption up to Kiskőrös.

At least equivalent with this supposition, however, is the possibility that the granite known on the surface at Ófalu and Zsibrik and found in a depth of 885 m in the drilling at Szekszárd closes down the Mecsek overthrust belt of the Mesozoic towards the NE in the line Ófalu—Cikó—Bonyhád.

A considerable thickness of the Neogene—surpassing 1,000 m—has been detected here by the seismic survey. This is confirmed also by the minimum of an absolute value of +15 mgals indicated at the same place by the gravity survey.

The second assumption is supported mainly by that result of the seismic survey that the 4,500 m/sec velocity rock is overlain by layers of a velocity of 2,800 m/sec. We are not in a position to decide whether there do or do not occur any young Mesozoic shreds “smeared” on the SE granite wall, like at Ófalu on the surface. We must be aware of the fact that this area is the most disturbed zone in the Mecsek.

Here we must dwell a bit longer upon the explanation of the expression “*overthrust belt*”. Let us consider the Mecsek as inserted into the structure of the Hungarian Basin. The outcropping basement ranges of the Hungarian Basin—the *Hungarian Central Chain*, the *Mecsek* and the *Villány Mountains*—awaken at the first glance the idea that they were, in times past, isolated sedimentation basins, so-called *cratoclines*. If, however, the open-sea facies of the majority of the rocks is confronted with the small distance of any point of the relatively narrow ranges (especially the Mecsek) from the ancient shoreline, furthermore if the complete lack of terrigenous material in the majority of the sediments is considered, it must be said that the present ranges of the Mesozoic were deposited in an originally contiguous sedimentation basin, and their strip-like division is a result of later tectonics. Naturally even this theory does not answer all the problems.

It is on the basis of this theory, that the assumption could be understood that the Mecsek and the Mesozoic basements at Kiskőrös, of the same facies are eventually overthrust belts contiguously sedimented, but separated by tectonics.

### Evaluation of the results

The geophysical exploration executed in the Mecsek Mountains contributed many new details, many essential data to the delineation of the general subsurface structural pattern of the Mecsek.

Let us mention first the direct and main purpose of the investigations: the determination of the boundary between the basement and the Neogene cover formations (Fig. 12). This task was easiest to solve by seismic exploration. The figure shows also that certain qualitative statements of the gravity exploration (the Szalatnak maximum, the Mecsekpölöske and Cikó minima) are in accordance with the more quantitative seismic results.

The conclusions drawn from the geomagnetic measurements were necessarily qualitative; no other possibility was given by the wide-spaced station network. Detailed investigations were made only in a few places and in small extensions; they are, therefore, only mentioned in this paper, intended to give a general picture without any detailing; similarly, no detailed local results of other investigations are given.

The results discussed according to areal units, to be summed up in the following, are the results of the gravity and seismic, but mainly of seismic exploration.

The quantitative results are compounded in the basement relief map shown on Fig. 12. It needs a few explanatory words.

1. Under basement is meant the rock directly underlying the Neogene; it can be Paleozoic, Triassic and Mesozoic younger than Triassic.

2. A datum plane suitable for construction seemed to be the level +100 m above the sea, since a plane in the height of the sea level—generally chosen for a datum plane—would have intersected the basement in too many places.

3. The inaccuracy of the map is greater than 10 per cent, as customary with seismic exploration; it may amount to as much as 15%. Its cause has been previously explained and laid down, in essence, in the complicated geological and petrographical conditions, furthermore in the basin-rim circumstances.

As to the geological pattern under the surface of the basement, only qualitative data were furnished even by the seismic exploration. These are none the less important, but they are by nature only of an informative character, and their representation is necessarily generalized.

The main qualitative results are the following:

1. The correct orientation of the so-called "western main fault" of the Komló area.

2. A Triassic limestone block in a shallow depth at Szalatnak (its depth and extension were quantitatively determined).

3. The possibility of younger Mesozoic under the Neogene (eventually comprising the coal formation, between Szalatnak and Szászvár).

4. The probable presence of the northern Paleozoic frame of the Mecsek along with Mesozoic Schuppen under the Neogene formations between Szászvár and Bonyhád (depth quantitatively determined).

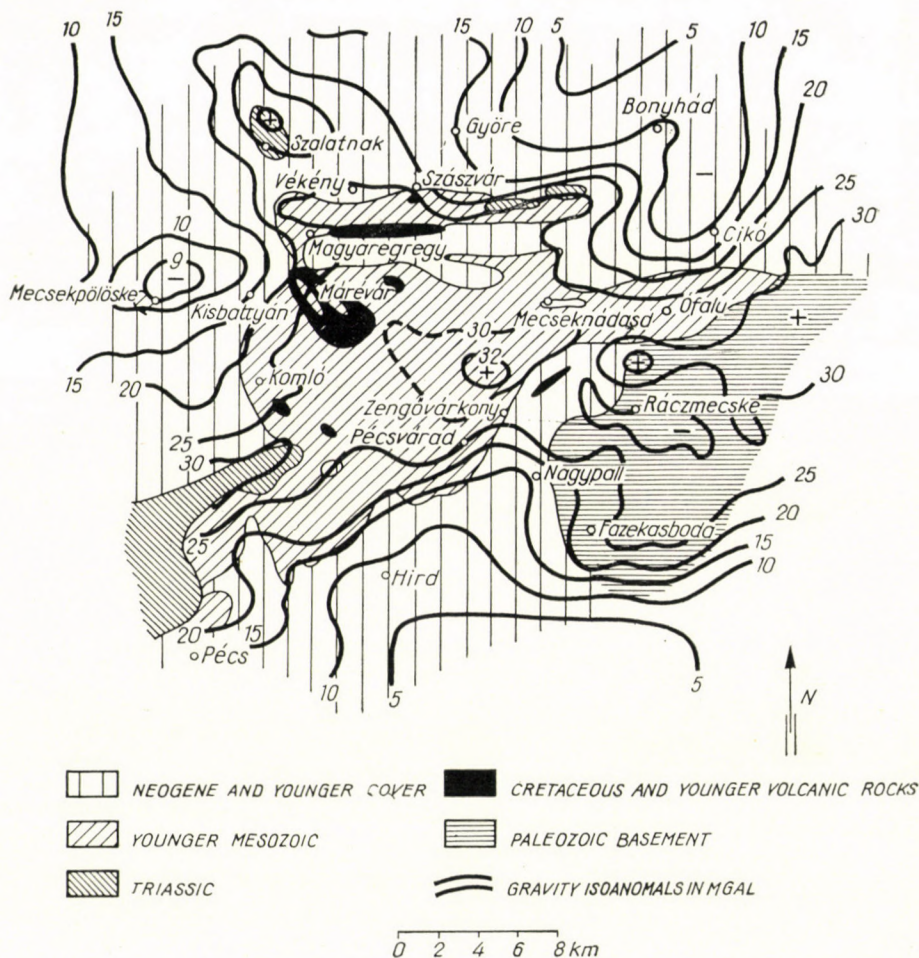


Fig. 13. A horizontal section of the Eastern Mecsek 100 m above sea level (generalized)

5. The depth of the so-called "Miocene trough", shallower than expected SW of Tolnaváralja.

6. The Mecsek does not necessarily continue in the deep without interruption until Kiskőrös; on the contrary, its Paleozoic "frame" may close in the NE,—at any rate, the Mesozoic belt narrows down considerably.

7. The presence of Triassic limestone in the deep on the northern margin of the perisyncline is possible, as shown by the velocity of 5,400 m/sec.

8. Attention was directed to the Paleozoic at Györe (Carboniferous?) by the velocity of 5800 m/sec shown by the seismic survey.

9. On the southern margin the Mesozoic sedimentation may have taken

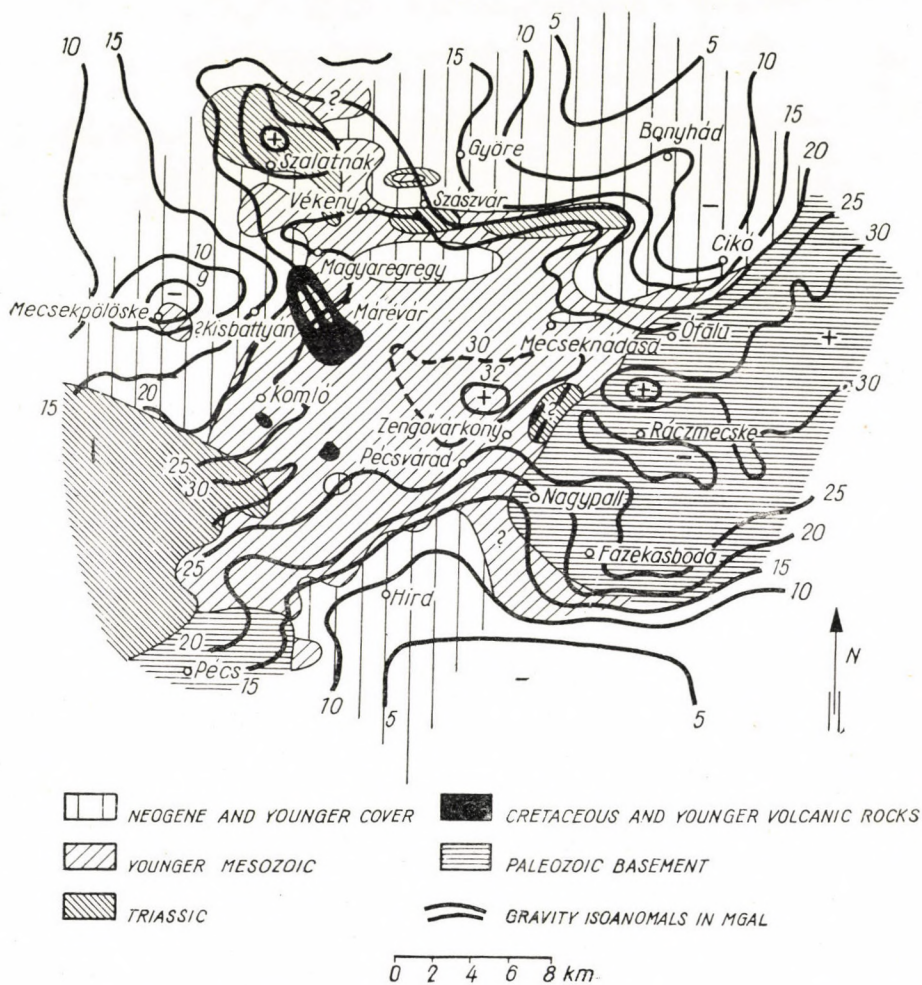


Fig. 14. A horizontal section of the Eastern Mecsek 200 m below sea level (generalized)

place also south of the limit previously assumed; the thickness of the Neogene formations in the Pécsvárád—Nagypall—Ráczmecske—Mecseknádasd area seldom exceeds 100 m.

It is not easy to present the qualitative results listed. The way of presentation on the Figures 13, 14 and 15 was preceded by longer considerations.

If closely regarded, these three plane-sections reflect the most important conclusions. It must be noted, that this kind of representation is a rough one

and is not so much aimed at quantitative accuracy as rather to give an insight into the deep structure of the Mecsek, "transilluminated" by geophysical investigations.

We regard the correlation of the seismic velocities with the stratigraphi-

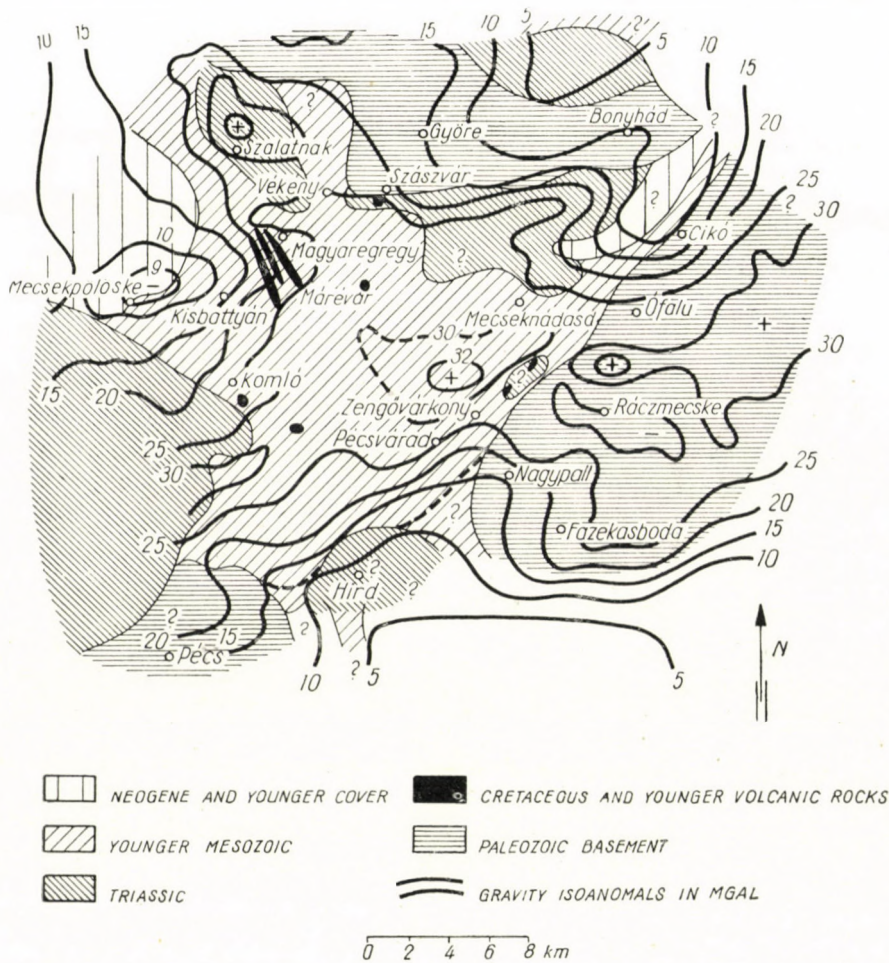


Fig. 15. A horizontal section of the Eastern Mecsek 800 m below sea level (generalized)

cal units as considerably good. Where we ourselves have any doubts, question marks indicate the uncertainty or a possibility of alternatives.

The representation—the construction of the formation boundaries—was made on the basis of seismic data. Yet, if the —200 m plane section is compared to the gravitational Bouguer anomaly map, it can be seen that their qualitative agreement is striking.

*The contour map of the basement relief and the three plane-sections are a summary of the geophysical exploration in the Mecsek up to the present.*

\*

We had the intention to show in this paper, that a systematical and thorough geophysical exploration furnishes numerous new data even in an area of so much complicated structure.

The Mecsek, however, still remains in several regards a riddle. If the geological and geophysical facts are compared, the theory of the origin of the Mecsek as accepted at present can be considered as untenable. No open-sea and bathyal sediments could be deposited in such a small sedimentation basin as suggested by the present feature and deep structure of the Mecsek. A solution of this question requires further investigations, which will probably throw a new light also upon the possible extension of the coal deposits.

#### REFERENCES

1. ÁDÁM, O.: Jelentés az 1954. évi Pécs környéki szeizmikus mérésekről. Geofizikai Intézet. (Report on the Seismic Measurements of 1954 in the Pécs Area.) Geophysical Institute.
2. ÁDÁM, O.: Jelentés az 1955. évi Komló környéki szeizmikus mérésekről. (GI. Report on the Seismic Measurements of 1955 in the Komló Area.) GI.
3. ÁDÁM, O.—KILCZER, GY. A Pécs környékén végzett szeizmikus mérések eredményei. Előadás, 1955. Pécs. (The Results of the Seismic Measurements Made in the Pécs Area.) Lecture, 1955, Pécs.
4. BOD, M.: Jelentés a laboratóriumi gerjesztett potenciálmérésekről. (Report on the Laboratory Polarized Potential Measurements.) 1955. GI.
5. ERKEL, A.: Tellurikus módszer alkalmazásának lehetősége a mecseki alsó liász kőszénmedence geofizikai kutatásában, 1955. GI. (A Possibility of the Application of the Telluric Method in the Geophysical Prospecting of the Lower Lias Coal-Basin of the Mecsek.) 1955. GI.
6. HOFMANN, K.—BÖCKH, J.: Mitteilungen der Geologen der Kgl. Ung. Geol. Anstalt über ihre Aufnahmsarbeiten in den Jahren 1874, und 1875. Budapest. Geological Institute. (German text).
7. HOFMANN, K.: Adatok a Pécsi-hegység geológiájához. Földt. Közl. XXXVII. 1907. (Data Concerning the Geology of the Pécs Mountains.) Geological Papers, Vol XXXVII. 1907.
8. KILCZER, GY.: Antiklinális adatainak kiszámítása a refrakciós terjedési időgörbéből. Geof. Közl. II. kötet 3. sz., 1953. (Interpretation of the Data of an Antycline from the Refraction Time-Distance Curve.) Geophysical Papers, Vol II. No 3. 1953.
9. KILCZER, GY.: Átlótt és inverz réteg kimutatásának lehetősége szeizmikus refrakciós méréssel. Geof. Közl. IV. kötet 2. sz. 1955. (The Observability of a "Through-shot" and of an "Inverse" Layer with Refraction Seismograph.) Geoph. Papers, Vol IV. No 2. 1955.
10. KILCZER, GY.: Kikékelődő réteg adatainak meghatározása szeizmikus refrakciós méréssel. Geof. Közl. VI. kötet 3—4. sz., 1957. (The Determination of a Pinch-out by Refraction Shooting), Geoph. Papers. Vol. 6, No 3—4, 1957.
11. LAKATOS, S.: Jelentés a pécsi kokszmű bővítésével kapcsolatos vízkutató vertikális elektromos szondázásokról, 1953. (GI. Report on the Vertical Resistivity Sounding for Water Supply in Connection with the Expansion of the Pécs Coke-Works.) 1953. GI.
12. LAKATOS, S.: Jelentés a Komló környékén létesítendő három transzformátorállomás körül végzett talajvezetőképesség-mérésről, 1954. (G. I. Report on the Soil-conductivity Measurements in the Area of the Komló Transformer-Stations to Be Erected.) 1954. GI.
13. LAKATOS, S.: Jelentés a Pécs—Szedres 120 kV-os, Diósgyőr—Kesznyéten 220 kV-os távvezeték nyomvonala mentén végzett elektromos mérésekről, 1954. (GI. Report on the Geoelectric Measurements along the Power Transmission Lines Pécs—Szedres 120 kV, Diósgyőr—Kesznyéten 220 kV). 1954. GI.



14. MAORT: Report No 6. on the Magnetic Survey of Southwestern Hungary between Lake Balaton and Drava River, 1937. (English text).
15. MAORT: Report No 7. on the Torsion Balance Surveys in Baranya County SE Transdanubia, 1939. (English text).
16. MAORT: Report No 9. on the Magnetic Surveys in SW Hungary in 1934 (English text).
17. MOLNÁR, K.: Jelentés a Komló környékén végzett földmágneses mérések eredményeiről, 1955—1956. GI. (Report on the Results of the Komló Geomagnetic Measurements.) 1955—56. GI.
18. OSZLACZKY, Sz.: 46. sz. jelentés az 1950—51-ben Dél-Somogy, Dél-Baranya területén Heiland graviméterrel végzett mérésekről. (G. I. Report No 46. on the Heiland Gravimeter Measurements of 1950—51, in South Somogy and South Baranya Counties.) GI.
19. PACSIRSZKY, L.: Jelentés az 1953. V. 20-tól X. 31-ig Pécs környékén végzett geotermikus mérésekről. (GI. Report on the Pécs Geothermic Measurements in 1953.) G. I.
20. PÁLOS, M.: Jelentés az 1953. évben Pécs környékén végzett szeizmikus mérésekről. (GI. Report on the Seismic Investigations in the Pécs Area in 1953.) GI.
21. PÉTER, Gy.: Jelentés a Pécsvárad—Mohács—Villány—Üszög közötti területen Nörgaard graviméterrel végzett mérésekről, 1952. (GI. Report on the Nörgaard Gravimeter Survey in the Area Pécsvárad—Mohács—Villány—Üszög.) 1952. GI.
22. SEBESTYÉN, K.: Jelentés a Pécs környékén végzett geoelektromos kísérleti mérésekről, 1952. (GI. Report on the Geoelectric Experimental Survey of Pécs.) 1952. GI.
23. SEBESTYÉN, K.: Hazai barnakőszencink mélyfúrási geofizikai vizsgálatainak problémái. Disszertáció. 1957. (The Borehole-Geophysical Problems with the Lignite-Deposits of Hungary.) Dissertation, 1957.
24. SZABADVÁRY, L.: Komló környéki geoelektromos ellenállásmérések, 1955. G. I. (Resistivity Measurements in the Komló Area.) 1955. G. I.
25. SZABADVÁRY, L.: A zobáki ikeraknánál 1956-ban végzett geoelektromos mérések. (The Geoelectric Measurements Made in 1956 around the Zobák Twin-Shaft.) GI.
26. SZABÓ, G.: Jelentés az 1955. évben Komló környékén végzett graviméter-mérésekről. (Report on the Gravimeter Measurements of Komló in 1955.) GI.
27. SZABÓ, G.: Jelentés a Mecsek hegységben és környékén az 1956. évben graviméterrel végzett mérésekről. (Report on the Gravimeter Measurements of Komló in 1956.) G. I.
28. SZÉNÁS, Gy.: Jelentés a Mecsek hegységben az 1956. év folyamán geofizikai módszerekkel végzett nyersanyagkutatásokról. (Report on the Investigations for Mineral Resources Made by Geophysical Methods in the Mecsek in 1956.) GI.
29. SZÉNÁS, Gy.: Geofizikai teleptan. Akadémiai Kiadó. Bp. 1958. (The Application of the Geophysical Methods. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Bpest, 1958.)
30. SZIIÁGYI, B.: Jelentés Magyaregregy környékén az 1952. évben végzett földmágneses mérések eredményeiről. (Report on the Results of the Geomagnetic Measurements in the Magyaregregy Area, in 1952.) G. I.
31. SZIIÁGYI, B.: Jelentés a Zengővárkony környékén 1953-ban végzett földmágneses mérések eredményeiről. (Report on the Results of the Geomagnetic Measurements in the Zengővárkony Area, in 1953.) G. I.
32. TATÁR, J.: Kőszénkutató fúrások radioaktív gamma-sugárszelvényezése. 1955. (Gamma-Logging of Boreholes for Coal.) 1955. G. I.
33. VADÁSZ, E.: A Mecsek-hegység. M. Kir. Földtani Intézet, Stádium. 1935. (The Mecsek Mountains, Royal Hungarian Geol. Institute.) Stadium Publ. Co. 1935.
34. WEIN, Gy.: Földtani vizsgálatok Máza—Váralja környékén. Földtani Intézet évi jelentése, 1950. (Geological Investigations in the Area Máza—Váralja. Geol. Institute. Annual Report). 1950.

## SUMMARY

The methodical problems of a complex geophysical prospecting on a highly folded and faulted structure and the results of this prospecting are discussed. Special applications of the gravity, and the seismic refraction method beside other geophysical methods is treated in detail. The importance of finding a special way for solving special problems is demonstrated in gravity (Bouguer) reduction computation and in seismic interpretation, respectively. The essential difference existing between a basin and a basement outcrop is designated as the main guiding principle in application problems.

ERGEBNISSE EINER KOMPLEXEN GEOPHYSIKALISCHEN PROSPEKTION IN  
EINEM BESONDERS KOMPLIZIERTEN GEBIET: DAS MECSEKGEBIRGE

GY. SZÉNÁS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Studie behandelt die Methodik und Ergebnisse einer komplexen geophysikalischen Prospektion in einer stark gefalteten und zerbrochenen Struktur. Verfasser bespricht eingehend die Anwendung der Gravitationsmethode, der Seismik und auch anderer Meßmethoden. Die Studie weist nach, daß sowohl die Anwendung der Bouguerschen Reduktion als auch die seismische Interpretation besondere Gesichtspunkte benötigt. In den Problemen der Deutung und Anwendung müssen die wesentlichen Unterschiede zwischen den Becken und Grundgebirgsausbissen in Betracht genommen werden.

RÉSULTATS DE RECHERCHES GÉOPHYSIQUES COMPLEXES EFFECTUÉS SUR  
UN TERRITOIRE DE STRUCTURE PARTICULIÈREMENT COMPLIQUÉE:

LA MONTAGNE MECSEK

GY. SZÉNÁS

RÉSUMÉ

L'étude traite la technique et les résultats d'une recherche géophysique complexe faite dans une région fortement plissée et fractionnée. L'auteur donne aussi les détails de l'application spéciale des méthodes de la gravitation, des méthodes sismiques, et d'autres méthodes géophysiques. On prouve que la réduction de Bouguer aussi bien que l'interprétation sismique exigent une manière de voir spéciale. Le principe directeur adopté dans les problèmes d'application est la différence essentielle existant entre le «bassin» et «l'affleurement de la base».

РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЛЕКСНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ РАЗВЕДКИ, ПРОВЕДЕННОЙ  
НА ТЕРРИТОРИИ ОСОБЕННО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ. ГОРЫ МЕЧЕК

Д. СЕНАШ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается методика и результаты комплексной геофизической разведки на сильно складчатой и пересеченной изломами территории. Подробно рассматривается специальное применение гравитационных и сейсмических, а также прочих геофизических методов. Работа показывает, что специальный взгляд требует как редукция Bouguer, так и сейсмическая трактовка. При проблемах применения в качестве основного принципа указывается существенная разница, имеющая место между «бассейном» и «выходом коренных гор».

# UNTERSUCHUNGEN ZUR ANWENDUNG DER GAUSS—KRÜGERSCHEN ABBILDUNG IN UNGARN

Prof. I. HAZAY

DOKTOR DER TECHN. WISSENSCHAFTEN

LEHRSTUHL FÜR GEODÄSIE II,

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR BAUGEWERBE UND VERKEHRSWESEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 31. August 1960]

Die ungarische Landesvermessung stellte sich beim Entwurf der topographischen Karten auf die *Gauß—Krügersche Abbildung* um und wünscht diese Abbildungsart auch bei Karten großen Maßstabes zu verfolgen. Wie bekannt, setzt die zuläßliche größte Längenverzerrung der gebrauchbaren Fläche jedes Projektionssystemes (Projektionsstreifens) eine Grenze, welcher Art auch die geodätische Projektion sein mag. Bei der *topographischen Kartographie* benützen auch wir das als international gültig annehmbare 6°-ige Streifensystem der *Gauß—Krügerschen Abbildung*, welches derart entsteht, daß die als Originalfläche dienende Ellipsoidfläche mittels je zweier Meridianbögen in sechzig gleiche Teile geteilt wird; diese Meridianbögen reichen von Pol zu Pol und umfassen 6°-ige geographische Längendifferenzen. Ein derartiges Bogenzweieck bildet einen 6°-igen Projektionsstreifen, wobei der höchste Wert der Längenverzerrung (an den ungünstigsten Stellen, d. h. an den Rändern des Streifens im südlichen Teile des Landes) rund 68 cm/km beträgt. Eine Verzerrung von dieser Größe kann bei der topographischen Kartographie zugelassen werden. Bei der *Kartographie in großem Maßstabe* jedoch wird die zuläßlich ungünstigste Längenverzerrung pro Kilometer den mehr oder minder strengen Anforderungen entsprechend im allgemeinen in 10—20 cm angegeben; aus diesem Grunde kann man bei der Abbildung in großem Maßstabe bloß 3°-ige oder 2°-ige Streifen anwenden. (Die Ellipsoidfläche wird in hundertzwanzig gleichgroße 3°-ige oder in hundertachtzig gleichgroße 2°-ige Zweiecke aufgeteilt).

Nachdem das als Grundlage der Aufnahmen dienende Triangulationsnetz auf beiden Kartentypen dargestellt werden muß, soll — zur schnelleren Lösung der zwischen den 6°-igen und schmälere Streifen auf jeden Fall sich ergebenden Koordinatenumrechnungen — der Anfangs-(Mittel)-Meridian der einzelnen 6°-igen Streifen gleichzeitig auch den Anfangs-(Mittel)-Meridian jedes Streifens des angewandten schmälere Streifensystems bilden. Dementsprechend wären in Ungarn — obwohl das Land insgesamt 7 Grade der geographischen Länge umfaßt — 4 Streifen notwendig, unabhängig davon, ob nun die 3°-igen oder 2°-igen Projektionsstreifen angenommen werden.

Die Anfangsmeridiane der beiden, unser Land überdeckenden  $6^\circ$ -igen Streifen liegen nämlich bei den geographischen Längengraden  $15^\circ$  und  $21^\circ$  ab Greenwich. Somit ist Ungarns Abbildung in großem Maßstabe — das Land liegt zwischen  $16^\circ$  und  $23^\circ$  — *auf den  $3^\circ$ -igen Streifen*, mit den Anfangsmeridianen von  $15^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $21^\circ$  und  $24^\circ$ , oder aber *auf den  $2^\circ$ -igen Streifen*, mit den Anfangsmeridianen von  $17^\circ$ ,  $19^\circ$ ,  $21^\circ$  und  $23^\circ$  möglich. (Letzteres Streifensystem paßt auch ins System der  $6^\circ$ -igen Streifen, der  $2^\circ$ -ige Streifen mit dem Anfangsmeridian von  $15^\circ$  fällt jedoch schon außerhalb des Gebietes von Ungarn.) Man kann jedoch die Zahl der Streifen vermindern, indem die ebenen Koordinaten im Laufe der Projektion mit der Zahl  $m_0 < 1$  (das sogenannte *Maßstabverhältnis der Projektion*) multipliziert und dadurch proportional verkleinert werden; die Abbildung wird dann gemäß den auf diese Weise *reduzierten Koordinaten* ausgeführt. Dieses Verfahren nennen wir — nicht ganz richtig — *die Senkung der Projektion* und die Projektion wird somit als *gesenkte Projektion* bezeichnet. Es wäre vielleicht richtiger, von einer *Projektionsreduzierung* und von einer *reduzierten Projektion* zu reden.

Bei einer solchen Projektion zeigt sich dort, wo es bei der ursprünglichen Projektion keine Längenverzerrung gab, jetzt eine Verkürzung und die verzerrungsfreie Stelle (Punkt oder Linie; bei der *Gauß—Krügerschen Abbildung* ist es eine Linie) wird verschoben; von dieser ausgehend nehmen zwar die der Längenverzerrungen auch weiterhin zu (die Entfernungen werden gedehnt), jedoch schwächer als zuvor. Würden wir dieses Verfahren verfolgen und das Maßstabverhältnis der Projektion in  $m_0 = 0,9999$  annehmen, dann könnte Ungarn mittels zwei  $3^\circ$ -iger Streifen so dargestellt werden, daß die ungünstigste Längenverzerrung pro Kilometer  $\pm 16$  cm nicht überschreiten würde. In diesem Falle müßten die Anfangsmeridiane bei der geographischen Länge  $18^\circ$  und  $21^\circ$  liegen. (Auch der Anfangsmeridian mit der geographischen Länge von  $18^\circ$  paßt in das System, welches durch die beiden  $6^\circ$ -igen Streifen für die  $3^\circ$ -igen Streifen bestimmt wird!)

Bei geodätischen Berechnungen ist es zweckmäßig, wenn die aufzunehmende und abzubildende Fläche in ihrer Gesamtheit im ersten Quadrant des Koordinatensystems liegt, d. h. wenn sämtliche Koordinaten ein positives Vorzeichen tragen. Da die  $x$ -Achse bei der *ursprünglichen Gauß—Krügerschen Projektion* das als Gerade auftretende Bild des Anfangsmeridians (des mittleren Meridians des Streifens) ist, kann man dies bei den  $y$ -Koordinaten erreichen, indem man diese nicht von der ursprünglichen  $x$ -Achse aus berechnet, sondern *von irgendeiner, westlich außerhalb des Landes aufgenommenen und dem Bilde des Anfangsmeridians gegenüber parallel verschobenen Geraden*. Diese Gerade soll die  $\xi$ -Achse heißen. Bekanntlich ist die  $y$ -Achse bei der *Gauß—Krügerschen Abbildung* das ebenfalls als Gerade auftretende Bild des Äquators. Unsere  $x$ -Koordinaten tragen demnach schon ursprünglich ein positives Vorzeichen. Unser Land liegt jedoch fern vom Äquator, weshalb die  $x$ -Koordinaten

sehr groß sind. Es ist daher zweckmäßig, diese auch nicht von der ursprünglichen Achse aus zu berechnen, sondern *von irgendeiner, südlich von den Landesgrenzen ausgewählten und zum Bild des Äquators parallelen Geraden*, welche die  $\eta$ -Achse heißen soll. Im neuen (verschobenen) Koordinatensystem werden die Koordinaten des weiteren durch  $\eta$  und  $\xi$  bezeichnet.

Sowohl die Projektionsreduktion (Senkung), als auch die Verschiebung des Koordinatensystems verursachen bei den Projektionsberechnungen gewisse Änderungen. Es muß daher noch vor der eventuellen Einführung des reduzierten und verschobenen, oder bloß ohne Reduktion verschobenen neuen Systems geprüft werden, welche Änderungen sich bei den Berechnungen sowie in den Tabellen und bei deren Gebrauch auftreten; denn die Projektionsänderung ist nur zweckmäßig, falls sie keine bedeutenderen Berechnungsschwierigkeiten zur Folge hat und die notwendigen Hilfsmittel zur Berechnung, die betreffenden Tabellen, bereits vorliegen. *Das Problem wird zwar hier bloß in ungarischer Relation geprüft, es mag und wird aber wohl auch anderswo auftreten. Ich bin deshalb der Meinung, daß die sowohl prinzipiellen wie auch die praktischen Ergebnisse unserer Untersuchungen nicht nur bei uns, sondern auch anderswo nützlich sein dürften.*

Die folgenden Darlegungen gehen von den *ursprünglichen Zusammenhängen der Gauß—Krügerschen Abbildung* aus. Es muß daher kurz das Wesen der Projektion geschildert und die ursprünglichen mathematischen Formeln bzw. Reihen angeführt werden. Vorangehend sollen jedoch auch noch die Definitionen einiger des weiteren vorkommender Projektionsbegriffe aufgefrischt werden.

Die Längenverzerrung wird charakterisiert durch den *Linearmodul*  $l$ , der das Verhältnis der Länge  $dt$  irgendeines *unendlich kleinen (elementaren)* Liniestückes auf der Originalfläche und dessen Gegenstückes  $dt'$  auf der Bildfläche,

$$l = \frac{dt'}{dt} \quad (1)$$

darstellt. Der Linearmodul ändert sich im allgemeinen in jedem Punkt für jede Richtung; bei *winkeltreuen* Projektionen jedoch (und die *Gauß—Krügersche Projektion* ist winkeltreu) ist er in einem gegebenen Punkt für alle Richtungen gleich.

Die *Meridiankonvergenz*  $\mu$  *der Projektion* in irgendeinem Punkte ist ein spitzer Winkel eingeschlossen durch die Tangente zum Bild des Meridians im Punkte einerseits und durch die zur  $x$ -Achse des ebenen Koordinatensystems parallele Richtung andererseits. Positiv ist dieser Winkel in dem Falle, wenn die zur  $x$ -Achse parallele Richtung den rechten Arm des Winkels bildet (Abb. 1).

Auf der Originalfläche werden die Punkte durch die der Fläche entsprechenden kürzesten Linien (auf dem Ellipsoid demnach durch die geodätischen

Linien) verbunden, auf der Bildebene der Projektion jedoch durch Geraden, um in der Ebene die ebene Trigonometrie anwenden zu können. Das Bild der geodätischen Linien in der Ebene ist im allgemeinen krummlinig; dementsprechend sind im Netz der Originalfläche und im Netz der Bildfläche bloß die Eckpunkte einander genau entsprechend, wogegen die verbindenden Linien durch die einander nicht genau entsprechenden kürzesten Linien der betreffenden Flächen dargestellt werden. Aus diesem Grunde müssen die Winkel

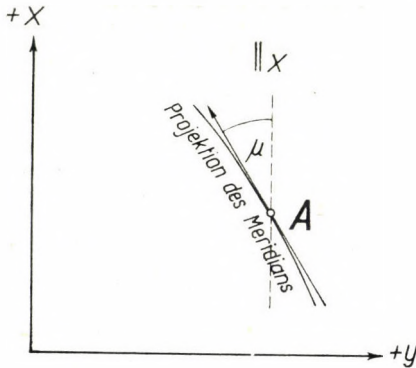


Abb. 1

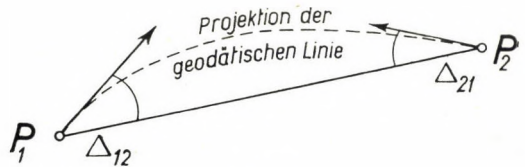


Abb. 2

bzw. die Richtungen selbst bei winkeltreuen Projektionen auch noch mit einer Korrektur, der sogenannten *Richtungsreduktion* (mit vollem Namen: *zweite Richtungsreduktion*) versehen werden. Unter Richtungsreduktion sollen — im Falle einer geodätischen Linie durch zwei Punkte der Originalfläche — die an den beiden Bildpunkten gelegenen Winkel zwischen dem wahren Bild des geodätischen Linienstückes und der Geraden durch die beiden Bildpunkte verstanden werden. Bezeichnet man den einen Punkt mit 1, den anderen mit 2 (oder etwa  $P_1$  bzw.  $P_2$ ), so ist das Symbol der Richtungsreduktion beim Punkte 1 =  $\Delta_{12}$ , beim Punkte 2 =  $\Delta_{21}$  (Abb. 2).

Ist die Länge des geodätischen Linienstückes zwischen den beiden Punkten  $s$  und die Länge des Geradenstückes zwischen den zwei Punktbildern  $d$ , dann beträgt der *Längenverzerrungsfaktor*  $m$  (Abb. 3):

$$m = \frac{d}{s}. \quad (2)$$

Schließlich ist die *isometrische Breite*  $\psi$  auf dem Ellipsoid, laut dem durch die Differentialgleichung

$$d\psi = \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi \quad (3)$$

dargestellten allgemeinen Zusammenhang (wobei  $\varphi$  die geographische Breite,  $M$  den Krümmungsradius des Meridians und  $N$  den Querkrümmungsradius bezeichnet):

$$\psi = \ln \left\{ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right\} \quad (4)$$

wo  $e$  die erste Exzentrizität des Ellipsoids bedeutet.

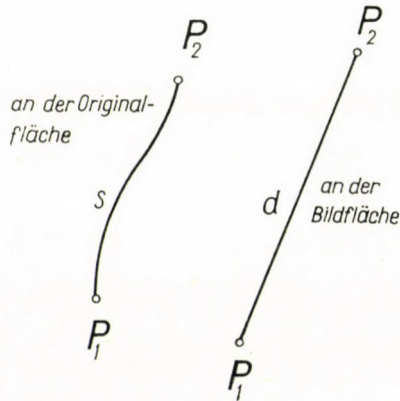


Abb. 3

### 1. Kurze Darlegung der Gauß—Krügerschen Abbildung

Bei der *Gauß—Krügerschen Abbildung* ist die Originalfläche (d. h. die angenommene Erdfigur) ein Rotationsellipsoid. (Wir benützen das *Krasowsky-Ellipsoid*, mit der großen Halbachse  $a = 6\,378\,245$  m und mit der Abplattung  $1/298,3$ .) Das Ellipsoid wird längs eines Meridians (des frei gewählten Anfangsmeridians) vom Mantel eines hypothetischen Zylinders berührt, dessen Achse in der Äquatorialebene liegt und durch den Mittelpunkt des Ellipsoids geht, und dessen Schnitt mit einer zu seiner Achse lotrechten Ebene gleich der Meridianellipse ist (Abb. 4, oder, wenn der Gesichtspunkt an der Schnittlinie des Anfangsmeridians mit der Äquatorebene gewählt wird, die linke Seite von Abb. 5).

Die Projektion hat kein Projektionszentrum, die Projektion besteht daher ausschließlich aus mathematischen Zusammenhängen. Wird der Zylindermantel längs seiner die Pole durchquerenden Mantellinien zerschnitten und der halbe Mantel in der Ebene abgewickelt, so sind die Bilder des Äquators bzw. des Anfangsmeridians gegenseitig lotrechte Geraden (rechte Seite von Abb. 5). Der Anfangsmeridian ist längentreu (das ist die verzerrungsfreie Linie). Auf Abb. 4 und 5 wurde (verzerrt) ein Projektionsstreifen mit der Streifenbreite  $S$  aufgezeichnet, und auf der rechten Seite von Abb. 5

auch dessen Bild dargestellt. Auf dem Ellipsoid wird ein Punkt  $A$  durch die geographische Breite  $\varphi$  des den Punkt schneidenden Parallelkreises bzw. durch die geographische Länge  $\lambda$  des den Punkt durchquerenden Meridians bestimmt. Die geographische Länge wird vom Anfangsmeridian aus gemessen. In der Ebene werden die Punkte durch die  $x$ ,  $y$ -Koordinaten bestimmt. Die Bilder der benachbarten Projektionsstreifen des Ellipsoids berühren sich

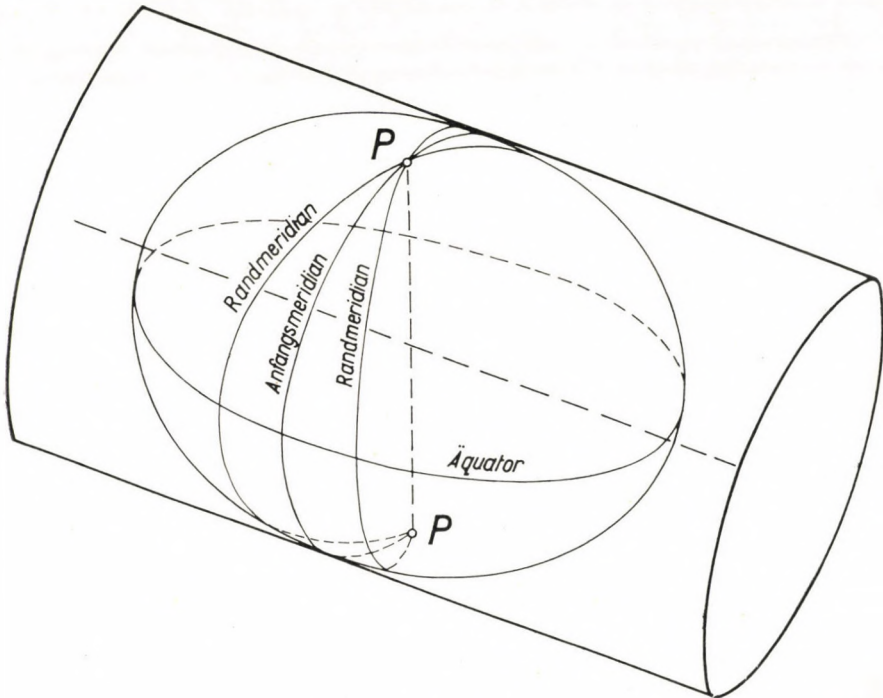


Abb. 4

im Bilde des Äquators. Man nimmt an, daß die Streifenbreiten  $S$  der benachbarten Streifen gleich sind, dann sind die Bilder der Streifen kongruent. (Man stelle sich selbstverständlich zu jedem einzelnen Streifen je einen besonderen Zylinder vor, der das Ellipsoid immer längs des Anfangsmeridians des betreffenden Streifens berührt.)

Die Zusammenhänge der Abbildung können von der *Grundgleichung der Konformität*

$$x + iy = F(\varphi + i\lambda) \quad (5)$$

abgeleitet werden;  $\varphi$  bezeichnet die isometrische Breite,  $i$  den Ausdruck  $\sqrt{-1}$ . Wird am Anfangsmeridian eine beliebige Beziehung

$$x = F(\varphi) \quad (6)$$



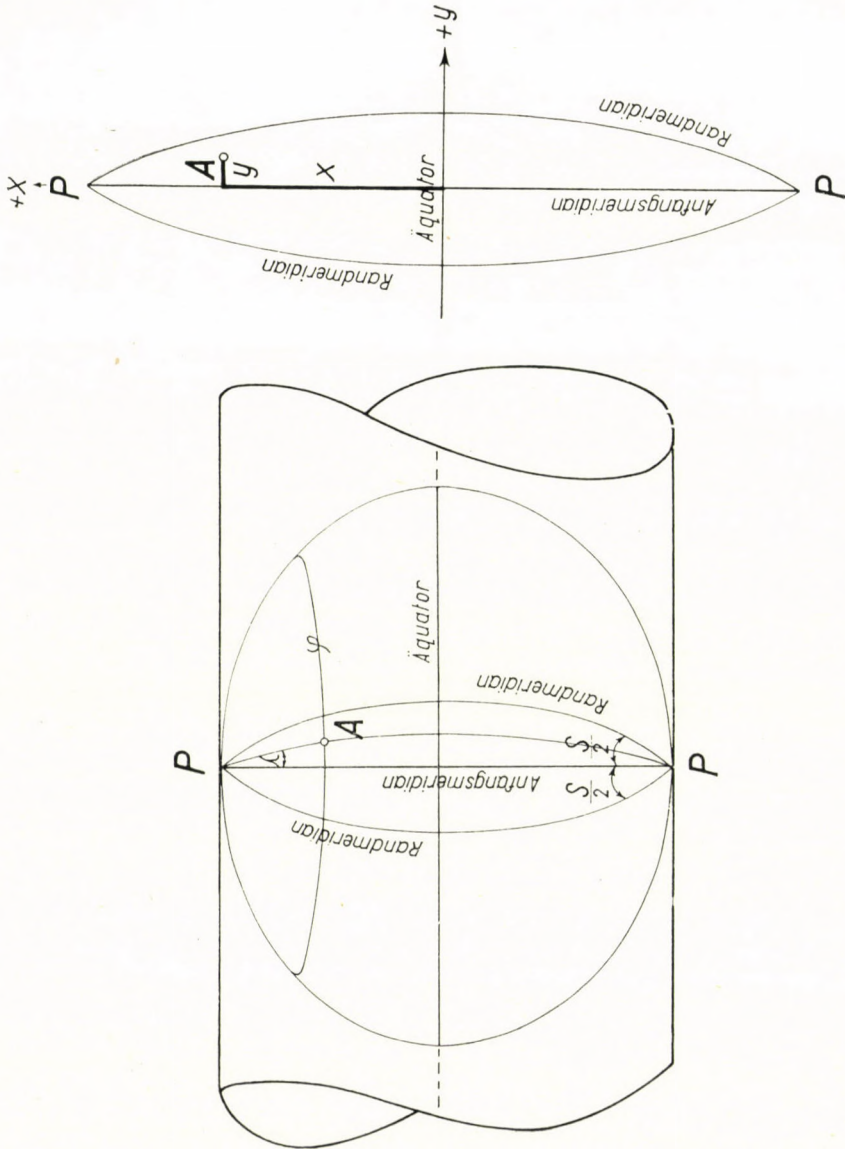


Abb. 5

angenommen, dann erhält man, die Werte  $iy$  bzw.  $i\lambda$  als Zuwachs betrachtet, durch Reihenentwicklung und durch Trennung der reellen und komplexen Glieder der Reihe die Projektionsgleichungen. Bei der *Gauß—Krügerschen Abbildung* ergibt sich Beziehung (6) aus der Forderung der längentreuen Abbildung des Anfangsmeridians. Dementsprechend ist am Anfangsmeridian

$$x = F(\psi) = B \quad (7)$$

wo  $B$  die Länge des Meridianbogens vom Äquator bis zum Punkt  $x$  des Anfangsmeridians ist.

Unter Vermeidung der Ableitung geben wir an, daß man *die ebenen Koordinaten aus den geographischen* mittels der Reihen

$$\begin{aligned} x &= B + A_2 \lambda^2 + A_4 \lambda^4 \\ y &= A_1 \lambda + A_3 \lambda^3 + A_5 \lambda^5 \end{aligned} \quad (8)$$

berechnen kann. Die Koeffizienten der Reihen sind:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{N \cos \varphi}{\varrho} \\ A_2 &= -\frac{N}{2\varrho^2} t \cos^2 \varphi \\ A_3 &= -\frac{N}{6\varrho^3} \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \\ A_4 &= \frac{N}{24\varrho^4} t \cos^4 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2) \\ A_5 &= \frac{N}{120\varrho^5} \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4) \end{aligned} \quad (9)$$

wo  $\varrho$  der dem Radian entsprechende Grad- oder Sekundenwert ist (je nachdem in welcher Einheit der Wert  $\lambda$  in die Reihen eingesetzt wird),  $N$  ist der Querkrümmungsradius des Ellipsoids bei der geographischen Breite  $\varphi$ ,  $t = \operatorname{tg} \varphi$  und  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ . Bei letzterem ist  $e'$  die sogenannte zweite Exzentrizität des Ellipsoids. (Beim *Krassowsky-Ellipsoid* ist  $e'^2 = 0,006\,738\,525\,414\,62$ .)

Aus den ebenen Koordinaten können die geographischen mittels der Reihen

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + B_2 y^2 + B_4 y^4 \\ \lambda &= B_1 y + B_3 y^3 + B_5 y^5 \end{aligned} \quad (10)$$

berechnet werden.  $\varphi_1$  bedeutet die geographische Breite des Punktes von der Koordinate  $x$  am Anfangsmeridian, während

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\varrho}{N_1 \cos \varphi_1} \\ B_2 &= \frac{\varrho}{2N_1^2} t_1(-1 - \eta_1^2) \\ B_3 &= \frac{\varrho}{6N_1^3 \cos \varphi_1} (-1 - 2t_1^2 - \eta_1^2) \\ B_4 &= \frac{\varrho}{24N_1^4} t_1(5 + 3t_1^2 + 6\eta_1^2 - 6t_1^2 \eta_1^2) \\ B_5 &= \frac{\varrho}{120N_1^5 \cos \varphi_1} (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4). \end{aligned} \quad (11)$$

Die Indizen 1 auf der rechten Seite der Formeln weisen darauf hin, daß die betreffenden Werte der geographischen Breite  $\varphi_1$  entsprechen.

Die *Meridiankonvergenz*  $\mu$  der *Projektion* sowie der *Linearmodul*  $l$  werden aus den ebenen Koordinaten mittels der Reihen

$$\begin{aligned} \mu &= K_1 y + K_3 y^3 + K_5 y^5 \\ l &= 1 + T_2 y^2 + T_4 y^4 \end{aligned} \quad (12)$$

berechnet. Die Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\varrho}{N_1} t_1 & T_2 &= \frac{1}{2R_1^2} \\ K_3 &= \frac{\varrho}{3N_1^3} t_1(-1 - t_1^2 - \eta_1^2 + 2\eta_1^4) & T_4 &= \frac{1}{24R_1^4} (1 + 4\eta_1^2) \\ K_5 &= \frac{\varrho}{15N_1^5} t_1(2 + 5t_1^2 + 3t_1^4) \end{aligned} \quad (13)$$

$R_1$  ist der der geographischen Breite  $\varphi_1$  des Ellipsoides entsprechende mittlere Krümmungshalbmesser.

Der *Längenverzerrungsfaktor* und sein *reziproker Wert*:

$$\begin{aligned} m &= \frac{d}{s} = 1 + ey_k^2 + fAy^2 + gy_k^4 \\ \frac{1}{m} &= \frac{s}{d} = 1 - ey_k^2 - fAy^2 + 5gy_k^4 \end{aligned} \quad (14)$$

wobei  $s$  die Länge des kleineren Bogens der geodätischen Linie durch die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf dem Ellipsoid ist und  $d$  die Entfernung in der Ebene zwischen den beiden Bildpunkten; weiters ist

$$y_k = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \Delta y = y_2 - y_1 \quad (15)$$

und wenn  $R_k$  der dem Mittelpunkt des Liniestückes entsprechende mittlere Krümmungshalbmesser des Ellipsoides ist, dann beträgt

$$e = \frac{1}{2R_k^2} \quad f = \frac{1}{24R_k^2} \quad g = \frac{1}{24R_k^4} \quad (16)$$

Schließlich sind die *Richtungsreduktionen* in Sekunden:

$$\begin{aligned} \Delta''_{12} &= -ay_k \Delta x + b\Delta x \Delta y + cy_k^3 \Delta x - dy_k^2 \Delta y \\ \Delta''_{21} &= +ay_k \Delta x + b\Delta x \Delta y - cy_k^3 \Delta x + dy_k^2 \Delta y \end{aligned} \quad (17)$$

wobei die noch nicht angewandten Bezeichnungen folgende sind:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (18)$$

und

$$a = \frac{\varrho''}{2R_k^2} \quad b = \frac{\varrho''}{12R_k^2} \quad c = \frac{\varrho''}{6R_k^4} \quad d = \frac{\varrho''}{R_k^3} t_k \eta_k^2 \quad (19)$$

(Der Index  $k$  bei  $t$  und auch bei  $\eta$  deutet an, daß der Wert  $t$  bzw.  $\eta$  auf den Mittelpunkt des Liniestückes zu beziehen ist.) Die übrigen Zeichen bedeuten dasselbe wie früher.

Bei kürzeren Entfernungen (bis etwa 20 km) sind die Richtungsreduktionen aus den Formeln

$$\begin{aligned} \Delta''_{12} &= -\frac{\varrho''}{6R_k^2} (2y_1 + y_2) (x_2 - x_1) \\ \Delta''_{21} &= +\frac{\varrho''}{6R_k^2} (y_1 + 2y_2) (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (20)$$

und bei noch kürzeren Entfernungen (bis etwa 10 km) aus der Formel

$$\Delta''_{12} = -\Delta''_{21} = -\frac{\varrho''}{4R_k^2} (y_1 + y_2) (x_2 - x_1) \quad (21)$$

zu berechnen.

Die Werte unter (7), (9), (11), (13), (16) und (19) für den geographischen Breitenbereich von  $45^{\circ}30'$  bis  $48^{\circ}40'$  liegen für entsprechend dichte runde Werte der geographischen Breite bzw. der  $x$ -Koordinate in tabellarischer Form vor [1]. Bei nicht runden Werten muß interpoliert werden.

## 2. Reduktion der ebenen Koordinaten nach dem Maßstabverhältnis der Projektion

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, — wenn sämtliche Koordinaten mit einer Zahl  $m_0$  (etwas kleiner als 1) multipliziert werden — fällt der vorkommende größte Wert der Längenverzerrung günstiger aus. Es ist selbstverständlich,

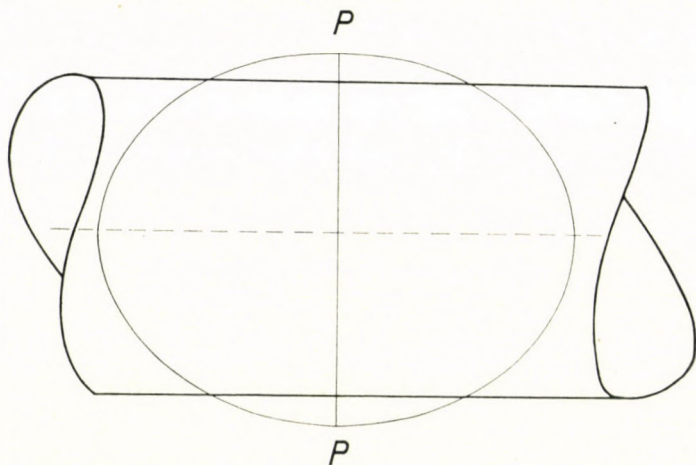


Abb. 6

daß mit der proportionellen Verkleinerung des Koordinaten-Absolutwertes auch die Abbildung und deren Maßstab kleiner wird. Das Bild jedoch bleibt der ursprünglichen Darstellung ähnlich.

Es wurde schon erwähnt, daß diese Projektionsform auch »gesenkte Projektion« genannt wird; ihre Entstehung kann nämlich auch so gedeutet werden, daß die Bildfläche nicht tangential zur Originalfläche, sondern *schneidend* angebracht ist. In unserem Falle bedeutet dies, daß das Ellipsoid bei unveränderter Achsenlage des Zylinders durch Verminderung und eine minimale Veränderung des Zylinderquerschnittes durch den Zylinder geschnitten wird (Abb. 6). Auf diese Weise ist also nicht der Anfangsmeridian längentreu, sondern jene beiden, zu ihm parallelen Schnittlinien, in welchen der Zylinder das Ellipsoid schneidet.

Bei konformer Projektion (also auch bei der *Gauß-Krügerschen Abbildung*) erhält man auch in dem Fall dieselben Ergebnisse wie bei der Multiplikation der Koordinaten mit  $m_0$  oder der entsprechenden Senkung der Pro-

jektion, wenn nicht die Koordinaten um die Verhältniszahl  $m_0$  verringert (also die Projektion gesenkt) werden, sondern die Originalfläche selber um das  $m_0$ -fache reduziert wird und die Bildfläche (in unserem Falle der hypothetische Zylinder) tangential zu der auf diese Weise reduzierten Fläche (in unserem Falle zum reduzierten Ellipsoid) angebracht wird. Auf der linken Seite der ebenfalls stark verzerrten Abbildung 7 befindet sich der Punkt mit den geographischen Koordinaten  $\varphi$  und  $\lambda$  auf dem ursprünglichen Ellipsoid an der

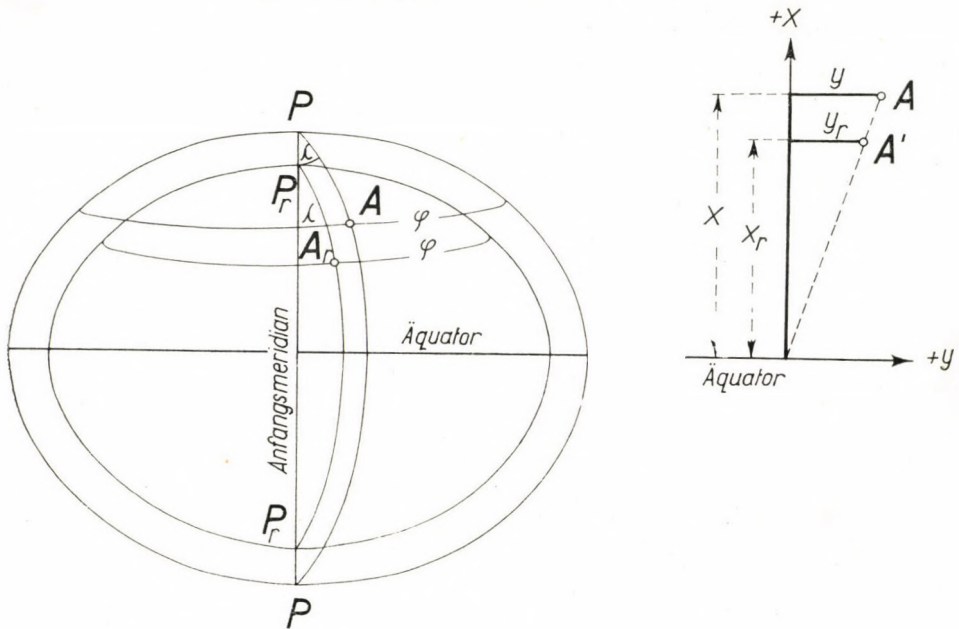


Abb. 7

Stelle  $A$ , auf dem verkleinerten (reduzierten) Ellipsoid an der Stelle  $A_r$ . (Auch diese Abbildung wird von der Schnittlinie der Anfangsmeridianebene mit der Äquatorebene aus betrachtet.) Der rechte Teil der Abbildung gibt das Verhältnis der Koordinaten in der Ebene an.

Nun wenden wir uns den mathematischen Zusammenhängen zu. Von den Reihen (3) ausgehend sind die reduzierten ebenen Koordinaten:

$$\begin{aligned} x_r &= m_0 x = m_0(B + A_2 \lambda^2 + A_4 \lambda^4) \\ y_r &= m_0 y = m_0(A_1 \lambda + A_3 \lambda^3 + A_5 \lambda^5). \end{aligned} \quad (22)$$

Man erhält demnach die reduzierten Koordinaten, indem man die Koeffizienten der Klammerausdrücke durch  $m_0$  multipliziert. Wird die Bogenlänge  $B$  durch  $m_0$  multipliziert, so gelangt man zur entsprechenden Bogenlänge des reduzierten

Ellipsoids. Untersucht man wiederum die Formelgruppe (9), so wird ersichtlich, daß die Multiplikation durch  $m_0$  eine Verkleinerung des Querkrümmungsradius  $N$  bedeutet, d. h. man gelangt auch so zur entsprechenden Abmessung des reduzierten Ellipsoids.

Es wird nun zu den Reihen (10) übergegangen. Nachdem

$$y_r = m_0 y \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{y_r}{m_0} \quad (23)$$

ist, läßt sich feststellen, daß

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \frac{B_2 y_r^2}{m_0^2} + \frac{B_4 y_r^4}{m_0^4} \\ \lambda &= \frac{B_1 y_r}{m_0} + \frac{B_3 y_r^3}{m_0^3} + \frac{B_5 y_r^5}{m_0^5} . \end{aligned} \quad (24)$$

Betrachtet man nun die Formelgruppe (11), so wird ersichtlich, daß die Verbindung von  $m_0$  (und seiner Potenzen) als Teiler und  $B$  als Dividend zum Werte  $m_0 N_1$  führt; wir sind also wiederum zum entsprechenden Querkrümmungsradius des reduzierten Ellipsoids gelangt.

Ähnlich ist die Lage auch bei der *Projektionsmeridiankonvergenz*  $\mu$ , was durch einen Blick auf die oberste Reihe in (12) und auf die linke Gruppe der Formeln (13) festgestellt werden kann.

Es sei nun auf die *Richtungsreduktionen* übergegangen. Ob auch die Formeln (17)–(19) oder (20) bzw. (21) geprüft werden, trifft man auf ähnliche Erscheinungen. Hier wird der mittlere Krümmungshalbmesser, entsprechend dem reduzierten Ellipsoid, im Verhältnis  $m_0$  verkleinert.

Es läßt sich also feststellen, daß für die untersuchten Projektionsberechnungen neue Tabellen anstelle der zum ursprünglichen Ellipsoid gehörenden angefertigt werden sollen, die den bereits vorhandenen ähnlich sind, sich jedoch auf den um  $m_0$  verkleinerten, reduzierten Ellipsoid beziehen.

Nicht ganz so einfach sind die Zusammenhänge bezüglich des *Linearmoduls* und des *Längenverzerrungsfaktors*. Wird z. B. bezüglich des Linearmoduls bloß so viel getan, daß der Radiuswert  $R_1$  in der rechten Formelgruppe unter (13) dem reduzierten Ellipsoid entsprechend angenommen wird und daß dieser reduzierte Radiuswert  $R_{1r}$  und die reduzierten Koordinaten  $y_r$  und  $x_r$  in die untere Formel (12) eingesetzt werden, so erhält man den Linearmodul im Verhältnis zum reduzierten Ellipsoid, nicht aber im Verhältnis zum ursprünglichen. Wir wollen aber gerade letzteren ermitteln, da ja dieser unseren Meßergebnissen entspricht (selbstverständlich in Meereshöhe). Dieses Problem soll deshalb auch eingehender behandelt werden.

Der Linearmodul zwischen dem ursprünglichen Ellipsoid und der ursprünglichen Projektion beträgt die untere Formel (12) beachtend:

$$l = \frac{dt'}{dt} = 1 + T_2 y^2 + T_4 y^4 \quad (25)$$

wobei  $dt$ , der Formel (1) entsprechend, die Länge eines unendlich kleinen Linienelements auf dem ursprünglichen Ellipsoid,  $dt'$  die Länge seines Projektionsbildes ist. (Das Linienelement liegt in der Entfernung  $y$  von der Achse  $x$ .) Werden die Koordinaten um das  $m_0$ -fache reduziert, so nimmt die Länge  $dt'$  offensichtlich auch in demselben Maße ab:

$$dt'_r = m_0 dt' \quad (26)$$

und somit beträgt der reduzierte Linearmodul zwischen dem ursprünglichen Ellipsoid und der reduzierten Abbildung:

$$l_r = \frac{m_0 dt'}{dt} = m_0(1 + T_2 y^2 + T_4 y^4). \quad (27)$$

Da jedoch  $y_r = m_0 y$ , bzw.  $y = y_r/m_0$  ist, kann geschrieben werden:

$$l_r = m_0 \left( 1 + T_2 \frac{y_r^2}{m_0^2} + T_4 \frac{y_r^4}{m_0^4} \right). \quad (28)$$

Anhand der rechten Formeln unter (13) kann festgestellt werden, daß  $T_2/m_0^2$  und  $T_4/m_0^4$  mit den Maßen des reduzierten Ellipsoids berechnete Faktoren sind. Werden diese nun mit  $T_{2r}$  und  $T_{4r}$  bezeichnet, so beträgt der gesuchte Linearmodul:

$$l_r = m_0(1 + T_{2r} y_r^2 + T_{4r} y_r^4). \quad (29)$$

Die Formel zeigt, daß nebst Anwendung der zum reduzierten Ellipsoid gehörenden Koeffizienten und der reduzierten Koordinaten auch noch — der unteren Formel (12) gegenüber — der Wert  $m_0$  als Multiplikator zu beachten ist.

Genau dasselbe gilt für den Längenverzerrungsfaktor und dessen Reziprokwert:

$$m_r = m_0 (1 + e_r y_{kr}^2 + f_r Ay_r^2 + g_r y_{kr}^4) \quad (30)$$

bzw.:

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_0} (1 - e_r y_{kr}^2 - f_r Ay_r^2 + 5g_r y_{kr}^4). \quad (31)$$



Die betreffenden Tabellen sind also auch dem verkleinerten Ellipsoid entsprechend anzulegen, die Klammernausdrücke müssen jedoch noch durch  $m_0$  bzw. durch  $1/m_0$  multipliziert werden. Die Tabelle kann selbstverständlich auch so angeordnet werden, daß durch  $m_0$  bzw.  $1/m_0$  multipliziert wird und die so multiplizierten Werte tabellarisch zusammengefaßt werden. Das erste Glied wird auf diese Weise jedoch nicht 1, sondern  $m_0$  bzw.  $1/m_0$  sein.

Ein Nachteil der angeführten einfachen Reduktion (der Zylindersenkung bzw. der Ellipsoidverkleinerung) ist, daß bei der Abbildung am Anfangsmeridian, der bei der ursprünglichen Projektion längentreu ist, z. B. ein am Südrande Ungarns gelegener Punkt um etwa 504 m, ein am Nordrande des Landes gelegener Punkt um etwa 539 m nach Süden verschoben wird, d. h. das Verfahren verursacht — den ursprünglich richtigen  $x$ -Koordinaten gegenüber — auch am übrigens längentreuen Anfangsmeridian ebenfalls bedeutende Abweichungen von etwa 500 m. Eine ähnliche Abweichung (Verrückung) tritt selbstverständlich auf jedem Gebiet, richtiger auf jedem Punkt jedes beliebigen Anfangsmeridians auf und steht mit der vom Äquator gemessenen Entfernung des Punktes im Verhältnis.

### 3. Lokale Reduktion der ebenen Koordinaten gemäß dem Maßstabsverhältnis der Projektion

Soll vermieden werden, daß die  $x$ -Koordinaten am Anfangsmeridian den entsprechenden Koordinaten der ursprünglichen Projektion gegenüber die erwähnte bedeutende Änderung erleiden, kann auch so verfahren werden, daß in der Landesmitte oder eventuell in der Nähe des Südrandes irgendein Punkt am Anfangsmeridian ausgewählt wird, dessen  $x$ -Koordinate auch weiterhin *gleich der Äquatorentfernung des Punktes am ursprünglichen Ellipsoid* gesetzt wird. Nennen wir diesen unsererseits bestimmten Punkt den *Basispunkt*. (Der Basispunkt ist nicht zu verwechseln mit dem Anfangspunkt irgendeines Koordinatensystems!) Man bezeichne die am Meridian des ursprünglichen Ellipsoids gemessene Äquatorentfernung dieses Basispunktes, d. h. dessen auf die ursprüngliche Projektion bezogene  $x$ -Koordinate durch  $q$ . Die Reduktion wird nun so ausgeführt, daß die vollständige  $y$ -Koordinate sowie die vom Basispunkt gemessene Teilkoordinate  $x'$  sämtlicher ins Abbildungsbereich fallender Punkte durch  $m_0$  multipliziert wird (*lokale Reduktion*). Der linke Teil der Abb. 8 stellt die Lage eines beliebigen Punktes  $A$  auf der ursprünglichen Projektion sowie entsprechend der im 2. Kapitel beschriebenen Reduktion dar. Der rechte Teil der Abbildung wiederum gibt die Lage des Basispunktes bzw. des Punktes  $A$  auf der ursprünglichen Projektion und entsprechend der lokalen Reduktion wieder. In Wirklichkeit — was eben durch die Abbildung nicht zur Genüge veranschaulicht werden kann — besteht zwischen den zweier-

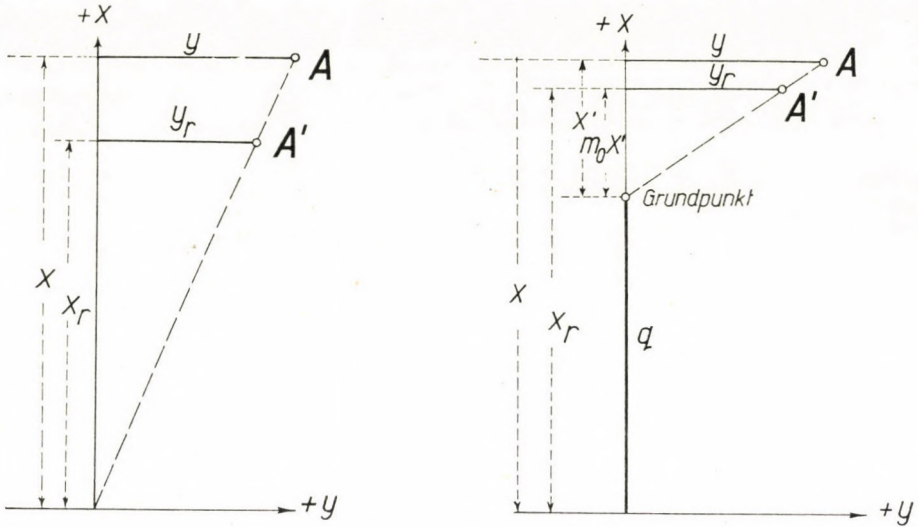


Abb. 8

lei  $x_r$ -Koordinaten ein wesentlicher Unterschied, da der Meridianbogen  $q$  im Falle Ungarns etwa das Dreizehnfache der Nord-Süd-Erstreckung des Landes beträgt.

Bezeichnet man die Koordinaten irgendeines ins Abbildungsbereich fallenden Punktes auf der ursprünglichen Projektion durch  $x$  und  $y$ , so sind die Koordinaten nach der erwähnten Reduktion

$$x_r = q + m_0(x - q) = m_0 x + Q \quad (32)$$

$$y_r = m_0 y$$

wobei

$$Q = q - m_0 q. \quad (33)$$

Die Glieder  $m_0 x$  bzw.  $m_0 y$  der Gleichungen (32) ergeben sich laut Gleichungen (22) auf Grund der auf das  $m_0$ -fach verkleinerte Ellipsoid bezogenen entsprechenden Tabelle. Nachdem  $Q$  ein konstanter Wert ist, wird die Tabelle einfach so verändert, daß in die Spalte der Werte  $B$  anstelle der zum verkleinerten Ellipsoid gehörenden Werte der Meridianbogenlänge  $B$  der Wert

$$B_q = B + Q \quad (34)$$

eingetragen wird. Die übrigen Rubriken der Tabelle bleiben unverändert. Will man nun aus den laut (32) reduzierten Koordinaten geographische Koordinaten berechnen, so ergibt die Tabelle dem  $x_r$  Wert des betreffenden Punktes entsprechend den richtigen Wert  $\varphi_1$  und man erhält in üblicher Weise die geographischen Koordinaten. (Die Form der entsprechenden Reihen ist unter (10) gegeben. Die Koeffizienten  $B$  sind auf das verkleinerte Ellipsoid bezogen.)

Zur Berechnung der *Meridiankonvergenz der Projektion* und des *Linear-moduls* werden die zu  $\varphi_1$  gehörenden Koeffizienten  $K$  bzw.  $T$  aus den entsprechenden Tabellen ausgesucht. Die auf das verkleinerte Ellipsoid bezogenen entsprechenden Tabellen müssen daher in keiner Weise verändert werden.

In den Tabellen, die zur Bestimmung der *Richtungsreduktion* sowie des *Längenverzerrungsfaktors* und dessen *Reziprokwertes* dienen, sollen in die Spalte  $x_k$  die Werte  $x_k + Q$  eingetragen werden. Hiernach kann man die auf das verkleinerte Ellipsoid bezogenen Tabellen in der üblichen Weise benützen. (Bezüglich der Richtungsreduktionen siehe Gleichungen (17) bzw. (20) und (21). Die Koeffizienten sind selbstverständlich auf das verkleinerte Ellipsoid zu beziehen und die Werte  $x$  und  $y$ , sowie  $\Delta x$  und  $\Delta y$  sind die Koordinaten der reduzierten Projektion.)

Aus Obengesagtem geht deutlich hervor, daß die lokale Reduktion der allgemeinen Projektionsreduktion (Senkung) gegenüber keine besonderen Schwierigkeiten verursacht. Es ist nämlich nichts weiteres zu tun als bloß in der auf das verkleinerte Ellipsoid bezogenen Tabelle, in der die Meridianbogenlängen  $B$  angegeben sind, in jeder einzelnen Reihe den entsprechenden  $B$ -Wert mit dem Wert  $B + Q$  zu ersetzen, und in all jenen Tabellen, in denen  $x_k$  vorkommt, anstelle dieses Wertes den Wert  $x_k + Q$  einzusetzen.

Der Basispunkt muß natürlich nicht mit irgendeinem fixierten oder sogar unfixierten geodätischen Punkt zusammenfallen, da die Werte  $q$  bzw.  $Q$  — wie bereits erwähnt — nach Belieben angenommen werden dürfen. Der  $Q$ -Wert kommt nämlich bloß bei der Umformung der Tabellen vor, bei den Projektionsberechnungen schon nicht mehr. Es scheint dennoch zweckmäßig, den Basispunkt so zu wählen, daß  $Q$  ein runder Meterwert sei. Ist z. B.  $m_0 = 0,9999$ , dann befindet sich im Falle von  $l = 522$  der am Anfangsmeridian ausgewählte Basispunkt ungefähr auf der geographischen Breite von  $47^\circ 12' 30''$ , etwa der mittleren geographischen Breite Ungarns.

Wird der Basispunkt südlich vom Lande gewählt, so beträgt die Verschiebung der  $x$ -Koordinate am Nordrande des Landes, im Vergleich zur  $x$ -Koordinate der ursprünglichen Projektion etwa 35 m, während — wenn sich der Basispunkt auf der mittleren geographischen Breite des Landes befindet — die maximale Verschiebung nicht mehr als  $\pm 17,5$  m ist. Nachdem die Bestimmung der Lage des Basispunktes bei der Ausführung der Projektionsberechnungen keinen Nachteil noch Vorteil bedeutet, dürfte sich die Bestimmung des Basispunktes in den mittleren geographischen Breiten des Landes als günstiger erweisen.

#### 4. Verschiebung des Koordinatensystems

Wie bereits eingangs erwähnt, wird — damit das gesamte Abbildungsreich des Koordinatensystems in den ersten Quadranten zu liegen kommt, damit

also sämtliche Koordinaten positiv werden — anstelle des Bildes des Anfangsmeridians eine von diesem westlich, außerhalb des Abbildungsbereiches liegende parallele Gerade als die eine Koordinatenachse ( $\xi$ ) angenommen. Um andererseits die nördlichen Koordinaten nicht vom fernabgelegenen Äquator aus berechnen zu müssen, wird als andere ( $\eta$ ) Achse eine mit dem

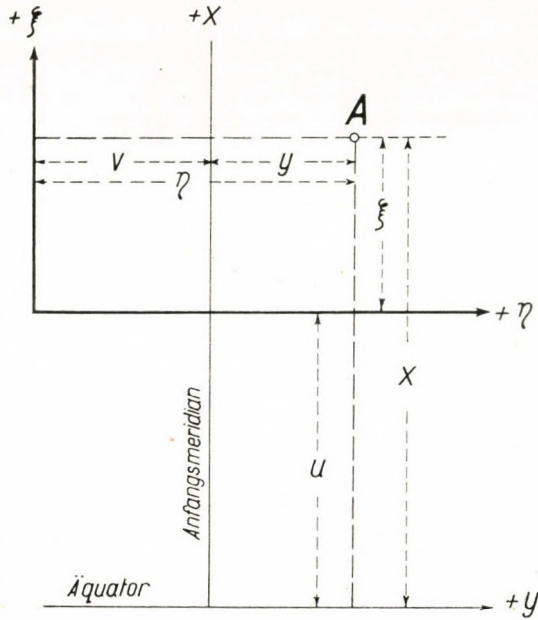


Abb. 9

Äquator parallele, südlich des Abbildungsbereiches laufende Gerade gewählt. Man bezeichne den Bildabstand des Äquatorbildes (der originellen  $y$ -Achse) von der neuen  $\eta$ -Achse mit  $u$ , des Anfangsmeridiansbildes (der originellen  $x$ -Achse) von der neuen  $\xi$ -Achse mit  $v$ . In diesem Falle betragen die auf das verschobene System bezogenen  $\xi$ - und  $\eta$ -Koordinaten (Abb. 9):

$$\xi = x - u \quad \text{und} \quad \eta = y + v \quad (35)$$

bzw.

$$x = \xi + u \quad \text{und} \quad y = \eta - v. \quad (36)$$

Es ist einfach von den geographischen Koordinaten zu den ebenen Koordinaten des verschobenen Systems überzugehen. Gleichungen (8) und (35) beachtend

$$\begin{aligned} \xi &= B + A_2 \lambda^2 + A_4 \lambda^4 - u \\ \eta &= A_1 \lambda + A_3 \lambda^3 + A_5 \lambda^5 + v. \end{aligned} \quad (37)$$

Wird in die Spalte  $B$  der betreffenden Tabelle überall der Wert  $(B - u)$  eingesetzt, so kann die  $\xi$ -Koordinate in der üblichen Weise berechnet werden. Bei der  $\eta$ -Koordinate hingegen muß der mit der üblichen Berechnungsmethode ermittelte Wert noch zu  $v$  addiert werden.

Es ist jedoch bei weitem nicht so einfach, die *geographischen Koordinaten* direkt von den  $\xi$ - und  $\eta$ -Koordinaten zu berechnen. Werden nämlich in die Gleichung (10) die Beziehungen (36) eingesetzt, so gelangt man, nach entsprechender Umordnung, zu den Reihen:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi'_1 + B'_1 \eta + B'_2 \eta^2 + B'_3 \eta^3 + B'_4 \eta^4 \\ \lambda &= B''_0 + B''_1 \eta + B''_2 \eta^2 + B''_3 \eta^3 + B''_4 \eta^4 + B''_5 \eta^5 \end{aligned} \quad (38)$$

wo

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= + \varphi_1 + B_2 v^2 + B_4 v^4 & B''_0 &= - B_1 v - B_3 v^3 - B_5 v^5 \\ B'_1 &= - 2B_2 v - 4B_4 v^3 & B''_1 &= + B_1 + 3B_3 v^2 + 5B_5 v^4 \\ B'_2 &= + B_2 + 6B_4 v^2 & B''_2 &= - 3B_3 v - 10B_5 v^3 \\ B'_3 &= - 4B_4 v & B''_3 &= + B_3 + 10B_5 v^2 \\ B'_4 &= + B_4 & B''_4 &= - 5B_5 v \\ & & B''_5 &= + B_5 \end{aligned} \quad (39)$$

Die Reihen der *Meridiankonvergenz der Projektion* und des *Linearmoduls* auf Grund der Beziehungen (12):

$$\begin{aligned} \mu &= K'_0 + K'_1 \eta + K'_2 \eta^2 + K'_3 \eta^3 + K'_4 \eta^4 + K'_5 \eta^5 \\ l &= T'_0 + T'_1 \eta + T'_2 \eta^2 + T'_3 \eta^3 + T'_4 \eta^4 \end{aligned} \quad (40)$$

wo

$$\begin{aligned} K'_0 &= - K_1 v - K_3 v^3 - K_5 v^5 & T'_0 &= + 1 + T_2 v^2 + T_4 v^4 \\ K'_1 &= + K_1 + 3K_3 v^2 + 5K_5 v^4 & T'_1 &= - 2T_2 v - 4T_4 v^3 \\ K'_2 &= - 3K_3 v - 10K_5 v^3 & T'_2 &= + T_2 + 6T_4 v^2 \\ K'_3 &= + K_3 + 10K_5 v^2 & T'_3 &= - 4T_4 v \\ K'_4 &= - 5K_5 v & T'_4 &= + T_4 \\ K'_5 &= + K_5 \end{aligned} \quad (41)$$

Die Reihe des *Längenverzerrungsfaktors* und seines *Reziprokwertes* beträgt, von den Ausdrücken (14) ausgehend:

$$\begin{aligned} m &= M' + h'_1 \eta_k + h'_2 \eta_k^2 + h'_3 \eta_k^3 + h'_4 \eta_k^4 + f \Delta \eta^2 \\ \frac{1}{m} &= M'' + h''_1 \eta_k + h''_2 \eta_k^2 + h''_3 \eta_k^3 + h''_4 \eta_k^4 - f \Delta \eta^2 \end{aligned} \quad (42)$$

wo

$$\begin{aligned}
 M' &= +1 + ev^2 + gv^4 & M'' &= +1 - ev^2 + 5gv^4 \\
 h'_1 &= -(2ev + 4gv^3) & h''_1 &= +2ev - 20gv^3 \\
 h'_2 &= +e + 6gv^2 & h''_2 &= -e + 30gv^2 \\
 h'_3 &= -4gv & h''_3 &= -20gv \\
 h'_4 &= +g & h''_4 &= +5g
 \end{aligned} \tag{43}$$

Erfolgt die Darstellung auf einer reduzierten Projektion, so ist die Reihe des Linearmoduls und Längenverzerrungsfaktors noch mit  $m_0$ , die Reihe des reziproken Längenverzerrungsfaktors mit  $1/m_0$  zu multiplizieren.

Auf Grund der Formel (17) der *Richtungsreduktionen*:

$$\begin{aligned}
 A''_{12} &= + [(+3cv^2 - a) \Delta\xi + 2dv\Delta\eta] \eta_k - (3cv\Delta\xi + d\Delta\eta) \eta_k^2 + \\
 &\quad + c\Delta\xi \cdot \eta_k^3 + (av - cv^3) \Delta\xi - dv^2 \Delta\eta + b\Delta\xi\Delta\eta \\
 A''_{21} &= - [(+3cv^2 - a) \Delta\xi + 2dv\Delta\eta] \eta_k + (3cv\Delta\xi + d\Delta\eta) \eta_k^2 - \\
 &\quad - c\Delta\xi \cdot \eta_k^3 - (av - cv^3) \Delta\xi + dv^2 \Delta\eta + b\Delta\xi\Delta\eta.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Bei kürzeren Entfernungen können die nach den Formeln (20) bzw. (21) der Richtungsreduktionen entwickelten Werte angewandt werden:

$$A''_{12} = - \frac{\varrho''}{6R_k^2} (2\eta_1 + \eta_2 - 3v) (\xi_2 - \xi_1) \tag{45}$$

$$A''_{21} = + \frac{\varrho''}{6R_k^2} (\eta_1 + 2\eta_2 - 3v) (\xi_2 - \xi_1)$$

bzw.

$$A''_{12} = - A''_{21} = - \frac{\varrho''}{4R_k^2} (\eta_1 + \eta_2 - 2v) (\xi_2 - \xi_1). \tag{46}$$

Betrachtet man nun die Reihen (38)–(44), so muß man feststellen, daß deren Anwendung sehr schwerfällig ist. Wenn die Tabellen auch vorliegen würden, müßte sehr viel interpoliert werden und die Reihen bestünden dann auch noch aus zu viel Gliedern. Einfach zu berechnen bleiben jedoch die Formeln (45) und (46), in welchen das letzte Glied der ersten Klammer *konstant* ist. Hieraus können folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Es ist richtiger und leichter, die mit den geographischen Koordinaten zusammenhängenden Berechnungen, sowie all jene Berechnungen, in welche die Meridiankonvergenz der Projektion, der Längenverzerrungsfaktor und der genauere Wert der Richtungsreduktion oder die bei größeren Entfernungen auftretende Richtungsreduktion eingeht, im *ursprünglichen Koordinatensystem* auszuführen. Aufgaben dieser Art kommen im allgemeinen im Triangulierungsnetz erster und zweiter Ordnung vor und bestehen im überwiegenden Teil

aus Richtungsreduktionsberechnungen. Diese müssen jedoch für sämtliche Richtungen ausgeführt werden. Es wird daher vorgeschlagen, die Berechnungsarbeiten der Triangulierung erster und zweiter Ordnung unbedingt im *ursprünglichen Koordinatensystem* vorzunehmen, es ist aber zweckmäßig, sämtliche  $x$ -Koordinaten um 5 000 000 m zu verkürzen. Sind nun die Koordinaten der Punkte erster und zweiter Ordnung im ursprünglichen Koordinatensystem auf diese Weise bestimmt, geht man mittels der Formeln (35) auf das *verschobene Koordinatensystem* über.

2. Bei der Triangulierung dritter und niedriger Ordnung bestehen die Projektionsberechnungen zumeist bloß aus der Berechnung von Richtungsreduktionen. Die Entfernungen sind hier bereits geringer, jedoch nimmt auch die Schärfe der Berechnung ab. Man kann ruhig die Formeln (45) oder (46) anwenden. Nachdem der überwiegende Teil der Triangulationspunkte zu diesen Ordnungen gehört, ist es ein großer Vorteil, daß das gesamte Abbildungsbereich in den ersten Quadranten fällt. Nach alledem wird vorgeschlagen, die Punkte dritter und niedriger Ordnung bereits im *verschobenen Koordinatensystem* zu berechnen.

### 5. Umrechnung zwischen benachbarten Projektionsstreifen

Wenn ein Land (oder ein vom Gesichtspunkt der Vermessung aus einheitliches Gebiet) nicht in einem einzigen Projektionssystem abgebildet werden kann, dann ergibt sich wegen der Anschlüsse unbedingt die Notwendigkeit einer *Umrechnung zwischen den benachbarten Systemen* (Projektionsstreifen). Zwischen den benachbarten *Gauß-Krügerschen Projektionsstreifen* müssen die Triangulationspunkte zwischen den beiden anschließenden Projektionsstreifen im allgemeinen östlich und auch westlich vom gemeinsamen Randmeridian innerhalb der geographischen Länge von  $0,5^\circ$  umgerechnet werden. In der Richtung  $y$  entspricht das für Ungarn einer maximalen Entfernung von rund 40 km vom Randmeridian aus berechnet. Der Umrechnungsstreifen ist demnach zweimal 40 km, d. h. 80 km breit.

Zur Umrechnung *zwischen den benachbarten Projektionsstreifen* entwickelte Verfasser auf Grund der Prinzipien des sogenannten *Reduktionsverfahrens* eine zur Bearbeitung mit der Rechenmaschine geeignete und verhältnismäßig einfache, schnelle Methode [1]. Hierzu wurde am Randmeridian bei jedem runden  $5'$  der geographischen Breite je ein sogenannter Anschlußpunkt aufgenommen. Beim Reduktionsverfahren erfolgt nämlich die Umrechnung mittels eines oder mehrerer Anschlußpunkte. Vom Anschlußpunkt wird erfordert, daß seine ebenen Koordinaten in beiden Systemen (Projektionsstreifen) bekannt seien. Zur Umrechnung wird aus dem erwähnten Anschlußpunktsystem immer jener Anschlußpunkt ausgewählt, der dem umzurechnen-

den Punkt am nächsten liegt. Auf diese Weise ist die Differenz zwischen den  $x$ -Koordinaten des Anschlußpunktes und des umzurechnenden Punktes (der Wert  $\Delta x$ ) in jedem Fall kleiner als 5000 m. Das Verfahren, das Ergebnisse von Millimeterschärfe liefert, besteht aus sieben Schritten, die mathematisch folgendermaßen aussehen:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \Delta y_1 &= y_1 - y_0 & \Delta x_1 &= x_1 - x_0 \\
 2. \quad (\Delta y_2) &= p\Delta y_1 + q\Delta x_1 & (\Delta x_2) &= -q\Delta y_1 + p\Delta x_1 \\
 3. \quad m &= [41 \cdot 10^{-16}((\Delta y_2) - \Delta y_1) + V](\Delta y_1 + (\Delta y_2)) + 1 \\
 4. \quad \Delta y'_2 &= m(\Delta y_2) & \Delta x'_2 &= m(\Delta x_2) & (47) \\
 5. \quad d\delta &= 41 \cdot 10^{-16}(\Delta y_1 \Delta x_1 - \Delta y'_2 \Delta x'_2) + E(\Delta x_1 + \Delta x'_2) \\
 6. \quad \Delta y''_2 &= \Delta x'_2 d\delta & \Delta x''_2 &= -\Delta y'_2 d\delta \\
 7. \quad y_2 &= -y_0 + \Delta y'_2 + \Delta y''_2 & x_2 &= x_0 + \Delta x'_2 + \Delta x''_2.
 \end{aligned}$$

Der Index 1 bezieht sich auf die Koordinaten des umzurechnenden Punktes im Streifen, *von welchem* aus die Umrechnung ausgeführt wird (Projektionssystem Nr. 1), der Index 2 wiederum gehört zu den Koordinaten desselben Punktes im anderen Streifen, also im Streifen, *in welchem* umgerechnet wird (Projektionssystem Nr. 2). Der Index 0 gibt die Koordinaten des Anschlußpunktes im Projektionssystem Nr. 1. Nachdem die beiden Streifen im Vergleich zum Randmeridian symmetrisch sind, ist die Koordinate  $x_0$  des Anschlußpunktes in beiden Systemen identisch, die Koordinaten  $y_0$  weichen bloß im Vorzeichen voneinander ab. Ebenfalls nur im Vorzeichen weichen in den beiden Systemen die Meridiankonvergenzen der Projektionen ab.

$$p = \cos 2\mu_0 \quad q = \sin 2\mu_0 \quad (48)$$

wo  $\mu_0$  die Meridiankonvergenz der Projektion beim Anschlußpunkt im 1. Projektionssystem ist; weiters ist

$$V = -(ey_0 - z) \quad E = \frac{ay_0}{\rho''} \quad (49)$$

wo  $e$  und  $a$  die durch die Formelgruppen (16) bzw. (19) ergebenden Werte sind, während  $z$  den Näherungswert in der Proportion der Längenverzerrungsfaktoren auftretenden kleinen Glieder höherer Ordnung darstellt. Auf Grund der einschlägigen und unter [1] eingehend behandelten Untersuchungen ist der Wert von  $z$  beim 2°-igen, 3°-igen und 6°-igen Streifensystem der Reihe nach:

$$-150 \cdot 10^{-16} \quad -1000 \cdot 10^{-16} \quad -10\,000 \cdot 10^{-16}$$



Beim 3. und 5. Schritt sind die Koordinatendifferenzen  $\Delta y$  und  $\Delta x$  bloß auf Meter abgerundet anzugeben. In der Umrechnungstabelle sind die Werte  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $V$  und  $E$  für einen jeden Anschlußpunkt angegeben.

Es soll nun untersucht werden, welche Änderung die *Reduktion (Senkung) der Projektion* bzw. die *Anwendung des verschobenen Koordinatensystems* beim Umrechnungsverfahren hervorruft.

1. Wird das Maßverhältnis  $m_0$  der Projektion auf beide gesamte Projektionsstreifen angewandt, d. h. reduziert man die  $y$ - sowie die vom Äquator aus berechneten ganzen  $x$ -Koordinaten (*allgemeine Reduktion*), so ist es klar, daß das Verhältnis der beiden benachbarten Streifen unverändert bleibt. Es ist jedoch selbstverständlich, daß die Werte  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $V$  und  $E$  auf dem verkleinerten Ellipsoid zu berechnen sind. Werden die neuen Werte mit dem Index  $r$  versehen, so ergibt sich im Gegensatz zu den Daten der Tabelle:

$$\begin{aligned} x_{0r} &= m_0 x_0 & V_r &= \frac{V}{m_0} \\ y_{0r} &= m_0 y_0 & E_r &= \frac{E}{m_0} \end{aligned} \quad (50)$$

Prinzipiell müßte eigentlich auch der im 3. Schritt vorkommende Wert  $41 \cdot 10^{-16}$  mit  $m_0$  dividiert werden, die Zahl wird jedoch — teils, weil die Abweichung sehr gering ist, teils, weil der Wert  $41 \cdot 10^{-16}$  an sich auch schon ein aufgerundeter Näherungswert ist, mit einer Vernachlässigung tief unter der Berechnungsschärfe — unverändert beibehalten.

2. Wird nun bloß eine *lokale Reduktion* ausgeführt, d. h. nur die  $y$ -Koordinaten in ihrer Gänze, die  $x$ -Koordinaten dagegen nur teilweise, nämlich lediglich in ihren vom ausgesuchten Basispunkt aus berechneten Teilwerten reduziert werden, bleibt das Verhältnis zwischen den beiden benachbarten Streifen auch weiterhin unverändert, angenommen natürlich, daß der Basispunkt auf beiden Streifen gleich weit vom Äquator liegt. Die bereits zusammengestellten Tabellen müssen umgeformt werden, genau wie im Falle der allgemeinen Reduktion, allerdings mit dem Unterschied, daß hier anstelle der Werte  $x_0$  die durch die Formel

$$x_{0r} = m_0 x_0 + Q \quad (51)$$

berechneten, der oberen Beziehung (32) entsprechenden Werte eingesetzt werden.

3. Bei Anwendung des *verschobenen Koordinatensystems* verändert sich das Wesen der Umrechnung auch nicht. Wenn man im ursprünglichen Projek-

tionssystem arbeitet, muß an den Umrechnungstabellen nur soviel geändert werden, daß anstelle der in beiden Streifen identischen  $x_0$ -Koordinaten der Anschlußpunkte der ebenfalls in beiden Streifen identische Wert  $\xi_0$ , und anstelle des mit den ersten Streifen bezogenen  $y_0$ -Wertes die auf den ersten Streifen bezogene  $\eta_{01}$ - bzw. die auf den zweiten Streifen bezogene  $\eta_{02}$ -Koordinate

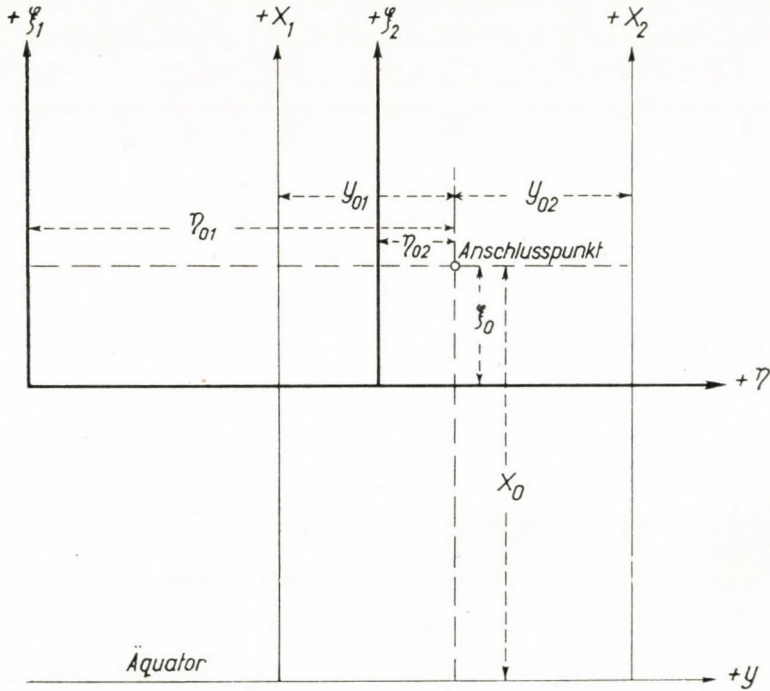


Abb. 10

eingesetzt wird (Abb. 10). In den Ausdrücken (47) wird hiernach statt  $y$  überall  $\eta$ , statt  $x$  überall  $\xi$  verstanden. Der erste Schritt lautet nunmehr:

$$\Delta\eta_1 = \eta_1 - \eta_{01} \quad \Delta\xi_1 = \xi_1 - \xi_0 \quad (52)$$

und der siebente:

$$\eta_2 = \eta_{02} + \Delta\eta'_2 + \Delta\eta''_2 \quad \xi_2 = \xi_0 + \Delta\xi'_2 + \Delta\xi''_2 \quad (53)$$

Arbeitet man mit *reduzierten Projektionssystemen*, so müssen die in Punkt 1 bzw. in Punkt 2 erwähnten tabellarischen Umänderungen sinngemäß angewandt werden.

## 6. Umrechnung vom reduzierten 3°-igen Streifen auf den ursprünglichen 6°-igen Streifen

Es sei angenommen, daß zu topographischen Karten die 6°-igen und zur Abbildung in großem Maßstabe die 3°-igen Projektionsstreifen benutzt werden, u. zw. die letzteren eventuell im reduzierten (gesenkten) System. Die Triangulierungspunkte werden bei beiderlei Abbildungen nötig sein; aus diesem Grunde müssen die im 3°-igen Streifen bestimmten Koordinaten der Triangulierungspunkte in jedem Falle auf den 6°-igen Streifen umgerechnet werden. Verfasser hat das Umrechnungsverfahren betreffs der ursprünglichen Projektionssysteme (d. h. wenn das 3°-ige Streifensystem auch nicht reduziert ist) ebenfalls ausgearbeitet. Die Ableitungen sowie die nötigen Tabellen sind alle im Werke [1] zu finden. Die sieben Schritte der Umrechnung sind folgende:

1.  $\Delta y_1 = y_1 - y_{01}$   $\Delta x_1 = x_1 - x_{01}$
2.  $(\Delta y_2) = p\Delta y_1 + q\Delta x_1$   $(\Delta x_2) = -q\Delta y_1 + p\Delta x_1$
3.  $m = [41 \cdot 10^{-16}((\Delta y_2) - \Delta y_1) + W] (\Delta y_1 + (\Delta y_2)) + Q((\Delta y_2) - \Delta y_1) + L$
4.  $\Delta y'_2 = m(\Delta y_2)$   $\Delta x'_2 = m(\Delta x_2)$  (54)
5.  $d\delta = 41 \cdot 10^{-16}(\Delta y_1 \Delta x_1 - \Delta y'_2 \Delta x'_2) + E_1 \Delta x_1 + E_2 \Delta x'_2$
6.  $\Delta y''_2 = \Delta x'_2 d\delta$   $\Delta x''_2 = -\Delta y'_2 d\delta$
7.  $y_2 = y_{02} + \Delta y'_2 + \Delta y''_2$   $x_2 = x_{02} + \Delta x'_2 + \Delta x''_2$

Die Unterschiede zwischen Gruppe (54) und Gruppe (47) ergeben sich daraus, daß die beiden Streifen nicht kongruent sind, keinen gemeinsamen Randmeridian besitzen (die Anschlußpunkte liegen mehrere festgesetzte Meridiane entlang, 2°, 3° bzw. 4° vom Anfangsmeridian des 6°-igen Streifens entfernt; auch hier liegen die Punkte an einem Meridian bei den runden 5'-igen Werten der geographischen Breite), weshalb auch die beiden Streifen *asymmetrisch* ausfallen. Das zeigt sich auch schon in der Tatsache, daß die Koordinaten der Anschlußpunkte in den beiden Systemen selbst in ihrem Absolutwert nicht übereinstimmen. Die von den bisherigen abweichenden und die bisher nicht benützten Symbole sind folgende:

$$p = \cos(\mu_{01} - \mu_{02}) \quad q = \sin(\mu_{01} - \mu_{02}) \quad (55)$$

wo  $\mu_{01}$  und  $\mu_{02}$  die Meridiankonvergenz der Projektion beim Anschlußpunkt im Projektionsstreifen 1, bzw. 2 ist;

$$\begin{aligned} W &= \frac{e}{2}(y_{02} - y_{01}) & Q &= \frac{e}{2}(y_{02} + y_{01}) \\ L &= 1 + e(y_{02} + y_{01})(y_{02} - y_{01}) + P & (56) \\ E_1 &= \frac{ay_{01}}{\rho''} & E_2 &= -\frac{ay_{02}}{\rho''} \end{aligned}$$

Der Wert  $P$  ist der Näherungswert der kleinen Glieder höherer Ordnung; er ist bei den vom Anfangsmeridian des 6°-igen Streifens verschieden weit liegenden Anschlußpunkten verschieden, u. zw. zwischen 0 und  $3700 \cdot 10^{-10}$ . In [1] sind diese Werte tabellarisch angegeben.

Bevor nun die infolge der Reduktion (Senkung) des 3°-igen Streifensystems auftretenden Änderungen untersucht würden, sei bezüglich einer von irgendeinem Anschlußpunkt ausgehenden Strecke das Verhältnis der *Längenverzerrungsfaktoren* untersucht, die zum reduzierten 3°-igen und ursprünglichen 6°-igen Streifen gehören:

$$m = \left[ \frac{1}{m_0} (1 - e_r y_{rk1}^2 + 5g_r y_{rk1}^4 - f_r \Delta y_r^2) \right] (1 + e y_{k2}^2 + g y_{k2}^4 + f \Delta y_2^2). \quad (57)$$

Es ist überflüssig hier die Ableitung der sich hieraus ergebenden und unter (54) im 3. Schritt aufgezeichneten Form zu behandeln. Statt dessen seien die Glieder in runden Klammern des ersten Gliedes einzeln geprüft.

$$e_r = \frac{1}{2R_k^2} = \frac{1}{2m_0^2 R^2} = \frac{e}{m_0^2} \quad y_{rk1}^2 = m_0^2 y_{k1}^2. \quad (58)$$

Das Produkt ist demnach:

$$e_r y_{rk1}^2 = \frac{e}{m_0^2} m_0^2 y_{k1}^2 = e y_{k1}^2. \quad (59)$$

Ähnlicherweise:

$$g_r y_{rk1}^4 = g y_{k1}^4 \quad f_r \Delta y_r^2 = f \Delta y^2 \quad (60)$$

wo der Index  $r$  auf den reduzierten Wert, seine Abwesenheit auf den entsprechenden Wert der ursprünglichen Projektion hinweist. Die Beziehungen (59) und (60) zeigen, daß im 3. Schritt der Wert  $m$  auf Grund der entsprechenden Werte und Tabellen der ursprünglichen Projektion berechnet werden kann, bloß sollte der auf diese Weise erhaltene Wert noch mit  $m_0$  multipliziert werden.

Prüft man den Wert  $d\delta$  im 5. Schritt, so gelangt man ebenfalls zu dem Ergebnis, daß hier getrost mit den entsprechenden Werten der ursprünglichen Projektion gerechnet werden darf.

Am 2. Projektionsstreifen erhält man für den Längenverzerrungsfaktor und die Richtungsreduktion desto genauere Werte, je mehr die vorläufige Koordinatendifferenzen der umzurechnenden Punkte vom Anschlußpunkt ( $\Delta y_2$ ) und ( $\Delta x_2$ ) die endgültigen Werte annähern. Es ist daher zweckmäßig, den 1. Schritt der Gruppe (54) zu ergänzen und die Schritte

$$\begin{aligned} \text{1a. } \Delta y_{1r} &= y_{1r} - y_{01r} & \Delta x_{1r} &= x_{1r} - x_{01r} \\ \text{1b. } \Delta y_1 &= \frac{\Delta y_{1r}}{m_0} & \Delta x_1 &= \frac{\Delta x_{1r}}{m_0} \end{aligned} \quad (61)$$

auszuführen, bevor noch auf die Transformation des 2. Schrittes übergegangen wird. War das der Fall, so können die Schritte 2—7 der Gruppe (54) unverändert ausgeführt werden, da es derart überflüssig wurde, den im Schritte 1b laut Schritt 3 erhaltenen Wert  $m$  mit dem Faktor  $1/m_0$  zu multiplizieren. Die Originaltabellen sind also unverändert gültig und bei der Umrechnung muß bloß der Schritt 1b eingeschaltet werden.

Wenn nun in der reduzierten Projektion des 3°-igen Streifens auch noch *das Koordinatensystem verschoben* ist, dann müssen in den Tabellen anstelle der Werte  $x_{01}$  und  $y_{01}$  die Koordinaten  $\xi_{01}$  und  $\eta_{01}$  der Anschlußpunkte eingetragen werden. Anstelle des 1. Schrittes der Gruppe (54) bzw. der Schritte (61) sind die Schritte

$$\begin{aligned} \text{1a. } \Delta\eta_1 &= \eta_1 - \eta_{01} & \Delta\xi_1 &= \xi_1 - \xi_{01} \\ \text{1b. } \Delta y_1 &= \frac{\Delta\eta_1}{m_0} & \Delta x_1 &= \frac{\Delta\xi_1}{m_0} \end{aligned} \quad (62)$$

auszuführen. Die Schritte 2—7 der Gruppe (54) bleiben hiernach unverändert gültig.

## 7. Schlußfolgerungen

Auf Grund der ausgeführten Untersuchungen wird zusammenfassend folgende Meinung ausgesprochen:

1. Es muß sehr gründlich überlegt werden — *wenn die reduzierte Projektion überhaupt angewendet wird* —, ob die Reduktion auf den 3°-igen Streifen für den ganzen Streifen erfolgen soll (*allgemeine Reduktion*), oder ob lediglich eine *lokale Reduktion* auszuführen ist.

2. Wie bereits erwähnt, schlägt Verfasser vor, sämtliche Berechnungen des Triangulierungsnetzes erster und zweiter Ordnung in der *nicht reduzierten* Originalprojektion auszuführen, und zwar im ursprünglichen, *nicht verschobenen* Koordinatensystem. (Von den  $x$ -Koordinaten können 5 000 000 m fortgelassen werden!) Die derart bestimmten Koordinaten werden reduziert und ins verschobene Koordinatensystem transformiert.

3. Das Triangulierungsnetz dritter und niederer Ordnung soll bereits bei *reduzierter* Projektion und im *verschobenen* Koordinatensystem berechnet werden.

4. Wird laut Punkt 2 und 3 verfahren, so sind im allgemeinen keine neuen Tabellen notwendig. Bei den üblichen Projektionsberechnungen müssen — lediglich zur Berechnung der Richtungsreduktionen — zu den runden Werten der Koordinaten  $x_r$  (oder  $\xi$ ) die Werte

$$\frac{\varrho''}{6R_{kr}^2} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho''}{4R_{kr}^2} \quad (63)$$

tabelliert werden. Die bereits vorliegenden Umrechnungstabellen sind auch gebrauchbar, wenn für die reduzierten und im verschobenen System berechneten Triangulationspunkte die im 6. Kapitel erwähnten geringen Änderungen eingeführt werden.

#### SCHRIFTTUM

1. HAZAY, I.—TÁRCZY-HORNOCH, A.: A Gauss-Krüger koordináták számítása (Berechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten) — Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
2. HAZAY, I.: Földi vetületek (Irdische Projektionen) — Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
3. HRISTOW, V. K.: Die Gauß-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid (Leipzig, 1943).
4. Abhandlungen Verfassers bezüglich der Umrechnungen zwischen den Gauß-Krügerschen Projektionsstreifen (Földméréstani Közlemények, 1950. No. 3—4; 1951. No. 2; Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Közleményei, 1951. No. 1; 1952 No. 1—2; Acta Technica Tom. I. Fasc. 2; Tom. IV).

#### ZUSAMMENFASSUNG

Die topographischen Karten werden in Ungarn schon nach der international allgemein anerkannten Gauß-Krügerschen Abbildung entworfen und man plant diese auch bei der Kartierung in großem Maßstabe einzuführen. Um jedoch das Gebiet des Landes auf je weniger Projektionsstreifen, d. h. je zusammenhängender darstellen zu können, wurde erwogen, ob nicht die Abbildung eventuell mittels einer Maßstabänderung reduziert, bzw. — wie man üblicherweise zu sagen pflegt: gesenkt werden soll. Zwecks Erleichterung der geodätischen Berechnungen wird geplant, die ursprünglichen Koordinatenachsen so zu verschieben, daß das gesamte Gebiet des Landes in den I. Quadranten falle. Die Abhandlung befaßt sich mit den wesentlichen Unterschieden, die infolge der unternommenen Abänderungen in den Projektionsberechnungen auftreten. Verfasser wirft den Gedanken auf, anstelle der allgemeinen Projektionsreduktion eine bloß auf das Landesgebiet erstreckte lokale Reduktion einzuführen. Die Untersuchung behandelt auch die Umrechnungen zwischen Projektionsstreifen.

Schlußfolgerungen: es ist zweckmäßig das Triangulierungsnetz erster und zweiter Ordnung auf der ursprünglichen Projektion und im ursprünglichen Koordinatensystem zu berechnen, und die Berechnung der Triangulierung niederer Ordnung bereits auf der reduzierten Projektion und im verschobenen Koordinatensystem auszuführen.

#### INVESTIGATIONS ON THE APPLICATION OF THE GAUSS-KRÜGER PROJECTION METHOD IN HUNGARY

I. HAZAY

#### SUMMARY

For the construction of the topographical maps of Hungary, the internationally more and more widely accepted Gauss-Krüger projection was adopted and it is planned to use the same in large-scale mapping too. In order, however, to plot the whole territory of the country in the least possible number of projection bands, i. e. in the most coherent manner, it was proposed to reduce the projection eventually by means of scale modification or, as it is also termed, by applying a secant projection. For the purpose of facilitating geodetic computations, it is intended to displace the original coordinate axes so that the whole country be in the first quadrant. This study deals with the pertinent considerable modifications of projection computation due to these changes. The idea of local reduction restricted to the territory of the country instead of general projection reduction is raised. Investigations include transformations between projection bands.

Final conclusions: It is advisable to compute the triangulation networks of first and second order in the original projection and in the original co-ordinate system; the triangulation of lower order should be, on the other hand, performed in the reduced projection and in the displaced co-ordinate system.

RECHERCHES SUR L'APPLICATION EN HONGRIE DU SYSTÈME  
DE REPRÉSENTATION DE GAUSS-KRÜGER

I. HAZAY

## RÉSUMÉ

Pour l'établissement des cartes topographiques, on a déjà adopté en Hongrie la méthode de représentation de Gauss-Krüger, dont l'emploi se généralise de plus en plus sur le plan international et dont on prévoit aussi l'utilisation pour les levés topographiques à grande échelle. Toutefois, afin de représenter le territoire du pays sur le plus petit nombre possible de zones de projection, c'est-à-dire de la manière la plus cohérente, on a aussi envisagé de réduire la projection par une modification d'échelle, ou autrement dit, d'utiliser une projection de la sécante. En vue de faciliter les calculs géodésiques, on a aussi l'intention de déplacer les axes de coordonnées, de sorte que tout le territoire du pays se trouve dans le premier quadrant. L'étude traite des recherches nécessaires, les calculs de projection se modifiant considérablement à cause des changements. L'auteur examine encore la possibilité d'une réduction locale concernant uniquement le territoire du pays, au lieu d'une réduction de projection générale. L'étude discute enfin le problème des transformations entre les zones de projection.

D'après les conclusions de l'auteur, il convient de calculer le système trigonométrique de premier et de deuxième ordre sur la projection et dans le système de coordonnées originaux, la triangulation d'ordre inférieur devant être calculée sur la projection réduite et dans le système de coordonnées déplacé.

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ОТОБРАЖЕНИЯ  
ПО ГАУССУ И КРЮГЕРУ В ВЕНГРИИ

И. ХАЗАИ

## РЕЗЮМЕ

В Венгрии при изготовлении топографических карт уже перешли к методу отображения по Гауссу и Крюгеру, ставшему все более общепринятым в международном отношении. Теперь предполагается перейти к этому методу отображения и в случае крупномасштабных карт. Однако, чтобы территорию страны можно было отобразить на возможно меньшем числе проекционных полос, следовательно отобразить более сплошно, возникла мысль редуцировать отображение с помощью изменения масштаба, т. е. как это принято говорить использовать опущенную проекцию. С той целью, чтобы облегчить геодезические вычисления, оригинальные координатные оси предполагается сдвинуть с таким расчетом, чтобы вся территория страны располагалась в первом квадранте плоскости. В работе рассматриваются исследования по этому вопросу, поскольку из-за этих изменений значительным образом изменяется и вычисление проекций. В работе поднимается вопрос осуществления вместо общей проекционной редукции только редукции окружающей местности, распространяющейся только на территорию страны. Исследование рассматривает также вопрос пересчетов между проекционными полосами. Сделаны окончательные выводы о том, что первоклассную и второклассную триангуляционную сеть целесообразно вычислять на оригинальной проекции и для оригинальной системы координат, а триангуляцию низшего класса — уже для редуцированной проекции и для смещенной системы координат.





# NEUE FORSCHUNGEN ZUR THEORIE DER HETEROGENEN SPHÄROIDISCHEN GLEICHGEWICHTSFIGUREN<sup>1</sup>

K. LEDERSTEGER<sup>2</sup>

Die Normalfigur der Erde, das sogenannte Normalsphäroid, kann physikalisch sinnvoll nur als eine heterogene Gleichgewichtsfigur definiert und bestimmt werden und wir erkennen unmittelbar, daß die gesamte Lösung des Problemes der Erdfigur an dem Studium der heterogenen, sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren orientiert sein muß, wenn wir uns nicht in rein geometrische Spekulationen verlieren wollen. Im Hinblick auf die erreichbare Genauigkeit können wir den folgenden Überlegungen am bequemsten den Potentialausdruck für das HELMERTSche Niveausphäroid vom 4. Range zugrundelegen:

$$U_4 = \frac{k^2 E}{l} \left[ 1 + \frac{K}{2l^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{\omega^2 l^3}{2k^2 E} \cos^2 \varphi' + \right. \\ \left. + \frac{D_4}{l_4} \left( \sin^4 \varphi' - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \frac{3}{35} \right) \right], \quad (1)$$

worin  $k^2$  die Gravitationskonstante,  $E$  die Erdmasse,  $l$  den Radiusvektor des Niveausphäroides und  $\varphi'$  die geozentrische Breite bedeuten und der Koordinatenursprung selbstverständlich im Schwerpunkt des Erdkörpers liegt, während die  $z$ -Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt.  $\omega^2 = 5,317\,496 \cdot 10^{-9}$  ist das Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit. Sind ferner  $A < B < C$  die drei Hauptträgheitsmomente der Erde, also  $A$  und  $B$  die beiden äquatorialen und  $C$  das polare Hauptträgheitsmoment, so ist die Massefunktion  $K$  von 2.O. durch das Verhältnis

$$K = \frac{1}{E} \left( C - \frac{A + B}{2} \right) \quad (2)$$

<sup>1</sup> Erweiterte Fassung eines Vortrages, gehalten am 17. August 1960 an der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest.

<sup>2</sup> Hofrat Dr. techn. h. c., Dr. phil. KARL LEDERSTEGER, o. Prof. und Vorstand des Institutes für Höhere Geodäsie an der Technischen Hochschule, korr. Mitglied der Österr. u. Bayer. Akademien der Wissenschaften. Wien IV, Karlsplatz 13.

definiert, während  $D_4$  eine Massefunktion 4.O.:

$$D_4 = \left(\frac{35}{8}\right)^2 \frac{1}{E} \int_E l^4 \left( \sin^4 \varphi' - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \frac{3}{35} \right) dm \quad (3)$$

bezeichnet. An Stelle von  $K$  und  $D_4$  verwendet man bequemer die »statische Abplattung«  $K/a^2$  und den Parameter  $\delta = D_4/a^4$ , unter  $a$  den Radius des kreisförmigen Äquators verstanden. Denn es ist klar, daß das Niveausphäroid bereits eine weitgehende Idealisierung darstellt, der eine Massenordnung mit Rotationssymmetrie und Symmetrie zur Äquatorebene entspricht, welche also nur mehr ein einziges äquatoriales Trägheitsmoment besitzt, das wir von nun an kurz mit  $A$  bezeichnen, wiewohl sein numerischer Betrag mit dem arithmetischen Mittel der beiden äquatorialen Trägheitsmomente der wirklichen Erde zusammenfällt. Eine weitere, sehr wichtige Größe ist noch die »dynamische Abplattung« oder auch »mechanische Elliptizität«:

$$H = \frac{C - A}{C} \quad (4)$$

Zum Potentialausdruck (1) tritt noch die Formel für die theoretische oder »normale« Schwere auf dem Niveausphäroid:

$$\gamma = \gamma_0 \left( 1 + \beta \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \beta_4 \sin^2 2\varphi \right), \quad (5)$$

in welcher die geozentrische Breite  $\varphi'$  bereits durch die übliche geographische Breite  $\varphi$  ersetzt ist.  $\gamma_0$  stellt das Schwereminimum am Äquator dar, während das Schweremaximum in den beiden Polen auftritt:

$$\gamma_P = \gamma_0(1 + \beta) \quad (5a)$$

Das Verhältnis  $\beta = (\gamma_P - \gamma_0) : \gamma_0$  wird als Schwereabplattung bezeichnet. Wichtig ist schließlich noch der Vergleich des Niveausphäroides mit dem achsengleichen Rotationsellipsoid. Ist  $r$  der Radiusvektor dieses Ellipsoides und führt man mit G. H. DARWIN den »Formparameter«  $f_4 \leq 0$  ein, so gilt:

$$h = (l - r) = \frac{a}{4} f_4 \sin^2 2\varphi \quad (6)$$

Das Niveausphäroid verläuft gänzlich innerhalb des achsengleichen Rotationsellipsoides und die maximale Depression tritt in der Breite  $45^\circ$  auf:

$$h_{\max} = \frac{a}{4} f_4 \quad (6a)$$

Das ganze Problem enthält 13 Parameter, die sich sehr übersichtlich gruppieren lassen. Zur Erdmasse  $E$  treten

a) 3 *Massegrößen*: die mittlere Dichte  $\varrho_m$ , die Massefunktion  $K$  oder die statische Abplattung  $K/a^2$ , die Massefunktion  $D_4$  oder der Parameter  $\delta = D_4/a^4$ ;

b) 3 *weitere physikalische Größen*: die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$ , der Potentialwert  $W_0$  und das Verhältnis  $\varepsilon$  von Fliehkraft zur Schwere im Äquator:  $\varepsilon = \omega^2 a : \gamma_0$ ;

c) die 3 *Konstanten der Schwereformel*,  $\gamma_0$ ,  $\beta$  und  $\beta_4$ ;

d) drei *geometrische Größen*: die Äquatorachse  $a$ , die geometrische Abplattung  $\alpha = (a - c) : a$ , wobei  $c$  den Polarradius bezeichnet, und der Formparameter  $f_4$ .

Bevor wir weitergehen, ist eine wichtige Bemerkung am Platze. Das HELMERTSche Rotations-Niveausphäroid 4. Ranges ist aus einer Kugelfunktionsentwicklung des Außenraumpotentials hervorgegangen. Diese Entwicklung hat den Nachteil, daß sie exakt nur im Außenraum einer die ganze Erdmasse umschließenden Kugel gilt. Diesem Nachteil könnte man durch Verwendung von rotationssymmetrischen Ellipsoidkoordinaten abhelfen, was jedoch einen beträchtlich größeren mathematischen Aufwand erfordert. Auf Grund einer solchen Entwicklung ist es erstmalig K. JUNG<sup>3</sup> gelungen nachzuweisen, daß mit der gewünschten Genauigkeit auch die Kugelfunktionsentwicklung bis an die Erdoberfläche gültig bleibt. Somit können wir letztere beibehalten, zumal sie auch physikalisch wesentlich durchsichtiger ist.

Für die genannten 13 Parameter, von denen  $\alpha$ ,  $K/a^2$ ,  $\varepsilon$  und  $\beta$  kleine Größen 2.O. sind, während  $\delta$ ,  $\beta_4$  und  $f_4$  Größen 4.O. darstellen, konnte HELMERT ein System von 8 Gleichungen aufstellen. Das HELMERTSche Gleichungssystem hat mithin  $\infty^5$  Lösungen und 5 freie Parameter, welche wir aber sofort als »bedingt frei« bezeichnen, weil sie weder in ihrer Kombination, noch in ihren Zahlwerten absolut frei sind. Für die gegeben gedachte Erdmasse resultieren  $\infty^4$  Lösungen, jedoch nur  $\infty^3$  verschiedene Figuren. Damit aber erhebt sich die Frage, wieviele mögliche Gleichgewichtsfiguren sich unter den Lösungen befinden und wie wir sie herausheben können.

Zunächst sei betont, daß mit der Rotationssymmetrie und der Symmetrie zur Äquatorebene bereits zwei wesentliche Merkmale für das hydrostatische Gleichgewicht erfüllt sind. Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren lehrt nun, daß es im Grunde nur eine einzige Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht gibt, nämlich daß die Flächen gleicher Dichte mit den Niveauflächen zusammenfallen, wobei lediglich aus Gründen der Stabilität vorausgesetzt ist, daß die Dichte nach innen niemals abnimmt. Dann gehört tatsächlich die freie Oberfläche als Fläche der geringsten Dichte der Schar der Niveauflächen an. Könnte man diese Bedingung als Gleichung zwischen den Para-

<sup>3</sup> KARL JUNG: Figur der Erde, Handbuch der Physik, Band 47, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1958, Seite 557/8.

metern formulieren und als 9. Gleichung dem HELMERTSchen System hinzufügen, so hätte das neue System für die gegebene Erdmasse  $\infty^3$  Lösungen, welche mit den  $\infty^3$  möglichen Figuren  $(a, \alpha, f_4)$  zusammenfallen, und es hat den Anschein, daß jede dieser Figuren freie Oberfläche einer möglichen Gleichgewichtsfigur, darüber hinaus aber gleichzeitig mit der entsprechenden Annäherung, d. h. bei Vernachlässigung von Größen 6.O., eine äußere Niveaulfläche von unendlich vielen anderen Gleichgewichtsfiguren darstellt.

Um dieses Bild zu verifizieren, betrachten wir die  $\infty^2$  möglichen Ellipsoide  $(a, \alpha, f_4 = 0)$ . Für ein homogenes Ellipsoid ( $\rho = \rho_m = \text{const}$ ) sind bekanntlich die inneren Niveaulflächen ähnliche (homothetische) Ellipsoide, deren konstante Abplattung im allgemeinen kleiner ist als die Abplattung der Oberfläche. Das Ellipsoid wird zur Gleichgewichtsfigur, wenn die freie Oberfläche der Schar der inneren Niveaulflächen angehört; dies ist der Fall, wenn die MACLAURINSche Bedingung erfüllt ist, welche bei sofortiger Beschränkung auf kleine Abplattungen in der Form

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \rho} = \frac{8}{15} \alpha - \frac{4}{35} \alpha^2 \dots \quad (7)$$

geschrieben werden kann. Wird sie als 9. Gleichung dem HELMERTSchen System hinzugefügt und gleichzeitig  $f_4 = 0$  gesetzt, so gibt es  $\infty^2$  Lösungen, d. h. alle Ellipsoide sind mögliche Gleichgewichtsfiguren. Mit der Wahl eines Ellipsoides ist also eine homogene Gleichgewichtsfigur mit ihren sämtlichen physikalischen Daten einschließlich der Rotationsgeschwindigkeit eindeutig bestimmt. Da sich nun selbstverständlich an die MACLAURINSchen Ellipsoide völlig dicht heterogene Gleichgewichtsfiguren ( $f_4 < 0$ ) anschließen müssen, liegen in den  $\infty^3$  Figuren  $(a, \alpha, f_4)$  tatsächlich ebensoviele Gleichgewichtsfiguren vor. Wir bezeichnen sinngemäß die homogenen MACLAURINSchen Ellipsoide als »nullparametrig«, die aus dem Ansatz (1) bei Vernachlässigung der Glieder 6.O. abgeleiteten als »einparametrig« Gleichgewichtsfiguren. Die  $\infty^4$  Lösungen des HELMERTSchen Systemes umfassen somit die  $\infty^3$  einparametrischen Gleichgewichtsfiguren mitsamt deren äußeren Niveaulflächen, wohl gemerkt nur auf der vorgegebenen Näherungsstufe.

Nach einem bekannten Satze von STOKES, dem sogenannten Umkehrproblem der Potentialtheorie, gibt es zu einer vorgegebenen Masse  $E$  und einer sie umschließenden Niveaulfläche, etwa  $S(a, \alpha, f_4)$ , im allgemeinen unendlich viele Massenordnungen derart, daß diese Niveaulfläche und das gesamte Außenraumpotential unverändert bleiben. POINCARÉ hat diesen Satz auf rotierende Massen ausgedehnt; es ist aber klar, daß die notwendige Erhaltung der Rotationsachse und des Schwerpunktes in ihr eine starke Beschränkung der möglichen Massenordnungen zur Folge hat. Dennoch gibt es auch in diesem Falle, wie später klar werden wird, noch immer unend-

lich viele derartige Massenkfigurationen. Mit den sogenannten »STOKESSchen Elementen«  $E$ ,  $\omega$  und  $S(a, \alpha, f_4)$  liegen die zur eindeutigen Auflösung des HELMERTSchen Systemes nötigen Bestimmungsstücke vor. Die übrigen 8 Parameter können unabhängig von der Massenordnung im Inneren von  $S$  berechnet werden. Sie sind also »STOKESSche Konstanten«, d. h. Integralinvarianten für alle möglichen Massenordnungen.

Zu den STOKESSchen Konstanten zählt wohl mit  $K$  die Differenz der Trägheitsmomente, auf keinen Fall aber diese selbst. Um dies einzusehen, braucht man bloß um den Schwerpunkt beliebige Kugeln zu schlagen und in jeder dieser Flächen mit der geringsten in ihr vorkommenden Dichte homogene Schalen zu bilden, die beliebig im Radius geändert werden können, weil jede homogene oder geschichtete Kugel auf alle Aufpunkte ihres Außenraumes so wirkt, als ob ihre Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre. Wenn daher die klassische Theorie auf Grund der berühmten Transformation von RADAU zu dem Schlusse gelangt, daß im Falle des Gleichgewichtes auch die Trägheitsmomente selbst genäherte oder "Quasi"-STOKESSche Konstanten sind, so läßt dies nur die Deutung zu, daß das Dichtegesetz der Gleichgewichtsfiguren streng individuell ist, welcher Schluß sich später auf ganz anderem Wege bestätigen wird. Dann gehört aber zu jeder Gleichgewichtsfigur auch ein ganz bestimmter Wert des Hauptträgheitsmomentes  $C$ , der sich unabhängig von der Kenntnis des Dichtegesetzes aus den Elementen berechnen läßt; er ist eine Funktion der Elemente, jedoch nicht eine echte STOKESSche Konstante im Sinne einer Integralinvariante für alle möglichen Massenordnungen, die es im Falle des Gleichgewichtes gar nicht gibt. Übrigens ist jede einparametrische Gleichgewichtsfigur durch die Masse  $E$  und die Gestalt  $S(a, \alpha, f_4)$  ihrer freien Oberfläche eindeutig bestimmt; die STOKESSchen Elemente stellen im Falle des Gleichgewichtes bereits eine Überbestimmung dar.

Ein wesentliches Hilfsmittel für das Studium der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren der gegebenen Masse  $E$  besteht in der Bildung linearer Figurenreihen. Wir haben oben gesehen, daß jedes Ellipsoid eine mögliche, homogene Gleichgewichtsfigur ist, welche entweder durch ihre zwei geometrischen Parameter  $(a, \alpha)$  oder durch zwei andere Stücke eindeutig gegeben ist. Hält man einen einzigen Parameter fest, so erhält man eine lineare Reihe MACLAURINScher Ellipsoide, etwa die Reihe  $(a)$  mit konstanter Äquatorachse, welche übrigens mit der Reihe  $(C)$  identisch ist, weil bekanntlich für jedes homogene Ellipsoid

$$C = \frac{2}{5} E a^2 \quad (8)$$

ist. Die Reihe  $(\omega)$ , gebildet mit der Rotationsgeschwindigkeit der wirklichen Erde, enthält dann alle MACLAURINSchen Ellipsoide, welche ihre Umdrehung in einem Sterntag vollenden usw.

Hält man zwei Parameter fest, so entsteht eine lineare Reihe heterogener Figuren, welche mit einem bestimmten MACLAURINSchen Ellipsoid beginnt und in welcher von Figur zu Figur mit wachsendem Absolutbetrag des stets negativen Formparameters  $f_4$  die Massenkonzentration gegen den Mittelpunkt immer weiter fortschreitet, bis schließlich eine Grenzfigur erreicht wird, die der Hüllfläche der einparametrischen Gleichgewichtsfiguren angehört. Von besonderer Wichtigkeit für die Theorie der Normalfigur der Erde ist, wie man unmittelbar an dem Potentialausdruck (1) ablesen kann, die Reihe  $(\omega, K)$ , deren Figuren mit der wirklichen Erde die Rotationsgeschwindigkeit und die Differenz der Trägheitsmomente gemeinsam haben. Da es nun  $\infty^2$  Wertepaare  $C$  und  $A$ , jedoch nur  $\infty^1$  Werte  $\omega$  gibt, gehören zu jedem  $\omega$  stets  $\infty^1$  Wertepaare  $(C, A)$  und die Reihe  $(\omega)$  lehrt, daß sich von Figur zu Figur  $C$  und  $K$  ändern. Mithin zieht die alleinige Änderung von  $C$  oder  $K$  unweigerlich eine Änderung der Rotationsgeschwindigkeit nach sich. Tatsächlich findet man, daß das Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit dem Ausdruck

$$\frac{K}{\sqrt{C^5}} \left( 1 + \frac{9}{7} \frac{EK}{C} \dots \right) \quad (9)$$

proportional ist, was besagt, daß  $\omega$  nur dann konstant bleiben kann, wenn mit  $C$  auch  $K$  zu- oder abnimmt. Es folgt daraus, daß in der Reihe  $(\omega, K)$  neben  $K$  auch  $C$  konstant sein muß, was auf die Identität der drei Reihen

$$(\omega, K) \equiv (\omega, C) \equiv (\omega, H) \quad (10)$$

führt. Weil sich aber die wirkliche Erde nicht im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, ist noch die Frage zu klären, ob das konstante  $C$  der Reihe  $(\omega, K)$  mit dem Hauptträgheitsmoment  $C$  der wirklichen Erde identisch ist.

Zunächst betrachten wir jedoch eine gänzlich andere Art einer linearen Figurenreihe, nämlich die Reihe der Gleichgewichtsfiguren mit einer gemeinsamen äußeren Niveaulfläche.<sup>4</sup> Diese Reihe beginnt mit einem MACLAURINSchen Ellipsoid von maximaler Rotationsgeschwindigkeit. Mit zunehmendem Äquatortradius ergeben sich heterogene Figuren mit abnehmender Rotationsgeschwindigkeit, bis die Reihe in jener Gleichgewichtsfigur mit minimaler Rotationsgeschwindigkeit endet, für welche die gegebene Niveaulfläche zur freien Oberfläche wird. Man erkennt, daß zu jedem System STOKESScher Elemente  $E, \omega, S(a, a, f_4)$ , wenn überhaupt, so nur eine einzige Gleichgewichtsfigur gehört, für welche die gegebene Fläche  $S$  im allgemeinen bloß eine äußere Niveaulfläche ist; nur für einen ganz bestimmten  $\omega$ -Wert wird  $S$  zur freien Oberfläche einer Gleichgewichtsfigur.

<sup>4</sup> K. LEDERSTEGE: Die heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und das Normalsphäroid der Erde, *Geofisica pura e applicata*, Bd. 44, S. 1–19, Milano, 1959.

Die genannte Reihe liefert noch drei sehr wesentliche Erkenntnisse.

a) An der Oberfläche jeder Gleichgewichtsfigur ist der Absolutbetrag des Formparameters ein Minimum, d. h. der Differentialquotient  $(df/da)$  ist an der Oberfläche Null. Mit wachsender Erhebung über die Oberfläche wird  $(df/da) < 0$ ; der Formparameter nimmt in seinem absoluten Betrage ständig zu. Diese merkwürdige Eigenschaft liefert zwar nur eine Relation 4.O., nämlich eine Gleichung für den Parameter  $\delta$ , die aber die im HELMERTSchen System fehlende Gleichgewichtsbedingung zu ersetzen vermag. Damit ist die Aufgabe gelöst, aus den  $\infty^4$  Lösungen des HELMERTSchen Systems die  $\infty^3$  einparametrischen Gleichgewichtsfiguren herauszugreifen. Die neun Gleichungen werden am besten in jene Form gebracht, bei welcher die übrigen 9 Parameter in Funktion von  $E$ ,  $a$ ,  $\alpha$  und  $\varepsilon$  erscheinen.

b) Wählt man als Fläche  $S$  ein Ellipsoid  $(a, \alpha, f_4 = 0)$ , so fallen in obiger Reihe die Ausgangs- und die Grenzfigur oder das Maximum und das Minimum der Rotationsgeschwindigkeit zusammen. Ein Ellipsoid kann niemals äußere Niveaufläche eines kleineren MACLAURINSchen Ellipsoides oder einer heterogenen Gleichgewichtsfigur und aus dem gleichen Grunde auch niemals selbst eine heterogene Gleichgewichtsfigur sein. Somit kann die mit so großem mathematischen Scharfsinn von PIZZETTI und SOMIGLIANA gewonnene Lösung des STOKESSchen Problemes für das Rotationsellipsoid höchstens als physikalische Fiktion gewertet werden, was schon in der Verwendung positiver und negativer Flächenbelegungen zum Ausdruck kommt, deren Summe verschwindet. Wenn die Verfechter des Niveauellipsoides immer wieder betonen, daß das Normalsphäroid höchstens um wenige Meter von seinem achsen-gleichen Rotationsellipsoid abweichen kann, weshalb das Niveauellipsoid eine sehr gute Näherung darstelle, so ist dem entgegenzuhalten, daß das physikalisch einwandfreie Normalsphäroid sogar leichter als das fiktive Niveauellipsoid zu gewinnen ist; daß wir eine Gleichgewichtsfigur als Referenzkörper benötigen, um einen klaren physikalischen Zusammenhang zwischen den Massestörungen und den Schwerestörungen gewährleisten zu können; und schließlich, daß man nicht eine Größe 4.O. ( $f_4$ ) willkürlich Null setzen darf, wenn man nicht die übrigen Größen 4.O. empfindlich verfälschen will. Wäre es da nicht korrekter, auf die Glieder 4.O. überhaupt zu verzichten und auf das BRUNSSche Rotations-Niveausphäroid vom 2. Range zurückzugreifen?

c) Jede der  $\infty^3$  Fläche  $S(a, \alpha, f_4)$  ist bei Vernachlässigung der Glieder 6.O. eine äußere Niveaufläche einer linearen Reihe von Gleichgewichtsfiguren, welche von einem bestimmten MACLAURINSchen Ellipsoid ausgeht. Für  $f_4 = 0$  schrumpft diese Reihe auf das Ausgangsellipsoid zusammen. Umgekehrt hat die Reihe ihre größte Ausdehnung, wenn das Maximum des Absolutbetrages des Formparameters  $|f_4| = \frac{3}{2} \alpha^2$  vorliegt, also unsere Reihe mit dem »rotierenden Massenpunkt« beginnt, welcher als dimensionsloses Ellipsoid zu denken ist.

Es handelt sich also um die äußeren Niveauflächen des rotierenden Massenpunktes, deren es natürlich  $\infty^2$  gibt, weil zu jeder Rotationsgeschwindigkeit unendlich viele Niveauflächen gehören. Diese hat man früher irrtümlich als die »Sphäroide der größten Massenkonzentration« bezeichnet und damit die Vorstellung verbunden, daß die gesamte Masse  $E$  im Schwerpunkt vereinigt ist, während der übrige Raum bis zur Fläche  $S$  mit Flüssigkeit der Dichte  $N_{ul}$  aufgefüllt gedacht werden muß. Es ist aber unmittelbar klar, daß diese Fiktion bereits weit jenseits der Grenze der reellen Gleichgewichtsfiguren liegen muß. Denn für die freie Oberfläche jeder Gleichgewichtsfigur muß die POINCARÉsche Ungleichung erfüllt sein:

$$\omega^2 \leq 2\pi k^2 \varrho_{\min}, \quad (11)$$

derzufolge die Oberflächendichte nur für die ruhende Kugel Null werden kann. Unsere Figurenreihen liefern jetzt aber völlig zwanglos die tatsächlichen Sphäroide der größten Massenkonzentration, d. h. die reellen Grenzfiguren. Jede äußere Niveaufläche eines rotierenden Massenpunktes ist gleichzeitig freie Oberfläche eines Sphäroides der größten Massenkonzentration, welches eine kleinere Rotationsgeschwindigkeit besitzt und durch das obige Maximum des Absolutbetrages des Formparameters gekennzeichnet ist. Werden die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren durch die Punkte eines kartesischen Koordinatensystemes mit den drei Achsen  $a$ ,  $a$  und  $f_4$  repräsentiert, so liegen die Sphäroide der größten Massenkonzentration in der Hüllfläche, welche einen parabolischen Zylinder mit zur  $a$ -Achse parallelen Erzeugenden bildet. Auch der HUYGENSSche Grenzwert für die Abplattung des Erdkörpers (1 : 580), der auf der Fiktion der völligen Massenkonzentration im Schwerpunkt beruht, kann jetzt nicht mehr aufrecht gehalten werden. Die beiden Grenzwerte für die Abplattung folgen vielmehr aus dem homogenen Ausgangsellipsoid und der Grenzfigur der linearen Reihe  $(\omega, a)$ , in welcher die Rotationsgeschwindigkeit der Erde und die Achse des Normalsphäroides konstant sind. Man findet:  $231,9 \leq a^{-1} \leq 420,1$ , wobei die untere Schranke der schon von NEWTON für das homogene Ellipsoid gefundene Wert ist.

Die vorstehenden Betrachtungen beruhen auf dem HELMERTSchen Rotations-Niveausphäroid  $U_4$ , wobei alle weiteren Glieder der Kugelfunktionsentwicklung des Schwerepotentials in die Restfunktion  $T$  verbannt sind. Wenn wir aber von Gleichgewichtsfiguren sprechen, so denken wir an völlig strenge Lösungen des geschlossenen oder des vollständig entwickelten Potentialausdruckes. Einen klaren Einblick in den Zusammenhang zwischen den strengen Gleichgewichtsfiguren und den sukzessiven Näherungen gewinnt man, wenn man in (1) das letzte Glied mit der Massefunktion  $D_4$  zur Restfunktion schlägt, also das HELMERTSche durch das BRUNSSche Niveausphäroid vom 2. Range ersetzt. Mit  $\delta$  muß man aber auch die beiden übrigen Parameter 4.O., nämlich



$\beta_4$  und  $f_4$  unterdrücken. Das HELMERTSche Gleichungssystem reduziert sich auf 6 Gleichungen für 10 Parameter, hat also für die gegebene gedachte Masse  $E$  nur mehr  $\infty^3$  Lösungen bei  $\infty^2$  geometrisch möglichen Figuren, den sämtlichen Ellipsoiden  $S(a, a)$ . Diese sind als MACLAURINSche Ellipsoide streng mögliche Gleichgewichtsfiguren und auf der vorgegebenen Näherungsstufe gleichzeitig die äußeren Niveauflächen von je einer unendlichen Reihe MACLAURINScher Ellipsoide. Erweitert man umgekehrt den Potentialausdruck um die zonale Kugelfunktion 6.O., so tritt mit der Massefunktion  $D_6$  auch ein weiterer Formparameter  $f_6$  und ein Parameter  $\beta_6$  in der zu erweiternden Schwereformel auf. Das HELMERTSche System wird um zwei Gleichungen vermehrt, d. h. es liegen 10 Gleichungen für 16 Parameter vor, welche für das gegebene  $E$   $\infty^5$  Lösungen besitzen, nämlich die  $\infty^4$  geometrischen Figuren  $S(a, a, f_4, f_6)$ , welche durchwegs mögliche Gleichgewichtsfiguren sind, gleichzeitig aber auf der vorgegebenen Näherungsstufe auch die äußeren Niveauflächen solcher Gleichgewichtsfiguren darstellen. Wir werden diese Figuren sinngemäß als zweiparametrische Gleichgewichtsfiguren bezeichnen.

Mit dieser einfachen Überlegung ist aber der Sachverhalt bereits vollständig aufgeklärt. Eine einparametrische Gleichgewichtsfigur z. B. ist durch das Verschwinden aller höheren Formparameter gekennzeichnet:  $f_6 = f_8 = f_{10} = \dots = 0$ . Damit verschwinden aber selbstverständlich nicht auch die höheren Massefunktionen  $D_6, D_8 \dots$ , welche in einer vollständigen Potentialentwicklung als Koeffizienten der höheren LEGENDRESchen Polynome auftreten. In  $U_4$  sind diese Glieder mit der Restfunktion vereinigt und man erkennt, daß das HELMERTSche Rotations-Niveausphäroid niemals der vollständige Potentialausdruck einer Gleichgewichtsfigur sein kann. Daraus folgt sofort, daß man entgegen der vielfach geäußerten Auffassung das Verschwinden der Restfunktion  $T$  im allgemeinen nicht mit dem Verschwinden der Massenunregelmäßigkeiten koppeln darf. Erst wenn das Niveausphäroid sämtliche zonale Kugelfunktionen enthält, haben wir die vollständige Potentialentwicklung einer Gleichgewichtsfigur vor uns. Nur in diesem Falle bedeutet das Verschwinden der Restfunktion die ideale Regularisierung der Erdmasse und damit das Verschwinden aller Massenunregelmäßigkeiten.

Damit erst kann die Definition des Normalsphäroides der Erde in vollster Allgemeinheit ausgesprochen werden: es ist dies jene Gleichgewichtsfigur, deren vollständige Potentialentwicklung durch  $U_\infty$  gegeben ist, wobei wir zunächst gar nicht wissen, wieviele Formparameter sie besitzt. Wäre z. B. dieses eindeutig definierte Normalsphäroid eine dreiparametrische Gleichgewichtsfigur, so wäre sie durch  $(E, \omega, K, D_4, D_6, D_8)$  bestimmt, weil alle höheren Massefunktionen durch das Verschwinden der höheren Formparameter  $f_{10} = f_{12} = \dots = 0$  zahlenmäßig festliegen. Vernachlässigen wir aber, wie es praktisch angezeigt erscheint, bereits die Glieder 6.O., so bedeutet dies, daß wir an Stelle des wirklichen Normalsphäroides genähert die durch  $(E,$

$\omega, K, D_4$ ) definierte einparametrische Gleichgewichtsfigur verwenden. Jedoch wäre die Kenntnis der Anzahl der Formparameter des wirklichen Normalsphäroides von größter Wichtigkeit für einen Einblick in die Struktur des Erdinnern. Wir werden hierauf später zurückkommen.

Da das exakte Normalsphäroid unendlich viele Massefunktionen mit der tatsächlichen Erde gemeinsam hat, ist es vollkommen ausgeschlossen, daß sich bei der Regularisierung der Erdmasse die beiden Trägheitsmomente  $C$  und  $\frac{1}{2}(A + B)$  um dieselbe Konstante ändern. Es gibt also eine Gleichgewichtsfigur, welche denselben Schwerpunkt, dieselbe Rotationsachse, dieselben Trägheitsmomente und damit auch denselben Drehimpuls oder dasselbe Rotationsmoment  $\omega C$  wie die wirkliche Erde besitzt. Diese Erkenntnis liefert verschärfte Bedingungen für das unbekannt Regularisierungsgesetz. Die bloßen Massenverschiebungen in vertikalen Säulen entsprechend der Hypothese der Isostasie genügen nicht, wie schon die dadurch bewirkte und theoretisch unmögliche Schwerpunktsverschiebung beweist. Hat das Normalsphäroid der Erde nur einen Formparameter, so ist die oben aufgeworfene Frage, ob das in der Reihe (9) konstante Trägheitsmoment  $C$  mit dem Trägheitsmoment der wirklichen Erde identisch ist, bereits positiv beantwortet. Hat aber das Normalsphäroid zwei oder mehr Formparameter, so können wir nicht behaupten, daß der Zusammenhang zwischen  $C$  und  $K$  oder zwischen  $K$  und  $H$  derselbe ist wie beim homogenen Ellipsoid. Denn offenbar hat z. B. bei den linearen Reihen zweiparametrischer Gleichgewichtsfiguren an Stelle des homogenen Ellipsoides als Ausgangsfigur jeweils ein WIECHERTSches Modell zu gelten, das aus einem homogenen Mantel und einem homogenen Kern besteht, wobei die Kernoberfläche eine Unstetigkeitsfläche der Dichte darstellt, an der sich die Dichte möglicherweise sogar sprunghaft ändert. Man erkennt übrigens, daß die Frage eigentlich schief gestellt war. Ob sich die wirkliche Erde im hydrostatischen Gleichgewicht befindet oder nicht, ist für die Frage unwesentlich; wesentlich ist allein die Anzahl der Formparameter des Normalsphäroides. Doch bedürfen die Probleme der mehrparametrischen Gleichgewichtsfiguren noch einer eingehenden Untersuchung.

Da die nullparametrischen Gleichgewichtsfiguren oder die MACLAURINSchen Ellipsoide homogen sind, liegt die Vermutung nahe, daß die einparametrischen Gleichgewichtsfiguren durch ein stetiges Dichtegesetz ausgezeichnet sind. Unter dieser Voraussetzung kann man für die Erdmasse  $E$  eine Doppelgleichung ansetzen, zu der sich eine Gleichung für das Hauptträgheitsmoment  $C$  sowie eine hierzu proportionale Beziehung für die Differenz  $(C - A)$  gesellen.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> K. LEDERSTEGER: Zur Frage des Dichtegesetzes der einparametrischen heterogenen Gleichgewichtsfiguren, Schweiz. Zeitschrift f. Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, Winterthur 1960, Seite 100–115.

Setzt man für die Dichte zunächst den Ausdruck

$$\varrho = \varrho_{\max} f\left(\frac{x}{a}\right) \quad (12)$$

an, in welchem  $\varrho_{\max}$  das Dichtemaximum im Schwerpunkt und  $x$  den Äquatorradius einer inneren Niveaufläche bedeuten, so treten zu der wegen der Kleinheit der Formparameter sehr nahe erfüllten Beziehung für die mittlere Dichte

$$\varrho_m = \frac{3E}{4\pi} \cdot \frac{1}{a^3(1-\alpha)} \quad (13)$$

die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}_2} &= \frac{\varrho_{\max}}{\varrho_m} \frac{3}{a^3} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^2 dx \\ \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha_h}\right) \left(\frac{\alpha_h}{a}\right)^2 &= \frac{\varrho_{\max}}{\varrho_m} \frac{5}{a^5} \int_0^a f\left(\frac{x}{a}\right) x^4 dx \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

worin  $a$  und  $\alpha$  die Äquatorachse und die Abplattung der gegebenen Figur,  $\alpha_h$  und  $\bar{\alpha}_h$  Achse und Abplattung des homogenen Ausgangsellisoides der zugehörigen Figurenreihe ( $\omega, K \equiv \omega, C$ ) sind, während  $\bar{\alpha}_2$  einen bestimmten Durchschnittswert der Abplattung der inneren Niveauflächen darstellt. Es dürfte genügen, näherungsweise

$$\frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}_2} = 2 \frac{1-\alpha}{1-\alpha_h} \quad (14)$$

zu setzen.

Der allgemeinste klassische Ansatz für das Dichtegesetz

$$\varrho = \varrho_{\max} \left[ 1 - k \left( \frac{x}{a} \right)^\lambda \right]^\mu \quad (15)$$

stammt von LÉVY<sup>6</sup>. Ist  $\varrho_m$  aus (13) berechnet, so liefern die zwei Gleichungen (13a) die beiden Unbekannten  $\varrho_{\max}$  und  $k$ , wenn die beiden Exponenten  $\lambda$  und  $\mu$  einmal gewählt sind. Für die Wahl dieser Exponenten stand der klassischen Theorie einzig die Normalfigur der Erde zur Verfügung und man forderte, daß sich als Dichteminimum möglichst gut die Oberflächendichte der festen Erdrinde 2,67 ergibt. So operierte man gewöhnlich mit dem Dichtegesetz von ROCHE ( $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$ ), für welches man  $\varrho_{\min} = 2,29$  findet. Die Übereinstimmung mit dem empirischen Wert 2,67 ist nicht nur ziemlich

<sup>6</sup> M. LÉVY: Sur la théorie de la terre, Acad. Paris, C. R., Bd. 106, 1838.

mäßig; sie wäre auch gar nicht beweiskräftig, wenn man an die Möglichkeit denkt, daß das Normalsphäroid der Erde nicht einparametrig ist. In diesem Falle könnte das einparametrig Ersatz-Sphäroid eine ganz andere Oberflächendichte aufweisen. Um dies einzusehen, braucht man bloß an die Existenz des Ozeans zu denken, welcher das wirkliche Normalsphäroid bei einer Oberflächendichte 1,028 mit einer Tiefe von etwa 2,5 km bedeckt.

Nummehr aber haben wir die Sphäroide der größten Massenkonzentration, d. h. die einparametrig Grenzfiguren zur Verfügung, für welche sich die Oberflächendichte so klein ergeben muß, daß die POINCARÉsche Ungleichung (11) gerade noch erfüllt ist. Mit diesen Figuren läßt sich die Wahl  $\lambda = \mu = 2$  für das Dichtegesetz

$$\varrho = \varrho_{\max} \left[ 1 - k \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (15a)$$

verifizieren, womit gleichzeitig die Gesetze von ROCHE und LIPSCHITZ ( $\lambda = \mu = 1$ ) ad absurdum geführt sind. Die Gleichungen (13a) nehmen damit die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 - a}{1 - a_2} &= \frac{\varrho_{\max}}{\varrho_m} \left[ 1 - \frac{6}{5} k + \frac{3}{7} k^2 \right] \\ \left( \frac{1 - a}{1 - a_h} \right) \left( \frac{a_h}{a} \right)^2 &= \frac{\varrho_{\max}}{\varrho_m} \left[ 1 - \frac{7}{10} k + \frac{5}{9} k^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13b)$$

Das Dichtegesetz enthält die drei Konstanten  $\varrho_{\max}$ ,  $k$  und  $a$ ; damit ist aber nochmals die strenge Individualität des Dichtegesetzes erwiesen: den  $\infty^3$  einparametrig Gleichgewichtsfiguren entsprechen ebensoviele Wertetripel der Konstanten. Übrigens kann man im Hinblick auf (13b) die geometrische Variable des Dichtegesetzes, die Äquatorachse  $a$ , durch das Volumen der Figur oder die mittlere Dichte  $\varrho_m$  ersetzen. Führt man dann in das Dichtegesetz

$$\varrho_{\max} = n \varrho_m \quad (16)$$

ein, so hat man  $(x : a)$  als reine Verhältniszahl zu denken, welche an der Oberfläche den Wert 1 annimmt. Für die homogenen Ellipsoide ist  $n = 1$  und  $k = 0$ , während für die Grenzfiguren in der Hüllfläche  $n$  nahe bei 4 und  $k$  knapp unter 1 liegt.

Die nächste wichtige Frage gilt der Gestalt der inneren Niveaulächen, in erster Linie ihrer Abplattung. Zur Lösung dieser Frage verwendet die klassische Theorie die CLAIRAUTSche Differentialgleichung, welche DARWIN auf die Glieder 4.O. ausgedehnt hat und welche die Abplattung der inneren Niveaulächen zu berechnen gestattet, wenn das Dichtegesetz gegeben ist. Dieses

Ergebnis kann aber wesentlich einfacher und exakter durch folgende Überlegung erreicht werden.<sup>7</sup> Nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie übt eine von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte homogene Schale auf die Punkte des inneren Hohlraumes keine Kraftwirkung aus. Weil nun die Niveauflächen eines MACLAURINSCHEN Ellipsoides einschließlich seiner freien Oberfläche homothetisch sind, besagt dies, daß man Schale für Schale abheben kann und durch diese »Entblätterung« des gegebenen Ellipsoides eine ähnliche Reihe MACLAURINSCHER Ellipsoide derselben Rotationsgeschwindigkeit mit ständig abnehmender Masse gewinnt. Es erhebt sich sofort die Frage, ob diese Methode der Entblätterung allgemein auf alle Gleichgewichtsfiguren anwendbar ist.

Selbst bei Beschränkung auf sphäroidische Gleichgewichtsfiguren könnte man Zweifel gegen die Methode der Entblätterung hegen. Wohl weichen in diesem Falle die Niveauflächen dank der Kleinheit schon des ersten Formparameters  $f_1$  maximal nur um eine kleine Größe 4.0., welche rund  $a \cdot 10^{-6}$  beträgt, vom achsengleichen Rotationsellipsoid ab. Es fällt also jede sehr dünne, von zwei benachbarten Niveauflächen begrenzte Schale äußerst nahe mit einer von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzten homogenen Schale zusammen. Dennoch wäre es nicht ausgeschlossen, daß durch Integration über eine endliche Schale zwischen der Oberfläche und einer beliebigen inneren Niveaufläche im unterhalb liegenden Raume meßbare Anziehungskräfte entstehen. Der Beweis für die physikalische Berechtigung der Methode der Entblätterung ergibt sich aber in verblüffend einfacher Weise aus der strengen Individualität des Dichtegesetzes. Legt man bei einer einparametrischen Gleichgewichtsfigur vom Äquatorradius  $a$  eine innere Niveaufläche mit dem Äquatorradius  $a'$  durch Entblätterung bloß, so hat die entstehende Restfigur von entsprechend verminderter Masse das Dichtegesetz

$$\varrho = \varrho_{\max} \left[ 1 - k' \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right]^2, \quad (15b)$$

wobei natürlich

$$k' = k \left( \frac{a'}{a} \right)^2 \quad (15c)$$

ist, während die Maximaldichte unverändert bleibt.  $\varrho_m$  ist größer geworden, während  $n$  verkehrt proportional hierzu abnimmt. Es gibt nun eine und nur eine Gleichgewichtsfigur der verminderten Masse  $E'$  mit dem Dichtegesetz (15b), eben unsere Restfigur. Da diese selbstverständlich auch dieselbe Rotationsgeschwindigkeit besitzt, ist damit auch ein wertvoller Beitrag zu der

<sup>7</sup> K. LEDERSTEGGER: Die Abplattungsfunktion einparametrischer sphäroidischer Gleichgewichtsfiguren, *Geofisica pura e applicata*, Bd. 46, S. 1–10, Milano 1960.

noch ausstehenden Diskussion des Zusammenhanges zwischen der Rotationsgeschwindigkeit und den drei Konstanten des Dichtegesetzes geliefert.

Die Methode der Entblätterung gestattet nun, jede innere Oberfläche des als einparametrische Gleichgewichtsfigur vorausgesetzten Normalsphäroides als die freie Oberfläche einer reduzierten Gleichgewichtsfigur mit all ihren geometrischen und physikalischen Daten zu berechnen. Als Ausgangselemente für diese auf iterativem Wege durchzuführende Rechnung dienen jeweils die vier Elemente ( $E'$ ,  $\omega$ ,  $a'$ ,  $a'_h$ ). In der folgenden kleinen Tabelle seien die wichtigsten Resultate für einige äquidistante innere Niveauflächen des Normalsphäroides zusammengestellt:

$a' = 1,0$	$a = 6\,378,3$ km,	$a^{-1} = 297,4$ ,	$f_4 = -421 \cdot 10^{-8}$ ,	$\gamma_0 = 978,037$ gal
0,8	$a = 5\,102,6$	348,8	— 144	1025,151
0,6	$a = 3\,827,0$	395,4	— 52	934,244
0,4	$a = 2\,551,3$	432,2	— 17	709,991
0,2	$a = 1\,275,7$	455,7	— 4	382,834

Diese Übersicht lehrt, daß die Abplattung der Niveauflächen langsam absinkt. Hingegen nimmt der Absolutbetrag des Formparameters sehr rasch ab; die Niveauflächen werden nach unten immer ellipsoidähnlicher. Für  $a' = 0,4$  ist der Formparameter nur mehr  $-17 \cdot 10^{-8}$ , was besagt, daß die maximale Depression der Niveaufläche gegenüber dem achsengleichen Rotationsellipsoid nur mehr 108 mm beträgt. Diese rasche Abnahme des Absolutbetrages des Formparameters steht aber nicht im Widerspruch zu der oben angeführten charakteristischen Eigenschaft der Gleichgewichtsfiguren, derzufolge die Änderung des Formparameters mit der Höhe an der Oberfläche verschwindet. Hier handelt es sich um eine Eigenschaft des äußeren Feldes, also bloß um eine rechtsseitige Ableitung. Die berechnete Abplattungsfunktion stimmt übrigens recht gut mit der von BULLARD auf Grund der Dichteverteilung von Bullen gewonnenen Abplattungsfunktion<sup>8</sup> überein. Was die Schwere auf den inneren Niveauflächen betrifft, so nimmt sie, wie bekannt, anfänglich zu, um sodann stetig bis auf Null abzusinken. Das Maximum  $\gamma_0 = 1026,651$  gal tritt für 0,83  $a$ , d. h. für eine Tiefe von 1084,31 km auf.

Ein ganz besonderes Interesse gebührt noch dem Schweregradienten dicht unter der Oberfläche des Normalsphäroides. Zu seiner Bestimmung kann man  $\gamma_0$  für eine Tiefe von 1 km, d. h. für  $a' = 6\,377,29$  km berechnen. Man findet  $\gamma_0 = 978,119$  gal, also eine Schwerezunahme von 82 mgal pro 1 km. Demgegenüber liefert die übliche PREYSche Reduktion unter Verwendung der Dichte 2,652, gültig für die Tiefe von 500 km, den Gradienten 86,3 mgal/km. Bedenkt man, daß die über den ganzen Erdball geschlossene Schale von 1 km

<sup>8</sup> E. C. BULLARD: The Figure of the Earth, Monthly Notices of the Royal Astr. Society, Geophys. Suppl., Vol. 5, No 6, London 1948.

Diecke auf einen unterhalb liegenden Aufpunkt überhaupt keine Anziehungskraft ausübt, während bei der PREYSchen Reduktion die Anziehung der BOUGUERschen Platte doppelt abgezogen wird, so muß man über die Brauchbarkeit dieses primitiven Modells staunen; beträgt doch der Fehler bloß 0,004 mgal/m!

Für das als einparametrische Figur betrachtete Normalsphäroid ergab sich die Oberflächendichte 2,651, welche überraschend gut mit dem empirischen Wert 2,67 für die mittlere Oberflächendichte der festen Erdrinde übereinstimmt. Dennoch darf man hierin keinen Beweis dafür erblicken, daß das Normalsphäroid tatsächlich einparametrisch ist. Auch wenn wir von der Wasserhülle der Erde abstrahieren, diese also durch Entblätterung beseitigen, ist es sehr fraglich, ob die Restfigur bereits einparametrisch ist. Ja, aus dem seismischen Befund geht im Gegenteil mit ziemlicher Sicherheit hervor, daß sich in einer Tiefe von 2900 km eine Unstetigkeitsfläche der Dichte befindet und man nimmt hier zumeist einen Dichtesprung von 4—5 Einheiten an. Die Entwicklung der Theorie der zweiparametrischen Gleichgewichtsfiguren ist demnach eine sehr wichtige und sicher lohnende Aufgabe. Sobald einmal das allgemeine Dichtegesetz der zweiparametrischen Gleichgewichtsfiguren gefunden ist, dürfte es möglich sein, nicht nur die mittlere Tiefe des Weltmeeres oder die mittlere Tiefe der Lithosphäre gänzlich unabhängig von den Echolotungen festzustellen, sondern auch den seismischen Befund auf völlig anderer Grundlage zu überprüfen und den vermuteten Dichtesprung exakt zu berechnen. Es wurde schon oben festgestellt, daß als jeweilige Ausgangsfigur für eine lineare Reihe zweiparametrischer Gleichgewichtsfiguren ein WIECHERTSches Modell dient. Ferner hat jedes in seiner Parameterzahl verminderte Ersatz-Normalsphäroid mit dem wirklichen Normalsphäroid der Erde außer der Rotationsgeschwindigkeit die STOKESSche Konstante  $K$  gemeinsam, deren Zusammenhang mit der dynamischen Abplattung andererseits von der Zahl der Formparameter abzuhängen scheint. Aus diesem Grunde erscheint eine direkte sichere Bestimmung der statischen Abplattung von höchster Wichtigkeit für die exakte Berechnung der Normalfigur der Erde. Es ist zu erwarten, daß sich die Differenz ( $C - A$ ) der beiden Hauptträgheitsmomente der Erde in naher Zukunft mit großer Sicherheit aus den künstlichen Satelliten berechnen läßt.

Was zunächst das WIECHERTSche Modell betrifft, so war der klassischen Theorie eine Berechnung nur unter Annahme eines bestimmten Wertes für die Dichte des Mantels möglich, wodurch eigentlich eine unendliche Reihe von Lösungen vorliegt. Die letzte Berechnung des WIECHERTSchen Modelles führte W. DE SITTER<sup>9</sup> durch, indem er für die Manteldichte 3,312 wählte. Verwendet man die aus der dynamischen Abplattung für ein einparametrisches Normalsphäroid gewonnenen Trägheitsmomente und dieselbe Manteldichte, so findet man nach der Methode der Entblätterung wesentlich einfacher,

<sup>9</sup> W. DE SITTER: On the Flattening and the Constitution of the Earth, Bull. of the Astr. Institutes of the Netherlands, Vol. 2, S. 97—108, 1924.

durchsichtiger und exakter für die Kernoberfläche den Äquatorradius  $a' = 4750,8$  km oder die Tiefe der Kernoberfläche  $T = 1627,5$  km und den Dichtesprung  $\Delta\rho = 5,332$ , welche Werte trotz des gänzlich verschiedenen Weges mit DE SITTERS Resultat befriedigend übereinstimmen. Jedoch liegt damit im Gegensatz zur Auffassung DE SITTERS ein für die Erde unmögliches Resultat vor. Denn läßt man im Mantel und im Kern eine Dichtezunahme nach unten zu, so kann die damit notwendigerweise verbundene Abnahme des Trägheitsmomentes  $C$  nur durch eine Ausdehnung des Kernes kompensiert werden. Es müßte also die Kerntiefe  $T < 1627$  km sein, was in krassem Widerspruch zum seismischen Ergebnis steht.

Man kann aber ein eindeutiges Resultat erzielen, wenn man neben der Erhaltung von  $C$  auch die Erhaltung der Differenz  $(C - A)$  fordert, also eine Gleichung für diese Differenz mit ansetzt. Auf diese Weise ergibt sich die richtige Lösung für die Manteldichte 4,4224. Der Äquatorradius des Kernes ist  $a' = 2513,5$  km, also die Tiefe der Kernoberfläche  $T = 3864,8$  km, die Kerndichte 22,2648, mithin der Dichtesprung 17,84! An diesem Resultat ist vor allem bemerkenswert, daß es dem seismischen Ergebnis nicht widerspricht; es wäre denkbar, daß sich bei entsprechender Massenkonzentration gegen den Schwerpunkt der Kern bis zur Tiefe 2900 km ausdehnt, womit natürlich eine starke Verminderung des Dichtesprunges verbunden sein müßte. Es muß aber betont werden, daß dieser Berechnung jener numerische Wert für das Trägheitsmoment  $C$  zugrundeliegt, welcher sich aus der dynamischen Abplattung für das einparametrische Normalsphäroid ergeben hat.

Auch hieraus erkennt man wieder die hohe theoretische Bedeutung einer direkten empirischen Bestimmung der statischen Abplattung oder der STOKESschen Konstanten  $K$ . Der bisher aus den Bahnen der künstlichen Satelliten abgeleitete Wert für die statische Abplattung:

$$K/a^2 = (10\,831 \pm 2) \cdot 10^{-7} \quad (16)$$

ist nun auffallend niedrig, wenn man bedenkt, daß sich aus der dynamischen Abplattung

$$H = (32\,7237 \pm 59) \cdot 10^{-8} \quad (17)$$

für das einparametrische Normalsphäroid die statische Abplattung  $10\,8960 \cdot 10^{-8}$  ergibt. Diese Diskrepanz zwischen den empirischen Werten für die dynamische und statische Abplattung wird noch dadurch verschärft, daß einerseits der angenommene BULLARDSche Wert für die dynamische Abplattung der niedrigste in der bisherigen Reihe der Berechnungen ist, und daß andererseits in der Umgebung des Normalsphäroides die Beziehung besteht:<sup>10</sup>

$$dH = 1,7989 d(K/a^2). \quad (18)$$

<sup>10</sup> K. LEDERSTEGER: Dynamische, statische und geometrische Abplattung, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie d. Wissenschaften, im Druck.



Mithin müßte dem größten bisherigen Wert  $H = 32\,7942 \cdot 10^{-8}$  (W. DE SITTER) die statische Abplattung  $K/a^2 = 10\,9353$  entsprechen.

Läßt man die beiden Werte (16) und (17) gleichzeitig bestehen, so ergibt sich mit  $E = 5976,259 \cdot 10^{24}$  g und  $a = 6\,378\,290$  m für die tatsächliche Erde

$$C = 80\,471,86 \cdot 10^{40}; \quad (C - A) = 263,334 \cdot 10^{40} \quad (19)$$

und es erscheint gänzlich ausgeschlossen, daß sich bei der Regularisierung der Erdkruste die beiden Trägheitsmomente  $C$  und  $A$  um den großen Betrag  $289,10 \cdot 10^{40}$  ändern, wie es das einparametrische Normalsphäroid  $[E, \omega, a, K]$  erfordern würde. Diese Änderung  $\Delta C = 0,0036 C$  ist wesentlich größer als die von W. DE SITTER auf Grund isostatischer Massenverschiebungen bei 14 schematisierten Schollen berechnete Änderung  $\Delta C = -3,4 \cdot 10^{-7} C$ , welche dem Sollwert Null bedeutend näher kommt.

Wir sehen demnach, daß sich eine Reihe von Problemen ergibt, deren Lösung die Feststellung der Anzahl der Formparameter des wirklichen Normalsphäroides der Erde zur Voraussetzung hat. Eine einwandfreie Klärung dieser Fragen hängt von der Auffindung des Dichtegesetzes der mehrparametrischen heterogenen Gleichgewichtsfiguren ab. Einen gewaltigen Fortschritt würde vermutlich die restlose Aufklärung der Frage bedeuten, ob die Rotationsgeschwindigkeit eine eindeutige Funktion der Trägheitsmomente  $C$  und  $A$  ist. Dies würde offensichtlich die Berechnung mehrparametrischer Figuren wesentlich erleichtern.

Abschließend sei noch betont, daß sich der erste Abschnitt der vorstehenden Ausführungen teilweise mit dem Inhalt des vorjährigen Budapester Vortrages des Autors: »Zur Theorie des Normalsphäroides der Erde« deckt, welchen Herr Dr. EMIL REGŐCZI liebenswürdigerweise übersetzt und veröffentlicht hat.<sup>11</sup>

#### ZUSAMMENFASSUNG

Ausgehend von einer kurzen Zusammenfassung der früheren Ergebnisse einer neu entwickelten Theorie der einparametrischen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren wird die Form ihres stetigen und streng individuellen Dichtegesetzes aus den Grenzfiguren der Hüllfläche, den sogenannten Sphäroiden der größten Massenkonzentration abgeleitet. Sodann wird in Verallgemeinerung eines bekannten Satzes der Potentialtheorie die Methode der Entblätterung entwickelt, welche es gestattet, jede beliebige innere Niveaufläche bloßzulegen und als freie Oberfläche einer in Achse und Masse reduzierten Gleichgewichtsfigur derselben Rotationsgeschwindigkeit zu berechnen. Damit kann völlig unabhängig von der CLAIRAUTSchen Differentialgleichung die Abplattungsfunktion der inneren Niveauflächen sowie der Schweregradient und die gesamte Schwereverteilung ermittelt werden. Mit der Berechnung des WIECHERTSchen Modelles wird schließlich ein erster Versuch unternommen, die Theorie auf mehrparametrische Figuren auszudehnen, und die hohe Bedeutung der künstlichen Satelliten für die empirische Bestimmung der statischen Abplattung betont.

<sup>11</sup> K. LEDERSTEGGER: A Föld normálszféroidjának elméletéhez, Geodézia és Kartográfia, Budapest 1960, Seite 1—8.

## NEW STUDIES CONCERNING THE THEORY OF HETEROGENEOUS SPHEROIDAL FIGURES OF EQUILIBRIUM

K. LEDERSTEGE

### SUMMARY

Departing from a brief review of former results of a newly developed theory of one-parameter spheroidal figures of equilibrium, the author derives their steady and strictly individual density relation from the figures of the envelope, the so-called spheroids of greatest mass concentration. Further on, by a generalization of a well-known theory of potential theory, he develops the method of shell-skinning which permits to lay bare every one of the internal level surfaces and to calculate it as the free surface of a figure of equilibrium of the same angular velocity but of reduced mass and dimensions. In this way it is possible, quite independently of the CLAIRAUT Differential Equation, to determine the function of flattening of the internal level surfaces as well as the gravity gradient and the entire gravity distribution. Finally, by calculating the WIECHERT Model a first attempt is made to extend the theory to figures of more than one parameter. In this relation the author stresses the importance of artificial satellites for the empiric determination of the static flattening.

## NOUVELLES RECHERCHES SUR LA THÉORIE DES FIGURES D'ÉQUILIBRE SPHÉROIDES HÉTÉROGÈNES

K. LEDERSTEGE

### RÉSUMÉ

En partant d'un bref résumé des résultats d'une nouvelle théorie des figures d'équilibre sphéroïdes à un paramètre, l'auteur déduit l'équation de la loi de répartition continue et strictement individuelle de ces figures, à partir des figures d'équilibre de l'enveloppe, c'est-à-dire des sphéroïdes de la plus grande concentration de masse. En généralisant la théorie du potentiel, il développe une méthode permettant de calculer n'importe quelle surface de niveau interne comme la surface libre d'une figure d'équilibre de même vitesse de rotation, réduite dans son axe et sa masse. Ainsi, la fonction d'aplatissement des surfaces de niveau internes, le gradient de pesanteur et la répartition totale de la pesanteur peuvent être déterminés d'une façon complètement indépendante de l'équation différentielle de CLAIRAUT. Par le calcul du modèle de WIECHERT, l'auteur tente enfin un premier essai d'extension de la théorie aux figures à plusieurs paramètres, et souligne que, du point de vue de la détermination empirique de l'aplatissement statique, les satellites artificiels présentent une grande importance.

## НОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ

К. ЛЕДЕРШТЕГЕР

### РЕЗЮМЕ

Исходя из краткого резюме полученных ранее результатов, вновь развитой теории сфероидальных фигур равновесия с одним параметром, выводится форма их постоянного и строго индивидуального закона плотности из граничных фигур поверхности оболочки, т. е. сфероидов наибольшей концентрации массы. Затем, как обобщение известной теоремы потенциальной теории, развивается метод отшелушивания, позволяющий обнажить внутреннюю поверхность любого уровня, расчет которой затем может вестись как расчет свободной поверхности фигуры равновесия с уменьшенными осью и массой но с той же скоростью ротации. Таким образом функция приведения к плоскости внутренних поверхностей уровня, а также градиент и общее распределение тяжести могут быть рассчитаны совершенно независимо от дифференциального уравнения Клеро. Наконец, посредством расчета модели Вихерта, делается первая попытка распространить теорию на фигуры с несколькими параметрами, и подчеркивается большое значение искусственных спутников в области эмпирического определения статического сплюсывания.

# ON THE ADJUSTMENT OF THE BASE QUADRILATERAL

Prof. B. MILASOVSKY

D. ENG. SC.

DEPARTMENT OF GEODESY, TECHNICAL UNIVERSITY, MISKOLC, HUNGARY

[Manuscript received November 8, 1960]

As it is well known, the purpose of a base net is to furnish by calculation the most probable length of a primary triangulation net, being given a base whose length was measured to a high degree of precision and a surplus number of measurements of directions or angles connected therewith. The triangle side, whose length is in general thrice that of the measured base, will be called below also the "extension side". The calculations to follow have among others the goal of revealing the reliability of the length of the extension side.

The adjustment in this sense of the base net is carried out by the so-called method of correlates, also called the "adjustment method of conditioned observations". In this respect, let us refer to p. 645, § 74, of Vol. IV of the 1958 edition of the JORDAN—EGGERT—KNEISSL manual of geodesy [1]:\* "Da die Ausgleichung eines Basisvergrößerungsnetzes fast ausnahmslos nach bedingten Beobachtungen ausgeführt wird..." ("Since the adjustment of a base net is carried out almost without exception on the basis of conditioned observations...").

However, there is a different way of solving the problem. Thus, the calculation of the base quadrilateral occurring in [2] was done on the principle of conditioned observations including one non-measured unknown. In the case under consideration, this principle can be applied to advantage, since it yields the adjusted angles, as well as the length and weight of the extension side of the primary net of triangulation, in a single set of operations.

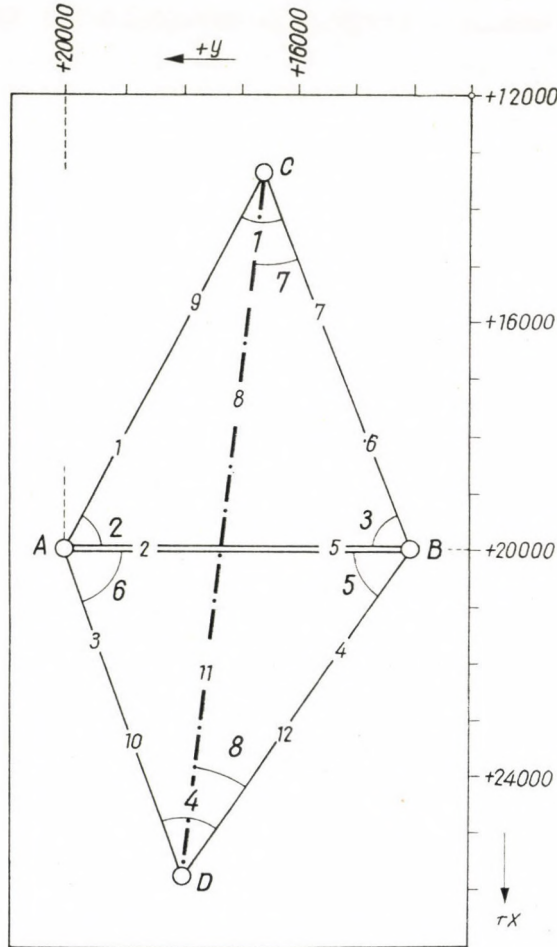
Since at present the trilateration by physical methods of a primary net is relatively rare as yet, the problem of the base quadrilateral remains for the time being a central one. Hence, in the author's opinion, the problem of the most suitable calculation of the base quadrilateral well merits the treatment on a general level it will be given in the following.

The adjustment of the base quadrilateral can also be done by the method of adjusting indirect observations. In all three cases mentioned, the basic

\* The figures in square brackets refer to the list of references, to be found at the end of the paper.

principle of adjustment is the principle of least squares. On assuming the same measured data, every one of the methods must furnish the same length and same mean error for the side in question.

In the inquiry to be carried out below, the simplest and at the same time the common form of the base net, the rhombic quadrilateral will be considered.



The measurements assumed will be angle measurements, inflicted with unavoidable errors, whereas the base  $\overline{AB}$  itself will be considered free of error.

In the following, we shall deal with four alternatives of base-quadrilateral adjustment, to wit:

[A] Solution by the classical procedure of correlate adjustment; the establishment of the distance function and of its weight is a separate task carried out subsequently to the adjustment of the base net.

[B] Solution by the "unified" procedure of correlate adjustment, combined with simultaneous calculation of the weight of the function.

[C] Adjustment of the angles considered as conditioned measurements simultaneously with the establishing of the length and weight coefficient of the non-measured side.

[D] Given the definite base and the angles considered as indirect observations. The four coördinates of the two end points of the extension side, the length of the side itself and its weight are calculated in a single set of adjustment.

\*

A comparative analysis of this sort becomes more illustrative if backed by concrete numerical data. For this purpose, we have assumed an actually measured base quadrilateral as a numerical example; this same quadrilateral is shown also in the figure.\* The numerical data and computations were listed in tables to which frequent reference will be made below.

\* \* \*

#### [A] Solution by the conventional procedure of adjustment by correlates

This well-known alternative will not be discussed in detail here. In the case of the base quadrilateral this system of calculation splits up in two separate phases. The purpose of the first phase is to furnish the adjusted values of the angles. In the possession of these latter, the same length must be obtained for the expansion side  $\overline{CD}$ , irrespectively of the method of calculation applied. As a subsequent phase, the reciprocal weight of  $\overline{CD}$  is calculated. This can be done likewise in two ways, to wit [3], by

- a) the method of transfer coefficients,
- b) the method of extended normal equations.

It is precisely this splitting of the work of calculation that we wish to eliminate by the alternative [B] below. This latter will permit to calculate the square sum  $[pvv]$  of the residuals, all correlates  $k$  and the reciprocal weight  $\frac{1}{P}$  of the required triangle side  $\overline{CD}$  in a single set of operations. This results in a more lucid schedule of calculations on the one hand and in a saving of labour on the other.

\* \* \*

\* For the detailed evaluation of the numerical example by all four alternative methods I must extend my thanks to Engineer DR. E. HÖNYI, Candidate of Technical Sciences.

**[B] Solution by the simultaneous calculation of the correlates  
and of the reciprocal weight of the side CD**

Since all eight angles of the base quadrilateral represented in the figure have been measured, we have  $8 - 4 = 4$  surplus measurements. Hence, four independent conditional equations are to be written up, notably three angle equations and one side equation.

The serials 1 through 8 denote adjusted angles, whereas the symbols  $1' \dots 8'$  denote the measured angles. These values stand in the following relation to the required residuals  $v$  of the angles:

$$1 = 1' + v_1; \quad 2 = 2' + v_2; \quad \dots \quad 8 = 8' + v_8. \quad (1)$$

The appropriate numerical values are found in Table I.

**Table I**  
*Alternative B)*

Measured angle + residual = adjusted angle	
47°46'12.26"	- 0.20" = 47°46'12,06"
63 12 29.22	- 0.42 = 63 12 28.80
69 01 19.31	- 0.17 = 69 01 19.14
53 51 37.50	+ 0.38 = 53 51 37.88
55 28 26.26	+ 0.67 = 55 28 26.93
70 39 54.65	+ 0.54 = 70 39 55.19
28 16 50.14	- 0.12 = 27 16 50.02
28 13 23.45	+ 0.46 = 28 13 23.91
Length of the base accepted as free of error	
$AB = 5\,879,989 \text{ m}$	

The three side equations are linear to begin with:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 1 + 2 + 3 - 180^\circ = 0 \\
 \text{b)} \quad & 4 + 5 + 6 - 180^\circ = 0 \\
 \text{c)} \quad & 3 + 5 + 7 + 8 - 180^\circ = 0.
 \end{aligned} \quad (2)$$

However, the side equation is transcendental:

$$\frac{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}{\sin 1 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8} - 1 = 0. \quad (3)$$

The latter can be reduced to a linear form by taking logarithms:

$$\begin{aligned} & \log \sin (2' + v_2) + \log \sin (4' + v_4) + \log \sin (7' + v_7) - \\ & - \log \sin (1' + v_1) - \log \sin (6' + v_6) - \log \sin (8' + v_8) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Let us develop this expression in a Taylor series and neglect the terms of higher order:

$$\begin{aligned} & \log \sin 2' + d_2 v_2 + \log \sin 4' + d_4 v_4 + \log \sin 7' + d_7 v_7 - \\ & - \log \sin 1' - d_1 v_1 - \log \sin 6' - d_6 v_6 - \log \sin 8' - d_8 v_8 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

where the symbols  $d$  denote the partial derivatives of the function taken at the measured values, namely

$$d_1 = \frac{M}{\varrho} \cot 1'; \quad d_2 = \frac{M}{\varrho} \cot 2'; \quad \dots \quad d_8 = \frac{M}{\varrho} \cot 8' \quad (6)$$

where the modulus,  $M$ , equals 0,434294 and the radian,  $\varrho$ , 206 265". (7)

The coefficients  $d$  thus defined coincide with the tabular differences listed in the table of logarithms, referring to 1" of the log sines of the angles. The log sine values of our measured angles will be added up to form a single absolute term  $l_d$ . Thus we get for the side equation the following linearized symbolical expression:

$$- d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_4 v_4 - d_6 v_6 + d_7 v_7 - d_8 v_8 + l_d = 0. \quad (8)$$

The numerical values of the absolute terms are listed in Table II.

The residuals of the angles must be determined, as it is well known, in such a way that they satisfy not only the condition equations but also the condition  $[p v v] = \text{Min}$ . In order to satisfy these conditions, we must compute the correlates from the normal equations. However, as a peculiar feature of Alternative [B], we wish to utilize these also in computing the reciprocal weight of the extension side  $\overline{CD}$ .

Let us start from the following relation:

$$\overline{CD} = \overline{AB} \frac{\sin 2 \cdot \sin (3 + 5)}{\sin 1 \cdot \sin 8} = \overline{AB} \cdot f'. \quad (9)$$

On substituting the adjusted angles by the measured ones, and by their residuals, (9) assumes the form

$$\overline{CD} = \overline{AB} \frac{\sin (2' + v_2) \sin (3' + 5' + v_3 + v_5)}{\sin (1' + v_1) \sin (8' + v_8)} = \overline{AB} \cdot f'. \quad (10)$$

Table II

Alternative [B]

Formation of the absolute term  $l$  of the angle equation

Serial	Value	Serial	Value	Serial	Value
of the measured angle		of the measured angle		of the measured angle	
1	47°46'12.26"	4	53°51'37.50"	3	69°01'19.31"
2	63 12 29.22	5	55 28 26.26	5	55 28 26.26
3	69 01'19.31	6	70 39 54.65	7	27 16 50.14
				8	28 13 23.45
$\Sigma$	180°00'00.79" -180°00'00.00"	$\Sigma$	179°59'58.41" -180°00'00.00"	$\Sigma$	179°59'59.16" -180°00'00.00"
$l_a =$	+0.79"	$l_b =$	-1.59"	$l_c =$	-0.84"

Formation of the coefficients and of the absolute term of the side equation

Serial	Value	log sine	differ- ence to 1"	Serial	Value	log sine	differ- ence to 1"
of the measured angle				of the measured angle			
2	63°12'29.22"	9,950 68 107	+105	1	47°46'12.26"	9,869 49 784	+192
4	53 51 37.50	9,907 18 695	+154	6	70 39 54.65	9,974 78 789	+ 73
7	27 16 50.14	9,661 19 587	+408	8	28 13 23.45	9,674 77 602	+392
		9,519 06 389				9,519 06 175	

 $l_d = +214$  (in units of the eighth decimal of the log)

Numerical form of the side equation:

$$-1.92 \cdot v_1 + 1.06 \cdot v_2 + 1.54 \cdot v_4 - 0.73 \cdot v_6 + 4.08 \cdot v_7 - 3.92 \cdot v_8 + 2.14 = 0$$

This function must likewise be linearized. Let us consequently develop  $f'$  in a Taylor series:

$$f' = \frac{\sin 2' \cdot \sin (3' + 5')}{\sin 1' \cdot \sin 8'} + \frac{\partial f'}{\partial 1} v_1 + \frac{\partial f'}{\partial 2} v_2 + \frac{\partial f'}{\partial 3} v_3 + \frac{\partial f'}{\partial 5} v_5 + \frac{\partial f'}{\partial 8} v_8. \quad (11)$$

Or, in a briefer symbolism,

$$f' = f_0 + f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + f_5 v_5 + f_8 v_8 \quad (12)$$



where the partial derivatives are given by the following expressions:

$$\begin{aligned} f_1 &= -f' \cot 1'; & f_2 &= +f' \cot 2'; & f_3 &= +f' \cot (3' + 5'); \\ f_5 &= +f' \cot (3' + 5'); & f_8 &= -f' \cot 8' \end{aligned} \quad (13)$$

Table III

Alternative [B]

Calculation of definite length of extension side  $\overline{CD}$ . Preliminary computations to the control of the accuracy of the length  $\overline{CD}$ .

$$\overline{CD} = \overline{AB} \frac{\sin 2 \cdot \sin (3 + 5)}{\sin 1 \cdot \sin 8} = \overline{AB} \cdot f'$$

$$f' = f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + f_5 v_5 + f_8 v_8 + f'_0$$

Serial number	Value	Sine—	Cotangent
of the adjusted angle			
1	47°46'12,06"	+0.740 45 300	+0,907 69 867
2	63 12 28,80	+0.892 64 877	+0,504 96 111
3 + 5	124 29 46,07	+0.824 16 441	-0,687 18 154
8	28 13 23,91	+0.472 90 923	+1,863 17 173

$$\overline{AB} = 5\,879,989 \text{ m}$$

$$f' = \frac{\sin 2 \cdot \sin (3 + 5)}{\sin 1 \cdot \sin 8} = \frac{0,735\,68\,935}{0,350\,16\,706} = 2,100\,9667$$

$$\overline{CD} = 5\,879,989 \cdot 2,100\,9667 = 12\,353,661 \text{ m}$$

The  $f$ -factors according to (13):

$$\begin{aligned} f_1 &= -f' \cdot \cot 1 &= -1,907 \\ f_2 &= f'_0 \cdot \cot 2 &= +1,061 \\ f_3 &= f'_0 \cdot \cot (3 + 5) &= -1,444 \\ f_5 &= f'_0 \cdot \cot (3 + 5) &= -1,444 \\ f_8 &= -f' \cdot \cot 8 &= -3,914 \end{aligned}$$

The factors in the last row of (31):

$$\left[ \frac{af}{p} \right] = -2,290; \left[ \frac{bf}{p} \right] = -1,444; \left[ \frac{cf}{p} \right] = -6,802;$$

$$\left[ \frac{df}{p} \right] = +20,176; \left[ \frac{ff}{p} \right] = +24,252$$

The numerical values of (13) are contained in Table III. From (12) we obtain the following condition equation:

$$f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + f_5 v_5 + f_8 v_8 + 0 = 0 \quad (14)$$

Now (2), (8) and (14) form together the following system of linear condition equations:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + l_a = 0 \\ \text{b)} \quad & \dots + b_4 v_4 + b_5 v_5 + b_6 v_6 + \dots + l_b = 0 \\ \text{c)} \quad & \dots + c_3 v_3 + \dots + c_5 v_5 + \dots + c_7 v_7 + c_8 v_8 + l_c = 0 \quad (15) \\ \text{d)} \quad & -d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_4 v_4 - \dots - d_6 v_6 + d_7 v_7 - d_8 v_8 + l_d = 0 \\ \text{f)} \quad & f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + \dots + f_5 v_5 + \dots + f_8 v_8 + 0 = 0 \end{aligned}$$

The coefficients of the system of equations (15) which hold in the case of our numerical example are listed in Table IV.

Now let us consider the formation of the coefficients  $\left[\frac{aa}{p}\right], \left[\frac{ab}{p}\right], \dots, \left[\frac{dd}{p}\right]$  of the normal equations. It is our intention to derive by the solution of the normal equations not only the correlates but also the reciprocal weight  $\frac{1}{P_f}$ , of the distance function  $f'$  given under (12). Accordingly, we shall form also the sums of products  $\left[\frac{af}{p}\right], \left[\frac{bf}{p}\right], \dots, \left[\frac{ff'}{p}\right]$ . The appropriate numerical results are listed in the lower part of Table III.

It is known that in the case of an adjustment by correlates the reciprocal weight of the function  $f'$  given under (10) and (12) can be written as follows ([4], § 46, p. 143, Formula 15):

$$\frac{1}{P_{f'}} = \left[\frac{ff'}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bf}{p} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{cf}{p} \cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} - \frac{\left[\frac{df}{p} \cdot 3\right]^2}{\left[\frac{dd}{p} \cdot 3\right]} = \left[\frac{ff'}{p} \cdot 4\right] \quad (16)$$

Let us remind here of the method of solution of normal equations first published in 1924, and known in literature by the names of CHOLESKY and RUBIN [5]. In the sense of this method, the negative symbols of the equation (16) are the squares of reduced terms which can be formed in the course of solving the normal equations by taking into consideration the function (14).

Table IV  
Alternative [B]

Tabulated form of condition equations. Numerical values of correlates and residuals

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$l$	$k^*)$
$a$	+1	+1	+1						+0,79	-0,3425
$b$				+1	+1	+1			-1,59	+0,4908
$c$			+1		+1		+1	+1	-0,84	+0,1759
$d$	-1,92	+1,06		+1,54		-0,73	+4,08	-3,92	+2,14	-0,0720
( $f$ )	-1,907	+1,061	-1,444	0	-1,444	0	0	-3,914	**)	
$v$	-0,204"	-0,419"	-0,167"	+0,380"	+0,667"	+0,543"	-0,118"	+0,458"	***)	
Control: $[pvv] = 1,3529$					$-[kl] = 1,3528$					

Remarks

- \*) For the calculation of the correlates see Table V.  
 \*\*) Row ( $f$ ) includes the coefficients of the last equation (15).  
 \*\*\*) Residuals are formed according to (18).

In the CHOLESKY—RUBIN schedule, the thus extended system of coefficients of the normal equations assumes the following form: (17)

$k_a$	$k_b$	$k_c$	$k_d$	$l$				$f$	$s-1$	$\Sigma$
$\left[ \frac{aa}{P} \right]$	$\left[ \frac{ab}{P} \right]$	$\left[ \frac{ac}{P} \right]$	$\left[ \frac{ad}{P} \right]$	$l_a$	-1			$\left[ \frac{af}{P} \right]$		
	$\left[ \frac{bb}{P} \right]$	$\left[ \frac{bc}{P} \right]$	$\left[ \frac{bd}{P} \right]$	$l_b$		-1		$\left[ \frac{bf}{P} \right]$		
		$\left[ \frac{cc}{P} \right]$	$\left[ \frac{cd}{P} \right]$	$l_c$			-1	$\left[ \frac{cf}{P} \right]$		
			$\left[ \frac{dd}{P} \right]$	$l_d$				$\left[ \frac{df}{P} \right]$		
								$\left[ \frac{ff}{P} \right]$		

Here are entered the reduced terms in four rows

The results:	$-[pvv]$	$-k_a$	$-k_b$	$-k_c$	$-k_d$				
						$Q_f = \frac{1}{P_f}$			

Applying now the rules of the CHOLESKY—RUBIN procedure and extending accordingly the reductions also to the column of the fifth unknown, denoted  $1/P_f$ , we obtain as a result of the computations indicated given by the above table (17) not only the square sum  $[pvv]$  of the residuals and the correlates but also the reciprocal weight  $1/P_f$ , of the function  $f'$ .

The numerical work is illustrated by Table V. In the same table, also the calculation of the mean square error  $\mu_0$  of the angles measured with equal weights was carried out.

In the possession of the numerical values of the four correlates, the residuals  $v$  of the measured angles are to be obtained in the well-known manner from the correlate equations:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{1 \cdot k_b + d_4 \cdot k_d}{P_1}; & v_2 &= \frac{1 \cdot k_a + d_2 \cdot k_d}{P_2}; \\
 v_3 &= \frac{1 \cdot k_a + 1 \cdot k_c}{P_3}; & v_4 &= \frac{1 \cdot k_b + d_4 \cdot k_d}{P_4}; \\
 v_5 &= \frac{1 \cdot k_b + 1 \cdot k_c}{P_5}; & v_6 &= \frac{1 \cdot k_b + d_6 \cdot k_d}{P_6}; \\
 v_7 &= \frac{1 \cdot k_c + d_7 \cdot k_d}{P_7}; & v_8 &= \frac{1 \cdot k_c + d_8 \cdot k_d}{P_8}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Table V

Alternative [B]

System of coefficients of normal equations, complemented with the function  $f'$  (Equation 12). Solution after Cholesky and Rubin

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$k_a$	$k_b$	$k_c$	$k_d$	$l$					$f'$	$s-1$	$\Sigma$
$a$	+3	0	+1	- 0,86	+0,79	-1				-2,290	+0,640	
$b$		+3	+1	+ 0,81	-1,59		-1			-1,444	+0,776	
$c$			+4	+ 0,16	-0,84			-1		-6,802	-2,482	
$d$				+39,7273	+2,14				-1	+20,176	+61,153	
$e$										+24,252	+24,752	
$f$	+1,7321	0	+0,5773	-0,4965	+0,4561	-0,5773				-1,3221	+0,3695	+0,3696
$g$		+1,7321	+0,5773	+0,4676	-0,9180	0	-0,5773			-0,8337	+0,4480	+0,4480
$h$			+1,8258	+0,0968	-0,3140	+0,1825	+0,1825	-0,5477		-3,0438	-1,6179	-1,6179
$i$				+6,2652	+0,4511	-0,0486	+0,0403	+0,0085	-0,1596	+3,2248	+9,7816	+9,7817
$j$					-1,3528 - [pvv]	+0,3425 - $k_a$	-0,4908 - $k_b$	-0,1759 - $k_c$	+0,0720 - $k_d$	+21,6792	+20,0742	+20,0742
$k$										+2,1449 $Q_f = 1/P_f$		

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{1,3528}{8-4}} = \pm 0,582''$$

The correlates obtained here are entered in Table III.

Table VI

Alternative [C]

Coefficients and absolute term of the length equation

$$x_0 = \overline{AB} \frac{\sin 2' \cdot \sin (3 + 5)'}{\sin 1' \cdot \sin 8'} = \overline{CD}_0 \text{ (preliminary length)}$$

$$= 5879,989 \frac{0,892\ 64\ 969 \cdot 0,824\ 16\ 578}{0,740\ 45\ 365 \cdot 0,472\ 90\ 727} = 12\ 353,735 \text{ m}$$

angle, side		log sine, log	dif- ference on 1''	angle, side		log sin, log	difference
2	63°12'29,22''	9,950 68 107	+106	1	47°46'12,26''	9,869 49 784	+192*)
3+5	124 29 45,57	9,916 01 462	-145	8	28 13 23,45	9,674 77 602	+392*)
$\overline{AB}$	5 879 989 mm	6,769 37 649	-	$x_0$	12 353 735 mm	7,091 79 827	+3,52**)
		6,636 07 218				6,636 07 213	

$l_f = +5$  units in the eighth decimal of the logarithm

Remarks: \*) Difference falling to 1'', \*\*) difference falling to 1 mm

Numerical form of the length equation:

$$-1,92 \cdot v_1 + 1,06 \cdot v_2 - 1,45 \cdot v_3 - 1,45 v_5 - 3,92 \cdot v_8 - 0,0352 \cdot dx + 0,05 = 0$$

The numerical values of the residuals are listed in Table IV. In the possession of the residuals we get by (1) the adjusted angles (Table I), which have to satisfy the condition equations. This control of the above calculation will not be enlarged upon here, and we shall only call attention to the fact that the evaluated side equation,

$$9,519\ 06\ 355 - 9,519\ 06\ 358 = -0,000\ 00\ 003,$$

showed a deviation of 3 units in the eighth decimal place of the log sine.

The final length of the required triangle side  $\overline{CD}$  in the sense of (9) is furnished by Table III.

The mean square error of the function  $f'$  under (12) is

$$\mu_{f'} = \mu_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{P_{f'}}} = 0,582 \sqrt{2,1449} = \pm 0,852'' \quad (19)$$

Since the base  $\overline{AB}$  is regarded to be free of error, the mean s. error of the side  $\overline{CD}$  is, by (9),

$$\overline{\mu}_{CD} = \overline{AB} \frac{\mu_{f'}}{\varrho} = 5\,879,989 \frac{0,852''}{206265''} = 0,02429 \text{ m.} \quad (20)$$

The final result is, as revealed by Table III:

$$\overline{CD} = 12\,353,661 \pm 0,024 \text{ m} \quad (21)$$

\* \* \*

### [C] Simultaneous adjustment of the measured angles and of the non-measured side length

In the foregoing chapter [B] we have taken relation (9) as a basis for determining the adjusted length of the extension side  $\overline{CD} = x$  and simultaneously for determining the "a posteriori" mean square error of the side. There is no reason why we should not adjoin this equation as a fifth condition to the four condition equations of the simple adjustment by correlates. That is, we are free to regard the problem as one of adjusting conditioned measurements including one non-measured unknown  $x$  [6].

Hence, in the case of our base quadrilateral, the five condition equations can be written as follows:

$$a) \quad 1 + 2 + 3 - 180^\circ = 0$$

$$b) \quad 4 + 5 + 6 - 180^\circ = 0 \quad (3 \text{ angle equations}) \quad (22)$$

$$c) \quad 3 + 5 + 7 + 8 - 180^\circ = 0$$

$$d) \quad \frac{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 7}{\sin 1 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8} - 1 = 0; \quad (1 \text{ side equation}) \quad (23)$$

$$f) \quad \overline{AB} \frac{\sin 2 \cdot \sin (3 + 5)}{\sin 1 \cdot \sin 8} - x = 0. \quad (1 \text{ length equation}) \quad (24)$$

We have invariably four surplus measurements.

The condition equations  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$  and  $d)$  can be written up and the last one can be linearized just like in the foregoing chapter [B].

The length equation  $f)$  expresses that, starting from the definite base  $\overline{AB}$ , we must obtain on introducing the adjusted angles the most probable value of the extension side  $\overline{CD} = x$ . The length equation is likewise linearized by taking logarithms:

$$\begin{aligned} & \log \overline{AB} + \log \sin (2' + v_2) + \log \sin (3' + 5' + v_3 + v_5) - \\ & - \log (x_0 + dx) + \log \sin (1' + v_1) + \log \sin (8' + v_8) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$





**Table VII**  
*Alternative [C]*

Tabulated form of the condition equations. Formation of the residuals  $v$  of the angles by (30)

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$dx$	$l$	$k^*$
$a$	+1	+1	+1							+0,79	-0,3428
$b$				+1	+1	+1				-1,59	+0,4906
$c$			+1		+1		+1	+1		-0,84	+0,1765
$d$	-1,92	+1,06		+1,54		-0,73	+4,08	-3,92		+2,14	-0,0720
$f$	-1,92	+1,06	-1,45		-1,45			-3,92	-0,0352	+0,05	0
$v$	-0,205"	-0,419"	-0,166"	+0,380"	+0,667"	+0,543"	-0,117"	+0,459"			

\*) Correlates were transferred from Table VIII.

these contain five unknown correlates. We substitute (30) into the linear condition equations, whereupon we get after reduction the first group of normal equations which, in the case under consideration, consists of five equations, to wit:

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{aa}{p} \right] k_a + \left[ \frac{ab}{p} \right] k_b + \left[ \frac{ac}{p} \right] k_c + \left[ \frac{ad}{p} \right] k_d + \left[ \frac{af}{p} \right] k_f + & + l_a = 0 \\
 \left[ \frac{ab}{p} \right] k_a + \left[ \frac{bb}{p} \right] k_b + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_c + \left[ \frac{bd}{p} \right] k_d + \left[ \frac{bf}{p} \right] k_f + & + l_b = 0 \\
 \left[ \frac{ac}{p} \right] k_a + \left[ \frac{bc}{p} \right] k_b + \left[ \frac{cc}{p} \right] k_c + \left[ \frac{cd}{p} \right] k_d + \left[ \frac{cf}{p} \right] k_f + & + l_c = 0 \quad (31) \\
 \left[ \frac{ad}{p} \right] k_a + \left[ \frac{bd}{p} \right] k_b + \left[ \frac{cd}{p} \right] k_c + \left[ \frac{dd}{p} \right] k_d + \left[ \frac{df}{p} \right] k_f + & + l_d = 0 \\
 \left[ \frac{af}{p} \right] k_a + \left[ \frac{bf}{p} \right] k_b + \left[ \frac{cf}{p} \right] k_c + \left[ \frac{df}{p} \right] k_d + \left[ \frac{ff}{p} \right] k_f + A_f \cdot dx + l_f = & 0
 \end{aligned}$$

However, the LAGRANGE function must be differentiated partially also with respect to the non-measured unknown  $x$ , and hence there arises a further normal equation of the following simple form ([4], § 61, p. 193, Formulae (17) —(20)):

$$A_f \cdot k_f + 0 + 0 = 0 \quad (32)$$

Consequently, in the adjustment of our base quadrilateral by the method [C] there arise six normal equations, whereas the alternative [B] furnished only five. However, the last equation yields in principle, for the correlate  $k_f$ , the relation

$$k_f = 0 \quad (33)$$

Since  $k_f$  occurred in every normal equation, the fifth term multiplied with  $k_f$  vanishes in every one of them. However, the five remaining equations contain precisely five unknowns; to wit, the four correlates denoted  $k_a, k_b, k_c, k_d$  respectively and the change of length  $dx$  of the non-measured side. Hence, every term multiplied with  $k_f$  vanishes also from the correlate equations (30) serving to furnish the residuals.

Still, the possibility of simplifying the equations by  $k_f = 0$  was not made use of in evaluating our numerical example which was solved with a normal equation system of six equations containing six unknowns. The reason for this was that in this manner we have obtained the necessary basis for

computing the weight of the side  $x = \overline{CD}$ . It is true that owing to the rounded-off values the solution furnished

$$k_f = -0,0007$$

instead of zero for the fifth correlate, but this value was neglected in the further numerical computations.

The advantage of the solution by method [C] is that the evaluation of the system of normal equations furnishes beside the change  $dx$  of the extension side  $\overline{CD} = x$  also directly its weight  $p_x$ . However, for this advantage to be a real one, it is necessary to apply the *Gauss method* of elimination, since the *CHOLESKY—RUBIN method* makes matters much less simple. To wit, the leading term of the normal equation (32) is zero, and that means that in the *CHOLESKY—RUBIN* schedule the squares of the reduced terms are to be subtracted from zero. Now that leads to imaginary numbers in the root expressions. On the other hand, in the *GAUSS* procedure the result is furnished by the algebraic sum of the reduced terms and hence the terms of negative sign can cause no difficulty. However, the *Gauss method* of substitution is much more complicated, especially in the case of a greater number of unknowns, than the *CHOLESKY—RUBIN method*. This circumstance is a definite disadvantage of the otherwise elegant alternative [C].

In summary, the system of coefficients of the normal equations will be used in the following arrangement:

1	$k_a$	$k_b$	$k_c$	$k_d$	$k_f$	$dx$	$l$
2	$\left[ \frac{aa}{p} \right]$	$\left[ \frac{ab}{p} \right]$	$\left[ \frac{ac}{p} \right]$	$\left[ \frac{ad}{p} \right]$	$\left[ \frac{af}{p} \right]$		$l_a$
3		$\left[ \frac{bb}{p} \right]$	$\left[ \frac{bc}{p} \right]$	$\left[ \frac{bd}{p} \right]$	$\left[ \frac{bf}{p} \right]$		$l_b$
4			$\left[ \frac{cc}{p} \right]$	$\left[ \frac{cd}{p} \right]$	$\left[ \frac{cf}{p} \right]$		$l_c$
5				$\left[ \frac{dd}{p} \right]$	$\left[ \frac{df}{p} \right]$		$l_d$
6					$\left[ \frac{ff}{p} \right]$	$A_f$	$l_f$
7						0	0
8							0

(34)

Table VIII

Alternative [C]

System of coefficients of the normal equations  
Results of solution by the Gaussian algorithm

$k_a$	$k_b$	$k_c$	$k_d$	$k_f$	$dx$	$l$	$-s$
<u>+3</u>	0	+1	-0,86	-2,31	0	+0,79	-1,62
	<u>+3</u>	+1	+0,81	-1,45	0	-1,59	-1,77
		<u>+4</u>	+0,16	-6,82	0	-0,84	+1,50
			<u>+39,723</u>	+20,176	0	+2,14	-62,154
				<u>+24,381</u>	-0,0352	+0,05	-33,993
					<u>0</u>	0	+0,0352
						<u>0</u>	-0,55

$- [pvv] = -1,3528$   
 $dx = -71,6071 \text{ mm}$   
 $px = 0,000 560 \text{ 1/mm}^2$

Length of the extension side:

$$x = x_0 + dx = 12\,353,735 - 0,072 = 12\,353,663 \text{ m}$$

Correlates furnished by the solution:

$$k_f = -0,0007; k_d = -0,0720; k_c = +0,1765; k_b = +0,4906; k_a = -0,3428$$

(The correlates of Table VII were transcribed from here)

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \sqrt{\frac{1,3528}{4}} = \pm 0,582''$$

The numerical form of the normal equations is represented by Table VIII.

In solving the system of equations (34) we obtain in the last reduced equation besides the numerical value of  $dx$  also its weight, which is the coefficient of the unknown. Here, care must be taken of the dimensions. The weight  $p_x$  will be obtained in the same units as the coefficient of the change  $dx$  was written in the length equation. We have utilized millimetres in our computations.

By (34), we get in the Gauss procedure the correlates by stepwise substitution. Every numerical result is contained in Table VIII. The correlates are then substituted into the correlate equations (30), whereupon all angular residuals can be computed as shown by Table VII.

Now (1) furnishes the final values of the angles of the net (Table 1). The final length of the side  $\overline{CD}$  is:

$$x = x_0 + dx = 12\,353,735 - 0,072 = 12\,353,663 = \overline{CD} \quad (35)$$

The adjusted angles and the length of the side  $\overline{CD}$  must, within the limits of accuracy of the calculation, satisfy all condition equations. In our numerical example, (23) resulted in a deviation of  $-3$  units in the eighth decimal place of the logarithm, and (24) in one of  $-1$  unit in the same decimal place of the log sine. These deviations will not be discussed farther here.

The sum of the squares of the angular residuals can be obtained, as is well known, on the one hand by adding together the squares of the individual residuals, and on the other from the normal equations; namely,  $[pvv]$  occurs in the  $l$  column of the absolute terms, after the fifth reduction of the normal equations. In this way, the change  $dx$ , being a non-measured unknown, does not affect  $[pvv]$ .

Making use of the value  $\mu_0$  of Table VII, the mean error of the non-measured side  $\overline{CD}$  becomes

$$\mu_{CD} = \frac{\mu_0}{\sqrt{P_x}} = \frac{0,582}{\sqrt{0,000\ 560}} = \pm 24,6 \text{ mm.} \quad (36)$$

In summary, the extension side is numerically characterized by

$$\overline{CD} = 12\ 353,663 \pm 0,025 \text{ m.} \quad (37)$$

\* \* \*

#### [D] Solution by the method of indirect observations

To calculate the length and mean error of the extension side we can directly — avoiding the conditional equations — apply the method of adjustment of indirect observations, by interpreting the calculation of the base quadrilateral as a problem of point determination and by adhering to the rules of coördinate adjustment. As far as is known to the author, this method of calculating the base quadrilateral has nowhere been applied up to now.

We can assign in principle arbitrary coördinates — as far as the constancy of the base length is guaranteed — to the two ends of the base line. The two end points of the extension side are regarded as two unknown new points, for the purpose of whose definition we have measured in a total of four points the eight angles shown in the figure. Consequently, the matter in question is an adjustment of coördinates with two new points and since in the present case we have made measurements of angles rather than of directions, also the adjustment is to be done by the angles figuring as measurement results, in order to satisfy the same condition  $[pvv] = \text{minimum}$  as in the foregoing chapters.

In our figure we have introduced a local system of coordinate axes with the  $y$  axis parallel to the measured base  $\overline{AB}$ . The coordinates of the end point  $A$  of the base were assumed arbitrarily but expediently in the imagined stereographic projection plane so that every one of the points under consideration be in the first quadrant of the plane.

Let the coordinates of the point  $A$  be

$$y_A = +20\,000,000 \text{ m} \quad x_A = +20\,000,000 \text{ m} \quad (38)$$

Since the length of the base in our numerical example is

$$\overline{AB} = 5\,879,989 \text{ m}$$

the coordinates of the end point  $B$  of the base are

$$y_B = +14\,120,011 \text{ m} \quad x_B = +20\,000,000 \text{ m} \quad (39)$$

We have measured eight angles, for every one of which we must write up one observation equation. The latter will be derived from the well-known observation equations applying to directions. For this purpose, we shall set up a series of fictitious directions derived from the measured angles.

Since the direction coefficients are to be assigned to the directions rather than to the angles, we have numerated in the figure besides the actually measured angles written in boldface, also the directions, with the smaller numbers 1 through 12.

It is hardly probable that anybody should find in literature a precedent of adjusting a base quadrilateral by the method of indirect observations, whence it seems to be indicated to go into details of the schedule of computation. The numerical values of the measured angles as well as of the directions  $L_1, L_2, \dots, L_{12}$  are listed in Table IX.

In the first place we shall compute approximate coordinates for the points  $C$  and  $D$  to be determined. The definitely fixed bearing  $\delta_{AB} = 270^\circ$  of the base  $\overline{AB}$  in our system of coordinates as well as the measured angles 2, 3, 5 and 6 permit to derive readily the oriented directions  $A \rightarrow C$ ,  $B \rightarrow C$ ,  $A \rightarrow D$  and  $B \rightarrow D$ ; from these we obtain by intersection the preliminary coordinates of the points  $C$  and  $D$ , denoted  $y_C^0, x_C^0, y_D^0$  and  $x_D^0$ , respectively, as shown in Table X. In the possession of these, we calculate preliminary bearings  $\delta^0$  and lengths  $t^0$  for the sides of the base quadrilateral. Subsequently we form the appropriate direction coefficients  $a$  and  $b$ , in the sense as usual in Hungary [7]. In this interpretation, these have the form, for example in the case of the direction connecting  $A$  and  $C$ , numbered 1:

$$a_{AC} = + \frac{\varrho''}{10} \cdot \frac{\cos \delta_{AC}^0}{t_{AC}^0} \quad \text{and} \quad b_{AC} = - \frac{\varrho''}{10} \cdot \frac{\sin \delta_{AC}^0}{t_{AC}^0} \quad (40)$$

Table IX

Alternative [D]

The measured angles and the fictitious directions derived therefrom

Measured angles		Fictitious directions		
serial	value	serial	value : $L_i$	sense
		1	0°00'00,00"	$A \rightarrow C$
2	63°12'29,22"	2	63 12 29,22	$A \rightarrow B$
6	70 39 54,65	3	133 52 23,87	$A \rightarrow D$
		4	0 00 00,00	$B \rightarrow D$
5	55 28 26,26	5	55 28 26,26	$B \rightarrow A$
3	69 01 19,31	6	124 29 45,57	$B \rightarrow C$
		7	0 00 00,00	$C \rightarrow B$
7	27 16 50,14	8	27 16 50,14	$C \rightarrow D$
1	47 46 12,26	9	47 46 12,26	$C \rightarrow A$
		10	0 00 00,00	$D \rightarrow A$
8	28 13 23,45	11	25 38 14,05	$D \rightarrow C$
4	53 51 37,50	12	53 51 37,50	$D \rightarrow B$

Table X

Alternative [D]

Calculation by intersection of the preliminary coördinates of the points  $C$  and  $D$  to be determined

	$y$	$x$	$\delta$	$\tan \delta$
$A$	+20 000,000	+20 000,000	206°47'30,78"	+0,504 9586
$B$	+14 120,011	+20 000,000	159 01 19,31	-0,383 4229
$C$	+16 657,797	+13 381,234		+0,888 3815
$A$	+20 000,000	+20 000,000	340°39'54,65"	-0,350 8774
$B$	+14 120,011	+20 000,000	34 31 33,74	+0,687 9503
$D$	+18 013,958	+25 660,216		-1,038 8277

Because of the division by 10, the changes  $dx$  and  $dy$  of the coördinates as well as the change  $d\varphi$  of the required triangle side are to be taken in decimetre units, whereas their weight coefficients have sq. decimetre dimensions.

In the relation of a given point and a point to be determined, we have, as is well known,

$$a_{AC} = a_{CA} \quad \text{and} \quad b_{AC} = b_{CA} \quad (41)$$

Hence, the observation equation of the direction  $A \rightarrow C = 1$  is

$$v_{AC} = a_{AC} dy_C + b_{AC} dx_C + (\delta_{AC}^0 - L_{AC}) \quad (42)$$

The absolute term in the parentheses on the right side is actually a preliminary constant of orientation (angle of reference), that is:

$$(\delta_{AC}^0 - L_{AC}) = z_{AC} \quad (43)$$

so that (44) may be rewritten as follows:

$$v_{AC} = a_{AC} \cdot dy_C + b_{AC} \cdot dx_C + z_{AC} \quad (44)$$

The observation equation of the direction  $C \rightarrow A$ , having the serial 9, and differing from the above one by  $180^\circ$ , differs only in the absolute term  $\delta_{CA}^0 - L_{CA} = z_{CA}$ , that is

$$v_{CA} = a_{AC} \cdot dy_C + b_{AC} \cdot dx_C + z_{CA} \quad (45)$$

The appropriate observation equations for any direction connecting a given point and a "new" point to be determined may be written up analogously.

However, matters are different with the directions 8 and 11, both end points of which are new points,  $\bar{C}$  and  $\bar{D}$ , whence there are four changes of coördinates here, resulting in four coefficients of direction. For example, in the case of the direction No 8:

$$a_{CD} = -\frac{\varrho''}{10} \cdot \frac{\cos \delta_{CD}^0}{t_{CD}^0} \quad \text{and} \quad b_{CD} = +\frac{\varrho''}{10} \cdot \frac{\sin \delta_{CD}^0}{t_{CD}^0} \quad (46)$$

If both end points of some side are "new" points, the interchanging of the appropriate indices and the resulting alteration of the bearing by  $180^\circ$  means, as is known, a reversal of signs in the direction coefficients  $a$  and  $b$  of the two opposite directions. Hence, in the present case

$$i. e. \quad a_{DC} = -a_{CD} \quad \text{and} \quad b_{DC} = -b_{CD} \quad (47)$$

$$a_{11} = -a_8 \quad \text{and} \quad b_{11} = -b_8$$

respectively. Hence, the observation equation of the direction 8 becomes

$$v_{CD} = a_{CD} \cdot dy_C + b_{CD} \cdot dx_C - a_{CD} \cdot dy_D - b_{CD} \cdot dx_D + (\delta_{CD}^0 - L_{CD}) \quad (48)$$



The analogous formula for the direction 11 is

$$v_{DC} = a_{CD} \cdot dy_C + b_{CD} \cdot dx_C - a_{CD} \cdot dy_D - b_{CD} \cdot dx_D + (\delta_{DC}^{\circ} - L_{DC}) \quad (49)$$

On comparing (48) and (49) it is apparent that the observation equations of the two opposite directions connecting the two points to be determined likewise differ in their absolute terms only.

A special role is played by the directions 2 and 5, connecting the two definite end points of the base. These being directions connecting a given point with another one, the leg  $A - B$  receives no correction at all, whence in the appropriate observation equation the two terms expressing the change in the bearing equal zero, whereas there arise necessarily here the calculated preliminary bearings  $\delta_{AB}^0$  and  $\delta_{BA}^0$  as well as the fictive directions  $L_{AB}$  and  $L_{BA}$  listed in Table IX. Hence, the two observation equations belonging to the two definite directions become

$$v_{AB} = 0 + \delta_{AB}^0 - L_{AB} \quad v_{BA} = 0 + \delta_{BA}^0 - L_{BA} \quad (50)$$

The computation of all preliminary bearings and distances as well as of the direction coefficients characterizing our base quadrilateral are found in Table XI, whereas in Table XII we have summarized all the fictive directions  $L_i$  of the quadrilateral, as well as the computed preliminary bearings  $\delta_i^0$ , and the preliminary angles of orientation (angles of reference):

$$\delta_i^0 - L_i = z_i^{\circ} \quad (51)$$

derived therefrom. To the discussion of the rest of the columns of Table XII we will return later.

However, in reality it is not the directions but the angles listed in Table IX that were actually measured, so that we must proceed to set up the observation equations of the angles. This circumstance is to be counted among the disadvantages of the method of adjustment by angles. There arises, on the other hand, the advantage that there is no unknown of orientation, whence the formation of the reduced direction coefficients is avoided.

Now the observation equations of the angles are set up by subtracting from the observation equation of the direction forming the right leg of the angle in question, the observation equation of the direction forming the left leg of the angle. Then the algebraic sum of the direction coefficients belonging to the same change of coördinate are formed, furnishing the appropriate coefficients of the angles. The absolute terms of the individual observation equations of the angles are obtained analogously, to wit, by forming the algebraic sum of the absolute terms of the two appropriate observation equations of directions.

**Table XI**  
*Alternative [D]*  
 Preliminary bearings and preliminary distances  
 Direction coefficients  $a$  and  $b$

$C$	+	16 657,797	+	13 381,234		$\delta = 206^{\circ}47'30,79''$
$A$	+	20 000,000	+	20 000,000		$t = 7414,7$
	-	3 342,203	-	6 618,766	0,504 95 863	$\sin \delta = 0,45075$
		$a_{AC} = -2,48$		$b_{AC} = +1,25$	$\alpha = 26^{\circ}47'30,79''$	$\cos \delta = 0,89265$
$B$	+	14 120,011	+	20 000,000		$\delta =$
$A$	+	20 000,000	+	20 000,000		$t =$
	-	5 879,989		0	$\infty$	
					$\alpha = 90^{\circ}00'00,00''$	
$D$	+	18 013,958	+	25 660,216		$\delta = 340^{\circ}35'54,65''$
$A$	+	20 000,000	+	20 000,000		$t = 5 998,5$
	-	1 986,042	+	5 660,216	0,350 87 742	$\sin \delta = 0,331 09$
		$a_{AD} = +3,24$		$b_{AD} = +1,14$	$\alpha = 19^{\circ}20'05,35''$	$\cos \delta = 0,943 60$
$D$	+	18 013,958	+	25 660,216		$\delta = 34^{\circ}31'33,73''$
$B$	+	14 120,011	+	20 000,000		$t = 6870,4$
	+	3 893,947	+	5 660,216	0,687 95 025	$\sin \delta = 0,566 78$
		$a_{BD} = +2,47$		$b_{BD} = -1,70$	$\alpha = 34^{\circ}31'33,73''$	$\cos \delta = 0,823 86$
$C$	+	16 657,797	+	13 381,234		$\delta = 159^{\circ}01'19,33''$
$B$	+	14 120,011	+	20 000,000		$t = 7088,6$
	+	2 537,786	-	6 618,766	0,383 42 283	$\sin \delta = 0,358 01$
		$a_{BC} = -2,72$		$b_{BC} = -1,04$	$\alpha = 20^{\circ}58'40,67''$	$\cos \delta = 0,933 72$
$D$	+	18 013,958	+	25 660,216		$\delta = 6^{\circ}18'09,11''$
$C$	+	16 657,797	+	13 381,234		$t = 12 353,646$
	+	1 356,161	+	12 278,982	0,110 44 572	$\sin \delta = 0,109 78$
		$a_{CD} = -1,66$ $a_{DC} = +1,66$		$b_{CD} = +0,18$ $b_{DC} = -0,18$	$\alpha = 6^{\circ}18'09,11''$	$\cos \delta = 0,993 96$

Let us set up for instance the observation equation of angle No. 2 measured at the end point  $A$  of the base:

angle 2 = direction  $AB$  minus direction  $AC$  = direction 2 minus direction 1

The appropriate observation equations of the directions are:

$$\begin{aligned}
 v_{AB} &= 0 & + 0 & + \delta_{AB}^0 - L_{AB} \\
 v_{AC} &= a_{AC} \cdot dy_C + b_{AC} \cdot dx_C + \delta_{AC}^0 - L_{AC}
 \end{aligned} \tag{52}$$

Table XII  
Alternative [D]

Computation of absolute terms $l$ of observation equations							Angle residuals after adjustment				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Serial of	Symbol of	L		$\delta^\circ$	$\delta^\circ - L = z^\circ$	$l$	$\delta$	$\delta - L = z$	$v$	$rv$	
direction	angle	station	observ. point	fictitious direction values	preliminary bearings	preliminary angles of reference	absolute terms	definite bearings	definite angles of reference	angle residuals	
1			C	0° 0' 0,00"	206°47'30,79"	206°47'30,79"		206°47'31,19"	206°47'31,19"	-0,41"	0,1681
2	2	A	B	63 12 29,22	270 00 00,00	206 47 30,78	-0,01"	270 00 00,00	206 47 30,78		
3	6		D	133 52 23,87	340 39 54,65	206 47 30,78	0,00"	340 39 55,19	206 47 31,32	+0,54	0,2916
4			D	0° 0' 0,00"	34°31'33,73"	34°31'33,73"		34°31'33,07"	34°31'33,07"		
5	5	B	A	55 28 26,26	90 00 00,00	34 31 33,74	+0,01"	90 00 00,00	34 31 33,74	+0,67"	0,4489
6	3		C	124 29 45,57	159 01 19,33	34 31 33,76	+0,02"	159 01 19,14	34 31 33,57	-0,17	0,0289
7			B	0° 0' 0,00"	339°01'19,33"	339°01'19,33"		339°01'19,14"	339°01'19,04"		
8	7	C	D	27 16 50,14	6 18 09,11	339 01 18,97	-0,36"	6 18 09,16	339 01 19,02	-0,12"	0,0144
9	1		A	47 46 12,26	26 47 30,79	339 01 18,53	-0,80"	26 47 31,19	339 01 18,93	-0,21	0,0441
10			A	0° 0' 0,00"	160°39'54,65"	160°39'54,65"		160°39'55,19"	160°39'55,19"		
11	8	D	C	25 38 14,05	186 18 09,11	160 39 55,06	+1,17"	186 18 09,16	160 39 55,11	+0,46"	0,2116
12	4		B	53 51 37,50	214 31 33,73	160 39 56,23	+1,58"	214 31 33,07	160 39 55,57	+0,38	0,1444
										[rv] = 1,3520	

Hence, the observation equation of the measured angle 2 becomes

$$v_{2an} = v_{AB} - v_{AC} = -a_{AC} \cdot dy_C - b_{AC} \cdot dx_C + \\ + (\delta_{AB}^0 - L_{AB}) - (\delta_{AC}^0 - L_{AC}) \quad (53)$$

or, employing a simpler symbolism of the absolute terms,

$$v_{2an} = -a_{AC} \cdot dy_C - b_{AC} \cdot dx_C + z_{AB}^0 - z_{AC}^0 \quad (54)$$

Hence, the numerical form of the observation equation of the angle in consideration becomes, under the substitution of the values taken from Tables XI and XII:

$$v_{2an} = +2,48 \cdot dy_C - 1,25 \cdot dx_C - 0,01'' \quad (54a)$$

The observation equation of say the angle No 7 measured at the point C to be determined is found in a similar manner:

angle 7 = direction CD minus direction CB = direction 8 minus direction 7

The observation equations of the two pertinent directions are:

$$v_{CD} = a_{CD} dy_C + b_{CD} dx_C - a_{CD} dy_D - b_{CD} dx_D + \delta_{CD}^0 - L_{CD} \quad (55)$$

$$v_{CB} = a_{CB} dy_C + b_{CB} dx_C + \delta_{CB}^0 - L_{CB} \quad (56)$$

Hence, the observation equation of the angle No 7 is

$$v_{7cn} = (a_{CD} - a_{CB}) dy_C + (b_{CD} - b_{CB}) dx_C - a_{CD} dy_D - b_{CD} dx_D + z_{CD}^0 - z_{CB}^0 \quad (57)$$

Table XIII  
Alternative [D]

Tabulated form of angle observation equations							Angle residuals	
serial	p	$dy_C =$ -0,0323	$dx_C =$ +0,2619	$dy_D =$ +0,0212	$dx_D =$ +0,4164	l	v = dδ + l	vv
		a <sub>C</sub>	b <sub>C</sub>	a <sub>D</sub>	b <sub>D</sub>			
1	1	+0,24	+2,29			-0,08	-0,2080	0,043 264
2	1	+2,48	-1,25			-0,01	-0,4175	0,174 306
3	1	-2,72	-1,05			+0,02	-0,1671	0,027 922
4	1			-0,77	-2,84	+1,58	+0,3811	0,145 237
5	1			-2,47	+1,70	+0,01	+0,6655	0,442 890
6	1			+3,24	+1,14	0	+0,5434	0,295 284
7	1	+1,06	+1,22	+1,66	-0,18	-0,36	-0,1145	0,013 110
8	1	+1,66	-0,18	+0,81	-1,52	+1,17	+0,4535	0,205 662
							[vv] = 1,347 675	

The data listed in Tables XI and XII carry this equation into

$$v_{\tau an} = +1,06 \cdot dy_C + 1,22 \cdot dx_C + 1,66 \cdot dy_D - 0,18 \cdot dx_D - 0,36'' \quad (57a)$$

The numerical values of the coefficients and absolute terms of every one of the eight angular observation equations are included in Table XIII. In the possession of the coefficients of the observation equations referring to the measured angles, likewise denoted  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , and  $d$ , respectively, as well as of their absolute terms  $l$ , the formation of the coefficients  $[paa]$ ,  $[pab]$ ,  $[pac]$  . . . . of the normal equations is quite obvious.

\*

In the following we shall introduce and apply a method of calculation which furnishes in a single set of operations besides every coördinate change and their weight coefficients also the change of length of the extension side and its weight coefficient as well as the sum of squares of the residuals.

The first step is, here too, to reduce the function

$$\varphi = \sqrt{(y_D - y_C)^2 + (x_D - x_C)^2} = \overline{CD} \quad (58)$$

to a linear form. Expansion into a series yields

$$\varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_C} dy_C + \frac{\partial \varphi}{\partial x_C} dx_C + \frac{\partial \varphi}{\partial y_D} dy_D + \frac{\partial \varphi}{\partial x_D} dx_D \right) + \varphi_0 \quad (59)$$

where  $\varphi_0$  denotes the preliminary value of the function furnished by (58) on substituting the preliminary coördinates.

The sum of the other four terms under the parentheses denotes that change  $d\varphi$  of the distance function  $\varphi$  which is due to the changes of the coördinates. In a simpler symbolism,

$$\varphi = (f_{y_C} dy_C + f_{x_C} dx_C + f_{y_D} dy_D + f_{x_D} dx_D) + \varphi_0 \quad (60)$$

and even more briefly

$$\varphi = d\varphi + \varphi_0 \quad (61)$$

Partial differentiation yields

$$\varphi = -\sin \delta_{CD}^0 \cdot dy_C - \cos \delta_{CD}^0 \cdot dx_C + \sin \delta_{CD}^0 \cdot dy_D + \cos \delta_{CD}^0 \cdot dx_D + \varphi_0 \quad (62)$$

The numerical values of the coefficients  $\sin \delta^0$  and  $\cos \delta^0$  as well as that of the preliminary distance  $\varphi_0 = \overline{CD}_0$  are likewise found in Table XI. Hence, the numerical form of the function (62) becomes

$$\varphi = -0,1098 \cdot dy_C - 0,9940 \cdot dx_C + 0,1098 \cdot dy_D + 0,9940 \cdot dx_D + 12\,353,646 \quad (62a)$$

To determine simultaneously the coördinate changes, the change of length  $d\varphi$  and the weight coefficients of all these terms, we shall again consider the system of coefficients of the extended normal equations. In the present case, the reciprocal of the weight of the triangle side  $\varphi = CD$ , regarded as a distance function, is furnished ([4], § 31, p. 100, Formula (13)) by

$$-\frac{1}{P\varphi} = 0 - \frac{f_{yC}^2}{[paa]} - \frac{[f_{xC} \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} - \frac{[f_{yD} \cdot 2]^2}{[pcc \cdot 2]} - \frac{[f_{xD} \cdot 3]^2}{[pdd \cdot 3]} = [0,4]. \quad (63)$$

On the right side of (63) the zero term was written out to facilitate the comparison with the weight expression occurring under (16) in chapter [B]. Whereas the negative terms in (63) are but the squares of the reduced terms of the function (60), if the Cholesky—Rubin procedure is applied to this function.

Hence, just like in chapter [B], the normal equation will be solved with the Cholesky—Rubin method. In the equations there will occur five unknowns: four coördinate changes and the change  $d\varphi$  of the distance. Therefore we shall complement the usual system of coefficients of the normal equations with the negative coefficients of the distance function (60).

It is most expedient to solve this complemented system of coefficients according to the followings schedule:

(64)

$dy_C$	$dx_C$	$dy_D$	$dx_D$	1				$-\varphi$	$s-1$	$\Sigma$
[paa]	[pab]	[pac]	[pad]	[pal]	-1			$-f_{yC}$		
	[pbb]	[pbc]	[pbd]	[pbl]		-1		$-f_{xC}$		
		[pcc]	[pcd]	[pcl]			-1	$-f_{yD}$		
			[pdd]	[pdl]				-1	$-f_{xD}$	
				[pll]						

Here are entered the reduced terms in four rows

The results	[p $\nu\nu$ ]	$-dy_C$	$-dx_C$	$-dy_D$	$-dx_D$	$-d\varphi$
		$Q_{11}$	$Q_{22}$	$Q_{33}$	$Q_{44}$	$Q_\varphi$

On the right side of the schedule there are the control columns headed  $(s - 1)$  and  $\Sigma$ . The control data  $(s - 1)$  are to be formed under consideration also of the new column headed  $(-\varphi)$ .

Now the above system of coefficients is solved by the well-known rules of the Cholesky—Rubin procedure, whereby the reductions are extended also to the terms of the  $(-\varphi)$  column as the fifth column of unknowns. After having carried out the reductions, we obtain in the last row save one the sum of the squares of the residuals, furthermore all the coördinate changes with inverted signs and the change of length  $d\varphi$ . In the last row are seen the weight coefficients of the five unknowns. Hence, the weight coefficient  $Q_\varphi$  of the distance function  $\varphi = \overline{CD}$  is obtained by forming the sum of the squares of the reduced terms of the  $(-\varphi)$  column.

Now, in possession of the square sum of residuals obtained by the above procedure, the mean error of the unit weight becomes

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n - u}}. \quad (65)$$

Furthermore, the mean error of the extension side is

$$\mu_\varphi = \mu_0 \sqrt{Q_\varphi}. \quad (66)$$

The evaluation of the schedule (64) furnishes the length change  $d\varphi$  as well, so that the adjusted length of the side  $\overline{CD}$  can be obtained already by applying (61). Herewith the adjustment of the base quadrilateral is essentially finished, since besides the most probable length of the extension side we have obtained also the mean error of the same.

\*

The numerical procedure is illustrated by Table XIV, which refers to our numerical example. In the columns numerated 1 through 5 of this table and in its rows lettered  $a$  through  $e$  are found the coefficients of the normal equations, whereas the rows  $a$  through  $e$  of the columns 6 through 9 contain the terms  $(-1)$  representing the systems of equations of the weight coefficients. Finally, the coefficients of the function under (60) are entered with inverted signs into the rows  $a, b, c, d$  of the column No 10. In the box  $(10, f)$  a zero is written. The reduced terms of the Cholesky—Rubin schedule are found in the rows  $g$  through  $j$  of the columns 1 through 9. After all this, there are found the sum of the squares of the residuals in the  $k^{\text{th}}$  row of the fifth column, the change  $(-d\varphi)$  of the function  $\varphi$  in the  $k^{\text{th}}$  row of the tenth column, the weight coefficient  $Q_\varphi$  of the function  $\varphi$  in the  $l^{\text{th}}$  row of the tenth column.

We require, as a matter of fact, no more than these latest three results, whose numerical values are in our numerical example

$$\begin{aligned} [vv] &= 1,3476 & (67) \\ d\varphi &= +0,1595 \text{ dm} & Q_\varphi = 0,1795 \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

With these values, the mean error of an individual angle becomes by (65)

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{1,3476}{8-4}} = \pm 0,5805 \quad (65a)$$

considering that all angle measurements were regarded to be of equal weight.

The data of the extension side can be summarized as follows:

Preliminary value from Table XI:  $\varphi_0 = 12\,353,646 \text{ m}$

Change furnished by the adjustment:  $d\varphi = + 0,016 \text{ m}$

Whence the definite length:  $\overline{CD} = \varphi = 12\,353,662 \text{ m}$

The mean square error of the definite length is

$$\mu_\varphi = \varphi_0 \sqrt{Q_\varphi} = 0,5805 \sqrt{0,1795} = \pm 0,2460 \text{ dm}$$

Hence, the final result of alternative [D] is

$$\overline{CD} = 12\,353,662 \pm 0,025 \text{ m.} \quad (68)$$

\* \* \*

### Controls

The solution of the schedule (64) has furnished us not only with the essential values  $d\varphi$  and  $Q_\varphi$  but on a sideline also with the four changes of coördinates together with their weight coefficients. Although these are not required in principle any more, they can be made a good use of in practice, in checking the results of computation. Since, having formed the definite coördinates

$$y_C = y_C^0 + dy_C; \quad x_C = x_C^0 + dx_C; \quad y_D = y_D^0 + dy_D; \quad x_D = x_D^0 + dx_D \quad (69)$$

of the end points  $\bar{D}$  and  $\bar{C}$ , we are in a position to compute not only the definite length and direction of the extension side  $\overline{CD}$  but also those of all sides of the base quadrilateral. The pertinent numerical values are listed in Table XV. Hence,

$$\overline{CD} = 12\,353,663 \text{ m} \quad (70)$$

showing a deviation of one millimetre against the result in (68).



Table XIV

Alternative [D]

System of coefficients of normal equations, complemented with the function  $\varphi$  of the distance  $CD$   
 Solution by the Cholesky—Rubin procedure

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$dy_C$	$dx_C$	$dy_D$	$dx_D$	$l$	$a$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$-\varphi$	$s-1$	$\Sigma$
<i>a</i>	+17,4856	+1,3000	+3,1042	-2,7140	+1,2894	-1				+0,1098	+19,5750	
<i>b</i>		+9,4299	+1,8794	+0,0540	-2,4903		-1			+0,9940	+10,1670	
<i>c</i>			+20,6031	+0,1514	-0,8912			-1		-0,1098	+23,7371	
<i>d</i>				+14,5980	-6,1838				-1	-0,9940	+3,9116	
<i>e</i>					+4,6355					0	-3,6404	
<i>f</i>												
<i>g</i>	+4,1816	+0,3109	+0,7424	-0,6490	+0,3084	-0,2391				+0,0263	+4,6812	+4,6815
<i>h</i>		+3,0550	+0,5396	+0,0837	-0,8465	+0,0243	-0,3273			+0,3227	+2,8516	+2,8515
<i>i</i>			+4,4453	+0,1323	-0,1492	+0,0370	+0,0397	-0,2250		-0,0683	+4,2119	+4,2118
<i>j</i>				+3,7620	-1,5665	-0,0431	+0,0059	+0,0079	-0,2658	-0,2645	+1,6358	+1,6359
<i>k</i>					$[vv] =$ +1,3476	$-dy_C =$ +0,0323	$-dx_C =$ -0,2619	$-dy_D =$ -0,0212	$-dx_D =$ -0,4164	$-d\varphi =$ -0,1595	+0,5207	+0,5209
<i>l</i>						$Q_{11} =$ +0,0610	$Q_{22} =$ +0,1087	$Q_{33} =$ +0,0507	$Q_{44} =$ +0,0706	$Q\varphi =$ +0,1795		

Table XV (for control)

Alternative [D]

Definite bearings. Definite length of extension side

<i>C</i>	+	16 657,794	+	13 381,260		$\delta = 206^{\circ}47'31,19''$
<i>A</i>	+	20 000,000	+	20 000,000		$t =$
	-	3 342,206	-	6 618,740	0,504 96 107	
					$\alpha = 26^{\circ}47'31,19''$	
<i>B</i>	+	14 120,011	+	20 000,000		$\delta = 270^{\circ}00'00,00''$
<i>A</i>	+	20 000,000	+	20 000,000		$t = 5 879,989$
	-	5 879,989		0,000	$\infty$	
					$\alpha = 90^{\circ}00'00,00''$	
<i>D</i>	+	18 013,960	+	25 660,258		$\delta = 340^{\circ}39'55,19''$
<i>A</i>	+	20 000,000	+	20 000,000		$t =$
	-	1 986,040	+	5 660,258	0,350 87 447	
					$\alpha = 19^{\circ}20'04,81''$	
<i>D</i>	+	18 013,960	+	25 660,258		$\delta = 34^{\circ}31'33,07''$
<i>B</i>	+	14 120,011	+	20 000,000		$t =$
	+	3 893,949	+	5 660,258	0,687 94 550	
					$\alpha = 34^{\circ}31'33,07''$	
<i>C</i>	+	16 657,794	+	13 381,260		$\delta = 159^{\circ}01'19,14''$
<i>B</i>	+	14 120,011	+	20 000,000		$t =$
	+	2 537,783	-	6 618,740	0,383 42 388	
					$\alpha = 20^{\circ}58'40,86''$	
<i>D</i>	+	18 013,960	+	25 660,258		$\delta = 6^{\circ}18'09,16''$
<i>C</i>	+	16 657,794	+	13 381,260		$t = 12 353,663 = CD$
	+	1 356,166	+	12 278,998	0,110 44 598	
					$\alpha = 6^{\circ}18'09,16''$	$\cos \delta =$ $+0,993 95 605$

In the possession of the definite bearing we can form in column 10 of Table XII also the definite reference angles of the individual directions just as we have formed in column 7 of this same table the preliminary angles of reference by the aid of (51); these preliminary angles were the absolute terms of the observation equations of the directions, numbered (48) and (49).

If we write for example the observation equation of the direction No 8 connecting the points  $C$  and  $D$  in the form

$$v_8 = (a_8 dy_C + b_8 dx_C - a_8 dy_D - b_8 dx_D + \delta_8^0) - L_8 = \delta_8 - L_8 \quad (71)$$

it becomes apparent that the definite angle of reference  $\delta_8 - L_8 = z_8$  is the correction (residual) of the direction  $C \rightarrow D$  denoted by the serial 8. Thus the definite angle of reference of any direction corresponds to the residual of the direction under consideration. Now the difference of the residuals of two directions yields the residual of the angle subtended by them. For instance, in the notation of our figure, we have for the directions 8 and 7:

$$v_8 = \delta_8 - L_8 = 6^\circ 18' 09,16'' - 27^\circ 16' 50,14'' = 339^\circ 01' 19,02''$$

$$v_7 = \delta_7 - L_7 = 339^\circ 01' 19,14'' - 0^\circ 00' 00,00'' = 339^\circ 01' 19,14''$$

Hence, the residual of the subtended angle No. 7 is

$$v_{7an} = v_8 - v_7 = 339^\circ 01' 19,02'' - 339^\circ 01' 19,14'' = -0,12''$$

The numerical values of the residuals of every angle are found in column 11 of Table XII, whereas the sum of their squares:

$$[vv] = 1,3520$$

is in column 12. This serves as a check for the value  $[vv] = 1,3476$  obtained in the course of solving the normal equations and found in Table XIV.

#### REFERENCES

1. JORDAN—EGGERT—KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde, Vol. IV, first half (Stuttgart, J. B. Metzler'sche Verlagsbuchhandlung, 1958).
2. HOVÁNYI, L.: Az egercsehi bányauizem alpmérései (The base measurements of the mining works of Egercsehi). Bányászati Lapok, Vol. 1959, No. 8 (August), pp. 514—519.
3. GROSSMANN, WALTER: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, § 32, p. 161. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.
4. JORDAN, W.—EGGERT, O.: Handbuch der Vermessungskunde, Vol. I.: Adjusting Calculation (Stuttgart, Metzler'sche Verlagsbuchhandlung, 1948).
5. BENOIT: Note sur une étude de résolution des équations normales provenant de l'application de la méthode des moindres carrés à un système d'équations linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues. Application de la méthode à la résolution d'un système défini d'équations linéaires (procédé du Commandant CHOLESKY). (Bulletin Géodésique, p. 67—77, 1924).
6. HELMERT, F. R.: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (pp. 215—222. Leipzig, 1872).
7. HAZAY, I.: Kiegészítő számítás a geodéziai gyakorlatban (Adjustment in geodetical practice) (§ 52, p. 138., Budapest, 1938).

## SUMMARY

The author compares four methods of the rigorous adjustment of the base quadrilateral as defined by angle measurements, as regards their efficiency and economy.

[A] The classical method of correlates (which is given only in an outline).

[B] A determination of the weight of the extension side  $C-D$  and of the correlates in a single set of calculations by the "extended normal equations", as indicated by Formula (17) and by Table V. This procedure appears to be more efficient as well as more economical.

[C] Conditioned observations with the side length  $C-D$  as the unknown. Formula (34) and Table VIII furnish in a single set together with the correlates also the length and weight of the side  $C-D$ ; however, this at the cost of using the more involved Gaussian procedure of elimination.

[D] The adjustment of the base quadrilateral is considered as a two-point resection with the two inserted points  $C$  and  $D$  and their positions determined by the method of coördinates. The extended scheme of normal equations (64) furnishes (Table VIII) in one set the side length  $DC$ , the coördinates of  $D$  and  $C$  as well as the weights of these quantities. It is of an advantage here that the considerations concerning the most advantageous side equation can be completely eliminated, since there are no condition equations at all.

The second two methods seem to be of equal rank between themselves and likewise more economical than [A].

## ÜBER DIE AUSGLEICHUNG DES BASISVIERECKS

B. MILASOVSKY

## ZUSAMMENFASSUNG

Es werden vier Alternativen der strengen Ausgleichung des Basisvierecks mit Winkelmessungen hinsichtlich der Zweckmäßigkeit und Wirtschaftlichkeit miteinander verglichen.

[A] Die klassische Korrelatenmethode nur schematisch behandelt.

[B] Gemäß den »erweiterten« Normalgleichungen (17) und Tab. V wird das Gewicht der Vergrößerungsseite  $C-D$  mit den Korrelaten gleichzeitig ermittelt, was sowohl zweckmäßiger, wie auch ökonomischer erscheint.

[C] Bedingte Beobachtungen mit der Seitenlänge  $C-D$  als Unbekannten. In einem Satz ergeben sich hier gemäß (34) und Tabelle VIII mit den Korrelaten gleichzeitig auch Länge und Gewicht von  $C-D$ ; jedoch muß das Gaus'sche Verfahren der Elimination angewendet werden.

[D] Die Ausgleichung des Basisvierecks wird als Doppelpunkt-Einschaltung mit den beiden Neupunkten  $C$  und  $D$  aufgefaßt und die Koordinatenmethode angewendet. Das erweiterte Schema der Normalgleichungen (64) liefert (Tab. VIII) gleichzeitig die Länge  $CD$ , die Koordinaten von  $C$  und  $D$ , sowie auch deren Gewichte. Vorteilhaft ist es hier, daß Überlegungen über die günstigste Seitengleichung gänzlich entfallen, da keine Bedingungsgleichungen vorhanden sind.

Die beiden letzten Methoden scheinen ebenbürtig und gegenüber [A] auch ökonomischer zu sein.

## LA COMPENSATION DES QUADRILATÈRES DE BASE

B. MILASOVSKY

## RÉSUMÉ

L'auteur, envisageant certains aspects d'utilité pratique et d'économie de la compensation exacte du quadrilatère de base aux angles mesurés, compare entre elles les quatre alternatives suivantes:

[A] Compensation selon la méthode corrélatrice classique (rappelée dans les grandes lignes);

[B] Compensation corrélatrice par équations normales „élargies" (17), méthode plus avantageuse que la précédente, vu qu'elle permet la détermination simultanée du poids du côté développé  $C-D$ , et des coefficients indéterminés (multiplicateurs de Lagrange); (Tableau V);

[C] Compensation d'observations liées, où c'est la longueur du côté développé qui figure comme inconnue. D'après (34), on obtient simultanément les coefficients indéterminés et la longueur et le poids du côté développé (Tableau VIII);

[D] En vertu de la méthode de compensation d'observations directes indépendantes, le problème est interprété comme une double intercalation de points. La compensation de coordonnées présentée donne simultanément d'après les équations normales «élargies» (64), la longueur du côté développé les coordonnées de ses points extrêmes et leurs poids. La méthode [D] présente encore l'avantage qu'à défaut d'équations de condition on, évite le problème de l'équation aux côtés optima.

Les deux dernières méthodes paraissent avoir la même valeur et toutes deux sont plus économiques que la méthode [A].

## УРАВНИВАНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА БАЗИСНОЙ ЛИНИИ

Б. МИЛАШОВСКИЙ

### РЕЗЮМЕ

Автор сравнивает с точки зрения целесообразности и экономичности приведенные ниже четыре альтернативы строгого уравнивания четырехугольника базисной линии при измерении углов.

[A] По классическому коррелятному методу (только схематически).

[B] Коррелятное уравнивание с помощью «расширенных» нормальных уравнений (17) кажется более выгодным, так как позволяет одновременное определение с помощью коррелят веса развитой стороны С — (см. табл. V.).

[C] Уравнивание таких условных измерений, при которых в качестве неизвестного проявляется длина развитой стороны. По (34) одновременно получаются корреляты, длина и вес развитой стороны (см. табл. VIII), однако при элиминации Гаусса.

[D] На основании метода уравнивания трансляционных измерений задача трактуется в качестве двоянных сопряжений точек. Иллюстрированное уравнивание координат на основе «расширенных» нормальных уравнений (64) одновременно дает длину развитой стороны, координаты конечной точки и их веса. Преимущество метода [D] состоит в том, что — вследствие отсутствия уравнений условий — не возникает вопрос оптимальных уравнений условий сторон.

Два последних метода кажутся равными между собой и оба эти метода экономичнее метода [A].



# ÜBER DIE BERECHNUNG DES RÄUMLICHEN RÜCKWÄRTSEINSCHNITTES

A. TÁRCZY-HORNOCH

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 5. Januar 1961]

Die Berechnung des räumlichen Rückwärtseinschnittes war bekanntlich so lange eine wichtige Grundaufgabe der Luftphotogrammetrie, bis die optisch-mechanischen Lösungen der Stereo-Auswertegeräte die langwierigen Berechnungen nicht verdrängten. Die Literatur des räumlichen Rückwärtseinschnittes ist sehr reich und man findet unter den Autoren die meisten bekannten Vertreter der Photogrammetrie; um nur einige Namen zu nennen, die Namen EGGERT, S. FINSTERWALDER, FUCHS, GAST, GRUBER, HUGERSHOFF, KELL, MANEK, PULFRICH und WERKMEISTER. Einige von ihnen gaben im Laufe der Zeit sogar mehrere Lösungen an. Auch der Verfasser dieser Abhandlung gab vor 33 Jahren, i. J. 1928 eine rechnerische Lösung für die in Frage stehende Aufgabe [1].

Etwa von 1930 angefangen wurde das Problem der rechnerischen Lösung des räumlichen Rückwärtseinschnittes aus den erwähnten Gründen stark in den Hintergrund gedrängt. Es sei immerhin bemerkt, daß die Kenntnis der mathematischen Beziehungen auch für die optisch-mechanischen Lösungen nützlich sind; so baute auch GRUBER seine optisch-mechanische Lösung der gegenseitigen relativen Orientierung auf seine vorangehenden mathematischen Untersuchungen auf. Seit dem Vorwärtsdringen der elektronischen Rechenmaschinen — etwa von den fünfziger Jahren angefangen — hat sich das Interesse auch auf dem Gebiete der Photogrammetrie wieder den rechnerischen Lösungen zugewandt, und auch HALLERT aus Stockholm hob 1959 hervor, daß die Entwicklung leistungsstarker elektronischer Rechenmaschinen in bezug auf die Lösung dieser und ähnlicher Probleme eine große Bedeutung hat [9; S. 104.] Der unter der Leitung von LACMANN stehende Lehrstuhl für Photogrammetrie der Technischen Universität Berlin hat schon vordem aus ähnlichen Gründen in einer großen, 144 Quartseiten starken Studie mehr als 60 Lösungen bearbeiten und miteinander vergleichen lassen. Die einen sehr großen kritischen Sinn und die Bearbeitung eines ungemein großen Materials erfordernde Arbeit hat SZCZEPANSKI durchgeführt, der sich selbst seit 1943 mit dem Problem des räumlichen Rückwärtseinschnittes beschäftigt und der 1956 durch eine von ihm angegebene weitere Lösung den Dr. Ing.-Grad

erworben hat. Seine unter [2] angeführte Arbeit ist im Verlage der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1958 erschienen. Wenn wir auch im folgenden nicht in allen Punkten mit den Feststellungen SZCZEPANSKIS übereinstimmen, möchten wir den sehr großen Wert und die sehr große Bedeutung seiner Arbeit schon eingangs ausdrücklich hervorheben.

Die Zeitgemäßheit des SZCZEPANSKISCHEN Buches wird durch die Feststellung GOTTHARDTS [3] aus 1942 unterstrichen, wonach im Falle von genauen Paßpunkten der räumliche Rückwärtseinschnitt die Daten der äußeren Orientierung genauer liefert als die Doppelpunkteinschaltung im Raume, sowie durch den Umstand bekräftigt, daß die optisch-mechanische Lösung vom Standpunkt der Fehlerfortpflanzung bei der Überbrückung paßpunktloser Flächen ungünstig ist, während durch die Rechnung die Fehler der erhaltenen Punkte wesentlich vermindert werden können. Dies setzt allerdings voraus, daß die zur Rechnung erforderlichen Größen an den Bildern mit entsprechender Genauigkeit ausgemessen werden können. Mit den in den letzten Jahren herausgebrachten Objektiven und Bildmaterialien kann dies bereits erreicht werden, und so sichern diese — neben der Verschiebung der Grenzen der Wirtschaftlichkeit von photogrammetrischen Aufnahmen gegen die großmaßstäblichen Pläne — auch eine wichtige Vorbedingung der analytischen Photogrammetrie. Wenn wir endlich bedenken, daß bei der optisch-mechanischen Lösung ein sehr teures Gerät während der gar nicht kurzen Dauer des Probierens eigentlich nicht arbeitet, sich abnützt und auch während dieser Zeit eingübte Arbeitskraft beansprucht, ist es leicht einzusehen, daß im Zeitalter der elektronischen Rechengeräte die sozusagen in Minuten berechenbaren analytischen Verfahren neuerlich ernstere Bedeutung haben können.

SZCZEPANSKI hat auch unser Verfahren aus 1928 einer eingehenden Prüfung unterzogen, und dieses — wie seine Ausführungen und Vergleiche auf S. 52—55, 61—64 sowie 88—89 zeigen — unter den untersuchten 60 Verfahren an einen sehr guten Platz eingereiht, ja unsere Methode zur Berechnung der Kantenlängen der Pyramide als die schnellste und zweckentsprechendste unter allen Verfahren zur Ermittlung der Kantenlängen bezeichnet. Wir selbst sind mit unserer Lösung vor 33 Jahren nicht so sehr zufrieden, weil unsere seinerzeitige Lösung im Geiste der seinerzeitigen Rechenmethoden eine logarithmische Lösung war. Entsprechend der Entwicklung der Rechentechnik sind nämlich in den einzelnen Lösungsgruppen des räumlichen Rückwärtseinschnitts noch weitere und einfachere Lösungen möglich. Weil diese nun wieder praktische Bedeutung haben können, dürften die diesbezüglichen Untersuchungen nicht ohne Interesse sein.

Die Lösungen des räumlichen Rückwärtseinschnitts werden von SZCZEPANSKI in zwei Gruppen getrennt: *A*) in die Lösungen mit Hilfe der (zwischen den Pyramidenkanten im vorderen Brennpunkt des Kammerobjektivs erscheinenden) Positionswinkel und *B*) in die Lösungen mit Hilfe von Richtungen.



Die Lösungen unter *A*) mit Hilfe der Positionswinkel werden in die Untergruppen AI (Torusverfahren) und AII (Pyramidenverfahren) eingeteilt. Die Lösungen bei dem Pyramidenverfahren können entweder in drei Phasen (AIIa bis AIIc) erfolgen, oder aber so, daß die ersten zwei Phasen zusammengezogen werden (AIIc). Unter AIII werden von SZCZEPANSKI die Ausgleichungen mit den Positionswinkeln behandelt.

Die Gruppe *B*) mit den Lösungen durch Richtungen enthält bei SZCZEPANSKI hauptsächlich die Berechnungen mit Hilfe von Horizontal- und Vertikalwinkeln, die in der Tat auch die wichtigsten sind.

Unsere Ergänzungen bzw. Abänderungen wollen wir in obiger SZCZEPANSKISCHER Gruppierung vornehmen und auch bei den literarischen Hinweisen begnügen wir uns meist mit den SZCZEPANSKISCHEN Berufungen auf die einzelnen Autoren. Nur in einigen Fällen war es erforderlich, auf die Originalquellen zurückzugreifen.

### A) Die Lösungen mit Hilfe von Positionswinkeln

AI. Die bei den zu dieser Gruppe gehörigen Lösungen erscheinenden Positionswinkel werden bekanntlich unmittelbar mit dem Bildmeßtheodolit gemessen, bzw. gerechnet. Es ist leicht einzusehen — und wir kehren darauf noch zurück — daß die rechnermäßige Behandlung des Torusverfahrens im Grunde genommen in das Pyramidenverfahren übergeht, weshalb wir uns hier nur mit dem letzteren beschäftigen.

#### AII. Das Pyramidenverfahren in drei Phasen

AIIa. *Erste Phase* : Die Bestimmung der Kantenlängen der Pyramide.

Wenn wir die über den gegebenen Festpunkten entstehende Pyramide entlang eine Kante aufschneiden und in die Zeichenebene ausbreiten, so entsteht das in Abb. 1 dargestellte Bild. Es sind gegeben: die Winkel  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$  im vorderen Hauptpunkt des Objektivs, also in der Pyramidenspitze, sowie die diesen gegenüberliegenden räumlichen Seitenlängen  $c_1, c_2$  und  $c_3$  zwischen den gegebenen Festpunkten. Zur berechnen sind die Kantenlängen  $l_1, l_2$  und  $l_3$ . Der Gedankengang unserer Lösung aus 1928 war folgender: Für die gemeinsamen Seiten  $l_1, l_2$  und  $l_3$  der benachbarten Dreiecke bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \frac{c_1}{\sin \gamma_1} \sin a_1 = \frac{c_3}{\sin \gamma_3} \sin \beta_3 \\
 l_2 &= \frac{c_2}{\sin \gamma_2} \sin a_2 = \frac{c_1}{\sin \gamma_1} \sin \beta_1 \\
 l_3 &= \frac{c_3}{\sin \gamma_3} \sin a_3 = \frac{c_2}{\sin \gamma_2} \sin \beta_2 .
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

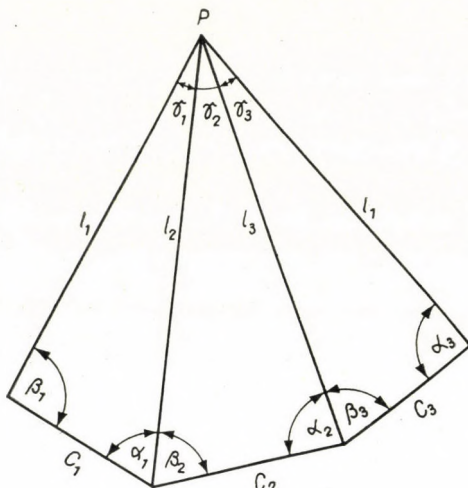


Abb. 1

Führen wir für die zunächst zu berechnenden Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  die Näherungswerte  $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$  ein, — die graphisch oder aus den annähernd bekannten Kantenlängen erhalten werden können —, so ist zunächst klar, daß wenn  $\beta'_1$  mit  $\Delta\beta_1$  geändert wird,  $\alpha'_1$  um den gleichen Betrag im entgegengesetzten Sinne geändert werden muß, da die Summe der Dreieckswinkel auch nach diesen Änderungen  $180^\circ$  bleiben muß. Die Glgen (1) können daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{c_1 \sin \gamma_3}{c_3 \sin \gamma_1} = C_1 = \frac{\sin \beta_3}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin (\beta'_3 + \Delta\beta_3)}{\sin (180^\circ - \gamma_1 - \beta'_1 - \Delta\beta_1)} = \frac{\sin (\beta'_3 + \Delta\beta_3)}{\sin (k_1 - \beta'_1 - \Delta\beta_1)}$$

$$\frac{c_2 \sin \gamma_1}{c_1 \sin \gamma_2} = C_2 = \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin (\beta'_1 + \Delta\beta_1)}{\sin (180^\circ - \gamma_2 - \beta'_2 - \Delta\beta_2)} = \frac{\sin (\beta'_1 + \Delta\beta_1)}{\sin (k_2 - \beta'_2 - \Delta\beta_2)} \quad (1a)$$

$$\frac{c_3 \sin \gamma_2}{c_2 \sin \gamma_3} = C_3 = \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_3} = \frac{\sin (\beta'_2 + \Delta\beta_2)}{\sin (180^\circ - \gamma_3 - \beta'_3 - \Delta\beta_3)} = \frac{\sin (\beta'_2 + \Delta\beta_2)}{\sin (k_3 - \beta'_3 - \Delta\beta_3)}$$

Daraus erhalten wir durch Logarithmierung, wenn  $\lambda$  mit den entsprechenden Indizes versehen die Tafeldifferenzen bezeichnet, für die Unbekannten  $\Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \Delta\beta_3$  die linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_{\beta_3} \Delta\beta_3 + \lambda_{k_1 - \beta'_1} \Delta\beta_1 &= \log C_1 + \log \sin (k_1 - \beta'_1) - \log \sin \beta'_3 \\ \lambda_{\beta_1} \Delta\beta_1 + \lambda_{k_2 - \beta'_2} \Delta\beta_2 &= \log C_2 + \log \sin (k_2 - \beta'_2) - \log \sin \beta'_1 \\ \lambda_{\beta_2} \Delta\beta_1 + \lambda_{k_3 - \beta'_3} \Delta\beta_3 &= \log C_3 + \log \sin (k_3 - \beta'_3) - \log \sin \beta'_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Nach Berechnung der Werte  $\Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \Delta\beta_3$  — gegebenenfalls, bei größeren Zuschlägen, durch Wiederholung der Berechnung — können mit den Winkeln

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, a_1, a_2, a_3$  auch die Pyramidenkantenlängen  $l_1, l_2, l_3$  berechnet werden. Das Verfahren konvergiert sehr rasch.

Bei zeitgemäßen Rechenmaschinen verlangsamt das Heraussuchen von Winkelfunktionen und die Interpolation in den Tafeln die Berechnung ganz merklich, weshalb wir diese bei Rechenmaschinen nach Möglichkeit vermeiden. Dies ist in unserem Falle einfach dadurch möglich, daß wir an Stelle der Winkelzuschläge sofort die Zuschläge zu den Pyramidenkantenlängen rechnen. Dies ist bei uns auch deshalb am Platze, weil wir später zu unserem neuen Verfahren zur Berechnung der Koordinaten der Pyramidenspitze unter A1b — im Gegensatz zu unserem Verfahren aus 1928 — alle drei Pyramidenkantenlängen brauchen.

Es seien  $l'_1, l'_2$  und  $l'_3$  die drei Näherungswerte der Kantenlängen, die z. B. mit der GASTSchen Methode [2; S. 45] leicht und rasch bestimmt werden können und  $\delta l'_1, \delta l'_2$  und  $\delta l'_3$  deren Zuschläge. Dann bestehen mit Hilfe der Positionswinkel  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$  die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \cos \gamma_1 &= \frac{l_1^2 + l_2^2 - c_1^2}{2l_1 l_2} = \frac{(l'_1 + \delta l'_1)^2 + (l'_2 + \delta l'_2)^2 - c_1^2}{2(l'_1 + \delta l'_1)(l'_2 + \delta l'_2)}, \\ \cos \gamma_2 &= \frac{l_2^2 + l_3^2 - c_2^2}{2l_2 l_3} = \frac{(l'_2 + \delta l'_2)^2 + (l'_3 + \delta l'_3)^2 - c_2^2}{2(l'_2 + \delta l'_2)(l'_3 + \delta l'_3)}, \\ \cos \gamma_3 &= \frac{l_3^2 + l_1^2 - c_3^2}{2l_3 l_1} = \frac{(l'_3 + \delta l'_3)^2 + (l'_1 + \delta l'_1)^2 - c_3^2}{2(l'_3 + \delta l'_3)(l'_1 + \delta l'_1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

während die den Näherungswerten  $l'_1, l'_2$  und  $l'_3$  entsprechenden  $\cos \gamma'$ -Werte:

$$\begin{aligned} \cos \gamma'_1 &= \frac{l_1'^2 + l_2'^2 - c_1^2}{2l'_1 l'_2} & \cos \gamma'_2 &= \frac{l_2'^2 + l_3'^2 - c_2^2}{2l'_2 l'_3} \\ \cos \gamma'_3 &= \frac{l_3'^2 + l_1'^2 - c_3^2}{2l'_3 l'_1} \end{aligned} \quad (4)$$

sind. Durch Subtraktion der Gln (4) aus den entsprechenden Gln (3) erhalten wir bei Vernachlässigung der kleinen Glieder höherer Ordnung die sehr einfachen Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Delta \cos \gamma'_1 &= \cos \gamma_1 - \cos \gamma'_1 = \frac{l_1 - l'_1 \cos \gamma'_1}{l'_1 l'_2} \delta l'_1 + \frac{l_2 - l'_2 \cos \gamma'_1}{l'_1 l'_2} \delta l'_2 \\ \Delta \cos \gamma'_2 &= \cos \gamma_2 - \cos \gamma'_2 = \frac{l_2 - l'_2 \cos \gamma'_2}{l'_2 l'_3} \delta l'_2 + \frac{l_3 - l'_3 \cos \gamma'_2}{l'_2 l'_3} \delta l'_3 \\ \Delta \cos \gamma'_3 &= \cos \gamma_3 - \cos \gamma'_3 = \frac{l_3 - l'_3 \cos \gamma'_3}{l'_3 l'_1} \delta l'_3 + \frac{l_1 - l'_1 \cos \gamma'_3}{l'_3 l'_1} \delta l'_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Es mag bemerkt werden, daß die Zähler der Koeffizienten von  $\delta l'_1$ ,  $\delta l'_2$  und  $\delta l'_3$  aus einer maßstabrichtigen Skizze sofort entnommen werden können, wenn die Seite  $l'_2$  normal auf  $l'_1$  usw. projiziert wird. Damit die Zeichnung nur einmal gemacht zu werden brauche, können wir zur zeichnungsmäßigen Bestimmung der Koeffizienten sofort die endgültigen Winkel  $\gamma$  nehmen.

Wir wollen hier hervorheben, daß wir zur Berechnung nach Glgen (5) mit Ausnahme der Coswerte der gegebenen Winkel  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  Winkelfunktionstabellen selbst dann nicht brauchen, wenn die Koeffizienten nicht zeichnungsmäßig bestimmt, sondern berechnet werden, da die darin vorkommenden  $\cos \gamma'$ -Werte die Glgen (4) liefern, und man diese nicht einmal rückaufzuschlagen braucht, denn die Winkel  $\gamma'$  selbst bei dieser Berechnung nicht gebraucht werden. Nachdem man so die Kantenlängen unmittelbar erhält und sie daher nicht mit Hilfe der Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  der Abb. 1 berechnet werden müssen, erscheint dieses Verfahren infolge der weitgehenden Ausschaltung des Aufschlagens von Winkelfunktionen und der Interpolationen bei der heutigen Rechentechnik als schneller und geeigneter als die unter Glgen (1–2) angegebene, vor 33 Jahren entstandene Lösung.

Die Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung in den Glgen (5) kann bei größeren Zuschlägen  $\delta l'_1$ ,  $\delta l'_2$  und  $\delta l'_3$  die einmalige oder mehrmalige Wiederholung der Berechnung erforderlich machen. In diesem Falle verbessern wir mit den ersten Zuschlägen  $\delta l'_1$ ,  $\delta l'_2$  und  $\delta l'_3$  die ersten Näherungswerte  $l'_1$ ,  $l'_2$  und  $l'_3$  und mit den erhaltenen neueren Näherungswerten  $l''_1$ ,  $l''_2$ ,  $l''_3$  wiederholen wir die Rechnung. Bei programmierten Rechenmaschinen ist die Wiederholung der Berechnung bekanntlich rasch möglich. Bei anderen Berechnungen kann die Ermittlung dadurch beschleunigt werden, daß man mit Hilfe der ersten Zuschläge die bei der Differenz der Glgen (3) u. (4) vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung nach den Beziehungen

$$\delta l_1'^2 \left( \frac{l_2'}{2l_1'^3} - \frac{c_1^2}{2l_1'^3 l_2'} \right) + \delta l_2'^2 \left( \frac{l_1'}{2l_2'^3} - \frac{c_1^2}{l_1' l_2'^3} \right) - \delta l_1' \delta l_2' \left( \frac{3}{2l_1'^2} + \frac{3}{2l_2'^2} - \frac{c_1^2}{2l_1'^2 l_2'^2} \right)$$

usw. ermittelt (deren Vorzeichen auf der linken Seite der Glgen 5 negativ ist) und mit diesen Werten als  $\Delta \cos \gamma''$ -Werten zweiter Ordnung die neueren Zuschläge  $\delta l_1''$ ,  $\delta l_2''$ ,  $\delta l_3''$  berechnet. Mit Rücksicht auf die relativ kleinen Werte der zu berechnenden Größen können die Koeffizienten aus der ersten Rechnung unverändert übernommen werden. Diese Berechnung kann auch auf programmgesteuerten Maschinen vorgenommen werden, doch hat sie dort keine wesentlichen Vorteile, während bei nicht mit dieser erfolgenden Berechnung die zuletzt angegebene Rechnungsweise auch deshalb zweckmäßig ist, weil sie oft auch mit dem Rechenschieber erledigt werden kann. Ähnliche Berechnungsmethoden können auch bei anderen Iterationsrechnungen mit Vorteil verwendet werden. (Vgl. unser Rechenbeispiel in den Mitteilungen der Fakultäten für Berg- u. Georingenieure, Sopron, Bd. 1957 S. 172–173.)

Es sei hier bemerkt, daß die Berechnung der  $\delta'$ -Werte von WERKMEISTER schon 1915 vorgeschlagen wurde [2; S 46—48], doch berechnete er nicht die Differenzen der  $\cos \gamma$ -Werte, sondern die mit Hilfe der gegebenen Positionswinkel  $\gamma$  ermittelten Differenzen in den Festpunktseiten  $c$ . Dieser Vorschlag, der mit dem Vorschlag von OLTAY aus 1925 übereinstimmt (Geodéziai Közlöny, Bd. 1925. S. 92), konnte bei der seinerzeitigen Rechentechnik keine besondere Aufmerksamkeit erwecken. Unsere Lösung ist — außer daß sie zum Maschinenrechnen geeignet erscheint — allgemeiner (wie dies später noch gezeigt werden soll) und infolge der im vorangegangenen Abschnitt angeführten Vereinfachungen auch rascher. Außerdem liefert sie als Ergebnis eben jene drei Pyramidenkanten, auf denen unsere Lösung der nächsten Phase basiert.

AIIb. *Zweite Phase*: Die Berechnung der Koordinaten der Pyramiden spitze aus den Pyramidenkantenlängen.

Das auch von der ungarischen Fachliteratur übernommene HUGERSHOFFsche Verfahren [2; S. 65—67] verwendet zur Lösung auch hier die Iteration, obwohl es auch unmittelbare exakte Verfahren gibt.

Bei dem von uns 1928 angewandten unmittelbaren Verfahren sind in Abb. 2 die Seiten des sphärischen Dreiecks 1 und mit diesen der Winkel  $\alpha$  berechenbar. Ebenso können wir den Neigungswinkel  $\gamma$  der durch die Punkte  $A, B, C$  bestimmten Festpunktebene und aus dem (rechtwinkligen) sphärischen Dreieck 2 den räumlichen Winkel berechnen, den die räumliche Gerade  $BA$

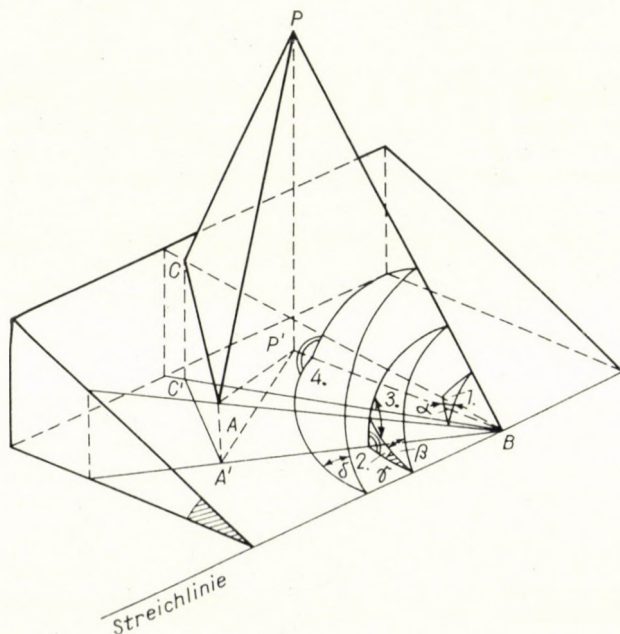


Abb. 2

mit der Streichlinie der Festpunktebene einschließt. Dann sind aber im sphärischen Dreieck 3 außer diesem Winkel auch der zum Winkel  $\alpha$  supplementäre Winkel und der zwischen den Pyramidenkanten  $\overline{BA}$  und  $\overline{BP}$  liegende Winkel (der nach Gln (2) berechenbar ist) gegeben. So können aus diesen der Winkel  $\beta$  sowie der räumliche Winkel zwischen der Streichlinie und der Pyramidenkante  $\overline{BP}$  dieses sphärischen Dreiecks berechnet werden. Da letzterer Winkel auch im (rechtwinkligen) sphärischen Dreieck 4 erscheint und dessen Winkel  $\delta$  sich aus  $\gamma$  und  $\beta$  zusammensetzt, ist es möglich, aus dem sphärischen Dreieck 4 sowohl den mit dem Grundriß gebildeten Neigungswinkel der Pyramidenkante  $\overline{BP}$  als auch den Grundrißwinkel zwischen der Streichlinie und der Grundrißprojektion  $\overline{BP'}$  der Pyramidenkante  $\overline{BP}$  zu bestimmen. Mit diesen Winkeln und der Kantenlänge  $\overline{BP}$  sind die Koordinaten der Pyramidenspitze leicht berechenbar. Zur Kontrolle erwähnten wir 1928 noch die Bestimmung der Koordinaten auch mit Hilfe einer zweiten Kantenlänge. Aber schon 1929 wiesen wir darauf hin [6; S. 89—90], daß zur Kontrolle auch dieselbe Kantenlänge herangezogen werden kann, falls deren Neigungswinkel von beiden Festpunktseiten (in Abb. 2 also auch von  $\overline{BC}$  aus) berechnet wird. Diese unsere Arbeit dürfte SZCZEPANSKI nicht bekannt gewesen sein, und so ist seine Bemerkung [2; S. 64], daß die Berechnung mit Hilfe der zweiten Kantenlänge zu viel Zeit in Anspruch nimmt, erklärlich, da wir 1929 selbst schon dieser Meinung waren.

Unsere sich auf die zweite Phase beziehende Lösung aus 1928 ist selbst bei der anerkennenden Bewertung SZCZEPANSKIS [2; S. 63 u. 88] nicht mehr zeitgemäß; es sind viele Winkel zu berechnen und diese erfordern, mit Rücksicht auf die in der Einleitung erwähnten erhöhten Genauigkeitsanforderungen, außer der häufigen Verwendung von Tabellen für Winkelfunktionen, viele die Berechnung verlangsamende Interpolationen.

In unserem neueren Verfahren trachten wir, die Verwendung von Winkel-funktionstabellen weitgehend auszuschalten.

Wir wollen zunächst den im ebenen Gelände häufigen Fall annehmen, daß die drei gegebenen Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  gleich hoch sind. Dann bestehen zwischen den drei aus der ersten Phase erhaltenen Kantenlängen und zwischen den Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  der Pyramidenspitze  $P$  folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} (x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + (z_A - z)^2 &= l_A^2 \\ (x_B - x)^2 + (y_B - y)^2 + (z_B - z)^2 &= l_B^2 \\ (x_C - x)^2 + (y_C - y)^2 + (z_C - z)^2 &= l_C^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Wenn wir diese Gln quadrieren und z. B. die zweite Gl. von den beiden anderen subtrahieren, so erhalten wir folgende zwei lineare Gln:

$$\begin{aligned}
 2(x_A - x_B) x + 2(y_A - y_B) y + 2(z_A - z_B) z &= l_B^2 - l_A^2 + \\
 &+ x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 + z_A^2 - z_B^2 \\
 2(x_C - x_B) x + 2(y_C - y_B) y + 2(z_C - z_B) z &= l_B^2 - l_C^2 + \\
 &+ x_C^2 - x_B^2 + y_C^2 - y_B^2 + z_C^2 - z_B^2
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Bei gleich hohen Punkten ( $z_A = z_B = z_C$ ), weiter bei Annahme eines Hilfskoordinatensystems mit dem Anfangspunkt in  $B$  (auch der Höhe nach, d. h. daß auch  $z_B$  Null werde, in welchem Falle der erhaltene  $z$ -Wert die Höhe über  $B$  angibt) und mit zu dem ursprünglichen System parallelen Koordinatenachsen erhalten wir aus Glgcn (7) die sehr einfachen Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 2x_A x + 2y_A y &= l_B^2 - l_A^2 + x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 \\
 2x_C x + 2y_C y &= l_B^2 - l_C^2 + x_C^2 + y_C^2 + z_C^2 .
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Daraus können die Grundrißkoordinaten  $x$  und  $y$  der Pyramidenspitze leicht berechnet werden. Setzt man diese Werte in eine der Glgcn (6) ein, so können wir auch  $z$  leicht berechnen (nur der  $z$ -Wert *oberhalb* der Festpunkte hat hier einen Sinn). Wenn alle drei Werte in eine andere der Glgcn (6) eingeführt werden, so erhalten wir dadurch eine durchgreifende Kontrolle für die Richtigkeit der ganzen Berechnung.

Wie wir sehen, brauchen wir bis jetzt überhaupt keine trigonometrischen Tabellen. Nicht so günstig sind diese Verhältnisse — wenn auch die Lösung im Vergleich mit den in der Fachliteratur bisher angegebenen noch immer rascher ist — in dem Falle, wo die drei gegebenen Festpunkte nicht gleich hoch liegen. Die Lösung wird auf die vorher gegebene dadurch zurückgeführt, daß wir die Koordinaten der drei Festpunkte auf ein in der Ebene dieser drei Punkte liegendes Achsenkreuz transformieren, in bezug auf diese Ebene nach Gl. (6—8) die Koordinaten der Pyramidenspitze bestimmen und nachher diese rücktransformieren.

Zur Transformation gehen wir zweckmäßig von der Streichlinie der durch die Punkte  $A, B, C$  gegebenen Ebene aus. Wie aus Abb. 3 ersichtlich, ist für den Fall, daß  $B$  in dem niedrigsten Punkt angenommen wird, die durch diesen gehende Streichlinie durch den Hilfspunkt  $S$  bestimmt, dessen Grundrißkoordinaten aus den Koordinaten des Punktes  $A$  mit Hilfe der Grundrißrichtung ( $C'A'$ ) und der grundrißlichen Länge  $\overline{A'S}$  ermittelt werden können. Letztere Größe ergibt sich nach der Abb. 3 aus der Beziehung:

$$\overline{A'S} = \overline{A'C'} \frac{h_{BA}}{h_{BC} - h_{BA}} ,
 \tag{9}$$

während die Höhe von  $S$  gleich der von  $B$  ist. Nun wählt man vorteilhaft in

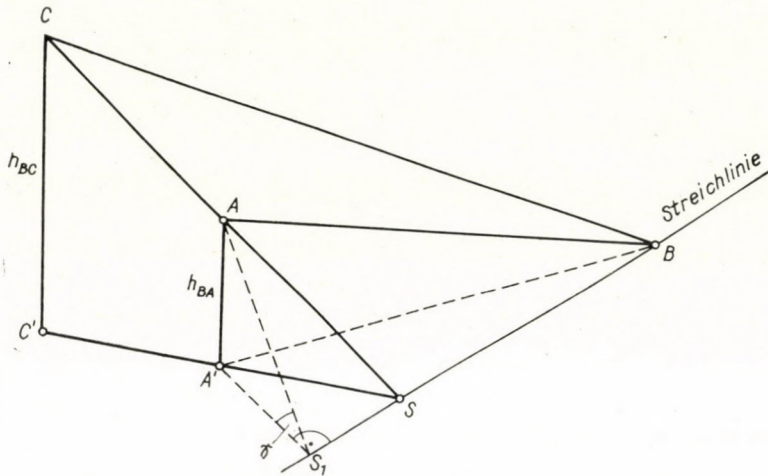


Abb. 3

dem zu Norden näher liegenden Ast der Streichlinie die neue  $x'$ -Achse des Hilfskoordinatensystems und nachdem so auch der Verdrehungswinkel  $\omega$  der neuen  $x'$  Achse zur alten gegeben ist, transformieren wir zunächst noch in dieser waagrechten Ebene die  $x$  und  $y$  Koordinaten von  $A$  und  $C$  auf diese Achse  $x'$ . Wenn wir nun die neue  $y'$  Achse unseres Koordinatensystems nicht in der durch  $B$  gehenden waagrechten Ebene, sondern wohl in  $B$ , aber in der Steig- bzw. Falllinie der Ebene der Festpunkte  $A, B, C$  annehmen, so bleiben die  $x'$  Abszissen von  $A$  und  $C$  unverändert, während die  $y'_{tr}$  transformierten Ordinaten nach Abb. 4 — die einen zur Streichlinie normalen Vertikalschnitt

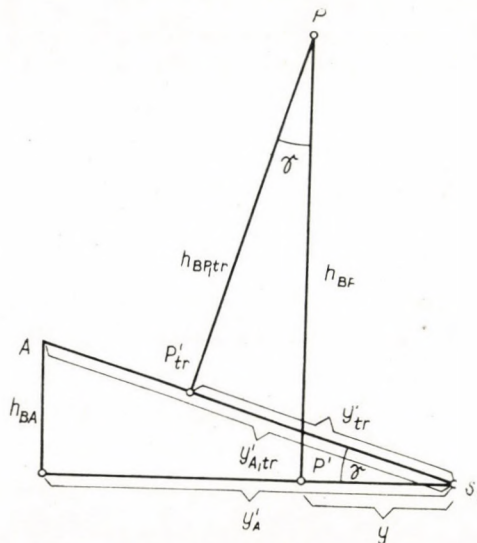


Abb. 4



durch  $A$  darstellt — leicht berechnet werden können. Der hierzu erforderliche Neigungswinkel der Ebene der Festpunkte ergibt sich aus Abb. 3, wie folgt:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h_{BA}}{A'S_1} = \frac{h_{BA}}{y'_A} \quad (10)$$

Dementsprechend wird:

$$y'_{A,tr} = \frac{y'_A}{\cos \gamma} \quad (11)$$

und ähnlich:

$$y'_{C,tr} = \frac{y'_C}{\cos \gamma} \quad (11a)$$

Mit diesen Werten zusammen mit den unveränderten Abszissen  $x'_A$  und  $x'_C$  erhalten wir mit Hilfe der Glgen (8) und (6) die  $x'_{tr}$ ,  $y'_{tr}$  sowie  $h_{BP,tr}$  transformierten Koordinaten der Pyramidenspitze  $P$ . Daraus erhalten wir die sich auf die durch  $B$  gehende waagrechte Ebene, aber noch auf die in der Streichlinie liegende  $x'$ -Achse beziehenden Koordinaten nach Abb. 4 als

$$\begin{aligned} x' &= x'_{tr} \\ y' &= y'_{tr} \cos \gamma - h_{BP,tr} \sin \gamma \\ h_{BP} &= h_{BP,tr} \cos \gamma + y'_{tr} \sin \gamma \end{aligned} \quad (11b)$$

Diese werden nun in der waagrechteten Ebene mit dem zwischen den  $x$  und  $x'$  Achsen befindlichen Winkel  $\omega$  in bekannter Weise noch auf die ursprüngliche  $x$  Achse umgerechnet, wobei  $h_{BP}$  unverändert bleibt. Durch Parallelverschiebung des letzteren Koordinatensystems vom Ursprung  $B$  in das Ausgangssystem erhalten wir dann die endgültigen Koordinaten der Pyramidenspitze  $P$ .

In den obigen Berechnungen können die Winkelfunktionen nicht mehr vermieden werden; wir brauchen aber außer der Berechnung des Hilfspunktes  $S$  am Anfang im Grunde genommen durchwegs nur  $\sin \omega$ ,  $\cos \omega$ ,  $\sin \gamma$  und  $\cos \gamma$ , die man deshalb nur einmal auszuschreiben braucht. So ist die Lösung bei Verwendung von Rechenmaschinen auch im allgemeinen Fall einfacher als die früher angegebenen.

Es sei des Interesses halber bemerkt, daß unseren Glgen (7) entsprechende Beziehungen auch von GRUNERT, PLATH und KLINGATSCH angegeben wurden (Vgl. [2; S. 56—57]), diese wurden aber nur benützt, um zwei Unbekannte mit Hilfe der dritten auszudrücken und so aus einer der Glgen (6) eine quadratische Gl. mit einer Unbekannten zu erhalten. Wir halten unsere Lösung für einfacher.

Es soll darauf hingewiesen werden, daß die Erdkrümmung sowohl bei den Grundriß- als auch bei den Höhenkoordinaten berücksichtigt werden muß. Weil aber dies kein ausgesprochenes photogrammetrisches Problem ist, soll darauf hier nicht eingegangen werden.

IIIc) *Dritte Phase:* Weil hier der Richtungswinkel der optischen Achse der Kammer im Grundriß, ferner der Winkel, den die optische Achse mit der Vertikalen einschließt und endlich der Kantungswinkel, d. h. der Winkel, den die  $x$ -Achse des Bildkoordinatensystems mit der Horizontalen bildet, gesucht werden, können wir die Winkelfunktionen nicht vermeiden. Sie sollen immerhin auf ein erträgliches Maß beschränkt werden.

In unserer Studie aus 1928 haben wir hierfür keine Lösung angegeben. In der ungarischen Literatur (z. B. in [5; S. 234–235]) wird häufig das WERKMEISTERSCHE Verfahren (vgl. [2; S. 79–80]) angegeben, das zwei Festpunkte voraussetzt. Es seien diese gegebenen Punkte in Abb. 2 die Festpunkte  $A$  und  $B$ . Aus deren Koordinaten sowie aus den Koordinaten der Pyramidenspitze  $P$  können die Zenitdistanzen  $Z_A$  und  $Z_B$  der von  $A$  und  $B$  ausgehenden Pyramidenkanten sowie der in  $P'$  erscheinende Grundrißwinkel  $(\gamma_1) = A' P' B'$  zwischen den Projektionen dieser Kanten berechnet werden. Aus Zweckmäßigkeitsgründen ermitteln wir nicht die Zenitdistanzen der von  $P$  abwärts, sondern jene der von  $P$  aufwärts nach den Bildpunkten gehenden Pyramidenkanten. (Es weicht demzufolge die hier erscheinende Richtung der Kammerachse um  $180^\circ$  von deren tatsächlicher Richtung ab.) Durch obige Festlegungen sind die mit dem Bildmeßtheodolit am Bilde gemessenen Winkel mit den gerechneten im Einklang. Die Zenitdistanzen werden aus den Beziehungen:

$$\cos Z_A = \frac{h_{AP}}{l_1} = \frac{z - z_A}{l_1} \quad \text{und} \quad \cos Z_B = \frac{h_{BP}}{l_2} = \frac{z - z_B}{l_2} \quad (12)$$

erhalten, während sich  $(\gamma_1)$  aus den Grundrißkoordinaten der in Frage kommenden Punkte ergibt. Wenn wir nun mit einem Bildmeßtheodolit die räumlichen

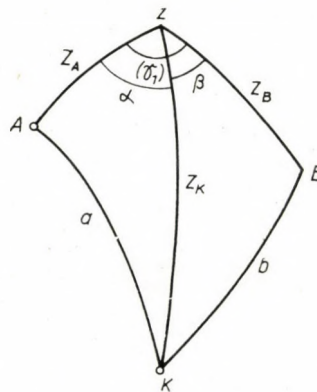


Abb. 5

Winkel  $a$  und  $b$  der Abb. 5 zwischen der Kammerachse und den Bildpunkten von  $A$  und  $B$  bestimmen (sie können mit Hilfe der Bildpunkte und der Brenn-

weite der Kammer auch berechnet werden), so können der Neigungswinkel  $Z_K$  der Kammerachse vom Zenit sowie die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , die die Horizontalprojektion der Kammerachse mit der grundrißlichen Richtung ( $P'A'$ ) bzw. ( $P'B'$ ) der Abb. 2 einschließen, berechnet werden. Wenn das Bild diesen Werten entsprechend in den Bildmeßtheodolit eingesetzt wird, ist der Kantungswinkel am Instrument unmittelbar ablesbar.

WERKMEISTER benützte auch zur Berechnung von  $Z_K$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  ein Iterationsverfahren: Er nimmt für  $Z_K$  einen Näherungswert  $Z'_K$  an, damit berechnet er aus dem sphärischen Dreieck  $AZK$  einen Näherungswinkel  $\alpha'$ , aus dem sphärischen Dreieck  $BZK$  einen Näherungswinkel  $\beta'$ . Je nachdem, ob  $\alpha' + \beta'$

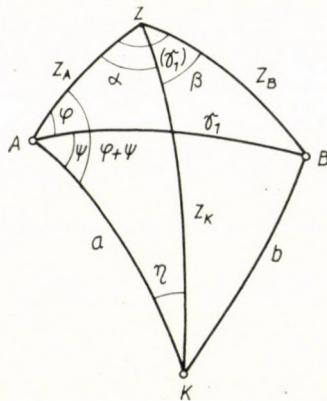


Abb. 6

$\cong (\gamma_1)$  ist, muß der angenommene Näherungswert  $Z'_K$  verkleinert, bzw. vergrößert werden, und mit dem so verbesserten Näherungswert  $Z'_K$  wiederholen wir die Berechnung, bis mit der erforderlichen Genauigkeit die Gleichheit  $\alpha + \beta = (\gamma_1)$  nicht erreicht ist. Bei kleineren Abweichungen kann auch interpoliert werden.

Der Aufmerksamkeit WERKMEISTERS entging aber die Tatsache, daß in Abb. 5 auch der räumliche Winkel zwischen  $A$  und  $B$  gegeben erscheint: dieser ist ja der Positionswinkel  $\gamma_1$ . Und sollte er nicht gegeben sein, so ist er aus  $Z_A, Z_B$  und  $(\gamma_1)$  berechenbar. Dann entsteht aber das in Abb. 6 dargestellte Bild. Aus den gegebenen Größen können die Winkel  $\varphi$  und  $\psi$  ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\sin (\gamma_1)}{\sin \gamma} \sin Z_B, \\ \cos \psi &= \frac{\cos b - \cos \gamma_1 \cos a}{\sin \gamma_1 \sin a}. \end{aligned} \tag{12a}$$

Mit diesen Größen berechnen wir aus dem sphärischen Dreieck  $AKZ$  die Win-

kel  $Z_K$  und  $a$  unmittelbar:

$$\cos Z_K = \cos Z_A \cos a + \sin Z_A \sin a \cos (\varphi + \psi)$$

und

$$\sin a = \frac{\sin a}{\sin Z_K} \sin (\varphi + \psi) .$$

(12b)

Diese Berechnung ist nicht viel länger als die erste Stufe der WERKMEISTER-schen Iteration.

Wenn wir noch dazu bedenken, daß aus Abb. 6 auch der Winkel  $\eta$  leicht zu berechnen ist, den die sog. vertikale Hauptrichtung mit der Richtung vom Hauptpunkt zum Bildpunkt von  $A$  einschließt, so gibt ein Vergleich dieses Winkels mit den aus den Bildpunktkoordinaten erhaltenen sofort den Wert der Kantung an. Der Winkel  $\eta$  kann schon nach dem Sin-Satz berechnet werden.

Diese unsere Lösung ist jedenfalls rascher als die LIEBITZKYSche [2; S. 72—73], die aus einem Gleichungssystem mit drei Unbekannten zunächst die Richtungskosinusse der Kammerachse und erst daraus die gesuchten Werte berechnet, und welche Lösung 1958 SZCZEPANSKI als die (bis dahin bekannte) beste Lösung für die dritte Phase ansah [2; S. 88]. Die LIEBITZKYSche Lösung ist auch deshalb nicht ganz befriedigend, weil eine überschüssige Beobachtung ohne Ausgleichung mitverwendet wird. Die Summe der Quadrate der Richtungskosinusse liefert nämlich im Gegensatz zu LIEBITZKY nicht eine Rechenkontrolle, sondern in der Regel einen Widerspruch infolge der überschüssigen Messung. Man müßte deshalb streng genommen seine berechneten Richtungskosinusse als Näherungswerte betrachten, die durch Zuordnung von Verbesserungen zu den gemessenen Winkeln  $a, b, c$  (bei ihm  $\tau_A, \tau_B, \tau_C$ ) durch die Ausgleichung  $\Delta \cos$ -Zuschläge zu den Näherungswerten der Richtungskosinusse liefern. Dabei ist der zur vertikalen Achse gehörige Richtungskosinus aus dem Zusammenhang, daß die Summe der Quadrate der drei Richtungskosinusse gleich eins ist, als Funktion der zwei anderen Richtungskosinusse zu ersetzen. Bei dieser Berechnungsweise erreichen wir auch hier, daß wir mit den ermittelten trigonometrischen Funktionen, ohne diese rückaufschlagen zu müssen, weiterrechnen können.

Es mag hier bemerkt werden, daß auch EGGERT bis zur Kenntnis der Abb. 6 gelangt ist; er zog aber andererseits die Gegebenheit des Winkels ( $\gamma_1$ ) nicht in Betracht [13; S. 70—71], und so konnte SZCZEPANSKI die ohne diesen Winkel angegebene umständlichere Lösung nicht als die einfachste unmittelbare Lösung bezeichnen. Das Bedenken SZCZEPANSKIS, daß die errechneten Winkel je nach ihrer Lage in verschiedenen Vorzeichenkombinationen auftreten und so zu Verwechslungen Anlaß geben können, ist hier insofern nicht ganz gerechtfertigt, da die Winkel  $Z_A, Z_B$  und  $Z_K$  hier immer kleiner als  $90^\circ$  sind

und weiter man vom Bild sofort entscheiden kann, ob die Verbindungslinie der Bildpunkte von  $A$  und  $B$  oberhalb oder unterhalb des Bildpunktes von  $K$  liegt, und ob  $Z_K$  diese Verbindungslinie zwischen  $A$  und  $B$  schneidet oder nicht.

AIId. Lösungen mit Verknüpfungen der Phasen.

Es handelt sich in diesem Falle um die Zusammenziehung der ersten zwei Phasen, so daß sofort die Koordinaten der Pyramidenspitze ermittelt werden.

Für die Zusammenziehung der beiden ersten Phasen hat HUGERSHOFF sogar zwei Lösungen angegeben. Es ist aber interessant, daß nicht nur er [2; S. 82—85], sondern auch die ungarische Literatur nur die Lösung von HUGERSHOFF anführt, die er selbst als die schlechtere bezeichnete [4; S. 63]. Nachdem bei HUGERSHOFF eine einfache Ableitung dieser Gln fehlt, wollen wir zunächst diese Gln herleiten.

Es ist zu diesem Zwecke am einfachsten, aus den Gln (5) auszugehen. Wenn wir nämlich die Längenänderungen  $\delta l'_1, \delta l'_2$  und  $\delta l'_3$  der Kanten als Funktionen der Koordinatenzuschläge  $\delta x, \delta y$  und  $\delta z$  ausdrücken, wobei den näherungsweise Kantenlängen  $l'_1, l'_2$  und  $l'_3$  die Koordinaten  $x', y'$  und  $z'$  entsprechen, so bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} l_1^2 &= (l'_1 + \delta l'_1)^2 = (x' + \delta x - x_A)^2 + (y' + \delta y - y_A)^2 + (z' + \delta z - z_A)^2 \\ l_2^2 &= (l'_2 + \delta l'_2)^2 = (x' + \delta x - x_B)^2 + (y' + \delta y - y_B)^2 + (z' + \delta z - z_B)^2 \\ l_3^2 &= (l'_3 + \delta l'_3)^2 = (x' + \delta x - x_C)^2 + (y' + \delta y - y_C)^2 + (z' + \delta z - z_C)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Nach Reihenentwicklung und durch Ersetzen der den Näherungskordinaten  $x', y'$  und  $z'$  entsprechenden Kantenlängen durch  $l'_1, l'_2$  und  $l'_3$  entstehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \delta l'_1 &= \frac{x' - x_A}{l'_1} \delta x + \frac{y' - y_A}{l'_1} \delta y + \frac{z' - z_A}{l'_1} \delta z \\ \delta l'_2 &= \frac{x' - x_B}{l'_2} \delta x + \frac{y' - y_B}{l'_2} \delta y + \frac{z' - z_B}{l'_2} \delta z \\ \delta l'_3 &= \frac{x' - x_C}{l'_3} \delta x + \frac{y' - y_C}{l'_3} \delta y + \frac{z' - z_C}{l'_3} \delta z. \end{aligned} \quad (14)$$

Wenn diese Gln in Gl. (5) eingesetzt werden, so erhalten wir nach entsprechender Ordnung sofort die gesuchten drei Gln:

$$\begin{aligned} A \cos \gamma_1 &= \left( \frac{(l'_1 - l'_2 \cos \gamma'_1)(x' - x_A)}{l_1^2 l'_2} + \frac{(l'_2 - l'_1 \cos \gamma'_1)(x' - x_B)}{l_1 l_2'^2} \right) \delta x + \\ &+ \left( \frac{(l'_1 - l'_2 \cos \gamma'_1)(y' - y_A)}{l_1^2 l'_2} + \frac{(l'_2 - l'_1 \cos \gamma'_1)(y' - y_B)}{l_1 l_2'^2} \right) \delta y + \\ &+ \left( \frac{(l'_1 - l'_2 \cos \gamma'_1)(z' - z_A)}{l_1^2 l'_2} + \frac{(l'_2 - l'_1 \cos \gamma'_1)(z' - z_A)}{l_1 l_2'^2} \right) \delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \cos \gamma_2 = & \left( \frac{(l'_2 - l'_3 \cos \gamma'_2)(x' - x_B)}{l'^2_2 l'_3} + \frac{(l'_3 - l'_2 \cos \gamma'_2)(x' - x_C)}{l'_2 l'^2_3} \right) \delta x + \\
& + \left( \frac{(l'_2 - l'_3 \cos \gamma'_2)(y' - y_B)}{l'^2_2 l'_3} + \frac{(l'_3 - l'_2 \cos \gamma'_2)(y' - y_C)}{l'_2 l'^2_3} \right) \delta y + \\
& + \left( \frac{(l'_2 - l'_3 \cos \gamma'_2)(z' - z_B)}{l'^2_2 l'_3} + \frac{(l'_3 - l'_2 \cos \gamma'_2)(z' - z_C)}{l'_2 l'^2_3} \right) \delta z \\
& \hspace{15em} (15) \\
\Delta \cos \gamma_3 = & \left( \frac{(l'_3 - l'_1 \cos \gamma'_3)(x' - x_C)}{l'^2_3 l'_1} + \frac{(l'_1 - l'_3 \cos \gamma'_3)(x' - x_A)}{l'_3 l'^2_1} \right) \delta x + \\
& + \left( \frac{(l'_3 - l'_1 \cos \gamma'_3)(y' - y_C)}{l'^2_3 l'_1} + \frac{(l'_1 - l'_3 \cos \gamma'_3)(y' - y_A)}{l'_3 l'^2_1} \right) \delta y + \\
& + \left( \frac{(l'_3 - l'_1 \cos \gamma'_3)(z' - z_C)}{l'^2_3 l'_1} + \frac{(l'_1 - l'_3 \cos \gamma'_3)(z' - z_A)}{l'_3 l'^2_1} \right) \delta z .
\end{aligned}$$

Diese Berechnung selbst ist nur scheinbar kompliziert, da die Glieder  $l'_1 - l'_2 \cos \gamma'_1$  usw. auch graphisch rasch bestimmt werden können und diese in den Koeffizienten eine große Rolle spielen. Wenn wir in den Koeffizienten an Stelle von  $\cos \gamma'_1$  wieder den entgeltigen Wert  $\cos \gamma_1$  usw. einsetzen, so können die Koeffizienten unverändert übernommen werden und man braucht nur die reinen Glieder der Gln neu zu berechnen. Die Berechnung letzterer Größen ist aber mit einigen Schwierigkeiten verbunden, da wir die den Näherungskordinaten  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  genau entsprechenden Näherungswerte  $l'_1$ ,  $l'_2$  und  $l'_3$  der Kantenlängen brauchen, da letztere nach Gln 4 zur Berechnung des zur Bestimmung der Widersprüche  $\Delta \cos \gamma$  erforderlichen  $\cos \gamma'$  notwendig sind. Es kann deshalb angebracht sein, z. B. bei gleich hohen Festpunkten, aus den leichter zu bestimmaren Näherungslängen der Kanten nach Gln 6—8 die Näherungskordinaten zu bestimmen und nicht umgekehrt aus den angenommenen Näherungskordinaten die Kantenlängen, weil hier dann Wurzeln zu ziehen sind.

Die Notwendigkeit der Bestimmung der den näherungsweise Kantenlängen genau entsprechenden Näherungskordinaten (oder umgekehrt) macht dieses Verfahren mit zusammengezogenen Phasen nicht so einfach, wie es auf den ersten Blick zu sein scheint.

In den Gln (15) haben wir unmittelbare Beziehungen zwischen den Änderungen der Kosinuse der Positionswinkel und den Änderungen der Koordinaten der Pyramidenspitze erhalten. Nachdem wir so die Kantenlängen (mit Ausnahme der Koeffizienten) ausgeschaltet haben, so kann die Lösung auch zu den Lösungen nach dem Torusverfahren gerechnet werden; ganz besonders dann, wenn wir diese Kantenlängen aus den Näherungskordinaten der Pyramidenspitze ermitteln, und so die  $l'$ -Werte in den Gln (15)

als in abgekürzter Schreibweise geschriebene Größen angesehen werden können. Die Gln (15) wurden allerdings mit Hilfe der Änderungen der Kantenlängen nach Gln (14) hergeleitet. Die Trennungslinie zwischen den Torus- und Pyramidenverfahren ist daher nicht scharf, und auch SZCZEPANSKI betonte schon, daß beide Verfahren ineinander überführbar sind [2; S. 128]. Die Bemerkung SZCZEPANSKIS dagegen, daß der Zusammenhang zwischen den Änderungen der Positionswinkel und der Koordinaten der Pyramidenspitze sehr umständlich sei [2; S. 12], gilt für die hier angegebenen Gln (15) nur zum Teil.

IIIc. *Ausgleichung beim Verfahren mit Hilfe der Positionswinkel.* Wenn wir die Positionswinkel  $\gamma$  unmittelbar messen können und man überschüssige Beobachtungen hat, so sind die Verbesserungen  $v$  offenkundig diesen Positionswinkeln zu geben. Die linke Seite der Gln (15) gestaltet sich mithin folgend:

$$\Delta \cos \gamma_1 = \cos (\gamma_1 + v_{\gamma_1}) - \cos \gamma'_1 \doteq \cos \gamma_1 - \sin \gamma_1 v_{\gamma_1} - \cos \gamma'_1 .$$

Daraus erhalten wir mit Hilfe der rechten Seite der Gln (15) die Verbesserungsgleichungen, falls  $v_\gamma$  die Verbesserungen im Winkelmaß und  $\varrho$  den Umwandlungsfaktor bezeichnen:

$$\begin{aligned} v_{\gamma_1} = \varrho & \left( \frac{(l'_1 - l'_2 \cos \gamma'_1) (x_A - x')}{l_1'^2 l_2' \sin \gamma_1} + \frac{(l'_2 - l'_1 \cos \gamma'_1) (x_B - x')}{l_1' l_2'^2 \sin \gamma_1} \right) \delta x + \\ & + \varrho \left( \frac{(l'_1 - l'_2 \cos \gamma'_1) (y_A - y')}{l_1'^2 l_2' \sin \gamma_1} + \frac{(l'_2 - l'_1 \cos \gamma'_1) (y_B - y')}{l_1' l_2'^2 \sin \gamma_1} \right) \delta y + \\ & + \varrho \left( \frac{(l'_1 - l'_2 \cos \gamma'_1) (z_A - z')}{l_1'^2 l_2' \sin \gamma_1} + \frac{(l'_2 - l'_1 \cos \gamma'_1) (z_B - z')}{l_1' l_2'^2 \sin \gamma_1} \right) \delta z + \\ & + \varrho \frac{\cos \gamma_1 - \cos \gamma'_1}{\sin \gamma_1} . \end{aligned} \tag{16}$$

Die Verbesserungsgleichungen sind nur scheinbar kompliziert, weil sie aus den gleichen Bauelementen aufgebaut sind, und diese auch einer maßstäblichen Skizze entnommen werden können, weshalb sie auch bei dem Programm keine zu große Schwierigkeiten verursachen. Wenn wir dieses Ausgleichungsverfahren mit dem Verfahren der Ausgleichung mit horizontalen und vertikalen Winkeln vergleichen, erscheint diese Gegenüberstellung besonders dann für die Ausgleichung mit den Positionswinkeln nicht nachteilig, wenn wir berücksichtigen, daß bei der letzteren nur drei Unbekannte durch die Ausgleichung berechnet werden müssen (die anderen können nach IIIc viel einfacher ermittelt werden), während bei der Ausgleichung mit horizontalen und vertikalen Winkeln man 6 bzw. 5 Unbekannte hat. Es soll hier noch bemerkt werden, daß die eigene Berücksichtigung der Fehler der irdischen Punkte,

wie dies HUGERSHOFF tat, entbehrlich sein kann, denn diese äußern sich insofern als Fehler der Positionswinkel, daß man den Bildmeßtheodolit nicht genau auf jene Punkte einstellt, auf die sich die Koordinaten beziehen. So können wir diese Fehler durch die entsprechende Wahl der Gewichte der einzelnen Positionswinkel berücksichtigen. Der Unterschied ist nur der, daß durch Wiederholung der Messung dieser Fehler nicht vermindert wird, weshalb bei Überwiegen der Koordinatenfehler der Festpunkte die wiederholte Messung desselben Positionswinkels nur beschränkte Berechtigung hat. Die zur Ausgleichung erforderlichen Näherungskordinaten erhalten wir am einfachsten aus der Berechnung eines einfachen Rückwärtseinschnittes.

Wir finden in der Fachliteratur auf HUGERSHOFF zurückgehend die Bemerkung, daß man bei der Ausgleichung mit Hilfe der Positionswinkel im

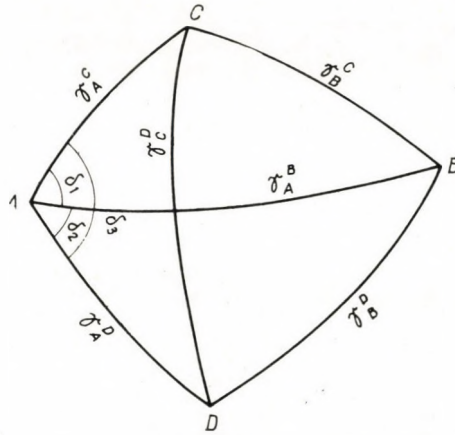


Abb. 7

Falle von  $n$  Punkten  $\binom{n}{2}$  Winkel zu messen hat, aus denen  $\binom{n}{3}$  räumliche Rückwärtseinschnitte zu bilden sind, und dies ist sehr umständlich [2; S. 90]. Bei der Lösung nach Glnen (16) entfällt offenkundig die Bildung der  $\binom{n}{3}$  räumlichen Rückwärtseinschnitte. Bezüglich der Messung der  $\binom{n}{2}$  Positionswinkel sei andererseits bemerkt, daß man alle diese nicht messen *muß*, sondern *kann*, wenn man die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen erhöhen will. Im letzteren Falle muß aber in Betracht gezogen werden, daß dann die einzelnen Positionswinkel nicht unabhängig voneinander sind, sondern zwischen diesen noch Bedingungsgleichungen bestehen. Wenn wir z. B. in Abb. 7 vier gegebene Punkte  $A, B, C$  und  $D$  voraussetzen, zwischen denen die Positionswinkel  $\gamma_A^B, \gamma_A^C, \gamma_A^D, \gamma_B^C, \gamma_B^D, \gamma_C^D$  gemessen wurden, dann besteht im Punkte  $A$  zwischen den Winkeln  $\delta_1, \delta_2$  und  $\delta_3$  der drei sphärischen Dreiecke die Bedingung:

$$\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 = 0. \quad (17)$$



Wenn die Winkel  $\delta$  als Funktionen der Positionswinkel ausgedrückt werden, so erhalten wir eine zur Berechnung geeignete Gleichung. (Die Ausgleichung führt dann zu den vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.) Diese Bedingungsgleichungen wurden von HUGERSHOFF bei seiner Ausgleichung nicht berücksichtigt, obwohl solche auch zwischen seinen gemessenen Positionswinkeln [4; S. 90] bestehen. Diese machen aber nicht nur die Messung, sondern auch die Berechnung sehr langwierig. Es ist aber gar nicht erforderlich, daß wir dies tun, denn bei der Methode mit den horizontalen und vertikalen Winkeln messen wir die Horizontalwinkel auch nicht in allen Kombinationen. Wir verfahren deshalb am vorteilhaftesten so, daß wir zwei möglichst genau gegebene, voneinander möglichst weit liegende gut identifizierbare Punkte aussuchen und wir messen die Positionswinkel eines jeden weiteren Punktes nur von diesen beiden Punkten. Zu dem Positionswinkel zwischen den ausgewählten Punkten erhalten wir so nach jedem weiteren Punkt zwei Positionswinkel, also ebensoviel Messungen wie bei dem Verfahren mit horizontalen und vertikalen Winkeln. Auf diese Frage kehren wir bei dem Verfahren mit horizontalen und vertikalen Winkeln noch zurück.

Der erste Vorschlag zur Ausgleichung mit den Positionswinkeln wurde nach unserem Wissen von S. FINSTERWALDER und SCHEUFELE 1903 gemacht [7; S. 561 ff.]. Weil ihr ziemlich kompliziertes Verfahren nicht auf dem Grundsatz des Minimums der Quadratsumme der Verbesserungen von den Beobachtungen beruht, sondern es wird die Pyramide mit den in deren Spitze gegebenen Winkeln so aufgestellt, daß die Summe der Quadrate der *Abweichungen* der einzelnen Kanten von den Festpunkten ein Minimum werde, entspricht dieses Verfahren nicht ganz den Grundsätzen der Ausgleichsrechnung. Ähnliches gilt für die MÜLLERSche Lösung aus 1926 (Allg. Vermessungsnachrichten, Bd. 1926. No. 28). Wesentlich besser ist die Lösung von HUGERSHOFF und CRANZ aus 1919 [4; S. 84—97], weil sie schon die Verbesserungen den Positionswinkeln geben. Weil aber von ihnen die Messung der Positionswinkel in allen Kombinationen gefordert wird, die Bedingungsgleichungen nach Gl. (17) aber nicht berücksichtigt werden, und zur Berücksichtigung der Festpunktfehler bei ihnen eine weitere Ausgleichung erforderlich ist, konnten wir mit ihrer Lösung das Problem nicht als abgeschlossen ansehen. Es ist bei HUGERSHOFF auch der Umstand etwas nachteilig, daß er die reinen Glieder der Verbesserungsgleichungen nach (16) durch Differenzen von Winkeln — und nicht, wie bei uns, durch Differenzen der Kosinusse — angibt, weil dies die häufigere Verwendung von trigonometrischen Tabellen und bei genaueren Berechnungen zeitraubende Interpolationen erfordert. Wir selbst haben vor 33 Jahren auch eine Lösung angegeben [6], die entsprechend ihrer Zeit — ähnlich wie [1] — noch ein logarithmisches Verfahren war. Auf dieses beruft sich SZCZEPANSKI nicht, sicherlich, weil er es nicht kannte. Dies ist aber unwesentlich, weil bei der heutigen Rechentechnik wir selbst es als überholt

ansetzen und an deren Stelle das soeben erörterte Verfahren angegeben haben, das brauchbar ist, wenn wir die Positionswinkel messen können.

### B) Die Berechnungen mit Hilfe von horizontalen und vertikalen Winkeln

Bei diesem Verfahren werden mit Hilfe des näherungsweise richtig eingesetzten Bildes meist entweder die Bildkoordinaten der Festpunkte oder die horizontalen und vertikalen Höhenwinkel nach den Bildpunkten gemessen. (Die Richtungen sind eigentlich auch Winkel.) Wir wollen hier nur den Fall mit gemessenen horizontalen und Höhenwinkeln untersuchen.

Wir weichen im folgenden von der SZCZEPANSKISCHEN Einteilung ab, weil wir unter BI zunächst den Zusammenhang zwischen den Verfahren mit Positionswinkelmessung sowie mit Horizontal- und Höhenwinkelmessung untersuchen wollen. In BII wird dann das unmittelbare Verfahren mit Hilfe von Horizontal- und Höhenwinkeln behandelt.

*BI. Die Lösung mit Hilfe von gemessenen horizontalen und vertikalen Winkeln nach dem Positionswinkelverfahren.*

Es seien in Abb. 8 die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  die Bildpunkte der entsprechenden Festpunkte,  $K$  der Bildpunkt des Hauptpunktes, von dem die (negativen) Horizontalwinkel  $\alpha_B$ ,  $\alpha_D$  und die (positiven) Horizontalwinkel  $\alpha_A$ ,  $\alpha_C$ , sowie die auf unserer Abb. positiven Höhenwinkel  $\beta_A$ ,  $\beta_B$ ,  $\beta_C$ ,  $\beta_D$  bzw. die diesen entsprechenden Zenitdistanzen  $Z_A$ ,  $Z_B$ ,  $Z_C$ ,  $Z_D$  gemessen wurden. (Den Höhenwinkel  $\beta_K$  bzw. die Zenitdistanz  $Z_K$  der Kammerachse sowie den Richtungswinkel  $\alpha_K$  der Horizontalprojektion der Kammerachse brauchen wir in den unmittelbar folgenden Berechnungen noch nicht.)

Aus den sphärischen Dreiecken der Abb. 8 können die Beziehungen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}\cos \gamma_A^B &= \cos Z_A \cos Z_B + \sin Z_A \sin Z_B \cos (\alpha_A - \alpha_B) \\ \cos \gamma_A^C &= \cos Z_A \cos Z_C + \sin Z_A \sin Z_C \cos (\alpha_A - \alpha_C) \\ \cos \gamma_C^B &= \cos Z_C \cos Z_B + \sin Z_C \sin Z_B \cos (\alpha_C - \alpha_B)\end{aligned}\quad (18)$$

Aus den Verbesserungen  $v_A^Z$ ,  $v_B^Z$ ,  $v_C^Z \dots$  bzw.  $v_A^\alpha$ ,  $v_B^\alpha$ ,  $v_C^\alpha \dots$  der gemessenen Werte  $Z_A$ ,  $Z_B$ ,  $Z_C \dots \alpha_A$ ,  $\alpha_B$ ,  $\alpha_C \dots$  ergeben sich die Verbesserungen  $v_\gamma$  der Positionswinkel aus den Gln:

$$\begin{aligned}\cos (\gamma_A^B + v_\gamma^{AB}) &= \cos (Z_A + v_A^Z) \cos (Z_B + v_B^Z) + \\ &+ \sin (Z_A + v_A^Z) \sin (Z_B + v_B^Z) \cos (\alpha_A + v_A^\alpha - \alpha_B - v_B^\alpha) \cdot \\ &\vdots\end{aligned}\quad (18a)$$

nach Reihenentwicklung unter Berücksichtigung, daß  $\cos \gamma_A^B = \cos Z_A \cos Z_B +$

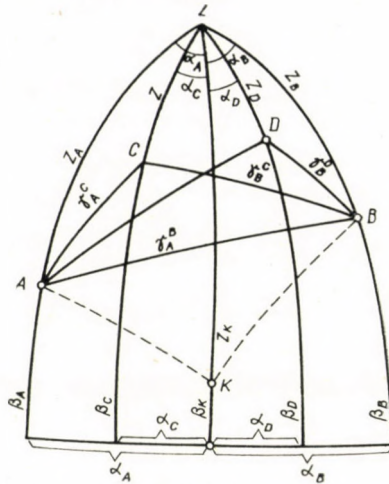


Abb. 3

+  $\sin Z_A \sin Z_B \cos (a_A - a_B)$  ist, folgt:

$$\begin{aligned}
 v_{\gamma}^{AB} = & \frac{\sin Z_A \cos Z_B - \cos Z_A \sin Z_B \cos (a_A - a_B)}{\sin \gamma_B^A} v_A^Z + \\
 & + \frac{\sin Z_B \cos Z_A - \sin Z_A \cos Z_B \cos (a_A - a_B)}{\sin \gamma_A^B} v_B^Z + \\
 & + \frac{\sin Z_A \sin Z_B \sin (a_A - a_B)}{\sin \gamma_A^B} v_A^a - \\
 & - \frac{\sin Z_A \sin Z_B \sin (a_A - a_B)}{\sin \gamma_A^B} v_B^a .
 \end{aligned} \tag{19}$$

Wenn wir jetzt auf der linken Seite der Glgen (16)  $v_{\gamma}$  nach Gl. (19) ersetzen, so erhalten wir die Glgen:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin Z_A \cos Z_B - \cos Z_A \sin Z_B \cos (a_A - a_B)}{\sin \gamma_A^B} v_A^Z + \\
 & + \frac{\sin Z_B \cos Z_A - \sin Z_A \cos Z_B \cos (a_A - a_B)}{\sin \gamma_A^B} v_B^Z + \\
 & + \frac{\sin Z_A \sin Z_B \sin (a_A - a_B)}{\sin \gamma_A^B} v_A^a - \frac{\sin Z_A \sin Z_B \sin (a_A - a_B)}{\sin \gamma_A^B} v_B^a = \\
 & = \varrho \left( \frac{(l'_A - l'_B \cos \gamma_A^B) (x_A - x')}{l'_A l'_B \sin \gamma_A^B} + \frac{(l'_B - l'_A \cos \gamma_A^B) (x_B - x')}{l'_A l'_B \sin \gamma_A^B} \right) \delta x + \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varrho \left( \frac{(l'_A - l'_B \cos \gamma'^B_A) (y_A - y')}{l'^2_A l'_B \sin \gamma'^B_A} + \frac{(l'_B - l'_A \cos \gamma'^B_A) (y_B - y')}{l'_A l'^2_B \sin \gamma'^B_A} \right) \delta y + \\
& + \varrho \left( \frac{(l'_A - l'_B \cos \gamma'^B_A) (z_A - z')}{l'^2_A l'_B \sin \gamma'^B_A} + \frac{(l'_B - l'_A \cos \gamma'^B_A) (z_B - z')}{l'_A l'^2_B \sin \gamma'^B_A} \right) \delta z + \\
& + \varrho \frac{\cos \gamma^B_A - \cos \gamma'^B_A}{\sin \gamma^B_A} . \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Es ist in der Regel zulässig  $\sin \gamma^B_A$  und  $\sin \gamma'^B_A$  gleich groß anzunehmen, in welchem Falle beiderseits durch  $\sin \gamma^B_A$  gekürzt werden kann.

Für einen jeden Positionswinkel erhalten wir eine der Gl. (20) entsprechende weitere Gl. Im Falle der Abb. 8 sind es folglich 5 Gleichungen. Weil die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  drei ist, so sind hier dann 2 überschüssige Beobachtungen vorhanden. Wenn wir die unter BII noch zu untersuchende unmittelbare Methode der horizontalen und vertikalen Winkel wählen, ist die Anzahl der Unbekannten (Vgl. [2; S. 113—115]) 6, während die Anzahl der Vermittlungsgleichungen (4 für die horizontalen, 4 für die vertikalen Winkel) zusammen 8 beträgt, d. h. die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen ergibt sich auch hier zu 2.

Aber nicht nur aus dem soeben angegebenen Grunde ist es nicht erforderlich die Positionswinkel in allen Kombinationen (also in Abb. 8 auch den Positionswinkel zwischen *C* und *D*) anzuschreiben, sondern auch deshalb nicht, weil alle nach Abb. 8 gemessenen Horizontal- und Vertikalwinkel in den dort eingezeichneten 5 Positionswinkeln bereits vorkommen und so der Positionswinkel zwischen *C* und *D* aus den vorherigen folgt und keine wirklich neue Vermittlungsgleichung gibt. Sie würden nur dann unabhängig von den früheren sein, wenn die einzelnen Positionswinkel unabhängig voneinander gemessen worden wären; da müßte man aber auch die Bedingungen nach Gl. (17) berücksichtigen.

Untersuchen wir nun die Lösung der Gln (20). Diese führen offenkundig zur Ausgleichung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten (vgl. [8; S. 183—191]), wobei wir bemerken wollen, daß die Verbesserungen  $v^a_A$  und  $v^z_A$  bzw.  $v^a_B$  und  $v^z_B$  abwechselnd auch in den Verbesserungen der übrigen Positionswinkel erscheinen. So können die in den einzelnen Gleichungen erscheinenden Verbesserungen nicht in je eine fingierte Verbesserung zusammengezogen und die Lösung auf den Fall der vermittelnden Beobachtungen mit verschiedenen Gewichten zurückgeführt werden. Auch die Einführung der gemeinsamen Verbesserungen als weitere Unbekannte in die Ausgleichung würde hier zu langwierig sein, weil sich dadurch die Anzahl der Unbekannten vergrößern würde. Deshalb ist die Ausgleichung mit Hilfe der Gln (20) in ihrer ursprünglichen Form in der Regel länger als die

unmittelbare Ausgleichung mit Hilfe der Horizontal- und Vertikalwinkel mit 6 Unbekannten nach BII.

Es ist aber leicht zu erreichen, daß die Verbesserungen der linken Seite der einzelnen Gln (20) in den übrigen Gln nicht erscheinen: z. B. dadurch, daß wir zu einem jeden in Betracht kommenden Positionswinkel die Horizontal- und Vertikalwinkel eigens messen. Es ist aber noch richtiger und auch rascher, nach Möglichkeit die einzelnen Positionswinkel selbst zu messen, denn da können wir die Verbesserungsgleichungen (16) oft als gleichgewichtig ansehen, während in dem vorangehenden Fall die nach der linken Seite der Gln (20) zu berechnenden fingierten Verbesserungen fallweise zu ermittelnde eigene Gewichte haben.

Zusammenfassend: Die Ausgleichung mit Hilfe der Positionswinkel nach Gln (16) hat dann eine Berechtigung und Bedeutung, wenn wir die Positionswinkel unmittelbar messen können. Dann aber ist sie einfacher als die GRUBERSCHE Ausgleichung mit Hilfe der gemessenen Horizontal- und Vertikalwinkel und der 6 Unbekannten.

Die zur Ausgleichung erforderlichen Näherungskordinaten der Pyramidenspitze können wir aber in allen Fällen (also auch zur unter BII zu behandelnden Ausgleichung — hier auch die Näherungswerte der weiteren Unbekannten —) am einfachsten durch die unter [A] behandelte Lösung eines einfachen Rückwärtsschnittes mit Hilfe der Positionswinkel erhalten. Wenn wir Horizontal- und Höhenwinkel gemessen haben, so berechnen wir zu diesem Zwecke die Positionswinkel nach Gln (18).

BII. *Die unmittelbare Lösung mit Hilfe von horizontalen und vertikalen Winkeln.*

Zwischen den vom Bild abgemessenen Horizontalwinkeln  $\alpha_A, \alpha_B \dots$  bzw. Höhenwinkeln  $\beta_A, \beta_B \dots$  oder Zenitdistanzen  $Z_A, Z_B \dots$  der Abb. 8, sowie den unbekanntenen Koordinaten  $x, y, z$  der Pyramidenspitze  $P$  bestehen nach Abb. 2 die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_A = \operatorname{ctg} Z_A &= \frac{z - z_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} \\ \operatorname{tg} \beta_B = \operatorname{ctg} Z_B &= \frac{z - z_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}} \end{aligned} \quad (21)$$

Wenn wir weiter den Richtungswinkel der Horizontalprojektion der Kammerachse mit  $\alpha_K$  bezeichnen, so wird der zum Festpunkt  $A$  gehörige Richtungswinkel  $\alpha_K + \alpha_A$  der zum Festpunkt  $B$  gehörige Richtungswinkel mit Rücksicht auf den negativen Wert von  $\alpha_B$  ähnlich,  $\alpha_K - \alpha_B$ . Dementsprechend:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a_K + a_A) &= \frac{y - y_A}{x - x_A} \\ \operatorname{tg}(a_K + a_B) &= \frac{y - y_B}{x - x_B} . \end{aligned} \quad (22)$$

Weil aber das Einlegen des Bildes nicht ganz genau ist, müssen wir zunächst untersuchen, wie die im Bildmeßtheodolit gemessenen Winkel sich als Funktionen der Änderung der Zenitdistanz (bzw. des Höhenwinkels) der Kammerachse und des infolge der nicht ganz horizontalen Lage der Bildhauptachse entstehenden Kantungswinkels verändern. Dies vorzunehmen ist auch deshalb zweckdienlich, weil die diesbezüglichen GRUBERSCHEN Ableitungen etwas lückenhaft sind und nicht ganz übersichtlich erscheinen. Diese Feststellung soll aber die großen bahnbrechenden Verdienste GRUBERS in keiner Weise beeinträchtigen.

Wir wollen zunächst die Änderungen in den Höhenwinkeln untersuchen.

Nach dem sphärischen Dreieck der Abb. 9 kann die Zenitdistanz  $Z_A$  bzw. der Höhenwinkel  $\beta_A$  der nach  $A$  gehenden Richtung wie folgt ausgedrückt werden:

$$\sin \beta_A = \cos a \cos Z_K + \sin a \sin Z_K \cos \eta_A \quad (23)$$

Man erhält daraus durch Differentiation

$$\begin{aligned} \cos \beta_A d\beta_A &= -\cos a \sin Z_K dZ_K + \sin a \cos \eta_A \cos Z_K dZ_K - \\ &\quad - \sin a \sin Z_K \sin \eta_A d\eta_A \end{aligned} \quad (23a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} d\beta_A &= \frac{(\sin a \cos \eta_A \cos Z_K - \cos a \sin Z_K)}{\cos \beta_A} dZ_K - \\ &\quad - \frac{\sin a \sin Z_K \sin \eta_A}{\cos \beta_A} d\eta_A . \end{aligned}$$

Da aber der Zähler des ersten Bruches der rechten Seite nach der sphärischen Trigonometrie  $-\cos \beta_A \cos a_A$  ist, der zweite Bruch infolge der Beziehung

$$\frac{\sin a \sin \eta_A}{\cos \beta_A} = \sin a_A \quad (23b)$$

durch  $\sin a_A \sin Z_K$  ersetzt werden kann, so erhalten wir durch Einführung der endlich kleinen Größen  $\Delta\beta_A$ ,  $\Delta Z_K$  und  $\Delta\eta_A$  an Stelle der unendlich kleinen

Größen, weiter, wenn wir den Koeffizienten von  $\Delta Z_K$  mit  $e_{\beta_A}$ , jenen von  $\Delta \eta_A$  mit  $g_{\beta_A}$  bezeichnen, die Beziehung:

$$\Delta \beta_A = -\cos a_A \Delta Z_K - \sin a_A \sin Z_K \Delta \eta_A = -e_{\beta_A} \Delta Z_K - g_{\beta_A} \Delta \eta_A \quad (24)$$

Wenn wir bedenken, daß der Fehler  $\Delta Z_K$  der Zenitdistanz der Kammerachse gleichzeitig den Fehler ihres Höhenwinkels mit entgegengesetztem Vorzeichen angibt, ferner, daß ähnliches auch für  $\Delta \eta_A$  gilt, weil die Verkleinerung von  $\eta_A$  den (nicht eingezeichneten) Winkel der Seite  $a$  der Abb. 9 mit der Horizontalen um denselben  $\Delta \alpha_A$  Betrag vergrößert (d. h.  $\Delta \eta_A = -\Delta \alpha_A$  ist), wobei  $\Delta \eta_A$  für alle Punkte den gleichen Wert annimmt (weshalb der Index  $A$  weggelassen werden kann), so entspricht unsere Gl. (24) sinngemäß der von SZCZEPANSKI auf S. 114 angegebenen GRUBERSCHEN Gl. für  $\Delta \beta_A$ . Die Glg. (24) kann übrigens auch wie folgt geschrieben werden:

$$\Delta \beta_A = \cos a_A \Delta \beta_K + \sin a_A \cos \beta_K \Delta \alpha. \quad (24a)$$

Wir wollen jetzt den Einfluß der Fehler  $\Delta Z_K$  der Kammerachse und  $\Delta \eta$  bzw.  $\Delta \alpha$  des Kantungswinkels auf den horizontalen Winkel  $a_A$  prüfen.

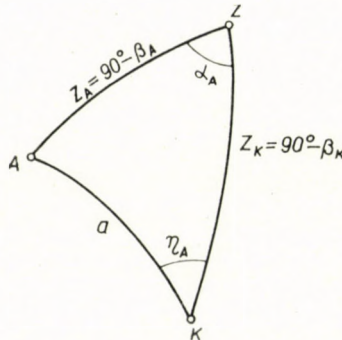


Abb. 9

Um diese gesuchte Veränderung  $\Delta a_A$  zu erhalten, gehen wir gleichfalls aus der Abb. 9 aus, wo nach der sphärischen Trigonometrie angeschrieben werden kann:

$$\operatorname{ctg} a \sin Z_K = \cos Z_K \cos \eta_A + \sin \eta_A \operatorname{ctg} a_A. \quad (25)$$

Durch Differentiation wird daraus:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} a \cos Z_K dZ_K = & -\cos \eta \sin Z_K dZ_K - \cos Z_K \sin \eta_A \Delta \eta_A + \\ & + \operatorname{ctg} a_A \cos \eta_A d\eta_A - \sin \eta_A \frac{1}{\sin^2 a_A} da_A \end{aligned} \quad (25a)$$

bzw. bei Übergang auf endlich kleine Größen und unter Berücksichtigung, daß  $\Delta\eta_A$  in allen Punkten gleich ist:

$$\begin{aligned} \Delta a_A = & - \frac{(\operatorname{ctg} a \cos Z_K + \sin Z_K \cos \eta_A) \sin^2 a_A}{\sin \eta_A} \Delta Z_K + \\ & + \frac{(\operatorname{ctg} a_A \cos \eta_A - \cos Z_K \sin \eta_A) \sin^2 a_A}{\sin \eta_A} \Delta \eta = - e_{a_A} \Delta Z_K - g_{a_A} \Delta \eta. \end{aligned} \quad (26)$$

Der erste Bruch kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$- e_{a_A} = - \frac{(\cos a \cos Z_K + \sin Z_K \sin a \cos \eta_A) \sin^2 a_A}{\sin a \sin \eta_A}. \quad (27)$$

Nachdem der Klammerausdruck nach der sphärischen Trigonometrie  $\cos Z_A = \sin \beta_B$  ist, so kann die Gl. (27) bei Berücksichtigung, daß:

$$\frac{\sin a_A}{\sin a} = \frac{\sin \eta_A}{\cos \beta_A}$$

ist, folgendermaßen geschrieben werden:

$$- e_{a_A} = - \frac{\sin^2 a_A \sin \beta_A}{\sin a \sin \eta_A} = - \sin a_A \operatorname{tg} \beta_A. \quad (27a)$$

Diese Beziehung entspricht bei Berücksichtigung, daß  $\Delta Z_A$  und  $\Delta \beta_A$  absolut genommen gleich groß sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, genau den von SZCZEPANSKI mitgeteilten GRÜBERSchen Koeffizienten [2; S. 114].

Untersuchen wir nun den zweiten Bruch der rechten Seite der Gl. (26), also den Koeffizienten  $-g_{a_A}$  von  $\Delta \eta$ :

$$\begin{aligned} - g_{a_A} &= \frac{(\operatorname{ctg} a_A \cos \eta_A - \cos Z_K \sin \eta_A) \sin^2 a_A}{\sin \eta_A} = \cos a_A \sin a_A \operatorname{ctg} \eta_A - \\ & - \cos Z_K \sin^2 a_A = \cos a_A \sin a_A \operatorname{ctg} \eta_A + \cos Z_K \cos^2 a_A - \cos Z_K = \\ & = \cos a_A (\sin a_A \operatorname{ctg} \eta_A + \cos a_A \cos Z_K) - \cos Z_K. \end{aligned} \quad (28)$$

Weil das erste Glied des Klammerausdruckes nach der sphärischen Trigonometrie  $\operatorname{tg} \beta_A \sin Z_K - \cos Z_K \cos a_K$  ist, kann Gl. (28) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$- g_{a_A} = \operatorname{tg} \beta_A \sin Z_K \cos a_A - \cos Z_K = \operatorname{tg} \beta_A \cos \beta_K \cos a_A - \sin \beta_K. \quad (28a)$$



Mit diesen können wir Gl. (26) folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \Delta a_A &= -\sin a_A \operatorname{tg} \beta_A \Delta Z_K + (\operatorname{tg} \beta_A \sin Z_K \cos a_A - \cos Z_K) \Delta \eta = \\ &= \sin a_A \operatorname{tg} \beta_A \Delta \beta_K - (\operatorname{tg} \beta_A \cos \beta_K \cos a_A - \sin \beta_K) \Delta z. \end{aligned} \quad (26a)$$

Letztere Beziehung entspricht sinngemäß dem von SZCZEPANSKI mitgeteilten GRÜBERSCHEN Werte.

Die am Bilde gemessenen Näherungswinkel  $a'_A, a'_B \dots \beta'_A, \beta'_B \dots$  sind außer den Winkelverbesserungen  $v_{a_A}, v_{a_B} \dots v_{\beta_A}, v_{\beta_B} \dots$  noch mit den nach Gln (24a u. 26a) angegebenen Korrekturen infolge des Fehlers der Kammerachse und des Fehlers des Kantenwinkels zu versehen, damit sie der rechten Seite der Gln (21) u. (22) entsprechen. Wenn wir noch zu den bekannten Näherungskoodinaten  $x', y', z'$  die zu bestimmenden Zuschläge  $\delta x, \delta y, \delta z$  als Unbekannte, und endlich zu dem bekannten Näherungswert  $a'_K$  des Richtungswinkels der Horizontalprojektion der Kammerachse den zu bestimmenden Zuschlag  $\Delta a_K$  einführen, so können Gln (21) u. (22) folgendermaßen angegeben werden:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (\beta'_A + v_{\beta_A} - \Delta \beta_A) &= \frac{z - z_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} = \\ &= \frac{z' + \delta z - z_A}{\sqrt{(x' + \delta x - x_A)^2 + (y' + \delta y - y_A)^2}} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (\beta'_B + v_{\beta_B} - \Delta \beta_B) &= \frac{z - z_B}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}} = \\ &= \frac{z' + \delta z - z_B}{\sqrt{(x' + \delta x - x_B)^2 + (y' + \delta y - y_B)^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdots \\ \operatorname{tg} (a'_K + \Delta a_K + a'_A + v_{a_A} - \Delta a_A) &= \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y' + \delta y - y_A}{x' + \delta x - x_A} \\ \operatorname{tg} (a'_K + \Delta a_K + a'_B + v_{a_B} - \Delta a_B) &= \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y' + \delta y - y_B}{x' + \delta x - x_B} \\ \vdots \end{aligned} \quad (30)$$

In den obigen Gln sind die Vorzeichen von  $\Delta \beta_A \dots$ , und  $\Delta a_A \dots$  deshalb negativ, damit unsere Gln mit der SZCZEPANSKISCHEN verglichen werden können, der nach FISCHER und PULFRICH (vgl. [2]; S. 114) auf Grund der Festlegung, »gemessener Wert minus Korrektur ist gleich dem richtigen aus den endgültigen Koordinaten gerechneten Höhen- bzw. grundrißlichen Richtungswinkel die Korrektur definiert.

Die rechte Seite der Glgen (29) nimmt nach Reihenentwicklung und Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung folgende Form an:

$$\begin{aligned} & \frac{z - z_A}{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}} = \frac{z' - z_A}{\sqrt{(x' - x_A)^2 + (y' - y_A)^2}} - \\ & - \frac{z' - z_A}{(x' - x_A)^2 + (y' - y_A)^2} \cdot \frac{x' - x_A}{\sqrt{(x' - x_A)^2 + (y' - y_A)^2}} \delta x - \\ & - \frac{z' - z_A}{(x' - x_A)^2 + (y' - y_A)^2} \cdot \frac{y' - y_A}{\sqrt{(x' - x_A)^2 + (y' - y_A)^2}} \delta y + \\ & + \frac{1}{\sqrt{(x' - x_A)^2 + (y' - y_A)^2}} \delta z, \end{aligned} \quad (31)$$

während die linke Seite der Gl., falls die Tafeldifferenz bei der Tangente des Winkels  $\beta'_A$  in der trigonometrischen Tabelle mit  $T_{\beta'_A}^{\text{tg}}$  bezeichnet und an Stelle von  $\Delta\beta_A$  der Wert nach Gl. (24) eingeführt wird, folgendermaßen angegeben werden kann:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\beta'_A + v_{\beta_A} - \Delta\beta_A) &= \text{tg} \beta'_A + T_{\beta'_A}^{\text{tg}} v_{\beta_A} - T_{\beta'_A}^{\text{tg}} (\cos a'_A \Delta\beta_K + \\ & + \sin a'_A \cos \beta'_K \Delta\kappa). \end{aligned} \quad (32)$$

Daraus und aus Gl. (31) erhalten wir die Verbesserungsgleichung für die Ausgleichung bei Einführung der Bezeichnung  $\sqrt{(x' - x_A)^2 + (y' - y_A)^2} = s'_A$  wie folgt:

$$\begin{aligned} v_{\beta_A} &= - \frac{z' - z}{T_{\beta'_A}^{\text{tg}} s'^2_A} \cdot \frac{x' - x_A}{s'_A} \delta x - \frac{z' - z_A}{T_{\beta'_A}^{\text{tg}} s'^2_A} \cdot \frac{y' - y_A}{s'_A} \delta y + \\ & + \frac{1}{T_{\beta'_A}^{\text{tg}} s'_A} \delta z + \cos a'_A \Delta\beta_K + \sin a'_A \cos \beta'_K \Delta\kappa + \\ & + \frac{1}{T_{\beta'_A}^{\text{tg}}} \left( \frac{z' - z_A}{s'_A} - \text{tg} \beta'_A \right) \end{aligned} \quad (33)$$

usw. für die weiteren Punkte. In obiger Verbesserungsgleichung, die zur Gruppe der vermittelnden Beobachtungen gehört, sind 5 Unbekannte enthalten. Wenn wir diese mit der von SZCZEPANSKI mitgeteilten GRUBERSCHEN [2; S. 114–115] vergleichen, so ist zunächst keine Übereinstimmung festzustellen. Die Ähnlichkeit wird größer, wenn wir bedenken, daß näherungsweise folgende Beziehungen bestehen:

$$\frac{z' - z_A}{s'_A} \doteq \text{tg} \beta'_A \quad \text{und} \quad T_{\beta'_A}^{\text{tg}} \doteq \frac{1}{\cos^2 \beta'_A},$$

weiter, daß bei uns die Koordinatendifferenzen entgegengesetzt zu SZCZEPANSKI angesetzt werden. Aber an Stelle von  $\frac{x' - x_A}{s'_A}$  können nicht  $\cos a'_A$  bzw. statt  $\frac{y' - y_A}{s'_A}$  nicht  $\sin a'_A$  geschrieben werden, wie bei SZCZEPANSKI, höchstens die Werte  $\cos (a'_K + a'_A)$  bzw.  $\sin (a'_K + a'_A)$ . Bei GRUBER [10; S. 13] fehlt der fragliche letzte Ersatz und es steht bei ihm richtig

$$\frac{x' - x_A}{s'_A} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y' - y_A}{s'_A}$$

Wenn wir das vorher Gesagte berücksichtigen und in Betracht ziehen, daß  $s'_A \doteq l'_A \cos \beta'_A$ , wo  $l'_A = \sqrt{(x' - x_A)^2 + (y' - y_A)^2 + (z' - z_A)^2}$  und  $z' - z = l'_A \sin \beta'_A$  bedeutet, so können die GRUBERSCHEN Verbesserungsgleichungen für die Höhenwinkel einfacher folgendermaßen angegeben werden:

$$v_{\beta_A} = - \frac{(x' - x_A) \operatorname{tg} \beta'_A}{l'^2_A} \delta x - \frac{(y' - y_A) \operatorname{tg} \beta'_A}{l'^2_A} \delta y + \frac{\cos \beta'_A}{l'_A} \delta z + \cos a'_A \Delta \beta_K + \sin a'_A \cos \beta'_K \Delta \kappa + \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z' - z}{s'_A} - \beta'_A \right). \quad (33a)$$

Wir halten aber die vorher angegebenen Umformungen für das Maschinenrechnen weniger geeignet, weil einerseits die Koordinatendifferenzen sofort in die Maschine eingeführt werden können, während die Winkelfunktionen aus trigonometrischen Tabellen entnommen werden müssen, andererseits ist der Ersatz durch die Winkelfunktionen ungenauer und entspricht nach Gl. (29) um so weniger, je größer  $\Delta \beta_A$  ist.

Unsere Gl. (33) unterscheidet sich von der GRUBERSCHEN auch dadurch, daß auch in den reinen Gliedern der Verbesserungsgleichungen nicht unmittelbar die Winkel erscheinen, sondern deren aus der Berechnung sich ergebende Tangenten, so daß man auch diese in trigonometrischen Tabellen nicht rückaufschlagen muß. Die Verwendung der trigonometrischen Tabellen beschränkt sich mithin bei der Verwendung der Glgen (33) auf die Werte  $\sin a'_A$ ,  $\cos a'_A$ ,  $\operatorname{tg} \beta'_A$ , der gemessenen Größen  $a'_A$ ,  $\beta'_A \dots$  und auf  $\cos \beta'_K$  des Näherungswertes der Neigung der Kammerachse. Mit Ausnahme des letzteren können die übrigen Werte auch dann unverändert verwendet werden, wenn infolge der ungenauen Näherungswerte die Ausgleichung mit den verbesserten Werten wiederholt werden muß. Sie ist deshalb für das Rechnen mit der Maschine geeigneter als die ursprüngliche GRUBERSCHE oder die unter Gl.(33a) angegebene, von uns vereinfachte GRUBERSCHE Beziehung.

Wir wollen jetzt die Glgen (30) in Reihe entwickeln und es sollen auch hier Beziehungen hergeleitet werden, die zum Maschinenrechnen geeigneter

sind. Das mit den entsprechenden Indizes versehene  $T$ -Zeichen bedeutet wieder die Tafeldifferenzen.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a'_K + \Delta a_K + a'_A + v_{a_A} - \Delta a_A) &= \operatorname{tg}(a'_K + a'_A) + T_{a_K+a_A}^{\operatorname{tg}} \Delta a_K + \\ &+ T_{a_K+a_A}^{\operatorname{tg}} v_{a_A} - T_{a_K+a_A}^{\operatorname{tg}} \Delta a_A = \frac{y' + \delta y - y_A}{x' + \delta x - x_A} = \frac{y' - y_A}{x' - x_A} - \quad (34) \\ &- \frac{y' - y_A}{(x' - x_A)^2} \delta x + \frac{1}{x' - x_A} \delta y \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Verbesserungsgl. für den horizontalen Winkel bei Ersatz von  $\Delta a_A$  nach Gl. (26a) zu:

$$\begin{aligned} v_{a_A} &= - \frac{(y' - y_A)}{T_{a_K+a_A}^{\operatorname{tg}} (x' - x_A)^2} \delta x + \frac{1}{T_{a_K+a_A}^{\operatorname{tg}} (x' - x_A)} \delta y - \Delta a_K + \\ &+ \sin a' \operatorname{tg} \beta'_A \Delta \beta_K - (\operatorname{tg} \beta'_A \cos \beta'_K \cos a'_A - \sin \beta'_K) \Delta z + \quad (35) \\ &+ \frac{1}{T_{a_K+a_A}^{\operatorname{tg}}} \left( \frac{y' - y_A}{x' - x_A} - \operatorname{tg}(a'_K + a'_A) \right) \end{aligned}$$

Wenn wir die Verbesserungsgl. (35) mit der von SZCZEPANSKI mitgeteilten GRÜBERSchen [2; S. 114] vergleichen, so sind auch hier Abweichungen fest-

zustellen. Wenn an Stelle von  $T_{a_K+a_A}^{\operatorname{tg}}$  der angenäherte Wert  $\frac{1}{\cos^2(a'_K + a'_A)}$  geschrieben wird, so kann der Koeffizient von  $\delta x$  als  $-\frac{\sin(a'_K + a'_A)}{s'_A}$  und jener von  $\delta y$  als  $\frac{\cos(a'_K + a'_A)}{s'_A}$  geschrieben werden, während bei SZCZEPANSKI

$-\frac{\sin a'_A}{s'_A}$  und  $\frac{\cos a'_A}{s'_A}$  erscheinen, welche Formen in der ursprünglichen GRÜBER-

schen Arbeit [10; S. 13] gleichfalls fehlen. Die entgegengesetzten Vorzeichen von  $\delta x$  und  $\delta y$  sind durch die entgegengesetzte Annahme der Koordinatendifferenzen bedingt. Auch hier gilt die im Zusammenhang mit der Gl. (33) gemachte Feststellung, daß Gl. (35) für das Maschinenrechnen sich besser eignet als die GRÜBERSche. In dem reinen Gliede der Verbesserungsgleichungen erscheinen auch hier nicht die eigens rückaufzuschlagenden Winkel, sondern deren aus der Berechnung erhaltene Funktionen.

Im Sinne der vorstehenden Untersuchungen können für die gemessenen Höhenwinkel die Glgen (33), für die gemessenen Horizontalwinkel die Glgen (35) vorteilhaft zur Ausgleichung verwendet werden. Aus je drei solchen Glgen kann man die Werte  $\Delta a_K$ ,  $\Delta \beta_K$  und  $\Delta z$  eliminieren, wodurch man zu den Glgen (20) entsprechenden Beziehungen gelangen muß. Doch sind zur Ausgleichung

die Glgen (32) u. (35) zweckmäßiger. Letztere Glgen können zur Berechnung der Unbekannten auch bei Nichtvorhandensein von überschüssigen Beobachtungen angewendet werden (in welchem Falle auf der linken Seite die  $v$  Verbesserungen durch Null ersetzt werden), doch ist die Berechnung des einfachen räumlichen Rückwärtseinschnittes mit Hilfe der Positionswinkel einfacher, weshalb in diesem Falle auch aus den Höhen- und Horizontalwinkeln nach Glgen (18) oder anderswie zunächst diese zu berechnen wären.

\*

Wir wollen der Vollständigkeit halber darauf hinweisen, daß die Vermittlungs- und Verbesserungsgleichungen nicht nur in der Form der Glgen (21) u. (22), bzw. (33) u. (35) angeschrieben werden können, sondern auch mit Hilfe der übrigen Winkelfunktionen. Die von GRUBER verwendete Tangensbeziehung ist deshalb nicht unbedingt die beste, da die Tangente bei  $90^\circ$  unendlich wird und sich die Tafeldifferenzen in deren Nähe rapid ändern, obwohl bei angenähert lotrechter Kammerachse die Winkel  $\beta$  allgemein nahe bei  $90^\circ$  liegen. Von diesem Standpunkt aus können schon die Kotangensbeziehungen besser sein, obwohl die sich auf die Horizontalwinkel beziehende Gl. (22) auch in diesem Falle unendliche Werte liefern kann und zwar für Punkte, deren  $x$  Abszissen mit jener des Punktes  $P$  gleich sind. In dieser Beziehung können die Sinus- und Kosinus-Beziehungen besser sein.

Es ist also möglich, die Vermittlungsgleichungen auch wie folgt anzuschreiben:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\beta'_A + v_{\beta_A} - \Delta\beta_A) &= \frac{\sqrt{(x' + \delta x - x_A)^2 + (y' + \delta y - y_A)^2}}{z' + \delta z - z_A} \\ \vdots \\ \operatorname{ctg}(a'_K + \Delta a_K + a'_A + v_{a_A} - \Delta a_A) &= \frac{x' + \delta x - x_A}{y' + \delta y - y_A} \\ \vdots \end{aligned} \tag{36}$$

oder:

$$\begin{aligned} \sin(\beta'_A + v_{\beta_A} - \Delta\beta_A) &= \frac{z' + \delta z - z_A}{\sqrt{(x' + \delta x - x_A)^2 + (y' + \delta y - y_A)^2 + (z' + \delta z - z_A)^2}} \\ \vdots \\ \sin(a'_K + \Delta a_K + a'_A + v_{a_A} - \Delta a_A) &= \frac{y' + \delta y - y_A}{\sqrt{(x' + \delta x - x_A)^2 + (y' + \delta y - y_A)^2}} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \sin(a'_K + \Delta a_K + a'_A + v_{a_A} - \Delta a_A) &= \frac{y' + \delta y - y_A}{\sqrt{(x' + \delta x - x_A)^2 + (y' + \delta y - y_A)^2}} \\ \vdots \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \cos(\beta'_A + v_{\beta_A} - \Delta\beta_A) &= \frac{\sqrt{(x' + \delta x - x_A)^2 + (y' + \delta y - y_A)^2}}{\sqrt{(x' + \delta x - x_A)^2 + (y' + \delta y - y_A)^2 + (z' + \delta z - z_A)^2}} \\ \vdots \\ \cos(a'_K + \Delta a_K + a'_A + v_{a_A} - \Delta a_A) &= \frac{x' + \delta x - x_A}{\sqrt{(x' + \delta x - x_A)^2 + (y' + \delta y - y_A)^2}} \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \cos(a'_K + \Delta a_K + a'_A + v_{a_A} - \Delta a_A) &= \frac{x' + \delta x - x_A}{\sqrt{(x' + \delta x - x_A)^2 + (y' + \delta y - y_A)^2}} \end{aligned}$$

Die eben angeführten Gln können dann in der bereits angegebenen Form (vgl. bei Gln 33 u. 35) in bezug auf die Unbekannte linear gemacht werden. Es steht nichts im Wege, daß für die Horizontal- und Höhenwinkel nicht die gleiche Art der Winkelfunktion verwendet wird, falls dadurch die Funktionen für die Berechnung günstiger werden. Die Entwicklung der ersten der Gln (36) führt z. B. zur folgenden Verbesserungsgleichung:

$$v_{\beta_A} = \frac{x' - x}{T_{\beta_A}^{\text{ctg}} s'_A (z' - z)} \delta x + \frac{y' - y}{T_{\beta_A}^{\text{ctg}} s'_A (z' - z_A)} \delta y - \frac{s'_A}{T_{\beta_A}^{\text{ctg}} (z' - z_A)^2} \delta z + \\ + \cos \alpha'_A \Delta \beta_K + \sin \alpha'_A \text{ctg} \beta'_A \Delta z + \frac{1}{T_{\beta_A}^{\text{ctg}}} \left( \frac{s'_A}{z' - z_A} - \text{ctg} \beta'_A \right). \quad (39)$$

Es sei hier bemerkt, daß die Kotangensfunktion im ersten Quadranten sich um die Vergrößerung von  $\beta_A$  verkleinert und deshalb  $T_{\beta_A}^{\text{ctg}}$  in der Regel einen negativen Wert annimmt.

Die Entscheidung, wann die im Wege der einzelnen Winkelfunktionen angeschriebenen Vermittlungsgleichungen am günstigsten sind, überschreitet den Rahmen dieser Abhandlung. Diese Frage soll noch später eigens untersucht werden, wobei wir als die günstigere Form jene ansehen, mit der die gesuchten Größen genauer berechnet werden können. Die Entscheidung ist nicht so einfach wie die Bestimmung der günstigsten Form der Bedingungsgleichung in einem Viereck mit gemessenen Winkeln nach dem Satz von Zachariae, weil hier die Genauigkeit nicht nur durch die Abrundung der letzten Zahl, sondern auch durch die Güte der angenommenen Näherungswerte beeinflusst wird.

#### SCHRIFTTUM

1. Beiträge zur Lösung des räumlichen Rückwärtseinschneidens. Allg. Vermessungsnachr. 1928. S. 729—739 u. 746—753.
2. SZCZEPANSKI: Die Lösungsvorschläge für den räumlichen Rückwärtseinschnitt. München, 1958. Verlag der Bayer. Akademie der Wissenschaften.
3. GOTTHARDT: Genauigkeitsfragen beim räumlichen Rückwärtseinschnitt und bei der Doppelpunkteinschaltung im Raume. Zeitschrift f. Vermessungswesen 1942. S. 257—274.
4. HUGERSHOFF u. CRANZ: Grundlagen der Photogrammetrie aus Luftfahrzeugen. Stuttgart 1919, Verlag Konrad Wittwer.
5. OLTAY: Geodézia. Bd. III. 2. Aufl. 1941. Verlag Németh József.
6. Eine streng richtige neue Ausgleichsmethode des mehrfachen räumlichen Rückwärtseinschneidens. Mitt. d. berg- u. hüttenm. Abt. zu Sopron, 1929, S. 87—122.
7. FINSTERWALDER u. SCHAUFEL: Das Rückwärtseinschneiden im Raume. Sitzungsberichte d. math. phys. Klasse d. bayr. Akad. d. Wissensch. 1903. S. 591 u. ff.
8. JORDAN—EGGERT: Handbuch der Vermessungskunde Bd. I. Stuttgart, 1948. Metzlersche Verlagsbuchhandlung.
9. HALLERT: Photogrammetry. New York—Toronto—London. 1959. McGraw-Hill Book Company.
10. GRUBER: Einfache und Doppelpunkteinschaltung im Raume. Jena, 1923. Verlag Fischer.

## ZUSAMMENFASSUNG

Da die analytische Photogrammetrie immer mehr an Bedeutung gewinnt, untersucht der Verfasser in Anlehnung an SZCZEPANSKI's wertvolles Buch »Die Lösungsvorschläge für den räumlichen Rückwärtseinschnitt« noch weitere zeitgemäße Lösungsmöglichkeiten, zumal zu diesen rechnermäßigen Verfahren die teureren fotogrammetrischen Geräte nicht erforderlich werden, und sie daher auch in dieser Zeit produktiv weiterarbeiten können.

In der vorliegenden Abhandlung wird zunächst im Teil A das Positionswinkelverfahren untersucht, und bei der Lösung in drei Phasen für die Berechnung der Kantenlängen in Gl. 3—5, für die Berechnung der Standortkoordinaten in Gl. 6—11b werden Methoden angegeben, die bei weitgehender Ausschaltung der Winkelfunktionen zur Berechnung mit der Rechenmaschine besser geeignet sind. Zur Bestimmung der Neigung und des Richtungswinkels der Kammerachse sowie zur Ermittlung der Kantung sind in Gl. 12—12b strenge Beziehungen angegeben worden, die einfacher sind als jene von LIEBITZKY.

Auch für die Verknüpfung der ersten beiden Phasen ist in Anlehnung an HUGERSHOFF ein Verfahren angegeben worden, in dem die Unterschiede in den Positionswinkeln und nicht die in den Seiten zwischen den gegebenen Festpunkten ermittelt werden.

Bei der strengen Ausgleichung mit den Positionswinkeln sind in den Gl. 16 die reinen Glieder nicht mit Hilfe der zurückzuschlagenden Winkel, sondern mit Hilfe der aus der Berechnung erhaltenen Winkelfunktionen selbst ausgedrückt. Es wurde auch bewiesen, daß bei der Aufstellung der Verbesserungsgleichungen für die in allen Kombinationen gemessenen Positionswinkel noch bisher nicht berücksichtigte Bedingungsgleichungen von der Bauart der Gl. 14 entstehen. Um diese zu vermeiden, ist es besser, zwei gut identifizierbare Festpunkte auszusuchen und jeden weiteren Festpunkt mit den Positionswinkeln nur mit diesen beiden Festpunkten zu verbinden. Dann liefert ein jeder weitere Punkt ebenso nur zwei weitere Verbesserungsgleichungen wie bei der Methode mit den horizontalen und vertikalen Winkeln.

Im Teil B werden Beiträge zur Lösung des räumlichen Rückwärtseinschnittes mit Hilfe von den mit dem Bildmeßtheodolit gemessenen horizontalen und vertikalen Winkeln gegeben.

Es wird zunächst der Zusammenhang zwischen den Lösungen nach der Positionswinkelmethode und der Methode mit horizontalen und vertikalen Winkeln angegeben: Werden die Positionswinkel mit Hilfe der letzteren und so auch die Verbesserungen der Positionswinkel mit Hilfe der Verbesserungen der letzteren ausgedrückt, so entstehen die Gl. 20, deren Lösung aber meist unbequem ist. Die Positionswinkelmethode hat also in erster Linie beim einfachen Rückwärtseinschnitt Bedeutung, bzw. bei überschüssigen Beobachtungen zur Berechnung der Näherungswerte. Die Ausgleichung selbst erfolgt am besten unmittelbar mit horizontalen und Höhenwinkeln.

Bei der unmittelbaren Lösung mit Hilfe der horizontalen und Höhenwinkel werden die entsprechenden GRUBERSCHEN Gl. auf anderem Wege hergeleitet und in einer für das Maschinenrechnen geeigneteren Form ausgedrückt, wobei die reinen Glieder der Gleichungen nicht durch die Winkel selbst, sondern deren unmittelbar erhaltene Winkelfunktionen ausgedrückt sind (Gl. 33 u. 35).

Es wird zum Schluß darauf hingewiesen, daß an Stelle der Tangensbeziehung auch andere Winkelfunktionen zur Aufstellung der Vermittlungsgleichungen herangezogen werden können. Welche in gegebenen Fällen die günstigere ist, soll in einer späteren Studie untersucht werden.

ON THE SOLUTION OF THE PROBLEM  
OF SPATIAL THREE-POINT RESECTION

A. TÁRCZY-HORNOCH

## SUMMARY

Since the importance of analytical photogrammetry increases ever more, the author sees fit to tackle—in attachment to SZCZEPANSKI's valuable book "Die Lösungsvorschläge für den räumlichen Rückwärtseinschnitt" (Suggestions for spatial three-point resection)—further problems at hand with particular regard to numerical proceedings for which there is no need of the expansive photogrammetric apparatus which thus become free for further work during this time.

Part A of this study deals with the angular position method and presents for the case of the three-phase solution, for the computation of edge length in equations 3 to 5, and for

the computation of the station co-ordinates in equations 6 to 11/b, methods more suitable for calculations with computers excluding trigonometric functions to a considerable degree. Equations 12 to 12b, are rigorous relations, simpler than those of LIEBITZKY, which determine the tilt and directional angle of the axis as well as the angle of swing of the image.

To connect the first two stages of computation, the author presents a method after HUGERSHOFF where differences in position angles rather than differences in the sides between given base points serve as the basis for computations.

In the case of exact adjustment by means of position angles, the absolute terms in equations 16 are expressed rather than by angles to be determined from their trigonometric functions, by the trigonometric functions themselves, obtained in the course of computation. It is proved that in setting up correction equations in case position angles are measured in all combinations there arise condition equations of the structure of equation 14 which have been, so far, disregarded. In order to avoid these equations of condition it is advisable to seek out two well-identifiable base points and to connect all further ones by means of position angles only with these two. In this case, each further point yields two further correction equations only, just as with the method with horizontal and vertical angles.

Part B discusses contributions to the solution of the problem of spatial three-point resection by means of horizontal and vertical angles, as measured with the image-measuring theodolite.

First the relation between the position angle method and the horizontal-and-vertical angle method is established. If the position angles and their corrections are to be expressed by horizontal and vertical angles as well as by their corrections, equations 20 are formed; their solution is, however, inconvenient in most cases. The method of position angles is thus of importance chiefly in simple spatial resection, *i. e.* in case there are surplus measurements, for computing the approximate values. Adjustment itself is better performed directly by means of horizontal and vertical angles.

In case of direct computation with horizontal and vertical angles, the pertinent GRUBER equations are derived in a different fashion and expressed in a form more suitable for mechanical computation; the absolute terms of the equations are not expressed with the angles themselves, but with the trigonometric functions directly obtained (equations 33 to 35).

In summary it is pointed out that for establishing intermediary equations, other trigonometric functions than the tangent may be used. As to which of these functions will be more favorable in given cases, this shall be the problem of a later study.

## SUR LA SOLUTION DU RECOUPEMENT SPATIAL

A. TÁRCZY-HORNOCH

### RÉSUMÉ

La photogrammétrie analytique prenant une importance toujours plus grande l'auteur étudie de nouvelles possibilités de solution à propos du précieux ouvrage de SZCZEPANSKI, intitulé: «Die Lösungsvorschläge für den räumlichen Rückwärtseinschnitt». Les procédés numériques présentent surtout l'intérêt de dispenser de l'emploi d'instruments photogramétriques onéreux, ce qui permet naturellement une utilisation plus productive de ces derniers.

La partie A de l'étude examine le procédé à angles de position. Pour le calcul des longueurs d'arêtes (ég. 3 à 5) et pour le calcul des coordonnées du lieu des prises de vues (ég. 6/a 11/b), l'auteur présente, dans la solution en trois phases, des méthodes se prêtant mieux au calcul avec les machines à calculer, grâce à une élimination considérable des fonctions angulaires. Pour déterminer l'inclinaison et la direction de l'axe de chambre, ainsi que l'orientation du cliché de l'image dans son plan, on dispose, dans les ég. 12 à 12/b, de relations exactes plus simples que celles de LIEBITZKY.

En vue de réunir les deux premières phases du calcul, l'auteur présente, suivant HUGERSHOFF une méthode où les écarts des angles de position et ceux des points de terrain servent de base au calcul.

En cas de compensation exacte à l'aide des angles de position on utilise, pour exprimer les termes absolus de l'équation 16, les fonctions angulaires obtenues au cours du calcul, au lieu des angles à chercher dans la table trigonométrique. On démontre qu'à l'établissement des équations de correction, il se produit aussi des équations de condition correspondant à la structure de l'équation 14, qui n'ont pas encore été considérées au cas des angles de position



mesurés dans toutes les combinaisons. Pour les éviter, il est préférable de chercher deux points de terrain identifiables sans difficulté, chaque nouveau point de terrain n'étant réuni à l'aide des angles de position, qu'avec ces deux points de terrain donnés. Dans ce cas chaque nouveau point de terrain ne donnera que deux nouvelles équations de correction, comme avec la méthode des angles horizontaux et verticaux.

La partie B donne un complément au problème du recouplement spatial par des angles horizontaux et verticaux mesurés au moyen d'un photogoniomètre.

Cette partie examine d'abord la relation entre la méthode à angles de position et celle à angles horizontaux et verticaux: si les angles de position et leurs corrections sont exprimées par des angles horizontaux et verticaux ainsi que par leurs corrections on aura les équations 20, dont la solution est peu commode. La méthode à angles de position importe donc surtout en cas du recouplement spatial simple, c'est-à-dire dans le cas de mesures en surplus, au calcul des valeurs approchées nécessaires pour la compensation. Celle-ci s'effectue le mieux directement à l'aide des angles horizontaux et verticaux.

En cas d'une solution directe par des angles horizontaux et verticaux les formules correspondantes de GRUBER sont déduites par une voie différente et exprimées sous une forme qui convient mieux au calcul mécanique: les termes absolus des équations sont exprimés non par les angles eux-mêmes, mais par les fonctions angulaires directement obtenues (éq. 33 à 35).

L'auteur fait remarquer enfin qu'au lieu de la relation tangentielle d'autres fonctions angulaires peuvent également servir à l'établissement des équations de correction. Le choix de la fonction convenant le mieux à un cas donné, fera l'objet d'une étude ultérieure.

## О РЕШЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАСЕЧКИ

А. ТАРЦИ-ГОРНОХ

### РЕЗЮМЕ

Вследствие того, что значение фотограмметрии возрастает все сильнее, автор, примыкая к ценной книге Сцепанского «Предложения по решению пространственной обратной засечки», исследует дополнительные возможности решения, особенно потому, что для числового метода не требуется дорогих фотограмметрических инструментов и поэтому эти инструменты и в течение этого времени можно использовать продуктивно.

В настоящей работе в части А) исследуется позиционный угловой метод и даются для случая трехфазного решения вычисления сторон уравнениями 3)–5), а для вычисления координат места съемок уравнениями 6)–11б) такие методы, которые при исключении угловых функций лучше подходят для работы на счетных машинах. Для определения наклона и угла ориентации оси камеры, а также угла поворота изображения в уравнениях 12)–12б) фигурируют строгие зависимости, которые проще зависимостей Либичского.

Для объединения первых двух фаз вычислений, примыкая к Гугерсгоффу, приводится такой метод, который как основу вычислений использует отклонения позиционных углов и отклонения длин между данными земными точками.

При уравнивании с помощью позиционных углов свободные члены уравнения 16.) здесь выражаются не с помощью устанавливаемых углов, а с помощью угловых функций, полученных в процессе вычислений. Показано, что при выводе поправочных уравнений образуются также уравнения условий, соответствующие структуре уравнения 14.) и до сих пор еще не учтенных в случае измеренных при каждой комбинации позиционных углов. Чтобы избежать этого, целесообразнее выбрать две хорошо идентифицируемые земные точки и все дальнейшие земные точки при помощи позиционных углов соединять только с этими двумя земными точками. В этом случае каждая дальнейшая земная точка дает также только два поправочных уравнения, как и при методе горизонтальных и вертикальных углов.

В части Б) рассматривается дополнение пространственной обратной засечки при помощи горизонтальных и вертикальных углов, измеренных фотограмметрическим теодолитом.

Сначала рассматривается связь между методом с позиционными углами и методом с горизонтальными и вертикальными углами.

Если позиционные углы и их поправки выразить горизонтальными и вертикальными углами, а также их поправками, тогда получаются уравнения 20.), решение которых

наталкивается на затруднения. Следовательно, метод с позиционными углами имеет значение, в первую очередь, при простой пространственной обратной засечке и, соответственно, в случае избыточного числа измерений — при вычислении приближенных значений, необходимых для уравнивания. Само уравнивание лучше всего производить непосредственно с помощью самих горизонтальных и вертикальных углов.

При прямом методе с помощью горизонтальных и вертикальных углов соответствующие формулы Грубера выводятся другим путем и выражаются в форме, более подходящей для обработки данных на счетной машине, и в этом случае свободные члены уравнений выражаются не через углы, а непосредственно полученными угловыми функциями. (Уравнения 33—35.)

Наконец, указывается, что вместо тангенциальной зависимости для составления уравнений можно использовать и другие угловые функции. Которые из них являются наиболее подходящими — этот вопрос будет рассмотрен в публикуемой позднее работе.

# THE CONNECTION BETWEEN THE ECCENTRICITY OF THE GEOMAGNETIC FIELD AND THE TRIAXIALITY OF THE EARTH\*

G. BARTA  
D. ENG. SC.

HUNGARIAN STATE GEOPHYSICAL INSTITUTE "ROLAND EÖTVÖS", BUDAPEST

[Manuscript received February 6, 1961]

## Premises

In the course of previous investigations, well-defined general features of the secular variation of the terrestrial magnetic field had been established. Notably, an oscillation having a period of about 50 years could be demonstrated in the secular variation of magnetic components of observatories in the temperate zone [2, 5, 22].

When representing and studying the phenomenon in a coordinate system whose orientation depends on the adjusted secular variation itself we can state that the rate of the secular variation exhibits simultaneous increases and decreases on the whole globe, at a period of about 50 years [5].

The orthogonal projections of the vector diagrams representing the secular variation of the total intensity on planes passing through the Earth's center, reveal that the phenomenon has a symmetry-center about Pakistan. On a suitably chosen projection plane the configuration shows a convergence of the vectors representing the secular variation towards the center of projection, except those lying on the periphery which, on the contrary, are radiating outwards [3].

In the papers referred to in the foregoing we already suggested the idea that the well known wandering of the magnetic center may be in connection with the symmetry-center around Pakistan. In these considerations the eccentric site and the shifting of the magnetic center has played an outstanding role; it is therefore of utmost importance that these phenomena be subjected to a thorough investigation.

A rather characteristic feature of the eccentricity is — among others — that in large parts of the Pacific the horizontal intensity is by about 10 000 gammas higher than in the antipodal regions of the Atlantic. The distribution of the magnetic inclination over the Earth's surface also suggests an eccentricity. All these and other deformities of the magnetic field — suggesting the eccentricity of the magnetic center — are well beyond the observational accuracy of magnetic measurements of to-day.

\* Lecture held at the international symposium of the Association of Hungarian Geophysicists in September 1959.

Taking into account the data obtained in various epochs a rather regular shifting of the magnetic center can be established. Since the times of GAUSS, that is, in more than a hundred years it has been moving towards WNW at a rate of  $0,2^\circ$  a year and its eccentricity increased from 300 to 400 kms. The changes of the eccentricity can be steadily traced throughout the epochs and their existence and properties are confirmed by a great number of data systems. Therefore, the eccentricity itself must be regarded as a firmly established physical fact, well founded on a great number of observational data. This being as it is we are led to the conclusion that there must exist also an eccentricity of mass in the interior of the Earth.

The rather high rate of the wandering of the magnetic center indicates that the eccentricity cannot be directly connected with the distribution of the continents over the Earth, nor can it be linked with the crustal and mantle structure, either. As a matter of fact, these great units of the Earth's structure do not undergo any significant changes rapid enough to be held responsible for variations of such short periods — short at least in the geohistorical sense — as the magnetic secular changes. The origin of the effect must therefore be looked for somewhere below the crust and mantle, that is in the core. The periods of the variations are rather long as compared with the rotation and revolution periods of the Earth: a fact pointing to a process of great inertia. Therefore, we might suppose an eccentricity and a slow shifting of huge masses in great depth, in the inner core of the Earth.

#### **The connection between the figure of the Earth and the eccentricity of the magnetic field**

In this connection one can conceive the idea that such a great eccentricity of so large masses could influence also the figure and gravity field of the Earth to a measurable extent. Indeed, the triaxiality of the Earth — that is the ellipticity of the equator — can be attributed to an internal mass-distribution of similar eccentricity, and it is rather remarkable that the direction of the magnetic eccentricity agrees — within the limits of measuring accuracy — with the major axis of the equator of the triaxial Earth.

At first sight, the magnetic eccentricity of 300—400 kms seems to be too large for a real mass-eccentricity of such size to exist in the Earth's interior. Nevertheless, we made some calculations in order to estimate the effect of such an eccentricity upon the changes of the level surfaces of gravity and of the values of the gravity acceleration on the Earth's surface. As a result of these calculations we obtained values for the difference of the equatorial major and minor axes and for the inequalities of the gravity force that agree well with the observed values.

The calculations were carried out as follows: Let us suppose that there are two masses  $M$  and  $m$  at distances  $l_2$  and  $l_1$ , resp. from their common centre of gravity, that is,  $m \cdot l_1 = M \cdot l_2$ . The center of gravity will be chosen as the origin of coordinates. Let us assume that a point  $P$  of a (variable) distance

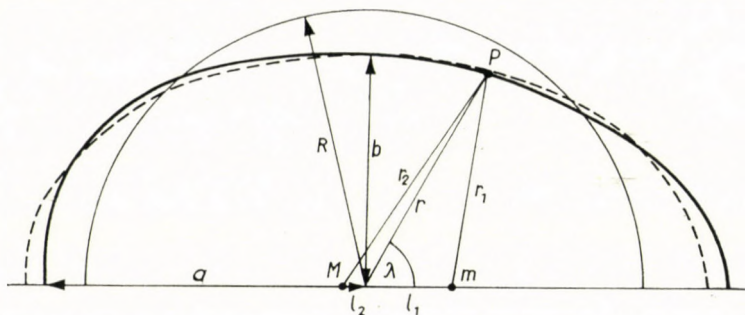


Fig. 1

$r$  from the center has a distance  $r_1$  from  $m$  and  $r_2$  from  $M$ . As it can be seen from Fig. 1, the potential of the joint attraction of the two masses in the point  $P$  will be:

$$V_1 + V_2 = V = f \frac{m}{r \sqrt{1 - \frac{2l_1}{r} \cos \lambda + \frac{l_1^2}{r^2}}} +$$

$$+ f \frac{M}{r \sqrt{1 + \frac{2l_2}{r} \cos \lambda + \frac{l_2^2}{r^2}}}$$

$\lambda$  being the geographical longitude (in the plane of the equator).

Applying the expansion

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \dots$$

we get:

$$V_1 = f \frac{m}{r} \left[ 1 + \frac{l_1}{r} \cos \lambda - \frac{l_1^3}{2r^2} + \frac{3}{8} \left( \frac{4l_1^2}{r^2} \cos^2 \lambda - \frac{4l_1^3}{r^3} \cos \lambda + \frac{l_1^4}{r^4} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{16} \left( \frac{2l_1}{r} \cos \lambda - \frac{l_1^2}{r^2} \right)^3 + \dots \right]$$

$$V_2 = f \frac{M}{r} \left[ 1 - \frac{l_2}{r} \cos \lambda - \frac{l_2^3}{2r^2} + \frac{3}{8} \left( \frac{4l_2^2}{r^2} \cos^2 \lambda + \frac{4l_2^3}{r^3} \cos \lambda + \frac{l_2^4}{r^4} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{5}{16} \left( \frac{2l_2}{r} \cos \lambda + \frac{l_2^2}{r^2} \right)^3 + \dots \right]$$

Arresting the expansion at the term  $l_1^3/r^3$  and taking into account the relation  $m \cdot l_1 = M \cdot l_2$ , we obtain the following formula:

$$V = f \frac{m + M}{r} \left[ 1 + \frac{m}{M} \frac{l_1^2}{2r^2} (3 \cos^2 \lambda - 1) + \right. \\ \left. + \frac{m(M - m)}{M^2} \frac{l_1^3}{2r^3} \cos \lambda (5 \cos^2 \lambda - 3) + \dots \right] \quad (1)$$

From this expression, the acceleration is obtained by simple differentiation:

$$g = -f \frac{m + M}{r^2} \left[ 1 + \frac{3ml_1^2}{2Mr^2} (3 \cos^2 \lambda - 1) + \right. \\ \left. + \frac{2m(M - m)l_1^3}{M^2 r^3} \cos \lambda (5 \cos^2 \lambda - 3) + \dots \right] \quad (2)$$

The outer core of the Earth possesses an average density of 11 g/cm<sup>3</sup>. Let within this outer core be a spherical inner core of 1250 km radius and of about 17 g/cm<sup>3</sup> density, supposed to be in an eccentric position. The mass of this inner core exceeds by  $0,05 \cdot 10^{27}$  g that of the outer core, that is, by the density difference of the two domains times the volume of the inner core. Let this excess mass be our mass  $m$ , which is in an eccentric position. Apart of this excess mass the Earth can be considered as a globe consisting of spherical shells every one of which is homogeneous in itself, and it can take the role of the mass  $M$ , equalling  $5,95 \cdot 10^{27}$  g. Let the point  $P$  be on the equator: let  $R$  be the radius of the Earth (as approximated by a sphere) and  $l_1 = 300$  km (the supposed eccentricity of the core); substituting these values into the formulas (1) and (2) and letting  $\lambda$  vary by steps of 10 degrees we get the potential of an Earth with eccentric internal mass distribution and the distribution of the gravity acceleration itself on the equator of the globe of radius  $R$ .

Table I lists the deviations of the level surface  $V = f \frac{M+m}{R}$  of the Earth having an eccentric inner core against a spherical Earth. (The  $r - R$  values were calculated on the assumption that  $r$  varies inversely as the potential.) The table also gives the differences in gravity acceleration as calculated with and without eccentricity. The gravity differences calculated for a sphere of the radius  $R$  have to be further reduced to the line of intersection of the equatorial plane of the sphere with the equipotential surface; the distance  $r$  of this line from the center varies from point to point. This reduction was performed by the formula:  $0,3086 (r - R)$ . It is seen that a gravity excess of 15 to 20 mgal in the direction of the major axis is to be expected on the level surface, whilst in the perpendicular direction the assumed eccentricity should result in a gravity defect of about 9 mgals.

Table I

Changes of the equipotential surface and of the gravity acceleration along the equator in case of an eccentricity of 300 kms of the inner core of the Earth

	$r-R$	$g_r - f \frac{M+m}{R^2}$	$g$ reduced to the level surface	$\Delta g$ on the level surface	Deviation from the symm. shape
0°	+123,9 m	+58,6 mgal	-38,2	+20,4 mgal	+5,5 m
10	+118,1	+55,8	-36,4	+19,4	+5,1
20	+101,2	+47,8	-31,2	+16,6	+3,8
30	+ 75,6	+35,6	-23,3	+12,3	+1,8
40	+ 44,6	+20,9	-13,8	+ 7,1	-0,1
50	+ 12,2	+ 5,6	- 3,8	+ 1,8	-1,6
60	- 17,7	- 8,3	+ 5,5	- 2,8	-2,5
70	- 41,2	-19,2	+12,7	- 6,5	-2,3
80	- 55,8	-25,9	+17,2	- 8,7	-1,4
90	- 59,7	-27,5	+18,4	- 9,1	0,0
100	- 53,0	-24,1	+16,4	- 7,7	+1,4
110	- 36,6	-16,4	+11,3	- 5,1	+2,3
120	- 12,8	- 5,3	+ 4,0	- 1,3	+2,4
130	+ 15,5	+ 7,7	- 4,8	+ 2,9	+1,7
140	+ 44,8	+21,1	-13,8	+ 7,3	+0,1
150	+ 72,1	+33,4	-22,3	+11,1	-1,7
160	+ 93,9	+43,2	-29,0	+14,2	-3,7
170	+108,0	+49,5	-33,3	+16,2	-5,0
180	+112,8	+51,7	-34,8	+16,9	-5,5

As it is shown in the table, the equator is not symmetrical with respect to the axis  $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$ , being more obtuse in the direction of the mass  $M$ , and more elongated in the direction of the mass  $m$ , than an ellipse would be (Fig. 1, dashed line). The deviation is rather small, not more than  $\pm 5,5$  m. Therefore, we will go on treating the equator as an ellipse, its major axis being the average of the two values  $r_0$  and  $r_{\pi}$ , its minor axis the radius  $r_{\pi/2}$ . Hence the difference of the major and minor axes will be:

$$a - b = \frac{r_0 + r_{\pi}}{2} - r_{\pi/2} = R + 118,3 - (R - 59,7) = 178 \text{ m}$$

In summary we can conclude that the eccentricity of 300 km of the inner core of the Earth deforms the equator into an ellipse and produces a difference of about 180 m between the major and minor axes. It is also shown in the table that the gravity acceleration is higher by 29,5 mgals at that end of the major axis of the equator which points towards the mass  $m$  than at the ends of the minor axis. Eliminating the asymmetry of the shape of the equator with respect to the minor axis, we can state that gravity is higher by 27,8 mgals at the ends of the major axis than at the ends of the minor one.

The coefficients of the development of the magnetic potential in spherical harmonics characterising the current state of the Earth's magnetism are available for several epochs from 1550 onwards. These furnish the direction as well as the amount of the eccentricity. Thus we are able to derive for all these epochs the direction of the equatorial major axis, the length difference of these axes, and gravity difference between their ends by carrying out similar calculations as above. To smooth out the asymmetry already dealt with we

Table II

*Spherical coordinates ( $l_1$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ ) of the eccentric magnetic dipole, the corresponding ellipticity constants of the equator ( $\lambda_0$ ,  $a-b$ ) and differences of gravity at the ends of the axes ( $g_a-g_b$ )*

No of the Figure 2	Author of the spherical harmonic expansion	Epoch	$l_1$ km	$\varphi$	$\lambda$	$\lambda_0$	$a-b$	$g_a-g_b$
I.	FRITSCHÉ	1550	242	+ 2,9°	220,4 E	40,4 E	116 m	18 mgal
II.		1600	220	+ 4,1	210,0 E	30,0 E	96	15
III.		1650	224	+ 5,2	205,6 E	25,6 E	99	15
IV.		1700	224	+ 6,0	193,5 E	13,5 E	99	15
V.		1780	246	+ 4,1	180,7 E	0,7 E	120	19
—		1842	273	— 3,7	180,2 E	0,2 E	148	23
—		1885	304	+ 2,3	168,4 E	11,6 W	183	29
VI.		1900	318	+ 4,2	164,8 E	15,2 W	200	31
VII.	ERMAN-PETERSEN	1829	251	— 1,6	181,7 E	1,7 E	125	19
VIII.	GAUSS	1835	289	—13,4	188,3 E	8,3 E	165	26
IX.	ADAMS	1845	285	— 4,9	181,2 E	1,2 E	161	25
—	CARLHEIM-GYLLENSKÖLD	1860	272	— 5,5	187,0 E	7,0 E	146	23
X.	SCHMIDT	1885	289	+ 6,2	167,7 E	12,3 W	165	26
XI.	DYSON—FURNER	1922	363	+ 9,7	161,3 E	18,7 W	261	41
XII.	VESTINE-LANGE	1945	396	+14,4	154,1 E	25,9 W	310	48
XIII.	AFANASIEVA	1945	388	+14,8	156,4 E	23,6 W	298	46
XIV.	CHAKRABARTY	1945	411	+13,9	153,9 E	26,1 W	334	52
XV.	FINCH—LEATON	1955	436	+16,3	150,2 E	29,8 W	376	59



have taken for the length of the major axis and for the values of gravity at the ends of it the arithmetical mean of the values for  $\lambda = 0^\circ$  and  $\lambda = 180^\circ$ . Table II contains the data used and the quantities obtained in the course of the calculations.

In Table III all the data concerning the triaxiality of the Earth, as available from the middle of the past century on, are given [26]. Data contained in the two tables II and III are represented together on Fig. 2. (Some of the magnetic data belonging to the same epoch or partly overlapping have been

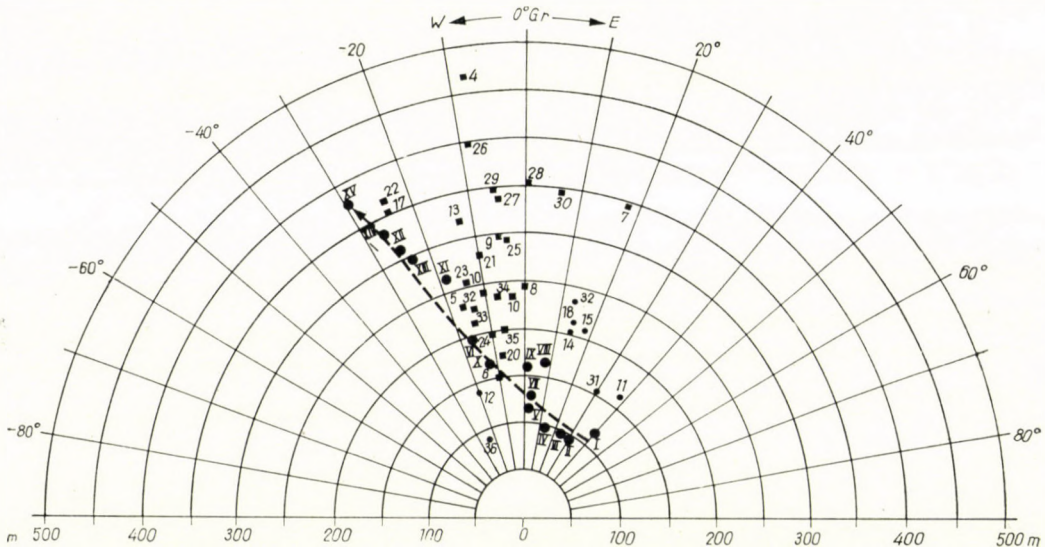


Fig. 2. The difference between the major and minor axis of the equatorial ellipse, and the direction of its major axis as determined by geodetic and gravity data (small circles and squares) as well as calculated from the magnetic eccentricity (larger circles). The arrow (dashed line) indicates the trend of change of the equatorial ellipse as calculated on the basis of magnetic data, from 1550 up to 1955

omitted.) The representation shows not only the coincidence of the direction of the magnetic eccentricity with the major axis of the elliptic equator of the Earth, but a good agreement between the eccentricity of the ellipse and the corresponding data obtained from geodetic and gravity measurements as well. It is seen on the graph that the equatorial ellipse calculated by means of the magnetic data has become more elongated during the past century, and its major axis shifted to the west, in conformity with the wandering of the magnetic center.

At the same time, the gravity field responsible for the figure of the Earth shows itself an equatorial deformation similar to the triaxiality of the Earth. The  $g_0 - g_{\pi/2}$  values, calculated by the  $g$  formulas given by various authors, — where  $g_0 = g(\varphi = 0, \lambda = \lambda_0)$  and  $g_{\pi/2} = g\left(\varphi = 0, \lambda = \lambda_0 + \frac{\pi}{2}\right)$  —

Table III

Direction of the major axis of the equatorial ellipse ( $\lambda_0$ , taken as positive E of Greenwich) and the difference between the major and minor axes ( $a-b$ ) as calculated on the basis of geodetical and magnetic data

Serial number	Name of author	Year	From geodetical data		From gravity data	
			$\lambda_0$	$a-b$	$\lambda_0$	$a-b$
1	SCHUBERT	1859	+41°	718 m		
2	CLARKE	1860	+14	1618		
3	CLARKE	1866	+16	1944		
4	CLARKE	1878	- 8	465		
5	HELMERT	1915			+17° ± 6	230 m ± 51
6	BERROTH	1916			-10	150 ± 58
7	HEISKANEN	1924			+18 ± 5	345 ± 38
8	HEISKANEN	1928			0 ± 5	242 ± 38
9	HEISKANEN	1928			- 5	294 ± 75
10	HEISKANEN	1928			- 3	230 ± 42
11	HEISKANEN	1929	+38 ± 10	165 ± 57		
12	HIRVONEN	1934			-19 ± 3	139 ± 16
13	HIRVONEN	1934			-13 ± 18	320 ± 200
14	KRASSOWSKI	1936	+15	200		
15	KRASSOWSKI	1936	+18	204		
16	KASANSKI	1937			+ 8	
17	HEISKANEN	1938			-25 ± 2	352 ± 30
18	KRASSOWSKI	1940	+15 ± 2,4	212 ± 16		
19	LUOMA	1941			-11	237
20	LUOMA	1941			- 7 ± 4	172 ± 62
21	LUOMA	1941			-10 ± 1	278 ± 45
22	K. JUNG	1943			-25 ± 7	366 ± 77
23	K. JUNG	1943			-14 ± 8	258 ± 66
24	K. JUNG	1943			-10,3	197,2
25	NISKANEN	1945			- 3,9	293
26	NISKANEN	1945			- 9,4	392
27	NISKANEN	1945			- 5,3	333
28	NISKANEN	1945			+ 0,8	350
29	NISKANEN	1945			- 6,0	295
30	NISKANEN	1945			- 6,1	293
31	KRASSOWSKI	1950	+29,5 ± 5,4	156 ± 29		
32	ISOTOW	1950	+14,3 ± 2,4	228 ± 19		
33	"	1950	+15	213		
34	ZSONGOLOVICS	1952			- 7 ± 6	233 ± 47
35	"	1952			- 6 ± 6	199 ± 47
36	TANNI	1948-54			-23 ± 1	86 ± 6

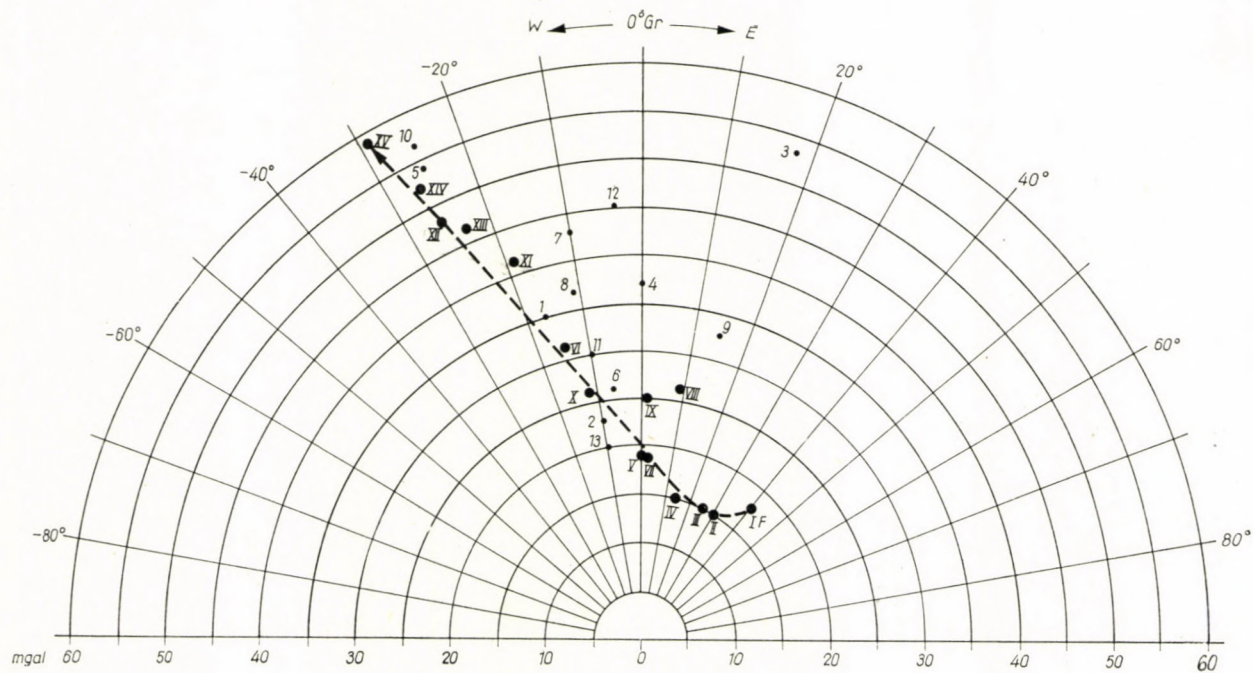


Fig. 3. Variation of the gravity acceleration along the equator, calculated from gravity measurements (small dots) and from magnetic eccentricity (large dots). The arrow indicates the trend of change of the gravity acceleration along the equator as calculated on the basis of magnetic data from 1550 up to 1955

are given in Table IV. The data of Tables II and IV are represented in Fig. 3. The tables and the figure indicate a good agreement in direction and amount of gravity differences as calculated from the magnetic eccentricity data and from gravity measurements, as it was pointed out by I. HAÁZ.\*

From all this we can draw the conclusion that both the eccentricity of the magnetic field evident in the plane of the equator and the equatorial ellipticity of the triaxial Earth can be explained by the mass eccentricity of the inner core. Thus, our idea of a causal relation between the permanent magnetic field of the Earth and the masses of its inner core seems to be well founded; at the same time our results as expounded above show that the gravity center of this inner core is eccentric in conformity with the magnetic center. Therefore, the secular variation of the Earth's magnetism can be explained indeed by an internal mass movement, *i. e.* by the continuous shifting of the inner core of the Earth.

### Ways of demonstrating the changes of eccentricity

#### *Secular changes of the gravity acceleration*

In the foregoing we have based the conclusion that the magnetic secular variation is connected with a certain shifting of the eccentric core on an investigation of the magnetic variations in their relation to the level surfaces of the Earth. It is obvious that the movement of the eccentric core of the Earth must manifest itself also in other phenomena on the Earth's surface. So the characteristics of the secular magnetic variation — this being connected with a large-scale mass movement — are to appear also in the long-term changes of the angular velocity of the Earth as well as in the secular oscillations of the equipotential level (Fig. 4). Indeed, the 50 years' period of the magnetic secular variation can be established in the variation of the angular velocity of the

\* Recently the ellipticity of the equator was computed on the basis of the perturbations of the motion of the Vanguard II and Vanguard III satellites. (IMRE G. IZSÁK: A determination of the ellipticity of the Earth's Equator from the motion of two satellites. Smithsonian Institution Astrophysical Observatory. Special Report No. 56. 1961. I. 30.)

According to this determination, at about the middle of 1960 the following values have been valid:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -33,15^\circ \pm 0,53^\circ \\ a-b &= 205 \pm 18 \text{ m.}\end{aligned}$$

These values are in better agreement with those computed from the magnetic eccentricity, than the geodetical and gravitational data obtained before. The orbit of an artificial satellite is influenced by the integrated effect of the Earth's mass; therefore, data obtained from its computation must be more accurate, than the gravitational or geodetical data founded on local measurements. Besides, the values obtained from the orbit of the satellites does not contain the secular change of the Earth's figure resulting from the shifting of the core either. Thus the investigation of the orbits of artificial satellites furnishes new and independent data for the support of the theory explained above.

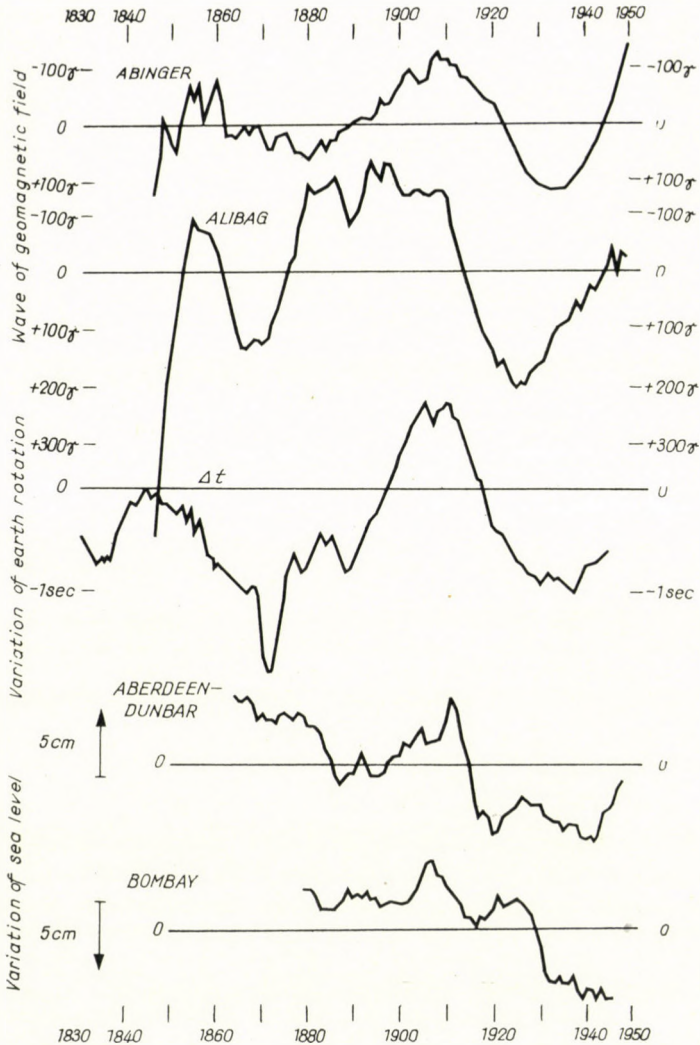


Fig. 4. The 50 years' period of the secular variation of the magnetic field, of the angular velocity of the Earth and of the sea level

Earth and also in the sea-level oscillations shown by the series of some mareographic stations of very long record [4, 6].

A large-scale mass movement, however, does not only alter the equipotential surfaces but also the intensity of the gravity field. Unfortunately, absolute gravity measurements or pendulum observations are not suited to establish a secular variation of the field; on the contrary, the accuracy of gravimeters is well known. It is therefore to be expected that the shifting of the inner core of the Earth could be demonstrated most simply by gravimeter measurements.

Table IV

*Deviations of the gravity acceleration along the equator according to various authors*

$$\left( g_0 = g(\varphi=0, \lambda=\lambda_0); \quad g_{\pi/2} = g(\varphi=0, \lambda=\lambda_0 + \frac{\pi}{2}) \right)$$

			$g_0 - g_{\pi/2}$	$\lambda_0$
1	HEMERT .....	1915	35 mgal	-17°
2	BERROTH .....	1916	23 "	-10
3	HEISKANEN .....	1924	53 "	+18
4	" .....	1928	37 "	0
5	" .....	1938	54 "	-25
6	LUOMA .....	1941	26 "	- 7
7	" .....	1941	43 "	-10
8	" .....	1941	36 "	-11
9	KRASSOWSKI .....	1942	32 "	+15
10	K. JUNG, according to Zhuraviev's data from 1940 .....	1943	56 "	-25
11	K. JUNG, according to Luoma's data from 1941 ..	1943	30 "	-10
12	NISKANEN .....	1945	45 "	- 4
13	K. JUNG, according to Tanni's data from 1948 ...	1955	20 "	-10

Table I shows that the gravity values on the equipotential surface exhibit rather great differences along the equator. The equipotential surface used in the calculations can well be identified with the sea level; thus we can eliminate relatively well the influence of local crustal movements. *So we are led to propose the establishment of a gravimetric network in the plane of the supposed core-movement, along the equator.* The equator is well suited to such measurements owing to the approximate constancy of the normal gravity value along it. If we choose the stations suitably, there will be rather small gravity differences between any two of them (of the order of 10 mgal), thus allowing to make full use of the measuring accuracy of modern gravimeters. In order to increase the accuracy and to ensure the exact repetition one has to set up permanent calibrating base-lines at about 3—4 points along the measuring profile.

When repeating — after the elapse of some time — the survey along this profile of suitably chosen and fixed measuring points we will be in a position to establish the change of the (relative)  $g$ -values due to the shifting of the eccentric core. To demonstrate the effect of the shifting we have prepared Table V, using the data contained in the column headed  $\Delta g$  of Table I. It is seen from the table that if the inner core of the Earth moves by 10° without altering its distance from the center, then in the series of the gravity

Table V

Changes of the gravity acceleration along the equator to be expected in case of a 10-degree shifting of the inner core of 300 km eccentricity (secular change of about 50 years)

Column I and IV: The effect of the eccentric core at the beginning of the period

Column II and V: The effect after the shifting of 10 degrees

Column III and VI: The change of the gravity acceleration due to the 10-degree shifting of core

	I	II	III		IV	V	VI
0°	+20,4	+19,4	+1,0 mgal	180°	+16,9	+16,2	+0,7 mgal
10	+19,4	+16,6	+2,8	190	+16,2	+14,2	+2,0
20	+16,6	+12,3	+4,3	200	+14,2	+11,1	+3,1
30	+12,3	+ 7,1	+5,2	210	+11,1	+ 7,3	+3,8
40	+ 7,1	+ 1,8	+5,3	220	+ 7,3	+ 2,9	+4,4
50	+ 1,8	- 2,8	+4,6	230	+ 2,9	- 1,3	+4,2
60	- 2,8	- 6,5	+3,7	240	- 1,3	- 5,1	+3,8
70	- 6,5	- 8,7	+2,2	250	- 5,1	- 7,7	+2,6
80	- 8,7	- 9,1	+0,4	260	- 7,7	- 9,1	+1,4
90	- 9,1	- 7,7	-1,4	270	- 9,1	- 8,7	-0,4
100	- 7,7	- 5,1	-2,6	280	- 8,7	- 6,5	-2,2
110	- 5,1	- 1,3	-3,8	290	- 6,5	- 2,8	-3,7
120	- 1,3	+ 2,9	-4,2	300	- 2,8	+ 1,8	-4,6
130	+ 2,9	+ 7,3	-4,4	310	+ 1,8	- 7,1	-5,3
140	+ 7,3	+11,1	-3,8	320	+ 7,1	+12,3	-5,2
150	+11,1	+14,2	-3,1	330	+12,3	+16,6	-4,3
160	+14,2	+16,2	-2,0	340	+16,6	+19,4	-2,8
170	+16,2	+16,9	-0,7	350	+19,4	+20,4	-1,0
180	+16,9	+16,2	+0,7	360	+20,4	+19,4	+1,0

changes a double wave of about  $\pm 5$  mgals appears. A turning of the inner core by such an amount occurs in 50 years, according to the magnetic measurements, *i. e.* in 10 years an amplitude equalling  $\pm 1$  mgal is to be expected to appear in the differential series of the data systems of two consecutive surveys. This amount is well beyond the error of measurement.

Of course, the surveys can be carried out along a different parallel, too, where there are more continental areas. In this case, too, the accuracy of the gravimeters can be used to the best advantage; still, there is the disadvantage that the effect to be expected is somewhat less than on the equator. It would

be best to carry out the measurements both on the equator and over several parallels in both hemispheres.

Surveys along meridians would be of interest, too. In that case, however, the advantage of the high relative accuracy of gravimeters is lost, because when determining the constants of the wide range gravimeters we must make use of pendulum measurements which are of a much lower accuracy. Between the equator and the poles there is a gravity difference of about 5000 mgals and a measurement of this difference with an accuracy of 0,01 mgal is impossible at present, owing to the instrumental conditions of today. Nevertheless, if we repeat the measurements using a number of instruments, the accuracy can be increased and the supposed temporal-variation of the gravity field can be detected along these circles, too.

Another way — and what is more, a direct one — of establishing the core-eccentricity would be an evaluation of seismic waves passing through the inner core. However, there is the difficulty that the rather weak waves which traversed the inner core are suppressed by the main wave of the earthquake on the seismic records, thus making the determination of their times of arrival very difficult.

### **The causal connection of the phenomena and further perspectives of research**

The periods pointing to the existence of a mass movement in the Earth's core are not sufficiently clear to indicate beyond doubt the nature of the common cause of these phenomena. In the first place it is open to question whether all the apparent periodicities could be retraced to the same first cause; then there is the question whether the motivating force resides inside or outside the Earth.

As regards the oscillations in the angular velocity of the Earth, and in the movement of the poles as well as in the fluctuations of the sea level one can suppose an outside control (perhaps meteorological or ocean-current influences). Concerning the magnetic secular variation, however, it can be proved, that its cause must be looked for in the interior of the Earth, and the deformation of the figure of the Earth must be brought about also by an endogenic force.

The uncertainty contained in the idea of the identity and causal connection of the periodicities is indicated in the statical picture by the differences of the data concerning triaxiality. As a matter of fact we cannot judge whether the supposed correspondences are random coincidences or not. The basic problem of a choice between causes inside or outside the Earth is represented in the static picture by the fact, that at the moment we are not able to decide



— as based directly on gravimetric measurements — whether the ellipticity is brought about by a near-surface anomaly of mass distribution or by an eccentricity of the inner core. In this point, a dynamic model can be of help. We must namely conclude — taking into account the coherence of the discussed phenomena, as regards their appearance in space and time and their order of magnitude — that the correspondence between the static and dynamic models is not accidental, but that there is moreover a causal connection, too. This being so, the static picture must leave open a possibility for changes as postulated by the supposition of an inner core of changing position.

The movement of the eccentric inner mass as related to the surface might be attributed to the gravity effect of the celestial bodies, too. The Sun and Moon exert, namely, an influence upon a mass, eccentric with respect to the axis of rotation, that is similar to the tide forces. This is indicated also by the fact that the magnetic center has moved in the direction of the apparent motion of the celestial bodies. The next step in this respect would be an examination of the energy balance of these phenomena and the finding out of the cause of the eccentricity. The solution of these problems would be a significant step towards revealing the physical causes of a whole series of natural phenomena.

It is to be hoped that with the improvement of data systems and with the realisation of the proposed gravitational and seismological investigations the correctness of the so far hypothetical theory will eventually be proved and the limits of its validity established.

I am much indebted to I. HAÁZ, who read the manuscript, for his helpful criticism and valuable suggestions, and to my co-workers A. ALBERT, D. Sc. and Mrs. F. KURALI for having carried out the laborious calculations.

#### REFERENCES

1. Association d'Océanographie Physique. Monthly and annual mean heights of sea level up to and including the year 1936, 1937 to 1946, 1947 to 1951. Publication scientifique 5—10—12.
2. BARTA, G.: On the 44 years' period of the secular variation of the terrestrial magnetic field. (In Hungarian, with English and Russian summaries.) *Geofizikai Közlemények* III., 1. 1954.
3. BARTA, G.: On the secular variation of the geomagnetic field. (In Hungarian with English summary.) *Geofizikai Közlemények* VI., 1—2. 1957.
4. BARTA, G.: On the variations of gravity. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae. Sectio Geologica. Tomus I.*, 1957.
5. BARTA, G.: Longitudinal and transversal effect of the secular variation of the geomagnetic field. (In Hungarian, with English summary.) *Geofizikai Közlemények* VII., 1. 1958.
6. BARTA, G.: On the secular variation of the level surface of gravity. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae. Sectio Geologica. Tomus II.* 1959.
7. BARTA, G.: Wandering of the magnetic poles and of the magnetic center of the Earth in time. (In Hungarian with German summary.) *Geofizikai Közlemények* VIII., 1—2. 1959.

8. BOCK, R.—SCHUMANN, W.: Katalog der Jahresmittel der magnetischen Elemente der Observatorien und der Stationen, an denen eine Zeitlang erdmagnetische Beobachtungen stattfanden. Berlin, 1948.
9. BROUWER, D.: A new discussion of the changes in the Earth's rate of rotation. Proc. of the National Acad. Sci., 1952.
10. BULLARD, E. C.: The westward drift of the earth's magnetic field. Philosoph. Transact. Roy. Soc. London Ser. A., 243, 1950.
11. ELSASSER, W. M.: The Earth's interior and geomagnetism. Rev. of Mod. Physics 22, 1, 1950.
12. FISK, H. W.: The unsymmetrical distribution of Magnetic Secular Variation. Terr. Magn. 37. Vol. 3. No. 1932.
13. FRITSCHÉ, H.: Die Elemente des Erdmagnetismus und ihre säkularen Änderungen während des Zeitraumes 1550, bis 1915. St. Petersburg, 1900.
14. JUNG, K.: Figur der Erde. Handbuch der Physik. Band XLVII. Geophysik I. Berlin, 1956.
15. LABROUSTE, A.—MME LABROUSTE, Y.: Composantes périodiques de la variation des latitudes. Annales de Géophysique, 2, 1945.
16. LOWES, F. J.—RUNCORN, S. K.: The analysis of the geomagnetic secular variation. Philosoph. Transact. Roy. Soc. London Ser. A, 243, 1951.
17. LUCKE, O.: Analyse der Veränderungen des erdmagnetischen Hauptfeldes, aus den Potentialentwicklungen erschlossen. Geomagn. und Aeronomie. Band III. Berlin, 1959.
18. LUCKE, O.: Über den physikalischen Zustand der Materie im Erdinneren und den Ursprung des geomagnetischen Hauptfeldes. Geomagn. und Aeronomie. Band III. Berlin, 1959.
19. MAUERSBERGER, P.: Beobachtungsergebnisse über das Hauptfeld und die Säkularvariation. Geomagn. und Aeronomie. Band III. Berlin, 1959.
20. MAUERSBERGER, P.: Mathematische Beschreibung und statistische Untersuchung des Hauptfeldes und der Säkularvariation. Geomagn. und Aeronomie. Band III. Berlin, 1959.
21. McNISH, A. G.: The apparent effect of magnetic activity upon the secular variation of the Earth's magnetic field. Transact. Amer. Geophys. Union 14<sup>th</sup> annual meeting, 1933.
22. SLAUCITAJŠ, L.: Some notes on secular variation. Centr. of Baltic University, 6. Pinneberg, 1948.
23. SPENCER—JONES, H.: The Rotation of the Earth. Handbuch der Physik. Band XLVII. Geophysik I. Berlin, 1956.
24. STRASSER, G.: Ellipsoidische Parameter der Erdfigur. Deutsche Geodätische Kommission, München, 1957.
25. VESTINE, E. H.: On variations of the magnetic field, fluid motions, and the rate of the Earth's rotation. Journal of Geophysical Research, 58, 1953.
26. WOLF, H.: Das von L. Tanni bestimmte Geoid und die Frage der Elliptizität des Erdäquators. Deutsche Geodätische Kommission. Frankfurt am Main, 1956.

#### SUMMARY

If the well known eccentricity of the geomagnetic centre is supposed to be due to an eccentricity of the inner core of the Earth, this mass-eccentricity must be also responsible for the equatorial asymmetry of the Earth figure and of the gravitational field, as known from geodesy.

The magnetic centre of the Earth is shifting continuously; hence, it is to be expected that the gravity field as well as the figure of the Earth and its angular velocity likewise are subjected to a secular variation.

The author carried out calculations concerning the change of the gravity acceleration on the Earth's surface, as caused by a displacement of the inner core. As the order of magnitude of the effects to be expected exceeds the limit of error of modern gravimeters, a series of relative gravity measurements around the equator is proposed to prove or disprove the existence of these mass movements.

DER ZUSAMMENHANG DER EXZENTRIZITÄT DES ERDMAGNETISCHEN FELDES  
MIT DER DREIACHSIGKEIT DER ERDE

G. BARTA

## ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser stellt fest, daß falls die bekannte Exzentrizität des erdmagnetischen Zentrums als eine Exzentrizität des inneren Erdkernes gedeutet wird, so dürfte diese Massen-Asymmetrie auch für die aus der Geodäsie bekannte äquatorielle Asymmetrie der Erdfigur und des Gravitationsfeldes verantwortlich sein.

Das magnetische Zentrum der Erde ist in fortwährender Bewegung; man könnte daher annehmen, daß sowohl das Gravitationsfeld, wie die Figur der Erde und ihre Rotationsgeschwindigkeit säkuläre Variationen aufweisen.

Es wird die Abschätzung der Schwereänderungen mitgeteilt, die durch die Verschiebungen des inneren Erdkernes hervorgerufen werden können. Da die Größenordnung der Änderungen die Fehlergrenzen moderner Gravimeter übertrifft, werden relative Gravitationsmessungen entlang des Äquators zur Feststellung der in Rede stehenden Massenbewegungen vorgeschlagen.

CORRÉLATION ENTRE L'EXCENTRICITÉ DU CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE  
ET LA TRIAXIALITÉ DU GLOBE

G. BARTA

## RÉSUMÉ

L'auteur constate qu'en prenant l'excentricité connue du centre magnétique égale à celle du noyau interne on peut conclure que cette asymétrie des masses est responsable de l'asymétrie équatoriale de la forme de la Terre et du champ gravimétrique bien connue de la géodésie.

Les observations magnétiques montrant que le centre magnétique du globe se déplace continuellement, on peut supposer, que le champ de gravitation, la forme et la vitesse de rotation de la Terre présentent aussi des variations séculaires.

Les calculs de l'auteur mettent en évidence que l'ordre de grandeur des variations de gravitation produites par les déplacements du noyau interne, surpasse la limite de précision des gravimètres modernes. En raison de cette circonstance, l'auteur propose l'établissement d'un réseau de postes d'observation gravimétriques autour de l'équateur, servant à démontrer les déplacements des masses terrestres.

СВЯЗЬ ЭКСЦЕНТРИЧНОСТИ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ТРЕХОСНОСТЬЮ  
ЗЕМЛИ

Д. БАРТА

## РЕЗЮМЕ

В статье излагается заключение автора о том, что в случае, если известную эксцентricность магнитного центра считать тождественной с эксцентricностью внутреннего ядра Земли, то этой эксцентricностью масс обуславливается искаженность фигуры Земли и поля силы тяжести по экватору, известная по данным геодезии.

Как показывают магнитометрические исследования, магнитный центр Земли постоянно перемещается, в связи с чем можно предполагать, что как для поля силы тяжести, так и для фигуры Земли и скорости вращения ее характерны вековые вариации.

Автором выполнены вычисления по определению размера изменений гравитационного ускорения на поверхности Земли, вызываемых смещением внутреннего ядра. Поскольку величина таких изменений превосходит чувствительность существующих гравиметров, для выявления упомянутых смещений масс автором предлагается проводить вдоль экватора гравиметрические исследования по изучению относительных изменений значений силы тяжести.



**BERICHT DES OBSERVATORIUMS  
BEI NAGYCENK (UNGARN)  
ÜBER DIE ERGEBNISSE  
DER ERDSTROMREGISTRIERUNGEN  
IM JAHRE 1959**

A. TÁRCZY-HORNOCH

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Wie in unserem Bericht über die beiden Halbjahre 1958 (*Acta Technica, Series Geodaetica et Geophysica, Tomus 2, S. 337—422*) werden auch jetzt sieben Arten von Tabellen veröffentlicht. Sie enthalten:

I. Die auf die allgemeine Tätigkeit bezüglichen Kennzahlen  $K_t$  in Zeitabschnitten von je drei Stunden, sowie die für die tägliche Tätigkeit der einzelnen Frequenzklassen charakteristischen Kennzahlen  $K_1 - K_5$ .

Die  $K_t$ -Skala ist linear; 1,8 mV/km entspricht einem Grad. Die  $K_1 - K_5$  Skalen sind die folgenden:

K Frequenzklasse	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. zwischen 0 und 2 Minuten	—	0,2	0,4	0,7	1,3	1,8	2,3	2,9	4,1	5,4
2. „ 2 „ 6 „	—	0,9	1,3	1,8	2,3	2,9	3,4	4,1	5,6	9,0
3. „ 6 „ 12 „	—	1,6	2,2	2,5	3,2	3,8	4,5	5,6	8,3	12,0
4. „ 12 „ 24 „	—	3,4	4,3	5,4	7,0	8,5	10,1	12,4	15,1	20,2
5. „ 24 „ 60 „	—	2,9	4,3	6,7	8,8	11,0	13,1	19,1	23,4	33,9

Alle diese Werte sind genau so, wie in 1958, in  $10^{-4}$  V/km Einheiten angegeben. Die in Klammern gesetzten Werte sind aus unvollständigem Beobachtungsmaterial extrapolierte Werte: An Stelle der nicht beobachteten Stunden wurden die Mittel der beobachteten Stunden gesetzt.

II. Die Ergebnisse der Ermittlung der  $D$ ,  $Q$ ,  $q$ -Tage, wobei die Tage mit den Extremwerten von  $(K_{t(0)} + K_{t(N)})$  angegeben wurden.

III. Die Monats- und Jahreswerte für die einzelnen Stunden in *Lokalzeit*. Auch die Jahresdurchschnittswerte für die durchschnittlichen, gestörten und ruhigen Tage werden angegeben.

Die horizontalen Reihen 1—5 enthalten die Durchschnittsamplituden der fünf Frequenzklassen in  $10^{-5}$  V/km.

Die Reihe 6 enthält die durchschnittlichen Feldintensitäten in  $10^{-5}$  V/km. Die Feldintensität ist auf die langperiodische Variation korrigiert.

Die Reihe 7 gibt die Totalvariationen und deren Summen an.

Die Reihen 8—13 enthalten die prozentuellen Häufigkeiten der in den entsprechenden Stunden vorherrschenden Frequenzklassen (8—12) bzw. der stürmischen Stunden (13) während des Monates. Als gestörte Tage gelten bei uns jene, an denen  $K_t$  höchstens einmal einen Minimalwert 3 erreicht. Als ruhige Tage betrachten wir jene Tage, bei denen  $K_t$  ständig unter 3 bleibt. An gestörten Tagen ist die herrschende Frequenz nur in Prozenten zu den sturmfreien Stunden ausgedrückt. Der prozentuelle Anteil der Stürme wurde im Vergleich zu den sturmfreien Stunden angegeben.

IV. Die Richtungen ( $\varphi$ ) der dreistündlichen mittleren Amplituden. Wenn die mittleren Amplituden in einem beliebigen dreistündigen Intervall in der Nord-Komponente  $a_N$ , in der Ost-Komponente  $a_o$  sind, dann ist diese Richtung  $\varphi$  durch die Beziehung:

$$\varphi = \text{arc tg } \frac{a_o}{a_N}$$

gegeben, wobei die Nord-Richtung  $0^\circ$ , die Ost-Richtung  $90^\circ$  ist.

V. Die Ergebnisse der harmonischen Analysen der aus je einem Monat gerechneten durchschnittlichen täglichen Feldstärkengänge. Die harmonische Analyse der mittleren Amplituden wurde in diesem Bericht, als entbehrlich, weggelassen.

VI. Die Zusammenstellung a) der Zeitpunkte in LZ und b) der Kennwerte der Störungen nach der auf Seite 231 verzeichneten Systematik.

VII. Ergebnisse der schnellen Registrierungen, und zwar:

Die horizontalen Reihen 1—4 enthalten die durchschnittliche Anzahl der Variationen (Amplituden) pro Stunde in den Intervallen

1.	zwischen 0	und	0,1 mV/km	(soll mit $a_1$ bezeichnet werden)
2.	„ 0,1	„	1	„ „ „ $a_2$ „ „
3.	„ 1	„	2	„ „ „ $a_3$ „ „
4.	„ 2	„ größer als	2	„ „ „ $a_4$ „ „

Die Reihe 5 gibt die Summe  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  an.

Die Reihen 6 bis 10 enthalten die hundertfachen Durchschnittskennzahlen der Frequenzklassen 1a ( $0''-8''$ ), 1b ( $8''-15''$ ), 1c ( $15''-30''$ ), 1d ( $30''-1'$ ), 1e ( $1'-2'$ ), wobei als Kennzahlen folgende Werte benützt wurden: 0 bedeutet keine, 1 spurweise, 2 gut wahrnehmbare, 3 herrschende Tätigkeit in der betreffenden Frequenzklasse.

Die Reihe 11 gibt die nach der Formel

$$A = \frac{0,1a_1 + 0,5a_2 + 1,5a_3 + 3a_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}$$

berechnete Durchschnittsamplitude  $A$  in  $10^{-6}$  V/km an.

Systematik der Störungen

- |                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| I. Stürme                       | VI. 1,5 Wellen                 |
| II. Kleinere Störungen ohne Bai | VII. Zwei Wellen               |
| III. Kleinere Störung mit Bai   | VIII. Regelmässige Variationen |
| IV. Bai ohne Störung            | IX. Kurze Pulsationen          |
| V. Starker Einzelimpuls         | X. Nadeln                      |

I.	A: von 0—2 <sup>h</sup> Dauer B: „ 2—6 <sup>h</sup> „ C: „ 6— „	Richtung des Anfangsimpulses in den Gruppen I—VIII und X	
II.	In den Gruppen II—VII u. X werden folgende Verhältnisse der zwei Komponenten angegeben	N O a + + b + - c - + d - - e + 0 f - 0 g 0 + h 0 -	
III. 1. Teil (Puls.)	$\alpha$ (N = 0,9—1,1 · 0) $\beta$ (N = 0,7—0,9 · 0) $\gamma$ (N = 0,4—0,7 · 0) $\delta$ (N < 0,4 · 0)		In den Gruppen III—2. Teil bis VIII sind die Phasensituationen folgend dargestellt A (O geht vor um 90°) B ( „ „ „ 45°) C ( „ „ „ 15°) D ( „ „ „ 0°) E (O geht nach um 15°) F ( „ „ „ 45°) G ( „ „ „ 90°)
2. Teil (Bai)	$\varepsilon$ (N = 0) $\zeta$ (N = 1,1—1,5 · 0) $\eta$ (N = 1,5—2,5 · 0) $\theta$ (N > 2,5 · 0) $\iota$ (O = 0)		
IV.			
V.			
VI.			
VII.			
VIII.	$\beta$ (Periode von 2— 6 Min) $\gamma$ ( „ „ „ 6—12 „ ) $\delta$ ( „ „ „ 12—24 „ )		
IX.			
X.			

Dauer in Zehntelstunden

\*

Die Tabellen wurden von JÓZSEF VERŐ jun. zusammengestellt. Die Ergebnisse werden von nun an nicht für halbe Jahre, sondern für das ganze Jahr in einem veröffentlicht.

Die Registrierungen im Observatorium wurden mit zwei Registriereinrichtungen Typ GMG T9/1956 durchgeführt. Die Einrichtungen wurden für den Bedarf des Observatoriumsbetriebes entsprechend umgebaut. Eine ausführliche Beschreibung der Instrumente befindet sich in der Arbeit von A. ÁDÁM und J. VERŐ »Das Erdstrom-Observatorium bei Nagycekn (Ungarn)« Geofisica pura e applicata Bd. 39 (1958/I.), S. 126—151.





ANHANG

Tabellen und Abbildungen



## I.

Die Kennzahlen  $K_t$  und  $K_1-K_5$ 

Jan. 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	00111101	5	0	1	3	2	0
2.	10124121	12	5	2	3	3	1
3.	13116121	16	3	1	3	3	2
4.	01125322	16	2	2	3	6	2
5.	31145368	31	2	1	3	4	7
6.	55253465	35	2	3	6	6	6
7.	43231154	23	3	1	4	2	5
8.	51132157	25	2	2	3	4	6
9.	72236997	45	3	2	3	3	7
10.	95557497	51	3	4	7	6	9
11.	61223123	20	2	1	4	3	6
12.	61114535	26	1	1	4	3	6
13.	21222232	16	2	1	3	3	3
14.	11641212	18	2	2	3	3	4
15.	12122101	10	2	1	3	2	3
16.	10076544	27	3	4	6	5	6
17.	24444532	28	5	4	5	7	6
18.	14366653	34	6	3	5	4	7
19.	22254231	21	7	3	4	4	5
20.	11213223	15	4	3	3	3	3
21.	10112111	8	4	1	3	3	2
22.	12332221	16	4	4	5	3	4
23.	63257322	30	5	5	3	4	7
24.	31321122	15	4	4	3	3	2
25.	21169997	44	5	3	4	6	8
26.	14279721	33	2	2	3	4	6
27.	02385121	22	2	2	7	4	5
28.	42122123	17	3	2	4	2	4
29.	21336436	28	4	3	4	7	6
30.	43254131	23	3	1	5	4	6
31.	13332121	16	3	1	3	4	4

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  2,508  
 $K(O)$  2,415  
 $K(1)$  3,16  
 $K(2)$  2,26  
 $K(3)$  4,03  
 $K(4)$  3,87  
 $K(5)$  4,77

Febr. 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	12224521	19	3	2	4	4	4
2.	12346332	24	1	2	2	3	6
3.	52234324	25	3	3	3	5	6
4.	644	(37)	3	0	3	8	7
5.	445743	(36)	3	4	4	5	8
6.	32355443	29	2	2	3	6	6
7.	23 441	(22)	1	1	5	3	6
8.							
9.	64335211	25	3	2	3	4	6
10.	21111103	10	3	2	3	0	3
11.	25299944	44	3	2	6	6	6
12.	83596542	42	3	4	6	6	7
13.	43245785	38	4	3	3	6	6
14.	22359932	35	3	4	4	8	6
15.	36754651	37	5	5	5	3	7
16.	57969999	63	4	3	6	6	9
17.	95241110	23	0	1	4	1	6
18.	10122210	9	0	0	2	1	1
19.	24214222	19	0	0	4	4	3
20.	10143100	10	0	0	4	2	2
21.	11233211	14	2	1	3	1	3
22.	43448431	31	3	3	5	3	4
23.	52334000	17	2	1	3	3	3
24.	00222111	9	2	0	3	0	3
25.	49999976	62	2	8	7	6	7
26.	45898856	53	3	3	7	7	6
27.	12356573	32	3	2	4	6	5
28.	44568569	47	4	3	7	6	8

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  3,451  
 $K(O)$  2,776  
 $K(1)$  2,41  
 $K(2)$  2,26  
 $K(3)$  4,19  
 $K(4)$  4,19  
 $K(5)$  5,34

## März 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	97466948	53	6	3	5	5	9
2.	44494549	43	3	3	4	7	8
3.	33344447	32	3	3	4	4	7
4.	43235252	26	3	2	3	4	6
5.	21233234	20	3	1	3	2	6
6.	21222110	11	1	1	3	3	2
7.	10122112	10	1	0	4	2	3
8.	56121100	16	2	1	3	3	3
9.	11111110	7	3	0	2	1	2
10.	00141111	9	1	0	3	1	2
11.	00233121	12	1	1	3	4	2
12.	32447442	30	3	2	4	3	7
13.	33535214	26	5	3	6	5	4
14.	12543211	19	7	4	4	5	2
15.	11222102	11	5	4	3	3	2
16.	30121101	9	5	3	4	3	2
17.	11212022	11	2	2	3	3	2
18.	00122119	16	0	0	4	3	3
19.	21144111	15	3	1	3	3	3
20.	02222111	11	5	3	4	3	2
21.	11133111	12	4	2	3	3	2
22.	11123114	14	4	1	3	4	2
23.	24242232	21	2	1	3	5	4
24.	11344112	17	2	1	3	3	3
25.	36445565	38	4	2	7	3	6
26.	32399999	53	4	4	7	3	9
27.	89759989	64	7	6	6	9	9
28.	24466769	44	5	4	6	6	7
29.	99786966	60	5	5	6	3	9
30.	14754222	27	6	4	6	6	5
31.	12234166	25	4	2	3	3	6

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  3,012 $K(O)$  2,258 $K(1)$  3,50 $K(2)$  2,23 $K(3)$  4,03 $K(4)$  3,68 $K(5)$  4,47

April 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	43211210	14	5	1	3	3	2
2.	00132202	10	2	2	3	1	1
3.	31242212	17	4	2	3	3	3
4.	21122111	11	6	3	4	0	2
5.	12123110	11	3	3	4	1	0
6.	11133221	14	3	3	3	2	1
7.	21122133	15	3	2	2	3	3
8.	11243226	21	3	2	4	3	4
9.	96642298	46	7	4	6	4	8
10.	49899976	61	8	9	8	8	7
11.	31356459	36	5	3	5	5	7
12.	52322111	17	5	3	4	4	3
13.	21243222	18	7	4	4	4	2
14.	24333324	24	7	4	5	5	3
15.	53232333	24	7	4	4	4	5
16.	22233323	20	6	3	4	3	4
17.	11233322	17	4	3	3	3	2
18.	12231221	14	7	2	3	3	2
19.	11231214	15	7	2	3	2	3
20.	21123210	12	3	1	4	3	1
21.	12223200	12	2	2	4	3	2
22.	11121101	8	2	1	3	2	0
23.	10198799	44	5	3	4	1	8
24.	69895418	50	3	5	5	6	5
25.	12434353	25	7	5	5	4	4
26.	24434127	27	8	5	5	3	5
27.	31233334	22	4	3	3	3	6
28.	31222115	17	6	2	3	2	6
29.	24527663	35	3	4	3	6	8
30.	12225762	27	6	2	4	5	6

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  2,662  
 $K(0)$  2,121  
 $K(1)$  4,93  
 $K(2)$  3,07  
 $K(3)$  4,00  
 $K(4)$  3,30  
 $K(6)$  3,77

## Mai 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	11122112	11	3	1	3	2	2
2.	01222102	10	4	1	4	2	2
3.	01113116	14	4	1	5	1	2
4.	51232226	23	5	2	5	3	5
5.	99349311	39	8	5	6	4	6
6.	01123101	9	5	2	3	2	1
7.	11125113	15	4	2	3	1	2
8.	47576973	48	3	5	6	8	5
9.	44335442	29	7	5	5	6	4
10.	33542332	25	6	5	6	5	5
11.	33436434	30	7	5	7	7	2
12.	98999996	68	9	9	8	9	9
13.	33322213	19	5	6	7	5	3
14.	21113110	10	4	2	3	2	1
15.	11356486	34	4	5	4	5	6
16.	66752114	32	5	6	5	5	6
17.	32434221	21	6	3	5	5	5
18.	34633348	34	6	4	6	5	7
19.	35232232	22	5	4	5	3	4
20.	12422223	18	5	4	3	3	4
21.	22322134	19	5	2	3	3	3
22.	23222322	18	4	4	4	4	2
23.	34322222	20	7	2	4	3	3
24.	22666549	40	7	5	6	5	7
25.	99435222	36	6	5	7	5	6
26.	31122122	14	7	3	4	3	2
27.	11212101	9	6	3	5	2	1
28.	11111113	10	4	3	5	0	1
29.	01121111	8	2	3	4	3	0
30.	20122711	16	0	2	5	4	2
31.	12326432	23	1	3	4	3	4

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  2,754  
 $K(O)$  2,168  
 $K(1)$  4,95  
 $K(2)$  3,94  
 $K(3)$  4,84  
 $K(4)$  4,03  
 $K(5)$  3,61

Juni 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	51211122	15	6	3	4	2	3
2.	23635434	30	4	3	4	3	6
3.	44323312	22	5	2	5	3	5
4.	33444445	31	4	4	4	6	6
5.	53333322	24	4	3	5	4	6
6.	23234243	23	7	4	3	6	3
7.	22223212	16	3	2	4	3	4
8.	2222423	19	5	4	5	3	4
9.	62234533	28	4	4	5	5	3
10.	57332212	25	7	4	5	3	3
11.	22299921	36	3	2	3	5	2
12.	11210231	11	4	1	2	3	2
13.	12011111	8	3	0	3	2	2
14.	22213211	14	4	2	4	2	2
15.	22222211	14	0	2	5	2	2
16.	22211012	11	0	2	4	0	2
17.	11112232	13	4	3	2	0	2
18.	12113222	14	3	3	3	3	3
19.	23324111	17	4	3	5	3	4
20.	22223232	18	4	2	4	0	2
21.	21121222	13	4	2	3	2	2
22.	21532135	22	2	3	4	4	4
23.	42324359	32	5	4	5	5	5
24.	99421122	30	8	7	7	3	5
25.	232112	(15)	8	4	4	3	2
26.	33433310	20	7	4	4	4	3
27.	01229985	36	6	4	7	3	6
28.	63333433	28	3	4	6	4	5
29.	33664528	37	4	4	5	6	8
30.	72579442	40	5	4	5	7	6

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  2,539  
 $K(O)$  2,189  
 $K(1)$  4,33  
 $K(2)$  3,10  
 $K(3)$  4,30  
 $K(4)$  3,30  
 $K(5)$  3,73



Juli 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	11121111	9	3	1	3	2	2
2.	33322310	17	4	2	3	3	4
3.	11121311	11	2	2	3	3	2
4.	11123356	22	4	2	4	3	5
5.	54434342	29	5	4	6	5	4
6.	24312442	22	4	3	4	3	2
7.	34432311	21	4	3	4	3	5
8.	24234321	21	4	3	4	3	5
9.	12323223	18	3	3	4	3	4
10.	52322111	17	1	1	4	3	4
11.	23632999	43	7	5	4	4	6
12.	93335311	28	6	5	7	5	3
13.	21323412	18	7	3	5	2	3
14.	13333222	19	3	4	6	3	5
15.	47999999	65	9	9	9	8	9
16.	98933353	43	5	7	8	7	4
17.	43343999	44	7	7	6	7	7
18.	99786974	59	6	6	8	9	7
19.	67475973	48	7	8	8	7	8
20.	44476433	35	8	7	6	7	5
21.	55445646	39	8	7	6	5	3
22.	54654326	35	9	7	5	6	3
23.	34243223	23	6	6	6	6	3
24.	62288798	50	8	8	7	7	8
25.	76997775	57	7	7	7	7	9
26.	666766	(49)	8	7	7	9	5
27.	4425	(30)	7	8	6	4	4
28.	42334422	24	7	6	7	4	3
29.	22222111	13	6	4	6	4	1
30.	1211121	(10)	6	3	4	3	2
31.	1224	(18)	4	5	5	2	4

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  3,203  
 $K(O)$  3,439  
 $K(1)$  5,65  
 $K(2)$  4,94  
 $K(3)$  5,55  
 $K(4)$  4,75  
 $K(5)$  4,49

Aug. 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	33333322	22	5	4	5	5	4
2.	63432241	25	6	4	4	5	4
3.	22433322	21	5	4	4	3	4
4.	23235222	21	4	4	3	4	4
5.	12112322	14	5	2	3	2	3
6.	12334254	24	3	4	4	3	6
7.	52322424	24	5	4	5	3	5
8.	22222412	17	3	3	5	3	3
9.	54223452	27	5	5	4	2	5
10.	15223222	19	5	2	5	3	4
11.	22213200	12	6	4	3	3	2
12.	21111111	9	4	2	3	1	1
13.	11132111	11	4	2	4	3	2
14.	11121211	10	4	2	3	2	1
15.	21246457	31	5	4	4	2	6
16.	55999999	64	7	7	7	9	8
17.	99877499	62	5	6	5	8	8
18.	23542452	27	4	3	4	3	6
19.	35343233	26	5	3	5	3	5
20.	26999899	61	7	9	8	9	6
21.	85796797	58	8	7	5	8	8
22.	56588589	54	7	8	7	7	8
23.	44559869	50	7	7	6	5	7
24.	67679645	50	9	8	7	6	6
25.	33333323	23	8	7	5	4	3
26.	32332131	18	7	5	6	3	1
27.	21323111	14	7	5	5	1	1
28.	01122112	10	4	3	3	1	0
29.	24212422	19	2	3	3	2	3
30.	32222222	17	0	1	4	1	3
31.	22222123	16	2	2	4	1	2

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  2,915  
 $K(O)$  2,952  
 $K(1)$  5,10  
 $K(2)$  4,32  
 $K(3)$  4,61  
 $K(4)$  3,71  
 $K(5)$  4,16

Sept. 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	32213348	26	2	2	4	4	4
2.	33553239	33	4	4	4	4	6
3.	32235559	34	4	5	3	3	5
4.	99976869	63	8	7	5	3	9
5.	95535278	44	7	6	6	4	4
6.	96544210	31	8	5	6	5	4
7.	10123312	13	7	4	3	2	1
8.	12332324	20	6	5	4	1	3
9.	31123101	12	5	2	4	1	2
10.	20222214	15	5	2	4	3	3
11.	24456322	28	6	4	5	4	2
12.	35544322	28	7	4	5	1	4
13.	51322216	22	8	4	3	3	3
14.	43335324	27	6	3	4	3	6
15.	22345236	27	6	3	5	1	6
16.	35332333	25	5	3	5	2	4
17.	13225538	29	6	4	4	3	6
18.	33466354	34	7	6	6	3	5
19.	78749444	47	4	4	7	5	5
20.	37566999	54	4	7	7	6	8
21.	79786999	64	7	8	7	5	9
22.	99988493	59	6	8	7	5	9
23.	21323469	30	5	4	3	4	7
24.	42275425	31	4	2	4	2	6
25.	43466736	39	4	5	7	4	8
26.	34336576	37	3	4	3	2	8
27.	61433556	33	4	4	4	4	7
28.	53242252	25	2	3	3	2	4
29.	21133112	14	2	2	3	2	5
30.	11124241	16	3	2	4	3	6

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  3,796  
 $K(O)$  3,084  
 $K(1)$  5,17  
 $K(2)$  4,27  
 $K(3)$  4,63  
 $K(4)$  3,13  
 $K(5)$  5,30

Okt. 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	64544459	41	2	3	4	3	8
2.	25666222	31	2	3	6	5	6
3.	12344899	40	3	4	5	3	8
4.	66349356	42	3	3	5	1	7
5.	35324679	39	4	3	5	6	7
6.	77755979	56	5	6	5	6	9
7.	33354328	31	7	5	6	5	5
8.	42343311	21	6	4	5	3	3
9.	21221152	16	4	4	4	2	2
10.	21221251	16	6	4	5	2	1
11.	11121013	10	4	3	4	1	2
12.	20023343	17	3	2	3	2	2
13.	1 2211	(11)	3	2	6	4	1
14.	11376223	25	6	5	5	4	4
15.	24556327	34	6	5	5	8	3
16.	11231111	11	5	2	5	2	0
17.	11578434	33	5	5	6	7	6
18.	55699754	50	5	7	7	6	7
19.	63453142	28	6	4	5	3	4
20.	32231100	12	4	4	4	2	2
21.	11233413	18	5	3	4	0	3
22.	32442532	25	1	2	3	2	6
23.	42141100	13	2	1	2	2	1
24.	01122112	10	0	2	3	1	2
25.	24453212	23	2	4	4	6	4
26.	42464634	33	3	3	5	4	6
27.	21235231	19	4	2	4	2	3
28.	11122101	9	2	2	3	0	1
29.	00113100	6	2	2	3	1	0
30.	87636549	48	3	5	7	6	6
31.	83256779	47	4	4	5	6	8

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  2,882  
 $K(0)$  2,534  
 $K(1)$  3,77  
 $K(2)$  3,49  
 $K(3)$  4,62  
 $K(4)$  3,35  
 $K(5)$  4,07

Nov. 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	54665445	39	2	3	6	5	6
2.	54866999	56	5	5	6	6	8
3.	94767998	59	7	5	6	8	8
4.	21679799	50	7	4	6	8	6
5.	55576432	37	7	4	7	6	6
6.	73257347	38	7	4	6	5	5
7.	22222256	23	4	2	7	2	4
8.	12233321	17	3	1	3	2	3
9.	02122145	17	3	1	4	3	3
10.	21223112	14	2	2	4	3	4
11.	11132111	11	3	2	4	2	2
12.	21122121	12	4	2	4	2	2
13.	32237324	26	4	4	4	5	4
14.	35389643	41	5	4	7	6	6
15.	41211001	10	4	3	4	3	1
16.	11254100	14	3	1	3	4	1
17.	13243000	13	4	1	4	1	3
18.	11112291	18	0	2	4	3	4
19.	22243311	18	3	3	6	3	2
20.	12121031	11	3	2	2	1	0
21.	01125472	22	0	2	3	2	4
22.	34267234	31	4	3	5	3	4
23.	74654577	45	2	3	4	1	8
24.	13122121	13	3	2	3	2	2
25.	21122214	15	2	2	3	3	2
26.	41133015	18	2	3	5	2	4
27.	31243232	20	0	2	3	0	5
28.	99998366	59	5	4	4	7	9
29.	22133323	19	0	1	3	2	6
30.	11576897	44	4	3	5	7	7

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  3,258  
 $K(O)$  2,304  
 $K_1$  3,40  
 $K_2$  2,67  
 $K_3$  4,50  
 $K_4$  3,57  
 $K_5$  4,30

Dez. 1959

Tag	K	Summe	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1.	55466331	33	4	4	5	5	6
2.	22566744	36	3	3	6	6	6
3.	35558959	49	3	4	5	6	9
4.	43223112	18	2	3	5	4	2
5.	10569999	48	4	4	4	8	9
6.	32455272	30	4	5	6	5	5
7.	32101100	8	2	2	3	1	3
8.	11111132	11	2	2	4	1	2
9.	11245121	17	4	2	4	2	3
10.	21221112	12	2	2	4	2	2
11.	00134112	12	4	2	5	2	1
12.	13228125	24	3	3	5	2	5
13.	66472337	38	3	2	7	5	5
14.	95668993	55	4	4	6	8	7
15.	32346364	31	3	3	5	5	5
16.	32112312	15	4	3	5	4	5
17.	21121122	12	5	2	4	3	1
18.	21212222	14	3	3	6	3	2
19.	21224211	15	4	3	4	3	3
20.	21111122	11	4	3	4	2	1
21.	11101111	7	4	0	3	1	1
22.	01111132	10	3	2	3	1	2
23.	21333995	35	3	2	4	3	6
24.	72435221	26	3	3	5	5	4
25.	43122131	17	4	2	5	4	1
26.	22334485	31	3	3	3	4	6
27.	45799965	54	5	7	7	7	6
28.	63869985	54	6	7	7	6	6
29.	34365311	26	6	5	4	4	5
30.	21233231	17	1	2	4	3	3
31.	11122124	14	1	1	4	3	3

Monatsdurchschnitte:  $K(N)$  3,064  
 $K(O)$  2,133  
 $K_1$  3,36  
 $K_2$  3,00  
 $K_3$  4,68  
 $K_4$  3,80  
 $K_5$  4,04

## II.

*Die ermittelten D, Q und q Tage*

	D	Q	q
Jan.	6, 9, 10, 25, 26,	1, 2, 15, 21, 24,	3, 4, 20, 28, 31,
Febr.	11, 16, 25, 26, 28,	10, 18, 20, 21, 24,	1, 2, 7, 19, 23,
März	1, 26, 27, 28, 29,	7, 9, 10, 16, 20,	6, 11, 15, 17, 21,
April	9, 10, 11, 23, 24,	2, 4, 5, 21, 22,	1, 6, 7, 18, 20,
Mai	5, 8, 12, 18, 24,	2, 6, 27, 28, 29,	1, 3, 7, 14, 26,
Juni	11, 23, 27, 29, 30,	12, 13, 16, 17, 21,	1, 14, 15, 18, 20,
Juli	15, 17, 18, 25, 26,	1, 2, 3, 29, 30,	9, 10, 13, 14, 31,
Aug.	16, 17, 20, 21, 22,	11, 12, 13, 14, 28,	5, 8, 27, 20, 31,
Sept.	4, 19, 20, 21, 22,	7, 9, 10, 29, 30,	8, 13, 15, 16, 28,
Okt.	4, 6, 18, 30, 31,	11, 16, 24, 28, 29,	10, 12, 13, 20, 23,
Nov.	2, 3, 4, 28, 30,	11, 12, 15, 20, 24,	8, 10, 16, 17, 25,
Dez.	3, 5, 14, 27, 28,	7, 8, 11, 21, 22,	10, 16, 18, 19, 20.





*der langsamen Registrierungen*

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe	
<b>Komponente</b>												
5	3	4	1	1	0	1	0	1	2	0	2,3	$10^{-5}$ V/km
24	20	24	9	10	9	9	10	7	8	6	13,0	
47	46	30	24	29	19	22	30	19	24	28	31,5	
146	86	97	61	62	47	71	67	41	48	43	70,9	
131	155	80	117	142	133	159	177	131	139	165	124,0	
-38	-5	+28	-17	+37	+46	+57	+38	+49	+16	+18		
233	177	138	115	121	107	132	114	96	100	97	311,5	$10^{-4}$ V/km
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,1	%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3	
3	—	3	—	7	7	3	3	—	7	13	4,8	
46	43	47	36	39	23	36	26	23	26	26	37,5	
48	54	47	61	54	67	58	71	77	67	61	56,4	
3	3	3	3	—	3	3	—	—	—	—	0,9	
<b>Komponente</b>												
29	18	22	13	10	4	5	4	5	5	1	10,4	$10^{-5}$ V/km
26	21	14	18	12	10	12	12	12	13	13	14,4	
37	33	29	28	32	29	17	23	27	24	27	29,3	
55	60	81	69	56	85	55	63	52	48	60	60,1	
129	109	65	128	104	107	178	188	155	168	126	109,3	
-14	+25	+3	+39	+26	+13	-41	-18	+11	+13	-21		
147	145	128	124	125	124	132	141	134	134	120	295,3	$10^{-4}$ V/km
7	3	3	—	—	—	—	—	—	—	—	1,3	%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,1	
3	7	3	3	7	3	—	—	—	3	3	4,3	
32	30	43	32	29	46	26	32	23	23	29	35,0	
58	57	47	62	64	48	71	68	77	74	68	58,2	
7	3	4	3	—	3	3	—	—	—	—	1,1	

Uhr	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Param.													

Febr. 1959. Nord-

1.	2	0	0	1	2	1	5	5	12	8	5	2	0
2.	8	11	7	7	12	29	12	18	21	24	23	17	20
3.	31	30	27	27	36	33	37	38	33	56	63	42	29
4.	89	41	46	86	70	91	42	87	93	115	93	83	124
5.	85	177	173	117	170	128	140	80	102	82	142	173	252
6.	+13	+12	+5	+14	-65	-34	-8	+39	+90	+96	-72	-81	-163
7.	108	120	118	146	145	140	148	185	200	179	237	206	217
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	—	—
9.	—	—	—	—	—	4	—	—	—	4	—	—	—
10.	12	4	12	8	8	4	4	8	12	12	16	4	—
11.	38	23	23	31	31	48	24	38	32	32	36	33	28
12.	50	73	65	61	57	40	64	46	44	44	40	59	64
13.	—	—	—	—	4	4	8	8	12	8	4	4	8

Ost-

1.	1	3	2	—	1	2	9	13	17	15	17	16	16
2.	8	8	5	7	6	13	13	13	12	16	19	17	19
3.	34	30	26	37	32	27	32	32	33	30	36	24	27
4.	60	58	60	69	53	53	46	45	42	59	91	62	41
5.	126	129	114	59	108	125	89	78	66	68	61	84	141
6.	-22	-20	+17	+18	-22	-45	-41	+10	+47	+82	+90	+92	-17
7.	108	109	111	120	122	119	132	133	137	132	154	142	155
8.	—	—	—	—	—	—	—	4	4	4	—	—	4
9.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10.	4	8	8	8	—	8	—	8	12	8	4	4	—
11.	46	35	35	50	35	24	36	33	20	36	52	37	20
12.	50	57	57	42	61	61	56	47	56	44	50	55	68
13.	—	—	—	—	4	4	8	8	8	8	4	4	8

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe	
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--------------------------------	--

Komponente

3	1	2	0	0	0	1	1	0	2	1	2,2	$10^{-5}$ V/km
19	23	18	14	13	9	11	11	9	9	8	14,8	
36	33	35	40	26	28	33	17	29	19	24	33,5	
102	155	98	52	68	59	66	44	41	73	77	78,8	
245	151	182	157	151	151	121	187	128	143	138	148,9	
-98	-53	+36	+76	+49	-5	+35	+39	+24	+13	+26		
225	207	194	169	149	122	132	120	109	105	104	3782	$10^{-4}$ V/km
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,2	%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,3	
4	—	12	17	8	4	4	—	8	4	4	7,0	
25	44	24	17	32	28	38	23	19	61	50	32,4	
67	44	48	58	52	60	58	77	69	35	46	55,1	
4	12	16	8	8	8	—	—	4	—	—	5,0	

Komponente

25	15	12	7	6	1	3	—	—	3	3	7,9	$10^{-5}$ V/km
20	19	14	12	16	11	12	13	6	10	9	12,4	
39	26	31	34	23	27	30	26	27	29	22	29,7	
77	46	71	57	54	53	80	62	30	31	61	56,7	
95	135	93	121	171	141	141	173	162	157	182	117,4	
+30	+5	0	+7	-29	-27	-34	-47	-38	-58	+2		
155	157	157	155	146	121	133	126	111	105	115	3153	$10^{-4}$ V/km
4	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	1,0	%
—	—	—	—	4	—	—	—	—	—	—	0,2	
4	4	4	4	—	—	—	4	4	—	—	4,0	
42	28	35	25	20	35	31	19	19	23	31	32,0	
46	56	42	63	68	57	69	77	73	77	69	58,0	
4	12	15	8	8	8	—	—	4	—	—	4,8	

Uhr	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pařam.													
März 1959. Nord-													
1.	1	3	3	2	5	4	5	7	5	9	5	3	2
2.	10	8	10	16	15	13	17	20	17	23	21	15	14
3.	26	30	32	28	28	34	52	41	53	34	26	31	33
4.	61	78	85	63	60	60	69	83	95	80	70	86	64
5.	131	101	84	143	132	98	80	85	59	94	136	126	182
6.	-1	+7	+25	-18	-32	+2	+53	+75	+83	-1	-78	-157	-164
7.	112	97	107	132	114	114	150	161	158	142	152	172	171
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9.	—	3	—	—	—	—	—	7	3	3	3	—	—
10.	6	6	3	6	—	10	10	3	10	7	3	6	6
11.	39	55	52	42	55	29	38	57	55	30	20	36	26
12.	52	36	45	52	45	58	42	30	22	53	64	52	62
13.	3	—	—	—	—	3	10	3	10	7	10	6	6
Ost-													
1.	3	6	3	6	9	11	12	19	18	26	21	23	21
2.	6	10	8	9	14	12	12	21	16	19	17	18	17
3.	32	33	24	36	36	31	29	27	28	29	35	29	30
4.	31	46	78	62	62	56	45	63	45	55	75	64	61
5.	157	114	78	81	60	66	91	55	47	82	54	73	123
6.	-26	-1	+11	0	-7	+4	-7	+39	+62	+92	+49	+51	+13
7.	107	96	95	106	95	110	107	103	109	117	133	127	127
8.	—	—	—	—	—	—	—	10	3	13	—	10	—
9.	—	—	—	—	—	3	—	3	3	3	—	—	3
10.	3	10	3	10	6	10	10	—	13	—	3	3	3
11.	23	45	45	42	52	42	31	47	42	37	43	36	39
12.	74	45	52	48	42	42	56	37	29	40	39	45	49
13.	—	—	—	—	—	3	3	3	10	7	10	6	6

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe	
<b>Komponente</b>												
2	3	2	3	0	1	2	1	2	4	0	3,1	$10^{-5}$ V/km
14	12	11	14	7	10	12	10	7	11	9	13,3	
30	30	37	32	37	26	27	27	27	26	29	32,4	
54	82	50	49	44	88	33	30	44	40	67	66,8	
180	125	110	125	78	90	175	201	241	166	176	130,0	
-115	-43	+56	+70	+40	+34	+65	+39	-30	+44	+50		
176	162	129	102	100	108	116	96	135	103	130	3139	$10^{-4}$ V/km
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0	%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,8	
6	3	6	3	6	3	6	10	—	10	6	5,5	
20	42	42	38	32	32	29	16	29	27	45	36,9	
64	39	46	59	56	65	65	74	68	63	46	52,6	
10	16	6	—	6	—	—	—	3	—	3	4,2	
<b>Komponente</b>												
22	23	21	9	6	7	8	3	8	5	5	12,2	$10^{-5}$ V/km
17	17	21	19	17	13	18	8	14	14	13	14,6	
31	31	39	26	38	27	25	28	26	31	35	30,6	
59	46	59	58	42	81	67	33	77	52	56	57,2	
106	87	72	98	92	85	132	176	164	169	175	101,3	
-19	-46	-1	+18	-29	-21	-78	-25	-27	-28	-24		
131	138	126	108	108	110	110	99	128	127	146	2760	$10^{-4}$ V/km
10	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,3	%
—	—	3	3	—	—	—	—	—	3	—	1,0	
6	3	10	—	3	3	3	6	—	—	3	4,6	
26	29	39	38	36	43	36	26	26	39	36	37,6	
48	42	42	59	55	54	61	68	71	58	58	50,7	
10	16	6	—	6	—	—	—	3	—	3	3,8	

Uhr Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
April 1959. Nord-													
1.	1	1	5	3	4	6	7	8	8	7	5	8	4
2.	7	9	16	17	21	25	27	24	27	19	16	23	20
3.	23	35	34	31	33	52	35	36	36	33	35	40	30
4.	46	60	77	39	77	74	89	80	78	66	57	100	60
5.	86	112	86	103	51	53	63	64	49	73	80	85	139
6.	+28	+15	+5	+6	-26	+26	+92	+140	+104	-3	-130	-250	-239
7.	91	100	119	109	100	127	162	136	144	143	141	146	145
8.	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—
9.	—	—	—	3	3	3	10	7	17	—	—	—	3
10.	13	10	10	17	10	27	17	10	7	7	10	13	—
11.	43	40	50	30	53	37	27	55	53	38	37	40	40
12.	44	50	40	47	28	33	39	25	20	52	46	47	57
13.	—	—	—	3	3	—	7	3	3	3	7	—	—
Ost-													
1.	2	3	4	8	15	17	39	41	39	33	27	38	33
2.	10	10	17	9	19	20	19	19	22	24	23	19	41
3.	34	26	44	30	28	34	26	30	25	29	29	31	31
4.	59	42	38	55	56	52	42	35	28	37	55	42	68
5.	85	115	91	71	48	63	62	55	66	117	70	88	94
6.	+47	+13	+2	-1	+2	-9	-17	+32	+74	+86	+55	-1	-3
7.	98	100	105	97	99	102	119	111	128	129	139	155	133
8.	—	—	—	—	3	3	30	31	27	10	3	21	7
9.	—	—	—	—	7	—	—	—	7	—	—	—	3
10.	10	—	14	17	3	10	7	14	10	10	3	3	7
10.	43	31	24	30	43	37	27	24	20	21	38	21	38
12.	47	69	62	50	41	50	29	28	33	56	49	55	45
13.	—	—	—	3	3	—	7	3	3	3	7	—	—

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--------------------------------

## Komponente

3	1	1	2	2	0	2	2	3	1	1	3,4	$10^{-5}$ V/km
17	23	13	16	20	13	12	12	14	13	13	17,5	
33	40	33	37	26	30	26	27	28	28	29	32,9	
74	80	88	58	51	58	46	33	55	53	58	65,0	
139	103	101	106	83	70	119	121	96	134	161	94,7	
-130	-64	+34	+86	+99	+58	+28	+5	+39	+27	+44		
150	138	133	114	103	96	98	108	103	112	134	2948	$10^{-4}$ V/km
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,1	%
3	3	—	—	—	—	—	3	—	3	—	2,4	
13	20	3	7	7	7	13	10	10	7	10	10,6	
37	37	53	47	40	50	47	34	27	33	30	40,6	
47	40	41	46	53	43	50	53	60	54	47	44,6	
—	—	3	—	—	—	—	—	3	3	3	1,7	

## Komponente

39	35	24	23	16	13	5	5	12	7	7	20,2	$10^{-5}$ V/km
35	41	24	26	22	20	12	12	15	19	19	20,9	
22	35	29	34	26	34	28	26	30	33	27	30,1	
107	67	111	57	41	43	52	59	71	81	51	56,2	
50	88	89	127	169	121	144	124	82	95	178	95,6	
+18	-26	+1	-41	-50	-25	-29	-27	-23	-50	-27		
156	149	150	141	132	115	124	111	124	137	134	2986	$10^{-4}$ V/km
10	7	—	7	—	—	—	—	—	—	—	6,6	%
7	10	7	—	3	3	—	—	—	—	7	2,2	
3	7	3	13	—	7	3	—	13	—	3	6,7	
43	47	47	33	27	37	37	48	37	53	37	35,1	
37	29	40	47	70	53	60	52	47	44	50	48,5	
—	—	3	—	—	—	—	—	3	3	3	1,7	

Uhr Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mai 1959. Nord-													
1.	2	2	1	2	7	7	8	15	13	7	7	5	10
2.	13	17	13	16	22	43	32	44	27	28	23	16	20
3.	32	48	32	30	46	38	72	53	45	46	26	39	29
4.	82	59	51	49	79	95	95	58	71	84	82	56	67
5.	64	123	82	96	88	69	51	67	75	42	111	79	105
6.	+16	+13	+62	+41	+96	+75	+161	+113	-28	-109	-199	-236	-234
7.	130	162	148	162	160	160	204	187	162	159	140	154	159
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
9.	—	3	—	—	3	10	6	6	3	3	—	3	—
10.	13	19	19	17	10	13	23	23	37	20	3	13	13
11.	55	47	47	30	47	47	36	29	33	47	48	29	39
12.	29	32	35	50	40	30	32	39	24	30	46	55	42
13.	3	3	3	3	—	—	3	3	3	—	3	—	3
Ost-													
1.	4	7	5	11	19	19	28	33	46	41	40	39	41
2.	17	17	16	21	19	43	34	29	38	34	26	25	28
3.	42	46	39	41	46	29	42	37	31	28	31	30	28
4.	54	60	55	61	68	39	36	55	89	82	64	48	37
5.	93	56	59	55	45	51	69	19	35	58	101	94	105
6.	+5	+1	-5	-2	+2	+21	+60	+91	+90	+46	-1	-37	-15
7.	147	137	136	154	128	107	154	161	172	169	161	159	153
8.	—	—	—	—	3	7	10	13	23	10	10	13	16
9.	—	—	—	—	3	10	7	10	3	3	6	—	—
10.	16	26	13	37	10	13	20	20	6	13	6	10	10
11.	32	35	42	40	47	43	30	37	45	45	32	19	23
12.	49	34	42	30	37	27	30	17	20	29	43	55	48
13.	3	3	3	3	—	—	3	3	3	—	3	3	3



13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe	
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--------------------------------	--

## Komponente

5	1	2	1	0	0	0	1	4	2	5	4,3	$10^{-5}$ V/km
22	12	15	9	10	3	6	10	11	18	13	18,5	
42	32	39	30	36	35	32	31	36	29	40	38,2	
87	61	88	48	47	41	46	54	72	112	75	69,1	
66	79	78	131	100	80	72	79	96	43	163	85,0	
-107	-21	+49	+78	+83	+42	+16	-8	+35	+21	+40		
189	151	145	136	136	96	95	99	127	129	139	3527	$10^{-4}$ V/km
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,1	%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	1,7	
23	3	10	6	10	10	23	10	10	19	10	14,9	
39	52	45	39	36	47	37	43	33	55	45	41,9	
35	39	42	55	54	43	40	47	57	23	45	39,7	
3	6	3	—	—	—	—	—	—	—	—	1,7	

## Komponente

31	36	25	16	15	8	2	3	8	5	8	20,3	$10^{-5}$ V/km
34	28	29	18	22	16	13	17	17	16	17	23,9	
41	26	34	28	37	32	28	35	33	33	34	34,7	
76	60	68	42	53	68	62	71	66	91	73	61,6	
64	81	136	122	105	123	80	52	96	145	95	79,9	
-20	-35	-24	-50	-76	-55	-15	-13	+15	-4	+21		
181	175	169	141	147	138	126	120	139	149	149	3590	$10^{-4}$ V/km
3	10	6	3	—	—	—	—	—	—	—	5,3	%
6	—	—	—	6	—	—	—	—	—	—	2,2	
6	3	6	3	3	3	6	10	10	10	10	10,9	
48	36	42	32	32	36	42	58	32	39	39	38,8	
34	48	48	59	56	61	52	32	58	51	51	41,1	
3	3	—	3	3	—	—	—	—	—	—	1,7	

Uhr Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Juni 1959. Nord-													
1.	0	3	2	5	4	6	8	5	11	10	8	4	1
2.	9	15	17	20	28	25	27	23	17	20	18	18	15
3.	28	32	27	35	36	45	52	38	32	35	41	28	35
4.	54	47	51	63	78	80	81	91	86	79	81	69	63
5.	151	140	116	59	40	117	81	53	46	47	57	110	81
6.	+38	+17	+17	+57	+78	+108	+161	+74	-9	-116	-178	-195	-171
7.	147	145	146	136	158	184	177	164	150	138	156	145	148
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3	7	—	—
9.	3	3	—	3	10	4	6	—	3	—	—	—	3
10.	10	3	14	10	17	14	20	20	14	10	17	10	14
11.	31	31	38	41	38	35	37	40	50	57	39	34	31
12.	55	62	48	65	35	47	37	40	30	30	34	56	49
13.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	3
Ost-													
1.	3	5	4	8	11	22	33	37	44	38	32	36	25
2.	14	14	17	10	19	25	24	26	21	25	26	26	22
3.	34	46	47	32	29	24	28	34	31	35	38	15	32
4.	64	66	51	62	43	48	32	70	62	53	108	87	62
5.	98	43	57	58	44	32	46	10	29	87	40	79	105
6.	-2	+13	+3	+12	+8	+37	+97	+99	+96	+66	+14	-9	-17
7.	139	148	133	111	98	130	136	138	154	156	177	158	175
8.	—	—	—	—	3	14	20	20	30	17	7	3	7
9.	—	3	—	3	7	10	3	—	—	3	—	—	—
10.	14	21	18	7	21	10	27	10	20	13	3	3	10
11.	41	52	41	59	45	38	23	57	33	30	64	49	31
12.	45	24	41	31	24	28	27	13	17	27	23	45	49
13.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	3

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe	
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--------------------------------	--

Komponente

1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	2,9	10 <sup>-5</sup> V/km
15	9	8	8	8	8	8	7	13	15	9	15,1	
32	29	33	28	28	45	26	29	30	25	29	33,3	
65	59	57	48	38	60	33	74	49	51	45	62,6	
98	139	131	80	113	73	73	40	77	132	131	90,9	
-114	-36	+7	+96	+52	+22	+14	+5	+14	+27	+30		
145	129	134	114	110	118	94	109	134	147	142	3368	10 <sup>-4</sup> V/km
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,5	%
-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	1,6	
10	13	21	14	18	14	11	14	14	7	17	13,6	
45	37	28	32	32	38	25	55	38	28	21	36,7	
45	50	51	54	50	48	64	31	45	65	62	47,4	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,2	

Komponente

24	21	17	10	11	6	3	1	5	8	7	17,1	10 <sup>-5</sup> V/km
26	25	22	24	20	18	15	12	18	17	18	20,2	
33	35	30	29	27	43	30	27	29	24	35	32,2	
62	63	63	46	52	59	62	61	59	64	73	61,4	
135	143	140	122	135	115	89	96	99	91	97	82,8	
-37	-39	-100	-57	-50	-55	-49	-29	-4	+2	-1		
177	170	156	169	155	161	147	140	148	154	145	3570	10 <sup>-4</sup> V/km
3	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	5,3	%
-	3	-	-	3	-	-	-	-	-	-	1,5	
7	7	14	3	3	10	3	3	7	7	14	10,6	
38	38	31	28	32	31	32	34	34	34	48	39,3	
52	52	52	69	62	59	65	63	59	59	38	43,0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,3	

Uhr Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Juli 1959. Nord-													
1.	0	2	1	7	10	6	5	5	12	7	12	6	8
2.	13	19	22	24	35	29	26	32	23	31	29	24	24
3.	27	40	37	42	60	55	55	51	76	37	37	45	41
4.	69	60	91	102	99	103	106	71	84	98	64	118	89
5.	108	116	94	110	81	107	77	102	27	29	78	35	75
6.	+60	+12	+24	+28	+54	+161	+150	+142	+57	-31	-138	-215	-196
7.	219	180	214	200	228	215	230	206	190	171	167	199	220
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	4	—	—	—	—
9.	—	—	—	—	4	8	4	4	—	4	4	4	3
10.	7	7	8	12	11	13	23	25	32	12	14	15	14
11.	45	32	50	49	41	42	38	21	52	54	50	48	48
12.	38	54	38	35	44	37	31	46	8	22	28	29	31
13.	10	7	4	4	—	—	4	4	4	8	4	4	4
Ost-													
1.	7	13	17	20	23	40	38	49	45	34	39	34	49
2.	21	25	38	30	31	34	37	40	51	34	38	30	46
3.	50	52	64	53	49	45	46	44	46	44	46	52	44
4.	81	75	130	154	105	36	77	74	38	102	80	85	80
5.	108	123	67	26	71	73	45	36	58	105	66	100	80
6.	+30	+47	+13	-12	+5	+73	+97	+138	+116	+114	+50	-38	-52
7.	241	191	228	207	211	164	189	208	206	209	200	220	236
8.	—	—	—	—	—	12	19	31	19	8	11	8	14
9.	4	—	4	—	4	12	4	8	11	—	14	—	7
10.	17	11	11	4	22	12	11	11	12	8	11	8	4
11.	40	33	48	69	37	16	36	31	23	24	29	46	35
12.	28	49	33	23	37	48	26	15	31	52	31	34	36
13.	11	7	4	4	—	—	4	4	4	8	4	4	4

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe	
<b>Komponente</b>												
4	3	0	1	1	0	1	1	1	3	3	4,1	$10^{-5}$ V/km
21	13	9	16	9	11	14	14	10	15	14	19,6	
39	51	46	41	38	32	33	29	35	30	33	42,1	
55	96	83	76	82	51	51	45	52	80	61	78,7	
179	62	43	70	36	56	79	91	108	83	101	81,2	
-176	-86	-1	+37	+62	+44	+24	+5	+6	-10	+40		
200	202	198	192	226	198	191	175	229	234	223	4914	$10^{-4}$ V/km
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,2	%
—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	1,6	
14	14	17	21	20	21	7	17	14	—	3	14,2	
31	42	38	28	43	41	40	28	29	50	42	40,9	
52	41	35	44	24	28	43	48	50	43	48	37,3	
3	3	7	7	13	10	10	7	7	7	7	5,8	

<b>Komponente</b>												
42	37	23	32	13	12	13	7	9	8	11	25,7	$10^{-5}$ V/km
35	35	35	28	24	24	36	20	21	24	27	30,4	
47	53	44	45	37	35	37	28	37	36	37	44,6	
71	103	90	62	102	100	103	66	52	84	80	84,6	
174	114	126	140	103	105	161	165	167	102	133	101,9	
-56	-80	-102	-133	-76	-48	-41	-25	-12	+1	-7		
254	239	249	230	268	248	237	212	251	254	255	5404	$10^{-4}$ V/km
10	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6,0	%
—	4	10	—	—	—	3	—	—	4	—	3,7	
14	18	3	15	11	3	3	3	4	4	3	9,3	
28	27	38	22	41	52	24	35	21	32	28	34,0	
45	36	42	56	33	35	60	55	68	53	62	41,1	
3	4	7	7	15	10	10	7	7	7	7	5,9	

Uhr Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Aug. 1959. Nord-													
1.	2	2	3	4	6	11	11	15	9	8	9	12	5
2.	18	15	19	17	20	18	43	34	30	23	39	32	24
3.	23	35	39	34	31	43	52	53	42	43	77	52	50
4.	65	58	51	66	44	73	123	58	88	108	68	61	129
5.	71	117	89	104	123	95	36	97	57	48	64	109	48
6.	+29	+22	+7	+19	+59	+97	+164	+103	+15	-108	-169	-221	-165
7.	190	176	180	190	189	198	264	220	242	214	266	235	218
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9.	—	—	4	—	—	—	4	7	11	—	4	—	—
10.	4	14	25	18	11	11	21	15	7	11	29	11	14
11.	36	32	39	50	26	39	53	45	52	48	32	36	54
12.	60	54	32	32	63	46	18	33	26	37	35	53	32
13.	—	—	—	—	—	4	4	—	4	4	—	—	—

Ost-													
1.	10	12	8	9	17	29	40	42	40	34	34	35	39
2.	23	28	27	28	40	26	56	38	31	35	35	28	28
3.	36	38	31	47	34	37	31	31	33	45	36	32	39
4.	61	90	63	66	58	42	41	53	51	75	75	48	86
5.	103	78	80	60	44	61	67	40	74	48	73	116	107
6.	+6	-19	-2	+14	-22	+12	+89	+140	+123	+32	-1	-27	-21
7.	175	173	175	166	159	173	229	223	260	204	229	210	240
8.	—	3	—	—	3	14	25	32	15	15	3	10	7
9.	—	3	6	3	10	—	7	7	—	4	3	—	—
10.	—	13	6	30	14	18	14	14	19	8	10	14	3
11.	48	36	45	40	48	25	28	32	27	35	43	17	37
12.	52	45	43	27	25	39	22	15	35	34	38	59	53
13.	—	—	—	—	—	4	4	—	4	4	3	—	—



Uhr Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sept. 1959. Nord-													
1.	1	2	3	2	7	12	17	24	19	15	14	12	8
2.	14	13	21	19	24	21	28	47	27	25	23	26	25
3.	28	38	40	34	38	40	45	44	50	41	45	44	34
4.	61	79	76	91	48	60	95	61	62	77	64	49	59
5.	191	211	135	178	119	103	49	55	67	44	129	158	200
6.	+16	+10	+21	+13	+65	+38	+80	+71	+13	-106	-159	-169	-167
7.	181	183	195	169	183	207	227	250	234	219	225	230	204
8.	—	—	—	—	—	—	3	10	10	7	3	3	3
9.	—	—	—	3	—	—	—	7	3	3	7	3	—
10.	7	13	17	7	13	10	24	14	17	10	17	10	3
11.	40	23	30	33	34	41	35	31	30	43	27	21	34
12.	50	64	53	57	50	39	31	28	23	27	43	60	60
13.	3	—	—	—	3	10	7	10	17	10	3	3	—
Ost-													
1.	8	7	8	9	17	28	35	50	51	35	39	35	37
2.	19	21	19	21	20	27	36	42	30	27	32	32	29
3.	28	36	32	35	44	26	32	18	31	38	38	43	35
4.	73	42	51	49	51	56	53	41	57	48	59	50	37
5.	132	128	123	92	64	61	73	57	49	51	85	95	113
6.	+9	+20	-6	+8	+22	+15	+55	+113	+103	+87	+29	-7	-25
7.	173	164	156	163	173	192	192	224	219	214	214	217	201
8.	—	—	—	3	3	11	17	21	23	13	20	17	13
9.	—	—	—	—	3	3	3	7	—	—	—	3	—
10.	—	7	7	7	10	7	14	10	7	13	10	3	13
11.	45	41	31	31	36	32	24	14	30	34	27	28	20
12.	52	52	62	59	45	36	35	38	23	30	40	46	54
13.	3	—	—	—	3	11	7	10	17	10	3	3	—



13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe	
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--------------------------------	--

## Komponente

8	9	8	4	6	2	2	1	2	2	3	7,6	$10^{-5}$ V/km
22	33	17	17	17	11	13	14	14	16	17	21,1	
36	37	38	38	48	32	32	32	29	33	37	38,2	
67	55	59	58	44	40	46	71	53	44	58	61,4	
135	123	113	78	126	126	114	160	236	248	213	137,9	
-56	+12	+27	+100	+83	+10	+26	+35	+39	-17	+16		
218	201	203	184	177	151	164	157	163	172	217	4711	$10^{-4}$ V/km
—	—	4	—	3	—	—	—	—	—	—	1,9	%
—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	3	1,3	
7	7	7	10	3	13	7	7	—	3	10	9,8	
42	33	41	38	27	17	30	30	37	33	27	32,4	
40	50	48	52	63	70	63	63	63	64	57	50,8	
11	7	—	—	3	—	—	—	—	—	3	3,8	

## Komponente

28	27	26	25	19	10	8	7	7	7	10	22,3	$10^{-5}$ V/km
30	37	24	25	23	17	19	20	24	23	20	25,6	
30	37	32	28	32	32	28	32	37	28	28	32,6	
29	51	62	37	57	60	41	47	53	68	62	51,5	
132	105	111	125	124	100	172	158	214	147	213	113,4	
-41	-44	-27	+6	-46	-38	-55	-32	-48	-39	-55		
203	209	201	185	196	155	176	178	176	187	205	4571	$10^{-4}$ V/km
10	3	4	3	7	—	—	—	—	—	—	7,0	%
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,9	
3	7	4	3	3	3	3	10	3	7	3	6,5	
14	23	43	14	33	37	30	30	24	28	28	29,0	
60	60	49	80	54	60	67	60	73	65	69	52,8	
10	7	—	—	3	—	—	—	—	—	3	3,8	





Uhr Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nov. 1959. Nord-													
1.	1	1	2	3	1	1	7	11	13	12	8	9	4
2.	11	13	14	13	13	17	20	28	26	21	20	21	21
3.	25	28	31	26	34	35	44	63	52	64	58	36	37
4.	55	77	56	80	58	61	62	64	83	64	80	128	108
5.	109	93	137	171	127	107	103	66	77	76	127	137	150
6.	-36	-4	-50	-28	-23	-16	+10	+51	+94	+60	-56	-96	-151
7.	133	117	134	147	144	141	148	181	183	164	185	225	187
8.	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	3	—	—
9.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10.	3	10	10	3	10	13	20	30	17	23	13	7	17
11.	43	27	27	33	33	40	30	40	40	40	34	50	33
12.	54	63	63	63	57	47	50	20	36	37	50	43	50
13.	—	—	—	—	—	—	—	7	7	—	—	—	—
Ost-													
1.	2	5	3	4	8	14	18	23	24	19	25	25	22
2.	11	14	15	13	17	18	19	21	21	23	23	23	23
3.	23	25	27	33	33	31	53	37	37	40	41	42	32
4.	80	52	50	55	61	64	53	55	42	61	48	89	57
5.	70	101	86	65	86	79	97	77	74	80	108	59	115
6.	-16	-15	-17	-8	-13	+10	+30	+42	+68	+91	+84	+90	+21
7.	128	111	109	112	120	118	139	150	149	147	146	161	138
8.	—	—	—	—	—	—	—	3	—	3	3	7	—
9.	—	—	—	—	—	—	—	7	—	—	—	—	—
10.	—	7	7	10	10	10	23	10	13	10	7	20	7
11.	50	30	43	30	33	43	24	33	37	33	40	40	30
12.	50	63	50	60	57	47	53	40	43	54	50	33	63
13.	—	—	—	—	—	—	—	7	7	—	—	—	—







Uhr Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Jahr 1959. Nord-													
1.	1	1	2	3	4	5	7	9	10	8	7	6	5
2.	11	13	14	15	19	21	24	28	24	23	23	22	21
3.	27	34	33	32	32	41	51	46	47	45	46	42	35
4.	61	61	61	68	69	71	77	74	83	80	81	91	86
5.	115	129	111	112	92	92	75	71	61	67	102	114	146
6.	+10	+4	-1	+5	+8	+34	+73	+74	+48	-20	-110	-156	-169
7.	137	138	142	145	149	155	175	178	177	171	185	191	187
8.	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	1	—	1
9.	—	1	1	1	2	2	3	4	3	2	1	1	1
10.	9	10	13	10	10	13	17	17	17	13	14	10	7
11.	42	36	39	40	42	38	37	41	46	43	37	38	38
12.	47	52	46	48	45	45	40	34	28	38	44	50	51
13.	2	1	1	1	1	2	3	3	5	3	3	1	2
Ost-													
1.	4	6	6	8	12	18	25	30	32	27	27	29	30
2.	14	15	16	15	20	22	27	27	25	25	26	24	27
3.	33	36	34	36	35	33	36	33	34	35	37	32	33
4.	60	55	59	64	62	53	48	57	53	63	74	65	60
5.	112	98	84	66	60	66	70	58	59	73	74	90	110
6.	-5	+2	0	+5	-5	+8	+28	+60	+76	+72	+46	+17	-8
7.	138	132	131	130	129	132	148	155	162	158	163	168	171
8.	—	—	—	—	2	5	12	15	13	9	6	9	7
9.	—	1	1	1	4	4	3	3	2	2	2	1	1
10.	7	11	9	13	11	11	14	10	13	10	7	7	6
11.	38	34	36	41	40	33	29	36	33	35	42	32	32
12.	53	53	53	44	42	45	39	33	34	41	40	49	52
13.	2	1	1	1	1	2	3	3	5	3	3	2	2



13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--------------------------------

Komponente

4	3	3	2	1	1	1	1	1	2	1	3,6	$10^{-5}$ V/km
19	19	15	13	13	10	11	11	11	12	12	16,9	
40	40	36	34	32	31	30	29	30	28	33	36,4	
85	78	75	54	59	57	50	59	48	59	62	68,6	
134	110	98	107	108	102	126	128	153	147	134	109,6	
-94	-24	+34	+59	+59	+30	+47	+23	+24	+15	+28		
190	170	156	146	140	132	135	131	138	140	146	3750	$10^{-4}$ V/km
—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	0,2	%
1	1	—	—	—	—	—	—	1	1	—	1,1	
10	10	10	11	11	11	10	9	8	7	10	11,1	
39	40	43	35	35	36	36	36	29	37	39	38,4	
47	44	43	53	53	51	53	54	61	54	50	47,2	
3	5	3	1	1	2	1	1	1	1	1	2,0	

Komponente

28	26	21	16	12	8	5	5	6	6	6	16,2	$10^{-5}$ V/km
27	28	22	21	21	17	17	15	17	17	17	20,9	
35	33	33	31	31	32	29	28	31	28	31	32,8	
65	58	74	53	55	64	63	61	62	66	70	61,0	
116	104	106	125	132	118	143	135	145	141	130	100,6	
-9	-21	-22	-29	-44	-37	-46	-29	-26	-21	-11		
173	169	160	157	166	156	155	149	161	159	164	3684	$10^{-4}$ V/km
6	7	3	2	1	1	—	—	—	—	—	4,1	%
2	3	2	—	1	—	—	—	1	2	1	1,5	
7	7	6	6	4	5	5	6	4	4	6	7,9	
34	29	40	32	32	37	33	34	32	36	38	34,9	
48	50	46	58	59	55	61	59	62	57	54	49,5	
3	4	3	2	3	2	1	1	1	1	1	2,1	



13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe	
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	--------------------------------	--

Nord-Komponente

1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1,4	10 <sup>-5</sup> V/km
13	11	11	8	6	6	6	6	7	8	13	11,0	
32	28	39	26	29	27	29	27	31	28	29	30,8	
68	48	47	35	37	38	36	35	33	39	32	44,1	
45	47	26	44	30	25	37	32	34	41	59	41,8	
-90	-30	+19	+32	+20	+31	+12	+33	+33	+27	+38		
111	91	74	71	61	55	60	63	70	70	82	1999	10 <sup>-4</sup> V/km
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,1	%
-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	0,4	
13	13	34	8	24	21	10	13	13	21	21	17,0	
55	40	40	40	40	47	58	40	43	38	30	42,2	
32	47	26	52	36	32	32	47	41	41	49	40,3	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0	

Komponente

22	20	19	6	3	3	1	1	1	3	3	10,6	10 <sup>-5</sup> V/km
22	19	14	16	9	11	8	8	11	17	17	13,1	
25	25	28	26	26	29	24	30	23	29	35	26,5	
50	41	45	42	47	50	49	41	39	47	35	42,0	
43	46	38	47	45	30	44	41	68	39	67	41,4	
-15	-27	-30	-38	-26	-23	-16	-12	-27	-9	-8		
104	88	89	86	82	69	77	73	77	90	98	1961	10 <sup>-4</sup> V/km
8	5	3	-	-	-	-	-	-	-	-	5,0	%
3	3	5	-	3	-	-	-	3	8	-	1,3	
11	3	5	11	-	16	5	16	5	5	16	9,9	
41	39	50	48	47	52	50	42	35	46	35	41,8	
37	50	37	41	50	32	45	42	57	41	49	42,0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0	

Uhr Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Jahr 1959. Gestörte Tage.													
1.	2	2	3	6	6	8	19	32	20	24	14	16	20
2.	14	18	23	25	35	62	50	104	59	42	33	40	28
3.	35	39	46	40	54	78	51	96	92	108	88	58	46
4.	78	123	109	111	120	98	119	45	121	133	90	180	127
5.	312	293	164	321	292	160	245	275	106	95	211	155	270
6.	-24	+10	+44	-23	+22	-10	+141	+95	+129	+79	-45	-60	-134
7.	245	225	236	268	246	263	295	281	302	270	308	374	342
8.	—	—	—	—	—	—	4	4	5	4	3	—	—
9.	—	—	—	3	3	11	4	29	10	4	3	—	—
10.	6	6	9	3	10	19	8	17	30	33	17	10	3
11.	29	33	34	32	23	26	25	8	30	30	28	41	43
12.	65	61	57	62	64	44	59	42	25	29	49	49	54
13.	13	3	6	6	7	15	28	21	45	29	17	10	13
Ost-													
1.	7	15	12	15	22	20	25	47	45	42	37	41	39
2.	24	35	30	34	52	56	56	66	44	39	40	39	53
3.	43	52	43	45	59	56	41	50	49	62	59	47	53
4.	108	114	114	115	122	89	65	96	122	140	97	154	61
5.	226	185	167	165	143	187	194	199	116	110	135	121	227
6.	-28	+10	+13	+39	+2	+48	+91	+131	+148	+113	+79	+47	-12
7.	262	220	272	244	256	238	269	274	287	256	290	274	297
8.	—	—	—	—	—	—	—	4	9	8	10	7	3
9.	3	3	6	3	12	7	14	16	—	4	3	3	6
10.	6	14	6	6	9	15	5	12	17	15	17	3	12
11.	35	36	33	29	33	26	23	24	43	35	27	50	16
12.	56	47	55	62	46	52	58	44	31	38	43	37	65
13.	12	3	6	6	6	18	36	20	35	23	1	13	12

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel, bzw. in 7. Summe	
<b>Nord-Komponente</b>												
10	9	5	9	4	6	2	2	2	3	0	9,4	$10^{-5}$ V/km
40	56	32	24	25	17	13	16	16	14	13	33,3	
44	72	41	38	41	44	39	35	33	29	44	53,8	
82	100	130	78	153	123	71	129	57	82	56	104,8	
372	201	136	252	245	190	238	238	385	310	244	238,0	
-135	-45	+41	-3	+41	+12	-6	-24	-45	-44	-20		
360	306	281	320	353	279	263	227	246	234	229	6754	$10^{-4}$ V/km
—	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	0,8	%
4	13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3,5	
4	13	—	3	—	6	6	3	3	—	9	9,1	
21	35	52	34	43	35	30	39	22	24	41	31,6	
71	39	48	60	57	59	64	58	75	76	50	55,0	
25	44	30	10	20	6	3	3	6	3	3	15,2	
<b>Komponente</b>												
40	40	29	30	22	19	12	12	10	8	6	24,8	$10^{-5}$ V/km
56	82	38	36	32	34	27	30	26	23	21	40,7	
53	54	56	44	50	38	40	41	40	37	41	48,1	
86	53	122	65	91	123	85	128	94	97	68	100,3	
213	202	205	261	374	207	332	241	330	238	215	207,7	
-51	-59	-49	-97	-153	+27	-22	-71	-114	-44	-48		
317	326	304	286	330	305	283	245	267	239	247	6589	$10^{-4}$ V/km
4	12	—	4	4	—	—	—	—	—	—	2,7	%
8	8	4	—	—	—	—	—	—	—	—	4,2	
4	4	4	4	4	3	3	3	6	—	6	7,4	
27	17	39	22	21	41	25	36	26	39	39	30,9	
57	59	53	70	71	56	72	61	68	61	55	55,8	
23	38	21	15	25	6	3	3	6	3	3	14,6	

## IV.

*Richtung der dreistündlichen mittleren Amplituden*

	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	Mittel
Jan.	1. ....	75	87	69	72	78	83	88	77
	2. ....	51	49	43	47	47	46	50	48
	3. ....	49	44	44	36	36	47	44	43
	4. ....	43	45	37	36	30	43	48	40
	5. ....	45	35	42	36	35	41	45	41
	T .....	46	45	42	38	37	44	48	53
Febr.	1. ....	73	55	62	73	85	86	63	75
	2. ....	38	28	36	39	41	44	49	40
	3. ....	45	45	43	29	41	34	44	42
	4. ....	45	34	31	36	22	46	49	33
	5. ....	40	38	36	28	28	52	45	39
	T .....	44	40	37	35	35	42	46	46
März	1. ....	60	66	71	77	82	83	74	76
	2. ....	42	38	42	43	51	61	51	48
	3. ....	45	49	31	46	44	44	45	43
	4. ....	35	45	32	40	39	48	50	41
	5. ....	42	29	41	31	32	42	40	38
	T .....	44	41	34	39	38	46	45	48
April	1. ....	55	72	79	78	86	86	79	80
	2. ....	49	38	37	48	67	56	50	50
	3. ....	49	38	37	39	41	43	47	42
	4. ....	37	41	23	31	49	47	48	41
	5. ....	46	42	46	49	32	53	52	45
	T .....	45	42	39	44	45	51	49	49
Mai	1. ....	73	72	72	81	82	87	85	78
	2. ....	49	46	45	52	59	64	67	52
	3. ....	49	46	33	39	43	43	44	42
	4. ....	41	37	40	41	39	41	55	42
	5. ....	38	31	33	47	45	50	48	43
	T .....	43	39	42	47	46	47	53	48
Juni	1. ....	69	70	78	79	87	88	90	81
	2. ....	48	37	47	54	62	70	63	53
	3. ....	55	37	37	41	47	44	45	44
	4. ....	50	35	33	47	45	49	47	44
	5. ....	26	32	26	44	50	51	58	42
	T .....	44	35	41	48	51	53	54	46
Juli	1. ....	86	73	81	77	82	88	88	81
	2. ....	58	47	57	51	64	69	64	59
	3. ....	58	43	37	50	48	45	47	47
	4. ....	52	45	36	44	47	49	61	47
	5. ....	43	30	34	61	50	68	62	51
	T .....	48	42	44	49	50	51	51	48
Aug.	1. ....	78	69	74	74	83	81	81	77
	2. ....	56	60	49	46	55	59	60	55
	3. ....	48	48	33	33	41	44	49	42
	4. ....	51	42	28	40	41	52	47	44
	5. ....	42	27	43	47	52	53	59	47
	T .....	44	41	44	42	49	49	50	50

	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	Mittel
Sept. 1. ....	75	69	66	70	75	76	79	74	71
2. ....	50	46	46	51	50	55	56	55	50
3. ....	42	44	30	42	44	37	44	43	41
4. ....	38	38	35	40	34	44	43	50	40
5. ....	35	28	47	35	37	41	46	39	39
T. ....	42	44	42	44	45	46	47	46	44
Okt. 1. ....	79	80	72	76	80	84	88	73	78
2. ....	51	48	45	48	49	50	59	55	50
3. ....	45	45	38	37	42	44	45	44	42
4. ....	46	45	31	36	37	42	46	55	41
5. ....	49	47	61	41	40	57	53	48	49
T. ....	47	45	46	43	43	48	47	48	46
Nov. 1. ....	67	81	65	67	76	82	90	86	69
2. ....	47	49	39	49	47	45	53	59	48
3. ....	42	45	37	38	41	40	45	42	41
4. ....	44	42	37	36	30	37	42	56	40
5. ....	37	30	46	36	47	45	49	37	41
T. ....	42	39	40	39	38	42	44	46	41
Dez. 1. ....	85	83	76	76	80	85	77	87	79
2. ....	46	51	47	43	47	49	53	53	47
3. ....	42	41	38	36	38	44	40	37	39
4. ....	40	38	46	37	28	39	48	47	40
5. ....	31	38	41	47	41	47	35	42	40
T. ....	37	39	41	41	37	46	40	44	40
Jahr 1. ....	74	72	73	75	82	84	83	76	78
2. ....	50	45	44	48	53	53	57	56	51
3. ....	48	44	36	38	42	43	45	45	42
4. ....	44	41	35	39	36	44	49	49	42
5. ....	40	33	36	43	40	49	48	44	43
T. ....	44	40	41	42	43	48	49	49	44
D 1. ....	78	70	59	67	71	77	78	79	70
2. ....	58	50	38	46	57	53	63	59	51
3. ....	49	43	31	34	45	52	45	48	42
4. ....	47	45	44	44	32	38	44	53	44
5. ....	37	32	43	37	37	52	50	40	41
T. ....	43	43	43	41	43	44	47	47	44
Q 1. ....	74	78	80	82	86	87	83	75	82
2. ....	43	40	41	53	55	57	56	59	50
3. ....	41	43	32	39	42	43	45	45	41
4. ....	45	40	34	53	39	41	52	50	43
5. ....	43	40	46	38	38	52	51	53	45
T. ....	43	36	39	44	43	50	50	51	44

## V.

*Harmonische Analyse der aus je einem Monat gerechneten durchschnittlichen täglichen Feldstärkengänge*

	$A_1$	$\varphi_1$	$A_2$	$\varphi_2$	$A_3$	$\varphi_3$	$A_4$	$\varphi_4$	$A_5$	$\varphi_5$	$A_6$	$\varphi_6$
Nord-Komponente												
Jan. ....	32	133	22	226	26	118	18	348	9	126	2	321
Febr. ....	29	109	41	250	54	98	30	293	3	298	9	105
März ....	49	110	58	264	52	112	23	311	4	5	8	202
April ....	63	98	93	275	79	115	18	349	14	240	4	290
Mai ....	84	93	101	303	59	142	5	327	7	301	9	260
Juni ....	75	85	87	296	49	140	7	117	8	308	3	110
Juli ....	81	72	96	283	54	127	10	82	5	60	3	83
Aug. ....	58	88	93	303	61	141	9	60	13	345	7	50
Sept. ....	53	106	74	302	42	142	12	343	6	311	7	78
Okt. ....	33	112	55	261	43	107	29	303	14	62	0	000
Nov. ....	21	148	51	258	38	106	28	306	14	131	2	90
Dez. ....	36	173	37	221	24	149	18	287	12	139	13	282
Jahr ....	46	102	64	281	46	123	14	322	3	135	3	192
Ost-Komponente												
Jan. ....	12	270	10	259	16	101	14	186	11	258	8	12
Febr. ....	40	303	20	120	26	29	15	266	4	143	7	206
März ....	40	324	15	167	20	47	14	237	10	303	5	75
April ....	33	337	17	148	19	55	15	337	12	127	10	71
Mai ....	44	10	23	209	21	144	15	4	4	173	7	161
Juni ....	60	7	30	207	14	138	8	41	8	270	6	342
Juli ....	81	13	41	207	19	105	20	25	6	114	11	335
Aug. ....	51	1	26	213	28	146	22	7	9	279	15	167
Sept. ....	55	350	22	236	26	85	9	337	6	329	10	93
Okt. ....	51	321	17	131	21	32	8	104	8	116	8	188
Nov. ....	60	322	25	129	13	101	12	219	4	5	3	192
Dez. ....	27	306	21	107	14	338	3	233	10	113	10	274
Jahr ....	41	339	19	180	13	87	7	307	1	211	1	180

Amplituden ( $A$ ) in  $10^{-5}$  V/km  
 Phasenwinkel ( $\varphi$ ) in  $^{\circ}$



## VI/a

## Die Zeitpunkte der Störungen

Jan. 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
13. 7h 00	1. 21h 30	6. 22h 15	3. 19h 30?	2. 12h 15			1. 15h 00	1. 22h 45	4. 17h 30
	1. 22 15	7. 19 45	9. 1 00?	3. 13 00				2. 2 00	26. 5 30
	13. 0 00	8. 0 30	14. 22 00	5. 2 30				13. 23 30	
	24. 0 45	8. 22 45	16. 1 45	17. 22 30				22. 2 45	
	28. 0 45	12. 0 30	21. 13 30	19. 1 15				25. 1 30	
		20. 21 45	23 5 30	23. 22 15				31. 22 30	
		23. 0 30	24 4 15	24. 7 00				31. 22 45	
		29. 21 30	26 21 15	29. 6 15					
			27 21 45						
			30 20 00						

Febr. 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
		3. 23h 00	2. 5h 00	11. 5h 15				2. 22h 45	13. 13h 30
		7. 20 30	3. 9 45	21. 12 00				9. 23 30	20. 14 30
		13. 23 00	10. 4 30	22. 1 45				10. 19 15	
			15. 19 15	24. 13 45				10. 22 15	
			18. 11 00	25. 0 15					
			18. 16 15						
			20. 15 45						
			24. 18 45						
			24. 19 45						

## März 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
26. 9h 45	3. 20h 40	2. 21h 00	3. 17h 15	12. 18h 15			11. 8h 00	3. 21h 45	23. 18h 30
	7. 3 45	3. 22 00	4. 18 15	15. 8 15				4. 0 00	
	7. 4 45	5. 21 15	10. 9 15	22. 4 00				6. 2 00	
	8. 21 30	8. 2 30	10. 11 30	22. 8 15				7. 3 00	
	9. 3 15	13. 21 45	16. 15 45	25. 0 15				9. 2 30	
	9. 3 45	17. 23 00	17. 9 30	25. 3 15				9. 3 00	
	12. 1 45	31. 19 30	17. 18 30	25. 13 00				9. 16 30	
	15. 22 15		21. 19 15					15. 23 45	
	16. 1 15		23. 19 30					21. 21 30	
	16. 23 45		24. 11 00						
	17. 0 30								
	23. 23 00								

## April 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
9. 19h 30	6. 2h 15	3. 1h 45	2. 20h 45	4. 7h 45				4. 0h 30	27. 10h 00
23. 11 30	6. 18 30	5. 3 00	3. 23 00	5. 7 00				4. 0 45	
	13. 2 15	7. 20 15	6. 12 15	5. 14 45				5. 2 15	
	14. 21 15	9. 1 15	7. 21 30?	7. 1 30				6. 2 00	
	16. 20 45	19. 21 15	11. 2 00?	7. 4 15				13. 0 45	
	21. 0 30	26. 22 45	13. 18 15	8. 10 15				13. 1 30	
	24. 21 15	28. 23 30	22. 13 15	12. 2 30				16. 21 00	
	25. 20 15		25. 18 15	18. 11 30				17. 21 00	
	25. 21 15		27. 22 00?	25. 10 15				17. 21 30	
			28. 0 00	26. 1 00				17. 21 45	
			29. 19 30	28. 12 00				20. 19 15	
				29. 4 30				21. 2 00	
				30. 20 30				27. 17 45	
								28. 21 15	
								29. 1 00	
								29. 1 30	
								29. 2 30	
								29. 20 45	
								29. 21 45	
								30. 23 30	

Mai 1959

i.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
30. 15h 15	2. 20h 45	3. 23h 45	1. 15h 30	4. 21h 15				15. 2h 00	5. 20h 45
	3. 21 15	15. 23 30	2. 18 45	6. 5 30				15. 2 30	18. 2 30
	11. 1 15	21. 22 15	4. 2 00	6. 13 30				22. 23 15	29. 15 15
	16. 22 15		9. 12 15	7. 23 00				22. 23 45	
	18. 21 45		10. 22 45	17. 14 45				23. 0 30	
	19. 20 45		15. 14 30	23. 15 00				27. 19 45	
	26. 20 00		16. 23 05?	24. 18 30					
	26. 20 45		17. 17 00	26. 13 30					
	27. 21 15		18. 14 30	30. 1 00					
	28. 22 30		21. 10 30						
	28. 23 15		26. 5 30						
			26. 15 15						
			28. 2 45						
			28. 15 45						
			29. 3 45						

Juni 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
11. 10h 15	1. 21h 30	1. 0h 00	1. 17h 00	4. 5h 30				10. 21h 15	3. 17h 30
	6. 23 30	2. 23 30	2. 20 00	5. 11 30				14. 22 30	8. 3 15
	17. 20 30	8. 22 00	4. 0 00	6. 3 30				26. 21 45	
	17. 22 15	20. 23 45	6. 11 30	6. 11 15					
	19. 22 30		7. 13 30	9. 0 30					
	20. 1 00		8. 0 30	10. 10 30					
	25. 23 30		12. 4 15	12. 15 00					
			16. 21 45	23. 3 00					
			18. 14 45						
			20. 21 00						
			21. 14 30						
			26. 15 00						

## Juli 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
11. 17h 30	5. 19h 30	9. 21h 30	10. 1h 30?	6. 20h 45				13. 21h 30	3. 10h 00
15. 9 00	8. 19 45	16. 23 45	16. 20 00?	8. 18 30				13. 21 45	12. 11 45
	14. 0 00	27. 21 30	25. 19 00?	23. 14 15					
	24. 0 45		30. 5 00	29. 0 30					
	29. 23 15								
	31. 22 45								

## Aug. 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
16. 5h 00	3. 2h 00	8. 23h 30	2. 19h 30	7. 10h 00				10. 0h 30	
	3. 22 00	9. 2 45	3. 16 15	7. 22 45				15. 1 30	
	4. 0 30	11. 23 45	4. 13 30	12. 9 45				20. 22 00	
	11. 23 00	12. 0 45	4. 23 15?	15. 11 45				25. 22 00	
	12. 1 30	26. 0 30	5. 20 15	27. 9 30				25. 23 00	
	13. 0 30	27. 1 00	7. 0 00?	27. 13 00				27. 0 30	
	14. 16 30	27. 1 30	7. 21 00?	28. 9 30				27. 20 30	
	15. 2 45		8. 13 30	28. 10 30					
	27. 22 00		9. 14 45	29. 3 30					
	28. 22 15		13. 12 00						
	28. 23 45		15. 15 15						
	29. 1 00		17. 18 00?						
	30. 20 30		18. 19 15?						
	31. 23 15		29. 16 15						
			30. 13 30						
			31. 17 30						

Sept. 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
3. 23h 00	2. 19h 00	1. 18h 00	1. 2h 00?	3. 14h 00				8. 21h 30	3. 15h 30
	8. 22 00	1. 21 30	1. 4 45	3. 15 30				12. 22 30	12. 22 00
	9. 21 00	2. 22 30	1. 13 00	7. 15 15				14. 21 00	24. 4 30
	12. 23 45	4. 23 00	2. 2 00	8. 13 00				14. 21 30	28. 21 45
	27. 20 45	8. 23 30	4. 17 15	9. 11 45				14. 21 45	
		9. 23 30	5. 2 15	10. 1 45				15. 1 15	
		10. 23 15	7. 21 45	14. 7 30				16. 19 00	
		13. 1 30	12. 16 30	15. 12 15				16. 19 45	
		13. 22 30	14. 11 00	16. 11 00				22. 23 30	
		16. 20 30	15. 11 45	23. 8 00				27. 21 15	
		23. 21 45	15. 21 00?	24. 11 45					
		25. 22 30	17. 1 00	29. 11 45					
		26. 2 30	20. 3 00						
		26. 20 15	23. 21 00?						
		26. 23 30	23. 22 15						
		27. 23 30	24. 21 30						
		28. 2 30	26. 17 30						
		29. 23 00	27. 16 30						
		29. 23 30	28. 17 00?						
			29. 5 45						
			29. 19 15						
			29. 20 30						
			30. 9 00						
			30. 20 00						

## Okt. 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
	4. 20h 15	1. 1h 30	1. 5h 15	4. 20h 00				9. 0h 45	8. 1h 00
	6. 0 30	1. 21 30	1. 18 45	7. 17 45				9. 2 00	8. 10 30
	7. 21 30	1. 22 30	3. 18 00?	7. 21 15				11. 0 15	10. 18 30
	9. 0 15	3. 21 00	4. 5 15	8. 12 30				11. 0 30	15. 8 30
	10. 17 30	3. 22 45	5. 15 30	9. 10 45				11. 20 30	15. 11 30
	11. 1 00	5. 21 30	6. 17 30	9. 11 45				14. 21 45	23. 11 45
	11. 3 15	6. 21 15	9. 17 30	9. 18 45				15. 20 30	28. 9 15
	11. 19 15	9. 2 15	12. 13 00	10. 16 00				15. 21 00	
	25. 2 00	9. 20 30	14. 10 00	16. 3 45				15. 21 15	
	25. 17 30	11. 21 30	21. 17 00	19. 12 45				15. 21 45	
	25. 22 00	14. 22 45	22. 20 00	22. 6 45				16. 20 30	
	25. 22 30	15. 21 30	23. 21 45	26. 3 00				20. 21 30	
	26. 22 00	19. 0 30	25. 11 30	27. 7 15				25. 0 30	
	28. 21 00	19. 19 15	27. 18 15?	30. 0 45				27. 21 00	
		20. 0 15		31. 1 30				27. 21 30	
		22. 17 00						27. 22 00	
		23. 2 15						27. 23 30	
		30. 2 30							
		30. 23 30							
		31. 19 00							
		31. 20 15							
		31. 22 00							

Nov. 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
28. 0h 45	6. 21h 30	2. 21h 00	1. 4h 15	9. 4h 15			7. 3h 00	7. 16h 45	1. 13h 30
	7. 20 30	4. 20 45	1. 13 30	9. 11 30			7. 4 00	7. 18 00	2. 6 30
	8. 22 45	5. 20 30	1. 21 00?	9. 20 00				11. 21 30	5. 4 15
	9. 21 00	6. 1 30	6. 19 30?	10. 9 00				15. 21 30	10. 15 30
	9. 21 30	6. 22 15	7. 19 00?	11. 13 15				15. 21 45	24. 17 30
	10. 0 45	7. 20 45	8. 4 15	15 2 45				19. 0 45	
	12. 0 30	10. 23 00	8. 10 30	24. 9 00				20. 1 30	
	12. 1 15	16. 23 15	11. 4 45	25. 18 45				22. 21 30	
	12. 2 45	18. 19 45	12. 13 30	26. 22 45				22. 21 45	
	15. 18 15	22. 21 00	12. 23 30?	27. 22 45				25. 1 45	
	15. 23 15	25. 2 30	16. 3 00	28. 18 30				25. 21 45	
	19. 23 30	25. 23 45	18. 6 30	28. 18 45					
	20. 20 00	28. 21 30	19. 15 30	30. 6 45					
	20. 23 00		21. 20 00?						
	22. 0 30		27. 20 15						
	25. 0 30		30. 3 15						
	26. 23 30								

## Dez. 1959

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
5. 8h 00	4. 0h 30	2. 22h 00	1. 20h 00	2. 13h 45				7. 0h 30	23. 16h 30
	4. 21 30	3. 22 00	3. 3 00	8. 6 45				10. 20 30	
	7. 23 00	8. 21 45	4. 5 30	9. 17 45				16. 23 30	
	8. 23 30	12. 4 00	4. 18 15	11. 10 15				17. 4 00	
	9. 13 30	18. 1 30	6. 19 00?	11. 13 30				17. 4 30	
	10. 21 30	30. 20 00	7. 20 00	13. 19 30				18. 23 30	
	11. 23 00		8. 16 30	18. 4 45				20. 20 15	
	11. 23 30		9. 11 30	22. 4 15				20. 22 15	
	16. 22 00		11. 12 30	25. 0 30					
	17. 23 30		13. 2 00?						
	18. 23 00		13. 21 00						
	20. 1 30		15. 19 00						
	20. 22 30		15. 23 00?						
	20. 23 30		16. 17 30						
	21. 21 00		23. 7 45						
	22. 22 30		23. 12 00						
			23. 18 00						
			23. 23 45?						
			26. 0 30?						
			31. 21 00?						



VI/b

A

Die Kennwerte der Störungen

Uhr Kennwert	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	Summe
I.									
A .....	—	—	1	—	—	1	—	—	2
B .....	—	—	—	1	—	—	—	—	1
C .....	1	1	1	3	—	1	1	1	9
a .....	—	1	1	1	—	1	1	1	6
b .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
c .....	—	—	1	—	—	—	—	—	1
d .....	1	—	—	1	—	1	—	—	3
Summe .....	1	1	2	4	—	2	1	1	12
II.									
$\alpha$ .....	17	2	—	—	—	1	10	14	44
$\beta$ .....	19	2	—	—	1	2	12	42	78
$\gamma$ .....	9	1	—	—	—	1	6	41	58
$\delta$ .....	1	—	—	—	—	—	2	10	13
$\epsilon$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$\zeta$ .....	6	1	—	—	—	—	4	5	16
$\eta$ .....	2	1	—	—	—	—	—	—	3
$\theta$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$i$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
a .....	38	4	—	—	1	2	14	68	127
b .....	4	1	—	—	—	—	1	2	8
c .....	1	—	—	—	—	—	11	20	32
d .....	5	2	—	—	—	2	6	12	27
0-2 · 0,1 St. .	13	2	—	—	1	—	12	15	43
3-5 .....	25	4	—	—	—	4	17	67	117
6-10 .....	14	1	—	—	—	—	6	25	46
11- .....	3	—	—	—	—	—	—	9	12
Summe .....	55	7	—	—	1	4	35	116	218
III.									
a .....	3	—	—	—	—	—	2	5	10
$\beta$ .....	1	1	—	—	—	—	4	10	16
$\gamma$ .....	2	—	—	—	—	—	—	9	11
$\delta$ .....	1	—	—	—	—	—	—	5	6
$\epsilon$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$\zeta$ .....	5	—	—	—	—	—	3	14	22

## B

Uhr Kennwert	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	Summe
III.									
$\eta$ .....	3	—	—	—	—	1	5	11	20
$\theta$ .....	6	—	—	—	—	—	1	3	10
$\iota$ .....	3	1	—	—	—	—	1	1	6
$a$ .....	18	1	—	—	—	—	7	37	63
$b$ .....	1	—	—	—	—	—	—	—	1
$c$ .....	1	—	—	—	—	1	6	19	27
$d$ .....	1	—	—	—	—	—	2	2	5
$e$ .....	3	1	—	—	—	—	—	—	4
$f$ .....	—	—	—	—	—	—	1	1	2
$g$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$h$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$A$ .....	3	—	—	—	—	—	2	8	13
$B$ .....	5	—	—	—	—	—	6	26	37
$C$ .....	2	—	—	—	—	—	2	1	5
$D$ .....	2	—	—	—	—	—	—	5	7
$E$ .....	3	1	—	—	—	—	—	8	12
$F$ .....	5	—	—	—	—	1	5	9	20
$G$ .....	1	—	—	—	—	—	—	—	1
0-1,8 mV/km	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1,8-3,6 .....	4	—	—	—	—	—	—	3	7
3,6-5,4 .....	5	2	—	—	—	—	4	17	28
5,4-7,2 .....	6	—	—	—	—	1	3	9	19
7,2-9,0 .....	7	—	—	—	—	—	4	9	20
9,0- .....	2	—	—	—	—	—	5	20	27
0-3 · 0,1 St. ...	4	—	—	—	—	—	2	—	6
4- 5 .....	10	1	—	—	—	—	10	32	53
6- 8 .....	7	1	—	—	—	1	3	26	38
9-10 .....	3	—	—	—	—	—	1	1	5
Summe .....	24	2	—	—	—	1	16	59	102
% .....	44	29	—	—	—	25	46	51	46

## IV.

$\alpha$ .....	3+1	6	1	1	4	3	10+1	4	32+2
$\beta$ .....	1+1	3	—	1	3	6	9+2	2+1	25+4
$\gamma$ .....	1	1	—	—	1	5	3+2	—	11+2
$\delta$ .....	1	—	—	—	—	—+1	—	2+1	3+2

C

Uhr Kennwert	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	Summe
-----------------	-----	-----	-----	------	-------	-------	-------	-------	-------

IV.

$\varepsilon$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$\zeta$ .....	2	3	1	4	7	10	4+2	2+4	33+6
$\eta$ .....	—+4	2	—	7	3	—	1+3	2+2	15+9
$\theta$ .....	1+1	2	—	2	1	—	—+1	—+3	6+5
$\iota$ .....	—	3	—	—	—	—	—	—+1	3+1
$a$ .....	5+6	11	—	10	7	16+1	20+5	9+7	88+19
$b$ .....	—	1	—	—	—	—	1+1	—	2+1
$c$ .....	—	1	—	—	—	1	3+3	—+3	5+6
$d$ .....	4+1	4	2	5	4	8	3+2	3+1	33+4
$e$ .....	—	2	—	—	—	—	—	—	2
$f$ .....	—	1	—	—	—	—	—	—+1	1+1
$g$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$h$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$A$ .....	3	—	—	1	—	—	2	1+2	7+2
$B$ .....	4+2	6	2	8	8	10	8+6	7+3	53+11
$C$ .....	0	5	—	2	5	5	6+2	2	26+2
$D$ .....	—+2	—	—	4	6	6	7	2+3	25+5
$E$ .....	—+1	2	—	—	—	3	2+1	—+2	7+4
$F$ .....	1+2	3	—	—	1	1+1	2+2	—+1	8+6
$G$ .....	—	1	—	—	—	—	—	—	1
0-1,8 mV/km	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1,8-3,6 .....	3	13	1	4	6	9	9	7	52
3,6-5,4 .....	4+2	1	1	5	9	3	7+2	1+3	31+7
5,4-7,2 .....	1+3	3	—	2	—	5+1	5+1	1+4	17+9
7,2-9 .....	—+1	2	—	2	3	4	4+1	1+3	16+5
9,0- .....	1+1	1	—	2	2	4	2+7	2+2	14+10
0-3 · 0,1 St. ...	4+1	12	2	9	5	9	5	4	50+1
4-5 .....	3+3	6	—	6	9	13	15+4	7+4	59+11
6-8 .....	2+3	2	—	—	5	2+1	7+7	1+7	19+18
9- .....	—	—	—	—	1	1	—	—+1	2+1
Summe .....	9	20	2	15	20	25	27	12	130
+? .....	16	20	2	15	20	26	38	24	161

Nach dem —+ Zeichen stehende Zahlen sind mit unbestimmten Pulsationen behaftete Bais.

## D

Uhr Kennwert	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	Summe
-----------------	-----	-----	-----	------	-------	-------	-------	-------	-------

## V.

$\alpha$ .....	6	1	—	4	1	2	2	1	17
$\beta$ .....	3	2	—	—	2	2	2	1	12
$\gamma$ .....	2	—	—	—	1	1	6	3	13
$\delta$ .....	1	—	—	1	—	—	—	1	3
$\varepsilon$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$\zeta$ .....	3	3	1	4	5	2	—	—	18
$\eta$ .....	1	5	5	6	8	—	2	1	28
$\theta$ .....	—	3	5	8	3	—	—	—	19
$\iota$ .....	—	—	1	—	—	—	—	1	2
$a$ .....	13	8	5	19	15	7	8	4	79
$b$ .....	—	—	—	1	1	—	—	—	2
$c$ .....	—	1	1	—	—	—	1	—	3
$d$ .....	3	5	5	3	4	—	3	3	26
$e$ .....	—	—	—	—	—	—	—	1	1
$f$ .....	—	—	1	—	—	—	—	—	1
$g$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$h$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$A$ .....	1	—	2	—	1	—	—	—	4
$B$ .....	12	11	7	11	9	1	2	2	55
$C$ .....	1	2	—	5	7	3	2	2	22
$D$ .....	2	1	1	5	2	3	7	1	22
$E$ .....	—	—	—	1	1	—	1	2	5
$F$ .....	—	—	1	1	—	—	—	—	2
$G$ .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0—1,8 mV/km	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1,8—3,6 .....	6	5	5	9	6	1	2	3	37
3,6—5,4 .....	3	5	4	11	7	5	4	2	41
5,4—7,2 .....	3	1	3	1	4	—	3	1	16
7,2—9,0 .....	1	1	—	1	2	1	1	1	8
9,0— .....	3	2	—	1	1	—	2	1	10
1 · 0,1 St. ....	15	10	11	18	16	7	10	7	94
2 .....	1	4	1	5	4	—	2	1	18
Summe .....	16	14	12	23	20	7	12	8	112

## E

Uhr Kennwert	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	Summe
VIII-IX.									
VIII. ....	—	2	1	—	—	1	—	—	4
IX. ....	32	4	—	—	—	3	13	52	104
X.									
<i>a</i> .....	—	—	—	2	1	1	—	—	4
<i>β</i> .....	—	—	1	1	—	3	1	—	6
<i>γ</i> .....	—	1	—	3	—	—	1	1	6
<i>δ</i> .....	—	1	—	—	1	1	—	1	4
<i>ε</i> .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>ζ</i> .....	—	1	—	—	1	1	1	—	4
<i>η</i> .....	1	1	—	1	—	—	—	—	3
<i>θ</i> .....	1	—	1	—	—	—	—	—	2
<i>ι</i> .....	—	—	—	—	—	1	—	—	1
<i>a</i> .....	—	2	1	—	2	2	2	1	10
<i>b</i> .....	—	—	1	—	—	—	—	1	2
<i>c</i> .....	—	1	—	—	—	—	1	—	2
<i>d</i> .....	2	1	—	7	1	4	—	—	15
<i>e</i> .....	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>f</i> .....	—	—	—	—	—	1	—	—	1
0-1,8 mV/km	—	—	—	—	1	1	—	—	2
1,8-3,6 .....	1	2	—	3	2	4	1	1	14
3,6-5,4 .....	1	—	1	1	—	—	—	—	3
5,4-7,2 .....	—	2	—	3	—	1	2	—	8
7,2-9 .....	—	—	1	—	—	1	—	1	3
Summe .....	2	4	2	7	3	7	3	2	30

## VII.

## Die Ergebnisse der schnellen Registrierungen im Jahr 1959

Uhr Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mittel
<b>Nord-Komponente</b>																									
1.	103	109	119	110	114	112	102	85	83	81	84	82	84	85	85	89	90	90	104	108	97	96	103	102	96,1
2.	20	22	25	42	53	61	61	68	68	65	67	59	58	50	44	37	34	32	30	26	17	21	12	16	41,2
3.	2,3	2,3	2,2	2,0	4,2	5,3	4,6	7,0	9,8	7,6	6,2	5,2	6,2	4,3	5,1	4,0	3,9	1,8	0,9	1,3	1,0	1,6	0,5	1,2	3,77
4.	1,0	1,3	0,9	1,1	1,3	1,4	1,4	2,1	3,9	4,8	2,9	2,7	2,9	1,4	2,2	1,4	2,1	1,5	1,1	1,3	1,1	1,0	0,5	0,8	1,75
5.	126	135	147	155	173	180	169	162	165	158	160	149	151	141	136	131	130	125	136	137	116	120	116	120	141,8
6.	60	67	60	46	53	52	50	43	33	42	32	24	23	27	35	41	40	43	59	65	53	52	63	57	47
7.	112	106	107	108	107	118	112	106	111	121	120	117	120	117	108	102	104	102	109	115	112	104	105	019	110
8.	67	64	84	111	124	146	152	158	163	163	163	159	153	141	133	140	132	125	98	86	81	76	69	64	119
9.	52	78	72	95	101	108	129	131	123	119	119	120	116	115	111	104	94	83	68	63	68	57	52	57	93
10.	52	49	37	34	22	27	36	38	31	36	33	33	37	37	32	24	22	21	24	27	29	33	28	43	33
11.	220	216	207	247	278	299	307	364	416	420	375	361	367	314	329	287	293	258	220	217	207	213	160	187	$283 \cdot 10^{-6}$ V/km
<b>Ost-Komponente</b>																									
1.	180	200	183	179	175	172	143	118	111	109	106	97	97	91	103	108	106	111	143	161	155	162	168	166	139,3
2.	26	30	30	44	61	68	82	80	78	76	75	77	76	71	59	52	53	49	47	28	20	24	18	20	51,8
3.	2,1	3,2	2,6	2,4	4,6	7,5	9,0	11,2	13,9	13,3	11,0	10,1	13,0	10,6	9,5	9,6	6,1	4,7	2,5	1,2	2,6	2,0	2,0	2,8	6,56
4.	1,1	3,0	2,3	1,8	1,2	2,4	3,0	4,6	5,7	6,1	5,4	4,9	6,0	4,8	4,3	4,4	2,8	3,2	1,1	0,8	0,4	1,1	0,6	0,5	2,98
5.	209	236	218	227	242	250	237	214	209	205	195	189	192	177	176	174	168	168	194	191	178	189	189	189	200,6
6.	121	135	119	114	98	103	79	78	71	77	69	59	54	50	51	61	66	74	98	113	117	111	121	116	90
7.	93	88	90	101	99	101	96	100	107	115	111	100	104	99	91	86	92	91	86	94	89	82	76	81	95
8.	58	69	89	108	126	145	158	165	166	166	167	173	173	164	150	161	150	136	110	91	69	65	67	56	124
9.	75	82	80	91	87	92	123	138	130	133	140	148	146	143	136	131	130	123	105	85	75	83	69	80	109
10.	63	43	33	28	17	22	24	21	18	26	27	30	32	28	34	24	26	30	36	42	42	37	46	54	33
11.	179	207	203	215	242	278	328	384	421	425	415	415	444	424	381	370	325	310	231	180	172	182	162	171	$292 \cdot 10^{-8}$ V/km

**Ergebnisse der Schnellregistrierung für das Jahr 1959**

**In jedem Monat, in jeder Komponente**

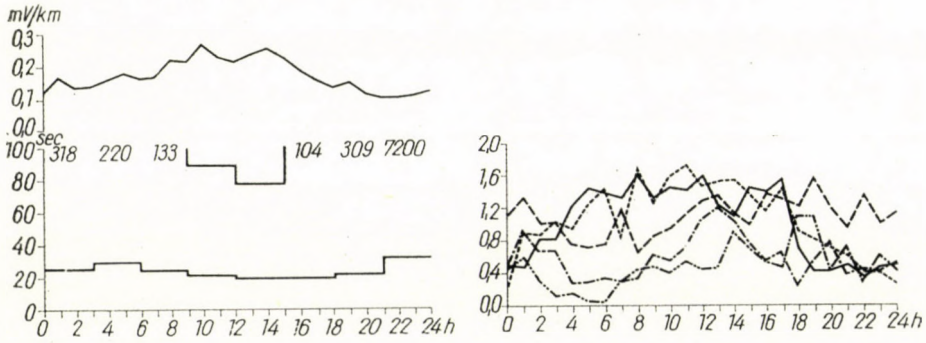
**1. links oben: Mittlere Amplitude**

**2. links unten: Mittlere Periode oben: aus Pulsationen, deren Amplitude größer, als 0,1 mV/km ist, unten aus allen Pulsationen**

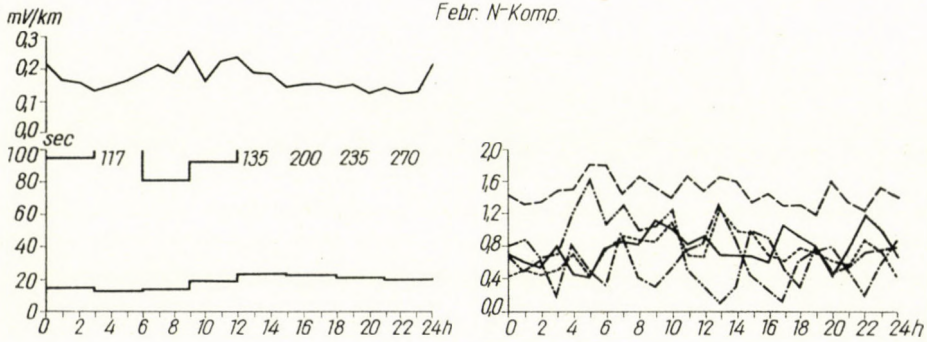
**Rechts: Mittlere Charakterzahlen für die Pulsationen von:**

- 0-8 Sec
- 8-15 Sec
- 15-30 Sec
- 30-60 Sec
- 1-2 Min

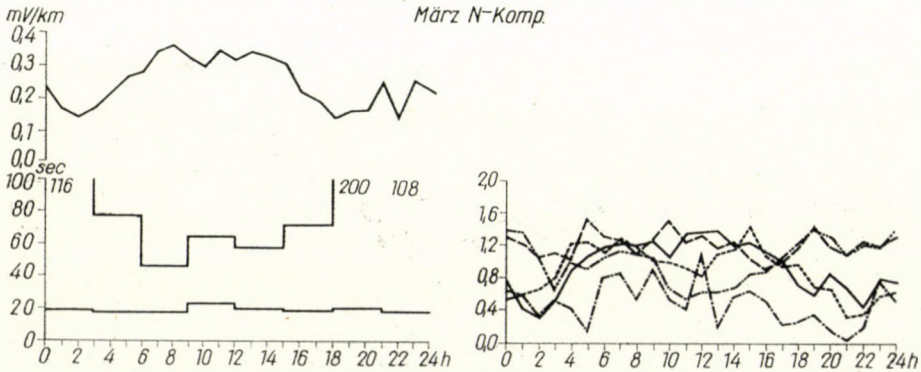
*Jan. N-Komp.*

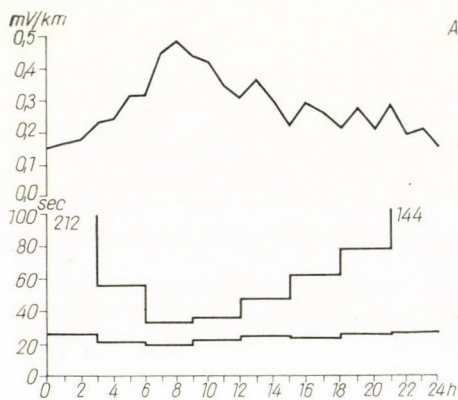


*Febr. N-Komp.*

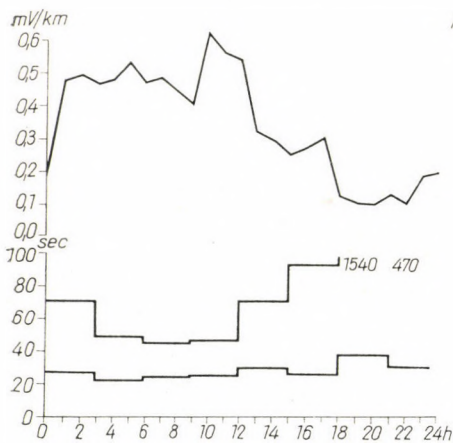
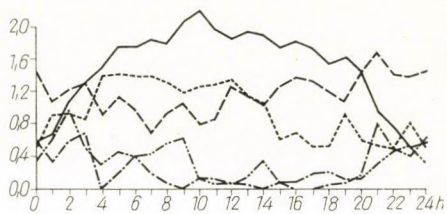


*März N-Komp.*

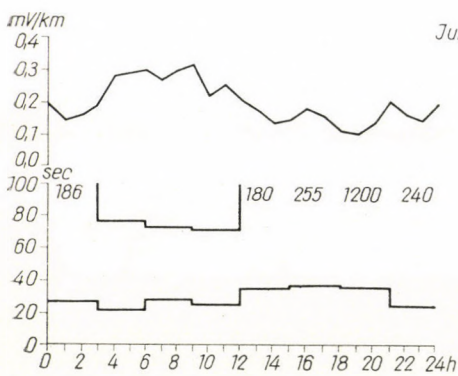
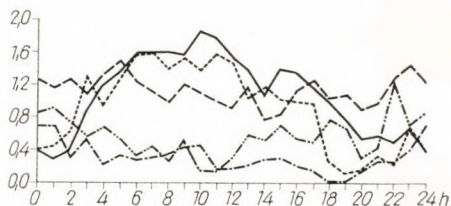




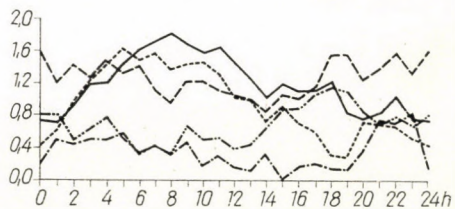
*Apr. N-Komp.*



*Mai N-Komp.*

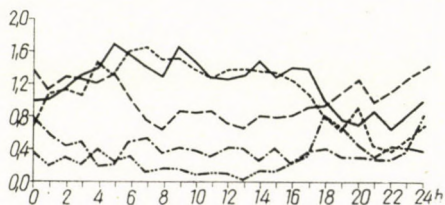
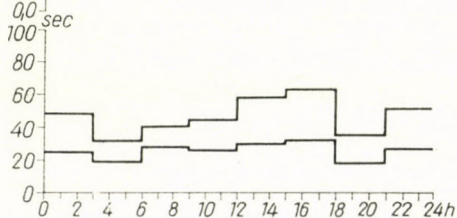


*Juni N-Komp.*

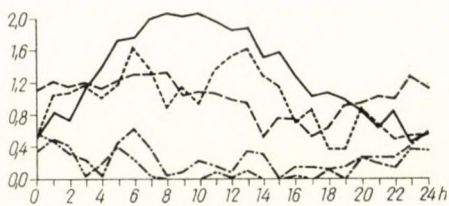
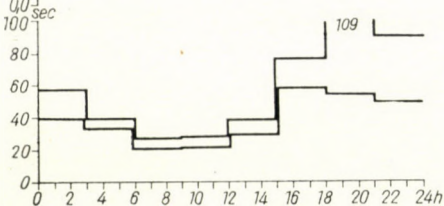




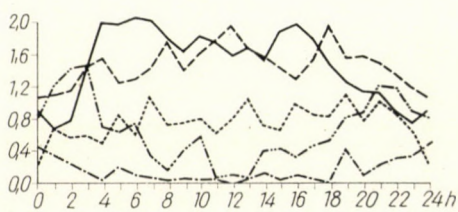
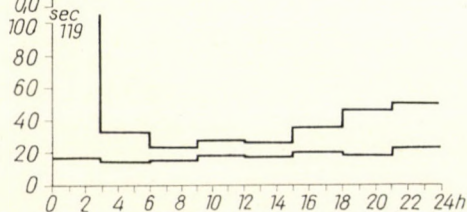
0,9 mV/km  
0,8  
0,7  
0,6  
0,5  
0,4  
0,3  
0,2  
0,1  
0,0  
100 sec  
80  
60  
40  
20  
0  
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24h  
Juli N-Komp.

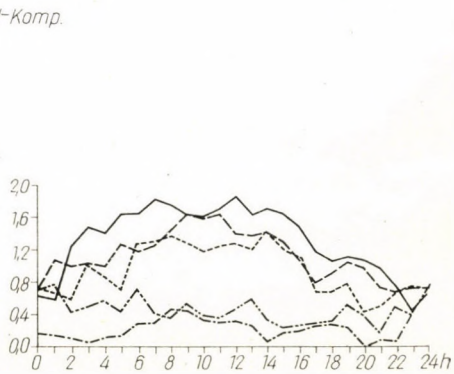
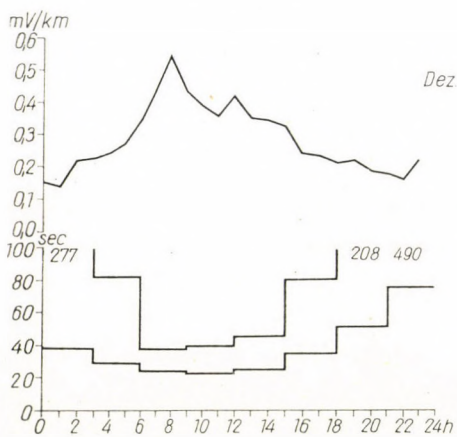
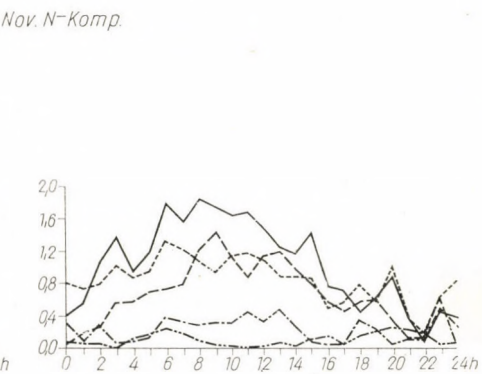
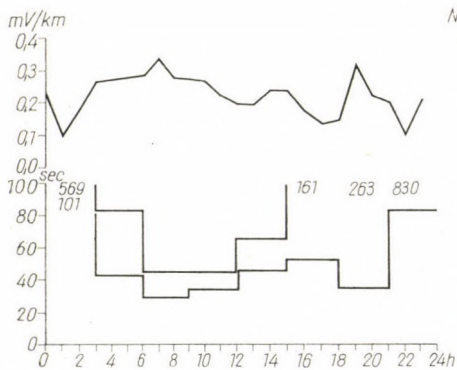
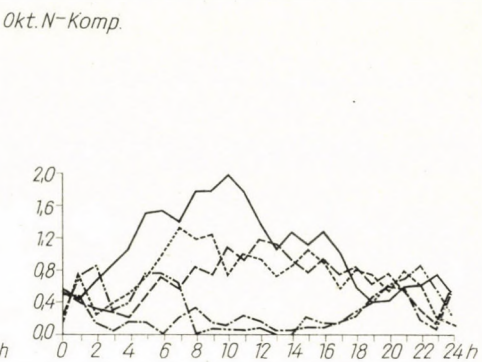
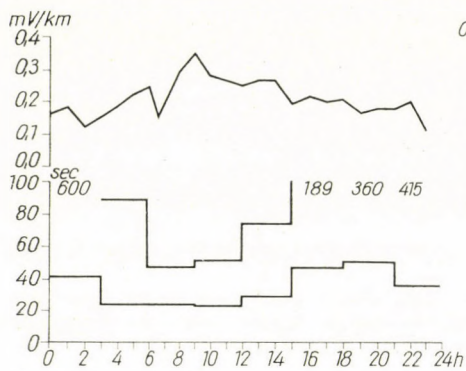


0,4 mV/km  
0,3  
0,2  
0,1  
0,0  
100 sec  
80  
60  
40  
20  
0  
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24h  
Aug. N-Komp.

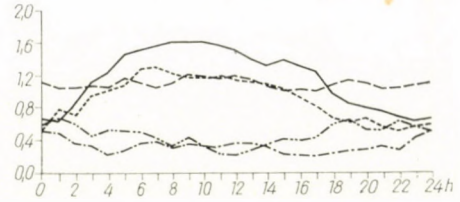
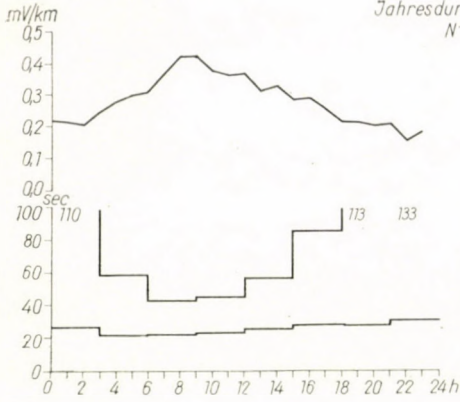


0,9 mV/km  
0,8  
0,7  
0,6  
0,5  
0,4  
0,3  
0,2  
0,1  
0,0  
100 sec  
80  
60  
40  
20  
0  
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24h  
Sept N-Komp

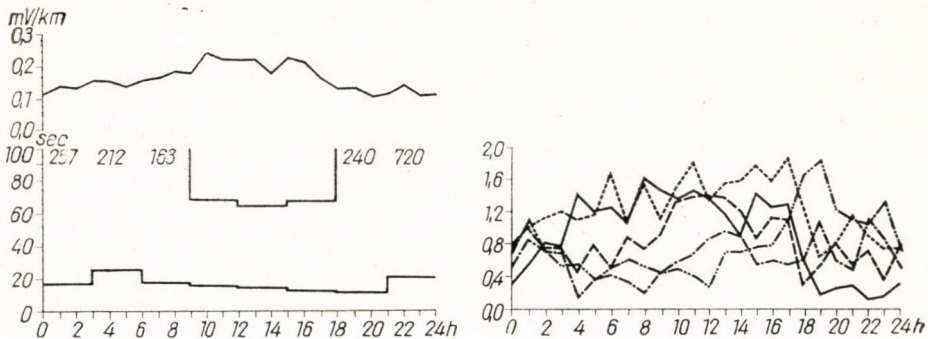




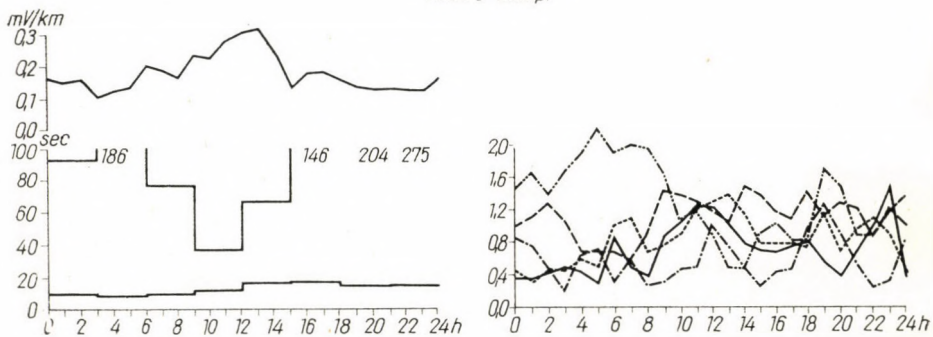
Jahresdurchschnitt 1959  
N-Komp



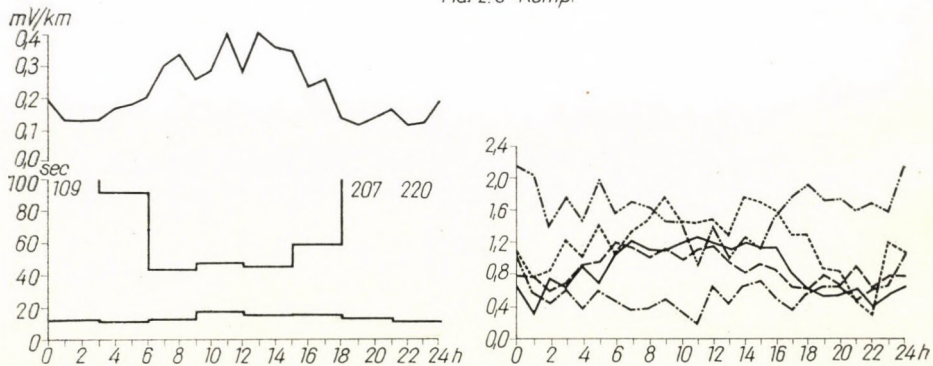
Jan. 0-Komp.



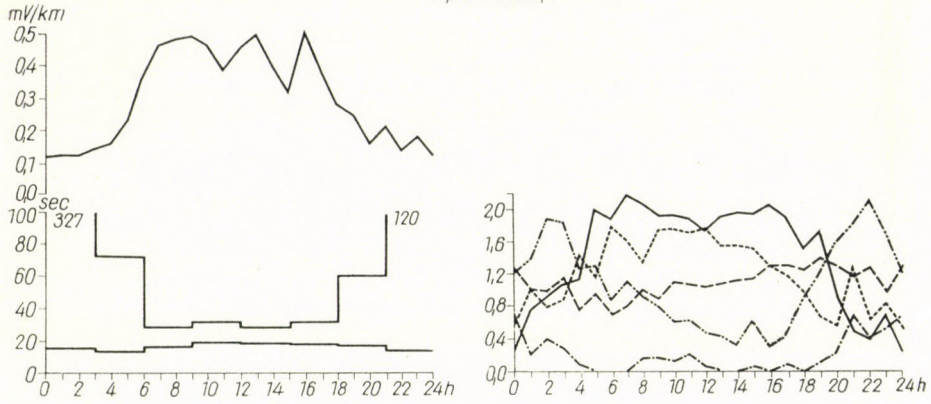
Febr. 0-Komp.



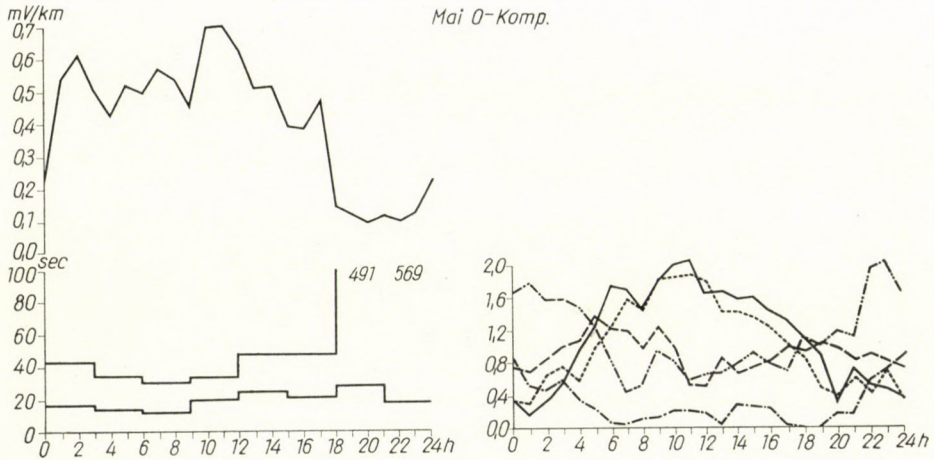
März. 0-Komp.



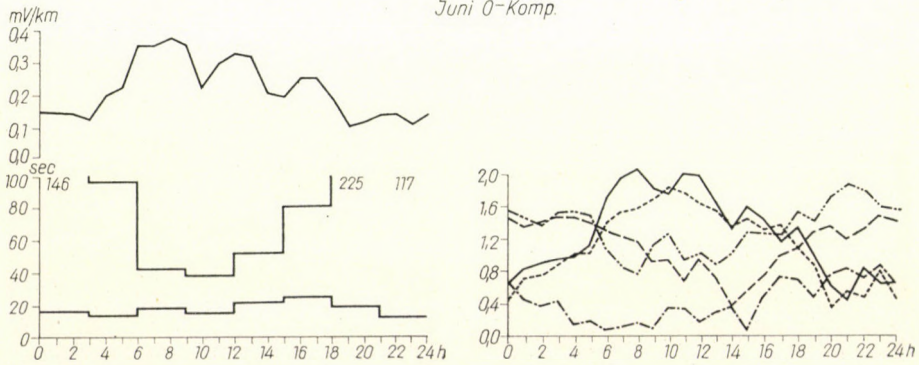
Apr. 0-Komp.

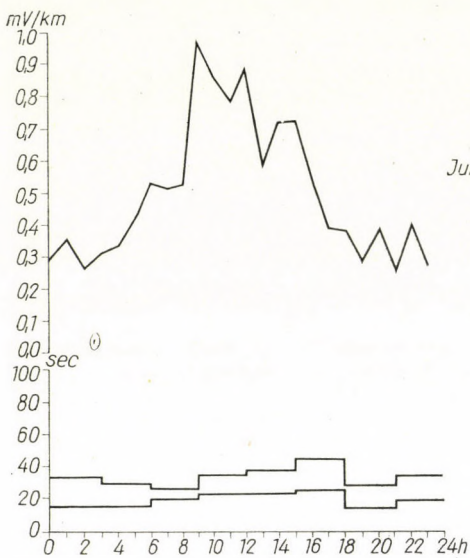


Mai 0-Komp.

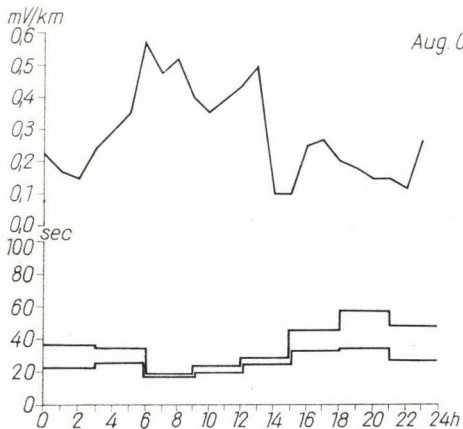
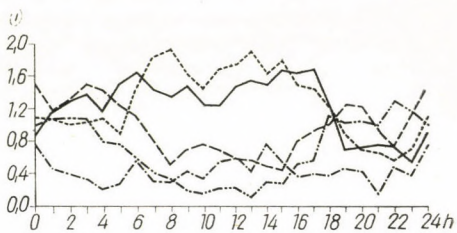


Juni 0-Komp.

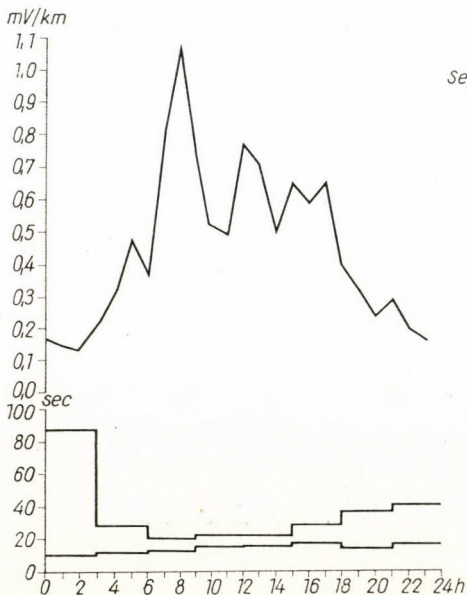
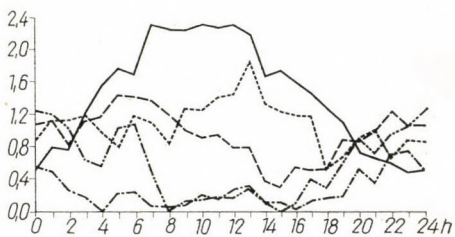




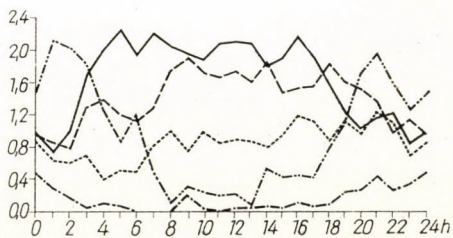
*Juli 0-Komp.*



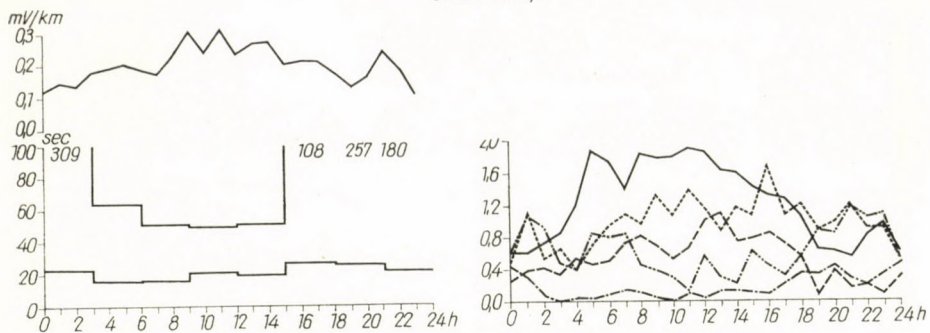
*Aug. 0-Komp.*



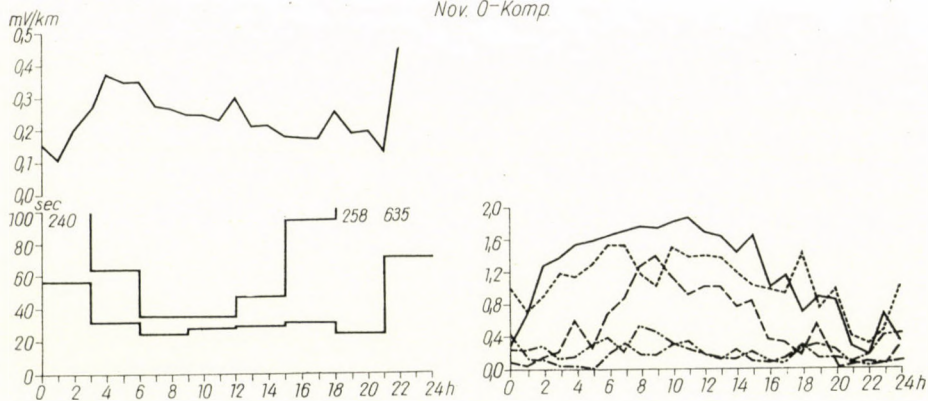
*Sept. 0-Komp.*



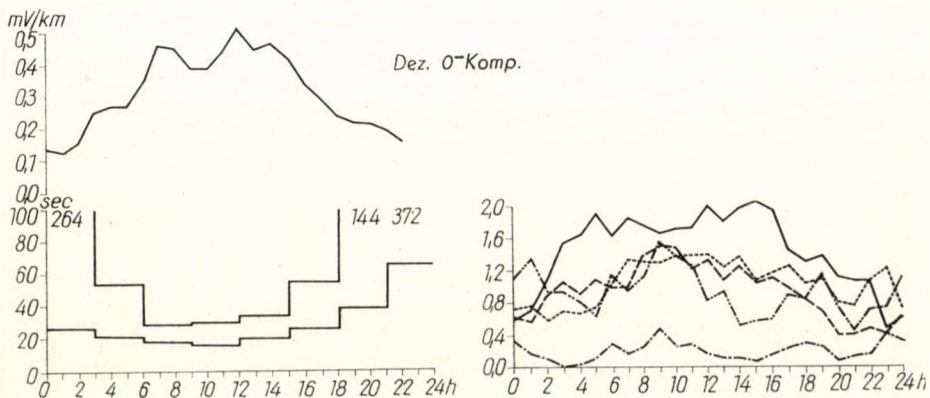
Okt. 0-Komp.

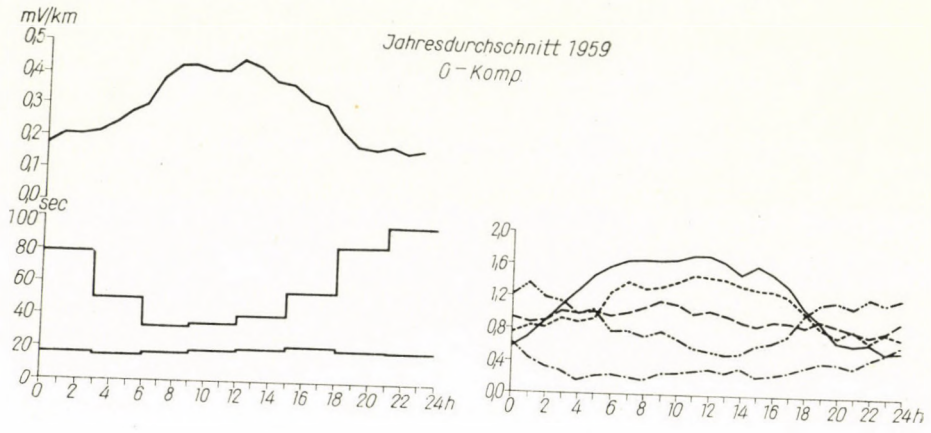


Nov. 0-Komp.



Dez. 0-Komp.

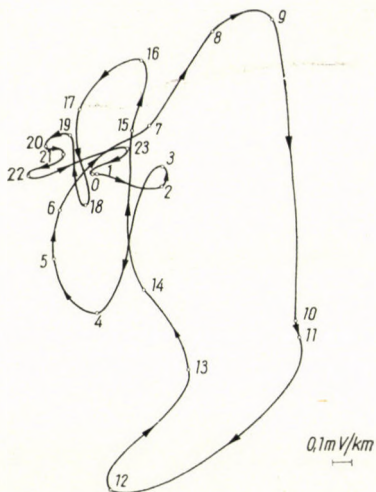




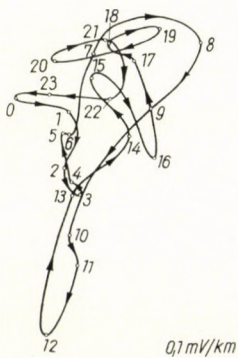


Vektordiagramme in den einzelnen Monaten und in dem Jahr 1959.

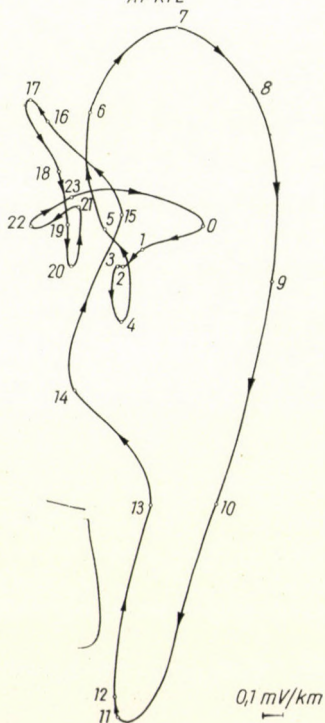
FEBRUAR



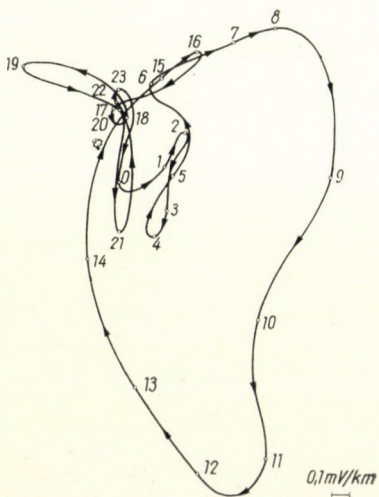
JANUAR

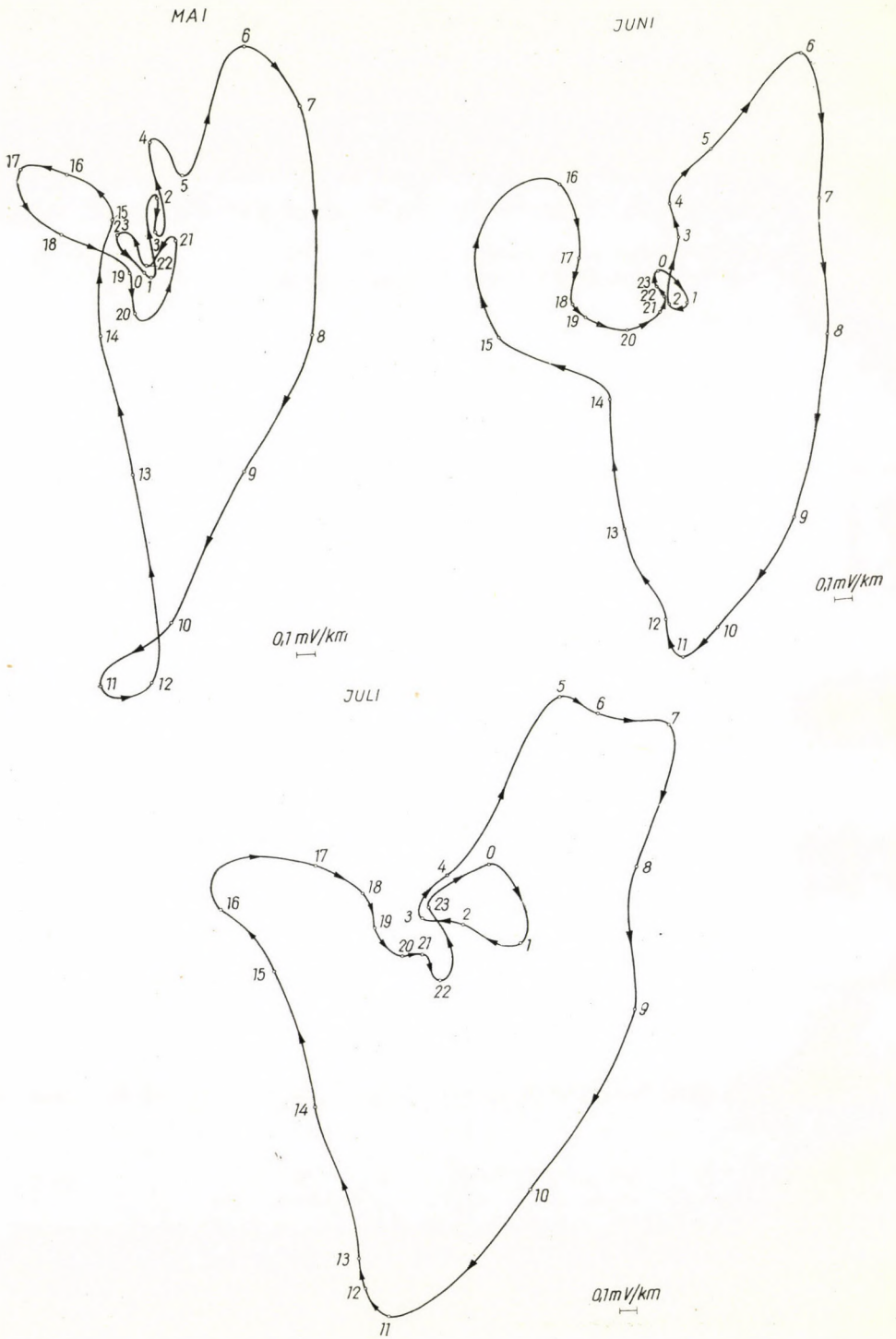


APRIL

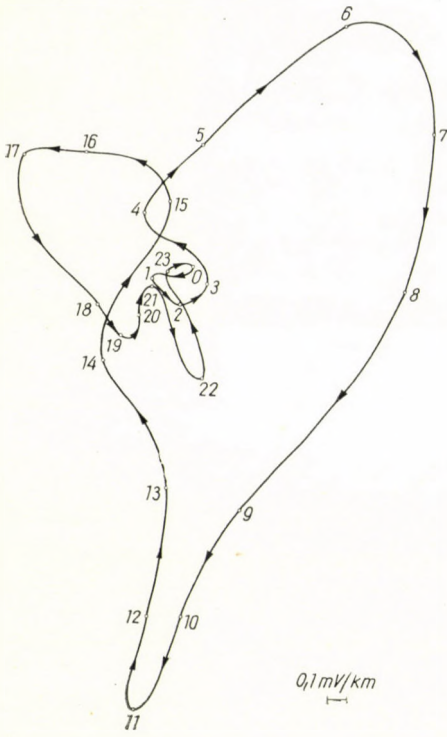


MÄRZ

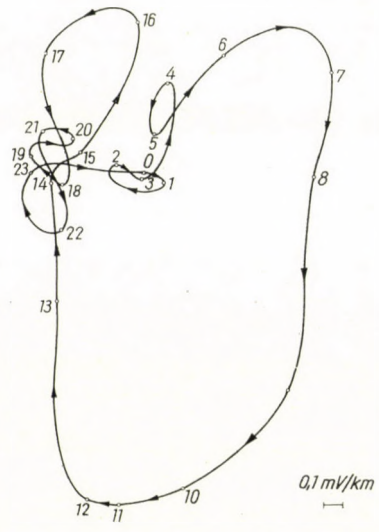




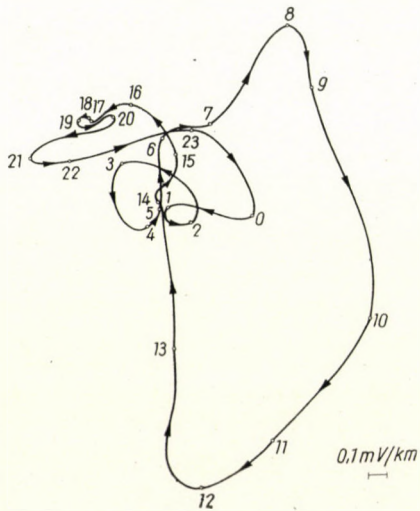
AUGUST



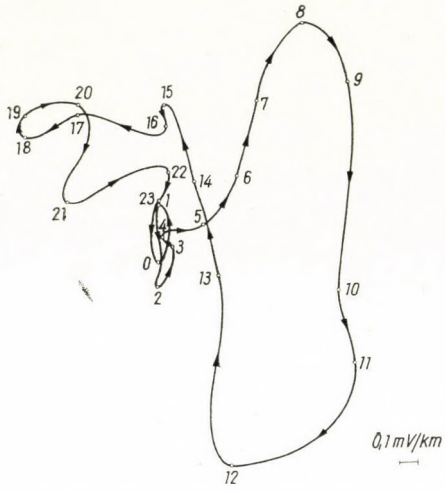
SEPTEMBER



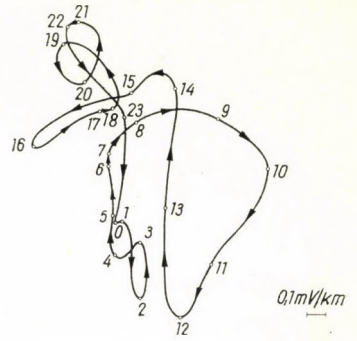
OKTOBER



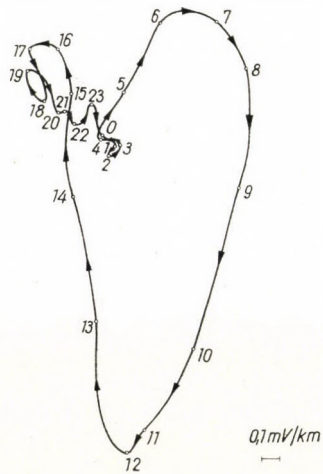
NOVEMBER



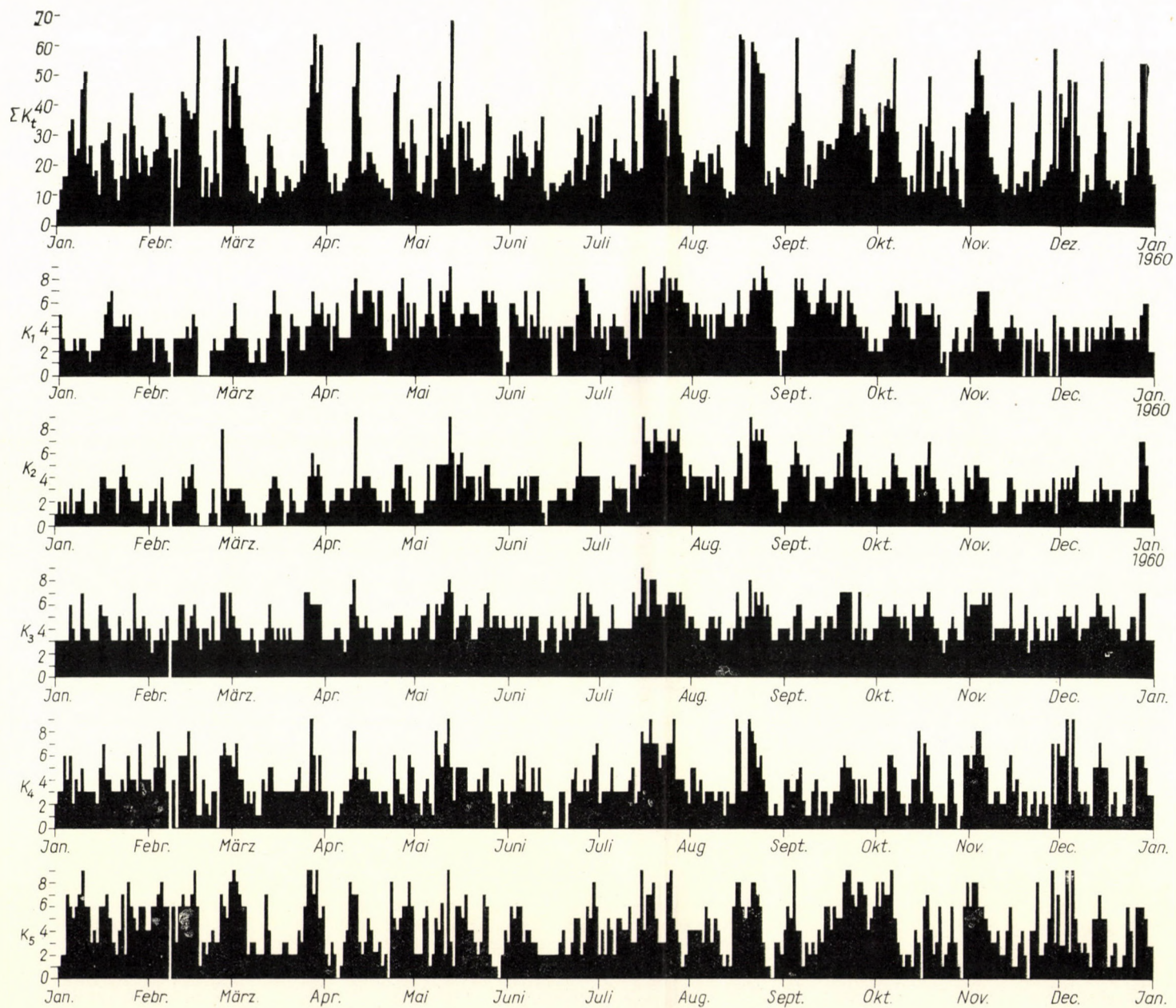
DEZEMBER



Jahresdurchschnitt 1959



Die Summe der tellurischen Charakterzahlen ( $\Sigma K_t$ ) und die Charakterzahlen in den 5 Frequenzklassen





BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG — COMPTE RENDU DE  
LIVRES — ОБЗОР КНИГ

---

*A. Tárczy-Hornoch und Wl. K. Hristow*

TAFELN FÜR DAS KRASSOWSKY-ELLIPSOID (ZONE 40°—55°)

Verlag Akadémiai Kiadó, Budapest 1959. 660 Seiten, A4

Das Buch bezweckt, die an dem Krassowsky-Ellipsoid mittels Gauß-Krügerschen Koordinaten und Rechenmaschine auszuführenden Rechnungen der höheren Geodäsie zu erleichtern. Schon hieraus ergibt es sich, daß die Geodätische Konferenz der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, als sie im Jahre 1956 die Zusammenstellung solcher Tabellen vorschlug, bestrebt war, damit dem praktischen Bedarf entgegenzukommen. Diese gewaltige Arbeit hatten A. TÁRCZY-HORNOCH und WL. K. HRISTOW im Namen des Forschungslaboratoriums für Geodäsie der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und des Zentrallaboratoriums für Geodäsie der Bulgarischen Akademie der Wissenschaften als gemeinsame Aufgabe übernommen. Das Buch kam im Sommer 1959 in einer Ausführung, die der Akademischen Druckerei würdig ist, auf den Markt.

Die Arbeit wurde so verteilt, daß die Berechnungen mit variablen Koeffizienten im bulgarischen Laboratorium, die Berechnungen mit konstanten Koeffizienten im ungarischen Laboratorium ausgeführt worden sind.

Die hierbei angewandten Formeln und Bezeichnungen wurden größtenteils dem Werk von HAZAY und TÁRCZY-HORNOCH: Berechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten (Budapest 1951) und WL. HRISTOW: Die Gauß-schen und geographischen Koordinaten auf dem Ellipsoid von Krassowsky (Berlin 1955) entnommen. Weitere wichtige Quellen sind hier die Studien HAZAYS bezüglich des Reduktionsverfahrens mit konstantem Anschlußpunkt (Zur Umrechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten von einem Projektionsstreifen in den benachbarten. Acta Technica Hungarica, Tom. I. Fasc. 2. 1951. — Die Transformation Gauß-Krügerscher Koordinaten zwecks Darstellung in kleinem Maßstabverhältnis. Acta Technica Hungarica, Tom. IV. Fasc. 1—4. 1952), sowie das zur Ausdehnung des Anwendungsgebietes des Koordinatenumrechnungsverfahrens von HAZAY ausgearbeitete Werk von F. EILINGZFELD und Gy. SZÁDECZKY-KARDOSS (Mitteilung der Fakultäten für Bergingenieure und Geo-Ingenieure. Band XX.).

Das Buch beginnt mit einer 68 Seiten langen Einleitung in russischer Sprache. Hier werden die im Buch vorkommenden Bezeichnungen besprochen, der Inhalt jeder einzelnen Tabelle auf genauer mathematischer Grundlage erklärt und die Anwendung mit je einem geschickt aufgestellten Rechenbeispiel illustriert. Die Formeln werden durch besondere Zeichen aufgeteilt, um darauf aufmerksam zu machen, welche Glieder bei der auf dm, cm oder mm scharfen Rechnung beachtet werden sollen. Diese gut verfaßte, sehr schön gedruckte, unentbehrliche Einleitung wiederholt sich in ihrer ganzen Länge auch in deutscher und englischer Sprache.

Der Einleitung folgen dreißigerlei Tafeln. Darunter sind 16 vom bulgarischen Laboratorium, 14 vom ungarischen Laboratorium verfertigt worden. Zur Vermeidung von Druckfehlern wurden die auf Schreibmaschine geschriebenen und überprüften Originaltafeln auf fotomechanischem Wege vervielfältigt.

Die im bulgarischen Laboratorium berechneten Tafeln sollen vor allem zur Lösung folgender Aufgaben dienen: Berechnung der Grundfunktionen, der Krümmungswerte, der Fläche zwischen den Meridianen und Parallelkreisen; Bestimmung der geographischen Breite aus der Länge des Meridianbogens; Lösung der ersten und zweiten geodätischen Hauptaufgabe auf Grund der geographischen, bzw. Gauß-Krügerschen Koordinaten; Berechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten, des Linearmoduls und der Meridiankonvergenz aus den geographischen Koordinaten; Richtungs- und Längenreduktionsberechnung der Gauß-Krügerschen Projektion; Umrechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten von einem 3° breiten Streifen in einen 6° breiten, oder in einen benachbarten 3° breiten, bzw. von einem 6° breiten Streifen in einen 3° breiten oder in einen benachbarten 6° breiten Streifen, mit Hilfe der Methode der variablen Koeffizienten.

Der erste Teil der im ungarischen Laboratorium verfertigten Tabellen kann hauptsächlich zur Berechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten, der Meridiankonvergenz und des Linearmoduls aus den geographischen Koordinaten, oder zur Berechnung der geographischen Koordinaten, der Meridiankonvergenz und des Linearmoduls aus dem Gauß-Krügerschen Koordinaten verwendet werden. Im übrigen Teil befinden sich Tabellen zur Umrechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten zwischen den verschiedenen Streifen in den obenerwähnten sämtlichen Variationen für den Fall, wenn die Aufgabe mit der Methode der konstanten Koeffizienten oder mit dem Reduktionsverfahren gelöst wird.

Als im Sommer 1957 das Manuskript dieses Buches in die Druckerei kam, waren die Verfasser wahrscheinlich der Meinung, sie hätten sich für lange Zeit aller Sorgen auf diesem Gebiete entledigt. Es geschah aber anders. Dieses wichtige, aktuelle Problem beschäftigte A. TÁRCZY-HORNOCH auch weiterhin, und er fand zur Umrechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten seither mehrere neue Lösungen (Umrechnung zwischen Gauß-Krügerschen Projektionsstreifen mittels zweier Anschlußpunkte. *Geodézia és Kartográfia*, 1959/1. — TÁRCZY-HORNOCH: Umrechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten von einem Streifen zum anderen mit Hilfe dreier Anschlußpunkte. *Geodézia és Kartográfia*, 1959/2. — TÁRCZY-HORNOCH: Zur Umrechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten mit drei Anschlußpunkten. *Geodézia és Kartográfia*, 1960/1.). Unter diesen ist insbesondere das Bogenschnittverfahren mit drei Anschlußpunkten zweckmäßig, da es eine umfassende, schnelle Kontrolle über die Richtigkeit der Rechnung sichert. Es ist erfreulich daß die Tabellen dieses Buches auch bei diesen Umrechnungen gut verwendet werden können. — Seine geistreich ausgearbeitete Methode zur entsprechenden Berechnung der Näherungskordinaten wird auch bei den früheren Umrechnungsverfahren erfolgreich angewandt werden können, daher bereitete uns sein Entschluß, dem Buche zu diesem Zwecke noch einige Seiten in der Form eines Heftes hinzuzufügen, besondere Freude. Mit diesem Heft wird der Wert und die Gebrauchbarkeit des Buches noch weiter erhöht.

*E. Regőczy*

*P. Kitaibel und A. Tomtsányi*

DISSERTATIO DE TERRAE MOTU MORENSI ANNO 1810

(Verlag Akadémiai Kiadó, 1960, 110 + LVIII Seiten, Beilage: 7 Tabellen, Preis: Ft 35,—

Unter obigem Titel hat die Ungarische Akademie der Wissenschaften als Faksimile das Werk PAUL KITAIBELS und ADAM TOMTSÁNYIS herausgegeben, welches in Buda im Jahre 1814 im Verlag der Universitätsdruckerei (Egyetemi Nyomda) erschienen und im Gebiete der ungarischen Seismologie von hervorragender Bedeutung ist.

Es sind 150 Jahre vergangen, seitdem am 14. Januar 1810 in Mór ein Erdbeben ausgebrochen ist. Dieses Erdbeben machte sich auch in den Städten Praha, Wien, Bratislava, Eger, Baja, Keszthely und Sopron bemerkbar. Im zentralen Gebiet des Erdbebens gab es drei Todesfälle, Kirchen und Häuser stürzten ein, viele Gebäude wurden stark beschädigt. Nach dem Erdbeben wandte sich das Komitat Fejér mit der Bitte an den Rat der Pester Universität, eine Kommission zur Untersuchung des Erdbebengebietes um Mór auszusenden. Die Pester Universität kam dieser Bitte entgegen und entsandte die Gelehrten KITAIBEL, TOMTSÁNYI und FABRICI, die gemeinsam an der Untersuchung der verursachten Schäden an Ort und Stelle teilnahmen; der inzwischen verstorbene Gelehrte FABRICI konnte sich jedoch an der Zusammenfassung der Ergebnisse nicht mehr beteiligen.

Der Bericht über das Erdbeben wurde in lateinischer Sprache verfaßt. In der beigelegten Karte benutzten die Verfasser zum erstenmal absichtlich Isoseisten.

Nicht bloß die Rarität dieses Buches begründet seine Neuauflage, sondern vor allem die Tatsache, daß es, wenn es auch in lateinischer Sprache verfaßt wurde, doch das erste ungarische Werk ist, welches die Erdbeben nicht nur in ihren Einzelheiten, sondern auch im allgemeinen behandelt.

Die erste ausführliche seismologische Monographie unseres Landes, die von bahnbrechender Bedeutung ist, enthält zwei in Kupfer gestochene seismologische Karten.

Das Buch zerfällt in drei Abschnitte. Der erste befaßt sich, unter Bezugnahme auf viele ausländische Verfasser, mit den Erdbeben im allgemeinen, der zweite mit dem Erdbeben in Mór vom 14. Januar 1810, wobei dieses Gebiet vom geographischen und geologischen Standpunkt eingehendst beschrieben wird. Der dritte Abschnitt behandelt die verschiedenen Hypothesen bezüglich der Ursachen der Erdbeben.



ANTAL RÉTHLY fügt dem Buch ein Nachwort bei, in welchem er die wissenschaftliche Arbeit KITAIBELS, TOMTSÁNYIS und FABRICIS würdigt.

Es ist das Verdienst Antal RÉTHLYS, daß dieses Werk auf Grund der Genehmigung der Geophysikalischen Hauptkommission der Ungarischen Akademie der Wissenschaften erscheinen konnte. Ein seit langem verlauteter Wunsch der ausländischen Seismologen ist mit der Neuauflage der Monographie KITAIBEL—TOMTSÁNYIS über das Erdbeben 1810 in Mór, dieses bedeutenden Dokumentes der Geschichte der ungarischen Wissenschaft, zur Wirklichkeit geworden.

V. Scheffer

László Bendefy

#### NIVELLIERARBEITEN IN UNGARN 1820—1920

Akadémiai Kiadó (Akademischer Verlag) Budapest, 1958. 736 S. 325 Abb. 175,— Ft

»Dem Andenken eines der größten ungarischen Geodäten MATHIAS HUSZÁR« — steht als Widmung in der großangelegten Arbeit von LADISLAUS BENDEFY. Jawohl, diese Widmung bestimmt eine der Hauptrichtungen des umfangreichen Werkes: wenigstens zum Teil die Vergangenheit der ungarischen Geodäsie und zahlreiche schöne, zu ihrer Zeit moderne Vermessungsarbeiten, welche unsere Vorgänger in Ungarn durchgeführt haben, dem Dunkel der Vergessenheit zu entreißen. Der Verfasser hat jahrzehntelang auf dem Gebiet der Landes-Nivellierung höherer Ordnung gewirkt, es ist daher natürlich, daß sich seine Aufmerksamkeit in erster Reihe auf die Nivellierung richtet. Unermüdlich hat er Archive durchforscht, die alten Fachbücher studiert und das Ergebnis dieser Arbeit des begabten Verfassers ist das jetzt erschienene Dokument. Auf Grund der erforschten Angaben ist der Verfasser der Ansicht, daß MATHIAS HUSZÁR einer der größten Geodäten des vergangenen Jahrhunderts war, denn wie das Buch sagt: »Ohne seine Person und sein Wirken würden sich die großen Flußregelungen und Hochwasserschutzbauten um Jahrzehnte verspätet haben, und er hat die geodätischen Grundlagen dieser gigantischen Arbeit niedergelegt.« Neben MATHIAS HUSZÁR führt uns das Buch die Gestalt von vielen ungarischen Ingenieuren vor und beweist damit, daß das ungarische Volk auch in der Vergangenheit viele gut ausgebildete, vortreffliche Ingenieure herangezogen hat. Die Ursache dessen, daß die technische Arbeit nur in langsamerem Tempo fortgeschritten ist, ist nicht der Mangel an guten Ingenieuren, sondern unsere jahrhundertlange Unterdrückung und die sich daraus ergebenden wirtschaftlichen Schwierigkeiten.

Das andere Ziel der historischen Aufarbeitung war es, einen je vollständigeren Überblick über die Entwicklung der ungarischen Nivellierung zu geben, welche schließlich zur heutigen, zeitgemäßen Durchführung unserer Landes-Nivellierung geführt hat. Weiter hat sich das Buch zum Ziel gesetzt, auch darauf hinzuweisen, welche Gründe auf dem Gebiet Ungarns zur Entwicklung von mehreren hundert Basisniveaus (Vergleichsniveaus) geführt haben, auf den Nachteil und die Schädlichkeit der vielen Basisniveaus hinzuweisen und die unbedingte Notwendigkeit und Nützlichkeit eines einheitlichen Basisniveaus aufzuzeigen.

Besonders hervorheben müssen wir die kritische Untersuchung der vom seinerzeitigen Militärgeographischen Institut in Wien in der österreichisch-ungarischen Monarchie durchgeführten Präzisions-Nivellements, welche Kritik hoffentlich ein für allemal der irrigen Auffassung einer Gruppe von Geodäten, Geophysikern und Geologen ein Ende macht, wonach die abweichenden Ergebnisse der erwähnten Nivellierung und unserer vor dem zweiten Weltkrieg durchgeführten modernen Nivellierung darauf hinweisen, daß ein großer Teil des Territoriums von Ungarn vertikale Bewegungen von bedeutendem Ausmaß ausführt. Die kritische Untersuchung zeigt klar, daß die im vergangenen Jahrhundert vom Militärgeographischen Institut in Wien durchgeführte Nivellierung mit meß- und rechnungstechnischen Fehlern behaftet war, und daß ihre Ergebnisse nicht geeignet sind, durch Vergleich mit den Ergebnissen einer den heutigen Anforderungen entsprechenden Nivellierung verlässliche Schlüsse auf die Bewegung der Erdrinde zu ziehen, oder zahlenmäßige Angaben zu machen.

Die Einführung des Buches gibt unter anderem einen Überblick über die Entwicklung der Nivellierinstrumente, die Geschichte der Ingenieurausbildung in Ungarn und die Entwicklung der ungarischen Fachausdrücke auf dem Gebiet der Nivellierung;

das 1. Kapitel handelt vom Beginn der ungarischen Präzisions-Nivellierung. In diesem Kapitel werden wir mit dem Leben, dem Wirken und den Nivellierinstruktionen von MATHIAS HUSZÁR bekannt;

das 2. Kapitel handelt von den entlang der Donau durchgeführten Nivellierungen. Hier tritt unter anderem die Gestalt von PAUL VÁSÁRHELYI in den Vordergrund;

das 3. Kapitel befaßt sich mit den Nivellements entlang der Theiss und der übrigen Flüsse, sowie mit dem ersten Anschluß an das Adriatische Meer;

das 4. Kapitel bespricht die Nivellierarbeiten der seinerzeitigen Hochwasserschutz- und Binnenwasserregulierungs-Gesellschaften;

das 5. Kapitel erschließt uns die im XIX. Jahrhundert in Pest und in Buda durchgeführten Nivellierungen;

das 6. Kapitel macht uns mit den alten städtischen Nivellements bekannt;

das 7. Kapitel enthält die schon erwähnte kritische Untersuchung der Präzisions-Nivellierung des seinerzeitigen Militärgeographischen Instituts in Wien;

das 8. Kapitel läßt die hydrographischen Präzisions-Nivellierungen der Jahrhundertwende wieder aufleben;

das 9. Kapitel kehrt zur Präzisions-Nivellierung des Militärgeographischen Instituts zurück und untersucht dessen Fehlerquellen;

das 10. Kapitel beschäftigt sich mit den Unterschieden der Basisniveaus der hydrographischen Nivellierungen, ihren geodätischen Fehlern und ihrer Verlässlichkeit;

das 11. Kapitel macht uns mit den Versuchen zur Organisierung einer selbständigen ungarischen Nivellierung höherer Ordnung bekannt;

das 12. Kapitel untersucht die Höhenangaben der topographischen Karten und die Frage des Basisniveaus von Nadap.

In den beiden letzten Kapiteln werden wir eingehend mit einigen Teilen des Wirkens von JOHANN MAREK und AUGUST TÓTH bekannt — obwohl wir auch schon vorher Hinweise auf sie finden — und in diesen Kapiteln lebt die Person der bedeutendsten Geodäten der Jahrhundertwende und der ersten Jahrzehnte des XX. Jahrhunderts auf.

Das Buch wird noch durch einen Anhang mit verschiedenen Tafeln und Angaben ergänzt. Besonders erwähnen wir den IV. Teil des Anhanges, welcher Verfahren zur Transformation der Höhenkoordinaten der Nivellement-Basispunkte mitteilt.

Es ist sehr von Nutzen, daß wir am Ende des Buches ein Abbildungsverzeichnis, Namensregister, Sachregister und Ortsnamenregister finden.

Leider haben wir keine Möglichkeit, den Inhalt der einzelnen Kapitel auch im Einzelnen zu schildern und zu würdigen. Das Buch muß man zuerst durchblättern, dann hier und da lesen und das Ende ist ohnehin, daß man es von Anfang bis zu Ende durchliest. Damit — so glaube ich — habe ich ausgedrückt, daß LADISLAUS BENDEFY ein verdienstvolles, schönes Werk geschaffen hat, welches sowohl vom fachgeschichtlichen, wie auch vom fachlichen Standpunkt ein Gewinn für die ungarische Fachliteratur ist, und welches er in gutem Ungarisch, in flüssigem abgerundetem Stil geschrieben hat.

Zum Schluß noch soviel, daß das Nachwort die Fortsetzung der Arbeit in Aussicht stellt: Zusammenfassung der Probleme betreffend die ungarische Präzisions-Nivellierung und Aufarbeitung der neueren Nivellierungen. Mit Freude sehen wir der Erfüllung dieses Versprechens entgegen.

*I. Hazay*

*Printed in Hungary*

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1961. VIII. 9

Terjedelem: 27,25 (A/5) ív, 89 ábra, 3 melléklet

1961.54330 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with „Kultura” Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

## INDEX

- Hoványi, L.* : Auswahl der für die Ausgleichung eines Diagonalsystems reiner Streckenmessungen günstigsten Bedingungsleichung — On the Determination of the Condition Equation to the Best Advantage of Adjustment in a Diagonal System Defined Purely by Length Measurements — Établissement de l'équation de condition la plus favorable du point de vue de la compensation, dans un système quadrilatéral aux côtés mesurés — *Ховани, Л.* : Определение уравнения условия наиболее благоприятного с точки зрения уравнивания, в диагональной системе чистого измерения длины ..... 3
- Halmos, F.* : L'examen de la division des cercles montés dans les théodolites de capacité faible et moyenne — Prüfung der Kreisteilung kleiner und mittlerer Theodolite im eingebauten Zustand — Circle Graduation Test of Small and Medium Theodolites in the Case of Built-in Circles — *Халмош, Ф.* : Проверка кругового деления теодолитов малых и средних размеров во встроеном его состоянии ..... 23
- Szénás, G.* : Case History of a Complex Geophysical Prospecting over a Highly-disturbed Structure (the Mecsek Mountains) — Ergebnisse einer komplexen geophysikalischen Prospektion in einem besonders komplizierten Gebiet: das Mecsekgebirge — Résultats de recherches géophysiques complexes effectués sur un territoire de structure particulièrement compliquée. La montagne Mecsek — *Сенаш, Д.* : Результаты комплексной геофизической разведки, проведенной на территории особенно сложной структуры горы Мечск ..... 47
- Hazay, I.* : Untersuchungen zur Anwendung der Gauß-Krügerschen Abbildung in Ungarn — Investigations on the Application of the Gauss-Krüger Projection Method in Hungary — Recherches sur l'application en Hongrie du système de représentation de Gauss-Krüger — *Хазай, И.* : Исследования в области применения метода отображения по Гауссу и Крюгеру в Венгрии ..... 91
- Ledersteger, K.* : Neue Forschungen zur Theorie der heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren — New Studies Concerning the Theory of Heterogeneous Spheroidal Figures of Equilibrium — Nouvelles recherches sur la théorie des figures d'équilibre sphéroïdes hétérogènes — *Ледерштегер, К.* : Новые исследования по теории гетерогенных сфероидальных фигур равновесия ..... 121
- Milasovszky, B.* : On the Adjustment of the Base Quadrilateral — Über die Ausgleichung des Basisvierecks — La compensation des quadrilatères de base — *Милашовский, Б.* : Уравнивание четырехугольника базисной линии ..... 139
- Tarczy-Hornoch, A.* : Über die Berechnung des räumlichen Rückwärtseinschnittes — On the Solution of the Problem of Spatial Three-point Resection — Sur la solution du recouplement spatial — *Тарци-Горнох, А.* : О решении пространственной обратной засечки ..... 175
- Barta, G.* : The Connection between the Excentricity of the Geomagnetic Field and the Triaxiality of the Earth — Corrélation entre l'excentricité du champ magnétique terrestre et la triaxialité du globe — *Барта, Д.* : Связь эксцентricности геомагнитного поля с трехосностью Земли ..... 211
- Tarczy-Hornoch, A.* : Bericht des Observatoriums bei Nagyecnk (Ungarn) über die Ergebnisse der Erdstromregistrierungen in den beiden Halbjahren 1959 — Report on the Nagyecnk Observatory (Hungary) on the Results of Earth Current Recordings in the Two Halfyears of 1959 — Rapport de l'Observatoire de Nagyecnk (Hongrie) sur les résultats des enregistrements de courants telluriques dans les deux semestres de 1959 — *Тарци-Горнох, А.* : Отчет обсерватории Надьценк (Венгрия) о результатах регистрирования земных токов в обоих полугодиях 1959 г. .... 229
- Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livres — Обзор книг ..... 309

# ACTA TECHNICA

## ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXVII

FASCICULI 3—4

*SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA*

*TOMUS 3*

*FASC. 3—4*



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST  
1961

ACTA TECHN. HUNG.

# ACTA TECHNICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

# УРАВНИВАНИЕ СОЕДИНИТЕЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО ПРИНЦИПУ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ «СЕТИ»

Л. ХОВАНИ

КАНДИДАТ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЯЖЕЛОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ, МИШКОЛЬЦ, ВЕНГРИЯ

[Поступило 10. октября 1960 г.]

Как известно, измерение соединительных треугольников становится необходимым тогда, когда проектирование направления через вертикальную шахту производится проекцией двух точек и не представляется возможным установить теодолит ни в проектируемой, ни в проектированной точках. Обозначим на рис. 1 через  $F_1$  и  $F_2$  проектируемые и проектированные точки. С помощью известных на поверхности точек  $P$  и  $A$ , примычного угла  $\varphi_1$ , далее измеренных в треугольнике  $A, F_1, F_2$  сторон  $a_1, b_1$  и  $c_1$ , и рассчитанных с помощью измеренного угла  $\gamma_1$ , так называемых углов при отвесах  $\alpha_1, \beta_1$  представляется возможным определить дирекционный угол  $(F_1, F_2)$ . В то же время измерением в шахте угла  $\gamma_2$ , далее сторон  $a_2, b_2$  и  $c_2$  возможно вычислить углы при отвесах  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  и, таким образом, полигон в шахте можно развить с помощью вычисленных углов.

Следует заранее сказать, что мы не ставим целью заниматься кроме изложенного выше метода ориентированием и его практическим выполнением. К проблеме ориентирования, как известно, по сути дела добавить что-либо является тяжелой задачей, но результаты, достигнутые в области уравнивания линейных сетей методом непосредственных измерений, связанных условиями, которые освещают с новой точки зрения — по принципу уравнивания линейных сетей — проблемы уравнивания некоторых специальных маркшейдерских задач, заставили нас написать данный труд.

Учитывая то обстоятельство, что здесь мы будем разбирать вопрос уравнивания ряда специальных маркшейдерских задач на основе линейных сетей, — среди которых данная работа предполагает детально заниматься вопросом уравнивания соединительных треугольников, в то же время остальные (после краткого изложения) мы будем рассматривать в наших дальнейших сообщениях, — необходимо, чтобы мы занимались кратко линейными сетями.

В случае линейных сетей, в противоположность угловым сетям, измеряются не углы, а стороны треугольников. Естественно, что эта существенная разница поднимает ряд новых проблем в области уравнивания линейных сетей. Бросим взгляд на вид линейную сеть на рис. 2. В случае уравни-

вания по способу условных измерений в центре сети теоретически должно быть соблюдено следующее условие:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 360^\circ. \quad (1)$$

Следовательно, сумма углов в центре после уравнивания должна быть равна  $360^\circ$ . Приведенное выше уравнение напоминает так называемое

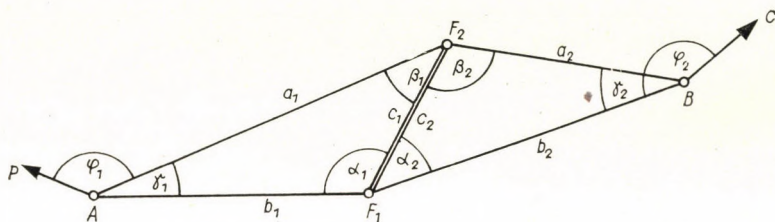


Рис. 1

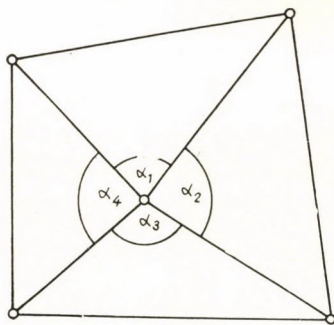


Рис. 2

условное уравнение горизонта. Однако, пока в случае триангуляции результатом измерений являются сами углы, то, в это же время, в данном случае углы необходимо вычислять с помощью сторон соответствующих треугольников, т. е. углы становятся какими-то функциями сторон треугольников, как результатов измерений. Хотя условное уравнение на вид существует между углами, эти углы, являющиеся некоторыми функциями длины сторон, определяют условия между длинами сторон, как между результатами измерений.

Если углы, вычисленные по измеренным сторонам треугольников, обозначить через  $a_{1,0}$ ,  $a_{2,0}$ ,  $a_{3,0}$  и  $a_{4,0}$ , далее изменения углов, соответствующие изменениям длины  $ds$ , в  $a$ , обозначить через  $da_1$ ,  $da_2$ ,  $da_3$ ,  $da_4$ , тогда очевидно получим, что

$$a_{1,0} + da_1 + a_{2,0} + da_2 + a_{3,0} + da_3 + a_{4,0} + da_4 - 360^\circ = 0.$$



Произведя приведение подобных членов, получим:

$$d a_1 + d a_2 + d a_3 + d a_4 + (a_{1,0} + a_{2,0} + a_{3,0} + a_{4,0} - 360^\circ) = 0. \quad (2)$$

В этом последнем уравнении выражение в скобках представляет собою свободный член. Если мы теперь изменения углов  $da_1, da_2, da_3$  и  $da_4$  выразим в функции изменений длины и, соответственно, поправок длин и в приведенное выше уравнение (2) подставим их обратно, тогда мы получим систему уравнений ошибок в линейной форме.

После сказанных выше, мы теперь вернемся к схеме на рис. 1. В так называемом поверхностном соединительном треугольнике  $AF_1F_2$ , учитывая, что располагаем четырьмя измеренными данными, число избыточных наблюдений и, соответственно, условных уравнений равно 1. Аналогичным образом получается одно условное уравнение и для подземных соединительных треугольников  $F_1F_2B$ .

Если теперь посмотрим поверхностный соединительный треугольник, тогда увидим, что здесь, по существу, идет речь об одном треугольнике, который можно принимать в качестве комбинированной «сети», в которой измеряются длины и углы.

Следовательно, в поверхностных соединительных треугольниках по вышеприведенной трактовке, — если обозначить вычисленный на основе измеренных сторон треугольника  $a'_1, b'_1$  и  $c'_1$  угол через  $\gamma_{1,0}$ , поправку через  $d\gamma_1$ , а измеренный угол  $\gamma'_1$ , поправку  $v_{\gamma_1}$ , тогда должно быть удовлетворено нижеприведенное условие, указанное А. Тарци-Горнохом для случая комбинированной сети с измерением углов и длин (см.: [1]; стр. 414, уравнение 18):

$$\gamma_{1,0} + d\gamma_1 = \gamma'_1 + v_{\gamma_1}. \quad (3)$$

Произведя приведение подобных членов, получим:

$$d\gamma_1 - v_{\gamma_1} + (\gamma_{1,0} - \gamma'_1) = 0. \quad (4)$$

В этом последнем уравнении выражение, взятое в скобки, представляет свободный член. Если мы теперь выразим изменение  $d\gamma_1$  угла  $\gamma_{1,0}$ , вычисленного на основе измеренных длин, в функции изменений длины  $ds$  и подставим обратно в наше уравнение (4), тогда мы получим систему уравнений ошибок в линейной форме.

Для выражения изменений углов в функции изменений длины литература, занимающаяся уравниванием линейных сетей (как об этом говорилось детально в диссертации на соискание ученой степени кандидата наук [2]), указывает ряд зависимостей. Среди них я желаю изложить лишь резуль-

таты *Хаммера* и *Тарци-Горноха*, как лучшие результаты, достигнутые в процессе развития.

Предполагая общий треугольник со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , ХАММЕР, — упрощая зависимость КРЮГЕРА для изменения угла  $d\gamma$ :

$$d\gamma = \frac{c}{ab \cdot \sin \gamma} (dc - \cos \alpha \cdot db - \cos \beta \cdot da), \quad (5)$$

в функции изменения длины  $ds$ , — получает следующий результат (см.: [3]; стр. 526, уравнение (29):

$$d\gamma = \left( \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{c} \right) dc - \left( \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{b} \right) db - \left( \frac{\operatorname{ctg} \beta}{a} \right) da. \quad (6)$$

Как очень интересный результат следует упомянуть, что **Ронл** в связи с уравниванием соединительных треугольников уже применяет уравнение (3). (См.: [4]; стр. 94, уравнение (7)). Однако, зависимость изменений углов (см.: [4]; стр. 93, уравнение (6)), данная в функции изменений длины является еще сложной, совпадает с приведенным мною уравнением и указанным **Крүгер** уравнением (5) (см.: [5]; стр. 4, уравнение (2)) и как будет видно ниже это уравнение можно упростить еще дальше.

Теперь посмотрим результаты исследований *Тарци-Горноха* (см. [6]; стр. 193). Также предполагая общий треугольник, исходим из зависимости, которую можно вывести для косинуса полуугла, взятой им также в качестве исходной. Следовательно:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{a \cdot b}},$$

где

$$s = \frac{a + b + c}{2} \quad \text{и} \quad s - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

Вводя изменения длины  $ds$  и не принимая во внимание обозначение измеренных данных штрихами, из приведенного выше уравнения можно записать, что:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\gamma_0 + d\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\left( s + \frac{da + db + dc}{2} \right) \left( s - c + \frac{da + db + dc}{2} \right)}{(a + da)(b + db)}}.$$

Изменения как углов  $d\gamma$ , так и длин  $ds$  вследствие их небольшого значения их влияние могут быть выражены при логарифмировании соответствующими табличными разностями. Обозначим табличные разности через  $\lambda$ .

Пусть нижний индекс обозначает, что к какому значению это относится (например,  $\lambda_{s-c}$  — обозначает табличную разность, соответствующую величине  $s-c$ ), в то же время верхний индекс дает функцию угла (например,  $\frac{\lambda_{\gamma_0}^{\cos}}{2}$  — дает  $\lambda$ , указанную для косинуса  $\frac{\gamma_0}{2}$ ).

Из вышеприведенной зависимости после логарифмирования получаем выражение следующего вида:

$$\log \cos \frac{\gamma_0}{2} + \gamma \frac{\cos \frac{\gamma_0}{2}}{2} \cdot \frac{d\gamma}{2} =$$

$$\log s + \lambda_s \cdot \frac{da + ab + dc}{2} + \log(s-c) + \lambda_{s-c} \frac{da + db + dc}{2} +$$

$$+ \frac{-\log a - \lambda_a da - \log b - \lambda_b db}{2}$$

Откуда:

$$d\gamma = \frac{\lambda_{s-c} - \lambda_{s-c}}{2\lambda_{\frac{\gamma_0}{2}}^{\cos}} dc + \frac{\lambda_s + \lambda_{s-c} - 2\lambda_b}{2\lambda_{\frac{\gamma_0}{2}}^{\cos}} db + \frac{\lambda_s + \lambda_{s-c} - 2\lambda_a}{2\lambda_{\frac{\gamma_0}{2}}^{\cos}} da +$$

$$+ \left\{ \log s + \log(s-c) - \log a - \log b - 2 \log \cos \frac{\gamma_0}{2} \right\}.$$

Однако, выражение, взятое в скобки, по логарифмированию уравнения, которое можно вывести для  $\cos \frac{\gamma_0}{2}$ , будет равно 0, следовательно:

$$d\gamma = \frac{\lambda_s - \lambda_{s-c}}{2\lambda_{\frac{\gamma_0}{2}}^{\cos}} dc + \frac{\lambda_s + \lambda_{s-c} - 2\lambda_b}{2\lambda_{\frac{\gamma_0}{2}}^{\cos}} db + \frac{\lambda_s + \lambda_{s-c} - 2\lambda_a}{2\lambda_{\frac{\gamma_0}{2}}^{\cos}} da. \quad (7)$$

Если значения  $\lambda$  выписать для одной секунды, тогда и изменение угла будет также иметь значение величины секунды, следовательно в данном случае уравнивания также свободный член необходимо выражать в секундах. Изменения длины и, соответственно, коэффициенты поправок длины в конкретном случае уравнивания являются логарифмическими табличными разностями, которые без того уже фигурируют при вычислении приближенного угла, необходимого для определения противоречия, и поэтому их не нужно вычислять отдельно.

Если теперь посмотреть зависимость (6), приведенную **НАММЕР** для  $d\gamma$ , и исходить из того, что в нашем случае идет речь лишь об одном треугольнике, а не о сети треугольников, тогда, учитывая результаты **НАММЕР**

(являющиеся с точки зрения линейной сети значительными) о том, что для вывода системы уравнений ошибок в линейной форме необходимо было бы вычислить все три угла треугольника, не будет целесообразным его использовать. Естественно, зависимость **НАММЕР** по сравнению с зависимостью (5), выведенной **КРЮСЕР** и **РОНЛ**, обозначает некоторые упрощения, так как опускается отдельное вычисление площади треугольника.

В случае выражения (7), указанного *Тарци-Горнохом* для  $e$ , для вывода системы уравнений ошибок в линейной форме соединительного треугольника, нужно вычислить лишь угол, необходимый для противоречия, следовательно, по сравнению с результатом **НАММЕР** опускается вычисление еще двух дополнительных углов. Если теперь мы будем исходить из соображения, что вычисление одного угла приблизительно соответствует вычислению одного изменения угла в функции *Тарци-Горноха*, по сравнению с результатом **НАММЕР** означает существенное упрощение.

Теперь подставим в уравнение (4) соответственно обозначению поверхностного соединительного треугольника по рис. 1 зависимость (7), указанную *Тарци-Горнохом* для  $dy$ , тогда получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{s'_1} - \lambda_{s'_1 - c'_1}}{2\lambda_{\gamma_{1,0}}^{\cos} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} dc'_1 + \frac{\lambda_{s'_1} + \lambda_{s'_1 - c'_1} - 2\lambda_{a'_1}}{2\lambda_{\gamma_{1,0}}^{\cos} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} da_1 + \\ & + \frac{\lambda_{s'_1} + \lambda_{s'_1 - c'_1} - 2\lambda_{b'_1}}{2\lambda_{\gamma_{1,0}}^{\cos} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} db'_1 - v_{\gamma'_1} + (\gamma_{1,0} - \gamma'_1)'' = 0 \end{aligned}$$

тогда

$$s'_1 = \frac{a'_1 + b'_1 + c'_1}{2} \quad \text{и} \quad s'_1 - c'_1 = \frac{a'_1 + b'_1 - c'_1}{2}.$$

Переходя к поверхностному соединительному треугольнику по рис. 1, т. е. к поправкам длины  $v$ , получается следующая система уравнений ошибок в линейной форме.

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{s'_1} + \lambda_{s'_1 - c'_1} - 2\lambda_{a'_1}}{2\lambda_{\gamma_{1,0}}^{\cos} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} v_{a'_1} + \frac{\lambda_{s'_1} + \lambda_{s'_1 - c'_1} - 2\lambda_{b'_1}}{2\lambda_{\gamma_{1,0}}^{\cos} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} v_{b_1} + \\ & + \frac{\lambda_{s'_1} - \lambda_{s'_1 - c'_1}}{2\lambda_{\gamma_{1,0}}^{\cos} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} v_{c'_1} - v_{\gamma'_1} + (\gamma_{1,0} - \gamma'_1)'' = 0. \end{aligned}$$

В том случае, если в нашем распоряжении имеется лишь таблица логарифмов, тогда, используя метод *Тарци-Горноха*, уравнивание соедини-

тельных треугольников с помощью приведенной выше зависимости (8), может быть выполнено очень просто, ибо, как это упоминалось уже выше, коэффициенты поправок длины представляют собою логарифмические табличные разности, фигурирующие при вычислении приблизительного значения угла, необходимого для определения противоречия, следовательно их не требуется вычислять отдельно.

Если же имеются в распоряжении таблица функций и счетная машина, тогда по сравнению с таблицей логарифмов, учитывая факт более простого вычисления с помощью таблиц натуральных значений тригонометрических функций, желаю дать другое решение. (См.: [2]; зависимости (41) и (42)).

Исходим из следующей зависимости:

$$\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{s(s-c)}{ab}. \quad (9)$$

Произведя логарифмирование и дифференцирование, получаем:

$$d \cdot \log \cos^2 \frac{\gamma}{2} = -2 M \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{d\gamma}{2}.$$

Откуда изменение угла:

$$d\gamma = - \frac{1}{M \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} d \log \cos^2 \frac{\gamma}{2}. \quad (10)$$

В приведенном выше выражении  $M$  — логарифмический модуль. Из зависимости (9) можно вывести далее, что

$$d \log \cos^2 \frac{\gamma}{2} = M \left( \frac{da + ab + dc}{a + b + c} + \frac{da + ab - dc}{a + b - c} - \frac{da}{a} - \frac{db}{b} \right). \quad (11)$$

Подставляя обратно в уравнение (10) и выполнив приведение, далее переходя на  $d\gamma''$ , получается следующая зависимость:

$$d\gamma'' = - \frac{\rho''}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \left[ \left( - \frac{1}{a + b + c} + \frac{1}{a + b - c} \right) dc + \left( - \frac{1}{a + b + c} - \frac{1}{a + b - c} + \frac{1}{a} \right) da + \left( - \frac{1}{a + b + c} - \frac{1}{a + b - c} + \frac{1}{b} \right) db \right]. \quad (12)$$

или

$$d\gamma'' = \varrho'' \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \left[ \left( -\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b-c} \right) dc + \left( -\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a} \right) da + \left( -\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b} \right) db \right]. \quad (13)$$

Теперь, упуская символы  $s$ ,  $(s-a)$ ,  $(s-b)$  и  $(s-c)$ , для величин  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  и  $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$  можно написать следующие известные зависимости:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a+b-c)}} \quad (14)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(-a+b+c)(a-b+c)}}. \quad (15)$$

Если теперь рассматривать уравнения (12) и (14), тогда видно, что в уравнении (12) коэффициенты, фигурирующие наряду с соответствующими изменениями длины, можно вычислить без всяких затруднений, так как величина  $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  при вычислении свободного члена нужна, и в то же время величины  $(a+b+c)$  и  $(a+b-c)$  являются величинами, фигурирующими в знаменателе под квадратным корнем при вычислении угла.

Сравнивая зависимости (13) и (15), здесь в уравнении (13)  $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$  фигурирует в качестве множителя и величины  $(a+b+c)$  и  $(a+b-c)$  в уравнении (15) с правой стороны под квадратным корнем находятся в числителе.

Для выражения изменения угла  $d\gamma$  в функции изменений длины уравнениями (14) и (13) таким образом дается две зависимости, и в случае острых углов целесообразнее использовать зависимость (12).

В случае поверхностного соединительного треугольника по рис. 1 угол  $\gamma_{1,0}$ , необходимый для вычисления свободного члена, вычисляется с помощью уравнения, которое можно вывести для  $\operatorname{tg} \frac{\gamma_{1,0}}{2}$ , таким образом, подставляя уравнение (12) обратно в уравнение (4) и переходя с изменений длины  $ds$  на поправки длины  $v$ , система уравнений ошибок в линейной форме будет иметь вид:

$$\frac{\varrho''}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} \left( -\frac{1}{a'_1 + b'_1 + c'_1} + \frac{1}{a'_1 + b'_1 - c'_1} \right) v_{c_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varrho''}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} \left( -\frac{1}{a'_1 + b'_1 + c'_1} - \frac{1}{a'_1 + b'_1 - c'_1} + \frac{1}{a'_1} \right) v_{a_1} + \\
& + \frac{\varrho''}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} \left( -\frac{1}{a'_1 + b'_1 + c'_1} - \frac{1}{a'_1 + b'_1 - c'_1} + \frac{1}{b'_1} \right) v_{b_1} - \\
& - v_{\gamma_1} + (\gamma_{1,0} - \gamma'_1)'' = 0.
\end{aligned} \quad (16)$$

Произведя приведение членов, имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{\varrho''}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} \left( -\frac{1}{a'_1 + b'_1 + c'_1} - \frac{1}{a'_1 + b'_1 - c'_1} + \frac{1}{a'_1} \right) v_{a_1} + \\
& + \frac{\varrho''}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} \left( -\frac{1}{a'_1 + b'_1 + c'_1} - \frac{1}{a'_1 + b'_1 - c'_1} + \frac{1}{b'_1} \right) v_{b_1} + \\
& + \frac{\varrho''}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{1,0}}{2}} \left( -\frac{1}{a'_1 + b'_1 + c'_1} + \frac{1}{a'_1 + b'_1 - c'_1} \right) v_{c_1} - v_{\gamma_1} + (\gamma_{1,0} - \gamma')'' = 0.
\end{aligned} \quad (17)$$

По аналогии приведенной выше зависимости для подъемных соединительных треугольников представляется возможным без всяких затруднений вывести систему уравнений ошибок в линейной форме. Следовательно, по рис. 1 имеем:

$$\begin{aligned}
& \frac{\varrho''}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{2,0}}{2}} \left( -\frac{1}{a'_2 + b'_2 + c'_2} - \frac{1}{a'_2 + b'_2 - c'_2} + \frac{1}{a'_2} \right) v_{a_2} + \\
& + \frac{\varrho''}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{2,0}}{2}} \left( -\frac{1}{a'_2 + b'_2 + c'_2} - \frac{1}{a'_2 + b'_2 - c'_2} + \frac{1}{b'_2} \right) v_{b_2} + \\
& + \frac{\varrho''}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{2,0}}{2}} \left( -\frac{1}{a'_2 + b'_2 + c'_2} + \frac{1}{a'_2 + b'_2 - c'_2} \right) v_{c_2} - v_{\gamma_2} + (\gamma_{2,0} + \gamma'_2)'' = 0.
\end{aligned} \quad (18)$$

Уравнениями (17) и (18) даны системы уравнений ошибок в линейной форме, которые можно вывести для поверхностных и подземных соединительных треугольников.

В качестве расчетного примера применимости предлагаемого метода используется числовой пример, приведенный в книге Романова. (См.: [7]; стр. 147, задача № 2.)

Данные измерения поверхностного треугольника по рис. 3:

$$\begin{aligned} a' &= 4,9760 \text{ м} & \mu_a &= +0,061 \text{ м} \\ b' &= 2,8165 \text{ м} & \mu_b &= \pm 0,001 \text{ м} \\ c' &= 2,2525 \text{ м} & \mu_c &= \pm 0,001 \text{ м} \\ \gamma' &= 9^\circ 33' 25'' & \mu_\gamma &= \pm 15'' \end{aligned}$$

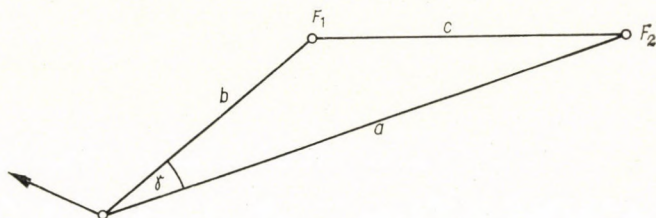


Рис. 3

Используя шестизначную таблицу, приближенное значение угла  $\gamma_0$  может быть вычислено по зависимости:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_0}{2} = \sqrt{\frac{(-a' + b' + c')(a' - b' + c')}{(a' + b' + c')(a' + b' - c')}}.$$

Таким образом:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_0}{2} = \sqrt{\frac{0,0930 \cdot 4,4120}{10,0450 \cdot 5,5400}} = \sqrt{\frac{0,410316}{55,6493}} = \sqrt{0,007373} = 0,085866$$

$$\frac{\gamma_0}{2} = 4^\circ 54' 27,7''$$

$$\gamma_0 = 9^\circ 48' 55,4''.$$

На основе уравнения (16), подставляя значение длин в миллиметрах, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{206265}{0,08587} \left( -\frac{1}{10045} - \frac{1}{5540} + \frac{1}{4976} \right) v_a + \frac{206265}{0,08587} \left( -\frac{1}{10045} - \frac{1}{5540} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2817} \right) v_b + \frac{206265}{0,08587} \left( -\frac{1}{10045} + \frac{1}{5540} \right) v_c - v_\gamma + (\gamma_0 - \gamma')'' = 0. \end{aligned}$$

Выполнив соответствующие вычисления, получаем:

$$-189,9 v_a + 180,0 v_b + 194,4 v_c - v_\gamma + 930,4 = 0.$$

Веса измеренных величин с помощью указанных средних ошибок можно вычислить известным способом:

$$P_a : P_b : P_c : P_\gamma = \frac{1}{1^2} : \frac{1}{1^2} : \frac{1}{1^2} : \frac{1}{15^2} = 225 : 225 : 225 : 1.$$

Следовательно, веса будут иметь следующие значения:

$$P_a = 225 ; P_b = 225 ; P_c = 225 ; P_\gamma = 1.$$



Таблица 1  
Таблица коэффициентов нормальных уравнений

	$a$	$aa$	$P$	$\frac{aa}{P}$
1	- 189,9	36062	225	160,2
2	+ 180,0	32400	225	144,0
3	+ 194,4	37791	225	167,9
4	- 1,0	1	1	1,0
	[    ]			473,1

Следовательно, нормальное уравнение будет:

$$473,1 \cdot k + 930,4 = 0$$

$$k = - 1,96$$

Поправки будут:

$$v_a = \frac{a_1}{P_a} k = + 1,64 \text{ мм}$$

$$v_b = \frac{a_2}{P_b} k = - 1,55 \text{ мм}$$

$$v_c = \frac{a_3}{P_c} k = - 1,68 \text{ мм}$$

$$v_\gamma = \frac{a_4}{P_\gamma} k = + 1,9''$$

Поправки полностью совпадают с поправками во взятом числовом примере. (См.: [7]; стр. 149.) Следовательно видно, что соединительный треугольник, как форма, принятая в качестве комбинированной «сети» с изменением длины и углов, может быть также очень просто уравнена. Коэффициенты системы уравнений ошибок в линейной форме могут быть хорошо схематизированы и быстро вычислены.

В данном кратком сообщении была сделана попытка дальнейшего упрощения на основе линейной сети второго метода (см.: [4]; стр. 93, 2 абзац), рассмотренного **Ронл** для случая уравнивания соединительных треугольников. Следует заметить, что рассмотренный им в качестве третьего метода (см.: [4]; стр. 94, 1 абзац) способ по пятой группе уравнивания был несколько усовершенствован *Тарци-Горнохом* на основе сети с измерением длин и углов, поскольку оба условных уравнения выводятся с помощью синусной теоремы. (См.: [1]; стр. 418, выражение (23).)

Сохраняя обозначение для соединительных треугольников рис. 4, два условных уравнения будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin(\alpha'_1 + v_{a'_1})}{\sin(x_0 + \delta x)} &= \frac{1' + v'_1}{2' + v_2} \\ \frac{\sin(\alpha'_1 + v_{a'_1})}{\sin(\alpha'_1 + v_{a'_1} + x_0 + \delta x)} &= \frac{1' + v_1}{3' + v_3} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

После логарифмирования и выполнения приведения по автору имеют вид (см.: [1]; стр. 416, зависимость (24)):

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \lambda_{a'_1}^{\sin} v_{a'_1} + \lambda_{x_0} \cdot \delta_x + \log 1' - \log 2' + \\ + \log \sin x_0 - \log \sin a'_1 = 0 \\ \lambda_1 v_1 - \lambda_3 v_3 (\lambda_{a'_1}^{\sin} - \lambda_{a'_1 + x_0}^{\sin}) v_{a'_1} + \lambda_{a'_1 + x_0}^{\sin} \cdot \delta x + \log 1' - \log 3' + \\ + \log \sin (a'_1 + x_0) - \log \sin a'_1 = 0 \end{aligned} \right\} (20)$$

Как об этом говорилось уже при изложении материала, кроме уравнивания соединительных треугольников уравнивание ряда других специальных маркшейдерских задач может быть сведено к уравниванию, выполняемому на основе линейных сетей. В связи с этим необходимо отметить, что **СЧУМАН**

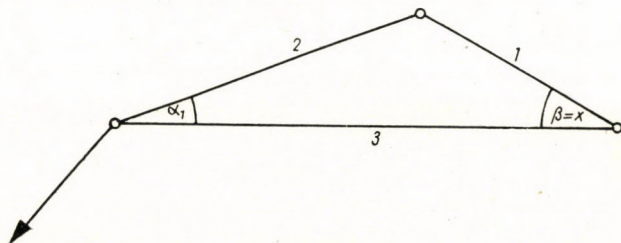


Рис. 4

рассматривает задачу уравнивания проектирования при помощи трех ответвлений на основе линейной сети [8]. **РАУС** из сторон треугольников, выведенных из полигонов, строит форму линейной сети [9]. Здесь нет достаточно места, чтобы заниматься хотя бы несколькими словами изложением и критическим анализом затронутых выше вкратце задач; в последующих работах предполагаю вернуться к их рассмотрению.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. *Тарци-Горнох*: Über die Ausgleichung von Streckennetzen. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, т. VIII стр. 399—424.
2. Л. *Ховани*: К уравниванию по методу непосредственных измерений, связанных с условиями. Диссертация на соискание ученой степени кандидата наук, поданная в августе 1955 года в Научную аттестационную комиссию.
3. Е. *НАММЕР*: Zur Ausgleichung von Streckennetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1911, тетр. 19.
4. К. *Пол*: Ориентирование через один вертикальный ствол в случае неглубокой шахты. (Журнал: Bányászati Lapok за 1954 г., № 1, 2, 3.)
5. Л. *КРЮСЕР*: Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte. Veröffentlichung d. K. Pr. Geod. Instituts, Neue Folge No 34.
6. А. *Тарци-Горнох*: Об уравнивании линейных сетей. (Журнал: Földméréstani Közlemények за 1953 г., № 4).
7. В. А. *Романов*: Теория ошибок и способ наименьших квадратов. Углетехиздат, 1952.

8. R. SCHUMANN: Zur Ausgleichung von Liniennetzen. Mitteilungen a. d. Markscheidewesen. 1909, тетр. 11.  
 9. H. PAUS: Orientierung v. Grubenvolygonzügen durch mittelbare Dreieckbestimmung. Mitteilungen a. d. Markscheidewesen. 1942.

## РЕЗЮМЕ

Работа при уравнивании соединительного треугольника исходит из принципа совместного уравнивания линейно-угловых сетей.

В введении кратко рассматриваются условные уравнения линейных сетей, далее выражение изменений углов в функции изменений длин, затем для этого последнего выводятся новые зависимости. С помощью этих новых зависимостей для линейных уравнений ошибок соединительных треугольников получается такая простая в обращении форма, при которой одновременно с вычислением угла  $\gamma$  может быть вычислен также коэффициент по данным, фигурирующим при вычислении углов.

В работе в заключение для доказательства быстроты применимости предлагаемого метода приводится числовой пример.

DIE AUSGLEICHUNG EINES BASENENTWICKLUNGSDREIECKS  
 ALS KOMBINATION VON WINKEL- UND STRECKENMESSNETZEN

L. HOVÁNYI

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Ausgleichung des Entwicklungsdreiecks wird aus dem Prinzip der gemeinsamen Ausgleichung von Strecken- und Winkelmeßnetzen ausgegangen.

Eingangs werden die Bedingungsgleichungen der Streckenmeßnetze kurz behandelt, sowie die Ausdrücke der Winkelveränderungen mittels der Streckenveränderungen. Für letztere werden neue Beziehungen abgeleitet, die die Gewinnung der linearen Verbesserungsgleichungen des Entwicklungsdreiecks in einer so einfachen und leicht zu handhabenden Form gestatten, daß die Berechnung der Koeffizienten der Verbesserungsgleichung gleichzeitig mit der Berechnung des  $\gamma$ -Winkels erfolgen kann, u. zw. aus den auch bei der Berechnung des Winkels benötigten Werten.

Als Abschluß wird die leichte Handhabung der Methode an einem Rechenbeispiel bewiesen.

THE ADJUSTMENT OF EXTENSION TRIANGLES BY A COMBINATION  
 OF THE ADJUSTMENTS OF TRILATERATION AND TRIANGULATION NETWORKS

L. HOVÁNYI

SUMMARY

The starting point of the considerations is the adjustment of an extension triangle by the principle of simultaneous adjustment of trilateration and triangulation networks.

In the introduction the condition equations of trilateration networks are briefly treated, as well as the expression of the changes of the angles in terms of the changes of the side lengths. Subsequently, new formulae are derived for the latter. The new formulae permit to state the linear residual equations in such a simple and easily handled form in which the coefficient of the residual equation is obtained simultaneously with the computation of the angle  $\gamma$ , out of the data figuring also in the computation of the angle.

As a conclusion, the simplicity of handling of the method is illustrated on a numerical example.

COMPENSATION DU TRIANGLE DE RATTACHEMENT PAR COMBINAISON  
DES RÉSEAUX DE TRILATÉRATION ET DE TRIANGULATION

L. HOVÁNYI

RÉSUMÉ

Dans la compensation du triangle de rattachement, l'étude part du principe de la compensation d'ensemble des réseaux de trilatération et de triangulation.

Dans l'introduction, l'auteur étudie brièvement les équations de condition des réseaux de trilatération, ainsi que l'expression des altérations angulaires en fonction des variations de longueur, puis déduit de nouvelles relations pour cette dernière. Grâce à ces nouvelles relations, il obtient, pour les équations de correction linéaires des triangles de rattachement, une forme simple et aisément maniable, où le coefficient de l'équation de correction peut être calculé simultanément avec l'angle  $\gamma$ , à partir des données figurant dans le calcul de l'angle.

L'étude se termine par un exemple numérique démontrant la possibilité d'utilisation rapide de la méthode proposée.

# POLYGONALE KNOTENPUNKTSYSTEME

Prof. I. HAZAY

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

LEHRSTUHL FÜR GEODÄSIE II. TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR BAUGEWERBE  
UND VERKEHRSWESSEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 16. Dezember 1960]

## 1.

Nach der Triangulation höherer Ordnung wird bei uns zumeist, ja fast im allgemeinen, die Bestimmung der horizontalen Festpunkte mit der sogenannten Triangulation vierter Ordnung weitergeführt und auf diese folgt in den meisten Fällen noch eine Triangulation fünfter Ordnung. Zweifellos ist auf freiem Felde, wo die Beschränkung des Sehvermögens verschwindend klein ist, die Triangulation ökonomisch, besonders in Fällen, wo die Signale der Triangulation höchster Ordnung noch stehen und somit zur Triangulation niedriger Ordnung keine kostspieligeren Signale (Pyramiden) aufgestellt werden müssen. Es besteht weiterhin kein Zweifel, daß die Bestimmung der Festpunkte mittels Triangulation mit den heutigen modernen Instrumenten und mit dem bei uns entwickelten Verfahren sehr zuverlässig ist.

Wesentlich geringer ist jedoch die Wirtschaftlichkeit der Triangulation in weiträumigen Wäldern und engen Tälern; auf solchen Gebieten ist die Triangulation in vielen Fällen zeitraubend und kostspielig. Man ist schon seit langem bestrebt, in einzelnen Fällen — wenn es die Wirtschaftlichkeit erwünscht — die Triangulation durch ein anderes Festpunktverdichtungsverfahren zu ersetzen, selbst auf die Gefahr hin, die Anforderungen der Genauigkeit etwas tiefer stellen zu müssen. Die nächstgelegene Methode hierfür ist die Polygonierung.

Die übliche Polygonierung zwischen Triangulierungspunkten hat jedoch gewisse Grenzen; vor allem soll die Länge der Polygonzüge begrenzt werden: die zugelassene größte Länge (die Summe der Polygonseitenlängen) wird je nach Art der Meßmethode und der erforderlichen Genauigkeit der Aufnahme in mehr oder weniger großem Maße beschränkt. Es ist auch nicht gleichgültig, wieviele Polygonpunkte (Brechtunkte) der Polygonzug hat. Diese Schranken der üblichen Polygonierung erfordern die Bestimmung von Festpunkten mittels Triangulierung in gewissen, nicht zu großen Entfernungen; diese Entfernung kann nur in dem Falle etwas erhöht werden, wenn eventuell polygonale Knotenpunkte den Regeln entsprechend eingefügt werden können. Wie bereits in meinem Aufsatz [1] erwähnt, beschränken unsere Aufnahmevorschriften die Aufstellung polygonaler Knotenpunkte auf die allernotwendigsten Fälle. Diese Beschränkung — man kann auch sagen: diese Abneigung gegen poly-

gonale Knotenpunkte — ist auf die Unsicherheiten der üblichen Berechnungsmethoden der Knotenpunkte zurückzuführen.

Zur Berechnung des polygonalen Knotenpunktes habe ich daher eine Methode entwickelt und unter [1] erörtert, durch welche die Bestimmung des Knotenpunktes mit der Bestimmung des Triangulationspunktes gleichwertig wird, und zwar nicht mit der eines beliebigen Triangulationspunktes, sondern eines solchen, zu dessen Bestimmung mindestens drei äußere-innere Richtungen (hin und zurück) sowie drei rein äußere gemessen wurden und die Schnittwinkel der Richtungen in dem zu bestimmenden Punkt sehr günstig liegen. Die Verlässlichkeit der Knotenpunktbestimmung kann noch weiter gesteigert werden, wenn am Knotenpunkt selber ebenfalls eine oder mehrere Orientierungsrichtungen gemessen werden; es kommen in diesem Falle zur Bestimmung noch so viel rein innere Richtungen hinzu, als Orientierungsrichtungen am Knotenpunkt gemessen worden sind.

Die Erhöhung der Bestimmungsgenauigkeit des polygonalen Knotenpunktes gestattet noch keine größere Steigerung der Abstände zwischen den Triangulierungspunkten, nachdem die bezüglich der übrigen Polygonzüge im obigen bereits erwähnte Beschränkung auch für die Länge der im Knotenpunkt zusammenlaufenden einzelnen Polygonzüge gilt. Die Abstände der Triangulierungspunkte können jedoch bedeutend erhöht werden, wenn zwischen einige Triangulierungspunkte ein ganzes Knotenpunktsystem eingeschaltet wird. Unter [1] habe ich mich schon eingehend mit der Bestimmung eines doppelten Knotenpunktsystems befaßt, worin auch die beiden Knotenpunkte mittels eines Polygonzuges verbunden sind. Die Bestimmung wurde auf die in der Triangulierung übliche Doppelpunkt-Ausgleichung zurückgeleitet. Es wurde weiterhin erwähnt, daß das Verfahren nötigenfalls auch auf ein dreifaches Knotenpunktsystem ausgedehnt werden kann.

Als Weiterentwicklung dieses Gedankens wurde die Zahl der in ein System zusammenfaßbaren polygonalen Knotenpunkte noch weiter erhöht und ihre Bestimmung auf die in der Triangulierung übliche Dreipunkt-, Vierpunkt- usw. -Ausgleichung zurückgeführt. Genau wie bei der Ausgleichung der Triangulierungspunktes theoretisch gleichgültig ist — wenn die allgemeinen Formen der Verbesserungsgleichungen für die äußeren und inneren Richtungen, und schließlich für die je zwei Neupunkte verbindenden gemeinsamen Richtungen bekannt sind —, wieviel Neupunkte in die gemeinsame Ausgleichung einbezogen werden, so ist es auch bei der Ausgleichung der polygonalen Knotenpunktsysteme theoretisch gleichgültig, wieviele Knotenpunkte ins System, in die gemeinsame Berechnung einbezogen werden.

Die Polygonzüge können in den Knotenpunktsystemen in zwei Gruppen gereiht werden: zur einen Gruppe gehören jene, die von einem bekannten Festpunkt ausgehen und sich einem Knotenpunkt anschließen; zur anderen Gruppe wieder jene Polygonzüge, die je zwei Knotenpunkte miteinander verbinden,

Die Verbesserungsgleichungen beider Gruppen sind in ihrer allgemeinen Form gegeben. Man braucht daher nichts weiter zu machen, als in die allgemeinen Gleichungen die zu den entsprechenden Anschlußpunkten gehörenden entsprechenden Angaben einzusetzen und danach die Ausgleichung in fast automatischer Weise auszuführen. Unsere vorliegenden Untersuchungen bezwecken auch nicht, die Zahl der theoretischen Überlegungen über diesen Problemkreis zu vermehren, sondern die in der Studie [1] bereits theoretisch entwickelte Möglichkeit für die Zwecke der Praxis zu erweitern.

Für unsere Untersuchungen wurde ein hügeliges Gelände gewählt, wo die Längenmessung auf einer Meßstrecke mittlerer Qualität ausgeführt werden konnte. Wir waren nämlich nicht bestrebt, mit außerordentlicher Genauigkeit das Polygonieren verrichten, da wir durchschnittlichen Verhältnissen entsprechende Ergebnisse haben wollten. Es wurden am Gelände 14 Punkte abgesteckt; zwischen je zwei Punkten betrug der Abstand durchschnittlich 625 m (der größte Abstand war 1163 m, der kleinste 366 m). Die Punkte wurden laut Abb. 7 mit Polygonzügen verbunden. Die 14 Punkte wurden sodann durch Triangulationsarbeiten V. Ordnung und die Koordinaten im lokalen System berechnet. Die Untersuchung bestand dann bloß darin, daß die mittels Triangulation bestimmten Koordinaten der am günstigsten gelegenen 4 Punkte von den 14 Punkten beibehalten und die »Triangulierungs«-Koordinaten der übrigen 10 Punkte vorerst unbeachtet worden sind; diese zehn Punkte wurden als polygonale Knotenpunkte betrachtet. Das Knotenpunktsystem haben wir dann in einem Satz ausgeglichen. Die auf diese Weise sich ergebenden Koordinaten wurden sodann mit den durch Triangulierung erhaltenen verglichen und die Abweichungen untersucht. Wie es sich aus folgendem auch zahlenmäßig zeigt, haben sich die Ergebnisse als sehr befriedigend erwiesen.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die fallweise Ersetzung der Triangulation mit dem polygonalen Knotenpunktsystem nur dann zu verlässlichen Ergebnissen führt, wenn die angewandte Berechnungsmethode das gesamte System in einem Satz auszugleichen gestattet. Ausgleichungen in Teilsätzen dürfen also nicht angewandt werden!

## 2.

Bevor wir noch auf die Einzelheiten der Untersuchung übergehen, muß kurz auf das Wesen des angewandten Rechenverfahrens (Ausgleichung) erinnert werden. Von mathematischen Ableitungen und Beweisen wird hier selbstverständlich abgesehen; diese sind in Aufsatz [1] aufzufinden.

Laufen in irgendeinem polygonalen Knotenpunkt solche Polygonzüge zusammen, an deren Anfangspunkten überall auch die Orientierungsrichtungen gemessen wurden, so kann für den Knotenpunkt aus einem jeden Polygonzug,

nämlich aus den Koordinaten (laut Abb. 1  $A$ ,  $B$ , bzw.  $C$ ) ihrer Anfangspunkte, den Richtungswinkeln der im Anfangspunkt gemessenen Orientierungsrichtungen ( $A - F$ ,  $B - G$ , bzw.  $C - H$ ) sowie den gemessenen Brechungswinkeln und Seitenlängen des Polygonzuges je eine Punktlage  $P_i$  ermittelt werden (auf Abb. 1.  $P_I$ ,  $P_{II}$  und  $P_{III}$ ); diese Punktlage wird durch die Koordinaten  $y_i$  und  $x_i$   $i = I, II, III$  gekennzeichnet. Hiernach wird der Richtungswinkel  $\delta_i$  ( $\delta_I$ ,  $\delta_{II}$  und  $\delta_{III}$ ) der Schlußseite der Polygonzüge, sowie deren Länge

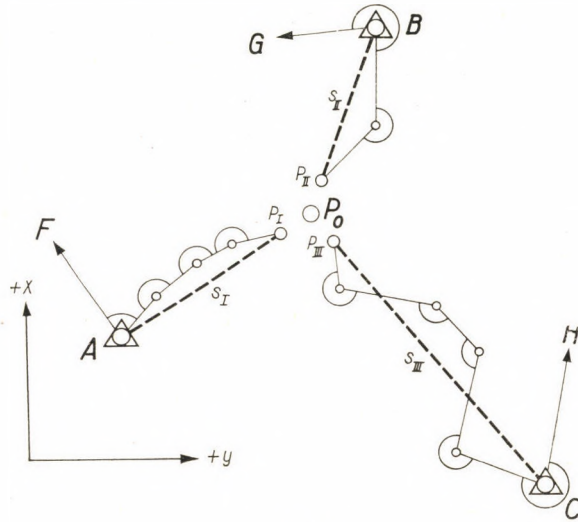


Abb. 1

$s_i$  ( $s_I$ ,  $s_{II}$  und  $s_{III}$ ) berechnet. (Unter Schlußseite eines Polygonzuges versteht man die Strecke, die den Anfangspunkt mit der sich aus dem Polygonzug ergebenden Punktlage des Knotenpunktes verbindet.)

Um die Ausgleichung ausführen zu können, wird unter den aus den einzelnen Polygonzügen erhaltenen Punktlagen (oder eventuell sogar in einer dieser Punktlagen) für den Knotenpunkt eine vorläufige Punktlage  $P_0$  aufgenommen, deren Koordinaten mit  $y_0$  und  $x_0$  bezeichnet werden. Die einzelnen Polygonzüge werden nunmehr durch je zwei fiktive Richtungen ersetzt. Die eine geht vom Anfangspunkt aus und ist durch den für die Schlußseite berechneten Richtungswinkel  $\delta_i$  bestimmt; die zweite ist die auf die Punktlage  $P_i$  gerichtete Richtung mit dem Richtungswinkel  $\delta'_i = \delta_i - 90^\circ$  (Abb. 2). Die Länge beider Richtungen stimmt mit der Länge der Schlußseite überein, d. h. ist in beiden Fällen gleich  $s_i$ . Mit den sich auf diese Weise als Polygonzüge ergebenden je zwei sogenannten äußeren Richtungen kann die Ausgleichung wie beim Vorwärtseinschneiden ausgeführt, die Veränderungen  $\delta y$  und  $\delta x$



der vorläufigen Knotenpunkt-Koordinaten ermittelt und schließlich die endgültigen Koordinaten selber bestimmt werden:

$$y = y_0 + \delta y \quad \text{und} \quad x = x_0 + \delta x \quad (1)$$

Diese Koordinaten geben die endgültige Punktlage  $P$  des Knotenpunktes an. Auf der Abbildung bedeuten die kurzen dicken Striche auf den Richtungs-

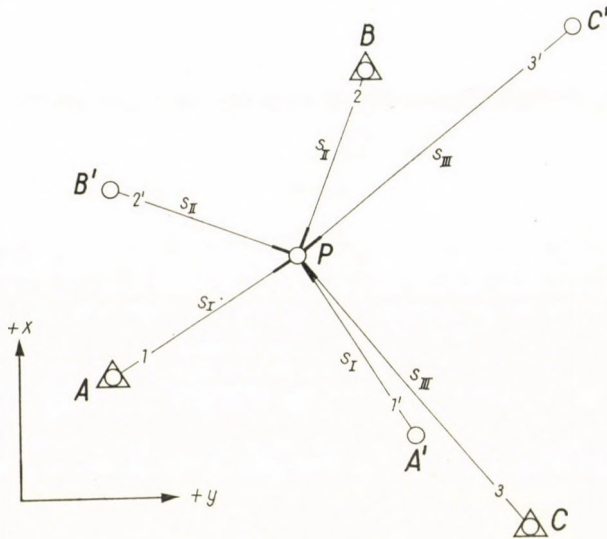


Abb. 2

linien bei Punkt  $P$ , daß es sich um vorwärtseinschneidende (äußere) Richtungen handelt.

Die allgemeine Form der Verbesserungsgleichungen zweier (äußerer), zu je einem Polygonzug gehörender fiktiver Richtungen lautet (s. Formeln und Bezeichnungen (21) im Aufsatz [1]):

$$\begin{aligned} v''_{ik} &= + a_i \delta y + b_i \delta x + l_{ik} \\ v''_{ih} &= - b_i \delta y + a_i \delta x + l_{ih} \end{aligned} \quad (2)$$

wobei  $v''_{ik}$  die Verbesserung (in Sekunden) der der Richtung der Schlußseite entsprechenden fiktiven Richtung und  $v''_{ih}$  die Verbesserung (in Sekunden) der hierauf senkrechten fiktiven Richtung ist;

$$a_i = + \frac{0,1 \varrho'' \cos \delta_{0i}}{s_{0i}} \quad b_i = - \frac{0,1 \varrho'' \sin \delta_{0i}}{s_{0i}} \quad (3)$$

sind die sogenannten Richtungskoeffizienten.  $\delta_{0i}$  ist der Richtungswinkel (vorläufiger Richtungswinkel) der vom Anfangspunkt des Polygonzuges zur vorläufigen Punktlage  $P_0$  des Knotenpunktes laufenden Richtung und  $s_{0i}$  der Abstand (vorläufiger Abstand) des Anfangspunktes von der vorläufigen Punktlage  $P_0$ . Die Absolutglieder  $l_{ik}$  und  $l_{ih}$  sind folgende:

$$l_{ik} = \frac{(y_0 - y_i) \cos \delta_{0i} - (x_0 - x_i) \sin \delta_{0i}}{s_{0i}} \varrho'' = \delta_{0i} - \delta_i$$

$$l_{ih} = \frac{(y_0 - y_i) \sin \delta_{0i} + (x_0 - x_i) \cos \delta_{0i}}{s_{0i}} \varrho'' = \frac{\varepsilon_{0i} - s_i}{s_{0i}} \varrho'' \quad (4)$$

In die Zähler der Richtungskoeffizienten wurde der Faktor 0,1 aus dem Grunde eingesetzt, damit man die Veränderungen  $\delta y$  und  $\delta x$  der Knoten-

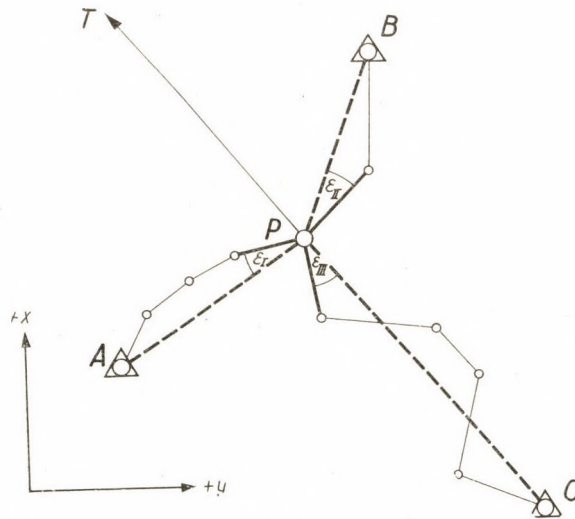


Abb. 3

punktkoordinaten — wie bei der Koordinatenausgleichung im allgemeinen üblich — in Dezimeteereinheit erhält.

Meistens wird am Knotenpunkt selber auch eine Richtungsmessung ausgeführt, und zwar mißt man die Richtung der sich dem Knotenpunkt anschließenden Seiten der Polygonzüge und — wenn nur irgend möglich — auch die Orientierungsrichtung mindestens zu einem weitergelegenen bekannten Festpunkt. Es werden mittels der Winkel  $\varepsilon$  zwischen den genannten Anschlußseiten des betreffenden Polygonzuges (Abb. 3) aus den gemessenen Richtungswerten der Anschlußseiten die Richtungswerte der Schlußseiten am Knoten-

punkt als zum Knotenpunkt gehörende innere fiktive Meßergebnisse hergestellt. (Die Winkel  $\varepsilon$  können auf Grund der Koordinaten berechnet werden, die sich anlässlich der vorläufigen Berechnung der Polygonzüge ergeben. Bei dieser Berechnung erhält man nämlich aus den einzelnen Polygonzügen nicht bloß je ein Koordinatenpaar für den Knotenpunkt, sondern auch Koordinaten für die dem Knotenpunkt vorangehenden Polygonpunkte.) Der gemessene Richtungswert der Orientierungsrichtung (auf der Abbildung  $P - T$ ) oder -richtungen und die für die Schlußseite der Polygonzüge berechneten fiktiven Richtungswerte ( $P - A$ ,  $P - B$  und  $P - C$ ), bilden jenen Richtungssatz, der bei der Ausgleichung des Knotenpunktes als innerer Richtungsmeßwert-satz aufgefaßt werden kann. Die fiktiven Richtungsmessungen betrachtet man als unmittelbar auf den Anfangspunkt der Polygonzüge zulaufend. (Auf der Abbildung sind die wahrhaftig gemessenen Richtungen mit dicken, zusammenhängenden Linien bezeichnet, die fiktiven Richtungen wiederum mit dicken gestrichelten Linien.)

Die Verbesserungsgleichungen der inneren Richtungen stimmen in der üblichen Koordinatenausgleichung der Triangulierungspunkte mit den Verbesserungsgleichungen der inneren Richtungen überein. Ihre allgemeine Form ist:

$$v_r'' = -\delta z + a_r \delta y + b_r \delta x + l_r \quad (5)$$

wo der Index  $r$  auf die entsprechende Richtung des Meßwertsatzes hinweist,  $\delta z$  die Veränderung des vorläufigen mittleren Orientierungswinkels  $Z_0$  des Richtungssatzes darstellt,  $a_r$  und  $b_r$  die durch Formel (3) zur betreffenden Richtung berechneten Richtungskoeffizienten sind (welche immer der dem Knotenpunkt zulaufenden Richtung entsprechen) und das Absolutglied

$$l_r = \delta_{or} - L_r - Z_0 \quad (6)$$

beträgt. Hier ist  $\delta_{or}$  der zur betreffenden Richtung mit den vorläufigen Koordinaten des Knotenpunktes berechnete vorläufige Richtungswinkel, wogegen  $L_r$  bei den Orientierungsrichtungen den gemessenen Richtungswert, bei den Schlußseiten das berechnete fiktive Richtungsmeßergebnis bedeutet. Den vorläufigen Wert des mittleren Orientierungswinkels bestimmen wir mit Hilfe der Formel

$$Z_0 = \frac{[p(\delta_0 - L)]}{[p]}, \quad (7)$$

wo die Richtungsgewichte mit  $p$  (siehe später), die vorläufigen Richtungswinkel mit  $\delta_0$  und die wirklichen bzw. fiktiven Meßergebnisse mit  $L$  bezeichnet wurden. (Der Wert  $\delta z$  wird im Laufe der Ausgleichung auf übliche Weise provisorisch eliminiert.)

Die Gewichte werden auf Grund der Ausführungen und der Formelgruppe (40) von [1] folgendermaßen angenommen. Wird das Gewicht der unmittelbar am Knotenpunkt gemessenen Orientierungsrichtung mit  $p_T$ , das Gewicht der inneren fiktiven Richtung mit  $p_b$ , und das Gewicht der äußeren fiktiven Richtung mit  $p_k$  bezeichnet, so ergibt sich

$$p_T = \frac{4}{3} s, \quad p_b = \frac{2s}{m}, \quad p_k = \frac{s}{m}; \quad (8)$$

wo  $s$  die Richtungslänge und  $m$  die Zahl der Seiten des entsprechenden Polygonzuges bedeutet. Bei den fiktiven Meßergebnissen ist die Richtungslänge gleich der Schlußseitenlänge des betreffenden Polygonzuges.

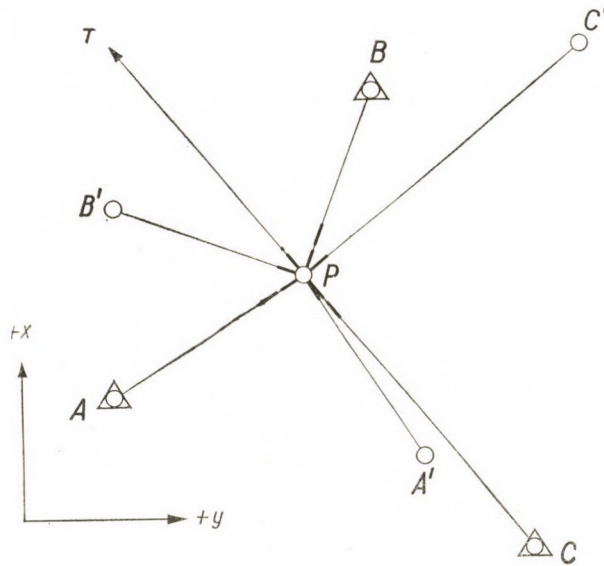


Abb. 4

Die Ausgleichung des Knotenpunktes wurde — wie oben bereits erwähnt — auf die in der Triangulation übliche Einpunkt-Ausgleichung zurückgeführt, deren Ausführung allbekannt und in Fachbüchern zu finden ist. Die Konfiguration Abb. 3 gestaltete sich im Laufe der Ausgleichung zur Punktbestimmung Abb. 4. Die im Punkt  $P$  auf die Richtungslinie gezogene dicke Linie zeigt eine vorwärtseinschneidende (äußere), der dicke Strich und Punkt eine rückwärtseinschneidende (innere) und die zwei dicken Striche eine Hin- und Rück- (äußere-innere) -Richtung an.

Es wird zwar hier — wie auch bereits erwähnt — im Zusammenhang mit dem Verfahren im allgemeinen auf mathematische Beweise nicht eingegangen, wir erachten es dennoch als zweckmäßig auch hier zu bemerken, daß die von einem Polygonzug herkommenden zwei bzw. drei fiktiven Richtungsmeßergebnisse vom Standpunkt der Ausgleichung aus gesehen als voneinander unabhängig betrachtet werden können.

Auch zwischen zwei polygonalen Knotenpunkten können fiktive Richtungen gebildet werden, wenn ein Polygonzug von einem zum anderen geführt

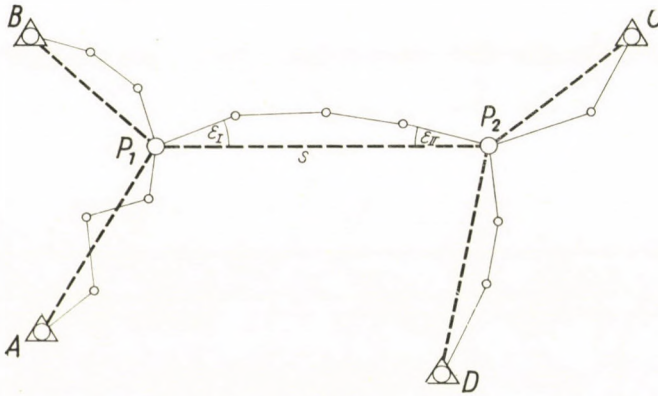


Abb. 5

worden ist. Wird nun dieser Polygonzug im lokalen Koordinatensystem durchgerechnet, so kann die Länge  $s$  der Schlußseite und die mit der Schlußseite eingeschlossenen Winkel  $\varepsilon_1$  bzw.  $\varepsilon_2$  der beiden äußeren Polygonseiten (der den Knotenpunkten angeschlossenen Seiten) bestimmt werden (Abb. 5). Mit Hilfe dieser Winkel wird an jedem der beiden Knotenpunkte je eine innere fiktive Richtung zwischen den beiden Knotenpunkten erhalten; diese entsprechen den gemeinsamen (Neupunkts-) Richtungen der bei der Triangulierung üblichen Doppelpunkt-Ausgleichung. Diese fiktiven gemeinsamen Richtungen werden selbstverständlich an beiden Knotenpunkten (bei jedem Knotenpunkt die von dort ausgehende) in den aus den vom Punkt ausgehenden übrigen fiktiven Richtungen und den eventuell gemessenen Orientierungsrichtungen bestehenden Richtungssatz eingefafßt.

Bezeichnen wir den einen Knotenpunkt mit  $P_u$ , den anderen mit  $P_v$ , so ist die Verbesserungsgleichung der vom Punkte  $P_u$  ausgehenden fiktiven Richtung:

$$v_{uv} = -\delta z_u + a_{vu} \delta y_u + b_{vu} \delta x_u - a_{vu} \delta y_v - b_{vu} \delta x_v + l_{uv} \quad (9)$$

wo  $a_{vu}$  und  $b_{vu}$  die mit den vorläufigen Koordinaten der Knotenpunkte  $P_u$  und  $P_v$  zur Richtung von  $P_v$  nach  $P_u$  gehörenden Richtungskoeffizienten sind,

$\delta z_u$  die Veränderung des zum Richtungssatz des Knotenpunktes  $P_u$  — selbstverständlich die gemeinsame Richtung auch mit inbegriffen — laut Formel (7) berechneten vorläufigen mittleren Orientierungswinkels  $Z_{0u}$  bedeutet und das Absolutglied

$$l_{uv} = \delta_{0uv} - L_{uv} - Z_{0u} \quad (10)$$

ist.  $L_{uv}$  ist das fiktive Meßergebnis der gemeinsamen Richtung vom Knotenpunkt  $P_u$  nach dem Knotenpunkt  $P_v$  und  $\delta_{0uv}$  der mit den vorläufigen Koordinaten der beiden Knotenpunkte berechnete vorläufige Richtungswinkel der Richtung.

Die Verbesserungsgleichung der fiktiven Richtung vom Knotenpunkt  $P_v$  nach dem Knotenpunkt  $P_u$  lautet:

$$v_{vu} = -\delta z_v + a_{vu} \delta y_u + b_{vu} \delta x_u - a_{vu} \delta y_v - b_{vu} \delta x_v + l_{vu} \quad (11)$$

Sinngemäß stimmen die Bezeichnungen unter Beachtung der Indizes mit den vorhin aufgerichteten überein. Es sei jedoch darauf erinnert, daß

$$a_{vu} = -a_{uv} \quad \text{und} \quad b_{vu} = -b_{uv} \quad (12)$$

Wird der die beiden Knotenpunkte verbindende Polygonzug durch fiktive Richtungen ersetzt, so muß außer der Verbesserungsgleichung (9) und (11) noch eine andere Verbesserungsgleichung aufgeschrieben werden, und zwar (siehe Formel (50) und (51) in [1]):

$$\bar{v}_{uv} = -b_{vu} \delta y_u + a_{vu} \delta x_u + b_{vu} \delta y_v - a_{vu} \delta x_v + \bar{l}_{uv} \quad (13)$$

wo

$$\bar{l}_{uv} = \left( \frac{s_0 - s}{s} \right)_{uv} \varrho'' \quad (14)$$

Die Glieder des Klammerausdruckes sind:  $s_0$ , der mit den vorläufigen Koordinaten der Knotenpunkte  $P_u$  und  $P_v$  berechnete vorläufige Abstand,  $s$  die Länge der Schlußlinie des Polygonzuges zwischen den beiden Knotenpunkten. Gleichung (13) entspricht eigentlich der Verbesserungsgleichung, die zum fiktiven Meßergebnis des Abstandes zwischen den beiden Knotenpunkten gehört.

Das Gewicht der gemeinsamen Richtungen zwischen den beiden Knotenpunkten, d. h. das zu den Verbesserungsgleichungen (9) und (11) gehörende Gewicht wird mittels der Formel für  $p_b$ , das zur Verbesserungsgleichung (13) gehörende Gewicht mit der Formel für  $p_k$  der Formelgruppe (8) berechnet.

Werden nun zwischen mehreren Knotenpunkten Polygonzüge geführt, so entsteht ein aus mehr als zwei Knotenpunkten bestehendes Knotenpunktsystem. Selbstredend gilt das, was vorhin vom Ersetzen des Polygonzuges zwischen den Knotenpunkten  $P_u$  und  $P_v$  durch fiktive Richtungsmessungen

behauptet worden ist, für jeden zwischen zwei Knotenpunkten geführten Polygonzug. Es dürfte jedoch noch bemerkt werden, daß bei allen Knotenpunkten, denen sich mehrere Polygonzüge zwischen Knotenpunkten anschließen, die diese Polygonzüge ersetzenden, vom Punkt ausgehenden sämtlichen fiktiven Richtungen in einen Meßsatz zusammengefaßt werden sollen, und zwar, wenn auch Orientierungsrichtungen gemessen wurden, mit diesen zusammen.

3.

Wir wollen nun die umrissene Untersuchung vornehmen. Im Netz auf Abb. 6 sind die Triangulierungspunkte zwischen die das aus den Punkten

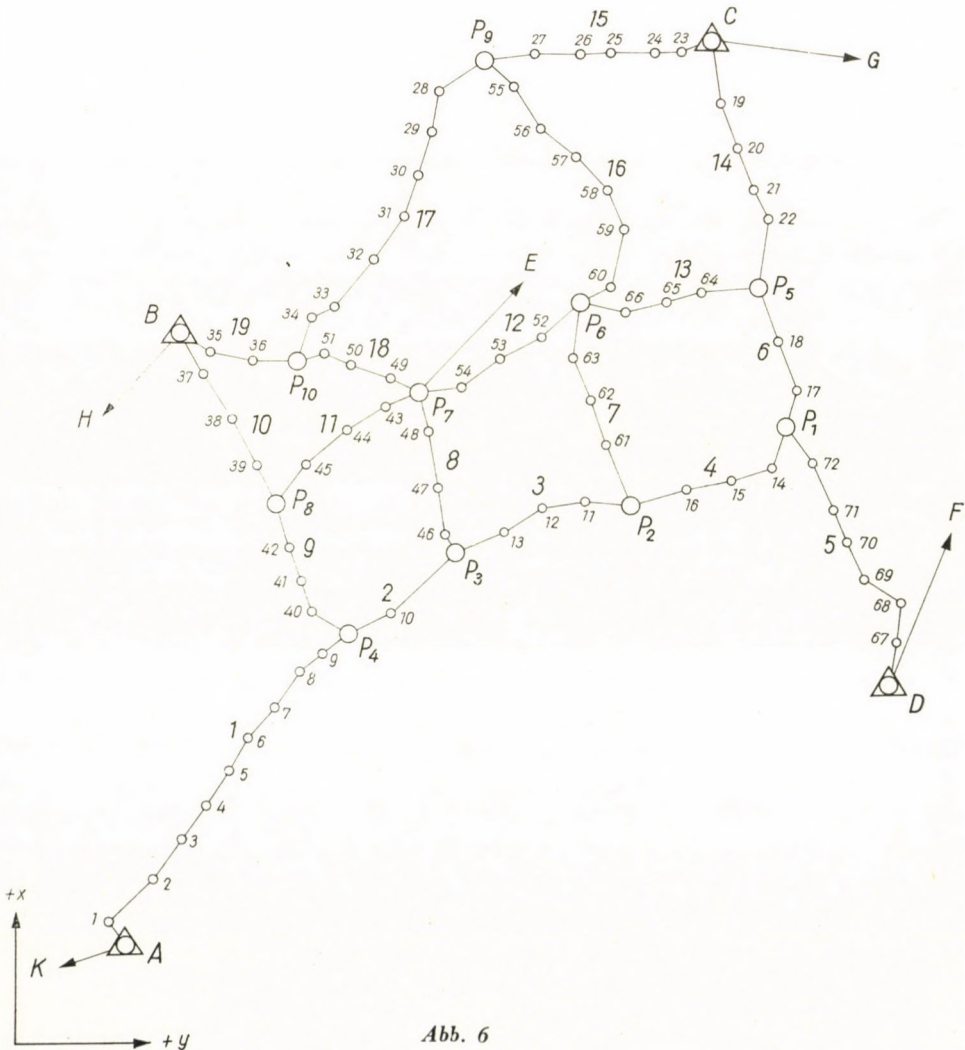


Abb. 6

$P_1 - P_{10}$  bestehende Knotenpunktsystem eingefügt worden ist, mit  $A, B, C$  und  $D$  bezeichnet. Die Koordinaten der Punkte  $A - D$  im lokalen System sind:

$$\begin{array}{ll} y_A = + 583,64 \text{ m} & x_A = + 316,40 \text{ m} \\ y_B = + 706,61 \text{ m} & x_B = + 2201,06 \text{ m} \\ y_C = + 2284,17 \text{ m} & x_C = + 3118,40 \text{ m} \\ y_D = + 2867,76 \text{ m} & x_D = + 1159,38 \text{ m} \end{array}$$

Die bei der Ausgleichung des Knotenpunktsystems anzuwendenden fiktiven und Orientierungsrichtungen sind auf Abb. 7 angegeben. Die Richtungen sind mit laufenden Nummern versehen. Die Richtungen 1—23, 25—34, 42, 46, 52, 54 und 57 sind fiktive Richtungen, die Richtung 24 ist eine Orientierungsrichtung (die bei der Punktbestimmung ebenfalls mitspielt), während die Zahlen 35—41, 43—45, 47—51, 53, 55—56 und 58 zu den Verbesserungsgleichungen der Längenmessungen gehören. Diese letzteren Zahlen sind in der Mitte der einzelnen Seiten angebracht, die Richtungszahlen hingegen in der Nähe des entsprechenden Standpunktes.

Im ersten Schritt wurden auf Grund der Meßangaben der Polygonzüge vorläufige Koordinaten für die Knotenpunkte berechnet; diese sind in Tabelle III angegeben.

Als Beispiel wird hier die Berechnung der Meßergebnisse der auf Grund des Polygonzuges Nr. 1 nach Knotenpunkt  $P_4$  gerichteten fiktiven äußeren Richtungen vorgeführt. Der Polygonzug wird mit der Orientierungsrichtung von Punkt  $A$  nach Triangulierungspunkt  $K$  orientiert; mittels der gemessenen Brechungswinkel und Seitenlängen erhält man für Knotenpunkt  $P_4$  die Koordinaten

$$(y_{P_4})_1 = +1239,43 \text{ m} \qquad (x_{P_4})_1 = +1277,43 \text{ m}$$

Richtungswinkel und Länge der von Punkt  $A$  nach der diesen Koordinaten entsprechenden Punktlage laufenden Richtung (der Schlußseite des Polygonzuges) betragen:

$$\delta = 34^\circ 18' 32'' \qquad s = 1163,46 \text{ m}$$

Der Richtungswinkel der fiktiven Richtung von  $A$  nach Punkt  $P_4$  beträgt demnach  $34^\circ 18' 32''$ , während der Richtungswinkel der lotrechten fiktiven Richtung der dem Punkt mit den oben angegebenen Koordinaten zuläuft,  $304^\circ 18' 32''$  ist. Die Länge beider Richtungen beträgt 1163,46 m. Man berechnet nun aus den endgültigen Koordinaten des Punktes  $A$  und aus den vorläufigen Koordinaten des Punktes  $P_4$  die zur Richtung  $A - P_4$  gehörenden Richtungskoeffizienten; die betreffenden zwei Verbesserungsgleichungen sind (wobei der Index der Meßverbesserung  $v$  den laufenden Nummern in Abb. 7 entspricht):

$$v_{42} = +14,6 \delta y_4 - 10,0 \delta x_4 - 51$$

$$v_{43} = +10,0 \delta y_4 + 14,6 \delta x_4 - 28$$

Die Absolutglieder ergaben sich folgendermaßen: Mit den vorläufigen Koordinaten des Punktes  $P_4$  berechnet ist

$$\delta_{042} = 34^\circ 17' 41'' \qquad s_0 = 1163,30 \text{ m}$$

Mit den Werten der Schußseite verglichen ergibt sich:

$$l_{42} = (34^\circ 17' 41'') - (34^\circ 18' 32'') = -51''$$

$$l_{43} = \frac{1163,30 - 1163,46}{1163,30} \rho'' = -28''$$



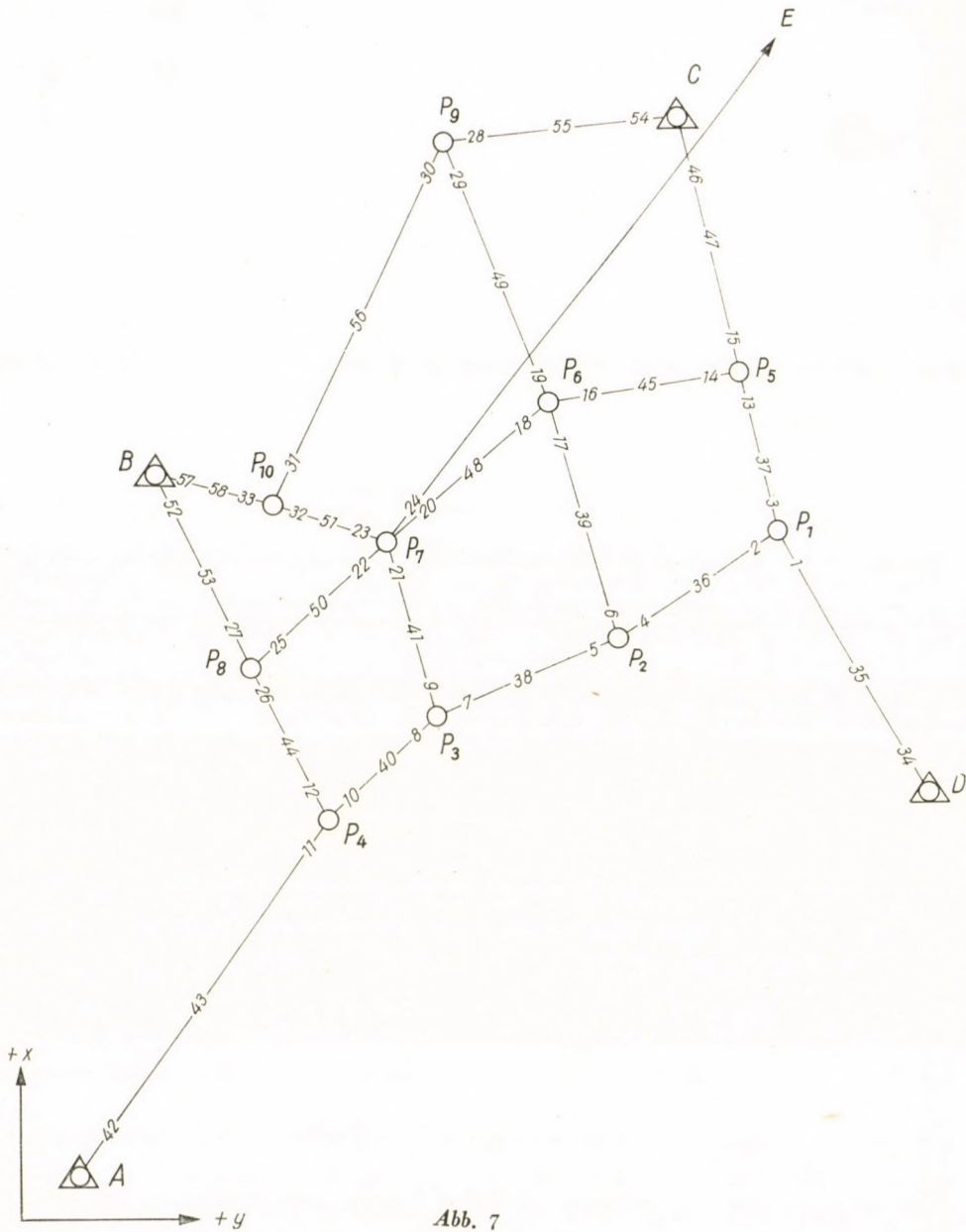


Abb. 7

Das Gewicht beider fiktiver Meßergebnisse ist

$$p_k = \frac{s}{m} = \frac{11,63}{10} \approx 1,2$$

(die Längenwerte zur Gewichts-bildung wurden in Hundertmeter-Einheiten beachtet!).

Der Polygonzug Nr. 1 liefert selbstverständlich beim Punkt  $P_4$  auch eine innere fiktive Richtung. Es ist jedoch zweckmäßiger, die Bildung der inneren fiktiven Richtungen beim

Knotenpunkt  $P_7$  zu demonstrieren, da dort ein Richtungssatz gemessen wurde, in dem auch eine Orientierungsrichtung vorkommt. Die wirklichen Meßergebnisse sind in den ersten zwei Spalten von Tabelle I angegeben, während in der dritten Spalte die Werte  $\varepsilon$  und in der vierten und fünften bereits der zur Ausgleichung geeignete Richtungssatz zusammengefaßt worden

Tabelle I

Visierter Punkt	Gemessener Richtungswert	$\varepsilon$	Richtungssatz zur Ausgleichung	Zielpunkt
54	0° 0' 0''	-21° 1' 49''	338° 58' 11''	$P_6$
48	85 4 31	+ 1 19 53	86 24 24	$P_3$
43	182 53 44	-32 17 34	150 36 10	$P_8$
49	213 54 54	-10 57 13	202 57 41	$P_{10}$
$E$	320 33 39		320 33 39	$E$

ist. Hier sind die ersten vier Richtungen fiktive innere Richtungen und die letzte eine tatsächlich gemessene Richtung. Die Berechnung der Winkel  $\varepsilon$  wird für den Polygonzug Nr. 12 angegeben (Abb. 8). Man geht von den für Punkt  $P_6$  aufgenommenen Koordinaten  $y = 0$

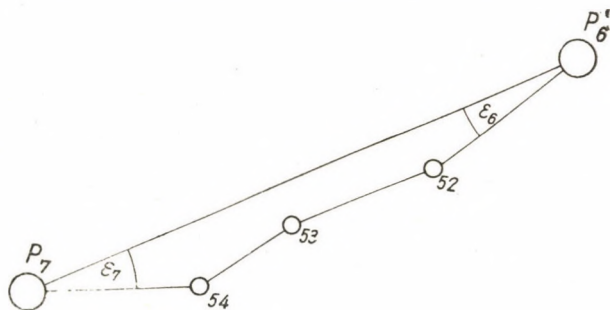


Abb. 8

und  $x = 0$  aus sowie von dem für die Seite  $P_6 - 52$  aufgenommenen annähernden Richtungswinkel  $230^\circ$  und erhält auf Grund der Meßergebnisse des Polygonzuges für den dem Knotenpunkt  $P_6$  folgenden und dem Knotenpunkt  $P_7$  vorangehenden Polygonpunkt sowie für den Knotenpunkt  $P_7$  die Koordinaten

$$\begin{aligned}
 y_{52} &= -118,52 \text{ m} & x_{52} &= -99,43 \text{ m} \\
 y_{54} &= -346,04 \text{ m} & x_{54} &= -264,01 \text{ m} \\
 y_{P_7} &= -480,45 \text{ m} & x_{P_7} &= -287,35 \text{ m}
 \end{aligned}$$

In diesem System ist der Richtungswinkel und die Länge der Schlußseite des Polygonzuges

$$\delta_{P_6-P_7} = 239^\circ 7' 1'' \qquad s_{P_6-P_7} = 559,82 \text{ m}$$

Der Richtungswinkel der beiden anschließenden Seiten beträgt

$$\delta_{P_6-52} = 230^\circ 0' 0'' \qquad \delta_{P_7-54} = 80^\circ 8' 50''$$

Demnach ist

$$\varepsilon_6 = +9^\circ 7' 1'' \qquad \varepsilon_7 = -21^\circ 1' 49''$$

Tabelle II

Richtungsnummer	Standpunkt	Zielpunkt	Richtungswerte fiktiven und Orientierungsrichtungen $L$	Vorläufiger Richtungswinkel $\delta_0$	Orientierungswinkel $\alpha$	Absolutglied $l$	Gewicht $P$
20	$P_7$	$P_6$	338° 58' 11"	59° 6' 6"	80° 7' 55"	+85"	2,8
21		$P_3$	86 24 24	166 31 42	80 7 18	+48	2,5
22		$P_8$	150 36 10	230 42 12	80 6 2	-28	2,7
23		$P_{10}$	202 57 41	283 2 47	80 5 6	-84	1,9
24		$E$	320 33 39	40 40 3	80 6 24	-6	21,9
					$Z = 80 6 30$		

Auf Tabelle II ist die Berechnung der Absolutglieder der zum Richtungssatz des Punktes  $P_7$  gehörenden Verbesserungsgleichungen ersichtlich. Die zur fiktiven Richtung nach Punkt  $P_6$  gehörende Verbesserungsgleichung beträgt, die Richtungskoeffizienten mit den vorläufigen Koordinaten berechnet:

$$v_{20} = +18,9 \delta y_6 - 31,6 \delta x_6 - 18,9 \delta y_7 + 31,6 \delta x_7 + 85$$

Die Verbesserungsgleichung der fiktiven Längenmessung zwischen den Punkten  $P_6$  und  $P_7$  ist

$$v_{18} = +31,6 \delta y_6 + 18,9 \delta x_6 - 31,6 \delta y_7 - 18,9 \delta x_7 - 117$$

Die betreffenden Gewichte sind:

$$p_{20} = \frac{2 \cdot 5,60}{4} = 2,8$$

$$p_{18} = \frac{5,60}{4} = 1,4$$

Das Absolutglied in Gleichung  $v_{18}$  rührt davon her, daß die Länge der Schlußseite des zwischen den Punkten  $P_6$  und  $P_7$  geführten Polygonzuges — wie bereits erwähnt — 559,82 m, der mit den vorläufigen Koordinaten der beiden Punkte berechnete Abstand jedoch 559,34 m beträgt. Demnach ist

$$l_{18} = \frac{559,34 - 559,82}{559,34} q'' = -177''$$

Die Verbesserungsgleichung der von Punkt  $P_7$  gemessenen Orientierungsrichtung ist, die Richtungskoeffizienten mit den gegebenen (endgültigen) Koordinaten des Punktes  $E$  und den vorläufigen Koordinaten des Punktes  $P_7$  berechnend:

$$v_{24} = -9,5 \delta y_7 + 8,2 \delta x_7 - 6$$

Da die Richtungslänge 1642 m beträgt, ist das betreffende Gewicht:

$$p_{24} = \frac{4}{3} 16,42 = 21,9$$

Den beispielshalber vorgeführten Verbesserungsgleichungen ähnlich werden auch die übrigen Verbesserungsgleichungen aufgestellt. Wir haben insgesamt 58 Verbesserungsgleichungen. Die Zahl der Normalgleichungen — je zwei Koordinaten pro Knotenpunkt entsprechend — beträgt 20. Die Orientierungsunbekannten wurden nämlich mit Hilfe der sogenannten Schreiberschen fiktiven Gleichungen eliminiert. Die 21. (ergänzende) Normalgleichung dient zur Bestimmung des Quadratsummenminimums  $[pvv]$ . Außer den Koor-

dinatenänderungen selbst wurden auch deren Gewichtskoeffizienten bestimmt und mit letzteren auch deren mittlerer Fehler berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle III zusammengefaßt.

Tabelle III

Punkt	Vorläufige $y_0$ -Koordinate	Veränderung $\delta y$	Mittlerer Fehler $\mu_y$	Vorläufige $x_0$ -Koordinate	Veränderung $\delta x$	Mittlerer Fehler $\mu_x$
	in Metern					
$P_1$	+2543,25	-0,08	$\pm 0,08$	+1950,74	-0,05	$\pm 0,10$
$P_2$	+2079,70	-0,18	$\pm 0,09$	+1698,80	-0,12	$\pm 0,10$
$P_3$	+1554,37	-0,26	$\pm 0,08$	+1536,69	-0,13	$\pm 0,08$
$P_4$	+1239,10	-0,58	$\pm 0,09$	+1277,46	-0,14	$\pm 0,09$
$P_5$	+2451,37	-0,05	$\pm 0,07$	+2374,17	+0,09	$\pm 0,09$
$P_6$	+1917,06	0,00	$\pm 0,08$	+2313,45	+0,03	$\pm 0,07$
$P_7$	+1437,10	-0,20	$\pm 0,07$	+2026,22	-0,25	$\pm 0,06$
$P_8$	+1011,12	-0,19	$\pm 0,08$	+1677,60	-0,16	$\pm 0,07$
$P_9$	+1610,77	0,00	$\pm 0,11$	+3056,62	+0,09	$\pm 0,09$
$P_{10}$	+1061,91	-0,36	$\pm 0,07$	+2113,16	-0,10	$\pm 0,05$

Tabelle IV

Punkt	Mit Triangulierung bestimmte Koordinaten		Durch Ausgleichung des Knotenpunktsystems erhaltene Koordinaten		Differenzen		
	in Metern						
	y	x	y	x	$\Delta y$	$\Delta x$	d
$P_1$	+2543,05	+1950,73	+2543,17	+1950,69	+0,12	-0,04	0,13
$P_2$	+2079,40	+1698,78	+2079,52	+1698,68	+0,12	-0,10	0,16
$P_3$	+1553,97	+1536,67	+1554,11	+1536,56	+0,14	-0,11	0,18
$P_4$	+1238,38	+1277,44	+1238,52	+1277,32	+0,14	-0,12	0,18
$P_5$	+1451,24	+2374,27	+2451,32	+2374,26	+0,08	-0,01	0,08
$P_6$	+1916,96	+2313,55	+1917,06	+2313,48	+0,10	-0,07	0,12
$P_7$	+1436,74	+2025,96	+1436,90	+2025,97	+0,16	+0,01	0,16
$P_8$	+1010,82	+1677,52	+1010,93	+1677,44	+0,11	-0,08	0,16
$P_9$	+1610,71	+3056,62	+1610,77	+3056,71	+0,06	+0,09	0,11
$P_{10}$	+1061,60	+2113,03	+1061,55	+2113,06	-0,05	+0,03	0,06

In Tabelle IV werden die mittels Ausgleichung des Knotenpunktsystems erhaltenen Koordinaten mit den durch Triangulation bestimmten verglichen. Der Unterschied zwischen den auf zwei Arten berechneten entsprechenden

Koordinaten ist mit  $\Delta y$  und  $\Delta x$  bezeichnet;  $d$  ist die lineare Abweichung zwischen den Punktlagen:

$$d = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$$

Wie ersichtlich, zeugt die Größe der Abweichungen davon, daß das Knotenpunktsystem völlig zweckdienliche Ergebnisse lieferte. Der Absolutwert der Koordinatenabweichungen beträgt durchschnittlich 9 cm. Der durchschnittliche Wert des mittleren Fehlers der Knotenpunkt-Koordinaten ist auf Grund der Tabelle III 8 cm. Der mittlere Fehler der Koordinaten der Triangulierungspunkte kann in  $\pm 5$  cm festgesetzt werden. Dementsprechend können auch die auftretenden Koordinatenabweichungen als reell angesprochen werden, da der mittlere Fehler des Unterschiedes der auf zwei Arten bestimmten Koordinaten dem Fehlerfortpflanzungsgesetz entsprechend (wobei der Index  $h$  den mit Triangulierung bestimmten mittleren Koordinatenfehler und der Index  $cs$  den im Knotenpunktsystem bestimmten mittleren Koordinatenfehler angibt)

$$\mu = \sqrt{\mu_h^2 + \mu_{cs}^2} = \sqrt{64 + 25} = \pm 9 \text{ cm}$$

beträgt, in völliger Übereinstimmung mit dem oben erhaltenen mittleren Wert.

Die Untersuchung hat letzten Endes unsere Auffassung bekräftigt, daß in allen Fällen, wo keine besondere Genauigkeit angestrebt wird, auf einzelnen Gebieten die Festpunktverdichtung zwischen entfernter liegenden Triangulationspunkten getrost mit der Ausbildung eines polygonalen Knotenpunktsystems aufgeführt werden kann. Das Berechnungsverfahren muß jedoch unbedingt die Ausgleichung des gesamten Systems in einem Satz gestatten.

#### SCHRIFTTUM

1. HAZAY, I.: Berechnung des polygonalen Knotenpunktes aus Ergebnissen der fiktiven Richtungsmessungen (Mitteilungen der Fakultäten für Bergingenieure und Geo-Ingenieure (XX). Techn. Universitätsfakultäten, Sopron, 1959).
2. Geodéziai Kézikönyv (Handbuch für Geodäsie), Band II. [Schriftleiter: I. Hazay; im Auftrage des Állami Földmérési és Térképészeti Hivatal (Ungarischen Vermessungs- und Kartographischen Amtes), herausgegeben vom Verlag Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1957. a) Punkt 624 (S. 341—345), b) Punkt 4522—453 (S. 231—236)].
3. JORDAN-EGGERT: Handbuch der Vermessungskunde, Band II, 10. Aufl., Par. 123, (S. 586—591) Stuttgart 1950.
4. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die verknöteten Einrechnungszüge [A Bányá- és Kohómérnöki Osztály Közleményei (Mitteilungen der Berg- und Hüttenmännischen Abteilung) Band VI, Sopron 1934].

## ZUSAMMENFASSUNG

In einzelnen Fällen, z. B. in größeren Wäldern, können die horizontalen Festpunkte zwischen voneinander entfernter liegenden Triangulierungspunkten zweckmäßig und wirtschaftlich durch die Entwicklung eines polygonalen Knotenpunktsystems verdichtet werden. Dieses Verfahren führt jedoch nur dann zu verlässlichen Ergebnissen, wenn eine Berechnungsmethode angewandt wird, mittels derer das ganze System in einem Satz ausgeglichen werden kann. Das vorgeführte Berechnungsverfahren leitet die Bestimmung des Knotenpunktsystems auf die bei der Triangulation übliche Mehrpunkt-Ausgleichung zurück. Das beschriebene Experiment brachte sehr günstige Ergebnisse.

## ON POLYGONAL NODAL SYSTEMS

I. HAZAY

## SUMMARY

In certain cases as, e. g., in larger forests, it is advisable and economical to complete the horizontal base points between points of triangulation situated in greater distances from each other, by developing a polygonal nodal system. This method, however, leads to reliable results only if a method of calculation is used in which the whole system can be adjusted in a single set. The process of calculation presented reduces the determination of the nodal system to the multipoint adjustment applied in triangulation. An experiment discussed gave very favorable results.

## DES SYSTÈMES POLYGONAUX DE POINTS NODAUX

I. HAZAY

## RÉSUMÉ

Les points fixes au sens horizontal, situés entre des points de triangulation à grande distance les uns des autres, peuvent être complétés économiquement, dans certains cas, dans une région forestière étendue par exemple, par le développement d'un système polygonal de points nodaux. Cependant, pour aboutir à des résultats sûrs, cette méthode nécessite un procédé de calcul permettant de compenser le système entier en bloc. Le procédé de calcul présenté ramène la détermination du système de points nodaux à la compensation à plusieurs points utilisée pour la triangulation. L'essai rapporté par l'auteur a donné des résultats très favorables.

## СИСТЕМЫ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК

И. ХАЗАИ

## РЕЗЮМЕ

В отдельных случаях, например, в районах крупных лесных массивов, опорные пункты по горизонтали целесообразно и экономично сгущать между триангуляционными пунктами, размещающимися на значительных расстояниях, путем создания системы полигональных точек. Однако, эта система может дать надежные результаты только в том случае, если использовать такой способ вычисления, при помощи которого можно уравнивать всю систему в целом. Излагаемым в настоящей работе методом вычисления определение системы узловых точек сводится к обычно применяемому при триангуляции способу многоточечного уравнивания. Описываемые опытные работы дали положительные результаты.

# COMPENSATION DE LA DÉTERMINATION SIMULTANÉE DE LA LATITUDE, DE LA LONGITUDE ET DE L'AZIMUT GÉOGRAPHIQUES

Gy. ALPÁR

LABORATOIRE DE RECHERCHES GÉODÉSIQUES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE, SOPRON

[Manuscrit présenté le 28 décembre 1960]

Plusieurs études récemment parues ont été consacrées aux différentes méthodes de précision limitée de l'astronomie géodésique de position. L'évaluation et la compensation graphique de telles observations ont été traitées dernièrement par R. ROELOFS [1], tandis que la compensation exacte a fait l'objet de plusieurs études antérieures publiées par Antal TÁRCZY-HORNOCH [2, 3].

Au cours des travaux poursuivis au Laboratoire de Recherches Géodésiques de l'Académie des Sciences de Hongrie, nous avons effectué, sur le conseil de l'académicien Antal TÁRCZY-HORNOCH, des recherches pouvant conduire à une définition mathématique générale de ces problèmes, de laquelle les solutions déjà connues seraient déduites comme des cas spéciaux. Nous voudrions rendre compte ci-dessous des résultats de ces recherches.

Pour le triangle de position bien connu, on peut écrire la relation de trigonométrie sphérique utilisant les notations de la figure 1\*:

$$\cos \delta \cos \tau = \cos \varphi \cos z - \sin \varphi \sin z \cos A \quad (1)$$

Cette relation se montre très utile pour nos examens, car excepté l'angle parallactique, presque toujours sans intérêt pour la détermination de la position géographique, elle contient tous les éléments du triangle de position. Pour pouvoir examiner la relation réciproque des variations différentielles des différents éléments, on écrit l'équation différentielle totale pouvant être obtenue de la relation ci-dessus. Après arrangement, on a:

$$\begin{aligned} \sin \delta \, d\varphi - \cos \delta \, \sin \delta \, d\tau - \cos \delta \, \sin \tau \, \sin \varphi \, dA - \sin \delta \, \cos \tau \, d\delta + \\ + (\sin z \cos \varphi + \cos z \sin \varphi \cos A) \, dz = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Ici,  $d\varphi$ ,  $d\tau$ ,  $dA$ ,  $d\delta$  et  $dz$  signifient les variations différentielles des valeurs  $\varphi$ ,  $\tau$ ,  $A$ ,  $\delta$  et  $z$ . (La déclinaison étant toujours désignée, en astronomie, par la

\* Vu qu'il s'agit ici uniquement de levés à petite échelle, l'azimut  $A$  est compté du Nord astronomique.

lettre  $\delta$ , nous avons choisi, comme symbole de la différentiation partielle, la lettre  $d$ , contrairement à la notation mathématique usuelle.) En cas de valeurs mesurées, ces variations différentielles peuvent être remplacées au cours de la compensation par les corrections d'observations, avec une approximation admissible. En cas d'inconnues non mesurées à introduire dans la compensa-

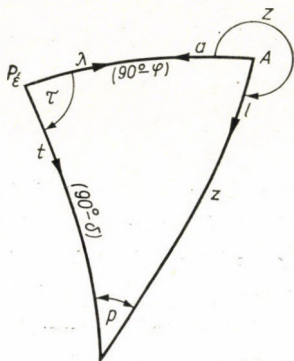


Fig. 1

tion, on remplace les variations différentielles par des valeurs complétant les valeurs approximatives de ces inconnues, calculées des résultats des observations. Dans ces cas, les coefficients des équations de correction de même caractère que les précédentes, sont affectés de l'indice 0. On indique ainsi qu'il s'agit de valeurs de base (initiales) calculées avec des valeurs d'observation ou des valeurs approximatives. Dans ce cas, on a tacitement supposé que tous les éléments indiqués du triangle de position peuvent varier simultanément, ce qui ne se produit guère dans la pratique, toutes les valeurs y figurant n'étant pas mesurées ou calculées à la fois. On peut cependant bien utiliser cette relation pour en déduire d'autres relations valables pour tous les cas spéciaux. La relation ci-dessus est donc l'équation différentielle la plus générale du triangle de position.

## I.

Dans le cas le plus connu, l'observation de la distance zénithale d'astres connus s'accompagne de l'observation de l'heure. Dans ce cas,  $\delta$  doit être considéré comme exempt d'erreur, donc  $d\delta = 0$ , et à défaut d'observations effectuées pour  $A$ ,  $dA$  doit être exprimé en fonction des autres variables. Le triangle de position donne:

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos z + \cos \varphi \sin z \cos A$$



d'où,  $\delta$  étant constant:

$$\sin z \sin A dA = \frac{\cos \delta \cos P}{\cos \varphi} dz - \frac{\cos \delta \cos \tau}{\cos \varphi} d\varphi = -\cos \delta \sin \tau dA \quad (3)$$

En substituant (3) dans (2):

$$\left[ \sin \delta - \frac{\cos \delta \cos \tau}{\cos \varphi} \sin \varphi \right] d\varphi - \cos \delta \sin \tau d\tau + \\ + \left[ \sin z \cos \varphi + \cos z \sin \varphi \cos A + \frac{\cos \delta \cos P}{\cos \varphi} \sin \varphi \right] dz = 0$$

Multiplions l'équation par  $\cos \varphi$ :

$$[\sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \cos \tau \sin \varphi] d\varphi - \cos \delta \sin \tau \cos \varphi d\tau + \\ + [\sin z \cos^2 \varphi + \cos z \sin \varphi \cos \varphi \cos A + \cos \delta \cos P \sin \varphi] dz = 0$$

Si l'on tient compte de ce que

$$\sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \cos \tau \sin \varphi = \sin z \cos A; \quad \cos \delta \sin \tau = -\sin z \sin A$$

et

$$\sin z \cos^2 \varphi + \cos z \sin \varphi \cos \varphi \cos A = \sin z - \sin \varphi \cos \delta \cos P$$

alors, après division par  $\sin z$ , on reçoit la relation suivante:

$$\cos A d\varphi + \sin A \cos \varphi d\tau + dz = 0 \quad (4)$$

On transforme cette relation d'après l'égalité  $\tau = t - \lambda$ , représentée sur la figure, où  $t$  signifie la lecture de l'heure exprimée en valeur d'angle correspondant à la position de l'étoile, et  $\lambda$  celle exprimée en valeur d'angle correspondant à son passage au méridien (c'est-à-dire à la longitude géographique). On écrit alors la relation différentielle  $d\tau = dt - d\lambda$  et avec l'approximation admissible déjà mentionnée, on remplace  $dt$  par la correction  $v_t$  de l'observation de l'heure, et  $d\lambda$  par  $\Delta\lambda$ , qui est la valeur complémentaire de la valeur approximative  $\lambda_0$  de la longitude géographique  $\lambda$  à introduire, comme inconnue non mesurée, dans la compensation. On obtient alors comme résultat:

$$d\tau = v_t - \Delta\lambda$$

Suivant un raisonnement tout analogue, on peut remplacer, dans l'équation (4),  $d\varphi$  par la valeur complémentaire  $\Delta\varphi$  correspondante, tandis qu'en cas de  $dz$ ,

il faut aussi tenir compte des circonstances pratiques de la compensation. En effet, les coefficients des équations rendues linéaires par développement en série ou d'une autre manière en vue de la compensation, ne peuvent être calculés en général que par utilisation de valeurs approximatives, et ainsi, dans notre cas, aux valeurs  $\varphi_0$  et  $\tau_0$  ainsi qu'aux valeurs  $\delta$  considérées comme définitives, appartient une valeur  $z_0$  calculée d'elles, qui diffère généralement des distances zénithales vraie  $z$  et d'observation  $z'$ . Conformément à cela, dans notre équation (4)

$$dz = z - z_0 = (z' + v_z) - z_0 = \Delta'z + v_z$$

où  $\Delta'z$  est la discordance apparaissant dans l'angle zénithal, et  $v_z$  la correction appartenant à l'angle zénithal observé. Ainsi, l'équation de correction correspondant à notre équation (4) prendra la forme ci-dessous:

$$v_z + \sin A_0 \cos \varphi_0 v_t + \cos A_0 \Delta\varphi - \sin A_0 \cos \varphi_0 \Delta\lambda + \Delta'z = 0 \quad (5)$$

(Bien que nous l'ayons déjà fait remarquer d'une façon générale, notons encore, pour éviter toute erreur, que  $A_0$  et  $\varphi_0$  figurant dans cette équation de correction sont des valeurs approximatives, qui doivent cependant satisfaire une condition initiale donnée. Il s'entend, en effet, que dans un triangle de position, on ne peut choisir librement les valeurs approximatives que de trois données tout au plus, et les valeurs approximatives des autres données éventuellement nécessaires pour calculer les coefficients des équations de correction, devront déjà être calculées de ces valeurs. Dans le cas présent,  $\delta$  est une valeur donnée,  $\varphi_0$  et  $\lambda_0$  (c'est-à-dire  $\tau_0$ ) sont des valeurs approximatives choisies, donc ici, la valeur de  $A_0$  figurant dans l'équation de correction devra être calculée de la relation  $-\sin A_0 = \sin \tau_0 \frac{\cos \delta}{\sin z_0}$  où  $z_0$ , nécessaire, comme nous l'avons vu, pour obtenir  $\Delta'z$ , sera déterminé d'une façon analogue par l'équation  $\cos z_0 = \sin \varphi_0 \sin \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta \cos \tau_0$ . Au cours de nos examens suivants, nous procéderons toujours conformément à nos constatations précédentes.)

Notre équation (5) correspond à l'équation (1) de l'étude citée de ROELOFS, à cette différence près, que  $\Delta'z$  a maintenant un signe opposé, et que nous avons également corrigé l'observation de l'heure. Étant donné que 15 secondes d'arc correspondent à une seconde de temps, cette correction peut être indiquée même en cas d'observations très exactes.

En principe, le même raisonnement est valable pour le cas d'étoiles observées à distances zénithales égales, mais inconnues (méthode de GAUSS). Pour faire une comparaison avec la méthode graphique, remarquons que l'élimination de la troisième inconnue se produisant ici (valeur complémentaire  $\Delta z$  de la valeur approximative  $z_0$  de l'inconnue  $z$ ) peut être effectuée de la

façon bien connue, même en cas de compensation exacte. Lors de la compensation selon les directions du recoupement, elle se fait d'une manière analogue à l'élimination de l'angle d'orientation (voir [4], pp. 91 et 311—312).

## II.

Si c'est des directions horizontales d'étoiles connues, et des observations de l'heure correspondantes que l'on détermine les coordonnées géographiques (méthode de GOUGENHEIM), alors en négligeant  $d\delta$  dans notre équation (2), l'angle zénithal n'ayant pas été observé,  $dz$  doit être exprimé par les autres variables. Dans ce but, exprimons d'abord  $dz$  de la relation (3):

$$dz = \frac{\cos \tau}{\cos P} d\varphi - \frac{\sin \tau \cos \varphi}{\cos P} dA .$$

En le substituant en (2), on a:

$$\left[ \sin \delta + \frac{\sin z \cos \varphi \cos \tau}{\cos P} + \frac{\cos z \sin \varphi \cos A \cos \tau}{\cos P} \right] d\varphi - \cos \delta \sin \tau d\tau - \left[ \cos \delta \sin \tau \sin \varphi + \frac{\sin z \sin \tau \cos^2 \varphi}{\cos P} + \frac{\cos z \sin \varphi \cos \varphi \cos A \sin \tau}{\cos P} \right] dA = 0$$

et après multiplication par  $\cos P$ :

$$\begin{aligned} & [\sin \delta \cos P + \sin z \cos \varphi \cos \tau + \cos z \sin \varphi \cos A \cos \tau] d\varphi - \\ & - \cos \delta \sin \tau \cos P d\tau - [\cos \delta \sin \tau \sin \varphi \cos P + \sin z \sin \tau \cos^2 \varphi + \\ & + \cos z \sin \varphi \cos \varphi \cos A \sin \tau] dA = 0 \end{aligned}$$

Étant donné que

$$\sin z \cos \varphi \cos \tau + \cos z \sin \varphi \cos A \cos \tau = \cos \tau (\sin \tau \sin P - \cos \tau \cos P \sin \delta)$$

et

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin \tau \sin \varphi \cos P + \sin z \sin \tau \cos^2 \varphi &= \sin \tau (\cos \delta \sin \varphi \cos P + \\ & + \sin z - \sin^2 \varphi \sin z) , \end{aligned}$$

après arrangement et simplification, on obtient l'équation suivante:

$$\sin A d\varphi + \frac{\cos \delta \cos P}{\cos z} d\tau + \operatorname{tg} z dA = 0 \quad (6)$$

En tenant encore compte de ce que  $\tau = t - \lambda$ , et ainsi  $d\tau = v_l - \Delta\lambda$ , et considérant que, d'une façon analogue à la substitution de  $dz$ ,  $dA = A - A_0 = (l' - a_0) + (v_l - \Delta a) - (l_0 - a_0) = \Delta' A - \Delta a - v_l$ , (où  $A$  est l'azimut calculé avec des valeurs correctes, et  $A_0$  l'azimut calculé avec des valeurs approchées,  $a_0$  la valeur approximative de la lecture au limbe correspondant au Nord astronomique,  $\Delta a$  sa valeur complémentaire,  $l'$  la lecture au limbe correspondant à l'étoile observée, et  $v_l$  sa correction), alors on pourra écrire l'équation (6) sous la forme:

$$\begin{aligned} + \operatorname{tg} z_0 v_l + \frac{\cos \delta \cos P_0}{\cos z_0} v_l + \sin A_0 \Delta\varphi + \cos A_0 \cos \varphi_0 \Delta\lambda - \\ - \operatorname{tg} z_0 (\sin \varphi_0 \Delta\lambda + \Delta a) + \operatorname{tg} z_0 \Delta' A = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Compte tenu encore de certaines différences, analogues à celles mentionnées dans le cas précédent, cette équation s'accorde avec celle de GOUGENHEIM (voir [1], p. 10). Quant aux corrections de l'observation de l'heure, nos constatations précédentes restent valables.

Comme cela ressort aussi de l'étude de la littérature citée, nous avons toujours examiné, dans les cas ci-dessus, les solutions utilisables pour la compensation graphique. Leur caractéristique commune est que, dans la solution graphique, les équations de correction apparaissent comme des droites situées dans le plan. Dans ces cas, les équations de correction ne peuvent donc contenir généralement que deux inconnues, et doivent se présenter sous une forme qui corresponde à la forme «normale» de ces droites:

$$x \cos a + y \sin a = p$$

où  $p$  signifie la distance normale de la droite, mesurée du centre du système de coordonnées  $x, y$ , et  $a$  l'angle de direction de la droite. Si pour les mêmes inconnues  $x$  et  $y$ , on a plusieurs équations de ce genre, indépendantes les unes des autres, alors les droites les représentant devraient se sectionner en un point. Mais dans les équations de correction de ce type, il faut mettre à la place de  $p$ , la valeur d'observation  $o'$  et la correction  $v$  de cette dernière, donc

$$x \cos a + y \sin a = o' + v$$

et ainsi, évidemment, ces droites n'auront pas un point d'intersection commun. La compensation graphique consiste donc à établir par estimation le point

d'intersection commun le plus probable, dont les coordonnées donneront les inconnues cherchées. Dans la pratique, on augmente d'une constante  $k$  les valeurs  $(o' + v)$  donnant la distance normale, et les coordonnées du centre du

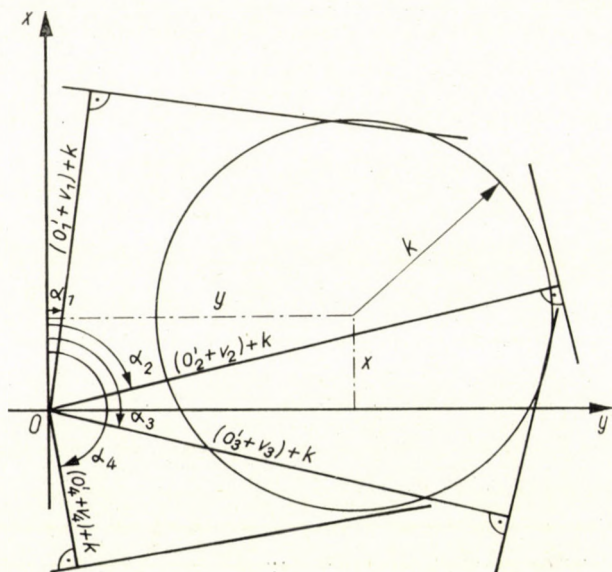


Fig. 2

cercle de rayon  $k$ , qui tangente le mieux les «droites de correction», donneront la solution (voir fig. 2). Ce procédé rend possible une construction plus exacte et si, dans les équations de correction, il se trouve une troisième inconnue ayant des coefficients de même valeur dans chaque équation, cette inconnue peut jouer le rôle de la constante  $k$ , et sa valeur est déterminée par le rayon du cercle le plus tangent. En raison de la précision limitée des solutions graphiques, les équations de correction sont écrites en général de façon telle, que seules les faibles valeurs complémentaires des inconnues cherchées y figurent comme des quantités à déterminer. Relativement au triangle de position, ces solutions graphiques sont généralement connues, aussi ne les avons-nous mentionnées ici qu'en passant. Notons encore qu'il est curieux de voir que ces procédés ne soient pas utilisés ailleurs, bien que dans le cas d'observations de même poids, par exemple, la compensation de la section d'arc peut être effectuée de cette manière.

### III.

Examinons maintenant le cas, où la distance zénithale et la direction horizontale simultanément observées d'une étoile inconnue (l'observation doit être effectuée pour une position d'étoile  $n \geq 3$ ), servent à déterminer la latitude

géographique et l'azimut (voir [3]). Ici, la détermination de la latitude géographique ne peut avoir lieu à cause de l'ascension droite inconnues, ou ne devient possible que si, par la connaissance autant que possible exacte de  $\delta$ , l'étoile peut être identifiée ultérieurement. Dans ces cas, on n'effectue généralement pas d'observations de l'heure, donc c'est  $d\tau$  qui devra être exprimé maintenant en fonction des autres variables, mais dans ce cas, la variation de  $\delta$  demeure également possible. Comme

$$-\sin z \sin A = \cos \delta \sin \tau,$$

de là, si  $\delta$  varie à son tour:

$$-\sin A \cos z dz + \sin z \cos A dA + \sin \delta \sin \tau d\delta - \cos \delta \cos \tau d\tau = 0 \quad (8)$$

D'où

$$d\tau = \frac{-\sin A \cos z}{\cos \delta \cos \tau} dz + \frac{\sin z \cos A}{\cos \delta \cos \tau} dA + \frac{\sin \delta \sin \tau}{\cos \delta \cos \tau} d\delta$$

En la substituant en (2), on a:

$$\begin{aligned} & \sin \delta \cos \tau d\varphi - (\sin \tau \sin z \cos A + \cos \delta \sin \tau \cos \tau \sin \varphi) dA + \\ & + (\sin z \cos \varphi \cos \tau + \cos z \sin \varphi \cos A \cos \tau + \sin z \sin A \cos z) dz - \\ & - (\sin^2 \tau \sin \delta + \cos^2 \tau \sin \delta) d\delta = 0 \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de ce que

$$\begin{aligned} & \sin \tau \sin z \cos A + \cos \delta \sin \tau \cos \tau \sin \varphi = \sin \tau \sin \delta \cos \varphi, \\ & \cos z \sin \varphi \cos A \cos \tau + \sin \tau \sin A \cos z = \\ & = \cos z \sin z \cos \delta - \cos^2 z \sin \delta \cos P \end{aligned}$$

et

$$\sin^2 \tau \sin \delta + \cos^2 \tau \sin \delta = \sin \delta,$$

alors, après arrangement et simplification, on obtient la relation

$$\cos \tau d\varphi - \sin \tau \cos \varphi dA - d\delta - \cos P dz = 0 \quad (9)$$

En introduisant à nouveau la substitution  $A - A_0 = dA = \Delta' A_0 - \Delta a + v_l$  et en remplaçant ici  $dz$  par  $v_z$ , on obtient l'équation de correction ci-dessous:

$$\begin{aligned} & -\cos P_0 v_z - \sin \tau_0 \cos \varphi_0 v_l + \cos \tau_0 \Delta \varphi + \sin \tau_0 \cos \varphi_0 \Delta a - \\ & - \Delta \delta - \sin \tau_0 \cos \varphi_0 \Delta' A = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

A part certaines simplifications des symboles, cette équation est identique à celles de [3; (17)], et sous cette forme, elle se prête aussi à la compensation graphique moyennant certaines omissions. Ici, en effet, il nous faut chercher dans un système de coordonnées  $\Delta\varphi$ ,  $\cos \varphi_0 \Delta a$ , le cercle le plus tangent dont le rayon est  $k \Delta\delta$  ( $k$  pouvant être librement choisi), et les coordonnées de son centre donnent les valeurs complémentaires cherchées. Mais dans l'équation (10), les corrections ont également des coefficients dont la valeur diffère pour chaque équation, de sorte que, dans ce cas, au lieu du minimum  $\Sigma (v_z + v_l)$  utilisé généralement pour la compensation graphique (et qui est déjà une approximation), on chercherait un minimum  $\Sigma (av_z + bv_l)$ ,  $a$  et  $b$  désignant les coefficients en question. De cette manière, c'est donc d'observations de poids mal déterminés que l'on construirait les coordonnées donnant les valeurs complémentaires des inconnues. Tout cela devient plus évident encore, si les corrections ne figurant chacune que dans une seule équation, sont réduites à des corrections fictives (voir [4]; pp. 262—264). Si on suppose, en effet, que  $-\cos P_0 v_z + \sin \tau_0 \cos \varphi_0 v_l = -v$  (où  $v$  est la correction fictive), alors

$$\cos \tau_0 \Delta\varphi - \sin \tau_0 \cos \varphi_0 \Delta a - \Delta\delta = (\sin \tau_0 \cos \varphi_0 \Delta' A + v) \quad (10a)$$

Cette équation, tout à fait analogue par sa structure à l'équation (5) de l'étude citée de ROELOFS, ne saurait cependant être strictement utilisée pour la compensation graphique, car les poids déterminés par l'introduction des corrections fictives n'y peuvent pas être considérés d'une façon simple. D'ailleurs, les variantes de ROELOFS ont le même défaut, parce qu'au côté droit des équations (9) et (14) de l'étude [1], les corrections figurent aussi avec des coefficients différents pour chaque équation. Ces procédés graphiques ne sont donc applicables que si les erreurs ne dépassent pas les limites d'exactitude du dessin. Par contre, ces méthodes s'utilisent très bien pour la solution graphique du problème.

#### IV.

Enfin, si on observe les distances zénithales et les directions horizontales d'étoiles connues, l'observation de deux étoiles ou de deux positions d'étoiles rend déjà possible la compensation, comme le Dr. Antal TÁRCZY-HORNOCH l'avait démontré en détail dans son ouvrage [2]. Si les valeurs complémentaires de  $\varphi$ ,  $\lambda$  et  $A$  sont également introduites dans la compensation, en tant qu'inconnues non mesurées, comme cela a été fait dans ce qui précède, deux équations de correction devront être écrites pour chaque étoile ou position d'étoile. Il convient d'appliquer ici simultanément les équations du premier et du second

cas spécial parce que, comme on peut aussi le voir ci-dessous, cela offre la possibilité d'une solution plus simple. Soient les deux équations de condition:

$$\begin{aligned}
 v_z + \sin A_0 \cos \varphi_0 v_l + \cos A_0 \Delta\varphi - \sin A_0 \cos \varphi_0 \Delta\lambda - \Delta'z = 0 \\
 - \operatorname{tg} z_0 v_l + \frac{\cos \delta \cos P_0}{\cos z_0} v_l + \sin A_0 \Delta\varphi + \cos A_0 \cos \varphi_0 \Delta\lambda - \\
 - \operatorname{tg} z_0 (\sin \varphi_0 \Delta\lambda - \Delta A) + \operatorname{tg} z_0 \Delta' A = 0
 \end{aligned} \quad (11)$$

En cas d'observation de deux étoiles, on aurait ici, d'après la solution classique,  $4 + 3 = 7$  équations normales. Mais si, de la façon connue, on considère les corrections  $v_l$  comme inconnues (voir [4]; pp. 266—269), on ne reçoit, selon la compensation des observations intermédiaires, que 5 équations normales. En tout cas, le surplus de travail reste encore considérable par rapport aux procédés graphiques, mais dans un cas donné, il peut être nécessaire de calculer plus exactement le résultat, en tenant bien compte du poids des observations. Ce cas peut se produire d'autant plus facilement que, comme on sait, si une étoile est en position favorable pour l'observation des distances zénithales, l'observation des directions horizontales s'effectue dans des circonstances très défavorables, et inversement. Conformément aux vues géodésiques modernes, la considération précise de leur poids permet aussi d'utiliser les observations moins exactes (mais non divergeantes), pour augmenter l'exactitude de nos résultats.

L'exemple numérique ci-dessous présenté pourra mieux illustrer nos examens. En vue de la comparaison des méthodes graphiques et numériques, nous avons choisi comme données de notre exemple, celles de l'ouvrage [5] cité par l'étude [1] du même auteur. Sans reproduire les procédés graphiques cités dans [1], nous en comparerons seulement les résultats avec ceux des méthodes numériques présentées ci-dessous d'une façon détaillée. Au cours de nos calculs, nous avons utilisé aussi certaines données de [6] se rapportant à notre cas. Dans le cas en question, la latitude et la longitude géographiques ont été déterminées par la méthode de GAUSS (par étoiles observées à distance zénithale égale, mais inconnue). Les données et résultats des observations sont les suivants:

$$\begin{array}{l}
 \text{Coordonnées géographiques} \\
 \text{approximatives de la station}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \varphi_0 = +3^\circ 41' 10'' \\
 \lambda_0 = +3^h 36^m 20,5^{\text{sec}}
 \end{array} \right.$$

date: 9 septembre 1948

N°	Nom de l'étoile	$\alpha$	$\delta$	Temps sidéral de Greenwich	$z_0$	$\Delta'z$
1	$\beta$ Cygni	19 <sup>h</sup> 28 <sup>m</sup> 39,30 <sup>sec</sup>	+27°51'07,9"	21 <sup>h</sup> 50 <sup>m</sup> 19,85 <sup>sec</sup>	30°00'20"	+10,6"
2	$\zeta$ Capricorni	21 <sup>h</sup> 23 <sup>m</sup> 45,18 <sup>sec</sup>	-22°38'08,6"	0 <sup>h</sup> 01 <sup>m</sup> 02,97 <sup>sec</sup>	30°00'20"	+23,3"
3	$\delta$ Sagittae	19 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 06,18 <sup>sec</sup>	+18°24'26,5"	1 <sup>h</sup> 08 <sup>m</sup> 23,76 <sup>sec</sup>	30°00'20"	+19,5"

D'après la méthode de GAUSS, mentionnée en passant à l'article I de notre étude, on peut, en complétant convenablement notre équation (5), écrire l'équation de correction suivante:

$$v_z + \sin A_0 \cos \varphi_0 v_l + \cos A_0 \Delta\varphi - \sin A_0 \cos \varphi_0 \Delta\lambda + \Delta z + \Delta'z = 0 \quad (5a)$$



Étant donné qu'il y figure 3 inconnues non mesurées ( $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$  et  $\Delta z$ ), et qu'on ne dispose d'observations que pour 3 étoiles, la compensation n'est pas possible, à défaut d'observations surabondantes. Ainsi, les inconnues recherchées devront être déterminées ici des équations de correction elles-mêmes. Avec les données ci-dessus, les valeurs approchées  $A_0$ , nécessaires pour le calcul des coefficients, peuvent être obtenues des triangles de position, d'après la relation  $\cos A_0 = \frac{\sin \delta - \sin \varphi_0 \cos z_0}{\cos \varphi_0 \sin z_0}$  par exemple. Comme on travaille ici avec de petites valeurs complémentaires, il est permis d'utiliser la règle aux logarithmes pour le calcul. Ainsi:

$A_{1,0} = 34,5^\circ$	$A_{2,0} = 152,2^\circ$	$A_{3,0} = 301,5^\circ$
$\cos A_{1,0} = +0,824$	$\cos A_{2,0} = -0,883$	$\cos A_{3,0} = +0,521$
$\sin A_{1,0} = +0,566$	$\sin A_{2,0} = +0,469$	$\sin A_{3,0} = -0,852$

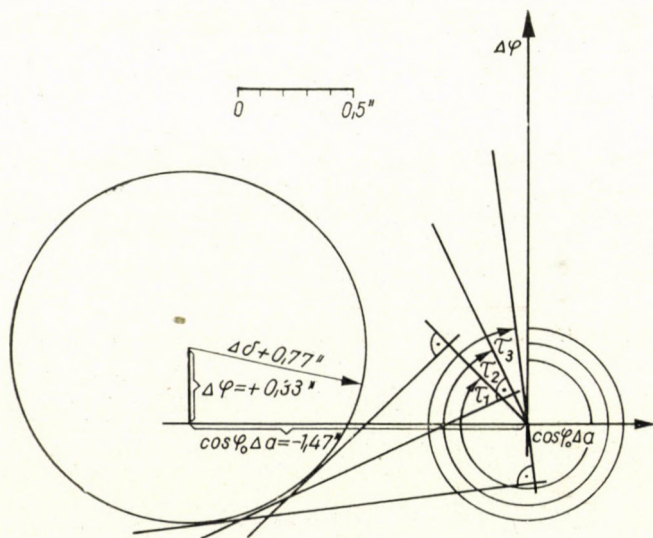


Fig. 3

En vertu de l'équation (5a), on peut maintenant écrire les équations déterminant les inconnues cherchées:

$$\begin{aligned}
 +0,824 \Delta\varphi - 0,566 \cos \varphi_0 \Delta\lambda + \Delta z + 10,6 &= 0 & D &= -2,391 & D_{\Delta\varphi} &= +17,13 \\
 -0,883 \Delta\varphi - 0,469 \cos \varphi_0 \Delta\lambda + \Delta z + 23,3 &= 0 & & & D_{\Delta\lambda \cos \varphi_0} &= -11,32 \\
 +0,521 \Delta\varphi + 0,852 \cos \varphi_0 \Delta\lambda + \Delta z + 19,5 &= 0 & & & D_{\Delta z} &= +45,89
 \end{aligned}$$

Donc:  $\Delta\varphi = \frac{D_{\Delta\varphi}}{D} = \frac{+17,13}{-2,391} = -7,2''$  (détermination graphique:  $-7,0''$ )

$\Delta\lambda \cos \varphi_0 = \frac{D_{\Delta\lambda \cos \varphi_0}}{D} = \frac{-11,32}{-2,391} = +4,7''$  (détermination graphique:  $+4,5''$ )

$\Delta z = \frac{D_{\Delta z}}{D} = \frac{+45,89}{-2,391} = -19,2''$

Si pour les observations d'étoiles ci-dessus, nous écrivons des discordances en azimut prises conformément à l'étude [1], alors la détermination des inconnues peut aussi se faire par la

méthode de GOUGHENHEIM, décrite sous II au cours de nos examens. Dans notre équation (7) se rapportant à ce cas, il figure aussi 3 inconnues ( $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\lambda$  et  $\Delta a$ ), donc à défaut d'observations en nombre surabondant, on déterminera encore les inconnues cherchées sans compensation directement des équations de correction. Les discordances en azimut choisies sont (voir [1]; p. 108):

$$\Delta A_1 = -12,2'' \quad \Delta A_2 = -4,0'' \quad \Delta A_3 = -22,5''$$

De là, conformément à notre équation (7):

$$\begin{aligned} -0,566 \Delta\varphi - 0,824 \cos \varphi_0 \Delta\lambda - 0,577 \Delta a + 0,577 \sin \varphi_0 \Delta\lambda + 7,04 &= \emptyset \\ -0,469 \Delta\varphi + 0,883 \cos \varphi_0 \Delta\lambda - 0,577 \Delta a + 0,577 \sin \varphi_0 \Delta\lambda + 2,31 &= \emptyset \\ +0,852 \Delta\varphi - 0,521 \cos \varphi_0 \Delta\lambda - 0,577 \Delta a + 0,577 \sin \varphi_0 \Delta\lambda + 12,98 &= \emptyset \end{aligned}$$

En vue d'une solution plus simple, écrivons à présent la différence des équations (1—2) et (1—3):

$$\begin{array}{l|l} -0,097 \Delta\varphi - 1,707 \cos \varphi_0 \Delta\lambda + 4,73 = \emptyset & D = +2,391 \quad D_{\Delta\varphi} = -11,58 \\ -1,418 \Delta\varphi - 0,303 \cos \varphi_0 \Delta\lambda - 5,94 = \emptyset & D_{\Delta\lambda \cos \varphi_0} = +7,29 \end{array}$$

$$\text{Donc: } \Delta\varphi = \frac{D_{\Delta\varphi}}{D} = \frac{-11,58}{+2,391} = -4,8'' \quad (\text{détermination graphique: } -5,5'')$$

$$\Delta\lambda \cos \varphi_0 = \frac{D_{\Delta\lambda \cos \varphi_0}}{D} = \frac{+7,29}{+2,391} = +3,0'' \quad (\text{détermination graphique: } +5,5'')$$

$$\Delta a = +12,8''$$

Cette fois, il y a déjà une différence considérable entre les résultats des méthodes numérique et graphique, qui vient non pas de l'imprécision du dessin, mais des poids mal déterminés dont il a été déjà question à l'article III de notre étude. La solution graphique originale de GOUGHENHEIM était exempte de ces erreurs. Si nous appliquons maintenant le procédé réuni examiné à l'article IV, à notre exemple ci-dessus, alors la compensation devient aussi possible.

D'après nos équations (11), les équations de correction écrites avec les données ci-dessus sont les suivantes:

$$\begin{array}{rcl} v_{z_1} + 0,565v_{t_1} + 0,824 \Delta\varphi - 0,565 \Delta\lambda - & - \Delta z - 10,60 = \emptyset \\ + 0,578v_{l_1} + & + 0,886v_{t_1} - 0,566 \Delta\varphi - 0,886 \Delta\lambda - 0,578 \Delta a + & + 7,06 = \emptyset \\ v_{z_2} + 0,468v_{t_2} - 0,883 \Delta\varphi - 0,468 \Delta\lambda - & - \Delta z - 23,30 = \emptyset \\ + 0,578v_{l_2} + & + 0,917v_{t_2} - 0,469 \Delta\varphi - 0,917 \Delta\lambda - 0,578 \Delta a + & + 2,31 = \emptyset \\ v_{z_3} - 0,851v_{t_3} + 0,521 \Delta\varphi + 0,851 \Delta\lambda - & - \Delta z - 19,50 = \emptyset \\ + 0,578v_{l_3} + & + 0,478v_{t_3} + 0,852 \Delta\varphi - 0,478 \Delta\lambda - 0,578 \Delta a + & + 13,00 = \emptyset \end{array}$$

Si, pour simplifier la solution, on considère les corrections  $v_t$  comme inconnues (voir [4]; pp. 266—269), alors il faudra aussi tenir compte, dans nos calculs, des trois équations d'identité suivantes:

$$v_{t_1} = v_{t_1} ; v_{t_2} = v_{t_2} ; v_{t_3} = v_{t_3}$$

Par elles, on garantit en effet, que dans le minimum  $[vv]$  figurent aussi les corrections  $v_t$  considérées comme inconnues. Si maintenant, tenant compte des circonstances de l'observation, on prend le poids des observations de l'heure le décuple de celui des observations angulaires, on peut, d'après ce qui précède, écrire le système d'équations normales ci-dessous:

$$\begin{array}{rcl} +12,6693 v_{t_1} + \emptyset & v_{t_2} + \emptyset & v_{t_3} - 1,0352 \Delta\varphi - 2,6693 \Delta\lambda - 1,5330 \Delta a - \\ & & - 0,5650 \Delta z + 12,7351 = \emptyset \\ \emptyset & v_{t_1} + 12,7344 v_{t_2} + \emptyset & v_{t_3} - 1,8105 \Delta\varphi - 2,7344 \Delta\lambda - 1,5860 \Delta a - \\ & & - 0,4680 \Delta z - 4,5668 = \emptyset \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\emptyset \quad v_{t_1} + \emptyset \quad v_{t_2} + 11,4081 v_{t_3} + 0,7756 \Delta\varphi - 1,4081 \Delta\lambda - 0,8270 \Delta a + \\
+ 0,8510 \Delta z + 35,1945 = \emptyset \\
- 1,0352 v_{t_1} - 1,8105 v_{t_2} + 0,7756 v_{t_3} + 5,6374 \Delta\varphi + 2,0701 \Delta\lambda + 0,3860 \Delta a - \\
- 0,4620 \Delta z + 19,3537 = \emptyset \\
- 2,6693 v_{t_1} - 2,7344 v_{t_2} + 1,4081 v_{t_3} + 2,0701 \Delta\varphi + 6,8118 \Delta\lambda + 3,9460 \Delta a + \\
+ 0,1820 \Delta z - 43,3628 = \emptyset \\
- 1,5330 v_{t_1} - 1,5860 v_{t_2} - 0,8270 v_{t_3} + 0,3860 \Delta\varphi + 3,9460 \Delta\lambda + 3,0000 \Delta a + \\
+ \emptyset \quad \Delta z - 38,7010 = \emptyset \\
- 0,5650 v_{t_1} - 0,4680 v_{t_2} + 0,8510 v_{t_3} - 0,4620 \Delta\varphi + 0,1820 \Delta\lambda + \emptyset \quad \Delta a + \\
+ 3,0000 \Delta z + 53,4000 = \emptyset
\end{aligned}$$

La solution donne, pour les inconnues:

$$\begin{aligned}
v_{t_1} &= -0,539'' & \Delta\varphi &= -7,036'' \text{ (méthode graphique: } -6,5'') & \Delta a &= +8,189'' \\
v_{t_2} &= +0,596'' & \Delta\lambda &= +4,288'' \text{ (méthode graphique: } +5,5'') & \Delta z &= -19,136'' \\
v_{t_3} &= -0,056''
\end{aligned}$$

Comme dans les résultats ci-dessus (figurant entre parenthèses) obtenus par compensation graphique, ROELOFS n'avait pas tenu compte des corrections à faire aux observations de l'heure, nous avons effectué la compensation de cette manière aussi, afin de pouvoir établir une base de comparaison commune. Le système d'équations normales écrit sans ces corrections est le suivant:

$$\begin{aligned}
+5,6374 \Delta\varphi + 2,0701 \Delta\lambda + 0,3860 \Delta a - 0,4620 \Delta z + 19,3537 &= \emptyset \\
+2,0701 \Delta\varphi + 6,8118 \Delta\lambda + 3,9460 \Delta a + 0,1820 \Delta z - 43,3628 &= \emptyset \\
+0,3860 \Delta\varphi + 3,9460 \Delta\lambda + 3,0000 \Delta a + \emptyset \quad \Delta z - 38,7010 &= \emptyset \\
-0,4620 \Delta\varphi + 0,1820 \Delta\lambda + \emptyset \quad \Delta a + 3,0000 \Delta z + 53,4000 &= \emptyset
\end{aligned}$$

La solution donne, pour les inconnues, les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= -7,174'' \text{ (méthode graphique: } -6,5'') \\
\Delta\lambda &= +4,413'' \text{ (méthode graphique: } +5,5'')
\end{aligned}$$

De la comparaison des résultats calculés, resp. construits par des méthodes différentes, il ressort que, dans le cas donné, l'omission des corrections de l'heure a produit des écarts de l'ordre de 0,1'' dans la latitude et la longitude géographiques, tandis que le procédé graphique de ROELOFS comporte déjà des erreurs de l'ordre de 1'' par rapport à la solution exacte utilisant des poids. Ces comparaisons confirment donc numériquement nos remarques précédentes faites aux articles III et IV. Enfin pour illustrer le nouveau procédé graphique examiné à l'article III, nous présentons ici la marche de la construction, avec les données d'un exemple résolu numériquement dans l'étude [2]. Comme il s'agit, ici, de l'observation en plusieurs positions d'une étoile inconnue, les données de l'exemple déjà utilisé ne peuvent plus être appliquées à ce cas. C'est pourquoi nous avons dû faire entrer dans nos comparaisons un nouvel exemple, bien connu de la littérature. Les données qui nous intéressent, reproduites de l'étude [2], sont:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= +30^\circ 23,5' & (90^\circ - z_1) &= 32^\circ 36' 06'' & l_1 &= 154^\circ 53' 00'' \\
\delta_0 &= -8^\circ 10,0' & (90^\circ - z_2) &= 44^\circ 24' 30'' & l_2 &= 173^\circ 42' 21'' \\
& & (90^\circ - z_3) &= 50^\circ 47' 29'' & l_3 &= 198^\circ 26' 43''
\end{aligned}$$

A défaut d'observations surabondantes, la compensation n'est pas possible, donc les équations de correction correspondant à (10) peuvent être directement utilisées pour le calcul des inconnues. En vue de la détermination des coefficients, nous devons calculer les valeurs  $\tau_0$  apparte

nant aux différentes positions. Compte tenu du triangle de position, on obtient, avec les données ci-dessus:

$$\cos \tau_0 = \frac{\cos z - \sin \varphi_0 \sin \delta_0}{\cos \varphi_0 \cos \delta_0}$$

D'après cette équation, les valeurs  $\tau_0$  peuvent se calculer par la règle aux logarithmes à 0,1° près, conformément à la précision réalisable par dessin. Ces valeurs seront, dans notre cas:

$$\tau_{1,0} = 44,3^\circ \quad \tau_{2,0} = 25,3^\circ \quad \tau_{3,0} = 7,4^\circ$$

Pour calculer les valeurs  $A'A$ , on a besoin des azimuts approximatifs  $A_0$  calculables avec les valeurs approchées et observées. Ceux-ci doivent être calculés d'après la relation

$$\cos A_0 = \frac{\sin \delta_0 - \sin \varphi_0 \cos z}{\cos \varphi_0 \sin z}$$

et dans notre cas, ils seront:

$$A_{1,0} = 124^\circ 47' 29,2'' \quad A_{2,0} = 143^\circ 36' 50,6'' \quad A_{3,0} = 168^\circ 21' 15,3''$$

(Comme il ressort des données d'observations, il s'agit ici d'observations avant la culmination supérieure, et il en faudra tenir compte pour les signes des fonctions trigonométriques des valeurs  $\tau_0$  ci-dessus.)

Connaissant ces valeurs, on peut calculer trois valeurs approchées pour la lecture au limbe correspondant au Nord astronomique, dont la valeur moyenne est, dans notre cas:  $a_0 = 30^\circ 05' 30''$ . Sur la base de l'égalité  $A' = l' - a_0$ , nous pouvons calculer désormais les azimuts «observés»:

$$A'_1 = 124^\circ 47' 30'' \quad A'_2 = 143^\circ 36' 51'' \quad A'_3 = 168^\circ 21' 13''$$

Ainsi, d'après la relation  $\Delta A' = A' - A_0$ ;  $\Delta A'_1 = +0,8''$ ;  $\Delta A'_2 = +0,4''$  et  $\Delta A'_3 = -2,3''$ . Avec ces valeurs, nous pouvons déjà écrire les équations déterminant les inconnues:

$$\begin{aligned} +0,715 \Delta \varphi - 0,699 \cos \varphi_0 \Delta a - \Delta \delta &= +0,482 \\ +0,904 \Delta \varphi - 0,428 \cos \varphi_0 \Delta a - \Delta \delta &= +0,148 \\ +0,992 \Delta \varphi - 0,129 \cos \varphi_0 \Delta a - \Delta \delta &= -0,256 \end{aligned}$$

Ici

$$D = -0,032; D_{\Delta \varphi} = -0,009; D_{\cos \varphi_0 \Delta a} = +0,047; D_{\Delta \delta} = -0,024$$

et ainsi

$$\Delta \varphi = +0,28''; \cos \varphi_0 \Delta a = -1,47''; \Delta \delta = +0,75''$$

La solution graphique est donnée par la figure 3. La marche de la construction est, ici encore, la même que chez les procédés graphiques décrits par l'étude [1], seulement les azimuts  $y$  sont remplacés par les angles  $\tau$ . Les résultats graphiques ayant un écart max. de 0,05'', concordent bien avec les résultats numériques.

## LITTÉRATURE

1. ROELOFS, R.: Gleichzeitige Bestimmung von Breite, Länge und Azimut. (Zeitschrift für Vermessungswesen, 1957. Heft 4. pp. 103—108.)
2. DR. ING. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Determination of Azimuth and Latitud from Observations of a Single Unknown Star by a New Method (Empire Survey Review, 1956. No 99., pp. 212—219).
3. DR. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über eine Methode der gleichzeitigen Meridian-, Breiten- und Zeitbestimmung (M. kir. József Nádor Műsz. és Gazd. tud. Egy. bányá- és kohómérn. oszt. Közl., 1938, tome X, pp. 157—168).
4. DR. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Kiegyenlítőszámítás (Calcul de compensation). Note polycopiée, Budapest, 1957, 3<sup>e</sup> éd.
5. ROELOFS, R.: Astronomy Applied to Land Surveying. N. V. Wed. J. Ahrend & Zoon. Amsterdam, 1950.
6. Apparent Places of Fundamental Stars, 1948.

## RÉSUMÉ

Les différentes méthodes de précision limitée de l'astronomie géodésique de position peuvent être réunies en un système homogène, et à côté du procédé numérique exact écrit pour tous les cas, existe aussi, pour les observations d'étoiles inconnues, une solution graphique répondant bien à la pratique. A l'époque actuelle où les activités expéditionnaires sont devenues plus intenses, de nombreuses déterminations de la position géographique de ce type auront certainement lieu, fait qui confère une certaine utilité aux résultats de nos examens.

ÜBER DIE AUSGLEICHUNG DER GLEICHZEITIGEN BREITEN-, LÄNGEN-  
UND AZIMUTBESTIMMUNG

GY. ALPÁR

## ZUSAMMENFASSUNG

Die geographischen Positionsbestimmungen nichtextremer Genauigkeit können in ein einheitliches System zusammengefaßt werden. Neben der strengen, alle möglichen Fälle beinhaltenden mathematischen Formulierung lassen sich bei Visierungen an unbekanntem Sternen auch die der bisherigen Praxis entsprechenden graphischen Lösungen ableiten. In unseren Zeiten, wo die Expeditionstätigkeit einen großen Aufschwung erlebt, werden gewiß zahlreiche derartige Positionsbestimmungen vorgenommen werden; deshalb dürften auch die hier mitgeteilten Untersuchungsergebnisse von Interesse sein.

ON THE ADJUSTMENT OF SIMULTANEOUSLY DETERMINED GEOGRAPHICAL  
LONGITUDE, LATITUDE AND AZIMUTH

GY. ALPÁR

## SUMMARY

The geographical position determinations of other than extreme accuracy can be treated in a single system, and besides the rigorous numerical procedure established for all possible cases, also graphical solutions in accordance with the practice usually employed up to now can be found for the measurements on an unknown star. On the expeditions which became so frequent in our days a large number of geographical position determinations of this kind will undoubtedly be performed: that is why the results to be published here merit attention.

ОБ УРАВНИВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОДНОВРЕМЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ ШИРОТЫ, ДОЛГОТЫ И АЗИМУТА

Д. АЛЬПАР

## РЕЗЮМЕ

Географические привязки не крайней точности можно свести к единой системе и наряду со строгим нумерическим методом, действительным для всех случаев, при измерениях на неизвестную звезду можно также найти графический метод, соответствующий сложившейся практике. Теперь, в повышенной экспедиционной деятельности выполняется по всей вероятности большое количество по подобным географическим привязок и таким образом публикация результатов наших исследований может представлять определенный интерес.



# STEIGERUNG DER GENAUIGKEIT BEI DER BESTIMMUNG DER KOMPARATIONSVERBESSERUNG IN DER NIVELLIERUNG

D. CSATKAI

BUDAPESTER GEODÄTISCHE UND TOPOGRAPHISCHE UNTERNEHMUNG

[Eingegangen am 15. März, 1961]

Ihrem Wesen nach ist die Nivellierung eine in der Richtung der Lotlinie ausgeführte Längenmessung. Bei der Nivellierung entspricht die Nivellierlatte den klassischen Meßgeräten der horizontalen Längenmessung: der Meßlatte, dem Meßband und dem Meßdraht.

Die nominelle und die effektive Länge der Meßgeräte sind im allgemeinen einander nicht gleich; daher sind die mittels nomineller Längen bestimmten Meßergebnisse mit einer Komparationsverbesserung zu versehen, um den Komparationsfehler — den Fehler, der sich infolge der Längendifferenzen ergibt — zu eliminieren.

Die Bestimmung der Differenz zwischen nominellen und effektiven Längen erfolgt mit der Komparationsmethode. Die Komparation ist an sich auch ein mit Fehlern behafteter geodätischer Prozeß, die vollständige Ausschaltung des Komparationsfehlers ist also nicht möglich; die algebraische Summe des unbekanntes Komparationsfehlers und der Komparationsverbesserung ist ein dem verbesserten Meßergebnis anhaftender Teil des Komparationsfehlers (die beiden Größen tragen notwendigerweise entgegengesetzte Vorzeichen). Selbstredend steht die ermittelte Komparationsverbesserung im Absolutwert dem unbekanntes Komparationsfehler umso näher, je kleiner der Fehler im Komparationsprozeß ist; der nicht ausgeschaltete Teil des Komparationsfehlers wird also in diesem Falle auch entsprechend kleiner.

Die Genauigkeit der Komparation ist bloß der eine Faktor, der die Genauigkeit der Komparationsverbesserung beeinflußt. Der andere Faktor ist die Berechnungsmethode, mittels welcher der Komparationsfehler aus dem Ergebnis der Komparation bestimmt wird.

Obige Feststellungen beziehen sich sowohl auf die horizontale Längenmessung als auch auf die Nivellierung. Während jedoch betreffs der Komparation selber eine vollkommene Analogie besteht, zeigt sich bezüglich der Berechnungsart der Komparationsverbesserung eine wesentliche Abweichung zwischen horizontaler Längenmessung und Nivellierung. Die Ursache liegt darin, daß bei der Längenmessung wiederholt die gesamte Länge des Meßgerätes — ausgenommen bei dem letzten Bruchstück — angewandt wird; die

Berechnung des Komparationsfehlers aus dem Komparationsergebnis ist demnach in diesem Falle einfach, eindeutig und erfordert keine ausführliche Darlegung. Demgegenüber erfolgt bei der Nivellierung die Lattenablesung im allgemeinen auf immer verschiedenen Stellen der Lattenskala. Dadurch wird die Bestimmung der Komparationsverbesserung bei der Nivellierung umständlicher. Im folgenden wird es sich um die Berechnung der Komparationsverbesserung der Nivellierung handeln und es wird ein Vorschlag vorgelegt, die Verbesserung genauer als bisher zu bestimmen.

Die gegenwärtig angewandte endgültige Formel der Komparationsverbesserung der Nivellierung lautet:

$$z = kH \quad (1)$$

und ist formell völlig identisch mit der Formel der Komparationsverbesserung der horizontalen Längenmessung.  $z$  ist die Komparationsverbesserung,  $H$  das rohe Endresultat der Messung — in unserem Falle der Höhenunterschied — und  $k$  der Komparationsfaktor.  $k = K/l$ , wobei  $K$  die Differenz zwischen dem effektiven und dem nominellen Wert der Länge  $l$  ist; der Komparationsfaktor  $k$  ist demnach der auf die Längeneinheit entfallende Teil der Komparationsverbesserung.

In der Praxis der Feineinwägung kann die Lattenablesung  $l$  alle Werte zwischen 0,50 m und 3,0 m annehmen; erfahrungsgemäß ist der Komparationsfaktor  $k$  die Länge der Nivellierlattenskala entlang nicht konstant. Außerdem ist  $k$  selbstverständlich auch noch temperaturabhängig, d. h.  $k$  ist eine Funktion mit zwei Variablen:  $k = f(l, T)$ . Hierin ist die Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  einfacher, nämlich linear; aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, zuerst diese zu behandeln.

Die Temperaturabhängigkeit der bei der Nivellierung praktisch gebrauchten Längenmeßgeräte (Normalmeter und Nivellierlatte) beträgt eine auf nominelle Länge von 1 Meter gezogene,

$$L \text{ (effektive Lattenlänge)} = 1 \text{ Meter} + k' \text{ mm} + c(T - T_0) \text{ mm} \quad (2)$$

Unserer obigen Feststellung entsprechend beträgt daher der Komparationsfaktor  $k$  — d. h. die auf die Längeneinheit entfallende Komparationsverbesserung

$$k = k' + c(T - T_0)$$

Die beiden Geraden auf Abb. 1 stellen die Gleichungen je eines Normalmeters und eines Lattenpaares dar.



Die von der horizontalen Achse aus gerechneten Koordinaten sind die Komparationsfaktoren; die Richtungstangenten der Geraden bedeuten die Wärmeausdehnungskoeffizienten. Ist  $T = T_0$ , so ist wegen 2/  $k = k'$ . Das Endresultat der Komparation ist die Ordinatendifferenz  $(k_l - k_n)$ : die bei

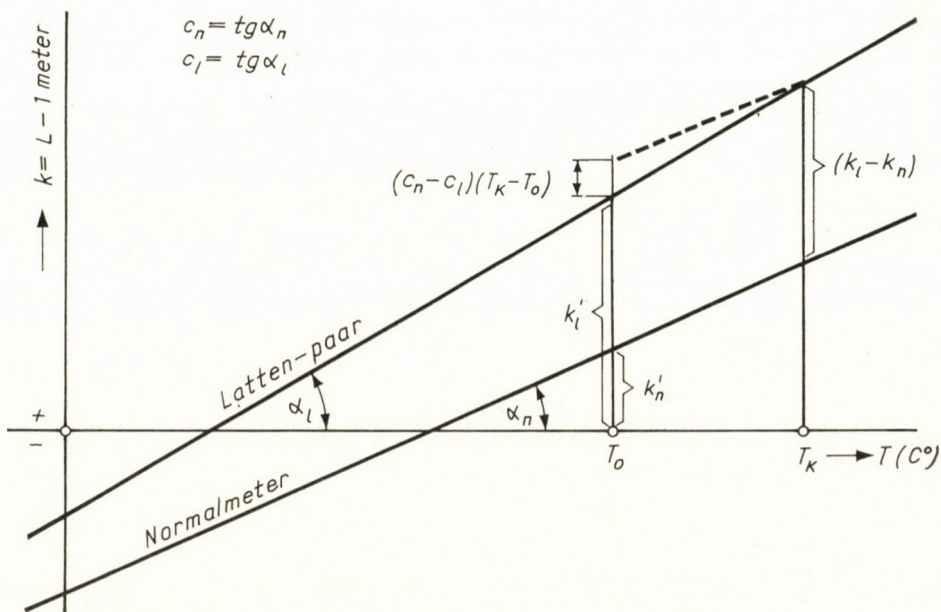


Abb. 1

durchschnittlicher Komparationstemperatur  $T_k$  bestimmte Differenz zwischen der durchschnittlichen Länge des Lattenabschnittes von 1 m Nominalwert und der Länge des zur Komparation benutzten Normalmeters.

Gegeben ist die Normalmetergleichung:

$$L_n = 1 \text{ Meter} + k'_n + c_n(T - T_0)$$

sowie die Dehnungskoeffizient  $c_l$  des Lattenpaares und die Komparationstemperatur  $T_k$ , so wird die Gleichung

$$L_l = 1 \text{ Meter} + k'_l + c_l(T - T_0)$$

des mittleren Lattenmeters, der das Lattenpaar kennzeichnet, eindeutig durch den Wert  $(k_l - k_n)$  festgelegt, da  $k'_l$  einfach berechnet werden kann:

$$k'_l = k'_n + (k_l - k_n) + (c_n - c_l)(T_k - T_0) \quad (3)$$

Wird der Temperatureffekt derart in Betracht gezogen, so kann diese unabhängige Veränderliche bei den weiteren Besprechungen ausgeschaltet werden; mit anderen Worten kann man des weiteren eine konstante Temperatur annehmen, z. B. ( $T_k = T_0$ ).

Wir gehen nun zur Untersuchung der Funktion  $k = f(l)$  über und in Zusammenhang damit dazu, wie aus den direkten Meßergebnissen der Komparation der für irgendein Lattenpaar kennzeichnende mittlere Komparationsfaktor  $k_{\text{mittl}}$  berechnet werden kann.

Vor allem ist der Begriff des mittleren Komparationsfaktors des Lattenpaares zu definieren; man muß diesen eben deshalb einführen, da bei der Nivellierung die Ablesung auf jeden beliebigen Punkt des Lattenpaares entfallen kann. Auf den bei Feineinwägungen gebrauchten Invarnivellierlatten befindet sich auf den zwei Seiten des Invarbandes je eine Skala; zu einem Lattenpaar gehören demnach vier Skalen.

Wird einem jeden beliebigen Punkt der Lattenskala dieselbe Wahrscheinlichkeit zugeschrieben, so entfällt im Falle zahlreicher Messungen im großen und ganzen dieselbe Zahl von Ablesungen auf jeden Teilstrich einer jeden Lattenskala. Es soll noch tiefgreifender überlegt werden, inwieweit diese Voraussetzung zutrifft, bzw. gestattet ist, doch wird davon erst später die Rede sein. Vorerst wird diese Voraussetzung angenommen und der mittlere Komparationsfaktor eines Lattenpaares folgendermaßen definiert: Es werden auf der gesamten Länge einer Lattenskala gleichmäßig verteilt  $n$  Teilpunkte angegeben. Zu jedem Punkt gehört ein Komparationsfaktor  $k$ ; wird nun diese Einteilung auf allen vier Skalen des Lattenpaares vorgenommen, so gehören zu  $4n$  Teilpunkten  $4n$   $k$ -Werte. Ihr arithmetisches Mittel ergibt den mittleren Komparationsfaktor des Lattenpaares:  $k_D = 1/4n [k]_1^{4n}$ .

Eine jede Lattenskala wird gekennzeichnet durch die Beziehung  $K = f(l)$ , bzw. durch die Bildkurve dieser Beziehung; diese Kurve sei die zur Lattenskala gehörende Komparationslinie genannt. Wie bereits eingangs erwähnt, bedeutet  $K$  den Unterschied der zur Lattenlänge  $l$  gehörenden nominellen und effektiven Länge.

Die bisherigen praktischen Erfahrungen der Komparationen lehren, daß die Komparationslinien  $K = f(l)$  keine Geraden sind, sondern periodisch regelmäßig oder gänzlich unregelmäßig verlaufende Kurven, auf die sich die örtlichen, zufälligen Fehler der Latteneinteilungen in der Form von kurzperiodischen Wellenlinien überlagern.

Bei der Komparation wird auf verschiedenen Stellen der Lattenskala der Unterschied zwischen der 1 m langen Komparationsbasis (Normalmeter oder optische Basis) und eines 1 m langen Stückes der Lattenskala gemessen. Das bedeutet im wesentlichen, daß die Komparation die Ordinatenunterschiede der Komparationslinie zwischen je 1 m voneinander entfernten Punkten der Lattenskala — die Werte  $\Delta K$  in Abb. 2 — liefert.

Die bisher angewandte Berechnungsmethode führte zuerst die Komparation auf gleichmäßig verteilten Stellen der Lattenskala aus und betrachtete das arithmetische Mittel der auf diese Weise erhaltenen Werte  $\Delta K$  als den mittleren Komparationsfaktor der Lattenskala, wobei die Werte  $\Delta K$  stillschweigend den Komparationsfaktoren gleichgesetzt wurden.

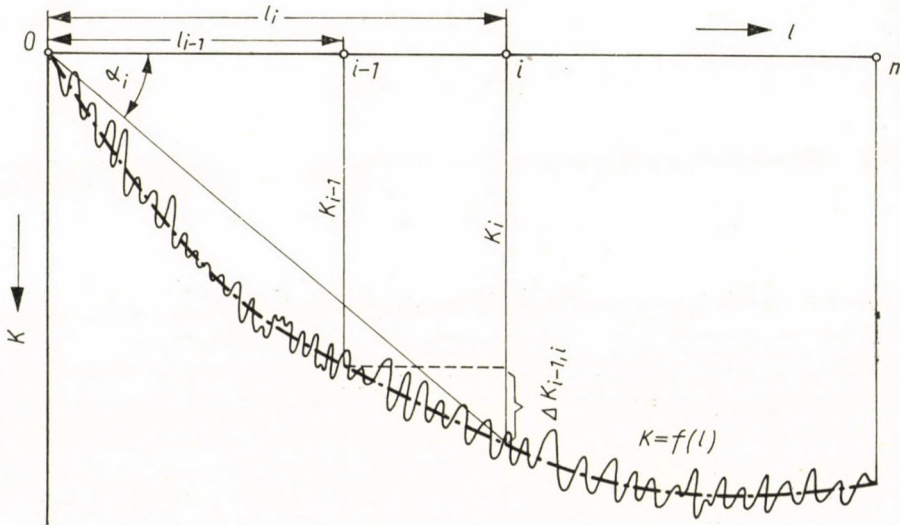


Abb. 2

Diese Auffassung ist jedoch irrtümlich und keinesfalls begründet. Die Lattenablesung bezieht sich immer auf den Anfangsstrich der Lattenskala, weshalb auch der zugehörige Komparationsfaktor auf den Anfangsstrich bezogen werden muß. D. h.:

$$k_i = \frac{K_i}{l_i} \quad ; \quad \text{jedoch} \quad k_i \neq \frac{\Delta K_{i-1,i}}{1 \text{ Meter}}$$

Der mittlere Komparationsfaktor einer Lattenskala kann im allgemeinen — mit den Bezeichnungen von Abb. 2 — folgendermaßen abgeleitet werden:

$$k_D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{l_i}$$

wobei  $n$  die Zahl der aneinander gereihten Normalmeter ist.

$$K_i = K_{i-1} + \Delta K_{i-1,i} = \sum_{e=1}^i \Delta K_{e-1,e}$$

wo

$$e \leq i$$

$$k_D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i} \sum_{e=1}^i \Delta K_{e-1,e}$$

Da jede Strecke 1 Meter lang ist, ist  $l_i = i$ , und

$$k_D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{e=1}^i \Delta K_{e-1,e}}{i} \quad (4)$$

Wird die Gleichung (4) auf den praktischen Fall  $n = 3$  bezogen, d. h. falls man eine 3 m lange Lattenskala entlang 3 fortlaufende Vergleichsmessungen mit der Komparationsbasis aufgeföhrt hat, dann ergibt sich:

$$k_D = \frac{1}{3} \left( \Delta K_{0,1} + \frac{\Delta K_{0,1} + \Delta K_{1,2}}{2} + \frac{\Delta K_{0,1} + \Delta K_{1,2} + \Delta K_{2,3}}{3} \right) =$$

$$= \frac{11 \Delta K_{0,1} + 5 \Delta K_{1,2} + 2 \Delta K_{2,3}}{18} \quad (5a)$$

Anstelle des arithmetischen Mittelwertes  $1/3 (\Delta K_{0,1} + \Delta K_{1,2} + \Delta K_{2,3})$  der bisherigen Berechnungen ergibt sich ein Mittelwert, der aus mit Gewichten versehenen Angaben ermittelt worden ist. In den Gewichten kommt es zum Ausdruck, daß die Komparationsverhältnisse der unteren Teile der Lattenskala auf die oberen Teile der Latte auswirken, was aber umgekehrt nicht der Fall ist. Dieses Prinzip der Gewichtsbestimmung ist auch in jenem praktischen Falle anzuwenden, wenn in fünf Normalmeterlangen Komparationsablesungen erfolgen, und zwar außer den obigen drei Lagen auch zwischen den Teilstrichen 0,50 m und 1,50 m bzw. 1,50 m und 2,50 m der Lattenskala. Für diesen Fall wird eine praktische Formel vorgeschlagen, die in befriedigendem Einklang mit der theoretisch exakten Formel (5) steht:

$$k_D = \frac{7 \Delta K_{0,1} + 5 \Delta K_{0,5,1,5} + 3 \Delta K_{1,2} + 2 \Delta K_{1,5,2,5} + \Delta K_{2,3}}{18} \quad (5b)$$

Die Genauigkeit der Komparationsverbesserung ist laut Formel (1) der Genauigkeit des Komparationsfaktors direkt proportionell; die Formel (5a) und (5b) dienen zu einer Berechnung der Komparationsfaktors, deren Genauigkeit die der bisherigen übertrifft.

Zur Bestimmung des mittleren Komparationsfaktors eines Lattenpaares müssen selbstverständlich die obigen Formeln auf alle vier Skalen des Lattenpaares angewandt werden; das arithmetische Mittel der sich auf diese Weise

ergebenden vier Werte liefert das Endergebnis. Die Gewichtswerte im Zähler der Formeln können auch als Zahlen aufgefaßt werden, die angeben, wie oft die Messungen zu wiederholen sind. Es ist zweckmäßig, die Wiederholungen an benachbarten cm-Teilstrichen vorzunehmen, um den Einfluß der örtlichen zufälligen Fehler der Lattenteilungen zu vermindern.

Man kann die Genauigkeit des mittleren Komparationsfaktors mittels Einführung einer noch korrekteren Rechenmethode auch auf anderem Wege erhöhen. Zweifellos hängt die möglichst genaue Kenntnis der Komparations-

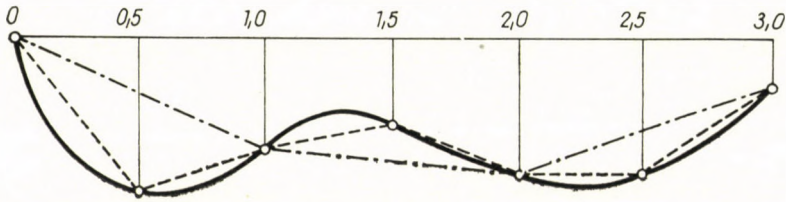


Abb. 3

linie  $K = f(l)$  auch eng mit dem erstrebten Ziel zusammen. Bei Anwendung einer 1 m langen Komparationsbasis werden nur die  $\Delta K$ -Werte von voneinander 1 m entfernten Lattenteilungen, d. h. die Ordinatenunterschiede der Komparationslinie zwischen Punkten von 1 m Abstand bekannt.

Demzufolge steht keinerlei Angabe bezüglich der untersten 1 m langen Strecke der Lattenskala zur Verfügung, obwohl — wie aus obigem ersichtlich — gerade der unterste Teil der Lattenskala einen ausschlaggebenden Einfluß auf den Wert des mittleren Komparationsfaktors ausübt. In jeder Basislage, wo die linke Kante der Basis zwischen dem Anfangspunkt der Lattenskala und der 1 m-Teilung liegt, ist die  $K$ -Ordinate, zu welcher das Ergebnis  $\Delta K$  addiert werden muß, unbekannt. Abb. 3 veranschaulicht, daß die Anwendung der 1 m langen Komparationsbasis die strichpunktierte Komparationslinie anstelle der effektiven vollen Komparationslinie zur Folge hat. Die beiden weichen bedeutend voneinander ab, gerade auf der kritischen Strecke unter 1 m Länge. Eine dünne gestrichelte Linie gibt auf der Abbildung jene Komparationslinie an, die sich bei der Anwendung einer 0,50 m langen Komparationsbasis ergeben würde. Diese steht schon bedeutend näher zur effektiven Komparationslinie. Diese Überlegung deutet bereits den Weg zur weiteren Erhöhung der Genauigkeit an: nämlich die Kürzung der Basislänge, die zweckdienlicher ist als die Komparation mit längerer Basis auf mehreren Stellen der Lattenskala. Am zweckmäßigsten erscheint — und wird daher empfohlen — die Einführung einer 50 cm langen Basis, da diese nicht nur die Genauigkeit erhöht, sondern auch verhältnismäßig leichter praktisch zu verwirklichen ist; hiervon jedoch später.

Hier erhebt sich die Frage: wie kann man bei Komparation mit einer Basis kürzer als 1 m den mittleren Komparationsfaktor aus den Teilergebnissen  $\Delta K$  der Komparation berechnen?

Die Länge der Komparationsbasis sei allgemein  $1/N$  Meter. In diesem Falle kann die Ableitung der Formel (4) mit der Abänderung  $l_i = i/N$  angewandt werden, daher:

$$k_D = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{e=1}^i \Delta K_{e-1,e}}{i} \quad (6)$$

Wir wollen nun die Formel (6) entwickeln und danach auf jenem praktischen Fall anwenden, wo — bei Komparation der 3 m langen Lattenskala mit einer 0,5 m langen Komparationsbasis  $n = 6$  und  $N = 2$ .

$$\begin{aligned} k_D &= \frac{N}{n} \left\{ \Delta K_{0,1} + \frac{1}{2} (\Delta K_{0,1} + \Delta K_{1,2}) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n} (\Delta K_{0,1} + \Delta K_{1,2} + \dots + \Delta K_{n-1,n}) \right\} = \\ &= \frac{N}{n} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \Delta K_{0,1} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \Delta K_{1,2} + \dots + \frac{1}{n} \Delta K_{n-1,n} \right\} = \\ &= \frac{N}{n} \left\{ \left[ \frac{1}{i} \right]_{i=1}^n \Delta K_{0,1} + \left[ \frac{1}{i} \right]_{i=2}^n \Delta K_{1,2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{i} \right]_{i=3}^n \Delta K_{2,3} + \dots + \frac{1}{n} \Delta K_{n-1,n} \right\} \end{aligned}$$

Damit sich statt Brüchen ganze Zahlen ergeben, werden Zähler und Nenner mit  $n!$  multipliziert.

$$k_D = \frac{N}{n} \frac{\left[ \frac{n!}{i} \right]_{i=1}^n \Delta K_{0,1} + \left[ \frac{n!}{i} \right]_{i=2}^n \Delta K_{1,2} + \dots + \frac{n!}{n} \Delta K_{n-1,n}}{n!}$$

Im Falle von  $N = 2$  und  $n = 6$  ergibt sich

$$\begin{aligned} k_D &= \frac{2}{6} \frac{1764 \Delta K_{0,1} + 1044 \Delta K_{1,2} + 684 \Delta K_{2,3} + 444 \Delta K_{3,4} + 264 \Delta K_{4,5} + 120 \Delta K_{5,6}}{720} = \\ &= \frac{147 \Delta K_{0,1} + 87 \Delta K_{1,2} + 57 \Delta K_{2,3} + 37 \Delta K_{3,4} + 22 \Delta K_{4,5} + 10 \Delta K_{5,6}}{180} \end{aligned}$$

Es folgt eine weitere Kürzung durch 20 und, mit guter Annäherung auf ganze Zahlen abgerundet, beträgt

$$k_D = \frac{7 \Delta K_{0,1} + 4 \Delta K_{1,2} + 3 \Delta K_{2,3} + 2 \Delta K_{3,4} + \Delta K_{4,5} + \Delta K_{5,6}}{9} \quad (7)$$

Bei Einführung einer 50 cm langen Komparationsbasis kann also der mittlere Komparationsfaktor einer Lattenskala mit der Formel (7) berechnet werden.

Bisher waren wir bestrebt den »mittleren« Komparationsfaktor so genau wie möglich zu bestimmen, in der Annahme, daß die Lattenablesungen im großen gleichmäßig längs der ganzen Latte verteilt sind. Wir wollen nun prüfen, inwiefern diese Annahme berechtigt ist. Das hängt selbstverständlich von den Höhenverhältnissen der Strecke ab, wo die Nivellierung vorgenommen wird. In gegliedertem hügeligem Gelände kann diese Annahme ohne weiteres als berechtigt betrachtet werden. Auf ebenem Gelände sind die Lattenablesungen der Höhe des Instruments gleich, sie fallen überwiegend zwischen 1,30 m und 1,60 m; in diesem Falle wäre es also theoretisch richtiger, die die Mitte der Lattenskala charakterisierenden Komparationsfaktoren zu benutzen. Nachdem jedoch einerseits der Absolutwert der Komparationsverbesserung auf ebenem Gebiete minimal — insgesamt einige hundertstel Millimeter — ist, andererseits der die Mitte der Lattenskala betreffende Komparationsfaktor jenem durchschnittlichen Komparationsfaktor nahesteht, der für die gesamte Lattenskalenlänge berechnet ist, kann letzterer auch auf ebenem Gebiete getrost benutzt werden.

Ganz anders steht es in steileren, bergreichen Geländen, wo die Höhendifferenz der benachbarten Nivellierbasispunkte 30—40 m oder noch mehr beträgt und die Strecke monoton ansteigend bzw. abfallend ist. Bei solchen Nivellierstrecken liegen in einem jeden der aufeinanderfolgenden Meßpunkte — die Ableesungen auf dem obersten Teil der tiefer stehenden, bzw. auf dem untersten Teil den höher stehenden Latte. Hier muß die Annahme der gleichmäßigen Verteilung der Ableesungen und im Zusammenhang damit die Anwendung des mittleren Komparationsfaktors aufgegeben werden.

Somit sind wir zum höchsten Schritt der Erhöhung der Genauigkeit gelangt. Vom streng theoretischen Standpunkt aus müßte man eigentlich bei jeder Lattenablesung auch die zugehörige Komparationsverbesserung einzeln in Betracht ziehen und die Höhendifferenz der benachbarten Höhenbasispunkte  $A$  und  $B$  laut Formel

$$M_{A-B} = \sum_A^B (l_{\text{rück.}} + K_{\text{rück.}}) - (l_{\text{vor.}} + K_{\text{vor.}})$$

berechnen. Dies wäre nur bei einer genaueren Kenntnis der Komparationslinien der Nivellierlatten möglich, würde jedoch einen beträchtlichen Arbeitsüber-

schuß erfordern, der in der Praxis nicht zu verwirklichen ist. Statt dessen muß man sich mit der Berechnung der Komparationsfaktoren begnügen, die zu den am häufigsten visierten, wahrscheinlichsten Stellen des unteren und oberen Teiles der Latten gehören. Auf Grund von Erfahrungen und statistischen Daten sind diese Stellen die Teilungen 0,50 m bzw. 2,50 m der Lattenskala. Hier zeigt sich die Notwendigkeit und der Vorteil der Einführung einer Komparationsbasis von 0,50 m in erhöhtem Maße: die zur Teilung 0,50 m bzw. 2,50 m gehörenden Komparationsfaktoren können damit präzise bestimmt werden, mit einer Basis von einem Meter jedoch überhaupt nicht. Aus den Ergebnissen  $\Delta K$  der mit einer Komparationsbasis von 0,50 m ausgeführten Komparation kann für alle vier Skalen eines Lattenpaares der zu 0,50 m gehörende Komparationsfaktor  $k_u$  und der zu 2,50 m gehörende  $k_0$  bestimmt werden:

$$k_u = 2 \Delta K_{0,1} \quad (8)$$

und

$$k_0 = 2 \frac{\Delta K_{0,1} + \Delta K_{1,2} + \Delta K_{2,3} + \Delta K_{3,4} + \Delta K_{4,5}}{5} \quad (9)$$

Die zwei Latten eines Lattenpaares seien mit *I* und *II* bezeichnet. Werden nun die Komparationsfaktoren  $k_{u,\text{links}}^I, k_{0,\text{links}}^I, k_{u,\text{rechts}}^I, k_{0,\text{rechts}}^I$  der beiden Skalen der I. Latte und ähnlicherweise die Komparationsfaktoren  $k_{u,\text{links}}^{II}, k_{0,\text{links}}^{II}, k_{u,\text{rechts}}^{II}, k_{0,\text{rechts}}^{II}$  der Skalen der II. Latte mit den Formeln (8) und (9) bestimmt, können sodann die die Stellen 0,50 und 2,50 m der Latten betreffenden Komparationsfaktoren durch Bildung des arithmetischen Mittels berechnet werden.

$$k_u^I = \frac{k_{u,\text{links}}^I + k_{u,\text{rechts}}^I}{2}; \quad k_0^I = \frac{k_{0,\text{links}}^I + k_{0,\text{rechts}}^I}{2}$$

$$k_u^{II} = \frac{k_{u,\text{links}}^{II} + k_{u,\text{rechts}}^{II}}{2}; \quad k_0^{II} = \frac{k_{0,\text{links}}^{II} + k_{0,\text{rechts}}^{II}}{2}$$

Um festzustellen, auf welche Weise die Komparationsverbesserung irgendeiner Nivellierstrecke in Kenntnis der Komparationsfaktoren  $k_u^I, k_0^I, k_u^{II}$  und  $k_0^{II}$  berechnet werden kann, sollen nun zwei aufeinander folgende Instrumentenlagen geprüft werden, die selbstverständlich in beiden Richtungen »hin« und »zurück« mit gewechselten Latten gemessen werden (Abb. 4).

Höhenunterschied zwischen den Wechsellagen ( $i-1$ ) und  $i$ :

$$h_{i-1,i}^{\text{hin}} = (l_{i-1,h} + l_{i-1,h} k_0^I) - (l_{i,v} + l_{i,v} k_u^{II}) =$$

$$= (l_{i-1,h} - l_{i,v}) + (l_{i-1,h} k_0^I - l_{i,v} k_u^{II})$$

$$h_{i-1,i}^{\text{rück}} = (l_{i,v} + l_{i,v} k_u^I) - (l_{i-1,h} + l_{i-1,h} k_0^{II}) =$$

$$= (l_{i,v} - l_{i-1,h}) + (l_{i,v} k_u^I - l_{i-1,h} k_0^{II})$$



$$H_{i-1,i} = \frac{h_{i-1,i}^{\text{hin}} - h_{i-1,i}^{\text{rück}}}{2} = (l_{i-1,h} - l_{i,v}) + l_{i-1,h} \frac{k_o^I + k_o^{II}}{2} - l_{i,v} \frac{k_u^I + k_u^{II}}{2}$$

Ähnlich erhält man den Höhenunterschied zwischen den Wechsellpunkten  $i$  und  $(i + 1)$ :

$$H_{i,i+1} = (l_{i,h} - l_{i+1,v}) + l_{i,h} \frac{k_o^I + k_o^{II}}{2} - l_{i+1,v} \frac{k_u^I + k_u^{II}}{2}$$

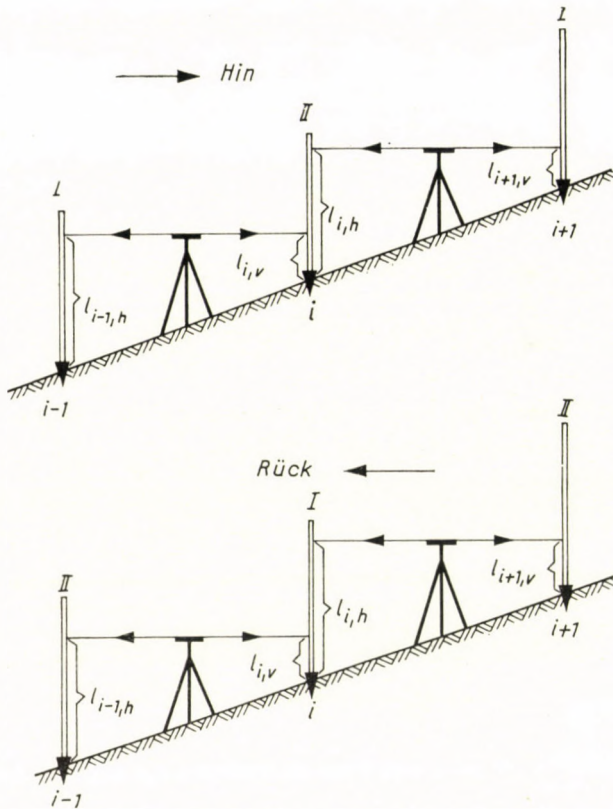


Abb. 4

Die Höhenunterschiede der benachbarten Wechsellpunkte zwischen den Streckenendpunkten  $A$  und  $B$  zusammenfassend, erhält man:

$$H_{A,B} = [\Delta l] + [l_h] \frac{k_o^I + k_o^{II}}{2} - [l_v] \frac{k_u^I + k_u^{II}}{2} = [\Delta l] + \alpha$$

Man bezeichne das arithmetische Mittel der die 2,50 m-Teilstriche der beiden Latten des Lattenpaares betreffenden Komparationsfaktoren mit  $k_{Ob}$ , und ähnlicherweise das arithmetische Mittel der zu 0,50 m gehörenden Komparationsfaktoren mit  $k_{Un}$ , dann ergibt sich:

$$k_{Ob} = \frac{k_o^I + k_o^{II}}{2} \quad \text{und} \quad k_{Un} = \frac{k_u^I + k_u^{II}}{2}$$

und die Formel der Komparationsverbesserung ist:

$$z = [l_n] k_{Ob} - [l_o] k_{Un} \quad (10a)$$

Die Formel (10a) wurde für eine ansteigende Strecke in der Richtung »Hin« abgeleitet. Im Falle einer abfallenden Strecke richten sich in der Richtung »Hin« die Lattenablesungen »Rückwärts« gegen den unteren Teil der Latte, und die »Vorwärts« gerichteten gegen den oberen Teil; bei abfallendem Gelände beträgt demnach die Komparationsverbesserung:

$$z = [l_n] k_{Un} - [l_v] k_{Ob}. \quad (10b)$$

In dem Spezialfall, wenn die Komparationslinie  $K = f(l)$  gerade ist, d. h. wenn der Komparationsfaktor  $k = K(l)$  in der gesamten Länge der Latte konstant ist (bzw. mittels Einführung eines durchschnittlichen Komparationsfaktors als konstant betrachtet werden kann), ergibt sich  $k_{Un} = k_{Ob} = k$  und die Formel der Komparationsverbesserung ist:

$$z = k \{ [l_n] - [l_v] \} = kH,$$

d. h. identisch mit der Bildung in der bisherigen Praxis.

Die Formeln (10a) und (10b) sind demnach Verallgemeinerungen der Formel  $z = kH$ .

Zur Berechnung laut Formeln (10a) und (10b) ist auch die Kenntnis der Werte  $[l_n]$  und  $[l_v]$  notwendig. Bei der Feinerwägung wird der Höhenunterschied der Streckenendpunkte durch Summierung der für jede Station gesondert gebildeten Höhenunterschiede berechnet, deshalb sind die Werte  $[l_n]$  und  $[l_v]$  gesondert zu bilden. Dies verursacht nicht viel mehr Arbeit, da es genügt, diesen Vorgang bis Zentimeter-Genauigkeit und bloß auf Hauptablesungen (die ersten drei Ziffern der Aablesungen) erstreckt auszuführen.

Bei welchen Nivellierstrecken und bis zu welcher Grenze die Komparationsverbesserung mit den Formeln (10a) und (10b) berechnet werden soll, hängt nicht allein vom Gelände ab, sondern auch davon, in welchem Maße sich die Werte  $k_{Un}$  und  $k_{Ob}$  des angewandten Lattenpaares voneinander bzw. vom

bestimmten durchschnittlichen  $k$ -Wert des Lattenpaares unterscheiden. Welch bedeutende Unterschiede sich noch ergeben können, wird mit folgenden, auf Grund praktischer Angaben aufgestellten und berechneten Beispielen bewiesen.

Es sei die gemessene Höhendifferenz  $H = 100$  m,  $[l_h] = 140$  m und  $[l_v] = 40$  m.

Die kennzeichnenden Komparationsdaten des angewandten Lattenpaares sind:

$k_{Un} = +0,010$  mm/m und  $k_{Ob} = +0,025$  mm/m, mittleres  $k = +0,015$  mm/m.

Mit der Formel  $\varkappa = kH$  berechnet:

$$\varkappa = +0,015 \times 100 = +1,50 \text{ mm.}$$

Laut Formel (10a):

$$\varkappa = 140 \times 0,025 - 40 \times 0,010 = +3,50 - 0,40 = +3,10 \text{ mm.}$$

Die Abweichung zwischen den zwei Arten der Berechnung beträgt 1,60 mm.

Im zweiten Beispiel soll von einem kleineren Höhenunterschied und von weniger abweichenden Komparationsdaten ausgegangen werden. Es sei  $H = 30$  m.

$$[l_h] = 40 \text{ m; } [l_v] = 10 \text{ m,}$$

$k_{Un} = +0,010$  mm/m,  $k_{Ob} = +0,015$  mm/m und das mittlere  $k = 0,012$  mm/m.

Laut Formel (10a):

$$\varkappa = 40 \times 0,015 - 10 \times 0,010 = 0,60 - 0,10 = +0,50 \text{ mm.}$$

Mit der Formel  $\varkappa = kH$ :  $\varkappa = 30 \times 0,012 = +0,36$  mm. Die Abweichung zwischen den beiden Arten von Berechnung ist hier auch noch 0,14 mm; selbst ein solcher Fehler darf die Ergebnisse der Feineinwägung nicht belasten.

Diese zwei Rechenbeispiele zeigen, daß die Komparationsverbesserung »bergiger« Nivellierstrecken bei Feineinwägungen immer auf Grund der Formeln (10a) und (10b) berechnet werden muß; hierzu ist auch die Bestimmung aus den Komparationsdaten der das Lattenpaar charakterisierenden Werte  $k_{Un}$  und  $k_{Ob}$  notwendig.

Eingangs wurde darauf hingewiesen, daß die Genauigkeit der Komparationsverbesserung der Nivellierung von zwei Faktoren beeinflusst wird: von der Genauigkeit des Komparationsvorganges und von der Art der Berechnung der Verbesserung. Diese zwei Faktoren müssen miteinander im Einklang stehen, d. h. die in der Berechnungsmethode vorgeschlagenen genauigkeitsteigernden Verfahren sind nur in dem Falle berechtigt, wenn die Genauigkeit des Komparationsvorganges denjenigen entspricht. Hier muß das neue ungarische geodätische Komparationsgerät, PUSZTAYs Nivellierlattenkomparator erwähnt werden, mit welchem die Genauigkeit der Komparation in großem Maße erhöht wird im Verhältnis zur Genauigkeit der bisher benutzten direkten Vergleichsmethode.<sup>1</sup> Die besondere Eigenart des Komparators von PUSZTAY besteht darin, daß er eine optische Komparationsbasis mit mikrometrisch regulierbarer Länge herstellt, und zwar so, daß er die Bilder der 1 m voneinander

<sup>1</sup> Das Gerät wird im Aufsatz von Dr. E. RECÓCZY, »Neuer Nivellierlattenkomparator« (*Geodézia és Kartográfia*, 1957, No. 1) eingehend beschrieben.

entfernten Skalenteilungen von zwei Seiten durch Mikroskope, optische Systeme und mit optischen Mikrometern verbundenen planparallelen Platten in die Okularröhre führt, wo im Sichtfeld auf der einen Seite das Bild des einen, auf der anderen Seite das Bild des anderen Teilstriches zu sehen ist. Mittels Drehen der optischen Mikrometertrommeln werden die Bilder der von zwei Seiten projizierten Teilstriche in Koinzidenz gebracht.

Werden nun die Endstriche eines Normalmeters von bekannter Länge verglichen, so kann eine optische Basis von bekannter Länge hergestellt werden, bzw. — wenn man die Längenänderung kennt, die der Verdrehung der Schraubentrommeln um eine Teilung entspricht — kann die optische Basis genau auf einen Meter einreguliert und die Schraubentrommeln in dieser Lage ohne einer weiteren Verdrehung des optischen Mikrometers auf Null eingestellt werden. Hiernach wird die zu komparierende Nivellierlatte unter dem Gerät angebracht — die Latte wird durch auf Schienen laufenden kleinen Wagen gestützt und bewegt — 1 Meter voneinander entfernten Teilstriche der Invarskala werden mittels Drehung des einen optischen Mikrometers in Koinzidenz gebracht; das Teilergebnis  $\Delta K$  der Komparation kann dann direkt abgelesen werden.

Die Vorteile des Komparators PUSZTAY gegenüber der bisher angewandten direkten Vergleichsmethode können in folgenden Punkten zusammengefaßt werden:

1. Die optische Basis macht die direkte mechanische Berührung zwischen Invarband der Latte und Normalmeter überflüssig; diese Berührung war unbedingt eine wichtige Fehlerquelle.

2. Das Gerät erstreckt sich auch auf den Komparationsvorgang jenes in der modernen geodätischen Instrumententechnik allgemein angewandten Prinzips, wonach die Genauigkeit der Ablesung, infolge der außerordentlichen Empfindlichkeit des menschlichen Auges für Symmetrie, bedeutend zunimmt, wenn die Ablesung statt Schätzung mit der Schaffung einer Koinzidenz erfolgt und die Lage der geschaffenen Koinzidenz mit Hilfe der Mikrometerschraube des optischen Mikrometers fixiert wird.

3. Die starke Vergrößerung und das reine Gesichtsfeld des Gerätes steigern die Genauigkeit der Ablesung. Die wiederholten Ablesungen zeigen, daß die Genauigkeit einer Lattenablesung bei  $3\ \mu$  liegt — das ist ungefähr das Fünffache der Ablesungsgenauigkeit der bisherigen Komparationsmethode.

4. Die Komparation mit dem Komparator Pusztay ist schnell und bequem, und kann sitzend ausgeführt werden. Die Latte wird unter dem optischen Aufbau durch Drehen eines Triebhebels weiterbefördert.

5. Schließlich, aber nicht zu allerletzt ist es ein großer Vorteil, daß bei einer gemeinsamen Grundkonstruktion Komparatoren von völlig identischem Prinzip mit beliebiger optischer Basislänge hergestellt werden können. Es wurde bereits auf den Vorteil der kürzeren Komparationsbasis hingewiesen und die

Einführung einer Basis von 0,5 m Länge vorgeschlagen. Die Möglichkeit der praktischen Verwirklichung ist mit der Abkürzung der optischen Basis des Komparators Pusztay schon gegeben.

Es ist ein großer Vorteil der optischen Basen, deren Länge den runden Bruchteil eines Meters beträgt, daß ihre effektive Länge auch mit dem 1 m langen Normalmeter bestimmt werden kann, falls es auch eine 1 m lange optische Basis gibt; und zwar durch Vermittlung der Invarskalenteilungen der Nivellierlatten. Die Komparation der 0,5 m langen optischen Basis mit 1 m langem Normalmeter kann in folgenden Schritten ausgeführt werden:

a) Mit Hilfe des 1 m langen Normalmeters wird die 1 m lange optische Basis des Komparators Pusztay genau auf die effektive Länge von 1 Meter eingestellt.

b) Auf irgendeiner Latte wird ein bestimmter 1 m langer Abschnitt ausgesucht dessen bestimmende Teilstriche auf dem Invarband regelmäßige gleichbreite Striche mit scharfer Kante seien. Ihre Entfernung wird durch wiederholte Ablesungen mittels des Komparators von 1 m langer optischer Basis festgesetzt. Ergebnis:  $1\text{ m} + \alpha$ .

c) Mit dem Komparator von 0,5 m langer optischer Basis wird der erste halbe Meter des festgesetzten Lattenmeters gemessen und der Komparator Mikrometer auf Null gedreht. Diese vorerst unbekannte, rund 0,5 m betragende Entfernung soll mit  $a$  bezeichnet werden.

d) Es wird auch das zweite, 0,5 m lange Stück gemessen. Meßergebnis:  $a + \beta$ .

e)  $1\text{ Meter} + \alpha = 2a + \beta$ , woraus

$$a = 0,5\text{ Meter} + \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

In Kenntnis von  $a$  kann nun die 0,5 m lange optische Basis mittels einer der Länge  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  entsprechenden Verdrehung des Mikrometers auf den genauen 0,5 m gestellt werden.

Die Genauigkeitssteigerung der Komparationsverbesserung in der Nivelierung ist sowohl vom praktischen als auch vom wissenschaftlichen Standpunkt aus notwendig. Vom praktischen Standpunkt, weil die Geräte und Meßmethoden der Feineinwägung in den vergangenen Jahrzehnten viel vollkommener geworden sind. Gleichzeitig hat sich jedoch die Komparationsmethode und die Bestimmungsart der Komparationsverbesserung nicht wesentlich verändert, obgleich diese bei der Messung größerer Höhendifferenzen in der Ausbildung des Nivellements-Endergebnisses eine bedeutende Rolle spielen. Deshalb scheint es, als stünde die Genauigkeit der Bestimmung des Komparationsfehlers gegenwärtig nicht im Einklang mit der bei den übrigen Teilvorgängen

der Feineinwägung erreichten Genauigkeit. Es sei dies mit einem Beispiel illustriert: im Falle einer Höhendifferenz von 100 m verursacht der bei der Bestimmung des Komparationsfaktors gemachte Fehler von 0,01 mm im Endergebnis einen Fehler von 1 mm; gleichzeitig pflegt der im Kilometern ausgedrückte mittlere Fehler eines extrem genauen Nivelliernetzes unter 0,1 mm zu bleiben.

Vom wissenschaftlichen Standpunkt aus erfordert die Untersuchung der lotrechten Bewegung der Erdkruste eine weitere Steigerung der Genauigkeit der Feineinwägung; laut Obengesagtem ist hier gerade die genauere Bestimmung der Komparationsverbesserung ein wesentlicher Faktor.

Abschließend sollen unsere Vorschläge zur Genauigkeitssteigerung der Bestimmung des Komparationsfaktors im folgenden zusammengefaßt werden:

1. Aus den Teilergebnissen der Komparation soll die Berechnung des durchschnittlichen Komparationsfaktors nicht mittels Bildung arithmetischer Mittel erfolgen, sondern mittels Durchschnittsbildung mit Gewichten laut Formeln (4), (5), (5a).

2. Die Berechnung der Komparationsverbesserung soll nur bei Nivellmentstrecken in ebenen und hügeligen Geländen mit Anwendung des durchschnittlichen Komparationsfaktors erfolgen. Auf bergigerem Gebiet sollen bei der Bestimmung der Komparationsverbesserung auf allen steileren Nivellmentstrecken mit gleichgerichtetem Ansteigen (oder Neigung) die Formeln (10a) und (10b) benutzt werden, zu denen der Komparationsfaktor des Lattenpaares auf den Stellen 0,5 m und 2,5 m zu bestimmen ist ( $k_{Un}$  und  $k_{Ob}$ ).

3. Die Länge der Komparationsbasis ist abzukürzen. Der Komparationsvorgang soll mit der 0,5 m langen optischen Komparationsbasis des PUSZTAY-schen Komparators ausgeführt werden.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Eine wesentliche Fehlerquelle der Feineinwägungen ist jene, die durch die ungenaue Bestimmung der Komparationsverbesserung verursacht wird. Diese Ungenauigkeit kann zwei Ursachen haben: a) der Komparationsvorgang an sich ist mit Fehlern behaftet; b) die bis heute angewandte Methode der Berechnung der Korrektur aus den Daten der Komparation ist theoretisch nicht hinreichend begründet. Letzteres zeigt sich im Zusammenhang mit dem durchschnittlichen Komparationsfaktor.

Die Einführung des Begriffes der Komparationslinie — erfahrungsgemäß ist die Komparationslinie nicht gerade — macht diese Frage leicht übersichtlich und nach Ableitung der Formeln (4) und (5) ergibt sich, daß die Berechnung des durchschnittlichen Komparationsfaktors durch Bildung des arithmetischen Mittels der Komparationswerte zu unrichtigen Resultaten führt — das richtige Ergebnis ergibt sich aus der Durchschnittsbildung mit Gewichten. Auf Grund weiterer Überlegungen wird als weiteres Mittel zur Genauigkeitssteigerung die Abkürzung der bei der Komparation anzuwendenden Basislänge empfohlen, namentlich die Einführung einer Komparationsbasis von 0,5 m. Für diesen Fall kann der durchschnittliche Komparationsfaktor mit der Formel (7) berechnet werden.

Bei den in bergigem Gelände häufig vorkommenden, größere Höhendifferenzen ergebenden Nivellierstrecken richten sich die Visierungen in ihrer überwiegenden Mehrzahl in die Nähe des oberen und unteren Randes der Nivellierlatten. In solchen Fällen ist es nicht erlaubt,

den durchschnittlichen Komparationsfaktor zu benutzen; die für diesen Fall zur Berechnung der Komparationsverbesserung abgeleiteten Formeln (10a) und (10b) sind die verallgemeinerten Formen der den durchschnittlichen Komparationsfaktor benutzenden Formel.

Die Genauigkeit des Komparationsvorganges kann mit Hilfe von Lattenkomparatoren mit optischer Komparationsbasis bedeutend gesteigert werden. Ein solches Gerät ist auch der in der ungarischen Geodäsie benutzte Nivellierlattenkomparator von Pusztay, der der älteren, auf direktem Vergleich mit dem Invarnormalmeter beruhenden Komparationsmethode gegenüber zahlreiche Vorteile hat und die Genauigkeit der Komparation bedeutend erhöht. Auch kann mit ihm die Einführung der vorgeschlagenen 0,5 m langen optischen Basis leicht verwirklicht werden.

## IMPROVING THE ACCURACY OF THE CALIBRATION CORRECTION OF LEVELLING

D. CSATKAI

### SUMMARY

One of the most significant error sources of precise levelling is the one due to the inaccuracy of the calibration correction. This inaccuracy is due in its turn to two reasons: a) the procedure of calibration itself is inflicted with errors; b) the method of calculating the calibration correction from the results of calibration, which was hitherto employed, is theoretically unsound. The weak point of the method is in connection with the average coefficient of calibration.

The introduction of the concept of the line of calibration — which, according to experiences, is not a straight line in the general case — makes the problem easy to understand. Formulas (4) and (5) reveal that the computation of the mean coefficient of calibration by forming the arithmetic mean of the results of calibration leads to false results. The correct result is obtained by calculating weighted averages. A further consideration yields that the accuracy may be further increased by shortening the length of the base of comparison, notably, by the introduction of a base of 0,5 metre length. In this case the average coefficient of calibration is furnished by formula (7).

In levelling lines of greater level differences, frequently occurring in mountainous areas, most of the sightings fall to the lower and upper sections respectively of the stadia rod. In such cases the use of the mean coefficient of calibration is not permissible; the formulas (10a) and (10b) derived for the correction of calibration in such cases represent generalizations of the formula making use of the mean coefficient of calibration.

The accuracy of the procedure of calibration can be considerably improved by the use of rod-calibrating devices with an optical base of calibration. A device of this kind is the Pusztay type rod calibrating apparatus, in use in the Hungarian geodetic institutions. The apparatus possesses considerable advantages over the earlier method of calibration compensation based on direct comparison of the standard metre consisting of invar steel. The use of this apparatus considerably increases the accuracy of calibration. With it, the introduction of the proposed optical basis of 0,5 metre length is also feasible.

## AUGMENTATION DE LA PRÉCISION DANS LA CORRECTION D'ÉTALONNAGE DU NIVELLEMENT

D. CSATKAI

### RÉSUMÉ

Le nivellement de précision comporte une importante source d'erreur, due à l'imprécision de la détermination de la correction d'étalonnage. Cette imprécision peut se ramener à deux causes: a) l'opération d'étalonnage est elle-même affectée d'erreurs; b) la méthode de calcul jusqu'à présent appliquée pour corriger l'erreur d'étalonnage à partir des données d'étalonnage, est théoriquement incorrecte. Cette dernière cause se produit en rapport avec le facteur d'étalonnage moyen.

L'introduction de la notion de courbe d'étalonnage — selon l'expérience, la courbe d'étalonnage n'est pas rectiligne — facilite la compréhension du problème. Des formules (4) et (5) il ressort, que le calcul du facteur d'étalonnage moyen par la valeur moyenne arithmétique des résultats de l'étalonnage donne des résultats incorrects, le résultat correct étant obtenu à l'aide de la moyenne pondérée. D'autres considérations font recommander, en tant que nouveau moyen d'augmentation de la précision, le raccourcissement de la longueur de base à appliquer lors de l'étalonnage, et notamment l'introduction d'une base d'étalonnage de 0,5 m. Dans ce cas, le facteur d'étalonnage moyen pourra se calculer par la formule 7.

Dans les tronçons de nivellement à différences d'altitudes plus importantes, assez fréquents dans les régions montagneuses, les lectures s'effectuent, dans leur majorité, près des deux extrémités, inférieure et supérieure, de la mire. Dans ces cas, l'utilisation du facteur d'étalonnage moyen ne peut être admise; les formules 10a et 10b déduites, pour ce cas, en vue du calcul de la correction d'étalonnage, sont des généralisations de la formule utilisant le facteur d'étalonnage moyen.

La précision de l'opération d'étalonnage peut être considérablement augmentée par les appareils d'étalonnage à étalon optique, tels que l'appareil d'étalonnage pour mires, selon Pusztay, employés en Hongrie. En regard du mode d'étalonnage plus ancien, basé sur la comparaison directe avec l'étalon en invar, cet appareil présente de nombreux avantages et augmente essentiellement la précision de l'étalonnage. Grâce à son utilisation, on réalise aisément l'introduction de la base optique d'une longueur de 0,5 m, préconisée par l'auteur.

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОМПАРАЦИОННОЙ ПОПРАВКИ НИВЕЛИРОВАНИЯ

Д. ЧАТКАИ

### РЕЗЮМЕ

Одним из значительных источников ошибок строгого метода нивелирования является неточность определения поправки компарации. Это сводится к двум причинам: а) сам процесс компарирования дает ошибки; б) метод вычисления, применявшийся до сих пор для определения поправки компарации по данным компарации является теоретически необоснованным, что намечается в связи с средним коэффициентом компарации.

Введение понятия линии компарации (по опыту линия компарации не представляет собой прямую) позволяет легко рассмотреть этот вопрос и из формул 4) и 5) следует, что вычисление среднего коэффициента компарации путем вычисления средне-арифметического значения результатов компарации, даст неправильные значения; правильные результаты получаются посредством образования средневзвешенных значений. По дальнейшим соображениям в качестве дополнительного средства повышения точности можно предложить сокращение длины базы, применяемой при компарировании, до 0,5 м. В этом случае средний коэффициент компарации вычисляется при помощи формулы 7).

В горных местностях часто имеют место большие колебания высотных отметок, вследствие чего участки нивелирования имеют также большие высотные колебания, причем ориентации выполняются в большинстве случаев на верхний и нижний край реек. В таких случаях не допускается применение среднего коэффициента компарации. Для вычисления при подобных условиях поправок компарации выведены формулы 10а) и 10б), которые являются обобщениями формулы, применяющей средний коэффициент компарации.

Точность процесса компарации можно значительно повысить путем применения реечных компараторов с оптической компарационной базой. Таким является импользуемый в Венгрии для геодезических целей компаратор системы Пустай, который имеет ряд преимуществ перед компаратором старой конструкции с инварным нормалометром и позволяет в значительной мере повысить точность компарирования. При его помощи легко осуществляется и введение предлагаемой оптической базы длиной 0,5 м.



# ÜBERBLICK ÜBER DAS KLIMA DER ÄQUATORIALZONE

GY. BACSÁK

DOKTOR DER GEOLOGISCHEN UND MINERALOGISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 17. April 1961]

## 1.

Unter Äquatorialzone verstehen wir den Erdgürtel, welcher durch den Wendekreis des Krebses und des Bockes begrenzt ist. Die Lage der Wendekreise wird durch  $\varepsilon$ , die Schiefe der Ekliptik bestimmt; wir werden  $\varepsilon$  mit rund  $23 \frac{1}{2}^\circ$  annehmen. Die Äquatorialzone macht rund 40% der ganzen Erdoberfläche aus; 52% entfallen auf die gemäßigten Zonen, und 8% auf die zwei Polarkappen. Der Anteil der Äquatorialzone ist also beträchtlich, dennoch findet man in der klimatologischen Literatur kein Werk, welches einen richtigen Überblick über das Klima der Äquatorialzone liefern würde. Es stehen uns zwar die schönsten Beschreibungen und Erklärungen über das Klima von kleineren oder größeren Anteilen dieser Zone zur Verfügung. Das sind aber Mosaikstücke, welche man nicht in ein einheitliches Bild zusammenfassen kann: sie passen nicht zueinander. Das hat seine natürliche Ursache darin, daß man, wenn man an einem und demselben Breitenkreis der Zone ringsum geht, ganz verschiedene Klimatypen trifft, je nachdem man einen Ozean, oder ein Festland mit Urwald, Steppen oder Wüsten durchquert. Ein Beobachter am Äquator wird sich im dichten, feuchten Urwald des Kongobeckens in der Mitte des Winters Tag und Nacht über eine unerträgliche Hitze beklagen. Sein Kollege in der Gegend des Viktoriasees in einem trockenen Steppengebiet wird in der Sommermitte in der Nacht und hauptsächlich gegen Morgen zu, eine Kälte feststellen, daß ihm die Zähne klappern. Auf der gemäßigten Zone können ähnliche grobe Unterschiede des jährlichen Klimaganges dadurch überbrückt werden, daß man das Jahr in sommerliche und winterliche Halbjahre teilt. Diesen Kunstgriff kann man aber für die Äquatorialzone nicht anwenden, denn dort gibt es keine sommerlichen und winterlichen Halbjahre. Mit dem effektiven Klima erreicht man keinen Überblick.

## 2.

Einen Überblick der Äquatorialzone kann nur das Solarklima ergeben. Dieses geht aus der Solarkonstante  $2 \text{ gr cal pro cm}^2 \text{ min.}$  aus, und berechnet

den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen, die Dauer des Sonnenlichtes und dadurch die Bestrahlungsmenge des Durchschnittstages für das ganze Jahr, wie auch die maximale tägliche Bestrahlung auf beiden Seiten. Eine solche Berechnung gelingt aber nur für eine ideale, geometrische Erdkugel, die also von allen Ungleichheiten, dem Äquatorialwulst, der ganzen geographischen Hülle befreit ist und an ihrer Oberfläche nichts außer dem Netz der Breiten- und Meridiankreise behält. Im Vergleich zu dem Effektivklima ist also das Solar-klima ein sehr abstrakter Begriff, dennoch ist es unentbehrlich. Letzten Endes hat auch das effektive Klima keine andere Ursache als die Strahlung der Sonne, und ohne einen Überblick des Solarklimas kann man auch keinen Überblick des effektiven Klimas gewinnen.

Die math. Klimalehre berechnet für einen beliebigen Punkt der Erdoberfläche und für einen beliebigen Tag des Jahres die Dauer des Tageslichtes und die Insolation in Kalorien. Daraus ergibt sich der jährliche Bestrahlungsgang: das Bestrahlungsniveau des betreffenden Breitenkreises samt seinen Höchst- und Kleinstwerten. Mit einer einzigen Zahl kann das Klima nicht gekennzeichnet werden, weil daraus nicht entschieden werden kann, ob man sich darunter ein sehr ausgeglichenes Klima (mäßiger Sommer, mäßiger Winter), oder ein Extremklima (große Sommerhitze, unerträgliche Winterkälte) verstehen soll. Vor klimatologischen Lehren, die mit einer einzigen Zahl das Klima zu charakterisieren suchen, soll man sich vorsichtig verhalten. Die Lebewesen gewöhnen sich leichter an ein Klima mit etwas höherem, oder niedrigerem Bestrahlungsniveau, vertragen aber viel schwerer ein Klima mit größeren Extremwerten des Sommers und Winters.

Dadurch, daß wir die Erde als eine geometrische Kugel vorstellen, verfälschen wir den Bestrahlungsgang der Tropen nur in Promillen, denn die Ausbuchtung des Äquatorialgürtels beträgt rund nur 20 km, was im Vergleich zum Erdradius von 6400 km in der Bestrahlung kaum bemerkbar ist. Ein viel schwereres Opfer bringen wir im Interesse des Überblickes dadurch, daß wir die Zirkulation der Luft und des Wassers außer acht lassen. Ist doch einer der wichtigsten Charakterzüge des Klimas der jährliche Niederschlag und dessen Verteilung zwischen den Jahreszeiten. Diese Zirkulation ist aber unberechenbar und wir können sie erst nachträglich berücksichtigen, wenn wir schon im Besitze eines Überblickes der Bestrahlung sind.

### 3.

In der ungarischen Literatur hat Universitätsprofessor A. VÁLLAS in seinem 1840 in Wien erschienenen Werk [1] das Problem der Bestrahlung der Äquatorialzone folgendermaßen kurz zusammengefaßt:

»Was die Jahreszeiten betrifft, kommen diese am Äquator jährlich zweimal vor. Es gibt dort jährlich zwei Sommer und zwei Winter. Von da aus dem

Pol zu bleibt der eine Winter an der Grenze des Gürtels (= Wendekreis) zurück und die Reihenfolge der Jahreszeiten wird von dort an die unsrige. Die Dauer des Tageslichtes und der Nacht sind am Äquator durch das ganze Jahr einander gleich. Von da an gegen die Grenzen der Zone ändert sich diese Lage, und an der Grenze dauert das längste Tageslicht  $13 \frac{1}{2}$  Stunden, das kürzeste  $10 \frac{1}{2}$  Stunden.«

Zu dieser kurzen Zusammenfassung sollte noch hinzugefügt werden, daß der eine Winter des Äquators genau an unserem sommerlichen Sonnenende (am 21. Juni) kulminiert, während die Kulmination des zweiten Winters mit der winterlichen Sonnenwende (23. Dezember) zusammenfällt. Damit wäre unser Problem genau umschrieben: wir müssen besprechen, wie und warum der erste Winter des Äquators am Wendekreis steckenbleibt, und warum die zwei benachbarten sommerlichen Vierteljahre des Äquators am Wendekreis sich zu einem einzigen Sommerhalbjahr vereinigen; zweitens müssen wir erklären, wie und warum aus dem zweiten Winter des Äquators auf seinem Wege zum Wendekreis ein Winterhalbjahr zustande kommt.

Es ist leicht einzusehen, daß die zwei Winter und die zwei Sommer des Äquators ganz gleichlange Vierteljahre bedeuten, wobei die Kulminationen der sommerlichen Vierteljahre mit unserem Frühlings- bzw. Herbstäquinox zusammenfallen müssen, wo die Mittagssonne am Äquator am allerhöchsten, im Zenith steht, und die Kulminationen der winterlichen Vierteljahre mit unseren Sonnenwenden zusammenfallen müssen, wo die Mittagssonne am Äquator bei einer Zenithdistanz von  $23 \frac{1}{2}^\circ$ , also am niedrigsten kulminiert.

Die Beurteilung des Überganges vom Äquator bis zum Wendekreis ist dagegen keine einfache Sache, denn die Bestrahlungsmenge hängt nicht nur von dem Einfallswinkel der Sonnenstrahlen ab, sondern auch davon, wie lange das Tageslicht dauert, und wie sich diese Bedingungen für die mittleren Breiten unseres Gürtels gestalten.

#### 4.

Um diese Schwierigkeiten zu erleichtern, ist es zweckmäßig außer unserem idealen Globus noch weitere Vereinfachungen einzuführen, das heißt, Modelle konstruieren um dadurch die Wirklichkeit Schritt für Schritt anzunähern.

Für unser Modell I untersuchen wir ein Jahr, wo die Exzentrizität der Erdbahn gerade ihr Minimum  $e = 0$  einnimmt, also die Bahn der Erde um die Sonne ein Kreis ist. Dadurch wird die scheinbare Bewegung der Sonne an der Himmelsekliptik gleichmäßig, das sommerliche Jahresviertel wird nicht nur in seiner Dauer genau dem winterlichen gleich, sondern auch in seinen Extremen, abgesehen vom Vorzeichen. Der Bestrahlungsgang der nördlichen Hälfte der Äquatorialzone wird spiegelbildlich gleich der südlichen Hälfte, wir können

also unsere Untersuchungen auf die nördliche Hemisphäre beschränken. Auch der Bestrahlungsgang des vom Frühlingspunkte aus gerechneten ersten Vierteljahres wird spiegelbildlich gleich dem zweiten Vierteljahr, und ebenso sind die Bestrahlungsgänge vom dritten und vierten Vierteljahr einander spiegelbildlich gleich. Wir ersparen also durch dieses Modell I eine Menge Zeit und Mühe. Sobald wir dadurch einen Überblick des Bestrahlungsganges unserer Zone erreicht haben, lassen wir die Beschränkung  $e = 0$  fallen, und suchen unseren Weg in einem anderen Modell.

Daß man ohne eine solche Beschränkung auch aus den präzisesten klimatologischen Werken keinen richtigen Überblick erreicht, dafür soll das Beispiel von C. WIENER [2] dienen, der für die ganze Erde den Bestrahlungsgang des tropischen Jahres vom 21. III. 1873 bis 21. III. 1874 genau berechnet hat und dessen Daten wir in der folgenden Tabelle I mitteilen.

Wir ersehen aus Tabelle I, daß am Äquator tatsächlich zwei Minima und zwei Maxima sich abwechseln mit 814, 913, 869, 924 cal; auf den Wendekreisen existiert dagegen nur ein Maximum und ein Minimum: 978, 581 für den Wendekreis des Krebses, bzw. 1045, 550 cal für den Wendekreis des Boeckes.

Aber über das Verschwinden des ersten Winters und den entsprechenden Zuwachs des zweiten kann man sich aus Tabelle I kaum eine Vorstellung machen. Dazu ist das Gradnetz von  $10^\circ$  zu  $10^\circ$  für  $\varphi$  und von  $22\frac{1}{2}^\circ$  zu  $22\frac{1}{2}^\circ$  für  $\lambda$  viel zu weit.

Man braucht dazu einen ununterbrochenen Übergang vom Äquator bis zum Wendekreis, was man mit Hilfe von Modell I viel leichter erhält.

Aus der Tabelle I können die nötigen kardinalen Grundwerte für das Modell I auf folgende Weise berechnet werden:

a) Nach Tabelle I ist die Bestrahlungsmenge für den Äquator in cal.

für  $\varphi = 0^\circ, \lambda = 0^\circ, 923$  cal für  $\varphi = 0^\circ, \lambda = 90^\circ, 814$  cal  
für  $\varphi = 0^\circ, \lambda = 180^\circ, 912$  cal für  $\varphi = 0^\circ, \lambda = 270^\circ, 869$  cal

insgesamt	1835 gr.cal	1683 gr.cal
im Durchschnitt	918 gr.cal	842 gr.cal

und das Bestrahlungsniveau des Äquators ist  $\frac{918+842}{2} = 880$  cal, mit den Extremwerten 918 bzw. 842 cal.

b) Das Bestrahlungsniveau der Wendekreise muß für das Modell I dem Mindestwert der Bestrahlung am Äquator gleich sein. Auf der Tabelle I ist SN die Weltachse, für den Äquator, in der Mitte 0, ist der Beobachter. Bei  $\varphi = 0^\circ$  kulminiert die Mittagssonne im Zenith Z mit der höchstmöglichen Bestrahlung 918 cal laut a). Bei  $\varphi = 90^\circ$  ist die Zenithdistanz der Mittagssonne  $23\frac{1}{2}^\circ$  in A, und die Bestrahlungsmenge beträgt 842 cal. Am Wendekreis ist

die Weltachse  $OB$  mit  $NB = 23\frac{1}{2}^\circ$ . Die Mittagssonne kulminiert also in  $C$ , wo  $CZ = 23\frac{1}{2}^\circ$  ist. Für  $\varphi = 0^\circ$ , wo das Tageslicht überall 12 Stunden dauert, wird die Bestrahlungsmenge von  $C$  gleich der Bestrahlungsmenge in  $A$ , nämlich 842 cal pro Tag, wie wir behauptet haben.

c) Wie hoch sind die Extremwerte am Wendekreis im Vergleich zu dem Niveau von 842 cal?

Zu $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$ , $\lambda = 90^\circ$ gehört laut der Tabelle I	978 cal
Zu $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$ , $\lambda = 270^\circ$ gehört laut der Tabelle I	1045 cal
insgesamt	2023 cal
im Durchschnitt	1012 cal
das Niveau b)	842
die extremen Exzesse sind daher	$\pm 170$ cal
mit den Bestrahlungswerten 1012 bzw. 672 cal.	

Die Niveauwerte von 842 cal treten für Modell I am Wendekreis zu den Zeitpunkten  $\varphi = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ , der Höchstwert 1012 bei  $\varphi = 90^\circ$ , der Mindestwert 672 bei  $\varphi = 270^\circ$  auf.

Im Besitze dieser Kardinalwerte a), b), c) kann man nach Beispiel der Abbildung 6 der Math. Klimalehre von MILANKOVIĆ [3] einen Bestrahlungs-

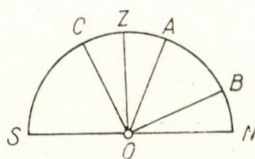


Abb. 1

block der Äquatorialzone entwerfen mit den in der Grundebene liegenden Achsen  $x = \varphi$ ,  $y = \lambda$  und in der vertikalen Richtung  $z$  mit den Bestrahlungsmengen in cal, wie die Abb. 2 zeigt.

Aus Abb. 2 entnimmt man sofort, daß die sukzessive Abnahme der Dauer des ersten Winters vom Äquator deshalb erfolgt, weil die beiden benachbarten sommerlichen Vierteljahre — ohne daß sie ihre eigene Dauer ändern würden — sich der Sommersonnenwende  $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $\lambda = 90^\circ$  zu verschieben. Dabei müssen sich die Kulminationspunkte der sommerlichen Vierteljahre, welche bei  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  bzw.  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 180^\circ$  lagen, sukzessive ebenfalls in die Richtung  $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $\lambda = 90^\circ$  verschieben, wo sie sich vereinigen.

Selbstverständlich nimmt der zweite echte Winter in seiner Dauer immer ebensoviel zu, als der erste falsche Winter verliert. Der Kulminationspunkt

Tabelle I

Die Tabelle von C. WIENER über die Bestrahlung des Jahres 1873/74  
bei Abwesenheit der Atmosphäre in gr. Kalorien/cm<sup>2</sup>min.

(ergänzt für  $\varphi = \pm 66 \frac{1}{2}^\circ$  und  $\varphi = \pm 23 \frac{1}{2}^\circ$ )

$\varphi/\lambda$	0°	22½°	45°	67½°	90°	112½°	135°	157½°	180°	202½°	225°	247½°	270°	292½°	315°	337½°	$\lambda/\varphi$
90°	0	436	796	1030	1110	1025	789	431	0								90°
80°	160	436	784	1014	1093	1010	777	431	158								80°
70°	316	541	976	968	1043	963	765	540	312	133	25				25	135	70°
66½°	367	531	926	966	1031	961	786	578	362	185	69	26	17	26	59	186	66½°
60°	461	655	834	963	1009	958	826	648	456	281	150	74	51	75	151	285	60°
50°	593	755	894	988	1020	983	886	747	586	427	293	210	181	311	298	432	50°
40°	707	832	938	1002	1022	977	929	823	698	562	442	359	327	361	447	570	40°
30°	799	892	958	997	1005	990	949	882	789	863	581	507	480	509	586	691	30°
23½°	843	911	954	968	978	970	946	901	837	715	668	598	581	600	664	757	23½°
20°	867	922	952	964	964	959	944	911	857	783	706	646	624	649	712	793	20°
10°	909	925	921	908	900	904	915	914	898	861	813	771	756	775	820	871	10°
0°	923	900	863	829	814	825	856	890	912	913	897	877	869	881	905	924	0°
—10°	909	849	783	729	708	726	776	839	898	938	956	960	962	956	965	949	—10°
—20°	867	773	680	611	585	608	674	764	857	935	989	1019	1030	1024	998	946	—20°
—23½°	843	738	638	565	550	562	597	730	837	925	992	1030	1045	1036	999	935	—23½°
—30°	799	674	560	479	455	477	555	666	789	904	994	1052	1073	1057	1003	915	—30°
—40°	707	555	426	339	306	388	422	549	698	844	973	1059	1092	1064	982	854	—40°
—50°	593	421	285	199	170	198	282	417	586	766	929	1045	1098	1050	937	775	—50°
—60°	461	277	144	70	48	70	143	274	456	644	866	1018	1078	1029	873	672	—60°
—66½°	367	182	66	24	17	24	66	180	362	588	824	1022	1101	1027	831	597	—66½°
70°	316	131	24				24	130	312	548	802	1024	1114	1029	809	556	—70°
80°	160	7						7	158	442	814	1073	1167	1076	821	447	—80°
90°	0							0	442	826	826	1089	1185	1095	834	447	—90°

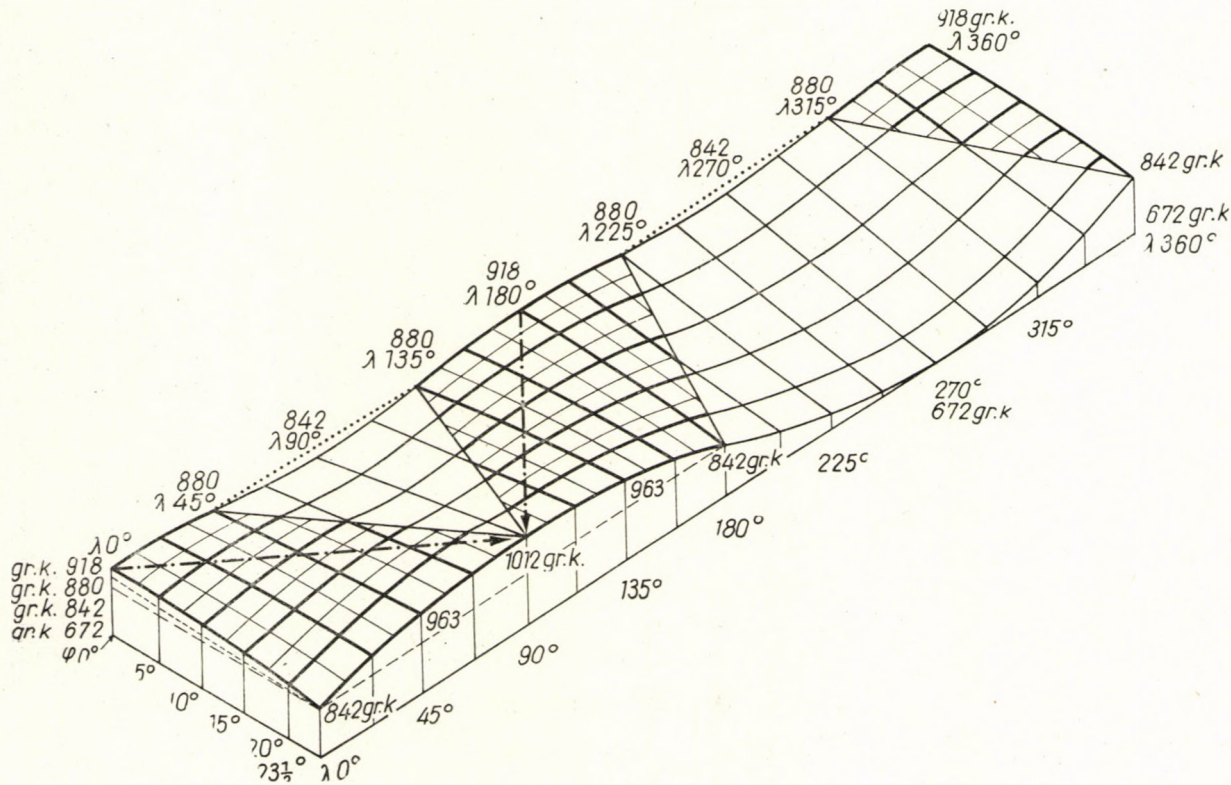


Abb. 2. Blockdiagramm der Bestrahlung in der Äquatorialzone für das Modell I,  $e = 0$ . Die sommerlichen Flächen sind durch ein dichteres Netz der Breitenkreise  $\left(2 \frac{1}{2}^\circ\right)$  und der Meridiane  $\left(\lambda 11 \frac{1}{4}^\circ\right)$  angedeutet. Die strichpunktierten Kurven zeigen den Weg des Kulminationspunktes des sommerlichen Vierteljahres von  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  bzw.  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 180^\circ$ , bis zu  $\varphi = 23 \frac{1}{2}^\circ$   $\lambda = 90^\circ$ , wo sie sich vereinigen.

des Winters bleibt aber dabei immer auf dem Meridian  $\lambda = 90^\circ$  bzw.  $\lambda = 270^\circ$ . Sommer und Winter benehmen sich also bei dieser Prozedur ganz verschieden.

Man bemerkt auch aus der Abb. 2, daß die sommerlichen Oberflächen konvex, die winterlichen konkav gekrümmt sind. Das ist eine sehr wichtige Beobachtung, denn die Definition der kalorischen Halbjahre, wie sie durch MILANKOVIĆ gegeben wurde, daß nämlich der mindestbestrahlte Tag des Sommers noch immer mehr Bestrahlung genießt als der am ausgiebigsten bestrahlte Tag des Winters, kann auf der Äquatorialzone nicht aufrecht erhalten werden. Man bemerkt sofort an der Abb. 2, daß z. B. der mindestbestrahlte Tag des Winters bei  $\varphi = 15^\circ$ ,  $\lambda = 90^\circ$  eine höhere Bestrahlung genießt, als der höchstbestrahlte Tag des Sommers bei  $\varphi 15^\circ$ ,  $\lambda 0^\circ$ . Auf der Äquatorialzone muß die charakteristische Eigenschaft von Sommer und Winter darin gesucht werden, daß die Bestrahlungskurven der Breitenkreise im Sommer konvex, im Winter konkav verlaufen.

## 6.

Einige der wichtigsten Bestrahlungskurven, welche auf der Abb. 2 eine Rolle spielen, können betreffs ihres Krümmungsgesetzes schon jetzt untersucht werden.

a) Die Bestrahlungskurve des Äquators für Modell I fällt laut Punkt a) 4. von  $\lambda = 0^\circ$  bis  $\lambda = 45^\circ$  von 918 cal bis zu 880 cal, ist also konvex um 38 cal, und während des zweiten Oktanten von  $\lambda 45^\circ - 90^\circ$  fällt die Bestrahlung von 880 gr cal auf 862 gr cal konkav. Nachdem am Äquator das Tageslicht durch das ganze Jahr 12 Stunden dauert, ist für die Krümmung der Bestrahlungskurve allein die Zenithdistanz der Mittagssonne maßgebend. Mit anderen Worten muß also die Krümmung in einer cos-Beziehung dem Einfallswinkel der Strahlen der Mittagssonne folgen, mit 38 cal als Einheit für cos. Für je  $11\frac{1}{4}^\circ$  Länge erhalten wir also für

$\lambda$	$0^\circ$	$11\frac{1}{4}^\circ$	$22\frac{1}{2}^\circ$	$33\frac{3}{4}^\circ$	$45^\circ$	$56\frac{1}{4}^\circ$	$67\frac{1}{2}^\circ$	$78\frac{3}{4}^\circ$	$90^\circ$
	918	915	907	896	880	864	853	845	842 cal.

Diese halbe Welle wiederholt sich abwechselnd spiegelbildlich noch dreimal von  $\lambda 90^\circ - 360^\circ$ , wie das aus Abb. 2 ersichtlich ist.

b) Das Krümmungsgesetz der Bestrahlungskurve des Wendekreises für Modell I ist etwas komplizierter, weil hier neben der Zenithdistanz der Mittagssonne auch die Dauer des Tageslichtes auf die Bestrahlung des Tages einen Einfluß hat. Da aber von  $\lambda = 0^\circ$  angefangen bis  $\lambda = 90^\circ$  sowohl die Zenithdistanz — respektive der Einfallswinkel der Strahlen der Mittagssonne — als auch die Dauer des Tageslichtes nach einer Sinusfunktion anwächst, und wenn



wir die Ordinaten der sin-Kurven addieren, wieder nur eine sin-Kurve erhalten, so wird die Bestrahlungskurve des Wendekreises ebenfalls eine sin-Kurve. Aus c) 4. wissen wir, daß die Bestrahlungsmenge am Wendekreis von  $\lambda = 0^\circ$  bis  $90^\circ$  von 842 cal auf 1012 cal wächst, die Einheit dieser sin-Kurve wird folglich 170 cal, und der Verlauf der Bestrahlungskurve des Wendekreises wird also von  $11\frac{1}{2}^\circ$  zu  $11\frac{1}{2}^\circ$ :

	$0^\circ$	$11\frac{1}{4}^\circ$	$22\frac{1}{2}^\circ$	$33\frac{3}{4}^\circ$	$45^\circ$	$56\frac{1}{4}^\circ$	$67\frac{1}{2}^\circ$	$78\frac{3}{4}^\circ$	$90^\circ$	
$23\frac{1}{2}^\circ$	842	876	908	937	963	983	999	1009	1012	cal.

Dieses Quartal wiederholt sich im nächsten Quartal spiegelbildlich und bildet einen Wellenberg für das Sommerhalbjahr, ein Wellental im folgenden Winterhalbjahr bildet sich mit den gleichen aber negativen Werten, wie das aus der Abb. 2 ersichtlich ist.

c) Für die mittleren Breiten zwischen  $\varphi = 0^\circ$  bis  $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$  ist der jährliche Verlauf der Bestrahlungskurven ganz verschieden, weil sich im ersten Halbjahr der Keil des ersten Äquatorialwinters zwischen die beiden sommerlichen Vierteljahre hineintreibt und dadurch schon im ersten Halbjahr zwei sommerliche Kulminationspunkte verursacht, welche bei einem jeden Breitengrad eine andere Zeitdifferenz haben. Diese mittleren Bestrahlungskurven haben also schematisch den folgenden Verlauf:

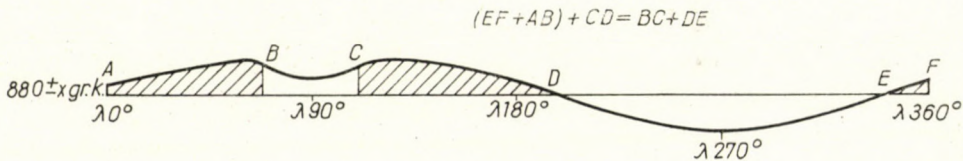


Abb. 3

Im zweiten Halbjahr dagegen gibt es keine doppelte Kulmination des Winters. Für eine jede Breite von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  werden diese Bestrahlungskurven unter 7. eingehend besprochen.

d) Die Bestrahlungskurven der Meridiane  $\lambda = 0^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $\lambda = 360^\circ$ , können wir sofort bestimmen, auf der Grundlage, daß in diesen Äquinoktialzeitpunkten die Dauer des Tageslichtes in allen geographischen Breiten 12 Stunden ausmacht, denn hier genügt es, die Zenithdistanz der Mittagssonne zu berücksichtigen.

Aus 4. a) wissen wir, daß für das Modell I die Bestrahlungsmenge für  $\varphi = 0^\circ$  und  $\lambda = 0^\circ$  im Durchschnitt (Seite 378) 918 cal, für  $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$  842 cal ausmacht, also von  $0^\circ$  bis  $23\frac{1}{2}^\circ$  eine Abnahme um 76 cal besteht.

Für die mittleren Breiten von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  bzw.  $2\frac{1}{3}^\circ$  erhalten wir laut dem cos-Gesetz die folgenden Bestrahlungswerte:

	$23\frac{1}{2}^\circ$	$20^\circ$	$15^\circ$	$10^\circ$	$5^\circ$	$0^\circ$
$0^\circ$	842	863	888	904	916	918 cal.

Den Gang der Berechnung teilen wir unter der Bemerkung mit, daß wir uns auf diesen Gedankengang auch später berufen werden.

Berechnung:	$23\frac{1}{2}^\circ$	$20^\circ$	$15^\circ$	$10^\circ$	$5^\circ$	$0^\circ$
Einfallswinkel:	$66\frac{1}{2}^\circ$	70	75	80	85	90
cos des Winkels	0,9170	0,9396	0,9659	0,9848	0,9962	1,0000
Grundwert	0,9170	0,9170	0,9170	0,9170	0,9170	0,9170
Zunahme	0	226	489	678	792	830
$76 \times \text{Zunahme} / 830$	0	20,69	46,34	62,08	73,84	76,00 cal
Rund	0	21	46	62	74	76 cal
Grundwert	842	842	842	842	842	842 cal
Bestrahlung	842	863	888	904	916	918 cal

e) Den Bestrahlungsgang des Meridians unserer sommerlichen Sonnenwende,  $\lambda = 90^\circ$  können wir auf Grund desselben Gedankenganges berechnen, weil der Anfangs- und Endpunkt dieser Bestrahlungskurve aus 4. c) bekannt ist: für  $\varphi = 0^\circ$ . 842, für  $23\frac{1}{2}^\circ$  1012 cal. Nach dem cos-Gesetz folgt dann

	$23\frac{1}{2}^\circ$	$20^\circ$	$15^\circ$	$10^\circ$	$5^\circ$	$0^\circ$
$\lambda = 90^\circ$	1012	996	900	888	880	842 cal.

f) Der Bestrahlungsgang des Meridians der Wintersonnenwende  $\lambda = 270^\circ$  kann aus den bekannten Endwerten 672 cal für  $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$  und 842 cal für  $\varphi = 0^\circ$ , als eine Differenz von 170 cal nach dem cos-Gesetz berechnet werden, wobei wir die folgenden Bestrahlungsmengen erhalten

	$23\frac{1}{2}^\circ$	$20^\circ$	$15^\circ$	$10^\circ$	$5^\circ$	$0^\circ$
$\lambda = 270^\circ$	672	718	773	811	834	842 cal.

g) Etwas komplizierter sind die Bestrahlungsgänge der Meridiane  $\lambda = 45^\circ$  und  $135^\circ$ , welche einander identisch verlaufen, weil dort von dem

Wendekreis dem Äquator zu eine sehr bescheidene Zunahme der Bestrahlungsmengen vorkommt, verursacht durch die Kulminationspunkte der Breitenkreise  $\varphi = 10^\circ$  und  $15^\circ$ , welche diesen Meridian bei  $\lambda = 39^\circ$  und  $\lambda = 57^\circ$ , also rechts und links beeinflussen; ihre Endwerte sind 963 und 880 cal.

h) Nachdem wir die Grundwerte in 4. aus der WIENERSchen Tabelle abgeleitet haben, wo schon die Dauer des Tageslichtes berücksichtigt war, haben wir darüber bisher gar nicht gesprochen. Es soll jetzt gezeigt werden,

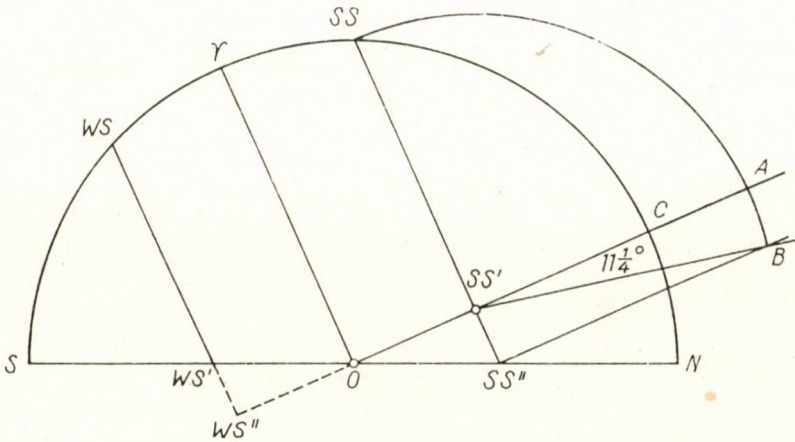


Abb. 4

daß für unser Modell I auch die Dauer des Tageslichtes einfach abgeleitet werden kann.

Wir wählen als Beispiel die Bestimmung des längsten Tages am Wendekreis, also für die Sommersonnenwende  $\lambda = 90^\circ$ .

Auf der Abb. 4 bedeutet  $OC$  die Weltachse und  $NS$  den Horizont,  $S, WS, \gamma, SS, N$  bedeuten an der Hohlkugel des Firmamentes nach der Reihe: Süd, Wintersonnenwende, Frühlingspunkt, Sommersonnenwende und Nord. Die Dauer des längsten Tages bei der Sommersonnenwende bedeutet die Linie  $SS - SS'$ . Davon ist  $SS - SS' = 90^\circ$  der Weg der Sonne; hin und zurück ist das  $180^\circ = 12$  Stunden = 720 Zeitminuten. Auf einen Winkelgrad entfallen also 4 Zeitminuten. Für die Bestimmung des längsten Tages muß also die Strecke  $SS' - SS''$  in Winkelgraden gemessen werden.

Dazu zieht man die Parallele  $SS''B \parallel SS'A$ , und aus dem Mittelpunkt  $SS'$  den Kreisbogen  $SSAB$ ; dann ist der Bogen  $AB$   $11^\circ 15'$ , und hin und zu dem Weg der Sonne morgens und abends  $22^\circ 30'$ .  $SS - A(180^\circ) + AB(22^\circ 1/2^\circ) = 202^\circ 1/2^\circ$ ; pro 4 Zeitminuten ist das 810 Zeitminuten gleich 13 Stunden 30 Minuten.

Durch dieselbe Konstruktion kann das Tageslicht für unser Modell I für beliebige Breiten bestimmt werden. Aus der Tabelle erkennt man auch, daß bei der Wintersonnenwende der kürzeste Tag um so viel kürzer als 12 Stunden wird, als an der Sommersonnenwende der längste Tag länger als 12 Stunden dauerte.

## 7.

Um sich über die Krümmung sämtlicher Bestrahlungskurven der mittleren Breiten und Meridiane einen Überblick zu verschaffen, soll man sich für alle Schnittpunkte des Gradnetzes der Äquatorialzone in Modell I die Bestrahlungsmengen, welche auf Grundlage der Zenithdistanz der Mittagssonne und Dauer des Tageslichtes nach 6. berechnet, und diese Bestrahlungsmengen senkrecht auf die ausgebreitete Grundebene in den Schnittpunkten des Gradnetzes aufgetragen vorstellen. Dadurch erhalten wir das Blockdiagramm der Bestrahlung, welches als Abb. 2 perspektivisch dargestellt ist. Wenn wir uns diesen Bestrahlungsblock aus einem sägbaren Stoff vorbilden, können wir daran nicht nur in orthogonale Richtungen, sondern auch in ausgewählten schrägen Richtungen Segmente schneiden und daran die Bestrahlungskurve studieren.

Anstatt dieser handgreiflichen Prozedur können wir als Zeichenfläche die Grundfläche unseres Blockes mit einer gewissen Modifikation in Anspruch nehmen. Wenn wir nämlich die originelle Grundfläche der Abb. 2 mit einem Niveau 672 cal benützen, so würde sich am Äquator überhaupt kein Winter ergeben, sondern nur eine Fluktuation der sommerlichen Bestrahlung zwischen den Grenzen 842—918 cal. Das wäre aber unvereinbar mit der allgemeinen Auffassung der Klimatologen, daß am Äquator jährlich abwechselnd zwei Sommer und zwei Winter vorkommen. Mit einer Auffassung, daß am Äquator überhaupt kein Winter existiere, kämen wir auch zu dem wichtigen Endergebnis des 6., daß nämlich in der Äquatorialzone das Kennzeichen des Winters darin besteht, daß die Bestrahlungskurven dort konkav verlaufen, und außerdem ist der zweite, wahre Winter unserer Zone mit der Kulmination bei  $\lambda = 270^\circ$  so eklatant, daß man den Begriff des Winters auch in der Äquatorialzone nicht entbehren kann.

Folglich müssen wir anstatt der Grundebene mit einem Bestrahlungsniveau von 672 cal die Ausgleichsfläche aller Bestrahlungsniveaus zwischen 880—842 cal (Abb. 5) in Anspruch nehmen, und die Segmente unseres Blockes in diese Fläche umlegen. Man kann die Breitenkreise bei der Abbildung beliebig weit auseinanderziehen, wodurch man zugleich für die Abbildung der Segmente der Breitenkreise genügend Raum bekommt, wo man die Mengen messen, respektive auf Millimeterpapier sie ablesen kann.

In Abb. 5 bedeutet  $0^\circ$ — $23\frac{1}{2}^\circ$  die originelle Grundebene von der Höhe 842 cal. 76, 73, 62, 45, 21, 0 bedeuten den Zuwachs der Bestrahlungsmengen

über 842 cal. Wir nehmen also die Mittelwerte 880, 878, 873, 864, 852, 842 als das Niveau der Bestrahlung der betreffenden geographischen Breiten, wodurch dann die wechselnde Reihe der Sommer- und Wintervierteljahre am Äquator sich ergibt.

Man könnte als Grundebene auch die gestrichelt eingezeichnete schräge Ebene nehmen, das möchte aber zu unerträglichen Schwierigkeiten führen und schon den Grundsatz der Bestrahlung des Meridians  $\varphi = 0^\circ$  verfälschen. Es macht weniger Schwierigkeiten, wenn wir die krumme Fläche mit den

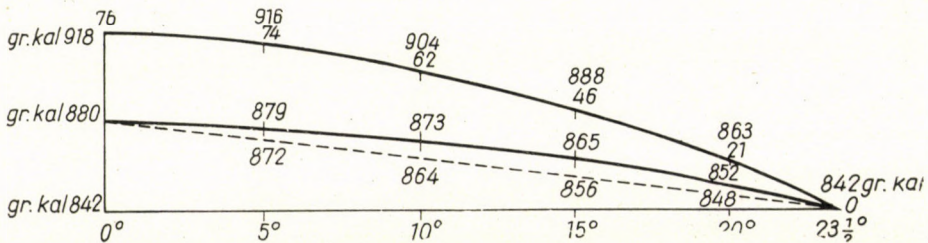


Abb. 5

Halbwerten für die Abbildung als Grundfläche nehmen, die einen richtigen Überblick über die Bestrahlung der Äquatorialzone ergeben wird. Die Abweichung zwischen der krummen Fläche und der Ebene kann dadurch stark vermindert werden, daß man die Distanz der Breitenkreise im Verhältnis zu der Distanz der Meridiane beliebig auseinanderzieht. Das bleibt immer ein schwacher Punkt in der Konstruktion unserer Abbildungen, aber im Interesse des richtigen Überblickes müssen wir uns damit zufriedengeben.

Auf Grund der in 6 entwickelten Krümmungsgesetze unseres Blockes für Modell I und auf Grund der Niveauwerte des 7. können wir eine nicht-perspektivische Übersicht über den Bestrahlungsgang der Äquatorialzone geben. Abb. 6 zeigt einen solchen Überblick für ein halbes Jahr, denn die andere Hälfte ist spiegelbildlich identisch mit diesem Bestrahlungsgang. Die Abb. 6 reicht von  $\lambda = 270^\circ$  bis  $\lambda = 90^\circ$  des nächsten Jahres, wodurch man den Bestrahlungsgang des ersten Sommervierteljahres — welcher asymmetrisch ist — und je die Hälfte der symmetrischen Bestrahlungsgänge der Winter I und II bekommt. In Abb. 6 sind die geographischen Breiten von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  bzw.  $3 \frac{1}{2}^\circ$  berücksichtigt, bei um  $11 \frac{1}{4}^\circ$  ansteigenden Längengraden. Die Stufe von  $5^\circ$  zwischen den Parallelkreisen ist mehr als zweimal so dicht wie die Längenstufe, und für die Bestrahlungswerte ist die Skala  $1 \text{ mm} = 5 \text{ cal}$  angewendet.

Die Konstruktion der Abb. 6 geht dann wie folgt vor sich: zuerst wird das Gradnetz eingezeichnet, dann wird die Bestrahlung des Äquators und der Wendekreise, sowie jene des Meridians  $\lambda = 0^\circ$  auf Grund des 6. eingezeichnet. Bei den Segmenten der Meridiane  $270^\circ$  und  $90^\circ$  müssen die sich aus 6.

ergebenden Kurven so aufgezeichnet werden, daß das Kreuzungsprinzip aufrecht bleibt, daß nämlich die Bestrahlungsmenge denselben Wert erhält, unabhängig davon, ob man entlang eines Breitenkreises oder Meridiansegmentes in den Punkt ankommt. Nach dieser Umrahmung des Feldes nehmen wir das schräge Segment zwischen  $\lambda = 0^\circ$ ,  $\lambda = 45^\circ$  und  $\lambda = 23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $\lambda = 90^\circ$  in Anspruch, dessen Anfangspunkt mit 880 cal und Endpunkt mit 1012 cal auch an der Oberfläche des Blockes bekannt ist. Dadurch bekommen wir die Differenzen zwischen der Oberfläche und dem Bestrahlungsniveau, wie folgt:

$\varphi$	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$23\frac{1}{2}^\circ$
Niveau	880	879	873	865	853	842 cal
+	0	36	72	108	144	170 cal linear
	880	915	945	973	997	1012 cal
für die Länge $\lambda$	$45^\circ$	$55^\circ$	$64^\circ$	$74^\circ$	$84^\circ$	$90^\circ$

Diese Trennlinie geht in südlicher Richtung geradlinig weiter, hört aber bei  $\lambda = 23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$  auf. Die andere ähnliche Trennlinie zwischen  $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  und  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 315^\circ$  geht nach Süden gerade weiter in der schrägen Richtung, gegen Norden bricht sie bei  $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  und läuft von dort in der Richtung dieses Meridians weiter.

Für die Kulminationsmengen der mittleren Breitenkreise kann der schräge Schnitt unseres Blockes von  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  bis  $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $\lambda = 90^\circ$  in Anspruch genommen werden. Die bekannten Anfangs- und Endwerte sind 918 cal und 1012 cal. Das Segment wird also ein Trapez, und wo die Grundlinie des Trapezes die Breitenkreise schneidet, erhalten wir durch Ablesung der Höhe in mm die Kulminationswerte der Breitenkreise und die Länge der Kulmination, wie folgt:

	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$23\frac{1}{2}^\circ$
Niveau	880	879	873	865	853	842 cal
+	38	65	95	120	150	170
	918	944	968	985	1003	1012 cal
für	$0^\circ$	$20^\circ$	$38^\circ$	$48^\circ$	$76\frac{1}{2}^\circ$	$90^\circ$

Für die Kulminationen der Bestrahlungskurven der Meridiane kann das schräge Segment zwischen  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  —  $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $\lambda = 45^\circ$  beansprucht werden. Wo die Grundlinie dieses Trapezes die Meridiane schneidet, dort liegt die Kulmination und kann abgelesen werden. Der Anfangs- bzw. Endwert ist hier 918 bzw. 962 cal und die Kulminationswerte gestalten sich folgenderweise:

	$0^\circ$	$5,9^\circ$	$10,17^\circ$	$17,4^\circ$	$23\frac{1}{2}^\circ$
	$0^\circ$	$11,25^\circ$	$22,50^\circ$	$33,75^\circ$	$45^\circ$
mit	918	920	923	968	962 cal.

Auch für die Meridiane zwischen  $\lambda = 270$  und  $315^\circ$  bekommt man zwischen den bekannten Endwerten 842—741 cal bestimmte Bestrahlungsmengen, welche aber keinen extremen Wert bedeuten.

Mit Hilfe des Kreuzungsnetzes können dann die übrigen Segmente unseres Blockes erzeugt werden.

9.

Die Besprechung der Abb. 6 beginnen wir mit dem leichtverständlichen Bestrahlungsgang des II-ten wahren Winters zwischen seinem Kulminationsmeridian  $\lambda = 270^\circ$  und der Trennlinie  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 315^\circ - \varphi = 23 \frac{1}{2}^\circ$ ,  $\lambda = 360^\circ$ . Im Raum dieses Trapezes, wo sich sowohl der Einfallswinkel

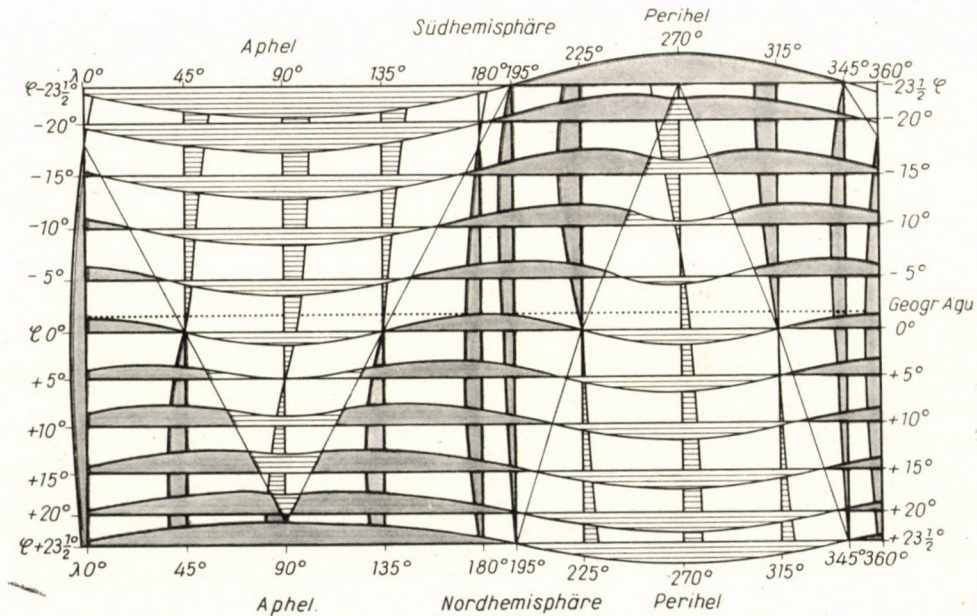


Abb. 6. Segmente des Bestrahlungsblockes Modell II  $\epsilon = 23 \frac{1}{2}$ ,  $e = 0,07$ ,  $\pi = 90^\circ$

winkel der Sonnenstrahlen wie auch die Dauer des Tageslichtes sich am ungünstigsten gestalten, ist die Breite der Segmente mächtig im Gegenteil zu den stumpfen Winkeln des Trapezes bei  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 315^\circ$ , wo sowohl in der Richtung am Äquator bis  $\lambda = 270^\circ$ , als auch in der schrägen Richtung bis zu  $\varphi = 23 \frac{1}{2}^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$  die Abnahme der Bestrahlungsmengen we-

niger als 38 cal beträgt. Die einzelnen Segmente unseres Bestrahlungsblockes in der Richtung der Breitenkreise und Meridiane sind einander so ähnlich, daß eine weitere Untersuchung überflüssig wäre.

Ganz anders ist die Sachlage bei der Bestrahlung in dem rechtwinkligen Dreieck des I. falschen Winters mit den Katheten am Äquator und am Meridian  $\lambda = 90^\circ$ , also an der sommerlichen Sonnenwende. Am Äquator ist das Gefälle nur 38 cal, an den mittleren Breiten nimmt das Gefälle rasch ab, die Bestrahlung wächst also dem Wendekreis entgegen und am Wendekreis hört der I. Winter auf. Die Segmente durch die Meridiane steigen also steil an und werden schon binnen  $5^\circ$  positiv. Die Krümmung dieser Segmente ist konvex und nur die Segmente der Breitenkreise behalten ihre konkave Form. Infolge der doppelten Kulminationen der Segmente durch die Breitenkreise können wir diesen Keil des I. Winters nicht unberücksichtigt lassen. An der Breite  $\varphi = 15^\circ$  liegen durch 12 Tage die Bestahlungsmengen zwischen 979—900 cal, welche Höhe das sommerliche Vierteljahr durch 50 Tage — also durch die größere Hälfte seiner Dauer — nicht erreicht hat. Das ist ein eklatantes Beispiel dafür, daß man die Definition der kalorischen Halbjahre an der Äquatorialzone nicht aufrechterhalten kann.

Der Bestrahlungsgang des I. sommerlichen Vierteljahres in der Äquatorialzone ist in Abbildung 6 ganz asymmetrisch, weil der Sommer des Äquators am Meridian  $\lambda = 0^\circ$  kulminiert, wo der Sommer des Wendekreises erst beginnt und erst bei  $\lambda = 90^\circ$ , also bei der Sommersonnenwende kulminiert, wo am Äquator der I. Winter seine niedrigste Bestrahlung erreicht. Die einzelnen Teile des sommerlichen Vierteljahres können der Abb. 6 entsprechend in drei Teilen untersucht werden: die zwei rechtwinkligen Dreiecke am Anfang und Ende des Sommers und das Viereck in der Mitte.

Im ersten Dreieck mit den Katheten am Äquator von  $\lambda = 315^\circ$ — $360^\circ$  und am Meridian des Frühlingspunktes ist die Bestrahlung sehr einfach. An den Segmenten der Breitenkreise wächst die Bestrahlung bescheiden von der Trennlinie, der Hypothense des Dreiecks an. An den Meridianen wächst im selben Maß die Bestrahlung von der Trennlinie dem Äquator entgegen.

Die Sachlage in dem Viereck zwischen den Meridianen  $\lambda = 0^\circ$ — $45^\circ$  ist kompliziert. Am Äquator nimmt die Bestrahlung um 38 cal ab, am Wendekreis um 120 cal zu, folglich wächst die Bestrahlung entlang des Diagonals von  $\lambda = 0^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$  bis  $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $\lambda = 45^\circ$  um 120 cal. Die Bestrahlung der Breiten von  $\lambda = 0^\circ$  bis  $\lambda = 11\frac{1}{4}^\circ$  nimmt zu bis zu dem Kulminationspunkt und von dort an vermindert sich die Bestrahlung. In der unteren Hälfte des Vierecks, zwischen den Breiten  $\varphi = 11\frac{3}{4}^\circ$  gibt es nur einen Anstieg der Bestrahlung, denn die Kulminationspunkte dieser Breiten liegen schon im zweiten Dreieck. Infolgedessen ist auch das Segment durch die Meridiane des Vierecks vom Äquator angefangen in Anstieg und von der Kulmination an werden die Bestahlungsmengen wieder kleiner. Da wir aus 7. die Anfangs-, Kulminations-



und Endwerte und auch die Lage der Kulminationspunkte kennen, wird auch der ganze Bestrahlungsgang des Vierecks verständlich.

Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten am Meridian von  $\lambda = 45^\circ$  und am Stück des Wendekreises von  $\varphi = 45^\circ - 90^\circ$  fällt die Bestrahlung der Breitenkreise von  $\lambda = 0^\circ - 11\frac{3}{4}^\circ$  zu den bekannten Werten an der Trennlinie. Die Bestrahlung der übrigen Breiten von  $\lambda = 11\frac{3}{4}^\circ - 23\frac{1}{2}^\circ$  wächst noch anfangs, weil ihre Kulminationspunkte sich immer näher zu der Trennlinie verschieben; von der Kulmination angefangen fällt die Bestrahlung aber nur mit sehr bescheidenen Werten. Am Wendekreis selbst gibt es nur einen Anstieg der Bestrahlung, welche mit 1012 cal endet.

Bei der Trennlinie kommt man im Verlegenheit, ob man sie an der Grundfläche oder an der Oberfläche des Blockes einzeichnen soll; da uns aber hauptsächlich die Übergangswerte an der Oberfläche interessieren, haben wir sie an der Oberfläche eingezeichnet, das dreieckige Übergangsegment des Bestrahlungsblockes steht ja eigentlich senkrecht zur Zeichenfläche.

Wir wollen noch bemerken, daß wir die angegebenen Bestrahlungswerte nicht bis zu der letzten cal garantieren können, denn unser Zweck war ja nur, uns mit diesem Modell I ( $e = 0$ ) einen Überblick zu schaffen. Wir können aus dem Typus 6 ersehen, daß bei einem Monopol der Bestrahlungskomponenten  $\Delta W_s \Delta \varepsilon$  oder  $\Delta W_w \Delta \varepsilon$  kein Gegensatz oder Sprung am Äquator gegen die Südhemisphäre denkbar ist. Wenn man das Dreieck unseres I. Winters von der Abbildung 6 abschneidet und an dem Äquator von  $360^\circ$  bis  $270^\circ$  anlegt, so daß der Kulminationsmeridian  $\lambda = 90^\circ$  sich dem Kulminationsmeridian des II. Winters anpaßt, decken sich die Bestrahlungskurven vollkommen. Ebenso kann auch der zweite Sommer am Äquator von  $\lambda = 315^\circ$  bis  $\lambda = 45^\circ$  genau angepaßt werden. Dagegen ist die Ecke der Trennlinie bei  $\lambda = 0^\circ$  am Wendekreis auffallend. Das beweist, daß in der gemäßigten Zone die Trennlinie von  $\lambda = 0^\circ$ , wie auch jene von  $\lambda = 180^\circ$  ihre Lage nicht mehr ändern. Die Schrägheit der Trennlinien, wie auch die Wanderung der Kulminationspunkte der sommerlichen Vierteljahre in der Zeitrichtung und in der Richtung der geographischen Breiten, also schräg durch die Meridiane, sind die charakteristischen Eigenschaften der Äquatorialzone, sie hören an der gemäßigten Zone auf.

10.

Nun können wir die Beschränkung des Modells I,  $e = 0$ , fallen lassen und ist es zweckmäßig für das Modell II einen recht hohen Wert für  $e$  anzunehmen, annähernd das Extremum 0,07 und  $\lambda$  mit  $90$  annehmen, so daß  $\sin \pi = 1$  wird. Die Schiefe der Ekliptik soll auch für Modell II  $23\frac{1}{2}^\circ$  bleiben. Die Richtung des Perihels wird dann  $\lambda = 270$ , so daß am Wendekreis des Krebses die Mitte des Sommers in das Aphel, die Mitte des Winters in das Perihel

fällt. Auf dem nördlichen Teil der Äquatorialzone wird also der Sommer länger, der Winter kürzer als 6 Monate, und im südlichen Teil der Äquatorialzone wird umgekehrt der Sommer länger und der Winter kürzer als auf Modell I sein. Ähnlich wird das Bestrahlungsniveau des Äquators etwas niedriger, die Amplituden bleiben aber dieselben. Die Kulminationswerte des Wendekreises des Bockes werden niedriger, weil der Sommer in das Aphel und der Winter in das Perihel fällt. Wir müssen aber auch den südlichen Teil der Äquatorialzone in Betracht ziehen, weil dort der Sommer nicht nur länger, sondern seine Kulmination durch das Perihel erhöht wird, und ebenso der Winter trotz seiner kürzeren Dauer wegen des Aphels eine höhere negative Amplitude erreichen wird.

Die Abnahme der Bestrahlung am Äquator durch die Exzentrizität ist als Naturerscheinung schon seit mehr als hundert Jahren bekannt und wurde durch MILANKOVIĆ auf mathematischer Grundlage erläutert [4, Seite 365]. Wir wollen diese ausführliche Berechnung unseren Lesern ersparen und beziehen uns auf das Werk des Professors der Universität Freiburg i. B. J. MÜLLER »Lehrbuch der kosmischen Physik« [5] und auf den dazugehörigen Atlas, in welchem in der »Regen- und Windkarte der Erde« die Region der Palmen etwas nördlich des geographischen Äquators angegeben ist, wo sich die Passatwinde der Äquatorialzone von der Südseite in allen drei Ozeanen ausschließen; von der Nordseite an bildet der Indische Ozean eine Ausnahme, weil dieser nur eine Bucht ist und anstatt der Passatwinde die Monsune auftreten. Mit Berücksichtigung des kalorischen Äquators kann man einen Überblick der Segmente des Bestrahlungsblockes von Modell II mit Hilfe der Abb. 7 entwerfen.

Diese Abb. 7 zeigt die Jahresbahn der Erde als eine Ellipse, betrachtet aus dem Nordpol der Ekliptik. Die mittlere Entfernung  $AO - OP$  ist unveränderlich, und nur die kleine Achse der Ellipse,  $BO$  wurde durch die Exzentrizität kürzer. Durch die Annahme  $\pi = 90^\circ$  entfällt das Perihel in den Zeitpunkt  $\lambda = 270^\circ$  des Jahres, und das Aphel auf  $\lambda = 90^\circ$ . Die Sommer- und Wintersonnenwende stehen also einander auf Modell II diametral entgegen. Die Äquinoktien rücken dagegen etwas näher zu dem Perihel, wodurch eine Ungleichheit des Sommers und Winters des Wendekreises zustandekommt.

An der bestrahlten Erdhälfte haben wir den Nordpol, den Polarkreis, den Wendekreis des Krebses und die sichtbare Hälfte des Äquators samt einigen Meridianen eingezeichnet.

Man ersieht, daß bei der winterlichen Sonnenwende die Polarkappe den ganzen Tag durch unbestrahlt bleibt. Der Wendekreis des Bockes wird nur in seiner kürzeren Hälfte, der Äquator nur für 12 Stunden bestrahlt. Am Frühlingspunkt bei  $\lambda = 345^\circ$  sind alle Parallelkreise nur für 12 Stunden bestrahlt. Am Wendekreis gibt es nur einen Sommer und einen Winter. Dagegen ist der Äquator an den Äquinoktien durch die im Zenith stehende Mittagssonne besser

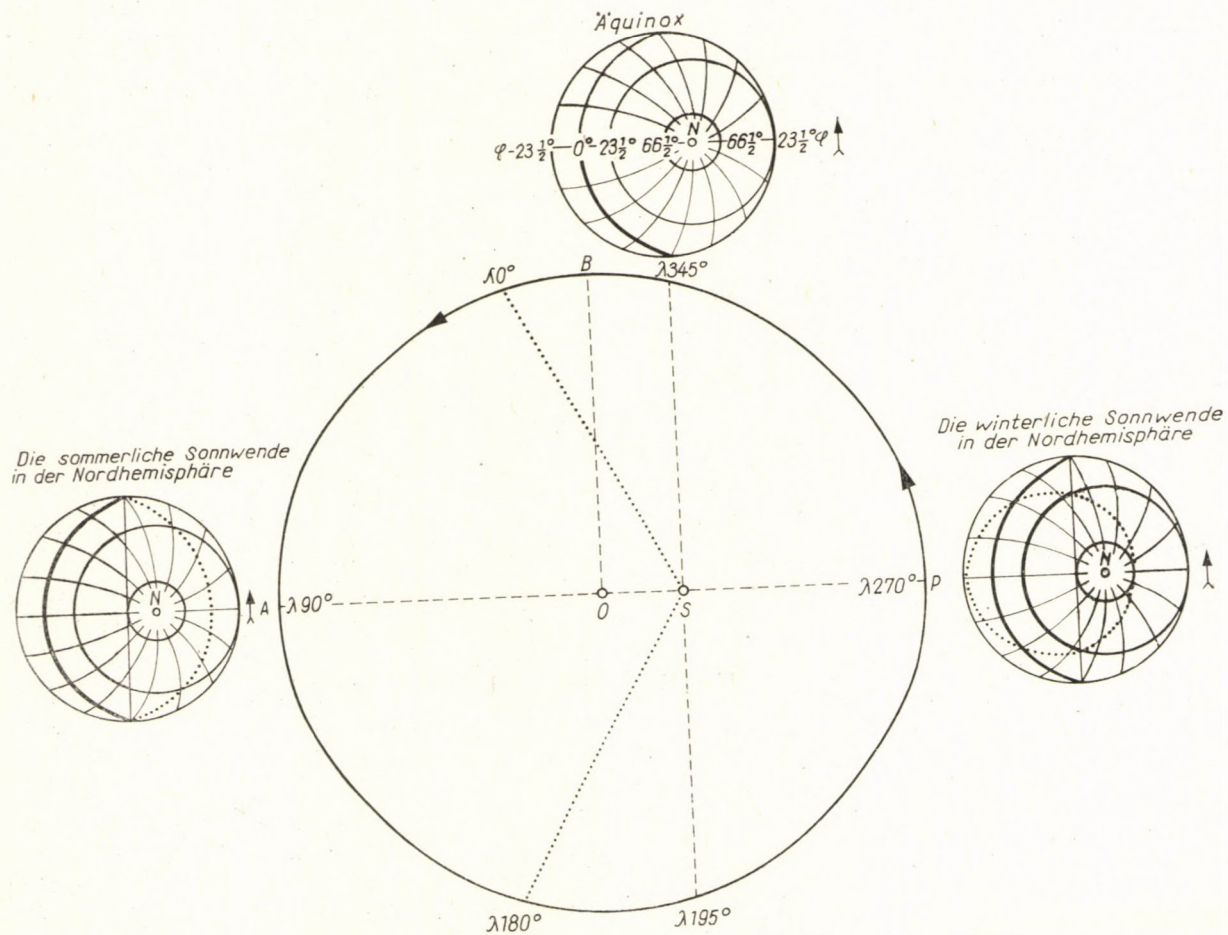


Abb. 7. Die Bahn der Erde um die Sonne von dem Pol der Ekliptik aus betrachtet, für Modell II. Die sommerliche Sonnenwende in der Nordhemisphäre. Die winterliche Sonnenwende in der Nordhemisphäre

bestrahlt als bei den Sonnenwenden, und darum gibt es am Äquator jährlich zwei Sommer und zwei Winter.

Man kann auch aus Abb. 7 den Einfallswinkel der Sonnenstrahlen für den Äquator ablesen. Bei den Äquinoktien ist die Zenithdistanz der Mittagssonne 0, der Einfallswinkel also ebenfalls 0, und der  $\cos$  ist gleich 1. Bei den

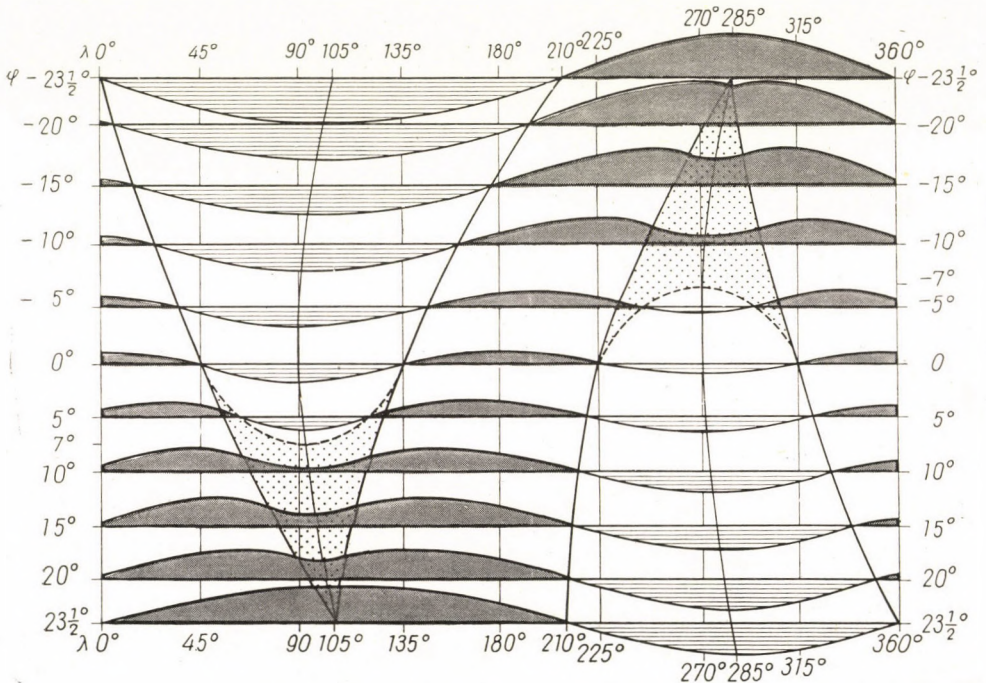


Abb. 8. Segmente des Bestrahlungsblockes für Modell II. ( $\epsilon = 23\frac{1}{2}^\circ$ ,  $e = 0,07$ ,  $\pi = 90^\circ$ )  
die Breitenkreise entlang

Die grauen Zonen sind sommerlich, die roten winterlich, die violetten stellen den »Pseudowinter« dar; auch der am wenigsten bestrahlte Tag des letzteren liegt über dem Pegel der betreffenden Breite. Werden die Segmente vertikal gestellt, so liegt der Sommer über, der Winter unter dem Niveau, in dieser Hinsicht ist also der Pseudowinter schon ein Sommer!

Sonnenwenden ist die Zenithdistanz der Mittagssonne  $\pm 23\frac{1}{2}^\circ$ , also das erreichbare Minimum.

Wir brauchen zu einem Überblick des Bestrahlungsganges von Modell II keine weiteren Berechnungen und können die Segmente des äquatorialen Bestrahlungsblockes ohne weiteres entwerfen, wie das an der Abb. 8 ersichtlich ist. Die Segmente der Meridiane  $\lambda = 195^\circ$  und  $345^\circ$  zeigen die kurze Dauer des Winters der Nordhemisphäre und die kurze Dauer des Sommers der Südhemisphäre. Von einer konstanten Dauer der sommerlichen Vierteljahre,

wie man das am Modell I sehen konnte, kann hier nicht mehr die Rede sein. Das Vierteljahr des Äquatorsommers wächst gegen Norden, und nimmt gegen Süden ab.

Das wichtigste Ergebnis, das man der Abb. 8 entnehmen kann, ist die Tatsache, daß am kalorischen Äquator trotz der Exzentrizität die Alleinherrschaft des ersten Bestrahlungsgliedes  $\Delta\varepsilon$  aufrecht geblieben ist.

## 11.

Für Modell III wollen wir die Schiefe der Ekliptik  $\Delta\varepsilon$  variieren und die Bestrahlungsmengen unserer Zone bei verschiedenen Werten von  $\varepsilon$  untersuchen. Nach der allgemein angenommenen Lehre der Himmelsmechanik hat  $\varepsilon$  einen Grundwert von  $23^{\circ}17'$ , bei welchem die Ebene der Ekliptik mit der Grundebene des Sonnensystems zusammenfällt. Die größten Exzesse von  $\Delta\varepsilon$  können  $\pm 1^{\circ}19'$  nicht überschreiten, das Maximum beträgt also  $24^{\circ}36'$  und das Minimum  $21^{\circ}58'$ . Wir haben an der Abb. 6 gesehen, daß bei  $23^{\circ}30'$  die Schwankung der Bestrahlungsexzesse am Äquator  $\pm 38$  cal, am Wendekreis  $\pm 170$  cal ausmachte. Wird  $\varepsilon$  größer so nimmt die Fläche der Äquatorialzone entsprechend zu. Ein Grad zu 111 km gerechnet war für Modell I die Breite im ganzen 52,170 km, was bis 58,835 km wachsen, oder bis 48,840 km abnehmen kann. Die jährlichen Exzesse der Bestrahlung betragen in Modell I  $\pm 38$  cal am Äquator und  $\pm 170$  cal am Wendekreis. Bei  $\varepsilon = 24^{\circ}36'$  steigt diese Schwankung zu  $\pm 39\frac{1}{2}$  cal, bzw.  $\pm 177$  cal; bei  $\varepsilon = 21^{\circ}58'$  wird die Schwankung  $\pm 36$  cal, bzw.  $\pm 160$  cal. Die Unterschiede der größten Extremwerte sind also ziemlich bescheiden, wenn man bedenkt, daß die niedrigsten Werte auf eine schmalere Zone und die Höchstwerte auf eine breitere Äquatorialzone verteilt waren. Dabei ist der geographische Faktor  $\Delta W_s$  bzw.  $\Delta W_w$  für  $\Delta\varepsilon$  in der Äquatorialzone sehr niedrig. Die Periode der Änderungen von  $\varepsilon$  ist ziemlich konstant mit 40 000 Jahren, der Unterschied in der Bestrahlung geht also so langsam vor, daß Flora und Fauna unserer Zone das kaum bemerkten, die Akklimatisation folgt von sich selbst.

Die Änderung von  $\varepsilon$  ist nur an den gemäßigten und polaren Breiten ein wichtiges Ereignis, wo die Faktoren  $\Delta W_s$  und  $\Delta W_w$  hohe Werte erreichen.

Dabei muß man wissen, daß die ganze Schwankung von  $\pm 1^{\circ}19'$  bei den Perioden von 40 000 Jahren nicht immer auftritt, im Gegenteil gibt es lange Zeiträume in der Erdgeschichte, wo diese Möglichkeit nur bis zur Hälfte oder  $\frac{2}{3}$  ausgenützt wurde, und nur in den seltenen Zeitperioden, wo Eiszeiten nacheinander entstanden sind, wurde die Schwankung von  $\pm 1^{\circ}19'$  voll ausgenützt. Über die Ursache dieser Naturerscheinung siehe [10].

Damit können wir unsere Spekulation über das Modell III schließen.

## 12.

Es bleibt noch übrig, ein Modell IV für variable Mengen der Länge des Perihels zu untersuchen, also die Beschränkung des Modells II,  $\pi = 90^\circ$  fallen zu lassen, denn das Perihel kann eine beliebige Länge binnen eines Jahres erreichen. An und für sich ändert sich der Bestrahlungsgang der Äquatorialzone mit der Änderung von  $\pi$  nicht, denn mit derselben Exzentrizität, wie aus Abb. 7 ersichtlich ist, bleibt ja alles unverändert, nur die Zeitpunkte  $\lambda = 270^\circ$  und  $90^\circ$  ändern sich, wenn man für das Perihel eine andere Länge als  $270^\circ$  wählt. Der Bestrahlungsgang, wie man ihn in Abb. 8 sieht, bleibt aber unverändert und nur die Benennung der Meridiane verändert sich. Der Sommer des Wendekreises wird nicht mit  $\lambda = 345^\circ$  beginnen und mit  $\lambda = 195^\circ$  enden, seine Dauer bleibt aber unverändert. Dasselbe versteht sich auch für den Winter des Wendekreises, und auch für die mittleren Breiten von  $\varphi 0^\circ$  bis  $\varphi 23 \frac{1}{2}^\circ$ .

Wir müssen aber jetzt bemerken, daß alle unsere Modelle — mit Ausnahme von Modell I, welches wir eben darum ausführlich untersucht haben — keine reelle Bedeutung haben. Man kann keine Jahreszahl angeben, wo der Bestrahlungsgang der Äquatorialzone so verfließen wäre, wie wir es an den Modellen II—IV gesehen haben. Eine Änderung der Exzentrizität ist nämlich in Wirklichkeit immer mit einer Änderung des Perihels verbunden, und ebenso sind die Änderung der Schiefe der Ekliptik und die Änderung der Lage des aufsteigenden Knotenpunktes voneinander abhängig. Alle diese Modelle II—IV dienen also nur zum Beweis dessen, daß am Äquator das Monopol der ersten Bestrahlungskomponente  $\Delta W_s \Delta \varepsilon - \Delta W_w \Delta \varepsilon$ , welche am Äquator einander gleich sind — immer aufrecht erhalten bleibt, also am Äquator sich immer zwei Sommervierteljahre mit zwei Wintern abwechselten, und zwar mit nur unbedeutenden Änderungen der Exzesse, von 36 bis  $39 \frac{1}{2}$  cal [11], denn der geographische Faktor  $W_s - W_w$  ist am Äquator sehr bescheiden. Modell I bildet eine Ausnahme, weil der berühmte amerikanische Astronom NEWCOMB für das künftige Jahr 25 000 berechnet hat, daß dann die Exzentrizität der Erdbahn null wird [6]; dieses Modell I ist also eine Realität.

## 13.

Aus allen Einzelheiten, die sich am Bestrahlungsgang der Äquatorialzone erkennen lassen, ist eigentlich nur der Übergang vom Äquator zu dem Wendekreis die schwierige Frage. Diese Schwierigkeit kann man am leichtesten überbrücken, wenn man den Begriff des Aktivrestes der zweiten Bestrahlungsmenge einführt. Dieser Aktivrest ist am Äquator 0, und am Wendekreis 1, was die volle Wirksamkeit dieser Bestrahlungskomponenten bedeutet. In den

mittleren Breiten fällt der Aktivrest nach dem Gesetz des Inverskosinus ( $1 - \cos$ ) ab. Am Äquator 0 ist der  $\cos = 1$  und  $1 - 1 = 0$ ; an dem Wendekreis ist  $\cos = 0$ , und  $1 - 0 = 1$ . Darum waren wir gezwungen, schon in 9. die mittlere Breite  $11\frac{3}{4}^\circ$  in Anspruch zu nehmen, und daher stammt die sehr verbreitete falsche Auffassung, daß die Duplizität der Jahreszeiten der Äquatorialzone schon bei dem Breitengrad 15 aufhört. Es ist ja richtig, daß der Aktivrest seine größte Wirkung bis zu diesem Breitengrad ausgespielt hat, aber immer kleiner werdend beendet er seine Rolle erst am Wendekreis.

In Zusammenhang mit dem Aktivrest der zweiten Bestrahlungskomponente wollen wir noch bemerken, daß eine Abbildung der zeitlichen Folge des Bestrahlungsganges der ganzen Erde, wie sie z. B. in der Abb. 55 [4] des Kanons zu finden ist, betreffs der Breiten  $\pm 15^\circ$  zwar sehr lehrreich, weil der Gegensatz zwischen der Bestrahlung der Nord- und Südbemisphere scharf in die Augen fällt, aber betreffs der Amplituden viel zu übertrieben ist. Man wird dazu angespornt, daß man die Eiszeiten, welche an der Breite  $45^\circ$  dort eingezeichnet sind, auch in die Bildkurven von  $\pm 15^\circ$  einzeichne, was irreführend wäre. Ein weniger vertrauter Leser kann auch auf den Gedanken kommen: was geschieht am Äquator, wo die entgegengesetzten mächtigen Amplituden zusammenprallen? Die Amplituden der Bildkurven der Breiten  $\pm 15^\circ$  sind in der Wirklichkeit viel kleiner, und am Äquator besteht das Monopol der ersten Bestrahlungskomponente  $\Delta W_s \Delta \varepsilon$ , und die Amplituden sind, wie wir gesehen haben, sehr bescheiden,  $36 - 39\frac{1}{2}$  cal.

Jetzt wollen wir auch darauf ein Licht werfen, warum für einen Quartärforscher die Vertrautheit mit der Bestrahlung der Äquatorialzone wichtig ist. Betreffs der Vollgliederung des Quartärs bemerkten wir schon nach den embryonalen Mitteilungen von KÖPPEN [8], daß man mit derselben mathematischen Apparatur, mit welcher MILANKOVIĆ und seine Anhänger das Quartär in 9 Eiszeiten  $G_1, G_2, M_1, M_2, R_1, R_2, W_1, W_2, W_3$  gliederten und mit Rücksicht auf die Unterbrechungen eine Vollgliederung des Quartärs auf 18 Teile entwarfen, ohne weiteres auch eine Vollgliederung von 85 Teilen möglich ist. KÖPPEN zeichnet — in unrichtiger Höhe — die Bildkurven des ersten und zweiten Bestrahlungsgliedes auf. Wenn man diese zwei Kurven in die richtige Höhe bringt, schneiden sie sich 85-mal, denn das erste Glied hat 30 Schnittpunkte mit der Zeitachse, das zweite Glied 55, zusammen 85. Eine solche Vollgliederung auf 85 Teile ergibt viererlei mögliche Klimatypen, deren charakteristische Eigenschaften in Bezug auf eine durchschnittliche ideale Bestrahlung, wo die zwei Bildkurven zur gleichen Zeit die Zeitachse schneiden möchten, folgenderweise bestimmt werden können: bei einer glazialen Schwankung (beide Komponenten negativ) ist der Sommer kühler als der Durchschnittssommer; in der Antiglaziale (beide Komponenten positiv) ist der Sommer wärmer als der Durchschnittssommer, bei der subarktischen Schwankung (die erste Komponente negativ, die zweite positiv) ist der Winter kühler als der

Durchschnittswinter; bei der subtropischen Schwankung (die erste Komponente positiv, die zweite negativ) ist der Winter wärmer als der Durchschnittswinter. Zu den Winterhalbjahren kommt man dadurch, daß wenn ein Wellental  $\Delta\varepsilon$  mit einem Wellental von  $\Delta(e \sin \pi)$  interferiert, die sommerliche Bestrahlung ausgeglichen wird und wir müssen das Vorzeichen  $m \Delta(e \sin \pi)$  vertauschen, wodurch wir in das Winterhalbjahr gelangen. Dasselbe gilt auch für die Interferenz eines Wellenberges von  $\Delta\varepsilon$ , mit einem Wellental von  $\Delta(e \sin \pi)$ . Der Durchschnittssommer und -winter waren in der näheren Vergangenheit zweimal, bei — 39 000 und 100 000 Jahren bis auf ein Prozent angenähert.

Da aber nach dem Bestrahlungsgesetz von MILANKOVIĆ

$$\Delta W_s \Delta\varepsilon \pm m \Delta(e \sin \pi)$$

das erste Glied auf beiden Hemisphären in der gleichen Richtung auf die Bestrahlung wirkt, gibt es am Äquator keinen Vorzeichenwechsel. Bei dem zweiten Glied dagegen muß das Vorzeichen gewechselt werden, wenn wir von der Nordhemisphäre auf die Südhemisphäre übergehen. Infolgedessen besteht auch zwischen den Klimatypen eine Reziprozität am Äquator im folgenden Sinne:

was auf der Nordhemisphäre glazial, antiglazial, subarktisch subtropisch ist,

ist auf der Südhemisphäre subarktisch, subtropisch, glazial, antiglazial.

Dabei befolgt der geographische Faktor  $m$  des zweiten Gliedes laut der unwiderlegbaren Lehre von MILANKOVIĆ das cos-Gesetz, ist also am Äquator am größten. Es entsteht also der absurde Zustand, daß ein Typ nördlich des Äquators einen entgegengesetzten Typ südlich des Äquators mit hoher Amplitude trifft. Ich dachte also immer daran, das MILANKOVIĆ bei dem Gesetz des geographischen Faktors  $m$  irgendetwas außer acht gelassen hat, und dachte darüber mehr als 20 Jahre nach, bis ich die richtige Lösung i. J. 1953 gefunden habe, welche auch dann von MILANKOVIĆ als richtig anerkannt wurde. Es ist nämlich ganz gleichgültig, wie hoch der Wert  $m$  und dadurch auch der Wert des zweiten Bestrahlungsgliedes am Äquator ist, denn am Äquator existieren nur sommerliche und winterliche Vierteljahre, welche genau mit  $180^\circ$  einander entgegenstehen. Wenn das erste Sommervierteljahr in das Perihel entfällt, so liegt das andere Sommervierteljahr im Aphel, und wenn man diese zu einem Halbjahr vereinigt — wofür das Gesetz von MILANKOVIĆ gültig ist — kompensiert sich die ganze Wirkung des zweiten Bestrahlungsgliedes auf Null. Und genau so stehen wir auch bei dem winterlichen Vierteljahr des Äquators. Diese Kompensierung trat auch in der gemäßigten Zone auf; wenn nämlich  $\pi = 90^\circ$  oder  $270^\circ$ , also  $\cos \pi = 0$  war. In diesen Zeiten hatte auf der ganzen Erde das erste Bestrahlungsglied das Monopol. Am Äquator besitzt aber das erste Glied ein permanentes Monopol, und am Äquator können sich die ent-



gegengesetzten Typen ruhig treffen, das erste Glied wirkt an beiden Hemisphären in gleicher Richtung.

Ganz anders ist die Lage an den Wendekreisen. Dort kommt das zweite Bestrahlungsglied mit entgegengesetztem Vorzeichen voll zur Auswirkung. Da aber an einem Meridian  $1^\circ = 111$  km bedeutet, liegen die zwei Wendekreise voneinander in einer Entfernung von 5227 km und bei einer solchen Distanz bedeutet die Reziprozität der Klimatypen keine Schwierigkeit.

Die sekundäre Inlandeiswirkung der Eiskalotte war in ihrer Amplitude 10–20-mal stärker als die Wirkung der Bestrahlungskurve. Ohne einer Klimatypenfolge, also hauptsächlich ohne der Kenntnis der Antiglaziale kann man auch keine richtige Vereisungskurve bestimmen. Es ist ebenso falsch, mit vier Eiszeiten zu rechnen, wie das PENCK und BRÜCKNER taten, als sich mit 9 Eiszeiten abplagen, wie das viele Quartärforscher noch heute tun. Denn die Vereisungen  $M_1$  und  $M_2$ , jene von  $R_1$  und  $R_2$ , wie auch  $W_2$  und  $W_3$  waren ja ungetrennt, zwischen diesen gab es keine Antiglaziale welche die Eiskalotte vernichtet hätte, und das zweite Glied  $M_2, R_2, W_3$  verrichtete nur eine Auffüllung der veralterten Eiskalotte der vorhergegangenen Glaziale. Wie kolossal die Amplituden der Inlandeiswirkung im Vergleich zu den Amplituden der Bestrahlungskurve waren, hat WOLDSTEDT in seiner Abhandlung über die Klimakurve des Tertiärs und Quartärs [8] an einer Abbildung gezeigt, wobei er bemerkt, daß das Klima der mittleren geographischen Breiten die Folge der polaren Eiskalotten war. Die Klimaschwankungen des Tertiärs betragen an seiner Kurve kaum ein Millimeter, und jene des Quartärs 1 bis 2 Zentimeter. Der sukzessive Anstieg im Tertiär ist eine andere Frage.

Die Unterscheidung der 85 Klimatypen der Quartärs ist auch darum unentbehrlich, weil ohne ihr z. B. das ganze große Interglazial Mindel-Riss im allgemeinen als »warm« geschildert werden sollte. Davon kann jedoch nicht die Rede sein; das Klima war damals abwechselnd angenehm bis beinahe unerträglich für die Flora und Fauna. Angenehm während den nicht gelungenen Glazialen und subtropischen Schwankungen, und unangenehm während den antiglazialen und subarktischen Klimaschwankungen. Noch wichtiger ist die Klimatypenfolge des Interglazials Riss-Würm, wovon wir viel mehr durch Fundmaterial neben dem Feuerherd des Menschen wissen, und dieses Fundmaterial kann nur durch die Klimatypenfolge datiert und verständlich gemacht werden.

#### 14.

Die Untersuchungen über das Klima der Äquatorialzone geben aber noch eine weitere Perspektive, welche man heute nur noch in ihren blassen Konturen erkennen kann. Die Geologen sind davon ziemlich einstimmig überzeugt,

daß seit dem Eiszeitkomplex der karbon-permischen Periode durch 400 Millionen Jahren keine Eiszeiten vorgekommen sind. Seit 600 000 Jahren toben aber wieder Eiszeiten, die eine nach der anderen. Wenn man in der Perturbationsrechnung bis zu den tiefsten Gründen eindringt, wir meinen darunter die Kenntnis der 21 Grundkonstanten für die Hilfsvariablen  $p, q$ , und die anderen 21 Grundkonstanten für die Hilfsvariablen  $h, l$  von LAGRANGE, woraus die Bildkurven von  $\varepsilon$  und  $e \sin \pi$  einfach folgen, so wird man früher oder später davon überzeugt, daß das momentane Auftreten von Eiszeiten nach einer Pause von 400 Millionen Jahren als die Folge einer Abnormität im Zustand des ganzen Sonnensystems zu betrachten ist. Augenfällig zeigt sich diese Abnormität im bevorzugten Quadranten, daß nämlich die aufsteigenden Knotenpunkte sämtlicher perturbierenden Planeten in einem einzigen Kreisquadranten zwischen den Längen  $45^\circ$  und  $135^\circ$  zusammengepreßt sind. Das bedeutet die heutige Endphase einer geschichtlichen Zeitfolge, denn die Lage der aufsteigenden Knotenpunkte ist ja im säkularen Sinne die Funktion der Zeit. Diese Abnormität wird im geologischen Sinne nicht lange dauern, — nach unserer Berechnung höchstens noch 20—25 Millionen Jahre, — und dann wird wieder der normale Zustand des Sonnensystems in einer Größenordnung von 400 Millionen Jahren folgen. Die Mitte des vorangegangenen normalen Zustandes fiel ungefähr auf das Jurazeitalter, wo alle aufsteigenden Knotenpunkte im ganzen Kreis verstreut lagen und besonders die wichtigsten Knoten von Jupiter und Saturn in orthogonale Richtungen fielen. Die Perturbation wurde dann für Jahrtausende auf minimale Werte zurückgedrängt. Der Bestrahlungsgang der Erde wurde sozusagen stabilisiert. Riesige Gewächse und riesige Tiere entwickelten sich, und verschwanden langsam in der Kreidezeit. Im Tertiär war schon der Bestrahlungsgang der Erde ähnlich dem heutigen, nur Eiszeiten fehlten, oder wurden durch unschuldige alpine Vereisungen repräsentiert, welche in Mitteleuropa keine Klimarevolution im Sinne der Inlandeiswirkung von PILGRIM [9] verursachten. Die aufsteigenden Knotenpunkte der störenden Planeten waren noch nicht in einem Kreisquadranten zusammengepreßt, die Knoten von Jupiter und Saturn haben sich noch nicht bis zu dem nötigen Schwellenwert angenähert.

Die größte Überraschung für uns war, als die Bestrahlungstheorie von MILANKOVIĆ erschien, daß Eiszeiten immer nur dann gelungen sind, wenn auch unser aufsteigender Knotenpunkt, der Frühlingspunkt in seiner säkularen Wanderung ebenfalls in den bevorzugten Quadranten geriet. MILANKOVIĆ hat das vielleicht gar nicht bemerkt, denn er macht nirgends eine Erwähnung davon.

## SCHRIFTTUM

1. VÁLLAS, A.: Die Armillisphären. Wien, 1840.
2. WIENER, C.: Die Bestrahlung des Jahres 1873/74. Zeitschr. f. Math. u. Physik. Bd. 22. 1877.
3. MILANKOVIĆ, M.: Mathematische Klimalehre und astronomische Theorie der Klimaschwankungen. Berlin, 1930.
4. MILANKOVIĆ, M.: Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem. Ed. spec. Acad. R. Serbe, Belgrad, 1941.
5. MÜLLER, J.: Kosmische Physik. Braunschweig, 1856.
6. NEWCOMB, S.: Populare Astronomie, Leipzig, 1892.
7. KÖPPEN, W.—WEGENER, A.: Die Klimate der geologischen Vorzeit. Berlin, 1924.
8. WOLDSTEDT, P.: Die Klimakurve des Tertiärs und Quartärs. Eiszeitalter u. Gegenwart, Bd. 4/5. Öhringen/Württ. 1954.
9. PILGRIM, L.: Versuch einer rechnerischen Behandlung des Eiszeitalters. Jahresber. d. Ver. f. Vaterländ. Naturkunde in Württemberg, Bd. 60. 1904.
10. BACSÁK, GY.: Die Ursache des bevorzugten Quadranten. Budapest, 1958.

## ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser weist betreffs der Einstrahlung in der Äquatorialzone nach, daß es dort keine Halbjahre gibt, sondern sommerliche Jahresviertel und ungleiche Winterperioden, weshalb die für Halbjahre ermittelte Einstrahlungskurve für diese Zone nicht gilt und das zweite Glied des Einstrahlungsgesetzes eine gewisse Abänderung erfährt. Den Wendekreisen zu nimmt diese Abänderung allmählich ab, an den Wendekreisen treten schon die wohlbekannten Halbjahre auf, und auch das gewohnte zweigliedrige Strahlungsgesetz hat wieder seine Gültigkeit.

## A REVIEW OF THE CLIMATE OF THE EQUATORIAL ZONE

GY. BACSÁK

## SUMMARY

In the present paper the author expounds that there are no climatical half-years in the equatorial zone. Summer quarters and unequal winter periods succeed each other instead. Consequently, these regions are not subject to the rule of the insolation equation established for half-yearly periods. The second term of the insolation equation undergoes a certain modification which decreases towards the tropics and vanishes on the same. Consequently, on the tropics the well-known half-years take over, and the usual law of insolation holds.

## APERÇU SUR LE CLIMAT DE LA RÉGION ÉQUATORIALE

GY. BACSÁK

## RÉSUMÉ

Sous le rapport de l'insolation de la région équatoriale, l'auteur démontre qu'il n'y a point de périodes semestrales dans cette région, mais des quartiers estivaux et des périodes d'hiver inégales, donc la courbe d'insolation déterminée pour des périodes semestrales n'est pas valable pour ce territoire. Le second membre de la loi d'insolation subit une certaine modification, qui cesse progressivement en allant vers le tropique. Ici la période semestrale existant déjà, la loi d'insolation à deux membres entre en jeu.

## ОБЗОР КЛИМАТА ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ЗОНЫ

Д. БАЧАК

## РЕЗЮМЕ

В отношении облучения экваториальной зоны автор показывает, что там не имеются полугодия, а лишь летние кварталы и неравные зимние периоды, следовательно на эту территорию не распространяется действительность кривой облучения, определенной для полугодий и второй член закона облучения претерпевает определенные изменения. Приближаясь к тропику, это изменение постепенно прекращается, а в области тропика уже формируются полугодия и начинает действовать обычный двухчленный закон облучения.

# ON THE GEOMAGNETIC QUADRUPOLE-FIELD\*

L. ZILAHÍ-SEBESS

HUNGARIAN STATE GEOPHYSICAL INSTITUTE "ROLAND EÖTVÖS"

[Manuscript received May 29, 1961]

The Gauss series representing the main part of the geomagnetic field can be written — if we assume only internal magnetic masses — as follows:

$$V = R \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r, \Theta, \lambda) \quad (1)$$

where

$$V_n = \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \Theta) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \quad (2)$$

$\lambda$  being the geographical longitude east of Greenwich,  $\Theta$  the pole distance from the astronomical north pole,  $r$  the distance from the Earth's centre,  $R$  the radius of the Earth supposed to be a sphere in which all the magnetic masses are supposed to be lying, and  $P_n^m(\cos \Theta)$  representing the associated Legendre function of degree  $n$  and order  $m$ .

The Gauss series presents the scalar potential function of the magnetic field as a sum of the potentials of fictitious multipoles (dipole, quadrupole, octupole etc.). The potential of a multipole of the order  $n$  may be written as follows:

$$\Phi_n = (-1)^n \frac{p^{(n)}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial l_1 \dots \partial l_n} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (3)$$

where

$$\frac{\partial}{\partial l_i} = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} + \beta_i \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}$$

is a differential operator,  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  are the cosines of the  $l_i$ -axis of the multipole, and  $p^{(n)}$  the momentum of the multipole (11, 15).

The first and simplest multipole is the dipole, the potential field of which is represented by the first term:  $V_1$  of the Gauss series. The coefficients  $g_1^0, g_1^1$  and  $h_1^1$  are proportional to the components of the moment of the dipole (1,2).

\* Part of the candidate's thesis of the author.

### Determination of the quadrupole axes

It can be shown that the two functions  $\Phi_2$  and  $V_2$  define the same potential field, but to compute the directional cosines of the two quadrupole axes from the  $V_2$  function is much more difficult than in the foregoing case of the dipole. We may adopt here the following procedure:

Let us perform the partial differentiations in the expression of  $\Phi_2$  and let us transform the orthogonal coordinate system into a polar one. We get

$$\Phi_2 = \frac{p^{(2)}}{r^3} \left\{ a_2 a_1 (3 \cos^2 \Theta - 1) + a_2 \beta_1 (\cos \Theta \sin \Theta \cos \lambda) + a_2 \gamma_1 (3 \cos \Theta \sin \Theta \cos \lambda) + \right. \\ \left. + \beta_2 a_1 (3 \cos \Theta \sin \Theta \cos \lambda) + \beta_2 \beta_1 (3 \sin^2 \Theta \cos^2 \lambda - 1) + \beta_2 \gamma_1 (3 \sin^2 \Theta \sin \lambda \cos \lambda) + \right. \\ \left. + \gamma_2 a_1 (3 \cos \Theta \sin \Theta \sin \lambda) + \gamma_2 \beta_1 (3 \sin^2 \Theta \sin \lambda \cos \lambda) + \gamma_2 \gamma_1 (3 \sin^2 \Theta \sin^2 \lambda - 1) \right\}.$$

2. We can easily prove that in case of a given value  $r$ ,  $V_2$  is a homogeneous quadratic function of  $(\cos \Theta)$ ,  $(\sin \Theta \cos \lambda)$  and  $(\sin \Theta \sin \lambda)$ . Let us determine, by means of a transformation to the principal axes, the eigenvectors corresponding to  $V_2$  as a homogeneous quadratic form. If we take as coordinate axes these mutually perpendicular eigenvectors, we can write the function  $V_2$  in the following form:

$$V_2 = s_1 \cos^2 \Theta_1 + s_2 \cos^2 \Theta_2 + s_3 \cos^2 \Theta_3, \quad (5)$$

where  $\cos \Theta_1$ ,  $\cos \Theta_2$  and  $\cos \Theta_3$  are the components of the unit vector pointing towards the given point of the spherical surface, and  $s_1$ ,  $s_2$  and  $s_3$  represent the eigenvectors (7).  $V_2$  can also be expressed by the zonal Legendre polynomials of second degree as follows:

$$V_2 = C_1 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \Theta_1 - \frac{1}{2} \right) + C_2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \Theta_2 - \frac{1}{2} \right) + C_3 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \Theta_3 - \frac{1}{2} \right). \quad (6)$$

It can be proved that  $P_2^0(\cos \Theta)$  is proportional to the potential of an axial quadrupole on the spherical surface; thus it is seen that every centric quadrupole can be substituted by three axial quadrupoles with axes mutually perpendicular to each other.

Comparing the coefficients figuring in the different expressions (5., 6) of  $V_2$  we get the following system of equations:

$$\begin{aligned} C_1 - \frac{1}{2} C_2 - \frac{1}{2} C_3 &= s_1 \\ -\frac{1}{2} C_1 + C_2 - \frac{1}{2} C_3 &= s_2 \\ -\frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{2} C_2 + C_3 &= s_3 \end{aligned} \quad (7)$$

The sum of the eigenvalues being zero in our case, we may set  $C_3 = q$  ( $q$  being an arbitrary real number) and compute  $C_1$  and  $C_2$  from the following equations:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{4}{3}s_1 + \frac{2}{3}s_2 + q \\ C_2 &= \frac{2}{3}s_1 + \frac{4}{3}s_2 + q \end{aligned} \quad (8)$$

Equation (4) gives the general form of the quadrupole in an arbitrary orthogonal coordinate system; hence, the relations which can be derived from it are applicable also to the coordinate system of the eigenvectors. On comparing the coefficients of (4) and (6) we can write up the following equations between the constants  $C_1$ ,  $C_2$  and  $C_3$  and the directional cosines of the quadrupole:

$$\begin{aligned} \text{I. } & M a_1 a_2 = C_1 \\ \text{II. } & M \beta_1 \beta_2 = C_2 \\ \text{III. } & M \gamma_1 \gamma_2 = C_3 \\ \text{IV. } & M(a_1 \beta_2 + a_2 \beta_1) = 0 \\ \text{V. } & M(a_1 \gamma_2 + a_2 \gamma_1) = 0 \\ \text{VI. } & M(\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

where  $M = p^{(2)}/r^3$ .

Besides the relations obtained from the comparison of the coefficients the following conditions must also be satisfied:

$$\begin{aligned} \text{VII. } & a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ \text{VIII. } & a_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \end{aligned}$$

To solve the system (9) we can start from equations I—III.; expressing  $a_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  one after one from these equations and substituting their expressions into the equations IV—VI., we get

$$\begin{aligned} C_1 \frac{\beta_2}{a_2} + C_2 \frac{a_2}{\beta_2} &= 0 \\ C_1 \frac{\gamma_2}{a_2} + C_3 \frac{a_2}{\gamma_2} &= 0 \\ C_2 \frac{\gamma_2}{\beta_2} + C_3 \frac{\beta_2}{\gamma_2} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Multiplying the equations (10) one after one by  $\frac{\beta_2}{a_2}, \frac{\gamma_2}{a_2}, \frac{\gamma_2}{\beta_2}$ , we obtain

pure quadratic equations for  $\frac{\beta_2}{a_2}, \frac{\gamma_2}{a_2}, \frac{\gamma_2}{\beta_2}$ , whence:

$$\frac{\beta_2}{a_2} = \pm \sqrt{-\frac{C_2}{C_1}}, \quad \frac{\gamma_2}{a_2} = \pm \sqrt{-\frac{C_3}{C_1}}, \quad \frac{\gamma_2}{\beta_2} = \pm \sqrt{-\frac{C_3}{C_2}}. \quad (11)$$

It is to be seen from (11) that for the quotients of the cosines we get real values only if one of the quantities  $C_1, C_2$  and  $C_3$ , say  $C_3$ , is equal to zero and the sign of  $C_2$  is different from that of  $C_1$ . In that case,  $\gamma_2 = 0$ . Further, since neither  $\beta_1$ , nor  $a_1$  is zero in the general case, it follows from (9) that  $\gamma_1 = 0$ . The condition  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  means that the quadrupole axes are in the plane of the eigenvectors corresponding to the eigenvalues  $s_1$  and  $s_2$ .

In the equations (9), the cosines with the indices 1 and 2 occur in symmetrical positions, so that all results regarding the index 2 also apply to the index 1.

The quotient  $\frac{\beta_i}{a_i}$  is the tangent of the angle ( $\omega_i$ ) subtended by the quadrupole axis  $l_i$  and the eigenvector  $\bar{s}_{\max}$ . The cosines are  $\beta_i = \sin \omega_i$  and  $a_i = \cos \omega_i$ . The angles  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are — according to the foregoing considerations — equal in absolute value but of opposite signs (as it is obvious by (9)), therefore the eigenvectors  $\bar{s}_{\max}$  and  $\bar{s}_{\min}$  bisect the quadrupole axes. The values

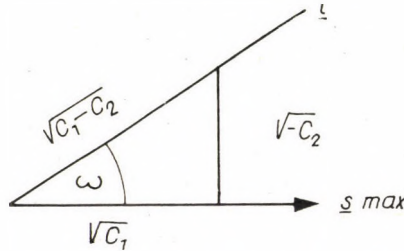


Fig. 1. Coordinates of the quadrupole axes in the system of the eigenvectors

of  $a_1, \beta_1, a_2, \beta_2$  giving the solution can be written with regard to Fig. 1, as follows:

$$\begin{aligned} a_1 &= \pm \sqrt{\frac{C_1}{C_1 - C_2}}, & \beta_1 &= \pm \sqrt{\frac{-C_2}{C_1 - C_2}} \\ a_2 &= a_1, & \beta_2 &= -\beta_1 \end{aligned} \quad (12)$$



The quantity  $M = p^{(2)}/r^3$  can be calculated from (9): it is

$$M = (C_1 - C_2) = \frac{2}{3} (|s_{\max}| + |s_{\min}|).$$

The formulas (12) furnish the cosines of the quadrupole axes as expressed in the coordinate system of the eigenvectors. In order to have these cosines in the usual system, we must subject the obtained values to an orthogonal transformation. The elements of the transformational matrix are the coordinates of the eigenvectors.

I have carried out my computations using the spherical harmonic expansions made by FRITSCHÉ as well as those collected by MAUERSBERGER; the former ones are of a strongly extrapolated character. The coefficients of the expansions made use of are listed in Table I. Since there were available several expansions

Table I

Author	Epoch	$g_0^0$	$g_1^1$	$h_1^1$
1. FRITSCHÉ	1550	-3227,8	-262,9	97,7
2.	1600	-3231,6	-279,7	167,6
3.	1650	-3236,3	-300,7	255,0
4.	1700	-3236,5	-314,1	408,9
5.	1780	-3198,5	-355,2	569,8
6. ERMAN-PETERSEN	1829	-3200,8	-283,5	601,1
7. GAUSS	1835	-3234,8	-311,0	624,5
8. FRITSCHÉ	1842	-3227,1	-275,1	593,1
9. ADAMS	1845 IV.	-3217,3	-283,3	582,0
10.	1845 VI.	-3218,7	-277,8	578,3
11. QU. ICILIUS	1880	-3339,2	-276,4	619,2
12. ADAMS	1880 IV.	-3161,1	-247,1	607,1
13.	1880 VI.	-3168,4	-242,7	603,0
14. NEUMAYER-PETERSEN	1885	-3157,2	-248,1	602,6
15. SCHMIDT	1885 IV.	-3187,0	-261,0	615,6
16.	1885 VI.	-3191,9	-211,7	598,1
17.	1885 II.	-3224,8	-176,5	609,1
18. FRITSCHÉ	1885	-3163,5	-241,4	591,4
19.	1900	-3141,2	-229,6	590,7
20. DYSON-FURNER	1922 X, Y	-3095	-226	592
21.	1922 Z, 80	-3046	-232	566
22.	1922 Z, 60	-3000	-222	561
23. VESTINE-LANGE	1945	-3057	-211	581
24. AFANASIEVA	1945	-3032	-229	590

**Table I**  
Continued

	$g_2^0$	$g_2^1$	$h_2^1$	$g_2^2$	$h_2^2$
1.	— 17,2	166,0	166,0	—154,3	—278,6
2.	— 20,5	174,6	129,0	—213,0	—225,1
3.	— 24,7	185,4	118,9	—214,3	—158,1
4.	— 29,4	202,1	75,1	—161,0	— 54,2
5.	— 33,5	244,7	10,9	— 80,6	81,8
6.	— 8,1	257,1	— 4,2	— 14,4	145,9
7.	51,4	292,3	12,2	— 2,0	157,4
8.	1,9	274,0	— 14,1	7,6	132,6
9.	— 3,8	282,1	— 11,2	4,4	135,6
10.	8,5	283,7	— 10,5	4,0	134,5
11.	— 36,7	299,8	— 22,0	49,4	143,5
12.	— 49,9	293,2	— 75,0	61,4	148,6
13.	— 48,8	296,5	— 74,7	61,3	148,8
14.	— 52,7	287,5	— 75,1	65,5	145,5
15.	— 53,1	280,1	— 76,8	59,8	141,7
16.	— 52,1	275,4	— 71,0	61,5	149,9
17.	— 87,9	249,5	— 86,0	44,8	143,2
18.	— 35,1	286,5	— 75,5	68,0	142,0
19.	— 48,1	290,9	— 96,9	89,1	145,4
20.	— 88,7	299,1	—124,1	144,3	84,3
21.	— 30,0	302,5	— 87,2	131,6	78,5
22.	— 60,7	288,1	—116,1	131,6	77,4
23.	—127,0	296,0	—166,0	164,0	54,0
24.	—125,0	288,0	—146,0	150,0	48,0

for almost the same epoch, I have, in representing the results to the eye, done no more than to indicate the area of scatter of the solutions. The extent of these areas may serve as a measure of reliability and reminds us of the necessity to treat the results with some criticism. The fact itself that the coefficients of the spherical harmonics were calculated only to an accuracy of four or five digits shows that the computed values are afflicted with considerable margins of error, the amount of which is difficult to determine, since the results are obtained by solving equations of the third degree and linear systems with two unknowns.

As regards the cases where only a unique expansion was available, I marked the results with small circles on the graphs. The numbers figuring next

to the circles or to the oblong rectangular areas represent the chronologica order. The numbers refer to the following expansions:

1. FRITSCHÉ	1550	ADAMS	1880 IV.
2. „	1600	NEUMAYER	1885
3. „	1650	SCHMIDT	1885 IV.
4. „	1700	„	1885 VI.
5. „	1780	„	1885 II.
6. ERMAN P.	1829	FRITSCHÉ	1885
7. GAUSS	1835	10. „	1900
8. FRITSCHÉ	1842	11. DYSON FURNER	1922 (X, Y)
ADAMS	1845 IV.	„ „	1922 (Z, 80)
„	1845 VI.	„ „	1922 (Z, 60)
9. QU. ICILIUS	1880	12. VESTINE	1945
ADAMS	1880 VI.	AFANASIEVA	1945

Table II. contains the direction cosines of the centric eigenvectors in units of  $10^{-5}$ . In the column headed  $a_{ik}$  is listed the  $k^{\text{th}}$  component of the  $i^{\text{th}}$  eigenvector.

Figures 2 and 3 show the wandering of the points of intersection of the centric eigenvectors with the sphere from 1550 up to 1945.

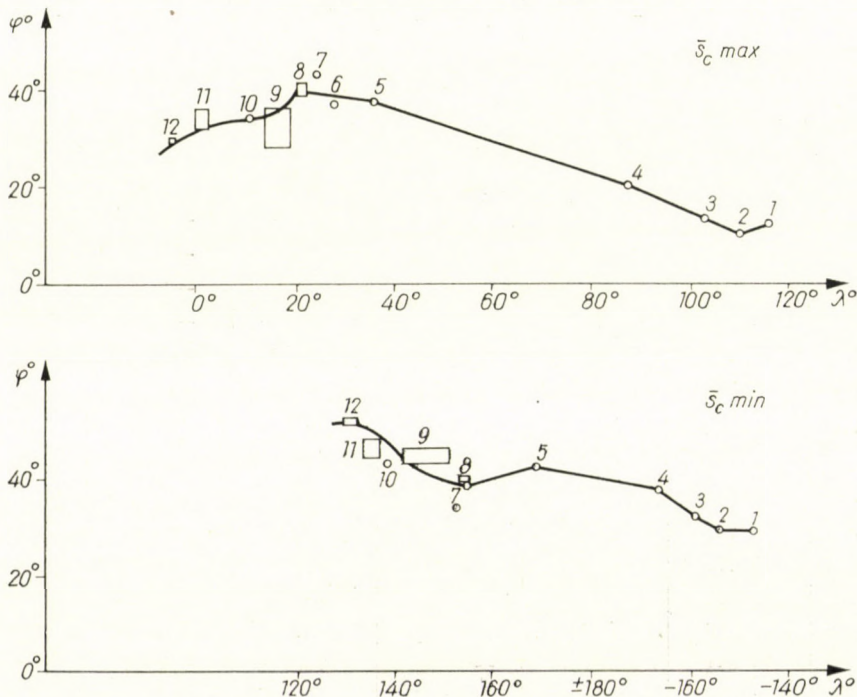


Fig. 2. Variation of the spherical coordinates of the eigenvectors corresponding to the eigenvalues  $s_{\max}$  and  $s_{\min}$ , 1550—1945

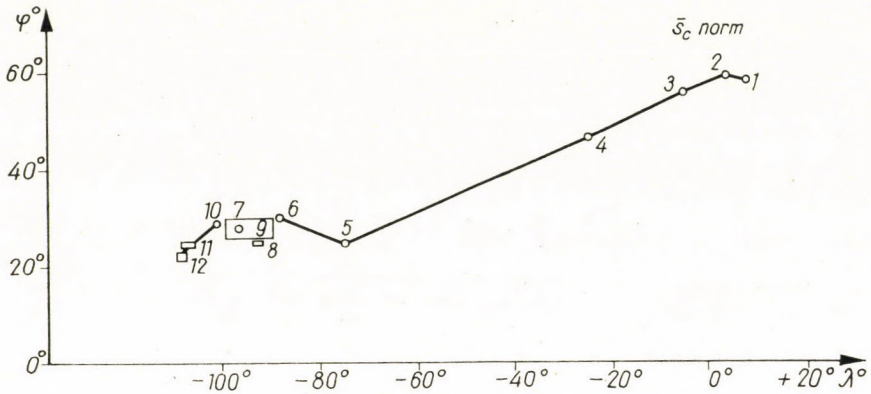


Fig. 3. Variation of the spherical coordinates of the eigenvector corresponding to the eigenvalue being in the middle of  $s_{\max}$  and  $s_{\min}$ , 1550—1945

Table II

	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
1.	20411	-43412	87743	48440	-73410	-47588
2.	17187	-33575	92614	47946	-79276	-37637
3.	22400	-22009	94941	52072	-79643	-30749
4.	34406	05406	93739	60612	-77525	-17776
5.	60921	64473	46172	67245	-72861	13014
6.	60397	70443	37284	62403	-70894	32862
7.	68823	65998	30128	55336	-74610	37029
8.	64058	71650	27620	63247	-69628	33938
9.	63350	71779	28890	64114	-69598	32335
10.	65206	70688	27412	62613	-70595	33104
11.	58099	77065	26182	68654	-63682	35089
12.	55979	80149	21037	68434	-59031	42803
13.	56332	79968	20780	68372	-59237	42617
14.	55301	80690	20760	68846	-58288	43158
15.	55311	80708	20666	69032	-58285	42865
16.	54118	80736	23515	68228	-58504	43843
17.	47488	83404	28083	72656	-55163	40966
18.	57819	79498	18357	66839	-59055	45224
19.	55579	81580	15995	67629	-55558	48369
20.	52360	85185	01442	74497	-46597	47738
21.	59196	80561	02383	69700	-52656	48676
22.	55691	83057	-00081	72255	-48400	49363
23.	49118	86820	-07057	77800	-40084	48379
24.	49289	86759	-06591	79071	-41501	45005

## Continued

	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$
1.	85070	52216	06045
2.	86057	50873	02473
3.	82382	56326	-06379
4.	71710	62934	-29950
5.	42032	23121	-87742
6.	49582	03420	-86775
7.	46917	-08813	-87870
8.	43548	-04272	-89919
9.	43317	-01962	-90110
10.	42752	-04421	-90293
11.	43712	-02411	-89908
12.	46724	-09564	-87894
13.	46390	-09799	-88045
14.	46924	-09570	-87787
15.	46640	-09444	-87952
16.	49155	-07684	-86746
17.	49656	00947	-86795
18.	46793	-13879	-87280
19.	48346	-16066	-86050
20.	41338	-23921	-87858
21.	40468	-27153	-87322
22.	40959	-27549	-86968
23.	39173	-29253	-87234
24.	36311	-27394	-89056

Table III contains the directional cosines of the quadrupole axes in units of  $10^{-5}$ . In the column headed  $\beta_{ik}$  is listed the  $k^{\text{th}}$  component of the  $i^{\text{th}}$  quadrupole axis.

Figure 4. exhibits the variation of the spherical coordinates of the centric quadrupole axes.

The first column of Table IV contains the absolute value of the momentum of the centric quadrupole in units of  $10^{-4} T$ ; the third column contains the same quantity for the eccentric quadrupole, whereas the second column presents the angle of inclination of the eccentric quadrupole axes ( $2\omega$ ).

Figure 5 represents the momentum of the centric quadrupole and the angle of intersection of the quadrupole axes as a function of time.

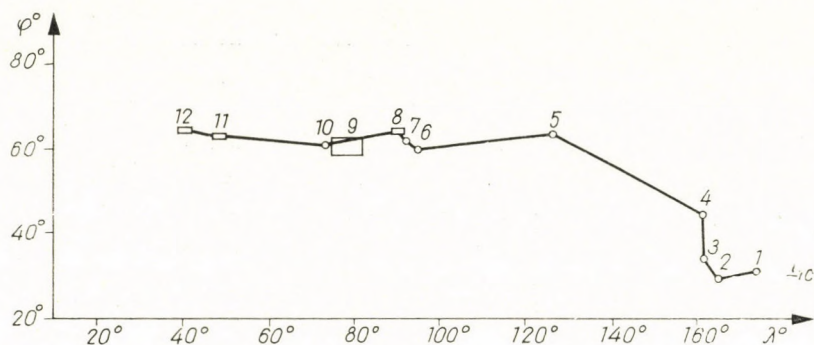


Fig. 4a. Variation of the spherical coordinates of the centric quadrupole axes, 1550—1945

Table III

	$\beta_{11}$	$\mu_{12}$	$\beta_{13}$	$\beta_{21}$	$\beta_{22}$	$\beta_{23}$
1.	51509	—85103	10230	—28471	36105	88802
2.	49088	—84137	22616	—29278	45437	84132
3.	55811	—78625	26517	—31179	54423	77885
4.	69445	—68163	23047	—40673	72683	55343
5.	89519	—26365	35936	—23565	96163	14050
6.	86821	—04305	49436	—04881	99873	01146
7.	88111	—01994	47246	13141	99090	—02922
8.	90007	00339	43574	—00409	99877	—04942
9.	90129	00073	43324	—01865	99935	—03072
10.	90368	—00564	42816	01264	99900	—04294
11.	89361	12474	43115	—04745	99764	—04983
12.	88308	09901	45867	—13276	97527	—17669
13.	88491	09804	45533	—12837	97594	—17625
14.	88134	11289	45880	—13618	97437	—17906
15.	88350	09869	45793	—15014	97145	—18391
16.	86903	10768	48290	—14299	97546	—16742
17.	86545	07097	49594	—28661	94565	—15364
18.	88313	11104	45581	—09381	97422	—20521
19.	87407	14215	46455	—12257	96091	—24827
20.	89310	29470	33996	—13540	93800	—31910
21.	89816	29697	32395	02376	95769	—28683
22.	89975	27936	33528	—08349	93798	—33646
23.	89819	32717	29363	—20611	89613	—39307
24.	90615	32635	26907	—20425	90915	—36293

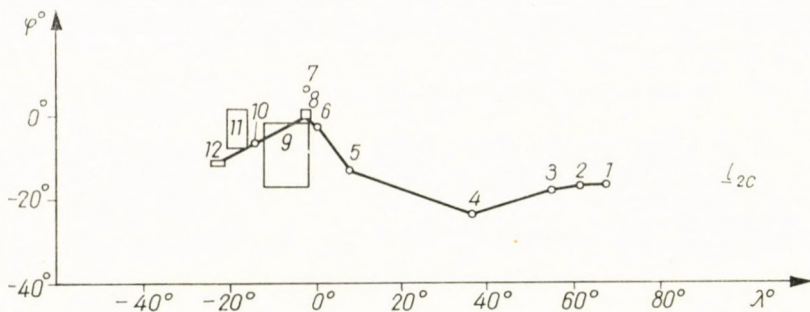


Fig. 4b. Variation of the spherical coordinates of the centric quadrupole axes, 1550--1945

Table IV

	$\frac{p^{(2)}}{r^3}$ center	$2\alpha$	$\frac{p^{(2)}}{r^3}$ excenter
1.	447,6	111°17'	385,5
2.	429,6	109 37	375,3
3.	390,0	113 17	328,0
4.	298,4	130 34	220,4
5.	306,1	114 27	187,6
6.	341,6	94 34	223,6
7.	387,7	85 17	240,8
8.	352,0	91 15	208,5
9.	361,7	91 41	213,1
10.	362,9	90 43	211,5
11.	390,9	86 32	230,4
12.	399,2	95 50	246,7
13.	402,3	95 38	247,0
14.	393,6	95 17	243,2
15.	383,5	96 57	236,9
16.	382,1	95 45	243,2
17.	361,0	104 54	229,3
18.	389,2	93 55	238,4
19.	408,4	94 55	254,9
20.	432,9	87 18	240,0
21.	402,8	77 43	213,8
22.	405,4	85 45	219,1
23.	463,5	90 25	245,2
24.	439,2	89 12	223,8

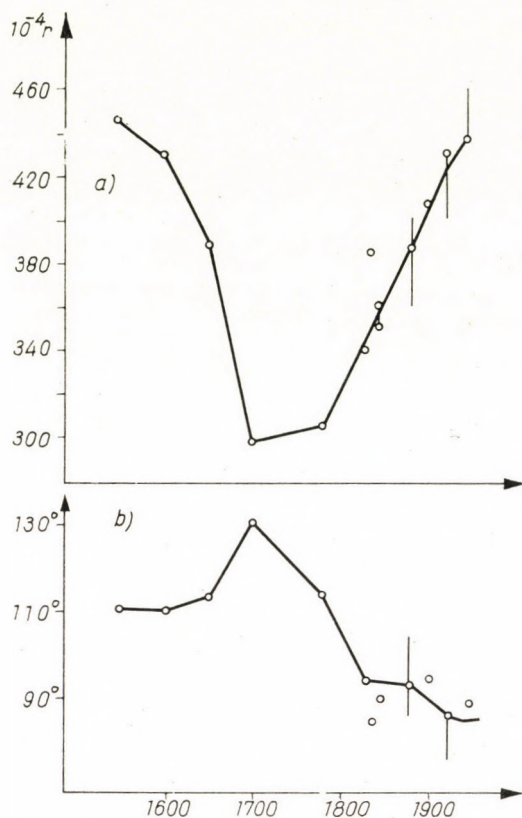


Fig. 5. Variation of the momentum of the centric quadrupole (a) and of the angle between the quadrupole axes (b), 1550—1945

### The position of the quadrupole axes in the coordinate system whose origin is the magnetic center

The coefficients of the potential function of magnetic masses situated within a sphere of radius  $R$  are given in polar coordinates by the following expressions:

$$g_n^m = \frac{1}{R^{n+2}} \int \mu r^n P_n^m(\cos \Theta) \cos m\lambda \, dv$$

$$h_n^m = \frac{1}{R^{n+2}} \int \mu r^n P_n^m(\cos \Theta) \sin m\lambda \, dv,$$
(13)

$P_n^m$  being the associated Legendre polynomial of degree  $n$  and order  $m$ ,  $\mu$  the elementary magnetic quantity and  $dv$  the element of volume.



It we want to perform the integrations, we have to pass from polar to orthogonal coordinates; thereby we obtain the following expressions for the coefficients:

$$\begin{aligned} g_1^0 &= R^{-3} \int \mu x \, dv, \quad g_1^1 = R^{-3} \int \mu y \, dv, \quad h_1^1 = R^{-3} \int \mu z \, dv, \\ g_2^0 &= R^{-4} \int \mu \left( x^2 - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} z^2 \right) dv, \quad g_2^1 = \sqrt{3} R^{-4} \int \mu xy \, dv, \\ h_2^1 &= \sqrt{3} R^{-4} \int \mu xz \, dv, \quad g_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} R^{-4} \int \mu (y^2 - z^2) \, dv, \quad h_2^2 = \sqrt{3} R^{-4} \int \mu yz \, dv. \end{aligned} \quad (14)$$

Let us shift the origin of the coordinates from the point 0 to the point 0'. The coordinates of the point 0' in the former system may be written in the form  $(Ru, Rv, Rw)$ . The transformation formulas into the new coordinates will be:

$$\bar{x} = x - Ru, \quad \bar{y} = y - Rv, \quad \bar{z} = z - Rw.$$

Since  $\int \mu \, dv = 0$ , we have

$$\begin{aligned} \bar{g}_1^0 &= g_1^0, & \bar{g}_1^1 &= g_1^1, & \bar{h}_1^1 &= h_1^1 \\ \bar{g}_2^0 &= g_2^0 - 2g_1^0 u + g_1^1 v + h_1^1 w \\ \bar{g}_2^1 &= g_2^1 - \sqrt{3} g_1^0 v - \sqrt{3} g_1^1 u \\ \bar{h}_2^1 &= h_2^1 - \sqrt{3} g_1^0 w - \sqrt{3} h_1^1 u \\ \bar{g}_2^2 &= g_2^2 - \sqrt{3} g_1^1 v + \sqrt{3} h_1^1 w \\ \bar{h}_2^2 &= h_2^2 - \sqrt{3} h_1^1 v - \sqrt{3} g_1^1 w, \end{aligned} \quad (15)$$

The axis of the coordinate system used in determining the coefficients of the spherical harmonics is parallel to the rotational axis of the Earth. We can rotate the spherical coordinate system in such a manner that two of the three terms of first degree vanish. In this case the directional cosines of the axis of the new system, as expressed in the old one, are as follows:

$$\frac{g_1^0}{m}, \quad \frac{g_1^1}{m}, \quad \frac{h_1^1}{m},$$

where

$$m = \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2}.$$

Owing to the rotation of the coordinate system the coefficients of the spherical harmonics will be changed. The first-degree terms simply transform

as vectors, but for the computation of the coefficients of second degree, more involved formulae have to be used. The transformational matrix can be obtained by applying the relations under (15). By the way of an example, the new  $g_2^{0*}$  coefficient results as follows:

The transformation equations are

$$\begin{aligned}x^* &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\y^* &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\z^* &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z\end{aligned}\tag{16}$$

By (14),

$$g_2^{0*} = R^{-4} \int \mu \left( x^{*2} - \frac{1}{2} y^{*2} - \frac{1}{2} z^{*2} \right) dv.$$

It is easily seen that  $g_2^{0*}$  is a linear function of the  $g_2^i$  and  $h_2^i$ ; that is,

$$g_2^{0*} = A g_2^0 + B g_2^1 + C h_2^1 + D g_2^2 + E h_2^2.\tag{17}$$

Making use of the values of  $x^*$ ,  $y^*$  and  $z^*$  and of the properties of the transformational matrix, and comparing the coefficients, we get for the parameters figuring in (17) the following system of equations:

$$\begin{aligned}-\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} D &= a_{12}^2 - \frac{1}{2} a_{22}^2 - \frac{1}{2} a_{32}^2 \\-\frac{A}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} D &= a_{13}^2 - \frac{1}{2} a_{23}^2 - \frac{1}{2} a_{33}^2 \\A &= \frac{3}{2} a_{11}^2 - \frac{1}{2}, \quad \sqrt{3} E = 3 a_{13} a_{12} \\ \sqrt{3} B &= 3 a_{12} a_{11}, \quad \sqrt{3} C = 3 a_{13} a_{11}.\end{aligned}\tag{18}$$

By the above relations, we get

$$\begin{aligned}g_2^{0*} &= \left( \frac{3}{2} a_{11}^2 - \frac{1}{2} \right) g_2^0 + \sqrt{3} a_{12} a_{11} g_2^1 + \sqrt{3} a_{13} a_{11} h_2^1 + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} (a_{12}^2 - a_{13}^2) g_2^2 + \sqrt{3} a_{12} a_{13} h_2^2.\end{aligned}$$

All the other transformational formulae can be obtained by such elementary though rather lengthy calculations. As a result the following formulae are obtained:

$$\begin{aligned}
 g_2^{0*} &= \frac{1}{2} (3a_{11}^2 - 1) g_2^0 + \sqrt{3} a_{11} a_{12} g_2^1 + \sqrt{3} a_{11} a_{13} h_2^1 + \\
 &+ \frac{\sqrt{3}}{2} (a_{12}^2 - a_{13}^2) g_2^2 + \sqrt{3} a_{12} a_{13} h_2^2, \\
 g_2^{1*} &= \sqrt{3} a_{11} a_{21} g_2^0 + (a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}) g_2^1 + (a_{11} a_{23} + a_{21} a_{13}) h_2^1 + \\
 &+ (a_{12} a_{22} - a_{13} a_{23}) g_2^2 + (a_{12} a_{23} + a_{22} a_{13}) h_2^2, \\
 h_2^{1*} &= \sqrt{3} a_{11} a_{31} g_2^0 + (a_{11} a_{32} + a_{31} a_{12}) g_2^1 + (a_{11} a_{33} + a_{31} a_{13}) h_2^1 + \\
 &+ (a_{12} a_{32} - a_{13} a_{33}) g_2^2 + (a_{12} a_{33} + a_{32} a_{13}) h_2^2. \quad (19) \\
 g_2^{2*} &= \frac{\sqrt{3}}{2} (a_{21}^2 - a_{31}^2) g_2^0 + (a_{21} a_{22} - a_{31} a_{32}) g_2^1 + (a_{21} a_{23} - a_{31} a_{33}) h_2^1 + \\
 &+ \frac{1}{2} (a_{22}^2 + a_{33}^2 - a_{32}^2 - a_{23}^2) g_2^2 + (a_{22} a_{23} - a_{32} a_{33}) h_2^2, \\
 h_2^{2*} &= \sqrt{3} a_{21} a_{31} g_2^0 + (a_{31} a_{22} + a_{21} a_{32}) g_2^1 + (a_{31} a_{23} + a_{21} a_{33}) h_2^1 + \\
 &+ (a_{22} a_{32} - a_{23} a_{33}) g_2^2 + (a_{23} a_{32} + a_{22} a_{33}) h_2^2.
 \end{aligned}$$

Let us choose the coefficients of the transformation equations (16) such that the condition:  $g_1^{1*} = h_1^{1*} = 0$  hold. Then let us translate our coordinate system by making use of (15). Let the coefficients of the spherical harmonics thus obtained be marked by  $*$ . The values of  $u, v$  and  $w$  in (15) have to be chosen so that  $g_2^{0*}, g_2^{1*}$  and  $h_2^{1*}$  should vanish; having made previously the hypothesis  $g_1^{1*} = h_1^{1*} = 0$ , this means that the equations  $g_2^{2*} = \bar{g}_2^{2*}$  and  $h_2^{2*} = \bar{h}_2^{2*}$  hold. Introducing an orthogonal coordinate system, whose  $x$ -axis coincides with the dipole axis as obtained from the series expansions of the potential and whose origin is in the magnetic center, we obtain for the quadratic terms of the potential series the simple expression

$$V_2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} g_2^{2*} \cos 2\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2} h_2^{2*} \sin 2\lambda \right) \sin^2 \theta \frac{R^4}{r^3}.$$

According to A. SCHMIDT the magnetic center is the origin of a coordinate system in which the meansquare of the terms with the index  $n = 2$  as obtained from the spherical harmonic expansions is minimum. This definition is equivalent to that of W. THOMSON, according to whom the magnetic center

is the origin of a polar coordinate system in which the coefficients of the zonal and two tesseral functions of the terms having the index  $n = 2$  are equal to zero.

Let us now examine in detail the quadratic terms of the function  $V_2$  in the coordinate system which has its origin in the magnetic center.

The eigenvalues, as obtained by means of the principal-axis transformation, are

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(g_2^{2*})^2 + (h_2^{2*})^2} \\ s_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(g_2^{2*})^2 + (h_2^{2*})^2} \\ s_3 &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

The directional cosines of the eigenvector corresponding to the eigenvalue  $s_3 = 0$  in the coordinate system marked  $-*$  are

$$\xi_{11} = 1, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = 0.$$

Thus we conclude that the eigenvector corresponding to  $s_3 = 0$  coincides with the axis of the spherical coordinate system, that is, with the direction of the magnetic momentum of the dipole lying in the magnetic center.

The other two eigenvectors are in the lines of intersection of the plane perpendicular to the dipole and passing through the origin, with the two meridian planes defined by the angles

$$\varphi_{1,2} = \text{arc tg} \frac{h_2^{2*}}{g_2^{2*} \pm \sqrt{(g_2^{2*})^2 + (h_2^{2*})^2}}.$$

The above relations hold of course in the coordinate system marked  $-*$ ; therefore it is desirable to retransform them by (16) into the system, whose axes are parallel to the axes of the originally used orthogonal coordinate system whose origin coincides with the Earth's magnetic center.

In the system of the three eigenvectors we can simply compute the quadrupole axes, too, by applying the considerations discussed above. Applying (7) to the quantities in (20) we can calculate the values  $C_1$ ,  $C_2$  and  $C_3$ . By the conditions  $-C_2/C_1 > 0$  and  $C_3 = 0$ , we get

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(g_2^{2*})^2 + (h_2^{2*})^2} \\ C_2 &= -C_1. \end{aligned}$$

The quadrupole axes are in the plane defined by the eigenvectors corresponding to the eigenvalues  $\bar{s}_{\max}$  and  $\bar{s}_{\min}$ , resp. and they subtend an angle  $\omega = \arctg \sqrt{-\frac{C_2}{C_1}}$  with the direction of  $\bar{s}_{\max}$  in both the positive and negative sense. Since in our case  $C_2$  and  $C_1$  are equal but of opposite signs,  $\omega = \pm 45^\circ$ . By (12) and (20) we can compute also the absolute value of the momentum of the quadrupole; it is

$$\frac{p^{(2)}}{r^3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{(g_2^{*2})^2 + (h_2^{*2})^2}.$$

Table V

	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	$\bar{a}_{13}$	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	$\bar{a}_{23}$
1.	6617	-48927	86962	5581	-86835	-49280
2.	8011	-37137	92502	6049	-92449	-37640
3.	10099	-27630	95578	6655	-95667	-28355
4.	13307	-08577	98739	8393	-99170	-09744
5.	11392	41915	90075	17098	-90139	39782
6.	8613	64232	76158	18414	-76151	62145
7.	8276	65224	75349	19360	-75217	62981
8.	7510	68380	72578	18382	-72485	66392
9.	7352	67439	73471	18302	-73332	65480
10.	7410	67317	73577	18089	-73463	65391
11.	5761	75840	64924	19049	-64672	73856
12.	5506	79139	60883	19542	-60650	77069
13.	5532	79116	60911	19321	-60700	77086
14.	5160	79889	59927	19545	-59654	77843
15.	5234	79287	60714	19854	-60410	77178
16.	5944	79805	59966	18569	-59908	77887
17.	7160	79057	60816	17918	-61000	77188
18.	4932	80433	59213	19169	-58946	78473
19.	4257	83376	55048	19314	-54747	81424
20.	702	92144	38846	20046	-38189	90222
21.	684	91181	41057	19677	-40378	89346
22.	595	91853	39530	19707	-38863	90007
23.	-870	95373	30056	19800	-29297	93540
24.	-1072	94954	31346	20405	-30481	93030

Table V. lists the directional cosines of the eccentric eigenvectors as expressed in the coordinate system with the magnetic center as its origin;  $a_{ik}$  is the  $k^{\text{th}}$  component of the  $i^{\text{th}}$  eigenvector.

Fig. 6 represents the variation of the spherical coordinates of the eccentric eigenvectors from 1550 up to 1945.

Table VI contains the directional cosines of the quadrupole axes as related to the magnetic center as the origin, in units of  $10^{-5}$ ,  $\beta_{ik}$  being the  $k^{\text{th}}$  component of the  $i^{\text{th}}$  quadrupole axis.

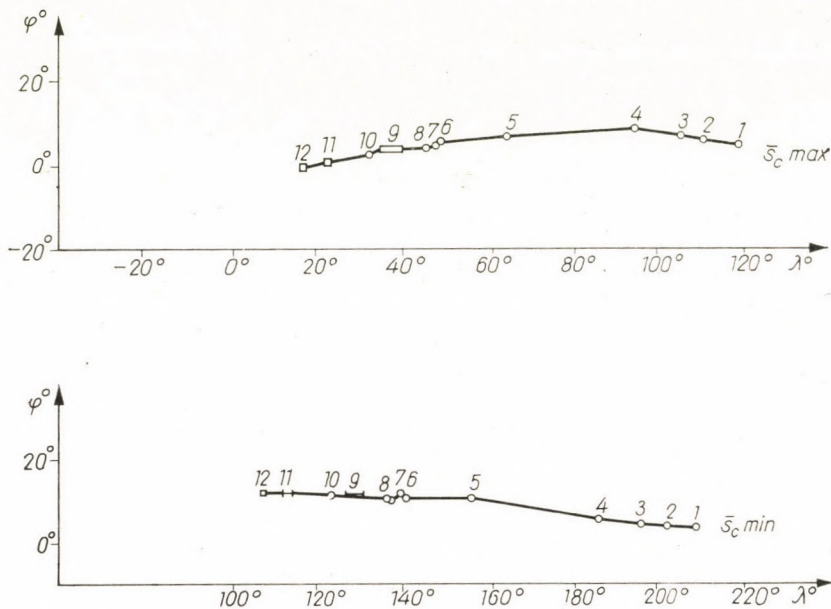


Fig. 6. Variation of the spherical coordinates of the eccentric eigenvectors 1550—1945

Fig. 7 shows the wandering of the quadrupole axes in the system with the magnetic center as the origin, whereas Fig. 8 gives the secular variation of the momentum of the eccentric quadrupole.

In summary we can state that with the origin in the magnetic center, the following connection holds between the terms of first and second degree of the spherical harmonic expansion: the dipole axis as defined by the linear terms is perpendicular to the plane of the quadrupole axes as shifted into the magnetic center; moreover, the quadrupole axes are mutually perpendicular. The two quadrupole axes and the dipole axis form a system of mutually perpendicular axes; the only difference against the orthogonal system of the eigenvectors is a rotation by  $45^\circ$  around the dipole axis.

The application of the coordinate system of the eigenvectors facilitates the theoretical computation of the quadrupole field to a considerable extent. The fact that the positions of the dipole and quadrupole axes are variable in time, is partly an advantage, partly a disadvantage when a coordinate system with

Table VI

	$\bar{\beta}_{11}$	$\beta_{.2}$	$\bar{\beta}_{13}$	$\bar{\beta}_{21}$	$\bar{\beta}_{22}$	$\bar{\beta}_{23}$
1.	8625	-95999	26645	733	26805	96337
2.	9942	-91631	38793	1387	39111	92024
3.	11846	-87184	47535	2435	48109	87634
4.	15345	-76188	62929	3474	64059	76709
5.	20145	-34105	91821	— 4035	93376	35562
6.	19111	-08429	97795	— 6931	99266	9910
7.	19563	-07066	97813	— 7859	99306	8746
8.	18308	-02901	98267	— 7688	99608	4374
9.	18140	-04167	98253	— 7742	99540	5651
10.	18030	-04346	98265	— 7552	99547	5789
11.	17543	7897	98132	— 9396	99357	— 6317
12.	17712	13074	97546	— 9925	98846	—11445
13.	17574	13019	97579	— 9750	98866	—11437
14.	17469	14308	97418	—10172	98671	—12669
15.	17740	13348	97504	—10337	98780	—11642
16.	17334	14063	97477	— 8927	98792	—12671
17.	17733	12768	97575	— 7608	99036	—11577
18.	17042	15194	97358	—10067	98555	—13620
19.	16668	20245	96500	—10647	97667	—18651
20.	14671	38152	91265	—13678	92159	—36328
21.	14398	35922	92209	—13430	93026	—34144
22.	14356	37470	91597	—13514	92431	—35693
23.	13385	46723	87395	—14616	88154	—44890
24.	13670	45590	87947	—15187	88696	—43617

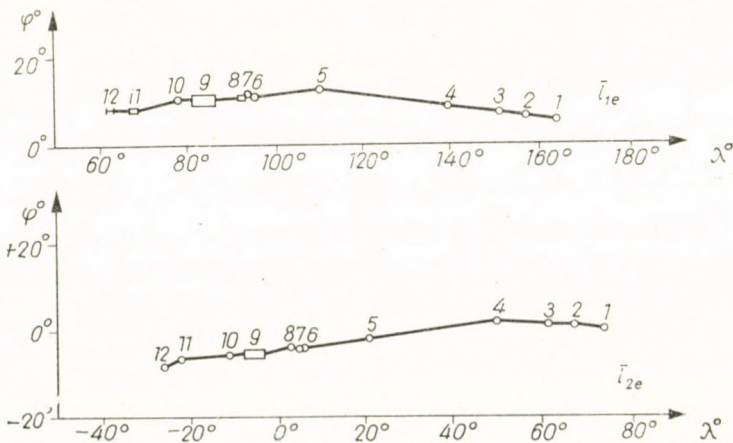


Fig. 7. Variation of the spherical coordinates of the eccentric quadrupole axes, 1550—1945

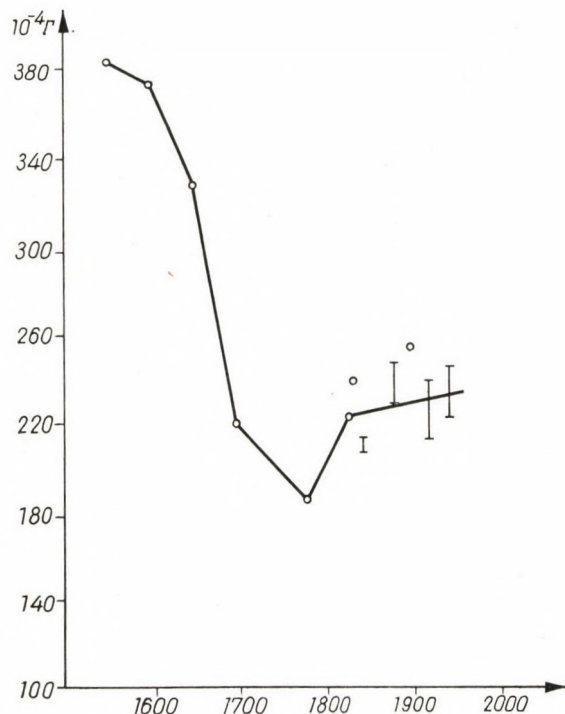


Fig. 8. Variation of the momentum of the eccentric quadrupole, 1550—1945

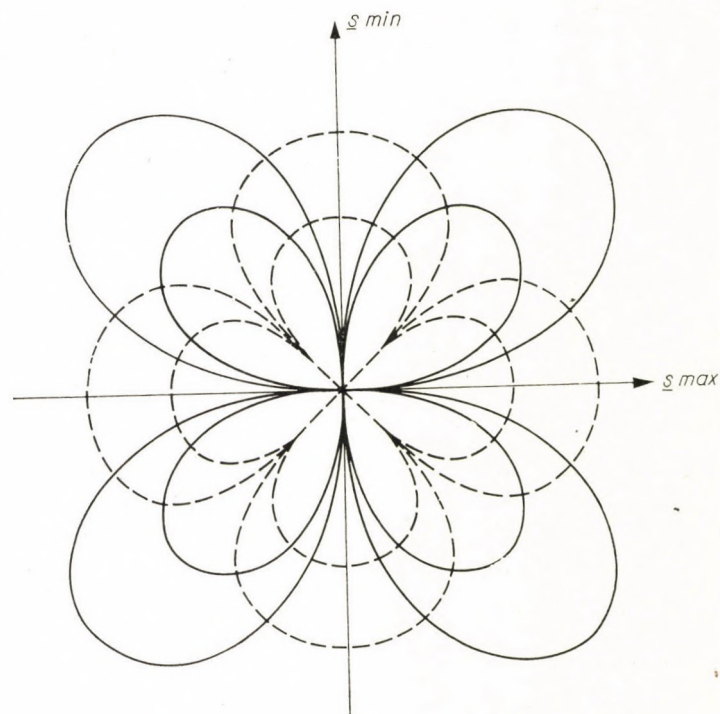


Fig. 9. Lines of force and equipotential lines of the quadrupole in the plane of the quadrupole axes. (Full lines represent lines of force, dashed lines are equipotential lines)



the Earth's center as the origin is used. It is a disadvantage because it makes the determination of the general features of the theoretical field more difficult; but, on the other side, it is favourable because it involves no preconceived

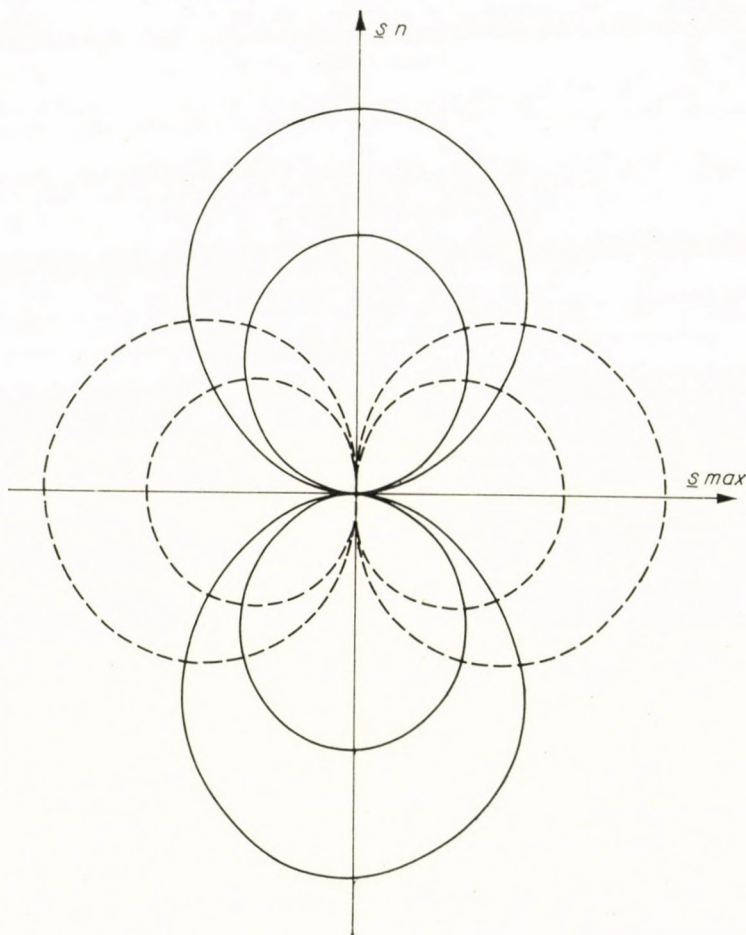


Fig. 10. Lines of force and isopotential lines of the quadrupole in the plane of the zero meridian (Full lines are lines of force, dashed lines are equipotential lines)

mathematical constraint as to the geometrical position of the dipole and quadrupole axes, thus bringing us nearer to the solution of the problem whether or not the movements in the interior of the Earth are of a purely rotational character or whether we have to take into account translatory displacements, too.

The shifting of the Earth's magnetic centre and the rather regular trend of the quadrupole axes indicates that in the interior of the Earth translatory movements of masses having a stable magnetic character is to be supposed.

The question whether a translatory movement is going on in the Earth's interior or not, can not be decided solely on the basis of potential expansions: the problem has to be attacked with other observational data at hand. It seems to be advisable to look into the seismic data in order to see if these would not furnish some indications as to the eccentric structure of the Earth's interior. In these investigations, too, the use of the spherical harmonics seems to be of advantage.

As we can always ensure that of the quadratic terms of the spherical harmonic expansion, only the term  $g_2^2$  differ from zero, we can restrict ourselves to the case of a theoretical quadrupole. The lines of force and isopotential lines corresponding to this simple case are seen in the figures 9 and 10.

Sincere thanks are extended to G. BARTA, D. Sc., in charge of the Geomagnetic Department of the Hungarian State Geophysical Institute "Roland Eötvös" and to my colleague M. A. ALBERT, D. Sc. for their valuable criticism and to my colleague S. BERTHA for his help in carrying out the laborious calculations.

#### REFERENCES

1. BARTA, GYÖRGY: Földmágnesség. (The Earth's magnetism.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1957.
2. A Föld mágneses sarkának és középpontjának időbeli vándorlásáról. (On the secular wandering of the Earth's magnetic pole and magnetic center.) Geofizikai Közlemények VIII. 1—2. 1959.
3. CHAPMAN and BARTELS: Geomagnetism. Oxford, 1940.
4. CHARGOY, A.: Movimiento del campo magnético terrestre dado por los terminos de segundo orden de la ecuacion del potencial. Anales del Instituto de Geofisica. UNAM Vol. I. pp. 24—37. Mexico 1955.
5. Analisis de modelos que describen el campo magnetico terrestre hasta 1955. *Ibid.* Vol. 3.
6. FANSELAU, G.: Geomagnetismus und Aeronomie. Band III. Berlin, 1959.
7. FANSELAU und LUCKE: Über die Veränderlichkeit des erdmagnetischen Hauptfeldes und seine Theorien. Zeitschrift für Geophysik. 1956. Heft 3—4.
8. FRITSCHÉ, H.: Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus St. Petersburg, 1897.
9. Die Elemente des Erdmagnetismus für die Epochen 1600, 1650, 1700, 1780, 1842 und 1885. . . . St. Petersburg, 1899.
10. FRITSCHÉ, H.: Die Elemente des Erdmagnetismus und ihre saeculaeren Aenderungen während des Zeitraumes 1550 bis 1915. St. Petersburg 1900.
11. LENSE, J.: Kugelfunktionen. Leipzig, 1950.
12. MAGNUS-OBERRETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Springer 1948.
13. MAUERSBERGER, P.: Betrachtungen über die zeitliche Änderung . . . Abhdl. d. Geophys. Inst. Potsdam. Nr. 5. 1952.
14. SCHMIDT, A.: Der magnetische Mittelpunkt der Erde und seine Bedeutung. Gotha. Gerlands Beiträge für Geophysik. Leipzig, 1934.
15. STRATTON, J. A.: Electromagnetic Theory. Mc. Graw-Hill. New York and London, 1941.
16. Тихонов, Самарский: Уравнения математической физики. Москва, 1953.

#### SUMMARY

The geomagnetic field — supposing the presence of internal agents only — may be represented by the Gaussian series of the following form:

$$V = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m \lambda + h_n^m \sin m \lambda) P_n^m (\cos \Theta) \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} = R \sum_{n=1}^{\infty} V_n.$$

where  $g_2^0, g_2^1$  and  $h_1^1$  are the constants of a centric dipole, while to the members with  $n > 1$  no simple physical interpretation can be attributed. The coefficients  $g_2^0, g_2^1, h_2^1, g_2^2$  and  $h_2^2$  define a theoretical quadrupole. On the sphere with  $r = R$ ,  $V_2$  is a homogeneous quadratic function of the directional cosines; the corresponding eigenvectors furnish the characteristic directions of the quadrupole. The eigenvector determined by the eigenvalue of least absolute value is perpendicular to the plane of the quadrupole axes, while the two other eigenvectors are the internal and external bisectors resp. of the quadrupole axes.

On transferring the origin of the coordinates to Schmidt's magnetic center, the dipole will come to be normal to the plane of the quadrupole, while the axes of the quadrupole will be perpendicular to each other. The orthogonal system of the quadrupole-axes is obtained from the orthogonal system of the eigenvectors by a rotation of 45 degrees around the dipole axis.

By these connections, it seems to be possible to follow in its details the displacement of internal masses determining the magnetic field of the Earth; the shifting of the magnetic center of the Earth could be identified with a mass movement of translational character, whereas the eigenvectors, perpendicular to each other might furnish some information about the movements of rotational character.

## ÜBER DAS GEOMAGNETISCHE QUADRUPOLE-FELD

L. ZILAH-SEBESS

### ZUSAMMENFASSUNG

Das erdmagnetische Feld kann — falls man sich auf innere Magnetkörper beschränkt — durch eine Gauss'sche Reihe folgender Form beschrieben werden:

$$V = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m \lambda + h_n^m \sin m \lambda) P_n^m(\cos \Theta) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} = R \sum_{n=1}^{\infty} V_n,$$

wobei  $g_1^0, g_1^1$  und  $h_1^1$  die Koeffizienten eines zentrischen Dipols darstellen; die Glieder  $n > 1$  lassen keine einfache physikalische Deutung zu. Aus den Koeffizienten  $g_2^0, g_2^1, h_2^1, g_2^2$  und  $h_2^2$  können die Daten eines theoretischen Quadrupols errechnet werden. Auf der Kugeloberfläche mit  $r = R$  ist  $V_2$  eine homogene, quadratische Funktion der Richtungskosinusse. Die zu  $V_2$  gehörigen Eigenvektoren geben die charakteristischen Richtungen des Quadrupols an. Der zum absolut kleinsten Eigenwert gehörige Eigenvektor steht normal auf die Ebene der Quadrupolachsen, während die beiden anderen Eigenvektoren die innere resp. äußere Winkelhalbierende der Quadrupolachsen darstellen.

Verlegt man das Koordinatenzentrum in den Schmidt'schen magnetischen Mittelpunkt, dann wird der Dipol mit der Normalen der Quadrupolebene zusammenfallen, während die Quadrupolachsen senkrecht zueinander zu liegen kommen. Das Orthogonalsystem der Quadrupolachsen wird aus dem Orthogonalsystem der Eigenvektoren durch eine Drehung von 45 Grad um die Dipolachse gewonnen.

Auf Grund der angeführten Zusammenhänge kann der Versuch vorgenommen werden, die Bewegung der inneren Massen, welche das Magnetfeld der Erde hervorrufen, genau zu verfolgen, da einerseits die Verschiebung des magnetischen Zentrums der Erde durch eine materielle Bewegung von translatorischem Charakter erklärt werden kann, und andererseits die paarweise senkrechten Eigenvektoren über die Drehbewegungen Information abgeben.

## SUR LE CHAMP QUADRUPOLE GÉOMAGNÉTIQUE

L. ZILAH-SEBESS

### RÉSUMÉ

La série de Gauss caractérisant le champ géomagnétique a la forme suivante, si nous nous bornons aux facteurs d'action internes:

$$V = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m \lambda + h_n^m \sin m \lambda) P_n^m(\cos \Theta) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} = R \sum_{n=1}^{\infty} V_n$$

$g_1^0, g_1^1$  et  $h_1^1$  étant les coefficients d'un dipôle centrique; les membres à  $n > 1$  n'admettent pas une interprétation physique simple. Les coefficients  $g_2^0, g_2^1, h_2^1, g_2^2$  et  $h_2^2$  définissent un quadripôle théorique. Sur la surface sphérique  $r = R$ ,  $V_2$  est une fonction quadratique homogène des cosinus de direction. Les vecteurs propres de  $V_2$  déterminent les directions caractéristiques du quadripôle. Le vecteur propre appartenant à la valeur propre minimum (en valeur absolu) est perpendiculaire au plan des axes du quadripôle, tandis que les deux autres vecteurs propres sont les bissectrices interne et externe de ces axes.

En déplaçant l'origine des coordonnées au centre magnétique de Schmidt, le dipôle va coïncider avec la normale du plan du quadripôle, et les axes du quadripôle seront perpendiculaires l'un à l'autre. Le système orthogonal des axes du quadripôle sera obtenu du système orthogonal des vecteurs propres par une rotation de  $45^\circ$  autour de l'axe du dipôle.

En se basant sur les relations exposées, on peut tenter de suivre avec plus d'exactitude les mouvements des masses internes produisant le champ géomagnétique; le déplacement du centre magnétique peut être interprété comme l'effet d'un mouvement matériel translatoire, tandis que les vecteurs propres perpendiculaires les uns aux autres peuvent donner des renseignements sur les mouvements de caractère rotatoire.

## ОБ ИЗУЧЕНИИ ПОЛЯ ГЕОМАГНИТНОГО КВАДРУПОЛЯ

Л. ЗИЛАХИ—ШЕБЕШ

### РЕЗЮМЕ

Предполагая лишь наличие внутренних возмущающих масс, ряд Гаусса, характеризующий геомагнитное поле, имеет вид:

$$V = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m \lambda + h_n^m \sin m \lambda) P_n^m(\cos \Theta) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} = R \sum_{n=1}^{\infty} V_n,$$

где коэффициенты  $g_1^0, g_1^1$  и  $h_1^1$  — данные центрального диполя, а члены с индексами  $n > 1$  не имеют простого физического значения. По коэффициентам  $g_2^0, g_2^1, g_2^2, h_2^1$  и  $h_2^2$  можно вычислить данные теоретического квадруполья. На сферической поверхности, характеризующейся радиусом  $r = R$ ,  $V_2$  означает однородную второстепенную функцию косинусов угла. Собственные векторы, соответствующие значению  $V_2$ , определяют характерные для квадруполья направления. Собственный вектор, определяемый минимальным по абсолютной величине собственным значением, представляет собой нормаль к плоскости осей квадруполья, в то же время, остальные два собственных вектора являются соответственно внутренней и внешней биссектрисами осей квадруполья.

Если поместить начало координат в магнитном центре Шмидта, то диполь совпадает с нормалью к плоскости квадруполья, а оси квадруполья перпендикулярны друг другу. Ортогональная система осей квадруполья получается из ортогональной системы собственных векторов путем поворота его под углом  $45^\circ$  вокруг оси диполя.

Вышеуказанные соотношения по-видимому позволяют подробно проследить перемещение внутренних масс, создающих магнитное поле Земли, поскольку перемещение магнитного центра Земли может объясняться перемещением материальных масс, имеющих трансляционный характер, в то же время собственные векторы, идущие по парам перпендикулярно друг другу, дают сведения о движении вращательного характера.

# THE INTERNAL ENERGIES OF THE EARTH AS REVEALED IN THE COURSE OF EVOLUTION OF NATURAL SCIENCES

L. EGYED

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received June 8, 1961]

The surface of the Earth is constantly being altered by streams, wind precipitation, ice, and sea water. The changes due to these agents take place before our eyes and they are seen to be of enormous dimensions even if only historical spans of time are considered. The most essential source of energy responsible for these changes is the Sun, whose energy incident upon the surface of the globe is converted into mechanical work partly by the atmosphere and partly by the hydrosphere. Hence, the source of energy of the above-named phenomena being situated outside the Earth, all the effects of these external energies are subsumed under the concept of exogenic (geological) processes.

However, the surface of the Earth reflects the action also of other kinds of forces. Much more sluggish, these other forces exert themselves over much longer spans of time; nevertheless, the energies involved are of the same order of magnitude as in the case of the exogenic forces. Geological observations have proved, namely, that the awe-inspiring mountain chains of frequently unattainable summits are nothing less than eternal and, like everything else, pass through stages of birth, development, and decay. They commence as sea-covered mountain-chain embryos, are born and exalted in a sequence of majestic events; after having reached maturity, they fall prey to senile decay, being cut down into flatlands. It then takes a trained eye to discern their remnants left over by the processes of destruction. But the place of the old mountains is taken by new ones; so the history of our globe is the history of a periodically repeated rejuvenation of the relief. Brief intermezzos of this enormous tide of events are glimpsed to-day as more or less destructive and sometimes even catastrophic earthquakes occur.

Nor is the energy consumption of these processes inferior to that of the relief-destroying agents. However, rather than being supplied by the Sun, the energy requirements of relief-building are provided for by the internal energy reserves of the Earth. Hence, the processes of relief-building are called endogenic processes and they comprise the earthquakes, the formation of enormous fault-lines and the phenomena of mountain building.

Notwithstanding the above-said, as far as we are unable to specify more closely the energies involved in the endogenic processes, they remain but spectres haunting the earth sciences much more than scientific realities.

When inquiring into the nature of the endogenic energies, it is simplest to begin by considering their effects. The arising of belts of folded mountains must be due to these energies. In the layers of rock building up these mountains, the observers have established the existence of enormous fold structures. Moreover, the mountain chains themselves appear like the artistically arranged folds of some giant fabric before the eyes of the casual onlooker. That is why the first interpreters of mountain building have thought the folded mountains to be wrinkles on the Earth's skin, brought about by the cooling of its interior. By the laws of elementary physics, the shrinking of a cooling body was only to be expected. At that stage of scientific research, when even the fact of heat being a form of energy was not quite clear, the only source of energy in question for the endogenic processes was evidently heat. Almost up to the present, this was the prevalent idea as regards the interpretation of mountain building. The changes introduced mostly touched the nature of the heat source. Namely, at first, all the heat was considered to be the remains of the heat inherited at the time of origin of the Earth. Later on it was recognized that this amount of heat would have been quite inadequate and that the Earth would then have cooled down completely long ago. The situation was saved by the discovery of radioactivity and of the heat production of radioactive decay in the last years of the previous century. Finally, it was proved that all magmatic rocks contain minute amounts of radioactive substances. The heat supplied by radioactivity to the interior of the Earth was found to be considerable and in the eyes of some, this even put the idea of the cooling of the Earth in the background.

The heat reserves of the Earth can be estimated in the following manner. The amount of heat radiated into outer space is given by the terrestrial heat flow. In continental areas, its values are something like the following:

	$\mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{sec}$		$\mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{sec}$
South Africa .....	1,09	Spain .....	0,96
Great Britain .....	1,45	Switzerland .....	1,90
Hungary .....	2,40	Poland .....	1,23
Canada .....	0,96	USA .....	1,47
Canadian oilfields .....	1,50	Germany .....	1,44
Iran .....	0,87	Japan .....	1,35

Mean 1,39  $\mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{sec}$

Mean exclusive of Hungary 1,29  $\mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{sec}$

This suggests that the mean value of the terrestrial heat flow lies between 1,2 and 1,4  $\mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{sec}$ . In the later years, heat flow measurement techniques were developed also for oceanic areas. Measurements of this kind were carried out by BULLARD, MAXWELL and REVELLE and by VON HERZEN. The statistical analysis of the measurements revealed that in the oceanic areas the mean heat flow is 1,15  $\mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{sec}$ , although in some places it may be ten times more and in others, ten times less. The localities of exceptionally high heat flow generally are under intense tectonic strain, that is, elastic energy was converted there into heat that is responsible for the high heat flow anomaly.

A mean heat flow of 1,2  $\mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{sec}$  for the entire surface of the globe means for the period of one year the energy expenditure of  $8.10^{27}$  ergs.

Now there arises quite by itself the problem as to what mean concentration of radioactive elements is required to furnish this amount of heat and as to what kind of rock would fit best the picture thus obtained? There being known the heat production of the radioactive decay processes and the abundance of radioactive elements in the individual types of rock, this question is simple to answer. An estimate shows that the observed heat flow equals that of a hypothetical Earth consisting of dunite or pallasite.

Part of the energy production in the interior of the Earth is consumed by the movements of mountain building. Now mountain building is known to be a periodical phenomenon, that is, the internal energy invested into mountain building is periodically transformed into heat. Thus the Earth is a thermal engine. It is further known that the efficiency of heat engines is generally below 10 percent.

However, the Earth can by no means be a well constructed thermal engine, wherefore its efficiency cannot be more than a fraction of the above-stated value. Furthermore, a mechanism which converts heat cyclically into mechanical work must by all means be more efficient than a mechanism of simple cooling. Such a cyclic mechanism is involved in the hypothesis of magmatic convection currents. These latter are considered to be vortices of matter driven round and round by temperature differences. The drag of these vortices on the surface of the Earth is assumed to be responsible for the crustal movements and for the tangential stresses of mountain building. However, insofar as these magmatic currents do exist, they must be limited to the mantle of the Earth and that sets up a limit also for the masses involved and the amount of heat transferred. Hence, the masses involved in the currents must not exceed one-tenth of the total mass of the Earth. Considering further that the efficiency of a thermal engine of this sort is less by at least two orders of magnitude than that of an ordinary one, we get that the fraction of the internal heat reserve of the Earth that is turned into mechanical work can be no more than one-ten-thousandth of the total amount, that is, less than  $10^{24}$  ergs.

On the other hand, we can estimate the lower limit of the amount of work exerted by the endogenic energies. Part of the work consumed by mountain building is used to lift the accumulated masses of sediment to mountain height. If we consider the Alpine mountain system, we have a mass of sediments of roughly 40 000 kilometres length, 500 kilometres breadth and 60 to 1000 kilometres thickness, which was lifted by an average of 5 kilometres. This requires an energy expenditure of  $2 \cdot 10^{33}$ — $3 \cdot 10^{34}$  ergs in a round figure. In other words, the bare minimum is  $2 \cdot 10^{33}$  ergs. A cycle of mountain building takes 50 million years on the average. That is, the minimum annual amount of energy required for mountain building is something of the order of  $4 \cdot 10^{25}$  ergs. It follows from this simple consideration that the amount of heat converted into mechanical work by a magmatic-current mechanism is less by one order of magnitude than the amount of energy needed to do the job.

The above consideration proved that the heat reserves stored in the interior of the Earth are inadequate to explain the phenomena of tectonism.

The problem of provenance of internal energies cannot be solved properly except when taking into consideration the results of modern physics. The solution of the problem must be looked for in atomic structure and in the structure of space. Both of these are intrinsically related with the internal structure of the Earth. Concerning the latter, there are two irreconcilable points of view. One of them is the classical iron-core hypothesis, which proposes that the core of the Earth differs in chemical composition from the mantle. In earlier times the core was considered to consist of 10 percent nickel and 90 percent iron. Lately, instead of nickel the presence of olivine is assumed. Namely, KNOPOFF and UFFEN [1] have shown by a generalization of the Thomas-Fermi method that the density of a mixture of 90 percent iron and 10 percent olivine at a pressure of  $1,4 \cdot 10^{12}$  dynes/cm<sup>2</sup> just about equals the density of the core. However, high-pressure experiments by Soviet scientists [2] revealed that the incompressibility coefficient of such a mixture would be about  $4,5 \cdot 10^{12}$  dynes/cm<sup>2</sup>, whereas the same parameter derived from seismological observations for the interface of mantle and core is  $6,2 \cdot 10^{12}$  dynes/cm<sup>2</sup>, that is, higher by about 30 percent. This contradicts the assumption of an iron-core Earth model.

The other hypothesis is due to RAMSEY [3]. According to the Ramsey-model, the Earth is a more or less homogeneous silicic mass, presumably olivine-like in composition, in which the core-mantle interface is due to the rise of the pressure above a certain critical value. At this pressure, matter passes from the molecular-ionic state into a metallic one. This process involves indeed a sudden increase of density. This is the way the Gutenberg-Wiechert discontinuity is brought into existence. The energy needed for the phase transition to take place is somewhere about 10 eV per molecule. RAMSEY applied his considerations and calculations to hydrogen and helium. Lately, T. WADA [4]



has demonstrated the possibility of degeneration by pressure also for MgO and obtained for this substance a critical pressure ranging from 0,7 to  $1,5 \cdot 10^{12}$  dynes/cm<sup>2</sup>, with an energy of transition of 9 to 12 eV and a density jump at the transition into the metallic state of 54 percent. Now these data represent a fair approximation of the conditions prevailing in the core of the Earth.

WADA has introduced a still further hypothesis in developing his Earth model, namely that the *D*-shell of the mantle is in a degenerated state intermediate between the metallic and ionic states. Every kind of degeneration involves the consumption of considerable amounts of energy, wherefore the metallic and semi-metallic degenerated masses represent enormous energy reserves. However, these energies cannot be liberated except by changes of space structure.

Now DIRAC [5] reached the conclusion that the value of the gravity coefficient is dependent on a time parameter, varying in a first approximation inversely to the same. Furthermore, GILBERT [6] has shown that DIRAC's equation can be derived from the general theory of relativity, i. e. it is closely connected with the structure of space. In the consequence of DIRAC's equation, however, the surfaces of critical pressure gradually shift towards the centre of the Earth and the masses in a stage of higher degeneration pass into a lower stage or even into the normal state. This results in a volume increase of the globe. The amount of expansion is, by geological-geophysical considerations as well as by theoretical calculations [7, 8], 0,4 to 0,8 mm per year in the direction of the radius.

The abating of degeneration results in the release of part of the stored energy. We shall now attempt to show that the amount of energy thus liberated is capable of furnishing the internal energies involved in mountain building. In order to estimate the amount of energy liberated, we have only to consider the amount of work exerted by the re-generated matter on lifting the superincumbent mantle and crust against the gravity force. Using BULLEN's data, this is

$$E = 0,7 \cdot 10^{31} \Delta R/\text{year},$$

where  $\Delta R$  is the annual radius increase. The latter being somewhere between 4 and 8 tenths of a millimetre per year, the energy liberated annually ranges from  $2,8 \cdot 10^{29}$  to  $5,6 \cdot 10^{29}$  ergs, that is, it exceeds the annual heat loss by two orders of magnitude. However, only part of this energy is converted into work of deformation. The energy density of deformation is

$$w = \frac{1}{2} \lambda \theta^2 + \mu \sum' e_{ij}^2 = \frac{1}{2} \kappa \theta^2 + \mu \left( \sum' e_{ij}^2 - \frac{1}{3} \theta^2 \right).$$

Taking the second term to be roughly equal to the first, we have

$$w = k \theta^2$$

where now  $k$  is the coefficient of incompressibility and  $\theta$  the specific change of volume.  $\theta$  can be computed by the formula  $\theta = 2(1 - \sigma) \frac{dR}{R}$  and, as a result, we have an annual increase of  $\theta$  by  $1,15 \cdot 10^{-10}$ , equalling the relative volume change  $\theta_0$  of the first year. Since  $\theta$  can be expressed with the coefficient of incompressibility and with the stress,

$$\theta = \frac{2p}{3k},$$

we can compute its maximal value by taking into consideration the maximum of  $p$ . In the upper part of the mantle, strength is of the order of  $10^{10}$  dynes/cm<sup>2</sup>. Hence,

$$\theta_{\max} = 5,75 \cdot 10^{-3},$$

and it takes  $\frac{\theta_{\max}}{\theta_0} = 5 \cdot 10^7$  years for  $\theta_{\max}$  to set in.

The deformational energy content of the volume  $V$  is  $W = k \theta^2 V$ . In the neighbourhood of the maximum deformation the annual increase of the energy of deformation is

$$\frac{dW}{dt} = 2k \theta \cdot V \cdot \frac{d\theta}{dt}.$$

Since  $d\theta/dt = 1,15 \cdot 10^{-10}$ ,  $k = 1,16 \cdot 10^{12}$  dynes cm<sup>2</sup> and  $\theta_{\max} = 5,75 \cdot 10^{-3}$  and  $V = 3,1 \cdot 10^{25}$  in the case of the uppermost 60 kilometres, that is, in the zone of shallow earthquakes, whereas  $k = 3,9 \cdot 10^{12}$  and  $V = 0,892 \cdot 10^{27}$  for the entire mantle, the total energy accumulated must fall between  $4,75 \cdot 10^{25}$  and  $4,6 \cdot 10^{27}$  ergs per year, that is, even at a pessimistic estimate the available mechanical energy suffices to cover the requirements of mountain building.

It is not less obvious that the yearly  $3,5 \cdot 10^{29}$  ergs energy also suffices to bring about continental drift.

There is, however, still another energy reserve which is capable of doing the work of mountain building, and that is precisely the density distribution around the Gutenberg channel, the origin of which is in a close connection with the origin of the Earth itself. The present author has shown, namely, by making use of the Dirac-equation [9], that the density reduced to surface pressure is higher above the Gutenberg channel than below. That is, if there is a deep fracture in the Earth's crust and the pressure decreases around it,

there arises an upward-directed hydrostatic force which may also play an important part in lifting the mountain chains.

In the above we have also proved that the source of the internal energies of the Earth is the huge amount of molecular energy stored in the Earth's interior as well as the peculiarities of space structure. The interior of the Earth and the space it occupies form from, the point of view of energy, a dialectical unity.

#### REFERENCES

1. KNOPOFF, L. and UFFEN, R. J.: The density of compounds at high pressure and the state of the Earth's interior. *J. Geoph. Res.* **59** (1954) 471—484.
2. ALTSHULER, L. V., KRUPNIKOV, K. K., LADENEV, B. N., SHUTCHIKIN, V. J., and BRASHNIK, M. J.: Dynamical compressibility and the equation of state of iron under high pressure. *Soviet Physics. JETP.* **34**, 7 (1958) 606—614.
3. RAMSEY, W. H.: On the nature of the Earth's core. *Monthly notices R. A. S. Geoph. Suppl.* **5** (1949) 409—426.
4. WADA, T.: On origins of the region C and the core of the Earth. *Disaster Prevention Res. Inst. Bulletin* **38**, (1960) 1—64.
5. DIRAC, P. A. M.: *Proc. Roy. Soc. A.*, **165** (1938) 199.
6. GILBERT, C.: Dirac's cosmology and the general theory of relativity. *Monthly notices R. A. S.* **116**, (1956) 684—690.
7. EGYED, L.: A new dynamic conception of the internal constitution of the Earth. *Geol. Rundschau*, **46** (1957) 101—121.
8. EGYED, L. and STEGENA, L.: Physical background of a dynamical Earth model. *Zeitschr. f. Geoph.* **24** (1958) 108—115.
9. EGYED, L.: On the origin and constitution of the upper part of the Earth's mantle. *Geol. Rundschau* **50** (1960) 251—258.

#### SUMMARY

The author has demonstrated that the internal heat reserves of the Earth do not suffice to bring about the crustal movements and mountain building, even if the heat generated by radioactive decay is taken into consideration. However, if the interatomary forces on which the dynamical Earth model and therewith the expansion of the Earth is based are also considered, the liberation of energy connected with the expansion of the Earth is enough to cover the energy requirements of the aforesaid processes.

#### DIE INNEREN ENERGIEN DER ERDE IM LICHT DER ENTWICKLUNG DER NATURWISSENSCHAFTEN

L. EGYED

#### ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser weist nach, daß die innere Wärme der Erde auch unter Berücksichtigung der radioaktiven Wärmeproduktion nicht zum Antrieb der Krustenbewegungen und der Gebirgsbildung hinreicht. Wenn man jedoch die interatomaren Kräfte in Betracht zieht, auf welchen das dynamische Erdmodell und auch die Expansion der Erde beruht, so deckt die bei der Expansion freiwerdende Energie die Energiebedürfnisse der genannten Prozesse.

LES ÉNERGIES INTERNES DE LA TERRE ET LEUR RAPPORT  
AVEC LE DÉVELOPPEMENT DES SCIENCES NATURELLES

L. EGYED

RÉSUMÉ

L'auteur démontre que la réserve de chaleur interne de la Terre, y compris la chaleur radioactive, ne suffit pas à produire les mouvements de l'écorce et l'orogénèse. Mais si l'on considère les forces interatomiques sur lesquelles repose le modèle dynamique du globe, ainsi que l'expansion, alors la libération d'énergies produite pendant l'expansion fournit les énergies nécessaires.

ВНУТРЕННИЕ ЭНЕРГИИ ЗЕМЛИ И ИХ СВЯЗЬ С РАЗВИТИЕМ  
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Л. ЭДЬЕД

РЕЗЮМЕ

Автор показывает, что внутренние энергоресурсы Земли, включая сюда и радиоактивное тепло, недостаточны для создания движения земной коры и горообразование. Однако, если учесть интератомарные силы, на которых основывается динамическая модель Земли, следовательно и теория экспансии, необходимые энергии получаются за счет энергий, выделяющихся в связи с растяжением Земли.

# ТЕКТОНОФИЗИКА И ПРОГНОЗ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ\*

М. В. ГЗОВСКИЙ

КАНД. ГЕОЛОГИЧЕСКИХ И МИНЕРАЛОГИЧЕСКИХ НАУК

Институт геофизики Академии наук СССР, Москва

Прогноз землетрясений выражается сейчас в форме карт сейсмического районирования. Они составляются в СССР в масштабах  $10^{-6}$  и  $10^{-5}$  и имеют для строительных организаций силу закона [37]. Методы прогноза находятся в стадии разработки. В настоящее время они развиваются в соответствии со следующими представлениями.

1. Будущие землетрясения ожидаются в тех же местах, где они уже возникали и считаются не менее опасными, чем прежние. Поэтому составляются карты, отражающие характеристики прошлых землетрясений. Техническая характеристика силы воздействия землетрясения на сооружения в каждой точке местности выражается в баллах. Графическое изображение принятой в СССР 12-балльной шкалы [33] приведено на фиг. 1. Среднее расстояние от эпицентра до следующих одна за другой границ зон с равной силой сотрясения показано на фиг. 2 согласно [53, 35, 50]. Наименьшее и наибольшее расстояния отличаются от среднего примерно на  $\frac{1}{5}$  его величины.

Обобщающими физическими характеристиками землетрясения в целом, основанными на инструментальной записи являются: 1) Магнитуда  $M$  [57—61, 45—47], связанная с максимальным баллом  $I_{\max}$  в эпицентре эмпирическими формулами [48, 54, 74, 80]. При глубине очага  $h$  меньше 60 км:

$$I_{\max} = 1,5 M - \delta. \quad (1)$$

При глубинах 8, 15, 30, 50, соответственно,  $\delta$  равно: 0, 1, 2, 3, 2) Количество энергии (в джоулях), излученной из очага в форме сейсмических волн  $U$ , которое сопоставляется с  $M$  [61, 45, 46, 75].

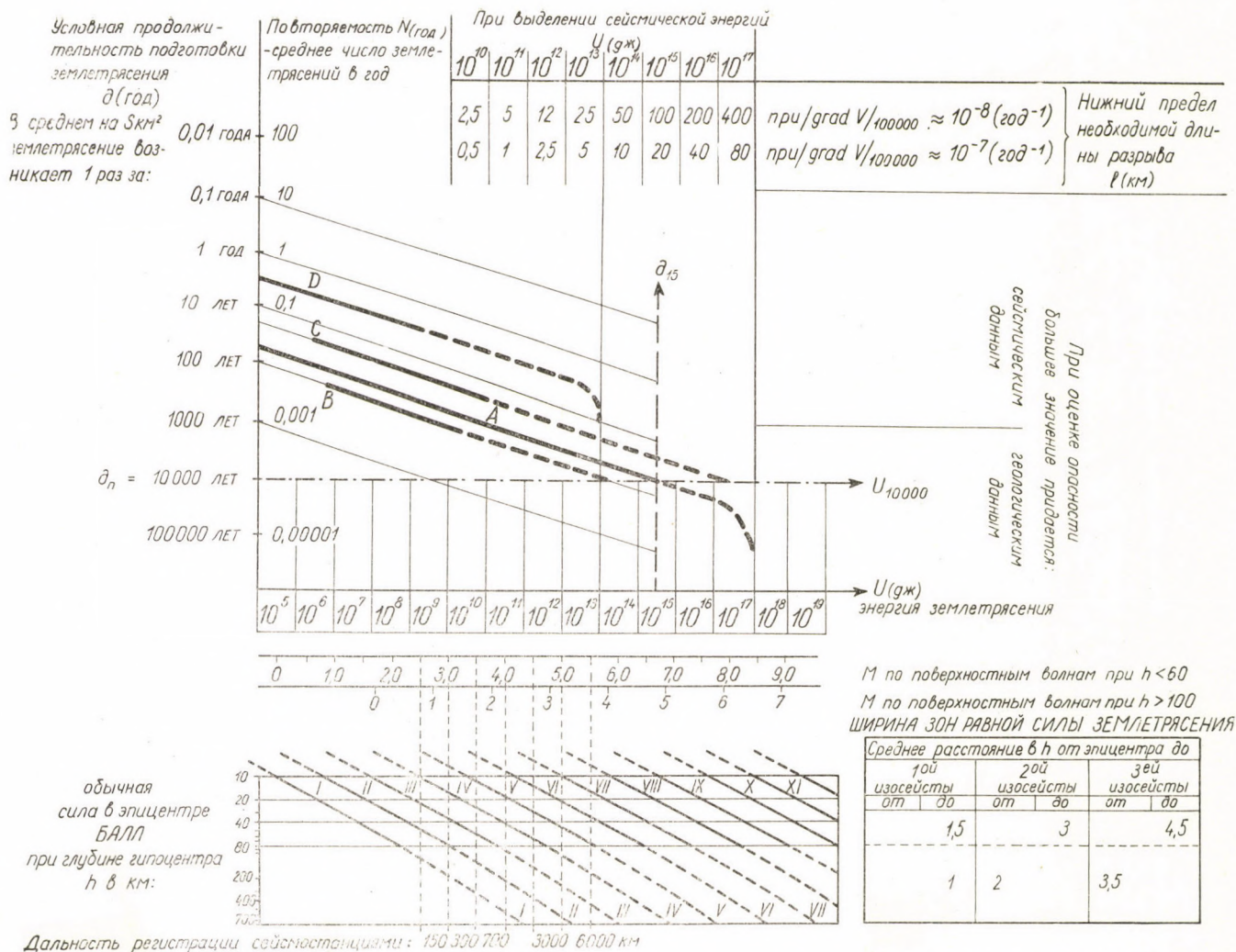
Обычно

$$\lg U = 1,5 M + 5. \quad (2)$$

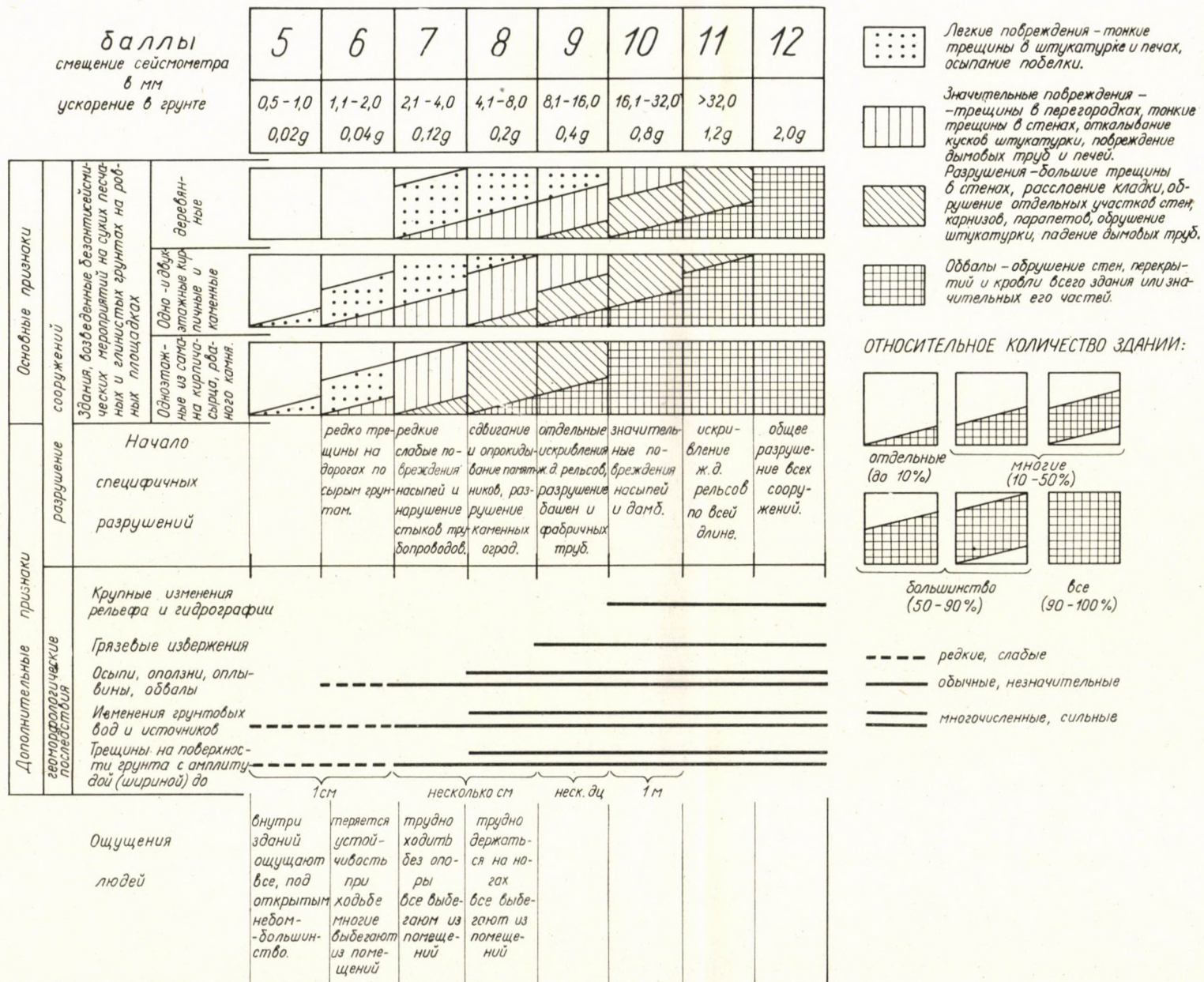
Из (1) и (2) вытекает связь между энергией и максимальным баллом

$$I_{\max} = \lg U - 5 - \delta \quad (3)$$

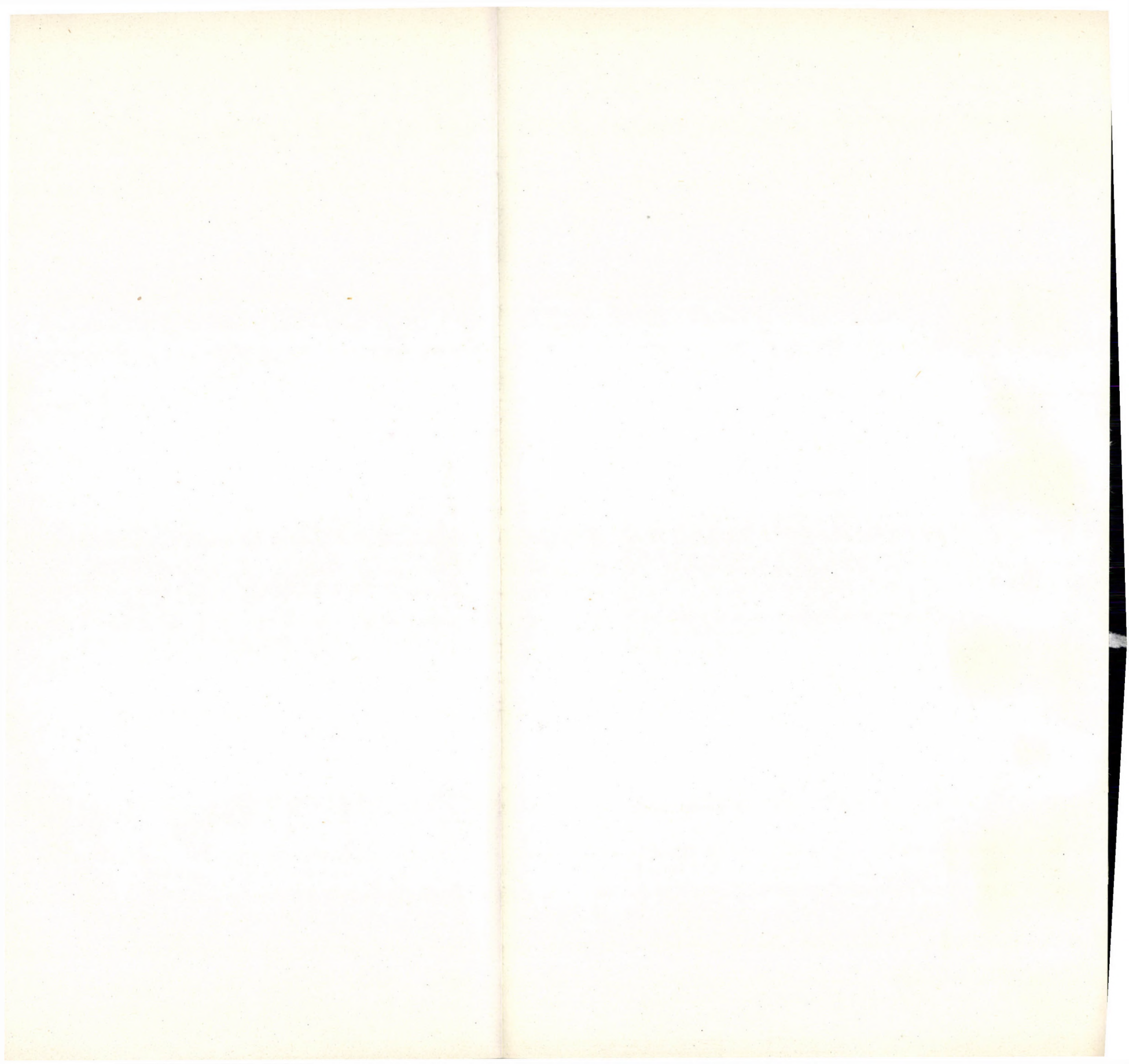
\* Доклад в Академии наук Венгрии 25 апреля 1961 г.



Фиг. 2. Схема оценки сейсмической опасности. А, В, С, D — кривые повторяемости для различных районов. По сравнению с районом А, район В менее опасен, район С — более опасен, район D — менее опасен, несмотря на высокую повторяемость слабых землетрясений (он имеет меньшую величину верхнего предела энергии)



Фиг. 1. Диаграмма последствий сильных землетрясений (шкала баллов по С. В. Медведеву)





11. В каждом районе землетрясения с определенной энергией возникают с некоторой средней повторяемостью, которая закономерно уменьшается по мере увеличения энергии.

Это представление было принято как ведущее при прогнозе землетрясений [9, 20, 31, 42]. Для многих районов [6, 7, 36, 41, 42, 51—54, 67—68, 76—78], установлено, что логарифм числа землетрясений  $N$ , приходящихся в среднем на единицу площади и на один год, связан линейной зависимостью с логарифмом энергии  $U$ :

$$\lg N = \lg N_0 - \nu (\lg U - \lg U_0) \quad (4)$$

где:  $N_0$  повторяемость землетрясений с эталонной энергией  $U_0$ ;  $\nu$  — угловой коэффициент линейного графика величиной от 0,26 [36] до 0,6 [20], обычно  $\nu = 0,45$ . Используя (2), вместо энергии в (4) может быть введена величина  $M$ :

$$\lg N = \lg N_0 - 1,5 \nu (M - M_0). \quad (5)$$

Здесь:  $M_0$  — магнитуда землетрясений с энергией  $U_0$ .

Если очаги землетрясений, в среднем, распределены равномерно по всей толще земной коры от 5 км до 50 км, то число землетрясений  $N_k$  с определенной энергией  $10_g^{k_{\text{ев}}}$  должно быть приблизительно равно числу землетрясений  $N_l$  с такой силой  $I_{\text{max}}$  в эпицентре, которая соответствует глубинам очагов около 15 км. Согласно (1) и (3) для них

$$I_{\text{max}} = \lg U - 6. \quad (6)$$

В этих случаях вместо (4) можно ожидать весьма важное для прогноза землетрясений соотношение

$$\lg N_y = \lg N_{y(0)} - \nu (I - I_0). \quad (7)$$

Тогда при полевых исследованиях по данным о слабых землетрясениях можно сперва построить график зависимости (4) повторяемости от энергии (фиг. 2); затем вместо энергии написать вытекающие из (6) баллы и рассматривать тот же график как изображение связи (7) между максимальным баллом и повторяемостью, не испытывающей влияния глубины очагов.

Карты с перечисленными характеристиками землетрясений необходимы для прогноза землетрясений, но все же недостаточны. Во-первых, полноценная статистика имеется лишь для короткого промежутка времени и относится к слабым землетрясениям. Повторяемость более редких сильных землетрясений устанавливается менее надежно и в значительной мере

путем экстраполяции данных о слабых землетрясениях. Во-вторых, временные флюктуации сейсмического режима могут привести к значительным ошибкам при такой экстраполяции. В-третьих, надежные чисто сейсмические критерии для определения верхнего предела энергии землетрясений, за который график повторяемости не следует экстраполировать, в настоящее время отсутствуют. Для преодоления этих затруднений нужно обращаться к рассмотрению геологических факторов, определяющих энергию и повторяемость землетрясений.

III. Для каждого района в результате тектонофизической интерпретации данных о его глубинном строении, истории и механизме тектонических нарушений и о современных тектонических движениях, в принципе, можно приблизительно вычислить основные параметры графика повторяемости землетрясений, средние для продолжительного времени. Непосредственной причиной землетрясения является возникновение или обновление тектонического разрыва сколового типа. Образование разрыва является длительным процессом. Он состоит из многих импульсов, каждый из которых включает продолжительную стадию подготовки (сопровождаемую слабыми сейсмическими толчками), кратковременную стадию основного смещения, вызывающего сильное землетрясение, и заключительную стадию, с которой связаны афтершоки. Длительность подготовки основного смещения  $\delta$  зависит от величины разрыва (постоянная  $\delta_0$ ), интенсивности касательных напряжений  $\tau$  и прочностных свойств разрушаемой среды — условно мгновенной прочности  $P_{1\tau}$  и углового коэффициента  $\zeta$  графика зависимости прочности от логарифма длительности действия напряжений. Наиболее соответствующей известным фактам является зависимость

$$\delta = \delta_0 e^{\frac{P_{1\tau} - \tau}{\zeta}}. \quad (8)$$

Она показывает, что в геологических условиях, благодаря большой длительности тектонических деформаций образование разрывов может происходить при различной интенсивности касательных напряжений  $\tau$ . Число основных смещений по разрывам определенной величины, приходящееся в среднем на единицу времени, обозначаемое  $N_f$  и называемое в дальнейшем повторяемостью разрывов определенной длины, равно:

$$N_f = \frac{1}{\delta} = N_{f(0)} e^{-\frac{P_{1\tau} - \tau}{\zeta}}. \quad (9)$$

Следовательно

$$\ln N_f = \ln N_{f(0)} - \frac{P_{1\tau}}{\zeta} + \frac{\tau}{\zeta}. \quad (10)$$

Если напряжения возрастут от значения  $\tau_0$  до значения  $\tau_M$ , то соответствующие им повторяемости  $N_{f(0)}$  и  $N_{f(m)}$  при одной и той же величине разрывов связаны соотношением

$$I_n N_{f(m)} = I_n N_{f(0)} + \frac{\tau_n - \tau_0}{\zeta} . \quad (11)$$

Окружающее разрыв пространство, в котором происходит перераспределение энергии упругой деформации (увеличение в одних местах и уменьшение в других), приводящее в общем к ее уменьшению, называется очагом землетрясения. Отношение количества энергии, освобождаемой при этом в среднем из единицы объема очага к первоначальному количеству потенциальной энергии в единице объема обозначается  $\omega$ . Лишь часть этой энергии, отношение которой к освободившейся энергии обозначается  $n$ , превращается в энергию сейсмических волн. Первоначальное количество энергии  $U_p$  в очаге зависит от его объема  $v$ , модуля условно мгновенного сдвига среды  $G_1$  и первоначальной интенсивности касательных напряжений  $\tau$  (рассматривается однородное поле напряжений):

$$U_p = \frac{\tau^2}{2G_1} v . \quad (12)$$

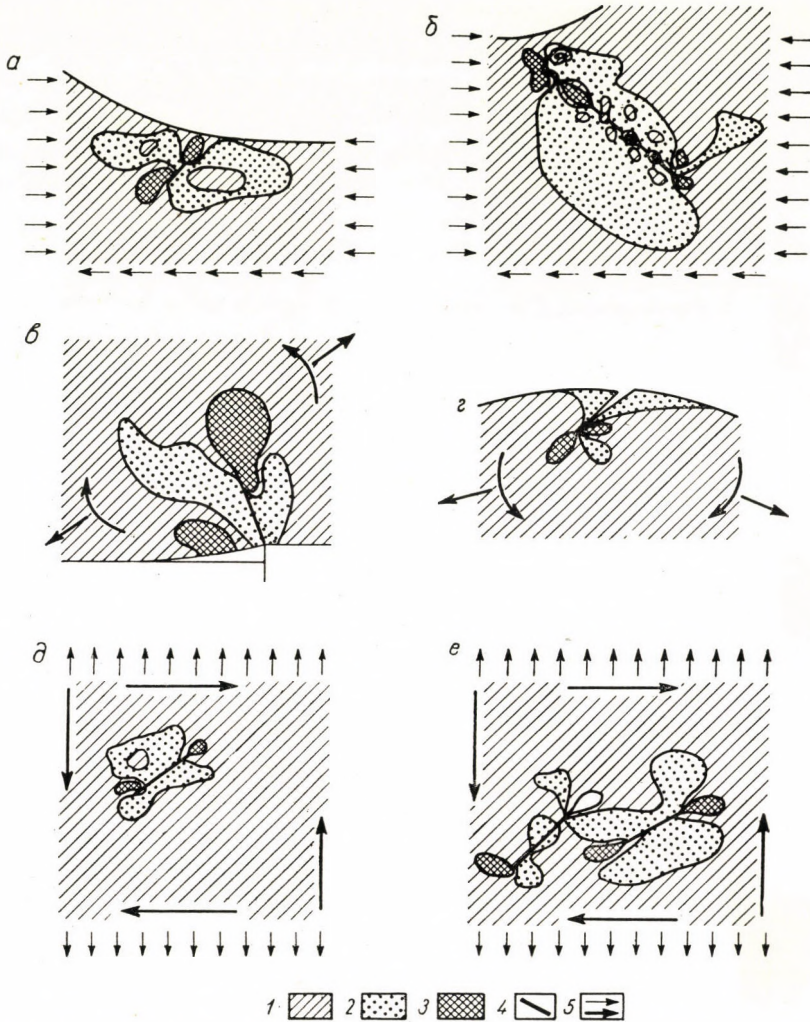
Энергия землетрясения  $U$  составляет часть этого количества энергии, зависящую от коэффициентов  $\omega$  и  $n$ :

$$U = n\omega \frac{\tau^2}{2G_1} v . \quad (13)$$

О величине объема очага  $v$  и коэффициенте  $\omega$  сейчас можно составить лишь приближенное представление, основываясь на испытаниях моделей (фиг. 3). Объем очага можно считать пропорциональным третьей степени длины образовавшейся (обновившейся) части разрыва  $l$ :

$$v = \lambda l^3 \quad (14)$$

введя безразмерный коэффициент  $\lambda$ , поддающийся определению на моделях. Кроме того можно составить весьма приближенные представления об объеме очага и основываясь на результатах обследования тех сильных землетрясений, при которых вызвавшие их разрывы выходят на поверхность. Получаемые таким образом представления об объеме очага согласуются с результатами испытания моделей. Модуль  $G_1$  измеряется сейсмическим методом.



Фиг. 3. Схема изменения напряженного состояния вокруг разрывов при различных типах деформации (результаты оптического исследования моделей): 1 — напряженное состояние не изменилось; 2 — касательные напряжения уменьшились; 3 — касательные напряжения увеличились; 4 — разрывы вдоль направления главных касательных напряжений; 5 — внешние усилия

Коэффициент  $n$  определяется при взрывах. Оставшуюся неизвестной интенсивность касательных напряжений можно ставить в зависимость от вязкости среды  $\zeta_{III}$  при длительной пластической деформации, градиента скорости тектонических движений верхней части земной коры и коэффициента  $\Phi$  пропорциональности между скоростью деформации вещества в области очага и градиентом скорости тектонических движений коры:

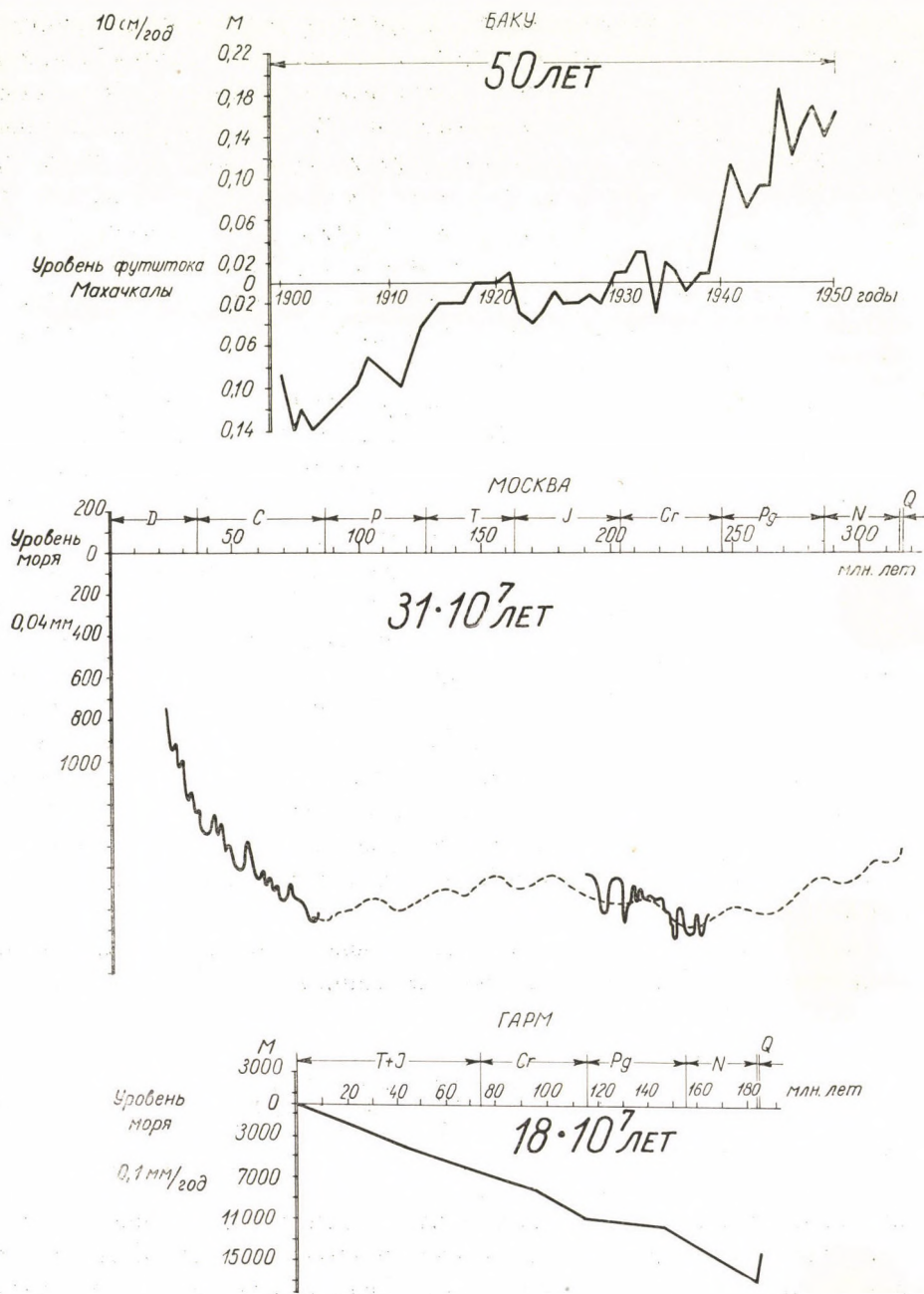
$$\tau \approx 2\Phi\eta_{III} |\text{grad } V|_m. \quad (15)$$

В принципе, в (15) подразумевается градиент полного вектора скорости. Объективные методы измерения разработаны лишь для вертикальной составляющей, которая в сейсмически активных районах Советского Союза несомненно достигает большой величины (фиг. 4). Значение горизонтальной составляющей дискуссионно, вероятно, она незначительна. Величина градиента скорости тектонических движений вычисляется как средняя для полосы в несколько км шириной и как средняя для определенного промежутка времени [18]. Скорость тектонических движений неравномерна во времени, известны ее изменения с периодами в сотни и десятки млн. лет, в сотни и десятки тысяч лет, в десятки и единицы лет (фиг. 4 и табл. 2). Такая же сложная периодичность существует и для градиента скорости. Поэтому среднее значение градиента может сильно зависеть от продолжительности времени осреднения (табл. 3). Согласно (15), периодические изменения градиента скорости должны сопровождаться периодическими изменениями интенсивности напряжений в земной коре. Использование среднего значения градиента за продолжительное время для прогноза землетрясений возможно лишь в том случае, если нет признаков существенного изменения тектонических движений на протяжении этого времени. В Средней Азии были отмечены примеры разных соотношений между градиентом скорости для конца четвертичного периода и для неогенового периода. Так, на северном склоне Киргизского хребта градиент с конца неогена до настоящего времени заметным образом не менялся. На северном склоне Заалайского хребта градиент уменьшился в конце четвертичного периода, по сравнению с концом неогенового. На северном склоне хребта Петра Первого он во второй половине четвертичного периода не только увеличился, но и изменил знак на противоположный, по сравнению с неогеновым периодом [19, 20].

Подстановка (14) и (15) в (13) дает основное выражение для оценки энергии землетрясений по геологическим данным

$$U \approx 2 n \omega \lambda \Phi^2 \cdot \frac{\eta_{11}^2}{G_1} \cdot l^3 |\text{grad } V|_n^2. \quad (16)$$

Наибольшие трудности возникают сейчас в связи с определением вязкости среды. Общая связь энергии с величиной разрывов и градиентом скорости тектонических движений (16) качественно подтверждается во всех сейсмически активных районах [11]. Количественная проверка уравнения (16) только начинается. Первые вычисления показали удовлетворительную сходимость результатов измерений в поле и на моделях. Так, например, для Средней Азии



Фиг. 4. Кривые тектонических движений земной коры, вычисленные по суммарным смещениям за единицы лет (Баку — максимальная скорость до 10 см/год); за единицы миллионов лет (Москва — максимальная скорость 0,04 мм/год) и за десятки миллионов лет (Гарм — максимальная скорость 0,1 мм/год). Баку и Гарм находятся на краю альпийской геосинклинальной области — Москва — в центре древней платформы

Таблица 1

Скорости вертикальных тектонических движений земной коры

Методы измерения	Вычисленные как средние для	Районы с высокой подвижностью — области геосинклинальные и послеплатформенной активизации (вторично подвижные)	Районы с малой подвижностью (платформы)
Геологические	Десятков миллионов лет	десятые миллиметра в год	сотые миллиметра в год
	Миллионов лет	миллиметры в год	до 1 мм в год
	Тысяч лет	до 1 см в год	миллиметры в год
Геофизические (включая геодезические)	Сотен и десятков лет	сантиметры в год	до 1 см в год
	Истинные	до 10 см в год	сантиметры в год

Таблица 2

Средняя величина градиента скорости вертикальных тектонических движений (средняя скорость изменения наклонов) земной коры за 1 год

Методы измерения	Вычисленные как средние для времени порядка	В областях			
		геосинклинальных и послеплатформенной активизации (вторично подвижных)		платформенных	
		рад/год	сек/год	рад/год	сек/год
Геологические	$10^7$ (десятки млн. лет)	$10^{-8}$ $10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-3}$ $2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-5}$
	$10^6$ — $10^5$ (единицы млн. и сотни тыс. лет)	$10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-2}$	—	—
	$10^4$ (десятки тыс. лет)	$10^{-6}$ $10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-1}$ $2 \cdot 10^{-4}$	$10^{-8}$ —	$2 \cdot 10^{-3}$ —
Геофизические (включая геодезические)	$10^0$ — $10+1$ (единицы и десятки лет)	—	—	$10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-2}$
	Истинные современные $10^0$ — $10^{-1}$ (годы и месяцы)	$5 \cdot 10^{-5}$	10	$10^{-5}$	2

Измерены в поле	Измерены на моделях	Вычислены по (16) и (3)
$(\text{grad } V)_{100 \cdot 000} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ год}^{-1}$	$\Phi = 3$	$U = 4 \cdot 10^{22} \text{ эрг} =$
$l = 30 \text{ км}$	$\lambda = 1$	$= 4 \cdot 10^{15} \text{ дж}$
$G_1 = 3 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2$	$\omega = 0,1$	$I_{\text{max}} = 9 \text{ баллов}$ (при глубине очага 10—20 км)
$n = 0,01$	$\omega \lambda \Phi^2 = 0,9$	
$\eta_{\text{III}} = 1 \cdot 10^{22} \text{ пуаз}^*$		
$I_{\text{max}} = 9 \text{ баллов}$		

Поскольку для ряда сильных землетрясений известны энергия, длина разрыва и градиент скорости по (16) можно находить величину произведения

$$\Omega = 2n\omega\lambda\Phi^2 \frac{\eta_{\text{III}}^2}{G_1}.$$

Если измерять  $l$  в км,  $(\text{grad } V)_{100 \cdot 000}$  в  $200^{-1}$ , энергию в дин, то для Средней Азии  $\Omega = 10^{25}$ . В единицах CGS имеем  $\Omega = 10^{30} \text{ дин.сек}^2/\text{см}^2$ . Эта величина использовалась затем для выяснения того, какие сочетания длины разрывов и градиента скорости необходимы для возникновения землетрясений различной энергии (фиг. 2). Результаты ряда расчетов сведены в первом варианте сейсмогеологической таблицы (табл. 3).

Перечисленные представления лежат в основе следующих гипотез, связанных с сейсмическим районированием:

*Гипотеза I.* В каждом районе верхний предел энергии землетрясения  $U_{\text{max}}$  зависит от наибольших значений тех факторов, с которыми сопоставляется эта энергия в (16). Вероятно, наибольшую роль играют максимальное значение градиента скорости тектонических движений  $(\text{grad } V)_{\text{max}}$  и наибольшая длина отдельных разрывов  $l_{\text{max}}$ :

$$U_{\text{max}} \approx 2n\omega\lambda\Phi^2 \frac{\eta_{\text{III}}^2}{G_1} l_{\text{max}}^3 |\text{grad } V|_{\text{max}}^3. \quad (17)$$

В каждом тектоническом регионе, если все входящие в (17) величины кроме  $l_{\text{max}}$  и  $(\text{grad } V)_{\text{max}}$  считать постоянными, можно вычислить таблицу типа изображенной на фиг. 2 справа вверху таблицы для Тянь-Шаня, которая показывает какие сочетания  $(\text{grad } V)_{\text{max}}$  средней для  $10^5$  лет и длины разрывов необходимы для возникновения здесь землетрясений с различной предельной энергией. Такие таблицы надо будет составить для каждого крупного тектонически единого региона, так как возможны изменения и остальных множителей уравнения (17).

\* Вязкость принимается по совокупности данных о строении коры на глубинах очагов землетрясений и результатов лабораторных определений вязкости горных пород.



Таблица 3  
Сейсмогеологическая таблица  
(вариант 1)

Группа землетрясений	Сейсмометрические особенности сильных землетрясений						Условия возникновения сильных землетрясений														
	Расстояние от эпицентра $\Delta$					Логарифм относительной величины максимальной амплитуды поверхностных волн при $\Delta$ больше 200 км $M$	Логарифм энергии землетрясения в джоулях $\lg U$ [дж]	Объем очага		Верхний предел логарифма потенциальной энергии предполагаемого объема очага	Протяженность образовавшегося (обновившейся части) разрыва при условии постоянства остальных факторов, определяющих энергию землетрясения		Площадь образовавшегося (обновившейся части) разрыва		Амплитуда относительного перемещения крыльев разрыва при объеме очага $V_{\text{pos}}$ и протяженности $l_{\text{pos}}$		Наблюдавшаяся или считающаяся наиболее вероятной (при условии постоянства всех остальных факторов, определяющих энергию землетрясений) величина градиента скорости вертикальных тектонических движений ( $\text{grad } V_{\text{m}}$ , средняя для 2—5 км и последних:				
	Около 10 км	Около 100 км		Около 1000 км				Н и ж н и й предел $V_{\text{min}}$	Считается наиболее вероятным $V_{\text{pos}}$		По простиранию		По падению		Нижний предел $S_{\text{min}}$	Считается наиболее вероятной $S_{\text{pos}}$	Верхний предел $a_{\text{max}}$	Наблюдалась или считается наиболее вероятн. $a_{\text{pos}}$	100—600 тысяч лет	1—10 тысяч лет	5—50 лет
	Наибольшее смещение в грунте	Период объемных волн	Наибольшее смещение в грунте в поперечных объемных и поверхностных волнах	Период поверхностных волн	Наибольшая амплитуда поверхностных волн	Нижний предел $l_{\text{min}}$	Наблюдается или считается наиболее вероятная $l_{\text{pos}}$			Нижний предел $d_{\text{min}}$	Считается наиболее вероятная $d_{\text{pos}}$										
I	(> 100 см)		> 50 мм		> 5 мм	> 7,5	> 16,25	3000 км <sup>3</sup>	70 000—2 500 000)	19—20	10 км	30—100 км	5 км	(15—50 км)	50 км <sup>2</sup>	(450—5000 км <sup>2</sup> )	20—70 м	5—12 км	К. $10^{-7}$ К. $10^{-8}$ 1/год	$m \cdot 10^{-6}$ $m \cdot 10^{-7}$ 1/год	$q \cdot 10^{-5} - q \cdot 10^{-6}$ 1/год
II	(10—100 см)	$10^{-1}$ сек	5,5—50 мм	5—15 сек	0,5—5,0 мм	6,5—7,5 (6,5—7,25)	14,75—16,25	50 км <sup>3</sup>	(8 000—70 000 км <sup>3</sup> )	18—19	(3—10 км)	15—30 км	1,5—5 км	(7,5—15 км)	4,5—50 км <sup>2</sup>	(100—450 км <sup>2</sup> )	10—20 м	2,5—5 м)	0,3К. $10^{-7}$ 0,3К. $10^{-8}$ 1/год	0,3 $m \cdot 10^{-6}$ 0,3 $m \cdot 10^{-7}$ 1/год	0,3 $q \cdot 10^{-5}$ 0,3 $q \cdot 10^{-6}$ 1/год
III	(1—10 см)		0,5—5,0 мм		0,05—0,5 мм	5,5—6,5 (5,25—6,25)	13,3—14,75	4 км <sup>3</sup>	(70—8 000 км <sup>3</sup> )	16—18	(0,5—3 км)	3—15 км	0,25—1,5 км	(1,5—7,5 км)	0,12—4,5 км <sup>2</sup>	(4,5—100 км <sup>2</sup> )	2—10 м	(0,5—2,5 м)	0,1К. $10^{-7}$ 0,1К. $10^{-8}$ 1/год	0,1 $m \cdot 10^{-6}$ 0,1 $m \cdot 10^{-7}$ 1/год	0,1 $q \cdot 10^{-5}$ 0,1 $q \cdot 10^{-6}$ 1/год

$k, m, q$  — постоянные для каждого района коэффициенты, величина которых может быть от 1 до 10.



*Гипотеза II.* В зонах с однородным геологическим строением, при постоянстве режима тектонических деформаций, различия в энергии землетрясений определяются в основном длиной разрывов  $l$ . Если отношение уменьшения логарифма числа разрывов  $-\Delta \ln N_f$  к увеличению логарифма их длины  $+\Delta \ln l$  обозначать:

$$\frac{-\Delta \ln N_f}{+\Delta \ln l} = 3\nu \quad (18)$$

то вследствие (16) окажется, что  $\nu$  явится угловым коэффициентом линейного эмпирического графика повторяемости землетрясений:  $\Delta \ln N = -\nu \Delta \ln U$ . Существует график для сопоставления длины разрывов, энергии землетрясений и повторяемости разрывов (и землетрясений), относящийся к зоне с постоянной средней величиной градиента скорости и одним и тем же геологическим строением [16]. Нужно думать, что при разных механизмах деформирования среды величина  $\nu$  может быть различной.

*Гипотеза III.* Увеличение градиента скорости тектонических движений  $(\text{grad } V)_n$  по сравнению с его эталонным значением  $(\text{grad } V)_0$ , указывает на усиление повторяемости землетрясений  $N_{n(U)}$  с заданной энергией  $U$ , по сравнению с их эталонной повторяемостью  $N_{0(U)}$ :

$$\begin{aligned} \ln N_{n(U)} \approx \ln N_{0(U)} + \frac{2\eta_{III} \Phi}{\zeta} [|\text{grad } V|_n - |\text{grad } V|_0] + \\ + 2\nu \ln \frac{|\text{grad } V|_n}{|\text{grad } V|_0} + \ln \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (19)$$

Необходимо учитывать также тип деформации коры ( $\Phi$ ), ее вязкость ( $\eta_{III}$ ) и коэффициент  $\zeta$  зависимости прочности от логарифма длительности действия напряжений. Важна общая протяженность  $\mathcal{L}$  зоны повышенных значений  $(\text{grad } V)$  (зоны разрывов).

Эта гипотеза развивает опубликованные раньше представления [16]. Она вытекает из (11) после учета ряда поправок.

*Гипотеза IV.* Увеличение градиента скорости тектонических движений  $(\text{grad } V)_n$  по сравнению с его эталонным значением  $(\text{grad } V)_0$  указывает на увеличение энергии землетрясений  $U_{n(N)}$  с определенной выбранной нами повторяемостью  $N$  (по сравнению с энергией  $U_{0(N)}$  при эталонном значении градиента скорости  $(\text{grad } V)_0$ ):

$$\begin{aligned} \ln U_{n(N)} \approx \ln U_{0(N)} + \frac{2\eta_{III} \Phi}{\nu \zeta} [|\text{grad } V|_M - |\text{grad } V|_0] + \\ + 2 \ln \frac{|\text{grad } V|_M}{|\text{grad } V|_0} + \ln \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (20)$$

При изменениях величины градиента скорости на энергию землетрясений с заданной повторяемостью, кроме того, должны влиять изменения типа деформации коры ( $\Phi$ ), вязкости ( $\eta_{III}$ ) и прочностных свойств ( $\zeta$ ) коры, а также общей протяженности  $\mathcal{L}$  зон с повышенными значениями  $(\text{grad } V)_n$ .

Для районов, на которые распространяется (7), балл в эпицентре при заданной повторяемости  $I_{n(N)}$  можно считать возрастающим от эталонного значения  $I_{0(N)}$  в соответствии с увеличением градиента скорости от  $(\text{grad } V)_0$  до наблюдаемого  $(\text{grad } V)$  :

$$I_{n(N)} \approx I_{0(N)} + \frac{2\eta_{III} \Phi}{v\zeta} [|\text{grad } V|_m - |\text{grad } V|_0] + \quad (21)$$

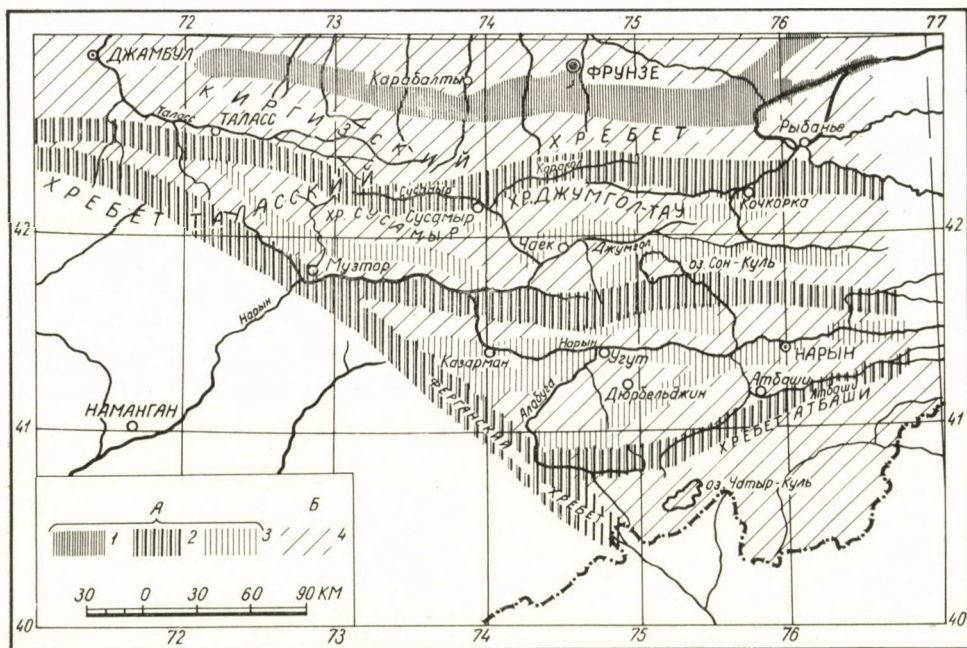
$$+ 2 \ln \frac{|\text{grad } V|_M}{|\text{grad } V|_0} + \ln \mathcal{L}.$$

*Гипотеза V.* Геофизические данные о мощности земной коры и геологические данные о тектонической природе рассматриваемого района и об истории происходивших в нем тектонических нарушений позволяют качественно судить о механических свойствах — вязкости и прочности среды в области очагов землетрясений.

Регионы с многочисленными проявлениями четвертичного магматизма, по-видимому, имеют несколько повышенную температуру недр. Поэтому в них вязкость и прочность среды должны быть несколько ниже, чем в районах лишенных интенсивного четвертичного магматизма. Значит при одинаковых средних градиентах скорости в районах с молодым магматизмом землетрясения должны иметь меньшую энергию и меньшую повторяемость, чем в районах без молодого магматизма. Возможно, в этом заключается причина меньшей повторяемости и, в особенности, энергии и силы землетрясений ряда районов Кавказа, по сравнению с землетрясениями районов Средней Азии, имеющих сходные величины градиента скорости, но лишенных четвертичного магматизма.

Кроме того, важно, что земная кора обладает анизотропией механических свойств, которая возникает в процессе длительных тектонических деформаций. При начале деформаций по новым направлениям, характеристики механических свойств, входящие в (17), (19), (20) и (21) резко изменяют свою величину (вязкость и прочность — увеличиваются). В этих случаях согласно перечисленным уравнениям при небольшой величине  $(\text{grad } V)_n$  землетрясения могут иметь высокие значения повторяемости и энергии. Этим объясняется неоднократно отмечавшаяся рядом исследователей повышенная сейсмическая опасность мест, где происходит перестройка структуры земной коры [3, 11, 19, 40].

IV. Прогноз землетрясений должен основываться на совместной интерпретации сейсмостатистических и геологических данных. Временные отклонения сейсмической активности на небольших участках от ее среднего уровня (флюктуации) обязательны. Поэтому статистика прошлых земле-

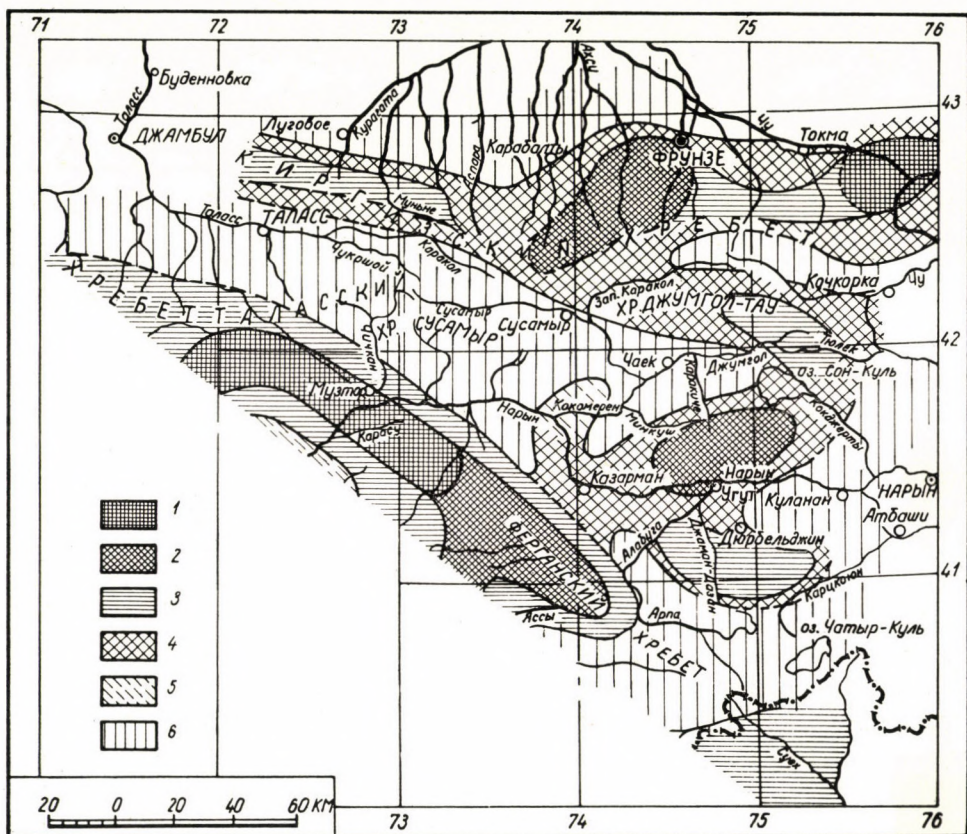


Фиг. 5. Схема сейсмической опасности центральной части Тянь-Шаня по геологическим данным [20]. А — полосы высоких значений градиента скорости тектонических движений, совпадающие с зонами разрывов, интенсивно развивающихся в неогене и четвертичном периоде (места возникновения землетрясений); 1 — полоса I категории, сейсмически весьма опасная; несомненна возможность 9-балльных землетрясений с высокой повторяемостью; 2 — полосы II категории, сейсмически опасные; возможность 9-балльных землетрясений несомненна, повторяемость их должна быть ниже, чем в полосах I категории; 3 — полосы III категории, сейсмически средне опасные; возможность 9-балльных землетрясений не исключена; повторяемость их должна быть меньше, чем в полосах II категории; Б — полосы низких значений градиента скорости тектонических движений и малой интенсивности развития разрывов в неогене и четвертичном периоде (места возникновения землетрясений); 4 — полосы IV категории, сейсмически слабо опасные; возникновение 9-балльных землетрясений почти невозможно

трясений дает неполное представление о распространении зон высокой сейсмической опасности. Использование геологических данных позволяет вносить дополнения к сейсмостатистике.

На примере центральной части Тянь-Шаня коллективно были разработаны следующие принципы совместной интерпретации сейсмических и геологических данных при составлении карт сейсмического районирования в масштабе  $10^{-5}$  [20]. Изучаемая территория делилась на полосы и участки, различающиеся по средней величине градиента скорости. Эти полосы и

участки классифицировались по степени их сейсмической опасности по геологическим признакам, основываясь на изложенных выше представлениях. По геологическим признакам для каждой полосы принимался верхний предел энергии (силы) землетрясений (фиг. 5). Одновременно состав-



Фиг. 6. Сводная карта сейсмической активности [20]. Средний период повторения землетрясений с энергией  $10^{15}$  дж равен: 1 — 300 лет; 2 — 600 лет; 3 — 1000 лет; 4 — 2000—3000 лет; 5 — неактивные области, в которых сотрясения могут достигать 8 баллов; 6 — то же — 6—7 баллов

лялась карта сейсмической активности для землетрясений такого энергетического класса, ( $10^{10}$  дж), который дает статистически наиболее обоснованные выводы. Эта карта превращалась затем в карту повторяемости землетрясений с энергией  $10^{15}$  дж (фиг. 6). Для тех частей карты, где верхний предел энергии признан не меньше  $10^{15}$  дж, согласно (4) повторяемость  $N_{15}$  землетрясений с энергией  $10^{15}$  дж связана с вычисленной по карте эпицентров повторяемостью  $N_{10}$  землетрясений с энергией  $10^{10}$  дж формулой

$$\lg N_{15} = \lg N_{10} - 5\nu. \quad (22)$$

Графическое изображение повторяемости землетрясений с энергией  $10^{15}$  в первом приближении совпадает с графическим изображением повторяемости землетрясений силой 9 баллов в эпицентре (см. выше раздел II).

Сопоставление фиг. 5 с фиг. 6 показало, что не все полосы с геологически установленной высокой опасностью включают в себя участки с соответствующей повторяемостью по сейсмостатистике. Это объясняется нами флюктуациями сейсмического режима во времени и в пространстве. Поэтому, для сейсмического режима будущего времени значительно большего чем время, охарактеризованное сейсмостатистикой, были приняты геологические границы полос различной опасности. Степень опасности характеризовалась наибольшей из повторяемостей 9-балльных землетрясений, зарегистрированных в пределах полос данной категории. Для всех полос одной категории была принята близкая степень опасности, которая несколько изменилась внутри каждой полосы в зависимости от средней величины градиента скорости тектонических движений. При такой комплексной оценке во многих местах опасность повышалась, по сравнению с зарегистрированной в течение последних 72 лет. Для будущего времени, соизмеримого с сейсмостатистически охарактеризованным временем, поправки, основанные на геологических данных вносились в меньшем объеме. Так были получены две карты возникновения будущих землетрясений, указывающие их место, силу и среднюю повторяемость.

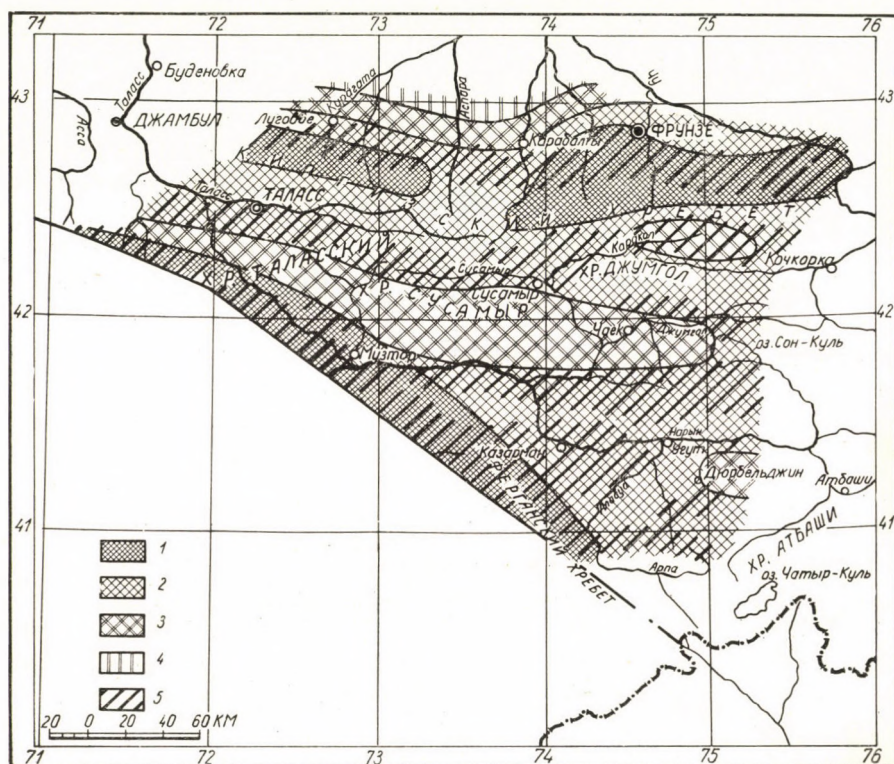
На следующих картах сейсмической опасности изображалась энергия (сила)  $U_n$  тех землетрясений, повторяемостью которых  $N_n$  мы заранее задаемся. Эта энергия равна абсциссе точки пересечения графика повторяемости каждого участка с нормативной горизонтальной линией (фиг. 2), и может быть получена из карты сейсмической активности. Если на карте активности энергия всех землетрясений  $U_A$  и изолиния соответствует повторяемости  $N_A$ , то она совпадает с изолинией энергии  $U_n$  на карте опасности при выбранной норме повторяемости  $N_n$ . Связь между ними:

$$\lg U_n = \lg U_A + \frac{1}{\nu} (\lg N_A - \lg N_n). \quad (23)$$

Принимая разные нормы повторяемости можно составить серию карт данного типа. Наконец, карты сейсмического районирования (фиг. 7 и 8) отличаются от карт сейсмической опасности лишь тем, что на них изображены также зоны распространения колебаний различной силы вдали от мест возникновения землетрясений. Это делается путем смещения границ зон возникновения землетрясений разной силы в соответствии с представлениями, приведенными в 1 разделе данного сообщения.

V. *Окончательная оценка силы проявления землетрясений на месте каждой строительной площадки включает учет грунтовых условий и рельефа.*

Оценка сейсмической опасности по перечисленным принципам в масштабе  $10^{-6}$  или  $10^{-5}$  относится к участкам площадью в 100, 1000 и более км<sup>2</sup> и является общей для многих строительных площадок в пределах одного города или административного района. Эта оценка силы землетрясений при



Фиг. 7. Схема детального сейсмического районирования центральной части Тянь-Шаня [20]. Сейсмические зоны, в которых сотрясения могут достигать: 1 — 9 и более баллов с вероятностью 1 раз в 1000 лет и чаще; 2 — 9 и более баллов с вероятностью 1 раз в 1000—10 000 лет; 3 — 8 баллов с вероятностью 1 раз в 1000 лет и чаще; 4 — 7 баллов; 5 — зоны наиболее вероятного места возникновения землетрясений по геологическим данным

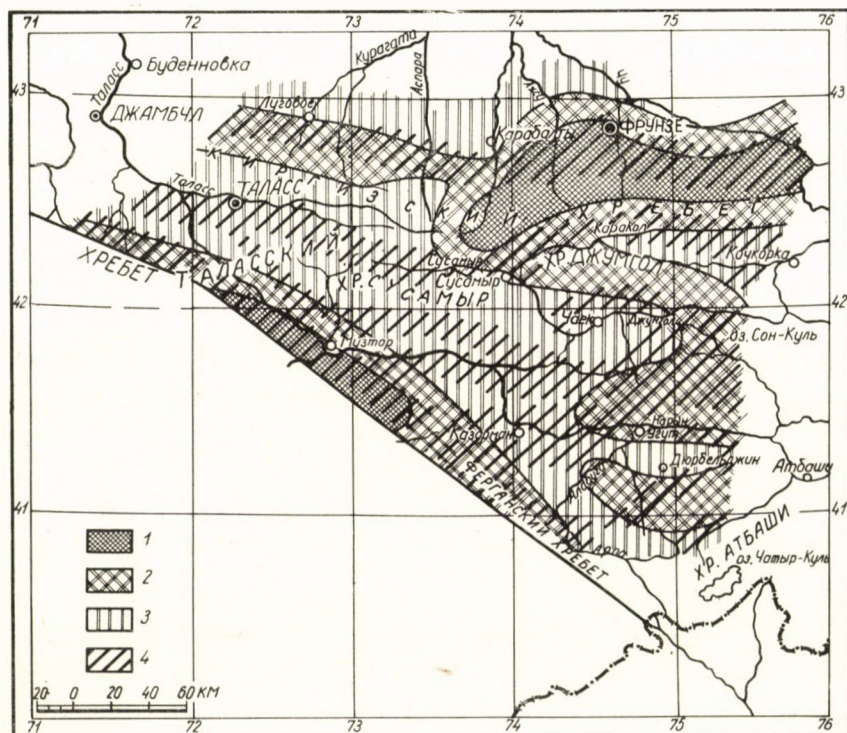
общем районировании относится к местности с горизонтальным рельефом, с песчаными и глинистыми грунтами, при глубине уровня грунтовых вод ниже 10 м. Выбор площадок для строительства требует проведения микросейсморайонирования [32, 34] в масштабе  $10^{-4}$ .

На картах микросейсморайонирования показывается расчетный сейсмический балл  $I_c$ , который должен быть принят строителями. Он рассматривается как сумма оценки силы землетрясения в данном месте по карте общего сейсмического районирования  $I$  и следующих поправок:

$$I_c = I + I_g + I_H + I_S \quad (24)$$



Поправка  $I_g$  — связана с грунтами. Для насыпных и почвенных она равна +1; для рыхлых крупнообломочных (галечников, щебня, гравия) она составляет —0,2; для цементированных осадочных пород (известняков, песчаников, глинистых сланцев, мергелей, гипсов) и кристаллических сланцев равна —0,5; для изверженных горных пород достигает —1,0.



Фиг. 8. Схема детального сейсмического районирования центральной части Тянь-Шаня для короткого промежутка времени [20]. Сейсмические зоны, в которых сотрясения могут достигать: 1 — 9 и более баллов с вероятностью 1 раз в 200 лет и чаще; 2 — 8 баллов с вероятностью 1 раз в 50 лет и чаще; 3 — 7 баллов; 4 — зоны наиболее вероятного места возникновения землетрясений по геологическим данным

Поправка  $I_H$  — связана с глубиной грунтовых вод. При глубине от 0 до 5 м она доходит до +1,0; при глубине от 5 до 10 м она не превышает +0,5.

Поправка  $I_S$  — связана с инженерно-геологической ситуацией: расчлененностью рельефа, мощностью рыхлого слоя, выходящего на поверхность, выветренностью пород, крутизной наклона слоев. Эта поправка делается по совокупности признаков и может составлять до +1 или до —1.

Величина последней поправки принимается такой, чтобы сумму предыдущих поправок округлить до единиц.

до + 1	до - 1
1. Расчлененный рельеф	1. Горизонтальный рельеф
2. Поверхностный рыхлый слой мощностью 1—50 м (поверх скального основания)	2. На поверхности рыхлый слой мощностью более 100 м.
3. Выветренность и трещиноватость пород	3. Свежесть пород
4. Близость крутых контактов различных пород, сбросов, сдвигов	4. Удаленность от крутых контактов

Обычно сумма всех поправок приравнивается + 1 или — 1. В редких случаях она может доходить до + 2. Дробные значения расчетного балла в СССР не принимаются.

\*

Настоящее сообщение обобщает результаты многих исследователей. Общие формулировки пяти основных положений можно считать признанными всеми советскими специалистами по прогнозу землетрясений. Конкретное содержание этих положений отчасти дискуссионно, поскольку оно находится в стадии разработки.

Большое значение имеют результаты, полученные не только в СССР, но и в ряде других стран, в том числе в Венгрии. В основе многих теоретических построений лежит общее представление о зависимости деформаций земной коры от процессов, происходящих в подкорковой оболочке, которое развивается и Л. Эдьедом [55], и рядом ученых Советского Союза [1, 29]. Работа Д. Чомора и З. Кишша [54] является одним из обоснований линейной зависимости между логарифмом энергии и логарифмом повторяемости землетрясений. При вычислениях среднего градиента скорости тектонических движений нами используется абсолютная хронология четвертичного периода, разработанная Д. Бачаком [79] и П. Криваном [81]. Для дальнейшего развития методов сейсмического районирования большое значение должны будут иметь совместные работы исследователей различных стран.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов В. В.: Основные вопросы геотектоники. Госгеолиздат, М., 1954.
2. Белоусов В. В.: К вопросу о методах сейсмического районирования. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1954.
3. Белоусов В. В., Гзовский М. В.: Тектонические условия возникновения землетрясений. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 25, 1954.
4. Белоусов В. В., Кириллова И. В., Сорский А. А.: Краткий обзор сейсмичности и тектоники Кавказа. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1952.
5. Берч Ф.: Физика земной коры. Сб. «Земная кора», Изд-во ин. лит. 1957.

6. Бунэ В. И.: Сравнительная энергетическая характеристика сейсмического режима трех районов Таджикистана. Докл. АН Таджикской ССР, вып. 19, 1956.
7. Введенская Н. А.: Об инструментальных наблюдениях над слабыми землетрясениями. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1958.
8. Виноградов С. Д.: О распределении числа разрывов по энергии при разрушении горных пород. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 12, 1959.
9. Гамбурцев Г. А.: Состояние и перспективы работ в области прогноза землетрясений. Бюлл. Сов. по сейсмологии АН СССР, № 1, 1955.
10. Гзовский М. В.: О задачах и содержании тектонофизики. Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 3, 1954.
11. Гзовский М. В.: Тектонофизическое обоснование геологических критериев сейсмичности I—II. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2—3, 1957.
12. Гзовский М. В.: Метод моделирования в тектонофизике. Сов. геол., № 4, 1958.
13. Гзовский М. В.: Основные вопросы тектонофизики и тектоника Байджансайского антиклинария. Изд. АН СССР, М., 1959.
14. Гзовский М. В.: Физическая теория тектонических разрывов. Сб. «Проблемы тектонофизики». Госгеолтехиздат, 1960.
15. Гзовский М. В.: Принципы моделирования тектонических явлений. Сб. «Проблемы тектонофизики», Госгеолтехиздат, 1960.
16. Гзовский М. В.: Тектонофизика и сейсмическое районирование. Бюлл. сов. по сейсмологии, № 8, 1960.
17. Гзовский М. В.: Тектонофизика и проблемы структурной геологии. Доклады советских геологов XXI сессии Междун. Геол. Конгресса. Проблема XVIII-структура земной коры и деформации горных пород. Изд-во АН СССР, 1960.
18. Гзовский М. В., Крестников В. Н., Рейснер Г. И.: Геологические методы количественной характеристики среднего градиента скорости вертикальных тектонических движений (изменений наклона) земной коры и некоторые результаты их применения. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 1959.
19. Гзовский М. В., Крестников В. Н., Нерсесов И. Л., Рейснер Г. И.: Сопоставление тектоники с сейсмичностью Гармского района Таджикской ССР, I—II, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 12, 1958.
20. Гзовский М. В., Крестников В. Н., Нерсесов И. Л., Рейснер Г. И.: Новые принципы сейсмического районирования на примере центральной части Тянь-Шаня. Статьи I и II, Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 2—3, 1960.
21. Голицын Б. Б.: Лекции по сейсмометрии. Изд. Академии Наук, СПб., 1912.
22. Горшков Г. П.: Землетрясения на территории Советского Союза. Географиздат, М., 1949.
23. Горшков Г. П., Шенкарева Г. А.: О корреляции сейсмических шкал. Тр. Инст. физ. Земли АН СССР, № 1 (168), 1958.
24. Губин И. Е.: Сейсмотектонический метод сейсмического районирования. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 13 (140), 1950.
25. Губин И. Е.: Определение максимальной силы возможных землетрясений при сейсмотектоническом районировании. Изв. отд. естеств. наук АН Тадж. ССР, вып. 18, 1956.
26. Кириллова И. В.: О периодичности разрушительных землетрясений Кавказа и Турции. ДАН СССР, т. 115, № 4, 1957.
27. Крестников В. Н.: История развития структуры и сейсмичность Тянь-Шаня. Изв. АН СССР, сер. геол., № 3, 1954.
28. Крестников В. Н.: О связи геологических и сейсмических явлений Тянь-Шаня. Бюлл. Сов. по сейсмол., № 3, 1957.
29. Магницкий В. А.: Основы физики Земли. Геодиздат, М., 1953.
30. Медведев С. В.: К вопросу об учёте сейсмической активности района при строительстве. Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР, № 119, 1947.
31. Медведев С. В.: Опыт нового районирования Молдавской ССР по зонам сейсмической активности. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 5 (131), 1949.
32. Медведев С. В.: Оценка сейсмической балльности в зависимости от грунтовых условий. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 14 (141), 1952.
33. Медведев С. В.: Новая сейсмическая шкала. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 21 (110), 1953.
34. Медведев С. В.: О сейсмических наблюдениях при сейсмическом микрорайонировании. Бюлл. Сов. по сейсмол., № 1, 1955.
35. Медведев С. В.: Соотношения между глубиной очага землетрясения и изосейстами. Тр. Инст. физ. Земли АН СССР, № 5 (172), 1959.

36. Мэй Ши-Юн: Сейсмическая активность территории Китая по инструментальным и историческим данным. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1960.
37. Нормы и правила строительства в сейсмических районах (СН—8—58). М., 1958.
38. Петрушевский Б. А.: Урало—Сибирская эпигерцинская платформа и Тянь-Шань. Изд-во АН СССР, 1955.
39. Петрушевский Б. А.: Значение геологических явлений при сейсмическом районировании. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 28 (155), 1955.
40. Резанов И. А.: Тектоника и сейсмичность Туркмено—Хорасанских гор. Издат. АН СССР, М., 1959.
41. Ризниченко Ю. В.: Об изучении сейсмического режима. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9, 1958.
42. Ризниченко Ю. В., Нерсесов И. Л.: К разработке основ количественного метода сейсмического районирования. Бюлл. сессии Совета по сейсмологии АН СССР, № 8, изд-во АН СССР, 1960.
43. Саваренский Е. Ф., Курнос Д. П.: Элементы сейсмологии и сейсмометрии. Гос. изд. технико-теорет. литер., М., 1955.
44. Саваренский Е. Ф., Мэй Ши-Юн: Об исследовании сейсмической активности территории Китая. Acta Geophysica Sinica, vol VIII, 1, 1959.
45. Соловьев С. Л.: О связи энергии и интенсивности землетрясения. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1956.
46. Соловьев С. Л.: К вопросу о соотношении между энергией объемных волн и интенсивностью землетрясений. Бюлл. Сов. по сейсмол. АН СССР, № 6, 1957.
47. Соловьев С. Л., Шебалин Н. В.: Определение интенсивности землетрясения по смещению почвы в поверхностных волнах. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1957.
48. Шебалин Н. В.: О связи между энергией, балльностью и глубиной очага землетрясения. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1955.
49. Шебалин Н. В.: Использование соотношения между интенсивностью и балльностью землетрясений для оценки глубины астеносферы в районе Вранча (Карпаты) Studia Geoph. et Geod. Praga, N 2, 1958.
50. Шебалин Н. В.: Определение глубины очага по макросейсмическим данным с учётом влияния слоя пониженной скорости. Тр. инстит. физ. Земли АН СССР, № 5 (172), 1959.
51. ASADA, T., SUZUKI, S., TOMODA, I.: Notes on energy and frequency of Earthquakes B. E. R. I. 24, 1951.
52. M. BATH: Seismicity of Fennoscandia and Related Problems. Gerlands Beiträge zur Geophysik LXII.
53. BLAKE, A.: On the estimation of focal depth from macroseismic data. Bull. Seism. Soc. Am., 31, 3, 1941.
54. CSOMOR, D., KISS, Z.: The seismicity of Hungary. Geofizikai Közlemények, VII, 3—4, 1958.
55. EGYED, L.: A föld fizikája. Bpest, 1956.
56. GORSHKOV, G. P.: On seismic regioning of Asian countries. Assoc. de seismol. et de Physique de l'Inter. de la terre, ser. A., Travaux scientifiques, Fasc. 20, Toulouse, 1959.
57. GUTENBERG, B.: Amplitudes of P, PP and S and magnitude of shallow earthquakes. Bull. Seismol. Soc. Am., 35, 1945.
58. GUTENBERG, B.: Magnitude determination for deep-focus earthquakes. Bull. Seismol. Soc. Am., 35, 1945.
59. GUTENBERG, B.: Amplitudes of surface waves and magnitudes of shallow earthquakes. Bull. Seismol. Soc. Am. 35, 1945.
60. GUTENBERG, B., RICHTER, C.: Seismicity of the Earth. Princeton Press, 1954.
61. GUTENBERG, B., RICHTER, C.: Magnitude and energy of earthquakes. Ann. d. Geof. 9, 1, 1956.
62. GZOVSKII, M. V.: Tectonophysical foundation for geological criteria of seismicity — I and II. Bull. Ac. Sci. USSR, Geophysics Series (translation by the Pergamon Press, New-York), 2 and 3, 1957.
63. GZOVSKII, M. V.: A conference on tectonic Physics. Bull. Ac. Sci. USSR, Geophysics Series (translation by the Pergamon Press, New-York), 7, 1957.
64. GZOVSKY, M. V.: The use of scale models in tectonophysics. Internat. Geol. Review, vol 1, 4, Washington, 1959.
65. GZOVSKI, M. V.: The modelling method in tectonophysics. Nat. Research Council of Canada, Technical Translation 806, Ottawa, 1959.
66. GZOVSKY, M. V.: Method of modelling in tectonophysics. Assoc. de Seismol. et de Physique de l'Interieur de la Terre, Ser. A., Travaux Scientifiques, Fasc. 20, Toulouse, 1959.

67. ISHIMOTO, M., IIDA, K.: Observations sur les seismes enregistres par le microseismograph construit derriere. B. E. R. I., 7, 1939.
68. KAWASUMI, H.: On energy law of occurrence of Japanese earthquakes, B. E. R. I., 30, 1952.
69. LEE, S. P.: The map of seismicity of China. Acta geophys. Sinica, 6, 2, 1957.
70. MEDVEDEV, S. V., PETROUCHEVSKY, B. A.: Les principes methodiques et essai de repartition de la seismicite en URSS. Assoc. de Seismol. et de Physique de l'Inter. de la Terre, ser. A, Travaux Scient., F. 20, Toulouse, 1959.
71. RETHLY, A.: A Karpátmedencék földrengései (455—1918). Bpest, 1952.
72. RICHTER, C.: An instrumental earthquake magnitude scale. Bull. Seism. Soc. Am. 25, 1—32, 1935.
73. SAVARENSKY, E. F.: Results of seismic investigations in the USSR. Assoc. de seismol. et de Physique de l'Inter. de la Terre, Ser. A, Travaux Scient., F. 20, Toulouse, 1959.
74. SHEBALIN, N. V.: Correlation between magnitude and intensity of earthquakes; astenosphere. Un. Geod. et Geoph. Int. Serie A, Travaux scientif., Fasc. 20, Toulouse, 1959.
75. SOLOVYOV, S. L.: Magnitude and energy of earthquakes. Assoc. de seismol. et de Physique de l'Inter. de la Terre, Ser. A, Travaux Scient. Fasc. 20, Toulouse, 1959.
76. SPONHEUER, W.: Erdbeben und Tektonik in Deutschland. Freiburger Forschungshefte, Reihe C, Heft 7, 1953.
77. SUZUKI, Z.: A statistical study on the occurrence of small earthquakes I. Science Report Tohoku Univ. Ser 5, Geophys. 1953.
78. TSUBOI, C.: Magnitude frequency relation for earthquakes in and near Japan. Journ. of Physics of the Earth, 1, 1952.
79. BACSÁK, GY.: Pliozän und Pleistozänzeitalter im Licht der Himmelsmechanik. Acta Geol. Acad. Sci. Hungaricae, 3, fasc. 4. 1955.
80. BISZTRICSÁNY, E.: A földrengések méretmeghatározásának új módszere. Geofizikai Közlemények, 1958.
81. KRIVÁN, P.: Die klimatische Gliederung des Mitteleuropäischen Pleistozäns. Acta Geol. Acad. Sci. Hungaricae, 3, fasc. 4, 1955.

## РЕЗЮМЕ

В связи с возникновением землетрясений автор показывает, что формула  $\log N = \log N_0 - \nu(I - I_0)$  не полностью надежна, поэтому им изучаются геологические факторы, обуславливающие энергию и повторяемость землетрясений. Зависимость между накапливающимися в земной коре напряжениями и градиентом скорости тектонических движений коры позволяет определить для всех тектонически единых территорий величину  $\text{grad } V$  и длину разлома, вызывающие землетрясения с различной предельной энергией. Показано, что при увеличении  $\text{grad } V$  по отношению к  $\text{grad } V_0$  повторяемость землетрясений данной энергии также возрастает по отношению к  $N_0$ .

## TEKTONOPHYSIK UND DIE VORAUSSAGE VON ERDBEBEN

M. W. GZOWSKI

## ZUSAMMENFASSUNG

In Zusammenhang mit der Auslösung von Erdbeben stellt Verfasser fest, daß die Formel  $\log N = \log N_0 - \nu(I - I_0)$  nicht ganz zuverlässig ist. Deshalb untersucht er die geologischen Faktoren, die die Energie und Häufigkeit der Erdbeben bestimmen. Er weist nach, daß man anhand des Zusammenhanges zwischen der Anhäufung von Spannungen in der Erdkruste und dem Geschwindigkeitsgradienten der tektonischen Krustenbewegungen die zur Entstehung der Erdbeben von einer gegebenen Schwellenenergie notwendigen  $\text{grad } V$ -Werte und Bruchflächenlängen in einem tektonisch einheitlichen Gebiet ermitteln kann. Weiterhin stellt er fest, daß falls  $\text{grad } V$  gegenüber  $\text{grad } V_0$  zunimmt, dann nimmt auch die Häufigkeit der Erdbeben gegebener Energie gegenüber  $N_0$  zu.

## TECTONOPHYSICS AND THE FORECAST OF EARTHQUAKES

M. V. GZOVSKI

## SUMMARY

In connection with the release of earthquakes the author reaches the conclusion that the formula  $\log N = \log N_0 - \nu(I - I_0)$  is not quite reliable. He therefore attempts the analysis of the geological processes defining the energy and frequency of earthquakes. He states that the relation existing between the tension accumulated in the crust and the velocity gradient of the tectonic crustal movements permits to determine the grad  $V$  and length of fault necessary to bring about earthquakes of a given threshold energy in a tectonically uniform area. He further states that if grad  $V$  increases with respect to grad  $V_0$ , then the frequency of shocks of a given energy will also increase with respect to  $N_0$ .

## TECTONOPHYSIQUE ET PROGNOSTIQUE DES TREMBLEMENTS DE TERRE

M. V. GZOVSKI

## RÉSUMÉ

L'auteur constatant, relativement au déclenchement des séismes, que la formule  $\log N = \log N_0 - \nu(I - I_0)$  n'est pas tout à fait sûre, examine les facteurs géologiques déterminant l'énergie et la fréquence des tremblements de terre. Il démontre que, sur la base de la relation existant entre la tension accumulée dans l'écorce et le gradient de vitesse des mouvements tectoniques, il devient possible d'établir, pour chaque territoire tectoniquement homogène, le grad  $V$  et la longueur de faille nécessaires au déclenchement de séismes d'énergies limitées différentes. Il constate que, si le grad  $V$  augmente par rapport au grad  $V_0$ , la fréquence du séisme d'énergie donnée augmente à son tour par rapport à  $N_0$ .

# EINPASSEN DER RADIALTRIANGULATION IN DAS GEODÄTISCHE SYSTEM\*

G. HANKÓ

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN

UNIVERSITÄT FÜR BAUINDUSTRIE UND VERKEHR, BUDAPEST  
LEHRSTUHL FÜR TOPOGRAPHIE UND PHOTOGRAMMETRIE

## Grundsätzliche Gesichtspunkte des Einpassens

Das Einpassen der Radialtriangulation in ein System erfolgt im allgemeinen mittels Koordinatentransformation. Die Berechnung der Radialtriangulation wird mit genäherter Orientierung und im genähernten Maßstab ausgeführt. Die erhaltenen Resultate werden dann in das geodätische System der gegebenen Punkte umtransformiert. Das von BUCHHOLTZ verfolgte Verfahren ([1]; S. 415, 416) ist im Falle mehrerer bekannter Punkte eigentlich die Helmert-Transformation und bei zwei gegebenen Punkten eine einfache Ähnlichkeits-Transformation.

Die Lagegenauigkeit der mit der Koordinatentransformation erhaltenen Punkte wird — außer den aus der Natur des Verfahrens folgenden Fehlern — von der Lage der gegebenen Punkte auf den einzelnen Bildern des Bildstreifens wesentlich beeinflußt. Die relative Lage der Punkte (2, 3, 4 . . .) des Polygonzuges der Radialtriangulation und der Hilfspunkte am Rande der Bilder ( $A_2, A_3, A_4, \dots B_2, B_3, B_4 \dots$ ) verändert sich mit der Transformation nicht. Bei der Anordnung der gegebenen Punkte muß man jedoch mit drei Möglichkeiten rechnen (Abb. 1).

1. Der gegebene Punkt fällt mit irgendeinem Brechungspunkt des Polygonzuges zusammen, oder befindet sich in dessen unmittelbarer Nähe. Punkte in dieser Lage sind die verläßlichsten, da die perspektive Verzerrung, die sich im ebenen Gelände aus der Bildneigung ergibt, keinen Einfluß auf sie hat. Punkt 5 auf der Abbildung.

2. Die in der Zone der dreifachen Überdeckung liegenden gegebenen Punkte sind ähnlich den Hilfspunkten  $A_3, B_3 \dots$ . Man kann sie als sekundär zuverlässig betrachten, da sie mit drei Richtungen abgeleitet werden können, die von den bestimmten Punkten des Polygonzuges der Radialtriangulation gemessen werden. Ähnlich den Hilfspunkten gibt es auch eine Möglichkeit,

\* Vortrag gehalten auf der seitens des Geodätischen und Kartographischen Vereins in Budapest veranstalteten Photogrammetrischen Konferenz am 4. Oktober 1961.

die perspektive Richtungsverzerrung zu beachten. Punkte 11 und 12 in der Abbildung.

3. Die am wenigsten verlässliche Lage haben die im gemeinsamen Gebiet der nachfolgenden Bilder befindlichen Punkte. Punkte 131, 142, 155 in der Abbildung. Diese fallen bloß auf zwei Nachbarbilder. Die aus den bestimmten Polygonpunkten gemessenen Richtungen werden durch die aus der Bildneigung folgende perspektive Verzerrung belastet, ihre Zuverlässigkeit innerhalb eines

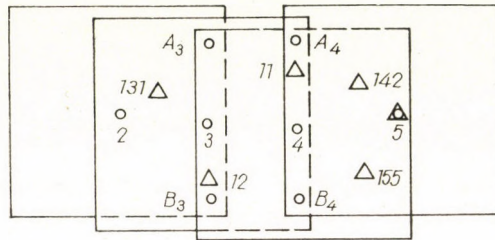


Abb. 1

Bildes ist verschieden, denn die perspektive Verzerrung verändert sich bei jedem Bild und je nach der Lage des Punktes.

Eigentlich kann man bei präziser Arbeit die mittels Radialtriangulation erhaltenen Polygon- und Hilfspunkte nicht in ein System einpassen, denn die Punkte haben verschiedene Zuverlässigkeit, da mit mehr oder weniger Restfehlern immer gerechnet werden muß, wie dies auch BUCHHOLTZ in seiner Arbeit erwähnt ([1]; S. 416).

Es ist zweckmäßiger zum Einpassen die zuverlässigsten Punkte gleichen Gewichtes zu benutzen, die mit Radialtriangulation bestimmt wurden, die also auch mit den Polygonpunkten der Radialtriangulation zusammenfallen. Unter diesen wird in der Bildreihe der erste und letzte Punkt durch Einstellung der entsprechenden Bilder auf dem Entzerrungsgerät bestimmt und zur Kontrolle auch im Gelände vermessen. Die detaillierte Beschreibung des Verfahrens findet man im Geodéziai Kézikönyv (Handbuch der Geodäsie, [2], III. S. 206), das Ergebnis der auf diese Weise ausgeführten Radialtriangulation in der Abhandlung ([3], S. 252.).

Im weiteren wird ein Verfahren für das ebene Gelände behandelt, da im hügeligen Gelände die durch verschiedene Höhenunterschiede verursachten Fehler durch die Anwendung des Nadirpunktes als Radialpunkt eliminiert werden können. Die Stelle des Nadirpunktes kann mittels entsprechender Hilfseinrichtungen (Horizontbildern, Stabilisatoren mit Kreisel, usw.) genauer bestimmt werden, als die Lotrechte der Kammerachse gesichert wird. Wird der Nadirpunkt als Radialpunkt gewählt, so stammen die Restfehler hauptsächlich von den perspektiven Richtungsverzerrungen her.



Im ebenen Gelände ist — außer den Fehlern der Identifizierung und Richtungsmessung — die durch Bildneigung verursachte perspektive Richtungsverzerrung die gefährlichste. Der Fehler der Richtungsmessung ist zufällig, mit veränderlichem Vorzeichen. Bei sorgfältiger Identifizierung kann er durch wiederholtes Messen reduziert werden. Die Bildneigung an sich ist zufälligen Charakters. Die durch sie verursachte Richtungsverzerrung besteht hingegen immer, und die verschiedenen Richtungsverzerrungen der Vorwärts-einschnitt-Richtungen weisen in ihrer Wechselwirkung einen seiner Größenordnung nach verschiedenen, aber regelmäßigen Charakter auf.

Der gewählte Radialpunkt ist nur annähernd der winkeltreue Punkt. Die angewandten Ausgleichungsverfahren sind vom Standpunkt der perspektiven Richtungsverzerrung aus nur Näherungsverfahren, da sie dem Zweck der Ausgleichung kleiner Meßfehler in horizontaler Meßebeane dienen. Die Rauten der Radialtriangulation können demnach mathematisch ausgeglichen werden, es bleiben jedoch infolge der unsicheren Lage des winkeltreuen Punktes Fehler in den Winkelwerten der Rauten, die die — wenn auch in geringem Maße — fehlerhafte Länge der abgeleiteten nachfolgenden Polygonseite zur Folge haben. Dies zeigt sich darin, daß die von der ersten oder auf dem Entzerrungsgerät bestimmten Seite mittels der Verhältniszahlen  $q$  der ausgeglichenen Rauten — die in den Rauten die auf die vorhergehende Polygonseite als Einheit reduzierten Längen sind — abgeleitete letzte Seite nicht mit der gemessenen oder auf dem Entzerrungsgerät bestimmten Seite übereinstimmt, d. h.

$$uq_1 q_2 \dots q_n = v_n \cong V, \quad (1)$$

wo  $u$  und  $v$  die Länge der ersten bzw. der letzten entzerrten Seite und  $v_n$  der abgeleitete Wert ist. Nachdem die Rauten regelmäßig sind, sind die Werte  $q_1, q_2 \dots q_n$  nahezu gleich groß. Werden diese im Durchschnitt mit  $q_i$  bezeichnet, dann wird Gleichung (1) folgendermaßen geschrieben:

$$uq_i^n = v_n, \quad (2)$$

d. h., man kann die Seitenlängen gemäß der geometrischen Reihe ableiten. Auf diesen Umstand hat auch schon SCHWEIZER hingewiesen ([4]; S. 62). Die durch die restlichen Winkelfehler der ausgeglichenen Rauten verursachten Maßstabänderungen haben demnach im Werte der Seitenlängen einen sich nach der geometrischen Reihe fortpflanzenden Fehler zur Folge, und die mit dieser Radialtriangulation bestimmten Punkte können durch die einfach proportionierte Auflösung der Fehler zu den gegebenen Punkten nicht eingepaßt werden. Die Wirkung einer solchen Fehlerfortpflanzung ist aus Abb. 2 ersichtlich. Die langen gestrichelten Linien sind die richtigen Rauten, die ununterbrochenen Linien jene Rauten, die auf den gemäß den geometrischen Reihen veränderlichen Polygonseiten beruhen.

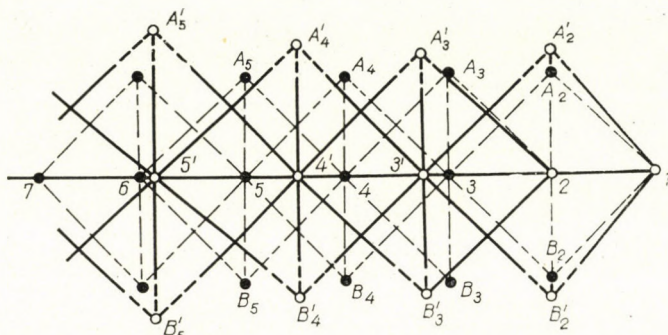


Abb. 2

Um die verschiedenen Fehler beseitigen zu können, müssen vor allem die bei der Polygonlinie der Radialtriangulation auftretenden Fehler aufgelöst werden, und zwar werden in entsprechender Weise zuerst der Winkelwiderspruch, sodann die Seitenlängen im Sinne ihres Ursprungs, der geometrischen Reihe korrigiert.

### Von der Zuverlässigkeit der Richtungsmessung auf dem Luftbild

Bevor noch die Besprechung der Verteilung der beiden Hauptfehler der Polygonlinie der Radialtriangulation beginnt, soll die Zuverlässigkeit der Richtungsmessung auf dem Luftbild geprüft werden.

Der mittlere Fehler der Punktidentifizierung auf dem Bild wird auf Grund des Auflösungsvermögens mit  $\pm 0,03$  mm bezeichnet. Infolgedessen ist auf den Meßbildern von  $23 \times 23$  cm bei einer Bildüberdeckung von 55% der aus der Identifizierung folgende mittlere Fehler der Richtungen nach den Polygonpunkten und Hilfspunkten

$$\varepsilon_a = \pm q' \frac{0,03}{230 \cdot 45\%} = \pm 1'. \quad (3)$$

Mit der bekannten Anordnung der Radialtriangulation ([2]; III. S. 204) müssen auf jedem Bild acht Winkel gemessen werden, die gleichen Gewichtes sind und deren Summe  $360^\circ$  beträgt. Der mittlere Fehler ([2]; I. S. 152) für einen Winkel ist laut dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\mu_{sz} = 1' \sqrt{2}$$

für acht Winkel beträgt er

$$\mu_{sz} = 1' \sqrt{8 (\sqrt{2})^2} = \pm 4'. \quad (4)$$

Zur Erhöhung der Genauigkeit wird auf dem Bild eine mit Richtungsmessung kombinierte Winkelmessung ausgeführt. Die  $360^\circ$  werden in vier nahezu  $90^\circ$ -igen Sektoren gemessen. Hier wird der mittlere Fehler laut des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

$$\mu_{sz} = 1' \sqrt{4 (\sqrt{2})^2} = 2' \sqrt{2} \quad (5)$$

ergeben. Die Auflösung der Abweichung von  $360^\circ$  erfolgt auf je zwei Winkel, die die vier gemeinsamen Richtungen umfassen. Dadurch sind nun alle acht Winkel korrigiert.

Die Messung kann mittels eines Voll- oder Halbkreistransporteurs mit einer Ablesefähigkeit von  $1'$  erfolgen, wobei insbesondere für die Reduktion eines aus der exzentrischen Drehung des Ansatzarmes folgenden Fehlers Sorge getragen werden muß. Diese Reduktion kann man durch Veränderung der Anfangsrichtung und mehrfaches Ansetzen des Instrumentes erreichen. Ein besseres Ergebnis dürfte sich mit der Anwendung des Radialtriangulators ergeben, wo neben den obigen Möglichkeiten auch noch der stereoskopische Effekt des Bildpaares zur Punktidentifizierung und Messung benutzt werden kann. Bei viermaliger Wiederholung der Messung wird die Genauigkeit auf das Doppelte erhöht. Der bei  $360^\circ$  auftretende mittlere Fehler beträgt demnach in diesem Falle

$$\mu_{sz} = 1' \sqrt{2}. \quad (6)$$

Die größte Abweichung des abgeleiteten Wertes vom wirklichen Werte kann höchstens das Dreifache des mittleren Fehlers in Gleichung (6) betragen, d. h., bei viermaliger Wiederholung darf die Abweichung von  $360^\circ$  den Wert  $3' \sqrt{2} \approx 4'$  nicht überschreiten. In diesem Falle ist die Verbesserung pro Winkel  $0,5'$ , was am Negativ einer der Tiefensehschärfe entsprechenden Winkelmessung entspricht.

Nach erfolgter Auswahl der Radial- und Hilfspunkte sowie nach deren Bezeichnung an den Negativen bei einfachen Winkelmessern werden die Punkte von den einzelnen Bildern auf maßhaltige Kunststoffolie übertragen; hier wird dann die Richtungs- bzw. Winkelmessung ausgeführt. Außer den Feldbüchern wird noch von jedem einzelnen Bild eine Richtungsskizze gefertigt (Tabelle 1), in der die bereits verbesserten Winkelwerte angegeben sind.

### Berechnung des Radialtriangulation-Polygonzuges

#### a) Bestimmung und Verteilung des Winkelabschlußfehlers

Zum Einpassen der Radialtriangulation in ein System wird das erste und letzte Bild auf Grund von Paßpunkten entsprechender Anzahl und Anordnung entzerrt. Auf diese Weise erhält man neben dem Anfangspunkt  $K$  und

dem Endpunkt  $V$  auch die Polygonpunkte  $1$  und  $n$  sowie die Länge der Anfangsseite  $u$  und der Endseite  $v$  (Abb. 3).

Infolge der Anordnung der Paßpunkte ( $\Delta$ ) — von denen auf den Bildern vier den Winkeln zu und einer der Mitte des Bildes zu gelegen ist — können beim Einhängen bloß die Punkte  $K$  und  $V$  als fehlerfrei betrachtet werden, weil diese in der Mitte des Bildes und nahe den Kontrollpunkten liegen. Die Punkte  $1$  und  $n$  liegen am Rand der Bilder im extrapolierten Teil und meist entfernt von den Kontrollpunkten. Hier wird die am Entzerrungsgerät erhal-

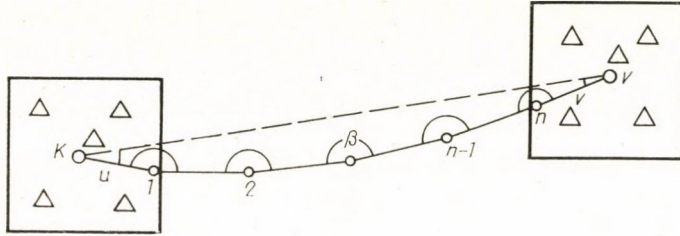


Abb. 3

tene Punktage nicht als fehlerfrei angenommen. Erfahrungsgemäß können diese Punkte im Bildmaßstab als etwa das Dreifache des monokularen Auflösungsvermögens, also als in einer einem Kreis mit  $0,09$  mm Radius entsprechenden Bildfläche gelegen, angenommen werden. Der effektive Wert dieser Bildfläche hängt bei der Aufarbeitung von der am Entzerrungsgerät angewandten Vergrößerung ab.

$\beta_1 \dots \beta_n$  sind die auf den Bildern gemessenen Brechungswinkel. Aus den Koordinaten der Punkte  $K, 1; n, V$  und  $K, V$  werden die Richtungswinkel berechnet. Die aus diesen abgeleiteten Winkelwerte  $\beta_K$  und  $\beta_v$  sind also auch mit einem kleinen Fehler belastet. Ähnlicherweise ist auch die Länge der Anfangsseite  $u$  und Endseite  $v$  fehlerhaft. Der Polygonzug der Radialtriangulation wird als eingespannter Polygonzug betrachtet. Anfangspunkt ist  $K$ , Endpunkt ist  $V$ , und an beiden Punkten nimmt man als Orientierungsrichtung die Seite  $K, V$  des Polygonzuges. Sein Richtungswinkel ist  $(KV)$  bzw.  $(VK)$ . Punkte  $1$  und  $n$  werden zur Berechnung der Brechungswinkel  $\beta_K, \beta_v$  und des Näherungswertes der Entfernungen  $u, v$  angewandt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \beta_K &= (K,1) - (K,V); \quad \beta_v = (V,K) - (V,n) \\ u &= \sqrt{\Delta x_{k,1}^2 + \Delta y_{k,1}^2}; \quad v = \sqrt{\Delta x_{v,n}^2 + \Delta x_{v,n}^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Erfahrung zeigt, daß die Zuverlässigkeit der Brechungswinkel  $\beta_K, \beta_v$  und  $\beta_i$  die gleiche ist. Laut des Geodätischen Handbuchs ([2]; II. S. 327) ist

der Winkelschlußfehler des Polygonzuges

$$\Delta\delta = \delta_{vt} - (\delta_{kt} + \Sigma\beta - (n - 1) 180^\circ) - k 360^\circ, \quad (8)$$

wo  $k = 1$  oder  $k = 0$  ist.

Nachdem der mittlere Fehler eines Brechungswinkels  $1' \sqrt{2}$  ist, beträgt der mittlere Fehler des Winkelschlußfehlers laut des Fehlerfortpflanzungsgesetzes, im Falle von  $(n + 2)$  Brechungswinkeln gleichen Gewichtes, theoretisch

$$\mu_z = 1' \sqrt{(n + 2)(\sqrt{2})^2} = 1' \sqrt{2(n + 2)}. \quad (9)$$

Der effektive Winkelschlußfehler hat kleiner zu sein als das Dreifache des theoretischen Wertes (möglichst in der Größe des mittleren Fehlers). Der erhaltene Winkelschlußfehler wird auf die Brechungswinkel im gleichen Maße verteilt. In der Praxis wird so vorgegangen, daß die Fehler für die einzelnen Brechungswinkel  $\beta_i$  — um die Komponentwinkel auflösen zu können — in vier dividierbare ganze Werte aufgeteilt werden. Für die Winkel  $\beta_k$  und  $\beta_v$  wird bei erster Näherung die Restsumme in gleichem Maße verteilt. Die Korrekturen und korrigierten Winkelwerte sind in der Richtungsskizze angegeben.

Im Kenntnis der Seitenlängen (die Bestimmung der Seitenlängen wird im Kapitel b) erörtert) folgt dann die Berechnung des Polygonzuges. Die koordinatenabweichungen  $\delta_y$  und  $\delta_x$  sind die Komponenten des linearen Zugsabschlußfehlers. Die planmäßige Luftbildaufnahme erfolgt in nordsüdlicher, ostwestlicher oder entgegengesetzter Richtung. Mit guter Näherung entspricht also bei der  $y$ -gerichteten Luftbildaufnahme die Koordinatenabweichung  $\delta_y$  dem Längswiderspruch und  $\delta_x$  dem Querwiderspruch. Der Polygonzug ist gestreckt, die Seitenlängen sind mit guter Näherung gleich groß; was die voraussichtliche Größe des Längs- und Querwiderspruches betrifft, geben die Formeln (4), (5), (8) des Geodätischen Handbuches (2), II. S. 347) Aufklärung. Der Querwiderspruch kann hauptsächlich auf die Restfehler jener Winkel zurückgeführt werden, die beim Polygonzug der Radialtriangulation zur Bestimmung der Winkelwerte  $\beta_k$  und  $\beta_v$  dienen. Mit den aus dem Polygonzug abgeleiteten Koordinaten ( $V$ ) kann der Richtungswinkel ( $K|V$ ) bestimmt werden, dessen Abweichung  $\Delta\tau$  vom Richtungswinkel ( $KV$ ) die Größe der Winkelverbesserung  $\beta_k$  vorzeichengerecht ergibt. Um seinen entgegengesetzten Wert —  $\Delta\tau$  wird der Winkelwert  $\beta_v$  verbessert. Die durch sämtliche Verbesserungen der Winkel  $\beta_k$  bzw.  $\beta_v$  verursachte Punktbeziehung im Punkte 1 und  $n$  darf jedoch nicht größer sein als der dreifache Wert des mittleren Fehlers  $\pm 0,03$  mm des Auflösungsvermögens, d. h.  $\pm 0,09$  mm im Maßstab der Aufarbeitung. Auf diese Weise ist der Querwiderspruch behoben worden und es entstand kein neuer Winkelwiderspruch. Der Polygonzug mit den neuen orientierten Rich-

tungswerten wird wieder durchgerechnet. Wurde der Querwiderspruch vollständig behoben, so ergibt sich bloß ein Längswiderspruch. Bei der Auflösung des Längswiderspruches bleiben die Brechungswinkel unverändert, was zur weiteren Berechnung sehr vorteilhaft ist.

Das Verfahren kann eigentlich auch durch Koordinatentransformation gelöst werden. Wir benötigen jedoch die Kenntnis der Größenordnung der Verbesserung  $\Delta\tau$  des Winkels  $\beta_k$ ; diese muß kleiner sein als der oben angegebene Wert, bzw. kann nur der entsprechende Teil zur Korrektur des Winkels  $\beta_k$  benutzt werden. Die Restfehler werden zwischen den Brechungswinkeln vorzeichengerecht in gleichem Maße verteilt.

### b) Berechnung der Seitenlängen

Man erhält die Seitenlängen des Polygonzuges der Radialtriangulation nicht unmittelbar mittels Längenmessung, sondern berechnet diese mit den Winkeln, die aus den im Radialpunkt der Bilder ausgeführten Richtungsmessungen bestimmt wurden. Die genaue Beschreibung der Berechnung befindet sich in folgenden Arbeiten: ([2], III. S. 210, 211 und [3], S. 232, 233). Werden nun die Bezeichnungen der Abb. 4 beachtet, so ergibt sich für die Länge der

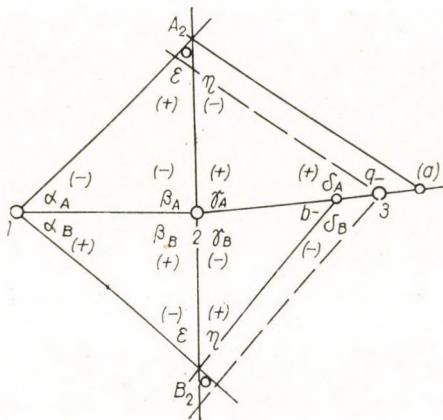


Abb. 4

nachfolgenden Polygonseite  $\overline{2,3}$  — aus der vorhergehenden Polygonseite  $\overline{1,2}$  über den Hilfspunkt  $A$  berechnet zu

$$\overline{2,3} = \overline{1,2} \frac{\sin \alpha_A \sin(\gamma_A + \delta_A)}{\sin(\alpha_A + \beta_A) \sin \delta_A} . \quad (10)$$

Ähnlicherweise kann Seite  $\overline{2,3}$  auch über Hilfspunkt  $B$  berechnet werden, wobei die Winkel mit Index  $A$  und Index  $B$  vertauscht werden. Die auf zweierlei

Arten berechneten Seitenlängen ergeben — auf die Einheit der vorhergehenden Polygonseite reduziert — die Werte  $a$  und  $b$ , die infolge verschiedener Fehler der Winkelmessungen, welche auf den Luftbildern ausgeführt worden sind, nicht gleich sind. Der Unterschied ist Widerspruch ( $a - b$ ), der die Zuverlässigkeit der Winkelwerte illustriert. Die zufälligen Fehler der Identifizierung und Winkelmessung, wie bereits in Abhandlung ([3], S. 240, 241) bewiesen, ergeben im Widerspruch den Wert  $(a - b) < 0,01$ . Bei größeren Abweichungen muß die Identifizierung überprüft werden, bevor man noch die Berechnungen fortsetzt. Nach Überprüfung nimmt man als Ausgangspunkt für weitere Berechnungen das arithmetische Mittel der bei der Bestimmung der Seitenlängen für die Verhältniszahlen erhaltenen beiden Werte und benutzt die Bezeichnung

$$\frac{a + b}{2} = q. \quad (11)$$

(Die zur Berechnung zweckmäßige Tabelle 2 ist auf Seite 473 ersichtlich, wo die 3. Rubrik die Winkelwerte angibt, die nach Auflösung des Winkelwiderspruches des Polygonzuges auftreten. Die übrigen Rubriken geben die notwendigen Berechnungen an.) Aus Länge  $u$  der Anfangsseite und aus den Verhältniszahlen  $q$  kann die Länge jeder beliebigen Seite bestimmt werden. Z. B. die Seite  $u_i$

$$u_i = u q_1 q_2 \dots q_i. \quad (12)$$

Die auf diese Weise erhaltenen Seitenlängen sind — wie bereits unter (1) erwähnt — fehlerhaft. Die aus den Messungen auf die Seitenlängen abgeleiteten Ergebnisse sind: die am Entzerrungsgerät erhaltenen Werte  $u, v$  und die auf die Einheit der vorhergehenden Polygonseite reduzierten, berechneten Verhältniszahlen  $q_i$ . Der praktisch aufgenommene mittlere Fehler gibt über die Größe der Seitenlängenwidersprüche bei  $u$  und  $v$  Aufklärung. Bei den übrigen Seitenlängen hängt der Fehler von der Zuverlässigkeit des Wertes  $q$  ab, auf den der Widerspruch ( $a - b$ ) und die Größe  $q$  einwirken. Die Größe ( $a - b$ ) wird durch die Lage des winkeltreuen Punktes und durch die Güte der Winkelmessung beeinflusst. Damit können auch bei sorgfältiger Identifizierung und Winkelmessung die Längen  $u$  und  $v$ , ferner jede Verhältniszahl  $q$  verbessert werden.

Für jede Seitenlänge können zweierlei Verbesserungen vorgeschrieben sein. Die eine  $t_i$  infolge des Widerspruches ( $a_i - b_i$ ), die andere  $k$  von der Seitenlänge abhängig. Die erste muß für jede Seite gesondert bestimmt werden, die zweite für die gesamte geometrische Reihe, dem Ursprung der Seitenlängen entsprechend.

Bei Bestimmung der Verbesserungen  $t_i$  wird — nachdem der kleinste Widerspruch das größte Gewicht hat — dieser als Korrekturereinheit gewählt.

Die Verbesserungen sind die auf Einheit reduzierten Widersprüche

$$t_i = \frac{\pm (a_i - b_i)}{c(a - b)_{\min}} \quad (13)$$

Wird Faktor  $c$  nicht beachtet, so sind die berechneten Verbesserungen  $t_i$  größer als die Einheit. Nachdem bloß von kleinen Verbesserungen die Rede sein kann, wird auch der lokale Wert der Verbesserungen durch  $(a - b)_{\min}$  bestimmt. Es sei z. B.  $(a - b)_{\min} = 0,000831$ , die Verbesserungseinheit. Die Verbesserung von  $(a - b)_{\min}$  darf nur kleiner sein als der Widerspruch selbst;  $c = 100\,000$  und somit ist die Verbesserung des Minimums  $0,00001$ .

Um die berechneten Verbesserungen  $t_i$  werden die Faktoren  $q$  und die Längen  $u, v$  erhöht oder vermindert, je nachdem, ob  $v_n$  kleiner oder größer ist als  $v$ .

Der zweite Verbesserungsfaktor ist  $k$ , mit dem alle Verhältniszahlen  $q$  und auch die Längen  $u, v$  multipliziert werden. Somit wird eine den Längen proportionale Verbesserung ausgeführt. Demzufolge ist die Verbesserungsgleichung

$$k(u \pm t_u) \cdot k(q_1 \pm t_1) \cdot k(q_2 \pm t_2) \dots k(q_n \pm t_n) = k(v \pm t_v) \quad (14)$$

Nachdem  $t_u$  und  $t_v$  Werte von geringer Zentimeterordnung sind, dürften sie hier vernachlässigt werden, so daß

$$k = \sqrt[n]{\frac{v}{u} \frac{1}{(q_1 \pm t_1)(q_2 \pm t_2) \dots (q_n \pm t_n)}} \text{ ist.} \quad (15)$$

Mit Logarithmus kann die Gleichung leicht gelöst werden und die Verbesserung beachtend, sind auch die Seitenlängen zu berechnen.

Sind die Seitenlängen bekannt, kann die Polygonlinie berechnet werden. Zur Behebung des erhaltenen Querwiderspruches  $\delta x$  berechnet man nun die Verbesserung  $\Delta \tau$  des Winkels  $\beta_k$ , und hienach, im Besitze der neuen orientierten Richtungswerte und Seitenlängen — wie bereits erwähnt —, erneut die Polygonlinie.

Aus den Punktkoordinaten werden zur Kontrolle die Richtungswinkel der einzelnen Seiten bestimmt, deren Unterschiede die Brechungswinkel der Luftbilder nach Horizontabschluß ergeben. Ebenfalls aus den Punktkoordinaten werden die endgültigen Seitenlängen und die zur weiteren Berechnung notwendigen und auf die Einheit der vorhergehenden Polygonseite reduzierten endgültigen Verhältniszahlen ( $q$ ) berechnet. Diese sind in Tabelle 2 angegeben.



## Berechnung der Hilfspunkte der Radialtriangulation

### a) Beachtung der nachfolgenden Rauten

Man kann die Koordinaten der Hilfspunkte aus den bestimmten Radialpunkten, den Polygonpunkten, mit je drei Vorwärtseinschnitten pro Punkt berechnen. Bei Aufgaben, die eine höhere Genauigkeit erfordern, müssen die zum Vorwärtseinschnitt notwendigen Winkel, welche die Winkel der Raute sind, ausgeglichen werden.

Bei der Ausgleichung der Rauten wird die Wirkung der Nachbarrauten auf die einzelnen Winkel in Betracht gezogen. Die Verbesserungen werden auf Grund des Geodätischen Handbuchs ([2], III. S. 215, Formel 13) bestimmt. Die Winkelverbesserung in Minuten (und Absolutwerten) für die im Zentrum liegenden nahezu 90°-igen vier Winkel ist

$$|v'| = 0,0002866(|a - b|) \quad (16)$$

Das Vorzeichen der Verbesserungen wird aus der Raute der Richtung (dem Vorzeichen) des Widerspruches gemäß aufgezeichnet.

In den vorhergehenden und nachfolgenden Rauten beträgt

$$|v'_\delta| = |v'_a| = \frac{1}{2} |v'|, \quad (17)$$

wo  $|v'|$  der aus Formel (16) erhaltene Verbesserungswert ist. Um die auf diese Weise erhaltenen Werte werde die entsprechenden Winkel der Rauten verbessert, und die mit  $a'$  und  $b'$  bezeichneten Verhältniszahlen aufs neue berechnet. Diese liegen zueinander im allgemeinen schon viel näher. Die Verbesserungen, die verbesserten Winkelwerte sowie die Berechnung sind in Rubriken 6, 7, 8 der Tabelle 2 angegeben.

### b) Bestimmung der Restfehler zufälligen Charakters in den Winkeln der einzelnen Rauten

Die berechneten Verhältniszahlen  $a'$  und  $b'$  weichen, wenn auch in geringerem Maße, dennoch voneinander ab, was auf die noch bestehenden Fehler der Winkelwerte hinweist. Die Winkelverbesserungen sind aus der Annahme zu bestimmen, daß sowohl die vorhergehende als auch die nachfolgende Seite in der Raute bekannt sind, und die optimalsten Verbesserungen der Winkel beim gewählten System der Gewichtsbestimmung gesucht werden.

In regelmäßigen Rauten, wenn die Eckpunkte nahezu 45°-ig sind ist das System der Gewichtsbestimmung 1/2 : 1 ([3], S. 243—246). Wird nun

demgemäß die Verbesserung des Sinuswertes der nahezu 45°igen Eckwinkel als Einheit und die der nahezu 90°-igen zentralen Winkel je nach Gewichtsbestimmung als 0,5 betrachtet, dann beträgt die Verbesserung des Sinuswertes der Winkel neben den nicht gemessenen Hilfspunkten 1,5 Einheiten.

Erst nach Beachtung der aus den nachfolgenden Rauten stammenden Verbesserungen werden die Winkel laut Abb. 4 mit  $\alpha'$ ,  $\beta'$ , ... bezeichnet. Die in den Rauten restlichen zufälligen Richtungsverzerrungen werden so eliminiert, daß die Seitenbedingung mit den Sinuszuwachsen  $v'$  — gemäß Gewichtsbestimmung — den Wert ( $q$ ) ergibt. Der Wert  $v'$  des Sinuszuwaches muß gesondert für Hilfspunkte  $A$  und  $B$  bestimmt werden. In Abb. 4 ist die Bedingungsgleichung für Hilfspunkt  $B$

$$\frac{(\sin \alpha'_B + v') \cdot (\sin \eta'_B + 1,5v')}{(\sin \varepsilon'_B - 1,5v') \cdot (\sin \delta'_B - v')} = (q) \quad (18)$$

entwickelt:

$$\sin \alpha'_B \sin \eta'_B + 1,5v' \sin \alpha'_B + v' \sin \eta'_B + 1,5v'^2 = (q) \cdot (\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B - v' \sin \varepsilon'_B - 1,5v' \sin \delta'_B + 1,5v'^2),$$

geordnet:

$$1,5v'^2 [1 - (q)] + 1,5v' \sin \alpha'_B + v' \sin \eta'_B + v' (q) \sin \varepsilon'_B + 1,5v' (q) \sin \delta'_B = (q) \sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B - \sin \alpha'_B \sin \eta'_B. \quad (19)$$

Die ganze Gleichung sei durch  $\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B$  geteilt und zur Näherungslösung angenommen, daß  $\alpha = \delta = 45^\circ$ , dann ist  $\sin \alpha = \sin \delta = 1/\sqrt{2}$ . Dies beachtend, ergeben sich für die einzelnen Glieder der Gleichung folgende Werte:

$$\frac{1,5v'^2 [1 - (q)]}{\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B} = \frac{1,5v'^2 [1 - (q)]}{(1/\sqrt{2})^2} = 3 [1 - (q)] v'^2$$

$$\frac{\sin \alpha'_B}{\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B} \cdot \frac{\sin \eta'_B}{\sin \eta'_B} \cdot 1,5v' = \frac{1,5b' v'}{\sin \eta'_B} = 1,5 \sqrt{2} b' v'$$

$$\frac{\sin \eta'_B}{\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B} \cdot \frac{\sin \alpha'_B}{\sin \alpha'_B} v' = \frac{b' v'}{\sin \alpha'_B} \sqrt{2} b' v'$$

$$\frac{\sin \varepsilon'_B}{\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B} (q) v' = \frac{(q) v'}{\sin \delta'_B} = \sqrt{2} (q) v'$$

$$\frac{\sin \delta'_B}{\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B} 1,5 (q) v' = \frac{1,5(q) v'}{\sin \varepsilon'_B} = 1,5 \sqrt{2} (q) v'$$

$$\frac{\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B}{\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B} (q) = (q) \quad \text{und} \quad \frac{\sin \alpha'_B \sin \eta'_B}{\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B} = b'.$$

Diese eingesetzt, ergibt sich

$$3 [1 - (q)] v'^2 + 1,5 \sqrt{2} b' + \sqrt{2} b' + \sqrt{2} (q) + 1,5 \sqrt{2} (q) v' = (q) - b' \quad (20)$$

$$3 [1 - (q)] v'^2 + 2,5 \sqrt{2} [(q) + b'] v' - [(q) - b'] = 0$$

$$v'^2 + \frac{2,5 \sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(q) + b'}{1 - (q)} v' - \frac{(q) - b'}{3 [1 - (q)]} = 0 \quad (21)$$

Gleichung zweiten Grades in der Form  $x^2 + px - r = 0$ , (21a). Lösung, dem Wert

$$x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 + r}$$

entsprechend,

$$v'_{1,2} = -\frac{2,5 \sqrt{2}}{6} \cdot \frac{(q) + b'}{1 - (q)} \pm \sqrt{\left[ \frac{2,5 \sqrt{2}}{6} \cdot \frac{(q) + b'}{1 - (q)} \right]^2 + \frac{(q) - b'}{3 [1 - (q)]}} \quad (22)$$

Der kleinere Wert, der mit  $v'_2$  bezeichnet ist, ergibt die gesuchte Lösung. Nachdem  $v'_2$  klein ist, wird als genäherte Lösung in der Gleichung zweiten Grades das quadratische Glied vernachlässigt und der Näherungswert von  $v'_2$  mit  $v'_k$  bezeichnet. Gelöst ergibt die Gleichung

$$v'_k = \frac{(q) - b'}{3 [1 - (q)]} \cdot \frac{3 [1 - (q)]}{2,5 \sqrt{2} [(q) + b']} = \frac{(q) - b'}{2,5 \sqrt{2} [(q) + b']} \quad (23)$$

$v'_k$  bezeichnet den Sinuzuwachs von  $\alpha_B$  bzw.  $\alpha_A$  bei  $45^\circ$ .

Der Zusammenhang zwischen  $v'_k$ ,  $v'_1$  und  $v'_2$  sei bestimmt. Auf Grund der Formel (21a) ist

$$v'_1 + v'_2 = -p = -\frac{2,5 \sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(q) + b'}{1 - (q)} \quad (24)$$

$$v'_1 v'_2 = -r = -\frac{(q) - b'}{3 [1 - (q)]} \quad (25)$$

$$\frac{v'_1 v'_2}{v'_1 + v'_2} = \frac{(q) - b'}{3 [1 - (q)]} \cdot \frac{3 [1 - (q)]}{2,5 \sqrt{2} [(q) + b']} = \frac{(q) - b'}{2,5 \sqrt{2} [(q) + b']} = v'_k \quad (26)$$

bzw.

$$v'_k = \frac{v'_1 v'_2}{v'_1 + v'_2} = \frac{v'_2}{1 + v'_2/v'_1}; \text{ hieraus } v'_2 = v'_k \left( 1 + \frac{v'_2}{v'_1} \right) \quad (27)$$

Ist  $v'_2$  klein, so kann es im Verhältnis zu  $v'_1$  vernachlässigt werden und  $v'_2 = v'_k$ . Auch das Vorzeichen von  $v'_2/v'_1$  kann festgestellt werden. Wie bereits erwähnt,

liegt  $v'_2$  der Größenordnung nach nahe  $v'_k$  und stimmt auch im Vorzeichen damit überein. Man kann einfach nur  $v'_k$  bestimmen. Im Falle eines positiven  $v'_k$ -Wertes ist auch  $v'_2$  positiv. Aus Gleichung (25) folgt

$$v'_2 = - \frac{r}{v'_1} .$$

Dieser Wert wird in Gleichung (27) eingesetzt:

$$v'_2 = v'_2 \left( 1 \mp \frac{r}{v'_1{}^2} \right), \text{ nachdem } r = \frac{(q) - b'}{\pm 3 [1 - (q)]} . \quad (28)$$

Ähnlicherweise ist im Falle eines negativen  $v'_k$ -Wertes auch  $v'_2$  negativ, d. h.,

$$v'_1 (-v'_2) = -r \quad \text{und} \quad v'_2 = \frac{r}{v'_1} .$$

Hieraus ergibt sich

$$v'_2 = v'_k \left( 1 \pm \frac{r}{v'_1{}^2} \right) . \quad (29)$$

Aus Gleichung (23) wird  $v'_k$  entweder positiv oder negativ. Aus der trigonometrischen Tafel werden bei  $45^\circ$  die zum Sinuszuwachs  $|v'_k|$  gehörenden Minuten- und Sekundenwerte ausgesucht. In Anbetracht der Näherungslösung wird der zu  $|v'_k|$  ausgesuchte Minuten- und Sekundenwert um  $\pm (0,05 - 0,15)$ -tel vermindert bzw. erhöht, je nach Vorzeichen von  $v'_k$  und  $1 - (q)$  in den Gleichungen (28) und (29). Als Kontrolle dient hier, daß die Verhältniszahlen  $(q_a)$  und  $(q_b)$ , welche auf Grund der um die  $v'_2$  entsprechenden Werte verbesserten Winkel berechnet worden sind, von der Verhältniszahl  $(q)$  nur in geringem Maße — in der fünften und sechsten Dezimale — abweichen dürfen, wenn die Hilfspunktkoordinaten aus den Vorwärtseinschnitten mit einer 10 cm überschreitenden Genauigkeit berechnet werden sollen.

Sind die Winkel der Rauten und die Richtungswinkel der Polygonseiten bekannt, so genügt es, die Koordinaten der Hilfspunkte aus je zwei Vorwärtseinschnitten zu berechnen.

Die einzelnen Schritte des Verfahrens sind in Tabellen 1 und 2 angegeben. Das Verfahren nimmt Luftbildaufnahmen bei ruhiger Atmosphäre an, da in diesem Falle die Höhenschwankungen, Längs- und Querneigungen des Flugzeuges klein und zufälligen Charakters sind und der geradlinige Flug auch leichter einzuhalten ist. Diese Umstände bestimmen die Länge des aufzuarbeitenden Bildstreifens, bzw. in wievielter Aufnahme sich die Paßpunkte innerhalb eines Bildstreifens befinden sollten. Unseren bisherigen Erfahrungen

entsprechend hat man bei Bildflügen ohne Hilfsmittel je fünf Paßpunkte in jedem 7—9. Bild mit 60% Längsüberdeckung zu messen.

Bei der in der Sowjetunion angewandten Photopolygonometrie werden nur die Polygonpunkte der Radialtriangulation bestimmt. Hierzu werden die Brechungswinkel von den Bildern abgenommen, während die Seitenlängen unabhängig voneinander aus den Angaben des Radiohöhenmessers RW-10 oder RWTD und der relativen Orientierung der Luftbilder berechnet werden; diese werden aus Parallaxenmessungen auf dem Stereokomparator bestimmt. Eine genaue Beschreibung siehe unter [5].

Die Tabellen enthalten die wichtigeren Schritte der Berechnung des Versuchsbildstreifens.

### 1. a. Text

Der Bildstreifen bestand aus sieben Bildern im Maßstab von etwa 1 : 18 000. Die Entzerrung erfolgte im Maßstabe 1 : 10 000. Mit dieser Entzerrung erhielt man die Koordinaten der Punkte  $K, I$  und  $4, V$ . Aus diesen wurde der Richtungswinkel ( $K, V$ ) :  $269^{\circ}36'17''$  — welcher der Anschlußwinkel des Polygonzuges ist, — berechnet, außerdem noch die Brechungswinkel  $\beta_k$  und  $\beta_v$ . Aus der auf der Aufnahme ausgeführten Richtungs- und Winkelmessung wurden die Richtungsskizzen hergestellt (Beispiel: Bild No. 2, mit den späteren Verbesserungen, weiters den notwendigen Winkeln; T. 1.; Abb. 5), aus denen die Brechungswinkel  $\beta_i$  entnommen werden können. (T. 1.; 1, 2. Rubrik.)

Der Horizontabschluß betrug, dem zulässigen  $4'$  gegenüber,  $2'45''$ . Der Winkelwiderspruch des Polygonzuges, aus Gleichung (8) berechnet, beträgt

$$\Delta\delta = 4'53'' = 293''.$$

Der mittlere Fehler des Winkelwiderspruches ist bei sieben Brechungswinkeln laut Gleichung (9)

$$\mu_z = 3'45''.$$

Die verbesserten Brechungswinkel sind unter T. 1. ; 3. Rubrik angegeben.

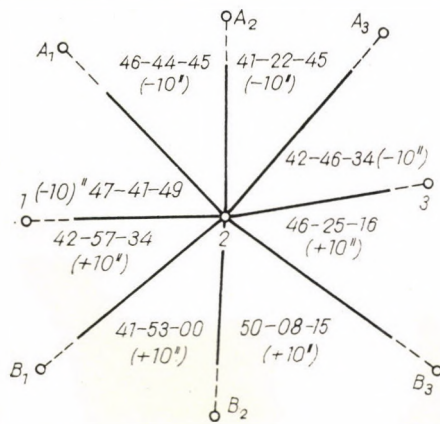
Die zur Berechnung der Seitenlängen notwendigen Widersprüche ( $a - b$ ) und die Verhältniszahlen  $q$  wurden in der Tabelle 2 auf die in Rubriken 1—5 angegebene Weise bestimmt. Zur weiteren Berechnung wurden diese in der Tabelle 1 in Rubriken 5, 6 übertragen. Die Werte  $t_i$  und  $k$  sind in T. 1 in Rubriken 7, 8 angegeben, ihre Bestimmung erfolgte laut Gleichungen (13) und (15). T. 1 Rubrik 9 zeigt die aus den Koordinaten berechneten Längen  $u$  und  $v$ , sowie die verbesserten Verhältniszahlen  $q'$  an. T. 1 Rubrik 10 enthält die berechneten Seiten des Polygonzuges.

Berechnungen

Tabelle 1

Bezeichnung	Berechnete und gemessene Brechungswinkel (2), die um die Winkelabschlußfehler verbesserten Werte (3)		Seite	$\pm(a-b)$	$\frac{a+b}{2} = q$	$\pm t_i = \frac{a_i - b_i}{c(a-b)_m}$	K	Verbesserte Verhältniszahlen ( $q'$ ) und bei der Entzerrung erhaltene Strecken ( $u; v$ )	Berechnete Seiten des Polygonzuges	Brechungswinkel nach Verbesserung von $\delta x$						
	1	2									3	4	5	6	7	8
$\beta_K$	358—56—32	358—55—40	K—I				0,999876	$\mu = 1498,46$	1498,27	358—55—00						
$\beta_I$	183—56—00	183—55—20								183—55—20						
$\beta_1$	178—01—00	178—00—20								I—1	—0,007190	1,004888	—0,000086	1,004677	1505,28	178—00—20
$\beta_2$	178—35—53	178—35—13								1—2	—0,007805	1,019006	—0,000150	1,016409	1529,98	178—35—13
$\beta_3$	179—57—21	179—56—41								2—3	+0,004177	0,954908	—0,000050	0,954740	1460,73	179—56—41
$\beta_4$	179—09—14	179—08—34								3—4	+0,014715	1,001650	—0,000177	1,001348	1462,70	179—08—34
$\beta_v$	1—28—53	1—28—12								4—v	—0,000831	1,002096	—0,000010	1,001961	1465,57	1—28—52
$\Sigma\beta$	1260—04—53	1260—00—00												$v = 1465,75$		1260—00—00

472  
G. HANKO



47—41—39	
46—44—35	
94—26—14	} 178—35—13
41—22—35	
42—46—24	
84—08—59	
42—57—44	
41—53—10	
84—50—54	} 181—24—47
50—08—25	
46—25—28	
96—33—53	[360—00—00]

Die aus den Polygonpunkten 1, 2, 3 durch Vorwärtschnitt berechneten Koordinaten der Hilfspunkte  $A_2$  und  $B_2$ .

	+y	+x
$A_2$	380,85 m	083,15 m
	480,86 m	083,24 m
	480,90 m	083,20 m
$B_2$	751,74 m	047,80 m
	751,74 m	048,00 m
	751,68 m	047,88 m

Abb. 5.

2. Raute

Tabelle 2

Berechnung der nachfolgenden Polygonseite	Bezeichnung	Winkel (3, 4) und Sinuse (5) nach Verteilung des Winkelabschlußfehlers			Winkelverbesserung $v$ aus dem systematischen Fehler (6), verbesserte Winkel (7) und die Sinuse (8)			Winkelverbesserung $v'$ aus dem zufälligen Fehler (9), verbesserte Winkel (10) und die Sinuse (11)			
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$a = \frac{\sin \alpha_A \sin \eta_A}{\sin \varepsilon_A \sin \delta_A}$	A	$\alpha$	41—22—50	0,661057	—(1—07)	41—21—43	0,660814	—(1—30)	41—20—13	0,660486	
		$\beta$	94—26—14		—(1—12)	94—25—02		—(0—45)	94—24—17		
		$\varepsilon$	44—10—56	0,696943		44—13—15	0,697426	+(2—15)	44—15—30	0,697895	
0,492862		B	$\delta$	47—38—33	0,738955	—(2—06)	47—36—27	0,738544	+(1—30)	47—37—57	0,738837
0,515009			$\gamma$	84—08—59		+(1—12)	84—10—11		+(0—45)	84—10—56	
0,492796			$\eta$	48—12—28	0,745566		48—13—22	0,745741	—(2—19)	48—11—07	0,745304
0,515080			$\alpha$	47—30—40	0,737408	+(1—07)	47—31—47	0,737628	+(1—20)	47—33—07	0,737889
0,492263		B	$\beta$	84—50—54		+(1—12)	84—52—06		+(0—40)	84—52—46	
0,515631			$\varepsilon$	47—38—26	0,738932		37—36—07	0,738478	—(2—0)	47—34—07	0,738085
			$\delta$	42—53—56	0,680707	+(2—06)	42—56—02	0,681154	—(1—20)	42—54—42	0,680870
			$\gamma$	96—33—53		—(1—12)	96—32—41		—(0—40)	96—32—01	
0,479264		Zahlenwerte der Widersprüche, der Verhältniszahlen und der Winkelverbesserungen	$\eta$	40—32—11	0,649931		40—31—17	0,649733	+(2—00)	40—33—17	0,650178
0,502996	$a$			0,956996	$a'$		0,956737	$(q_A)$		0,954681	
0,479261	$b$			0,952819	$b'$		0,952773	$(q_B)$		0,954668	
0,503017	$a - b$		+	0,004177				$(q) - (q_A)$	+	0,000054	
0,479759	$\frac{a+b}{2} = q$			0,954908	$(q)$ aus dem Polygon		0,954735	$(q) - (q_B)$	+	0,000067	
0,502540											

Aus dem systematischen Fehler:  $|v'| = 0,0002866 / 1\ 000\ 000 (a - b) / = 0,0002866 / 4717 / =$   
 $= / 1' - 12'' / ; \quad \frac{1}{2} |v'| = / 0' - 36'' /$

$$V'_{aA} = \frac{(q) - a'}{2,5 \sqrt{2} [(q) + a']} = \frac{0,954735 - 0,956737}{3,535 \cdot 1,911472} = \frac{0,002002}{6,757054} = -0,000296 = -1' - 26'' \approx -1' 30''$$

$$V'_{bB} = \frac{(q) - b'}{2,5 \sqrt{2} [(q) + b']} = \frac{0,954735 - 0,952773}{3,535 \cdot 1,907508} = \frac{+0,001963}{6,743041} = +0,000291 = +1' - 25'' \approx +1' 20''$$

Nach der ersten Berechnung des Polygonzuges infolge des Querwiderspruches  $\delta x = 2,17$  m beträgt der Richtungswinkel ( $K/V$ )  $269^\circ 37' 8''$ . Aus diesem Grunde wurde der Brechungswinkel  $\beta_k$  um  $\Delta\tau = -40''$  vermindert und der Brechungswinkel  $\beta_v$  um denselben Wert erhöht. Die endgültigen Brechungswinkel zur Polygonberechnung sind unter T. 1 in der Rubrik 11 enthalten. Infolge der Verbesserung  $\beta_k = 92''$  ist die gesamte Bewegung des I. Punktes auf dem Bilde  $0,051$  mm, im Maßstabe  $1 : 10\,000$   $0,92$  m, befindet sich also unter  $0,1$  mm.

Nach der zweiten Umrechnung des Polygonzuges betrug der Längswiderspruch  $\delta y = \Delta h = -1,88$  m, der Querwiderspruch  $\delta x = \Delta k = +0,43$  m. Die Länge des Polygonzuges ist  $8923$  m, der lineare Zugsabschlußfehler:  $d_m = \sqrt{1,88^2 + 0,43^2} = 1,93$  m und der relative Fehler ist  $1,93/8923 \approx \approx 0,2\%$ . Der voraussichtliche Längs- und Querwiderspruch beträgt laut Gleichungen ([2], II. S. 347 [4], [5]):  $\Delta h = 3,46$  m;  $\Delta k = 2,34$  m.

Nach Berechnung der Polygonpunkte mußten zur Berechnung der Koordinaten der Hilfspunkte zunächst die Innenwinkel der Rauten ausgeglichen werden. Der erste Schritt hierzu ist die Beachtung der systematischen Fehler, deren Berechnung in T. 2 die Rubriken 6, 7, 8 enthalten. Die Berechnungen der zufälligen Fehler  $v'_{aA}$  und  $v'_{aB}$  sowie der Kontrollen ( $q_a$ ) und ( $q_b$ ) sind in T. 2 in Rubriken 9, 10, 11 angegeben.

Waren nun die Innenwinkel bekannt, so erfolgte die Berechnung der Hilfspunkte mittels Vorwärtseinschneiden. Die als Ergebnis der Berechnung der Koordinaten der Hilfspunkte  $A_2$  und  $B_2$  erhaltenen je drei Wertepaare sind unter T. 1 angegeben.

Um die Genauigkeit des Verfahrens bestimmen zu können, wurden für die festgesetzten Hilfspunkte die Negativen 1 und 3 auf dem Entzerrungsgerät eingestellt und die darauf befindlichen 13 Triangulationspunkte als Unbekannte bestimmt. In den Punktkoordinaten sind die Abweichungen die folgenden:

$$\Delta y_{\min} = 0,0 \text{ (in 3 Fällen); } \Delta y \text{ durchschnittlich} = \pm 1,27 \text{ m; } \mu_{\Delta y} = \pm 1,55 \text{ m; } \Delta y_{\max} = \pm 2,4 \text{ m (in 2 Fällen).}$$

Im Auswertungsmaßstab von  $1 : 10\,000$ :

$$\Delta y_{\min} = 0,0; \Delta y \text{ durchschnittlich} = \pm 0,127 \text{ mm; } \mu_{\Delta y} = \pm 0,155 \text{ mm; } \Delta y_{\max} = \pm 0,24 \text{ mm;}$$

Im Bildmaßstab von  $1 : 18\,000$ :

$$\Delta y_{\min} = 0,0; \Delta y \text{ durchschnittlich} = \pm 0,071 \text{ mm; } \mu_{\Delta y} = \pm 0,086 \text{ mm; } \Delta y_{\max} = \pm 0,133 \text{ mm.}$$

$$\Delta x_{\min} = 0,0 \text{ (in 5 Fällen); } \Delta x \text{ durchschnittlich} = \pm 0,79 \text{ m; } \mu_{\Delta x} = \pm 1,08 \text{ m; } \Delta x_{\max} = \pm 2,3 \text{ m (in 1 Falle).}$$



Im Auswertungsmaßstab von 1 : 10 000:

$$\Delta x_{\min} = 0,0; \Delta x \text{ durchschnittlich} = \pm 0,079 \text{ mm}; \mu_{\Delta x} = \pm 0,108 \text{ mm}; \\ \Delta x_{\max} = \pm 0,23 \text{ mm}.$$

Im Bildmaßstab von 1 : 18 000:

$$\Delta x_{\min} = 0,0; \Delta x \text{ durchschnittlich} = \pm 0,044 \text{ mm}; \mu_{\Delta x} = \pm 0,06 \text{ mm}; \\ \Delta x_{\max} = \pm 0,128 \text{ mm}.$$

Die erhaltenen Resultate weisen — der graphischen Lösung der Radialtriangulation gegenüber — eine etwa zweifache Genauigkeitssteigerung auf und das Verfahren erweist sich infolge des angewandten kleineren Aufnahmemaßstabes als viel wirtschaftlicher.

#### SCHRIFTTUM

1. BUCHHOLTZ: Photogrammetrie (VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1960).
2. Die seitens des Staatl. Amtes für Vermessung und Kartographie beauftragte Arbeitsgemeinschaft, Redakteur Hazay: Geodéziai Kézikönyv (Geodätisches Handbuch) I, II, III. Band (Közgazdasági és jogi kiadó, Budapest 1956, 1957, 1960).
3. HANKÓ: Über Radialtriangulation (Acta Technica, Bd. XXX. No. 3—4. Budapest 1960).
4. SCHWEIZER: Untersuchung und praktische Durchführung einer Radialtriangulation im Hügelland (Universitätsverlag von Robert Noske in Borna—Leipzig 1931).
5. KONSIN: Aerofotopografija (Geodesisdat, Moskau 1954).

#### ZUSAMMENFASSUNG

Die Zuverlässigkeit der zum Einpassen der Radialtriangulation anwendbaren Punkte ist ganz verschieden, da sich diese Punkte an verschiedenen Teilen der Luftbilder befinden. Am günstigsten sind diese Radialpunkte des Bildstreifens, welche den Polygonzug der Radialtriangulation bilden. Je zwei Punkte der Anfangs- und Endseite können vermessen oder auch im Auswertungsmaßstab mittels Entzerrung der beiden Bilder bestimmt werden.

Der eine Fehler des Polygonzuges ist der Winkelwiderspruch. Bei seiner Auflösung wird innerhalb der durch die Entzerrung gegebenen Fehlergrenze die Richtung der Anfangs- bzw. Endseite mit Rücksicht auf den Querwiderspruch verändert.

Der andere Fehler ist der Längswiderspruch, zu dessen Bestimmung die Seitenlängen des Polygonzuges aus den Winkeln der Raute abgeleitet werden müssen, da diese unmittelbar nicht gemessen werden können. Für die abgeleiteten Seitenlängen kann man zwei Verbesserungen vorschreiben. Die eine ist die auf zwei Arten abgeleitete nachfolgende Seitenverbesserung, die aus dem Widerspruch, die andere die Verbesserung der Verhältniszahl, die aus der Herkunft der Seitenlängen gemäß der geometrischen Reihe bestimmt wird.

Wenn der Polygonzug bekannt ist, müssen die Richtungen nach den Hilfspunkten teils infolge der konstanten, teils infolge der zufälligen Fehler verbessert werden. Bei letzteren wird aus der Annahme ausgegangen, daß sowohl die vorhergehende als auch die nachfolgende Polygonseite bekannt ist, und die Verbesserung der Richtungen bei günstigsten Gewichtsverhältnissen berechnet wird.

Die Hilfspunkte werden aus den Polygonpunkten mittels mehrfacher Vorwärtseinschnitten bestimmt.

In den Tabellen sind die wichtigeren Schritte der Berechnung des Versuchsbildstreifens angegeben. Zur Kontrolle wurden aus den bestimmten Hilfspunkten die Koordinatenabweichungen der als unbekannt angenommenen Triangulationspunkte geprüft.

## THE FITTING-IN OF THE GEODETICAL RADIAL TRIANGULATION TO A SYSTEM

G. HANKÓ

## SUMMARY

The points to be utilised for fitting-in the radial triangulation are of different reliability for they are lying at different parts of the photographs. Of greatest advantage are the radial points of the image band forming the traverse of radial triangulation. Two points each of the beginning and abutment line can be located or determined by rectifying the two photographs on the scale of evaluation.

One fault of the traverse is the angular contradiction. When resolving it, the direction of the beginning, resp. abutment line is changed in view of the cross error within the error limits given by rectification.

The other fault is the longitudinal error; in order to determine the same, the side length of the traverse which cannot be measured directly are derived from the angles of the central system. Two corrections can be suggested for the side lengths derived. One is the correction of the following traverse side derived in two ways, the other the correction of the proportion factor. The former being determined from the contradiction, the latter from the origin of the side lengths as to the geometrical progression.

In the knowledge of the traverse, the direction towards the reference points are to be corrected, partly on account of constant, and partly of accidental errors. In this latter case, let us start with the assumption that the foregoing as well as the following sides are known, and the correction of directions is computed under the most favourable weight conditions.

The reference points are determined from the traverse stations by means of repeated intersections.

The enclosures indicate the chief steps of computation of the experimental band. For control, the coordinates deviation of the triangulation points regarded as unknown are to be tested from the determined reference points.

LE RATTACHEMENT DE LA TRIANGULATION RADIALE  
A UN SYSTÈME GÉODÉSIQUE

G. HANKÓ

## RÉSUMÉ

Les points utilisables pour le rattachement de la triangulation radiale n'ont pas la même exactitude, étant donné qu'ils se trouvent dans des parties différentes des photographies. Les plus avantageux sont les points radiaux de la bande-image, qui constituent le tracé polygonal de la triangulation radiale. Deux points peuvent être relevés sur le point initial et deux autres sur le côté final, ou bien ils peuvent être déterminés à l'échelle de l'évaluation, par la transformation des deux images.

L'écart angulaire constitue un des écarts du tracé polygonal. En décomposant cet écart, la direction du côté initial, resp. du côté final est changée en considération de l'écart transversal, dans les limites d'erreur données par la transformation.

L'autre écart est l'écart longitudinal. Pour le déterminer, il faut, des angles du système central, déduire les côtés du tracé polygonal, leur mesure directe n'étant pas possible. Il y a deux corrections à prescrire pour les côtés déduits. L'une est la correction du côté suivant, déduite par deux voies et déterminée par l'écart, l'autre la correction du facteur de proportionnalité, déterminée par l'origine des côtés, suivant la série géométrique.

En connaissance du tracé polygonal, on doit corriger les directions sur les points de référence, en raison des erreurs constantes et des erreurs accidentelles. En cas de ces dernières, on part de l'hypothèse que le côté antécédent aussi bien que le coté suivant sont connus, et l'on calcule la correction des directions dans les conditions de poids les plus favorables.

Les points de référence sont déterminés des points polygonaux, au moyen d'intersections répétées.

Les annexes indiquent les principales phases du calcul de la bande-image expérimentale. Comme contrôle, on a examiné les différences de coordonnée des points de triangulation considérés comme inconnus, à partir des points de référence déterminés.

## ПОДГОНКА РАДИАЛЬНОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ К СИСТЕМЕ ГЕОДЕЗИИ

Д-р ГЕЗА ХАНКО

## РЕЗЮМЕ

Точки, пригодные для подгонки радиальной триангуляции в различной степени надежны, поскольку расположены в различных частях фотографий. Наиболее предпочтительны радиальные точки ряда изображений, образующие линию многоугольника радиальной триангуляции. По две точки начальной и замыкающей сторон могут быть замерены или определены путем трансформации двух изображений в масштабе обработки.

Одной из погрешностей линии многоугольника является погрешность замыкания угла. Принимая во внимание поперечную погрешность, при распределении изменяем направление начальной или соответственно замыкающей сторон в пределах погрешности, заданной посредством трансформации.

Другой погрешностью является погрешность длины, для определения которой необходимо вывести из углов центральной системы длины сторон линии многоугольника, ввиду того, что таковые непосредственно не замеримы. Для выведенных длин сторон может быть предписано два исправления. Одно — исправление последующей стороны, выведенной двумя способами, которое определяется из противоречия, второе — исправление коэффициента пропорциональности, определяющееся по происхождению длин сторон от геометрического ряда.

При известной линии многоугольника, необходимо исправить направления, стремящиеся к вспомогательным точкам, исходя из частично постоянных, частично же случайных ошибок. В этом последнем случае исходим из предположения, что известна как предыдущая, так и последующая сторона, и ведем расчет исправления направления для наивыгоднейших условий веса.

Вспомогательные точки определяются путем повторной засечки из точек многоугольника.

В приложениях показаны главные этапы расчета ряда опытов. В качестве проверки из определенных вспомогательных точек были исследованы отступления координат, принятых за неизвестные точек триангуляции.



*Printed in Hungary*

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett 1961. XII. 5. — Terjedelem: 15 (A5) ív, 50 ábra, 1 melléklet

---

1961.54515 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György



The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address. The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

## INDEX

- Ховани Л.*: Уравнивание соединительных треугольников по принципу линейно-угловой «сети» — *Hoványi, L.*: Die Ausgleichung eines Basenentwicklungsdreiecks als Kombination von Winkel- und Streckenmeßnetzen — The Adjustment of Extension Triangles by a Combination of the Adjustments of Trilateration and Triangulation Networks — Compensation du triangle de rattachement par combinaison des réseaux de trilatération et de triangulation ..... 309
- Hazay, I.*: Polygonale Knotenpunktsysteme — On Polygonal Nodal Systems — Des systèmes polygonaux de points nodaux — *Хазай И.*: Системы полигональных узловых точек ..... 323
- Alpár, Gy.*: Compensation de la détermination simultanée de la latitude, de la longitude et de l'azimut géographiques — Über die Ausgleichung der gleichzeitigen Breiten-, Längen- und Azimutbestimmung — On the Adjustment of Simultaneously Determined Geographical Longitude, Latitude and Azimuth — *Альпар Г.*: Об уравнивании результатов одновременного определения географической широты, долготы и азимута ..... 341
- Csatkai, D.*: Steigerung der Genauigkeit bei der Bestimmung der Komparationsverbesserung in der Nivellierung — Improving the Accuracy of the Calibration Correction of Levelling — Augmentation de la précision dans la correction d'étalonnage du nivellement — *Чаткай Д.*: Повышение точности при определении компарационной поправки нивелирования ..... 357
- Bacsák, Gy.*: Überblick über das Klima der Äquatorialzone — A Review of the Climate of the Equatorial Zone — Aperçu sur le climat de la région équatoriale — *Бачак Д.*: Обзор климата экваториальной зоны ..... 375
- Zilahi-Sebess, L.*: On the Geomagnetic Quadrupole-Field — Über das geomagnetische Quadrupol-Feld — Sur le champ quadrupôle géomagnétique — *Зилахи-Шебеш Л.*: Об изучении поля геомагнитного квадруполья ..... 403
- Egyed, L.*: The Internal Energies of the Earth as Revealed in the Course of Evolution of Natural Sciences — Die inneren Energien der Erde im Lichte der Entwicklung der Naturwissenschaften — Les énergies internes de la Terre et leur rapport avec le développement des sciences naturelles — *Эдьед Л.*: Внутренние энергии Земли и их связь с развитием естествознания ..... 427
- Гзовский, М. В.*: Тектонофизика и прогноз землетрясений — *Gzowski, M. W.*: Tectonophysik und die Voraussage von Erdbeben — Tectonophysics and the Forecast of earthquakes — Tectonophysique et prognostique des tremblements de terre .. 435
- Hankó, G.*: Einpassen der Radialtriangulation in das geodätische System — The Fitting-in of the Geodetical Radial Triangulation to a System — Le rattachement de la triangulation radiale à un système géodésique — *Ханко Г.*: Подгонка радиальной триангуляции к системе геодезии ..... 457