

1987

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XXXIV

FASCICULI 1-2



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1961

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Acta Technica
Tomus XXXIV

- Berceli, T.* : A Travelling-Wave Output Amplifier for the 4000-Mc/s Band — Ein Wanderfeld-Endverstärker für das 4000-MHz-Gebiet — Amplificateur final à onde progressive dans la bande de 4000 MHz — *Берцели, Т.*: Конечный усилитель бегущей волны 151
- Bölskei, E.* : Über die grundlegenden rheologischen Eigenschaften der Festkörper — On the Fundamental Rheologic Properties of Solid Bodies — Des propriétés rhéologiques fondamentales des solides — *Бельскеи, Э.*: Основные реологические свойства твердых тел 369
- Csonka, P.* : Analysis of the Wind Load Effect on Rigid Jointed Multi-Storied Building Frames — Die Berechnung hoher Stockwerkrahmen auf Windlast — Calcul de l'ossature de bâtiments tours chargés par le vent — *Чонка П.*: Расчет каркасной конструкции башенных зданий на ветровую нагрузку 135
- Csonka, P.* : Elliptic Paraboloid Shells with Constant or Continuously Varying Thickness Having an Elliptic Base — Elliptische Paraboloidschalen über elliptischen Grundriß mit konstanter oder kontinuierlich veränderlicher Wandstärke — Voile en forme de paraboloïde elliptique construit sur une base elliptique, d'épaisseur de paroi constante ou à variation continue — *Чонка, П.*: Эллиптическая параболоидная оболочка с неизменной или непрерывно изменяющейся толщиной стенки над эллиптическим основанием 337
- Dévényi, Gy. und Mecseki, I.* : Die Verformbarkeit von Al 99,5 und Cu-E-Rohren und die Veränderung ihrer mechanischen Eigenschaften beim Hohlzug — The Ductility of 99,5% Aluminium and Electrolytic Copper Tubes and the Changes in their Mechanical Characteristics at Hollow Drawing — Malléabilité et variation des propriétés mécaniques des tubes en aluminium à 99,5% et des tubes en cuivre électrolytique, pendant l'étirage en creux — *Девени Д., Мечки И.*: Обрабатываемость и изменение механических свойств при протяжки труб из 99,5% алюминия и электролитной меди 351
- Fonó, A.* : The Economics of Long Natural-gas Pipelines — Die Wirtschaftlichkeit von langen Erdgasleitungen — L'économie des conduites de gaz naturel longues — *Фоно А.*: Экономичность длинных трубопроводов природного газа 437
- Gangli, B.* : Fibre Tufts in the Drafting Mechanisms of the Bast Fibre Industry — Stapelbildkurven in den Streckwerken der Bastfaserindustrie — Wilkinson tuft diagrammes de bancs d'étirage pour fibres — *Гангли Б.*: Вытяжные аппараты 9
- Geleji, A.* : Berechnung des Kraftbedarfs beim Pressen im Gesenk — Calculating the Forces in the Dies at Press Forging — Calcul des forces nécessaires pour le matriçage — *Геллеи А.*: Расчет усилий потребных при ковке в штампах 185
- Goschy, B. und Balázs, Gy.* : Grenzzustand der auf Biegung und auf gleichzeitigen Schub beanspruchten Stahlbetonquerschnitte — Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete Sections under Combined Bending and Shear — La rupture des sections de béton armé par flexion et par effort tranchant — *Гоши Б. и Балаж Д.*: Исследование предельного состояния железобетона четырехугольного сечения, работающего одновременно на изгиб и срез 55

<i>Káldor, M. and Veró, J.</i> : A Method to Reveal Austenitic Grain Size in Hardenable Steels — Ein Verfahren zur Messung der Austenit-Korngröße härterbarer Stahlsorten — Méthode pour mesurer la grosseur des grains d'austenite des aciers trempés — <i>Калдор М. и Вере Й.</i> : Метод определения величины зерна аустенита закаливающих сталей	177
<i>Kaliszky, S.</i> : Untersuchung einer Kegelstumpf-Schale aus Stahlbeton auf Grund des Traglastverfahrens — Investigation of a Truncated Cone-Like Reinforced Concrete Shell on the Basis of their Limit Analysis — Étude des voiles minces tronconiques en béton armé, sur la base de la théorie de la plasticité — <i>Калиски Ш.</i> : Исследование железобетонной оболочки, имеющей форму усеченного конуса на основе теории излома	159
<i>Kardos, Á.</i> : Relation of Cutting Temperature to Tool Life in Turning of Aluminium Alloys — Zusammenhang zwischen Schnitttemperatur und Standzeit beim Drehen von Aluminiumlegierungen — Rapport entre la température de coupe et la durée du tranchant de l'outil au tournage des alliages d'aluminium — <i>Кардош А.</i> : Зависимость температуры резания от стойкости резца при токарной обработке алюминиевых сплавов	71
<i>Kereszty, P.</i> : Pesage des charges de roues des véhicules de chemin de fer à deux essieux — Das Wägen des Raddruckes von zweiachsigen Eisenbahnwagen — Balancing of the Wheel-load of Two-axled Railway Carriages — <i>Кересту П.</i> : Определение давления колес двухосных железнодорожных вагонов	281
<i>Klimov, B.</i> : Ein Beitrag zur Biegetheorie der flachen doppelt gekrümmten Schalen mit veränderlicher Dicke — Contribution to the General Bending Theory of Flat Shells Curved in two Directions Having a Varying Thickness — Contribution à la théorie de la flexion des voiles plats doublement courbes et d'épaisseur variable — <i>Климов Б.</i> : Моментная теория расчета пологих оболочек двойной кривизны при переменной толщине	403
<i>Likeš, J., Čadek, J. and Mazanec, K.</i> : Eine Methode zur Bestimmung der Anzahl und Größe diskusförmiger Teilchen der Dispersionsphase — Method to Determine Number and Size of Disc Shaped Particles of the Dispersion Phase — Méthode pour la détermination du nombre et de la grandeur des particules discoïdes de la phase de dispersion — <i>Ликеш Й., Чадек Й., Мазанец К.</i> : Метод определения количества и размеров дискообразных частиц дисперсионной фазы	259
<i>Lipka, I.</i> : Theorie der Ableitung von Polygonprofilen — Theory on the Deduction of Polygon Profiles — Théorie de la formation des profils polygonaux — <i>Липка И.</i> : Теория нахождения производной полигонных профилей	319
<i>Mándi, A.</i> : In Memory of Otto Titus Bláthy — Zur Erinnerung an Otto Titus Bláthy — In memoriam Otto Titus Bláthy — <i>Манди А.</i> : Памяти Отто Титус Блати ...	3
<i>Paulinyi, Á.</i> : Eisenwerke von Rhonitz in der ersten Hälfte des 19-ten Jahrhunderts und das Frischverfahren von Rhonitz — The Iron Works of Rhonitz in the First Half of the 19th Century and the Refining Process of Rhonitz — L'usine sidérurgique de Rhonitz dans la première moitié du XIX ^e siècle. Le procédé de raffinage de Rhonitz — <i>Паулини А.</i> : Железодетальный завод в Ронице в первой половине XIX века и роницкий метод, фришевания	199
<i>Széchy, Ch.</i> : A More Exact Evaluation of Pile Test Loadings — Genauere Auswertung bei Pfahlprobelastungen — Une méthode pour l'évaluation plus exacte des essais de mise en charge des pieux — <i>Сечи, К.</i> : Уточненная оценка пробной нагрузки свай	445
<i>Szelényi, T. Z.</i> : Distance to Potential Minimum of the Electronic Space-Charge from Externally Heated Cathodes in Inert High-Pressure Gas-discharges — Der Abstand des Potentialminimums der Elektronenraumladung in Edelgasentladungen von nahezu atmosphärischem Druck, mit einer von außen geheizter Kathode — La distance du potential minimum de la charge électronique de l'espace dans les décharges des gaz rares à haute pression avec cathodes chauffées de l'extérieur	

— Селени, Т. З.: Расстояние минимума электронной зарядки потенциала при разрядах в инертных газах высокого давления в случае накаливаемых извне катодов	453
<i>Szelényi, T. Z.</i> : Electrical Conduction and Breakdown Phenomena in High-pressure Argon Using an Externally Heated Cathode — Elektrische Leitungs- und Durchschlagserscheinungen in Argon, bei nahezu atmosphärischem Druck, mit einer von außen geheizter Kathode — Conduction et décharge électriques dans l'argon à haute pression en employant une cathode chauffée par l'extérieur — Селени Т. З.: Явления электрической проводимости и пробоя в аргоне высокого давления в случае накаливаемых извне катодов	457
<i>Szendy, Ch.</i> : Simple and Generalized Method for Developing the Incremental Transmission Losses — Eine einfache allgemeine Methode für Bestimmung der Zuwachsnetzverluste — Une méthode simple et générale pour la détermination des pertes de transport différentielles — Сенди К.: Простой и общий метод определения приращивания потерь	421
<i>Szöke, B.</i> : Enlargement on the Eytelwein-Grashof Thesis — Weiterentwicklung des Satzes Eytelwein-Grashof — Extension de la formule d'Eytelwein-Grashof — Секе Б.: Распространение теоремы Ейтельвейна-Грасхофа	83
<i>Szöke, B.</i> : Methods for the Delineation of Axonometric and Perspective Projections; Functional Principles of the Existing Transformer Devices — Zeichnungsverfahren von axonometrischen und perspektiven Projektionen. Arbeitsprinzipien von Zeichenmaschinen gangbarer Ausführungen — Méthodes de délinéation des projections axonométriques et perspectives; principes de fonctionnement des instruments actuels — Секе Б.: Методы отображения аксонометрических и соответственно перспективных проекций из точных по размеру проекций и принципы работы устройств для отображения	231
<i>Terplán, Z.</i> : Erinnerung an Prof. G. Pattantus Á. — In the Memory of G. Pattantus Á. — In memoriam Prof. Géza Pattantus Á. — Терплан З.: Памяти профессора Г. А. Паттантыуш	5
<i>Thamm, I.</i> : Ein Kreisringplatten-Problem bei stehenden Kleindampfkesseln — Stress and Strain in the Upper Closing Plates of Upright, Cylindrical Steam Boilers — Conditions de tensions et de déformations de la plaque de fermeture supérieure des chaudières verticales cylindriques — Там И.: Режим напряжения и деформаций верхнего запорного листа цилиндрических вертикальных паровых котлов	17
<i>Verba, A.</i> : Method of Singularities for Computing the Velocity Distribution in a Radial Impeller — Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung an einem radialen Laufrad mit Hilfe der Methode der Singularitäten — Calcul de la répartition des vitesses dans les roues purement radiales, selon la méthode des singularités — Верба А.: Расчет распределения скоростей в радиальных рабочих колесах, с помощью метода сингулярностей	109
Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livre — Обзор книг	227

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XXXIV



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1961

IN MEMORY OF OTTO TITUS BLÁTHY

A. MÁNDI

Otto Titus BLÁTHY was born on August 11, 1860 in Tata and passed away in Budapest on September 26, 1939.

After graduating from the Vienna Technical University he worked at the Electrical Department of the Ganz Works, by the side of ZIPERNOWSKY and DÉRI. He was the first to economically dimension electrical machines, after having calculated the magnetic circuits, an achievement which even amazed the Edison Works. He determined the relation between the heating and the surface losses. He invented an automatic, mercury-type voltage regulator (1884).

The principal invention of the triumvirate at the Ganz Works is the transformer, and thus the creation of the modern power transmission. The merit of BLÁTHY was the closed iron core and hence the shell and core type transformer.

He solved the parallel connection of the Rome power station, built according to the new system. Already in 1905 he designed a water-cooled oil transformer and in 1926 he attained the 45 MVA. He constructed water-turbine generators also for 30,000 V (1905). The generators for the Almissa station were of 16 and 26 MVA. His four-pole steam-turbine generators, *e.g.* those for the Kelenföld power station, had sleeved poles. He constructed the two-pole turbo-generators with parallel-slot rotors because these were the sturdiest and safest design.

His other technical achievements were the wattmeters, slotted d. c. machines, calculation of the iron loss, prevention of lamination ageing, fractional slot windings, perfection of the Kandó phase converter, etc.

His most outstanding mental gift was to get an extraordinarily quick and clear grasp of the most complicated problems. He was brilliant at mental computation. From a few basic data, he deduced and calculated with lightning speed the theorems in question. His papers dealt chiefly with additional losses.

BLÁTHY was a honorary Doctor of the Budapest and of the Vienna Technical Universities, member of the Hungarian Academy of Sciences, etc. His technical prestige is characterized by the fact that for the customers it was

more important to know that BLÁTHY designed a project than what was laid down in the contract. Shortly after the outbreak of World War II he passed away and even on his death-bed, he was engaged in making new designs.

ZUR ERINNERUNG AN OTTO TITUS BLÁTHY

A. MÁNDI

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz ist der Tätigkeit des berühmten ungarischen Ingenieurs, Erfinder des elektrischen Transformators und anderer elektrotechnischer Apparate, Otto Titus BLÁTHY, Ehrendoktor der Budapester und Wiener Technischen Hochschulen, Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften gewidmet.

IN MEMORIAM OTTO TITUS BLÁTHY

A. MÁNDI

RÉSUMÉ

Article rappelant les résultats des travaux et l'activité du grand ingénieur hongrois, inventeur du transformateur électrique et de nombreuses innovations électrotechniques importantes.

ПАМЯТИ ОТТО ТИТУС БЛАТИ

A. МАНДИ

РЕЗЮМЕ

Воспоминание знакомит с деятельностью и результатами работы известного венгерского инженера — изобретателя электротрансформатора и многих других электротехнических новшеств.

ERINNERUNG AN PROFESSOR GÉZA PATTANTYUS Á.

Am 11. Dezember 1960 wäre Professor Géza PATTANTYUS Á. 75 Jahre alt geworden. An diesem Tage wurde in Ungarn an mehreren Stellen des im Jahre 1956 verstorbenen, ausgezeichneten ungarischen Gelehrten gedacht. In dieser Zusammenfassung wollen wir unseren ausländischen Lesern sein erfolgreiches und fruchtbares Leben vorführen.

PATTANTYUS ist am 11. Dezember 1885 in Selmechánya geboren. 1907 erwarb er das Diplom eines Maschinenbauingenieurs und 1912 das technische Doktorat. Im Jahre 1921 wurde er auf der technischen Universität in Budapest zum Privatdozenten habilitiert. Von 1907 an wirkte er in verschiedenen Stellungen an der Technischen Universität in Budapest. Im Jahre 1910 ermöglicht ihm ein Stipendium der Ganz-Fabrik eine Studienreise nach Deutschland, England und den Vereinigten Staaten.

Seine erste Facharbeit erschien in 1909, bis zu seinem Tode in 1956 waren 85 wissenschaftliche, bzw. die Ingenieurausbildung betreffende Aufsätze erschienen, außerdem schrieb er 36 Fachbücher.

Im Jahre 1926 wurde er zum außerordentlichen und 1930 zum ordentlichen Professor am Lehrstuhl III für Maschinenkonstruktionslehre der Technischen Universität in Budapest ernannt. Sein Vorgänger auf diesem Lehrstuhl war der weltbekannte Professor Donát BÁNKI.

Die hervorragendsten seiner Fachbücher sind die 1942 erschienene »Strömungslehre« (die seitdem unter dem Titel »Praktische Strömungslehre« 1951 und 1959 zwei umgearbeitete Neuauflagen erreichte), und die 1944 erschienene »Betriebslehre der Maschinen« (die in unveränderter Form bis zu seinem Tode sieben und danach zwei Neuauflagen erreichte, wobei die letzte neunte eine Auflagstärke von 25.000 Stück aufzuweisen hatte).

Als anerkannter Fachmann, genoß er in Ungarn ein großes Ansehen. Aus seinen fruchtbaren Werken erschienen nur sehr wenige in englischer, deutscher oder russischer Sprache, infolgedessen stehen die ausländischen Hinweise auf seine Werke nicht im wahren Verhältnis zu den geistreichen Lösungen, neuartigen Behandlungsweisen und neuen Theorien, die er in der ungarischen Sprache produzierte. Nichtdestoweniger berichtet A. CLOSTER-

HALFEN im Jahre 1933 in der VDI—Z. 1143—1146 über die Windkesselberechnungen der Kolbenpumpe von PATTANTYUS und unter diesem Einfluß ist in der 27. Auflage der Hütte II. die Anführung »Windkesselinhalt nach PATTANTYUS« zu finden. Das von Kováts—DESMUR im Jahre 1953 in Paris erschienene Buch: »Pompes, ventilateurs, compresseurs«, verwendet bei der theoretischen Besprechung der sogenannten Ausgleichscheiben von Zentrifugalpumpen, den Ausdruck »Method de calcul de G. PATTANTYUS«. Die in Amerika ausgegebene Zeitschrift Applied Mechanics Reviews bringt im Jahre 1949 eine sehr gute Kritik über den in englischer Sprache erschienenen Aufsatz: »Oscillations of water level in surge tanks or break-pressure reservoirs of water power plants«, in dem er die neuen Berechnungs- und Konstruktionsmethoden zur genauen Prüfung der Spiegelschwankung als eines mit der zweiten Potenz der Geschwindigkeit gedämpften Schwingungsvorgangs behandelt, und die die Literatur seitdem als Methode PATTANTYUS bezeichnet. Ebenso wird sein in 1953 in deutscher Sprache erschienener Aufsatz »Wirkungsweise und Berechnung des Stoßhebers (hydraulischen Widders)«, mit Anerkennung erwähnt, in welchem er die Theorie des auf spezieller Weise arbeitenden Stoßhebers ganz neuartig bespricht. 1954 erschien über seinen in russischer Sprache ausgegebenen Artikel »Dviznyije potoka v betonnih kanalakh« eine anerkennende Besprechung, in der die Regeln der in Betonrinnen strömenden Flüssigkeiten zusammengefaßt werden. In seinen letzten Lebensjahren prüft PATTANTYUS die Eigenarten des pneumatischen Transportes; Applied Mechanics Reviews würdigt im Jahre 1958, bereits nach seinem Tode, den in ungarischer Sprache erschienenen Aufsatz »Pneumatischer Materialtransport«.

Durch die Reorganisation der Ungarischen Akademie der Wissenschaften hielt er als korrespondierendes Mitglied in zwei Fällen Antrittsvorträge: »Energetische Kennwerte der gedämpften Schwingungen« (1945), bzw. »Materialtransport in Luftströmen« (1953).

Der wissenschaftliche Verein der ungarischen Maschinenindustrie stiftete nach seinem Tode, neben dem bereits gegründeten BÁNKI-Preis, einen PATTANTYUS-Preis, dessen drei Stufen einmal jährlich erteilt werden. Seine Schüler widmeten ihre Bücher seinem Gedenken. Die ungarische Post gab zu seinem Andenken eine Marke aus.

Dr. Z. Terplán

IN THE MEMORY OF G. PATTANTYUS

Z. TERPLÁN

SUMMARY

A short survey of the works of the famous Hungarian scientist who had unfading merits in university engineer training, in fluid mechanics, as well as in hydrological engineering and in the mechanics of machines.

IN MEMORIAM PROF. GÉZA PATTANTYUS

Z. TERPLÁN

RÉSUMÉ

Bref rappel des travaux effectués par l'éminent savant hongrois dans les domaines de la dynamique des fluides, de la construction de machines hydrauliques, de la théorie de l'exploitation des machines et de l'enseignement universitaire des ingénieurs.

ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА Г. ПАТТАНТЮШ

З. ТЕРПЛАН

РЕЗЮМЕ

Работа вкратце знакомит с деятельностью венгерского ученого, имеющего заслуги в области теории потока, теории гидромашин и теории эксплуатации машин, а также в области педагогической деятельности по подготовке инженерных кадров в университете.

FIBRE TUFTS IN THE DRAFTING MECHANISMS OF THE BAST FIBRE INDUSTRY*

B. GANGLI

TEXTILE RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST, HUNGARY

[Manuscript received March 25, 1960]

On surveying in previous studies [1, 2] the general directions of development and improvement of drafting mechanisms, the interrelations of fibre-tapes, tape-curves, and limiting curves of floating fibres to the structural elements was also pointed out. Similar fibre-tapes and tuft-curves were not expounded then in connection with bast-fibre drafting because it would have been necessary to go into detail for the explanation of those tuft-curve deviations which, in general, are connected with bast-fibre drafting and spinning process.

From tests carried out in another direction it became evident that the forces arising in the drafting field cause splitting, shortening, and thinning of the fibres, and thus significantly modify the tuft-curves. Further tests in this connection may reveal what kind of previous fibre recovering method — using an existing drafting mechanism — would in the drafting field ensure such fibre splitting, and thereby such “a”, “b” tufts, which would render the spinning procedure the most efficient.

Studies [3] published in 1931 have already shown that there are slow, fast, and floating fibres in the drafting field. These are of varying quantity along the fibre-tapes in the drafting field. Under the expression “quantity” the sum of the fibre cross-sections measurable in the cross-section of a given dx fibre-tape is to be understood this time.

Within the drafting field one can find an “a” slow back tuft, a “b” first or initial fast tuft existing at the very first moment of drafting, and an actual “c” fast tuft, which in principle can be regarded as the form of “b” reduced in the scale of D . This is shown on Fig. 1.

The “a” and “b” tufts form the border of the surface “ff” in the fibre-tape, which latter is proportional to the number of floating fibres. It is also customary to draw such a figure by plotting the fast tuft “c” — which is identical with c_1 — which hangs back into the drawing field over “ff” onto the curve cut out by “b” tuft, and thus the relative amount of the slow, floating,

* Preliminaries published: Acta Technica 1958 XX. 3—4 and 1959 XXIV 3—4.

and fast fibres can be read off at any "x" point between the nipping points of the rolls.

If by means of any fibre movement controlling structural element the conditional retaining line, braking line (tensor-point) of "a" slow tuft is shifted towards the delivery roll, thus creating a short tensor-distance, the amount of floating fibres can rapidly be reduced. This was pointed out in detail in earlier studies [1—2].

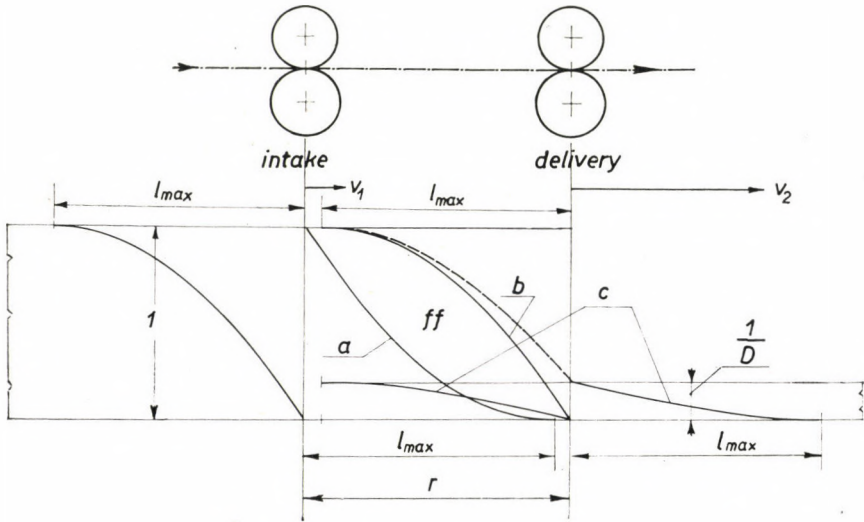


Fig. 1

A theoretical study [4] on the drafting of bast fibre tapes refers to extraordinarily simplified tuft-curves, but does not show the deviations originating from bast fibre splitting, parting, and breaking. Some of the researchers, for instance, take the curves limiting the floating fibres as circular arcs etc. At the same time it has to be mentioned that numerous studies have pointed to the fact that the tuft-diagram of the product delivered by the drafting mechanisms of the Bast Fibre Industry, as well as its average length, and the fibre length dispersion change considerably on the subsequent machine stages [5].

The delineation in tuft-diagrams of the measured results of bast fibre studies, [6—7] prepared for other purposes, showed that the "b" tufts deviate considerably from the "a" input sliver. A continuous splitting and shortening of the fibres in the fibre-tape run into the drafting mechanism ensues, and therefore the tuft changes at each "x" spot of the "r" drafting field. The tuft reaching the delivery roll — which also changes according to the mechanical

elements — significantly deviates from “a” tuft. In this a greater quantity of shorter fibres are to be found. A sketch is given in Fig. 2.

During acceleration and pulling out the “b” tufts continue to change on account of the effects of forces; and still within the draft field “c₁” fast tuft is generated, in which further shortening can be established.

Even the latter “c₁” tuft cannot be regarded as stable because the passing between the delivery rolls, and the eventual twist take-up, as well as the winding tension cause further shortening of the fibres. All these effects together may result in a “c₂” tuft.

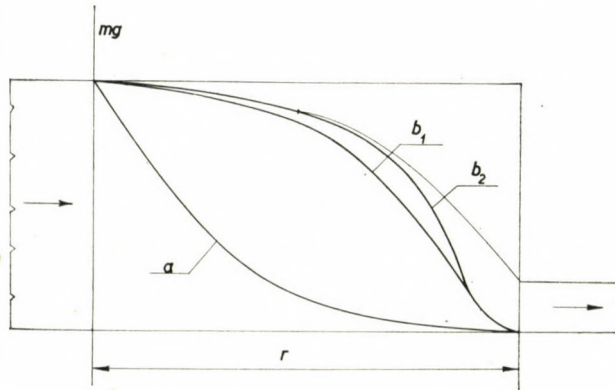


Fig. 2

In practice the “b” tuft-diagrams were so determined that, after bringing the drafting mechanism at 28 cm field-setting to standstill, the fast fibres of the “c₁” tuft nipped by the delivery roll were pulled out of the drafting field, then the fibre-tape remaining in the drafting field was cut along its length, beginning from the intake roll, into 1 cm long pieces. Having weighed these on a pair of scales, their mg values were delineated to the abscissa values of the drafting force measured in cm. The b₁ and b₂ curves of Fig. 2 were thus obtained. To both b₁ and b₂ belonged a different tensor-surface and tensor-distance. The curves towards the delivery rolls are slightly distorted. The cause of this is well-known. The nipped fast fibres shift the nipping line opposite to the movement of the fibre-tape to the rear, and thus the speed change points are also shifted backwards, wherefrom arises the distortion of the anticipated tuft-diagram. This, however, does not influence the consideration of the differences between b₁ and b₂ which are dependent on the size and place of the mechanical elements.

This figure serves to prove that the mechanical retaining part mounted into the drafting mechanisms of the Bast Fibre Industry can create tuft dia-

grams which greatly deviate from the symmetrical "a" and "b" tuft-diagrams designed in the drafting mechanisms of the Cotton and Worsted Wool Industry.

This latter figure does not say anything as to how the tuft-diagram of the product delivered by the drafting mechanism will be. It is known by the bast spinners, however, that the accelerated fibres undergo splitting, parting and tearing even during the course of delivery. However, it is also known that the highest amount of fibre splitting, thinning, finening, length decreasing ensues on the end-spinning machine. Such a characteristic tuft-diagram measurable in an end-product of the Bast Industry can be seen on Fig. 3.

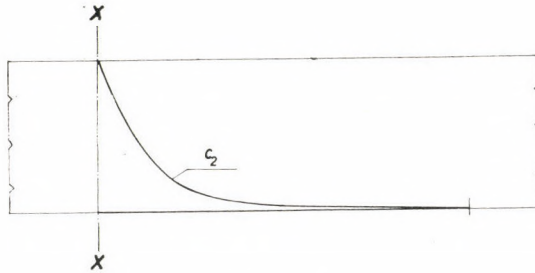


Fig. 3

The long fibres, which were still available in the field of the drafting mechanism moving them, are not to be found in the yarn. Those were partly torn into many parts during drafting and partly split lengthwise. Numerous Bast Industry studies refer to this fact. By the latter it is desired to give direct proof, that large deviation may show between tuft-diagrams "b" and "c".

Therefore, in the drafting mechanisms of the Bast Fibre Industry such fibre-tapes and tuft-diagrams may schematically develop, as are sketched in Fig. 4.

As a matter of fact four kinds of tufts can be distinguished in the drafting mechanisms of the Bast Fibre Industry:

1. the "a" slow tuft held by the intake roll,
2. the "b" tuft which is created by the fast fibres, but with which
3. the " c_1 " fast tuft, which still hangs back in the drafting field, cannot be identified even in D scale, because, as the fibres become fast, the worked up "b" tuft already consists of shorter and thinner fibres, hence it forms another tuft-shape from the diminished shape of "b".
4. " c_2 " is the tuft measurable at a given x cross-section of the drafted product which, as a consequence of the mentioned causes, deviates from "a" even more so.

In connection with the latter, the drafting experiment of the Jute Industry has to be pointed out, where, by the variation of the tensor-distance and tensor-surface, different yarn qualities were obtained [8]. The drafting mechanism and the variations are schematically shown on Fig. 5. BB' shows the pair of intake and FF' the pair of delivery rolls. The setting of the tensor-surfaces and condenser have been tried out in variations A, B, C, D. The quality of the yarns was classified after spinning one and the same yarn number.

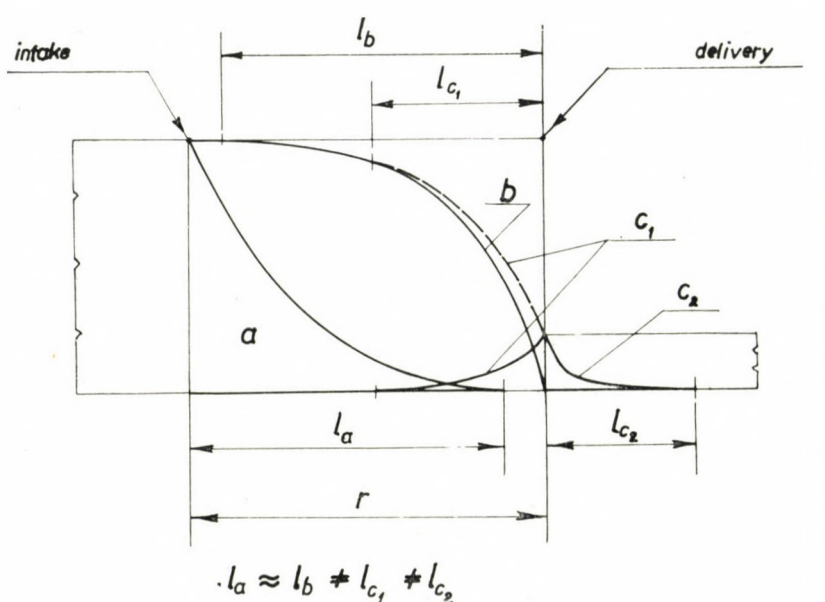


Fig. 4

Before dealing with this it has to be pointed out that on those points where the fibres are extended on some sort of metal surface, not only twist retaining effect arises, but also normal forces originate [9]. The fibres are generally rigid; on structural elements with small curvature radius, the forces which in addition to the stress caused by the pulling out action, generated load by bending, are high. Therefore complex stresses arise in the fibres on these points. This can be compared to the effect arising in the drafting mechanisms of the cable spinning, direct spinning machines. The stretched artificial filaments will most probably break sooner on the spot where another kind of stress, for instance bending, is generated.

Therefore it cannot be surprising that the A and D setting variation has created the most favourable position for the build up of the yarn body. In

both instances those places — where excess forces ensued — were nearer to the delivery roll, although this time no stress is laid on

1. the flume effect of the condenser, further
2. the twist retaining effect of these elements.

It seems that — depending on the raw material — for the build up of the yarn body this splitting, parting element has to be placed in a definable

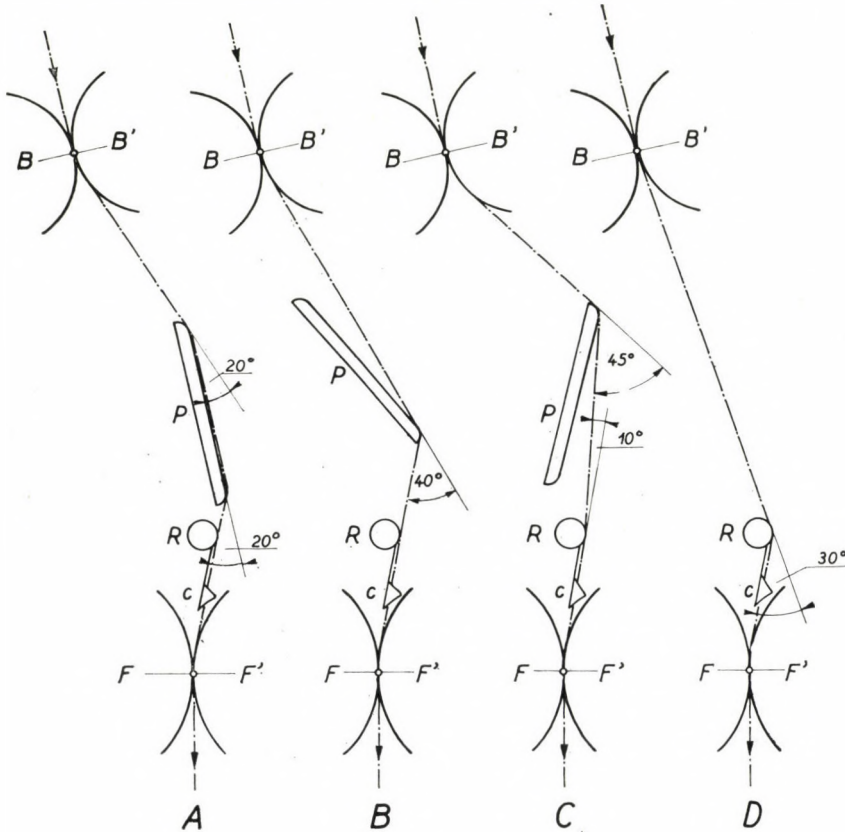


Fig. 5

place of the drafting field — as on Fig. 5 in A and D position — if the best drafting results are to be arrived at. Thus structural elements have a considerable part in the development of the tuft-diagrams — based on the latter as well as on the information given on Fig. 2.

The same study shows also, that in the jute drafting systems there may exist such long fibres — which in this case participate in the construction of the tuft-diagram — which are longer than the “r” drafting field. These can slip through under the intake rolls and become fast fibres if the pressure of

the intake top roll is not too high to allow this. In this case the geometrical plotting of the tuft-diagrams would present a task even more complicated. This is mentioned merely to point out more emphatically what extraordinary diagrams are evolved at bast drafting instead of the well-known measurable (cut and weighed method) or geometrically plottable relations.

To-day such tuft-diagram relations are not yet known, and from quoted study [6] it can be concluded that the "a", "b", "c₁" and "c₂" tuft-diagrams with the same raw material, with identical drafting mechanism will depend on the measure of drafting; and mechanical fibre recovering, on the number and kind of machine stages employed; and on the level of the draft used.

Drafting problems have been more and more thoroughly dealt with during the last years. Economic reasons force both the machine designers and spinning experts to deal with a given type of bast industry drafting mechanism with a view to determine what amount of drafting can be carried out with them. Especially great influence was exercised by the abbreviated spinning systems realized in the field of other fibres, by the drafting mechanisms with flume, and by the autoleveller drafting systems. At present flax, hemp, and jute drafting systems are, therefore, investigated with great intensity. The apparatuses, however, with which the mass irregularity of the product can reliably be measured rendered it possible to value and impartially classify the drafted product, *i.e.* the results of drafting.

REFERENCES

- 1., 2. GANGLI, B.: Acta Technica. 1958. XX, 3—4.; Acta Technica. 1959. XXIV. 3—4. General Survey of the Construction of Drafting Mechanism. Budapest.
3. GOODINGS, A. C.: Roller Drafting in the Worsted Industry. The Journal of the Textile Institute, 1931. T. 12.
4. TAFEL, W.: Verzugsprobleme der Bastfaserspinnerei theoretisch gesehen. Textil Praxis 1953. November, p. 952.
5. DR. DISCHKA, GY.: Objective Characterizing Examination of Bast Fibres. Selections from Communications of the Textile Research Institute. Budapest, Hungary, Part I. p. 60.
6. DARABOS, F.: Improvement of the drafting mechanisms of end-spinning machines of the Bast Fibre Industry and theoretical study of the drafting process connected therewith. 1957. Textile Research Institute. Budapest, Hungary, Not published.
7. TÁRNOKI, F.: Utilization of flax fibre characteristics with wet-spun linen yarn. 1953. Competition Essay. Manuscript. Budapest.
8. BANDYOPADHAY: Effect of the breast plate on the quality of rovespun jute yarn. Textile Manufacturer. 1958. Sept. p. 455.
9. FRENZEL, W. und UHLEMANN, G.: Das Gleitstreckwerk in the Flachsspinnerei, Faserforschung und Textiltechnik, 1957. No. 8. p. 297.

SUMMARY

In this study — which refers to earlier survey [1,2] of the development of drafting mechanisms published in Acta Technica — the specially shaping fibre-tape *i.e.* tuft-diagrams were pointed out, which develop in the drafting mechanisms of the Bast Fibre Industry in a different way to other fibrous materials partly on account of fibre qualities and partly due to mechanical elements.

Studies referring to the drafting mechanisms of the Bast Fibre Industry expound entirely idealized theoretical fibre tapes *i. e.* tuft-curves. The shortening, splitting, fining of the

fibres, which take place in all kind of bast fibre drafting systems, is not taken into consideration.

In the drafting mechanisms of the Bast Fibre Industry at least three, rather four kinds of tufts have to be followed with attention, if it is desired — while observing the process — to form with the help of the fibre tape-curves an opinion of the structural build up of the successively developed products.

HALBBARTKURVEN IN DEN STRECKWERKEN DER BASTFASERINDUSTRIE

B. GANGLI

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Studium, das auf die in der Acta Technica früher erschienene, die Entwicklung der Streckwerke beschreibende Mitteilung hinweist, wird auf die speziellen Faserflus- resp. Halbbartkurven hingedeutet, die teilweise wegen der Fasereigenschaften, teilweise wegen der Strukturelemente in den Streckwerken der Bastfaserindustrie sich von den anderen Spinnfasern abweichend ausbilden.

Studien, die sich auf die Streckwerke der Bastfaserindustrie beziehen, legen einen stark idealisierten theoretischen Faserflus- resp. Halbbartkurvenbilder dar. Hierbei wird der Vorgang, der die Verkürzung, Teilung und Verfeinerung der Faser in jedem Streckwerk der Bastfaserindustrie verursacht, außer acht gelassen.

In den Streckwerken der Bastfaserindustrie sind drei, sogar vier Stapel verschiedene Halbbärte mit Aufmerksamkeit zu verfolgen, wenn man bei der Beobachtung der Vorgänge den Strukturaufbau der sich nacheinander bildenden Produkte mit Hilfe der Halbbartkurven beurteilen will.

WILKINSON TUFT DIAGRAMMES DE BANCS D'ÉTIRAGE POUR FIBRES

B. GANGLI

RÉSUMÉ

L'étude faisant suite à des articles sur le développement des bancs d'étirage, parus dans deux numéros de l'Acta Technica [1, 2], traite de ces diagrammes dont l'allure particulière par rapport aux diagrammes d'autres matières filables est due en partie aux caractéristiques des fibres et en partie aux éléments différents de leur structure.

Les études relatives aux bancs d'étirage pour fibres donnent des diagrammes idéalisés dans une très grande mesure, qui ne tiennent pas compte du processus observable dans tous les bancs d'étirage pour fibres, sous forme du raccourcissement, de la division selon la longueur et l'amincissement des fibres travaillées.

Dans les bancs d'étirage pour fibres, il convient d'observer au moins trois, mais plutôt quatre sortes de demi-barbes, si l'on veut juger de la structure des produits successifs à l'aide de tuft-diagrammes.

ВЫТЯЖНЫЕ АППАРАТЫ

Б. ГАНГЛИ

РЕЗЮМЕ

В нашей работе, которая ссылается на описание развития вытяжных аппаратов, опубликованное в прежних номерах журнала Acta Technica [1—2], мы указываем на те, особо складывающиеся рисунки волокна, которые возникают в вытяжных аппаратах вследствие свойств волокон или структурных элементов, в отличие от других волокнистых материалов.

Работы, относящиеся к вытяжным аппаратам, в большинстве случаев знакомят с идеализированными теоретическими рисунками волокон. В этих работах не приняты во внимание процессы, имеющие место в любом вытяжном аппарате и сказывающиеся в сокращении, расщеплении и утончении волокон.

В вытяжных аппаратах необходимо уделять внимание хотя бы трем, но лучше четырем видам рисунка волокна, если, исходя из наблюдений, при помощи рисунков волокна желательно сделать вывод относительно структуры, образующихся один после другого продуктов.

EIN KREISRINGPLATTEN-PROBLEM BEI STEHENDEN KLEINDAMPFKESSELN

I. THAMM

[Eingegangen am 11. Januar 1960]

Es ist bekannt, daß die Industrie zu gewissen Zwecken heute noch Kleinkesseln baut und verwendet. Ein solcher für mäßige Betriebsdrucke in Ungarn gebauter Kleinkessel stehender Bauart ist in Abb. 1 dargestellt. Wie die Abbildung zeigt, besteht der Kessel aus einem zylindrischen Außenmantel und einem konzentrischen Innenmantel mit Galloway-Rohren, der den Feuerraum und die Heizfläche verkörpert. Der Kessel wird durchwegs durch Schweißen hergestellt.

Beim dargestellten Kessel ist die obere kreisringförmige Deckplatte, die die beiden Mäntel oben zusammenhält und abschließt, das Element, dessen Inanspruchnahme auf einfacher Weise nicht festgestellt bzw. berechnet werden kann.

Eine genauere Festigkeitsrechnung der Deckplatte müßte auch die Formänderungen der Ränder der beiden Mantelbleche in Betracht ziehen. Dadurch würde aber die Rechnung sehr erschwert. Um diesen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, soll angenommen werden, daß die Mantelränder starr sind, und die erzwungenen Formänderungen nur von der Deckplatte und von den Schweißnähten aufgenommen werden. Die sich so ergebende Spannungsverteilung der Platte wird sicherlich ungünstiger als die in Wirklichkeit auftretende, kann also bei der praktischen Festigkeitsberechnung mit Sicherheit angewendet werden. Demgegenüber ergibt sich der Vorteil, die von den Mantelflächen losgelöst gedachte, und durch entsprechende Randbedingungen belastete Deckplatte als Kreisringplatte allein zum Gegenstand der weiteren Untersuchung machen zu können.

In vorliegender Arbeit wird nun versucht, auf Grund der Theorie der Kreisplatten, wie diese z. B. in [1] dargestellt ist, für diesen Fall eine ausreichend zuverlässig erscheinende Berechnungsgrundlage zu schaffen.

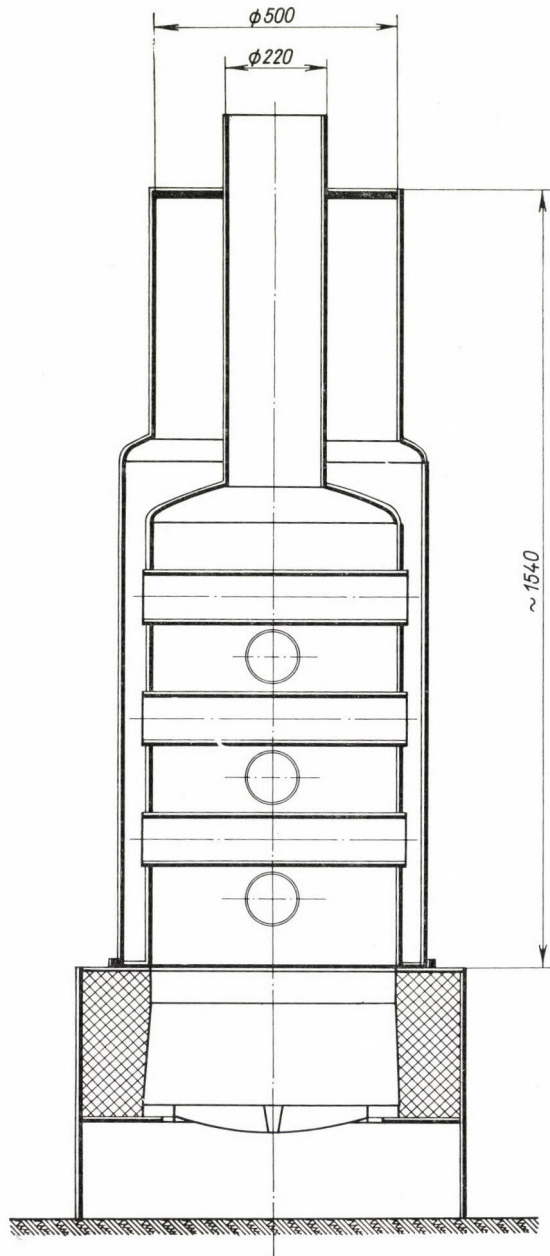


Abb. 1. Meridianschnitt des Kleinkessels, dessen obere, kreisringförmige Deckplatte der Gegenstand der Untersuchung ist

Verwendete Bezeichnungen

- a_V die auf die Volumeinheit bezogene Formänderungsarbeit, kp. cm/cm
 b_1, b_2 } aus den Randbedingungen zu bestimmende Konstanten mit verschiede-
 c_1, c_2 } nen Dimensionen
 l Länge des Kesselmantels in cm
 m_r an den Plattenrändern übertragene — auf die Umfangs-Längeneinheit
bezogene — Momente in kp. cm/cm
 p Dampfdruck im Kessel in kp/cm²
 r veränderliche Koordinate in cm
 r_a Außenhalbmesser }
 r_i Innenhalbmesser } der Kreisringplatte in cm
 s Plattendicke in cm
 t_a Temperatur des äußeren Kesselmantels in C°
 t_i Temperatur des inneren Kesselmantels in C°
 y Ausbiegung der Platte in cm
 y_i Verschiebung der Platteninnenkante in cm
 z veränderliche Koordinate in Richtung der Plattennormalen von der
Plattenmittelfläche gerechnet in cm
 A_V die gesamte Formänderungsarbeit der Kreisringplatte in kp. cm
 $[A_V]_{\text{opt}}$ die gesamte Formänderungsarbeit der Kreisringplatte in kp. cm der
Minimalbedingung entsprechend
 B }
 C } Integrationskonstanten mit verschiedenen Dimensionen
 D }
 E Elastizitätsmodul des Plattenmaterials in kp/cm²
 N Konstante mit dem Wert = $\frac{p(1-\nu^2)}{E \cdot s^3}$
 β Wärmedehnungsbeiwert des Plattenmaterials in cm. 10⁻⁵/C°
 ν Poissonsche Zahl des Plattenmaterials, dimensionslos
 σ_r Radialspannung in kp/cm²
 σ_t Tangentialspannung in kp/cm²
 τ Schubspannung in kp/cm²
 φ Neigungswinkel der Meridiankurve der Plattenmittelfläche
 ψ dimensionslose Verhältniszahl

Einleitende Bemerkungen

Im Betrieb, d. h. im angeheizten Kessel wird das innere Mantelblech verständlicherweise höhere Temperaturen annehmen als der Außenmantel, um so mehr, als diese Kessel meistens ohne Wärmeschutz betrieben werden.

Da beim abgebildeten Kessel der Betriebsdruck 6 atü beträgt, so kann die Temperaturdifferenz beider Mäntel auf $\sim 50^\circ \text{C}$ geschätzt werden.

Die Mäntel sind unten zusammengeschweißt; zudem sind diese auf das Mauerwerk gestellt. Infolgedessen wird sich der aus der Temperaturdifferenz ergebende Unterschied der Wärmedehnungen oben, bei der Kreisringplatte bemerkbar machen. Die ungünstigste Annahme ist, daß die Dehnungsdifferenz allein von der Kreisringplatte aufgenommen werden muß und eine elastische Verformung in dieser verursacht. Wird nun die Ebene der Oberkante des äußeren Mantelbleches im Betriebszustand als Basisebene eines räumlichen Koordinatensystems gewählt, und die Ausbiegungen y der Kreisringplatte von dieser gerechnet, so kann die Auslenkung y_i der Innenkante, also am Halbmesser $r = r_i$, aus der Temperaturdifferenz, den linearen Abmessungen und dem Wärmedehnungsbeiwert β wie folgt berechnet werden. Es sei die Temperatur des Außenmantels t_a , des Innenmantels t_i , die Länge der Erzeugenden von der Mauerung bis zur Kreisringplatte l , so wird bei der oben gemachten Annahme

$$y_i = l \cdot \beta \cdot (t_a - t_i) \quad (1)$$

Nach Abb. 1 ist $l = 150 \text{ cm}$, lt. obigem $(t_a - t_i) = 50^\circ \text{C}$, weiter ist $\beta = 1,1 - 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}/^\circ \text{C}$; aus diesen ergibt sich im Mittel

$$y_i \cong 9,15 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

als die Ausbiegung, die die Kreisringplatte erleiden muß. Bei den weiteren Untersuchungen soll dieser Wert zugrunde gelegt werden. Da aber damit gerechnet werden kann, daß die Formänderungen der übrigen Kesselteile u. U. die Ausbiegung der Deckplatte vermindern, so werden die Formänderungs- und Spannungsverteilungen auch für andere (auch negative) y_i -Werte berechnet.

Bei der weiteren Untersuchung auf Grund der Theorie der Kreisplatten sollen die Bezeichnungen nach Abb. 2 gewählt werden, insbesondere soll im Zylinderkoordinatensystem die veränderliche Koordinate in radialer Richtung mit r , die Tangente der Mittelfläche der Kreisringplatte in einer radialen Ebene mit φ , die Plattendicke mit s , die veränderliche Koordinate in der Normalenrichtung der Plattenmittelfläche und von letzterer gemessen mit z bezeichnet werden. Außerdem sei der Kesseldruck p , der Elastizitätsmodul des Materials der Platte E , sowie ν die Poisson-Konstante desselben. Mit der Konstante

$$N = p \cdot \frac{6(1 - \nu^2)}{E \cdot s^3} \quad (2)$$

kann nach der zitierten Theorie für die Veränderliche φ geschrieben werden :

$$\varphi = -\frac{N}{8}r^3 + B \cdot r + \frac{C}{r} \quad (3)$$

wo B und C Integrationskonstanten sind.

Nach der Festsetzung in (1) wird

$$\frac{dy}{dr} = -\operatorname{tg} \varphi$$

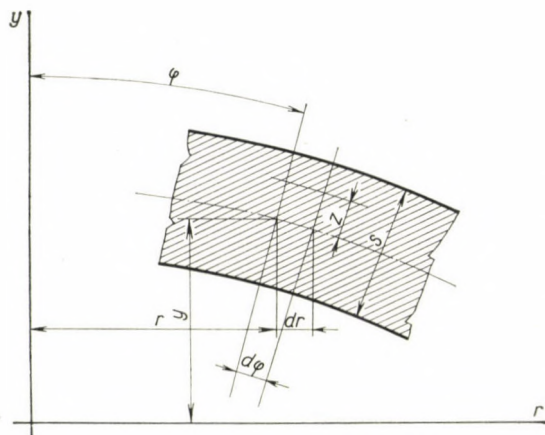


Abb. 2. Meridianschnitt eines Kreisplattenelements

Da die weitere Untersuchung auf kleine Werte von φ beschränkt werden muß, so kann auch als gute und vereinfachende Näherung geschrieben werden :

$$\frac{dy}{dr} \cong -\varphi. \quad (4)$$

Daraus ergibt sich endlich

$$y = \frac{N}{32} \cdot r^4 - \frac{B}{2} \cdot r^2 - C \cdot \ln r + D, \quad (5)$$

worin D eine dritte Integrationskonstante ist. Wie ersichtlich, sind in den als Lösung des Problems zu betrachtenden Gl. (3) und (5) insgesamt drei Konstanten vorhanden, die aus den jeweiligen Randbedingungen zu bestimmen sind.

Zwei Randbedingungen, denen die Lösung genügen muß, sind in den obigen Ausführungen schon enthalten. Diese lauten mit den eingeführten Bezeichnungen:

I. $[y]_{r=r_a} = 0 \quad (6a)$

II. $[y]_{r=r_i} = y_i \quad (6b)$

Diese drücken die Bedingungen aus, denen die Kreisringplatte im vorliegenden Falle demzufolge entsprechen muß, daß die innere Kante über die äußere infolge der Wärmedehnungen um y_i gehoben wurde. Aus der ersten Bedingung ergibt sich die Integrationskonstante D als

$$D = -\frac{N}{32} \cdot r_a^4 + \frac{B}{2} \cdot r_a^2 + C \cdot \ln r_a \quad (7)$$

und mit dieser wird statt Gl. (5) erhalten:

$$y = -\frac{N}{32} (r_a^4 - r^4) + \frac{B}{2} (r_a^2 - r^2) + C \cdot \ln \frac{r_a}{r} \quad (5a)$$

Aus letzterer und der Bedingung II. (6/b) folgt sofort eine Bedingung zwischen den beiden Konstanten B und C :

$$\frac{N}{32} \cdot (r_a^4 - r_i^4) - \frac{B}{2} (r_a^2 - r_i^2) - C \cdot \ln \frac{r_a}{r_i} + y_i = 0 \quad (8)$$

Nach den Ausführungen in (1) können mit den Konstanten B und C auch die in der Kreisringplatte auftretenden Normalspannungen, u. zw. die Radialspannung σ_r , sowie die Tangentialspannung σ_t als gebrochene rationale Funktionen der Variablen r angegeben werden. Diese Spannungen sind mit der von der Mittelfläche der Platte gerechneten Entfernung z verhältnisgleich; ihre Größtwerte treten also an den oberen und unteren Grenzflächen der Platte auf und sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \pm \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{s}{2} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \cdot \frac{\varphi}{r} \right) = \\ &= \pm \frac{E \cdot s}{2(1-\nu^2)} \cdot \left\{ -\frac{N}{8} (3+\nu)r^2 + B(1+\nu) - \frac{C}{r^2} (1-\nu) \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \pm \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{s}{2} \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \cdot \frac{d\varphi}{dr} \right) = \\ &= \pm \frac{E \cdot s}{2(1-\nu^2)} \cdot \left\{ -\frac{N}{8} (1+3\nu)r^2 + B(1+\nu) + \frac{C}{r^2} (1-\nu) \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Eine Vereinfachung der weiteren Rechnungen soll noch dadurch erreicht werden, daß die in der Kreisringplatte auftretenden Schubspannungen τ vernachlässigt werden. Dies scheint aus dem Grunde angängig zu sein, da die

Schubspannungen niedrige Werte annehmen; u.zw. werden diese um mehr als eine Größenordnung kleiner, als die w.u. zu berechnenden Normalspannungen.

Im übrigen ist die Verteilung der Schubspannungen parabolisch; diese haben an den Außenflächen der Platte den Wert 0; und der Größtwert, der in der Mittelfläche der Platte auftritt, wird unabhängig von den jeweiligen Randbedingungen

$$\tau_{\max} = \frac{3}{4} \cdot \frac{pr}{s}$$

und ergibt für die untersuchte Kreisringplatte bei $r = r_a = 25$ cm und $p = 6$ kp/cm² den Zahlenwert von 56,25 kp/cm². Da die Normalspannungen — wie w. u. noch gezeigt werden soll — Werte von mehreren 100, sogar über 1000 kp/cm² annehmen können, so scheint die Vernachlässigung der Schubspannungen zulässig.

Durch diese Vernachlässigung kann aber der Spannungszustand der Kreisringplatte als ein ebener betrachtet und die zu berechnenden Normalspannungen als die Hauptspannungen des Spannungszustandes angesehen werden. Dies trifft übrigens an den beiden ebenen Außenflächen, wo die Normalspannungen ihre Höchstwerte erreichen, genau zu. Da nach obigem die Schubspannung auch dem Halbmesser der jeweils ins Auge gefaßten Plattenstelle proportional ist, also sich mit r nach innen vermindert, so dürfte die gemachte Vernachlässigung nur einen geringfügigen und tragbaren Fehler verursachen.

Es wird noch vorteilhaft sein, die in den obigen Ausführungen vorkommenden Konstanten B und C in anderer Form anzugeben. Nach der »klassischen« Elastizitätstheorie, auf die die mit 3 und 5 angegebene Lösung aufgebaut ist, kann die wirkende äußere Kraft — in diesem Falle der Dampfdruck p — in den Ergebnissen der Rechnung nur linear vorkommen. Dasselbe kann ganz allgemein von der durch die Wärmedehnungen hervorgerufene Verschiebung y_i festgestellt werden. Da sowohl p bzw. der diesem verhältnismäßige Ausdruck N und y_i in den Konstanten einbezogen werden, so können B und C mit den neuen Konstanten b_1, b_2, c_1 und c_2 wie folgt geschrieben werden:

$$B = b_1 N + c_1 \cdot y_i; \quad C = b_2 N + c_2 y_i \quad (11)$$

Also die Aufgabe, B und C zu bestimmen, ist der Bestimmung von den neu eingeführten Konstanten $b_1 \dots c_2$ gleichbedeutend; dabei werden noch die Vorteile erreicht, daß erstens diese neuen Konstanten — wie es sich noch zeigen wird — nur die linearen Plattenabmessungen und die Poisson-Konstante des Plattenmaterials enthalten, und daß zweitens die zu verschiedenen Werten von p (bzw. N) und y_i gehörigen B und C einfach berechnet werden können.

Da aber auf diese Weise die Zahl der zu bestimmenden Konstanten von 2 auf 4 gewachsen ist, so sind noch zwei weitere Gleichungen dazu erforderlich. Diese können aus (5a) erhalten werden. Wenn man nämlich obige Gleichungen (11) in (5a) einsetzt, so ergibt sich nach entsprechender Umstellung der Glieder:

$$y = N \cdot \left[-\frac{r_a^4 - r^4}{32} + \frac{b_1}{2} (r_a^2 - r^2) + b_2 \ln \frac{r_a}{r} \right] + y_i \left[\frac{c_1}{2} r_a^2 - r^2 + c_2 \cdot \ln \frac{r_a}{r} \right].$$

Das erste, mit dem Faktor N behaftete Glied auf der rechten Seite der erhaltenen Gleichung wäre der Ausdruck, der für die Ausbiegung der Platte

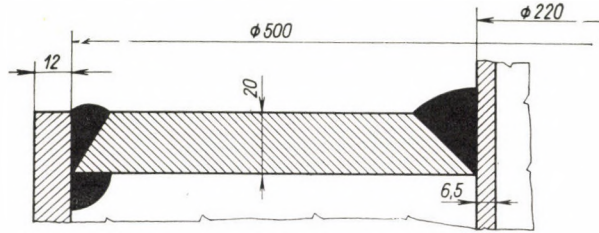


Abb. 3. Abmessungen und Befestigung der Kreisringplatte. Ausführung der Schweißnähte

im Falle von $y_i = 0$ sich ergeben würde; dieser muß also bei $r = r_i$ gleich 0 werden. D. h.

$$-\frac{r_a^4 - r_i^4}{32} + \frac{b_1}{2} (r_a^2 - r_i^2) + b_2 \cdot \ln \frac{r_a}{r_i} = 0. \quad (12)$$

Daraus folgt aber, daß demgegenüber der zweite Klammerausdruck

$$\frac{c_1}{2} (r_a^2 - r_i^2) + c_2 \ln \frac{r_a}{r_i} = 1 \quad (13)$$

sein muß. Damit sind aber die noch nötigen Gleichungen gewonnen.

Um in einem bestimmten Belastungsfalle die Ausbiegung y der Kreisringplatte, sowie die Spannungen σ_r und σ_t berechnen zu können, reichen die bisherigen Ergebnisse noch nicht aus. Beim Rechnen mit B und C ist neben (8) noch eine, bei Verwendung der oben in (11) eingeführten 4 Konstanten neben (12) und (13) sind noch zwei weitere Bestimmungsgleichungen nötig. Diese werden durch Festsetzung einer weiteren Randbedingung gegeben.

Es muß nun gefragt werden, ob eine solche Randbedingung angegeben werden kann, durch welche die in Wirklichkeit auftretende Spannungsverteilung gut oder wenigstens brauchbar angenähert wiedergegeben wird.

Einfach angebbare Randbedingungen wären:

Unterstützung oder Einspannung am äußeren oder inneren Plattenrand. Von diesen vier möglichen Randbedingungen kann jeweils nur eine gewählt werden. Dadurch aber, daß man am äußeren oder inneren Plattenrand eine dieser Bedingungen festlegt, wird ein Formänderungs- und Spannungszustand errechnet, bei welchem eine Symmetrie zwischen beiden Plattenrändern aufgegeben werden mußte. Daß eine solche in Wirklichkeit doch zu erwarten ist, ergibt sich schon daraus, daß beide Ränder durch Schweißnähte mit dem äußeren bzw. inneren Kesselmantel verbunden sind. Insbesondere wenn eine Schweißnaht in den Meridianebenen Momente übertragen kann, so ist kein Grund anzunehmen, daß dies bei der anderen nicht der Fall ist. Und um an beiden Plattenrändern die gleichen Randbedingungen (z. B. Unterstützung oder Einspannung) vorschreiben zu können, reichen eben die Integrationskonstanten der Lösung (3) und (5) nicht aus.

Um aber die — durch diese Randbedingungen erzwungenen — die Wirklichkeit im untersuchten Falle voraussichtlich weniger gut abbildenden Formänderungen und Spannungen bei der weiteren Behandlung des Falles zum Vergleich heranziehen zu können, sollen nun zuerst diese Belastungs- und Formänderungsfälle durchgerechnet werden.

Belastungsfälle mit einfach anzugebenden Randbedingungen

I. Die Unterstützung am äußeren ($r = r_a$) Plattenrand sei zuerst behandelt. Als dritte Randbedingung muß jetzt zur Analogie des unterstützten Balkens

$$\text{III}_1 \quad [\sigma_r]_{r=r_a} = 0 \quad (14)$$

gewählt werden. Mit Gl. (9) ergibt sich daraus die Bedingung:

$$-\frac{N}{8} (3 + \nu) r_a^2 + B(1 + \nu) - \frac{C}{r_a^2} (1 - \nu) = 0 \quad (14a)$$

Zu dieser Gleichung die Gl. (8) lt. obigem hinzugenommen, können die beiden Konstanten B und C errechnet werden. Durch Einsetzen der Gl. (11) in (14a) erhält man aber weiter

$$N \left[-\frac{3 + \nu}{8} \cdot r_a^2 + b_1(1 + \nu) - \frac{b_2}{r_a^2} (1 - \nu) \right] + y_i \cdot \left[c_1(1 + \nu) - \frac{c_2}{r_a^2} (1 - \nu) \right] = 0.$$

Da diese Gleichung bei jedem Werte von N und y_i erfüllt sein muß, und diese

letzteren von einander unabhängig sind, so kann die Gleichung nur bestehen, wenn:

$$-\frac{3+\nu}{8} \cdot r_a^2 + b_1(1+\nu) - \frac{b_2}{r_a^2}(1-\nu) = 0 \quad (15)$$

$$c_1(1+\nu) - \frac{c_2}{r_a^2}(1-\nu) = 0 \quad (16)$$

Aus den Gl. (12), (13), (15) und (16) ergeben sich in diesem Falle die Konstanten b_1 , b_2 , c_1 , c_2 wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{\frac{1-\nu}{4} \cdot \frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a^2} + (3+\nu) \cdot r_a^2 \ln \frac{r_a}{r_i}}{\frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2} + (1+\nu) \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}} \\ b_2 &= \frac{\frac{1+\nu}{4} (r_a^4 - r_i^4) - \frac{3+\nu}{2} r_a^2 (r_a^2 - r_i^2)}{\frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2} + (1+\nu) \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}} \\ c_1 &= \frac{\frac{1-\nu}{r_a^2}}{\frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2} + (1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i}} \\ c_2 &= \frac{1+\nu}{\frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{r_a^2} + (1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Wie schon erwähnt, enthalten diese letzteren Konstanten nur die linearen Abmessungen der untersuchten Kreisringplatte, sowie die Poisson-Konstante von deren Material. Mit den aus Abb. 3 zu entnehmenden Abmessungen, d. h. mit $r_a = 25$ cm, $r_i = 11$ cm, und $s = 2$ cm, sowie für Kesselblech mit $\nu = 0.3$ gerechnet ergeben sich für die vorliegende Kreisringplatte die Zahlenwerte (die Dimensionen sind zwischen Klammern dahintergesetzt)

$$b_1 = 166.578 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$b_2 = -3.682 \cdot 10^4 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$c_1 = 8.298 \cdot 10^{-4} \text{ (cm}^{-2}\text{)}$$

$$c_2 = +0.9632 \text{ (cm}^0\text{)}$$

Mit den angeführten Zahlenwerten wurden nun die Durchbiegungen y sowie die Spannungen σ_r und σ_t in Abhängigkeit von der Veränderlichen r zu verschiedenen Wertekombinationen von p (bzw. N) und y_i berechnet und in die w. u. gezeigten Diagramme eingetragen. Auf deren Abszissenachse ist nur die Breite der Kreisringplatte angegeben, d. h. die Abszissen- teilung beginnt mit 11 cm ($= r_i$; Innenrand) und endet bei 25 cm ($= r_a$; Außenrand). Bei der

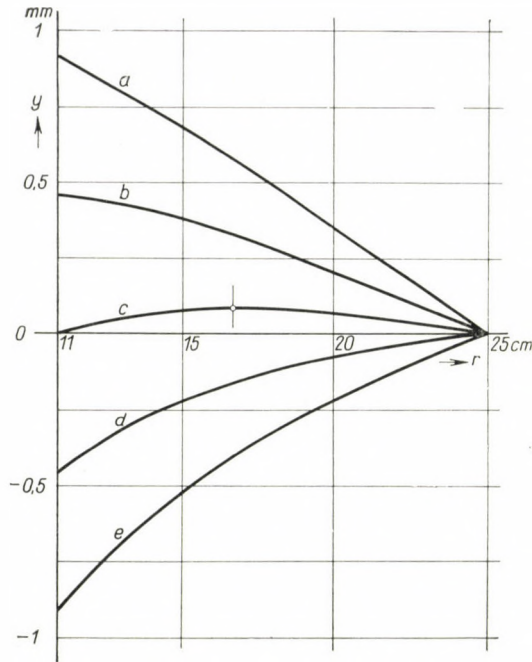


Abb. 4. Die Ausbiegungen y der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_f. Bei festgehaltenem Kesseldruck $p = 6 \text{ kp/cm}^2$ ist

- bei Kurve a $y_i = +9,15 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$
- bei Kurve b $= +4,575 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$
- bei Kurve c $= 0$
- bei Kurve d $= -4,575 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$
- bei Kurve e $= -9,15 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$

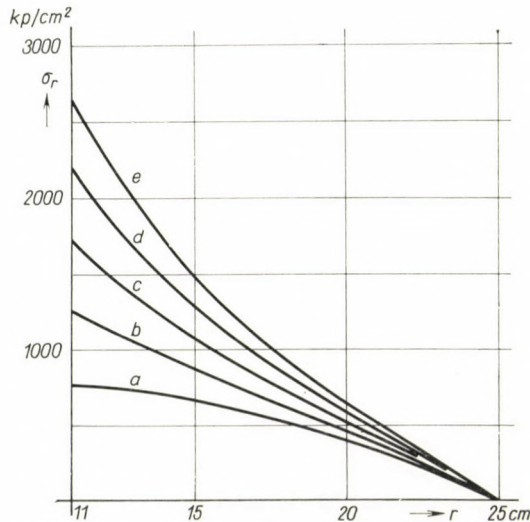


Abb. 5. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_f. Kesseldruck und Bedeutung der Buchstaben $a - e$ dieselben wie in Abb. 4

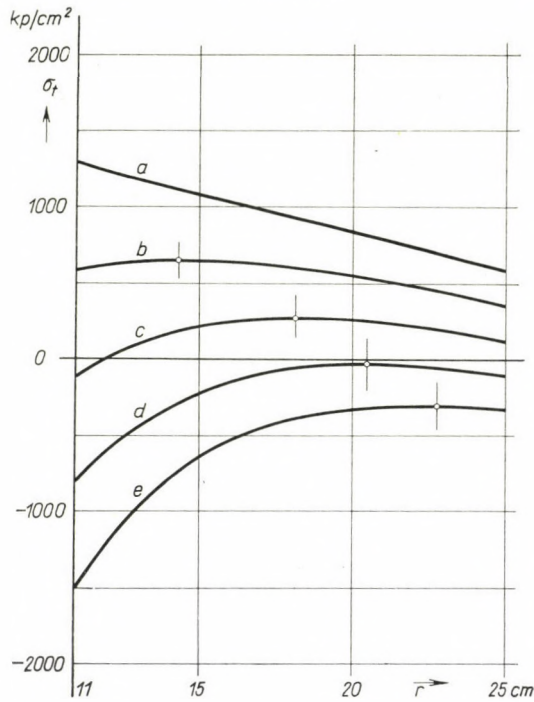


Abb. 6. Die Tangentialspannungen σ_z der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_f. Kesseldruck und Bedeutung der Buchstaben *a* — *e* dieselben wie in Abb. 4

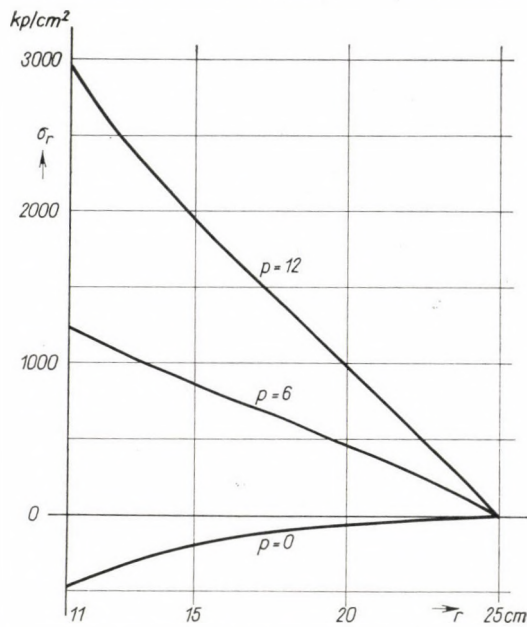


Abb. 7. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_f. Festgehaltene Verschiebung der Platteninnenkante $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2}$ cm; wechselnde Kesseldrücke an den Kurven angegeben

ersten Diagrammreihe (Abb. 4, 5, 6) wurde $p = 6 \text{ kp/cm}^2$ und damit $N = 1.95 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-3}$ festgehalten und die Kurven zu $y_i = 0, \pm 4.575 \cdot 10^{-2}$ und $\pm 9.15 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ errechnet.

Bei der zweiten Kurvenreihe (Abb. 7, 8) ist $y_i = +4.575 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ festgehalten worden und sind die zu verschiedenen p ($= 0, 6, 12 \text{ kp/cm}^2$) gehörigen Kurven aufgezichnet.

Wie aus den vorangegangenen Ausdrücken 5a, 9, und 10 geschlossen werden kann, ist es möglich, bei festgehaltener Abszisse zwischen den einzelnen Kurven linear zu interpolieren und so Zwischenwerte zu erhalten.

Wie aus Abb. 4 zu ersehen ist, sind die Ausbiegungen bei dieser Randbedingung durchwegs von oben konvex. Die Spannungen sind am Innenrand ziemlich hoch, und die Spannung wächst mit dem Dampfdruck stark an (Abb. 7).

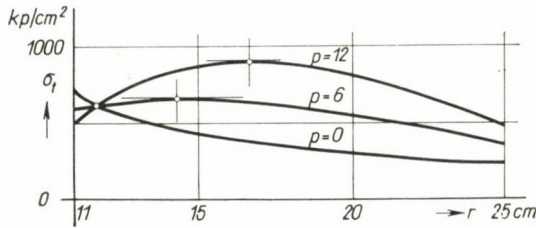


Abb. 8. Die Tangentialspannungen σ_t der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_I. Festgehaltene Verschiebung der Platteninnenkante und wechselnde Kesseldrücke wie in Abb. 7

II. Weiters soll der Fall dargestellt werden, wo als die dritte Randbedingung die Einspannung des äußeren Plattenrandes ($r = r_a$) angenommen wird. Also sei hier:

$$\text{III}_{II} \quad \left[\frac{dy}{dr} \right]_{r=r_a} = 0 \tag{18}$$

Nach (4) ist dies mit

$$[\varphi]_{r=r_a} = -\frac{N}{8} \cdot r_a^3 + Br_a + \frac{C}{r_a} = 0 \tag{18a}$$

gleichbedeutend. Nach Einsetzen von (11) ergibt sich daraus:

$$N \left(-\frac{r_a^3}{8} + b_1 r_a + \frac{b_2}{r_a} \right) + y_i \left(c_1 \cdot r_a + \frac{c_2}{r_a} \right) = 0. \tag{18b}$$

Da auch diese Gleichung bei jedem Werte von N und y_i erfüllt sein muß, so folgt hier

$$-\frac{r_a^3}{8} + b_1 r_a + \frac{b_2}{r_a} = 0 \tag{19}$$

$$c_1 r_a + \frac{c_2}{r_a} = 0. \tag{20}$$

Zu den letzteren beiden Gleichungen noch die Gl. (12) und (13) hinzugenommen, ergeben sich die Konstanten b_1, b_2, c_1, c_2 wie folgt:

$$\left. \begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{16} \frac{r_a^4 \left(1 - 4 \ln \frac{r_a}{r_i}\right) - r_i^4}{r_a^2 \left(1 - 2 \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}\right) - r_i^2} \\
 b_2 &= \frac{r_a^2}{16} \cdot \frac{(r_a^2 - r_i^2)^2}{r_a^2 \left(1 - 2 \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}\right) - r_i^2} \\
 c_1 &= \frac{2}{r_a^2 \left(1 - 2 \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}\right) - r_i^2} \\
 c_2 &= \frac{2 r_a^2}{r_a^2 \left(1 - 2 \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}\right) - r_i^2}
 \end{aligned} \right\} (21)$$

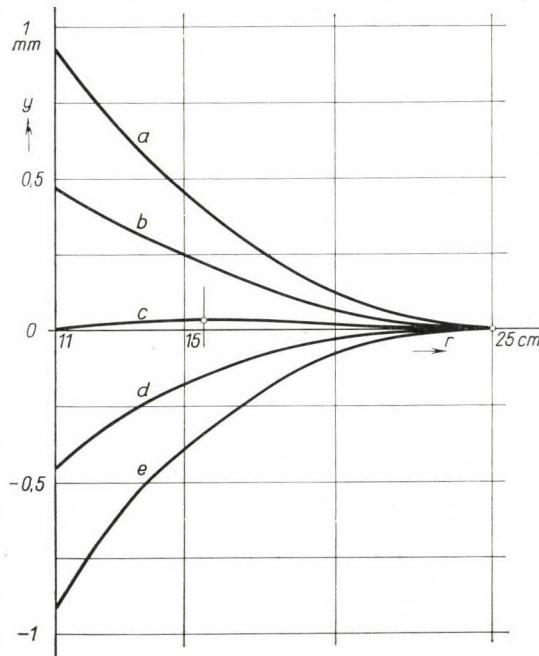


Abb. 9. Die Ausbiegungen y der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{II}. Kesseldruck und Bedeutung der Buchstaben $a - e$ dieselbe wie in Abb. 4

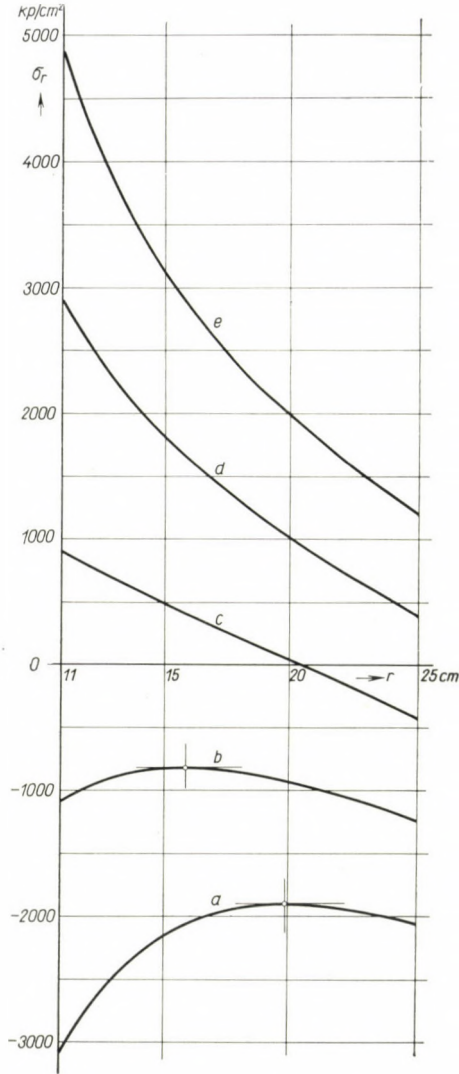


Abb. 10. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{II}. Kessel-
druck und Bedeutung der Buchstaben dieselbe wie in Abb. 4

Dieselben Zahlenwerte wie oben eingesetzt, ergeben hier:

$$b_1 = 108.524 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$b_2 = -1.89995 \cdot 10^4 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$c_1 = -3.82958 \cdot 10^{-3} \text{ (cm}^{-2}\text{)}$$

$$c_2 = 2.39349 \text{ (cm}^0\text{)}$$

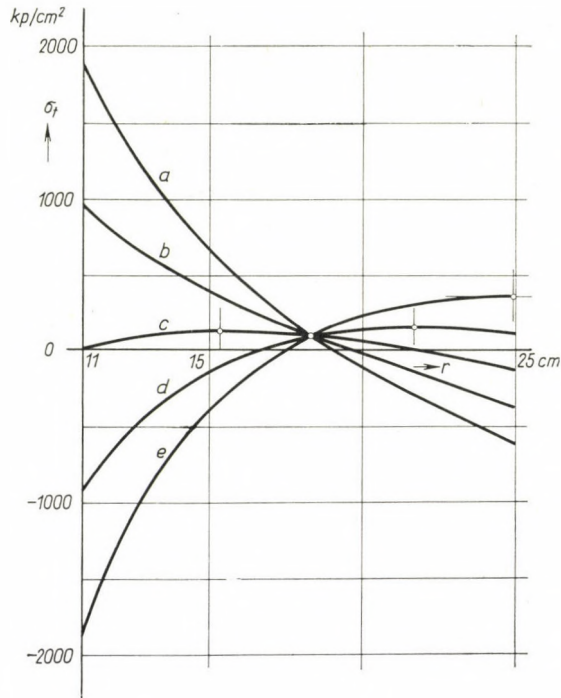


Abb. 11. Die Tangentialspannungen σ_t der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{II}. Kesseldruck und Bedeutung der Buchstaben a — e dieselbe wie in Abb. 4

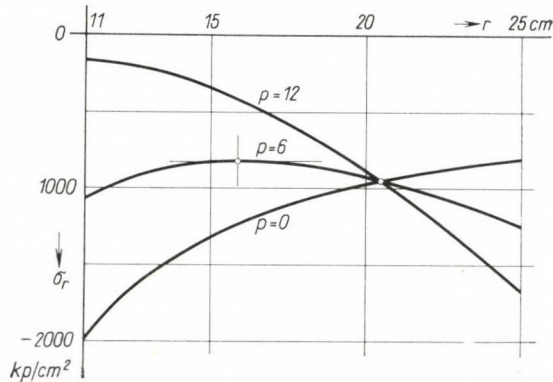


Abb. 12. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{II}. Festgehaltene Verschiebung der Platteninnenkante $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2}$ cm; Kesseldrücke wechselnd, an den Kurven angegeben

Die dazugehörigen Ausbiegungs-, und Spannungskurven sind bei festgehaltenem $p = 6$ kp/cm² in den Abbildungen 9, 10 und 11, bei festgehaltenem $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2}$ cm in Abb. 12, und 13 dargestellt. Wie aus Abb. 9 ersichtlich, sind die zu $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2}$ und $+9,15 \cdot 10^{-2}$ cm gehörigen Ausbiegungen hier von oben konkav, die übrigen konvex. Daß die Spannungen noch höher sind als im vorangegangenen Falle, dürfte bei der Einspannung als Randbedingung verständlich sein. Bemerkenswert ist noch, daß bei festem y_i die Kurven der Tangentialspannungen σ_t (Abb. 13) einen gemeinsamen Punkt haben.

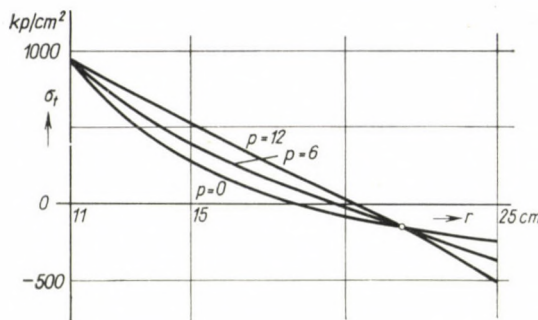


Abb. 13. Die Tangentialspannungen σ_t der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{II}. Festgehaltene Verschiebung der Platteninnenkante und wechselnde Kesseldrücke wie in Abb. 12

III. Der dritte Fall sei durch die Randbedingung

$$\text{III}_{\text{III}} \quad [\sigma_r]_{r=r_i} = 0 \tag{22}$$

d. h. die Unterstützung am inneren Plattenrand gekennzeichnet. Nach Ausführungen auf Seite 26 ist (22) mit den Gleichungen

$$-\frac{3 + \nu}{8} r_i^2 + b_1(1 + \nu) - \frac{b_2}{r_i^2} (1 - \nu) = 0 \tag{23}$$

$$c_1(1 + \nu) - \frac{c_2}{r_i^2} (1 - \nu) = 0 \tag{24}$$

gleichwertig.

Zu den letzteren die Gln. (12) und (13) hinzugenommen, ergeben sich

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{16} \frac{4(3 + \nu) r_i^4 \ln \frac{r_a}{r_i} + (1 - \nu)(r_a^4 - r_i^4)}{2(1 + \nu) r_i^2 \ln \frac{r_a}{r_i} + (1 - \nu)(r_a^2 - r_i^2)} \\ b_2 &= \frac{r_i^2}{16} \cdot \frac{-2(3 + \nu) r_i^2 (r_a^2 - r_i^2) + (1 + \nu)(r_a^4 - r_i^4)}{2(1 + \nu) r_i^2 \ln \frac{r_a}{r_i} + (1 - \nu)(r_a^2 - r_i^2)} \\ c_1 &= \frac{2(1 - \nu)}{2(1 + \nu) r_i^2 \ln \frac{r_a}{r_i} + (1 - \nu)(r_a^2 - r_i^2)} \\ c_2 &= \frac{2(1 + \nu) r_i^2}{2(1 + \nu) r_i^2 \ln \frac{r_a}{r_i} + (1 - \nu)(r_a^2 + r_i^2)} \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

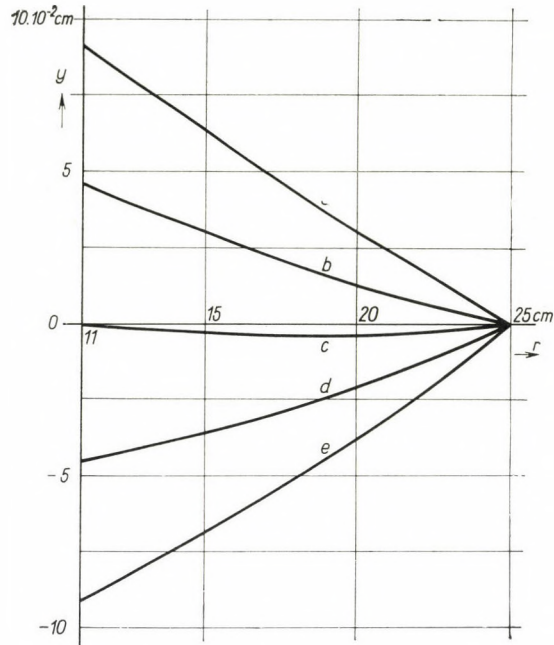


Abb. 14. Die Ausbiegungen y der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{III}. Kesseldruck und Bedeutung der Buchstaben $a - e$ dieselbe wie in Abb. 4

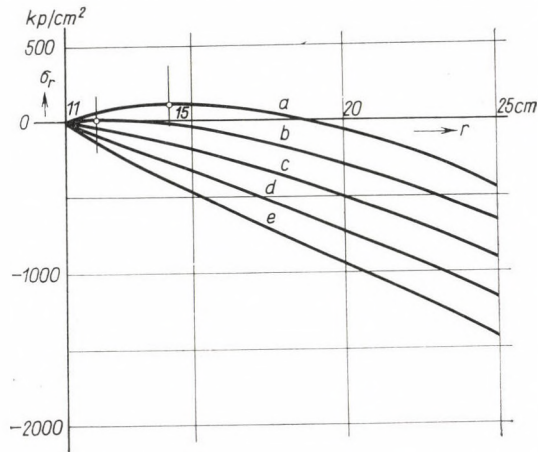


Abb. 15. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{III}. Kesseldruck und Bedeutung der Buchstaben $a - e$ dieselbe wie in Abb. 4

Als Zahlenwerte ergeben sich hier:

$$b_1 = 43.1461 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$b_2 = 1067.82 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$c_1 = 2.291 \cdot 10^{-3} \text{ (cm}^{-2}\text{)}$$

$$c_2 = 0.51482 \text{ (cm}^0\text{)}$$

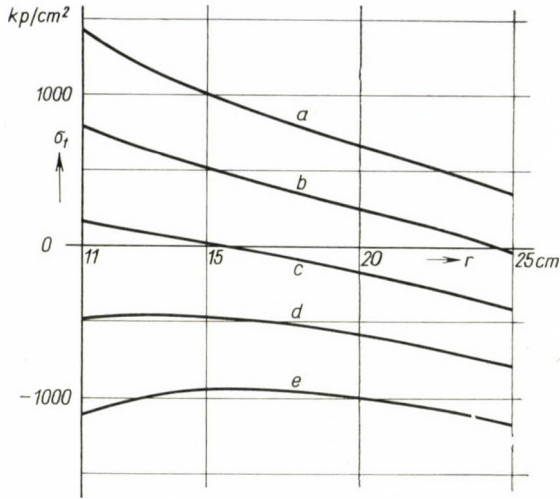


Abb. 16. Die Tangentialspannungen σ_t der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{III}. Kesseldruck und Bedeutung der Buchstaben a — e dieselbe wie in Abb. 4

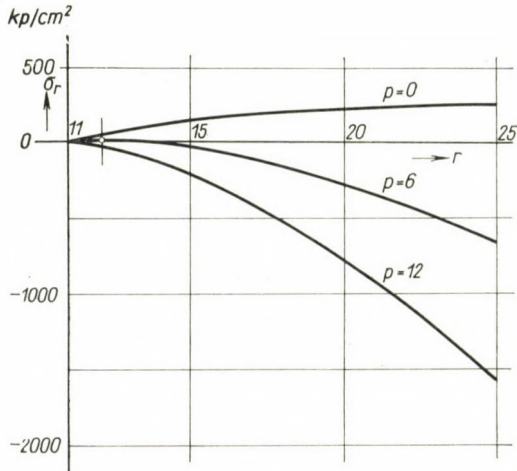


Abb. 17. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{III}. Festgehaltene Verschiebung der Platteninnenkante $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2}$ cm; Kesseldrücke wechselnd, an den Kurven angegeben

Die mit diesen Zahlenwerten errechneten Ausbiegungen und Spannungen sind in den Diagrammen Abb. 14—18 gezeichnet. Gegenüber Fall I sind die Radialspannungen σ_r etwas weniger hoch; und der Anstieg derselben bei festgehaltenem y_i in Abhängigkeit von p ist ebenfalls weniger stark (Abb. 17). Im übrigen ist der Fall in bezug der beiden Plattenränder ebenso unsymmetrisch wie Fall I.

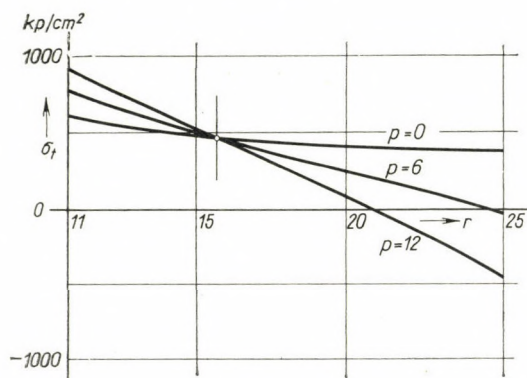


Abb. 18. Die Tangentialspannungen σ_t der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{III}. Festgehaltene Verschiebung der Platteninnenkante und wechselnde Kesseldrücke wie in Abb. 17

IV. Der vierte hier noch darzustellende Fall ist mit der Randbedingung

$$\text{III}_{\text{IV}} \quad \left[\frac{dy}{dr} \right]_{r=r_i} = 0 \quad (26)$$

festgelegt. Wie bei Fall II, ergeben sich hier daraus die zwei Gleichungen:

$$-\frac{r_i^3}{8} + b_1 r_i + \frac{b_2}{r_i} = 0 \quad (27)$$

$$c_1 r_i + \frac{c_2}{r_i} = 0 \quad (28)$$

Letztere Gleichungen, zusammen mit Gln. (12) und (13), lassen folgende Ausdrücke für die Konstanten b_1 , b_2 , c_1 , c_2 errechnen:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{r_a^4 - r_i^4 \left(1 + 4 \ln \frac{r_a}{r_i} \right)}{16 \left[r_a^2 - r_i^2 \left(1 + 2 \ln \frac{r_a}{r_i} \right) \right]} \\ b_2 &= -\frac{r_i^2}{16} \cdot \frac{(r_a^2 - r_i^2)^2}{r_a^2 - r_i^2 \left(1 + 2 \ln \frac{r_a}{r_i} \right)} \\ c_1 &= \frac{2}{r_a^2 - r_i^2 \left(1 + 2 \ln \frac{r_a}{r_i} \right)} \\ c_2 &= -\frac{2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2 \left(1 + 2 \ln \frac{r_a}{r_i} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Zahlenwerte dieser Konstanten für die Kreisringplatte nach Abb. 3. ergeben sich wie folgt:

$$b_1 = 67.1233 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$b_2 = -6291.787 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$c_1 = 6.55054 \cdot 10^{-3} \text{ (cm}^{-2}\text{)}$$

$$c_2 = -0.7926 \text{ (cm}^0\text{)}$$

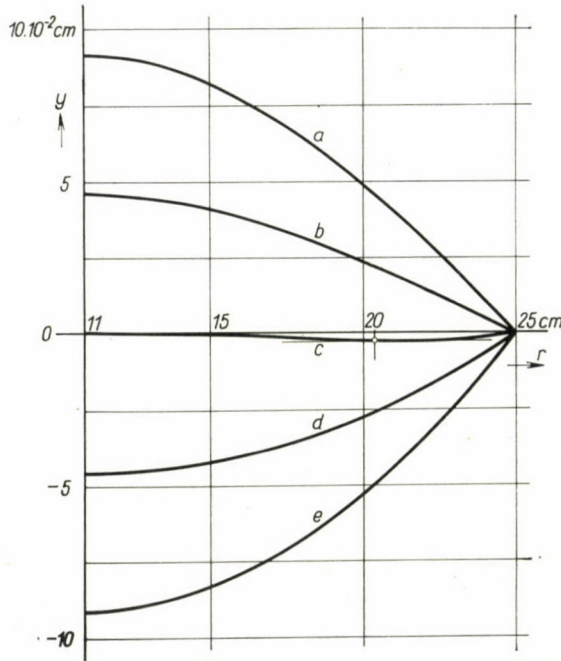


Abb. 19. Die Ausbiegungen y der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{IV}. Kesseldruck und Bedeutung der Buchstaben $a - e$ dieselbe wie in Abb. 4

Die mit diesen Konstanten errechneten Ausbiegungen und Spannungen sind in Abb. 19—28 dargestellt.

Wie nach den vorangegangenen erwartet werden konnte, ergeben sich in diesem Falle die höchsten Spannungswerte. Bei festgehaltenem y_i und veränderlichem p haben die Kurven der σ_r und σ_t je einen gemeinsamen Punkt (Abb. 22 und 23), dementsprechend zeigen die Spannungen in Abhängigkeit von p weniger große Unterschiede.

Auf Grund der für die beschriebenen Fälle berechneten Ausbiegungs-, und Spannungskurven können dafür, daß eine der Fälle in Wirklichkeit auftreten wird, oder wenigstens die Verhältnisse im Betriebszustand durch eine dieser Fälle mit halbwegs annehmbarer Näherung dargestellt werden, keine Beweise erbracht werden.

Die fehlende Symmetrie der Fälle I und III, die unwahrscheinlich hohen Spannungswerte bei den Fällen II und IV machen es naheliegend, nach einer Rechenmethode zu suchen, welche die in Wirklichkeit auftretenden Formänderungen und Spannungen besser wiedergibt.

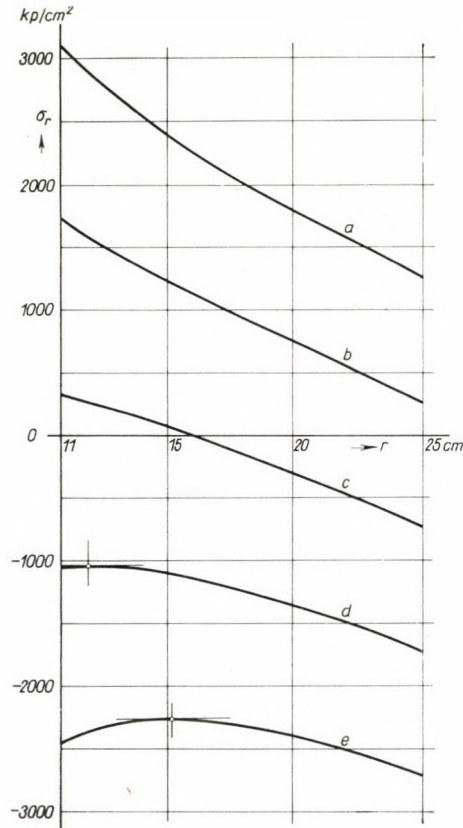


Abb. 20. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte bei der Randbedingung III/IV. Kessel-
druck und Bedeutung der Buchstaben *a* — *e* dieselbe wie in Abb. 4

Bestimmung der Formänderungen und Spannungen auf Grund der minimalen Formänderungsarbeit

Es ist klar, daß bei Festhalten an der oben gemachten Annahme, nach welcher die beiden Kesselmäntel als starr betrachtet werden, eine der Wirklichkeit genau entsprechende Berechnung der Spannungsverteilung usw. nicht möglich ist. Man kann aber behaupten, daß eine Rechenmethode gefunden werden kann, welche Spannungswerte liefert, die der Wirklichkeit näher kommen als die oben berechneten bzw. gezeigten Spannungsverteilungen.

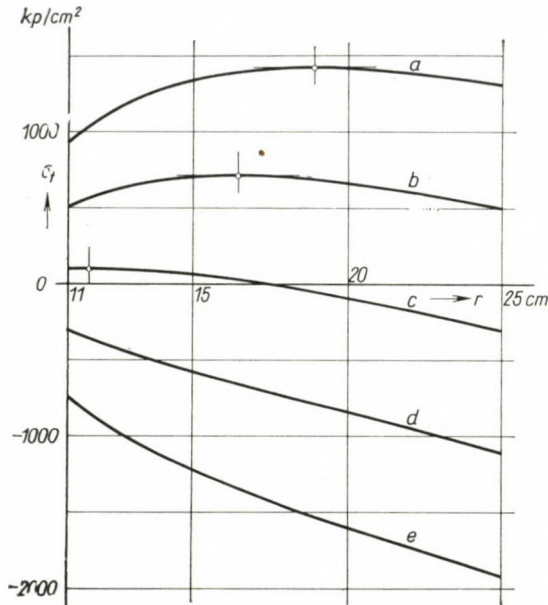


Abb. 21. Die Tangentialspannungen σ_t der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{IV}. Kesseldruck und Bedeutung der Buchstaben a — e dieselbe wie in Abb. 4

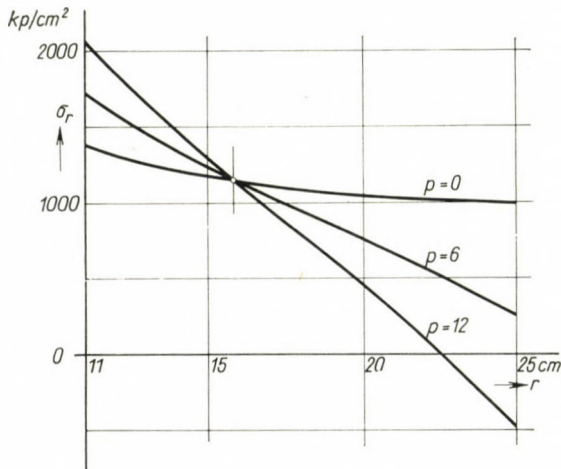


Abb. 22. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{IV}. Festgehaltene Verschiebung der Platteninnenkante $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2}$ cm; Kesseldrücke wechselnd, an den Kurven angegeben

gen. Letztere sind Spezialfälle, die sich aus den mathematisch leicht angebbaren Randbedingungen ergeben, ohne die Verhältnisse wirklichkeitstreu abzubilden.

Um eine bessere Annäherung der Wirklichkeit erreichen zu können, muß eine allgemeiner gefaßte dritte Randbedingung zugrunde gelegt werden.

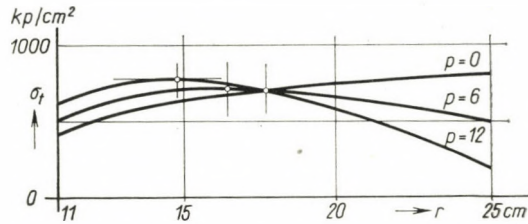


Abb. 23. Die Tangentialspannungen σ_t der Kreisringplatte bei der Randbedingung III_{IV}. Festgehaltene Verschiebung der Platteninnenkante und wechselnde Kesseldrücke wie bei Abb. 22

Als Ausgangspunkt dazu kann die Überlegung dienen, daß die Schweißnähte an den Plattenrändern nicht nur Kräfte, sondern auch Momente übertragen können. Hier soll nur angenommen werden, daß die sich aus den weiteren Rechnungen ergebende Momente — insofern diese nur Spannungen unter der Elastizitätsgrenze des Plattenmaterials hervorrufen — von den Schweißnähten übertragen werden.

Momente an den Plattenrändern werden durch die Radialspannungen σ_r übertragen. Bezeichnen wir mit m_r das auf 1 cm des Plattenumfangs übertragene Moment (mit der Dimension von kp. cm/cm), so kann dieses mit der Spannung σ_r in der äußersten Plattenschicht, der Plattendicke s und der Entfernung z von der Plattenmittelfläche gerechnet, ausgedrückt werden, als

$$m_r = \int_{-s/2}^{+s/2} \frac{2z}{s} \cdot \sigma_r \cdot z \cdot dz = \frac{s^2 \cdot \sigma_r}{6} \quad (30)$$

Dieses ist also mit der Spannung σ_r verhältnismäßig.

Im allgemeinen wird sowohl $[m_r]_{r=r_a} \neq 0$ als auch $[m_r]_{r=r_i} \neq 0$ sein. Man kann also die oben angedeutete dritte Randbedingung mit der später noch zu bestimmenden Verhältniszahl ψ als

$$\text{III} \quad [m_r]_{r=r_i} = \psi \cdot [m_r]_{r=r_a}, \quad (31)$$

angeben.

Mit den Glgn. (9) und (30) kann letztere nach entsprechenden Kürzungen noch geschrieben werden:

$$\psi \left[-\frac{N}{8} (3 + \nu) r_a^2 + B(1 + \nu) - \frac{C}{r_a^2} (1 - \nu) \right] = \\ -\frac{N}{8} (3 + \nu) r_i^2 + B(1 + \nu) - \frac{C}{r_i^2} (1 - \nu).$$

Nach Einführen der Gl. (11) können durch den gleichen Gedankengang, der zu den Glgn. (15) und (16) führte, folgende Gleichungen als Ausdrücke der

dritten Randbedingung erhalten werden:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{3+\nu}{8}(\psi r_a^2 - r_i^2) + b_1(1+\nu)(\psi - 1) - b_2(1-\nu)\left(\frac{\psi}{r_a^2} - \frac{1}{r_i^2}\right) &= 0 \\ c_1(1+\nu)(\psi - 1) - c_2(1-\nu)\left(\frac{\psi}{r_a^2} - \frac{1}{r_i^2}\right) &= 0. \end{aligned} \right\} (31a)$$

Zusammen mit den Gln. (12) und (13) haben wir hier wieder vier Gleichungen, aus welchen die hier gültigen Ausdrücke der Konstanten b_1 , b_2 , c_1 , c_2 berechnet werden können. U. zw. werden hier

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{\frac{3+\nu}{8}(\psi r_a^2 - r_i^2) \ln \frac{r_a}{r_i} + (1-\nu) \frac{(\psi r_i^2 - r_a^2)(r_a^4 - r_i^4)}{32 r_a^2 r_i^2}}{(1+\nu)(\psi - 1) \ln \frac{r_a}{r_i} + (1-\nu) \frac{(\psi r_i^2 - r_a^2)(r_a^2 - r_i^2)}{2 r_a^2 r_i^2}} \\ b_2 &= \frac{(1+\nu)(\psi - 1) \frac{r_a^4 - r_i^4}{32} - \frac{3+\nu}{16}(r_a^2 - r_i^2)(\psi r_a^2 - r_i^2)}{(1+\nu)(\psi - 1) \ln \frac{r_a}{r_i} + (1-\nu) \frac{(\psi r_i^2 - r_a^2)(r_a^2 - r_i^2)}{2 r_a^2 r_i^2}} \\ c_1 &= \frac{(1-\nu) \frac{\psi r_i^2 - r_a^2}{r_a^2 r_i^2}}{(1+\nu)(\psi - 1) \ln \frac{r_a}{r_i} + (1-\nu) \frac{(\psi r_i^2 - r_a^2)(r_a^2 - r_i^2)}{2 r_a^2 r_i^2}} \\ c_2 &= \frac{(1+\nu)(\psi - 1)}{(1+\nu)(\psi - 1) \ln \frac{r_a}{r_i} + (1-\nu) \frac{(\psi r_i^2 - r_a^2)(r_a^2 - r_i^2)}{2 r_a^2 r_i^2}} \end{aligned} \right\} (32)$$

Die durch Gl. (31) definierte dimensionslose Verhältniszahl ψ kann sämtliche Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Zu jedem dieser Werte gehört ein möglicher Formänderungs- und Spannungszustand. Auch die oben dargestellten Fälle I—IV sind zwischen diesen enthalten. U. zw. entspricht dem Falle I der Wert $\psi = \infty$, dem Falle III der Wert $\psi = 0$. Dagegen gehört bei den Fällen II und IV zu jedem Wertepaar p und y_i je ein verschiedener ψ -Wert.

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, zu gegebenem p und y_i einen ψ -Wert so zu bestimmen, daß die dadurch festgelegten Formänderungen und Spannungen der in Wirklichkeit auftretenden möglichst nahe kommen. Einen Weg zur Lösung der gestellten Aufgabe scheint die Anwendung eines Minimalprinzips zu bieten. Das »Prinzip des kleinsten Zwanges« [siehe z. B. in (2)] kann im gegebenen Falle so gedeutet werden, daß bei den gemachten Annah-

men ein solcher Verformungs- und Spannungszustand auftreten wird, bei welchem die Formänderungsarbeit die kleinste wird.

Nach obigem soll der Spannungszustand der Kreisringplatte als ein ebener betrachtet werden. Bei diesem ist die Formänderungsarbeit pro Volumeneinheit (also pro cm^3) (3)

$$a_V = \frac{\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - 2\nu\sigma_r\sigma_t}{2E}. \quad (33)$$

Daraus ergibt sich für die ganze Kreisringplatte:

$$A_V = \int_V 2\pi \cdot r \cdot a_V dr dz = 2\pi \int_{r_i}^{r_a} r dr \int_{-s/2}^{+s/2} a_V dz. \quad (34)$$

Nach den nötigen längeren Zwischenrechnungen wird daraus mit den Ausdrücken (9) und (10) erhalten:

$$A_V = \frac{Es^3\pi}{12(1-\nu)} \left\{ \frac{N^2}{192} \left[3 + \frac{2}{(1+\nu)^2} \right] (r_a^6 - r_i^6) - \frac{N \cdot B}{4} (r_a^4 - r_i^4) + \left[B^2 + \frac{1-\nu}{1+\nu} \left(\frac{N \cdot C}{4} + \frac{2C^2}{r_a^2 r_i^2} \right) \right] (r_a^2 - r_i^2) \right\}. \quad (35)$$

Dieser Ausdruck ist bei festgehaltenem N (bzw. p) und y_i eine implizite Funktion von ψ . Nach Einsetzen von (11) kann die Differentiation nach ψ durchgeführt werden und ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{dA_V}{d\psi} = N^2 & \left\{ \left[2b_1 - \frac{r_a^2 + r_i^2}{4} \right] \cdot \frac{db_1}{d\psi} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \left[\frac{1}{4} + \frac{4b_2}{r_a^2 r_i^2} \right] \cdot \frac{db_2}{d\psi} \right\} + \\ & + N \cdot y_i \left\{ 2 \left[b_1 \frac{dc_1}{d\psi} + c_1 \frac{db_1}{d\psi} \right] + \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{dc_2}{d\psi} + \right. \\ & + \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{4}{r_a^2 r_i^2} \left[b_2 \frac{db_2}{d\psi} + c_2 \frac{db_2}{d\psi} \right] - \frac{r_a^2 + r_i^2}{4} \cdot \frac{dc_1}{d\psi} \left. \right\} + \\ & + y_i^2 \left\{ 2c_1 \frac{dc_1}{d\psi} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{4}{r_a^2 r_i^2} \cdot c_2 \cdot \frac{dc_2}{d\psi} \right\}. \quad (36) \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\frac{dA_V}{d\psi} = 0$$

kann nun dazu benützt werden, die Verhältniszahl ψ so zu bestimmen, daß die Formänderungsarbeit am kleinsten wird. Um eine numerische Rechnung durchführen zu können, müssen in Gl. (36) noch die Ausdrücke (32) sowie deren Differentialquotienten nach ψ eingesetzt werden; letztere ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 & \frac{db_1}{d\psi} = \\
 & = \frac{- \left[\frac{3+\nu}{8} r_a^2 \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^4 - r_i^4)}{32r_a^2} \right] \cdot \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_i^2} \right]}{\left\{ \psi \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_a^2} \right] - \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_i^2} \right] \right\}^2} + \\
 & + \frac{\left[\frac{3+\nu}{8} r_i^2 \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{32r_i^2} \right] \cdot \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_a^2} \right]}{\left\{ \psi \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_a^2} \right] - \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_i^2} \right] \right\}^2} \\
 & \frac{db_2}{d\psi} = \\
 & = \frac{- \left[(1+\nu) \frac{r_a^2 - r_i^2}{32} - \frac{3+\nu}{16} (r_a^2 - r_i^2) r_a^2 \right] \cdot \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_i^2} \right]}{\left\{ \psi \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_a^2} \right] - \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_i^2} \right] \right\}^2} + \\
 & + \frac{\left[(1+\nu) \frac{r_a^2 - r_i^2}{32} - \frac{3+\nu}{16} (r_a^2 - r_i^2) r_i^2 \right] \cdot \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_a^2} \right]}{\left\{ \psi \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_a^2} \right] - \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_i^2} \right] \right\}^2} \quad (37) \\
 & \frac{dc_1}{d\psi} = - \\
 & \frac{(1-\nu^2) \left(\frac{1}{r_a^2} - \frac{1}{r_i^2} \right) \ln \frac{r_a}{r_i}}{\left\{ \psi \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_a^2} \right] - \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_i^2} \right] \right\}^2} \\
 & \frac{dc_2}{d\psi} = \\
 & \frac{(1-\nu^2) \frac{(r_a^2 - r_i^2)^2}{r_a^2 r_i^2}}{2 \left\{ \psi \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_a^2} \right] - \left[(1+\nu) \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{(1-\nu)(r_a^2 - r_i^2)}{2r_i^2} \right] \right\}^2}
 \end{aligned}$$

Um die weitere Rechnung zu erleichtern, sollen in die Gl. (32) die Zahlenwerte $r_a = 25$ cm, $r_i = 11$ cm, sowie die Verhältniszahl $r_d/r_i = 2.272727$ und $\nu = 0.3$ eingesetzt werden, so ergeben sich

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= r_a^2 \frac{0.359717 \psi - 0.174321}{1.34954 \psi - 2.52515} \\ b_2 &= -r_a^4 \frac{0.127219 \psi - 0.00690189}{1.34954 \psi - 2.52515} \\ c_1 &= \frac{1}{r_a^2} \cdot \frac{0.7 \psi - 0.361571}{1.34954 \psi - 2.52515} \\ c_2 &= \frac{1.3 (\psi - 1)}{1.34954 \psi - 2.52515} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Ähnlich ergeben sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{db_1}{d\psi} &= -r_a^2 \cdot \frac{0.673086}{1.821258 \psi^2 - 6.81558 \psi + 6.37638} \\ \frac{db_2}{d\psi} &= r_a^4 \cdot \frac{0.330562}{1.821258 \psi^2 - 6.81558 \psi + 6.37638} \\ \frac{dc_1}{d\psi} &= \frac{1}{r_a^2} \cdot \frac{3.111945}{1.821258 \psi^2 - 6.81558 \psi + 6.37638} \\ \frac{dc_2}{d\psi} &= -\frac{1.529293}{1.821258 \psi^2 - 6.81558 \psi + 6.37638} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Mit diesen Ausdrücken wird erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{dA_\nu}{d\psi} &= N^2 \cdot r_a^4 (-0.621005 \psi - 0.410255) + N y_i (6.71051 \psi + 1.98259) + \\ &+ \frac{y_i^2}{r_a^4} (-17.76028 \psi + 0.3868) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Diese Gleichung liefert mit $N = 3.25 \cdot 10^{-7} p$ und $r_a = 25$ cm den zur Bestimmung der kleinsten Formänderungsarbeit nötigen Wert:

$$\psi_{\text{opt}} = \frac{1.692702 \cdot 10^{-8} \cdot p^2 - 6.443416 \cdot 10^{-7} \cdot p \cdot y_i - 0.99044 \cdot 10^{-6} \cdot y_i^2}{-2.56225 \cdot 10^{-8} \cdot p^2 + 21.80919 \cdot 10^{-7} \cdot p \cdot y_i - 45.46633 \cdot 10^{-6} \cdot y_i} \quad (41)$$

Nach Gl. (41) ist ψ_{opt} eine quadratische gebrochene rationale Funktion sowohl von p wie auch von y_i . Da der Zähler wie auch der Nenner im allgemeinen zwei Nullstellen haben werden, so nimmt ψ_{opt} im Endlichen sowohl als Funktion von p (bei festgehaltenem y_i) wie auch als Funktion von y_i (bei festgehaltenem p) zweimal den Wert 0, und zweimal den Wert $\pm\infty$ an.

Bei anderen Abmessungen und anderem Material der Kreisplatte werden die Zahlenfaktoren in Gl. (41) andere Werte annehmen, die Form des Ausdruckes bleibt aber bestehen; d. h. mit zwei Nullstellen und zwei Unendlichkeitsstellen von ψ_{opt} kann also im allgemeinen gerechnet werden.

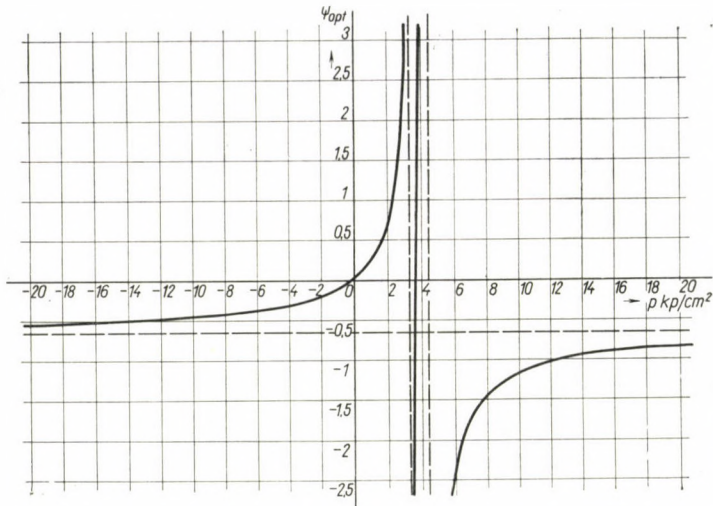


Abb. 24. Die Verhältniszahl ψ_{opt} in Abhängigkeit vom Kesseldruck, bei festgehaltenem $y_i = +9,15 \cdot 10^{-2}$ cm für die in Abb. 3 gezeigte Kreisringplatte dargestellt

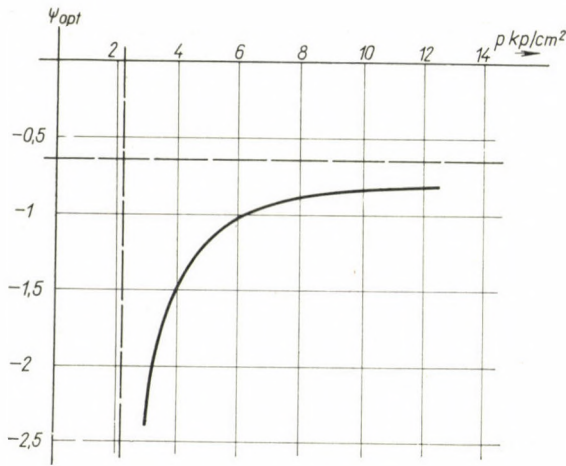


Abb. 25. Die Verhältniszahl ψ_{opt} in Abhängigkeit vom Kesseldruck, aber bei festgehaltenem $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2}$ cm im praktisch wichtigen Teilgebiet dargestellt

Aus Gl. (41) wurden nun zu verschiedenen Werten bzw. Wertepaaren von p und y_i die ψ_{opt} -Werte berechnet. So ergab sich z. B. bei konstant gehaltenem $y_i = +9,15 \cdot 10^{-2}$ cm das in Abb. 24 gezeigte Diagramm. Für konstantes $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2}$ cm zeigt Abb. 25 das praktisch wichtige Teilgebiet der Funktion ψ_{opt} .

Bei festgehaltenem $p = 6$ kp/cm^2 ergab sich in Abhängigkeit von y_i die in Abb. 26 gezeigte Kurve.

Anscheinend nimmt ψ_{opt} in den praktisch interessierenden Fällen negative Werte an. Das bedeutet, daß die Momente an den beiden Plattenrändern bei Spannungszuständen, die zu der jeweils minimalen Formänderungsarbeit gehören, verschiedene Vorzeichen haben. Schon aus diesem Ergebnis kann gefolgert werden, daß die oben dargestellten Belastungsfälle I—IV dem aufgestellten Minimalprinzip im allgemeinen nicht entsprechen können; ihr Auftreten im praktischen Falle also als wenig wahrscheinlich erachtet werden kann.

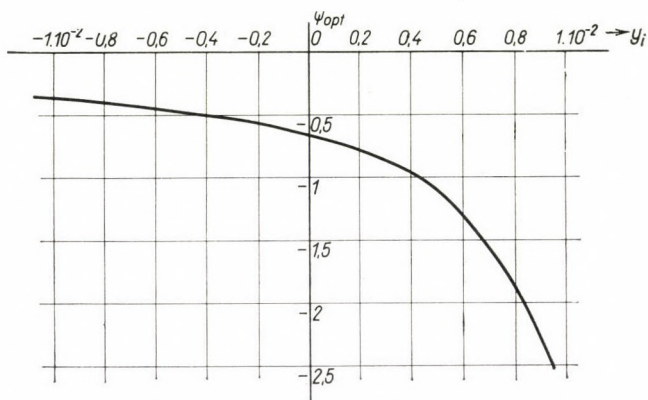


Abb. 26. Die Verhältniszahl ψ_{opt} in Abhängigkeit von der Verschiebung y_i bei festgehaltenem Kesseldruck $p = 6 \text{ kp/cm}^2$ für die in Abb. 3 gezeigte Kreisringplatte dargestellt

Mit Hilfe der berechneten ψ_{opt} -Werte wurden weiter die zu den jeweiligen Wertepaaren von p und y_i die Zahlenwerte der Formänderungsarbeit bestimmt. Der Berechnungsgang war — wie es aus dem vorangegangenen verständlich sein dürfte — kurz der folgende. Der zu dem gewählten Wertepaar von p und y_i gehörige ψ_{opt} -Wert wurde in die Ausdrücke unter (32) eingesetzt, und so die Konstanten b_1, b_2, c_1, c_2 erhalten. Mit diesen ergaben sich aus den Gln. (11) die entsprechenden Werte von B und C . Letztere endlich ermöglichten die Berechnung von $[A_V]_{\text{opt}}$ aus Gl. (35). Um die Verhältnisse kurvenmäßig darstellen zu können, wurde zuerst $[A_V]_{\text{opt}}$ bei festgehaltenem $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ in Abhängigkeit von p bestimmt, diese ergab sich in Abb. 27 als die strichpunktierte Kurve. Es konnte festgestellt werden, daß diese eine gewöhnliche Parabel ist.

Zweitens wurde bei festgehaltenem $p = 6 \text{ kp/cm}^2$ (d. h. $N = 1,95 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-3}$) die Formänderungsarbeit $[A_V]_{\text{opt}}$ als Funktion von y_i berechnet. Letztere ist in Abb. 28 ebenfalls strichpunktiert eingetragen; auch diese Kurve ist eine Parabel.

In den Abb. 27 und 28 sind auch die entsprechenden Kurven der Formänderungsarbeit A_V der oben besprochenen Belastungsfälle I—IV eingezeichnet, die ebenfalls Parabeln sind.

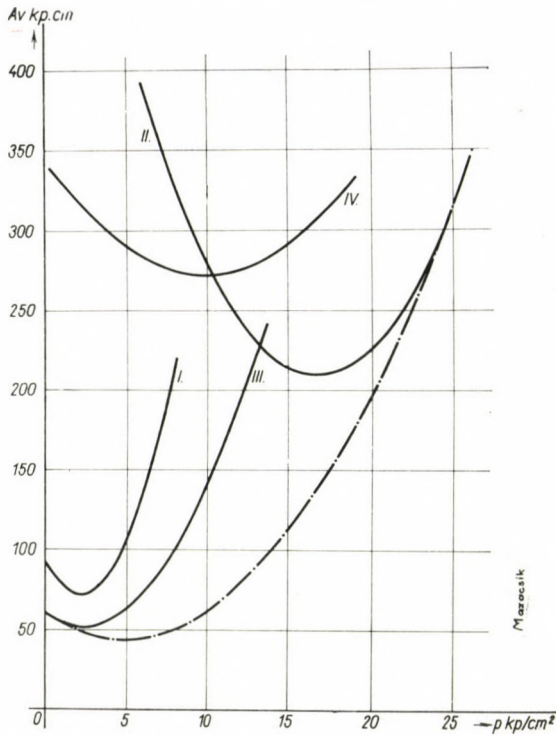


Abb. 27. Die gesamte Formänderungsarbeit der in Abb. 3 gezeigten Kreisringplatte für die Belastungsfälle I—IV, sowie $[A_v]_{\text{opt}}$ bei festgehaltenem $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ in Abhängigkeit vom Kesseldruck p dargestellt

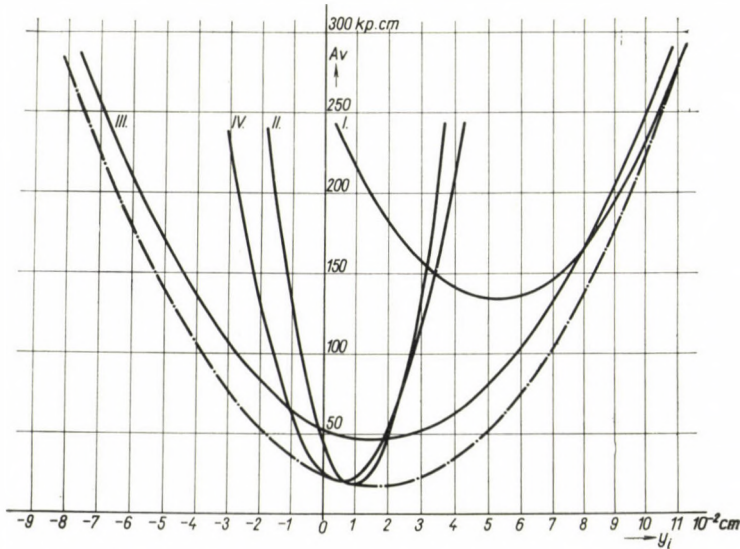


Abb. 28. Die gesamte Formänderungsarbeit der in Abb. 3 gezeigten Kreisringplatte für die Belastungsfälle I—IV, sowie $[A_v]_{\text{opt}}$ bei festgehaltenem Kesseldruck $p = 6 \text{ kp}/\text{cm}^2$ in Abhängigkeit von der Verschiebung y_i der Platteninnenkante dargestellt

Es ist verhältnismäßig leicht zu beweisen, daß die zu den Fällen I—IV gehörigen Funktionen $A_V = F_I(p, y_i) \dots A_V = F_{IV}(p, y_i)$ durch elliptische Paraboloiden oder Kegelflächen darstellbar sind. Der Beweis kann folgendermaßen geführt werden. Wie oben gezeigt, gehört zu den Fällen I—IV je ein System von Konstanten b_1, b_2, c_1, c_2 , die nurmehr von den linearen Abmessungen und der Poissonschen Konstante abhängig sind.

Wenn man nun diese Konstanten in die Gl. (11) und die so erhaltenen B und C zur Berechnung von A_V in Gl. (35) einführt, so ergibt sich für jeden der Fälle ein Ausdruck, in dem nur noch p (bzw. N) und y_i veränderlich sind. Da dieser für A_V erhaltene Ausdruck nur Glieder mit $p^2, p \cdot y_i$ und y_i^2 enthält, und die linearen Glieder mit p und y_i fehlen, so muß die A_V darstellende Fläche entweder ein elliptisches Paraboloid oder eine ebenfalls elliptische Kegelfläche sein. Bei diesen beiden sind aber die zur Hauptachse parallelen ebenen Schnitte gemeine Parabeln.

Abb. 27 und 28 zeigen nun weiter, daß die den Fällen I—IV zugeordneten Kurven von A_V — der Erwartung entsprechend — sämtlich in den durch die Kurven $[A_V]_{\text{opt}}$ begrenzten Flächenstücken verlaufen. Einige der zu den Fällen I—IV gehörenden Kurven berühren die $[A_V]_{\text{opt}}$ -Kurven. Bei den übrigen scheint dies — auf Grund der durchgeführten Extrapolationen — auch der Fall zu sein. Daraus könnte gefolgert werden, daß auch die eingangs besprochenen Fälle I—IV unter gewissen Umständen der Bedingung der minimalen Formänderungsarbeit genügen können. Nach den Abb. 27 und 28 zu schließen, dürfte das aber meistens nur in praktisch nicht interessierenden Fällen eintreffen.

Um zu zeigen, welche Verformungs- und Spannungszustände der Bedingung der minimalen Formänderungsarbeit entsprechen, wurden mit Hilfe der zu verschiedenen Wertepaaren von p und y_i berechneten ψ_{opt} -Werte die Ausbiegungs-, und Spannungskurven punktweise bestimmt, und in die Abb. 29—33 eingetragen. Zur Ermöglichung des Vergleichs wurden in Abb. 29—31 die zu $p = 6 \text{ kp/cm}^2 = \text{konst.}$ gehörenden Kurven, und in Abb. 32—33 die bei $y_i = + 4,575 \cdot 10^{-2} \text{ cm} = \text{konst.}$ errechneten Kurven aufgezeichnet.

Das Nebeneinanderstellen der letzteren Abbildungen mit den Schaubildern 4—23 ergibt nun folgendes.

Die Ausbiegungen y sind bei dem zur minimalen Formänderungsarbeit gehörenden Plattenzustand, gegenüber den übrigen Belastungsfällen I—IV ziemlich flach und unterscheiden sich nur verhältnismäßig wenig von der Kegelfläche, deren Erzeugende die, zwischen $[y]_{r=r_a} = 0$ und $[y]_{r=r_i} = y_i$ ziehbare Gerade ist.

Im einzelnen kann noch festgestellt werden, daß gegenüber Fall I die Radialspannungen σ_r beträchtlich, die Tangentialspannungen σ_t nur wenig niedriger sind.

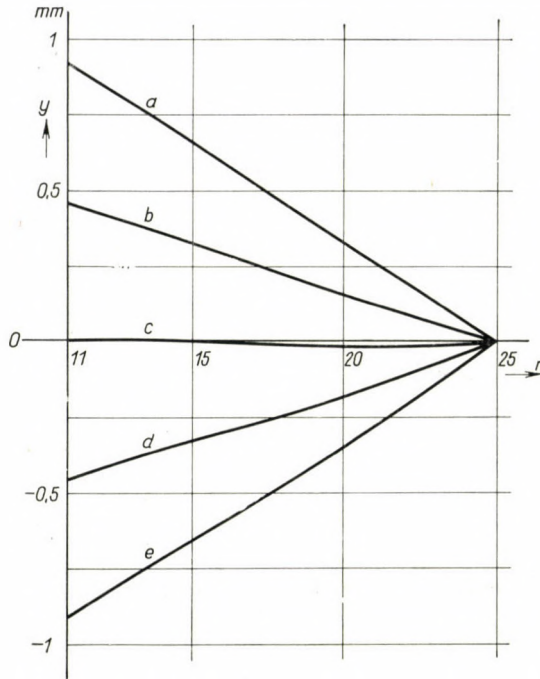


Abb. 29. Die Ausbiegungen y der Kreisringplatte, die der Bedingung der minimalen Formänderungsarbeit entsprechen. Festgehaltener Kesseldruck $p = 6 \text{ kp/cm}^2$; Verschiebungen der Platteninnenkante verschieden; Bedeutung der Buchstaben $a - e$ wie in Abb. 4

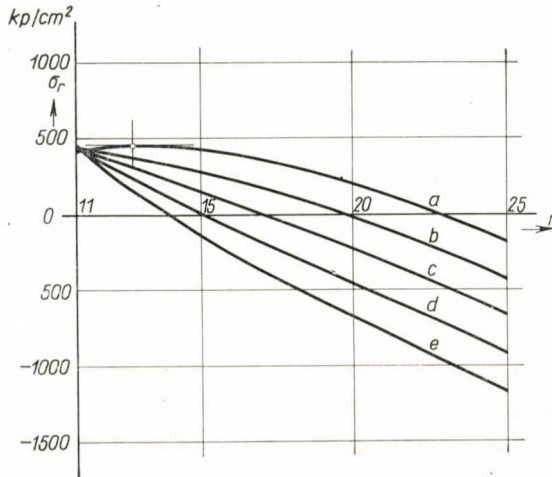


Abb. 30. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte, die der Bedingung der minimalen Formänderungsarbeit entsprechen. Kesseldruck sowie Verschiebungen der Platteninnenkante wie in Abb. 29

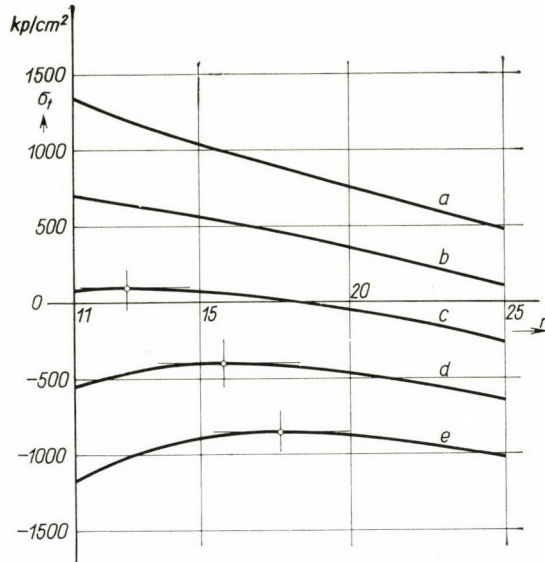


Abb. 31. Die Tangentialspannungen σ_t der Kreisringplatte unter gleichen Bedingungen wie in Abb. 30

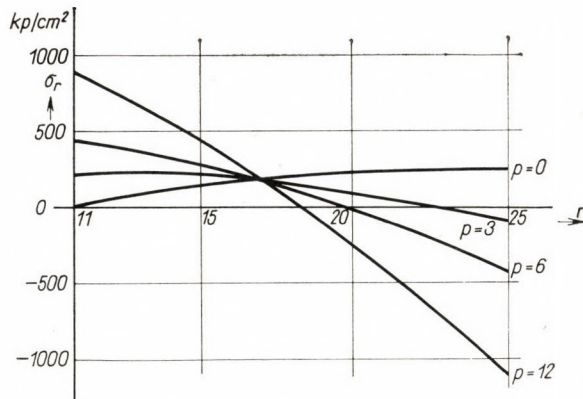


Abb. 32. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte, die der Bedingung der minimalen Formänderungsarbeit entsprechen. Festgehaltene Verschiebung der Platteninnenkante $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2}$ cm; Kesseldrücke verschieden, wie an den Kurven angegeben

Beim Vergleich mit Fall II zeigt sich ein noch größerer Unterschied. Bei letzterem haben die Ausbiegungen zwischen den Plattenrändern (siehe Abb. 9) infolge der vorgeschriebenen Randbedingung andere Form und sind viel größer. Dementsprechend sind auch die Radialspannungen σ_r mehrfach größer (Abb. 10).

Bezüglich der Ausbiegungen und der Größe der Spannungen steht noch Fall III dem der minimalen Formänderungsarbeit entsprechenden Platten-

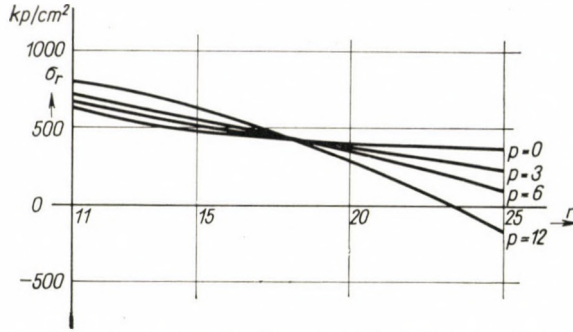


Abb. 33. Die Tangentialspannungen σ_t der Kreisringplatte, die der Bedingung der minimalen Formänderungsarbeit entsprechen. Festgehaltene Verschiebung der Platteninnenkante und Kesseldrücke wie in Abb. 32

zustand am nächsten. Die Verteilung der Spannungen ist natürlich eine andere.

Fall IV zeigt ebenfalls hohe Spannungen und steht in dieser Hinsicht — abgesehen vom Vorzeichen der Spannungen — dem Fall II nahe. Ist also von dem optimalen Zustand auch ziemlich entfernt. Dies kann schon aus den Kurven in Abb. 27 gefolgert werden.

Um auch einen direkten Vergleich zu ermöglichen, wurden in Abb. 34 und 35 die Kurven der Spannungen σ_r und σ_t für das Wertepaar $p = 6 \text{ kp/cm}$, und $y_i = + 4,575 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ der Fälle I—IV sowie die der zu letzt errechneten Annahme der minimalen Formänderungsarbeit zusammen gezeichnet. Es zeigt sich gleich, daß diese letztere Annahme die günstigste Spannungsverteilung liefert.

Wie ersichtlich, verlaufen die Spannungskurven der minimalen Formänderungsarbeit (in den Abb. 34 und 35 strichpunktiert eingetragen und mit »opt« bezeichnet) zwischen den entsprechenden Kurven der Fälle I und III. Dagegen liegen die Kurven der Fälle II und IV weiter auseinander.

Bemerkenswert ist noch, daß alle fünf Kurven der Tangentialspannungen σ_t einen gemeinsamen Punkt haben (siehe Abb. 35). Da dies bei anderen Wertepaaren von p und y_i ebenfalls zutrifft, so kann vermutet werden, daß bei jedem Wertepaar von p und y_i ein Wert der unabhängigen Veränderlichen gefunden werden kann, für welche die Tangentialspannung σ_t von den jeweiligen Randbedingungen unabhängig konstant ist.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden: Wie zu erwarten war, ist der der minimalen Formänderungsarbeit zugeordnete Plattenzustand günstiger als irgendeiner der oben dargestellten Belastungsfälle. Und da die Voraussetzungen, die zu dessen Bestimmung benötigt wurden, von der Wirklichkeit weniger entfernt sind als die in den Fällen I—IV festgesetzten Randbedingungen, und kein zwingender Grund zur Annahme des Auftretens dieser Bedingungen in praktischen Fällen gefunden werden kann, so darf behauptet

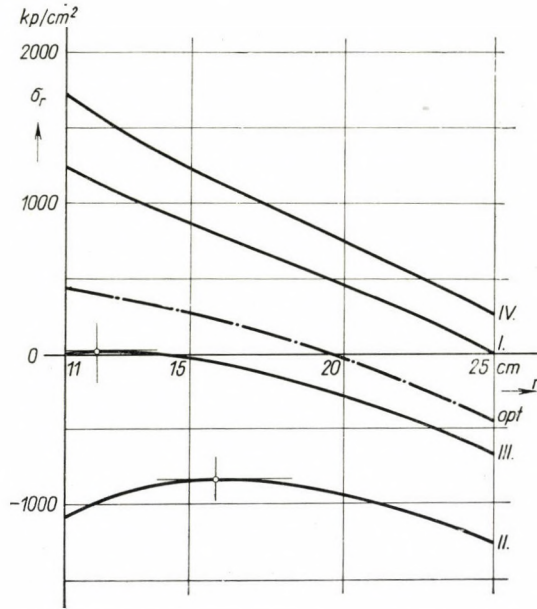


Abb. 34. Die Radialspannungen σ_r der Kreisringplatte für das Wertepaar $p = 6 \text{ kp/cm}^2$ und $y_i = +4,575 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ der Belastungsfälle I—IV sowie die der minimalen Formänderungsarbeit entsprechend (letztere strichpunktirt eingezeichnet) zusammen eingetragen

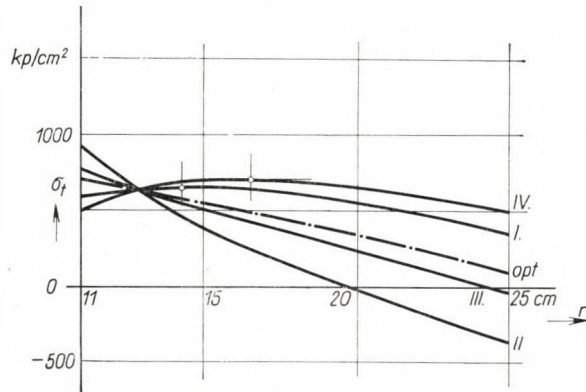


Abb. 35. Die Tangentialspannungen σ_t der Kreisringplatte, wie in Abb. 34. Die Kurven scheinen bei der Abszisse $r \cong 12,9$ einen gemeinsamen Punkt zu haben

werden, daß die in Wirklichkeit entstehenden Ausbiegungen und Spannungen von den in Abb. 29—33 dargestellten Kurven besser angenähert werden als die entsprechenden Kurven der Fälle I—IV.

Sogar die Behauptung ist zulässig, daß die beim ausgeführten Kessel an der untersuchten Deckplatte auftretenden Spannungen teilweise noch niedriger sein können als die in den Abb. 30, 31, 32 und 33. Denn die zy-

lindrischen Kesselmäntel sind in Wirklichkeit nicht starr — wie oben angenommen — und entlasten durch ihre Formänderungen die Plattenränder teilweise.

Es wäre sehr wünschenswert, wenn die erhaltenen Ergebnisse mit der Wirklichkeit verglichen werden könnten. Dazu müßten am aufgeheizten Kessel die Ausbiegungen und Spannungen der kreisförmigen Deckplatte gemessen werden. Die Durchführung dieser Messungen dürfte aber mit beträchtlichen meßtechnischen Schwierigkeiten verbunden sein, so daß eine experimentelle Überprüfung der obigen Ausführungen und die Feststellung der Annäherung der Wirklichkeit einstweilen schwer möglich sein dürfte.

SCHRIFTTUM

1. FÖPPL, A.: Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. III. Festigkeitslehre. V. Aufl. 1914. S. 253 ff.
2. BRILL, A.: Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. 1909. S. 48.
3. „Hütte“ 28. Aufl. Bd. I. 1955. S. 842.

ZUSAMMENFASSUNG

Im vorliegenden Aufsatz werden die Spannungen und Formänderungen der kreisringförmigen Deckplatte eines stehenden zylindrischen Kleindampfkessels untersucht. Es wird festgestellt, daß das Auftreten der bei ähnlichen Aufgaben üblichen Randbedingungen (u. zw. Einspannung oder Unterstützung am äußeren oder inneren Rand) nicht wahrscheinlich ist. Zur Vereinfachung der Aufgabe wird bei der weiteren Untersuchung die Starrheit des äußeren und inneren zylindrischen Kesselmantels angenommen. Der gesuchte Formänderungszustand wird dargestellt, indem die Formänderungsarbeit der Kreisringplatte entwickelt, u. zw. als Funktion eines eingeführten Parameters, und deren Minimum nach dem Parameter abgeleitet wird. Die dazu gehörenden Formänderungen und Spannungen werden in Diagrammen aufgezeichnet, und es wird festgestellt, daß die so abgeleiteten Spannungen günstiger, d. h. entschieden niedriger sind als sich diese nach den in ähnlichen Rechnungen üblichen Randbedingungen ergeben. Da zum Zustandekommen einer der üblichen Randbedingungen kein zwingender Grund feststellbar ist, so scheinen die erhaltenen Ergebnisse die Wirklichkeit besser anzunähern, als dies bei auf einfacheren Annahmen aufgebauten Rechnungsergebnissen möglich erscheint.

STRESS AND STRAIN IN THE UPPER CLOSING PLATES OF UPRIGHT CYLINDRICAL STEAM BOILERS

I. THAMM

SUMMARY

The paper deals with the deformation and the state of stresses in the welded, annular closing plates of small upright steam boilers. The author proves that with the given fixation and load of the plate, none of the boundary conditions which appear to be obvious in similar problems (e.g. simple support or fixation on the inner or on the outer periphery) is likely to occur. In order to find a method of calculation which approaches the real deformation and the real state of stresses better, the author uses the simple hypothesis that the inner and the outer shell of the boiler are rigid. Subsequently, the state of strain is calculated by the condition that the deformation work of the plate, with respect to a certain parameter introduced by the author, is minimum.

By comparing the graphs of the stress-strain relations calculated with this method and the graphs belonging to the usual boundary conditions, it becomes clear that the state of

strain corresponding to minimum deformation work is essentially more advantageous than those calculated by other methods, because it leads to lower stresses. In the investigated case there are no compulsory conditions for the realization of the usual, known boundary conditions and thus it is probable that the results obtained in the paper give a closer approach to reality.

CONDITIONS DE TENSIONS ET DE DÉFORMATIONS DE LA PLAQUE DE FERMETURE SUPÉRIEURE DES CHAUDIÈRES VERTICALES CYLINDRIQUES

I. THAMM

RÉSUMÉ

L'étude traite des déformations et états de tensions de la plaque de fermeture en forme de couronne, soudée à la partie supérieure des chaudières verticales cylindriques de faibles dimensions. Quant aux conditions aux limites connues, qui s'imposent à propos de ces problèmes (appui ou encastrement à la circonférence extérieure ou intérieure), l'auteur constate que, vu le mode de fixation et la charge de la plaque, l'apparition de ces conditions n'est pas probable. Pour établir une méthode de calcul approximatif se rapprochant mieux de la déformation et du régime de tension réels, l'étude suppose, à titre d'hypothèse simplificatrice, la rigidité de l'enveloppe de cylindre extérieure et intérieure de la chaudière. L'étude établit en outre le régime de déformation cherché à partir de la condition du travail de déformation minimum de la plaque ronde, suivant un paramètre nouvellement introduit.

Par la représentation sur diagrammes des relations des déformations et tensions ainsi reçues, et par la comparaison avec les courbes appartenant aux conditions aux limites connues, on constate que le régime de déformations correspondant au travail de déformation minimum est bien plus avantageux par rapport à celui calculé par d'autres moyens, à cause des tensions plus faibles qui en résultent. Comme dans le cas examiné, les circonstances n'exigent pas l'existence des conditions aux limites connues, il est probable que les résultats obtenus par l'étude seront plus près de la réalité.

РЕЖИМ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИЙ ВЕРХНЕГО ЗАПОРНОГО ЛИСТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПАРОВЫХ КОТЛОВ

И. ТАМ

РЕЗЮМЕ

Работа рассматривает режим деформаций и напряжений верхнего кольцевидного запорного листа, приваренного к вертикальным малым паровым котлам. О предельных условиях, действующих в случае таких задач (как, например, закладка и опирание по внутреннему или внешнему периметру), устанавливается, что при методе укрепления листа и его нагрузке возникновение упомянутых не вероятно. В интересах получения методики расчета, лучше приближающейся к действительно имеющим место деформации и напряженному состоянию при упрощениях, используется жесткость внутренней и внешней оболочек котла. Далее, искомое деформационное состояние определяется по минимальному условию некоторого введенного параметра работы деформации листа в виде круглой пластинки.

Отображением на графике зависимостей деформации напряжения, получающихся указанным выше образом, и при сравнении с кривыми, соответствующими известным предельным условиям, графике устанавливается, что состояние деформации, соответствующее минимуму работы деформации по сравнению с рассчитанными другим способом имеет меньшую величину, так как дает меньшие напряжения. Так как для удовлетворения известных предельных условий в исследованном случае не имеют место принудительные обстоятельства, то вероятно, что полученные в работе результаты стоят ближе к действительности.

GRENZZUSTAND DER AUF BIEGUNG UND AUF GLEICHZEITIGEN SCHUB BEANSPRUCHTEN STAHLBETONQUERSCHNITTE

Dr. techn. B. GOSCHY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
UNGARISCHES FORSCHUNGSINSTITUT FÜR HOCH- UND TIEFBAU

und

GY. BALÁZS

BUDAPESTER TECHNISCHE UNIVERSITÄT, LEHRSTUHL FÜR BRÜCKENBAU II

[Eingegangen am 25. März 1960]

I. Einleitung

Bei dem heutigen Entwicklungsgrad der Plastizitäts- und Bruchtheorien besteht die Möglichkeit, die Tragfähigkeit der Querschnitte und der Konstruktionen zu bestimmen.

Die modernsten Vorschriften — einschließlich auch die ungarischen Bemessungsnormen — empfehlen die Bemessung der Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitte im Grenz- oder Bruchzustand nach den Prinzipien der Plastizitätstheorie.

Für einfache Beanspruchungen (reine Biegung, reiner Druck, usw.) stehen theoretisch begründete und durch Versuche bestätigte Verfahren den Bauingenieuren zur Verfügung. Die Vorschriften zur Berechnung des Bruchmomentes bei einfacher Biegung unterscheiden sich in der Form des Spannungsbildes der Betondruckzone bzw. in der Bestimmung des Rauminhaltes des gedrückten Spannungsblocks.

Für praktische Anwendung ist die geeignetste die Whitney-Westgard'sche Auffassung, die im Bruchzustand in dem aus Biegung gedrückten Betonanteil eine gleichmäßig verteilte konstante Spannung voraussetzt. Diese Hypothese steht mit den Versuchsergebnissen in guter Übereinstimmung. (Neuerdings wurde dieser Vorschlag auch von CEB — Comité Européenne du Béton — angenommen).

Die Hypothese des viereckigen (konstanten) Spannungsbildes hat sich bei der Untersuchung der zusammengesetzten Beanspruchungen nicht immer als nutzbar bewiesen. So z. B. aus der vorigen Biegespannungsverteilung kann man nicht die Frage der Tragfähigkeit des Querschnitts unter der gleichzeitigen Wirkung eines Momentes und einer Querkraft einwandfrei und kritiklos lösen. Es ist nämlich bekannt, daß die Betondruckzone des auf Biegung beanspruchten Stahlbetonbalkens auch im Bruchzustand Querkraft tragen kann [7, 8, 9, 10]. Eine gleichmäßige Verteilung der Normalspannung in der Druckzone schließt aber, — nach der Cauchy'scher Gleichgewichtsbedin-

gung — die Bildung der Schubspannungen in diesem Querschnittsteil von vornherein aus. Die gleichzeitigen Schubspannungen können zwar bei dem parabolischen Spannungsbild in Betracht gezogen werden, aber diese Ergebnisse werden — wegen der Nichterfüllung der Bruchbedingung durch die größten Schubspannungen — nicht das richtige Bild des Bruchzustandes zeigen.

Der theoretische Zusammenhang zwischen den Normal- und Schubspannungen, sowie das Gleichgewicht der inneren Kräfte ist bei dreieckiger Spannungsverteilung im elastischen Zustand erfüllt, doch ist die Tragfähigkeit noch nicht erschöpft, nicht einmal dann, wenn die Spannung in der Randfaser den Grenz- oder Bruchwert erreicht hat. Die Notwendigkeit, auf das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Beanspruchung Schlüsse zu ziehen, — hat eine Fülle von Theorien und Untersuchungen hervorgerufen. Da die Frage der Berechnung der Schubspannungen nach dem Traglastverfahren offen ist, begnügen sich die meisten Bestimmungen mit dem klassischen Mörsch'schen Schubsicherungsnachweis, in dem der sogenannte plastische Hebelarm in die Rechnung gestellt wird.

In dieser Arbeit versuchen wir, den Grenzzustand (Bruchzustand) des Stahlbetonquerschnitts für Biege- und gleichzeitige Schubbeanspruchung auf Grund der Mohr'schen Bruchtheorie und der Cauchy'schen Gleichgewichtsbedingung rechnerisch zu bestimmen.

2. Voraussetzungen

- 2.1. Die Baustoffe — Beton und Stahl — haben Idealeigenschaften, sie verhalten sich elastisch, idealplastisch (Bild 1).
- 2.2. Die Tragfähigkeit des Querschnitts wird durch das gleichzeitige Versagen des Betons und des Stahles erschöpft.
- 2.3. Die Lage der Nulllinie in dem untersuchten Querschnitt ist unbegrenzt, woraus

$$x_M \leq h \text{ ist.} \quad (1)$$

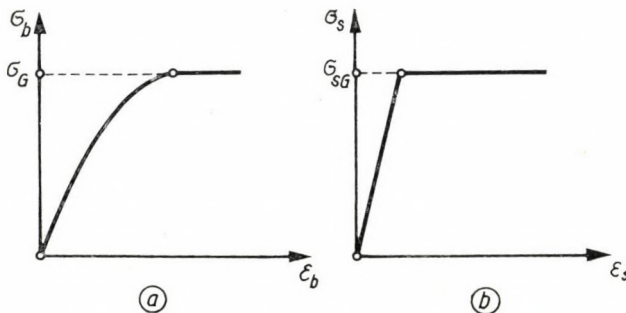


Bild 1. Idealisierte Spannungs-Dehnungslinie a) des Betons, b) des Stahls

2.4. Die Bruchbedingung des Betons wird bei mehrachsiger Beanspruchung aus der Mohr'schen Schubspannungshypothese bestimmt. Zwar ist sie für den Baustoff Beton theoretisch nicht ganz einwandfrei, aber die neuesten amerikanischen und sowjetischen Versuche haben die Mohr'sche Bruchtheorie im Falle zweidimensionaler Spannungsaufgaben als recht pünktlich und bequem bewiesen. (Die Theorie der konstanten Gestaltänderungsenergie von HUBER—MISES—HENCKY gilt für Beton nicht, da die Druck- und Zugfestigkeiten verschieden sind.)

Der Zusammenhang — im Bruchzustande — zwischen Druck- und Schubspannungen kann aus der »reduzierten Spannung« bestimmt werden. Die »reduzierte Spannung« ist eine ideale Spannung, eine Ersatzbruchspannung.

Laut der Mohr'schen Hypothese wird die »reduzierte Spannung« (σ_{red}) mit der Hauptdruck- (σ_1) und Hauptzugspannung (σ_3) folgenderweise ausgedrückt:

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - k \sigma_3 = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (2)$$

oder die Schubspannung

$$\tau = \frac{\sigma_{red}}{1+k} \sqrt{1 - (1-k) \frac{\sigma}{\sigma_{red}} - k \frac{\sigma^2}{\sigma_{red}^2}}. \quad (2a)$$

In Gl. (2) bedeutet k die Verhältniszahl zwischen der Zug- und Druckfestigkeit des Betons:

$$k = \frac{\sigma_{zG}}{\sigma_G} = 0,07 - 0,08.$$

Als Grenzspannungen (σ_G und σ_{zG}) werden die unteren Grenzwerte der Bruchspannungen bezeichnet.

Der Wert der »reduzierten Spannung« kann zwischen

$$\sigma_G \leq \sigma_{red} \leq k \sigma_G = \sigma_{zG}$$

eingeschränkt werden.

Wenn die Umhüllungskurven der Mohr'schen Kreise durch Geraden ersetzt sind, soll die Grenzscherbspannung bei reinem Schub

$$\tau_G = \frac{\sigma_G \cdot \sigma_{zG}}{\sigma_G + \sigma_{zG}} = \frac{k}{1+k} \sigma_G \quad (3)$$

genannt werden.

Wenn nun die Veränderung der Normal- und der »reduzierten« Spannungen als geradelinig angenommen wird

$$\sigma = \sigma_G \frac{y}{y_0},$$

$$\sigma_{\text{rcd}} = k\sigma_G + (1+k)\sigma_G \frac{y}{y_0},$$

kann Gl. (2a) in die Form

$$\tau = \tau_G \sqrt{1 + \frac{1-k}{k} \frac{\sigma}{\sigma_G} - \frac{1}{k} \frac{\sigma^2}{\sigma_G^2}} \quad (4)$$

gebracht werden. Die Gl. (4) drückt die Bruchbedingung zwischen Druck- und Schubspannungen aus.

Der Maximalwert der Schubspannung stimmt mit

$$\tau_{G0} = \frac{\sqrt{k}}{2} \sigma_G$$

überein und wird dann erreicht, wenn die gleichzeitige Normalspannung den Wert

$$\sigma = \frac{1-k}{2} \sigma_G$$

beträgt.

Der Zusammenhang zwischen den Druck- und Schubspannungen im Grenzzustand ist im Bild 2 dargestellt.

2.5. Die Spannungen eines Querschnittsanteils werden auch im plastischen Zustand die Gleichgewichtsbedingung — die durch die Cauchy'sche Differenzialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ausgedrückt sind — erfüllen.

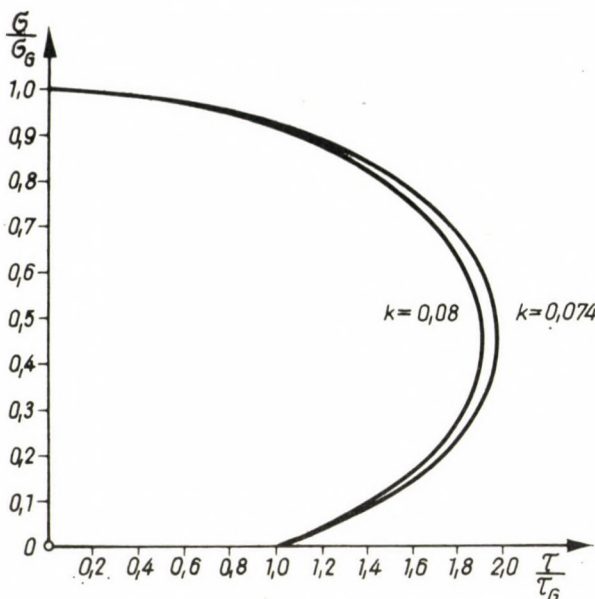


Bild 2. Zusammenhang zwischen Druck- und Schubspannung im Bruchzustand nach der Mohr'schen Bruchhypothese

3. Berechnung der Druckspannungen des auf Schub beanspruchten Stahlbetonquerschnitts im Bruchzustand

Die gleichzeitig auftretenden Bruchdruck- und Bruchschubspannungen sind mit der Mohr'schen Bruchbedingung (Gl. 4) angegeben. Die zunächst zu lösende Frage lautet: wie verteilen sich die Normal- und Schubspannungen entlang des Querschnitts so, daß die Gleichgewichtsbedingung erfüllt werde? Da bei dem einseitigen Druck

$$\sigma_y = 0 \quad (6)$$

ist, kann aus den Cauchy'schen Gln. (5)

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

festgestellt werden — das heißt, die Schubspannungen sind nur von y abhängig (Bild 3) infolgedessen kann die Normalspannung aus der Gl.:

$$\sigma_x = - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} x \quad (8)$$

berechnet werden.

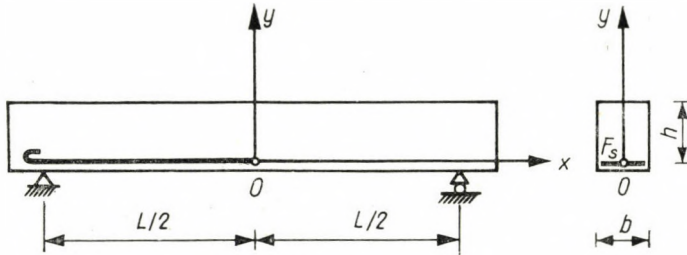


Bild 3. Koordinatensystem in dem untersuchten rechteckigen Stahlbetonbalken

Mit der Abkürzung der Bezeichnungen

$$\sigma_x = \sigma \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = \tau$$

wird die Schublänge (shear-length, shear-span) aus dem Verhältnis des Momentes und der Querkraft bestimmt

$$x = l_x = \frac{M}{Q}$$

Die Verteilung der Normalspannungen entlang der Achse y wird mit

$$\sigma = - \frac{\partial \tau}{\partial y} l_x = - \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y} l_x \quad (8a)$$

angegeben. Aus der Gl. (4) folgt

$$\frac{\partial \tau}{\partial \sigma} = \tau_G \frac{\frac{1-k}{k} \frac{1}{\sigma_G} - \frac{2}{k} \frac{\sigma}{\sigma_G^2}}{2 \sqrt{1 + \frac{1-k}{k} \frac{\sigma}{\sigma_G} - \frac{1}{k} \frac{\sigma^2}{\sigma_G^2}}} \quad (9)$$

und die Differenzialgleichung (8a) kann in die explizite Form

$$dy = \frac{l_x \tau_G}{k \sigma_G^2} \left[\frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \frac{1-k}{k} \frac{\sigma}{\sigma_G} - \frac{1}{k} \frac{\sigma^2}{\sigma_G^2}}} - \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\sigma}{\frac{\sigma}{\sigma_G} \sqrt{1 + \frac{1-k}{k} \frac{\sigma}{\sigma_G} - \frac{1}{k} \frac{\sigma^2}{\sigma_G^2}}} \right] \quad (10)$$

gebracht werden.

Nach der Einführung der neuen Veränderlichen

$$\frac{\sigma}{\sigma_G} = u_1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sigma_G}{\sigma} = u_2$$

wird das Ergebnis der Integration:

$$\begin{aligned} y &= \frac{l_x \tau_G}{k \sigma_G} \left(\int \frac{du_1}{\sqrt{1 + \frac{1-k}{k} u_1 - \frac{1}{k} u_1^2}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1-k}{2} \int \frac{du_2}{\sqrt{u_2^2 + \frac{1-k}{k} u_2 - \frac{1}{k}}} \right) = \\ &= \frac{l_x \tau_G}{k \sigma_G} \left[\sqrt{k} \arcsin \frac{2 \frac{\sigma}{\sigma_G} - (1-k)}{1+k} + \right. \\ &+ \left. \frac{1-k}{2} \operatorname{Ar Cosh} \frac{2k \frac{\sigma_G}{\sigma} + 1 - k}{1+k} + C \right]. \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante kann aus den Bedingungen

$$y = h \quad \text{und} \quad \sigma = \sigma_G$$

bestimmt werden und wird mit

$$C = \frac{h}{l_x} \frac{k \sigma_G}{\tau_G} - \sqrt{k} \frac{\pi}{2}$$

in Rechnung gestellt.

Schließlich wird die Normalspannungsverteilung in der Druckzone aus der Funktion

$$\begin{aligned} \frac{y}{h} &= \frac{l_x}{h} \frac{\tau_G}{k \sigma_G} \left\{ \sqrt{k} \left[\arcsin \frac{2 \frac{\sigma}{\sigma_G} - (1-k)}{1+k} - \frac{\pi}{2} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{1-k}{2} \operatorname{Ar Cosh} \frac{2k \frac{\sigma_G}{\sigma} + 1 - k}{1+k} + \frac{h}{l_x} \frac{k \sigma_G}{\tau_G} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

berechnet. Der analytische Ausdruck des Schubspannungsbildes kann ebenfalls aus der Gl. (12) mit der Substitution

$$\frac{\sigma}{\sigma_G} = \frac{1-k}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4k}{(1-k)^2} \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_G^2}\right)} \right] \quad (13)$$

abgeleitet werden.

Der Wert der Druckspannung in der neutralen Achse des Querschnitts (σ_0) folgt aus der Gl. (12). Mit der Randbedingung

$$\frac{y}{h} = 0$$

ist der Wert σ_0 aus

$$-\sqrt{k} \left[\arcsin \frac{2 \frac{\sigma_0}{\sigma_G} - (1-k)}{1+k} - \frac{\pi}{2} \right] - \frac{1-k}{2} \operatorname{Ar} \operatorname{Cosh} \frac{2k \frac{\sigma_G}{\sigma_0} + 1 - k}{1+k} = \frac{h}{l_x} \frac{k \sigma_G}{\tau_G} = (1+k) \frac{h}{l_x} \quad (14)$$

eindeutig bestimmt.

Da der Grenzübergang

$$\lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} \frac{h}{l_x} = \infty$$

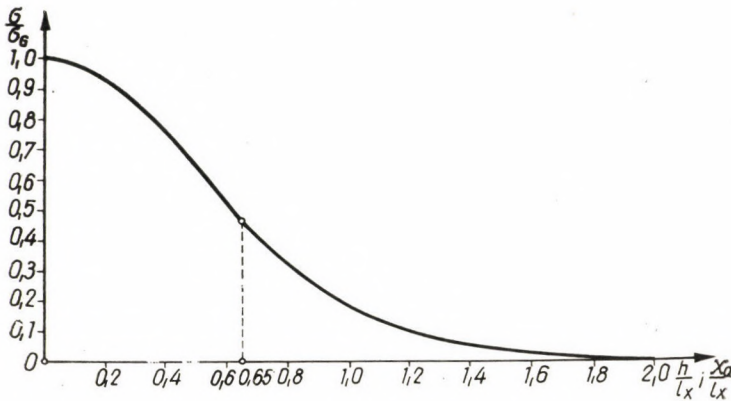


Bild 4/a. Normalspannungsverteilung in der Druckzone eines Stahlbetonquerschnitts im Bruchzustand

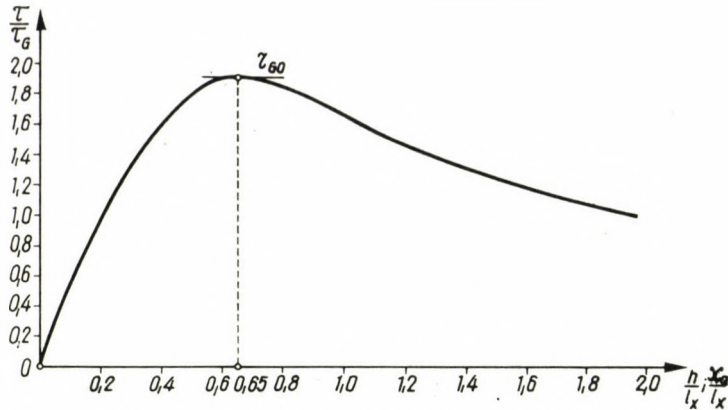


Bild 4/b. Schubspannungsverteilung in der Druckzone eines Stahlbetonquerschnitts im Bruchzustand

liefert, kann dieses Verfahren bis zu den Grenzen der wandartigen Träger (Scheiben) benützt werden.

Die Diagramme der Druck- und Schubspannungsverteilung in Abhängigkeit von $\frac{h}{l_x}$ sind in den Bildern 4/a und 4/b dargestellt.

4. Berechnung des Grenzmomentes und der gleichzeitigen Grenzscherkraft der rechteckigen Stahlbetonquerschnitte

Es wird als Grenzmoment eines Stahlbetonquerschnitts in reiner Biegung das Moment bezeichnet, welches von dem untersuchten Querschnitt getragen werden kann, wenn die Spannung der Zugbewehrung die Stahlgrenzscherkraft (σ_{sG}) erreicht, und in der Betondruckzone eine rechteckige Spannungsverteilung herrscht, wobei die Betonspannung gleich der Grenzdruckspannung des Betons (σ_G) ist.

Aus dem Bild 5 erkennt man den Ausdruck des Grenzmomentes für reine Biegung:

$$M_{G0} = \sigma_G b x_M \left(h - \frac{x_M}{2} \right) = \sigma_{sG} F_s \left(h - \frac{x_M}{2} \right),$$

wo b die Breite, h die Nutzhöhe des Rechteckquerschnitts, x_M den Abstand der Nulllinie vom gedrückten Rand und F_s die Querschnittsfläche der Zugbewehrung bedeuten.

Da die Schubspannung in der Druckzone

$$\tau = 0$$

ist, kann der Querschnitt in diesem Zustand keine Querkraft tragen (Bild 5).

Bei der zusammengesetzten Biege- und Schubbeanspruchung wird in der Druckzone eine Normalspannungsverteilung nach Bild 4/a und eine Schubspannungsverteilung nach Bild 4/b vorausgesetzt.

Die Spannungswerte in der Nulllinie sind aus der Gl. (14) zu bestimmen oder aus den Bildern 4/a und 4/b abzulesen.

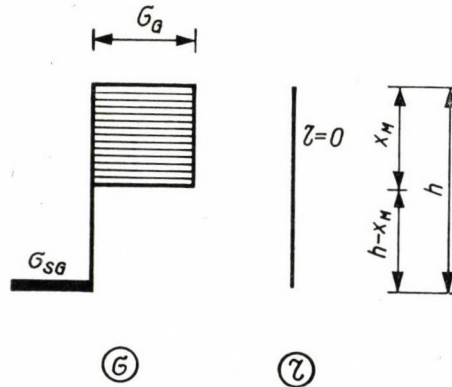


Bild 5. Spannungsbild aus reiner Biegung eines Stahlbetonquerschnitts im Bruchzustand

Der Abstand der Nulllinie vom gedrückten Rand im Falle gleichzeitiger Schub- und Biegebeanspruchungen befindet sich im Bereich

$$x_M < x_Q \leq h.$$

Die Grenzquerkraft des Querschnitts bzw. der lotrechten Bruchfläche kann aus dem Schubspannungsbild durch Integration berechnet werden:

$$Q_G = \int_0^{x_Q} \tau dF = \tau_G b \int_0^{x_Q} \sqrt{1 + \frac{1-k}{k} \frac{\sigma}{\sigma_G} - \frac{1}{k} \frac{\sigma^2}{\sigma_G^2}} dy. \quad (16)$$

Durch Vertauschen der Grenzen 0 und x_Q des Integrals und Verwendung der Gl. (10) kommt man zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned} Q_G &= \frac{\tau_G^2}{k\sigma_G^2} b l_x \int_{\sigma_0}^{\sigma_G} \left(1 - \frac{1-k}{2} \frac{\sigma_G}{\sigma} \right) d\sigma = \\ &= Q_{G0} \frac{1}{1+k} \frac{l_x}{x_Q} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_G} - \frac{1-k}{2} \ln \frac{\sigma_G}{\sigma_0} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

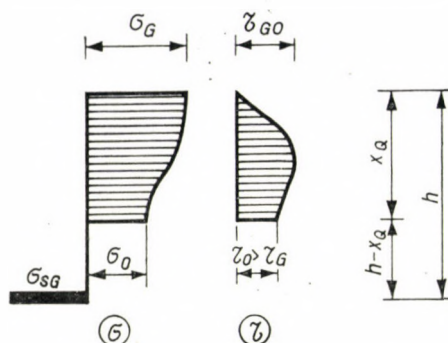


Bild 6. Spannungsbild aus gleichzeitiger Biegung und Schub eines Stahlbetonquerschnitts im Bruchzustand

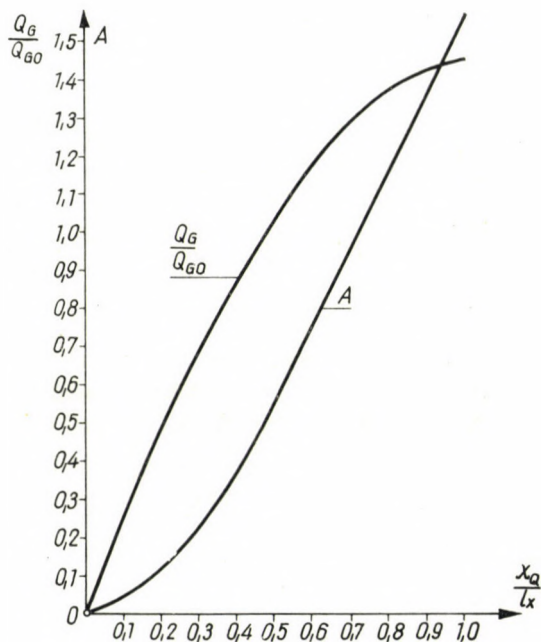


Bild 7. Zusammenhang zwischen der Grenzscherkraft und Schublänge

Der Ausdruck

$$Q_{G0} = \tau_G b x_G \tag{18}$$

bezeichnet die Grenzscherkraft bei reinem Querkraftsangriff.

Die Werte der Grenzscherkraft sind als Funktion von $\frac{x_G}{l_x}$ in dem Bild 7 dargestellt.

Für die vereinfachte Gleichung der Grenzquerkraft erhält man

$$Q_G = \frac{\tau_G}{1+k} b l_x A. \quad (19)$$

Hierin ist

$$A = \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_G} + \frac{1-k}{2} \ln \frac{\sigma_G}{\sigma_0} \right).$$

Der mit der Querkraft Q_G belastete Querschnitt kann das Grenzmoment

$$M_G = \sigma_{sG} F_s \left(h - \frac{\beta x_Q}{2} \right) \quad (20)$$

tragen, wobei $\beta \frac{x_Q}{2}$ den Schwerpunkt des gedrückten Spannungsblocks bestimmt. Die Verhältniszahl der Grenzmomente bei zusammengesetzter und bei reiner Biegung beträgt

$$\nu = \frac{M_G}{M_{G0}} = \frac{1 - \frac{\beta x_G}{2h}}{1 - \frac{x_M}{2h}} = 1 - \frac{\beta x_Q - x_M}{2h - x_M}.$$

Der gegenseitige Einfluß des Moments und der Querkraft im Bruchzustand kann aus den Gln. [20], [17] und [14] in expliziter Form ausgedrückt werden.

Die Form der Bruchhüllkurve bei gleichzeitig wirkendem Moment und Querkraft ist im Bild 8 angegeben. Die Momenten- und Querkraftwerte, die innerhalb dieser Kurve liegen, verursachen keinen Bruch.

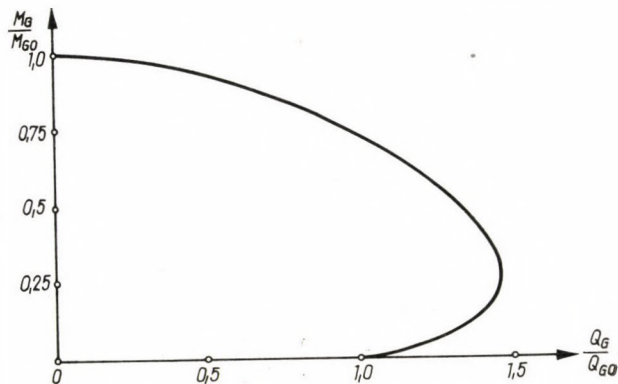


Bild 8. Zusammenhang zwischen Moment und Querkraft in der lotrechten Bruchebene

Aus den Ergebnissen dieser Arbeit kann der Sicherheitsnachweis in der lotrechten Bruchebene eines auf Biegung und gleichzeitig auf Schub beanspruchten Stahlbetonquerschnitts in folgenden Schritten durchgeführt werden:

a) Bestimmung der Schublänge aus dem Verhältnis des maßgebenden äußeren Moments und der Querkraft nach:

$$l_x = \frac{M_M}{Q_M}.$$

(Nach den ungarischen Bemessungsvorschriften wird als maßgebend die Kraft oder das Moment bezeichnet, das durch die — um die Stoßzahl und den Sicherheitsbeiwert vergrößerte — äußere Belastung zustandekommt.)

b) Berechnung des Wertes

$$A = \frac{(1 + K) Q_M}{\tau_G b l_x}.$$

c) Feststellung aus der Kurve nach dem Bild 7 des zu A gehörenden Wertes

$$\frac{x_Q}{l_x} = B.$$

Die Lage der Nulllinie ist durch

$$x_Q = B l_x \leq h$$

gegeben (wenn $x_Q > h$ ist, müssen die Querkräfte durch Schubbewehrung aufgehoben werden).

d) Bestimmung des Grenzmoments im Besitz des Nulllinienabstandes x_Q und Nachprüfung der Bedingung:

$$M_G = \sigma_{sG} F_S \left(h - \frac{\beta x_Q}{2} \right) \leq M_M.$$

SCHRIFTTUM

1. PRAGER, W.: Probleme der Plastizitätstheorie. V. Basel und Stuttgart 1955. Birkhäuser.
2. FREUDENTHAL, A.: The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures. New York, London 1950. J. Wiley und S.
3. KELDYSCH, M.: Berechnung von Baukonstruktionen nach den Grenzbeanspruchungen. VEB. Berlin 1953.
4. KLÖPPEL, K. und YAMADA, M.: Fließpolyeder des Rechtecks und I Querschnittes unter der Wirkung von Biegemoment, Normalkraft und Querkraft. Der Stahlbau, Heft 11, 1958.
5. KANI, G.: Über das Wesen der sogenannten Schubsicherung. Der Bauingenieur, Heft 10, 1958.

6. WHITNEY, C. S.: Guide of Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete, A.C.I. Journal. Nov. 1956.
7. GYENGŐ, T.: Berechnung der Schubbewehrung auf Grund der Plastizitätslehre. Bauplanung und Bautechnik, Heft 12. 1957.
8. GOSCHY, B. und BALÁZS, G.: Über die Tragfähigkeit von Stahlbeton-Verbundkonstruktionen. Bauplanung-Bautechnik, Heft 7. 1958.
9. GURALNICK, S. A.: Shear Strength of Reinforced Concrete Beams. Proceedings of the A.S.C. E. Vol. 85. No. ST. 6. 1. 1959.
10. MENYHÁRD, J.: Über den Schrägbruch des auf Schub und Biegung beanspruchten Stahlbetonbalkens. Vortrag am Kongress der Polnischen Akademie, 1955. Krynica. S. 443.
11. DRUCKER, D. C.: Effect of Shear on Plastic Bending of Beams. Journal of Applied Mechanics. 12. 1956.

ZUSAMMENFASSUNG

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der gegenseitige Einfluß des Momentes und der Querkraft auf den lotrechten Bruch der Stahlbetonquerschnitte untersucht.

Dieses Rechenverfahren unterscheidet sich von den bisherigen Forschungen in einer strengeren Analyse der Bruch- und Gleichgewichtsbedingung der Betondruckzone.

Die Mohr'sche Bruchhypothese und die Erfüllung der Cauchy'schen Gleichungen in dem plastischen Zustand vorausgesetzt, kann der Abminderungsfaktor des Bruchmomentes bei zusammengesetzter Biege- und Schubbeanspruchung bestimmt werden.

Da die Ergebnisse auf rein theoretischer Grundlage erhalten wurden, wäre es wünschenswert, die zur Bemessung benötigten Werte durch Versuche nachzuprüfen und dieselben in Tabellen oder Diagrammen aufzuarbeiten.

ULTIMATE STRENGTH DESIGN OF REINFORCED CONCRETE SECTIONS UNDER COMBINED BENDING AND SHEAR

B. GOSCHY and GY. BALÁZS

SUMMARY

In this paper the moment-shear interaction in the rupture of reinforced concrete sections is analysed.

The suggested method differs from the majority of these kinds of research by examining the failure and equilibrium conditions of the compression zone.

Assuming the validity of Mohr's failure theory for concrete and the satisfaction of equilibrium condition imposed by Cauchy's equations in case of combined bending and shear, the shear deterioration factor can be deduced.

As these results have a purely theoretical basis, it would be desirable to make an experimental control and prepare tables and graphs for practical purposes.

LA RUPTURE DES SECTIONS DE BÉTON ARMÉ PAR FLEXION ET PAR EFFORT TRANCHANT

B. GOSCHY et GY. BALÁZS

RÉSUMÉ

Dans le cadre de cette étude, nous avons analysé l'influence réciproque du moment et de l'effort tranchant sur la rupture transversale des sections de béton armé.

Cette méthode de calcul diffère des méthodes analogues par une plus stricte recherche des conditions de rupture et d'équilibre.

En supposant la validité de l'hypothèse de rupture de Mohr et la satisfaction des conditions d'équilibre imposées en état plastique par les équations de Cauchy, on peut déduire le coefficient de détérioration du moment de la rupture en cas de flexion composée.

Les résultats avant une base purement théorique, il serait désirable de faire le contrôle expérimental et d'encadrer les valeurs nécessaires pour le dimensionnement en abaques ou en tableaux.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА ЧЕТЫРЕХ-УГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ, РАБОТАЮЩЕГО ОДНОВРЕМЕННО НА ИЗГИБ И СРЕЗ

Б. ГОШИ и Д. БАЛАЖ

РЕЗЮМЕ

В данной работе на основе принципов математической теории пластичности определена зависимость между моментом и усилием среза для предельного состояния.

Результаты получены на основе того предположения, что сжатый участок исследованного сечения железобетона согласно теории излома Мора находится в предельном состоянии и внутренние силы находятся в равновесии, следовательно, напряжения удовлетворяют уравнению равновесия Коши.

Выведенные зависимости получены теоретическим путем; для их подтверждения мы считаем необходимым выполнить экспериментальные опыты.

Для облегчения практических вычислений желательно объединить функции в виде таблицы.

RELATION OF CUTTING TEMPERATURE TO TOOL LIFE IN TURNING OF ALUMINIUM ALLOYS

Á. KARDOS

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES
DEPARTMENT OF MACHINE PRODUCTION TECHNOLOGY, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received April 15, 1960]

Relation of heat generated in metal cutting to other cutting factors is one of the most investigated problems of the last three decades. Even to the present day it is impossible to give accurate answers to a great many of the questions which arise. Due to this, many conflicting articles on this subject were published in the literature. The applicability of measuring the cutting temperature to machinability investigations is also one of the complex problems not definitely answered yet.

Recently the investigations on cutting heat follow two principal directions. On the one hand the investigators wanted to explain the temperature produced in metal cutting by physical investigation of the processes, and the applicability of the measuring methods were put under investigation, on the other.

Some workers investigated the problem of cutting heat theoretically [1, 2, 3] and their results were partly checked experimentally, too. It has been stated that mathematical relations of the metal cutting temperature to other factors could be established. Other workers reached at a similar result by investigating principally the practical (experimental) side of the problem [4, 5, 6]. In the literature on machinability of metals it is recommended by a number of workers to use cutting temperature measurements in machinability investigations [7, 8, 9].

Contrary to the above positive appreciation in investigation of the method of cutting temperature measurement several researchers arrived at the result that it was impossible to determine the temperature actually generated in metal cutting by the generally used GOTTWEIN or REICHEL [10, 11] methods. *E.g.* in steel cutting FELDSTEJN [12] and PANKINA [13] stated that this method was inapplicable for the determination of cutting temperature, also of machinability and cutting variables resp. The aim of these investigations was to decide about the possibility of establishing a definite relation between the temperature measured by the two chisel thermocouple method and, cutting variables when turning an aluminium alloy.

The characteristics of the extruded aluminium alloy investigated are as follows: chemical composition: 2,8% Cu, 0,89% Zn, 0,45% Fe, 0,44% Si, rem. Al; hardness HB = 61 kg/mm², tensile strength $\sigma_B = 23,8$ kg/mm², relative elongation $\delta_{10} = 13\%$. The basic idea for the accomplishment of the experiments can be summarized as follows.

The purpose was to determine the relation

$$v = \frac{C}{e^y \cdot f^x}$$

by measuring the cutting temperature. The experiments were carried out partly by the principles laid down by REICHEL [14], and partly by novel principles.

The first step to determine the wanted relation was to find the relation to cutting temperature — cutting variables. This relation can be written as

$$\Theta = C_h \cdot e^p \cdot f^r \cdot v^s.$$

(It is to be noted that in the calculation, instead of cutting temperature the corresponding thermovoltage was used. This substitution only effects the value of the constant C_h .)

The above relation was determined by using the functional correlations of

$$\Theta = C_v \cdot v^s$$

$$\Theta = C_e \cdot e^p$$

$$\Theta = C_f \cdot f^r$$

Beside the three relations obtained by measuring the cutting temperature, we have also used the relation of $v = \frac{C_v}{T^m}$ obtained in a tool life experiment [15] made on the material under investigation.

From the four relations already available the wanted relation can be determined. From the above relation

$$v = \frac{C}{e^{\frac{p}{s}} \cdot f^{\frac{r}{s}}}$$

will be given.

The experiments were made on the Thermoduo equipment for measuring cutting temperature. For our experiments a new pair of turning tools were made according to the cutting conditions of the investigated aluminium alloy. The tools were made of metal carbide *A* (78% WC, 16% TiC, 6% Co) and of high-speed steel *G 370* (0,7% C, 4% Cr, 17% W, 0,8% Mo, 1% V); their cross-sectional area 15×15 mm², length 110 mm. Shape characteristics of their cutting section: $\gamma = 30^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $\kappa = 60^\circ$, $\tau = 30^\circ$, $r = 0,5$ mm.

For the determination of the measurable cutting temperature the device with the new tools had to be calibrated. The calibration is a difficult and not perfectly solved problem of the two-chisel temperature measuring method [16, 17]. The evaluation process of the experiments simplified the calibration problem. Namely, the experiments did not aim at an accurate determination of the cutting temperature, only the rules of parameter variations were sought. For this end during the experiments and evaluations, instead of the cutting temperature the thermovoltage was used for estimations. This solution in this case is permissible and reasonable, as between cutting temperature and thermovoltage a functional relation exists according to the calibration curve of the device, so the estimating with values of thermovoltage does not change the character of the functional relation cutting temperature — cutting variables. In addition, this solution eliminates the source of errors in converting thermovoltage into temperature. Consequently, the tools had to be calibrated for evaluation of applicability of the tool pair to measurements, and for obtaining temperature data of orientation.

For the calibration of tools a device was constructed. Its diagram is shown in Fig. 1.

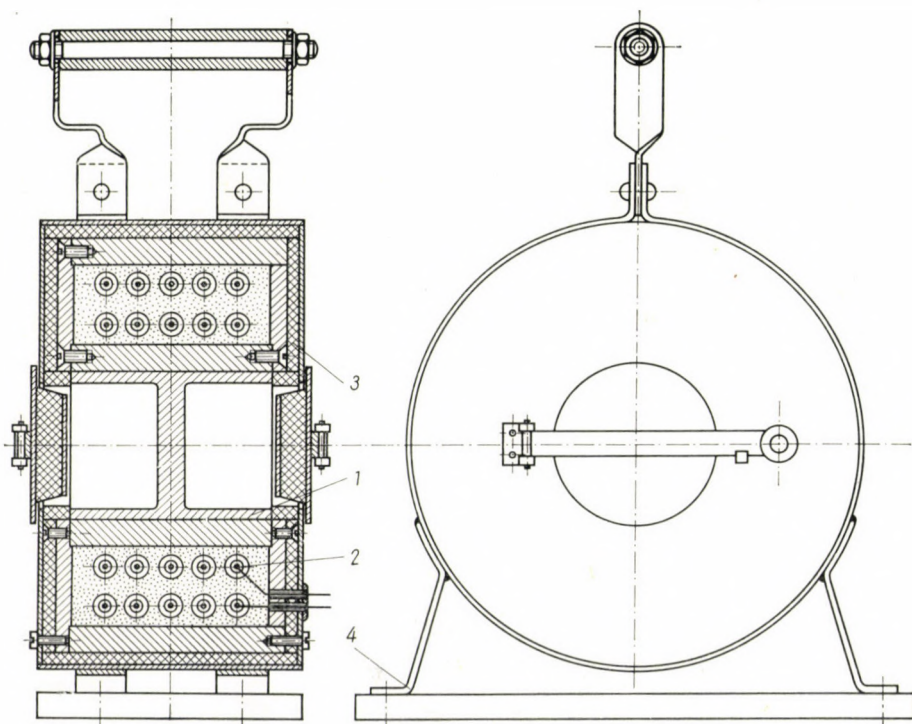


Fig. 1

In reality the device is an electrical furnace, in the muffle 1 of which the calibration of tools is carried out. The muffle is made of inoxidizable material. Around the muffle the heating wire 2 is wound and by its controlled heating the required temperature can be set. Heat radiation to the surroundings is prevented by the isolation case 3. When measuring the device can be set up on legs 4.

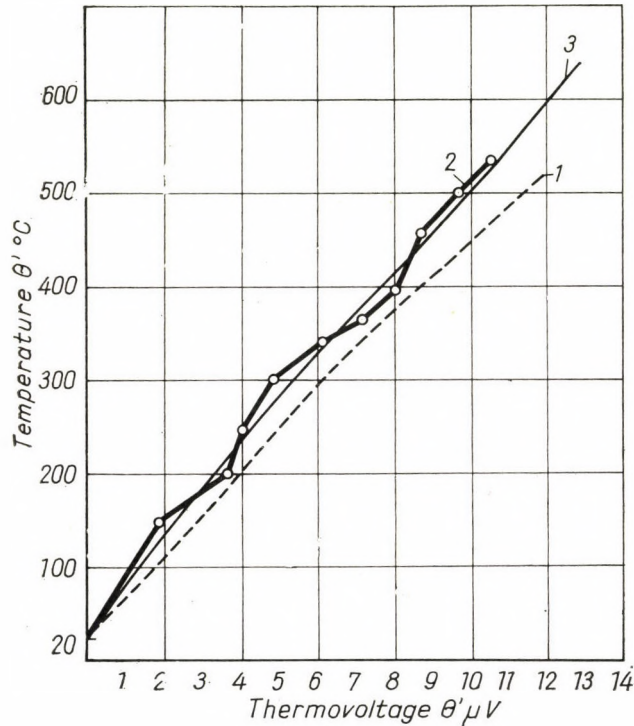


Fig. 2

Calibration of the tools is made on the center wall of the case, which is perpendicular to its axis. The temperature of the wall can be measured by a contact thermometer. The noses of both tools to be calibrated are brought into contact from both sides of the device to the walls of known temperature. A millivoltmeter is connected to the other ends of the chisels. After a few seconds elapsed from contacting the tools with the calibration walls, the millivoltmeter gives a definite reading. By these temperature readings — thermovoltage values can be determined for a given pair of tools. By repeated operations made at various temperatures the required relation temperature vs. thermovoltage can be established.

The curve 1 on Fig. 2 shows the results of the calibration measurements made on the experimental tool pair. For checking the accuracy of the

calibration method a calibration was made by the original tools of the Thermo-
duo. The measuring results are shown on curve 2 of Fig. 2 and the original
calibration curve of the Thermo-
duo [18] on curve 3. It can be seen that no significant difference exists between the points of the original and experimental
curves. From Fig. 2 it can also be seen that the new pair of tools gives a thermo-
voltage greater than that given by the Thermo-
duo tools at the same tem-
perature.

For the cutting experiments the experimental material was periodically
recessed according to the two tool temperature measuring method. The experi-

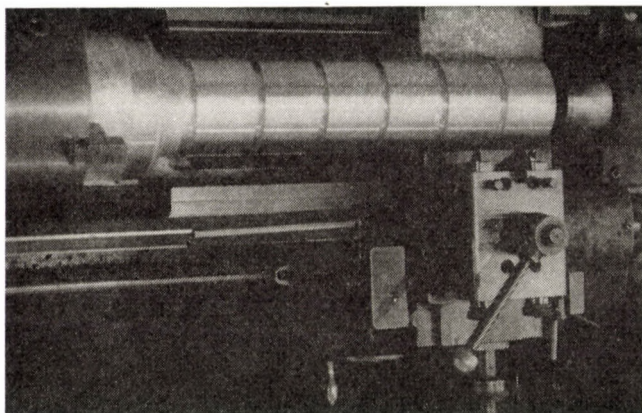


Fig. 3

mental parts had an initial diameter of 200 mm, and length of 750 mm. Fig.
3 shows the part prepared for experiments and also the experimental set-up.

Measuring ranges in the experiments were as follows: $f = 1-4$ mm,
 $e = 0,1-0,58$ mm/rev., $v = 150-550$ m/min. At least two measurements
were made with each measuring parameter.

A part of the measuring results is shown on Figs. 4, 5, 6. When notating
the results along the ordinate of the diagrams the thermovoltage was plotted,
and along their abscissa, the set in variable cutting parameter. The measuring
points shown on diagrams are averages of several measurements.

Fig. 4 shows the relation of thermovoltage to cutting speed when turning
a cutting depth of $f = 2, 3$ and 4 mm resp. Fig. 5 illustrates the effect of feed
variation on thermovoltage when the cutting speed is $v = 200$ and 400 m/min
resp. Fig. 6 shows the relation of thermovoltage to cutting depth when the
cutting speed is $v = 200$ and 400 m/min resp.

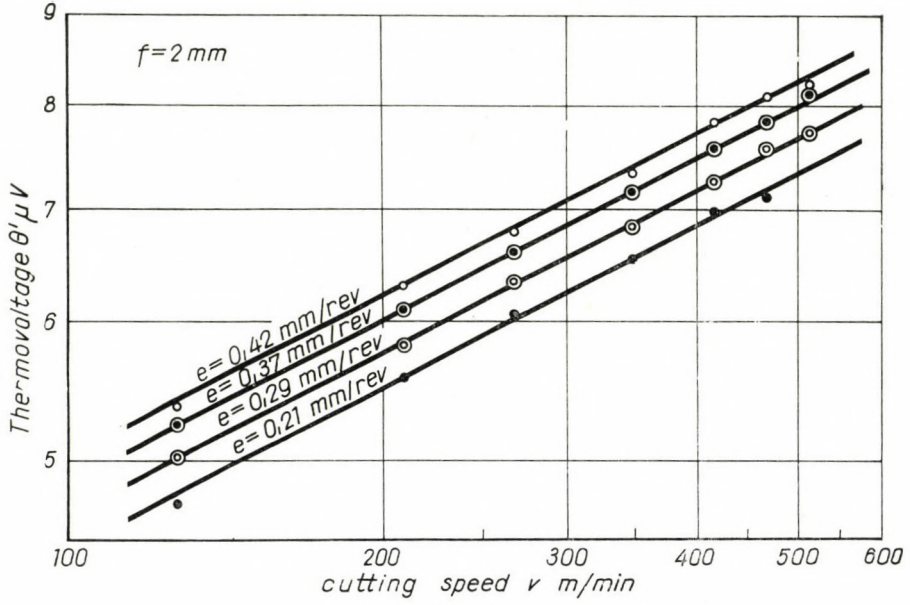


Fig. 4a

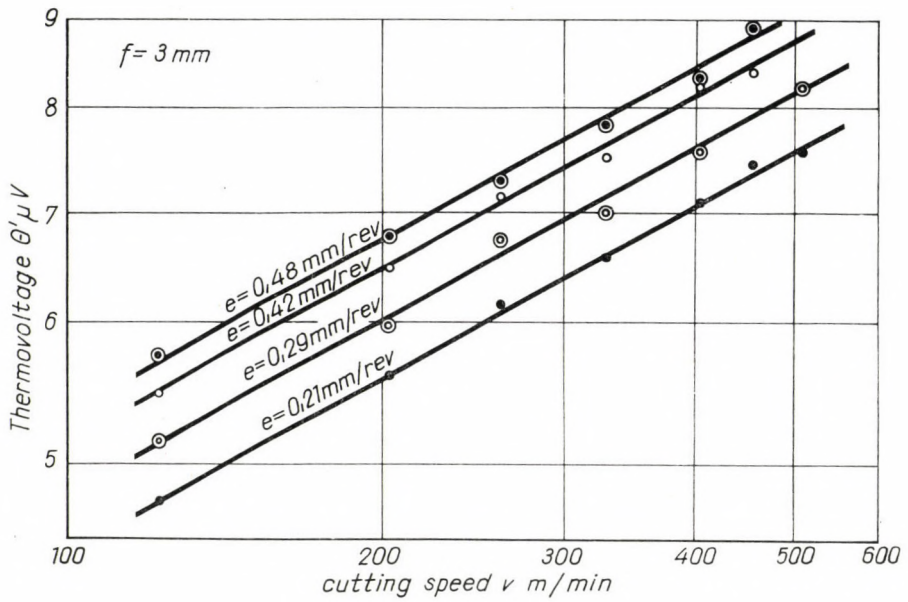


Fig. 4b

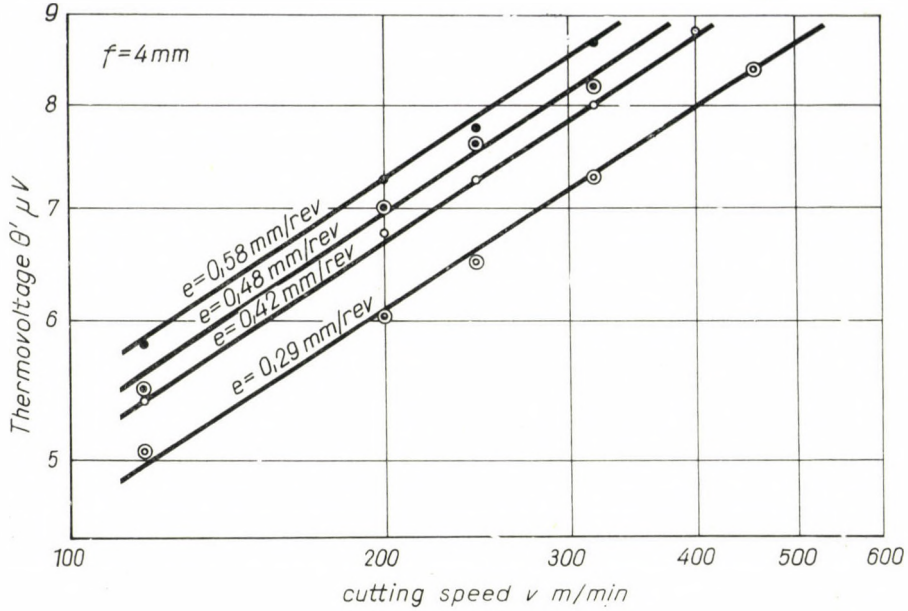


Fig. 4c

Evaluation of the measuring results was made graphically. According to the evaluation

$$\Theta = C_r \cdot v^{0,33}$$

$$\Theta = C_e \cdot e^{0,20}$$

$$\Theta = C_f \cdot f^{0,10}$$

From the above three relations the constants in the equation $v = \frac{C}{e^y \cdot f^x}$ can be determined. According to the above relations

$$y = \frac{P}{s} = 0,60 \quad \text{and} \quad x = \frac{r}{s} = 0,30 .$$

Thus:

$$v = \frac{C}{e^{0,60} \cdot f^{0,30}} .$$

The value of the constant C can be determined by taking into consideration the results of the said tool life measuring test and by extrapolating the results of the given experiments. According to the tool-life tests [15]: $v = \frac{C_v}{T^{0,30}}$. From this (in case of $T = 1$): $C = 660$ and the generalized form of

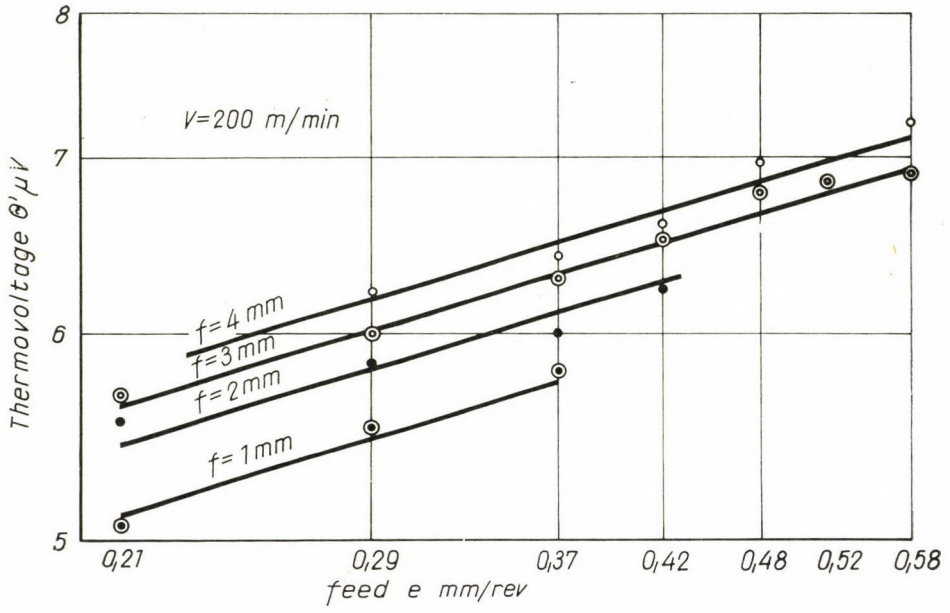


Fig. 5a

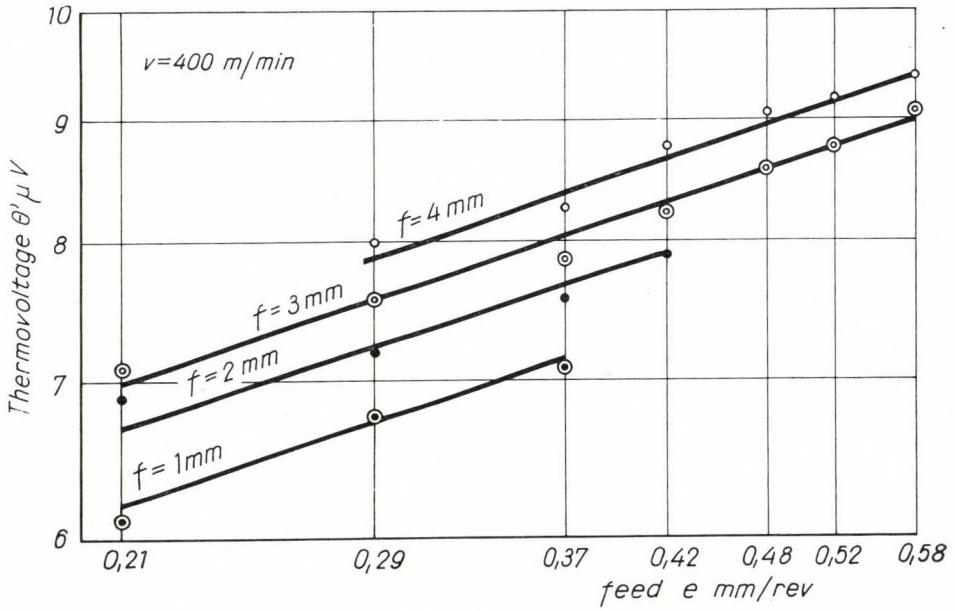


Fig. 5b

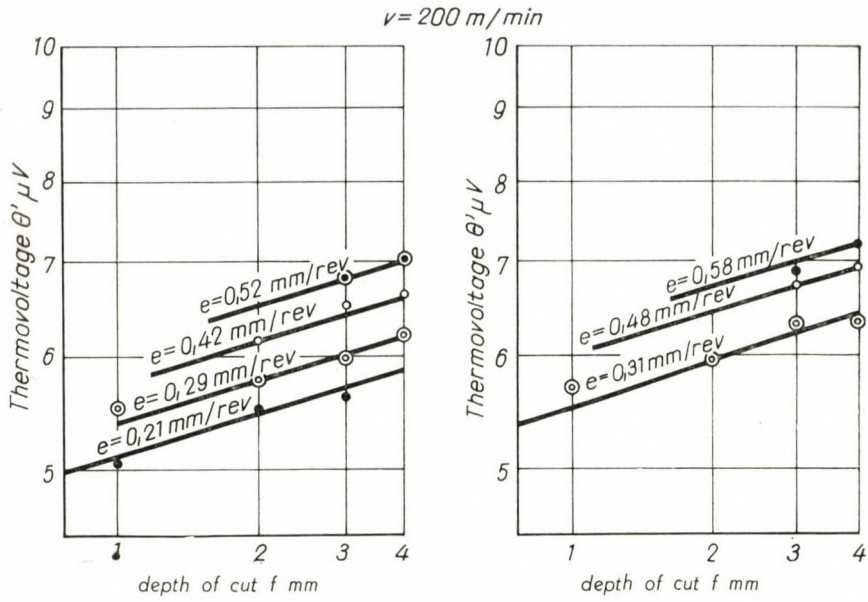


Fig. 6a

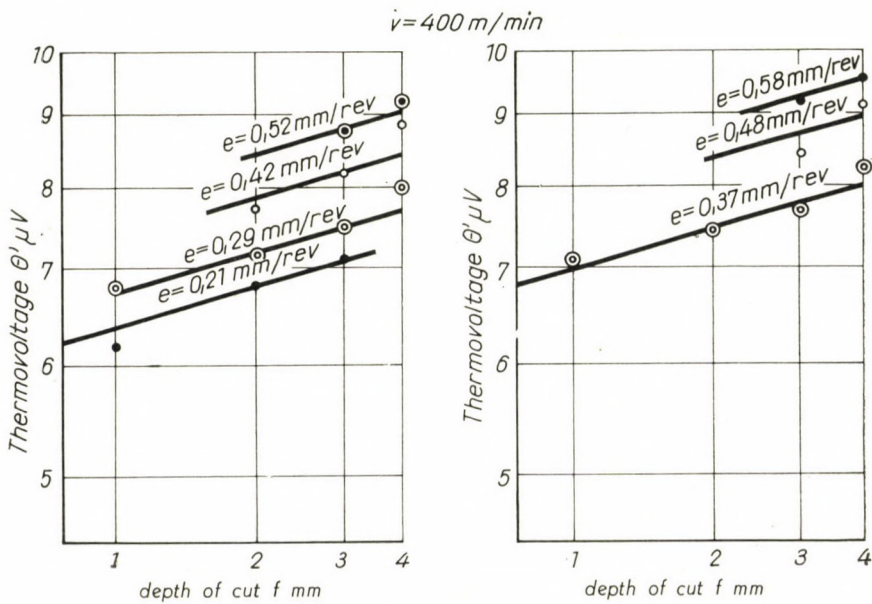


Fig. 6b

the above equation are

$$v = \frac{660}{e^{0,60} \cdot f^{0,30} \cdot T^{0,30}} .$$

For comparison the relation obtained in the tool-life tests mentioned above is:

$$v = \frac{741}{e^{0,52} \cdot f^{0,20} \cdot T^{0,30}} .$$

Comparing the two equations shows that in experimental conditions the method for measuring the cutting temperature is not applicable for the substitution of the accurate tool-life tests.

When estimating with equation obtained as a result of the cutting temperature measurements instead of that afforded by conventional tool-life tests a difference in the cutting speed value of 19 per cent might arise in the experimental range as given above. During the cutting operation the setting-in of the speeds estimated by both ways can result in a difference of 78 per cent in the tool-life. Nevertheless, base of the method for measuring the cutting temperature and the fact that its demand for materials and time is much less than that of the conventional tool life test, raise the question of its applicability for measurements of orientation character.

Equation for estimating the cutting temperature can be determined by using the experimental results, but error from the conversion of thermovoltage to temperature will be included:

$$\Theta = 64,7 \cdot v^{0,33} \cdot e^{0,20} \cdot f^{0,10} .$$

To be able to compare the temperatures obtained in the cutting of steel and aluminium alloy, we have to determine these values of temperature in case of a chip cross-sectional area of $q = 2 \times 0,5 \text{ mm}^2$ and a cutting speed of $v = 150 \text{ m/min}$ when turning the aluminium alloy under investigation and those of the Soviet Steel marked 40 XH, respectively. For the latter material the estimation was made with Danieljan's equation [5].

In the aluminium alloy under investigation:

$$\Theta = 64,7 \cdot 150^{0,33} \cdot 0,5^{0,20} \cdot 2^{0,10} = 317^\circ\text{C} .$$

In the steel 40 XH :

$$\Theta_{st} = 148,8 \cdot 150^{0,4} \cdot 0,5^{0,24} \cdot 2^{0,10} = 1005^\circ\text{C} .$$

From the estimation data it can be seen that in case of the estimation parameters the cutting of the aluminium alloy can be made with a tool of tool-steel, while the cutting of steel is only possible with a carbide tool.

REFERENCES

1. Борисов, Б.: О температуре и температурном поле резца. Вестник Машиностроения, 1952. Ян. № 1. 63. стр.
(BORISOW, B.: On temperature and thermal field of the lathe tool.)
2. Левицкий, М.: Температура при резании металлов. Журнал Технической Физики, 1952. Апр. 648. стр.
(LEWITSKIJ, M.: Temperature in cutting of metals.)
3. TRIGGER, N.—CHAO, N.—ZILYSTRA, N.: Thermophysical aspects of metal cutting. Trans. ASME, Aug. 1952. p. 1039.
4. SCHALLBROCH, H.—SCHAUMANN, H.: Die Schnitttemperatur beim Drehvorgang und ihre Anwendung als Zerspanbarkeitskennziffer. Zeitschr. VDI, 1937. p. 325.
5. Даниелян, А. М.: Резание металлов и инструмент. Москва, Машгиз, 1950.
(DANIELJAN, A. M.: Metal cutting and tool.)
6. Даниелян, А. М.: Теплота и износ инструментов в процессе резания металлов. Москва, Машгиз, 1954.
(DANIELJAN, A. M.: Temperature and wear of tools in the metal cutting process.)
7. PETERS, O.: Die Schnitttemperatur als Kenngröße der Zerspanbarkeit. Werkstatt u. Betrieb, 1951. p. 360.
8. LOCATI, L.—NATALE, T.: Alcuni particolari aspetti della lavorabilità degli acciai. Metallurgia Italiana, May 1951. p. 164.
9. Машиностроение. Энциклопедический Справочник. 3 том. 280 стр. Москва, 1947.
(Футоржан, С. Б.: Пробы на механическую обрабатываемость.)
(FUTORJAN, S. B.: Machinability tests.)
10. Леонов, Н. И.: Об измерении температур при резании металлов. Вестник Машиностроения, 1951. Февр. 33. стр.
(LEONOW, N. I.: On temperature measurement in metal cutting.)
11. VICKEL, E.—WIDMER, M.: Die Temperaturen an der Werkzeugschneide. Industrielle Organisation, Aug. 1951. p. 238.
12. Фелдштейн, Е. И.: Методы определения обрабатываемости металлов. Москва, Машгиз, 1946.
(FELDSHTEIN, E. I.: Methods for determination of machinability of metals.)
13. Панкина, Е. А.: Метод двух резцов и его применение для исследования процессов резания. Станки и Инструмент, 1954. Окт. 12. стр.
(PANKINA, E. A.: The two-tool method and its application to cutting process investigation.)
14. REICHEL, W.: Standzeitgeschwindigkeits-Ermittlung von Werkzeuge und Bearbeitbarkeitsprüfung von Werkstoffen. Maschinenbau, 1936. p. 187.
15. KARDOS, A.: Alumíniumötvözet megmunkálhatósági vizsgálata. Budapest, 1956. Kézirat.
(Machinability test of aluminium alloy.)
16. GOTTWEIN, K.: Die Temperatur an der Meisselschneide beim Schruppdrehen von Metallen. Maschinenbau, 1925. pp. 1129 und 1926.
17. LANG, M.: Prüfen der Zerspanbarkeit durch Messung der Schnitttemperatur. München, Hanser Verl. 1949.
18. Anleitung zum Gebrauch des Thermoduo Zweistahl-Supportes. Otto Wolpert, Ludwigs-hafen, w. y.

SUMMARY

The paper deals with the analysis of the two-chisel cutting temperature measurement method as a shortening of the tool-life in turning an aluminium alloy. Method for calibration of tools of the two-tool temperature measuring equipment is given. Results of experiments for determining the relation of cutting temperature to machining variables are described. Comparison of results of tool-life tests and evaluation of applicability of cutting temperature measuring method to machinability tests.

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN SCHNITTEMperatur UND STANDZEIT BEIM DREHEN VON ALUMINIUMLEGIERUNGEN

Á. KARDOS

ZUSAMMENFASSUNG

Im Aufsatz wird ein Kurzverfahren zur Bestimmung der Standzeit beim Drehen von Aluminiumlegierungen durch Schnitttemperaturmessung mit einem Zweistahlsupport erörtert. Es wird eine Methode zur Eichung der Stähle des Zweistahlsupportes beschrieben. Es werden die Ergebnisse der Versuche mitgeteilt, die zur Ermittlung des Zusammenhanges zwischen der Schnitttemperatur und den Schnittbedingungen durchgeführt worden sind. Es werden die Standzeitprüfungsergebnisse mit den Schnitttemperaturmessungen verglichen, und es wird die Anwendbarkeit der Methode der Schnitttemperaturmessung bei den Zerspanbarkeitsversuchen ausgewertet.

RAPPORT ENTRE LA TEMPÉRATURE DE COUPE ET LA DURÉE DU TRANCHANT DE L'OUTIL AU TOURNAGE DES ALLIAGES D'ALUMINIUM

Á. KARDOS

RÉSUMÉ

L'étude examine le procédé de mesure de la température de coupe à deux outils, considéré comme un procédé raccourci de mesure de la durée du tranchant de l'outil, en cas de tournage d'un alliage d'aluminium. L'auteur décrit une méthode pour l'étalonnage des outils du dispositif de mesure de la température. Il donne les résultats des recherches entreprises pour déterminer les rapports entre la température et les caractéristiques de la coupe, établit une comparaison avec les résultats des mesures de la durée, et évalue l'applicabilité de la méthode de mesure des températures de coupe aux examens de l'usinabilité de la matière.

ЗАВИСИМОСТЬ ТЕМПЕРАТУРЫ РЕЗАНИЯ ОТ СТОЙКОСТИ РЕЗЦА ПРИ ТОКАРНОЙ ОБРАБОТКЕ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ

А. КАРДОШ

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается метод измерения температуры при резании. Измерение осуществляется при помощи двух резцов. Метод применяется для скоростного определения стойкости при обработке алюминиевых сплавов. Метод калибровки резцов устройства измерения температуры при помощи двух резцов. Результаты опытов для определения температурной зависимости режима резания. Сопоставление данных результатов с результатами измерения стойкости и оценка применимости метода измерения температуры резания для исследования обрабатываемости.

ENLARGEMENT ON THE EYTELWEIN—GRASHOF THESIS

B. SZÓKE

[Manuscript received April 27, 1960]

The expression

$$T_1 = T_0 e^{\mu\varphi} = T_0 \varepsilon$$

of the EYTELWEIN (1807)—GRASHOF (1883) thesis in engineering serves as the theoretic basis for the calculation of hoist pulleys, strap brakes, and first of all, for the construction of belt drive; in this formula

T_0 useful tension on the slack side,

T_1 useful tension on the tight side,

μ coefficient of friction of a belt on the pulley,

φ central angle of contact embraced by the belt.

When computing the dimensions of a belt drive (Fig. 1) the stress values to be taken into consideration are the following:

— the tensile stress:

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \frac{P}{b \delta}$$

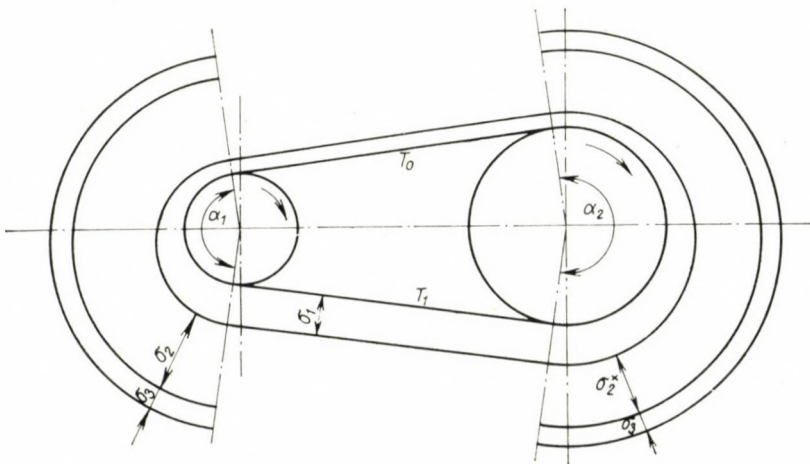


Fig. 1. Stresses resulting from the tension, the bending and the centrifugal force

originating from the useful pulling force P ;

— the bending stress:

$$\sigma_2 = E \frac{\delta}{D_1}$$

— the centrifugal stress:

$$\sigma_3 = \frac{\gamma}{g} v^2$$

derived from the centrifugal force:

$$C = \frac{\gamma}{g} b \delta v^2$$

expressed as the specific force per unit of circumference of a circle with radius 1, where

- γ specific weight of the belt,
- b belt width,
- δ belt thickness,
- E Young's modulus,
- D_1 diameter of the smaller pulley,
- P circumferential (pulling) force,
- v circumferential velocity.

As seen in the diagram (Fig. 1) the stresses

$$\sigma_2 \text{ and } \sigma_3$$

cannot be employed for the transmission of force.

Again, when determining the ratio of tensions ϵ being a decisive value as far as the power transmission is concerned, usually the weight of the belt is not taken into consideration.

In the present study the role of the belt-weight as an additional element of stress within the embraced arc should be examined.

This amplification of the problem seems to be the more motivated, since in the case of "V"-belts, not to speak of plastic laminated steel belts — the specific weight is sensibly greater than that of old-fashioned flat leather belts.

In commonly used calculations, when the belt weight is disregarded, the influence line of the centrifugal force of an elementary belt portion originates from the centre of rotation. The resultant of the centrifugal and gravitational

force acts upon the elementary mass rotating in the homogenous gravitational field and originates from a new centre located on the vertical diameter at a

$$h = \frac{g}{\omega^2} = \frac{895}{n^2}$$

distance above the horizontal axis of rotation (Fig. 2) as has already been stated in another paper [4]. Considering a pulley with a horizontal axis, as diagrammatically shown in Fig. 2, the radial component of the gravitational

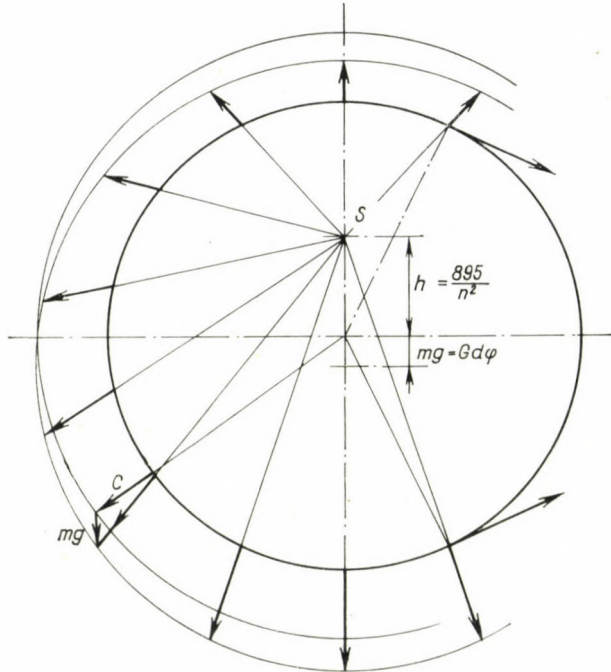


Fig. 2. Resultant of the belt weight and the centrifugal force

force of every elementary mass in the lower half of the circumference is a vector of the same direction as the centrifugal force and acts as an addition to the same, thus decreasing the normal force; again, within the upper half of the pulley, the effect is an inverse one; here by the radial component of the weight, the normal force is increased, respectively, the centrifugal force is decreased.

1. The contact point of the slack side is located on the upper half circle

The weight of the belt element is expressed by

$$dG = \gamma b \delta r d\varphi;$$

by using the formula

$$G = \gamma b \delta r$$

as the expression of the weight G of the belt portion having a length equal to the radius r of the pulley, one finds that

$$dG = G d\varphi$$

and the elementary centrifugal force acting upon the belt element is

$$dC = \frac{\gamma}{g} b \delta r d\varphi \frac{v^2}{r} = \frac{\gamma}{g} b \delta v^2 d\varphi = Cd\varphi,$$

where C denotes the centrifugal force acting on the arc unit of the circle with radius 1.

The elementary normal force dN resulting from the tangential force T and $(T + dT)$, (see Fig. 3) is:

$$dN = T d\varphi.$$

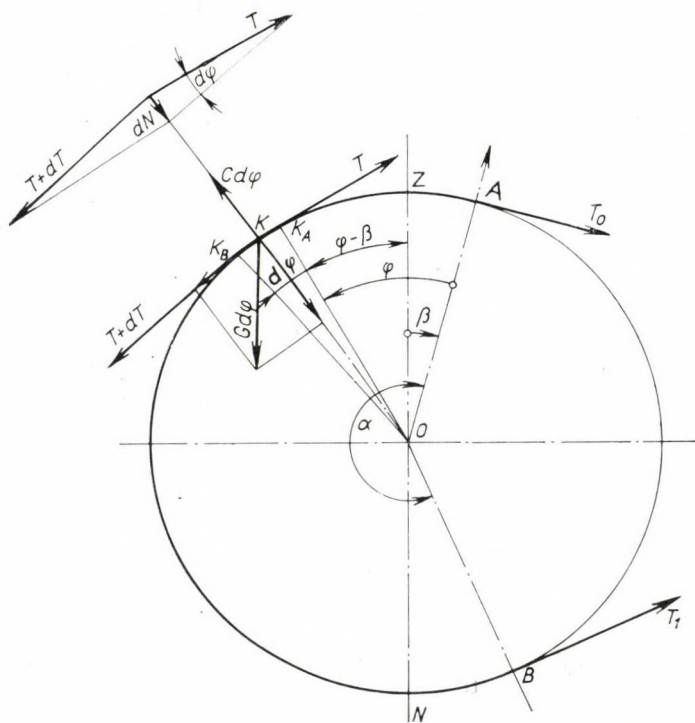


Fig. 3. Resultant of the belt weight, the centrifugal force and the tension. The contact point of the slack belt is located on the upper half circle, to the right of the vertical

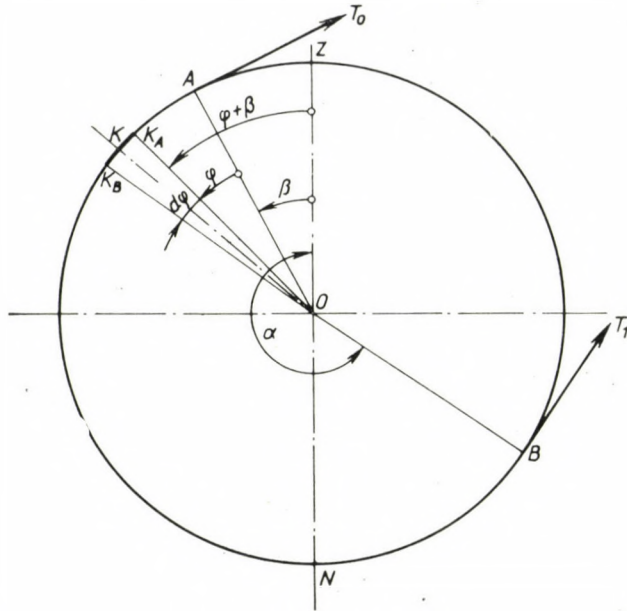


Fig. 3a. The contact point of the slack belt on the upper half circle, to the left of the vertical

By the centrifugal force $dC = C d\varphi$ the normal force dN is diminished at every single point which belongs to any possible value of φ .

In setting up a polar system of coordinates (Fig. 3) the axis of the system will be the radius \overline{OA} , directed towards the contact point on the slack side and φ will be the polar angle; then β denotes the angle between the (upwards directed) vertical and the polar axis; based on the precedings:

$$dG \cos(\varphi - \beta) = G \cos(\varphi - \beta) d\varphi$$

is the radial component of the weight of an elementary belt portion (the small values of the 2nd order are neglected). The value $\cos(\varphi - \beta)$ within the belt arc below the horizontal is negative; inversely, its sign changes into positive within the upper belt arc (above the horizontal); therefore the radial weight component in the lower zone is directed in an inverse sense to that in the upper zone.

Starting from the polar axis, the position of the upwards directed vertical line (according to Fig. 3) can be reached by a positive rotation; that is — in the assumed case — in a direction of rotation corresponding to increasing tension. In another arrangement, according to Fig. 3a, the same vertical line has a position corresponding to a negative rotation starting from the polar axis; in the latter case, the formula of the radial component of the weight is:

$$G \cos(\varphi + \beta) d\varphi$$

where β is (Fig. 3a) as in the first alternative, the angle between the upwards directed vertical and the polar axis. Thus, the two equations derived for these two cases, differ only in the sign of the angle β (+ or -).

Always starting from the contact point A of the slack side, the angle β is considered as positive when the movement from A to B represents a rotation made counterclockwise, that corresponds — in the examined case — to an increasing tension.

Thus according to Fig. 3 the resultant (elementary) radial force acting upon the elementary belt mass is

$$dR = dN - dC + dG \cos(\varphi - \beta),$$

or, in conformity with the precedings:

$$dR = [T - C + G \cos(\varphi - \beta)] d\varphi.$$

Through this radial force, a frictional force μdR is induced, which equals — at any position determined by some φ value — the differential force dF (the difference between the tangential forces) acting upon the elementary belt mass.

For a driven pulley, as shown in Fig. 3 the tangential weight component of any elementary arc portion located to the left of the vertical plane is a vector with the same direction as the (elementary) tangential force dT originating from the useful pulling force, and inversely, those located to the right, have a direction opposite to the first; this relationship is expressed by

$$dF = dT + dG \sin(\varphi - \beta);$$

as mentioned:

$$dF = \mu dR$$

consequently:

$$dT + G \sin(\varphi - \beta) d\varphi = \mu [T - C + G \cos(\varphi - \beta)] d\varphi$$

or

$$dT = \mu [T - C + G \cos(\varphi - \beta)] d\varphi - G \sin(\varphi - \beta) d\varphi,$$

wherefrom

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\varphi} - \mu T &= G [\mu \cos(\varphi - \beta) - \sin(\varphi - \beta)] - \mu C = \\ &= G (\mu \cos \varphi \cos \beta + \mu \sin \varphi \sin \beta - \sin \varphi \cos \beta + \cos \varphi \sin \beta) - \mu C ; \end{aligned}$$

and the following differential equation is to be solved:

$$\frac{dT}{d\varphi} - \mu T = G [\cos \varphi (\mu \cos \beta + \sin \beta) + \sin \varphi (\mu \sin \beta - \cos \beta)] - \mu C. \quad (1)$$

By solving a first order differential equation of the type

$$\frac{dT}{d\varphi} + p(\varphi)T = q(\varphi)$$

the result is:

$$T = e^{-\int p(\varphi)d\varphi} [C_1 + \int q(\varphi) e^{\int p(\varphi)d\varphi} d\varphi] \quad (2)$$

where C_1 is the integration constant.

By using the symbols

$$a = \mu \cos \beta + \sin \beta$$

and

$$b = \mu \sin \beta - \cos \beta$$

it follows that

$$p(\varphi) = -\mu$$

$$q(\varphi) = G(a \cos \varphi + b \sin \varphi) - \mu C$$

and the integrals in equation (2) are:

$$-\int p(\varphi)d\varphi = -\int (-\mu) d\varphi = \mu\varphi$$

$$\int p(\varphi)d\varphi = -\mu\varphi$$

$$\begin{aligned} \int q(\varphi) e^{-\mu\varphi} d\varphi &= \int [G(a \cos \varphi + b \sin \varphi) - \mu C] e^{-\mu\varphi} d\varphi = \\ &= Ga \int e^{-\mu\varphi} \cos \varphi d\varphi + Gb \int e^{-\mu\varphi} \sin \varphi d\varphi - \mu C \int e^{-\mu\varphi} d\varphi; \end{aligned}$$

wherefrom results:

$$T = e^{\mu\varphi} [C_1 + G(a \int e^{-\mu\varphi} \cos \varphi d\varphi + b \int e^{-\mu\varphi} \sin \varphi d\varphi) - \mu C \int e^{-\mu\varphi} d\varphi].$$

Because of the relationship:

$$\int e^{-\mu\varphi} \cos \varphi d\varphi = \frac{e^{-\mu\varphi}}{1 + \mu^2} (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$$

and

$$\int e^{-\mu\varphi} \sin \varphi d\varphi = -\frac{e^{-\mu\varphi}}{1 + \mu^2} (\cos \varphi + \mu \sin \varphi)$$

further

$$\int e^{-\mu\varphi} d\varphi = -\frac{1}{\mu} e^{-\mu\varphi}$$

it follows that

$$T = C_1 e^{\mu\varphi} + C + \frac{G}{1 + \mu^2} [a (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) - b (\cos \varphi + \mu \sin \varphi)].$$

After rearranging the expression within the square brackets (by re-substituting the formulae of a and b) the result is

$$\begin{aligned} & (\mu \cos \beta + \sin \beta) (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) - (\mu \sin \beta - \cos \beta) (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) = \\ & = 2\mu (\sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \sin \beta) + (1 - \mu^2) (\cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta) \end{aligned}$$

and therefore

$$T - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin (\varphi - \beta) + (1 - \mu^2) \cos (\varphi - \beta)] = C_1 e^{\mu\varphi}.$$

Considering that at the contact point A on the slack side (Fig. 3)

$$\varphi = 0, \text{ and } T = T_0,$$

the result is:

$$T_0 - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin (-\beta) + (1 - \mu^2) \cos (-\beta)] = C_1.$$

For the contact point B of the tight side with an embraced angle α *i.e.* with

$$\varphi = \alpha, \text{ and } T = T_1,$$

the result is:

$$T_1 - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin (\alpha - \beta) + (1 - \mu^2) \cos (\alpha - \beta)] = C_1 e^{\mu\alpha}.$$

Now dividing the latter equation by the former one the constant C_1 disappears, and:

$$\frac{T_1 - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin (\alpha - \beta) + (1 - \mu^2) \cos (\alpha - \beta)]}{T_0 - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [-2\mu \sin \beta + (1 - \mu^2) \cos \beta]} = e^{\mu\alpha} \quad (I)$$

Considering the arrangement according to Fig. 3a, when in order to reach the contact point A of the slack side, the direction — starting from the top point Z — is conformed to the positive sense of rotation, then (corresponding to an increasing tension) the sign of β (in equation I) will change into minus and therefore

$$\frac{T_1 - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin(\alpha + \beta) + (1 - \mu^2) \cos(\alpha + \beta)]}{T_0 - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin \beta + (1 - \mu^2) \cos \beta]} = e^{\mu\alpha}. \quad (\text{Ia})$$

It is only self-evident that, by neglecting the weight ($G = 0$), both formulae I and Ia assume the known form:

$$\frac{T_1 - C}{T_0 - C} = e^{\mu\alpha}.$$

2. The contact point of the slack side is located on the lower circle

It was I. LIPKA who drew the attention to that special arrangement when the slack side is in the lower position.

As seen from Fig. 4 and maintaining the position sign for rotation made counterclockwise by the polar axis OA the tension T decreases with an increase

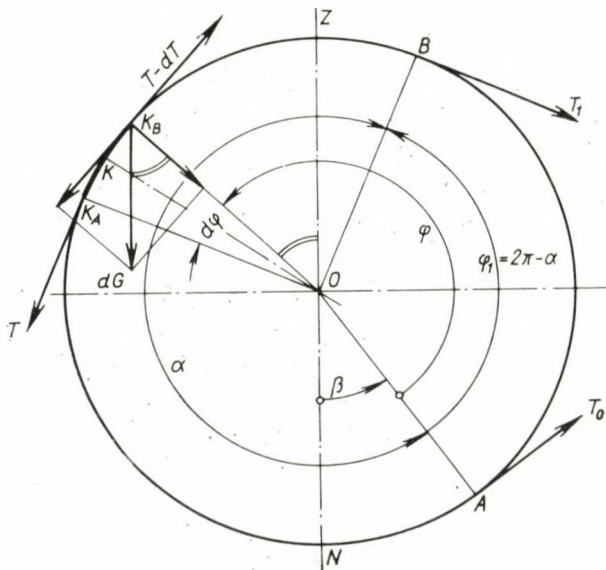


Fig. 4. The contact point of the slack belt on the lower half circle to the right of the vertical

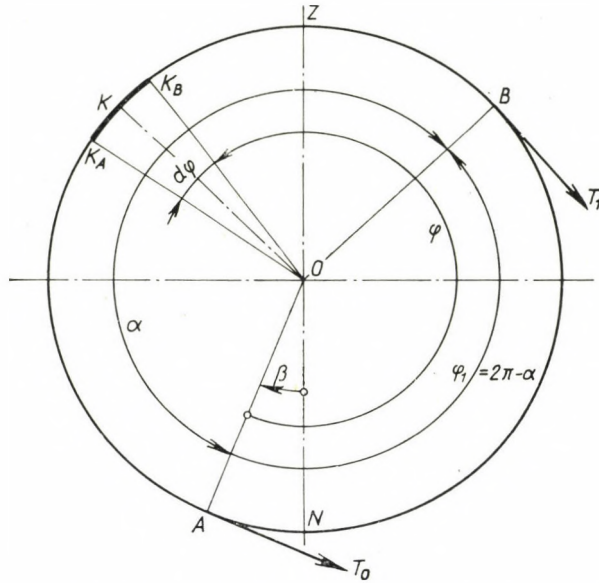


Fig. 4a. The contact point of the slack side on the lower half circle, to the left of the vertical

of the angle φ ; in other words, the differential quotient

$$\frac{dT}{d\varphi} < 0,$$

and consequently, with an increasing φ the range $d\varphi > 0$ compulsively involves that $dT < 0$.

When following the direction from the contact point B on the tight side to the contact point A on the slack side, and considering a belt element at some point K on the embraced arc the tension at point K_B is greater than the tension at the point K_A ; therefore, given an increment dT with a minus sign, it must be subtracted from tension T (at the point K_A) in order to obtain the greater tension (at the point K_B) $T - dT > T$.

Now, starting again from point B on the tight side, to which the angle value $\varphi = (2\pi - \alpha)$ is coordinated, and following the counterclockwise direction along the arc portion \widehat{BKA} , the angle value coordinated to the point A is $\varphi = 2\pi$.

According to the above mentioned, when considering the two tensions acting upon the belt element at K , i.e. the tangential force T in point K_A and the other one ($T - dT$) at point K_B the resultant radial force is

$$dN = Td\varphi$$

that acts by pressing the belt to the pulley. This pressing force is diminished by the centrifugal force dC at every point of the embraced arc; again the radial component of the weight dG acts on the upper zone (above the horizontal) in increasing, and in the lower zone (below the horizontal) in decreasing the pressing force. The radial component of the weight is

$$-dG \cos(\beta + \varphi) = -G \cos(\beta + \varphi) d\varphi.$$

According to Fig. 4, the cosine value of the reflex angle $(\beta + \varphi)$ is negative, and the radial component as expressed by the above formula is positive, therefore, in conformity with the symbols used in Fig. 4, the pressing force is increased by this radial component. Thus, the resultant radial force that acts upon the belt element is:

$$\begin{aligned} dR &= dN - dC - dG \cos(\beta + \varphi) = \\ &= Td\varphi - Cd\varphi - G \cos(\beta + \varphi) d\varphi = [T - C - G \cos(\beta + \varphi)]d\varphi. \end{aligned}$$

According to the symbols used in Fig. 4, the direction of the tangential component of the weight dG of the arc elements on the left side of the vertical centre line is contrary to the direction of the tension-increment originating from the useful pulling force, whereas the direction of the same component is identical with this increment on the elements on the right side. Thus, the tangential component of the weight dG at the point K_A is

$$-dG \sin(\beta + \varphi) = -G \sin(\beta + \varphi) d\varphi.$$

In conformity with the symbols in Fig. 4, the value of the tangential component of the weight of the belt element is, at a reflex angle $(\beta + \varphi)$ positive.

By subtracting the tangential force acting on point K_A

$$T - dG \sin(\beta + \varphi)$$

from the tangential force $(T - dT)$ acting on point K_B , the remainder is:

$$\begin{aligned} dF &= T - dT - [T - dG \sin(\beta + \varphi)] = -dT + dG \sin(\beta + \varphi) = \\ &= -dT + G \sin(\beta + \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

and is equal to the friction force induced by the radial force, therefore

$$dF = \mu dR$$

whence:

$$-dT + G \sin(\beta + \varphi) d\varphi = \mu [T - C - G \cos(\beta + \varphi)] d\varphi.$$

Thus, the first degree differential equation to be solved is:

$$\frac{dT}{d\varphi} + \mu T = G [\sin(\beta + \varphi) + \mu \cos(\beta + \varphi)] + \mu C. \quad (1a)$$

Since the general solution of

$$\frac{dT}{d\varphi} + p(\varphi)T = q(\varphi)$$

according to (2) is:

$$T = e^{-\int p(\varphi)d\varphi} [C_1 + \int q(\varphi) e^{\int p(\varphi)d\varphi} d\varphi]$$

and as

$$p(\varphi) = \mu$$

and

$$q(\varphi) = G [\sin(\beta + \varphi) + \mu \cos(\beta + \varphi)] + \mu C$$

therefore is

$$T = e^{-\mu\varphi} [C_1 + G \int (a \cos \varphi + b \sin \varphi) e^{\mu\varphi} d\varphi + \mu C \int e^{\mu\varphi} d\varphi].$$

By simplifying

$$a = \sin \beta + \mu \cos \beta$$

$$b = \cos \beta - \mu \sin \beta$$

respectively

$$\int e^{\mu\varphi} \cos \varphi d\varphi = \frac{e^{\mu\varphi}}{1 + \mu^2} (\sin \varphi + \mu \cos \varphi)$$

$$\int e^{\mu\varphi} \sin \varphi d\varphi = \frac{e^{\mu\varphi}}{1 + \mu^2} (\cos \varphi - \mu \sin \varphi)$$

and by substituting the latter into the former preceding of T

$$T = C_1 e^{-\mu\varphi} + \frac{G}{1 + \mu^2} [a (\sin \varphi + \mu \cos \varphi) - b (\cos \varphi - \mu \sin \varphi)] + C$$

and using the assumed formulae for a and b :

$$\begin{aligned} T &= \frac{G}{1 + \mu^2} [(\sin \beta + \mu \cos \beta) (\sin \varphi + \mu \cos \varphi) - (\cos \beta - \\ &\quad - \mu \sin \beta) (\cos \varphi - \mu \sin \varphi)] + C_1 e^{-\mu\varphi} + C = \\ &= \frac{G}{1 + \mu^2} (\sin \beta \sin \varphi + \mu \cos \beta \sin \varphi + \mu \cos \varphi \sin \beta + \mu^2 \cos \beta \cos \varphi - \\ &\quad - \cos \beta \cos \varphi + \mu \sin \beta \cos \varphi + \mu \sin \varphi \cos \beta - \mu^2 \sin \beta \sin \varphi) + C_1 e^{-\mu\varphi} + C \end{aligned}$$

or

$$T = \frac{G}{1 + \mu^2} [2 \mu \sin (\varphi + \beta) - (1 - \mu^2) \cos (\varphi + \beta)] + C_1 e^{-\mu \varphi} + C$$

respectively:

$$T - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [2 \mu \sin (\varphi + \beta) - (1 - \mu^2) \cos (\varphi + \beta)] = C_1 e^{-\mu \varphi}.$$

Considering the relationship that:

the force T_0 acting on point A corresponds to the angle value $\varphi = 2\pi$ and the force T_1 acting on point B corresponds to the angle value $\varphi = (2\pi - a)$ the former equation may be re-written:

$$T_2 - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [2 \mu \sin \beta - (1 - \mu^2) \cos \beta] = C_1 e^{-2\pi\mu}$$

and

$$T_1 - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [2 \mu \sin (\beta - a) - (1 - \mu^2) \cos (\beta - a)] = C_1 e^{-\mu(2\pi - a)}$$

and the relation of tensions

$$\frac{T_1 - C + \frac{G}{1 + \mu^2} [2 \mu \sin (a - \beta) + (1 - \mu^2) \cos (a - \beta)]}{T_0 - C + \frac{G}{1 + \mu^2} [-2 \mu \sin \beta + (1 - \mu^2) \cos \beta]} = e^{\mu a}. \quad (\text{II})$$

This result is another evidence for proving the relationship, that with a slack side in the lower position, the formula differs from the other one corresponding to a slack side in the upper position, only in the contrary (plus) sign of the value G . Of course, the same result will be obtained, when in setting the differential equation, the positive sense of rotation of the polar axis is to be assigned to the direction corresponding to the increase of tension, and the integration is to be carried out between the limits

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = 0 \\ T = T_0 \end{array} \right\} \quad \text{and} \quad \left. \begin{array}{l} \varphi = a \\ T = T_1 \end{array} \right\}.$$

In Fig. 4, the acute angle $\sphericalangle AON = -\beta$ is described by a clockwise rotation (*i.e.* in negative sense) of the polar axis. With a point A , correspond-

ing to the force T_0 , located to the left of the vertical central line ON (Fig. 4a), i.e. with $\sphericalangle AON = +\beta$, the relation of tensions, written with a changed sign of the angle β again becomes:

$$\frac{T_1 - C + \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin(\alpha + \beta) - (1 - \mu^2) \cos(\alpha + \beta)]}{T_0 - C + \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin \beta + (1 - \mu^2) \cos \beta]} = e^{\mu\varphi}. \quad (\text{IIa})$$

3. The types of drive and the corresponding formulae

As is to be seen in Fig. 2, the vectors of the ray bundle with the centre S of the resulting forces are symmetric to the vertical centre line. Therefore, the relationship expressed in the derived equations corresponding to the arrangements according to figures 3, 3a, and 4, 4a, respectively, is the same for the arrangements symmetric to the vertical centre line.

The type of drive is determined by a given sense of rotation, by the portion of the slack side, the tight side and by the pulley pattern (driving or driven).

In Fig. 5, and in Fig. 5a, all possible arrangements with an open belt and a crossed belt, respectively, together with the indication of the corresponding formulae are shown; the symbolic ciphers of the formulae are indicated in the following synoptic table:

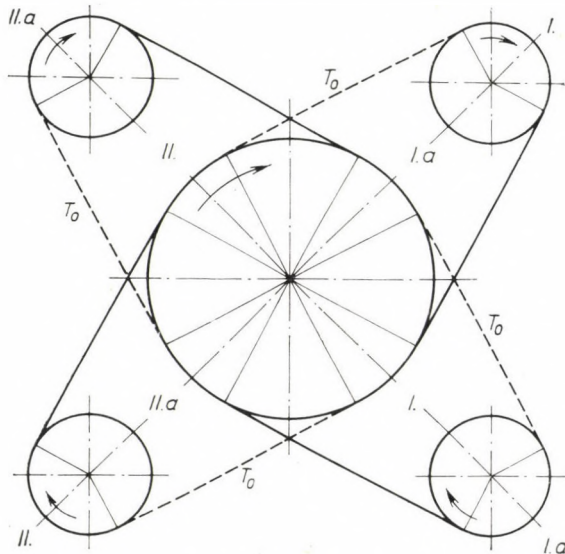


Fig. 5. Various positions of the open belt drive

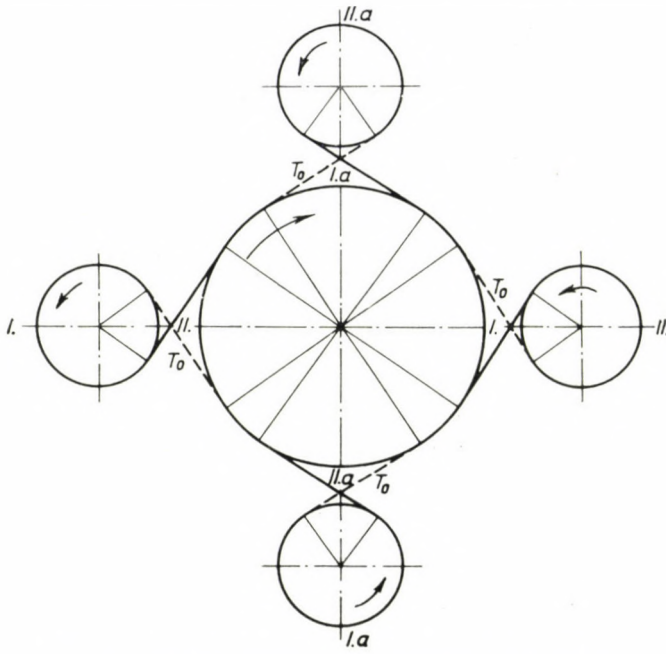


Fig. 5a. Various positions of the crossed belt drive

Driven pulley	Driving pulley	
	on the open belt	on the crossed belt
Ia	Ia	II
Ia	I	IIa
II	IIa	I
IIa	II	Ia

As is shown, the formulae for an open belt have the same cipher for both pulleys, differing only by the index; for a crossed belt, the ciphers are different for the two pulleys, both are with, or without, the index "a". Further when the positions of the slack side and the tight side — for the same type of drive — are changed, the spatial disposition, the transmission ratio and the centre distance, are important.

4. Variation of the error value in the function of β

The pulley diameter once given, the embraced arc depends on the transmission ratio and the centre distance.

When using the symbols according to Fig. 6 and 6a,

$$\frac{D_2}{D_1} = i \text{ and } \frac{h}{D_1} = j$$

the embraced arc on an open drive is:

$$a_1 = 2 \arccos \frac{D_2 - D_1}{2h} = 2 \arccos \frac{i - 1}{2j}$$

or

$$a_1 = \pi - 2 \arcsin \frac{i - 1}{2j}$$

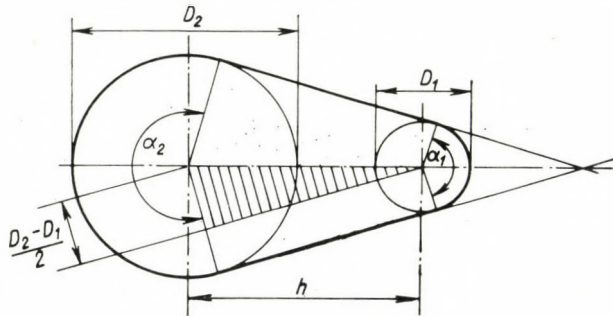


Fig. 6. The embraced arc in an open belt drive

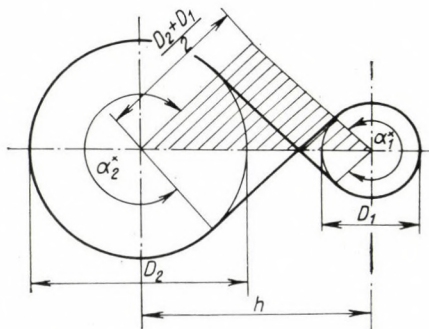


Fig. 6a. The embraced arc in a crossed belt drive

and

$$a_2 = 2 \left(\pi - \arccos \frac{i - 1}{2j} \right).$$

In a crossed belt drive:

$$a_1^* = a_2^* = 2 \left(\pi - \arccos \frac{D_2 + D_1}{2h} \right) = 2 \left(\pi - \arccos \frac{i + 1}{2j} \right).$$

In the range of $\frac{i - 1}{j} = (0 \div 0.6)$ the expression of the angle value a

in degrees will be exact enough when the arc function is substituted by the sin function

thus

$$\alpha_1 \approx 180^\circ - \frac{i-1}{j} \frac{180^\circ}{\pi} \approx 180^\circ - \frac{i-1}{j} 60^\circ = 60^\circ \left(3 - \frac{i-1}{j} \right)$$

or

$$\alpha_1 \approx \frac{60}{j} (3j - i + 1).$$

The value of the angle β depends not only on the running conditions determining the rotation sense and the type of the pulley (driven or driving) but it is also influenced by the relative spatial position of the other pulley. The present question is, starting from an obtained value a , the angle β_m is to be found at which the maximum error will occur, and whether any special β_0 value exists without error, *i.e.* at which the belt may be considered as weightless.

The answer is found:

Neglecting the belt weight, the tension in the tight side is:

$$T_1^* = e^{\mu a} (T_0 - C) + C.$$

According to equation (I) by taking into account the weight of the belt and assuming that the values a , μ and T_0 are the same, the tension is:

$$T_1 = e^{\mu a} \left\{ T_0 - C - \frac{G}{1 + \mu^2} [-2\mu \sin \beta + (1 - \mu^2) \cos \beta] \right\} + C + \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin (a - \beta) + (1 - \mu^2) \cos (a - \beta)].$$

The difference is:

$$\begin{aligned} y &= T_1^* - T_1 = e^{\mu a} \frac{G}{1 + \mu^2} [-2\mu \sin \beta + (1 - \mu^2) \cos \beta] - \\ &\quad - \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin (a - \beta) + (1 - \mu^2) \cos (a - \beta)] \\ y &= \frac{G}{1 + \mu^2} \left\{ -2\mu [\sin (a - \beta) + e^{\mu a} \sin \beta] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \mu^2) [e^{\mu a} \cos \beta - \cos (a - \beta)] \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Assuming a weightless belt, the difference becomes zero, *i.e.*

$$y = \frac{G}{1 + \mu^2} [-2\mu (\sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta + e^{ua} \sin \beta) + (1 - \mu^2) (e^{ua} \cos \beta - \cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta)] = 0. \quad (4)$$

Dividing by $\left(-\frac{G \cos \beta}{1 + \mu^2}\right)$

$$\begin{aligned} 2\mu (\sin a - \cos a \tan \beta + e^{ua} \tan \beta) - (1 - \mu^2) (e^{ua} - \cos a - \sin a \tan \beta) &= 0 \\ \tan \beta [2\mu (e^{ua} - \cos a) + (1 - \mu^2) \sin a] + 2\mu \sin a - (1 - \mu^2) (e^{ua} - \cos a) &= 0 \\ \tan \beta_0 = \frac{(1 - \mu^2) (e^{ua} - \cos a) - 2\mu \sin a}{2\mu (e^{ua} - \cos a) + (1 - \mu^2) \sin a}. \end{aligned} \quad (5)$$

The first differential quotient $\frac{dy}{d\beta}$ becomes zero for the extreme values of $y = T_1^* - T_1$; therefore, derived from (4) it can be written:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\beta} = \frac{G}{1 + \mu^2} [-2\mu (-\sin a \sin \beta - \cos a \cos \beta + e^{ua} \cos \beta) + (1 - \mu^2) (-e^{ua} \sin \beta + \cos a \sin \beta - \sin a \cos \beta)] &= 0 \end{aligned}$$

and dividing by $\left(-\frac{G \cos \beta}{1 + \mu^2}\right)$

$$\begin{aligned} 2\mu (-\sin a \tan \beta - \cos a + e^{ua}) + (1 - \mu^2) (e^{ua} \tan \beta - \cos a \tan \beta + \sin a) &= 0, \\ \tan \beta [(1 - \mu^2) (e^{ua} - \cos a) - 2\mu \sin a] + 2\mu (e^{ua} - \cos a) + (1 - \mu^2) \sin a &= 0 \\ \tan \beta_m = -\frac{2\mu (e^{ua} - \cos a) + (1 - \mu^2) \sin a}{(1 - \mu^2) (e^{ua} - \cos a) - 2\mu \sin a}. \end{aligned} \quad (6)$$

In comparing equation (5) with equation (6) it is obvious that

$$\tan \beta_m = -\frac{1}{\tan \beta_0}.$$

This formula means that in the case of a given value of the angle a the deviation is 90° between the angle β_m corresponding to the greatest difference of the two tension values, and the angle β_0 corresponding to the case when the original EYTELWEIN—GRASHOF thesis yields exact results.

Another relationship that follows from this formula is, that — supposing unchanged running conditions — when the contact point belonging to angle β_0 is located to the right of the vertical diameter, then the other contact point belonging to β_m is located to the left and vice versa.

For a drive arrangement where the contact point A belonging to T_0 is located below the horizontal, according to equation (II) it follows:

$$T_1 = e^{\mu a} \left\{ T_0 - C + \frac{G}{1 + \mu^2} [-2\mu \sin \beta + (1 - \mu^2) \cos \beta] \right\} + \\ + C - \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin (a - \beta) + (1 - \mu^2) \cos (a - \beta)].$$

Considering the value

$$T_1^* = e^{\mu a} (T_0 - C) + C$$

and setting up the subtraction

$$y = T_1^* - T_1 = -e^{\mu a} \frac{G}{1 + \mu^2} [-2\mu \sin \beta + (1 - \mu^2) \cos \beta] + \\ + \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu \sin (a - \beta) + (1 - \mu^2) \cos (a - \beta)] \\ y = \frac{G}{1 + \mu^2} \{ 2\mu [\sin (a - \beta) + e^{\mu a} \sin \beta] + (1 - \mu^2) [\cos (a - \beta) - \\ - e^{\mu a} \cos \beta] \}. \quad (3a)$$

For $y = 0$,

$$y = \frac{G}{1 + \mu^2} [2\mu (\sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta + e^{\mu a} \sin \beta) + \\ + (1 - \mu^2) (\cos a \cos \beta + \sin a \sin \beta - e^{\mu a} \cos \beta)] = 0. \quad (4a)$$

Dividing by $\frac{G \cos \beta}{1 + \mu^2}$

$$2\mu (\sin a - \cos a \tan \beta + e^{\mu a} \tan \beta) + (1 - \mu^2) (\cos a + \sin a \tan \beta - e^{\mu a}) = 0 \\ \tan \beta [2\mu (e^{\mu a} - \cos a) + (1 - \mu^2) \sin a] + 2\mu \sin a - (1 - \mu^2) (e^{\mu a} - \cos a) = 0$$

and

$$\tan \beta_0 = \frac{(1 - \mu^2) (e^{\mu a} - \cos a) - 2\mu \sin a}{2\mu (e^{\mu a} - \cos a) + (1 - \mu^2) \sin a}. \quad (5)$$

Again, for the extreme values of $y = T_1^* - T_1$ according to (4a), the obtained value of $\tan \beta_m$ equals the same one, as given in the equation (6).

So the formula for β_m is the same for both cases; *i.e.* for the contact point A on the upper half circle and for the contact point A on the lower half circle. To be more explicit in the case of a contact point belonging to T_0 located on the lower half circle, the negative value of β_m means that the polar axis comprising point A reaches the vertical half diameter which points downwards by a positive rotation (Fig. 4a). Thus, the angle β_m belonging to the A point in a lower position is the opposite angle in relation to the other angle β_m belonging to the other A point in the upper position.

With a given sense of rotation and a given angle α the position of the corresponding belt arc — for maximum error — is different for a driven and a driving pulley. Only with an angle $\alpha = 180^\circ$ (*i. e.* $i = 1$) does the centre line point to the same direction and is the belt arc the same too, independently of whether it belongs to the driving or driven pulley.

As already seen, the embraced arc depends on the ratio $i = \frac{D_2}{D_1}$ and on the ratio $j = \frac{h}{D_1}$ independent of the diameter of the pulley.

Theoretically, for a crossed belt drive the range of the angle α is between $\alpha_1 = \alpha_2 = 180^\circ \div 360^\circ$ while the value of h varies from $h = \infty$ downwards to $h = \frac{D_1 + D_2}{2}$.

For an open belt drive *e.g.* with a ratio $i = 5$, the minimum α_1 — for the theoretical position of the two pulleys in contact with each other — is:

$$\alpha_{1\min} = 2 \arccos \frac{i-1}{2j} = 2 \arccos \frac{5-1}{2 \times 3} = 2 \arccos \frac{2}{3}$$

and

$$\alpha_{1\min} = 2 \times 48^\circ 12' = 96^\circ 24'$$

$$\alpha_2 = 360^\circ - 96^\circ 24' = 263^\circ 36'.$$

Here some corresponding value for $i = 5$:

α_1	$96^\circ 24'$	120°	135°	150°	180°
α_2	$263^\circ 36'$	240°	225°	210°	180°
j	3	4	5.23	7.73	∞

For the value of the coefficient of friction μ for grey cast or steel pulleys, the following formula is recommended for practical purposes:

$$\mu = 0.2 + 0.008 v \text{ (m/sec)}.$$

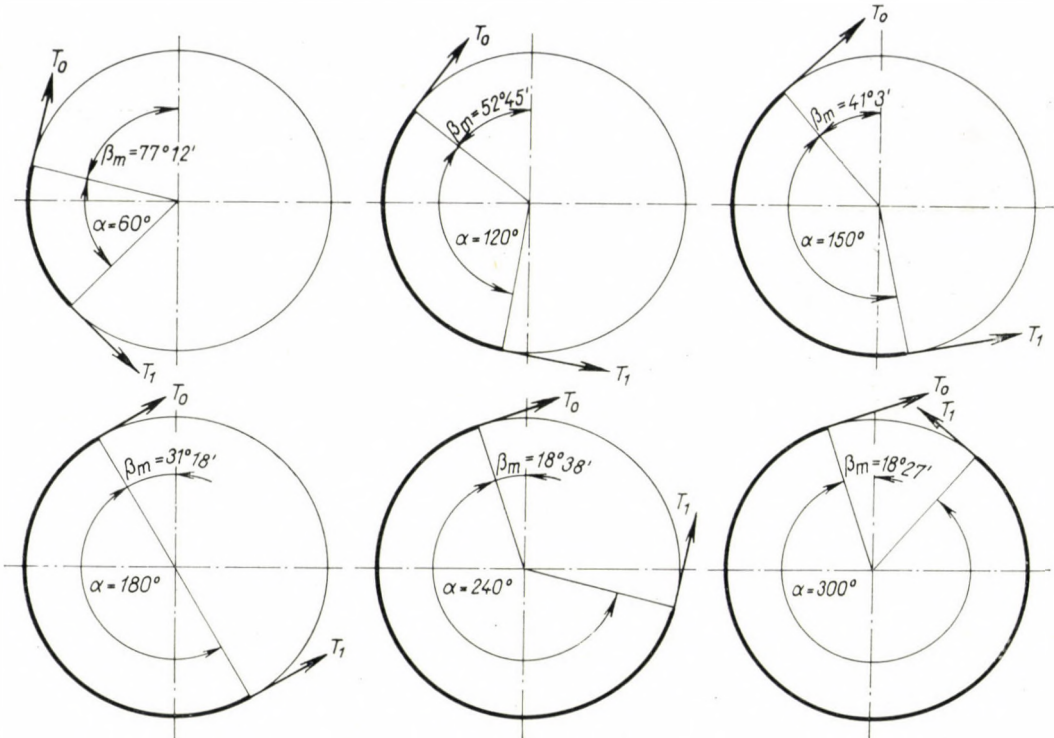


Fig. 7. Values of the angle β_m corresponding to the maximum deviation of the calculated forces, for some special values of the embrace angle α

According to the experiments carried out by KAMMERER [1] the average value that proved satisfactory is:

$$\mu = 0.28 .$$

By substituting this value:

$$\tan \beta_m = - \frac{0.56 (e^{0.28\alpha} - \cos \alpha) + 0.9216 \sin \alpha}{0.9216 (e^{0.28\alpha} - \cos \alpha) - 0.56 \sin \alpha} \quad (7)$$

according to this formula, the following series of corresponding values can be established:

$\alpha =$	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°
$\beta_m =$	83°57'	77°12'	64°45'	52°45'	46°16'	41°3'	31°18'	23°34'	20°43'	18°38'	16°23'	18°27'	21°46'

In Fig. 7 some values of the angle $-\beta_m$ are shown, each belonging to a given angle value α always with a contact point A for T_0 located on the upper half circle.

Taking into account the usual average value $\mu = 0.28$ and by considering the relationship (3), the concrete values of the maximum deviation belonging to the various coordinated values of α and β_m — as indicated above — will be calculated as follows:

$$y = T_1^* - T_1 = \frac{G}{1.0784} \left\{ -0.56 [\sin (\alpha + \beta_m) - e^{0.28\alpha} \sin \beta_m] + 0.9216 [e^{0.28\alpha} \cos \beta_m - \cos (\alpha + \beta_m)] \right\} = k_\alpha G \quad (8)$$

From this equation, and by taking into account several coordinated values of α and β_m the following values of the coefficient k_a are obtained (Fig. 8):

$\alpha =$	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°
$k_a =$	0.89	1.21	1.85	2.45	2.75	2.99	3.41	3.7	3.76	3.81	3.86	3.93	4.02

The error for the arrangement according to Fig. 3 and 3a, is roughly $(3.5 \div 4) G$; again, it is worth while to observe, that for a transmission ratio 1 : 1 it is not the vertical drive to which the maximum deviation of the theoretic value belongs: namely in a vertical drive

$$\alpha = 180^\circ, \quad \beta = 90^\circ, \quad (\alpha + \beta) = 270^\circ$$

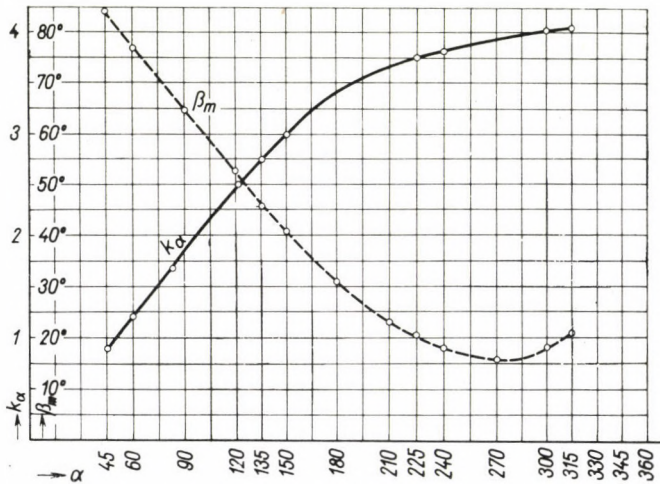


Fig. 8. The maximum deviation of the calculated forces, for some special values of the embrace angle α

consequently, according to (Ia)

$$\frac{T_1 - C + \frac{2G\mu}{1 + \mu^2}}{T_0 - C - \frac{2G\mu}{1 + \mu^2}} = e^{\pi\mu}$$

and hence

$$T_1 = e^{\pi\mu} \left(T_0 - C - \frac{2G\mu}{1 + \mu^2} \right) - \frac{2G\mu}{1 + \mu^2} + C.$$

Carrying out the usual subtraction from

$$T_1^* = e^{\pi\mu} (T_0 - C) + C$$

$$y = T_1^* - T_1 = \frac{2G\mu}{1 + \mu^2} (e^{\pi\mu} + 1)$$

and with the usual value $\mu = 0.28$,

the calculation error with a vertical drive is

$$y = \frac{2 \times 0.28 G}{1 + 0.0784} (e^{0.28\pi} + 1) = 1.77 G .$$

On the other hand, when the angle between the vertical line and the connecting belt portion is

$$90^\circ - \beta_m = 90^\circ - 31^\circ 18' = 58^\circ 42'$$

the error is 3.41G.

It is to be mentioned that the analysis as given above is based on the consideration of the weight, not of the free portions of the belt but only of the belt portion embracing the pulley.

5. The resultant of the forces acting on the free belt portions

With reference to the belt force T_0 and T_1 it is advisable to deal with a certain relationship, generally, to which the usual textbooks never pay any attention.

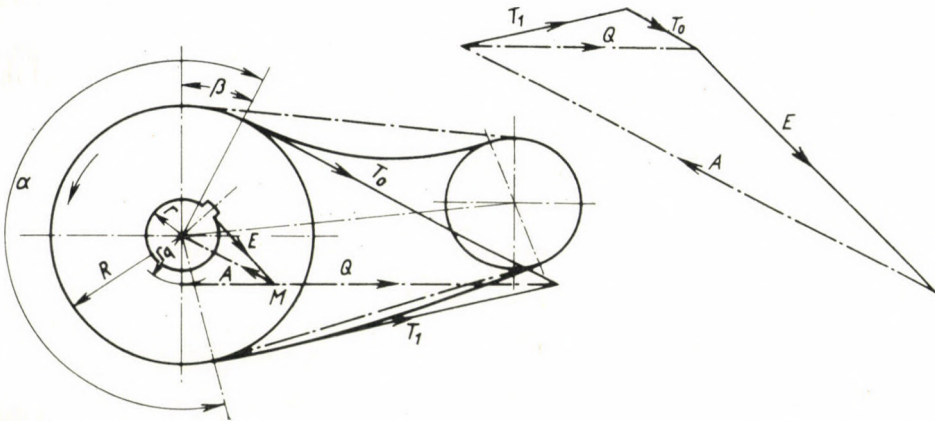


Fig. 9. The resultant of the forces acting on the contact points of the tight and the slack belt

According to the accepted method of teaching, it is usually stated, that the circumferential force $P = T_1 - T_0$ is but imaginary and its role is only to facilitate calculations: the effective resultant force Q (Fig. 9), vectorially $\vec{Q} = \vec{T}_1 + \vec{T}_0$ is not mentioned and its vectorial position is not determined.

Taking into consideration this force Q that acts on the lever arm of moment r_q having an unchanged spatial position and the constant force E acting on the key and rotating, it can be demonstrated [5] that the force A , the influence line of which goes through the centre, is fluctuating; this pulsation tends to loosen the key joint whenever the following relationship is valid:

$$r_q \sin \varrho \leq r$$

where ϱ is the friction angle between key and keyway; this represents another motive for locating the key in the dividing plane of halved pulleys.

REFERENCES

1. HERMANN, M.: Gépelemek (Machine elements). Budapest, 1924.
2. VÖRÖS, I.: Gépelemek II. Budapest, 1954 (Machine Elements, Part II.).
3. MUTNYÁNSZKY, Á.: Statika, Budapest 1952 (Statics).
4. SZÓKE, B.: A felvonóról, Malomújság 1939, No. 9, 13, 20 (Elevator problems). Forces acting in the Bucket of the Elevator. Acta Technica Tom. XVI. Fasc. 1—2, Budapest, 1957.
5. SZÓKE, B.: Dynamics of Gears with Feather Keys. Acta Technica, Tom. XXI. Fasc. 1—2. Budapest, 1958.
6. SZÓKE, B.: Erőjáték reteszes fogaskerekeknél. GÉP, 1959. évf. 5. sz. (Dynamics of Gears with Feather Keys).

SUMMARY

When calculating the tension forces arising in belt drives, only the coefficient of friction, the embraced arc and the centrifugal force are usually taken into consideration.

The author derives — instead of the simple exponential function of the relation of tensions on a weightless belt — the more exact general relationship corresponding to the real running conditions by taking into account the belt weight; the former theoretic case is a special one of those comprised by this general scheme.

For a given embrace angle α the direction of the slack belt is determined for the case of the maximum error; it is demonstrated that in another arrangement when the belt direction is perpendicular to the former, the error value is equal to zero, the belt can be considered as weightless and the results of the EYTELWEIN—GRASHOF formula are exact for only this single case.

The greatest values of the deviation are determined for some values of the embrace angle α and it is demonstrated that, for the case of parallel belt drives it is not the vertical arrangement that involves the most unfavourable relation of tension forces.

Finally, the importance of the vectorial sum of the tension forces is mentioned, since this serves to explain some phenomena that cannot be explained by the fictive notion of the circumferential tension.

WEITERENTWICKLUNG DES SATZES EYTELWEIN—GRASHOF

B. SZÓKE

ZUSAMMENFASSUNG

Es ist allgemein üblich, bei der Berechnung des Kräftespiels in Riementrieben nur den Reibungskoeffizienten, den Umschlingbogen und die Zentrifugalkraft in Betracht zu ziehen. An Stelle der einfachen exponentiellen Funktion für den Fall eines voraussetzungs-mäßig gewichtslosen Riemens, leitet der Verfasser unter Berücksichtigung des Riemen-gewichtes eine der Wirklichkeit besser angepasste, allgemeine Formel ab, die den vorigen als speziellen Fall in sich schließt.

Es wird zu einem gegebenen Umschlingungswinkel α diejenige Richtung des Riemen-trums bestimmt, bei der der theoretische Rechnungsfehler der größte ist. Es wird nachgewie-sen, daß bei einer auf der vorigen senkrecht stehenden Trumrichtung der Riemen als gewichts-los betrachtet werden kann, und daß in diesem speziellen Fall der ursprüngliche EYTELWEIN—GRASHOF Satz genau gilt.

Weiter werden die Werte des größten Rechenfehlers für bestimmte Umschlingungs-winkel berechnet und nachgewiesen, daß bei dem Parallelriementrieb das am wenigsten günstige Trumkräfteverhältnis nicht bei der vertikalen Anordnung auftritt.

Es wird noch kurz auf die Bedeutung der Resultierende der beiden Trumkräfte hinge-wiesen, da man mit deren Hilfe gewisse Erscheinungen erklären kann, die durch die Annahme der fiktiven Umfangskraft nicht geklärt werden konnten.

EXTENSION DE LA FORMULE D'EYTELWEIN—GRASHOF

B. SZÓKE

RÉSUMÉ

Au calcul des forces de traction naissant dans les brins, on ne considère généralement que le coefficient de frottement, l'arc d'engagement et la force centrifuge.

Pour mieux approcher les conditions réelles, l'auteur développe à la place de la formule connue à fonction exponentielle, une nouvelle relation générale tenant compte du poids propre de la partie engagée de la courroie, relation qui contient le cas théorique de la formule ancienne comme un cas spécial.

L'auteur définit la direction du brin à laquelle, avec un angle d'engagement a donné, on trouve la plus grande erreur de calcul, et démontre qu'avec une disposition perpendiculaire à cette direction du brin, et dans cette position unique, la formule d'Eytelwein—Grashof est valable de façon exacte.

Les variations de l'erreur maximum, en fonction de l'angle d'engagement a sont déterminées; l'auteur prouve qu'en cas de courroies parallèles, le rapport le plus défavorable des forces tangentielles ne se présente pas à l'entraînement vertical.

L'auteur démontre encore l'importance de la résultante des forces de traction naissant dans les brins, ce qui permet d'expliquer certains phénomènes qui ne sauraient être décelés à l'aide des forces circonférentielles.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЭЙТЕЛЬВЕЙНА—ГРАСХОФА

B. SEKE

РЕЗЮМЕ

При расчете растягивающих усилий, возникающих в отдельных ветвях ремней, кроме коэффициента трения и дуги колеса, охваченного ремнем, обычно учитывают лишь действие центробежной силы.

Автор вместо простой экспоненциальной функции, действительной для условий напряжения невесомого ремня, с учетом собственного веса выводит общую зависимость, соответствующую действительным условиям, которая прежний случай рассматривает как частный случай.

Вычисляется, что при заданном угле a соприкасания дуги, при каком направлении слабой ветви ремня возникает наибольшая погрешность расчета и показано, что при перпендикулярном этому направлению расположении, ремень следует принимать невесомым, то есть в этом единственном положении теорема Эйтельвейна—Грасхофа справедлива с полной строгостью.

Далее показана максимальная расчетная погрешность для соприкасающихся дуг ремней с самым разнообразным углом раскрытия и указывается, что в случае параллельных ветвей ремней наиболее неблагоприятное условие напряжений имеет место не в случае отвесного привода.

Далее упоминается, что векторное сложение растягивающих усилий, возникающих в ветвях ремней достойно внимания, так как этим можно объяснить такие явления, которые не поддаются раскрытию при помощи фиктивного периферийного усилия.

METHOD OF SINGULARITIES FOR COMPUTING THE VELOCITY DISTRIBUTION IN A RADIAL IMPELLER

A. VERBA

DEPARTMENT OF HYDRAULIC MACHINES, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received May 24, 1960]

I. Introduction

The knowledge of flow conditions is indispensable for design engineers when projecting turbomachines with a prescribed output and of high efficiency.

In centrifugal pumps and ventilators, the impeller is one of the most important parts. Flow conditions in the impeller depend on a great number of parameters.

The task of measuring the pressure and velocity in an impeller during operation is very expensive and troublesome. With a view to the multitude of parameters, the solution of the problem in a pure empirical way seems to be rather hopeless.

The method in looking for a theoretic solution of the problem through some neglects and in checking empirically the results obtained, is obviously a more adequate way of study.

The first tentatives were made by supposing a two-dimensional flow of a frictionless and incompressible fluid in the impeller, and the blade contour was mapped by means of complex functions into a geometric figure with a known velocity distribution [1, 2].

Later on the tentatives comprised solutions sought for by the use of the EULER plane or spatial equations of motions [3].

Both methods proved lengthy and tiresome, and could not find their way into the engineering practice.

Nowadays, the adoption of the method of singularities, which proved satisfactory when calculating an isolated airfoil and a straight cascade, also succeeded for the case of rotating circular cascades.

The method of singularities for rotating circular cascades with finite thickness of blade was first applied by W. H. ISAY [4]. He gave an exact solution and did not apply those simplifying assumptions which in the case of the single airfoil [5, 9] and of the straight cascade [10, 14] resulted in a considerable reduction of the calculation labour, without impairing the exactitude to an undesirable measure.

The paper of GRUBER was the first to present a suitable method to be applied by design engineers [15]; then followed HOFFMEISTER [16] and KRÜGER [17] by publishing studies dealing with the same subject. All these publications assume an infinitely thin, swept back blade with a constant breadth and an incompressible fluid medium.

In the case of ventilators, the blade thickness is not of great importance. Thin blades are quite suitable for producing a good efficiency, not to speak of a rather inexpensive production process contrary to profiled blades. According to experiences the characteristic curves of a sheet blade and of a profiled one, both having the same camber line, are nearly identical. Although, the velocity distribution along the blade does not show the same similarity; the deviation is considerable on the leading edge only. Again in the case of ventilators this deviation is of no practical importance.

But in the case of centrifugal pumps the suction capacity is greatly dependent on velocity conditions on the leading edge.

So it seems to be desirable to develop a method for computing blades of finite thickness.

A method suitable for the calculation of the rotating circular cascade of blades of finite thickness for radial flow will be presented in the following. For a given impeller an endeavour was made to find the characteristic curve and the velocity distribution along the blade.

For the method applied in this paper it is assumed that

1. a frictionless and incompressible medium is flowing in a two-dimensional flow (constant blade width);
2. the swept back blades with a moderate thickness and moderate camber measured from the logarithmic spiral connecting the leading and the trailing edges;
3. the relative velocity field is stationary.

In order to solve the problem, we start on by distributing a vorticity and a source-sink system along the blade camber line. With a view to facilitate the calculation of the induced velocities, a conformal mapping is employed which transforms the circular cascade into a straight one, so the calculation is made in this new system. The results obtained will again be transformed into the original system of the circular cascade.

2. Symbols

i	imaginary unit
$z = r e^{i\varrho}$	complex number on the plane of the circular cascade
β	angle of the logarithmic spiral connecting the leading and the trailing blade edges
$\lambda = \frac{\pi}{2} - \beta$	SCHLICHTING's cascade angle
n	number of blades

r_1, r_2	radius of the entry circle and the exit circle, respectively
$\zeta = x + iy$	complex number on the plane of the straight cascade
x'	abscissa of the locus of elementary singularity
l	blade chord length
t	blade pitch
y_c	ordinate of the camber line
y_t	ordinate of the symmetrical airfoil
s_c	camber line arc length
$\tan \sigma$	slope of the camber line
$\tan \delta$	slope of the contour line of the symmetrical airfoil
φ	argumentum of the Glauert series
$c_m = u_m + i \cdot v_m$	meridional velocity
$c_k = u_k + i \cdot v_k$	GRUBER'S compensation velocity
ω	angular velocity
$\gamma(s_c)$	vorticity distribution on the camber line
$\gamma(x)$	vorticity distribution on the chord
$q(s_c)$	source-sink distribution on the camber line
$q(x)$	source-sink distribution on the chord
$v_{E\gamma} = \frac{\gamma(s_c)}{2}$	} velocities induced by the vorticity distribution on the camber line and by the source-sink distribution on the camber line
$u_{Eq} = \frac{q(s_c)}{2}$	
$c_G = (u_{G\gamma} + u_{Gq}) + i (v_{G\gamma} + v_{Gq})$	velocities induced by the remainder of cascade
$c_u = u_u + i v_u$	the correspondent of the peripheral velocity on the ζ plane
c_{u1}	the corresponding value of $r_1 \omega$ on the ζ plane
W_K	velocity along the contour
Γ_v	blade circulation
Γ_i	prerotation
H_{th}	theoretical head
Q	the volume of fluid pumped in the time unit
g	acceleration of gravity
b	impeller width
$\psi_{th} = \frac{2g H_{th}}{r_2^2 \omega^2}$	head coefficient
$\varphi_1 = \frac{Q}{2\pi r_1 b \omega}$	capacity coefficient
$A_0 = A_{00} + \varphi_1 A_{0\varphi}$	} coefficients of the GLAUERT series of the vorticity distribution
$A_1 = A_{10} + \varphi_1 A_{1\varphi}$	
$A_2 = A_{20} + \varphi_1 A_{2\varphi}$	
$B_0 = B_{00} + \varphi_1 B_{0\varphi}$	} coefficients of the GLAUERT series of the source-sink distribution
$B_2 = B_{20} + \varphi_1 B_{2\varphi}$	
$B_3 = B_{30} + \varphi_1 B_{3\varphi}$	
$g_{\gamma 0}, g_{\gamma 1}, g_{\gamma 2}, g_{\gamma 3}$	} SCHLICHTING'S coefficients of the velocities induced by the remainder of cascade
$f_{\gamma 0}, f_{\gamma 1}, f_{\gamma 2}, f_{\gamma 3}$	
$g_{q 0}, f_{q 0}$	
T_0, T_φ	} coefficients of the thickness equations
a_{t0}, a_{t1}, a_{t2}	
b_{t0}, b_{t2}, b_{t3}	
C_0, C_φ	} coefficients of the camberline equations
a_{c0}, a_{c1}, a_{c2}	
b_{c0}, b_{c2}, b_{c3}	
K_0, K_φ	} coefficients of the velocity distribution equations
a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}	
b_{k0}, b_{k2}, b_{k3}	
a, a_z	coefficients

Subscripts:

n	normal component of velocity
\tan	tangential component of velocity

a	absolute velocity
*	velocity transformed into the camber line
s	suction side
p	pressure side
z	quantity on the z plane
$\bar{}$	complex conjugate

Since the calculating operations are principally made in the straight cascade, the quantities in the ζ plane are not indicated by a special subscript. All the symbols without subscript refer to quantities in the ζ plane.

3. Systems of coordinates. Mapping of the circular cascade into a straight one

The system of coordinates in the z and ζ planes, and the respective symbols are illustrated in Fig. 1.

When mapping the circular cascade into a straight one, the following formula is used

$$\zeta = \frac{\sin \beta}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (\sin \beta - i \cos \beta) \ln \frac{z}{r_1} \quad (1)$$

It is obvious from the transformation function that the logarithmic spiral sections — having an obliquity β — between the leading and the trailing edge are transformed into straight line sections parallel to the x axis which are the blade chords having a unit length.

The cascade solidity is

$$\frac{l}{t} = \frac{n}{2\pi} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\sin \beta} \quad (2)$$

The interdependence of the two systems of coordinate-axes is represented by the following equations:

$$x = \frac{\sin^2 \beta}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\sin \beta \cos \beta}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \varrho \quad (3)$$

$$y = \frac{\sin^2 \beta}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \varrho - \frac{\sin \beta \cos \beta}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} \quad (4)$$

$$\varrho = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\tan \beta} x + y \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (5)$$

$$\frac{r}{r_1} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{\left(x - \frac{y}{\tan \beta} \right)} \quad (6)$$

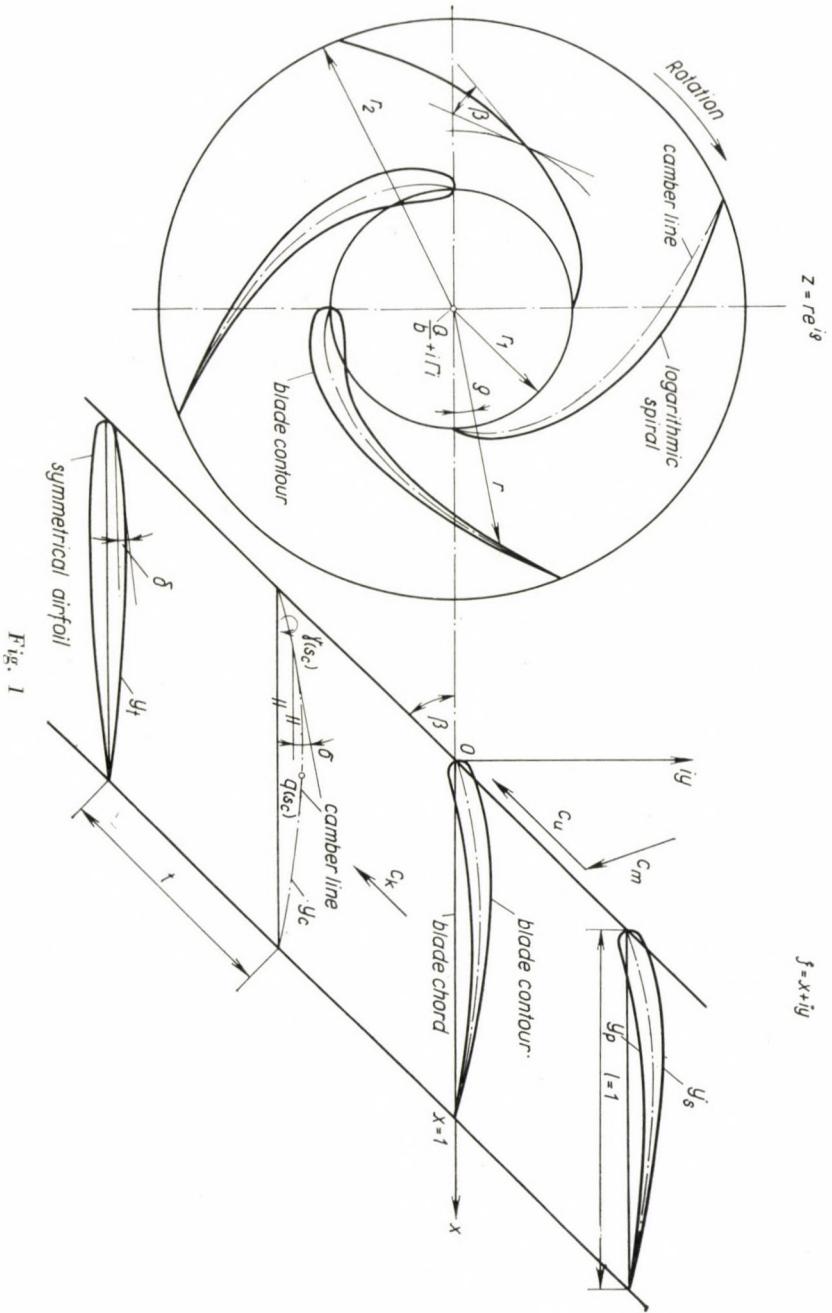


Fig. 1

The following two equations are necessary for transforming velocities:

$$\frac{dz}{dz} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\sin \beta} r e^{-i\left(\vartheta + \frac{\pi}{2} - \beta\right)} \quad (7)$$

$$\left| \frac{dz}{dz} \right| = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\sin \beta} r. \quad (8)$$

4. Singularities. Transforming of velocities

When calculating straight cascades, it is necessary to know the velocities on the camber line and on the blade contour, induced by $\gamma(s_c)$ vorticity distribution and by $q(s_c)$ source-sink distribution located on the camber lines of the blades.

After having removed a blade from the cascade, it is to be examined as a single airfoil. The remainder of the cascade as it shows after the examined blade had been removed will induce certain velocities. These velocities will also be examined separately.

Using the symbols in Fig. 2, it is obvious that by the elementary vortex $\gamma(s_c)ds_c$ located on a ds_c section of the camber line having an abscissa x , a velocity of $\pm \frac{\gamma(s_c)}{2}$ will be induced on the same camber line section ds_c . The velocity is parallel to the tangent of the camber line. The plus sign refers to the suction side and the minus sign to the pressure side.

The task of calculating the exact value of the velocity induced on the camber line point with the abscissa x , by the vortex distribution on other parts of the camber line, is rather tiresome, therefore, we shall rely on the following approximation:

We locate on the chord a vortex distribution, $\gamma(x)$, so that

$$\gamma(x) dx = \gamma(s_c) ds_c. \quad (9a)$$

In considering the relationship

$$\frac{dx}{ds_c} = \cos \sigma \quad (9b)$$

we find

$$\gamma(x) = \frac{\gamma(s_c)}{\cos \delta}. \quad (9)$$

It is assumed that the $v_{E\gamma}$ velocity in the y direction

$$v_{E\gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(x')}{x' - x} dx' \quad (10)$$

induced by the $\gamma(x)$ vortex distribution on the chord point x equals, in value and direction, the velocity induced at the camber line point with the abscissa x by the vortex $\gamma(s_c)$ located on the camber line. In equation (10), x' is the abscissa of the elementary vortex and x that of the locus examined.

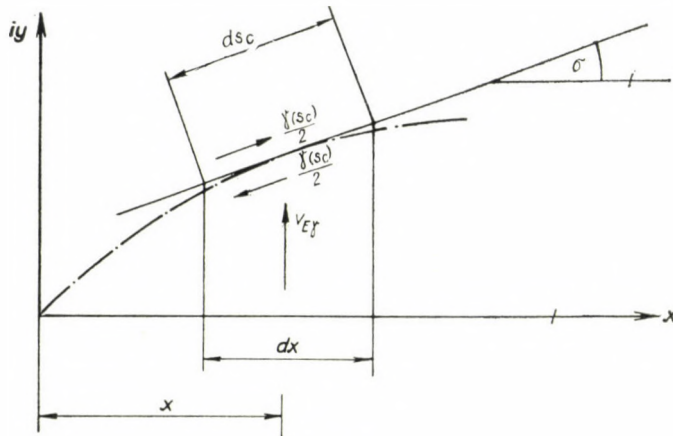


Fig. 2

In the following the singularities (vorticity and source-sink distributions) located on the camber line of the airfoil examined, will be called "proper" singularities.

In conformity with the precedings and by using equation (9), the following velocities will be induced at the point x of the camber line by the proper vortex distribution $\gamma(s_c)$:

a) velocity $\pm \frac{\gamma(x)}{2} \cos \sigma$ parallel to the tangent of the camber line;

the plus sign refers to the suction side, the minus to the pressure side.

b) velocity

$$v_{E\gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(x')}{x' - x} dx' \quad (10)$$

parallel to the y axis.

Now we shall define the source-sink distribution as expressed by

$$q(x) = \frac{q(s_c)}{\cos \sigma} \tag{11}$$

With the same assumptions as stated in what has been said above, the following velocities will be induced at the point x of the camber line by the proper source-sink distribution:

a) velocity $\frac{q(x)}{2} \cos \sigma$ normal to the camber line. The plus sign denotes

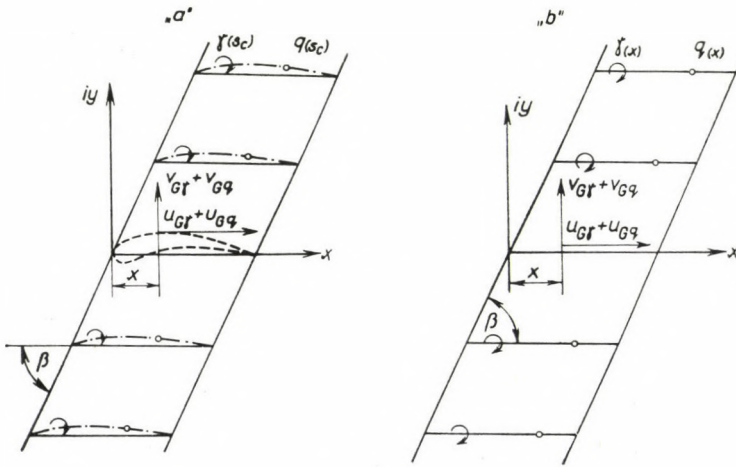


Fig. 3

a velocity conforming with the direction of the normal vector pointing away from the camber line. In order to find the meaning of the normal vector showing outwards, we shall substitute the camber line by a closed curve strictly adhering to the camber line, representing a slot.

b)
$$u_{Eq} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{q(x')}{x' - x} dx' \tag{12}$$

parallel to the x axis.

The calculation of the exact values of the velocities induced by the remainder of cascade is again a most lengthy and tiresome task; therefore, we shall use some approximations.

In Fig. 3 the remainder of cascade "a" is substituted by another remainder of cascade "b". The difference between these two cascades consists in that on the remainder of cascade type "a" there are the singularities $\gamma(s_c)$ and

$q(s_c)$ located on the camber line, whereas on the remainder of cascade type "b" the singularities $\gamma(x)$ and $q(x)$ are located on the chord.

The symbols for the velocities induced by the remainder of cascade "b" on the chord point x are

$$\begin{aligned} &(v_{G\gamma} + v_{Gq}) \text{ in the direction } y, \text{ and} \\ &(u_{G\gamma} + u_{Gq}) \text{ in the direction } x. \end{aligned}$$

It is assumed that the velocities induced by the remainder of cascade type "a" on the contour point with the abscissa value x of the removed blade are also equal to

$$(v_{G\gamma} + v_{Gq}) \text{ and } (u_{G\gamma} + u_{Gq})$$

in the direction y and x , respectively.

In this paper an endeavour is made to find the velocity distribution in a given impeller. The singularity distributions $\gamma(s_c)$ and $q(s_c)$ are still unknown; yet it is just this determination of unknown singularity distributions which constitutes the decisive step and leads to the solution of the problem.

These unknown distributions of singularities will be approximated by the GLAUERT [6] series, each one consisting of three members:

$$\gamma(x) = \frac{\gamma(s_c)}{\cos \sigma} = 2c_{u1} \left[A_0 \cotan \frac{\varphi}{2} + A_1 \sin \varphi + A_2 \sin 2\varphi \right] \quad (13)$$

$$q(x) = \frac{q(s_c)}{\cos \sigma} = 2c_{u1} \left[B_0 \left(\cotan \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi \right) + B_2 \sin 2\varphi + B_3 \sin 3\varphi \right] \quad (14)$$

where c_{u1} represents the corresponding value of the peripheral velocity $r_1\omega$ in the plane ζ . The constants of the GLAUERT series $A_0, A_1, A_2, B_0, B_2, B_3$ are still not known.

The relationship between x and φ is given by the equation set up by GLAUERT [6]

$$x = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi). \quad (15)$$

By inserting the equations (13) and (14) into the equations (10) and (12)

$$u_{Eq} = c_{u1} [B_0 (1 + 2 \cos \varphi) - B_2 \cos 2\varphi - B_3 \cos 3\varphi] \quad (16)$$

$$v_{E\gamma} = c_{u1} [-A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi]. \quad (17)$$

In order to calculate the velocities induced by the remainder of cascade, equations set up by PISTOLESI [10] and SCHOLZ [12] will be used for the

remainder of cascade type "b" (Fig. 2):

$$u_{G\gamma} - iv_{Gq} = \frac{i}{2} \frac{l}{t} \int_{x'=0}^1 \gamma(x') \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} \operatorname{cth} \left(\pi \frac{x-x'}{t/l} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{t/l}{x-x'} \right] dx' \quad (18)$$

$$u_{Gq} - iv_{Gq} = \frac{1}{2} \frac{l}{t} \int_{x'=0}^1 q(x') \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} \operatorname{cth} \left(\pi \frac{x-x'}{t/l} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{t/l}{x-x'} \right] dx' \quad (19)$$

By inserting the equations (13) and (14) into equations (18) and (19), expressions are obtained which can be numerically integrated. This operation was made by SCHLICHTING [13], who derived the following relationships:

$$\left. \begin{aligned} u_{G\gamma} &= c_{u1} [A_0 g_{\gamma 0} + A_1 g_{\gamma 1} + A_2 g_{\gamma 2}] \\ v_{G\gamma} &= c_{u1} [A_0 f_{\gamma 0} + A_1 f_{\gamma 1} + A_2 f_{\gamma 2}] \\ u_{Gq} &= c_{u1} [B_0 g_{q0} - B_2 f_{\gamma 2} - B_3 f_{\gamma 3}] \\ v_{Gq} &= c_{u1} [B_0 f_{q0} + B_2 g_{\gamma 2} + B_3 g_{\gamma 3}] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

The values $g_{\gamma 0}$, $g_{\gamma 1}$, $g_{\gamma 2}$, $g_{\gamma 3}$, g_{q0} , $f_{\gamma 0}$, $f_{\gamma 1}$, $f_{\gamma 2}$, $f_{\gamma 3}$ and f_{q0} are given in SCHLICHTING's tables (see the Appendix in paper [13]) as functions of λ , l/t and x . SCHLICHTING used the symbol λ for the stagger angle. Between λ and β the following relation exists

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \beta$$

As we shall calculate in the straight cascade, the velocities in the z plane are to be transformed into the ζ plane, by using the known formula

$$c = c_z \frac{\overline{dz}}{d\zeta} \quad (22)$$

where the symbols c and c_z denote complex numbers corresponding to the velocities in the ζ plane and z plane, respectively.

It is suitable for this purpose to relate each velocity to a velocity which is constant in the course of the calculation. As it was already obvious when setting up the formulae determining the induced velocities that

$$c_{u1} = r_1 \omega \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\sin \beta} r_1^2 \omega \quad (23)$$

has been chosen as the basic constant value.

The following velocities have to be transformed from the z to the ζ plane:

a) *meridional velocity*. In order to ensure the prerotation and the fluid delivery flowing through the impeller, a source type vortex $\frac{Q}{b} + i\Gamma_i$ is to be located into the origin of the z plane. The velocity induced by this source type vortex at the point z will be c_{mz} , and its corresponding value in the ζ plane will be c_m . Q denotes the fluid volume delivered in the time unit, and Γ_i the prerotation.

$$\bar{c}_{mz} = \frac{\frac{Q}{b} + i\Gamma_i}{2\pi z} = \left[\frac{Q}{2\pi b r} + i \frac{\Gamma_i}{2\pi r} \right] e^{-i\varrho} \quad (24a)$$

$$c_{mz} = \left[\frac{Q}{2\pi b r} - i \frac{\Gamma_i}{2\pi r} \right] e^{i\varrho}. \quad (24)$$

By definition, the dimensionless capacity coefficient as the characteristic of the pump delivery is

$$\varphi_1 = \frac{Q}{2\pi r_1^2 \omega b}. \quad (25)$$

By using equations (2), (22), (23), (24), (25) and transposing:

$$\left. \begin{aligned} c_m &= u_m + i v_m = c_{u1} \left[\varphi_1 - i \frac{\Gamma_i}{n t c_{u1}} \right] e^{-i \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)} \\ u_m &= c_{u1} \left[\varphi_1 \sin \beta - \frac{\Gamma_i}{n t c_{u1}} \cos \beta \right] \\ v_m &= c_{u1} \left[-\varphi_1 \cos \beta - \frac{\Gamma_i}{n t c_{u1}} \sin \beta \right] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

b) *peripheral velocity*. If the corresponding value of the peripheral velocity in the ζ plane is denoted c_u , by using equations (6), (7), (22) and (23) and after transposing:

$$\left. \begin{aligned} c_u &= u_u + iv_u = -c_{u1} e^{i\beta} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left(x - \frac{y}{\tan \beta} \right) \\ u_u &= -c_{u1} \cos \beta \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left(x - \frac{y}{\tan \beta} \right) \\ v_u &= -c_{u1} \sin \beta \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left(x - \frac{y}{\tan \beta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

c) GRUBER's *compensation velocity*. The velocities induced by the singularities located on the camber lines of the circular cascade are to be transformed into the plane by equation (22). It is proved [18] that the corresponding description of this flow pattern in the ζ plane is equal to the sum of the following two flow patterns:

1. a flow pattern of the singularities with the same intensities located in the corresponding points of the ζ plane;
2. a field of the compensation velocity c_k with a constant value and an unchanged direction.

GRUBER [15] was the first to apply the compensation velocity, wherefor it will be referred to as GRUBER's compensation velocity.

In this paper, the singularities are located not in the circular cascade, but in the ζ plane. Therefore, instead of transforming the velocities induced in the circular cascade, the induced velocity field in the ζ plane of singularities will be calculated and the following values of GRUBER's compensation velocity will be superposed:

$$\left. \begin{aligned} c_k &= u_k + iv_k = -\frac{\Gamma_v}{2t} e^{i\beta} \\ u_k &= -c_{u1} \frac{\pi}{2} \frac{l}{t} \cos \beta \left[A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right] \\ v_k &= -c_{u1} \frac{\pi}{2} \frac{l}{t} \sin \beta \left[A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

where Γ_v denotes the blade circulation. By using equations (9) and (13) it may be written:

$$\Gamma_v = \int_0^1 \gamma(x) dx = c_{u1} \pi \left[A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right]. \quad (29)$$

5. Kinematic conditions

The singularity distributions $\gamma(s_c)$ and $q(s_c)$ located on the camber line, will be determined on the condition that the blade should have a streamlined contour in the relative flow field of the rotating impeller. According to Fig. 4 this condition is obviously satisfied by the equation

$$c_{an} = c_{un} \quad (30)$$

where c_{an} and c_{un} denote the component normal to the blade contour of the absolute and the peripheral velocity, respectively.

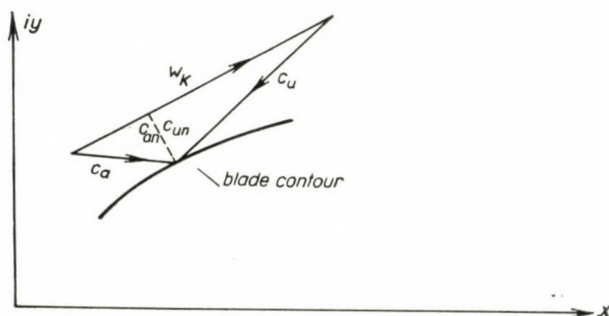


Fig. 4

The peripheral velocity is known, and so is its component c_{un} when the contour is given. Consequently, according to equation (30) the values of c_{an} along the blade contour are known as well.

Therefore, when dealing with blades in the ζ plane we have to establish a distribution of singularities located on the camber line that will induce velocities on the blade contour which, with the compensation velocity c_k and the meridional velocity c_m , result in an absolute velocity field with a normal component that should be equal to c_{un} .

Let the sign c_{EK} be used to denote the velocity induced in the contour by the proper singularities, and the subscript n to indicate the velocity component normal to the blade contour. The normal component pointing outwards is positive. The sign c_G denotes the velocity induced by the remainder of cascade. With respect to equation (30)

$$c_{an} = c_{EK_n} + c_{kn} + c_{mn} + c_{G_n} = c_{un} \quad (31a)$$

wherefrom

$$c_{EK_n} = c_{un} - c_{mn} - c_{kn} - c_{G_n} \quad (31)$$

The velocities induced by the proper singularities are only known on the camber line. Therefore, RIEGELS' approximative transformation [8] through which the blade contour is mapped onto a slot will be applied.

In RIEGELS' paper [8], the contour of a symmetrical airfoil is mapped onto a slot attached to the chord, and it is assumed that the corresponding points have identical abscissa values. RIEGELS pointed out that the errors caused by this supposition are negligible in the case of a narrow airfoil.

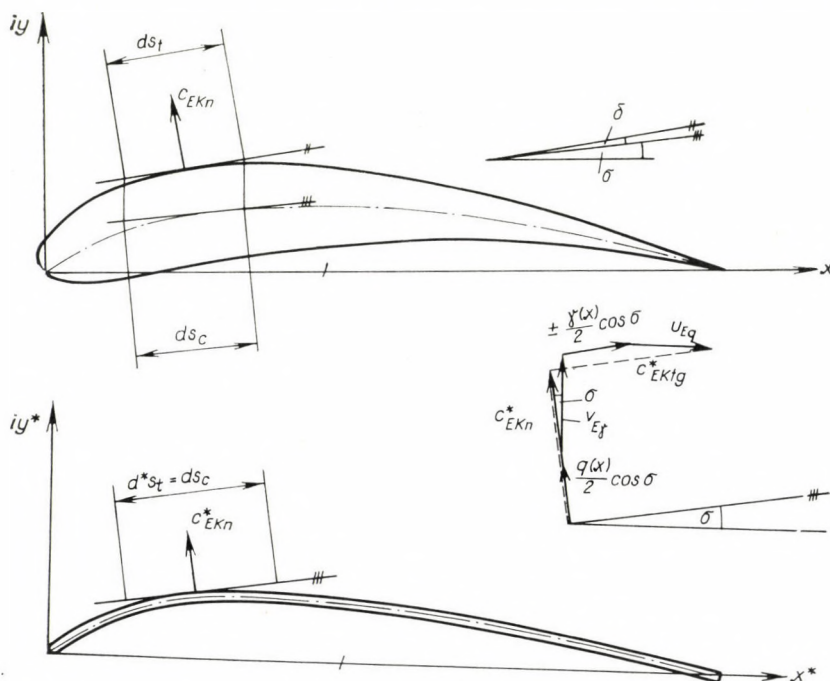


Fig. 5

In Fig. 5 the transformed quantities and the new coordinate system are indicated by an asterisk. When transforming, the contour points are mapped onto the camber line points with identical abscissa values. The velocity components normal and tangential to the contour are mapped onto velocity components, normal and tangential to the camber line. The value of the velocities is given by the equation

$$c^* = \frac{c}{\cos \delta} \quad (32)$$

By using equation (32)

$$c^*_{EK_n} = \frac{c_{EK_n}}{\cos \delta} \quad (33)$$

As can be seen in Chapter 4, the velocities induced by the proper singularities on the camber line are the following:

a) parallel to the tangent of the camber line: $\pm \frac{\gamma(x)}{2} \cos \sigma$

b) normal to the camber line: $\frac{q(x)}{2} \cos \sigma$

c) parallel to the x axis: u_{Eq}

d) parallel to the y axis: $v_{E\gamma}$.

In these expressions as well as in the following text, the upper sign of the two alternatives refers to the suction side, and the lower one refers to the pressure side.

With reference to the velocity diagram in Fig. 5, we obtain the normal component of the velocities induced by the proper singularities as follows:

$$c_{EK_n}^* = \frac{q(x)}{2} \cos \sigma \pm v_{E\gamma} \cos \sigma \mp u_{Eq} \sin \sigma \quad (34)$$

By using the equations (31), (33) and (34) with a reverse transformation onto the contour

$$\left(\frac{q(x)}{2} \pm v_{E\gamma} \right) \cos \sigma \cdot \cos \delta \mp u_{Eq} \sin \sigma \cos \delta = c_{un} - c_{mn} - c_{kn} - c_{Gn} \quad (35)$$

With respect to expressions (14), (16), (17), (20), (26), (27) and (28), and assuming a given value of φ_1 , the equation (35) comprises not more than six unknown quantities, namely the six GLAUERT coefficients. By setting up equation (35) separately for six singular points of the contour, one will have six equations with six unknown quantities. Prior to setting up these equations, let the basic equation (35) be slightly modified in the following manner:

To be short, the contour points, for which the concrete equations according to (35) should be written, are to be referred to as assigned points. These will be chosen on the condition that 3 points on the suction side and 3 points on the pressure side should have, by pairs, the same x abscissa value. From addition and subtraction, respectively, of the two equations, referring to the assigned points with the same abscissa value, two equations will result determining the airfoil thickness and the camber line, respectively. For distinction's sake, subscript s will be used to indicate quantities on the suction side, and subscript p to indicate those on the pressure side. The thickness equation is then

$$q(x) \cos \sigma \cos \delta = (c_{uns} + c_{unp}) - (c_{mns} + c_{mnp}) - (c_{kns} + c_{knp}) - (c_{Gns} + c_{Gnp}) \quad (36)$$

and the camber line equation

$$\begin{aligned} & (v_{E\gamma} \cos \sigma - u_{E\dot{q}} \sin \sigma) 2 \cos \delta = \\ & = (c_{uns} - c_{unp}) + (c_{mnp} - c_{mns}) + (c_{knp} - c_{kns}) + (c_{Gnp} - c_{Gns}). \end{aligned} \quad (37)$$

Prior to substituting into the equations (36) and (37), it is necessary to calculate the quantities on the right side of the equations.

The angle between the tangent to the contour of blade and the x axis is equal to $\sigma \pm \delta$. On Fig. 6, represented are a velocity u in the x direction, and a velocity v in the y direction, both decomposed in components normal

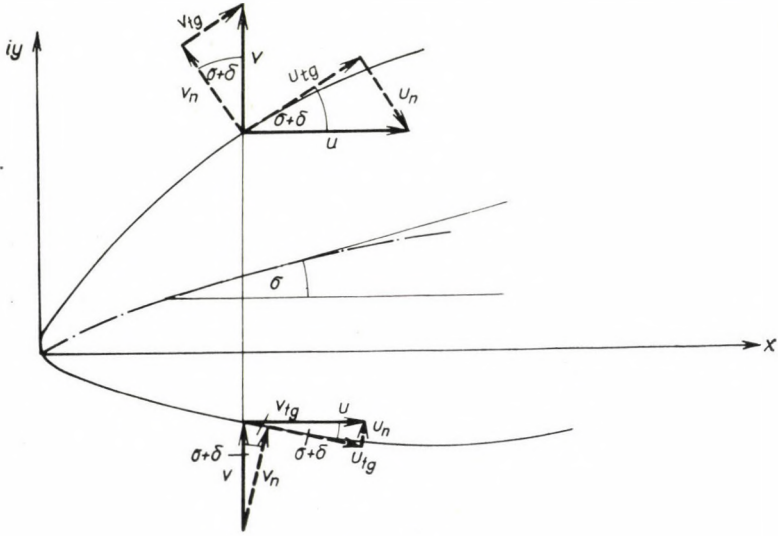


Fig. 6

and tangential to the contour. The relationship is characterised by the equations:

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \mp u \sin(\sigma \pm \delta) \\ v_n &= \pm v \cos(\sigma \pm \delta) \\ u_{tan} &= \cos(\sigma \pm \delta) \\ v_{tan} &= u v \sin(\sigma \pm \delta) \end{aligned} \right\}. \quad (38)$$

As has been stated, the normal vector pointing outwards is positive. Further, the tangential vector pointing towards the trailing edge is positive.

From the contour ordinates y_s (suction side) and y_p (pressure side) one can determine the ordinates y_c (of the camber line) and y_t (of the symmetrical airfoil) by using the following equations:

$$\left. \begin{aligned} y_s &= y_c + y_t \\ y_p &= y_c - y_t \end{aligned} \right\}. \quad (39)$$

The determination of the camber line ordinates by using equations (39) represents a certain approach to the camber line that connects the centres of the inscribed circles. In the case of slightly cambered airfoils this approach may be considered as the most appropriate.

After rearrangement of terms and by using the equations (27), (38) and (39), one can write:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_{unp} + c_{uns}}{\cos \sigma \cos \delta} &= c_{u1} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left(x - \frac{y_c}{\tan \beta} \right) \left\{ \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \frac{y_t}{\tan \beta} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-2} \frac{y_t}{\tan \beta} \right] [\cos \beta + \sin \beta \tan \sigma] \tan \delta + \right. \\ &+ \left. \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \frac{y_t}{\tan \beta} - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-2} \frac{y_t}{\tan \beta} \right] [\sin \beta - \cos \beta \tan \sigma] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_{unp} - c_{uns}}{\cos \sigma \cos \delta} &= c_{u1} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left(x - \frac{y_c}{\tan \beta} \right) \left\{ \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \frac{y_t}{\tan \beta} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-2} \frac{y_t}{\tan \beta} \right] [\sin \beta - \cos \beta \tan \sigma] + \right. \\ &+ \left. \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \frac{y_t}{\tan \beta} - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-2} \frac{y_t}{\tan \beta} \right] [\cos \beta + \sin \beta \tan \sigma] \tan \delta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Further, by using equations (26) and (38):

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_{mnp} + c_{mns}}{\cos \sigma \cos \delta} &= 2c_{u1} \tan \delta \left\{ \varphi_1 [\cos \beta \tan \sigma - \sin \beta] + \right. \\ &+ \left. \frac{\Gamma_i}{n t c_{u1}} [\cos \beta + \sin \beta \tan \sigma] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_{mnp} - c_{mns}}{\cos \sigma \cos \delta} &= 2c_{u1} \left\{ \varphi_1 [\sin \beta \tan \sigma + \cos \beta] + \right. \\ &+ \left. \frac{\Gamma_i}{n t c_{u1}} [\sin \beta - \cos \beta \tan \sigma] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

By using equations (28) and (38):

$$\frac{c_{knp} + c_{kns}}{\cos \sigma \cos \delta} = c_{u1} \pi \frac{l}{t} \left[A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right] [\cos \beta + \sin \beta \tan \sigma] \tan \delta \quad (44)$$

$$\frac{c_{knp} - c_{kns}}{\cos \sigma \cos \delta} = c_{u1} \pi \frac{l}{t} \left[A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right] [\sin \beta - \cos \beta \tan \sigma] \cdot \quad (45)$$

By using equations (38):

$$\frac{c_{Gnp} + c_{Gns}}{\cos \delta \cos \sigma} = 2c_{u1} \tan \delta \left[-\frac{u_{G\gamma} + u_{Gq}}{c_{u1}} - \frac{v_{G\gamma} + v_{Gq}}{c_{u1}} \tan \sigma \right] \quad (46)$$

$$\frac{c_{Gnp} - c_{Gns}}{\cos \delta \cos \sigma} = 2c_{u1} \left[\frac{u_{G\gamma} + u_{Gq}}{c_{u1}} \tan \sigma - \frac{v_{G\gamma} + v_{Gq}}{c_{u1}} \right] \cdot \quad (47)$$

6. Thickness equations

The following symbols will be used:

$$T_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left(x - \frac{y_e}{\tan \beta} \right) \left\{ \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \frac{y_t}{\tan \beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-2} \frac{y_t}{\tan \beta} \right] [\cos \beta + \sin \beta \tan \sigma] \tan \delta + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \frac{y_t}{\tan \beta} - \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-2} \frac{y_t}{\tan \beta} \right] [\sin \beta - \cos \beta \tan \sigma] \right\} - \\ - \frac{\Gamma_i}{n t c_{u1}} [\cos \beta + \sin \beta \tan \sigma] \\ T_\varphi = [\sin \beta - \cos \beta \tan \sigma] \tan \delta \quad (48)$$

$$a_{t0} = \left[g_{\gamma 0} + f_{\gamma 0} \tan \sigma - \frac{\pi}{2} \frac{l}{t} (\cos \beta + \sin \beta \tan \sigma) \right] \tan \delta \\ a_{t1} = \left[g_{\gamma 1} + f_{\gamma 1} \tan \sigma - \frac{\pi}{4} \frac{l}{t} (\cos \beta + \sin \beta \tan \sigma) \right] \tan \delta \\ a_{t2} = [g_{\gamma 2} + f_{\gamma 2} \tan \sigma] \tan \delta \\ b_{t0} = [g_{\gamma 0} + f_{\gamma 0} \tan \sigma] \tan \delta - \left[\cotan \frac{\varphi}{2} - 2 \sin \varphi \right] \\ b_{t2} = [g_{\gamma 2} \tan \sigma - f_{\gamma 2}] \tan \delta - \sin 2 \varphi \\ b_{t3} = [g_{\gamma 3} \tan \sigma - f_{\gamma 3}] \tan \delta - \sin 3 \varphi \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= A_{00} + \varphi_1 A_{0\varphi} & B_0 &= B_{00} + \varphi_1 B_{0\varphi} \\ A_1 &= A_{10} + \varphi_1 A_{1\varphi} & B_2 &= B_{20} + \varphi_1 B_{2\varphi} \\ A_2 &= A_{20} + \varphi_1 A_{2\varphi} & B_3 &= B_{30} + \varphi_1 B_{3\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Let the equations (14), (20), (40), (42), (44), (46), (48), (49) and (50) be inserted into the thickness equation (36). Taking into consideration that the equation will remain true at any given value of φ_1 , we can separate the members that are, and the other ones that are not functions of φ_1 , and write two separate equations:

$$\left. \begin{aligned} T_0 + a_{i0} A_{00} + a_{i1} A_{10} + a_{i2} A_{20} + b_{i0} B_{00} + b_{i2} B_{20} + b_{i3} B_{30} &= 0 \\ T_\varphi + a_{i0} A_{0\varphi} + a_{i1} A_{1\varphi} + a_{i2} A_{2\varphi} + b_{i0} B_{0\varphi} + & \\ + b_{i2} B_{2\varphi} + b_{i3} B_{3\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

7. Camber line equations

The following symbols are used:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left(x - \frac{y_c}{\tan \beta} \right) \left\{ \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \frac{y_t}{\tan \beta} - \right. \\ &- \left. \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-2} \frac{y_t}{\tan \beta} \right\} [\cos \beta + \sin \beta \tan \sigma] \tan \delta - \\ &- \left\{ \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \frac{y_t}{\tan \beta} + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{-2} \frac{y_t}{\tan \beta} \right\} [\cos \beta \tan \sigma - \sin \beta] \left\{ - \right. \\ &- \left. \frac{\Gamma_i}{n t c_{u1}} [\cos \beta \tan \sigma - \sin \beta] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$$C_\varphi = - [\cos \beta + \sin \beta \tan \sigma] \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{c0} &= f_{\gamma 0} - 1 - g_{\gamma 0} \tan \sigma + \frac{\pi}{2} \frac{l}{t} [\cos \beta \tan \sigma - \sin \beta] \\ a_{c1} &= f_{\gamma 1} - g_{\gamma 1} \tan \sigma + \cos \varphi + \frac{\pi}{4} \frac{l}{t} [\cos \beta \tan \sigma - \sin \beta] \\ a_{c2} &= f_{\gamma 2} - g_{\gamma 2} \tan \sigma + \cos 2\varphi \\ b_{c0} &= f_{\varphi 0} - [(1 + 2 \cos \varphi) + g_{\varphi 0}] \tan \sigma \\ b_{c2} &= g_{\varphi 2} + [f_{\varphi 2} + \cos 2\varphi] \tan \sigma \\ b_{c3} &= g_{\varphi 3} + [f_{\varphi 3} + \cos 3\varphi] \tan \sigma \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

The equations (16), (17), (20), (26), (28), (41), (50), (52), (53) and (54) will be inserted into the camber line equation (37). By separating the members being functions of φ_1 from those that are not, the following two equations will be obtained:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= a_{c0} A_{00} + a_{c1} A_{10} + a_{c2} A_{20} + b_{c0} B_{00} + b_{c2} B_{20} + b_{c3} B_{30} \\ C_{\varphi} &= a_{c0} A_{0\varphi} + a_{c1} A_{1\varphi} + a_{c2} A_{2\varphi} + b_{c0} B_{0\varphi} + b_{c2} B_{2\varphi} + b_{c3} B_{3\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

8. Determination of the GLAUERT coefficients

For the abscissa values of the assigned points one may choose, in the same way as SCHLICHTING did, the values resulting from the theorem of the three-quarter chord. These values are

$$x_1 = \frac{3}{12}; \quad x_2 = \frac{7}{12}; \quad x_3 = \frac{11}{12}. \quad (56)$$

Let equations (51) and (55) be written with reference to the points having abscissa values according to (56) located at the suction side and on the pressure side. In this way, two times six equations are obtained which comprise the constants $A_{00}, A_{10}, A_{20}, B_{00}, B_{20}, B_{30}$ and $A_{0\varphi}, A_{1\varphi}, A_{2\varphi}, B_{0\varphi}, B_{2\varphi}, B_{3\varphi}$ as unknown quantities. By solving these equations through combining them with the equations (50), the values of the GLAUERT coefficients to any given value of φ_1 are obtained.

With the resulting values of the GLAUERT coefficients and by using equations (9), (11), (13), (14) and (29), one may find the vorticity distribution and the source-sink distribution along the blade, and the circulation about the blade.

9. Calculation of theoretical characteristic curve and of velocity distribution

For radial flow impellers (e.g. [19]):

$$H_{th} = \frac{\omega n \Gamma_v}{2\pi g} \quad (57)$$

$$\psi_{th} = \frac{2g H_{th}}{r_2^2 \omega^2} = \frac{n \Gamma_v}{\pi \omega r_2^2}. \quad (58)$$

By inserting equations (23), (29) and (50) into equation (58),

$$\begin{aligned} \psi_{th} &= n \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\sin \beta} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \left[A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right] = \\ &= n \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\sin \beta} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \left[A_{00} + \frac{1}{2} A_{10} + \varphi_1 \left(A_{0\varphi} + \frac{1}{2} A_{1\varphi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

One may find the velocity W_K along the contour by forming the algebraic sum of all the components parallel to the contour tangent; namely, those of the meridional velocity, the compensation velocity, the peripheral velocity, furthermore, of the velocities induced by the remainder of cascade, and of those induced by the proper singularities in the following manner:

$$W_K = c_{mtan} + c_{ktan} + c_{Gtan} + c_{EKtan} - c_{utan}. \quad (60)$$

When calculating the five members of the right side of equation (60) one by one, the first, the second, the third and the fifth ones can be calculated from expressions (20), (26), (27) and (28) by using the relationship given in the system of equations (38).

Again, in order to determine the tangential component of the velocity induced by the proper singularities on the contour, it is necessary to transform the tangential velocity induced on the camber line c_{EKtan}^* into the contour, as follows:

$$c_{EKtan} = c_{EKtan}^* \cos \delta \quad (61)$$

where the relation exists:

$$c_{EKtan}^* = \pm \frac{\gamma(x)}{2} \cos \sigma + u_{Eq} \cos \sigma + v_{E\gamma} \sin \sigma. \quad (62)$$

Using the following symbols:

$$K_\varphi = \sin \beta \cos (\sigma \pm \delta) - \cos \beta \sin (\sigma \pm \delta) \quad (63)$$

$$K_0 = \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left(x - \frac{y_0 \pm y_t}{\tan \beta} \right) - \frac{\Gamma_i}{n t c_{u1}} \right] [\cos \beta \cos (\sigma \pm \delta) + \sin \beta \sin (\sigma \pm \delta)] \quad (64)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_{k0} &= \left[g_{\gamma 0} - \frac{\pi}{2} \frac{l}{t} \cos \beta \right] \cos (\sigma \pm \delta) + \left[f_{\gamma 0} - \frac{\pi}{2} \frac{l}{t} \sin \beta \right] \sin (\sigma \pm \delta) - \\
 &\quad - \sin \sigma \cos \delta \pm \cotan \frac{\varphi}{2} \cos \sigma \cos \delta \\
 a_{k1} &= \left[g_{\gamma 1} - \frac{\pi}{4} \frac{l}{t} \cos \beta \right] \cos (\sigma \pm \delta) + \left[f_{\gamma 1} - \frac{\pi}{4} \frac{l}{t} \sin \beta \right] \sin (\sigma \pm \delta) + \\
 &\quad + \cos \varphi \sin \sigma \cos \delta \pm \sin \varphi \cos \sigma \cos \delta \\
 a_{k2} &= g_{\gamma 2} \cos (\sigma \pm \delta) + f_{\gamma 2} \sin (\sigma \pm \delta) + \cos 2 \varphi \sin \sigma \cos \delta \pm \sin 2 \varphi \cos \sigma \cos \delta \\
 b_{k0} &= g_{q0} \cos (\sigma \pm \delta) + f_{q0} \sin (\sigma \pm \delta) + (1 + 2 \cos \varphi) \cos \sigma \cos \delta \\
 b_{k2} &= g_{\gamma 2} \sin (\sigma \pm \delta) - f_{\gamma 2} \cos (\sigma \pm \delta) - \cos 2 \varphi \cos \sigma \cos \delta \\
 b_{k3} &= g_{\gamma 3} \sin (\sigma \pm \delta) - f_{\gamma 3} \cos (\sigma \pm \delta) - \cos 3 \varphi \cos \sigma \cos \delta .
 \end{aligned} \right\} (65)$$

In the last member of the equation for a_{k0} we find the product $\cotan \frac{\varphi}{2} \cos \delta$. On the locus $x = 0$ the value of this expression can be calcu-

lated only by a limiting process, because if $x \rightarrow 0$, then $\cotan \frac{\varphi}{2} \rightarrow \infty$

$$\cos \delta \rightarrow 0$$

By using equation (15), it can be written:

$$\cotan \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{x}} .$$

When the function $y = f(x)$ describing the symmetrical airfoil tends — in the vicinity of the locus $x = 0$ — to 0 as the function $a\sqrt{x}$, it can be written

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cotan \frac{\varphi}{2} \cos \delta = \frac{2}{a} .$$

If a symmetrical airfoil that has been drawn over a logarithmic spiral in the circular cascade, in the vicinity of the nose, has a character similar to that of the curve $a_z\sqrt{x}$ then it can be proved that the contour line mapped onto the plane ζ by means of equation (1) will tend to zero in the vicinity of the locus $x = 0$ according to the function

$$y = \sqrt{\frac{r_2 - 1}{\frac{r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}} a_z \sqrt{x} = a \sqrt{x} .$$

From all the aforementioned, the velocity along the contour in the plane ζ is:

$$W_K = c_{u1} [K_0 + a_{k0} A_{00} + a_{k1} A_{10} + a_{k2} A_{20} + b_{k0} B_{00} + b_{k2} B_{20} + b_{k3} B_{30} + \\ + \varphi_1 (K_\varphi + a_{k0} A_{0\varphi} + a_{k1} A_{1\varphi} + a_{k2} A_{2\varphi} + b_{k0} B_{0\varphi} + b_{k2} B_{2\varphi} + b_{k3} B_{3\varphi})] \quad (66)$$

and by using the equation (22), the contour velocity in the circular cascade is

$$W_{Kz} = W_K \frac{\sin \beta}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r} \quad (67)$$

This scheme of calculation, based on the method of singularities is suitable for determining the theoretical characteristic curve of an impeller with entirely radial flow and with blades of finite thickness and for finding the velocity distribution thereupon.

10. Acknowledgements

Author wishes to express his thanks to Prof. J. GRUBER for hints and encouragements given during long years, and to Mr. Z. BOGNAR for having revised this paper and controlled the mathematical analysis and deduction.

REFERENCES

1. SPANNHAKE, W.: Anwendung der konformen Abbildung auf die Berechnung von Strömungen in Kreisrädern. ZAMM, 5 (1925) S. 481—484.
2. SÖRENSEN, E.: Potentialströmungen durch rotierende Kreisräder. ZAMM, 7 (1927) S. 89—106.
3. WU, C. H.: A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial, Radial and Mixed-Flow Types. (Trans. ASME, 1952. Nov. pp. 1363—1380.)
4. ISAY, W. H.: Beitrag zur Potentialströmung durch radiale Schaufelgitter. Ing. Arch. 22 (1954) S. 203—210.
5. BIRNBAUM, W.: Die tragende Fläche als Hilfsmittel zur Berechnung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. ZAMM, 3 (1923) S. 290—297.
6. GLAUERT, H.: Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie (Berlin, 1929).
7. ALLEN, H. J.: General Theory of Airfoil Sections Having Arbitrary Shape of Pressure Distribution (NACA T. R. Nr. 833. Washington, 1945).
8. RIEGELS, F.: Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen. Ing. Arch. 16 (1948) S. 373—376; 17 (1949) S. 94—106, und 18 (1950) S. 329.
9. TRUCKENBRODT, E.: Ergänzungen zu F. Riegels: Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen. Ing. Arch. 18 (1950) S. 324—328.
- TRUCKENBRODT, E.: Die Berechnung der Profilform bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung. Ing. Arch. 19 (1951) S. 365—377.
10. PISTOLESI, E.: Sul calcolo dei schiere infinite di ali sottili. Aerotechnica. 17 (1937) 484—506.
11. SCHILHANSL, M. J.: A Simple Approach to an Approximative Two-Dimensional Cascade Theory (Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, Dec. 1958. pp. 607—612).
12. SCHOLZ, N.: Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern (VDI-Forschungsheft. 442. 1954).

13. SCHLICHTING, H.: Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter (VDI-Forschungsheft. 447. 1955).
14. MELLOR: An Analysis of Axial Compressor Cascade Aerodynamics (Trans. ASME, Series D. Journal of Basic Engineering, 1959. Sept. pp. 362—386).
15. GRUBER, J.: Die Konstruktion von Schaufelgittern mit rückwärts gekrümmter Beschauflung (Periodica Polytechnica. Engineering. Maschinen- und Bauwesen. 1 (1957) 43—49).
16. HOFFMEISTER, M.: Entwicklung von radialen Laufschaufeln unter Benutzung des Singularitätsverfahrens. (Maschinenbautechnik. Band 8, 1959. S. 77—83.)
17. KRÜGER, H.: Ein Verfahren zur Druckverteilungsrechnung an geraden und radialen Schaufelgittern. (Ing. Arch. Band 26, 1958. S. 242—267.)
18. FÜZY, O.: A kompenzáló sebesség szükségessége logaritmusos leképzésnél (Necessity of Compensation Velocity in Logarithmic Mapping). Manuscript.
19. FÜZY, O.: Vízgépek (Hydraulic Machines). Tankönyvkiadó, Budapest, 1947.

SUMMARY

Author elaborated a method for computing the radial pump impeller with constant blade width. Assumed are an incompressible and frictionless fluid medium and a stationary relative flow. By this method, the theoretical characteristic curve, the pressure distribution along the blade and the theoretic suction head can be calculated for a given impeller and for any chosen quantity delivered.

To this purpose, author relies upon the method of singularities. The vorticity and the source-sink distributions on the camber line are approached by GLAUERT's series consisting of three members. The kinematic conditions of the blade contour are established at three various points on the suction side and a further three on the pressure side, chosen according to the theorem of the three-quarter chord length. In this way, a system of six non-homogenous linear equations, with six unknown quantities, can be obtained for GLAUERT's six coefficients. These equations consist of members some of which are, and others are not functions of the capacity coefficient φ_1 . As this system of equations should be true for any value of φ_1 it can be divided into two new systems. The GLAUERT's coefficients once stated, the vorticity and the source-sink and consequently the theoretical characteristic curve, the pressure distribution along the blade and the theoretical suction head can be calculated.

When establishing the kinematic conditions, it is necessary to know the velocities induced by the vorticity and the source-sink distributions located on the camber lines of the airfoils in the circular cascade. Because of the difficulties arising in the course of computing operations in the circular cascade, a transformation is carried out by conform mapping of the latter into a straight one; the calculation is then made in the new straight system, and afterwards the results obtained are re-transformed into the circular cascade.

BERECHNUNG DER GESCHWINDIGKEITSVERTEILUNG DES RADIALEN LAUFRADES UNTER BENUTZUNG DES SINGULARITÄTENVERFAHRENS

A. VERBA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser entwickelt eine Berechnungsmethode für Kreiselpumpen mit Radialrad bei konstanter Schaufelbreite. Als Grundlage wird ein inkompressibles und reibungsloses Medium und eine stationäre relative Strömung angenommen. Mit Hilfe dieses Rechenverfahrens kann man für ein gegebenes Laufrad die theoretische Kennlinie, die Druckverteilung um die Schaufel und die theoretische Saughöhe für einen beliebigen Förderstrom berechnen.

Angewendet wird die Methode der Singularitäten, indem die Zirkulationsverteilung und die Quellsinkenverteilung an der Skelettlinie durch GLAUERT's dreigliedrige Reihen angenähert werden. Zur Feststellung der kinematischen Bedingungen werden an der Schaufelkontur drei Punkte der Saugseite und weitere drei der Druckseite nach dem Dreiviertelsehnen-Theorem gewählt. Hierdurch erhält man ein System von sechs inhomogen-linearen Gleichungen für die sechs unbekanntenen GLAUERT'schen Koeffizienten. Da diese Gleichungen aus Gliedern zusammengesetzt sind, von denen einige auch die Durchflußzahl φ_1 enthalten, andere Glieder

aber nicht, und da das Gleichungssystem für alle möglichen Werte von φ_1 unbedingt gilt, zerfällt das Gleichungssystem in zwei neue, voneinander unabhängige Systeme. Nach Lösung der beiden Gleichungssysteme können die GLAUERTSchen Koeffizienten für jeden gewählten Wert von φ_1 errechnet werden. Nach Berechnung dieser Koeffizienten können die Zirkulationsverteilung und die Quellsenkenverteilung und folglich die theoretische Kennlinie, die Druckverteilung um die Schaufel und die theoretische Saughöhe errechnet werden.

Zum Anschreiben der kinematischen Bedingungen müssen vorerst die durch die Zirkulationsverteilung und Quellsenkenverteilung induzierten Geschwindigkeiten entlang der Skelettlinien der Schaufeln des radialen Gitters berechnet werden. Um diesen schwerfälligen Rechengang zu umgehen, wird das radiale Gitter in ein gerades transformiert; zum Schluß werden die gewonnenen Resultate in das radiale Gitter zurücktransformiert.

CALCUL DE LA RÉPARTITION DES VITESSES DANS LES ROUES PUREMENT RADIALES, SELON LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS

A. VERBA

RÉSUMÉ

L'auteur présente un procédé de calcul pour les roues purement radiales, à largeur d'aube constante des turbo-pompes. Il se sert de l'hypothèse d'un fluide incompressible, sans friction et d'un écoulement relatif stationnaire. Le procédé permet le calcul de la courbe caractéristique de la roue, de la répartition de la pression le long de l'aube, et de la hauteur d'aspiration théorique pour un débit quelconque.

Le procédé de calcul est basé sur la méthode des singularités. On procède par approximation des répartitions des tourbillons et des sources ou sillages disposées sur la ligne squelette, à l'aide de séries Glauert de trois membres. Les conditions cinétiques sont établies pour six points de contour différents, dont trois du côté succion, et trois autres du côté pression. Le choix de ces points s'effectue suivant le théorème des trois quarts de la longueur de corde. De cette façon on reçoit un système inhomogène de six équations linéaires pour les coefficients inconnus des séries Glauert. En séparant les membres en deux groupes, dont l'un contient le coefficient de débit φ_1 , et l'autre ne le contient pas, on obtient deux systèmes d'équations au lieu d'un. Par la solution des deux systèmes, on obtient les valeurs des coefficients Glauert pour une valeur quelconque du coefficient φ_1 . Les coefficients Glauert une fois connus, on calcule la répartition des tourbillons et des sources ou sillages disposés sur la ligne squelette, la courbe caractéristique théorique, la répartition de la pression le long de l'aube et la hauteur d'aspiration théorique.

Pour établir les conditions cinétiques, il faut calculer les vitesses induites par les répartitions de tourbillons, de sources ou sillages disposées sur la ligne squelette. Leur calcul dans la persienne circulaire rencontrant des difficultés, on recourt à une transformation conforme de la persienne circulaire en une persienne droite, les résultats y obtenus étant ensuite retransformés en persienne circulaire.

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ В РАДИАЛЬНЫХ РАБОЧИХ КОЛЕСАХ, С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

A. ВЕРБА

РЕЗЮМЕ

Автор разработал методику расчета насосных колес с неизменной шириной лопасти, с радиальным переливом. При расчете, протекающую через рабочее колесо среду принимают несжимаемой и не имеющей трения, далее предполагается, что относительное движение потока является стационарным. Метод позволяет рассчитать для данного рабочего колеса теоретическую характеристику, распределение давления вдоль лопастей и теоретическую высоту напора перекачки любой жидкости.

Расчетная методика исходит из метода сингулярностей. Кинематические условия выводятся для шести различных контурных точек: трех со стороны всасывания и трех со

стороны напора. Выбор точек производится на основе теории $3/4$ длины хорды. Записав кинематические условия упомянутых шести точек, может быть получена система неоднородных линейных уравнений с шестью неизвестными для искоемых коэффициентов Глауэрта. Коэффициенты системы уравнений содержат число φ , характерное для перекачки жидкости. Используя тот факт, что система уравнений должна быть действительной при любом φ , система уравнений распадается на две независимые друг от друга системы уравнений. Одна из них содержит только зависящие от φ , другая только независимые от φ члены. После решения этих двух систем уравнений, коэффициенты Глауэрта вычислимы из линейной относительно φ зависимости для любого значения φ . При известных коэффициентах Глауэрта, можно рассчитать распределение завихрений, размещающихся на линии воды и поглотительные центры, а исходя из этого, теоретическую характеристику, распределение давления вдоль лопасти и теоретическую высоту напора.

При записи кинематических условий необходимо произвести расчет скоростей индуцированных от распределения завихрения и поглотительных центров, расположенных по контуру сечений крыла размещенных в окружной решетке. Так как в случае круговой решетки их вычисление весьма затруднительно, круговую решетку посредством конформной проекции преобразовали в прямую. Расчеты проводились для прямой решетки и полученные результаты были ретрансформированы в круговую решетку.

ANALYSIS OF THE WIND LOAD EFFECT ON RIGID JOINTED MULTI-STORIED BUILDING FRAMES

P. CSONKA

D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF BUILDING SCIENCES OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received September 1, 1960]

1. Introduction

The design of rigid jointed building frames having a great height encounters serious difficulties due to the multifold redundancy of the problem. Therefore, it seems likely that the method to be presented will be of interest, because it may give useful information — at least in preliminary design — as to whether the assumed dimensions will be adequate from the view-point of wind load. This possibility may sustain the designer from more than one repetition of the whole analysis of the structure, the necessity of which may happen, because the inadequacy of the assumed cross-sections becomes clear only at the very end of the computation.

The subject of the investigations of the approximate method to be introduced is not the whole structure, but only its lower part which is the most dangerously affected by wind load; and the procedure itself does not use relaxation methods, but difference equations. The use of the latter is definitely more advantageous. This is due to the fact that the stiffness of the columns is greater than that of the beams, in general, and for this reason the relaxation methods converge very slowly.

2. Assumptions, notations

The investigations in question refer to multi-storied rectangular rigid frames, the stiffness relations of which differ, at most, a little from those of the so-called *proportional frames* [6].

As the effect of the wind load is the most powerful on the lower stories of the frame, the investigations will be restricted only to its lower stories. On this part — *i.e.*, on the *part of investigation* — the height h of the stories is assumed as being constant. It is stipulated that on this investigated part of the frame all columns erected above each other should have the same cross-section, furthermore that all the girders placed above each other should have the same stiffness. The columns are regarded as being fixed stiffly into the footings.

The wind loads affecting the frame will be treated as concentrated forces acting at the height of the single floor levels. These forces will be taken into consideration at all floor levels of the investigated part of the frame with the same value.

The material of the frame is assumed to be completely elastic, the forces to be acting in the same plane, while the modulus of elasticity as being constant on the whole structure. When calculating the deformations, only the bending moments will be taken into account; the effect of the normal and

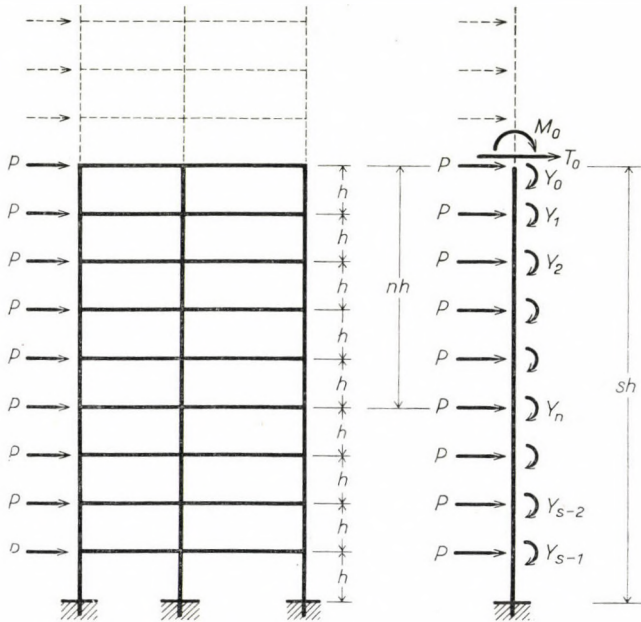


Fig. 1. The part of investigation of the rigid frame
 Fig. 2. The part of investigation of the equivalent girder

shearing forces on the deformations of the frame, on the other hand, will be disregarded.

Owing to the above stipulations the deformation of the columns will be regarded as to be constant along their whole length, and the frame will be replaced by a common cantilever which is stiffly fixed at its lower end, but elastically fixed at the height of the individual floor levels. The moment of inertia of this cantilever — of the so-called *equivalent girder* —, is equal to the sum of the moments of inertia belonging to the cross sections of the columns at the same level. The coefficient of embedding of the elastic fixings, on the other hand, is equal to the sum of the stiffness belonging to the girder ends at the same level.

The part of the equivalent girder corresponding to the examined part of the frame is also called the *part of investigation*.

The parts of investigation pertaining to the original frame and to the equivalent girder, respectively, are shown in *Figs. 1* and *2* by full lines. In the same figures the parts of the frame and of the equivalent girder situated above the part of investigation are drawn with dashed lines. In the investigation the structural parts marked by dashed lines are assumed as being removed; and the forces transferred by them to the part of investigation, *i. e.*, the shearing force T_0 and the bending couple M_0 are treated as external force effects.

On the part of investigation of the equivalent girder the cross-sections corresponding to the individual floor levels are marked by downwards increasing numbers. The cross-section or the floor level situated at the distance $n \cdot h$ from the top of the part of investigation, will be called the n -th cross section or floor level, respectively. The moment of the elastic fixing transferred to the equivalent girder at the n -th cross-section will be denoted by Y_n ; the bending moments of the equivalent girder directly above and directly below the n -th cross section, however, will be marked by M_n and L_n , respectively.

3. Conditions of continuity

The columns and the girders of the frame are joined without any interstice; consequently, the columns and the girders must rotate at their joints by the same angle. The *condition of continuity* means in the case of the equivalent girder, that at the height of the single floor levels the angle of rotation of its axis line must coincide with the angle of rotation caused by the moment due to the elastic fixing at the same place.

The rotation of the axis line of the equivalent girder will be expressed by the area of the moment diagram below the investigated cross section. For the n -th floor level this area will be denoted by F_n . In compliance with the four force effects acting on the equivalent girder, F_n may be composed of four parts.

For the determination of the diagram area F_n corresponding to the wind load P , it should be known, that the part of this area falling between the i -th and the $(i - 1)$ -th floor levels is

$$\frac{Ph^2}{2} \cdot i^2, \quad (1 \leq i \leq s);$$

and so

$$F_n^I = \frac{Ph^2}{2} \sum_{n+1}^s i^2, \quad [0 \leq n \leq (s - 1)],$$

or after some transformations

$$F_n^I = -\frac{Ph^2}{2}(s+1)^2 + \frac{Ph^2}{2} \sum_{n+1}^{s+1} i^2, \quad (0 \leq n \leq s). \quad (1)$$

The diagram area corresponding to the bending moments caused by the shearing force T_0 is

$$F_n^{II} = \frac{T_0 h^2}{2} (s^2 - n^2), \quad (0 \leq n \leq s); \quad (2)$$

furthermore, the diagram area corresponding to the bending moments caused by the bending couple M_0 is the following:

$$F_n^{III} = M_0 h (s - n), \quad (0 \leq n \leq s). \quad (3)$$

Finally, the diagram area pertaining to the moments of the elastic fixing Y_i can be expressed by

$$F_n^{IV} = h \left[(s - n) \sum_0^{n-1} Y_i + \sum_n^s (s - i) Y_i \right], \quad (1 \leq n \leq s),$$

or after some transformations:

$$F_n^{IV} = h \left[-(s - n) Y_n + (s - n) \sum_0^n Y_i + \sum_n^s (s - i) Y_i \right], \quad (0 \leq n \leq s). \quad (4)$$

The area F_n sought for is the sum of these four area parts, *i. e.* :

$$\begin{aligned} F_n = h & \left[-\frac{Ph}{2}(s+1)^2 + \frac{Ph}{2} \sum_{n+1}^{s+1} i^2 + \right. \\ & + \frac{T_0 h}{2} (s^2 - n^2) + M_0 (s - n) - Y_n (s - n) + \\ & \left. + (s - n) \sum_0^n Y_i + \sum_n^s (s - i) Y_i \right], \quad (0 \leq n \leq s). \end{aligned} \quad (5)$$

Knowing the area F_n , the aforementioned condition of continuity can be expressed as follows:

$$\frac{F_n}{EJ} = -\frac{1}{K} Y_n, \quad (0 \leq n \leq s). \quad (6)$$

In addition, agreeing on the notation

$$\beta = \frac{K h}{E J}, \quad (7)$$

and taking equation (5) into consideration, the *condition of continuity* in question can be formulated as follows:

$$\begin{aligned} \beta \left[-\frac{P h}{2} (s+1)^2 + \frac{P h}{2} \sum_{n+1}^{s+1} i^2 + \frac{T_0 h}{2} (s^2 - n^2) + \right. \\ \left. + M_0 (s-n) - Y_n (s-n) + (s-n) \sum_0^n Y_i + \right. \\ \left. + \sum_n^s (s-i) Y_i \right] + Y_n = 0, \quad (0 \leq n \leq s). \quad (8) \end{aligned}$$

4. Difference equation of the problem

Setting up the condition of continuity given in (8) for the cross-section $n = 1, 2, \dots, s-1$ — i. e., for s cross sections the same number of equations independent of each other will be available for the determination of the s unknowns $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{s-1}$. From these equations the above-mentioned s unknowns can be determined, provided T_0 and M_0 are known.

The above-indicated mode of calculation, however, is because of the great number of unknowns fairly complicated. This is the very reason why for the solution of the problem another method — *the method of difference equations* — will be used.

For producing the difference equation of the problem the condition of continuity should be written for the $(n-1)$ -th and for the $(n+1)$ -th cross sections.

For the $(n-1)$ -th cross section:

$$\begin{aligned} \beta \left[+\frac{P h}{2} (s+1)^2 + \frac{P h}{2} \sum_n^{s+1} i^2 + \frac{T_0 h}{2} (s^2 - n^2 + 2n - 1) + \right. \\ \left. + M_0 (s-n+1) - Y_{n-1} (s-n+1) + (s-n+1) \sum_0^{n-1} Y_i + \right. \\ \left. + \sum_{n-1}^s (s-i) Y_i \right] + Y_{n-1} = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

For the $(n + 1)$ -th cross section:

$$\beta \left[-\frac{Ph}{2}(s+1)^2 + \frac{Ph}{2} \sum_{n+2}^{s+1} i^2 + \frac{T_0 h}{2}(s^2 - n^2 - 2n - 1) + \right. \\ \left. + M_0(s - n - 1) - Y_{n+1}(s - n - 1) + (s - n - 1) \sum_0^{n+1} Y_i + \right. \\ \left. + \sum_{n+1}^s (s - i) Y_i \right] + Y_{n+1} = 0. \quad (10)$$

It is evident that of these two equations the first one is only defined for $n \geq 1$, the second, on the other hand, only for $n \leq (s - 1)$.

Now summarizing equations (9) and (10) and subtracting from the so obtained sum the double of equation (8), the following result is arrived at:

$$Y_{n+1} - (2 + \beta) Y_n + Y_{n-1} = \beta h(nP + W). \quad (11)$$

In the above formula

$$W = \frac{P}{2} + T_0 \quad (12)$$

denotes the resultant force of the wind load acting upon the part of the frame above the part of investigation.

Equation (11) — called according to BLEICH—MELAN's mode of expression [5] the *difference equation of the problem* — determines a simple relation between the moments of the elastic fixing Y_0, Y_1, \dots, Y_s .

5. General solution of the difference equation

The general solution of the linear difference equation of the second order with constant coefficients can be composed of the general solution of the homogeneous equation, and of a particular solution of the inhomogeneous equation:

$$Y_n = Y_{nh} + Y_{ni}. \quad (13)$$

To produce the general solution of the *homogeneous* equation, the characteristic equation

$$\lambda^2 - (2 + \beta)\lambda + 1 = 0 \quad (14)$$

must be solved. Knowing its roots

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\beta + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}, \quad (15)$$

the general solution of the homogeneous equation is

$$Y_{nh} = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n. \quad (16)$$

Taking into consideration the relation

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1, \quad (17)$$

the general solution can be expressed as follows:

$$X_{nh} = A\lambda_1^n + B\lambda_1^{-n}. \quad (18)$$

Here A and B are for the time being indefinite constants.

In the present case one of the particular solutions of the *inhomogeneous* equation is a polynome of the first order, because the external term of the difference equation is also the same. Accordingly, one of the particular solutions has the form

$$Y_{ni} = an + b. \quad (19)$$

Substituting this expression into difference equation (11), the relation

$$a(n+1) + b - (2 + \beta)(an + b) + a(n-1) + b = P\beta h n + W\beta h$$

is arrived at, which however, can be transformed after the possible simplifications as follows:

$$-an - b = Phn + Wh.$$

The latter equation can only be satisfied for an optional n , if

$$a = -Ph, \quad b = -Wh.$$

With respect to the above values, the particular solution (19) will take the form

$$Y_{ni} = -Phn - Wh. \quad (20)$$

Thereupon, replacing results given in (16) and (19) into formula (13) for the *general solution of the difference equation* the following formula is obtained:

$$Y_n = A\lambda_1^n + B\lambda_1^{-n} - Phn - Wh. \quad (21)$$

6. Boundary conditions

The values of the constants A and B figuring in formula (21) of the general solution must be chosen so that the solution should also satisfy the boundary condition of the problem.

As *first boundary condition* the circumstance will be utilized, that the lowest cross-section of the equivalent girder is fixed stiffly. As this cross-section $n = s$ cannot rotate at all, the moment of the elastic fixing must here be equal to zero:

$$Y_s = 0. \quad (22)$$

With regard to formula (21), the above boundary condition can be formulated:

$$A\lambda_1^s + B\lambda_1^{-s} - Ps h - Wh = 0. \quad (23)$$

For the *second boundary condition* no accurate stipulation can be given. As the bending couple M_0 is unknown, the boundary condition referring to the cross-section $n = 0$ does not involve any definite specification. Therefore, as to the value of Y_0 only approximate conclusions can be drawn. As an approximation it is to be assumed that the validity of the general solution given in (21) can also be expanded over the cross-section $n = -1$, and that the value of the moment of the elastic fixing changes between the cross-sections $n = 1$ and $n = -1$ linearly, *i. e.* :

$$Y_1 - 2Y_0 + Y_{-1} = 0.$$

Substituting formula (21) into the above equation, the relation

$$A + B = 0 \quad (24)$$

is arrived at.

From equations (23) and (24) the constants A and B can already be determined:

$$\begin{aligned} A &= \frac{Ps + W}{\lambda_1^s - \lambda_1^{-s}} h, \\ B &= - \frac{Ps + W}{\lambda_1^s - \lambda_1^{-s}} h. \end{aligned} \quad (25)$$

7. End moments of the girders and columns

Substituting the values determined by formulae (25) into formula (21), for the moments of the elastic fixing of the equivalent girder the following

formula is obtained:

$$Y_n = \left[(Ps + W) \frac{\lambda_1^n - \lambda_1^{-n}}{\lambda_1^s - \lambda_1^{-s}} - (Pn + W) \right] h. \quad (26)$$

Knowing the moments of the elastic fixing, the couple M_0 acting on the equivalent girder can also be determined. For this purpose a simple relation can be deduced, if from (10) valid for $n = 0$ the formula (8) valid for $n = 0$ is subtracted. By so doing it is found that

$$\beta \left(-\frac{Ph}{2} - \frac{T_0 h}{2} - M_0 - Y_0 \right) + Y_1 - Y_0 = 0,$$

and herefrom

$$M_0 = -\frac{Ph}{2} - \frac{T_0 h}{2} - Y_0 - \frac{Y_0}{\beta} + \frac{Y_1}{\beta}. \quad (27)$$

Now, all data necessary for the calculation of the bending moments of the equivalent girder are available. The calculation itself can be made on the basis of the statical sketch to be seen in Fig. 2, according to the method usual for common cantilevers. Consequently, for the value of the bending moment directly above the n -th cross section or directly below it, the following formulae are arrived at:

$$M_n = \left(\frac{Pn}{2} + W \right) nh + M_0 + \sum_0^{n-1} Y_i, \quad (28)$$

or

$$L_n = \left(\frac{Pn}{2} + W \right) nh + M_0 + \sum_0^n Y_i. \quad (29)$$

Herewith, all data necessary for plotting the moment diagram of the part of investigation of the equivalent girder becomes known.

It should be mentioned that the upper part of the moment diagram plotted in this way is — due to the uncertainty of the second boundary condition — adequate only for a rough approximation, the lower part of the moment diagram, on the other hand, is thoroughly reliable. Namely, among the coefficients A and B figuring in the difference equation, the value of the coefficient A is only slightly influenced by the second boundary condition, while the value of the coefficient B is closely connected to it. But, in the formula for the moment of the elastic fixing the coefficient B plays an important role only for the upper stories, and advancing downwards from here the importance of the coefficient B becomes more and more insignificant.

Knowing the moment diagram of the equivalent girder, the moment diagram belonging to the part of investigation of the original frame can also be plotted. Here the determination of the moments can be carried out by a suitable distribution of the corresponding moments of the equivalent girder.

E.g., when computing the end moments of the girders at the n -th floor level, the moment of the elastic fixing Y_n must be distributed proportionately to the stiffness of the girder ends of the n -th floor level. The determination of the end moments of the columns can be carried out in a similar way. These moments can be determined directly above the n -th floor level and directly below it, by distributing the bending moments M_n and L_n , respectively, between the individual columns in the proportion of their stiffness.

Numerical example 1

The application of the introduced method will be first shown for the eight storied rigid frame to be seen in Fig. 3. This example at the same time will prove that the introduced

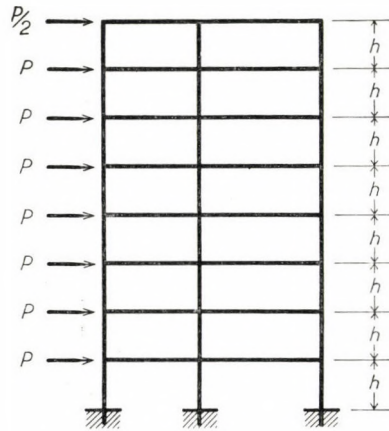


Fig. 3. Eight-storied building frame

method can also be used, if the calculation is not restricted only to the lower stories, but refers to the whole frame. In this case the results of the calculation are, of course, not approximate, but perfectly accurate.

The data of the numerical example are:

$$s = 8, \quad h = 3,00 \text{ m}, \quad J = 0,01 \text{ m}^4, \quad K = 0,0048 \text{ E m}^3, \quad P = 0,9 \text{ t}.$$

In the present case the wind force acting on the highest floor level is only $P/2$. The previously deduced formulae, on the other hand, refer to a frame loaded on the part of investigation at each floor level by the force P . Therefore, in the present case at the top level a force

$$T_0 = -0,45 \text{ t},$$

acting in an opposite direction to the wind force, must be taken into consideration. Accordingly, in the present case

$$M_0 = 0,$$

and

$$W = T_0 + \frac{P}{2} = 0.$$

Calculating with the above terms, the value of the coefficient β is according to formula (7)

$$\beta = \frac{Kh}{EJ} = \frac{0,0048 E 3,0}{E 0,01} = 1,44,$$

while the value of the coefficient λ_1 is in compliance with formula (15)

$$\lambda_1 = 1 + 0,5 \beta + \sqrt{\beta + 0,25 \beta^2} = 3,119428.$$

Thereafter, the general solution of the problem is given in accordance with formula (21) by

$$Y_n = A\lambda_1^n + B\lambda_1^{-n} - Phn. \quad (30)$$

The constants A and B figuring here are to be determined from the boundary condition of the problem.

As first boundary condition the statement will be used that at the lowest cross-section $n = 8$ the moment of the elastic fixing Y_n shall be equal to zero. Accordingly,

$$A \cdot 3,119428^8 + B \cdot 3,119428^{-8} - 8 \cdot 0,9 \cdot 3,0 = 0. \quad (31)$$

As second boundary condition, the condition of continuity, according to formula (8), will be used for the cross-section $n = 7$:

$$1,44 \left[-\frac{0,9 \cdot 3}{2} \cdot 9^2 + \frac{0,9 \cdot 3}{2} (8^2 + 9^2) - \frac{0,9 \cdot 3}{4} \cdot 15 + 0 - \right. \\ \left. - Y_7 + (Y_0 + Y_1 + \dots + Y_7) + Y_7 \right] + Y_7 = 0. \quad (32)$$

It is obvious, that here the values Y_n should be taken into consideration in accordance with formula (30). From the above equations (31) and (32) the values A and B can be determined:

$$A = 0,002\,409\,114, \quad B = -1,731\,275.$$

Now, all data required for the computation of the moments of the elastic fixing Y_n are known. Carrying out the computations according to formula (26), the values compiled in Table I are obtained as results.

Table I

Values of the moments of the elastic fixing Y_n

n	Y_n [tm]
0	-1.729
1	-3.247
2	-5.554
3	-8.084
4	-10.590
5	-12.794
6	-13.982
7	-11.976
8	0

Having the values Y_n , the moments M_n and L_n arising at the ends of the columns can be calculated by using formulae (28) and (29), respectively. The results of this calculation are compiled in

Table II
Values of the moments M_n and L_n

n	M_n [tm]	L_n [tm]
0	0	-1,729
1	- 0,379	-2,869
2	+ 0,424	-5,131
3	+ 1,619	-6,465
4	+ 2,985	-7,605
5	+ 4,545	-8,249
6	+ 6,601	-7,381
7	+10,169	-1,807
8	+18,443	0

Thereafter, knowing the values Y_n , M_n and L_n , the moments pertaining to the single bar ends can be determined by a simple moment distribution. It seems likely that this finishing step of the calculation can be disregarded.

Numerical example 2

As second example the case shown in Fig. 4 will be dealt with. This Fig. shows the lower five stories of the eight storied rigid frame examined in Numerical Example 1. Now only the five lower stories of the eight-storied frame will be investigated, thus, the calculations can only give approximately accurate results. As in Numerical Example 1 the problem was accurately solved, this will give the possibility for a comparison between the accurate and the approximate results, and so, at the same time for the numerical determination of the error arising from the approximate method.

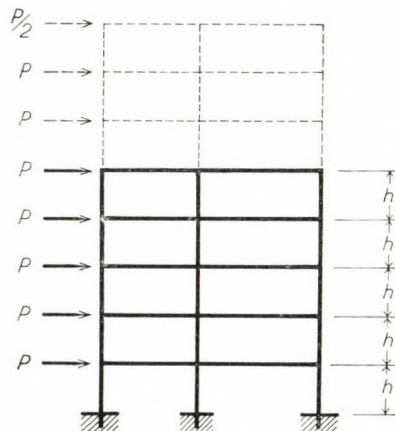


Fig. 4. The lower five stories of an eighth-storied building frame

The data referring to the present example are:

$$s = 5, \quad h = 3,0 \text{ m}, \quad J = 0,01 \text{ m}^4, \quad K = 0,0048 \text{ E m}^3, \quad P = 0,9 \text{ t}.$$

The wind force pertaining to the disregarded upper stories is

$$T_0 = 2 \cdot 0,9 + 0,45 = 2,25 \text{ t},$$

and so

$$W = T_0 + \frac{P}{2} = 2,7 \text{ t}.$$

The values of the coefficients β and λ_1 are the same as those figuring in the previous example, *i. e.* :

$$\beta = 1,44, \quad \lambda = 3,119 \ 428.$$

Knowing the value of λ_1 , the *approximate* values of the moments of the elastic fixing Y_n can be determined by using formula (26). The resulting values are compiled in Table III.

Table III
Values of moments of the elastic fixing Y_n

n	Y _n [tm]		Error, %
	approximate value	accurate value	
0	— 8,100	— 8,084	0,20
1	—10,595	—10,590	0,05
2	—12,796	—12,794	0,02
3	—13,983	—13,982	0,01
4	—11,796	—11,796	0,00
5	0	0	0

In the above table the *accurate* values of Y_n determined in Numerical Example 1 are also shown. The comparison of the two sorts of values indicates, that in the present case the error due to the application of the approximate method was quite insignificant.

Thereafter, the value of the moment M_0 will be computed by using formula (27):

$$M_0 = -\frac{Ph}{2} - \frac{T_0 h}{2} - Y_0 - \frac{Y_0}{\beta} + \frac{Y_1}{\beta} = -0,9 \frac{3,0}{2} - 2,25 \frac{3,0}{2} + 8,100 + \\ + \frac{8,100}{1,44} - \frac{10,595}{1,44} = 1,642.$$

Knowing the value of M_0 , the approximate values of the moments M_n and L_n , arising directly above or below the single floor levels, can be calculated from formulae (28) and (29). The results of the calculation are to be found in Table IV.

Table IV
Values of moments M_n and L_n

n	M_n [tm]			L_n [tm]		
	appr. value	accur. value	error %	appr. value	accur. value	error %
0	—	—	—	—6,458	—6,465	0,11
1	2,992	2,985	0,23	—7,603	—7,605	0,03
2	4,547	4,545	0,04	—8,249	—8,249	0,00
3	6,601	6,601	0,00	—7,381	—7,381	0,00
4	10,169	10,169	0,00	—1,807	—1,807	0,00
5	18,443	18,443	0,00	—	—	—

In the above table the *accurate* values calculated in Numerical Example 1 are also shown. As can be seen from this comparison, the difference between the approximate and the accurate values is also here insignificant.

Knowing the values Y_n , M_n and L_n , the moments belonging to the individual bar ends have to be determined; this requires a simple moment distribution. The demonstration of this part of the calculation is omitted.

REFERENCES

1. CROSS, H.—MORGAN, N. D.: Continuous Frames of Reinforced Concrete. New York, John Wiley and Sons (1932), pp. 228—233.
2. HABEL, A.: Zur Windberechnung vielgeschossiger Stockwerkrahmen nach Takabeya. *Die Bautechnik* 37 (1960) pp. 307—309.
3. CSONKA, P.: Beitrag zur Berechnung waagrecht belasteter Stockwerkrahmen. *Die Bautechnik — Bautechnik* 16 (1961), pp. 336—337.
4. CSONKA, P.: Die Größtmomente der durch Windlast belasteten Stockwerkrahmen. *Bauplanung Bautechnik* 7 (1961) pp. 336—337.
5. BLEICH, F.—MELAN, E.: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzen-Gleichungen der Baustatik, Berlin und Wien, Verlag von Julius Springer (1927).
6. CSONKA, P.: Über proportionierte Rahmen. *Die Bautechnik* 33 (1955), pp. 19—23.

SUMMARY

The paper presents a simple approximate method for the determination of the moments arising at the lowest stories of multi-storied rigid building frames. The method in question can be applied for the calculation of multi-storied frames the stiffness relations of which differ from those of the so-called proportional frames only insignificantly.

In the paper the stiffness of the columns of the lowest stories erected above each other is assumed as being the same. As loading at all floor levels of the lowest s stories, a concentrated wind load of the same magnitude, is taken into consideration.

The paper only deals with the investigation of the lower s stories, the remaining parts of the frame are assumed as being removed. The effect of the removed parts of the frame is replaced by external forces acting on the place where the structure is cut in two.

For the solution of the problem the method of difference equations is used. This method leads to a linear difference equation of the second order with constant coefficients. The latter can be solved only approximately, because for the place where the structure is cut in two, no precise boundary condition can be set up. But, the influence of the uncertainty of this boundary

condition is observable only in the immediate vicinity of the place where the frame is cut in two. So, the value of the bending moments affecting the lower stories can be calculated, in spite of the aforementioned uncertainty, with a fairly sufficient accuracy.

Finally two numerical examples are given. These prove the suitability and the simplicity of the suggested method.

DIE BERECHNUNG HOHER STOCKWERKRAHMEN AUF WINDLAST

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Im Aufsätze wird zur Momentenberechnung hoher Stockwerkrahmen ein in den untersten Geschossen anwendbares einfaches Annäherungsverfahren behandelt. Das Verfahren kann für Rahmen angewendet werden, deren Steifigkeitsverhältnisse von denen der sogenannten proportionellen Rahmen höchstens wenig abweichen.

Im Aufsätze wird angenommen, daß die Steifigkeit der übereinander stehenden Stützen in den unteren s Geschossen ein und dieselbe ist. Als Belastung wird in sämtlichen Deckenniveaus der unteren s Geschosse je eine konzentrierte Windlast von identischer Größe berücksichtigt.

In dem Aufsätze werden lediglich die unteren s Geschosse des Stockwerkrahmens untersucht, seine übrigen Teile werden als entfernt angesehen. Der Effekt der entfernten Rahmenteile wird durch an der Schnittstelle angreifende konzentrierte Außenkräfte ersetzt.

Zur Lösung des Problems wird im Aufsätze die Methode der Differenzgleichungen angewendet.

Dieses Verfahren führt zu einer linearen Differenzgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die letztere kann nur annähernd gelöst werden, nachdem für die Schnittstelle keine genaue Randbedingung angeschrieben werden kann. Die Auswirkung des ungewissen Charakters der soeben erwähnten Randbedingung wird aber nur in der unmittelbaren Nähe der Schnittstelle fühlbar. So können die Biegemomente der unteren Geschosse trotz der erwähnten Ungewißheit mit einer für die Praxis vollständig genügenden Genauigkeit berechnet werden.

Der Aufsatz ist durch zwei Rechenbeispiele ergänzt. Diese beweisen die Zweckmäßigkeit und die Einfachheit des vorgeschlagenen Verfahrens.

CALCUL DE L'OSSATURE DE BÂTIMENTS TOURS CHARGÉS PAR LE VENT

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'étude expose un procédé d'approximation simple pour le calcul des moments naissant aux étages inférieurs des bâtiments tours. Le procédé s'applique à des portiques à plusieurs étages, dont les conditions de rigidité ne diffèrent pas, ou ne diffèrent que peu de celles des portiques proportionnels.

On suppose qu'aux étages inférieurs s du portique, les montants superposés ont la même rigidité. Au niveau de chaque plancher des étages inférieurs s , on calcule avec une charge concentrée de même grandeur.

L'étude n'examine que les étages inférieurs s du portique, et imagine ses autres parties enlevées. L'effet dû aux parties enlevées du portique est remplacé par des forces extérieures agissant dans le plan de sectionnement.

Pour résoudre le problème, on utilise la méthode des équations aux différences. Cette méthode conduit à une équation aux différences linéaire du deuxième ordre, à coefficient constant. Celle-ci ne comporte qu'une solution approximative, la condition au contour exacte ne pouvant pas être écrite pour le plan de sectionnement. Toutefois, l'incertitude de la condition au contour ne fait sentir son effet qu'à proximité du plan de sectionnement, de sorte qu'aux étages inférieurs, la valeur des moments de flexion peut être calculée avec une exactitude suffisante, malgré l'incertitude mentionnée.

L'étude se complète par deux exemples numériques démontrant l'utilité et la simplicité de la méthode.

РАСЧЕТ КАРКАСНОЙ КОНСТРУКЦИИ БАШЕННЫХ ЗДАНИЙ
НА ВЕТРОВУЮ НАГРУЗКУ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

В работе описывается простой приближенный метод расчета моментов, возникающих в нижних рядах этажей башенных зданий. Метод применим для таких многоэтажных рам, режим жесткости которых в крайнем случае ненамного отличается от режимов жесткости пропорциональных рам.

В работе жесткость расположенных друг над другом колонн нижнего ряда этажей с предполагается идентичной. Ветровая нагрузка принимается для всех ярусов нижнего ряда этажей с равной по величине и концентрированной.

В работе рассматривается лишь нижний ряд этажей с рамной конструкиции, а прочие части рамной конструкиции принимаются удаленными. Действие удаленных частей замещается действующими в местах разреза секущими силами.

Для решения задачи в работе применен метод дифференциальных уравнений. Метод приводит к вторичному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Это уравнение может быть решено лишь приближенно, так как для мест разреза не может быть записано точное краевое условие. Неопределенность упомянутого краевого условия однако распространяет свое влияние только в непосредственной близости разреза. Таким образом значение моментов изгиба в нижних рядах этажей, несмотря на теоретическую неопределенность, может быть рассчитано с достаточной точностью.

Работа дополнена числовым примером. Этот пример подтверждает целесообразность и простоту предложенного метода.

A TRAVELLING-WAVE OUTPUT AMPLIFIER FOR THE 4000-MC/S BAND*

T. BERCELI
CAND. of TECHN. SC.

RESEARCH INSTITUTE FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received September 20, 1960]

1. Introduction

Problems of a travelling-wave output amplifier for use in wide-band microwave equipments, for the transmission of signals over long distances, will be discussed. The travelling-wave output amplifier and the travelling-wave tube used in the equipment have been developed in the Research Institute for Telecommunication (Microwave Department and Electron Tube Laboratory, respectively).

The wide-band microwave equipment will be schematically described first, followed by a discussion of the problems of its travelling-wave output amplifier. Transmission of television programmes to a distance of 2500 kilometers is feasible through a microwave channel of the wide-band microwave equipment operating at 4000 Mc/s band. Schematically, the operation of the transmitter terminal station is as follows. A 70-Mc/s carrier frequency is modulated in the modulator by the signal to be transmitted. The frequency-modulated signal is then amplified to the desired level and limited by intermediate-frequency stages. A transmitter mixer converts the intermediate-frequency signal to the microwave band, and the microwave signal is amplified by the travelling-wave amplifier and radiated by the antenna. At the receiving end, the antenna receives the signal which is transposed to 70-Mc/s intermediate-frequency by the receiving mixer and amplified to the desired level. The frequency-modulated signal is then demodulated by the demodulator. When several microwave channels operate simultaneously, branching filters must be inserted in the transmitter before and in the receiver after the antenna for the separation of the various channels. The relay stations include all units but the modulator and demodulator of the transmitter and receiver terminal stations.

The bay of the relay station shown in Fig. 1 contains all circuits required for the transmission of a microwave channel, including transmitter and

* This paper is based on the first part of a lecture on "Microwave Design Problems of Travelling-Wave Amplifiers" delivered by the author to the "Colloquium on Microwave Communications" held in Budapest, in November 1959.

receiver branching filters. Only the electronics are shown, the waveguide assemblies being inside the bay.

2. The output amplifier

Drawers 1 and 2 in Fig. 1 contain the travelling wave output amplifier. This consists of the following: travelling-wave tube type H02, high-voltage power supply, focusing magnet, adjustable transition, delaying and protecting circuits, cooling ventilator, output power indicator and transmitter alarm circuit.

First, a few remarks should be made on the choice of coupling for the travelling-wave amplifier. Basically, coupling of the travelling-wave tube can be achieved in two ways: with waveguide couplers and with helix couplers. Both have their advantages and disadvantages. Compared with the waveguide coupler, the helix coupler has the advantage of a very wide transmission band, wider than an octave, consequently it requires no adjustment when the frequency is changed; moreover, its dimensions are small, and thin cables can be used for power transmission. Accordingly, coupling of travelling-wave tube does not require much space, which is a favourable feature particularly when permanent magnets are used. Connections to the waveguide assemblies of the equipment are easily achieved by means of flexible cables. On the other hand, the disadvantages of the helix couplers are their rather high standing-wave ratio and loss. However, matching can be improved by inserting matching elements into the waveguide. By reason of the above-mentioned facts, the travelling-wave tube type H02 has been chosen for use in the wide-band equipment. With this tube, helix couplers serve for power coupling and thin coaxial cables for the transmission of power.

Direct-current adjustment of the travelling-wave tube is such that the voltage is highest on the accelerating anode and the voltage of the helix is somewhat lower. In this way, a so-called ion trap is formed between anode and helix. The electric field strength is directed from the accelerating anode to the helix. Consequently, the ions from the inside of the helix, excited by the high velocity electron beam, cannot reach the cathode and the life time of the cathode is greatly increased. The voltage of the collector is considerably lower than that of the helix. This results in a significant increase of the direct current efficiency of the tube and in a decrease of collector dissipation, which is an advantage from the point of view of cooling. At the same time, the hollow in the collector prevents secondary electrons from leaving the collector space.

The above-mentioned direct-current adjustment is effected by the high-voltage power supply. The collector voltage has no effect on the interaction

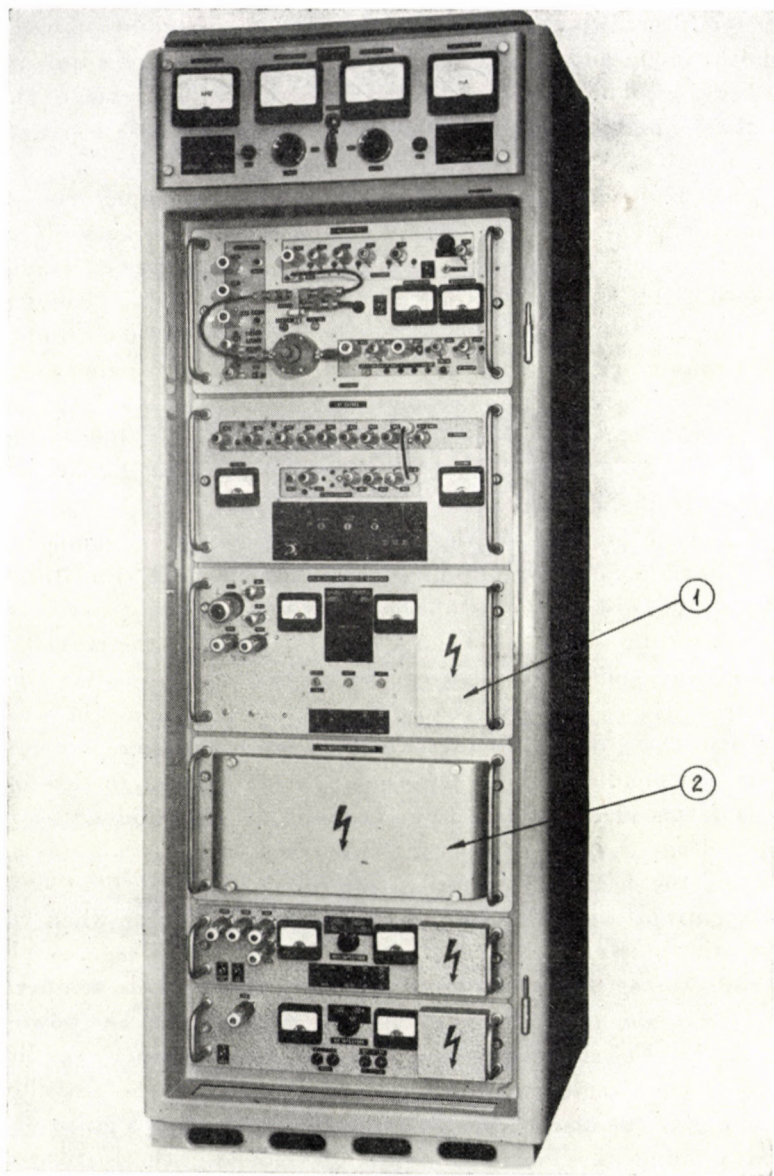


Fig. 1. Relay station bay used in the wide-band microwave radio link

of the electron beam and high-frequency field and, therefore, it is neither stabilized, nor filtered to any extent. A common high-stability power supply provides both anode and helix voltages. These voltages are adjustable, but the circuit is designed in such a way that at any arbitrary adjustment the anode voltage is always higher than the helix voltage, thus always ensuring the formation of an ion trap.

The electron beam is focussed by a permanent magnet consisting of AlNiCo-5 magnet bars which produces a magnetic field intensity of 550 gauss along a length of 210 mm. Focussing of the beam requires a homogeneous axial magnetic field. Experiments have shown that in the vicinity of the axis the radial component of the magnetic field along the given length of 210 mm may reach a maximum value of 3 gauss. A series of homogenizing disks in the magnet serves to meet this requirement. As the magnet has a considerable leakage, large soft-iron objects must not be placed near it. Both ends of the magnet carry adjusting devices which serve to adjust the position of the travelling-wave tube in the magnet.

Input and output cables of the travelling-wave tube are connected to the waveguide assemblies of the equipment through adjustable transitions. Input and output standing-wave ratios of the travelling-wave tube as measured at the coaxial connections are below 2,5. Matching between the travelling-wave amplifier and waveguide assemblies can be improved by adjusting the above-mentioned transitions. Thereby the standing-wave ratio along the waveguide, as measured in the direction of the travelling-wave amplifier, is decreased in the transmission band to a value less than 1,5. Matching is further improved by ferrite isolators placed in the input and output waveguides.

High voltage is switched on by the delay circuit 1,5 minutes after the application of the heating, primarily to protect the travelling-wave tube. If the helix current reaches a value higher than 2,5 mA or when cooling is interrupted, the protecting circuits switch off the high voltage. A ventilator cools the collector of the travelling-wave tube and keeps its temperature at 100°C at 20°C ambient temperature and 70 W dissipation. The power indicator shows the level of the output signal of the travelling-wave amplifier. The transmitter alarm circuit controls the output signal of the travelling-wave amplifier and gives an alarm whenever the level falls below a given value.

The travelling-wave output amplifier developed in the Institute is characterized by the following values:

Operational input level	5 mW
Gain at this level	28 dB
Operational output level	3 W
Saturation output power	5 W
Noise factor	30 dB

3. AM-to-PM conversion

Results of the investigation of the AM-to-PM conversion factor of the travelling-wave amplifier are given below. We understand by AM-to-PM conversion the phase variation of the output signal caused by the amplitude variation of the signal applied to the amplifier input. When frequency-modulated signals are transmitted, this phenomenon is of great importance because it may result — in case of amplitude variations — in the distortion of the transmitted signal.

Investigation of AM-to-PM conversion was performed by means of inter-modulation measurements. Two signals were applied simultaneously to the

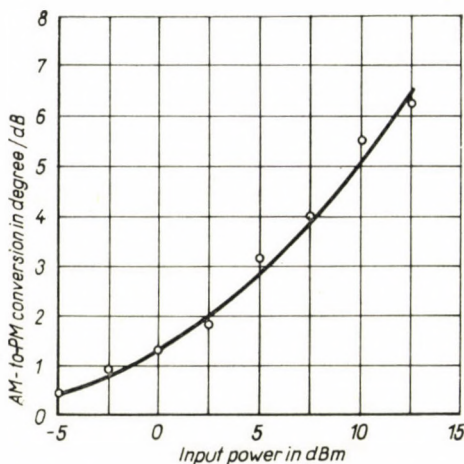


Fig. 2. AM-to-PM conversion as a function of input power

amplifier input. The level difference and the frequency difference of the two signals were 30 dB and 100 Mc/s, respectively. Owing to the AM-to-PM conversion, three signals were obtained at the output. The levels of these signals were measured and the AM-to-PM conversion factor was calculated as

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta P} = 13,2 \left[S_1^2 - \frac{1}{4} (1 + S_1^2 - S_2^2)^2 \right]^{1/2} \text{ degrees/dB}$$

where S_1 is the relative amplitude of the signal with the lower level at the output and S_2 is the relative amplitude of the new signal at the output.

The AM-to-PM conversion factor of a travelling-wave amplifier is a function of the input power. AM-to-PM conversion as a function of the input power, is shown in Fig. 2, according to our measurements. On the basis of Fig. 2 when a television programme is transmitted the travelling-wave amplifier is operated by a 5 mW input signal.

4. Noise

Considerable difficulties had to be overcome to reduce the noise in the travelling-wave amplifier to a minimum. Earlier CCIR recommendations for microwave radio relay systems include separate specifications both for the so-called triangular noise and white noise in the transmission of frequency-modulated television signals. No special adjustments of the travelling-wave amplifier are required to meet these specifications. At the session of the CMTT held in Monte Carlo in October 1958, new recommendations were adopted according to which in the case of television transmission noise must be measured visometrically weighted. These recommendations concerning visometric noise present to some extent higher requirements as compared to the earlier specifications, especially with regard to interference, oscillations and white noise. To meet the new requirements, the travelling-wave amplifier must be set at minimum noise.

Noise in the travelling-wave amplifier was reduced to a minimum as follows. First, the travelling-wave amplifier in the equipment was substituted by a cable by-pass and thus a signal-to-noise ratio of 75 dB was obtained in a transmission section. Noise measurements were made with a quadratic vacuum tube voltmeter with visometric weighting. Then, after the insertion of the travelling-wave tube amplifier, the receiver level was adjusted to the same value as before. In this arrangement a maximum decrease of 0,5 dB was allowed in the signal-to-noise ratio. In order to fulfil this condition first of all the position of the travelling-wave tube in the magnet had to be changed. This was followed by an adjustment to the desired noise minimum of the voltages on the electrodes of the tube. Noise depends to a great extent on the position of the travelling-wave tube in the magnet. Variation of the beam-forming electrode voltage has also a considerable effect and changes in the helix voltage a lesser effect on the noise.

It is interesting to note that visometric noise is greatly reduced by the ageing of the travelling-wave tube. Visometric noise is defined as the noise measured visometrically after setting the travelling-wave tube at minimum noise. Visometric noise in the travelling-wave tube was measured before and after a 50-hour ageing with the result that in cases when before ageing this noise had a value not higher than 10 dB above the required; 50-hour ageing generally reduced it to the desired value. In these cases, however, when visometric noise in the tube was originally higher than 10 dB above the permissible value, it could not be reduced to the required value even by more than 50 hour of ageing. This means that tubes with an originally high noise level cannot be improved by ageing to meet the requirements. Experiments indicate that this high noise level might have been caused by unsatisfactory vacuum. Furthermore, it has been found that the fastest decrease in visometric noise was

achieved during the first period of ageing, and after a 50-hour ageing period the subsequent decrease was relatively small. This led to the conclusion that at least a 50-hour ageing must be applied to keep visometric noise below the permissible value.

REFERENCES

1. PIERCE, J. R.: Travelling-Wave Tubes. D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1950.
2. ROGERS, D. C.: The Travelling-Wave Tube as Output Amplifier in Centimetre-Wave Radio Links. The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Part III, May 1953, pp. 151-156.
3. LACY, P. D.: Helix Coupled Travelling-Wave Tube. Electronics, Nov. 1954, pp. 132-135.
4. EICHIN, W., MEYERER, P., VEITH, W. and ZINKE, O.: Wanderfeld-Endröhre hoher Verstärkung mit Permanentmagnet. Fernmeldetechnische Zeitschrift, July 1955, pp. 369-373.
5. LAICO, J. P., McDOWELL, H. L., MOSTER, C. R.: A Medium Power Traveling-Wave Tube for 6000-Mc Radio Relay. The Bell System Technical Journal, Nov. 1956, pp. 1285-1346.
6. HEIDBORN, W.: Eine Wanderfeldröhre für die Richtfunktechnik im 4 GHz-Bereich. Nachrichtentechnik. Nov. 1959, pp. 485-489.

SUMMARY

The present paper deals with the problems of a travelling-wave output amplifier used in wide-band microwave links. The components of the travelling-wave output amplifier are described, and the problems of AM-to-PM conversion and signal-to-noise ratio are discussed. Noise measurements with visometric weighting of amplifiers showed that visometric noise decreases with the ageing of the tube. Further experiments indicated that in order to meet noise requirements the travelling-wave tube must be aged for at least 50 hours.

EIN WANDERFELD-ENDVERSTÄRKER FÜR DAS 4000 MHz-GEBIET

T. BERCELI

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden die Probleme behandelt, die bei einem Wanderfeld-Endverstärker in einer Breitband-Richtfunkverbindung auftreten. Es werden zunächst die Einzelheiten des Wanderfeld-Endverstärkers beschrieben und dann die Fragen der AM-PM-Konversion und des Geräuschabstandes behandelt. Das Rauschen des Verstärkers wurde visometrisch gemessen und es zeigte sich, daß mit der Alterung der Röhre sich das visometrische Rauschen vermindert. Weiterhin wurde festgestellt, daß eine Alterung von mindestens 50 Stunden nötig ist, um den vorgeschriebenen Rauschwert zu erreichen.

AMPLIFICATEUR FINAL À ONDE PROGRESSIVE DANS LA BANDE DE 4000 MHz

T. BERCELI

RÉSUMÉ

L'auteur expose les problèmes posés par l'utilisation d'un amplificateur final à onde progressive, dans un équipement à hyperfréquence à large bande pour longues distances. Il décrit d'abord les parties de l'amplificateur à onde progressive, puis traite des questions de la conversion MA-MP et du rapport signal-bruit. Après la mesure visométrique du bruit

des amplificateurs, l'auteur a constaté que le vieillissement des tubes à onde progressive réduit le bruit. Ses expériences ont montré, en outre, que si l'on veut respecter les valeurs de bruit prescrites, les tubes doivent être vieillis d'au moins 50 heures.

КОНЕЧНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Т. БЕРЦЕЛИ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются проблемы конечного усилителя бегущей волны микроволновой аппаратуры широкого диапазона, пригодной для передачи на большие расстояния. Автор сначала описывает отдельные узлы конечного усилителя бегущей волны, затем занимается вопросами конверсии АМ—РМ и отношением сигнал/шум. Автор измерял шум усилителей с помощью визометрического взвешивания и установил, что при горении электронных ламп визометрически измеренный шум падает. Далее автор установил, что для поддержания предписанного уровня шумов необходимо держать включенными электронные лампы бегущей волны в течение не менее 50 часов.

UNTERSUCHUNG EINER KEGELSTUMPF-SCHALE AUS STAHLBETON AUF GRUND DES TRAGLASTVERFAHRENS

Dr. techn. S. KALISZKY
KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

LEHRSTUHL FÜR MECHANIK DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE FÜR ARCHITEKTUR,
BAU- UND VERKEHRSWESEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 23. September 1960]

1. Einleitung

In der Folge soll die kinematisch hinreichende und die statisch zulässige Lastintensität einer axialsymmetrisch gestalteten und belasteten, entlang ihres oberen Randes eingespannten, entlang ihres unteren Randes dagegen freien Kegelstumpf-Schale aus Stahlbeton bestimmt werden. Nachdem im Falle des gegebenen Beispiels nachgewiesen werden kann, daß diese zwei Werte einander gleichen, so liefert das abgeleitete Ergebnis im Falle des Bestehens der angewendeten Voraussetzungen die effektive Tragfähigkeit der Schale. Als Sonderfall wird auch die auf dem Traglastverfahren beruhende Lösung der Kreisringplatte gegeben und deren Anwendung an Hand eines Zahlenbeispiels gezeigt.

Zur Bestimmung der Tragfähigkeit bediente sich der Verfasser zweier Extremalprinzipie des Traglastverfahrens. Diese zwei Sätze wurden von DRUCKER, GREENBERG und PRAGER ursprünglich für homogene, isotrope, elastisch plastische Körper und Konstruktionen abgeleitet [2], während OLSZAK und PERZYNA die Richtigkeit dieser Sätze auch für inhomogene und anisotrope Körper nachgewiesen haben [7]; daher eignen sich dieselben auch zur Berechnung von Stahlbetonkonstruktionen.

Diese Sätze beruhen auf den Begriffen der kinematisch hinreichenden und der statisch zulässigen Lastintensität, die auf folgende Weise definiert werden können.

Der plastische Formänderungszustand, der die Randbedingungen erfüllt, und bei dessen Auftreten die Außenlast positive Arbeit leistet, wird der kinematisch hinreichende Formänderungszustand genannt, während die Intensität der mit einem Parameter gekennzeichneten Außenlast, die aus der Gleichheit der während der Entwicklung dieses Zustandes entstehenden äußeren und inneren Arbeiten berechnet werden kann, die *kinematisch hinreichende Lastintensität* genannt und in der Folge mit p_k bezeichnet wird.

Der Spannungszustand dagegen, der die Gleichgewichts- und Fließbedingungen erfüllt, wird der statisch zulässige Spannungszustand, die zu diesem gehörende, mit einem Parameter gekennzeichnete Intendentität der

Außenlast aber die *statisch zulässige Lastintensität* genannt und im weiteren mit p_s bezeichnet.

Die vorhin erwähnten Extremalprinzipie lauten folgendermaßen:

1. Die kinematisch hinreichende Lastintensität ist in jedem Falle größer, oder wenigstens ebenso groß, wie die Intensität der Traglast.

2. Die statisch zulässige Lastintensität ist stets kleiner, oder höchstens so groß, wie die Intensität der Traglast, die mit p_t bezeichnet wird.

Daher gilt für diese drei Lastintensitäten:

$$p_s \leq p_t \leq p_k.$$

Wenn für eine Lastintensität nachgewiesen werden kann, daß sie kinematisch hinreichend und auch statisch zulässig ist, dann ist dieselbe mit der Traglastintensität identisch.

Die Bestimmung der Tragfähigkeit von Kreiszyylinder- und Kugelschalen wurde in der Literatur von HODGE [3] und MENYHÁRD [4], ferner von OLSZAK und SAWCZUK [6] von verschiedenen Fließbedingungen ausgehend behandelt; während die Berechnung der Tragfähigkeit der hyperbolischen Paraboloidschale von SZMODITS [9] gelöst wurde. Die erwähnten Studien bedienten sich zur Lösung des Problems der Tragfähigkeit ebenfalls der vorhergenannten zwei Extremalprinzipie.

2. Bezeichnungen

Die geometrischen Abmessungen der Mittelfläche der Kegelstumpfschale sind durch die Halbmesser R_1 und R_2 und den halben Kegelwinkel α gekennzeichnet, während ein Punkt der Leitkurve durch die dimensionslose Koordinate $r = R/R_2$ bestimmt ist (Abb. 1). Die in der Richtung der Tangente erfol-

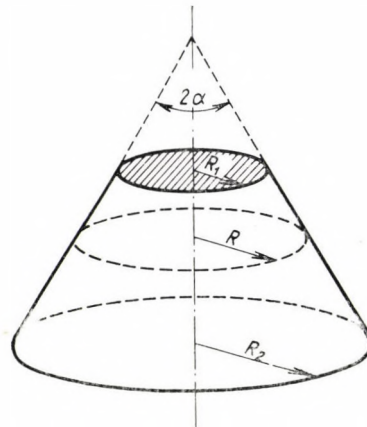


Abb. 1

genden Verschiebungen eines Punktes der Mittelfläche werden durch die Funktion $u(r)$, während die zur Mittelfläche normalen Verschiebungen durch die Funktion $v(r)$ beschrieben.

Der positive Sinn der auf ein Volumelement der Schale wirkenden Außenkräfte und der inneren Beanspruchungen sowie der der Verschiebungen ist in Abb. 2 angedeutet. Die Intensität der Außenlast ist konstant und ist durch die mit der Erzeugenden parallele Komponente p_r , sowie durch die zur Mittelfläche normale Komponente p_n — beide von konstanter Größe — gekennzeichnet. Die kinematisch hinreichende, bzw. statisch zulässige Intensität der Kom-

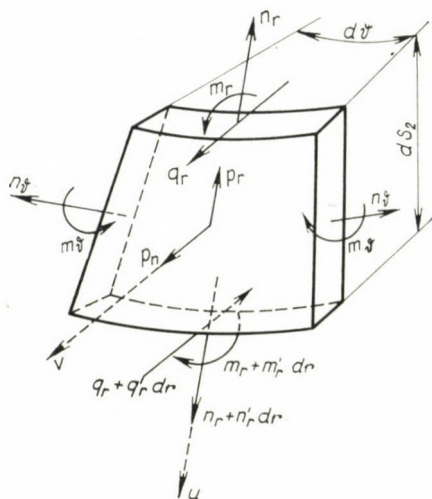


Abb. 2

ponenten wird zum Unterschied voneinander durch die Indizes k , bzw. s angedeutet. Der spezifische Wert der in der Mittelfläche der Schale wirkenden Schnittkräfte wird mit n_r , und n_ϑ , der spezifische Wert der Biegemomente bzw. der Querkräfte wird mit m_r , m_ϑ bzw. mit q_r bezeichnet. Die in den Formeln an der für Exponenten üblichen Stelle angewendeten oberen Beistrich-Indizes bedeuten Differenzierungen nach r .

3. Die Fließ- und Randbedingungen

Der Zusammenhang, der sämtliche Kombinationen der Beanspruchungen liefert, durch deren Wirkung in einem Volumelement einer aus idealplastischem Material bestehenden Konstruktion der plastische Zustand einsetzt, wird *Fließbedingung* genannt. Im Falle von N Beanspruchungen ist die Fließbedingung durch eine Hyperfläche N -ten Grades gekennzeichnet. In der Konstruk-

tion können nur derartige Beanspruchungen auftreten, die einen bestimmten Punkt darstellen, der innerhalb des durch die Hyperfläche begrenzten Raumes, oder auf der Fläche selbst zu liegen kommt.

Beim Anschreiben der Fließbedingungen spielen im Falle von Platten und Schalen aus Stahlbeton die Bewehrungseinlagen eine entscheidende Rolle. Die zu einander senkrecht versetzten Stahleinlagen üben aufeinander eine so geringe Wirkung aus, daß diese vernachlässigt werden kann. Aus diesem Grunde können die Fließbedingungen, die sich auf die in den der Richtung der Bewehrung entsprechenden Querschnitten wirkenden Beanspruchungen beziehen, voneinander unabhängig behandelt werden [3, 4, 5]. Gleichzeitig kann beim Anschreiben der Fließbedingungen der Effekt der Querkkräfte ebenfalls außer acht gelassen werden [4, 5].

Bei der Berechnung der untersuchten Schalenkonstruktion wurde ferner von der Annäherung Gebrauch gemacht, daß die in der Ringrichtung wirkenden Biegemomente vernachlässigt wurden; ferner, daß bei den Fließbedingungen der Effekt der in der Richtung der Erzeugenden wirkenden Druckkräfte ebenfalls außer acht gelassen wurde. Die erste Annäherung kann damit begründet werden, daß gemäß der auf der Elastizitätslehre beruhenden Berechnung die als Sekundäreffekt auftretenden, in der Ringrichtung wirkenden Biegemomente im Vergleich zu den übrigen Beanspruchungen so klein sind, daß sie vernachlässigt werden können [10]. Die zweite Annäherung kann aber deshalb zur Anwendung gelangen, weil die verhältnismäßig kleine Druckkraft den Wert des Bruchmomentes nicht bemerkenswert beeinflußt. Die letztere Annäherung wird übrigens nur bei der Berechnung der Tragfähigkeit benötigt, da im Zuge des Entwurfes bei der Querschnittsbemessung mit dem Biegemoment gleichzeitig auch die sich aus der Berechnung ergebende Normalkraft in Betracht gezogen werden kann.

Wenn die zu untersuchende Stahlbetonschale in jedem Punkte in der Ringrichtung über die spezifische Zugtragfähigkeit n_0 , und in der Richtung der Erzeugenden über die spezifische Momententragfähigkeit m_0 verfügt, dann nehmen infolge der angeführten Annäherungen die Fließbedingungen die folgende einfache Form an:

$$n_{\vartheta} \leq n_0, \quad m_{\vartheta} \equiv 0, \quad |m_r| \leq m_0. \quad (1)$$

Nachdem die Schale entlang ihres oberen Randes ($r = r_1$) steif eingespannt ist, so kann hier die *Randbedingung* — mit Rücksicht auf die Möglichkeit der Entwicklung eines plastischen Ringes und so auch einer Verdrehung — folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\text{bzw.} \quad \left. \begin{aligned} v(r_1) = u(r_1) = 0, \quad |m_r| = m_0; \\ v(r_1) = u(r_1) = v'(r_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Im Gegensatz hierzu ist die Schale entlang ihres unteren Randes ($r = 1$) frei und unbelastet, daher kann hier die Randbedingung wie folgt ausgedrückt werden:

$$n_r(1) = m_r(1) = q_r(1) = 0. \quad (3)$$

4. Die kinematisch hinreichende Lastintensität

Den kinematisch hinreichenden, die Randbedingung (2) erfüllenden Formänderungszustand charakterisieren die folgenden Verschiebungsfunktionen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ferner im Intervall} \\ \\ \text{und im Intervall} \end{array} \right\} \begin{array}{l} u(r) \equiv 0, \\ r_1 \leq r \leq r_0 \\ v(r) \equiv 0 \\ r_0 \leq r \leq 1 \\ v(r) = v_2 \frac{r - r_0}{1 - r_0}, \end{array} \quad (4)$$

die in Abb. 3 dargestellt sind.

Die in den Formeln vorkommende Größe $r_0 = R_0/R_2$, d. h. die Stelle des »plastischen Ringes« ist vorderhand unbekannt, doch besteht die Ungleichheit $r_1 \leq r_0 \leq 1$ unter allen Umständen.

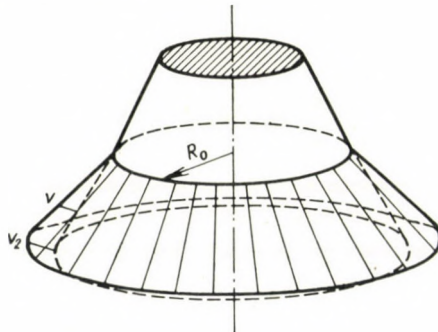


Abb. 3

Die zu dem angenommenen kinematisch hinreichenden Formänderungszustand gehörende kinematisch hinreichende Lastintensität kann aus der Gleichheit der während des angenommenen Zustandebringens der Verschiebungen geleisteten inneren und äußeren Arbeiten bestimmt werden. Die durch die Formeln (1) gegebenen Fließbedingungen berücksichtigend kann die innere Arbeit auf folgende Weise berechnet werden:

$$L_i = \iint (n_\delta \varepsilon_\delta + m_r \varkappa_r + n_r \varepsilon_r) ds_1 ds_2 + \int m_0 \varkappa_0 ds_1.$$

In der obigen Formel bezeichnen ε_θ bzw. ε_r die in die Ringrichtung bzw. die in die Richtung der Erzeugenden fallende spezifische Dehnung der Mittel­fläche der Schale; \varkappa_r die spezifische Verdrehung der zur Erzeugenden normalen Querschnitte, während \varkappa_0 die bei dem an der Stelle r_0 sich entwickelnden plas­ti­schen Ringe entstehende Verdrehung bedeutet. Diese Größen können aus den Verschiebungen u und v , die Formeln (4) benützend, folgendermaßen berechnet werden [10]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= \frac{1}{R_2} \frac{v \cos \alpha + u \sin \alpha}{r} = \frac{v_2 \cos \alpha}{R_2(1-r_0)} \frac{r-r_0}{r}; \\ \varepsilon_r &= \frac{\sin \alpha}{R_2} u' = 0; \\ \varkappa_r &= \frac{\sin^2 \alpha}{R_2^2} v'' = 0; \\ \varkappa_0 &= \frac{\sin \alpha}{R_2} [v']_{r=r_0} = \frac{v_2 \sin \alpha}{R_2(1-r_0)}.\end{aligned}$$

Die Abmessungen des Volumelementes der Schale sind nach Abb. 1 und 2:

$$ds_1 = r R_2 d\vartheta, \quad ds_2 = \frac{R_2}{\sin \alpha} dr.$$

Die obigen Größen in die Formel der inneren Arbeit einsetzend, erhält man nach vollzogener Integrierung das folgende Ergebnis:

$$L_i = 2\pi \frac{n_0 R_2 v_2}{(1-r_0)} \left[\frac{1}{2} (1-r_0)^2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{m_0 \sin \alpha}{n_0 R_2} r_0 \right]. \quad (5)$$

Die beim Zustandekommen der angenommenen Verschiebungen geleistete äußere Arbeit kann wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned}L_a &= \iint p_{nk} v ds_1 ds_2 = \frac{p_{nk} R_2^2 v_2}{\sin \alpha (1-r_0)} \int_{r_0}^1 \int_0^{2\pi} r (r-r_0) d\vartheta dr = \\ &= 2\pi p_{nk} \frac{R_2^2 v_2}{6 \sin \alpha (1-r_0)} (r_0^3 - 3r_0 + 2).\end{aligned} \quad (6)$$

Die äußere und die innere Arbeit einander gleichstellend erhält man für die zum angenommenen Formänderungszustand gehörende kinematisch hinreichende Lastintensität das folgende Ergebnis:

$$p_{nk} = 6 \frac{\frac{\cos \alpha}{2} (1-r_0)^2 + \frac{m_0 \sin^2 \alpha}{n_0 R_2} r_0}{r_0^3 - 3r_0 + 2} \frac{n_0}{R_2}. \quad (7)$$

Diese Formel liefert die kinematisch hinreichende Lastintensität als eine Funktion des Parameters r_0 . Obzwar eine beliebig angenommene, zu einem in das Intervall $r_1 \leq r_0 \leq 1$ fallenden Wert gehörende Lastintensität eine obere Grenze der Tragfähigkeit bedeutet, erhält man die am besten entsprechende Grenze in dem Falle, wenn dieser Parameter so bestimmt wird, daß die Funktion hiedurch zum Minimum wird, d. h. aus der Gleichung

$$\frac{\partial p_{nk}}{\partial r_0} = 0 . \tag{8}$$

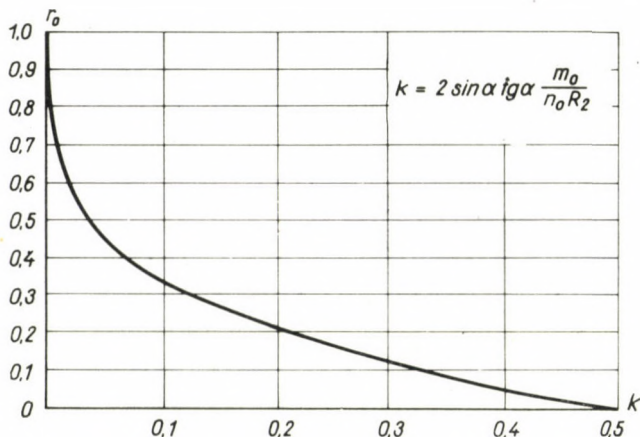


Abb. 4

Nach der Differenzierung erhält man für den Wert von r_0 eine algebraische Gleichung vierten Grades, deren in das untersuchte Intervall fallende Wurzel in Abb. 4 als eine Funktion der Konstanten

$$k = 2 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \frac{m_0}{n_0 R_2}$$

dargestellt ist. Die Berechnung der kinematisch hinreichenden Lastintensität erfolgt dann auf folgende Art:

Vorerst wird der Wert der Konstanten k bestimmt. Wenn der zu dieser gehörende, aus der Abb. 4 ablesbare Wert $r_0 \geq r_1$ ist, dann muß die kinematisch hinreichende Lastintensität durch Einsetzen dieses Wertes in die Formel (7) bestimmt werden. Wenn dagegen der zum Wert k gehörende Wert $r_0 < r_1$ ist, dann hat die Funktion (7) im untersuchten Intervall keinen Extremwert. Es ist leicht einzusehen, daß man die kleinste kinematisch mögliche Lastintensität in diesem Falle durch die Substitution $r_0 = r_1$ erhält, der plastische Ring entwickelt sich daher entlang des oberen Randes.

Als Sonderfall liefert die Formel (7) auch die kinematisch hinreichende Lastintensität der entlang ihres Innenrandes eingespannten, ebenen Kreisringplatte, wenn für a der Wert $a = 90^\circ$ eingesetzt wird:

$$p_{nk} = \frac{6r_0}{r_0^3 - 3r_0 + 2} \frac{n_0}{R_2^2}. \quad (7a)$$

Nachdem diese Funktion im Intervall $0 \leq r_0 \leq 1$ keinen Extremwert hat, so erhält man die kleinste Lastintensität mit Hilfe der Substitution $r_0 = r_1$. Der plastische Ring bildet sich daher in jedem Falle entlang der Einspannung aus.

Obzwar der Wert p_{nk} nach dem beschriebenen Verfahren auf Grund der Minimumbedingung bestimmt wurde, bedeutet dies jedoch nicht, daß das so erhaltene Ergebnis mit der Traglastintensität übereinstimmt. Das Aufsuchen des Minimums erfolgte nämlich nicht auf Grund der sämtlich möglichen, sondern nur auf Grund der durch die Formeln (4) bestimmten Typen der kinematisch hinreichenden Verschiebungen. Mit Rücksicht hierauf muß in der Folge auch die statisch zulässige Lastintensität der Schale berechnet werden, und zwar umso mehr, als gleichzeitig auch die Verteilung der Beanspruchungen bestimmt werden kann.

5. Die statisch zulässige Lastintensität

Auf Grund des Gleichgewichtes der auf ein Volumelement der Schale wirkenden Kräfte können zwei Projektions- und eine Momentengleichung angeschrieben werden [10]:

$$n'_r + \frac{n_r - n_\delta}{r} - \frac{R_2}{\sin \alpha} p_r = 0, \quad (9)$$

$$q'_r + \frac{q_r + n_\delta \operatorname{ctg} \alpha}{r} - \frac{R_2}{\sin \alpha} p_n = 0, \quad (10)$$

$$m'_r + \frac{m_r - m_\delta}{r} - \frac{R_2}{\sin \alpha} q_r = 0. \quad (11)$$

Da in den obigen drei Gleichgewichtsgleichungen fünf unbekannte Beanspruchungen vorkommen, so ist das Problem statisch zweifach unbestimmt.

In der Folge wird die Verteilung einer statisch zulässigen Beanspruchung der Schale derart bestimmt werden, daß zwei Beanspruchungsfunktionen zwar beliebig, aber der Fließbedingung (1) entsprechend angenommen werden,

während die übrigen drei aus den angeschriebenen Differentialgleichungen zu bestimmen sind. Falls die letzteren die Bedingung, daß sie die durch die Fließbedingungen festgesetzten Werte nirgends überschreiten, erfüllen, dann ist die zu den bestimmten Beanspruchungen gehörende Außenlast statisch zulässig.

Die angenommenen Beanspruchungsfunktionen seien die folgenden:

$$\begin{aligned} m_{\vartheta} &\equiv 0, \\ n_{\vartheta} &\equiv n_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Vorerst wird aus den Gleichungen (10) und (11) der Wert q_r eliminiert. Auf diese Weise erhält man die folgende Gleichung:

$$m_r'' - \frac{2m_r' - m_{\vartheta}'}{r} + \frac{R_2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{n_{\vartheta}}{r} - \frac{R_2^2}{\sin^2 \alpha} p_n = 0. \tag{13}$$

Wenn diese Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Randbedingung (3) und der Formeln (12) gelöst wird, so gelangt man zu dem folgenden Ergebnis:

$$m_r = \frac{R_2^2}{6r \sin^2 \alpha} \left[p_n (r^3 - 3r + 2) - \frac{3n_0 \cos \alpha}{R_2} (1 - r)^2 \right]. \tag{14}$$

Diese Beanspruchungsverteilung kann aber nur dann erreicht werden, wenn die Biegemomente das Bruchmoment nirgends überschreiten. Nachdem der Wert von m_0 konstant ist, so kann die statisch zulässige Lastintensität auf Grund der Bedingung bestimmt werden, daß das größte Biegemoment dem Bruchmoment gleicht. Man bezeichne die Stelle des größten Biegemomentes, das durch die Gleichung

$$\frac{\partial m_r}{\partial r} = 0 \tag{15}$$

bestimmt ist, mit \bar{r}_0 . Diesen Wert in die Gleichung (14) einsetzend und sie nachher ordnend, erhält man das folgende Ergebnis:

$$p_{ns} = 6 \cdot \frac{\frac{\cos \alpha}{2} (1 - \bar{r}_0)^2 + \frac{m_0 \sin^2 \alpha}{n_0 R_2} \bar{r}_0}{\bar{r}_0^3 - 3\bar{r}_0 + 2} \frac{n_0}{R_2}. \tag{16}$$

Es kann festgestellt werden, daß die Formeln (7) und (16) formell vollständig identisch sind, der Unterschied besteht lediglich darin, daß der in der Formel (7) für p_{nk} vorkommende Wert r_0 durch die Formel (8), während der

in der Formel (16) für p_{ns} erscheinende Wert \bar{r}_0 durch die Formel (15) bestimmt ist. Es läßt sich jedoch leicht nachweisen, daß diese Gleichungen zu ein und demselben Ergebnis führen. Die Gleichungen (7) bzw. (14) können nämlich nach einer entsprechenden Transformation in der allgemeinen Form

$$p_{nk}f_1(r_0) + m_0f_2(r_0) + f_3(r_0) = 0$$

bzw.

$$p_{ns}f_1(r) + m_rf_2(r) + f_3(r) = 0$$

angeschrieben werden, wo $f_1(r_0)$, $f_2(r_0)$, $f_3(r_0)$ bzw. $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$ vollkommen identische Funktionen bedeuten.

Wenn man in der ersten Gleichung p_{nk} , in der zweiten aber m_r als abhängige Veränderliche betrachtet, und die impliziten Funktionen nach r_0 bzw. nach r ableitet, so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$p'_{nk}f_1(r_0) + p_{nk}f'_1(r_0) + m_0f'_2(r_0) + f'_3(r_0) = 0$$

bzw.

$$p_{ns}f'_1(r) + m'_rf_2(r) + m_rf'_2(r) + f'_3(r) = 0.$$

Wenn nun der Gleichung (8) entsprechend der Wert $p'_{nk} = 0$ ist, bzw. der Gleichung (15) entsprechend der Wert $m'_r = 0$ ist, und ferner die die Fließbedingungen ausdrückenden Gleichheiten $r = \bar{r}_0$ und $m_r = m_0$ eingesetzt werden, so erhält man die Gleichungen:

$$p_{nk}f''_1(r_0) + m_0f'_2(r_0) + f'_3(r_0) = 0 \quad (17)$$

bzw.

$$p_{ns}f'_1(\bar{r}_0) + m_0f'_2(\bar{r}_0) + f'_3(\bar{r}_0) = 0. \quad (18)$$

Nachdem aber die für Bestimmung der Werte p_{nk} und r_0 dienenden Gleichungen (7) und (17), ferner die für Bestimmung der Werte p_{ns} und \bar{r}_0 dienenden Gleichungen (16) und (18) vollkommen identisch sind, so ist der vorstehenden Behauptung entsprechend $r_0 = \bar{r}_0$ und $p_{nk} = p_{ns} = p_{nt}$.

Es kann daher behauptet werden, daß die durch die Formeln (7) und (8) bestimmte Lastintensität nicht nur kinematisch hinreichend, sondern auch statisch zulässig ist, daher mit der Traglastintensität der Schale identisch ist. Die Tragfähigkeit einer Kegelstumpf-Schale kann daher auf Grund des im Absatz 4 beschriebenen, auf die kinematisch hinreichende Lastintensität bezüglichen Verfahrens bestimmt werden. Nachdem die obige Ableitung auch für den Sonderfall $\alpha = 90^\circ$ gültig ist, so liefert die Formel (7a) die Traglastintensität der Kreisringplatte.

6. Die Beanspruchungen

Beim Entwurf einer Kegelstumpf-Schale können die maßgebenden Beanspruchungen nur dann bestimmt werden, wenn vorher das Verhältnis m_0/n_0R_2 angenommen wird. Diese Annahme kann nicht ganz willkürlich erfolgen, vielmehr ist es zweckmäßig, danach zu trachten, daß dieses Verhältnis von dem auf Grund der Elastizitätslehre gewonnenen Werte nicht erheblich abweiche [10]. Eine entsprechende Wahl des Wertes m_0/n_0R_2 bietet gleichzeitig die Möglichkeit, auch wirtschaftlichen Gesichtspunkten Rechnung zu tragen; die Untersuchung dieser Fragen würde aber den Rahmen des vorliegenden Aufsatzes überschreiten. Nach Annahme des Wertes m_0/n_0R_2 kann mit Hilfe der Abb. 4 und der Formel (7) aus der Außenlast die in der Ringrichtung wirkende Zugkraft bestimmt werden, in deren Kenntnis dann die größten Biegemomente berechnet werden können. Außerdem ist es aber zweckmäßig, zur Bemessung der Querschnitte und zur Anordnung der Bewehrung die entlang der Erzeugenden auftretende Veränderung des Biegemomentes, ferner die der Normalkraft, wie auch die der Querkraft ebenfalls zu bestimmen.

Die Verteilung der Biegemomente ist durch die Formel (14) gegeben.

Die Funktion der Normalkraft erhält man aus der Differentialgleichung (9), wenn man die Randbedingung (3) und die Formeln (12) in Betracht zieht. Die Lösung der Differentialgleichung liefert das folgende Ergebnis:

$$n_r = - \frac{1-r}{1} \left[\frac{p_r R_2}{2 \sin a} (1+r) + n_0 \right]. \quad (19)$$

In Kenntnis dieser Beanspruchung kann bei der Bemessung der Querschnitte neben dem Biegemoment auch die Wirkung der Normalkraft berücksichtigt werden.

Schließlich können die Querkräfte aus der Differentialgleichung (11) berechnet werden, wenn man die zur Bestimmung der Biegemomente dienenden Beziehungen (12) und (14) in dieselbe einsetzt. Das Ergebnis ist:

$$q_r = \frac{1-r}{2r \sin a} [2n_0 \cos a - R_2 p_n (1+r)]. \quad (20)$$

Im Falle einer Kreisringplatte entstehen in der Ringrichtung keine Schnittkräfte, daher ist n_0 aus der Formel (7a) der Tragfähigkeit ausgefallen und erscheint auch in der Formel der Beanspruchungen mit dem Nullwert. Wenn in den Formeln (14), (19) und (20) für a der Wert $a = 90^\circ$ eingesetzt wird, so erhält man für die Beanspruchungen der Kreisringplatte die folgenden Ergebnisse:

$$m_r = \frac{p_n R_2^2}{6} \frac{r^3 - 3r + 2}{r}, \quad (14a)$$

$$n_r = \frac{p_r R_2}{2} \frac{1-r^2}{r}, \quad (19a)$$

$$q_r = -\frac{p_n R_2}{2} \frac{1-r^2}{r}. \quad (20a)$$

7. Die praktische Anwendung der Kegelstumpf-Schale

Von den Gesichtspunkten der Materialersparnis und der Möglichkeit der Vorfertigung aus betrachtet erscheint die Anwendung von Schalenkonstruktionen für Gründungskörper wirtschaftlich [1]. Unter diesen ist der ein-

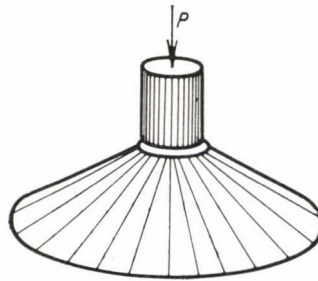


Abb. 5

fachste und vom Standpunkte der Praxis aus betrachtet wichtigste Typ der kegelstumpfförmige Gründungskörper (Abb. 5), dessen Entwurf und Tragfähigkeitsberechnung mit Hilfe der bekanntgegebenen Methode leicht durchgeführt werden kann. Um aber die abgeleiteten Ergebnisse anwenden zu können, muß die Belastung bekannt sein, die infolge der in der Achse des Kegelstumpfes wirkenden Kraft P an der Seitenfläche der Kegelstumpf-Schale entsteht. Zur Bestimmung der letzteren bedient man sich der Annahme, daß unmittelbar unter dem Gründungskörper die Sohldruckverteilung gleichmäßig ist, und daß innerhalb des Kegels ein hydrostatischer Spannungszustand herrscht. In diesem Falle ist die Intensität des auf die Schalenfläche wirkenden Druckes konstant, während die Werte der in normaler bzw. tangentialer Richtung wirkenden Druckkomponenten

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \frac{P}{R_2^2 \pi} \\ p_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

bwz.

sind.

Wenn der Gründungskörper durch eine ausmittige Kraft belastet ist, dann kann die Berechnung unter Voraussetzung einer solchen mittigen Kraft durchgeführt werden, die bei einer gleichmäßigen Spannungsverteilung eine Bodenspannung erweckt, die ebenso groß wie die aus der ausmittigen Kraft berechenbare größte Spannung ist [5].

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß das vorgeführte Rechnungsverfahren, zwar unter Berücksichtigung anderer Randbedingungen, aber nach ähnlichen Prinzipien durchgeführt, auch zur Bemessung kegelstumpfförmiger Silotrichter und Behälter verwendbar ist; ja noch mehr, wenn man dieses Verfahren mit dem für Kreiszyinderschalen abgeleiteten Rechenverfahren ergänzt [4], dann kann mit dessen Hilfe auch die auf dem Traglastverfahren beruhende Entwurfsarbeit einer kompletten Silozelle oder eines Behälters durchgeführt werden.

8. Zahlenbeispiel

Es sollen die Beanspruchungen eines aus einer kegelstumpfförmigen Stahlbetonschale gebildeten Gründungskörpers berechnet werden, der die folgenden charakteristischen Abmessungen hat: $R_1 = 0,25$ m, $R_2 = 1,00$ m, $\alpha = 60^\circ$. Die in der Achse wirkende Belastung beträgt $P = 30$ t.

Nach Formel (21) beträgt die Intensität der zur Schale normalen, gleichmäßig verteilten Belastung

$$p_n = \frac{30}{1,0^2 \pi} = 9,56 \text{ t/m}^2 .$$

Den auf der Elastizitätslehre beruhenden Ergebnissen entsprechend [10] beläuft sich der Wert des Verhältnisses zwischen dem in der Richtung der Erzeugenden wirkenden größten Biegemoment und dem durchschnittlichen Wert der in der Ringrichtung wirkenden Zugkraft, je nach der Schalendicke, auf etwa 0,15—0,20. Dementsprechend den Wert des Verhältnisses $m_0/n_0 \cdot R_2$ auf 0,20 annehmend, erhält man für k :

$$k = 2 \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \frac{m_0}{n_0 R_2} = 2 \cdot 0,866 \cdot 1,73 \cdot 0,20 = 0,600 > 0,500 ,$$

daher ist

$$r_0 = r_1 = 0,25 .$$

Den Wert von n_0 aus der Formel (7) ausdrückend, ist die in der Ringrichtung wirkende Zugkraft:

$$n_0 = \frac{9,56 \cdot 1,0 (0,25^3 - 3 \cdot 0,25 + 2)}{6 \left[\frac{0,500}{2} (1 - 0,25)^2 + 0,20 \frac{0,866^2}{1,0} \cdot 0,25 \right]} = 11,35 \text{ t/m} .$$

Hieraus ergibt sich für das größte Biegemoment der Wert

$$m_0 = 0,20 \cdot 11,35 = 2,27 \text{ tm/m} .$$

Außerdem kann aus den Formeln (14), (19) und (20) die Verteilung der Beanspruchungen m_r , n_r und q_r entlang der Erzeugenden ebenfalls bestimmt werden (Abb. 6). In Kenntnis der Beanspruchungen kann nun die Bemessung der Schalenquerschnitte unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Biegemomentes und der Normalkraft durchgeführt sowie auch der Bewehrungsplan entworfen werden. Außerdem muß aber die Schale auch auf Schub untersucht werden.

Die vorige Aufgabe soll nun für den Sonderfall gelöst werden, daß $\alpha = 90^\circ$ ist, d. h. daß der Gründungskörper eine mit den geometrischen Angaben $R_1 = 0,25$ m, $R_2 = 1,00$ m gekennzeichnete Kreisringplatte aus Stahlbeton ist, auf die ebenfalls eine mittige Kraft $P = 30$ t wirkt.

Der Wert des größten Biegemomentes bzw. der der größten Querkraft ergibt sich aus den Formeln (14a) bzw. (20a) wie folgt:

$$m_0 = 9,56 \cdot 1,00^2 \cdot \frac{0,25^3 - 3 \cdot 0,25 + 2}{6 \cdot 0,25} = 8,05 \text{ tm/m}$$

bzw.

$$q_r = -\frac{9,56 \cdot 1,00}{2} \cdot \frac{1 - 0,25^2}{0,25} = -17,95 \text{ t/m.}$$

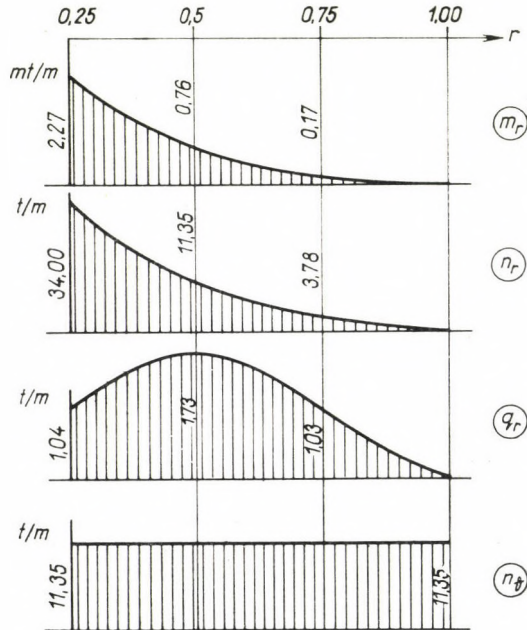


Abb. 6

Für dieselben Beanspruchungen ergaben sich im Falle eines Schalengründungskörpers die Werte $m_0 = 2,27$ mt/m, bzw. $q_r = 1,73$ t/m (Abb. 6). Es kann daher festgestellt werden, daß im Falle der Anwendung eines Schalengründungskörpers sowohl die Biegemomente wie auch die Querkräfte erheblich kleiner als im Falle der Anwendung einer Gründungsplatte sind.

9. Schlußbemerkungen

Im Aufsatz wurde ein Rechnungsverfahren vorgeführt, mit dessen Hilfe die Tragfähigkeit und die Beanspruchungen einer axialsymmetrisch angeordneten und belasteten Kegelstumpfschale aus Stahlbeton, die entlang eines Randes eingespannt, entlang ihres anderen Randes aber frei ist, auf Grund des Traglastverfahrens bestimmt werden können.

Zur Prüfung der Richtigkeit des vorgeführten Rechenverfahrens und zwecks Untersuchung des Verhaltens von schalenartig konstruierten Gründungskörpern, sind im Bauwissenschaftlichen Institute in Budapest Bruchversuche mit kegelstumpfförmigen Schalengründungskörpern im Gange. Die untersuchten Modelle haben einen unteren Durchmesser $R_2 = 0,70$ m und verschiedene Kegelwinkel. Die bisherigen Versuche haben gezeigt, daß das Bruchbild der auf einem Sandboden aufliegenden Modelle den Vorausset-



Abb. 7

zungen entsprechend aus einem plastischen Ringe und radialen Rissen besteht (Abb. 7), daß aber die tatsächliche Traglast die auf Grund des vorgeführten Verfahrens berechnete allgemein um 10—30% übersteigt. Diese Erscheinung findet darin ihre Erklärung, daß nach den Messungen kein gleichmäßig verteilter Sohlendruck auftrat, sondern daß in der Achse des Kegels größere Spannungen entstanden als entlag der Ränder. Wenn bei der Berechnung dieser Umstand berücksichtigt wird, stellt sich heraus, daß zwischen der theoretischen und den Versuchsergebnissen nur unwesentliche Abweichungen vorliegen.

Auf Grund der obigen Ergebnisse kann festgestellt werden, daß die Versuche die Richtigkeit des vorgeführten Verfahrens ebenfalls bewiesen haben.

Die ausgearbeiteten Beispiele haben gezeigt, daß die in kegelstumpfförmigen, schalenartig konstruierten Gründungskörpern auftretenden, für die Bemessung entscheidend wichtigen Beanspruchungen erheblich kleiner als die in Gründungsplatten sind, weshalb die ersteren vom Gesichtspunkte der Wirtschaftlichkeit aus betrachtet vorteilhaft zu sein scheinen. Die Frage der Wirtschaftlichkeit kann jedoch nur in Kenntnis der effektiven Ausführungskosten entschieden werden.

SCHRIFTTUM

1. BÖLCSKEI, E.: Application of Shell Structures for Foundation. Acta Technica Ac. Sc. Hung. Tom. XXVIII., Fasc. 1-2., pp. 199-207 (1959).
2. DRUCKER, D. C.—GREENBERG, H. J.—PRAGER, W.: The Safety Factor of an Elastic-Plastic Body in Plane Strain. Journal of Applied Mechanics, 18 (1951).
3. HODGE, P. G.: Plastic Analysis of Structures, New York (1959).
4. MENYHÁRD, I.: Die statische Berechnung von zylindrischen Stahlbeton-Behältern auf Grund der Bruchtheorie. Vorbericht des V. Kongresses der internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Lissabon (1956).
5. MENYHÁRD, I.: Vasbeton lemezek méretezése a képlékenységtan elvei szerint (Die Bemessung von Stahlbetonplatten nach den Prinzipien der Plastizitätslehre). Mérnöki Továbbképző Intézet. Jegyzet (1954).
6. OLSZAK, W.—SAWCZUK, A.: Die Grenztragfähigkeit von zylindrischen Schalen bei verschiedenen Formen der Plastizitätsbedingung. Acta Technica Ac. Sc. Hung. Tom XXVI., Fasc. 1-2., pp. 55-77.
7. OLSZAK, W.—PERZYNA: Variational Theorems in the Theory of Non-Homogeneous Elastic-Plastic Bodies (I. Non-Homogeneous Anisotropic Bodies). Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Techn. Sci. 1958. No. 2.
8. PALOTÁS, L.: Mérnöki Kézikönyv III. köt. (Handbuch für Bauingenieure III. Bd.) Budapest, 1959.
9. SZMODITS, K.: A hiperbolikus paraboloidhéj törésmélete (Die Bruchtheorie der hyperbolischen Paraboloid-Schale). Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények, III. kötet, 1-2 (1959).
10. TIMOSHENKO, S. P.: Theory of Plates and Shells, New York (1940).

ZUSAMMENFASSUNG

Von zwei Extremalprinzipien des Traglastverfahrens und vereinfachten Fließbedingungen ausgehend, behandelt der Aufsatz die Bestimmung der Tragfähigkeit und der Beanspruchungen einer axialsymmetrisch angeordneten und belasteten, entlang ihres oberen Randes eingespannten, entlang ihres unteren Randes dagegen freien Kegelstumpf-Schale aus Stahlbeton. Als Sonderfall liefern die Ergebnisse auch die Tragfähigkeit und die Beanspruchungen der ebenen Kreisringplatte.

In der Praxis kann das vorgeführte Rechnungsverfahren zur Bemessung schalenartig konstruierter Stahlbeton-Gründungskörper verwendet werden, was an Hand eines Zahlenbeispiels gezeigt wird.

INVESTIGATION OF A TRUNCATED CONE-LIKE REINFORCED CONCRETE SHELL ON THE BASIS OF THE LIMIT ANALYSIS

S. KALISZKY

SUMMARY

Starting out from two extremum principles of the limit analysis and simplified yielding conditions, the paper deals with the determination of the bearing capacity and of the stresses arising in an axial symmetrically arranged and loaded truncated cone-like reinforced concrete

shell, built in along its upper edge, but free along its lower one. The results also give — as a limit case — the bearing capacity of an annulus-like formed slab and the stresses arising therein.

The method of calculation in question can be used for the dimensioning of shell-like formed reinforced concrete footings. The calculation itself is presented by a numerical example.

ÉTUDE DES VOILES MINCES TRONCONIQUES EN BÉTON ARMÉ, SUR LA BASE DE LA THÉORIE DE LA PLASTICITÉ

S. KALISZKY

RÉSUMÉ

En partant des deux théorèmes des limites extrêmes de la théorie de la plasticité, et de conditions de fluage simplifiées, l'étude offre une méthode de détermination de la capacité portante et des sollicitations de voiles en béton armé tronconiques, de dispositions et à charge symétriques par rapport à l'axe, et encastres seulement le long de leur rive supérieure. Les résultats donnent aussi, comme cas limite, la capacité portante et les efforts intérieurs de la plaque en forme d'anneau circulaire.

Dans la pratique, cette méthode peut s'utiliser au calcul des fondations en béton armé en forme de voile. Le mode d'application du calcul est illustré par un exemple numérique.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ОБОЛОЧКИ, ИМЕЮЩЕЙ ФОРМУ УСЕЧЕННОГО КОНУСА, НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ИЗЛОМА

Ш. КАЛИСКИ

РЕЗЮМЕ

Исходя из двух крайних теорем исследования граничного состояния и упрощенных условий текучести, работа знакомит с определением нагрузки и нагружаемости симметричной по оси железобетонной оболочки, имеющей форму усеченного конуса, с симметричной к оси нагрузкой, зажатой по верхнему с свободной по нижнему краю. В виде крайнего случая, результаты определяют и нагрузку и нагружаемость плоской, кольцевидной пластины.

Методика расчета в практике может использоваться при расчете железобетонных оболочек, имеющих простую геометрическую форму. Выполнение расчета демонстрируется на числовом примере.

A METHOD TO REVEAL AUSTENITIC GRAIN SIZE IN HARDENABLE STEELS

M. KÁLDOR

CANDIDAT OF ENG. SC.

and

J. A. VERŐ

MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

REPORT No. 18 OF THE WORKING COMMUNITY FOR METALLURGY
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received February 2, 1961]

There are several methods to measure, or more precisely to reveal austenitic grain size of steels [1]. Some of these can be used only for steels within rather narrow limits of composition, such as measurements based on the network of ferrite or cementite. Other methods are difficult to carry out, such as the preparation of gradient quenched samples or the production of a ferrite network by stepped quenching. Further methods, such as MCQUAID—EHN's carburising test [2] or quenching a previously polished sample after austenitising in hydrogen have also certain limitations in selecting the conditions of austenitising.

All in all, there are certain sorts of steel for which hardly conveniently applicable methods could be found. Such a sort is, first steel containing about 1 pct. of carbon and 1,5 pct. of chromium, generally used as ball-bearing material, the grain size of which can be determined only by comparing the fracture of a quenched sample with a standard set of fractures representing the ASTM grain size grades [4]. Another sort of steel for which no reliable method is known is the low carbon quality of case hardening or that of weldable steels containing less than 0,2 pct. of carbon, especially, if fine grained [3].

Knowledge of the austenitic grain size in these steels is often desirable when qualifying them for use. Therefore, the relatively simple method accidentally found during another research work on ball-bearing steel should be described. The method has successfully been used with the two above-mentioned kinds of steel, but doubtlessly it will prove applicable to all grades of steel which become martensitic on proper cooling.

Our method is the following. Two disks of steel, having a diameter of about 12 mm and a thickness of 3 mm are ground and polished on one circular side and assembled, the two polished surfaces being in good contact. The two disks are fastened to each other in this position by means of wire: notches on the circumference or two boreholes going through both disks make wiring easier and more secure. The circumference of the double disk is then smeared with some alumina made up with water glass and dried at 80° C.

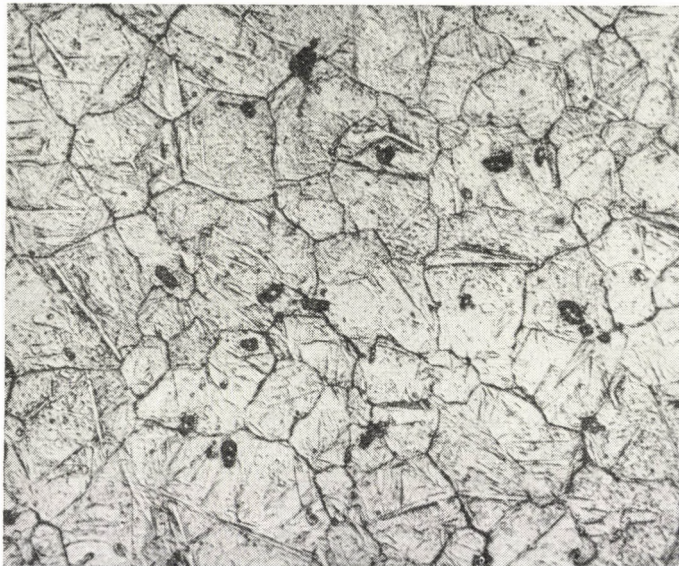


Fig. 1. Ball-bearing steel containing 1 pct. C and 1,4 pct. Cr, austenitised at 1050°C for half an hour. Grain size ASTM No. 6. Unetched. 180 ×



Fig. 2. The same as in Fig. 1 but austenitised at 1050°C for an hour. Grain size ASTM No. 5. Unetched. 180 ×

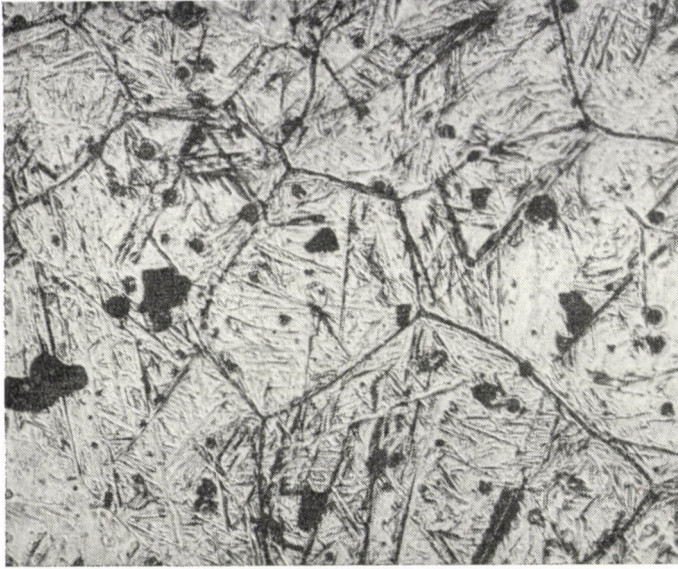


Fig. 3. The same as in Fig. 1 but austenitised at 1250° C for half an hour.
Grain size ASTM No. 2. Unetched. 180×



Fig. 4. The sample of Fig. 2 but focused to show the martensitic structure

Such pairs of disks, suspended on a wire, were then austenitised in a slow stream of nitrogen at the desired temperature in a vertical tubular furnace and when the required time had elapsed quenched in oil. The two specimens were now separated and cleaned of oil by washing in alcohol; the two identically treated samples were then ready for microscopical examination, because their polished surfaces were hardly deteriorated during heating.

Figs. 1—4 are micrographs of specimens of ball-bearing steel prepared in this way. The grain boundaries of austenite that existed in the moment of quenching are very clearly visible.

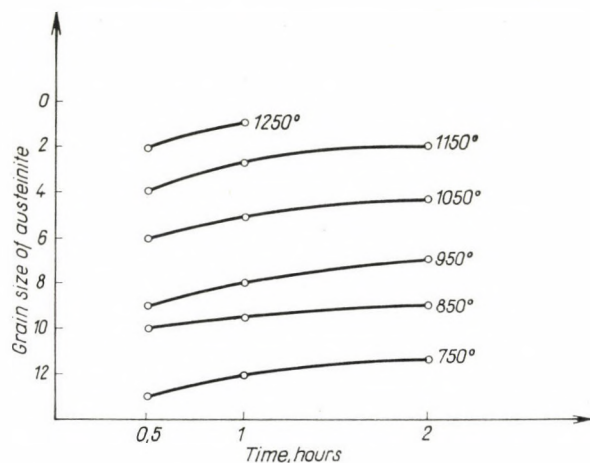


Fig. 5. The grain size of the examined ball-bearing steel as a function of austenitising time and temperature

The relief produced by the formation of martensite causes some difference in the appearance of the structure when focused differently. Fig. 4 is a picture of the very same spot of a sample which also is shown in Fig. 2, but was photographed in a position 3—4 microns farther from the objective. In Fig. 2 chiefly the grain boundaries, but in Fig. 4 rather the needles of martensite protrude.

The method proved quite satisfactory, except when the grain size was finer than grade ASTM No. 12. In coarser austenite grains, larger martensite needles are formed and these make a higher relief, protruding more from the polished plane.

In Fig. 5 the determined grain sizes of ball-bearing steel are shown as a function of austenitising temperature and time.

In low carbon steels the relief due to martensite formation is less pronounced; as shown in Fig. 6, the grain boundaries of austenite in a 0,12 pct. carbon steel sample, heated at 1050° C for half an hour, are revealed as

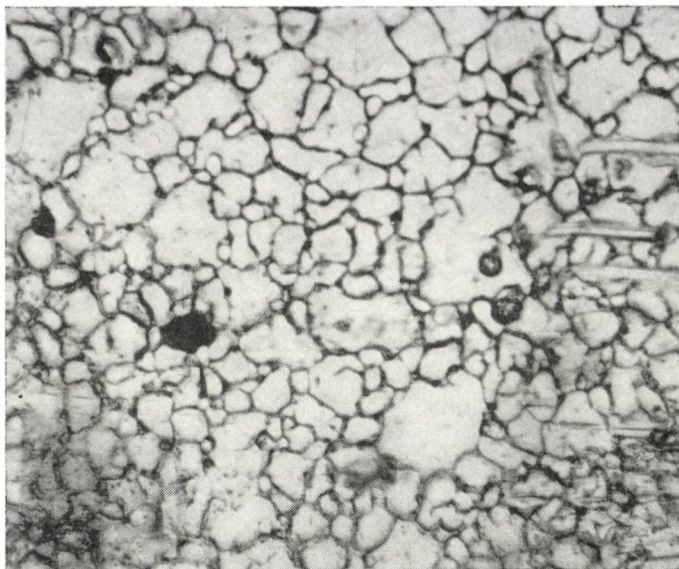


Fig. 6. Austenitic grain structure of a 0,12 pct. carbon steel. Unetched. 540 \times

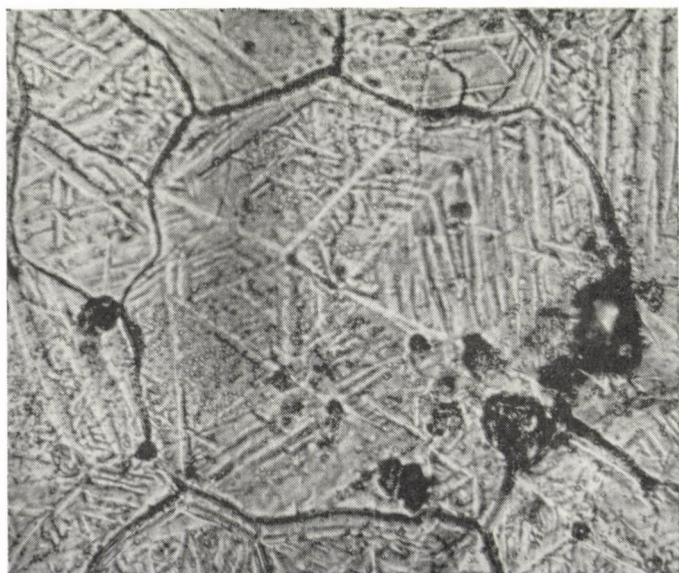


Fig. 7. Ball-bearing steel austenitised at 1050° C for an hour. Slight Nital etch after quenching.
540 \times

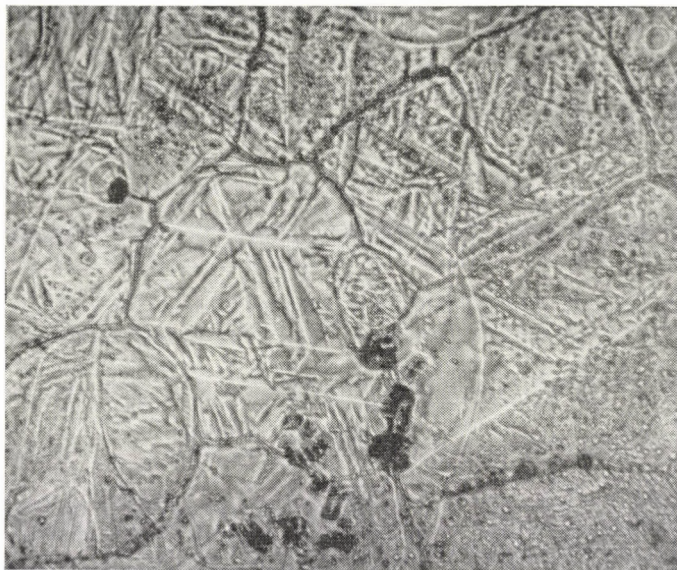


Fig. 8. The same sample as in Fig. 7., another spot



Fig. 9. Ball-bearing steel austenitised at 1150° C for two hours. Slight Nital etch after quenching. 540×

broad dark lines, which rather appear to be a result of oxidation than that of volume changes accompanying the formation of martensite. While on samples of hard steel nearly the whole area of the polished surface was suitable for examination, on these of low carbon steel the structure shown in Fig. 6 could be found in isolated spots only.

The samples prepared in the described way not only show the austenitic grain size, but after a slight etching with Nital, reveal some interesting details of martensite formation also and of the relation of martensite needles to the austenite from which it was formed. Figs. 7—9 are micrographs of lightly etched ball-bearing steel samples. In the center of Fig. 7 there is a large austenite grain, which obviously was a multiple twin having lamellas crossing each other, as indicated by the needles of martensite. In the grains shown in Fig. 9. there are long, parallel martensite needles wholly traversing the mother crystal and in the fields between the long needles smaller ones, which were formed in later steps of transformation; within the same austenite grain, the shorter needles run in a few parallel directions.

REFERENCES

1. BAIN, E. C. and VILELLA, J. R.: Austenitic Grain Size in Steel. ASM Metals Handbook, 1948. 399.
2. McQUAID, H. W.: The McQuaid-Ehn Test. ASM Metals Handbook, 1948, 407
3. MILLER, O. O.: Ferric Chloride Etch to Reveal Austenitic Grain Size in Low-carbon Steel. Metal Progress 56 (1949) 692.
4. VERŐ, J.: The Preparation of Standard Fractures for Grain Size Determination. Bányászati és Kohászati Lapok, 89 (1948) 1.
5. SZÉKI, P.: The Determination by Oxidation of Austenitic Grain Size in Mild Steel. Acta Technica, Tomus XXI, Fasc. 1—2. 79—86.
6. BODA, F.: Ujabb, egyszerű és gyors eljárás vasötvözetek szemcsenagyságának meghatározására (Simple and Quick New Method for Determination of the Grain Size of Iron Alloys). Kohászati Lapok, June 1957, p. 246 (Hungarian).

SUMMARY

A method is described which reveals the austenite grain size of hardenable steels by means of the relief formed during martensitic transformation. Two polished samples fitted together are heated in an inert atmosphere and quenched. On the polished surface the grain size of austenite is now visible without any further preparation or etching. The method is useful for ball-bearing steel. If the samples are etched, some particulars of the transformation become visible.

EIN VERFAHREN ZUR MESSUNG DER AUSTENIT-KORNGRÖSSE HÄRTBARER STAHLSORTEN

M. KÁLDOR und J. A. VERŐ

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein Verfahren beschrieben, durch welches die Austenitkorngröße härtpbarer Stahlsorten sichtbar gemacht wird. Zwei gleich große Schliifproben werden mit ihren polierten Oberflächen aneinander gepaßt, befestigt, in neutraler Atmosphäre geglüht und abgeschreckt.

An den polierten Flächen sind die Korngrenzen des Austenits ohne weitere Behandlung bereits sichtbar. Das Verfahren ist u. a. zur Untersuchung von Kugellagerstählen geeignet. Werden die abgeschreckten Proben leicht geätzt, so kommen manche Einzelheiten des Umwandlungsvorganges zum Vorschein.

MÉTHODE POUR MESURER LA GROSSEUR DES GRAINS D'AUSTÉNITE DES ACIERS TREMPABLES

M. KÁLDOR et J. A. VERÓ

RÉSUMÉ

L'article étudie une méthode de détermination de la grosseur des grains d'austénite, basée sur l'augmentation de volume des grains par suite de la transformation martensitique. La surface des spécimens ajustés avec leur surface polie, recuits dans une atmosphère protectrice et trempés ensuite, montre les limites des grains d'austénite développés pendant le recuit.

Sur les spécimens polis, le mécanisme de la transformation peut être étudié après une légère attaque.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ЗЕРНА АУСТЕНИТА ЗАКАЛИВАЮЩИХСЯ СТАЛЕЙ

М. КАЛЬДОР и Й. А. ВЕРЕ

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается метод определения величины зерна аустенита сталей, основывающийся на увеличении объема, вызванного мартенситным превращением. Если образцы с плотно наложенными друг на друга полированными поверхностями нагреть в защитной атмосфере с последующей закалкой, то на нетравленной поверхности шарикоподшипниковой стали видны образовавшиеся во время нагрева границы зерна аустенита.

После слабого травления, на шлифах может быть изучен также и механизм превращения.

BERECHNUNG DES KRAFTBEDARFS BEIM PRESSEN IM GESENK

Prof. Dr. ing. A. GELEJI

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

BERICHT Nr. 20. DER METALLURGISCHEN ARBEITSGEMEINSCHAFT DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 9. Februar 1961]

Die nachstehenden Ausführungen sind die Weiterentwicklung zweier meiner früheren Artikel. Der erste der beiden: »Strangpressen und Preßblockverfahren« [1, 2] erschien im Jahre 1952 und der zweite: »Kraftbedarf und Fließvorgänge beim Strangpressen und beim Pressen im Gesenk« [3] im Jahre 1955. In diesen beiden Artikeln führte ich mit diesen Verformungsvorgängen zusammenhängende Versuche vor, sowie eine Theorie und ein Rechenverfahren zur Bestimmung der auftretenden Kräfte.

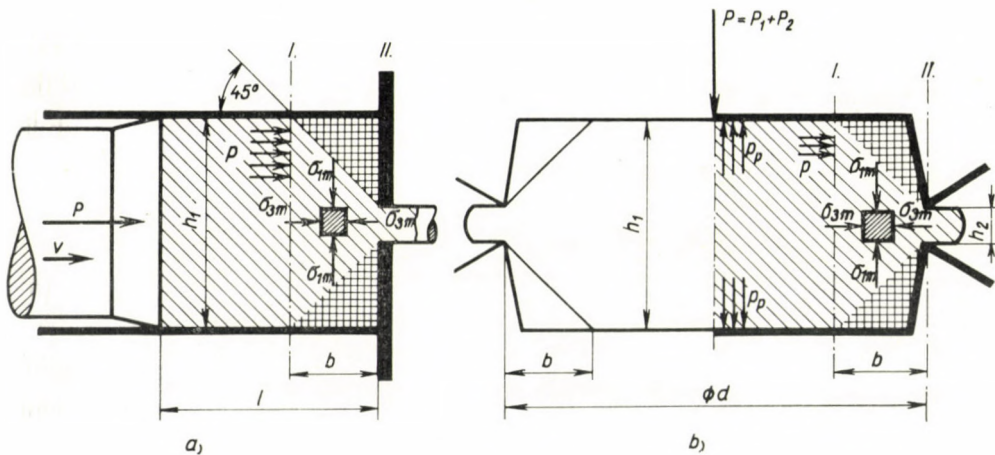


Bild 1

In dem zweiten der genannten Artikel habe ich den Vorgang beim Gesenkpesseln dem Vorgang beim Strangpressen gegenübergestellt und darauf hingewiesen, daß beide Vorgänge grundsätzlich identisch sind (Bild 1). Die Kräfte, die beim Pressen (Schmieden) im Gesenk auftreten, habe ich auf Grund dieser Identität abgeleitet.

Man kann nämlich das Problem des Gesenkschmiedens auf das Problem des Strangpressens zurückführen. Werfen wir einen Blick auf Bild 1. Hier sind die prinzipielle Darstellung des Strangpressens und das Pressen im Gesenk

nebeneinander gestellt. Die Identität der beiden Verformungsvorgänge liegt klar auf der Hand. Bei beiden drückt die im Querschnitt I—I wirkende Spannung p den Werkstoff durch die hinter der h_2 hohen Austrittsöffnung im Werkstoff selbst sich bildende kegelige Düse (»Ziehdüse«) heraus.

Die Spannung p ist

$$\sigma_3 \equiv p = 2 \cdot k_m - k_f \quad (1)$$

In dieser Gleichung bedeuten:

$$k_m = \frac{k_f}{1 - 0,93 \cdot \frac{F}{f_1}} \quad (2)$$

den mittleren Verformungswiderstand in der hinter dem Preßwerkzeug bzw. Gratspalt entstehenden kegelligen Düse, k_f die Formänderungsfestigkeit des gepreßten Werkstoffs. Ferner ist

$$f_1 = (d - 2b) \cdot h_1 \cdot \pi \quad (3)$$

die zylindrische Fläche I—I;

$$f_2 = d \cdot \pi \cdot h_2 \quad (4)$$

die Fläche des Gratspalt (Fläche II—II).

In diesen Gleichungen ist d der Durchmesser des Gesenkes in der Gratebene, h_1 die Entfernung der beiden Gesenkboden voneinander, h_2 die Höhe des Gratspalt, h_1 und h_2 ändern sich während des Pressens fortwährend, d. h. sie werden immer kleiner.

Die Abnahme F ist beim Pressen im Gesenk (Bild 1/b):

$$F = f_1 - f_2 = (d - 2b) \cdot h_1 \cdot \pi - d \cdot \pi \cdot h_2. \quad (5)$$

Die Kraft, die erforderlich ist, um den Grat aus dem völlig ausgefüllten Gesenk herauszudrücken, wenn dabei keine Gratreaktion (P_3) auftritt, wenn also die Kraft P_2 (Bild 2/a) ausgeschaltet ist (Bild 2/b), beträgt:

$$P = 2k_m \cdot \left[\frac{d^2 \cdot \pi}{4} + \psi \cdot V \right] \quad (6)$$

In dieser Gleichung ist

$$V = (l - b) \cdot f_1 = (l - b) \cdot (d - 2b) \cdot h_1 \pi \quad [\text{cm}^3] \quad (7)$$

der Inhalt des Preßstückes der von der Zylinderfläche I—I eingeschlossen ist:

$$\psi = C \cdot \sqrt[4]{\frac{v_1}{l - b}}, \quad (8)$$

wo $C = 0,025$ und v_1 [cm/s] die Preßgeschwindigkeit ist, d. h. die Geschwindigkeit, mit der die beiden Gesenkboden sich nähern.

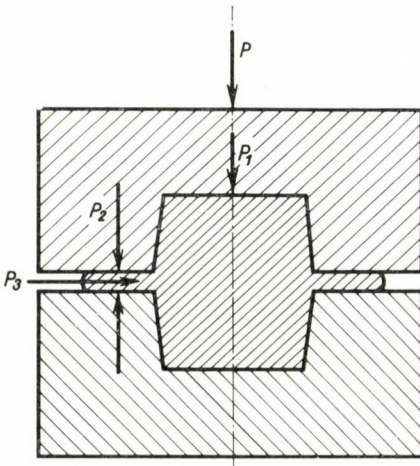


Bild 2a

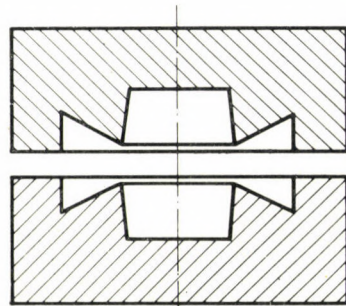


Bild 2b

Die Preßkraft kann bei auftretender Gratreaktion folgenderweise ausgerechnet werden (Bild 3):

$$P = 2k_m \cdot \left(\frac{d^2 \cdot \pi}{4} + \psi V \right) + k_{grm} \cdot \left(\frac{D^2 - d^2}{4} \right) \cdot \pi. \quad (9)$$

In dieser Gleichung ist der mittlere Verformungswiderstand im »Ziehhol«:

$$k_m = \frac{k_f + \sigma_{rm}}{1 - 0,93 \cdot \frac{F}{f_1}}, \quad (10)$$

worin k_f die mittlere Formänderungsfestigkeit des gepreßten Werkstoffes bedeutet.

$$k_{grm} = k_f \cdot \frac{h_2}{2\mu \cdot x} \cdot \left(e^{\frac{2\mu}{h_2} \cdot x} - 1 \right) (=) \frac{k_f}{1 - \mu \cdot \frac{x}{h_2}} \quad (11)$$

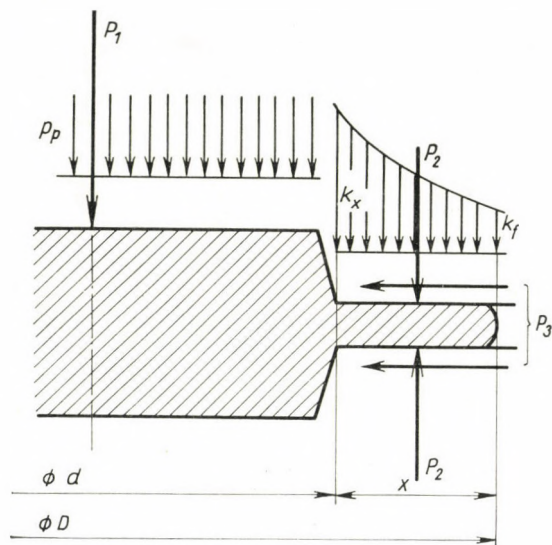


Bild 3

ist der Verformungswiderstand beim Zusammendrücken des Grades,

$$\sigma_{rm} = \frac{\sigma_r}{2} \cdot \left(1 + \frac{f_2}{f_1} \right) = \frac{\sigma_r}{2} \cdot \left[1 + \frac{d \cdot h_2}{(d - 2b) \cdot h_1} \right] \quad (12)$$

die Spannung, welche die dritte Hauptspannung (σ_{3m}) in der Ziehöse infolge der Gratreaktion vergrößert und

$$\sigma_r = k_{grm} \cdot \mu \cdot \left(\frac{D^2 - d^2}{2d \cdot h_2} \right) \quad (13)$$

die im Gratspalt auftretende Spannung.

Die Aufgabe ist verwickelter bei einem Gesenk nach Bild 4. Wird die Gratreaktion auch hier ausgeschaltet, dann tritt die größte Kraft in dem Augenblick des Grataustritts auf. Wenn der Grat aus dem Gratspalt heraustritt, wirkt auf den Querschnitt I eine Spannung p . Diese Spannung ist, wie es schon im Zusammenhang mit Bild 3 gezeigt wurde:

$$p = 2k_m - k_f, \quad (1)$$

wobei

$$k_m = \sigma_{1m}$$

ist.

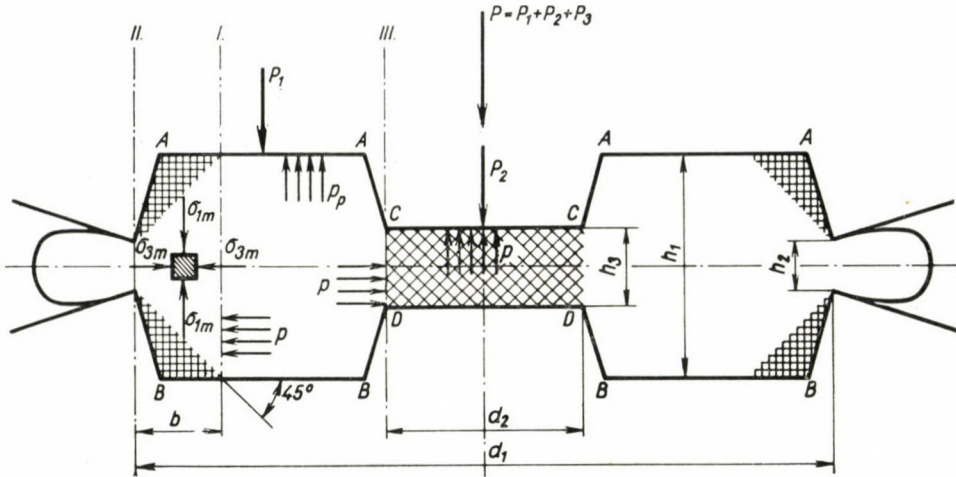


Bild 4

Der mittlere Verformungswiderstand in der kegelförmigen Düse hinter dem Gratspalt beträgt:

$$k_m = \frac{k_f}{1 - 0,93 \cdot \frac{F}{f_1}} \quad (2)$$

wo

$$f_1 = (d_1 - 2b) \cdot h_1 \cdot \pi, \quad (3)$$

$$f_2 = d_1 \cdot \pi \cdot h_2 \quad (4)$$

und

$$F = f_1 - f_2 = (d_1 - 2b) \cdot h_1 \cdot \pi - d_1 \cdot \pi \cdot h_2 \quad (5)$$

ist.

Der Grat wird, wie schon gesagt, durch die an dem Zylindermantel I—I wirkende Spannung (f_1) bzw. durch die Kraft

$$P_0 = h_1 (d_1 - 2b) \cdot \pi \cdot p \quad (14)$$

durch die kegelförmige Düse (Ziehhol) hinter dem Gratspalt herausgedrückt. Die Kraft P_0 wird jedoch durch die auf die Flächen A—A und B—B des Werkzeuges wirkende Kraft hervorgerufen. Diese Kraft ist

$$P_1 = p_p \cdot (d_1^2 - d_2^2) \cdot \frac{\pi}{4}. \quad (15)$$

Hier ist p_p eine Spannung, die in der Richtung der senkrechten Preßkraft auf die Flächen A—A und B—B wirkt.

Im Sinne der Voraussetzung O. MOHRs ist:

$$p_P = p + k_f, \quad (16)$$

das heißt

$$p_P = (2 \cdot k_m - k_f) + k_f = \frac{2 \cdot k_f}{1 - 0,93 \cdot \frac{F}{f_1}}, \quad (17)$$

somit ist p_p gleich dem doppelten mittleren Verformungswiderstand und

$$P_1 = 2 \cdot k_m \cdot (d_1^2 - d_2^2) \cdot \frac{\pi}{4}. \quad (18)$$

Auf die in das Preßstück eindringenden Flächen C—C und D—D wirkt die Kraft P_2 , die der Spannung p_{PB} entspricht. Die Größe der Spannung p_{PB} kann folgendermaßen berechnet werden:

$$p_{PB} = \frac{k_f + p}{1 - \mu \cdot \frac{d_2}{2 \cdot h_3}}. \quad (19)$$

Demnach ist die Kraft P_2

$$P_2 = p_{PB} \cdot \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} = \left(\frac{k_f + p}{1 - \mu \cdot \frac{d_2}{2 \cdot h_3}} \right) \cdot \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \quad (20)$$

Hier ist p die Spannung, die in den Querschnitten I—I und III—III auftritt und kann mit Formel (2) berechnet werden.

Im Laufe des Pressens kommt der im Gesenk befindliche Werkstoff, die toten Ecken ausgenommen, in seiner ganzen Masse in Bewegung. Zur inneren Bewegung des Werkstoffes ist eine Kraft P_3 nötig, die auf die gleiche Weise berechnet werden kann, wie beim Strangpressen die zur Überwindung der inneren Verschiebungen nötige Kraft, nämlich ist:

$$P_3 = \psi_1 \cdot p_P \cdot V_1 + \psi_2 \cdot p_{PB} \cdot V_2. \quad (21)$$

Dabei betragen

$$V_1 = \left(\frac{d_1^2 - d_2^2}{4} \right) \cdot \pi \cdot h_1, \quad (22)$$

$$V_2 = \left(\frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \right) \cdot h_3, \quad (23)$$

$$\psi_1 = C \cdot \sqrt[4]{\frac{v}{h_1}} \quad (24)$$

und

$$\psi_2 = C \cdot \sqrt[4]{\frac{v}{h_3}} \quad (25)$$

In diesen Formeln bezeichnen V_1 und V_2 das Volumen [cm³] des in Bewegung kommenden Werkstoffes, v die Geschwindigkeit des Schließens des Preß-

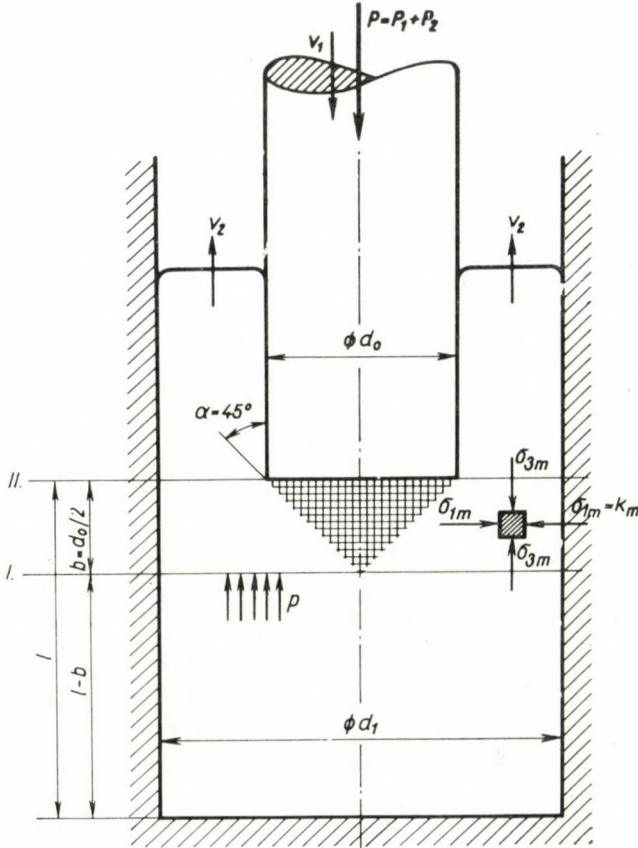


Bild 5

werkzeuges [cm/s], h_1 und h_2 die jeweilige Entfernung der Gesenkboden voneinander [cm]; $C = 0,025$ ist eine Konstante, ψ_1 und ψ_2 sind Koeffizienten der inneren Arbeit.

Die zum Herausdrücken des Grates nötige Preßkraft ist

$$P = P_1 + P_2 + P_3, \quad (26)$$

wobei die Größen von P_1 , P_2 , P_3 durch die Formeln (18), (20) und (21) gegeben sind.

Zum Problemenkreis des Schmiedens im Gesenk gehört auch das steigende Lochen.

Beim steigenden Lochen wird der Block von kreisförmigem Querschnitt in einen Aufnehmer (Rezipienten) von fast demselben Durchmesser gesetzt; dann wird in den Block in der Richtung seiner Achse ein Dorn eingepreßt (Bild 5). Da der Preßblock den Querschnitt des Rezipienten ganz ausfüllt,

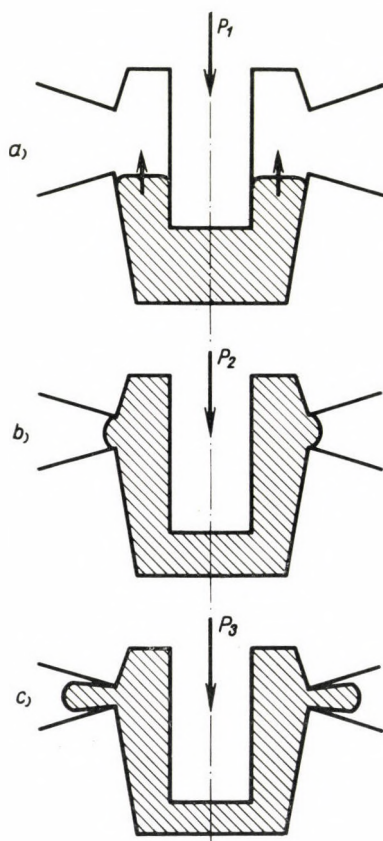


Bild 6

strömt der Stoff, der durch das Eindringen des Preßdorns aus dem eingepreßten Loch herausgedrängt wird, zwischen dem Dorn und der Wand des Rezipienten heraus, und zwar der Bewegungsrichtung des Dornes entgegen.

Der Vorgang des steigenden Lochens ist — wie gesagt — seinem Wesen nach mit dem des Strangpressens identisch. Der Unterschied zwischen den beiden Vorgängen besteht nur darin, daß beim steigenden Lochen der Werkzeugspalt keine kreisförmige Öffnung im Boden des Rezipienten, sondern ein

ringförmiger Spalt zwischen dem Lochdorn und der Wand des Rezipienten ist. Demnach wird die Öffnung des Werkzeuges im Querschnitt II (Bild 5):

$$f_2 = (d_1^2 - d_0^2) \cdot \frac{\pi}{4}. \quad (27)$$

Die Abnahme beim Pressen ist

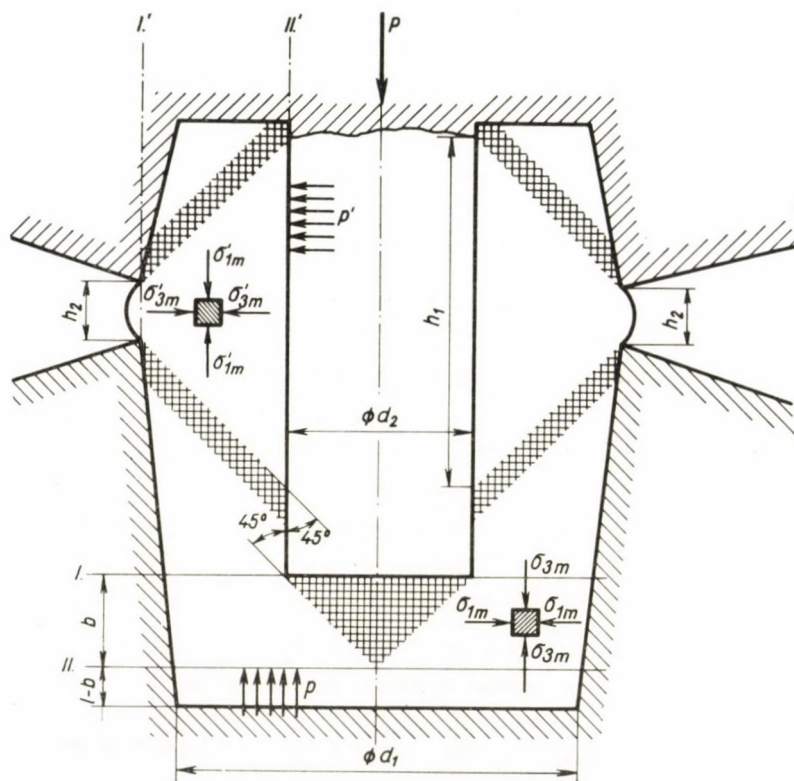


Bild 7

$$F = f_1 - f_2, \quad (28)$$

wobei

$$f_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \quad (29)$$

den Querschnitt des Rezipienten bzw. des Blockes bedeutet. Hier spielt der Werkstoffkegel, der sich vor der Stirnfläche des Dornes bildet die Rolle der toten Ecken: die Höhe des Kegels ist $b = \frac{d_0}{2}$.

Die Kraft P , die den Preßdorn in Bewegung setzt, wird somit mit denselben Formeln berechnet, wie die zum Strangpressen nötige Kraft.

Wird das Pressen in geschlossener Düse durchgeführt, so kann man die zum Pressen erforderlichen Kräfte ebenfalls nach den obigen Grundsätzen bestimmen. Der Preßvorgang ist in Bild 6 veranschaulicht.

Die Preßkraft muß in der ersten Phase des Pressens (Bild 6/a) auf dieselbe Art wie beim steigenden Lochen, mit Hilfe der beim Strangpressen angewandten Formeln bestimmt werden. Vom Augenblick des Grataustrittes an (Bild 6/a) wird die Bestimmung der Kräfte auf Grund von Bild 7 möglich.

Auch hier entsteht der Grat genau so wie in den vorigen Beispielen. Hinter dem h_2 hohen Gratspalt entsteht im Werkstoff ein Kegel. Die Grundfläche der kegeligen Düse bildet der h_1 hohe Mantel des Dornes. Dringt nun der Oberteil des Gesenkes tiefer ein, so tritt an dem h_1 hohen Dornmantel (Querschnitt II') eine Spannung p' auf, die den Werkstoff aus der kegeligen Düse durch den Gratspalt herauspreßt. Diese Spannung beträgt

$$p' = 2 \cdot k'_m - k_f. \quad (30)$$

In dieser Formel bedeuten k'_m den mittleren Verformungswiderstand im kegeligen Teil hinter dem Gratspalt, k_f die Formänderungsfestigkeit des gepreßten Werkstoffs. Der mittlere Verformungswiderstand beträgt

$$k'_m = \frac{k_f}{1 - 0,93 \cdot \frac{F'}{f_1}} \quad (31)$$

Übrigens ist der mittlere Verformungswiderstand mit der im Gratspalt auftretenden ersten Hauptspannung identisch, somit ist:

$$k'_m \equiv \sigma_{1m}. \quad (32)$$

In Gleichung (30) und (31) ist

$$f_1' = d_2 \cdot \pi \cdot h_1, \quad (33)$$

$$f_2' = d_1 \cdot \pi \cdot h_2, \quad (34)$$

$$F' = f_1' - f_2'. \quad (35)$$

Vor dem Dorn vom Durchmesser d_2 , im kegelförmigen Raum zwischen Querschnitt I und II, wo der größte Teil der Formgebung vor sich geht, ist die größte mittlere Hauptspannung $\sigma_{1m} \equiv k_m$, das heißt, die größte mittlere Hauptspannung ist mit dem in dieser Umformungszone auftretenden mittleren Verformungswiderstand identisch. Die im Querschnitt II auftretende Spannung

p , die den verformten Werkstoff zwischen der Wand des Rezipienten und des Dornes nach oben drückt, wird — wie beim Strangpressen —

$$p = 2 \cdot k_m - k_f \quad (36)$$

sein.

Die Fließbedingung zwischen Querschnitt I und II kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\sigma_{1m} - \left[\sigma_{3m} + \sigma'_{1m} \cdot \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) \right] = k_f. \quad (37)$$

Daraus folgt:

$$\sigma_{1m} - \sigma_{3m} = k_f + \sigma'_{1m} \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right).$$

In dieser Umformungszone ist der mittlere Verformungswiderstand

$$\sigma_{1m} \equiv k_m = \frac{k_f + \sigma'_{1m} \cdot \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right)}{1 - 0,93 \cdot \left(\frac{F'}{f_1} \right)} \quad (38)$$

bzw.

$$k_m = \frac{k_f \cdot \left[1 + \frac{0,5 \cdot (f_1 + f_2)}{1 - 0,93 \cdot \left(\frac{F'}{f_1} \right)} \right]}{1 - 0,93 \cdot \left(\frac{F'}{f_1} \right)} \quad (39)$$

Wenn demnach das Pressen in einem Gesenk nach Bild 7 durchgeführt wird, dann beträgt die Preßkraft beim Grataustritt, d. h. wenn die Höhe des Gratspaltes h_2 ist:

$$P = p \cdot f_1 + k'_m \cdot f_2 + p \cdot V \cdot \Psi. \quad (40)$$

Darin ist

$$p = 2 \cdot k_m - k_f,$$

$$V = (l - b) \cdot f_1,$$

$$\Psi = C \cdot \sqrt[4]{\frac{v}{l - b}} = 0,025 \cdot \sqrt[4]{\frac{v}{l - b}},$$

$$f_2 = f_1 - F' = \frac{(d_1^2 - d_2^2) \cdot \pi}{4},$$

$$k_m = \frac{k_f \cdot \left[1 + \frac{0,5 \cdot (f_1 + f_2)}{1 - 0,93 \cdot (F'/f'_1)} \right]}{1 - 0,93 \cdot \left(\frac{F}{f_1} \right)},$$

$$k'_m = \frac{k_f}{1 - 0,93 \cdot \left(\frac{F'}{f'_1} \right)},$$

$$f'_1 = d_2 \cdot \pi \cdot h_1,$$

$$f'_2 = d_1 \cdot \pi \cdot h_2,$$

$$F' = f'_1 - f_2,$$

$$f_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4},$$

$$f_2 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4},$$

$$F = \frac{(d_1^2 - d_2^2) \cdot \pi}{4}.$$

Die Reihe der Beispiele könnte noch weiter fortgesetzt werden. Selbstverständlich betrachte ich das Problem der Berechnung der in Gesenken auftretenden Kräfte und der Umformungsarbeit durch das hier gezeigte Verfahren nicht für endgültig gelöst, aber ich glaube, daß die angeführte Methode in sehr vielen Fällen ermöglichen wird, die Kräfte und die Arbeit zu berechnen.

ZUSAMMENFASSUNG

Im einleitenden Teil der Arbeit behandelt der Verfasser die Mechanik des Strangpressens und die Berechnung der erforderlichen Preßkraft. Im weiteren weist er darauf hin, daß man über die beim Pressen in Gesenken auftretenden Kräfte erst dann ein klares Bild gewinnen kann, wenn man bei den Versuchen die Gratreaktion ausschaltet. Bei der Bestimmung der im Gesenk auftretenden Kräfte führt der Verfasser den Vorgang im Gesenk auf den Vorgang beim Strangpressen zurück. Endlich zeigt er, wie in den Fällen einiger einfacher Gesenke, die erforderliche Preßkraft berechnet werden kann.

CALCULATING THE FORCES IN THE DIES AT PRESS FORGING

A. GELEJI

SUMMARY

By way of introduction the author is talking on the mechanics of extrusion and is calculating the force requirement. Further on he is pointing out, that a good conception of the forces arising in dies during press forging can be formed when the burr reaction forces are eliminating the forces arising in the die, the process is brought back to the extrusion process. Finally it is shown how to determine the forging forces in case of some dies of simple design.

CALCUL DES FORCES NÉCESSAIRES PUR LE MATRIÇAGE

A. GELEJI

RÉSUMÉ

Dans l'introduction de son étude, l'auteur traite du mécanisme du filage et du calcul des forces nécessaires. Il montre ensuite que, pour avoir une idée claire sur les forces se produisant lors du matriçage, il convient d'éliminer la réaction de la bavure au cours des essais. A la détermination des forces dans la matrice, les phénomènes sont ramenés au processus de filage. L'auteur montre enfin, comment on détermine la force de matriçage dans le cas de quelques matrices simples.

РАСЧЕТ УСИЛИЙ, ПОТРЕБНЫХ ПРИ КОВКЕ В ШТАМПАХ

А. ГЕЛЕИ

РЕЗЮМЕ

Введение работы посвящено автором механике прессования стержней и расчету потребных усилий. В дальнейшем указывается, что о возникающих при ковке в штампах усилиях можно получить ясную картину, если при опытах исключить реакцию заусенцев. При определении усилий, возникающих в штампах, процесс сводится к процессу прессования стержней. Наконец, показано, каким образом можно определить усилие штамповки в случае нескольких более простых штампов.

ÜBERSICHT ÜBER DIE TECHNISCHE ENTWICKLUNG DER EISENWERKE VON ROHNITZ IN DER ERSTEN HÄLFTE DES 19. JAHRHUNDERTS UND DAS FRISCHVERFAHREN VON ROHNITZ

Á. PAULINYI

KOMENSKY UNIVERSITÄT, BRATISLVA

[Eingegangen am 7. April 1960]

Die Rohnitzer Ärarialeisenwerke am Oberlauf des Granflusses in der Slowakei gehörten in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts zu den größten Eisenwerken in Ungarn. Am Ende des 18. und zu Beginn des 19. Jahrhunderts wurden die Rohnitzer Eisenwerke durch Erweiterung der alten Hütte in Rohnitz (Hronec) und in Teißolz (Tisovec) durch Ankauf des Großteils von Kuxen privater Gewerkschaften (Poniky und Lubietová) und schließlich durch Errichtung neuer Objekte (Hochöfen, Frisch- und Streckhämmer) zu einem Komplex ausgebaut. Die Rohnitzer Eisenwerke hatten im ersten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts ihre Hochöfen in Hronec (2), Polhora, Tisovec, Poniky und Lubietová, die Frisch- und Streckhämmer in Hronec, Bystrá, Jasenie, Vajsková, Moštenica, in Píla bei Tisovec, sowie in Kostiviarska bei Banská Bystrica. Außer diesen Anlagen sind noch die Gießerei, die Nagelschmiede und Stahlhütte zu Hronec erwähnenswert. Der Hauptzweck des ganzen Betriebes war die Erzeugung von Streckeisen und in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts waren die Rohnitzer Eisenwerke der größte Streckeisen-Produzent in Ungarn.

Obwohl auch in den Rohnitzer Eisenwerken der Produktionsprozeß auf der alten technischen Basis beruhte, indem die Holzkohle der einzige Brennstoff war, das Roheisen in Frischherden gefrischt und das Frischeisen unter Hämmern gestreckt wurde, das Wasser als einzige Treibkraft diente, gehörten die Rohnitzer Eisenwerke doch zu den Unternehmen in Ungarn, die das größte Bemühen um die Einführung technischer Neuerungen bekundeten.

Die Entstehung des Rohnitzer Eisenwerk-Komplexes war mit einer sehr wichtigen Veränderung verbunden. Die unrentable, direkte Produktion von schmiedbarem Eisen in den sogen. slowakischen (oder slawischen) Öfen wurde aufgegeben und die Produktion von Roheisen in Hochöfen (in sogen. Maschen, Maßöfen), eingeführt. Der letzte slowakische Ofen der Rohnitzer Eisenwerke in Moštenica wurde im Jahre 1806 abgetragen [1]. Der Übergang zur Produktion in Hochöfen war eine grundlegende Voraussetzung für den weiteren Aufschwung sämtlicher Zweige der Eisenerzeugung in den Eisenwerken. Der größte, im Jahre 1800 in Betrieb gesetzte Hochofen in Polhora erzeugte in 24 Stunden etwa 52 Ztr. (56 kg = 1 Ztr.) Roheisen, während sich die durchschnitt-

liche Produktion sämtlicher 6 Hochöfen auf 36 Ztr. je 24 Stunden und Ofen belief. Demgegenüber erzeugten die slowakischen Öfen bloß 4—8 Ztr. je 24 Stunden [2]. Die Steigerung der Roheisenproduktion ermöglichte die Erweiterung der Erzeugung von Frischeisen, welches in Streckhämmern (Abb. 1) größtenteils zu Streckeisen verarbeitet wurde. Die erhöhte Nachfrage nach Blech für den Kriegsbedarf in der Zeit der napoleonischen Kriege gab den Anlaß zur Planung eines Blechwalzwerks in Rohnitz. Der Plan wurde aber erst in den Jahren 1813—1815 realisiert. Das Rohnitzer Blechwalzwerk war das erste in Ungarn und war mit der damals gebräuchlichen technischen Einrichtung ausgestattet (Abb. 2, 3, 4) [3].

In den zwanziger bis vierziger Jahren des 19. Jahrhunderts stieg die Streckeisenproduktion der Rohnitzer Eisenwerke von 28.405 Ztr. im Jahre 1820—1821 auf 82.908 Ztr. im Jahre 1847 [4].

Diese fast dreifache Steigerung der Produktion wurde nicht durch quantitative Vermehrung der Produktionsanlagen, sondern vor allem durch Verbesserung der Produktionstechnik erreicht. Im allgemeinen handelte es sich um eine Verbesserung der alten Produktionstechnik und nur in einigen Fällen um die Einführung modernster Produktionsmethoden.

Die erste Verbesserung im Hochofenbetrieb war die Einführung leistungsfähigerer Gebläse. Schon im ersten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts wurden Kastengebläse anstatt der bis dahin verwendeten hölzernen Spitzbälge eingeführt (Abb. 5, 6). Der Umtausch der Gebläse hatte auch eine Änderung des Profils und die Erweiterung des Umfangs der Hochöfen zur Folge. In den Jahren 1826 und 1827 wurden dann Zylindergebläse eingeführt, die man im eigenen Gußwerk und in der eigenen mechanischen Werkstätte herstellte [5]. Die wichtigste Verbesserung im Hochofenbetrieb war eben die Einführung der Winderhitzung durch Gichtflammen. Nach den ersten Versuchen, die in den Jahren 1835 und 1836 mit einem Malapaner Erhitzungsapparat durchgeführt wurden, kamen vorerst in Hronec und allmählich auch bei den übrigen Hochöfen Caldersche Erhitzungsapparate zur Einführung (Abb. 7). Der Lufterhitzungsapparat des Hochofens Nr. 1 in Hronec, der seit Anfang des Jahres 1837 dauernd in Betrieb stand, war der erste Erhitzungsapparat in Ungarn [6].

Bei der Erzeugung von Frischeisen war in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts die Einführung der sogen. Rohnitzer Frischarbeit die wichtigste Verbesserung. Da nachstehend im Anhang eine eingehende Beschreibung dieser Frischmethode veröffentlicht wird, so beschränken wir uns hier nur auf einen kurzgefaßten Entwurf dessen, was der Einführung der Rohnitzer Frischarbeit voranging. In den Rohnitzer Eisenwerken bediente man sich beim Frischen des Roheisens schon seit der Mitte des 18. Jahrhunderts einer gewissen Abart der Aufbrechschmiede, und zwar der sogen. Anlaufschmiede [7]. Diese Methode entsprach am besten dem Frischen des Rohnitzer Roheisens, ihr Nachteil jedoch war aber die relativ niedrige Tagesproduktion, die sich auf etwa 9 Ztr.

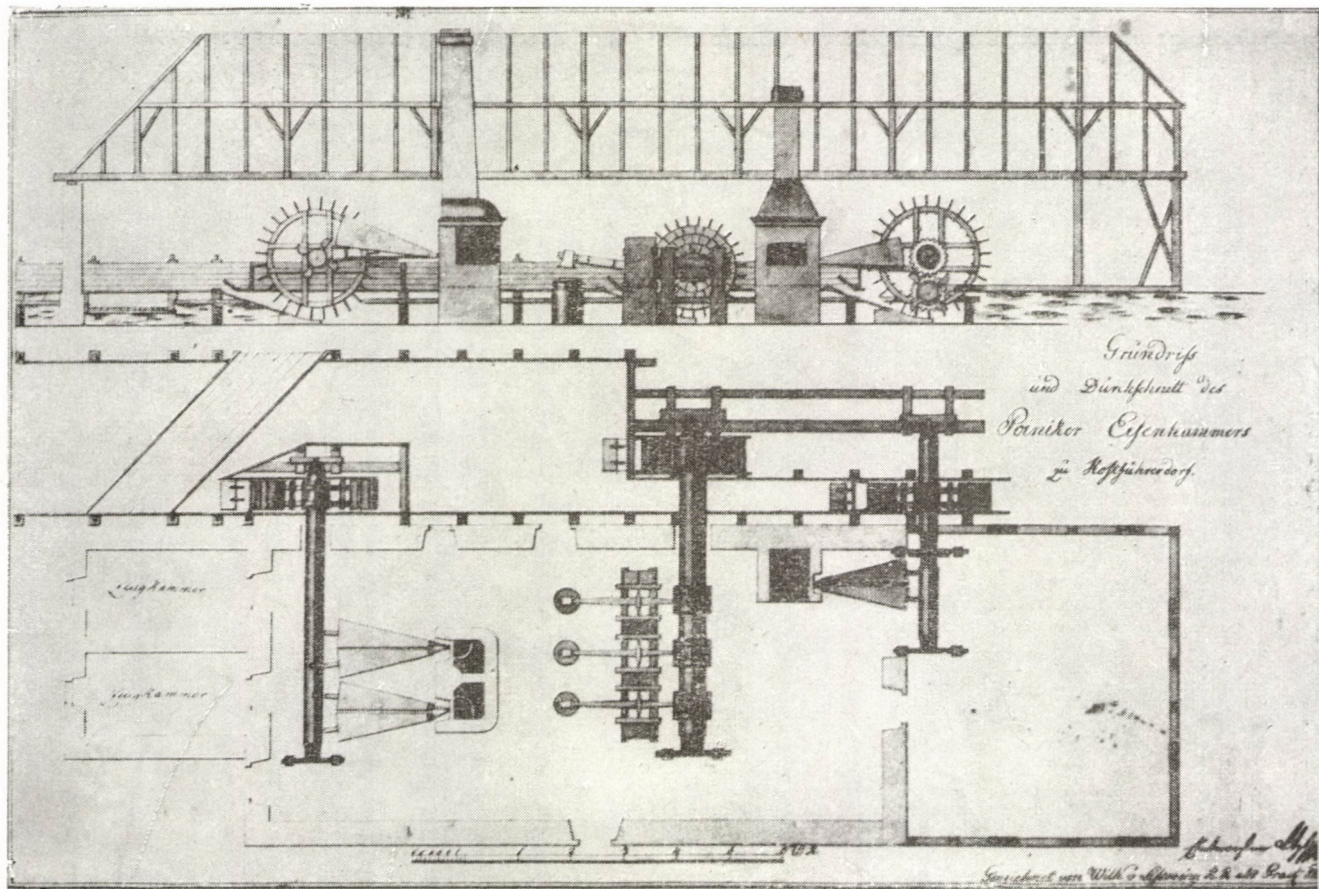


Abb. I. Streckhammer der Rohnitzer Eisenwerke in Kostiviarska. 1818

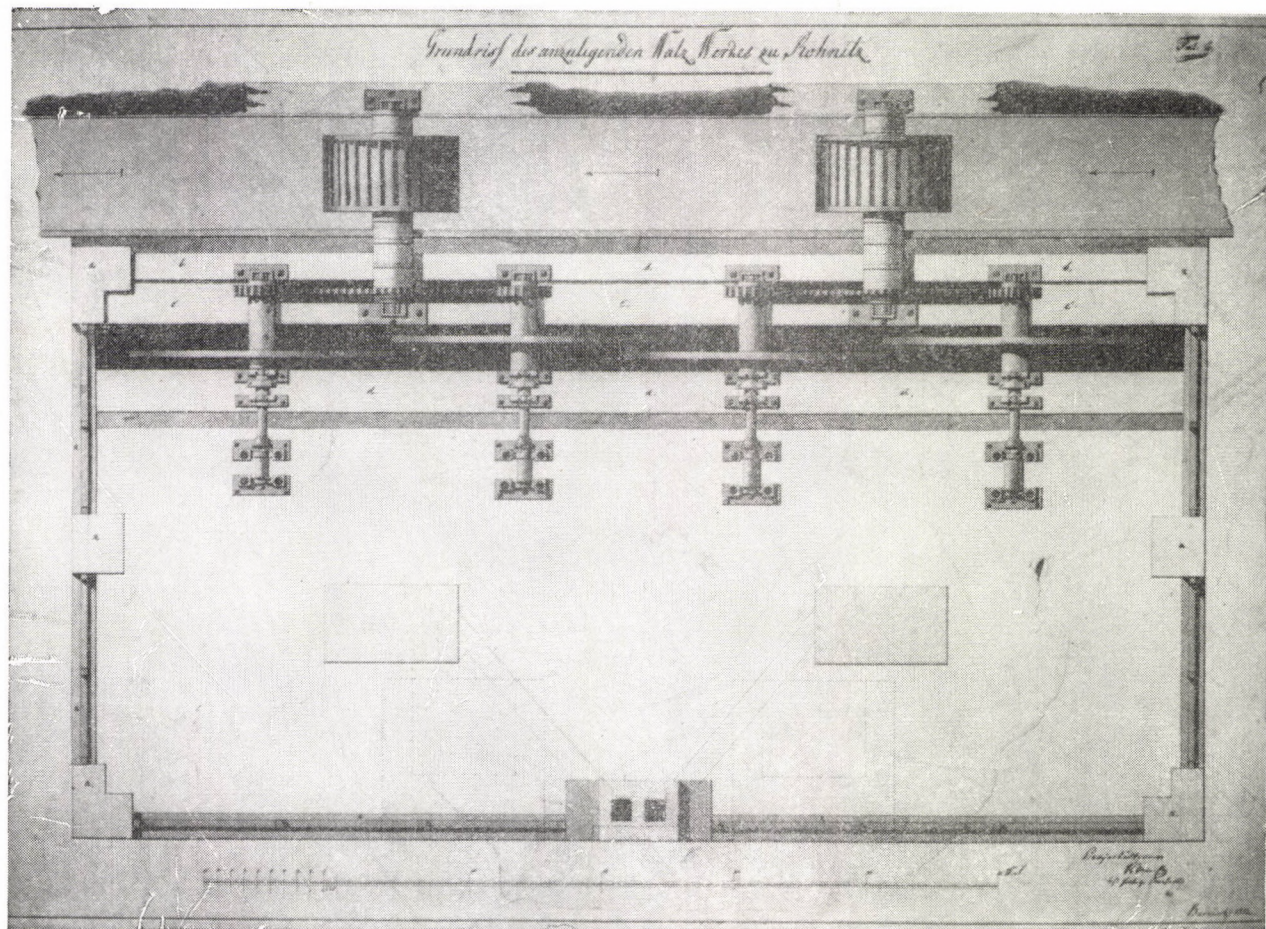


Abb. 2. Rohnitzer Blechwalzwerk — Entwurf aus dem Jahre 1813, Grundriß

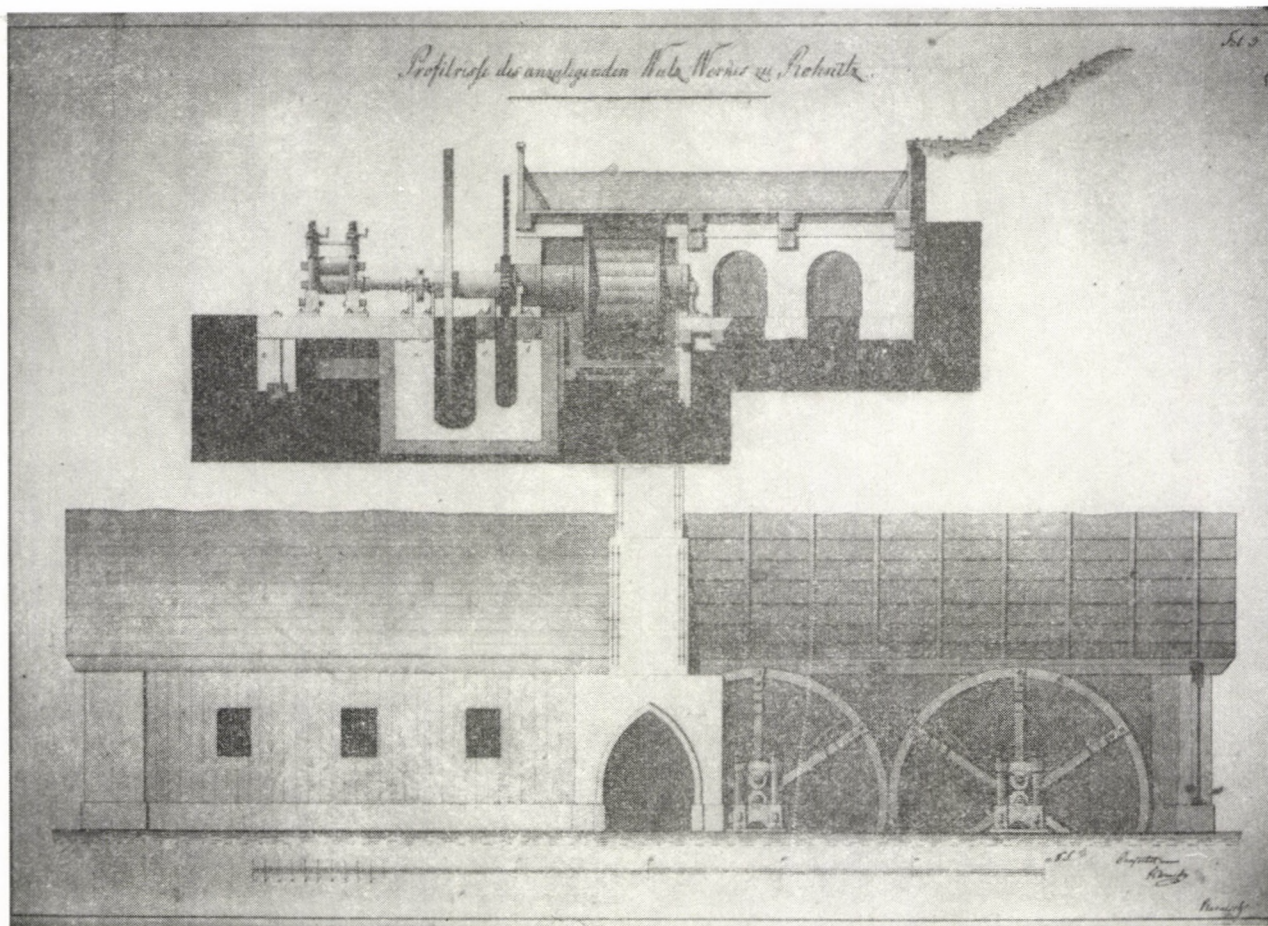


Abb. 3. Rohnitzer Blechwalzwerk — Entwurf aus dem Jahre 1813, Querschnitt

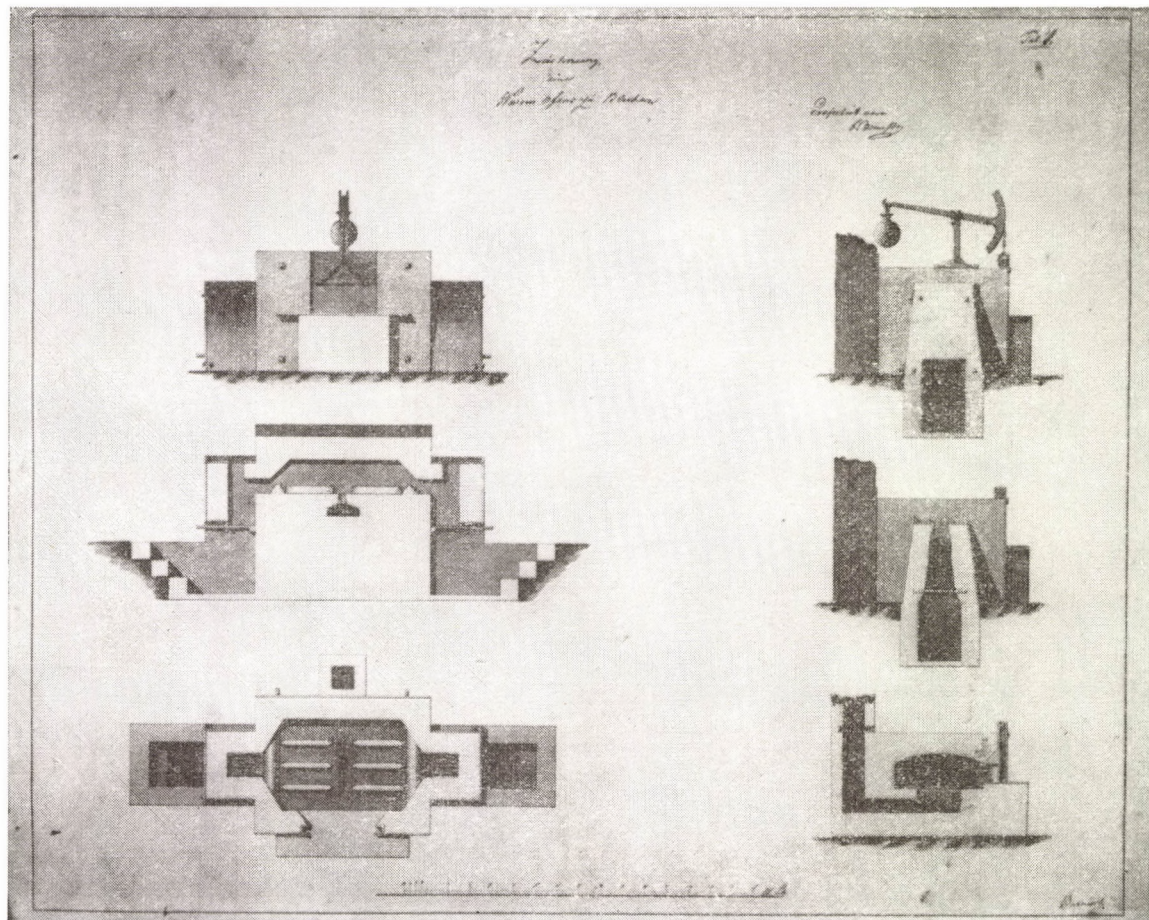


Abb. 4. Rohnitzer Blechwalzwerk — Entwurf aus dem Jahre 1813, Glühöfen

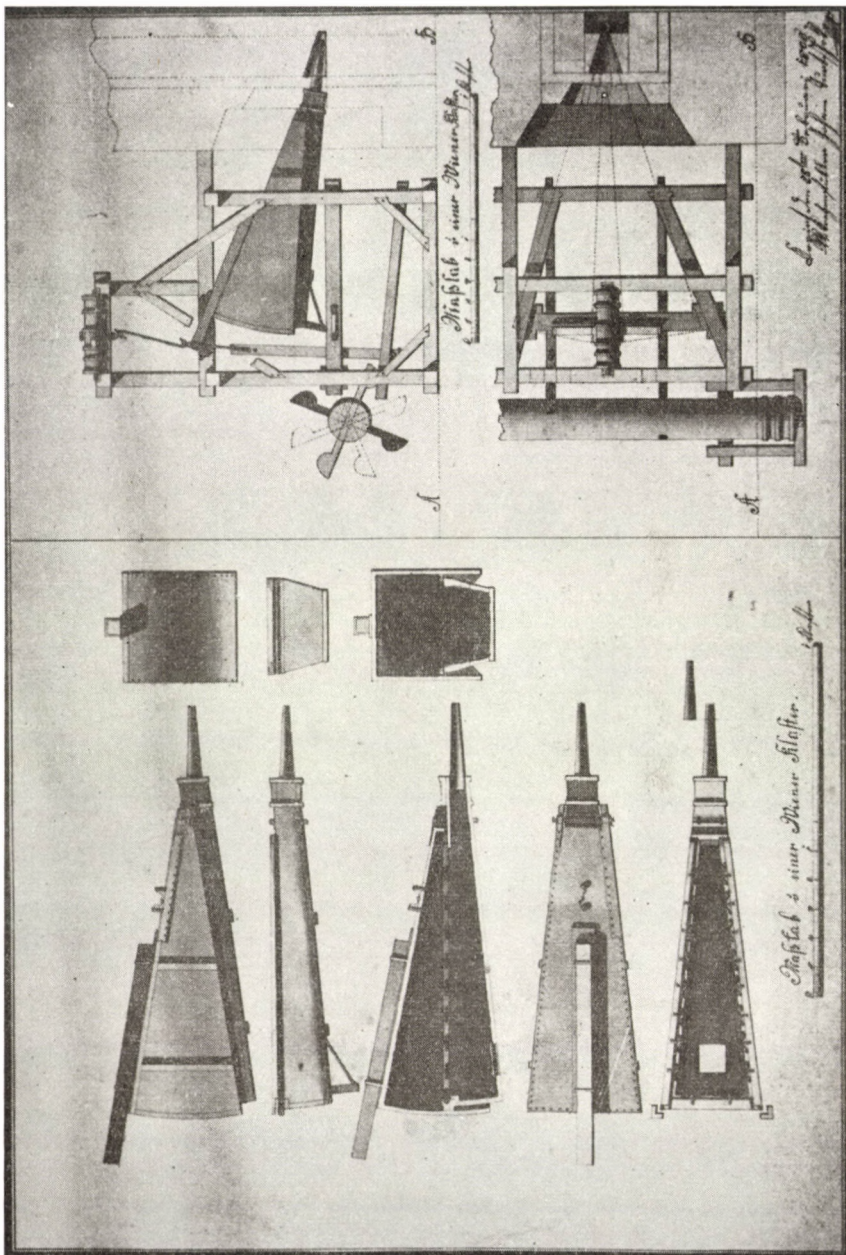


Abb. 5. Hölzerner Spitzhalm

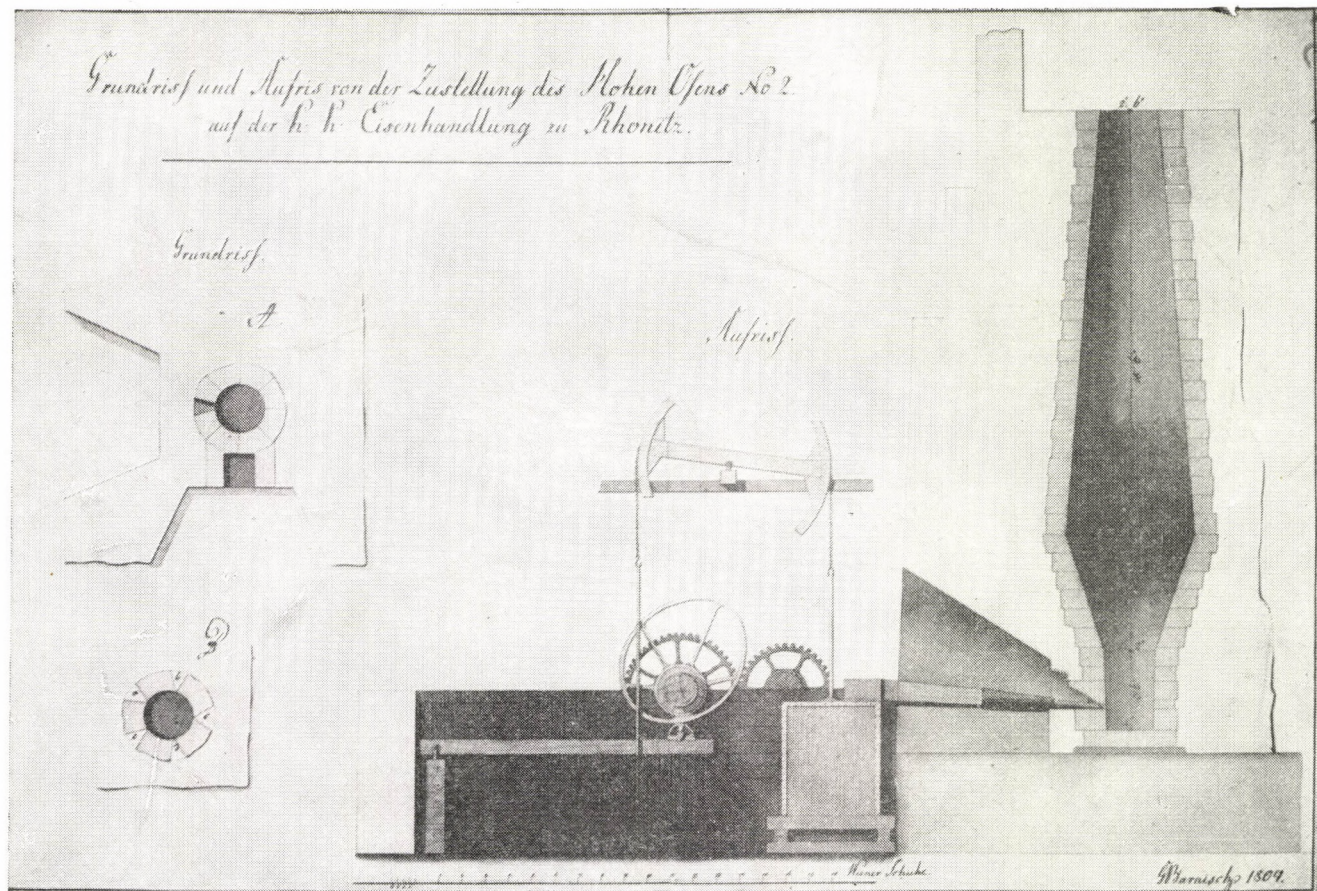


Abb. 6. Hochofen 2 in Rohnitz mit Kastenbläse. 1809

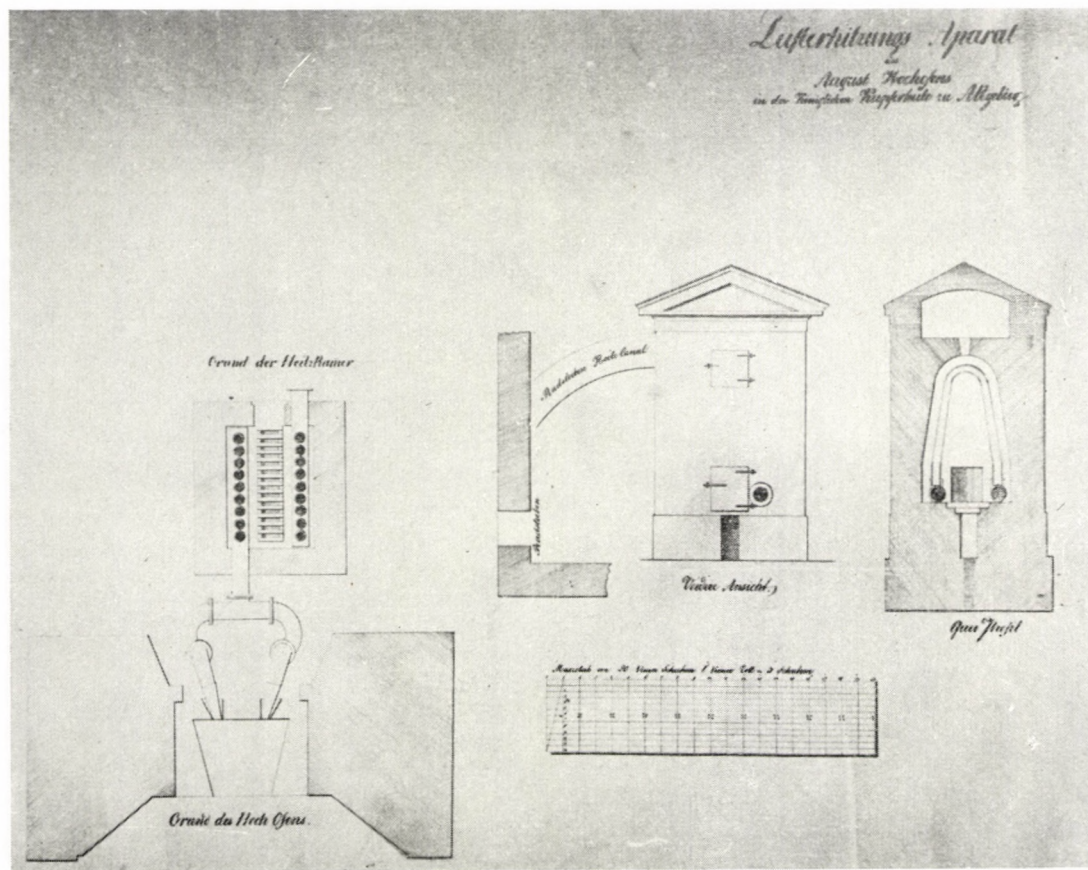


Abb. 7. Caldere'scher Lufterhitzungsapparat

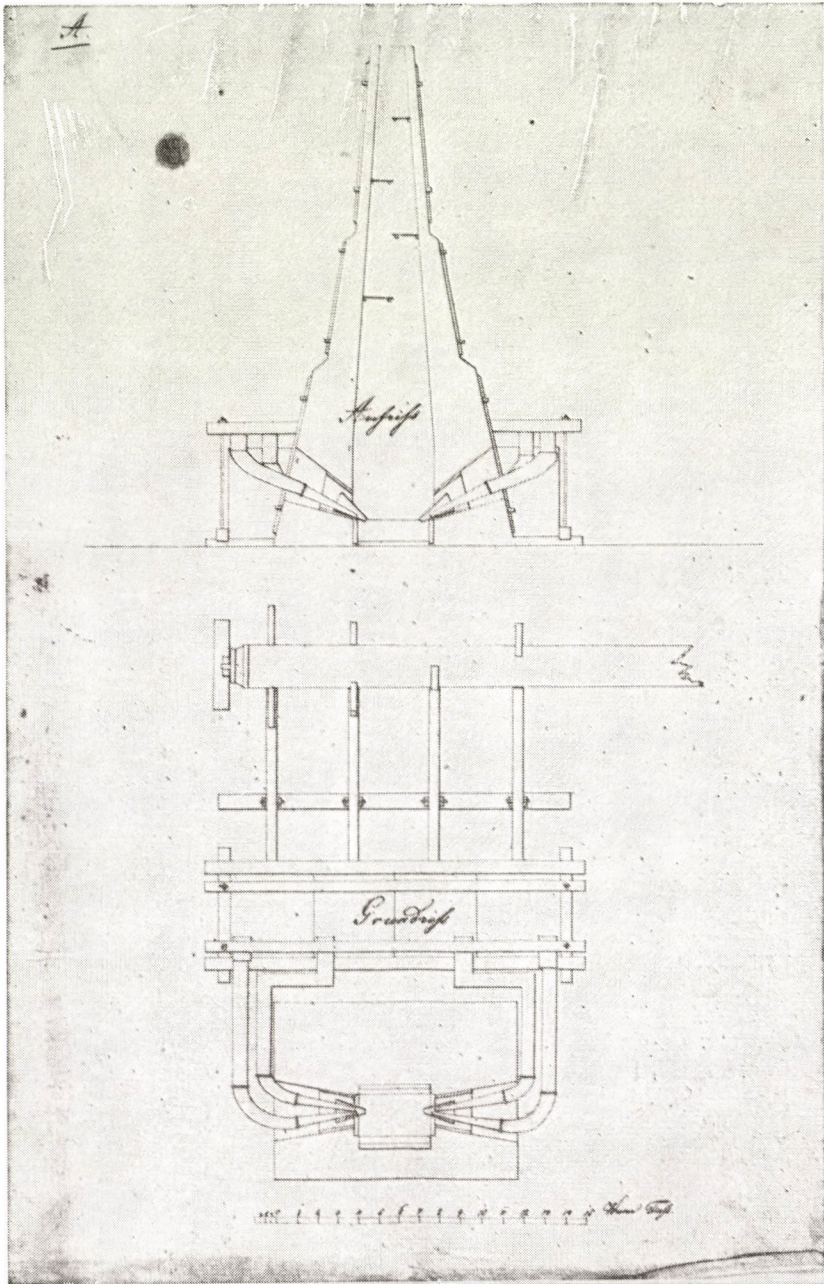


Abb. 3. Puddelofen mit Holzfeuerung in Chvatimech. 1839

je 24 Stunden belief. Deshalb kam es schon ab Ende des 18. Jahrhunderts zu mehreren Versuchen, andere Frischmethoden einzuführen. Der damalige Verwalter der Eisenwerke, SCHWARZKÖNIG, stellte jedoch schon seit dem Jahre 1802 Versuche an, in denen er die Anlaufmethode beibehielt, den Arbeitsraum des Frischherdes aber auf das Doppelte vergrößerte. Um zur Verfrischung des weit größeren Einsatzes von Roheisen die genügende Windmenge zu sichern benützte SCHWARZKÖNIG die doppelte Anzahl von Gebläsen und führte den Wind durch zwei gegenüberliegende Formen in den Herd. Schon beim Versuch im Jahre 1804 ist es ihm auf diese Weise gelungen, in 24 Stunden 17,77 Ztr. gefrischtes Eisen zu erzeugen, wobei die Anzahl der Arbeiter von 6 auf 8 erhöht wurde. Dies stellte eine Produktionssteigerung von 66% dar, und gleichzeitig stieg auch die Arbeitsproduktivität [8]. Es bedurfte aber fast noch 20 Jahre, bis die von SCHWARZKÖNIG erfundene Frischmethode in den Rohnitzer Eisenwerken eingeführt wurde. SCHWARZKÖNIG starb nämlich kurze Zeit nach den Versuchen und sein Nachfolger sandte über die Versuchsergebnisse einen unwarhen und negativen Bericht. Der Antrag auf Einführung von Frischfeuern mit 2 Formen kam erst im Jahre 1821 wieder zum Vorschein. Im Amt des Verwalters der Eisenwerke stand damals M. JACSKOVSKY, der sich im Jahre 1804 als junger Praktikant an SCHWARZKÖNIGS Versuchen persönlich beteiligt hatte. Im Juli 1821 hatte JACSKOVSKY, der schon vorher die Behauptung über die Erfolglosigkeit der Versuche entkräftet hatte, einen Antrag auf die Erneuerung der Versuche eingebracht. Im September 1823 begannen die Versuche vorerst im Eisenhammer in Hronec und sodann auch in Bystrá und nach vierjährigen Versuchen erteilte die Hofkammer für Münz- und Bergwesen Dezember 1827 den Auftrag die sogen. Rohnitzer Frischarbeit in sämtlichen Betrieben der Rohnitzer Eisenwerke [10] allmählich einzuführen.

Die Rohnitzer Frischarbeit, die im wesentlichen eine originelle Verbesserung der Anlaufarbeit darstellt, wurde in den dreißiger Jahren in der Mehrzahl der Frischhütten der Rohnitzer Eisenwerke eingeführt, so daß im Jahre 1835 von insgesamt 19 Frischfeuern 15 zwei Formen hatten. Als eine besondere und originelle Art der Aufbrechschmiede wurde sie auch in P. TUNNERS bekanntes Handbuch aufgenommen, wo eine kurze Beschreibung dieser Verfrischungsmethode erstmalig veröffentlicht wurde. Auch L. BECK betrachtete es als zweckmäßig, sie in seiner »Geschichte des Eisens« als eine »eigenartige Verbesserung« anzuführen [11], so daß wir feststellen können, daß die Rohnitzer Frischarbeit die einzige originelle Methode beim Herdfrischen des Roheisens in der Slowakei, ja in ganz Ungarn war, die auch in der Geschichte der Technologie der Eisenerzeugung ihren Platz eingenommen hat.

Die Rohnitzer Frischarbeit hatte allen Versuchen, andere Methoden (Wallonschmiede, steyrische einmalige Weichzerrnung, französische Kleinfrischschmiede) einzuführen, standgehalten und wurde dann später durch den Puddelprozeß abgelöst.

Außer der Rohnitzer Frischarbeit wurden bei dem Raffinieren des Roheisens in den dreißiger Jahren auch andere Verbesserungen, wie z. B. das Vorwärmen des Roheisens, die Winderhitzung, Comté-Feuer, usw., eingeführt. Den Anbruch einer neuen Epoche in der Entwicklung der Rohnitzer Eisenwerke stellte jedoch die Aufstellung eines mit Holz beheizten Puddelofens in Chvatimech im Jahre 1839 (Abb. 8) dar, der der erste in Ungarn war [12]. Kurze Zeit nachher, im Jahre 1842 wurde in Orsblie (Zährenbach) auch ein Stabeisen-Walzwerk errichtet [13]. Dies waren die ersten Schritte auf dem Wege der Einführung der modernen Produktionstechnik in den Rohnitzer Eisenwerken, die sich jedoch erst mit der Inbetriebsetzung des großen Puddel- und Walzwerkes in Podbrezová (Brezová) in den fünfziger Jahren des 19. Jahrhunderts durchgesetzt hat [14].

Das Beispiel der Rohnitzer Eisenwerke ist ein Beweis, daß auch bei Aufrechterhaltung der alten technischen Basis die reale Möglichkeit der Verbesserung der Produktionstechnik bestand. Zwar wurde diese Möglichkeit nicht einmal von den Rohnitzer Eisenwerken völlig ausgenutzt, es wurde aber hier jedenfalls weit mehr getan, als bei der Mehrzahl der Eisenproduzenten im damaligen Ungarn [15].

ANHANG*

Beschreibung des praktischen Verfahrens der bei den niederungarischen k. k. Eisenwerken in Ausübung bestehenden Frischmethode vor zwei und vor einer Form mit dem Anlaufstabe**

Nachdem die Beschaffenheit der Betriebsmaterialien einen bedeutenden Einfluß auf den Erfolg der verschiedenen Eisenverfrischungsmethoden ausüben: so wird es für zweckmäßig und angemessen erachtet, der Darstellung des praktischen Verfahrens selbst eine Beschreibung des n. ung. Roheisens, der Brennmaterialien und der Zuschläge voranzuschreiben.

I. Von den Betriebsmaterialien

Die Betriebsmaterialien zerfallen nach den Veränderungen, die sie erleiden oder bewirken, in die leidenden und in die wirkenden; zu ersteren gehört das Roheisen, zu den letzteren gehören außer der Gebläseluft die Kohlen und die Zuschläge.

a) Vom Roheisen

Die niederungarischen k. k. Hochöfen blasen teils der Beschaffenheit der Eisensteine, teils den Gesetzen der Hüttenökonomie gemäß, grau und weiß. So werden die Späte und reichen Brauneisensteine bei einem noch ziemlich gaaren Ofengange auf weißes, die Toneisensteine aber und ärmere Braunerze auf graues Eisen verschmolzen.

Ein vollkommenes Gaarblasen der ersteren Sorten würde einen zu großen Kohlverbrauch verursachen, daher gegen die Hüttenökonomie sein; während die letzteren der Eisengiesserei

* Wortwörtliche Abschrift eines im slowakisch-staatlichen montanistischen Archiv zu Schemnitz befindlichen von Michael JACSKOVSKÝ am 24. Nov. 1828 verfassten Berichts mit ganz geringfügigen Auslassungen an zwei Stellen; Archivzeichen ŠSÚA—BO, HKG, 1929, Nr. 67.

** Zu dieser seinerzeit offiziellen Benennung sei bemerkt, daß das hier in Frage stehende Gebiet, obwohl es im ehemaligen Ober (Nord-)Ungarn lag, zur Unterscheidung von den nördlich davon in der Zips liegenden »oberungarischen« Montanrevieren »niederungarisch« genannt wurde. (*Die Schriftleitung.*)

halber, und zum Teil auch der zu beschreibenden Frischprozesse wegen, auf graues Eisen verblasen werden müssen. Die hier in Ausübung stehenden Frischprozesse erheischen nämlich aus dem Grunde auch graues Roheisen, weil nur durch dessen Zuteilung es möglich wird, weißes Roheisen in einem so flüssigen Zustande niederzuschmelzen, daß das Einrühren der entkohlenden Zuschläge und ihre unmittelbare Berührung mit der geschmolzenen Masse im nötigen Maße stattfinden könne. Ein Teil grauen Roheisens wird ferner auch deswegen nötig, damit sich den im weißen Roheisen enthaltenen Unarten Zeit und Gelegenheit darbiete, sich zu oxidieren und mit der Schlacke auszuscheiden.

Das *weiße* Roheisen wird aus einer Beschickung von 56—60% größtenteils verrösteter Späte und 44—40% reicher Braunerze und Oxidul-oxida (Magneteisensteine) ohne Kalkzuschlag erblasen. Selbes ist nicht immer von gleicher Beschaffenheit, und erscheint nur selten kristallinisch als neutrales Eisencarburid (Spiegelfloß), sondern meistens im Zustande des körnig weißen, oder mit weniger Kohlenstoff als strahliges. Es wird bei nicht zu hoher Satzführung erzeugt, ist leicht zersprengbar, geht ziemlich gaar im Frischfeuer und wird in Gänzeform von 8 Schuh Länge, 8—9 Zoll Breite und 1—1 $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke gegossen.

Das *graue* Roheisen ist von verschiedenen Schattierungen im Bruche, bald mehr, bald weniger dunkel, zuweilen auch halbiert. Es wird bei einer ziemlich niederen Satzführung gewonnen, und ist meistens von einer grünen glaslichten Schlacke begleitet. Auch diese Roheisensorte ist größtenteils in Gänzeform von 1 $\frac{1}{2}$ —2 Ztr im Gewichte. Außer denselben werden verschiedene Gußeisen Abfälle als Eingüsse, Schlackeneisen und auch mißratene Gußstücke in die Verfrischung genommen, und da diese nicht immer von dem anklebenden Formsande und Lehm gereinigt werden können, so verursachen sie einen ziemlichen Rohgang, der dem größeren Gaargange der weißen Roheisensorten zu Gute kommt.

Ein ferneres Betriebsmaterial, wenn schon nur ein zufälliges, sind die Abfälle der Blechbereitung, in den sog. Blechabschnitzeln bestehend; jedoch findet ihre Verwendung nur im Orte des Blechwalzwerkes Statt. Die auswärtigen Frischfeuer haben mit diesen den Feuerabbrand bedeutend vermehrenden Materiale nichts zu schaffen.

Die vorbenannten Schmelz- oder viel mehr Betriebsmaterialien werden mit unbedeutendem Aufgewichte in die Verarbeitung genommen. Dies wird aus dem Grunde gestattet, weil die Gußwerksabfälle, wie oben erwähnt wurde, mit Lehm und Sand verunreinigt sind. Auch hat der hiesige ordinäre Sand die unangenehme Eigenschaft, wegen seines Glimmergehaltes sehr fest an dem Roheisen kleben zu bleiben; indem die Glimmerblättchen eine Anschmelzung erleiden.

Die Verwendung und Zuteilung des *Wascheisens*, welches durch Zerpochung der gezogenen Hochofenschlacke gewonnen wird, ist ebenfalls nicht allgemein. Dasselbe kann mehr den Zuschlägen beigerechnet werden, und wird zuweilen von einem übergaren Feuergange erfordert, wobei es jedoch auch mit seinem Nettogewichte in Verrechnung kommt.

b) Von den Kohlen

Die bei den meisten hiesigen Frischfeuern in Verwendung kommende Kohlen sind aus getrifteten Fichten- und Tannenholz (in Klüften oder Scheitern) durch eine Abart der italienischen Köhlerei gewonnen. Sie enthalten weit weniger Brennkraft als das in den Forsten erzeugte Kohl; wahrscheinlich weil durch das Schwemmen im zerklüfteten Zustande durch Auflösung der gummichten Teile die Kohärenz der Holzfasern geschwächt wird, und daher beim Kohlbrennen Hitze und Luft tiefer eindringen und einen Teil des Kohlenstoffes mehr verzehren. Daher sind auch dieselben spezifisch leichter als weiches Waldkohl, und ein Scharnowitzer Maß von 6,397 Wiener Kubikfuß wiegt warm gewogen 35,5 Wiener Pfd. im Durchschnitte; doch saugen sie, wegen ihrer großen Porosität begierig bis 12% Feuchtigkeit ein; wodurch das Gewicht einer Scharnowitzer Maß auf 39,5 Pfd. steigt.

Sie werden in mäßig großen Stücken gewonnen, verursachen einen weichen Feuergang, vertragen kein starkes Gebläse, nur eine niedere Luftpressung, erheischen beim Frischfeuerbetriebe ein oftmaliges Begießen, und erleiden durch die Beifuhr und noch mehr durch den Absturz in die 2—3 Klafter tiefen Kohlschoppen einen 10% betragenden Einrieb.

Auch beim Frischen wurden abgelegene ältere Kohlen wirksamer und ausgiebiger befunden, als frisch geplissene.

c) Von den Zuschlägen

Als Zuschlag bedient man sich beim Frischen vor zwei Formen, wie vor einer Form, der Stockschlacken, der Schwähle, des Lehmes, des Quarzes und zuweilen des schon erwähnten Wascheisens. Unter *Stockschlacke* versteht man hierorts alles was sich beim Schmieden ansam-

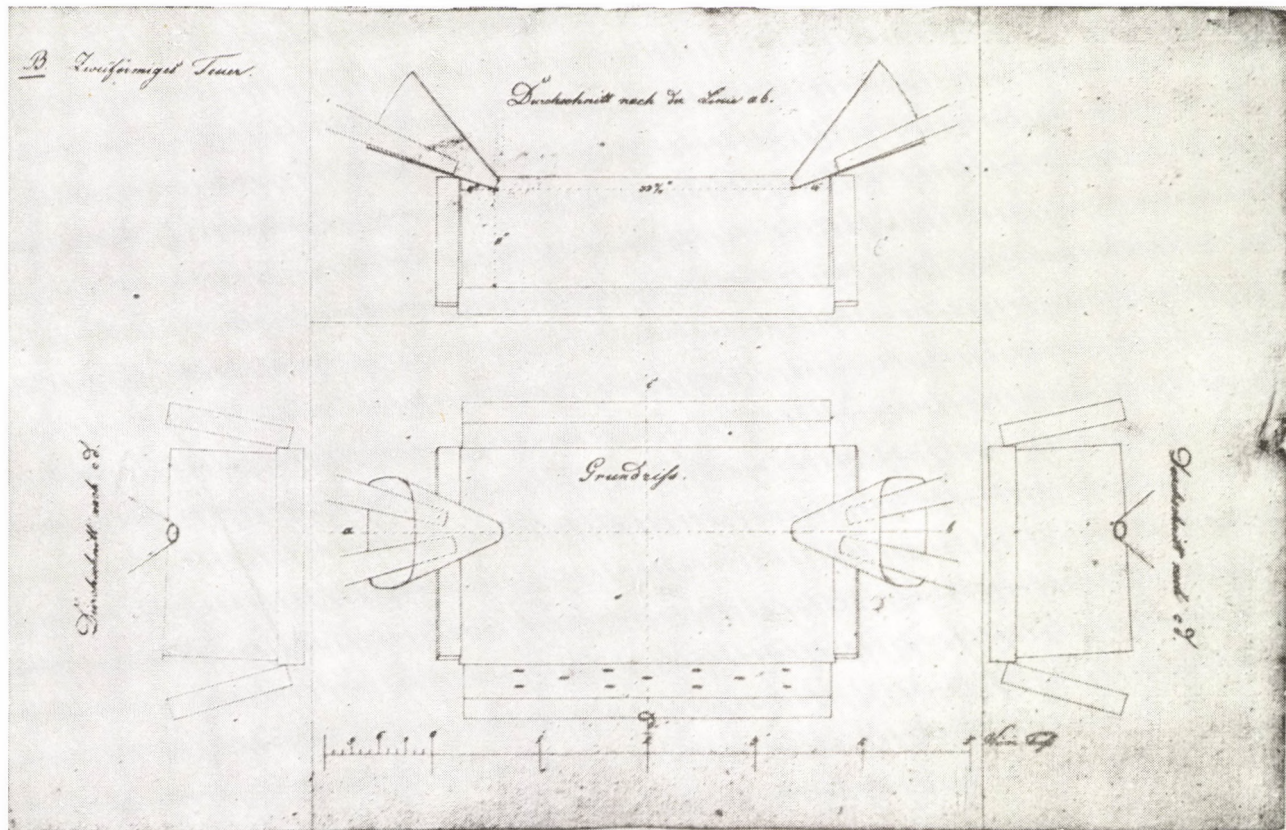


Abb. 9. Rohnitzer Frischherd mit 2 Formen

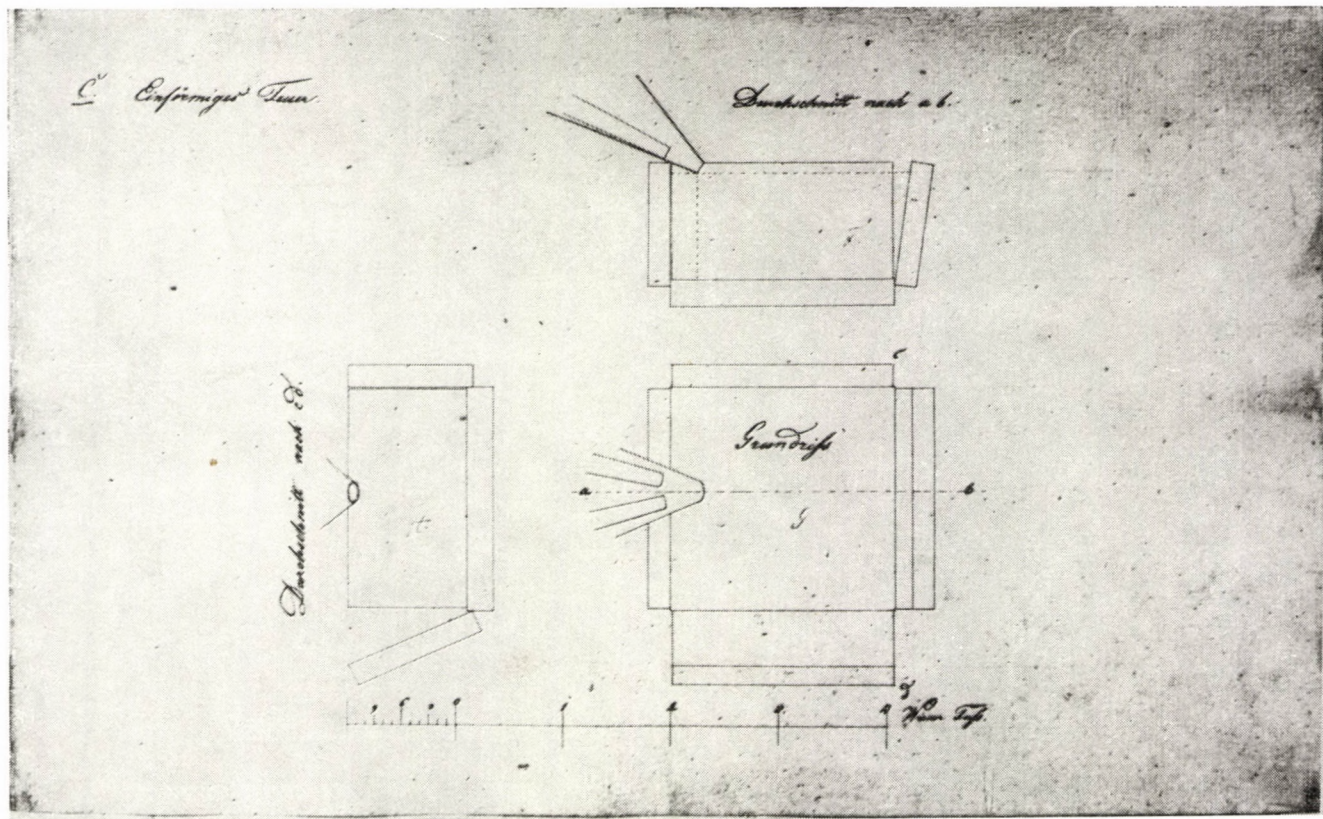


Abb. 10. Rohnitzer Frischherd mit 1 Form

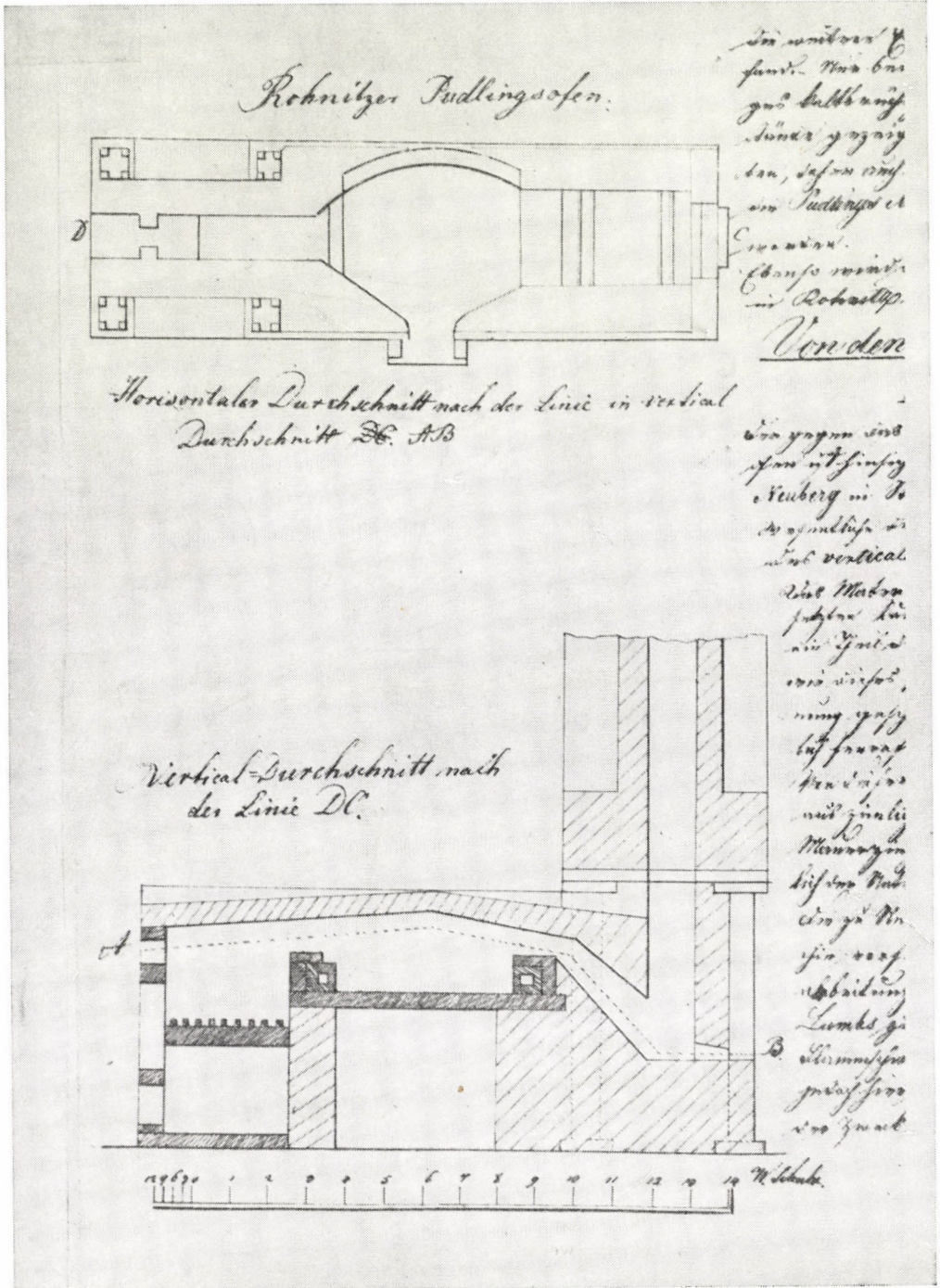


Abb. 11. Puddelofen in Chvatimech (1839).

melt und sie besteht teils aus Hammerschlag, der größtenteils reiner Eisenoxidul-oxid ist und beim Ausschmieden abspringt, teils aus noch nicht gehörig durchgefrischem Brockwerke, welches während dem Auspenden unter dem Stockhammer abfällt. Ersteres bewirkt vorzüglich einen weichen Feuergang. Das Nämliche verursachen die *Schwähle* und gaaren Frischschlacken, die sich bloß dadurch von einander unterscheiden, daß erstere entweder im Herde zurückbleiben oder beim Herausnehmen größerer Stücke abgestoßen werden; während die gaare Schlacke noch von selbst abfließt.

Beide sind ein Subsilikat und wirken teils durch weitere Aufnahme von Kieselerde aus dem Roheisen, teils durch Abgabe von Oxygen an den Kohlenstoff des Roheisens aus dem überschüssig enthaltenen Eisenoxydule, welches zur Silikatbildung nicht nötig ist.

Die *Rohschlacke* wird nicht als Zuschlag verwendet; weil man andere vorzüglichere Mittel zur Beförderung des Rohganges hat. Zu diesen vorzüglicheren Mitteln gehört das *Waschisen* in kleinen Körnern.

Ferner wendet man Quarz zur Herbeiführung eines rohen Feuerganges an; ein jedoch nicht nachahmungswürdiges Verfahren, da die Kieselerde viel Eisenoxydul zur Silicatbildung braucht, und somit ein großer Feuerabgang entsteht.

Verschiedene *Lehmarten* führen ebenfalls durch Verdünnung der Schlacke einen rohen Gang herbei.

Den wirkenden Zuschlägen wäre auch das Wasser beizuzählen, und es wird im Verfolge erwähnt werden, wie solches einen weichen Feuergang verursacht; aber dennoch ein rohes Produkt liefert.

II. Von den äußeren und inneren Verhältnissen eines zweiförmigen Frischfeuers

Die zu Gebote stehenden Wasserkräfte bestimmen die Möglichkeit der Anlage eines zweiförmigen Frischfeuers. Es handelt sich nämlich um die angemessene schnelle Bewegung eines 3—3 $\frac{1}{2}$ Ztr. schweren Grobhammers und um die Zulieferung von nahe an 500 Kubikfuß reeller Luftmasse pro Minute, von atmosphärischer Dichte; das ist durch jede Form 250 Kubikfuß.

Da aber bekanntlich die gewöhnlichen hölzernen Gebläse einen Windverlust von 30—40% erleiden, so ist bei der Anlage auf eine Wasserkraft Bedacht zu nehmen die pro Minute an 700 Kubikfuß Luft einzusaugen und auszupressen vermag.

Ob dieser nötige Effekt vorteilhafter durch eine größere Wassermasse, oder durch ein höheres Gefälle hervorgebracht werden könne, ist nur durch Lokalverhältnisse, oder bei übrigen gleichen Umständen durch die Ausfälle des Kalküls zu entscheiden.

Man hat bei den niederungarischen Eisenwerken bei zweiförmigen Frischfeuern für den Hammer ein besonderes Wasserrad, und die Gebläse werden an einigen Orten durch zwei Wasserräder, an anderen nur durch ein einziges betrieben.

Bei der Anlage eines neuen Werkes bleibt immer der letzte Fall vorzüglicher; und Berichterleger würde zwei Zylinder-Doppelgebläse von angemessenen Dimensionen als die entsprechendste Vorrichtung anempfehlen.

Von geringerem Belange sind die übrigen äußeren Verhältnisse. Nur ist vorzüglich Rücksicht auf einen trockenen Grund zu nehmen, da zusitzende Grundfeuchtigkeit sehr nachteilig auf den Gang des Frischprozesses einwirkt. Kann die Sohle des neu anzulegenden Frischfeuers nicht über die Sohle des Niveau der anliegenden Fahrstraße erhöht werden, so ist das Hammergebäude mit tiefen Gräben zu umgeben, und es sind verdeckte Abzüge bis zur Sohle der Radstube zu leiten.

In Bezug auf die äußeren Dimensionen eines zweiförmigen Frischfeuers wird auf die sub *A** beiliegende Zeichnung hingewiesen; woraus es jedem baukundigen Hüttenmanne ein leichtes sein dürfte, alle nötigen Maße und Verhältnisse zu entnehmen. Daß dort, wo unmittelbar das Feuer einwirkt, Lehm und feuerfestes Gestein angewendet werden müsse, dürfte überflüssig zu bemerken sein. Nur muß eine recht massive Mauerung, und keine zu große Ökonomie bei der Eisenverwendung auf Schließen besonders ans Herz gelegt werden; indem die Erwärmung, mithin auch die Ausdehnung weit größer als die bei gewöhnlichen Frischfeuern ist.

In Rücksicht auf Feuergefahr wird eine etwas höhere Esse anempfohlen; auch ist die Anbringung der Funkenbleche nicht außer Acht zu lassen; selbe sind auch im Risse *A* angedeutet. Auch auf Anbringung von Abzügen im Gemäuer selbst darf nicht vergessen werden.

Ein sehr berücksichtigungswerter Umstand ist die Stellung des Feuers selbst in Bezug auf Geflüder, Geschläge und Gebläse. Sie ist bei den hierortigen Frischfeuern, abgedrungen durch Lokalumstände nicht allgemein gleich vorteilhaft. Bei dieser Stellung ist zu beobachten:

* Vgl. Abb. 9.

daß das Geschläge, nächtlicher Weile vom Feuer aus hinlänglich beleuchtet werde, — daß die Arbeiter am Feuer beim Abhauen der Zigel und der rauen Enden keine Verletzung zu fürchten haben, — endlich daß der Wind nicht zu weit, noch in zu großen Krümmungen geführt werden dürfe.

Eine diesen drei Hauptbedingnissen entsprechende Stellung des Feuers wäre im nebenstehenden Grundrisse (Abb. A) ausgedrückt, wobei das Geschläge hinlänglich erleuchtet, jede Gefahr beim Abschroten vermieden und die Windführung nur mit unbedeutender Brechung ausgeführt ist.

Zu den äußeren Verhältnissen gehört ferner das *Geschläge* sammt den nötigen Werkzeugen, dann das *Gebläse*.

Das *Geschläge* ist dasselbe, wie bei einem gewöhnlichen Frischfeuer. Allenthalben befinden sich an einer Hämmerwelle, an deren einem Ende das Hammerrad befestigt ist, zwei Schwanzhämmer, und zwar der Schmiedhammer, $3\frac{1}{4}$ — $3\frac{3}{4}$ Ztr. schwer, vormals von geschmiedetem Eisen an der Bahn gestahlt, derzeit fast schon aller Orten aus Gußeisen, an einem büchernen Hammerstiele befestigt; ferner der Stauchhammer von Gußeisen 4 Ztr. schwer mit quadratischer Bahn von 9—10 Zoll Breite, und anstatt auf einem Amboß, auf eine runde, im Amboßstocke eingelassene Platte schlagend.

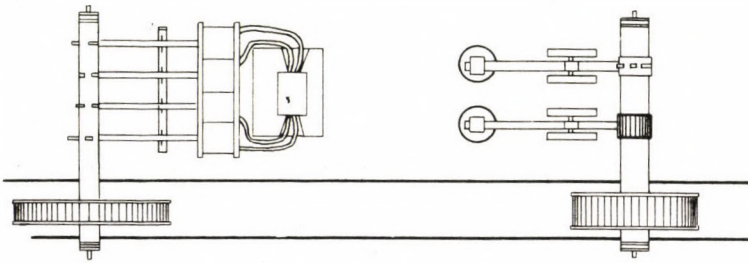


Abb. 12a

Die Hebung der Hammer findet an einigen Orten durch Rückeisen Statt, die zwischen zwei gegossenen Ringen an der Welle befestigt sind; an anderen Orten mittelst der sogenannten Ertel, die in der gegossenen Wellentrommel befestigt werden.

Die gegossenen Ilsenringe, in denen die Hammerstiele stecken, laufen in gegossenen Ilsenpfandeln, welche in gegossenen Hammergerüsten eingekeilt sind.

In Bezug auf die Stauchhämmer wird noch erinnert, daß sie nicht allein beim Zerschlagen und Zerkleinern der Zuschläge gute Dienste leisten, sondern auch die Zusammenbauschung und Anschweißung der gezwungenen Anläufe in einem vorzüglichen Grade erleichtern. Deswegen sind sie auch bereits allgemein eingeführt.

Die übrigen, jedem Frischfeuerbetriebskundigen bekannten Werkzeuge sind folgende, als: Verschiedene Brech- und Rennstangen, Anlaufstäbe und Feuerhacken, Formräumer, Formkrücken und Formeisen, Schlackenspieß, Schaufeln, Putzken, Prellhämmer, Schröter, Handhämmer, Keilschlägel, Dörner, Durchschläge, Schmied-, Breit- und Kolbenzangen, Sparringe, Bindklammern und endlich Rührstangen von trockenem Holze.

Vom Gebläse

Bei den hierortigen zweiförmigen Frischfeuern befinden sich hölzerne Gebläse mit vier Kästen von 3 Schuh Länge und Breite im Lichten und $2\frac{1}{2}$ Schuh Hubhöhe.

Die Kapazität eines solchen Gebläsekastens ist somit bei einer Kolbenfläche von 9 Quadratfuß $22\frac{1}{2}$ Kubikfuß.

An der Welle, die die Gebläse bewegt, befinden sich 8 Däumlinge, die auf die Waagbäume drücken, deren vordere Enden die Gebläsekolben aufwärts schieben. Der leichteren Bewegung wegen sind an beiden Enden der Waagbäume Friktionsräder angebracht, so wie die Balgschämel, damit sie schnell genug herabgleiten, mit Gewichten beschwert zu werden pflegen.

Die Liederung besteht aus Leisten, die durch stählerne Federn an die Kastenwände angedrückt werden, sie sind S-förmig gekrümmt und lassen sich stärker und schwächer stimmen. Die Bälge oder Kästen selbst sind meistens aus lindenem $2\frac{1}{2}$ zölligen Pfosten gearbeitet. Eine Wellenumdrehung gibt mittelst ihrer 8 Däumlinge, aus den 4 Kästen 8 Auspressungen

und da während des Frischens und Anlaufens nahe an 700 Kubikfuß Luft (inklusive des Verlustes) nötig sind, so müssen die Wasserkräfte 4 Wellenumdrehungen in einer Minute zulässig machen, wobei aus den 4 Kästen 32 Auspressungen erfolgen.

Von den inneren Verhältnissen eines zweiförmigen Frischfeuers

Die Feuergrube eines zweiförmigen Frischfeuers wird durch gegossene Platten, Frischzacken genannt, begrenzt. Sie sind von grauem Gußeisen, weil dieses weniger borstet, leichter das Begießen mit Wasser erleidet, und dem Anfrischen weniger als das weiße ausgesetzt ist. Diese Platten sind namentlich folgende: Ein *Frischboden* 42 Zoll Länge; 24 Zoll Breite; 3 Zoll Stärke bei einem Gewichte von 650—690 Pfd. Ein *Aschen- oder Hinterzacken*, 41, 14 und $2\frac{1}{2}$ zöllig; und 320—350 Pfd. schwer. Zwei *Formzacken*, 23, 14 und $2\frac{1}{2}$ zöllig, jeder bis 230 pfündig. Zwei *Formkästen* zur Befestigung der kupfernen Schmelzform, in Gestalt eines in der Mitte durchschnittenen hohlen Parallelepipedes; hinten in Lichten 15 und 18 Zoll breit und hoch, vorne 13 und 14 Zoll messend, jedes bis 200 Pfd. schwer.

Endlich ein *Sinterblech* 41 Zoll lang, 14 hoch und $2\frac{1}{2}$ dick, mit 11 Löchern von 1 Zoll Weite zum Ablassen der Schlacke, in 3 Reihen, wovon die unterste 3, die oberste 4 Zoll vom Rande entfernt ist. Die *Überlegplatte* ruht, wie bei gewöhnlichen Frischfeuern, auf den sogenannten *Sinterkästen*, der Ähnlichkeit mit den Formkästen hat, nur etwas länger ist.

Übrigens ist auch hier die Überlagsplatte, die den oberen Horizont der Arbeitsseite bildet, in die Seitenmauern eingelassen.

Der Hauptzweck der Frischmanipulation besteht in der Darstellung eines möglichst gutartigen Stabeisens mit dem möglichst geringen Personal-, Zeit- und Kosten- (Kalo- und Kohl-) aufwande, und hiernach richtet sich eine raisonmäßige Herdstellung, ein zweckmäßiger Feuerbau.

Bevor zu dessen Beschreibung geschritten wird, ist zu bemerken, daß durch die Herdstellung ein Feuergang erzweckt werden müsse, der zwischen dem zu rohen und zu gaaren die Mittelstraße hält, indem ersterer ein schlecht beschaffenes Produkt und letzterer einen großen Materialaufwand zur Folge haben würde.

Von der Herdstellung

Bei der Herdstellung kommen in vorzüglichen Betracht: das zu verfrischende Roheisen, das zu Gebote stehende Brennmaterial, die Lokalität des Frischfeuers.

In Bezug auf das Letzte liegt es ob, die Beschaffenheit des Bodens auf seine Nässe und Trockenheit zu prüfen, und im ersten Falle die bereits angeführten Mittel in Ausübung zu bringen, um die diesfälligen Nachteile zu beseitigen. Die Folgen eines nassen Bodens bestehen in einem zu großen Gaargange, der sich außer seinen physischen Kennzeichen durch einen übergroßen Feuerabbrand am Roheisen zu erkennen gibt.

Kohlen aus getriftetem Fichten- und Tannenholze bewirken ebenfalls einen weicheren gaareren Feuergang, als solche aus ungetriftetem Holze; und diesem Übelstande kann nur durch eine später zu beschreibende Feuerstellung abgeholfen werden.

Der Hauptausschlag jedoch bei der Bestimmung des Feuerbaues gibt das zu verfrischende *Roheisen*, bei einer schon bestehenden, bestimmten Frischmanipulation; ob es mehr oder weniger grau — halbirt — neutral, zum Roh- oder Gaargange geneigt ist.

Die derzeit bei den k. k. Werken in Niederungarn in Ausübung stehende Frischmanipulation ist kein reines Anlauffrischen, sie ist das sogenannte *Judenfrischen*, eine Abart des deutschen Frischens, von welchem sie insoweit abweicht, daß sie das nicht Angelassene nicht wie jene in einen Deul aufammelt, sondern in mehreren Klumpen (Juden) vor der Form zur gänzlichen Gaare bringt und daraus gezwungene Anläufe bildet. Übrigens weicht selbst die Herdstellung bei dem deutschen Frischprozesse nur insoweit ab, als es durch die mehr zum Rohgange geneigte Beschaffenheit des Roheisens bei der deutschen Frischschmiede erheischt wird.

Obwohl hierorts $\frac{2}{3}$ weißes, bei einem auch ziemlich gaaren Hochofengange erblasenes und $\frac{1}{3}$ graues Roheisen in die Verfrischung kommen, so ist doch gar nicht zu zweifeln, daß auch einerlei Roheisengattung, nämlich halbirtes, und vielleicht auch gutartiges neutrales Eisen-Karburid (Spiegelfloß) durch den hier üblichen Frischprozeß zu Guten gebracht und mit ökonomischen Vorteilen verfrischt werden könnte. Der hiesige Frischprozeß dürfte somit einer allgemeinen Anwendung fähig sein; weil sich selbst Späte in Hochöfen insofern gaar mit Vorteil verblasen lassen, wenn man das zum Braten oder Vorbereiten des Roheisens erforderliche Brennmaterial der Hochofenmanipulation gönnt. Auch bei übergaaaren (Koks-Roheisen) wäre sie anwendbar, weil man ohnehin roh einzuschmelzen genötigt ist, um die frischende Zuschläge in genaue Berührung zu bringen.

Durch obige Gattirung entsteht ein licht halbirtes Roheisen. Diesem und der mehr trockenen Beschaffenheit des Bodens wurde und wird der Herdbau angepaßt. Bei demselben kommen folgende Gestände im Einklange zu berücksichtigen: der Boden, die Stellung der Frischzacken, die Form sammt der Düsen, die Gebläse.

Alle diese integrierende Teile des Feuers können nach Umständen zur Bezweckung eines weicheren oder roheren Feuerganges benützt werden. Ein halbirtes Roheisen, weiche Kohlen und ein trockener Boden, die beiden Ersten den Gaargang verursachend, sprechen für nachstehende hierübliche Herdstellung.

Dem *Bodenzacken* gibt man eine horizontale Lage, während man ihn, wo man eines noch roheren Feuerganges bedürfte, etwas gegen die Aschenseite neigen würde.

Die beiden *Formzacken* werden nicht ganz vertikal aufgestellt, sondern man gibt ihnen eine kleine Neigung ins Feuer hinein, die jedoch beiderseitig nur $\frac{1}{4}$ Zoll beträgt; so daß die Feuerlänge im Lichten unten 42 Zoll, oben aber $41\frac{3}{4}$ Zoll beträgt. Dies geschieht um den Formen eine ihrer künftigen Stellung mehr angemessene Unterlage zu geben. Aus eben diesem Grunde haben die Formzacken auch eine kleine Dosirung gegen die Rückseite und ragen hinten einen Zoll weniger als vorne vom Boden heraus; damit auch die Form eine ähnliche Lage erhalte, und sich der Windstrom mehr dem Anlaufstabe anschmiege, welcher nicht horizontal, sondern schief ins Feuer gehalten wird. Übrigens hat weder die eine noch die andere dieser Stellungen einen Einfluß auf den Feuergang.

Auch der *Aschenzacken* und das *Sinterblech* stehen nicht lotrecht. Ersterer hängt 3 Zoll und letzterer 4 Zoll aus dem Feuer; der leichteren Hantierung wegen.

Das Hauptaugenmerk ist bei der Feuerstellung auf die *Form* zu richten. Sie ist von geschlagenem Kupfer, 15—18 Zoll lang, hinten am Blatte 12 Zoll und in der Mitte 14 Zoll breit, vorne am Rüssel (inklusive der $\frac{1}{4}$ — $\frac{3}{8}$ zölligen Metallstärke) 2 Zoll im Durchmesser, und wiegt im neuen Zustande 30—35 Pfd.

Die Lichte des Rüssels hat für den Frischer die größte Wichtigkeit und wird mittelst des sogenannten *Formeisens* auf die erforderliche Weise zugerichtet; dies ist ein Instrument in Gestalt eines ovalen abgestutzten Kegels mit dessen Hilfe man nach vorhergegangenen Erwärmen durch Hammerschläge und zuletzt mit der Feile dem Formauge seine nötigen Ausmaßen gibt. Eine elliptische Formmündung von 22 und 13 Linien im Durchmesser fand man hierorts als die entsprechendste. Ein gaar oder weich im Feuer gehendes Roheisen erfordert eine engere, ein rohschmelzendes eine weitere Formmündung.

Man gibt der elliptischen Mündung den Vorzug vor der früher gebräuchlichen halbmöndförmigen, weil der Wind weniger aufwärts geführt wird und ein besseres Frischen am Anlaufstabe erfolgt.

Die Formmündung ist ferner senkrecht abgeschnitten.

Beim *Einlegen* der Form sind folgende Umstände zu berücksichtigen.

1. Die *Entfernung* des Rüssels vom *Boden*. Sie beträgt $10\frac{3}{4}$ —11 Zoll. Sollte aber ein Feuer zu weich gehen, so wäre die Entfernung größer zu machen. Das Maximum, welches hierorts bei einem gaargängigen Feuer mit nassem Boden vorkam, betrug $12\frac{1}{2}$ Zoll.

2. Die *Vorrangung* der Form ins Feuer hinein beträgt, waagrecht gemessen, $3\frac{1}{2}$ —4 Zoll bei halbirtem Roheisen, bei mehr grauem müßten die Formen etwas weiter zurück liegen. Bei einer beiderseitigen Vorrangung von 4 Zollen ist eine Formmündung von der anderen $33\frac{3}{4}$ Zoll entfernt.

3. Die *Neigung* der Form richtet man bei den oberwähnten Roheisensorten zwischen 18 und 19 Grad. Ein mehr rohschmelzendes Roheisen würde einen um einige Grade flacheren Winkel erheischen, ein mehr weißes eine geneigtere Form.

Wenn man den Durchschnitt des Feuers der Länge nach in 6 gleiche Teile teilt, so soll der ins leere Feuer blasende Wind beiderseits an der Grenze des ersten Sechstels anfallen.

Übrigens stechen die Formen weder gegen die Rück- noch gegen die Arbeitsseite, doch steht ihr Querschnitt nicht horizontal, sonder etwas einwärts geneigt, wie bereits bei der Stellung der Formzacken erwähnt worden ist.

Um die Formen mit der gehörigen Neigung leicht und schnell einzulegen, bedient man sich der sogenannten Formwaagen. Jene, deren sich die Meister bedienen, haben meistens eine willkürliche Einteilung, und die an denselben angebrachten Striche zeigen weder Grade noch Zolle an und können nur durch Nachmessung und Auflösung eines Dreieckes darauf reduziert werden. Entsprechender ist eine Formwaage an der ein gewöhnlicher Transporteur angebracht ist, wie nebige Zeichnung (Abb. B) darstellt. Das dicke Ende A wird in den Formrüssel hinein gehalten, wo dann die Senkelschnur den Neigungswinkel angibt.

4. Die *Entfernung* der Formen vom *Hinterzacken* beträgt $11\frac{1}{2}$ bis $12\frac{3}{4}$ Zoll. Bei der erwähnten Roheisengattirung $12\frac{1}{2}$ Zoll. Eine größere Annäherung zum Hinterzacken bringt einen weicheren Gang hervor und ist bei sehr grauem, rohschmelzendem Roheisen anzuraten. Je weißer aber das Roheisen ist, desto mehr muß gegen die Arbeitsseite gerückt werden.

5. Die *Gestalt* und *Lage* der *Düsen*, deren sich zwei in jeder Form befinden, ist folgende: Ihre Mündung ist kreisförmig und größer, als die der Formen, um sie beständig kühl zu blasen und das Abschmelzen zu verhindern. Der Durchmesser beträgt im Lichten $1\frac{3}{4}$ Zoll. Ferner sind die Düsen so gelegt, daß sich der Wind im Feuer kreuzt und auch gegen die Ecken streicht.

Die Entfernung der Düsenmündung vom Formende ist verschieden und steht im Verhältnis mit der Stärke der Gebläse. Hier pflegt gewöhnlich eine weiter vor und die andere weiter zurück zu liegen, doch die Notwendigkeit dieser Lage wird durch den Erfahrungssatz bestritten, daß man auch mit einer Düse frischen kann. Übrigens steht die erwähnte ungleiche Lage oder Vorrangung im Zusammenhange mit der verschiedenen Güte der einzelnen Gebläse, indem jede Düse mit einem besonderen Balge in Verbindung steht und daher, je nach dem dieser Balg stärker oder schwächer ist, weiter zurück oder weiter vorwärts gelegt wird. 6 Zoll und $4\frac{3}{4}$ Zoll sind hierorts das Maximum und Minimum. Im Ganzen bestimmt der Erfolg des Feuer-

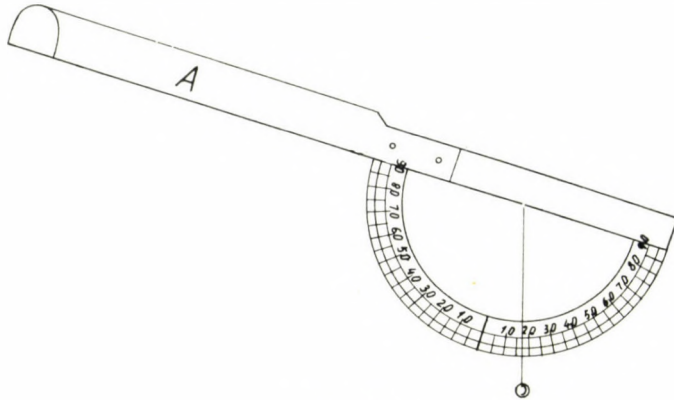


Abb. 12b

ganges die Näherung oder Entfernung, die überhaupt zu den ersten Mitteln gehören, welche dem Frischer zu Gebote stehen einen roheren oder weicheren Gang herbeizuführen; und zwar wird ersterer durch Annäherung und letzterer durch Entfernung zur Formmündung herbeigeführt.

Ein ferneres Mittel den Gang des Feuers abzuändern findet der Frischer im schnelleren oder langsameren Wechsel der Gebläse, über deren übliche Ausmaßen und Luftleistungen schon das nötige gesagt worden ist. Eben so gewähren ihm Zuschläge — Wasser — und abgeänderte Gattungsverhältnisse des Roheisens mobile Hilfsmittel, den angemessensten Feuergang zu bewirken und es wird nur dann zu einer Herdstellungsabänderung geschritten, wenn die erwähnten mobile Hilfsmittel nicht hinreichende annehmbare Resultate zu liefern.

Ein zu gaarer Feuergang hat, wie schon erwähnt, einen großen Roheisenabbrand zur Folge, und ein zu roher Gang gibt ein rotbrüchiges, roheisenartiges, nicht gehörig entkohltes Produkt; daher hat der Frischer den Mittelweg einzuschlagen.

III. Praktische Beschreibung der Frischmanipulation vor zwei und vor einer Form

Wie schon im Eingange zur Herdstellung erwähnt wurde, ist das in Niedergarn übliche Frischen kein reines Anlauffrischen. Das Einschmelzen geht noch ziemlich roh vor sich, und die Gaare wird teils durch den Einfluß der Zuschläge, teils am Boden, teils vor der Form gegeben. Die nachstehende Beschreibung des praktischen Verfahrens wird das Vorausgelassene näher erläutern.

Bei dem hiesigen, sowohl einförmigen, als zweiförmigen Frischprozesse lassen sich folgende 6 Manipulations-Abteilungen unterscheiden:

1. Das Reinigen des Feuers und Einsetzen des Roheisens.
2. Das Einschmelzen.
3. Das Abräumen und Einrühren.
4. Das Zuschütten und Gaarblasen.
5. Das Anlaufen.
6. Zusammenblasen des übrig gebliebenen Brockwerkes.

Vom Feuerreinigen und Roheisen Einsetzen

Das Reinigen des Feuers von den Schwählen und Ansätzen ist nur dann nötig, wenn diese bereits im Verfolge der Manipulation nach vollendeten mehreren Schichten überhand genommen haben; wo dann die Brechstange zu Hilfe genommen und alles im Herde befindliche ausgebrochen und ausgehoben wird. Versteht sich, nicht um es auf die Halde zu laufen, sondern aufzusammeln und als ferneren Zuschlag zu benützen.

Bei einem neu zugestellten Feuer wird nun etwas Kohlgestübe in die Feuergrube gegeben und die Arbeit beginnt mit dem Einsetzen des Roheisen.

Mann nimmt hierorts 4 Ztr. weißes und 2 Ztr. graues auf einmal in die Verfrischung; bei weniger geübten Frischern auch nur 5 Ztr., wobei die Schichten von kürzerer Dauer und weniger ermüdend sind. Ist das Roheisen in kleinen Stücken, so wird es in Zangen eingehalten, bei der hier gewöhnlichen Gänzeform aber werden diese in 2—3 Stücke zerschlagen und so ins Feuer gelegt, daß sie, sich an den Hinterzacken anlehnend, noch über denselben hervorragen, und in den beiläufig 5 Zoll über der Mitte des Bodens befindlichen Vereinigungsraum beider Windkegel zu liegen kommen. Hierauf wird das Feuer mit Kohlen angefüllt und das Gebläse angelassen.

Vom Einschmelzen

In der Einschmelzperiode dreht sich die Balgwelle $2\frac{1}{2}$ mal pro Minute, wobei mit Hilfe der 8 Däumlinge aus den 4 Gebläsekasten, deren jeder 22,5 Kubikfuß faßt, 20 Auspresungen stattfinden und durch beide Formen 450 Kubikfuß Luft von atmosphärischer Dichte in den Herd geleitet werden sollen.

Gewöhnlich kommen während dem Fortgange des Einschmelzens, besonders wenn das Feuer auch größere Stabeisengattungen zu erzeugen hat, die Maßeln von der vorigen Schicht zur weiteren Verarbeitung ins Feuer; und da diese Maßeln entweder noch zu roh, oder aber schon hinlänglich gaar sind, so wird im ersten Falle Hammerschlag in kleinen Dosen über sie geschüttet, im letzten Falle hingegen das Abbrennen durch Lehmzuschlag verhindert.

Beide Zuschläge wirken auf den Gang des Einschmelzens, letzterer wirkt rohgängig, während der erstere einen weicheren Gang herbeiführt.

Wird aber bloß Roheisen eingeschmolzen, ohne Einhaltung von Maßeln, so hat der Arbeiter sein vorzügliches Augenmerk dahin zu richten, daß es in einem Grade von Flüssigkeit zu Boden komme, der das Einrühren der frischenden Zuschläge erlaubt.

Hierbei muß er, wenn ihm nicht die durch den bloßen Anblick des Feuers unterschiedbaren Kennzeichen genügen, den Spieß fleißig zur Hand nehmen und hiemit das niedergeschmolzene untersuchen. Springt das Angesetzte und im Wasser Abgelöschte bei unbedeutenden Hammerschlägen leicht ab, zeigt sich häufig rohe, dünnflüssige Schlacke, so ist dies ein Beweis eines entsprechenden Rohganges, während bei einem bröcklichen Anfühlen, geringen und schwer absprengharen Ansätzen, bei funkensprühender Schlacke der Gang der Manipulation oder die Feuerstellung zu gaar ist.

Im letzten Falle läßt man die Gebläse schneller wechseln, oder man rückt die Düsen weiter vor, man rückt das Roheisen schneller nach, man wirft kleine Stücke graues Roheisen oder Wascheisen ins Feuer, man sticht die Schlacke selten oder gar nicht ab, während man bei Beobachtung eines zu rohen Ganges die Bälge sanfter wechseln läßt, das Roheisen langsamer nachrückt, fleißiger gaarende Zuschläge anwendet und die Schlacke öfter absticht.

Kurz das Bestreben des Frischers soll dahin gehen, entweder durch den freiwilligen Feuergang, oder durch Anwendung vorerwähnter Abhilfsmittel das Roheisen in einem zum Ein- und Umrühren geeigneten Zustande niederzuschmelzen. Im entgegengesetzten Falle kann beim gaaren Feuergange ein rohes Produkt resultieren.

Das Einschmelzen von 6 Ztr. währt ungefähr $1\frac{1}{2}$ Stunden, wobei das höhere oder tiefere Abstechen der Schlacke durch die obwaltenden Umstände bestimmt wird, ja es findet zuweilen gar kein Ablassen statt, je nachdem mehr oder weniger roh niedergeschmolzt wurde und die Schlacke eine größere oder geringere Dünflüssigkeit erreichte.

Vom Abräumen und Einrühren

Zeigt die Anwendung der Brechstange und die Herdflamme, daß bereits alles niedergegangen ist, so wird das Gebläse eingestellt, das Feuer abgeräumt und die mit Schlacken bedeckte Eisenmasse mit Wasser begossen, wodurch erstere erstarrt und mit der Schaufel abgehoben wird. Von ihr sondert ein fleißiger und aufmerksamer Frischer die mehr eisenhaltige Teile, die sich teils durch ihr Funkensprühen, teils durch hellere Farbe und längeres Glühen zu erkennen geben, sorgfältig ab.

Die von der obensitzenden Schlacke befreite Eisenmasse erscheint nun, nach der Art des angewandten Roheisens, nach dem stattgehabten Feuergange, nach der geschehenen Zuschlagsanwendung, mehr oder weniger dünn-, dickflüssig, breiartig oder auch bröcklig, vielleicht gar in einen Klumpen zusammengesintert. Die letzteren Fälle sind ein Beweis eines zu großen Gaarganges und müssen in der künftigen Schicht sorgsamst vermieden werden.

Eine angemessene Zerkleinerung mittelst der Brechstange geht nur sehr schwer von Statten, die frischenden Zuschläge finden wegen dem nicht angemessenen Aggregatzustande und wegen Mangel an der nötigen Berührung keine Anwendung. Es entsteht hiebei beim Weichgange des Feuers ein rohes Produkt, weil die Entkohlung nicht mehr ins innere eindringen kann.

Weniger schädlich und unangemessen ist ein bröckiger oder ein breiartiger Zustand; aber auch dieser verhindert eine innige Berührung mit den Zuschlägen; der flüssige rohere bleibt somit der entsprechendste.

Eben so wenig darf dem Rohgange, der sich beim eingeschmolzenen Roheisen darstellt, durch zu häufigen Gebrauch der Stockschlacke abgeholfen werden, weil das so erzeugte Eisen eine faule Ader, wie man es zu nennen pflegt, bekommen würde; wahrscheinlich weil da unreduziertes Oxydul mit in die Mischung mechanisch eingeschlossen wird.

Zum Behufe des Einrührens und Entkohlens richtet sich der Frischer eine Partie von 20—30 Pfd. Hammerschlag und gepochter Schwähle vor, wobei der Stauchhammer seine dienste leistet.

Von dem bei einem zweiförmigen Feuer in einer Schicht arbeitenden *zwei* Schmieden und *einem* Heitzer ergreift der ersteren einer die hölzerne Rührstange, sticht damit in die flüssige Eisenmasse und rührt sie beständig untereinander, während der zweite Schmied Partien des Zuschlages bald vor die eine, bald vor die andere Form wirft. Mit dem Rühren und Zuschlagzuwerfen wird so lange fortgefahren, bis die ganze im Herde befindliche Masse eine breiartige Konsistenz angenommen hat und sich in zöllige unzusammenhängende Stücke zerteilen läßt.

Bei einem gewordenen zu rohen Gange ist hiezu ein größerer Zeitaufwand nötig, daher demselben künftig durch den Gaargang bewirkende Hilfsmittel zu steuern ist.

Die zerkleinete Masse wird von den Formen weg gegen die Mitte aufgehäuft, so daß um und unter denselben ein leerer Raum zur Aufnahme der Kohlen und zum Arbeitsraume für die Anlaufstäbe entsteht. Beim gewöhnlichen Gang dauert diese Operation eine halbe Stunde und schließt mit Auftragen von Kohlen und Wiederanlassen der Gebläse.

Vom Zusammenblasen und Vorrichten zum Anlaufen

Man läßt nun die Gebläse schneller wechseln, so daß sich die Welle 4mal in der Minute umdreht und 32 Auspressungen mit 700 Kubikfuß Luft erfolgen.

Man wendet größeres Kohl an, trägt dessen mehr auf und trachtet den Herd in eine höhere Temperatur zu bringen, als beim Einschmelzen nötig war; man begießt das Feuer öfter, reinigt die Formen, damit der Wind nicht zurückpralle und frei wirken könne und untersucht die Räume unter und neben denselben ob von der aufgehäuften Masse nichts herabgekollert sei.

Während dem richtet man die Anlaufstäbe vor, schmiert die Hammerwellzapfen, erwärmt die Schröter und schickt sich überhaupt zu tätigerer Arbeit an, auch der Heitzer trägt sich mehrere Schwingen Kohl im Vorrate zu, um in der folgenden Periode zum Ziehen der Zugstangen und zu sonstiger Aushilfe beständig bei der Hand sein zu können.

Vom Anlaufen

Die Schmiede erwärmen die Anlaufstäbe indem sie dieselben über die Form in den Herd legen, sie brechen dann von dem Aufgeschichteten ein Stück loß, bringen es noch mehr vor die Form und gegen den Windstrom und versuchen dessen Gaare mit dem Spieße; springt es schwer durch Hammerschläge ab und zeigt es durch Zähigkeit schon eine reine Eisennatur, so wird zum Anlaufen geschritten, im entgegengesetzten Falle läßt man dem Winde noch mehr Zeit zu wirken.

Tritt endlich die gaare Periode ein, so wird der erwärmte Anlaufstab beiderseitig in den leergelassenen Raum zwischen der Form und dem aufgeschichteten Haufwerke, den man bei der deutschen Schmiede Pfanne nennt, eingehalten. Während er zur Schweißhitze gelangt geht das aufgebrochene und über die Form gebrachte Stück teilweise herunter und hängt sich lagenweise am Anlaufstabe an, den der Frischer dem Windstrome aussetzend beständig dreht.

Hat sich ein ziemlicher Klumpen angeschweißt, so bringt ihn der Frischer unter den Hammer, um ihn gehörig auszurecken. Dehnt er sich nach allen Richtungen ohne sich zu bersten, so ist dies der Beweis einer gehörigen Gaare und man verwendet dann den ersten Kolben gewöhnlich zur Verlängerung des Anlaufstabes, um bei den folgenden Anläufen, besonders bei der gezwungenen (Juden) eine gaare Ader in die Mitte des Zagels oder des Stabes zu bringen.

Geht der angelassene Kolben unter dem Hammer auseinander, so verrät dies eine noch nicht hinlängliche Gaare und der Anlaufstab wird neuerdings in die Pfanne gebracht und dem Winde dargeboten. Diese eben beschriebene Operation findet vor beiden Formen auf gleiche Weise statt.

Würde mit dem Aufbrechen, über und vor die Form Bringen, dann Anschweißen beständig auf obrige Art fortgefahren, so lange noch Eisenmasse im Feuer ist, so wird diese Manipulation ein reines Anlauffrischen, würde jedoch einen größeren Materialaufwand und eine geringere Erzeugung zur Folge haben. Allein durch das sogenannte Judenfrischen wird die Arbeit abgekürzt und an Kalo und Kohl erspart.

Der Arbeiter erzeugt nämlich nur wenige freiwillige Anläufe, sondern bricht größere Stücke loß, bringt sie vor und über die Form und wenn die Kennzeichen ihrer Gaare eintreten zieht er sie mit dem Feuerhacken aus dem Herde auf die Hüttensohle, befestigt sie durch Putzkenschläge an den weißglühenden Anlaufstab und bringt diesen damit zur vollkommenen Anschweißung und Auspauschung unter den Stauchhammer und dann unter den Grobhammer zum weiteren Ausziehen in Kolben- oder Zagelform.

Gut gefrischte Brocken zeichnen sich durch eine lichtere Farbe und durch Funkelsprünge aus, sie sind nicht übermäßig groß, mehr platt geformt, mit einer Vertiefung versehen, wo der Windstrom einwirkt und können, wenn sie gehörig gaar geblasen sind und wenn am Anlaufstabe schon ein Kolben von reinem Anlaufeisen war, ein durchgängig fasriges Eisen geben.

Der Stauchhammer ist der Probiertest ihrer Güte, halten sie unter demselben aus ohne zu bersten, ohne daß während dem Auspauschen viel losspringt, so ist dies ein Beweis ihrer Gaare, während bedeutende Abfälle auf Roheit hindeuten, in welchem Falle sie neuerdings vor den Wind gebracht und besser ausgefrischt und entkohlt werden müssen. Kleinere Formmündungen verursachen kleinere Juden, weil durch dieselben geringere Oberflächen gaar werden.

Mit dem Herausheben der Juden, ihrem Anschweißen, Auspauschen und Ausheizen wird ununterbrochen vor beiden Formen fortgefahren. Aber auch hiebei kann sich ein zu roher oder zu gaarer Gang zeigen, letzterer kann, besonders bei nassem Boden, durch sein Prasseln selbst dem Ohre bemerkbar werden. Zeigt es sich durch die dem Frischer bekannten Kennzeichen, deren Erörterung als bekannt übergangen wird, so mag durch Vorrückung der Düsen, oder durch Zuschlagung von grauem Brückeisen oder Wascheisen abgeholfen werden und in der folgenden Schicht beuge man dann durch ein weniger gaares Einschmelzen vor, oder ändere die Roheisengattierung und falls diese Mittel nicht genügen, schreite man zu einer roheren Feuerstellung.

Zeigt sich jedoch ein roher Gang, durch Erscheinung von mehr Rohschlacke, die dann öfter abzulassen ist, durch ein rohes Produkt und häufige Abfälle unter dem Stauchhammer: so wendet man gaarende Zuschläge an, läßt die Gebläse langsamer wechseln, zieht die Düsen weiter zurück, trägt gröberes Kohl auf, schmelzt in der künftigen Schicht gaarer ein und sollten diese Hilfsmittel nicht fruchten, so stelle man das Feuer gaarer zu.

Wie sich die Masse im Feuer vermindert, geht auch die Arbeit langsamer von Statten und zuletzt werden auch die zerstreuten Teile mit der Brechstange gesammelt und auf einen Haufen gebracht.

Vom Zusammenblasen des Brockwerkes

Das Zusammenblasen des letzten Brockwerkes findet nur mehr vor einer Form statt. Es wird demnach, wo 4 Bälge an einer Welle sich befinden, der Formlöffel vor die eine Form vorgelegt. Wo zwei und zwei Bälge eine besondere Welle haben, wird eine davon aufgeschützt.

In dieser Periode werden auch die Streckabfälle zu Guten gebracht, welche in schiefrigen Zageln und unganzen Stabeisenstücken bestehen, und wofür der Frischer, nach der hiesigen Verfassung, reine Zageln im Nettogewichte abzuliefern hat. Ingleichen findet die Zugutebringung der bei den Betriebsmaterialien erwähnten Blechabschnitte statt, die in Partien von 25—50 Pfd. in den Herd gebracht werden. Ferner teilen fleißige Arbeiter in dieser Periode alles unter dem Hammerstocke liegende Brockwerk zu, um den Feuerabgang zu vermindern.

Die Gebläse spielen in dieser Periode gleichmäßig wie in der vorigen. Sind die Zuschläge niedergegangen, so wird das Ganze gelüftet, gehoben und vor die Form gebracht, die Schlacke, wenn sie häufig ist, abgestochen, nach Beschaffenheit der Umstände gaar- oder rohgängige Zuschläge angewendet, endlich der kleine Schmelz herausgehoben, unter dem Stauchhammer ausgepauscht, unter dem Grobhammer zerschrotet und ausgereckt. Eine Ähnlichkeit mit der deutschen Frischschmiede. Diese Periode mag ungefähr $\frac{1}{2}$ Stunde dauern, und nach deren Beendigung beginnt die Arbeit sogleich wieder von Neuem.

Vom Verfrischen vor einer Form

Die Betriebsmaterialien sind dieselben wie beim zweiförmigen Feuer, auch hier werden $\frac{2}{3}$ weißes mit $\frac{1}{3}$ grauem Roheisen gattiert, um ein rohschmelziges Einrennen zu bezwecken. Die Zuschläge sind ebenfalls die nämlichen und in Bezug auf die nötige Windmenge genügen 2 Kastenbälge von 3 Fuß Länge und Breite mit einem $2\frac{1}{2}$ schubigen Hube, um in der Einschmelzperiode bis 250 und in der Periode des Gaarens und Anlaufens etwas über 300 Kubikfuß Luft auszupressen.

Vor jedem einförmigen Feuer arbeiten in einer Schicht 2 Mann und die auf ein Mal eingenrennte Roheisenmenge beträgt $3\frac{1}{2}$ Ztr.

In Bezug auf das praktische Verfahren findet kein wesentlicher Unterschied statt. Die Grundsätze des Vorrichtens, Einschmelzens, Einrührens, Aufbrechens, Anlaufens, Anschweißens des Bröckelwerkes, des Zusammenblasens sind dieselben, nur werden beim 2 förmigen Feuer 6 Ztr. im nämlichen Zeitraum eingeschmolzen, entkohlt und angelassen, in dem dieses beim einförmigen mit $3\frac{1}{2}$ Ztr. geschieht, dabei verhält sich die Zahl des Arbeitspersonals wie 3 zu 2, daher sind die Ausfälle in Bezug auf die Produktionsmenge so verschieden.

Bevor zur fernen Darstellung der Betriebsausfälle geschritten wird, durch welche die zweiförmige Frischmanipulation vor der andern den Vorrang abgewinnt, soll noch der Versuch mit der Wallonschmiede vor zwei Formen erwähnt werden, mit Angabe der Ursachen, warum in Niederrungarn diese Frischmethode keine praktische Anwendung erhalten hat.

Von den Versuchen mit der Wallonschmiede vor zwei Formen

Bei der Wallonschmiede geht die Absicht dahin, gaargängiges, das ist weißes Roheisen sogleich gaar niederzuschmelzen, aufzubrechen, vor die Form zu bringen, den erhaltenen Klumpen unter dem Hammer zusammenzuschlagen und dann in einem besonderen Streckherde auszuschmieden, wo Deule von 40—60 Pfd. erzeugt werden. Ein derlei Deul soll keine $\frac{3}{4}$ Stunden bedürfen und die wöchentliche Erzeugung könnte 100 Ztr. überschreiten.

Die diesfälligen Versuche entsprachen in zweierlei Hinsichten nicht. Es verursachten nämlich die besonderen Streckherde zur Darstellung der Kaufmannsware einen weit über das hiesige System gehenden Kalo und Kohlverbrauch und dann stellte sich auch das Produkt in keinem annehmbaren Zustande dar. Die Ursache hievon lag nicht in der Zustellung, nicht im ungeübten Personale, sondern im Betriebsmateriale, nämlich im Roheisen selbst.

Es ist bekannt, daß die meisten in Niederrungarn in die Verschmelzung kommenden reicher Eisensteine sehr viele fremdartige, der Güte des Eisens nachteilige Bestandteile mit sich führen, die weder mit Ausscheidung mit dem Hammer, noch durch Vorbereitungsarbeiten als Rösten, Waschen, Abliegen, Verwittern beseitigt werden können. Diese Eisensteine von der Gattierung auszuschliessen wäre zwar in Bezug auf die Güte des zu erzeugenden Produktes ratsam, aber die Exzidierung dieser Eisensteine ist wegen ihres reichen Gehaltes in ökonomischer Hinsicht nicht wohl zulässig, demnach sind sie als ein notwendiges Übel zu betrachten.

Ihre Unarten wären zwar durch einen bedeutenden Kalkzuschlag, und durch verschmelzen bei einem niederen Satze größtenteils in die Verschlackung zu bringen, allein der hiezu nötige Kohlaufwand macht einen solchen Hochofenbetrieb unökonomisch, daher müssen diese Eisensteine minder gaar verblasen werden, weil sonst das hieraus erzeugte Roheisen, wegen hohen Kohlpreisen unverhältnismäßig teuer zu stehen kommen würde.

Diesem Nachteile des minderen Gaarblasens im Hochofen, hilft bei dem üblichen Verfrischungsprozesse die Gattierung mit grauem Roheisen ab, wo durch den Rohgang beim Einschmelzen die im weißen Roheisen enthaltenen Unarten Zeit und Gelegenheit finden teils verschlackt zu werden, teils Silikate zu bilden, während beim gaaren Einschmelzen in der Wallonschmiede die meisten fremdartigen Beimischungen in der Eisenmasse zu bleiben genötigt sind.

Übrigens ist es nicht in Abrede zu stellen, daß bei gutartigen weißen Roheisen, wie es die Eisenerzer und Vordernberger Floßen in Steiermark sind, die Wallonschmiede vor zwei Formen nicht ebenfalls mit Vorteil eingeführt werden könnte.

Auch die, der in Steiermark üblichen ähnliche, hierortig sogenannte *Schmelzmanipulation*, wobei man ebenfalls das Roheisen gaar eingehen läßt und nach zweimaligen Aufbrechen einen Deul von mehreren Zentnern bildet, ohne Anläufe zu nehmen, lieferte aus den vorgelassenen Gründen, auch vor zwei Formen kein entsprechendes Produkt, daher auch ihre nähere Beschreibung unterbleibt, indem der Grund des Nichtgelingens schon im Betriebsmateriale liegt.

Bei obgemeldeten Umständen fand die *Wallonschmiede*, so wie auch die *Schmelzmanipulation* keinen weiteren Fortgang.

IV. Vergleichung der Betriebsausfälle, des Personal- und Zeitaufwandes beim zwei- und beim einförmigen Frischen

Ein zweiförmiges Frischfeuer verarbeitet in einer Schicht 6 Ztr. Roheisen und diese dauert bei hinlänglichem Aufschlagwasser 7 bis $7\frac{1}{2}$ Stunden.

Es können daher, wenn keine Brüche am Gehwerk erfolgen oder sonst keine Reparationen vorkommen, in einem Wochenwerke 20 Schichten ausgearbeitet und 120 Ztr. verfrischt werden.

Ein einförmiges Frischfeuer schmelzt $3\frac{1}{2}$ Ztr. auf einmal ein und kann in ebenfalls 20 Schichten 70 Ztr. verarbeiten.

Das Personal bei ersteren besteht in 9 Mann, wovon drei und drei in einer Schicht beschäftigt sind, beim einförmigen Feuer sind 6 Mann, von denen 2 in jeder Schicht arbeiten.

In Bezug auf den Feuerabbrand haben die zweiförmigen Feuer auch den Vorzug vor den einförmigen, indem die ersteren die Zigel mit einem Eisenabbrande von 11 bis 15% darstellen, während die einförmigen selten unter 16% arbeiten.

Der Mitverbrauch der Blechabschnitzel wirkt bedeutend auf den Kalo, daher die Werke welche sie nicht verarbeiten weit geringer kalieren und vor 2 Formen kaum 12% brauchen.

Anlangend den Kohlverbrauch erspart die zweiförmige Manipulation nicht bedeutend gegen die einförmige und gegen das Kohlverbrauch System von $5\frac{1}{2}$ Maß pro Ztr. Zigel werden nur unbedeutende Ersparnisse in den Rechnungen nachgewiesen, besonders wenn bloß Rechenkohl in Verarbeitung kommt.

Die Bezahlung der Arbeiter besteht gegenwärtig gleichmäßig in $15\frac{1}{2}$ Kr. Conv. Münze per Zentner Zigel, wobei dieselben das nötige Schmiermaterial, Geleuchte, Zeug und alle kleinen Reparationen aus eigenem zu bestreiten haben.

Die Güte des Produktes ist beim ein- und zweiförmigen Frischen von gleichem Grade. Rohnitz am 24. November 1828."

SCHRIFTTUM

1. ŠSÚA-BO, HKG (Slowakisches Zentralarchiv, Bergbauabteilung in Banská Stiaavnica, Fond Oberkammergrafenamt), No 5529 ex 1806.
2. MARCHER, F. A., Notizen und Bemerkungen über den Betrieb der Hochöfen, 5. Heft, Klagenfurt 1811, 12 ff., Tabelle VII.
3. ŠSÚA-BO, HKG, Mappensammlung; No 2982 ex 1826. Auf das Vorhandensein dieser Zeichnungen wurde der Verfasser von Herrn Julius KISZELY, Sekretär des Ungarischen Geschichtsausschusses für Hüttenwesen, Budapest, aufmerksam gemacht; es sei ihm dafür auch hier der beste Dank ausgesprochen.
4. ŠSÚA-BO, HKG, No 4075 ex 1822; 2006 ex 1841; Tafeln zur Statistik der österreichischen Monarchie etc., Wien 1853.
5. ŠSÚA-BO, HKG, No 464 ex 1827; No 4365 ex 1828.
6. PAULINYI, Á., Zavedenie dúchania horúceho vzduchu etc., Hutnícke listy XIV (1959), No 2, 145 ff. ŠSÚA-BO, HKG, No 5239 ex 1835.
7. ŠSÚA-BO, HKG, Manuskriptensammlung, »Goldenes Buch«, 241 ff.
8. ŠSÚA-BO, HKG, No 2006 ex 1841, Beilage F.
9. ŠSÚA-BO, HKG, No 1780 ex 1823; No 4075 ex 1822.
10. ŠSÚA-BO, HKG, No 217 ex 1828.
11. TUNNER, P.: Die Stabeisen- und Stahlbereitung im Frischherden, Bd. II, Freiberg 1858, 201 ff.; BECK L., Geschichte des Eisens etc. Bd. IV, Braunschweig 1899, 555.
12. PAULINYI, Á.: Počiatky Pudlovania na Slovensku, Hutnícke listy XIV (1959), No 4, 326 ff.
13. ŠSÚA-BO, HKG, No 4103 ex 1844.

14. PAULINYI, Á.: Založení Valcovne v Podbrezovej, Historický časopis, Jg. VII, Bratislava 1959, No 3, 390 ff.
15. Bezüglich der sonstigen technischen Einzelheiten sei hier auf die in ungarischer Sprache erschienene Arbeit des Verfassers »Die technische Entwicklung der Rohnitzer Eisenwerke«, Mitteilungen der Klasse für Technische Wissenschaften der Ungar. Akad. d. Wissenschaften 28 (1961) 149/188. verwiesen.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Zustände der Eisenwerke zu Rohnitz werden in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts in großen Zügen behandelt, welche damals zu den größten Eisenwerken Ungarns zählten und stets bestrebt waren, die Erzeugung mit neuzeitigen technischen Neuerungen zu verbessern. Ein wesentlicher Teil im Aufsatz ist eine amtliche Meldung vom Jahre 1828, die das Frischverfahren von Rohnitz ausführlich darstellt. Dieses Verfahren erlangte zu jener Zeit einen Ruhm, der auch von dem ausgezeichneten österreichischen Professor P. TUNNER, dem Fünften Bessemer-Goldmedaillisten des Britischen Eisen- und Stahlinstituts als auch von L. BECK in seinem berühmten Werk über die Geschichte des Eisens anerkannt wurde [11]. Wir vermessen jedoch eine eingehende Beschreibung des Verfahrens, daher kann die Veröffentlichung der bisher nicht publizierten Beschreibung aus technisch-geschichtlichem Standpunkt von Interesse sein.

THE IRON WORKS OF HRONEC IN THE FIRST HALF OF THE 19th CENTURY AND THE REFINING PROCESS OF HRONEC

Á. PAULINYI

SUMMARY

Conditions at the Iron Works of Hronec in the first half of the 19th century are being treated in a general outline. They belonged at that time to the biggest iron works in Hungary and were always doing their best to improve their production with up-to-date technical innovations. A vitally important part of the paper is an official report from 1828 giving full particulars about the refining process of Hronec. This process at that time gained such high reputation that mention was made of it, both by the excellent Austrian metallurgist, Professor P. TUNNER, fifth Bessemer Gold Medalist of the British Iron and Steel Institute, and by L. BECK, in his famous work on the history of iron [11]. Yet they did not give any details about the process itself, therefore such a description having not yet been published may be of interest from the point of view of metallurgical history.

L'USINE SIDÉRURGIQUE DE HRONEC DANS LA PREMIERE MOITIÉ DU XIX^e SIECLE LE PROCÉDÉ DE RAFFINAGE DE HRONEC

Á. PAULINYI

RÉSUMÉ

L'article retrace, dans les grandes lignes, la situation de l'usine sidérurgique de Hronec dans la première moitié du XIX^e siècle. A l'époque, celle-ci comptait parmi les plus importantes du pays et assurait, par l'introduction d'une série de perfectionnements techniques, l'amélioration constante de sa production. Une partie essentielle de l'article reproduit un rapport officiel datant de 1828, qui décrit en détail le procédé de raffinage mis au point par l'usine. Ce procédé était tellement célèbre à l'époque, qu'on le trouve également mentionné dans l'ouvrage de P. TUNNER ayant obtenu la médaille d'or Bessemer de l'Iron and Steel Institute, et dans l'ouvrage célèbre de L. BECK, consacré à l'histoire du fer [11]. Mais ceux-ci ne donnant pas la description détaillée du procédé, la publication du rapport pourra fournir une contribution précieuse à l'histoire de la métallurgie.

ЖЕЛЕЗОДЕЛАТЕЛЬНЫЙ ЗАВОД В РОНИЦЕ В ПЕРВОЙ ПОЛОВИНЕ XIX ВЕКА
И РОНИЦКИЙ МЕТОД ФРИШЕВАНИЯ

А. ПАУЛИНИ

РЕЗЮМЕ

Статья в основных чертах знакомит с состоянием роницкого железоделательного завода в первой половине XIX века. Этот завод в то время относился к числу крупнейших железоделательных заводов Венгрии и здесь всегда старались улучшить производство современными техническими новшествами. Значительная часть статьи детально знакомит читателя с официальным сообщением 1828 года, в котором подробно описывается роницкий метод фришевания. Этот метод в свое время приобрел такую славу, что о нем упоминается (11) также в известном труде по истории железа, написанном П. Туннером и Л. Беком, сотрудниками Лобенского института Айрон энд Стил. Однако это упоминание не содержит детального описания метода, и поэтому сообщение неопубликованного до сих пор описания может иметь интерес с точки зрения истории металлургии.

BOOK REVIEW — BUCHBESPRECHUNG —
COMPTE RENDU DE LIVRES — ОБЗОР КНИГ

E. Mosonyi

WATER POWER DEVELOPMENT (VOLUME 2)

High-Head Power Plants, Midget Stations and Pumped-Storage Schemes,
Edited by Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences. Budapest 1960.
1139 p. 742 Figures and 4 Supplements

This book is a continuation of the volume published in 1957 and dealing with low-head power developments (a review of the German version of the first volume was published by J. Bogárdi on p. 387 of *Acta Technica*, 1957, Tom. XVII). In keeping with the contents, the structure of the book is divided into three parts, the largest of which (836 pages), as indicated also by the title, is devoted to high-head hydroelectric developments. Within this framework separate chapters deal with individual features and main types of high-head plants, with open canals, pressure tunnels, pipelines, penstocks and the pertinent equipment. The powerhouse itself and various possibilities for locating the latter are discussed in the following part. Underground power stations are dealt with very copiously, more than 200 pages being devoted to this subject. After reviewing stations located at the toe of the dam, hydraulic machinery and electric equipment are described on 172 pages. The following part is on midget stations, which are divided into those equipped with water wheels and those with turbines. In connection with the latter problems of the electric equipment and of the modernization of midget plants are also discussed. In the last part a complete picture is given about pumped-storage developments, including the mechanical equipment and various regimes of operation. The volume is supplemented by an extensive annex, which includes the bibliography, the index of symbols and notations, nomenclature, the conversion table between the metric and foot-pound systems, the indices for authors, power plants, firms and research institutions and the subject index.

Before entering upon a detailed appraisal it should be mentioned, that a similarly complete and detailed survey of any branch of technique as that given in Mosonyi's book has long not been published in the world literature. This book is based on the author's familiarity with almost every major existing hydroelectric plant in the world and every statement is supported by the introduction of the most up-to-date solutions of the relevant problem. The considerable progress made in the field of hydroelectric development during the last decade, and also that of hydraulic machinery itself rendered the survey of this branch a rather difficult and laborious work. The author is to be commended upon for having embarked upon this subject and for having solved the problem in a highly successful manner, so that this book may be regarded with confidence as a gap-filling, up-to-date standard work on water power development. We fully agree with the *V. D. I. Zeitschrift* (No. 25, Vol. 102, 1st September, 1960) in its appreciation of the book: "A standard work, which was badly missed, and which will undoubtedly be received with general approval and appreciation all over the world, has been temporarily completed with this volume." The "*Österreichische Zeitschrift für Elektrizitätswirtschaft*" (Vienna, Vol. 13, No. 6, 1960) expresses admiration for the book which is the deeper in view of the fact, that the author lives in a country, where the natural opportunities for water power development are very scarce.

When reviewing the two volumes of Dr. Mosonyi's work, it can be established as, perhaps, one of the greatest merits thereof, that a complex work on hydroelectric development has been created, which presents the inclusive picture outlined above to the reader. Specialists in various fields of science cooperating in harnessing water power, may from this book obtain the main aspects, the knowledge of which is essential to them for the proper accomplishment of their own work, as well as the problems in which close cooperation and a common approach are the prerequisites for a really successful solution.

The second volume necessarily dealt with a number of mechanical issues. The author, a hydraulic engineer himself, succeeded in maintaining an admirable balance between his special field and the related subjects, so that no disproportionalities can be detected.

The book comprises several chapters which are in themselves gap-filling in the literature on the subject dealt with. Thus *e. g.* a similarly complete discussion of underground and pumped storage developments has not been presented before. Neither has the problem of

midjet installations been summarised and considered in a comparable manner together with the aspects governing their modernization.

Special acknowledgements are due to the author for having presented in his book the Hungarian manufacturers of hydraulic machinery, the traditions of which industry reach back to the beginnings of hydroelectric development.

Concluding the above remarks, this tremendous work by *Dr. Mosonyi*, which reflects his exquisite style, cannot be mentioned but with the greatest appreciation. A valuable standard work has been added to technical literature, which will always be a useful source of reference to both the university student and a wide circle of experts engaged in practice. Acknowledgements are due to the publisher as well, for having undertaken the publication of a book of this volume and for the excellent printing technique displayed.

Dr. J. Varga

J. Biczók

BETONKORROSION—BETONSCHUTZ

Budapest, 1960. Gemeinschaftsaufgabe des Verlages der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und des Ungarischen Verlages für Technik, Budapest, 396 Seiten, 96 Bilder.

Der Beton wird als Baustoff von Jahr zu Jahr in immer größeren Mengen verwendet. Der eingebaute Beton ist zahlreichen physikalischen und chemischen Wirkungen ausgesetzt, die den Beton angreifen und zu einer vorzeitigen Zerstörung der Konstruktionselemente führen können. Der Zweck dieses in deutscher Sprache erschienen Buches ist es, die Korrosionserscheinungen zu erfassen und zu erklären, und auf dieser Grundlage die entsprechendsten und ökonomischsten Schutzmaßnahmen zu beschreiben.

Das Buch zerfällt in fünf Hauptkapitel. Das erste Kapitel befaßt sich mit den Grundstoffen des Betons, in erster Linie mit den verschiedenen Zementen. Es werden die Klinkermineralzusammensetzungen der Zemente und deren Widerstand gegen Korrosionswirkungen angegeben. Nach dem heutigen Stande der Korrosionsforschung ist die Güte-Reihenfolge der einzelnen Korrosionswirkungen widerstehenden Zementarten jeweils eine andere. Die einzelnen Abstufungen der Korrosion am besten entsprechenden Zementarten können genau angegeben werden und in deren Kenntnis bietet sich die Möglichkeit für die Auswahl und die Erzeugung der dem Zwecke entsprechenden Zementart.

Das zweite Kapitel behandelt die mit dem Grundwasser zusammenhängenden Probleme, das seinerseits die meisten Betonkorrosionen verursacht, und zwar die Niveauschwankungen des Grundwassers, dessen Strömung, seine chemische Zusammensetzung und die Entnahme von Grundwasserproben.

Das Rückgrat des Buches bildet das dritte Kapitel, das eine mit dem Titel des Buches identische Überschrift trägt. Die in- und ausländischen Korrosionsuntersuchungen werden ausführlich beschrieben und gleichzeitig wird auch auf die Schwierigkeiten der Bewertung der Untersuchungsergebnisse hingewiesen. Die bei Verwendung von verschiedenartig konzentrierten aggressiven Flüssigkeiten, voneinander abweichenden Untersuchungstemperaturen und schnellen und langsamen Untersuchungsmethoden erhaltenen Ergebnisse können nur schwer miteinander verglichen werden. Es entstand daher die Notwendigkeit, die Untersuchungsmethoden zu normieren; die wichtigsten Normen werden im Buche ausführlich erörtert.

Nachher folgt eine nach Vollständigkeit strebende, klare und übersichtliche Behandlung der Korrosionserscheinungen. Hier muß die Beschreibung der durch Laugen verursachten Korrosion, die sich auf die neuesten Forschungsergebnisse gründet, besonders hervorgehoben werden; die Frage war in ihren Einzelheiten bisher wenig bekannt.

Eine die Beurteilung der Korrosionserscheinungen betreffende wesentliche Erkenntnis des Verfassers geht dahin, daß eine Änderung der Konzentration eine Änderung der Art der Korrosion zur Folge haben kann; die Grenze hängt von den Komponenten des Zementes ab. Vom Verfasser werden über die Rolle des Chlor-Ions eigene Forschungsergebnisse mitgeteilt. Die Wirkung des Chlors bzw. seiner Verbindungen auf die Korrosion ist einmal abschwächend, ein andermal dagegen erhöhend. Im Buche wird diese Frage in allen ihren Beziehungen geklärt.

Das Kapitel gibt bezüglich der schwersten Frage der Korrosion, nämlich der zahlenmäßigen Bestimmung der Korrosionswirkung eine ausführliche Aufklärung. Die hydrologischen Verhältnisse, der Gebrauchsscharakter der Bodenfläche, die Rolle der Konzentration und die zeitlichen Änderungen der Korrosionswirkungen werden hier der Reihe nach behandelt.

Das vierte Kapitel befaßt sich mit den die Korrosion erhöhenden, bzw. vermindernenden Wirkungen.

Die Erörterung der mikrobiologischen Korrosion, mit der sich die Literatur bisher nicht befaßt, muß besonders hervorgehoben werden. Die sulfatbildende bzw. sulfatreduzierende Wirkung der Schwefelbakterien wird ausführlich behandelt und durch eigene, überzeugende Versuchsergebnisse bekräftigt. Einen neuen Gesichtspunkt bildet die Wirkung der Lufoxidation, für die im Buche zahlreiche Beispiele angeführt werden.

Das fünfte Kapitel behandelt die Schutzmaßnahmen, wobei die aktiven und passiven Schutzmethoden getrennt erörtert werden. Die richtige Planung der der gegebenen Korrosionswirkung am besten widerstehenden Betonzusammensetzung, der Oberflächenschutz des Betons und die verschiedenen Isolierungen werden ebenfalls beschrieben.

Ein die Titel von über dreihundert Werken umfassendes Literaturverzeichnis sowie ein ausführliches Namen- und Sachverzeichnis schließen das Buch ab.

Als Zusammenfassung kann festgestellt werden, daß der Verfasser der technischen Wissenschaft und der Baupraxis ein Buch gegeben hat, das die theoretischen und praktischen Beziehungen der sich über zahlreiche technische Gebiete erstreckenden, äußerst komplexen, die Chemie, die Erdbaumechanik, die Gründung, die Betontechnologie, die Hydrologie usw. betreffenden Fragen gleicherweise umfaßt, zeitgemäß ist und originale Forschungen und Feststellungen enthält. Das Buch ist auch in internationaler Beziehung außerordentlich bedeutsam; ein ähnlich umfassendes Werk war bisher nicht bekannt. Die Behandlungsweise des Buches ist klar und gut übersichtlich, es ist auch als Handbuch gut verwendbar, all das lobt die gute Arbeit der Redaktion. Die äußere Ausstattung des Buches befriedigt auch die höchsten Ansprüche.

Dr. Á. Kézdi

J. Sövegjártó

FEUERFESTE BAUMATERIALIEN DES EISENHÜTTENWESENS

Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budaest, 1960. S. 247, 97 Abb., 32 Tafeln. Preis 60.— Ft

Als Band III/2 der ungarischen „Encyklopädie des Eisenhüttenwesens“ — herausgegeben von Dr. A. Geleji, ord. Mitglied der Akademie und Dr. A. Schleicher — ist das Buch im Herbst vorigen Jahres erschienen.

Das Buch besteht aus zwei Hauptteilen; der erste Teil befaßt sich, als Fortsetzung des Bandes III/1 der Encyklopädie, mit den tonerdereichen feuerfesten Materialien, und zwar aus natürlichen und künstlichen Rohstoffen hergestellten Mullitsteinen, gesintert und geschmolzen. Mit besonderer Ausführlichkeit beschäftigt sich der Autor mit den basischen feuerfesten Materialien, mit den Magnesit-, Magnesitchrom- und Chrommagnesitsteinen, wobei nicht nur die Technologie der Erzeugung dieser Steine mit großen fachmännischen Kenntnissen bearbeitet wurde, vielmehr bringt das Buch auch Ratschläge zur Beurteilung und zur Auswahl der geeigneten Rohstoffe. Auch die chemisch gebundenen Magnesitsteine werden entsprechend behandelt. In diesem Teil wird auch die Frage und Stand der Stabilisierung des Dolomites beschrieben, wobei nicht nur die allgemein bekannten, sondern auch die ungarischen Vorschläge zur Erzielung einer verlässlichen Stabilisierung behandelt werden.

Einen entsprechenden Platz haben auch die besonderen feuerfesten Stoffe, wie Siliziumkarbid, Graphit und oxidkeramische Stoffe, Sinterkorund, Spinelle, Berillium und Zirkonoxid, wie auch die seltenen Erden im Buch gefunden und über die Forsteritsteine teilt der Autor auch seine Erfahrungen mit.

Im zweiten Teil des Buches werden die feuerfesten Baumaterialien beschrieben, die die Eisenhüttenindustrie für den Schutz und Isolierung der für Erzaufbereitung benützten Rotieröfen, für die Hochöfen und für die Eisen- und Stahlschmelzöfen verwendet.

Besonders ausführlich werden die Probleme der feuerfesten Materialien der Siemens-Martinöfen behandelt, wobei auch auf die perspektivische Entwicklung Rücksicht genommen wird, als Folge der Intensivierung der Stahlerzeugung. Nach kurzer Behandlung der Probleme der elektrischen Schmelzöfen werden die Fragen erörtert, die bei den Ofenfuttern der Konverter auftauchen.

In einem separaten Teil werden die feuerfesten Formsteine beschrieben, die in den Gießereien Verwendung finden.

Als Abschluß behandelt der Verfasser die feuerfesten Baumaterialien, die in den anschließenden Betrieben, wie Kraftzentralen und Kokereien, Verwendung finden und mit denen der Hütteningenieur auch zu tun hat.

Das Buch von Sövegjártó ist ein wertvolles Hilfsbuch für die Hütteningenieure, es ist aber zur Hilfe auch allen Ingenieuren, die in ihren Betrieben feuerfeste Baustoffe verwenden.

Dr. Ing. E. Bereczky

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1961. V. 17. — Terjedelem: 20,25 (A/5) ív, 120 ábra

61.53483 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

INDEX

<i>Mándi, A.</i> : In Memory of Otto Titus Bláthy — Zur Erinnerung an Otto Titus Bláthy — In memoriam Otto Titus Bláthy — <i>Манду, А.</i> : Памяти Отто Титус Блати ..	3
<i>Terplán, Z.</i> : Erinnerung an Prof. G. Pattantyus Á. — In the Memory of G. Pattantyus Á. — In memoriam Prof. Géza Pattantyus Á. — <i>Терплан, З.</i> : Памяти профессора Г. Паттантьюш А.	5
<i>Gangli, B.</i> : Fibre Tufts in the Drafting Mechanisms of the Bast Fibre Industry — Halbartkurven in den Streckwerken der Bastfaserindustrie — Wilkinson tuft diagrams de bancs d'étirage pour fibres — <i>Гангли, Б.</i> : Вытяжные аппараты....	9
<i>Thamm, I.</i> : Ein Kreisringplatten-Problem bei stehenden Kleindampfkesseln — Stress and Strain in the Upper Closing Plates of Upright Cylindrical Steam Boilers — Conditions de tensions et de déformations de la plaque de fermeture supérieure des chaudières verticales cylindriques — <i>Там, И.</i> : Режим напряжения и деформаций верхнего запорного листа цилиндрических вертикальных паровых котлов	17
<i>Goschy, B. und Balázs, Gy.</i> : Grenzzustand der auf Biegung und auf gleichzeitigen Schub beanspruchten Stahlbetonquerschnitte — Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete Sections under Combined Bending and Shear — La rupture des sections de béton armé par flexion et par effort tranchant — <i>Гоши, Б. и Балаж, Д.</i> : Исследование предельного состояния железобетона четырехугольного сечения, работающего одновременно на изгиб и срез	55
<i>Kardos, Á.</i> : Relation of Cutting Temperature to Tool Life in Turning of Aluminium Alloys — Zusammenhang zwischen Schnitttemperatur und Standzeit beim Drehen von Aluminiumlegierungen — Rapport entre la température de coupe et la durée du tranchant de l'outil au tournage des alliages d'aluminium — <i>Кардош, А.</i> : Зависимость температуры резания от стойкости резца при токарной обработке алюминиевых сплавов	71
<i>Szöke, B.</i> : Enlargement on the Eytelwein—Grashof Thesis — Weiterentwicklung des Satzes Eytelwein—Grashof — Extension de la formule d'Eytelwein—Grashof — <i>Секе, Б.</i> : Распространение теоремы Ейтельвейна—Грасхофа	83
<i>Verba, A.</i> : Method of Singularities for Computing the Velocity Distribution in a Radial Impeller — Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung des radialen Laufrades unter Benutzung des Singularitätenverfahrens — Calcul de la répartition des vitesses dans les roues purement radiales, selon la méthode des singularités — <i>Верба, А.</i> : Расчет распределения скоростей в радиальных рабочих колесах, с помощью метода сингулярностей	109
<i>Csonka, P.</i> : Analysis of the Wind Load Effect on Rigid Jointed Multi-Storied Building Frames — Die Berechnung hoher Stockwerkrahmen auf Windlast — Calcul de l'ossature de bâtiments tours chargés par le vent — <i>Чонка, П.</i> : Расчет каркасной конструкции башенных зданий на ветровую нагрузку	135

<i>Berceli, T.</i> : A Travelling-Wave Output Amplifier for the 4000-Mc/s Band — Ein Wanderfeld-Endverstärker für das 4000 MHz-Gebiet — Amplificateur final à onde progressive dans la bande de 4000 MHz — <i>Берцелу, Т.</i> : Конечный усилитель бегущей волны	151
<i>Kalisky, S.</i> : Untersuchung einer Kegelstumpf-Schale aus Stahlbeton auf Grund des Traglastverfahrens — Investigation of a Truncated Cone-Like Reinforced Concrete Shell on the Basis of the Limit Analysis — Étude des voiles minces tronconiques en béton armé, sur la base de la théorie de la plasticité — <i>Калиски, Ш.</i> : Исследование железобетонной оболочки, имеющей форму усеченного конуса на основе теории излома	159
<i>Káldor, M. and Verő, J. A.</i> : A Method to Reveal Austenitic Grain Size in Hardenable Steels — Ein Verfahren zur Messung der Austenit-Korngröße härtpbarer Stahlsorten — Méthode pour mesurer la grosseur des grains d'austénite des aciers trempables — <i>Калдор, М. и Вере, Й.</i> : Метод определения величины зерна аустенита закаляющихся сталей	177
<i>Geleji, A.</i> : Berechnung des Kraftbedarfs beim Pressen im Gesenk — Calculating the Forces in the Dies at Press Forging — Calcul des forces nécessaires pour le matriçage — <i>Гелеу, А.</i> : Расчет усилий, потребных при ковке в штампах	185
<i>Paulinyi, Á.</i> : Übersicht über die technische Entwicklung der Eisenwerke von Rohnitz in der ersten Hälfte des 19-ten Jahrhunderts und das Frischverfahren von Rohnitz — The Iron Works of Hronec in the First Half of the 19th Century and the Refining Process of Hronec — L'usine sidérurgique de Hronec dans la première moitié du XIX ^e siècle. Le procédé de raffinage de Hronec — <i>Паулини, А.</i> : Железодельательный завод в Ронице в первой половине XIX века и роницкий метод фришевания	199
Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livres — Обзор книг	227

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXIV

FASCICULI 3-4



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1961

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

METHODS FOR THE DELINEATION OF AXONOMETRIC AND PERSPECTIVE PROJECTIONS; FUNCTIONAL PRINCIPLES OF THE EXISTING TRANSFORMER DEVICES

B. SZÓKE

[Manuscript received May 24, 1957]

Quick methods for the transformation of geometrical figures into illustrative ones, nowadays represent a problem of increasing urgency [6, 13], because they are regarded as the most suitable means for improving efficiency [10]. In the following, some older and newer methods are to be reviewed and examined for designing both axonometric and perspective drawings.

The symbols used in this paper are, intentionally, almost identical with those applied in the author's previous paper entitled: "A method for designing axonographs and perspectographs" [17].

A) Axonometry

a) *Quadrangular ruler.* Constructed with fixed angles rightly chosen, the quadrangular ruler is one of the oldest devices [8]; it is suitable for drawing figures with the scales' ratio: $x : y : z = k_1 : k_2 : k = 1 : 0.5 : 1$ (Fig. 1).

The direction data are obtained from the ruler's angles according to the formulae given in the author's paper quoted above [17], clause f) in chapter III dealing with the case in which $\varphi = 90^\circ$.

Generally, the usual ratios are:

$$\tan \lambda_1 = 1/8, \quad \tan \lambda_2 = 7/8.$$

The use of the ruler is advantageous, because parallel lines to every one of the three axes can be drawn by sliding the ruler on the *T*-square. The same task can be performed by using the three-legged ruler [14] attached to the drawing machine (Fig. 2).

b) *The method of intersecting rays.* By means of a drawing machine suitable for tracing parallel lines of any arbitrary angle, axonometric figures can be drawn from two perpendicular projections by using the method of intersecting rays as shown in Fig. 3; further, the working principle of this method is explained in Fig. 2c of the paper [17] where the points (*P*) and *P*₀ are conjugated points in the horizontal and the vertical plane of projection.

As seen in the Figure, the verticals are transformed into lines parallel to the oblique leg of the angle γ ; the dimensions in the direction of x remain unchanged ($k_1 = 1$), whereas the scales of the directions y and z can be varied.

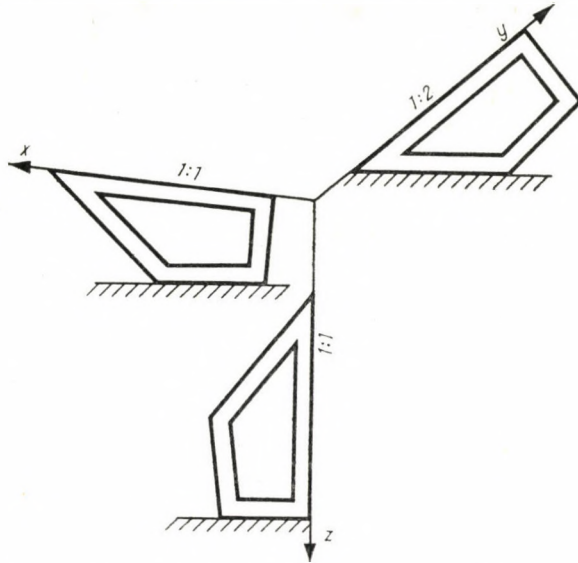


Fig. 1. Quadrangular ruler for drawing lines parallel to the axe

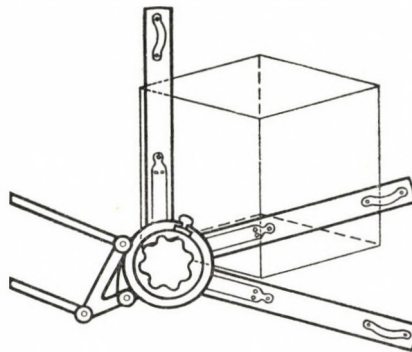


Fig. 2. Drawing machine with a three-legged attachment for tracing axonometric views

Denoting $\delta_1 = 90^\circ - \delta$ and in considering the triangle $O'R'\bar{R}$,

$$k = \frac{O'R'}{O'\bar{R}} = \frac{\sin \delta_1}{\sin [180^\circ - (\gamma + \delta_1)]}$$

wherefrom the dimension z appears in the original scale, when

$$\delta_1 = 180^\circ - \gamma - \delta_1 \text{ or } \gamma = 180^\circ - 2\delta_1$$

that corresponds to an isosceles triangle, where

$$O'R' = O'\bar{R}$$

when the oblique leg of the angle δ is perpendicular to the bisecting line of the angle γ .

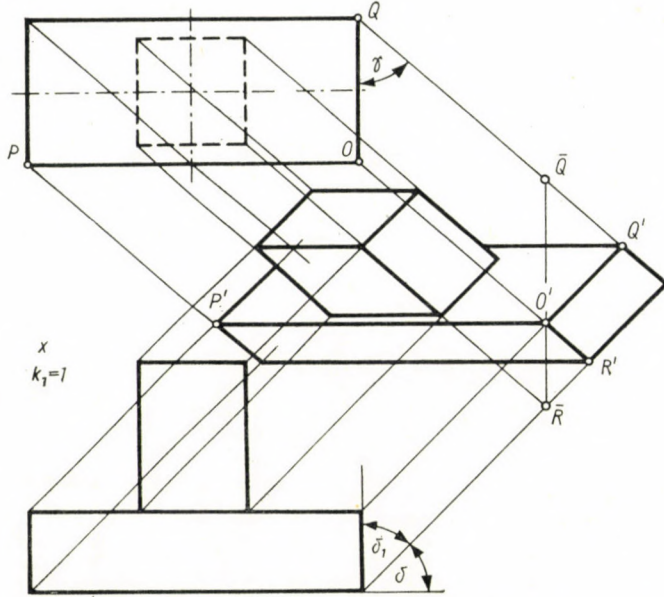


Fig. 3. Method of construction by means of intersecting rays

In the same way, considering the triangle $O'Q'Q$

$$k_2 = \frac{O'Q'}{O'\bar{Q}} = \frac{\sin \gamma}{\sin[180^\circ - (\gamma + \delta_1)]}$$

wherefrom the dimension y appears in the original scale, when

$$O'Q' = O'\bar{Q}$$

i.e. when the oblique leg of the angle γ is perpendicular to the bisecting line of the angle δ_1 .

Consequently, when

$$\gamma = \delta_1 = 60^\circ,$$

the equality

$$k_1 = k_2 = k = 1,$$

exists, *i.e.* the axonometric figure is isometric.

By this method, the most favoured "Kavalierperspective" cannot be performed, because for the axis z the position angle should be $\gamma = 0^\circ$, and therefore the front view would be transformed into itself. On the other hand, the condition to have the directions y and z perpendicular to each other, can be easily fulfilled, by putting only $\gamma = \delta$.

c) *Orthographic axonometry by means of intersecting rays (ELROD's method).*
The method of intersecting rays is easily applicable in a common and simple

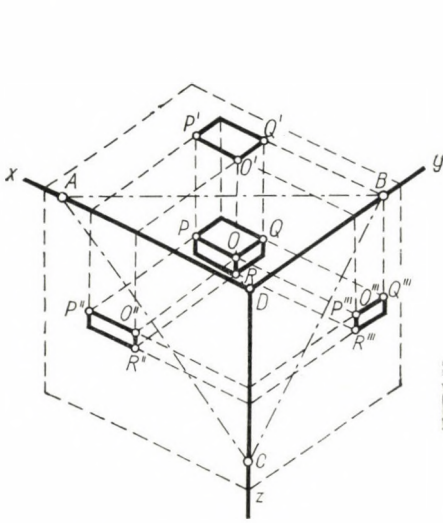


Fig. 4. Plan view, front elevation and side elevation of a block with the edges OP , OQ and OR —Triangle ABC formed by the trace-lines of the axonometric picture plane on the reference planes

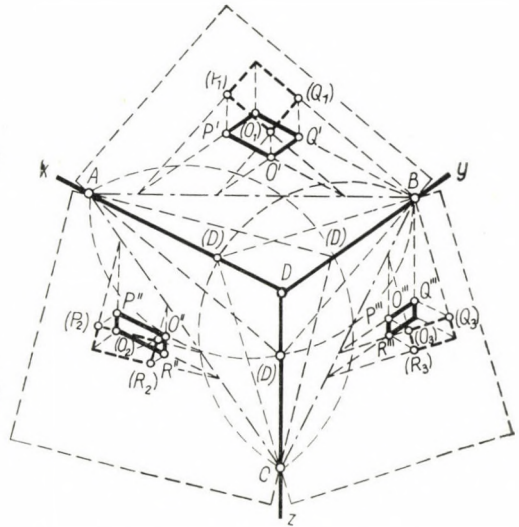


Fig. 5. Reference planes revolved into the axonometric picture plane. The affine rays are perpendicular to the trace-lines of the axonometric picture plane

way for drawing orthographic axonograms [14]. In Fig. 4, the system of axes is x, y, z ; the axonometric picture plane is ABC , and there one can see the three axonometric projections of a rectangular block with the edges OP , OQ , OR . As is known, the axes coincide, in orthographic axonometry, with the altitudes of the triangle formed by the trace-lines of the axonometric picture plane.

By drawing the THALES-circles over the sides of the triangle, and by revolving the planes of projection into the axonometric picture plane (Fig. 5), the oblongs corresponding to the orthographic projections and the axonometric views are in affinity. The affinity rays are perpendicular to the trace-lines of the axonometric picture plane. By extending these affine rays over the axonometric views of the oblongs (Fig. 6), and by comparing this figure to Figure 4, it is obvious that the affine rays passing the respective points of the ortho-

graphic projections contain and determine, by intersection, the corresponding points of the axonometric view.

Further, it can be seen from Fig. 6 that in the case of orthographic views drawn according to the direction of the axes of the revolved planes, the orthographic projections can be arbitrarily shifted in the direction of the affine rays, when only the affine rays of one single point *e.g.* of the point *O* meet in one point.

The triangle *ABC* formed by the trace lines may be an isosceles one, and in this case the reduction ratio on the two axes is the same; again, choosing

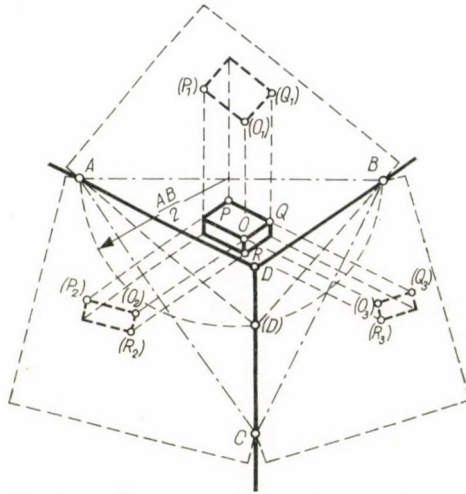


Fig. 6. The points of the axonometric picture are produced by the points of intersection of the respective affine rays traced from the corresponding points of the orthographic views

this triangle as equilateral, the result is isometric axonometry.

d) The "Perspector" instrument of the Swiss firm "Société Gènevoise d'Instruments de Physique".

The "Perspector" is constructed on the pantograph principle [6, 11]; it is suitable for drawing orthographic isometric axonograms.

In order to determine the requirements of this device, the cube — originally resting on its horizontal face — is delineated in a position in which the body diagonal is perpendicular to the picture plane (Fig. 7). The edges *AB*, *BC*, *CD*, *DA* and *HI*, *IJ*, *JK*, *KH* which were all horizontal in the original position appear as a transformed view of straight lines inclining at 30° to the vertical *h*.

All the cube edges in this view are equal viz: $A'B' = A'D' = A'H' = A''H'' \cdot \cos 35^\circ 16' = 0.816$.

In an isometric view, the circle inscribed into the face of the cube, appears as an ellipse having its major axis in the original scale *i.e.* equal to

$MN = 1$, and a minor axis the reduction ratio of which is determined by the following equation:

$$PQ = 2 \times PO = 2 \times MO \times \tan 30^\circ = MN \tan 30^\circ = 0.577.$$

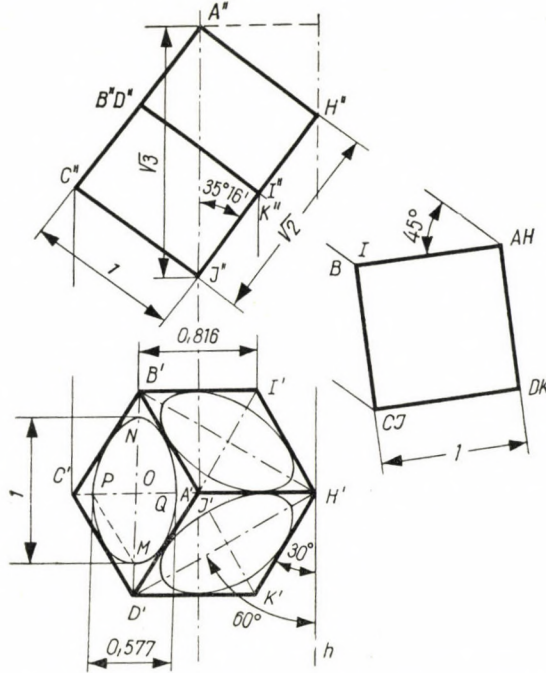


Fig. 7. Geometric relations of the "Perspector"

Consequently, the device should comply with the following two conditions:

1. The cube edges of unit length should be reduced at the ratio 1 : 0.816.
2. Any circle inscribed on the cube face should be transformed into an ellipse with a major axis equal to 1, and a minor axis equal to 0.577.

The "Perspector", respectively, its actual type performs, in addition, a general reduction of the isometric figures drawn to the ratio 1 : 2. In Fig. 8 the topview of the device is shown. The device consists of three main parts, namely: the fixed board P_1 , the sideways slidable board P_2 , and a double pantograph.

The centre of rotation A of the pantograph is fixed onto the slidable board P_2 that can be moved by the handle V ; the tracer tip C travels on the drawing paper fixed on the board P_1 . The movement of the tracer tip is transmitted, by the specially designed double pantograph onto the drawing tip L in a manner that an isometric view should be delineated.

The functioning of the device is the following: When the tracer tip moves at a lateral distance x (to the left or right), the drawing tip performs, in the same direction, a travel equal to $\frac{0.577}{2}x$, corresponding to the reduction ratio

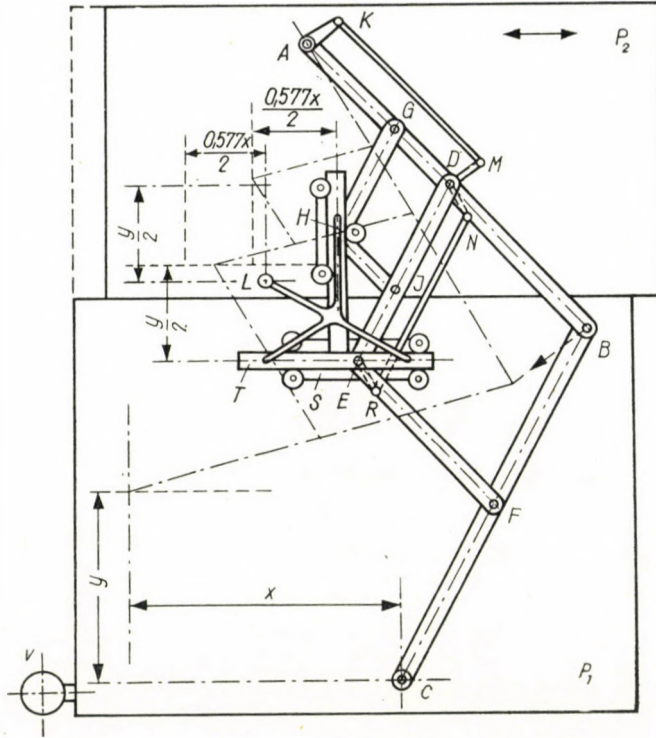


Fig. 8. Top view of the "Perspector", made by the Swiss firm "Société Genèveoise d'Instruments de Physique" and by the Company "Isometric Projections Ltd."

- P_1 — Fixed drawing board
- P_2 — Slidable drawing board
- C — tracing tip
- L — drawing tip
- $AB = BC$
- $AD = DB = BF = FC$
- $DE = EF = DB = BF$
- $DG = HI$
- $AG = GH = DI = 0.577 AD$

of the minor axis of the ellipse and to the general diminutive factor $1/2$; again, moving the tip C vertically (upwards or downwards), the drawing tip L moves in the same direction at a distance equal to half of the original.

The slat that moves in the roller type slide, rotating about the articulation H of the double pantograph, performs a travel reduced to the ratio $\frac{0.577}{2}$ in the lateral direction only; again, the slat that moves in the roller type slide,

rotating about the articulation E , only follows the vertical component of the movement of the articulation point E . In order to transmit to the drawing tip L the resulting movement of these two components (horizontal and vertical), this tip is fastened onto a guide member shaped as an inverted Y , and having two fixed points on the ruler of the articulation E , and a third fixed point on the ruler of the articulation point H .

In order to secure a constant direction to the roller type slide S that serves, attached to the articulation E to guide the slat T , the connecting rods

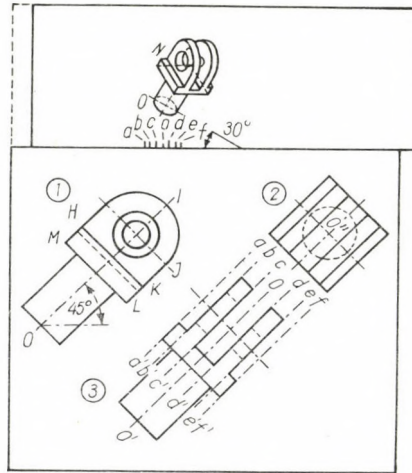


Fig. 9. Setting angle of the figure on the "Perspector"

KM and NR are coupled to the fixed arm AK and to the angle lever MDN respectively to the arm ER , and form the parallelograms $AKMD$ and $DNRE$.

The orthographic plan view, revolved at an angle of 45° , is fixed onto the drawing board P_1 ; the drawing paper for delineating the isometric view is fixed in a position revolved at a 30° angle, onto the board P_2 (Fig. 9).

A strip of paper, bearing the scale $1 : \frac{0.816}{2}$ is pinned onto the sliding board. By bringing this board into any wanted position, component parts can be delineated in their assembled position.

All the circles visible in the plan view can be transmitted, by means of the tracer tip C onto the isometric drawing paper, on which the drawing tip L delineates the corresponding ellipse. When again, the axonometric view of such a circle has to be delineated, that appears on the plan in the edge view, that is perpendicular to the centre line of the plan view being rotated at an angle of 45° , the illustrating paper is to be revolved, at an angle of 60° and the tracer tip C should be moved about the desired centre in order to describe a circle with the corresponding radius.

e) RUSKEVITCH'S *axonograph*

The functional principle of this device is based on the method of axonometric construction given by C. M. КОРОТОВА [10] dealing with a special case in which the projecting plane is perpendicular to the axonometric picture plane.

The determination of the axonometric picture A_0 of some point A in the space is represented in Fig. 10 by means of an illustrative drawing and in Fig. 11 by means of the descriptive geometry.

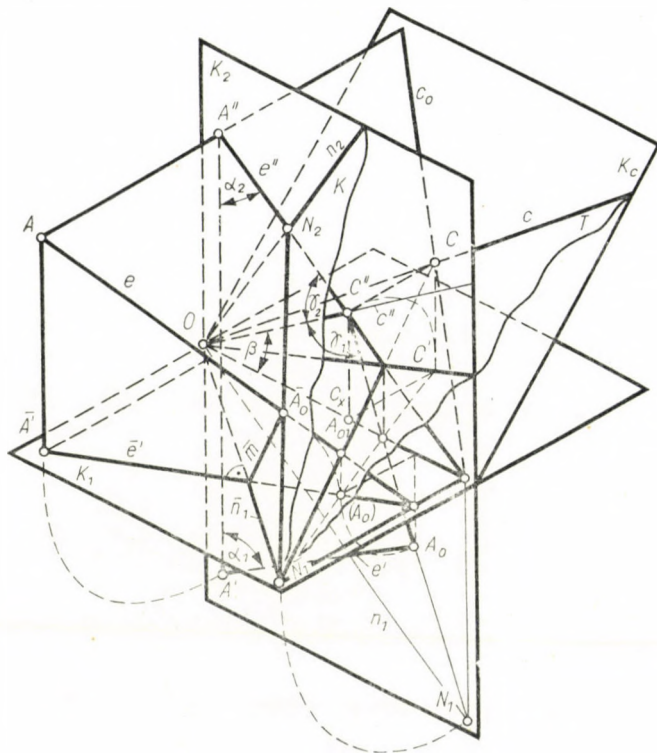


Fig. 10. Geometric scheme of the transformer drawing device made by RUSKEVITCH. Projecting plane perpendicular to the axonometric picture plane, K

In Fig. 10, K_1 denotes the plan, K_2 the front elevation plane, K denotes the axonometric picture plane and K_c denotes the plane of coincidence. The plan view e' of the sight line e passing the point A is perpendicular to the foot line n_1 of the picture plane K in the plan.

The picture plane K and the front projecting plane of the sight line e produce the intersection line $\bar{N}_1 N_2$, this latter line and the line of sight e intersect at the picture point \bar{A}_0 .

When the picture plane K is revolved about the footline \bar{n}_1 as a folding line into the plan K_1 , one finds the point (A_0) on the line \bar{e}' ; again, by revolving

the plan K_1 into the front elevation plane K_2 , the axonometric picture point A_0 lying on the line e' becomes a point in the drawing plane.

The picture point A_0 can be found by means of the following simple construction:

Let the point (A_0) be projected onto the sight line e and have a straight line traced through the point \bar{N}_1 and the point A_{01} produced by the projection as mentioned above; this straight $\bar{N}_1 A_{01}$ is, of course, equally contained by the plane T (determined by the point A_{01} and the footline \bar{n}_1) and by the front projecting plane of the sight line e . The intersection line of the plane of coin-

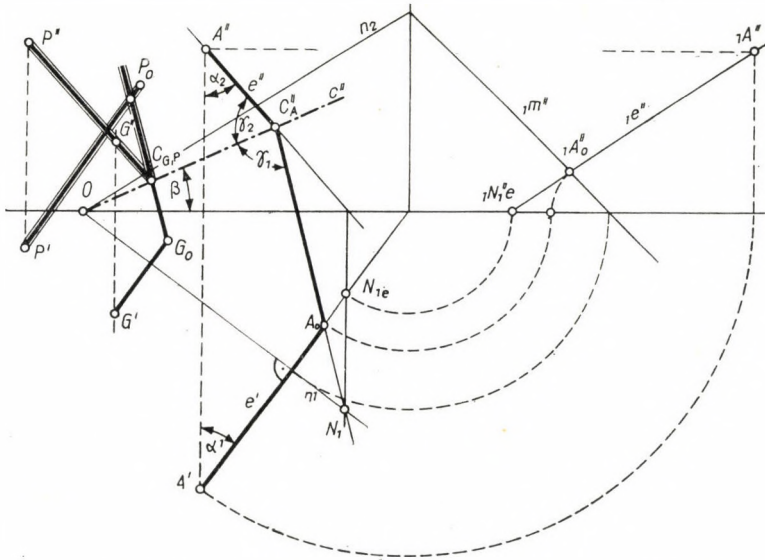


Fig. 11. Construction of the axonometric picture of the objective point

idence with the plane T is the straight c ; the intersection line of the plane of coincidence with the front projecting plane is the straight c_0 . The intersection point of these coincidence straights is C . Its front elevation C'' is the point of intersection of the straight $N_1 A_0$ with the front view e'' . This is obvious, because the horizontal ordinate of the point C (this point C being considered as contained by the straight line $\bar{N}_1 A_{01}$) i.e. $C_x C'$ is equal to $C'' C_x$, the vertical ordinate of the point of intersection as mentioned before.

Since there is only a single plane T that belongs to the given axonometric picture plane K and to the arbitrary direction e , that lies on the projecting plane perpendicular to the picture plane K , the scheme of construction is fully determined by the front view c'' of the coincidence line c belonging to the plane T and passing the point O . It can be seen from Fig. 11 that the axonometric view of any point can be mechanically determined by means of a line

c'' drawn from the point 0 at an angle β to the axis x_{12} , because the angles $\alpha_1 \alpha_2$ and γ_1 remain invariable.

In order to determine point C'' of the sight line e (belonging to a given point A) and the axonometric picture point A_0 , the method for using the vertical axis of rotation is shown in Fig. 11; further, it can be seen that the determination of the axonometric view G_0 of any assumed point G can be made,

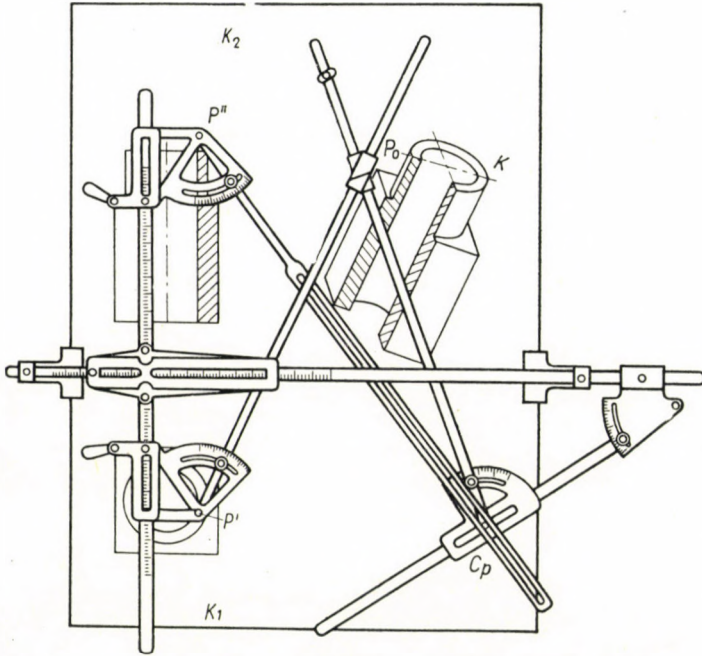


Fig. 12. RUSKEVITCH'S Axonograph. Tracing tips P' and P'' , drawing tip P_0

simply by means of drawing three lines which are parallel to the respective three auxiliary lines first drawn when determining the axonometric view A_0 . In the same way, the axonometric view of a point P is shown, the front projecting plane of which coincides with the front projecting plane of point G .

The scheme of the "Axonograph" is seen in Fig. 12. Its function is easy to be understood by comparing the mechanism of rods with the lines of con-

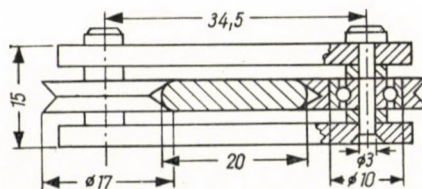


Fig. 13. Roller type guide on the axonograph

struction in Fig. 11, e.g. in considering the auxiliary lines traced for determining the axonometric view of point P .

The roller type guide of the axonograph is seen in Fig. 13. It was BRAUER who was the first to introduce this type of guide to be used in a transforming drawing device [9]; the mechanism proved satisfactory in other fields of application, too [6].

B) Central projection

a) Method of intersecting rays, ELROD's system

One finds the roots of the development of projective geometry in the pictorial perspective [12]; hence, it is not surprising that the perspective view can be delineated from the orthographic projections by means of common geometric operations, namely by using "connections" and "intersections". Again, the method of intersecting rays as described in relation to axonometry, is applicable only by taking into account the mutual relations of folding (revolving), vanishing points, and measure points.

Geometric references

The geometric references implied by this method [13] are shown in Fig. 14. The origin S of the co-ordinates x, y, z is the visual point or centre of perspective. The intersection points of the picture plane with the axes are the vanishing points I_x, I_y, I_z .

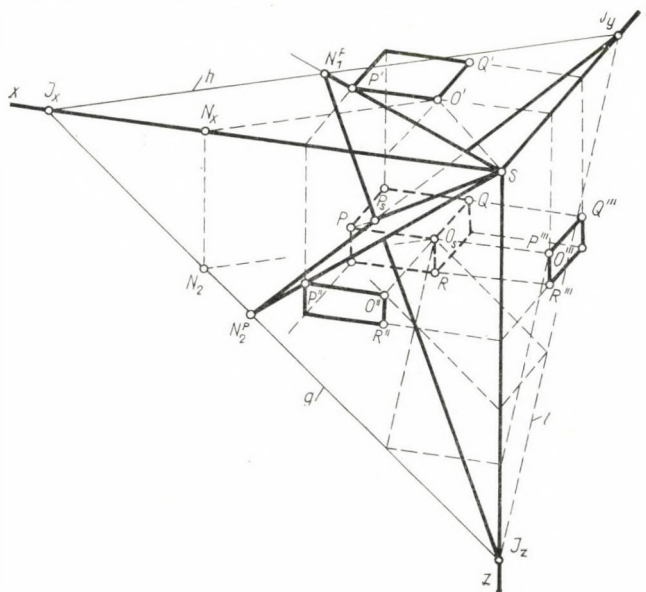


Fig. 14. Geometric relations of the construction of the perspective view by means of intersecting rays

The point O_s in the picture plane, given as the piercing point of the normal line traced from the visual point S is called the centre or main point. The distance SO_s is called eye-distance. The edges of the block O_sP , O_sQ and O_sR are parallel to the axes, its corner point O lies on the picture plane (wherefore, in the following, the subscript denoting the location will be omitted); the other corners of the block are without the picture plane.

The orthographic projection of the edges are the following: on the horizontal projection plane (xy) the views are $P'O'Q'$; on the front projection plane (xz) P'', O'', R'' and on the profile plane (yz) Q''', O''', R''' . E.g. the plan view O' of O is obtained by the following construction: a plane that contains the line SO (both plane and line being perpendicular to the picture plane) is laid as a parallel plane to the horizon h ; this plane and the picture plane intersect in the footline ON_2 (since the point O is contained by the picture plane); the following step consists in laying a vertical projecting plane passing this footline (both plane and line being parallel to the horizon h); this vertical projecting plane and the orthographic front elevation plane intersect in the vertical N_2N_x ; further, a line — lying in the horizontal projection plane — traced from the point N_x as a parallel to the horizon h will intersect another line — lying in the horizontal projecting plane and traced from the point S as a perpendicular to the horizon h — in the point O' that consequently represents the plan view of O ; obviously, the angle $SO'N_x$ is a right angle.

First of all, this figure is intended to show the construction of the picture point P_s of any chosen point P , in other words to show how to find the piercing point of the line of sight SP with the image plane.

The plan that contains axis y and a spatial point P produces with the front elevation plane the intersection line SP'' , and with the perspective picture plane the intersection line $N_2^P I_y$. Again, the plan that contains the axis z and the point P produces, with the horizontal (orthographic) plane, the line of intersection SP' and with the perspective picture plane the line of intersection $N_1^P I_z$; finally, the point of intersection of the latter line with the perspective trace line of the former plane, is the very perspective view P_s of the point P . In the figure the line of intersection PS of the two projecting planes is visible *viz.* the line of sight of the point P , although this line is not needed for the construction.

The following geometric correlations as basis of practical design, are clearly to be understood from the figure:

By the planes that contain the axis y and the front elevation of the points of the illustrated body produce with the horizontal (orthographic) reference plane a pencil of rays having the visual point S as centre: the same planes produce with the perspective picture plane another pencil of rays with the centre I_y i. e. the vanishing point. The corresponding rays of these two perspective pencils intersect one another at points on the traceline g of the picture plane; their

perspective position with reference to the line g (e.g. the point of intersection N_2^P of the corresponding two rays traced in the figure) remains without change when the pencil of rays of S is revolved, together with the (orthographic) front plane of projection, into the perspective picture plane.

The same rule applies to the two pencils of rays with the centre S in the horizontal (orthographic) plane and the centre I_z in the perspective image plane respectively, the line of intersection of the rays being the line h , e.g. containing foot points as e.g. N_1^P .

Folding (revolving)

In Fig. 15, the perspective picture plane is the very drawing plane, and the orthographic projections of the axes are identical with the altitudes of a

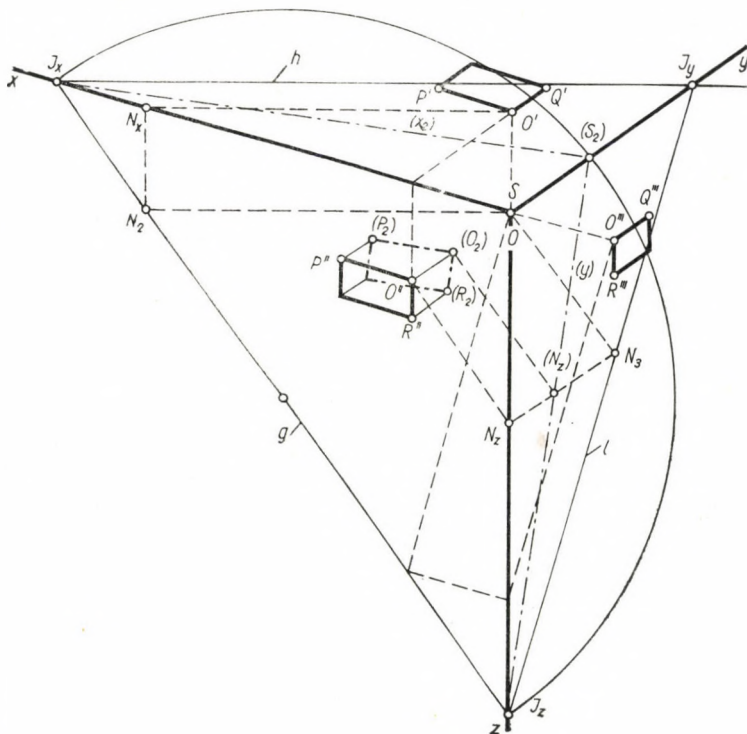


Fig. 15. The perspective picture plane is identical with the drawing plane. Construction of the main point O and revolving of the frontal reference plane

triangle, the sides of which are the trace lines h , g , l . In this figure, one finds the constructive location of the views, O' , O'' , O''' of the main point O and the revolution of the front elevation plane I_xSI_z into the given perspective picture plane.

The revolved picture $(P_2) (O_2) (R_2)$ is now the corresponding delineation of the front elevation true to shape. The revolved view (S_2) of the visual point S is obtained as a point of the revolved front elevation plane by finding the point of intersection of the THALES-circle over the diameter $I_x I_z$ with axis y .

Since the revolved edge $(O_2) (P_2)$ is parallel to axis (x_2) all the revolved edges are parallel to the revolved views of the respective axes.

Vanishing points

In Fig. 16, the routine work of construction is shown: the visual point S is revolved about $h (S_1)$, about $g (S_2)$ and about $l (S_3)$. When locating the plan view, the parallelity of $(O_1) (P_1)$ to (x_1) has to be taken into account; the same idea applies when locating the front elevation viz. $(O_2) (P_2) || (x_2)$ and when locating the side elevation with $(O_3) (R_3) || (z_3)$.

The points of intersection $N_2^P, N_2^R \dots$ are produced by the line g and the pencil of rays $(S_2) [(P_2) (R_2) \dots]$ by connecting these points with the vanishing point I_y the corresponding perspective pencil of rays is obtained.

In the same way, the intersection points $N_1^P, N_1^Q \dots$ are obtained on the line h by tracing the pencil of rays $(S_1) [(P_1) (Q_1) \dots]$ and by connecting these points with the aiming point I_z , the corresponding pencil of perspective rays is obtained.

The point of intersection of the lines $N_2^P I_y$ and $N_1^P I_z$ is the perspective picture P ; the perspective images of all lines parallel to axis x form a pencil of rays with the carrying centre I_x , the images of all parallel lines to axis y form a pencil of rays with the centre I_y and the images of the parallels to axis z form the pencil of rays with the carrying centre I_z .

The vanishing points of all horizontal lines form a range of points lying on the straight h . As a proof of this theorem, one vanishing point I_1^a , belonging to the two diagonals on the two horizontal faces of the block, is determined; this point is obtained by tracing from the revolved point (S_1) a line parallel to the diagonal passing the revolved point (O_1) .

In the same way, the vanishing points of lines parallel to the plane (xz) form a range of points on the line g , and all the vanishing points of the lines parallel to the plane (yz) form a range of points on line l .

Measure points

By revolving the horizontal edge OP in the horizontal plane from its original spatial position about its point O , that is contained by the perspective picture plane, into the picture plane, this transformation of this edge will appear, as a horizontal line $(O_1) H$ parallel to the line h , this being a transposition of the view $(O_1) (P_1)$ (Fig. 17).

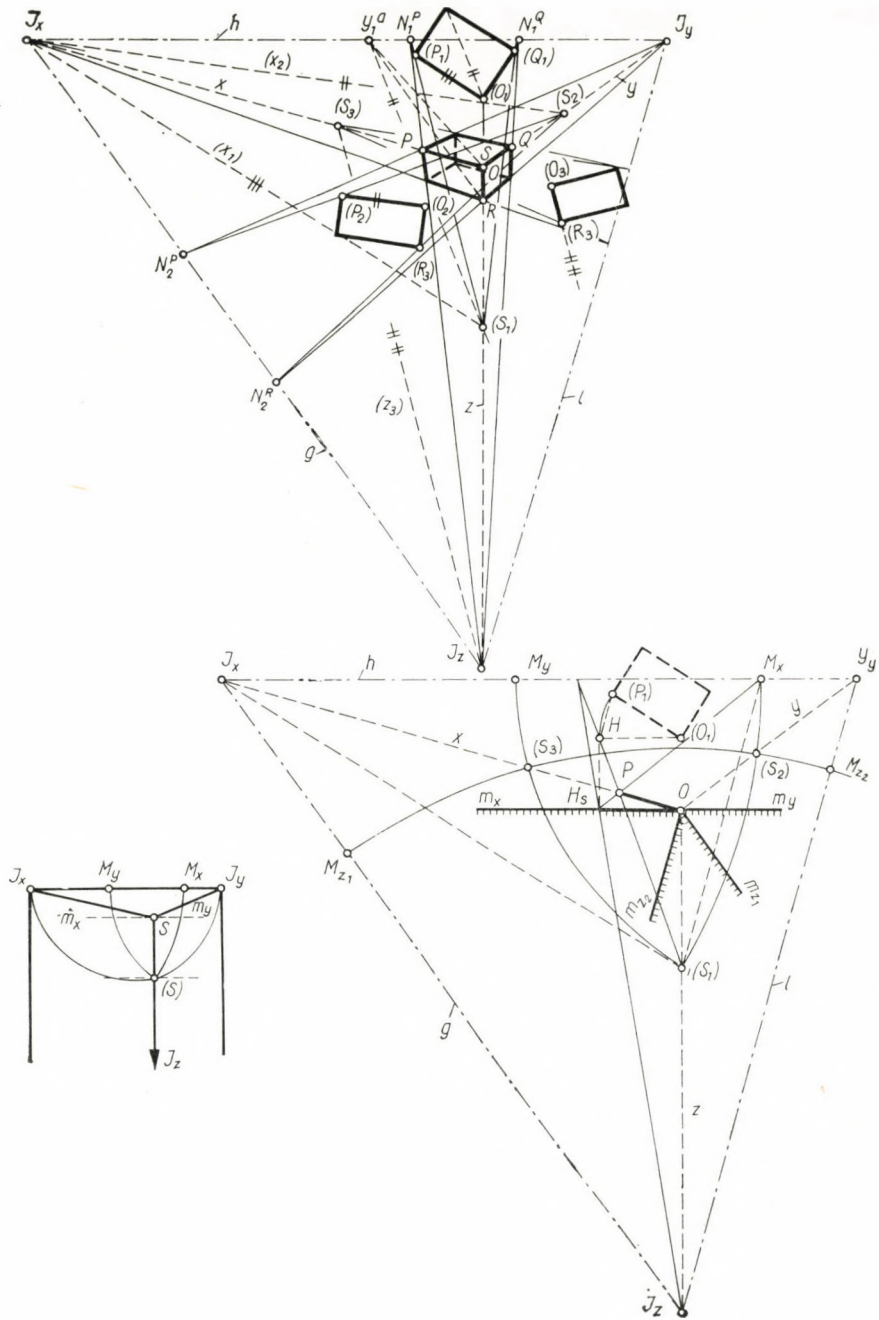


Fig. 16. Perspective view constructed from the three orthographic views

Fig. 17. Measure points. Measuring lines

Fig. 18. Vanishing points and measure points on a vertical picture plane

The perspective picture of the point H will be obtained as the point H_s lying on a line that passes the point O and is parallel to h ; thus, the obtained line OH_s appears as the true length of the original edge OP , respectively, OH , because OH_s lies on the perspective picture plane.

The vanishing point M_x of the lines parallel to the chord $H(P_1)$ is obtained by intersecting the horizon h with a line parallel to $H(P_1)$ and traced from point (S_1) .

Having in view the similarity:

$$\Delta H(O_1)(P_1) \sim \Delta I_x(S_1)M_x$$

this vanishing point M_x (the so-called measure point) is of great importance as regards the determination of measures, can be obtained, instead of tracing the parallel line mentioned above simply by drawing the arc of a circle with radius $I_x(S_1)$ from the centre I_x .

In the original spatial position, before being revolved, the vanishing point of the edge OP as a line parallel to the axis x , is I_x ; the vanishing point of the picture of the chord $H(P_1)$ is M_x ; consequently, the image point P is the point of intersection of the image lines OI_x and H_sM_x .

As can be clearly seen from the figure, the method of finding the picture of a given distance to be located on the axis x in space, is the following: the distance $(O_1)(P_1) = OH_s$ being parallel to axis x , is in its true length equal to OH_s ; by transferring this length onto the horizontal measuring line m_x , the point H_s is obtained then, by connecting the point H_s with the measure point M_x , the intersection point on axis x , namely P , will determine the picture, namely OP . OP is the corresponding perspective length of the true distance OH_s .

The measure point M_y of axis y can be determined in the same way, namely by intersecting the line h with the circle of radius $I_y(S_1)$ and the centre I_y , and the respective measuring line m_y is parallel to h , and directed to the right.

In order to find the measure point M_z of axis z , two constructive alternatives may be applied. The intersecting circle of radius $I_z(S_2) = I_z(S_3)$ may pass the lines g or l , and produce the measure point M_{z1} on the line g , to which the measuring line m_{z1} being parallel to g , belongs, or else the measure point M_{z2} on the line l , with a measuring line m_{z2} parallel to line l .

According to Figure 18, the vanishing point I_z will be located in the infinite, when the perspective picture plane is parallel to the vertical axis z ; in this case, the picture of every single line contained in a vertical projecting plane, appears as a vertical.

b) *The transformer designing machine of HAUCK*

In Fig. 19, one finds the scheme of the functioning principle of HAUCK's machine [9]. Here O is a chosen point in a space, A is the station point (the

centre of vision), I denotes the plane of the plan, II denotes the plane of the front elevation and III denotes the perspective picture plane. In Fig. 20 the device is shown, the main feature of which is the EVANS' type articulated straight guide that serves to have the image points O_1 , O_2 and O_3 kept moving on vertical straight lines; the working principles of the device are the following:

1. By laying through the visual ray OA , a projecting plane (Fig. 19) perpendicular to the elevation plane, the elevation view KO_2 is obtained as an intersection line; the same projecting plane and the picture plane intersect in

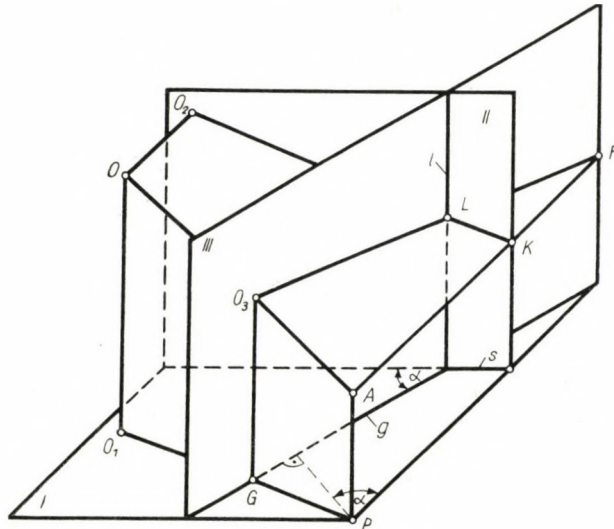


Fig. 19. Geometric scheme of HAUCK's device

the line O_3F ; these two intersection lines produce a point of intersection L lying on the trace line l of the picture plane (III) with the elevation plane (II).

2. By laying a vertical projecting plane (Fig. 19) through the visual ray AO , the plan view PO_1 is obtained as an intersection line in the plan; the same vertical projecting plane and the picture plane (III) intersect in the line O_3G ; these two intersection lines produce the point of intersection G lying on the trace line g of the picture plane III with the plane I; this line g appears, after being revolved at an angle α equal to the bearing of the image plane, as the line g' , parallel to the vertical projection plane II (Fig. 20).

3. After having revolved both the horizontal projection plane I and the perspective image plane III into the vertical projection plane II, there are three fix points that appear as a carrier of a pencil of rays, namely: the point P for the plan view, the point K for the elevation view, and the point F for the perspective image.

In consequence of being revolved at angle α , the vertical projection plane II becomes shifted in relation to the horizontal projection plane; further, in

order to avoid any overlapping, the point F is shifted away from the horizontal line containing point K . Consequently, in Figure 20, the articulation L , fixed to the slat l , has a double function: once in connection to slat KO_2 , and in addition in connection to slat FO_3 . By this construction, the slat l is also suitable for moving in a vertical direction on the plane of the drawing board, when O_2 is displaced.

The straight guides (EVANS' type) belonging to the picture points O_1 and O_2 are relatively displaced in a horizontal direction.

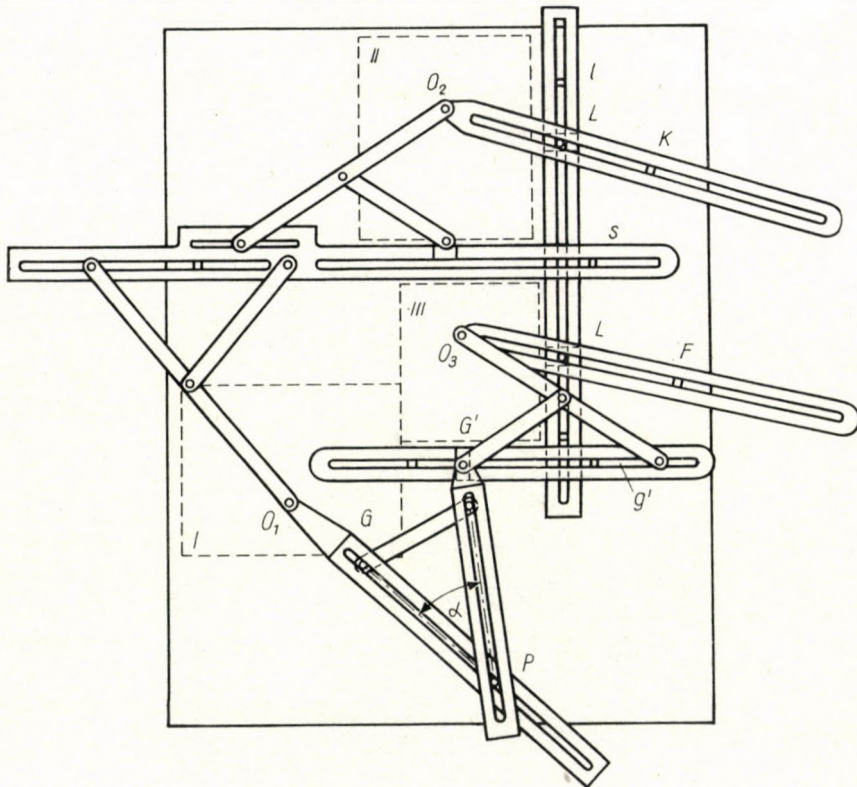


Fig. 20. The first device made by HAUCK. Tracing tips O_1 and O_2 ; drawing tip O_3 . I — plan view; II — front elevation; III — perspective view

c) BRAUER'S projectograph

Based on HAUCK's device Professor BRAUER succeeded in developing a new transformer drawing device [9] that had been constructed by applying some constructive modifications originating from appropriate deliberations and well observed experiments. The working scheme of this device, that proved quite satisfactory in practical use, is shown in Figure 21; the actual construc-

tive type is shown, in a rotated position at right angle relatively to the working scheme — in Figure 22.

In BRAUER's type, the plan and the elevation are not shifted; by the mechanism $G'HJO_3$ — designed as an angle lever, — all three views are aligned along the same straight line.

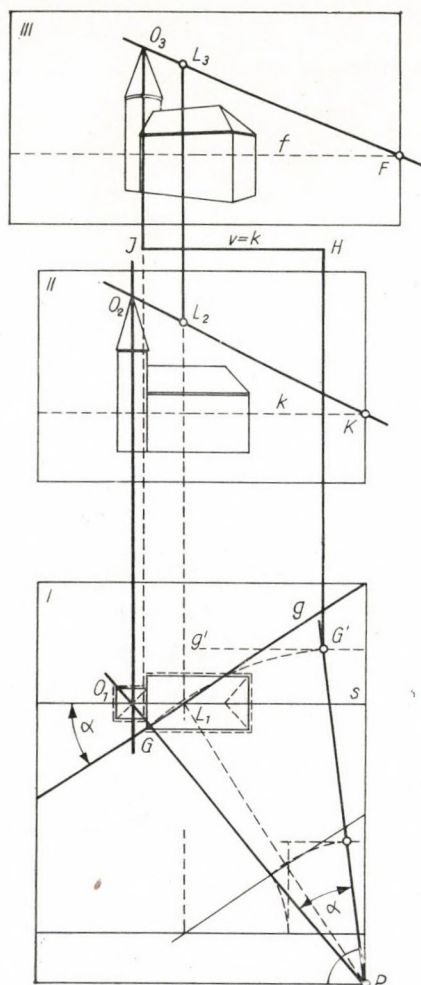


Fig. 21. Scheme of BRAUER's device

In BRAUER's device, the articulated straight guides of HAUCK that did not yield, in consequence of the extended arms being susceptible to bending, exact figures, has been substituted by rail guided V-grooved roller pairs; to be noted, similar devices are usual in other recent implements [8, 10] (see e.g. Fig. 13).

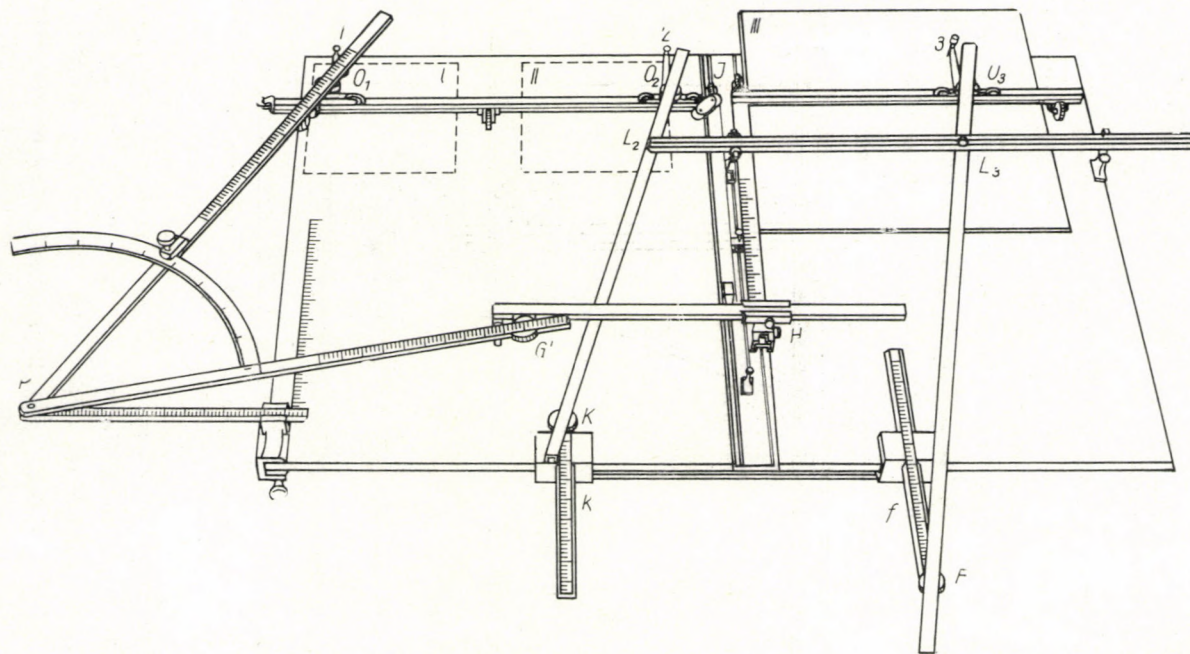


Fig. 22. Constructional details of BRAUER's device. Tracing tips O_1 and O_2 ; drawing tip O_3 ;
 I — plan view; II — front elevation; III — perspective view

The tracing tips "1" and "2" and the drawing tip "3" are, for the sake of a better visibility, placed on special extension links. Besides, the functioning principles correspond to the relations represented in Figure 19, but the letter symbols are identical.

d) RITTER's "Perspectograf"

Compared with the former described types, the perspectograph, designed by HERMANN RITTER, architect at Frankfurt, is especially characterized by its simplicity [1, 2].

As a matter of principle, the HAUCK type device is more versatile than that of RITTER, because the former is suitable for delineating the image of any arbitrary point, and not only the perspective image of a horizontal sec-

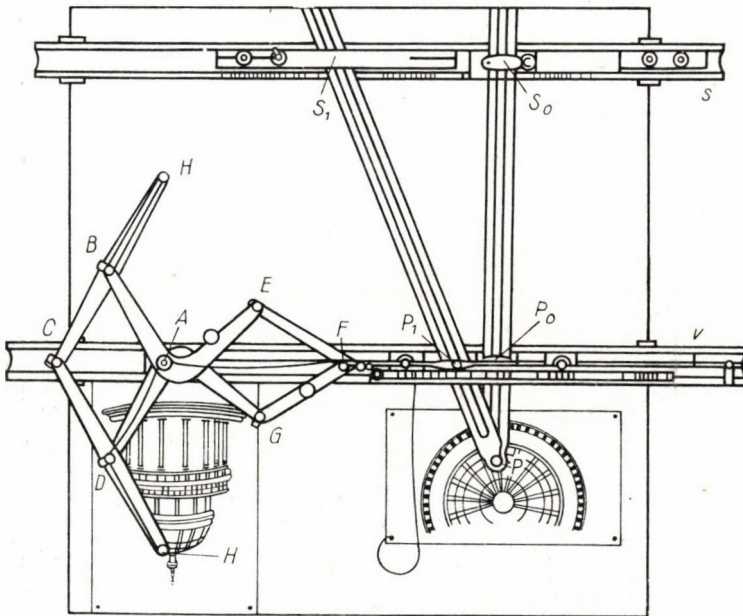


Fig. 23. RITTER's Perspectograph. Tracing tip P , drawing tip H ; $S_0S_1 = P_0B$ — distance of the horizon from the level plane

tional view, as with the RITTER type; only, this versatility implies the complexity of construction and the difficulties of handling. As has already been described, using HAUCK's machine, there are two tracing tips which are to be conducted on the related orthographic projections, whereas the RITTER's type works with *one* single tracing tip.

The geometric bases of this device are described in the author's paper [17] and shown there in Figures 28 & 29.

Here follow the main features of the device:

1. According to Fig. 23, the device produces on line v , a distance P_1P_0 of the right direction and in the right measure, in any possible position of point P .

2. This distance P_1P_0 will be laid down, from the point P_1 in a normal direction. In a practical manner, in order to avoid overlapping, this is not done directly on point P_1 , but is located in a position displaced at a constant distance.

The first operation is performed by the slats PS_0 and PS_1 in the same way as illustrated in Fig. 30 (in paper [17]).

The second operation of the transforming process is performed by the so called "frog-leg" type mechanism, consisting of a double rhomb (Fig. 24).

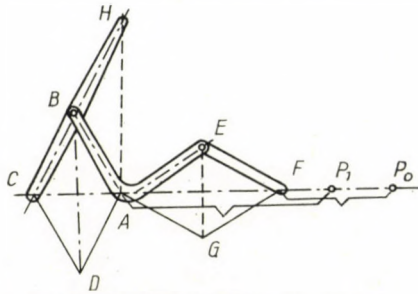


Fig. 24. "Frog-leg" arrangement

In the articulated double rhomb $ABCD$ and $AEFG$, the articulation point A is a common articulation. The sides BA and AE , respectively, DA and GA are integral, wherefore angle

$$BAE = 90^\circ$$

and angle

$$DAG = 90^\circ$$

The side CB carries an extension of the same length *viz.*:

$$CB = BH$$

and consequently:

$$AH \perp AC$$

With a second rhomb, having sides of a different length than those of the first, the relation exists:

$$AB = k \cdot AE$$

(for the most simple case: $k = 1$);

and also

$$AH = k \cdot AF;$$

in this device, the rods connecting the point A with the point P_1 respectively the point F with the point P_0 , are rigid and therefore:

$$\begin{aligned} AH &= k \cdot AF = k(AP_1 - FP_1) = k(AP_1 - FP_0 + P_1P_0) \\ AH &= c + k \cdot P_1P_0 \end{aligned}$$

When the distance P_1P_0 , respectively, the locus of these points is already determined on the guide v , the locus of the points A and F is then also fixed by means of the rod mechanism working under the influence of positively acting couplings, consequently, the distance AH is also determined. Therefore, the drawing tip in point H already represents the image point P' , that is displaced — in the direction to the left of P_1 — at a distance AP_1 (Fig. 23) and upwards at a distance:

$$c = k(AP_1 - FP_0)$$

and its scale ratio, in relation to the plan view located under the tracing point P , corresponds to the required value:

$$k = \frac{AB}{AE}$$

Hence, the main parts of the device are:

1. Two slats PS_1 and PS_0 both coupled to the tracing tip P by an articulated joint.
2. Two guiding pins S_1 and S_0 adjustably located on the sliding guide s .
3. The guiding slat v , parallel to the guide s , and fitted with two movable slides: there are — on the wooden main-slat — two eyes which bear a round iron bar adjustably mounted in their longitudinal position.

4. Two guiding pins P_1 and P_0 , movable over guide v ; pin P_0 being fastened onto the wooden slide, and pin P_1 being fastened onto the round iron bar.

The two slats, rotatable about the two guiding pins, and displaceable longitudinally, are supposed to determine the locus of P_1 and P_0 according to the position of tracing tip P .

5. The "frog-leg" type double rhomb mounted with the drawing tip: the common articulated point A of the two rhombs is fastened into the wooden slide, respectively to pin P_0 ; besides, two adjacent sides of one rhomb bear extensions, wherefore two drawing tips may be used simultaneously.

It follows from the aforesaid relations that the desired altitude of the level line is adjustable by shifting the slidable guiding pin S_1 and the iron bar fastened to tip F ; viz. according to Figure 23 (of Fig. 28 in paper [17]),

$$S_0S_1 = P_0F$$

It is to be noted that this device is applicable not only in the case when the level plane ε is perpendicular to picture plane η , but also with an arbitrary angle φ formed by these planes; in this latter case, the points S_1 and F have to be adjusted by taking into account the level altitudes divided by the $\sin \varphi$ values.

e) *The "Perspectograph" of RUSKEVITCH*

In the same way, as in the HAUCK—BRAUER device, two tracing tips function in this machine [10]. But, a relatively simple tracing operation occurs only for the case of a vertical picture plane. On the other hand, the profile

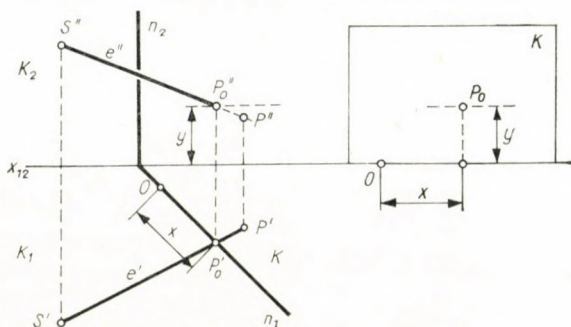


Fig. 25a. Geometric relations on RUSKEVITCH's perspectograph

Fig. 25b. Picture plane revolved

view is susceptible to prompt transformation without further adjustment, advantageously.

The scheme of its working principle is shown in Figures 25a and 25b.

In Fig. 25a, the visual point S is determined by the plan view and front view of the objective point P , and the image plane K is determined by its two footlines, n_1 in the horizontal plane, and n_2 in the vertical plane. The piercing point of the line of sight e on the image plane K is the picture point P_0 ; the coordinates of this point, x and y are represented in Fig. 25a as measured from some point O on the footline n_1 .

In Fig. 25b the revolved image plane is represented, containing the picture point P_0 and its coordinates x any y .

The device can easily be realized by combining these two figures; the component parts of the device illustrated in Fig. 26 are denoted with the same symbols as the geometrical symbols of Figure 25a.

Based on the precedings, the working scheme of the device will be sufficiently described by the following: the first system of two pulleys with the pulling string, as represented in the figure, serves to secure the ordinate x of the image point P_0 on the image plane K to be changed at the same value as

the change of length of this x occurring when displacing point P'_0 . The second system of pulling string is designed to transmit the displacement of the tracing tip P' in the plan K_1 onto the profile plane K_3 .

This system is suitable for enabling a free choice of two tips, from the

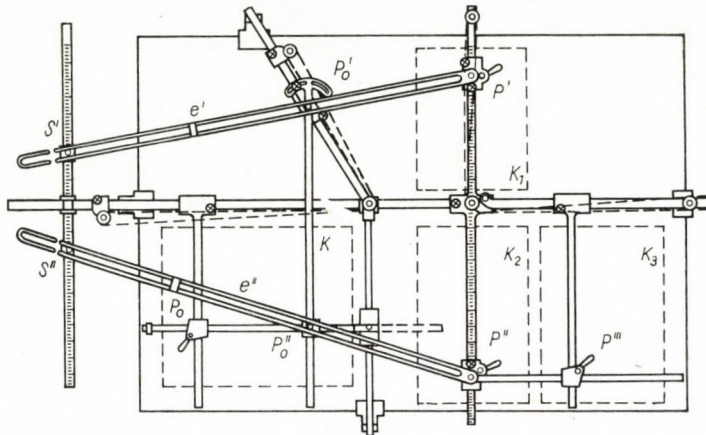


Fig. 26. RUSKEVITCH'S Perspectograph: Tracing tips P' , P'' , P''' . Drawing tip P''_0 ; plan view K_1 , front elevation K_2 , side elevation K_3 , perspective picture K

three usable tips P' , P'' , and P''' , always in accordance with the actual picture detail to be transformed.

REFERENCES

1. DOEHLEMANN, K.: Geometrische Transformationen. I. Teil. Sammlung Schubert XXVII. Leipzig 1902.
2. ZIGÁNY, F.: Ábrázoló geometria. Egyetemi tankönyv. Budapest, 1951. (Descriptive Geometry. University Textbook.)
3. ROMSAUER, L.: Ábrázoló geometria I. és II. kötet. Budapest 1930. (Descriptive Geometry. Vol. I. and II.)
4. PRÜFER, H.: Projektive Geometrie. Zweite Auflage. Leipzig 1953.
5. BACHMANN, A.: Technisches Zeichnen. Vierte Auflage. Teubners Technische Leitfäden. Reihe I. Band 2. Leipzig 1943.
6. H. H.: Zeichnungsapparat für isometrische Perspektive. Technische Rundschau Bern. 1950. Nr. 38. (Technische Neuheiten.)
7. Magyar Népköztársasági Országos Szabvány: Műszaki rajz. — Géprajz. — Axonometrikus ábrázolás. MSZ 488—52 R. (Hungarian Standard MSZ 488—52: Technical Drawing. Engineering practice. Axonometric representation.)
8. „Hütte” des Ingenieurs Taschenbuch. Abt. I. XIX. Auflage Berlin 1905. — XXVIII. Auflage I. Band. 1955.
9. BRAUER, E.: HAUCK—BRAUER'S Perspektiv-Zeichenapparat. Zeitschrift d. V D I 1891. Nr. 28.
10. RUSKEVITCH, N. L. (Н. Л. Рускевич): Новые методы вычерчивания наглядных изображений в аксонометрических и центральных проекциях. Машгиз, Москва 1953.
11. Isometric Projections Ltd. The Green, Broad Street, Newport Pagnell, Buckinghamshire: Axonometrische Darstellung als Produktionsmittel. Technische Rundschau Bern. 1949. Nr. 43. (II. Technik S. 12—14.)

12. KÁRTESZI, F.: *Ábrázoló geometria I.* (A budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem jegyzete.) (Descriptive Geometry, University Textbook.)
13. ELROD, S. B.: Simplified pictorial drawing. *Machine Design*. Ohio. 1953. March. p. 128. — *Mathematics Magazine* Vol. 26. No. 2. Nov-Dec. 1952. p. 97.
14. DENNERT, H.: *Zeichenmaschinen*. VDI Zeitschrift 1957. Nr. 13.
15. VÖRÖS, I.: *Géprajz.* (Egyetemi tankönyv.) Tankönyvkiadó Bpest. 1954. (Engineering Drawing. Textbook.)
16. ORDÓDY, J.: *Géprajzolás.* Budapest. Nehézipari könyvkiadó. 1954. (The knowledge of reading engineering drawings.)
17. SZÓKE, B.: A Method for Designing Axonographs and Perspectographs. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, Tom. XXXIII. Fasc. 3—4 pp. 231/274. Budapest. 1961.

SUMMARY

The paper comprises the short description of some transformer drawing devices in the sequence of their development, in strict historical order, regardless as to whether it deals with planar configurations or spatial solids.

The drawing device of HAUCK, developed in the years after 1880, is rather complicated, nevertheless, HAUCK was the first to draw attention to all those geometric relations which caused his contemporaries to solve the problems in a more practical way, and nowadays, when speaking of perspectographs, the idea generally refers to RITTER's machine.

The author has not the design to enumerate all the existing methods. His intention is to show that the trend for applying mechanical methods for the transformation of figures into illustrative ones, becomes more and more intensive. The author thinks that a single example will suffice to illustrate this fact: in the number of the 11th January 1957 of the periodical MACHINERY (London) there is a short communication, without other details, dealing with the perspectograph constructed by M. R. I. L. NEGRE (Paris), under the title: "Perspectograph Perspective Drawing Instruments." — The device, FORSTER's system, is based on routine manual drawing after a picture projected optically [14].

However, the use of the methods and implements will really be efficient only when draftmen will acquire the needed aspect of space.

ZEICHNUNGSVERFAHREN VON AXONOMETRISCHEN
UND PERSPEKTIVEN PROJEKTIONEN.
ARBEITSPRINZIPIEN VON ZEICHENMASCHINEN
GANGBARER AUSFÜHRUNGEN

B. SZÓKE

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser überblickt eine Reihe von transformierenden Zeichenmaschinen in historischer Reihenfolge, ohne Rücksicht darauf, ob es sich um das Zeichnen ebener Figuren oder räumlicher Körper handelt.

HAUCK's Instrument, aus den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts, ist ziemlich kompliziert; immerhin muß man anerkennen, daß er die geometrischen Zusammenhänge aufgedeckt hat, auf deren Grund seine Zeitgenossen daran gingen, praktischere Lösungen zu finden. Heutzutage denkt man bei Erwähnung des Perspektographen meistens an den Zeichenapparat von RITTER.

Es war nicht die Absicht des Verfassers, lückenlos alles zu beschreiben; sein Hauptziel war, darauf hinzuweisen, daß man heute immer energischer danach strebt, aus normalen Abbildungen illustrative Darstellungen mit Hilfe mechanischer Hilfsmittel herzustellen. Ein Beispiel dürfte als Beweis genügen: in der Zeitschrift MACHINERY (London), 11. Jänner 1957, wurde eine Mitteilung unter dem Titel »Perspective Drawing Instruments« publiziert, in welchem — zwar ohne nähere Erörterungen — über den Perspektographen des M. R. I. L. NEGRE berichtet wurde. Mit dem Instrument System FORSTER läßt sich die perspektive Abbildung als Handzeichnung nach einem optisch projiziertem Bild vollbringen [14].

Jedenfalls kann man die beschriebenen Verfahren und Geräte nur dann nutzbringend anwenden, wenn die Zeichner sich die richtige Raumbetrachtung aneignen.

MÉTHODES DE DÉLINÉATION DES PROJECTIONS AXONOMÉTRIQUES
ET PERSPECTIVES;
PRINCIPES DE FONCTIONNEMENT DES INSTRUMENTS ACTUELS

B. SZÓKE

RÉSUMÉ

L'auteur décrit certains instruments transformateurs à dessin, énumérés dans l'ordre de succession historique, sans égard à ce que la pointe à dessiner se déplace dans deux ou trois dimensions.

L'appareil à dessin de HAUCK, apparu vers 1880, est d'une construction encore trop compliquée. Néanmoins, c'est à HAUCK que revient le mérite d'avoir révélé des relations géométriques qui ont incité ses contemporains à chercher une solution plus pratique du problème; actuellement, quand il s'agit de perspectographes, on pense généralement à l'appareil de RITTER.

Sans vouloir énumérer toutes les méthodes existantes, l'auteur constate la tendance actuelle, toujours plus forte, de faire appel à des méthodes mécaniques de délinéation par transformation des projections normales. A titre d'exemple, l'auteur rappelle le perspectographe du Français M. R. I. L. NEGRE, lancé par la Perspectograph Corporation de New-York, et dont le No du 11 janvier 1957 de la «Machinery» de Londres donne une description sommaire dans son article: «Perspectograph Perspective Drawing Instruments». L'appareil, construit selon le système de FORSTER, fonctionne comme un instrument manuel à copier les traits des images produits par projection optique [14]. L'utilisation des méthodes et instruments décrits ne donne de bons résultats que si l'opérateur lui-même dispose d'une perception spatiale convenable.

МЕТОДЫ ОТОБРАЖЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ И, СООТВЕТСТВЕННО, ПЕРСПЕКТИВНЫХ ПРОЕКЦИЙ ИЗ ТОЧНЫХ ПО РАЗМЕРУ ПРОЕКЦИЙ И ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ

В. СЕКЕ

РЕЗЮМЕ

В этом сообщении описывается ряд устройств для перечерчивания по порядку их сконструирования, выдерживая при этом историческую последовательность, независимо от того, что идет ли разговор о черчении фигуры на плоскости или же фигуры в пространстве. Устройство для перечерчивания, сконструированное в 1880 г. Hauck-ом является еще сложным, но заслуга Hauck-а состоит в том, что он указал на такие геометрические зависимости, которые стимулировали его современников к решению такой практической задачи, и сегодня уже (если идет речь о перспективном черчении), тогда обычно думают об устройстве системы Ritter-а.

В данном сообщении мы не стремились полностью перечислить все методы решения. Однако, можно установить, что устремления к механическому перечерчиванию наглядных рисунков в настоящее время усиливаются все больше. Пожалуй, достаточно будет здесь указать на перспектограф, сконструированный в Париже M. R. I. L. Negre для определения перспективных точек, который выпускается Нью-Йоркской фирмой Перспектограф—Корпорейшен. Это устройство описывается без детального изложения в издаваемом в Лондоне журнале «Машинери» за 11 января 1957-го года в статье «Perspectograph Perspective Drawing Instruments». На устройстве системы Forster-а (14) работу можно выполнять с помощью оптической проекции и ручного перечерчивания. Использование описанных методов и вспомогательных средств для перечерчивания будет действительно успешным только в том случае, если использующие эти устройства располагают соответствующим пространственным представлением.

EINE METHODE ZUR BESTIMMUNG DER ANZAHL UND GRÖSSE DISKUSFÖRMIGER TEILCHEN DER DISPERSIONSPHASE

J. LIKEŠ, J. ČADEK

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DAS STAHLHÜTTENWESEN, PRAHA,

und

K. MAZANEC

KLEMENT GOTTWALD-EISENWERKE, VITKOVICE

[Eingegangen am 9. Juni 1959]

Einleitung

Statistische Methoden des Studiums der Mikrostruktur von Metallen und Legierungen sind geradewegs dazu bestimmt, eine hervorragende Rolle bei der Untersuchung von Phasenumwandlungen von Metallen und Legierungen zu spielen. Die Kinetik der überwiegenden Mehrheit dieser Umwandlungen kann nämlich durch zwei kinetische Parameter beschrieben werden, und zwar durch die Kernbildungs- und die Wachstumsgeschwindigkeit der neuen Phase. Das Messen dieser Parameter stützt sich auf die Benützung statistischer Methoden der Mikrostrukturanalyse.

In dieser Hinsicht besteht eine der Hauptaufgaben in der Bestimmung der Teilchenanzahl der neuen Phase per Volumeneinheit des Probestückes auf Grund der Anzahl der Teilchenquerschnitte per Flächeneinheit der Schliiffebene und der Größe dieser Querschnitte, oder auf Grund der Länge und Anzahl der Linienschnitte, die dadurch entstehen, daß eine in der Schliiffebene zufällig geführte Gerade die Teilchenquerschnitte durchschneidet. Diese Teilchen können verschiedene Gestalt annehmen; sie können kugelförmig, zylinderförmig (plättchenartig), nadelförmig oder diskusförmig sein. Beim Lösen dieser Aufgabe ist es notwendig, von einer bestimmten geometrischen Teilchenform auszugehen.

Die vorläufig am vollkommensten ausgearbeitete Methode ist die der Bestimmung der Anzahl kugelförmiger Teilchen [1, 2, 3]. Obwohl die Teilchen der Dispersionsphase sehr oft ganz erheblich von der Kugelform abweichen (z. B. [5]), wird diese Methode beim Studium von Phasenumwandlungen oft verwendet (z. B. [4]). FULLMAN [6] löste die Aufgabe der Bestimmung der Anzahl kreisscheibenförmiger Teilchen, deren Durchmesser d bedeutend größer ist als ihre Dicke t ($d \gg t$). Der Fall, wo $d \ll t$, wo es sich also um nadel- oder stäbchenförmige Teilchen handelt, ist praktisch nicht sehr wichtig. In einer weiteren Arbeit [7] löste FULLMAN die Aufgabe der Berechnung von gleich großen rotationszylinderförmigen Teilchen, ohne Rücksicht auf die begrenzenden Voraussetzungen für den Anteil t/d .

Für das Studium der Martensit- und Bainitreaktion ist es notwendig, eine Methode zur Bestimmung der Anzahl der diskusförmigen Teilchen per Volumeneinheit auszuarbeiten, denn die annäherungsweise Bestimmung der kreisscheibenförmigen Teilchen erscheint nicht zufriedenstellend. Die Dringlichkeit der Lösung der Aufgabe der Bestimmung der Anzahl diskusförmiger Teilchen per Volumeneinheit der Probe ist anschaulich illustriert durch die außerordentliche Aufmerksamkeit, die in den letzten Jahren dem Studium sowohl der Bainit- als auch der Martensitreaktion zugewendet wird. Der Lösung dieser Aufgabe ist die vorliegende Arbeit gewidmet.

1. Teilchen einheitlicher Größe

Vorerst werden wir den Fall von praktisch gleich großen Teilchen behandeln.

1.1 Grundlegende Beziehungen

Betrachten wir eine Probe von würfelförmiger Gestalt mit der Höhe $v = 1$ und nehmen wir an, daß in dieser Probe die Phase a in einer großen Anzahl von Teilchen, die die Form gleich großer Rotationsdiskusse haben, verteilt ist, so daß die Teilchengröße im Vergleich zur Größe der Probe sehr klein ist. Setzen wir voraus, daß die Teilchen im Raum der Probe zufällig verteilt und zufällig orientiert sind.

Den Rotationsdiskus kann man sich als zwei einander durchdringende Kugeln von gleichem Durchmesser D vorstellen, deren Mittelpunkte S_1 und S_2 voneinander durch eine bestimmte Entfernung getrennt sind. Die Größe des Rotationsdiskus charakterisieren wir durch zwei Dimensionen: den Kugeldurchmesser D und die »Höhe« des Diskus $a \leq D$ (d. i. durch die Summe der Höhen zwei gleich großer Kugelsegmente, die dadurch entstehen, daß die Symmetrieebene des Diskus die Kugeln durchschneidet). Anstatt des Größenpaares (D, a) können wir zur Charakterisierung der Diskusgröße das Paar (a, b) benutzen wobei

$$b = \sqrt{D^2 - (D - a)^2} = \sqrt{2aD - a^2}. \quad (1.1.1)$$

Es sei nun die Schlifffebene durch den Prüfling geführt. Die Lage und Orientierung der Schlifffebene kann im Falle einer zufälligen Verteilung und Orientierung der Teilchen eine beliebige sein; in der Regel führen wir sie parallel zur oberen Fläche der Probe. Sind die Teilchen nicht zufällig orientiert, dann ist es notwendig, die Orientierung der Schlifffebenen zufällig zu gestalten.

Die Projektion eines diskusförmigen Teilchens auf die Ebene ρ , die senkrecht zur Schlifffebene durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte S_1

und S_2 verläuft, ist im Bild 1 dargestellt, und zwar für die Fälle $a < \frac{D}{2}$ und $a > \frac{D}{2}$. Bezeichnen wir mit θ den spitzen Winkel, den die Verbindungslinie der Punkte B_1, B_2 mit der Normalen zur Schliffebene bildet. Im Falle einer

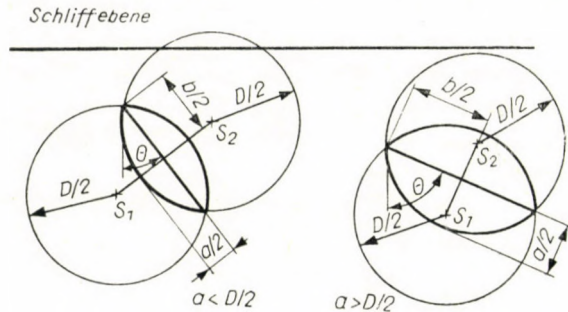


Bild 1. Projektion des Diskus auf die Ebene ϱ

zufälligen Orientierung der Teilchen im Raum der Probe ist θ eine zufällige Veränderliche mit der Dichtefunktion

$$g(\theta) = \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1.1.2)$$

Führen wir die Schliffebene parallel zur oberen Fläche der Probe und bezeichnen wir mit H die maximale Größe — senkrecht zur Schliffebene — eines Teilchens in der Ebene ϱ . Der Wert H ist offensichtlich vom Winkel θ abhängig. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Schliffebene ein Teilchen durchschneidet, ist gleich dem Mittelwert $E(H)$, wobei

$$E(H) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_{\theta} g(\theta) d\theta \quad (1.1.3)$$

und die mittlere Anzahl der Teilchenquerschnitte per Flächeneinheit der Schliffebene λ_A ist gleich der mittleren Teilchenanzahl per Volumeneinheit der Probe λ_V multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit des Durchschneidens eines Teilchens: d. h., daß

$$\lambda_A = \lambda_V E(H) \quad (1.1.4)$$

ist. Bezeichnen wir mit S und V die Oberfläche und das Volumen eines Rotationsdiskus; dann bedeutet $\lambda_V S$ die spezifische Oberfläche und $\lambda_V V$ den Volumenanteil der Phase α .

Wenn wir durch die Schliffebene eine zufällige Gerade ziehen und wenn wir mit λ_L die mittlere Anzahl der Teilchenquerschnitte bezeichnen, die von einer Längeneinheit der zufälligen Geraden durchschnitten werden, dann gilt für λ_L und die spezifische Oberfläche $\lambda_V S$ die Beziehung [8, 9]

$$\lambda_V S = 4 \lambda_L. \quad (1.1.5)$$

Bezeichnen wir mit $E(F)$ den Mittelwert der Schnittfläche F in der Schliffebene und mit $E(l)$ den Mittelwert der Linienschnitte, die dadurch entstehen, daß die zufällige Gerade die Teilchenquerschnitte durchschneidet. Wenn wir dann die Beziehungen (1.1.4) und (1.1.5) mit denen, die die Gleichheit des Volumen-, Flächen- und Geradenanteils der α -Phase ausdrücken

$$\lambda_V V = \lambda_A E(F) = \lambda_L E(l) \quad (1.1.6)$$

kombinieren, erhalten wir

$$E(F) = \frac{\lambda_V}{\lambda_A} V = \frac{V}{E(H)} \quad (1.1.7)$$

und

$$E(l) = \frac{\lambda_V}{\lambda_L} V = 4 \frac{V}{S}. \quad (1.1.8)$$

Um die Werte (D, a) zu finden, ist es notwendig, $E(H)$, S und V mit Hilfe von D und a auszudrücken.

Die Oberfläche S des Rotationsdiskus ist gleich

$$S = \pi D a. \quad (1.1.9)$$

Das Volumen V ist gleich

$$V = \frac{\pi}{12} a^2 (3D - a). \quad (1.1.10)$$

1.2 Die Bestimmung von $E(H)$

Bild 2 veranschaulicht zwei verschiedene Fälle der Teilchenorientierung zur Schliffebene. Im ersten Falle (Bild 2a, b) ist der Winkel θ derart, daß die zur Schliffebene parallel verlaufenden Ebenen, die das Teilchen berühren, die Punkte B_1 und B_2 durchlaufen. Im zweiten Falle (Bild 2c) verlaufen die Tangentialebenen des Teilchens parallel zur Schliffebene über B_1 und unter B_2 . Der erste Fall entspricht dem Winkel θ im Intervall von $0 \leq \theta \leq \theta^*$, der zweite Fall dem Winkel θ im Intervall von $\theta^* < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Bild 2b entspricht dem Fall $\theta = \theta^*$. Auf allen Bildern ist jeweils der Fall $a < \frac{D}{2}$ als auch $a > \frac{D}{2}$

veranschaulicht. Für den Intervall von $0 \leq \theta \leq \theta^*$ gilt

$$H_\theta = b \cos \theta.$$

Für $\theta > \theta^*$ ist $H_\theta > b \cos \theta$.

Es ist also notwendig, den Wert θ^* zu finden und ferner H_θ für $\theta > \theta^*$

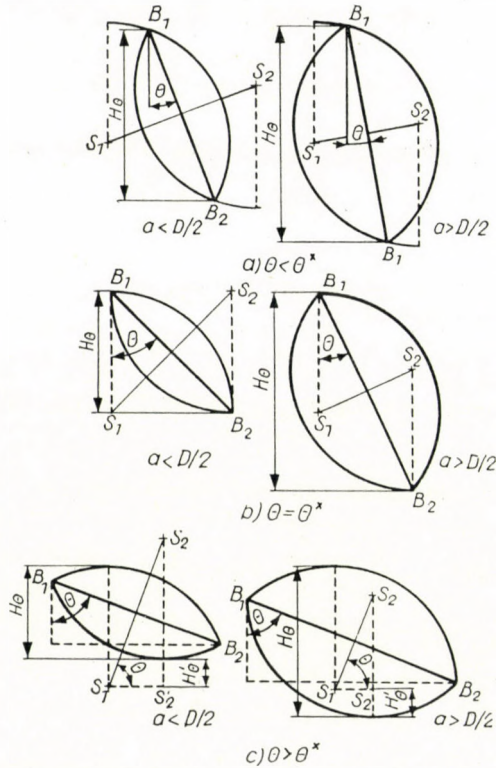


Bild 2. H_θ in Abhängigkeit vom Winkel θ

auszudrücken. Für $\theta = \theta^*$ gilt $\sin \theta^* = \frac{D - a}{D}$, wie aus Bild 2 ersichtlich ist, so daß

$$\theta^* = \arcsin \frac{D - a}{D}. \quad (1.2.1)$$

Für $\theta < \theta^*$ ist $\sin \theta < \frac{D - a}{D}$, für $\theta > \theta^*$ ist $\sin \theta > \frac{D - a}{D}$. Für

Teilchen, deren Winkel $\theta > \theta^*$ ist, gilt im Falle $a < \frac{D}{2}$ (Bild 2c)

$$H_\theta = \frac{D}{2} - H'_\theta = \frac{D}{2} - \left(\overline{S_2 S'_2} - \frac{D}{2} \right) = D - \overline{S_2 S'_2}.$$

Aber

$$\overline{S_2 S_2'} = \overline{S_1 S_2} \sin \theta = (D - a) \sin \theta.$$

Für $a > \frac{D}{2}$ ist

$$H_\theta = \frac{D}{2} + H'_\theta = \frac{D}{2} + \left(\frac{D}{2} - \overline{S_2 S_2'} \right) = D - \overline{S_1 S_2} \sin \theta = D - (D - a) \sin \theta.$$

Es ist also H_θ gleich

$$\begin{aligned} H_\theta &= b \cos \theta && \text{für } 0 \leq \theta \leq \theta^* \\ H_\theta &= D - (D - a) \sin \theta && \text{für } \theta^* < \theta \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

wo θ^* durch die Gleichung (1.2.1) bestimmt ist.

Der Mittelwert $E(H)$ ist dann gleich

$$E(H) = \int_0^{\theta^*} b \cos \theta \sin \theta d\theta + \int_{\theta^*}^{\frac{\pi}{2}} [D - (D - a) \sin \theta] \sin \theta d\theta.$$

Nach Lösung der einzelnen Integrale und Benützung der Gleichung

$$\cos \theta^* = \frac{b}{D} \quad \sin 2\theta^* = 2 \frac{b(D - a)}{D^2}$$

erhalten wir

$$E(H) = b - (D - a) \frac{\pi - 2\theta^*}{4}. \quad (1.2.3)$$

Im speziellen Falle von $a = D$, daß heißt, wenn sich der Diskus in die Kugel verwandelt, ist $\theta^* = 0$ und $E(H) = b = D$.

1.3. Experimentelle Bestätigung der $E(H)$ Werte

Die in den vorhergehenden Absätzen angeführten Ausdrücke können noch durch die Gleichsetzung von $a = kD$ ($0 < k \leq 1$) eine weitere Abänderung erfahren.

Dann können Oberfläche und Volumen des Rotationsdiskus in folgender Form ausgedrückt werden:

$$S = \pi D^2 k \quad (1.3.1)$$

$$V = \frac{\pi}{12} D^3 k^2 (3 - k). \quad (1.3.2)$$

Der Mittelwert der Größe H ist gleich

$$E(H) = D \left[\sqrt{2k - k^2} - (1 - k) \frac{\pi - 2\Theta^*}{4} \right], \quad (1.3.3)$$

wobei

$$\Theta^* = \arcsin(1 - k) \quad (1.3.4)$$

ist.

Nach (1.7) ist dann die mittlere Schnittfläche in der Schliffebene gleich

$$E(F) = \frac{V}{E(H)} = \varphi_1(k) D^2, \quad (1.3.5)$$

wo

$$\varphi_1(k) = \frac{\pi}{12} \frac{k^2(3 - k)}{\sqrt{2k - k^2} - (1 - k) \frac{\pi - 2\Theta^*}{4}}. \quad (1.3.6)$$

Wenn wir nun eine genügende Anzahl t von Schnitten durch einen Rotationsdiskus von gegebenen Dimensionen D und $a = kD$ durchführen, dann wird die durchschnittliche Fläche

$$\bar{F} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t F_i$$

sein, wo F_i die Flächen der einzelnen Schnitte sind ($i = 1, 2, \dots, t$), die um den Wert $E(F) = \varphi_1(k) D^2$ schwanken, wobei für D und k die gegebenen Teilchendimensionen eingesetzt werden. Auf diese Art können wir experimentell die Richtigkeit der Formel (1.3.5) bestätigen.

Anstatt durch das Dimensionenpaar $(D, a = kD)$ kann die Teilchengröße durch das Verhältnis $x = \frac{a}{b}$ und den Wert a ausgedrückt werden.

Dann ist

$$x = \frac{a}{b} = \frac{k}{\sqrt{2k - k^2}},$$

so daß

$$k = \frac{2x^2}{x^2 + 1} \text{ ist.} \quad (1.3.7)$$

Ist z. B. $x = \frac{1}{3}$, so ist $k = 0,2$ so daß

$$E(F) = \varphi_1(0,2) D^2 = \varphi_1(0,2) \frac{a^2}{0,04} \text{ ist.}$$

Experimentelle Messungen von Schnittflächen wurden für einige Teilchengrößen durchgeführt. Die Verhältnisse $x = 1 : 2$, $1 : 3$, $1 : 5$ und $1 : 12,5$ wurden untersucht. Für das Verhältnis $x = 1 : 5$ wurden Messungen für 2 Werte von a , bei den übrigen Verhältnissen für je einen Wert von a durchgeführt. Die Winkel θ wurden in Abständen von fünf Graden im Bereich von $0^\circ - 90^\circ$ gewählt. Für jeden Winkel wurde ein Bündel paralleler Schnittebenen in Betracht gezogen, von denen eine durch die Mitte des Teilchens, die anderen über die Mitte verliefen, wobei der Abstand benachbarter Ebenen immer 5 mm war. Für jeden Schnitt wurde die Fläche F bestimmt.

Tafel I gibt für die angeführten Verhältnisse von x die Werte von k und $\varphi_1(k)$ an. Für die Berechnung des Wertes von Θ^* wurden Tabellen [10] benützt.

Tafel I

Die Werte von $\varphi_1(k)$ für die betreffenden Verhältnisse von x

x	k	$\varphi_1(k)$
1 : 2	0,4000	0,20871
1 : 3	0,2000	0,08558
1 : 5	0,0769	0,02237
1 : 12,5	0,0127	0,00158

Tafel II gibt für die einzelnen Verhältnisse von x die betreffenden Werte von b (in cm), ferner die Werte von a und die theoretischen Werte von $E(F)$ an. Eine weitere Rubrik enthält die Durchschnittsfläche \bar{F} der gemessenen Schnitte, während die letzte Rubrik die Abweichung \bar{F} von $E(F)$ in Prozenten des theoretischen Wertes von $E(F)$ angibt.

Tafel II

Vergleich der Durchschnittswerte \bar{F} der gemessenen Flächen mit den theoretischen Werten $E(F)$

Verhältnis x	b	a	$E(F)$	\bar{F}	$\frac{ \bar{F} - E(F) }{E(F)} 100\%$
1 : 2	6	3	11,74	11,50	2,04
1 : 3	6	2	8,56	8,04	6,07
1 : 5	4	0,8	2,42	2,46	1,65
1 : 5	6	1,2	5,44	5,18	4,78
1 : 12,5	10	0,8	6,24	6,18	0,96

In Anbetracht der Tatsache, daß die gemessenen Schnitte eine systematische Stichprobe darstellen, ist die Übereinstimmung der versuchsmäßig

gewonnenen Werte mit den theoretischen eine gute. Die Übereinstimmung wird selbstverständlich desto besser sein, je mehr Schnittebenen durch das Teilchen gelegt werden.

1.4. Bestimmung der Teilchendimensionen

Die Teilchendimensionen D und $k = \frac{a}{D}$ bestimmen wir mit Hilfe der Gleichungen (1.1.7) und (1.1.8). Durch Einsetzen der Ausdrücke (1.3.1) und (1.3.2) für V bzw. S erhalten wir

$$E(l) = 4 \frac{V}{S} = \varphi_2(k) D, \quad (1.4.1)$$

wobei

$$\varphi_2(k) = \frac{k}{3} (3 - k) \quad (1.4.2)$$

ist.

Wenn wir die zweite Potenz von (1.4.1) durch (1.3.5) teilen, erhalten wir

$$\frac{E^2(l)}{E(F)} = \frac{4}{3\pi} (3 - k) \left[\sqrt{2k - k^2} - (1 - k) \frac{\pi - 2\Theta^*}{4} \right] = \varphi_3(k). \quad (1.4.3)$$

Für einige Werte von k sind in Tafel III die Werte von $\varphi_3(k)$ angeführt. Die Funktion $\varphi_3(k)$ ist im Bild 3 graphisch dargestellt.

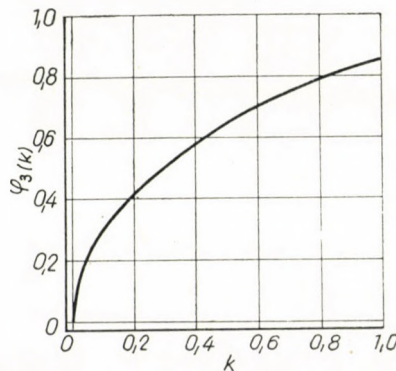


Bild 3. Graphische Darstellung der Funktion $\varphi_3(k)$

Wenn wir für $E(F)$ und $E(l)$ ihre Schätzwerte \bar{F} und \bar{l} einsetzen, die den arithmetischen Durchschnitt einer großen Anzahl von Messungen der

Tafel IIIDie Werte der Funktion $\varphi_3(k)$ IIIa) $k = 0,001-0,099$ je 0,001

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	—	0,0285	0,0403	0,0493	0,0570	0,0637	0,0698	0,0754	0,0806	0,0855
0,01	0,0901	0,0945	0,0987	0,1028	0,1066	0,1104	0,1140	0,1175	0,1210	0,1243
0,02	0,1275	0,1307	0,1338	0,1368	0,1397	0,1426	0,1455	0,1482	0,1510	0,1537
0,03	0,1563	0,1589	0,1615	0,1640	0,1664	0,1689	0,1713	0,1737	0,1760	0,1783
0,04	0,1806	0,1829	0,1851	0,1873	0,1895	0,1916	0,1938	0,1959	0,1980	0,2000
0,05	0,2021	0,2041	0,2061	0,2081	0,2101	0,2120	0,2140	0,2159	0,2178	0,2197
0,06	0,2215	0,2234	0,2252	0,2270	0,2288	0,2306	0,2324	0,2342	0,2360	0,2377
0,07	0,2394	0,2412	0,2429	0,2446	0,2462	0,2479	0,2496	0,2512	0,2529	0,2545
0,08	0,2561	0,2577	0,2593	0,2609	0,2625	0,2641	0,2656	0,2672	0,2688	0,2703
0,09	0,2718	0,2733	0,2749	0,2764	0,2779	0,2794	0,2808	0,2823	0,2838	0,2852

IIIb) $k = 0,10-0,49$ je 0,01

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	0,2867	0,3008	0,3144	0,3274	0,3399	0,3520	0,3637	0,3750	0,3860	0,3967
0,2	0,4071	0,4173	0,4272	0,4369	0,4464	0,4557	0,4647	0,4736	0,4824	0,4909
0,3	0,4993	0,5076	0,5157	0,5236	0,5315	0,5392	0,5467	0,5542	0,5615	0,5687
0,4	0,5758	0,5828	0,5897	0,5964	0,6031	0,6097	0,6162	0,6225	0,6288	0,6350

IIIc) $k = 0,5-0,1$ je

k	$\varphi_3(k)$	k	$\varphi_3(k)$
0,5	0,6411	0,8	0,7870
0,6	0,6974	0,9	0,8213
0,7	0,7458	1,0	0,8488

Schnittflächen F bzw. der Linienschnittlängen l darstellen, dann können wir mit Hilfe der Tafel III und evtl. des Bildes 3 den Wert von k finden, für den

$$\varphi_3(k) = \frac{\bar{l}^2}{\bar{F}} \quad (1.4.4)$$

ist.

Der Wert D ergibt sich aus der Lösung der Gleichung

$$D \approx \frac{3\bar{l}}{k(3-k)} \quad (1.4.5)$$

Die Ermittlung von k und D geht von den Schätzungswerten \bar{F} und \bar{l} aus, deren Bestimmung jedoch sehr mühselig und langwierig ist. Es wird deshalb günstiger sein, andere Stichprobefunktionen zu benutzen. Wenn wir für $D(F)$ und $E(l)$ in (1.4.3) die Ausdrücke $E(F) = \frac{\lambda_V V}{\lambda_A}$, $E(l) = \frac{\lambda_V V}{\lambda_L}$ einsetzen, so erhalten wir

$$\frac{(\lambda_V V) \lambda_A}{\lambda_L^2} = \varphi_3(k). \quad (1.4.6)$$

Nun können wir, wenn wir eine genügend große Fläche der Schliffebene und eine genügende Länge der zufälligen Geraden in Betracht ziehen, den Parameter λ_A mit Hilfe der Durchschnittszahl der Teilchenquerschnitte per Flächeneinheit der Schliffebene n_A und den Parameter λ_L mit Hilfe der Durchschnittszahl der Schnitte per Längeneinheit der zufälligen Geraden n_L schätzungsweise bestimmen.

Den Volumenanteil $\lambda_V V$ können wir mit Hilfe einer der Methoden zur Bestimmung des Phasenanteils, d. i. mit Hilfe der Geraden-, Punkt- resp. Gitteranalyse abschätzen. Bezeichnen wir diese Schätzung mit p .

Die Werte von k und D bestimmen wir dann mit Hilfe der leichter bestimmbaren Größen n_A , n_L , p . Tafel III oder Bild 3 geben den Wert k an, für den

$$\varphi_3(k) \approx \frac{n_A p}{n_L^2} \quad (1.4.7)$$

ist.

D wird durch die Gleichung

$$D \approx \frac{3p}{n_L k(3-k)} \quad (1.4.8)$$

bestimmt.

Es ist also

$$a = kD \approx \frac{3p}{n_L(3-k)}, \quad (1.4.9)$$

und b wird mit Hilfe der Gleichung (1.1.1) bestimmt:

$$b = \sqrt{2aD - a^2} = a \sqrt{\frac{2-k}{k}} \approx \frac{3p}{n_L(3-k)} \sqrt{\frac{2-k}{k}}. \quad (1.4.10)$$

1.5. Die Bestimmung der Teilchenanzahl per Volumeneinheit

Die mittlere Teilchenanzahl per Volumeneinheit der Probe λ_V wird aus der Gleichung (1.1.4) oder (1.1.5) berechnet

$$\lambda_V = \frac{\lambda_A}{E(H)} = \frac{4\lambda_L}{S}. \quad (1.5.1)$$

Wenn wir λ_A bzw. λ_L durch ihre Schätzungswerte n_A bzw. n_L ersetzen, erhalten wir entweder

$$\lambda_V \approx \frac{n_A}{E(H)}, \quad (1.5.2)$$

wo wir für $E(H)$ (1.3.3) einsetzen, oder

$$\lambda_V \approx \frac{4n_L}{S} = \frac{4}{\pi} \frac{n_L}{D^2 k}, \quad (1.5.3)$$

wobei wir für k und D die Lösung von (1.4.7) und die Beziehung (1.4.8) einsetzen.

Die Beziehung (1.5.3) kann dann in der Form von

$$\lambda_V \approx \frac{4}{9\pi} k(3-k)^2 \frac{n_L^3}{p^2} \quad (1.5.4)$$

ausgedrückt werden.

Beispiel 1. Nehmen wir an, daß wir durch Benützung der Punktanalyse zur Bestimmung von p , der Geradenanalyse zur Bestimmung von n_L und durch die Errechnung der Durchschnittszahl der Schnitte per Flächeneinheit der Schnittebene n_A die folgenden Werte gefunden haben:

$$p = 0,475, \quad n_A = 10301,33 \frac{1}{\text{mm}^2}, \quad n_L = 160,69 \frac{1}{\text{mm}}.$$

Der Quotient $\frac{n_A p}{n_L^2}$ ist gleich 0,1895. In Tafel III erhalten wir $k = 0,044$ für $\varphi_3(k) = 0,1895$. Nach (1.4.8) und (1.4.9) ist $D \approx 68,182 \mu$, $a = 0,044 D \approx 3\mu$ und nach (1.4.10) ist $b = a \sqrt{\frac{2-k}{k}} \approx 20 \mu$. Der Quotient $x = \frac{a}{b} \approx 0,15$. Die Schätzung der mittleren Teilchenanzahl per Volumeneinheit λ_V ist nach (1.5.4) $\lambda_V \approx 10^6 \frac{1}{\text{mm}^3}$.

2. Uneinheitliche Teilchengröße

Bisher hatten wir angenommen, daß alle Teilchen der Dispersionsphase von gleicher Größe sind. Die erhaltenen Ergebnisse können dort benützt werden, wo die Streuung der Teilchengröße vernachlässigbar klein ist. Trifft dies

nicht zu, dann wird es notwendig, grundlegende Beziehungen für diesen allgemeinen Fall festzulegen.

2.1. Grundbeziehungen für den Fall uneinheitlicher Teilchengröße

Nehmen wir an, daß Teilchen aller Größen im Volumen der Probe zufällig verteilt und zufällig orientiert sind, so daß der Größenvektor (D, k) bzw. (a, b) und der Winkel θ unabhängige zufällige Veränderliche sind. Bezeichnen wir wiederum mit λ_V, λ_A bzw. λ_L die mittlere Teilchenanzahl per Volumeneinheit der Probe, die mittlere Anzahl der Teilchenschnitte per Flächeneinheit der Schliffebene bzw. die mittlere Anzahl der Querschnitte, die von einer Längeneinheit einer zufälligen Geraden durchschnitten werden. Bezeichnen wir ferner mit $E(S)$ den Mittelwert der Teilchenoberfläche und mit $E(V)$ den Mittelwert des Teilchenvolumens. Es ist dann

$$\lambda_A = \lambda_V E(H), \quad (2.1.1)$$

wo $E(H)$ den Mittelwert der Größe H für den ganzen Teilchengrößenbereich bezeichnet, und

$$\lambda_V E(S) = 4 \lambda_L. \quad (2.1.2)$$

Den Beziehungen (1.1.6) ähnlich sind die Beziehungen:

$$\lambda_V E(V) = \lambda_A E(F) = \lambda_L E(l), \quad (2.1.3)$$

so daß

$$E(F) = \frac{\lambda_V}{\lambda_A} E(V) = \frac{E(V)}{E(H)} \quad (2.1.4)$$

und

$$E(l) = \frac{\lambda_V}{\lambda_L} E(V) = 4 \frac{E(V)}{E(S)} \quad (2.1.5)$$

ist.

Es ergibt sich also die Notwendigkeit, die Mittelwerte der Oberfläche $E(S)$, des Volumens $E(V)$ und der Größe H auszudrücken. Da uns die zwei Gleichungen (2.1.4) und (2.1.5) zur Verfügung stehen, können wir eine Lösung nur dann erzielen, wenn $E(F)$ und $E(l)$ Funktionen höchstens zweier Unbekannten sind.

Die Bildung diskusförmiger Teilchen beginnt allgemein dann, wenn neben der Oberflächenenergie auch elastische Spannungsenergie, die aus dem Unterschied der spezifischen Volumina der ursprünglichen Phase und der neu entstehenden resultieren, in bedeutendem Maße mitwirkt. Ist die Bedingung $b \geq a$ erfüllt, dann ist in Übereinstimmung mit FISHER, HOLLOWAY und TURNBULL [11]

$$x = \frac{a}{b} = \text{konst.}$$

Wenn wir die Teilchengröße durch das Größenpaar $(D, a = kD)$ ausdrücken, dann ist, da x konstant ist, auch $k = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ konstant, so daß die Veränderung der Teilchengröße vollkommen durch die Veränderung der Größe D bestimmt ist. Da wir annehmen, daß Θ und D unabhängige zufällige Veränderliche sind, ist

$$E(H) = \left[\sqrt{2k - k^2} - (1 - k) \frac{\pi - 2\Theta^*}{4} \right] E(D). \quad (2.1.6)$$

Ferner ist

$$E(S) = \pi k E(D^2) \quad (2.1.7)$$

und

$$E(V) = \frac{\pi}{12} k^2 (3 - k) E(D^3), \quad (2.1.8)$$

wo $E(D^v)$ den Mittelwert der v -ten Potenz der zufälligen Veränderlichen D ($v = 1, 2, 3$) bezeichnet. Wenn wir diese Ausdrücke in die Gleichungen (2.1.4) und (2.1.5) einsetzen, erhalten wir

$$E(F) = \varphi_1(k) \frac{E(D^3)}{E(D)} \quad (2.1.9)$$

und

$$E(l) = \varphi_2(k) \frac{E(D^3)}{E(D^2)}, \quad (2.1.10)$$

wobei $\varphi_1(k)$ und $\varphi_2(k)$ die gleichen Ausdrücke wie im Falle der Teilchen einheitlicher Größe darstellen. Aus diesen zwei Gleichungen erhalten wir eine Lösung nur dann, wenn entweder die Quotienten $\frac{E(D^3)}{E(D)}$ und $\frac{E(D^3)}{E(D^2)}$ Funktionen einer Unbekannten (eines Parameters) sind — die zweite Unbekannte ist k — oder sie sind Funktionen zweier Parameter, wobei k , das unabhängig von diesen Gleichungen bestimmt werden kann, bekannt ist.*

Beim Studium der Größenverteilungsform gleichachsiger Teilchen, stellen verschiedene Autoren fest, daß diese Verteilung unsymmetrisch sei. Wir werden die gleiche Voraussetzung auch für unsere Veränderliche D (der Durchmesser zweier gleich großer Kugeln, die einander durchdringen) in Betracht ziehen. Wir sind uns dabei der Notwendigkeit bewußt, diese Voraussetzung für diskusförmige Teilchen, deren Dimensionen $b \gg a$ sind, zu überprüfen. Damit werden wir uns jedoch in dieser Arbeit nicht befassen.

* Z. B. FISHER, HOLLOMON und TURNBULL [11] berechneten den Wert von $x = \frac{a}{b}$ für Martensit eines 3prozentigen Chromstahls. Der Wert schwankt im Bereich von 0,084–0,128 in Abhängigkeit vom Kohlenstoffgehalt, der sich innerhalb der Grenzen von 0,08%–1,28% bewegte.

Von den unsymmetrischen Verteilungen der zufälligen Veränderlichen D werden zwei Typen betrachtet werden. Im Falle, wo die Quotienten $\frac{E(D^3)}{E(D)}$ und $\frac{E(D^3)}{E(D^2)}$ von einem Parameter abhängig sind, ist es die Maxwell'sche Verteilung, im Falle, wo diese von zwei Parametern abhängig sind, ist es die logarithmisch-normale Verteilung.

2.2. Voraussetzung der Maxwell'schen Verteilung

Die Mittelwerte der Potenzen der Veränderlichen D , die der Maxwell'schen Dichtefunktion

$$f(D) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{D^2}{\beta^3} e^{-\frac{D^2}{2\beta^2}} \quad D > 0 \quad (2.2.1)$$

mit dem Parameter $\beta > 0$ folgt, sind

$$E(D) = \beta \sqrt{\frac{8}{\pi}}, \quad (2.2.2)$$

$$E(D^2) = 3\beta^2, \quad (2.2.3)$$

$$E(D^3) = 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta^3. \quad (2.2.4)$$

Durch Einsetzen in (2.1.9) und (2.1.10) erhalten wir

$$E(F) = 4 \varphi_1(k) \beta^2 \quad (2.2.5)$$

$$E(l) = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi_2(k) \beta, \quad (2.2.6)$$

so daß wir nach Ersetzen von $E(F)$ und $E(l)$ durch ihre Schätzwerte \bar{F} und \bar{l} oder bei Benützung der Größen n_A , n_L , p erhalten:

$$\varphi_3(k) \approx \frac{9\pi}{32} \frac{\bar{l}^2}{\bar{F}} \approx \frac{9\pi}{32} \frac{n_A p}{n_L^2}. \quad (2.2.7)$$

Durch Lösung dieser Gleichung erhalten wir den Wert von k .

Der Parameter β wird durch die Gleichung (2.2.6) bestimmt:

$$\beta \approx \frac{9}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{k(3-k)} \approx \frac{9}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p}{n_L k(3-k)}. \quad (2.2.8)$$

Der Mittelwert der zufälligen Veränderlichen D ist dann

$$E(D) = \beta \sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx \frac{9}{4} \frac{\bar{l}}{k(3-k)} \approx \frac{9}{4} \frac{p}{n_L k(3-k)}, \quad (2.2.9)$$

und ihre Streuung ist

$$V^2(D) = \beta^2 \frac{3\pi - 8}{\pi}. \quad (2.2.10)$$

Wir erhalten also als Standardabweichung $V(D)$

$$V(D) \approx \frac{9}{8} \sqrt{\frac{3\pi - 8}{2}} \frac{\bar{l}}{k(3-k)} \approx \frac{9}{8} \sqrt{\frac{3\pi - 8}{2}} \frac{p}{n_L k(3-k)}. \quad (2.2.11)$$

Die Mittelwerte der zufälligen Veränderlichen a und b sind

$$E(a) = kE(D), \quad (2.2.12)$$

$$E(b) = E(D)\sqrt{2k - k^2}. \quad (2.2.13)$$

Die Standardabweichungen der Veränderlichen a und b sind

$$V(a) = kV(D), \quad (2.2.14)$$

$$V(b) = V(D)\sqrt{2k - k^2}. \quad (2.2.15)$$

Die mittlere Teilchenanzahl per Volumeneinheit ist

$$\lambda_V = \frac{4\lambda_L}{E(S)} \approx \frac{512}{243\pi^2} k(3-k)^2 \frac{n_L^3}{p^2}. \quad (2.2.16)$$

Da wir mit Hilfe der Gleichung (2.2.8) den Schätzungswert des Verteilungsparameters β erhalten haben, können wir nun den Anteil oder die Anzahl der Teilchen im Volumen des Probestückes mit dem Wert D in einem bestimmten Intervall $D_1 < D < D_2$ (d. h. $\frac{D_1}{k} < a < \frac{D_2}{k}$) bestimmen. Der Teilchenanteil im Volumen der Probe mit dem Wert $D_1 < D < D_2$ ist gleich

$$F(D_1, D_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta^3} \int_{D_1}^{D_2} D^2 e^{-\frac{D^2}{2\beta^2}} dD, \quad (2.2.17)$$

und die Teilchenanzahl per Volumeneinheit mit dem Wert D in diesem Intervall ist

$$\lambda_V F(D_1, D_2). \quad (2.2.18)$$

Beispiel 2. Betrachten wir die Werte n_A, n_L, p des 1. Beispiels. Es ist dann $\varphi_3(k) \approx \frac{9\pi}{32} \frac{n_A p}{n_L^2} = 0,1674$. Durch Interpolation in Tafel III finden wir $k = 0,0344$. Mit Hilfe der Gleichungen (2.2.8) bis (2.2.16) finden wir den Verteilungsparameter $\beta \approx 40,86 \mu$, als auch den Mittelwert und die Standardabweichung der Größe D : $E(D) \approx 65,20 \mu$, $V(D) \approx 27,51 \mu$, so daß die Mittelwerte und Standardabweichungen der Größen a und b gleich $E(a) \approx 2,24 \mu$, $V(a) \approx 0,95 \mu$, $E(b) \approx 16,95 \mu$, $V(b) \approx 7,15 \mu$ sind. Die mittlere Teilchenanzahl per Volumeneinheit $\lambda_V \approx 1,19 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{mm}^3}$.

2.3. Voraussetzung der logarithmisch-normalen Verteilung

Die Mittelwerte der Potenzen der Veränderlichen D , die die logarithmisch-normale Dichtefunktion

$$f(D) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(\lg D - \lg \xi)^2}{2\sigma^2}} \quad D > 0 \quad (2.3.1)$$

mit den Parametern $\xi > 0$ und $\sigma > 0$ aufweist, sind:

$$E(D) = \xi e^{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad (2.3.2)$$

$$E(D^2) = \xi^2 e^{2\sigma^2} \quad (2.3.3)$$

$$E(D^3) = \xi^3 e^{9\sigma^2} \quad (2.3.4)$$

Durch Einsetzen in (2.1.9) und (2.1.10) erhalten wir:

$$E(F) = \varphi_1(k) \xi^2 e^{4\sigma^2}, \quad (2.3.5)$$

$$E(l) = \varphi_2(k) \xi e^{\frac{5}{2}\sigma^2}. \quad (2.3.6)$$

Da wir k kennen, erhalten wir durch Lösung dieser zwei Gleichungen die Werte der Parameter ξ und σ . Wenn wir $E(F)$ und $E(l)$ durch ihre Schätzwerte \bar{F} und \bar{l} ersetzen und wenn wir ferner die Größen n_A, n_L, p benutzen, dann wird

$$\xi = \frac{[\varphi_2(k)]^4}{[\varphi_1(k)]^2} \frac{\bar{F}^{\frac{5}{2}}}{l^4} \approx \frac{[\varphi_2(k)]^4}{[\varphi_1(k)]^2} \frac{n_L^4}{p^{\frac{3}{2}} n_A^{\frac{5}{2}}}, \quad (2.3.7)$$

$$e^{\sigma^2} \approx \frac{\varphi_1(k)}{[\varphi_2(k)]^2} \frac{\bar{l}^2}{\bar{F}} \approx \frac{\varphi_1(k)}{[\varphi_2(k)]^2} \frac{n_A p}{n_L^2}. \quad (2.3.8)$$

Nun können wir die Mittelwerte der Veränderlichen D , a und b bestimmen

$$E(D) \approx \frac{[\varphi_2(k)]^3}{[\varphi_1(k)]^2} \frac{\bar{F}^2}{l^3} \approx \frac{[\varphi_2(k)]^3}{[\varphi_1(k)]^2} \frac{n_L^3}{n_A^2 p}, \quad (2.3.9)$$

$$E(a) = kE(D)$$

$$E(b) = \sqrt{2k - k^2} E(D).$$

Die Standardabweichungen dieser Veränderlichen sind:

$$V(D) = E(D) \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \approx \frac{[\varphi_2(k)]^3}{[\varphi_1(k)]^2} \frac{\bar{F}^2}{\bar{l}^3} \sqrt{\frac{\varphi_1(k)}{[\varphi_2(k)]^2} \frac{\bar{l}^2}{\bar{F}} - 1} \quad (2.3.10)$$

$$\approx \frac{[\varphi_2(k)]^3}{[\varphi_1(k)]^2} \frac{n_L^3}{n_A^2 p} \sqrt{\frac{\varphi_1(k)}{[\varphi_2(k)]^2} \frac{n_A p}{n_L^2} - 1}$$

$$V(a) = k V(D)$$

$$V(b) = \sqrt{2k - k^2} V(D).$$

Die mittlere Anzahl der Teilchen per Volumeneinheit der Probe ist

$$\lambda_V = \frac{4\lambda_L}{\pi k \xi^2 e^{2\sigma^2}} \approx \frac{4}{\pi k} \frac{[\varphi_1(k)]^3}{[\varphi_2(k)]^4} \frac{n_A^3 p}{n_L^3}. \quad (2.3.11)$$

Die mit Hilfe der Gleichungen (2.3.7) und (2.3.8) erhaltenen Parameter ξ und σ können wir wiederum zur Berechnung des Anteils oder der Anzahl der Teilchen mit dem Wert D im bestimmten Intervall $D_1 < D < D_2$ benutzen. Der Anteil ist gleich

$$F(D_1, D_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{D_1}^{D_2} \frac{1}{D} e^{-\frac{(\lg D - \lg \xi)^2}{2\sigma^2}} dD, \quad (2.3.12)$$

und die Anzahl per Volumeneinheit ist

$$\lambda_V F(D_1, D_2). \quad (2.3.13)$$

Die Werte von $F(D_1, D_2)$ können mit Hilfe der Distributionsfunktion normaler Verteilung

$$F(D_1, D_2) = \Phi \left[\frac{\lg D_2 - \lg \xi}{\sigma} \right] - \Phi \left[\frac{\lg D_1 - \lg \xi}{\sigma} \right] \quad (2.3.14)$$

berechnet werden, wobei

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (2.3.15)$$

Diese Funktionswerte sind in Tabellen angegeben, siehe z. B. [12].

Beispiel 3. Betrachten wir die Werte n_A, n_L, p des Beispiels 1 und setzen wir voraus, daß der Quotient $x = \frac{a}{b}$ bekannt und gleich 0,1323 ist. Dann ist $k = 0,0344$. Der Mittelwert und die Standardabweichung der Größe D sind dann $E(D) \approx 67,92 \mu$, $V(D) \approx 24,61 \mu$, so daß die Mittelwerte und die Standardabweichungen der Größen a und b gleich $E(a) \approx 2,34 \mu$, $V(a) \approx 0,85 \mu$, $E(b) \approx 17,66 \mu$, $V(b) \approx 6,40 \mu$ sind. Die mittlere Teilchenanzahl per Volumeneinheit der Probe $\lambda_V \approx 1,14 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{mm}^3}$. Die mit Hilfe der Gleichungen (2.3.7) und (2.3.8) gewonnenen Schätzungen der Parameter der logarithmisch-normalen Verteilung sind $\xi \approx 63,86 \mu$, $\sigma \approx 0,351$. Mit ihrer Hilfe können wir dann den Teilchenanteil mit dem Wert a (bzw. D) in einem gewählten Intervall abschätzen. Wir wollen z. B. den Teilchenanteil im Raum der Probe für die $a < 2,5 \mu$ abschätzen. Dieser Anteil ist gleich dem Teilchenanteil mit dem Werte D im Intervall von $0 < D < \frac{2,5 \mu}{k} = 72,674 \mu$. Nach (2.3.14) ist

$$F(0; 72,674) = \Phi \left[\frac{\lg 72,674 - \lg 63,86}{0,351} \right] - \Phi(-\infty) = \Phi(0,368).$$

In den Tabellen [12] finden wir $\Phi(0,368) = 0,6436$. Die Schätzungswerte der Teilchen per Volumeneinheit der Probe mit dem Größenwert a im Intervall von $0 < a < 2,5 \mu$ ist dann $\lambda_V \Phi(0,368) \approx 0,73 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{mm}^3}$.

SCHRIFTTUM

1. WICKSELL, S. D., *Biometrika*, **17** (1925) 84.
2. SCHEIL, E., *Zeitschrift für Metallkunde*, **27** (1935) 199.
3. SALTYKOW, S. A., *Savodskaja Laboratorija*, **15** (1949) 1317.
4. HULL, F. C., R. A. COLTON, R. F. MEHL, *Trans. AIME*, **150** (1942) 185.
5. MAZANEC, K., ČADEK, J., *Hutnické listy*, **12** (1957) 492.
6. FULLMANN, R. L., *Journal of Metals*, **5** (1953) 447.
7. FULLMANN, R. L., *Journal of Metals*, **5** (1953) 1267.
8. SALTYKOW, S. A., *Savodskaja laboratorija*, **12** (1946) 816.
9. SMITH, C. S., GUTTMAN, L., *Journal of Metals*, **5** (1953) 81.
10. BRIGGS, L. J., LOWAN, A. N., *Tables of arcsin x*, Columbia University Press, New York, 1945.
11. FISHER, J. C., HOLLOWAY, J. H., TURNBULL, D., *Journal of Metals*, **1** (1949) 691.
12. PEARSON, E. S., HARTLEY, H. O., *Tables for Statisticians*, vol. I. Cambridge, 1956.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Aufgabe der Bestimmung der Anzahl jener Teilchen der Dispersionsphase, die die Form rotierender Diskusse haben. Die Größe der Rotationsdiskusse ist charakterisiert durch zwei Dimensionen, nämlich D und $a = kD$, bzw. a und $b = a \sqrt{\frac{2-k}{k}}$. Es wird angenommen, daß die Teilchen im Raum des Probestückes zufällig verteilt und auch zufällig orientiert sind. Die Raumdimensionen der Teilchen und ihre Anzahl per Volumeneinheit der Probe λ_V wird mit Hilfe der Durchschnittszahl der Querschnitte per Flächeneinheit der Schliffebene n_A , der Schätzung p des Volumenanteils der Phase und der durchschnittlichen Anzahl der Querschnitte per Längeneinheit einer durch die Schliffebene zufällig geführten Geraden n_L bestimmt. Die Raumdimensionen und λ_V können auch mit Hilfe der Durchschnittsflächen der Querschnitte \bar{F} und der durchschnittlichen Länge der Linienschnitte \bar{l} bestimmt werden.

Zuerst wird der Fall betrachtet, in dem alle Teilchen einheitliche Größe besitzen. Der Fall nichteinheitlicher Teilchengröße wird für $b \geq a$ und k konstant durchgeführt, so daß die Teilchengröße vollkommen durch den Wert D (bzw. a) bestimmt wird. Für den Fall, wo k

unbekannt ist, wurde die Berechnung unter der Voraussetzung durchgeführt, daß D der Maxwellschen Verteilung folgt; für bekanntes k wurde die logarithmisch-normale Verteilung der Veränderlichen D vorausgesetzt.

Die Ergebnisse dieser Arbeit können für Messungen der kinetischen Parameter der Bainit- und Martensitreaktionen verwendet werden.

METHOD TO DETERMINE NUMBER AND SIZE OF DISC SHAPED PARTICLES OF THE DISPERSION PHASE

J. LIKEŠ, J. ČADEK and K. MAZANEC

SUMMARY

The aim of the present paper is to determine the amount of dispersion phase particles having rotary disc shapes. The size of rotary discs is characterized by two dimensions, viz.

D and $a = kD$, resp. a and $b = a \sqrt{\frac{2-k}{k}}$. The random dispersion of these particles should be assumed to be present in the sample body, as well as their random orientation. The spacial dimensions of the particles and their number λ_V per unit volume of the sample is determined by the average number of cross sections n_A per unit area of the polished surface, the estimated volume fraction of the phase p and the average number of the cross sections n_L per unit line passed at random through the polished surface. The spacial dimensions and λ_V may be also determined by means of the average area surfaces of the cross sections \bar{F} and of the average length of the line intersections \bar{l} .

First the case is considered, in which all particles have uniform sizes. The case of non-uniform particle sizes is treated for $b \gg a$ and k constant, thus the particle size is completely determined by the value D (or a resp.). For k unknown it was assumed, that D followed Maxwell's distribution law; for k known the logarithmic normal distribution of the variable D was assumed.

The results of this paper may serve for measurements of the kinetic parameters of bainith and martensite reactions.

MÉTHODE POUR LA DÉTERMINATION DU NOMBRE ET DE LA GRANDEUR DES PARTICULES DISCOÏDES DE LA PHASE DE DISPERSION

J. LIKEŠ—J. ČADEK—K. MAZANEC

RÉSUMÉ

L'étude examine le problème de la détermination du nombre des particules discoïdes de la phase de dispersion. La grandeur des disques en rotation est caractérisée par deux dimen-

sions, à savoir par D et $a = kD$, resp. a et $b = a \sqrt{\frac{2-k}{k}}$. On suppose que les particules sont distribuées et orientées au hasard dans la masse de l'éprouvette. On détermine les dimensions spatiales des particules, ainsi que leur nombre λ_V par unité de volume de l'essai, à l'aide du nombre moyen des sections n_A par unité de surface du plan de polissage, et à l'aide de l'estimation p du pourcentage de volume de la phase, ainsi que du nombre moyen des sections n_L par unité de longueur d'une droite menée au hasard sur le plan de polissage. Les dimensions spatiales, ainsi que λ_V peuvent être également déterminés à l'aide de surfaces transversales des sections \bar{F} et de la longueur moyenne des sections de lignes \bar{l} .

On considère d'abord le cas, où toutes les particules ont la même grandeur. Le cas de grandeurs différentes des particules est examiné pour $b \gg a$ et $k = \text{const.}$, où l'on détermine entièrement la grandeur des particules par la valeur D (resp. a). Pour le cas où k est inconnu, on a établi le calcul en supposant que D suit la distribution de Maxwell; pour le cas de k connu, on a supposé une distribution logarithmique-normale de la variable D .

Les résultats de l'étude peuvent être utilisés pour les mesures des paramètres cinétiques des réactions bainitiques et martensitiques.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА И РАЗМЕРОВ ДИСКООБРАЗНЫХ
ЧАСТИЦ ДИСПЕРСИОННОЙ ФАЗЫ

Й. ЛИКЕШ, Й. ЧАДЕК и К. МАЗАНЕЦ

РЕЗЮМЕ

В работе решается задача определения количества частиц дисперсионной фазы, имеющих форму ротационных дисков, величина которых определяется двумя размерами, а именно D и $a = kD$ или a и $b = a \sqrt{\frac{2-k}{k}}$. Предполагается, что частицы в пространстве размещены и ориентированы случайно. Пространственные размеры частиц λ_V в единице объёма определяются при помощи среднего количества сечений n_A в единице площади плоскости шлифа, оценки p объемной доли фазы и среднего количества сечений n_L на единицу длины случайно проведенной в плоскости шлифа прямой.

Пространственные размеры и λ_V можно выразить также и при помощи средней площади сечений \bar{F} и средней длины отрезков \bar{l} .

Сначала обсуждается случай, когда все частицы имеют равную величину. Для случая частиц различной величины дано решение при условии, что $b \gg a$ и k — постоянная, так что величина частиц полностью определена значением D (или a). Для случая, когда k — неизвестна, дано решение в предположении, что D следует распределению Максвелла; для известного k обсуждается случай, предполагающий логарифмически-нормальное распределение переменной D .

Результаты предлагаемой работы могут быть использованы для измерения кинетических параметров бейнитной и мартенситной реакций.

PESAGE DES CHARGES DE ROUES DES VÉHICULES DE CHEMIN DE FER A DEUX ESSIEUX

P. KERESZTY

ATELIERS MÁV DE DUNAKESZI

[Manuscrit présenté le 8 septembre 1960]

I. Introduction

Les défauts d'un véhicule qui peuvent contribuer à son déraillement (ressorts inégaux, caisse gauchie, etc. . .), se révèlent déjà ordinairement par l'inégalité des charges de roues. Le contrôle par pesage des charges de roues semble donc être une méthode de *contrôle global* relativement facile à effectuer sur le véhicule déjà achevé. Ce mode de contrôle figure parmi les prescriptions des Chemins de fer des Pays-Bas [1],* et les Normes des Che-

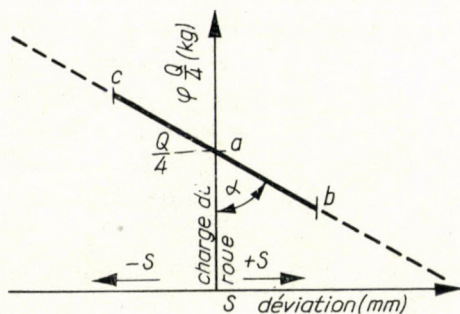


Fig. 1

mins de fer de l'État Hongrois prescrivent, à leur tour, le pesage des charges de roues des véhicules déraillés, à leur sortie de l'atelier [2].

Depuis l'entrée en vigueur de ces normes, il est apparu qu'il y avait des constructions où la tolérance maximum de $\pm 10\%$, admise par la norme pour la charge de roue moyenne de l'essieu monté, n'a pas pu être respectée, bien que le véhicule fût d'ailleurs sans défaut apparent. De telles difficultés s'étant rencontrées surtout chez les wagons-citernes rigides, il paraissait probable que l'anomalie était due à la rigidité au gauchissage du véhicule. Mais d'autre côté, plusieurs pesages des charges de roues d'un même véhicule ont parfois donné, pour la même roue, des charges très différentes, bien qu'aucune modi-

* Les chiffres arabes entre parenthèses renvoient à la bibliographie présentée à la fin de l'étude.

fication n'ait été effectuée sur le véhicule entre les pesages. Il a donc paru certain que les frottements internes de la caisse et des ressorts à lames devaient contribuer, dans une grande mesure, à produire cette différence essentielle entre les charges de roues. C'est ce qui a rendu nécessaire une étude théorique de la charge de roue des véhicules, tenant compte des frottements mentionnés.

Pour les véhicules à deux et à plusieurs essieux, nous avons déjà établi dans une étude antérieure, en quelle mesure la charge de la roue se trouve modifiée si on abaisse une roue d'une valeur de déviation S . Rappelons ici que les points d'appui de trois roues du véhicule forment un plan, et c'est la distance mesurée entre ce plan et le point d'appui de la quatrième roue qui a été appelée «déviation» dans notre étude [3]. Les autres constatations de celle-ci sont supposées connues et utilisées par la suite. D'après ces résultats, la charge de roue dépend linéairement de la déviation, suivant la figure 1.

Sur cette figure, nous avons supposé la construction et la charge entièrement symétriques, de sorte que chaque roue y reçoit une fraction $Q/4$ du poids brut Q du véhicule. Ceci n'est vrai, évidemment, que si la voie sur laquelle se trouve placé notre véhicule est parfaitement plane, c'est-à-dire si les points d'appui des quatre roues sont situés sur le même plan. Si par contre, la voie constituée par deux files de rails forme deux droites *divergentes*, ce qui équivaut à l'abaissement de la file de rail supportant l'une des roues, d'une valeur de déviation S , alors la charge diminuera sur cette roue, parce que le véhicule subira un gauchissage de valeur S . Par suite de la symétrie diagonale, la roue située en opposition sur la même diagonale aura une décharge identique, tandis que la charge des deux roues situées sur l'autre diagonale du véhicule augmentera de la même valeur.

La charge de roue du véhicule placé sur une déviation de valeur S sera donc $\varphi \frac{Q}{4}$, tandis que celle des deux roues de l'autre diagonale aura une valeur de $(2 - \varphi) \frac{Q}{4}$. Dans les études [3] et [4], il a été démontré qu'en cas de ressorts de caractéristique linéaire, la relation entre $\varphi \frac{Q}{4}$ et S reste linéaire même en cas d'une charge asymétrique. Dans ces études, les ressorts aussi bien que le gauchissage de la caisse du véhicule ont été supposés sans frottement. A présent, notre but est de déterminer la relation entre la charge de roue et le gauchissage des véhicules chargés de frottements.

II. Frottements

Les ressorts de suspension des véhicules à deux essieux sont quasi exclusivement des ressorts à lames, qui ont toujours des frottements internes. Il s'ensuit que les courbes caractéristiques de la charge et de la décharge ne

coïncident pas dans le diagramme force—fléchissement du ressort, mais circonscrivent une certaine surface [5 et 6]. Ce diagramme est appelé aussi cycle d'hystérésis du ressort à lames.

Les lignes obliques de la charge et de la décharge, donnant des flexibilités quelques peu différentes, sont désignées par f_i , celle de la décharge étant, en plus, affectée d'une virgule. Les distances verticales entre les deux droites obliques correspondent au frottement interne dans le ressort à lames.

En vue de la simplification, nous considérerons, par la suite, au lieu de cette caractéristique réelle arrondie du ressort, un diagramme force—fléchissement simplifié à angles vifs, visible sur la figure 3.

La seule différence que ce diagramme simplifié présente par rapport au diagramme réel, est que le passage vertical entre les deux droites obliques

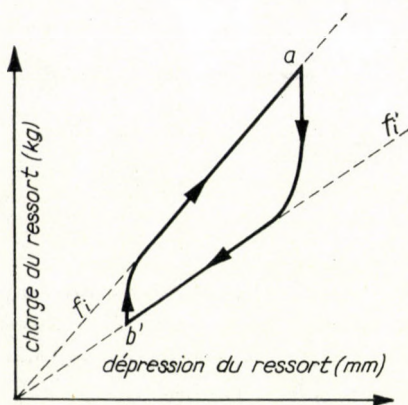


Fig. 2

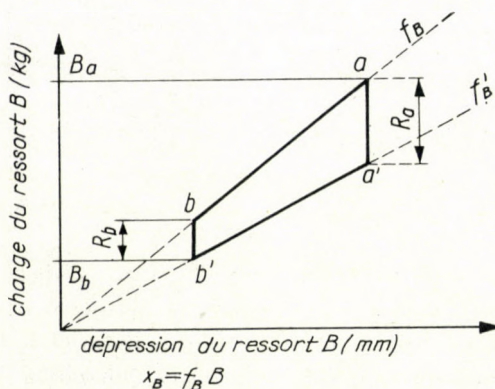


Fig. 3

n'est pas arrondi. (Ainsi, en appliquant une charge progressive on arrive, sur la ligne f_i , au point a , et si on décharge ensuite le ressort, il faut vaincre d'abord le frottement R_b pour qu'en arrivant au point a' l'abaissement du ressort ait lieu suivant la ligne f'_i . En arrivant au point b' , et passant à nouveau brusquement de la décharge à la charge, on arrive au point b en vaincant d'abord le frottement vertical R_b , et ce n'est qu'à partir du point b que la flèche de notre ressort diminuera selon la ligne f_i . En cas de f_i et f'_i donnés, on peut, pour n'importe quelle charge du ressort — correspondant au point a par exemple — calculer le frottement R_a appartenant à l'inversion de la charge. Naturellement, on peut calculer de même le frottement R_b appartenant au point b' par exemple.

Pour le gauchissage de la caisse, on utilisera un diagramme de gauchissage simplifié de la même manière, suivant le figure 4. L'abscisse donne la tangente de l'angle de torsion de la caisse, l'ordonnée indique le moment gauchissant la caisse. Dans la surface circonscrite par les deux lignes obliques du diagramme,

les sections de lignes $M - M' = M_u$ appartenant à la même valeur de $\text{tg } \varepsilon$ signifient le moment du frottement interne de la caisse. En divisant le moment par les distances d'appui des ressorts, on reçoit la force de frottement R_u agissant dans l'axe des ressorts, qu'il faut d'abord vaincre pour pouvoir gauchir la caisse.

$$R_u = \frac{M_u}{b}$$

Ce diagramme représente donc aussi la force de frottement R_u , si l'on choisit convenablement l'échelle de cette dernière.

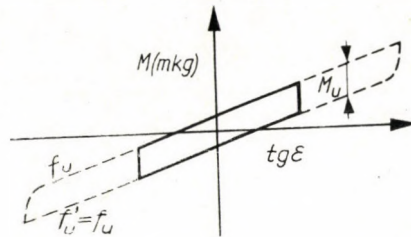


Fig. 4

A présent, les valeurs numériques des différents frottements doivent nous intéresser à leur tour. Sur le frottement interne des *ressorts*, on trouve des données détaillées dans le manuel de Hütte [4]. Mais il ne faudra pas oublier que toutes ces données se rapportent à des ressorts neufs. D'après notre expérience, des frottements bien plus grands (de valeur double, et même triple) peuvent se produire en service. Quant aux frottements de la *caisse*, on ne trouve presque pas de données dans la littérature [7]. Il peut être toutefois rassurant de constater, d'après ces quelques données et nos propres mesures, que le frottement interne de la caisse est d'une valeur inférieure à celle du frottement des ressorts.

III. Diagramme charge de roue — gauchissage du véhicule

Revenons à présent à notre véhicule de construction entièrement symétrique, dont les ressorts soient encore parfaitement identiques, mais cette-fois-ci chargés de frottement.

Dans la voie où se trouve placé notre véhicule, augmentons la déviation (S) sous de la roue appartenant au ressort B , c'est-à-dire abaissons le rail au-dessous d'elle. Le ressort B sera alors déchargé dans la même mesure que l'autre ressort (D) situé sur la *même* diagonale. En revanche, les ressorts A et C sur l'*autre* diagonale du véhicule supporteront une charge augmentée de la

même valeur. Cette situation ne se produit d'ailleurs que chez des véhicules chargés tout à fait symétriquement.

Nous avons vu plus haut que la courbe de «charge» et la courbe de «décharge» du même ressort diffèrent entre elles en raison du frottement. C'est pourquoi, en continuant à analyser la relation existant entre la déviation

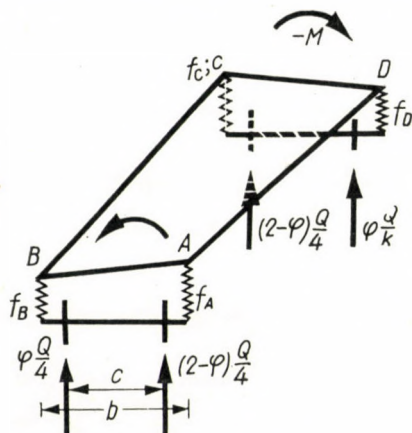


Fig. 5

et la décharge de la roue, il nous faudra partir d'une relation qui caractérise un véhicule s'appuyant sur quatre ressorts de flexibilité différente ($f_A - f_B - f_C - f_D$). A l'annexe IV de l'étude déjà citée, on trouvera une déduction détaillée, d'après laquelle la décharge spécifique de la roue est (avec les notations adoptées dans l'étude en question):

$$\varphi = 1 - \frac{2m}{t} \frac{P}{Q} \frac{\frac{b}{c} \frac{2m}{t} P(f_A - f_B - f_C + f_D) + \frac{2o}{c} P(2f_C + 2f_D + \psi)}{(f_A + f_B + f_C + f_D + \psi) Q}$$

$$\frac{4 \frac{b}{c} w_0 + 4 \left(\frac{b}{c}\right)^2 S - 4 \frac{o}{c} \frac{m}{t} \psi P - \frac{b}{c} P(f_A - f_B + f_C - f_D)}{(f_A + f_B + f_C + f_D + \psi) Q}$$

« ψ » étant ici le facteur spécifique de gauchissage de la caisse. Soulignons à nouveau que notre examen se portera sur des véhicules de construction et à charge parfaitement symétriques, pour pouvoir mieux éclaircir l'influence des principaux facteurs. Mais comme l'étude mentionnée comporte aussi des formules valables pour les dispositions asymétriques, on pourra calculer, au besoin, le comportement du véhicule même dans ce dernier cas.

Dans la formule ci-dessus, les facteurs «*m*» et «*o*» signifiant l'excentricité de la charge sont, en cas d'une disposition symétrique, égaux à zéro, de même que «*v*» signifiant le gauchissage original de la caisse. Les termes contenant ces facteurs s'élimineront donc de notre formule.

Aussi, pour les véhicules de construction et à charge symétriques, notre formule ci-dessus pourra-t-elle s'écrire sous la forme beaucoup plus simple:

$$\varphi = 1 - \frac{4 \left(\frac{b}{c}\right)^2 S - \frac{b}{c} P (f_A - f_B + f_C - f_D)}{(f_A + f_B + f_C + f_D + \psi) Q} \quad (\text{I})$$

Entre la décharge de roue $\frac{Q}{4} (1 - \varphi)$ et la déviation S de la voie par rapport au plan, la relation est, ici encore, linéaire. La tangente de direction formée par l'ordonnée et la caractéristique droite, peut être aisément déterminée de deux points de cette dernière:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{S_i - S_{i-1}}{(1 - \varphi_i) \frac{Q}{4} - (1 - \varphi_{i-1}) \frac{Q}{4}}; \\ \frac{Q}{4} [(1 - \varphi_i) - (1 - \varphi_{i-1})] &= \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2 (S_i - S_{i-1})}{f_A + f_B + f_C + f_D + \psi}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \left(\frac{c}{b}\right)^2 (f_A + f_B + f_C + f_D + \psi) \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Notre but est de déterminer, par le calcul, les charges de roues de véhicules construits avec des ressorts chargés de frottements, pour différents cas de déviation. Armés des résultats de nos examens précédents, nous pouvons maintenant tenter la solution du problème. Mais systématisons d'abord les constatations que nous avons faites:

a) On étudie un véhicule parfaitement symétrique, où les charges des deux roues et des deux ressorts situés sur l'une des diagonales du véhicule sont toujours identiques. Comme, en outre, la charge $\frac{Q}{2}$ du même essieu monté est invariable, la charge de l'une des roues de l'essieu va décroître dans la mesure où celle de l'autre roue augmente.

b) Toute variation de V kg de la charge de roue modifiera de $\frac{c}{b} V$ kg la charge du ressort.

c) Tant qu'on travaille sur les lignes obliques de la caractéristique des ressorts, la relation entre la décharge $\frac{Q}{4} (1 - \varphi)$ de la roue et la déviation S

sera linéaire. La tangente de direction de cette ligne est donnée par la formule II.

Partons à présent d'un véhicule supposé suspendu en son centre de gravité, et que l'on laisserait descendre progressivement sur ses quatre ressorts. La hauteur libre de ces quatre ressorts soit égale, mais leur frottement interne soit différent (figure 7). Quand on laisse arriver lentement la caisse sur ces ressorts, les ressorts d'abord déchargés reçoivent une charge de plus en plus grande. Chacun des quatre ressorts travaillera donc sur la branche supérieure de sa caractéristique.

On considère que le véhicule est en position initiale quand il se trouve placé sur une voie parfaitement plane, c'est-à-dire $S_B = 0$. Ainsi, d'après la formule I, on peut déterminer la valeur de la charge de roue $\varphi \frac{Q}{4}$. Sur notre figure, elle correspond au point O .

De la charge de roue calculée, on peut recalculer la charge du ressort B voisin de la roue étudiée, charge qui sera, d'après l'annexe IV de l'étude déjà citée (si $m = 0$ et $o = 0$):

$$B = \frac{P}{4} - (1 - \varphi) \frac{Q}{4} \frac{c}{b} \quad (\text{III})$$

Ici P signifie le poids total suspendu. Par suite de la symétrie, $A + B = C + D = \frac{P}{2}$.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, c'est toujours la diminution (resp. l'augmentation) de charge de la roue voisine du ressort B qui figure dans nos formules, et c'est encore au-dessous de la roue voisine de B que l'on mesurera la déviation S_B , positive quand elle cause la décharge du ressort B , et négative quand elle cause une augmentation de la charge dans ce dernier. Naturellement, par suite de la symétrie diagonale, les déviations de la voie sous la roue D donneront, dans le ressort B , un résultat de même signe. Par contre, la déviation sous les deux roues de la diagonale $A - C$ causera, sur le ressort B , une modification de charge de signe contraire.

Maintenant, abaissons progressivement le rail sous la roue B . Les ressorts B et D se déchargeront, tandis que sur les ressorts A et C , la charge augmentera peu à peu. Sur notre figure 6, nous sommes arrivés au point O en chargeant progressivement les quatre ressorts. Si maintenant la charge des ressorts B et D décroît, il se produira un changement dans la direction de la charge. Nous avons vu qu'il faut, pour cela, vaincre d'abord le frottement interne. Sur la figure 7, représentant les caractéristiques des quatre ressorts, ce stade de l'inversion de charge se trouve illustré par les sections allant du point O au point 1, ces sections étant marquées par une seule flèche. Comme la charge

des ressorts A et C continue à croître progressivement, nous avancerons *de bas en haut* sur la branche de «charge» des caractéristiques de ces deux ressorts, et *de haut en bas* sur la branche de «décharge» des ressorts B et D , après que les frottements R_B , resp. R_D seront vaincus.

Il nous faut encore examiner à part le frottement intérieur de la caisse.

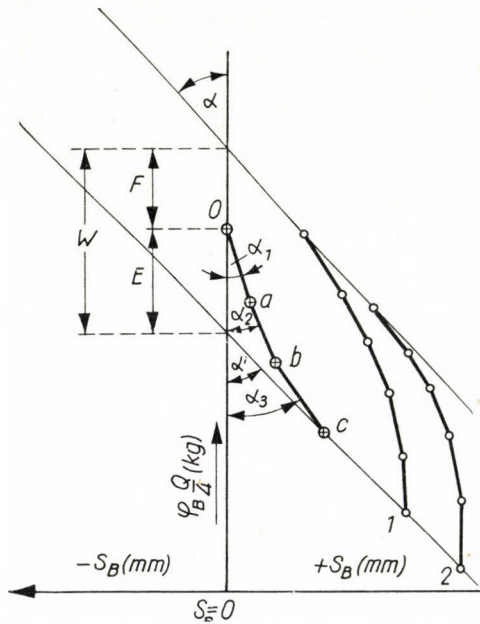


Fig. 6

Celle-ci ne gauchira pas tant que le moment de torsion qui la charge n'aura pas vaincu le frottement interne $\frac{1}{2} R_{ui}$. C'est par suite de la différence des forces de ressort A et B que le moment de torsion se produira dans la caisse, donc

$$M_U = \frac{A - B}{2} b; \quad \frac{M_U}{b} = \frac{A - B}{2}$$

D'après nos constatations précédentes, il nous faudra, en partant du point O de la figure 6, compter avec la flexibilité f_A ; f_C et f'_B ; f'_D des quatre ressorts. Naturellement, on tiendra aussi compte du gauchissage spécifique ψ de la caisse. Ainsi, parmi les frottements, R_B ; R_D et R_{ui} seuls interviendront.

La valeur des deux premiers dépend de la charge de ressort agissant au début du changement de direction. Au point O , où se produit ce changement, le frottement interne peut se calculer facilement suivant la figure 7.

$$x_A = A_0 f_A = (A_0 - R_A) f'_A$$

d'où

$$R_A = A_0 \frac{f'_A - f_A}{f'_A}$$

et de même

$$R_B = B_0 \frac{f'_B - f_B}{f'_B} ; \quad R_C = C_0 \frac{f'_C - f_C}{f'_C} ; \quad R_D = D_0 \frac{f'_D - f_D}{f'_D}$$

Par contre, le frottement de la caisse est d'une valeur constante, comme nous l'avons vu sur la figure 4, de sorte qu'en première approximation, on prend R_{ui}

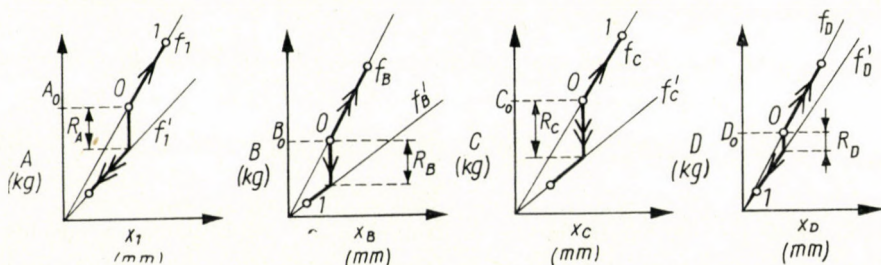


Fig. 7

comme une force donnée de valeur généralement inférieure aux frottements dans les ressorts. (Plus loin, on prendra aussi R_{ui} avec sa valeur effective.) En partant du point O de la figure 6, et en augmentant la déviation S_B , les forces de ressort B et D diminueront progressivement, de sorte que la valeur $(A - B)$ du moment gauchissant la caisse sera plus grande. Mais avant que la force de ressort B diminue au moins à $(B_0 - R_B)$, le ressort B restera rigide, donc $f_B = 0$. De même, le ressort D restera rigide, c'est-à-dire $f_D = 0$, tant que sa charge ne descende au-dessous de la valeur $(D_0 - R_D)$. De la même manière, la caisse ne gauchira pas, tant que $R_{ui} > \frac{A - B}{2}$. Ainsi, sur la figure 6, la tangente de l'angle d'inclinaison de notre caractéristique droite partant du point O sera, suivant la formule II:

$$\text{tg } \alpha_1 = \left(\frac{c}{b} \right)^2 (f_A + 0 + f_C + 0 + 0) = \left(\frac{c}{b} \right)^2 (f_A + f_C)$$

tant qu'on n'aura pas vaincu le plus petit des frottements R_B, R_D et R_{ui} . Soit celui-ci le frottement R_B par exemple, et arrivons ainsi au point a . La valeur de l'ordonnée de ce point sera de $\frac{b}{c} R_B$ plus petite que celle du point O , selon notre constatation précédente. A partir de là, notre caractéristique redevient

droite, mais la tangente de l'angle d'inclinaison de la droite sera déjà

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{c}{b} \right)^2 (f_A + f'_B + f_C)$$

Nous voilà arrivés au point b , où nous supposons avoir juste vaincu le frottement de la caisse. En augmentant de nouveau la déviation de la voie, l'angle d'inclinaison de la droite de notre caractéristique sera donc

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \left(\frac{c}{b} \right)^2 (f_A + f'_B + f_C + \psi)$$

jusqu'au point c , d'où nous continuons par une droite ayant la tangente de direction

$$\operatorname{tg} \alpha' = \left(\frac{c}{b} \right)^2 (f_A + f'_B + f_C + f'_D + \psi) \quad (\text{IV})$$

Si on avait effectué le même essai avec notre véhicule, mais en élevant ($-S_B$) le rail sous la roue B au lieu de l'abaisser ($+S_B$), on serait arrivé alors sur la droite supérieure de la figure 6. Sur les caractéristiques des ressorts, représentées sur la figure 7, on avancerait, dans ce cas, du point O , dans la direction marquée par deux flèches (élévation de la roue B). La tangente de direction de la ligne supérieure de la figure 6 peut être développée par le même raisonnement que ci-dessus. On reçoit ici, comme résultat:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{c}{b} \right)^2 (f'_A + f_B + f'_C + f_D + \psi) \quad (\text{V})$$

Le diagramme charge de roue — gauchissage de notre véhicule sera donc formé de deux droites approximativement parallèles, la tangente de direction de la droite supérieure étant $\operatorname{tg} \alpha$, et celle de la droite inférieure $\operatorname{tg} \alpha'$.

Examinons maintenant un peu plus à fond la partie formée de trois lignes du diagramme de la figure 6, qui part du point O , et que l'on trouve reproduite sur une plus grande échelle par la figure 8. Qu'avons-nous fait jusqu'à présent? Nous avons classé, selon leur grandeur, les frottements R_B , R_{ui} et R_D entrant graduellement en jeu, l'ordre de grandeur ayant déterminé l'angle d'inclinaison de la droite menant jusqu'au point suivant. La valeur de l'ordonnée du point a est de $\frac{b}{c} R_B$ plus petite que celle du point O , tandis que l'ordonnée du point b montre une nouvelle diminution égale à $\frac{b}{c} (R_{ui} - R_B)$ par rapport au point a . De même, l'ordonnée du point c est de $\frac{b}{c} (R_D - R_{ui})$ plus petite

que celle du point b . Nous avons supposé ici, à titre d'exemple, que parmi les trois frottements, R_D présentait la valeur maximum, c'est-à-dire $R_D = R_m$. Sur la figure 8, on connaît la tangente de direction et l'ordonnée des trois sections de lignes, de sorte que la longueur T peut se calculer aisément:

$$T = \frac{b}{c} R_B \left(\frac{c}{b} \right)^2 (f_A + f_C) + \frac{b}{c} (R_{ui} - R_B) \left(\frac{c}{b} \right)^2 (f_A + f'_B + f_C) + \\ + \frac{b}{c} (R_D - R_{ui}) \left(\frac{c}{b} \right)^2 (f_A + f'_B + f_C + \psi)$$

En ordonnant cette expression, et en la complétant encore par $R_D f'_D$, on reçoit:

$$T = \frac{c}{b} [R_m (f_A + f'_B + f_C + f'_D + \psi) - R_B f'_B - R_{vi} \psi - R_D f'_D]$$

L'expression obtenue pour la valeur de T peut aussi s'écrire sous une forme générale, plus simple:

$$T = \frac{b}{c} R_m \operatorname{tg} \alpha' - \frac{c}{b} \sum'_0 R_i f_i \quad (\text{VI})$$

Ici, $\sum'_0 R_i f_i$ signifie la somme des produits dont chaque membre est le produit des frottements à vaincre par la flexibilité leur appartenant. Dans ces produits, il faut faire figurer la flexibilité qui se produit après qu'on a vaincu le frottement interne du ressort.

Déterminons du même coup la valeur de la distance E de la figure 8, car nous en aurons besoin par la suite.

$$E = \frac{b}{c} R_m - \frac{T}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{\frac{c}{b} \sum'_0 R_i f_i}{\operatorname{tg} \alpha'} \quad (\text{VII})$$

Nous recevons de la même manière la valeur de la distance F de la figure 6:

$$F = \frac{\frac{c}{b} \sum_0 R_i f_i}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{VIII})$$

Naturellement, en déterminant ici la valeur de F , nous devons substituer les frottements produits par l'élévation de la roue B , et les flexibilités leur appartenant, c'est-à-dire faire la somme des produits $R_A f'_A$; $R_C f'_C$ et $R_{ui} \psi$.

L'indice de Σ signifie que nous partons du point O ; une virgule dans l'exposant de Σ désigne que l'on va vers la ligne ayant un angle d'inclinaison

α' ; quand Σ ne comporte pas d'exposant, on se dirige vers la ligne d'un angle d'inclinaison α .

Sur la figure 6, nous avons marqué par W la somme de E et de F , somme dont la valeur, réduite des formules VII et VIII, sera:

$$W = E + F = \frac{\frac{c}{b} \sum_0' R_i f_i}{\operatorname{tg} \alpha'} + \frac{\frac{c}{b} \sum_0 R_i f_i}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{IX})$$

Cependant, pour pouvoir considérer les deux droites inscrites sur la figure 6 comme des caractéristiques de la charge de roue—gauchissage de notre

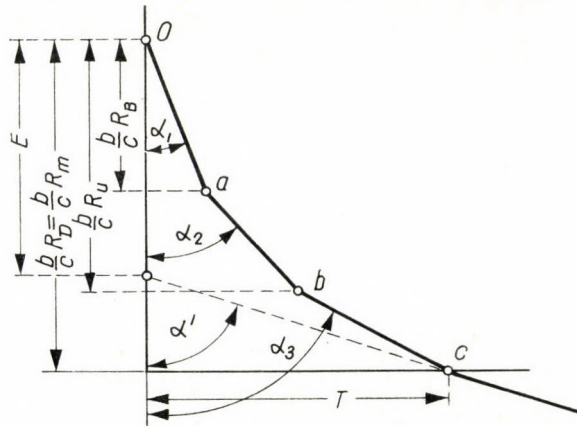


Fig. 8

véhicule, il faut d'abord prouver que ces deux droites auront entre elles une distance toujours identique. Donc si, en passant par exemple le long de la ligne inférieure (c'est-à-dire en diminuant la valeur de S_B), on part soit du point 1, soit du point 2, en provoquant un changement de direction dans la charge des ressorts, notre caractéristique aboutit chaque fois à la même ligne supérieure d'un angle d'inclinaison α . (Notons ici que cette partie de la caractéristique du véhicule, formée de plusieurs sections de ligne, ressemble tellement à la caractéristique des ressorts à lames, qu'il est tout naturel de penser que les frottements entre les extrémités des lames y jouent un rôle analogue à celui des frottements internes des ressorts de notre véhicule, et que la partie d'abord verticale de la caractéristique représentée sur la figure 2, est le résultat de l'entrée en jeu graduelle de ces frottements.)

Démonstration

Pour la vérification nous avons représenté, sur la figure 9, la caractéristique formée de deux droites d'une façon telle, qu'elle diffère légèrement de la

partie inférieure de la figure 6. Nous avons supposé, en effet, sur la figure 9, que lors d'une diminution de la déviation sous la roue *B*, on recevrait, en partant d'abord du point 1, puis du point 2 de la ligne inférieure de la caractéristique, deux lignes supérieures *différentes* (bien que parallèles). La distance verticale de ces deux lignes supérieures a été marquée par la lettre *j*, et nous démontrerons que sa valeur est égale à zéro.

Pour arriver du point 1 au point 2 de la figure, on diminue la charge de roue d'une valeur $\frac{b}{c}\Delta$, donc parmi les quatre ressorts, la charge de *B* et *D* diminuera de Δ , tandis que celle des ressorts *A* et *C* augmentera de la même valeur.

La valeur de *j* peut être écrite suivant la figure 9:

$$j = \frac{b}{c}(R_{m2} - R_{m1} - \Delta) + \frac{U}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (\text{X})$$

et de même, la valeur de *U*:

$$U = T_1 - T_2 + \frac{b}{c}\Delta \operatorname{tg} \alpha' \quad (\text{XI})$$

Ici, les valeurs de T_1 et T_2 peuvent être calculées à l'aide de la formule VI. La valeur des frottements des ressorts peut être également obtenue d'après la figure 10. Nous avons aussi admis, à titre d'exemple, que parmi les cinq frottements à considérer, $R_A = R_m^l$ présente la plus grande valeur. De tout ce qui précède, on peut démontrer, par la déduction de l'Annexe I, que $j = 0$, si les points 1 et 2 ont été choisis de sorte que parmi les cinq frottements internes, ce soit toujours le même qui présente la valeur maximum dans ces points. En supposant que, sur la figure 9, on éloigne progressivement le point 1 du point 2, vers la gauche, alors on arrive à une position du point 1, où $R_{A1} = R_{m1}$ aura, suivant la figure 10, une valeur identique à celle de l'un des frottements de ressorts *B* ou *D* (en diminuant S_B , la charge des ressorts *A* et *C* diminue, et celle des ressorts *B* et *D* augmente). Désignons ce point par 3. Notre démonstration ci-dessus restera évidemment valable pour ce point, c'est-à-dire $j = 0$. Si à présent, on continue à éloigner vers la gauche le point 1, qui coïncidait ici avec le point 3 (figure 9), alors la démonstration de l'Annexe I nous donnera encore le résultat $j = 0$ (mais cette fois-ci pour les points 1—3, au lieu des points 1—2). La seule différence est qu'au lieu du frottement R_A , un autre frottement de ressort présentera maintenant la valeur maximum.

De cette façon, nous pouvons considérer comme démontré, que le *diagramme charge de roue—gauchissage d'un véhicule à deux essieux est constitué par deux droites presque parallèles. De ces deux lignes droites parallèles, la supérieure a un angle d'inclinaison α , et l'inférieure un angle d'inclinaison α' ,*

et à la valeur $S = 0$, leur distance $W = E + F$. En principe, nous avons donc atteint notre but; il nous reste seulement à déterminer les valeurs W , E et F , nécessaires pour tracer la caractéristique du véhicule.

Point de départ O

Comme premier pas de la construction de notre diagramme, nous devons déterminer l'ordonnée du point O appartenant à la valeur $S = 0$. Nous sommes arrivés en ce point en faisant descendre progressivement, sur ses quatre ressorts, la caisse du véhicule suspendue par un fil en son centre de gravité. Pendant cette opération, à mesure que l'on abaisse la caisse, une partie toujours plus grande (P_i) du poids P de celle-ci va charger les ressorts qui sont différents. Selon la formule I, la charge de la roue voisine de B sera, dans ce cas :

$$\varphi_B \frac{P_i + K}{4} = \frac{P_i + K}{4} - \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2 S - \frac{b}{c} \frac{P_i}{4} (f_A - f_B + f_C - f_D)}{f_A + f_B + f_C + f_D + \psi}$$

Étant donné qu'au point de départ les quatre roues se trouvent sur le même plan, $S = 0$, de sorte que notre formule sera plus simple. Mais il faut aussi considérer le rôle de ψ . Il y a des frottements dans la caisse, qui ne gauchira que si ces frottements sont déjà vaincus. Le moment de torsion nécessaire est donné par la différence des charges des deux ressorts du même essieu monté. Par la suite, nous avons supposé la caisse complètement déchargée au début, et ainsi, suivant la figure 11 (représentant le diagramme des frottements de la caisse), la caisse ne gauchit que si la moitié de la différence de charge des deux ressorts augmente jusqu'à dépasser la moitié de R_u :

$$\left| \frac{A_i - B_i}{2} \right| > \frac{R_u}{2}$$

Mais jusque-là, il nous faudra calculer avec la valeur $\psi = 0$.

En laissant donc le véhicule se poser progressivement sur ses ressorts, ceux-ci seront chargés à partir de $P_i = 0$ jusqu'au cas extrême de charge $P_i = P$, qui correspondra au point O de la figure 6. En commençant par la charge $P_i = 0$, on aura d'abord une section de droite où la charge de la roue B sera

$$\varphi_B \frac{P_i + K}{4} = \frac{P_i + K}{4} + \frac{b}{c} \frac{P_i}{4} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \psi}$$

Dans cette formule, nous avons introduit deux notations abrégées:

$$\Sigma_4 = f_A - f_B + f_C - f_D \quad \text{et} \quad \Sigma_3 = f_A + f_B + f_C + f_D + \psi$$

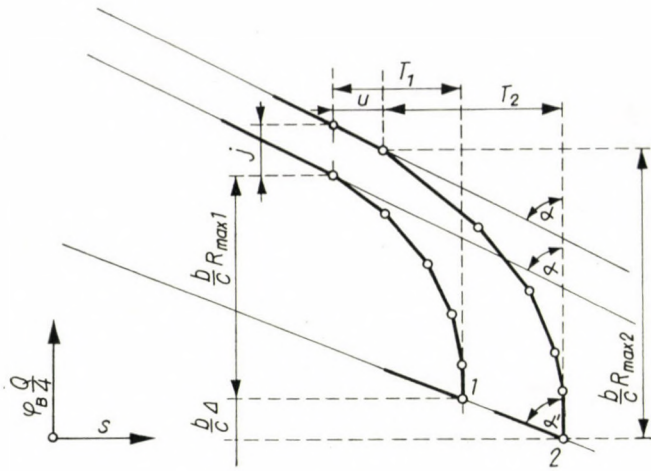


Fig. 9

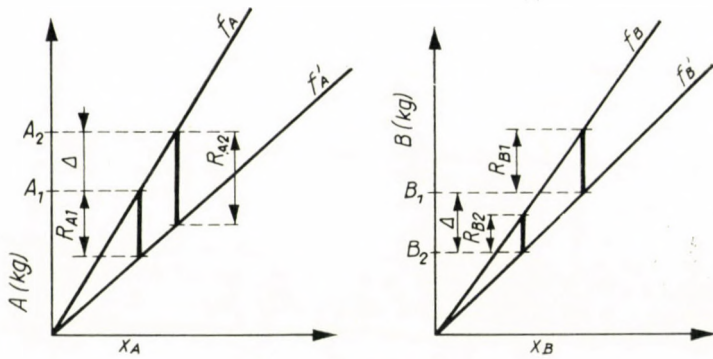


Fig. 10

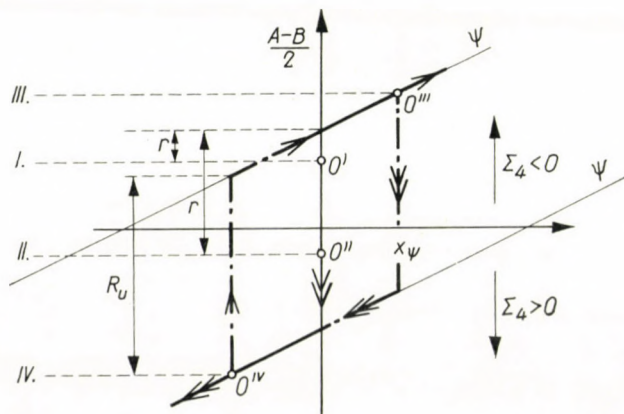


Fig. 11

Avec l'augmentation progressive de la charge P_i , la charge de la roue B augmentera linéairement, jusqu'à ce que

$$\frac{A_i - B_i}{2} = \frac{R_u}{2}$$

La variation de la charge de la roue B en fonction de P_i , a été représentée sur la figure 12. Dans la première phase de l'augmentation de la charge, qui dure

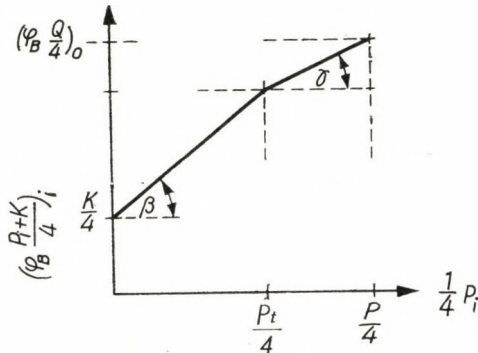


Fig. 12

jusqu'au point de brisure t de la ligne, la tangente de direction représentant la charge de roue est:

$$\operatorname{tg} \beta = 1 + \frac{b}{c} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \psi}$$

Au point de brisure, les symboles des forces sont affectés de l'indice t , donc

$$\frac{A_t - B_t}{2} = \frac{R_u}{2}$$

En continuant à abaisser la caisse après le point t , la charge de la roue B variera déjà suivant une droite à angle γ , et la valeur de la tangente de direction sera

$$\operatorname{tg} \gamma = 1 + \frac{b}{c} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3}$$

parce qu'alors la caisse elle-même gauchit, et le gauchissage spécifique ψ interviendra donc à son tour. C'est ainsi qu'on arrive au point $P_i = P$, où les ressorts sont soumis à la charge totale de la caisse, et ici la valeur de la charge de roue sera:

$$\left(\varphi_B \frac{P + K}{4} \right)_0 = \left(\varphi_B \frac{Q}{4} \right)_0$$

Par suite de la répartition symétrique des charges, la relation $A_i + B_i = P_i/2$ sera valable, et la valeur de B_i se calculera, à l'aide de la formule III, de la valeur momentanée de P_i .

À l'aide des hypothèses et expressions ci-dessus on peut déterminer, suivant l'Annexe II, la valeur de la charge de roue au point de départ. Selon la relation entre le poids suspendu (P) du véhicule, et le frottement interne de la caisse (R_u), on distingue deux cas différents. Si

$$R_u < \left| \frac{P}{2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \psi} \right|$$

alors la valeur de l'ordonnée du point O sera:

$$\left(\varphi_B \frac{Q}{4} \right)_0 = \frac{Q}{4} + \frac{P}{4} \frac{b}{c} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3} - \frac{R_u}{2} \frac{b}{c} \frac{\psi}{\Sigma_3} \quad (\text{XII})$$

et la charge du ressort B :

$$B_0 = \frac{P}{4} \left(1 + \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3} \right) - \frac{R_u}{2} \frac{\psi}{\Sigma_3} \quad (\text{XIII})$$

Si, par contre

$$R_u > \left| \frac{P}{2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \psi} \right|$$

alors la longueur de l'ordonnée du point O sera:

$$\left(\varphi_B \frac{Q}{4} \right)_0 = \frac{Q}{4} + \frac{P}{4} \frac{b}{c} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \psi} \quad (\text{XIV})$$

et la charge du ressort B :

$$B_0 = \frac{P}{4} \left(1 + \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \psi} \right) \quad (\text{XV})$$

Dans les formules XII et XIII, il faut faire attention aux signes, parce qu'en cas de $\Sigma_4 < 0$, R_u aura un signe positif, et en cas de $\Sigma_4 > 0$, un signe négatif.

La figure 11 représente quatre cas caractéristiques du point de départ, sur le diagramme formé par le couple de forces gauchissant la caisse (ordonnée), et la tangente de l'angle de gauchissage de la caisse (abscisse). Si le poids de la caisse $P > P_r$, c'est-à-dire en cas de

$$R_u < \left| \frac{P}{2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \psi} \right|$$

le point de départ se trouvera en O'''' et O''' , sur notre diagramme, tandis que dans le cas contraire, il viendra en O'' ou O' , selon que $\Sigma_4 > 0$, ou $\Sigma_4 < 0$. Remarquons que l'expression $\Sigma_4/\Sigma_3 - \psi$ est un facteur caractérisant l'inégalité des quatre ressorts.

Les facteurs E, F et W de la caractéristique du véhicule

Géométriquement, nous avons déjà déterminé les facteurs E , F et W , dans les expressions VII, VIII et IX. Cependant, les valeurs des frottements n'y ont pas encore été définies. Nous devons donc les déterminer tout d'abord. Comme on obtient la valeur de E en diminuant la charge de la roue B (en partant du point O), après la charge progressive des ressorts, la charge des ressorts B et D va maintenant diminuer, c'est-à-dire il se produira en eux une inversion de charge. Il nous faut donc vaincre le frottement interne de ces deux ressorts. On tiendra compte, en outre, du frottement de la caisse. D'après la figure 11, il nous faut distinguer quatre cas, selon que le point de départ est marqué par O' , O'' , O''' ou O'''' sur le diagramme du frottement de la caisse. Désignons, en général, par R_{ui} le frottement de la caisse que nous devons vaincre quand, en partant de l'un des points O , nous diminuons la charge de la roue B . Les quatre valeurs du frottement de la caisse sont les suivantes:

— en partant du point O' , la charge de ressort A augmente, tandis que la charge de ressort B diminue. Dans ce cas, il nous faut vaincre, suivant la figure, le frottement $R'_{ui} = r$. Étant donné que

$$\frac{A_0 - B_0}{2} = \frac{P}{4} - B_0 = \frac{R_u}{2} - r;$$

la valeur de ce frottement sera

$$r = \frac{R_u}{2} + B_0 - \frac{P}{4} \quad (\text{XVI})$$

Ici, la valeur de B_0 nous sera donnée par la formule XV.

— en partant du point O'' , nous recevrons le même résultat.

— en partant du point O''' , il n'y aura plus d'inversion dans le gauchissage de la caisse, donc $R'_{ui} = 0$, et enfin

— en partant du point O'''' , $R_{ui} = R_u$, mais R_u sera affecté d'un signe négatif dans les formules.

Avec ces données, nous avons déduit, à l'Annexe III, l'expression de W , qui est absolument indépendante de la position du point de départ. Nous avons déterminé en même temps l'ordonnée du point d'intersection de la ligne inférieure avec l'axe vertical.

Résultat

Nos examens peuvent se résumer comme suit: Pour pouvoir déterminer le cycle d'hystérésis du gauchissage d'un véhicule à deux essieux

— il faut déterminer la tangente de direction des deux lignes délimitant le cycle d'hystérésis, selon les formules IV et V;

— il faut calculer la distance entre les deux droites:

$$W = \frac{P}{2} \frac{c}{b} \left[\frac{f'_B + f'_D + \psi/2}{\operatorname{tg} \alpha'} - \frac{f_B + f_D + \psi/2}{\operatorname{tg} \alpha} \right] + \frac{R_u}{2} \frac{c}{b} \psi \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha'} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \tag{XVII}$$

Cette distance W se rapportant à un véhicule placé sur un plan, la formule ne donnera la distance entre les deux droites que là, où l'abscisse $S_B = 0$.

— il faut déterminer la valeur R_u du frottement de la caisse, et la comparer avec celle de l'expression

$$\left| \frac{P}{2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \psi} \right|$$

Si R_u est plus grand que cette dernière, alors selon l'Annexe III, l'ordonnée de la ligne droite inférieure du cycle sera, à la valeur $S = 0$:

$$\frac{Q}{4} - \frac{P}{4} \frac{c}{b} \frac{f'_B + f'_D - f_A - f_C}{\operatorname{tg} \alpha'} + \frac{R_u}{2} \psi \frac{c}{b} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha'} \tag{XVIII}$$

Si par contre, la valeur de R_u est plus faible que celle de l'expression ci-dessus, alors l'ordonnée de la ligne inférieure sera, à la valeur $S = 0$:

$$\frac{Q}{4} - \frac{P}{4} \frac{c}{b} \frac{f'_B + f'_D - f_B - f_D}{\operatorname{tg} \alpha'} - \frac{R_u}{2} \psi \frac{c}{b} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha'} \tag{XIX}$$

De cette manière, on peut tracer le cycle d'hystérésis du gauchissage du véhicule. En faisant avancer notre véhicule sur des sections de voie présentant des déviations différentes, la valeur de la charge de roue peut se situer n'importe où entre les deux lignes du cycle d'hystérésis, mais pas en dehors de celles-ci.

Charge de la roue A

Jusqu'à présent, nous n'avons examiné que la charge de la roue $B = \varphi_B \frac{Q}{4}$.

Mais souvent, il est également intéressant de connaître la charge de l'autre roue du même essieu monté, c'est-à-dire de la roue $A = \varphi_A \frac{Q}{4}$.

En cas de charge symétrique, suivant notre déduction:

$$\varphi_B \frac{Q}{4} + \varphi_A \frac{Q}{4} = \frac{Q}{2}$$

donc

$$\varphi_A \frac{Q}{4} = \frac{Q}{2} - \varphi_B \frac{Q}{4}$$

Sur la figure 13, nous avons donc aussi tracé, dans le diagramme d'hystérésis de la roue B du véhicule, la droite

$$\varphi_B \frac{Q}{4} = \frac{Q}{2}$$

Soit notre véhicule placé, par exemple, sur une section de voie présentant une déviation S_3 , et désignons la charge de la roue B par le point 3, sur notre figure 13. Dans la même position, la charge de la roue A sera alors représentée par

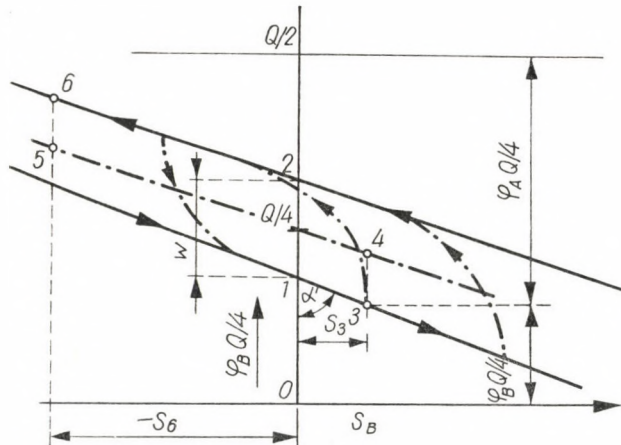


Fig. 13

la distance mesurée entre le point 3 et l'horizontale tracée à la hauteur de $Q/2$.

Il sera utile de voir à présent les résultats de nos déductions théoriques dans leur application pratique.

IV. Application

a) Contrôle des valeurs limites admises pour l'écart des charges de roues

Dans l'introduction de cette étude, nous avons déjà parlé des Normes des Chemins de fer de l'État Hongrois (2). Lors de l'établissement de ces normes,

on considérait avant tout que le contrôle par pesage de la charge de roue constitue un moyen relativement facile de déceler le gauchissage du véhicule et certains autres défauts pouvant influencer défavorablement la sécurité contre le déraillement. D'après les normes actuelles, la charge de l'une des roues de l'essieu monté $\left(\varphi_B \frac{Q}{4}\right)$ ne peut présenter qu'un écart maximum de $\pm 10\%$ par rapport à la charge de roue moyenne $(Q/4)$, c'est-à-dire $0,9 < \varphi_B < 1,1$.

On suppose que les balances utilisées pour le pesage sont de niveau, c'est-à-dire que leur partie supportant les roues du véhicule se trouve sur un

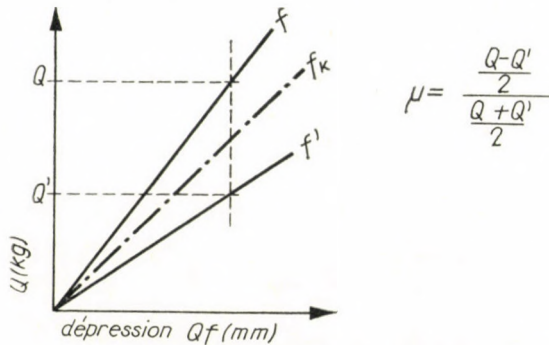


Fig. 14

même plan horizontal. Le pesage du véhicule s'opère donc à la valeur $S = 0$ de l'abscisse de la figure 13. La charge de roue du véhicule posé sur la balance pourra donc être représentée en un point quelconque de la section W de l'ordonnée, marquée en trait épais sur la figure 13, suivant la direction et la valeur du gauchissage que la voie avait causé dans le véhicule avant le pesage.

Considérons maintenant des véhicules, dont les principales caractéristiques sont identiques ou semblables à celles des véhicules standard UIC-ORE: soit la tare $Q = 12,5$ tonnes, dont le poids suspendu $P = 10$ tonnes, la distance d'axe en axe des ressorts d'un essieu, $b = 2000$ mm, et la distance des cercles de roulement $c = 1500$ mm. Les quatre ressorts du véhicule sont identiques, et leur flexibilité moyenne $f_k = 0,01$ mm/kg (ressort unifié à huit lames, long de 1400 mm). Nous devons encore prendre la valeur numérique du frottement des ressorts, dont on trouve, à la page 205 du volume *V. B.* de la 28^e édition de HÜTTE, des données détaillées résumées dans un diagramme. C'est de là que nous avons reproduit notre figure 14, où le coefficient de frottement du ressort est également défini. D'après le diagramme, ce coefficient de frottement se rapporte à la charge moyenne du ressort, et donne la charge supplémentaire qui est nécessaire, en raison du frottement dans le ressort, pour avoir

le même abaissement qu'avec un ressort sans frottement (calculé avec une flexibilité moyenne f_k).

$$\mu = \frac{Q - Q'}{Q + Q'} \text{ et } Qf = Q'f' \text{ donc } \mu = \frac{f' - f}{f' + f}$$

La flexibilité moyenne du ressort

$$f_K = \frac{f + f'}{2}$$

d'où

$$f = (1 - \mu)f_K \text{ et } f' = (1 + \mu)f_K$$

D'après les données de HÜTTE, le coefficient de frottement du ressort international choisi peut être pris $\mu = 0,06$. Des mesures de contrôle que nous avons effectuées sur quelques ressorts, il apparaît que ces valeurs de frottement augmentent au double environ après un an de service. Après trois ans de service, nous avons aussi mesuré des coefficients de frottement augmentés au triple de leur valeur originale. Ainsi, même en comptant, chez le véhicule ou le ressort neufs, avec une valeur de $\mu = 0,06$, avant la réparation du véhicule effectuée trois ans plus tard, cette valeur peut augmenter à $\mu = 0,18$ dans les ressorts. C'est avec cette dernière valeur que nous calculerons par la suite.

Les quatre ressorts étant identiques,

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha' = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \{2[f_K(1 - \mu) + f_K(1 + \mu)] + \psi\} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 (2f_K + \psi) \quad (\text{XX})$$

donc

$$W = \frac{2P\mu f_K + \psi R_u}{\frac{c}{b} (4f_K + \psi)} \quad (\text{XXI})$$

$\Sigma_4 = 0$, et ainsi, d'après la formule XIV, $\left(\varphi_B \frac{Q}{4}\right)_0 = \frac{Q}{4}$, c'est-à-dire $(\varphi_B)_0 = 1$.

En outre, $E' = F' = W/2$, donc chez le véhicule placé sur la balance, où $S = 0$, la valeur de la plus petite charge de roue est

$$\frac{Q}{4} - \frac{W}{2} = \varphi_B \frac{Q}{4} \text{ c'est-à-dire } \varphi_B = 1 - 2 \frac{W}{Q}$$

De cette façon, nous avons défini la situation des deux lignes délimitant le cycle d'hystérésis de notre véhicule. Celles-ci seront parallèles, et leur distance, ainsi qu'il ressort de la formule de W , sera directement proportionnelle à la valeur de μf_k .

Complétons encore les caractéristiques de notre véhicule, en considérant d'abord un véhicule ayant un châssis de grande souplesse (wagon plat long), puis un autre ayant un châssis totalement rigide (wagon-citerne). Les données principales des deux véhicules soient d'ailleurs identiques, excepté le gauchissage spécifique de leur caisse, qui soit $\psi = 0,2$ mm/kg chez le véhicule «souple», et $\psi = 0,001$ mm/kg chez le véhicule «rigide». La valeur du frottement interne de l'ensemble du châssis et de la caisse soit enfin égale à 0, resp. à 200 kg.

Avec ces données on reçoit pour W , les valeurs inscrites dans la rubrique I du tableau ci-dessous:

Tableau I

Rigidité de l'ensemble du châssis et de la caisse Ψ (mm/kg)	$\text{tg } \alpha$	Coefficient de frottement interne des ressorts μ	Frottement de l'ensemble du châssis et de la caisse R_u (kg)	I. W (kg)	II. $S = 0$ φ_B (%)	III. $S_3 = 5$ mm φ_B (%)	IV. $S_3 = 10$ mm φ_B (%)
Véhicule souple $\psi = 0,2$	0,135	ressorts neufs 0,06	0	66,5	99	98	97
			200	289	95	94	93
		ressorts non graissés 0,18	0	200	97	96	95
			200	422	93	92	91
Véhicule rigide $\psi = 0,001$	0,002324	ressorts neufs 0,06	0	388	94	87	80
			200	393	94	87	80
		ressorts non graissés 0,18	0	1160	81	74	67
			200	1168	81	74	67

Dans la rubrique II du tableau, nous avons donné aussi les valeurs de $\varphi_B = 1 - 2 \frac{W}{Q}$. On y voit qu'en cas de ressorts bien graissés ou neufs, la valeur de la charge de roue est toujours plus de 90% de la charge de roue moyenne. Ici, la prescription de la norme peut donc être encore respectée. Par contre, si les ressorts ne sont pas graissés, la charge de roue du véhicule rigide peut être de près de 20% inférieure à la moyenne. On peut en tirer la conclusion, que quand la répartition de la charge de roue du véhicule n'est pas assez uniforme, on peut souvent rétablir des charges de roues plus convenables, par le nettoyage et le graissage intensif des ressorts.

On sait cependant que les véhicules sont construits avec des tolérances de fabrication, et que durant le service se produisent des usures et gauchissages

dont les valeurs sont différentes chez les quatre ressorts du véhicule. Les écarts de dimensions dans la suspension et le train de roulement du véhicule ne seront pas évalués séparément. Il nous suffit, en effet, d'estimer la valeur avec laquelle la somme des dimensions en hauteur déterminant la hauteur du véhicule diffère, sur l'une des diagonales, de la somme des dimensions en hauteur des deux roues et de la suspension sur la diagonale opposée. Cette différence qui apparaît donc, d'une part, à l'endroit du cercle de roulement de la roue (c), et d'autre part dans la ligne médiane des ressorts (b), est considérée comme convertie directement en distance des cercles de roulement (ainsi, les différences de hauteur au point d'attaque des ressorts figurent déjà avec le rapport c/b dans la valeur totale). Comme valeur estimée [1], on calculera à l'endroit du cercle de roulement avec une valeur totale de 5 mm, puis de 10 mm, en remarquant que la valeur totale de 5 mm peut être probablement considérée, dans la pratique, comme un minimum. Ces 5 mm, resp. 10 mm, étant déjà concentrés au cercle de roulement, peuvent remplacer tout simplement la déviation au-dessous de la roue, dans nos formules. Naturellement, cette déviation continuera à diminuer la charge de roue, et notamment, d'après notre formule I, à la valeur

$$\left(\varphi_B \frac{Q}{4}\right)_3 = \left(\varphi_B \frac{Q}{4}\right)_1 - \frac{S}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Ici, l'indice 1 signifiant la charge de roue du véhicule placé sur un plan horizontal, correspond aux valeurs inscrites dans la rubrique II de notre tableau. L'indice 3 représentant la charge de roue du véhicule ayant un écart de hauteur de 5 mm, correspond aux valeurs de la rubrique III.

Si $S = 10 \text{ mm}$, la valeur en pour cent de la charge de roue des véhicules est donnée dans la rubrique IV.

Des données numériques du tableau, il ressort clairement par les chiffres que

— le manque de graissage des ressorts,

— les écarts dans les dimensions en hauteur du véhicule ont un effet défavorable, surtout chez les véhicules à caisse rigide.

D'après les données numériques, l'écart de 10% admis jusqu'ici comme un maximum des différences entre les charges de roues, ne saurait être respecté chez les véhicules à caisse rigide, même si les ressorts sont neufs (ou fortement graissés), et si on ne calcule qu'avec une tolérance de fabrication minimum de 5 mm. Il paraît donc nécessaire de modifier les Normes de Chemins de fer Hongrois actuellement en vigueur, et admettre pour les véhicules rigides un écart max. de $\pm 15\%$ entre les charges des deux roues d'un essieu monté, au lieu des 10% permis.

Remarquons aussi que, jusqu'à présent, quand le pesage des charges de roues ne donnait pas de résultats satisfaisants, on essayait d'y remédier en

interchangeant entre eux les quatre ressorts du véhicule. De cette façon, on mettait le ressort plus dur ou ayant une cambrure plus forte, là où la hauteur de la suspension était plus faible, ou inversement, on mettait le ressort plus mou au coin qui était trop élevé. Dans ces cas, il y aura lieu d'examiner aussi, à l'avenir, le frottement interne des ressorts, ce qui peut se faire le plus simplement par l'établissement de leur cycle d'hystérésis. Des normes modifiées devraient donc prescrire l'établissement de ce diagramme, lors du contrôle à l'atelier des véhicules déraillés, en vue de la détermination du frottement interne des ressorts.

b) L'effet des frottements sur la sécurité contre le déraillement des véhicules

Sur la figure 1, nous avons représenté les variations de la charge de roue d'un véhicule sans frottement, en fonction de la déviation de la voie. Par contre, la figure 13 donne le cycle d'hystérésis formé par deux lignes droites, d'un véhicule chargé de frottements. Dans cette figure nous avons aussi tracé, en ligne résultante, la caractéristique idéale, sans frottement, du même véhicule.

Plaçons notre véhicule sur une voie de déviation S_3 . Sur cette section de voie, la charge de roue du véhicule idéal serait marqué par le point 4. Le point caractérisant la charge de roue de la construction réelle, chargée de frottements, se situerait quelque part entre les deux droites obliques, sur l'ordonnée de S_3 . Faisons rouler ensuite le véhicule sur la section de voie ayant une déviation $-S_6$. La charge de roue de notre véhicule idéal serait alors marquée, sur la figure, par le point 5, et celle du véhicule réel par le point 6. Comme il ressort de la figure, il y aura un écart $W/2$ entre les charges de roues du véhicule réel et du véhicule idéal. La valeur en pourcent de cet écart a été déjà calculée (pour le véhicule considéré au chapitre précédent), et le résultat est donné par la rubrique II du tableau. On voit que, par suite du seul effet du frottement, des diminutions de près de 20% de la charge de roue peuvent se produire en service.

Avant d'aller plus loin dans nos constatations, examinons un cas pratique de déraillement survenu parce qu'une des roues était trop faiblement chargée. L'entr'axe des essieux et les charges de roues du wagon-citerne déraillé sont indiqués sur la figure 15. Ici, la courbe inférieure représente les surhaussements de la section de voie sur laquelle s'était produit le déraillement. Au cours de l'examen, les traces ont permis de constater les endroits où la roue déraileuse du véhicule, marquée par le chiffre 3 sur la figure, avait monté sur le champignon, quitté la file de rail, et continué de rouler sur les traverses.

De la courbe de surhaussement de la voie, nous avons tracé, d'après les constatations de notre étude antérieure [3], les déviations s'étant produites sous la roue 3 du véhicule. Nous savons que la charge de la roue diminue

en raison directe de ces déviations. La courbe supérieure indique les rayons de courbure de la voie, mesurés tous les 5 mètres. On voit qu'il y avait aussi une brisure, au point même où la roue 3 avait monté sur le champignon. On en peut conclure qu'à la suite du choc ainsi provoqué dans le plan horizontal, il s'est produit dans ce plan une force ayant pu causer le déraillement. Pour

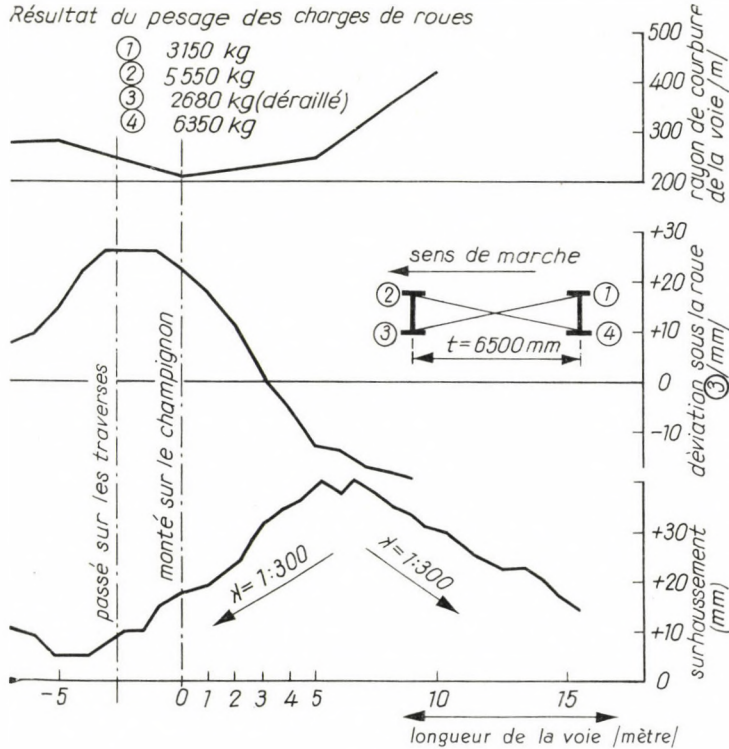


Fig. 15

cela, la roue 3 devait naturellement se décharger. La charge de roue *moyenne*, calculée des charges de roues inscrites sur la figure, était de 4432,5 kg, tandis que la charge de la roue 3 présentait, au pesage, une valeur de près de 40% inférieure à cette moyenne. A l'endroit de la montée sur le champignon, il y avait, d'après la figure, une déviation $S = 22,5$ mm, et calculée selon notre formule I, cette déviation avait augmenté encore la décharge de 25%. Par conséquent, à l'endroit de la montée sur le champignon, la roue 3 n'avait plus qu'une charge de 1567 kg, ce qui explique que la force transversale pouvait faire monter la roue sur le champignon.

La flexibilité moyenne des ressorts de notre véhicule, $f_k = 0,0085$ mm/kg. Selon le diagramme de frottement des ressorts, donnée par HÜTTE, on peut, ici encore, prendre un coefficient de frottement $\mu = 0,06$ pour les ressorts bien

graissés, et comme nous l'avons déjà dit, cette valeur pouvait, selon nos essais, s'élever jusqu'à 0,18 en service. En calculant suivant notre formule XXI, il pouvait résulter de ces données une valeur de $W = 1750$ kg env. Nous ignorons à quel point de la caractéristique du véhicule celui-ci pouvait se trouver au moment du pesage des charges de roues, mais la valeur de $W/2 = 875$ kg, qui contient les frottements, a diminué encore la charge de la roue 3.

Notre exemple numérique nous a non seulement servi à faire ressortir cet effet défavorable du frottement, mais permet aussi de démontrer sur le même véhicule que la modification des prescriptions relatives au pesage, que nous avons proposée à la fin de l'article a) précédent, aurait également permis de déceler la défectuosité évidente du véhicule.

D'après les valeurs des charges de roues données par la figure, on a relevé un écart de 40% et nous proposons d'admettre un écart de $\pm 15\%$ pour ces wagons-citernes rigides. Au pesage de contrôle, on aurait naturellement estimé de trop ces 40%, et pour y remédier, on aurait fortement graissé les ressorts. Quelle amélioration aurait-on pu réaliser de cette façon? D'après notre calcul ci-dessus, la valeur de $W/2$ n'aurait pu être réduite ainsi qu'à 295 kg environ, ce qui aurait produit une amélioration de 13% env. dans la charge de roue. Ainsi, un nouveau pesage de contrôle n'aurait toujours donné, pour la roue 3, que 27% de la charge de roue moyenne. Cette valeur, bien trop élevée, est déjà signe d'un défaut dans la construction du véhicule. Or, pour déceler ce défaut et y remédier, on aurait retiré de service le véhicule pour le renvoyer à l'atelier. Dans le cas présenté comme exemple, le mode de contrôle par pesage de la charge de roue aurait donc abouti à une décision convenable, même avec la modification que nous avons proposée.

c) Connaissant le cycle d'hystérésis de notre véhicule, délimité par deux droites obliques, *contrôlons*, à la lumière de cette nouvelle constatation, *la méthode actuelle du pesage de la charge de roue*.

Nous avons rappelé à plusieurs reprises le fait qu'au cours des pesages, on a trouvé des véhicules sans défauts sur lesquels les valeurs extrêmes admises pour l'écart des charges de roues ne pouvaient pas être respectées. Les résultats de notre calcul ont également démontré le mal fondé des prescriptions en question. Mais comment a-t-on pu remédier à cette insuffisance, lors des pesages? En général, on procédait, dans la pratique, à plusieurs pesages successifs des charges de roues du véhicule, et si parmi les résultats obtenus, un ou deux seulement se trouvaient entre les limites de tolérance admises, on remettait en service le véhicule. Ajoutons cependant qu'on ne décidait ainsi que si les autres données du pesage (dépassant les tolérances) ne s'écartaient pas trop des limites admises.

De ce qui précède, nous savons déjà qu'au pesage (donc à la valeur $S = 0$), le véhicule peut se trouver en n'importe quel point de la section verticale W de sa caractéristique. C'est pourquoi, en cas même d'une construction

mauvaise ou défectueuse, il peut arriver que le pesage donne des résultats satisfaisants. Et pourtant, le pesage de contrôle a précisément pour but de révéler les défauts du véhicule.

En connaissance de ce fait, faut-il rejeter la méthode du pesage des charges de roues, ou peut-on essayer de remédier à son insuffisance?

Si on considère le cycle d'hystérésis du véhicule sur la figure 13, il apparaît aussitôt ce qu'il faut faire pour pouvoir appliquer la méthode de contrôle par pesage: arriver à ce qu'au moment du pesage, la position du véhicule corresponde au point 1 ou 2 de la figure. Comment y arriver? La réponse est évidente: en faisant monter une des roues du véhicule sur une déviation donnée, disons de valeur S_3 , avant le pesage, pour l'en faire rouler sur la balance de plan horizontal (sans déviation).

Quelle valeur cette déviation S_3 devra-t-elle avoir? Naturellement une valeur telle, qu'en faisant rouler notre véhicule de cette déviation sur un plan horizontal, la ligne brisée représentant la position du véhicule (désignée par la ligne résultante de la figure 13) aboutisse, à la fin du roulement, au point 2. Cette ligne brisée, partant de la droite inférieure de la caractéristique, coupe la ligne supérieure au point 2 ou à droite de celui-ci. Dans le cas extrême, la déviation S_3 doit donc être assez élevée pour qu'on arrive juste au point 2. Sur la figure 9 et dans le texte qui s'y rapporte, cette valeur a été marquée par la lettre T , déjà déterminée par la formule VI. Pour des véhicules à charge symétrique, en cas d'identité des quatre ressorts on reçoit, d'après la déduction de l'Annexe IV:

$$T = S_3 = \psi \frac{c}{b} \frac{\mu \frac{P}{2} - R_u}{1 - \mu} \quad (\text{XXII})$$

Dans la suite, nous nous intéresserons aussi aux valeurs numériques de certains véhicules donnés. Aussi avons nous calculé, à l'aide de cette formule, les valeurs de S_3 pour les véhicules caractéristiques figurant au tableau I. Ces valeurs sont concentrées dans la rubrique I du tableau II.

Outre les véhicules caractéristiques «souples» et «rigides», nous avons aussi calculé ces valeurs pour des véhicules de rigidité «moyenne», qui correspondraient au wagon tombereau de l'UIC (type 2).

Notons qu'en prenant une flexibilité moyenne $f_k = 0,0063$ mm/kg (soit le ressort unifié le plus dur de l'UIC), au lieu des ressorts de flexibilité moyenne $f_k = 0,01$ mm/kg, les valeurs S_3 de la rubrique I restent pratiquement inchangées, et représentent ainsi de bonnes valeurs approchées pour l'appréciation des véhicules.

Les données du tableau II montrent que notre nouvelle méthode recommandée pour le pesage ne saurait être appliquée aux véhicules à ressorts non graissés et ayant une caisse souple. Son application exigerait, en effet, qu'on

soulève une roue du véhicule au-dessus du plus grand surhaussement permis de la voie, pour l'en faire rouler ensuite, sans à-coup, sur la balance horizontale, toute l'opération devant s'effectuer naturellement sur une longueur de voie inférieure à l'entr'axe des essieux du véhicule. Heureusement, chez les véhicules «souples» un tel examen est superflu,

— d'abord parce que, selon le témoignage du tableau I, le pesage n'y décèlerait que les défauts extrêmes du véhicules,

— et ensuite, parce qu'en raison même de leur souplesse, il n'y a pour ainsi dire aucun danger de déraillement, leur roue n'ayant qu'une décharge négligeable pendant le roulement.

Tableau II

	Frottement des ressorts $\mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu$	Frottement interne de la caisse R_u (kg)	I. S_2 (mm)	Frottement des ressorts	Frottement interne de la caisse R_u (kg)	II. S_2 (mm)	
Véhicule souple $\psi = 0,2$ (mm/kg)	0,18	0	165	$\mu_A = 0,18; \mu_B = 0,14; \mu_C = 0,10; \mu_D = 0,06$	0	170	
		200	128				
	0,06	0	48		200	135	
		200	16				
Véhicule de rigidité moyenne $\psi = 0,017$ (mm/kg)	0,18	0	14		200	0	20,3
		200	11				
	0,06	0	4,1			17,5	
		200	1,4				
Véhicule rigide $\psi = 0,001$ (mm/kg)	0,18	0	0,82	200	0	8,3	
		200	0,64				
	0,06	0	0,24		8,5		
		200	0,08				

Remarquons en passant, que la condition selon laquelle les quatre ressorts d'un véhicule (et leur frottement interne) doivent être parfaitement identiques, constitue une hypothèse bien éloignée de la pratique. C'est pourquoi nous avons étendu notre examen à des véhicules, chez lesquels les frottements internes des quatre ressorts sont différents.

Nous avons admis que les quatre ressorts ont la même flexibilité, mais leur frottement interne se situe graduellement entre les valeurs extrêmes

$\mu = 0,06$ et $\mu = 0,18$. Les valeurs S_3 de tels véhicules sont inscrites dans la rubrique II du tableau II, dont il apparaît que la différence entre les ressorts produit, surtout chez les véhicules rigides, des écarts considérables en comparaison de la construction tout à fait symétrique.

Des données numériques du tableau on peut conclure:

1) Chez les véhicules à châssis très souple, on ne peut pas s'attendre à découvrir les défauts par pesage. Ainsi, le pesage des charges de roues est à peu près inutile chez ces véhicules.

2) Pour le pesage de la charge de roue des autres véhicules, il est utile de procéder comme suit:

a) Placer sur le rail un coin de 25 à 30 mm de hauteur devant l'une des roues du véhicule, faire monter celui-ci sur cette déviation, puis l'en faire rouler sans à-coup sur les balances de plan horizontal.

b) Répéter l'opération en plaçant cette fois-ci le coin sous l'autre roue de même essieu, en procédant d'ailleurs comme pour la mesure a) précédente. Par le pesage ainsi effectué, on reçoit les points 1 et 2, donc la valeur W de la caractéristique du véhicule. Parmi les données ainsi obtenues par pesage de la charge de roue, la plus défavorable même ne devra pas présenter un écart supérieur à $\pm 15\%$ par rapport à la charge de roue moyenne, autrement le véhicule devra être considéré comme défectueux.

Les données de la rubrique I du tableau II fournissent ainsi une explication de certains autres phénomènes, observés assez souvent au pesage des véhicules rigides. On trouve en effet, qu'en déplaçant quelque peu ces véhicules après leur premier pesage, les données du second pesage des charges de roues présentent parfois des écarts excessifs. Ainsi, par exemple le premier pesage des charges de roues d'un wagon-citerne donnait

3500—4540—3570—4670 kg.

Après avoir remué quelque peu le véhicule, les valeurs des charges de roues mesurées aux mêmes fusées d'essieux que précédemment devenaient:

4230—3780—4330—3930 kg.

On pensait alors que le châssis se comportait à la manière d'une tôle faiblement déformée, passant brusquement d'une position extrême à l'autre au moment du gauchissage. Suivant une autre explication, la position entre les deux rails du véhicule devait être d'abord tangentielle au premier, puis diagonale au second pesage, et par suite de l'obliquité, d'un rapport de 1 à 20, du bandage, le véhicule est venu se placer ainsi sur une déviation. En résultat de cette déviation, la roue du véhicule se trouve déchargée (d'après la figure 1.) ce qui expliquerait alors l'écart existant entre les deux pesages.

Le jeu de l'essieu monté entre les deux rails de la voie peut varier de 10 à 20 mm suivant l'usure. Il en résulte, sur les bandages d'une obliquité

de 1 : 20 une déviation $S = 1 - 2$ mm. Sur le diagramme du véhicule rigide figurant au bas de notre tableau II, la valeur de $\operatorname{tg} \alpha$ est égale à 0,021. De sorte que la déviation $S = 1 - 2$ mm ne produirait, entre les résultats des deux pesages de charges de roues, qu'un écart max. de $P = S/\operatorname{tg} \alpha = 50 - 100$ kg (suivant la figure 1), si l'on ne tient pas compte des frottements.

Mais les valeurs S_3 du tableau II montrent clairement que, chez les véhicules totalement rigides, un écart d'un dixième de millimètre peut suffire parfois à déplacer le point indiquant la position du véhicule, de la droite inférieure à la droite supérieure du diagramme. Ceci peut produire jusqu'à des écarts allant de 400 à 1100 kg entre les charges de roues, suivant les valeurs W du tableau I. Ainsi, précisément chez les véhicules les plus rigides, qui sont les plus dangereux au point de vue du déraillement, et où le pesage des charges de roues présente, par conséquent, une importance toute particulière, il est presque inutile de faire monter le véhicule sur un coin de hauteur S_3 avant le pesage, parce qu'un tel véhicule ne peut être posé que dans ses deux positions extrêmes. En effet, une déviation de l'ordre de 1 mm peut toujours se produire sur la balance, à la suite par exemple de la conicité du bandage.

BIBLIOGRAPHIE

1. WEINERT, O.: Verteilung der Radlasten von Kesselwagen. — *Glaser's Annalen*, 1959 Dezember.
2. Vasúti Szakmaisabványok (Normes des Chemins de fer). KPM. Sz. 859—54 et 860—54.
3. KERESZTY, P.: La capacité de gauchissage des véhicules de chemin de fer. *Acta Technica*, Budapest. T. XXVI., Fasc. 3—4; T. XXVII., Fasc. 3—4; T. XXIX., Fasc. 1—2.
4. KERESZTY, P.: Vasúti kocsik kisiklásvizsgálatának egyes kérdései (Problèmes de l'étude du déraillement des véhicules de chemin de fer). — *Járművek, Mezőgazdasági Gépek* 1960, No 4.
5. Hütte — Berlin, 1955, Aufl. 28. Bd. V. B. p. 205.
6. GROSS-LEHR: Die Federn. — VDI. Verl. Berlin. 1938.
7. LUTTEROTH: Lastübertragung bei Personenwagen. *Organ*, 1933, Heft 7/8.
8. KRUGMANN, L.: Untersuchung von Entgleisungen in schwierigen Fällen. — *Der Eisenbahningenieur*. 1960, Heft.

Annexe I

En modifiant quelque peu les formules X et XI:

$$j \frac{c}{b} \operatorname{tg} \alpha = U \frac{c}{b} - (R_{m1} - R_2 + \Delta) \operatorname{tg} \alpha$$

et

$$U \frac{c}{b} = \frac{c}{b} (T_1 - T_2) + \Delta \operatorname{tg} \alpha$$

Selon la formule VI

$$T_1 \frac{c}{b} = R_{m1} \operatorname{tg} \alpha - \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Sigma_1 R_i f_i$$

et

$$T_2 \frac{c}{b} = R_{m2} \operatorname{tg} \alpha - \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Sigma_1 R_i f_i$$

D'où

$$j \frac{c}{b} \operatorname{tg} \alpha = \Delta (\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha) - \left(\frac{c}{b}\right)^2 (\Sigma_1 R_i f_i - \Sigma_2 R_i f_i)$$

Le mode de calcul des frottements internes des ressorts a été déjà donné dans la figure 7. On déterminera de la même façon, avec les notations de la figure 10, la différence des frottements dans chaque ressort — par rapport au point 1, resp. 2. Ces frottements sont désignés successivement par R_{A1} ; R_{A2} ; R_{B1} ; R_{B2} etc. suivant le point auquel ils se rapportent, les forces de ressort étant symbolisées dans les mêmes points par A_1 ; A_2 ; B_1 , B_2 etc. . . Ainsi

$$\begin{aligned}\Sigma_1 R_i f_i &= R_{A1} f'_A + R_{B1} f_B + R_{C1} f'_C + R_{D1} f_D + R_U \Psi \\ \Sigma_2 R_i f_i &= R_{A2} f'_A + R_{B2} f_B + R_{C2} f'_C + R_{D2} f_D + R_U \Psi' \\ \Sigma_1 R_i f_i - \Sigma_2 R_i f_i &= R_{(A1 - A2)} f'_A + (R_{B1} - R_{B2}) f_B + (R_{C1} - R_{C2}) f'_C + \\ &\quad + (R_{D1} - R_{D2}) f_D + R_U \Psi - R_U \Psi'\end{aligned}$$

D'après la figure 10, on peut écrire les frottements internes des ressorts:

$$\begin{aligned}R_{A1} &= A_1 \frac{f'_A - f_A}{f'_A}; R_{A2} = (A_1 + \Delta) \frac{f'_A - f_A}{f'_A}; \\ R_{B1} &= B_1 \frac{f'_B - f_B}{f_B}; R_{B2} = (B_1 + \Delta) \frac{f'_B - f_B}{f_B}\end{aligned}$$

D'où

$$R_A - R_{A2} = -\Delta \frac{f'_A - f_A}{f'_A}; R_{B1} - R_{B2} = \Delta \frac{f'_B - f_B}{f_B}$$

et de même

$$R_{C1} - R_{C2} = -\Delta \frac{f'_C - f_C}{f'_C}; R_{D1} - R_{D2} = \Delta \frac{f'_D - f_D}{f_D}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\Sigma_1 R_i f_i - \Sigma_2 R_i f_i &= \Delta [(f_A + f'_B + f_C + f'_D + \Psi) - (f'_A + f_B + f'_C + f_D + \Psi')] \\ &\quad \left(\frac{c}{b}\right)^2 (\Sigma_1 R_i f_i - \Sigma_2 R_i f_i) = \Delta (\operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha)\end{aligned}$$

et donc

$$j \frac{c}{b} \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

c'est-à-dire

$$j = 0,$$

parce que

$$\frac{c}{b} \neq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha \neq 0.$$

Annexe II

$$A_t + B_t = \frac{P_t}{2}; B_t = \frac{P_t}{4} - (1 - \varphi_B) \frac{P_t + K}{4} \frac{c}{b};$$

D'après la figure 12

$$\varphi_B \frac{P_t + K}{4} = \frac{K}{4} + \frac{P_t}{4} \left(1 + \frac{b}{c} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \Psi}\right)$$

et ainsi

$$B_t = \frac{P_t}{4} \left(1 + \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \Psi}\right); A_t - B_t = \frac{P_t}{2} - 2 B_t = -\frac{P_t}{2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \Psi}$$

Cette expression doit être complétée par notre remarque concernant les signes. Étant donné que P_t ne peut jamais être négatif, en cas de $\Sigma_4 < 0$, la valeur de R_u devra figurer avec un signe positif, tandis qu'en cas de $\Sigma_4 > 0$, R_u sera substitué dans les formules suivantes avec un signe négatif. Ceci ressort d'ailleurs également de la figure 11.

Envisageons d'abord le cas, où le poids de la caisse $P > P_t$. Comme

$$\frac{A_t - B_t}{2} = \frac{R_U}{2}.$$

De là

$$P_t = -2 R_U \frac{\Sigma_3 - \Psi}{\Sigma_4}$$

Ainsi, selon la figure 11:

$$\begin{aligned} \left(\varphi_B \frac{Q}{4}\right)_0 &= \left(\varphi_B \frac{P_t + K}{4}\right)_t + \frac{P - P_t}{4} \operatorname{tg} \gamma = \frac{K}{4} + \frac{P_t}{4} \operatorname{tg} \beta + \frac{P - P_t}{4} \operatorname{tg} \gamma = \\ &= \frac{K}{4} + \frac{P}{4} \operatorname{tg} \gamma + \frac{P_t}{4} (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma) = \frac{K}{4} + \frac{P}{4} \left(1 + \frac{b}{c} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3}\right) - \\ &\quad - \frac{R_U}{2} \frac{\Sigma_3 - \Psi}{\Sigma_4} \frac{b}{c} \left(\frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \Psi} - \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3}\right) \end{aligned}$$

et enfin

$$\left(\varphi_B \frac{Q}{4}\right)_0 = \frac{Q}{4} + \frac{P}{4} \frac{b}{c} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3} - \frac{R_U}{2} \frac{b}{c} \frac{\Psi}{\Sigma_3}$$

Mais dans le cas, où le poids de la caisse $P < P_t$:

$$|R_U| > \left| \frac{P}{2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \Psi} \right|$$

Alors, sur la figure 12, $P/4$ se trouvera à gauche de $P_t/4$, de sorte que

$$\left(\varphi_B \frac{Q}{4}\right)_0 = \frac{K}{4} + \frac{P}{4} \operatorname{tg} \beta = \frac{K}{4} + \frac{P}{4} \left(1 + \frac{b}{c} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \Psi}\right) = \frac{Q}{4} + \frac{P}{4} \frac{b}{c} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \Psi}$$

Avec les valeurs ainsi calculées, on peut calculer du même coup la force de ressort B_0 au point de départ 0. Dans le premier cas

$$B_0 = \frac{P}{4} - (1 - \varphi_B) \frac{Q}{4} \frac{c}{b} = \frac{P}{4} \left(1 + \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3}\right) - \frac{R_U}{2} \frac{\Psi}{\Sigma_3}$$

tandis que dans le second cas, c'est-à-dire quand

$$R_U > \left| \frac{P}{2} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \Psi} \right|$$

alors

$$B_0 = \frac{P}{4} \left(1 + \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \Psi}\right)$$

Annexe III

Détermination de «E»

Nous avons quatre conditions de départ différentes, nous devons donc distinguer quatre cas, suivant le point de départ adopté sur la figure 11:

Symbole du point de départ sur la fig. 11.			
O'	O''	O'''	O''''
Formule à utiliser pour déterminer la force de ressort B			
XV	XV	XIII	XIII
Signe du frottement de la caisse dans la formule XIII			
—	—	positif	négatif
Partie du frottement de la caisse à calculer (R'_{ui})			
$R'_{ui} = r$	$R'_{ui} = r$	$R'_{ui} = 0$	$R'_{ui} = R_u$
$\frac{b}{c} E = \frac{R_B f'_B + R_D f'_D + R'_{ui} \Psi}{\operatorname{tg} \alpha'}$			

Les forces de ressort figurant dans cette formule peuvent être calculées d'après la figure 7, compte tenu de ce que $B_0 = D_0$

$$\frac{b}{c} E = \frac{B_0 [f'_B + f'_D - (f_B + f_D)] + \Psi R_{ui}}{\operatorname{tg} \alpha'}$$

La valeur de r a été donnée par la formule XVI, et ainsi

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} E' = \frac{b}{c} E'' = \frac{P}{4} \frac{(\Sigma_3 - \Psi + \Sigma_4) [f'_B + f'_D - (f_B + f_D)]}{(\Sigma_3 - \Psi) \operatorname{tg} \alpha'} + \\ + \Psi \frac{R_U/2 + \frac{P}{4} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \Psi}}{\operatorname{tg} \alpha'} \end{aligned}$$

Après transformation et arrangement de cette expression, on obtient comme résultat définitif:

$$\frac{b}{c} E' = \frac{b}{c} E'' = \frac{P}{4} \left[\frac{\Sigma_3 - \Psi + \Sigma_4}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 (\Sigma_3 - \Psi)} - \frac{\Sigma_3 + \Sigma_4}{\operatorname{tg} \alpha'} \right] + \frac{R_U}{2} \Psi \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha'}$$

Pour les deux autres positions de départ, on reçoit de même les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} E''' = \frac{P}{4} (\Sigma_3 + \Sigma_4) \left[\frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Sigma_3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha'} \right] - \frac{R_U}{2} \Psi \left[\frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Sigma_3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha'} \right] \\ \frac{b}{c} E'''' = \frac{P}{4} (\Sigma_3 + \Sigma_4) \left[\frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Sigma_3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha'} \right] + \frac{R_U}{2} \Psi \left[\frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Sigma_3} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha'} \right] \end{aligned}$$

Détermination de «F» : On procède de la même manière que pour E , mais on considérera à présent le frottement des forces de ressort A et C , car c'est là que s'opère l'inversion de charge, et on calculera avec α au lieu de α' . Dans les quatre positions différentes du point de départ, les formules déterminant les forces de ressort B_0 seront les mêmes que précédemment; les signes de R_u resteront aussi inchangés. C'est dans le frottement interne de la caisse qu'il nous faudra calculer avec de nouvelles valeurs:

Symbole du point de départ sur la fig. 11.

O'	O''	O'''	O''''
Partie du frottement de la caisse à calculer (R_{ui})			
$R_{ui} = R_u - r$	$R_{ui} = R_u - r$	$R_{ui} = R_u$	$R_{ui} = 0$

$$\frac{b}{c} F = \frac{R_A f'_A + R_C f'_C + \Psi R_{ui}}{\operatorname{tg} \alpha} = \left(\frac{P}{2} - B_0 \right) \frac{[f'_A + f'_C - (f_A + f_C)] + \Psi R_{ui}}{\operatorname{tg} \alpha}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} F' = \frac{b}{c} F'' = \frac{P}{4} \left[\frac{\Sigma_3 - \Psi - \Sigma_4}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 (\Sigma_3 - \Psi)} - \frac{\Sigma_3 - \Sigma_4}{\operatorname{tg} \alpha} \right] + \frac{R_U}{2} \frac{\Psi}{\operatorname{tg} \alpha} \\ \frac{b}{c} F''' = \frac{P}{4} (\Sigma_3 - \Sigma_4) \left[\frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Sigma_3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right] + \frac{R_U}{2} \Psi \left[\frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Sigma_3} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right] \\ \frac{b}{c} F'''' = \frac{P}{4} (\Sigma_3 - \Sigma_4) \left[\frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Sigma_3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right] - \frac{R_U}{2} \Psi \left[\frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Sigma_3} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right] \end{aligned}$$

Détermination de «W» : En additionnant simplement les résultats ci-dessus obtenus, on reçoit la valeur de $W = E + F$ qui sera, comme on pouvait s'y attendre, identique dans les quatre cas :

$$\frac{b}{c} W = \frac{P}{4} \left[\frac{2}{\left(\frac{c}{b}\right)^2} - \frac{\Sigma_3 + \Sigma_4}{\text{tg } \alpha'} - \frac{\Sigma_3 - \Sigma_4}{\text{tg } \alpha} \right] + \frac{R_U}{2} \psi \left(\frac{1}{\text{tg } \alpha'} + \frac{1}{\text{tg } \alpha} \right)$$

$$\Sigma_3 + \Sigma_4 = 2 \left(f_A + f_c + \frac{\psi}{2} \right) \text{ et } \Sigma_3 - \Sigma_4 = 2 \left(f_B + f_D + \frac{\psi}{2} \right)$$

$$\frac{2}{\left(\frac{c}{b}\right)^2} = 2 \frac{f_A + f_B + f_C + f_D + \psi}{\text{tg } \alpha'} = 2 \frac{f'_A + f_B + f'_C + f_D + \psi}{\text{tg } \alpha}$$

De cette manière, l'expression de W peut être écrite de deux façons différentes sous sa forme définitive :

$$W = \frac{P}{2} \frac{c}{b} \left[\frac{f'_A + f'_C + \psi/2}{\text{tg } \alpha} - \frac{f_A + f_C + \psi/2}{\text{tg } \alpha'} \right] + \frac{R_U}{2} \frac{c}{b} \psi \left(\frac{1}{\text{tg } \alpha} + \frac{1}{\text{tg } \alpha'} \right)$$

ou

$$W = \frac{P}{b} \frac{c}{b} \left[\frac{f'_B + f'_D + \psi/2}{\text{tg } \alpha'} - \frac{f_B + f_D + \psi/2}{\text{tg } \alpha} \right] + \frac{R_U}{2} \frac{c}{b} \psi \left(\frac{1}{\text{tg } \alpha'} + \frac{1}{\text{tg } \alpha} \right)$$

Pour pouvoir tracer la caractéristique de véhicule, on détermine encore le point d'intersection de la ligne ayant un angle d'inclinaison α' et de l'axe de l'ordonnée, donc l'ordonnée de ce point :

$$\left(\varphi_B \frac{Q}{4} \right)_0 - E' = \left(\varphi_B \frac{Q}{4} \right)_0 - E'' = \frac{Q}{4} + \frac{P}{4} \frac{b}{c} \frac{\Sigma_4}{\Sigma_3 - \psi} -$$

$$- \frac{P}{4} \frac{b}{c} \left[\frac{\Sigma_3 - \psi + \Sigma_4}{\Sigma_3 - \psi} - \left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{\Sigma_3 + \Sigma_4}{\text{tg } \alpha'} \right] - \frac{R_U}{2} \frac{\psi}{\text{tg } \alpha'} \frac{c}{b} =$$

$$= \frac{Q}{4} - \frac{P}{4} \frac{c}{b} \frac{f'_B + f'_D - f_A - f_C}{\text{tg } \alpha'} - \frac{R_U}{2} \psi \frac{c}{b} \frac{1}{\text{tg } \alpha'}$$

et nous recevons d'une façon analogue la valeur de l'ordonnée pour les deux autres cas :

$$\left(\varphi_B \frac{Q}{4} \right)_0 - E''' = \frac{Q}{4} - \frac{P}{4} \frac{c}{b} \frac{f'_B + f'_D - f_B - f_D}{\text{tg } \alpha'} - \frac{R_U}{2} \psi \frac{c}{b} \frac{1}{\text{tg } \alpha'} = \left(\varphi_B \frac{Q}{4} \right)_0 - E''''$$

Annexe IV

D'après ce qui a été établi à l'Annexe I :

$$T = \frac{b}{c} R_m \text{tg } \alpha - \frac{c}{b} \Sigma R_i f_i$$

Selon ce que nous avons fixé dans le texte :

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \alpha' = \left(\frac{c}{b}\right)^2 (4f_k + \psi)$$

De cette façon $R_A = R_C > R_B = R_D$ en outre $R_U < R_A$ et ainsi $R_M = R_A$

$$T = \frac{b}{c} R_A \text{tg } \alpha - 2 \frac{c}{b} \left(R_A f' + R_B f + R_U \frac{\psi}{2} \right)$$

et toujours selon l'Annexe I :

$$R_A = A_3 \frac{f' - f}{f'} ; R_B = B_3 \frac{f' - f}{f} ; A_3 + B_3 = \frac{P}{2}$$

Étant donné que

$$f' - f = 2\mu f_k; f' = (1 + \mu)f_k; f = (1 - \mu)f_k$$

on obtient comme résultat:

$$T = \frac{b}{c} \left(\frac{P}{2} - B_3 \right) \frac{2\mu}{1 + \mu} \operatorname{tg} \alpha - 2 \frac{c}{b} P \mu f_k - \frac{c}{b} R_U \psi$$

La formule III donne la valeur de B_3 :

$$\frac{P}{2} - B_3 = \frac{P}{4} + (1 - \varphi_3) \frac{Q}{4} \frac{c}{b}$$

tandis que la charge de roue peut se calculer suivant la figure 13:

$$\varphi_3 \frac{Q}{4} = \frac{Q}{4} - \frac{W}{2} - \frac{S_3}{\operatorname{tg} \alpha'}$$

Ainsi

$$P - 2 B_3 = \frac{P}{2} + \frac{c}{b} W + \frac{b}{c} \frac{2 S_3}{4 f_k + \psi}$$

de sorte que

$$T = \frac{c}{b} (4 f_k + \psi) \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{P}{2} - 2 \frac{c}{b} P \mu f_k - \frac{c}{b} R_U \psi + \\ + \left(\frac{c}{b} \right)^2 (4 f_k + \psi) \frac{\mu}{1 + \mu} W + \frac{\mu}{1 + \mu} 2 S_3$$

et en ordonnant

$$T = \left[\frac{c}{b} \frac{P}{2} (\psi - 4 f_k \mu) + \left(\frac{c}{b} \right)^2 (4 f_k + \psi) W \right] \frac{\mu}{1 + \mu} - \frac{c}{b} R_U \psi + 2 S_3 \frac{\mu}{1 + \mu}$$

Après cela, en choisissant la déviation de la voie par rapport au plan de roulement assez grande pour que $S_3 = T$,

$$S_3 = \frac{\mu}{1 - \mu} \left[\frac{c}{b} \frac{P}{2} (\psi - 4 f_k \mu) + \left(\frac{c}{b} \right)^2 (4 f_k + \psi) W \right] - \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{c}{b} R_U \psi$$

En utilisant enfin notre formule XXI, on reçoit, après arrangement, la forme suivante:

$$S_3 = \psi \frac{c}{b} \frac{\mu \frac{P}{2} - R_U}{1 - \mu}$$

RÉSUMÉ

La charge de roue des véhicules de chemin de fer n'est pas constante, même quand on la mesure sur une voie parfaitement plane. Elle dépend du gauchissage que le véhicule avait subi avant le pesage. En connaissance des frottements internes des ressorts de suspension et de la caisse du véhicule à deux essieux, on peut calculer les valeurs limites inférieure et supérieure de la charge de roue du véhicule placé sur une voie plane ou même dénivelée. Ces valeurs limites peuvent être illustrées par un diagramme caractérisant le gauchissage du véhicule, semblable au cycle d'hystérésis des ressorts à lames (ressorts de suspension). Ce diagramme permet de déterminer l'effet défavorable des frottements sur la sécurité contre le déraillement du véhicule, et d'établir d'une façon plus précise les conditions du pesage de la charge de roue.

BALANCING OF THE WHEEL-LOAD OF TWO-AXLED RAILWAY CARRIAGES

P. KERESZTY

SUMMARY

The wheel-load of railway carriages is not constant even in the case of a perfectly plane rail-track, because it depends on the twisting which happened to the carriage structure before the balancing. Knowing the frictions arising in the bearing-springs and the carriage body of a two-axled carriage, the lower and the upper limit of the wheel-load can be computed for a carriage standing on a plane, as well as for one standing on a twisted rail-track. These limit values can be demonstrated in the diagram characteristic for the twisting of the carriage structure, which resembles the so-called hysteresis-diagram of leaf-springs. The use of the aforementioned diagram gives the possibility for the determination of the detrimental influence of frictions on the safety against derailment of carriages, furthermore, for a more accurate specification for the execution of wheel-load balancings.

DAS WÄGEN DES RADDRUCKES VON ZWEIACHSIGEN EISENBAHNWAGEN

P. KERESZTY

ZUSAMMENFASSUNG

Der Raddruck der Eisenbahnwagen ist selbst im Falle eines vollkommen ebenen Geleises kein konstanter Wert, sondern er hängt von der Verwindung ab, die die Wagenkonstruktion vor dem Wägen erlitten hatte. In Kenntnis der in den Tragfedern und im Wagenkasten entstehenden Reibungen, kann der obere und der untere Grenzwert des Raddruckes, sowohl eines auf einem ebenen wie auch eines auf einem windschiefen Geleise stehenden Wagens berechnet werden, die in dem für die Verwindung der Wagenkonstruktion charakteristischen Diagramm veranschaulicht werden können. Das erwähnte Diagramm ist dem sogenannten Hysteresis-Diagramm der Blattfedern ähnlich; mit seiner Hilfe kann der schädliche Einfluß der Reibungen auf die Sicherheit gegen Wagenentgleisungen bestimmt werden, ferner können für die Durchführung des Wägens der Raddrücke, im Vergleich zu den bisherigen, genauere Vorschriften festgesetzt werden.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ КОЛЕС ДВУХОСНЫХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ
ВАГОНОВ

П. КЕРЕСТИ

РЕЗЮМЕ

Давление колес железнодорожных вагонов на рельсы даже в случае совершенно плоских путей не является постоянным значением, а зависит от степени скручивания конструкции вагона перед определением давления на рельсы. Если известно трение в несущих рессорах и шасси двухосных вагонов, нижние и верхние предельные значения давления колес на рельсы можно вычислить не только для плоских путей, но и для искаженных путей для вагонов, стоящих на искаженных путях, что можно отлично иллюстрировать на диаграмме, характерной для скручивания конструкции вагона. Эта диаграмма аналогична так называемой диаграмме гистерезиса несущих рессор. С помощью этой диаграммы можно определить вредное влияние трений на надежность вагона в отношении схода с рельс и определение давления колес на рельсы можно описать более строго, чем до сих пор.

THEORIE DER ABLEITUNG VON POLYGONPROFILIEN

I. LIPKA

INSTITUT FÜR WERKZEUGMASCHINENENTWICKLUNG, BUDAPEST-HALÁSZTELEK

[Eingegangen am 8. Sept. 1960]

Die Verbindungen mittels Loch und Bolzen ineinanderpassender Maschinenelementenpaare werden im allgemeinen mit Keil oder Nutenwelle gesichert. Die Gefahr der Keilverbindung besteht im Ausschlagen; nachteilig für die Nutenwelle sind aber Schwierigkeiten bei der Präzisionserzeugung. Nuten, Beilagekeile und ähnliche Verbindungselemente sind wegen der auftretenden Höchstbeanspruchungen bei den Arbeitsspindeln der Hochpräzisionswerkzeugmaschinen unverwendbar, da durch Formänderungen und etwa

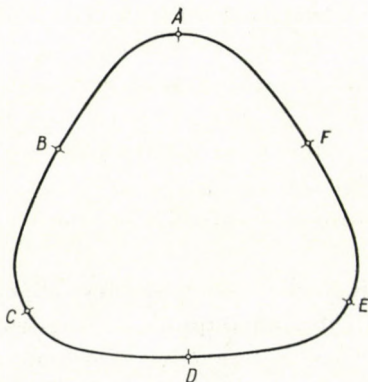


Fig. 1. Krausesches K-Profil mit sechs Scheiteln

entstehende Schwingungen die Genauigkeit der Maschine und deren Dauerhaftigkeit gefährdet werden. Daher werden in der neuzeitlichen Maschinenerzeugung bei Werkzeugmaschinen hoher Genauigkeit als auch bei häufigen Stößen unterworfenen Maschinenbestandteilen zur Übertragung großer Leistungen Polygonprofile für Loch- und Bolzenverbindungen verwendet, wobei die Verbindung der Welle und der Nabe mit zusammengehörigem Profilbolzen und Bohrung gelöst wird. Für den Schliff von Profilbolzen und Bohrungen hat die Firma Krause ein Verfahren ausgearbeitet und sie hat das sog. K-Profil eingeführt. Das durch das Krausesche Verfahren erzeugte K-Profil ist eine Konvexkurve, ähnlich einem Bogendreieck mit abgerundeten Ecken (Fig. 1). Diese

Konvexkurve hat sechs Scheitel, die in der Figur mit Buchstaben bezeichnet wurden. Nach einem klassischen Lehrsatz der Differentialgeometrie (Vierscheitelsatz) hat jede geschlossene Konvexkurve (Oval) mindestens vier Scheitel. Z. B. die Ellipse hat genau vier Scheitelpunkte und zwar in dem Endpunkten der kleinen und der großen Achse. Scheitelpunkte sind jene Punkte der Kurve, in denen die Krümmung ein Maximum oder ein Minimum hat. Neuerdings werden Konvexprofile auch mit Schliff erzeugt, die eine beliebige Scheitelzahl besitzen; das sind die sogenannten Polygonprofile. Die Erzeugung eines solchen Profilbolzens erfolgt, indem die Achse der Schleifscheibe durch eine entsprechende Vorrichtung an irgendeiner geeigneten, geschlossenen Kurve entlang geführt wird, d. h., der Mittelpunkt der rotierenden Schleifscheibe beschreibt irgendeine geschlossene Kurve. Während der Schleifscheibenmittelpunkt die erwähnte geschlossene Kurve eine bestimmte Anzahl von Malen durchläuft, macht das Werkstück (der Bolzen) eine volle Umdrehung um die eigene Achse, wobei durch die rotierende Schleifscheibe auf den Bolzen das erwünschte Polygonprofil geschliffen (generiert) wird. Unter den Polygonprofilen kommen besonders solche mit Erfolg zur Verwendung, die Pseudokreise sind. Das sind sogenannte Profile konstanter Abmessung, Kurven konstanter Breite [1]. Die Hauptcharakteristik des Pseudokreises (Gleichdickes) ist der konstante Abstand zwischen zwei beliebigen, untereinander parallelen Tangenten. Wird also das Maß eines solchen Profils mit Schublehre — oder irgendeinem Meßgerät mit parallelen Meßflächen — wo immer gemessen, wird immer derselbe Wert erhalten, wie im Falle des gewöhnlichen Kreises. Da konstante Maße die Montage als auch die Kontrolle der Abmessungen der fertigen Stückes vereinfachen, ist die Verwendung des Pseudokreises als Profil begründet.

In dieser Abhandlung soll unter besonders allgemeinen Bedingungen die Bahnkurve des Schleifscheibenmittelpunktes für den Fall bestimmt werden, daß das durch die Schleifscheibe erzeugte Profil ein Pseudokreis ist.

1. Ableitung der Gleichung der durch die Schleifscheibe erzeugten Profilkurve

Es soll der Mittelpunkt C der Schleifscheibe K mit dem Halbmesser c die einfach geschlossene Konvexkurve Γ beschreiben (Fig. 2). Das parametrische Gleichungssystem dieser Kurve sei im rechtwinkligen Koordinatensystem (x', y')

$$x' = f(\varphi)$$

$$y' = g(\varphi),$$

wo die Funktionen $f(\varphi)$ und $g(\varphi)$ nach 2π periodische, mindestens einfach stetig differenzierbare Funktionen sein sollen. Der Mittelpunkt des Werk-

stückes sei O und (x, y) sei das rechtwinklige Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt O ist und dessen Achsen richtungsgleich den entsprechenden Achsen des Systems (x', y') sind, ferner sollen die Achsen x und x' in dieselbe Gerade fallen. Während das Werkstück sich im Sinne der Uhrzeigerbewegung, also sich im negativen Sinne drehend einen vollen Umlauf vollführt, soll das Zentrum C der Scheibe die Kurve Γ n -mal durchlaufen, u. zw. auch im nega-

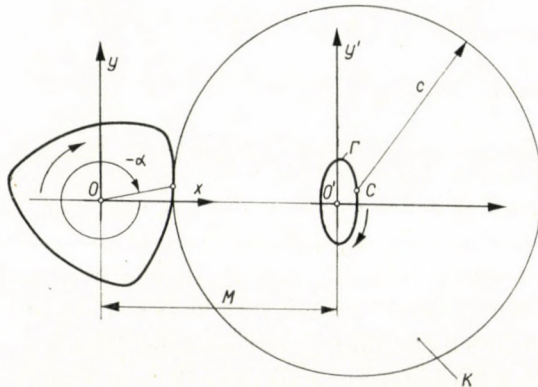


Fig. 2. Schematisches Bild für die Ableitung des Polygonprofils

tiven Sinn. Da der Drehwinkel des Werkstückes negativ ist, soll er mit $-a$ bezeichnet werden; $a \geq 0$. Zwischen dem in der parametrischen Gleichung der Kurve Γ auftretenden Winkelparameter φ und dem Drehwinkel $-a$ des Werkstückes bestehe die folgende lineare Beziehung:

$$\varphi = -na \quad (a \geq 0). \quad (1)$$

Nun soll das parametrische Gleichungssystem der Kurve Γ im Koordinatensystem (x, y) betrachtet werden. Es wird:

$$x = M + f(-na)$$

$$y = g(-na)$$

wo

$$M = OO' \text{ ist.}$$

Das Werkstück sei nun während des ganzen Erzeugungsvorganges als unbeweglich vorgestellt, doch eine, auch um die eigene Achse rotierende Schleifscheibe drehe sich um (umkreise) das Werkstück. Dann wird die relative Bahn des Scheibenmittelpunktes C durch folgende Gleichungen festgesetzt:

$$\xi = (M + f(-na)) \cos a - g(-na) \sin a$$

$$\eta = (M + f(-na)) \sin a + g(-na) \cos a.$$

Der Drehwinkel ist $-a(a \geq 0)$ und daher wird sich im Sinne der Relativbewegung die Schleifscheibe um das Werkstück um den positiven Winkel a verdrehen. Die um den Punkt O (relativ) rotierende Schleifscheibe K liefert eine Kreisschar mit dem Gleichungssystem:

$$x = \xi - c \cdot \cos \psi$$

$$0 \leq \psi < 2\pi,$$

$$y = \eta - c \cdot \sin \psi$$

wo ξ und η die (vorhin angeführten) Koordinaten des Steinscheibenmittelpunktes C sind, wenn sich der Punkt C auf der relativen Bahn bewegt; c ist der Kreishalbmesser und ψ ein neuer Parameter; $0 \leq \psi < 2\pi$. Im angeführten Gleichungssystem erscheint der Parameter a in den Beziehungen für ξ und η . Somit enthält das Kreisschargleichungssystem zwei Parameter: a und ψ . Wird der eine Parameter beseitigt, dann erhält man das Gleichungssystem der Einhüllenden. Zu dieser Elimination muß die folgende Funktionaldeterminante gebildet werden [2]:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial a} & c \cdot \sin \psi \\ \frac{\partial \eta}{\partial a} & -c \cdot \cos \psi \end{vmatrix}.$$

Wenn aus der Gleichung für $D = 0$ der eine Parameter mit dem anderen ausgedrückt und dann diese Beziehung in dem obigen Gleichungssystem für x und y eingesetzt wird, folgt ein einparametrisches Gleichungssystem. Dieses Gleichungssystem drückt die Einhüllende der Kreisschar aus, die nichts anderes als die durch die Schleifscheibe erzeugte Profilkurve ist. Unter Berücksichtigung der Gleichung $D = 0$ sollen also die partiellen Differentialquotienten der Determinante D berechnet werden. Es werden die folgenden Werte erhalten:

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = -\cos a (n f'(-na) + g(-na)) - \sin a (-n g'(-na) + f(-na) + M),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial a} = \cos a (-n g'(-na) + f(-na) + M) - \sin a (g(-na) + n f'(-na)),$$

wo der Strich die Differenzierung nach dem Argument bedeutet. Aus dem Aus-

druck der Determinante D ist ersichtlich, daß $D = 0$ ist, wenn

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}},$$

d. h. wenn:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\cos \alpha [nf'(-na) + g(-na)] + \sin \alpha [-ng'(-na) + f(-na) + M]}{\cos \alpha [-ng'(-na) + f(-na) + M] - \sin \alpha [g(-na) + nf'(-na)]} \text{ ist.}$$

Auf Grund der Beziehungen $\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}$ und $\sin \psi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}}$

folgt hieraus:

$$\cos \psi = \frac{\cos \alpha [-ng'(-na) + f(-na) + M] - \sin \alpha [g(-na) + nf'(-na)]}{G}$$

$$\sin \psi = \frac{\cos \alpha [nf'(-na) + g(-na)] + \sin \alpha [-ng'(-na) + f(-na) + M]}{G},$$

wo

$$G = \{[g(-na) + nf'(-na)]^2 + [-ng'(-na) + f(-na) + M]^2\}^{\frac{1}{2}} \text{ ist.}$$

Wenn diese Werte schließlich in das frühere Gleichungssystem der Kreisschar

$$x = \xi - c \cos \psi,$$

$$y = \eta - c \sin \psi$$

eingesetzt werden, folgt das Gleichungssystem der Einhüllenden in folgender Form:

$$\begin{aligned} x &= [M + f(-na)] \cos \alpha - g(-na) \sin \alpha - \\ &- c \frac{\cos \alpha [-ng'(-na) + f(-na) + M] - \sin \alpha [g(-na) + nf'(-na)]}{G} \\ y &= [M + f(-na)] \sin \alpha + g(-na) \cos \alpha - \\ &- c \frac{\cos \alpha [nf'(-na) + g(-na)] + \sin \alpha [-ng'(-na) + f(-na) + M]}{G}. \end{aligned} \quad (2)$$

Im weiteren wird gezeigt, daß falls die Kurve keinen Singulärpunkt besitzt, für alle Werte von a $G \neq 0$ ist.

Das hierdurch erhaltene Gleichungssystem (2) der Profilkurve, mit α als Parameter, ist äußerst verwickelt, da für die durch den Schleifscheibenmittelpunkt C beschriebene Kurve Γ bisher keine Bedingungen gemacht wurden; die Kurve wurde bloß mit dem parametrischen Gleichungssystem

$$x' = f(\varphi)$$

$$y' = g(\varphi)$$

bestimmt. Wird jedoch von der die Koordinate y' darstellenden Funktion $g(\varphi)$ die Bedingung

$$g(\varphi) = -nf'(\varphi) \quad (3)$$

für alle Werte von φ erfüllt, dann wird das Gleichungssystem der Profilkurve wesentlich einfacher. In diesem Falle gilt nach (3) die Gleichung

$$g(-na) + nf'(-na) = 0$$

für alle Werte von α und G erhält die folgende einfache Form:

$$G = -ng'(-na) + f(-na) + M.$$

Der Zähler im Bruch für x in (2) wird

$$G \cos \alpha;$$

der Wert des Zählers im Bruch für y wird

$$G \sin \alpha.$$

Somit werden die einfachen Gleichungen aus (2) für die Einhüllende bzw. für das erzeugte Profil:

$$x = (M - c) \cos \alpha + f(-na) \cos \alpha - g(-na) \sin \alpha, \quad (4)$$

$$y = (M - c) \sin \alpha + f(-na) \sin \alpha + g(-na) \cos \alpha.$$

Es sei hier bemerkt, daß die Einhüllende der Kreisschar eigentlich aus zwei nicht miteinander zusammenhängenden Zweigen besteht, wovon einer durch den Schleifstein beim Bolzenschliff erzeugt wird. Der zweite Zweig (Lochschliff) wird erhalten, indem in der Gleichung (4) statt c der Wert $-c$ eingesetzt wird (Fig. 3). Wenn man nämlich im Gleichungssystem der Kreisschar, die durch die relative Drehung der Schleifscheibe um den O Punkt entsteht, statt c den Wert $-c$ setzt, dann wird das erhaltene Gleichungssystem $x = \xi +$

$+ c \cos \psi$; $y = \eta + c \sin \psi$ offenbar das Gleichungssystem derselben Kreisschar, was übrigens aus Fig. 3 klar hervorgeht.

Beispiel: Es sei die durch den Schleifscheibenmittelpunkt beschriebene

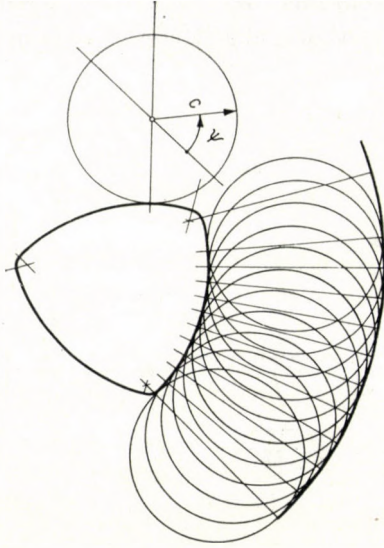


Fig. 3. Die bei Ableitung des Polygonprofils entstandenen beiden Zweige der Einhüllenden Kurve Γ eine Ellipse, deren parametrisches Gleichungssystem folgende Form hat:

$$\begin{aligned} x' &= f(\varphi) = -e \cos \varphi, \\ y' &= g(\varphi) = -ne \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Zwischen dem Winkelparameter φ und dem Drehwinkel $-a$ des Werkstückes — dieser Drehwinkel ist negativ — soll die Beziehung (1) bestehen. (5) ist das Gleichungssystem einer Ellipse in Parameterform, deren kleine Achse $2e$; große Achse $2ne$ ist. Wenn der Parameter φ das Intervall $(0, -2\pi)$ von 0 bis -2π durchläuft, dann wird der Punkt (x', y') die Kurve in negativem Sinne (im Sinne der Uhrzeigerbewegung) beschreiben. Ferner werden die Funktionen $f(\varphi)$ und $g(\varphi)$ unter (5) der Bedingung (3)

$$g(\varphi) = -nf'(\varphi)$$

genügen, da jetzt

$$f'(\varphi) = e \sin \varphi \text{ ist.}$$

Hiernach wird für die Kurve Γ unter (5) die Gleichung (4) des erzeugten Profils folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} x &= (M - c) \cos a - e \cos na \cos a - ne \cdot \sin na \cdot \sin a, \\ y &= (M - c) \sin a - e \cos na \sin a + ne \cdot \sin na \cdot \cos a. \end{aligned}$$

E. FILEMON beschäftigte sich mit der Ableitung von Polygonprofilen für den Fall, daß sich der Schleifscheibenmittelpunkt an einer Ellipse entlang bewegt [3].

In diesem Falle vollführt die Schleifscheibenachse eine gleichzeitige lotrechte und waagerechte Bewegung. Diese Bewegung nach zwei Richtungen

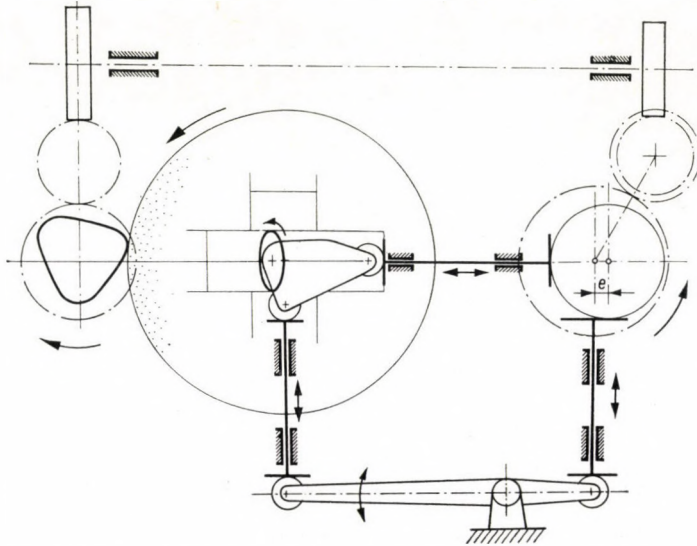


Fig. 4. Kinematische Darstellung der Polygonprofilschleifmaschine

wird von einer Exzentrerscheibe mit veränderbarer Exzentrizität e durch Vermittlung von entsprechendem Schlitten und Hebelarm vollbracht (Fig. 4). Die Ellipse unter (5) wird als Resultierende der beiden aufeinander rechtwinkligen (harmonischen) Bewegungen durch den Schleifscheibenmittelpunkt derart befahren, daß zwischen dem Werkstückdrehwinkel und dem die Scheibenmittelpunkt-lage bestimmenden Winkelparameter φ die Beziehung (1) $\varphi = -na$ besteht. Die große Halbachse der Ellipse ist: ne ; die kleine Halbachse: e . Die vertikale Bewegung der Scheibenachse vollführt die Exzentrerscheibe mit Hilfe eines doppelarmigen Hebels, dessen Übersetzungsverhältnis n ist. Die Scheitelpunkte der hierdurch erhaltenen Profilkurve befinden sich dort, wo der Krümmungshalbmesser ϱ (oder die Krümmung selbst) Extremwerte hat, wo $\frac{d\varrho}{da} = 0$ ist. Da nun der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = R + e(n^2 - 1) \cos na \quad (\text{wo } R = M - c)$$

(siehe [2]; (25)) und somit

$$\frac{d\rho}{da} = -en(n^2 - 1) \sin na \quad \text{ist,}$$

hat der Krümmungshalbmesser ρ Extremwerte dort, wo $\sin na = 0$ ist, also in den $2n$ Punkten für $a = \frac{k\pi}{n}$; $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (2n - 1)$. Somit ist die Anzahl der Kurvenscheitelpunkte: $2n$.

In der allgemeinen Erläuterung dieses Punktes ist noch zu bemerken, daß das Gleichungssystem (2) der Profilkurve auch in einer noch allgemeineren Form leicht abgeleitet werden kann, wenn statt der linearen Beziehung (1) zwischen den Winkeln a und φ ein allgemeiner Funktionszusammenhang $\varphi = F(a)$ zugelassen wird.

2. Bedingungen der Ableitung pseudokreisförmiger (gleichdicker) Polygonprofile

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, ist es von Vorteil, einen Pseudokreis als Polygonprofil zu verwenden, wobei also der Durchmesser der Kurve, wo immer (mit der Schublehre) gemessen, immer denselben konstanten Wert besitzt.

Im vorangehenden wurde angeführt, daß falls der Schleifscheibenmittelpunkt eine Bahnkurve Γ , die der Bedingung (3) genügt, beschreibt, und außerdem das Durchlaufen der Kurve Γ nach der Bedingung (1) erfolgt, ein Polygonprofil entsprechend der Gleichungen (4) zustandekommt. Nun soll untersucht werden, welchen Bedingungen ferner eine durch den Schleifscheibenmittelpunkt durchlaufene Bahnkurve außer (3) noch zu genügen hat, um einen durch den Schleifstein erzeugten Pseudokreis zu erhalten.

Es soll die mit dem Gleichungssystem (4) dargestellte Profilkurve

$$x = (M - c) \cos a + f(-na) \cos a - g(-na) \sin a,$$

$$y = (M - c) \sin a + f(-na) \sin a + g(-na) \cos a$$

betrachtet und der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ berechnet werden. Da die Voraussetzung (3) besteht, also $g(\varphi) + nf'(\varphi) = 0$, daher ist

$$\begin{aligned} \frac{dx}{da} &= -(M - c) \sin a - nf'(-na) \cos a - f(-na) \sin a + ng'(-na) \sin a - \\ &\quad - g(-na) \cos a = \sin a [ng'(-na) - f(-na) - (M - c)] \end{aligned}$$

und ebenso ist

$$\frac{dy}{da} = -\cos a [ng'(-na) - f(-na) - (M - c)].$$

Mit der Voraussetzung, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer

$$ng'(-na) - f(-na) - (M - c) \neq 0 \quad (6)$$

ist, erhalten wir als Ableitung von y nach x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{da}}{\frac{dx}{da}} = -\operatorname{ctg} a. \quad (7)$$

Falls in den Formeln der Differentialquotienten $\frac{dx}{da}$ und $\frac{dy}{da}$ der Teil unter (6) in der eckigen Klammer für irgendwelchen Wert von a verschwindet, so wird der Differentialquotient im Punkt für diesen Wert von a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$$

unbestimmt, also ist dieser Punkt ein *Singulärpunkt* der Kurve. Natürlich darf das konvexe Polygonprofil keinen Singulärpunkt haben. Singulärpunkte des Profils werden vermieden bei Erfüllung gewisser Bedingungen, d. h. wenn der Ausdruck (6) bei keinem Werte von a verschwindet. In der Beziehung (6) kommen die Funktionen $f(\varphi)$ und $g'(\varphi)$ vor, die nach 2π periodisch und ihre Extremwerte endliche, bestimmte Werte sind. Dasselbe gilt für die aus $f(\varphi)$ und $g'(\varphi)$ gebildete Funktion

$$ng'(\varphi) - f(\varphi),$$

auch für den absoluten Wert dieser Funktion. Es soll μ der Höchstwert von $|ng'(\varphi) - f(\varphi)|$, also

$$\operatorname{Max} |ng'(\varphi) - f(\varphi)| = \mu \text{ sein.}$$

Wenn bei der Wahl des Abstandes M gesichert wird, daß

$$\mu < M - c$$

sei, dann wird der Ausdruck (6) bei keinem Wert von a verschwinden, und das Profil wird keinen Singulärpunkt haben.

Es ist offenbar, daß im Fall, wo die Bedingung $\mu < M - c$ erfüllt wird, auch die Größe G im Gleichungssystem (2) nicht verschwindet.

Als Beispiel diene der bereits betrachtete Fall, wobei sich der Schleifscheibenmittelpunkt auf einer elliptischen Bahn bewegt:

$$f(\varphi) = -e \cos \varphi,$$

$$g(\varphi) = -ne \sin \varphi,$$

und daher

$$\begin{aligned} ng'(\varphi) - f(\varphi) &= -n^2e \cos \varphi + e \cos \varphi \\ &= e \cos \varphi (1 - n^2). \end{aligned}$$

Also

$$\text{Max } |ng'(\varphi) - f(\varphi)| = e(n^2 - 1) \quad (n \geq 1)$$

und somit hat die Kurve keinen Singulärpunkt, falls die folgende Ungleichung besteht:

$$M - c > e(n^2 - 1).$$

Zurückgreifend auf den allgemeinen Fall, wo die Kurve (4) keinen Singulärpunkt hat, wird in dem beliebigen Parameterwert a entsprechenden Punkte nach (7) die Richtungstangente der Berührungsgerade der Kurve:

$$\frac{dy}{dx} = -\text{ctg } a.$$

Da die Funktion $\text{ctg } a$ nach π periodisch ist, sind die Tangenten der Kurve in den zu den Parameterwerten a und $(a + \pi)$ gehörenden beiden Punkten miteinander parallel.

Es soll in irgendeinem zum Parameter $a = a_0$ gehörenden Punkt (x_0, y_0) die Gleichung der Tangente der Kurve (4) im Koordinatensystem (x, y) betrachtet werden. Da im Punkte (x_0, y_0)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\text{ctg } a_0 \\ &\quad (x = x_0) \end{aligned}$$

ist, hat die Gleichung die folgende Form:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\text{ctg } a_0$$

d. h.
$$x \operatorname{ctg} \alpha_0 + y - x_0 \operatorname{ctg} \alpha_0 - y_0 = 0.$$

Die Gleichung lautet in der Hesseschen Normalform geschrieben:

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha_0}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_0}} x + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_0}} y - \frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha_0 + y_0}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_0}} = 0.$$

Hier ist das konstante Glied:

$$p = \frac{x_0 \operatorname{ctg} \alpha_0 + y_0}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_0}} = ON,$$

die sogenannte Normale der Geraden, gleich dem Abstand der Geraden vom

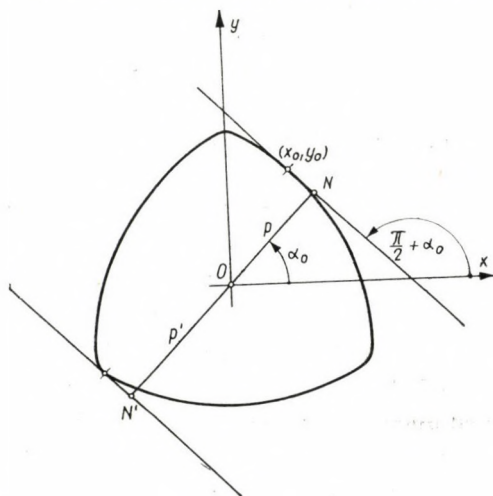


Fig. 5. Bestimmung des Pseudokreisdurchmessers

Anfangspunkt O (Fig. 5). (Der Punkt O ist der Drehpunkt des Werkstückes.)
Da

$$\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_0} = \frac{1}{\sin \alpha_0}$$

ist, der Wert der Normalen:

$$p = x_0 \cos \alpha_0 + y_0 \sin \alpha_0.$$

Werden die Werte von x_0 und y_0 laut Formeln (4) hierin eingesetzt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} p &= [(M - c) \cos \alpha_0 + f(-n a_0) \cos \alpha_0 - g(-n a_0) \sin \alpha_0] \cos \alpha_0 + \\ &+ [(M - c) \sin \alpha_0 + f(-n a_0) \sin \alpha_0 + g(-n a_0) \cos \alpha_0] \sin \alpha_0 = \\ &= (M - c) \cos^2 \alpha_0 + f(-n a_0) \cos^2 \alpha_0 - g(-n a_0) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \\ &+ (M - c) \sin^2 \alpha_0 + f(-n a_0) \sin^2 \alpha_0 + g(-n a_0) \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = \\ &= M - c + f(-n a_0). \end{aligned}$$

Für den Abstand der Tangente vom Ausgangspunkt des Koordinatensystems wurde also die folgende Beziehung erhalten:

$$p = M - c + f(-na_0). \quad (8)$$

Die erhaltene Größe p gehört zur Tangente, die an den dem Parameterwert a_0 entsprechenden Kurvenpunkt gelegt wurde. Es soll hiernach der zum Parameterwert $a = a_0 + \pi$ gehörige Kurvenpunkt betrachtet werden. Die an diesen Punkt gelegte Tangente ist, wie angeführt, parallel mit derjenigen, die an den dem a_0 entsprechenden Kurvenpunkt gelegt wurde. Wenn daher der Abstand der im Punkte gelegten Tangente, der zu $(a_0 + \pi)$ gehört, vom Ursprung O mit p' bezeichnet wird, dann ist $(p + p')$ der Abstand der beiden parallelen Tangenten voneinander. Der Abstand p' der Tangente vom Koordinatenanfangspunkt ist nach Formel (8):

$$p' = M - c + f(-n(a_0 + \pi)).$$

Nun soll von der nach 2π periodischen Funktion $f(\varphi)$ vorausgesetzt werden, daß sie auch die Bedingung

$$f(\varphi) = -f(\varphi + \pi) \quad (9)$$

erfüllt. Da die Funktion $f(\varphi)$ nach 2π periodisch ist, folgt nach (9), daß für jede positive oder negative, ungerade, ganze Zahl die Gleichung

$$f(\varphi) = -f(\varphi + n\pi)$$

besteht. Ist hiernach n eine ungerade Zahl, so ist

$$f(-n(a_0 + \pi)) = -f(-na_0),$$

und somit

$$p' = M - c - f(-na_0).$$

Hieraus und aus der Beziehung (8) folgt, daß

$$p + p' = 2(M - c),$$

also ist der Abstand irgendwelcher zwei, paralleler Tangenten der Kurve (4) eine Konstante. Zusammenfassend kann also der folgende allgemeine Satz ausgesprochen werden:

Wenn sich der Schleifscheibenmittelpunkt auf einer einfach geschlossenen Konvexkurve bewegt, in deren parametrischer Darstellung in dem Gleichungssystem

$$x = f(\varphi),$$

$$y = g(\varphi)$$

die $f(\varphi)$ und $g(\varphi)$ nach 2π periodische, mindestens einmal stetig differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} g(\varphi) &= -nf'(\varphi), \\ f(\varphi) &= -f(\varphi + \pi), \end{aligned}$$

worin n irgendeine, ungerade, positive, ganze Zahl ist; ferner zwischen den Bewegungen der Schleifscheibe und des Werkstückes eine Beziehung vorhanden ist, wonach zwischen dem Drehwinkel $-a$ des im negativen Sinne drehenden Werkstückes und dem die Lage des Schleifscheibenmittelpunktes bestimmenden Winkelparameter φ die Beziehung

$$\varphi = -na \quad (a \geq 0)$$

besteht, und die Drehachse des Werkstückes auf der x Achse liegt, dann erzeugt (generiert) der Schleifstein auf das Werkstück einen Pseudokreis.

Z. B. wenn der Schleifscheibenmittelpunkt sich auf dem Umfang der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= f(\varphi) = -e \cos \varphi \\ y &= g(\varphi) = -ne \sin \varphi \end{aligned}$$

festgesetzten Ellipse bewegt, dann erfüllt, wie oben angeführt, die Funktion $g(\varphi)$ die Bedingung $g(\varphi) = -nf'(\varphi)$; aber auch die Bedingung $f(\varphi) = -f(\varphi + \pi)$ wird erfüllt, denn

$$\cos \varphi = -\cos(\varphi + \pi).$$

Wenn daher noch vorausgesetzt wird, daß n eine ungerade, ganze Zahl sei, so wird das generierte Profil ein Pseudokreis sein. Doch wenn $n = 1$ ist, geht aus dem Gleichungssystem der Profilkurve sogleich hervor, daß die Kurve zu einem gewöhnlichen Kreis wird.

3. Ableitung äquidistanter Polygonprofile

Offenbar können die Abmessungen des durch Schliff erzeugten Profilbolzens verändert werden, wenn die durch den Mittelpunkt C der Schleifscheibe beschriebene Kurve Γ (Fig. 2), — die in fester Verbindung mit dem Koordinatensystem (x', y') steht, — näher oder weiter zur oder von der Werkstückachse versetzt, d. h. der Abstand $OO' = M$ verändert wird. Aus der Gleichung (4) für die Polygonkurve geht hervor, daß falls der Schleif-

steinhalbmesser c zufolge Verschleiß abnimmt, so kann man durch Verminderung des Abstandes M eine unveränderte Differenz $(M - c)$, wie auch eine mit den Gleichungen (4) dargestellte unveränderte Profilkurve erreichen. Es soll irgendein Punkt $P(x, y)$ der durch das Gleichungssystem (4) dargestellten Kurve betrachtet werden, der zum Parameterwert a gehört (Fig. 6). In diesem Punkt P ist nach (7) die Richtungstangente der Kurvenberührungsgerade: $-\text{ctg } a$. Im Punkte P soll die Normale zur Kurve errichtet werden.

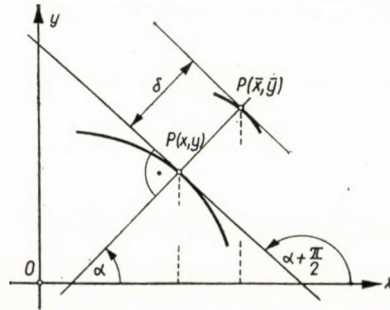


Fig. 6. Das Polygonprofil und seine äquidistante Kurve

Da die Richtungstangente der Normalen gleich dem negativen, reziproken Wert der Richtungstangente der Berührungsgerechten ist, ist die Richtungstangente der Normale gleich $\text{tg } a$. Die Normale bildet also den Winkel a mit der positiven Hälfte der x Achse. Wenn in jedem Kurvenpunkt die Normale eingezeichnet und auf die Normale derselbe Abstand δ vom Kurvenpunkt als Ausgangspunkt aufgetragen wird, dann entsteht eine äquidistante Kurve zur gegebenen Kurve. Wenn die Koordinaten des äquidistanten Kurvenpunktes \bar{P} mit \bar{x}, \bar{y} bezeichnet werden, dann werden als Koordinaten — da $P\bar{P}$ den Winkel a mit der x Achse bildet — die Werte:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \delta \cos a \\ \bar{y} &= y + \delta \sin a\end{aligned}$$

erhalten. Es sollen hierin für x und y die Beziehungen (4) eingesetzt werden, um das parametrische Gleichungssystem der äquidistanten Kurve in folgender Form zu bekommen:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (M - c + \delta) \cos a + f(-na) \cos a - g(-na) \sin a, \\ \bar{y} &= (M - c + \delta) \sin a + f(-na) \sin a + g(-na) \cos a.\end{aligned}$$

Aus beiden Gleichungen ist ersichtlich, daß falls in den Gleichungen (4) statt M der Wert $(M + \delta)$ eingesetzt wird, wobei $\delta \leq 0$, d. h., die Bahn-

kurve Γ zum Werkstück genähert oder davon entfernt wird, äquidistante Kurven entstehen.

Die bisherigen Überlegungen bezogen sich auf Bolzenschliffe. Soll das zum Bolzen gehörige Loch geschliffen, d. h. die Profilkurve des Loches ermittelt werden, dann muß — wie bereits unter Punkt 1 erwähnt, — in den Gleichungen (4) statt c der Wert $-c$ eingesetzt werden. Das Loch wird natürlich nicht mit einer Schleifenscheibe gleichen Halbmessers c wie der Bolzen, sondern mit einer anderen vom Halbmesser c' geschliffen. Demnach ist das Gleichungssystem der Profilkurve des Loches, wenn der Abstand OO' nun durch M' bezeichnet wird:

$$x = (M' + c') \cos a + f(-na) \cos a - g(-na) \sin a$$

$$y = (M' + c') \sin a + f(-na) \sin a + g(-na) \cos a$$

Offenbar wird die mit diesem Gleichungssystem festgesetzte Profilkurve des Loches kongruent mit der Bolzenprofilkurve, falls

$$M - c = M' + c' \text{ ist,}$$

woraus für die Schleifsteinhalbmesser und die Einstelldistanzen OO' die folgende Beziehung gewonnen wird:

$$M - M' = c + c'.$$

Um für Bolzen und Loch die vorgeschriebene Passungseigenheit zu sichern, müssen natürlich den Nennprofilmaßen gemäß Profile kleinerer und größerer Abmessungen hergestellt werden, u. zw. äquidistante Polygonprofile, die der Toleranz entsprechende Abweichungen von den Nennprofilen aufweisen. Dies wird durch Verändern der Einstelldistanz M erreicht, denn, wie gezeigt, werden durch die Veränderung von M lauter äquidistante Profile gewonnen.

SCHRIFTTUM

1. RADEMACHER, H. u. TOEPLITZ, O.: Von Zahlen und Figuren 2. Aufl. Verl. v. J. Springer, Berlin 1933.
2. LIPKA, I.: Megjegyzések ifj. Drahos I., Hornyik L. és Hosszu M. »Egy szerszámgeometriai probléma matematikai megoldása« című dolgozatához. (Bemerkungen zur Abhandlung von I. Drahos jun., L. Hornyik u. M. Hosszú »Mathematische Lösung eines werkzeuggeometrischen Problems«.) M. T. A. Matematikai Kutató Intézetének Közleményei (Mitt. d. MTA Math. Forsch. Inst.) III. Jahrg. 1958.
3. FILEMON, E.: Production and Analysis of Polygon Profiles. Periodica Polytechnica Budapest, 1959.

ZUSAMMENFASSUNG

Polygonprofile werden für Bolzen-Loch Verbindungen verwendet. Profilbolzen werden durch Schleifen erzeugt, indem die Schleifscheibenachse (der Mittelpunkt) durch eine geeignete Vorrichtung an einer geschlossenen Bahnkurve Γ entlang geführt wird, wobei auf den sich um die eigene Achse drehenden Bolzen die sich ebenfalls um die eigene Achse drehende Schleifscheibe das erwünschte Profil anschleift (generiert). Das erste verbreitete Profil dieser Art war das Krausesche K -Profil, dessen Form nur wenig von der eines Dreiecks mit abgerundeten Ecken abweicht. Solche K -Profil genannten Konvexkurven haben sechs Scheitel. Zur Zeit werden Konvexprofile mit beliebiger Anzahl von Scheiteln erzeugt; sie werden Polygonprofile genannt. Die Anzahl der Scheitel ist davon abhängig, wievielmals die Schleifscheibe die Bahnkurve Γ durchläuft, während das Werkstück (der Bolzen) um die eigene Achse eine Umdrehung vollführt. Es wird die Gleichung der durch den Schleifstein erzeugten Profilkurve (Polygonprofil) für den allgemeinen Fall bestimmt, daß die Bahnkurve Γ des Schleifscheibenmittelpunktes eine beliebig angenommene einfach geschlossene Konvexkurve ist. Falls die Gleichung der Bahnkurve Γ gewisse Bedingungen erfüllt, nimmt die erzeugte Profilkurvegleichung eine einfachere Gestalt an; so z. B. wenn die Γ Kurve eine Ellipse ist. Ferner wird eingehend untersucht, bei welcher Bahnkurve Γ das erzeugte Profil zu einer Kurve gleicher Dicke, zum sogenannten Pseudokreis wird.

THEORY ON THE DEDUCTION OF POLYGON PROFILES

I. LIPKA

SUMMARY

Polygon profiles are used for bolt and hole joints. Shaped bolts are made by form grinding, the axis (the center) of the grinding wheel being conducted by some suitable device along some closed trace Γ , while the grinding disc revolving about its own axis is grinding (generating) the desired profile to the bolt turning round its own axis as well. The first profile of this kind was Krause's profile, the shape of which shows but a slight difference from a triangle with rounded off corners. Such a convex curve called a K -profile has six cusps. Nowadays convex profiles with any number of cusps are being manufactured; they are the so called polygon profiles. There are as many numbers of profile cusps as the abrasive disc can run along the trace, while the work piece (the bolt) is making one single turn round its axis. Equations of the profile curve (polygon profile) generated by the abrasive disc were determined for a general case, when the trace curve Γ of the abrasive disc center was an optionally assumed once closed convex curve. The equation of the generated profile curve could be more simple if the equation of the trace Γ fulfils certain conditions; e. g. if the Γ curve were an ellipse. Further detailed investigations of Γ traces made it possible to find out, which of the generated profiles would become curves having an equal thickness, i. e. pseudo circles.

THÉORIE DE LA FORMATION DES PROFILS POLYGONAUX

I. LIPKA

RÉSUMÉ

Les profils polygonaux sont utilisés dans les assemblages à arbre et alésage. L'arbre profilé se fait à la rectifieuse de telle sorte, que l'axe (le centre) de la meule est dirigé, au moyen d'un dispositif approprié, le long de la courbe d'une voie en Γ , et simultanément, la meule rotative engendre le profil voulu sur l'arbre tournant, lui aussi, autour de son axe. Le premier profil généralement utilisé de ce genre fut le profil en K de Krause, dont la forme ne s'écarte que peu de celle d'un triangle aux angles arrondis. Ces courbes convexes appelées «profils K » ont six points de rebroussement. Actuellement, on produit aussi des profils convexes, où le nombre des points de rebroussement peut être choisi à volonté: c'est ce qu'on appelle les profils polygonaux.

Le nombre des points de rebroussement dépend du nombre de parcours effectués par le centre de la meule sur la voie en Γ , pendant que la pièce à usiner (l'arbre) fait un seul tour

autour de son axe. L'auteur traite de la détermination de l'équation du profil courbe (profil polygonal) engendré par le meule, dans le cas général où la courbe de la voie en Γ parcourue par le centre de la meule est une courbe convexe une fois fermée, établie à volonté. Si l'équation de la courbe en Γ satisfait à certaines conditions déterminées, alors l'équation de la courbe engendrée prend une forme plus simple, dans le cas par exemple où la courbe en est une ellipse. Par la suite, l'auteur examine en détail, avec quelle courbe de voie en Γ on aura un profil en pseudo-cercle.

ТЕОРИЯ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ПОЛИГОННЫХ ПРОФИЛЕЙ

И. ЛИПКА

РЕЗЮМЕ

Полигонные профили применяются для системы соединений валов и отверстий. Изготовление профильного вала производится шлифованием, а именно таким образом, что ось шлифовального круга (его центр) при помощи подходящего механизма приводится в движение по какой-либо замкнутой кривой Γ и вследствие этого на вал, вращающийся вокруг своей оси, шлифовальный круг, вращающийся также вокруг своей оси, шлифует желаемый профиль. Первым распространенным таким профилем был профиль K Краузе, форма которого только незначительно отличается от треугольника со снятыми кромками. Такая конвексная кривая, называемая профилем K , имеет 6 вершин. Сегодня изготавливаются и такие конвексные профили, число вершин которых может быть произвольным; такие профили являются так называемыми полигонными профилями.

Число вершин профиля зависит от того, сколько раз опишет центр шлифовального круга путь кривой Γ за то время, пока заготовка (вал) повернется один раз вокруг своей оси. Автор занимается определением уравнения полигонного профиля, изготовленного шлифовальным кругом, в том общем случае, когда кривая Γ центра шлифовального круга является произвольно принятой однократной замкнутой конвексной кривой. Если уравнение кривой Γ удовлетворяет определенным условиям, тогда уравнение изготовленной профильной кривой принимает более простой вид; например, в том случае, когда кривая Γ является эллипсом. В дальнейшем детально анализируется, что при какой кривой Γ будет изготовленный профиль иметь постоянную кривизну: так называемый накладной круг.

ELLIPTIC PARABOLOID SHELLS WITH CONSTANT OR CONTINUOUSLY VARYING THICKNESS HAVING AN ELLIPTIC BASE

P. CSONKA
D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF BUILDING SCIENCES OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received October 11, 1960]

1. Introduction

The elliptic paraboloid shells having an elliptic basis (Fig. 1) are usually constructed according to DISCHINGER's rule of the "statical compensation of masses" and so have varying thickness.

The determination of the wall thickness of the shells in question, accord-

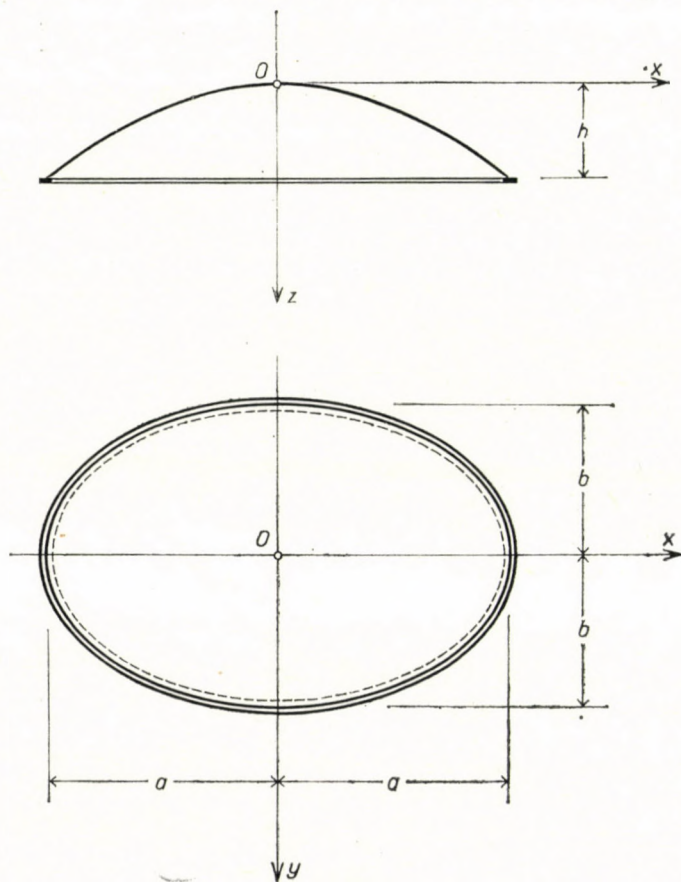


Fig. 1

ing to the above-mentioned method is not motivated by a statical necessity, but merely by the fact, that the calculation of shells so constructed is, in general, extraordinarily simple and easy. But, the afore-mentioned simplification is usually followed by a great waste of materials, therefore, it seems to be desirable to work out a method of calculation the application of which is relatively simple, either in the case of a constant, or for an optionally but continuously varying wall thickness.

In the following a method of calculation corresponding to this demand will be presented. The method to be dealt with can be used in the case of vertical distributed forces, characterized by a polynome.

2. Assumptions of the calculation

The investigations refer to an elliptic paraboloid shell with a vertical axis, supported along its lower border by a horizontal edge beam. The support

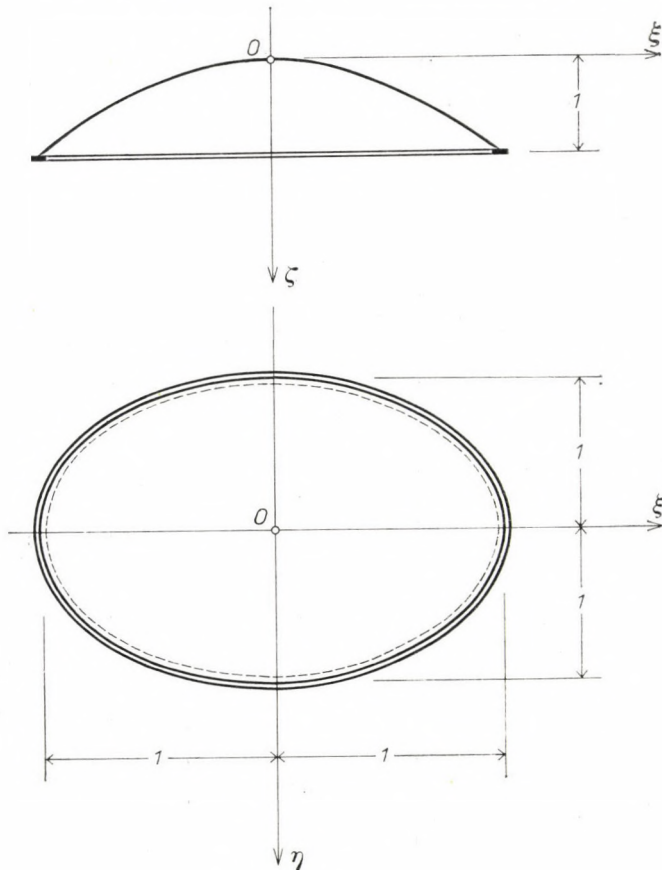


Fig. 2

occurs along a single line, *i. e.*, along the *edge line*. This edge line coincides with the axis line of the edge beam, and lies on the middle surface of the shell at the same time. The edge beam is supported along its whole length by a wall. The latter exerts only vertical forces on the edge beam. These forces pass through the axis line of the edge beam.

In the following investigations the simplifying assumptions of the membrane theory are applied. Accordingly, it is assumed that the shell does not resist bending and torsional force effects, furthermore, that the disturbing effects arising at the junction of the shell and the edge beam, due to the constraints of deformation, are insignificant.

3. Fundamentals

The investigations will be carried out in the system of orthogonal co-ordinates $O(x, y, z)$ or $O(\xi, \eta, \zeta)$, respectively, shown in Figs. 1 and 2. The relation between these two kinds of co-ordinates is the following:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{h}. \quad (1)$$

The equation of the middle surface of the shell in the system of co-ordinates $O(\xi, \eta, \zeta)$, has the form

$$\zeta = \xi^2 + \eta^2, \quad (2)$$

while the load function expressing the load data of the shell is

$$Z = Z(\xi, \eta). \quad (3)$$

The stress state of the shell will be characterized by the projectional internal forces n_x, n_{xy}, n_z referring to the basic projectional area. Between the internal forces and PUCHER's stress function $F(\xi, \eta)$ the following relations hold:

$$n_x = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}, \quad n_{xy} = -\frac{1}{ab} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \cdot \partial \eta}, \quad n_z = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}. \quad (4)$$

In the case in question the stress function itself has to satisfy the differential equation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{a^2 b^2}{2h} Z = 0, \quad (5)$$

as well as the boundary conditions of the problem.

As to the boundary condition it is stipulated that the axis line of the edge beam of the shell should be the funicular curve of the horizontal forces affecting the edge beam. The satisfaction of this demand requires that the stress function should be constant or varying, according to a plane along the edge beam. In conformity with the above, the most simple possibility, *i. e.*, the relation

$$F = 0 \quad (6)$$

will be specified as boundary condition.

4. The stress function of the problem

In the following — keeping in mind the demands of practice — only some cases of loading characterized by simple polynomes will be dealt with. In all these cases the stress function of the shell will be set up in the following form:

$$F = \frac{a^2 b^2}{2h} [\xi^2 + \eta^2 - 1] G(\xi, \eta), \quad (7)$$

where $G(\xi, \eta)$ is a polynome advancing according to the powers of ξ and η . It is obvious that the so constructed function $F(\xi, \eta)$ satisfies the boundary condition (6), as on the edge of the shell the expression within brackets figuring in formula (7) equals zero. For solving the task in question, therefore, only the adequate polynome $G(\xi, \eta)$ should be sought for. The degree number of this polynome, as will be seen, coincides with the degree number of the load polynome.

The polynome $G(\xi, \eta)$ sought for will be determined by using the method of the unknown coefficients, *i. e.*, the polynome in question and the value of the load function will be substituted into (7) and subsequently an adjustment of the corresponding coefficients will be carried out.

For loading cases, important from the view point of practice, the above-mentioned procedure can be carried out in the following manner.

a) *Constant load*

The value of the load on the shell, related to the surface unit of the projectional basic area, should be constant, *i. e.*,

$$Z = C_{00} = \text{const.} \quad (8)$$

In this case — as can quite simply be proved — the stress function will take the form

$$F = \frac{a^2 b^2}{2h} (\xi^2 + \eta^2 - 1) A_{00}, \quad (9)$$

where A_{00} is for the time being an unknown constant.

For the determination of A_{00} the expressions (8) and (9) should be substituted into differential equation (5). By so doing, it will be found, that the stress function (9) can only satisfy differential equation (5), if the relation

$$\frac{a^2 b^2}{2h} 4 A_{00} + \frac{a^2 b^2}{2h} C_{00} = 0$$

holds. Herefrom, for the unknown coefficient A_{00} the following value is obtained:

$$A_{00} = -\frac{C_{00}}{4}. \quad (10)$$

b) *Load varying according to a pure polynome of the first degree*

The load characterized by the function

$$Z = C_{10} \xi + C_{01} \eta \quad (11)$$

should be dealt with. Experimentally, it should be assumed, that the stress function of the problem takes the following form:

$$F = \frac{a^2 b^2}{2h} (\xi^2 + \eta^2 - 1) (A_{10} \xi + A_{01} \eta). \quad (12)$$

Substituting the values (11) and (12) into differential equation (5) and subsequently adjusting the corresponding coefficients, it will be found that in the case of optional values of ξ and η the assumed stress function will satisfy the differential equation of the problem only then, if

$$\left. \begin{aligned} A_{10} &= -\frac{1}{8} C_{10}, \\ A_{01} &= -\frac{1}{8} C_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

c) *Load varying according to a pure polynome of the second degree*

Now, the load function has the form

$$Z = C_{20} \xi^2 + C_{11} \xi \eta + C_{02} \eta^2, \quad (14)$$

and in compliance with this the assumed stress function should be:

$$F = \frac{a^2 b^2}{2h} (\xi^2 + \eta^2 - 1) (A_{20} \xi^2 + A_{11} \xi \eta + A_{02} \eta^2 + A_{00}). \quad (15)$$

Proceeding similarly to the previous cases, for the unknown coefficients A the following formulae are arrived at:

$$\left. \begin{aligned} A_{20} &= -\frac{7C_{20} - C_{02}}{96}, \\ A_{11} &= -\frac{C_{11}}{12}, \\ A_{02} &= +\frac{C_{20} - 7C_{02}}{96}, \\ A_{00} &= -\frac{C_{20} + C_{02}}{32}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

d) *Load varying according to a pure polynome of the third degree*

The load function takes the form now of

$$Z = C_{30} \xi^3 + C_{21} \xi^2 \eta + C_{12} \xi \eta^2 + C_{03} \eta^3, \quad (17)$$

while the stress function is

$$F = \frac{a^2 b^2}{2h} (\xi^2 + \eta^2 - 1) (A_{30} \xi^3 + A_{21} \xi^2 \eta + A_{12} \xi \eta^2 + A_{03} \eta^3 + A_{10} \xi + A_{01} \eta). \quad (18)$$

Determining the values of the here figuring coefficients by using the known method, the formulae given below are obtained:

$$\left. \begin{aligned} A_{30} &= -\frac{9C_{30} - C_{12}}{192}, \\ A_{21} &= -\frac{11C_{21} - 3C_{03}}{192}, \\ A_{12} &= \frac{3C_{30} - 11C_{12}}{192}, \\ A_{03} &= \frac{C_{21} - 9C_{03}}{192}, \\ A_{10} &= -\frac{3C_{30} + C_{12}}{96}, \\ A_{01} &= -\frac{C_{21} + 3C_{03}}{96}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

e) *Load varying according to a pure polynome of the fourth degree*

The unit load on the shell related to the projectional area of the basis should be

$$Z = C_{40} \xi^4 + C_{31} \xi^3 \eta + C_{22} \xi^2 \eta^2 + C_{13} \xi \eta^3 + C_{04} \eta^4, \tag{20}$$

while for the stress function the expression

$$F = \frac{a^2 b^2}{2h} (\xi^2 + \eta^2 - 1)(A_{40} \xi^4 + A_{31} \xi^3 \eta + A_{22} \xi^2 \eta^2 + A_{13} \xi \eta^3 + A_{04} \eta^4 + A_{20} \xi^2 + A_{11} \xi \eta + A_{02} \eta^2 + A_{00}).$$

should be chosen.

Carrying out the adjustment of the corresponding coefficients using the known method, the following formulae are arrived at:

$$\left. \begin{aligned} A_{40} &= -\frac{93 C_{40} - 8 C_{22} + 3 C_{04}}{2880}, \\ A_{31} &= -\frac{13 C_{31} - 3 C_{13}}{320}, \\ A_{22} &= \frac{3 C_{40} - 8 C_{22} + 3 C_{04}}{180}, \\ A_{13} &= \frac{3 C_{31} - 13 C_{13}}{320}, \\ A_{04} &= -\frac{3 C_{40} - 8 C_{22} + 93 C_{04}}{2880}, \\ A_{20} &= -\frac{15 C_{40} + 2 C_{22} - 3 C_{04}}{576}, \\ A_{11} &= -\frac{C_{31} + C_{13}}{64}, \\ A_{02} &= \frac{3 C_{40} - 2 C_{22} + 15 C_{04}}{576}, \\ A_{00} &= -\frac{3 C_{40} + C_{22} + 3 C_{04}}{288}. \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

f) *Other kinds of loads*

If the load function is a polynome of not more than the fourth degree, and contains terms of different degrees, the stress function should be divided into parts corresponding to the cases to be found in a)–e), and the stress

function should be put together of stress functions corresponding to these parts of the loads.

In the case of other polynomes the procedure to be followed is the same, as was previously shown for cases of load characterized by a function of not more than the fourth degree.

5. Numerical example

As an example for the application of the introduced method, the shell shown in Fig. 3 shall be dealt with. The characteristic dimensions of its middle surface are:

$$a = 24,0 \text{ m}, \quad b = 16,0 \text{ m}, \quad h = 10,0 \text{ m},$$

while the thickness of the shell is

$$t = 0,07 \text{ m}.$$

The task to be solved is to determine the projectional internal forces of the shell: α) in the case of a uniformly distributed snow load, and β) in the case of dead load.

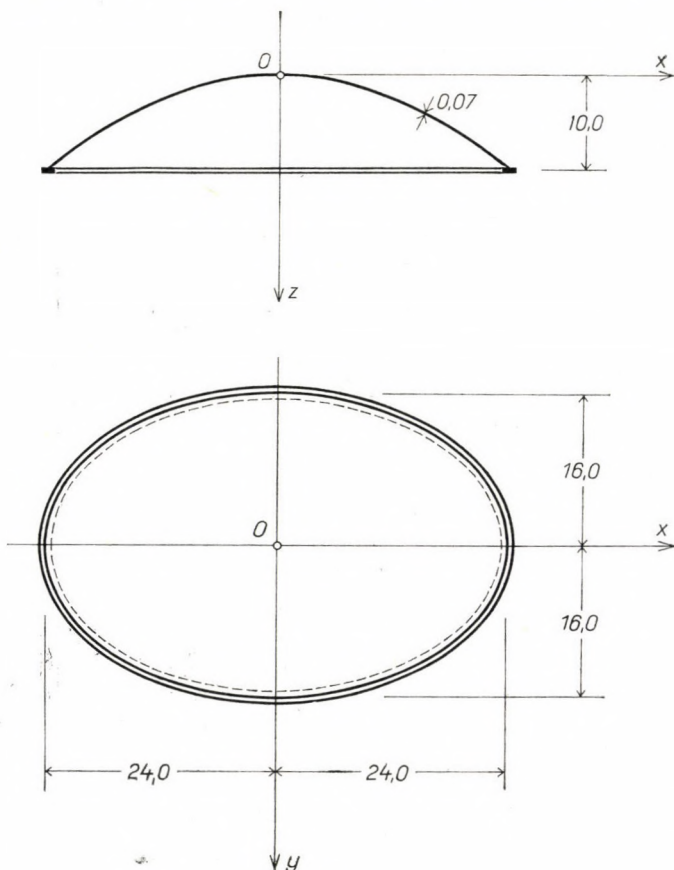


Fig. 3

α) Uniformly distributed snow load

The unit value of the snow load to be taken into consideration related to the projectional area of the basis should be

$$Z = 80 \text{ kg/m}^2.$$

As the load in question is uniformly distributed, thus, formulae (9) can be used. It is obvious that in the present case

$$C_{00} = 80 \text{ kg/m}^2,$$

and so in compliance with formula (10)

$$A_{00} = -\frac{80}{4} = -20 \text{ kg/m}^2.$$

Substituting this value, as well as the data of the dimensions of the shell into formula (9), the stress function will take the following form:

$$F = \frac{24,0^2 \times 16,0^2}{2 \times 10,0} (\xi^2 + \eta^2 - 1) (-20).$$

Carrying out the operations, the result

$$F = -147\,456 (\xi^2 + \eta^2 - 1)$$

is obtained. Knowing the stress function, the projectional internal forces can be determined by using formulae (4):

$$n_x = \frac{1}{16,0^2} (-147\,456 \times 2) = -1152 \text{ kg/m},$$

$$n_{xy} = 0,$$

$$n_y = \frac{1}{24,0^2} (-147\,456 \times 2) = -512 \text{ kg/m}.$$

β) Dead load

The unit weight of the shell wall related to the surface unit of the middle surface should be

$$g = 300 \text{ kg/m}^2.$$

In this case the value of the unit load on the shell related to the projectional area of the basis of the shell will be:

$$Z = g \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 300 \sqrt{1 + 0,694 \xi^2 + 1,5625 \eta^2}.$$

This load function can be approached with an error of about 1,5% by the following polynome:

$$Z = 304 + 86,4 \xi^2 + 180,5 \eta^2.$$

The above polynome is composed of a constant term and a pure quadratic term. Accordingly, the load function can be set up by using formulae (9) and (12). In the case of the constant term according to formula (10)

$$A_{00} = -\frac{304}{4} = -76,0 \text{ kg/m}^2,$$

while in the case of the quadratic term in compliance with formula (16)

$$A_{20} = -\frac{7 \times 86,4 - 180,5}{96} = -4,420,$$

$$A_{02} = +\frac{86,4 - 7 \times 180,5}{96} = -12,261,$$

$$A_{00} = -\frac{86,4 + 180,5}{32} = -8,341.$$

Using the above values and taking into consideration relations (9) and (15), the stress function will take the form:

$$F = \frac{24,0^2 \times 16,0^2}{2 \times 10,0} (\xi^2 + \eta^2 - 1) (-76,0 - 8,341 - 4,420 \xi^2 - 12,261 \eta^2) =$$

$$= - (621\,827 + 654\,413 \xi^2 + 712\,228 \eta^2 + 122\,988 \xi^2 \eta^2 + 32\,586 \xi^4 + 90\,401 \eta^4).$$

Thereafter, employing formulae (4), the projectional internal forces can already be determined:

$$n_x = - (5564 + 961 \xi^2 + 4238 \eta^2),$$

$$n_{xy} = + 1281 \xi \eta,$$

$$n_y = - (2272 + 427 \eta^2 + 679 \xi^2).$$

Computing, in accordance with the above formulae, the values of n_x , n_{xy} , n_y can easily be obtained. *E. g.*, at the centre of the shell, *i. e.*, at the place $\xi = \eta = 0$:

$$n_x = - 5564 \text{ kg/m},$$

$$n_{xy} = 0 \quad ,,$$

$$n_y = - 2272 \quad ,,$$

At the end points of the great axis, *i. e.*, at the places $\xi = \pm 1$, $\eta = 0$:

$$n_x = - 6525 \text{ kg/m},$$

$$n_{xy} = 0 \quad ,,$$

$$n_y = - 2951 \quad ,,$$

while at the end points of the small axis, *i. e.*, at the places $\xi = 0$, $\eta = \pm 1$:

$$n_x = - 9796 \text{ kg/m},$$

$$n_{xy} = 0 \quad ,,$$

$$n_y = - 2699 \quad ,,$$

As can be seen, the values computed in this way, chiefly the values of n_x deviate to a considerable degree from the following constant values valid over the whole extent of the shell in the case of a uniform stress distribution:

$$n_x = - 1152 \cdot \frac{300}{80} = - 4320 \text{ kg/m},$$

$$n_{xy} = 0 \cdot \frac{300}{80} = 0 \text{ kg/m},$$

$$n_y = - 512 \cdot \frac{300}{80} = - 1920 \text{ kg/m}.$$

Finally, it will also be of interest to determine the value of the tensional force arising in the edge beam of the shell in certain characteristic cross sections. The tensional force affecting the cross section $\xi = 0$ is, for simple reasons of equilibrium:

$$H_x = - \int_0^1 n_x d\eta = \left[5564 \eta + 4238 \frac{\eta^3}{3} \right]_0^1 = 6976 \text{ kg},$$

while the tensional force affecting the cross section $\eta = 0$ is

$$H_y = - \int_0^1 n_y d\xi = \left[2272 \xi + 679 \frac{\xi^3}{3} \right]_0^1 = 2499 \text{ kg}.$$

It is clear, that when designing a shell the safety against buckling must also be considered. In the given case the critical load can approximately be determined (see [2]) by using the formula:

$$q_{cr} = 0,05 E \frac{t^2}{R_1 R_2} ,$$

where E is the modulus of elasticity of the shell wall; R_1 and R_2 are the two principal radii of curvature of the middle surface of the shell pertaining to the point $x = 0, y = 0$. The values of the latter are

$$R_1 = \frac{a^2}{2h} = \frac{24,0^2}{2 \times 10,0} = 28,8 \text{ m} ,$$

$$R_2 = \frac{b^2}{2h} = \frac{16,0^2}{2 \times 10,0} = 12,8 \text{ m} .$$

If the value of the modulus of elasticity is

$$E = 2 \times 10^9 \text{ kg/m}^2 ,$$

the value of the critical load will be:

$$q_{cr} = \frac{0,05 \times 2 \times 10^9 \times 0,07^2}{28,8 \times 12,8} = 1329 \text{ kg/m}^2 .$$

Accordingly, in the given case the safety against buckling is

$$s = \frac{q_{cr}}{g + p} = \frac{1329}{300 + 80} \cong 3,5\text{-fold} .$$

REFERENCES

1. EMPERGER, F.: Handbuch für Eisenbeton 6 (Hochbau II. Teil) Berlin, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 1929.
2. CSONKA, P.: The Buckling of a Spheroidal Shell Curved in Two Directions. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.* Tom. XIV, Fasc. 3-4., pp. 425-437 (1956).
3. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen, 2. Aufl. Berlin (Göttingen), Heidelberg, 1957, Springer Verlag.
4. CSONKA, P.: Bau einer elliptischen Schalenkuppel in Ungarn, *Die Bautechnik* 36 (1959) pp. 422-423.
5. DULÁCSKA, E.: Shell Structures Having an Elliptic Basis. (In Hungarian.) *Mélyépitéstudományi Szemle* 10 (1960), pp. 284-286.
6. CSONKA, P.: Shell Having an Elliptic Basis Derived from a Cycloidal Shell of Revolution (in Hungarian). *Magyar építőipar.* (In print.)
7. CSONKA, P.: Elliptic Shell Derived from Cycloidal Shell of Revolution Having a Constant Thickness (in Hungarian). *Magyar Építőipar.* (In print.)
8. CSONKA, P.: Eine praktische Formulierung des Prinzips des statischen Massenausgleiches bei affinen Schalen. *Die Bautechnik.* 38 (1961), pp. 53-54.
9. CSONKA, P.: On the Annular Edge Beam of Membrane Shells. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.* 33 (1961), pp. 413-430.

SUMMARY

The paper presents an approximate method for the calculation of elliptic paraboloid shells constructed over an elliptic basis, having a constant or continuously varying thickness.

The treatments are based on the usual assumptions of the membrane theory. Disturbing effects, due to the constraints of deformation arising at the junction of the shell and the edge beam, are disregarded.

The load function is expanded in a double power series. As to the load, the case of a constant load, furthermore, the loads characterized by a function of the pure first, of the pure second, of the pure third and of the pure fourth degree are dealt with separately. In all these

cases the stress function of the problem is a polynome the degree number of which is higher by two than that of the load function. The indefinite constants of the latter are determined by using the method of the adjustment of coefficients.

The practical application of the method of calculation is elucidated by a numerical example, which proves the simplicity and the expediency of the method presented.

ELLIPTISCHE PARABOLOIDSCHALEN ÜBER ELLIPTISCHEN GRUNDRISS MIT KONSTANTER ODER KONTINUIERLICH VERÄNDERLICHER WANDSTÄRKE

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Im Aufsatz wird die Berechnung von über einem elliptischen Grundriß konstruierten elliptischen Paraboloidschalen mit konstanter oder kontinuierlich veränderlicher Wandstärke behandelt und zwar auf Grund der gebräuchlichen Voraussetzungen der Membrantheorie. An der Anschlußstelle der Schale und des Randträgers werden die aus dem Formänderungszwang entstehenden Störungen nicht in Betracht gezogen.

Die Belastungsfunktion wird in eine Doppel-Potenzreihe entwickelt. Als Belastungsfälle werden die mit einer konstanten bzw. die mit einer Funktion reinen ersten, reinen zweiten, reinen dritten, bzw. reinen vierten Grades charakterisierbaren Belastungsarten behandelt. In all diesen Fällen ist die Spannungsfunktion des Problems ein Polynom, dessen Ordnungszahl um zwei Grade höher ist als die der Belastungsfunktion. Die unbestimmten Konstanten dieses Polynoms werden durch Koeffizientenvergleiche bestimmt.

Die praktische Anwendung des beschriebenen Rechenverfahrens wird an Hand eines Zahlenbeispiels erläutert, durch das die Einfachheit und Zweckmäßigkeit des behandelten Verfahrens bewiesen wird.

VOILE EN FORME DE PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE CONSTRUIT SUR UNE BASE ELLIPTIQUE, D'ÉPAISSEUR DE PAROI CONSTANTE OU À VARIATION CONTINUE

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'étude présente un procédé d'approximation pour le calcul des voiles en forme de paraboloides elliptiques, et ayant une épaisseur de paroi constante ou à variation continue.

L'étude part des suppositions couramment admises par la théorie des membranes. Au lieu de raccordement du voile et de la ceinture, les effets perturbateurs dûs aux contraintes de déformation sont négligés.

La fonction de charge est développée en une série double de puissances, et l'auteur traite séparément des modes d'application de la charge caractérisés par une constante, ou par des fonctions pures du premier, du second, du troisième et du quatrième degré. Dans tous ces cas, la fonction de tension du problème est un polynôme supérieur de deux degrés au nombre de degrés de la fonction de la charge. Les coefficients de ces polynômes sont déterminés par la méthode des coefficients indéterminés.

L'application pratique du procédé de calcul présenté dans l'étude est illustré par un exemple numérique. Celui-ci montre bien la simplicité et l'utilité du procédé en question.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ПАРАБОЛОИДНАЯ ОБОЛОЧКА С НЕИЗМЕННОЙ ИЛИ
НЕПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ТОЛЩИНОЙ СТЕНКИ НАД
ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

В работе описывается приближенный метод вычисления эллиптических параболических оболочек с неизменной или непрерывно изменяющейся толщиной стенки, размещаемых над эллиптическим основанием.

Работа основывается на обычных предположениях мембранной теории. При соединении оболочки и кромки не учитываются мешающие эффекты от принуждений деформации.

Функция нагрузки разлагается в двойной показательный ряд и отдельно разбираются виды нагрузок, характеризуемые постоянной функцией, функциями чисто первого, второго, третьего и четвертого порядков. Во всех этих случаях функция нагрузки задачи представляет собою полином на две степени выше степени функции нагрузки. Неопределенные постоянные последнего определяются сопоставлением коэффициентов.

Автор изложенную им в работе методику расчета освещает на числовом примере. Числовой пример подтверждает простоту и целесообразность описанного метода.

DIE VERFORMBARKEIT VON ALUMINIUM 99,5 UND ELEKTROLYTKUPFER-ROHREN UND DIE VERÄNDERUNG IHRER MECHANISCHEN EIGENSCHAFTEN BEIM HOHLZUG

GY. DÉVÉNYI und I. MECSEKI

UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE MISKOLC (UNGARN)
LEHRSTUHL FÜR HÜTTENMASCHINENBAU UND BILDSAME FORMUNG
MITTEILUNG N. 22 DER ARBEITSGEMEINSCHAFT FÜR METALLURGIE
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 24. November 1960]

Rohre von einwandfreier Oberfläche und genauen Abmessungen können kalt gezogen hergestellt werden. Vom Gesichtspunkte des wirtschaftlichsten Herstellungsverfahrens ist es von sehr großer Bedeutung, die beim Ziehvorgang auftretenden Kräfte und die zwischen den beiden Glühen anwendbare maximale Verformbarkeit zu kennen. Der Verformbarkeit setzt die beim Vorgange einsetzende Verfestigung Grenzen.

Das Ausmaß der größten anwendbaren Verformbarkeit hängt mit den Veränderungen der mechanischen Eigenschaften des gezogenen Werkstoffes zusammen, woraus folgt, daß dessen eindeutige Bestimmung nur in dem Falle möglich ist, wenn man weiß, welchen Einfluß die technologischen Kennwerte des Rohrziehens auf die mechanischen Eigenschaften des gezogenen Werkstoffes ausüben. Wenn man den Zusammenhang feststellt, der zwischen der Verformung und der auftretenden Ziehkraft besteht, dann ist man in der Lage, für jedes Ziehen die entsprechende Abnahme zu wählen, bei der sich die auftretende Ziehkraft den Nennwert der Ziehkraft der Ziehbank am meisten nähert. mit anderen Worten die wirtschaftlichste Ausnützung der Ziehbank gewährleistet.

A. Das Meßverfahren und der Versuchswerkstoff

Die Versuchsmethode und die angewandten Meßgeräte stellen wir den Meßprogrammen entsprechend zusammen. Mehrere Teileinheiten der angewandten Meßeinrichtung wurden dem Charakter der Versuchsreihe entsprechend unter Rücksichtnahme auf besondere Gesichtspunkte hergestellt.

Die Messungen wurden auf einer 10-Tonnen Ziehbank durchgeführt, die eine Geschwindigkeit von 18,5 m/min hatte. Zum Messen der Ziehkraft wendeten wir einen mit Dehnungsmeßstreifen versehenen Meßkörper an, und registrierten sie auf einem Drei-Schleifenzillographen. Die Meßeinrichtung bestand aus einem Verstärker, einem Drei-Schleifenzillographen und einem Zeitgeber. Die Anordnung der Versuchseinrichtung zeigt Abb. 1, das Schalt-schema der gebrauchten Meßinstrumente Abb. 2.

Der Meßkörper wurde auf dem Ziehwagen— unter Zwischenschaltung entsprechender Paß-Stücke— montiert. Der Meßkörper war mit einem Schwingkabel mit der Meßeinrichtung verbunden. Zur Messung der Ziehkraft ver-

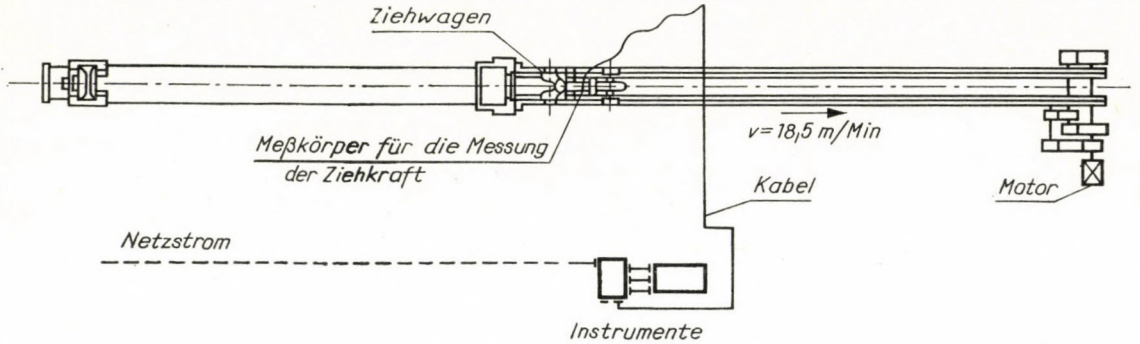


Abb. 1. Versuchseinrichtung

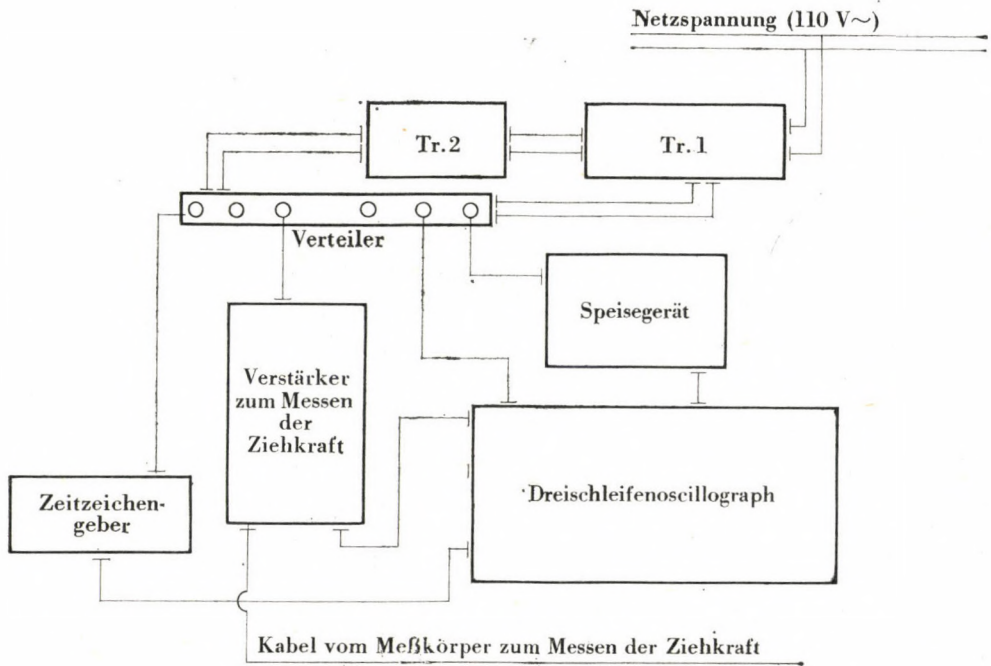


Abb. 2. Schaltschema des Meßapparates

wendeten wir einen ringförmigen 1-Tonnen-Meßkörper (Abb. 3), dessen Werkstoff ein vergüteter Stahl war, mit der folgenden Zusammensetzung:

$$C = 0,45\% \quad Si = 0,25\% \quad Cr = 1,25\% \quad V = 0,25\%$$

Nach der Bearbeitung vergüteten wir den Meßkörper auf einen Zugfestigkeitswert von $\sigma_B = 125 \text{ kg/mm}^2$. Der Meßkörper wurde vor und nach der Versuchsreihe geeicht. Die Auswertung der Oszillogramme geschah unter Verwendung dieser Eichkurven.

Die Ziehkraft und das Zeitzeichen photographierten wir beim Versuch auf den Papierstreifen des Oszillographen. Einige bei den aufeinanderfolgenden

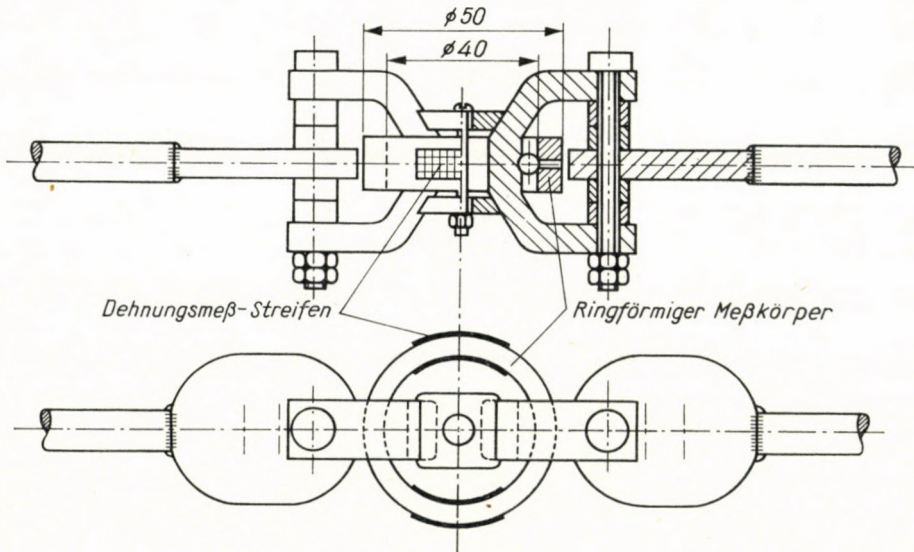


Abb. 3. Meßkörper

Ziehstufen aufgenommene Oszillogramme wurden in Abbildungen 4 und 5 dargestellt. Die sägezahnartige Linie, die am unteren Rande des Diagramms entlang läuft, ist das Zeitzeichen.

Die Zusammensetzung der bei der Untersuchung gebrauchten Versuchswerkstoffe und die Werte ihrer mechanischen Eigenschaften faßten wir in Tabelle I zusammen. Die Fließgrenzenkurven bringen wir in Abb. 6.

Tabelle I

Zusammensetzung und mechanische Werte der bei den Versuchen gebrauchten Werkstoffe

Nummer	Benennung	Normzeichen	Zusammensetzung	σ_B kg/mm ²	$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	δ_{10} %	H_B kg/mm ²
1	Aluminium	Al 99,5	99,5% Al Weich	5,34	Siehe: Abb. 6.	36,9	25,0
2	Elektrolit-Kupfer	Cu-E	99,9% Cu	20~25		35~50	42,0

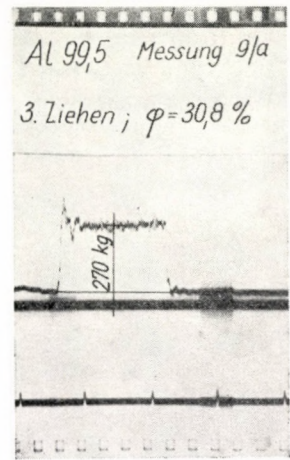
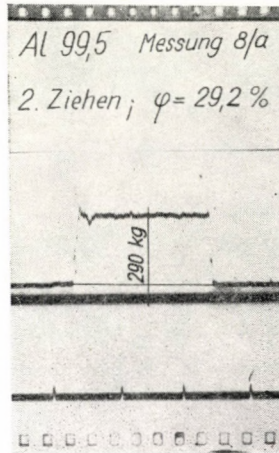
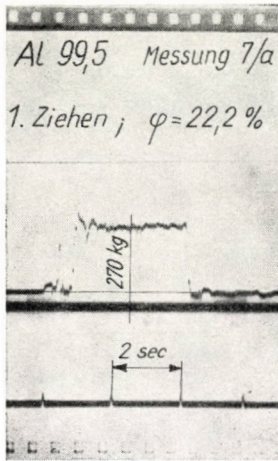


Abb. 4. Versuchszillogramme (Al 99,5)

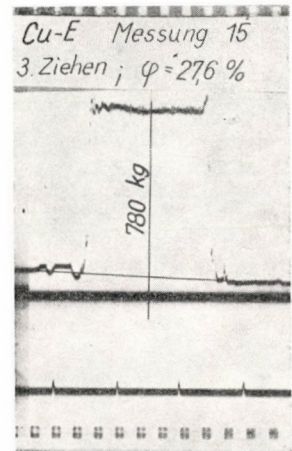
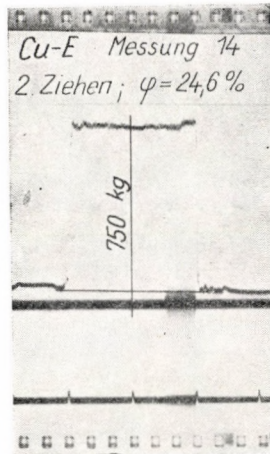
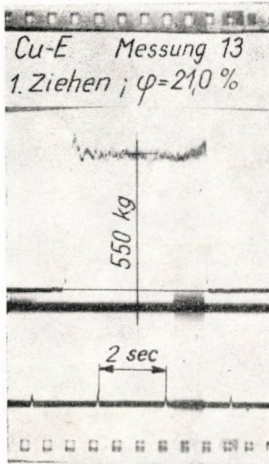


Abb. 5. Versuchszillogramme (Cu—E)

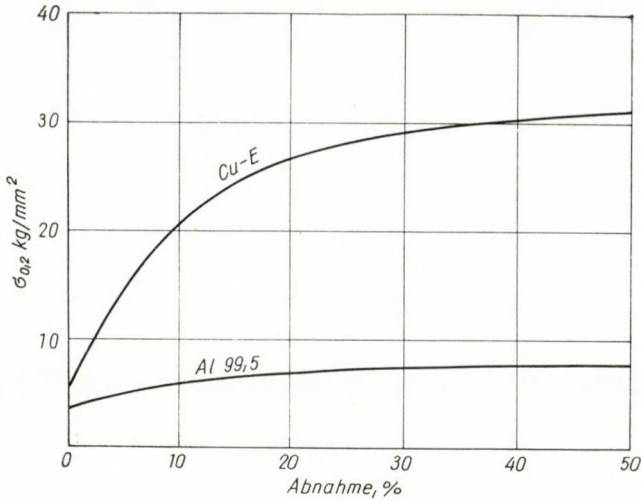


Abb. 6. $\sigma_{0,2}$ -Kurven der bei den Versuchen verwendeten Werkstoffe

Um die bei den Versuchen angewendeten Profile festzustellen, stellten wir von den gebrauchten Ziehholn Gipsmuster her, die in der Tabelle II zusammengefaßt sind. Die Form der Werkzeuge entspricht der Traktrixkurve.

Tabelle II

Numer des Werkzeuges	d mm	Gebraucht bei der Messung Nr.....	Bild
1.	20,4	19;	
2.	19,5	1; 1/a; 10; 10/a;	
3.	18,2	4; 4/a; 13;	
4.	17,9	16; 16/a;	
5.	17,0	7; 7/a;	
6.	15,5	11; 11/a; 17; 17/a;	
7.	13,9	5; 5/a;	
8.	12,3	8; 8/a;	
9.	12,0	12; 12/a; 18; 18/a;	
10.	10,7	6; 6/a;	
11.	8,9	9; 9/a;	

B. Die Untersuchung des Ausmaßes der Verformbarkeit

Den Hohlzug verwendet man im allgemeinen bei dem Vorziehen der Rohre. Während des Ziehvorgangs bleibt die Wandstärke des gezogenen Rohres praktisch unverändert, der Durchmesser hingegen verjüngt sich entsprechend der Abnahme. Ein Teil unserer Untersuchung bezweckte die Feststellung des höchsten Verformbarkeitsgrades, der zwischen zwei Glühungen erreichbar ist.

Um den wirtschaftlichsten Ziehplan und die größte Verformbarkeit zu ermitteln, war es nötig, die einzelnen Ziehstufen voneinander getrennt zu

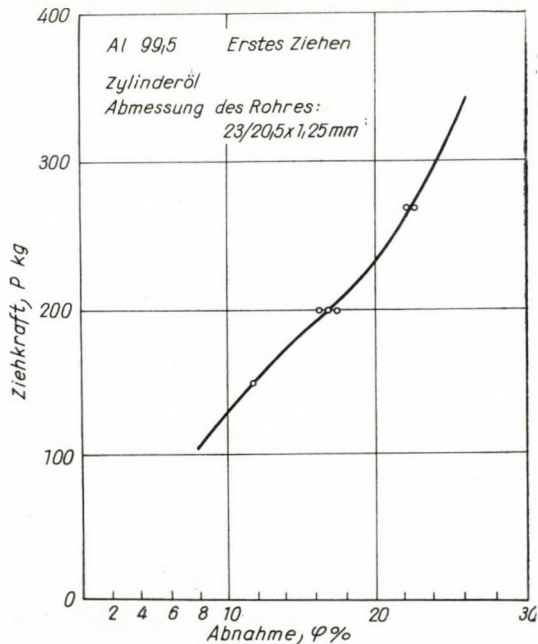


Abb. 7. Ziehkraft als Funktion der Abnahme (Al 99,5)

untersuchen. Deshalb untersuchten wir die erste Ziehstufe getrennt von den nachfolgenden, und erst nachher, wenn wir die Erscheinungen hier erklärt hatten, gingen wir zur Untersuchung der Erscheinungen des Weiterziehens über. (Unter Weiterziehen verstehen wir den Vorgang, bei dem das schon gezogene Rohr ohne Glühen nochmals gezogen wird.)

1. Die beim ersten Ziehen erreichbare größte Verformbarkeit

Bei der Versuchsreihe untersuchten wir die Eigenschaften von zweierlei Werkstoffen (Al 99,5 und Cu—E). Die beim Ziehen von Al 99,5 Rohren auftretenden Kräfte sind als Funktion der Abnahme in Abb. 7 dargestellt und in Tabelle III angeführt.

Wird beim Ziehvorgang als Schmiermittel Zylinderöl verwendet, so entsteht auf der Ziehkraft-Kurve ungefähr beim Abnahmewert von 20% ein Inflexionspunkt. Von diesem Punkte ab wächst die Ziehkraft unverhältnismäßig stark an, woraus folgt, daß wenn wir diese Abnahme überschreiten, in den Reibungsverhältnissen eine Änderung eintritt, die Qualität der Rohroberfläche sich verschlechtert, und die Gefahr immer größer wird, daß es zum

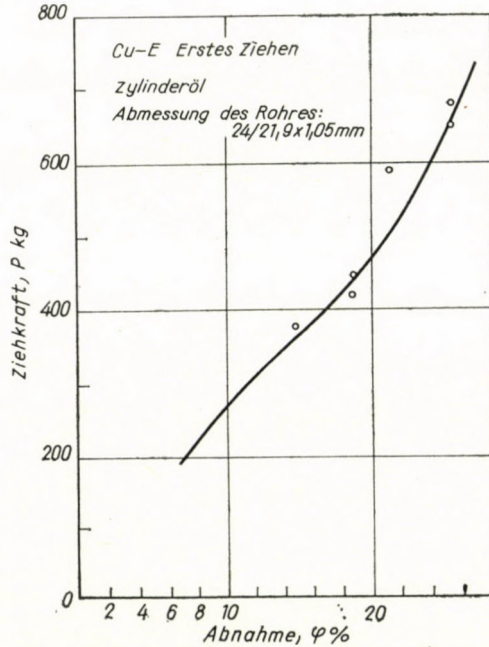


Abb. 8. Ziehkraft als Funktion der Abnahme (Cu—E)

Zerreißen des Rohres kommt. Der Inflexionspunkt dieser Kurve tritt bei um so größerer Verformung auf, je mehr das Schmiermittel den gestellten Anforderungen entspricht. Wenn die bei der ersten Ziehstufe angewendete Abnahme das zum Inflexionspunkt gehörende Verformbarkeitsmaß überschreitet, dann rückt die dritte Hauptspannung, die im Austrittsquerschnitt des Rohres auftritt,

$$\sigma_3 = \frac{P}{f_2},$$

immer näher an den Wert der Fließgrenze des Rohres heran, was nach Überschreitung dieser Grenze zum Zerreißen führt.

Der Reibungskoeffizient ist eine Funktion der Abnahme, und bei einer größeren Verformung wird auch deren Beiwert größer. Auf Grund unserer Untersuchungen wurde festgestellt, daß die Veränderung des Reibungskoeffizienten nicht so sehr eine Folgeerscheinung des Ansteigens des spezifischen

Tabelle III

Die Daten über die Hohlzugversuche von Al 99,5-Rohren

Al 99,5			Nominelle Abmessungen des Rohres vor dem Ziehen: $D_a = 23,0 \text{ mm}$ $D_i = 20,5 \text{ mm}$ $s_1 = 1,25 \text{ mm}$						Schmiermittel: Zylinderöl, Ziehgeschwindigkeit: 18,5 m/Min							
Versuchsnummer	Rohrdurchmesser vor dem Ziehen		Abmessungen des gezogenen Rohres		Wandstärke		Querschnitt		Abnahme		Gesamtabnahme		Abmessungen des Ziehohls \varnothing d mm	Gemessene Ziehkraft P kg	Spezifische Werte	
	Außen \varnothing D_a mm	Innen \varnothing D_i mm	Außen \varnothing d_a mm	Innen \varnothing d_i mm	vor	nach	vor	nach	F mm ²	φ %	ΣF mm ²	$\Sigma \varphi$ %			P/F kg/mm ²	P/ f_2 kg/mm ²
					dem Ziehen		dem Ziehen									
					s_1 mm	s_2 mm	f_1 mm ²	f_2 mm ²								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	23,0	20,5	19,3	16,8	1,25	1,25	85,3	70,8	14,5	17,0	14,5	17,0	19,5	200	13,8	2,82
2	19,3	16,8	15,5	12,76	1,25	1,37	70,8	60,8	10,0	14,1	24,5	28,7	15,7	180	18,0	2,96
3	15,5	12,76	12,6	9,76	1,37	1,42	60,8	49,9	10,9	18,0	35,4	41,5	12,8	230	21,0	4,6
1/a	23,0	20,5	19,5	16,86	1,25	1,32	85,3	75,3	10,0	11,7	10,0	11,7	19,5	130	13,0	1,73
2/a	19,5	16,86	15,5	12,76	1,32	1,37	75,3	60,8	14,5	19,2	24,5	28,6	15,7	220	15,2	3,6
3/a	15,5	12,76	12,6	9,76	1,37	1,42	60,8	49,9	10,9	18,0	35,4	41,5	12,8	220	20,1	4,4
4	23,0	20,5	18,0	15,3	1,25	1,35	85,3	70,6	14,7	17,2	14,7	17,2	18,2	200	13,6	2,84
5	18,0	15,3	13,8	11,06	1,35	1,37	70,6	53,5	17,1	24,2	31,8	37,3	13,9	250	14,6	4,7
6	13,8	11,06	10,7	7,9	1,37	1,40	53,5	40,9	12,6	23,5	44,4	52,0	10,7	230	18,3	5,63
4/a	23,0	20,5	18,0	15,3	1,25	1,35	85,3	70,6	14,7	17,2	14,7	17,2	18,2	200	13,6	2,84
5/a	18,0	15,3	13,8	11,06	1,35	1,37	70,6	53,5	17,1	24,2	31,8	37,2	13,9	290	17,0	5,4
6/a	13,8	11,06	10,7	7,9	1,37	1,40	53,5	40,9	12,6	18,0	44,4	52,0	10,7	225	17,8	5,5
7	23,0	20,5	17,0	14,3	1,25	1,35	85,3	66,3	19,0	22,2	19,0	22,2	17,0	270	14,2	4,1
8	17,0	14,3	12,1	9,3	1,35	1,37	66,3	47,0	19,3	29,2	38,3	45,0	12,3	290	15,0	6,18
9	12,1	9,3	8,9	6,14	1,37	1,40	47,0	32,5	14,5	30,8	52,8	61,8	8,9	270	18,6	8,3
7/a	23,0	20,5	17,0	14,3	1,25	1,35	85,3	66,3	19,0	22,2	19,0	22,2	17,0	270	14,2	4,1
8/a	17,0	14,3	12,1	9,3	1,35	1,37	66,3	47,0	19,3	29,2	38,3	45,0	12,3	290	15,0	6,18
9/a	12,1	9,3	8,9	6,14	1,37	1,40	47,0	32,5	14,5	30,8	52,8	61,8	8,9	270	18,6	8,3

Tabelle IV

Die Daten über die Holzzugversuche von Cu-E-Rohren

Cu-E			Nominelle Abmessungen des Rohres vor dem Ziehen: $D_a = 24,0 \text{ mm}$ $D_i = 21,9 \text{ mm}$ $s_1 = 1,05 \text{ mm}$						Schmiermittel: Zylinderöl, Ziehgeschwindigkeit: 18,5 m/Min							
Versuchsnummer	Rohrdurchmesser vor dem Ziehen		Abmessungen des gezogenen Rohres		Wandstärke		Querschnitt		Abnahme		Gesamt-abnahme		Abmessungen des Zieh-hohls \varnothing d mm	Gemessene Zieh-kraft P kg	Spezifische Werte	
					vor	nach	vor	nach								
	dem Ziehen		dem Ziehen		F mm ²	φ %	ΣF mm ²	$\Sigma \varphi$ %	P/F kg/mm ²	P/f _z kg/mm ²						
	Außen \varnothing D_a mm	Innen \varnothing D_i mm	Außen \varnothing d_a mm	Innen \varnothing d_i mm							s_1 mm	s_2 mm			f_1 mm ²	f_2 mm ²
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
10	24,0	21,9	19,4	17,26	1,05	1,07	75,6	61,5	14,1	18,6	14,1	18,6	19,5	420	29,8	6,83
11	19,4	17,26	15,4	13,2	1,07	1,10	61,5	49,3	12,2	20,0	26,3	34,8	15,5	610	50,0	12,4
12	15,4	13,2	11,8	9,6	1,10	1,10	49,3	37,0	12,3	25,0	38,6	50,8	12,0	740	60,0	20,0
10/a	24,0	21,9	19,4	17,26	1,05	1,07	75,6	61,5	14,1	18,6	14,1	18,6	19,5	440	31,2	7,15
11/a	19,4	17,26	15,4	13,2	1,07	1,10	61,5	49,3	12,2	20,0	26,3	34,8	15,5	610	50,0	12,4
12/a	15,4	13,2	11,8	9,6	1,10	1,10	49,3	37,0	12,3	25,0	38,6	50,8	12,0	740	60,0	20,0
13	24,0	21,9	18,1	15,86	1,05	1,12	75,6	59,7	15,9	21,0	15,9	21,0	18,2	550	34,6	9,2
14	18,1	15,86	13,6	11,3	1,12	1,15	59,7	45,0	14,7	24,6	30,6	40,5	13,7	750	51,0	16,7
15	13,6	11,3	10,2	7,9	1,15	1,15	45,0	32,6	12,4	27,6	43,0	56,8	10,4	780	63,0	23,9
16	24,0	21,9	17,78	15,62	1,05	1,08	75,6	56,7	18,9	25,0	18,9	25,0	17,9	650	34,4	11,5
17	17,78	15,62	15,4	13,2	1,08	1,10	56,7	49,3	7,4	13,0	26,3	34,8	15,5	370	50,2	7,5
18	15,4	13,2	11,8	9,6	1,10	1,10	49,3	37,0	12,3	25,0	38,6	50,8	12,0	740	60,0	20,0
16/a	24,0	21,9	17,78	15,62	1,05	1,08	75,6	56,7	18,9	25,0	18,9	25,0	17,9	680	36,0	12,0
17/a	17,78	15,62	15,4	13,2	1,08	1,10	56,7	49,3	7,4	13,0	26,3	34,8	15,5	400	54,0	8,1
18/a	15,4	13,2	11,8	9,6	1,10	1,10	49,3	37,0	12,3	25,0	38,6	50,8	12,0	780	63,5	21,0
19	24,0	21,9	20,36	18,24	1,05	1,06	75,6	64,3	11,3	15,0	11,3	15,0	20,4	380	33,6	5,9
20	20,36	18,24	13,6	11,4	1,06	1,10	64,3	43,5	20,8	32,4	32,1	42,5	13,7	940	45,5	21,3
21	13,6	11,4	10,2	8,0	1,10	1,10	43,5	31,4	12,1	27,9	44,2	58,0	10,4	770	63,5	24,5

Oberflächendruckes ist, sondern viel mehr von der Temperaturerhöhung abhängig ist, die bei der Verformungsarbeit auftritt. Eine nachteilige Auswirkung dieser Erscheinung ist die starke Verminderung der Viskosität des Schmiermittels.

Beim Ziehen von Kupferrohren (Cu-E) erscheint die Inflexion der Ziehkurve bereits bei einer Abnahme von etwa 15%, wenn dasselbe Schmiermittel verwendet wird. Der Grund dafür ist der höhere Wert der Verformungsfestigkeit, beziehungsweise des Verformungswiderstandes von Cu-E (Abb. 8 und Tabelle IV).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß man beim ersten Hohlzug von Al 99,5-Rohren bei einer Abnahme von etwa 20–25% und bei Cu-E-Rohren bei einer Abnahme von etwa 15–20% noch immer Rohre von einwandfreier Oberfläche und genauem Durchmesser erhalten kann. Daraus folgt, daß es zweckmäßig ist, die erste Ziehstufe dementsprechend zu wählen. Wendet man das erste Ziehen als Vorziehen an, so ist die noch erlaubte größte Abnahme bei Al 99,5 Werkstoff 30–35%, bei Cu-E hingegen nur 25–30%.

2. Die beim Weiterziehen erreichbare größte Verformbarkeit

Um die Feststellung zu erleichtern, welche die günstigste Technologie für das Weiterziehen ist, planten wir bei den Versuchen Ziehstufen, die Abnahmen von ganzen Zahlen (15, 20, 25, 30%) haben. Es gelang uns jedoch nicht, diese Ziehstufen in vollem Maße zu erreichen. Um festzustellen, welche Gesetzmäßigkeiten zwischen den einzelnen ganzzahligen Ziehstufen bestehen, benötigen wir Kurven, die den Zusammenhang veranschaulichen, der zwischen der auf die Einheit der Abnahme bezogenen Ziehkraft und der Gesamtabnahme ($P/F - \sum \varphi$) besteht. Aus diesen Kurven kann dann diejenige gewünschte Ziehkraft berechnet werden, die zu der beliebigen ganzzahligen Abnahme gehört. Die auf Grund der Versuchsergebnisse berechneten P/F -Kurven für Al 99,5 und Cu-E-Werkstoffe sind in den Tabellen III und IV und in den Abbildungen 9 und 10 veranschaulicht. Die zu den ganzen Zahlen gehörigen Ziehkraftwerte für Al 99,5 und Cu-E-Werkstoffe sind in den Abbildungen 11 und 12 dargestellt. Die Kurven sind einander fast parallel und zeigen bei Al 99,5 eine fallende, bei Cu-E jedoch eine steigende Tendenz, woraus folgt, daß im ersten Falle eine immer kleinere und im zweiten Falle eine immer größere Ziehkraft nötig ist, um eine Ziehstufe gleichen Ausmaßes erreichen zu können.

Die nominelle Ziehkraft der Ziehbank wird dann am besten ausgenützt, wenn bei jeder Ziehstufe eine nahezu konstante Ziehkraft auftritt, die gleich dem Nennwert der Ziehkraft der Ziehbank ist. Das ist der Fall, wenn man bei den einzelnen Ziehstufen von Al 99,5 Rohren eine immer höhere, bei Cu-E Rohren hingegen eine immer geringere Abnahme anwendet.

Bei der Feststellung der Ziehstufen muß jedoch auch noch der Wert der im Auslaufquerschnitt auftretenden spezifischen Ziehkraft (P/f_2) in Betracht gezogen werden.

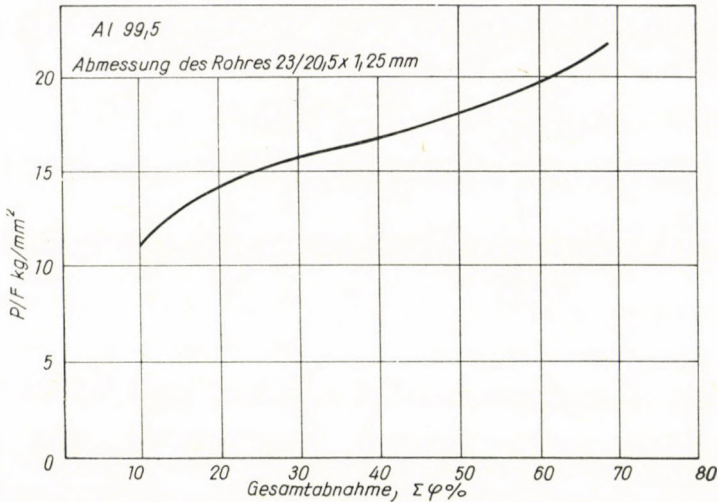


Abb. 9. Spezifische Ziehkraft als Funktion der Gesamtabnahme Al 99,5

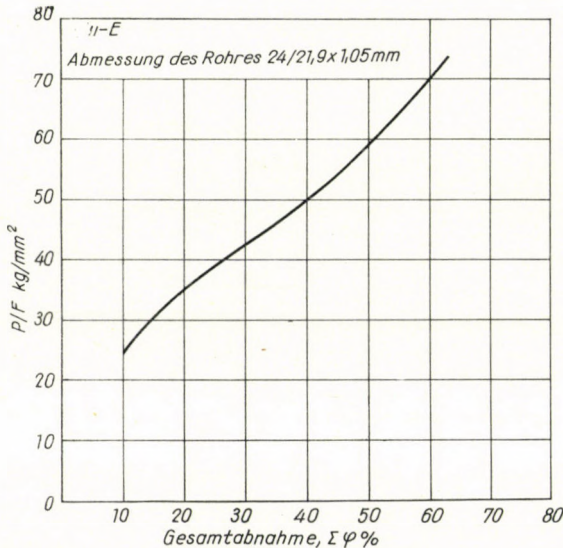


Abb. 10. Spezifische Ziehkraft als Funktion der Gesamtabnahme Cu-E

Die eindeutige Feststellung der höchsten Verformbarkeit erfolgt im Laufe des ersten Ziehens, und beim Weiterziehen auf Grund eines Raumdiagramms, bei dessen Konstruktion wir die Wirkung sämtlicher Faktoren, die das Rohrziehen beeinflussen, in Betracht ziehen.

Auf die *B*-Achse des Raumdiagramms (Abb. 13) trugen wir die prozentuellen Abnahmewerte des ersten, noch im weichen Zustand durchgeführten Ziehens auf. Die *A*-Achse zeigt den prozentuellen Wert der Gesamtabnahme,

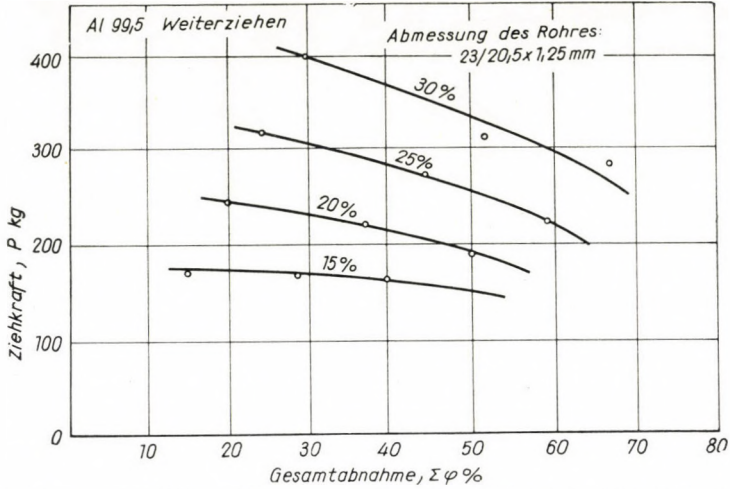


Abb. 11. Die zu ganzzahligen Abnahmen gehörenden Ziehkkräfte (Al 99,5 Weiterziehen)

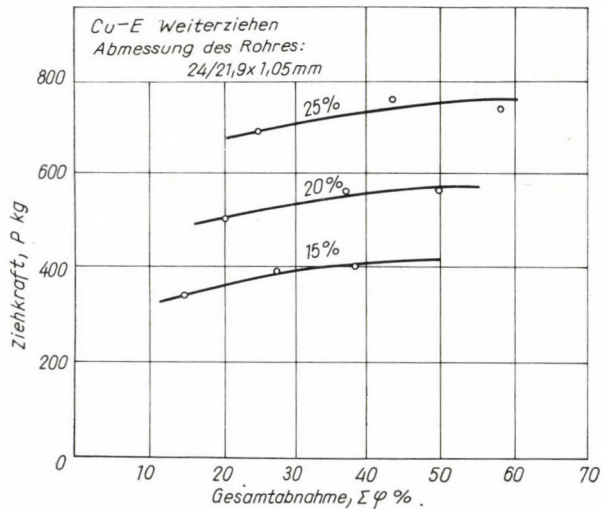


Abb. 12. Die zu ganzzahligen Abnahmen gehörenden Ziehkkräfte (Cu-E Weiterziehen)

die dem jeweiligen Weiterziehen vorangeht, und die *C*-Achse die auf den Querschnitt des gezogenen Rohres bezogene spezifische Ziehkraft. Die zur *CB*-Ebene parallelen und beliebigen Ziehstufen entsprechenden P/f_2 -Kurven konstruierten wir aus den Versuchsdaten.

Den Gebrauch des Diagramms erklären wir an Hand des folgenden Beispiels:

Es seien die drei einander folgenden Ziehstufen die folgenden:

1. Stufe: $f_1 = 100 \text{ mm}^2$ auf $f_2 = 80 \text{ mm}^2$ $\varphi = 20\%$
 2. Stufe: $f_2 = 80 \text{ mm}^2$ auf $f_3 = 68 \text{ mm}^2$ $\varphi = 15\%$
-
- $\Sigma\varphi = 32\%$
3. Stufe: $f_3 = 68 \text{ mm}^2$ auf $f_4 = 61 \text{ mm}^2$ $\varphi = 10\%$

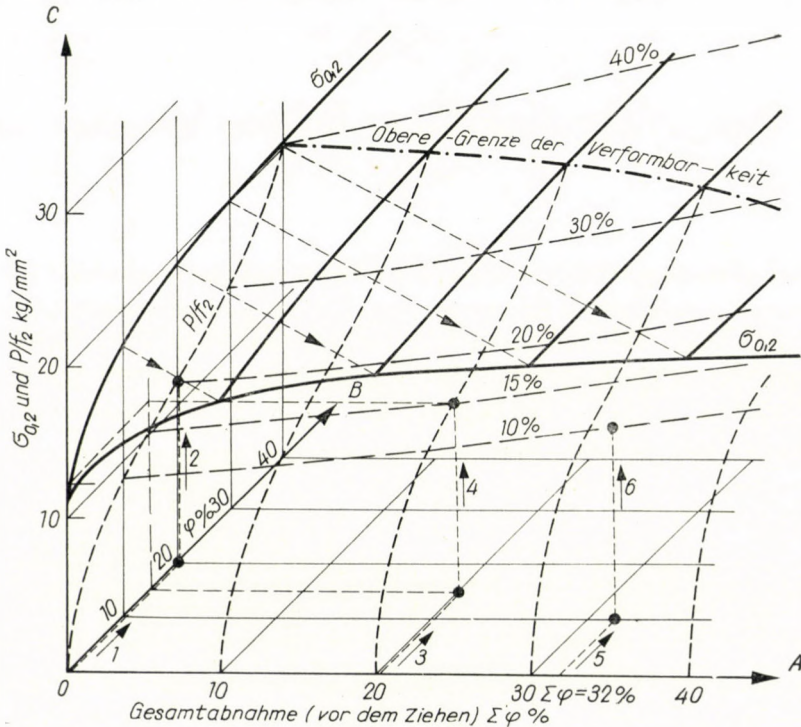


Abb. 13. Raumdiagramm

Das erste Ziehen erfolgt mit einer Abnahme von 20%; die diesem Wert entsprechende spezifische Ziehkraft (P/f_2) ist in der BC -Ebene Punkt 2. Die Gesamtabnahme, die der ersten Stufe des Weiterziehens vorangeht, beträgt 20%. Von diesem Punkte aus, entsprechend der in der zweiten Stufe angewandten 15% igen Abnahme, erhalten wir den Punkt 4 der räumlichen Oberfläche. Durch Projektion dieses Punktes auf die C -Achse ergibt sich der beim Ziehen auftretende spezifische Wert.

Die Gesamtabnahme ($\Sigma\varphi$) vor der zweiten Ziehstufe des Weiterziehens beträgt 32%. Bei der Feststellung des im dritten Ziehvorgang auftretenden spezifischen Wertes, der einer Abnahme von 10% entspricht (Punkt 6), gehen wir wie früher vor.

Die Erzeugungstechnologie des Rohrziehens ist dann die wirtschaftlichste, wenn man mit der geringsten Zahl von Ziehstufen die größte Verformung erreichen kann. Dies wird aber durch die bei der Verformung auftretende Verfestigung begrenzt.

Trägt man in die BC und die ihr parallelen Ebenen die Kurven der Fließgrenzen ein, so schneiden diese die P/f_2 -Kurven in gewissen Punkten. Bei den zu den Schnittpunkten gehörenden Abnahmen wird die im Auslaufquerschnitt auftretende Spannung gleich der Fließgrenze, mit anderen Worten, das Rohr kontrahiert und zerreißt. Darum muß in jedem Falle die angewendete Abnahme geringer sein als die, die zu den Schnittpunkten gehört. Verbindet man die gesamten Schnittpunkte, so erhält man die obere Grenze der Verformbarkeit.

Die auf Grund der oben festgelegten Grundsätze konstruierten Raumdiagramme für Al 99,5 und Cu-E-Werkstoffe sind in den Abbildungen 14 und 15 (Tabellen III und IV) veranschaulicht.

Die tatsächliche $\sigma_{0,2}$ Fläche kann man aber nur in dem Falle genau konstruieren, wenn die Wirkungen bekannt sind, die die Umstände des Ziehvorganges auf die Veränderung der Verfestigung ausüben. Es ist bekannt, daß je größer der Ziehwinkel des Werkzeuges, um so größer auch der Wert der Fließgrenze des gezogenen Werkstoffes ist, aber diese Veränderung ist noch von der Zahl der Ziehstufen abhängig.

C. Die Veränderung der mechanischen Eigenschaften beim ersten und beim Weiterziehen

Bei dem Ziehvorgang wächst der Wert der Zugfestigkeit und Fließgrenze, während der der Dehnung fällt. Um die Gesetzmäßigkeiten der Veränderungen feststellen zu können, führten wir eine große Zahl von Zerreißeigenschaftenprüfungen durch.

Nach den Ergebnissen der Versuche kann man behaupten, daß die Veränderung der $\sigma_{0,2}$ Werte bei dem ersten Ziehen eine dauernd steigenden Kurve folgt. Beim Weiterziehen dagegen sind die $\sigma_{0,2}$ Werte einer solchen Kurve entlang angeordnet, die einen stufenförmigen Charakter hat und höher verläuft als die früher genannte (Abb. 16).

Die Fließkurve des Weiterziehens verläuft bei gleichbleibender Gesamt- abnahme um so höher über der Fließkurve des ersten Ziehens, je höher die angewandte Zahl der Ziehstufen war. Die verhältnismäßig größere Verfestigung ist eine Folge der ungleichmäßigen Verformung im Querschnitt des Rohres, deren Grund die bei den einzelnen Ziehstufen angewandten kleineren Deformationen sind (unter solchen Umständen entstehen größere Verformungsspannungen). Besonders in den letzten Stufen ist die Verfestigung groß, die

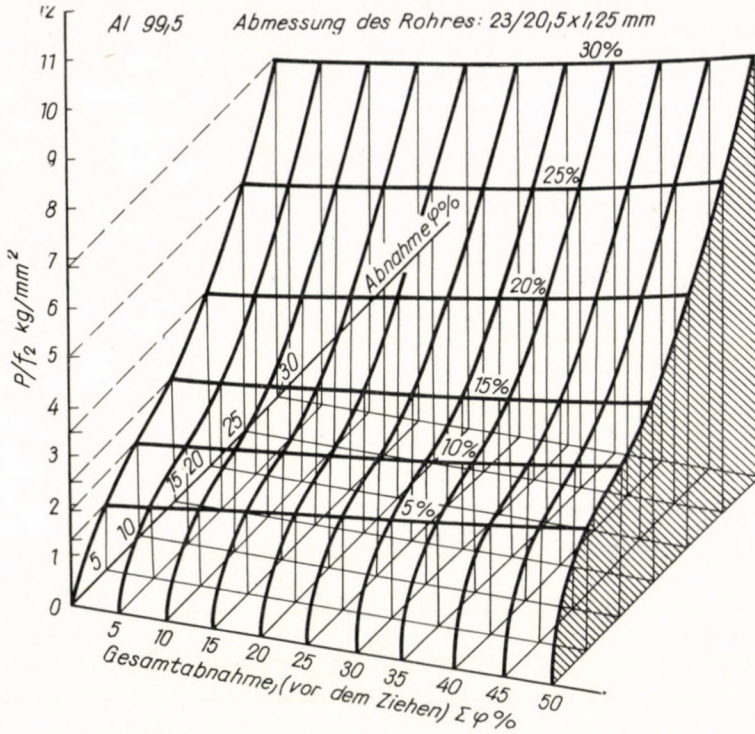


Abb. 14. Vereinigtes spezifisches Diagramm der Ziehkraft Al 99,5

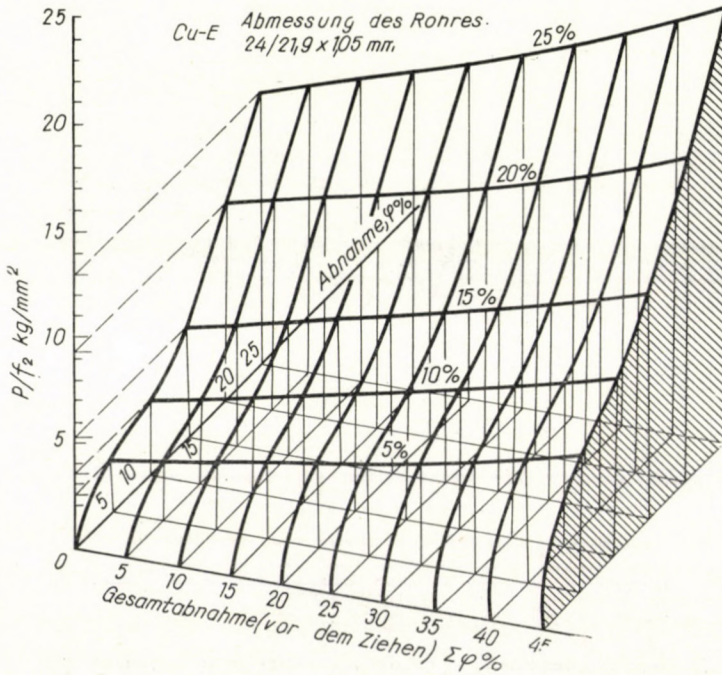


Abb. 15. Vereinigtes spezifisches Diagramm der Ziehkraft Cu-E

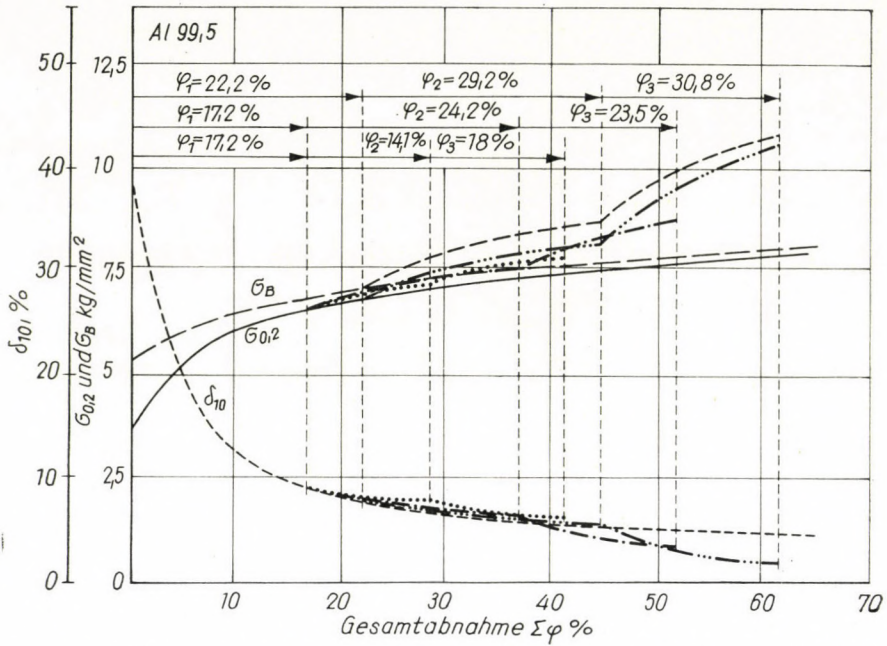


Abb. 16. Änderung der Fließgrenze, der Zugfestigkeit und der Dehnung (Al 99,5)

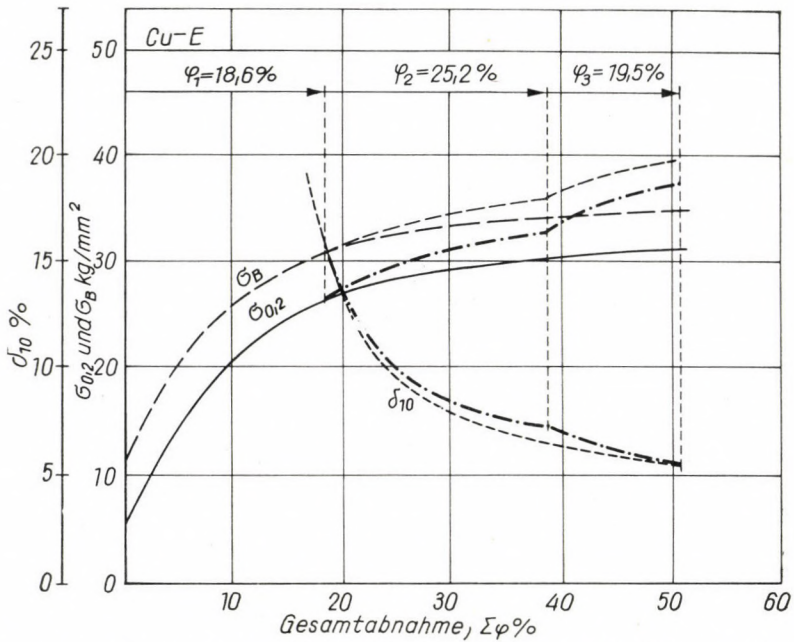


Abb. 17. Änderung der Fließgrenze, der Zugfestigkeit und der Dehnung (Cu-E)

den Vorteil hat, daß dementsprechend auch die spezifische Ziehkraft (P/f_2) stark anwachsen kann, und somit auch die in dieser Ziehstufe erreichbare maximale Verformbarkeit. Ist der beim Ziehen tatsächlich auftretende $\sigma_{0,2}$ -Wert bekannt, so ist man in der Lage, bei jeder beliebigen Ziehstufe die Beanspruchung des gezogenen Rohres zu ermitteln. Die erwähnten Gesetzmäßigkeiten müssen auch beim Konstruieren des Raumdiagramms, beim Feststellen der oberen Grenze der maximalen Verformbarkeit, in Betracht gezogen werden. Durch dieses Verfahren ist es möglich, festzustellen, welche größte Verformbarkeit in einer Ziehstufe erreichbar ist.

Die Veränderung der Zugfestigkeit ist ähnlich dem $\sigma_{0,2}$, der Wert der Dehnung dagegen vermindert sich.

Die Veränderungen der mechanischen Eigenschaften der Cu-E-Rohre (Abb. 17) zeigen dieselben Gesetzmäßigkeiten wie Al 99,5.

Die Bedeutung der Meßergebnisse liegt einerseits darin, daß man mit deren Hilfe eine Möglichkeit hat, die theoretischen Formeln des Kraft- bzw. Leistungsbedarfes des Rohrziehens zu überprüfen, andererseits die Weiterentwicklung und Verbesserung auf Grund der Versuchsdaten durchführen kann. Der praktische Wert der Arbeit liegt darin, daß sie für die Betriebe zur Ausbildung einer wirtschaftlichen Technologie Angaben zur Verfügung stellt.

SCHRIFTTUM

1. GELEJI, A.: Die Berechnung der Kräfte und des Arbeitsbedarfs bei der Formgebung im bildsamen Zustande der Metalle. 2. Aufl. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955. 277/87. S.
2. GELEJI, A. und SCHEY, J.: Die graphische Ermittlung von Ziehplänen für Rohre. Acta Technica, Tom. IV. 1952. 347/64. S.
3. GELEJI, S. und SCHEY, J.: A fémek képlékeny alakításának technológiája. (Die Technologie der plastischen Formgebung der Metalle.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1955. 865/98. S.
4. HANTOS, R., HEERINGER, J., SCHEY, J.: A csőhúzásnál keletkező erők vizsgálata. (Untersuchung der beim Rohrziehen entstehenden Kräfte.) M. T. A. Közlemények, 1957. XXI. kötet, 1–4. sz. 141/55. S.
5. П. И. Орпо и Я. Е. Осада: Производство стальных тонкостенных бестовных труб (Москва 1951).
6. И. Л. Перлин: Теория волочения (Москва 1957).
7. ZEERLEDER, A.: Technologie des Aluminiums und seiner Leichtlegierungen. 5. Aufl. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1947. 290/93. S.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Versuche verfolgen das Ziel, die beim Hohlzug von Rohren anwendbare maximale Verformbarkeit und die Veränderung der mechanischen Eigenschaften festzustellen.

Die Ziehkraftkurven haben einen Inflexionspunkt, von dem zu diesem gehörenden Abnahmewert an vermindern sich im weiteren die Bedingungen des wirtschaftlichen Ziehens stark. Beim Weiterziehen tritt eine fast konstante Ziehkraft auf, wenn man die Werte der Ziehstufen nahezu konstant hält. Die zwischen zwei Glühungen anwendbare größte Verformbarkeit kann man mit Hilfe eines Raumdiagramms feststellen.

Bei der Veränderung der mechanischen Eigenschaften konnte festgestellt werden, daß zu derselben Gesamtzunahme eine um so größere Verfestigung gehört, je mehr die angewandten Ziehstufen waren. Die Zugfestigkeit ändert sich nach einer ähnlichen Gesetzmäßigkeit wie die Fließgrenze. Die Verringerung der Dehnung geht der Erhöhung der Zugfestigkeit voraus.

THE DUCTILITY OF 99,5% ALUMINIUM AND ELECTROLYTIC COPPER TUBES AND THE CHANGES IN THEIR MECHANICAL CHARACTERISTICS AT HOLLOW DRAWING

GY. DÉVÉNYI and I. MECSEKI

SUMMARY

The object of this study is to determine the maximal ductility to be applied by drawing without plugs and to register the changes of mechanical characteristics.

The tensile load curves illustrated as plotted against diminution have a point of inflexion. From this point on, the conditions for an economical drawing are gradually diminishing.

At extended drawing an approximately constant tensile load is to be observed in the case when drawing stages are assumed to be constant. The maximal ductility to be applied between two annealings can be determined from the space diagrams.

When investigating mechanical values, it can be stated that with the same gross diminution, hardening will be the greater, the larger is the number of drawing stages. The change in tensile strength takes place practically on rules similar to the change of the yield point. The drop in elongation precedes the growth of tensile strength.

MALLÉABILITÉ ET VARIATION DES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DES TUBES EN ALUMINIUM À 99,5% ET DES TUBES EN CUIVRE ÉLECTROLYTIQUE, PENDANT L'ÉTIRAGE EN CREUX

GY. DÉVÉNYI—I. MECSEKI

RÉSUMÉ

Le but de l'étude est d'établir la malléabilité maximum applicable et les variations des propriétés mécaniques pendant l'étirage sans bouchon des tubes.

Les courbes de la force d'étirage en fonction de la réduction ont un point d'inflexion. À partir de ce point, les conditions d'un étirage économique vont en diminuant.

Pendant l'étirage ultérieur, la force d'étirage est approximativement constante quand les échelons d'étirage sont pris constants. La plus grande malléabilité applicable entre deux recuites peut être déterminée au moyen des diagrammes dans l'espace.

Par l'examen des valeurs mécaniques, on peut établir que dans le cas de réductions totales identiques, l'augmentation du durcissement est proportionnelle à l'augmentation du nombre des échelons d'étirage. La variation de la résistance à la rupture suit pratiquement des lois analogues à celle de la limite de fluage. La diminution de l'allongement précède l'augmentation de la résistance à la rupture.

ОБРАБАТЫВАЕМОСТЬ И ИЗМЕНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПРИ ПРОТЯЖКЕ ТРУБ ИЗ 99,5% АЛЮМИНИЯ И ЭЛЕКТРОЛИТНОЙ МЕДИ

Д. ДЕВЕНИ и И. МЕЧЕКИ

РЕЗЮМЕ

Работой ставится цель определения изменения механических свойств и максимальной обрабатываемости при безвулочном протягивании труб.

Кривые усилий протягивания, отображенные в функции уменьшения, имеют инфлекссионную точку. Начиная от этой точки, условия выгодной протяжки падают.

При дальнейшей протяжке в том случае возникает приближенно постоянное усилие протягивания, если переходы протягивания приняты постоянными. Наибольшую обрабатываемость между двумя отпусками можно определить по стереодиаграммам.

При анализе механических показателей можно установить, что при одном и том же обжатии получается тем большее твердение, чем больше число переходов протяжки. Изменение сопротивления разрыву практически происходит по закономерности, аналогичной изменению предела текучести. Снижение растяжения предшествует росту сопротивления разрыву.

ÜBER DIE GRUNDLEGENDEN RHEOLOGISCHEN EIGENSCHAFTEN DER FESTKÖRPER

E. BÖLCSKEI

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR BAUINDUSTRIE
UND VERKEHR, LEHRSTUHL II. FÜR BRÜCKENBAU, BUDAPEST

[Eingegangen am 21. Dezember 1960]

1. Gegenstand des Aufsatzes

Die Rheologie untersucht die Gesetzmäßigkeiten der aus verschiedenen Gründen stattfindenden Formänderung beziehungsweise die des zeitlichen Verlaufes der Formänderung der Stoffe. Der untersuchte Stoff kann sich dabei im festen, flüssigen oder gasförmigen Aggregatzustand befinden. Dieser Aufsatz hat allein das rheologische Verhalten der festen Stoffe zum Gegenstand, da die technischen Wissenschaften in erster Linie an der Beantwortung der Frage interessiert sind, welchen Formänderungen die festen Körper unter der Wirkung der rheologisch wirksamen Faktoren (Zeit, Spannung, Temperaturänderung) unterliegen, wobei in erster Linie Dehnungen und Winkeldeformationen in Betracht kommen.

Die Festigkeitslehre befaßt sich in erster Linie mit den unter der Wirkung von Spannungen stattfindenden Formänderungen. Zur Charakterisierung der zwischen den Spannungen und Dehnungen bestehenden Beziehungen diene bis zur Zeit das Dehnung-Spannungsdiagramm. Wir wollen nachweisen, daß das zeitunabhängige Dehnung-Spannungsdiagramm zur allgemeinen Behandlung der Festigkeitsprobleme nur für den Fall des ideal elastischen Stoffes verwendet werden kann. Ändert sich jedoch, im Gegensatz hierzu, die Form des Stoffes ohne jegliche Kraftwirkung (der Stoff schrumpft sich zum Beispiel), oder aber erleidet der Stoff unter der Wirkung von Spannungen eine allmähliche Formänderung, oder verfügt der Stoff über plastische Eigenschaften beziehungsweise erleidet er remanente Formänderungen, usw., so muß die unmittelbare Beziehung zwischen der Dehnung und Spannung durch eine neue, zeitabhängige Beziehung ersetzt werden.

2. Allgemeine rheologische Grundbegriffe

2.1. Über die Ursachen der rheologischen Formänderungen

Die Formänderungen der Festkörper können im allgemeinen auf drei Hauptursachen zurückgeführt werden. Diese sind die folgenden:

a) Die Stoffe können an sich rheologischen Aenderungen unterliegen, das heißt, unbelastete Körper von konstanter Temperatur können in der Zeit

auch ohne jegliche äußere Ursache eine Formänderung erleiden (z. B. das Schwinden des Betons, die Ermüdung der Leichtmetalllegierungen, usw.). Diese wollen wir lediglich unter der Wirkung der Zeit stattfindende Formänderung im folgenden als natürliche Formänderung bezeichnen.

b) Es ist allgemein bekannt, daß die Körper unter der Wirkung von Spannungen ihre Form ändern. Es sind zwei Arten der unter der Wirkung von Spannungen stattfindenden Formänderungen bekannt. Die erste Gruppe umfaßt die reversiblen elastischen Formänderungen, während die zweite die Gruppe der irreversiblen Formänderungen darstellt, in die die remanenten, die allmählich verlaufenden, die plastischen, usw. Formänderungen eingereiht werden. Zur Kennzeichnung des in einem gegebenen Punkt irgendeines Körpers herrschenden Spannungszustandes dient der sogenannte Spannungstensor (Σ), der mit den üblichen Bezeichnungen die folgende Form annimmt:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

wo $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ die Normalspannungen in den Richtungen x, y, z , während $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ die Schubspannung bezeichnen. Der Spannungstensor ist symmetrisch, das heißt,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Die einzelnen Elemente dieses Tensors sind von den die Lage des untersuchten Punktes bestimmenden Koordinaten x, y, z , und wenn der Spannungszustand auch zeitabhängig ist, noch von der Zeitkoordinate t abhängig. Somit stellt ein jedes Element des Spannungstensors eine Funktion mit vier Veränderlichen dar, das heißt,

$$\sigma_x = f_1(x, y, z, t); \tau_{xy} = f_2(x, y, z, t), \text{ usw.}$$

c) Es ist auch bekannt, daß die Körper auch unter der Wirkung einer Temperaturänderung ihre Form ändern. In den einzelnen Punkten des Körpers dient zur Beschreibung der zeitabhängigen Temperatur (T) ebenfalls eine Funktion mit vier Veränderlichen, das heißt,

$$T = g(x, y, z, t).$$

2.2. Die Kennzeichnung der Formänderung

Die in einem Punkt des Körpers stattfindenden Formänderungen können hingegen mit dem Tensor

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

gekennzeichnet werden, wo $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ die spezifische Dehnung in den Richtungen x, y, z , während

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$$

die Deformation des Winkels zwischen den Koordinatenrichtungen, der ursprünglich 90° betrug, bedeuten. Die einzelnen Elemente des symmetrischen Formänderungstensors stellen somit ebenfalls Funktionen mit vier Veränderlichen dar, das heißt, es ist z. B.

$$\varepsilon_x = h_1(x, y, z, t); \quad \gamma_{xy} = h_2(x, y, z, t), \text{ usw.}$$

Letzten Endes stellen somit die aus verschiedenen Gründen stattfindenden Formänderungen der aus verschiedenen Stoffen bestehenden festen Körper eine physikalische Erscheinung dar, und als solche ist sie von drei Koordinaten mit Längendimension, die die Lage eines Punktes des Körpers im Raume bestimmen, und einer vierten Koordinate mit Zeitdimension abhängig.

2.3. Die Grundfrage der Rheologie

Die Aufgabe der Rheologie besteht darin, die Formänderungen zu bestimmen, die die Körper unter der Wirkung der die Formänderung bedingenden Faktoren — das heißt der Zeit, der Spannungen und der Temperaturänderung — erleiden. In mathematischer Fassung ist die Beziehung zu ermitteln, die zwischen dem Formänderungstensor als abhängiger Variablen und der Zeit, dem Spannungstensor und der Temperaturänderung als unabhängigen Variablen besteht. Es wurde absichtlich nicht von einer Funktion gesprochen, da — wie es in der Folge noch nachgewiesen wird — zwischen diesen Größen keine Funktionsbeziehung in dem Sinne des üblichen Wortgebrauches, vielmehr ein Zusammenhang höherer Ordnung besteht, den wir in der Folge als Beziehung nennen wollen. Die unabhängige Veränderliche dieser Beziehung ist nämlich nicht allein die Zeit t , die durch eine einzige Zahl angegeben werden kann, vielmehr besteht sie auch aus den beliebigen Funktionen, die die zeitliche Änderung des Tensors Σ beziehungsweise die der Größe T beschreiben. Diese Beziehung kann in der Form

$$E = \Phi [t, \psi \boxed{\Sigma}, x \boxed{T}] \tag{1}$$

angeschrieben werden, wo eine neue mathematische Bezeichnung, namentlich

$$\psi \boxed{\Sigma} \text{ beziehungsweise } \chi \boxed{T}$$

eingeführt wurde. Mit diesem Symbol wollen wir eine mathematische Beziehung symbolisieren, in der die unabhängige Veränderliche selbst eine beliebige Funktion ist.

3. Die rheologischen Verhältnisse in Stäben mit gerader Achse

Es geht auch aus dem Vorangehenden hervor, daß die genaue Beschreibung der rheologisch bedingten Formänderungen eine im allgemeinen äußerst komplizierte Aufgabe darstellt. Um die rheologischen Erscheinungen klar verfolgen zu können, wollen wir zunächst von dem einfachen Fall eines Stabes mit gerader Achse und konstantem Querschnitt (prismatischer Stab) ausgehen (siehe Fig. 1) und die folgenden Annahmen machen:

a) Der Stab ändert seine Form in Abhängigkeit von der Zeit auch ohne Belastung und Temperaturänderung, wobei diese Änderung in allen Punkten des Stabes die gleiche sein soll.

b) Der Stab wird an seinen beiden Enden durch eine gleich große, aber entgegengesetzte Zug- oder Druckkraft zentrisch belastet. Wir wollen voraus-

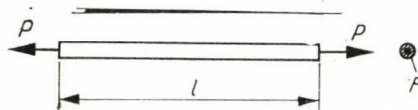


Fig. 1

setzen, daß die Verteilung der Spannungen entlang des Querschnittes als gleichmäßig betrachtet werden kann, ferner daß die unter der Wirkung der Druckkraft erfolgende Ausbiegung des Stabes durch entsprechende reibungsfreie Stützen verhindert wird, so daß eine Ausbiegung des Stabes unmöglich ist.

c) Schließlich wollen wir voraussetzen, daß die Temperaturänderung des Stabes als gleichmäßig betrachtet werden kann, das heißt, daß in allen Querschnitten des Stabes und in allen Punkten eines beliebigen Querschnittes die gleiche Temperatur herrscht.

Infolge dieser Voraussetzungen wird unsere ursprüngliche Aufgabe wesentlich vereinfacht, da im Stabe ein homogen linearer Spannungszustand herrscht, und die Änderung der Temperatur gleichmäßig erfolgt. Aus diesem Grunde wird — wenn von einer Querkontraktion zunächst abgesehen wird — auch die Formänderung homogen linear erfolgen, das heißt, der Stab wird allein eine Formänderung parallel seiner Längsachse erleiden. Zur Kennzeichnung des Spannungs- bzw. des Formänderungszustandes wird an Stelle des je sechs Elemente enthaltenden Tensors ein homogener, das heißt, von den Koordinaten x, y, z unabhängiger, linearer Spannungs- bzw. Formänderungszustand zustandekommen, der mit je einer Veränderlichen beschrieben werden kann. In diesem Fall kann die die Formänderung hervorrufende Spannung mit einer einzigen Zahlangabe (σ) und die Formänderung gleicherweise mit einer einzigen Zahlangabe, der der Stabachse parallelen spezifischen Dehnung, (ε), gekennzeichnet werden.

An Stelle der Beziehung (1) kann somit für diesen Fall die Beziehung

$$\varepsilon = \Phi [t, \psi \left[\frac{f}{t} \right], \chi \left[\frac{g}{t} \right]]$$

angeschrieben werden, wo $\Phi []$ eine die Qualität des Stoffes ausdrückende Beziehung darstellt, während die unabhängigen Veränderlichen

- $t =$ Zeit,
- $\sigma = f(t) =$ die zeitabhängige Spannung im Stabe in der Achsenrichtung,
- und
- $T = g(t) =$ die zeitabhängige Temperaturänderung des Stabes sind.

3.1. Beschreibung der die rheologischen Änderungen hervorrufenden Faktoren

Im vorangehenden wurden drei Hauptfaktoren der rheologischen Änderungen untersucht.

Als der erste Faktor wurde die Zeit (laufende Zeit) erwähnt, die eine von uns unabhängige, durch eine Zahlangabe zu kennzeichnende unabhängige Veränderliche darstellt.

Den zweiten Faktor stellt die Spannung dar, die wir selbst hervorrufen (z. B. in einem Versuch mit dem Zugfestigkeitsprüfer). Die Änderung der

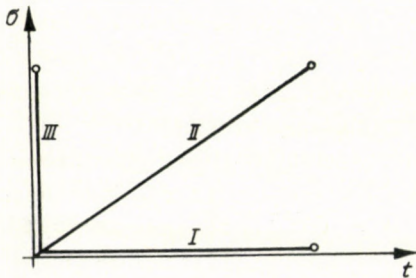


Fig. 2

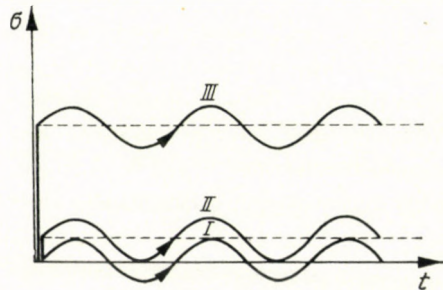


Fig. 3

Spannung mit der Zeit hängt also von uns ab, und stellt somit eine beliebige zeitabhängige Veränderliche dar. Für den Fall eines einachsigen Spannungszustandes können wir somit die zeitliche Änderung der Belastung durch die Funktion

$$\sigma = f(t)$$

beschreiben.

In der Folge wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß lediglich Belastungsvorgänge in Betracht gezogen werden, bei denen das Vorzeichen der Funktion $\sigma = f(t)$ unverändert bleibt, mit anderen Worten, wo

die die Funktion $\sigma = f(t)$ darstellende Kurve in ihrem vollen Verlauf im ersten Quadranten bleibt.

Zur Illustrierung der zeitlichen Änderung der Belastung werden in den Figuren 2, 3 und 4 einige Beispiele vorgeführt. In Fig. 2 führt die Linie I den Fall des unbelasteten Stabes an, Linie II stellt den Fall eines Stabes dar, wo die Belastung gleichmäßig, stufenweise erhöht wird, während Linie III eine momentane Belastung darstellt, wo die Belastung prinzipiell in einer unendlich kleinen Zeitspanne vorgenommen wurde. In Fig. 3 werden ebenfalls

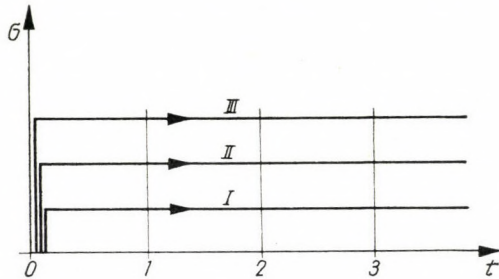


Fig. 4

drei Belastungsvorgänge dargestellt. Fall I ist zur Prüfung der Schwingungsfestigkeit, Fall II der Schwellfestigkeit und schließlich Fall III zur Prüfung der Ermüdung zwischen den gegebenen oberen und unteren Grenzen geeignet. In Fig. 4 können die der t -Achse parallelen Linien I, II, III zur Prüfung von allmählichen Formänderungen verwendet werden, die unter der Wirkung von unterschiedlichen, aber zeitlich konstanten Spannungen stattfinden. Schließlich wollen wir auf Figur 6 verweisen, wo Linie II eine bei stufenweiser Änderung der Belastung erhaltene, aber einwertige Kurve $\sigma = f(t)$ von beliebiger Form, einen sogenannten Belastungsvorgang, darstellt.

Den dritten Faktor stellt die Temperaturänderung dar. Diese hängt gleicherweise von uns ab. Die Temperatur des Stabes können wir nämlich in beliebiger Weise, und zwar entweder linear, oder nach einer gekrümmten Linie ändern, oder aber können wir den Stab auch bei einer konstanten Temperatur erhalten.

Die Temperatur des Stabes kann somit durch eine zeitabhängige, einwertige Funktion mit einer Veränderlichen gekennzeichnet werden:

$$T = g(t).$$

Aus dem vorangehenden geht es deutlich hervor, daß in irgendeinem Punkte des untersuchten Körpers jeder der die rheologischen Änderungen hervorrufenden Faktoren als eine Funktion der Zeit betrachtet werden kann.

Nach dem oben Gesagten soll noch auf einen wesentlichen Umstand mit besonderem Nachdruck hingewiesen werden. In der Plastizitätslehre sind nämlich Belastungen mit einem oder mit mehreren Parametern bekannt. Diese Unterscheidung ist begründet, wenn die Belastungen nur von Koordinaten mit Kraft- bzw. Längendimension abhängen. (So stellt z. B. nach der bisherigen Auffassung eine entlang der vollen Länge eines Einfeldträgers wirkende, gleichmäßig verteilte und eine in einem gegebenen Punkt wirkende konzentrierte Last P — für den Fall, daß sich ihre Intensitäten voneinander unabhängig ändern — eine Belastung mit zwei Parametern dar.) Wenn wir jedoch auf Grund des Vorstehenden auch die zeitliche Änderung der Lasten berücksichtigen, so wird eine jede der Lasten auch eine Funktion der Zeit als eines gemeinsamen Parameters sein, und die Erscheinungen können somit in Abhängigkeit von der Zeit, diesem einzigen Parameter, behandelt werden. (So wird z. B. die auf den oben erwähnten Einfeldträger einwirkende gleichmäßig verteilte Last vom Zeitpunkt t_0 an gleichmäßig und stufenweise erhöht, es wird somit $p = f_1(t)$. Anschließend wird dann der Träger in einem gegebenen Zeitpunkt t_1 durch die zeitabhängige konzentrierte Kraft belastet, es wird somit $P = f_2(t)$.)

Selbstredend können wir uns auch Belastungen vorstellen, die scheinbar von mehreren Parametern abhängen, bei denen also nicht allein die Größe, sondern auch die Lage der Lasten veränderlich ist. (Z. B. bei einem mit einem Druck exzentrisch belasteten Stabe können wir mit Erhöhung der Größe der Belastungskraft gleichzeitig auch ihre Exzentrizität ändern.) Doch können beide Änderungen als Funktionen der Zeit betrachtet werden, und somit wird auch in diesem Falle die Belastung mit scheinbar zwei Parametern zu einer Funktion der Zeit als eines gemeinsamen Parameters.

Die auf den Trägern einwirkenden, bezüglich ihrer Lage und Größe in der Zeit beliebig veränderlichen Belastungskräfte stellen somit stets eine Funktion der Zeit mit einem Parameter dar, und die korrekte Untersuchung des Kräfte-spieles dieser Träger aus nicht ideal elastischem Material kann stets in Abhängigkeit von der Zeit als eines einzigen Parameters durchgeführt werden.

3.2. Die Formänderungen der festen Körper

Nach dem Grundgesetze der Rheologie verfügen alle realen Körper — wenn auch in verschiedenem Maße — über alle rheologischen Eigenschaften. In der Folge wollen wir uns mit fiktiven Stoffen befassen, die von den rheologischen Eigenschaften nur über eine einzige verfügen, und wir wollen voraussetzen, daß all die übrigen rheologischen Eigenschaften zunächst nicht-existent sind. Je nach der rheologischen Eigenschaft, die diesen fiktiven Stoffen zugeschrieben wird, wollen wir sie als

ideal natürlich formändernd,
ideal elastisch,

ideal remanent,
 ideal kriechverformend,
 ideal thermisch,

usw. benennen.

In der Folge wollen wir somit diese idealisierten Stoffe mit nur einer einzigen rheologischen Eigenschaft gesondert behandeln.

3.21. Körper mit ideal natürlicher Formänderung

Unter einer natürlichen Formänderung verstehen wir die ohne jegliche äußere Ursache stattfindende und sich mit der Zeit ändernde — meistens graduell abnehmende — Verkürzung bzw. Dehnung der neu hergestellten

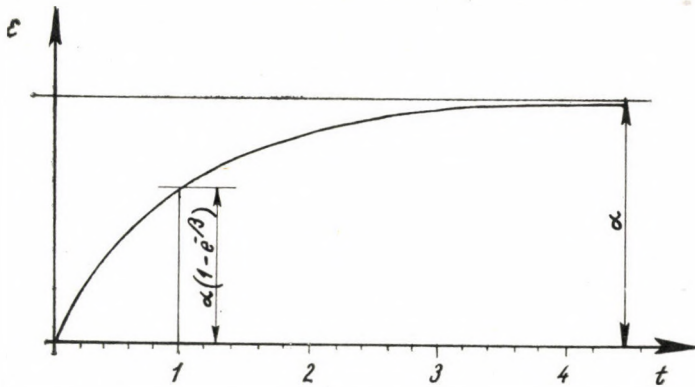


Fig. 5

Werkstoffe. Diese Erscheinung kann bei einigen Stoffen in ihrem Ausmaße vernachlässigt werden (z. B. bei Metallen), während bei anderen Stoffen (z. B. Zementmörtel oder das Schwinden des Betons) eine bedeutende Formänderung stattfindet.

Für den einfachen Fall eines geradachsigen Stabes kann die natürliche Formänderung durch die Funktion

$$\epsilon = j(t)$$

beschrieben werden, wo

j eine von dem Stoff abhängige Funktionsbeziehung, und
 t (die Zeit) die unabhängige Veränderliche darstellt.

So wird z. B. bei Zementmörtel, Beton und ähnlichen Stoffen die auf Grund der vorgenommenen Messungen ermittelte Form der die natürliche Formänderung beschreibenden Funktion (siehe Figur 5) wie folgt angeschlossen:

$$\epsilon_n = j(t) = a(1 - e^{-\beta t}),$$

wo a die spezifische Längenänderung im Zeitpunkt $t = \infty$ und β eine für die Form der Kurve charakteristische Zahl bedeutet.

Beide Konstanten stellen somit Stoffkonstanten dar, deren Wert durch Messungen ermittelt werden kann.

3.22. Ideal elastische Körper

Unter einer ideal elastischen Formänderung verstehen wir die unter der Wirkung von Spannungen stattfindende Formänderung der festen Körper, die nach dem Aufhören der Spannungen ebenfalls aufhört, das heißt, der Körper gewinnt seine ursprüngliche Form zurück. Die Entspannung vollzieht sich somit nach der gleichen Gesetzmäßigkeit. In kurzer Fassung lautet diese Aussage: die ideal elastische Formänderung ist vollständig reversibel. Im Laufe der ideal elastischen Formänderung besteht zwischen den Dehnungen und Spannungen eine gegenseitige und eindeutige Beziehung. Diese Beziehung kann durch die Gleichung

$$\varepsilon = k(\sigma)$$

gekennzeichnet werden, die graphisch durch ein in der Ebene des Achsenkreuzes (ε, σ) liegendes und durch den Ursprung des Koordinatensystems gehendes Diagramm, das sogenannte Dehnung-Spannungsdiagramm dargestellt wird.

Bei Beibehaltung der vorstehenden Aussagen in bezug auf die ideal elastischen Formänderungen wollen wir zwischen den Dehnungen und Spannungen wieder eine gegenseitige und eindeutige Beziehung aufstellen, jedoch derart, daß die Beziehung $\varepsilon_r = k(\sigma)$ nicht unmittelbar, sondern in Parameterform angeschrieben werden soll.

Als natürlichen Parameter wollen wir die Zeit wählen. Die im Stabe auftretenden Spannungen können von der Zeit in beliebiger Weise abhängen, wobei diese Abhängigkeit durch die Funktion

$$\sigma = f(t)$$

beschrieben werden kann. Bei ideal elastischen Formänderungen besteht zwischen den Dehnungen und Spannungen eine gegenseitige und eindeutige Beziehung, die durch die Funktionen

$$\varepsilon_r = k(\sigma)$$

beziehungsweise

$$\varepsilon_r = k[f(t)]$$

beschrieben werden kann.

Die durch die Verwendung des Zeitparameters angeschriebene Beziehung kann auch graphisch dargestellt werden.

Die auf den Stab wirkende Kraft — beziehungsweise die dieser Kraft entsprechende und in den Querschnitten des Stabes als konstant vorausgesetzte Spannung — sei in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt, wobei wir Fig. 6 erhalten. Eine beliebige, in der Ebene des Achsenkreuzes liegende Linie ent-

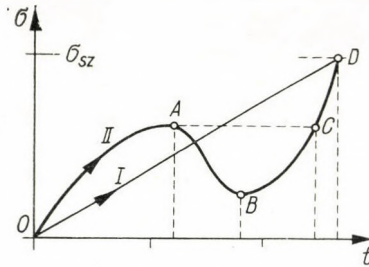


Fig. 6

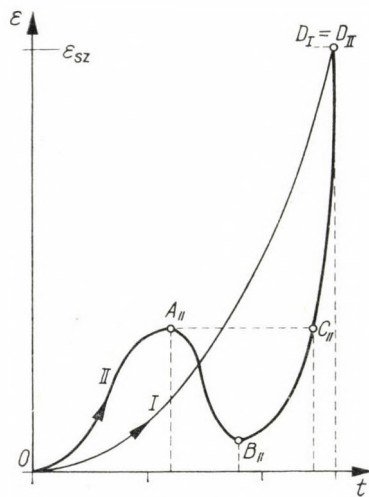


Fig. 7

spricht je einem Belastungsvorgang. Die in der Fig. 6 konstruierte Linie I entspricht einer gleichmäßig graduellen Erhöhung der Spannungen, während für den Fall der Linie II die Änderung der Spannungen nach einer Parabel dritter Ordnung vorgenommen wird. In Fig. 7 wurde entsprechend diesen Belastungsvorgängen die Änderung der Dehnungen in der Ebene des Achsenkreuzes (t, ε) dargestellt. Wenn wir nämlich das Dehnung-Spannungsdiagramm eines ideal elastischen Körpers kennen, so können wir berechnen beziehungsweise konstruieren die in Fig. 7 dargestellten Kurven, von denen Linie I bzw. II den Belastungsvorgängen I bzw. II entsprechen.

Es sei bemerkt, daß bei einem ideal elastischen Körper — da zwischen den Dehnungen und Spannungen eine gegenseitige und eindeutige Beziehung

besteht — wie immer auch der Vorgang beschaffen sei, durch den wir Punkt *D* in Fig. 6 erreichten, die entsprechenden Punkte *D_I* und *D_{II}* in Figur 7 identisch sein werden.

Es kann auch das diesen beiden Belastungswegen entsprechende Diagramm $\varepsilon_r = k(\sigma)$ konstruiert werden, das im Falle des Belastungsvorgangs I

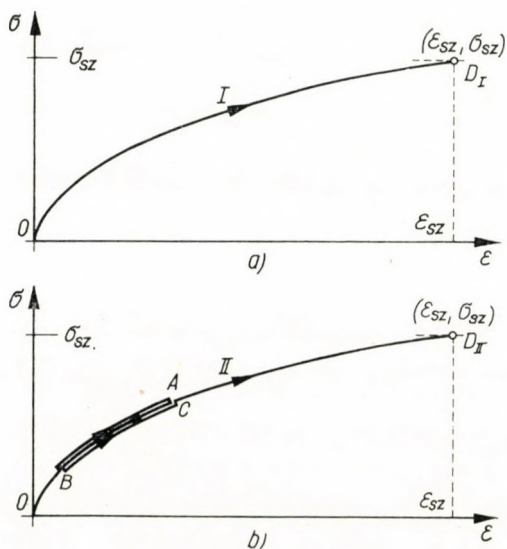


Fig. 8

dadurch gekennzeichnet wird, daß die ganze Kurve lediglich einmal durchgelaufen wurde (siehe Fig. 8a). Im Falle des Belastungsweges II hingegen wurden die Abschnitte *B — A*, *A — B* bzw. *B — C* entlang derselben Linie durchgelaufen, das heißt, dieser Abschnitt wurde dreimal beschritten. (Siehe Fig. 8b.)

Bei dieser Behandlungsweise tritt auch der Elastizitätsmodul als eine Funktion der Zeit auf. Unter dem momentanen Elastizitätsmodul wird der Differentialquotient der Spannung nach der Dehnung verstanden, das heißt,

$$E(t) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_r}$$

Nach der Differenzierungsregel der in Parameterform angegebenen Funktionen wird somit

$$E(t) = \frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{d\varepsilon_r}{dt}} = \frac{\frac{df(t)}{dt}}{\frac{d}{dt}k[f(t)]} = \frac{f'}{k' \cdot f'} = \frac{1}{k'}$$

Beispiel

Die theoretische Elastizitätslehre behandelt einen ideal elastischen Stoff, dessen Dehnung-Spannungsdiagramm eine durch den Ursprung des Koordinatensystems gehende schiefe Gerade darstellt, die mit der ε Achse einen Winkel $\arctg E$ einschließt. Obschon in diesem Fall sich die Verhältnisse einfacher gestalten, im Wesen handelt es sich dabei um einen speziellen Fall der im vorstehenden allgemein behandelten Formänderung eines ideal elastischen Körpers.

Der Belastungsvorgang ist für diesen Fall

$$\sigma = f(t),$$

$$\varepsilon_r = k(\sigma) = \frac{\sigma}{E},$$

das heißt,

$$\varepsilon_r = k[f(t)] = \frac{f(t)}{E}.$$

Der Elastizitätsmodul ergibt sich dabei zu

$$E(t) = \frac{1}{k'} = E = \text{konst.}$$

Auch für diesen Fall wurde die Kurve der spezifischen Dehnung (Fig. 9) für die beiden gleichen Belastungsvorgänge (Fig. 6) in Abhängigkeit von dem

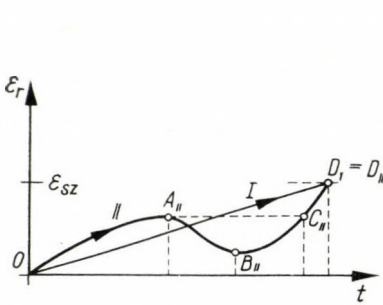


Fig. 9

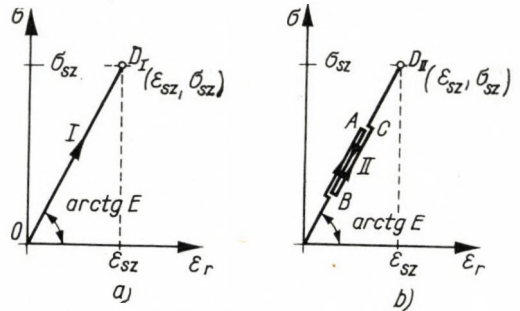


Fig. 10

Zeitparameter konstruiert, und in den Figuren 10a bzw. 10b wurden auch die entsprechenden Dehnung-Spannungsdiagramme dargestellt.

Bei dieser Behandlungsweise kann leicht verifiziert werden die wohlbekannte Tatsache, daß das Gesetz der Superposition selbst unter den ideal elastischen Stoffen lediglich für diejenigen gilt, die ein Dehnung-Spannungsdiagramm in Form einer schiefen Gerade aufweisen.

3.23. Körper mit ideal bleibender Formänderung

Unter bleibender Formänderung verstehen wir eine — in der Wirklichkeit selbständig nicht existierende — Formänderung, deren Größe im Laufe der Belastung in einem von der maximalen Spannung des Stabes (σ_{max}) abhängigen Maße zustandekommt und dadurch gekennzeichnet ist, daß sie auch nach

erfolgter Erniedrigung oder gar vollständigen Aufhebung der Spannung erhalten bleibt. Diese Formänderung ist demgemäß nicht reversibel, und zwischen den Dehnungen und Spannungen besteht keine gegenseitige und eindeutige Beziehung mehr, da doch die Formänderung keine Funktion der momentanen Spannung, vielmehr eine Funktion der während des Belastungsvorganges erreichten maximalen Spannung darstellt. Diese Formänderung stellt eine

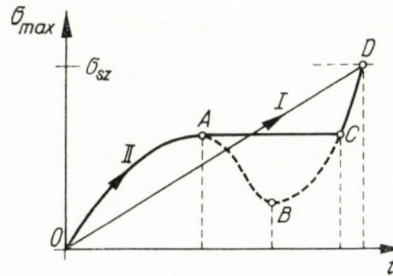


Fig. 11

unter der Wirkung der maximalen Spannung stattfindende strukturelle Umwandlung des Stoffes dar, deren obere Grenze durch die Bruchdehnung bedingt wird:

$$\varepsilon_m = l(\sigma_{\max}).$$

Wenn der Belastungsvorgang

$$\sigma = f(t)$$

bekannt ist, so kann auf Grund des Belastungsvorganges die Beziehung

$$\sigma_{\max} = m(t)$$

und damit auch die Beziehung

$$\varepsilon_m = l[m(t)]$$

ermittelt werden.

Wir wollen das nachstehende Beispiel untersuchen. Die Änderung der Spannungen erfolge wieder nach den Belastungsvorgängen I bzw. II der Fig. 6. Die zu diesen Belastungsvorgängen gehörenden und leicht zu konstruierenden σ_{\max} -Kurven wurden in Fig. 11 dargestellt. Bei einer monoton zunehmenden Belastung, das heißt, wenn in dem untersuchten Bereich $d\sigma/dt \neq 0$ ist (z. B. beim Belastungsvorgang I), wird die σ -Kurve gleich der σ_{\max} -Kurve gleich sein. Bei Belastungsvorgängen, bei denen auch sogenannte Spannungstäler vorkommen, wird entlang des ersten monoton zunehmenden Abschnittes $\sigma_{\max} \equiv \sigma$ (so z. B. entlang des Abschnittes OA für den Belastungsweg II), während in den Spannungstälern (so z. B. entlang des Abschnittes AC im Falle

des Belastungsvorgangs II) $\sigma_{\max} = \sigma_A$ wird. Wenn jedoch die Spannung den maximalen Wert überschritten hat, so gilt wiederum die Beziehung $\sigma_{\max} \equiv \sigma$ (z. B. entlang des Abschnittes CD im Falle des Belastungsweges II). In den Spannungstälern, zwischen den Punkten A und C , wird bei einer beliebigen, aber die Ungleichung $\sigma \leq \sigma_A$ befriedigenden Spannung σ_{\max} den gleichen Wert aufweisen. Es wird somit entlang des Abschnittes zwischen den Größen σ und ε_m eine gegenseitige und eindeutige Beziehung bestehen.

In Kenntnis der Beziehung $\sigma_{\max} = m(t)$ kann die zeitliche Änderung der spezifischen Dehnungen auf Grund der von den stofflichen Eigenschaften

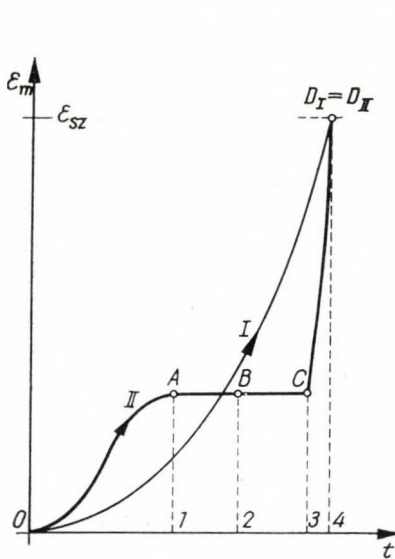


Fig. 12

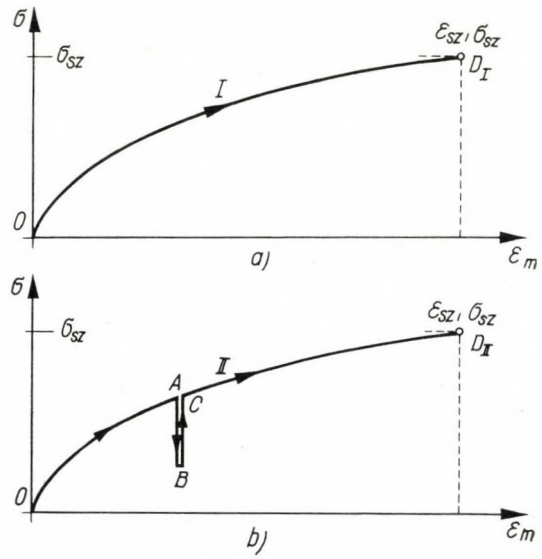


Fig. 13

abhängigen Beziehung $\varepsilon_m = l(\sigma_{\max})$ eindeutig bestimmt werden. Die Ergebnisse wurden in der Fig. 12 dargestellt.

In Fig. 13a ist das zu dem Belastungsweg I gehörende, während in Fig. 13b das zu dem Belastungsweg II gehörende Dehnung-Spannungsdiagramm dargestellt. Zu anderen Belastungswegen gehören wieder andere Dehnung-Spannungsdiagramme. Diese Diagramme bilden somit eine der σ -Achse parallele Geradenschar, deren Differentialgleichung als singuläre Lösung auch die Kurve $\varepsilon_m = l(\sigma)$ mit enthält.

3.24. Ideal kriechende Körper

Als Kriechen wird die irreversible Formänderung bezeichnet, die im Laufe der auf den Körper einwirkenden Last in Abhängigkeit von der Zeit

zustandekommt. Die Erscheinung wird auch mit dem Namen Relaxation (Nachdehnung) benannt.

Die allmähliche Formänderung (Kriechen, Relaxation) erfolgt mit einer Geschwindigkeit, die für den Fall eines einfachen, gezogenen Stabes eine Funktion der Spannung und der Zeit darstellt, das heißt,

$$\frac{d\varepsilon_t}{dt} = n(\sigma, t) .$$

Die Form dieser Funktion ändert sich je nach dem Stoff, aber aus Meßergebnissen ist es bekannt, daß die Geschwindigkeit der langsamen Formände-

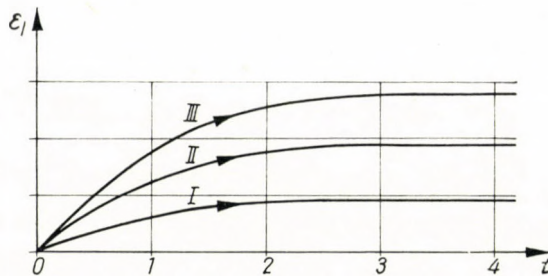


Fig. 14

rung in erster Annäherung der elastischen Dehnung und einem mit der Zeit abnehmenden Faktor proportional ist, das heißt,

$$\frac{d\varepsilon_t}{dt} = \varepsilon_r e^{-t} = k(\sigma) e^{-\beta t}$$

oder

$$\varepsilon_t = \int_0^t k(\sigma) e^{-\beta t} dt = \int_0^t k[f(t)] e^{-\beta t} dt .$$

Beispiele

1. Als erstes Beispiel wollen wir den Fall einer konstanten Spannung, $\sigma = \sigma_0$, bei einem linear elastischen Stoff mit dem Elastizitätsmodul E untersuchen.

$$\varepsilon_t = \alpha' \frac{\sigma_0}{E} [1 - e^{-\beta t}]_0^t = \frac{\alpha'}{\beta} \frac{\sigma_0}{E} [1 - e^{-\beta t}] = \alpha \frac{\sigma_0}{E} [1 - e^{-\beta t}] .$$

In dieser Formel stellt $\alpha\sigma_0$ die im Zeitpunkt $t = \infty$ hervorgerufene größte Dehnung dar, während β eine für die Ablaufgeschwindigkeit der allmählichen Formänderung charakteristische Zahl bedeutet. Bedeutet β eine große Zahl, so läuft die allmähliche Formänderung (Kriechen) rasch ab, während wenn β eine äußerst kleine Zahl ist, geht die Formänderung äußerst langsam vor sich. Die obigen Ergebnisse stimmen mit den an Stahl- und Betonkörpern vorgenommenen Messungen gut überein. Für die in Figur 4 dargestellten Belastungswege wurden die in t, ε Ebene der Figur 14 dargestellte Kurven erhalten.

2. Eine dem Kriechvorgang verwandte, doch umgekehrte Erscheinung stellt die Relaxation (Erschlaffung) dar. Hierunter wird die Verringerung der Spannung an dem gespannten Stab konstanter Länge verstanden. Wir wollen den Fall eines elastischen Stoffes mit dem Elastizitätsmodul E untersuchen. Die elastische Dehnung beträgt:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma}{E}.$$

Für die allmähliche Formänderung gilt

$$\varepsilon_l = \alpha \frac{\sigma}{E} (1 - e^{-\beta t}),$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_l = \text{konst} = \frac{\sigma}{E} \{1 + \alpha(1 - e^{-\beta t})\},$$

woraus folgt, daß

$$\sigma = \frac{E}{1 + \alpha(1 - e^{-\beta t})} \text{ ist.}$$

Die entsprechende Kurve wurde in Fig. 15 dargestellt.

Für einen nicht elastischen Stoff ist selbstredend die Beziehung viel komplizierter. Zwischen den in den Beispielen 1 bzw. 2 behandelten Vorgängen, Kriechen und Relaxation, besteht eine enge Beziehung. Wenn wir die für das Kriechen charakteristischen Konstanten α und β ermittelt haben, so können wir auf Grund der obigen Formel die im Laufe der

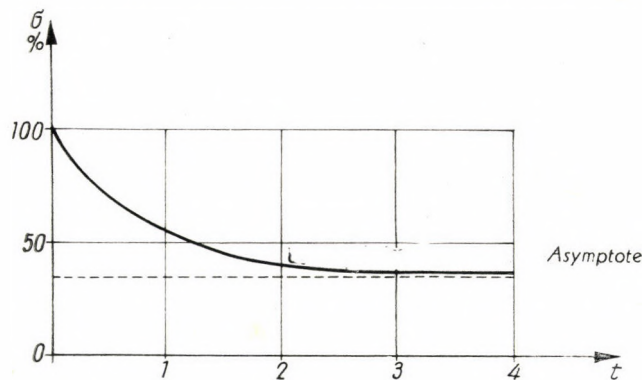


Fig. 15

Relaxation auftretenden Spannungen bestimmen. Zur Kontrolle der oben aufgezeigten Berechnungen verwendeten wir die Ergebnisse der im Laboratorium des Lehrstuhls II für Brückenbau der Technischen Universität für Bau- und Verkehrswesen im Jahre 1952 durchgeführten Versuche (S. Veress: »Relaxationserscheinungen des inländischen Spezialbetonstahls mit 5 mm Durchmesser« Wissenschaftliche Veröffentlichungen der Technischen Universität für Bau- und Verkehrswesen (ÉKME), 1956).

Wir ermittelten die Kurvengleichungen der Kriechvorgänge, die zu den konstanten Spannungen von 10 500, 9750 und 9000 kg/cm² an den nicht vorgespannten Drähten gehörten, und hieraus berechneten wir die Konstanten α und β . Mit Hilfe dieser Konstanten schrieben wir die Beziehung für die Relaxation an und bestimmten die Abnahme der Spannung, die über die Zeitspanne von 20 bis 164 Stunden infolge der Relaxation erfolgte. Die berechneten Werte wurden zusammen mit den gemessenen Werten in der nachstehenden Tabelle zusammengefaßt.

Die Dehnung, die der größten Differenz zwischen dem berechneten und gemessenen Spannungsabfall entspricht, beträgt $35/2\ 000\ 000 = 0,0000175$. Umgerechnet entspricht dies einem Temperaturunterschied von 1,4° C. Da im Laufe dieser Messungen die Temperatur im Laboratorium — nach Ausweis der registrierten Temperaturwerte — Schwankungen unterlag, so liegt der Fehler innerhalb der Meßgenauigkeit. Bei Messungen dieser Art besteht eine unver-

Spannung (kg/cm ²)	Abnahme der Spannung (kg/cm ²)						Differenz zwischen dem gemessenen und berechneten Spannungsabfall
	berechnet			gemessen			
	20 ^h	164 ^h	$\Delta \tau$	20 ^h	164 ^h	$\Delta \tau$	
9 000	260	340	80	165	240	75	5
9 750	317	420	103	180	266	86	17
10 500	360	480	120	205	290	85	35

meidliche Fehlerquelle darin, daß die Belastung des Drahtes 3 Minuten lang dauert, während die erste Ablesung erst nach 6 Minuten vorgenommen wird, so daß eben entlang des steilsten

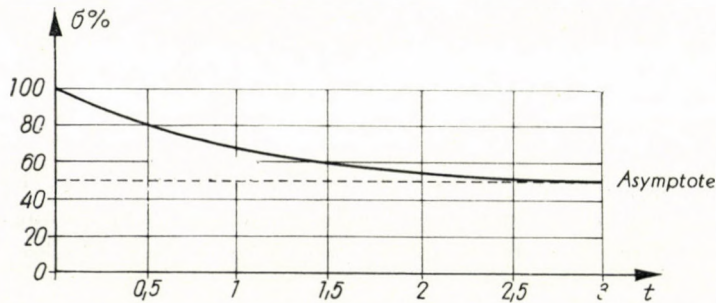


Fig. 16

Abschnitts der Kurve nicht gemessen werden kann. Logischerweise tritt dieser Fehler bei den höheren Spannungen auf.

3. Wenn die Zerstörung des Stabes bei einem vorbestimmten Wert ϵ_{\max} eintritt, so kann auch der Zeitpunkt berechnet werden, bei dem der mit der konstanten Spannung $\sigma = \sigma_0$ belastete Stab infolge des Kriechens zerreißt.

In diesem Falle ist nämlich

$$\sigma_0 = \frac{E \epsilon_{\max}}{1 + \alpha (1 - e^{-\beta t})}$$

und hieraus erhalten wir:

$$\alpha (1 - e^{-\beta t}) = \frac{E \epsilon_{\max}}{\sigma_0} - 1,$$

$$e^{\beta t} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{E \epsilon_{\max}}{\sigma_0} - 1 \right)},$$

$$t = \frac{1}{\beta} \log \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{E \epsilon_{\max}}{\sigma_0} - 1 \right)}.$$

Das Ergebnis wurde in der Ebene des Achsenkreuzes (t, σ) in Fig. 16 dargestellt

Aus der Abbildung ist es ersichtlich, daß zu der die maximale Dehnung hervorrufenden maximalen Spannung ein unmittelbares Zerreißen gehört, während bei Spannungen, die unter diesem Wert liegen, bis zum Eintreten des Zerreißen immer größer werdende Zeitspannen erforderlich sind. Dabei

kann aber auch ein Extremwert der Spannung gefunden werden, bei dem das Zerreißen erst im Zeitpunkt $t = \infty$ eintreten wird.

Die Form dieser Kurve ist der Ermüdungskurve äußerst ähnlich, doch mit dem Unterschied, daß bei dieser auf die Abszissenachse an Stelle der Wiederholungszahl n die Zeit, während auf die Ordinatenachse die Ermüdungsspannung aufgetragen wurde. Durch die Ermüdung wird das Zerstören des Stabes beschleunigt, demgemäß wird die in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragene Ermüdungskurve stets unterhalb dieser Einhüllenden liegen, und zwar in einem Maße, das von der Amplitude der Ermüdung abhängt. Die aufgetragene Kurve kann somit als eine zur Ermüdungsamplitude σ des Stoffes gehörende spezielle Kurve betrachtet werden. Die Asymptote kann dabei als die Ermüdungsgrenze mit der Amplitude σ betrachtet werden.

3.25. Ideal plastische Körper

Die ideal plastischen Körper können dadurch gekennzeichnet werden, daß sie bis zur Erreichung einer gegebenen extremen Spannung dehnungsfrei sind, nach Erreichen dieser Grenze (der sogenannten Fließgrenze) nehmen

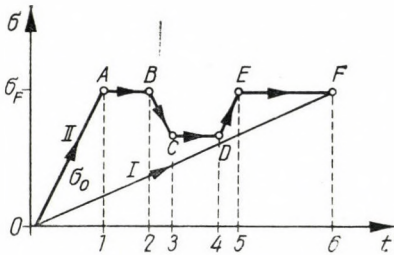


Fig. 17

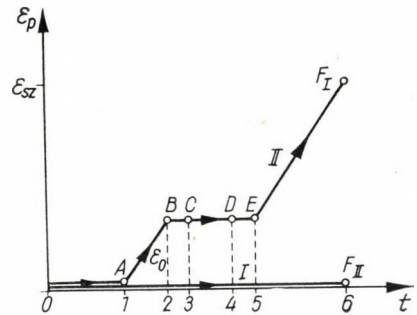


Fig. 18

jedoch die spezifischen Spannungen auch ohne Erhöhung der Spannungen zu.

Zur Illustration dieses Umstandes haben wir Figur 17 konstruiert, in der zwei Belastungsvorgänge dargestellt wurden. Belastungsweg I stellt eine schiefe Gerade dar, während Belastungsweg II aus gebrochenen Strecken zusammengesetzt wurde. Beide Belastungsvorgänge führen zu dem nämlichen Punkt F der t, σ -Ebene. Es sei bemerkt, daß an Stelle des polygonalen Belastungsweges II auch eine beliebige stetige und differenzierbare oder aber eine beliebige kontinuierliche und stellenweise Knickpunkte aufweisende krumme Linie hätte gewählt werden können. Der polygonale Belastungsweg wurde lediglich der Vereinfachung der Konstruktion bzw. der Berechnung halber zugrunde gelegt.

Da es sich um einen ideal plastischen Stoff handelt, wollen wir als Dehnung-Spannungsdiagramm das in der Figur 19 dargestellte Diagramm wählen, wobei wir voraussetzen wollen, daß der Stoff bei der Dehnung $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ zerstört wird. Aus diesem Diagramm geht es hervor, daß die zur Spannung σ_F gehörenden Dehnungen hierdurch noch nicht eindeutig bestimmt sind, das

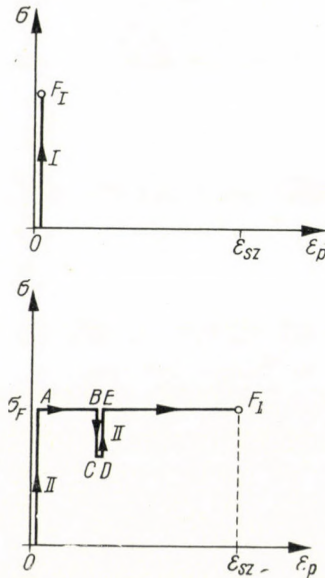


Fig. 19

heißt, wir bedürfen noch weiterer Daten. Es ist bekannt, daß beim Erreichen der Fließgrenze sich der Stoff noch eine kurze Zeit lang als belastungsfähig verhält, das heißt, die Dehnung stellt sogar unter dieser Belastung einen zeitabhängigen Vorgang dar. In der Folge wollen wir der Einfachheit halber nur den Fall untersuchen, wo die bei der Fließgrenze auftretende Dehnung der Zeit proportional ist. Wir setzen somit voraus, daß wenn

$$\sigma = \sigma_F, \text{ so ist } \varepsilon_p = \varepsilon_0 t,$$

während wenn

$$\sigma < \sigma_F, \text{ so ist } \varepsilon_p = 0.$$

Auf Grund dieser Daten können wir bereits die zu den Belastungswegen I und II gehörenden Dehnungen in Abhängigkeit von der Zeit konstruieren. Das Ergebnis wurde in Figur 18 dargestellt, während die bezüglichen mathematischen Beziehungen in der nachstehenden Tafel zusammengestellt wurden.

Die Gleichungen der in der t, σ -Ebene bzw. t, ε -Ebene dargestellten Polygone können in Anbetracht des polygonalen Verlaufs des Belastungsweges nur für die einzelnen Abschnitte angeschrieben werden. Hieraus folgt, daß sowohl

Zeitdauer	Spannung σ	Dehnung ε
$t_0 - t_1$	$\sigma = \sigma_0 t = \sigma_F$	$\varepsilon = 0$
$t_1 - t_2$	$\sigma = \sigma_F$	$\varepsilon = \varepsilon_0(t - t_1)$
$t_2 - t_3$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0(t - t_2) \leq \sigma_F$	$\varepsilon = \varepsilon_0(t_2 - t_1)$
$t_3 - t_4$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0(t_3 - t_2) < \sigma_F$	$\varepsilon = \varepsilon_0(t_2 - t_1)$
$t_4 - t_5$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0(t_3 - t_2) + \sigma_0(t - t_4)$	$\varepsilon = \varepsilon_0(t_2 - t_1)$
$t_5 - t_6$	$\sigma = \sigma_F$	$\varepsilon = \varepsilon_0(t_2 - t_1) + \varepsilon_0(t - t_5)$

die Beziehung t, σ wie auch die Beziehungen t, ε und σ, ε stetig sind, doch können sie allein in den mittleren Teilen der Bereiche differenziert werden, während in den Eckpunkten das Kriterium für die eindeutige Differenzierbarkeit nicht besteht.

Aus den erwähnten Figuren kann auch festgestellt werden, daß zu den Belastungswegen, die in der t, σ -Ebene zu den gleichen Punkten führen, in der Ebene t, ε unterschiedliche Punkte gehören. Der entscheidende Unterschied zwischen dem ideal elastischen und ideal plastischen Stoff besteht somit darin, daß den identischen Punkten der in der t, σ -Ebene dargestellten beliebigen Belastungswege bei einem ideal elastischen Stoff auch in der t, ε -Ebene identische Punkte entsprechen, während bei ideal plastischen Stoffen diese Punkte im allgemeinen unterschiedlich sind.

Als ein weiteres Beispiel wollen wir den Fall untersuchen, wo beim Erreichen der Fließgrenze die Dehnungen sich im Sinne der Funktion

$$\varepsilon_p = \varepsilon_0(1 - e^{-\beta t})$$

ändern. Die Belastungswege wollen wir als gleich den in der Fig. 17 dargestellten annehmen, und auch das Dehnung-Spannungsdiagramm sei dem oben erörterten gleich, wie es in Fig. 21 dargestellt wurde. Im Besitze dieser Daten können auch die zu den beiden Belastungswegen gehörenden Kurven der spezifischen Dehnung in Abhängigkeit von der Zeit konstruiert werden. Diese Kurven sind jedoch nicht mehr der in der Fig. 18 dargestellten Kurve gleich. Ihre Form wird in Fig. 20 angeführt.

3.36. Körper aus ideal thermischem Stoff

Im Interesse einer deutlichen und klaren Behandlung der unter der Wirkung der Erwärmung bzw. Abkühlung ablaufenden Erscheinungen wollen wir wieder den einfachsten Fall untersuchen. Wir verbleiben dabei bei den in der Bau- und Maschinenindustrie üblichen festen Werkstoffen und wollen unsere Untersuchung auf die innerhalb der auf diesem Gebiet vorkommenden Temperaturgrenzen stattfindenden Erscheinungen beschränken. Der untersuchte Körper sei wieder ein prismatischer Stab, dessen Formänderungen wir für den

Fall einer gleichmäßigen Temperaturänderung verfolgen wollen. Wir wissen, daß die spezifische Längenänderung durch die Beziehung

$$\varepsilon_{T \text{ mp}} = a(T, \sigma) \cdot T$$

beschrieben werden kann, wo

- a den in erster Linie von der Temperatur und der Spannung abhängigen Dehnungskoeffizienten des Stoffes,
- σ die Spannung des Stabes in Richtung der Längsachse,

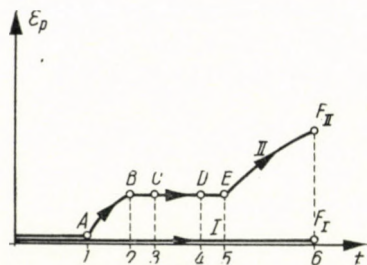


Fig. 20

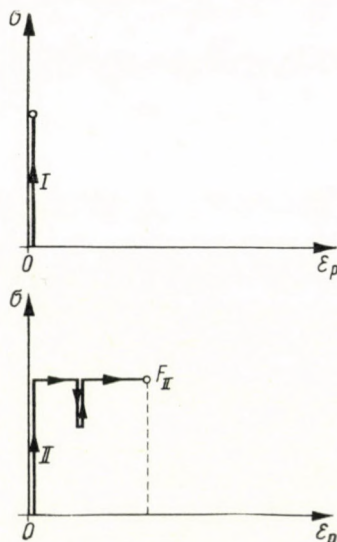


Fig. 21

T die Temperatur des Stabes bedeutet.

Die Abhängigkeit der Temperatur von der Zeit wird durch die Funktion

$$T = g(t)$$

beschrieben, das heißt,

$$\varepsilon_{Temp} = a[g(t), f(t)] g(t) .$$

Erfahrungsgemäß kann der Dehnungskoeffizient zwischen den oben erwähnten Temperaturgrenzen und unter den üblichen Beanspruchungsbedingungen als konstant betrachtet werden, und so erhalten wir:

$$\varepsilon_{Temp} = a T = a g(t) .$$

Wie ersichtlich, kann die unter der Wirkung der Temperaturänderung stattfindende Formänderung letzten Endes auch als eine Funktion der Zeit

betrachtet werden. Zur Illustration dieses Umstandes wurden zwei Temperaturänderungskurven, die sogenannten »Belastungswege«, in Fig. 22 vorgeführt, wobei die diesen Belastungswegen entsprechenden Dehnungskurven in Fig. 23

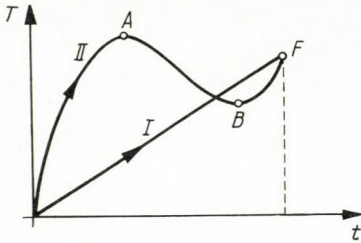


Fig. 22

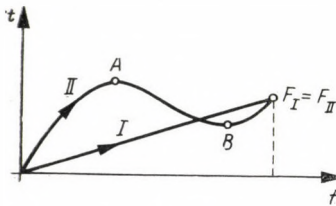
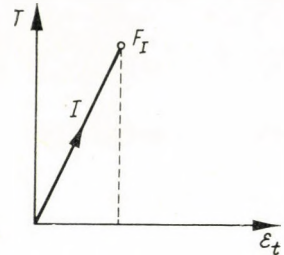


Fig. 23

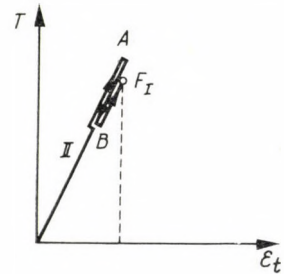


Fig. 24

dargestellt sind. Ähnlich dem Dehnung-Spannungsdiagramm können wir hier ein Dehnung-Temperaturdiagramm konstruieren. (Siehe Figur 24.)

Aus dem vorangehenden geht auch hervor, daß für den Fall, daß der Dehnungskoeffizient von der Temperatur bzw. der Spannung unabhängig ist, das Gesetz der Superposition seine Gültigkeit bewahrt. Wenn jedoch der Dehnungskoeffizient auch von den erwähnten Wirkungen abhängig ist, so ist die einfache Überlagerung dieser Effekte nicht zulässig.

4. Das rheologische Verhalten der realen Stoffe

Im vorangehenden wurden die einzelnen rheologischen Erscheinungen an sogenannten idealisierten Stoffen gesondert untersucht, wobei es in jedem Fall vorausgesetzt wurde, daß gleichzeitig mit dem Stattfinden der untersuchten Formänderung die gesamten übrigen Formänderungen gleich Null sind. Aus dem Grundgesetz der Rheologie ist es bekannt, daß die realen Stoffe — wenn auch in verschiedenem Maße — doch alle rheologischen Eigenschaften aufweisen.

Es ist bekannt, daß die aus verschiedenen Gründen stattfindenden rheologischen Änderungen voneinander nicht unabhängig sind (so ist z. B. das

Dehnung-Spannungsdiagramm des Eisens bei Normaltemperatur dem bei 600° C gemessenen Dehnung-Spannungsdiagramm nicht gleich). Im Fall unseres vereinfachten Beispiels wird somit die resultierende Dehnung im allgemeinen durch die Zeit (t), den zeitlichen Verlauf der Spannung (σ) und der Temperatur (T) beeinflußt, wobei zwischen diesen Größen eine äußerst komplizierte Beziehung besteht.

Wir können jedoch annehmen, daß bei den in der Bauindustrie üblicherweise verwendeten Werkstoffen, während der Lebensdauer der Bauwerke, zwischen den üblichen Belastungsgrenzen und unter den im allgemeinen herrschenden Temperaturverhältnissen, die aus den verschiedenen Gründen stattfindenden Dehnungen einander überlagert werden können, das heißt,

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_r + \varepsilon_m + \varepsilon_l + \varepsilon_p + \varepsilon_{\text{Temp}},$$

oder

$$\varepsilon = j(t) + k(\sigma) + l(\sigma_{\text{max}}) + \int_0^t n(\sigma, t) dt + o(\sigma, t) + a(T, \sigma) \cdot T$$

beziehungsweise in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\varepsilon = j(t) + k[f(t)] + l[m(t)] + \int_0^t n[f(t), t] dt + \sigma[f(t), t] + a[g(t), f(t)] \cdot g(t).$$

Obschon wir wissen, daß diese Annahme nur näherungsweise gilt, doch bei Annahme dieser Näherung können wir für das Verhalten der realen Stoffe Beziehungen anschreiben, die der Wirklichkeit recht nahekommen. Zur Illustrierung dieses Umstandes wurden die nachstehenden Beispiele entwickelt.

Diese Stoffe wollen wir je nach den rheologischen Eigenschaften, die sie aufweisen, durch Anführung dieser rheologischen Eigenschaften benennen (so z. B. Körper mit Formänderung elastischen, remanenten, kriechenden Charakters).

4.1. Körper mit Formänderung elastischen, remanenten, kriechenden Charakters

Zunächst wollen wir einen Körper untersuchen, der lediglich elastische und remanente Eigenschaften aufweist. Es sei vorausgesetzt, daß sich das Dehnung-Spannungsdiagramm im Laufe der ersten monoton zunehmenden Belastung nach der in Figur 13 dargestellten Kurve $l(\sigma_{\text{max}})$ gestaltet. Es sei ferner vorausgesetzt, daß bei der Belastung sowie Entlastung sich der Körper bis zum Erreichen der vorerwähnten Linie $l(\sigma_{\text{max}})$ ideal, doch nicht linear, vielmehr nach einer Linie $h(\sigma)$ elastisch verhält, um dann im Laufe der weiteren monoton zunehmenden Belastung seine Form wieder nach der Linie $l(\sigma_{\text{max}})$ zu ändern.

Die Beziehung zwischen Zeit und Dehnungen wurde in Fig. 25 — entsprechend den bereits erörterten Belastungsvorgängen I und II der Fig. 6 — dargestellt. In Fig. 26 wurde das dem Belastungsvorgang I entsprechende Diagramm $\sigma(\varepsilon)$ dargestellt, das in seiner ganzen Länge der Linie $l(\sigma_{\max})$ gleich ist. Fig. 26b zeigt das dem Belastungsvorgang II entsprechende Diagramm

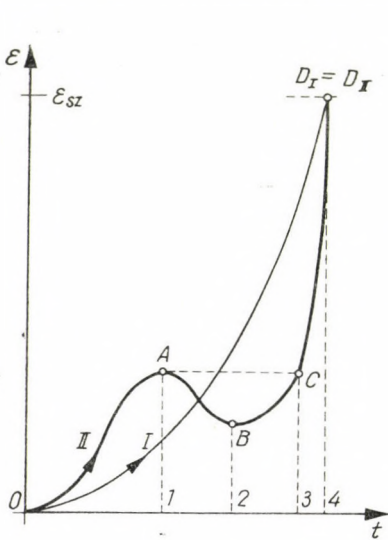


Fig. 25

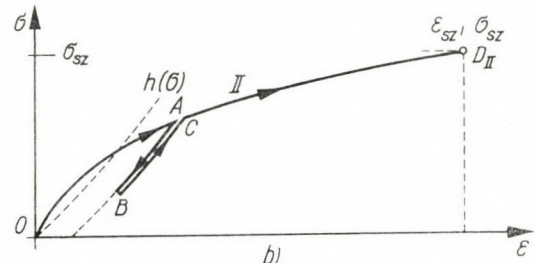
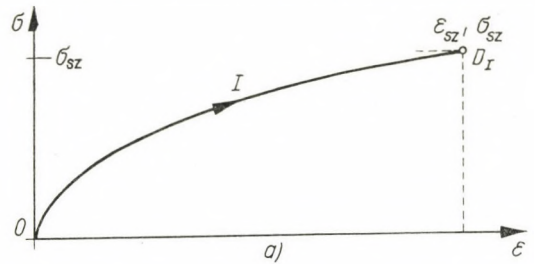


Fig. 26

$\sigma(\varepsilon)$, das entlang der Abschnitte $O-A$ und $C-D$ gleich denen der der Fig. 26 ist, während entlang $A-B-C$, das heißt, bei der Entlastung und der wiederholten Belastung, gemäß der Beziehung $h(\sigma)$ verläuft. Wir haben somit

$$\varepsilon_I = l[f(t)]$$

und

$$\varepsilon_{II} = l[\max f(t)] - h[\max f(t)] + h[f(t)].$$

Als Beispiel wollen wir den Fall der momentanen Belastung des Betons untersuchen, wir wollen also das Kriechen des Betons unberücksichtigt lassen. Bei dem Beton ist eine allgemein angenommene Annäherung, daß die erste Belastung nahe nach einer Parabel dritten Grades erfolgt, während bei der Entlastung die Änderung entlang der Geraden vor sich geht, die der Anfangstangente parallel verlaufen. Diesen Stoff können wir als einen linear elastischen-remanenten Körper bezeichnen. In diesem Fall gilt:

$$l(\sigma) = l[f(t)]$$

und

$$h(\sigma) = h[f(t)] = \frac{f(t)}{E}.$$

Das Dehnung-Spannungsdiagramm kann somit für den Belastungsvorgang I durch die Gleichung

$$\varepsilon_I = I[f(t)],$$

während für den Belastungsvorgang II durch die Gleichungen:

$$\varepsilon_{II} = I[f(t)] \text{ für die Abschnitte } O - A \text{ und } C - D$$

beziehungsweise

$$\varepsilon_{II} = I[\max f(t)] - \frac{\max f(t)}{E} + \frac{f(t)}{E}$$

für die Abschnitte $A-D$ und $B-C$ beschrieben werden. Das dem Belastungs-

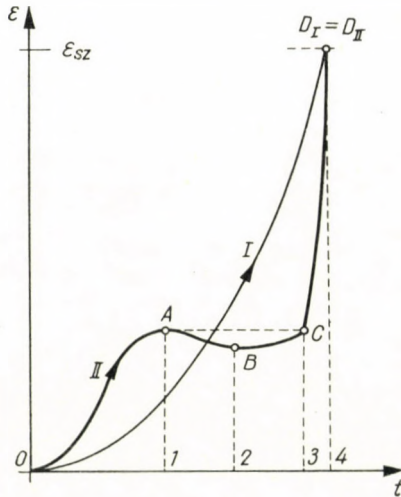


Fig. 27

weg der Fig. 6 entsprechende Diagramm $\varepsilon(t)$ wurde in Fig. 27, während das Dehnung-Spannungsdiagramm in Fig. 28 dargestellt.

Wenn wir auch die langsame Verformung (Kriechen) berücksichtigen, das heißt, wir untersuchen die Verformungen eines Körpers mit elastischen, remanenten und kriechenden Eigenschaften, so erhalten wir die nachstehenden Beziehungen:

Für den Belastungsvorgang I:

$$\varepsilon_I = I[f(t)] + \alpha \frac{f(t)}{E} (1 - e^{-\beta t}),$$

für den Belastungsvorgang II:

für die Abschnitte $O-A$ und $C-D$:

$$\varepsilon_{II} = I[f(t)] + \alpha \frac{f(t)}{E} (1 - e^{-\beta t}),$$

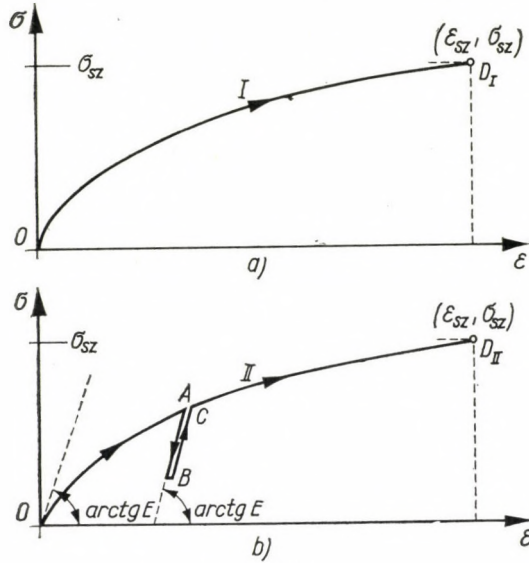


Fig. 28

und für die Abschnitte $A-D$ und $B-C$:

$$\varepsilon_{II} = I[\max f(t)] - \frac{\max f(t)}{E} + \frac{f(t)}{E} + \alpha \frac{f(t)}{E} (1 - e^{-\beta t}).$$

4.2. Elastisch-plastische Körper

Als zweites Beispiel wollen wir einen Stoff untersuchen, der sich bei einem bestimmten Wert unterschreitenden Spannungen linear-elastisch verhält, weist jedoch plastische Eigenschaften auf, sobald die Spannung die Fließgrenze erreicht hat.

In mathematischer Fassung heißt dies:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{für } \sigma < \sigma_F,$$

während

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + t \quad \text{für } \sigma = \sigma_F.$$

Zur Veranschaulichung dieses Falls wurde Fig. 29 konstruiert, in der die Dehnungen, die zu den Belastungswegen I und II der Fig. 17 gehören, in

Abhängigkeit von der Zeit dargestellt wurden. In Fig. 30 werden die zu den beiden Belastungsvorgängen gehörenden Dehnung-Spannungsdiagramme vorgeführt.

Es geht auch aus diesen Figuren hervor, daß dem Schnittpunkt F der

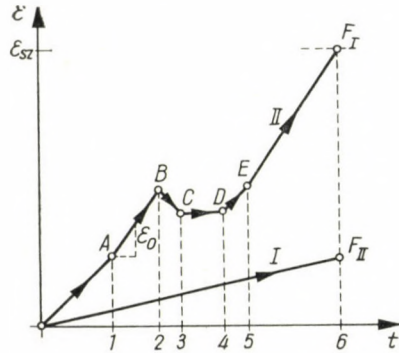


Fig. 29

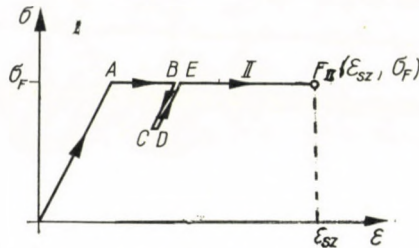
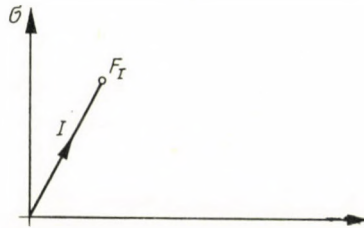


Fig. 30

in der (t, σ) -Ebene gezeichneten zwei Belastungskurven in der (t, ε) -Ebene zwei Bildpunkte, F_I und F_{II} , entsprechen.

Die für die einzelnen Abschnitte geltenden mathematischen Beziehungen wurden in der nachstehenden Tafel zusammengefaßt.

Dem beschriebenen elastisch-plastischen Stoff steht der Flußstahl am nächsten, wenn wir auf die Erscheinung der Nachverfestigung — entsprechend

Zeitdauer	Spannung	Dehnung
$t_0 - t_1$	$\sigma = \sigma_0 t < \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t$
$t_1 - t_2$	$\sigma = \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t_1 + \varepsilon_0(t - t_1)$
$t_2 - t_3$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0(t - t_2) < \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t_1 + \varepsilon_0(t_2 - t_1) - \frac{\sigma_0}{E} (t - t_2)$
$t_3 - t_4$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0(t_3 - t_2) < \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t_1 + \varepsilon_0(t_2 - t_1) - \frac{\sigma_0}{E} (t_3 - t_2)$
$t_4 - t_5$	$\sigma = \sigma_F - \sigma_0(t_3 - t_2) +$ $+ \sigma_0(t - t_4) < \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t_1 + \varepsilon_0(t_2 - t_1) t -$ $- \frac{\sigma_0}{E} (t_3 - t_2) + \frac{\sigma_0}{E} (t - t_4)$
$t_5 - t_6$	$\sigma = \sigma_F$	$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} t_1 + \varepsilon_0(t_2 - t_1) - \frac{\sigma_0}{E} (t_3 - t_2) +$ $+ \frac{\sigma_0}{E} (t_5 - t_4) + \varepsilon_0(t - t_5)$

der in der technischen Praxis allgemein angenommenen Näherung — ohne Rücksicht bleiben.

5. Schlußfolgerungen

Auf Grund der vorangehenden Erörterungen werden die bekannten Erscheinungen der Plastizität, langsamen Formänderung, usw. in ein neues Licht gerückt, und es lassen sich auch einige neue Aussagen machen:

1. Die aus verschiedenen Gründen stattfindende Formänderung der aus verschiedenen Stoffen bestehenden festen Körper stellt eine physikalische Erscheinung dar, und aus diesem Grunde ist sie außer den drei Raumkoordinaten, die die Lage eines beliebigen Punktes im Raume bestimmen, noch von einer vierten Koordinate, der Zeitkoordinate, abhängig.

Es wurde nachgewiesen, daß die zeitunabhängige Behandlung der rheologischen Änderungen nur im Falle der ideal elastischen Stoffe möglich ist. Die Formänderungen der Körper mit natürlicher, bleibender, langsamer und plastischer Verformung lassen sich von der Zeit unabhängig nicht behandeln. Einen ideal elastischen Körper gibt es in der Wirklichkeit nicht, da nach dem bekannten Grundgesetz der Rheologie einem realen Stoff alle rheologischen Eigenschaften — wenn auch in verschiedenem Maße — zukommen. Die statischen und Festigkeitsprobleme der realen Körper können somit genau nur in Abhängigkeit von der Zeit behandelt werden.

So stellt z. B. das statische Problem eines druckbelasteten Stabes aus nicht ideal elastischem Stoff — das heißt, die Erscheinung der Ausknickung —

eine Funktion des Belastungsvorganges, oder anders ausgedrückt, der Zeit dar. In der wohlbekannten Differentialgleichung der gedrückten Stäbe kommt aber die Zeit als Veränderliche nicht vor, und so kann die Erscheinung durch diese Differentialgleichung nicht genau beschrieben werden. Diese Differentialgleichung ist somit derart abzuwandeln, daß in dieser neben den bereits vorkommenden unabhängigen Veränderlichen als eine neue unabhängige Veränderliche die Zeit erscheint.

2. Nach der Plastizitätslehre können die Belastungen einen oder aber mehrere Parameter haben. Führen wir die Zeit als Parameter ein, so läßt sich auch auf Grund logischer Erwägungen unschwer einsehen, daß es keine Belastung mit mehreren Parametern existiert, da doch zu einem gegebenen Zeitpunkt eine und nur eine Belastungslage zugeordnet werden kann. Eine jeder auf einen Träger einwirkenden verschiedenen (konzentrierten, verteilten) Lasten mit verschiedenen Lagen kann als eine Funktion der Zeit definiert werden, und so kann zu einem gegebenen Zeitpunkt eine und nur eine Belastungslage gehören. Das Gesagte bezieht sich sinngemäß auch auf die etwaigen Temperaturänderungen.

3. Im Dehnung-Spannungsdiagramm der ideal plastischen beziehungsweise elastisch plastischen Körper gehört zu der der ϵ -Achse parallelen Strecke eine bestimmte Spannung, die Fließspannung, die zu dieser Fließspannung gehörende Dehnung war jedoch nach den bisherigen Vorstellungen nicht definiert. Wird der Zeitparameter eingeführt, so kann zwischen den Dehnungen und Spannungen auch bei diesen Stoffen eine umkehrbar eindeutige Beziehung hergestellt werden.

4. Mit Hilfe des Dehnung-Spannungsdiagrammes können lediglich die statischen und Festigkeitsprobleme der ideal elastischen Körper untersucht werden. Ist jedoch der Körper nicht ideal elastisch, so muß zwischen den Dehnungen und Spannungen eine neue, auch von der Zeit abhängige Beziehung hergestellt werden. In diesen Fällen besteht die Aufgabe darin, die zeitabhängige Formänderung in Abhängigkeit von dem in der Zeit beliebig veränderlichen Belastungsvorgang zu bestimmen.

Auf Grund der Untersuchung der im vorliegenden Aufsatz ausführlich behandelten homogenen und linearen Spannung bzw. Dehnung können wir behaupten, daß zu der durch den Ursprung des Koordinatensystems in der t, σ -Ebene gehenden beliebigen Linie eine entsprechende Linie in der t, ϵ -Ebene zugeordnet werden muß. Wenn diese Linie auf Grund von Messungen oder Berechnungen bei einem beliebigen Belastungsvorgang bestimmt werden kann, so haben wir die Beziehung erfaßt, durch die das bei den ideal elastischen Körpern verwendete Dehnung-Spannungsdiagramm ersetzt werden kann.

Diese Beziehung kann bei den ideal elastischen Körpern als Funktion einer Funktion dargestellt werden, während in allen anderen Fällen eine viel kompliziertere Beziehung vorliegt, da — wie es bereits gezeigt worden ist —

die in der t, ε -Ebene zu konstruierende Kurve nicht allein Funktion des Belastungsvorganges, vielmehr auch Funktion der Differentialquotienten verschiedener Ordnung beziehungsweise der Integrale des Belastungsvorganges, gegebenenfalls eine Funktion von deren Gesamtheit sein wird.

5. Zur Beschreibung dieser komplizierteren Beziehung müssen alle rheologischen Eigenschaften des untersuchten Stoffes bekannt sein. Zur Kennzeichnung der Festigkeit eines gegebenen Stoffes

a) genügt bei ideal und linear elastischen Stoffen die Kenntnis des Elastizitätsmoduls und der Poissonschen Zahl.

b) Bei ideal, aber nicht linear elastischen Stoffen genügt die Gleichung des Dehnung-Spannungsdiagrammes.

c) Bei nicht ideal elastischen Stoffen muß das Dehnung-Spannungsdiagramm durch das zu der ersten Belastung gehörende Diagramm der bleibenden Spannung ersetzt werden, und es müssen auch die Funktionen der zur Entlastung gehörenden Formänderungen angegeben werden, und sollten diese mit denen der Belastung nicht übereinstimmen, so müssen auch die Funktionen der letzteren angegeben werden.

Darüber hinaus müssen noch die Funktionen bestimmt werden, die die etwaige natürliche Formänderung, die langsame Formänderung, die plastische Formänderung, usw. beschreiben.

Wie ersichtlich, ergeben sich auch dann schwere und komplizierte Beziehungen, wenn wir auch das in der Einleitung erwähnte Prinzip der Addition annehmen, das innerhalb der erwähnten engeren Spannungs- und Temperaturgrenzen näherungsweise Gültigkeit besitzt und zahlreiche Vereinfachungen ermöglicht. Die weitere theoretische und experimentelle Klärung dieser Beziehungen bedarf noch einer schweren und langwierigen Forschungsarbeit.

6. Die in der Ingenieur-Praxis weit verbreiteten Einflußlinien zeigen die Änderungen an, die die in einem gegebenen Querschnitt eines Trägers auftretenden Beanspruchungen unter der Wirkung der am Träger wandernden Krafteinheit erfahren. Durch Einführung des Zeitparameters kann der Begriff der Einflußlinie folgendermaßen definiert werden: Die Einflußlinie stellt die zeitliche Änderung der Beanspruchungen dar, die unter der Wirkung der sich am Träger mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Krafteinheit auftreten.

Es wurde letzten Endes nachgewiesen, daß bei der Untersuchung einiger Fragen der Statik und der Festigkeitslehre die Einführung des Zeitparameters notwendig ist, während bei anderen Fragen durch den Zeitparameter eine einfachere und übersichtlichere Behandlungsweise der Erscheinungen ermöglicht wird. Eine umfassendere Verwendung des Zeitparameters ist somit in vielen Fällen unvermeidbar, wobei sie in jedem Fall rational und nutzbringend ist.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird im vorliegenden Aufsatz die aus verschiedenen Gründen stattfindende Formänderung der festen Körper untersucht, und es wird nachgewiesen, daß die zeitunabhängige Behandlung dieser Formänderungen nur bei den ideal elastischen Stoffen möglich ist, während es in allen anderen Fällen der Einführung der Zeit als einer unabhängigen Veränderlichen bedarf. Werden die Probleme der ideal elastischen Stoffe mit Einführung des Zeitparameters behandelt, so wird hierdurch die einheitliche Behandlung der rheologischen Eigenschaften aller Stoffe ermöglicht.

Es wird nachgewiesen, daß im Gegensatz zu der bisherigen Auffassung der Plastizität jede Belastung nur einen Parameter hat. Zu einem gegebenen Zeitpunkt kann nämlich nur eine einzige Laststellung gehören, doch muß in diesem Falle die Änderung der verschiedenen Lasten als eine Funktion der Zeit definiert werden.

Im Dehnung-Spannungsdiagramm der plastische Eigenschaften besitzenden Stoffe gehört zu jeder der ϵ -Achse parallelen Strecke eine bestimmte Spannung (die Fließspannung), doch waren die zur Fließspannung gehörenden Dehnungen nach der bisherigen Anschauung nicht definiert. Wird der Zeitparameter eingeführt, so kann zwischen den Dehnungen und Spannungen auch bei diesen Stoffen eine umkehrbar eindeutige Beziehung hergestellt werden.

Es wird der lineare und homogene Spannungs- bzw. Dehnungszustand untersucht, der in einem prismatischen Stabe unter der Wirkung eines mittigen Zuges oder Druckes entsteht, und es wird nachgewiesen, daß zur Kennzeichnung der Beziehungen zwischen Dehnungen und Spannungen das bisher übliche Dehnung-Spannungsdiagramm nur für ideal elastische Stoffe genügt, während in allen anderen Fällen die Kennzeichnung der Stoffe viel komplizierter ist. Bei diesen Stoffen muß nämlich zu der in der t, σ -Ebene gezeichneten, beliebigen, stetigen und eindeutigen Kurve — zu dem Belastungsvorgang — eine entsprechende Linie in der t, ϵ -Ebene gefunden werden. Unsere Aufgabe gilt als gelöst, wenn wir diese letztere Linie auf Grund von Messungen und Berechnungen zu dem beliebigen Belastungsvorgang zuordnen können.

Nach dieser Anschauung erhält auch die Einflußlinie eine neue Deutung. Die Einflußlinie stellt nämlich die zeitliche Änderung der Beanspruchung dar, die unter der Wirkung der am Träger mit konstanter Geschwindigkeit wandernden Kräfteinheit auftritt.

Es kann letzten Endes festgestellt werden, daß bei der Behandlung der Erscheinungen der Statik und der Festigkeitslehre die umfassendere Verwendung des Zeitparameters eine unumgängliche Notwendigkeit darstellt, wobei sie in allen Fällen als zweckmäßig und nutzbringend erscheint.

ON THE FUNDAMENTAL RHEOLOGIC PROPERTIES OF SOLID BODIES

E. BÖLCSKEI

SUMMARY

The subject of the paper is the investigation of the deformations of solid bodies occurring due to different reasons. It was proved, that these changes in form could be dealt with independently of the time only for ideally elastic materials, while in the case of other materials the introduction of the time as an independent variable becomes inevitable. If the problems on ideally elastic materials are dealt with, by introducing the time-parameter, this gives the possibility for a uniform discussion of the rheologic phenomena of all sorts of materials.

It was proved, that contrary to the hitherto opinion accepted in the Plasticity Theory, every load should be regarded as being monoparametric. Namely, it is evident, that to a given instant only one single load position can belong; in this case, however, the variations of the different kinds of loading should be defined as a function of the time.

In the stress-strain diagram of materials possessing plastic properties, to the section of the curve which is parallel to the ϵ -axis a certain defined stress (the yield stress) pertains, but the strains pertaining to the yield stress were — according to the opinion so far — not defined. By introducing the time-parameter it becomes possible to establish mutual and unambiguous stress-strain relations also for materials having plastic properties.

The investigation of the linear and homogeneous stress and strain state, arising in a prismatic bar affected by centric compression or tension, leads to the result that the stress-strain diagram used so far for the characterization of the relations existing between stresses and strains, is only adequate until ideally elastic materials are concerned; while the character-

ization of all other materials is much more complicated. Therefore, in the case of these latter materials, to the optional continuous and monovalent curve plotted on the (t, σ) plane — i. e., to the loading process — on the (t, ε) plane another corresponding line should be sought for. This problem could be regarded as being solved, if the aforementioned line could be determined by measurings and calculations for whichever optional loading process.

According to this new opinion the influence diagram also obtains a new interpretation, as it can be regarded as being the change in time of the external force affecting the beam, caused by the unit force travelling along the beam at a constant speed.

Finally, it can be stated, that when dealing with phenomena belonging to statics and the strength of materials, a more widespread application of the time-parameter is always expedient and useful, and in many cases even indispensable.

DES PROPRIÉTÉS RHÉOLOGIQUES FONDAMENTALES DES SOLIDES

E. BÖLCSKEI

RÉSUMÉ

L'étude examine les déformations de diverse origine des solides, et démontre que ces déformations ne sauraient être étudiées indépendamment du temps, que dans le cas de matériaux idéalement élastiques. Dans tout autre cas, il est nécessaire d'introduire le temps comme variable indépendante. Si les problèmes des matériaux idéalement élastiques sont étudiés avec introduction du temps comme paramètre, l'étude uniforme les phénomènes rhéologiques de tous les matériaux devient possible.

L'auteur démontre que, contrairement à la conception admise dans la théorie de la plasticité, chaque charge dépend d'un paramètre. Un seul, et rien qu'un seul cas de charge peut, en effet, appartenir à un moment donné, mais alors la variation des différentes charges doit être définie en fonction du temps.

Dans le diagramme allongement-tension des matériaux ayant des propriétés plastiques, la portion de courbe parallèle à l'axe ε correspond à une tension déterminée (la tension de fluage), mais les allongements appartenant à la tension de fluage n'ont pas été définis d'après la conception jusqu'à présent admise. Par introduction du temps comme paramètre entre les allongements et les tensions, il devient possible d'établir une correspondance bi-univoque pour de tels matériaux.

En examinant l'état de tension et d'allongement linéaire et homogène, naissant sous l'effet de tractions (ou de compressions) simples dans la barre prismatique, l'auteur démontre que le diagramme allongement-tension ordinairement utilisé pour caractériser les relations entre les allongements et les tensions n'est suffisant que dans le cas de matériaux idéalement élastiques. Dans tout autre cas, un procédé bien plus complexe s'impose pour caractériser les matériaux. Chez ceux-ci, en effet, c'est à une courbe quelconque continue et univoque tracée sur le plan t, σ — au processus d'application de la charge — qu'il faut chercher, sur le plan t, ε , une autre courbe correspondante. Le problème est résolu si cette dernière courbe peut être déterminée, à l'aide de mesures et de calculs, pour n'importe quel processus d'application de la charge.

Selon cette vue, la ligne d'influence reçoit à son tour une nouvelle interprétation. Elle représente, en effet, la variation dans le temps des sollicitations produites sous l'action de la force unitaire qui progresse sur la poutre avec une vitesse constante.

En définitive, on peut établir qu'à l'étude des phénomènes relevant de la statique et de la résistance des matériaux, l'application étendue du temps comme paramètre est souvent indispensable, et se montre toujours d'une grande utilité.

ОСНОВНЫЕ РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Э. БЕЛЬЧКЕИ

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется деформация твердых тел вследствие различных причин и показано, что исследование этих изменений независимо от времени возможно лишь в случае идеально упругих материалов, в то же время во всех иных случаях введение

времени, как независимого переменного, является в обязательном порядке необходимым. Если проблемы идеально упругих материалов исследовать с введением параметра времени, становится возможным единное исследование реологических свойств всех существующих материалов.

В работе показано, что в противоположность представлению учения пластичности любая нагрузка является однопараметровой. Как известно, для некоторого данного момента соответствует одна и только одна нагрузка, но в этом случае изменение различных нагрузок необходимо определять в функции времени.

На диаграмме напряжения растяжения материалов с пластическими свойствами отрезку, параллельному оси, соответствует некоторое определенное напряжение (напряжение текучести), но растяжения, соответствующие напряжению текучести, согласно существовавшему до сих пор взгляду не были определены. Если ввести параметр времени между растяжениями и напряжениями, тогда в случае и таких материалов можно установить взаимную и однозначную связь.

Исследуя линейное и однородное напряженное состояние и состояние растяжения, возникающие в призматическом стержне под воздействием центрального растяжения (соответственно сжатия), показано, что применявшаяся до сих пор для характеристики зависимостей между растяжениями и напряжениями диаграмма растяжений-напряжений является удовлетворительной только в случае идеально упругих материалов, и в то же время во всех иных случаях характеристика материала является более сложной. Как известно, в случае этих материалов для построенных по плоскости t, σ произвольных непрерывных и однозначных кривых (для процесса нагрузки) необходимо найти на плоскости t, ε некоторую соответствующую другую линию. Задача будет решена в том случае, если эта линия может быть определена путем измерений и вычислений для произвольного процесса нагрузки.

На основе этого взгляда линия влияния также получает новую трактовку. Таким образом линия влияния представляет собою изменение во времени нагрузки, возникающей под воздействием единичного усилия, двигающегося по балке с постоянной скоростью.

В конечном счете можно установить, что при рассмотрении явлений статики и теории сопротивления материалов более широкое применение параметра времени во многих случаях является неизбежным, но во всех случаях использование параметра времени является целесообразным и полезным.

EIN BEITRAG ZUR BIEGETHEORIE DER FLACHEN DOPPELT GEKRÜMMTEN SCHALEN MIT VERÄNDERLICHER DICKE

B. KLIMOV

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN,
PLANUNGSUNTERNEHMEN FÜR INDUSTRIELLE UND LANDWIRTSCHAFTLICHE BAUTEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 23. Dezember 1960]

Übersicht

Die Grundgleichungen der doppelt gekrümmten Schalen mit veränderlicher Dicke, d. h. die Differentialgleichungen (37) und (47) wurden von der WLASSOWSchen Theorie [1] ausgehend abgeleitet. Das System dieser Differentialgleichungen wird mit Hilfe des aus der Variationsrechnung bekannten RITZ—GALERKINSchen Verfahrens [2] für den Fall gelöst, daß die Schale ein nach (1) gestaltetes elliptisches Paraboloid ist und daß sich deren Dicke nach (2) ändert. Es wird stets vorausgesetzt, daß von einer Stahlbetonschale die Rede ist.

Die Biegetheorie der flachen doppelt gekrümmten Schale mit veränderlicher Dicke, die im vorliegenden Aufsätze behandelt wird, ist daher nichts anderes als die Verallgemeinerung der WLASSOWSchen Biegetheorie der flachen, doppelt gekrümmten Schale mit konstanter Dicke. Die Daseinsberechtigung und die Verlässlichkeit der in diesem Aufsätze dargelegten Theorie ist gerade aus diesem Grunde genau dieselbe wie die der von WLASSOW entwickelten Theorie.

Es werden drei Belastungsfälle untersucht und zwar: eine gleichmäßig verteilte Vollbelastung der gesamten Schalenfläche, eine gleichmäßig verteilte Belastung auf der halben Schalenfläche und eine an einem beliebigen Punkte der Schale angreifende konzentrierte Last.

Der Vollkommenheit halber muß erwähnt werden, daß bezüglich der flachen, doppelt gekrümmten Schalen mit konstanter Dicke nicht nur die WLASSOWSche, sondern auch MATILDIS Theorie [4] bekannt ist, deren Anwendung MATILDI gerade für den Fall des Rechteckgrundrisses ausführlich erörtert.

I. Einleitung

Von Prof. WLASSOWS allgemeiner Theorie [1] ausgehend wird in der Folge die Biegetheorie solcher flacher, doppelt gekrümmter Schalen mit veränderlicher Dicke abgeleitet, die sich auf allen vier Seiten ihres Umfangs auf bogenartige Randträger stützen und bei denen die Schale an die Randträger

gelenkartig angeschlossen ist. Die vier Randträger sind in ihrer eigenen Ebene steif, hindern aber eine zu ihrer Ebene senkrechte Verschiebung nicht. Diese Art von Schalen wird in der Literatur seitendruckfrei genannt.

Es wird ferner vorausgesetzt, daß auf die Schale nur eine vertikale Belastung wirkt, die aber noch eine Funktion der Ortskoordinaten x, y sein kann, d. h.:

$$X = 0, Y = 0 \text{ und } Z = Z(x, y).$$

Die Grundgleichungen werden unter Anwendung der Annahme aufgestellt, daß die Schale ein flaches elliptisches Paraboloid darstellt.

2. Die Grundlagen der Berechnung

Die Mittelfläche der Schale ist durch die Gleichung

$$z = z(x, y) \quad (1)$$

bestimmt. Im Falle eines elliptischen Paraboloides wird die Mittelfläche der Schale in einem gegebenen Koordinatensystem durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$z = f - \frac{k_1}{2} x^2 - \frac{k_2}{2} y^2.$$

Im Falle einer Kugelfläche ist

$$k_1 = k_2$$

und

$$z = f - \frac{k}{2} (x^2 + y^2).$$

Diese Gleichung bezieht sich auf ein orthogonales DESCARTESSCHES Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Schwerpunkte des Schalenquerschnitts zusammenfällt.

Der positive Zweig der z Achse ist aufwärts gerichtet, die x und y Achsen sind den Seiten $2a$ und $2b$ parallel (Abb. 1).

Die Änderung der Wanddicke der Schale wird in diesem Abschnitt als allgemein angenommen und erst im 3. Abschnitt wird vorausgesetzt, daß die Änderung der Wanddicke der Schale der Regel

$$h(x, z) = hCh \frac{x}{a} Ch \frac{y}{b} \quad (2)$$

folgt, wo h die Wanddicke im Nullpunkte des Koordinatensystems bedeutet.

In den Abb. 2 und 3 ist ein infinitesimaler Teil der Schalenfläche dargestellt, gleichzeitig sind in diesen Abbildungen auch die positiven Richtungen der inneren und äußeren Kräfte angedeutet. Die das Gleichgewicht des infinitesimalen

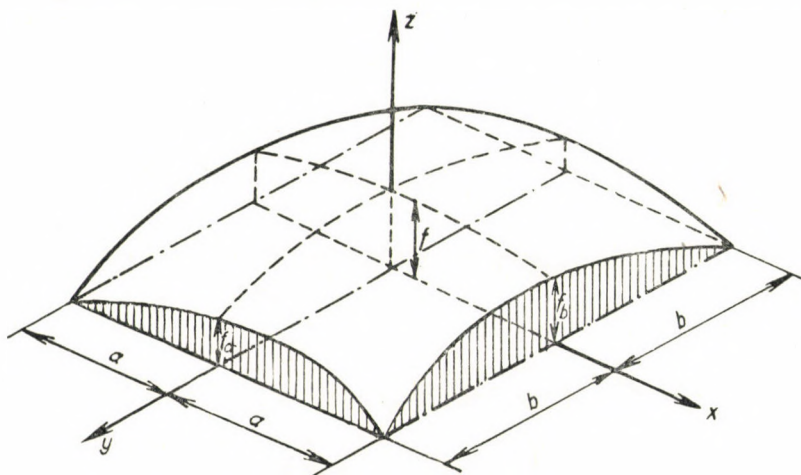


Abb. 1. Die Lage der Schale im Decartes'schen Koordinatensystem.

malen Schalteiles ausdrückenden statischen Gleichungen sind die folgenden:

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0$$

und

$$\Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0.$$

Aus diesen sowie aus der Annahme von WLASSOW, daß die Schale flach ist, erhält man die folgenden Grundgleichungen:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + X = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y = 0, \quad (4)$$

$$-(k_1 N_x + k_2 N_y) + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + Z(x, y) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0. \quad (7)$$

Hier sind X , Y und $Z(x, y)$ die Komponenten der äußeren Kräfte und

$$k_1 = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad *, \quad (8)$$

$$k_2 = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad *, \quad (9)$$

sind die Krümmungen; k_1 und k_2 sind daher konstant. Wenn die Torsion der

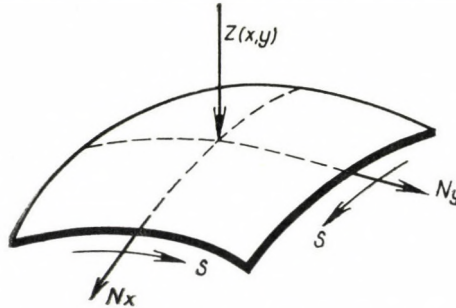


Abb. 2. Die positiven Richtungen der Schnittkräfte

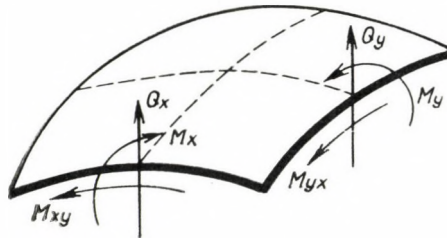


Abb. 3. Die positiven Richtungen der Momente und Querkräfte

Fläche vernachlässigt wird, so sind die Formeln auch im Falle einer veränderlichen Krümmung gültig.

Die Richtungen der Verschiebungen werden nach Abb. 4 als positiv betrachtet. In diesem Falle wird der Spannungszustand des infinitesimalen Flächenelementes der Schale durch die folgenden spezifischen Dehnungen und Winkeländerungen gekennzeichnet:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w, \quad (10)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w, \quad (11)$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (12)$$

* *Anmerkung*: Das Vorzeichen wurde als negativ gewählt, um in der GAUSSschen Auslegung nach Abb. 1 zu einer positiven Krümmung zu gelangen.

Die spezifischen Veränderungen der Krümmungen der Mittelfläche dagegen sind:

$$\kappa_1 = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{13}$$

$$\kappa_2 = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{14}$$

$$\tau = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{15}$$

wo $w(x, y)$ die vertikale Verschiebung der Schale bedeutet.

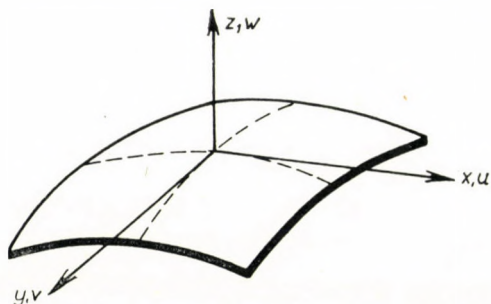


Abb. 4. Die positiven Richtungen der Verschiebungen

Der Zusammenhang zwischen den inneren Kräften und den Verrückungen ist durch die folgenden Formeln gegeben:

$$N_x = Eh(x, y) \varepsilon_1, \tag{16} \quad M_x = - D(x, y) \kappa_1, \tag{19}$$

$$N_y = Eh(x, y) \varepsilon_2, \tag{17} \quad M_y = - D(x, y) \kappa_2, \tag{20}$$

$$S = \frac{1}{2} Eh(x, y) \omega, \tag{18} \quad M_{xy} = M_{yx} = + D(x, y) \tau. \tag{21}$$

Hier ist $D(x, y) = \frac{Eh^3(x, y)}{12}$ die zylindrische Steifigkeit der Stahlbetonschale, wenn für Stahlbeton der Wert der Poissonzahl mit $\nu = 0$ angenommen wird. Es sollen nun nach Wlassow die Bezeichnungen

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \tag{22}$$

$$N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tag{23}$$

$$S = S_{xy} = S_{yx} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \tag{24}$$

eingeführt werden, wo $\varphi = \varphi(x, y)$ eine Spannungsfunktion ist. Die in die Richtungen x und y fallenden Komponenten der äußeren Belastung sind $X = 0 \cdot Y = 0$. Durch Einsetzen der bezeichneten Werte werden die Gleichungen (3) und (4) identisch befriedigt. Wenn man die Formänderungsfunktion $w = w(x, y)$ einführt, gelangt man zu den Ausdrücken:

$$M_x = D(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (25)$$

$$M_y = D(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (26)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (27)$$

Für die Querkräfte erhält man:

$$Q_x = -D(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad (28)$$

$$Q_y = -D(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (29)$$

Die der KIRCHHOFFSchen Deutung entsprechenden allgemeinen Ausdrücke der Querkräfte sind:

$$Q_x^* = -D(x, y) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad (30)$$

$$Q_y^* = -D(x, y) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (31)$$

Nach diesen ergeben sich für die allgemeinen Verträglichkeitsbedingungen der Schalen mit kleiner Krümmung die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial \kappa_2}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial y} - \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \quad (33)$$

Diese Bedingungen werden von den Gl. (13), (14) und (15) identisch befriedigt. Die dritte Verträglichkeitsbedingung ist nach WLASSOW die folgende:

$$\nabla^2 \Theta - \left(\frac{\partial}{\partial x} k_2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (34)$$

wo

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (35)$$

die spezifische Volumänderung bedeutet.

Wenn in die Gleichung (35) anstatt ε_1 und ε_2 die Werte der Gl. (16) und (17) eingesetzt werden, so erhält man mit Rücksicht auf (22) und (23):

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{Eh(x,y)} (N_x + N_y) = \frac{1}{Eh(x,y)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{1}{Eh(x,y)} \nabla^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Durch Einsetzen von (36) und (34) gelangt man schließlich zur folgenden Verträglichkeitsgleichung der flachen Schale:

$$\frac{1}{Eh(x,y)} \nabla^4 \varphi - \nabla_k^2 w = 0. \quad (37)$$

Nun soll zur zweiten Grundgleichung übergegangen werden.

Nach dem Differenzieren der Ausdrücke (25) und (26) und nach dem Einsetzen der Werte von \varkappa und τ nehmen (13), (14) und (15) die folgende Form an:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = - \frac{\partial D(x,y)}{\partial x} \varkappa_1 - D(x,y) \frac{\partial \varkappa_1}{\partial x}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = - \frac{\partial D(x,y)}{\partial y} \varkappa_2 - D(x,y) \frac{\partial \varkappa_2}{\partial y}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial D(x,y)}{\partial x} \tau + D(x,y) \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad (40)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial D(x,y)}{\partial y} \tau + D(x,y) \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (41)$$

Wenn man die Ausdrücke (38)–(41) in das Gleichungssystem (6) und (7) einsetzt und dann nach Q_x und Q_y ordnet, so erhält man die Gleichungen:

$$Q_x = \frac{\partial D(x,y)}{\partial y} \tau + D(x,y) \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial D(x,y)}{\partial x} \varkappa_1 + D(x,y) \frac{\partial \varkappa_1}{\partial x}, \quad (42)$$

$$Q_y = \frac{\partial D(x,y)}{\partial x} \tau + D(x,y) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial D(x,y)}{\partial y} \varkappa_2 + D(x,y) \frac{\partial \varkappa_2}{\partial y}. \quad (43)$$

Mit Rücksicht auf die Verträglichkeitsbedingungen (32)–(33) und wenn der Zusammenhang

$$-(\varkappa_1 + \varkappa_2) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w \quad (44)$$

in Betracht gezogen wird, so gelangt man zu den Ausdrücken:

$$Q_x = -D(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = \frac{\partial D(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial D(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (45)$$

$$Q_y = -D(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = \frac{\partial D(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial D(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (46)$$

Das Einsetzen der obigen Ausdrücke (45) und (46) in die Gl. (5) führt zu der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} \nabla_k^2 \varphi + D(x, y) \nabla^4 w + 2 \frac{\partial D(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \\ + 2 \frac{\partial D(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - Z(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Die bisherigen Erwägungen ergaben zwei Grundgleichungen der technischen Biegetheorie der flachen Schale mit veränderlicher Wanddicke, nämlich die Gl. (37) und (47). Hiemit wurde die Berechnung der flachen Schale im allgemeinen Falle auf die Lösung einer zwei unbekannte skalare Funktionen enthaltenden Differentialgleichung zurückgeführt. Die in den Gleichungen (37) und (47) vorkommenden unbekannt Funktionen sind $\varphi = \varphi(x, y)$ und $w = w(x, y)$. Von diesen Funktionen ist $\varphi = \varphi(x, y)$ die Spannungsfunktion, die den Ausdrücken (22)–(24) entsprechend zur Bestimmung von N_x , N_y und $S = S_{xy} = S_{yx}$ verwendbar ist, während $w = w(x, y)$ die Formänderungsfunktion ist, die zusammen mit den auf Grund der Ausdrücke (13)–(15) berechenbaren Werten von \varkappa_1 , \varkappa_2 und τ mit Hilfe der Formeln (25)–(27), (28) und (29) die Berechnung sämtlicher innerer Momente und Schubkräfte der Schale ermöglichen. Von den zwei Grundgleichungen ist (37) die Verträglichkeitsgleichung, während (47) die Gleichgewichtsgleichung ist (in bezug auf die Vertikalachse).

Wenn die Krümmungen k_1 und k_2 gleich Null sind, und in der dadurch zur Ebene gewordenen Mittelfläche keine äußeren Kräfte wirken, wenn ferner $\nabla^2\varphi = 0$ ist, dann gelangt man zur Differentialgleichung der Platte mit veränderlicher Dicke [3]. Die Lösung der Platte mit veränderlicher Dicke wurde erstmalig von OLSSON (Ingenieur Archiv t. 5. 1934) und nachher von REISSNER (M. E. I., Math. Phys. t. 16. 1937) bekanntgegeben. Wenn $D(x, y) = \text{konst}$ ist, so gelangt man zur Gleichung der Schale mit konstanter Wanddicke:

$$\nabla_k^2 \varphi + D \nabla^4 w - Z(x, y) = 0, \quad (48)$$

die mit dem Namen von WLASSOW verbunden ist [1].

3. Die allgemeine Lösung der flachen, doppelt gekrümmten Schale mit veränderlicher Wanddicke

Bezüglich der Randbedingungen wird folgendes vorausgesetzt:

1. Die Schale ist an die Randträger auf allen vier Seiten gelenkartig angeschlossen.

2. Die Randträger sind in ihrer eigenen Ebene vollkommen steif.

3. Die Randträger setzen den auf ihre eigene Ebene senkrechten Kräften keinen Widerstand entgegen.

Im Falle dieser Randbedingungen führt die Anwendung von trigonometrischen Doppelreihen auf die Gl. (3)–(7) zu einer einfachen und schnellen Lösung des Problems der Schalen mit konstanter Krümmung und konstanter Wanddicke. Diese Lösung kann aber im Falle einer veränderlichen Krümmung oder einer veränderlichen Wanddicke nicht angewendet werden. Im Gegensatz hierzu führt die in das Gebiet der Variationsrechnung gehörende, von GALERKIN stammende Methode — wie ersichtlich sein wird — leicht zum Ziele. Zwecks Anwendung der GALERKINSCHEN Methode werden die auf die Spannung, die Formänderung und die Belastung bezüglichen Funktionen in der Form von unendlichen Doppelreihen angeschrieben:

$$\varphi(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} X(x) Y(y), \quad (49)$$

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n B_{mn} X(x) Y(y), \quad (50)$$

$$Z(x, y) = \sum_m \sum_n C_{mn} X(x) Y(y), \quad (51)$$

wo $X(x)$ bzw. $Y(y)$ nur eine Funktion von x bzw. y ist:

Die Spannungs- und Formänderungsfunktionen, d. h. die Ausdrücke (49)–(51) müssen die folgenden Randbedingungen befriedigen:

$$\text{An der Stelle } x = \pm a - N_x = M_x = w = 0, \quad (52)$$

$$\text{An der Stelle } y = \pm b - N_y = M_y = w = 0. \quad (53)$$

Nun können auf Grund der bekannten Methode von GALERKIN anstatt der Grundgleichungen (37) und (47) die folgenden Gleichungen angeschrieben werden:

$$\iint_F [\nabla^4 \varphi - Eh(x, y) \nabla_k^2 w] X(x) Y(y) dx dy = 0, \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \iint_F \left\{ \nabla_k^2 \varphi + D(x, y) \nabla^4 w + 2 \frac{D(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \right. \\ \left. + 2 \frac{D(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - Z(x, y) \right\} X(x) Y(y) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{2b}, \quad (56)$$

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}, \quad (57)$$

$$Z(x, y) = \sum_m \sum_n C_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}. \quad (58)$$

Hiemit ist die Aufgabe auf die Integrierung von bekannten Funktionen zurückgeführt, die derart gewählt werden müssen, daß sie zweimal integriert werden können.

Das so erhaltbare Gleichungssystem wird die Werte A_{mn} und B_{mn} ergeben, die ihrerseits schon die Spannungs- und die Formänderungsfunktionen bestimmen.

Bei der vorausgesetzten Art der Stützung befriedigen die Spannungsfunktion (56), die Formänderungsfunktion (57) und die Belastungsfunktion (58) die Randbedingungen (52) und (53).

Zur Lösung des Gleichungssystems (54)–(55) müssen zehn Integralwerte bestimmt werden und zwar:

$$I_1 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \nabla_{\varphi}^4 \cos \frac{n\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy = \sum_m \sum_n A_{mn} L_1^2 ab, \quad (59)$$

$$I_2 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} h(x, y) \nabla_k^2 w \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy \approx$$

$$\approx - Eh \sum_m \sum_n B_{mn} (1,175)^2 ab, \quad (60)$$

$$I_3 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \nabla_k^2(\varphi) \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy = - \sum_m \sum_n A_{mn} L_2 ab, \quad (61)$$

$$I_4 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} D(x, y) \nabla^4 w \cos \frac{m\pi x}{2b} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy \approx$$

$$\approx 1,947 \frac{Eh^3}{12} \sum_m \sum_n B_{mn} L_1^2, \quad (62)$$

$$I_5 = 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{\partial D(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy = 0, \quad (63)$$

$$I_6 = 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{\partial D(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy = 0, \quad (64)$$

$$I_7 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy \approx$$

$$\approx - 4,804 \frac{Eh^3}{12} ab \sum_m \sum_n B_{mn} \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2, \quad (65)$$

$$I_8 = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy \approx$$

$$\approx - 4,804 \frac{Eh^3}{12} ab \sum_m \sum_n B_{mn} \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2, \quad (66)$$

$$I_9 = 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy = 0, \quad (67)$$

$$I_{10} = \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} Z(x, y) \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy = ab \sum_m \sum_n C_{mn}. \quad (68)$$

In den obigen zehn Ausdrücken bedeuten:

$$L_1 = \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2, \quad (69)$$

$$L_2 = k_2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + k_1 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2. \quad (70)$$

Durch Einsetzen der erhaltenen Integralwerte in die Variationsgleichungen (54) und (55) gelangt man zu zwei linearen Gleichungen:

$$L_1^2 A_{mn} - 1,381 Eh L_2 B_{mn} = 0, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} L_2 A_{mn} - 1,977 \frac{Eh^3}{12} L_1^2 B_{mn} + \\ + 4,804 \frac{Eh^3}{12} L_1 B_{mn} + C_{mn} = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man für A_{mn} und B_{mn} die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} A_{mn} = - \frac{C_{mn} \left[k_2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + k_1 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]}{\left[k_2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + k_1 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2 - 3,479 \frac{h^2}{12} \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^3 \left\{ 1 - 0,405 \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right] \right\}} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} B_{mn} = \frac{C_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2}{1,381 Eh \left\{ \left[k_2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + k_1 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2 - 3,479 \frac{h^2}{12} \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^3 \left[1 - 0,405 \left\{ \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right\} \right] \right\}}. \end{aligned} \quad (74)$$

Mit Hilfe der obigen Werte können die Spannungs- und die Formänderungs-

funktionen wie folgt angeschrieben werden

$$\varphi(x, y) = - \sum_m \sum_n \frac{C_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \left[k_2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + k_1 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]}{\left[k_2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + k_1 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2 - 3,479 \frac{h^2}{12} \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^3 \left[1 - 0,405 \left\{ \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right\} \right]} \quad (75)$$

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n \frac{C_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2}{1,381 Eh \left[k_2 \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + k_1 \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^2 - 0,400 Eh^3 \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^3 \left[1 - 0,405 \left\{ \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right\} \right]} \quad (76)$$

Die Spannungsfläche ist in Abb. 5 dargestellt.

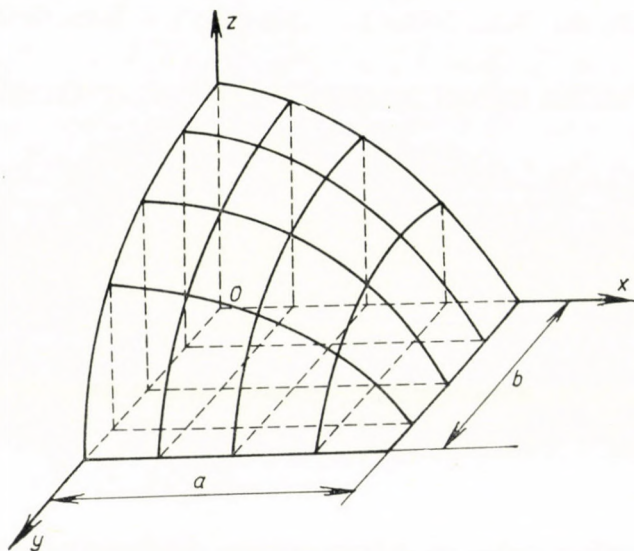


Abb. 5. Die axonometrische Darstellung der Spannungsfläche

Die Bestimmung des Koeffizienten C_{mn}

Die Kenntnis des Koeffizienten C_{mn} ist für den in der Praxis tätigen Ingenieur in den folgenden Belastungsfällen wichtig: a) gleichmäßig verteilte Volllast; b) gleichmäßig verteilte halbseitige Last (Schneelast); c) konzentrierte Last an einem beliebigen Punkte der Schale.

a) *Gleichmäßig verteilte Volllast*

In diesem Falle kann der Koeffizient C_{mn} als der Koeffizient der folgenden FOURIERSchen Reihe bestimmt werden:

$$q(x, y) = \sum_n \sum_n C_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (77)$$

und hieraus:

$$C_{mn} = - \frac{1}{ab} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} q \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy = - \frac{16q}{mn\pi^2}. \quad (78)$$

b) *Gleichmäßig verteilte halbseitige Last (Schneelast)*

$$C_{mn} = \frac{q}{ab} \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy = - \frac{8q}{mn\pi^2}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ m, n = 1, 3, 5 \dots \end{array} \right\} \quad (79)$$

c) *Konzentrierte Belastung an einem beliebigen Punkte der Schale mit den Koordinaten x_0, y_0*

Die konzentrierte Last P wird auf Grund des Zusammenhanges

$$q = \frac{P}{4\varepsilon\eta}$$

durch eine gleichmäßig verteilte Belastung ersetzt. Der Koeffizient der trigonometrischen Doppelreihe wird in diesem Falle der folgende sein:

$$C_{mn} = - \frac{1}{ab} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \int_{y_0-\eta}^{y_0+\eta} q \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} dx dy. \quad (80)$$

Wenn $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$, dann ist

$$C_{mn} = - \frac{P}{ab} \cos \frac{m\pi x_0}{2a} \cos \frac{n\pi y_0}{2b}; \quad m, n = 1, 3, 5 \dots$$

4. Die Schnittkräfte, Momente und Querkräfte

Nachdem nun die Werte von A_{mn} und B_{mn} bekannt sind, können die inneren Kräfte N_x , N_y und S aus den Gleichungen (22)–(24) berechnet werden. So gelangt man zu den folgenden Ausdrücken:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}, \quad (81)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}, \quad (82)$$

$$S = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \left(\frac{n\pi}{2b} \right) \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b}. \quad (83)$$

Die Werte der Momente werden durch die Formänderungsfunktion (57), die Zusammenhänge (25)–(27) zusammen mit dem Koeffizienten B_{mn} folgendermaßen bestimmt:

$$M_x = + D(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \quad (84)$$

$$= - D(x, y) \sum_m \sum_n \left(\frac{m\pi}{2a} \right)^2 B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b},$$

$$M_y = + D(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \quad (85)$$

$$= - D(x, y) \sum_m \sum_n \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b},$$

$$M_{xy} = M_{yx} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \quad (86)$$

$$= - D(x, y) \sum_m \sum_n \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \left(\frac{n\pi}{2b} \right) B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b}.$$

Die Werte der Querkräfte sind:

$$\begin{aligned}
 Q_x &= -D(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = -D(x, y) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\
 &= -D(x, y) \sum_m \sum_n B_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{2a} \right)^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{m\pi}{2a} \right) \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right] \sin \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b},
 \end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
 Q_y &= -D(x, y) \sum_m \sum_n B_{mn} \left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{m\pi}{2b} \right) \left(\frac{n\pi}{2a} \right)^2 \right] \sin \frac{n\pi y}{2b} \cos \frac{m\pi x}{2a}.
 \end{aligned} \tag{88}$$

5. Die Konvergenz der abgeleiteten Reihen

Die hier abgeleiteten trigonometrischen Doppelreihen konvergieren [1], daher genügt es in der Ingenieurpraxis für die erste Näherung mit den Werten $m = 1, 3$ und $n = 1, 3$ zu rechnen.

SCHRIFTTUM

1. WLASSOW, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Berlin, Akademie-Verlag 1958. 10. Kapitel, 12. Absatz.
2. KANTOROWITSCH, L. W.—KRYLOW, W. I.: Näherungsmethoden der höheren Analysis. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.
3. OGIBALOW: Die Biegung, Stabilität und Schwingungen von Schalen. Moskau (1958) (in russischer Sprache).
4. MATILDI, P.: Fläche dünne Kuppelschalen über rechteckigem Grundriß (in italienischer Sprache) Atti dell' Instituto di Scienza della Construzioni dell'Università, Pisa 1959.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Grundgleichungen der Biegetheorie der doppelt gekrümmten flachen Schalen mit veränderlicher Dicke werden auf Grund der WLASSOWSchen Theorie entwickelt. Hält man in Gleichung (47) die Schalendicke konstant, so erhält man die Grundgleichung der technischen Theorie von WLASSOW für konstante Dicke. Die vorliegende Arbeit stellt also eine Verallgemeinerung der WLASSOWSchen Theorie dar.

Für $K_x = K_y = 0$ geht die Gleichung (47) in die Grundgleichung der ebenen Platte mit veränderlicher Dicke über, die von OLSSON und später von REISSNER entwickelt wurde.

Für den Fall des elliptischen Paraboloids, deren Dicke in jedem Punkt

$$h(x, y) = h \, ch \frac{x}{a} \, ch \frac{y}{b} \tag{Gleichung 2}$$

beträgt, ist die Lösung der Differentialgleichungen nach RITZ-GALERKIN angegeben.

Es werden drei Lastfälle behandelt:

- a) Gleichmäßig verteilte Last über die gesamte Schalenfläche,
- b) einseitige gleichmäßig verteilte Last,
- c) Einzellast in beliebiger Stellung.

In dieser Arbeit ist stets eine Schale aus Stahlbeton vorausgesetzt worden.

CONTRIBUTION TO THE GENERAL BENDING THEORY OF FLAT SHELLS CURVED IN TWO DIRECTIONS HAVING A VARYING THICKNESS

B. KLIMOV

SUMMARY

The basic equations of the bending theory of flat shells curved in two directions having a varying thickness, were developed on the basis of Wlassow's theory. If in equation (47) the value of the thickness is taken as constant, the basic equation of Wlassow's technical theory valid for a constant thickness is arrived at. Thus, the paper represents a generalization of Wlassow's theory.

For $K_x = K_y = 0$ equation (47) turns into the basic equation of the plane slab having a varying thickness, solved first by Olsson and later by Reissner.

In the case of an elliptic paraboloid the thickness of which is determined for each of its points by the equation

$$h(x, y) = h ch \frac{x}{a} ch \frac{y}{b}, \quad (\text{equation 2})$$

the solution of the differential equations was obtained by using RITZ—GALERKIN's method.

Three cases of loading were dealt with, namely:

- a) a uniformly distributed total load over the whole shell surface,
- b) a unilateral uniformly distributed load,
- c) a concentrated load on an optional point of the shell.

In this paper a reinforced concrete shell is always to be assumed.

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DE LA FLEXION DES VOILES PLATS DOUBLEMENT COURBES ET D'ÉPAISSEUR VARIABLE

B. KLIMOV

RÉSUMÉ

Les équations fondamentales de la théorie de la flexion des voiles plats, doublement courbes et ayant une épaisseur variable sont déduites sur la base de la théorie de VLASSOV. En prenant l'épaisseur du voile constante dans l'équation (47), on aboutit à une équation fondamentale, relative aux voiles d'épaisseur constante, de la théorie de VLASSOV. L'étude peut donc être considérée comme une généralisation de cette dernière.

En cas de $K_x = K_y = 0$, l'équation (47) prend la forme de l'équation fondamentale des plaques planes d'épaisseur variable, équation résolue par OLSSON et plus tard par REISSNER.

En cas de paraboloides elliptiques, dont l'épaisseur en un point quelconque est déterminée par l'équation (2) suivante:

$$h(x, y) = h ch \frac{x}{a} ch \frac{y}{b},$$

a résolution des équations différentielles peut être obtenue à l'aide de la méthode de RITZ—GALERKINE.

L'étude examine trois cas de charge, à savoir:

- a) charge totale uniformément répartie sur toute la surface du voile;
- b) charge uniformément répartie sur la moitié du voile et
- c) charge concentrée sur un point donné du voile.

Les conclusions de l'auteur se rapportent à des voiles en béton armé.

МОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЕТА ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЕ

Б. КЛИМОВ

РЕЗЮМЕ

Основные уравнения теории изгиба пологих оболочек двоякой кривизны при переменной толщине выведены нами, исходя из общей теории Власова. При этом предполагалось, что дело имеем с оболочками из железобетона.

Если в полученном нами статическом уравнении (47) принять толщину оболочки постоянной, получим основные уравнения Власова. Таким образом, данная работа является дальнейшим обобщением теории последнего.

Если же в полученные уравнения подставить нулевую кривизну, т. е.

$$K_x = K_y = 0$$

то получаем основное уравнение плоских пластин переменной толщины, решения которых даны Ольсоном и позднее Рейсснером.

Дано также и решение этих уравнений известным способом Рица—Галеркина для случая, когда форма оболочки — эллиптический параболоид, толщина которого меняется по закону

$$h_{xy} = h \operatorname{ch} \frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{y}{b}.$$

Разобраны три случая нагрузки:

- а) равномерно распределенная нагрузка на всей поверхности оболочки,
- б) односторонняя нагрузка оболочки равномерного распределения, и
- в) случай концентрированной силы в любой точке поверхности.

SIMPLE AND GENERALIZED METHOD FOR DEVELOPING THE INCREMENTAL TRANSMISSION LOSSES

Ch. SZENDY

D. ENG. SC.

POWER STATIONS ENGINEERING INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received January 30, 1961]

The incremental transmission losses are defined by the partial derivatives of transmission losses with respect to the source powers. The incremental transmission losses may be determined by the B_{mn} coefficients method [1-3] or by the phase-angle method [4]. For systems consisting of several machines the first method is generally more convenient. The incremental loss is here derived from the transmission loss formula expressed in terms of source power. In deriving the loss formula the following steps were made:

- a) the loss formula written in terms of source and load currents, by means of open circuit impedances for transmission system;
- b) substitution of various load currents by the equivalent load current;
- c) elimination of the equivalent load current from the formula;
- d) transformation of source current into source power.

The determination of the coefficient in the formula as under c) is still a tedious work except with a digital computer. The transformation as per d) should be regarded as an approximation only. The assumption of the constant power factor in each source cannot be applied in several instances. The simple relation between the source current and power cannot be achieved under certain conditions. For the simplification of the computing work, and the generalization of the source current increment, the following method is suggested:

1. determination of the relative incremental loss with respect to source current;
2. determination of the relative incremental loss with respect to source power, by means of the chain rule for partial differentiation;
3. determination of the transformation coefficients obtained by chain rule and the determination of transmission loss coefficients.

1. Relative incremental losses with respect to source currents

The elimination of the load current in the transmission loss formula (as per b) and c)) is superfluous. Finding the derivatives of the transmission loss in terms of source and load currents (first formula in a)) the load currents can

be treated as constants which may save considerable computing work. In this case, the relative incremental losses can be determined. The change of one source current indicates opposite change of the source current at the arbitrarily selected reference point if the load and other source currents are assumed to be constant values. Therefore, the difference of the incremental loss at the above mentioned source and at the reference point may be investigated by the derivative of the simple loss formula with respect to this source current.

The over-all economy of the power system can be also investigated by means of the relative incremental losses at the sources if the reference point is in the middle section of the system. In this case the incremental loss at the reference point is not considerable, so that the error caused by relative incremental losses is negligible. The computation on the basis of the relative incremental loss gives a simple method, as shown in the following.

The source-currents and voltage-rises can be written as the elements of a current and a voltage-rise column matrix. Similarly, the load-currents and voltage-rises are the elements of other column matrices. The voltage-rises at the source and the load points are related to the reference point which is an arbitrarily selected source point as shown in Fig. 1.

The relation between the currents and voltage-rises is given by the well-known matrix formulas:

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_G \\ \bar{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{GG} & \bar{Z}_{GL} \\ \bar{Z}_{GL} & \bar{Z}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{i}_G \\ \bar{i}_L \end{bmatrix} \quad (1)$$

where

$$\bar{u}_G = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_i \\ \vdots \\ \bar{u}_j \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{bmatrix}, \quad \bar{i}_G = \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \vdots \\ \bar{i}_i \\ \vdots \\ \bar{i}_j \\ \vdots \\ \bar{i}_m \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{the voltage-rise and current} \\ \text{matrix of sources } 1, \dots, i, \dots, \\ j, \dots, m \end{array}$$

$$\bar{u}_L = \begin{bmatrix} \bar{u}_{L1} \\ \vdots \\ \bar{u}_{Ln} \end{bmatrix}, \quad \bar{i}_L = \begin{bmatrix} \bar{i}_{L1} \\ \vdots \\ \bar{i}_{Ln} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{the voltage rise and current} \\ \text{matrix of loads } L_1, \dots, L_n. \end{array}$$

The circuit elements in Fig. 1 have no shunt parts, as has been assumed in earlier works [1-3] also. \bar{Z}_{GG} , \bar{Z}_{LL} , \bar{Z}_{GL} are the open circuit self and mutual impedance matrices related to the source and load point. \bar{Z}_{GG} and \bar{Z}_{LL} are symmetrical matrices. They may be measured as shown in Fig. 2.

The algebraic symbols marked above by a horizontal line denote complex numbers (e.g. \bar{u}_1). The sign \wedge above the symbols means the conjugate complex value. The matrix \bar{Z}_{GL}^* is obtained by the transpose of \bar{Z}_{GL} .

Obviously [1-3], the transmission losses can be written as:

$$S_l = P_l + jQ_l = [\hat{\mathbf{i}}_G^*, \hat{\mathbf{i}}_L^*] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_G \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

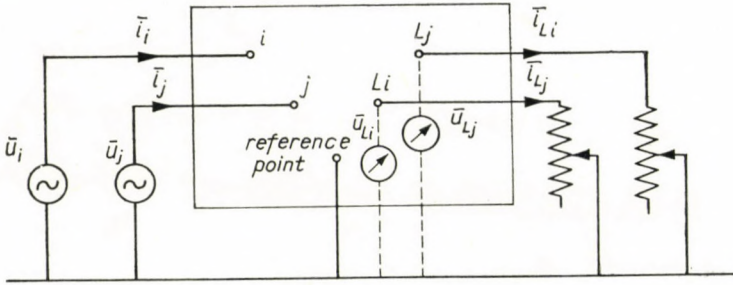


Fig. 1

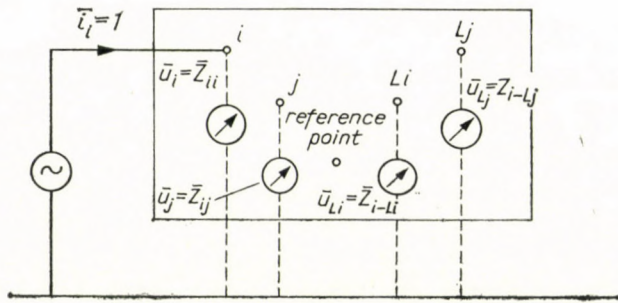


Fig. 2

where S_l , P_l and Q_l are the complex, active, and reactive power losses, respectively.

Hence, making use of Eq. (1):

$$S_l = [\hat{\mathbf{i}}_G^*, \hat{\mathbf{i}}_L^*] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{GG} & \bar{\mathbf{Z}}_{GL} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{GL}^* & \bar{\mathbf{Z}}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{i}}_G \\ \bar{\mathbf{i}}_L \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Our task is to ascertain the active power loss, the real part of the complex power. In the arbitrary co-ordinate system, the real components of current matrices are denoted by \mathbf{i}_{Gd} , \mathbf{i}_{Ld} , and the imaginary components by \mathbf{i}_{Gq} , \mathbf{i}_{Lq} hence

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{i}}_G &= \mathbf{i}_{Gd} + j \mathbf{i}_{Gq} \\ \bar{\mathbf{i}}_L &= \mathbf{i}_{Ld} + j \mathbf{i}_{Lq} \end{aligned} \tag{3.1}$$

The complex impedance matrices can be also decomposed into real and imaginary parts:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Z}}_{GG} &= \mathbf{R}_{GG} + j\mathbf{X}_{GG}, & \bar{\mathbf{Z}}_{LL} &= \mathbf{R}_{LL} + j\mathbf{X}_{LL} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{GL} &= \bar{\mathbf{Z}}_{LG}^* = \mathbf{R}_{GL} + j\mathbf{X}_{GL} = \mathbf{R}_{LG}^* + j\mathbf{X}_{LG}^*.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Considering the behaviour of symmetrical matrices \mathbf{Z}_{GG} and \mathbf{Z}_{LL} , the active power can be written as

$$P_l = [\mathbf{i}_{Gd}^*, \mathbf{i}_{Ld}^*] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{GG} & \mathbf{R}_{GL} \\ \mathbf{R}_{GL}^* & \mathbf{R}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Gd} \\ \mathbf{i}_{Ld} \end{bmatrix} + [\mathbf{i}_{Gq}^*, \mathbf{i}_{Lq}^*] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{GG} & \mathbf{R}_{GL} \\ \mathbf{R}_{GL}^* & \mathbf{R}_{LL} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{Gq} \\ \mathbf{i}_{Lq} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

The incremental losses with respect to the component d of the source currents constitute a column matrix denoted by the gradient of transmission loss P_l with respect to component d of current matrix \mathbf{i}_G . Similarly, the incremental losses with respect to the component q of the source currents may be expressed by the gradient of transmission losses with respect to component q of the source current matrix. So

$$\text{grad}_{i_{Gd}} P_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_l}{\partial i_{1d}} \\ \vdots \\ \frac{\partial P_l}{\partial i_{id}} \\ \vdots \\ \frac{\partial P_l}{\partial i_{md}} \end{bmatrix}, \quad \text{grad}_{i_{Gq}} P_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_l}{\partial i_{1q}} \\ \vdots \\ \frac{\partial P_l}{\partial i_{iq}} \\ \vdots \\ \frac{\partial P_l}{\partial i_{mq}} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

It follows from the Eq. (3.3), that the components d and q of the incremental loss matrix are these:

$$\begin{aligned}\text{grad}_{i_{Gd}} P_l &= 2(\mathbf{R}_{GG} \mathbf{i}_{Gd} + \mathbf{R}_{GL} \mathbf{i}_{Ld}), \quad \text{and} \\ \text{grad}_{i_{Gq}} P_l &= 2(\mathbf{R}_{GG} \mathbf{i}_{Gq} + \mathbf{R}_{GL} \mathbf{i}_{Lq}).\end{aligned}\quad (4.2)$$

These equations may be reduced to the following complex form:

$$\overline{\text{grad}}_{i_G} P_l = \text{grad}_{i_{Gd}} P_l + j \text{grad}_{i_{Gq}} P_l = 2(\mathbf{R}_{GG} \mathbf{i}_G + \mathbf{R}_{GL} \mathbf{i}_L). \quad (4.3)$$

The column matrix $\mathbf{R}_{GG} \bar{\mathbf{i}}_G + \mathbf{R}_{GL} \bar{\mathbf{i}}_L$ in this equation represents the resistive source voltage-rise matrix $\bar{\mathbf{u}}_R$.

$$\bar{\mathbf{g}} = \overline{\text{grad}}_{i_G} P_l = 2 \bar{\mathbf{u}}_R. \quad (4.4)$$

The relative incremental transmission loss with respect to the source current of generating station j may be expressed as the double of the resistive voltage-rise (\bar{u}_{Rj}) at the generating station j related to the reference station (v , Fig. 3).

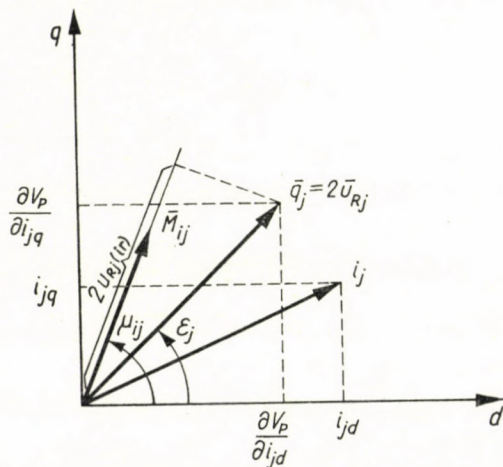


Fig. 3

The relative incremental loss with respect to source current matrix has still complex values.

2. Relative incremental losses with respect to source powers

If we change the variables of the source current into variables of source powers in the derivatives of transmission losses, we are able to express the incremental loss with respect to source power i by the chain rule for partial differentiation:

$$\frac{\partial P_l}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial P_l}{\partial i_{jd}} \frac{\partial i_{jd}}{\partial p_i} + \frac{\partial P_l}{\partial i_{jq}} \frac{\partial i_{jq}}{\partial p_i} \right) \quad (5.1)$$

$j = 1, \dots, m$

This expression may be written in matrix form. Therefore, we introduce the following matrices:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial i_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial i_j}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial i_m}{\partial p_1} \\ \frac{\partial i_1}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial i_j}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial i_m}{\partial p_i} \\ \frac{\partial i_1}{\partial p_m} & \dots & \frac{\partial i_j}{\partial p_m} & \dots & \frac{\partial i_m}{\partial p_m} \end{bmatrix}, \text{ and} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{grad}_p P_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_l}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial P_l}{\partial p_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial P_l}{\partial p_m} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

So the relative incremental losses with respect to source powers are written in matrix form:

$$\mathbf{grad}_p P_l = \operatorname{Re}(\widehat{\mathbf{M}} \overline{\mathbf{grad}_i P_l}) \quad (6.1)$$

(The symbol *Re* means the real part of the complex value.) Substituting Eq. (4.4) into Eq. (6.1):

$$\mathbf{grad}_p P_l = 2 \operatorname{Re}(\widehat{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{u}}_R). \quad (6.2)$$

If we have determined the elements of matrix $\bar{\mathbf{M}}$ and $\bar{\mathbf{u}}_R$, which are $M_{ij}e^{j\mu_{ij}}$ and $u_{Rj}e^{j\epsilon_{Rj}}$ as shown in Fig. 3 (where $i, j = l, \dots, m$), the relative incremental loss with respect to source power at source point i

$$\frac{\partial P}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^m M_{ij} u_{Rj} \cos(\epsilon_{Rj} - \mu_{ij}). \quad (6.3)$$

If the projection of complex voltage-rise \bar{u}_{Rj} on the complex element \bar{M}_{ij} is denoted by $u_{Rj(i)}$, Eq. (6.3) may be written as

$$\frac{\partial P_l}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^m M_{ij} u_{Rj(i)}. \quad (6.4)$$

The determination of matrix $\bar{\mathbf{M}}$ will be discussed further below. If the voltage matrix $\bar{\mathbf{u}}_R$ and the projections of its elements on the elements of matrix $\bar{\mathbf{M}}$ can be determined by means of an a.c. network analyser, the task is solved. Provided the transmission lines are not too long, the impedance angles of the transmission lines and the power factor of the sources and loads can be replaced by mean values and the d.c. network analyser may be used [5].

This method is very simple for the determination of the incremental losses by means of a network analyser under various load conditions. The projections of voltage elements on the elements of matrix $\bar{\mathbf{M}}$ yield the incremental losses directly.

Analogue or digital computers are frequently used for the economic scheduling of power generation. These computers are usually not directly

connected with an a.c. network analyser. Therefore, the determination of B_{mn} coefficients may become necessary. In this case, our task is to determine the incremental loss in the neighbourhood of an operating position. To solve this problem, we may substitute Eq. (4.3) into Eq. (6.1)

$$\mathbf{grad}_p P_l = 2 \operatorname{Re} [\widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{R}_{GG} \bar{\mathbf{i}}_G + \mathbf{R}_{GL} \bar{\mathbf{i}}_L)]. \quad (7.1)$$

Assuming that in a new operating position the change of the load currents is proportional to the total source power, the load current matrix may be expressed by means of the source current matrix with following formula:

$$\bar{\mathbf{i}}_L = -\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{i}}_G, \quad \text{where} \quad (7.2)$$

$$\bar{\mathbf{L}} = \left[\begin{array}{c} \overbrace{l_1 \dots l_1 \dots l_1}^{m \text{ columns}} \\ \dots \\ l_j \dots l_j \dots l_j \\ \dots \\ l_n \dots l_n \dots l_n \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \overbrace{l_1 \dots l_1 \dots l_1}^{m \text{ columns}} \\ \dots \\ l_j \dots l_j \dots l_j \\ \dots \\ l_n \dots l_n \dots l_n \end{array}} \right\} n \text{ rows}, \quad (7.3)$$

because the load current $i_{Li} = l_i \sum_{j=1}^m \bar{i}_j$. Obviously this assumption cannot affect the supposition of constant load currents for the determination of incremental loss formula. Starting from Eq. (7.2), we want now to investigate the incremental loss in a new operating position. Introducing the expression

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{GG} - \mathbf{R}_{GL} \bar{\mathbf{L}}, \quad (7.4)$$

and considering that the source current matrix is in the neighbourhood of the basic position $\bar{\mathbf{i}}_G^{(0)}$ of the current matrix it can be expressed as

$$\bar{\mathbf{i}}_G = \bar{\mathbf{i}}_G^{(0)} + \bar{\mathbf{M}}^* [\mathbf{p} - \mathbf{p}^{(0)}]. \quad (7.5)$$

The incremental loss formula (7.1) can, therefore, be written in the following form:

$$\mathbf{grad}_p P_l = 2 (\mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{b}) \quad \text{where} \quad (8.1)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{Re} (\widehat{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{M}}^*), \quad (8.2)$$

$$\mathbf{b} = \operatorname{Re} [\widehat{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{R}} (\bar{\mathbf{i}}_G^{(0)} - \bar{\mathbf{M}}^* \mathbf{p}^{(0)})]. \quad (8.3)$$

3. Determination of matrices \bar{M} , B and b

The load currents were treated as constants in the formulae expressed in paragraph 1. In a new operating position, changes in the source powers induce changes in the source currents. The partial derivatives of the source currents with respect to source powers are the transformation coefficients obtained by the chain rule for partial differentiation with a view to finding the incremental loss with respect to source power. To determine the partial derivatives, the following alternative assumptions can be made:

1. the power factor of each source remains constant, and the power change in one source cannot affect the currents in the other sources;
2. the reactive power of each source remains constant, and the power change in one source cannot affect the currents in the other sources;
3. the bus voltage at each source remains constant, and the source currents may be affected by other source powers, or, else, their effects are negligible.

3.1. Constant power factor

In this case, the transformation matrix \bar{M} is a diagonal one.

$$\text{If } i \neq j, \text{ then } \frac{\partial \bar{i}_j}{\partial p_i} = 0.$$

Determining the diagonal elements of matrix \bar{M} , the delivered power at source i can be written as

$$p_i = U_i \bar{i}_i \cos \varphi_i \quad (9.1)$$

where U_i is the absolute value of the bus voltage between the source point i and the neutral point of the system,

\bar{i}_i is the absolute value of the source current \bar{i}_i ,

φ_i is the phase angle of the source current \bar{i}_i and bus voltage \bar{U}_i as shown in Fig. 4.

Assuming the bus voltage U_i , and the power factor $\cos \varphi_i$ to be constants, the partial derivative of source power p_i with respect to variable \bar{i}_i

$$\frac{\partial p_i}{\partial \bar{i}_i} = U_i \cos \varphi_i.$$

Hence

$$\frac{\partial \bar{i}_i}{\partial p_i} = \frac{e^{-j\varphi_i}}{U_i \cos \varphi_i}, \text{ so that}$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-j\varphi_1}}{\hat{U}_1 \cos \varphi_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{e^{-j\varphi_i}}{\hat{U}_i \cos \varphi_i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{e^{-j\varphi_m}}{\hat{U}_m \cos \varphi_m} \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

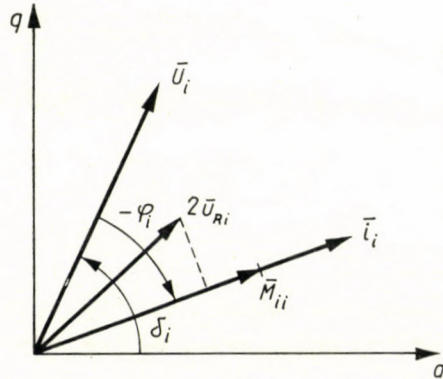


Fig. 4

Substituting Eq. (9.2) into Eq. (8.2) the element of transformation matrix \mathbf{B} in row i and column j may be written as:

$$B_{ij} = \frac{R'_{ij} \cos [\delta_i - \delta_j - (\varphi_i - \varphi_j)] + R''_{ij} \sin [\delta_i - \delta_j - (\varphi_i - \varphi_j)]}{U_i U_j \cos \varphi_i \cos \varphi_j} \quad (9.3)$$

where δ_i, δ_j are the respective phase angles of the voltage \bar{U}_i, \bar{U}_j ; $\bar{R}_{ij} = R'_{ij} + jR''_{ij}$ the element of matrix \mathbf{R} defined by Eq. (7.4).

For the sake of simplicity in usual cases, we may assume that the matrix \mathbf{L} contains only real elements, so that $R''_{ij} = 0$.

By the assumption of constant power factors

$$\mathbf{b} = 0. \quad (9.4)$$

3.2. Constant reactive power

In this case, the matrix $\bar{\mathbf{M}}$ has also a diagonal form. The source current \bar{i}_i changes in the direction of the complex bus voltage \bar{U}_i , so that

$$\frac{\partial \bar{i}_i}{\partial p_i} = \frac{1}{\hat{U}_i} \quad (10.1)$$

Therefore, the transformation matrix may be written as

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{U}_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{\bar{U}_i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{\bar{U}_m} \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Substituting Eq. (10.2) into Eq. (8.2), we may write the element of matrix \mathbf{B} in row i and column j as:

$$B_{ij} = \frac{R'_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + R''_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)}{U_i U_j} \quad (10.3)$$

where the symbols are the same as in Eq. (9.3).

Obviously, the elements of column matrix $\mathbf{i}_G^{(0)} - \mathbf{M}^* \mathbf{p}^{(0)}$ are the reactive currents of the sources shown in Fig. 5. Let us denote the reactive source cur-

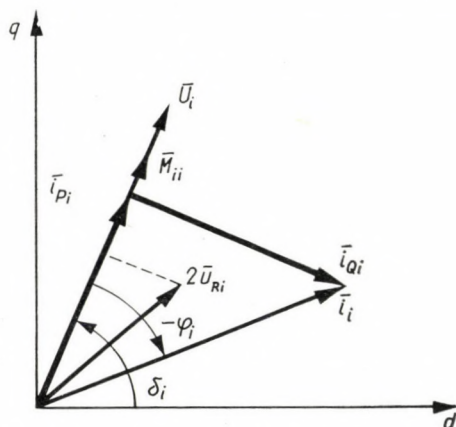


Fig. 5

rent matrix in the basic operating position by $\mathbf{i}_Q^{(0)}$, so that the element of the matrix \mathbf{b} in row i is

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^m [-R'_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) + R''_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)] i_{Qj}^{(0)}}{U_i} \quad (10.4)$$

This formula is more accurate than the earlier ones.

3.3. Constant bus voltages

In this case the absolute values of the bus voltages are constants, and it is only the angular displacement (δ) of the bus voltages in the source point which is varying. The transformation matrix $\bar{\mathbf{M}}$ can be determined by the product of the two matrices $\bar{\mathbf{J}}$ and \mathbf{F} . Using the chain rule for partial differentiation,

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{J}}\mathbf{F}^{-1} \quad (11.1)$$

where $\bar{\mathbf{J}}$ is a matrix with element $\frac{\partial \bar{i}_j}{\partial \delta_i}$ in row i and column j if δ_i is the angular displacement of bus voltage \bar{U}_i in power source i with respect to the reference axis;

\mathbf{F} is a matrix with element $\frac{\partial P_j}{\partial \delta_i}$ in the row i and column j .

Eq. (1) may be arranged in the following manner:

$$\bar{\mathbf{i}}_G = \bar{\mathbf{Z}}_{GG}^{-1} \bar{\mathbf{u}}_G - \bar{\mathbf{Z}}_{GG}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{GL} \bar{\mathbf{i}}_L. \quad (11.2)$$

Further,

$$\bar{\mathbf{U}}_G = \bar{\mathbf{u}}_G + \bar{U}_{\text{ref}} \mathbf{e}, \quad (11.3)$$

where $\bar{\mathbf{U}}_G$ is the bus voltage matrix consisting of voltage differences between the source points and the neutral point of the system;

\bar{U}_{ref} is the bus voltage between the reference point and the neutral point of the system, and

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

From Eq. (11.2) and (11.3) the matrix $\bar{\mathbf{J}}$ can thus be easily obtained. Obviously, the matrices $\bar{\mathbf{Z}}_{GG}^{-1}$ and $\bar{\mathbf{Z}}_{GG}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{GL}$ in Eq. (11.2) can be investigated by a network analyser according to Fig. 6. If we treat the load current matrix $\bar{\mathbf{i}}_L$ as a constant and if we produce the derivatives of Eq. (11.2) with respect to angular displacement δ_j , the second term on the left side of the resulting equation is eliminated. The scalar form of Eq. (11.2) is

$$\bar{i}_i = \sum_j \bar{A}_{ij} U_j e^{j\delta_j} - \sum_j \bar{A}_{ij} U_{\text{ref}} + \bar{C}_i \quad (11.4)$$

where \bar{A}_{ij} = the element of the matrix $\bar{\mathbf{Z}}_{GG}^{-1}$ in row i and column j ,

\bar{C}_i = the element of the column matrix $\bar{\mathbf{Z}}_{GG}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}_{GL} \bar{\mathbf{i}}_L$ in row i (Fig. 7).

This column matrix is constant if it is assumed that the load current matrix $\bar{\mathbf{i}}_L$ is also constant.

The derivative of Eq. (11.4) with respect to variable δ_j is, therefore,

$$\frac{\partial \bar{i}_i}{\partial \delta_j} = j \bar{A}_{ih} U_j e^{j\delta_j} \tag{11.5}$$

In this way the elements of matrix $\bar{\mathbf{J}}$ are determined. To find the expres-

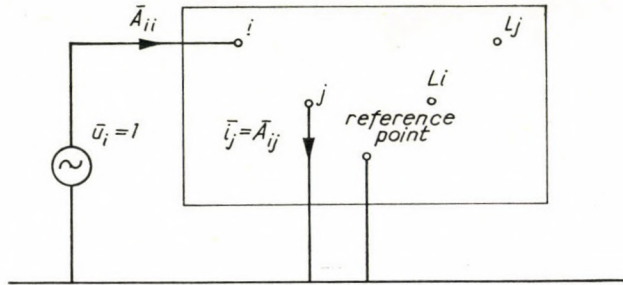


Fig. 6

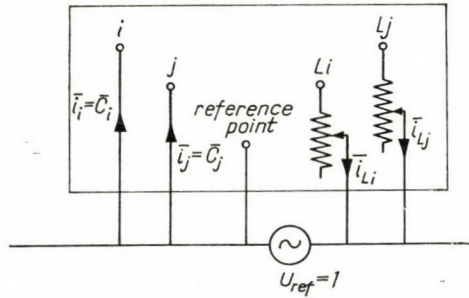


Fig. 7

sion for matrix \mathbf{F} , we may write the source powers in the following way:

$p_i = \text{Re}(\bar{U}_i \hat{i}_i)$ where
 $\bar{U}_i = U_i e^{j\delta_i}$ and the current
 \hat{i}_i can be substituted from the Eq. (11.4).

Hence

$$P_i = \text{Re} [U_i \sum_j \hat{A}_j U_j e^{j(\delta_i - \delta_j)} - U_i U_{ref} e^{j\delta_i} \sum_j \hat{A}_{ij} \hat{C}_i U_i e^{j\delta_i}] .$$

The partial derivatives of the source powers with respect to angular displacements of voltages are:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = U_i \left[\sum_j A_{ij} U_j \cos(\delta_i - \delta_j - \alpha_{ij}) - U_{\text{ref}} A_{ir} \cos(\delta_i - \alpha_{ir}) + C_i \cos(\delta_i - \gamma_i) \right], \quad (11.6)$$

$$(i = 1 \dots, m)$$

where A_{ij}, A_{ir}, C_i are the absolute values of $\bar{A}_{ij}, \bar{A}_{ir}, \bar{C}_i$;
 $\alpha_{ij}, \alpha_{ir}, \gamma_i$ the angular displacement of $\bar{A}_{ij}, \bar{A}_{ir}, \bar{C}_i$, further

$$\bar{A}_{ir} = \sum_j \bar{A}_{ij}.$$

Finally,

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = -A_{ij} U_i U_j \cos(\delta_i - \alpha_{ij}). \quad (11.7)$$

The expression (11.7) is generally negligible, so that the matrix F may be treated as a diagonal matrix. Therefore, the determination of its inverse is easy. The computation of the values \bar{C}_i in Eq. (11.6) means a tedious work. For the sake of simplicity, the power expression may be established by means of the well-known formula used for the determination of the system stability condition [6]. In this expression the loads have an impedance character so that the assumption of a constant load current is valid in a given region only. In this case, the elements of matrix F may be written as follows:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = \sum_j Y_{ij} U_i U_j \cos(\delta_i - \delta_j - \beta_{ij}) \quad (11.8)$$

where \bar{Y}_{ij} = short circuit admittance, measured as in Fig. 8 (their reciprocal values are the driving point and the transfer impedances);

Y_{ij}, β_{ij} = the absolute value and the complementary angle of \bar{Y}_{ij} .

Further,

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = -Y_{ij} U_i U_j \cos(\delta_i - \delta_j - \beta_{ij}). \quad (11.9)$$

The expression (11.9) can likewise be eliminated because of its negligible value.

By means of the above mentioned simplification, we may write the elements of matrix M as

$$\bar{M}_{ii} = \frac{A_{ii} U_i e^{j(\delta_i + \alpha_{ii})}}{\sum_k Y_{ik} U_i U_k \cos(\delta_i - \delta_k - \beta_{ik})}; \bar{M}_{ij} = 0. \quad (12.1)$$

Hence

$$B_{ij} = \frac{A_{ii} A_{jj} U_i U_j R_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j + \alpha_{ii} - \alpha_{jj})}{\sum_k Y_{ik} U_i U_k \cos(\delta_i - \delta_k - \beta_{ik}) \sum_k Y_{jk} U_j U_k \cos(\delta_j - \delta_k - \beta_{jk})} \quad (12.2)$$

and

$$b_i = \sum_j \left[\frac{A_{ii} R_{ij} i_j \cos(\delta_j - \delta_i - \varphi_j - \alpha_{ii})}{\sum_k Y_{ik} U_i U_k \cos(\delta_i - \delta_k - \beta_{ik})} - B_{ij} P_j^{(0)} \right] \quad (12.3)$$

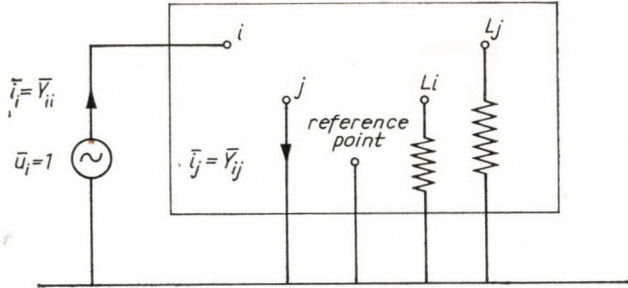


Fig. 8

The formulae of variants 1 or 2 can be used in most cases. If the transmission system consists of long lines, the loss constants can be computed with the aid of variant 3.

REFERENCES

1. KRON, G.: Tensorial Analysis of Integrated Transmission Systems — Part. I.: The Six Basic Reference Frames. AIEE Trans., Vol. 70, Part I, 1951., pp. 1239—1248.
2. KIRCHMAYER, L. K., STAGG, G. W.: Analyses of Total and Incremental Losses in Transmission Systems. AIEE Trans., Vol. 70, Part I, 1951, pp. 1197—1205.
3. KIRCHMAYER, L. K.: Economic Operation of Power Systems. John Wiley & Sons, Inc. New York, Chapman & Hall, Ltd. London, 1958.
4. BROWNLEE, W. R.: Co-ordination of Incremental Fuel Costs and Incremental Transmission Losses by Functions of Voltage Phase Angle. AIEE Trans., Vol. 73, Part III, 1954, pp. 529—533.
5. DESPOTOVIC, S. T.: A Quick Method for Developing a Transmission Loss Formula. AIEE Trans., Part III, 1960, pp. 707—711.
6. CRARY, S. B.: Power System Stability. Vol. I, John Wiley and Sons, New York, 1945.

SUMMARY

It is convenient to express incremental losses first with respect to the source currents and then change the variables of the latter into variables of the source powers by applying the chain rule for partial derivatives. The relative incremental loss with respect to source current may be obtained as the double of the resistive voltage-rise. The projecting of this voltage vector to the direction of the current change gives the proportional value of the required incremental loss. In conclusion, the matrices **B** and **b** in the neighbourhood of an operating position are determined in a general way.

EINE EINFACHE ALLGEMEINE METHODE FÜR BESTIMMUNG
DER ZUWACHSNETZVERLUSTE

K. SZENDY

ZUSAMMENFASSUNG

Es ist zweckmäßig, die Zuwachsnetzverluste zuerst mit Speiseströmen auszudrücken und dann, unter Anwendung der Kettenregel für die partiellen Ableitungen, von den Speiseströmen auf die eingespeisten Leistungen überzugehen. Der auf die Speiseströme bezogene relative Zuwachsnetzverlust ist der zweifachen Ohmschen Spannungserhöhung proportional. Die Projektion dieses Spannungsvektors auf die Richtung der Stromänderung ergibt einen dem gesuchten Zuwachsverlust proportionalen Wert. Schließlich werden in der Umgebung eines Betriebszustandes die Matrizen \mathbf{B} und \mathbf{b} bestimmt.

UNE MÉTHODE SIMPLE ET GÉNÉRALE POUR LA DÉTERMINATION
DES PERTES DE TRANSPORT DIFFÉRENTIELLES

Ch. SZENDY

RÉSUMÉ

En déterminant les pertes de transport différentielles (dues aux augmentations de la consommation) d'un réseau, on a avantage à les exprimer d'abord par les courants d'alimentation, et à passer ensuite des courants aux puissances d'alimentation en appliquant la règle conjointe de la dérivation partielle. L'augmentation relative des pertes par rapport aux courants d'alimentation est proportionnelle au double de l'augmentation de la tension ohmique. La projection de ce vecteur de tension sur la direction de la variation du courant donne une valeur proportionnelle à l'augmentation de pertes cherchée. A la fin de son étude, l'auteur détermine les matrices \mathbf{B} et \mathbf{b} au voisinage d'un régime de fonctionnement.

ПРОСТОЙ И ОБЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИРАЩИВАНИЯ ПОТЕРЬ

К. СЕНДИ

РЕЗЮМЕ

Приращивание потерь целесообразно сначала выразить питающими токами и после этого, применяя цепное правило парциальных производных, перейти с токов питания на мощности питания. Относительное приращивание потерь, действительное для токов питания, составляет двухкратную резистивного роста напряжения. Проекция этого вектора напряжения на направление изменения тока дает значение, пропорциональное искомому приращиванию потерь. Наконец, определяются вблизи рабочего режима матрицы \mathbf{B} и \mathbf{b} .

THE ECONOMICS OF LONG NATURAL-GAS PIPELINES

A. FONÓ

D. ENG. SC.

CORR. MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received January 30, 1961]

In gas pipelines, the transport of the gas is ensured by the pressure difference between the beginning and the end of the line. In long pipelines, compressor stations are inserted along the line which prevent the pressure from dropping too far, as the greater volume corresponding to lower pressure, and the velocity of flow increased in this way would increase the work needed for the transport of the gas. The result of economical investigations determines the distance between compressor stations, and thus the gas pressure before the compressor station. After the gas compressor station, pressure is usually allowed dropping to the value required at the place of consumption.

The author has shown that if we depart from this usual method and insert a compressor also in the section before the place of consumption, and select the parameters so that the gas arrives at the place of consumption at approximately the same pressure as at the compressor stations, and if, furthermore, an expansion turbine is built in at this end point [1, 2] we may ensure two considerable economical advantages.

1. At the gas turbine, which uses the gas as a working medium, and after introduction of heat expands it to the needed value at the place of consumption, we gain a considerable part of the compression work otherwise needed for the operation of gas turbines. This compression work is usually about 140% of the useful work which can be delivered by the turbine. The compression energy used at the inserted compressor station is but a small fraction of this. The economical results are that in the last line section between the compressor station and the place of consumption, as a consequence of the increased pressure the flow resistance is reduced, and therefore the energy consumption as well.

2. From the gas line kept under increased pressure, gas can be drawn, while the pressure decreases, until the pressure at the place of consumption does not drop to the value needed for the purposes of consumption. This quantity of gas is suitable for equalizing the fluctuations of consumer requirements.

According to the investigations carried out by the author, this solution proves to be very economical even if we count the energy gain only. Besides, the considerable advantage of gas storage was separately proved.

The phenomena of gas storage can be elucidated better if we examine the shock action of a suddenly appearing load.

In the following it will be examined how fast the quantity of gas stored in the line in consequence of a sudden pressure drop at the line end becomes available.

In a long natural gas line with a constant cross section, q_1 Nm³/h of gas flows at a constant speed. The pressure drop along the line maintains the flow. The pressure at the beginning of the line is p_a , at the end of the line it is p_{e1} .

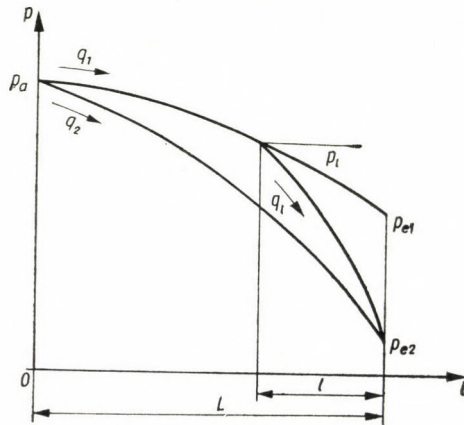


Fig. 1

If in this line the pressure at the end suddenly drops from p_{e1} to p_{e2} as a consequence of a sudden increase of consumption, the quantity of gas leaving the line increases above the former q_1 Nm³/h, because in the line section next to the outlet, the pressure of the gas drops and from this section the gas quantity being liberated in consequence of the pressure drop, flows out as well. After the pressure in this extreme line section had dropped, the gas from the next, neighbouring line section flows there. The place of beginning pressure reduction wanders off towards the beginning of the line, where the pressure is p_a . This phenomenon is illustrated by Fig. 1.

The gas quantity flowing out of the line is the largest immediately after the pressure reduction at the place of consumption, because at that time the quantity of gas stored in the line end has to overcome the flowing resistance of the shortest line section. The out-flowing quantity gradually diminishes, until the place of pressure reduction reaches the beginning of the line where the pressure is p_a . From this moment, the stationary flow of a new quantity of gas q_2 , larger than the former, begins. The change of gas flow as a function of time is shown by Fig. 2.

The following symbols will be used:

$$p \text{ kg/m}^2$$

$$q \text{ Nm}^3/\text{h}$$

$$Q \text{ Nm}^3$$

$$l, L \text{ m}$$

$$t \text{ hours}$$

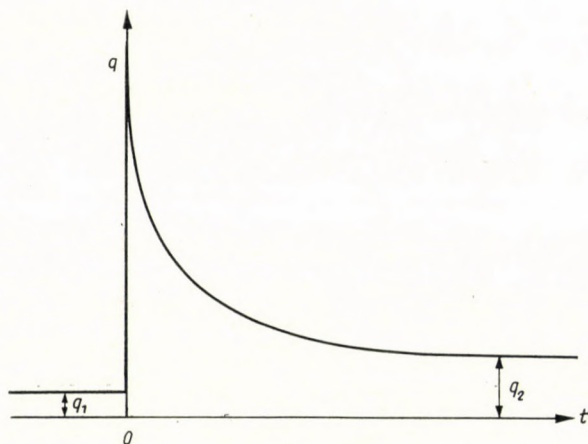


Fig. 2

The following relations, taken from the quoted papers, characterize the phenomena:

$$p_a^2 - p_{e1}^2 = q_1^2 \frac{L}{c}$$

$$p_a^2 - p_{e2}^2 = q_2^2 \frac{L}{c}$$

$$p_l^2 - p_{e1}^2 = p_1^2 \frac{l}{c}$$

$$p_l^2 - p_{e2}^2 = q_l^2 \frac{l}{c}$$

From these latter

$$p_{e1}^2 - p_{e2}^2 = (q_l^2 - q_1^2) \frac{l}{c}$$

$$q_l^2 = q_1^2 + \left(\frac{p_{e1}^2 - p_{e2}^2}{l} c \right)$$

where q_l is the instantaneous flow at the time when the previous stationary state is reached at a distance l by the pressure drop progressing along the line.

It must be pointed out that the quantity effectively flowing at that time is even larger. This difference only very slightly influences the relation between q_l and l if p_{e2} is sufficiently small, *i.e.* if we neglect p_{e2} . The quantity flowing in fact is the larger, the more gas is liberated in the line as a consequence of the pressure drop. The flowing surplus quantity increases the pressure drop. For a given initial pressure, the final pressure decreases. But, as we have neglected the final pressure, this difference does not appear.

According to the quoted papers, the quantity delivered by the line in consequence of the pressure drop during the time t will be:

$$\Delta Q = Q_1 = Q_2 = \frac{2}{3} Fc \left[\frac{p_l^3 - p_{l1}^3}{q_l^2} - \frac{p_l^3 - p_{e2}^3}{q_l^2} \right]$$

where

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} \frac{1}{10^4} \quad c = 1100^2 d^{\frac{16}{3}}$$

Neglecting p_2^3 with regard to p_1^3 and p_l^3 and calculating with

$$t = \frac{\Delta Q}{\Delta q}$$

we obtain the following relations:

$$\Delta Q = \frac{2}{3} Fc \left[\frac{\left(q_1^2 \frac{l}{c} + p_{e1}^2 \right)^{\frac{3}{2}} - p_{e1}^3}{q_1^2} - \frac{\left(q_1^2 \frac{l}{c} + p_{e1}^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{q_1^2 + \frac{p_{e1}^2 c}{l}} \right]$$

$$\Delta Q = \frac{2}{3} Fc \left[\left(q_1^2 \frac{l}{c} + p_{e1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{c} + \frac{p_{e1}^2}{q_1^2} - \frac{l}{c} \right) - \frac{p_{e1}^3}{q_1^2} \right]$$

$$\Delta Q = \frac{2}{3} Fc - \frac{p_{e1}^2}{q_1^2} \left[\left(q_1^2 \frac{l}{c} + p_{e1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - p_{e1} \right]$$

$$\Delta q = q - q_1 = \left(q_1^2 + p_{e1}^2 \frac{c}{l} \right)^{\frac{1}{2}} - q_1$$

$$t = \frac{\Delta Q}{\Delta q} = \frac{2}{3} Fc \frac{p_{e1}^2}{q_1^2} \frac{\left(q_1^2 \frac{l}{c} + p_{e1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - p_{e1}}{\left(q_1^2 + p_{e1}^2 \frac{c}{l} \right)^{\frac{1}{2}} - q_1}$$

Calculating with the above:

l	ΔQ	Δq	t/h	t/min.
0	0	20 000 000*	0	0
10 000	40 000	1 622 000	0,0246	1,48
20 000	110 000	1 032 000	0,1065	6,4
50 000	260 000	542 000	0,48	28,6
100 000	510 000	312 000	1,63	98
140 000	690 000	242 000	2,84	170

* Corresponding to the velocity of sound.

In the example worked out, according to [1] and [2],

$$q_1 = 548\,000 \text{ Nm}^3/\text{h}$$

$$p_{e1} = 42,4 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2$$

$$F = 0,425 \text{ m}^2$$

$$c = 0,234$$

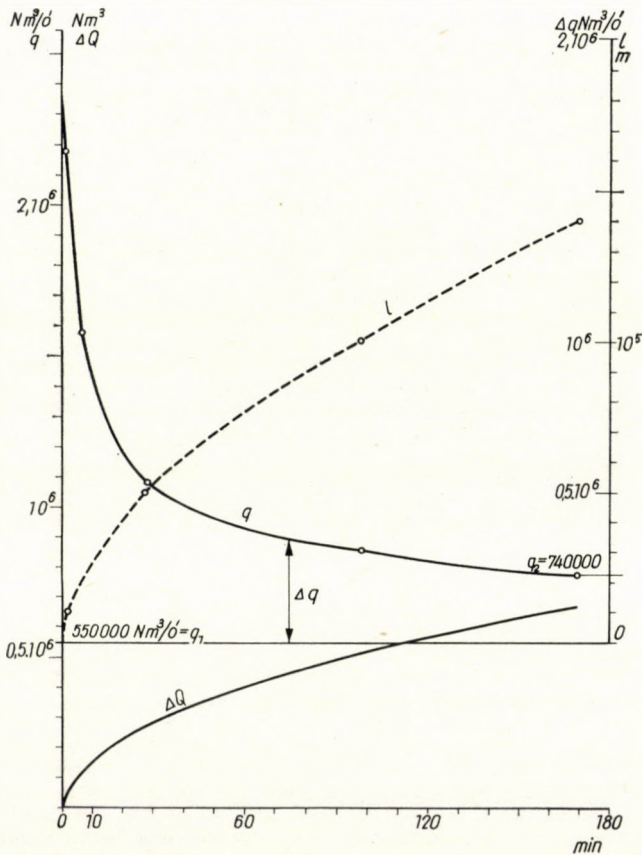


Fig. 3

With the calculated values, Fig. 3 has been traced, which shows that the distance l from the end of the line, at which the diminishing pressure reaches the point where the constant quantity q_1 is flowing, increases approximately as a linear function of time.

The quantity leaving the line after the drop of the output pressure instantaneously jumps at the possible maximum value and then gradually approaches the new stationary state. The quantity ΔQ drawn from the stored quantity at first steeply increases, after that it is gradually used up; in the case of the example, it is consumed during 180 minutes.

These relations show that in the case of fluctuating gas extraction, the equalization from the gas quantity stored in the line will take place extremely quickly, so that in the more distant parts of the line the fluctuation cannot be noticed. We also see that for practical purposes, the pipeline is suitable for equalizing the daily fluctuations and no special gasometer is needed.

REFERENCES

1. FONÓ, A.: Gas stored in Pipelines as a Factor of Continuous Supply. Acta Technica Acad. Sc. Hung. T. XXVII Fasc. 1-2, p. 65-77.
2. FONÓ, A.: Means of Improving the Economy and Safety of Long-Distance Gas Pipe Lines. World Power Conference Madrid 1960. Paper III. A/7.

SUMMARY

In his earlier papers [1, 2] the author dealt with the increasing of the pressure in the section, situated just before the place of consumption, of long gas lines and with the effect of such increase, especially with the possibilities of cheap energy production and of utilization of the gas quantity stored in the line. This paper deals with the quantity of gas which can be drawn from the line in consequence of the elevation of the pressure in detail.

The characteristic case is calculated, in which under the effect of a sudden increase of consumption the pressure at the end point of the line drops. Consequently, more gas flows from the line. The instantaneous value of the surplus quantity continuously decreases. The quantity drawn from the stored gas is capable of equalizing considerable fluctuations of gas consumption.

DIE WIRTSCHAFTLICHKEIT VON LANGEN ERDGASLEITUNGEN

A. FONÓ

ZUSAMMENFASSUNG

In zwei früheren Arbeiten [1, 2] hat der Verfasser die Erhöhung des Druckes in langen Erdgasleitungen bis vor dem Verbrauchsort und die Auswirkung dieser Maßnahme behandelt, insbesondere im Hinblick auf billige Energieerzeugung und die Möglichkeit, die in der Leitung gespeicherte zusätzliche Gasmenge auszunützen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich eingehend mit der Menge, die aus dem infolge der Druckerhöhung in der Leitung gespeicherten Gas entnommen werden kann.

Ein charakteristischer Fall wird durchgerechnet, bei dem als Folge einer plötzlichen Zunahme des Verbrauchs der Druck abfällt, und demzufolge eine zusätzliche Gasmenge aus der Leitung auströmt. Der Momentanwert dieser zusätzlichen Menge sinkt kontinuierlich. Die dem gespeicherten Gas entnommene Menge kann große Verbrauchsschwankungen ausgleichen.

L'ÉCONOMIE DES CONDUITES DE GAZ NATUREL LONGUES

A. FONÓ

RÉSUMÉ

Dans deux études antérieures [1], [2], l'auteur a traité de l'augmentation de la pression dans la section des conduites précédant le lieu de consommation, ainsi que de l'effet de cette augmentation, à savoir de la production d'énergie économique et des possibilités d'utilisation de la quantité de gaz additionnelle emmagasinée dans la conduite. La présente étude s'occupe en détail de la quantité de gaz pouvant être extraite du gaz emmagasiné par suite de l'augmentation de la pression.

On calcule le cas caractéristique où, sous l'effet de l'augmentation brusque de la consommation, la pression décroît subitement à l'extrémité de la ligne. En conséquence, une quantité additionnelle de gaz est délivrée par la conduite. La valeur instantanée de la quantité additionnelle décroît d'une façon continue. La quantité extraite du gaz emmagasiné peut équilibrer des fluctuations importantes de la consommation.

ЭКОНОМИЧНОСТЬ ДЛИННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИРОДНОГО ГАЗА

А. ФОНО

РЕЗЮМЕ

Две ранее опубликованные работы автора [1] и [2] занимались длинными газопроводами с точки зрения повышения давления на участке перед местом потребления, и влиянием повышения давления, а именно выработкой дешевой энергии и возможностью утилизации дополнительных количеств газа, хранящихся в газопроводе. Данная работа детально рассматривает то количество, которое можно отобрать от газа, хранящегося в трубопроводе вследствие повышения давления.

Вычисляется тот характерный случай, при котором в конечной точке газопровода падает давление вследствие резкого роста потребления. Из-за этого из газопровода вытекает дополнительное количество. Моментальное значение дополнительного количества постепенно падает. Количество, отобранное из хранящегося газа, может уравновесить большие колебания потребления.

A MORE EXACT EVALUATION OF PILE TEST LOADINGS

Prof. Ch. SZÉCHY D. SC.

UNIVERSITY FOR CIVIL ENGINEERING & ARCHITECTURE, BUDAPEST

[Manuscript received May 12, 1961]

The most reliable method for the determination of pile-bearing capacity is the test-loading *in situ*. There is still much ambiguity, how to derive a safe bearing load from the test results. All methods are based on the plotted test load-settlement diagram which is dealt with in the same way as the stress-strain ($\sigma - \varepsilon$) diagrams of steel, concrete and of other construction materials. It must be borne in mind, however, that within the range of working stresses these latter may be dealt with as elastic materials, and the produced deformations are predominantly reversible and of elastic character. On the contrary, the soil, upon which the pile also transmits its load, is a semi-elastic material and its deformations under load are always composed of a residual and of an elastic part. Consequently, the determination of the two characteristic points: the limit of proportionality and the limit of plasticity (ultimate bearing capacity) is very difficult and uncertain and the derivation of the safe load from these values (by dividing them with an appropriate safety factor) may be difficult and misleading.

The greatest obstacles in bringing the test-load diagrams onto a common and univocal basis are the influence of consolidation and the defects of the test-loading apparatus and of the process itself. The usual form of a pile test-loading curve is represented on Fig. 1. The load is increased by steps and should be kept on the pile at least as long as the final value of the consolidation settlement may be concluded upon by a definite convergency of the time-settlement curve (Fig. 1. A and B).

The first difficulty is that in the majority of cases we cannot afford to spend the time necessary for this observation at each loading stage, because that would extend the duration of a test loading for several days, — maybe for weeks. Therefore, the determination of total settlement values is very frequently uncertain.

The second disturbing item is principally encountered with, when the test-load is not exerted in the form of a kentledge placed on a platform, — bearing directly on the pile or through the insertion of a central hydraulic jack, — but effected by jacking against an adequate reaction provided by a

beam attached to anchor piles. Namely in this latter case the produced settlement of the pile will always incur a pressure-loss in the cylinder of the jack, involving a loss of the exerted load. In order to keep it at a constant value (unless self adjusting types of jacks are used) one has to restore the pressure by moving the piston again and again during the period of consolidation. This displacement will, of course, disturb the development of a balance in pore-

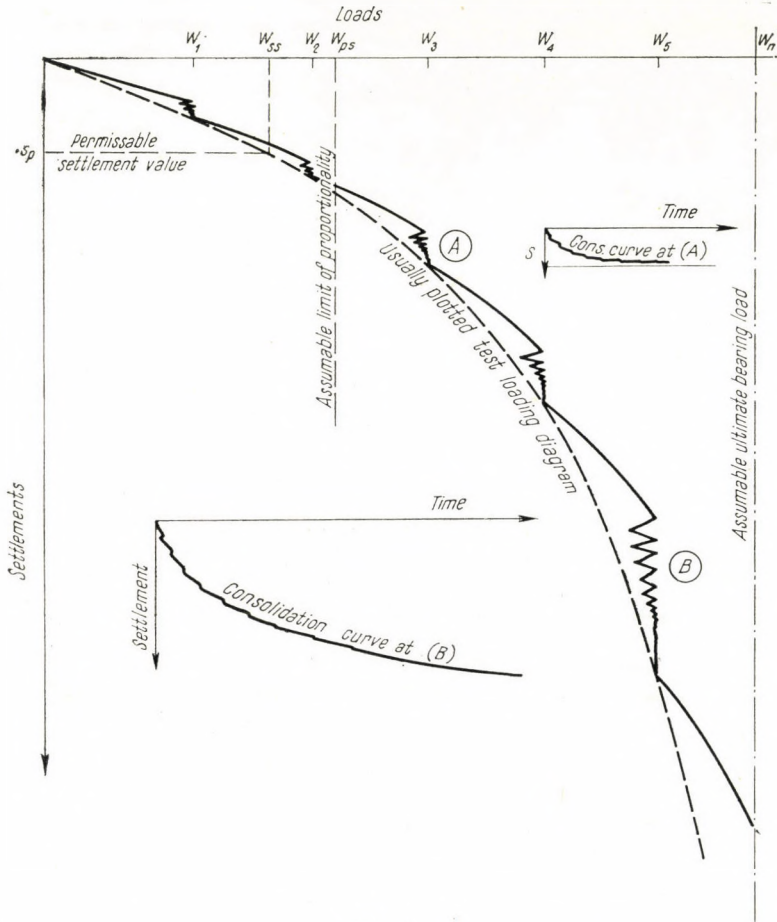


Fig. 1

water pressure propagation and thus influence the smooth flow of this process. (See Fig. 1 A and B.)

This load-settlement curve of the tested pile being subject to the above defects — serves as the basis for the determination of the bearing capacity of the pile. In addition its evaluation is also not devoid of certain defects. There are three ways in use for this:

1. Determination of the safe bearing load (W_{ss}) as a function of the permissible settlement (S_p) of the building.

2. Find out on the curve some limit of proportionality (mostly in cohesive soils) and determine the safe load by dividing it (W_{ps}) with an appropriate safety factor (n_p).

3. Define the ultimate load as that at which the rate of settlement continues undiminished without further increment of load (unless this rate is so slow as to indicate that settlement may be due to consolidation) and determine the safe load by dividing (W_u) with another appropriate safety factor (n_u).

The difficulty now is, that it is a rather rare exception when either the limit of proportionality or the ultimate load is distinctly to be detected on the curve. The heterogeneity of soil stratification on the one hand and the increase of load-bearing capacity bound together with progressive settlement and the changing load-distribution between mantle friction and toe resistance on the other hand, render this problem especially difficult.

Based on laboratory and field observations the author has developed a procedure for the direct determination of the safe pile-load as follows:

The pile transmits its load upon the soil, and therefore we have to consider first the deformation process of the soil proper under progressive loading quite up to failure (Fig. 2).

At the beginning the soil particles will undergo a progressive compaction (Zone I) and vertical displacement will be preponderant. In this phase the relative density of soil, and as a consequence, also its load-carrying capacity will increase with the loading. Its compressibility will gradually be reduced and its elastic properties improved (Zone II). Consequently the residual part in the total amount of deformation (settlement) will gradually be decreased and the elastic part increased. With the further increase of loading after a certain limit, plastic zones gradually develop on the edges and an irreversible lateral displacement of soil particles will set in again, until at last the plastic zones — starting from the edges — will conflux and — accompanied by rapidly increasing remnant deformations — will give rise to the formation of a continuous sliding surface, along which bearing failure will set in as a consequence of the lateral yield of the surrounding soil masses (Zone III).

This behaviour of soils under surfacial test loading is well illustrated after KÖGLER on Fig. 2. The increase of strength and compression modulus (YOUNG's modulus) is well demonstrated by the gradually diminishing slope of the load-settlement curve in the first phase, then the greater bearing capacity and diminished compressibility of the denser soil by the flatter grade in the second phase and finally the gradual preponderancy of lateral displacements and plastic yield in the growth of this slope nearing a vertical tangent in the third phase. It is obvious from this figure, that the limit of the safe bearing

load lies at the boundary of zones II and III (Point *P*). It may also be concluded, that this limit can be characterized by the sign that the increments of plastic (residual) deformations become bigger again from here than those of elastic deformations. With regard to this the stress-strain relations of the typical load-settlement curve of soils could be reflected by the change in the ratio of elastic deformations (s_e) to residual deformations (s_r) i.e. by the ratio: $\varepsilon = \frac{s_e}{s_r}$.

In the first phase of loading it must always become bigger, because the elastic part of the deformation increases as compared to the residual part, owing to

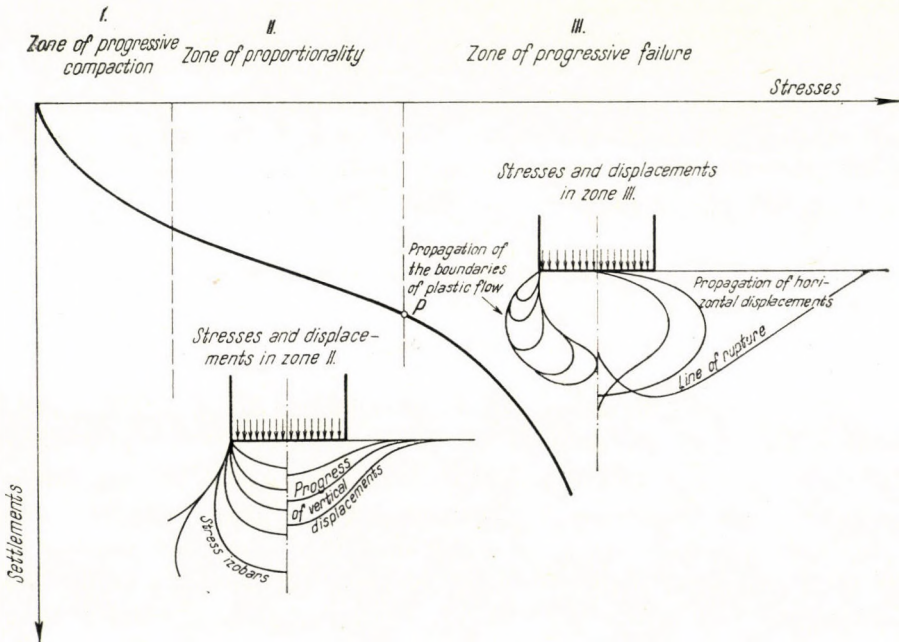


Fig. 2

the gradual increase of soil bearing strength brought about by the compacting effect of vertical loading and of the filling up of voids effected by the vertical displacements. But when the boundary between zones II and III is attained — the increase of residual settlements will surpass more and more that of the elastic settlements. The boundary and point *P* must be thus represented by a maximum of the ε values which may be obtained in a diagramm by laying a horizontal tangent to the plotted ε curve (see Fig. 3b).

For the separation of the two components: residual settlement and elastic settlement, the best way is to alternately apply loading cycles and load relief cycles. The elastic set (s_{ei}) will appear here as the heave measured under the load relief-cycle, and the plastic or residual part (s_{ri}) as the difference between

total settlement and the elastic part. If there were no other influencing factors disturbing the evaluation of surface load-test on soils (dimensions, shape etc.) this procedure might be generally used for the evaluation of any test-loading of soils. But it may be used with proper accuracy for the evaluation of bearing tests

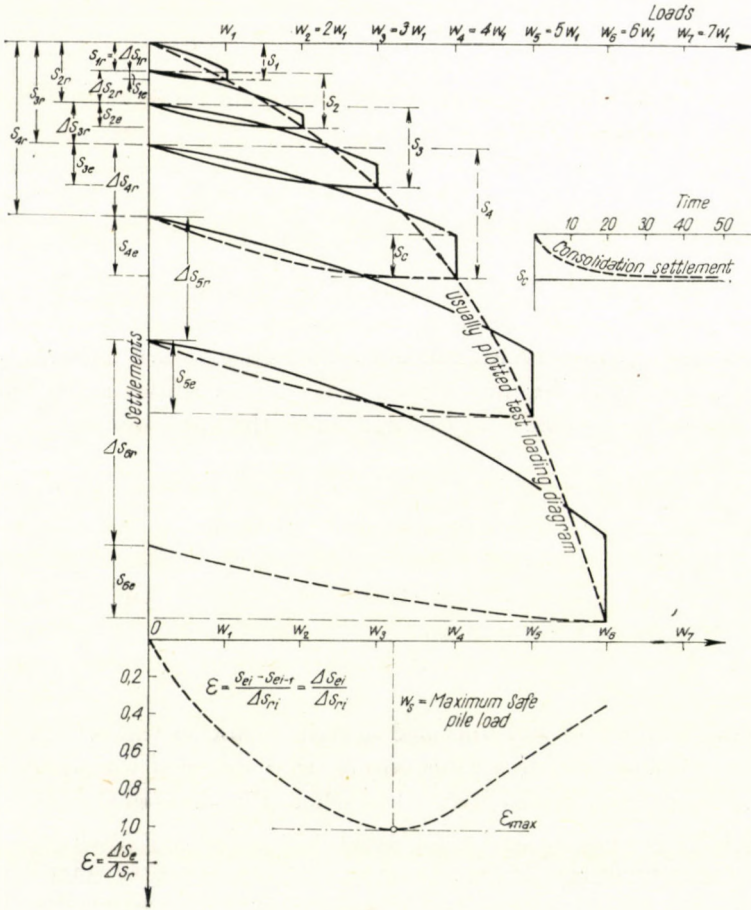


Fig. 3

on piles, where these disturbing factors are absent and dimensions, shape of test specimen are the same as that of the real structure.

In conclusion Fig. 3 shows the way how to evaluate the load-settlement curve of a pile according to these principles.

The test load should be imposed by equal increments. The first load (W_1) must be applied and the settlement (s_1) measured (including the determination of consolidation settlement by plotting a time-settlement curve at each loading stage). Then the elastic rebound (s_{1e}) must be measured under the following

relief cycle. By this we also get the residual settlement as $s_{1r} = s_1 - s_{1e}$. The ε_1 value may be computed as

$$\varepsilon_1 = \frac{s_{1e} - 0}{s_{1r}} .$$

Then the loading must be raised up to the next loading stage (W_2) and after the determination of the total settlement (s_2) again a total load relief applied, the total elastic rebound (s_{2e}) measured and the residual settlement gained as $\Delta s_{2r} = s_2 - s_{2e} = s_{2r} - s_{1r}$. The ε_2 value appertaining to W_2 may now be obtained as

$$\varepsilon_2 = \frac{s_{2e} - s_{1e}}{s_{2r} - s_{1r}} = \frac{\Delta s_{2e}}{\Delta s_{2r}}$$

Proceeding in this way we can determine all ε values until we see that they reveal a definitely diminishing tendency. Now, drawing the horizontal tangent to the plotted ε curve we can determine the appertaining safe bearing load W_s (Fig. 3).

It is to be seen, that the ε values were determined by repeated full loading and full relief, although the determination of the change of elastic and residual settlement values between the single loading stages might have been more accurate. This would, however be practically unfeasible owing to the relatively small differences to be measured and to the inexactitude of test mechanism and to the uncertain behaviour of soils under relatively small load relief decrements.

Beyond the distinct and univocal determination of the safe pile bearing load another advantage of this procedure is, that we must not apply loads to obtain the ultimate bearing capacity, but when it is obvious that the ε values are beyond their maximum and show a definite decreasing tendency, then no further load increment should be imposed, which means a considerable saving in time and cost, taking into consideration the ever increasing duration time of consolidation settlement.

SUMMARY

The usual way for the evaluation of pile test loading curves is done in a similar way to that of the stress-strain diagrams of construction materials (steel). *I.e.* that the safe bearing load is derived from some limit of elasticity or ultimate bearing value found on the curve. Author points out, that in case of soils these values do not definitely appear and for several reasons cannot be fixed distinctly. In addition soils are not elastic but semi-elastic materials and consequently they are subject — from the first stage of loading — not only to elastic, but to considerable residual deformations. Based on the typical load settlement curve of soils, he points out that the ratio of these vary in the various stages of loading. He is developing an original, univocal and properly defined method for the evaluation of pile test loading curves based just on the variation of this ratio.

GENAUERE AUSWERTUNG BEI PFAHLPROBEBELASTUNGEN

K. SZÉCHY

ZUSAMMENFASSUNG

Die Auswertung des — bei den Pfahlprobepbelastungen aufgenommenen — Last-Setzungsdiagramms erfolgt in üblicher Weise ähnlich der des Bruchdiagramms der Baustoffe (Stahl). Also die zulässige Last des Pfahles wird aus einer auf dem Last-Setzungsdiagramm aufgesuchten Proportionalitäts- oder Bruchgrenze abgeleitet. Der Verfasser weist darauf hin, daß bei der Last-Setzungskurve der Böden diese Grenzen meistens schwer und aus mehreren Gründen nicht eindeutig feststellbar sind. Darüber hinaus sind die Böden nicht als elastische, sondern als semi-elastische Stoffe zu betrachten, die schon von Anfang der Belastung an beträchtliche bleibende Setzungen erleiden. Von einer typischen Last-Setzungskurve des Bodens ausgehend zeigt der Verfasser, daß eben die Veränderung dieses Verhältnisses der bleibenden und elastischen Zusammendrückungen die typischen Spannungsvorgänge und Tragfähigkeit des Bodens kennzeichnet. Auf diese Erscheinung baut er seine neuartige Methode auf, die die eindeutige und genaue Bestimmung der zulässigen Pfahlbelastung ermöglicht.

UNE MÉTHODE POUR L'ÉVALUATION PLUS EXACTE DES ESSAIS DE MISE EN CHARGE DES PIEUX

CH. SZÉCHY

RÉSUMÉ

La courbe de tassement obtenue à l'épreuve de charge des pieux est évaluée ordinairement d'une façon analogue au diagramme tension-allongement des matériaux de construction (acier). On cherche à établir la limite de proportionnalité ou de fluage, pour en déduire la valeur de la charge admise. L'auteur fait remarquer que les points correspondant à ces limites n'apparaissent pas nettement sur les courbes obtenues à l'issue des essais de charge, et leur détermination reste, pour plusieurs raisons, incertaine; en outre, les sols sont des matières non pas élastiques, mais semi-élastiques, qui une fois soumis à la charge, subissent des déformations permanentes considérables. En partant de la courbe caractéristique des essais de charge des sols, l'auteur démontre qu'il est préférable de prendre pour base de l'évaluation les déformations permanentes et élastiques caractérisant les différentes étapes de la mise en charge, c'est-à-dire le rapport variable de ces déformations.

L'auteur présente un procédé original et concret basé sur ce rapport variable, qui détermine avec sûreté la capacité de charge limite des pieux.

УТОЧНЕННАЯ ОЦЕНКА ПРОБНОЙ НАГРУЗКИ СВАЙ

К. СЕЧИ

РЕЗЮМЕ

Кривую нагрузки—осаждения, снятую при испытательной нагрузке свай, вообще оценивают аналогично диаграмме разрыва строительных материалов (сталей). То есть стремятся найти предел пропорциональности или предел текучести, и на основе их выводятся допустимые значения нагрузки. Автор показывает, что наряду с тем, что на снятых кривых испытательной нагрузки эти точки не проявляются выражено и их определение вследствие ряда причин является неопределенным, грунты являются не упругими, а семиупругими материалами, при нагрузке которых уже с самого начала возникают значительные остаточные деформации. Исходя из характерной кривой испытательной нагрузки грунтов, показано, что правильнее брать за основу оценки остаточные и упругие деформации, характеризующие различные стадии нагрузки, и соответственно их переменные пропорции.

Демонстрируется основывающийся на этой переменной пропорции конкретный оригинальный метод, который однозначно дает предельную нагрузку свай.

DISTANCE TO POTENTIAL MINIMUM OF THE ELECTRONIC SPACE-CHARGE FROM EXTERNALLY HEATED CATHODES IN INERT HIGH-PRESSURE GAS-DISCHARGES

(PRELIMINARY COMMUNICATION)

T. Z. SZELÉNYI

RESEARCH INSTITUTE FOR TECHNICAL PHYSICS OF THE HUNGARIAN
ACADEMY OF SCIENCES, SECTION OF ELECTRON PHYSICS, BUDAPEST

[Manuscript received October 2, 1961]

In many problems of high-pressure gas discharges from externally heated cathodes the electronic space-charge plays an important part. In contrast to electron emission in vacuum concerning which in the last years formulas [1, 2] and a nomogram [3] have been published by means of which one may calculate the extension and density distribution of the space-charge in high-pressure gases, there are at present — to our knowledge — no mathematical expressions available for this purpose.

To overcome this difficulty in close analogy to the equation for the case of potential minimum in vacuum, and also to the space-charge equation for high-pressure gases [4], we may set up a differential equation for the one-dimensional case with infinite plan-parallel electrodes on the basis of Poisson's equation

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = - \frac{i_s e^{eU/[kT(x)]}}{\varepsilon_0 \bar{K} |(dU/dx)|} , \quad (1)$$

where the Boltzmann factor has been inserted on ground of the equation:

$$i = i_s \cdot e^{eUm/[kT(x)]} \quad (2)$$

In these equations U is the potential at the point x ; x is the distance from the cathode; i_s the saturation value of the electronic current density; i the electronic discharge current density which flows without producing ionization between the electrodes; e the electronic charge; k the Boltzmann constant; $T(x)$ the temperature of the gas and also of the electrons at x ; ε_0 the dielectric constant; \bar{K} the mean electron mobility in the gas.

Extending a well-known method [5], and taking at first T as a constant, we solve eq.(1) by multiplying both sides by $(dU/dx)^2$

$$\left(\frac{dU}{dx} \right)^2 \frac{d^2 U}{dx^2} = - \left| \frac{dU}{dx} \right| \frac{i_s}{\varepsilon_0 \bar{K}} e^{eU/kT} \quad (3)$$

Because of the identity,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dU}{dx} \right)^3 = 3 \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 \frac{d^2 U}{dx^2} \quad (4)$$

we are able to integrate eq.(3) between the limits zero and U_m , the potential minimum, and so obtain for its distance x_m

$$x_m = \left(\frac{kT}{e} \right)^{2/3} \cdot \sqrt[3]{\frac{-i_s \varepsilon_0 \bar{K}}{3i^2}} \left\{ \frac{3}{2} \ln \left(\sqrt[3]{1 - \frac{i}{i_s}} + \sqrt[3]{\frac{i}{i_s}} \right) + \right. \\ \left. + \sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{i_s - i}}{\sqrt[3]{i_s - i} - 2 \sqrt[3]{i}} \right\}. \quad (5)$$

To insert subsequently the variation of temperature with distance, we may use, on the evidence of literature [6], the following equation:

$$T(x) = T_0 + (T_c - T_0)e^{-\gamma x}. \quad (6)$$

Here, T_0 is the temperature of the gas at a relatively great distance from the cathode; T_c is the cathode temperature, and γ a constant.

With the aid of formula (6) and an iteration of computations we arrive at the appropriate value of T_m , taking first a supposedly correct temperature in eq.(5).

For example, in a discharge in argon, specified by the constants: $p = 500$ mm mercury; $T_c = 2500$ °K; $\bar{K} = 1.0$ m²/Vs; $i_s = 10^2$ A/m²; $i = 10^{-2}$ A/m²; $\gamma = 6.28$ cm⁻¹; $T_0 = 300$ °K, we obtain $x_m = 3.5$ mm; and $T_m = 535$ °K.

These values are in accordance with the position of the virtual cathode of the discharge, computed on ground of the mean free-path variations and the required ionization energy of electrons.

If in eq.(5) i had the value: 0.1 or 1 A/m², x_m would be diminished to 1.4 or 0.5 mm respectively. This change in the distance to potential minimum towards the incandescent cathode is associated with the increase of T_m to 1200 and 1920 °K. This augmentation transfers, in many cases, the virtual cathode into a region where — in consequence of the longer mean free paths — the electrons are able to ionize the gas and so alter completely the character of the discharge. We have experienced this change which occurs reversibly in both directions on augmenting and diminishing the discharge current.

The author would like to thank Professor E. WINTER, member of the Hungarian Academy of Sciences, for suggesting this theme, and for valuable discussions.

REFERENCES

1. NOTTINGHAM, W. B.: in *Handbuch der Physik*, Bd XXI p. 43 (Springer, Berlin 1956)
2. WEIZEL, W.: *Lehrbuch der theoretischen Physik II*. p. 1575 (Springer, Berlin 1958)
3. NOTTINGHAM, W. B.: *The Thermionic Diode as a Heat-to-Electrical-Power Transducer* in J. KAYE and J. A. WELSH, editors: *Direct Conversion of Heat to Electricity* p. 2-5 (Wiley, New York, 1960)
4. COBINE, J. D.: *Gaseous Conductors*, p. 128 (Dover Publications, New York 1958)
5. KAMKE, E.: *Differentialgleichungen I*. p. 113 (Akademischer Verlag, Leipzig 1951)
6. BRÓDY, J. and KÖRÖSY, F.: *J. of Appl. Phys.* Vol. 10, August 1939; p. 584

ELECTRICAL CONDUCTION AND BREAKDOWN PHENOMENA IN HIGH-PRESSURE ARGON USING AN EXTERNALLY HEATED CATHODE

(PRELIMINARY COMMUNICATION)

T. Z. SZELÉNYI

RESEARCH INSTITUTE FOR TECHNICAL PHYSICS OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, SECTION FOR ELECTRON PHYSICS, BUDAPEST

[Manuscript received October 2, 1961]

In exploring the high-pressure ($p = 500$ mm Hg) gas conduction and breakdown phenomena in argon using externally heated tungsten cathodes, some important novel results are achieved which we will describe in brief.

Our experimental arrangement consisted of a simple diode with a 120 K-ohm resistance in series.

The cathode was made of a tungsten wire, 0.02 cm in diameter, coiled in a spiral 3 cm long, 28 windings per cm; the outer diameter of the spiral was 0.08 cm. The anode consisted of a molybdenum disc, 2.5 cm in diameter, the rim of which was bent away from the cathode to avoid high field effects at the edge. The minimum distance between the electrodes was 4.0 cm. The electrodes were mounted in a hard glass cylinder of about 6 cm diameter, and 20 cm long. The spiral, the electrodes and also the axis of the tube were in a horizontal position.

The diode system was baked out at 420° C for 6 hours. The tungsten spiral was degassed by heating to 2400 — 2800° K, and the anode was degassed at about 1300° K by electron bombardment until high-vacuum conditions were achieved. After degassing, the tube was filled with "F"-tank-argon* which had been previously purified under high pressure by glowing calcium turnings. The argon passed through a solid carbondioxide trap and reached a pressure of 500 mm Hg. Before the measurements began, but after the tube had been sealed off, the spiral was heated in the gas at 3000° K for 20 minutes.

The results of the d.c. conductance measurements are shown as the logarithms of the anode current densities vs. cathode-temperature data at different constant voltages (as parameters) on the electrodes. The voltages were measured by an electrostatic voltmeter. Fig. 1 illustrates the conductance at 500 V, and breakdown at 820 V as two representatives from the family of many similar curves.

* Obtained as a gift from the Tungram Company Ltd.

In the curves, one can distinguish three consecutive parts: A, B, and C, which are the consequences of three different conduction mechanisms in the gas, as described below.

The data of the steep parts "A" of the curves are displayed in another manner in Fig. 2 where the logarithms of the anode current densities vs. the reciprocal cathode temperatures are plotted. As a completion, the 600 and 700 V data are also shown. From the graph we infer that in part "A", where the role of the space-charge is not observable, the negative slope can be inter-

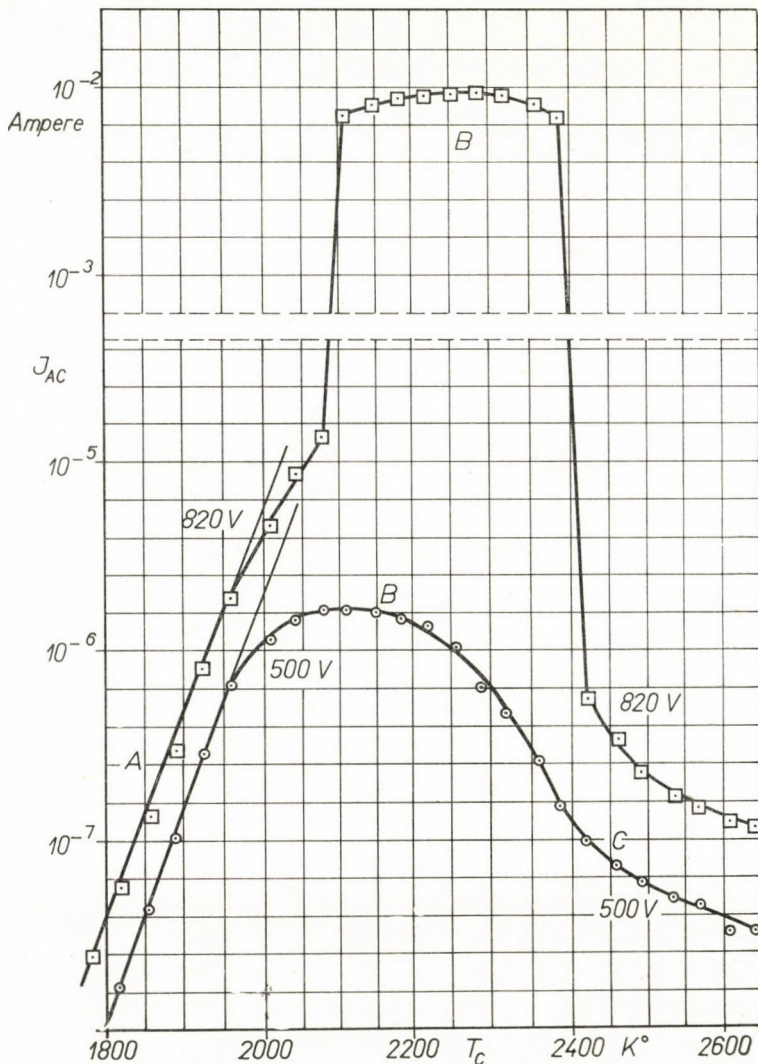


Fig. 1. Discharge-current density as function of the cathode temperature at constant voltages 500 and 820 V at the electrodes. Argon, $p = 500$ mm Hg, $R_s = 120$ K-ohm, 4 cm interval between the electrodes, tungsten spiral cathode, molybdenum-disc anode

preted as being proportional to an activation energy, φ , on ground of the equation $I_{AC} = a \exp [-e\varphi/kT_c]$ which applies to electrons emitted in dense gas. Assuming a to be a constant, the value of which is $120 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{T}^{-2}$, and extrapolating for zero field, we obtain

$$\varphi = 7.9 - 0.97 \cdot 10^{-3} \cdot T. \quad (1)$$

The high value of the activation energy and its temperature coefficient may

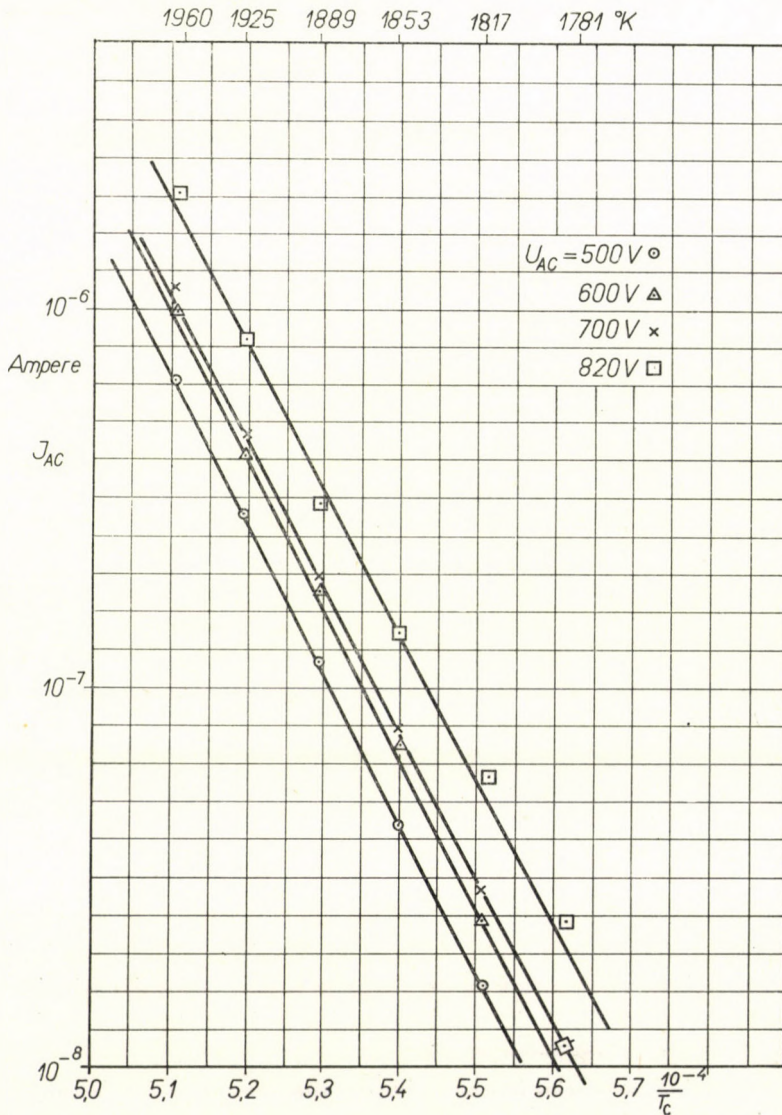


Fig. 2. Discharge-current density as function of the reciprocal temperature at constant voltages; 500, 600, 700, 820 V at the electrodes. Other data as in Fig. 1

be interpreted as some unintentional surface contamination of the cathode, and the effect of a bombardment by neutral argon-atoms. This latter effect may also depend on temperature if we consider that the impact mass of the gas-atoms at constant pressure is inversely proportional to the square-root of temperature.

The sudden jump of the current at the transition point between parts A and B in the 820 V curve is the consequence of beginning ionization which

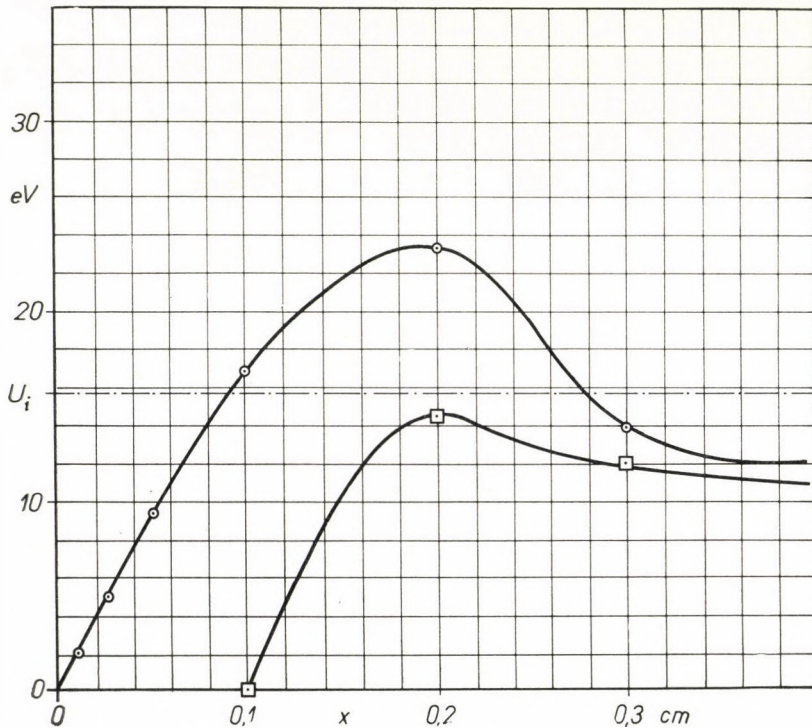


Fig. 3. Energy of an electron taken up from the field E , travelling in argon of variable density and 500 mm Hg pressure, as function of the distance x of the electron from the real or virtual cathode

occurs at a higher temperature in the neighbourhood of the cathode. Here, at constant pressure, the mean free path of the electrons is longer, and therefore the field is able to accelerate them to a sufficient energy for ionization. In Fig. 1 the height of the flat part B of the curve, exhibiting ionization, is limited in the upward direction by the series resistance, and, besides, it is also a function of the applied potential.

If the applied potential is only slightly above that which is just required for producing ionization — as in the demonstrated event of Fig. 1 with 820 V — the discharge will be not converted into a self-sustained one, and — with

increasing cathode temperature at the point between B and C — the current will abruptly drop again to the microampere range. We call this current reducing action an *impeding* effect, in contrast to the limiting effect due to the space-charge experienced in vacuum or in low-pressure gas.

To explain this unexpected drop of the characteristic, one must take into consideration the joint action of the electronic space-charge in consequence of which the discharge initiating virtual cathode arises at some distance from the cathode, and the temperature-gradient in the vicinity of the incandescent cathode. If at some distance from the cathode the mean free path in the cooler gas is shorter than that required for ionization to become possible, the discharge may be quenched. The condition for this effect is that the virtual cathode, behind which the electrons are not accelerated by the field, be sufficiently far from the cathode.

For conditions corresponding to the case in Fig. 1 we found by calculation [1] that the distance from the cathode to the potential minimum amounted to several millimeters. To conclude at least for the magnitude of the distance at which the ionization ceases, let us solve Compton's differential equation [2] for an idealized, one-dimensional case between infinite, plane-parallel electrodes:

$$e \cdot dU = eE \cdot dx - fUe \frac{dx}{S(x)}. \quad (2)$$

This equation must be modified according to the inhomogeneous gas-density conditions. We assume that the value of S changes as $S(T) = S_0 T/T_0$ with gas temperature. In these equations e is the electronic charge; $U(x)$ is the energy of the electron acquired from the field E ; x denotes the electron's distance from the cathode; f is a constant expressing the energy-rate which the electron loses in a single elastic impact against an argon atom; $S(x)$ is the distance along which the electron moves between two successive collisions on argon atoms in the direction, and in consequence of the field; for S_0 , we adopt the value $1.7 \cdot 10^{-6}$ cm; T is the absolute temperature of the gas at point x .

To determine $T(x)$ we used the experimental data of BRÓDY and KŐRÖSY [3] adapted to argon, and expressed them in successive steps for layers of 0.2 cm thickness:

$$\begin{cases} T(x) = T_{c_n} \cdot e^{-\kappa_n x} \\ 0 \leq x - x_n \leq 0.2 \text{ cm} \\ n = 0, 1, 2, \dots \\ x_n = 0.2 \cdot n \end{cases} \quad (3)$$

Here, T_{c_n} denotes the temperature of the gas at x_n , T_{c_0} indicates the tempera-

ture of the cathode, and $\kappa_0 = 5.15$, $\kappa_1 = 2.99 \text{ cm}^{-1}$. According to equations (1), (2), (3), we have

$$\frac{dU}{dx} + \frac{fT_0 e^{\kappa_1 x}}{S_0 T_c} U - E = 0, \quad (4)$$

with the boundary condition: $U = U_n$, if $x = x_n = 0.2n$; $U_0 = 0$.

The solution of eq. (4) is plotted in Fig. 3. From this we see that the electron, travelling in the direction of the field, falls short of the ionization energy already at a distance of some millimeters. This fact explains the impeding effect in the case of the 820 V curve shown in Fig. 1.

For a better understanding of part C of the characteristic in general, we measured in this temperature-range the logarithms of the discharge currents as functions of the potential difference at the electrodes. The linear relations, as established here, prove that — in spite of the impeding effect — charge-carrier multiplication also takes place. As the impeding effect suppresses multiplication, it is conceivable that it is this action which is always responsible for the diminution of the discharge current whenever temperature is increased.

A more detailed discussion of the above findings is intended for publication in the near future.

The author wishes to thank Professor E. WINTER, member of the Hungarian Academy of Sciences, for suggesting this subject, and for valuable discussions.

REFERENCES

1. SZELÉNYI, T. Z.: Acta Technica Acad. Sci. Hungaricae, XXXIV, p. 457. See previous paper.
2. LOEB, L. B.: Basic Processes of Gaseous Electronics (Univ. California Press, Berkeley, 1960) p. 221
3. BRÓDY, I. and KÖRÖSY, F.: Convection and Conduction of Heat in Gases, J. Appl. Phys. 10, (1939, VIII), p. 584

INDEX

- Szöke, B.* : Methods for the Delineation of Axonometric and Perspective Projections; Functional Principles of the Existing Transformer Devices — Zeichnungsverfahren von axonometrischen und perspektiven Projektionen. Arbeitsprinzipien von Zeichenmaschinen gangbarer Ausführungen — Méthodes de délinéation des projections axonométriques et perspectives; principes de fonctionnement des instruments actuels — Секе Б.: Методы отображения аксонометрических и соответственно перспективных проекций из точных по размеру проекций и принципы работы устройств для отображения 231
- Likeš, J., Čadek, J. und Mazanec, K.* : Eine Methode zur Bestimmung der Anzahl und Größe diskusförmiger Teilchen der Dispersionsphase — Method to Determine Number and Size of Disc Shaped Particles of the Dispersion Phase — Méthode pour la détermination du nombre et de la grandeur des particules discoïdes de la phase de dispersion — Ликекс Й., Чадек Й. и Мазанец К.: Метод определения количества и размеров дискообразных частиц дисперсионной фазы 259
- Kereszty, P.* : Pesage des charges de roues des véhicules de chemin de fer à deux essieux — Das Wägen des Raddruckes von zweiachsigen Eisenbahnwagen — Balancing of the Wheel-load of Two-axled Railway Carriages — Керестти П.: Определение давления колес двухосных железнодорожных вагонов 281
- Lipka, I.* : Theorie der Ableitung von Polygonprofilen — Theory on the Deduction of Polygon Profiles — Théorie de la formation des profils polygonaux — Липка, И.: Теория нахождения производной полигонных профилей 319
- Csonka, P.* : Elliptic Paraboloid Shells with Constant or Continuously Varying Thickness Having an Elliptic Base — Elliptische Paraboloidschalen über elliptischen Grundriß mit konstanter oder kontinuierlich veränderlicher Wandstärke — Voile en forme de parabolöide elliptique construit sur une base elliptique, d'épaisseur de paroi constante ou à variation continue — Чонка, П.: Эллиптическая параболоидная оболочка с неизменной или непрерывно изменяющейся толщиной стенки над эллиптическим основанием 337
- Dévényi, Gy. und Mecseki, I.* : Die Verformbarkeit von Al 99,5 und Cu-E-Rohren und die Veränderung ihrer mechanischen Eigenschaften beim Hohlzug — The Ductility of 99.5% Aluminium and Electrolytic Copper Tubes and the Changes in their Mechanical Characteristics at Hollow Drawing — Malléabilité et variation des propriétés mécaniques des tubes en aluminium à 99,5% et des tubes en cuivre électrolytique, pendant l'étirage en creux — Девени Г. и Мечеки, И.: Обрабатываемость и изменение механических свойств при протяжке труб из 99,5% алюминия и электролитной меди 351
- Böleskei, E.* : Über die grundlegenden rheologischen Eigenschaften der Festkörper — On the Fundamental Rheologic Properties of Solid Bodies — Des propriétés rhéologiques fondamentales des solides — Бельскеи, Э.: Основные реологические свойства твердых тел 369

- Klimov, B.* : Ein Beitrag zur Biegetheorie der flachen doppelt gekrümmten Schalen mit veränderlicher Dicke — Contribution to the General Bending Theory of Flat Shells Curved in two Directions Having a Varying Thickness — Contribution à la théorie de la flexion des voiles plats doublement courbes et d'épaisseur variable — *Климов, Б.*: Моментная теория расчета пологих оболочек двоякой кривизны при переменной толщине 403
- Szendy, Ch.* : Simple and Generalized Method for Developing the Incremental Transmission Losses — Eine einfache allgemeine Methode für Bestimmung der Zuwachsnetzverluste — Une méthode simple et générale pour la détermination des pertes de transport différentielles — *Сенди, К.*: Простой и общий метод определения приращивания потерь 421
- Fonó, A.* : The Economics of Long Natural-gas Pipelines — Die Wirtschaftlichkeit von langen Erdgasleitungen — L'économie des conduites de gaz naturel longues — *Фонно, А.*: Экономичность длинных трубопроводов природного газа 437
- Széchy, Ch.* : A More Exact Evaluation of Pile Test Loadings — Genauere Auswertung bei Pfahlprobelastungen — Une méthode pour l'évaluation plus exacte des essais de mise en charge des pieux — *Сечи, К.*: Уточненная оценка пробной нагрузки свай 445
- Szelényi, T. Z.*: Distance to Potential Minimum of the Electronic Space-Charge from Externally Heated Cathodes in Inert High-Pressure Gas-discharges — Der Abstand des Potentialminimums der Elektronenraumladung in Edelgasentladungen von nahezu atmosphärischem¹ Druck, mit einer von außen geheizter Kathode — La distance du potential minimum de la charge électronique de l'espace dans les décharges des gaz rares à haute pression avec cathodes chauffées de l'extérieur — *Селени, Т. З.*: Расстояние минимума электронной зарядки потенциала при разрядах в инертных газах высокого давления в случае накаливаемых извне катодов 453
- Szelényi, T. Z.*: Electrical Conduction and Breakdown Phenomena in High-pressure Argon Using an Externally Heated Cathode — Elektrische Leitungs- und Durchschlagserscheinungen in Argon, bei nahezu atmosphärischem Druck, mit einer von außen geheizter Kathode — Conduction et décharge électriques dans l'argon à haute pression en employant une cathode chauffée par l'extérieur — *Селени, Т. З.*: Явления электрической проводимости и пробоя в аргоне высокого давления в случае накаливаемых извне катодов. 457

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
A kézirat nyomdába érkezett: 1961. VII. 13

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
Terjedelem: 20,50 (A/5) ív, 128 ábra

1961.53742 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

