

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXII

FASCICULI 1—2



1961

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

TOMUS XXXII

INDEX

- Balogh, A.* : Einiges über die Eigenschaften der charakteristischen Gleichung bei Torsionsschwingungen — On some Features of the Characteristic Equations of Torsion Oscillations — Quelques propriétés des équations caractéristiques des vibrations de torsion — *Балог, А.* : Некоторые свойства характеристических уравнений торсионных колебаний 429
- Barta, J.* : Schranken für die Knicklast des einseitig eingespannten dünnen Stabes von veränderlichem Querschnitt — Bounds for the Buckling Load of a Thin Column Clamped at one End and Having Varying Cross Sections — Bornes pour la valeur critique de la charge compressive d'une barre mince aux sections variables, encastrée à une extrémité — *Барта, И.* : Пределы критической нагрузки тонкого стержня переменного сечения, зажатого на одном конце 321
- Bella, E.* : Warmstauchversuche mit Kupfer bei kleinen Formänderungsgeschwindigkeiten — Hot Bulbing Experiments with Copper at Low Forming Rates — Essais de déformation par compression de cuivre électrolytique, à faible vitesse de déformation — *Бэлла, Э.* : Опыты по горячему осаживанию меди при небольшой скорости деформации 221
- Bognár, G.* : Colloquium on Microwave Communications — Kolloquium für Richtfunkverbindungen — Colloque sur les liaisons hertziennes — *Богнар, Г.* : Коллоквиум по микроволновой связи 441
- Buray, Z.* : Die Verminderung der Schweißrisigkeit einiger Aluminiumlegierungen mit gewissen Zusatzelementen — The Decrease of Weld Cracking Tendency of some Aluminium Alloys Having Additional Elements — Diminution de la tendance à la fissuration de certains alliages d'aluminium par diverses additions — *Бурай, З.* : Уменьшение с помощью добавок склонности к трещинообразованию при сварке отдельных алюминиевых сплавов 93
- Csonka, P.* : Apse-like Formed Rotation-paraboloid Shells — Rotationsparaboloidförmige Schalen — Absides en paraboloides de révolution — *Чонка, П.* : Полукруглые оболочки, оформленные по параболоиду вращения 39
- Csonka, P.* : Buckling of Bars Elastically Built-in along their Entire Length — Die Knickung eines entlang seiner ganzen Länge elastisch eingespannten Stabes — Flambage d'une barre élastiquement encastrée sur toute sa longueur — *Чонка, П.* : Прогиб стержня, зажатого эластично по всей длине 423
- Dulácska, E.* : Die Biegetheorie der langen, flachen, elastischen Kreiszyinderschalen — The Bending Theory of Long Oblate Circular-cylindrical Shells — Théorie de flexion des voiles cylindriques circulaires longs, aplatis et élastiques — *Дулачка, Э.* : Теория изгиба длинных, плоских и эластичных кругло цилиндрических оболочек 343
- Fekete, L.* : Neue Methoden der Schlackenberechnung in der NE-Metallurgie — New Methods for the Computation of Slag in Metallurgy — Nouvelles méthodes de calcul de scorie dans la métallurgie des métaux — *Фекете, Л.* : Новый метод расчета шлаков в цветной металлургии 299

- Fuchs, E. G.*: Die thermische Dimensionsänderung der vakuumtechnischen Stromdurchleuchtungsdrähte aus Fe-Ni-Legierung mit Kupferüberzug — Heat-caused Dilatation of Copper-clad Iron—Nickel Current-carrying Wires for Vacuum Engineering — Dilatation des fils conducteurs de courant en FeNi à revêtement de cuivre, utilisés dans la technique du vide poussé — Фукс, Э.: Тепловое изменение размеров покрытых медной оболочкой железо-никельных токоредущих проволок, применяемых в вакуумной технике 53
- Fuchs, E. G.*: Bestimmung des Restaustenitgehaltes gehärteter Stähle mit Röntgen-Feinstrukturanalyse — Determination of the Residual Austenite Content in Hardened Steels by X-Ray Diffraction — Détermination par radiodiffraction du contenu résiduel en austénite des aciers trempés — Фукс, Э.: Рентгенодифракционное определение содержания остаточного аустенита закаленных сталей 389
- Goschy, B.*: Eigenschwingungen der Schrägseilbrücken — Free Frequency of Bridges Suspended on Skew Cables — Frequences propres des ponts suspendus par des cables obliques — Гоши, Б.: Собственные колебания арфообразных мостов 119
- Káldor, M.*—*Szikszai, M.*: Über die Rekristallisation der Legierung Cu—Ni 80/20 — Recrystallization of Cu—Ni Alloy No. 80/20 — Sur la recristallisation de l'alliage Cu—Ni 80/20 — Кальдор, М. и Сиксац, М.: О рекристаллизации Cu—Ni сплава 80/20 149
- Kollár, L.*: Stability of Centrally Compressed Shell-arches — Die Stabilität auf mittigen Druck beanspruchter Schalenbögen — Stabilité des voiles en arc comprimés concentriquement — Коллар, Л.: Стабильность центрально сжатых арочных оболочек 11
- Kollár, L.*: Stability of Bent Shell-arches — Über die Stabilität auf Biegung beanspruchter Schalenbögen — Stabilité des voiles en arc fléchis — Коллар, Л.: Стабильность изогнутых арок в виде оболочек 267
- Kovács, K. P.*: Das Anlassen und Regeln von Schleifring-Asynchronmotoren mit asymmetrischem Läuferwiderstand — Starting and Control of Slip-ring Asynchronous Motors by Means of an Asymmetric Rotor Rheostat — Démarrage et réglage des moteurs synchrones à bagues par une résistance rotorique asymétrique — Ковач, К. П.: Пуск и регулирование асинхронных двигателей с фазовым ротором с помощью асимметричного роторного реостата 197
- Kurutz, I.*: The Regulation of the Radial Flow Impeller by Adjusting the Impeller Blades — Leistungsregulierung des radial durchströmten Laufrades durch Umstellung der Laufschaufeln — Réglage du débit d'une roue centrifuge par le déplacement angulaire des aubes — Курutz, И.: Регулирование мощности рабочих колес радиального перелива установкой лопасей рабочих колес 415
- Lázár J.*: Untersuchungen über die Korngrößenverteilung feingebrochener Materialhaufen — Investigations on the Granulometric Composition of Desintegrated Aggregations as Produced by Comminuting Machines — Recherches sur la distribution des grains dans un agglomérat concassé par des concasseurs fins — Лазар, Ж.: Исследование гранулометрического состава множеств, измельченных тонкодробящими машинами 325
- Lewin, L.*: Diversity Reception and Automatic Phase Correction — Diversity-Empfang und automatische Phasenkorrektion — Réception diversity et correction de phase automatique — Левин, Л.: Диверзитный прием и автоматическая коррекция фазы 445
- Madarász, B.*: Logical Machine for Automatically Setting up an Equivalent Relay Network — Logische Maschine für die Herstellung eines equivalenten Systems von Relais — Une machine de logique pour la production automatique d'un réseau de relais équivalent — Мадарас, Б.: Логическая машина, автоматически создающая эквивалентную релейную сеть 3

<i>Mašin, A.—Bakalíková, O.</i> : Über den Einfluß von Druck, Temperatur und mechanischem Schleifen auf das Entstehen des Oberflächenmartensits — Influence of Pressure, Temperature and Mechanical Grinding on the Appearance of Surface-martensite — Influence de la pression, de la température et de la préparation mécanique sur la formation de la martensite superficielle — <i>Машин, А. и Бакаликова, О.</i> : О влиянии давления, температуры и механической шлифовки на возникновение поверхностного мартенсита	247
<i>Mašin, A.—Jezek, J.—Bakalíková, O.</i> : Über das Wesen des Oberflächenmartensits — About the Nature of Surface-martensite — Sur la nature de la martensite superficielle — <i>Машин, А., Ежек, Й., Бакаликова, О.</i> : В чем заключается суть поверхностного мартенсита	261
<i>Шандор, И. и Сабо, Я.</i> : Расчет прямоугольных шайб — <i>Sándor, I.—Szabó, J.</i> : Die Berechnung wandartiger Träger — Analysis of Deep Beams — Calcul des poutres-cloisons	185
<i>Szántó, I.</i> : The Characterization of Lattice Distortion Spectra with Deformation Indices — Beschreibung von Gitterverzerrungsspektren mittels Deformationsindexen — Description des spectres de distorsion de grille par des indices de déformation — <i>Санто, И.</i> : Описание спектров при помощи индексов деформации	65
<i>Széki, P.</i> : The Influence of Heat Treatment on the Strain-ageing of Aluminium-killed Mild Steel — Der Einfluß der Wärmebehandlung auf die Reckalterung von mit Aluminium beruhigtem niedriggekohtem Stahl — Influence du traitement thermique sur le vieillissement apres l'écrouissage de l'acier doux calmé à l'aluminium — <i>Секи, П.</i> : Влияние термообработки на старение обработки низкоуглеродистой стали успокоенной алюминием	141
<i>Tarján, G.</i> : Some Theoretical Questions on Classifying and Separating Hydrocyclones — Einige theoretische Fragen der Klassier- und Waschhydrozyklone — Quelques questions théoriques sur les cyclones hydrauliques de triage et d'enrichissement — <i>Тарьян, Г.</i> : Некоторые теоретические вопросы классифицирующих и обогащающих гидроциклонов	357
<i>Томашев, Н. Д.</i> : Развитие электрохимической теории коррозии металлов — <i>Tomaschow, N. B.</i> : Über die Entwicklung der elektrochemischen Theorie der Metallkorrosion — Development of the Electrochemical Theory of Metal Corrosion — L'évolution de la théorie électrochimique de la corrosion du métal	163

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXII



1961

LOGICAL MACHINE FOR AUTOMATICALLY SETTING UP AN EQUIVALENT RELAY NETWORK

B. MADARÁSZ

RESEARCH INSTITUTE FOR THE INSTRUMENTS INDUSTRY, BUDAPEST

[Manuscript received February 28, 1958]

I. Introduction

Logical machines in the narrower sense are understood to be machines which are able to carry out logical operations presented in the form of formulas, through the application of mathematical logic.

Given a logical function $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ where both the variables x_1, x_2, \dots, x_n and the value of the function y itself are restricted to one of the two symbols 1 and 0, the following questions may be posed:

1. If given values of x_1, x_2, \dots, x_n are substituted, what value may y assume?
2. For the case of what system of values x_1, x_2, \dots, x_n will y assume a *prescribed* value? (Synthesis.)
3. Let the function y be produced by the physical input (*e. g.* by a relay network) of a circuit diagram.
4. Let the function y be simplified.

In the course of the past twenty years the problems that have been enumerated have been satisfactorily solved with machines using relays and partly also with electronic machines.

Among the solutions produced it may suffice to mention FERRANTI's machine, which may by now be regarded as classical, the Logical Machine of Szeged, SHANNON's relay circuit analyser and the machine Mark LRR1 constructed at the Polytechnical University in Vienna under the guidance of professor ZEMANEK.

The present paper is the description of a logical machine which is capable of automatically setting up the equivalent of any unknown circuit network contained in a closed box.

II. The object

Assume the following problem in relay technique: Given a "box" such as that shown in Fig. 1, of whose interior we know only that it contains relays with one pair of contacts (make or break) each. However complex the network, the contacts of the relays represent a two-terminal network between the "in"

and "out" points. Bridge networks are also permitted. The input terminals marked x_1, x_2, \dots, x_n are connected to the operating coils of the relays. Several relays may be connected to one input terminal. Each of the terminals x_1, x_2, \dots, x_n may be in either a grounded or energised state. The energised state is symbolised by 1, the grounded by 0. For every binary variation on the terminals x_1, x_2, \dots, x_n there will be a corresponding value, 0 or 1, at the output. The output value may be represented in general terms by a function

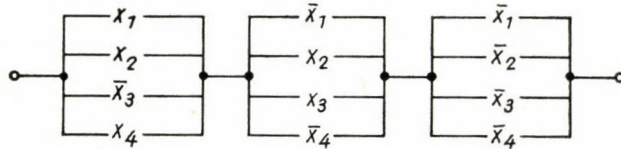
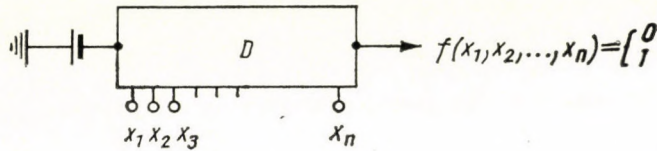


Fig. 1

with n variables, such that $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. This is the general form of an elementary logical function (of the calculus of decisions), with n variables.

Object : Let a machine be constructed, which will automatically reproduce the circuit inside the box D (Fig. 1), or more precisely, which will prepare the equivalent D^+ of D , whose outward effect is identical. (The equivalent may also be *simpler* according to some incomplete conjunctive normal form, *i.e.* the machine may also carry out simplifications on the circuit in this sense.)

III. The structure and operation of the machine

Fig. 2 shows the circuit diagram of the machine. The principle on which it is based rests upon the following logical theorem:

Every formulæ of the calculus of decisions may be written in the fully conjunctive normal form, as the conjunction of disjunctions. Translated into the language of the analysis of relay circuits this well-known theorem says:

All two-terminal relay networks are equivalent to a circuit consisting of parallel blocks connected in series, where each relay is represented by one pair of contacts in each of the blocks. Thus

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

is a logical function with four variables, and the circuit belonging to it. Negation has as usual been symbolized by a bar above, conjunction by the ordinary sign for addition, disjunction by the ordinary sign for multiplication. In the instrumentation of the formula x_i corresponds to a made and \bar{x}_i to a broken contact.

The object that has been set may now be solved with the help of variational elements and a comparative element, if we consider that the two systems

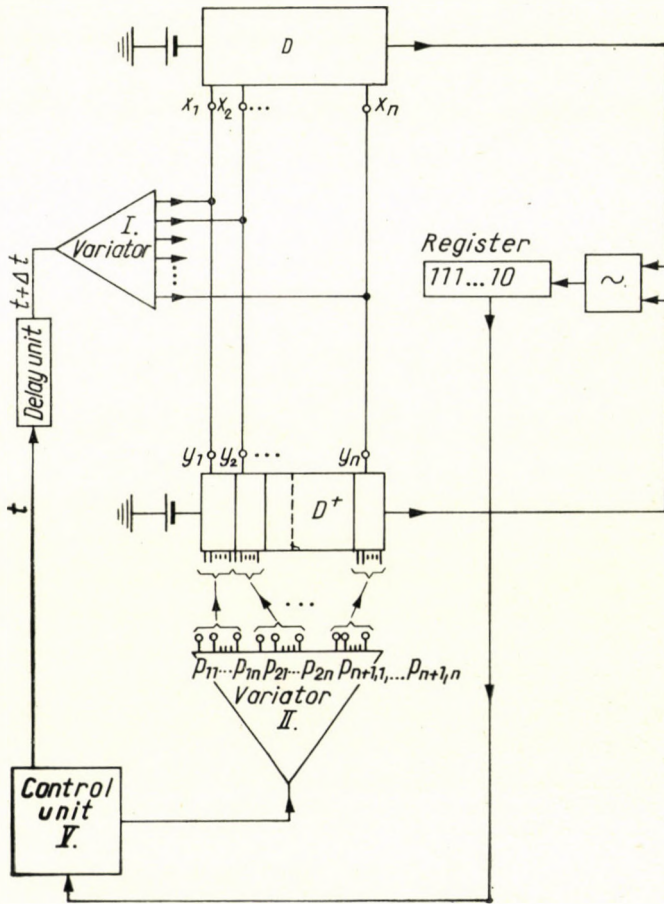


Fig. 2

are equivalent if and only if both systems produce identical logical values (0 or 1) at the output for all control variations (which involve the performance of all possible substitutions for the independent variables of the functions).

The relay circuit to be copied (or possibly simplified) is represented by the box D , while the setting up of its equivalent takes place in D^+ . The control

variations (substitutions) are provided by the variator I, while the actual setting up is done by the three-position switching relays marked p_{ij} , located in the cells of D^+ . Here the index i has successive values from 1 to $n + 1$, while the index j may assume any value between 1 and 2^n . The constructional units are the relay contacts marked y_k ($k = 1, 2, \dots, n$). The function of the three-position switching relays is to connect the contacts y_k in series with them to one of the blocks either as break, or as make contacts, or not at all, if they remain in their central position. Obviously, the coils of the switching

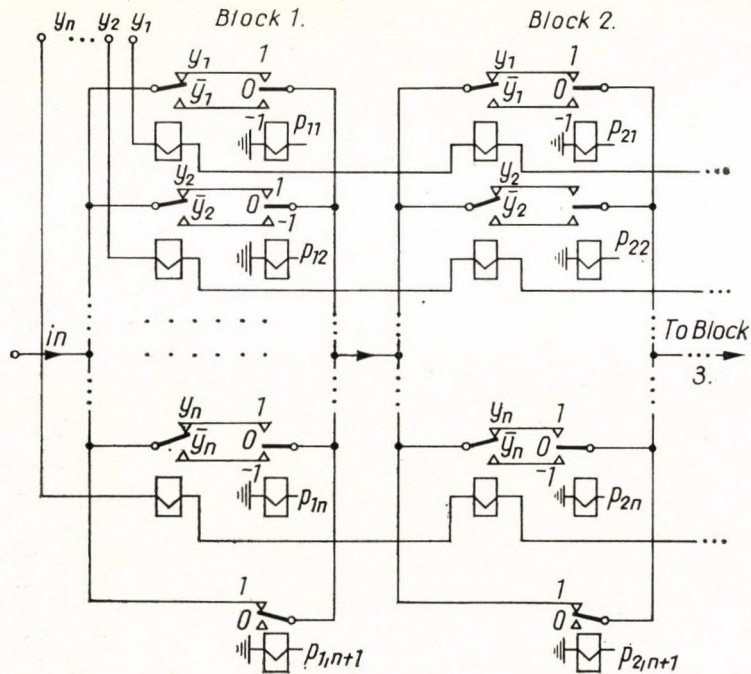


Fig. 3

relays must have positive or negative potentials or ground connected to them to produce one of the three conditions described. Fig. 3 shows two blocks of D^+ in detail.

When searching for an equivalent circuit, the full normal form is available, which in the case of n variables contains 2^n blocks. The method by which the variator of the machine operates is first to take the first, then the first two blocks (constructional units), while all the other cells are short-circuited. The relays p_{ij} of these two blocks are then energised according to all the possible variations, etc. Thus any contact y_k of every block may be connected

or not, according to the required scheme as a make or a break contact. Moreover, each block has a relay marked $p_{n+1,j}$ which can short-circuit *the whole* block.

The operation of the entire machine, shown in Fig. 2, takes place as follows:

1. The variator II receives a command to start from the control unit V (which is a motor driven sequence contactor containing a simple program).

2. Variator II establishes the first variation in which one of the potential values 1, -1 and 0 is applied to each of the terminals p_{ij} . (In the case belonging to the index $i + 1$ only one of the values 1 or 0.) A period of time Δt is needed to do this.

3. After Δt had elapsed, *i.e.* when the variation has been set up, variator I sends a series of investigating potentials consisting of signals for 0 and 1 to the coils of the relays y_k of both D and D^+ .

4. The condition of the output of D and D^+ is compared by an equivalence unit marked \sim , and the result is sent to the register in the shape of a potential 0 or 1.

5. If the register has received a signal 1, it forwards a signal to the control units, which issues a command to variator II to set up the next variation which follows. This process continues until the register receives the signal 0. In this case II proceeds to the next position in the sequence and variator I starts again at the beginning.

Ultimately, as a result of systematic trial, the equivalent of the system D is reproduced in the cells of D^+ .

The fact that the connections of the relay contacts y_1, y_2, \dots, y_n which bring about the circuit that is sought did not actually have to be "soldered" in the appropriate place as the system of relays p_{ij} was used for this system, involves only an apparent simplification. Theoretically, the two cases are identical, for the relays y_k did not, before the setting up was commenced, belong to any circuit and the only simplification permitted was that they were first placed in a system of compartments.

It may easily be shown that the equivalent circuit may come about not only in the full conjunctive normal form, but also in, say, an incomplete conjunctive normal form containing the minimum number of relay contacts, such as the following function

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 + x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_5.$$

The machine thus produces all the parallel-series equivalents. It stops after each successful attempt to enable the scheme of connections established in box D^+ to be recorded, through the positions of relays p_{ij} , which operate three different coloured lights per relay on the front of the box D^+ .

IV. Practical example

The practical usefulness of the machine is illustrated by the following example: let a relay problem be set in which a two-terminal network (which could be the signalling circuit of a transformer station or the circuit of a railway interlock scheme) must obey the following conditions: Accordingly, as the relays R_1, R_2, R_3, R_4 are switched on (1) or off (0) a lamp should light up only if the various relays are simultaneously energised or not energised, respectively, according to the following table:

R_1	R_2	R_3	R_4
1	1	1	0
0	1	0	1
1	1	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	0	1	0

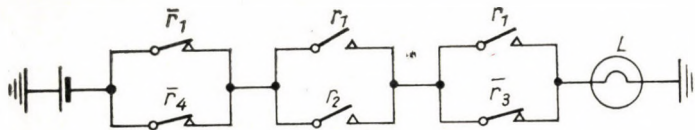


Fig. 4

For all other variations the lamp must not light. On the basis of the table the full conjunctive normal form may immediately be written:

$$r_1 r_2 r_3 r_4 + r_1 r_2 r_3 \bar{r}_4 + r_1 r_2 \bar{r}_3 r_4 + r_1 r_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4 + \bar{r}_1 r_2 r_3 \bar{r}_4 + r_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 r_4 + r_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4 + \bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4 + \bar{r}_1 \bar{r}_2 r_3 \bar{r}_4 + \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4$$

A circuit that satisfies this logical function will obviously comply with the conditions required, but it will contain very many superfluous contacts. The reduction of the circuit may be done according to the rules of switching algebra, but this would take considerable time even in the case of a practiced designer. The tiresome work of computing and testing is done automatically by the machine which, in a matter of minutes, "provides" the simplified circuit according to the Fig. 4.

It should be pointed out that if a so-called mixed circuit is used, one more contact may be saved. The machine, however, is not built to achieve this, any more than it can set up bridges. At any rate, the initial 40 contacts have been successfully reduced to 6.

Another very important feature of the apparatus is that the machine, in the course of reproduction, establishes logical contact among elements (relays) which formerly had no contact with active circuits, and parts that are already functioning. In this respect the machine may be regarded as a modest step towards the construction of automatic cybernetical devices which are able to build and organize themselves, without outside interference.

SUMMARY

The author describes an automatic device which will set up the circuit of a simplified network D^+ to be the equivalent of a relay network D , whose circuit diagram is unknown. The operation of the machine is based on the connection of relay networks in circuits which represent the conjunctive normal form, moreover on the fact that two such relay networks are equivalent if they respond to identical input signals by identical outputs.

The operation of the device requires a comparison unit and two variation units, one of which sets up the circuit scheme corresponding to the conjunctive normal form (seeks

a circuit structure), while the other variator produces in a fixed order the signal variations necessary for comparison. The control unit, which is not described in detail, only controls the starting and stopping of the variation units, according to the result of the comparison.

Apart from its practical significance, the apparatus is a simple example of an automatic cybernetical device in which the principle of feedback is applied to the reorganization of circuit structures, through the insertion and removal of elementary switching units.

LOGISCHE MASCHINE FÜR DIE HERSTELLUNG EINES EQUIVALENTEN SYSTEMS VON RELAIS

B. MADARÁSZ

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser macht eine automatische Einrichtung bekannt, welche fähig ist, die Schaltung eines vereinfachten, mit D^+ bezeichneten Systems, welches einem anderen System von Relais von unbekannter Zusammenstellung equivalent ist, herzustellen. Die Wirkung der Maschine beruht auf einer Schaltung der Relaisysteme, die die konjunktive Normalform realisiert, sowie darauf, daß zwei solche Relaisysteme equivalent sind, wenn sie identische eingehende Zeichen mit identischen ausgehenden Zeichen beantworten.

Zur Wirkung der Maschine ist ein Vergleichungselement nötig, weiters zwei Variationseinheiten, von welchen die eine das der konjunktiven Normalform entsprechende Schaltungsdiagramm entwickelt (die Schaltstruktur sucht), während der zweite Variator die Zeichenvariationen in einer festgesetzten Reihenfolge, welche zur Vergleichung nötig ist, herstellt. Die in ihren Einzelheiten nicht erörterte Reglereinheit steuert nur die Anlassung und Abstellung der Variationseinheiten nach den Resultaten der Vergleichung.

Diese Konstruktion, abgesehen von ihrer praktischen Bedeutung, liefert auch ein einfaches Beispiel von einem kibernetischen Automat, welches das Rückführungsprinzip für die Reorganisation von Schaltstrukturen verwendet, wo bei elementare Schaltelemente ein- und ausgerückt werden.

UNE MACHINE DE LOGIQUE POUR LA PRODUCTION AUTOMATIQUE D'UN RÉSEAU DE RELAIS ÉQUIVALENT

B. MADARÁSZ

RÉSUMÉ

L'auteur décrit une installation automatique pour la production d'un réseau simplifié désigné par D^+ , qui est équivalent à un réseau de relais de schème inconnu désigné par D. Le principe de fonctionnement de la machine se base sur une connexion des réseaux de relais réalisant un schème normal conjonctif, ainsi que sur l'équivalence de deux réseaux de relais répondant à des signaux d'entrée identiques par des signaux de sortie identiques.

Le fonctionnement nécessite un élément de comparaison, ainsi que deux unités de variation, dont l'une produit le schème de connexion correspondant au schème normal conjonctif (recherche la structure de connexion), l'autre unité de variation produisant, selon un ordre fixe, les variations de signaux nécessaires pour une comparaison. L'unité de commande, n'étant pas décrite en détail, commande seulement le démarrage et l'arrêt des unités de variation, selon les résultats de la comparaison.

L'auteur présente l'importance pratique de la construction, qui fournit aussi l'exemple de l'application d'un système d'automate cybernétique, où le principe de la conduction inverse est appliqué à la réorganisation du schème de connexion, par l'intercalation et l'interruption des éléments de connexion élémentaires.

ЛОГИЧЕСКАЯ МАШИНА, АВТОМАТИЧЕСКИ СОЗДАЮЩАЯ ЭКВИВАЛЕНТНУЮ РЕЛЕЙНУЮ СЕТЬ

Б. МАДАРАС

РЕЗЮМЕ

Автор дает описание такого автоматического устройства, которое разрабатывает схему упрощенной сети, обозначенной через D^+ , эквивалентную релейной сети неизвестного плана, обозначенной через D . Работа машины основывается на схеме релейной сети, реализующей конъюнктивную нормальную форму, далее на том, что две такие релейные сети являются эквивалентными, если на идентичные сигналы входа отвечают идентичными сигналами выхода.

Для работы необходимо иметь один сравнительный элемент, далее две вариационные единицы, среди которых один вариатор создает схему соединений, соответствующую конъюнктивным нормальным формам (ищет структуру схемы соединения), а другой вариатор создает вариации знаков по фиксированному порядку, необходимые для сравнения. Блок управления, не описанный детально, управляет лишь пуском и остановом вариационной единицы в соответствии с результатом сравнения.

Конструкция кроме практического значения дает простой пример такого кибернетического автомата, у которого принцип сведения применен для реорганизации структур схем соединений на основе введения и выведения элементарных элементов схемы соединения.

STABILITY OF CENTRALLY-COMPRESSED SHELL-ARCHES

L. KOLLÁR

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES

PLANNING OFFICE FOR INDUSTRIAL AND AGRICULTURAL BUILDING, BUDAPEST

[Manuscript received February 24, 1959]

1. Introduction

1.1. The subject of the paper

The aim of this paper is the investigation of the stability of centrally-compressed thin elastic bars with curved axis (in the following called shell-arches) in their own plane. Central compression means that the funicular polygon of external forces coincides with the axis of the arch. From the viewpoint of practical use it would be desirable, if we could solve this problem for arches with optionally symmetrical or variable cross-section, furthermore,

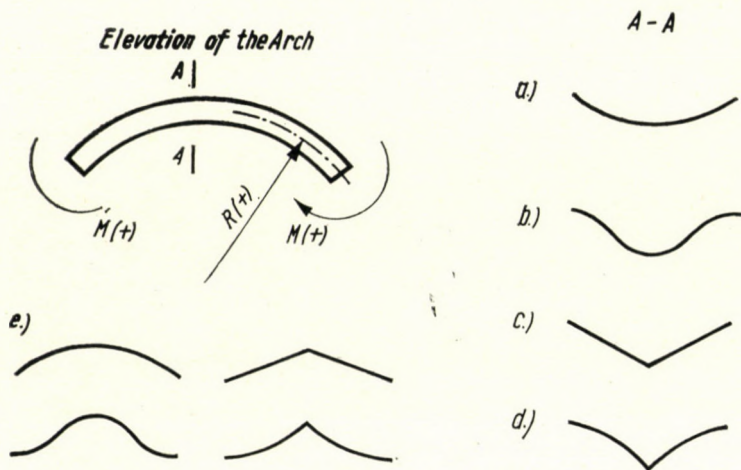


Fig. 1

for arches the axis of which is an optional curve, finally, for arches supported at discretion. We do not want to deal with the problem in this generalized form. We will prove, however, that the determination of the critical load of such a general shell-arch would become possible, if we were able to solve the following simple problem.

Let us investigate the shell-arch shown in Fig. 1, the cross-section of which is optionally symmetrical and its longitudinal axis is a circular arc.

The cross-section and the thickness of this arch are constant everywhere. The structure is only affected at both ends by two couples of opposite sign, this means that such an arch does not need any support. We want to determine the relation between the bending moment affecting the arch and the change in its curvature. Thus, first of all this problem shall be dealt with.

1.2. Description of the arch's behaviour

Shell-arches are used for roofing structures in engineering practice (Fig. 2). Their shape resembles the form of shells curved in two directions, but there are no edge-beams along their longitudinal edges. It is the very



Fig. 2

reason why when affected by an optional loading they cannot be in the membrane state, but transversal moments are arising in them.

The difference between the behaviour of a shell-arch and a normal bar (with solid cross-section) is the following: if a normal bar is affected by bending, then between the change (χ) in curvature and the bending moment (M) the following relation is valid:

$$M = E \cdot J \cdot \chi, \quad (1)$$

where E is the modulus of elasticity of the bar's material, and J is the moment of inertia of the bar's cross-section.

The product $E \cdot J$ is also called the bar's *bending stiffness*. In the following under the expression bending stiffness, generally the relation between the bending moment and the change in curvature should be understood.

We will prove that if a *shell-arch* is bent, then between the bending moment and the change in curvature the following relation holds (Fig. 3):

$$M = A(R) \cdot \chi - B(R) \cdot \chi^2, \quad (2)$$

where $A(R)$ and $B(R)$ are expressions depending on the radius R of longitudinal curvature.

From Fig. 3 the following important results can be read:

a) The shell-arch loses its stability in the case of pure bending at a certain moment M_{crit} .

b) From relation $M = E \cdot J_0 \cdot \chi$, calculated on the base of the elementary moment of inertia J_0 of the shell's cross-section, we obtain a much steeper straight line, than the tangent pertaining to the zero-point of the real curve $M(\chi)$. This means that the bending stiffness of such a shell-arch is much smaller than that to be expected according to the elementary theory.

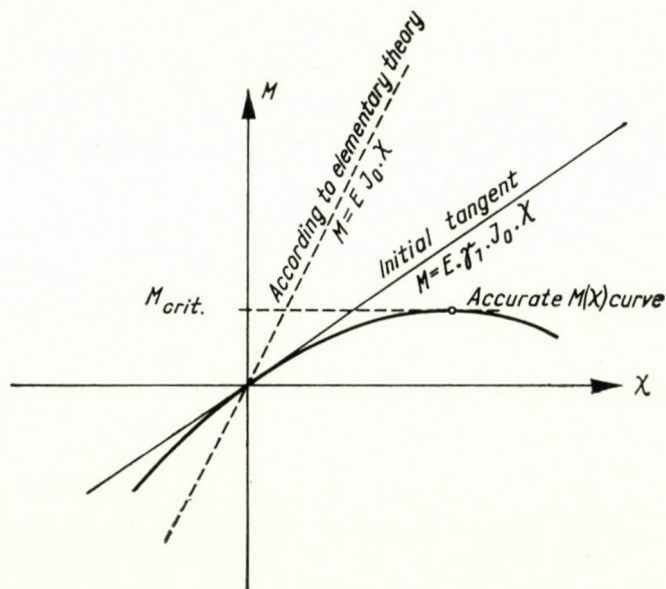


Fig. 3

The formula of the tangent belonging to the zero-point of the curve $M(\chi)$ can be written in the form:

$$M = E \cdot \gamma_1 \cdot J_0 \cdot \chi = E \cdot J_1 \cdot \chi.$$

This means that instead of the elementary moment of inertia J_0 of the arch's cross-section, a diminished "effective" moment of inertia J_1 should be used for writing relation $M = E \cdot J_1 \cdot \chi$. The magnitude of J_1 is determined by the equation

$$J_1 = \gamma_1 \cdot J_0, \quad (\gamma_1 \leq 1).$$

In the present paper we will determine the initial tangent of the curve $M(\chi)$ or the quantity γ_1 , respectively. The knowledge of the latter enables us to determine the *critical compressive force* causing buckling in the arch's

own plane of a *centrally-compressed shell-arch*. That is to say, for the determination of the stability in the case of central compression, we have always to examine that form of equilibrium, which is infinitely near to the momentless form. This means that the curve $M(\chi)$ could be replaced by the initial tangent belonging to the moment $M = 0$, because an infinitely near deformed shape includes an infinitely small change in curvature. It follows from the above that a shell-arch could be examined for central compression as if it were a normal arch, the only difference being that instead of the elementary moment of inertia J_0 the diminished effective moment of inertia $\gamma_1 \cdot J_0$ should be

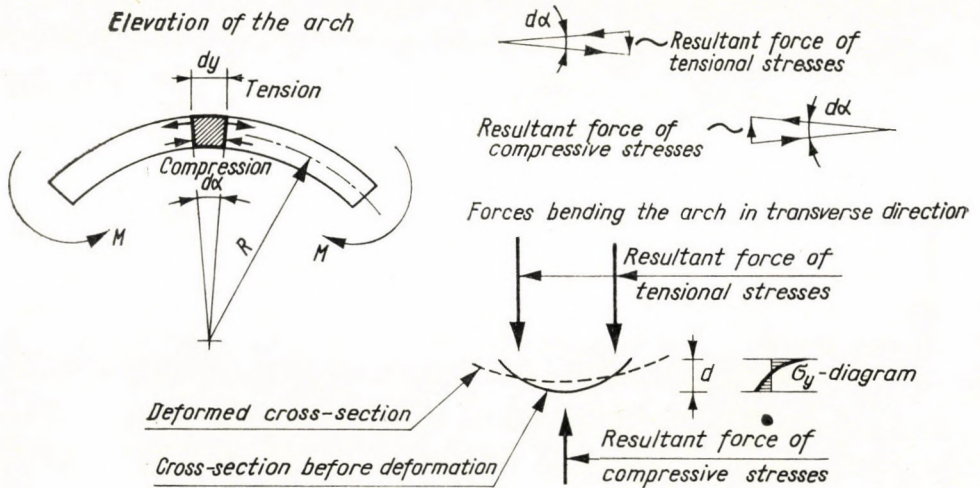


Fig. 4

replaced into the formula of the arch's critical compressive force. In another paper we wish to determine the entire curve $M(\chi)$, and this will enable us to investigate the arch in the case of bending.

The very reason why shell-arches are less stiff to bending as could be expected according to elementary calculation, can be realized by observation without any calculation. For this purpose, let us examine the infinitesimal part dy between two adjacent cross-sections of the longitudinally curved shell-arch shown in Fig. 4, lying at any place of this arch. Longitudinal tensional and compressive forces give, due to the longitudinal curvature, resultant forces normal to the axis of the arch. In the case shown in Fig. 4 the mentioned resultant forces try to straighten the cross-section. The shell resists this straightening effort as a transversely bent plate, but because of its small bending stiffness at the sacrifice of considerable deformations,

only. If the cross-section would not have any bending stiffness in transverse direction, then the arch itself would not have any bending stiffness either, because in such a case the cross-section of the arch would already become deformed owing to the action of the smallest longitudinal stresses: it would become entirely flat (or bulged, respectively), and so it would not be able to resist any moment. The transversal bending stiffness of a shell-plate is in reality not equal to zero, but it is certainly a small value, thus, the cross-section — due to the action of forces resulting from longitudinal stresses — becomes deformed, and this is the very reason why the arch's bending stiffness shall be considerably smaller than that, which could be calculated on the basis of the elementary theory.

All this indicates that the longitudinal bending stiffness of a shell-arch cannot be calculated according to the elementary Theory on Strength of Materials on the base of the cross-section's original shape (pertaining to the unloaded state), moreover, not even on the basis of the cross-section's deformed shape. In contradiction to observation, the bending stiffness does not increase, even if the load would cause a bulging of the cross-section (*i.e.*, if the moment of inertia would increase in accordance with the elementary theory), but the bending stiffness equally diminishes owing to the cross-section's flattening or bulging, respectively.

The flattening or bulging of the cross-section of an arch requires that longitudinal stresses should cause resultant forces normal to the axis of the arch, and this, however, demands a longitudinal curvature of the arch.

By this, it can easily be understood that bars with shell-like cross-section and straight axis at first behave according to the elementary theory and only begin to deviate from it and become less resistant to bending, after they had already become curved.

It also follows from the above that a shell-arch the cross-section of which is *impeded in transversal deformation*, shall behave according to the elementary Theory on Strength of Materials: its bending stiffness shall be $E \cdot J_0$ and no *bending instability* shall occur. *E.g.* if several shell-arches are built side by side, then they mutually hinder each other in deformation. Thus, shell-arches built in such a way shall considerably be stiffer than single ones. Hence, our discussion only refers to such single shell-arches, the transversal deformation of which is not impeded.

A shell-arch may also lose its stability in another way as above described (by buckling in the arch's own plane caused by centric compression or due to vertical bending); among others, in the case of centric compression the arch may also fail due to *buckling in a horizontal plane* or *torsional buckling*, as well as owing to a *local buckling of the shell-plate*. These phenomena will not be dealt with in this paper, but in the course of actual design these exigencies should also be taken into consideration.

1.3. *Literary survey*

The bending theory and questions concerning the stability of thin-walled pipes were discussed by several authors. Among these, first of all KÁRMÁN [5] should be mentioned. He was the first, who, when investigating the bending stiffness of curved pipes, drew attention to deviations versus the elementary bending theory. The problem of the stability of bent pipes with straight axis, *i.e.*, the determination of the critical bending moment was first discussed by BRAZIER [2]. For the problem dealt with by him, a more accurate solution was later presented by CHWALLA [3].

Among others treating of similar subjects BELLUZZI [1] and FUNK [4] should also be mentioned. They determined the critical bending moment of bars with straight axis, the cross-section of which are circular, arc- and V -formed, by the energy method. WEINEL's paper [6] dealing with the bending of hyperbolic shells with circular-arc formed cross-section, the longitudinal axis of which is also a circular arc, is closely connected with the subject. His investigations referred to shell-arches with a flat cross-section. He did not neglect POISSON's ratio, therefore, his results are exceedingly complicated and cannot be generalized for shell-arches with other cross-sections.

2. Determination of the $M(\chi)$ curve

2.1. *Assumptions of deductions*

The material of the shell-arch is homogeneous, isotropic and follows HOOKE's law.

The radius of curvature R of the arch's longitudinal axis is great in comparison to the depth d of the cross-section ($R \gg d$).

The thickness h of the shell-arch is small in comparison to its other dimensions. By this, the center of gravity, the moment of inertia etc. of the cross-section could be calculated in the same way as if the cross-section were a line's part.

The cross-section is *flat*, *i. e.*, the infinitesimal part ds of the curve $z_0(x)$ indicating the center-line of the cross-sections, can be replaced by its projection dx .

POISSON's ratio will be neglected ($\nu = 0$).

As we only want to determine the behaviour of the arch during bending, in our discussions the dead-load of the shell-arch will not be taken into account.

We suppose that external forces (couples) acting at both ends of the shell-arch are in compliance with the distribution of internal forces. In reality, however, this condition is generally not fulfilled; *e.g.*, if the roofing structure

shown in Fig. 2 is a tie-arch, then the two ties do not exert uniformly-distributed, but concentrated forces on the shell-arch's ends. By this, the end-zones of such an arch should be dimensioned like a girder with great depth, and the correction, necessary because of the shell's curvature, should also be taken into consideration. Questions concerning this problem, however, will not be dealt with.

The influence of deformations due to shear, on the critical load causing buckling in the vertical plane, shall not be taken into account. This is justified by the fact that the shearing stiffness of shell-arches is equal to that of normal bars (with solid cross-section), their bending stiffness, however, is considerably smaller. By this, the influence of deformations caused by shear on the critical compressive force of shell-arches is still smaller than on the critical compressive force of bars with solid cross-section.

2.2. Deformation of an optional cross-section

The axis of the shell-arch shown in Fig. 1, *i.e.*, the line connecting centers of gravity of the cross-sections, is a circular arc the radius of which is R_0 . The shell-arch's cross-section is an optional, but symmetric curve $z_0(x)$ (Fig. 5),

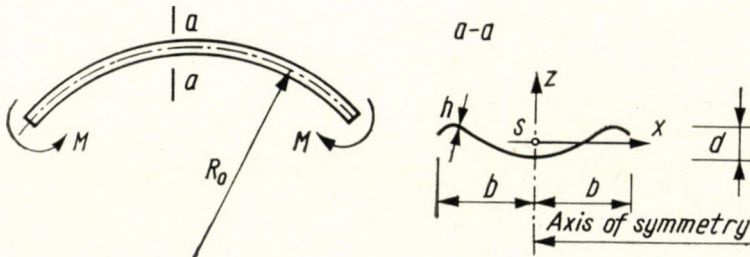


Fig. 5

constant along its length. The zero-point of the system of co-ordinates (z, x) should be placed into the cross-section's center of gravity S . The arch should be affected at both ends by two couples M , which are of the same magnitude but of opposite sign. Due to this, all cross-sections shall be in the same state, and this is the very reason why we can assume, that the *cross-sections being originally plane, shall also remain plane* after deformation.

The external moment and the radius of longitudinal curvature are to be taken as being positive according to explanation given in Figs. 1 and 5.

Deformations of shell-elements shall be expressed by the for the time being unknown *deformed* shape of the cross-section; substituting these into equations of equilibrium, we will obtain a differential equation for the determination of $z(x)$.

For writing equations of equilibrium, let us cut out from the arch, at an optional place the shell-element $dx \cdot dy$ (Fig. 6, y is the co-ordinate along the axis of the arch). Internal forces acting on the shell-element are shown in Figs. 6/a—b split into two groups. R denotes the longitudinal radius of curvature after deformation.

Projection on the x -axis:

$$n'_x = 0. \quad (3a)$$

(In the following differentiations according to x will be marked by commas or Roman symbols, respectively.)

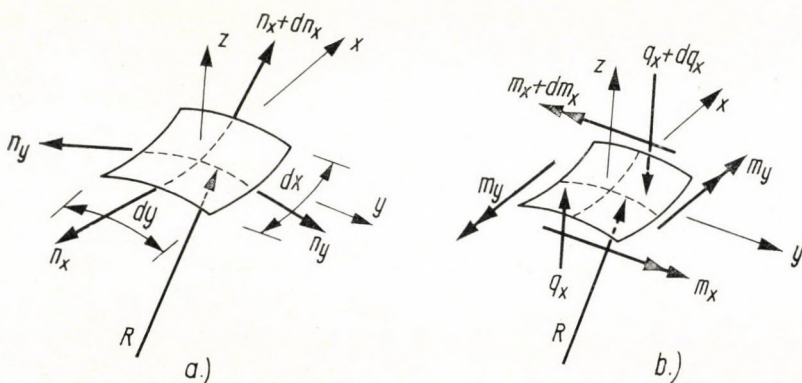


Fig. 6

As along the shell's edge ($x = \pm b$) $n_n = 0$; thus, n_x is equal to zero everywhere. In equation (3a) n_{xy} does not appear, because the cross-sections remain plane, and by this, n_{yx} equals zero everywhere.

Projection on axis z :

$$-\frac{n_y}{R} - q'_x = 0. \quad (3b)$$

Moment referring to axis y :

$$-m'_x + q_x = 0. \quad (3c)$$

Moment referring to axis x :

$$m'_y = 0, \quad (3d)$$

i. e., m_y is constant.

Due to symmetry and pure bending the other equations of equilibrium fall out, because the remaining internal forces are equal to zero.

Eliminating q_x from equations (3b) and (3c):

$$m_x'' + \frac{n_y}{R} = 0. \quad (4)$$

Employing HOOKE's law, n_y and m_x can be expressed by specific deformations (ε_y is the longitudinal strain and χ_x the transversal change in curvature)

$$n_y = E \cdot h \cdot \varepsilon_y, \quad (5)$$

$$m_x = \frac{E \cdot h^3}{12} \cdot \chi_x. \quad (6)$$

ε_y and χ_x can be expressed by the deformed shape z of the cross-section:

$$\varepsilon = \frac{z}{R} - \frac{z_0}{R_0}. \quad (7)$$

As to equation (7), the following should be considered:

According to all that had previously been said, originally plane cross-sections remain plane, therefore, the longitudinal strain is directly proportional to the distance z between the point in question and the center of gravity of the cross-section, but inversely proportional to the radius of the longitudinal curvature $\left(\frac{z}{R}\right)$. The strain, however, is only given by the deviation of the deformed state from the original one $\left(\frac{z_0}{R_0}\right)$, and because of this, $\frac{z_0}{R_0}$ must be subtracted from $\frac{z}{R}$. Finally, with respect to relation $R \gg d$, the radius of longitudinal curvature can be regarded as being the same at all points of the cross-section (*i.e.* $R + z \approx R$).

χ_x can also be expressed by z :

$$\chi_x = z'' - z_0''. \quad (8)$$

Substituting (7) and (8) into (5) and (6):

$$n_y = E \cdot h \cdot \left(\frac{z}{R} - \frac{z_0}{R_0} \right) \quad (9)$$

and

$$m_x = \frac{E \cdot h^3}{12} \cdot (z'' - z_0''). \quad (10)$$

Replacing (9) and (10) into (4), for z we obtain the following differential equation:

$$\frac{E \cdot h^3}{12} \cdot (z^{IV} - z_0^{IV}) + \frac{E \cdot h}{R} \cdot \left(\frac{z}{R} - \frac{z_0}{R_0} \right) = 0. \quad (11)$$

We will introduce the following abbreviations:

deformation w of the cross-section (vertical displacement)

$$w = z - z_0; \quad (12)$$

(w is positive, if its direction coincides with direction $+z$)

furthermore, the parameter β being characteristic for the shell's geometrical shape

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{h \cdot R}} = \frac{1,316}{\sqrt{h \cdot R}}; \quad (13)$$

finally, the change in the arch's longitudinal curvature

$$\chi = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}, \quad (14)$$

(if R is positive, then χ is positive if $R < R_0$, *i. e.*, for a diminishing R). Employing the above abbreviations, equation (11) can be written in the more simple form:

$$w^{IV} + 4 \cdot \beta^4 \cdot w = -4 \cdot \beta^4 \cdot R \cdot \chi \cdot z_0(x). \quad (15)$$

Deformation w of the cross-section has to be determined from this differential equation. All quantities figuring in this equation are — except w — constant, thus, the equation in question is a linear inhomogeneous differential equation, the coefficients of which are constant.

Boundary conditions for w are the following:

1. Owing to symmetry, the medial tangent of the cross-section remains horizontal, *i. e.*

$$w'(0) = 0. \quad (16)$$

2. Due to symmetry, the shearing force in the middle of the cross-section is equal to zero, *i. e.*

$$w'''(0) = 0. \quad (17)$$

3. The transversely directed moment vanishes at the edge of the cross-section, *i. e.*

$$w''(\pm b) = 0. \quad (18)$$

4. The shearing force on the edge of the cross-section equals zero, *i. e.*

$$w''(\pm b) = 0. \quad (19)$$

Our equation (15) coincides with the well-known differential equation of a beam on an elastic foundation, the length of which is $2 \cdot b$:

$$w^{IV} + \frac{c}{EJ} \cdot w = \frac{p(x)}{EJ}. \quad (20)$$

where: $E \cdot J$ is the beam's bending stiffness; c is the modulus of foundation, *i. e.*, the sole-reaction referring to the unit-length of the beam arising at the beam's unit-deflection $w = 1$; $p(x)$ is the external load acting on the beam. The elastic foundation is characterized by connection $p = c \cdot w$.

On the analogy of the beam on elastic foundation, the theorem — which should later be employed — that the center of gravity does not displace during deformation, can easily be proved. Namely, the load on the cross-section, regarding the latter as being a beam on elastic foundation, is according to (15) proportional to z_0 . As the center of the system of co-ordinates was placed into the center of gravity of z_0 , we have:

$$\int_{-b}^{+b} z_0 \cdot dx = 0$$

This means that the load on the cross-section, regarding the latter as being a beam, is a system of forces in equilibrium. By this, elastic reaction forces p also constitute a system of forces in equilibrium. Thus, in consequence of $p = c \cdot w$, we can write:

$$\int_{-b}^{+b} p \cdot dx = c \cdot \int_{-b}^{+b} w \cdot dx = 0 \quad (20a)$$

The center of gravity of the beam's displacement curve w (*i. e.* of the cross-section) remains in the same place $w = 0$, where it was before the displacement occurred. By this, the center of gravity of the deformed cross-section $z(x)$ coincides with the original center of gravity.

The solution w of differential equation (15) must — as is well-known — be put together from two parts: from the solution w_0 of the homogeneous differential equation, and from a particular solution w_1 of the inhomogeneous differential equation, *i. e.*:

$$w = w_0 + w_1. \quad (21)$$

The solution of the *homogeneous* part is for each form of cross-section identical:

$$w_0 = A \cdot \operatorname{ch} \beta x \cdot \cos \beta x + B \cdot \operatorname{sh} \beta x \cdot \sin \beta x + \\ + C \cdot \operatorname{ch} \beta x \cdot \sin \beta x + D \cdot \operatorname{sh} \beta x \cdot \cos \beta x. \quad (22)$$

Here A, B, C, D are constants of integration which should be determined from boundary conditions (16)–(19).

2.3. Curve $M(\chi)$ and its initial tangent

In our discussions so far, the change χ in longitudinal curvature was assumed as being known, and displacement w was determined on this basis. Now, we wish to determine the connection existing between χ and the external bending moment M affecting the arch. Knowing w , the moment M born by the cross-section can be calculated as the sum of moments of internal forces n_y in the following way (employing simplifying possibilities given by the cross-section's flatness):

$$M = \int_{-b}^{+b} n_y \cdot z \cdot dx + \int_{-b}^{+b} m_y \cdot dx. \quad (23)$$

According to our previous discussions, the shell was assumed to be *thin*. Therefore, the second member of equation (23) expressing the moment $m_y = \frac{E \cdot h^3}{12} \chi$ caused by the flexure of the shell-plate, can — for the sake of simplicity — be omitted. (In that exceptional case, if the bending stiffness of the shell's cross-section were so small, that it would considerably be increased by allowing for the moment born by the shell-plate, we must simply add to the moment of inertia of the shell's cross-section, given by the first member of equation (23), the moment of inertia of the shell-plate, *i. e.* $J_{slab} = \frac{2 \cdot b \cdot h^3}{12}$; see numerical example.)

Thus, in the following we only deal with the expression

$$M = \int_{-b}^{+b} n_y \cdot z \cdot dx. \quad (24)$$

On the base of (9), (12) and (14) we have:

$$\left. \begin{aligned} M &= E \cdot h \cdot \int_{-b}^{+b} \left(\frac{z^2}{R} - \frac{z \cdot z_0}{R_0} \right) \cdot dx = E \cdot h \cdot \chi \cdot \int_{-b}^{+b} z_0^2 \cdot dx + \\ &+ \frac{E \cdot h}{R} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w \cdot dx + E \cdot h \cdot \chi \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w \cdot dx + \\ &+ \frac{E \cdot h}{R} \cdot \int_{-b}^{+b} w^2 \cdot dx. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Equation (25) gives the exact connection between the external moment M and the change in longitudinal curvature χ (Fig. 3). In the first two members

of (25) χ is of the first power, in the second two members, however, of the second power. The very reason for this is that according to (15) w is proportional to $R \cdot \chi$. In addition, R is to be found in each member by itself and also hidden in β to be met with in w_1 and w_0 . Thus, equation (25) is really the same form as (2): $A(R) \cdot \chi$ denotes the first two members of (25), $-B(R) \cdot \chi^2$, however, the third and the fourth members.

In this paper we only want to determine the *initial tangent* of curve $M(\chi)$; therefore, let us differentiate equation (2) according to χ :

$$\frac{dM}{d\chi} = \frac{dA(R)}{d\chi} \cdot \chi + A(R) - \frac{dB(R)}{d\chi} \cdot \chi^2 - B(R) \cdot 2 \cdot \chi. \quad (26)$$

At point $\chi = 0$ the angle of slope of the tangent shall be $A(R)$, *i. e.* the first two members of (25) divided by χ . On the other hand, as can be seen from Fig. 3, the tangent of the angle of slope is $E \cdot \gamma_1 \cdot J_0 = E \cdot J_1$. According to this, the effective moment of inertia of the shell-arch is:

$$J_1 = \frac{A(R)}{E} = h \cdot \int_{-b}^{+b} z_0^2 \cdot dx + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w \cdot dx. \quad (27)$$

The first member on the right-hand side in (27) gives the cross-section's *elementary moment* of inertia:

$$J_0 = h \cdot \int_{-b}^{+b} z_0^2 \cdot dx. \quad (28)$$

Substituting (28) into (27):

$$J_1 = J_0 + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w \cdot dx. \quad (29)$$

As we are investigating the *initial tangent* of the curve $M(\chi)$, the effective moment of inertia J_1 of the shell-arch has to be calculated from the *original geometrical dimensions* (z_0, R_0) pertaining to the undeformed shape of the shell. Thus, in the following β and R (being hidden in β) always denote β_0 and R_0 , respectively, *i. e.* dimensions before deformation.

For the sake of an easier comparison of the decrease in bending stiffness of different cross-sections we shall determine relations

$$\gamma_1 = \frac{J_1}{J_0}, \quad (30)$$

($\gamma_1 \leq 1$).

2.4. Determination of the effective moment of inertia of several cross-sections

The four types of cross-section to be dealt with were chosen in such a way that the designer would be able, as far as possible, to classify cross-sections to be met with in practice according to one of these types, or to range them between two of the types discussed, respectively. Therefore the designer will have the possibility of finding the solution by interpolation between solutions of cases to be given below.

2.41. Circular arc formed cross-section (Fig. 7)

We assumed the cross-section as being *flat*, therefore, the circular arc can be replaced by a *parabola*; on the other hand, the center of gravity can

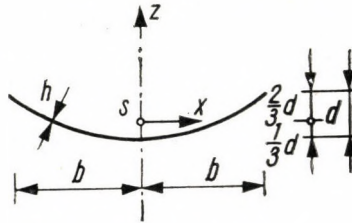


Fig. 7

be taken as being placed in the *third of the depth*. So, the equation of such a cross-section is the following:

$$z_0 = d \cdot \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (31)$$

Substituting this expression into equation (15), the *particular solution* of the differential equation shall be as follows:

$$w_1 = -R \cdot \chi \cdot z_0. \quad (32)$$

Constants figuring in the solution of the homogeneous part of (22) shall be determined from equations (16)–(19) of *boundary conditions* and by taking into consideration equation (21). The final result of this calculation is:

$$A = d \cdot R \cdot \chi \cdot \left[\frac{1}{(\beta b)^2} \cdot \frac{\text{sh } \beta b \cdot \cos \beta b - \text{ch } \beta b \cdot \sin \beta b}{\text{ch } \beta b \cdot \text{sh } \beta b + \cos \beta b \cdot \sin \beta b} \right] = d \cdot R \cdot \chi \cdot Z_A; \quad (33)$$





$$B = d \cdot R \cdot \chi \cdot \left[\frac{1}{(\beta b)^2} \cdot \frac{\text{sh } \beta b \cdot \cos \beta b + \text{ch } \beta b \cdot \sin \beta b}{\text{ch } \beta b \cdot \text{sh } \beta b + \cos \beta b \cdot \sin \beta b} \right] = d \cdot R \cdot \chi \cdot Z_B, \quad (34)$$

if denoting dimensionless quantities within brackets by Z_A and Z_B , respectively.

$$C = D = 0 . \tag{35}$$

Numerical values of constants belonging to different values of βb are compiled in Table I.

Table I
Contents A—D of different cross-sections

Form of cross-section	$\beta b =$	1	2	3	4	6	10
	Z_A	-0,29254	-0,0930	-0,01252	+0,0002388	+1,716·10 ⁻⁴	+2,664·10 ⁻⁷
	Z_B	+0,85245	+0,03604	-0,00940	-0,003224	+9,42·10 ⁻⁵	-1,25·10 ⁻⁶
	$Z_C=Z_D$	0	0	0	0	0	0
	Z_A	+0,0284	+0,0910	+0,02372	-0,000536		
	Z_B	-0,0830	-0,03526	+0,01778	+0,00724		
	$Z_C=Z_D$	0	0	0	0		
	Z_A	-0,4605	-0,2642	-0,166105	-0,1249197		
	Z_B	-0,1492	-0,232	-0,166039	-0,1247133		
	$Z_C=Z_D$	+0,500	+0,250	+0,166667	+0,1250		
	Z_A	-0,596	-0,3935	-0,276618	-0,2104077		
	Z_B	-0,1555	-0,256	-0,209475	-0,175735		
	Z_C	-0,0724	+0,2475	+0,221667	+0,1801325		
	Z_D	+0,696	+0,468	+0,292092	+0,2102319		

The elementary moment of inertia of the shell's cross-section is according to (28) and employing (31):

$$J_0 = h \cdot d^2 \cdot \int_{-b}^{+b} \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3} \right)^2 \cdot dx = \frac{8}{45} \cdot h \cdot d^2 \cdot b = 0,1778 \cdot h \cdot d^2 \cdot b . \tag{36}$$

The effective moment of inertia is in accordance with (29) and employing (32):

$$J_1 = J_0 + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot (-R \cdot \chi \cdot z_0 + w_0) \cdot dx . \tag{37a}$$

As the first member of the integral is equal to $-J_0$, therefore, employing (22), (31), (33) and (34), the effective moment of inertia can be written in the following more simple form:

$$J_1 = \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w_0 \cdot dx = \frac{h \cdot d}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3} \right) \cdot w_0 \cdot dx . \tag{37b}$$

As according to (20a) we have:

$$\int_{-b}^{+b} w \cdot dx = \int_{-b}^{+b} (w_1 + w_0) \cdot dx = 0, \quad (38a)$$

and in accordance with (32)

$$\int_{-b}^{+b} w_1 \cdot dx = -R \cdot \chi \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot dx = 0, \quad (38b)$$

therefore





$$\int_{-b}^{+b} w_0 \cdot dx = 0. \quad (38c)$$

Using this we obtain:

$$\begin{aligned} J_1 &= h \cdot d^2 \cdot \int_{-b}^{-b} \frac{x^2}{b^2} \cdot (Z_A \cdot \operatorname{ch} \beta x \cdot \cos \beta x + Z_B \cdot \operatorname{sh} \beta x \cdot \sin \beta x) \cdot dx = \\ &= \frac{h \cdot d^2 \cdot b}{(\beta b)^3} [Z_A (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b - 2\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b) + \\ &\quad + Z_B \cdot (-\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b + 2\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b)]. \end{aligned} \quad (39)$$

For the sake of an easier practical calculus, expression (39) had been calculated for different values of βb . On the base of the latter values of ratio $\gamma_1 = J_1/J_0$

Table II
Numerical values of effective moments of inertia of different cross-sections

Form of cross-section	$\beta b =$	0	1	2	3	4	6	10
	$\gamma_1 =$	1	0,895	0,333	0,093	0,033	0,0073	0,00101
	$\gamma_1 =$	1	0,890	0,347	0,1391	0,0468		
	$\gamma_1 =$	1	0,891	0,351	0,111	0,0467		
	$\gamma_1 =$	1	0,897	0,4075	0,1493	0,070		
Approximate	$\gamma_1 =$	1	0,893	0,342	0,0931	0,0315	0,0064	0,000833

indicating the cross-section's effective moment of inertia, were compiled in Table II for different values of βb (see also Fig. 11).

2.42. Cosine-line like formed cross-section (Fig. 8)

The equation of the cross-section referring to the system of co-ordinates to be seen in Fig. 8 is:

$$z_0 = -\frac{d}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{b} \cdot x. \quad (40)$$

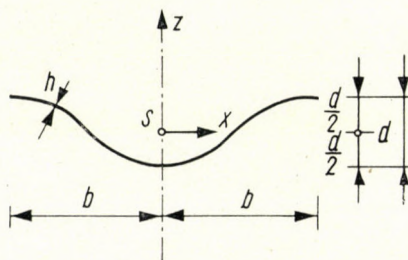


Fig. 8

In compliance with *particular solution* of differential equation (15) we have:

$$w_1 = -\frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{4 \cdot (\beta b)^4}} \cdot R \cdot \chi \cdot z_0. \quad (41)$$

From equations (16)–(19) of *boundary conditions* we obtain that constants belonging to cosine-line like cross-sections can be calculated from constants pertaining to circular arc formed cross-sections, by multiplying the latter ones with the factor (see Table I):

$$-\frac{\pi^2}{4 + \frac{\pi^4}{(\beta b)^4}}. \quad (42)$$

The cross-section's *elementary moment of inertia* is, according to (28):

$$J_0 = \frac{h \cdot d^2}{4} \cdot \int_{-b}^{+b} \cos^2 \frac{\pi}{b} x \cdot dx = 0,250 \cdot h \cdot d^2 \cdot b. \quad (43)$$

The *effective moment of inertia*, on the other hand, is according to (29):

$$J_1 = J_0 + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot \left(-\frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{4(\beta b)^4}} R \cdot \chi \cdot z_0 + w_0 \right) \cdot dx =$$

$$\begin{aligned}
&= h \cdot d^2 \cdot b \cdot \left\{ 0,250 \cdot \frac{1}{1 + \frac{4(\beta b)^4}{\pi^4}} + \right. \\
&+ \frac{Z_A}{2} \left[\frac{\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b - (\pi - \beta b) \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b}{(\beta b)^2 + (\pi - \beta b)^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b + (\pi + \beta b) \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b}{(\beta b)^2 + (\pi + \beta b)^2} \right] + \\
&+ \frac{Z_B}{2} \cdot \left[\frac{\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + (\pi - \beta b) \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b}{(\beta b)^2 + (\pi - \beta b)^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - (\pi + \beta b) \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b}{(\beta b)^2 + (\pi + \beta b)^2} \right] \left. \right\}. \quad (44)
\end{aligned}$$

Numerical values resulting from formula (44), as well as values of ratio $\gamma_1 = J_1/J_0$, referring to different values of βb are to be found in Table II (see Fig. 11, too).

2.42. V-formed cross-section (Fig. 9)

In the middle of the cross-section there is a break, therefore, we will make all calculations for the right-hand side of the cross-section only. The

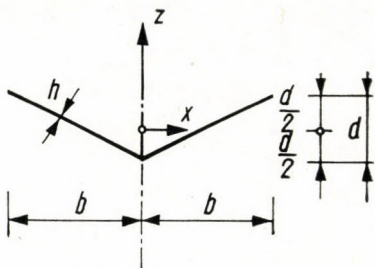


Fig. 9

joining of the two deformed half cross-sections is given by boundary conditions (16) and (17).

The equation of the cross-section's right-hand side is:

$$z_0 = d \cdot \left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2} \right). \quad (45)$$

Thus, particular solution of (15) is:

$$w_1 = -R \cdot \chi \cdot z_0. \quad (46)$$

From boundary conditions (16)–(19) we have:

$$Z_C = Z_D = \frac{1}{2\beta b}; \quad (47)$$

$$Z_A = \frac{\Phi_1(\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b) + \Phi_2 \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b}{\operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b) + \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b)}; \quad (48)$$

$$Z_B = \frac{-\Phi_1(\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b) + \Phi_2 \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b}{\operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b) + \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b)}. \quad (49)$$

Symbols Φ_1 and Φ_2 figuring in the above two equations are defined by the following expressions:

$$\Phi_1 = Z_C \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b - Z_D \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b, \quad (50)$$

$$\Phi_2 = Z_C \cdot (\operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b) - Z_D (\operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b + \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b), \quad (51)$$

(see Table I).

The *elementary moment of inertia* of the cross-section is:

$$J_0 = h \cdot d^2 \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} \left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2} \right)^2 \cdot dx = \frac{h \cdot d^2 \cdot b}{6} = 0,1667 \cdot h \cdot d^2 \cdot b. \quad (52)$$

The cross-section's *effective moment of inertia* is in accordance with (29):

$$\begin{aligned} J_1 &= J_0 + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} z_0 \cdot (-R \cdot \chi \cdot z_0 + w_0) \cdot dx = \\ &= \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} z_0 \cdot w_0 \cdot dx = \frac{h \cdot d}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} \left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2} \right) \cdot w_0 \cdot dx. \end{aligned} \quad (53a)$$

As formulae (38a)–(38c) are also valid for a V-formed cross-section, formula (53a) can be written in the following more simple form:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{h \cdot d}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} \frac{x}{b} \cdot w_0 \cdot dx = \frac{h \cdot d^2 \cdot b}{(\beta b)^2} \cdot [-Z_A \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b + \\ &+ Z_B (\operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b - 1) - Z_C (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b)]. \end{aligned} \quad (53b)$$

Numerical values of ratio $\gamma_1 = J_1/J_0$ belonging to different values of βb are given in Table II (see Fig. 11, too).

2.44. Wing-formed cross-section (Fig. 10)

This cross-section is put together from two fourth of a sine-line. Because of the break in the middle of the cross-section, calculations shall only be done for the right-hand side of the cross-section; the joining of the two half cross-sections is assured by boundary conditions (16) and (17).

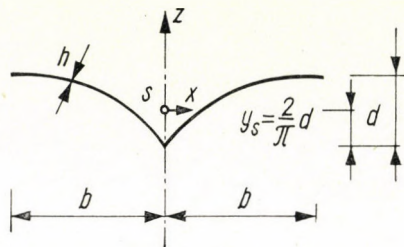


Fig. 10

The equation of the half cross-section on the right-hand side is (the distance between the center of gravity and the lower edge is $2 \cdot d/\pi$):

$$z_0 = d \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2 \cdot b} x - \frac{2}{\pi} \right). \quad (54)$$

So the particular solution of (15) is:

$$w_1 = R \cdot \chi \cdot d \cdot \left(- \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64 \cdot (\beta b)^4}} \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot b} x + \frac{2}{\pi} \right). \quad (55)$$

From equations of boundary conditions we have:

$$Z_C = \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64 \cdot (\beta b)^4}} \cdot \frac{\pi}{4 \cdot \beta b} \left[1 - \frac{\pi^2}{8 \cdot (\beta b)^2} \right], \quad (56)$$

$$Z_D = \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64 \cdot (\beta b)^4}} \cdot \frac{\pi}{4 \cdot \beta b} \left[1 + \frac{\pi^2}{8 \cdot (\beta b)^2} \right], \quad (57)$$

furthermore, using abbreviations (50) and (51) we obtain:

$$Z_A = \frac{\left[\Phi_1 + \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64 \cdot (\beta b)^4}} \cdot \frac{\pi^2}{8 \cdot (\beta b)^2} \right] (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b) + \Phi_2 \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b}{\operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b) + \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b)} \quad (58)$$

$$Z_B = \frac{- \left[\Phi_1 + \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64 \cdot (\beta b)^4}} \cdot \frac{\pi^2}{8 \cdot (\beta b)^2} \right] (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b) + \Phi_2 \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b}{\operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b) + \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b (\operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b)} \quad (59)$$

(See Table I.)

The *elementary moment of inertia* of the cross-section according to (28) is:

$$J_0 = h \cdot d^2 \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} \left(\sin \frac{\pi}{2 \cdot b} x - \frac{2}{\pi} \right)^2 \cdot dx = \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) h \cdot d^2 \cdot b = 0,18944 \cdot h \cdot d^2 \cdot b. \quad (60)$$

The *effective moment of inertia* of the cross-section according to (29) is:

$$J_1 = J_0 + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} z_0(w_1 + w_0) \cdot dx = \quad (61a)$$

$$= J_0 + \frac{h \cdot d}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} \left(\sin \frac{\pi}{2 \cdot b} x - \frac{2}{\pi} \right) \cdot (w_1 + w_0) \cdot dx.$$

Using (38a) we obtain the following final result:

$$J_1 = J_0 + \frac{h \cdot d}{R \cdot \chi} \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} \sin \frac{\pi}{2 \cdot b} x \cdot (w_1 + w_0) \cdot dx =$$

$$= h \cdot d^2 \cdot b \cdot \left\{ \frac{1}{1 + \frac{64 \cdot (\beta b)^4}{\pi^4}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + Z_A \cdot \left[\frac{\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b - \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right) \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right)}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right) \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right)}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right)^2} \right] + \\
& + Z_B \cdot \left[\frac{\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right) \cdot \operatorname{sh} \beta b \cos \beta b - \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \sin \beta b - \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right) \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \cos \beta b + \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right)^2} \right] + \\
& + Z_C \cdot \left[\frac{\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right) \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta b \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b - \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right) \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right)^2} \right] + \\
& + Z_D \cdot \left[\frac{\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b - \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right) \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \beta b\right)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta b \cdot \operatorname{ch} \beta b \cdot \cos \beta b + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right) \cdot \operatorname{sh} \beta b \cdot \sin \beta b}{(\beta b)^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \beta b\right)^2} \right] . \quad (61b)
\end{aligned}$$

The quotient of (61b) and (60), *i. e.* ratios $\gamma_1 = J_1/J_0$ pertaining to different values of βb are numerically given in Table II and in Fig. 11.

2.5. Comparison of effective moments of inertia belonging to different cross-sections

From Fig. 11 it can be observed that γ_1 -curves pertaining to different sorts of cross-sections hardly deviate from each other. All curves start with a horizontal tangent; values of γ_1 rapidly decrease with the increase of βb , and at the value $\beta b > 4$ the value of γ_1 is already smaller than 0.05, i. e., the effective

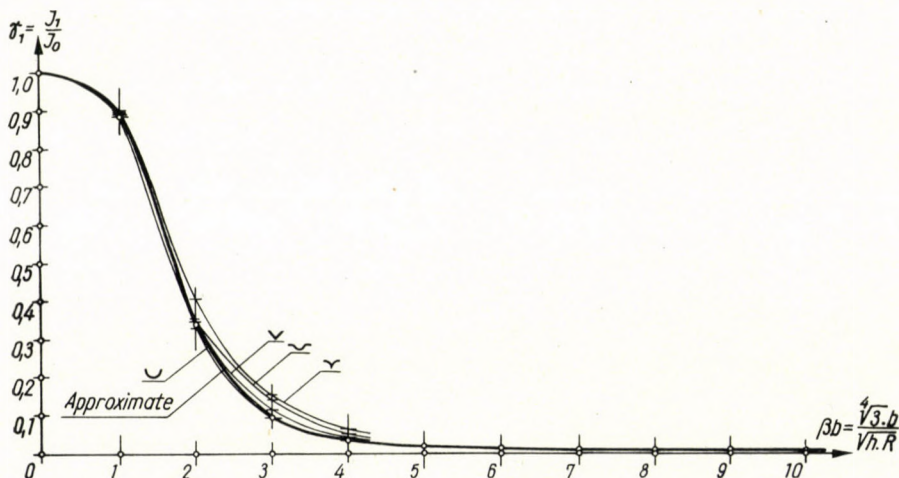


Fig. 11

tive moment of inertia J_1 is less than 5 per cents of the elementary moment of inertia J_0 (except for the wing-formed cross-section). This is the very reason why Table II was only calculated for values $\beta b = 1, 2, 3, 4$, because this is the range characteristic for γ_1 -curves. The γ_1 -curve belonging to circular arc formed cross-section, however, was calculated up to the value $\beta b = 10$.

With regards to all these, it seems to be expedient to establish an *approximate* γ_1 -curve, which should supply the effective moment of inertia for all sorts of cross-sections, and should be fairly simple to be applied by designing engineers.

According to our investigations the curve

$$\gamma_{1,appr.} = \frac{1}{1 + 0,120 \cdot (\beta b)^4} = \frac{1}{1 + 0,360 \cdot \frac{b^4}{h^2 \cdot R^2}} \quad (62)$$

approaches accurate γ_1 -curves belonging to discussed cross-sections within the limit of several per cents, and generally, but especially for great values of βb , deviates from the accurate curves to the advantage of safety (see Table II and Fig. 11).

3. Generalizations. Investigation of stability for central compression

3.1. Inverse cross-sections

Cross-sections dealt with in $1/a-d$ can be inverted (Fig. 1/e) and the so far deduced results are also valid for the inverse cross-sections. Namely, by inverting the cross-section, the sign of z_0 changes, this however, is followed by the inversion of the sign of w (e. g., see (32), (41) etc.). Thus J_1 does not change either (29).

3.2. Steeper cross-sections

According to the results of model tests, for steeper cross-sections the calculation must be corrected. We want to deal with this in a later paper.

3.3. Stability of centrally-compressed shell-arches in their own plane

In our discussions made up till now, we assumed that the radius R of longitudinal curvature of the shell-arch is constant, and its cross-section is the same everywhere. This supposition does not always comply with reality; the radius of longitudinal curvature generally changes along the arch, and the cross-section is frequently varying, too. In such a case we have to apply the following mode of calculation: we determine the value of the effective moment of inertia of several cross-sections, of course, in compliance with radii of longitudinal curvature as being valid for the cross-sections in question; subsequently, the arch can be treated like a normal arch of variable cross-section. Thus, critical horizontal force H of such an arch can be determined by the usual method of statics in compliance with the mode of supporting (see numerical example).

Of course, the above-mentioned method of calculation will be approximate, its reliability will be in an inverse proportion to the suddenness of the change of the radius of longitudinal curvature and of the cross-section. But, hitherto made model tests showed the good applicability of this approximate method for calculations to be met with in practice.

4. Numerical example

Let us choose for an example an erected shell: the roofing members of the Glue Factory in Újpest, Hungary (designed by M. GNÁDIG in 1953, constructed in 1954).

The longitudinal section, as well as the cross-section of the arch are parabolas of the second degree (Fig. 12). The cross-section's depth d , advancing from the arch's crown towards the springers also varies according to a parabola. The steepness of the cross-sections will not be taken into account.

The main dimensions of this arch are:

$$h = 3,5 \text{ cm}$$

$$b = 154,0 \text{ cm}$$

$$L = 19,0 \text{ m}$$

$$f = 3,18 \text{ m}$$

The shell itself is a reinforced concrete slab with insertions of hollow tiles. The dimensions of the applied, so-called cable-tiles are $3,5 \times 21 \times 40$ cm with 3 cm spacing between them. The average modulus of elasticity of the shell-slab is: $E_{av.} = 86,6 \text{ t/cm}^2$.

$$\frac{f}{L} = \frac{318}{1900} = 0,167.$$

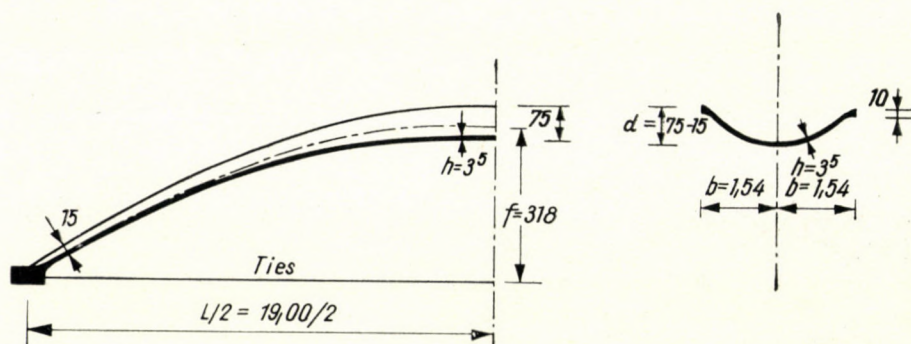


Fig. 12

The arch itself is a two-hinged arch, therefore, its reduced length is:

$$L_0 = 0,586 \cdot 19,00 = 11,13 \text{ m}$$

The moment of inertia of the arch's cross-section shall be calculated at the crown, at the fourth part of the span, i. e. at $\frac{L}{4}$ and at the springer.

At the crown:

$$d = 75 \text{ cm}$$

$$R = \frac{L^2}{8 \cdot f} = \frac{19^2}{8 \cdot 3,18} = 14,1 \text{ m}$$

According to (13):

$$\beta b = \frac{1,316 \cdot 154}{\sqrt{3,5 \cdot 1410}} = 2,88$$

According to (62):

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 + 0,120 \cdot 2,88^4} = 0,108$$

According to (36):

$$J_0 = 0,1778 \cdot 154 \cdot 3,5 \cdot 75^2 = 5,37 \cdot 10^5 \text{ cm}^4$$

$$J_1 = \gamma_1 \cdot J_0 = 0,108 \cdot 5,37 \cdot 10^5 = 5,80 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

$$J_{slab} = 2 \cdot \frac{154 \cdot 3,5^3}{12} = 0,11 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

$$J_{crown} = J_1 + J_{slab} = 5,91 \cdot 10^4 \text{ cm}^4$$

At $\frac{L}{4}$:

$$d = 60 \text{ cm.}$$

The final results of the omitted detailed calculation are the following:

$$\begin{aligned} R &= 16,60 \text{ m} \\ \beta b &= 2,66 \\ \gamma_1 &= 0,142 \\ J_{L/4} &= 5,01 \cdot 10^4 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

At the springer :

$$d = 15 \text{ cm.}$$

The final results are:

$$\begin{aligned} R &= 24,6 \text{ m} \\ \beta b &= 2,18 \\ \gamma_1 &= 0,270 \\ J_{spr.} &= 0,690 \cdot 10^4 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

On the base of these three moments of inertia the average moment of inertia of the half arch can approximately be determined by the usual methods (e. g., on the basis of the deflection-equality).

By so doing we obtain:

$$J_{aver} \approx 4,67 \cdot 10^4 \text{ cm}^4.$$

The critical value of force H is:

$$H_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E_a \cdot J_a}{L_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 86,6 \cdot 4,67 \cdot 10^4}{1113^2} = 32,2 \text{ t.}$$

Effectively arising force H (caused by total load 180 kg/m^2) is:

$$H_{eff.} = 3,06 \cdot 180 \frac{19^2}{8 \cdot 3,18} = 7,82 \text{ t.}$$

Thus, the safety against buckling is $32,2/7,82 = 4,12$ -fold. The thickening of the arch's edges (see Fig. 12), which in these calculations was not taken into consideration, in reality still increases the above-established safety.

In their final position these shell-arches are placed closely side by side. This circumstance impedes their transversal deformation, and this gives an additional increase of safety.

REFERENCES

- [1.] BELUZZI, O.: Un caso di instabilità per ovalizzazione nei tubi sollecitati a flessione. Ric. Ingegn. 1 (1933), pp. 79—87.
La stabilità dell' equilibrio delle coperture a due spioventi inflesse longitudinalmente. Ric. Ingegn. 2 (1934), pp. 161—166.
Sulla stabilità dell' equilibrio delle volte Zeiss e Dywidag. Ric. Ingegn. 3 (1935), pp. 35—40.
- [2.] BRAZIER, L. G.: On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other "Thin" Sections. Proc. Royal Society, London, Ser. A. Vol. 116, (1927), pp. 104—114.
- [3.] CHWALLA, E.: Reine Biegung schlanker, dünnwandiger Rohre mit gerader Achse. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech. Bd. 13 (1933) pp. 48—53.
- [4.] FUNK, P.: Über die durch Krümmung steifgemachten Meßbänder. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech. Band 14 (1934), pp. 251—252.
Über ein Stabilitätsproblem bei den durch Krümmung steifgemachten Meßbändern. Österreichisches Ingenieur-Archiv, Band 5 (1951) pp. 387—397.
- [5.] KÁRMÁN, TH.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichsrohre. V. D. I. Zeitschrift, Band 55 (1911) pp. 1889—1895.
- [6.] WEINEL, E.: Über Biegung und Stabilität eines doppelt gekrümmten Plattenstreifens. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech. Band 17 (1937), pp. 366—369.

SUMMARY

The paper deals with investigations on the bending stiffness of thin shell-arches non-stiffened along the edges, on the basis of the usual assumptions of the Theory of Elasticity. The cross-section of these arches, if affected by bending, flattens or bulges, respectively, therefore, the bending stiffness of such arches is in general considerably smaller than that, which could be calculated according to the elementary theory. The paper contains the theoretical determination of the relation between the bending moment and the change in curvature for an *optional symmetric cross-section*, furthermore, the numerical values of the so-called *effective moment of inertia* for four types of cross-section the most frequently met with in practice, finally a simple approximate formula for the speedy determination of the effective moment of inertia belonging to different kinds of cross-sections. The investigation of the *stability of a shell-arch* in its own plane, affected by central compression, requires to take into consideration the effective moment of inertia calculated in this way. Finally, the practical use of the obtained results is demonstrated on hand of a numerical example.

DIE STABILITÄT AUF MITTIGEN DRUCK BEANSPRUCHTER SCHALENBÖGEN

L. KOLLÁR

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz befaßt sich mit der Untersuchung der Biegesteifigkeit am Rande unversteifter Schalenbögen auf Grund der gebräuchlichen Voraussetzungen der Elastizitätstheorie. Die Biegebeanspruchung verursacht die Verflachung (oder die Ausbuchtung) der Querschnitte dieser Schalenbögen, daher ist ihre Biegesteifigkeit beträchtlich geringer als die, die auf Grund der elementaren Theorie berechnet werden kann. Der Aufsatz enthält die theoretische Bestimmung des Zusammenhangs zwischen dem Biegemoment und der Krümmungsänderung für den Fall eines *beliebigen symmetrischen Bogenquerschnittes*, ferner wird darin der zahlenmäßige Wert des sogenannten *wirksamen Trägheitsmomentes* für die in der Praxis am häufigsten vorkommenden vier Querschnittsarten, wie auch eine annähernde Formel zur schnellen Bestimmung des wirksamen Trägheitsmomentes verschiedener Querschnitte angegeben. Bei der Untersuchung der Stabilität in der Bogenebene des auf mittigen Druck beanspruchten Schalenbogens muß das auf diese Weise berechnete wirksame Trägheitsmoment berücksichtigt werden. Schließlich wird die praktische Anwendung der abgeleiteten Ergebnisse an Hand eines Zahlenbeispiels gezeigt.

STABILITÉ DES VOILES EN ARC SOUMIS À UNE COMPRESSION SIMPLE

L. KOLLÁR

RÉSUMÉ

L'étude traite de la rigidité à la flexion de voiles minces en arc (voûtes étroites en forme de ruban) non raidis à leur bord, en admettant les hypothèses courantes de la théorie de l'élasticité. La section transversale de ces voiles en arc s'aplatit (ou se bombe) sous l'effet du moment de flexion, de sorte que la rigidité à la flexion du voile est, en général, sensiblement plus faible que celle calculable selon la théorie élémentaire. L'auteur détermine théoriquement la relation entre le moment de flexion et les variations de courbure pour *n'importe quelle section de voile symétrique*, donne la valeur numérique du moment d'inertie efficace pour les quatre sortes de sections de voile en arc se rencontrant le plus couramment dans la pratique, et offre aussi une formule d'approximation simple, permettant une détermination rapide du moment d'inertie efficace de ces différentes sections. Lors de l'examen, dans le plan de l'arc, de la stabilité du voile en arc soumis à une compression simple, il faut calculer avec le moment d'inertie efficace déterminé par cette méthode. L'application pratique des résultats obtenus est démontrée par un exemple numérique.

СТАБИЛЬНОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ АРОЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

Л. КОЛЛАР

РЕЗЮМЕ

В работе исследуется жесткость изгиба тонких не укрепленных на краях арочных оболочек, исходя из обычных предположений теории упругости. Под воздействием изгибающей нагрузки сечение арочных оболочек уплощается (или же выпучивается), и поэтому жесткость арки по отношению к изгибу вообще значительно меньше той жесткости, которая получается при вычислении на основе элементарной теории. Теоретическим путем определяется зависимость между изгибающим моментом и изменением кривизны для случая любых симметричных сечений арок, далее дается числовое значение т. н. эффективного момента инерции для наиболее часто встречающихся на практике четырех различных сечений арки, дается также простая приближенная формула для быстрого определения эффективного момента инерции различных сечений. Для анализа стабильности центрально сжатых арочных оболочек в плоскости арки необходимо учитывать вычисленный таким образом эффективный момент инерции. Наконец, числовым примером демонстрируется практическое применение полученных результатов.

APSE-LIKE FORMED PARABOLOID SHELLS OF REVOLUTION

P. CSONKA
D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF STRUCTURAL ENGINEERING
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received October 9, 1959]

1. Introduction

The following deals with the calculation of apse-like formed shells, resembling a semi-cupola, the middle surface of which is a paraboloid of revolution with a vertical axis. These shells are open on one side, their ground-plan is a semi-circle or a segment (Fig. 1). This sort of shell can be used for

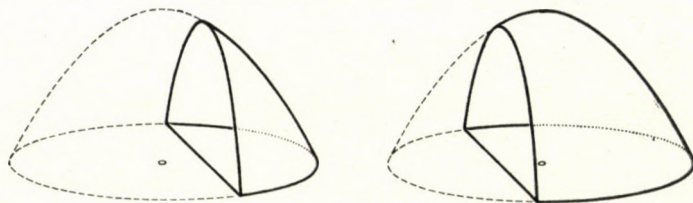


Fig. 1. Apselike shells

smaller structures, music-pavilions, exhibition-halls, or as elements of compound shells [1-2].

2. Assumptions, notations

Our discussions refer to shells supported by a horizontal basis-ring. On the lower boundary of the shell the horizontal force-components are balanced by this basis-ring, the vertical force-components, however, are equipoised by the reaction-force of the ground. The shell's open boundary is entirely free, there, for diminishing the danger of buckling, an edge-arch could at must be applied.

Our examinations are based on the usual assumptions of the membrane theory. Disturbing effects arising due to constraints of deformation and appearing along the basis-ring, as well as along the occasional edge-arch bordering the shell's free edge, are not taken into consideration.

During our discussions we use the systems of coordinates $O(x, y, z)$ or $O(r, \varphi, z)$, shown in Fig. 2. The equation of the shell's middle surface in the

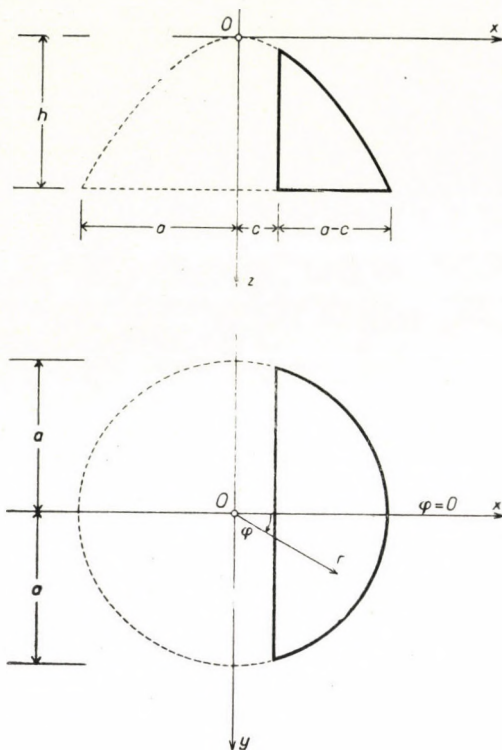


Fig. 2. Systems of coordinates $O(x, y, z)$ and $O(r, \varphi, z)$

above-mentioned systems of coordinates is

$$z = \frac{1}{2k}(x^2 + y^2), \quad (1)$$

or

$$z = \frac{1}{2k}r^2, \quad (2)$$

where

$$k = \frac{a^2}{2h}. \quad (3)$$

For loads only distributed forces, namely, only distributed forces falling in the meridian-planes, are taken into account. Loading forces are characterized by their specific value related to the plan projection area of the middle surface. The x, y, z directed components of these forces are marked by letters X, Y, Z ,

their r , z directed components, on the other hand, are denoted by letters R , Z . Between the force-components in question the following relations exist:

$$X = R \cos \varphi, \quad Y = R \sin \varphi. \quad (4)$$

For the characterization of the shell's stress-state, we use the so-called projectional internal forces. For marking their x , y directed components, we introduce the notations

$$n_x, n_{xy}, n_{yx}, n_y.$$

Owing to equilibrium there is

$$n_{xy} = n_{yx}. \quad (5)$$

The x co-ordinate of the shell's open edge is marked by the letter c . To write more simply, we agree to use the notation

$$\xi = x - c. \quad (6)$$

3. Basic relations

We want to determine the internal forces as usual in the membrane theory, *i.e.*, aided by a stress-function. The differential equation of the latter in the orthogonal system of co-ordinates $O(x, y, z)$ has the form

$$z_{xx} F_{yy} - 2 z_{xy} F_{xy} + z_{yy} F_{xx} = Q, \quad (7)$$

where Q is defined by the equation

$$Q = \frac{\partial}{\partial x} (z_x \int X dx) + \frac{\partial}{\partial y} (z_y \int Y dy) - Z. \quad (8)$$

In the case on hand we have

$$z_{xx} = z_{yy} = \frac{1}{k} \quad \text{and} \quad z_{xy} = 0,$$

and therefore, instead of differential equation (7), we can write the following equation:

$$F_{xx} + F_{yy} = q. \quad (9)$$

The value of the *load-function* $q = q(x, y)$, appearing in the above formula is

$$q = \int X dx + \int Y dy + Xx + Yy - Zk. \quad (10)$$

Knowing the stress-function, the values of the internal forces can be calculated in a very simple way, *i. e.*:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= F_{yy} = \int X dx, \\ n_{xy} &= n_{yx} = -F_{xy}, \\ n_y &= F_{xx} - \int Y dy. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

For the simplification of the following calculations, we choose for the lower limit of integrals according to x and y , the values $x = c$ and $y = 0$, while neglecting the optional integrating functions. By this agreement, the formula of the load-function, figuring in differential equation (9), will be

$$q = \int_c^x X dx + \int_0^y Y dy + Xx + Yy - Zk, \quad (12)$$

the formulae of internal forces, however, will obtain the following form:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= F_{yy} - \int_c^x X dx, \\ n_{xy} &= n_{yx} = -F_{xy}, \\ n_y &= F_{xx} - \int_0^y Y dy. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

For the determination of internal forces, differential equation (9) should be solved by taking into consideration the boundary conditions of the problem. In the case on hand, boundary conditions only exist on the shell's open edge, and these can be formularized in the following way:

$$[F_{yy}]_{x=c} = 0, \quad [F_{xy}]_{x=c} = 0. \quad (14)$$

4. Value of the load-function in certain important cases of practice

a) *Dead-load.* — If the specific value of the weight of the shell's slab, relating to the surface-unit of the middle surface, is

$$g = \text{const.},$$

the value of the load-function will be:

$$q = g \left(1 + \frac{r^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

b) *Snow-load*. — If the specific value of the snow-load, relating to the surface-unit of the plan projection area is

$$p = \text{const.},$$

then the load-function can be expressed as follows:

$$q = p = \text{const.} \quad (16)$$

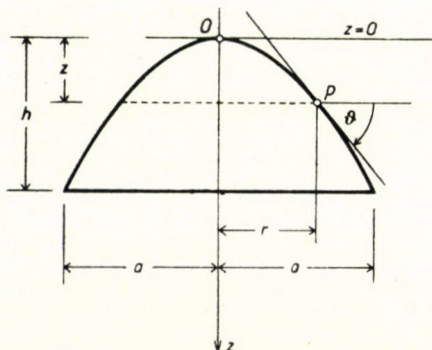


Fig. 3. Definition of the angle θ

c) *Uniformly-distributed wind-load*. — If a wind, blowing in direction $+x$, exerts a uniformly-distributed force-system w_0 normal to the shell, we have according to Fig. 3

$$Z = w_0 = \text{const.},$$

$$R = w_0 \operatorname{tg} \theta = \frac{w_0}{k} r,$$

$$X = \frac{w_0}{k} x, \quad Y = \frac{w_0}{k} y.$$

Under such circumstances, the value of the load-function, computed according to formula (12), will be:

$$q = \frac{w_0}{2k} (3r^2 - c^2 - k^2). \quad (17)$$

d) *Wind in direction $+x$* . — If an investigation would be necessary, the accuracy of which should exceed the accuracy of the solution given in c), it would be expedient — in lack of something better — to assume as to the wind-load the following law of distribution:

$$w = w_1 x (a^2 - y^2), \quad w_1 = \text{const.}$$

In this case:

$$\begin{aligned} Z &= w_1 x (a^2 - y^2), \\ R &= \frac{w_1}{k} r x (a^2 - y^2), \\ X &= \frac{w_1}{k} x^2 (a^2 - y^2), \\ Y &= \frac{w_1}{k} x y (a^2 - y^2). \end{aligned}$$

And so, the load-function calculated in accordance with formula (12), will be:

$$q = \frac{w_1}{k} \left[(a^2 - y^2) \left(\frac{4}{3} x^3 - kx^2 - \frac{c^3}{3} \right) - \frac{5}{4} xy^4 + \frac{3}{2} a^2 xy \right]. \quad (18)$$

e) *Wind in direction +y.* — As the law on the distribution of the wind-pressure is unknown, it is advisable to take into account the value of the normal wind-load according to the formula

$$w = w_2 (a^2 - x^2) y.$$

By so doing, we obtain the following formulae:

$$\begin{aligned} Z &= w_2 (a^2 - x^2) y, \\ R &= \frac{w_2}{k} (a^2 - x^2) ry, \\ X &= \frac{w_2}{k} (a^2 - x^2) xy, \\ Y &= \frac{w_2}{k} (a^2 - x^2) y^2. \end{aligned}$$

Thus the load-function, calculated according to formula (12), will be:

$$q = \frac{w_2}{k} y \left[(a^2 - x^2) \left(\frac{5}{4} x^2 + \frac{4}{3} y^2 - k^2 + \frac{a^2}{4} \right) + \left(\frac{a^2 - c^2}{4} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

5. The solution of the problem

For the determination of the stress-function, it is expedient to approach the load-function q appearing in differential equation (19) by power-series. For this purpose, three kinds of expanding in series can generally be used.

a) *Expanding in series according to the powers of ξ and y .* — In this case the approximate load-function q^* is produced in the form

$$q^* = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \xi^m y^n.$$

Thus the stress-function corresponding to the individual load-members

$$q_{mn}^* = \xi^m y^n$$

can — by satisfying initial conditions (14) — immediately be established, *i. e.*:

$$F_{mn}^* = m! n! \left[\frac{\xi^{m+2} y^n}{(m+2)! n!} - \frac{\xi^{m+4} y^{n-2}}{(m+4)! (n-2)!} + \frac{\xi^{m+6} y^{n-4}}{(m+6)! (n-4)!} - + \dots \right]. \quad (20)$$

The last member on the right-hand side of the above formula is

$$\frac{\xi^{m+n+2}}{(m+n+2)!} \quad \text{or} \quad \frac{\xi^{m+n+1} y}{(m+n+1)!},$$

depending on the even or odd nature of n .

During calculation formulae compiled in Table 1 could easily be used. From the latter, the stress-function, valid for different simple sorts of loading, can readily be obtained.

b) *Expanding in series according to the powers of x and y .* — Now the load-function will be approached by the series

$$q^* = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n.$$

By so doing, the stress-function \bar{F}_{mn}^* , corresponding to the individual load-members

$$\bar{q}_{mn}^* = x^m y^n,$$

could be calculated in the following way:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{mn}^* &= \binom{m}{0} c^m F_{0n}^* + \binom{m}{1} c^{m-1} F_{1n}^* + \\ &+ \binom{m}{2} c^{m-2} F_{2n}^* + \dots + \binom{m}{m} c^0 F_{mn}^*. \end{aligned} \quad (21)$$

Expressions F_{mn}^* , ($n = 0, 1, 2, \dots$) have the meaning as explained in (20).

Table 1

Formulae of the stress-function F_{mn}^* for certain simple cases of loading

q_{mn}^*	F_{mn}^*	q_{mn}^*	F_{mn}^*
1	$\frac{\xi^2}{2}$	y^2	$\frac{\xi^2 y^2}{2} - \frac{\xi^4}{12}$
ξ	$\frac{\xi^3}{6}$	ξy^2	$\frac{\xi^3 y^2}{6} - \frac{\xi^5}{60}$
ξ^2	$\frac{\xi^4}{12}$	$\xi^2 y^2$	$\frac{\xi^4 y^2}{12} - \frac{\xi^6}{180}$
ξ^3	$\frac{\xi^5}{20}$	$\xi^3 y^2$	$\frac{\xi^5 y^2}{20} - \frac{\xi^7}{420}$
ξ^4	$\frac{\xi^6}{30}$	y^3	$\frac{\xi^2 y^3}{2} - \frac{\xi^4 y}{4}$
ξ^5	$\frac{\xi^7}{42}$	ξy^3	$\frac{\xi^3 y^3}{6} - \frac{\xi^5 y}{20}$
y	$\frac{\xi^2 y}{2}$	$\xi^2 y^3$	$\frac{\xi^4 y^3}{12} - \frac{\xi^6 y}{60}$
ξy	$\frac{\xi^3 y}{6}$	y^4	$\frac{\xi^2 y^4}{2} - \frac{\xi^4 y^2}{2} + \frac{\xi^6}{30}$
$\xi^2 y$	$\frac{\xi^4 y}{12}$	ξy^4	$\frac{\xi^3 y^4}{6} - \frac{\xi^5 y^2}{10} + \frac{\xi^7}{210}$
$\xi^3 y$	$\frac{\xi^5 y}{20}$	y^5	$\frac{\xi^2 y^5}{2} - \frac{5 \xi^4 y^3}{6} + \frac{\xi^6 y}{6}$
$\xi^4 y$	$\frac{\xi^6 y}{30}$		

For the simplification of the calculations, stress-functions valid for certain simple cases of loading are given in Table 2.

c) *Expanding in series according to powers of r^2 .* — This sort of expanding in series can only be used for circular-symmetrical loadings. In this case, the series, replacing the load function, has the following form:

$$q^* = \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{2m}.$$

Stress-functions F_m^* corresponding to the individual load-members

$$q_m^* = r^{2m}$$

Table 2

Formulae of the stress-function \bar{F}_{mn}^ for certain simple cases of loading*

\bar{q}_{mn}^*	\bar{F}_{mn}^*
1	$\frac{\xi^2}{2}$
x	$c \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{6}$
x ²	$c^2 \frac{\xi^2}{2} + 2c \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^4}{12}$
x ³	$c^3 \frac{\xi^2}{2} + 3c^2 \frac{\xi^3}{6} + 3c \frac{\xi^4}{12} + \frac{\xi^5}{20}$
x ⁴	$c^4 \frac{\xi^2}{2} + 4c^3 \frac{\xi^3}{6} + 6c^2 \frac{\xi^4}{12} + 4c \frac{\xi^5}{20} + \frac{\xi^6}{30}$
x ⁵	$c^5 \frac{\xi^2}{2} + 5c^4 \frac{\xi^3}{6} + 10c^3 \frac{\xi^4}{12} + 10c^2 \frac{\xi^5}{20} + 5c \frac{\xi^6}{30} + \frac{\xi^7}{42}$
y	$\frac{\xi^2 y}{2}$
xy	$c \frac{\xi^2 y}{2} + \frac{\xi^3 y}{6}$
x ² y	$c^2 \frac{\xi^2 y}{2} + 2c \frac{\xi^3 y}{6} + \frac{\xi^4 y}{12}$
x ³ y	$c^3 \frac{\xi^2 y}{2} + 3c^2 \frac{\xi^3 y}{6} + 3c \frac{\xi^4 y}{12} + \frac{\xi^5 y}{20}$
x ⁴ y	$c^4 \frac{\xi^2 y}{2} + 4c^3 \frac{\xi^3 y}{6} + 6c^2 \frac{\xi^4 y}{12} + 4c \frac{\xi^5 y}{20} + \frac{\xi^6 y}{30}$
y ²	$\left(\frac{\xi^2 y^2}{2} - \frac{\xi^4}{12} \right)$
xy ²	$c \left(\frac{\xi^2 y^2}{2} - \frac{\xi^4}{12} \right) + \left(\frac{\xi^3 y^2}{6} - \frac{\xi^5}{60} \right)$
x ² y ²	$c^2 \left(\frac{\xi^2 y^2}{2} - \frac{\xi^4}{12} \right) + 2c \left(\frac{\xi^3 y^2}{6} - \frac{\xi^5}{60} \right) + \left(\frac{\xi^4 y^2}{12} - \frac{\xi^6}{180} \right)$
x ³ y ²	$c^3 \left(\frac{\xi^2 y^2}{2} - \frac{\xi^4}{12} \right) + 3c^2 \left(\frac{\xi^3 y^2}{6} - \frac{\xi^5}{60} \right) + 3c \left(\frac{\xi^4 y^2}{12} - \frac{\xi^6}{180} \right) + \left(\frac{\xi^5 y^2}{20} - \frac{\xi^7}{420} \right)$

Table 2 (continued)

\bar{q}_{mn}^*	\bar{F}_{mn}^*
y^3	$\left(\frac{\xi^2 y^3}{2} - \frac{\xi^4 y}{4} \right)$
$x y^3$	$c \left(\frac{\xi^2 y^3}{2} - \frac{\xi^4 y}{4} \right) + \left(\frac{\xi^3 y^2}{6} - \frac{\xi^5 y}{20} \right)$
$x^2 y^3$	$c^2 \left(\frac{\xi^2 y^3}{2} - \frac{\xi^4 y}{4} \right) + 2c \left(\frac{\xi^3 y^2}{6} - \frac{\xi^5 y}{20} \right) + \left(\frac{\xi^4 y^3}{12} - \frac{\xi^6 y}{60} \right)$
y^4	$\left(\frac{\xi^2 y^4}{2} - \frac{\xi^4 y^2}{2} + \frac{\xi^6}{30} \right)$
$x y^4$	$c \left(\frac{\xi^2 y^4}{2} - \frac{\xi^4 y^2}{2} + \frac{\xi^6}{30} \right) + \left(\frac{\xi^3 y^4}{6} - \frac{\xi^5 y^2}{10} + \frac{\xi^7}{210} \right)$
y^5	$\left(\frac{\xi^2 y^5}{2} - \frac{5\xi^4 y^2}{6} + \frac{\xi^6 y}{6} \right)$

can be produced after the substitution

$$r^2 = x^2 + y^2$$

according to the explanations to be found in *b*).

For the simplification of the calculation Table 3 contents the formulae valid for several simple cases of loading.

Table 3

Formulae of the stress-function F_m^* for certain simple cases of loading

q_m	F_m^*
1	$\frac{\xi^2}{2}$
r^2	$(c^2 + y^2) \frac{\xi^2}{2} + c \frac{\xi^3}{3}$
r^4	$(c^2 + y^2)^2 \frac{\xi^2}{2} + 2c(c^2 + y^2) \frac{\xi^3}{3} + (c^2 - y^2) \frac{\xi^4}{3} + 2c \frac{\xi^5}{15} + \frac{\xi^6}{18}$

6. Example of application

Let us demonstrate the application of the procedure outlined in the preceding for the shell shown in Fig 4. The equation of the middle surface of this shell is

$$z = \frac{r^2}{5},$$

the characteristic measuring data for it, on the other hand, are the following:

$$a = 5,0 \text{ m}, \quad c = 1,4 \text{ m}, \quad h = 5,0 \text{ m}, \quad k = 2,5 \text{ m}.$$

a) *Dead-load*. — If the specific weight of the shell, relating to the surface-unit of the middle surface, is

$$g = 200 \text{ kg/m}^2,$$

then the accurate load function has — according to formula (15) — the following form:

$$q = - 500 \left(1 + \frac{r^2}{2,5^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

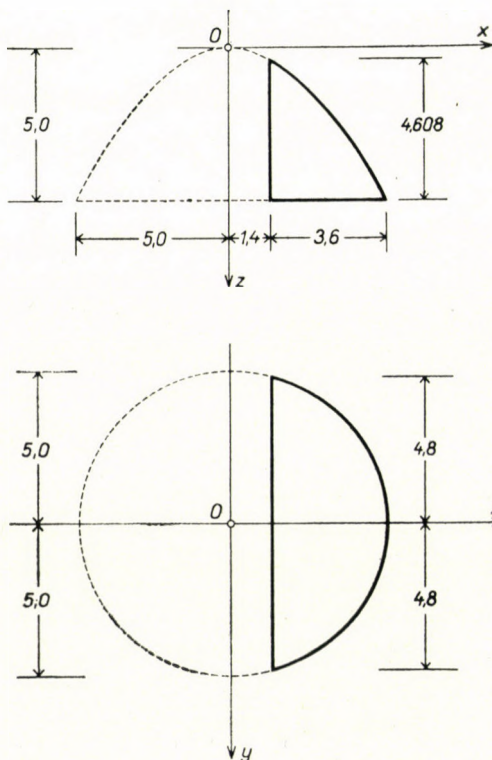


Fig. 4. Example of application

We replace this load-function along the section $r = 1,4 \div 5,0 \text{ m}$ with the expression

$$q^* = A + Br^2,$$

the accuracy of which is sufficient for practical purposes. The values of coefficients A and B figuring herein are:

$$A = - 554 \text{ kg/m}^2,$$

$$B = - 24 \text{ kg/m}^4.$$

Subsequently, the approximate stress-function of the problem can — aided by formulae to be found in the first two lines of Table 4 — immediately be set up, i. e.:

$$F^* = - 554 \frac{\xi^2}{2} - 24 \left[(1,96 + y^2) \frac{\xi^2}{2} + 1,4 \frac{\xi^3}{3} \right].$$

For the illustration of the degree of accuracy of the applied approximation, we present in Table 4 the accurate and the approximate values of the load function.

Table 4

The accurate value q and the approximate value q^* of the load function

r	1,4	2,0	2,6	3,2	3,8	4,4	5,0
q	-572	-640	-715	-812	-910	-1012	-1118
q^*	-592	-640	-708	-790	-890	-1005	-1140

b) *Snow-load.* — If the specific value of the snow-load relating to the surface-unit of the plan projection area is

$$p = 80 \text{ kg/m}^2$$

then, according to formula (16), the accurate load-function is

$$q = -200 \text{ kg/m}^2,$$

the stress-function, on the other hand, using the formula to be found in the first line of Table 3, is

$$F = -200 \frac{\xi^2}{2}.$$

c) *Uniformly-distributed wind-load.* — If the specific value of the wind-load relating to the surface unit of the middle surface is

$$w_0 = 120 \text{ kg/m}^2,$$

then, according to formula (17), the accurate value of the load-function will obtain the following form:

$$q = \frac{120}{2 \cdot 2,5} (3r^2 - 1,4^2 - 2,5^2) = 72r^2 - 197,04.$$

The precise stress-function, complying with this load-function, using formulae to be found in the first and in the second lines of Table 3, will be:

$$F = 72 \left[(1,4^2 + y^2) \frac{\xi^2}{2} + 1,4 \frac{\xi^3}{3} \right] - 197,04 \frac{\xi^2}{2}.$$

REFERENCES

1. DISCHINGER, F.—FINSTERWALDER, H.: Weitere Entwicklung der Schalenbauweise »Zeiss-Dywidag«. *Beton und Eisen* **31** (1932), pp. 101—108, 149—155, 165—170, 181—184, 213—320, 229—235, 245—247.
2. PUCHER, A.: Die Berechnung der Dehnungsspannungen von Rotationschalen mit Hilfe von Spannungsfunktionen. *Abhandlungen. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau* **5** (1937—38), pp. 275—299.
3. PUCHER, A.: Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen. *Beton und Eisen* **33** (1934), pp. 298—304.

SUMMARY

The present paper deals with the calculation of apse-like shells, formed according to a paraboloid of revolution. The ground-plan of the examined shell is a semi-circle or a segment. The shell is supported at its lower end by a horizontal basis-ring. Its open edge is entirely free, but for increasing its stiffness against buckling, it is at most reinforced by an edge-arch.

The treatise examines the distribution of forces of apse-like shells within the range of the usual assumptions of the membrane-theory. Disturbing effects arising along the edges, due to constraints of deformations, are not taken into consideration. Similarly, the effect of the stiffening arch — occasionally applied along the open edge — on the distribution of forces, is also neglected.

The determination of the shell's internal forces is carried out by using a stress-function. The load-function, figuring in the differential equation of the stress-function, is approached by a finite power-series and the final solution is assembled from detail solutions corresponding to the individual members of this series.

For the simplification of the calculation, the formulae belonging to certain important cases of loading, are compiled in tables. The knowledge of these gives the possibility for a comparatively simple calculation of internal forces, arising from the afore-mentioned loadings important from the view-point of practice.

ROTATIONSPARABOLOIDFÖRMIGE SCHALENNISCHEN

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz behandelt die Berechnung von rotationsparaboloidförmigen, einer Halbkuppel (Apside) ähnlichen Nischenschalen. Der Grundriß der Schale ist ein Halbkreis oder ein Kreisabschnitt. Die Schale stützt sich auf einen horizontalen Fußring. Ihr offener Rand ist vollkommen frei, dort wird zur Erhöhung der Knicksteifigkeit höchstens nur ein Randbogen angebracht.

Im Aufsatz wird Kräfteverteilung der Schalennischen im Rahmen der gebräuchlichen Voraussetzungen der Membrantheorie untersucht. Die infolge des Verformungszwanges auftretenden Randstörungen werden außer acht gelassen. Der Einfluß des am offenen Schalendrand gelegentlich angebrachten Randbogens auf die Kräfteverteilung der Schale wird ebenfalls nicht in Betracht genommen.

In der Abhandlung werden die Schnittkräfte der Schale mit Hilfe einer Spannungsfunktion bestimmt. Die in der Differentialgleichung der Spannungsfunktion vorkommende Belastungsfunktion wird mittels einer endlichen Potenzenreihe angenähert und die Lösung wird aus den einzelnen Gliedern entsprechenden Teillösungen zusammengesetzt.

Zur Vereinfachung der Berechnungen sind die für die wichtigsten Belastungsfälle benötigten Formeln in Tabellen zusammengefaßt. Mit Hilfe dieser kann die Berechnung der Schnittkräfte in den praktisch wichtigen Belastungsfällen auf verhältnismäßig einfache Weise durchgeführt werden.

ABSIDES EN PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'étude traite du calcul des absides en paraboloides de révolution. Le plan du voile examiné est un demi-cercle ou un segment de cercle, et le voile s'appuie, en bas, sur une ceinture de plan horizontal. Sa rive ouverte est entièrement libre, un arc de rive étant tout au plus appliqué pour augmenter la rigidité au flambement.

Le jeu de forces des absides est étudié dans le cadre des hypothèses courantes de la théorie des membranes. Sur les rives du voile, les effets dus aux contraintes circonférentielles sont négligés par l'auteur. L'effet que des raidisseurs éventuellement appliqués sur la rive ouverte du voile peuvent avoir sur le jeu de forces n'a pas été non plus considéré.

Les forces intérieures du voile sont déterminées à l'aide d'une fonction de tension. La fonction de charge figurant dans l'équation différentielle de la fonction de tension est approchée par une série de puissances finie, et la résolution composée de résolutions partielles correspondant aux différents membres de la série.

Pour simplifier le calcul, les formules relatives aux cas de charges les plus importants ont été concentrées dans des tableaux. A l'aide de ceux-ci, le calcul des forces intérieures devient relativement aisé dans tous les cas de charges se rencontrant dans la pratique.

ПОЛУКРУГЛЫЕ ОБОЛОЧКИ, ОФОРМЛЕННЫЕ ПО ПАРАБОЛОИДУ ВРАЩЕНИЯ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Данная работа занимается расчетом полукруглых оболочек, оформленных по параболоиду вращения. План исследованной оболочки представляет собою полукруг или сегмент круга. Внизу оболочка опирается на кольцо горизонтальной плоскости. Открытый край является совершенно свободным, и там в крайнем случае только для повышения жесткости на прогиб изготавливается краевая дуга.

Работа анализирует работу полукруглой оболочки в рамках обычных предположений мембранной теории. Мешающие воздействия на краю оболочки, вызванные периметрическими принуждениями, упускаются. Не учитывается также воздействие, оказываемое на работу дуги жесткости, возможно применяемой на открытом краю оболочки.

В работе внутренние силы оболочки определяются с помощью функции напряжений. Функция нагрузки, фигурирующую в дифференциальном уравнении функции напряжения, приближается конечным степенным рядом, и решение складывается из соответствующих частных решений отдельных членов ряда.

В интересах упрощения вычислений в работе формулы важнейших случаев нагрузки сводятся в таблицы. Эти таблицы позволяют относительно просто осуществить вычисление внутренних усилий случаев нагрузки, которые могут притти в расчет с практической точки зрения.

DIE THERMISCHE DIMENSIONSÄNDERUNG DER VAKUUMTECHNISCHEN STROMDURCHLEITUNGSDRÄHTE AUS Fe-Ni-LEGIERUNG MIT KUPFERÜBERZUG

E. G. FUCHS

EISENFORSCHUNGSINSTITUT, BUDAPEST

[Eingegangen am 16. November 1959]

1. Einleitung

In die Glaskolben der Elektronenröhren, Glühlampen und anderer vakuumtechnischer Erzeugnisse werden Metallfäden eingeschmolzen, um den Strom durchzuleiten. Die Kolben müssen bei allen Temperaturen im Bereich zwischen der Einschmelzung und der niedrigsten Lagerungstemperatur luftdicht schließen. Das kann nur dann erzielt werden, wenn die thermische Dimensionsänderung der Metallfäden bei jeder Temperatur der des Glases entspricht [1, 2].

Die Durchleitungsdrähte werden schon seit langem aus einer Fe-Ni-Legierung mit etwa 42% Nickelgehalt hergestellt, auf die ein etwa 20–30% des Gesamtquerschnittes ausmachender *Kupferüberzug* gelötet wird, damit die thermische Dimensionsänderung des Drahtes der des Glases angenähert werde (*Dumet*).

Vor kurzem ausgeführte eingehende Untersuchungen erwiesen, daß man auch mit strengen Vorschriften für die chemische Zusammensetzung keine Fe-Ni-Legierungen erhalten kann, deren Ausdehnungseigenschaften vollkommen gleich sind. Damit also die thermische Ausdehnung der Durchleitungsdrähte möglichst gut der des Glases entspreche, benötigt man zu ihrer Herstellung ein Verfahren, mit dem man für jede Charge die Dicke des notwendigen Kupferüberzuges der *im übrigen qualitätsmäßig entsprechenden* Fe-Ni-Legierung feststellen kann [3].

2. Zielsetzung

Es ist bekannt, daß in Abhängigkeit von der Temperatur weder die thermische Dimensionsänderung des Glases, noch die der Fe-Ni-Legierung, noch die des Kupfers gleichmäßig ist, und daß sie auch voneinander verschieden sind. Außerdem ist die longitudinale und die radiale Dimensionsänderung der mit einem Kupferüberzug versehenen Fe-Ni-Legierung, des sog.

Dumets, sehr verschieden. Man kann also die Ausdehnungsverhältnisse nur bedingt in Übereinstimmung bringen.

Die Länge der stromleitenden, im Glas eingebetteten Drähte ist ein Vielfaches ihres Durchmessers. Dennoch zeigte die Erfahrung von mehreren Jahrzehnten, daß die *radiale* Dimensionsänderung die entscheidendere Wirkung hat, diese muß also mit der thermischen Ausdehnung des Glases im besseren Einklang stehen. Die radiale Ausdehnung der gebräuchlichen Drähte kann mit den üblichen Geräten überhaupt nicht, die longitudinale Ausdehnung auch nur unsicher gemessen werden. Unsere zu entwickelnden Überlegungen hatten daher das Ziel, *aus den gemessenen longitudinalen Dimensionsänderungen der Fe-Ni-Legierung und des Kupfers die resultierende longitudinale und radiale Dilatation der fertigen Durchleitungsdrähte wenigstens angenähert zu berechnen*. Ferner war unser Ziel die Ausarbeitung eines rechnerischen Verfahrens, mit dem *aus der gemessenen thermischen longitudinalen Dimensionsänderung der Fe-Ni-Legierungen die ungefähre Dicke des Kupferüberzuges des Leitungsdrahtes mit der gewünschten radialen Ausdehnung bestimmt werden kann*.

3. Die longitudinale Dimensionsänderung der Durchleitungsdrähte

Die resultierende Dilatation der Durchleitungsdrähte kann aus den gemessenen thermischen Dimensionsänderungen der Fe-Ni-Legierungen und

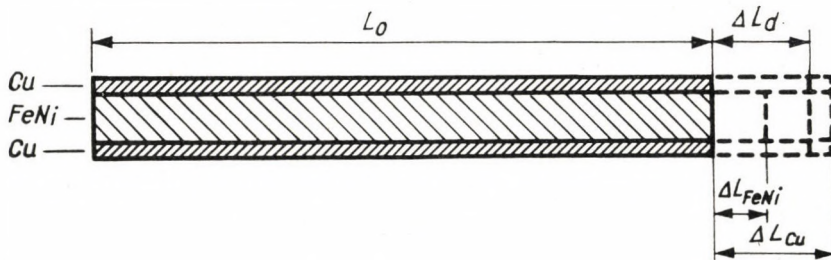


Bild 1. Die longitudinale Dilatation der mit Kupfer überzogenen stromdurchleitenden Drähte aus Eisennickel (Dumet)

des Kupfers exakt nur sehr umständlich berechnet werden. Es sind dazu auch einige schwer bestimmbare Konstanten nötig, so besonders die Poissonschen Zahlen, noch dazu auch bei sehr kleinen Formänderungen und bei verschiedenen Temperaturen. Deshalb wurde folgende vereinfachte Berechnung angewandt.

Bild 1 zeigt den Längsschnitt eines bei Zimmertemperatur L_0 langen Leitungsdrahtes. Wenn man die Möglichkeit einer freien Dimensionsänderung voraussetzt, würde sich als Wirkung einer Temperaturerhöhung von Δt der

Fe-Ni-Kern um

$$\Delta L_{\text{FeNi}} = L_0 \cdot \alpha_{\text{FeNi}} \cdot \Delta t = L_0 \cdot \Delta l_{\text{FeNi}}, \quad (1)$$

der Kupferüberzug hingegen um

$$\Delta L_{\text{Cu}} = L_0 \cdot \alpha_{\text{Cu}} \cdot \Delta t = L_0 \cdot \Delta l_{\text{Cu}}, \quad (2)$$

verlängern. α ist der lineare Ausdehnungskoeffizient. Es ist zweckmäßig, die Werte $\alpha \cdot \Delta t$ in die Form Δl zusammenzuziehen, da man aus den gemessenen Ausdehnungskurven diese Werte unmittelbar bestimmen kann, und die Berechnung so einfacher wird. Die Werte α sind übrigens auch nicht ganz eindeutig, weil sie sich mit der Temperatur ändern.

Da der Eisen-Nickel-Kern und der Kupferüberzug zusammengelötet sind, kann statt der unter (1) und (2) beschriebenen Dimensionsänderungen nur die Resultierende ΔL_d beobachtet werden. Das Maß der Verlängerung ΔL_d wird dadurch bestimmt, daß die Kräfte, die infolge der Verschiedenheit der thermischen Dimensionsänderungen zwischen dem Fe-Ni-Kern und dem Kupferüberzug auftreten, im Gleichgewicht sein müssen.

Werden die auf die elastische Formänderung bezüglichen Zusammenhänge $P = \sigma \cdot q$ und $\sigma = \lambda \cdot E$ mit in Betracht gezogen — wo P die Belastung, σ die Spannung, q der Querschnitt, λ die Dehnung und E der Elastizitätsmodul ist — so kann man schreiben

$$P = \lambda_{\text{FeNi}} \cdot E_{\text{FeNi}} \cdot q_{\text{FeNi}} = \lambda_{\text{Cu}} \cdot E_{\text{Cu}} \cdot q_{\text{Cu}}. \quad (3)$$

Daraus folgt, wenn man voraussetzt, daß als Wirkung der Dimensionsänderung, die infolge der Temperaturzunahme Δt eintritt, zwischen dem Fe-Ni-Kern und dem Kupferüberzug ein Kräftegleichgewicht vorhanden ist,

$$(\Delta L_d - \Delta L_{\text{FeNi}}) \cdot E_{\text{FeNi}} \cdot q_{\text{FeNi}} = (\Delta L_{\text{Cu}} - \Delta L_d) \cdot E_{\text{Cu}} \cdot q_{\text{Cu}}. \quad (4)$$

ΔL_d kann ausgedrückt werden und so kann man die resultierende Verlängerung des Leitungsdrahtes aus dem folgenden Zusammenhang berechnen:

$$\Delta L_d = L_0 \frac{\Delta l_{\text{FeNi}} + k \cdot \Delta l_{\text{Cu}} \cdot \frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{FeNi}}}}{1 + k \cdot \frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{FeNi}}}}. \quad (5)$$

In der Formel (5) ist $k = \frac{q_{\text{Cu}}}{q_{\text{FeNi}}}$, also der Quotient der Querschnitte des Kupferüberzuges, und des Fe-Ni-Kernes.

Zur praktischen Verwendung der Formel (5) ist es notwendig, den Elastizitätsmodul der Fe-Ni-Legierung und des Kupfers zu kennen, und zwar bei Zimmertemperatur und auch bei höheren Temperaturen. Diese Werte sind so gut wie unbekannt. Deshalb wurden mit einem Mohr & Federhaffschen Dauerstandprüfgerät und mit einem Martensschen Spiegeldehnungsmesser die Werte des Elastizitätsmoduls einer der industriellen Erzeugung entstammenden Fe-Ni-Probe mit der Bezeichnung 42, sowie des Elektrolytkupfers als Funktion der Temperatur bestimmt. (Die chemische Zusammensetzung der Fe-Ni-Legierung war die folgende: C = 0,03%, Si = 0,18%, Mn = 0,88%,

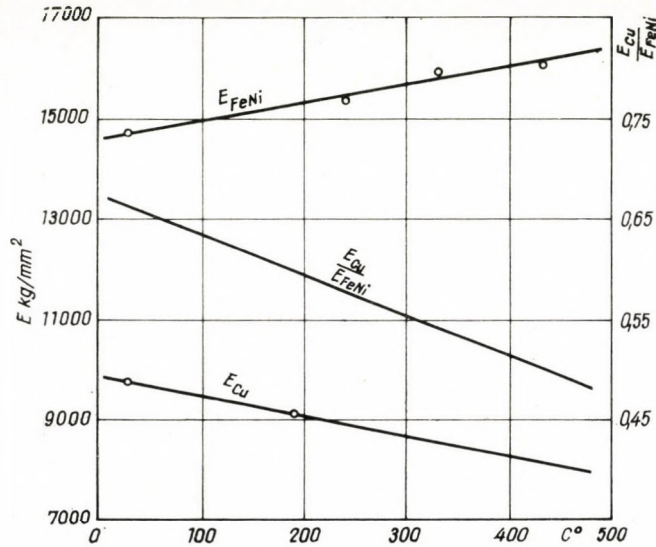


Bild 2. Die Änderung des Elastizitätsmoduls des Kupfers und des Eisennickels als Funktion der Temperatur

S = 0,005%, P = 0,011%, Cu = 0,02%, Ni = 41,8%, Cr = 0,06%.) Die so gemessenen Werte wurden in Bild 2 zusammengefaßt. In das Bild wurden auch die zur Berechnung notwendigen Werte $\frac{E_{Cu}}{E_{FeNi}}$ eingezeichnet.

Um die Gültigkeit des Zusammenhanges (5) zu kontrollieren, wurde folgendes Experiment durchgeführt:

Es wurde aus der Fabrikation der betriebsüblichen Dumetdrähte ein Halbfabrikat von etwa 3,8 mm Durchmesser herausgehoben. Sein Kern bestand aus Fe-Ni mit der Bezeichnung 42, und der Überzug aus reinem Kupfer, also aus Stoffen, deren Elastizitätsmodule bestimmt worden waren. Die auf die Längeneinheit bezogene Verlängerung der Fe-Ni-Legierung, die des Kupfers und die des Halbfabrikates wurde als Funktion der Temperatur gemessen und im Bild 3 dargestellt. Darnach wurde das Querschnittsverhältnis

Kupfer/Eisennickel gemessen — es betrug $k = 0,41$ — und nun wurde aus der Beziehung (5) auch die thermische Dimensionsänderung des Durchleitungsdrahtes berechnet. Die so erhaltenen Ergebnisse wurden ebenfalls in Bild 3 eingetragen; die gute Übereinstimmung ist augenfällig. Die dennoch vorhandene Abweichung kann teilweise dem Umstand zugeschrieben werden, daß das Kupfer während der mehrstündigen dilatometrischen Prüfung unter dem Einfluß der Spannungen kriecht. So können auch bleibende Formänderungen entstehen, die die Spannungen selbstverständlich verringern. Man kann voraus-

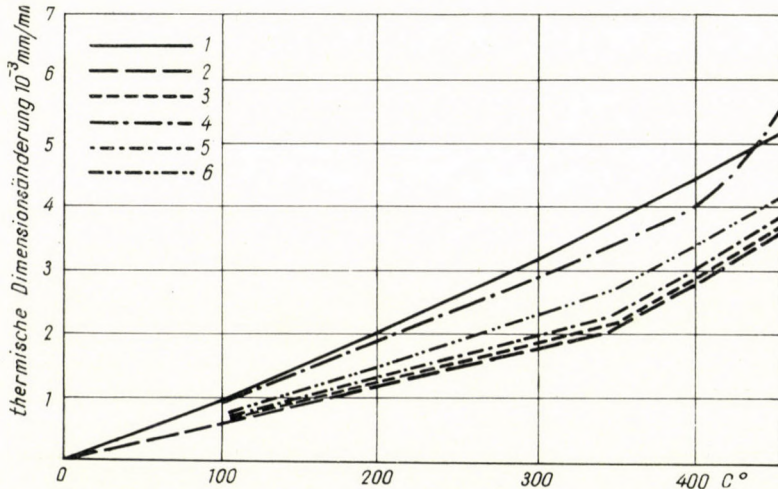


Bild 3. Gemessene bzw. berechnete Dimensionsänderungen

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1 Kupfer, gemessen | 4 Glas, gemessen |
| 2 Fe-Ni, gemessen | 5 Dumet, berechnet (longitudinal) |
| 3 Dumet, gemessen (longitudinal) | 6 Dumet, berechnet (radial) |

setzen, daß die Abweichung bei den tatsächlichen Einschmelzungen wegen der bedeutend größeren Abkühlungsgeschwindigkeit kleiner als die hier gefundene ist.

4. Die radiale Dimensionsänderung der Durchleitungsdrähte

Die kubischen Metalle und Legierungen, zu denen auch die Fe-Ni-Legierungen und auch das Kupfer gehören, sind vom Gesichtspunkt der thermischen Dimensionsänderung als isotrop zu betrachten, sofern ihr Gefüge keine Textur aufweist. Ihre thermische Dimensionsänderung ist daher in jeder Richtung gleich groß. Somit kann von den Beziehungen (1) und (2) abgeleitet werden, daß der Rauminhalt V_0 eines Metallkörpers unter dem Einfluß einer Temperaturerhöhung Δt um den Wert

$$\Delta V = V_0 \cdot 3 \cdot a \cdot \Delta t = V_0 \cdot 3 \cdot \Delta l, \quad (6)$$

zunimmt. In der Formel ist Δl die lineare Dimensionsänderung, um die sich die Längeneinheit des Metallkörpers bei Einwirkung der Temperaturzunahme Δt vergrößert.

Annähernd gilt auch, daß die Zunahme des Volumens auch dann nach (6) zustandekommt, wenn die Ausdehnung des Metallkörpers in irgendeiner Richtung behindert ist. Die Dimensionszunahme wird daher in den anderen Richtungen sinngemäß größer sein, als wenn die Verhinderung nicht vorhanden wäre. Die thermische Dimensionsänderung der Längeneinheit der Eisennickel- oder Kupferstäbe ist also longitudinal und radial die gleiche, solange keine äußere Einwirkung sie hindert; in den Stromleitungsdrähten treten aber der

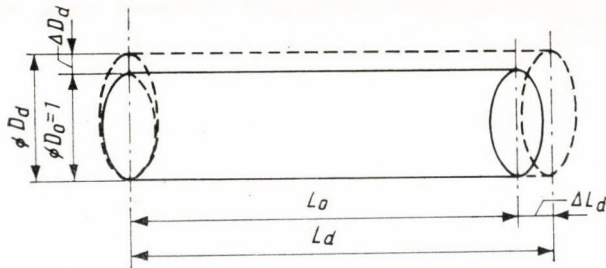


Bild 4. Thermische Volumenänderung des mit Kupfer überzogenen stromdurchleitenden Fe-Ni-Drahtes

Zwangsverhältnisse wegen bedeutende Abweichungen auf. Da die longitudinale Dimensionsänderung mit den üblichen Dilatometern bestimmt werden kann, die Messung der radialen Dilatation hingegen auf meßtechnische Schwierigkeiten stößt, wurden folgende Überlegungen angestellt, um die thermische radiale Dimensionsänderung der Leitungsdrähte wenigstens angenähert zu bestimmen.

Bild 4 zeigt die Abmessungen eines Leitungsdrahtes bei Zimmertemperatur und nach einer Temperaturzunahme von Δt . Für die Änderung des Volumens kann man schreiben

$$\Delta V_d = V_d - V_0 = (D_0 + \Delta D_d)^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (L_0 + \Delta L_d) - D_0^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot L_0. \quad (7)$$

Vorausgesetzt, daß D_0 , d. h. der ursprüngliche Durchmesser des Leitungsdrahtes 1 ist, folgt daraus, daß die Veränderung des Durchmessers

$$\Delta D_d = \frac{4 \cdot \Delta V_d - \pi \cdot \Delta L_d}{2 \cdot \pi \cdot L_0} \quad (8)$$

beträgt. Aus der Gleichung (6) folgt

$$\Delta V_d = V_{0, \text{FeNi}} \cdot 3 \cdot \Delta l_{\text{FeNi}} + V_{0, \text{Cu}} \cdot 3 \cdot \Delta l_{\text{Cu}}. \quad (9)$$

Wenn man nun diesen Ausdruck sowie (5), der ΔL_d bestimmt, in (8) einsetzt, wenn man ferner bedenkt, daß $k = \frac{q_{\text{Cu}}}{q_{\text{FeNi}}}$ ist, und

$$q_{\text{FeNi}} + q_{\text{Cu}} = \frac{D_0^2 \pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ ist,} \quad (10)$$

so beträgt die radiale, auf die Einheit des Durchmessers des Leitungsdrahtes bezogene Dimensionsänderung des Dumets unter der Wirkung der Temperaturzunahme von Δt

$$\Delta D_d = \frac{3}{2} \frac{\Delta l_{\text{FeNi}} + k \cdot \Delta l_{\text{Cu}}}{k + 1} - \frac{1}{2} \frac{\Delta l_{\text{FeNi}} + k \cdot \Delta l_{\text{Cu}} \frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{FeNi}}}}{1 + k \cdot \frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{FeNi}}}}. \quad (11)$$

Um die Gültigkeit zu kontrollieren, wurden die radialen Dimensionsänderungen des auch in Punkt 3 verwendeten Probematerials mittels (11) berechnet und die Ergebnisse in Bild 3 eingezeichnet. Ebenso wurde die thermische Ausdehnungskurve der Glasart gemessen und eingezeichnet, in welche die Einschmelzungen vorgenommen werden. Auf dem so ergänzten Bild 3 fällt der ziemlich große Unterschied zwischen der longitudinalen und der radialen Dilatation auf. Man sieht auch die bekannte größere Ausdehnung über dem Erweichungspunkt des Glases gut. (Erweichungspunkt wird konventionell der Schnittpunkt der beiden Zweige der Ausdehnungskurve genannt, in unserem Falle etwa 420°C.)

Die Leitungsdrähte, die aus derselben Fabrikation stammten wie das vorliegende Probematerial, wurden zur Anfertigung von vakuumtechnischen Erzeugnissen mit gutem Erfolg verwendet. Ihre Ausdehnung entsprach daher der des Glases, was auch durch den Umstand bezeugt wird, daß das Glas einigermaßen auf den Draht schrumpft, wenn das Glas von seinem Erweichungspunkt an mit dem Leitungsdraht zusammen gekühlt wird (Bild 3). Es ist bekannt, daß das die unbedingte Voraussetzung für eine gute Verbindung des Leitungsdrahtes mit dem Glas ist. Die beschriebene Kontrolluntersuchung lieferte so gleichzeitig auch den mittelbaren Beweis, daß die angewandte Näherungsmethode im wesentlichen die Verhältnisse richtig beschreibt. Man muß bemerken, daß der Zusammenhang (5), wie schon erwähnt, etwas größere longitudinale thermische Dimensionsänderungen voraussagt, als sie

tatsächlich beobachtet werden, weil hauptsächlich das Kupfer bei höheren Temperaturen nicht mehr als elastischer Stoff betrachtet werden kann. Da in der Gleichung (11) auch die Gleichung (5) verwendet wurde, sind die daraus sich ergebenden Werte ΔD_d etwas kleiner als die wirklichen.

5. Die Bestimmung der notwendigen Dicke des Kupferüberzuges

Wie schon in der Einleitung davon die Rede war, wird die Fe-Ni-Legierung bei der Herstellung von vakuumtechnischen stromdurchleitenden Dumetdrähten mit einem Kupferüberzug versehen, damit sie den Ausdehnungseigenschaften des verwendeten Glases ähnlicher werden. Die Eigenschaften des verwendeten Glases und Kupfers sind als Konstanten zu betrachten, das kann man aber auf Grund der vieljährigen Erfahrung und der eigenen Meßergebnisse [3] auch von den qualitätsmäßig übrigens entsprechenden Fe-Ni-Legierungen nicht behaupten. Vom Gesichtspunkt der Herstellung der Durchleitungsdrähte wäre es deshalb wichtig, wenn man ohne Versuchsproduktion, nur auf Grund der mit den üblichen Untersuchungseinrichtungen leicht zu bewerkstellenden Messung der thermischen Dimensionsänderung, jenes Verhältnis Cu/FeNi bestimmen könnte, das den Eigenschaften des Glases am besten entsprechenden Durchleitungsdraht ergibt.

Auch wurde es erwähnt, daß besonders die *radiale* Dimensionsänderung des Durchleitungsdrahtes sich der thermischen Dimensionsänderung des Glases annähern muß. Wenn man die in Punkt 3 und 4 beschriebenen Zusammenhänge für richtig annimmt, muß man deshalb das Querschnittverhältnis Kupfer/Eisennickel aus der Gleichung (11) bestimmen. Die Rechnung führt zu der folgenden recht umfänglichen, aber für konkrete Berechnungen nicht unbequemen Form:

$$k = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (12)$$

wo

$$a = 2 \frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{FeNi}}} (\Delta l_{\text{Cu}} - \Delta D_d),$$

$$b = \Delta l_{\text{FeNi}} \left(3 \frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{FeNi}}} - 1 \right) - \Delta l_{\text{Cu}} \left(\frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{FeNi}}} - 3 \right) - 2\Delta D_d \left(\frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{FeNi}}} + 1 \right),$$

$$c = 2(\Delta l_{\text{FeNi}} - \Delta D_d)$$

ist.

Mit der Gleichung (12) kann das Querschnittverhältnis Kupfer/Eisennickel für Durchleitungsdrähte berechnet werden: Bild 3 enthält die dazu nötigen Werte Δl_{Cu} , Bild 2 die Werte $\frac{E_{\text{Cu}}}{E_{\text{FeNi}}}$. Die thermische longitudinale Dimensionsänderung der Fe-Ni-Legierung kann mit jedem beliebigen ge-

bräuchlichen Dilatometer gemessen werden. Außer diesen muß man nur noch die gewünschte resultierende Dimensionsänderung ΔD_d des Durchleitungsdrahtes kennen.

Die Gleichung (12) ist das Ergebnis einer nicht ganz exakten Rechnung. Dazu kommt, daß in der thermischen Dimensionsänderung der Fe-Ni-Legierungen um den Curie-Punkt ein erheblicher Knick vorhanden ist (s. Bild 3). An der Stelle, wo das Glas und der durchstoßende Durchleitungsdraht

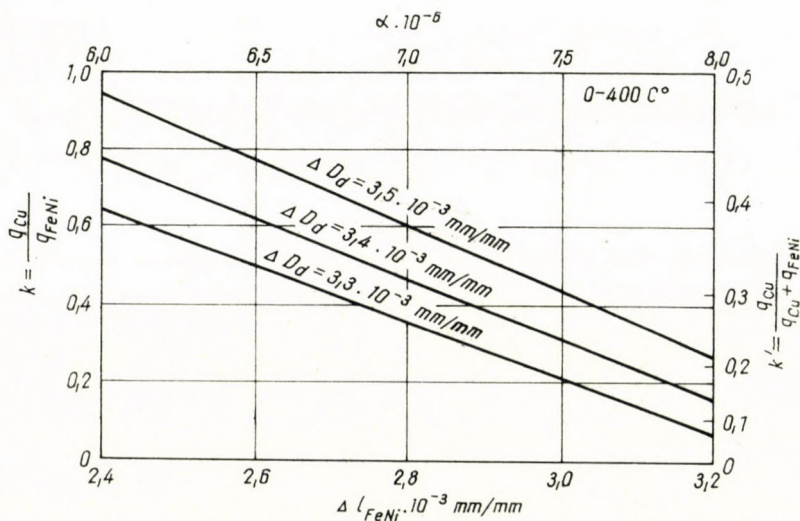


Bild 5. Das notwendige Querschnittsverhältnis Cu/FeNi als Funktion der spezifischen thermischen longitudinalen Dimensionsänderung, innerhalb der in den Fe-Ni-Legierungen vorkommenden Grenzen

sich berühren, treten ebenfalls gewisse, Dimensionsänderungen verursachende Spannungen auf, die zwar kleiner sein können als die, die zwischen Kupfer und Eisenickel auftreten, die man aber dennoch nicht völlig vernachlässigen darf. Diese Umstände können innerhalb gewisser Grenzen durch die entsprechende Wahl von ΔD_d in Betracht gezogen werden.

Da für eine solche Bestimmung des gewünschten Wertes ΔD_d keine andere Möglichkeit zur Verfügung stand, wurden die Werte des einzigen zur Verfügung stehenden und im vorangehenden wiederholt erwähnten Probenmaterials benützt. Demgemäß ist $\Delta D_d = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ mm/mm}$.

Zur besseren Übersicht wurde die Gleichung (12) bei Verwendung der obigen Zahlenwerte auch graphisch innerhalb der vorkommenden Grenzen Δl_{FeNi} des Dumets dargestellt. Zur Orientierung wurde auch je eine Kurve $k = f(\Delta l_{FeNi})$ mit einem größeren und einem kleineren Wert ΔD_d eingetragen.

An dieser Stelle danke ich Herrn Dipl. Physiker Sz. SZENTPÉTERY für seine Mitwirkung. Dank gebührt auch den wissenschaftlichen Mitarbeitern Herrn Á. SZOMBATFALVY und L. ROZSNOKI für die Bestimmung der Elastizitätsmodule.

ZUSAMMENFASSUNG

In der Vakuumtechnik werden zum Durchleiten des elektrischen Stromes durch Glas oft Eisen-Nickel Drähte verwendet, die mit einem Kupferüberzug versehen sind. Die thermische Dimensionsänderung dieser sogenannten *Dumet*-Drähte muß der des Glases entsprechen. Vor kurzem wurde nachgewiesen, daß die Dilatation der Eisen-Nickel Chargen mit scheinbar gleicher chemischer Zusammensetzung verschieden sein kann. Deshalb muß zur Annäherung der Eigenschaften des Glases für jede Charge das nötige Cu/FeNi Querschnittverhältnis gesondert festgestellt werden. Es wurden vereinfachte Zusammenhänge abgeleitet, mit denen die thermischen longitudinalen und radialen Dimensionsänderungen der Dumet Durchleitungsdrähte aus der gemessenen longitudinalen Dilatation des Kupfers und des Eisennickels berechnet werden können. Aus dem letzteren Zusammenhang kann das k Cu/FeNi Verhältnis ausgedrückt werden. Zur leichteren Bestimmung dieses Verhältnisses wird die Funktion $k = f(\Delta l_{\text{FeNi}})$, die mit Hilfe gemessener und aufgenommener Werte berechnet wurde, auch als Diagramm dargestellt.

SCHRIFTTUM

1. MILLNER, T.: Vasnikkel ötvözetek hőkiterjedési tulajdonságainak összefüggése mágneses sajátságokkal (Der Zusammenhang zwischen den thermischen Ausdehnungseigenschaften und den magnetischen Eigenschaften von Eisen-Nickel-Legierungen) Mérnöki Továbbképző Intézet. 1954. 2402 sz. Budapest.
2. MILLNER, T., WELESZ, R.: Effect of Manganese Content on the Thermal Expansion Coefficient and Magnetic Properties of the So-Called Dumet Iron-Nickel Alloys. (Einfluß des Mangengehaltes auf den thermischen Ausdehnungskoeffizienten und auf die magnetischen Eigenschaften der sog. Dumet Eisen-Nickel-Legierungen.) Acta Technica, 1956. Bd. 14. Budapest. S. 279—291.
3. FUCHS, E.G.: Chemische Zusammensetzung und thermische Ausdehnung der zu den sogenannten Dumet-Drähten verwendeten Fe-Ni-Legierungen. Acta Technica, Bd. 31 (1960) Budapest. S. 425—435.

HEAT-CAUSED DILATATION OF COPPER-CLAD IRON-NICKEL CURRENT-CARRYING WIRES FOR VACUUM ENGINEERING

E. G. FUCHS

SUMMARY

Vacuum engineering employs copper-clad iron-nickel wires for conduction current through glass. Their transverse heat dilatation especially must correspond for that of glass. Recently it was found [3] that dilatation of various FeNi charges of seemingly identical chemical composition may be different. Thus, to approach actual glass characteristics, it has to be stated by charges the required cross-section ratio of copper resp. FeNi. To make this easier, simplified relations were established for calculating the heat-caused length- and cross-wise dilatation of copper-clad FeNi current-carrying wires, from lengthwise measured dilatations of copper and FeNi. From the latter relations the copper can be derived (FeNi cross-sectional relation k , for the easier determination of which, the function $k = f(\Delta l_{\text{FeNi}})$, calculated by using the measured resp. assumed constants, is shown in a diagram.

DILATATION DES FILS CONDUCTEURS DE COURANT EN FeNi À REVÊTEMENT DE CUIVRE, UTILISÉS DANS LA TECHNIQUE DU VIDE POUSSÉ

E. G. FUCHS

RÉSUMÉ

Dans la technique du vide poussé, les fils en FeNi à revêtement de cuivre étant utilisés pour la conduction du courant à travers le verre, le changement de dimension, transversal surtout, des fils en question, doit correspondre à la dilatation du verre. Dans un passé tout

récent on a constaté [3], que la dilatation des charges d'une composition chimique similaire peut varier, de sorte que l'approximation des propriétés du verre nécessite la détermination de la proportion cuivre/FeNi de la section transversale pour chaque charge. Pour faciliter cette détermination, on a déduit des corrélations simplifiées pour le calcul du changement de dimension longitudinal et transversal des fils en FeNi revêtus de cuivre, à partir de la dilatation longitudinale mesurée du cuivre et du FeNi. De ces corrélations, la proportion k de la section transversale cuivre/FeNi peut être dégagée. Pour faciliter la détermination de cette proportion, la fonction $k = f(\Delta l_{\text{FeNi}})$, obtenue par utilisation des constantes mesurées ou calculées, est représentée par un diagramme.

ТЕПЛОВОЕ ИЗМЕНЕНИЕ РАЗМЕРОВ ПОКРЫТЫХ МЕДНОЙ ОБОЛОЧКОЙ ЖЕЛЕЗО-НИКЕЛЬНЫХ ТОКОВЕДУЩИХ ПРОВОЛОК, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ВАКУУМНОЙ ТЕХНИКЕ

Э. Г. ФУКС

РЕЗЮМЕ

Покрытые медью железо-никельные проволоки используются в вакуумной технике для токоведущего провода через стекло; дилатации стекла в основном должны соответствовать поперечные тепловые изменения размеров проволоки. В недавнем прошлом установлено [3], что тепловые изменения размеров ферроникельных сплавов кажущегося идентичного химического состава могут отклоняться друг от друга, и, таким образом, чтобы максимально приблизиться к свойствам стекла для каждой отдельной плавки необходимо определить отношение сечений медь/ферроникель. Для облегчения определения этого отношения выведены упрощенные зависимости вычисления продольных и поперечных тепловых изменений размеров покрытых медью железо-никельных проволок, используемых в качестве токоведущих проводов через стекло, на основе измеренной продольной дилатации меди и ферроникеля. Последние зависимости позволяют выразить отношение сечений меди/ферроникеля, и для более легкого определения этого отношения с использованием измеренных и, соответственно, принятых постоянных расчетная функция $k = f(\Delta T_{\text{FeNi}})$ изображается диаграммой.

THE CHARACTERIZATION OF LATTICE DISTORTION SPECTRA WITH DEFORMATION INDICES*

I. S. SZÁNTÓ

DEPARTMENT FOR MECHANICAL TECHNOLOGY, BUDAPEST,
TECHNICAL UNIVERSITY

[Manuscript received November 18, 1959]

1. Introduction, aims

From a submicroscopic standpoint lattice distortions are understood to mean the changes in the array of atoms to be found in a solid body, *i. e.* of these bonds established at a very minimum energy level. The phenomena of these changes are dealt with by the physics of crystalline bodies. Within this framework the elastic properties of atomic bonds and the residual displacements (in a macroscopic sense the plastic deformations) which occur among the atoms, or groups of atoms in a body are effected by a mechanical state of stress.

There is no well developed homogeneous theory as yet available, taking into account the strains of the microstructure. According to KONOBAYEVSKY [1] there are contrary views on the most fundamental concepts too. This is the reason why some disputable views may lead to techniques of measurement based on false theoretical premises. Thus, for instance, SACHS' and WEERTS' [2] first publication has led also used by GLOCKER [3] and BARRETT [4] up to SCHWAIGERER [5] in the adaption of the misleading method of illustration (Fig. 1/a), according to which the distance d_0 between atomic planes, measured nearly perpendicularly to the surface in a stress-free metal body, decreases to d , in consequence of the tensile strength σ , because a contraction between lattice planes is to be supposed as a necessary occurrence, which corresponds to the decrease in thickness, observed on the macroscopic scale.

It should be pointed out, that we do not consider the dimensions of the unit cells characteristic of the degree of lattice deformation, but the distance d_{hkl} between the planes of a lattice plane-group marked with the indices $\{hkl\}$, such as can always be found and defined in a lattice structure. This in itself can serve to define any lattice distortion, and since it only differs from cell dimensions in one constant, which is a characteristic of the crystalline structure, it may also be regarded as a lattice parameter. Likewise the reason for this procedure is, that the X-ray diffraction method used gives quantitative information on values of d the most easily.

* Part of the author's theses for a scientific degree. (Candidate of Technical Sciences)

When we presume even in the rarest case, that the stress distribution in the metal body being investigated is homogeneous, the standpoint that has already been cited, fails to take into consideration the following circumstances:

1. The metal body does not consist of a single crystal, but of a number of crystallites randomly oriented.

2. These crystallites will, even in the case of a homogeneous stress distribution, yield differing values of d_{hkl} , mainly due to their random orientation and mechanical anisotropy.

3. The crystallites are in forced connection to each other at their grain boundary surfaces. The strain of crystallites of identical orientation bias in different degrees, even if subjected to the same load, as the presence of the neighbouring crystallites impedes the deformation of each quite differently.

Therefore, these are the reasons for the different values of \bar{d} to be obtained for the crystallites even in case of the same stress applied to a larger volume. From this it follows that internal stresses or residual stresses of the first kind, according to the definition in the nomenclature proposed by DAVIDENKOV [6] might be possible, but that a primary lattice deformation (*i. e.* one that is homogeneous within a volume of the order of magnitude of cm) cannot occur on their effect, at least not in a polycrystalline material. As far as monocrystals are concerned, a primary lattice deformation is possible, but also here only as an approximation; because due to the deviation of the component subgrains in monocrystals, a slight inhomogeneity is likewise probable of the lattice distortion.

These findings make quite clear the reason why the cited erroneous concepts of the classical German X-ray investigators should be subjected to a revision. These one-sided conceptions have for nearly twenty years impressed themselves on the research work done in this field. And this period was characterised by the efforts made to eliminate the experimental shortcomings of this procedure, believing the difficulties of detail were those, which prevented these methods from spreading in practice. Nobody thought — at least there is no sign of this in the literature — that there might have been possible errors in the theoretical principles of measurements or of their evaluation, causing a stagnancy in further development.

According to the author's point of view the fundamental arrangement of the X-ray diffractometric investigation of a polycrystalline aggregate should not correspond to that of Fig. 1a, but rather to Fig. 1b. Consequently the primary beam of rays P_s issuing from the X-ray tube passes through a diaphragm and irradiates on an area of about 1 sq. mm on the surface of the test piece; penetrating into the layers close to the surface. In a plane perpendicular to P_s , the deforming load σ which is to be measured, acts on and within the specimen. Within the random disoriented aggregate of crystallites, one crystallite, which is just in the position to be able to reflect and whose orienta-

tion is defined by the normal N and the inclination angle η , was shown in a preferred representation. The secondary radiation S_s is reflected from a suitably oriented lattice plane series characterised by the distance d_{\perp} , at an angle of 2η . It is only these changes, in the given situation, of the distances d which can be measured by X-rays. The remaining crystallites do not at all reflect

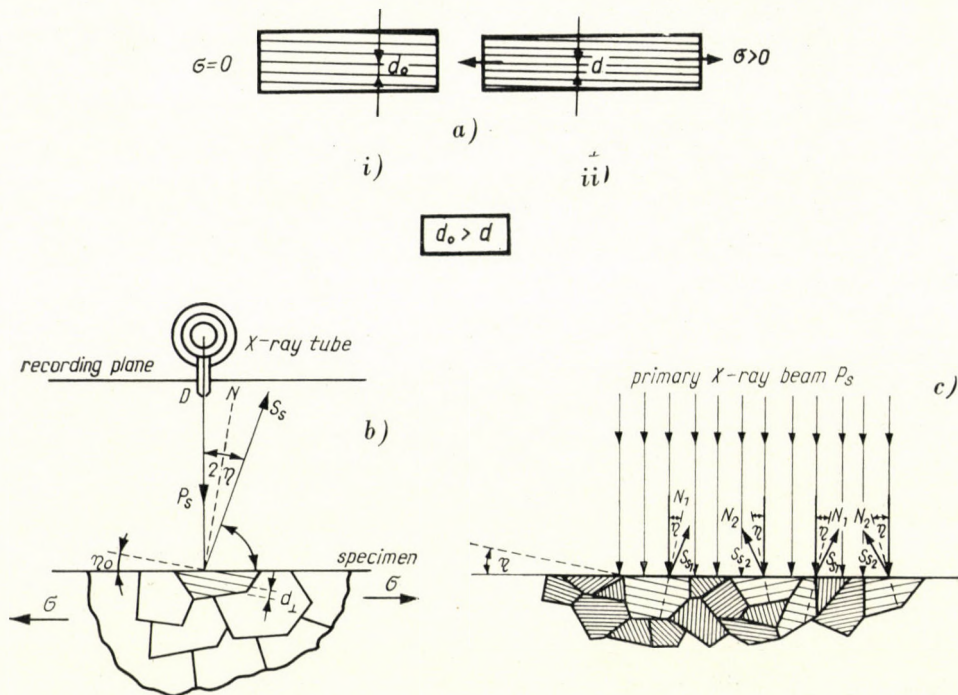


Fig. 1. The illustration of the surfaces of tensile test specimens

a) in the classical way, in a stress-free (i) and in a tensile stressed (ii) condition, b) in a scheme, complete with the arrangement of the back-reflexion X-ray method, c) showing the actual situation, with the indicator crystallites

in the illustrated part of the irradiated range. The true position is even more correctly illustrated in Fig. 1c, where the finite extent of beam P_s , compared to the dimensions of the crystallites can be observed even better. From this figure it can be established that a number of the individual members of the irradiated crystallite aggregates — preferably illustrated — are of the same orientation. The N normals to these enclose just the angle η with the beam P_s , which complies to the condition for reflection ability. These correspond to the crystallites with identical angles α , described in connection with the texts of Fig. 6. Such homogeneous lattice ranges, taking part in reflection, are the so-called *indicator crystallites*, from which scattered parts of the intensity of the back-reflected radiation form a single spot. This constitutes one arc section of the length Δh of the interference ring concerned, in the reflectogram.

Generalizing the plane-conditions for three-dimensions, it can be seen, that not only the atomic planes $\{hkl\}$ with the positions shown in the figure have normals at an angle η with the direction P_s , but that a once infinite multitude of reflecting planes in the body with the same angle η may also belong to this incident beam. The rays reflected by these, altogether form a conical surface with a semi-vertex of 2η , whose apex is the investigated point on the specimen, while its intersection with the recording plane is the circle, formed of the summation of the arc sections Δh . The change in diameter of the circle, or its deformation into an ellipse, serves to determine the extent of the lattice deformation that has taken place.

It follows from the above, that the state of stress of a metal body under load, if using X-ray diffraction methods, just as in the case of any other procedure known to date, can only be measured in two successive steps.

a) The determination of the strain or changes in deformation caused by the stresses.

b) The calculation of the equivalent stress from the measured changes.

In contrast to other methods of stress measurement, based mainly on tensometric principles where relative strain is measured over a macroscopic distance, the recording of strain in the case of X-ray methods takes place over a basic-distance of the order of magnitude of an Ångström unit. Thus, it is also possible to observe lattice deformations due to local changes of stress, with steep gradients. This is a considerable advantage, if we bear in mind, that as a last resort, the load which some engineering part can support, depends on the innermost microstructural processes of the material. This high degree of sensitivity in measurement is at the same time also a disadvantage of the process, which should not be neglected, for it carries numerous sources of error with it. Thus, the evaluation of the X-ray pattern, without the knowledge of the conditions of precise measurement and the careful consideration of the circumstances of the test it can more easily lead to incorrect results than another less sensitive macroscopic procedure.

All these statements refer to the first step that has already been mentioned of the methods of stress measurement, *viz.* the measurement of deformation. This may essentially be regarded as a fairly critical recording procedure, the details of which have already been discussed in previous publications [7, 8].

The second phase of the measurement is a completely separate set of problems: it is a process of calculation, taking certain facts in regard. Numerous sources of possible error, to be detailed below, justify the performance of stress measurements in these two separated steps, instead of using working formulae designed for automatic substitution, which would contain both phases of measurements concentrated in one formula, thus promoting the danger *i. e.* the physical sense, the theoretical principles of the measurement being obliterated. The literature mainly contains formulae of this type [9, 10, 11, 12].

They have an attractive, but at the same time only an apparent advantage that they provide stress values directly, after a simple substitution of the X-ray data, whereas the validity of the relations which are regarded as universal, can only be maintained in certain special cases.

The X-ray diffraction technique that was mentioned makes it possible to obtain information on volumes of metal of the order of magnitude of the X-rays' wavelength, with regard to the size and distortion effects of the stresses prevailing there. Therefore some problems necessarily arose, the solution of which has led to the need of putting the procedure, for evaluating the X-ray patterns, on a new base in principle.

Indeed is it allowable to talk of stress, in the case of deformations on an atomic scale? Logically it is difficult to accept if — to say an extreme case — it were desirable to compute the magnitude of the stress between two neighbouring atoms. Here the lattice forces are independent of the dimensions of the plane unit imagined as being inserted between the two atoms, whereas a stress would be inversely proportional to an arbitrarily chosen cross-sectional area. A macroscopic approach may thus lead to incorrect conclusions. This definition has a meaning only if the area unit concerned includes a large number of immediately neighbouring atoms. It may, therefore, be seen that in the case of the investigation of volumes of microscopic or submicroscopic range (X-ray measurements are just of this type) it was necessary to revise the concept of the stresses prevalent in the lattice structure, as the accustomed view of stress here, lacks actual physical reason.

It is, moreover, questionable, whether the measurement results determined in kp/sq. mm according to the classical expressions, could be here taken as a true value. The essential feature of the methods used hitherto was, that the specific lattice dimension changes, of the order of magnitude of Ångström units obtained by X-rays, were multiplied by a certain macroscopically determined value E (Young-modulus) [3, 9, 10, 11]. Thus the stress dimension which had become customary from the macroscopic point of view, was constrained onto the description of the submicroscopic phenomenon. This, however, led to a loss of the quite special advantage of X-ray recording, *i. e.* that here, contrary to all other methods of strain measurement, direct information may be obtained on the microdistortions in the atomic volumes which are to be found.

The use of the traditional figure, which represents an average stress is, therefore, also disadvantageous because it does not draw attention to those local inhomogeneities, lattice deformations from which — according to the latest concepts in the metal physics — micro-cracks might start out, and by propagation lead to fracture.

After the above mentioned considerations of all these factors the idea was arrived at, that instead of the conventional results of measurement so far

used, of introducing a new procedure for stress indication, based on actual physical knowledge, that would make suitable use of the special possibilities made available by X-ray techniques.

In order to achieve this aim the following problems had to be solved:

I. The forming of a statistical model on the basis of which the so-called deformation spectrum — which is unequivocally characteristic of the state of stress of metals and alloys — could be conceptually deduced.

II. The elaboration of an X-ray evaluation method which is free of failure of stress determination made by a macroscopic approach and able at the same time to provide quantitative information on the degree of atomic deformation of the lattice volume being investigated (irradiated by X-rays).

The elucidation of problem I was the precondition for the ability for working out problem II on the basis of well defined physical phenomena or changes.

2. The statistical model of the mechanism of strain

The process of strain in polycrystalline aggregates is really a mass phenomenon, composed of smaller or larger movements of a finite, but very large number of atomic groups. The changes in the extent of the indicating lattice parameter d of a single subgrain, in the course of the phenomenon, may only be followed theoretically. The experimental equipment at present available only enables the recording of mass movement of atomic groups, of their average statistical strain. In this treatment d will, therefore, figure as a probability variable.

The elementary, coherent lattice ranges of the polycrystalline material in their stress-free state possess approximately identical lattice parameters d_0 . With increasing stress the values of d become always more differentiated, and there are ever greater differences in the deformations occurring in neighbouring crystallites, or between the extent of the stress which accumulated along the grain boundaries.

In order to make numerical findings of the state of deformation on the lattice structure, it is necessary to know the full probability distribution of the variable d . Dividing this up into part-problems, this means, that we must know

- A) the full stock of values of the probability variable d , *i. e.* all its possible values,
- B) the probabilities of all these possible values.

In order to make the discussion quite clear, let us examine a polycrystalline mass of metal. Let the orientation of the individual crystallites composing the aggregate be characterized by the normal, to a preferred atomic plane.

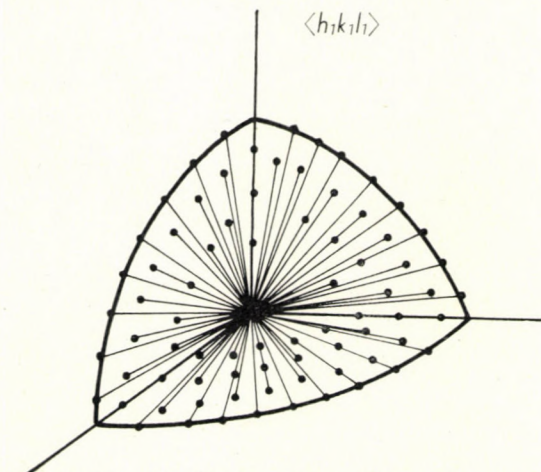


Fig. 2. The distribution of crystallites of a chosen $(h_1 k_1 l_1)$ orientation

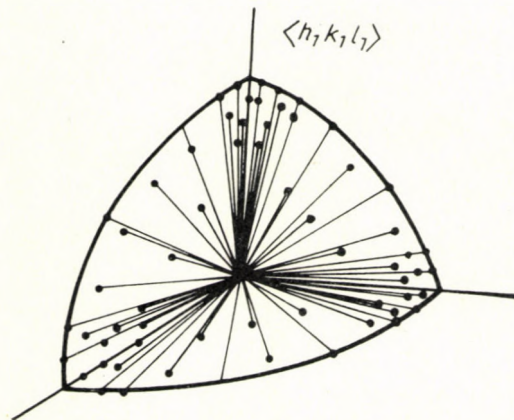


Fig. 3. A structure with crystallites of preferred orientation

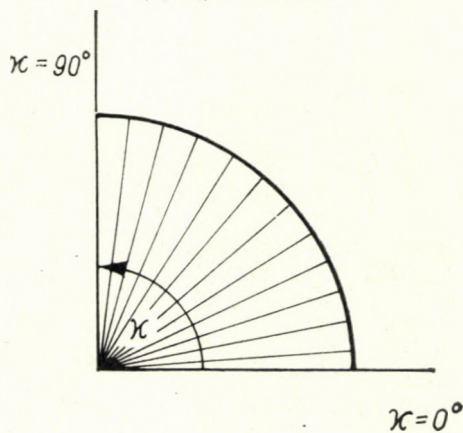


Fig. 4. The frequency graph of atomic plane normals as a function of the angular position along one of the meridian planes of Fig. 2

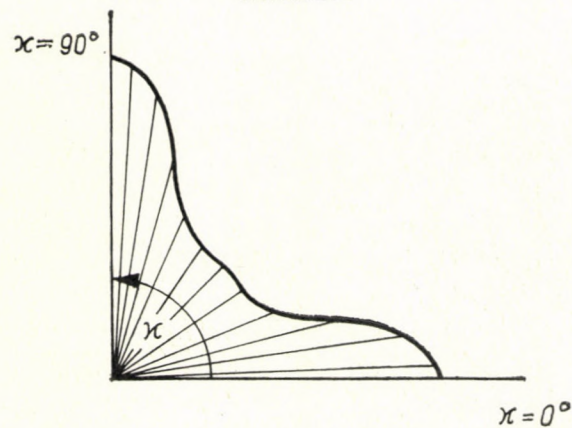


Fig. 5. The frequency graph of atomic plane normals as a function of the angular position along one of the meridian planes of Fig. 3

Let this be $\langle III \rangle$ to the glide planes along which the atomic movement takes place the most easily in certain metal of highly symmetrical crystal structure. If the metal consists of many disordered crystallites then the selected normals of these crystallites are distributed more or less evenly in all directions of space. Shifting the normals parallel to themselves to a common centre, the points of intersection of this group of lines with a spherical surface imagined round the centre, would cover the sphere nearly uniformly. Fig. 2. shows an octant of the sphere. In the case of structures with preferred orientation the points of intersection on the octant surface would show a distribution where there was a density in some regions and a scarcity in others (Fig. 3). To illustrate these relations in a plane is not given in the usual way, *i. e.* in a polar diagram,

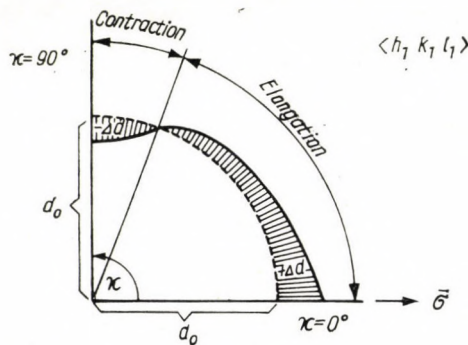


Fig. 6. The distribution of values of d effected by the tensile stress σ as a function of the angle κ (shown in a polar coordinate system)

but in anticipation of our further considerations, the octant's one-one plane section corresponding to the previous two figures, is presented. Figs. 4 and 5 are nothing more than frequency diagrams of the normals as functions of the angular position along a meridian plane. In the case of a statistically random oriented crystallite distribution, this approach shows that the choice of a particular meridian plane in the sphere is completely indifferent, as far as the results are concerned. Further considerations will, for the sake of simplicity, be carried out on such a crystal aggregate with random oriented distribution.

In the selected plane section in the initial stress-free state identical values of d_0 exist in the direction of the normals. These are shown in a $d - \kappa$ polar coordinate system in Fig. 6. The angle κ is that subtended by the normal n which is characteristic of the crystallite, and the direction of the load σ .

In the case of a mono-axial stress condition the following relation is valid, with respect to changes in d and σ also the angle κ , characterizing the orientation of the crystallites:

$$\sigma \cdot (\cos^2 \kappa - \nu \cdot \sin^2 \kappa) = C \cdot \Delta d \quad (1)$$

where ν is the Poisson ratio number characteristic of the contraction of the metal, C is a proportionality factor.

In respect to ν it could be stated that in practice it is not a function of σ .

With increasing values of σ , the Δd strain-changes (intercepts) take place as functions of the orientation as shown on Fig. 7.

In the direction of the load σ , where $\alpha = 0^\circ$,

$$\sigma = C \cdot \Delta d \quad \text{hence} \quad (\Delta d)_{\max} = C_1 \cdot \sigma. \quad (2)$$

In the direction perpendicular to the load σ , where $\alpha = 90^\circ$,

$$-\nu \cdot \sigma = C \cdot \Delta d \quad \text{hence} \quad (-\Delta d)_{\max}' = C_1 \cdot \nu \cdot \sigma. \quad (3)$$

Between the two extreme values Δd the sign should be changed. At a certain angular value α_0 no lattice deformation takes place, however large the increase in σ is, so that $\Delta d = 0$.

This case comes about when $\cos^2 \alpha_0 - \nu \sin^2 \alpha_0 = 0$, whence

$$\cotan^2 \alpha_0 = \nu, \quad \text{i. e.} \quad \alpha_0 = \cotan^{-1} \nu^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

According to the terminology of the calculus of probabilities the intercepts d belonging to various values of σ on Fig. 7 are, in fact, places of the most probable values d_ν . To each of these, there can necessarily be attached a corresponding ξ_n , i. e. the mean square deviation of the probability variables, the mean dispersion of the true values of d around the given value d_ν , which is also a characteristic of the stress state and the lattice structure under investigation.

The distortions of the various lattice ranges (in the terms of the calculus of probabilities: the statistical events) are influenced by numerous environmental effects. The strain in the individual grains of the crystalline aggregate will differ in size according to

- a) the place,
- b) the time,
- c) the orientation,
- d) the degree of mechanical and
- e) thermal anisotropy,
- f) the state of the neighbouring grains, depending on the hardening effect of the boundary surfaces; the differing toughness of the grain boundaries.

As a result of increasing stress the influence of the factors mentioned will exert itself in an always increasing extent. There will be ever greater differences in the deformations taking place in neighbouring crystallites. These will expand the distribution of d , which shows relatively slight scatter

for small values of σ and the average value of ξ will rise increasingly. To demonstrate this process, Fig. 7, which has already been discussed, is again presented, but now showing the ξ scatter ranges belonging to the various curves of $d_v(\sigma)$ (Fig. 8). The qualitative figure gives a clear view of the characteristic trend of the statistical process which has been described.

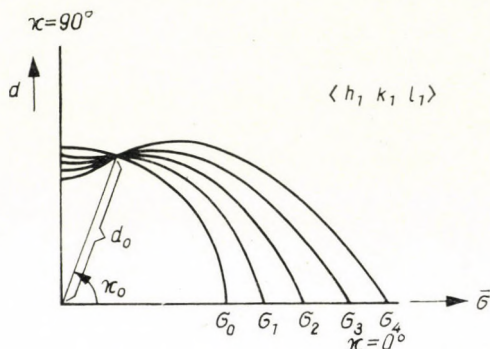


Fig. 7. The values of d as a function of the orientation effected by the increasing tensions σ as parameters

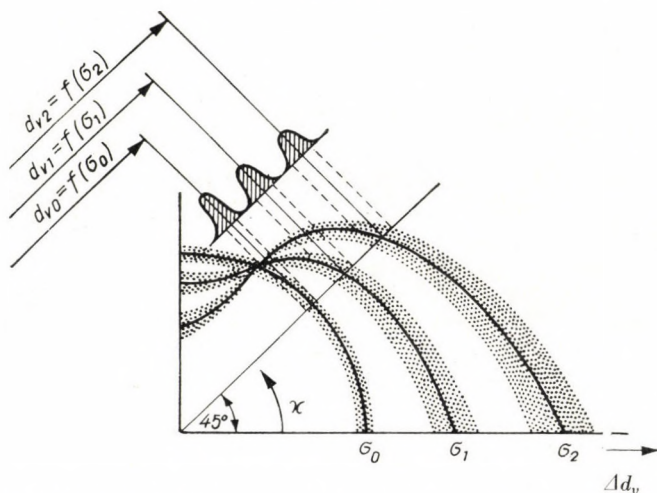


Fig. 8. Changes in the values of d_v and Δd_v and the increase in the scatter ξ for increasing values of σ . (The distribution of crystallites with $\kappa = 45^\circ$ orientations is preferred)

Let us for the purposes of numerical investigation, choose crystallites possessing normals belonging to a particular angle κ . Let them, for instance, be the grains belonging to $\kappa = 45^\circ$. Now let us turn the intercepts along the straight line drawn in Fig. 8 with the curves $d_v(\sigma)$ and the corresponding scatter zone ξ , down, in order, along the increasing values of σ . This provides the full stock of values of d for the given stress σ , as a function of their frequency. We, thus, have statistical distribution patterns, each of which describes a

probability-density function $p(d)$. We may also call these the *spectra of lattice distortions* characteristic of this state of deformation.

The factors causing the distribution are for the greater part probability variables that are independent of each other. Each separately exerts only a negligibly slight influence. The scatter of the probability variable d occurs as the sum effect of these factors. But whatever be the distribution of the component probability variables in themselves, the resultant distribution will, within reasonable limits, always be normal, *i. e.* statistical models of

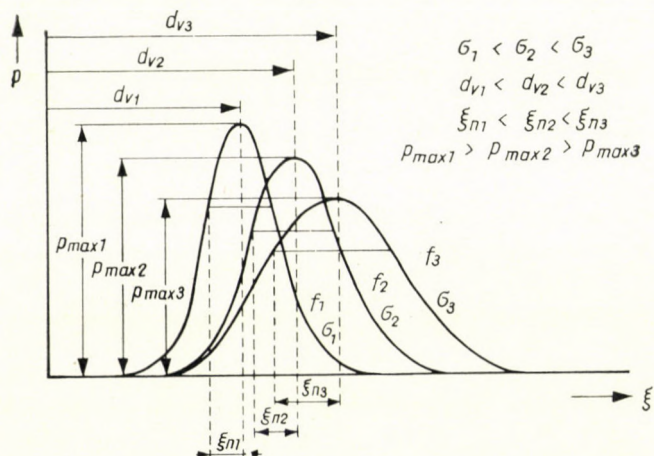


Fig. 9. Some distribution curves $p(\xi)$ as functions of the parameter σ_i

the strain in polycrystalline metals (their lattice deformation spectra) are subject to the central limit value theorem of the calculus of probabilities.

The analytical expression for the normal d -distribution represented graphically by a continuous (so-called bell-)curve is in this case

$$p(d) = \frac{1}{\xi_n \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left(- \frac{(d - d_v)^2}{2\xi_n^2} \right) \quad (5)$$

where d_v is the most frequently occurring, most probable lattice parameter value for the grains of the aggregate concerned, and ξ_n is the mean square value of the scatter of the lattice parameters (within the investigated volume).

In its graphical interpretation ξ_n is simply the half-value of the so-called inflexion width to be measured at the level of the point of inflexion of the probability-density function curve $p(d)$, while d_v is the abscissa value of the peak on the same curve.

The conditions arising with an increase in the stresses acting on the lattice structure are represented in Fig. 9, which shows some of the distribution curves $p(\xi)$ drawn below each other as functions of the parameter σ_i .

The number of individual homogeneous particles, which are characterized by a single d -distribution, is finite within the specimen tested. A short, informative calculation will, however, serve to convince the reader that this finite number can generally be taken to be several millions.

The average cylindrical volume irradiated by X-rays is a circle of 1 mm dia., multiplied by a depth of 0,035 mm (in the case of Co— K_{α} radiation, with Fe-alloy). This is equivalent to

$$\frac{1^2 \cdot 3,14}{4} \cdot 0,035 \cong 0,028 \text{ mm}^3.$$

The diameter of a homogeneous lattice block, regarded as approximately spherical, is on the average of the order of $2 \cdot 10^{-3}$ mm, so that its volume is $4,18 \cdot 10^{-9}$ mm³. The number of blocks will in this case be about

$$\frac{0,028}{4,2 \cdot 10^{-9}} \cong 7 \cdot 10^6.$$

As the number of possible values of d is very large, the use of a continuous distribution to approximate the probability—density curve $p(d)$, appears to be justified.

3. The specific index of lattice deformation

By applying the above mentioned constants of the distribution function describing the lattice distortion spectra, a new index of condition was deduced: the specific index of lattice deformation (briefly: the deformation index).

The indication of the momentary state of deformation of the specimen being examined, takes place on the basis of a single X-ray pattern. Both the quantities d_v , measured from the shift of the interference line peak, and ξ_n obtained from an evaluation of the line profile distortion on the pattern, are used. The index correspondingly consists of two connected partial factors, since these together define the state of the specimen under load, and not separately.

The first partial factor, the so-called primary deformation component, gives the average shift of the atomic planes set in the main direction of the load within the irradiated lattice volume, expressed per mille. In the given terminology: *specific main deformation* and is given the symbol Δ' . This may be calculated from the relative shift in the line peak, from the relation of the values d_v and d_0 to each other. Algebraically:

$$\Delta' = \frac{(d_v - d_0)^*}{d_0} \cdot 10^3 = \frac{\Delta d_v^*}{d_0} \cdot 10^3 = \varepsilon^* \cdot 10^3 \cdot [^0/_{00}]. \quad (6)$$

The calculation of Δd_v^* and ε^* from the value ε_x obtained on the basis of the indicator d_v is discussed later.

The second partial factor, the so-called secondary deformation component, gives the mean scatter value of the atomic planes differing from the average main shift and comparing the expected most probable value of the initial basic lattice parameter spectrum also per mille. In our terminology it is the *local inhomogeneity in deformation* and is given the symbol Δ'' . This may be calculated by determining the mean square deviation of the local lattice parameters ξ_n about the most probable expected lattice parameter with regard to the shape factor ξ' , which may be established from the profile of the investigated interference line on the reflectogram, and dividing it by the value d_{v0} pertaining to the un-deformed (stress-free) state.

Algebraically

$$\Delta'' = \frac{\xi_n}{d_{v0}} \cdot 10^3 [0/00] . \quad (7)$$

The symbolic representation of the deformation index is thus

$$\Delta = \Delta' / \Delta'' [0/00/0/00]$$

where Δ' and Δ'' are corresponding partial factors.

The index which has been thus defined is no conventional figure, but a physically interpreted rational index of condition. It more fully exploits the possibilities involved in X-ray method than a figure expressed in the dimensions of stress, as it does not only show the average strain in the lattice structure numerically, but also indicates the extent of the local distortions of this state.

4. The basic problem of evaluation

The parameter values which give the basis of the determination of the deformation index, cannot be directly measured from the X-ray pattern. For the $p(d)$ spectra characteristic of the lattice deformation can only be found in implicit form on it. In the case of the so-called back-reflexion X-ray technique which will be described later, the intensity-density of the reflected rays is recorded on the reflectogram as a function of space along the recording plane or cylindrical surface. The measurable $a(\varphi)$ intensity-density distribution thus obtained, includes not only the required $p(d)$ statistics, but also the spectral energy-distribution of the X-rays used in the investigation and the deformations arising from the geometry of the arrangement. These effects may be summarized in the functional symbol $A(\lambda)$. The resultant distribution $a(\varphi)$, moreover, includes other disturbing effects, which arise mainly from the character of the indirect recording method (photography). These may, however, for the greater part be eliminated by introducing some corrections.

The basic problem to indicate the lattice deformations caused by mechanical stress, consists therefore, of determining the intensity-density distribution which might be measured from the X-ray pattern and from this of computing the functional constants characteristic of the statistical distribution $p(d)$. The solution of this problem involves the following:

The so-called instrumental distortions arising from the geometry of the arrangement and the spectral ones, due to spectral inhomogeneity of the type of X-rays used for the investigation, are considered in the form of a disturbance function $A(\lambda)$. The effects included in this function may well be defined on the basis of data found in the literature and of stress-free standard specimen experiments.

Since the curve $a(\varphi)$ recorded on the X-ray pattern is derived from a superposition of the distributions $p(d)$ and $A(\lambda)$, the unknown probability spectrum $p(d)$ must be determined from this resultant distribution by disassembling the known functional component $A(\lambda)$. It may be shown from the approximate formula for the intensity—density distribution $a(\varphi)$, which will be derived in a manner to be discussed below, that the constants of this function are in fact the values d_v and ξ_n that unequivocally define the required distribution $p(d)$. Their derivation by deductive mathematical methods is, therefore, universally valid.

5. The deduction of the intensity—density distribution function

Let us consider the interconnections between the quantities and factors occurring in X-ray strain determination. For the sake of simpler treatment our investigation will deal with the elastic range of loads. The anomaly occurring near the flow limit will be discussed in another publication.

The basic statement is that a stress σ acts on the distribution of the d -values characterising the lattice structure of the specimen. The main effect is twofold.

An increase in $\pm\sigma$

I. shifts the position of the interference line-peak either in the $+$ or the $-$ direction (the value of d_v increases or decreases);

II. it extends the d -distribution of the crystallites of the volume investigated, in the region of the most probable expected average lattice parameter d_v (the scatter $\xi = |d - d_v|$ increases in both cases).

Main effect I is influenced by the following factors:

1. The wavelength of the radiation used; ... λ_1
2. The angle ψ_1 at which the primary beam irradiates the surface to be investigated of the specimen: ... ψ_1

3. The angle which includes the deviation between the normals of the indicator atomic plane set of the reflecting grains and the direction of the main stress σ in working, ... α

It depends on the choice of ψ and λ , whichever value of α should be indicated for the crystallites suitably positioned. With ψ and α viz. the supplementary reflexion angle η is defined which, for the particular λ_1 used, makes it possible to calculate the value of the d which is sought for. It is familiar from the X-ray physics, that the actual primary beam cannot be regarded as strictly monochromatic radiation characterized by a single λ_1 . The wave group shows some kind of a distribution $A(\lambda)$, where as a result of the spectral inhomogeneity, various intensities belong to each wavelength λ around the most intense λ_1 . This is approximately a normal (*Gaussian*) distribution.

4. Since the values of the indicator d (or d_v) depend on the values of λ , the influence of the distribution $A(\lambda)$ will also have an effect on the configuration of the indicator d -value-range. ... $A(\lambda)$

From the physical point of view and in accordance with the casuality the inverse statement would really be the more correct formulation. The magnitude and distribution of the values of d is namely a given material characteristic, determined by the deformed state of the lattice. It depends on the values of d , which sort of X-rays with its own wavelength, will be able to take part in reflexion. We must concede to the fact, however, that the interference-ring of only those values of d are to be observed on the reflectogram, whose corresponding λ values occur in the primary X-ray beam.

5. The finite intensity distribution due to geometrical causes is generally effective through the disposition function $D(\varphi)$. $D(\varphi)$ may, within the angular range concerned, be regarded as practically constant, and very small in comparison to the spectral width. The reasons for this are:

a) The geometrical line broadening is negligible, if the supplementary reflexion angle is in the neighbourhood of $\eta = 10^\circ$ or less. This is nearly always the case in the back-reflexion technique. Within this range, on the other hand, the spectral width will be increasingly dominant [13].

b) The ratio of the width of the beam, to the distance of the object-recording plane is of the order of magnitude of 1 to 50. The cross-section of the beam of rays may, therefore, within a fair approximation, be regarded as a pinhole.

No great error will, therefore, be committed in this treatment if in a first approach — though admittedly not fully justified by the physical model — the geometrical broadening is also involved in the $A(\lambda)$ distribution. The two effects are considered together in the effective basic form factor.

Main effect II is influenced by the following factors:

1. The dependence on direction of the Young-modulus (the extent of the change is determined by the angle α) ... $E_{hkl}(\alpha)$
2. The thermal anisotropy (also dependent on the angle α) ... $\rho_{hkl}(\alpha)$

3. The elastic hysteresis effect

...t

4. The total impeding effect of the neighbouring grains with differing orientations and one of the boundary layers of indicator crystallites ... ΣF_h

These functions may be symbolically represented as

$$\left. \begin{aligned} d_v &= f[A(\lambda); \varkappa(\psi, \eta); \sigma] \\ \xi &= f[E_{hkl}(\varkappa); \varrho_{hkl}(\varkappa); t; \Sigma F_h; \sigma] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

It may further be stated that

$$A(\lambda) = C_1 \cdot \exp \left[- \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{a^2} \right] \quad (9)$$

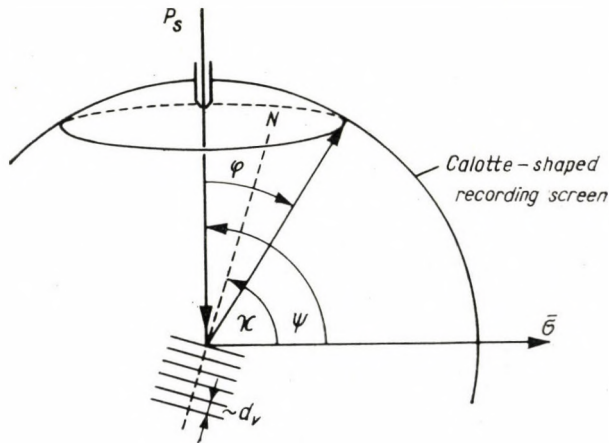


Fig. 10. Simplified model of back-reflexion recording arrangement, with a calotte-shaped screen

where a is the shape factor of the summarized basic technical distribution, and

$$\varkappa = \psi + \eta. \quad (10)$$

In order to facilitate the consideration of the circumstances, let the testing arrangement used first be connected with a system of spherical coordinates of suitable dimensions. Let the point on the surface of the specimen to be investigated, which is irradiated by a beam P_s , be the centre of a unit radius sphere on the inner surface of which the calotte-shaped screen for recording the X-rays is fitted (Fig. 10). Let the directions P_s and σ be selected as the main axis of the system of coordinates. The cones of rays around the axis P_s may be characterised by the semi-apex angles φ . The cones intersect the surface of the sphere along circular "rings". The current coordinate φ may thus be used

unequivocally to determine any point on the surface of the sphere, if it is borne in mind that

1. to each angle φ belongs one complete ring surface section of the calotte-shaped recording screen,
2. the complete hemispherical surface can be built up from such rings between $\varphi = 0^\circ$ and $\varphi = 90^\circ$,
3. along any particular ring (according to the perpendicular irradiation of the simplified model) the intensity-density is constant, so that the distribution of intensity may be reduced to an investigation of a planar change of density (taken along the arc of a circle).

General statements on the place and profile of the interference lines of reflectograms must, therefore, start out from the question of how the intensity-density "a" changes along a meridian of the spherical surface of the recording screen, as a function of the polar coordinate φ . The other determinant factor, the basic distance T_a between the surface of the object and the recording surface has, for the time being, been taken as a unit.

The mathematical formula thus obtained will make it possible to deduce the theoretical connection between the stress σ and the values of the parameters d_v and ξ_n , as the main constituent figure of the deformation index.

The following should also be stated at the outset: It is a universally valid fact that rays of various suitable wavelengths λ are reflected from a certain atomic plane series of dimension d and summed up at the given ring, characterized by φ . Hence we may write

$$d = \frac{\lambda}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \quad (11a)$$

If the angle of incidence is fixed ($\psi = \psi_1$), then only rays of a certain preferred wavelength λ^* and their environment $\pm \Delta\lambda$ will be able to be reflected from a particular indicator plane-set $\{hkl\}$ of orientation κ to produce a full d -distribution showing a value of d_v and the scatter ξ_n belonging to it.

$$d_v = \frac{\lambda^*}{2 \cos (\psi_1 - \kappa)} = \frac{\lambda^*}{2 \cos \eta} = \frac{\lambda^*}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} \quad (11b)$$

where the condition for reflection is defined by the preferred angular position

$$\eta = \psi_1 - \kappa = \frac{\varphi}{2} \quad (12)$$

It follows, moreover, from what has already been mentioned, that if the d -distribution is regarded as approximately normal, then substituting the relations (11a) and (11b) in (5),

$$\begin{aligned}
 p(d) &= \frac{1}{\xi_n \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\frac{\lambda}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} - \frac{\lambda^*}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}}{\xi_n \cdot \sqrt{2}} \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{\xi_n \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\lambda - \lambda^*}{\xi_n \cdot \sqrt{8} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}} \right)^2 \right] = \frac{1}{\xi_n \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{\lambda - \lambda^*}{\beta} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{13}$$

where the auxiliary variable β has been introduced to simplify the operation, this being defined as

$$\beta = \xi_n \cdot \sqrt{8} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} = \beta(\varphi). \tag{14}$$

Since all the wave-groups of the beam, to a greater or lesser extent contribute to the intensity-density along the rings characterized by angles φ , moreover, considering the mutual effect of the d - and the λ -distribution, let us perform the integration over the full range of the possible wavelengths λ . Then intensity-density as a function of φ will be

$$\begin{aligned}
 a(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) \cdot P(d) \cdot d\lambda = \frac{c_3}{\xi_n \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\lambda - \lambda_1}{a} \right)^2 \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \exp \left[- \left(\frac{\lambda - \lambda^*}{\beta} \right)^2 \right] \cdot d\lambda.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Let us introduce the following simplifying symbols:

$$\left(\frac{\lambda - \lambda_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \lambda^*}{\beta} \right)^2 = \vartheta^2 + \delta \tag{16}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \vartheta &= \gamma \cdot \left(\lambda - \frac{\beta^2 \cdot \lambda_1 + a^2 \cdot \lambda^*}{a^2 + \beta^2} \right) \\
 \delta &= \gamma^2 \cdot \left[\frac{\beta^2 \cdot \lambda_1^2 + a^2 \cdot \lambda^*}{a^2 + \beta^2} - \frac{(\beta^2 \cdot \lambda_1 + a^2 \cdot \lambda^*)^2}{(a^2 + \beta^2)^2} \right]
 \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

where

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + \beta^2}{a^2 \cdot \beta^2}. \tag{18}$$

Omitting the operations in its particulars, we obtain

$$\delta = \frac{(\lambda_1 - \lambda^*)^2}{a^2 + \beta^2}. \quad (19)$$

Returning to the integrand expression (15) and substiting (16) into it

$$a(\varphi) = \frac{c_3}{\xi_n \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-(\vartheta^2 + \delta)] \cdot d\lambda = \frac{c_4}{\gamma \cdot \xi_n \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp [-\delta] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-\vartheta^2] d\vartheta = \frac{c_5}{\gamma \cdot \xi_n \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp [-\delta] \quad (20)$$

since $\int_{-\infty}^{\infty} \exp [-\vartheta^2] d\vartheta = C \cdot 2\pi$ is a known result.

Re-substituting the values of β , δ and γ we have

$$a(\varphi) = \frac{c_5}{\gamma \cdot \xi_n \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left\{ - \left[\frac{(\lambda - \lambda^*)^2}{a^2 + 8\xi_n^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \right] \right\} = \frac{c_6 \cdot a \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{a^2 + 8\xi_n^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} \cdot \exp \left\{ - \left[\frac{(\lambda_1 - 2d_0 \cdot \cos \frac{\varphi}{2})^2}{a^2 + 8\xi_n^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \right] \right\}. \quad (21)$$

The maximum of the intensity-density $a(\varphi)$ is, where $\lambda_1 = \lambda^*$, *i. e.* where the exponential member assumes the value $e^0 = 1$. In all other cases the value of the exponent is larger than zero, so that due to its negative sign the exponential term will be less than one. This result shows good agreement with those obtained experimentally.

Our theoretical investigation of the place and profile of the interference line will now be extended to the most frequent case of the back-reflexion X-ray method, where the recording screen is not a spherical, but a plane surface (Fig. 11). The intensity-density distribution function $a(\varphi)$ is then modified to some function $a^*(l)$. The base of this modification is that the $\cos \frac{\varphi}{2}$ in expression (21), or rather its square, must have another function of φ substituted for it, which may be expressed by the new current coordinate l . Thus if $\tan \varphi = \frac{l}{T_a}$, then

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{T_a^2}{l^2 + T_a^2}} = F^2(l). \quad (22)$$

The general mathematical formula of the intensity-density distribution along a meridian of the recording plane obtained by the reflectogram, may thus be written:

$$a^*(l) = \frac{c_5 \cdot a \cdot F(l)}{\sqrt{a^2 + 8\xi_n^2 \cdot F^2(l)}} \cdot \exp \left\{ -\frac{[\lambda_1 - 2d_v \cdot F(l)]^2}{a^2 + 8\xi_n^2 \cdot F^2(l)} \right\}. \quad (23)$$

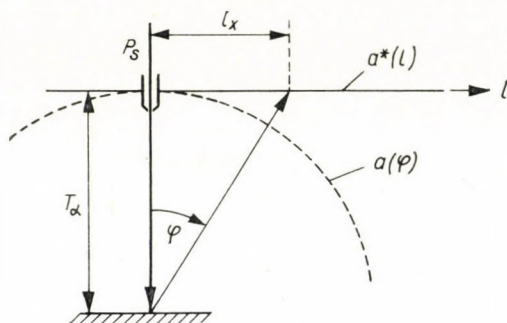


Fig. 11. Derivation of a plane recording surface from the spherical system

This relation makes it possible, after substituting the data defining the concrete circumstances of the experiment, to determine the figures d_v and ξ_n characteristic of the state of stress concerned, from the measured values of $a^*(l)$.

5. Determination of partial factors

The distribution function deduced above provides a basic formula from which a start can be made in computing both the partial factors Δ' and Δ'' .

The first multiplicity factor of the function hardly changes its value between fairly wide limits. The correctness of this statement will be confirmed in the next chapter. This term has, moreover, no effect either on the shift in the peak-lines or on the relative shape of the line profile, modified merely in the vertical dimension values of the ordinates $a(\varphi)$.

The power index of the exponential term on the other hand, is important from the point of view of the place and shape of the intensity-density distribution, due to the values d_v in the numerator and ξ_n in the denominator. Both quantities depend on σ and may thus be regarded as functional constants in the course of the evaluation of a single reflectogram.

The distribution thus obtained, as the concrete example will show, reminds one of the Gaussian (normal) distribution, though the two descending branches are not symmetrical to each other. This we shall, therefore, call a *quasi-normal* distribution.

If the quasi-normal distribution is, analogously to (5), described by the expression

$$p(d) = \frac{1}{\xi'_n \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{d - d_v}{\xi'_n \cdot \sqrt{2}} \right)^2 \right] \quad (24)$$

whose shape factor is ξ'_n , then the distribution obtained by densitometry from the reflectogram, which obeys expression (21), may be linked to this, *i. e.* the exponential term of the equation (24) containing the ξ'_n belonging to the quasi-normal distribution, should be equal to the exponential member in formula (21).

$$\frac{(d - d_v)^2}{2 \xi_n'^2} = \frac{\left(\lambda_1 - 2d_v \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2}{a^2 + 8 \xi_n'^2 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (25)$$

Taking into account the expression, inverse of the disposition function

$$D^*(\varphi) \cong \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \quad (26)$$

which provides for the effects of geometrical arrangement of tests, the final formula, suitable for computation is

$$\xi_n = \sqrt{\xi_n'^2 - \xi_{n0}'^2}, \quad (27)$$

where

ξ'_n ... is the shape factor of the quasi-normal resultant curve

ξ'_{n0} ... is the same, under stress-free conditions

ξ_n ... is the "intrinsic" or "stress-characteristic" mean square scatter denoting the local inhomogeneity in distortion, which exerts a decisive influence on the numerical value of the partial factor Δ'' .

The value ξ_n may, therefore, be obtained by deductive methods on the basis of the theoretical relations developed, while d_v is obtained by direct measurement from the X-ray pattern.

6. Comparison of calculated and experimental values

The following is a comparative examination performed using an example taken from a series of author's experiments. The aim is to determine how the results computed on the basis of the relation for $a^*(l)$, which was deduced from theoretical considerations, correspond to the figures obtained empirically.

A steel specimen irradiated by Co — K_{α} radiation will be investigated in detail by back-reflection method. The X-ray pattern was taken with an incident primary beam perpendicular to the specimen, in the fifth stage of its step-by-step loading, was under a stress of $\sigma \cong 38,5$ kp/sq. mm in the outer layer, set with a calibrated bending apparatus. The data characteristic of the experiment were:

Wavelength	$\lambda_1 = \lambda K_{\alpha_1} = 1,78890 \text{ \AA}$
Indicator atomic plane series	$(hkl) = (310)$
Angle of incidence	$\varphi = 90^\circ$
Distance between the object and the film	$T_a = 89,0 \text{ mm}$
Basic lattice parameter	$d_0 = 0,905566 \text{ \AA}$
Supplementary reflexion angle	$\eta_{\max} = \frac{\varphi}{2} = 8^\circ 48' 30''$
Effective basic form factor	$\xi'_{n0} = 91,8 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$
Integration constant	$C_6 = 1,0$
The most probable expected distance of the deformed atomic plane series (computed value)	$d_v = 0,905124 \text{ \AA}$
Shape factor of the quasinormal curve of the K_{α_1} component distribution	$\xi'_n = 118,4 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$

The given data may now be substituted into the mathematical expression for the $a^*(l)$ distribution function, to be seen in (23). For the sake of simplifying, let the following notation be adopted:

Let the multiplier before the exponential term be

$$K(l) = \frac{c_6 \cdot a \cdot F(l)}{\sqrt{\alpha^2 + 8\xi_n^2 \cdot F^2(l)}} \quad (28)$$

Let the numerator of the expression in the exponential term be

$$E_1(l) = [\lambda_1 - 2d_v \cdot F(l)]^2 \quad (29)$$

and the denominator in the same be

$$E_2(l) = \alpha^2 + 8\xi_n^2 \cdot F^2(l) \quad (30)$$

All the terms are dependent on the magnitude of the current coordinates along the meridian of the recording plane film l , through the functions $F(l)$ and $F^2(l)$ defined by (22). It follows from geometrical considerations that the intensity-density distribution function is only to be examined in the zone between $l = 23,0 - 33,0$ mm, as the peak of the density curve is to be expected about the middle of the range.

The details of the substitution are contained in Tables 1, 2 and 3. Table 1 provides permanently valid data for the value of $T_a = 89$ mm used in these experiments, in respect to the corresponding values of l and $F(l)$, also displaying the details of the course of the computation.

Table 1
Corresponding values of l and $F(l)$ for
 $T_a = 89$ mm
 (With the process of computation)

l^2	$T_a^2 + l^2$	$\log(T_a^2 + l^2)$	$\frac{1}{2} [\log T_a^2 - \log (T_a^2 + l^2)]$	$F^2(l)$	$\frac{1}{2} \log F^2(l)$	$F(l)$	
23,0	529	8450	3,926857	0,985962-1	0,984096	0,9965185-1	0,992015
24,0	576	8497	3,929266	0,984757-1	0,98276	0,996224-1	0,991343
25,0	625	8546	3,931763	0,983509-1	0,98137	0,9959165-1	0,990641
26,0	676	8597	3,934347	0,982217-1	0,97994	0,995599-1	0,98992
27,0	729	8650	3,937016	0,980882-1	0,978467	0,995273-1	0,989175
27,5	756	8677	3,938370	0,980205-1	0,977721	0,9951075-1	0,988798
28,0	784	8705	3,939769	0,979506-1	0,976953	0,9949365-1	0,98841
28,25	798	8719	3,940467	0,9791565-1	0,97657	0,994851-1	0,98822
28,5	812	8733	3,941164	0,978808-1	0,976187	0,9947665-1	0,988022
29,0	841	8762	3,942603	0,978089-1	0,97540	0,9945915-1	0,987624
30,0	900	8821	3,945567	0,976607-1	0,97378	0,9942305-1	0,986801
31,0	961	8882	3,948511	0,975135-1	0,972177	0,993872-1	0,98599
32,0	1024	8945	3,951580	0,973600-1	0,970511	0,993500-1	0,985144
33,0	1089	9010	3,954725	0,972028-1	0,968811	0,9931195-1	0,984282

Table 2
Changes in value of the exponential term of the $a^(l)$ distribution with actual values*

l	$1,81025 \cdot F(l)$	$[E_1(l)]^{\frac{1}{2}}$	$E_1 \cdot 10^6$	$4,57 \cdot F^2(l)$	$E_2 \cdot 10^6$	$E(l) = \frac{E_1}{E_2}$	$e^{-E(l)}$
23,0	1,795795	-0,00689	47,5	4,49732	11,07732	4,288	0,01356
24,0	1,794579	-0,00568	32,3	4,49121	11,07121	2,917	0,05393
25,0	1,793308	-0,00441	19,5	4,48486	11,06486	1,762	0,1718
26,0	1,792003	-0,00310	9,61	4,47832	11,05832	0,869	0,4188
27,0	1,790654	-0,00175	3,06	4,47159	11,05159	0,2769	0,7601
27,5	1,789972	-0,00107	1,14	4,46818	11,04818	0,1032	0,9010
28,0	1,789269	-0,00037	0,137	4,46468	11,04468	0,0124	0,9892
28,25	1,788925	-0,00003	0,0009	4,46292	11,04292	0,00008	1,000
28,5	1,788567	0,00033	0,109	4,46117	11,04117	0,00987	0,9978
29,0	1,787846	0,00105	1,102	4,45758	11,03758	0,0998	0,9042
30,0	1,786357	0,00254	6,45	4,45017	11,03017	0,5847	0,5576
31,0	1,784888	0,00401	16,08	4,44285	11,02285	1,4587	0,2332
32,0	1,783357	0,00554	30,7	4,43524	11,01524	2,787	0,0615
33,0	1,781796	0,00710	50,4	4,42746	11,00746	4,578	0,0110

Table 3

The values of the expression $K(l)$ in an actual case and the corresponding figures of the theoretically derived intensity-density distribution

l	$2,56 \cdot F(l)$	$\log(E_2 \cdot 10^6)$	$\frac{1}{2} \log(E_2 \cdot 10^6)$	$\sqrt{E_2}$	$K = \frac{2,56 \cdot 10^{-3} F(l)}{\sqrt{E_2}}$	$a^*(l) = K \cdot e^{-E(l)}$
23,0	2,539558	1,0444357	0,5222174	3,32826	0,763028	0,01034666
24,0	2,537838	1,04415590	0,5220779	3,32719	0,762757	0,04113548
25,0	2,536041	1,04394591	0,5219730	3,32639	0,762400	0,1309803
26,0	2,534195	1,04368918	0,5218446	3,32540	0,762072	0,31915575
27,0	2,532288	1,04342469	0,5217124	3,32439	0,761730	0,57899097
27,5	2,531323	1,04329077	0,5216454	3,32388	0,761556	0,68616195
28,0	2,530329	1,04315312	0,5215766	3,32336	0,761376	0,75315314
28,25	2,529843	1,04308001	0,5215400	3,32307	0,761297	0,761297
28,5	2,529336	1,04301508	0,5215075	3,32283	0,761199	0,75952436
29,0	2,528317	1,04287385	0,5214369	3,32229	0,761016	0,68811066
30,0	2,526211	1,04258220	0,5212911	3,32117	0,760639	0,42413231
31,0	2,524134	1,04229389	0,5211469	3,32007	0,760265	0,17729380
32,0	2,521969	1,04200183	0,5210009	3,31895	0,759870	0,04673201
33,0	2,519762	1,04168712	0,5208436	3,31775	0,759479	0,00835427

Table 2 shows the effective method of computation of the exponential member of formula (23), using the simplifying notation technique adopted in (29) and (30).

Finally Table 3 contains the series of figures obtained by substituting the expression for $K(l)$. From this, it may be seen why the function defined in (28) may, in practice, be taken to be constant, for between the two limiting values of the l -range the magnitude of K monotonously decreases. The difference arising from the change in value turned out to be 0,003549 at the most, which was some 0,45% of the basic value. The value of K may, therefore, in constructing the distribution curves be regarded as constant, to within a very fair approximation. The linear transformation of the ordinate intercepts of the empirical curves is, therefore, permissible and does not modify the value of the shape factor of the $p(d)$ distribution.

The last column of Table 3 moreover, contains the figures on the basis of which the theoretically deduced $a^*(l)$ intensity-density distribution was obtained, by substituting the characteristic data described above. The graph constructed from the corresponding pairs of values is shown in Fig. 12/a, while the $a_{a_1}(l)$ distribution obtained from the actual microphotogram (density distribution of an X-ray pattern made with a densitometer) may be seen in Fig. 12/b, as the former's empirical equivalent.

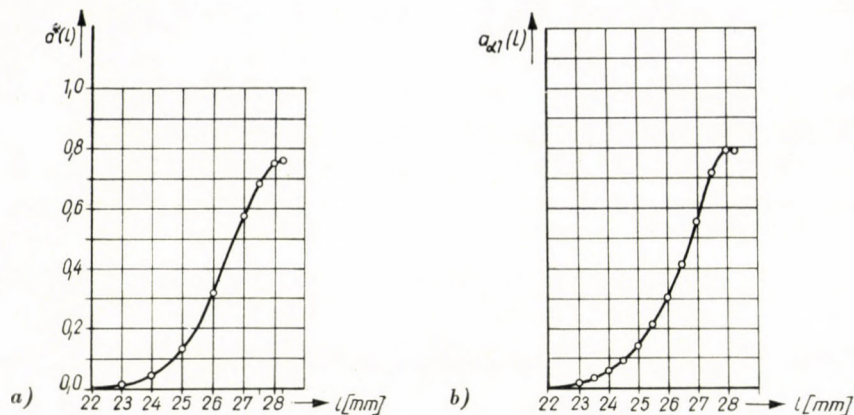


Fig. 12. a) Theoretical intensity-density distribution $a^*(l)$, computed from the actual data of an experimental microphotogram. b) An empirically established actual $a_{\alpha_1}(l)$ distribution obtained by densitometry

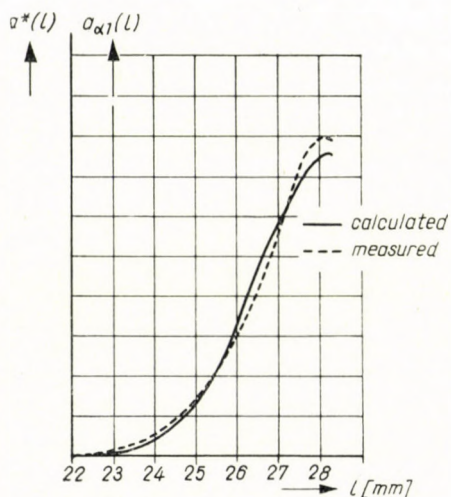


Fig. 13. To illustrate the discrepancies between the graph of Figs. 12a and 12b

7. Discussion on the results

The curves of the computed and measured values have also been shown in an identical scale, drawn on top of each other, in Fig. 13. The curves are, to within a fair approximation, in agreement. The deviation in measurement is hardly greater than the error band that is unavoidable in experiments. On the other hand there is a greater discrepancy between the other branches of the curves, descending towards the larger angles η , since the distributions are known to be asymmetrical. The discrepancy is also increased by the effects

which are to be discussed in a later paper. It is, however, unnecessary to draw this branch in order to calculate the parameters d_v and ξ_n , since, for the purposes of determining the deformation index, the evaluation procedure, even thus, yields an unequivocal result. The plotting of the descending branches after the line peaks was thus omitted.

I should like to express thanks to Dr. *T. Frey*, Candidate of Mathematical Sciences, who helped my work with valuable advice on the deduction of the intensity-density distribution function.

REFERENCES

1. Конобеевский, С. Т.: Вестник Акад. Наук СССР. вып. 7. (1955) 15.
2. SACHS, G.—WEERTS, J.: *Z. Physik*, 64 (1930) 344.
3. GLOCKER, R.: *Materialprüfung mit Röntgenstrahlen*. 2. Aufl. Berlin, Springer, 1936.
4. BARRETT, C. S.: *Structure of metals*. New York—London—Toronto, McGraw-Hill, 1943.
5. SCHWAIGERER, S.: *Z. VDI*. 94 (1952) 1025.
6. Давиденков, Н. Н.: Журн. Технической Физики (1931) вып. 1.
7. SZÁNTÓ, I.: *Acta Technica Acad. Scientiarum Hung. Tomus VII. Fasc. 1—2* (1953) 165.
8. SZÁNTÓ, I.: *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. 16* (1955) 2—4. sz. 233.
9. GISEN, F.—GLOCKER, R.—OSSWALD, E.: *Zeitschr. techn. Phys.* 17 (1936) 145.
10. GLOCKER, R.—HESS, B.—SCHAABER, O.: *Zeitschr. techn. Phys.* 19 (1938) 194.
11. FROMMER, L.—LLOYD, E. H.: *J. Inst. Metals*, 70 (1944) 91.
12. HALL, W. H.: *Proc. Phys. Soc.* 62A (1949) 741.
13. EKSTEIN, H.—SIEGEL, S.: *Acta Cryst.* 2 (1949) 99.

SUMMARY

X-ray methods for measuring residual (self) stresses of first kind, generally agree in that their results are obtained by the multiplication of specific lattice strain changes in the order of magnitude of Ångström units, measured by means of X-rays, with some macroscopically determined modulus of elasticity E . As a result the submicroscopic phenomena are expressed in the dimensions of kp/sq. mm, usual in the macroscopic (tensometric) methods. This is less suitable to truly characterize the actual conditions and, therefore, is only to be considered as a conventional expression.

The author, in his paper, presents a new, rational method for evaluation which adequately uses the special facilities provided by X-ray technique to indicate the condition of stress existing in the lattice structure of metals and alloys. The deformation indices here defined characterize the degree of atomic distortion of the investigated lattice volume, thus expressing both the observed average strain and the local scatter in the lattice parameters concerned. The indication may be made on the basis of a single X-ray pattern, using on the one hand the shift of the measured interference line peaks and on the other, the extent of the change in line profile. The basis for evaluation is a statistical model making possible the derivation of a so-called lattice distortion spectrum, which is characteristic of the stress condition in the specimen investigated. In the course of the statistical treatment the lattice parameter d figures as being a probability variable. The frequency distribution $p(d)$ discussed, may be treated as a probability-density function. Deformation indexing can be carried out on the basis of its constants.

The paper concludes with a comparison of computed and experimental data supporting the theoretical treatment and with a discussion of the method used.

BESCHREIBUNG VON GITTERVERZERRUNGSSPEKTREN
MITTELS DEFORMATIONSINDEXEN

I. S. SZÁNTÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Die Röntgenmeßmethoden, welche die Eigenspannung erster Art messen, stimmen im allgemeinen bis dahin überein, daß ihre Resultate als Produkte von röntgenographisch bestimmten spezifischen Gittermaßveränderungen in Å Größenordnung und einem makroskopisch bestimmten Elastizitätsmodul E sich ergeben. Dadurch wird eine submikroskopische Erscheinung in der üblichen Dimension kp/mm^2 der makroskopischen Anschauung ausgedrückt, was zur Beschreibung der wirklichen Zustände nur wenig geeignet ist und nur als konventionelle Meßgröße betrachtet werden kann.

Verfasser erörtert in seiner Abhandlung eine neue rationelle Auswertungsmethode, welche zum Indizieren der Spannungszustände, die in der Gitterstruktur von metallischen Stoffen bestehen, die spezielle Möglichkeiten der Röntgentechnik zweckmäßig verwendet. Die dadurch definierten Deformationsindexe charakterisieren den Grad der atomaren Verzerrung des untersuchten Gitterrauminhaltes und sie drücken sowohl die momentan beobachteten durchschnittlichen Deformationen als auch die lokalen Schwankungen der Gitterparameter aus. Das Indizieren kann auf Grund einer einzelnen Röntgenaufnahme durchgeführt werden, benützend einerseits die Verschiebung des Maximumpunktes der gemessenen Interferenzlinie, andererseits die Größe der Profilverzerrung der Linie. Als Grund für die Auswertung dient ein statistisches Modell, welches die Derivierung des für den Spannungszustand des untersuchten Versuchskörpers charakteristischen, sogenannten Deformationspektrums ermöglicht. Im Laufe der Erwägungen figuriert der Gitterparameter d als eine Wahrscheinlichkeitsvariable. Die erörterte Häufigkeitsverteilung $p(d)$ kann als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion behandelt werden. Auf Grund deren Konstanten kann man das Deformationsindizieren durchführen.

Zwecks Begründung der theoretischen Erörterungen ist die Arbeit mit einem Vergleich der Berechnungs- und Versuchsdaten sowie mit einer Diskussion über die Methode ergänzt.

DESCRIPTION DES SPECTRES DE DISTORSION DE RÉSEAU
PAR DES INDICES DE DÉFORMATION

I. S. SZÁNTÓ

RÉSUMÉ

Les méthodes radiographiques de mesure des tensions propres de première sorte s'accordent généralement en ce que les résultats sont obtenus par multiplication des changements spécifiques de la dimension de réseau, déterminés par radiographie en unité Å, par le module d'élasticité E , déterminé par une méthode macroscopique. Les phénomènes submicroscopiques s'expriment ainsi dans la dimension usuelle kp/mm^2 de la méthode macroscopique, qui ne permet guère la description des conditions réelles, et ne peut être considérée que comme un nombre de mesure conventionnel.

L'auteur expose une nouvelle méthode d'évaluation rationelle, qui utilise les avantages offerts par la radiographie, pour indiquer les conditions de tension dans la structure de réseau des matériaux métalliques. Les indices de déformation définis par l'auteur caractérisent l'état de distorsion atomique du réseau examiné, exprimant tant la déformation moyenne momentanée que les variations locale du paramètre du réseau. On peut effectuer l'indication par une seule radiographie, utilisant d'une part le décalage du lieu de maximum de la ligne d'interférence mesurée, et d'autre part le degré de distorsion du profil de la ligne d'interférence. La base de l'évaluation est constituée par un modèle statistique rendant possible la dérivation du spectre dit de déformation, qui caractérise l'état de tension du corps examiné. Dans ces considérations, le paramètre de réseau d figure comme variable de probabilité. La distribution de fréquence $p(d)$ peut être considérée comme une fonction de la densité de probabilité. Sur la base des constantes de cette fonction, on peut effectuer l'indexage de déformation.

Pour appuyer les considérations théoriques, l'étude complète celles-ci par la comparaison des données calculées et expérimentales, ainsi que par la discussion de la méthode analysée par l'auteur.

ОПИСАНИЕ СПЕКТРОВ ИСКАЖЕНИЯ РЕШЕТКИ ПРИ ПОМОЩИ ИНДЕКСОВ ДЕФОРМАЦИИ

И. Ш. САНТО

РЕЗЮМЕ

Рентгеновские методы, измеряющие собственные напряжения первого рода, в общем согласуются в том, что их результаты получаются на основе умножения изменений удельных размеров решетки в Å , полученных рентгеновским методом, и некоторого модуля упругости E , полученного макроскопическим методом. Таким путем, субмикроскопическое явление находит выражение в обычной размерности $кп/мм^2$ макроскопического взгляда, что мало подходит для описания действительного состояния и может считаться лишь в качестве конвенционального параметра.

Автор в своей работе излагает новый рациональный метод оценки, который целесообразно использует для индикации напряженного состояния, господствующего в решетке металлических материалов; специальные особенности, предоставляемые рентгеновской техникой. Определенные автором индексы деформации характеризуют степень атомического искажения исследованного объема решетки, выражая при этом как среднюю деформацию, наблюдающуюся в данный момент, так и местные колебания параметра решетки. Индикация может производиться на основе одного единственного рентгеновского снимка, используя при этом, с одной стороны, сдвиг места максимума линии измеренной интерференции, а с другой стороны, величину искажения профиля линии. Основой оценки служит такая статистическая модель, которая позволяет вывести т. н. деформационный спектр, характерный для напряженного состояния исследованного образца. При решении параметр решетки d фигурирует в качестве переменного вероятности. Приведенное распределение частоты $p(d)$ можно принять в качестве функции плотности вероятности. На основе постоянных последней можно назначить деформационные индексы.

Для подтверждения теоретических выкладок дается сравнение расчетных и опытных данных. В завершение обсуждается предлагаемый метод.

DIE VERMINDERUNG DER SCHWEISSRISSIGKEIT EINIGER ALUMINIUMLEGIERUNGEN MIT GEWISSEN ZUSATZELEMENTEN

Z. BURAY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN,
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR NE-METALLE BUDAPEST

[Eingegangen am 2. Dezember 1959]

Einleitung

Das Aluminium und seine Legierungen nehmen immer mehr den ihnen gebührenden Platz in der modernen Industrie und dem alltäglichen Leben ein. Das Aluminium wird an mehreren Stellen anstelle der Stähle verwendet. Auf diesen Gebieten wird sehr oft die Frage der Verbindungsarten und die mindere Schweißbarkeit der Aluminiumlegierungen den Konstruktionsstählen gegenüber aufgeworfen.

Einige Probleme des Schweißens der Aluminiumlegierungen können auf ihre gegenüber den Kohlenstoffstählen mit kleinem C-Gehalt unterschiedlichen, physikalisch-chemischen und metallurgischen Eigenschaften zurückgeführt werden. Die Wirkung dieser Eigenschaften liegt natürlich nicht voneinander unabhängig vor, und einige Schweißfehler können durch verschiedene Ursachen hervorgerufen werden; die üblichsten Fehlerquellen des Schweißens können jedoch im folgenden kurz zusammengefaßt werden.

Eine wichtige Ursache der mangelnden Durchschweißung wird wohl unter den physikalischen Eigenschaften des Werkstoffes Aluminium zu suchen sein, und zwar in der rund zweifachen spezifischen Wärme und der rund dreifachen Wärmeleitfähigkeit dieses Metalles, verglichen mit den Stählen, trotz dem verhältnismäßig niedrigen Schmelzpunkte des Leichtmetalles. Diese Eigenschaften können wegen der rund doppelten Wärmeausdehnung bzw. Schwindung, Spannungen, Verwerfungen, Risse verursachen.

Unter den chemischen Eigenschaften wird die große Affinität zum Sauerstoff, außer der Oxydschicht an der Oberfläche, die die Schweißverbindung erschwert, zu Oxydeinschlüssen und zum Abbrand einiger Legierungselemente führen. Die Neigung des Metalls zur Wasserstoffaufnahme kann zur Ausbildung von Gasporosität führen, die unter dem Einfluß der Schrumpfspannungen zur Bildung von Rissen in der Nähe der Schweißbraupe beiträgt.

Von den metallurgischen Eigenschaften kann die verhältnismäßig breite Temperaturspanne zwischen der Solidus- und der Liquiduslinie einiger Legierungen eine wichtige Ursache der Nahrisse darstellen, die im Laufe der

Erstarrung oberhalb der Solidustemperatur entstehen. Bei einigen Legierungen können Nahrisse infolge von spröden Phasenbestandteilen, die an der Korngrenze ausscheiden, unterhalb der Solidustemperatur entstehen, während in der Wärmeeinflußzone auch Risse neben der Schweißraupe entstehen können. Sowohl die aushärtbaren wie die kaltverfestigten Legierungen werden infolge des Schweißens einen Teil ihrer Festigkeit in der Wärmeeinflußzone abgeben müssen. Auch der Korrosionswiderstand der Legierungen wird in der Wärmeeinflußzone vermindert.

Von diesen Fehlermöglichkeiten können die Einbrandfehler, die Oxyd- und andere Einschlüsse durch Verwendung einer entsprechenden Technologie und eines entsprechenden Verfahrens des Schweißens im allgemeinen vermieden werden. Das Problem der Gaseinschlüsse ist eine viel umstrittene und auch heute noch nicht gelöste Frage. Die Rißempfindlichkeit für Nahrisse oberhalb und unterhalb der Solidustemperatur sowie für Risse neben der Schweißraupe, ist auch ein Problemkreis, der seit längerer Zeit untersucht wird, und obzwar ihr Vorkommen durch entsprechende Konstruktion der Verbindung und eine entsprechende Schweißtechnologie vermindert werden kann, die Lösung ihrer vollkommenen Vermeidung könnte wirksam nur durch solche Zusatzdrähte angenähert werden, deren Zusammensetzung auf die einzelnen Legierungstypen abgestimmt wird. Am zweckmäßigsten erscheint jedoch die Entwicklung einer solchen schweißbaren Legierung, bei welcher, innerhalb des gegebenen Legierungstyps, die Rißneigung des Grundwerkstoffes selbst durch entsprechende Auflegung bzw. durch Zusätze weitgehend vermindert wurde. Bei unseren Versuchen haben wir diese beiden Wege der Verminderung der Rißempfindlichkeit beschritten.*

Versuchsmethodik

Die Untersuchungen erstreckten sich in beiden Fällen auf eingespannte Schweißproben und Festigkeitsprüfungen, bei der Entwicklung der schweißbaren Legierung außerdem auf Ringgußproben und Bestimmung der Korngröße.

Bei den eingespannten Schweißproben wurde eine wassergekühlte Einspannvorrichtung verwendet, deren Einspannlänge veränderlich ist. Die Versuche haben wir mit dieser Vorrichtung und zwei verschiedenen Einspannlängen durchgeführt. Die kürzere, strengere Länge war 50 mm, die längere 126 mm. Erstere wurde bei der Lichtbogenschweißung mit Wolframelektrode unter Argongasschutz verwendet, die längere beim Gasschmelzschweißen.

* Unsere Versuche zur Auswahl der Zusatzdrähte, die zum Schweißen der genormten Aluminiumlegierungen geeignet sind, wurden im Jahre 1953 durchgeführt [1, 2].

Die Versuche zur Entwicklung der gut schweißbaren Aluminiumlegierung mittlerer Festigkeit wurden in den Jahren 1957 bis 1959 durchgeführt [3, 4, 5, 6]. Diese Arbeit stellt eine kurze Zusammenfassung der beiden Versuchsreihen dar.

Die Gesichtspunkte der Ausbildung der Einspannvorrichtung, die nähere Beschreibung der Versuchsumstände und ihre Begründung wurden in unseren früheren Veröffentlichungen behandelt [1, 2].

Die Untersuchung der Ringgußproben erfolgte nach der Methode, die die Forschungsgruppe an der Universität von Birmingham entwickelt hatte [7].

Zur Untersuchung der Gußstruktur wurde die Korngröße an kleinen Gußblöcken bestimmt.

Die Legierungen wurden sowohl bei der Ringgußprobe, wie bei der Strukturuntersuchung von Reinaluminium von 99,99% Reinheit einheitlich bei einer Temperatur vergossen, die um 100° C höher lag als die Liquidustemperatur. Bei den Zweistoff- und Dreistofflegierungen bezog sich dieselbe auf die tatsächliche Liquidustemperatur, bei Mehrstofflegierungen auf die Liquidustemperatur der ternären Basislegierung. Beim Guß wurde eine besondere Sorgfalt der Übereinstimmung der übrigen Gießumstände (Temperatur der Kokille, Abkühlungsgeschwindigkeit, Entnahme aus der Kokille usw.) gewidmet [4, 8].

Jede der eingespannten Schweißprobe unterworfenen Legierungen, jede Schweißprobe mit verschiedenen Zusatzdrähten und jede mit der Ringgußprobe untersuchte Legierung wurde auch einer Zerreißprobe bzw. einer Nahtzerreißprobe unterworfen.

Versuchsergebnisse

a) Schweißdrahtwerkstoffe

Im Laufe unserer Untersuchungen haben wir die Rißneigung von genormten AlMgSi, AlMg 3, AlMg 5 und AlCuMg-Legierungen untersucht, die mit verschiedenartig legierten Zusatzdrähten verschweißt wurden. Die nominelle Zusammensetzung der Schweißdrähte war in jedem Falle Reinaluminium von 99,5% Reinheit (Tafel 1).

Die Untersuchungen wurden mit den Korngrößenuntersuchungen von DOMONY—VASSEL [8] verglichen (Tafel 2). Diese Autoren untersuchten im Falle der Zweistoff- und Dreistofflegierungen des Aluminiums, von Reinaluminium von 99,99% Reinheit ausgehend, die Wirkung des Titans und der meist üblichen Legierungselemente auf die Guß-Struktur. Die Wirkung der verschiedenartig legierten Zusatzdrähte auf die Festigkeit der Verbindung wurde mit Zerreißproben bestimmt.

Die ausgehärtete, genormte AlMgSi-Legierung wurde bei unseren Untersuchungen mit den Basislegierungen AlMg 5, AlMg 3 und AlMg 1 der Tafel 1 verschweißt. Die Rißneigung war beim Argon-Schutzgas-Schweißen bedeutend niedriger als beim Gasschmelzschweißen. Die relative Rißneigung der Verbindungen in % ist in Bild 1 zusammengestellt. Es ist

Tafel 1
Die Zusammensetzung der untersuchten Zusatzdrahtwerkstoffe

Gruppe	Typ	Zusammensetzung %				
		Cu	Mg	Si	Fe	Ti
Al-Mg-Si	Al-Mg 1		1	1,5		
			1	2		
			1	2,5		
	Al-Mg 3		3	1,5		
			3	2		
			3	2,5		
	Al-Mg 5		5	1,5		
			5	2		
			5	2,5		
Al-Mg-Si-Fe	Al-Mg 1		1	1,5	1	
			1	2	1	
			1	2,5	1	
	Al-Mg 3		3	2	1	
			3	2,5	1	
			3	3,5	1	
	Al-Mg 5		5	1,5	1	
			5	2	1	
			5	2,5	1	
			5	5	1	
			5	7	1	
	Al-Mg-Si-Ti	Al-Mg 3		3	1,5	
			3	1,5		0,2
			3	1,5		0,3
			3	2		0,1
			3	2		0,2
			3	2		0,3
			3	2,5		0,1
			3	2,5		0,2
			3	2,5		0,3
			3	3,5		0,2
Al-Cu-Mg	Al-Cu		4	0,25		
			4	0,5		
			4	1		
			4	1,5		
			4	2		
			4	3,5		
			4	5		
			4	7,5		
			4			
Al-Cu-Si	Al-Cu		4	0,5		
			4	1		
			4	1,5		
			4	2		
			4	2,5		
			4	3		
			4	5		
	4	7				
Al-Cu-Mg-Si	Al-Cu	4	2	2,5		

Tafel 2

Die Veränderung der Korngröße von Reinstaluminium unter Einwirkung von einzelnen Legierungselementen und Zugaben, auf Grund der Untersuchungen von Domony und Vassel [5]

Korngröße	10 mm ²	1 mm ²	0,5 mm ²	0,1 mm ²	0,05 mm ²	0,05 mm ²	
Zusammensetzung	99,99% Al	0—1% Si, Fe	0,1% Ti + (Si, Fe)		—	0,5% Ti + (Si, Fe)	
		0—2% Zn	—	0,1% Ti + Zn	—	0,5% Ti + Zn	
		—	0—4% Mg + + (Si, Fe)	0,1% Ti + Mg + (Si, Fe)		—	0,5% Ti + Mg + (Si, Fe)
		—	0—2% Mn + + (Si, Fe)	0,1% Ti + + Mn (Si, Fe)	—	0,5% Ti + Mn + (Si, Fe)	
		—	—	0—6% Cu	0,1% Ti + Cu	0,5% Ti + Cu	
		—	—	2—13% Si ± ± 0,1% Ti	0,5% Ti + 2—13% Si		
		—	—	—	99,99% Al + 0,1% Ti	99,99% Al + 0,5% Ti	
		—	—	—	Cu-Mg (Fe + Si) ± 0,1% Ti	0,5% Ti + Cu-Mg + (Fe, Si)	
		—	—	Cu + Si + (Fe)	0,1% Ti + Cu—Si + (Fe)	0,5% Ti + Cu—Si + (Fe)	
		—	Mg ₂ Si + Si	Mg ₂ Si + Si + (Fe)	0,1% Ti + Mg ₂ Si + Si + (Fe)	0,5% Ti + Mg ₂ Si + Si + (Fe)	
		—	—	Mg ₂ Si ± (Fe)	0,1% Ti + Mg ₂ Si + (Fe)	0,5% Ti + Mg ₂ Si ± (Fe)	
		Mg ₂ Si + Mg	Mg ₂ Si + Mg + (Fe)		0,1(Ti + Mg ₂ Si + Mg + (Fe))		0,5% Ti + Mg ₂ Si + Mg—(Fe)

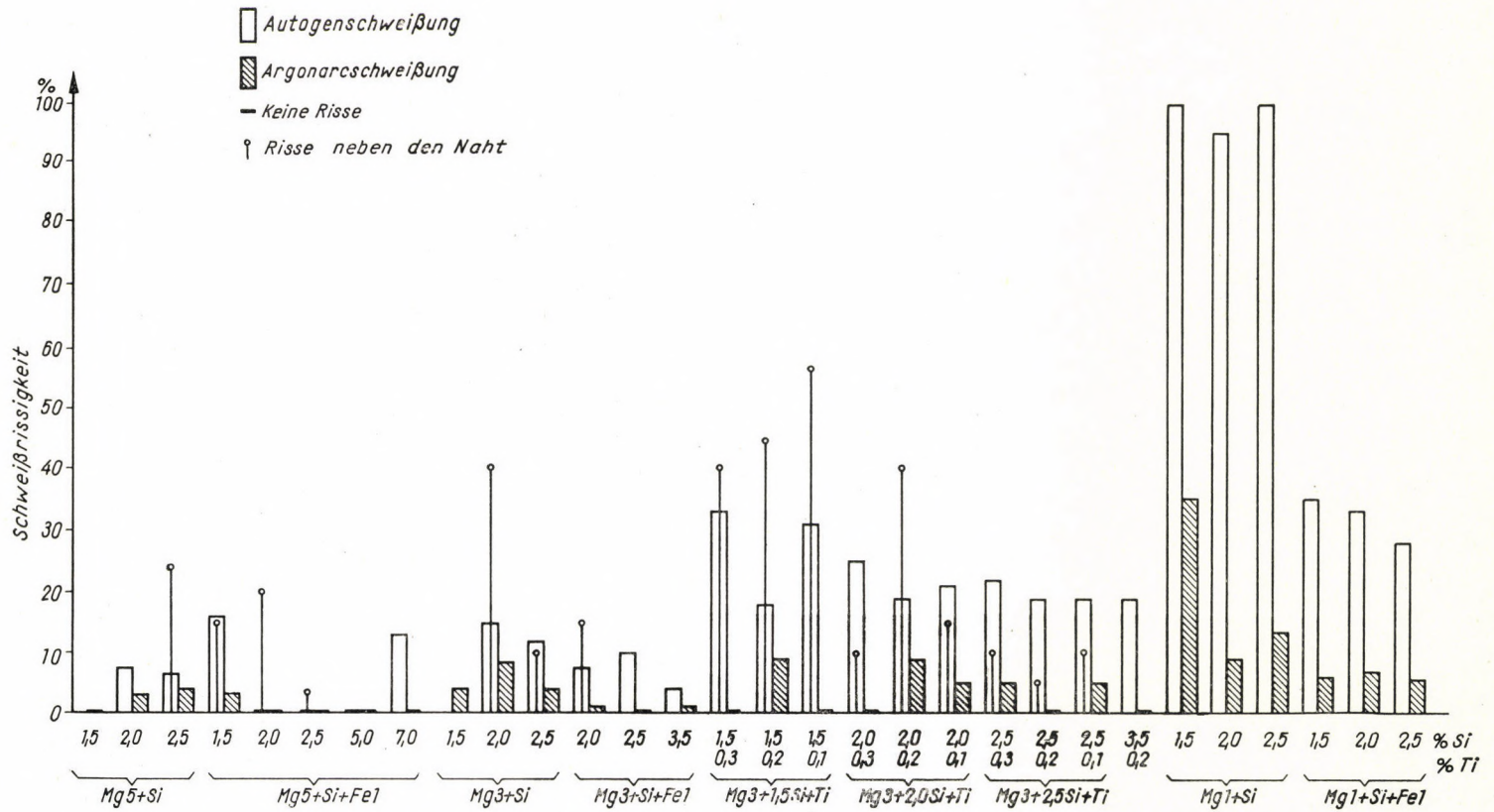


Bild 1. Die Schweißbrissigkeit der AlMgSi-Legierungen, die mit verschiedenen Zusatzdrahtwerkstoffen geschweißt wurden

wohl ersichtlich, daß die Schweißung am meisten rißempfindlich ist, wenn Zusatzdrähte aus Legierung AlMg 1 verwendet wurden, und daß bei Erhöhung des Mg-Gehaltes die Rißeigung stark abfällt.

Auch ein höherer Si-Gehalt war nach Bild 2 vom Standpunkte der Rißeigung mäßig vorteilhaft. Das kornverfeinernde Ti hat bei unseren Untersuchungen bei den AlMgSi-Legierungen nicht zur Verbesserung der Schweiß-eigenschaften geführt. Hingegen hat das Fe bis zu einem Gehalt von 1% bei allen Zusatzdrähten mit verschiedenen Mg-Gehalten eindeutig zur Verringerung der Rißeigung geführt.

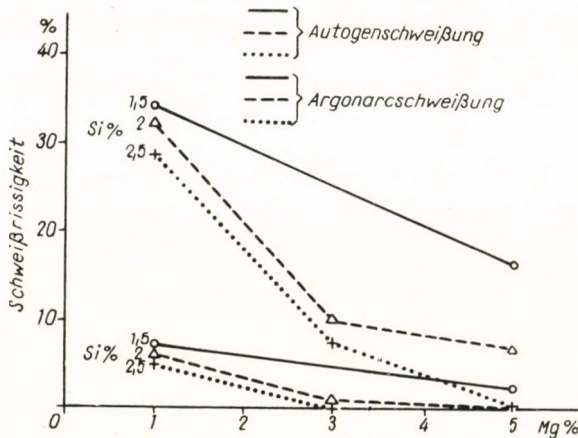


Bild 2. Die Veränderung der Schweißrißempfindlichkeit der AlMgSi-Legierungen, die mit Zusatzdrähten vom Typ AlMgSiFe geschweißt wurden, in Abhängigkeit von dem Si- und Mg-Gehalte des Zusatzdrahtes

Bei der Rissigkeitskenngröße haben wir nur die Nahtrisse oberhalb der Solidustemperatur berücksichtigt. Beim Schweißen der AlMgSi-Legierungen wurden bei den meisten Zusatzdrähten auch in der Übergangszone neben der Schweißbraupe Risse beobachtet. Risse wurden nur dann nicht gefunden, wenn der Si-Gehalt größer war als der Mg-Gehalt.

DOMONY und VASSEL fanden bei ihren Untersuchungen über die Al-Mg₂Si-Legierungen bei einem Mg-Überschuß die geringste kornverfeinernde Wirkung, ein Si-Überschuß verminderte die Korngröße um eine halbe Größenordnung, eine Zugabe von Fe sogar um eine ganze Größenordnung. Die Zugabe von 0,1% Ti weist eine dem Eisen kaum überlegene kornverfeinernde Wirkung auf.

Die Festigkeit und die Dehnung der Schweißverbindungen waren die größten ($\sigma_B = 22 \text{ kg/mm}^2$, $\delta = 6\%$) bei der Verschweißung mit einem Zusatzdraht mit einem Mg-Gehalt von 1% und einem Si-Gehalt von 2–2,5%. Die Erhöhung des Mg-Gehaltes übt eine nachteilhafte Wirkung auf die Festig-

keit und die Dehnung aus, die des Ti-Gehaltes ist jedoch für die Dehnung vorteilhaft. Die Festigkeitseigenschaften der Schweißverbindung werden jedoch — ohne eine nachträgliche Wärmebehandlung — nicht soweit verringert wie die Rißneigung.

Zum Schweißen der AlMgSi-Legierungen können wir also einen Zusatzdraht mit folgender Zusammensetzung empfehlen — besonders in dem Falle, wenn auch eine nachträgliche Wärmebehandlung durchgeführt werden kann: Mg = 3%, Si = 3–3,5%, Fe = 0,6–1,0%, Al = Rest. Wird die Legierung mit diesem Zusatzdrahtwerkstoff verschweißt, so wird die Rißempfindlichkeit für Nahtrisse oberhalb der Solidustemperatur im Falle des Gasschmelzschweißens äußerst gering, im Falle des Argonarc-Schutzgas-Schweißens

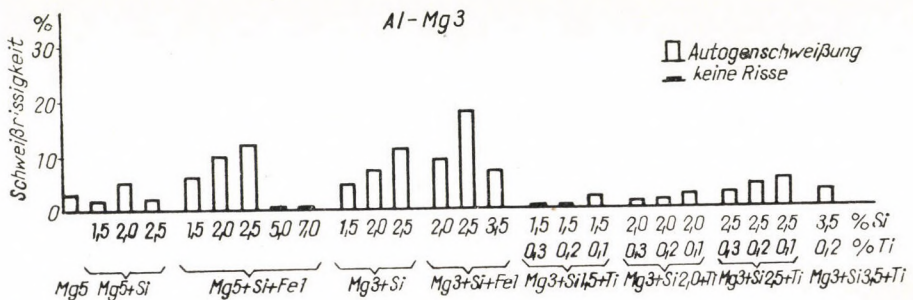


Bild 3. Die Schweißrissigkeit der AlMg 3 Legierungen, die mit verschiedenen Zusatzdrahtwerkstoffen gasschweißt wurden

praktisch abwesend und die Möglichkeit der Rißbildung neben der Schweißraupe wird auch zu Null.

Die Legierungen der Gattung AlMg 3 und AlMg 5 wurden bei unseren Schweißversuchen mit den Zusatzdrähten vom Typ AlMg 3 und AlMg 5 laut Tafel 1 verschweißt bzw. nur mit Drähten vom Typ AlMg 5. Risse entstanden im Falle der von uns verwendeten Zusatzdrahtzusammensetzungen nur beim Schweißen mit dem Gasschmelzverfahren. Auf Grund der Untersuchungen (Bild 3 und 4) kann eine nachteilhafte Wirkung der Fe-Zugabe festgestellt werden. Hingegen verminderte die Zugabe des kornverfeinernden Titans die Rißempfindlichkeit der AlMg-Legierungen in hohem Maße.

Die Erhöhung des Mg-Gehaltes der Zusatzdrähte übte im Falle der AlMg 3 Legierung eine merkbare verbessernde Wirkung aus. Der Si-Gehalt scheint auf Grund unserer Versuche im Falle der AlMg 3 Legierung in kleinerer Menge (bis zu 1,5%) eine verminderte Wirkung auf die Rißempfindlichkeit auszuüben, in größerer Menge jedoch (bis zu 2,5%) scheint er dieselbe zu vergrößern.

Die Rißneigung eines Grundwerkstoffes vom Typ AlMg 5 ist schon in dem Falle minimal, wenn die Schweißung mit einem Zusatzdrahte gleicher Zusammensetzung durchgeführt wird. Diese Rißneigung wird durch Zugabe

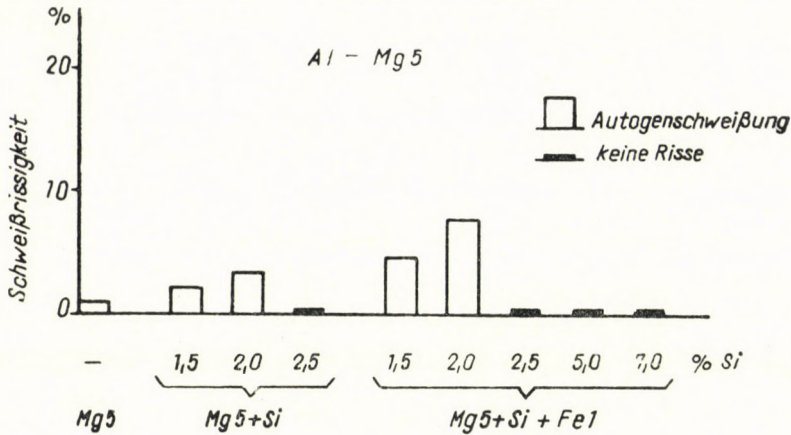


Bild 4. Die Schweißrissigkeit der AlMg 5 Legierungen, die mit verschiedenen Zusatzdrahtwerkstoffen gasgeschweißt wurden

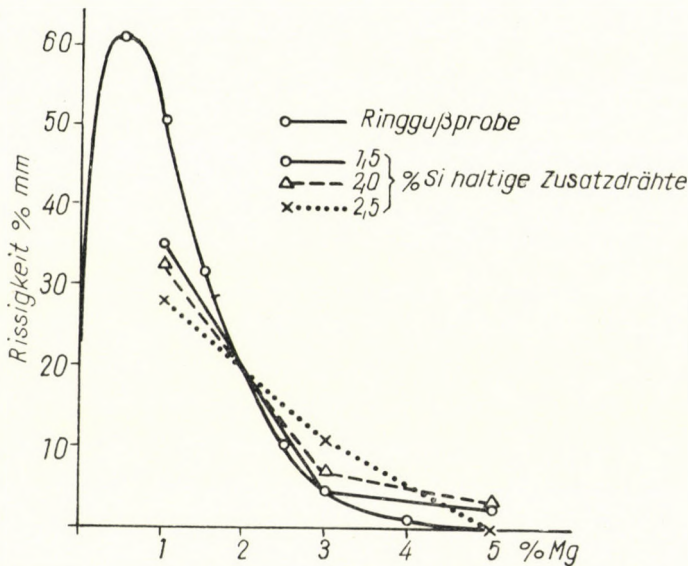


Bild 5. Die Veränderung der Schweißrißempfindlichkeit der AlMg-Legierungen, die mit Zusatzdrähten vom Typ AlMgSi geschweißt wurden, verglichen mit der Rißempfindlichkeit der Ringgußproben der AlMg-Legierungen

von Si im Anfang vergrößert, später jedoch vermindert. Die Rissigkeitskurve der Ringgußproben der AlMg-Legierungen wurde mit den Schweißproben verglichen, indem wir in einem Diagramm (Bild 5) diejenigen Punkte einzeichneten, wo die einzelnen Legierungen mit arteigenen Zusatzdrähten verschweißt wurden. Aus den Kurven ist es ersichtlich, daß die Rißneigung der AlMg-

Legierungen durch den Mg-Gehalt viel stärker beeinflusst wird als durch den Si-Gehalt.

Bei den Versuchen wurden auch Zusatzdrähte vom Typ AlSi 5 und AlMg 5 verwendet. Die AlSi 5 Drähte brachten nicht den erwünschten Erfolg, hingegen führten die AlMg 5 Drähte beim Grundwerkstoff AlMg 3 zu den gleichen Resultaten wie die AlMg 3 Si 1,5 Zusatzdrähte, und beim Grundwerkstoff AlMg 5 zu ungefähr den gleichen Resultaten wie die AlMg 5 Si 2 Zusatzdrähte.

Entsprechend den Korngrößenuntersuchungen von Domony und Vassel hat eine Zugabe von Si im Falle der AlMg-Legierungen eine Korngröße zur Folge, die um eine Größenordnung größer als im Falle der Zugabe von Ti ist.

Die Erhöhung des Fe-Gehaltes vermindert gewissermaßen die Festigkeit und die Dehnung der Schweißverbindungen der AlMg-Legierungen.

Das Silizium übt kaum eine Wirkung auf die Festigkeitswerte der AlMg 3 Legierung aus, hingegen wurde durch Erhöhung des Si-Gehalts die Festigkeit der AlMg 5 Legierung merklich erhöht. Die vorteilhafte Wirkung des Titans auf die Festigkeit und Dehnung war beträchtlich. So war z. B. die Festigkeit einer AlMg 3 Legierung, die mit einem Zusatzdraht AlMg 3 Si verschweißt wurde, ungefähr 19 kg/mm^2 , die Dehnung rund 5%, beim Schweißen mit einem Zusatzdraht AlMg₃SiTi jedoch 22 kg/mm^2 bzw. 15%. Die Festigkeit der Schweißverbindungen von Legierungen, die mit den Zusatzdrähten AlMg 5 verschweißt wurden, war im allgemeinen größer als die der Verbindungen, die mit AlMgSi Drähten verbunden wurden. Auf Grund dieser Erfahrungen und da das Si, das in die Schweißnaht gelangt, die Festigkeits- und plastischen Eigenschaften der Legierungen nicht vorteilhaft beeinflusst, obzwar die rißvermindernde Wirkung des Siliziums bewiesen werden konnte, haben wir unter Berücksichtigung der in Ungarn herrschenden Verhältnisse für die AlMg 3 und AlMg 5 Legierungen einen Zusatzdrahtwerkstoff folgender Zusammensetzung empfohlen: Mg = 5%, Fe \leq 0,3%, Si \leq 0,3%, Al = Rest. Es wird empfohlen zu diesem Draht eine Zugabe des kornverfeinernden Titans von 0,2% hinzuzufügen.

Bei der Untersuchung der Legierungsgattung AlCuMg haben wir bei unseren Versuchen bei einer Zusammensetzung entsprechend Tafel 1 Zusatzdrähte vom Typ AlCuMg und AlCuSi verwendet. Die Rißneigung der Verbindungen, die mit den verschiedenen Zusatzdrähten, mit Gasschmelzschweißen und Argonarc-Schutzgas-Schweißen hergestellt wurden, wurde in Bild 6 dargestellt.

Aus dem Diagramm des Bildes 7, das auf Grund der Messungen konstruiert wurde, konnten wir feststellen, daß bei der Verwendung von AlCuMg Zusatzdrähten das Maximum der Rißneigung sowohl im Falle des Gasschmelzschweißens wie auch im Falle des Argonarc-Schutzgas-Schweißens bei einem Mg-Gehalt von 1% liegt neben einem Cu-Gehalt von 4%. Wenn wir in dieses Diagramm die Ergebnisse der Ringgußproben von PUMPHREY und MOORE [9]

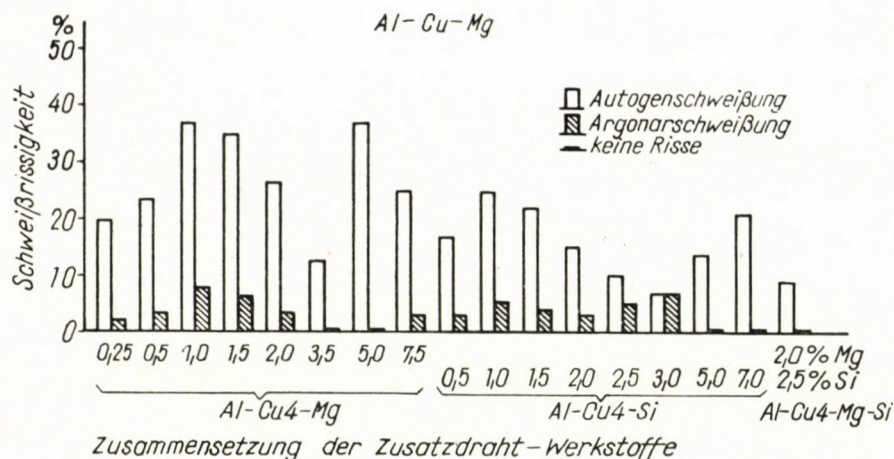


Bild 6. Die Schweißrissigkeit der AlCuMg-Legierungen, die mit verschiedenen Zusatzdraht-werkstoffen geschweißt wurden

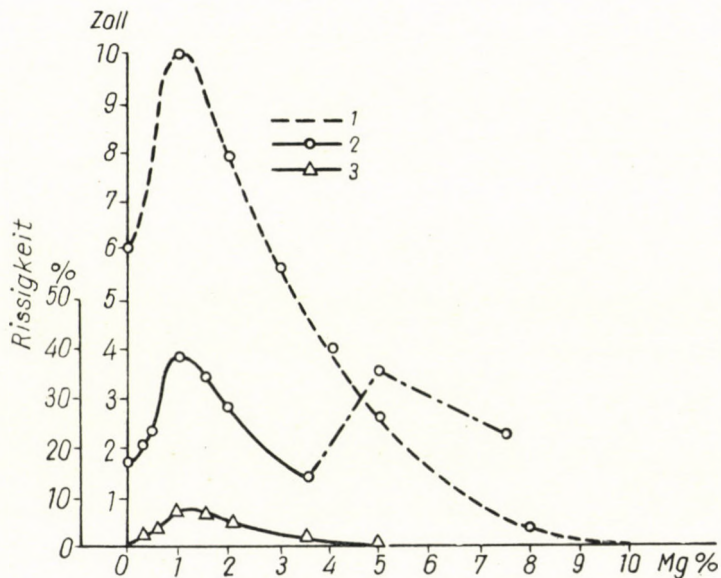


Bild 7. Die Veränderung der Schweißrißempfindlichkeit der AlCuMg-Legierungen, die mit Zusatzdrähten vom Typ AlCu4Mg geschweißt wurden, verglichen mit den Ringußproben von Pumphrey und Moore

1. Ringußprobe
2. Autogenschweißung
3. Argonarschweißung

e inzeichnen, so können wir feststellen, daß der Charakter der Kurve der unserer Schweißrissigkeitsuntersuchungen ähnlich ist. Die Kurve der Rissigkeit steigt im Falle des Gasschmelzschweißens oberhalb eines Mg-Gehaltes von 3,5% wieder an. Dieselbe Erscheinung wurde auch von den englischen Forschern

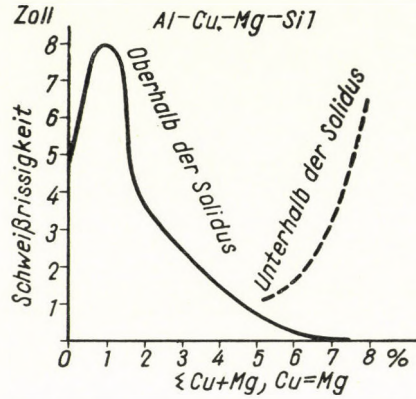


Bild 8. Die Riempfindlichkeit von Ringußproben der AlCuMgSi1 Legierung nach den Versuchsergebnissen der englischen Forscher

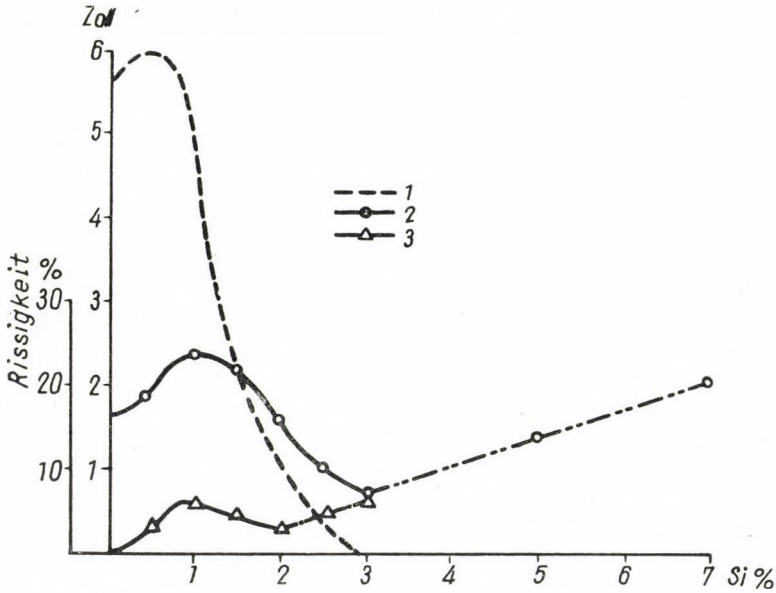


Bild 9. Die Veränderung der Schweißbrüßigkeit der AlCuMg-Legierungen, die mit Zusatzdrähten vom Typ AlCu4Si geschweißt wurden, verglichen mit den Ringußproben von Jennings und Mitarbeitern

1. Ringußprobe
2. Autogenschweißung
3. Argonareschweißung

beobachtet — siehe Bild 8 — wobei das Cu/Mg Verhältnis gleich 1 gesetzt und auf der Abszisse ihre Summe eingezeichnet wurde. Der plötzliche Anstieg der Riempfindlichkeit wurde von den englischen Forschern auf die Riempfindlichkeit des Werkstoffes für Nahrisse unterhalb der Solidustemperatur zurückgeführt und mit der sehr geringen Dehnung des erstarrten Materials begründet.

Die Rißneigung der AlCuMg-Legierungen, die mit AlCuSi-Zusatzdrähten verschweißt wurden, ist in Bild 9 dargestellt: Hierin haben wir auch die Ergebnisse der Ringgußproben von JENNINGS und Mitarbeitern [10] mit eingezeichnet. Die Kurven zeigen einen ähnlichen Verlauf. Durch Vergleich von Bild 7 und 9 kann festgestellt werden, daß die Erhöhung des Si-Gehaltes die Rißneigung in stärkerem Maße verringert als die Erhöhung des Mg-Gehaltes, während oberhalb eines Si-Gehalts von 2–2,5% die Nahtrisse unterhalb der Solidustemperatur auch hier auftreten.

Bei ihren Korngrößenmessungen fanden DOMONY und VASSEL im Falle der AlCu-Legierung, daß das Mg um eine halbe Größenordnung feinere Korngrößen erwirkt als das Si. Das Ti übte bis zu einem Gehalt von 0,1% hingegen keine kornverfeinernde Wirkung aus.

Die Festigkeit einer Verbindung, die mit einem Zusatzdraht vom Typ AlCuMg hergestellt wurde, betrug 32 kg/mm², die Dehnung war größer als 5%, im Falle eines Zusatzdrahtes vom Typ AlCuSi war die Dehnung nur 2 bis 3%, bei einer Festigkeit von 27–30 kg/mm². Da das Magnesium mehr vom Standpunkte der Festigkeit, das Silizium jedoch mehr vom Standpunkte der Verringerung der Rißneigung aus vorteilhafter ist, haben wir für die weiteren Untersuchungen auch Zusatzdrähte mit einer AlCu₄Mg₂Si_{2,5} Zusammensetzung hergestellt. Mit diesen Drähten konnte die Rißneigung bedeutend verringert werden, während die Festigkeit der Schweißverbindung beim Gasschmelzschweißen 32 kg/mm², beim Argonarc-Schutzgas-Schweißen 34 kg/mm² erreichte, bei einer Dehnung von 5%. Im Falle dieses Zusatzdrahtwerkstoffes ist mit einer nachträglichen Wärmebehandlung auch die Möglichkeit einer bedeutenden Erhöhung der Verbindungsfestigkeit gegeben. Aufgrund der Versuche können Zusatzdrähte mit der folgenden Zusammensetzung für das Schweißen der AlCuMg-Legierungen empfohlen werden: Cu = 4%, Mg = 2%, Si = 2,5%, Fe ≤ 0,3%, Al = Rest. Mit diesem Zusatzdrahtwerkstoff kann die Rißneigung der Naht für Risse oberhalb und unterhalb der Solidustemperatur bedeutend verringert werden. Die Festigkeitseigenschaften der Verbindung sind nach dem Schweißen genügend gut, außerdem besteht die erfolgsversprechende Möglichkeit für eine nachträgliche Wärmebehandlung der Verbindung.

b) Schweißbare Legierung

Bei den Untersuchungen über die AlZnMg-Legierungen erstreckten sich die Versuche auf die Bestimmung der Wirkung einzelner Legierungselemente und Kornverfeinerer auf die Rißneigung der Ringgußproben, auf die Korngröße sowie die Festigkeitseigenschaften. Die Untersuchungen wurden für die Zusammensetzungen entsprechend der Tafel 3 durchgeführt. Auf Grund dieser Versuche wurden eingespannte Schweißproben und Festigkeitsuntersuchungen mit den Legierungen mit Zusammensetzungen nach Tafel 4 ausgeführt.

Tafel 3

Die Zusammensetzung der Legierungen, die durch Ringgußproben untersucht wurden

Zusammensetzung der Legierung	Veränderlicher Legierungsgehalt %						
	Mg	Zn	Fe	Si	Cu	Ti	B
Al-Mg	0,5—7						
Al-Zn		1—15					
Al-Si				0,5—12			
Al-Cu					2—6		
Al-Mg-Zn	0,5—5	1—8					
Al-Mg-Zn-Fe	1—3	4—8	0,5—1				
Al-Mg-Zn-Si	1—3	4—8		0,5—3			
Al-Mg-Zn-Cu	1—3	4—8			0,5—3		
Al-Mg-Zn-Ti	1—3	4—8				0,1—0,5	
Al-Mg-Zn-B	1—3	4—8					0,01—0,1
Al-Mg-Zn-Fe-Si	1—3	2—8	0,1—0,4	0,1—0,4			
Al-Mg-Zn-Ti-B	1—3	2—8				0,2	0,1

Tafel 4

Die Zusammensetzung der AlMgZn-Legierungen, die durch eingespannte Schweißprobe untersucht wurden

Bezeichnung der Legierung	Zusammensetzung %				Bemerkung
	Mg %	Zn %	Ti %	Rest.	
Al-Mg-Zn	1	4	—	99,5 Al	Unidal und Al-Zn-Mgl Superalumag T35
	1,5	3	—	99,5 Al	
	1,5	4	—	99,5 Al	
	2	2	—	99,5 Al	
	2	3	—	99,5 Al	
	2	4	—	99,5 Al	
	3	3	—	99,5 Al	
Al-Mg-Zn-Ti	1	4	0,2	99,5 Al	
	1,5	3	0,2	99,5 Al	
	1,5	4	0,2	99,5 Al	
	2	2	0,2	99,5 Al	
	2	3	0,2	99,5 Al	
	2	4	0,2	99,5 Al	
	3	3	0,2	99,5 Al	

Im Laufe unserer Versuche haben wir in der Aluminiumecke der AlMgZn-Legierungen mit Hilfe von Ringgußproben die Kurven der gleichen Rißempfindlichkeitsstufen bestimmt (Bild 10). Auf Grund derselben konnten wir feststellen, daß die starke Rißneigung der Legierungen mit größerem Zn-Gehalt durch einen Mg-Gehalt von mindestens 2% bedeutend verringert werden kann. Wir haben außerdem auch den Einfluß von Cu, Fe, Si, Ti und B auf die Rißneigung der Legierungen untersucht. Dabei zeigte sich, daß das Kupfer bis zu 0,5—1,0% zu größerer Rißneigung führt (Bild 11), daß Eisen und Silizium

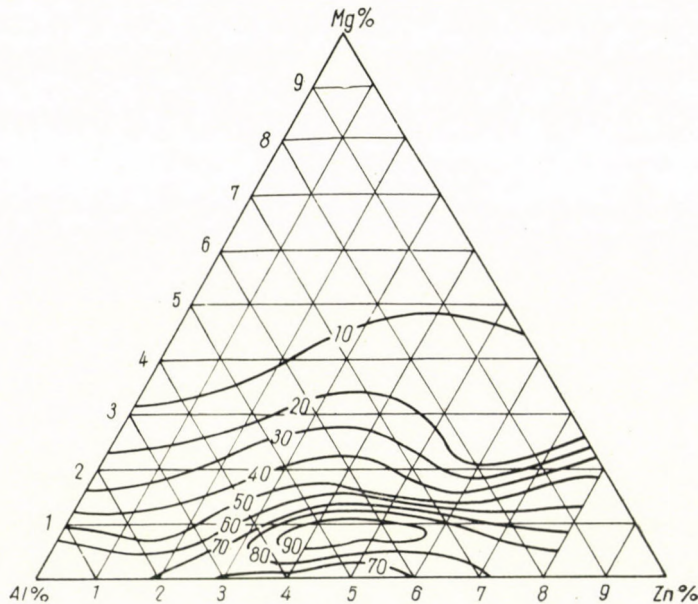


Bild 10. Die Veränderung der Rißempfindlichkeit von Ringgußproben der AlZnMg-Legierungen

bereits in einer Menge von 0,5% diese Rißneigung bedeutend vermindert, und im Falle von $(\text{Fe} + \text{Si}) = 0,5\%$ ein Fe/Si Verhältnis größer als 1 bezüglich der Verringerung der Rißneigung vorteilhafter als ein Verhältnis kleiner als 1 ist. Das Titan wird über 0,3% (Bild 12), das Bor über 0,1%, sowie Ti und B gemeinsam eine bedeutende Verringerung der Rißneigung verursachen.

Bei der Untersuchung der Wirkung von einzelnen Legierungselementen und Zugaben auf die Korngröße haben wir feststellen können, daß das Kupfer in diesem Falle eine kornvergrößernde Wirkung ausübt. Eisen und Silizium bewirkt bis zu einer Menge von 0,5% die Verminderung der Korngröße um eine halbe Größenordnung, Ti über 0,3%, sowie B über 0,1% eine Verminderung um zwei Größenordnungen. Ein Mg-Gehalt von mehr als 2% ist kornverfeinernd, das Zn übt jedoch keine Wirkung aus (Tafel 5).

Die Festigkeitseigenschaften der AlMgZn-Legierungen auf Reinstaluminiumbasis am Tage der Wärmebehandlung werden eher vom Mg, dieselben nach Auslagerung jedoch eher vom Zn günstig beeinflusst. Die Zugabe von Cu, Fe, Ti und B wirkt festigkeitserhöhend, dieselbe von Si jedoch nicht.

Die Untersuchung der Schweißrissigkeit der ternären AlMgZn-Legierungen erfolgte mit Zusatzdrahtwerkstoffen arteigener Zusammensetzung sowie mit 0,2% Ti legiert, und im Falle der Legierungen mit bis zu 2% Mg Gehalt

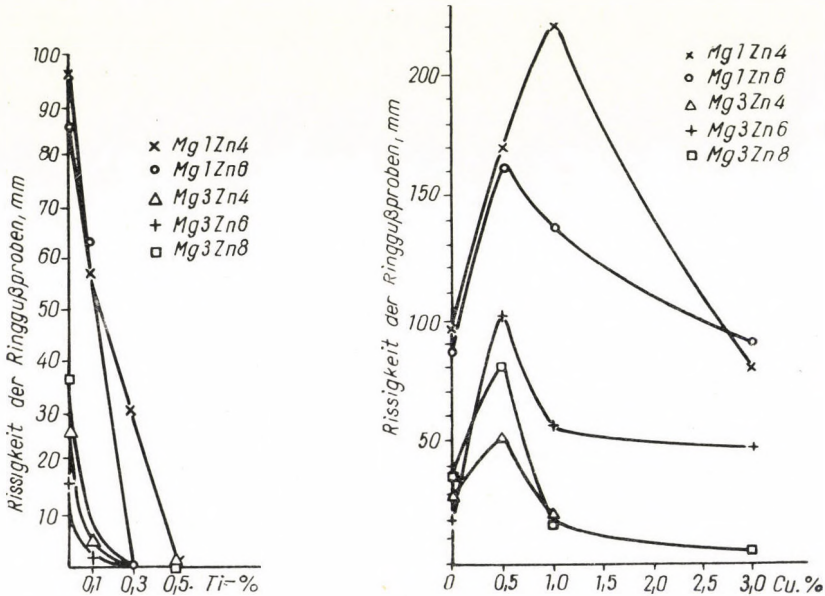


Bild 11. Die Veränderung der Reißempfindlichkeit von Ringgußproben der AlZnMg-Legierungen, in Abhängigkeit von dem Cu-Gehalte

Bild 12. Die Veränderung der Reißempfindlichkeit von Ringgußproben der AlZnMg-Legierungen, in Abhängigkeit von dem Ti-Gehalte

mit Drähten, die mehr Magnesium enthielten. Die Ergebnisse dieser Versuche (Bild 13) zeigen eine gute Übereinstimmung mit denen der Ringgußproben (Bild 12 und 14).

Im Laufe der Schweißproben zeigten die Legierungen auch eine Reißneigung neben der Schweißraupe. Diese Reißempfindlichkeit konnte mit höherem Mg-Gehalt — auf Kosten des Zn-Gehaltes — gewissermaßen verringert werden, und durch Zugabe von Titan zum Zusatzdrahtwerkstoff oder zum Grundwerkstoff vollkommen aufgehoben werden.

Wenn wir die Zusammensetzungen der AlMgZn-Legierungen mittlerer Festigkeit (Tafel 6), die in einigen Literaturstellen [11, 12, 13] der letzten Jahre mitgeteilt wurden, mit den Ergebnissen unserer Reißneigungsuntersuchungen

Tafel 5

Die Veränderung der Korngröße einiger AlMgZn-Legierungen unter der Wirkung des vierten und fünften Zusatzelementes

Korngröße mm ²	Al+Mg(1—3)%+ +Zn(4—8)%	+Fe(0,5—1%)	+Si(0,5—3)%	+Fe(0,1—0,4)%+ +Si(0,1—0,4)%	+Cu(0,5—3)%	+Ti(0,1—0,5)%	+B(0,01—0,1)%	+Ti 0,2+B 0,1
>1								
1—0,75					0,5			
0,75—0,5	(1+4)	0,5	0,5	(0,1+0,4)	0,5 1 3	0,1		
0,5—0,3	(1+6), (3+4), (3+6), (3+8)	0,5 1	0,5 1	(0,1+0,4) (0,4+0,1)	1 3	0,1	0,01	
0,3—0,1		0,5 1	0,5 1 3	(0,1+0,4) (0,4+0,1)	1	0,1	0,01 0,1	
0,1—0,05		1		(0,4+0,1)		0,3	0,01 0,1	
<0,05				(0,4+0,1)		0,3 0,5	0,1	(0,2+0,1)

Tafel 6

Die Zusammensetzung und die Festigkeitseigenschaften der bekannten niedriglegierten AlMgZn-Legierungen

Bezeichnung	Herstellerland	Zusammensetzung %							Festigkeit			
		Mg	Zn	Mn	Cr	Cu	Fe	Si	$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	σ_B kg/mm ²	δ_{10} %	HB kg/mm ²
Unidal	Schweiz	1	4,5	0,3	?	?	?	?	15	30	20	75
Superalumag T35	Frankreich	1,5— 1,75	2,75— 3,25	0,2— 0,4	0,1— 0,3	<0,1	Σ 0,5		25	35	16—18	70—75
AlZnMg 1	Deutschland	0,5— 1,2	3,5— 4,8	<1,0	<0,3	<0,1	<0,7	<0,7	18—25	30—40	19—22	

durch Ringgußproben vergleichen, so können wir feststellen, daß diese Legierungen vom Standpunkte der Rißempfindlichkeit aus gesehen in einem ungünstigen Bereich liegen. Die auf Grund der Ringgußproben durchgeführten Schweißversuche sowie die Festigkeitsuntersuchungen bekräftigen, daß die Rißempfindlichkeit durch die Erhöhung des Mg-Gehaltes sowie durch Zugabe

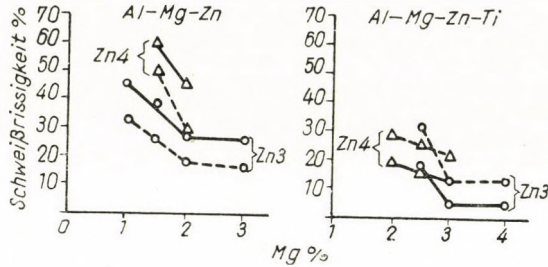


Bild 13. Die Veränderung der Rißempfindlichkeit von gasschmelzgeschweißten AlZnMg-Legierungen in Abhängigkeit von der Zusammensetzung des Grundwerkstoffes und des Zusatzdrahtes. Geschweißt wurde einmal mit Zusatzdrähten dem Grundwerkstoff gleicher Zusammensetzung (—), außerdem auf dem linken Bilde mit Drähten mit einer Zugabe von 0,2% Ti, auf der rechten Seite ohne Ti-Zugabe (— — — —)

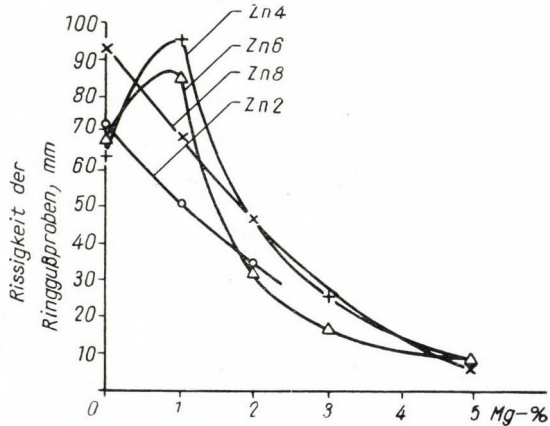


Bild 14. Die Veränderung der Rißempfindlichkeit von Ringgußproben der AlZnMg-Legierungen

von Ti bedeutend verringert werden kann, ohne daß die Festigkeitseigenschaften der Legierung dadurch wesentlich beeinflußt wären. Auf Grund unserer Versuche können wir die Zusammensetzung einer gut schweißbaren, rißungefährdeten AlZnMg-Legierung mittlerer Festigkeit* neben der Einschränkung von

* Die Legierung ist durch das Ung. Patent Nr. 146.449 des Forschungsinstituts für NE-Metalle, Budapest, geschützt.

(Mg + Zn) = 6% im folgenden festlegen: Mg = 2–3%, Zn = 4–3%, Ti = 0,2%, Fe ≤ 0,3%, Si ≤ 0,3%, Al = Rest. Wurde diese Legierung mit einem Zusatzdraht gleicher Zusammensetzung verschweißt, so fanden wir bei den eingespannten Schweißproben im Falle des Argonarc-Schutzgas-Schweißens gar keine Risse, im Falle des Gasschmelzschweißens nur eine geringe Rißneigung in der Form von Nahtrissen und gar keine Risse neben der Schweißbraupe. Diese Legierung verfügt über folgende Festigkeitseigenschaften:

Zugfestigkeit	34–36 kg/mm ²
Streckgrenze	20–22 kg/mm ²
Bruchdehnung	18–22%
Brucheinschnürung	ungefähr 40%.

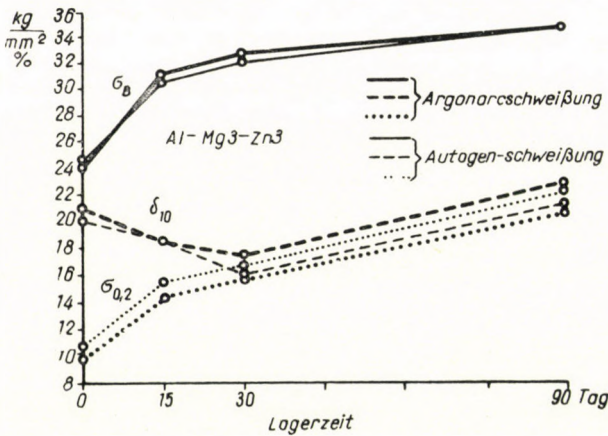


Bild 15. Die Veränderung der Festigkeit der Schweißverbindungen der AlMg3Zn3 Legierung, geschweißt mit dem Argonarc-Verfahren (fett ausgezogene Linien) und dem Gasschmelzverfahren (dünn ausgezogene Linien), in Abhängigkeit von der Lagerzeit nach dem Schweißen

Die Festigkeitseigenschaften der Schweißverbindung werden zwar durch das Schweißen verringert, die Auslagerung bei Zimmertemperatur bewirkt jedoch, daß die Festigkeit der Verbindung nach 30 Tagen gleich der des Grundwerkstoffes nach einer Periode von 30 Tagen nach erfolgter Wärmebehandlung wird, und die Dehnung 80 bis 100% der ursprünglichen Dehnung erreicht (Bild 15).

Die Besprechung der Versuchsergebnisse

Es ist üblich, die Rißneigung der Aluminiumlegierungen in drei Gruppen einzuteilen: Nahrisse oberhalb der Solidustemperatur, Nahrisse unterhalb der Solidustemperatur sowie Risse neben der Schweißbraupe, in der Wärmeinflußzone.

Die Entstehung der Nahtrisse oberhalb der Solidustemperatur wurde schon von verschiedenen Forschern untersucht [7, 14, 15, 16, 17]. Bezüglich der Ursache dieser Risse stimmen die Annahmen insofern überein, daß nach der Ansicht dieser Autoren die Temperaturspanne zwischen der Solidus- und der Liquidustemperatur — d. h. das Temperaturintervall, in dem sich das Metall in einem teigartigen Zustande befindet — eine maßgebende Rolle spielt. Oberhalb der Solidustemperatur üben auf die Verminderung der Rißgefährdung die Verteilung und die Menge der in dem erstarrendem Metall zwischen den erstarrten Gefügebestandteilen noch vorhandenen flüssigen Phase eine große Wirkung aus. Ist der Anteil der flüssigen Phase im letzten Moment der Erstarrung genügend groß, so kann dieselbe

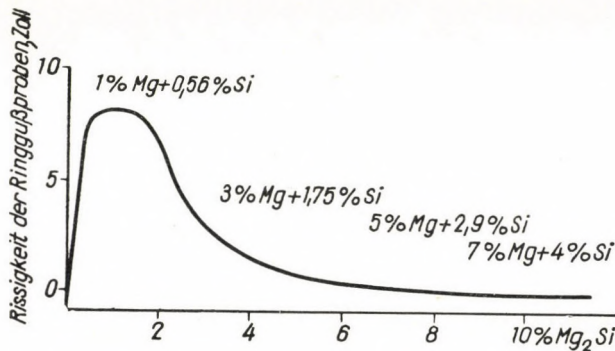


Bild 16. Die Veränderung der Rißeigung der quasibinären $AlMg_2Si$ Legierung, auf Grund der Ringgußproben der englischen Forschergruppe an der Universität von Birmingham

auf der Grenzfläche der festen Phase die während der Schwindung entstehenden Hohlräume ausfüllen. Diese flüssige Phase ist von eutektischer Zusammensetzung, deshalb muß zur Verringerung der Rißgefährdung ein gewisser Anteil des Eutektikums vorhanden sein. Die Rißgefährdung der Legierung ist am größten bei einer Zusammensetzung, die der festen Löslichkeitsgrenze entspricht, diese Grenze verschiebt sich jedoch im Falle einer raschen Abkühlung — gegenüber einer Abkühlung, die zum Gleichgewicht führt — weiter nach links. Diese Verschiebung nach links hat gleichzeitig zur Folge, daß in der Legierung der Anteil des Eutektikums zunimmt.

Man bezeichnet als Ursache der Nahtrisse unterhalb der Solidustemperatur die geringe Warmfestigkeit der erstarrten, jedoch noch nicht genügend abgekühlten Naht. Diese geringe Warmfestigkeit tritt in erster Linie bei den Legierungen der Gattung $AlMgSi$, $AlCuMg$ und $AlZnMg$ auf, wo die spröden Gefügebestandteile, die an den Korngrenzen ausscheiden, sowie die unmittelbar angrenzende, an Legierungselementen verarmte Zone die Kräfte, die infolge der Schwindung auftreten, nicht aufnehmen können [18].

Die Risse in der Wärmeeinflußzone neben der Schweißraupe, sind ihrem Charakter nach Risse unterhalb der Solidustemperatur, mit der Bemerkung, daß hier im festen Material die grobe Ausscheidung der spröden Gefügebestandteile durch die Wärmeeinwirkung des Schweißens weitgehend gefördert wird.

Die Wirkung der einzelnen Legierungselemente und Zusätze auf die Verringerung der Reißempfindlichkeit der verschiedenen Legierungsgattungen kann folgendermaßen erklärt werden:

Die am meisten rissgefährdete AlMgSi-Legierung — entsprechend den Feststellungen der Forschergruppe an der Universität von Birmingham — hat eine Zusammensetzung, die der quasibinären Scheidelinie Al-Mg₂Si entspricht (Bild 16). Der Höchstwert der Reißempfindlichkeit liegt bei einem Mg₂Si-Gehalt von 0,5 bis 1,5%, der sehr nahe der Zusammensetzung der genormten AlMgSi-Legierung liegt.

Auf Grund unserer Untersuchungen bewirkt bei den AlMgSi-Legierungen ein Zusatzdrahtwerkstoff mit höherem Mg- und Si-Gehalt die Verringerung der Reißneigung für Nahtrisse oberhalb der Solidustemperatur dadurch, daß die Zusammensetzung entlang der quasibinären Scheidelinie mehr nach rechts von dem kritischen Reißbereich verschoben wird, wodurch sich der Anteil des Eutektikums vom Standpunkte der »heilenden« Wirkung aus gesehen günstiger gestaltet. Das Vorhandensein eines Mg₂Si-Gehaltes ist ja schon vom Standpunkte der Reißneigung für Nahtrisse unterhalb der Solidustemperatur und für Risse in der Wärmeeinflußzone aus gesehen weniger vorteilhaft. Zur Verringerung dieser Reißneigung benötigt man einen Si-Überschuß gegenüber dem Mg₂Si-Verhältnis, was mit Rücksicht auf die Verdünnung der Schweißnaht ein Mg/Si Verhältnis ≤ 1 erfordert. Das freie Silizium übt seine rissigkeitsvermindernde Wirkung wahrscheinlich durch seine kornverfeinernde Wirkung aus. Dafür spricht auch die günstige Wirkung des freien Si-Gehaltes, die bei den Korngrößenmessungen beobachtet wurde. Die Mäßig rissigkeitsvermindernde Wirkung des Eisens dürfte ebenfalls nur mit der kornverfeinernden Wirkung, die bei den Korngrößenmessungen beobachtet wurde, erklärt werden.

Das Titan übte keine günstige Wirkung auf die Reißempfindlichkeit der AlMgSi-Legierungen aus, was für die Richtigkeit der Annahme von LIHL, NACHTIGALL und PIELSLINGER [19] spricht, wonach das Ti in der Gegenwart von freiem Si eine Ti₂Si Verbindung bildet, wodurch es an der kornverfeinernden Wirkung behindert wird. Bei den Korngrößenmessungen hatte das Ti in der Gegenwart von freiem Si tatsächlich eine mindere Wirkung auf die Korngröße.

Im Falle der AlMg 3 Legierungen scheint die rissigkeitsvermindernde Wirkung einer kleineren Menge an Si mit den Ergebnissen von ERDMANN—JESNITZER [20] im Einklang zu stehen. Die Verdünnung des 1,5%igen Si-Gehaltes des Zusatzdrahtes in der Naht erreicht nämlich ungefähr die Zusammensetzung der von ihm empfohlenen, weniger rissgefährdeten AlMg3Si Legierung.

Nach Erdmann-Jesnitzer vermindert die kleine Menge an Silizium die Verminderung der Rißneigung der AlMg 3 Legierung dadurch, daß hierbei ein Al-Mg₂Si Eutektikum entsteht. Der Schmelzpunkt dieses Al-Mg₂Si Eutektikums steht nämlich viel näher dem Soliduspunkt dieser Legierung, die in einer weiten Temperaturspanne erstarrt, als das Al-Al₃Mg₂ Eutektikum, das erst bei 450° C entsteht. So kann dieses Eutektikum in der letzten Phase der Erstarrung als eine »heilende« flüssige Phase vorhanden sein. Die weitere Erhöhung des Si-Gehaltes führt zur Bildung eines größeren Anteils der spröden Mg₂Si Phase, wodurch die Zusammensetzung der Legierung mehr an die quasibinäre Scheidelinie Al-Mg₂Si heranrückt und somit mehr rißempfindlicher als das Grundwerkstoff wird.

Die Rißneigung der AlMg 5 Legierung ist an und für sich schon so gering, daß sie durch die Mg₂Si Verbindung, die als Folge des Si-Gehaltes des Zusatzdrahtes entsteht, nur verringert werden kann. Die Ergebnisse der Korngrößmessungen zeigten einen ähnlichen Charakter, wie die rissigkeitsvermindernde Wirkung von Si und Ti, und bestätigen, daß das kornverfeinernde Titan merkbar zur Verringerung der Rißempfindlichkeit der Legierung beiträgt.

Im Falle der AlCuMg Legierungen verringert der Zusatzdraht mit AlCuSi-Gehalt dadurch die Rißneigung der Legierung, daß das Si bei der Vermischung mit dem Grundwerkstoff den Mg-Gehalt in der Form von Mg₂Si abbundet — da die Verbindung Mg₂Si die stabilste Phase im Vierstoffsystem AlCuMgSi darstellt [21] — und somit die Rißneigung der Legierung mit ungefähr 1% Mg-Gehalt unterbindet. Ein größerer Si-Gehalt wird wahrscheinlich in der Form einer Korngrenzensteigerung, als eine spröde Phase, die Rißneigung der Legierung für Nahtrisse unterhalb der Solidustemperatur fördern. Die rissigkeitsvermindernde Wirkung des Mg-Gehaltes kann durch die Vergrößerung des Anteils des bei 500° C schmelzenden Al-CuAl₂-Cu₂Mg₂Al₅ Eutektikums erklärt werden, das eine gewisse »heilende« Wirkung ausüben kann. Die weitere Erhöhung des Mg-Gehaltes kann aber anstatt der CuAl₂ Phase dieses dreiteiligen Eutektikums zur Entstehung der spröderen CuMg₄Al₅ Phase führen, die wiederum für Nahtrisse unterhalb der Solidustemperatur verantwortlich gemacht werden kann.

Im Falle der AlZnMg Legierungen wird die Rißneigung bei der Erhöhung des Mg-Gehaltes wahrscheinlich dadurch verringert, daß nach der Ausbildung der MgZn₂ Verbindung das zurückbleibende, freie Magnesium eine günstige Wirkung ausübt. Das freie Mg bildet wahrscheinlich das Al-Al₃Mg₈ Eutektikum [22], das an den Korngrenzen verteilt eine »heilende« Wirkung ausübt. Die rissigkeitsvermindernde Wirkung des Titans kann durch die Entstehung der äquiaxialen, feinen Körner erklärt werden. Die Wirkung des Mg und des Ti konnte auch bei den Korngrößmessungen beobachtet werden. Die Rißneigung in der Wärmeeinflußzone ist wegen der Ausscheidung der spröden Verbindungsphase bei dieser Legierungsgattung charakteristisch. Diese Neigung

wird unserer Meinung nach bei der Erhöhung des Mg-Gehaltes darum verringert, weil — unter der Einschränkung von $(Mg + Zn) = \text{konstant}$ — die Erhöhung des Mg-Gehaltes gleichzeitig zur Verminderung des Zn-Gehaltes führt und damit auch der Anteil der spröden $MgZn_2$ Verbindung kleiner wird. Diese Erscheinung kann auch bei der Veränderung der Zusammensetzung der zu schweißenden Legierung beobachtet werden. Unter der kornverfeinernde Wirkung einer weiteren Zugabe von Ti verschwindet die Rißeigung in der Wärmeeinflußzone, wahrscheinlich darum, weil im Falle des feineren, viel-flächigen Gefüges die Steigerung der Korngrenzenausscheidungen nicht in dem Maße eintreten kann als im Falle des grobkörnigen Materials.

Auf Grund unserer Untersuchungen können wir das Prinzip der rissigkeitsvermindernden Wirkung der einzelnen Legierungselemente und Zugaben im folgenden festlegen.

Die Rißeigung für Nahtrisse oberhalb der Solidustemperatur wird in erster Linie durch solche Zugaben verringert, die die Löslichkeitsgrenze der Legierung nach links verschieben und den Anteil der eutektischen Phase in der Richtung eines günstigeren Verhältnisses vergrößern. Im Hinblick auf die Verringerung der Rißeigung für Nahtrisse oberhalb der Solidustemperatur ist diese vorhin erwähnte Wirkung der Zugaben wichtiger als die eventuelle kornverfeinernde Wirkung derselben, die nur eine untergeordnete Rolle spielt. Damit können die Unterschiede in der geringen kornverfeinernden Wirkung und in der rissigkeitsvermindernden Wirkung einiger Zugaben erklärt werden.

Andererseits verringern jene Zugaben, die im Falle der gegebenen Legierung eine starke kornverfeinernde Wirkung ausüben, immer die Rißeempfindlichkeit für Nahtrisse oberhalb der Solidustemperatur. Die flüssige Phase ist bei dendritischen Kristallen an den Korngrenzen der großen Körner in der Form von Zusammenballungen verteilt, bzw. schließen die großen Dendriten die flüssige Phase gewissermaßen in sich ein und verhindern dadurch die »heilende« Wirkung derselben. Die feine, äquiaxiale Kristallisation ermöglicht eben durch eine gleichmäßigere, filmartige Verteilung der flüssigen Phase die Verringerung der Rißeigung.

Die Rißeigung für Nahtrisse unterhalb der Solidustemperatur wird durch Zugaben mit starker kornverfeinernder Wirkung immer verringert. Die Kornverfeinerer vermindern die Rißeigung für Nahtrisse unterhalb der Solidustemperatur dadurch, daß die Ausscheidungen im festen Zustande an den Grenzen der kleineren, gleichmäßigeren Körner besser verteilt werden und die groben oder zusammengeballten Ausscheidungen, die die örtliche Warmfestigkeit stark herabsetzen können, nicht auftreten.

Die Rißeempfindlichkeit in der Wärmeeinflußzone kann nur wenig durch die Zusammensetzung des Zusatzdrahtes beeinflusst werden. Dieselbe kann jedoch viel erfolgreicher durch die zweckmäßige Auswahl der Zusammen-

setzung des Grundwerkstoffes verringert werden. Eine Zugabe mit starker kornverfeinernder Wirkung wird auch die Reißempfindlichkeit für Risse in der Wärmeeinflußzone verringern; die Ursache dieser Verringerung ist dieselbe wie im Falle der Nahtrisse unterhalb der Solidustemperatur.

Schlußfolgerungen

Auf Grund der Untersuchungen kann festgestellt werden, daß im Falle der Legierungsgattungen AlMgSi, AlMg 3, AlMg 5, AlCuMg und AlMgZn in Hinsicht der Festigkeitseigenschaften die beste Lösung das Schweißen mit Zusatzdrähten von der Zusammensetzung des Grundwerkstoffes darstellt.

Wegen der Verringerung der Reißgefährdung ist die Erhöhung der Schweißgeschwindigkeit unbedingt vorteilhaft, also anstelle des Gasschmelzschweißes soll die Lichtbogenschweißung unter Argongasschutz verwendet werden. Wird mit diesem Verfahren geschweißt, so sind die Legierungsgattungen AlMg sowie die AlMgZn-Legierungen mittlerer Festigkeit rißfrei.

Die Reißempfindlichkeit des Grundwerkstoffes für Nahtrisse oberhalb der Solidustemperatur kann durch einige Zugaben zum Zusatzdrahte in bedeutender Weise verringert werden.

Zugaben, die eine starke kornverfeinernde Wirkung auf den Grundwerkstoff ausüben, können durch Zulegieren zum Zusatzdrahtwerkstoffe die Reißempfindlichkeit des Grundwerkstoffes für Nahtrisse oberhalb und unterhalb der Solidustemperatur sowie für Risse in der Wärmeeinflußzone gleichfalls verringern.

Alle drei Arten der Reißempfindlichkeit können am wirksamsten durch Zugaben zum Grundwerkstoffe verringert werden.

SCHRIFTTUM

1. BURAY, Z.: »Die Schweißbarkeit von Aluminiumlegierungen«. MTI. Budapest, 1954.
2. BURAY, Z.: Mitt. Forschungsinstitutes für NE-Metalle Budapest, Band I, 1956, S. 216.
3. BURAY, Z.: Gép, 1959, Nr. 1, S. 3.
4. BURAY, Z.: Mitt. Forschinst. NE-Metalle Budapest, Band II, 1958, S. 107.
5. BURAY, Z.: ebenda, Band III, 1959, S. 148.
6. BURAY, Z.: ebenda, Band III, 1959, S. 157.
7. ANON: A. D. A. Research Report, No. 1, 1947.
8. DOMONY, A. und VASSEL, K. R.: Acta Technica Acad. Sci. Hung., Bd. XII, Nr. 1—2, S. 157.
9. PUMPHREY, W. I. und MOORE: A. D. A. Research Rept, No. 4, 1949.
10. JENNINGS und Mitarbeiter: A. D. A. Research Rept, No. 4, 1949.
11. HÉRANGUEL, J.: Rev. Aluminium, 27 (1950), S. 135.
12. HUG, H.: Aluminium Suisse 5 (1955), S. 112.
13. MÜLLER-BUSSE, A.: Aluminium, 32 (1956), S. 333.
14. VERÓ, J.: Mitt. Berg- u. Hütt. Abt. Kgl. ung. Palatin-Joseph Univ. Sopron, 7 (1935), S. 138.
15. HOLLARD, M.: Rev. Aluminium, 1950, S. 175.
16. Авакян С. В. и Ласко Н. Ф., Автогенное Дело, 1951, № 10, S. 1.
17. PELLINI, W. S.: Foundry, November 1952, S. 33.
18. KOZIARSKI, J.: Welding J., 32 (1953), S. 970.
19. LIHL, F. und Mitarbeiter: Aluminium Ranshofen Mitt., 6 (1958), S. 14.
20. ERDMANN-JESNITZER, F.: Z. f. Metallkde, 40 (1948), S. 389.
21. DOMONY, A.: Mitt. Abt. VI. Ung. Akad. Wissensch., Bd. I, Nr. 2, S. 104.
22. HANEMANN, H., SCHRADER, A.: Atlas Metallogr. Bd. III, Berlin.
23. MANTEL, W., WOLF, L.: Aluminium Ranshofen Mitt., 5 (1957), S. 13.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser hat die Untersuchung von Ringgußproben, der Korngröße, der Festigkeitseigenschaften und von eingespannten Schweißproben verschiedener Aluminiumlegierungen durchgeführt. Auf Grund derselben wurden die Möglichkeiten der Verminderung der Rissigkeit erörtert. Er gibt die Zusammensetzung von Zusatzdrähten zum Schweißen der genormten Aluminiumlegierungen an, die die Rissigkeit vermindern und die gleichzeitig die Ansprüche in bezug auf Festigkeit mitberücksichtigen. Er stellt fest, daß die endgültige Lösung nur durch die Entwicklung einer Legierung erzielt werden kann, die auf Grund der Erfordernisse der Schweißbarkeit zusammengestellt wird. Die bei seinen Versuchen hergestellte AlMgZnTi Legierung mittlerer Festigkeit ist beim Schweißen gegen Rissigkeit unempfindlich, ihre Festigkeit erreicht fast die der Konstruktionsstähle und die Festigkeit der Schweißverbindung erreicht nach Auslagerung ungefähr 90 bis 100% der Festigkeit des Grundwerkstoffes. Er gibt eine theoretische Begründung der Wirkung von kleinen Zusätzen auf die Verminderung der Neigung zu Nahtissen oberhalb und unterhalb der Solidustemperatur sowie zu Rissen in der Wärmeeinflußzone neben der Schweißbraue an.

THE DECREASE OF WELD CRACKING TENDENCY OF SOME ALUMINIUM ALLOYS
HAVING ADDITIONAL ELEMENTS

Z. BURAY

SUMMARY

The investigations on different aluminium alloys for ring casting, grain size, strength and restrained welding were made by the Author. The decrease in cracking tendency was established by these methods. For the welding of Commercial aluminium alloys, welding rods are given, which decrease the cracking tendency, taking the strength of the alloys into account.

The Author established that for the solution of this question, such an alloy is given which was made for its weldability. A medium strength alloy Al-Mg-Zn-Ti components was produced by manifold researches. This alloy is not sensitive to weld cracking, its strength attaining the strength of soft steel, and the strength of the weld reaching 90 to 100% of the strength of the base metal.

A theoretical explanation is given of the decrease of weld craking tendency on the weldings of some aluminium alloys, above and below the solidus and beside the seam, which is influenced by some additional elements.

DIMINUTION DE LA TENDANCE À LA FISSURATION DE CERTAINS ALLIAGES
D'ALUMINIUM PAR DIVERSES ADDITIONS

Z. BURAY

RÉSUMÉ

L'auteur a effectué des essais portant sur le coulage de bagues, la structure granulaire, la résistance et soudage fixé de différents alliages d'aluminium. Sur la base des résultats obtenus, il détermine les méthodes permettant de diminuer la fissuration du métal. Pour le soudage des alliages d'aluminium commerciaux, il indique des compositions de baguettes de soudage satisfaisant aux exigences de résistance, ainsi qu'à la réduction de la tendance à la fissuration. L'auteur constate que, pour résoudre le problème, il faut développer un alliage satisfaisant aux exigences de la soudabilité. L'alliage Al-Mg-Zn-Ti de résistance moyenne, développé au cours de ses essais, résiste à la fissuration, sa résistance est voisine de celle des aciers de construction, et la résistance de la soudure atteint au repos 90 à 100% de celle de la matière de base. L'auteur donne une explication théorique de l'influence de certaines additions sur la tendance à la fissuration au-dessus et au-dessous du solidus et le long des cordons de soudure, tendance intervenant au cours du soudage des alliages d'aluminium.

УМЕНЬШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ДОБАВОК СКЛОННОСТИ К ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЮ ПРИ СВАРКЕ ОТДЕЛЬНЫХ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ

Э. БУРАИ

РЕЗЮМЕ

Автором были проведены исследования кольцевой отливки, зернистой структуры, прочности и зажимной сварки алюминиевых сплавов. Им разработан метод для сокращения трещинообразования и состав сварочного прутка, служащего для уменьшения трещинообразования при сварке алюминиевых сплавов торговых марок, с учетом требований прочности. Решение данного вопроса дает сплав, отвечающий требованиям свариваемости. В ходе исследований был получен сплав $Al-Mg-Zn-Ti$, который нечувствителен к трещинам, достигает прочности конструкционной стали, а прочность сварочного соединения после вылеживания достигает 90–100% прочности основного материала. Автор дает теоретическое объяснение влияния отдельных добавок на снижение склонности к трещинообразованию под солидусом, над солидусом и вдоль шва при сварке алюминиевых сплавов.

EIGENSCHWINGUNGEN DER SCHRÄGSEILBRÜCKEN

B. GOSCHY

TIEFBAUPLANUNGS-UNTERNEHMEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 2. Dezember 1959]

1. Einleitung

Außer weitgespannten Straßenbrücken können auch kleinere Rohr- und Fußgängerbrücken wirtschaftlich und ästhetisch aus Schrägseilkonstruktionen in Harfenform (Abb. 1/a) oder in Bündelform (Abb. 1/b) ausgebildet werden. Da unsere technischen Büros neuerdings immer häufiger Harfen- und Bündelbrücken entwerfen, ist es notwendig, die Dynamik dieser neuartigen Brückenkonstruktionen eingehend zu untersuchen und ein vereinfachtes Rechenverfahren zur Bestimmung deren Eigenfrequenzen zu entwickeln.

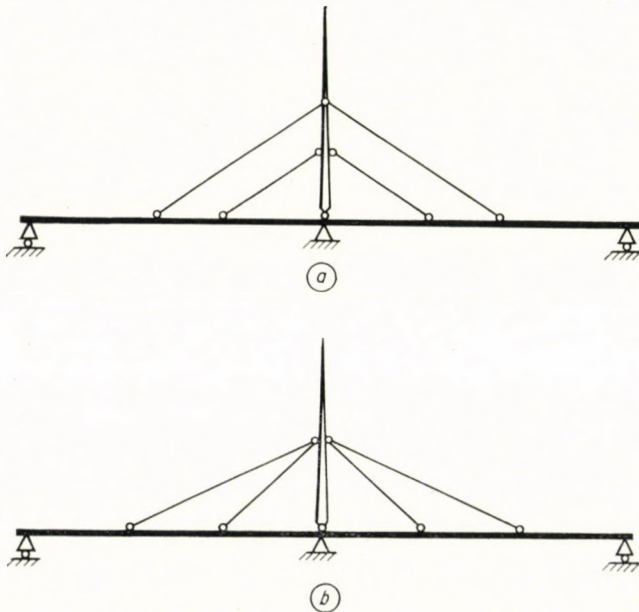


Abb. 1. Schrägseilbrücken-Systeme
a) Harfenbrücke, b) Bündelbrücke

Obwohl die Schwingungsprobleme der echten Hängebrücken (Ketten- und Kabelbrücken) in der Fachliteratur hinreichend betrachtet sind, sind unsere Kenntnisse über das dynamische Verhalten der unechten, harfenförmigen Hängebrücken lückenhaft.

In dieser Arbeit veröffentlichen wir eine Näherungsmethode zur praktischen Berechnung der Eigenfrequenzen von Harfenbrücken, die den aerodynamischen Untersuchungen und der Beurteilung des dynamischen Beiwertes dieser Konstruktionen zugrunde liegen.

Bei der Ermittlung der Eigenfrequenzen von Brücken kann man wegen der verwickelten Einflüsse auf übertriebene Genauigkeit verzichten.

Theoretisch kann die Schrägseilbrücke als ein Stabsystem mit verteilten Massen und dementsprechend mit unendlich vielen Freiheitsgraden betrachtet werden. Infolgedessen hat das System unendlich viele Eigenfrequenzen. Unsere Aufgabe ist die Bestimmung der Grundschwingung, das heißt der Eigenschwingung mit der niedrigsten Frequenz.

Wie bei Hängebrücken im allgemeinen, werden wir auch die Harfenbrücken auf Biege- und Torsionsschwingungen untersuchen. Die Berechnung von Eigenschwingungen gehört zu den Eigenwertproblemen der Mathematik: die Eigenfrequenzen sind Eigenwerte, die Schwingungslinien Eigenfunktionen.

Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen greifen wir zur Energiemethode, die mit weniger Rechenarbeit verbunden ist. Das Wesen der Energiemethode liegt darin, daß sich die kinetische Energie im Laufe der Schwingung in Verformungsarbeit umwandelt.

Auf Grund des Prinzips der Energieerhaltung wird die Summe der kinetischen und potentiellen Energien oder die Gesamtenergie eines konservativen Schwingers immer konstant bleiben, das heißt:

$$W + U = E = \text{const.}, \quad (1)$$

wo W die kinetische, U die potentielle und E die gesamte Energie bezeichnet.

Da bei der freien, ungedämpften Schwingung die maximale kinetische Energie dann zustande kommt, wenn die potentielle Energie Null ist und umgekehrt, werden — nach der Erkenntnis von Rayleigh — die Maximalbeträge der Energien einander gleich:

$$W_{\max} = U_{\max} = E. \quad (2)$$

Das Grundprinzip der Energiemethode ist durch die Gl. (2) gegeben, die eigentlich einen Variationsatz ausdrückt, aus dem man mehrere Näherungslösungen zur Bestimmung der Eigenschwingungen ableiten kann. Eine der bekanntesten dieser Näherungslösungen ist das Ritzsche Verfahren. Der theoretische Grund des Ritzschen Verfahrens liegt in der Bestimmung der

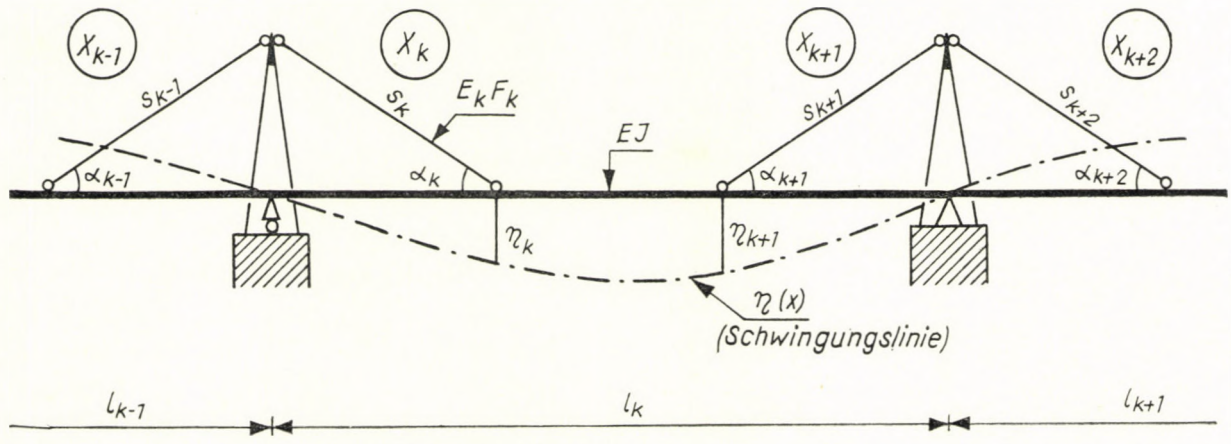


Abb. 2. Grundsystem einer Schrägseilbrücke mit durchlaufendem Versteifungsträger und unbewegbaren (fest eingespannten) Pylonen

Eigenfunktion (Schwingungslinie), die das kinetische Potential (Φ) eines schwingenden Systems

$$\Phi = U_{\max} - \omega^2 W_{\max} \quad (3)$$

zu einem Minimum werden läßt, d. h.

$$\vartheta\Phi = \vartheta(U_{\max} - \omega^2 W_{\max}) = 0, \quad (4)$$

wo ω die Kreisfrequenz der Schwingung bedeutet. Durch Gl. (4) haben wir ausgedrückt, daß der schwingende Körper von allen möglichen Schwingungsverformungen diejenige auswählt, zu der die geringste Energiemenge nötig ist.

Da wir zur Berechnung der Biege- und Torsionsschwingungen der Schrägseilbrücken die Ritzsche Näherungsmethode verwenden, bringen wir dementsprechend auch die Rechenergebnisse in die dazu geeignete Form.

Im Rahmen dieses Aufsatzes machen wir ein Berechnungsverfahren bekannt, das sowohl bei starr eingespannten wie auch bei beweglichen, pendelartigen Pylonen mit Vorteil verwendbar ist.

2. Biege (vertikale) -Schwingungen

Die Energieausdrücke der Harfenbrücken kann man wie folgt zusammenstellen. Die kinetische Energie der schwingenden Teilmasse des Stabsystems kann durch

$$dW = dm \frac{V^2}{2} \quad (5)$$

ausgedrückt werden, wo:

$$dm \left[\frac{t \text{ sec}^2}{m^2} \right] \quad \text{die Masse des Stabelementes,}$$

$$V \left[\frac{m}{\text{sec}} \right] \quad \text{die Geschwindigkeit bezeichnet.}$$

Vorausgesetzt, daß eine Brücke ein konservatives schwingendes Stabsystem bildet, wird der Schwingungsvorgang als harmonisch betrachtet. Mit dem Ansatz

$$\eta = \eta(x) \sin \omega_v T \quad (6)$$

ist der Ausschlag einer ungedämpften harmonischen Schwingung als Funktion des zeitlichen Maximums der Amplitude $\eta(x)$ an der Stelle x , der vertikalen

Kreisfrequenz ω_v und der Dauer einer vollen Schwingung T ausgedrückt. Da in der Gl. (6) $\eta(x)$ nur von x abhängt, kann der Wert der Geschwindigkeit aus

$$V = \dot{\eta} = \omega_v \eta(x) \cos \omega_v T \quad (7)$$

berechnet werden. Den Maximalwert der Geschwindigkeit bekommt man mit

$$\cos \omega_v T = 1 ,$$

und die zu diesem Wert entsprechende elementare kinetische Energie kann durch

$$dW^\eta = \frac{1}{2} dm \omega_v^2 \eta^2(x) \quad (8)$$

angegeben werden.

Die kinetische Energie ist bei starr eingespannten Pylonenstielen aus zwei Anteilen zusammensetzen:

$$dW^\eta = dW_1^\eta + dW_2^\eta . \quad (9)$$

Darin sind:

dW_1^η der kinetische Energieanteil des Versteifungsträgers,
 dW_2^η der kinetische Energieanteil der Schrägseile (Kabel).

Das erste Glied kann in folgender Form ausgedrückt werden :

$$dW_1^\eta = \frac{1}{2} dm \omega_v^2 \eta^2(x) = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \omega_v^2 \eta^2(x) dx \quad (10)$$

wo:

p [t/m] die gleichmäßig verteilte Last des Versteifungsträgers ist; bei unbelasteter Brücke das Eigengewicht, bei belasteter Brücke die Summe aus Eigengewicht und verteilter Nutzlast, und $g = 9,81$ [m/sec²] die Schwerebeschleunigung ist.

Das zweite Glied hat mit den Bezeichnungen der Abbildung 3 die Form

$$dW_2^\eta = \frac{1}{2} dm_K \omega_v^2 \eta^2(s) = \frac{1}{2} \frac{P_K}{g} \omega_v^2 \frac{\eta_k^2}{s_k^2} s^2 ds , \quad (11)$$

wo:

p_K [t/m] das Gewicht des Kabels,
 s_k [m] die Länge des Kabels,
 η_k [m] der zeitlich-maximale Schwingungsaussschlag des Versteifungsträgers an der Stelle der Kabelverankerung ist.

Die kinetische Energie der Brücke wird durch Integration über die Gesamtlänge (L) des Versteifungsträgers und durch Summierung über die Anzahl (m) der im Versteifungsträger verankerten Kabel nach der Formel:

$$\begin{aligned} W^\eta &= \frac{1}{2} \omega_v^2 \left(\frac{P}{g} \int_L \eta^2(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{P_K}{g} \frac{\eta_k^2}{s_k^2} \int_0^{s_k} s^2 ds \right) = \\ &= \frac{1}{2} \omega_v^2 \left(\frac{P}{g} \int_L \eta^2(x) dx + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m \frac{P_K}{g} \eta_k^2 s_k \right) = \omega_v^2 \bar{W}^\eta \end{aligned} \quad (12)$$

berechnet.

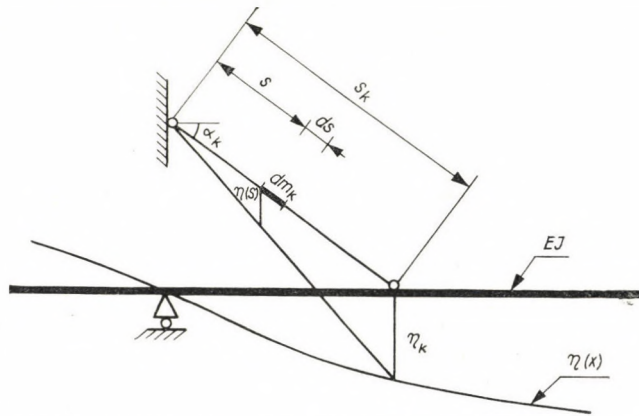


Abb. 3. Kinetische Energie des Kabels aus der Durchbiegung des Versteifungsträgers

Der Energieanteil der Kabel wird nur bei den Brücken mit leichtem Versteifungsträger (Fußgängerbrücken, Rohrbrücken, usw.) nach der Gl. (12) bestimmt; bei großen Brücken wird das Gewicht der Kabel auf die ganze Länge des Versteifungsträgers gleichmäßig verteilt.

Die potentielle Energie der Schrägseilbrücke kann aus

$$U^\eta = \frac{1}{2} \int_L P \eta(x) dx \quad (13)$$

berechnet werden und ist gleich der Formänderungsarbeit (A) des Tragwerkes:

$$U^\eta = A = A_1 + A_2 + A_3. \quad (14)$$

Die Formänderungsarbeit besteht aus drei Anteilen:

A_1 die Arbeit des Versteifungsträgers,

A_2 die Arbeit der Kabel,

A_3 die Arbeit der Kabelkräfte aus den Formänderungen II. Ordnung.

Da die Formänderungen der einzelnen Brückenelemente gleichzeitig mit der Schwingung des Versteifungsträgers zustande kommen, können die Arbeitsgleichungen als Funktion der Schwingungsamplitude $\eta(x)$ des Versteifungsträgers ausgedrückt werden. Mit der — aus der Festigkeitslehre — bekannten Differentialgleichung

$$M = -EJ\eta''(x) \quad (15)$$

wird der Ausdruck der Biegearbeit des Versteifungsträgers

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2 dx}{EJ} = \frac{1}{2} \int_L EJ \eta''^2(x) dx \quad (16)$$

wo EJ die Biegesteifigkeit des Versteifungsträgers bezeichnet.

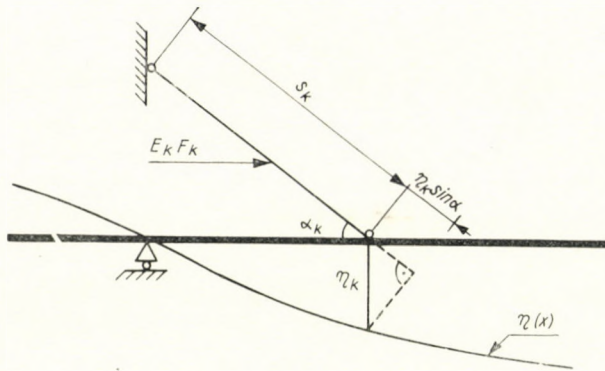


Abb. 4. Innere Arbeit des Kabels aus der Durchbiegung (η_k) des Versteifungsträgers

Die Kabel folgen den vertikalen Schwingungen des Versteifungsträgers. Infolge der periodischen Verlängerung und Verkürzung der Kabel nehmen die Kabelkräfte periodisch ab und zu. Der zusätzliche Anteil der Kabelkraft erreicht seinen zeitlichen Maximalwert (\bar{X}_k) bei der Schwingungsamplitude $\eta(x)$ und die durch diese Zusatzkräfte geleistete innere Arbeit wird

$$A_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\bar{X}_k^2 s_k}{E_k F_k}, \quad (17)$$

worin

E_k [kg/cm²] den Elastizitätsmodul des Kabels,

F_k [cm²] die Querschnittsfläche des Kabels,

m die Anzahl der Kabel

bedeuten.

Die zu dem zeitlich maximalen Ausschlag (η_k) gehörende Dehnung des Kabels — abgesehen von der Bewegung des Pylons — (Abb. 4) kann mit

$$\Delta s_k = \eta_k \sin \alpha_k \quad (18)$$

ausgedrückt werden, ferner wegen

$$\Delta s_k = \frac{\bar{X}_k s_k}{E_k F_k} \quad (19)$$

erhält man den Wert der Kabelkraft des Kabels k

$$\bar{X}_k = \eta_k \sin \alpha_k \frac{E_k F_k}{s_k}, \quad (20)$$

wo α_k den Anschlußwinkel zwischen Kabel und Versteifungsträger bedeutet. Schließlich wird die Arbeit der inneren Kräfte aus der Gleichung

$$A_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{E_k F_k \eta_k^2 \sin^2 \alpha_k}{s_k} \quad (21)$$

berechnet.

Infolge der Schwingungen des Stabwerkes kommen Formänderungen II. Ordnung zustande, welche die Kabelkräfte periodisch ändern. Nach den Bezeichnungen der Abb. 5 kann die Zu- und Abnahme der vertikalen Komponente der Kabelkraft in der Form

$$X_{kV} = X_k \sin(\alpha_k + da) - X_k \sin \alpha_k \quad (22)$$

angeschrieben werden. Da im Falle $da \rightarrow 0$

$$\cos da = 1 \quad \text{und} \quad \sin da = da$$

wird, kann der Wert der gesuchten Kraft nach

$$X_{kV} = X_k \cos \alpha_k da \quad (22a)$$

ausgedrückt werden.

Die Winkeländerung des Kabels wird

$$da = \frac{\eta \cos \alpha_k}{s_k} \quad (23)$$

und die zusätzliche Kabelkraft kann aus der Gleichung

$$X_{kV} = X_k \frac{\cos^2 \alpha_k}{s_k} \eta \quad (24)$$

bestimmt werden, wo X_k die Kabelkraft aus Eigengewicht oder aus Eigengewicht und Nutzlast bedeutet.

Die Arbeit der inneren Kräfte hat den Ausdruck

$$A_3 = \sum_{k=1}^m \int_0^{\eta_k} X_{kV} d\eta = \sum_{k=1}^m \int_0^{\eta_k} X_k \frac{\cos^2 \alpha_k}{s_k} \eta d\eta, \quad (25)$$

und nach der Integration bekommen wir folgendes Ergebnis:

$$A_3 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m X_k \frac{\cos^2 \alpha_k}{s_k} \eta_k^2. \quad (25a)$$

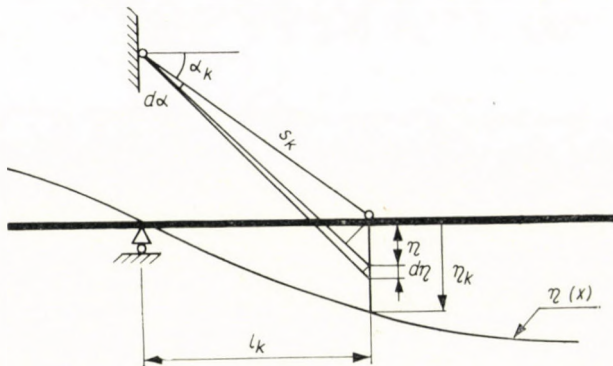


Abb. 5. Potentielle Energie des Kabels aus der Verformungen II. Ordnung

Durch Gleichsetzen der zeitlichen Maxima der Energien (Gl. 2) bestimmen wir die Eigenfrequenz der vertikalen Biegeschwingungen, im Falle einer Grundschwingung, nach dem Rayleighschen Quotienten, d. h.

$$\omega_v^2 = \frac{U\eta}{W\eta}, \quad (26)$$

und die Schwingungszahl pro Sekunde ergibt sich zu

$$n_{v0} = \frac{\omega_v}{2\pi}. \quad (27)$$

3. Torsionsschwingungen

Die Hängebrücken sind insbesondere empfindlich gegen Torsionsschwingungen. Der Einsturz einiger großen Hängebrücken (z. B. Tacoma—Narrow usw.) wurde durch die dynamische Instabilität der Torsionsschwingungen

verursacht. in folgedessen ist es notwendig, außer der Berechnung der Biegeschwingungen die Untersuchung mit der Analyse der Torsionsschwingungen zu ergänzen.

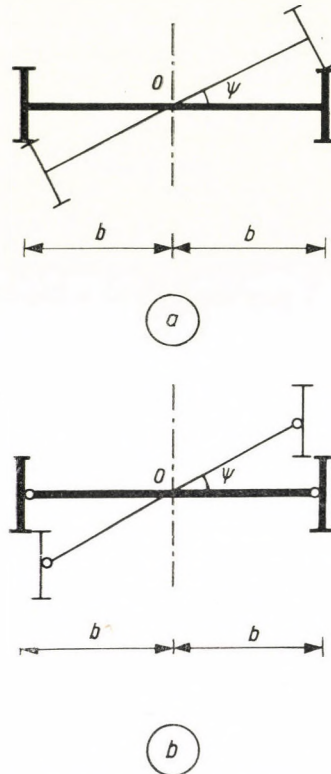


Abb. 6. Drillung des Versteifungsträgers :
 a) Verdrehung des Querschnittes, wenn die Querträger und Versteifungsträger starr verbunden sind ;
 b) Verdrehung des Querschnittes, wenn die Querträger und Versteifungsträger gelenkig verbunden sind

Zwischen den Torsions- und Biegeverformungen besteht nach Abb. 6 die folgende Beziehung:

$$\eta(x) = b\psi(x), \quad (28)$$

wo:

$2b$ der Abstand der Versteifungsträger,

$\psi(x)$ der zeitlich-maximale Drehwinkel des Brückenquerschnittes mit der Ordinate x bedeutet.

Da bei freier Torsion (Saint-Venantsche Torsion) die Verwindung (Drehwinkel je Längeneinheit) des Stabwerkes

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{M_T}{GJ_T} \quad (29)$$

ist, können die Energieausdrücke in folgender Weise umgeformt werden [4]:

$$W^v = \frac{1}{2} \omega_v^2 \left(\frac{P}{g} \int_L \frac{J_P}{F} \psi^2(x) dx + \frac{1}{3} b^2 \sum_{k=1}^m \frac{P_K}{g} \psi_k^2 s_k \right) = \omega_v^2 \bar{W}^v \quad (31)$$

und

$$U^v = \frac{1}{2} \int_L G J_T \psi'^2(x) dx + \frac{1}{2} b^2 \sum_{k=1}^m E_k F_k \psi_k^2 \sin^2 \alpha_k / s_k + \\ + \frac{1}{2} b^2 \sum_{k=1}^m X_k \frac{\cos^2 \alpha_k}{s_k} \psi_k^2, \quad (30)$$

worin:

J_P das polare Trägheitsmoment des Versteifungsträgers und der Fahrbahn bezogen auf den Schwenkpunkt des Brückenquerschnittes 0 (Abb. 6),

F die Querschnittsfläche der Brücke (Versteifungsträger und Fahrbahn),

$G = \frac{\bar{m}E}{2(\bar{m} + 1)}$ den Schubmodul,

$G J_T = \frac{1}{3} \beta G \sum v_j^3 h_j$ die Torsionssteifigkeit des offenen Querschnittes (der Saint-Venantsche Proportionalitätsfaktor),

β den Formfaktor,

\bar{m} die Poissonsche Zahl bedeutet.

Wenn wir nun auch den Wölbwiderstand in Betracht nehmen wollen, rechnen wir mit der bekannten Formel des Torsionsmoments

$$M_T = G J_T \psi'(x) - E C_T \psi'''(x), \quad (32)$$

ferner folgt aus der Gl. (32)

$$U_1^v = \frac{1}{2} G J_T \int_L \psi'^2(x) dx - \frac{1}{2} E C_T \int_L \psi'''(x) \psi'(x) dx \quad (33)$$

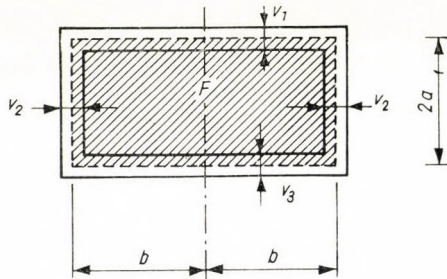
für die potentielle Energie des Versteifungsträgers, mit C_T als Wölbwiderstand, die eine Querschnittskonstante ist.

Die potentielle Energie des Versteifungsträgers mit geschlossener Querschnittsform (Hohlkasten, Rohr usw.) kann aus der Gleichung

$$U_1^v = \frac{1}{2} G \oint \frac{4F^2}{v} \int_L \psi'^2(x) dx - \frac{1}{2} E C_{T1} \int_L \psi'''(x) \psi'(x) dx \quad (33a)$$

berechnet werden, mit der Bezeichnung:

- F die mit der Achse der einzelnen Teilelemente begränzte Querschnittsfläche des Hohlkastens (Abb. 7),
 $\oint \frac{du}{v}$ die Umlaufintegrale des Hohlkastenquerschnittes mit der Wandstärke v ,
 C_{T1} die Wölbwiderstand des Querschnittes,
 $GJ_T = G \frac{4F^2}{\oint \frac{du}{v}}$ die Torsionssteifigkeit des geschlossenen Hohlkastens.



$$\oint \frac{du}{v} = \frac{4a}{v_2} + \frac{2b}{v_1} + \frac{2b}{v_3}$$

$$F = 2a \times 2b$$

Abb. 7. Querschnitt des geschlossenen Kastenträgers

Setzt man die Maximalbeträge der potentiellen Energie und der kinetischen Energie einander gleich

$$U_{\max}^{\psi} - W_{\max}^{\psi} = 0,$$

so erhält man die Frequenz ω_{ψ} und schließlich die Torsionsschwingungszahl aus

$$n_{0\psi} = \frac{\omega_{\psi}}{2\pi}. \quad (34)$$

Es ist zu bemerken, daß die Berechnung der Torsionsschwingungen wesentlich vereinfacht durchgeführt werden kann [4], wenn sich die Quertträger der Brücke gelenkig zu den Versteifungsträger schließen, wie es in der Abb. 6/b dargestellt ist. Da in diesem Falle die Formänderungsarbeit größer ist, werden auch die Eigenfrequenzen höher sein. Wegen der vorausgesetzten Verformung nach der Abb. 6/b, besteht zwischen den potentiellen Energien der Torsion und der Biegung die Beziehung

$$U^{\psi} = b^2 U^{\eta}, \quad (35)$$

und die kinetische Energie der Torsion kann aus

$$W^v = \frac{1}{2} \frac{P}{g} r^2 \omega_v^2 \int_L \psi^2(x) dx = \omega_v^2 W^v \quad (36)$$

bestimmt werden, mit

$$r = \sqrt{\frac{J_P}{F}}, \text{ der den polaren Trägheitshalbmesser bezeichnet.}$$

4. Einfluß der Pylonenverschiebung und der Durchbiegung des Versteifungsträgers auf die Energiebeträge

In diesem Abschnitt werden wir ein Näherungsverfahren für den Fall des beweglichen, pendelartig ausgebildeten Pylons vorführen.

Die Verbindung der Kabel und des Pylons der in Abbildung 8 dargestellten Harfenbrücke ist verschieden: das obere mit k bezeichnete Kabel ist fest (fester Sattel), das untere mit i bezeichnete Kabel ist beweglich — durch Vermittlung der Gleitlager (Sektorlagen) — mit dem Pylon verbunden.

Der Verankerungspunkt c des Kabels k verschiebt sich bei dem maximalen Ausschlag des Versteifungsträgers in den Punkt c' . Zu der Amplitude $\eta_k = \overline{cc'}$ gehört eine Längenänderung des Kabels, welche gleich

$$\eta_k \sin \alpha_k$$

ist. Aus den geometrischen Beziehungen können

$$\Delta s'_k = \Delta s''_k \frac{s'_k}{s''_k} \frac{\cos \beta_k}{\cos \alpha_k}, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \eta_k \sin \beta_k &= \Delta s''_k + \Delta h' \cos \beta_k = \Delta s''_k + \Delta s'_k \frac{\cos \beta_k}{\cos \alpha_k} = \\ &= \Delta s''_k \left(1 + \frac{s'_k}{s''_k} \frac{\cos^2 \beta_k}{\cos^2 \alpha_k} \right) = A_k \Delta s''_k \end{aligned} \quad (38)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta h' &= \frac{\Delta s'_k}{\cos \alpha_k} = \frac{s'_k}{s''_k} \frac{\cos \beta_k}{\cos^2 \alpha_k} \Delta s''_k = \\ &= \frac{1}{A_k} \frac{s'_k}{s''_k} \frac{\sin \beta_k \cos \beta_k}{\cos^2 \alpha_k} \eta_k = B_k \eta_k \end{aligned} \quad (39)$$

abgeleitet werden.

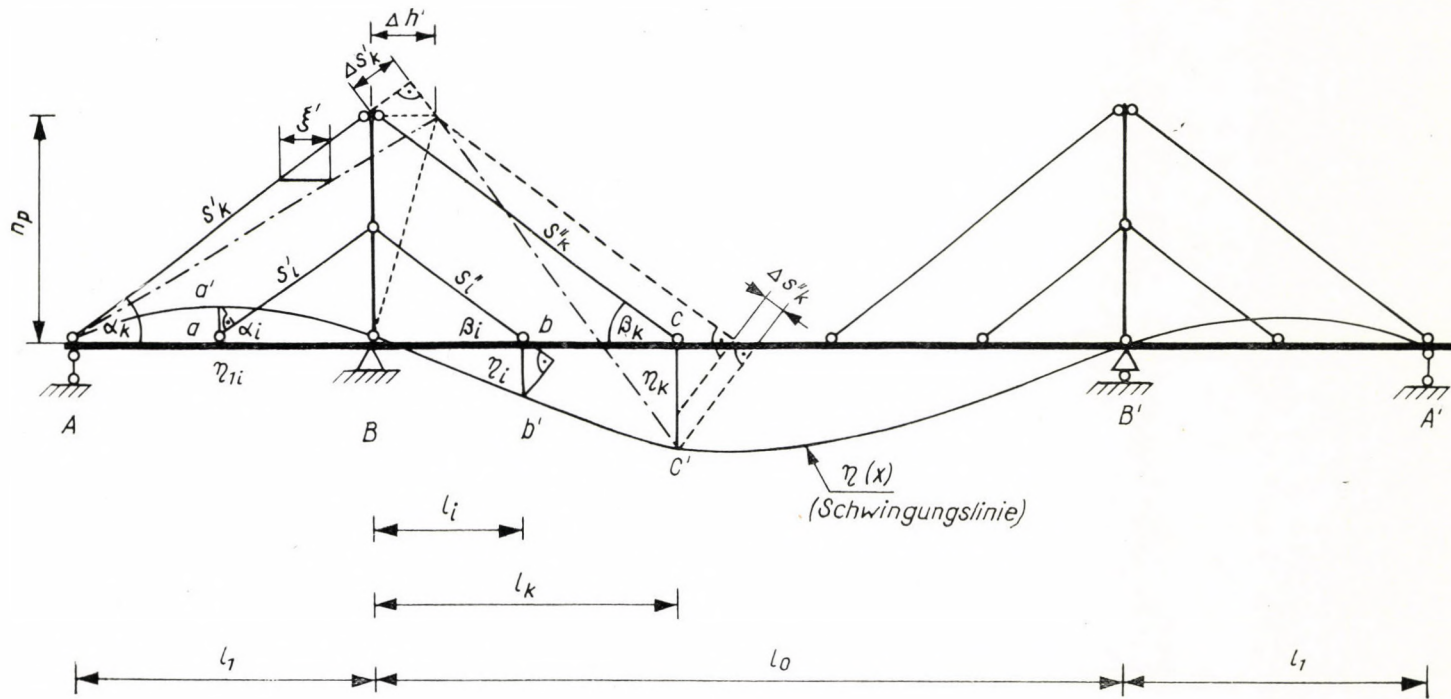


Abb. 8. Grundsystem einer Schrägseilbrücke mit durchlaufendem Versteifungsträger und bewegbaren (gelenking gelagerten) Pylonen

Aus der horizontalen Verschiebung (ξ) des Kabelpaares k erhält man für die elementare kinetische Kabelenergie

$$dW_2^{\eta'} = \frac{1}{2} dm_K (\eta^2 + \xi^2) \omega_v^2 ds. \quad (40)$$

Mit den Hilfswerten

$$\eta = \eta_k \frac{s}{s_k''}; \quad \xi' = \frac{\Delta h'}{s_k'} s; \quad \xi'' = \frac{\Delta h'}{s_k''} (s_k'' - s)$$

und

$$\xi^2 = \xi'^2 + \xi''^2$$

kann die Gl. (40) als

$$dW_2^{\eta'} = \frac{1}{2} dm_K \left[\frac{\eta_k^2}{s_k''^2} s^2 + \frac{B_k^2 \eta_k^2}{s_k''^2} (s_k'' - s)^2 + \frac{B_k^2 \eta_k^2}{s_k'^2} s^2 \right] \omega_v^2 ds \quad (41)$$

ausgedrückt werden. Die Integration der Gl. (41) führt zu dem gesuchten Ergebnis:

$$\overline{W}_2^{\eta'} = \frac{W_2^{\eta'}}{\omega_v^2} = \frac{1}{2} \frac{P_K}{g} \eta_k^2 \left[\frac{s_k''}{3} (1 + B_k^2) + \frac{s_k'}{3} B_k^2 \right], \quad (42)$$

und wenn die Anzahl der mit dem Pylon fest verbundenen Kabelpaare n ist, kann die gesamte kinetische Kabelenergie aus

$$\overline{W}_2^{\eta'} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{P_K}{g} \eta_k^2 \left[\frac{s_k''}{3} (1 + B_k^2) + \frac{s_k'}{3} B_k^2 \right] \quad (43)$$

berechnet werden.

Das mit i bezeichnete Kabel stützt sich — der Voraussetzung nach — ohne Gleitwiderstand auf das Gleitlager des Pylons. Infolgedessen werden die Kabelkräfte in den beiden Kabelteilen einander gleich. Die Endpunkte a und b des Kabels verschieben sich lotrecht in a' und b' . Der Einfluß der Verschiebungen wirkt auf die reduzierte kinetische Energie des Kabels i aus, dessen Ausdruck nun in der Form

$$\overline{W}_2^{\eta'} = \frac{W_2^{\eta'}}{\omega_v^2} = \frac{1}{2} \frac{P_i}{g} \left(\frac{\eta_i^2 s_i''}{3} + \frac{\eta_{i1}^2 s_i'}{3} \right) \quad (44)$$

angeschrieben werden kann.

Im Falle r gleitfähiggestützter Kabel wird die gesamte kinetische Kabelenergie aus

$$\overline{W}_2^{\eta'} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \frac{P_i}{g} \left(\frac{\eta_i^2 s_i''}{3} + \frac{\eta_{i1}^2 s_i'}{3} \right) \quad (45)$$

bestimmt.

Bei den gelenkig (pendelartig) gelagerten Pylonen werden auch die kinetischen Energien der Pylonen in Betracht genommen.

Die waagerechte Verschiebung des Pylonengipfels bei der Verankerungsstelle des Kabels k beträgt laut Gl. (39)

$$\Delta h' = B_k \eta_k.$$

Mit den Bezeichnungen h_P für die Länge, — dm_P für die Masse pro Einheitslänge, — p_P für das verteilte Gewicht des Pylons, kann — aus der Verschiebung ξ — die reduzierte kinetische Energie des Pylons durch

$$\overline{W}_3^{\eta'} = \frac{W_3^{\eta'}}{\omega_v^2} = \frac{1}{2} dm_P \int_0^{h_P} \xi^2 dh \quad (46)$$

ausgedrückt werden. Wenn man aus der Geometrie der Bewegung

$$\xi = \frac{\Delta h'}{h_P} h = B_k \eta_k \frac{h}{h_P} \quad (47)$$

anschreibt und in die Gl. (46) einsetzt, ergibt sich die ganze kinetische Energie der j Pylonen zu

$$\overline{W}_3^{\eta'} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j \frac{p_P}{g} B_k^2 \eta_k^2 \frac{h_P}{3}. \quad (48)$$

Die Bewegung des Pylons vermindert die Verformungsarbeit der Kabel. Die Arbeit des Kabelpaares k ist gegeben durch

$$A_{2K} = \frac{1}{2} \frac{\overline{X}_k''^2 s_k''}{E_k F_k} + \frac{1}{2} \frac{\overline{X}_k'^2 s_k'}{E_k F_k} = \frac{1}{2} A_k \frac{\overline{X}_k''^2 s_k''}{E_k F_k} \quad (49)$$

mit

$$A_k = 1 + \frac{s_k'}{s_k''} \frac{\cos^2 \beta_k}{\cos^2 \alpha_k}.$$

Wenn man in Betracht zieht, daß

$$\overline{X}_k'' = \eta_k \sin \beta_k \frac{E_k F_k}{A_k s_k''}, \quad (50)$$

wird die potentielle Energie der mit den Pylonen fest verbundenen Kabel

$$A_2' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{E_k F_k \eta_k^2 \sin^2 \beta_k}{A_k s_k''}. \quad (51)$$

Aus den Gleichungen (20) und (50) ist leicht zu ersehen, daß zwischen den Kabelkräften der starr eingespannten — und gelenking gelagerten Pylonen das Verhältnis

$$\bar{X}_k'' = \frac{\bar{X}_k}{A_k} \quad (52)$$

besteht, infolgedessen kann die potentielle Energie aus den Formänderungen II. Ordnung der n Kabelpaare aus

$$A_3' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n X_k'' \frac{\cos^2 \beta_k}{A_k} \frac{\eta_k^2}{s_k} \quad (53)$$

berechnet werden, wo X_k'' die statische Kabelkraft im Kabelast s_k'' bedeutet.

Die Längenänderung des mit i bezeichneten Kabels, das durch das Gleitlager reibungslos durchgeht, kann als Funktion des Ausschlages des Versteifungsträgers in der Form

$$\eta_i \sin \beta_i = (\Delta s_i' + \Delta s_i'') + \eta_{1i} \sin \alpha_i \quad (54)$$

angegeben werden. Da die Größe der Kabelverlängerung

$$\Delta s_i' + \Delta s_i'' = \frac{\bar{X}_i (s_i' + s_i'')}{E_i F_i} \quad (55)$$

ist, kann für die Verformungsarbeit der Kabel die Gleichung

$$A_2'' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \frac{E_i F_i (\eta_i \sin \beta_i - \eta_{1i} \sin \alpha_i)^2}{s_i' + s_i''} \quad (56)$$

abgeleitet werden.

Der Arbeitsbeitrag der Kabelkräfte II. Ordnung — wenn die lotrechte Schwingung des Verankerungspunktes in Betracht gezogen ist — kann aus dem Ausdruck

$$A_3'' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r X_i \frac{\cos^2 \beta_i}{s_i''} \left(\eta_i - \eta_{1i} \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i} \right)^2 \quad (57)$$

bestimmt werden.

Durch die Umänderung der Energieausdrücke nach den Überlegungen des Abschnittes 3, kann man auch die Torsionsfrequenzen berechnen.

Die Verwendung der Ritzschen Methode ermöglicht, daß mit symmetrischen und antisymmetrischen Schwingungsformen, d. h. mit einer Reihe von geraden und ungeraden Zahlen von Halbsinuswellen die wirkliche Schwingungslinie am besten angenähert wird.

Bei der Auswahl der Schwingungsformen von durchlaufenden Versteifungsträgern müssen wir darauf achten, daß die Bedingung der Kontinuität über dem Auflager erfüllt wird.

5. Der Einfluß der Horizontalkomponenten der Kabelkräfte auf die Eigenfrequenzen

Die in den Versteifungsträger verankerten Schrägseile übergeben demselben Normalkräfte.

Aus den statischen Lasten entstehende Horizontalkomponenten des Seilzuges können die Schwingungen der Brückenkonstruktion vermindern oder vergrößern je nach dem, ob der untersuchte Abschnitt des Versteifungsträgers auf Druck oder auf Zug beansprucht ist.

Berücksichtigt man, daß

n_0 die Schwingungszahl des Stabwerkes ohne Normalkraft,

X_{kH} die Horizontalkomponente der Seilkraft mit Vorzeichen (positiv beim Zug, negativ beim Druck),

X_{kr} die Knicklast des Versteifungsträgers

bedeuten, wird die Schwingungszahl des mit Normalkraft belasteten Stabwerkes bekanntlich aus der Gleichung

$$n = n_0 \sqrt{1 + \frac{\sum X_{kH}}{X_{kr}}} \quad (58)$$

berechnet.

Zur Bestimmung der Knicklast des Versteifungsträgers verwenden wir ebenfalls die Energiemethode. Die bei der elastischen Verformung des Systems — abgesehen von den Verformungen II. Ordnung — aufgespeicherte Energie (innere Arbeit) kann durch

$$A_i = \frac{1}{2} \int_L EJ \eta'^2(x) dx + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{E_k F_k \eta_k^2 \sin^2 \alpha_k}{s_k} \quad (59)$$

ausgedrückt werden. Die von den am Stab angreifenden Lasten geleistete Arbeit (äußere Arbeit) ist

$$A_a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m X_{kr} \Delta h_k \quad (60)$$

mit

$$\Delta h_k = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} \eta'^2(x) dx \quad (61)$$

als Unterschied zwischen Bogen- und Sehnellänge auf dem untersuchten Abschnitt (l_k) des Versteifungsträgers.

Zwischen den statischen Kabelkräften bestehen die Beziehungen

$$\frac{X_1}{D_1} = \frac{X_2}{D_2} = \dots = \frac{X_k}{D_k} = \dots = \frac{X_m}{D_m} = \frac{1}{D} = \text{const.}, \quad (62)$$

wo:

D die Nennerdeterminante und

D_k die Zählerdeterminante des Elastizitätsgleichungssystems bedeuten.

Die Summe der Kabelkräfte kann auf Grund der Gl. (62) mit X_k ausgedrückt werden:

$$\sum_{k=1}^m X_k = X_k \left(1 + \frac{D_1}{D_k} + \frac{D_2}{D_k} + \dots + \frac{D_m}{D_k} \right). \quad (63)$$

Da der Wert der Normalkraft aus der Kabelkraft X_k

$$X_{kH} = X_k \cos \alpha_k \quad (64)$$

ist, folgt die Summe aller Normalkräfte aus

$$\sum_{k=1}^m X_{kH} = X_k \left(\cos \alpha_k + \frac{D_1}{D_k} \cos \alpha_1 + \frac{D_2}{D_k} \cos \alpha_2 + \dots + \frac{D_m}{D_k} \cos \alpha_m \right). \quad (65)$$

Durch Gleichsetzen der äußeren und inneren Arbeiten erhält man:

$$\begin{aligned} X_{1kr} \int_0^{l_1} \eta'^2(x) dx + X_{2kr} \int_0^{l_2} \eta'^2(x) dx + \dots + X_{mkr} \int_0^m \eta'^2(x) dx = \\ = \int_L EJ \eta''^2(x) dx + \sum_{k=1}^m E_k F_k \frac{\eta_k^2 \sin^2 \alpha_k}{s_k}. \end{aligned} \quad (66)$$

Da das Verhältnis zwischen den statischen Kabelkräften gemäß Gl. (65) bekannt ist, kann die Knicklast des Versteifungsträgers aus der Gleichung

$$X_{kr} = \frac{\int_L EJ \eta''^2(x) dx + \sum_{k=1}^m E_k F_k \frac{\eta_k^2 \sin^2 \alpha_k}{s_k}}{\cos \alpha_k \int_0^{l_k} \eta'^2(x) dx + \frac{D_1}{D_k} \cos \alpha_1 \int_0^{l_1} \eta'^2(x) dx + \dots + \frac{D_m}{D_k} \cos \alpha_m \int_0^{l_m} \eta'^2(x) dx} \quad (67)$$

bestimmt werden.

Die Gl. (67) stellt eine Spezialform des Rayleigh-Quotienten dar. Zur Verbesserung der Ergebnisse mußte man auch hier die Ritzsche Methode verwenden.

SCHRIFTTUM

1. PALOTÁS, L.: Mérnöki kézikönyv. 3. kötet (Handbuch für Bauingenieure. Band 3). Műszaki könyvkiadó. 1959.
2. PETŰR, A.: Repülőgép szilárdságtan (Festigkeitslehre der Flugzeuge). Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
3. GOLDENBLAT, I. I. und SISOW, A. M.: Die Berechnung der Baukonstruktionen auf Stabilität und Schwingungen. VEB Verlag Technik, Berlin 1955. Moskau 1952.
4. BLEICH, F.: Dinamic Instability of Truss-Stiffened Suspension Bridges under Wind Action. Proceedings of the A. S. C. I. Okt. 1948. S. 1269.
5. WALKING, F.: Praktische Berechnung der Eigenfrequenzen von Hängebrücken. Der Bauingenieur, 1950. Heft 6. S. 208.
6. DISCHINGER, F.: Torsionsteifigkeit der Hängebrücken. Der Bauingenieur, Mai—Juli 1950.
7. STEINMANN, D. B.: Le problème aérodynamique des ponts suspendus et sa solution. L'ossature métallique, Okt. 1954. S. 491.
8. SCHLEICHER, F.: Taschenbuch für Bauingenieure. Band I. Springer, Berlin 1955.
9. KORENEW, B. G.: Dynamik von Baukonstruktionen. VEB Verlag Technik, Berlin 1953. Moskau 1951.
10. HAMBURGER, L., BUZDUGAN, GH: Teoria Vibrațiilor (Theorie der Schwingungen) Ed. Technica, Bukarest 1958.

ZUSAMMENFASSUNG

In dem vorliegenden Aufsatz wurde die Berechnung der Eigenfrequenzen von Schrägseilbrücken dargelegt. Das entwickelte Rechnungsverfahren kann bei allen Arten von Schrägseilhängebrücken sowie Harfen- und Bündelbrücken benützt werden.

Im Rahmen der Arbeit werden, wie bei Hängebrücken üblich ist, die Biege- und Torsionsschwingungen des Stabwerkes untersucht. Die Berechnungsmethode umfaßt bautechnisch verschieden ausgebildete Schrägseilbrücken; man hat den Einfluß des starr eingespannten und pendelartig gelagerten Pylons sowie auch die Querschnittsform des Versteifungsträgers (offen oder geschlossen) auf die Schwingungszahl in Betracht gezogen.

Um bei der Bestimmung der Eigenfrequenzen ein genaueres Ergebnis zu haben, wurde auch die Normalkraft der in den Versteifungsträger verankerten Seile in Rechnung gesetzt. Grundlage der Berechnung ist die bekannte Ritzsche Näherungsmethode.

Obwohl das veröffentlichte Verfahren einen erheblichen Aufwand an Rechenarbeit mit sich bringt, ist es wichtig, die Eigenschwingungen der Schrägseilbrücken zu kennen, um die ungewünschten und auf die Stabilität der Konstruktion gefährlichen Frequenzen zu verhindern.

FREE FREQUENCY OF BRIDGES SUSPENDED ON SKEW CABLES

B. GOSCHY

SUMMARY

The former contribution deals with a calculation procedure of the free frequency of bridges suspended on skew cables. The method developed hereby is a general one, in consequence, it can be used for all kinds of bridges suspending on skew cables, i. e. for bridges having a harp- (harp-bridges) or a beam-shape (beam-bridges).

In this paper we give the detailed analysis of free vertical and torsional vibrations. The article gives researches on the influence of different structural arrangements on natural frequency, the support of towers (restrained or hinged) and the opened or closed (box, tube) cross-sectional shape of the stiffening trusses.

To obtain more exact results we have taken into account the axial components of the force of the skew suspension cables.

The calculation procedure is based on the Ritz's approximation method.

In spite of extended computations it is necessary to know the laws of the free vibrations of suspension bridges to eliminate, or to limit, the not desired and incidental frequency from the standpoint of the stability of the construction.

FRÉQUENCES PROPRES DES PONTS SUSPENDUS PAR DES CÂBLES OBLIQUES

B. GOSCHY

RÉSUMÉ

L'auteur présente un procédé de calcul des fréquences propres des ponts suspendus par des câbles obliques. La méthode développée est une méthode générale, et par conséquent applicable à tous les genres de ponts suspendus par des câbles obliques, c'est-à-dire de ponts en forme de harpe (pont-harpe) ou de faisceau (pont-faisceau).

L'auteur donne une analyse détaillée des vibrations propres de la flexion et de la torsion, et traite l'influence des différentes dispositions constructives sur le nombre des autovibrations, du mode d'appui des piliers (encastrés ou articulés), et de la forme ouverte ou fermée (caisson, tuyau) de la poutre de raidissage.

Pour obtenir des résultats plus exacts, on a tenu compte des composants axiaux des efforts des câbles obliques.

Le procédé de calcul est basé sur la méthode approchée de Ritz. Malgré le travail étendu de calcul, il est nécessaire de connaître les lois de la vibration des ponts suspendus pour éviter ou limiter les fréquences indésirables et dangereuses du point de vue de la stabilité de la construction.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ АРФООБРАЗНЫХ МОСТОВ

Б. ГОШИ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается частота собственных колебаний арфообразных мостов различной конструкции. При изложении дана оценка характерных свойств арфообразных мостов и учтены специальные воздействия, вытекающие из первых.

Определение частоты собственных колебаний представляет собою основу динамического и аэродинамического анализа стабильности арфообразных мостов.

Несмотря на то, что вычисления требуют много времени, в случае крупнопролетных мостов, далее легких трубных и пешеходных кабельных мостов анализ необходимо выполнить в обязательном порядке.

THE INFLUENCE OF HEAT TREATMENT ON THE STRAIN-AGEING OF ALUMINIUM-KILLED MILD STEEL

P. SZÉKI

CAND. OF ENG. SC.

GENERAL ENGINEERING DESIGN INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received January 18, 1960]

In this review, the author has already published a paper on the influence of heat treatment on the strain-ageing of aluminium-killed mild steel.* At that time, we have stated that quick cooling after austenizing and subsequent tempering at a temperature below 700° C reduces the tendency for strain-ageing of the steel awaiting cold working. By varying the tempering temperature, the tendency for strain-ageing of one and the same steel destined for strain-ageing can be improved or deteriorated.

Since that time, we have carried out more experiments on these lines, which provide a base for an informative mathematical relation between the acid-soluble Al-content of the steel, the tempering temperature and the transition temperature τ corresponding to 5 mkg/cm² impact resistance.

The new experiments were carried out with steels of the following composition:

	C	Mn	Si	P	S	Cu	Cr	acid-soluble Al
1.	0.08	0.28	0.05	0.026	0.025	0.20	0.02	0.049
2.	0.07	0.25	0.04	0.024	0.030	0.18	0.05	0.042
3.	0.08	0.26	0.02	0.019	0.025	0.20	0.03	0.008

The steel specimens were heat treated as follows:

Austenizing for 15 min at 930° C

Cooling in 8% NaOH solution

Tempering

- a) at 680° C for 3 hours, after that cooling in air,
- b) at 650° C for 3 hours, after that cooling in air,
- c) at 600° C for 3 hours, after that cooling in air.

* The Influence of Heat Treatment on the Strain-Ageing of Aluminium-Killed Steel. Acta Technica, 1958, Tom. XX. Fasc. 1-2.

After 10% stretching, notch-impact test bars were machined from the steel specimens which had been prepared in this way. A 3 mm deep notch was made by drilling a hole and sawing, and the bottom was rounded off with a radius of 1 mm. The finished notch-impact specimens were artificially aged at 250° C for 1 hour.

The aged notch-impact specimens were broken at various temperatures and from the results, temperature-impact energy curves were drawn, as shown on Figs. 1, 2 and 3.

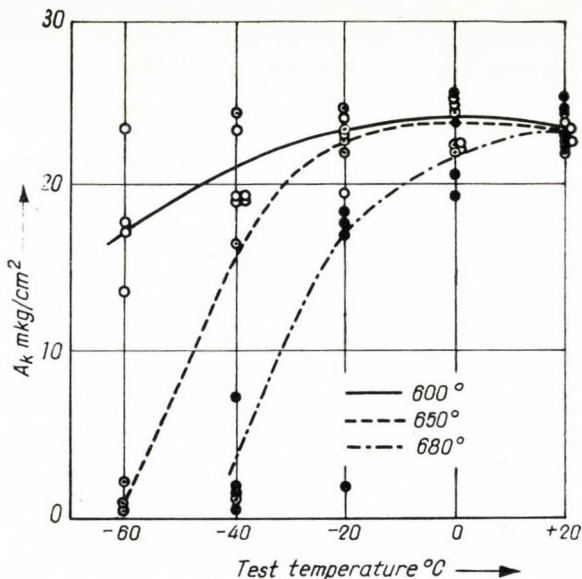


Fig. 1. Temperature-impact energy diagram of steel containing 0.049% Al in aged and in non-aged state, tempered at various temperatures

It appears from these figures that from amongst the three tempering temperatures used, the smallest one, i. e. 600° C, had the most favourable effect. The critical section of the temperature-impact energy curve is shifted in the direction of the large temperatures, if the tempering temperature is higher than this.

The transition temperatures corresponding to 5 mkg/cm² are resumed in the subsequent table, which has been completed by several results of our earlier experiments. With these, measurements were made only after tempering at 680° and at 650° C, therefore the data for 600° are lacking.

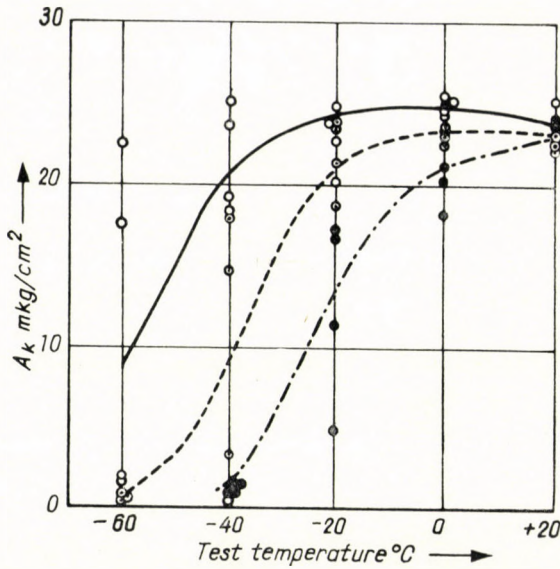


Fig. 2. Temperature-impact energy diagram of steel containing 0.042% Al in aged and non-aged state, tempered at various temperatures

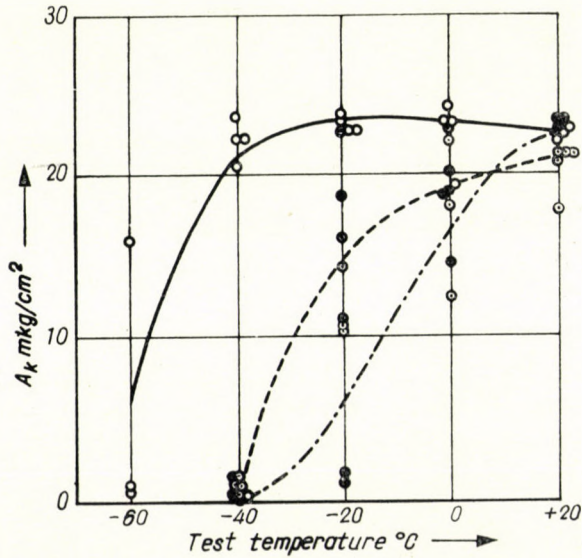


Fig. 3. Temperature-impact energy diagram of steel containing 0.008% Al in aged and non-aged state, tempered at various temperatures

Al-content %	Transition temperature after tempering at					
	680° C		650° C		600° C	
	°C	°K	°C	°K	°C	°K
1. 0.049	-35	238	-52	221	-78	195
2. 0.042	-30	243	-46	227	-66	207
3. 0.008	-22	251	-35	238	-55	218
4. 0.038	-40	233	-50	223		
5. 0.038	-35	238	-48	225		
6. 0.022	-32	241	-42	231		
7. 0.010	-27	246	-39	224		
8. traces	-12	261	-28	245		

The data contained in the Table are shown in the diagram of Fig. 4. The points representing the experimental results are widely scattered, which fact can be ascribed to the sources of errors hidden in the method of Al-analysis and to the dispersion due to the nature of impact testing. But by interpolation, hyperbolae can be traced from the experimental points. The hyperbolae are well approximated by the following formula:

$$\tau = \frac{4 \left(\frac{T}{100} \right) - 14.9}{1.52 (100 \cdot x)^2 + 1} + \frac{24 \left(\frac{T}{100} \right) + 1116}{15.23 - \left(\frac{T}{100} \right)}$$

where

- τ = the transition temperature corresponding to 5 mkg/cm², in °K,
- x = the acid-soluble Al-content in %,
- T = the tempering temperature in °K.

The equation furnishes information about the transition temperature of any artificially aged steel (heated for 1 hour at 250° C after 10% working), if the acid-soluble Al-content of the steel and the tempering temperature are known.

The curvature of the hyperbolae is related to the Al-content of the steel, thus the slope of the curves signifies that the ageing action of the N gradually ceases. The mutual distances of the hyperbolae point to the ageing effect of the C . In connection with this we may observe interesting effects on the hyperbolae of Fig. 4. If we compare the ratio of the difference between the transition temperatures for the same Al-content of two hyperbolae, to the ratio of the difference between the maximum quantities of C soluble in the ferrite at the

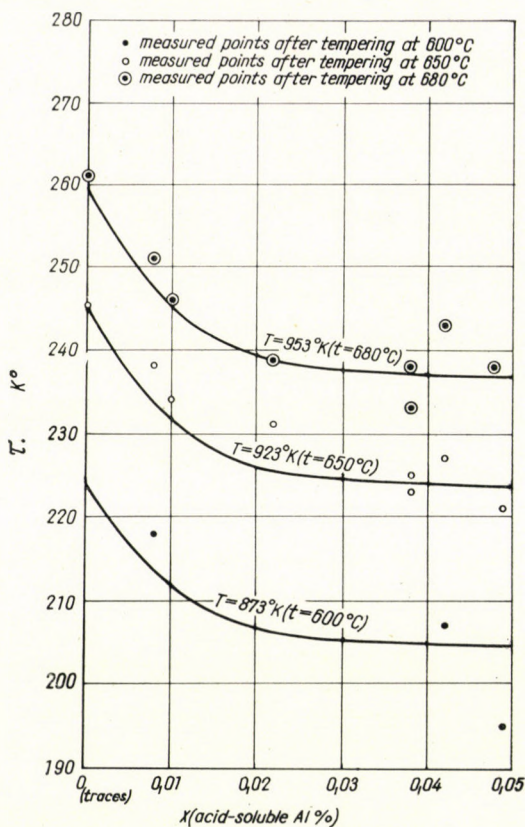


Fig. 4. Informative relation between the Al-content of the steel, the transition temperature corresponding to 5 mkg/cm² and the tempering temperature

tempering temperature (z), we obtain the following values:

$$\frac{z_{680} - z_{650}}{z_{650} - z_{600}} = \frac{15.71 \cdot 10^{-3} - 13.32 \cdot 10^{-3}}{13.32 \cdot 10^{-3} - 98.57 \cdot 10^{-3}} = \frac{2.39}{3.463} = 0.69$$

$$\frac{\tau_{680} - \tau_{650}}{\tau_{650} - \tau_{600}} (\text{Al} = \text{traces}) = \frac{259.1526 - 244.975}{244.975 - 233.99} = 0.6756$$

$$(\text{Al} = 0.01\%) = \frac{245.1589 - 231.693}{231.693 - 211.914} = 0.6808$$

$$(\text{Al} = 0.02\%) = \frac{239.2323 - 226.06517}{226.06517 - 206.7977} = 0.6833$$

$$(\text{Al} = 0.03\%) = \frac{237.53434 - 224.455}{224.455 - 205.3337} = 0.6840$$

$$(\text{Al} = 0.04\%) = \frac{236.86966 - 223.82466}{223.82466 - 204.76066} = 0.6842$$

$$(\text{Al} = 0.05\%) = \frac{236.548 - 223.5196}{223.5196 - 204.4833} = 0.6844$$

The maximum quantity of C soluble in the ferrite of the steel (z) can be calculated by the following formula [1]:

$$\log n C_c = 0.936 - \frac{9700}{RT}.$$

Accordingly,

- at 680° C, maximum $1.571 \cdot 10^{-2}$ % of C ,
- at 650° C, maximum $1.332 \cdot 10^{-2}$ % of C ,
- at 600° C, maximum $9.857 \cdot 10^{-3}$ % of C ,

is dissolved in the ferrite.

From these simple calculations it appears that the larger is the acid-soluble Al-content of the steel, the better approaches the ratio of the differences between the transition temperatures τ for two tempering temperatures the ratio of the differences of the C quantities dissolved at the same tempering temperatures. The more the Al-content of the steel is reduced, the more diverge the corresponding ratios.

We may conclude from these observations that with the described heat treatment, the ageing action of the N gradually ceases with increasing Al-content of the steel. In the steel containing 0.03% or more Al, the N practically does not cause ageing and one must consider only the ageing action of the C soluble at the tempering temperature. If the steel contains less than 0.03% Al, to the ageing action of the C dissolved at tempering, the action of a certain quantity of N is added, the more so the smaller is the Al-content of the steel.

Naturally, these conclusions are valid only for mild steels produced in Siemens-Martin furnaces, the N content of which is generally about 0.005%.

REFERENCE

1. COTTRELL, A. H.—LEAK, G. M.: Effect of Quench Ageing on Strain Ageing in Iron. Journal of the Iron and Steel Inst., 1952. Nov., p. 301.

SUMMARY

From the experimental results, we have deduced a relation between the tempering temperature of aluminium-killed steel, quenched from 930° C and aged after working, its soluble Al-content and the transition temperature τ corresponding to 5 mkg/cm²:

$$\tau = \frac{4 \left(\frac{T}{100} \right) - 14.9}{1.52 (100 x)^2 + 1} + \frac{24 \left(\frac{T}{100} \right) + 1116}{15.23 - \left(\frac{T}{100} \right)}.$$

From the calculations the conclusion can be drawn that the work-ageing of steel containing at least more than 0.03% Al is due chiefly to the C soluble at the tempering temperature. The strain-ageing of steel containing less acid-soluble Al than that can be ascribed to the N which has remained in solution and has not been precipitated into AlN.

DER EINFLUSS DER WÄRMEBEHANDLUNG AUF DIE RECKALTERUNG VON MIT ALUMINIUM BERUHIGTEM NIEDRIGGEKOHLTEM STAHL

P. SZÉKI

ZUSAMMENFASSUNG

Aus den Versuchsergebnissen wurde ein Zusammenhang abgeleitet zwischen der Anlaßtemperatur von mit Al beruhigtem, von 930° C abgeschrecktem und nach Verformung gealtertem niedriggekohltem Stahl, seinem säurelöslichen Al-Gehalt und der Übergangstemperatur τ welche 5 mkg/cm² entspricht:

$$\tau = \frac{4 \left(\frac{T}{100} \right) - 14,9}{1,52 (100 x)^2 + 1} + \frac{24 \left(\frac{T}{100} \right) + 1116}{15,23 - \left(\frac{T}{100} \right)}$$

Aus den Berechnungen kann gefolgert werden, daß die Reckalterung von mindestens mehr als 0,03% Al enthaltendem Stahl hauptsächlich von dem bei der Anlaßtemperatur gelöstem Kohlenstoff hervorgerufen wird. Die Reckalterung von Stahl mit niedrigerem säurelöslichem Al-Gehalt kann außer dem gelösten Kohlenstoff dem in Lösung verbliebenen und nicht in Form von AlN ausgeschiedenen Stickstoff zugeschrieben werden.

INFLUENCE DU TRAITEMENT THERMIQUE SUR LE VIEILLISSEMENT APRES L'ÉCROUISSAGE DE L'ACIER DOUX CALMÉ A L'ALUMINIUM

P. SZÉKI

RÉSUMÉ

À partir des résultats des essais, l'auteur déduit une relation entre la température de revenu de l'acier doux calmé à l'Al, trempé à 930° C et vieilli après écrouissage, d'une part, et d'autre part la teneur en Al soluble à l'acide et la température de transition τ correspondant à 5 mkg/cm²:

$$\tau = \frac{4 \left(\frac{T}{100} \right) - 14,9}{1,52 (100 x)^2 + 1} + \frac{24 \left(\frac{T}{100} \right) + 1116}{15,23 - \left(\frac{T}{100} \right)}$$

On peut déduire des calculs, que le vieillissement à l'écrouissage des aciers contenant plus de 0,03% d'Al est dû surtout au C soluble à la température de revenu. Le vieillissement à l'écrouissage d'un acier contenant moins d'Al soluble à l'acide peut être attribué, en plus du C dissolu, au N non précipité sous forme de AlN et resté en solution.

ВЛИЯНИЕ ТЕРМООБРАБОТКИ НА СТАРЕНИЕ ОБРАБОТКИ НИЗКОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ, УСПОКОЕННОЙ АЛЮМИНИЕМ

П. СЕКИ

РЕЗЮМЕ

На основе опытных данных установлена зависимость между температурой отпуска низкоуглеродистой стали, — быстро охлажденной с температуры 930°C, подвергнутой старению после обработки и успокоенной алюминием, — с процентом содержания в стали алюминия, растворяющегося в кислоте, и переходной температурой τ , соответствующей 5 $\kappa\Gamma/\text{см}^2$, а именно:

$$\tau = \frac{4 \left(\frac{T}{100} \right) - 14,9}{1,52 (100 x)^2 + 1} + \frac{24 \left(\frac{T}{100} \right) + 1116}{15,23 - \left(\frac{T}{100} \right)} .$$

На основе вычислений можно сделать вывод, что старение обработки стали, содержащей алюминий хотя бы более 0,03%, вызывается в основном только С, имеющимся при температуре отпуска. Старение обработки стали, содержащем растворяющийся в кислоте алюминий в количестве менее указанного количества, может быть отнесено кроме растворенного С за счет азота AlN, оставшегося в растворе и неprecипитировавшегося.

ÜBER DIE REKRISTALLISATION DER LEGIERUNG Cu-Ni 80/20

M. KÁLDOR

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

und

M. SZIKSZAI

MITTEILUNG NR. 16 DER ARBEITSGEMEINSCHAFT FÜR METALLURGIE
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 22. Februar 1960]

Die Untersuchungen über die Rekristallisation gehen nach Ausweis der Literatur auf etwa 50 Jahre zurück. Auf Grund der in der Literatur vorliegenden Aufsätze können die diesbezüglichen Versuche im allgemeinen in zwei größere Gruppen eingeteilt werden.

Das Hauptziel der in die erste Gruppe einzureihenden Versuche besteht darin, die Korngröße oder die Härte der Textur nach der der Kaltverformung verschiedenen Maße folgenden Wärmebehandlung bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen. Diese älteren, im Wesen technologischen Versuche zielten gar nicht darauf ab, im Laufe der Bestimmung der Korngröße die in der Textur unter der Wirkung der späteren Verformung entstandenen Kristallite von denen zu trennen, die sich bereits im Laufe der früheren Verformungen ausgebildet hatten.

Bei einer Verformung in größerem Ausmaße von etwa 70—80% bedarf es in der Tat keiner solchen Unterscheidung. Bei einer solchen Verformung werden nämlich die Kristallite bereits in dem Maße gedehnt und zerstört, daß im mikroskopischen Bild des aus dem Werkstück hergestellten Schliffes die Kristallgrenzen gar nicht mehr zu erkennen sind. Bei der Untersuchung nach der Wärmebehandlung können — in Abhängigkeit von der Temperatur und Zeitdauer der Wärmebehandlung — im mikroskopischen Bild entweder keine Änderungen beobachtet werden — wenn sich nämlich die Kristallisation noch in der Inkubationsperiode befindet — oder aber — wenn die Rekristallisation bereits eingesetzt hat — sind in den einzelnen Teilen des Bildes wachsende, sich in Entwicklung befindende Kristalle zu erkennen. Schließlich können nach Abschluß der Rekristallisation im vollen Gesichtsfeld voneinander scharf abgegrenzte Kristalle beobachtet werden.

Durch eine Verformung geringeren Ausmaßes werden die Kristallite gedehnt, doch werden dabei die Kristallgrenzen nicht verschwommen. In diesem Falle läßt sich die Ausgangstextur von der im Laufe der Rekristallisation entstandenen Textur lediglich auf Grund der Gedehntheit der Kristallite unterscheiden, wobei diese Unterscheidung bei den Kristallen eines nur in geringem

Maße von etwa 5–10% verformten Werkstückes — wenn die ursprüngliche Textur feinkörnig war — auf große Schwierigkeiten stößt, wenn nicht gar unmöglich wird. Es kann allerdings nicht mit Sicherheit festgestellt werden, ob das Werkstück überhaupt einem Rekristallisationsprozeß unterlag.

Dementsprechend liegen in der Literatur hie und da Rekristallisationsdiagramme vor, in denen sich bei der Abszisse, die einer Verformung von 5–10% entspricht, eine Mulde in die Länge zieht, da die durchschnittliche Korngröße im Vergleich zu der unverformten, infolge des Erscheinens der neuen Kristallite, nach einer verhältnismäßig kurzen Wärmebehandlung etwas verringert wird.

Diese Diagramme können im Wesen nicht mehr als Rekristallisationsdiagramme betrachtet werden, obwohl sie die durchschnittliche Korngröße, die sich nach der Verformung und der anschließenden Wärmebehandlung ausbildet, angeben.

In die zweite Gruppe der Versuche — und die neueren Untersuchungen weisen wohl diesen Charakter auf — gehören jene Versuche, die den Verlauf, die Geschwindigkeit der Rekristallisation verfolgen und die die Rekristallisation kennzeichnenden Maßzahlen zu bestimmen suchen. Versuche mit der gleichen Zielsetzung wurden neuerlich auch im Laboratorium des Lehrstuhles für Metallographie durchgeführt.

Beschreibung der Versuche

Als Untersuchungsmaterial wurde die Legierung Cu-Ni 80/20 gewählt, einmal da sie eine Legierung darstellt, die ohne Umwandlung abgekühlt werden und so die Wirkung der Verformung von jeder anderen Erscheinung auseinandergehalten werden kann, zum anderen, weil die Rekristallisationsmeßzahlen dieser Legierung in der Literatur noch unbekannt sind.

Um einen homogenen Ausgangsstoff vor uns zu haben, wurde die Legierung vorangehend verformt und anschließend weichgeglüht. Die vorangehende Verformung erfolgte durch Walzen, wobei die Dicke von 10 mm auf 4 mm herabgesetzt wurde. Die anschließende Weichglühung erfolgte bei einer Temperatur von 950° C und dauerte 4 Stunden lang. Nach dieser Verformung und Wärmebehandlung bildet sich eine recht grobe Korngröße von etwa $10^4 \mu^2$ aus, die benötigt wird, um die rekristallisierte Textur von der ursprünglichen — sogar bei einer geringfügigen Verformung — unterscheiden zu können.

Das derart erhaltene Material wurde für die Zwecke der eigentlichen Versuche auf eine Dicke von 80, 60, 40 bzw. 20% der ursprünglichen Dicke gewalzt, worauf ein Weichglühen bei verschiedenen Temperaturen und mit verschiedenen Glühdauern folgte. Die dem Weichglühen unterzogenen Prüf-

körper hatten eine Grundfläche von 1×2 cm und variierende Dicken von 0,8 mm bis zu 4 mm.

Im Interesse eines guten Temperatenausgleiches wurde das Weichglühen in wärmebeständigen Stahlblöcken ausgeführt. Bei der Feststellung der Glühdauer muß die Zeit der Aufheizung prinzipiell in Abzug gebracht werden. Die Bestimmung der Aufheizdauer erfolgte mit Hilfe eines Thermoelementes, das in einer Bohrung des Prüfkörpers angebracht wurde. Der Wert der Aufheizdauer ist jedoch äußerst unsicher, da sich die Wärmeübertragung immer mehr verlangsamt, sobald die Temperatur des Prüfkörpers die des Blockes annähert. Hierzu kommt noch der Umstand, daß bei höheren Temperaturen, bei etwa $700-800^{\circ}\text{C}$, die Rekristallisation — insbesondere nach einer stärkeren Verformung — praktisch bereits im Laufe der Aufheizung vor sich geht. Auf diesem Grunde wurden die Versuche auf niedrigere Temperaturen beschränkt, andererseits bemühten wir uns, zur Auswertung nach Möglichkeit diejenigen Meßwerte zu verwenden, bei denen der Zeitbedarf des Aufheizens im Vergleich zu dem des Prozesses vernachlässigt werden konnte. Wo es unvermeidlich war, wurde die Aufheizdauer durch mehrere Messungen bestimmt, und als Endpunkt des Aufheizens der Moment gewählt, wo sich die Differenz zwischen den Temperaturen des Prüfkörpers und des Blockes auf 20°C verminderte. Diese Zeitdauer ändert sich bei den Prüfkörpern mit den angeführten Dimensionen in Abhängigkeit von der Temperatur, wobei als Maximalwert eine Zeitdauer von etwa 70 Sekunden erhalten wurde.

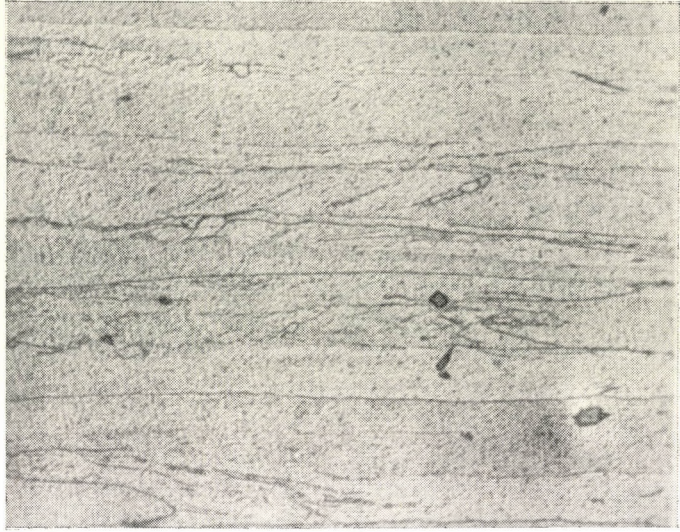
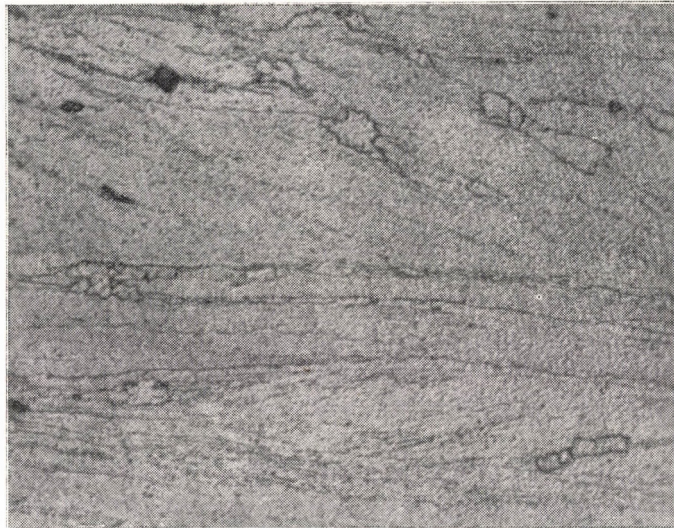
Von den derart verformten und wärmebehandelten Prüfstücken wurden sodann Schiffe verfertigt. In diesen Schliffen konnte es deutlich unterschieden werden, inwieweit die Teilprozesse der Rekristallisation:

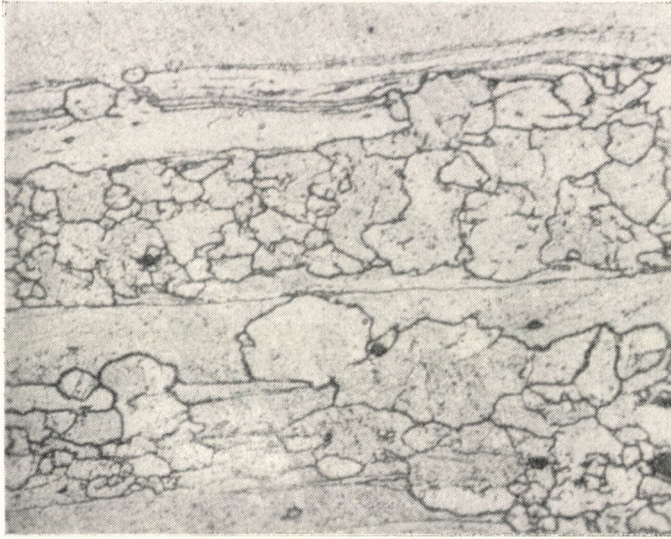
- die Keimbildung,
- das Wachstum der Keime, ferner
- das Anwachsen der Korngröße

im jeweiligen Prüfkörper nach der Verformung, bei der gegebenen Temperatur, während der verflossenen Zeit vorgeschritten sind.

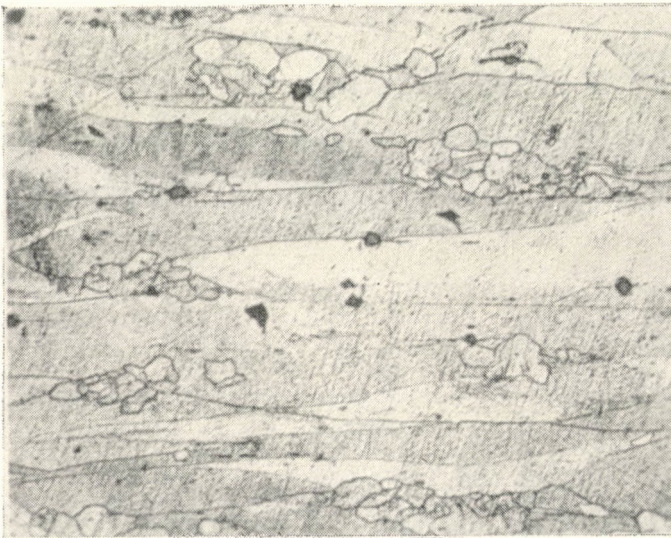
Das Wesentlichste ist dabei, die Phase der Keimbildung von beiden übrigen Phasen auseinanderhalten zu können.

Um diese Teilprozesse auseinanderhalten zu können, wurde zunächst je eine Serie der verschiedenartig verformten Prüfkörper bei Temperaturen von $400, 500, 600$ und 700°C geglüht, wobei die Anlaßdauern bei allen Temperaturen zu 10, 100 und 1000 Minuten gewählt wurden. Diese Versuchsserie wurde lediglich der Orientierung halber durchgeführt, wobei es geklärt wurde, ob der Rekristallisationsprozeß bei 600°C bereits so schnell verläuft, daß die Aufheizdauer ohne beträchtlichen Fehler nicht mehr vernachlässigt werden kann. Die weiteren Versuche wurden aus diesem Grunde bei nur 550°C und bei noch niedrigeren Temperaturen vorgenommen. Die bei den niedrigeren Temperaturen durchgeführte Versuchsserie ergab auf Grund der

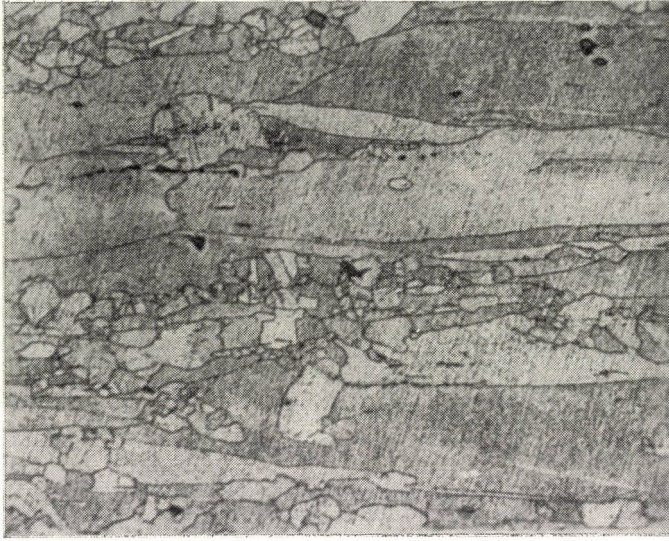
*1/a**1/b*



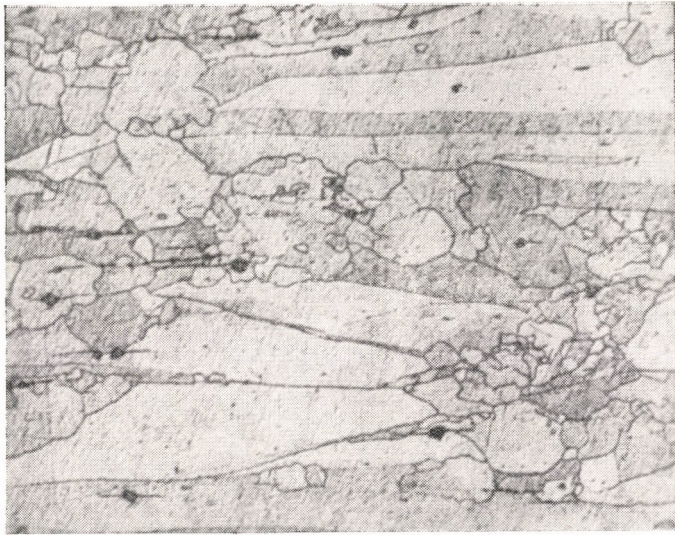
1/c



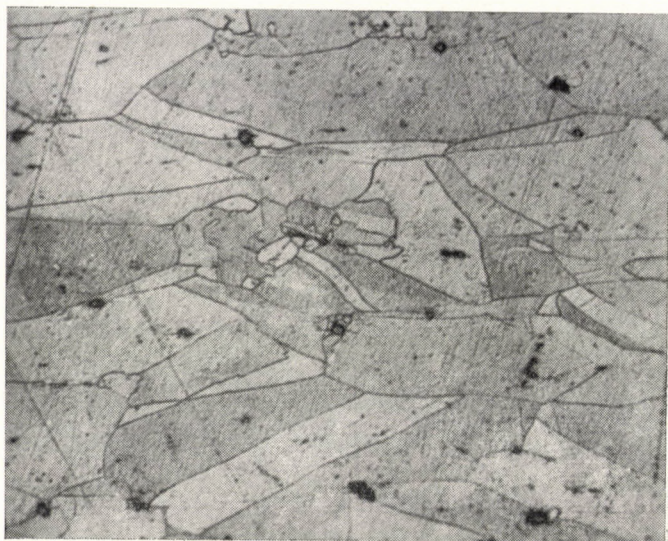
1/d



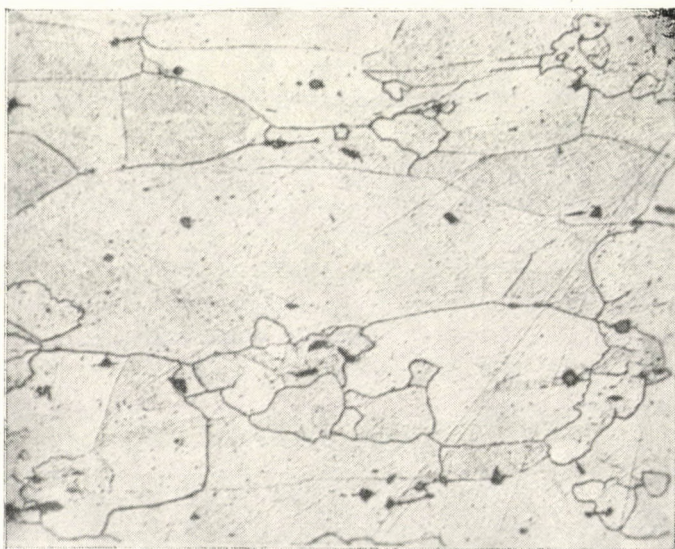
1/e



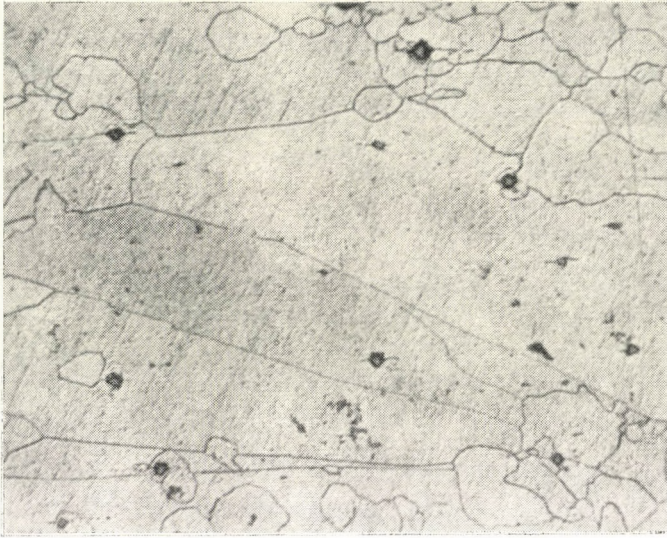
1/f



1/g



1/h



1/i

Abb. 1. Rekristallisation der Legierung Cu-Ni 80/20

a, b, c: Glühung während 2, 3, 5 Minuten bei 500° C nach einer 80%igen Verformung (Vergrößerung: 400×) — *d, e, f:* Glühung während 60, 90, 110 Stunden bei 400° C nach einer 60%igen Verformung (Vergrößerung: 200×) — *g, h, i:* Glühung während 20, 45, 55 Minuten bei 500° C nach einer 40%igen Verformung (Vergrößerung: 200×)

Schliffe eine Orientierung darüber, ob die Keimbildung oder das Wachstum der Keime während der fraglichen Zeit eingesetzt oder sich gar beendet hatte.

Nach dieser Orientierung mußten bereits die Wärmebehandlungen bei den den einzelnen Verformungen entsprechenden Prüfkörpern gesondert, bei bestimmten Temperaturen vorgenommen werden, um die Zeitdauern der Keimbildungs- und Keimwachstumsperioden zu bestimmen.

Unter diesen Versuchen wurden zahlreiche Wärmebehandlungen durchgeführt, die anderthalb bis zwei Wochen andauerten.

Abb. 1 führt einige charakteristische Bilder über die einzelnen Phasen der Rekristallisation vor.

Versuchsergebnisse

a) Rekristallisation bei konstanter Temperatur, in Abhängigkeit von der Zeit

Die Menge der rekristallisierten Textur nach den einzelnen Verformungen wird bei konstanter Temperatur und in Abhängigkeit von der Zeit in Abb. 2 dargestellt.

Nach Ausweis der Kurven weist der Vorgang vollkommen den Charakter auf, wie er bei jeder mit Keimbildung und Diffusion vor sich gehenden

Phasenumwandlung zu erkennen ist, das heißt, daß einige Zeit lang unter dem Mikroskop keine Änderung in der Textur zu beobachten ist — in dieser Phase ist die Rekristallisation offenbar noch submikroskopisch — nach Verlauf der Inkubationszeit wird jedoch die Menge der rekristallisierten Stoffes durch die für die Phasenumwandlungen charakteristischen S-förmigen Kurven angezeigt.

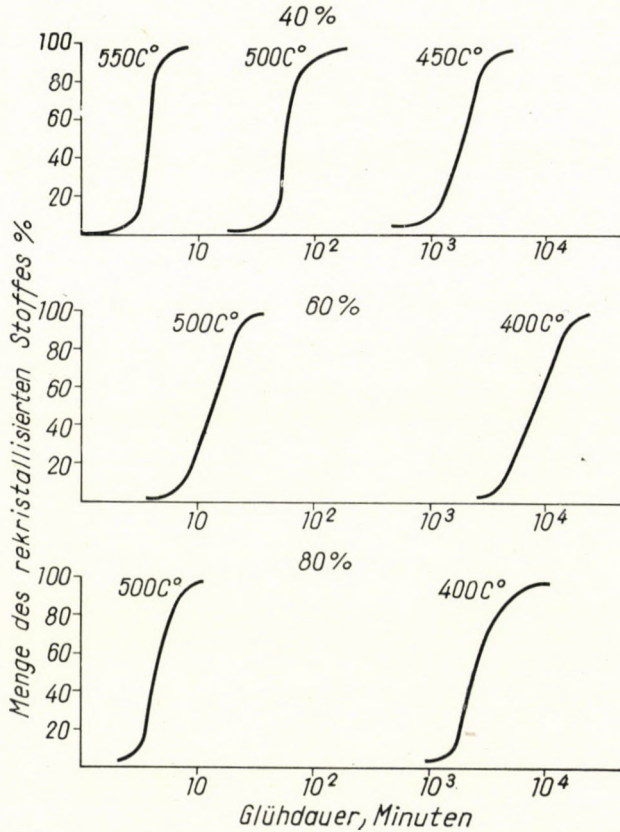


Abb. 2. Menge des rekristallisierten Stoffes in Abhängigkeit von der Zeit, bei konstanter Temperatur, nach Verformung verschiedenen Maßes

Zahlreiche Forscher bemühten sich, den Charakter dieser Kurven in mathematischer Form wiederzugeben. Einer der ältesten Ausdrücke dürfte wohl die von COOK und RICHARDS angegebene Formel sein, nach welcher die Geschwindigkeit der Umwandlung der Menge der noch unumgewandelten Phase proportional ist, das heißt,

$$\frac{dx}{dt} = K(1 - x),$$

wo x die Menge der bereits umgewandelten Phase,
 t die Zeit und

K eine Konstante darstellt, die die übrigen Faktoren zusammenfaßt.

Nach AUSTIN und RICKETT wird der Umwandlungsprozeß in Abhängigkeit von der Zeit durch die folgende Formel beschrieben:

$$x = K(1 - x) \cdot t^p,$$

wo p eine Konstante darstellt.

Von MISHIMA, HASIGUTI und KIMURA wurde zur Beschreibung des Umwandlungsprozesses die folgende Formel vorgeschlagen:

$$\frac{dx}{dt} = Kx^{\frac{p-1}{p}} \cdot (1-x)^{\frac{r-1}{p}}$$

Die meisten Forscher rechnen aber mit einer vereinfachten Abwandlung der Austin und Rickettschen Relation, nach welcher

$$\frac{dx}{dt} K(1-x) \cdot t^{p-1} \text{ ist.}$$

Durch die entsprechende Wahl der Konstanten wird durch die meisten dieser Formeln der Umwandlungsprozeß in Abhängigkeit von der Zeit mit einem größeren oder kleineren Fehler zweifelsohne beschrieben. Diese Formeln besagen jedoch um nichts mehr als die Diagramme, auf Grund deren die Konstanten bestimmt wurden, stellen sie doch keine Stoffkonstanten dar, sondern hängen sowohl von der Temperatur wie auch dem Ausmaß der Verformung ab.

b) Die Rekristallisation als Funktion der Temperatur

Bei den mit Keimbildung und Diffusion vor sich gehenden Vorgängen drückt nach BECKER die Beziehung zwischen Zeit und Temperatur folgende Gleichung aus:

$$\ln t = K + \frac{Q}{RT} + \frac{A}{RT},$$

wo t die Zeit

T die Temperatur,

Q die Aktivierungsenergie der Diffusion (Autodiffusion),

A die Aktivierungsenergie der Keimbildung und

R die universale Gaskonstante bedeutet.

Die Wärmemenge Q stellt die Energie dar, die in der die Beziehung zwischen dem Diffusionskoeffizienten und der Temperatur ausdrückenden Formel:

$$D = D_0 e^{-\frac{Q}{RT}}$$

vorkommt. Bei gleicher Temperatur ist demgemäß die Diffusion bei dem Metallpaar intensiver, bei welchem Q , die zur Aktivierung der Atome erforderliche Energie, geringer ist. Nach Ausweis der Messungen hängt der Wert von Q von der Temperatur nicht ab. Gleichzeitig weist die Formel darauf hin, daß — insofern die Umwandlung bei niedrigerer Temperatur auf dem Wege der Diffusion stattfindet — die Aktivierungsenergie dieser Diffusion verhältnismäßig groß ist.

Die Aktivierungsenergie A drückt in der obigen Gleichung die Intensität der Keimbildung aus. Der Wert von A steht mit dem Wert der Oberflächenspannung im Zusammenhang, und so steht zu seiner Bestimmung zur Zeit keine experimentelle Methode zur Verfügung. Was aber den Charakter von A betrifft, so liegt es auf der Hand, daß bei niedrigen Temperaturen — wo das Maß der Unterkühlung bereits groß ist — der Wert der Energie A gering ist, wobei er aber mit der Temperatur steil ansteigt.

Durch Differentiation der obigen Gleichung erhalten wir:

$$\frac{\partial \ln t}{\partial \left(\frac{1}{T}\right)} = \frac{Q}{R} + \frac{A}{R} + \frac{1}{RT} \cdot \frac{\partial A}{\partial \left(\frac{1}{T}\right)}$$

Das dritte Glied der rechten Seite der Gleichung stellt einen negativen Wert dar, während das erste und zweite Glied stets positiv ist.

Bei niedrigeren Temperaturen ist der Wert von A vernachlässigbar gering, und so kann der Wert des vorigen Differentialquotienten als praktisch konstant betrachtet werden:

$$\frac{d \ln t}{d \left(\frac{1}{T}\right)} = \frac{Q}{R}$$

Bei höheren Temperaturen kann jedoch der Wert von A im Vergleich zu dem von Q nicht mehr vernachlässigt werden, und so nimmt der Wert des Differentialquotienten

$$\frac{d \ln t}{d \left(\frac{1}{T}\right)}$$

mit Erhöhung der Temperatur ab, um über Null allmählich in die negative Werte überzugehen.

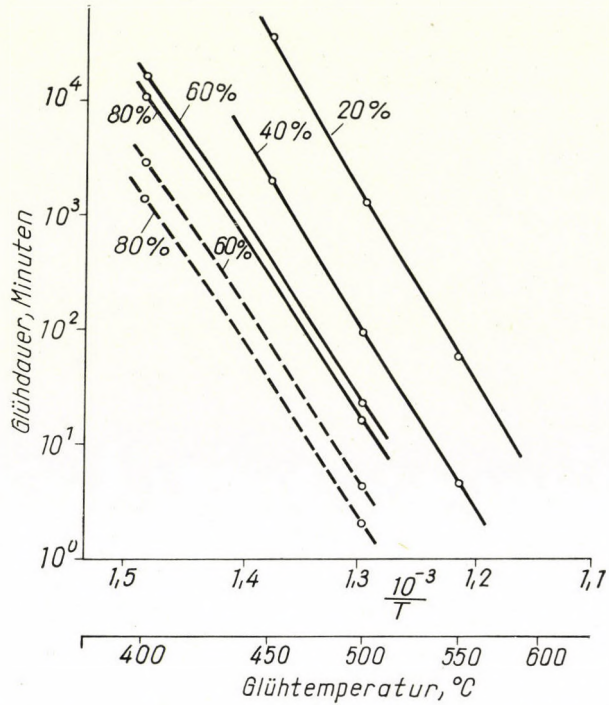


Abb. 3. Wirkung der Glüh Temperatur auf den Zeitbedarf der Rekristallisation bei Verformungen verschiedenen Maßes

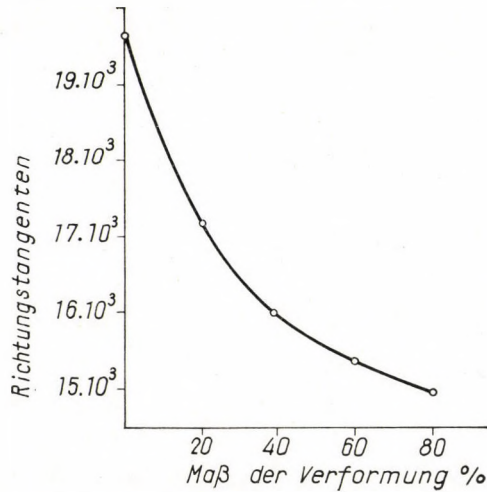


Abb. 4. Extrapolation der aus Abb. 3 bestimmten Richtungstangenten auf die unverformte Legierung

Wird dementsprechend die Umwandlung in dem vollen Temperaturintervall untersucht, so gelangen wir in dem Koordinatensystem $(t, 1/T)$ — und ebenso in den Koordinatensystemen (t, T) und $(\ln t, T)$ — zu C-förmigen Kurven.

Wurde die Rekristallisation der Legierung Cu-Ni 80/20 zwischen 400 und 550° C untersucht, so wurde für Q/R noch ein konstanter Wert erhalten (siehe Abb. 3).

Werden die Q/R proportionalen Richtungstangenten der Geraden entsprechend der unverformten Legierung extrapoliert (siehe Abb. 4), und kehrt man zum natürlichen Logarithmus über, so ergibt sich der Wert von Q zu 89,66 kcal, der nach dem vorangehenden die Aktivierungsenergie der Selbstdiffusion der Legierung Cu-Ni 80/20 darstellt.

Zum Schlusse wollen wir noch erwähnen, daß in Abb. 3 — außer den Geraden, die auf Grund der Zeitwerte der in engerem Sinne genommenen Rekristallisation konstruiert wurden — noch die Geraden (gestrichelt) eingezeichnet wurden, die bei den 60 und 80 %ig verformten Proben dem als selbstständig betrachteten Inkubationsprozeß entsprechen. Diese Geraden verlaufen genau parallel mit den für die Rekristallisation gültigen Geraden. Dies weist darauf hin, daß die in engerem Sinne genommene Rekristallisation und die Inkubation einen und denselben Vorgang darstellen, und die Grenze zwischen den beiden Vorgängen wird allein durch das Auflösungsvermögen des Mikroskops bedingt.

SCHRIFTTUM

1. AUSTIN, C. R., LUINI, L. A., LINDSAY, R. W.: Annealing Studies on Cold-Rolled Iron and Iron Binary Alloys. Trans. Am. Soc. Met. XXXV. (1945) 446.
2. BETCHERMAN, I.: Rate processes in physical Metallurgy. Chalmers, B.: Progress in Metal Physics. Pergamon Press. 1950.
3. WIENER, G.: Grain Growth in High Purity Iron. Trans. Am. Soc. Met. XLIV (1952) 1169.
4. WENSCH, G. W., WALKER, H. L.: Recrystallization and Grain Growth of Nickel. Trans. Am. Soc. Met. XLIV (1952) 1186.
5. HARDY, H. K., HEAL, T. J.: Nucleation and growth processes in metals and alloys. The Mechanism of Phase Transformations in Metals. Symposium. The Institute of Metals. 1958.
6. BORCHERS, H., JORDAN, H., SCHWARZWÄLDER, R.: Überblick über den derzeitigen Stand der Rekristallisationsforschung. Metall. 1959. 12.
7. BÖHM, H.: Die diskontinuierliche Ausscheidung. Metall. 1959. 929.

ZUSAMMENFASSUNG

In dem vorliegenden Aufsatz werden die Rekristallisationserscheinungen der Legierung Cu-Ni 80/20 behandelt. Nach erfolgter Vorverformung wurde das Material grobkörnig gemacht, um nach der späteren Verformung und Wärmebehandlung die Rekristallisationstextur von der ursprünglichen Textur unterscheiden zu können. Der Zeitbedarf der Aufheizung wurde von der Zeitdauer der Wärmebehandlung teilweise in Abzug gebracht, teilweise aber wurden Wärmebehandlungen von so langer Zeitdauer angewendet, daß die Wirkung der Aufheizungsdauer vernachlässigt werden konnte.

Die Menge des rekristallisierten Stoffes wurde bei konstanter Temperatur und in Abhängigkeit von der Zeit in Diagrammen dargestellt.

Bei der Untersuchung des Vorganges in Abhängigkeit von der Temperatur konnte die Aktivierungsenergie der Rekristallisation für die Legierung Cu-Ni 80/20 bestimmt werden. Der Wert dieser Aktivierungsenergie beträgt 89,66 kcal.

RECRYSTALLIZATION OF Cu-Ni ALLOY No 80/20

M. KÁLDOR and M. SZIKSZAI

SUMMARY

The article describes the phenomena of recrystallization of the Cu-Ni Alloy No 80/20. In order to distinguish the recrystallized structure from the basic one after later deformation and heat treatment, the material was grain-coarsened after a preliminary deformation. The time required for heating up was partly subtracted from the time of heat treatment, partly such long-lasting heat treatment was employed by which it was possible to neglect the effect of the heating up time.

Diagrams show the quantity of recrystallized material, after various degrees of deformation, at a constant temperature, in the function of time.

Investigating the process as a function of temperature, the activation energy of recrystallization with the Cu-Ni alloy No 80/20 could be determined and it came out as being 89,66 Kcal.

SUR LA RECRISTALLISATION DE L'ALLIAGE Cu-Ni 80/20

M. KÁLDOR et M. SZIKSZAI

RÉSUMÉ

Les auteurs examinent les phénomènes de recristallisation de l'alliage Cu-Ni 80/20. L'alliage en question était soumis à un traitement préalable pour obtenir une texture à gros grains, afin que la texture recristallisée puisse être distinguée de la texture originale, après la déformation postérieure et le traitement thermique. Le temps nécessaire pour l'échauffement a été, d'une part, retranché de la durée du traitement thermique, et d'autre part l'alliage a été soumis à des traitements thermiques assez longs pour que l'influence du temps d'échauffement soit négligeable.

L'état de recristallisation de la texture en fonction du temps est représenté dans les diagrammes construits après déformation de l'alliage, à une température constante.

Pour examiner le procès en fonction de la température, on peut déterminer l'énergie d'activation de la recristallisation, dont la valeur obtenue était de 89,66 kcal pour l'alliage Cu-Ni 80/20.

О РЕКРИСТАЛЛИЗАЦИИ Cu-Ni СПЛАВА 80/20

М. КАЛЬДОР и М. СИКСАИ

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается явление рекристаллизации Cu-Ni сплава 80/20. Материал после предварительной обработки доведен до крупнокристаллического состояния, чтобы после последующих обработки и термообработки возможно было бы отличить исходную структуру от рекристаллизовавшейся. Время нагрева вычиталось из времени термообработки, частично же применялось такое продолжительное время термообработки, что влиянием времени нагрева можно пренебречь.

На диаграммах отражено количество рекристаллизовавшейся структуры после обработки различной степени при константной температуре в функции времени.

Исследуя процесс в функции времени, можно было определить энергию активации рекристаллизации для Cu-Ni сплава 80/20; величина ее получилась равной 89,66 ккал.

РАЗВИТИЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОРРОЗИИ МЕТАЛЛОВ*

Н. Д. ТОМАШОВ

ДОКТОР ХИМИЧЕСКИХ НАУК

[Поступило 2 марта 1960 г.]

Введение

Исследование закономерностей процессов коррозии и разработка на этой основе новых эффективных средств защиты металлов имеет большое народно-хозяйственное значение.

Основные практические задачи, стоящие перед коррозионистами:

1. Сохранение металлического фонда, находящегося в техническом обращении.

2. Повышение сроков жизни металлических конструкций.

3. Содействие прогрессу науки и техники путем создания новых металлических материалов и средств защиты, обеспечивающих необходимую коррозионную устойчивость металлических конструкций новой техники (авиация, реактивная техника, атомная энергетика и др. области).

В связи с усложняющимися запросами современной техники, успешную борьбу с коррозией уже невозможно проводить на основе чисто экспериментального подбора новых устойчивых материалов и методов защиты. Только путем раскрытия основных закономерностей коррозионного процесса и широких научных обобщений можно дать объяснение многим сложным случаям коррозии, предугадать коррозионное поведение металлических систем в реальных условиях эксплуатации и разработать наиболее эффективные меры борьбы с коррозионным разрушением.

Учение о коррозии в настоящее время можно рассматривать, как уже самостоятельно оформившуюся область науки, являющейся разделом физической химии и разбирающую вопросы разрушения структуры твердого тела, вследствие физико-химического воздействия окружающей среды.

Невозможно в кратком докладе пытаться осветить все стороны современной электрохимической теории коррозии вследствие обширности материала. Чтобы избежать длительного повторения основных положений современной электрохимической теории коррозии, что детально изложено в

* Доклад на Конгрессе по коррозии в Будапеште в 1959 г.

Таблица 1

Приближенное суждение о термодинамической стабильности металлов по величине их стандартного электродного потенциала

Стандартный потенциал металла	Характеристика термодинамической стабильности	Вероятные коррозионные процессы	Металлы
1	2	3	4
Отрицательнее $-0,414 \text{ в}^*$	Металлы повышенной термодинамической неустойчивости (неблагородные)	Могут корродировать в нейтральных водных средах, даже не содержащих кислорода	Литий, рубидий, калий, цезий, радий, барий, стронций, кальций, натрий, лантан, магний, плутоний, торий, нептуний, бериллий, уран, гафний, алюминий, титан, цирконий, ванадий, марганец, ниобий, хром, цинк, галлий, железо
Потенциал между $-0,414 \text{ в}$ и $+0$	Металлы термодинамически неустойчивые (неблагородные)	Могут корродировать в нейтральных средах при наличии кислорода, в кислых средах могут корродировать и в отсутствие кислорода	Кадмий, индий, таллий, кобальт, никель, молибден, олово, свинец
Между $+0$ и $+0,815 \text{ в}^*$	Металлы промежуточной термодинамической стабильности (полублагородные)	При отсутствии кислорода устойчивы в кислых или нейтральных средах. При наличии кислорода могут корродировать в этих средах	Висмут, сурьма, мышьяк, медь, родий, ртуть, серебро
Положительнее $+0,815 \text{ в}$	Металлы высокой термодинамической стабильности (благородные)	Не корродирует в нейтральных средах при наличии кислорода. Могут корродировать при наличии окислителей или кислорода в кислых средах или средах, содержащих комплексообразователи	Палладий, иридий, платина, золото

* Величины $-0,414 \text{ в}$ и $+0,815 \text{ в}$ представляют значения потенциала водородного и, соответственно, кислородного электрода в нейтральной среде

ряде фундаментальных исследований [1—9], мы лишь кратко остановимся на принципиальной основе современной теории коррозии и изложим ряд новых достижений в изучении процессов электрохимической коррозии металлов, базируясь главным образом на исследованиях, выполненных в Отделе коррозии ИФХ АН СССР за последние годы [8, 9, 11—18, 22—29].

Термодинамика и кинетика коррозионных процессов

Металлическое состояние для большинства технических металлов в условиях атмосферы (наличие влаги и кислорода воздуха) является с точки зрения термодинамики неустойчивым.

Суждение о термодинамической возможности протекания электрохимической коррозии может быть сделано на основании сравнения потенциала анодного процесса (V_A^0) и потенциала катодного деполаризующего процесса (V_K^0) в данных условиях. При более отрицательном значении V_K^0 относительно V_A^0 процесс электрохимической коррозии термодинамически возможен.

Суждение о степени термодинамической стабильности различных металлов может быть приближенно сделано также непосредственно по величине стандартного электродного потенциала металла, как это следует из прилагаемой таблицы 1.

Та или иная степень термодинамической нестабильности еще не определяет однозначно устанавливающихся реальных скоростей коррозионного процесса. Установление действительных скоростей, термодинамически возможного коррозионного процесса, определяется степенью кинетического торможения анодного и катодного процессов за счет замедленности диффузионных процессов доставки реагента или отвода продуктов реакции и увеличения перенапряжения электродных процессов, а также в более редких случаях за счет омического сопротивления.

Механизм коррозионного процесса

Благодаря большому числу выполненных работ как у нас в Союзе, главным образом в школах академика А. Н. Фрумкина, чл. корр. Г. В. Акимова, а также рядом исследователей за рубежом, механизм коррозионного процесса на сегодня является достаточно уточненным.

Термодинамически возможный процесс перехода металла в окисное (ионное) состояние при взаимодействии его с окружающей средой, т. е. протекание процесса коррозии, может осуществляться химическим или электрохимическим путем. Химический и электрохимический механизм не исклю-

чают друг друга, и возможно параллельное одновременное протекание процесса коррозии тем и другим путем. Однако можно полагать, что в случае электропроводной коррозионной среды (электролит) электрохимический механизм является, как правило, настолько преобладающим, что чисто химический механизм может не приниматься в расчет.

Основное отличие электрохимического механизма коррозионного процесса от химического состоит, как известно, в том, что в первом случае общая реакция взаимодействия металла с коррозионной средой разделяется на два непосредственно независимых процесса: катодный и анодный. Необходимо подчеркнуть, что непосредственно из этого утверждения (как простое следствие этого допущения) вытекает необходимость разделения анодного и катодного процесса, также в пространстве или во времени и, следовательно, признания необходимости рассмотрения любого электрохимического процесса коррозии, как результата работы коррозионных (локальных) гальванических пар (при их расширенной трактовке).

Таблица 2

Различные типы коррозионных гальванических пар

Типы коррозионных пар			Примеры электрохимической гетерогенности, вызывающих работу пары	Характер разрушения поверхности
Тип пары	Характеристика по размеру	Характеристика по постоянству местоположения		
Коррозионные пары первого рода	<i>Макропары</i> Пары соизмеримые с размерами конструкции или детали. (размеры более 1 мм)	Пары постоянного местоположения	Контакт разнородных металлов. Дифференциальная аэрация	Местная коррозия отдельных участков конструкции или детали
Коррозионные пары второго рода	<i>Микропары</i> Пары, соизмеримые с размерами кристаллической структуры металла (размеры от 1 мм до 0,1 м)	Пары с возможным постепенным перемещением анодов и катодов	Различия в составе или ориентации отдельных кристаллитов. Наличие включений, границ зерен и т. д.	Микро-неравномерное разрушение. В макромасштабах иногда может быть рассмотрено как равномерное
Коррозионные пары третьего рода	<i>Субмикропары</i> Пары, соизмеримые с элементами кристаллических решеток. (Размеры от 1000 до 10 Å)	Пары с постоянно перемещающимися по поверхности анодами и катодами (флуктуирующие пары)	Наличие дефектов (дислокаций атомов) кристаллической решетки. Различные местоположения отдельных атомов. Тепловые флуктуации	Внешне вполне равномерное разрушение

В зависимости от характера электрохимической гетерогенности металлической поверхности следует различать коррозионные пары не только по размерам катодных и анодных участков (макро-, микро- и субмикроэлементы), но также и по степени постоянства распределения катодных и анодных участков по поверхности (постоянно действующие пары, постепенно перемещающиеся или достаточно быстро изменяющие свое местоположение во времени), см. табл. II.

Работа макрокоррозионных пар, или коррозионных пар 1-го рода, обычно характеризуется достаточной устойчивостью распределения катодных и анодных участков по поверхности корродирующего металла во времени. Эти пары, следовательно будут приводить к явно выраженной местной коррозии (гетерогенно-электрохимический механизм коррозии). Постоянство распределения по корродирующей поверхности микрокатодов и микроанодов, т. е. микрокоррозионных пар, ограниченных масштабами структурных составляющих сплава (пары 2-го рода) обычно менее резко выражено во времени*. Помимо этого следует допустить существование субмикропар, т. е. коррозионных пар, определяемых электрохимической неоднородностью в масштабах отдельных атомов или групп атомов (пары 3-го рода). В общем случае субмикропары отличаются крайним непостоянством распределения катодных и анодных участков. При работе таких флуктуирующих по корродирующей поверхности коррозионных пар можно условно относить распределение анодного и катодного процесса на всю корродирующую поверхность металла (гомогенно-электрохимический механизм коррозии).

Гетерогенно-электрохимический и гомогенно-электрохимический механизм коррозии обычно накладываются один на другой, реализуясь одновременно. Соотношение скоростей процессов, протекающих по одному и другому механизму, в зависимости от конкретных условий могут изменяться в широком диапазоне.

В тех случаях, когда характер распределения коррозионного поражения по поверхности может не приниматься во внимание и нас интересует только общая величина коррозии, то весь материальный эффект коррозии (если нет заметных омических сопротивлений в системе) можно условно относить за счет протекания процесса по гомогенно-электрохимическому механизму. Это допущение упрощает расчет и исследование коррозионного процесса. Наоборот, если важно определение не только величины общего коррозионного эффекта, но также конкретное распределение коррозионного поражения по поверхности, т. е. топография коррозионного разрушения, то единственно правильным будет рассмотрение коррозионного процесса

* В отдельных случаях может наблюдаться также значительное постоянство и в местоположении анодов микропар, например при питтинговой или межкристаллитной коррозии, а также развитии коррозионной трещины напряженного растяжением металла, что обусловлено своеобразными особенностями этих видов коррозии.

на основе гетерогенно-электрохимического механизма. Большинство практических вопросов коррозии получают достаточно полное истолкование только на основе гетерогенно-электрохимического механизма коррозии.

Контролирующий фактор электрохимической коррозии

Скорость протекания электрохимической коррозии, т. е. эффективность работы коррозионного элемента стоит в прямой зависимости от двух величин: степени термодинамической неустойчивости и величины общего кинетического торможения данной коррозионной системы. При заданной величине степени термодинамической неустойчивости, определяемой ЭДС коррозионного элемента и равного $V_K^0 - V_A^0$, скорость коррозии, следовательно, будет однозначно определяться общим кинетическим торможением (общим сопротивлением) коррозионной системы.

Процесс электрохимической коррозии, т. е. функционирование коррозионного элемента, представляет замкнутый цикл из отдельных более простых последовательно (а частично также параллельно) соединенных ступеней. Поэтому установление реальной скорости коррозионного процесса стоит в зависимости от суммарного торможения* процесса на каждой из этих более простых элементарных ступеней.

Доля торможения процесса коррозии каждой элементарной ступенью или доля падения потенциала на данной ступени называется степенью контроля процесса коррозии данной ступенью. Только в том случае, если степень контроля во много раз превышает общее суммарное торможение процесса на всех остальных ступенях, можно говорить о полном контроле процесса коррозии данной ступенью. В более общем случае все ступени в меру величины их кинетического сопротивления, определяемого падением потенциала на данной ступени, принимают участие в установлении общей скорости коррозионного процесса.

Количественное соотношение между основными контролирующими факторами электрохимической коррозии могут быть определены на основании изучения кинетики электродных реакций (анодных и катодных) в условиях протекания коррозионного процесса и построения поляризационных диаграмм коррозии, как это указано на рис. 1. Здесь $V_A^0 X$ — анодная, $V_K^0 X$ — катодная поляризационная кривая, т. е. зависимость эффективного потенциала анода и, соответственно, катода от величины коррозионного тока J .

* Лучше говорить о торможении, т. е. о сопротивлении протекания каждой ступени или о пропорциональной ей величине падения потенциала на каждой элементарной последовательно включенной элементарной ступени, а не о скоростях отдельных ступеней, т. к. скорости отдельных элементарных ступеней в условиях стационарного режима с необходимостью выравниваются со скоростью общего процесса.

Соотношение контроля между основными ступенями коррозионного процесса, т. е. соотношение между анодным торможением, катодным торможением и торможением за счет перемещения зарядов в цепи, будет соответственно определяться на диаграмме величинами падения потенциалов на

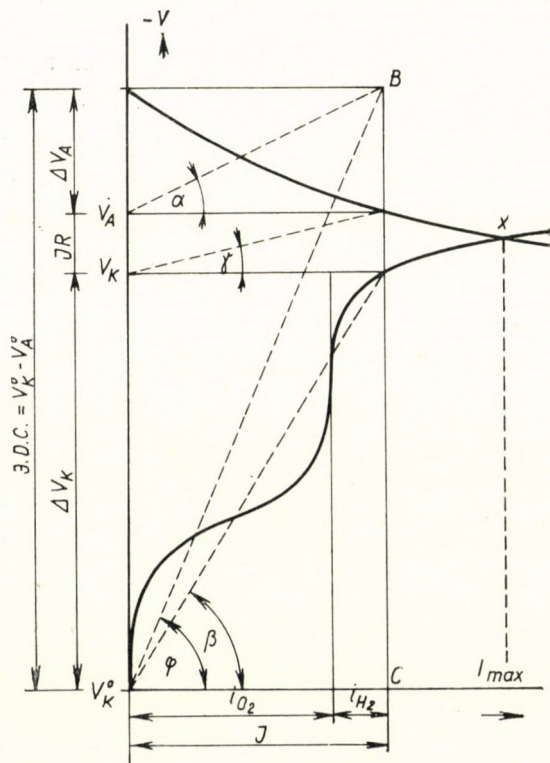


Рис. 1. Поляризационная диаграмма коррозии

анодной и катодной ступенях (ΔV_A и ΔV_K) и омическим падением потенциала (JR).

Высота прямоугольника $V_A^0 B C V_K^0$, равная $V_K^0 - V_A^0$ или ЭДС коррозионного элемента, будет характеризовать термодинамическую нестабильность данной коррозионной системы. Ширина этого прямоугольника J — величину устанавливающейся в данных условиях силы тока пары, т. е. величину, пропорциональную скорости коррозии. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_K^0 - V_A^0}{J}$ представляет общую поляризуемость или общее сопротивление коррозионной системы.

Сопротивления ступеней (или, что то же, средние анодные и катодные поляризуемости), а также омическое сопротивление определяются на диаграмме наклонами диагоналей, соответственно, равных $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ и $\operatorname{tg} \gamma$.

В связи с высказанным нами представлением, о том, что отдельные звенья коррозионного элемента связаны в общую цепь, аналогично сопротивлениям обычной электрической цепи, все ступени торможения коррозионного процесса могут быть наглядно представлены на диаграмме элементарных ступеней электрохимической коррозии (см. рис. 2). Диаграмма представляет замкнутую цепь коррозионного элемента, разрезанную по линии MN и развернутую в плоский прямоугольник. Здесь аналогично предыдущей диаграмме, величина падения потенциала на каждой данной последо-

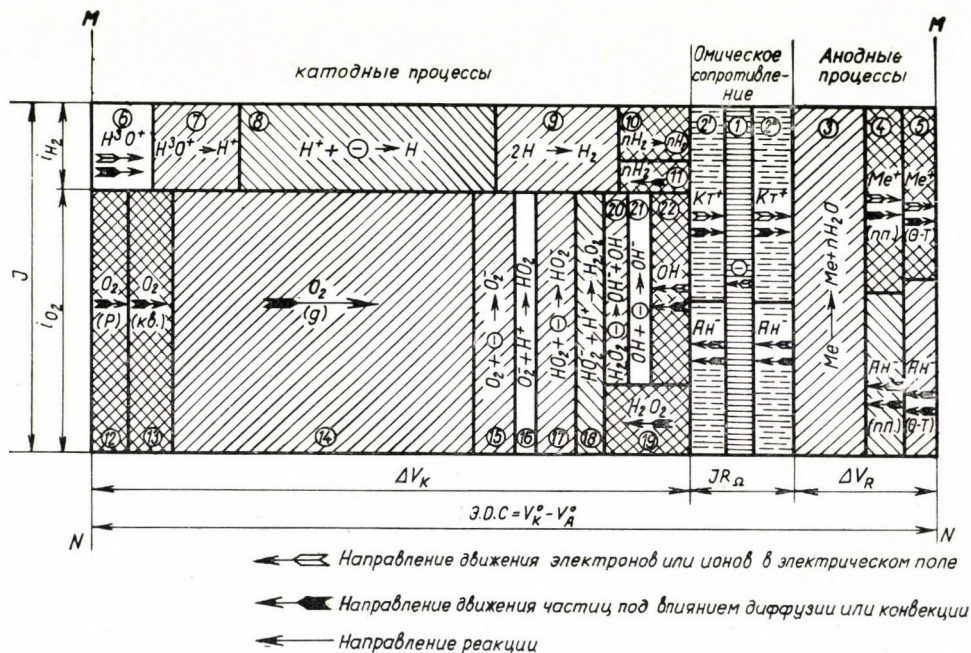


Рис. 2. Диаграмма элементарных ступеней электрохимической коррозии

вательной стадии характеризуется протяженностью ее по оси потенциалов. Наоборот, протяженность по оси токов характеризует силу тока на данной ступени. При наличии нескольких параллельных ступеней их сумма представляет общую силу коррозионного тока. Например, сумма токов процесса кислородной i_{O_2} и водородной i_{H_2} деполяризации равна общей силе тока катодного процесса и силе тока коррозионного элемента J .

На диаграмме можно видеть отдельные стадии коррозионного процесса и их роль в установлении общего коррозионного тока. Например, представленный на диаграмме рис. 2 коррозионный процесс контролируется в основном катодным процессом, причем катодная деполяризация идет двумя параллельными процессами — ионизацией кислорода и разрядом водорода,

однако первый процесс идет примерно втрое более эффективно, чем второй. Основным торможением данного коррозионного процесса является затруднение диффузии кислорода в диффузионном слое. Остальные процессы имеют меньшее значение, но тем не менее в меру сопротивления каждого из них (эти сопротивления могут быть определены по тангенсу наклона диагонали прямоугольника для соответствующей стадии) оказывают свое влияние на установление коррозионного тока.

Некоторые новые приложения электрохимической теории коррозии

Помимо принципиальных возможностей количественного расчета скорости коррозионного процесса, электрохимическая теория коррозии позволяет сделать ряд обобщающих выводов. Эти обобщения позволяют не только рационально поставить направление исследовательских работ, но также заранее предугадать развитие коррозионного процесса, объяснить практические случаи коррозии и сделать определенные выводы, имеющие непосредственное практическое значение в деле борьбы с коррозией металла.

Некоторые новые результаты экспериментального исследования различных случаев электрохимической коррозии, выполненных под моим руководством в ИФХ АН СССР и могущие иллюстрировать конкретные случаи применения электрохимической теории коррозии, далее кратко обсуждаются.

1. Влияние катодных включений на скорость коррозии и пути создания коррозионно-устойчивого металлического сплава [9, 13, 16]

Наличие в металлическом сплаве катодных включений не всегда однозначно должно вести к ускорению коррозионного процесса, как это одно время предполагалось.

В зависимости от условий коррозии могут иметь место следующие четыре характерных случая влияния катодного включения (или катодного контакта) на скорость коррозии металла [9, 16].

1) Ускорение коррозионного процесса в соответствии с силой тока, возникающей между катодным включением и остальной анодной поверхностью (пример — растворение загрязненного цинка в разбавленной кислоте).

2) Ускорение коррозионного процесса в большей степени, чем это соответствует току, возникающему в паре с катодным контактом. Это наблюдается для металлов, имеющих отрицательный дифференц эффект (пример — магний в растворе NaCl, алюминий в разбавленной соляной кислоте, дуралюмин в морской воде, нержавеющая сталь в азрированных, подкисленных растворах хлоридов).

3) Малое влияние микрокатодных включений в сплаве на скорость коррозии. Этот случай наблюдается при коррозии, контролируемой диффузией деполяризатора (кислорода) к микроатомам корродирующей поверхности (пример — коррозия железа, стали, цинка и некоторых других металлов в морской и пресной воде, а также и других нейтральных электролитах).

4) Уменьшение скорости коррозии под влиянием образования или увеличения катодных включений наблюдается [13] в условиях возможности возникновения пассивного состояния (пример — нержавеющие стали в растворах серной и некоторых других кислот).

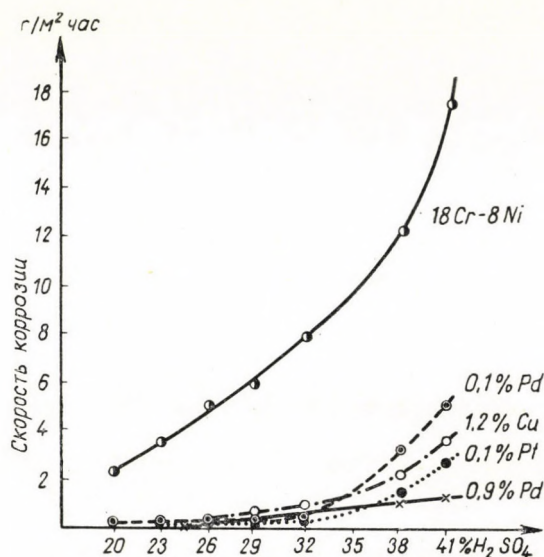


Рис. 3. Скорость коррозии хромоникелевых нержавеющих сталей (18 Cr 8 Ni) дополнительно легированных катодными присадками (Pt, Pd или Cu) в зависимости от концентрации. Время испытания — 360 часов. Температура 20 °C

На основе анализа современной теории электрохимической коррозии можно указать следующие основные пути повышения коррозионной устойчивости металлических сплавов [13, 16].

1) Создание сплавов с более совершенным экранирующим слоем продуктов коррозии.

2) Уменьшение катодной активности сплава. Это достигается уменьшением площадей микрокатодов или увеличением перенапряжения катодного процесса (обычно перенапряжение водорода) на микроатомах сплава.

3) Уменьшение анодной активности сплава. Это может достигаться: а) уменьшением площади анодной фазы; б) введением компонентов, повышающих термодинамическую устойчивость анодной фазы; в) введением

компонентов, повышающих пассивируемость анодной фазы; г) введением активных катодов (в условиях возможного пассивирования).

Увеличение пассивируемости металлического сплава является одним из важных путей уменьшения анодной активности сплава и, следовательно, повышения его общей коррозионной устойчивости.

Возможность повышения общей пассивируемости металлического сплава путем введения эффективных катодных (электроположительных) компонентов в сплав, ранее почти не учитывавшаяся, была с теоретической и экспериментальной сторон обоснована в ряде наших исследований.

На рис. 3 приведены, по данным исследований Черновой, результаты сравнительных коррозионных испытаний обычной и катодно-легированных хромоникелевых нержавеющей сталей в растворах H_2SO_4 различной концентрации. Оказалось, что все стали, легированные присадками таких катодно-эффективных металлов, как Cu (1,2%), Pt (0,1%) или Pd (0,1% и 0,9%), вследствие большей устойчивости пассивного состояния обладают значительно более высокой коррозионной устойчивостью в холодной и горячей серной кислоте различных концентраций по сравнению с теми же сталями, но дополнительно легированными катодными присадками.

Как показали дальнейшие исследования, подобное действие катодных присадок наблюдается также и по отношению к некоторым другим легко пассивирующим металлам, как, например, титан и его сплавы.

2. Коррозия в условиях возможности возникновения пассивного состояния [9, 12—21]

1) Степень пассивности может быть рассмотрена как величина, эквивалентная степени анодного контроля в данном коррозионном процессе. На этом основании может быть предложен метод расчета пассивности различных металлов [9, 12]. Приближенный расчет степени пассивности в воздушно-азрированном растворе 0,5 NNaCl дает следующий ряд (по уменьшению степени пассивности): Ti-Al-Cr-Be-Mo-Mg-Ni-Co-Fe-Mn-Zn-Cd-Sn-Pb-Cu.

2) Исследование условий пассивирования нержавеющей сталей показало, что в ряде коррозионных сред (например, растворах серной кислоты) анодная поляризация может быть применена как метод защиты от коррозии [15]. Для проведения анодной электрохимической защиты нержавеющей хромоникелевой стали в серной кислоте следует поддерживать ее потенциал при значениях от +0,3 до +0,8 в (по водородному электроду). Скорость коррозии нержавеющей стали (18Cr 8Ni) при ее анодной поляризации плотностью тока 0,01—0,1 a/m^2 была в 50—60% серной кислоте при температуре 50° С очень незначительной, в тысячи раз ниже, чем в отсутствие анодной поляризации (рис. 4). Анодная защита может быть также осуществлена и в отношении других металлов и других сред. Например, как это было

показано в нашей лаборатории Альтовским и Аракеловым в отношении титана и его сплавов в растворах серной кислоты (см. рис. 5). Необходимым условием возможности осуществления анодной электрохимической защиты металла будет являться возможность установления устойчивости анодной

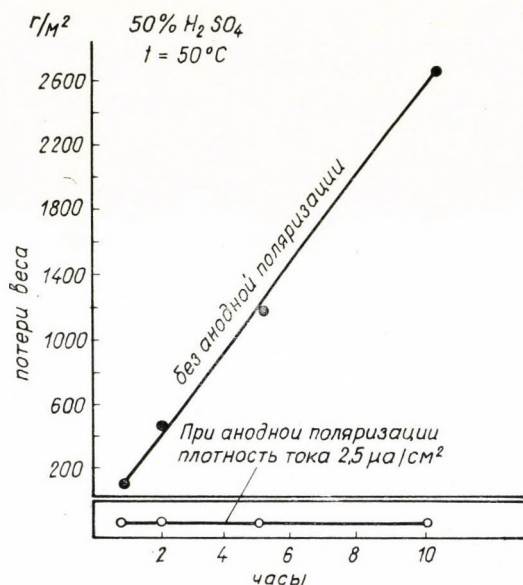


Рис. 4. Кривые коррозии — время для хромоникелевой стали (18—8): 1 — без анодной поляризации; 2 — защищенной анодным током (2,5 микроампера ($см^2$)). Раствор 50% H_2SO_4 . Температура $50^\circ C$

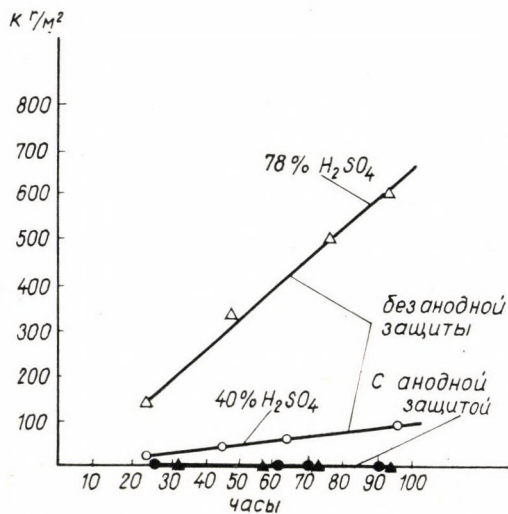


Рис. 5. Влияние анодной защиты на коррозию титана в растворах 40% и 78% серной кислоты. Температура раствора $20^\circ C$

пассивируемости и поддержание пассивного состояния при сравнительно малых плотностях анодного тока в данных условиях.

3) Были проведены исследования явления транспассивности нержавеющей хромистых и хромоникелевых сталей [14, 17—21], т. е. исследование причин уменьшения их коррозионной устойчивости в чрезмерно окислительных средах (например, 60% $\text{HNO}_3 + 10 \text{C}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$). Повышение скорости растворения металла из транспассивного состояния объясняется образованием растворимых шестивалентных окислов хрома в том случае, если потенциал стали становится более положительным, чем + 1,36 в.

Явление транспассивности наступает независимо от того, достигается ли указанное значение потенциала анодной поляризацией или увеличением окислительной способности среды. Катодная поляризация или восстановители, смещая потенциал к менее положительным значениям, способны перевести нержавеющую сталь из транспассивного состояния обратно в пассивное.

3. Подземная коррозия металлов [22, 23]

Установлен электрохимический механизм подземной коррозии металлов. Характерные особенности протекания анодных и катодных процессов в почвенных условиях определяются формой связи влаги с почвой, диффузионными возможностями для переноса кислорода и продуктов коррозии, гетерогенностью и микропористостью структуры почвы и почти полным отсутствием механического перемешивания и конвекции твердой основы почвы.

Эти особенности почвы, как коррозионной среды, будут влиять на характер процесса электрохимической коррозии, значительно изменяя условия работы катодного и анодного процесса при переходе от жидкостной к почвенной электрохимической коррозии. Особенно характерным будет различие в механизме и скорости проницаемости кислорода при различных условиях коррозии в объем жидкого электролита (коррозия металлов в растворе), через тонкую пленку электролита (атмосферная коррозия) и в твердый микропористый электролит (почвенная коррозия). На схеме рис. 6 даны кислородные проницаемости в различных случаях коррозии: при полном погружении в раствор, в условиях атмосферной и почвенной коррозии. В растворе доступ кислорода к корродирующей поверхности металла определяется главным образом условиями перемешивания, в атмосфере — толщиной пленки влаги, в почвенных условиях, при равной толщине слоя почвы — структурой и влажностью почвы. Из приведенной на рис. 6 схемы, построенной на основании полученных экспериментальных данных, следует, что в почвенных условиях в отличие от других видов коррозии возможны различия в кислородной проницаемости на 3—4 и даже 5 порядков, т. е. в де-

сятки тысяч раз, чего обычно мы не наблюдаем при коррозии в растворах или в атмосфере под тонкой пленкой влаги. По этой причине почвенные условия особенно благоприятны для создания активно-действующих корро-

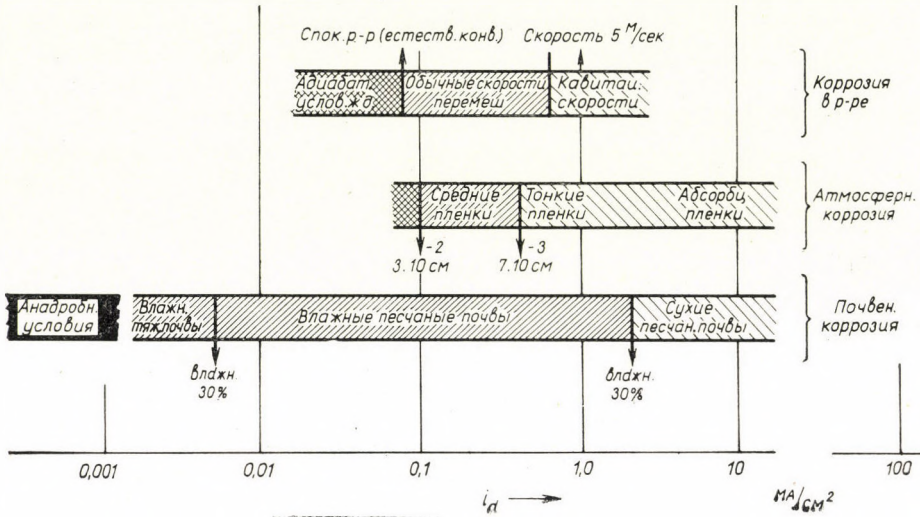


Рис. 6. Характеристика кислородной проницаемости при различных случаях коррозии i_d — предельный диффузионный ток по кислороду

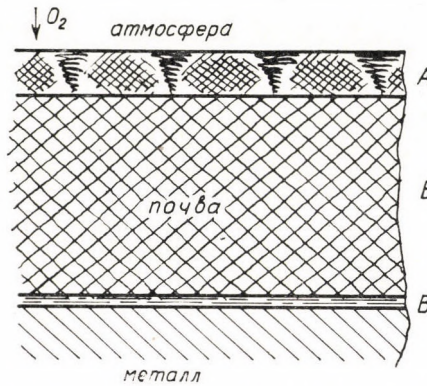


Рис. 7. Механизм транспорта кислорода в почве к корродирующей поверхности металла. А — зона конвекционного переноса кислорода в воздушных порах почвы; Б — зона диффузионного переноса кислорода в порах почвы; В — зона диффузионного переноса кислорода в сплошной жидкой пленке (или продуктах коррозии)

зионных пар неравномерной аэрации. Механизм подвода кислорода к корродирующей поверхности может быть пояснен схемой на рис. 7.

В подавляющем числе почв коррозионный процесс контролируется процессом диффузии кислорода (катодного деполяризатора). Однако в очень

рыхлых, сухих и хорошо аэрируемых почвах возможно превалирование анодного контроля вследствие возникновения явлений анодной пассивности или недостатка влаги для анодного процесса гидратирования ионов металла, при длительных процессах коррозии также вследствие тормозящего действия продуктов коррозии на анодный процесс.

Процесс коррозии стальных конструкций в почве есть результат работы микроструктурных пар и макропар неравномерной аэрации.

Суждение о коррозионной активности различных почв, согласующееся с реальными практическими данными, возможно получить на основе ускоренных электрохимических исследований при условии учета роли микро- и макрокоррозионных пар в данном случае подземной коррозии.

Быстрый электрохимический метод оценки коррозионной устойчивости металлов в подземных условиях (по уменьшению склонности к образованию пар неравномерной аэрации) приводит к заключению, что такие металлы как Ti и Zr должны обладать практически полной устойчивостью в подземных условиях.

4. Атмосферная коррозия

Механизм и скорость атмосферной коррозии, как известно, сильно зависят, в первую очередь, от степени увлажнения корродирующей поверхности металла [24]. Характер зависимости скорости атмосферной коррозии от степени увлажнения поверхности металла может быть качественно передан кривой на рис. 8. Участок I соответствует весьма малой влажности воздуха. Возникающие в этих условиях на поверхности металла адсорбированные молекулы воды (моно- или несколько молекулярных слоев) еще не

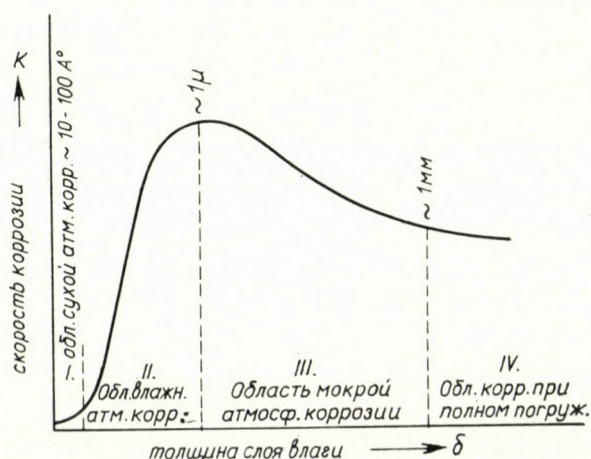


Рис. 8. Характер зависимости скорости атмосферной коррозии от степени увлажнения поверхности металла

могут рассматриваться достаточно сплошными обладающими свойствами электролита. Этому участку соответствуют минимальные скорости коррозии, соответствующие процессам химического окисления металлов в сухих атмосферах при обычных температурах (сухая атмосферная коррозия).

Участок II наступает при значительном повышении относительной влажности окружающей атмосферы и соответствует значительному утолщению слоя влаги на поверхности металла по причинам не только явлений адсорбции, но также и вследствие хемосорбции (образования гидратов). Тонкая влажная пленка, еще в начале невидимая, уже начинает выполнять функции электролита. Переход механизма коррозии от химического к электрохимическому соответствует быстрому возрастанию скорости коррозии на этом этапе (область *влажной атмосферной коррозии*). Дальнейшее утолщение слоя влаги до величин десятков и сотен микрон (участок III) будет соответствовать атмосферной коррозии под видимой пленкой влаги (*мокрая атмосферная коррозия*). Утолщение пленки влаги на этом участке уже может вызывать небольшое понижение скорости коррозионного процесса вследствие некоторого затруднения диффузии кислорода через утолщающийся слой влаги.

Еще более толстые слои электролита на участке IV соответствуют *коррозии при полном погружении в электролит* указывают на весьма малое изменение скорости коррозии с увеличением толщины электролита, вследствие установления достаточно постоянной толщины диффузионного слоя.

Разработанные в настоящее время прецизионные электрохимические методы исследования процессов атмосферной коррозии, как, например, снятие поляризационных кривых не только в условиях видимых пленок влаги, но также и под невидимыми адсорбционными слоями влаги [25], а также моделирование, работающих под тончайшими адсорбционными слоями влаги микрокоррозионных пар [26], позволило в последнее время дать новые данные по установлению закономерностей атмосферной коррозии, в частности:

1) Моделирование коррозионных пар впервые дало прямое экспериментальное доказательство электрохимического механизма атмосферной коррозии не только в условиях видимых слоев влаги (мокрая атмосферная коррозия), но также и в условиях невидимых адсорбционных слоев влаги при влажности менее 100% (влажная атмосферная коррозия).

2) Установлено, что при мокрой атмосферной коррозии еще сохраняется катодный контроль [26, 27], при влажной атмосферной коррозии превалирует уже анодный контроль [25], как это следует, например, из данных табл. 3.

Таким образом, разделение атмосферной коррозии на «мокрую» и «влажную» помимо внешних различий по степени увлажнения поверхности обосновывается также и более глубоким изменением в характере контроля электрохимического процесса.

Таблица 3

Зависимость плотности коррозионного тока и долей анодного, катодного и омического контроля пары медь-цинк корродирующей под адсорбционной пленкой влаги, при различных значениях влажности воздуха

Влажность воздуха %%	Плотность коррозионного тока пары $\mu a / cm^2$	Отношение доли анодного контроля к катодному $S_A:S_K$
75	0,55	39
100	7,80	4

3) Катодный процесс при атмосферной коррозии облегчается при утоньшении слоя влаги на корродирующей поверхности, в первую очередь, вследствие увеличения скорости диффузионного подвода кислорода к корродирующей поверхности в более тонких слоях. Помимо этого доставка кислорода может также несколько ускоряться (26) вследствие увеличения конвекции в слое влаги при его испарении.

Как было недавно установлено [25], при крайне больших степенях недостатка влаги на поверхности (переход от влажной к сухой атмосферной коррозии), катодный процесс может начать тормозиться вследствие недостатка влаги для процесса образования ионов гидроксила.

4) Анодный процесс в условиях влажной атмосферной коррозии все более тормозится с понижением толщины слоя влаги (например, при уменьшении относительной влажности атмосферы) как вследствие наступающего явления анодной пассивности [24, 25], так и при дальнейшем утонении влажной адсорбционной пленки, также вследствие недостатка влаги для процесса гидратации иона металла при анодном растворении металла [25].

5) Процесс ионизации кислорода является наиболее обычным и общим типом катодного процесса при атмосферной коррозии. Однако полностью не могут быть исключены в отдельных случаях наличия и других деполяризационных процессов. Так, например, было показано [28], что сернистый газ может выступать при атмосферной коррозии железа не только как анодный активатор, но также и как катодный деполяризатор процесса. Однако, как в дальнейшем было уточнено в нашей лаборатории работами Кларк и Михайловской, сернистый газ, выступая как катодный деполяризатор в условиях мокрой коррозии при более тонких адсорбционных слоях влаги (в условиях влажной атмосферной коррозии), является, в основном, анодным активатором.

6) Коррозия магния и магниевых сплавов под тонкими слоями влаги (атмосферная коррозия) протекает преимущественно кислородной деполяризацией, а не с водородной деполяризацией, как это имеет место при полном погружении в раствор [11]. При коррозии железа и сталей под тонкими кислыми слоями электролита (условия индустриальных сильно загряз-

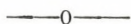
ненных атмосфер) основным типом катодной деполяризации является также процесс ионизации кислорода.

7) Коррозионная активность природных атмосфер (не загрязненных специфическими активными примесями), как это показали проведенные в нашей лаборатории Г. К. Берукштис исследования, может быть наиболее полно характеризована продолжительностью времени нахождения влажной пленки на поверхности металла в данных условиях атмосферы.

5. Коррозия металлов в расплавах солей [29, 30]

Подтверждено [29], как это раньше было указано [30], что коррозия металлов в расплавах солей при повышенных температурах носит электрохимический характер. Установлено, кроме того [29], что пары воды, углекислота, сульфат-ионы, карбонат-ионы, нитрат-ионы, нитрит-ионы, а также некоторые катионы металла (например, Ca^{++}) являются активными катодными деполяризаторами, ускоряющими процесс коррозии железа и стали в расплавленных солях (хлориды различных щелочных и щелочноземельных металлов) при повышенных температурах.

Резкое ускорение процессов высокотемпературной газовой коррозии металла при образовании на поверхности легкоплавких окислов, должно, в первую очередь, связываться с электрохимическим характером окисления, устанавливающегося в этом случае.



В ряде других случаев на основе приложения электрохимической теории коррозии, также удалось получить ряд интересных и практически важных данных и научных обобщений. Это, прежде всего, относится: 1) к трактовке действия ингибиторов коррозии; 2) применению теории многоэлектродных систем к расчетам электрохимической коррозии; 3) исследованию коррозии при одновременном воздействии механического фактора; 4) установлению влияния униполярной проводимости в окислах (продуктах коррозии) и в самом металле (полупроводниковые металлы — Ge, Si) на процессы электрохимической коррозии; 5) электрохимической трактовке коррозии в узких щелях и зазорах; 6) исследованию механизма коррозии технически новых металлов (Ti, Zr, Nb, Ta и др.) и многим другим вопросам.

В заключение своего сообщения я хотел остановиться на следующем вопросе.

6. Рациональная классификация различных методов борьбы с коррозией на базе электрохимической теории

Все существующие методы защиты металлов от коррозии, с точки зрения электрохимической теории, могут, в первую очередь, подразделяться

по характеру торможения, оказываемого данным способом защиты на ту или иную ступень коррозионного процесса.

Оказывается возможным для каждого способа защиты установить конкретную ступень коррозионного процесса, которая в основном тормозится при осуществлении данного метода защиты, т. е. выделить *контролирующий фактор данного метода защиты*. Таким образом, исходя из трех основных контролирующих факторов коррозии, можно выделить следующие группы методов защиты от коррозии: 1) методы, увеличивающие омическое сопротивление (торможение), 2) методы, увеличивающие катодное торможение и 3) методы, увеличивающие анодное торможение коррозионного процесса. Внутри каждой из этих групп следует отличать осуществляется ли воздействие данного метода через изменение внутреннего фактора (металла), изменение факторов поверхности изделия или изменением внешних факторов (внешних условий коррозии или коррозионной среды).

Как правило, легче осуществляется защита, когда контролирующий фактор данного метода защиты совпадает с основным контролирующим фактором коррозии в данных условиях.

Различные методы защиты, имеющие общий контролирующий фактор, как правило, взаимно усиливают защитное действие друг друга. При разноименных контролирующих факторах двух методов защиты их общий защитный эффект может не только не усиливаться, но иногда быть меньшим, чем каждого в отдельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. U. EVANS: *Metallic Corrosion Passivity and Protection*, London, 1946.
2. O. BAUER, O. KRÖNKE und CR. MASING: *Die Korrosion metallischer Werkstoffe*, Bd. 1, 2, 3, Leipzig, 1940.
3. H. UHLIC: *The Corrosion Handbook*. New York, 1948.
4. F. SPELLER: „Corrosion Causes and Prevention” USA, 1935.
5. F. TÖDT: *Korrosion und Korrosions-Schutz*, Berlin, 1955.
6. Г. В. Акимов: Теория и методы исследования коррозии металлов, изд. А.Н. СССР, 1945.
7. А. Н. Фрумкин, В. С. Богоцкий, З. А. Иофа, Б. И. Кабанов: Кинетика электродных процессов. Москва, изд. МГУ, 1952.
8. Н. Д. Томашов: Коррозия металлов с кислородной деполяризацией. Изд. А.Н. СССР, Москва, 1947.
9. Н. Д. Томашов: Теория коррозии металлов. Metallurgizdat, Москва, 1952.
10. Н. Д. Томашов; Г. П. Синельщикова и М. А. Веденева: Журнал физической химии, XXIII, № 3, 289, 1949.
11. Н. Д. Томашов и Т. В. Матвеева: Журнал физической химии, XXIV, № 11, 1281, 1950.
12. Н. Д. Томашов: Доклады АН СССР, LXXXVIII, № 6 и № 4, 705, 1953.
13. Н. Д. Томашов и Г. П. Чернова: ДАН СССР, LXXXIX, № 1, 121, 1953.
14. Н. Д. Томашов и Г. П. Чернова: ДАН СССР, XCVIII, № 3, 435, 1954.
15. Н. Д. Томашов и Г. П. Чернова: ДАН, т. 104, № 1, 104, 1055.
16. Н. Д. Томашов: Успехи химии, т. XXIV, № 4, 453, 1955.
17. М. М. Куртеев, Г. В. Акимов: ДАН — т. 87, № 1, 93, 1952; т. 87, № 5, 795, 1952; т. 87, № 6, 1005, 1952.
18. М. М. Куртеев, Г. В. Акимов, Н. Н. Бардиж: ДАН, т. 87, № 4, 625, 1952.

19. J. M. DEFRAUOUF: Rev. de Métall. 49, 9, 664, 1952.
20. В. П. Батраков, Г. В. Акимов: ДАН, т. 89, № 2, 321, 1953.
21. В. П. Батраков: ДАН, т. 99, 97, 1954.
22. Н. Д. Томашов и Ю. Н. Михайловский: ДАН, т. 107, № 6, 853, 1956; т. 108, № 4, 668, 1956.
23. Н. Д. Томашов: Успехи химии, т. XXVI, № 2, 139, 1957.
24. Н. Д. Томашов: Успехи химии т. XIX, № 6, 716, 1950.
25. Н. Д. Томашов и Ю. Н. Михайловский: ДАН, т. 110, № 6, 1026, 1956.
26. Н. Д. Томашов, Г. К. Беруштитс: А. А. Локотилов. Заводская лаборатория, № 3, 345, 1956.
27. И. Л. Розенфельд и К. А. Жигалова: ДАН т. 99, № 1, 137, 1954; ДАН т. 104, № 6, 876, 1955.
28. И. Л. Розенфельд и Т. И. Павлуцкая: ЖФХ, XXXI, № 2, 328, 1957.
29. И. Л. Розенфельд и Т. И. Луконина: ДАН, т. 111, № 1, 136, 1956.
30. Н. Д. Томашов и Н. И. Тугаринов: Журнал прикладной химии, т. XXX, 1619, 1957.
31. А. В. Рябченков и В. Ф. Абрамова: Сборник Трудов ЦНИИТМАШ, 11, 1948.

РЕЗЮМЕ

Автор детально останавливается на описании кинетики коррозионных процессов, далее подробно занимается термодинамическими вопросами этой проблемы. Указываются факторы, которые воздействуют на электрохимическую коррозию. Исследуется роль катодных включений в процессе коррозии сплавов, далее указывается практическое значение первого.

Изучаются процессы коррозии, протекающие в пассивном состоянии металла. Излагаются обстоятельства транспассивизации металлов.

Выводится электрохимический механизм грунтовой коррозии металлов. Указываются факторы, воздействующие на грунтовую коррозию. Описываются различные случаи атмосферной коррозии, которые также можно считать одним из видов электрохимической коррозии. Наконец рассматриваются отдельные случаи коррозии металлов, происходящие в расплаве.

Автор излагает рациональную классификацию методов коррозионной защиты, основывающуюся на электрохимической теории.

ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER ELEKTROCHEMISCHEN THEORIE DER METALLKORROSION

N. D. TOMASCHOW

ZUSAMMENFASSUNG

Im Aufsatz wird die Kinetik der Korrosionsvorgänge ausführlich behandelt, ferner werden auch die thermodynamischen Fragen dieser Kinetik eingehend erörtert. Es wird auf die die elektrochemische Korrosion beeinflussenden Faktoren hingewiesen. Es wird die Rolle der Kathodeinschlüsse in dem Korrosionsverlauf der Legierungen erörtert, und es wird auf die praktische Bedeutung dieser Einschlüsse hingewiesen.

Es werden die im passiven Zustand des Metalls verlaufenden Korrosionsvorgänge studiert, und die Verhältnisse der Transpassivierung der Metalle erörtert.

Es wird ein elektrochemischer Mechanismus für die Bodenkorrosion der Metalle aufgestellt. Es wird auf die die Bodenkorrosion beeinflussenden Faktoren hingewiesen, ferner werden die verschiedenen Fälle der atmosphärischen Korrosion beschrieben, die ebenfalls als eine Art der elektrochemischen Korrosion zu betrachten ist. Schließlich werden die einzelnen Fälle der in der Schmelze stattfindenden Metallkorrosionen untersucht.

Es wird eine rationale Klassifizierung der auf der elektrochemischen Theorie beruhenden Korrosionsschutzverfahren angegeben.

DEVELOPMENT OF THE ELECTROCHEMICAL THEORY OF METAL CORROSION

N. D. TOMASCHOW

SUMMARY

Author explains in detail the kinetics of corrosion processes and also gives a thorough study on their thermodynamical problems. He points out the factors which have influence on electrochemical corrosion. He investigates the role of cathode inclusions concerning corrosion process in alloys, and at the same time he emphasizes their practical importance.

He examines the corrosion processes taking place in the metals passive state. Further, he describes the circumstances of the metals becoming transpassivized.

Author sets up the electrochemical mechanism of the soil corrosion of metals and points out the factors influencing soil corrosion. He also describes various cases of atmospheric corrosion, which can also be regarded as a sort of electrochemical corrosion. Finally, he investigates certain cases of corrosion taking place in melted metals.

Author also gives a rational classification of anticorrosive methods based on the electrochemical theory.

L'ÉVOLUTION DE LA THÉORIE ÉLECTROCHIMIQUE DE LA CORROSION DU MÉTAL

N. D. TOMASCHOW

RÉSUMÉ

L'auteur expose en détail la cinétique des procès de corrosion, et soumet à un examen approfondi les problèmes thermodynamiques de celle-ci. Il indique les facteurs exerçant une influence sur la corrosion électrochimique, examine le rôle des inclusions cathodiques dans la corrosion des alliages et souligne l'importance pratique de la question.

L'auteur étudie ensuite le procès de la corrosion dans l'état passif du métal, et expose les conditions de la transpassivité du métal. L'article établit aussi le mécanisme électrochimique de la corrosion du métal par action du sol, indique les facteurs entrant en jeu, et analyse les divers cas de corrosion atmosphérique, qui peut être considérés comme une espèce de corrosion électrochimique. Suit enfin un examen de la corrosion de la fonte de métal.

Pour terminer, l'auteur présente une classification rationnelle des méthodes de protection contre la corrosion, basées sur la théorie électrochimique.

РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ШАЙБ

И. ШАНДОР

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ И ТРАНСПОРТА,
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ, БУДАПЕШТ

и

Я. САБО

КАНДИДАТ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
НАУЧНО- ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ПО СТРОИТЕЛЬСТВУ, ВУДАПЕШТ

[Поступило 21 марта 1960 г.]

Работа занимается расчетом состояния плоскостного напряжения для прямоугольных шайб постоянной толщины, причем рассматривается случай лишь краевых нагрузок. Метод дает приближенные результаты, так как дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных, с помощью которого записывается состояние напряжения, может быть приближенно заменено уравнениями конечных разностей, но всегда может быть достигнута требуемая точность.

Работа показывает два метода решения задачи:

1. Предполагая непрерывное изменение по одной переменной и задавая значения функции только при дискретных значениях второй переменной, первый метод действительно составляет производные по первой переменной, а производные по второй переменной заменяет отношением приращений. Решение задачи сводится к решению обычного линейного матрично-дифференциального уравнения.

2. Второй метод задает значения искомой функции только при дискретных значениях переменных и частные производные по обеим переменным заменяет отношением приращений. Это сводит задачу к решению линейного матричного уравнения.

1.

Схема прямоугольной шайбы с краевыми нагрузками показана на чертеже № 1.

Состояние плоскостного напряжения прямоугольной шайбы может быть записано уравнением типа функции Эри:

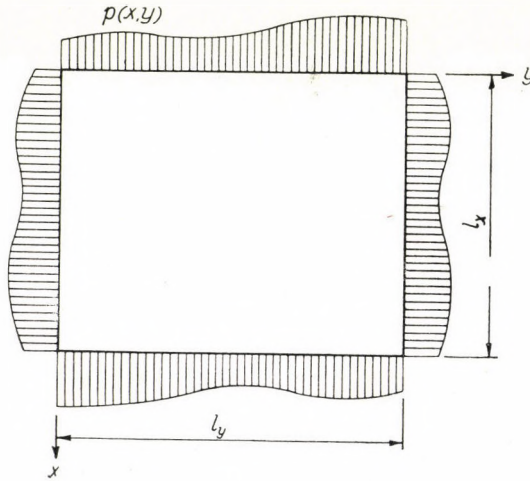
$$\Delta\Delta F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Связь между $F(x, y)$ «функцией напряжения» и функциями σ_x , σ_y , τ_{xy} задается известными¹ формулами:

¹ см. [1] стр. 17–24.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

Исходя из известной зависимости между краевой нагрузкой и крайними значениями функции напряжения, можно определить значения функции $F(x, y)$ на сторонах прямоугольной шайбы, поэтому в дальнейшем эти значения будем считать известными.



Черт. 1

Пусть $F(x, y)$ непрерывная функция по x , и задана только при

$$\left. \begin{aligned} y_i &= i \cdot b \\ \left(b = \frac{l_y}{n+1}; i = 0, 1, 2, \dots, n+1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

дискретных значениях переменной y . (черт. 2.) Тогда $F(x, y)$ может быть задана как функция одного переменного

$$\left. \begin{aligned} \{ F(x, y) \}_{y=i \cdot b} &= F(x, ib) = f_i(x) \\ (i = 0, 1, 2, \dots, n+1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Разобьем уравнение (1) на следующие два уравнения:

$$\Delta G(x, y) = 0 \quad (5)$$

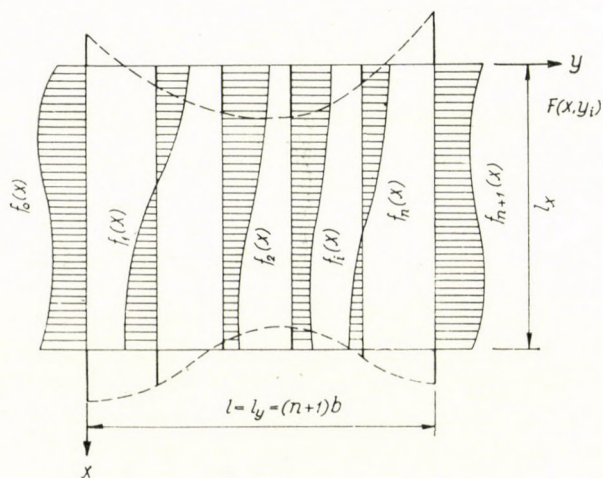
$$\Delta F(x, y) = G(x, y) \quad (6)$$

где

$$G(x, y) = \sigma_x(x, y) + \sigma_y(x, y). \quad (7)$$

Уравнение (5) может быть записано в матричной форме следующим образом:

$$[\Delta G(x, y)] \approx -\frac{1}{b^2} \mathbf{C} \mathbf{g}(x) + \frac{1}{b^2} \mathbf{g}_{(1)}(x) + \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{g}(x) = 0 \quad (8)$$



Черт. 2

где

$$\mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (n) \end{matrix}; \quad g_i(x) \approx G(x, ib)$$

$$\mathbf{g}_{(1)}(x) = \begin{bmatrix} g_0(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{n+1}(x) \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (n) \end{matrix}$$

Систематизируя уравнение (8)

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{g}(x) - \mathbf{A}^2 \mathbf{g}(x) = \mathbf{a}(x) \quad (9)$$

где

$$\mathbf{A}^2 = \frac{1}{b^2} \mathbf{C}, \quad \mathbf{a}(x) = \frac{1}{b^2} \mathbf{g}_{(1)}(x)$$

Общее решение уравнения (9)

$$\mathbf{g}(x) = (\operatorname{ch} \mathbf{A} x) \mathbf{c}_1 + (\operatorname{sh} \mathbf{A} x) \mathbf{c}_2 + \mathbf{b}(x) \quad (10)$$

где

$$\mathbf{b}(x) = -(\operatorname{ch} \mathbf{A} x) \mathbf{A}^{-1} \int (\operatorname{sh} \mathbf{A} x) \mathbf{a}(x) dx + (\operatorname{sh} \mathbf{A} x) \mathbf{A}^{-1} \int (\operatorname{ch} \mathbf{A} x) \mathbf{a}(x) dx \quad (11)$$

Постоянные $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ определяем из краевых условий:

$$\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{g}_0, \mathbf{g}^{(l)} = \mathbf{g}_l \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{g}_0 - \mathbf{b}(0) \\ \mathbf{c}_2 &= (\operatorname{sh} \mathbf{A} l)^{-1} \{ \mathbf{g}_l - \mathbf{b}(l) - \operatorname{ch} \mathbf{A} l [\mathbf{g}_0 - \mathbf{b}(0)] \} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Имея в распоряжении решение уравнения (5), уравнение (6) можно записать аналогично уравнению (8)

$$[F(x, y)] \approx -\frac{1}{b^2} \mathbf{C} \mathbf{f}(x) + \frac{1}{b^2} \mathbf{f}_{(1)}(x) + \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x) \quad (14)$$

Систематизируя уравнение (14)

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{f}(x) - \mathbf{A}^2 \mathbf{f}(x) = \mathbf{d}(x) \quad (15)$$

где

$$\mathbf{d}(x) = \mathbf{g}(x) - \frac{1}{b^2} \mathbf{f}_{(1)}(x)$$

Общее решение уравнения (15) аналогично с решением уравнения (9)

$$\mathbf{f}(x) = (\operatorname{ch} \mathbf{A} x) \mathbf{c}_3 + (\operatorname{sh} \mathbf{A} x) \mathbf{c}_4 + \mathbf{h}(x) \quad (16)$$

где

$$\mathbf{h}(x) = -(\operatorname{ch} \mathbf{A} x)^{-1} \int (\operatorname{sh} \mathbf{A} x) \mathbf{h}(x) dx + (\operatorname{sh} \mathbf{A} x) \mathbf{A}^{-1} \int (\operatorname{ch} \mathbf{A} x) \mathbf{d}(x) dx \quad (17)$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{h}(0) \quad (18)$$

$$\mathbf{c}_4 = (\operatorname{sh} \mathbf{A} l)^{-1} \{ \mathbf{f}_l - \mathbf{h}(l) - \operatorname{ch} \mathbf{A} l [\mathbf{f}_0 - \mathbf{h}(0)] \} \quad (19)$$

2.

На основании работы [2] вторым методом, уравнение (1) может быть приближенно записано следующим матричным уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^4} \mathbf{C}^2 \mathbf{W} + \frac{2}{a^2 b^2} \mathbf{C} \mathbf{W} \mathbf{C} + \frac{1}{b^4} \mathbf{W} \mathbf{C}^2 &= \frac{1}{a^4} \mathbf{C} \mathbf{W}_{(1)} + \frac{1}{b^4} \mathbf{W}_{(2)} \mathbf{C} + \\ + \frac{2}{a^2 b^2} \mathbf{W}_{(0)} - \frac{1}{a^2} \ddot{\mathbf{W}}_{(1)} - \frac{2}{a^2} \ddot{\mathbf{W}}'_{(1)} - \frac{1}{b^2} \ddot{\mathbf{W}}'_{(2)} - \frac{2}{b^2} \ddot{\mathbf{W}}_{(2)} &= \mathbf{D} \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\mathbf{W} = [F(ia, jb)] ; \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

далее

$\mathbf{W}_{(1)}, \mathbf{W}_{(2)}$ содержат краевые значения функции $F(x, y)$ по направлениям y и x ,

$\mathbf{W}_{(0)}$ содержит значения $F(x, y)$ в угловых точках и, наконец, $\mathbf{\ddot{W}}_{(1)},$

$\mathbf{\ddot{W}}_{(2)}, \mathbf{\dot{W}}_{(1)}$ содержат краевые значения переменных σ_x и σ_y .

Решение уравнения (20) может быть записано следующей формулой

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \cdot \{ \mathbf{M} \times (\mathbf{UDU}) \} \cdot \mathbf{U} \quad (21)$$

где

$$\mathbf{M} = \left[\frac{1}{\left(\frac{\lambda_i}{a^2} + \frac{\lambda_j}{b^2} \right)^2} \right]$$

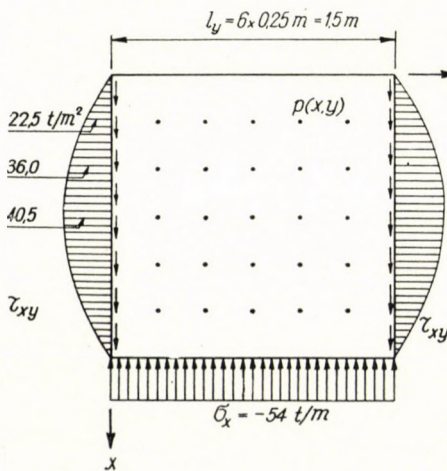
$$\mathbf{L} = \langle \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \rangle$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{ULU}$$

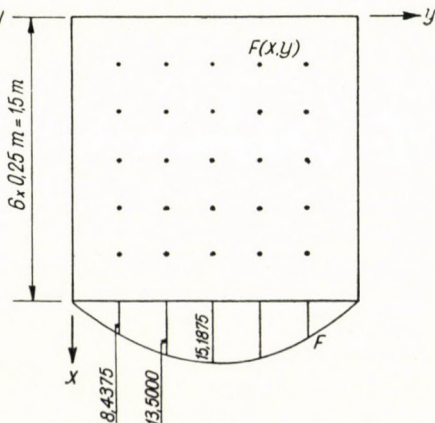
3.

Применение двух способов, упомянутых выше, покажем на числовом примере.

Требуется определить состояние напряжения для прямоугольной шайбы, изображенной на чертеже 3. Краевые значения функции напряжения представлены на чертеже 4.



Черт. 3



Черт. 4

1°Ход решения, в соответствии с первым методом:

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{g}(x) - \mathbf{A}^2 \mathbf{g}(x) = 0$$

где

$$\mathbf{A}^2 = \frac{1}{b^2} \mathbf{C} = \frac{1}{b^2} \mathbf{U} \mathbf{L} \mathbf{U}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{L} \mathbf{U}$$

На основании краевых условий (см. черт. 3 и 4)

$$\mathbf{g}_1(x) = 0, \text{ т. е. } \mathbf{a}(x) = 0$$

$$x = 0, \quad \mathbf{g}(0) = 0, \text{ т. е. } \mathbf{c}_1 = 0$$

$$x = l, \quad \mathbf{g}(l) = -54\mathbf{e}, \quad \text{где } \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{т. е. } \mathbf{c}_2 = -54(\text{sh } \mathbf{A} l)^{-1} \mathbf{e}$$

Общее решение:

$$\mathbf{g}(x) = -54(\text{sh } \mathbf{A} x)(\text{sh } \mathbf{A} l)^{-1} \mathbf{e}$$

далее

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{f}(x) - \mathbf{A}^2 \mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x)$$

$$\mathbf{f}(x) = (\text{ch } \mathbf{A} x) \mathbf{c}_3 + (\text{sh } \mathbf{A} x) \mathbf{c}_4 + \mathbf{h}(x)$$

На основе краевых условий:

$$\mathbf{c}_3 = 0; \quad \mathbf{c}_4 = (\text{ch } \mathbf{A} l)^{-1} \{\mathbf{f}(l) - \mathbf{h}(l)\},$$

где

$$\mathbf{f}(l) = -1,6875 \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}(x) = -\frac{54}{5} \mathbf{A}^{-2} (\text{sh } \mathbf{A} l)^{-1} \{2 \mathbf{A} x (\text{ch } \mathbf{A} x) - \text{sh } \mathbf{A} x\} \mathbf{e}$$

Общее решение $\mathbf{f}(x)$.

$$\mathbf{f}(x) = (\text{sh } \mathbf{A} l)^{-1} (\text{sh } \mathbf{A} x) \{\mathbf{f}(l) - \mathbf{h}(l)\} + \mathbf{h}(x)$$

Матричную функцию $f(x)$ выразим с помощью канонической формы матрицы \mathbf{A} .

$$f(x) = (\text{sh } \mathbf{A} l)^{-1} \left\{ (\text{sh } \mathbf{A} x) \left[\mathbf{f}(l) + \frac{27}{2} \mathbf{A}^{-2} (\text{sh } \mathbf{A} l)^{-1} (2l \mathbf{A} \text{ch } \mathbf{A} l - \text{sh } \mathbf{A} l) \mathbf{e} \right] - \right. \\ \left. - \frac{27}{2} \mathbf{A}^{-2} (2x \mathbf{A} \text{ch } \mathbf{A} x - \text{sh } \mathbf{A} x) \mathbf{e} \right\} = \\ = \mathbf{U} (\text{sh } \mathbf{A} l)^{-1} \left\{ \text{sh } \mathbf{A} x \left[\mathbf{U} \mathbf{f}(l) + \frac{27}{2} \frac{2l \mathbf{A} \text{ch } \mathbf{A} l - \text{sh } \mathbf{A} l}{\mathbf{A}^2 \text{sh } \mathbf{A} l} \mathbf{U} \mathbf{e} \right] - \right. \\ \left. - \frac{27}{2} \frac{2x \mathbf{A} \text{ch } \mathbf{A} x - \text{sh } \mathbf{A} x}{\mathbf{A}^2} \mathbf{U} \mathbf{e} \right\}$$

где:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0,288\ 675 & 0,5 & 0,577\ 350 & 0,5 & 0,288\ 675 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & -0,5 & -0,5 \\ 0,577\ 350 & 0 & -0,577\ 350 & 0 & 0,577\ 350 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0,288\ 675 & -0,5 & 0,577\ 350 & -0,5 & 0,288\ 675 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{16} \mathbf{A}^2 = \langle 0,267\ 949; 1; 2; 3; 3,732\ 051 \rangle$$

$$\mathbf{A} = \langle 2,070\ 552 * 5,656\ 854 * 7,727\ 407 \rangle^2$$

Запишем диагональные матрицы $\mathbf{A}x$, $\text{sh } \mathbf{A}x$, $\text{ch } \mathbf{A}x$

$$0,25 \mathbf{A} = \langle 0,517\ 636 * 1,414\ 216 * 1,931\ 852 \rangle$$

$$0,5 \mathbf{A} = \langle 1,035\ 372 * 2,828\ 432 * 3,863\ 704 \rangle$$

$$0,75 \mathbf{A} = \langle 1,552\ 908 * 4,242\ 649 * 5,795\ 556 \rangle$$

$$1,00 \mathbf{A} = \langle 2,070\ 744 * 5,656\ 864 * 7,727\ 408 \rangle$$

$$1,25 \mathbf{A} = \langle 2,588\ 180 * 7,071\ 080 * 9,659\ 260 \rangle$$

$$1,50 \mathbf{A} = \langle 3,104\ 816 * 8,485\ 296 * 11,591\ 112 \rangle$$

$$\text{sh } 0,25 \mathbf{A} = \langle 0,54106 * 1,93411 * 3,37000 \rangle$$

$$\text{sh } 0,50 \mathbf{A} = \langle 1,22915 * 8,42549 * 23,69110 \rangle$$

$$\text{sh } 0,75 \mathbf{A} = \langle 2,25110 * 34,76951 * 163,17843 \rangle$$

$$\text{sh } 1,00 \mathbf{A} = \langle 3,88624 * 143,03954 * 1123,42720 \rangle$$

$$\text{sh } 1,25 \mathbf{A} = \langle 6,58262 * 588,22059 * 7734,88544 \rangle$$

$$\text{sh } 1,50 \mathbf{A} = \langle 11,07501 * 2418,90647 * 53254,69975 \rangle$$

² На место обозначенное звездочкой (*) может быть записано любое значение, которое согласовано с характером векторов $\mathbf{U} \cdot \mathbf{f}(l)$ и $\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}$.

$$\begin{aligned}
 \text{ch } 0,25 \Lambda &= < 1,13583 * 2,17813 * 3,51500 > \\
 \text{ch } 0,50 \Lambda &= < 1,58022 * 8,48850 23,71045 > \\
 \text{ch } 0,75 \Lambda &= < 2,45991 * 34,78488 * 163,18124 > \\
 \text{ch } 1,00 \Lambda &= < 4,00790 * 143,04351 * 1123,45366 > \\
 \text{ch } 1,25 \Lambda &= < 6,65498 * 588,22157 * 7734,88928 > \\
 \text{ch } 1,50 \Lambda &= < 11,12052 * 2418,90647 * 53254,69975 >
 \end{aligned}$$

Дальше запишем подробно следующие матрицы.

$$\begin{aligned}
 2l \Lambda \text{ch } \Lambda l - \text{sh } \Lambda l &= \\
 &= < 57,979 327 * 38631,368 319 * 1181307,680 016 > \\
 \Lambda^{-2} &= < 0,233 253 * 0,031 250 * 0,016 747 > \\
 (\Lambda^2 \text{sh } \Lambda l)^{-1} &= < 0,021 060 * 0,000 013 * 0,00000032 > \\
 (\Lambda^3 \text{sh } \Lambda l)^{-1} (2l \text{ch } \Lambda l - \text{sh } \Lambda l) \mathbf{U} \mathbf{e} &= \begin{bmatrix} 2,630 986 \\ 0 \\ 0,289 950 \\ 0 \\ 0,058 506 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{U} \mathbf{f}(l) &= \frac{27}{2} \begin{bmatrix} 2,008 340 \\ 0 \\ 0,072 097 \\ 0 \\ 0,010 340 \end{bmatrix} \\
 2\Lambda^{-1} \mathbf{U} \mathbf{e} &= \begin{bmatrix} 2,081 270 \\ 0 \\ 0,204 124 \\ 0 \\ 0,039 980 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Имея в распоряжении эти данные, можно записать матрицу $\mathbf{f}(x)$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(x) = 13,5 \cdot 10^{-6} & \begin{bmatrix} 134047 \text{sh} 2,070544x - 54247x \cdot \text{ch} 2,070544x + 90 \text{sh} 5,656864x - \\ 232177 \text{sh} 2,070544x - 93959x \cdot \text{ch} 2,070544x - \\ 268095 \text{sh} 2,070544x - 108494x \cdot \text{ch} 2,070544x - 90 \text{sh} 5,656864x + \\ 232177 \text{sh} 2,070544x - 93959x \cdot \text{ch} 2,070544x - \\ 134047 \text{sh} 2,070544x - 54247x \cdot \text{ch} 2,070544x + 90 \text{sh} 5,656864x - \\ - 48x \cdot \text{ch} 5,656864x + 0,3 \text{sh} 7,727408x - 0,3x \cdot \text{ch} 7,727408x \\ - 0,5 \text{sh} 7,727408x + 0,5x \cdot \text{ch} 7,727408x \\ + 48x \cdot \text{ch} 5,656864x + 0,6 \text{sh} 7,727408x - 0,3x \cdot \text{ch} 7,727408x \\ - 0,5 \text{sh} 7,727408x + 0,5x \cdot \text{ch} 7,727408x \\ - 48x \cdot \text{ch} 5,656864x + 0,3 \text{sh} 7,727408x - 0,3x \cdot \text{ch} 7,727408x \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

На основании матрицы $f(x)$ в сечениях $y = ib (i = 1, 2, \dots)$ можно определить значения $F(x, y)$ функции напряжения для любого x . Значения функции $F(x, y)$ во внутренних точках, отмеченных на чертеже 4., собраны в нижеприведенную матрицу:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0,77317 & 1,33576 & 1,54038 & 1,33576 & 0,77317 \\ 1,65322 & 2,85036 & 3,28400 & 2,85036 & 1,65322 \\ 2,74814 & 4,71542 & 5,42005 & 4,71542 & 2,74814 \\ 4,17866 & 7,09718 & 8,11405 & 7,09718 & 4,17866 \\ 6,04781 & 10,09106 & 11,39156 & 10,09106 & 6,04781 \end{bmatrix}$$

2° Ход решения, в соответствии со вторым методом.

На основании уравнения (20):

$$a = b = 0,25$$

$$\mathbf{C}^2 \mathbf{W} + 2\mathbf{CWC} + \mathbf{WC}^2 = \mathbf{CW}_{(1)} + \mathbf{W}_{(1)}\mathbf{C} - a^2 \mathbf{G}_{(1)} = \mathbf{D}$$

$$-a^2 \mathbf{G}_{(1)} = 1,6875 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \mathbf{W}_{(1)} = 1,6875 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = 1,6875 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -8 & -9 & -8 & -5 \\ 14 & 20 & 22 & 20 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{ULU}$$

$$\mathbf{L} = \langle 0,267\ 949; 1; 2; 3; 3,732\ 051 \rangle$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3,482\ 056 & 0,622\ 009 & 0,194\ 417 & 0,093\ 637 & 0,062\ 500 \\ 0,622\ 009 & 0,250\ 000 & 0,111\ 111 & 0,062\ 500 & 0,044\ 658 \\ 0,194\ 417 & 0,111\ 111 & 0,062\ 500 & 0,040\ 000 & 0,030\ 435 \\ 0,093\ 637 & 0,062\ 500 & 0,040\ 000 & 0,027\ 778 & 0,022\ 065 \\ 0,062\ 500 & 0,044\ 658 & 0,030\ 435 & 0,022\ 065 & 0,017\ 949 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{UDU} = \begin{bmatrix} 6,297\ 824 & 0 & 1,200\ 359 & 0 & 0,312\ 262 \\ -20,842\ 059 & 0 & -2,435\ 695 & 0 & -0,592\ 059 \\ 39,735\ 544 & 0 & 3,374\ 997 & 0 & 0,764\ 419 \\ -47,981\ 953 & 0 & -3,409\ 973 & 0 & -0,731\ 953 \\ 33,437\ 718 & 0 & 2,174\ 637 & 0 & 0,452\ 105 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} \times (\mathbf{UDU}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 21,92938 & 0 & 0,23337 & 0 & 0,01952 \\ -12,96395 & 0 & -0,27063 & 0 & 0,02644 \\ 7,72526 & 0 & 0,21094 & 0 & 0,02326 \\ -4,49289 & 0 & -0,13640 & 0 & -0,01615 \\ 2,08986 & 0 & 0,06618 & 0 & 0,00812 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \cdot \{\mathbf{M} \times (\mathbf{UDU})\} \cdot \mathbf{U} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,77224 & 1,33271 & 1,53628 & 1,33271 & 0,77224 \\ 1,65057 & 2,84184 & 3,27260 & 2,84184 & 1,65057 \\ 2,74592 & 4,70240 & 5,40323 & 4,70240 & 2,74592 \\ 4,17642 & 7,07222 & 8,09180 & 7,07222 & 4,17642 \\ 6,05889 & 10,03982 & 11,40456 & 10,03982 & 6,05889 \end{bmatrix}$$

Элементы матрицы \mathbf{W} хорошо согласуются с элементами матрицы \mathbf{F} , полученными первым способом.

Отметим, что возможность промежуточной проверки при решении вторым способом, обеспечивается тем, что след матрицы во время ортогональных преобразований остается неизменным. Например:

$$Sp(\mathbf{D}) = Sp(\mathbf{UDU}) = 1,6875. (-6,0000)$$

$$Sp\{\mathbf{M} \times (\mathbf{UDU})\} = Sp(\mathbf{W}) = 1,6875 \cdot 13,125$$

Элементы матрицы \mathbf{W} дают приближенные значения функции $\mathbf{F}(x, y)$ в точках разбиения. Зная \mathbf{W} значения напряженностей, σ_x, σ_y можно записать следующим формулами:

$$[\sigma_x] = -\frac{1}{a^2} \mathbf{WC}; \quad [\sigma_y] = -\frac{1}{a^2} \mathbf{CW} + \frac{1}{a^2} \mathbf{W}_{(1)}$$

$$[\sigma_x] = \begin{bmatrix} -3,388 & -5,710 & -6,514 & -5,710 & -3,388 \\ -7,349 & -12,168 & -13,748 & -12,168 & -7,349 \\ -12,631 & -20,090 & -22,427 & -20,090 & -12,631 \\ -20,490 & -30,020 & -32,627 & -30,020 & -20,490 \\ -33,247 & -41,859 & -43,671 & -41,859 & -33,247 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_y] = \begin{bmatrix} 1,697 & 2,822 & 3,200 & 2,822 & 1,697 \\ 3,473 & 5,623 & 6,309 & 5,623 & 3,473 \\ 5,362 & 8,148 & 8,927 & 8,148 & 5,362 \\ 7,232 & 9,564 & 9,987 & 9,564 & 7,232 \\ 7,938 & 7,881 & 7,523 & 7,881 & 7,938 \end{bmatrix}$$

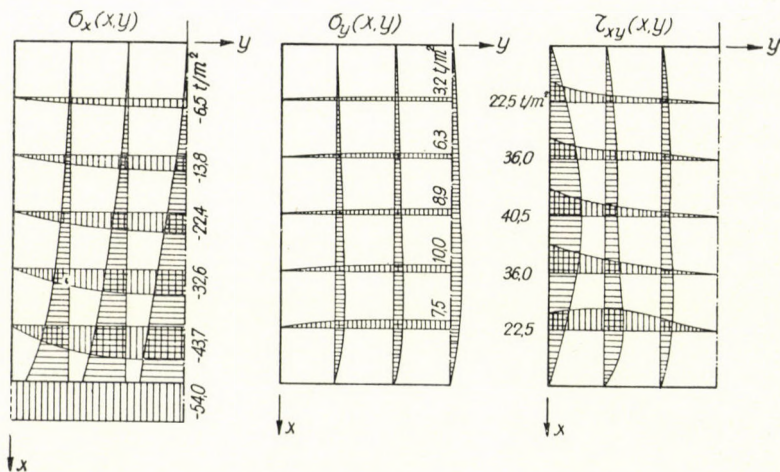
Приближенное значение касательного напряжения τ_{xy} , выраженное формулой

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

можно получить из элементов матрицы \mathbf{W} с помощью двухсторонних конечных разностей.

$$[\tau_{xy}] = \begin{bmatrix} 11,367 & 6,488 & 0 & -6,488 & -11,367 \\ 13,479 & 7,573 & 0 & -7,573 & -13,479 \\ 16,921 & 9,173 & 0 & -9,173 & -16,921 \\ 21,350 & 10,753 & 0 & -10,753 & -21,350 \\ 25,711 & 11,338 & 0 & -11,338 & -25,711 \end{bmatrix}$$

На чертеже (5) представлены кривые возможного изменения напряжений с учетом известных значений напряжения в дискретных точках.



Черт. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. K. GIRKMANN: *Flächentragwerke* (Springer-Verlag, Wien, 1946).
2. I. SZABÓ: Ein neues Verfahren zur unmittelbaren numerischen Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe (*ZaMM*, Band 38, Heft 7/8, 1958).

РЕЗЮМЕ

Работа занимается расчетом состояния плоскостного напряжения для прямоугольных шайб постоянной толщины, причем рассматривается случай лишь краевых нагрузок. Для разрешения задачи авторы показывают два метода приближения, которые можно усилить до любой степени точности. Первый метод предполагает искомые функции

двух переменных лишь при дискретных значениях одного переменного, а задача записана в виде обычного линейного матрично-дифференциального уравнения. Другой метод предполагает искомую функцию от напряжения исключительно в дискретных значениях, а задачу сводит к решению линейного матричного уравнения.

DIE BERECHNUNG WANDARTIGER TRÄGER

I. SÁNDOR und J. SZABÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Die Mitteilung befaßt sich mit der Berechnung des ebenen Spannungszustandes von rechtwinkligen, ausschließlich randbelasteten wandartigen Trägern mit konstanter Stärke. Zur Lösung der Aufgabe werden zwei, bis zu einer beliebigen Genauigkeit steigerbare Näherungsverfahren vorgeführt. Die eine Lösung definiert die gesuchte Funktion mit zwei Veränderlichen bloß bei den diskreten Werten der einen Veränderlichen und schreibt die Aufgabe in Form einer gewöhnlichen linearen Matrix-Differentialgleichung an. Die andere Lösung definiert die gesuchte Spannungsfunktion ausschließlich in diskreten Punkten und reduziert die Aufgabe auf die Lösung einer linearen Matrixgleichung.

ANALYSIS OF DEEP BEAMS

I. SÁNDOR and J. SZABÓ

SUMMARY

Two-dimensional stress state of uniformly thick rectangular deep beams are analysed at the edge loads only. Authors describe two approximation methods for the accuracy to be increased arbitrarily. One of the methods defines the studied function of two variables at the discrete values of but one of the variables, and sets up the problem in the form of an ordinary linear matrix differential equation. With the other method the studied stress equation is defined at discrete points only, and the problem is reduced to the solution of a linear matrix equation.

CALCUL DES POUTRES-CLOISONS

I. SÁNDOR et J. SZABÓ

RÉSUMÉ

Les auteurs étudient le calcul de l'état de tension plane de poutres-cloisons de forme rectangulaire, d'épaisseur constante, chargées uniquement au bord. Ils présentent deux procédés d'approximation pouvant être amenés jusqu'à la précision désirée. L'une des solutions n'interprète la fonction à deux variables qu'aux valeurs discrètes de l'une des variables, et représente le problème sous forme d'une équation différentielle d'une matrice linéaire ordinaire. L'autre solution interprète la fonction de tension cherchée uniquement dans des points discrets, et réduit le problème à la solution d'une équation matricielle linéaire.

DAS ANLASSEN UND REGELN VON SCHLEIFRING- ASYNCHRONMOTOREN MIT ASYMMETRISCHEM LÄUFERWIDERSTAND

K. P. KOVÁCS

KORRESP. MITGLIED D. UNG. AKADEMIE D. WISSENSCHAFTEN
KRAFTWERK-TRUST, BUDAPEST

[Eingegangen am 3. Mai 1960]

1. Einleitung

Wie bekannt, werden bei Schleifringmotoren zur Verminderung der Anzahl der Regelkontakte im Läuferkreis solche Metall-Anlaß bzw. Regelwiderstände angewandt, deren einzelne Phasenwiderstände in gewissen Regelungslagen verschieden sind. Im folgenden wird das Verhalten eines mit einem solchen asymmetrischen Läuferwiderstand geregelten Motors untersucht.

Bei der Erörterung der im Läufer asymmetrischen Maschinen (sowohl Synchron- als Asynchronmaschinen) ist es zweckmäßig, die Gleichungen der Maschine im an den Läufer gebundenen Koordinatensystem anzuschreiben und, falls möglich, die (zweiphasige) Zerlegung in Richtungen d und q anzuwenden. Mit diesen zwei mathematischen Mitteln kann die Behandlung der Form nach sehr einfach gestaltet werden. Bei Synchronmaschinen ergibt sich die Zerlegung in Richtungen d und q wegen des Aufbaues des Läufers von selbst, da die Erregerspule im allgemeinen die ausgezeichnete Richtung des Läufers der Synchronmaschine ist, so daß die Richtung d gewöhnlich in Richtung der Erregerspule aufgenommen wird. Die Notwendigkeit dieser Zerlegung geht besonders klar bei den Synchronmaschinen mit ausgeprägten Polen (Schenkelpolmaschinen) hervor, wo zwei, aufeinander normale magnetische Symmetrieebenen vorhanden sind. Bei den Asynchronmaschinen gibt es wegen des gleichmäßigen Luftspaltes und der rundherum gleichmäßig ausgestanzten Nuten keine magnetische Asymmetrie. Eine elektrische Asymmetrie wird durch das in den Läuferkreis der Schleifringmotoren eingeschaltete asymmetrische Dreiphasen-Widerstandssystem verursacht. Es sei erwähnt, daß in gewissen Fällen des asymmetrischen Läuferwiderstandssystems die aufeinander normalen Symmetrieachsen d und q sich unmittelbar herausbilden. In dem extremen Fall, z. B., wo im Läuferkreis die eine Phase unterbrochen wird, die beiden anderen Phasen jedoch kurzgeschlossen bleiben (siehe Abb. 1/a), kann die Richtung d in Achsrichtung der offenen Phase a , und die Richtung q in der resultierenden Richtung der in Kurzschluß gebliebenen Phasenspulen b und c aufgenommen werden. Eine ähnliche Lage ergibt

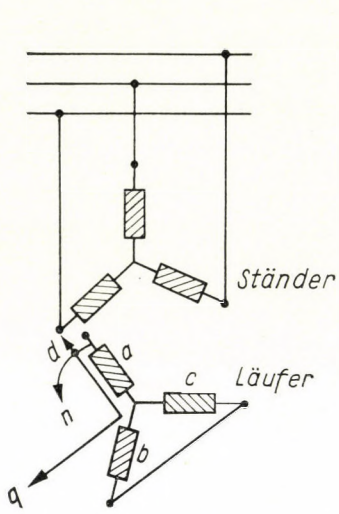


Abb. 1/a

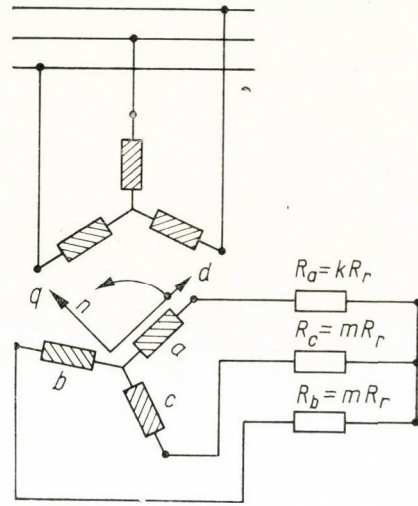


Abb. 1/b

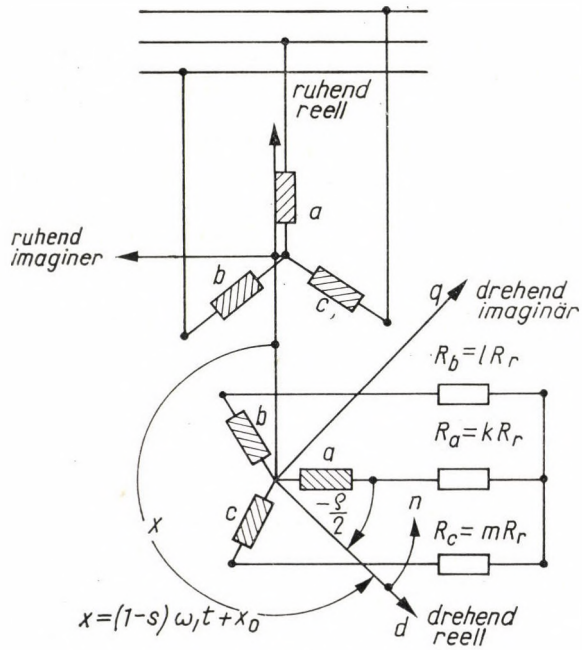


Abb. 1/c

sich, wenn in zwei Phasen des Läuferkreises (z. B. in Phasen b und c) gleich große äußere Widerstände, in die dritte Phase (Phase a) jedoch ein von den Widerständen der Phasen b und c abweichender Widerstand geschaltet werden. (s. Abb. 1/b). Auch in diesem Falle werden sich die aufeinander normalen Läuferrichtungen d und q von selbst ergeben, und zwar ist die Achse d in Richtung der Phasenspule a , die Achse q aber dazu normal in der resultierenden Richtung der Phasenspulen b und c aufzunehmen. Im allgemeinen werden jedoch die Werte aller drei Phasenwiderstände als verschieden angenommen (s. Abb. 1/c), und es soll die Möglichkeit der Zerlegung in Richtungen d und q hierbei untersucht werden. Nachdem der Ständer der Maschine an ein symmetrisches Dreiphasen-Spannungssystem gelegt wurde und die Maschine selbst einen symmetrischen Dreiphasenaufbau zeigt, liegt die einzige Ursache des asymmetrischen Betriebes im in den Läuferkreis eingeschalteten asymmetrischen Widerstandssystem. Im nachfolgenden werden daher zunächst die Ströme und Spannungen des Läufers auf ihre Komponenten in Richtungen d und q zerlegt.

2.1 Zerlegung der Läuferströme und Spannungen auf ihre Komponenten in Richtungen d und q

Es sei das in den Läuferkreis geschaltete asymmetrische Widerstandssystem (s. Abb. 1/c):

$$R_a = kR_r; \quad R_b = lR_r; \quad R_c = mR_r$$

wo R_r den inneren Läuferwiderstand je Phase bedeutet. Die symmetrischen Komponenten des Widerstandssystems R_a , R_b und R_c (die Realachse liegt in Richtung der Phasenspule a des Läufers) sind:

$$\bar{z}_0 = \frac{R_a + R_b + R_c}{3} = R_r \frac{k + l + m}{3} = R_0 \quad (1a)$$

$$\bar{z}_1 = \frac{R_a + \bar{\alpha} R_b + \bar{\alpha}^2 R_c}{3} = R_r \frac{k + \bar{\alpha} l + \bar{\alpha}^2 m}{3} = R_1 e^{j\varrho} \quad (1b)$$

$$\bar{z}_2 = \frac{R_a + \bar{\alpha}^2 R_b + \bar{\alpha} R_c}{3} = R_r \frac{k + \bar{\alpha}^2 l + \bar{\alpha} m}{3} = R_1 e^{-j\varrho} \quad (1c)$$

Der in den Gleichungen (1) vorkommende Widerstand R_1 ist

$$R_1 = \frac{R_r}{3} \sqrt{k^2 + l^2 + m^2 - (kl + km + lm)}$$

und

$$\varrho = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l - m}{k - \frac{1}{2}(l + m)}$$

Nun ist die Spannungsgleichung des äußeren Stromkreises des Läufers mit den dreiphasigen symmetrischen Komponenten der Ströme und Spannungen anzuschreiben, wonach

$$\bar{u}_{1r} = \bar{i}_{1r} \bar{z}_0 + \bar{i}_{2r} \bar{z}_2, \quad (2a)$$

$$\bar{u}_{2r} = \bar{i}_{1r} \bar{z}_1 + \bar{i}_{2r} \bar{z}_0. \quad (2b)$$

Durch Substituierung der Werte \bar{z}_0 , \bar{z}_1 und \bar{z}_2 aus Gleichungen (1) erhält man:

$$\bar{u}_{1r} = \bar{i}_{1r} R_0 + \bar{i}_{2r} R_1 e^{-j\varrho}, \quad (3a)$$

$$\bar{u}_{2r} = \bar{i}_{1r} R_1 e^{j\varrho} + \bar{i}_{2r} R_0. \quad (3b)$$

Zwischen den dreiphasigen symmetrischen Komponenten und den zweiphasigen symmetrischen Komponenten (d und q) bestehen die folgenden bekannten Beziehungen:

$$\bar{u}_{dr} = \bar{u}_{1r} + \bar{u}_{2r}, \quad (4a)$$

$$\bar{u}_{qr} = -j(\bar{u}_{1r} - \bar{u}_{2r}), \quad (4b)$$

$$\bar{i}_{dr} = \bar{i}_{1r} + \bar{i}_{2r}, \quad (4c)$$

$$\bar{i}_{qr} = -j(\bar{i}_{1r} - \bar{i}_{2r}). \quad (4d)$$

Werden die Werte von \bar{u}_{1r} und \bar{u}_{2r} aus Gleichungen (3) in die Gleichungen (4a) und (4b) eingesetzt, und auch die Beziehungen (4c) und (4d) benutzt, gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$\bar{u}_{dr} = \bar{i}_{dr} (R_0 + R_1 \cos \varrho) - \bar{i}_{qr} R_1 \sin \varrho,$$

$$\bar{u}_{qr} = -\bar{i}_{dr} R_1 \sin \varrho + \bar{i}_{qr} (R_0 - R_1 \cos \varrho).$$

Aus diesen letzteren Gleichungen geht klar hervor, daß die Spannungen \bar{u}_{dr} bzw. \bar{u}_{qr} zugleich von \bar{i}_{dr} und \bar{i}_{qr} abhängig sind, so daß ein Läufer-Koordinatensystem, dessen Realachse in Richtung der Phasenspule a des Läufers zeigt, im allgemeinen keine voneinander unabhängigen Richtungen d und q geben kann. Die Frage ist nun, ob es nicht möglich wäre, am Läufer eine Koordinatentransformation anzuwenden, bei welcher die elektrischen Größen in den Richtungen d und q voneinander tatsächlich unabhängig werden. Eine solche Koordinatentransformation ergibt sich durch die Verdrehung der in den Spannungsgleichungen (3) vorkommenden Spannungen und Ströme um einen entsprechenden Winkel. Es sei dieser Transformationswinkel ε und nun soll das Gleichungssystem (3) in transformierter Form angeschrie-

ben werden, wobei zu berücksichtigen ist, daß die Transformation der mitlaufenden Größen die Werte

$$\bar{u}_{1r} e^{j\varepsilon} \quad \text{und} \quad \bar{i}_{1r} e^{j\varepsilon}$$

und jene der gegenlaufenden Größen die Werte

$$\bar{u}_{2r} e^{-j\varepsilon} \quad \text{und} \quad \bar{i}_{2r} e^{-j\varepsilon}$$

liefert.

Es ist ersichtlich, daß die vorgeschlagene Transformation im an den Läufer gebundenen Koordinatensystem bloß die Verdrehung um den Winkel ε bedeutet.

Das Gleichungssystem (3) gestaltet sich in transformierter Form zu:

$$\bar{u}_{1r} e^{j\varepsilon} = \bar{i}_{1r} e^{j\varepsilon} R_0 + \bar{i}_{2r} e^{-j(\varepsilon+\varrho)} R_1, \quad (3a')$$

$$\bar{u}_{2r} e^{-j\varepsilon} = \bar{i}_{1r} e^{j(\varepsilon+\varrho)} R_1 + \bar{i}_{2r} e^{-j\varepsilon} R_0. \quad (3b')$$

Wird die Substitution $\varepsilon = -\varrho/2$ durchgeführt, so nehmen die Gleichungen (3') folgende Form an:

$$\bar{u}'_{1r} = \bar{i}'_{1r} R_0 + \bar{i}'_{2r} R_1, \quad (5a)$$

$$\bar{u}'_{2r} = \bar{i}'_{1r} R_1 + \bar{i}'_{2r} R_0 \quad (5b)$$

wo

$$\bar{u}'_{1r} = \bar{u}_{1r} e^{-j\frac{\varrho}{2}}; \quad \bar{i}'_{1r} = \bar{i}_{1r} e^{-j\frac{\varrho}{2}}$$

$$\bar{u}'_{2r} = \bar{u}_{2r} e^{-j\frac{\varrho}{2}}; \quad \bar{i}'_{2r} = \bar{i}_{2r} e^{-j\frac{\varrho}{2}} \quad \text{ist.}$$

Aus Gleichungen (5) gelangt man bei Anwendung der Beziehungen (4) zu folgenden Ausdrücken:

$$\bar{u}_{dr} = \bar{i}_{dr} (R_0 + R_1), \quad (6a)$$

$$\bar{u}_{qr} = \bar{i}_{qr} (R_0 - R_1). \quad (6b)$$

Dies bedeutet, daß tatsächlich eine Koordinaten-Transformation gefunden wurde, mit deren Hilfe es gelang, die Größen in Richtungen d und q voneinander unabhängig zu machen.

Die Transformation selbst besteht daher darin, daß die Läufer-Ströme und Spannungen im Vergleich zum ursprünglichen Koordinatensystem (dessen Realachse in Richtung der Läuferspule a zeigt, s. Abb. 1/c) in ein um den Winkel

$$\varepsilon = -\frac{\varrho}{2} = -\frac{1}{2} \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l-m}{k - \frac{1}{2}(l+m)}$$

verdrehen Koordinatensystem umgeschrieben wurden. (Die neue Achse d schließt mit der Phasenspule a des Läufers den Winkel $-\varrho/2$ ein.)

Es soll die im vorstehenden besprochene Koordinatentransformation an Hand eines praktischen Beispiels klargelegt werden.

Seien die Werte der drei Widerstände im Läuferkreis:

$$R_a = 2R_r; \quad R_b = 5R_r; \quad R_c = 6R_r,$$

das heißt: $k = 2$; $l = 5$; und $m = 6$.

Laut Gleichungen (2) und (3) ist

$$R_0 = \frac{2 + 5 + 6}{3} R_r = 4,33 R_r,$$

$$R_1 = \frac{R_r}{3} \sqrt{4 + 25 + 36 - (10 + 12 + 30)} = R_r \frac{\sqrt{13}}{3} = 1,2 R_r,$$

$$\varrho = \arctg \frac{5 - 6}{2 - \frac{5 + 6}{2}} = \arctg \frac{1}{3,5} = \arctg 0,286 = 16^\circ$$

Wenn zufälligerweise $R_a = kR_r$ und $R_b = R_c = mR_r = lR_r$ ist, dann sind zwei zueinander normale Symmetrieachsen zu verzeichnen, und es wird:

$$R_0 = \frac{k + 2m}{3} R_r \quad \text{und} \quad R_1 = \frac{k - m}{3} R_r \quad \text{bzw.}$$

$$R_0 + R_1 = \frac{2k + m}{3} R_r \quad \text{und} \quad R_0 - R_1 = mR_r,$$

und nachdem $l = m$, wird $\varrho = 0$ sein.

Wie zu erwarten war, fallen diesmal die Achse d und die Phasenachse a wegen der natürlichen Symmetrieachsen des Läufers zusammen.

2.2. Ständergleichungen

Nachdem der Läufer im allgemeinen mit dem Schlupf s läuft, ist der von den ruhenden und drehenden Koordinatensystemen eingeschlossene Winkel in jedem Augenblick $x = (1 - s) \omega_1 t + x_0$ (s. Abb. 1/c). Im folgenden wird die Bedingung $x_0 = 0$ angewandt, da der Ausgangswinkel (für $t = 0$) beim stationären Betrieb ohne Bedeutung ist. Wird die symmetrische dreiphasige Ständerspannung in Läufer-Koordinaten transformiert, so erhält man:

$$\bar{u}_d = \bar{u}_{sL} = \bar{u}_s e^{-jx} = \bar{U}_s e^{j\omega_1 t} \cdot e^{-j(1-s)\omega_1 t} = \bar{U}_s e^{js\omega_1 t}$$

bzw.

$$\bar{u}_q = -j \bar{u}_d = -j \bar{u}_s e^{-jx} = -j \bar{U}_s e^{js\omega_1 t}.$$

Die Ständerspannungsgleichung ergibt sich im drehenden Läufer-Koordinatensystem zu

$$\bar{u}_{sL} = \bar{i}_{sL} R_s + \frac{d\bar{\psi}_{sL}}{dt} + j(1-s)\omega_1 \bar{\psi}_{sL} \quad (7)$$

oder auf Richtungen d und q zerlegt bzw. die reellen und imaginären Teile abgesondert, erhält man:

$$u_d = i_d R_d + \frac{d\psi_d}{dt} - (1-s)\omega_1 \psi_q \quad (8a)$$

$$u_q = i_q R_s + \frac{d\psi_q}{dt} + (1-s)\omega_1 \psi_d \quad (8b)$$

Schließlich können die Gleichungen (8), da die darin vorkommenden sämtlichen Größen sich zeitlich nach einem Sinusgesetz mit der Kreisfrequenz $s\omega_1$ ändern, auch in folgender Form angeschrieben werden:

$$\bar{u}_d = \bar{i}_d R_s + \frac{d\bar{\psi}_d}{dt} - (1-s)\omega_1 \bar{\psi}_q \quad (9a)$$

$$-j\bar{u}_d = \bar{i}_q R_s + \frac{d\bar{\psi}_q}{dt} + (1-s)\omega_1 \bar{\psi}_d \quad (9b)$$

Aus dem Gleichungssystem (9) erhält man durch die Anwendung zweiphasiger symmetrischen Komponenten folgende Formen:

$$\bar{u}_d = \bar{u}_{sL} = \bar{i}_{1L} R_s + \frac{j\omega_1 \bar{\psi}_d + j(j\omega_1 \bar{\psi}_q)}{2}, \quad (10a)$$

$$0 = \bar{i}_{2L} \frac{R_s}{2s-1} + \frac{j\omega_1 \bar{\psi}_d - j(j\omega_1 \bar{\psi}_q)}{2}. \quad (10b)$$

Zwischen den im Gleichungssystem (10) vorkommenden Ständerspannungen $j\omega_1 \bar{\psi}_d$ und $j\omega_1 \bar{\psi}_q$ und Ständerströmen \bar{i}_d und \bar{i}_q geben die bei Asynchronmotoren üblichen Ersatzschaltungen den Zusammenhang. In Abb. 2/a ist das Ersatzschaltbild für Richtung d dargestellt. Hieraus geht hervor, daß

$$j\omega_1 \bar{\psi}_d = \bar{i}_d Z_d = \frac{\bar{i}_d}{\bar{Y}_d} \quad (11)$$

wo \bar{Z}_d die Eingangsimpedanz der dem ursprünglichen Motor gleichen Maschine (ohne Ständer-Wirkwiderstand) bedeutet, in deren Läuferkreis laut (6a)

der äußere Widerstand $R_0 + R_1 = R_r (K_0 + K_1)$ eingeschaltet wurde. Auf Grund der Abb. 2b ergibt sich ähnlicherweise:

$$\omega_1 \bar{\psi}_q = \bar{i}_q \bar{Z}_q = \frac{\bar{i}_q}{\bar{Y}_q} \quad (12)$$

Im Läuferkreis dieser letzteren Maschine ist laut (6b) der äußere Widerstand $R_0 - R_1 = R_r (K_0 - K_1)$ eingeschaltet.

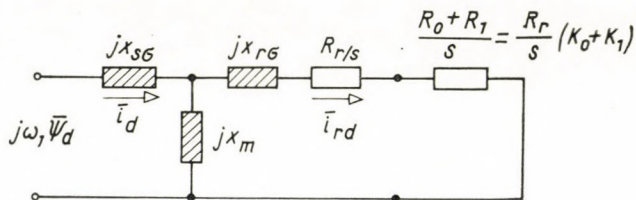


Abb. 2/a

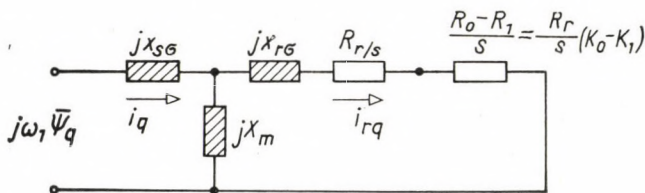


Abb. 2/b

In dieser Weise wurde eigentlich die im Läufer asymmetrische Dreiphasenmaschine in zwei gleiche Maschinen für die Richtungen d bzw. q zerlegt, deren gemeinsame Wirkung mit jener der ursprünglichen Maschine sowohl in elektrischer Hinsicht wie auch in Bezug auf die Momentenverhältnisse übereinstimmt.

Zur Vereinfachung der Berechnungen kann auch ein Ersatzschaltbild — wie bekannt [1], [2] — gezeichnet werden (siehe Abb. 3). Aus dem Schaltbild ist klar ersichtlich, daß wenn $\bar{Z}_d = \bar{Z}_q$ ist, d. h. in allen drei Phasen des Läuferkreises der Widerstand gleich groß ist, dann wird nur

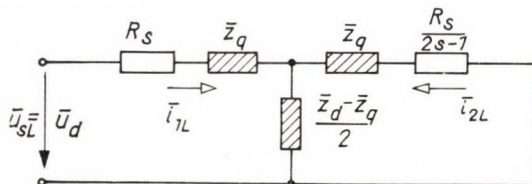


Abb. 3

das normale mitlaufende Ersatzschaltbild bzw. nur die Mitmaschine wirksam sein. Der Wert des im Läuferkoordinaten angegebenen gegenlaufenden Ständerstromes \bar{i}_{2L} beträgt im ruhenden Koordinatensystem:

$$\bar{i}_{2L} e^{-jx} = \bar{I}_2 e^{js\omega_1 t} e^{-j(1-s)\omega_1 t} = \bar{I}_2 e^{j(2s-1)\omega_1 t}$$

und der Mitstrom \bar{i}_{1L} ist im ruhenden Koordinatensystem:

$$\bar{i}_{1L} e^{jx} = \bar{I}_1 e^{js\omega_1 t} e^{j(1-s)\omega_1 t} = \bar{I}_1 e^{j\omega_1 t}$$

Aus dem Ersatzschaltbild ist es ersichtlich, daß in der Nähe von $s = 0,5$ der Wert $R_s/(2s - 1)$ sich steil ändert und bei $s = 0,5$ unendlich wird. Bei genauer halber Synchronzahl verschwinden im Ständer die Gegenspannungen und Gegenströme. In der Nähe der halben Drehzahl ändern sich nicht nur die Ströme in höherem Maße, sondern es tritt auch im Drehmoment eine vom Maß der Läuferasymmetrie abhängige Einsattelung auf.

Die weitere theoretische Untersuchung der Strom- und Momentenverhältnisse kann einfach gestaltet werden, wenn wir den ganzen Schlupfbereich zwischen $1 \rightarrow s \rightarrow 0$ auf zwei Schlupfbereiche unterteilen, und die Untersuchung auf beide Teile gesondert vornehmen. Wir unterscheiden Schlupfbereich $s = 0,5$ (d. h. ungefähr $0,4 \rightarrow s \rightarrow 0,6$) und die übrigen Schlupfwerte zwischen $1 \rightarrow s \rightarrow 0,6$ bzw. $0,4 \rightarrow s \rightarrow 0$. Für diesen größeren Schlupfbereich kann man bei nicht ganz kleinen Maschinen mit sehr guter Näherung $R_s = 0$ setzen; für den Schlupfbereich $s = 0,5$ muß man naturgemäß den Ständerwirkwiderstand in Betracht ziehen.

In diesem Sinne sollen die Strom- und Momentenverhältnisse zuerst unter Vernachlässigung des Ständerwirkwiderstandes untersucht werden. Wie z. B. aus Abb. 3 ersichtlich, ist also in diesem Fall $R_s/(2s - 1)$, und somit wurden die Erscheinungen in der Nähe von $s = 0,5$ gänzlich außer acht gelassen. Diese Vereinfachung ist nicht nur aus den oben angeführten theoretischen Gründen zweckmäßig, sondern auch praktisch dann angebracht, wenn Z_d nicht wesentlich von Z_q abweicht, da in diesem Falle der Läufer der Maschine nahezu symmetrisch und der Wert der die Gegenströme hervorrufoenden Spannung ohnedies gering ist. Bei den üblichen asymmetrischen Anlaß- und Regelwiderständen verursacht diese Vereinfachung keinen beachtenswerten Fehler.

3.1 Stromverhältnisse bei $R_s = 0$.

Der resultierende Ständerstrom ist im drehenden Läufer-Koordinatensystem

$$\bar{i}_{sL} = U_s \left[\frac{Y_d + \bar{Y}_q}{2} e^{j(s\omega_1 t + a)} + \frac{\bar{Y}_d^* - Y_q^*}{2} e^{-j(s\omega_1 t + a)} \right]. \quad (13)^1$$

¹ Mit * sind die konjugiert-komplexe Werte bezeichnet.

Wird in Ständer-Koordinaten übergegangen, wonach

$$\bar{i}_s = \bar{i}_{sL} e^{jx} = \bar{i}_{sL} e^{j(1-s)\omega_1 t}$$

ist, so erhält man:

$$\bar{i}_s = U_s \left[\frac{\bar{Y}_d + \bar{Y}_q}{2} e^{j(\omega_1 t + a)} + \frac{Y_d^* - \bar{Y}_q^*}{2} e^{-j[(2s-1)\omega_1 t + a]} \right]. \quad (14)$$

Schließlich ergibt sich, da $\bar{u}_s = U_s e^{j(\omega_1 t + a)}$ ist:

$$\bar{i}_s = \bar{u}_s \left[\frac{Y_d + \bar{Y}_q}{2} + \frac{Y_d^* - \bar{Y}_q^*}{2} e^{-j2s\omega_1 t} \right]. \quad (15)$$

Nach Reduzierung durch $e^{j\omega_1 t}$ auf beiden Seiten in (15) erhält man die üblichen Zeitzeiger:

$$\bar{I}_s = \bar{U}_s \left[\frac{\bar{Y}_d + \bar{Y}_q}{2} + \frac{Y_d^* - \bar{Y}_q^*}{2} e^{-j2s\omega_1 t} \right]. \quad (16)$$

Aus (16) geht folgendes hervor. Der Primärstrom des Motors mit asymmetrischem Widerstand im Läuferkreis ($R_a = kR_r$, $R_b = lR_r$, $R_c = mR_r$ und bei $R_s = 0$) besteht aus zwei Teilen:

A) Aus dem bei einem gewissen Schlupf s konstanten Strom

$$\bar{I}_{s1} = \bar{U}_s \frac{\bar{Y}_d + \bar{Y}_q}{2},$$

B) aus dem in Bezug auf Strom I_{s1} sich mit Frequenz $2s\omega_1$, in negativer Richtung drehenden Strom $\bar{I}_{s2} = \bar{U}_s \frac{Y_d^* - \bar{Y}_q^*}{2}$. Die Darstellung dieser beiden Ströme ist sehr einfach. Die Endpunkte der Admittanz-Zeiger \bar{Y}_d und \bar{Y}_q bewegen sich bei Änderung des Schlupfes, wie dies auf Grund der Bilder 2a und 2b einleuchtend ist, auf demselben Kreis (am Admittanzdiagramm des in Rede stehenden Asynchronmotors), nur sind den gleichen Werten von s infolge der verschiedenen Läuferkreis-Widerstände verschiedene Kreispunkte zugeordnet. Die Verhältnisse sind in Abb. 4 dargestellt. Kreis K stellt das Kreisdiagramm der Maschine dar. Auf diesem Kreis wurde der zum Schlupf s und zum äußeren Läuferkreiswiderstand R_r ($K_0 + K_1$) gehörende Kreispunkt mit \bar{Y}_d bezeichnet. Ebenfalls wurde auf dem Kreis auch der dem äußeren Widerstand R_r ($K_0 - K_1$) zugeordnete Kreispunkt bei demselben Schlupf mit \bar{Y}_q bezeichnet. In der üblichen Darstellung hat der Zeiger der Admittanz $\frac{Y_d + Y_q}{2}$ bei konstantem Schlupf eine konstante

Länge und einen konstanten Phasenwinkel. Um den Endpunkt dieses Zeigers dreht sich der Admittanzzeiger $\frac{\bar{Y}_d^* - \bar{Y}_q^*}{2}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $2s\omega_1$ in negativer Richtung. In der Maschine ändert sich der konstante Mitstrom $\left| U_s \frac{\bar{Y}_d + \bar{Y}_q}{2} \right|$ mit der Kreisfrequenz ω_1 , wobei die Kreisfrequenz des überlagerten konstanten Gegenstromes $\left| U_s \frac{\bar{Y}_d^* - \bar{Y}_q^*}{2} \right|$ in der Maschine

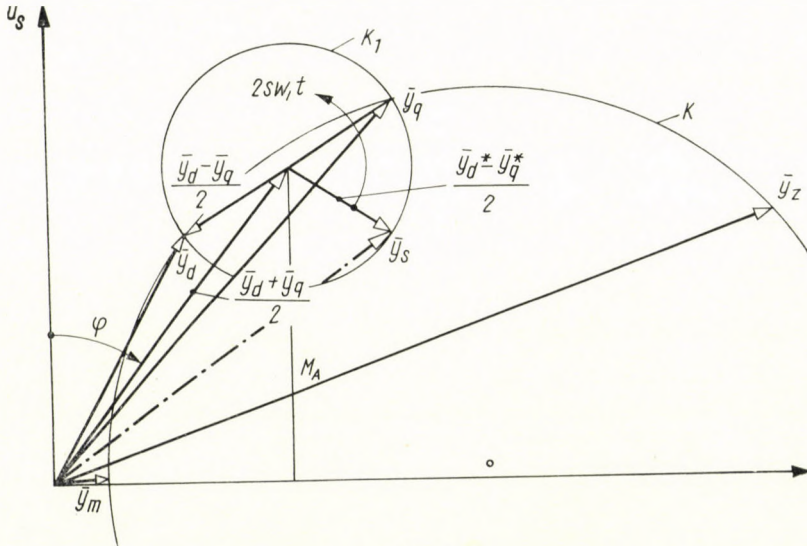


Abb. 4

$(2s - 1)\omega_1$ gleichkommt. Nachdem die elektrische Asymmetrie im Läuferkreis besteht, werden hier, im Gegensatz zu den Fällen mit symmetrischem Läufer und asymmetrischem Ständer, nicht im Läufer, sondern im Ständer die Mit- bzw. Gegenströme mit im allgemeinen verschiedener Periodenzahl auftreten.

3.2 Momentenverhältnisse bei $R_s = 0$

Das Drehmoment der Maschine wird aus der Beziehung $m = \frac{3}{2} \text{Im} (\bar{\psi}_s^* \bar{i}_s)$ berechnet. Da der Wirkwiderstand des Ständers vernachlässigt wurde, ist $U_s = j\omega_1 \bar{\Psi}_s$, und folglich das Drehmoment:

$$m = \frac{3}{2} \text{Im} (\bar{\psi}_s^* \bar{i}_s) = \frac{3}{2} \text{Im} \left[\frac{U_s^*}{-j\omega_1} U_s \left(\frac{\bar{Y}_d + \bar{Y}_q}{2} + \frac{\bar{Y}_d^* - \bar{Y}_q^*}{2} e^{-j2s\omega_1 t} \right) \right] \quad (17)$$

Aus (17) ergibt sich

$$m = \frac{3}{2\omega_1} U_s^2 \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{Y}_d + \bar{Y}_q}{2} + \frac{Y_d - \bar{Y}_s}{2} e^{j2s\omega_1 t} \right] \quad (18)$$

und schließlich

$$m = \frac{3}{2\omega_1} U_s \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{I}_d + \bar{I}_q}{2} + \frac{\bar{I}_d - \bar{I}_q}{2} e^{j2s\omega_1 t} \right]. \quad (19)$$

Das Drehmoment besteht aus zwei Teilen:

A) Aus dem konstanten Nutzmoment

$$M = \frac{3}{2\omega_1} U_s \left| \frac{\bar{I}_d + \bar{I}_q}{2} \right| \cos \varphi \quad (20)$$

wo φ den von \bar{U}_s und $\frac{\bar{I}_d + \bar{I}_q}{2}$ eingeschlossen Phasenwinkel bedeutet. Das Nutzmoment kann auch aus dem in Abb. 4 dargestellten Stromzeigerdiagramm abgelesen werden, und zwar als die Wirkkomponente des Stromes $\frac{\bar{I}_d + \bar{I}_q}{2}$ (die Ständerverluste wurden vernachlässigt).

B) Aus dem mit Kreisfrequenz $2s\omega_1$ pulsierenden Moment

$$m_p = \frac{3}{2\omega_1} U_s \left| \frac{\bar{I}_d - \bar{I}_q}{2} \right| \cos 2s\omega_1 t. \quad (21)$$

Nachdem die Frequenz des pulsierenden Momentes jeden Wert zwischen 100 und 0 Hz aufnimmt, während sich die Drehzahl des Motors vom Stillstand bis zur Synchrondrehzahl ändert, kann in diesem Frequenzbereich, besonders bei größeren Läuferasymmetrien (Bruch in einer Läuferphase), die Resonanzgefahr in den elastischen Bestandteilen auftreten, was im gegebenen Fall zum unangenehmen Geräusch, in einzelnen kritischen Fällen ja sogar zum Bruch führen kann.

In Abb. 5/a wurde auf Grund eines konkreten Beispiels das Stromzeigerdiagramm zwischen den Grenzwerten $s = 0$ und $s = 1$ für die Bedingung $R_s = 0$ aufgezeichnet.

Die Daten des dargestellten Motors sind in relativen Einheiten: $i_z = 5$; $\cos \varphi_z = 0,3$; $i_m = 0,3$; $\cos \varphi_m = 0,15$. Im Beispiel wurden im Interesse der leichteren Darstellung die Werte $k = 0$, $l = 2$, $m = 7$ angenommen, obzwar solche extreme Widerstandsasymmetrien in der Praxis kaum vorkommen.

Dementsprechend ist

$$K_0 = \frac{0 + 2 + 7}{3} = 3; \quad K_1 = \frac{1}{3} \sqrt{0 + 4 + 49 - (0 + 0 + 14)} = \sqrt{\frac{13}{3}} = 2,08$$

$$K_0 + K_1 = 5,08; \quad K_0 - K_1 = 0,92.$$

Der Transformationswinkel beträgt

$$\varrho = \arctg \frac{\sqrt{3}(2-7)}{2\left(0 - \frac{2+7}{2}\right)} = \arctg \frac{5}{9} \sqrt{3} = \arctg 0,962 = 44^\circ.$$

In diesem Fall wird die Symmetrieachse d des Läufers auf die Achse der Läuferphase a bezogen um 22° naheilen.

In Abb. 5b ist die Änderung des Nutzmomentes in Funktion des Schlupfes dargestellt (Kurve » $R_s = 0$ «).

Zum Vergleich wurde in dieselbe Abbildung der Verlauf des Momentes für den Fall eingezeichnet, daß im Läuferkreis der Maschine ein symmetrischer Dreiphasenwiderstand (im Beispiel der Mittelwert $3R_r$ pro Phase) eingeschaltet ist. Es ist ersichtlich, daß das bei symmetrischem Läufer auftretende Moment bei Schlüpfen über $s = 0,5$ oberhalb des Momentes für asymmetrischen Läufer, und unter $s = 0,5$ unterhalb desselben verläuft.

4. Berücksichtigung des Ständerwiderstandes

Der Ständerwiderstand hat, wie im Abschnitt 2.2 gezeigt wurde, nur in der Nähe des Schlupfwertes $s = 0,5$ eine störende Wirkung, und auch dies nur in dem Falle, wenn die Admittanzen in Richtung d und q voneinander stärker abweichen. Somit werden die Untersuchungen nur auf den Bereich um $s = 0,5$ beschränkt, was hingegen ermöglicht, hier die Werte \bar{Y}_d und \bar{Y}_q als konstant zu betrachten.

4.1 Kreisdiagramm in der Umgebung von $s = 0,5$ ²

Als Ausgangspunkt kann angenommen werden, daß \bar{Z}_d und \bar{Z}_q ihre Werte in der Umgebung von $s = 0,5$ nur sehr wenig ändern. Wenn man nämlich die Abb. 2a und 2b betrachtet, so zeigt es sich sogleich, daß mit der Änderung des Schlupfes nur die Wirkwiderstände der Rotorkreise sich ändern, welche Änderung — falls man sich nur auf die Umgebung von $s = 0,5$

² Für die Bestimmung des Kreisdiagramms wird dieselbe Methode wie beim Auflauf von Synchronmotoren angewandt [3].

begrenzt — im Wert der gesamten Impedanz tatsächlich nur einen kleinen Fehler verursacht. Deswegen wird bei der Untersuchung R_r im Läuferkreis der Ersatzschaltbilder \bar{Z}_d bzw. \bar{Z}_q laut Abb. 2 durch den konstanten, doppelten Wert ersetzt $R_r/s = R_r/0,5 = 2R_r$. Mit dieser Voraussetzung wird die Untersuchung der Maschine in der Umgebung des Schlupfes $s = 0,5$ äußerst vereinfacht, indem sich nur $R_s/2s - 1$ ändert: der Endpunkt des Ständerstromes bewegt sich daher bei Änderung von s auf einem Kreis.

Das Kreisdiagramm wird diesmal durch zwei Punkte und eine Tangente bestimmt. Um dieses einfacher zeichnen zu können, kann das Ersatzschaltbild der Abb. 3 zu einem vollkommen symmetrischen Vierpol umgeformt werden, und zwar dadurch, daß der Widerstand R_s im Stromkreis i_1 vernachlässigt wird (Abb. 6). In diesem Fall sei

$$\frac{R_s}{2s - 1} = pR_s, \tag{22}$$

worin

$$p = \frac{1}{2s - 1} \text{ ist.}$$

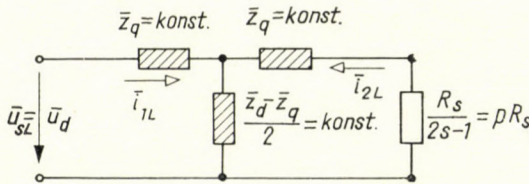


Abb. 6

Wird die Gleichung des Kreises auf Grund der Abb. 6 aufgezeichnet, so erhält man: (in Ständerkoordinaten, mit Effektivwerten)

$$\bar{I}_1 = \bar{U}_s \frac{\frac{\bar{Z}_d + \bar{Z}_q}{2} + pR_s}{\bar{Z}_d \bar{Z}_q + \frac{\bar{Z}_d + \bar{Z}_q}{2} pR_s} \tag{23}$$

Zunächst werden zwei leicht zu bestimmende Punkte ($p = 0$ und $p = \infty$) des Kreises festgestellt. Die Werte sind untenstehend zusammengestellt.

$$p = 0, s = \infty \quad \bar{I}_1(0) = \bar{U} \frac{\bar{Y}_d + \bar{Y}_q}{2}$$

$$p = \infty, s = 0,5 \quad \bar{I}_1(\infty) = \bar{U}_s \frac{2}{\bar{I}_d + I_q}$$

Im folgenden wird die Stromdifferenz $\bar{I}_1(0) - \bar{I}_1(\infty)$, die durch den Zeiger der die Kreispunkte $p = 0$ und $p = \infty$ verbindenden Sehne dargestellt ist, für die weiteren Berechnungen benützt:

$$\bar{I}_1(0) - \bar{I}_1(\infty) = \bar{U}_s \frac{(\bar{Y}_d - \bar{Y}_q)^2}{2(\bar{Y}_d + \bar{Y}_q)} \tag{24}$$

Gerade AB) um den Winkel α verdreht. Die Bestimmung des Winkels α ist aus Abb. 7 ebenfalls ersichtlich. In Kenntnis der Punkte $\bar{I}_1(0)$ und $\bar{I}_1(\infty)$ und der Richtung der im Punkt $\bar{I}_1(\infty)$ gezogenen Tangente wird nun der Kreis gezeichnet. Die Konstruktion des Punktes $\bar{I}_1(0)$ ist auch in Abb. 7 gezeigt. Die Konstruktion von

$$\bar{I}_1(\infty) = U_s \frac{2}{Z_d + Z_q}$$

ist leicht vorzustellen. Es werden nämlich die Werte

$$Z_d = \frac{1}{Y_d} \quad \text{und} \quad \bar{Z}_q = \frac{1}{Y_q}$$

mittels Inversion aufgezeichnet. Nach Aufzeichnung von $\bar{Z}_d + \bar{Z}_q/2$ wird dieser Zeiger rückinventiert in den Zeiger

$$\bar{I}_1(\infty) = \bar{U}_s \frac{2}{\bar{Z}_d + \bar{Z}_q}$$

In Abb. 7 wurden die so erhaltenen Zeiger $\bar{I}_1(0)$ und $\bar{I}_1(\infty)$ aufgezeichnet sowie die im Endpunkt von I_1 gezogene und gegen die Richtung von $\bar{I}_1(0) - \bar{I}_1(\infty)$ um den Winkel α in positiver Richtung verdrehte Tangente des Kreises, und zuletzt auch der auf die Umgebung von $s = 0,5$ bezogene Kreis. Zum in Abb. 7 gezeichneten Kreis ist noch die Schlupfskala zu finden. Das einfachste ist, die Tangente selbst als Schlupfskala zu benutzen. Bekanntlich gibt es auch auf der Tangente eine gleichmäßige Teilung der Schlupfskala, so daß auf Grund der die Richtung der Tangente bestimmenden Gleichung (34) auch für einen beliebig kleinen Wert der Teilung gültig angeschrieben werden kann:

$$d\bar{I}_1 = \left(\frac{d\bar{I}_1}{ds} \right)_{s=0,5} ds = \frac{2ds}{R_s} [\bar{I}_1(0) - \bar{I}_1(\infty)] \left| \frac{2}{Y_d + Y_q} \right| e^{ja} \quad (31)$$

Diese Beziehung ist für die Einteilung der Skala auch in dem Fall richtig, wenn die Werte $d\bar{I}_1$ und ds durch die endlichen Werte $\Delta\bar{I}_1$ und Δs ersetzt werden, weil die Skala linear ist. Will man z. B. den zu $s = 0,55$ gehörenden Skalenpunkt auf der Tangente ermitteln, so ist in der Beziehung (31) der Wert $\Delta s = 0,05$ einzusetzen. Somit wird in diesem Falle

$$\Delta\bar{I}_1 = \frac{0,1}{R_s} [\bar{I}_1(0) - \bar{I}_1(\infty)] \left| \frac{2}{Y_d + Y_q} \right| e^{ja} \quad (32)$$

Oder mit den Bezeichnungen der Abb. 7:

$$\Delta\bar{I}_1 = \frac{AB}{OB} \cdot \frac{0,1}{R_s} U_s \quad (33)$$

Wird beispielsweise für den Wert $1/R_s$ das Zehnfache von Y_d angenommen (etwa 2% Ständerwiderstand), so erhält man bei $s = 0,55$: $I_1 = 4,5$ Einheiten. (Als Einheit wurde im Bild ein Zehntel des Stromes $\bar{Y}_d \bar{U}_s$ vorausgesetzt.)

Um die Schlupfskala und deren Teilung benutzen zu können, muß am Umfang des Kreises der Bezugspunkt gefunden werden. Da Punkt B dem Schlupf $s = \infty$ entspricht, schneidet die durch den Punkt B zur Tangente parallel gezogene Gerade den Kreis im Bezugspunkt S. Es wurden auf dem beispielsweise auch die dem Schlupf $s = 0,577$ und $s = 0,47$ zugeordneten Kreispunkte bezeichnet.

4.2 Das Moment in der Umgebung von $s = 0,5$

Das Moment kann im Bereich von $s = 0,5$ von Punkt zu Punkt graphisch abgelesen werden, und zwar liefert die Nutzkomponente des Stromes \bar{I}_1 das Mitmoment, nachdem auf der Eingangsseite des Ersatzschaltbildes in Abb. 6 der Widerstand R_s vernachlässigt wurde (siehe die Momentenabschnitte M_1 in Abb. 7). Das Gegenmoment wird, wie einfach nachweisbar,

durch die — mit der Kreistangente in A parallel verlaufenden — Abstände der Kreispunkte von der Geraden AB — Nulllinie des Gegenmomentes — gemessen (siehe Abb. 7). Hierbei hat im Falle $s > 0,5$ auch das Gegenmoment positives Vorzeichen, d. h. es ist ein Triebmoment, im Falle von $s < 0,5$ aber ein negatives Vorzeichen, wodurch es zum Bremsmoment wird. Diese Erscheinung findet ihre physikalische Erklärung — wie bekannt — darin, daß das im Läufer entstehende gegenlaufende Feld im Falle von $s > 0,5$ vom Ständer aus gesehen sich entgegen dem mechanischen Drehsinn des Läufers dreht, so daß in der bei vom Läufer gespeisten Asynchronmotoren üblichen Weise auf die Welle ein positives Moment wirkt. Ist $s < 0,5$, dann dreht sich das gegenlaufende Läuferfeld vom Ständer aus gesehen in positiver Richtung, so daß dieser Wellenmomententeil das Vorzeichen wechselt und zum Bremsmoment wird.

In Abb. 8a wurde auf Grund der Abb. 7, jedoch mit den Daten des Beispiels im Abschnitt 3.2 das Kreisdiagramm für den Schlupfbereich $s = 0,5$ aufzeichnet (Kreis $K_{0,5}$). In Abb. 8/a ist zunächst das normale Kreisdiagramm K dargestellt. An diesem wurden für $s = 0,5$ die zum äußeren Läuferwiderstand $R_0 + R_1 = 5,08 R_r$ bzw. zu $R_0 - R_1 = 0,92 R_s$ gehörigen Admittanzpunkte \bar{Y}_d bzw. \bar{Y}_q bestimmt. In Kenntnis dieser Punkte werden — indem der Kreis K gleichzeitig auch als Inversionskreis gebraucht wird — die Impedanzen \bar{Z}_d^* und \bar{Z}_q^* , hieraus wieder die Impedanz $\frac{\bar{Z}_d^* + \bar{Z}_q^*}{2}$ und in Kenntnis

derselben zuletzt die Admittanz $\frac{2}{\bar{Z}_d + \bar{Z}_q}$ bestimmt. Der Endpunkt dieser Admittanz ist zum Schlupf $s = 0,5$ gehörende Punkt A am Kreis $K_{0,5}$. Aus den Admittanzen \bar{Y}_d und \bar{Y}_q erhält man die Admittanz $\frac{\bar{Y}_d + \bar{Y}_q}{2}$, deren Endpunkt der dem Schlupf $s = \infty$ entsprechende Punkt B am Kreis $K_{0,5}$ ist. Wird der Winkel α der Admittanz $\frac{\bar{Y}_d + \bar{Y}_q}{2}$ auf die Gerade AB im Punkt

A aufgetragen, so erhält man die Kreistangente im Punkt A . Mit Hilfe dieser Tangente sowie der beiden Kreispunkte A und B wurde der Kreis $K_{0,5}$ für unseren Fall gezeichnet. Auf die Tangente wurde auf Grund des Bildes 7 die Schlupfskala aufgetragen (wobei $R_s = 0,03$ angenommen wurde): zuletzt wurde der Bezugspunkt S konstruiert. Mit Hilfe desselben wurden am Kreis $K_{0,5}$ die den Schlupfwerten $s = 0,6, 0,55, 0,45$ und $0,4$ entsprechenden Kreispunkte bestimmt. Hiernach wurde das Stromzeigerdiagramm für $R_s = 0$ (siehe Abb. 5a) mit dem in Abb. 8/a konstruierten Kreis $K_{0,5}$ vereinigt (Abb. 8/b). Mit Hilfe des so erhaltenen Stromzeigerdiagramms wurde in Abb. 5/b die Änderung des Drehmomentes im Schlupfbereich $s = 0,5$ für $R_s \neq 0$ auch eingetragen.

Wie aus der Abbildung ersichtlich, ändert sich das Drehmoment im Schlupfbereich $s = 0,5$ rasch und im angenommenen Beispiel wird sein Wert

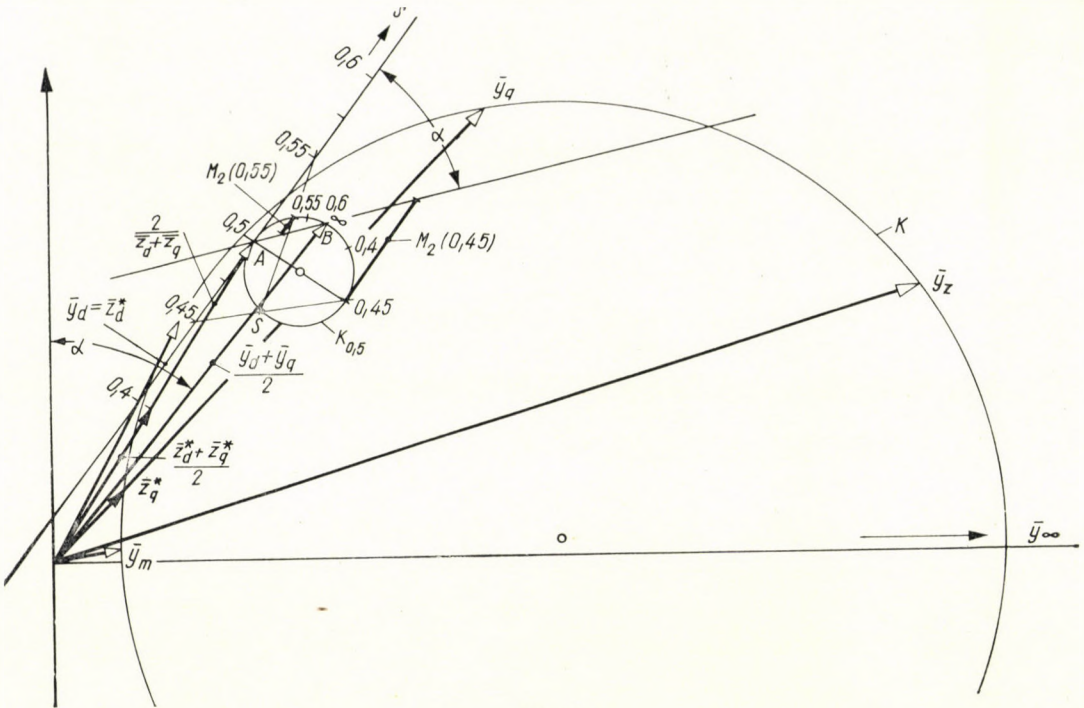


Abb. 8/a

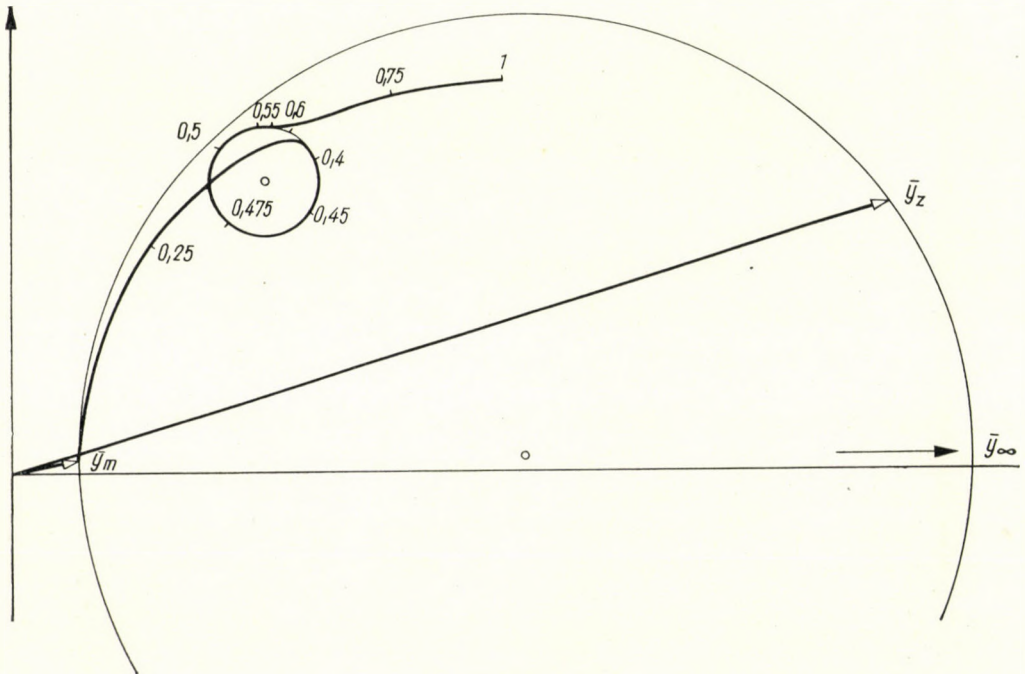


Abb. 8/b

beim Schlupf $s = 0,47$ gegenüber dem sonst (im Falle von $R_s = 0$) bestehenden zweifachen Momente bloß etwa das 0,4fache betragen. In diesem etwas extremen Beispiel könnte der Motor schon beim Anlassen mit halbem Momentbedarf nicht über die halbe Drehzahl beschleunigt werden.

5. Bruch in einer Läuferphase

Es sei die Phase a des Läufers unterbrochen, z. B. infolge eines Betriebsfehlers, wobei die beiden anderen Läuferphasen kurzgeschlossen sind. In diesem Falle hat man, mit den Bezeichnungen des Abschnittes 2.1, $k = \infty$ und $m = 0$, somit $R_0 + R_1 = R_r \frac{2k+m}{3} = \infty$ und $R_0 - R_1 = mR_r = 0$. Dies bedeutet, daß im Ersatzschaltbild für Richtung d der Läuferkreis offen ist,

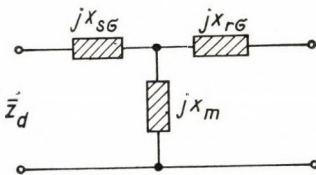


Abb. 9/a

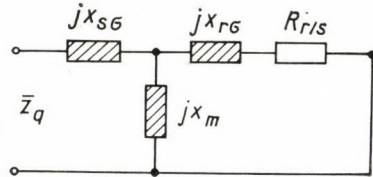


Abb. 9/b

in jenem für Richtung q aber die Läuferklemmen unmittelbar kurzgeschlossen sind. In Abb. 9 sind die Schaltungen für Richtungen d und q aufgezeichnet. Es ist ersichtlich, daß die Admittanz in Richtung d die Leerlaufadmittanz der Maschine ist ($\bar{Y}_d = \bar{Y}_m$), deren Wert unabhängig vom Schlupf konstant bleibt. Die Admittanz in Richtung q ist beim Schlupf s mit der Eingangsadmittanz der ursprünglichen Maschine übereinstimmend. Das heißt, der Endpunkt von \bar{Y}_q beschreibt bei Änderung des Schlupfes s das Kreisdiagramm der Maschine, wogegen der Endpunkt von $\bar{Y}_d = \bar{Y}_m$ unbeweglich bleibt. Der Zeiger $\frac{\bar{Y}_d + \bar{Y}_q}{2}$ beschreibt daher ebenfalls einen Kreis, dessen Durch-

messer die Hälfte jenes des Kreisdiagramms der ursprünglichen Maschine beträgt. Die Verhältnisse sind aus Abb. 10 ersichtlich. Da $Y_d = Y_m \ll Y_q$ (0,5) ist, ist in diesem Falle die Änderung der Ströme und Momente in der Nähe der halben Drehzahl besonders groß. Die im Abschnitt 4.1 beschriebene Methode für die Aufzeichnung des Kreisdiagrammes $K_{0,5}$ kann auch hier angewandt werden. Der Durchmesser weicht wenig von jenem des Kreises für $R_s = 0$ ab, so daß hier Momenten- und Stromanomalien (auch als Görgesches Phänomen bekannt) ganz besonders beachtet werden müssen.

In Abb. 11 ist die Änderung des Nutzmomentes in Funktion des Schlupfes für unser Beispiel dargestellt und in dieselbe Abbildung wurde auch die Änderung des auf Grund der Beziehung (21) berechneten pulsierenden Momentes eingezeichnet. Die Änderung des Nutzmomentes in der Nähe von $s = 0,5$ zeigt, daß es den Anschein hat, als ob der Schleifringläuferasynchronmotor mit Bruch in einer Läuferphase als ein der doppelten Polzahl (halben Drehzahl)

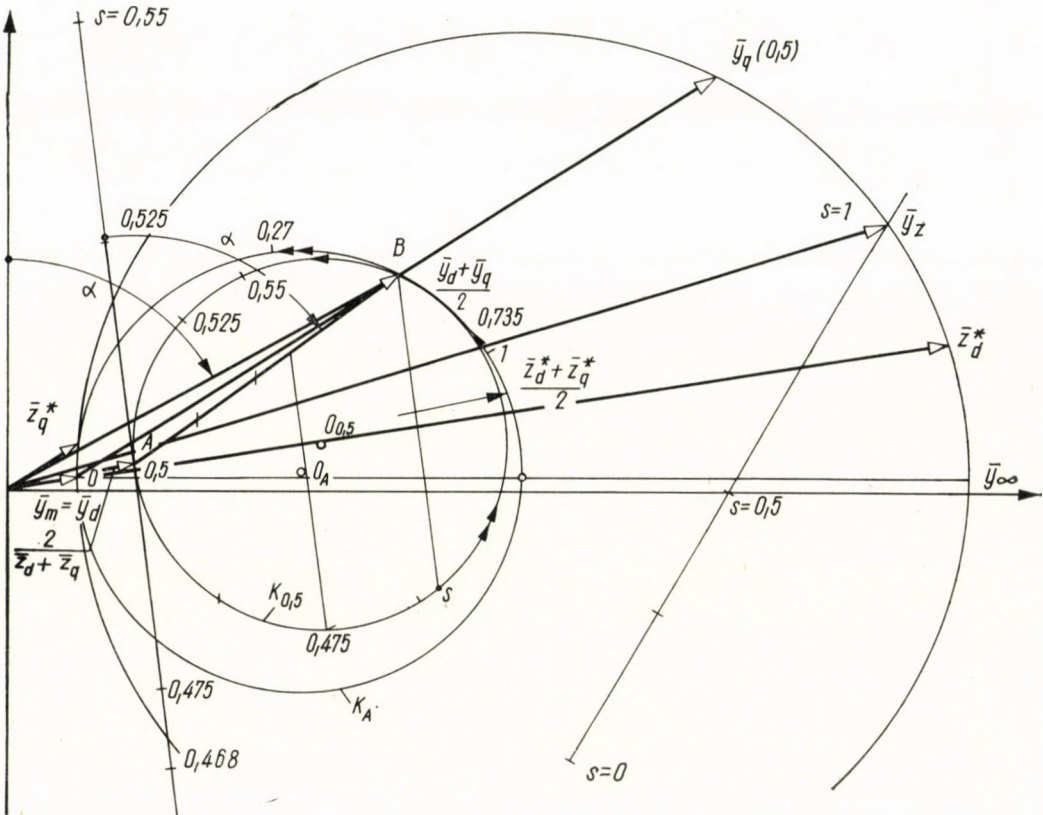


Abb. 10

entsprechender Motor verwendet werden könnte. Dies ist jedoch leider nicht der Fall, denn das auftretende pulsierende Moment, die im Ständerstromkreis auftretenden Störungsströme von niedriger Frequenz und schließlich, jedoch nicht in letzter Reihe, wie bekannt, die auftretende Sättigungserscheinungen es nicht möglich machen, diese Schaltung zu Drehzahlregelungszwecken praktisch anzuwenden. Wie nämlich aus dem Kreisdiagramm in Abb. 10 ersichtlich ist, beträgt der Magnetisierungsstrom bei $s = 0,5$ etwa das Zweifache des zu $s = 0$ gehörenden Magnetisierungsstromes. In der Wirklichkeit

wurde dies nur in dem Falle zutreffen, wenn die Sättigung unverändert bliebe. Demgegenüber ist der zweifache Leerlaufstrom so zu verstehen, als ob die Sättigung die doppelte wäre, und so könnte man die normalen Sättigungsverhältnisse im Falle einphasiger Läuferwicklung nur beim auf die halbe Betriebsspannung geschalteten Motor erreichen. Wenn aber die Maschine mit

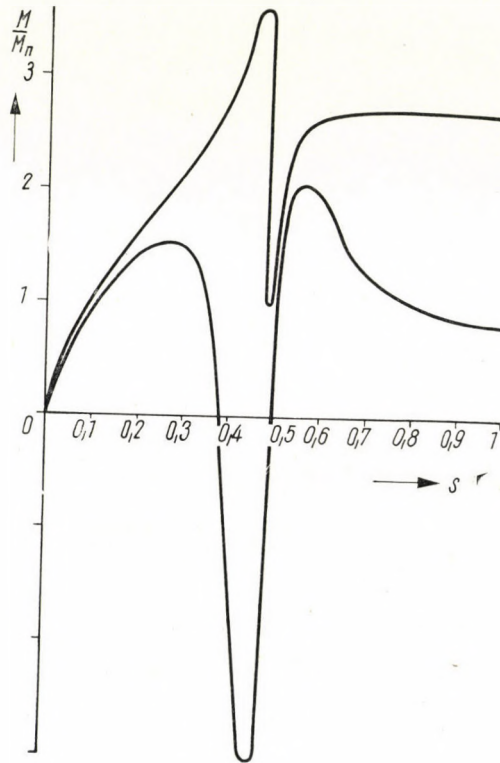


Abb. 11

voller Spannung läuft, dann ergibt sich nicht der zweifache Leerlaufstrom, sondern ein der doppelten Sättigung entsprechender, unzulässig hoher Magnetisierungsstrom.

Schließlich sei es bemerkt, daß das Ständerstromzeigerdiagramm der Maschine mit asymmetrischen Läufer eigentlich ein zusammenhängendes Stromzeigerdiagramm höherer Ordnung (in der Regel eine bizirkulare Quartik) ist, dessen exakte Aufzeichnung sich durch die von uns angewandte, für die Praxis genügende Genauigkeit sichernde Bestimmungsmethode (nämlich die Vereinigung des mittleren Stromzeigerdiagramms mit dem Kreis $K_{0,5}$) erübrigt.

SCHRIFTTUM

1. CH. CONCORDIA: Synchronous Machines, Wiley, New York 1951.
2. KOVÁCS—RÁCZ: Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen. Akadémiai Kiadó, Budapest 1959.
3. KOVÁCS—RÁCZ: Einsattelung der Drehmomentkurve von Synchronmotoren beim asynchronen Anlauf. Bulletin SEV 1957, Seite 631.
4. KOVÁCS: Betriebsverhalten von Asynchronmaschinen. VEB Verlag Technik, Berlin 1957.

ZUSAMMENFASSUNG

Im Läuferkreis der Dreiphasenschleifringmotoren werden oft asymmetrische Anlaß- und Regelwiderstände angewandt. Im Aufsatz wird zur Untersuchung des Verhaltens von den mit asymmetrischem Widerstand angelassenen bzw. geregelten Motoren eine neue Methode entwickelt, die darin besteht, daß im Läuferkreis die bei den Synchronmaschinen übliche Zerlegung nach den Richtungen d und q angewandt wird. Diese Zerlegung ermöglicht es, die Behandlung gleich dem asynchronen Betrieb der Synchronmaschinen vorzunehmen. Auf Grund dieser Methode werden im Aufsatz die Stromvektordiagramme der mit asymmetrischen Widerstand geregelten Schleifringmotoren vorgeführt. Es werden ferner Momentenbeziehungen abgeleitet.

STARTING AND CONTROL OF SLIP-RING ASYNCHRONOUS MOTORS
BY MEANS OF ASYMMETRIC ROTOR RESISTANCES

K. P. KOVÁCS

SUMMARY

In the rotor circuit of three-phase slip-ring motors often asymmetric starting and control resistances are used. The paper sets up a new method to investigate the operation of motors started, resp. controlled by means of an asymmetric rheostat. The point of this method is to apply the resolving into directions d and q of the rotor circuit as is usual with synchronous machines. This method makes possible a similar discussion as used on asynchronous running of synchronous machines. Using this method, the paper supplies the current vector diagram of slip-ring motors controlled by means of asymmetric rheostats, as well as deducting some torque equations.

DÉMARRAGE ET RÉGLAGE DES MOTEURS SYNCHRONES
A BAGUES PAR UNE RÉSISTANCE ROTORIQUE ASYMÉTRIQUE

K. P. KOVÁCS

RÉSUMÉ

Dans le circuit du rotor des moteurs triphasés à bagues, on applique souvent une résistance asymétrique de démarrage et de réglage. L'étude établit une nouvelle méthode pour examiner le fonctionnement des moteurs démarrés, resp. réglés par une résistance asymétrique. Cette méthode consiste à employer, dans le circuit du rotor, la décomposition de direction d et q , habituelle chez les machines synchrones. Cette décomposition permet de procéder comme pour l'opération asynchrone des machines synchrones. L'étude présente, par cette méthode, les diagrammes du vecteur de courant des moteurs à bagues réglés par résistance asymétrique, et déduit des relations concernant les couples.

ПУСК И РЕГУЛИРОВАНИЕ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ С ФАЗОВЫМ РОТОРОМ С ПОМОЩЬЮ АСИММЕТРИЧНОГО РОТОРНОГО РЕОСТАТА

К. П. КОВАЧ

РЕЗЮМЕ

В цепи ротора трехфазных асинхронных двигателей с фазовым ротором часто применяют пусковые и регулирующие реостаты. В работе применяется новый метод для анализа работы двигателей, включенных и, соответственно, регулируемых при помощи асимметричного реостата. Предлагаемый метод состоит в том, что в цепи ротора применяется разложение в направлении d и q , обычно применяемое в случае синхронных машин. Это разложение позволяет производить анализ аналогично анализу асинхронного режима синхронных машин. Работа этим методом показывает диаграмму вектора тока двигателей с фазовым ротором, регулируемых асимметричным реостатом; выводятся также зависимости момента.

WARMSTAUCHVERSUCHE MIT KUPFER BEI KLEINEN FORMÄNDERUNGSGESCHWINDIGKEITEN

Dr Ing. E. BELLA

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

BERICHT NR. 13. DER METALLURGISCHEN ARBEITSGEMEINSCHAFT
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 4. Mai 1960]

Mit Warmstauchversuchen an verschiedenen Metallen, darunter auch Kupfer beschäftigte sich G. GÄRTNER [1]. Seine Versuche galten jedoch hauptsächlich der Anwendung des Kegelkaltstauchversuches bei höheren Temperaturen, d. h. der Klärung der Umstände des sogenannten Kegelwarmstauchversuches. Die nachstehend beschriebenen Versuche bezweckten in Fortsetzung der früheren Warmwalzversuche [2] die weitere Beobachtung der bei der Warmverformung von Kupfer auftretenden Umstände. Bei den Warmwalzversuchen war die Verformungsgeschwindigkeit (die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen) konstant, $v = 470$ mm/sec, und dementsprechend war die Formänderungsgeschwindigkeit $\left[\dot{\epsilon} = \frac{\Delta h}{H_0 \cdot i} \right]$, wo Δh die Dickenabnahme, H_0 die ursprüngliche Dicke, $i = \frac{l_d}{v}$ die Zeit bedeutet, während der sich der Einspannbogen ($l_d = \sqrt{r \cdot \Delta h}$) um die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen verdreht, von der unteren Versuchsgrenze, 2% Formänderung, bis zur oberen Versuchsgrenze, 40% Formänderung, zwischen den Grenzen $\dot{\epsilon} = 300\% \text{ sec}^{-1}$ bis $1350\% \text{ sec}^{-1}$ veränderlich. Die Warmstauchversuche verliefen mit einer durchschnittlichen Verformungsgeschwindigkeit von $v = 0,35$ mm/sec — entsprechend einer durchschnittlichen Formänderungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 1\% \text{ sec}^{-1}$ — und richteten sich auf die Beobachtung der mit der Warmverformung einhergehenden Verfestigung, Entfestigung und Gefügeänderungen.

Beschreibung der Versuche

Der Werkstoff für die Versuche stammte aus der gleichen Charge Elektrokupfer mit 99,95% Reinheit, mit der seinerzeit die Walzversuche [2] durchgeführt wurden. Die Probestäbe mit 18 mm \varnothing wurden aus warmgepreßtem Material mit 30 mm \varnothing durch Kaltzug und Erhitzung auf 600° C

während 1 Stunde hergestellt. Der durch den Druckversuch festgelegte mechanische Ausgangswert die Quetschgrenze betrug $\sigma_{0,2Dr} = 6,5 \text{ kg/mm}^2$. Die Gefügeuntersuchung wurde am Längsschnitt der Druckstäbe $18 \text{ } \varnothing \times 35 \text{ mm}$

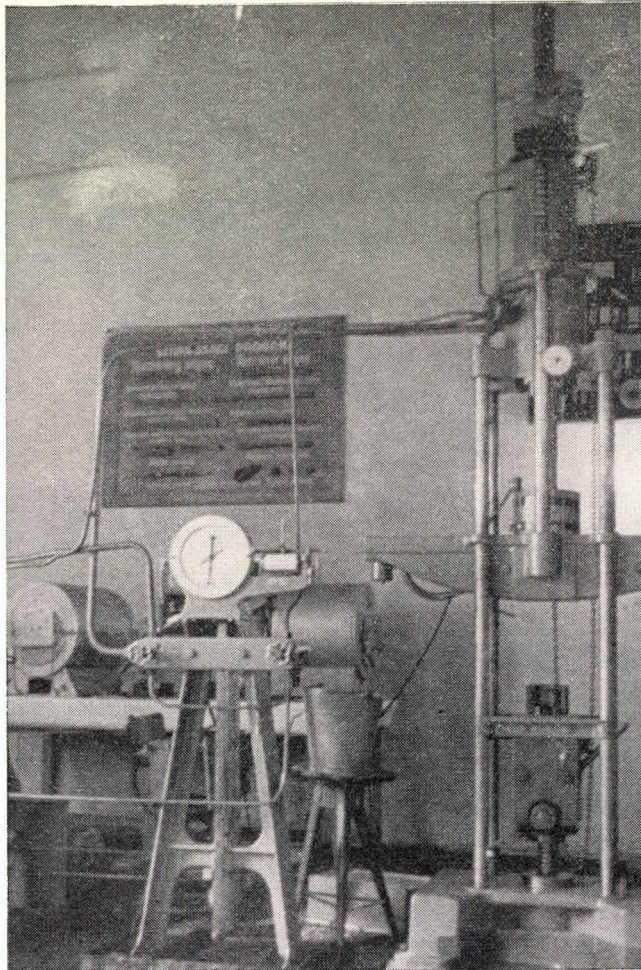


Abb. 1. Die Versuchseinrichtung

durchgeführt, mit 10 Wertungen je Schliff. Die durchschnittliche Korngröße des ursprünglichen Werkstoffes betrug $0,050 \text{ mm}$.

Bei der Vorbereitung der Stauchversuche wurden die in Zwickau ausgeführten Versuche [1] in Betracht gezogen, die die Übertragung des Kegelstauchversuches auf die Warmverformung bezweckten. Dementsprechend

wurden die untere und obere Druckplatte der zylindrischen Probekörper zur Vermeidung der Verzerrung, d. h. der Ausbauchung sowie zur Erreichung eines einachsigen Spannungszustandes mit einer konischen Vertiefung mit einem Neigungswinkel $\alpha = 3^\circ$ versehen, die Druckwerkzeuge ähnlich gestaltet und eine Schmierung mit Graphitemulsion angewendet. Bei stärkeren Stauchungen konnte auch bei diesen Maßnahmen eine Ausbauchung nicht zur Gänze vermieden werden.

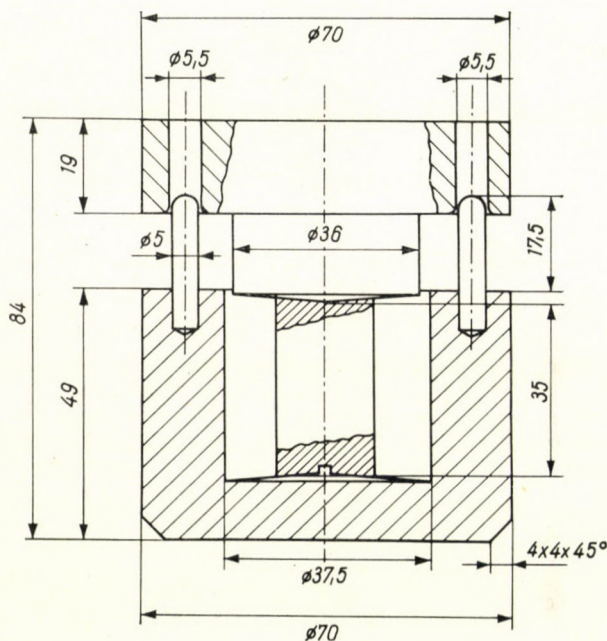


Abb. 2. Skizze des Werkzeuges

Die Stauchversuche wurden auf einer 35-t Amsler Zerreißmaschine mit Ölhydraulik durchgeführt (Abb. 1), so daß die Probestäbe sich während der Verformung in einem besonders für diesen Zweck hergestellten und mit der erwähnten konischen Form versehenen, zweiteiligen Werkzeug befanden (Abb. 2). Das Werkzeug war aus hitzebeständigem Stahl und wurde in einem gesondert aufgestellten Ofen solange erwärmt, bis es die notwendige Temperatur tatsächlich erreichte. Sodann mußte die Probe vor der Verformung nur während der notwendigen minimalen Zeit erhitzt werden, wodurch eine überflüssige Kornvergrößerung vermieden werden konnte. Das Werkzeug spielte eigentlich die Rolle eines Wärmespeichers und verhütete eine bedeutendere Abkühlung des Probestabes während der Stauchung. Dies wurde mit besonderen Messungen nachgeprüft. Die Zeitdauer von der Entnahme der Proben aus dem Ofen bis zum Beginn der Verformungsoperation betrug etwa 4 sec.

Die Temperatur der Warmstauchversuche betrug 500, 700 und 900° C, in Übereinstimmung mit den früheren Warmwalzversuchen. Zur Gewährleistung dieser durchschnittlichen Temperaturen während der Verformungsdauer wurden die Proben auf 520, 720 bzw. 920° C erhitzt. Die Bestimmung der Glühzeit zur Erhitzung der Werkzeuge für sich sowie zur Erhitzung der Probestäbe zusammen mit den Werkzeugen wurde durch Aufnahme von gesonderten Erhitzungskurven festgelegt. Auf Grund der aufgenommenen Kurven betrug die Erhitzungszeit für die Werkzeuge allein in einem Ofen von 520° C: 50 Minuten, bei 720° C: 31 und bei 920° C Ofentemperatur: 19 Minuten. Die Vorwärmedauer der Probestäbe im erhitzten Werkzeug betrug bei 520° C Ofentemperatur: 21 Minuten, bei 720° C: 16 und bei 920° C: 12 Minuten.

Die Verformungs- (Stauch-) geschwindigkeit, d. h. der in der Zeiteinheit zurückgelegte Werkzeugweg v betrug 0,3–0,5 mm/sec, hauptsächlich aber 0,35 mm/sec, was einer Formänderungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 1\% \text{ sec}^{-1}$ entspricht. $\left(\dot{\epsilon} = \frac{\Delta h}{H_0 i} = \frac{v}{H_0} \right)$, wo H_0 = Höhe vor der Verformung, Δh = Höhendifferenz nach der Verformung, i = Verformungsdauer, v = Verformungsgeschwindigkeit.)

Die geplante Formänderung während der Versuche betrug 2, 5, 10, 20 und 40%, ebenfalls in Übereinstimmung mit den Walzversuchen. Dementsprechend waren die Verformungsdauern auf 2, 5, 10, 20 und 40 sec geplant, entsprechend der angegebenen Formänderungsgeschwindigkeit.

Die experimentelle Beobachtung der Vorgänge wurde in zwei Perioden vorgenommen:

I. *Periode unmittelbar während der Verformung.* Während dieser wurden die Änderungen der bei der Verformung auftretenden Spannungen, die Verfestigung und Entfestigung beobachtet. Die Dauer entsprach der Verformungsdauer, die sich je nach Maß und Geschwindigkeit der Verformung änderte.

II. *Periode der Abkühlung nach der Verformung.* Während dieser Periode wurden je nach der Abkühlungsweise der Proben zwei verschiedene Zustände hervorgebracht:

1. *Zustand »A«*, unmittelbar nach der Verformung; dieser Zustand wird durch Abschrecken in Wasser fixiert. Die hierzu nötige Operation dauert etwa 2–3 sec nach der Verformung.

2. *Zustand »B«*, nach langsamer Abkühlung nach der Verformung, der durch Abkühlung der Proben an der Werkstattluft nach der Verformung herbeigeführt wird. Die Erreichung dieses Zustandes dauert etwa 24–27 Minuten von der Beendigung der Verformung.

In den beiden beobachteten Perioden war die angewandte Methode verschieden. In der I. Periode konnte die Änderung der Spannungen durch

die Messung der Verformungskräfte unmittelbar festgestellt werden. In der II. Periode konnten die Zustände »A« und »B« durch Bestimmung gewisser kennzeichnender mechanischer Eigenschaften und des Gefüges sowie durch ihren Vergleich mit den Kennzeichen des Ausgangszustandes nachträglich untersucht werden (es soll bemerkt werden, daß — wie später geschildert — die I. und II. Periode nicht streng voneinander getrennt werden können, da über eine gewisse Deformation hinaus die nach der Verformung gewonnenen Gefügebilder auch für den Vorgang während der Verformung kennzeichnend sind).

Zur Untersuchung der angeführten Erscheinungen wurden etwa 150 Proben gestaucht. Der Hauptversuch wurde bei den angegebenen 3 Verformungstemperaturen mit 5 verschiedenen Verformungen und 1% sec^{-1} Formänderungsgeschwindigkeit, bei 500°C mit 2, bei 700°C und 900°C mit je 4 parallelen durchgeführt. Die Hälfte der Proben wurde nach der Verformung in Wasser abgeschreckt, während die andere Hälfte in Luft abgekühlt wurde. Zur Ergänzung der Beobachtungen wurden auch bei 20°C Stauchversuche durchgeführt und ein Teil der Proben zur Kontrolle der Gefügeänderungen bei 750° im Salzbad behandelt. Außerdem wurden zur Feststellung der Änderung der Umstände auch Versuche mit geringerer Verformungsgeschwindigkeit ($v = 0,1-0,13$ mm/sec, $\dot{\epsilon} = 0,3-0,38\%$ sec^{-1}) durchgeführt. Dabei mußte wegen der dreifach verlängerten Verformungsdauer während der Stauchzeit auf der Anwendung des vorgewärmten Werkzeuges auch eine besondere elektrische Heizung eingeschaltet werden (Abb. 1). Schließlich wurden auch Proben bei 900°C , 40% Verformung und einer Verformungsgeschwindigkeit von $v = 0,1, 0,35$ und 1 mm/sec unter Anwendung einer besonderen Heizung gestaucht, um festzustellen, ob die erhöhten Spannungen gegen Ende der Verformungsperiode als Folge der verringerten Temperatur aufzufassen sind.

Bei allen Versuchen war die Abmessung der angewendeten Probekörper $d_0 = 18 \varnothing$ und $H_0 = 35$ mm, wodurch bei Anwendung eines Verhältnisses $\frac{H_0}{d_0} \approx 2$ eine Ausbiegung vermieden wurde. Eine Skizze des Probekörpers ist aus Abb. 3 ersichtlich. Zwecks besserer Vergleichbarkeit wurde der sog. effektive Ausgangszustand festgelegt, indem mehrere Probekörper bei den einzelnen Verformungstemperaturen in die Werkzeuge eingelegt und unter genau den gleichen Bedingungen wie die zu stauhenden Probekörper erhitzt, sodann ohne Stauchung in Wasser abgeschreckt wurden. Dadurch wurde der Ausgangszustand unmittelbar vor Beginn des Stauchvorganges festgestellt (»M«-Zustand). Die verschiedenen »M«-Zustände wurden mechanischen und metallographischen Untersuchungen unterzogen. Die durch den Druckversuch festgestellte durchschnittliche 0,2-Grenze $\sigma_{0,2 Dr}$ betrug $6,2$ kg/mm².

Auswertung der Versuche und Folgerungen

I. Beobachtungsperiode. Hier wurden die Spannungen unmittelbar während der Verformung beobachtet. Zur Erreichung dieses Zweckes wurde die Änderung der Druckkräfte während des Stauchvorganges gemessen und als Funktion des Weges des Druckwerkzeuges graphisch dargestellt. Daraus kann in jeder beliebigen Phase die zu einer bestimmten Verformung (Δh) zugeordnete Verformungskraft (P) bestimmt werden und mit Hilfe des zur Verformung zugeordneten geänderten Querschnittes (F) die auftretende wahre Spannung (σ') d. h. die Formänderungsfestigkeit (k_f) durch die Formel $\sigma' = k_f = \frac{P}{F}$ berechnet werden. Die Berechnung der jeweiligen geänderten Querschnitte wurde — mit Rücksicht auf die konisch vertieften Probekörper — mit der Siebel-Formel vorgenommen [1, 3]. Danach ist

$$F = F_0 \frac{h_0 + 2/3 \operatorname{tg} \alpha \cdot d_0}{h_0 - \Delta h + 2/3 \operatorname{tg} \alpha \cdot d_0} \sqrt{\frac{h_0}{h_0 - \Delta h}} \text{ mm}^2$$

wo F_0 = der ursprüngliche Querschnitt der Probe in mm^2 ,
 H_0 = die ursprüngliche Höhe der Probe an der Kante in mm,
 h_0 = $H_0 - d_0 \operatorname{tg} \alpha$, die ursprüngliche Höhe der Probe in ihrer Achse, in mm,
 Δh = $H_0 - H_1 = h_0 - h_1$ der Höhenunterschied nach der Verformung,
 H_1 = Höhe nach der Verformung an der Kante
 h_1 = $H_1 - d_1 \operatorname{tg} \alpha$,
 d_1 = geänderter Durchmesser in mm,
 α = Neigungswinkel der Druckflächen, als 3° angenommen (Abb. 3).

Das Maß der Formänderung wurde durch die Formel $\varepsilon = \frac{\bar{F} - F_0}{F} \cdot 100$ (%) festgestellt. Abb. 4 zeigt die Kraft-Weg-Diagramme bei drei verschiedenen Verformungstemperaturen für die größte Stauchung; diese Diagramme enthalten auch die Vorgänge bei den geringeren Verformungen und somit den ganzen untersuchten Vorgang. Um ein richtigeres Durchschnittsbild der Spannungsverhältnisse wiederzugeben, wurden die wahren Spannungen einerseits bei sämtlichen Proben im Endpunkt der Verformung berechnet, andererseits bei allen Verformungstemperaturen aus mehreren zur größten Stauchung (40%) zugeordneten Diagrammen die zu den kleineren Verformungen gehörenden Spannungen bestimmt. Die Bestimmung der Spannungen und der zugeordneten Verformungsdauer wurde gleichmäßig verteilt, bei jedem mm Weg des Druckwerkzeuges durchgeführt. Die Werte der Druckkraft, Formänderung und wahren Spannung in den Endpunkten der Hauptversuche bei den einzelnen Verformungstemperaturen und einer durchschnittlichen Formänderungsgeschwindigkeit von $1\% \text{ sec}^{-1}$ sind in Zahlentafel 1 enthalten.

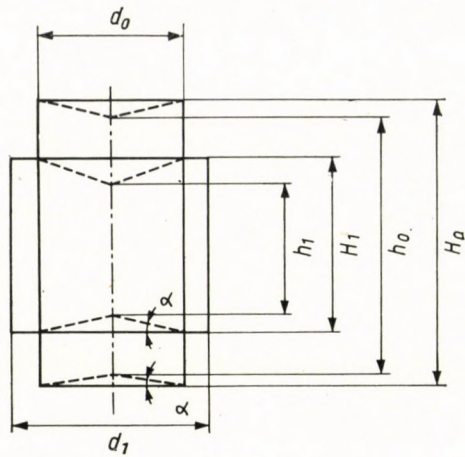


Abb. 3. Skizze des Probekörpers

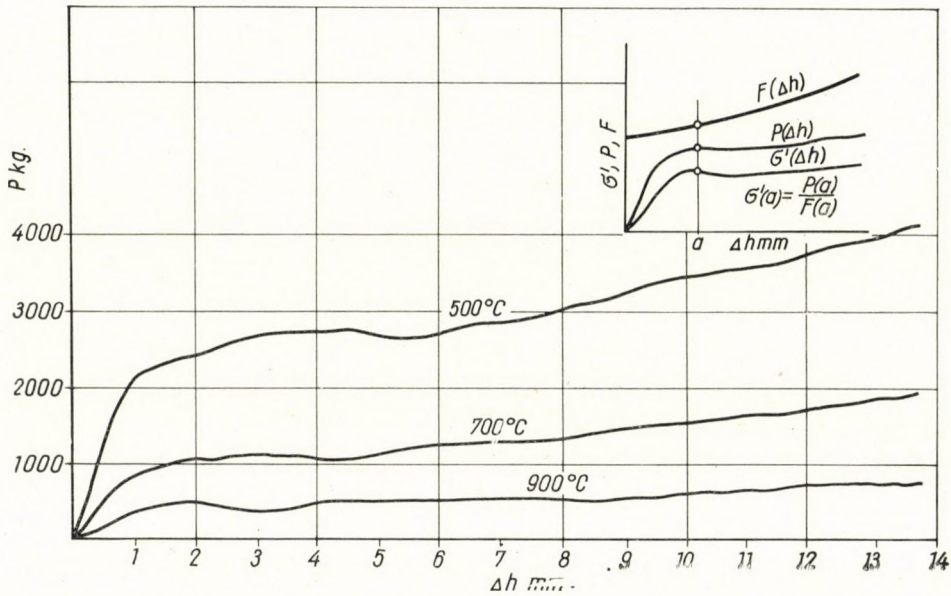


Abb. 4. Verformungskraft-Diagramme in Abhängigkeit von der Formänderung

Aus den am Ende des Gesamtvorganges bestimmten sowie auf die Formänderungen während des Vorganges bezüglichen, berechneten Spannungswerten wurden je Verformungstemperatur Durchschnittskurven gezeichnet, jedoch nicht nur als Funktion der Formänderung, sondern auch in Abhängigkeit von der Zeit (Abb. 5, 6 und 7). Die Ausgangswerte der Diagramme

Zahlentafel I
Versuchswerte am Ende des Stauchvorganges

Verformungs- temperatur °C	Effektive Stauchung ε%	Kraft am Ende der Verformung P kg	Effektiver Querschnitt am Ende d. Verformung F mm ²	Wahre Spannung σ' kg/mm ²
20	2,57	2 860	261	10,9
	2,57	2 560	261	10,2
	4,4	3 460	266	13
	5,1	3 830	268	14,3
	9,8	5 940	282	21
	9,8	6 140	282	21,7
	20,8	8 400	321	26,2
	20,8	8 610	321	26,8
	38	13 740	409	33,6
	38	13 350	409	32,6
500	1,06	1 400	257	5,46
	2,2	1 500	260	5,08
	2,2	1 400	260	5,4
	3,67	1 700	264	6,45
	4,4	1 700	266	6,4
	5,1	2 200	268	8,2
	5,8	2 200	270	8,15
	7,21	2 500	274	9,1
	10,2	3 200	282	11,3
	11,7	3 100	288	10,8
	12,3	3 100	286	10,8
	12,6	3 300	291	11,3
	17,4	3 500	308	11,4
	23	3 500	330	10,6
38	4 000	409	9,8	
39,8	3 800	422	9	
700	1,55	750	258	2,9
	1,82	660	259	2,55
	1,93	690	259	2,66
	1,93	735	259	2,84
	2,12	870	259,5	3,23
	2,5	660	261	2,53
	2,2	720	260	2,77
	2,94	820	262	3,13
	4,05	960	265	3,62

Verformungs- temperatur °C	Effektive Stauchung $\varepsilon\%$	Kraft am Ende der Verformung P kg	Effektiver Querschnitt am Ende d. Verformung F mm ²	Wahre Spannung σ kg/mm ²
700	4,48	1 150	266	4,3
	4,76	884	267	3,35
	4,76	900	267	3,37
	5,22	1 110	268	4,15
	6,7	990	269	3,69
	6,95	1 020	273	3,74
	7,2	970	274	3,54
	10,1	1 200	277	4,33
	10,2	1 230	283	4,35
	11,7	1 170	288	4,06
	11,7	1 200	288	4,17
	13,5	1 260	294	4,2
	14,5	1 380	297	3,84
	14,7	1 200	298	4,02
	19,3	1 380	315	4,38
	19,8	1 200	317	3,8
	20,1	1 300	318	4,09
	20,5	1 300	319,8	4,06
	20,6	1 300	320	4,06
	21	1 360	322	4,22
	23,2	1 200	331	3,61
	34,6	1 600	388	4,13
	34,7	1 500	389	3,86
	39	1 600	416	3,85
	39,4	1 700	418	4,06
	40,1	1 800	425	4,25
	40,5	2 100	427	4,9
	40,8	2 200	429	5,14
900	1,93	300	259	1,16
	1,93	360	259	1,39
	2,2	300	260	1,15
	2,2	330	260	1,27
	2,3	330	260	1,27
	2,56	320	261	1,23
	2,9	360	262	1,37
	3,46	360	260	1,38

Verformungs- temperatur °C	Effektive Stauchung ε%	Kraft an Ende der Verformung P kg	Effektiver Querschnitt am Ende d. Verformung F mm ²	Wahre Spannung σ' kg/mm ²
	4,5	405	266	1,52
	4,5	405	266	1,52
	4,5	390	266	1,84
	4,8	390	267	1,46
	4,8	420	267	1,57
	5,1	390	266	1,46
	5,23	375	268	1,4
	5,8	400	270	1,48
	8,64	405	278	1,46
	9,73	405	278	1,46
	9,8	435	282	1,54
	9,95	360	282	1,28
	10,8	450	285	1,58
	13,9	465	295,5	1,57
900	13,9	480	295,5	1,63
	16,2	435	303,5	1,44
	18,8	480	313	1,53
	18,8	480	309	1,55
	19	540	314	1,72
	20,5	495	320	1,54
	21	495	322	1,54
	22,6	570	328	1,74
	22,6	570	328	1,74
	34	720	385	1,87
	36	780	397	1,96
	37,6	660	407	1,62
	38,6	870	413	2,25
	39,4	750	419	1,79
	39,6	960	415	2,31
	43,3	900	430	2,09

waren die aus den Warmstauchversuchen ermittelten durchschnittlichen 0,2-Quetschgrenzwerte (bei 500°C—3,9 kg/mm², bei 700°C—1,95 kg/mm² und bei 900°C—0,73 kg/mm²). Die den Formänderungen zugeordnete volle Zeitdauer wurde bei jedem Versuch genau gemessen, und aus diesen ließ sich die durchschnittliche Verformungsgeschwindigkeit und daraus auch die Dauer irgendeiner geringeren Formänderung bestimmen.

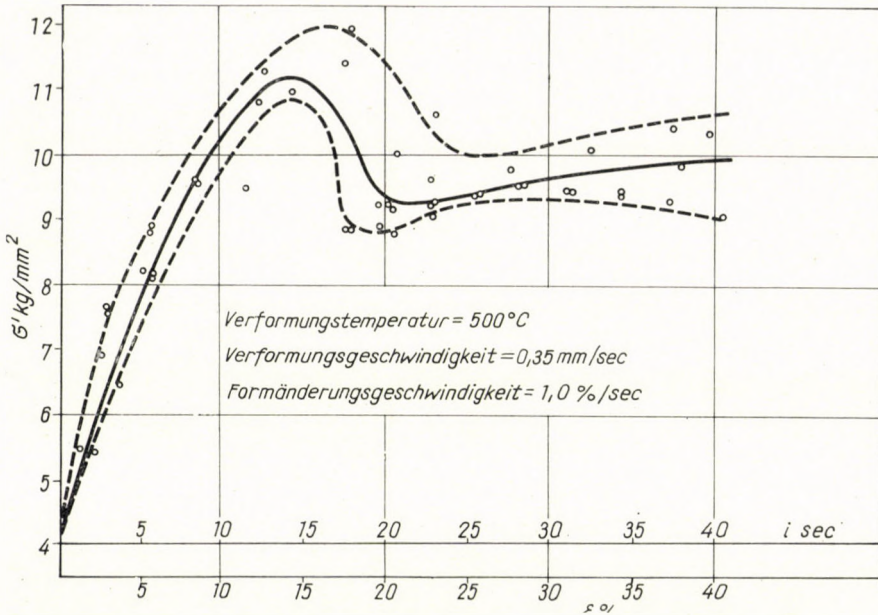


Abb. 5. Änderung der wahren Spannung in Abhängigkeit von der Verformung bei einer Warmstauchung bei 500° C und einer Formänderungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 1,0\% \text{ sec}^{-1}$

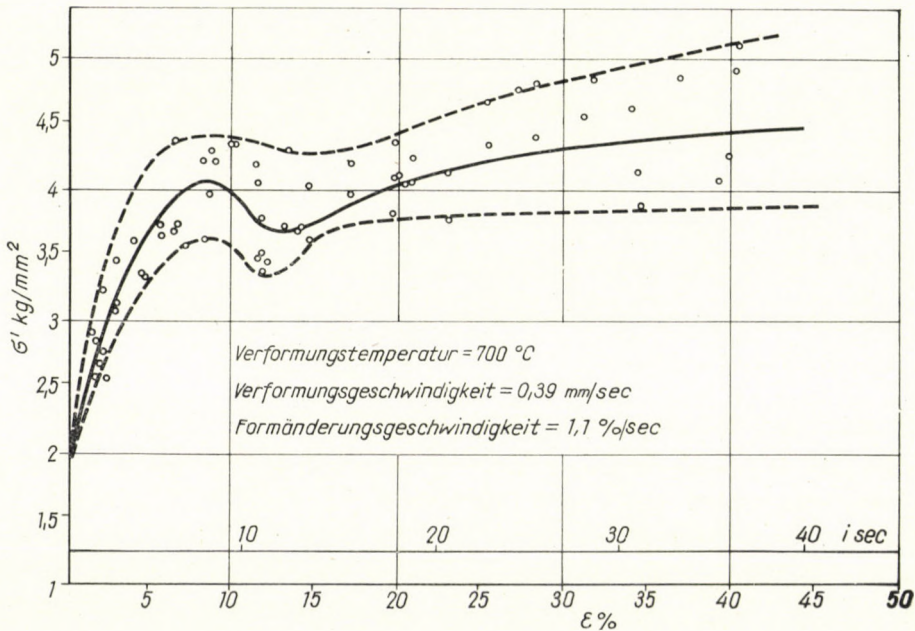


Abb. 6. Änderung der wahren Spannung in Abhängigkeit von der Verformung bei einer Warmstauchung bei 700° C und einer Formänderungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 1,1\% \text{ sec}^{-1}$

Die Form der Kurven war von denen der bei 20° C Stauchttemperatur sowie beim Warmwalzen aufgenommenen Kurven wesentlich verschieden. Die Stauchkurven bei allen drei Verformungstemperaturen waren dadurch gekennzeichnet, daß zuerst ein gewisses Spannungsmaximum auftritt, sodann die Kurve absinkt und bei steigender Stauchung wieder ansteigt. Die Steigung dieses Kurvenabschnittes ist bei den höheren Verformungstemperaturen verhältnismäßig stärker. Diese Spannungszunahme muß eine Folge der während des Stauchens doch eintretenden Temperaturabfalls sein, denn die

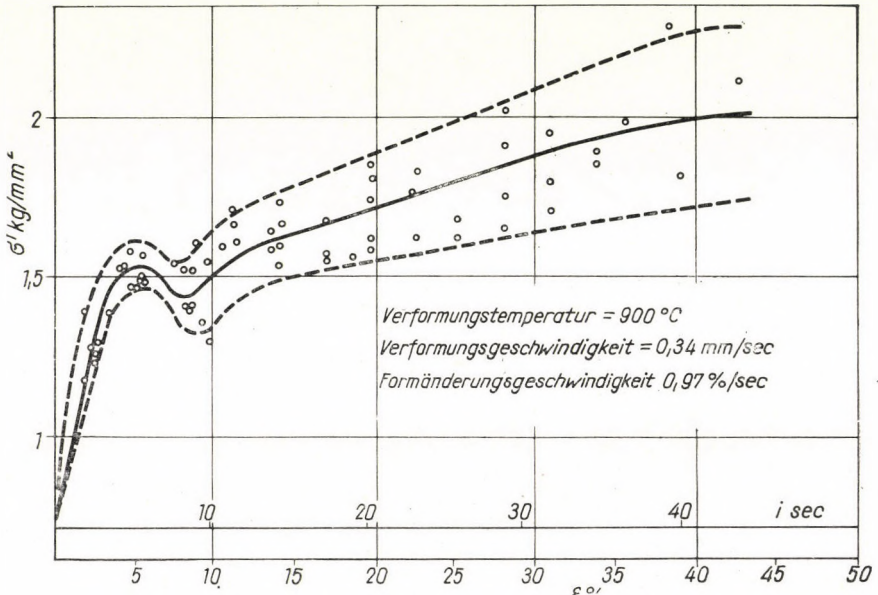


Abb. 7. Änderung der wahren Spannung in Abhängigkeit von der Verformung bei einer Warmstauchung bei 900° C und einer Formänderungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 0,97\% \text{ sec}^{-1}$.

mit kleinerer ($0,38\% \text{ sec}^{-1}$) und größerer ($3\% \text{ sec}^{-1}$) sowie mit zusätzlicher Erhitzung während der Verformung durchgeführten Versuche deuten auf diesen Umstand hin. Bei Abb. 9 steigt nämlich die Kurve der geringeren Geschwindigkeit schärfer an als die bei $1\% \text{ sec}^{-1}$ Formänderungsgeschwindigkeit aufgenommene, während die bei $3\% \text{ sec}^{-1}$ aufgenommene Kurve darunter bleibt und in die Waagrechte umbiegt. Das bei der Stauchung gebildete Spannungsmaximum und das darauffolgende Minimum sind sicherlich eine Folge des bei geringer Verformungsgeschwindigkeit durchgeführten komplizierten Warmverformungsvorganges. Bei geringeren Geschwindigkeiten zieht sich nämlich der Vorgang infolge der zur Verfügung stehenden längeren Zeit so in die Länge, daß die zu Beginn auftretende Verfestigung durch die Einwirkung der Temperatur stetig kompensiert wird und dadurch

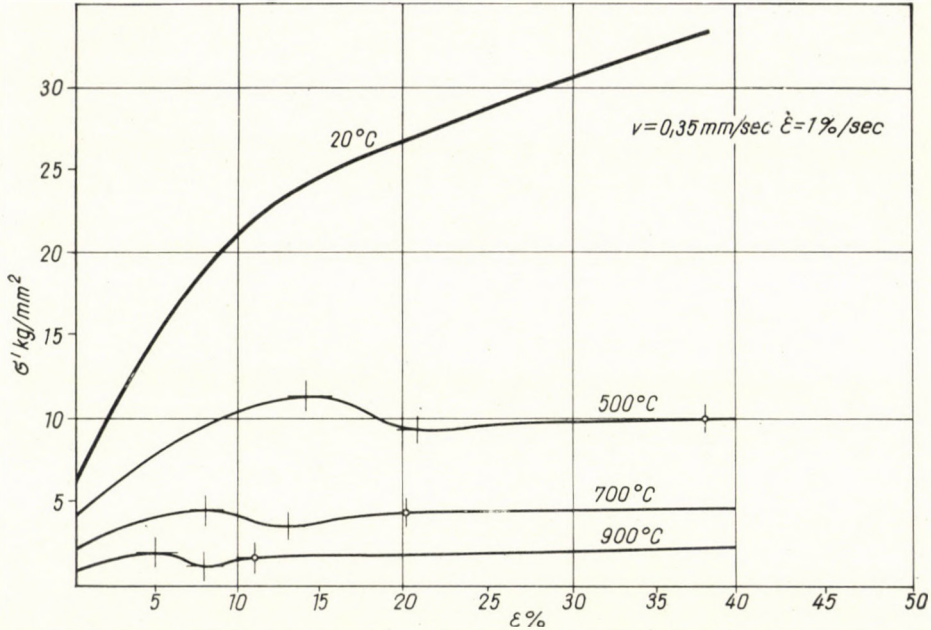


Abb. 8. Änderung der wahren Spannung in Abhängigkeit von der Verformung bei verschiedenen Verformungstemperaturen und einer Formänderungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 1\%/sec^{-1}$

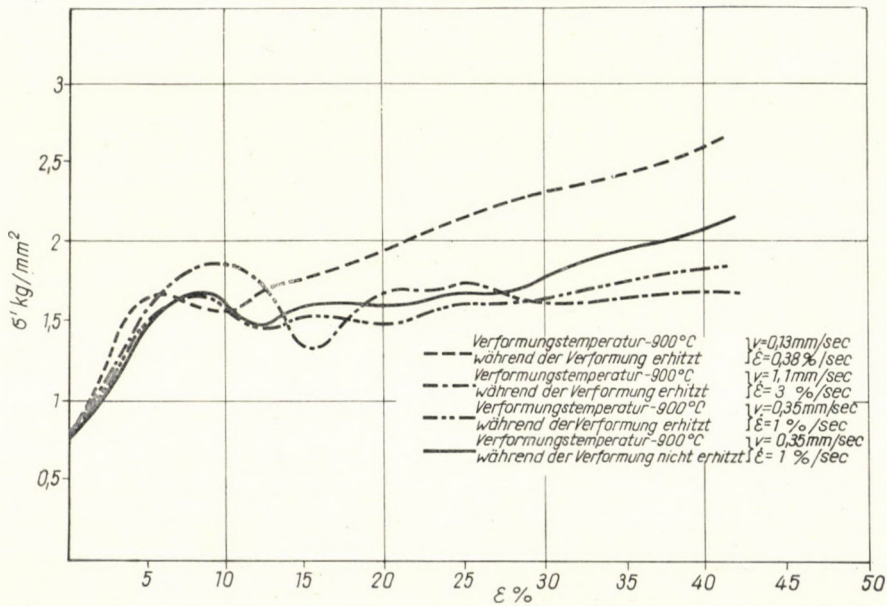


Abb. 9. Vergleich der wahren Spannungskurven verschiedener Stauchversuche bei 900°C und geringen Formänderungsgeschwindigkeiten. Einfluß der erhöhten Abkühlung durch zunehmende Verformungsdauer

nicht weiter gesteigert, sondern sogar verringert wird und wahrscheinlich nach dem Minimum einem konstanten Wert zustrebt. Die entscheidende Wirkung der Verformungstemperatur bezeigt sich auch darin, daß mit steigender Temperatur der Zahlenwert des Maximums stark abfällt und die Stelle des Maximums und Minimums sich in Richtung der geringeren Stauchungen verschiebt (Abb. 8). Man sieht nämlich, daß während bei 500°C das Maximum bei etwa 13–15% Verformung liegt, es bei

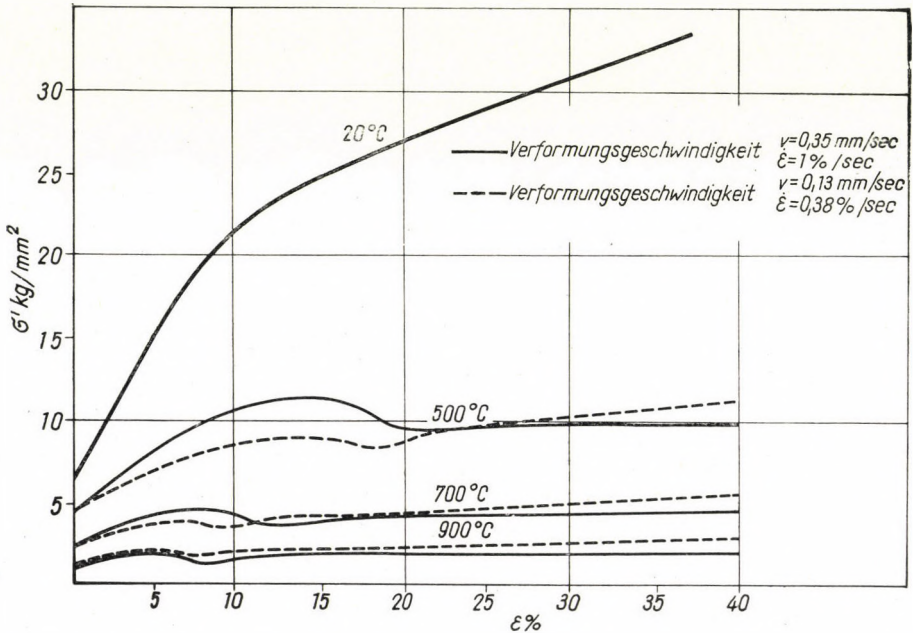


Abb. 10. Änderung der wahren Spannungen in Abhängigkeit von der Verformung bei geringeren ($\dot{\epsilon} = 0,38\% \text{ sec}^{-1}$) Formänderungsgeschwindigkeiten und verschiedenen Verformungstemperaturen sowie Vergleich mit den wahren Spannungen der Versuche bei $1\% \text{ sec}^{-1}$ Formänderungsgeschwindigkeit

700° C bei etwa 7–9% und bei 900° C bei etwa 4–6% Formänderung zu liegen kommt (es scheint, daß die Maximum- und Minimumstellen bei verschiedenen Temperaturen auf je einer Kurve liegen). Dies bedeutet natürlich weiterhin, daß diese Kennzeichen bei steigender Temperatur und gleichbleibender Geschwindigkeit in immer kürzerer Zeit auftreten.

Die mit einigen Proben bei geringerer Geschwindigkeit ($v = 0,1–0,13 \text{ mm/sec}$, $\dot{\epsilon} = 0,3–0,38\% \text{ sec}^{-1}$) durchgeführten Stauchungen ergaben mit zunehmender Temperatur gleichermaßen eine Verringerung des Zahlenwertes der Maxima sowie eine Verschiebung der Maximum- und Minimumstellen nach den geringeren Verformung (Abb. 10). Zugleich läßt sich aber auch ent-

decken, daß sich die Verschiebung der Maximum- und Minimumstellen mit steigender Temperatur bei geringeren Geschwindigkeiten noch stärker als bei den höheren auswirkt. Das bedeutet aber, daß bei der gleichen Verformungstemperatur die Verringerung der Geschwindigkeit die Entfestigung in Richtung der kleinen Stauchungen, die Vergrößerung in Richtung der größeren Stauchungen verschiebt (es ist zu bemerken, daß in Abb. 10 bei geringeren Geschwindigkeiten die schon erwähnte Abkühlung die Erhöhung der Spannungen noch stärker bewirkt). Die Verringerung der Geschwindigkeit wirkt also im gleichen Sinne wie eine Temperaturerhöhung. Dies ist auch selbstverständlich, da z. B. bei geringeren Geschwindigkeiten bis zur gleichen Formänderung mehr Zeit zur Verfügung steht und demnach die mildernde Wirkung der Temperatur schon früher, bei geringerer Formänderung zur Geltung kommt. Die verschieden verlaufenden Kurven der um eine Größenordnung höheren Geschwindigkeit durchgeführten Warmwalzversuche [2] bedeuten, daß in diesem Geschwindigkeitsbereich wenigstens bei gleichbleibender Verformungsgeschwindigkeit (die Formänderungsgeschwindigkeit war verschieden) nur Verfestigung eintritt, ohne daß auch nur eine geringfügige Entfestigung sich während der Verformung melden könnte, die Wirkung der Temperatur jedoch das Maß der Verfestigung verringert. Es muß also voraussichtlich eine Geschwindigkeitsgrenze bestehen, oberhalb deren während des Vorganges keine Entfestigung festgestellt werden kann, unterhalb deren jedoch ein Maximum und Minimum der Verfestigung besteht. Man könnte sich sogar vorstellen, daß sich die Stelle des Maximums und des Minimums bei genügend geringer Geschwindigkeit sogar ausgleicht und nach einer geringfügigen Verfestigung ein konstanter Spannungswert erreicht wird. Eine derartige Tendenz kann in Abb. 10 wahrgenommen werden, indem bei den geringeren Geschwindigkeiten der Unterschied zwischen den Zahlenwerten des Maximums und Minimums abnimmt.

Das oben dargestellte Bild des Warmstauchvorganges wird durch die Versuche von G. GÄRTNER in Zwickau [1] bestätigt. Seine mit Elektrolytkupfer bis 550°C durchgeführten Versuche zeigen ebenfalls die Bildung von Verfestigungsmaxima bei 450°C und 550°C (z. B. bei 15% Verformung und 550°C). Die hinzugefügte Erklärung jedoch, die diese Erscheinung mit einer gewissen Versprödung des Kupfers zwischen $350\text{--}650^{\circ}\text{C}$ erklären will, ist unserer Ansicht nach nicht zutreffend. Nach obiger Deutung folgt diese Erscheinung nämlich aus der Natur der Warmverformung und ist eine Folge der Entfestigungswirkung der Temperatur. Warmtorsionsversuche von C. ROSSARD und P. BLAIN [4] an verschiedenen Stählen ergaben im wesentlichen analoge Kurven wie die hier geschilderten.

Die Änderung der wahren Spannungen in Abhängigkeit von der Verformungstemperatur bei verschiedenen Verformungen zeigt die Abb. 11. Im allgemeinen tritt die übliche Kurvenform auf, die Überschneidungen sind

die Folgen von Spannungsabfällen (Entfestigungen) wegen der geringeren Geschwindigkeiten.

Schließlich muß man bemerken, daß die wahren Spannungskurven der mit den Warmwalzversuchen parallel als Hilfsmittel durchgeführten Warmzerreiversuche [2] auf Grund der Warmstauchversuche bei höheren Temperaturen einer Korrektur bedürfen. Dies beeinflußt jedoch die Werte der berechneten Formnderungsfestigkeiten nur in sehr geringem Maße.*

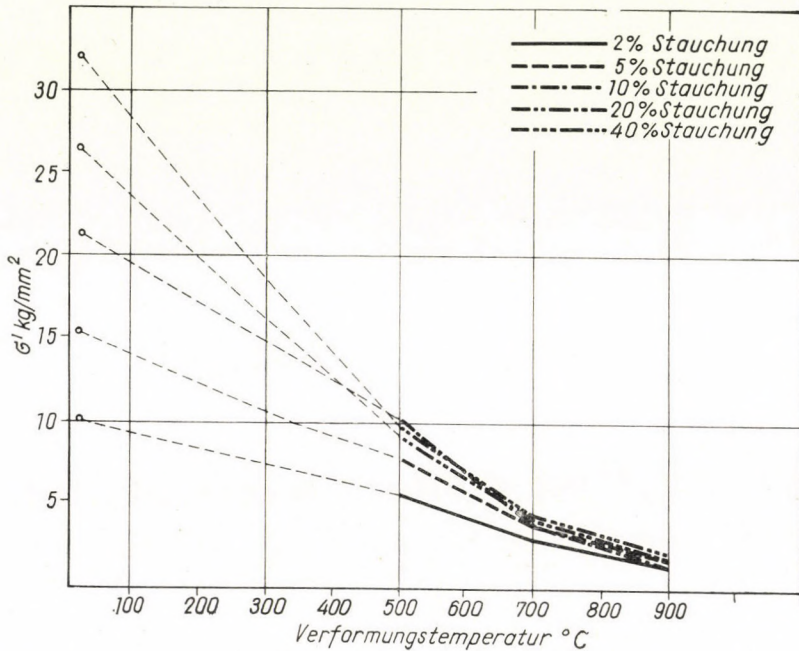


Abb. 11. Änderung der wahren Spannungen in Abhängigkeit von der Verformungstemperatur bei verschiedener Verformung und einer Formänderungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 1\% \text{ sec}^{-1}$

II. Beobachtungsperiode. Hier wurde die Beobachtung des in Wasser abgeschreckten »A«-Zustandes und des an der Luft abgekühlten »B«-Zustandes vorgenommen. Die Untersuchungen erstreckten sich auf die durch die Verfestigung am empfindlichsten beeinflußte mechanische Eigenschaft, die 0,2-Quetschgrenze und auf das Gefüge. In Anbetracht dessen, daß die Fest-

* Die bezeichneten Kurven der Warmzerreiversuche (Acta Technica Tom. XXV. Fasc. 3—4. p. 401, Abb. 2) zeigen nämlich auf Grund wiederholter Versuche bei höheren Temperaturen (ber 500 $^{\circ}\text{C}$), ähnlich den Warmstauchversuchen, keine stndige Verfestigung, sondern ein Spannungsmaximum und dann eine Verringerung der Spannung. Wenn man jedoch die Formnderungsfestigkeitswerte der Abb. 3 durch die wahren Spannungswerte des Warmstauchversuches kontrolliert, so bleibt die Form der k_f -Kurven unverändert, wobei in den Werten zwar eine gewisse Änderung eintritt, jedoch dieser Unterschied unter 10% bleibt.

legung der Ausgangszustände (»M«) gleichfalls mit mechanischen und metallographischen Methoden vorgenommen wurde, waren die Ergebnisse vergleichbar. Für die Untersuchungen wurden die gestauchten Probekörper entlang der längeren Achse, jedoch 2,5 mm von der Achse entfernt, aufgeschlitzt. Demnach konnte aus dem einen Teil eine kleine Druckprobe 10 \varnothing \times 15 mm zur Bestimmung von $\sigma_{0,2 Dr}$ hergestellt werden. Der andere Längsschnitt ergab das Material für die Gefügeuntersuchung. Die Werte von $\sigma_{0,2 Dr}$ für verschiedene Verformungstemperaturen und Verformungen im Zustand »A« und »B« sind in Zahlentafel 2 enthalten.

Zahlentafel 2

$\sigma_{0,2}$ -Werte des Zustandes »A« und »B« bei verschiedenen Verformungstemperaturen

Verformungstemperatur 500° C				Verformungstemperatur 700° C				Verformungstemperatur 900° C			
In Wasser abgeschreckt »A«		An der Luft abgekühlt »B«		In Wasser abgeschreckt »A«		An der Luft abgekühlt »B«		In Wasser abgeschreckt »A«		An der Luft abgekühlt »B«	
ϵ %	$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	ϵ %	$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	ϵ %	$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	ϵ %	$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	ϵ %	$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²	ϵ %	$\sigma_{0,2}$ kg/mm ²
1	8,4	2,2	9,7	1,93	7,62	1,55	7,35	1,93	5,8	1,93	6,95
2,2	9,8	3,67	9,95	2,2	9,05	1,82	7,8	2,2	8,2	2,2	7,7
5,1	11,4	3,67	10,3	2,5	8,26	2,12	7,4	2,9	5,5	2,3	5,8
5,8	11,2	4,4	10	4,48	6,5	2,94	8,4	3,46	7,3	2,56	6,75
7,2	11,4	11,7	9,3	4,76	8,9	4,05	7,2	4,5	5,8	4,5	6,05
10,2	12,9	12,6	10,1	6,7	7,3	4,76	8,7	4,5	6,15	4,8	7,95
12,3	11,7	19	8,17	7,2	6,7	5,22	5,8	4,8	7,1	5,23	5,95
17,4	12	23	8,65	10,1	5,9	6,95	6,4	5,1	7,45	5,8	7,35
20,5	10	39,8	7,55	11,7	8,85	10,2	7,05	9,95	6,2	8,64	6,35
33,8	14,6			14,2	6,3	11,7	8,2	9,73	6,28	9,8	8
38	8,74			14,7	6,95	13,5	8,4	10,8	7,95	13,9	6,5
				19,3	9	14,5	5,8	13,9	6,6	16,2	6,66
				20,1	5,7	19,8	7,35	20,5	7,3	18,8	6,2
				20,5	6,65	20,6	6,3	21	7,4	18,8	6,15
				21	7,3	23,2	7,3	22,6	5,8	19	6,95
				34,7	7,2	34,6	6,4	23,6	6,2	36	6,25
				39,4	6,5	39	7,6	34	7,45	38,6	6,0
				40,4	7,15	40,1	9,2	37,6	7,7	39,4	8,4
				40,5	8,4	40,8	6,75	39,6	5,38	40,9	5,7
								43,3	6,35		

Die Änderung dieser Werte in Abhängigkeit von der Verformung ist aus Abb. 12 ersichtlich. Bei 500° C wie auch bei 700° C ist sowohl im Zustand

»A« als auch im Zustand »B« ein ausgeprägtes Maximum zu beobachten und zwar bei 500° C im Zustand »A« bei 11% und im Zustand »B« bei 4%; bei 700° C im Zustand »A« und »B« zwischen 2 und 3% Verformung. Die Maxima des Zustandes »B« sind infolge der längeren Abkühlung kleiner als die des Zustandes »A«. Bei 900° C erscheint im Grunde genommen keine Verfestigung, was mit den Erfahrungen des Warmwalzversuches übereinstimmt. Mit Erhöhung der Temperatur ist eine Verschiebung der Maxima in Richtung der kleineren Stauchungen ersichtlich, was mit den Aussagen der σ' —

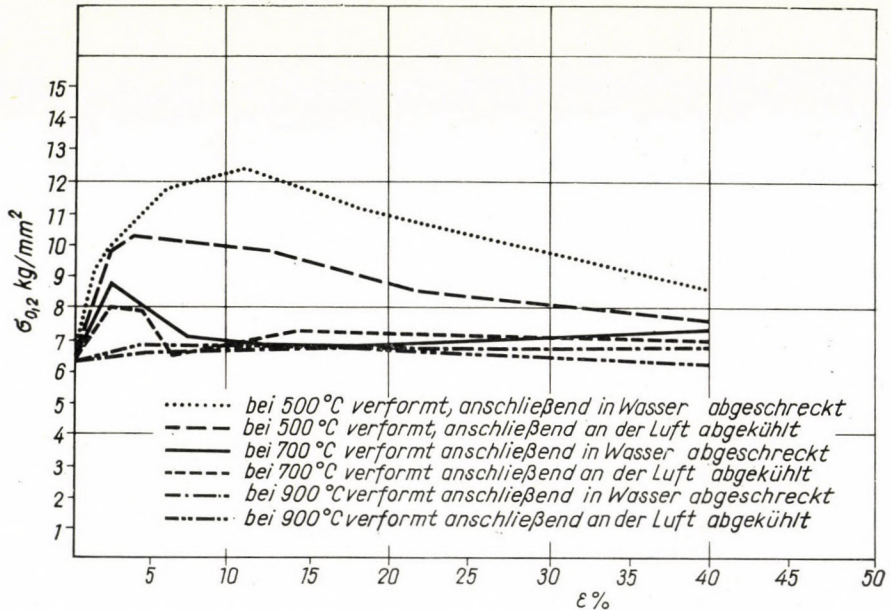


Abb. 12. Änderung der durch Druckversuch bestimmten 0,2-Quetschgrenze in Abhängigkeit von der Formänderung, nach Verformung bei verschiedenen Temperaturen und Abschreckung in Wasser (Zustand »A«) oder Abkühlung an der Luft (Zustand »B«)

ϵ Kurven übereinstimmt. Außerdem verschiebt sich bei 500° C das Maximum des Zustandes »B« in Richtung der kleineren Stauchung, was sich durch die langsamere Abkühlung erklären läßt. Selbstverständlich sind die $\sigma_{0.2}$ D_T -Werte mit den σ' -Werten nicht vergleichbar, denn die Bestimmung der 0,2-Grenze wurde bei 20° C vorgenommen. Jedoch zeigt die Erfahrung, daß im Zustand »A« die Maxima der 0,2-Grenze im Vergleich zu den Maxima der wahren Spannung in Richtung der kleineren Formänderung verschoben sind. Dies ist wahrscheinlich eine Folge der bis zum Eintreten des Zustandes »A« verstrichenen Zeit.

Die Gefügeuntersuchungen ergaben folgende Tatsachen. Das Ausgangsgefüge des Versuchswerkstoffes ist aus Abb. 13 ersichtlich, die Korngröße



Abb. 13. Ausgangsgefüge des Versuchswerkstoffes ($\varnothing = 0,05$ mm) 75 \times

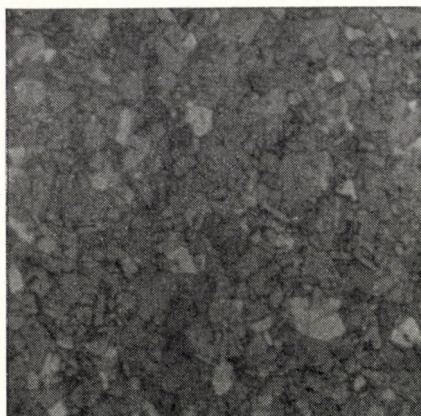


Abb. 14. Gefüge des bei 520° C 21' lang erhitzten und ohne Verformung in Wasser abgeschreckten Zustandes (M5). 75 \times

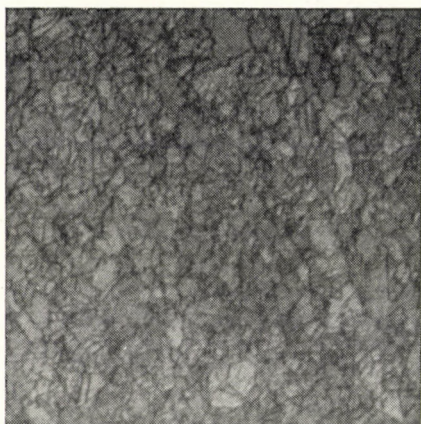


Abb. 15. Gefüge der bei 500° C um 17% gestauchten Probe. Merkliche Orientierung. 75 \times

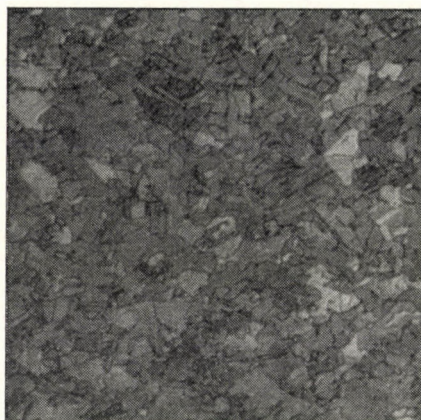


Abb. 16. Gefüge der bei 500° C um 20% gestauchten Probe. Sehr geringe Orientierung, auf dem Bild nicht mehr zu erkennen. 75 \times

beträgt 0,05 mm. Der tatsächliche Ausgangszustand der Verformung bei 500° C (auf 520° C erhitzt und ohne Verformung in Wasser abgeschreckt »M«) ist eigentlich der gleiche (Abb. 14). Mit zunehmender Verformung zeigt sich eine Zeitlang keine Änderung. Bei etwa 17% Verformung jedoch zeigt sich eine Streckung (Abb. 15), die bei 20% nur ein Verhältnis von 1 : 1,3 aufweist (Abb. 16). Bei weiterer Verformung ($\epsilon = 38\%$) erscheint jedoch ein geändertes Gefügebild (Abb. 17) mit geringerer Korngröße (0,035 mm).

Die Wertung der Gefüge der bei 700° C und 900° C verformten Proben wurde dadurch erschwert, daß das Gefüge des sog. wirklichen Ausgangszustandes (»M«) hinsichtlich der Größe der Kristallite heterogen war. Das Gefügebild der vor der Verformung bei 700° C zweckmäßigerweise 16 Minuten lang auf 720° C erhitzten und dann ohne Verformung in Wasser abgeschreckten Proben weist nämlich unterschiedliche, teils sehr feine, teils sehr grobe Kristallite auf (Abb. 18). Im Gefügebild des bei 920° C hergestellten Zustandes M9 sind nach Abb. 24 zweierlei, aber der Größe nach weniger abweichende grobe

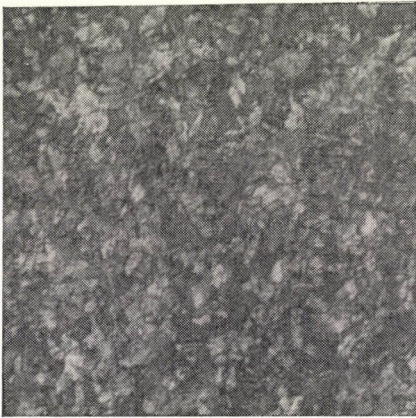


Abb. 17. Gefüge der bei 500° C um 38% gestauchten Probe. Rekristallisiertes Gefüge. 75×

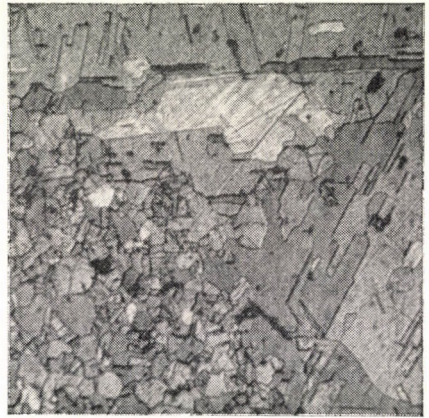


Abb. 18. Gefüge des bei 720° C 16' lang erhitzten und ohne Verformung in Wasser abgeschreckten Zustandes (M7). 50×

Körner zu sehen. Die zur Untersuchung dieser Tatsache zwischen 650° C und 920° C durchgeführten Glühversuche bewiesen, daß die Heterogenität gerade bei der angewendeten Temperatur von 720° C am größten ist, bei 650° C entstand nur ein minimales, über 750° C ein gröberes Doppelgefüge, wobei jedoch die Unterschiede in den Korngrößen schon geringer waren. Mit Rücksicht darauf, daß wegen dieser Heterogenität die Änderung der Korngröße in Abhängigkeit von der Verformung nicht verfolgt werden konnte, mußte das Verschwinden des Doppelgefüges bzw. die Erscheinung eines gewissen gleichmäßigeren Gefüges hier als Gefügeänderung betrachtet werden.

Demnach wurde die Verformung bei 700° C durch die folgenden Gefügebilder festgelegt. Das Gefüge bei der 2%-Verformung weist (Abb. 19) keine wesentliche Änderung gegenüber dem Ausgangszustand (Abb. 18) auf. Bei etwa 7%-Verformung zeigt sich eine geringe Zunahme der feinen sowie eine stärkere Abnahme der größeren Körner (Abb. 20). Noch stärker zeigt sich diese Tendenz bei der 14%-Verformung (Abb. 21). Bei der 20%-Verformung

erscheint ein fast ganz homogenes Gefüge (Abb. 22) und bei der 40%-Verformung ist das Gefüge feiner und weist eine fast homogene Korngröße auf (Abb. 23).

Der Stauchvorgang bei 900° C wird durch folgende Gefügebilder gekennzeichnet. Das hauptsächlich aus zwei groben Korngrößen bestehende Gefüge (Abb. 24) des Ausgangszustandes (M9) beginnt sich bei 5% Verformung zu ändern und es erscheint ein einheitlicheres, aus feineren Körnern bestehendes Gefüge (Abb. 25). Bei 11%-Verformung ist die Korngröße fast einheitlich

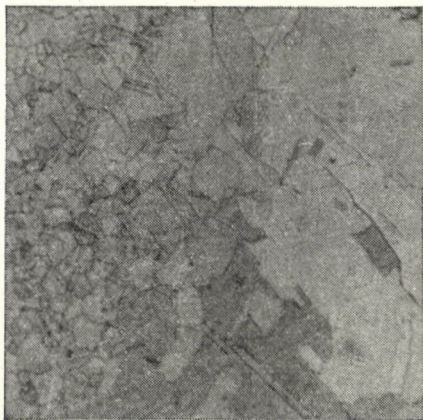


Abb. 19. Gefüge der bei 700° C um 2% gestauchten Probe. 50 ×



Abb. 20. Gefüge der bei 700° C um 7% gestauchten Probe. Heterogenität der Korngröße verringert. 50 ×

(Abb. 26), schließlich ist bei 40%-Verformung die Einheitlichkeit noch vollständiger und das Gefüge wird feiner (Abb. 27).

Obwohl die wahren Spannungen und die Werte der 0,2-Quetschgrenze keine miteinander vergleichbaren Werte ergeben, kann man aus der Tendenz ihrer Änderungen gewisse Schlüsse ziehen, die auch die Deutung der Gefügebilder erleichtern. So zeigen die 500° C-Kurven der Abb. 8. und 12., daß die Änderung der wahren Spannung und der 0,2-Grenze über eine gewisse Verformung hinaus ähnliche Tendenzen aufweist. Die wahre Spannung weist ein Maximum bei $\epsilon = 13-15\%$ auf, von hier an sinkt die Verfestigung durch den Einfluß der Temperatur und die Kurve weist durch den gemeinsamen Einfluß der Verformung und der Temperatur eine Tendenz zur Einstellung eines Gleichgewichtszustandes auf. In Zustand »A« zeigt die 0,2 Grenze bis etwa 11% eine Verfestigung und von da an deutet das Absinken der Kurve auf eine Entfestigung. Im Zustand »B« tritt dieser Fall bei noch geringeren Verformungen ein. Die Verformung bei 700° C ergibt ein unterschiedliches Verhalten beider Spannungen, also keine einheitliche Verfestigung, da das



Abb. 21. Gefüge der bei 700° C um 14% gestauchten Probe. Heterogenität der Korngröße weiter verringert. 50×



Abb. 22. Gefüge der bei 700° C um 20% gestauchten Probe. Fast gleichmäßig große Körner. 50×



Abb. 23. Gefüge der bei 700° C um 40% gestauchten Probe. Praktisch vollständig homogene Körner; feineres Gefüge. 50×



Abb. 24. Gefüge des bei 920° C 12' lang erhitzten und ohne Verformung in Wasser abgeschreckten Zustandes (M9). 50×

Maximum der wahren Spannung hier bei $\varepsilon = 7-9\%$ liegt, während die 0,2-Grenze bei 2-3% ein Maximum aufweist. Bei 900° C verformt weisen die Änderungen der 0,2-Grenze weder im Zustand »A«, noch im Zustand »B« auf eine Verfestigung hin. Demnach gibt es auch hier Unterschiede bis zum Maximum der wahren Spannung ($\varepsilon = 4-6\%$). Bei beiden Temperaturen jedoch bezeichnet die 0,2-Grenze über dem entsprechenden Maximum der wahren Spannung schon einen entfestigten Zustand.



Abb. 25. Gefüge der bei 900° C um 5%
gestauchten Probe. Änderung der Korn-
größe bereits sichtbar. 50×

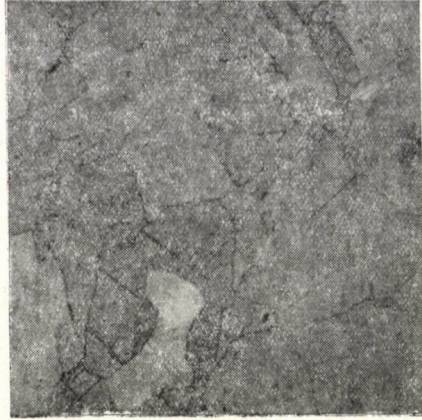


Abb. 26. Gefüge der bei 900° C um 11%
gestauchten Probe. Fast gleichmäßiges
Korn. 50×



Abb. 27. Gefüge der bei 900° C um 40%
gestauchten Probe. Noch gleich-
mäßigeres Korn. 50×

Im Hinblick darauf, daß bei Stauchungen, die den Maximalwert der wahren Spannung übersteigen, bei Verformungstemperaturen von 700° C und 900° C der Versuchszustand »A« und »B« als entfestigt bezeichnet werden kann, sowie auch bei 500° C eine starke Tendenz zur Erreichung des entfestigten Zustandes besteht, ferner wenn man überlegt, daß bei allen drei Verformungstemperaturen die Gefügebilder der Zustände »A« und »B« innerhalb derselben Temperatur im großen und ganzen übereinstimmen, kann man zu der Feststellungen gelangen, daß die Gefügebilder der nach der Stau-

chung fixierten Versuchszustände (Zustand »A« und »B«) auch für den Vorgang während der Verformung charakteristisch sind. Demnach scheint es also, daß bei einer mit kleiner Formänderungsgeschwindigkeit durchgeführten Stauchung sich das Gefüge schon im Laufe der Verformung ändert und zwar während der Periode der konstant bleibenden wahren Spannung. Bei steigender Verformungstemperatur erfolgt die Gefügeänderung bei einer geringeren Verformung. Wie jedoch die Änderungen der 0,2-Grenze zeigen, erfolgt eine Entfestigung, die den Ausgangszustand erreicht oder ihm nahekommt, erst bei nach der Verformung gebildeten Zuständen (»A« oder »B«).

Die durchgeführten Versuche und die daraus gezogenen Schlüsse beziehen sich im wesentlichen auf eine Verformungsgeschwindigkeit von $v = 0,35$ mm/sec und dementsprechend auf eine Formänderungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 1\%$ sec⁻¹. Eine Untersuchung des Einflusses der Geschwindigkeiten auf den Warmverformungsvorgang ist derzeit im Gange und die Ergebnisse sollen später mitgeteilt werden.

SCHRIFTTUM

1. G. GÄRTNER: Versuche zur Übertragung des Kegelstauchverfahrens auf das Warmstauchen von Metallen. Freiburger Forschungshefte B. 27. 1958.
2. E. BELLA: Untersuchung der Verfestigung, der Entfestigung und der Veränderung des Gefüges während und nach dem Warmwalzen von Elektrolytkupfer. Acta Technica XXV (1959) 393/426.
3. V. D. I. Arbeitsblätter Fließkurven metallischer Werkstoffe V. D. I. 5 — 3.200. 1954.
4. C. ROSSARD et P. BLAIN: Evolution de la structure de l'acier sous l'effet de la déformation plastique à chaud. Revue de Metallurgie 1959. N. 3.

ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegender Aufsatz befaßt sich mit den Vorgängen der Warmstauchung von Elektrolytkupfer mit geringer Formänderungsgeschwindigkeit (durchschnittlich $\dot{\epsilon} = 1\%$ sec⁻¹). Die Versuche bezweckten die Untersuchung der Verfestigung, Entfestigung und Gefügeänderung bei drei verschiedenen Verformungstemperaturen (500, 700 und 900° C) in Abhängigkeit von der Formänderung. Der Zustand während der Verformung läßt sich durch die aus der gemessenen Druckkraft und dem jeweiligen Querschnitt berechnete wahre Spannung kennzeichnen, der Zustand nach der Verformung durch den nachträglich durch Druckprobe bestimmten Wert der 0,2-Quetschgrenze. Es ergibt sich, daß die wahre Spannung während der Warmverformung zuerst bis zu einem Maximalwert ansteigt, dann nach ständiger Abnahme einem konstanten Wert zustrebt. Das Maß dieser Verfestigung und Entfestigung verringert sich mit zunehmender Verformungstemperatur. Die Formänderungen, die den charakteristischen Verfestigungs- und Entfestigungsstellen der Spannungskurven entsprechen, verschieben sich mit steigender Verformungstemperatur nach geringeren Werten. Die Kurven der 0,2-Quetschgrenze zeigen ein ähnliches Bild für die Zustände nach der Verformung. Aus den in verschiedenen Phasen des Warmstauchvorganges gewonnenen Gefügebildern ist es ersichtlich, daß schon während des Vorganges eine Gefügeänderung eintritt.

HOT BULBING EXPERIMENTS WITH COPPER AT LOW FORMING RATES

E. BELLA

SUMMARY

The paper deals with phenomena observed during hot bulbing of electrolytic copper with low forming rates (in the averages $\dot{\epsilon} = 1\% \text{ sec}^{-1}$). The purpose of the experiments was to observe hardening, softening and structural changes at three forming temperatures (500, 700 and 900° C) as a function of strain. The condition under forming is characterized by the true stress as calculated from the measured compressive force and the actual cross section, while the condition after forming by the value of the 0,2-limit as determined afterwards by the compression test. It could be established as to, how during hot forming the true stress is increased up to a maximum value, then after gradual decrease, points to a constant level. As the forming temperature is increased, so the measure of this hardening and softening is lower. Strains corresponding to the significant hardening—softening points of the stress curves show a trend to lower values with increasing forming temperatures. The curves of the 0,2-limits show a similar trend for the conditions after forming. From photos of the structure made during the different stages of hot bulbing a structural change may be seen even during the process.

ESSAIS DE DÉFORMATION PAR COMPRESSION DE CUIVRE ÉLECTROLYTIQUE, À FAIBLE VITESSE DE DÉFORMATION

E. BELLA

RÉSUMÉ

Le travail traite des phénomènes se produisant pendant la déformation par compression à chaud du cuivre électrolytique, effectuée avec une faible vitesse de déformation ($\dot{\epsilon} = 1\% \text{ sec}^{-1}$ en moyenne). Les essais examinent le durcissement, l'adoucissement et les changements de la structure en fonction de la déformation, à trois températures d'essai (500, 700 et 900° C). La condition pendant la déformation est caractérisée par la tension réelle, calculée de la force compressive mesurée et de la section donnée, tandis que la condition après la déformation est caractérisée par la valeur de la limite 0,2, déterminée ultérieurement par un essai de pression. On peut constater que pendant la déformation à chaud, la tension réelle commence par augmenter jusqu'à une valeur maximum, après quoi elle baisse graduellement et s'approche d'un niveau constant. Ce durcissement et cet adoucissement diminuent avec l'augmentation de la température de déformation. Les déformations par compression correspondant aux endroits caractéristiques de durcissement-adoucissement des courbes de tension se déplacent, avec l'augmentation de la température, vers les valeurs plus faibles. Quant aux conditions après la déformation par compression, les courbes de la limite 0,2 offrent une allure analogue. Des images représentant les structures, fixées pendant les diverses phases de la déformation par compression à chaud, il ressort que l'altération de la structure commence déjà au cours du procès.

ОПЫТЫ ПО ГОРЯЧЕМУ ОСАЖИВАНИЮ МЕДИ ПРИ НЕБОЛЬШОЙ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ

Э. БЭЛЛА

РЕЗЮМЕ

Статья занимается явлениями горячего осаживания электролитической меди, производимого при небольшой скорости деформации (в среднем $\dot{\epsilon} = 1\% \text{ сек}^{-1}$). Во время опытов при трех различных температурах обработки (500, 700 и 900° C) в функции деформации исследуются твердение, отпуск и изменение структуры. Характеристика состоя-

ния при обработке производится действительным напряжением, вычисленным на основе измеренной величины усилия давления и сечения в каждый отдельный момент. Можно установить, что при горячей обработке действительное напряжение сначала возрастает до некоторого максимального значения, затем оно после постепенного уменьшения достигает неизменного уровня. Степень этого твердения и отпуска с повышением температуры обработки падает. Те деформации, которые соответствуют характерным точкам твердения — отпуска, с повышением температуры обработки сдвигаются в сторону меньших значений. Кривые предела 0,2 для состояний после обработки показывают аналогичную картину. По структуре, зафиксированной в различных периодах процесса горячего осаживания, видно, что уже во время процесса происходит изменение структуры.

ÜBER DEN EINFLUSS VON DRUCK, TEMPERATUR UND MECHANISCHEM SCHLEIFEN AUF DAS ENTSTEHEN DES OBERFLÄCHENMARTENSITS

A. MAŠÍN

PHYSIKALISCHES LABORATORIUM DES FORSCHUNGSINSTITUTS FÜR VERKEHRSWESEN,
RESORTANSTALT DES VERKEHRSMINISTERIUMS, PRAHA

O. BAKALÍKOVÁ

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR VAKUUMELEKTROTECHNIK, PRAHA

[Eingegangen am 30. November 1959]

1. Einleitung

In der Arbeit [1] wurden Änderungen des Oberflächenmartensits im Laufe des fortschreitenden Nachpolierens studiert. Dabei wurde beobachtet, daß die plastische Deformation, die durch das Einritzen des Markierungszeichens hervorgerufen wird, keine Bildung von Oberflächenmartensit verursacht. Aus dieser Tatsache wurde damals vorläufig abgeleitet, daß der einfache Druck allein keine Entstehungsursache des Oberflächenmartensits wäre. In der vorliegenden Arbeit wird dann die Frage vom Einfluß des bloßen Druckes näher untersucht.

Weiter wird hier der Einfluß der Unterkühlung bei -78°C und bei -193°C , des Glühens bei verschiedenen Temperaturen bis 1250°C und des mechanischen Schleifens bei der Schliifherstellung der Proben auf die Ausbildung des Oberflächenmartensits und der Einfluß des Druckes und der Temperatur auf den bereits bestehenden Oberflächenmartensit verfolgt.

2. Der Einfluß des Druckes

Für die Versuche verwendete man Proben aus 2 mm starkem warmgewalzttem Kovar-Blech von folgender Zusammensetzung: 18% Co, 27,8% Ni, 0,51% Mn, 0,03% C, Rest Eisen. Die Zusammensetzung der Legierung stimmt praktisch mit der in [1] benutzten Legierung überein. Die Proben wurden handgeschliffen auf Schmirgelpapier 4/0, 5/0 und 6/0, dann auf nassem Wege mit künstlichem Korund (Körnung 600) vorpoliert und auf Samtscheibe mit Suspension von Spinellin in destilliertem Wasser poliert. Als Ätzmittel wurde eine Lösung von 20 ccm HCl, 10 ccm HNO₃ und 2g CuCl₂ benutzt. Das Gefüge der Proben war austenitisch mit zeilenförmig angeordnetem Oberflächenmartensit. An den Schliifproben wurden Stellen mit einer Zeile des Oberflächenmartensits gewählt und mit gekreuzten Ritzen markiert. Die so bezeichnete Stelle wurde dann photographiert. Um die Zufälligkeit der Versuchsergebnisse auszuschließen, wurden 5 Blechproben genommen, deren ausgesuchte und bezeichnete Stellen aufgenommen wurden.

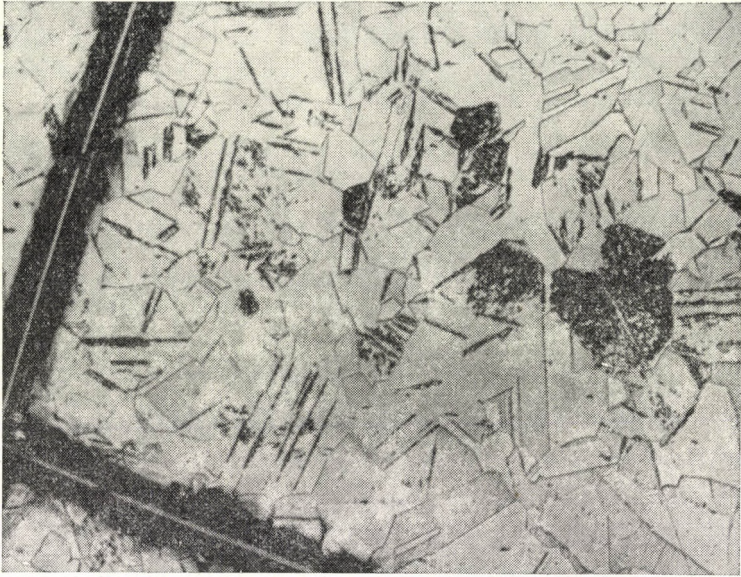


Bild 1. Gefügebild der unverformten Schliﬀprobe (Vergr. 200×)

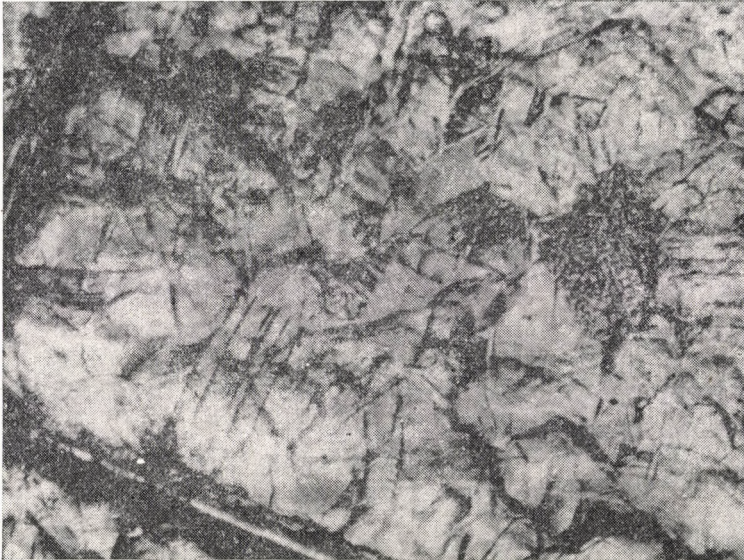


Bild 2. Gefügebild der mit Hammerschlag verformten Schliﬀprobe (Vergr. 200×)

Davon wurden nachher 3 Proben auf der hydraulischen Preßmaschine von 2 mm Ausgangshöhe auf 1 mm gepreßt, was einer Stauchung von 50% entspricht. Die übrigen Blechplatten wurden einfach zerknüllt. Beim Pressen und Zerknüllen wurden die Proben zwischen Filtrierpapier gelegt, um die Beschädigung des Schliffes zu vermeiden.

Die Ergebnisse dieser Versuche sind aus Bild 1 bis 3 ersichtlich. Bild 1 zeigt die bezeichnete Stelle mit Oberflächenmartensit in unverformtem Zustand.

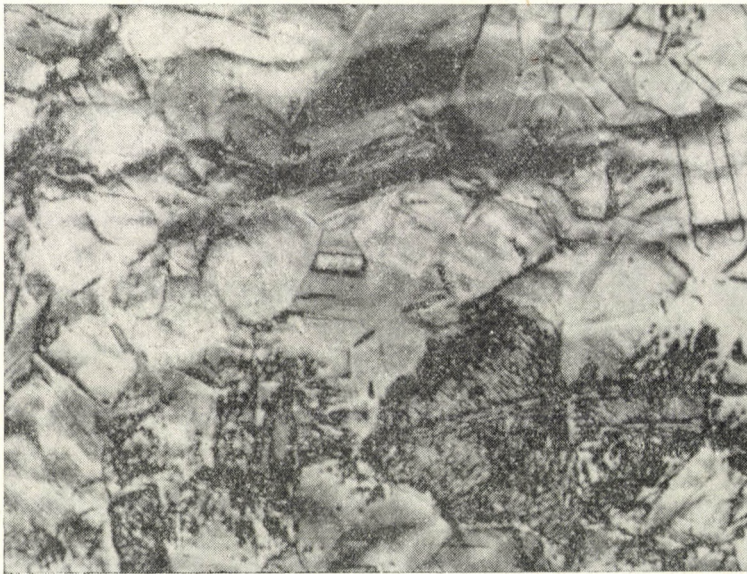


Bild 3. Gefügebild der zusammengedrückten Schliffprobe (Vergr. 300×)

In Abbildung 2 und 3 ist die gleiche Stelle nach der Verformung abgebildet. Bild 2 entspricht der durch Hammerschlag verformten, Bild 3 der durch einmaligen Druck verformten Probe. Wie ersichtlich, verursacht der einfache Druck oder das Zerknüllen weder eine neue Ausbildung von Oberflächenmartensit, noch ruft diese Verformung Änderung des bestehenden Oberflächenmartensits hervor, obzwar die austenitischen Körner in hohem Grade plastisch verformt sind, wie es die große Anzahl von Gleitlinien im Korn in der Mitte des Bildes 3 beweist.

Die Richtigkeit der Folgerung, die in [1] über die Wirkung des Druckes auf das Entstehen des Oberflächenmartensits aufgestellt wurde, wird also hiemit völlig bestätigt.

3. Der Einfluß der Temperatur

Die Versuche dieser Serie wurden an Proben der gleichen Legierung durchgeführt wie vorher. Die ausgesuchten Stellen mit Oberflächenmartensit wurden wiederum mit gekreuzten Ritzlinien markiert. Dazu wurden 6 Proben benützt; an 3 Proben wurde der Einfluß der Unterkühlung bei niedrigen Temperaturen verfolgt, an den 3 übrigen der Einfluß des Glühens. Eine größere Probenanzahl wurde wieder absichtlich gewählt, um zufällige Ergebnisse zu vermeiden. Die Wärmehandlung aller 3 Proben wurde gemeinsam durchgeführt.

a) Die Unterkühlung

Die ausgesuchten Proben wurden vorerst in festen CO_2 auf -78°C abgekühlt, und die Stellen mit gekreuzten Erkennungszeichen aufgenommen. Die weitere Abkühlung erfolgte dann in flüssiger Luft bei -193°C und von den so bearbeiteten Proben wurden Aufnahmen gemacht. Die Unterkühlungszeit war 25 Minuten. Die erreichten Versuchsergebnisse sehen wir in Abbildungen 4 bis 6, zusammen mit den ursprünglichen unabgekühlten Zustand. Wie aus Bildern 5 und 6 hervorgeht, erfolgte hier durch die Unterkühlung eine Umwandlung des Austenits in normale Martensitkristalle. Es entstand jedoch kein neuer Oberflächenmartensit, auch kam es nicht zur Änderung des schon vorhandenen. Weitere Abkühlung auf -193°C hat nur weitere Umwandlung von Austenit in normalen Martensit zur Folge (Bild 6).



Bild 4. Ausgangsgefüge vor dem Abkühlen (Vergr. $200\times$)



Bild 5. Gefügebild nach Unterkühlung bei -78° C (Vergr. $200\times$)

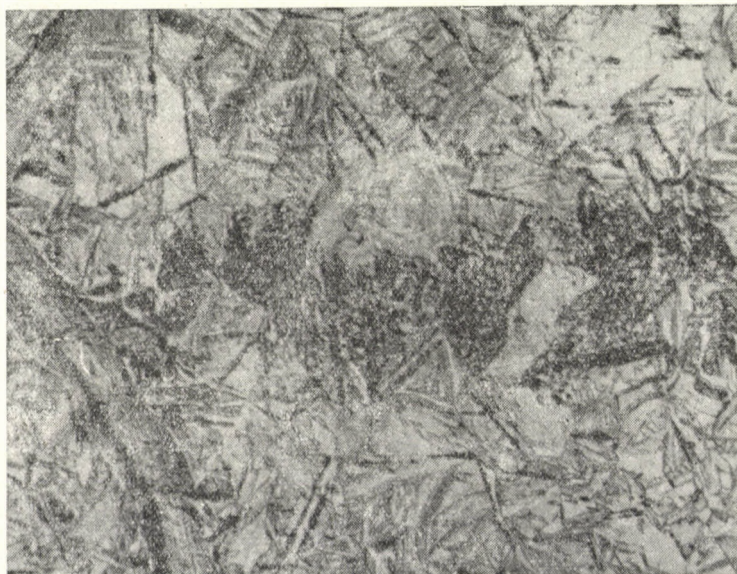


Bild 6. Gefügebild nach Unterkühlung bei -193° C (Vergr. $200\times$)

Die Tiefkühlung der Proben zu niedrigen Temperaturen, ähnlich wie der bloße Druck, bewirkt also weder Bildung von Oberflächenmartensit, noch eine Veränderung desselben.

Aus beiden Bildern 5 und 6 ist die bekannte Tatsache zu ersehen, daß bei der Tiefkühlung die entstandenen Martensitkristalle nicht weiterwachsen, sondern daß sich neue bilden. In Abbildung 5 kann weiter beobachtet werden, daß martensitische Kristalle bei Unterkühlung anfänglich im Gebiet



Bild 7. Ausgangsgefüge vor dem Glühen (Vergr. 200 \times). Entspricht gleichzeitig dem Gefügebild nach der Erwärmung bei 850° C

der Oberflächenmartensitzeile entstehen und erst bei weiterer Temperaturherabsetzung breitet sich ihre Ausbildung seitwärts aus. Dies ist in völliger Übereinstimmung mit dem zweiten Faktor der Arbeit [1], der der nicht-homogenen (zeilenförmigen) Komponentenverteilung in der Legierung eine der hauptsächlichsten Entstehungsursachen des Oberflächenmartensits zuspricht, wodurch der Anfangspunkt der martensitischen Umwandlung (Punkt M_s) verschoben wird. Die Entstehung des normalen und des Oberflächenmartensits an gleichen Stellen beweist die Gültigkeit dieses Faktors für beide Martensitarten.

b) Das Glühen

Drei für das Studium der Wärmebehandlung bestimmte Proben wurden nach der Kennzeichnung der Stellen mit Oberflächenmartensit und mit

geringerer Menge von normalem Martensit nach dem Photographieren (Bild 7) in einen Nickeltiegel gelegt und im Vakuumofen bei folgenden Temperaturen eine Stunde geglüht: 850° C, 1000° C, 1100° C und 1250° C. Nach jeder Wärmebehandlung der Proben wurden von den gekennzeichneten Stellen mikroskopische Aufnahmen gemacht. Die Gefügeänderungen bei Wärmebehandlung sind in Bildern 8 bis 10 zu ersehen.

Durch das Glühen bei 850° C ändert sich das Gefügebild gegenüber der Ausgangsstruktur (Bild 7) keineswegs.



Bild 8. Gefügebild der Schliﬀprobe nach dem Glühen 1 Stunde lang bei 1000° C Glühtemperatur (Vergr. 200×)

Bei der Glühtemperatur von 1000° C werden die Grenzen der Martensitkristalle unscharf, die Kristalle sind oft gewellt — es stellt sich die Rückumwandlung ein. Auch die Partikeln des Oberflächenmartensits werden immer weniger deutlich, Ecken und scharfe Kanten werden abgerundet (Bild 8).

Bei Glühtemperatur von 1100° C sind bereits alle Kristalle des normalen Martensits in Austenit umgewandelt. Die Oberfläche der Austenitkörner behält noch teilweise Reliefreste nach den Martensitkristallen. Gleichzeitig sind austenitische Korngrenzen quer über Stellen, wo ursprünglich martensitische Nadeln waren, klar zu ersehen. Die den aufgelösten Oberflächenmartensitpartikeln entsprechenden Stellen sind grob vergrößert und abgerundet, wie im Bild 9 zu sehen ist. Es ist schwer anzunehmen, daß es sich wirklich noch um Teilchen des Oberflächenmartensits handeln könne,



Bild 9. Gefügebild der Schliﬀprobe nach dem Glühen 1 Stunde lang bei 1100° C Glüh-
temperatur (Vergr. 200×)

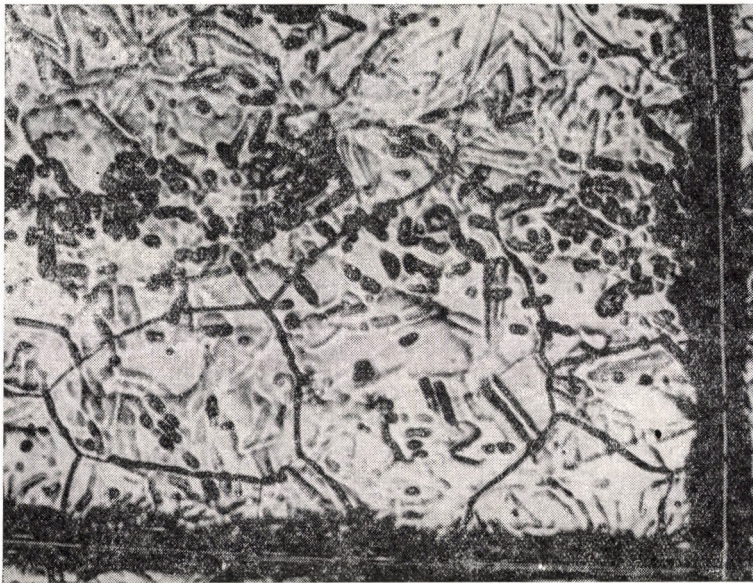


Bild 10. Gefügebild der Schliﬀprobe nach dem Glühen 1 Stunde lang bei 1250° C Glüh-
temperatur (Vergr. 200×)

es handelt sich wahrscheinlich vielmehr um ihre Spuren. Dies kann folgendermaßen erklärt werden: durch die chemische Gefügeätzung wird der Oberflächenmartensit stärker als Austenit angegriffen und bildet dadurch Vertiefungen. Nach dem Auflösen (Umwandlung) der Partikel bleiben tiefere Spuren der Oberflächenmartensitpartikeln, deren Kanten und Wände bei höheren Temperaturen abzuschmelzen beginnen, wodurch die Spuren breiter und abgerundeter werden. Die Temperatur von 1100°C kann daher für einen Grenzwert gehalten werden, in dem der Oberflächenmartensit schon aufgelöst ist und die Temperatur von 1000°C für den Beginn seiner Auflösung, da hier der Anfang der Abrundung der Oberflächenmartensitpartikeln und gleichzeitig die Auflösung des normalen Martensits festgestellt wurde.

Nach dem Glühen bei 1250°C blieben noch Spuren — Vertiefungen — nach den Oberflächenmartensitpartikeln erhalten, ein Teil davon verschwand jedoch (Bild 10).

Die Resultate dieser Partie beweisen also, daß auch das Glühen bei hohen Temperaturen keine Ausbildung von Oberflächenmartensit hervorruft.

4. Der direkte Beweis für die Ausbildung des Oberflächenmartensits durch das mechanische Schleifen bei Herstellung metallographischen Schlißproben

Die in der vorliegenden Arbeit bisher durchgeführten Versuche beweisen eindeutig, daß es weder der einfache Druck ist, noch das Glühen oder die Unterkühlung, die den Oberflächenmartensit entstehen lassen. In Arbeit [1] waren als einer der Entstehungsfaktoren die das Schleifen bei Herstellung metallographischer Schliße begleitenden Vorgänge angegeben. (Faktor 3). Der dort durchgeführte Versuch mit dem nacheinanderfolgenden Abpolieren gab jedoch noch keinen direkten Beweis für das Schleifen als Ausbildungsursache des Oberflächenmartensits, obwohl es als sehr wahrscheinlich erscheint. Ein weiteres Experiment hatte deshalb die Klärung der mechanischen Schleifwirkung auf die Entstehung des Oberflächenmartensits zum Ziel.

Für diesen Versuch wurden 3 Schlißproben mit beinahe 100%igem Anteil an Oberflächenmartensit verwendet. Die Proben wurden zuerst stark elektrolytisch in einem Gemisch von Chromsäure und Orthophosphorsäure abpoliert. Die abpolierte Schicht betrug etwa 0,3 mm, sodaß die zerbrückelte Oberflächenschicht dadurch völlig beseitigt wurde, gemeinsam mit der plastischen Deformation, die bei mechanischem Schleifen entsteht. Das metallographisch bestimmte Gefüge der polierten Probe war nach dem Ätzen rein austenitisch, wie aus Bild 11 hervorgeht. Die elektrolytisch abpolierten Proben wurden dann mechanisch geschliffen und poliert auf genau dieselbe Weise wie in Arbeit [1] und wie im vorhergehenden Teil dieser Arbeit beschrieben. Um die Beobachtung der gleichen Stelle vor und nach dem Schleifen zu sichern,

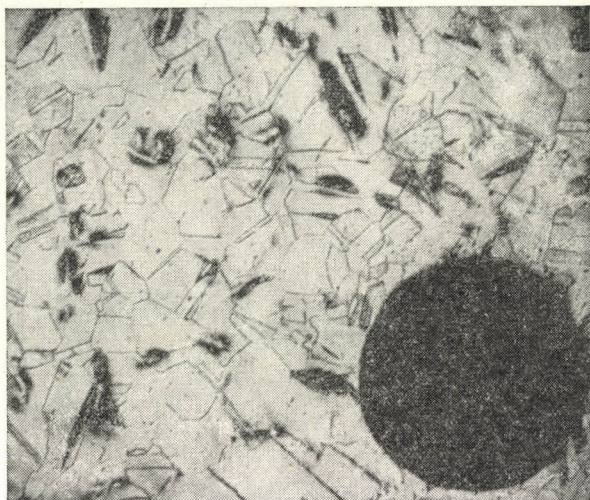


Bild 11. Ausgangsgefüge der elektrolytisch abpolierten Schliifprobe (Vergr. 200 \times)



Bild 12. Gefügebild der gleichen Probe nach dem erneuten metallographischen Schleifen (Vergr. 200 \times)

darf die Markierung nicht durch Einritzen erfolgen wie vorher, da das Zeichen unvermeidlich durch das Schleifen verschwinden müßte. Die Proben wurden aus diesem Grunde in der ganzen Blechstärke 0,2 mm durchbohrt, was die Erhaltung der Markierungszeichen auch nach dem Schleifen sichern sollte.

Es wurden 2 Löcher durchbohrt und die beobachtete Stelle lag auf der Verbindungsachse zwischen ihnen. Wie aus dem Ergebnis nach dem Schleifen im Bild 12 ersichtlich ist, entstand auf der ganzen vorhin rein austenitischen Fläche Oberflächenmartensit. Durch das wiederholte elektrotlytische Polieren wurde der entstandene Oberflächenmartensit wieder beseitigt.

Durch diesen und durch die in der vorhergehenden Arbeit durchgeführten Versuche wird also direkt bewiesen, daß das mechanische Schleifen bei Herstellung metallographischer Schliffproben für sich allein die Ausbildungsursache des Oberflächenmartensits ist.

Schlußfolgerung

In der vorliegenden Abhandlung wurde klargelegt, daß die Entstehungsursache des Oberflächenmartensits das mechanische Schleifen bei der Schlichtherstellung ist, und daß es weder der Druck noch das Glühen noch die Unterkühlung seien, die für sein Entstehen oder für seine Änderungen verantwortlich sind. Aus den Resultaten der vorliegenden Arbeit geht noch eine für den Ausbildungsmechanismus des Oberflächenmartensits wichtige Tatsache hervor: In Arbeit [2] wurden die Partikeln des Oberflächenmartensits mit den Blöcken der bei mechanischem Schleifen zerbröckelten Kristallite für identisch erklärt. Beim Schleifen kommt es selbstverständlich zum Zerbröckeln der Kristallite auf der ganzen Oberfläche der Probe, nicht nur in Gebieten des Oberflächenmartensits. Die Tatsache, daß neuer Oberflächenmartensit weder durch das Zusammenpressen, noch durch jegliche Wärmebehandlung entstand, während normale Martensitplättchen bei der Unterkühlung gebildet wurden, zeugt davon, daß sich bei dieser Bearbeitung keine anderen Kristallblöckchen umgewandelt haben. Man kann daraus schließen, daß für die Ausbildung des Oberflächenmartensits die Existenz der martensitischen Umwandlung direkt beim Schleifprozeß notwendig ist, und daß es sich hier nicht um eine bloße Umwandlung der Kristallblöckchen in Martensit handelt, da sie sich in diesem Falle bei der Unterkühlung unweigerlich umwandeln müßten. Es ist nicht ausgeschlossen, daß einige von den Vorgängen beim Schleifprozeß (Zwillingsbildung?) an der Umwandlung des Kristallblockes in Martensit direkt mitbeteiligt sind.

Dieser Frage wird ein weiteres Studium gewidmet.

SCHRIFTTUM

1. MAŠÍN A., BAKALÍKOVÁ, O.: Acta Techn. Hung. 26 (1959) 403/418. (Der Oberflächenmartensit in Fe-Ni-Co-Legierung und die Bedingungenfaktoren seiner Ausbildung im allgemeinen).
2. MAŠÍN A., JEŽEK, J., BAKALÍKOVÁ, O.: Acta Techn. Hung. (Über das Wesen des Oberflächenmartensits). In diesem Heft, S. 259.

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wird der Einfluß des einfachen Druckes, des Glühens bis zu 1250° C der Unterkühlung bei -78° und -193° C, und des mechanischen Schleifens bei metallographischer Schlifherstellung auf die Ausbildung des Oberflächenmartensits untersucht.

Es wird bewiesen, daß der bloße Druck und die Unterkühlung oder das Glühen die Entstehung des Oberflächenmartensits weder herbeizuführen (bis zu 1000° C), noch den bereits entstandenen zu ändern vermögen. Es wird bewiesen, daß das mechanische Schleifen bei Herstellung des metallographischen Schliffes die Ausbildung des Oberflächenmartensits verursacht.

INFLUENCE OF PRESSURE, TEMPERATURE AND MECHANICAL GRINDING,
ON THE APPEARANCE OF SURFACE-MARTENSITE

A. MAŠÍN and O. BAKALÍKOVÁ

SUMMARY

In the present work the influence of pressure, annealing temperature till 1250° C, undercooling till -78° C and -193° C and mechanical grinding on the appearance of surface-martensite is studied. It was proved, that neither the pressure itself nor undercooling or annealing cause the appearance of surface-martensite and do not change (till 1000° C) the martensite formed earlier. A direct proof is given that the cause of the appearance of surface-martensite is mechanical grinding.

INFLUENCE DE LA PRESSION, DE LA TEMPÉRATURE ET DE LA PRÉPARATION
MÉCANIQUE SUR LA FORMATION DE LA MARTENSITE SUPERFICIELLE

A. MAŠÍN et O. BAKALÍKOVÁ

RÉSUMÉ

L'article étudie l'influence que la pression, la température de recuit jusqu'à 1250° C, de surfusion à -78° C et -193° C, ainsi que l'effet mécanique se manifestant lors de la préparation ont sur la formation de la martensite superficielle. Il a été démontré que ni la pression en elle-même, ni la surfusion ou le recuit ne provoquent l'apparition de la martensite superficielle, et ne modifient pas non plus la martensite déjà formée (jusqu'à 1000° C). D'après la démonstration directe, l'effet mécanique se manifestant lors de la préparation est la cause de la formation de la martensite superficielle.

О ВЛИЯНИИ ДАВЛЕНИЯ, ТЕМПЕРАТУРЫ И МЕХАНИЧЕСКОЙ ШЛИФОВКИ
НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО МАРТЕНСИТА

А. МАШИН и О. БАКАЛИКОВА

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье проверяется влияние давления, температуры отжига до 1250°C и охлаждения до -78°C и -193°C , и механической шлифовки на образование поверхностного мартенсита. Приведено доказательство того, что ни простое давление, ни охлаждение или отжиг не вызывают возникновения поверхностного мартенсита и не меняют уже существующий мартенсит (до 1000°C). Доказано, что причиной образования поверхностного мартенсита является механическая шлифовка.

ÜBER DAS WESEN DES OBERFLÄCHENMARTENSITS

A. MAŠÍN

PHYSIKALISCHES LABORATORIUM DER FORSCHUNGSANSTALT FÜR VERKEHRSWESEN,
RESORTANSTALT DES VERKEHRSMINISTERIUMS, PRAHA

J. JEŽEK

STAATLICHES FORSCHUNGSINSTITUT FÜR MATERIAL UND TECHNOLOGIE, PRAHA

O. BAKALÍKOVÁ

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR VAKUUMELEKTROTECHNIK, PRAHA

[Eingegangen am 30. November 1959]

Einleitung

Die Frage, ob die Partikel des Oberflächenmartensits winzige normale martensitische Plättchen, beziehungsweise ihre Zusammenballungen, oder aber nur kleine kompakte Ganze des Martensits sind, ist eine der wichtigsten für die Lösung des Bildungsmechanismus des Oberflächenmartensits. Die bisher durchgeführten Versuche mit magnetischem Kolloid, mit optischem Mikroskop und mit Röntgenstrahlung [1—3] geben zunächst weder eine Antwort auf diese Frage, noch befassen sie sich mit ihr. Die Verteilung von ferromagnetischem Eisenoxyd Fe_3O_4 in Kolloidlösung, das auf den Oberflächenmartensits aufgetragen wurde [1], läßt zwar die Möglichkeit zu, daß einzelne Teilchen des Oberflächenmartensits winzige martensitische Plättchen sein könnten, die magnetischen Eigenschaften des Stoffes sind jedoch durch die Atomanordnung seines Kristallgitters bestimmt (soll die Ursache schon dem Ferromagnetismus der Leitfähigkeitselektronen nach ZENER oder der gegenseitigen Interaktion der Atome nach HEISENBERG und NEÉL zugesprochen werden) und nicht durch die äußere Form der Partikeln. Die Kolloidverteilung schließt daher auch die andere Möglichkeit, nämlich daß es sich nur um kleine Partikeln des kompakten Martensits handelt, nicht aus.

Ähnlich gilt dies für das optische Mikroskop [2], dessen kleine Auflösungsfähigkeit nicht eindeutig genug zu bestimmen erlaubt, um welche von den zwei Alternativen es sich handelt.

Auf Grund der Tatsache, daß der Oberflächenmartensit durch Tiefkühlung bei niedrigen Temperaturen von -78°C und -193°C nicht entsteht, obzwar sich normale Plättchen des Martensits bilden, wie in Arbeit [4] beobachtet wurde, könnte angenommen werden, daß die Partikeln des Oberflächenmartensits eher kompakte Ganze des Martensits als winzige normale Martensitplättchen sind. Die Frage wird aber dadurch wiederum nicht direkt gelöst.

In der vorliegenden Arbeit wurde das Wesen der Oberflächenmartensitpartikeln mit Hilfe des Elektronenmikroskops studiert, dessen große Auflösungsfähigkeit Details zu bestimmen vermag, die die Möglichkeiten der früher angeführten Methoden übertreffen.

Arbeitsvorgang und erreichte Ergebnisse

Die Versuchsarbeiten wurden an Proben aus Legierung von 28,28% Ni, 0,50% Mn, 0,028% C, Rest Eisen, durchgeführt, die schon in der vorhergegangenen Arbeit [2] bei dem metallographischen Studium gebraucht wurden. Die Proben wurden auf die übliche metallographische Weise mechanisch auf Schmirgelpapier geschliffen, poliert und mit einer Lösung aus 20 ccm HCl, 10 ccm HNO₃ und 2 g CuCl₂ angeätzt. Nach dem Ätzen wurden sie vollkommen im Äthylalkohol abgespült. Die Anwesenheit des Oberflächenmartensits wurde unter dem metallographischen Mikroskop überprüft.



Bild 1. Partikeln des Oberflächenmartensits

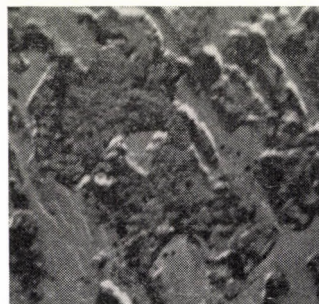


Bild 2. Partikeln des Oberflächenmartensits

Von der angeätzten und abgespülten Oberfläche wurden Kolloidabdrücke abgezogen, die zwecks Kontrasterhöhung mit Chrom schattiert worden sind. Die Versuche wurden mit dem »Tesla«-Mikroskop mit 500facher Vergrößerung durchgeführt. Bilder 1 bis 5 stellen die erreichten Ergebnisse dar.

Aus allen Bildern geht auf den ersten Blick hervor, daß die Oberflächenmartensitpartikeln kompakte Ganze des Martensits, nicht aber winzige normale Plättchen des Martensits oder ihre Zusammenballungen sind. Wie aus dem Bild 1 und 2 ersichtlich, ist jedes Teilchen ein selbständiges Individuum, das mit den benachbarten Partikeln zusammenhängt. Die Partikeln zeigen an sich allein keine Orientierung, die für normale Martensitplättchen so charakteristisch ist; erst ihre Anordnung im Komplex hat eine bestimmte Richtungsanordnung, wie das Bild 3 zeigt.

Die Partikelgröße schwankt um den Wert 10^{-4} — 10^{-5} cm.

Bild 4 zeigt ein Detail des Gebietes, das auf metallographischen Aufnahmen als zusammenhängendes Gebiet des Oberflächenmartensits erscheint [2]. Aus Bild 4 ist ersichtlich, daß diese Gebiete in Wirklichkeit aus winzigen Partikeln bestehen und daß es sich nicht um eine kontinuierliche Fläche des Martensits handelt.

Die Ätzgruben (»itch pits«), die NISHIYAMA und SHIMIZU [5] an einem Martensitkristall beobachtet haben, wurden an Oberflächenmartensitpartikeln nicht gefunden. Ebenfalls wurde an keiner Partikel eine »Rippe« beobachtet, die so typisch für normale martensitische Plättchen ist.

Im Austenit kommen zwischen Oberflächenmartensitpartikeln feine Gleitlinien vor, wie aus Bildern 1 und 2 hervorgeht. Ihre Anwesenheit beweist

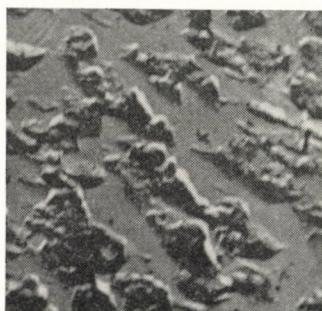


Bild 3. Komplex der Oberflächenmartensitpartikeln

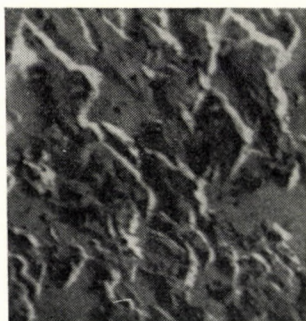


Bild 4. Eine Schar der Oberflächenmartensitpartikeln, die metallographisch als zusammenhängendes Gebiet des Oberflächenmartensits erscheint



Bild 5. Längliche Oberflächenmartensitpartikeln zwischen zwei normalen Martensitplättchen

die plastische Verformung des Austenits. Dies ist in vollkommener Übereinstimmung mit der plastischen Deformation von Oberflächenschichten der Schlißproben, die das metallographische Schleifen begleitet.

Erörterung der Ergebnisse

Die Versuchsergebnisse mit dem Elektronenmikroskop entscheiden also die Frage über das Wesen der Oberflächenmartensitpartikeln eindeutig zugunsten der kompakten Partikeln des Martensits.

Die Partikelgröße 10^{-4} — 10^{-5} cm ist dabei der Größenordnung nach die gleiche wie die Größe der Kristallblöckchen, die durch Zerbröckelung der Kristallite in der Oberflächenschicht der Schliffproben beim Schleifen entstehen. Da das Schleifen bei metallographischer Schliffherstellung die Ursache der Oberflächenmartensitbildung ist (neben der chemischen Zusammensetzung u. a. [2]), wie in Arbeit [4] bewiesen wurde, liegt die Schlußfolgerung nahe,* daß die Oberflächenmartensitpartikeln im Grunde bei diesem Schleifen entstandene, in Martensit umgewandelte Kristallblöckchen sind.

Der Oberflächenmartensit erscheint dann als ein Schar von diesen umgewandelten Einzelblöckchen.

Wir wollen zeigen, daß dieser Schlußfolgerung weder die Struktur der zerbröckelten Oberflächenschicht, noch die Gesetzmäßigkeiten der martensitischen Umwandlung widersprechen und daß im Gegenteil die typischen Ausbildungsformen, die bei metallographischem Studium beobachtet worden sind, daraus hervorgehen. Der Beweis der Individualität der einzelnen Partikeln wird dann in Arbeit [6] vorgelegt.

Wie aus dem Aussehen der Röntgen- und Elektronenaufnahmen hervorgeht [7], sind die beim Schleifen auf Schmirgelpapier entstandenen Kristallblöckchen untereinander unabhängig und sind allgemein räumlich verschiedenen orientiert. Infolgedessen muß die Kohärenz von Kristallgittern der einzelnen Blöcke auf ihren Grenzen unterbrochen werden und jedes Einzelblöckchen erscheint als ein kristallographisches Individuum.

Wenn es also beim Schleifen in entstandenem Block zur martensitischen Umwandlung kommt, läuft die Umwandlung nur bis zu seinen Grenzen ab, wo sie infolge der Kohärenzstörung des Kristallgitters (die Kohärenz ist für den Vorgang der martensitischen Umwandlung nötig, wie FRANK [8] und KURDJUMOV [9] gezeigt haben) aufgehalten wird. Das Kristallblöckchen bildet so einen Block des kompakten Martensits in Übereinstimmung mit dem Versuchsergebnis vom Elektronenmikroskop, und wenn es in benachbarten Kristallblöcken zu keiner martensitischen Umwandlung kommt, bleibt es vereinsamt, umgeben von nicht umgewandelten Austenitblöcken. Dies gibt selbsttätig die Erklärung der verschiedenen typischen Ausbildungsformen des Oberflächenmartensits, die in [2] gefunden worden sind. Wenn in einem bestimmten Gebiet die Umwandlung einer großen Anzahl der Blöckchen einsetzt, wird dieses Gebiet bei Anwendung eines optischen Mikroskops anscheinend als eine kontinuierliche Fläche des Oberflächenmartensits erscheinen (im Elektronenmikroskop als eine dichte Schar martensitischer Blöckchen : Bild 3). Im Falle einer mittelmäßigen Anzahl umgewandelter Blöck-

* Die direkte Beweisführung der Identität beider Partikelarten ist nicht einfach, denn es gibt keine bekannte Methode, die es uns ermöglicht, die Zerbröckelung der Kristallite an der Oberfläche der vollen Schliffprobe sichtbar zu machen. Ein Versuch, diesen Beweis zu erbringen, wird mit Hilfe des Röntgenmikroskops durchgeführt, falls es gelingen sollte, Oberflächenmartensit an einer schwachen Folie zu erhalten.

chen erscheint dann dieses Gebiet als Oberflächenmartensit von mittelmäßigen Dichte und im Grenzfall der Ausbildung von nur vereinzelt umgewandelten Blöcken wird der Oberflächenmartensit nur von alleinstehenden Partikeln gebildet. Alle diese Anordnungen sind in vollkommener Übereinstimmung mit typischen in [2] beobachteten Ausbildungsformen des Oberflächenmartensits.

Vom Standpunkt des oben angeführten ist das Bild 5 von Interesse. Hier entstanden zwischen annähernd parallelen martensitischen Plättchen lange, schmale Oberflächenmartensitpartikeln. Die Erklärung liegt auf Grund der angenommenen Identität auf der Hand: wie die Verfasser, GAY mit HIRSCH, JACQUET und SAMUELS [10] bewiesen haben, kommt es beim Schleifen zum Zerbröckeln der Kristallite anhand der Entstehung von Deformationsbändern und durch den Gleitprozeß, der mit der Rotation der Kristallblöcke verbunden ist. Wenn also zwischen den parallelen Martensitplättchen die Gleitlinien querlaufend entstehen, wird der Austenit durch diese Gleitlinien in längliche, schmale Blöcke der gleichen Ausbildungsform der Oberflächenmartensitpartikeln wie auf Bild 5 zerteilt. Im Falle, daß die Identität der beiden Partikelarten auf Wirklichkeit beruht, ist diese Ausbildungsform des Oberflächenmartensits selbstverständlich.

SCHRIFTTUM

1. MAŠÍN, A., HAVEL, V., TLUSTÁ, D.: Bull. Acad. Sci. Polon. **4** (1957) 181.
2. MAŠÍN, A., BAKALÍKOVÁ, O.: Acta techn. Hung. **26** (1959) 403/418. (Der Oberflächenmartensit in der Fe-Ni-Co-Legierung . . .)
3. MAŠÍN, A.: Naturwiss. **45** (1958) 182.
4. MAŠÍN, A., BAKALÍKOVÁ, O.: (Über den Einfluß von Druck, Temperatur und mechan. Schleifen . . .) Acta Techn. Hung. In diesem Heft, S. 247.
5. NISHIYAMA, Z., SHIMIZU, K.: Acta Metallurgica **6** (1958) 125.
6. MAŠÍN, A., BAKALÍKOVÁ, O.: Čs. čas. fys. — Acta Technica **31** (1960) 437/454.
7. POLCAROVÁ, M.: Čs. čas. fys. **8** (1958) 238.
8. FRANK, F. C.: Acta Metallurgica **1** (1953) 15.
9. KURDJUMOV, G. V.: Dokl. AN SSSR **9** (1948) No 9.
10. GAY, P., HIRSCH, P. B.: Properties of metallic surfaces, London 1953, S. 123.
 JACQUET, P. A.: Rev. Metallurgie **51** (1954) 385.
 SAMUELS, L. E.: J. Inst. Metals **35** (1956—57) 51.

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wird mit Hilfe des Elektronenmikroskops bewiesen, daß die Oberflächenmartensitpartikeln kompakte Ganze des Martensits sind. Aus der Übereinstimmung der Partikelgröße mit den Blöcken der zerbröckelten Kristallite, die an der Oberfläche der Schliifprobe entstehen, wird deduziert, daß die Oberflächenmartensitpartikeln in ihrem Wesen in Martensit umgewandelte Blöcke sind. Aus dieser Identität gehen dann selbsttätig die typischen Ausbildungsformen des Oberflächenmartensits hervor, die in der vorhergehenden Arbeit [3] bestimmt worden sind.

ABOUT THE NATURE OF SURFACE-MARTENSITE

A. MAŠÍN, J. JEŽEK, O. BAKALÍKOVÁ

SUMMARY

By means of an electron-microscope the question whether particles of surface-martensite are normal martensitic plates or compact particles of martensite was studied. It was proved that only compact martensite-particles are formed. Further the explanation of the typical aspect of surface martensite is given.

SUR LA NATURE DE LA MARTENSITE SUPERFICIELLE

A. MAŠÍN, J. JEŽEK, O. BAKALÍKOVÁ

RÉSUMÉ

On a employé le microscope électronique pour rechercher si la martensite superficielle consiste en lamelles martensitiques, ou en parties compactes de martensite. Il a été démontré qu'il s'agit de ces dernières. Les aspects typiques de la martensite superficielle sont décrits dans une autre étude.

В ЧЕМ ЗАКЛЮЧАЕТСЯ СУТЬ ПОВЕРХНОСТНОГО МАРТЕНСИТА

А. МАШИН, Й. ЕЖЕК и О. БАКАЛИКОВА

РЕЗЮМЕ

При помощи электронного микроскопа доказывається, что частицы поверхностного мартенсита существуют как нормальные пластинки или компактные частицы мартенсита. Приведено доказательство того, что частицы поверхностного мартенсита — компактные целые мартенсита.

Дальше объясняют типический вид поверхностного мартенсита.

INDEX

- Madarász, B.* : Logical Machine for Automatically Setting up an Equivalent Relay Network — Logische Maschine für die Herstellung eines äquivalenten Systems von Relais — Une machine de logique pour la production automatique d'un réseau de relais équivalent — *Мадарас, Б.*: Логическая машина, автоматически создающая эквивалентную релейную сеть 3
- Kollár, L.* : Stability of Centrally-compressed Shell-arches — Die Stabilität auf mittigen Druck beanspruchter Schalenbögen — Stabilité des voiles en arc soumis à une compression simple — *Коллар, Л.*: Стабильность центрально сжатых арочных оболочек 11
- Csonka, P.* : Apse-like Formed Paraboloid Shells of Revolution — Rotationsparaboloidförmige Schalennischen — Absides en paraboloïde de révolution — *Чонка, П.*: Полуокруглые оболочки, оформленные по параболоиду вращения 39
- Fuchs, E.* : Die thermische Dimensionsänderung der vakuumtechnischen Stromdurchleitungsdrähte aus Fe-Ni-Legierung mit Kupferüberzug — Heat-caused Dilatation of Copper-clad Iron—Nickel Current-carrying Wires for Vacuum Engineering — Dilatation des fils conducteurs de courant en FeNi à revêtement de cuivre, utilisés dans la technique du vide poussé — *Фукс, Э.*: Тепловое изменение размеров покрытых медной оболочкой железо-никельных токоведущих проволок, применяемых в вакуумной технике 53
- Szántó, I.* : The Characterization of Lattice Distortion Spectra with Deformation Indices — Beschreibung von Gitterverzerrungsspektren mittels Deformationsindexen — Description des spectres de distorsion de réseau par des indices de déformation — *Санто, И.*: Описание спектров при помощи индексов деформации 65
- Buray, Z.* : Die Verminderung der Schweißrissigkeit einiger Aluminiumlegierungen mit gewissen Zusatzelementen — The Decrease of Weld Cracking Tendency of some Aluminium Alloys having Additional Elements — Diminution de la tendance à la fissuration de certains alliages d'aluminium par diverses additions — *Бурай, З.*: Уменьшение с помощью добавок склонности к трещинообразованию при сварке отдельных алюминиевых сплавов 93
- Goschy, B.* : Eigenschwingungen der Schrägseilbrücken — Free Frequency of Bridges Suspended on Skew Cables — Fréquences propres des ponts suspendus par des câbles obliques — *Гоши, Б.*: Собственные колебания арфообразных мостов .. 119
- Széki, P.* : The Influence of Heat Treatment on the Strain-ageing of Aluminium-killed Mild Steel — Der Einfluß der Wärmebehandlung auf die Reckalterung von mit Aluminium beruhigtem niedriggekohltem Stahl — Influence du traitement thermique sur le vieillissement après l'écrouissage de l'acier doux calmé à l'aluminium — *Секи, П.*: Влияние термообработки на старение обработки низкоуглеродистой стали, успокоенной алюминием 141

<i>Káldor, M.—Szikszai, M.</i> : Über die Rekristallisation der Legierung Cu-Ni 80/20 — Recrystallization of Cu—Ni Alloy No. 80/20 — Sur la recristallisation de l'alliage Cu-Ni 80/20 — <i>Кальдор, М. и Сиксаи, М.</i> : О рекристаллизации Cu—Ni сплава 80/20	149
<i>Томашов, Н. Д.</i> : Развитие электрохимической теории коррозии металлов — <i>Tomaschow, N. D.</i> : Über die Entwicklung der elektrochemischen Theorie der Metallkorrosion — Development of the Electrochemical Theory of Metal Corrosion — L'évolution de la théorie électrochimique de la corrosion du métal	163
<i>Щандор, И. и Сабо, Я.</i> : Расчет прямоугольных шайб — <i>Sándor, I.—Szabó, J.</i> : Die Berechnung wandartiger Träger — Analysis of Deep Beams — Calcul des poutres-loisns	185
<i>Kovács, K. P.</i> : Das Anlassen und Regeln von Schleifring-Asynchronmotoren mit asymmetrischem Läuferwiderstand — Starting and Control of Slip-Ring Asynchronous Motors by Means of Asymmetric Rotor Resistances — Démarrage et réglage des moteurs synchrones à bagues par une résistance rotorique asymétrique — <i>Ковач, К. П.</i> : Пуск и регулирование асинхронных двигателей с фазовым ротором с помощью асимметричного роторного реостата	197
<i>Bella, E.</i> : Warmstauchversuche mit Kupfer bei kleinen Formänderungsgeschwindigkeiten — Hot Bulbing Experiments with Copper at Low Forming Rates — Essais de déformation par compression de cuivre électrolytique, à faible vitesse de déformation — <i>Бэлла, Э.</i> : Опыты по горячему осаживанию меди при небольшой скорости деформации	221
<i>Mašin, A.—Bakalíková, O.</i> : Über den Einfluß von Druck, Temperatur und mechanischem Schleifen auf das Entstehen des Oberflächenmartensits — Influence of Pressure, Temperature and Mechanical Grinding on the Appearance of Surface-martensite — Influence de la pression, de la température et de la préparation mécanique sur la formation de la martensite superficielle — <i>Машин, А. и Бакаликова, О.</i> : О влиянии давления, температуры и механической шлифовки на возникновение поверхностного мартенсита	247
<i>Mašin, A.—Ježek, J.—Bakalíková, O.</i> : Über das Wesen des Oberflächenmartensits — About the Nature of Surface-martensite — Sur la nature de la martensite superficielle — <i>Машин, А., Ежэк, Й. и Бакаликова, О.</i> : В чем заключается суть поверхностного мартенсита	261

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante :

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу :

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XXXII

FASCICULI 3—4



1961

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

STABILITY OF BENT SHELL-ARCHES

L. KOLLÁR

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES

PLANNING OFFICE FOR INDUSTRIAL AND AGRICULTURAL BUILDING, BUDAPEST

[Manuscript received June 1, 1959]

1. Introduction

In the present paper we deal with thin elastic arches (shell-arches) with symmetrical cross sections the edges of which are not stiffened (see Fig. 1). Our aim is to clear up the behaviour of shell-arches affected by bending.

In a previous paper the heading of which was "Stability of Centrally Compressed Shell-arches" [2]* we deduced the relation between the bending moment M affecting the arch and the change χ in its longitudinal curvature. This is valid for an arch with an optional symmetric cross section, but with the following restrictions:

The cross section of the arch is sufficiently *flat*, so, that the arc-element ds of the cross section could be replaced by its horizontal projection dx ; furthermore, POISSON'S ratio is equal to zero.

The above-mentioned deductions are, strictly speaking, only valid for arches with constant cross sections and a circular arc-formed axis (Fig. 1), if affected by a *constant bending moment*; the obtained results, however, are also valid with good approximation for arches affected by a *varying bending moment*, the *radius of longitudinal curvature* and the *cross section* of which also *vary*, if these variations are not too sudden.

In paper [2] we determined the initial tangent of the curve $M(\chi)$ and this enabled us to determine the critical compressive force of a shell-arch affected by central compression. Now, we wish to determine the *entire* $M(\chi)$ -*curve*, and the knowledge of this shall give us the possibility to follow the behaviour of such an arch up to the very limit, when the arch at a certain moment M_{crit} loses its stability and buckles, due to pure bending. Subsequently we shall deal with the calculation of other quantities necessary for practical dimensioning (longitudinal stresses, transversal moments in the slab etc.), finally we shall turn to the investigation of that case, when the arch is simultaneously affected by compression and by bending (eccentric compression).

* In the present paper we shall often refer to formulae or Tables, respectively, deduced in our previous paper [2]. These references shall be marked in the following manner: [2] (5) = formula (5) to be found in paper [2].

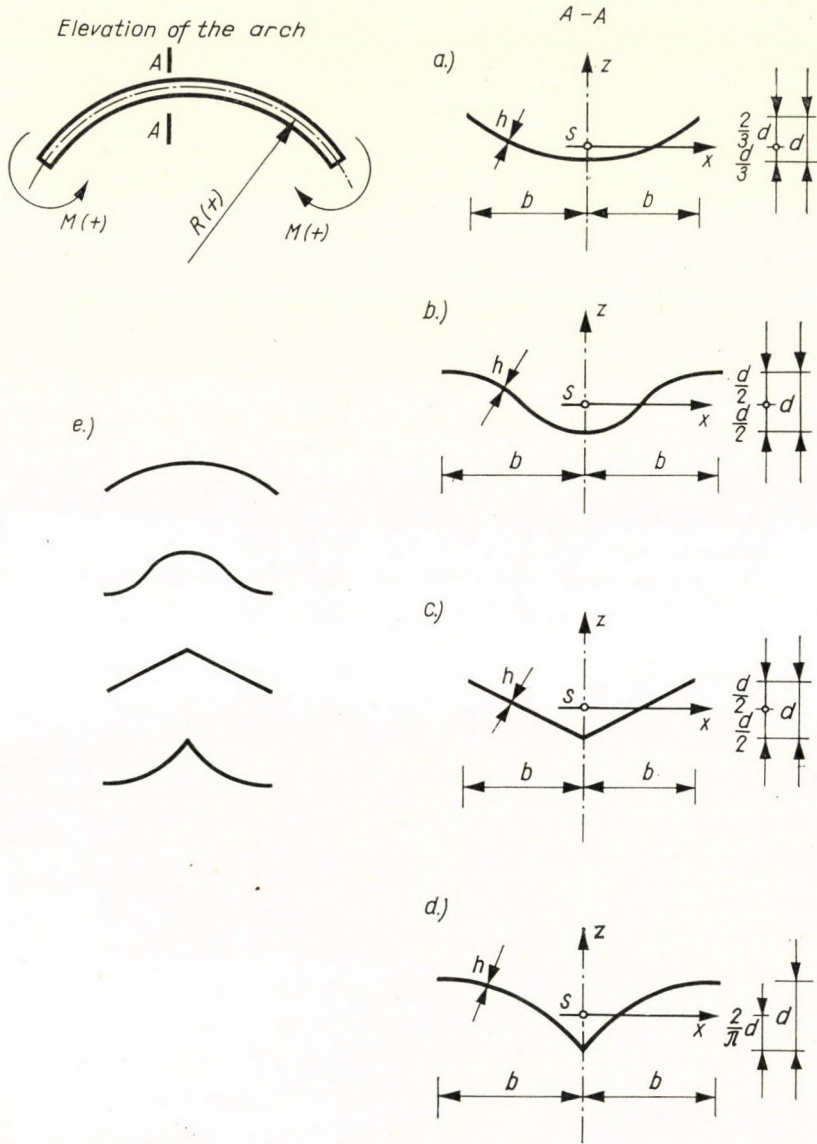


Fig. 1

2. The curve $M(\chi)$

2.1. Basic equation

In our previous paper we deduced ([2] (26)), that between the change χ in longitudinal curvature and the acting moment M — for a shell-arch with constant (but otherwise optional) cross section and with a circular arc-formed

longitudinal axis, affected at both ends by two equal couples of opposite sign, Fig. 1 — the following relation holds:

$$\frac{M}{E \cdot \chi} = h \cdot \int_{-b}^{+b} z_0^2 \cdot dx + \frac{h}{R \cdot \chi} \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w \cdot dx + h \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w \cdot dx + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} w^2 \cdot dx. \quad (1)$$

Here denote:

- h thickness of the shell,
- b width of the half cross section of the shell,
- E modulus of elasticity of the material of the shell,
- R_0 original radius of curvature of the axis of the arch,
- R radius of curvature of the axis of the arch after deformation,
- $\chi = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}$ change in longitudinal curvature of the axis of the arch, (2)
- $z_0(x)$ original form of the cross section of the shell in the system of co-ordinates shown in Fig 1,
- $w(x)$ deformation of the cross section of the shell (vertical displacement), details to be found in [2].

M, R, z are positive according to the explanation given in Fig. 1; w is positive if its direction complies with the direction of $+z$; $+\chi$ is the change in curvature caused by a positive M .

Relation (1) existing between the moment and the change in curvature shall be transformed — using results deduced in [2] valid for a circular arc-formed cross section — into the form of (20), later, for the sake of an easier practical calculus connection (20) will be plotted in Figs. 2/0—4. Culminating points of curves to be plotted give the critical moments.

2.2. Curve $M(\chi)$ belonging to the circular arc cross section

We know from [2] (formulae (31), (21), (32), (22), (35) and (13)) that the shape of the cross section (Fig. 1a) is defined by the equation

$$z_0 = d \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{3} \right), \quad (3)$$

where d denotes the depth of the cross section; the deformation, however, is defined by expressions:

$$w = w_1 + w_0; \quad (4)$$

$$w_1 = -R \cdot \chi \cdot z_0; \quad (5)$$

$$w_0 = d \cdot R \cdot \chi \cdot (Z_A \cdot \operatorname{ch} \beta x \cdot \cos \beta x + Z_B \cdot \operatorname{sh} \beta x \cdot \sin \beta x). \quad (6)$$

Here Z_A and Z_B are constants of integration according to [2] (33) and [2] (34); on the other hand

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{h \cdot R}} = \frac{1,316}{\sqrt{h \cdot R}} \quad (7)$$

is a parameter characteristic for the geometry of the shell. Employing relation (4) and (5), as well as the definition of χ given in (2), our basic equation (1) valid for the circular arc-like cross section can be written in the following more simple form:

$$\frac{M}{E \cdot \chi} = \frac{h}{R_0 \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w_0 \cdot dx + \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} w_0^2 \cdot dx. \quad (8)$$

The first member on the right-hand side of equation (8) — except for a coefficient $\frac{R}{R_0}$ — coincides with formula [2] (37b), i. e.:

$$\frac{h}{R_0 \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} z_0 \cdot w_0 \cdot dx = \frac{R}{R_0} \cdot J_1 = \frac{R}{R_0} \cdot \gamma_1 \cdot J_0. \quad (9)$$

Here

$$J_0 = h \cdot \int_{-b}^{+b} z_0^2 \cdot dx = 0,1778 \cdot h \cdot d^2 \cdot b \quad (10)$$

is the elementary moment of inertia of the cross section according to [2] (36) and J_1 is the effective moment of inertia according to [2] (39) and Table [2] (II).

$$\gamma_1 = \frac{J_1}{J_0}, \quad \text{see [2] (Fig. 11).}$$

$$\gamma_{1appr.} = \frac{1}{1 + 0,120 \cdot (\beta b)^4}. \quad (11)$$

Using (6), the second member on the right hand side of equation (8) shall obtain the following form:



$$\begin{aligned} \frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} w_0^2 \cdot dx &= R \cdot \chi \cdot h \cdot d^2 \cdot \int_{-b}^{+b} (Z_A \cdot \text{ch} \beta x \cdot \cos \beta x + Z_B \cdot \text{sh} \beta x \cdot \sin \beta x)^2 \cdot dx = \\ &= \frac{R \cdot \chi \cdot h \cdot d^2 \cdot b}{4 \cdot \beta b} \left\{ Z_A^2 \cdot \left(\frac{\text{sh} 2\beta b \cdot \cos 2\beta b + \text{ch} 2\beta b \cdot \sin 2\beta b}{2} + \text{sh} 2\beta b + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sin 2\beta b + 2\beta b \right) + Z_A \cdot Z_B \cdot (\text{ch} 2\beta b \cdot \sin 2\beta b - \text{sh} 2\beta b \cdot \cos 2\beta b) + \right. \\ &+ \left. Z_B^2 \left(\frac{-\text{sh} 2\beta b \cdot \cos 2\beta b - \text{ch} 2\beta b \cdot \sin 2\beta b}{2} + \text{sh} 2\beta b + \sin 2\beta b - 2\beta b \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Removing $R \cdot \chi \cdot J_0$ from (12) and denoting the remaining expressions, depending on βb only, by γ_2 , (12) obtains the following more simple form:

$$\frac{h}{R \cdot \chi} \cdot \int_{-b}^{+b} w_0^2 \cdot dx = R \cdot \chi \cdot J_0 \cdot \gamma_2. \quad (13)$$

Numerical values of γ_2 belonging to different values of βb are given in Table I.

Table I
Coefficients γ_2 belonging to different cross sections

Form of cross section	$\beta b =$	1	1,25	1,3	1,5	2	3	4	10
	$\gamma_2 =$	0,791	0,578	0,537	0,373	0,1131	0,0128	0,00274	$1,64 \cdot 10^{-5}$
	$\gamma_2 =$	0,810	—	—	—	0,1235	0,0277	0,01182	—
Approximate	$\gamma_2 =$	0,804	0,587	0,537	0,3605	0,112	0,01303	0,002584	$1,169 \cdot 10^{-5}$

From the view-point of subsequent calculations it should be expedient to set up for γ_2 a *simple approximate formula*, so that the value of γ_2 belonging to any value of βb could easily be calculated:

$$\gamma_{2 \text{ appr.}} = \frac{1}{1 + 0,160 (\beta b)^4 + 0,084 (\beta b)^6}. \quad (14)$$

Values of $\gamma_{2 \text{ appr.}}$ are also to be found in Table I. At greater values of βb the value of $\gamma_{2 \text{ appr.}}$ perceptibly deviates from the accurate value, but this circumstance does not practically influence the value of the critical moment; compare with comment on formula (32b).

Thus, equation (8) expressing the relation between the moment and the change in curvature, can be written — employing (9) and (13) — in the following simple form:

$$\frac{M}{E \cdot J_0 \cdot \chi} = \frac{R}{R_0} \cdot \gamma_1 + R \cdot \chi \cdot \gamma_2. \quad (15)$$

In (15) the change in curvature is represented by three variables: R , χ and βb , the latter is hidden in γ_1 and γ_2 . Instead of these the unique dimensionless variable $\chi \cdot R_0$ will be introduced. Thus variables figuring in (15) will be expressed by $\chi \cdot R_0$. With regards to (2):

$$R = \frac{R_0}{\chi \cdot R_0 + 1}. \quad (16)$$

On the basis of (7) and (16) we have:

$$\beta b = \frac{\sqrt[4]{3} \cdot b}{\sqrt{h \cdot R_0}} \cdot \sqrt{\chi \cdot R_0 + 1} = \beta_0 \cdot b \sqrt{\chi \cdot R_0 + 1}, \quad (17)$$

if βb belonging to R_0 is denoted by $\beta_0 b$. So we obtain:

$$\gamma_{1 \text{ appr.}} = \frac{1}{1 + 0,120(\beta_0 b)^4 \cdot (\chi \cdot R_0 + 1)^2} \quad (18)$$

and

$$\gamma_{2 \text{ appr.}} = \frac{1}{1 + 0,160(\beta_0 b)^4 \cdot (\chi \cdot R_0 + 1)^2 + 0,084(\beta_0 b)^6 \cdot (\chi \cdot R_0 + 1)^3}. \quad (19)$$

Thus, (15) can be written in the following form (if both sides of the equation are multiplied with $\frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h} = R_0 \cdot (\beta_0 b)^2$):

$$\frac{M}{E \cdot J_0} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h} = \chi \cdot R_0 \cdot (\beta_0 b)^2 \left[\frac{1}{\chi \cdot R_0 + 1} \gamma_1 + \frac{\chi \cdot R_0}{\chi \cdot R_0 + 1} \gamma_2 \right]. \quad (20)$$

Equation (20) gives the relation between the moment M affecting the arch and the change χ in longitudinal curvature in a more perspicuous form. Parameters

in this equation are the original radius of curvature R_0 of the arch and the geometrical parameter $\beta_0 b$ referring to the original shape of the arch. On the basis of (7) these parameters can be calculated from each other by the formula

$$R_0 = \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h \cdot (\beta_0 b)^2}. \quad (21)$$

An additional advantage of equation (20) is the dimensionless nature of its two sides, furthermore, that it can also be explained for $\beta_0 b = 0$ ($R_0 = \infty$).

As can be seen from (20), the equation of the initial tangent of the curve $M(\chi)$ (i. e. the tangent belonging to the point $\chi = 0$) is

$$\frac{M}{E \cdot J_0} = \chi \cdot \gamma_1; \quad (22)$$

connection $M(\chi)$ corresponding to the *elementary theory of Strength of Materials*, however, could be obtained if γ_1 were equal to one, i. e.:

$$\frac{M}{E \cdot J_0} = \chi. \quad (23)$$

For an *originally straight shell* (i. e. for $R_0 = \infty$ and $\beta_0 b = 0$, respectively) we have $\chi = \frac{1}{R}$; in addition, the first member within brackets on the right-hand side of equation (20) is equal to zero, the second member, however, is equal to γ_2 . Finally, according to (21)

$$R_0 \cdot (\beta_0 b)^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h},$$

thus,

$$\frac{M}{E \cdot J_0} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h} \cdot \gamma_2. \quad (24)$$

For the characterization of the curvature it is expedient to introduce instead of

$$\chi = \frac{1}{R}$$

the dimensionless variable βb . On the basis of (7) we obtain

$$\frac{M}{E \cdot J_0} \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h} = (\beta b)^2 \cdot \gamma_2; \quad (25)$$

and so the moment is obtained as a function of the geometrical parameter βb , valid for the deformed cross section.

Numerical values resulting from connection (20) for values $\beta_0 b = 0, 1, 2, 3$ and 4 are given in Tables II/0—4 and in Figs. 2/0—2/4. In these figures the initial tangent (22) of the curve, as well as connection $M(\chi)$ which can be obtained in accordance with the *elementary theory* (23), are also plotted. For the sake of descriptiveness, in Tables II/1—4 relations R/R_0 (16) belonging to different values $\chi \cdot R_0$ are also shown. In Table II/0 instead of the latter — on the base of (7) — relation

$$\frac{R}{\left(\frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h}\right)}$$

is given. Using this, the magnitude of the curving of the arch, up to the very limit when the critical moment is arrived at, can also be determined.

Knowing $\beta_0 b$, the curvature of the arch can be characterized instead of by $\chi \cdot R_0$ also by $(\beta b)^2$ (17); therefore, values of $(\beta b)^2$ pertaining to values of $\chi \cdot R_0$ are also shown.

Tables II/0—4

Connections between the bending moment and the change in curvature

	II/0				$\beta_0 b = 0$		Tangent (elementary theory)
$(\beta b)^2 = \frac{1}{R} \frac{\sqrt{3} b^2}{h} =$	0	1,0	1,21	1,44	1,69	1,96	1,0
$\frac{M}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{h} =$	0	0,791	0,861	0,903	0,910	0,886	1,0

	II/1				$\beta_0 b = 1$				Tangent	Elementary theory
$(\beta b)^2 =$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	2,7	3,0			
$\chi \cdot R_0 =$	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	1,7	2,0	0,5	0,5	
$\frac{M}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{h} =$	-0,496	0	0,364	0,553	0,615	0,616	0,604	0,4465	0,5	
$R/R_0 =$	2,0	1,0	0,667	0,50	0,40	0,370	0,333	—	—	

II/2		$\beta_0 b = 2$							Tangent	Elementary theory
$(\beta b)^2 =$	2,0	4,0	4,8	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2		
$\chi \cdot R_0 =$	-0,5	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,5	0,5
$\frac{M}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{h} =$	-1,835	0	0,1865	0,262	0,277	0,284	0,284	0,281	0,684	2
$R/R_0 =$	2,0	1,0	0,833	0,714	0,667	0,625	0,588	0,555	—	—

II/3		$\beta_0 b = 3$						Tangent	Elementary theory
$(\beta b)^2 =$	4,5	9	10,8	12,6	13,5	14,4	15,3		
$\chi \cdot R_0 =$	-0,5	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,5	0,5
$\frac{M}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{h} =$	-2,25	0	0,1022	0,1346	0,1371	0,1374	0,1350	0,419	4,5
$R/R_0 =$	2,0	1,0	0,833	0,714	0,667	0,625	0,588	—	—

II/4		$\beta_0 b = 4$						Tangent	Elementary theory
$(\beta b)^2 =$	8	16	19,2	20,8	22,4	24,0	25,6		
$\chi \cdot R_0 =$	-0,5	0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,5	0,5
$\frac{M}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} b^2}{h} =$	-1,98	0	0,0598	0,0715	0,0768	0,0786	0,0781	0,252	8
$R/R_0 =$	2,0	1,0	0,833	0,770	0,714	0,667	0,625	—	—

If (in the case of a negative moment) $\chi \cdot R_0 = -1$, then $\beta b = 0$, thus, the arch straightens. If an additional decrease of $\chi \cdot R_0$ occurs, the arch shall be curved in the opposite direction and βb becomes imaginary; this phenomenon will again be dealt with in section 2.42.

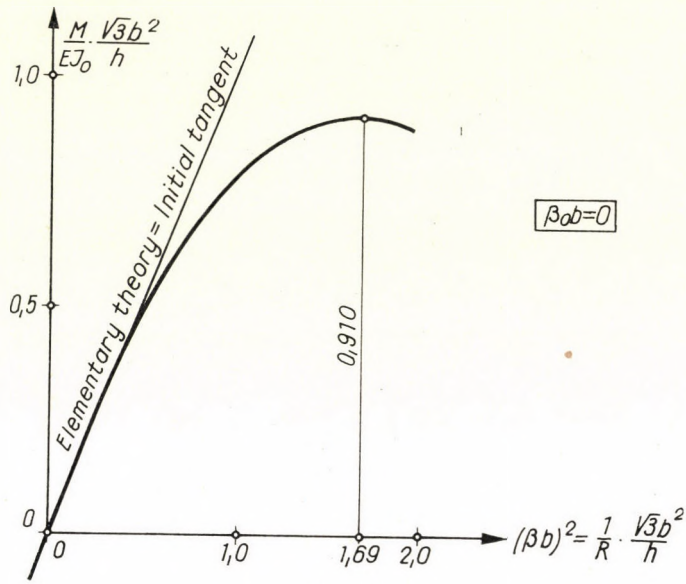


Fig. 2/0

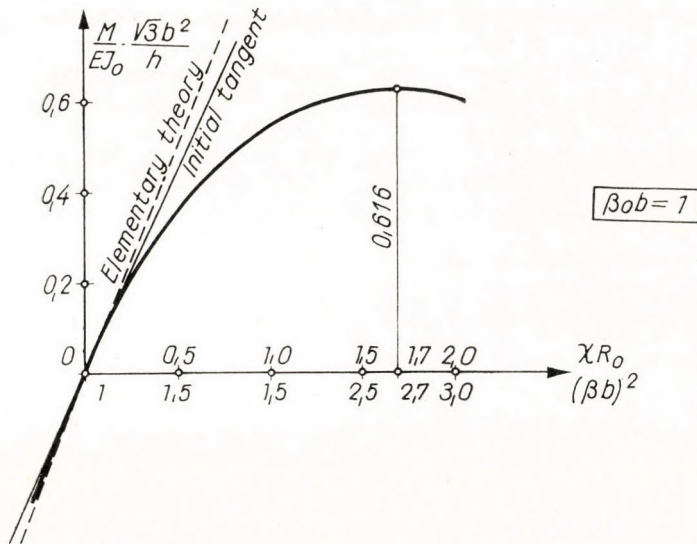


Fig. 2/1

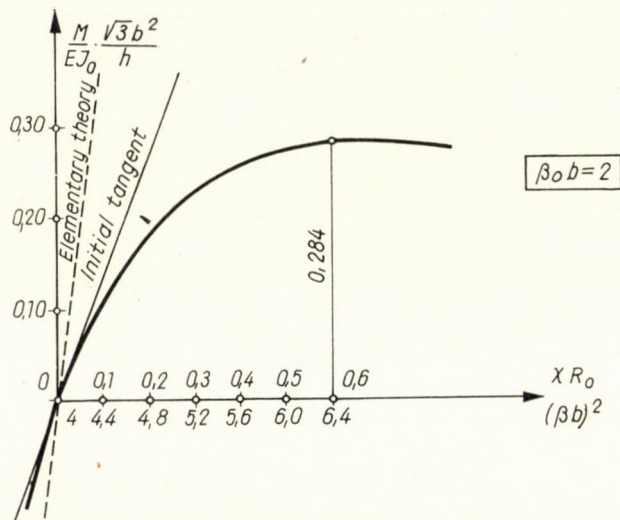


Fig. 2/2

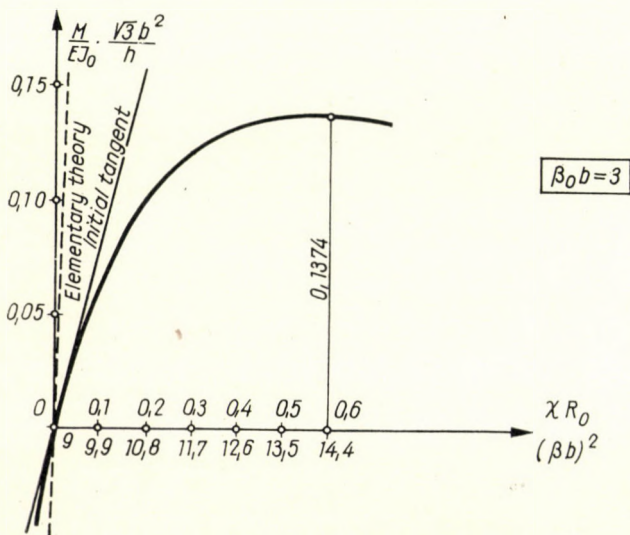


Fig. 2/3

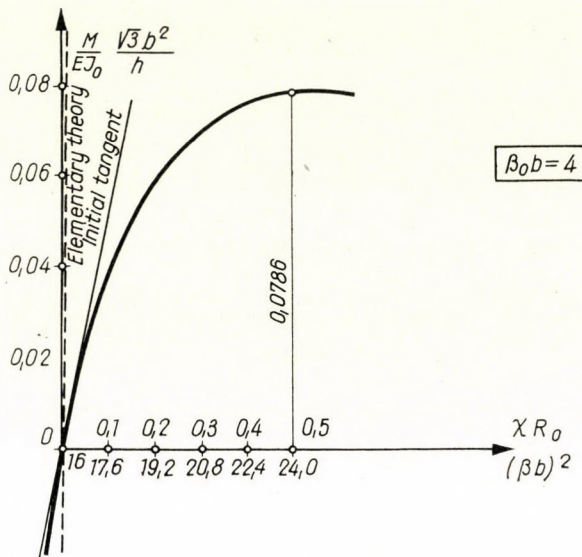


Fig. 2/4

2. 3. Curve $M(\chi)$ pertaining to the V-formed cross section.

Other cross sections

2. 31. V-formed cross section

We know from paper [2] (formulae (45) and (46)) that the shape of a V-formed cross section (Fig. 1c) is given by the equation

$$z_0 = d \left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2} \right), \tag{26}$$

the deformation of the cross section, on the other hand, by the equations

$$w_1 = -R \cdot \chi \cdot z_0, \tag{27}$$

and

$$w_0 = d \cdot R \cdot \chi \cdot (Z_A \cdot \text{ch } \beta x \cdot \cos \beta x + Z_B \text{ sh } \beta x \cdot \sin \beta x + Z_C \cdot \text{ch } \beta x \cdot \sin \beta x + Z_D \cdot \text{sh } \beta x \cdot \cos \beta x). \tag{28}$$

Constants of integration $Z_A - Z_B$ were determined by formulae [2] (47) — [2] (51). As (27) coincides with (5), basic connection (1) between the moment and the change in curvature can be simplified in the same way as for the circular arc-formed cross section. This means: formula (8) shall also be valid for the

V-formed cross section, but z_0 and w_0 figuring in formula (8) should be calculated according to formulae (26) and (28). This should be done in the following way.

Connection (9) is also valid for the *first member* on the right-hand side of equation (8), but with the difference, that γ_1 should be calculated according to the V-formed cross section. In addition, in conformity with formula [2] (52) we have:

$$J_0 = 0,1667 \cdot h \cdot d^2 \cdot b. \quad (29)$$

Employing formula (28) the second member on the right-hand side of equation (8) shall obtain the following form (taking into consideration that $Z_C = Z_D$):

$$\begin{aligned} \frac{h}{R \cdot \chi} \int_{-b}^{-b} w_0^2 \cdot dx &= R \cdot \chi \cdot h \cdot d^2 \cdot 2 \cdot \int_0^{+b} (Z_A \cdot \text{ch}\beta x \cdot \cos\beta x + Z_B \cdot \text{sh}\beta x \cdot \sin\beta x + \\ &+ Z_C \cdot \text{ch}\beta x \cdot \sin\beta x + Z_D \cdot \text{sh}\beta x \cdot \cos\beta x)^2 \cdot dx = \\ &= \frac{R \cdot \chi \cdot h \cdot d^2 \cdot b}{4\beta b} \left\{ Z_A^2 \left(\frac{\text{sh}2\beta b \cdot \cos2\beta b + \text{ch}2\beta b \cdot \sin2\beta b}{2} + \text{sh}2\beta b + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sin2\beta b + 2\beta b \right) + Z_B^2 \left(\frac{-\text{sh}2\beta b \cdot \cos2\beta b - \text{ch}2\beta b \cdot \sin2\beta b}{2} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \text{sh}2\beta b + \sin2\beta b - 2\beta b \right) + 2 \cdot Z_C^2 (\text{sh}2\beta b - \sin2\beta b) + \right. \\ &+ (Z_A \cdot Z_B + Z_C^2) \cdot (\text{ch}2\beta b \cdot \sin2\beta b - \text{sh}2\beta b \cdot \cos2\beta b) + \\ &+ 2 \cdot Z_A \cdot Z_C (\text{sh}2\beta b \cdot \sin2\beta b + \text{ch}2\beta b - \cos2\beta b) + \\ &+ \left. 2 \cdot Z_B \cdot Z_C (-\text{ch}2\beta b \cdot \cos2\beta b + \text{ch}2\beta b + \cos2\beta b - 1) \right\} = \\ &= R \cdot \chi \cdot J_0 \cdot \gamma_2. \quad (30) \end{aligned}$$

(From the result of the integration — similarly to the circular arc-formed cross section — $R \cdot \chi \cdot J_0$ was removed and the remaining members, depending on βb only, were marked by γ_2 .)

Thus, our formula (8), as the sum of (9) and (30), shall obtain the following form:

$$\frac{M}{E \cdot J_0 \cdot \chi} = \frac{R}{R_0} \cdot \gamma_1 + R \cdot \chi \cdot \gamma_2. \quad (31)$$

The only difference between (31) and (15) is that γ_1 and γ_2 cannot be calculated from the formulae valid for the circular arc-formed cross section, but from the formulae referring to the V-formed one. We established in [2] that γ_1 pertain-

ing to the V-formed cross section hardly deviates from γ_1 belonging to the circular arc-like cross section. We also observed that γ_1 pertaining to all other cross sections is somewhat greater than γ_1 referring to the circular arc-formed one. In accordance with the above, the use of γ_1 belonging to the circular arc-formed cross section, or the use of $\gamma_{1\text{appr.}}$ (11), which is even somewhat smaller than the previous one, means an approximation to the advantage of safety.

The value of γ_2 belonging to the V-formed cross section was calculated on the base of expression (30) for different values of βb (Table I). We can observe, that considerable deviations between the value of γ_2 belonging to the V-formed cross section and the value of γ_2 pertaining to the circular arc-formed cross section only appear at greater values of βb ; but the former value is always greater than the latter one. Consequently, for practical calculations γ_2 belonging to the circular arc cross section can also be used — with an approximation to the benefit of safety — for V-formed cross sections, as well as $\gamma_{2\text{appr.}}$ given by formula (14) and Figs. 2/0—2/4 plotted on its base; the same also holds for the moment M_{crit} obtained from formula (32).

It should also be mentioned that at greater values of βb the influence of the first member (γ_1) on the right-hand side of equations (15) and (31), respectively, is far greater than that due to the second member (γ_2); see comment on formula (32b). Thus, at greater values of βb the value of the moment is insignificantly influenced only, if instead of the greater γ_2 belonging to the V-formed cross section the considerably smaller γ_2 pertaining to the circular arc-formed cross section is used. The deviation between these two sorts of cross sections is essentially caused by the difference between the values of the respective factors γ_1 ; see [2]. However, at small values of βb , when the influence of γ_2 is greater, γ_1 and γ_2 belonging to the V-formed and to the circular arc-formed cross section, respectively, hardly deviate from each other, thus, the error resulting from the use of γ_1 and γ_2 pertaining to the circular arc-like cross section shall become insignificant again.

2. 32. Other cross sections

The connection between the moment and the change in curvature is more complicated for the *cosine-line* and *wing-formed* cross sections (Figs. 1/b and 1/d), than the relation expressed by formulae (15) and (31), respectively. Namely, the simple proportionality between w_1 and z_0 according to (5) and (27) is not valid for these cross sections, see formulae (43) and (48); therefore, simplifications resulting from the above-mentioned proportionality will also fall out.

In paper [2] we proved, however, that γ_1 pertaining to all investigated cross sections is greater than γ_1 referring to the circular arc-like one. But, as we have seen from the previous paragraph, γ_2 belonging to the V-formed cross

section is greater than γ_2 pertaining to the circular arc-like one. As γ_1 and γ_2 must be calculated from similar integrals, we can rightly conclude that γ_2 — or the corresponding more complicated quantities, respectively — pertaining to the cosine-line and V-formed cross sections are also greater than those referring to the circular arc-like cross section. (According to what has been said in connection with the V-formed cross section, it is just the magnitude of γ_1 which is decisive from the view-point of the critical moment, the effect due to γ_2 is far smaller than that of γ_1 .) On the base of all that has previously been deduced, it can be stated, that *connections valid for the circular arc-formed cross section can safely be used for the V-formed cross section, as well as for the other kinds of cross sections.*

2. 4. Evaluation of results

2. 41. — The most important result that can be read from Figs. 2/0—2/4 is the fact, that in the case of *pure bending* such a *critical moment* M_{crit} exists, at which the shell *loses its stability*. This moment is given by the culminating point of curves $M(\chi)$ calculated from formula (20).

Critical moments belonging to different values of $\beta_0 b$ are compiled in Table III and are plotted in Fig. 3. For the sake of the simplification of *practical calculations* we set up simple approximate formulae which directly supply the value of the *critical moment* M_{crit} pertaining to a given value of $\beta_0 b$.

According to our investigations the formula

$$\frac{M_{crit}}{E \cdot J_0} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h} = \frac{0,910}{1 + 0,488 (\beta_0 b)^2 + 0,0155 (\beta_0 b)^4} \tag{32a}$$

approaches the critical moments calculated from formula (20) within the limits $0 \leq \beta_0 b \leq 3$ with sufficient accuracy; see Table III.

Table III
Magnitude of the critical moment

$\beta_0 b =$	0	1	2	3	4
$\frac{M_{crit}}{E J_0} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h} =$	0,910	0,616	0,284	0,1374	0,0786
$\frac{0,910}{1 + 0,488 (\beta_0 b)^2 + 0,0155 (\beta_0 b)^4} =$	0,910	0,605	0,285	0,137	—
$\frac{1,23}{(\beta_0 b)^2} =$	—	—	—	0,137	0,077

For $3 \leq \beta_0 b$ the second member within brackets on the right-hand side of formula (20) can be neglected in comparison with the first member (for the reason of $\gamma_2 \ll \gamma_1$ and on account of the fact that for $M = M_{crit}$ we have $\chi \cdot R_0 < 1$). Thus, substituting expression (18) of γ_1 into (20), M_{crit} can directly be obtained by differentiation according to $(\chi \cdot R_0)$. Differentiating and employing possibilities of simplification given by the relation $(\beta_0 b)^4 \gg 1$, we obtain

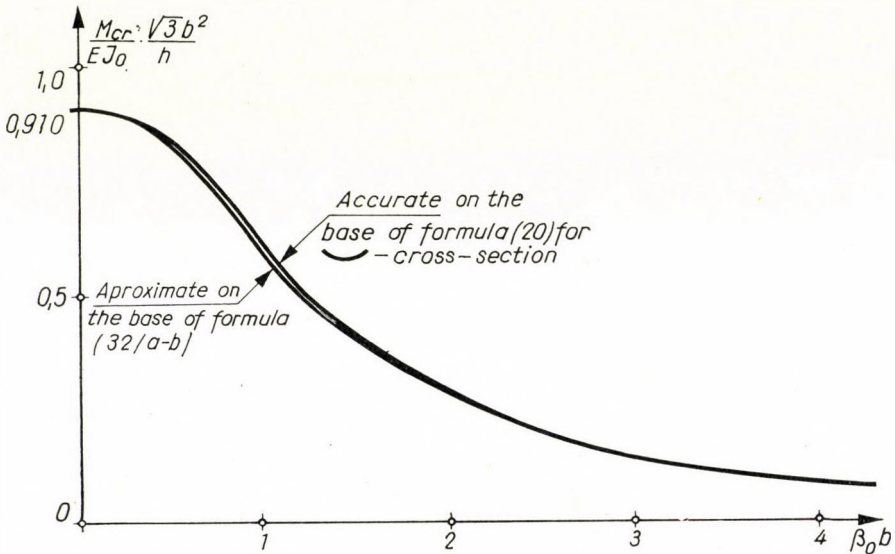


Fig. 3

the result that the critical moment occurs for any $\beta_0 b$ at $\chi \cdot R_0 = 0,5$, while its magnitude is

$$\frac{M_{crit}}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h} \approx \frac{1,32}{(\beta_0 b)^2}. \quad (32b)$$

In accordance with the conclusions that can be drawn from Table III, this formula, beginning from $\beta_0 b = 3$, gives a good approximation of the accurate value of M_{crit} ; with an additional increase of $\beta_0 b$ the accuracy of this approximation is still more intensified. At great values of $\beta_0 b$ some inaccuracy is caused by the fact, that formula (18) of γ_1 deviates from the accurate value — see Table [2] (II) — this deviation, however, is not considerable and is always to the benefit of safety.

Thus, in the case of $0 \leq \beta_0 b \leq 3$ formula (32a), but for $3 \leq \beta_0 b$ formula (32b) must be used.

2. 42. — Shell-arches with cross sections according to Figs. 1a–1c behave exactly in the same way as arches with cross sections shown in Fig.

ie, *i. e.*, the cross section of shell-arches can be *inverted*. Namely, the two kinds of cross sections only differ from each other in the sign of z_0 and this is followed by the change in the sign of w , consequently, there is no change in formula (1), either.

It follows from the above, that an *originally straight shell* ($\beta_0 b = 0$) behaves in the same way as if affected by a positive or a negative moment, respectively. Therefore, Fig. 2/0 is equally valid for $\pm M$.

Originally curved shells, on the other hand, behave in a different manner if they are affected by a positive or a negative moment, respectively. If affected by a *positive moment* (Fig. 1) the original curvature of the shell increases and at the same time its bending stiffness decreases; and when the *critical moment* is reached the shell loses its stability. In contrast to this, if the shell is affected by a *negative moment*, its bending stiffness increases up to the very moment when the axis of the shell straightens. Therefore, until the shell straightens we cannot speak about the critical moment.

The physical reason for the different behaviour of an arch when affected by a positive or a negative moment, respectively, is the following. The action of a *positive moment* causes the *flattening* of the cross section of the arch, consequently, the arm of internal forces gradually decreases. Contrary to this, if affected by a *negative moment* the cross section of the arch *bulges*, so the arm of internal forces steadily increases. Thus, the loss of stability does not occur in this case.

When the arch has already straightened, an additional increase of the negative moment will cause an oppositely directed curvature. As has already been mentioned, in such a case βb becomes imaginary. This phenomenon was not investigated in detail. Nevertheless, we are able to follow the behaviour of the arch qualitatively without detailed calculations. Namely, from the very moment when the arch straightened it can subsequently be treated like an originally straight (but not stressless) shell. Thus, by an additional increase of the moment a *negative critical moment* may be reached. This negative critical moment is (as to the absolute value) — for here not detailed reasons — greater than the positive critical moment, therefore, it is sufficient to determine the latter.

It should also be mentioned that if the cross section bulges, then the basic assumption of this paper, *i. e.* the *flatness* of the cross section is continually less realized. This is one of the reasons why the behaviour of a shell affected by a negative moment was not dealt with in greater detail.

The different behaviour for positive and negative moments, however, appears practically at greater moments, only. If the shell-arch is affected by a *small bending moment*, then — owing to the fact, that the curve $M(\chi)$ can be replaced by its initial tangent — the bending stiffness of the arch shall be *the same in both directions*. Consequently, if we only deal with small deformations

of the shell-arch (e. g., the investigation of the stability for central compression, see [2]), then the different behaviour due to moments of opposite signs must not be taken into consideration.

3. Calculation of longitudinal stresses

3. 1. Distribution of longitudinal stresses in an optional cross section

The distribution of longitudinal stresses σ_y , arising in the cross section due to the action of a bending moment, is owing to the deformation of the cross section not linear (Fig. 4).

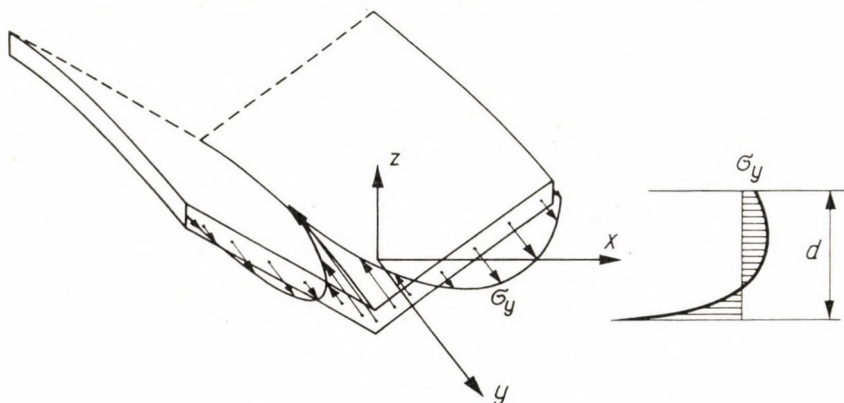


Fig. 4

As we know from formula [2] (7) the longitudinal strain is the following:

$$\varepsilon_y = \frac{z}{R} - \frac{z_0}{R_0}. \quad (33)$$

Thus, employing (2) the longitudinal stress is:

$$\sigma_y = E \cdot \varepsilon_y = E \left(\frac{z}{R} - \frac{z-w}{R_0} \right) = E \cdot \chi \cdot z + \frac{E}{R_0} \cdot w. \quad (34)$$

The first member ($E \cdot \chi \cdot z$) on the right-hand side of formula (34) gives a linear stress-distribution according to the depth, the second member $\left(E \cdot \frac{w}{R_0} \right)$,

on the other hand, gives a non-linear one (because w is not proportional to z). Therefore, the stress σ_y determined by the sum of these two members does not vary linearly according to the depth z , either.

In the following we will investigate the stress-distribution for several forms of cross sections.

3. 2. Stress-distribution of the circular arc-like formed cross section (Fig. 1a)

Employing (4), (5) and (6), formula (34) shall obtain the following form:

$$\sigma_y = E \cdot \chi \cdot \left[z - \frac{R}{R_0} \cdot z_0 + \frac{R}{R_0} \cdot d (Z_A \cdot \operatorname{ch} \beta x \cdot \cos \beta x + Z_B \cdot \operatorname{sh} \beta x \cdot \sin \beta x) \right]. \quad (35)$$

The accurate connection between the external moment and the stresses is — as we can see — fairly complicated. Partly, because the relation between M and χ is, according to (20), not linear, and partly as in (35) R , z and β vary depending on χ , and hereby with them Z_A and Z_B , too. Thus, instead of the accurate investigation of the stress-distribution we shall choose the following *approximate* method.

Let us be confined to *small moments*, *i. e.*, let us take instead of the real curve $M(\chi)$ its initial tangent. In this case we have according to (22):

$$\chi = \frac{M}{E \cdot J_0 \cdot \gamma_1}. \quad (36)$$

This means that at the same time the following approximations can be regarded as being valid:

$$z \approx z_0, \quad (37)$$

$$R \approx R_0, \quad (38)$$

$$\beta \approx \beta_0. \quad (39)$$

Taking all these into account, we have:

$$\sigma_y \approx \frac{M}{J_0} \cdot d \cdot \left\{ \frac{1}{\gamma_1} \cdot [Z_A \cdot \operatorname{ch} \beta_0 x \cdot \cos \beta_0 x + Z_B \cdot \operatorname{sh} \beta_0 x \cdot \sin \beta_0 x] \right\} = \frac{M}{J_0} \cdot d \cdot \zeta, \quad (40)$$

if the dimensionless quantity within brackets is denoted by ζ . As $\frac{M}{J_0} \cdot d$ is

constant within the cross section, the change in stress within the cross section is given by ζ as a function of x . For the sake of an easier practical calculus we computed the values of ζ according to (40) for different points of the cross section, for the values of $\beta_0 b = 1, 2, 3$ and 4. Results of these computations were plotted in Fig. 5 (not as a function of x , but as a function of the depth z). For the sake of a better comparison we also plotted the values of $\zeta_{\text{elementary}}$

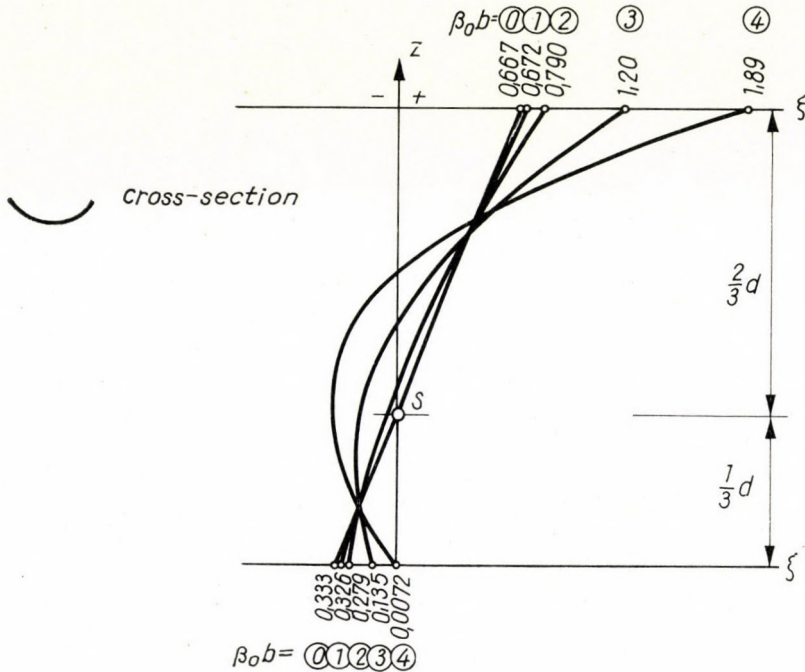


Fig. 5

corresponding to the stress-distribution according to the elementary theory, *i. e.*, linearly varying with the depth:

$$\sigma_{y \text{ elementary}} = \frac{M}{J_0} \cdot d \cdot \left(\frac{z_0}{d} \right) = \frac{M}{J_0} \cdot d \cdot \zeta_{\text{elementary}} \quad (41)$$

It can be seen from Fig. 5 that the stress distribution deviates all the more from that according to the elementary theory, the greater the parameter $\beta_0 b$ is. If $\beta_0 b = 0$, then the stresses are distributed in compliance with formula (41). This is equally valid for the circular arc-formed cross section, as well as for any other kind of cross section.

The approximate expression of the stress valid for the *other kinds of cross sections* can be deduced from (34) by a similar mental process, using expressions (36)–(39). Consequently, these will only be dealt with shortly.

3. 3. Stress-distribution of the cosine-line-like formed cross section
(Fig. 1b)

In accordance with [2] (40), (41) and (42) we have:

$$z_0 = -\frac{d}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{b} \cdot x, \tag{42}$$

$$w_1 = -\frac{1}{1 + \frac{4(\beta b)^4}{\pi^4}} \cdot R \cdot \chi \cdot z_0, \tag{43}$$

$$w_0 = R \cdot \chi \cdot d \cdot (Z_A \cdot \text{ch}\beta x \cdot \cos\beta x + Z_B \cdot \text{sh}\beta x \cdot \sin\beta x). \tag{44}$$

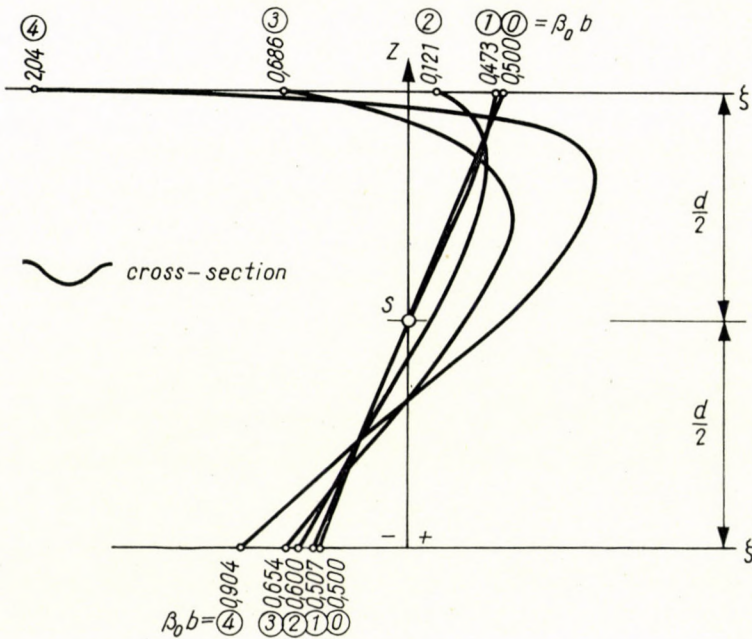


Fig. 6

Using these we obtain:

$$\sigma_y \approx \frac{M}{J_0} \cdot d \left\{ \frac{1}{\gamma_1} \left[-\frac{1}{1 + \frac{4}{\pi^4} (\beta_0 b)^4} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{b} \cdot x + Z_A \cdot \text{ch}\beta_0 x \cdot \cos\beta_0 x + Z_B \cdot \text{sh}\beta_0 x \cdot \sin\beta_0 x \right] \right\} = \frac{M}{J_0} \cdot d \cdot \zeta. \tag{45}$$

Values of ζ are to be found in Fig. 6.

The form of w_0 complies with (28), but Z_A-Z_D should be calculated differently, see [2]. Employing these, we obtain:

$$\sigma_y \approx \frac{M}{J_0} \cdot d \left\{ \frac{1}{\gamma_1} \left[\frac{1}{1 + \frac{64}{\pi^4} \cdot (\beta_0 b)^4} \cdot \sin \frac{\pi}{2 \cdot b} \cdot x + \right. \right. \\ \left. \left. + Z_A \cdot \text{ch} \beta_0 x \cdot \cos \beta_0 x + Z_B \cdot \text{sh} \beta_0 x \cdot \sin \beta_0 x + \right. \right. \\ \left. \left. + Z_C \cdot \text{ch} \beta_0 x \cdot \sin \beta_0 x + Z_D \cdot \text{sh} \beta_0 x \cdot \cos \beta_0 x \right] \right\} = \frac{M}{J_0} \cdot d \cdot \zeta. \quad (49)$$

Values of ζ are given in Fig. 8.

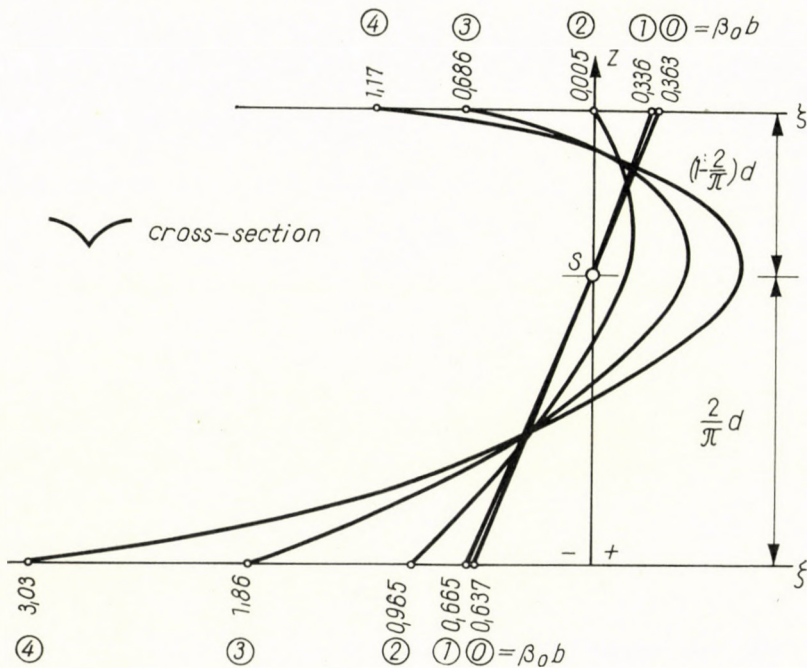


Fig. 8

3. 6. Evaluation of the obtained results

From Figs. 5—8 it can be seen that the stress-distribution of all cross sections — especially for greater values of $\beta_0 b$ — considerably deviates from the linear distribution corresponding to the elementary theory. The stress-distributions pertaining to the individual cross sections also differ more or less from each other. This deviation is explained by the differences in curvature of the individual cross sections.

For practical calculations Figs. 5—8 give the possibility for an interpolation between them, according to the form of the cross section and the value of the parameter $\beta_0 b$ belonging to the shell to be calculated.

4. Transversal moments

The deformation (w) of the cross section of the arch is followed by transversal bending moments m_x arising in the slab. Knowing w , the magnitude of these bending moments can easily be calculated because we have (see formula [2] (10)):

$$m_x = \frac{E \cdot h^3}{12} \cdot w'' \quad (50)$$

(differentiation according to x marking by commas).

According to (4):

$$w = w_1 + w_0,$$

thus, taking (28) into consideration, which is the general expression for w_0 , we obtain:

$$m_x = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot b^2} [w_1'' \cdot b^2 + 2(\beta b)^2 \cdot R \cdot \chi \cdot d \cdot (-Z_A \cdot \text{sh}\beta x \cdot \sin\beta x + Z_B \cdot \text{ch}\beta x \cdot \cos\beta x + Z_C \cdot \text{sh}\beta x \cdot \cos\beta x - Z_D \cdot \text{ch}\beta x \cdot \sin\beta x)]. \quad (51)$$

Expression $w_1'' \cdot b^2$ figuring in the above equation, is for different cross sections given as follows:

Form of cross

section:

$$w_1'' \cdot b^2 =$$

Circular arc:

$$- 2 \cdot R \cdot \chi \cdot d. \quad (52)$$

Cosine line:

$$- \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{4(\beta b)^4}} \cdot R \cdot \chi \cdot d \cdot \cos \frac{\pi}{b} \cdot x. \quad (53)$$

V-formed:

$$0 \quad (54)$$

Wing-formed:

$$+ \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^4}{64(\beta b)^4}} \cdot R \cdot \chi \cdot d \cdot \sin \frac{\pi}{2b} \cdot x. \quad (55)$$

Thus, for a given external moment — using Tables II/0—4 or Figs. 2/0—4, respectively — first $(\beta b)^2$ should be determined, and from this $R \cdot \chi$:

$$R \cdot \chi = 1 - \frac{(\beta_0 b)^2}{(\beta b)^2}. \quad (56)$$

The values of constants Z_A-Z_D belonging to the different kinds of cross sections are to be found in Table [2] (I).

The transversal moment generally reaches its maximum value in the middle of the cross section ($x = 0$):

$$m_x(0) = \frac{Z \cdot h^3}{12 \cdot b^2} [w_1''(0) \cdot b^2 + 2(\beta b)^2 \cdot R \cdot \chi \cdot d \cdot Z_B]. \quad (57)$$

5. Investigation of stability for eccentric compression

In paper [2] we determined the critical compressive force of a shell-arch for *central compression*, furthermore, in section 2 of this paper the critical bending moment for *pure bending*. In reality the shell-arch is generally not affected by pure bending, but by bending combined with compression, *i. e.*, by *eccentric compression*. Thus, the problem should once more be solved for this compound

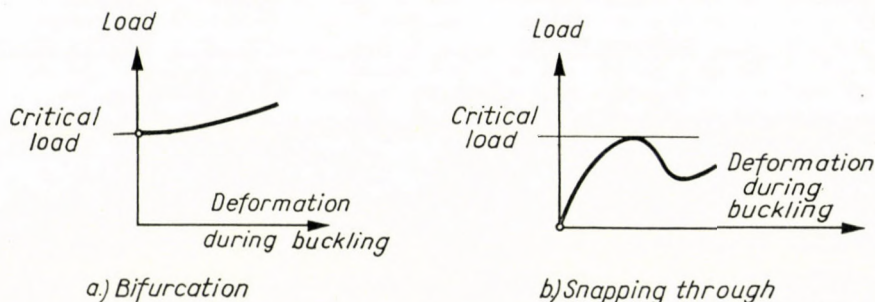


Fig. 9

case. This, on the other hand, would be far more complicated than the previously discussed problems. For this very reason, we shall try to find a way, which—on the basis of our two known solutions—would give the approximate solution of the compound case in question. For this purpose, we shall employ the following statements of the Theory of Stability (see *e. g.* [3]):

The two principal kinds of loss of stability are the phenomenon of *bifurcation* and the phenomenon of *snapping through*. The phenomenon of *bifurcation* is given, *e. g.*, by the buckling of a centrally compressed bar. From our point of view, the phenomenon of bifurcation is characterized by the fact, that the structure before the critical load is arrived at, does not undergo any sort of deformation as will occur after the stability is lost. *E. g.*, a centrally compressed bar affected by a smaller compressive force than the critical one, does not deflect in a lateral direction (Fig. 9a). This case refers to our shell-

arch investigated for central compression [2]. The *snapping through* phenomenon, on the other hand, is characterized — among others — by the fact, that the structure before the critical load is arrived at, undergoes the same kind of deformation as will occur after the stability is lost (Fig. 9b). Thus, the loss of stability of a shell-arch affected by pure bending is a snapping through phenomenon.

The Theory of Stability gives, for the combination of *bifurcation*-phenomena, several theorems and methods [3], [4]. Among these DUNKERLEY'S method is the most simple. He employs the theorem, that if two sorts of loading (P_1, P_2) are combined, then the curve indicating the accurate intensity of the load combination (Fig. 10) is always concave, seen from the zero-point,

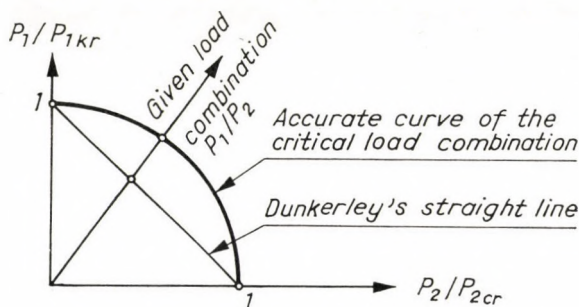


Fig. 10

i. e., the straight line connecting the points of intersection of the curve with the two axes of co-ordinates always gives a *smaller* load-intensity than the accurate one. Consequently, the error resulting by using DUNKERLEY'S straight line is always to the advantage of safety. The equation of this straight line is (Fig. 10):

$$\frac{P_1}{P_{1\text{crit}}} + \frac{P_2}{P_{2\text{crit}}} = 1. \quad (58)$$

Thus, the safety (n) against buckling for given loads

$$P_{1,\text{eff}} = \frac{P_1}{n} \quad \text{and} \quad P_{2,\text{eff}} = \frac{P_2}{n}$$

is the following:

$$\frac{1}{n} = \frac{P_{1,\text{eff}}}{P_{1\text{crit}}} + \frac{P_{2,\text{eff}}}{P_{2\text{crit}}}. \quad (59)$$

Our problem, however, does not refer to the combination of two bifurcation problems, but to the combination of a *bifurcation* and a *snapping through*

problem. As to the problem in question, in the Theory of Stability theorems worked out in detail are not to be found. Therefore, we have to consider the following: DUNKERLEY's theorem cannot be applied forthwith. The very reason for this is, that owing to pure bending the curvature of the shell increases. Thus, in addition to the flexure caused by the bending moment arising from the external load, the originally central compressive force becomes — in consequence of the deformation of the axis of the arch — eccentric, and this causes a further bending of the arch. So, DUNKERLEY's theorem could be applied with similar safety also for bifurcation problems, if to the bending moment the surplus moment arising from the eccentricity of the compressive force were added. This, however, would require the knowledge of the deformation caused by eccentric compression, on the other hand, this would only be possible, if the accurate solution were known.

With regards to the above let us tackle the problem in the following way. As DUNKERLEY's theorem always deviates from the reality to the benefit of safety, we can neglect the additional moment caused by the eccentricity of the compressive force. So, the calculation becomes fairly simple, but according to the present state of the Theory of Stability it cannot be proved that the error caused by such a calculation will always be to the advantage of safety. For this very reason, it is expedient to use a greater coefficient of safety than is usually required. In more delicate cases we can proceed in such a way, that we determine the eccentricity of the compressive force from the deformation occurring owing to the bending moment (taking into consideration the decrease in stiffness), and by this additional moment we increase the bending moment caused by the external load.

6. Numerical example

Let us investigate the roofing structure (Fig. 11) dealt with in [2], for *eccentric compression* (dead load and unilateral wind-load and snow-load). We don't take into account the steepness of the cross sections. In a subsequent paper, however, we want to deal with this question.

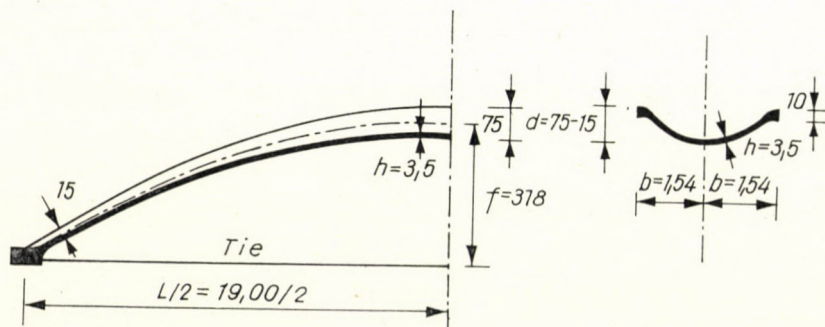


Fig. 11

The *critical horizontal compressive force* of the arch for *central compression* is according to [2]:

$$H_{crit} = 32,2 \text{ t.}$$

The *critical moment* decisive for *pure bending* will be determined on the base of the cross section in the fourth of the span, because this is the place, where owing to the unilateral snow- and wind-load the maximum moment arises. Here we have (see [2]):

$$\begin{aligned} d &= 60 \text{ cm} \\ \beta_0 b &= 2,66 \\ J_0 &= 3,44 \times 10^5 \text{ cm}^4 \\ R_0 &= 16,60 \text{ m} \\ E &= 86,6 \text{ t/cm}^2 \\ F &= 1080 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

As $\beta_0 b < 3$, the critical moment should be determined from formula (32a), i. e.:

$$\begin{aligned} \frac{0,910}{1 + 0,488 \times 2,66^2 + 0,0155 \times 2,66^4} &= 0,174, \\ M_{crit} = 0,174 \cdot \frac{E \cdot J_0 \cdot h}{\sqrt{3} \cdot b^2} &= 0,174 \frac{86,6 \times 3,44 \times 10^5 \times 3,5}{\sqrt{3} \times 154^2} = 4,41 \text{ mt.} \end{aligned}$$

The effective horizontal compressive force H_{eff} and the bending moment M_{eff} arising from dead load and the decisive unilateral snow- and wind-load are:

$$\begin{aligned} H_{eff} &= 2,8 \text{ t,} \\ M_{eff} &= 1,90 \text{ mt.} \end{aligned}$$

The *safety against buckling* is according to DUNKERLEY's formula (59):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &= \frac{2,8}{32,2} + \frac{1,90}{4,41} = 0,517, \\ n &= 1,93. \end{aligned}$$

Thus, the safety is little, therefore the shell should be built side by side closely to the adjacent shells. This hinders the transversal deformation of the cross sections of the shell. Due to this, the bending stiffness of such shells practically reaches the value EJ_0 corresponding to the elementary theory, and so, such shells cannot lose their stability owing to bending.

Calculation of stresses

The compressive force normal to the cross section is:

$$\begin{aligned} N_{eff} &= H_{eff} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + f^2}}{\frac{L}{2}} = 2,8 \frac{\sqrt{9,5^2 + 3,18^2}}{9,5} = 2,97 \text{ t} \\ \sigma_{compr} &= \frac{N_{eff}}{F} = \frac{-2970}{1080} = -2,75 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$

i. e., so small as to be negligible.

The stress arising from bending is according to formula (40):

$$\sigma_{bend} = \frac{M}{J_0} \cdot d \cdot \zeta = \frac{190\,000}{3,44 \times 10^5} \cdot 60 \cdot \zeta = 33,2 \text{ kg/cm}^2 \cdot \zeta.$$

ζ should be determined from Fig. 5 by interpolation between the values $2 \leq \beta_0 b \leq 3$. ζ and σ_{bend} plotted as functions of the depth are to be seen in Fig. 12.

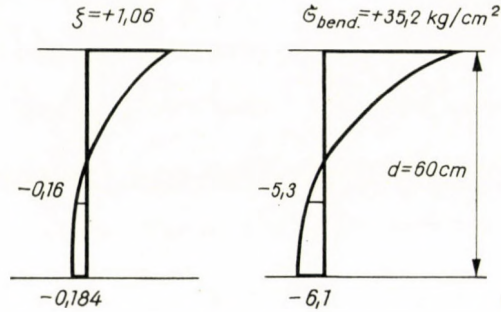


Fig. 12

Transversal bending of the slab

The transversal moment arising in the middle of the cross section will be calculated according to (57).

The value βb belonging to the external moment should be determined by interpolation between the values given by curves to be found in Figs. 2/2 and 2/3, respectively:

$$\frac{M}{EJ_0} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{h} = \frac{190}{86,6 \times 3,44 \times 10^5} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 154^2}{3,5} = 0,075$$

The value of $(\beta b)^2$ belonging to this value is obtained as follows: from the curve $\beta_0 b = 2$ (Fig. 2/2) $(\beta b)^2 = 4,32$; from the curve $\beta_0 b = 3$ (Fig. 2/3) $(\beta b)^2 = 10,3$. Thus, for $\beta_0 b = 2,66$ the respective value is $(\beta b)^2 = 8,28$.

According to (56) we have:

$$R \cdot \zeta = 1 - \frac{2,66^2}{8,28} = 0,144$$

In compliance with (52) we obtain:

$$w''_1(0) \cdot b^2 = -2 \times 0,144 \times 60 = -17,27 \text{ cm.}$$

Z_B should be determined by interpolation between the values $2 \leq \beta b \leq 3$, to be found in Table [2] (I); according to $\beta b = \sqrt{8,28} = 2,88$ we obtain:

$$Z_B = -0,00396.$$

Thus, in conformity with (57) we have:

$$m_x(0) = \frac{86,6 \times 3,5^3}{12 \cdot 154^2} \times [-17,27 - 2 \times 8,28 \times 0,144 \times 60 \times 0,00396] = -234 \text{ mkg/m}$$

(for a positive external moment).

The stress arising in the slab of the shell in consequence of the transversal bending is:

$$\sigma_{x \text{ bend}} = \pm \frac{m_x \cdot 6}{h^2} = \pm \frac{234 \times 6}{3,5^2} = \pm 114 \text{ kg/cm}^2.$$

After the shell-elements are fitted together, the transversal moment practically vanishes.

REFERENCES

1. FUNK, P.: Über ein Stabilitätsproblem bei den durch Krümmung steif gemachten Meßbändern. Österreichisches Ingenieur-Archiv, V. (1951), pp. 387—397.
2. KOLLÁR, L.: Stability of Centrally Compressed Shell-Arches. Acta Technica Ac. Sci. Hung. Tom. XXXII. (1961) Fasc. 1—2, pp. 11—38.
3. PFLÜGER, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1950.
4. STRIGL, G.: Das nichtlineare Überlagerungsgesetz für die Lösungen von zusammengesetzten Stabilitätsproblemen mit Verzweigungspunkt. Der Stahlbau, 24. (1955) pp. 33 und 51.
5. WEINEL, E.: Über Biegung und Stabilität eines doppelt gekrümmten Plattenstreifens. Zeitschrift f. angew. Math. und Mech. XVII. (1937), pp. 366—369.

SUMMARY

Thin, along their edges not stiffened, elastic arches (shell-arches) lose their stability not only due to central compression, but also by pure bending at a certain critical value of the bending moment, in consequence of the deformation of the cross-section. The paper deals with the examination of the critical moment of shell-arches with *different* types of cross-sections. For practical calculations simple approximate formulae were set up, which supply the value of the critical moment for the discussed types of cross-sections with sufficient safety. The distribution of longitudinal stresses arising in the cross-section of the shell-arch due to bending are dealt with, in detail, as well as the transversal moment affecting the shell-slab. The investigation of the stability in the case of eccentric compression is also discussed. Finally, the practical application of the above-discussed problems is demonstrated on hand of a numerical example.

ÜBER DIE STABILITÄT AUF BIEGUNG BEANSPRUCHTER SCHALENBÖGEN

L. KOLLÁR

ZUSAMMENFASSUNG

Dünnwandige, an den Rändern unversteifte, elastische Bogenträger (Schalenbögen) verlieren ihre Stabilität nicht nur infolge mittigen Druckes, sondern auch infolge reiner Biegung, wenn das Biegemoment einen bestimmten kritischen Wert erreicht, infolge der Formänderung des Querschnittes. Der Aufsatz befaßt sich mit der Bestimmung des kritischen Momentes für Schalenbögen *verschiedenen* Querschnittes. Es wird eine einfache annähernde Formel abgeleitet, die für alle im Aufsatz behandelten Querschnitte das kritische Moment mit Sicherheit liefert. Die im Querschnitt des Schalenbogens infolge Biegung auftretende Spannungsverteilung wird ausführlich erörtert, wie auch das die Schalenplatte beanspruchende Quermoment. Die Untersuchung der Stabilität für den Fall ausmittiger Druckbeanspruchung wird ebenfalls behandelt. Schließlich wird die praktische Anwendung der abgeleiteten Ergebnisse an Hand eines Zahlenbeispiels gezeigt.

STABILITÉ DES VOILES EN ARC FLÉCHIS

L. KOLLÁR

RÉSUMÉ

Par suite de la déformation de leur section, les voiles en arc élastiques minces et non raidis à leur bord, perdent leur stabilité à une valeur critique du moment de flexion non seulement sous l'action de forces compressives, mais aussi par suite d'une flexion simple. L'étude examine le moment critique de voiles en arc de sections *différentes*. Pour le calcul pratique, l'auteur établit une formule approximative simple donnant le moment critique pour les sections examinées. Il traite en détail de la répartition des tensions longitudinales qui naissent dans la section du voile sous l'effet de la flexion, ainsi que du moment transversal agissant sur le voile. L'auteur examine aussi le problème de la stabilité en cas de compression excentrique, et présente un exemple numérique illustrant l'application pratique des résultats.

СТАБИЛЬНОСТЬ ИЗОГНУТЫХ АРОК В ВИДЕ ОБОЛОЧЕК

Л. КОЛЛАР

РЕЗЮМЕ

Вследствие деформации сечения тонких упругих арочных ферм (арочных оболочек) не распертых на их краях, они теряют стабильность не только вследствие давления, но и чистого изгиба при некотором критическом значении изгибающего момента. В работе исследуются критические моменты арочных оболочек различных сечений. Для практических расчетов выводится простая приближенная формула, которая для случая любых сечений надежно указывает критический момент. Детально рассматривается распределение продольных напряжений, возникающих под воздействием изгиба в сечении арочной оболочки, и поперечный момент, действующий на оболочку. Для указанных выше расчетов сообщаются также графики. Рассматривается также анализ стабильности и в случае эксцентричного давления. Для практического применения перечисленных выше приводится числовой пример.

NEUE METHODEN DER SCHLACKENBERECHNUNG IN DER NICHEISEN-METALLURGIE

L. FEKETE

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR NICHEISEN-METALLE, BUDAPEST

[Eingegangen am 8. Juli, 1959]

Zweck der Schlackenberechnung ist die Menge der zum Erz (bzw. zur Erzmischung) beizugebenden Zuschläge so zu bestimmen, daß sich beim Verschmelzen eine günstige Schlacke bildet.

Die Berechnung wird auf Grund der Zusammensetzung des Erzes und der zur Verfügung stehenden Zuschläge durchgeführt.

Es ist zu beachten, daß die Bedingungen der guten Schlackenbildung durch Zugabe der möglichst geringsten Zuschläge gesichert werden sollen, da sonst die Menge der abzusetzenden Schlacke unnütz vergrößert und dadurch der Heizmittelverbrauch und der Metallverlust erhöht wird.

Laut Erfahrungen der Praxis ist das Verhältnis der drei Hauptkomponenten der NE-metallurgischen Schlacken (FeO , SiO_2 , CaO) in gewissen Grenzen frei abänderbar unter gleichzeitiger Einhaltung der gegenüber der guten Schlacken gestellten Forderungen.

Gemeinsamer Nachteil der bisher bekannten Methoden der Schlackenberechnung ist, daß das Verhältnis der Hauptkomponenten der Schlacke im voraus anzunehmen ist. Hieraus folgt, daß durch die auf Grund der klassischen Methoden durchgeführten langwierigen Berechnungen nur entschieden werden kann, welcher von mehreren im vorhinein angenommenen Schlackentypen der bestentsprechende sein wird. Zur Bestimmung der dem absoluten Minimum der Schlackenmengen entsprechenden optimalen Schlackenzusammensetzung bestand keine Möglichkeit.

Die in dieser Arbeit bekanntgegebenen neuen Methoden ermöglichen, die optimale Schlackenzusammensetzung unter Berücksichtigung der Zusammensetzung der Ausgangsmaterialien unmittelbar zu bestimmen. Die Übersichtlichkeit und Genauigkeit der Berechnung wird dabei gesteigert, der Zeitbedarf hingegen wesentlich herabgesetzt. Bei diesen Methoden wird die Lösung der Probleme graphisch auf derart einfache Zusammenhänge zurückgeführt, die die Berechnung mittels Rechenschieber ermöglichen.

Der Zusammensetzung der über gute Eigenschaften verfügbaren Schlacken wurden die sich auf Betriebsdaten stützenden Bestimmungen von SZÉKI [1–2] und SCHLIPPENBACH [7] zugrunde gelegt. Laut diesen Autoren müssen

die drei Hauptbestandteile der Schlacke in einem solchen Verhältnis stehen, daß das Eisen als Singulosilikat ($2 \text{FeO} \cdot \text{SiO}_2$), das Kalzium als Bisilikat ($\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$) oder aber als Sesquisilikat ($4 \text{CaO} \cdot 3 \text{SiO}_2$) gebunden wird, und auf jedem Gewichtsteil FeO 0,35–0,8 Gewichtsteile CaO fallen. Der Wert des CaO/FeO Verhältnisses wird so angenommen, daß er die untere Grenze annähert, falls viel ZnO zu verschlacken ist, und nahe der oberen Grenze liegt, wenn viel Al_2O_3 verschlackt werden soll.

Ist die Menge des ZnO und Al_2O_3 unbedeutend, dann wählt man einen Wert des CaO/FeO Verhältnisses, bei dem die Menge der beizugebenden Zuschläge weniger wird. Wenn die gemeinsame Menge des ZnO und Al_2O_3 in der Schlacke unter 20% bleibt, so werden diese in der Schlacke aufgelöst. Kommt im Erz oder in irgendeinem Zuschlag außer den bisher erwähnten Schlackenkomponenten auch BaO, MgO und MnO vor, so werden dieselben derart in Betracht gezogen, daß BaO und MgO im Verhältnis der Molekulargewichte in CaO umgerechnet werden, hingegen MnO in FeO. Bei den weiteren Berechnungen arbeitet man mit den so erhöhten Werten des CaO und FeO.

$$\text{CaO}\% = (\text{CaO}\%)_{\text{wahr}} + 0,365 \text{BaO}\% + 1,4 \text{MgO}\% \quad (1)$$

$$\text{FeO}\% = (\text{FeO}\%)_{\text{wahr}} + \text{MnO}\% \quad (2)$$

Die Summe des SiO_2 , FeO, CaO, ZnO und Al_2O_3 macht ungefähr 95% des Gesamtgewichtes der Schlacke aus.

Auch die neuesten Prüfungen hinsichtlich Schmelzpunkt und Viskosität beweisen die Güte der den obigen Anforderungen entsprechenden Schlacken.

F. M. LOSKUTOW hat auf Grund der Messungen von WEINARTH das Schmelzdiagramm des SiO_2 —FeO—CaO Ternärsystems konstruiert, in welchem auch die auf 1300 C° bezogene Viskositätskurven eingezeichnet sind. Dieses Diagramm wurde jetzt mit dem Viereck ergänzt, binnen welchem die die SZÉKI—SCHLIPPENBACH'schen Schlackenzusammensetzung darstellenden Punkte liegen (Abb. 1). SZÉKI hat die auf die vier Grenzschlackentypen bezüglichen Verhältniszahlen der Hauptkomponenten berechnet und tabellarisch zusammengefaßt. Diese Verhältniszahlen sind in Tabelle 1 enthalten.

Tabelle 1

Schlacken- typ	2 FeO·SiO ₂ ~ CaO·SiO ₂			2 FeO·SiO ₂ ~ 4 CaO·3 SiO ₂			Schlacken- typ
	FeO	CaO	SiO ₂	FeO	CaO	SiO ₂	
I.	1,00	0,35	0,79	1,00	0,35	0,70	III.
II.	1,00	0,80	1,27	1,00	0,80	1,06	IV.

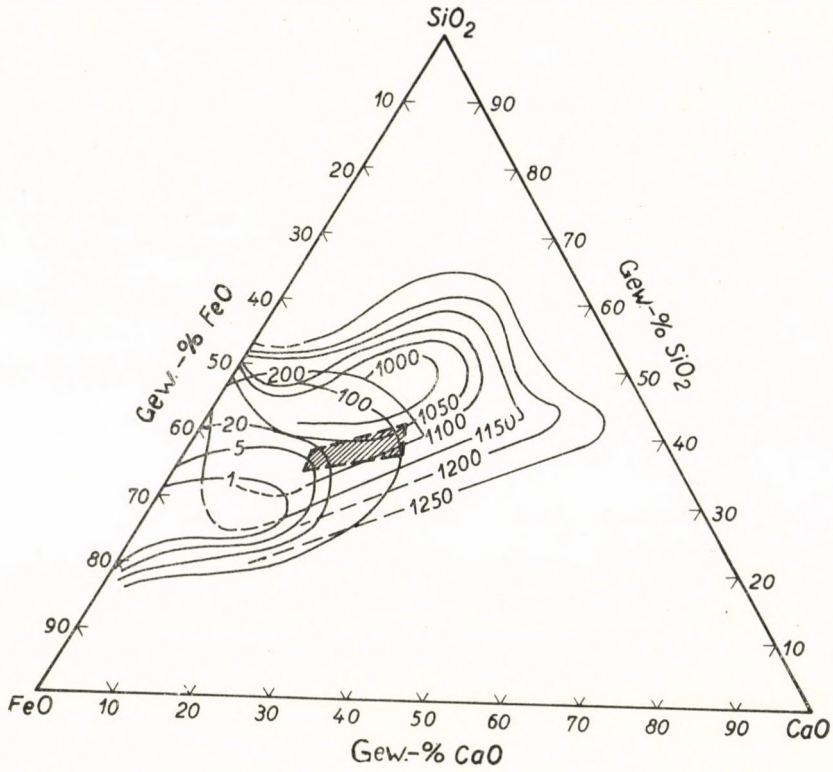


Abb. 1

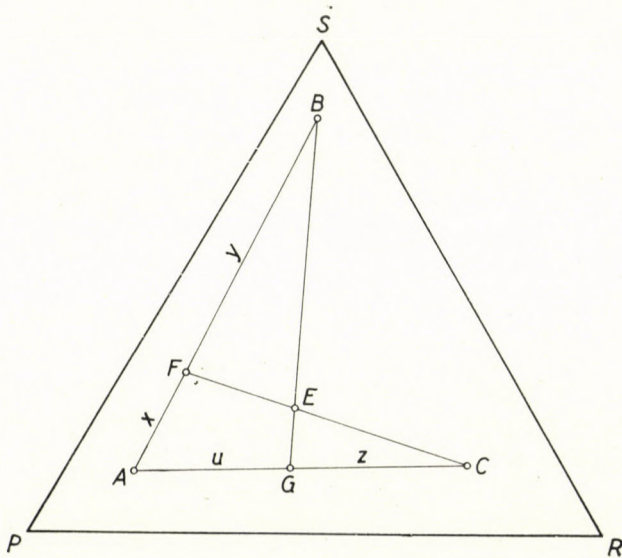


Abb. 2

1. Schlackenberechnung mit Hilfe des Dreieckdiagrammes

Den Grund der Berechnung bildet die an den Ternärdiagrammen durchführbare graphische Mischungsberechnung.

Den verschiedentlich proportionierten Mischungen der P , R und S Komponenten entspricht im Dreieckdiagramm je ein Punkt. (In Abb. 2 A , B , C und E .)

Wird die Frage gestellt, welche Mengen der B und C Grundmischungen einer gegebenen Menge der A Grundmischung zuzusetzen sind, um die mit Punkt E bezeichnete Endmischung herzustellen, so ist die Aufgabe folgendermaßen zu lösen.

Der Punkt A soll mit B und C verbunden werden. Die zwei Geraden werden durch die Punkte B , E und C , E gelegten Geraden geschnitten. Die Schnittpunkte (F und G) teilen die AB Strecke in x und y , die AC Strecke in u und z Teile auf. Unter Berücksichtigung der in Abb. 2 gebrauchten Bezeichnungen können die folgenden Gleichungen angeschrieben werden:

$$b = a \frac{x}{y} \quad (3)$$

$$c = a \frac{u}{z}, \quad (4)$$

wo a die gegebene Menge der Grundmischung A , b und c die nötigen Mengen der Grundmischungen B und C bedeuten. Die Strecken x , y , u und z sind aus dem Diagramm abzumessen.

Werden die zu vermischenden Mengen der drei Grundmischungen (a , b und c) theoretisch in die Eckpunkte des gewichtslos betrachteten Dreiecks ABC konzentriert, so wird der Punkt E der Schwerpunkt des belasteten Dreiecks sein.

Das Dreieckdiagramm des SiO_2 — FeO — CaO Ternärsystems wird für die Schlackenberechnung durch das Hineinzeichnen des die charakteristischen Punkte der guten Schlacken umhüllenden Vierecks zweckdienlich gemacht. Die vier Eckpunkte des Trapezoids entsprechen den vier SZÉKI'schen Grenzschlackentypen (Abb. 3).

Um die charakteristischen Punkte des Erzes und der Zuschläge in das Diagramm einzeichnen zu können, müssen vorher die auf die Summe der Hauptschlackenkomponenten bezogenen »reduzierten« prozentuellen Werte der drei Hauptschlackenkomponenten berechnet werden (SiO_2^* , FeO^* , CaO^*).

$$\text{SiO}_2^* = \frac{\text{SiO}_2\%}{\text{SiO}_2\% + \text{FeO}\% + \text{CaO}\%} \cdot 100 \quad (5)$$

$$\text{FeO}^* = \frac{\text{FeO}\%}{\text{SiO}_2\% + \text{FeO}\% + \text{CaO}\%} \cdot 100 \quad (6)$$

$$\text{CaO}^* = \frac{\text{CaO}\%}{\text{SiO}_2\% + \text{FeO}\% + \text{CaO}\%} \cdot 100 \quad (7)$$

Zur Bezeichnung des Erzes und der verschiedenen Zuschläge werden im weiteren die in Tab. 2 angeführten Buchstaben gebraucht. Die Summe der

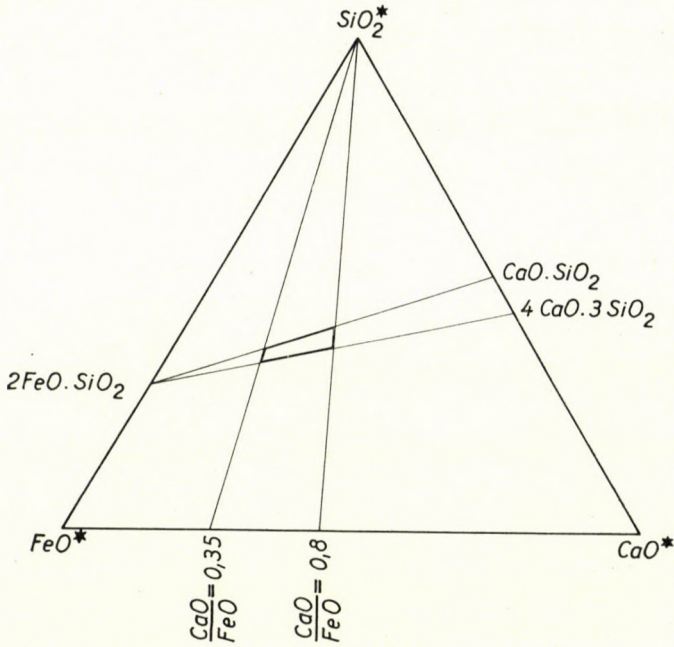


Abb. 3

prozentuellen Mengen der drei Hauptschlackenbestandteile in den einzelnen Materialien wird mit dem entsprechenden fett gedruckten Buchstaben bezeichnet.

Tabelle 2

Benennung	Zeichen	SiO ₂ % + FeO% + CaO%
Erz (Erzmischung)	A	A
Eisenzuschlag	V	V
Kalkzuschlag	M	M
Sauerer Zuschlag	K	K
Die gewünschte Schlacke	E	E

Wurden die charakteristischen Punkte des Erzes und der Zuschläge in das Diagramm eingetragen, dann ist der Ort des Punktes E auf den Seiten des das Feld der guten Schlacken umfangenden Trapezoids so auszuwählen, daß die Menge der mit den Zuschlägen einzutragenden Schlackenbildner minimal werde.

Um die Zusammenhänge zu klären, soll es vorerst angenommen werden, daß der ganze Flächenraum des Trapezoids innerhalb des Dreiecks VAM liegt (Abb. 4).

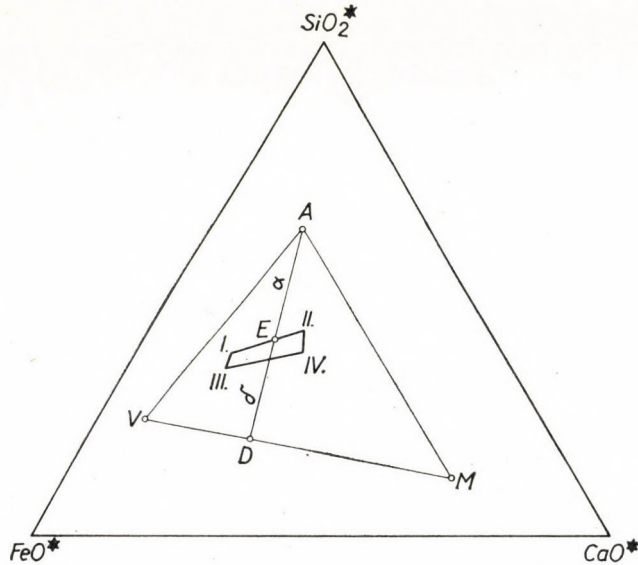


Abb. 4

Der Punkt E wird auf derjenigen Seite des Trapezoids aufgenommen, die gegen Punkt A liegt. Die über Punkt A und E gelegte Gerade schneidet die Seite VM in Punkt D .

Da die Gerade AD die Schwerlinie des belasteten Dreiecks ist, bleibt das Gleichgewicht auch dann erhalten, wenn die in den Punkten V und M konzentrierten Materialmengen vereint in Punkt D konzentriert werden.

Wird die Strecke AE mit a , die Strecke ED mit δ bezeichnet, dann gilt es auf 100 kg Erz bezogen, entsprechend der Waagregel:

$$d = A \frac{a}{\delta}, \quad (8)$$

wo d die Summe der Schlackenbildner in den zum Erz beizumischenden Zuschlägen bedeutet.

Gibt man z. B. v kg Eisenzuschlag und m kg Kalkzuschlag zu 100 kg Erz, dann ist

$$d = m \frac{M}{100} + v \frac{V}{100}. \quad (9)$$

Es folgt aus Gleichung (8), daß sich die Menge der mit den Zuschlägen eingetragenen Schlackenbildner — und zugleich auch die Menge der zu erwartenden Schlacke — proportional dem Wert des Bruches α/δ ändert.

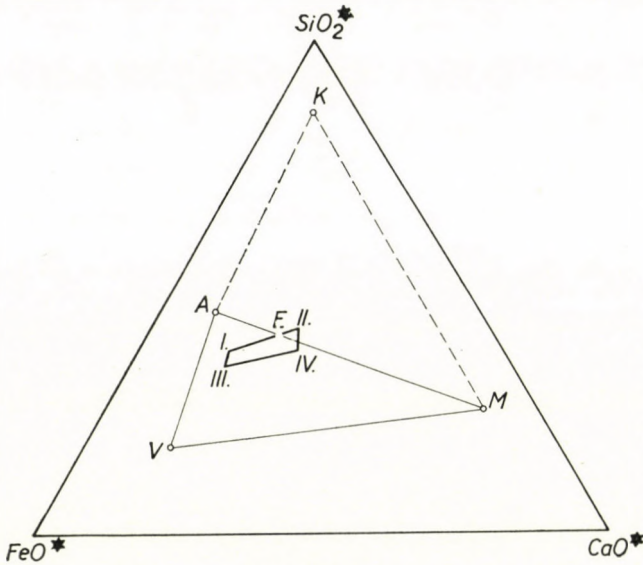


Abb. 5

Es ist leicht einzusehen, daß der minimale Wert des Bruches α/δ dann erreicht wird, wenn der Punkt E in dem von der Geraden VM entferntest liegenden Punkte des Trapezoids aufgenommen wird.

Aus der in Abb. 4 bezeichneten Lage des Dreiecks VAM folgt, daß man im gegebenen Falle mit dem Grenzschlackentyp II (Tab. 1) zu arbeiten hätte.

Fällt nur ein Teil des Trapezoids in das Gebiet des durch die charakteristischen Punkte des Erzes und der beiden Zuschläge bestimmten Dreiecks, dann können bloß diejenigen Punkte des Trapezoids in Betracht gezogen werden, die innerhalb des fraglichen Dreiecks liegen.

In dem in Abb. 5 angeführten Falle hat der Schnittpunkt der Geraden AM und der Seite I—II des Trapezoids den größten Abstand von der gegen Ecke A liegenden Seite sowohl im Dreieck VAM wie auch in Dreieck MAK . Der Punkt E muß daher mit diesem Schnittpunkt zusammenfallen.

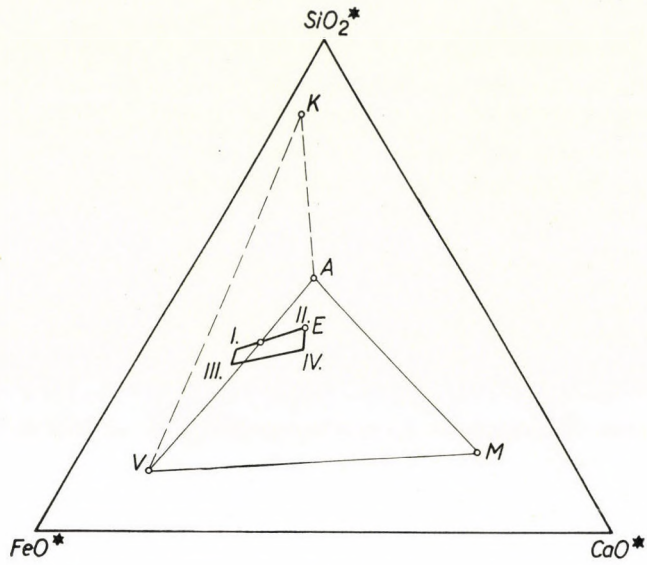


Abb. 6

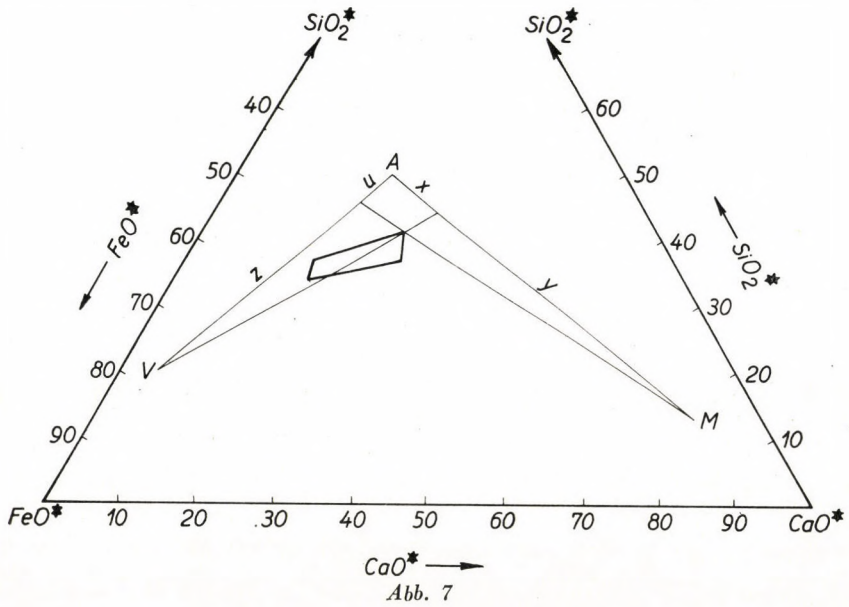


Abb. 7

Dies bedeutet, daß der optimale Schlackentyp zwischen den Grenzschlackentypen I und II aufzufinden ist, und zu dessen Erzeugung *ausschließlich nur Kalkzuschlag* zum Erz gegeben werden muß.

Aus der in Abb. 6 festgelegten Lage der charakteristischen Punkte der Ausgangsmaterialien ist ersichtlich, daß es mit Zugabe von Eisenzuschlag und Kalkzuschlag auf Grenzschlackentyp II gattiert werden muß.

Der Schnittpunkt der Gerade VA und der Seite I—II des Trapezoids liegt im Dreieck VAK unter den in Betracht kommenden Punkten des Trapezoids am entferntesten von der Seite VK . Derselbe Punkt ist aber im Dreieck VAM bezüglich E nicht mehr in der besten Lage, da der Punkt II von der Seite VM einen größeren Abstand hat.

Nachdem die Lage des Punktes E festgelegt wurde, können die beiden Schwerlinien eingezeichnet werden. Die Strecken x, y, u und z werden aus dem Diagramm abgemessen (Abb. 7).

Die Verhältnisse $\frac{x}{y}$ und $\frac{u}{z}$ bestimmen nicht unmittelbar das Verhältnis der Gewichte der zu vermischenden Materialien, weil diese sich nur auf die Verhältnisse der im Erz und in den Zuschlägen befindlichen schlackenbildenden Komponenten beziehen.

Wenn zu 100 kg Erz m kg Kalkzuschlag und v kg Eisenzuschlag beizugeben sind, um eine günstige Schlackenzusammensetzung zu erzielen, dann können die Werte m und v auf Grund der folgenden Zusammenhänge

$$\frac{x}{y} = \frac{m \frac{\mathbf{M}}{100}}{\mathbf{A}} \quad (10)$$

$$\frac{u}{z} = \frac{v \frac{\mathbf{V}}{100}}{\mathbf{A}} \quad (11)$$

berechnet werden:

$$m = 100 \frac{x}{y} \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{M}} \quad (12)$$

$$v = 100 \frac{u}{z} \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{V}} \quad (13)$$

Die Anwendung der Methode wird auch durch ein Beispiel erläutert.

Die prozentuellen Mengen der Hauptschlackenbildner des Erzes und der zur Verfügung stehenden Zuschläge sind in Tab. 3 angegeben.

Es ist festzustellen, welcher Schlackentyp zu wählen ist, um die minimale Schlackenmenge sichern zu können. Es sollen berechnet werden die auf

Tabelle 3

Benennung der Möllerbestandteile	Zeichen	SiO ₂ %	FeO%	CaO%	SiO ₂ %+FeO%+ +CaO%
Erz	A	30,0	18,0	12,0	A = 60
Eisenzuschlag	V	18,0	67,5	4,5	V = 90
Kalkzuschlag	M	6,5	4,5	39,0	M = 50
Saurer Zuschlag	K	68,0	8,0	4,0	K = 80

100 kg Erz bezogenen Mengen der zwecks Erlangung der ausgewählten Schlackenzusammensetzung erforderlichen Zuschläge.

Als erster Schritt der Lösung müssen die in Tab. 3 angegebenen prozentuellen Werte den Gleichungen (5)–(6) gemäß umgerechnet werden. Die reduzierten prozentuellen Werte sind in Tab. 4 angeführt.

Tabelle 4

Benennung	Zeichen	SiO ₂ * %	FeO* %	CaO* %	Bemerkung
Erzmischung	A	50	30	20	A = 60
Eisenzuschlag	V	20	75	5	V = 90
Kalkzuschlag	M	13	9	78	M = 50
Saurer Zuschlag	K	85	10	5	K = 80

Auf Grund der in Tab. 4 enthaltenen Daten können die charakteristischen Punkte der Ausgangsstoffe in das Dreieckdiagramm eingezeichnet werden (Abb. 7).

Aus der Lage der Punkte kann sofort festgestellt werden, daß die geringste Schlackenmenge bei Anwendung des Grenzschlackentyps II zu erwarten ist.

Ist die Seitenlänge des Dreieckdiagrammes 20 cm, dann können nach Vollendung der Konstruktion folgende Strecken abgemessen werden:

$$x = 15,7 \text{ mm}, y = 86 \text{ mm}, u = 11 \text{ mm}, z = 68,2 \text{ mm}.$$

Die Mengen der zu 100 kg Erz erforderlichen Zuschläge werden also nach den Gleichungen (12) und (13) die folgenden sein:

$$m = 100 \frac{15,7}{86} \cdot \frac{60}{50} = 21,9 \approx 22 \text{ kg Kalkzuschlag,}$$

$$v = 100 \frac{11}{68,2} \cdot \frac{60}{90} = 10,75 \approx 11 \text{ kg Eisenzuschlag.}$$

Um die Einfachheit und Schnelligkeit der dargelegten Methode weiter zu steigern, wird das in Abb. 8 dargestellte Gerät empfohlen, welches mittels der auf verschiebbaren Linealen aufgetragenen Skalen die Aufnahme der einzelnen Punkte in dem Feld des Diagrammes erleichtert.

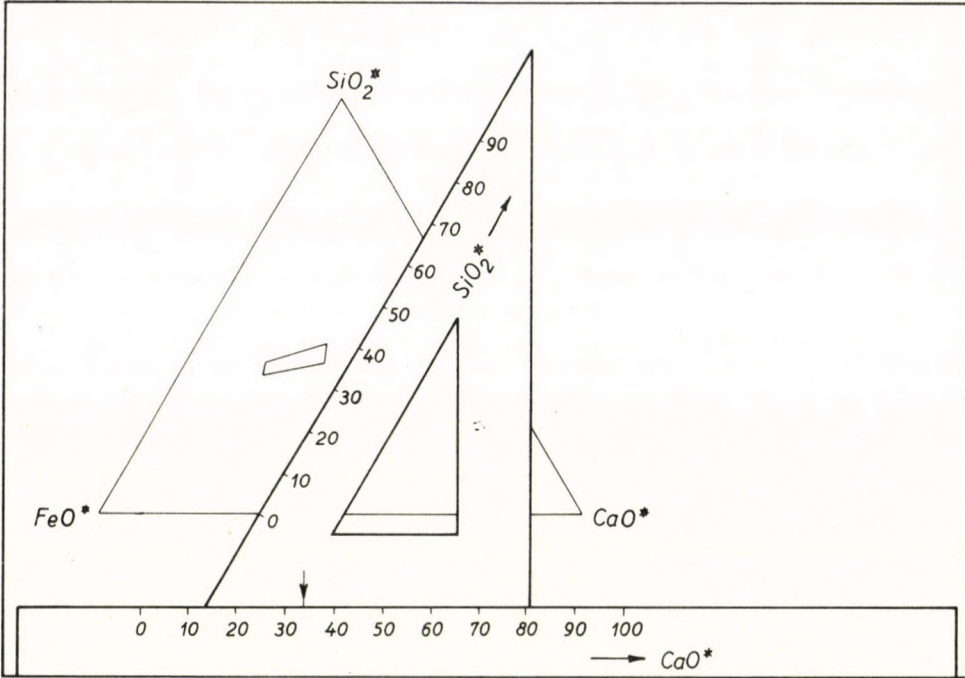


Abb. 8

Die Genauigkeit der Methode wird durch die unvermeidlichen Konstruktions- und Ablesefehler um so weniger beeinflusst, je größer das verwendete Diagramm ist.

In diesem Falle sichert eine Skalenlänge von 20–30 cm schon eine befriedigende Genauigkeit.

2. Schlackenberechnung mit der Pyramide-Methode

Die charakteristischen Punkte des Erzes und der Zuschläge werden bei dieser Methode in einem dreifach-rechtwinkligen Koordinatensystem im Raum aufgenommen und in Orthogonalprojektion abgebildet.

Auf die drei Achsen werden die zur Darstellung der analytisch ermittelten prozentuellen Mengen der SiO_2 , FeO und CaO geeigneten Skalen aufgetragen.

Die auf die als gut qualifizierten Schlacken bezüglichen Werte des Bruches SiO_2/FeO sind die Richtungstangenten der in der $\text{SiO}_2\text{—FeO}$ Ebene liegenden, die Werte des Bruches CaO/FeO hingegen der in der FeO—CaO Ebene liegenden Geraden. Die den zusammengehörigen Werten der beiden

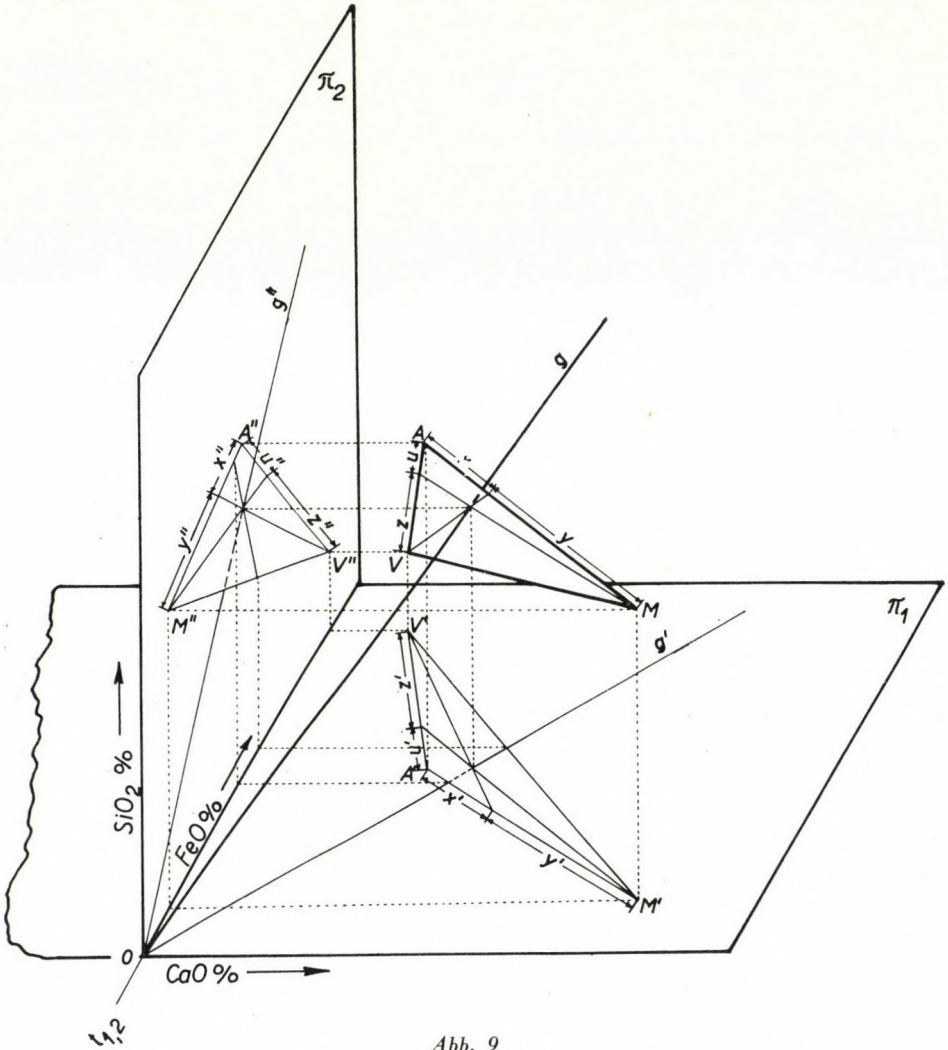


Abb. 9

Brüche entsprechenden Geraden können als zwei Projektionen der durch den Mittelpunkt des Koordinatensystems hindurchgehenden Raumgeraden betrachtet werden. Jede beliebige Schlacke hat daher ihre charakteristische Gerade im Raum.

Die Raumpunkte des Erzes und zweier Zuschläge bestimmen eine Ebene.

Um die Menge der dem Erz beizumischenden Zuschläge berechnen zu können, ist zunächst der Punkt zu bestimmen, in dem die charakteristische Gerade des ausgewählten Schlackentypes die Erz-Zuschlag-Ebene durchstößt.

Fällt der Durchstoßpunkt außerhalb des Erz-Zuschlag-Dreiecks, dann kann die gewünschte Schlacke aus den gegebenen Ausgangsmaterialien nicht erzeugt werden.

Wenn hingegen der Durchstoßpunkt innerhalb des Dreiecks liegt, dann wird das Verhältnis der zu vermischenden Materialien durch dessen Lage bestimmt.

Die Gewichte der zu vermischenden Ausgangsstoffe müssen nämlich in solchem Verhältnis zueinander stehen, daß der Schwerpunkt des belasteten Dreiecks mit dem Durchstoßpunkt zusammenfällt, wenn die einzelnen Stoffmengen theoretisch in den Eckpunkten des gewichtslos betrachteten Dreiecks konzentriert werden.

Die durch eine beliebige Ecke und durch den Durchstoßpunkt gelegte Gerade teilt die gegenüberliegende Seite des Dreiecks in solche Teile, deren Größen zu den in den die Seite grenzenden Eckpunkten konzentrierten Gewichten im umgekehrten Verhältnis stehen.

Das Verhältnis der Teilstrecken bleibt bei der Orthogonalprojektion unverändert. Abb. 9 dient zur Erläuterung des zur Berechnung gebrauchten Diagramms.

Die drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen bestimmen drei Ebenen, die sich im Nullpunkt (O) schneiden. Zwei von diesen Ebenen werden bei der Darstellung der Raumpunkte als Bildebenen verwendet, während die Dritte nur die Lage des Nullpunktes an der Achse $t_{1,2}$ festzulegen hat.

Es soll die Ebene $\text{FeO}-\text{CaO}$ für Grundrißebene (π_1), die Ebene $\text{FeO}-\text{SiO}_2$ für Aufrißebene (π_2) gewählt werden. Die Ebene $\text{CaO}-\text{SiO}_2$ wird in Abb. 9 für durchsichtig angenommen und wird nur durch die beiden Schnittlinien veranschaulicht.

Die durch den Nullpunkt gelegte Raumgerade g durchstößt die mit Raumpunkten V , A und M bestimmte Ebene innerhalb des Dreiecks VAM .

Da die Raumpunkte A , V und M die Zusammensetzung des Erzes, Eisenzuschlages und Kalkzuschlages charakterisieren, kann die auf 100 kg Erz bezogene Menge der beiden beizumischenden Zuschläge unter Berücksichtigung der Bezeichnungen der Abb. 9 nach folgenden Zusammenhängen berechnet werden:

$$v = 100 \frac{u}{z} = 100 \frac{u'}{z'} = 100 \frac{u''}{z''} \text{ kg Eisenzuschlag,} \quad (14)$$

$$m = 100 \frac{x}{y} = 100 \frac{x'}{y'} = 100 \frac{x''}{y''} \text{ kg Kalkzuschlag.} \quad (15)$$

Durch Eindrehung der Aufrißebene π_2 in die Grundrißebene π_1 gelangt man zu der im weiteren gebrauchten Form des Diagrammes.

Die zur Darstellung der Werte der Brüche SiO_2/FeO und CaO/FeO geeigneten Skalen werden auf die Senkrechte aufgetragen, welche in dem dem 100% FeO entsprechenden Punkte der Achse $t_{1,2}$ errichtet wurde.

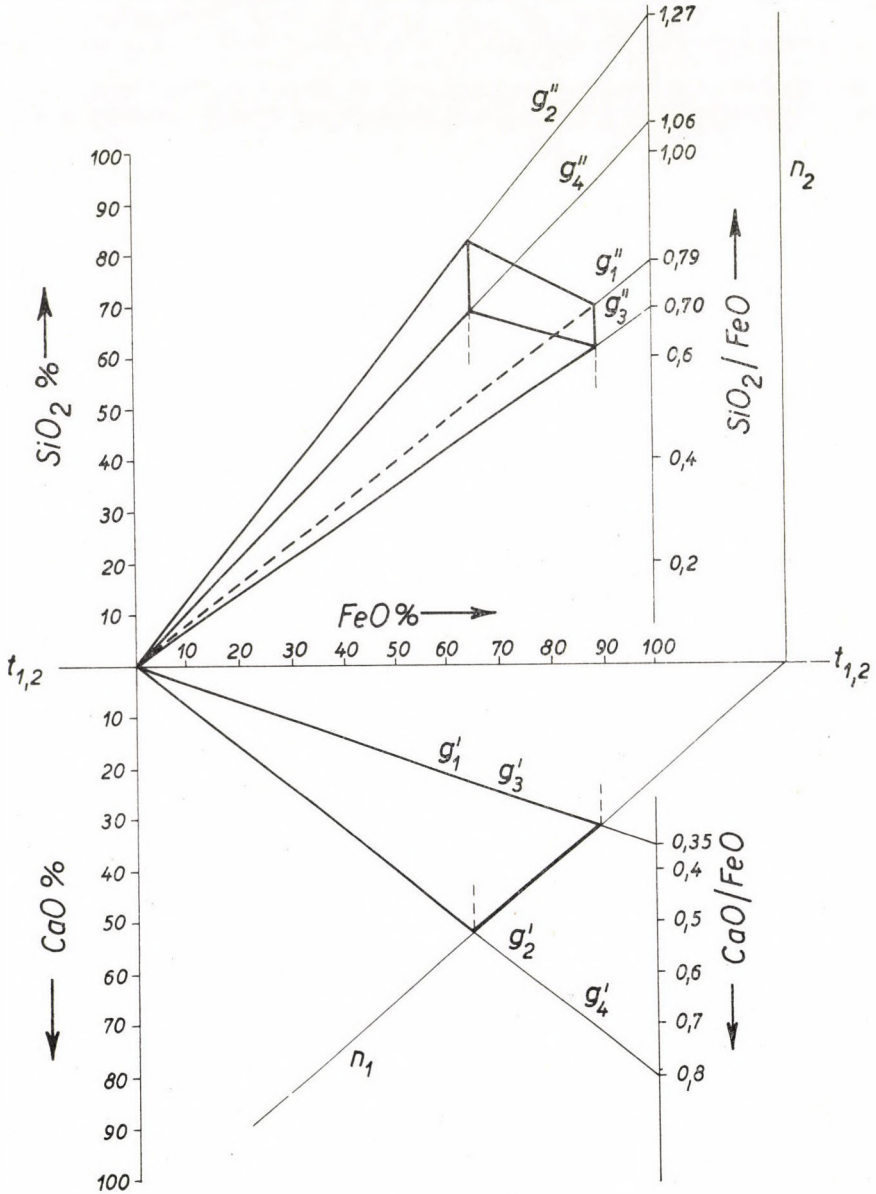


Abb. 10

Die Projektionen der auf die vier Grenzschlackentypen bezüglichen Raumgeraden konnten auf Grund der Daten der Tab. 1 konstruiert werden (Abb. 10).

Es ist zu behaupten, daß die vier Geraden eine Pyramide bestimmen, deren Spitze im Nullpunkt des Koordinatensystems liegt. Zwei Seitenflächen der Pyramide stehen senkrecht zur Grundrißebene π_1 .

Diese Pyramide soll mit einer zur Ebene π_1 senkrecht stehenden Ebene N geschnitten werden. Der Grundriß der Schnittfigur fällt mit der Spurlinie n_1 zusammen, der Aufriß ist ein Trapez.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Rissen der Schnittfigur ermöglicht, daß die Projektionen auch solcher Geraden konstruiert werden können, welche die zwischen die Grenztypen fallenden Schlacken charakterisieren. Die zur Darstellung der Werte des Bruches SiO_2/FeO dienende Skala wird daher im weiteren nicht mehr benötigt.

Zur Einstellung der günstigen Schlackenzusammensetzung werden von den drei Zuschlagsorten jeweils höchstens zwei benötigt. Beim Verschmelzen von eisenreichen Erz wird kein Eisenzuschlag zugemischt. Enthält das Erz viel Kieselsäure, dann ist kein saurer Zuschlag nötig. Ist das Erz an CaO reich, dann ist der Kalkzuschlag entbehrlich.

Die zum Vermischen in Betracht kommenden Zuschläge können am einfachsten derart ausgewählt werden, daß man den Schnittpunkt der durch den Nullpunkt des Koordinatensystems und durch den charakteristischen Punkt des Erzes gelegten Geraden mit der zu π_1 senkrecht stehenden Ebene N bestimmt, um die Lage desselben im Vergleich zu der Schnittfigur der Pyramide prüfen zu können. Dieser Schnittpunkt wird im weiteren mit P bezeichnet.

Fällt der Schnittpunkt innerhalb des Trapezes, dann wird keinerlei Zuschlag benötigt, da das Erz die Schlackenbildner in einem den guten Schlacken entsprechenden Verhältnis enthält.

Die durch Verlängerung der oberen Seite des Trapezes gewonnene Gerade und die aus der Mitte der unteren Seite herausgehende senkrechte Gerade teilt die Ebene N um den Trapez in drei Felder, die in der endgültigen Form des Diagrammes mit je zwei eingekreisten Buchstaben bezeichnet wurden (Abb. 11).

Die eingekreisten Buchstaben beziehen sich auf diejenigen zwei Zuschlagarten, die bei der weiteren Konstruktion in Betracht gezogen werden müssen, falls der Schnittpunkt P in das betreffende Feld gelangt.

Die Bestimmung der Feldgrenzen erfolgte unter folgender Überlegung.

Die Ebene der oberen Seitenfläche der Pyramide soll mit F , die Ebene der unteren Seitenfläche mit L , die Ebene der dem $\text{CaO}/\text{FeO} = 0,8$ Verhältnis entsprechenden senkrechten Seitenfläche mit B und die dem $\text{CaO}/\text{FeO} = 0,35$ Verhältnis entsprechende senkrechte Ebene mit J bezeichnet werden.

Den Bezeichnungen der Abb. 10 gemäß wird die Ebene F durch die sich schneidenden Geraden g_1 und g_2 , die Ebene L durch die Geraden g_3 und g_4 , die Ebene B durch die Geraden g_2 und g_4 , die Ebene J durch die Geraden g_1 und g_3 bestimmt. Die Ebene der oberen Seitenfläche

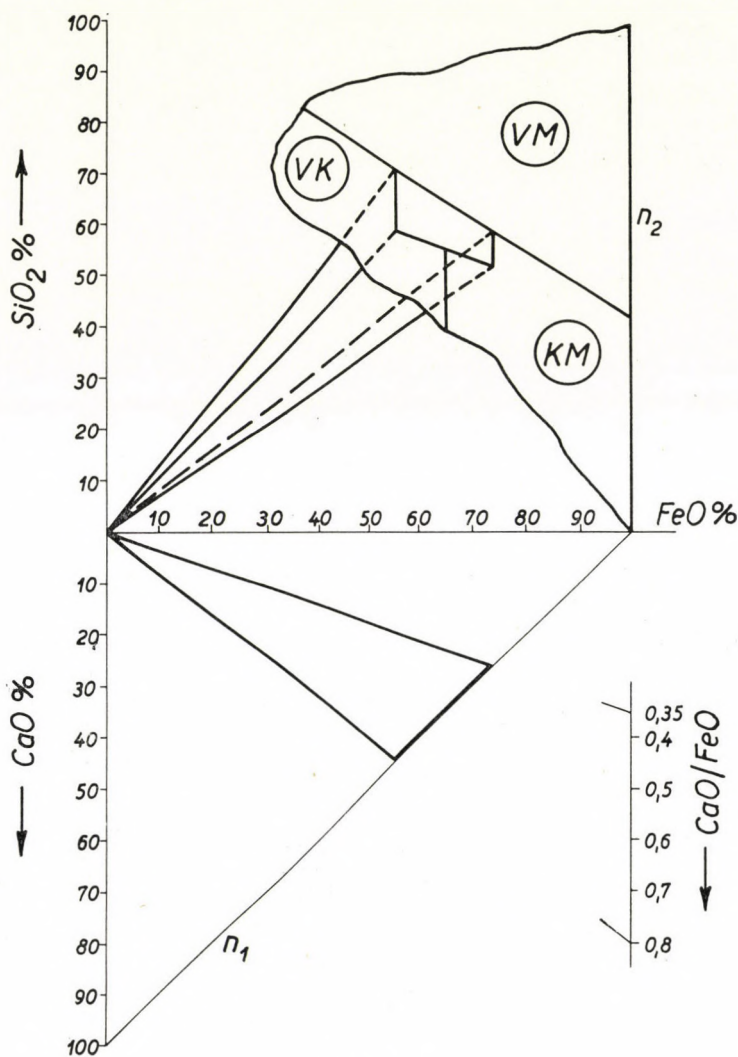


Abb. 11

der Pyramide (F) enthält die charakteristischen Geraden derjenigen Schlacken, welche das Kalzium als Bisilikat ($\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$) enthalten.

Enthält das Erz mehr Kieselsäure als es zur Bildung der guten Schlacke erforderlich wäre, dann liegt der charakteristische Punkt des Erzes im Raum oberhalb der Ebene F . Unter solchen Umständen erscheint der Aufriß des Punktes P oberhalb des Aufrißes der Schnittlinie der beiden Ebenen N und F . In diesem Falle müssen zur Verminderung der prozentuellen Menge des SiO_2 , CaO - und FeO -haltige Zuschläge dem Erz zugemischt werden.

Die Ebenen der beiden senkrechten Seitenflächen der Pyramide (B und J) umfassen die charakteristischen Geraden derjenigen Schlacken, in welchen das Verhältnis CaO/FeO den gegenüber den guten Schlacken gestellten Anforderungen entspricht. Fällt der Aufriß des Punktes P links von dem Aufriß der Schnittlinie der beiden Ebenen B und N , dann ist für Minderung des Wertes von CaO/FeO Eisenzuschlag erforderlich. Wenn dagegen derselbe von

dem Aufriß der Schnittlinie der beiden Ebenen J und N nach rechts fällt, dann ist zur Erhöhung des Wertes von CaO/FeO Kalkzuschlag dem Erz beizugeben.

Auf Grund ähnlicher Überlegungen könnte man die Ebene N um die Schnittfigur der Pyramide herum durch Verlängerung der Schnittlinien der Ebenen F , B und J eigentlich in 6 Felder aufteilen (Abb. 12).

Die mit der Projektionsebene N gebildeten Schnittlinien der einzelnen Ebenen werden mit den entsprechenden kleinen Buchstaben (f , b , j und l) bezeichnet. In jedem Felde sind die Formeln derjenigen Schlackenbildner angeführt worden, die zum Erz beizugeben werden müssen, falls Punkt P in das entsprechende Feld gelangt.

Die zur Verfügung stehenden Zuschläge sind keine reinen Stoffe und sie können nebst dem überwiegenden Bestandteil auch andere Schlackenbildner enthalten. Bei der Auswahl des optimalen Schlackentypes ist die Zusammensetzung der Zuschläge ebenfalls in Betracht zu ziehen.

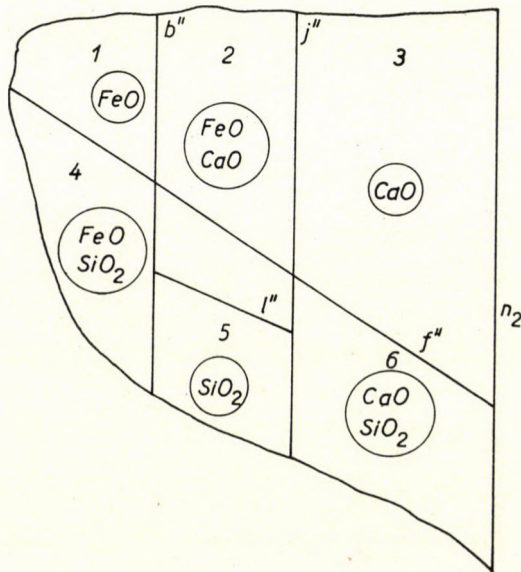


Abb. 12

Da dies im Laufe der graphischen Berechnung nur später an die Reihe kommt, muß man sich im ersten Schritt darauf beschränken, daß man von den drei Zuschlagsorten die einzige auswählt, die keineswegs benötigt wird.

Demgemäß muß auch die Aufteilung der Ebene N geändert werden. Die drei oberhalb der Schnittlinie f befindlichen Felder werden vereinigt, die Teile des halbierten Feldes 5 werden dem benachbarten Felde angeschlossen.

Nachdem die in Betracht kommenden zwei Zuschlagsarten ausgewählt worden sind, werden die charakteristischen Punkte derselben in das Diagramm eingetragen. Hernach müssen die Schnittpunkte der vier Seitenkanten der Pyramide mit der durch die charakteristischen Punkte des Erzes und der beiden Zuschläge bestimmten Ebene konstruiert werden. Die Konstruktion kann sehr einfach durchgeführt werden, da zwei Seitflächen der Pyramide senkrecht zu der Grundrißebene π_1 stehen.

Das Auswählen des bezüglich der Schlackenmenge optimalen Schlackentyps erfolgt derart, daß man in jedem der beiden Projektionen die Schnittfigur durch Verbindung der vier Schnittpunkte konstruiert, und nachher denjenigen Punkt derselben aufsucht, dessen Abstand von der durch die charakteristischen Punkte der beiden Zuschläge gelegten Geraden innerhalb des Erzzuschlag-Dreiecks der größte ist.

Der gesuchte Punkt ist entweder ein Eckpunkt der Schnittfigur oder ein Schnittpunkt einer Seite der Schnittfigur mit irgendeiner Seite des Dreiecks.

Liegt der gesuchte Punkt auf einer Seite des Dreiecks, dann ist zur Herstellung des optimalen Schlackentyps nur ein einziger Zuschlag erforderlich. Der Punkt teilt die entsprechende Seite des Dreiecks in zwei Strecken, deren Verhältnis das Verhältnis der zu vermischenden Mengen des Erzes und des Zuschlages bestimmt. (Waageregel!)

Liegt hingegen der gewählte Punkt innerhalb der Seiten des Dreiecks, dann werden beide Zuschläge benötigt. In diesem Falle schneiden die durch die Punkte der beiden Zuschläge gelegten »Schwerlinien« zwei Seiten des Dreiecks. Die Schnittpunkte teilen die Seiten in Strecken auf, deren Verhältnis die Berechnung der Mengen der zu vermischenden Materialien ermöglicht.

Abb. 13 zeigt die Lösung desselben Beispiels, das bereits durch die andere Methode gelöst wurde. (Siehe S. 308.)

Aus der Lage des Punktes P folgt, daß bei der Berechnung Eisenzuschlag und Kalkzuschlag in Betracht gezogen werden müssen.

Zunächst werden die Schnittlinien der Ebene VAM mit den beiden zur Grundrißebene π_1 senkrecht stehenden Ebenen B und J , dann die Schnittpunkte der Pyramidenkanten, und schließlich der Aufriß der Schnittfigur konstruiert.

Es kann festgestellt werden, daß der Schnittpunkt der Pyramidenkante II derjenige Punkt ist, dessen Abstand von der Seite MV innerhalb des Dreiecks VAM der größte ist.

Das Einzeichnen der Schwerlinien und das Abmessen der durch Aufteilung der Dreieckseiten entstandenen Strecken wird im allgemeinen am zweiten Bild (Aufriß) vollendet, weil hierdurch die Konstruktion des ersten Bildes der Schnittfigur vernachlässigt werden kann.

In Abb. 13 wurde diese letzte Konstruktion zur Besserung der Übersichtlichkeit jedoch auf dem ersten Bild vorgenommen, nachdem der Grundriß des Schnittpunktes der Pyramidenkante II bestimmt worden ist.

Die Seite $A'V'$ wird durch die Schwerlinie in die Teile u und z , die Seite $A'M'$ hingegen in die Teile x und y aufgeteilt.

Ist die Skalenlänge des Diagrammes 25 cm, dann können nach der Konstruktion folgende Strecken abgemessen werden:

$$x = 13,6 \text{ mm}, y = 61,8 \text{ mm}, u = 12,2 \text{ mm}, z = 112,8 \text{ mm}.$$

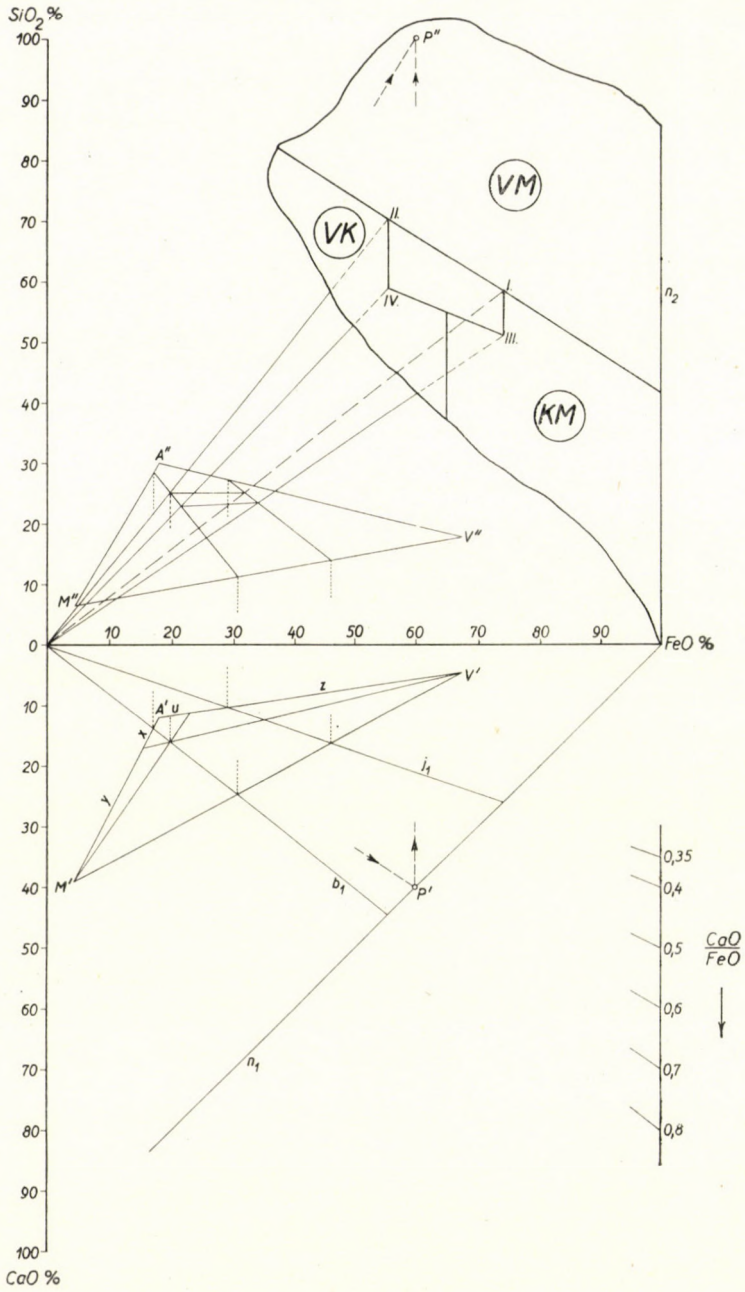


Abb. 13

Die zu 100 kg Erz beizumischende Menge der Zuschläge ist nach den Gleichungen (14) und (15)

$$v = 100 \frac{12,2}{112,8} = 10,8 \approx 11 \text{ kg Eisenzuschlag,}$$

$$m = 100 \frac{13,6}{61,8} = 22 \text{ kg Kalkzuschlag.}$$

Das Resultat ist daher das gleiche wie es durch die andere Methode erhalten wurde.

Der in der Schnelligkeit der graphischen Rechnung bestehende Vorteil kann bei dieser Methode nur dann zur Geltung kommen, wenn das laut Abb. 11 konstruierte Grunddiagramm in entsprechender Größe im vorhinein vorbereitet zur Verfügung steht.

SCHRIFTTUM

1. J. SZÉKI: A réz- és ólomkohászat szilikátsalakjai. (Silikatschlacken der Kupfer- und Bleimetallurgie.) B.K.L. (Ungarische Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen) (1915) S. 1—43.
2. SZÉKI—HORVÁTH: Általános kohászat. (Allgemeine Hüttenkunde.) Budapest 1953.
3. V. TAFEL: Lehrbuch der Metallhüttenkunde. Leipzig 1951.
4. Лоскутсов—Цейдлер: Расчёты по металлургии тяжёлых металлов. Москва 1943.
5. A. BUTTS: Metallurgical problems. New-York 1943.
6. J. W. RICHARDS: Metallurgische Berechnungen. Berlin 1913.
7. F. SCHLIPPENBACH: Schlackentypen für den Bleihochofen. Metall und Erz Jg. 25. (1928) S. 346—350.
8. W. MATHESIUS: Die Zusammensetzung der Hochofenschlacke in graphischer Darstellung. Stahl und Eisen Jg. 28. (1908) S. 1121.
9. Dr. H. v. PHILIPSBORN: Bemerkungen zur graphischen und rechnerischen Behandlung polynärer Systeme. Erzmetall Jg. 2. (1949) S. 26—28.
10. — Графический метод расчёта шлаков цветной металлургии Бюллетень цветной металлургии 2 № (98) (1957) III. 29.

ZUSAMMENFASSUNG

Sämtliche bisher bekannten Methoden der Schlackenberechnung haben den gemeinsamen Nachteil, daß die Zusammensetzung der zu erzeugenden Schlacke im voraus festgelegt werden muß. Die bezüglich der Schlackenmenge günstigste Schlackenzusammensetzung kann nur durch zeitraubendes Herumprobieren erzielt werden.

Die bekanntgegebenen graphischen Methoden ermöglichen, die optimale Schlackenzusammensetzung unmittelbar zu bestimmen. Die Schlackenberechnung wird daher einfacher, übersichtlicher und wesentlich rascher.

Bei der ersten Methode müssen die prozentuellen Werte der Ausgangsmaterialien vorher umgerechnet werden um die charakteristischen Punkte in das Dreieckdiagramm einzeichnen zu können. Das Verhältnis der nach vollendeter Konstruktion abzumessenden Strecken muß wieder umgerechnet werden. Die Konstruktion selbst wird sehr einfach in einem Bilde durchgeführt.

Bei der zweiten Methode werden die wahren prozentuellen Werte verwendet und das Verhältnis der nach vollendeter Konstruktion abzumessenden Strecken ist unmittelbar dem Verhältnis der zu vermischenden Materialien gleich. Die Konstruktion hingegen wird in diesem Falle in zwei Bildern (Projektionen) nach Art der darstellenden Geometrie durchgeführt.

NEW METHODS FOR THE COMPUTATION OF SLAG IN METALLURGY

L. FEKETE

SUMMARY

All methods hitherto known for the computation of slag have the common disadvantage that the composition of the slag to be produced must be assumed beforehand. As a consequence the composition which is the most advantageous for the least quantity of slag can only be approached by trial and error.

By the graphic methods discussed, with the knowledge of the initial material, direct determination of the optimal slag composition is made possible.

The computation of the slag becomes more simple, lucid and exact, and becomes considerably faster by the new methods.

NOUVELLES MÉTHODES DE CALCUL DE SCORIE DANS LA MÉTALLURGIE DES MÉTAUX

L. FEKETE

RÉSUMÉ

L'inconvénient commun à toutes les méthodes connues du calcul de scorie est que la composition de la scorie à produire doit être supposée pour le calcul. Il s'ensuit que la composition la plus avantageuse, donnant une quantité minimum de scorie, ne peut être approchée que par expérimentation.

En connaissance de la composition des matières de base, les méthodes graphiques décrites permettent de déterminer directement le dosage optimum de la scorie.

Par les nouvelles méthodes, le calcul de scorie devient plus simple, plus clair, plus exact et bien plus rapide.

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ШЛАКОВ В ЦВЕТНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ

Л. ФЕКЕТЕ

РЕЗЮМЕ

Общим недостатком известных до сих пор методов расчета шлаков состоит в том, что состав получаемого шлака необходимо определить заранее. Из этого следует, что наиболее удовлетворительный состав с точки зрения минимума количества шлака может быть установлен приближенно только производством ряда опытов.

Изложенные графические методы позволяют определить оптимальный состав шлака непосредственно по составу исходных материалов.

Расчет шлаков при помощи новых методов становится более простым, легко обозримым, строгим и более быстрым.

SCHRANKEN FÜR DIE KNICKLAST DES EINSEITIG EINGESPANNTEN DÜNNEN STABES VON VERÄNDERLICHEM QUERSCHNITT

J. BARTA

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 11. November 1959]

EI ist die Biegesteifigkeit des Stabes. Sie ist eine gegebene Funktion von x . l ist die Stablänge. P_k ist die Knickkraft, d. h. der kritische Wert der Lastkraft (Abb. 1). Es wird vorausgesetzt, daß die Ausbiegung in der Ebene xy erfolgt. In diesem Aufsatz wird gezeigt, daß eine untere Schranke und eine obere Schranke für den Wert P_k wie folgt ermittelt werden können. Man stellt sich vor, daß eine Lastkraft H auf das freie Ende des gegebenen Stabes in der Richtung y wirkt (Abb. 2). Die durch H hervorgerufene Neigung bzw.

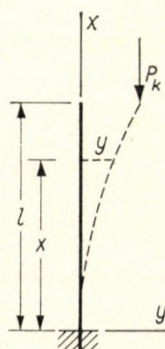


Abb. 1

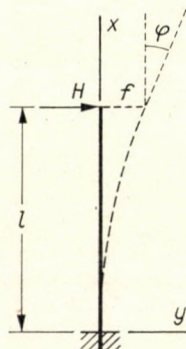


Abb. 2

Verschiebung des freien Endes des Stabes sei mit φ bzw. f bezeichnet. (Unter Neigung soll man das analytische Maß, oder was dasselbe ist, die trigonometrische Tangente des kleinen Verdrehungswinkels verstehen.) Man ermittle die Neigung φ_1 und die Verschiebung f_1 , die das freie Ende des gegebenen Stabes unter der Wirkung von $H = 1$ erleidet. Dann gilt die Einschränkung

$$\frac{1}{\varphi_1} \leq P_k \leq \frac{l}{f_1} \quad (1)$$

Der Beweis der Formel (1). Man weiß, daß P_k gleich dem kleinsten Eigenwert λ_1 des Problems

$$EIy'' = \lambda[y(l) - y], \quad y(0) = y'(0) = y''(l) = 0$$

ist. Ferner weiß man, daß

$$y_1 \geq 0, \quad y_1(l) \geq y_1(l) - y_1 \geq y_1(l)(l-x)/l, \quad y'' \geq 0$$

gesetzt werden darf, wobei $y_1(x)$ die zu λ_1 gehörende Eigenfunktion ist. Es gelten auch die Gleichungen

$$(l-x) \frac{y_1''}{y_1(l) - y_1} = \lambda_1 \frac{l-x}{EI}, \quad (l-x)^2 \frac{y_1''}{y_1(l) - y_1} = \lambda_1 \frac{(l-x)^2}{EI}. \quad (2),(3)$$

Aus (2) folgt, da $\lambda_1 = P_k$ ist,

$$P_k = \int_0^l (l-x) \frac{y_1''}{y_1(l) - y_1} dx \bigg/ \int_0^l \frac{l-x}{EI} dx. \quad (4)$$

Statt $y_1(l) - y_1$ sei hier $y_1(l)$ geschrieben. Der Wert von (4) nimmt hiedurch nicht zu, und sein Zähler wird

$$\int_0^l (l-x) \frac{y_1''}{y_1(l)} dx$$

lauten. Der Wert dieses Integrals ist 1, wovon man sich durch partielle Integration leicht überzeugen kann. Der Nenner von (4) ist, wie man leicht erkennt, gleich φ_1 . Aus (4) folgt also $P_k \geq 1/\varphi_1$.

Aus (3) erhalten wir

$$P_k = \int_0^l (l-x)^2 \frac{y_1''}{y_1(l) - y_1} dx \bigg/ \int_0^l \frac{(l-x)^2}{EI} dx. \quad (5)$$

Statt $y_1(l) - y_1$ sei hier $y_1(l)(l-x)/l$ geschrieben. Der Wert von (5) nimmt hiedurch nicht ab, und sein Zähler wird

$$\int_0^l (l-x) \frac{y_1''}{y_1(l)} l dx$$

lauten. Der Wert dieses Integrals ist l , wovon man sich wieder durch partielle Integration überzeugen kann. Der Nenner von (5) ist, wie man sieht, gleich f_1 . Aus (5) folgt mithin $P_k \cong l/f_1$.

Bemerkung. Schreibt man $l/\varphi_1 = H'$ und $l/f_1 = H''$, so nimmt (1) die Gestalt

$$H' \cong P_k \cong H'' \quad (6)$$

an. H' und H'' lassen sich wie folgt deuten: H' ist jener Wert von H , welcher die Neigung $\varphi = 1$ des freien Stabendes hervorruft. H'' ist jener Wert von H , welcher die Verschiebung $f = 1$ des freien Stabendes hervorruft. (H' und H'' sind natürlich nur Rechnungswerte, da so große Formänderungen praktisch gar nicht vorkommen können.)

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird bewiesen, daß die Beziehung (1) gilt. φ_1 und f_1 sind die durch die Lastkraft $H = 1$ hervorgerufene Neigung und Verschiebung des freien Stabendes.

BOUNDS FOR THE BUCKLING LOAD OF A THIN COLUMN CLAMPED AT ONE END AND HAVING VARYING CROSS SECTIONS

J. BARTA

SUMMARY

It will be proved that the relation (1) holds. φ_1 and f_1 are the slopes and the deflection of the free end of the column, produced by the load $H = 1$.

BORNES POUR LA VALEUR CRITIQUE DE LA CHARGE COMPRESSIVE D'UNE BARRE MINCE AUX SECTIONS VARIABLES, ENCASTRÉE À UNE EXTRÉMITÉ

J. BARTA

RÉSUMÉ

On prouve que la relation (1) est valable φ_1 et f_1 sont la déclinaison et le déplacement de l'extrémité libre de la barre, produits par la charge $H = 1$.

ПРЕДЕЛЫ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ, ЗАЖАТОГО НА ОДНОМ КОНЦЕ

И. БАРТА

РЕЗЮМЕ

В работе доказано, что действительна формула (1). φ_1 и f_1 обозначают кручение и, соответственно, изгиб от действия нагрузки $H = 1$.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE KORNGRÖSSEN- VERTEILUNG FEINGEBROCHENER MATERIALHAUFEN

J. LÁZÁR

KONSTRUKTIONSBÜRO FÜR INDUSTRIE UND LANDWIRTSCHAFT (IPARTERV)
BUDAPEST

[Eingegangen am 26. November 1959]

Im Bande XVII/3—4 dieser Zeitschrift [7] wurde vom Verfasser darauf hingewiesen, daß sowohl die — zur Bestimmung des Verlaufes der Gewichtsverteilung — früher allgemein angewendete empirische Rosin—Rammlersche Formel wie das neuerdings, auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung erhaltene Ergebnis [6, 9], wonach die Korngrößenverteilung näherungsweise logarithmisch normal verläuft, nur auf dem Gebiete der Feinzerkleinerung gültig sind, während auf dem Gebiete der Grobzerkleinerung andere Gesetzmäßigkeiten gelten.¹

Unsere vorliegenden Betrachtungen sollen nur ein Teilgebiet der Feinzerkleinerung untersuchen. Wir unterscheiden nämlich bei der Feinzerkleinerung zwischen dem Mahlvorgange — wo die Korngrößen der gemahlten Haufen im μ -Bereiche liegen — und dem Feinbrechen (also Zerkleinerung durch Desintegratoren, Dismembratoren, Hammerbrecher, Prallbrecher usw.), wo diese Korngrößen im allgemeinen im mm-Bereiche liegen. Wir wollen nur das Gebiet des Feinbrechens untersuchen, welches — im Gegensatz zum Mahlvorgang — noch wissenschaftlich kaum behandelt wurde. Da wir aber auf beiden Teilgebieten der Feinzerkleinerung mit der log. normalen bzw. mit der Rosin—Rammler'schen Verteilung rechnen müssen, wollen wir zunächst der Vollständigkeit halber zusammenfassen, wie sich nach dem heutigen Stande der Untersuchungen das Verhältnis dieser beiden Verteilungsformeln auf dem Gebiete des Mahlens gestaltet. Die Bennetsche Gestalt der Rosin—Rammlerschen Formel lautet:

$$R = e^{-\left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^n} \quad (1)$$

wo R das Gewichtsperzent jenes Materialanteiles angibt, welcher durch die entsprechende Sieböffnung nicht durchgefallen ist. (Rückstand.)

¹ Die Beschränkung der Gültigkeit des Satzes von KOLMOGOROV—RÉNYI auf das Gebiet der Feinzerkleinerung bezieht sich nur auf die Gewichtsverteilungskurven — mit denen wir uns hier beschäftigen — und die den Prozentanteil eines durch eine bestimmte Sieböffnung durchfallenden Materialanteiles an dem Gesamtgewicht angeben (Durchgangskurve). Sie bezieht sich aber nicht auf die Anzahlverteilungskurven, die den Prozentanteil der durch eine bestimmte Sieböffnung durchfallenden Körner an der gesamten Kornzahl darstellen.

Wenn wir die Formel (1) zweimal logarithmieren, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$\ln \ln \frac{1}{R} = n \ln \left| \frac{x}{\bar{x}} \right| = n (\ln x - \ln \bar{x}) \quad (2)$$

Wird also eine Kurve die dem Rosin—Rammlerschen Gesetze entspricht, in einem Koordinatensystem dargestellt, auf dessen Abszissenachse die Logarith-

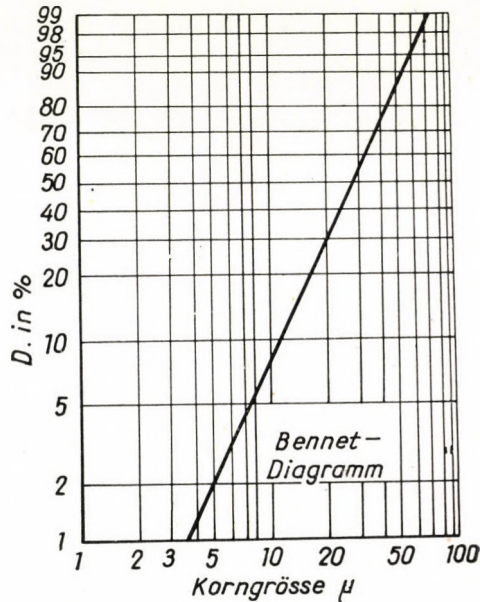


Abb. 1. Eine Rosin—Rammlersche Verteilung

men der Korngrößen aufgetragen werden und auf dessen Ordinatenachse die doppelten Logarithmen der reziproken Werte der Siebrückstände in Gewichtsprozenten stehen (Bennetsches Koordinatensystem), so erhalten wir laut obiger Gleichung eine Gerade (Abb. 1).

Wir werden in den folgenden Ausführungen nicht die Rückstandskurve, sondern die Durchgangskurve verwenden. Für die Ordinaten dieser Kurve gilt:

$$D = (100 - R)\%. \quad (3)$$

Aus gewissen Voraussetzungen ausgehend kann mit Hilfe der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet werden, daß die Verteilungskurve »logarithmisch normal« verläuft. Eine Verteilung nennen wir »normal«, wenn

sie sich durch die Gaußsche Kurve darstellen läßt. Eine Kurve kann logarithmisch normal genannt werden, wenn sie in einem Koordinatensystem, dessen Abszisseneinteilung logarithmisch ist, eine normal verlaufende Kurve ergibt (Abb. 2).

Wird eine Kurve der normalen Verteilung in einem Koordinatensystem dargestellt, dessen Abszisseneinteilung linear ist und dessen Ordinatenachse

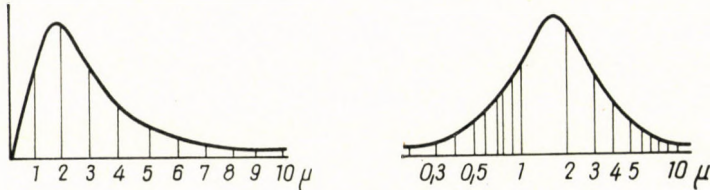


Abb. 2. Eine logarithmisch normale Kurve

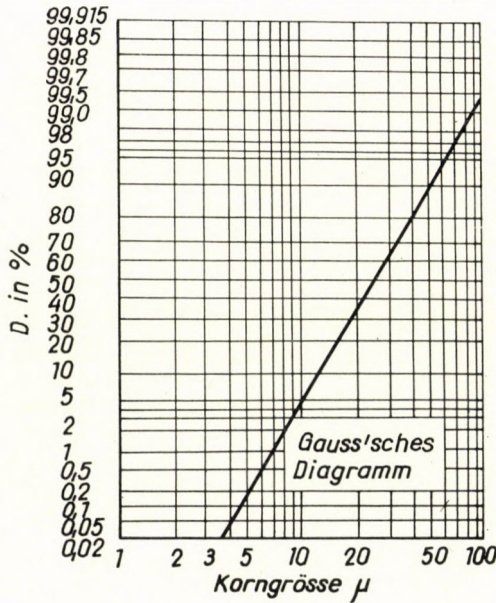


Abb. 3. Eine logarithmisch normale Verteilung

eine besondere — sog. Gaußsche — Einteilung besitzt, so ergibt sie eine Gerade. Dementsprechend ergibt eine logarithmisch normale Kurve, wenn wir sie in einem Koordinatensystem darstellen, dessen Ordinatenachse eine Gaußsche Einteilung besitzt und dessen Abszisseneinteilung logarithmisch ist, (im folgendem kurz Gaußsches Koordinatensystem genannt) ebenfalls eine Gerade (Abb. 3).

Die Gleichung der Differentialkurve der logarithmisch normalen Verteilung lautet:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

(Hier bedeuten » m « den Mittelwert und » σ « die Streuung der Verteilung.) [9].

Zur Feststellung des Charakters beider Kurvenformen übertragen wir die Geraden in Abb. 1 und 3 in lineare Koordinatensysteme. Abb. 4 stellt die

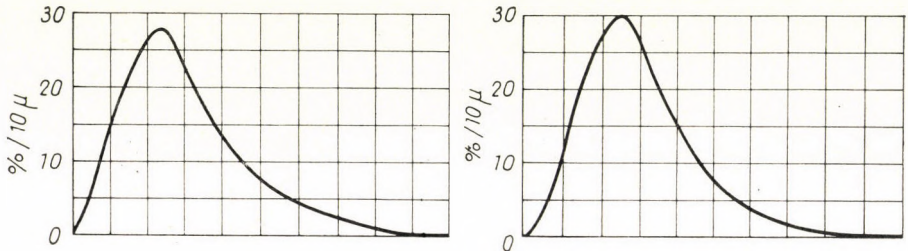


Abb. 4. Eine Rosin—Rammlersche Verteilung

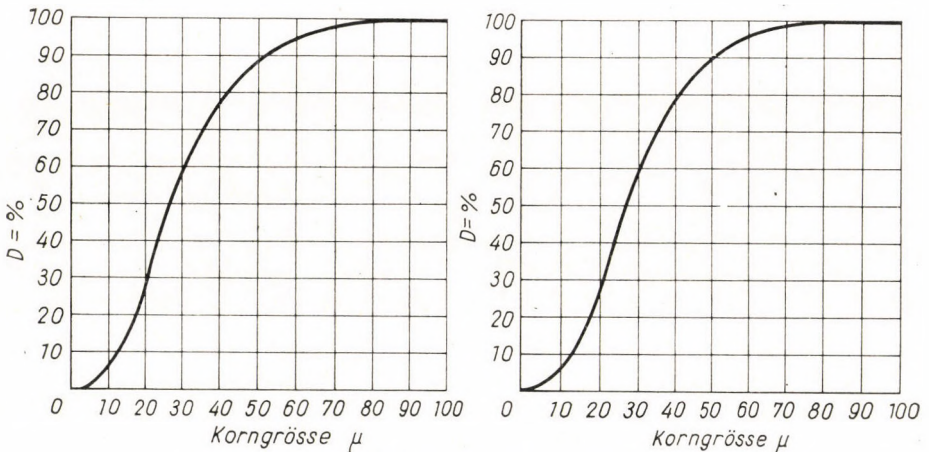


Abb. 5. Eine log. normale Verteilung

Rosin—Rammlersche Kurve, die im Bennetschen Koordinatensystem (Abb. 1) eine Gerade ergab, in einem linearen Koordinatensystem dar, und ebenso zeigt Abb. 5 die logarithmisch normale Verteilung von Abb. 3 in einem linearen Koordinatensystem.

Aus Abb. 4 und 5 ist ersichtlich, daß die Scheitelpunkte beider Differentialkurven stark nach links, gegen die Ordinatenachse verschoben sind. In beiden Fällen zeigen also die Differentialkurven eine linksschiefe Gestaltung.

Sowohl die Rosin—Rammlersche als auch die log. normale Kurve bestimmen also gleichartige Verteilungen.

Das rechtseitige Ende der tatsächlichen Verteilungskurve muß sowohl von der log. normalen als auch von der Rosin—Rammlerschen Verteilung abweichen, denn diese Verteilungen erreichen den Durchgangswert $D = 100\%$ erst im Unendlichen, dagegen hat die maximale Korngröße einer tatsächlichen Verteilungskurve einen endlichen Wert.

Bezüglich des Gebietes der feinsten Körnungen ist zu bemerken, daß nach der Rosin—Rammlerschen Formel die Gesamtanzahl der Körner unendlich groß wird, wenn $n \leq 3$ ist (das heißt, praktisch immer), und auch die Gesamtoberfläche des Haufens einen unendlich großen Wert gibt, wenn $n \leq 1$ ist. Auf dem Gebiete der feinsten Körnungen kann also die Rosin—Rammlersche Formel keine Gültigkeit mehr besitzen. Um brauchbare Ergebnisse zu erhalten, ist es üblich, die Umgebung von $x = 0$ bei den Berechnungen auszuschließen, und die untere Grenze bei etwa $x = 0,1 \mu$ anzunehmen. Diese Annahme ist aber willkürlich, und ihre Wahl beeinflußt natürlich den Wert der mit Hilfe der Formel errechneten Größen.

Neuerdings haben sich besonders H. GEBELEIN [3] und W. FRITZ [2] mit dem Vergleiche beider Verteilungsformel beschäftigt. Beide unterstreichen die Tatsache, daß die Rosin—Rammlersche Formel nicht als ein physikalisches Gesetz zu betrachten sei, und zitieren G. HERDAN [4]: »daß das logarithmisch normale Verteilungsgesetz sich immer mehr als eines der wichtigsten Naturgesetze erweist«, auch unterstreichen beide die oben angeführten mathematischen Einwendungen, die bezüglich der Rosin—Rammlerschen Verteilung gemacht werden können. FRITZ hebt außerdem noch den Umstand hervor, daß, durch das zur Darstellung im Bennetschen Koordinatensystem notwendige mehrfache Logarithmieren, auch Zusammenhänge ganz anderer Art als die durch die Rosin—Rammlersche Formel angegebene, in diesem Koordinatensystem, über größere Bereiche hinweg fast geradlinig verlaufen können.

Zusammenfassend stellt GEBELEIN fest: »Die logarithmischen Normalverteilungen erweisen sich für die Behandlung der anstehenden Aufgaben den RRS (Rosin—Rammler—Sperling) Verteilungen zumindest methodisch, vermutlich aber auch aus physikalischen Gründen als überlegen. Eine sehr plausible Überlegung führt zu einer leichten Abänderung der log. Normalverteilung und läßt es dann fast als selbstverständlich erscheinen, daß viele Mahlgüter sich in einem weiten Meßbereich so gestalten, wie dies gerade durch die RRS Formel angegeben wird. Gegen einen verständigen Gebrauch der RRS Körnungsgesetze in der Praxis ist daher nichts einzuwenden.«

W. FRITZ verweist auf den schon erwähnten Umstand, daß die RRS Formel bei den feinsten Korngrößen eine viel größere Kornanzahl und Gesamtoberfläche ergibt, als es tatsächlich der Fall ist, »hingegen haben viele Kornanalysen von besonders feinen Pulvern eine vorzügliche Übereinstim-

mung mit dem schon erwähnten Gesetz der logarithmischen Normalverteilung gezeigt; dieses paßt sich im Feinkornbereich sehr gut an die gemessenen Werte an, ist also dort der RRS Formel überlegen.«

Dies ist zwar in vielen Fällen zweifellos richtig, doch ergeben sich auch abweichende Resultate, bei denen die tatsächliche Verteilungskurve — trotz der oben angeführten Einwände, die gegen die Rosin—Rammlersche Verteilung erhoben werden können — sich doch dieser mehr annähert als der log. Normalverteilung.² Dies hat seinen Grund wahrscheinlich darin, daß die log. Normalverteilung zwar auf exakten mathematischen Ableitungen beruht, daß aber als Ausgangspunkt dieser Ableitungen notwendigerweise vereinfachende Annahmen bezüglich des Zerkleinerungsvorganges gemacht werden müssen, die in Wirklichkeit nicht immer zutreffen, so daß sich die tatsächliche Verteilung in manchen Fällen eher der rein empirischen, aber auf Grund von vielen Versuchsergebnissen bestimmten Rosin—Rammlerschen Verteilung nähern kann. Es wäre wünschenswert — und es sind auch diesbezügliche Versuche im Gange — durch eine entsprechende Abänderung der log. Normalverteilungsgleichung dieses Verteilungsgesetz noch enger den tatsächlichen Verhältnissen anzupassen.

Soviel über den Stand der Untersuchungen auf dem Gebiete des Mahlens. Wie wir aber schon einleitend bemerkten, wollen wir nur das Feinbrechen untersuchen. Während beim Mahlvorgang das Gebiet der feinsten Teilchen eine ausschlaggebende Rolle spielt, kommt diesem Gebiet beim Feinbrechen eine viel geringere Bedeutung zu; dagegen wird hier die Gestaltung der Verteilung der größten Körner der feingebrochenen Haufen, also das rechtsseitige Ende der Verteilungskurven, von Interesse sein.

Zunächst untersuchen wir als Beispiel die Gewichtsverteilungskurven von drei schnellaufenden Feinbrechermaschinen.

Abb. 6 zeigt die Verteilungskurve eines Dismembrators (Dis.) mit 630 mm \varnothing und $n = 2000$ Umdr/Min. im linearen Koordinatensystem.³

Abb. 7 stellt die Kurven eines 1000 mm $\varnothing \times 250$ mm Desintegrators (d) im linearen Koordinatensystem dar.⁴ Es wurde dabei Kohle zerkleinert.

Abb. 8 zeigt die Kurven eines schnellaufenden Hammerbrechers (H) mit $n = 2200$ U/Min. Zerkleinert wurde dabei Kalkstein.⁵

Abb. 9 stellt dieselben Verteilungskurven im Gauß'schen Koordinatensystem, und Abb. 10 im Bennet'schen Koordinatensystem dar. Wie die Abbildungen zeigen, verläuft der untere Teil der Verteilungen in beiden Koordinatensystemen geradlinig, dagegen weicht das rechte Ende von der Geraden ab. Die Abweichung scheint wegen der angewendeten besonderen Maßstäbe

² So z. B. bei einer Versuchsreihe des Zentralforschungsinstitutes für Baumaterialien (Építőanyagipari Központi Kut. Int.) mit feinerzkleinertem Zementklinker.

³ Die Versuche wurden im Laboratorium der Firma Ganz durchgeführt.

⁴ Versuchslaboratorium der Firma Ganz.

⁵ Messungen der Firma Ganz.

bedeutend, tatsächlich ist dies aber nicht der Fall. So z. B. beginnt im Gaußschen Koordinatensystem die Abweichung von der Geraden bei den Verteilungen »d« und »H« erst bei der Ordinate 95—96%, bei der Verteilung »Dis.« sogar bei 98%. Das bedeutet, daß die Verteilung von 95% bzw. 98% der Haufen der log. normalen Verteilung entspricht.

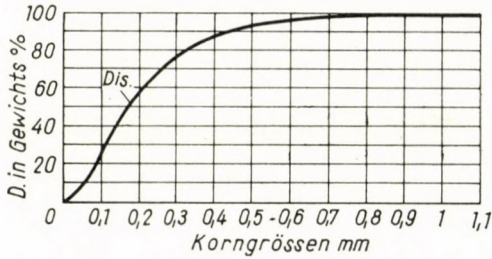


Abb. 6. Verteilungskurve eines Dismembrators mit $n = 2000$ U/Min.

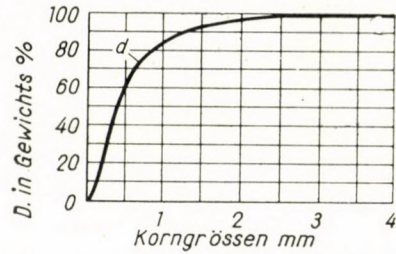


Abb. 7. Verteilungskurve eines Desintegrators

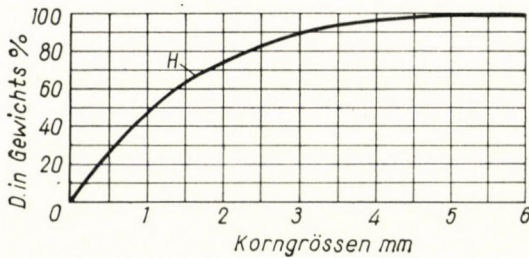


Abb. 8. Verteilungskurve eines schnellaufenden Hammerbrechers

Im Bennetschen Koordinatensystem beginnt die Abweichung von der Geraden bei den Verteilungen »Dis.« und »d« etwa bei der Ordinate 80%, die der Verteilung »H« bei etwa 90%.

Aus Abbildungen 9 und 10 zeigt sich also, daß sich die Verteilung der durch schnellaufende Feinbrecher erzeugten Haufen viel genauer durch die log. normale Verteilung als durch die Rosin—Rammersche Formel ausdrücken läßt.

Ein ganz anderes Bild ergibt sich aus Abb. 11, 12, 13 und 14, die die Verteilungskurven langsamlaufender Feinbrecher darstellen. Abb. 11 zeigt die Verteilungskurve eines langsamlaufenden Prallbrechers (Pr) [8] und Abb. 12 die Verteilungskurve des Titanbrechers der Zemetfabrik im Lábatlan (T)⁶

⁶ Die Verteilungskurve wurde im Versuchslaboratorium des Zentralforschungsinstitutes für Baumaterialien aufgenommen.

im linearen Koordinatensystem. (In Abb. 11 wurde auch die Differentialkurve der Verteilung dargestellt, da wir sie später benötigen werden.) Während die Drehzahl der schnelllaufenden Maschinen etwa 2000 U/Min. betrug, und die durch sie zerkleinerten Haufen maximale Korngrößen von 1,2–6 mm hatten, haben die hier behandelten langsamlaufenden Brechmaschinen Drehzahlen von 280–300 U/Min. und erzeugen deshalb Materialhaufen mit einer maximalen Korngröße von 40–50 mm.

Abb. 13 zeigt die Verteilungskurven der durch die obigen Maschinen erzeugten Haufen im Gaußschen Koordinatensystem und Abb. 14 im Bennet-

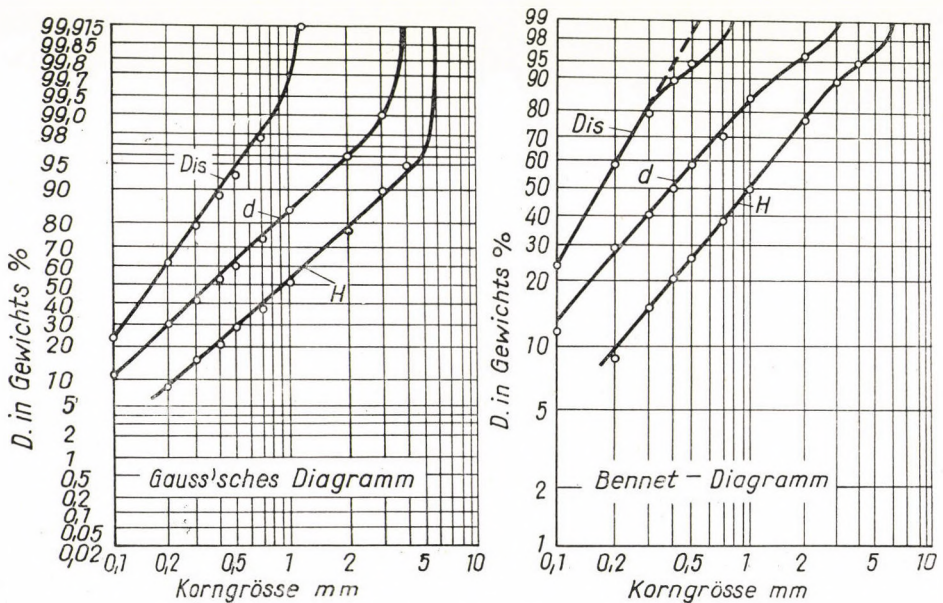


Abb. 9—10. Verteilungskurven eines Dismembrators (Dis), eines Desintegrators (d) und eines schnelllaufenden Hammerbrechers (H)

schen Koordinatennetz. Wir sehen, daß die Kurve T im Gaußschen Koordinatensystem schon bei der Ordinate $D = 50\%$ von der Geraden abweicht, und die Kurve Pr. sogar schon bei ca. 40% , wogegen im Bennetschen Koordinatensystem die Abweichung nur bei $D = 80\%$ bzw. $D = 70\%$ eintritt. Bei Maschinen mit kleiner Drehzahl nähert sich also die Verteilungskurve eher der Rosin—Rammlerschen als der log. normalen an Verteilung.

Um dies zu demonstrieren, betrachten wir die Verteilungskurven eines Hammerbrechers mit 800 mm \varnothing , die bei verschiedenen Drehzahlen aufgenommen wurden.⁷ Abb. 15 zeigt die bei verschiedenen Drehzahlen aufgenommenen Verteilungskurven der erzeugten Haufen im linearen Koordinatensystem.

⁷ Aufgenommen im Versuchslaboratorium der Firma Ganz.

Abb. 16 zeigt die Verteilungskurven, die zu der höchsten Drehzahl der Maschine ($n = 1250$ U/Min.) und zu ihrer niedrigsten Drehzahl ($n = 315$ U/Min.) gehören, im Gaußschen Koordinatensystem, und Abb. 17 im Bennetschen Diagramm. Der Vergleich dieser beiden Abbildungen zeigt, daß die tatsächliche

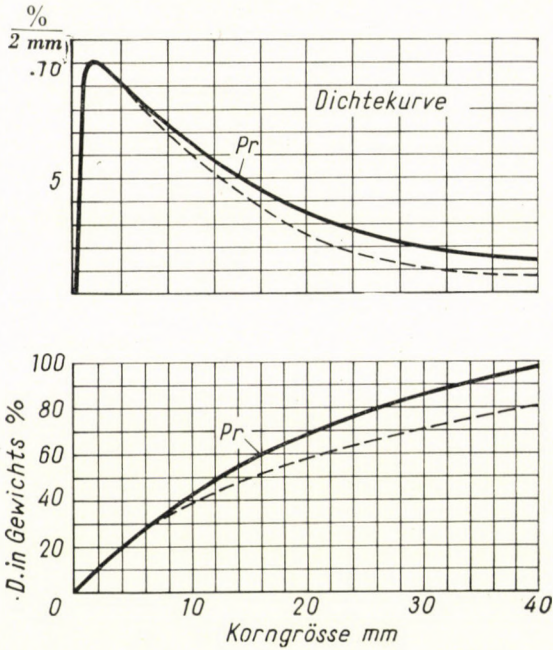


Abb. 11. Verteilungskurve eines langsamlaufenden Prallbrechers (Pr)

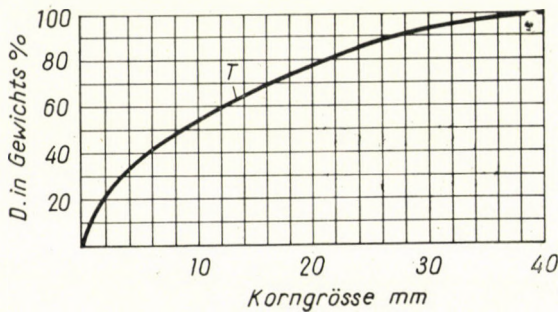


Abb. 12. Verteilungskurve eines langsamlaufenden Hammerbrechers (T)

Verteilungskurve bei der höheren Drehzahl erst über $D = 99,5\%$ von der log. normalen Verteilung abweicht und von der Rosin—Rammlerschen bei etwa 95% ; bei der niedrigeren Drehzahl weicht dagegen die tatsächliche Verteilung von der log. normalen Verteilung schon bei $D = 80\%$ ab, dagegen von der Rosin—Rammlerschen Verteilung nur bei etwa $D = 95\%$.

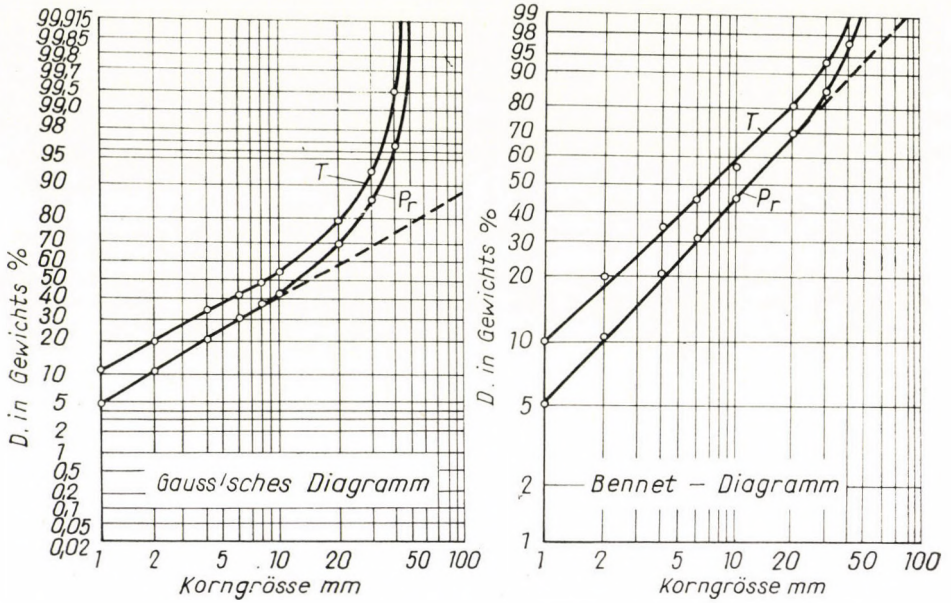


Abb. 13—14. Verteilungskurven eines langsamlaufenden Prallbrechers (Pr) und eines langsamlaufenden Hammerbrechers (T)

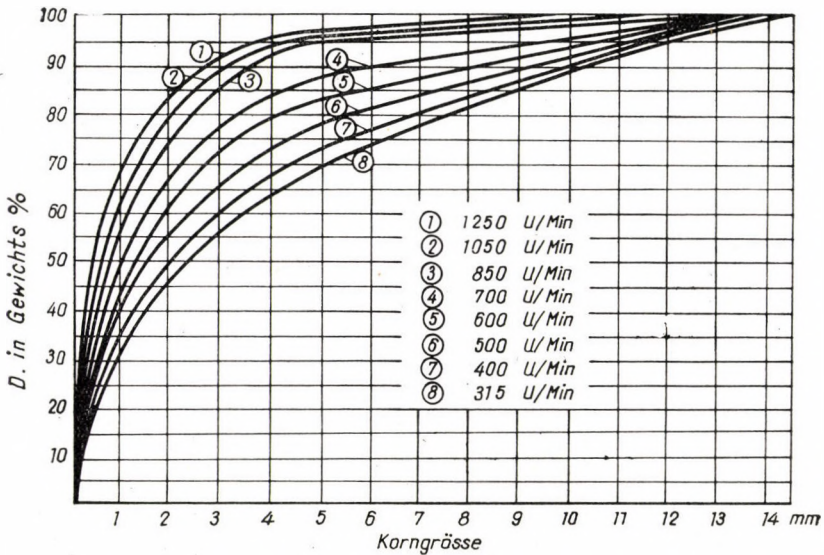


Abb. 15. Verteilungskurven eines Hammerbrechers bei verschiedenen Drehzahlen

Zur Begründung obiger Verhältnisse dienen zwei Umstände:

a) Wir verweisen auf den schon früher genannten Aufsatz [7], worin ausgeführt wurde, daß der Charakter der Verteilungskurve eine Funktion der Anzahl der erlittenen Zerkleinerungseinwirkungen ist. Bei Grobzerkleinerungsmaschinen (z. B. Backenbrecher, Kegelbrecher), wo die Anzahl der erteilten Zerkleinerungseinwirkungen viel kleiner als bei Feinzerkleinerungsmaschinen ist, läßt sich die Verteilungskurve annähernd durch die normale Verteilung ausdrücken, je größer aber die Anzahl der erlittenen Zerkleinerungseinwirkun-

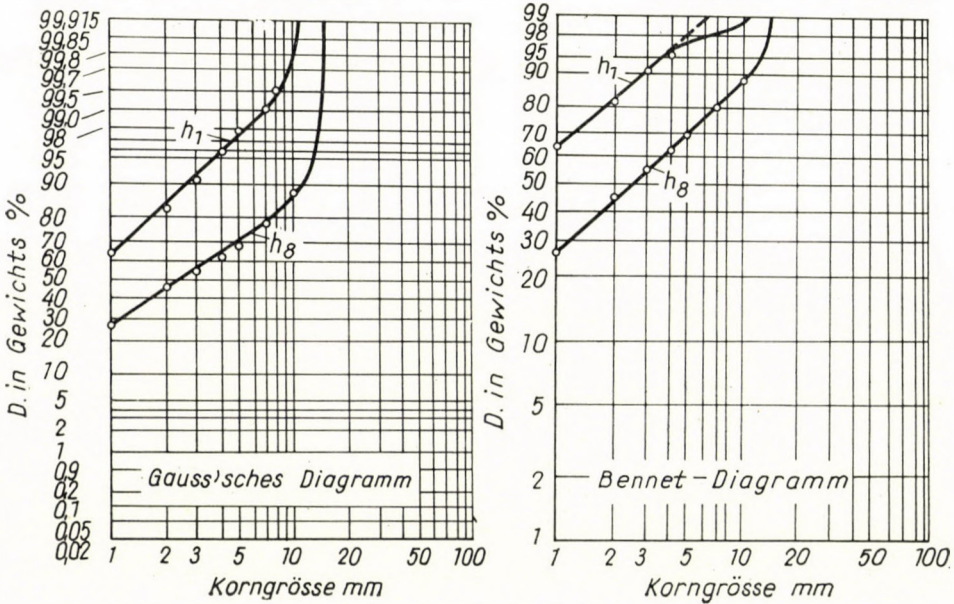


Abb. 16—17. Verteilungskurven eines Hammerbrechers bei großer Drehzahl (h_1) und bei niedriger Drehzahl (h_2)

gen wird, um so mehr verschiebt sich der Scheitelpunkt der Differentialkurve nach links von der mittleren Korngröße, und bei Erreichung einer sehr großen Anzahl von Zerkleinerungseinwirkungen (z. B. bei Feinzerkleinerungsmaschinen mit hoher Drehzahl) verläuft die Verteilungskurve fast schon entsprechend der log. normalen Verteilung.

Die Übergangskurven von der normalen zur log. normalen Verteilung können auch doppelwellig verlaufen, wie die Ergebnisse einer Versuchserie von H. HEYWOOD zeigen [5], wo Kohle bei verschiedenen Umdrehungszahlen zerkleinert wurde, und wo bei Verminderung der Drehzahl eine zweite, rechts von der ersten liegende Welle in der Verteilungskurve entstand, die sich um so stärker ausbildete, je geringer die Drehzahl der Maschine war (Abb. 18).

Wenn eine Feinbrechmaschine mit großer Drehzahl läuft, entspricht also ihre Verteilungskurve mit starker Annäherung der log. normalen Verteilung. Dies zeigen z. B. die Kurven »Dis«, »d« und »H« der mit großer Umdrehungszahl laufenden Feinbrecher, wo die Abweichung der tatsächlichen Verteilungskurven von der log. normalen Verteilung erst bei $D = 95\%$ bzw. $D = 98\%$ beginnt, wo aber diese Abweichung auch bei $D = 100\%$ der tatsächlichen Verteilungskurve nur $0,5\%$ bzw. 1% und 2% beträgt, wo sich also die beiden Kurven auch dort ganz eng aneinanderschmiegen, wo sie sich nicht mehr vollkommen überdecken. In den von uns angeführten Fällen bildet sich bei Ver-

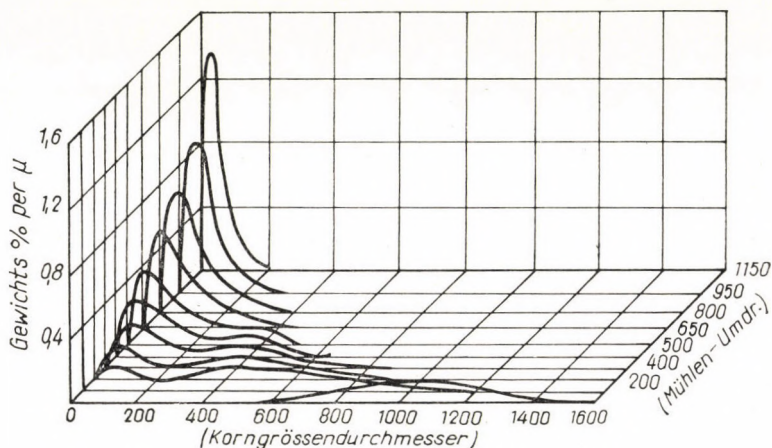


Abb. 18. Versuchsergebnisse von H. HEYWOOD. (Die Abb. stammt aus dem Buche von H. HEYWOOD [Schrifttum Nr. 5])

minderung der Drehzahl zwar keine zweite Welle, der rechte Teil der tatsächlichen Verteilungskurve hebt sich aber bereits ab und verläuft höher als die log. normale Verteilung.

Dies zeigt z. B. Abb. 11, die sowohl die Integralkurve als die Differentialkurve des langsamlaufenden Prallbrechers zeigt (Pr). Es wurde zum Vergleich auch die ideale log. normale Verteilung gezeichnet (gestrichelt), die wir in der Weise erhalten, daß wir die Gerade des Gauß-Diagrammes, die den linken Teil der Verteilungskurve »Pr« bildet, nach rechts verlängern und diese — die ideale log. normale Verteilung anzeigende — Gerade in das lineare Koordinatensystem übertragen (gestrichelt). Die Differentialkurve kann aus dieser Integralkurve mit graphischer Differentiation konstruiert werden. Wie Abb. 11 als Beispiel zeigt, steigt bei Feinbrechmaschinen mit niedrigeren Drehzahlen der rechte Teil der tatsächlichen Verteilungskurve höher als die log. normale Verteilung.

Die Abbildungen zeigen, daß wenn sich die mittleren Teile einer Rosin-Rammlerschen und einer log. normalen Kurve im linearen Koordinatensystem

ungefähr decken, der rechte Teil der Rosin—Rammlerschen Kurve stärker ansteigt als die log. normale Kurve. Abb. 19 zeigt dies als Beispiel für die zu dem schnellaufenden Dismembrator (Dis) gehörenden Kurven und Abb. 20 für die Kurven des langsam laufenden Prallbrechers (Pr.).

Bei schnellaufenden Feinbrechern entspricht der Verlauf der tatsächlichen Verteilungskurve fast genau der log. normalen Verteilung, infolgedessen kann die rechte Seite der Rosin—Rammlerschen Kurve nicht mit der tatsächlichen Verteilung übereinstimmen — denn diese entspricht ja der log. normalen Verteilung — sondern verläuft höher als diese (Abb. 19).

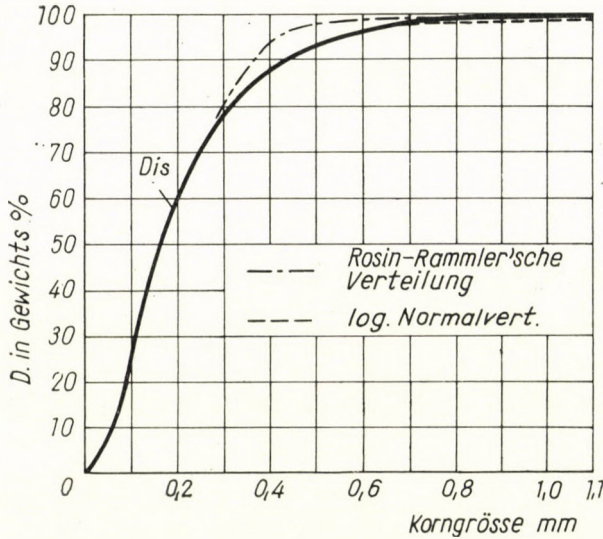


Abb. 19. Verteilungskurve eines schnellaufenden Dismembrators, verglichen mit der Rosin—Rammlerschen und der log. normalen Verteilung

Wird aber die Drehzahl vermindert, so steigt — wie oben erwähnt wurde — die tatsächliche Verteilungskurve höher als die log. normale Verteilungskurve, nähert sich also der Rosin—Rammlerschen Kurve. Abb. 20 zeigt die Verteilungskurve des langsam laufenden Prallbrechers (Pr) und hier verläuft die tatsächliche Verteilungskurve sogar über der Rosin—Rammlerschen Verteilung. Diese liegt jetzt zwischen der log. normalen und der tatsächlichen Verteilung, die also in diesem Falle näher zur Rosin—Rammlerschen als zur log. normalen Verteilung verläuft.

Betrachten wir Abb. 10, so sehen wir, daß die rechte, von der Geraden bereits abweichende Seite der tatsächlichen Verteilungskurven schnellaufender Feinbrecher im Bennet-Diagramm eine merkwürdige, rechtsgerichtete Schleife beschreibt. Aus obigen Ausführungen ergibt sich die Erklärung auch für diesen Umstand.

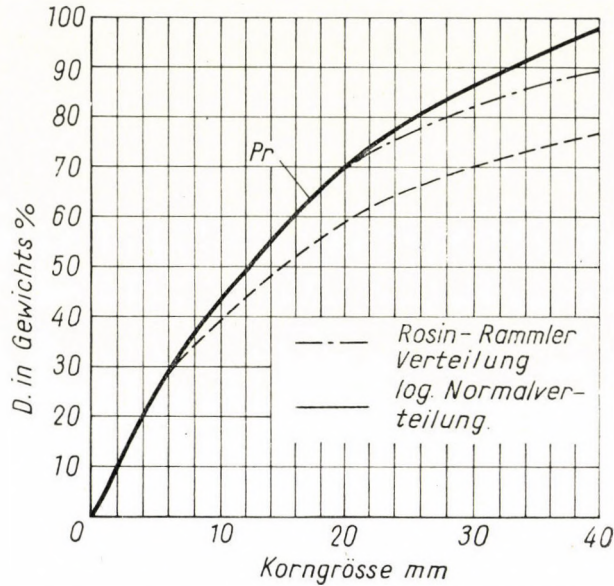


Abb. 20. Verteilungskurve eines langsamlaufenden Prallbrechers, verglichen mit der Rosin—Rammlerschen und der log. normalen Verteilung

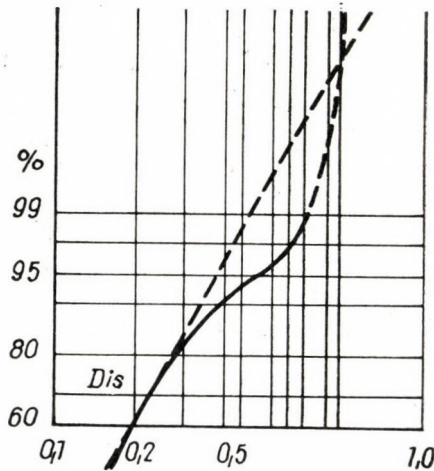


Abb. 21. Der rechte Teil der tatsächlichen Verteilungskurve (Dis) im Bennett-Diagramm

Der linke teil der Verteilungskurven deckt sich mit der Rosin—Rammlerschen Verteilung, die in diesem Koordinatensystem eine Gerade ergibt. Der rechtseitige Teil der beiden Kurven deckt sich aber nicht mehr mit dieser Kurve, denn nach unseren früheren Ausführungen verläuft die Rosin—Rammlersche Verteilungskurve — also die im Bennetschen Koordinatensystem ihr

entsprechende Gerade — höher als die tatsächliche Verteilungskurve, die deshalb, in diesem Diagramm, nach rechts abbiegen muß.

Die Rosin—Rammlersche Kurve erreicht den Punkt $D = 100\%$ nur im Unendlichen, dagegen gehört bei der tatsächlichen Verteilungskurve $D = 100\%$ zu einem endlichen Abszissenwert. Bevor also die tatsächliche Verteilungskurve den Wert $D = 100\%$ erreicht, muß sie wieder zur Rosin—Rammlerschen Geraden zurückkehren und sie kreuzen. Bei den bezüglichen Abbildungen liegt dieser Schnittpunkt zwischen 99% und 100% , also außerhalb unserer Diagramme, die deshalb nur den unteren Teil der Schleife zeigen. Ihren vollen Verlauf, z. B. für die Kurve »Dis«, zeigt Abb. 21.

Bei langsamlaufenden Feinbrechern verläuft die tatsächliche Verteilungskurve nicht mehr tiefer als die Rosin—Rammlersche Verteilung, sondern erhebt sich über dieselbe. Hier biegt sie im Bennetschen Diagramm einfach nach oben von der Geraden ab und es entsteht keine Schleifenbildung. (Abb. 14 und 15/h_g.)

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Verteilung von Haufen, die durch schnelllaufende Feinbrecher zerkleinert wurden, durch die log. normale Verteilung ausgedrückt werden kann. Je mehr aber die Drehzahl — also die Anzahl der erteilten Zerkleinerungseinwirkungen — der Feinbrecher abnimmt, um so mehr nähert sich die Verteilungskurve der zerkleinerten Haufen der Rosin—Rammlerschen Verteilung.

SCHRIFTTUM

1. BEKE B.: Megjegyzések az aprítás alapvető kérdéseihöz. (Bemerkungen zu den grundlegenden Fragen der Zerkleinerung. Nur ung.) Építőanyag 1954.
2. FRITZ W.: Probleme bei der experimentellen Bestimmung von Korngrößen und bei der schaubildlichen Darstellung von Korngrößenverteilungen nach Rosin, Rammler und Sperling. Chemiker Zeitung — Chemische Apparatur, Heidelberg. 83 Jahrg. Dez. 1959. S. 819—823.
3. GEBELEIN, H.: Beiträge zum Problem der Kornverteilungen. Chemie-Ing. Techn. 28. Jahrg. 1956/Nr. 22.
4. HERDAN, G.: Small Particle Statistics. Amsterdam. 1953.
5. HEYWOOD, H.: Some notes on grinding research. Journal of the Imperial College Chemical Engineering Soc. London. 6(1950—52)26.
6. KOLMOGOROV, A. N.: Über das logarithmisch normale Verteilungsgesetz der Teilchen bei Zerstückelung. Dokladi Akademii Nauk SzSzsZR 31 (1941) S. 99—101.
7. LÁZÁR, E.: Die Gesetzmäßigkeiten der Korngrößenverteilung maschinell zerkleinerter Materialhaufen. Acta Technica XVII/3—4. S. 175—217.
8. RENNERT, B.: Die Anwendung der Prallzerkleinerung zur Erzeugung von Straßenbaustoffen. Straßen und Tiefbau, 1953. X.
9. RÉNYI, A.: Az aprítás matematikai elméletéről. (Über die mathematische Theorie der Zerkleinerung. Nur ung.) Építőanyag. 1950. 9—10. S. 177—183.

ZUSAMMENFASSUNG

Wir haben früher nachgewiesen [7], daß auf dem Gebiete der Feinzerkleinerung die Gewichtsverteilung der Teilchen annähernd der log. Normalverteilung entspricht, oder eventuell auch durch die Rosin-Rammlersche Formel ausgedrückt werden kann, während auf dem Gebiete der Grobzerkleinerung schon andere Gesetzmäßigkeiten maßgebend sind.

Bezüglich der Feinzerkleinerung unterscheiden wir zwei Teilgebiete: Das Mahlen, wobei Haufen erzeugt werden, deren Teilchen eine Größenordnung besitzen, die in μ ausgedrückt werden kann, und das Feinbrechen (z. B. mit Hammerbrechern usw.) wobei Teilchen mit einer in mm. ausdrückbaren Größenordnung entstehen. Beim Mahlen spielen die feinen Körnungen eine entscheidende Rolle und der derzeitige Stand der Untersuchungen bezüglich der Korngrößenverteilung gemahlener Haufen wird einleitend zusammengefaßt.

Die angestellten Untersuchungen befassen sich aber nicht mit dem Mahlvorgange, sondern mit dem Feinbrechen. Hier spielen die feinsten Körner eine viel geringere Rolle als beim Mahlen, dagegen ist die Rolle der groben Körner — also der rechten Seite der Verteilungskurve — von Interesse.

Laut den Ergebnissen der Untersuchungen entspricht die Verteilung der durch Feinbrechmaschinen erzeugten Haufen bei großen Drehzahlen der log. Normalverteilung. Je mehr sich aber die Drehzahl vermindert, um so mehr nähert sich die Verteilung der Haufen der Rosin—Rammlerschen Formel. Dies wird auch theoretisch begründet.

INVESTIGATIONS ON THE GRANULOMETRIC COMPOSITION OF DESINTEGRATED AGGREGATIONS AS PRODUCED BY COMMINUATING MACHINES

J. LÁZÁR

SUMMARY

It was previously shown (7) that in the fine comminuating technique a nearly log. normal sizing occurs or one possibly described by the formula of Rosin and Rammler, while in the coarse comminuating field (e. g. with jaw crushers) other laws govern.

In fine comminuation two separate ranges exist: grinding, producing reduced aggregations with μ = sized grains and fine crushing (as affected e. g. by sledge mills) resulting grain sizes of „mm“-scale. In grinding, the fine grain sizes, are of paramount importance, the present state of investigations covering this field are dealt with at the beginning of this paper.

The present paper is concerned essentially with fine crushing only; here the finer grain sizes are of lesser importance than is the case of grinding, whereas the distribution of the heavier grains, thus the development of the right hand side of the distribution curves should be taken into consideration.

According to the results of investigations described, machines to effect fine comminuation produce reduced aggregations with grading lines approximately conform to the log. normal distribution. However, with the rotation speed diminishing the distribution of the reduced aggregation becomes more and more similar to the one characterized by the formula of Rosin and Rammler. This phenomenon is theoretically accounted for in the paper.

RECHERCHES SUR LA DISTRIBUTION DES GRAINS DANS UN AGGLOMÉRAT CONCASSÉ PAR DES CONCASSEURS FINS

E. LÁZÁR

RÉSUMÉ

L'auteur avait exposé précédemment (7) que pour le broyage fin, la distribution d'après les dimensions des grains peut être exprimée approximativement par la formule logarithmique normale, ou éventuellement par celle de Rosin—Rammler, d'autres lois étant valables pour le gros concassage.

Quant au broyage fin, on distingue deux procédés différents: la mouture, qui produit des agglomérats contenant des grains concassés de l'ordre des microns, et le concassage fin (par ex. au moyen d'un concasseur à marteau) produisant des particules d'un ordre de grandeur millimétrique. Dans la mouture, les grains fins ont une importance décisive: l'état actuel des recherches sur la distribution des agglomérats moulus est exposé au début de l'étude.

L'étude ne s'occupe essentiellement que du concassage fin, où les grains plus fins ont une importance beaucoup moindre qu'à la mouture. Par contre, la distribution des grains plus gros, donc la forme du côté droit des courbes de distribution, peut ici présenter de l'intérêt.

D'après les résultats des expériences décrites, la courbe de distribution des agglomérats concassés par des concasseurs fins à grande vitesse, correspond sensiblement à la distribution logarithmique normale. Plus la vitesse du concasseur est faible, plus la distribution des agglomérats concassés s'approche de la formule de Rosin—Rammler. Les causes théoriques en sont exposées par l'auteur.

ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАНУЛОМЕТРИЧЕСКОГО СОСТАВА МНОЖЕСТВ, ИЗМЕЛЬЧЕННЫХ ТОНКОДРОБЯЩИМИ МАШИНАМИ

И. ЛАЗАР

РЕЗЮМЕ

Ранее (7) было показано, что в области тонкого измельчения распределение по крупности зерен является приближенно логарифмически нормальным, или же может быть выражено формулой Розена и Рамлера, в то же время в области крупнозернистого измельчения действительны другие закономерности.

В случае тонкозернистого измельчения можно отличить две частные области, т. е. помол, который позволяет получать множества, содержащие измельченные множества зерен крупностью μ , и тонкозернистое дробление (например, молотковая дробилка и т. д.), с помощью которого можно получать зерна крупностью порядка «мм». При помоле получаются в преобладающем большинстве тонкие зерна; теперешнее положение исследований в области гранулометрического состава молотых множеств излагается в начале работы.

По существу, работа занимается лишь тонкозернистым дроблением, при котором тонкие зерна играют менее важную роль, чем в случае помола, в то же время распределение более крупных зерен играет основную роль, т. е. формирование правой стороны кривых распределения.

Согласно полученным результатам изложенных исследований кривая распределения множеств, измельченных до тонкости зернистого состава дробильными машинами при высоких оборотах, соответствует с удовлетворительной точностью логарифмическому нормальному распределению. Однако, чем сильнее падает число оборотов, тем сильнее приближается распределение измельченных множеств к формуле Розена и Рамлера. В работе дается теоретическое обоснование сказанных выше.

DIE BIEGETHEORIE DER LANGEN, FLACHEN, ELASTISCHEN KREISZYLINDERSCHALEN (TONNENSCHALEN)*

E. DULÁCSKA

PLANUNGSUNTERNEHMEN „BUVÁTI“, BUDAPEST

[Eingegangen am 11. Januar 1960]

Einleitung

Die auf Biegung beanspruchten Kreiszyklinderschalen (Tonnenschalen) eignen sich sowohl einzeln wie auch reihenweise angeordnet zur Überdeckung größerer, rechteckiger Räume. Die Berechnung dieser Schalenträgerwerke ist eine schwere und zeitraubende Arbeit, die an den in der Praxis tätigen Ingenieur seine durchschnittlichen mathematischen Kenntnisse beträchtlich übersteigende Anforderungen stellt.

Die Mehrheit dieser Schalenträgerwerke ist so gestaltet, daß der Schalenbogen eine flache Kurve ist, und die in die Richtung der Erzeugenden fallende Abmessung (die Länge) das mehrfache der in der Bogenrichtung liegenden (der Breite) ist. Wenn man diese Eigenschaften berücksichtigt, ergeben sich für die Berechnung der Kreiszyklinderschale solche Vereinfachungen, daß die Differentialgleichung der Schale im Falle einer in der Richtung der Erzeugenden gleichmäßig verteilten Belastung unmittelbar integriert werden kann, und die Lösung in der Form eines Polynoms gegeben ist. Auf diese Weise kann die

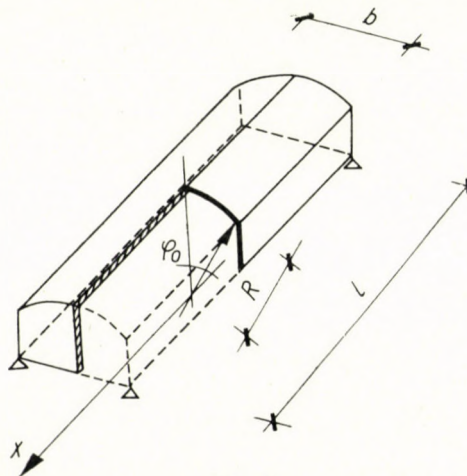


Abb. 1

* Beim Preisausschreiben der Ungarischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1959 preisgekrönte Studie.

Anwendung der langsam konvergierenden Fourier'schen Reihe vermieden werden.

Im weiteren wird vorausgesetzt:

a) Die Schale ist so flach, daß für die Bogenlänge des Schalenbogens ihre Projektion eingesetzt werden kann, daher ist $\sin \varphi \approx \varphi$ und $\cos \varphi \approx 1$; ferner, daß die Belastung p konstant ist.

b) Die Länge l ist ein Mehrfaches der Breite b (siehe Abb. 1).

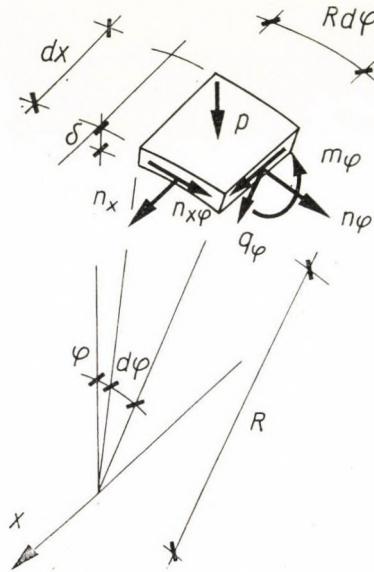


Abb. 2

Die Gleichgewichtsgleichungen

Die Gleichgewichtsgleichungen sind — wenn mit Rücksicht auf den flachen Schalenbogen die Glieder $\varphi \cdot p \cdot R$ und q_φ der Gleichung (1) vernachlässigt werden und vorausgesetzt wird, daß $m_x = m_{xy} = q_x = 0$ ist (bei langen Schalen) — die folgenden:

$$\frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} \cdot R = 0, \quad (1)$$

$$R \cdot \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \varphi} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + n_\varphi + p \cdot R = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} - R \cdot q_\varphi = 0. \quad (4)$$

Wenn die Schnittkräfte aus den Gleichungen (1), (2), (3) und (4) als eine Funktion von m_φ ausgedrückt werden, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$q_\varphi = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (5)$$

$$n_\varphi = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \varphi^2} - p \cdot R, \quad (6)$$

$$\frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^3 m_\varphi}{\partial \varphi^3}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} = -\frac{1}{R^3} \cdot \frac{\partial^4 m_\varphi}{\partial \varphi^4}. \quad (8)$$

Die Formänderungsgleichungen

Im weiteren werden mit Rücksicht auf den »langen« Charakter der Schale die Formänderungen n_φ und $n_{x\varphi}$ vernachlässigt und es wird vorausgesetzt, daß der Koeffizient der Querkontraktion ν gleich Null ist.

Die positiven Werte der Formänderungsverschiebungen wurden in Abb. 3 gezeigt.

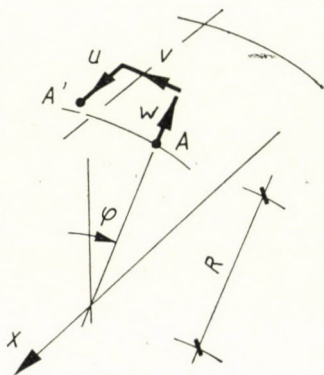


Abb. 3

Im Laufe der Formänderung verschiebt sich der Punkt A in den Punkt A' .

Mit Rücksicht auf die oben erwähnten Vernachlässigungen ergeben sich für die bekannten Grundbedingungen der Formänderung die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E\delta} n_x, \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = w, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = R \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (11)$$

Hier bedeutet E den Elastizitätsmodul des Schalenmaterials und δ die Schalendicke. Ferner besteht die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{RE\delta} \cdot \frac{\partial n_x}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

Durch Benützung dieser Gleichung erhält man:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{RE\delta} \cdot \frac{\partial^2 n_x}{\partial \varphi^2}. \quad (13)$$

Aus der infolge der Biegung der Schalenplatte auftretenden Formänderung folgt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = \frac{12 R^2}{E\delta^3} \cdot m_\varphi. \quad (14)$$

Die Differentialgleichung der Schale

Aus der Gleichung (14) folgt:

$$m_\varphi = \frac{E\delta^3}{12 R^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \quad (15)$$

Durch zweimalige Ableitung der obigen Gl. nach x erhält man:

$$\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial x^2} = \frac{E\delta^3}{12 R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2 \partial x^2}. \quad (16)$$

Durch zweimalige Ableitung der Gl. (13) nach φ ergibt sich:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} = \frac{1}{RE\delta} \cdot \frac{\partial^4 n_x}{\partial \varphi^4}. \quad (17)$$

Wenn man die Gleichung (17) in die Gleichung (16) einsetzt, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial x^2} = \frac{\delta^2}{12 R^3} \cdot \frac{\partial^4 n_x}{\partial \varphi^4}. \quad (18)$$

Durch zweimalige Ableitung nach x erhält man:

$$\frac{\partial^4 m_\varphi}{\partial x^4} = \frac{\delta^2}{12 R^3} \cdot \frac{\partial^6 n_x}{\partial \varphi^4 \partial x^2}. \quad (19)$$

Durch viermalige Ableitung der Gl. (8) nach φ ergibt sich:

$$\frac{\partial^6 n_x}{\partial \varphi^4 \partial x^2} = \frac{-1}{R^4} \cdot \frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \varphi^8}. \quad (20)$$

Wenn die Gleichung (20) in die Gleichung (19) eingesetzt wird, gelangt man zur Gleichung

$$\frac{\partial^4 m_\varphi}{\partial x^4} = \frac{-\delta^2}{12 R^6} \cdot \frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \varphi^8},$$

und nach Ordnen der letzteren zu dem Ergebnis

$$\frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \varphi^8} + \frac{12 R^6}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^4 m_\varphi}{\partial x^4} = 0 \quad ; \quad (21)$$

d. h. zur allgemeinen Differentialgleichung der flachen, langen Kreiszyllinderschale.

Wenn die verteilte Belastung in der Richtung x konstant ist, und die an den Stellen $x = \pm l/2$ angebrachten Endbinderbögen der querverrichteten Formänderung der Schale folgen können, so kann es versucht werden m_φ so anzunehmen, daß es von x unabhängig sein soll.

Aus den weiteren Erörterungen wird ersichtlich, daß im Falle eines in der Richtung x als konstant angenommenen m_φ sowohl die Gleichgewichts- wie auch die Formänderungsgleichungen erfüllt werden, ferner, daß zu einem konstanten m_φ tatsächlich eine konstante Belastung gehört, und endlich, daß am Rande $x = \pm l/2$ für die von φ abhängigen Formänderungen die Möglichkeit der freien Ausbildung gegeben sein muß.

So nimmt die Gleichung (21) die folgende einfache Form an:

$$\frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \varphi^8} = 0 \quad . \quad (22)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$m_\varphi = A\varphi^7 + B\varphi^6 + C\varphi^5 + D\varphi^4 + E\varphi^3 + F\varphi^2 + G\varphi + H. \quad (23)$$

Wenn sowohl die Schale wie auch die Belastung in bezug auf die Ebene ($x, \varphi = 0$) symmetrisch sind, so fallen aus der Gleichung (23) die ungeraden Glieder heraus und es wird

$$m_\varphi = B\varphi^6 + D\varphi^4 + F\varphi^2 + H. \quad (24)$$

In der Folge werden wir uns nur mit diesem Falle befassen.

Die Schnittkräfte

Die notwendigen Differentialquotienten von m_φ sind:

$$\frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} = 6B\varphi^5 + 4D\varphi^3 + 2F\varphi, \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \varphi^2} = 30B\varphi^4 + 12D\varphi^2 + 2F, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^3 m_\varphi}{\partial \varphi^3} = 120B\varphi^3 + 24D\varphi \quad (27)$$

$$\frac{\partial^4 m_\varphi}{\partial \varphi^4} = 360B\varphi^2 + 24D \quad (28)$$

Durch Einsetzen der Differentialquotienten von m_φ in die Formeln (5), (6), (7) und (8) der Schnittkräfte erhält man:

$$q_\varphi = \frac{1}{R} (6B\varphi^5 + 4D\varphi^3 + 2F\varphi), \quad (29)$$

$$n_\varphi = -\frac{1}{R} (30B\varphi^4 + 12D\varphi^2 + 2F) - p \cdot R. \quad (30)$$

$$\frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} = \frac{1}{R^2} (120B\varphi^3 + 24D\varphi). \quad (31)$$

Durch Integration dieser letzteren Gleichung nach x folgt:

$$n_{x\varphi} = \frac{x}{R^2} (120B\varphi^3 + 24D\varphi) + C_1(\varphi). \quad (32)$$

Infolge der an der Stelle $x = 0$ bestehenden örtlichen Antimetrie ist $C_1(\varphi) = 0$ und so ist

$$n_{x\varphi} = \frac{x}{R^2} (120B\varphi^3 + 24D\varphi). \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} = -\frac{1}{R^3} (360B\varphi^2 + 24D). \quad (34)$$

Durch zweimalige Integration der obigen Gleichung nach x ergibt sich

$$n_x = -\frac{x^2}{2R^3} (360B\varphi^2 + 24D) + C_1(\varphi)x + C_2(\varphi). \quad (35)$$

Wegen der an der Stelle $x = 0$ bestehenden örtlichen Symmetrie ist $C_1(\varphi) = 0$.

Falls $x = \pm l/2$ ist, so ist $n_x = 0$.

Hieraus folgt:

$$C_2 = \frac{l^2}{8R^3} (360B\varphi^2 + 24D). \quad (36)$$

Durch Einsetzen des obigen Wertes von C_2 in die Gleichung (35) und durch Ordnen der Gl. gelangt man zur Formel:

$$n_x = \frac{l^2}{8R^3} (360B\varphi^2 + 24D) \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right). \quad (37)$$

Hiemit wurden die Formeln der Schnittkräfte bestimmt (Formeln (29), (30), (33) und (37)). Die Konstanten B , D , F , H können auf Grund der entlang des Randes $\varphi = \varphi_0$ bestehenden Randbedingungen bestimmt werden.

Die Formänderungen

Die in der Richtung φ erfolgende Winkelverdrehung der Schalenplatte ist

$$\chi \approx -\frac{\partial w}{R\partial\varphi}. \quad (38)$$

Die Formänderungen mit Berücksichtigung der Schnittkräfte ausdrückend, gelangt man zu den folgenden Formeln:

$$u = \frac{1}{E\delta} \int n_x dx, \quad (39)$$

$$w = \frac{1}{RE\delta} \iint \frac{\partial^2 n_x}{\partial \varphi^2} dx^2 + \frac{12R^2}{E\delta^3} \iint m_\varphi d\varphi^2, \quad (40)$$

$$v = \frac{1}{RE\delta} \iiint \frac{\partial^2 n_x}{\partial \varphi^2} dx^2 d\varphi + \frac{12R^2}{E\delta^3} \iiint m_\varphi d\varphi^3. \quad (41)$$

Durch Einsetzen der Werte der Schnittkräfte in die Ausdrücke für w und v (Ausdrücke (40) und (41)) wird es ersichtlich, daß ein Teil der Formänderungen von x , der andere Teil dagegen von φ abhängig ist. Am Rande $x = \pm l/2$ bestimmen wir die Bedingungen der Formänderungen derart, daß die von x abhängige, in der Richtung der Spannweite l genommene Durchbiegung gleich Null sein soll. Das bedeutet, daß am Rande $x = \pm l/2$

$$v_{(x)} = w_{(x)} = 0$$

ist. Die von φ abhängige Formänderung wird von dem Moment m_φ verursacht, in dieser Beziehung stellen wir keinerlei Bedingungen.

Werden die durch die Formeln (29), (30), (33) und (37) bestimmten Werte der Schnittkräfte und die am Rande $x = \pm l/2$ gültigen Grenzbedingungen der Formänderungen in Betracht gezogen, so ergeben sich die Formänderungsgleichungen wie folgt:

$$u = \frac{l^2}{8R^3 E\delta} (360B\varphi^2 + 24D) \cdot \left(x - \frac{4x^3}{3l^2} \right) \quad (42)$$

$$w = \frac{l^2}{R^4 E\delta} \cdot \frac{720B}{8} \left(-\frac{5l^2}{48} + \frac{x^2}{2} - \frac{4x^4}{12l^2} \right) + \frac{12R^2}{E\delta^3} \left(\frac{B\varphi^8}{56} + \frac{D\varphi^6}{30} + \frac{F\varphi^4}{12} + \frac{H\varphi^2}{2} \right). \quad (43)$$

$$v = \frac{l^2}{R^4 E\delta} \cdot \frac{720B\varphi}{8} \left(-\frac{5l^2}{48} + \frac{x^2}{2} - \frac{4x^4}{12l^2} \right) + \frac{12R^2}{E\delta^3} \left(\frac{B\varphi^9}{504} + \frac{D\varphi^7}{210} + \frac{F\varphi^5}{60} + \frac{H\varphi^3}{6} \right). \quad (44)$$

$$\chi = -\frac{12R}{E\delta^3} \left(\frac{B\varphi^7}{7} + \frac{D\varphi^5}{5} + \frac{F\varphi^3}{3} + H\varphi \right). \quad (45)$$

Nachfolgend wird die Schale auf solche Weise gelöst, daß man für den Rand $\varphi = \varphi_0$ die vier Unbekannten enthaltenden Schnittkrafts- bzw. Formänderungsfunktionen darstellt. Die vier Ausgangsbedingungen, die vom Gesichtspunkte der Statik bzw. der Formänderungen für den Rand φ_0 angeschrieben werden können, ermöglichen die Bestimmung der Konstanten.

Die Randbedingungen

Für die in der Praxis vorkommenden verschiedenartig gestützten Ränder gelten die in der Folge zu behandelnden Randbedingungen.

1. Freier Rand

An der Stelle $\varphi = \varphi_0$ ist der Wert der Schnittkräfte — von n_x abgesehen — gleich Null, folglich ist:

$$m_\varphi = q_\varphi = n_\varphi = n_{x\varphi} = 0. \quad (46)$$

2. Innenrand von Tonnenreihen ohne Randträger

Wegen der Symmetrie werden entlang des Randes φ_0 keine vertikalen Kräfte übertragen, eine horizontale Verschiebung ist nicht möglich, es kann keine Winkelverdrehung auftreten, infolgedessen ist $n_{\varphi x}$ gleich Null.

Dementsprechend gelten die folgenden Randbedingungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi \cdot n_\varphi + q_\varphi &= 0, \\ n_{\varphi x} &= 0, \\ \chi &= 0, \\ v - \varphi \cdot w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

(Aus der vierten Gleichung fällt das nach x veränderliche Glied heraus.)

3. Innenrand von Tonnenreihen mit Randträgern

Wegen der Symmetrie ist eine horizontale Verschiebung unmöglich, und es kann auch keine Winkelverdrehung zustandekommen.

Die Dehnung und die Durchbiegung des Randträgers und des an diesen angeschlossenen Schalenrandes sind identisch.

Die Randbedingungsgleichungen sind die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= 0 \\ v - \varphi \cdot w &= 0 \\ u_{\text{Schale}} &= u_{\text{Randträger}} \\ \varphi \cdot v + w &= f \text{ (Durchbiegung des Randträgers) } \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

(Aus der zweiten Gleichung fällt das nach x veränderliche Glied heraus.)

4. Endtonnenrand mit Randträger

Mit Rücksicht auf die Halbsteifigkeit des Randträgers kann kein Seitendruck auftreten. In Ermangelung eines Drillungswiderstandes des dünnwandigen Randträgers kann am Schalenrand kein Biegemoment zustandekommen. Die Dehnung und die Durchbiegung des Randträgers und des an diesen angeschlossenen Schalenrandes sind identisch.

Die Randbedingungsgleichungen sind die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} n_\varphi - \varphi \cdot q_\varphi &= 0 \\ m_\varphi &= 0 \\ u_{\text{Schale}} &= u_{\text{Randträger}} \\ \varphi \cdot v + w &= f \text{ (Durchbiegung des Randträgers)} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Die Anpassung der Formänderungen der Schale an die des Randträgers

Die von der Schale auf den Randträger übertragenen Kräfte, wie auch das Eigengewicht des Randträgers, sind in der Richtung x gleichmäßig verteilt. Das übertragene $n_{\varphi x}$ ist in der Richtung x zwar linear veränderlich, doch liefert es für den Randträger eine ebensolche Formänderungsfunktion (für x eine vierten Grades) wie die gleichmäßige Belastung. Diese Formänderungsfunktion ist mit dem nach x veränderlichen Gliede der Formänderungsfunktion der Schale identisch.

Die durch m_φ verursachte Formänderung ist im Sinne unserer Bedingungen am Rande entweder gleich Null, oder sie entspricht der Verschiebung des sich mit der Schale zusammen bewegenden Endbinderbogens und ist in der Richtung x konstant.

Daher ist die Anpassung der Formänderungen des Schalenrandes an die des Randträgers möglich, nachdem diese Formänderungen in Richtung x durch identische Funktionen beschrieben werden.

An der Stelle $x = \pm l/2$ steht im Falle einer steifen Endbinderscheibe die Möglichkeit einer gemeinsamen Verschiebung der Endbinderscheibe und der Schale mit der Wirklichkeit im Widerspruch. In einem solchen Falle können die hier auftretenden Randstörungen annähernd mit Hilfe der für die Randstörungen der Kreiszyylinderbehälter gültigen Zusammenhänge bestimmt werden.

Wenn wir den Wert der Belastung p mit $p = 0$ annehmen, so erhalten wir die homogene Lösung der Schale, die mit einer jeden beliebigen, nach φ veränderlichen Funktion $p(\varphi)$ gebildeten Membranlösung zusammen, die Totallösung der Schale liefert.

Zahlenbeispiel

Wir wollen die Schnittkräfte einer Mitteltonne der in Abb. 4 dargestellten, randträgerlosen Tonnenreihe bestimmen.

$$\varphi_0 = 0,523$$

$$\varphi_0^2 = 0,274$$

$$\varphi_0^3 = 0,144$$

$$\varphi_0^4 = 0,075$$

$$\varphi_0^5 = 0,039$$

$$\varphi_0^6 = 0,021$$

$$\varphi_0^7 = 0,011$$

$$\varphi_0^8 = 0,0052$$

$$\varphi_0^9 = 0,0027$$

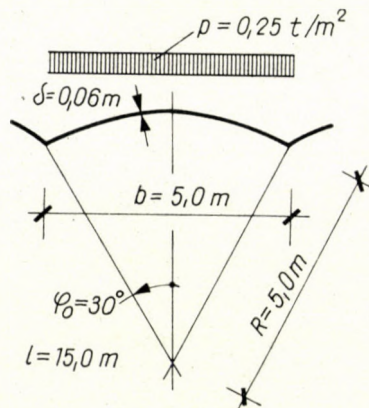


Abb. 4

Die Randbedingungen für den Rand φ_0 sind:

$$\varphi \cdot n_\varphi + q_\varphi = 0,$$

$$n_{\varphi x} = 0,$$

$$\chi = 0,$$

$$v - \varphi w = 0.$$

Nach Einsetzen der Formeln der Schnittkräfte ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen:

$$0,93B + 1,15D + 3,27 = 0,$$

$$17,28B + 12,56D = 0,$$

$$0,00157B + 0,0078D + 0,048F + 0,523H = 0,$$

$$0,00043B + 0,0031D + 0,026F + 0,480H = 0,$$

Das obige, vier Unbekannten enthaltende Gleichungssystem zerfällt in zwei Gleichungssysteme mit je zwei Unbekannten, da die ersten zwei Gleichungen für sich gelöst werden können.

Die Lösung dieser Gleichungen liefert für die Konstanten die folgenden Werte:

$$B = 5,01, D = -6,88, F = 1,24, H = 0,027.$$

Die Maximalwerte der Schnittkräfte erhält man, indem die obigen Werte in die Gleichungen (29), (30), (33) und (37) eingesetzt werden.

$$n_x(\varphi = 0, x = 0) = \frac{15^2}{8 \times 5^3} (-24 \times 6,88) = -37,0 \text{ t/m},$$

$$n_x(\varphi = 30^\circ, x = 0) = \frac{15^2}{8 \times 5^3} (360 \times 5,01 \times 0,274 - 24 \times 6,88) = 74,0 \text{ t/m},$$

$$n_{x\varphi}(\varphi = 17,3^\circ, x = 7,5) = \frac{7,5}{5^2} (120 \times 5,01 \times 0,144 - 24 \times 6,88 \times 0,274) = -10,0 \text{ t/m},$$

$$n_\varphi(\varphi = 0) = -\frac{1,24 \times 2}{5} - 0,25 \times 5 = -1,75 \text{ t/m},$$

$$n_\varphi(\varphi = 30^\circ) = -\frac{1}{5} (30 \times 5,01 \times 0,075 - 12 \times 6,88 \times 0,274 + 2 \times 1,24) - 1,25 = 0,52 \text{ t/m},$$

$$m_\varphi(\varphi = 0) = -0,027 \text{ tm/m},$$

$$m_\varphi(\varphi = 20^\circ) = 5,01 \times 0,00184 - 6,88 \times 0,015 + 1,24 \times 0,1225 - 0,027 = +0,031 \text{ tm/m},$$

$$m_\varphi(\varphi = 30^\circ) = 5,01 \times 0,021 - 6,88 \times 0,075 + 1,24 \times 0,274 - 0,027 = -0,097 \text{ tm/m}.$$

Die Veränderung der Schnittkräfte wurde in Abb. 5 veranschaulicht.

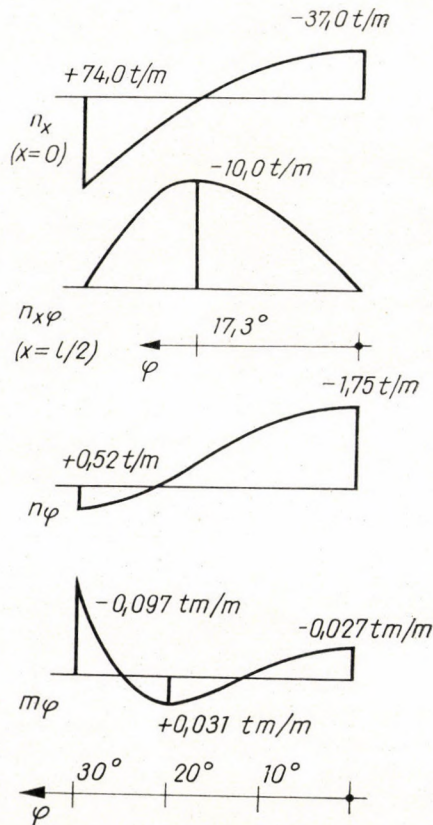


Abb. 5

SCHRIFTTUM

1. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. 3. Auflage, Springer-Verlag, Wien (1954).
2. LUNDGREN, H.: Cylindrical Shells. The Danish Technical Press. The Institution of Danish Civil Engineers. Copenhagen (1951).
3. SZMODITS, K.: Héjszerkezetek statikája (Die Statik der Schalenkonstruktionen). Budapest (1953). (In ungarischer Sprache.)
4. Proceedings of a Symposium on Concrete Shell Roof Construction, 2—4 July 1952. Published and printed by Cement and Concrete Association London (1954).
5. RÜDIGER—URBAN: Kreiszyllinderschalen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Eigenschaften der langen, flachen Kreiszyllinderschale ermöglichen es, gewisse Vereinfachungen und Vernachlässigungen in die Schalengleichungen einzuführen. Mit Hilfe dieser erhält man im Falle einer in der Längsrichtung der Tonne wirkenden gleichmäßig verteilten Belastung, für das in der Querrichtung auftretende Biegemoment die außerordentlich einfache Differentialgleichung

$$\frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \varphi^8} = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist ein Polynom siebenter Ordnung, dessen freie Konstanten aus den Randbedingungen bestimmt werden können. Abschließend wurde das Verfahren an Hand eines Zahlenbeispiels vorgeführt.

THE BENDING THEORY OF LONG OBLATE CIRCULAR-CYLINDRICAL SHELLS

E. DULÁCSKA

SUMMARY

The properties of long oblate circular-cylindrical shells give the possibility for the introduction of certain simplifications and negligences in their equations. Using these, we obtain, in the instance of a uniformly distributed load acting in the direction of the shell's longitudinal axis, the following exceedingly simple differential equation of the cross-directed bending moment:

$$\frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \varphi^8} = 0.$$

The solution of this differential equation is a polynome of the seventh power, the free constants of which could be determined from boundary conditions. Finally, the procedure in question was explained on hand of a numerical example.

THÉORIE DE FLEXION DES VOILES CYLINDRIQUES CIRCULAIRES LONGS, APLATIS ET ÉLASTIQUES

E. DULÁCSKA

RÉSUMÉ

Dans les équations du voile cylindrique circulaire long et aplati on obtient, à l'aide des simplifications introduites en tenant compte de ces propriétés, l'équation différentielle extrêmement simple

$$\frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \varphi^8} = 0.$$

exprimant le moment transversal, en cas de charges uniformément réparties dans le sens de l'axe longitudinal du voile.

La solution de l'équation différentielle est un polynôme du septième degré, dont les constantes libres peuvent être déterminées des conditions au contour. Le procédé est illustré par un exemple numérique.

ТЕОРИЯ ИЗГИБА ДЛИННЫХ, ПЛОСКИХ И ЭЛАСТИЧНЫХ КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Э. ДУЛАЧКА

РЕЗЮМЕ

Свойства длинных, плоских, круглоцилиндрических оболочек позволяет ввести определенные упрощения и пренебрежения в уравнения оболочек. При помощи упомянутых выше в случае равномерно распределенной нагрузки, действующей в продольном направлении оболочки, представляется возможным получить исключительно простое дифференциальное уравнение для момента изгиба, возникающего в поперечном направлении:

$$\frac{\partial^8 m_{\varphi}}{\partial \varphi^8} = 0.$$

Решение приведенного выше дифференциального уравнения представляет собой полином седьмого порядка, свободные константы которого представляется возможным определить по краевым условиям. В заключение этот метод демонстрируется числовым примером.

SOME THEORETICAL QUESTIONS ON CLASSIFYING AND SEPARATING HYDROCYCLONES

Prof. G. TARJÁN

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES,
INSTITUTE OF MINERAL DRESSING, TECHNICAL UNIVERSITY, MISKOLC

[Manuscript received February 3, 1960]

While advancing towards the under- and overflow located on the axial line, the medium entering the cyclone at a certain velocity and pressure, revolves at a great velocity in the hydrocyclone. The first drawing of the upper row in Fig. 1 tries to give an idea of the radial and axial medium flow, the second one demonstrates the corresponding flow lines. A very great part of the medium leaving through the overflow (vortex finder) is produced by the integration of partial flows torn from the downwards directed flow along the wall of the cyclone, while the smaller part of the flow (about 10–20%) is produced by escape of same along the outer wall of the vortex finder and the cover of the cyclone. The relative ratio of the medium parts leaving through the over- and underflow depends on the relative size of the outlets.

Approximately, the formula

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{1}{1 + 1,1 \left(\frac{r_a}{r_0} \right)^3}$$

holds, where Q is the total quantity of the medium, Q_0 the one leaving through the upper outflow, r_0 and r_a the radii of the overflow and the underflow, respectively. In the cylindrical section of the cyclone, in the vicinity of the vortex finder a double-closed vortex appears, flowing in its middle region upward and outward and on its both sides downward. By connecting those points of the flow line on the second scheme of Fig. 1, where the tangent is horizontal, we receive the line $v_a = 0$ that means the locus of the axial flow being zero (drawing 3) and where the tangent is parallel to the cyclone axis $v_r = 0$, that means that here no radial flow takes place (drawing 4). The arrows on drawings 3 and 4 show the axial (v_a) and the radial (v_r) flow directions, their magnitude also indicating the relative intensity of the flows.

The lines $v_t = \text{const.}$ (and at the same time $p = \text{const.}$) $v_a = \text{const.}$ and $v_r = \text{const.}$ in the lower part of Figure 1 demonstrate the approximate shape of the iso-tangential, iso-axial and iso-radial velocity components of the me-

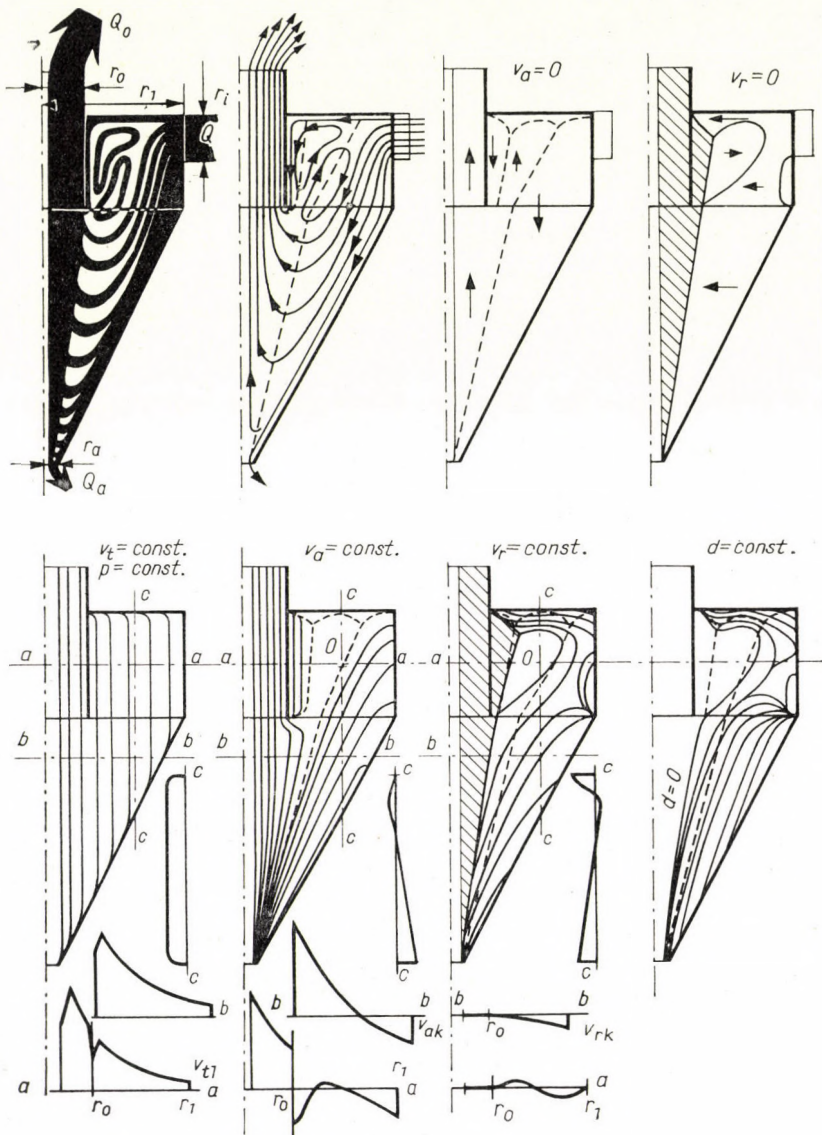


Fig. 1

dium, while the sections beside the figures show the approximate shape of the velocity components v_t , v_a and v_r themselves.

It must be stated, however, that the proportions of the velocities are different on each drawing. At the junction of the cylindrical and conical sections $v_{r1}/v_{a1} \cong \text{tg } a$, where a is the half apex angle of the cyclone. The relative magnitude of the velocity components v_r and v_a appearing along the cone wall,

is thus a function of the apex angle of the cyclone. The tangential velocity component along the cylindrical wall (v_{t1}) is about one order of magnitude greater, than the vectorial sum of the two other velocity components:

$$\frac{v_{t1}}{v_{a1} + v_{r1}} \approx 6 - 10$$

(The value of v_{t1} is in practice between 3 and 12 m/sec.)

Proceeding from the shell towards the axis line the tangential velocity component changes with decrease in the radius, in accordance with the relationship

$$v_t = v_{t1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n$$

where “ n ” remains positive and constant for a relatively long section (falling most frequently within the range 0,5–0,9) afterwards reaching the value of

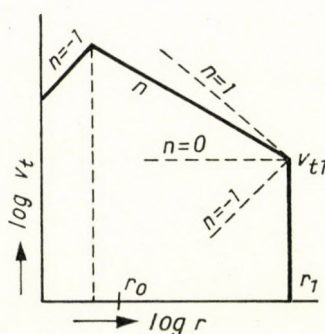


Fig. 2

–1 near the axis line. Thus, the velocity component v_t gradually increases with the diminution in radius, until it reaches its maximum, whereafter it diminishes proportionally to the decrease of the radius. In Figure 2 the change of v_t is plotted against r on a logarithmic scale. Along the axial line — with the hydrocyclone operating under normal conditions — there is no fluid to be found, the vacuum formed here sucks air in only. The lines $v_t = \text{const.}$ are parallel to the axis of the cyclone, that is to say, the loci of isotangential velocities are coaxial cylindrical surfaces.

The axial velocity component directed downward along the wall diminishes at the beginning with the decrease of the distance (radius “ r ”) to the axis and later, after having passed the locus where $v_a = 0$, gradually increases in the opposite direction. At the boundary of the “core of air” its value might exceed that of v_{t1} . In the cylindrical section of the cyclone along the wall as

well as along the vortex finder the medium flows downward, in the rather broad intermediate section, a slight — practically almost negligible — flow directed upward may be observed. The lines $v_a = \text{const.}$ are more or less curved beams of rays, radiating from a pole near the apex of the cyclone. The loci of is-axial velocities are therefore roughly speaking coaxial cone surfaces with common apices.

The radial velocity component of the medium directed towards the axis in the conical section of the cyclone is gradually diminishing with the decrease of the radius, becoming zero at locus $v_r = 0$. In the cylindrical section of the cyclone of the place of the double vortex a slight radial flow directed towards the wall of the cyclone may be observed; under the cover the radial velocity component directed inward is relatively strong. This and the strong axial flow beside the vortex finder is the reason for a too great quantity of "defective" grains being discharged at the overflow of the classifying cyclones. The lines $v_r = \text{const.}$ in the part of the cyclone important from the point of view of the result of cycloning are more or less parallel to one another and include an angle with the axis somewhat greater than that of the cyclone cone generatrix. The loci of isoradial velocities in the essential section of the cyclone are thus about coaxial cone surfaces with identical apex angles.

The lines in the last drawing in the lower row in Fig. 1 indicate the approximate position of the grains of identical size (equal specific gravity) revolving in "equilibrium" in the cyclone. These lines have a surprising analogy to those of $v_r = \text{const.}$

The line $v_a = 0$ is also shown on the drawings $v_r = \text{const.}$ and $d = \text{const.}$ in Fig. 1. This is the boundary separating the mediums discharging at the overflow and underflow, respectively. The grains revolving here in equilibrium give the limit grain size of the classification, while the specific gravity of the suspension developed here is the separating specific gravity of heavy media cyclones.

On the elemental part of the medium of dA cross sectional area, of thickness dr , and specific gravity γ revolving in the cyclone on radius r at velocity v_t , centrifugal force

$$C = \frac{\gamma dA dr v_t^2}{gr}$$

is acting. If the statical pressure in the medium at loci r resp. $r + dr$ is p resp. $p + dp$ on the elementary part of the medium with thickness dr and cross section dA towards the axis of the cyclone is acting a pressure $P = dA \cdot dp$. In case of equilibrium $P = C$, that means

$$dp = \frac{\gamma v_t^2 dr}{gr} \quad \text{that is} \quad \frac{dp}{dr} = \frac{\gamma v_t^2}{gr}$$

Thus in the hydrocyclone the statical pressure drop is in direct proportion to the centripetal acceleration of the medium, that is on a given radius r so is proportional to the square of the tangential velocity.

By substitutions

$$\frac{P}{\gamma} = H_s \quad \text{and} \quad \frac{v_t^2}{2g} = H_v$$

our differential equation may be brought to the form

$$dH_s = \frac{2 H_v \cdot dr}{r} \quad \text{resp.} \quad \frac{dH_s}{dr} = \frac{2H_v}{r}$$

where H_s and H_v are the statical and velocity pressure heads expressed in liquid column.

It results from the differential equation of the pressure drop that the surfaces $v_t = \text{const.}$ and $p = \text{const.}$ will be coaxial, cylindrical surfaces as is shown in the first drawing of the lower row in Fig. 1.

Let us imagine that further out at a distance dr from the cylindrical surface with radius r , constant pressure p and velocity v_t , there is another cylindrical surface on one point of which the pressure is different, for instance lower — and thus the pressure drop dp/dr is lower too — than it is at the rest of the surface. According to the differential equation above the tangential component of the medium flow ought to be lower at this point too, than at the remaining parts of the cylindrical surface. This, however, would contradict the fact, that fluid flows from loci of higher pressures toward those where the pressure is lower, that is to say that a greater quantity of liquid gets here, than to other parts of the cylindrical surface, so that the velocity of the liquid and — according to the formula — at the same time the pressure gradient and the pressure itself must also increase [1].

The coaxial cylindrical surfaces, thus inevitably become surfaces of constant statical pressures and tangential velocities.

In the drawing $v_t = \text{const.}$ (and $p = \text{const.}$) of Fig. 1 — in accordance with the facts — the slight decline of the statical pressure near the wall of the cyclone and the decrease of the tangential component of the medium flow — both due to friction occurring here — are indicated too. The consequence of this is the great axial velocity of the medium along the cyclone shell, and along the vortex finder, respectively its high radial velocity along the cover. To these places of reduced pressure a relatively great quantity of medium flows to the detriment of those with higher pressures. But with the decrease of pressure also the tangential velocity of the medium decreases here, so that the greater medium flow finds its way along the lines of increased axial

and radial velocities. As a consequence of the foresaid, at places of greater wall friction the non-tangential (axial or radial) flows will be greater. The intensity and quantity of the non-tangential flow along the cover and the vortex finder causing the defective grains at the overflow may be successfully diminished by shaping these places so as to be smooth and to have low friction. The shape of the curves $v_a = f(r)$ and $v_r = f(r)$ thus the loci of the lines $v_a = \text{const.}$ (and among them the one $v_a = 0$) $v_r = \text{const.}$ and $d = \text{const.}$ probably also depends upon the surface roughness of the cone wall (Fig. 3). If the upper section of the cone is rougher and its lower part smoother the shape of the line

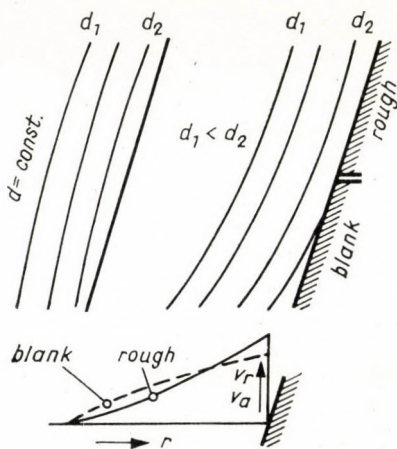


Fig. 3

$d = \text{const.}$ might probably be similar to the right side drawing of Fig. 3, while in a cone having a constant friction throughout, rather the shape of lines $d = \text{const.}$ as shown in the left-side drawing in the figure are to be considered as usual. The wall friction can be different even in case of different materials of identical smoothness; hydrophilic ones having a higher, hydrophobic ones a lower friction.

The integration of the differential equation $dp = \frac{\gamma v_t^2 dr}{gr}$ leads to a formula expressing the static pressure p as a function of r . By substituting for $v_t = v_{t1} \left(\frac{r_1}{r}\right)^n$ — in case of γ being constant, we get

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} = \frac{v_{t1}^2}{2gn} \left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^{2n} - 1 \right],$$

or

$$H_{s1} - H_s = \frac{H_{v1}}{n} \left[\left(\frac{r_1}{r} \right)^{2n} - 1 \right]$$

whence, when $n = 1$, we get $H_{s1} - H_s = H_v - H_{v1}$ that is Bernoulli's theorem valid for frictionless flow: $H_s + H_v = H_{s1} + H_{v1} = \text{const.}$ If friction losses occur, too, $n < 1$ and then the formula $H_s + \frac{H_v^n}{n} = H_{s1} + \frac{H_{v1}^n}{n}$ holds.

The value of $\frac{1}{n} \left[\left(\frac{r_1}{r} \right)^{2n} - 1 \right]$ is a positive number at any positive or negative value of n , thus advancing from the cyclone wall towards the axis line the static pressure decreases even when n is negative. (n is generally a positive number, but *e. g.* according to a verbal information received from Mr. V. I. Klassen for n also negative values were being measured in hydrocyclones by the Ore Dressing Section of the Mining Institute of the Soviet Academy of Sciences. In this case not only the static pressure, but also the velocity head, that is the tangential velocity of the medium flow also decreases when advancing from the shell towards the axis line.)

On the boundary of the air core along the axis there is a vacuum, thus there $p < 1 \text{ kg/cm}^2$, that is H_s is less than the height of the medium head of 1 atmosphere. To a somewhat greater radius pertains $p = 1 \text{ ata}$ and to the maximum velocity of v_t pertains a still greater radius and $p > 1$, appearing, as a rule inside the vortex finder with radius r_0 at radii $(0,7-0,8) r_0$. The pressure 1 ata pertains to radius φr_0 where the value of φ probably might be about $0,6-0,7$. The medium head, according to the total pressure drop $p_1 - 0 = p_1 \text{ abs. atm.}$ in the cyclone is thus given by the equation

$$H_{s1} = \frac{H_{v1}}{n} \left[\left(\frac{r_1}{\varphi r_0} \right)^{2n} - 1 \right].$$

With the substitutions of

$$b = \sqrt{\frac{H_{v1}}{H_{s1}}} \quad \text{and} \quad a = \frac{r_1}{\varphi r_0}$$

the formula

$$\frac{1}{b^2} = \frac{a^{2n} - 1}{n}$$

is given.

From this knowledge of a and b the value of n may be computed. The correlation of a , b and n are given by the curves drawn with unbroken lines in Figs. 4 and 5. Instead of the difficult computation with an exponential equation, the values of n may be taken from these curves too. (It will be noticed

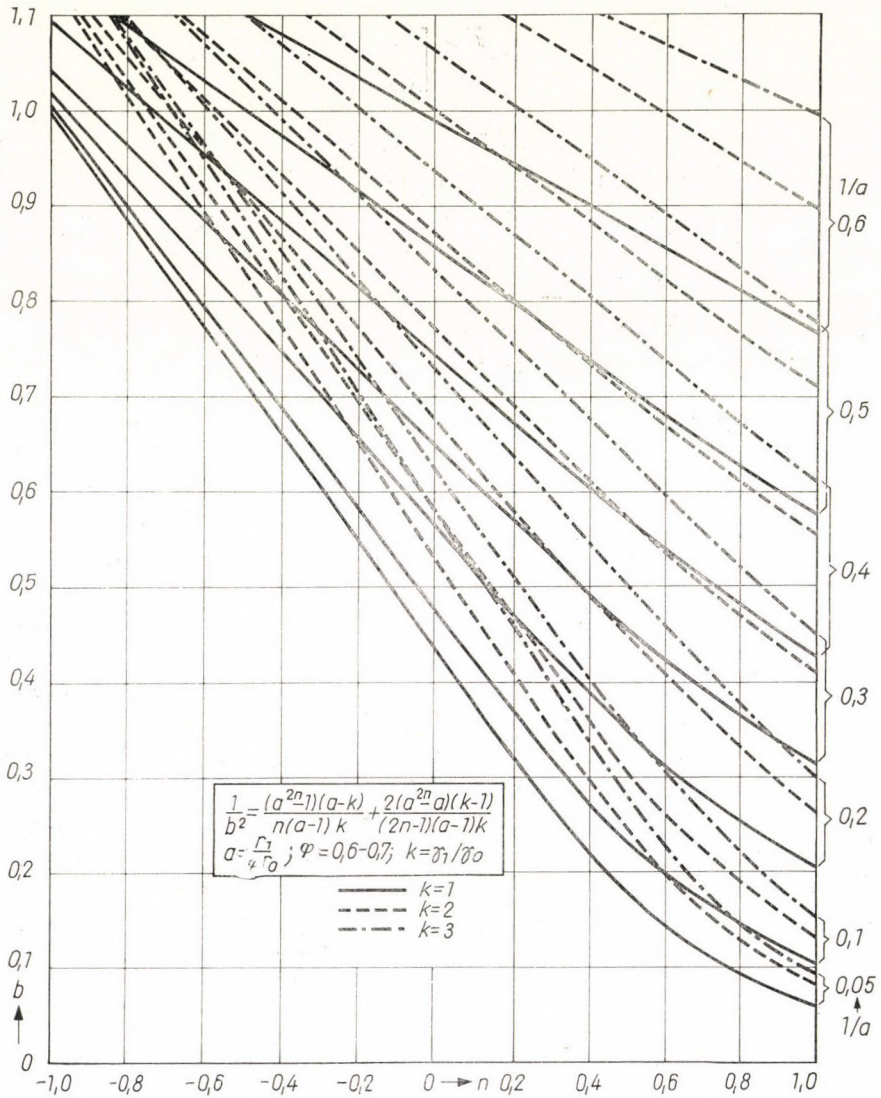


Fig. 4

that the straight sections of the curves in reality here replace somewhat curved ones, but the deviation between the straight and effective curved lines throughout is less than 0,01 b).

In the formula

$$b = \sqrt{\frac{H_{v1}}{H_{s1}}} = \frac{v_{t1}}{\sqrt{2gp_1/\gamma_1}}$$

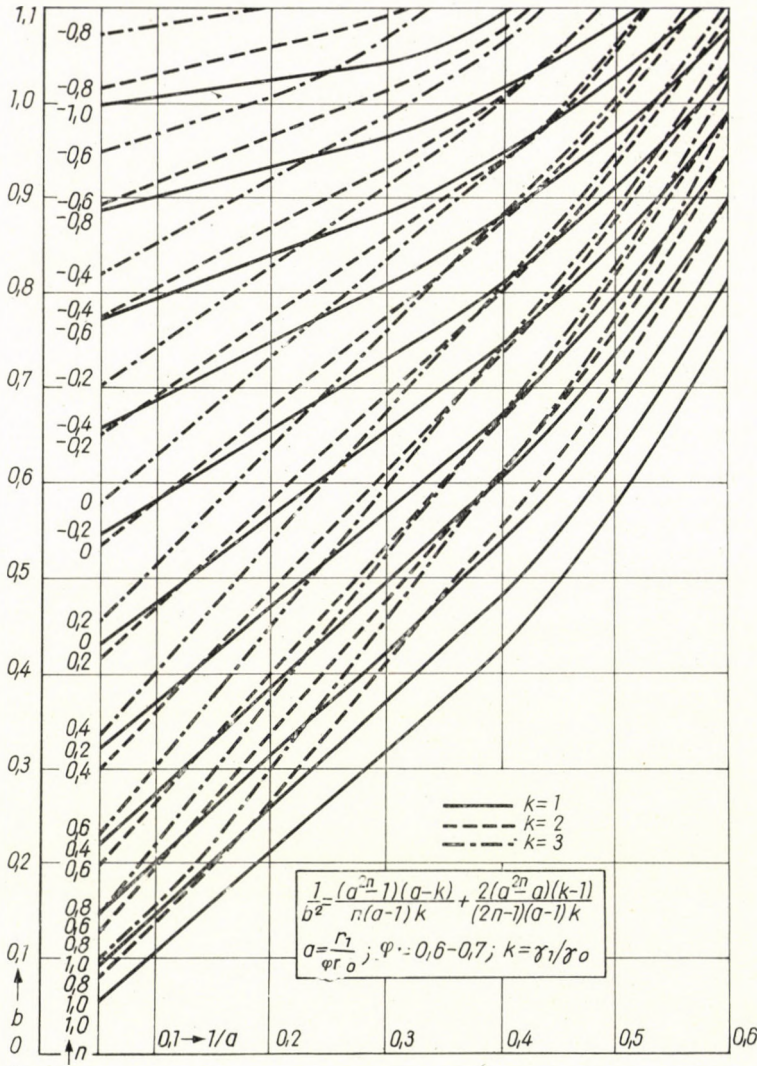


Fig. 5

p_1 is the static overpressure appearing on radius r_1 at the periphery of the cyclone. $H_{s1} = p_1/\gamma_1$ is the corresponding static head expressed in terms of the medium head of specific gravity γ_1 , v_{t1} is the peripheral tangential medium velocity (pertaining to radius r_1) and $H_{v1} = \frac{v_{t1}^2}{2g}$ is the corresponding velocity head. p_1 and v_{t1} , that is H_{s1} and H_{v1} in the formula are generally different from pressure p_i and velocity v_i to be measured in the inlet pipe, and are also different from head values $H_{si} = p_i/\gamma_i$ and $H_{vi} = v_i^2/2g$ corresponding to

them. Overpressure p_i is directly indicated by the manometer fitted onto the inlet pipe, velocity v_i may be computed by the relationship $v_i = \frac{Q}{\pi r_i^2}$, where Q is the amount of pulp entering the cyclone (or discharged from there at the two outlets) during the time unit, r_i is the radius of the inlet duct. The relationship $H_{si} + H_{vi} = H_{s1} + H_{v1} + Z$ holds here too, where Z is the loss in pressure head due to a sudden change in cross section, vortex, friction etc. If the value of Z can be neglected, we come to Bernoulli's equation

$$H_s + H_v = \text{const.}$$

(By providing a manometer also on the cylindrical wall of the hydrocyclone the pressure H_{s1} may be measured directly and from the relationship

$$H_{si} + H_{vi} \cong H_{s1} + H_{v1}$$

conclusion can be drawn on the approximate value of H_{v1} and v_{t1} , respectively. Data for H_s , $H_s + H_v$ and $H_s - H_v$ appearing at the periphery of the cyclone or anywhere inside of same or in the inlet duct may be obtained by Pitot measurement too, from these data H_s and H_v can be calculated. The accuracy of the Pitot measurements, however, is very limited).

The value of $e = v_{t1}/v_i$ may be both less or greater than 1. Most researchers found that $e < 1$. E. g. for e , FONTEIN and DIJKSMAN [1] give values lying between 0,15 and 0,79. The greater $\text{Re} = 2v_i r_1 / \nu$, the "Reynold's number of the cyclone" is, the greater e will be. (ν is the kinematic viscosity of the medium). According to D. BRADLEY [2], for e KELSALL obtained values lying between 0,69–0,81 and found the relationship $e = k (\text{Re})^{0,14}$. JOSHIOKA and HOTTA found that $e = 3,7 \frac{r_i}{r_1}$ (E. g. in case $r_i = r_1/7$ $e = 0,53$). The value of e depends upon the magnitude of n too; when $n = 0,8$ e was found to be between 0,3 and 0,9, for the "normal" cyclone ($r_1 = 7r_i = 5r_0$) $n = 0,8$ and $e = 0,45$. According to LILGE, FREGREN and PURDY [3] however, in a cyclone with $r_1 = 3'' = 2,3r_i = 2,3r_0$, $\alpha = 10^\circ$, $e = 1,5$ and $n = 0,27$. W. F. CAREY [4] says that for the cyclone of LILGE and collaborators by reason of "theoretical considerations" for e 1,2 was obtained.

From equation

$$\frac{1}{b^2} = \frac{a^{2n} - 1}{n}$$

the conclusion may be drawn — as is shown directly in Fig. 4 — that if $a = \text{const.}$ n would decrease with b increasing. n may vary theoretically between $+1$ and -1 , practically between 0 and $+1$. Increasing the diameter of the inlet duct ($2r_i$) and the apex angle of the cyclone (α) n increases and by

increasing the length (h_1) of the cylindrical section of the cyclone n decreases; by raising the inlet pressure (p_i) or by enlarging one of the outlets (r_0, r_a) n would alter but insignificantly, or not at all. In Table 1 is shown how the different data characterizing the operation of the cyclone are altered by the relative growth of any element of the cyclone. By + the increase, by - the decrease is indicated, while 0 means that there is practically no change at all occurring. + and - in brackets give minor changes, (+0) and (-0) indicate the directions of the practically negligible alterations.

Table 1

+	H_{s1}	H_{v1}	b	n	Q	$Q_a\%$	σ_a	At locus $v_a = 0$		
								v_l	v	d
r_0	-	(+)	+	0	+	-	+	(+0)	+	+
r_i	(-)	-	-	+	+	(-)	(-)	(-0)	(-0)	(0)
r_a	0	0	0	0	(+)	+	-	0	-	-
h_1	-	(+)	+	-	(+)	(+)	-	(-0)	(-)	-
a	+	(-)	-	+	-	(-)	+	(-0)	+	+
p_i	+	+	0	0	+	(-)	(+)	+	(+)	-
γ_i	0	0	0	0	0	0	+	0	0	+

Q is the total amount of pulp, $Q_a\%$ the percentage fraction of same discharged at the underflow, σ_a the volume ratio of the solid matter at the underflow and d the grain size of the classification.

By increasing r_0 , the resistance of the cyclone towards medium flow will decrease, the medium has to pass a shorter way from the inlet to the outlet and there is a lower static pressure needed on radius r_1 . But if the static pressure decreases, the velocity pressure would automatically increase as the sum of these two values is identical - not taken into calculation pressure drop Z - to the sum $H_{s1} + H_{v1}$ appearing in the inlet duct. By the diminution of the resistance of the cyclone a direct decrease in H_{s1} is brought about, as the increase in H_{v1} is an indirect result, therefore the alteration of the latter is of a relatively lesser degree. The increase in r_0 involves an increase in b and a decrease in a , *i. e.* increase in $1/a$. As is shown in Fig. 4 to $n = \text{const.}$ the simultaneous increase in $1/a$ and b pertains. By increasing r_0 , n would not change at all, or only to a minor degree. Whether the value of n keeps constant or whether it increases, depends upon the initial values of b and n respectively, and upon the extent to which the change of a involves an alteration in the magnitude of b .

By increasing r_i , v_{i1} , *i. e.* H_{v1} would decrease directly; in the same cyclone a lower static pressure drop is needed to bring about a flow of smaller velocity

than is, also H_{s1} is decreasing, but the change of H_{s1} is the relatively minor indirect effect, thus after all b decreases and n increases.

Increase in h_1 or decrease in a enlarges the cylindrical surface coaxial to the axis of the cyclone on the upper and lower parts of which, (on the cone wall and on the cover) the wall friction appears. Under such circumstances a relatively smaller ratio of the total medium amount rotating over the cylindrical surface with velocity v_t rubs against the cyclone wall with its major part flowing "without friction". Herewith the resistance of the cyclone to medium flow and thus H_{s1} and with them the resistance of the cyclone towards friction also decreases. But this causes — as a secondary effect — a relatively smaller increase in flow velocity and thereby in H_{v1} too. Increase in h_1 or decrease in a thus involves increase in b and decrease in n .

By increasing p_i , H_{s1} and H_{v1} will simultaneously and nearly identically increase, thus b remains practically unchanged (or decreases slightly) and n also remains unaltered (or increases to a small degree).

The increase of γ_i and r_a will practically have no effect on the value of n . If $r_a > r_0$ $a \cong r_1/r_a$, that is r_a is going to take the place of r_0 . (According to BRADLEY [2], n decreases in that case when r_0 decreases or r_a increases.)

The equation $\frac{1}{b^2} = \frac{a^{2n} - 1}{n}$ was obtained by integrating the differential equation

$$dp = \frac{\gamma}{g} \frac{v_t^2}{r} dr$$

on condition of γ being constant. This condition holds in a classifying cyclone operating with dilute pulp, but in heavy media hydrocyclones the specific gravity of the medium generally changes with the radius.

E. g. if it is assumed, that the specific gravity of the medium is diminishing linearly from γ_1 to γ_0 , in the section between r_1 and r_0 — introducing the substitution $k = \gamma_1/\gamma_0$ — the integration of the differential equation, the formula

$$\frac{1}{b^2} = \frac{(a^{2n} - 1)(a - k)}{n(a - 1)k} + \frac{2(a^{2n} - a)(k - 1)}{(2n - 1)(a - 1)k}$$

is reached. The broken curves in Figs. 4 and 5 pertain to $k = 2$, the dash and dotted ones to $k = 3$.

By the assumption of γ_1 being constant from r_1 to \bar{r} and linearly decreasing down to γ_0 between \bar{r} and r_0 and by substituting for $x = r_1/r$, the formula

$$\frac{1}{b^2} = \frac{x^{2n} - 1}{n} + \frac{(a^{2n} - x^{2n})(a - kx)}{n(a - x)k} + \frac{2(a^{2n-1} - x^{2n-1})ax(k - 1)}{(2n - 1)(a - x)k}$$

is obtained. (The deduction of the equation will be neglected.)

The lines of Fig. 5 beside $1/a < 0,3$ and $a > 3$ respectively are straight ones. Thus $b = b_0 + m/a$. For the lines $k = 1$ is with good approximation $m = 1,1$ and $b_0 = 0,36 - 0,5 n$, if $n < 0,5$ that is $b_0 = 0,22 - 0,22 n$ if $n > 0,5$. Substitution and rearrangement leads to the formula

$$n = 0,72 + 2,2/a - 2b \text{ if } n < 0,5 \text{ that is } n = 1 + 5/a - 4,55b$$

if $n > 0,5$. *E. g.* in case $a = 5$ and $b = 0,3$, according to the first formula $n = 0,72 + \frac{2,2}{5} - 2 \cdot 0,3 = 0,56$; but as $n > 0,5$, the right magnitude is obtained by the other equation: $n = 1 + 5/5 - 4,55 \cdot 0,3 = 0,64$.

Table 2

p. s. i.	Water						Magnetite suspension, spec. gravity 2,4					
	v_{t1}	H_{v1}	v_t	H_{vt}	H_{st}	ΣH_t	v_{t1}	H_{v1}	v_t	H_{vt}	H_{st}	ΣH_t
80	13,73	9,58	9,15	4,26	56,25	60,51	8,30	3,52	5,54	1,57	23,40	24,97
40	9,16	4,28	6,11	1,91	28,12	30,03	5,60	1,60	3,73	0,71	11,70	12,41
20	6,36	2,07	4,25	0,92	14,06	14,98	3,76	0,72	2,51	0,32	5,85	6,17
10	4,61	0,86	2,74	0,38	7,03	7,41	2,54	0,33	1,69	0,15	2,93	3,08

Table 3

p. s. i.	Z%	Water				Magnetite suspension, spec. gravity: 2,4					
		ΣH_t	H_{st}	b	n	ΣH_t	H_{st}	b	n		
									$k = 1$	$k = 2$	
80	20	48,50	38,92	0,496	0,06	20,0	16,48	0,461	0,13	0,31	
	10	54,50	44,92	0,461	0,13	24,5	20,98	0,406	<u>0,28</u>	0,42	
	0	60,51	50,93	0,434	0,18	25,0	21,48	0,395	<u>0,26</u>	0,45	
40	20	24,0	19,72	0,466	0,12	9,9	8,30	0,439	0,17	0,37	
	10	27,04	22,76	0,455	0,14	11,18	9,58	0,408	<u>0,23</u>	0,43	
	0	30,03	25,75	0,407	<u>0,23</u>	12,41	10,81	0,385	<u>0,28</u>	0,47	
20	20	12,0	9,94	0,457	0,13	4,94	4,22	0,413	<u>0,22</u>	0,41	
	10	13,5	11,44	0,425	0,20	5,56	4,84	0,386	<u>0,28</u>	0,47	
	0	14,98	12,92	0,400	<u>0,25</u>	6,17	5,45	0,364	<u>0,32</u>	0,52	
10	20	5,94	5,08	0,411	<u>0,23</u>	2,46	2,13	0,393	<u>0,25</u>	0,46	
	10	6,67	5,81	0,385	<u>0,28</u>	2,77	2,44	0,367	<u>0,31</u>	0,52	
	0	7,41	6,55	0,362	<u>0,32</u>	3,07	2,75	0,346	0,36	0,56	

According to experiments carried out by LILGE and collaborators [3] (Fig. 10), in a cyclone with $2r_1 = 6''$ and $2r_0 = 1\frac{3}{8}''$ at different inlet pressures (expressed in p.s.i.) with water, that is with a magnetite suspension of specific gravity 2,4 the tangential velocities (m/sec) listed in the column headed v_{t1} in Table 2, appeared. Calculated with values $e = 1,5$ in the inlet tube velocities v_i (m/sec) were obtained. The values H_{v1} and H_{vi} (expressed in term of m pulp head) are calculated by the formula $H_v = v^2/2g$, while H_{si} is the m pulp head corresponding to the listed inlet pressures. (E. g. 80 p.s.i. = 5,625 at = 56,25 m water head, that is $56,25/2,4 = 23,40$ m pulp head of specific gravity 2,4.) The values of ΣH_s listed in Table 3 were taken from values $\Sigma H_i = H_{si} + H_{vi}$ in Table 2 by assuming the losses $Z = 20\%$, 10% or 0% . Data in the other headings were calculated with formulae $H_{s1} = \Sigma H_i - H_{v1}$, $b = \sqrt{H_{v1}/H_{s1}}$, $n \cong 0,72 + 2,2/a - 2b$. In the relation $a = \frac{r_1}{\varphi r_0}$ computing with $\varphi \cong 0,65$

$a = \frac{6}{0,65 \cdot 1,376} = 6,71$ and $1/a = 0,149$ that is $n = 1,048 - 2b$ in case of $k = 1$. The values for n valid for magnetite suspensions, to be seen beside $k = 2$ were taken from Figure 5, by marking the values for b from Table 3 on the perpendicular $1/a = 0,149$. Both for water and magnetite suspension LILGE found the value $n = 0,268$. The values of n listed in Table 3 which differ from 0,268 to not more than 10%, are cursiv and underlined by line, those falling within the limits of error between 10 and 20% are cursiv not underlined.

By computing with LILGE's experimental data $n = 0,268$ and $1/a = 0,149$ with the formula $b = 0,36 + 1,1/a - 0,5 n$ valid in case $n < 0,5$, we come to $b = 0,39$. By using this value we obtain, in good agreement with LILGE's experimental data from Fig. 5 for $k = 1$ $n = 0,27$ and for $k = 2$ $n = 0,46$. As compared with $b = 0,39$ the data for b listed in Table 3 have the following percentile "error"-distributions:

number of data	deviation in %
1	27
8	between 10 and 20
5	„ 5 „ 10
10	less than 5

The average deviation of the 8 b -data pertaining to $Z = 20\%$ from 0,39 is $\frac{+106}{8} = +13,2\%$ that of the ones pertaining to $Z = 10\%$ $\frac{+34 - 8}{8} = +3,25$

and that of the data pertaining to $Z = 0\%$ is $\frac{+20 - 26}{8} = \frac{-6}{8} = -0,75\%$.

Plotting these data, on the curve obtained the deviation $\pm 0\%$ appears at $Z = 3\%$.

Or starting *e. g.* from the data of the experimental series by D. F. KELSALL [5] ($2r_1 = 3''$, $2r_0 = 1/2''$, $2r_i = 5/8''$) and by choosing for Z 16% of ΣH_i , that is by computing with $\Sigma H_1 = 0,84 \Sigma H_i$,

$$a = \frac{r_1}{\varphi r_0} = \frac{3}{0,65 \cdot 0,5} = 9,23$$

($1/a = 0,1083$) from Fig. 5 or equation $n = 1 + 5/a - 4,55b$ the values of n enumerated in the last column of Table 4 are obtained.

Table 4

Psi	at	1/p	v_i m/sec	v_{ti} m/s	e	H_{si}	H_{vi}	H_i	H_1	H_{s1}	H_{s1}	b	n
40	2,812	59,82	5,06	3,67	0,725	28,12	1,15	29,27	24,60	0,69	23,91	0,170	0,77
30	21,09	52,31	4,42	3,20	0,724	21,09	1,00	22,09	18,57	0,52	18,05	0,170	0,77
20	1,406	43,27	3,66	2,70	0,737	14,06	0,68	14,74	12,38	0,37	12,01	0,176	0,74
10	0,703	31,51	2,66	1,88	0,706	7,03	0,60	7,63	6,41	0,18	6,23	0,170	0,77

According to direct measurements as was carried out by KELSALL, in these experimental series the value of n was found to be 0,77. This agreement of calculated and experimental data at the same time proves the values $\varphi = 0,65$ and $Z = 16\%$ valid in "normal" cyclones.

The centrifugal power

$$C = \frac{d^3 \pi (\delta - \gamma) v_i^2}{6 gr}$$

acting upon the grain of specific gravity δ and diameter d revolving in equilibrium on radius r and the medium resistance $P = \frac{c \gamma d^2 \pi}{2g \cdot 4} v_r^2$ are equal. The value of the medium resistance factor c is a function of the Reynolds' number $Re = \frac{dv_r \gamma}{\eta g}$. With $Re < 1$ (STOKES) $c = 24/Re$, with Re lying between 30 and 300 (ALLEN) $c = 10/\sqrt{Re}$ and when $Re > 800$ (NEWTON) $c = 0,43$. By substituting the adequate magnitudes of c the following relations may be obtained: $Re < 1$ (STOKES)

$$d = \sqrt{\frac{18 \eta g r v_r}{(\delta - \gamma) v_i^2}}$$

$Re = 30 - 300$ (ALLEN)

$$d = \left(\frac{15 \sqrt{g \gamma \eta} r v_r^{3/2}}{2(\delta - \gamma) v_i^2} \right)^{2/3}$$

$Re > 800$ (NEWTON)

$$d = \frac{0,32 \gamma r v_r^2}{(\delta - \gamma) v_t^2}$$

In cyclones $Re > 800$ practically does not occur. At any Reynolds' number Newton's equation keeps valid, either in the form

$$d = \frac{3c \gamma r v_r^2}{4(\delta - \gamma) v_t^2}, \text{ or as } v_r = \sqrt{\frac{4(\delta - \gamma) d v_t^2}{3c \gamma r}},$$

provided that the suitable medium resistance factor c corresponding to the Reynolds' number involved was substituted in the formula. In Table 5 the corresponding values of Re and c are listed.

Table 5

Re	c	Re	c
0,1	241	10	4,15
0,2	126	20	2,62
0,3	64,8	30	2,045
0,6	44,2	40	1,735
0,8	33,8	50	1,540
1,0	27,6	60	1,398
2,0	14,9	70	1,295
4,0	8,32	80	1,213
6,0	6,05	90	1,148
8,0	4,89	100	1,092

Starting from any faulty value of c , by means of iteration the correct c , v_r or d may be reached. The computation is to be repeated with c' pertaining to Re which latter corresponds to v_r (or d) calculated on the basis of a faulty c and this has to be done as long as the corresponding Re and c , as listed in the table, have been found.

$$v_r' = v_r \sqrt{\frac{c}{c'}}, \quad v_r'' = v_r' \sqrt{\frac{c'}{c''}} \quad \text{or} \quad v_r'' = v_r \sqrt{\frac{c}{c''}}, \quad \text{etc.}$$

If an incorrect d was computed by Stokes' formula (for which $Re > 1$) proper grain size d' may be reached by the relation $d' = d \frac{cRe}{24}$, repeating the computation as often as the corresponding c and Re are obtained. The value of

the factor $\frac{cRe}{24}$ with which the grain size as computed by Stokes' formula has to be multiplied in the interjacent section between the validity range of Stokes' and Allen's formula is as follows:

Re	1	2	4	6	8	10	20	30
$cRe/24$	1,15	1,24	1,39	1,51	1,63	1,73	2,18	2,56

E. g. in case $r = 1,5$ cm, $v_r = 30$ cm/sec, $v_t = 800$ cm/sec if $\delta = 2,65$ g/cm³, $\gamma = 1$ g/cm³, $\eta = 10^{-5}$ gsec/cm², according to Stokes' formula

$$d = \sqrt{\frac{18 \cdot 981 \cdot 1,5 \cdot 30}{10^5 \cdot 1,65 \cdot 800^2}} = 0,00275 \text{ cm} = 27,5 \mu.$$

Then $Re = \frac{d v_r}{\nu} = \frac{0,00275 \cdot 30}{0,01} = 8,76$, to which the factor 1,67 pertains, that is $d = 1,67 \cdot 27,5 = 46 \mu$, consequently $Re = 8,76 \cdot 46/27 = 14,7$ and the factor is 1,95. That is $d = 1,95 \cdot 27,5 = 54 \mu$, $Re = 8,76 \cdot 54/27,5 = 17,2$ where 2,05 is the factor, *i. e.* $d = 2,05 \cdot 27,5 = 56,5 \mu$. Here $Re = 8,76 \cdot 56,5/27,5 = 18$, where the factor is 2,09, that is $d = 2,09 \cdot 27,5 = 57,5 \mu$ being nearly identical to the preceding d value.

The effective grain size "rotating in equilibrium" is 58μ , *i. e.* 2,1 times as much as the value calculated by Stokes' formula.

If $\sigma = 0,45$ $\gamma = 1,74$ g/cm³ and $\eta = 2 \cdot 10^{-3}$ g sec/cm³ computed with Stokes' formula

$$d = 27,5 \sqrt{\frac{10^5 \cdot 1,65}{2 \cdot 10^3 \cdot 0,91}} = 262 \mu; Re = \frac{0,0262 \cdot 30 \cdot 1,74}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 981} = 0,70$$

that is, in a denser medium the validity of Stokes' formula also covers the range of coarser grains. (In pure water in case that $v_r = 30$ cm/sec Stokes' formula is valid only for grains finer than $d = \frac{Re \nu}{v_r} = \frac{1 \cdot 0,01}{30} = 0,00033 \text{ cm} = 3,3 \mu$.)

The medium parts leaving at the under and overflow are parted by a cone surface determined by the line $v_a = 0$ as generatrix. If the limit grain size of the classification is to be determined, the average values of r , v_r , v_t , γ and η by this line must be substituted into one of the d -equations. The correctness of the d -value reached (*viz.* the validity of the equation chosen) must be always controlled by the Reynolds' number $Re = \frac{d \gamma v_r}{\eta g} = \frac{d v_r}{\nu}$ ($\nu = \eta g / \gamma$ is the kinematic viscosity).

For classifying hydrocyclones the specific gravity and viscosity of pure water may generally be substituted for γ and η . The apex of the cone surface of the zero axial velocity is, according to BRADLEY [2], the apex of the cyclone cone, its base being a circle with radius $2,3r_0$ (or $0,38r_1$), lying in the height of the bottom of the vortex finder (ter LINDEN found for gas cyclones the value $2,1r_0$). The bottom of the vortex finder is, as a rule, at the juncture of the conical and cylindrical section. The cone surface area is about $F = 2,3 \pi r_0 L$, where L is the distance between the base circle and the cyclone apex. Through this cone surface passes — subtracting the section occupied by the lower part of the double vortex beside the vortex finder — 80–90% of the total quantity of the overflow. (The residual 10–20% flows towards the overflow along the outer wall of the vortex finder.) The approximate magnitude of the average radial medium velocity flowing through the cone surface may also be obtained by computing with Q_0 total quantity of overflow and the whole cone surface $v_r \cong Q_0/F$. As average radius of the cone surface $2/3$ of the radius of the base circle, that is $r = 1,5r_0$ (or $r \cong r_1/4$) and the corresponding tangential velocity $v_t = v_{t1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n = ev_i \left(\frac{r_1}{1,5r_0} \right)^n$ (or $v_t \cong 4^n \cdot ev_i$) may be taken. (I myself in a previous publication [6] calculated with base circle radius $r = r_1 \frac{r_0}{r_0 + r_a}$.)

As is also indicated by the drawing $d = \text{const.}$ in Fig. 1, in cyclones with a small apex angle the line $v_a = 0$ is nearly parallel to one of the $d = \text{const.}$ lines, this is favourable in point of view of a sharp grain size classification.

The Tromp-curve for classifying cyclones is approximately characterized by the following data:

d/d_{50}	0,50	0,75	1	1,3	1,5	1,7	2,0
Tromp %	7	20	50	80	90	95	100

d_{50} pertaining to Tromp-value 50% is the grain size revolving in equilibrium along the line $v_r = 0$. The grains coarser than necessary get into the overflow, in consequence of the short-circuit flow appearing along the cover and the vortex finder, and of their being involved in the strong axial flow directed upwards at the apex of the cyclone unless they have not been centrifuged out by the strong axial and zero radial flow before reaching the bottom of the vortex finder. The centrifuging is to occur so much the surer, the higher is the final setting velocity (size and specific gravity) of the grains and the longer the way to be covered in axial direction, that is the longer the vortex finder is (respectively, the cylindrical section of the cyclone approximately corresponding to same) and the smaller the apex angle of the cyclone, consequently the longer its conical section.

According to FONTEIN and DIJKSMAN [1, p. 241], the degree to which the grains are being centrifuged out of the axial flow does not depend upon their size, being a function of the specific gravity of the grains only, as in a medium with zero radial velocity only a very short radially directed displacement is needed for the grains to leave the zone of axial flow of great velocity, and meanwhile, their radial velocity does not increase to any extent, that a notable medium resistance would appear; thus for the duration of their presence in the zone of great axial velocity a constant and for the grains of greater specific gravity a higher $\left(-\frac{\delta - \gamma}{\delta} \frac{v_i^2}{r}\right)$ centrifugal acceleration is to be reckoned with.

According to FONTEIN, this is the assumption by the reason of which the effectiveness of the washing cyclones operating with instable suspensions (water + pulp) may be interpreted.

The fine grains, however, within a very short time approach very close to their terminal velocity both in the gravitational as well as in the centrifugal force field, thus their path of dislocation should not be computed by their constant acceleration, but rather by their constant final sinking velocity. In the gravitational force field in case of the validity of Stokes' formula ($Re < 1$)

$$t = \frac{v_0}{g_0} \ln \frac{1}{1-z}, \text{ in case of the validity of Newton's formula (Re} > 800)$$

$$t = \frac{v_0}{2g_0} \ln \frac{1+z}{1-z} \text{ sec time is needed for the velocity to become } z \text{ times as high}$$

as the sinking velocity, where v_0 is the final sinking velocity, $g_0 = g \frac{\delta - \gamma}{\delta}$

the initial acceleration. In the centrifugal force field instead of v_0 as well as of g_0 , $\frac{v_i^2}{gr}$ times as high values present themselves, so that t remains unaltered.

E. g. for 50 μ quartz grains ($\delta = 2,65$) in water ($\gamma = 1$, $\eta = 10^{-5}$) Stokes formula keeps valid; $v_0 = \frac{d^2(\delta - \gamma)}{18\eta} = \frac{0,005^2 \cdot 1,65}{18 \cdot 10^{-5}} = 0,23 \text{ cm/sec,}$

$g_0 = 611 \text{ cm/sec}^2$ and t is at $z = 0,5$ 0,00025 sec, at $z = 0,95$ 0,0011 sec, at $z = 0,99$ 0,0017 sec; that is that during 0,001 sec the final sinking velocity is almost reached. For periods longer than that, the constant final velocity and not the initial acceleration in depending of the grain size, has to be reckoned with.

In the gravitational force field the distance travelled in time t is $s = \frac{v_0^2}{g_0} \left[\frac{g_0 t}{v_0} - \left(1 - e^{-\frac{g_0 t}{v_0}} \right) \right]$ and $\frac{v_i^2}{rg}$ times as long as that in the centrifugal force field. To $z = 0,95$ respectively 0,99 $t = 0,0011$ resp. $t = 0,0017$ and in the gravitational force field $s = 1,87 \cdot 10^{-7}$ respectively $5,2 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$ pertains. If at the place of strong flow along the axis, the centrifugal acceleration is *e. g.* 10 000 times as high as the gravitational one, during this time the 50 μ quartz

grain is travelling only a distance of $1,87 \cdot 10^{-3}$, respectively, $5,2 \cdot 10^{-3}$ cm (19 resp. 52 μ) until it reaches 95% resp. 99% of its final velocity.

The Tromp-curve of the hydrocyclone passes the region of the very low grain sizes not at the height of Tromp-% 0%, but at 100 Q_a/Q , for somewhat greater grains it diminishes to 0% later increasing gradually with the grain size. *I. e.* the very fine pulp particles become parts of the medium and do not move off as compared to the medium in the hydrocyclone. The medium resistance is proportional to the surface, that is to the quadrate of the grain size, the centrifugal force to the volume, that is to the cube of the grain size. The cube of small numbers diminishes faster, than their quadrate does, so that the small slurry particles "get stuck" in the medium and are not able to dislocate in the direction according to their state of equilibrium. The fractions of these grains leaving at the over- and underflow, are thus identical to the quantities of medium leaving.

Advancing along line $v_a = 0$ towards the apex of the cyclone velocity v_t gradually increases; if d remains nearly constant velocity v_r must increase too. A certain $d = \text{const.}$ line remains on line $v_a = 0$ if, in case $\text{Re} < 1$ (Stokes) the corresponding quotient rv_r/v_t^2 , in the case that Re lies between 30 and 300 (ALLEN) the quotient $rv_r^{3/2}/v_t^2$, in case $\text{Re} > 800$ (NEWTON) the quotient rv_r^2/v_t^2 — with γ and η keeping constant — do not alter. If these quotients became smaller on advancing downwards, the grain sizes in state of equilibrium along line $v_a = 0$ gradually decrease in the direction of the apex and vice versa.

Advancing towards the axis line the volume ratio of the solid grains (σ) and at the same time the specific gravity and viscosity of the pulp (γ and η) usually decrease. The alteration of γ' with σ is a linear one: $\gamma' = \sigma(\delta - \gamma) + \gamma$, in the section where σ is small η' too changes linearly with σ ; $\eta' = (1 + 2,5 \sigma) \eta$. In the section of great σ -values, the growth of the viscosity is more rapid and is high multiple of the growths on the specific gravity of the pulp. That is $\gamma'/\gamma = 1 + \frac{\delta - \gamma}{\gamma} \sigma$ and $\frac{\eta'}{\eta} \geq 1 + 2,5 \sigma$. Thus when σ is small the relative growth ratio of the specific gravity of the medium exceeds that of the viscosity if, $\frac{\delta - \gamma}{\gamma} > 2,5$ that is if $\delta > 3,5$. (*E. g.* this is the case for pyrite, magnetite etc.). On the other hand, if $\delta < 3,5$ (*e. g.* for coal, quartz etc.) the viscosity increases more rapidly than the specific gravity whether σ is high or low.

In the strict sense of the word the increase in specific gravity of the medium would occur, only if the solid grains are so fine, that they become constituents to the medium. The specific gravity of these fine suspensions as measured by an areometer — and their viscosity too — is different from the viscosity and specific gravity of pure water. Though in the mixture of coarser grains and water — at low values of σ — the areometer indicates, as if pure water were present, the sinking velocity of the grains is, all the same less than it

would be in pure water. The grains are hindered in free movement by one another; the approximate value of their sinking velocity is to be got by substituting in the formula for γ (specific gravity) and η (viscosity) of the pure liquid the specific gravity $\gamma' = \sigma \delta + (1 - \sigma) \gamma$ and the viscosity η' of the mixture. [In a denser mixture also the decrease in the free transverse section of the medium has to be taken into account by using the factor $(1 - \sigma)$.] In a very dense mixture *e. g.* in that of a jig bed consisting of solid grains and water, the coarse grains behave, as if they were in a liquid of a specific gravity corresponding to that of the mixture of solid material and water surrounding them, and if the specific gravity of the mixture is higher than that of the grain, the latter is driven out upwards, "swimming out", of the bed.

The grain size d is proportional to $\sqrt{\frac{\eta}{\delta - \gamma}}$ (Stokes) respectively, $\sqrt[3]{\frac{\eta \gamma}{(\delta - \gamma)^2}}$ (Allen) and $\frac{\gamma}{\delta - \gamma}$ (Newton) that increases with the growths of γ and η .

Thus, if by the decrease of the radius the specific gravity and viscosity would be decreasing too, advancing along line $v_a = 0$ towards the apex, gradually lower grain sizes are being found as being in equilibrium state as in the case γ and η being constant. Thus the tangent of the lines $d = \text{const.}$, when approaching the apex, is to gradually include smaller angles to the axis line of the cyclone. At a certain pair of values of γ and η , which are decreasing with the radius, the Stokes' formula stops being valid; from this point onward the grains being in the state of equilibrium are gradually greater, than those computed by Stokes' formula, whereby the previous effect is partly compensated.

If there are gradually higher grain sizes being in equilibrium advancing towards the apex along line $v_a = 0$, a stable suspension of great specific gravity is formed in the hydrocyclone.

The lines $v_t = \text{const.}$ are parallel to the axis line of the cyclone. Line $v_a = 0$ includes angle β , the lines $v_r = \text{const.}$ angle ε and the one $d = \text{const.}$ angle ζ with the axis line.

The direction of growths for v_t , v_r , and d is indicated by arrows in Fig. 6. Moving off the apex of the cyclone along any $v_t = \text{const.}$ -line gradually smaller values are found for v_r and d ($\zeta > 0$ if $\varepsilon > 0$, v_r being in the counter of formulae d).

The grain being in a state of equilibrium on line $v_a = 0$ sticks to its position and if any external force were to dislocate it out of its state of equilibrium, it automatically returns to its original trace, thus if $\zeta > \beta$ along line $v_a = 0$ a stable heavy suspension is going to be formed. If *e. g.* the grain marked on line $v_a = 0$ in the left-side drawing in Fig. 7 were turned out to right or left by another particle, impacting with it the axial flow directed up- and downwards on both sides of line $v_a = 0$ and the radial dislocation of the particle towards its own $d = \text{const.}$ -line causes same to run round in a clockwise direc-

tion and forwards it back to its original state of equilibrium in the intersection of $v_a = 0$ and $d = \text{const.}$

The state of equilibrium of grain d (its line $d = \text{const.}$) removed from the intersection and forwarded up or down near line $v_a = 0$ by the low speed axial flow lies *i. e.* beyond line $v_a = 0$ in the section of the axial counterflows.

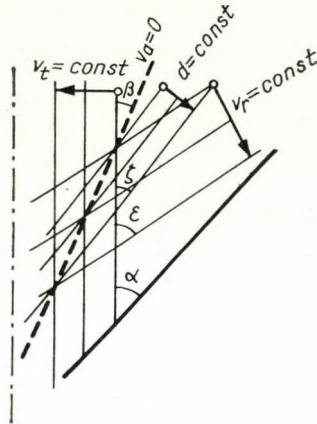


Fig. 6

On the other hand the grain being in a state of equilibrium on line $v_a = 0$ (right-side drawing in the figure, $\zeta < \beta$) when dislocated to right or left will remain in the gradually increasing axial flow directed down- or upward, and is not able to reach line $v_a = 0$ any more even if the dislocated grain came back

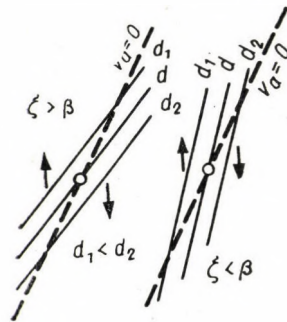


Fig. 7

to its own line $d = \text{const.}$ Thus along line $v_a = 0$ a stable heavy suspension with a density considerably higher than the one of the feed, would not be formed.

The drawings in Fig. 8 try to show approximately how γ and η of the coarse (a, b) and fine (c, d) grain suspensions vary as a function of the distance from the axis line (radius) when $\zeta < \beta$ and $\zeta > \beta$.

In the drawings the locus of line $v_a = 0$ is indicated by radius \bar{r} (at the juncture of the cylindrical and conical sections); the specific gravity appearing here is the specific gravity of the separation taking place in the washing cyclone, the particles with lower sp.gr. will leave at the overflow, those with a higher one at the underflow. When the coarse grain suspension according to drawing a) is used and $\zeta < \beta$, the separating spec. gravity is just a little higher than that

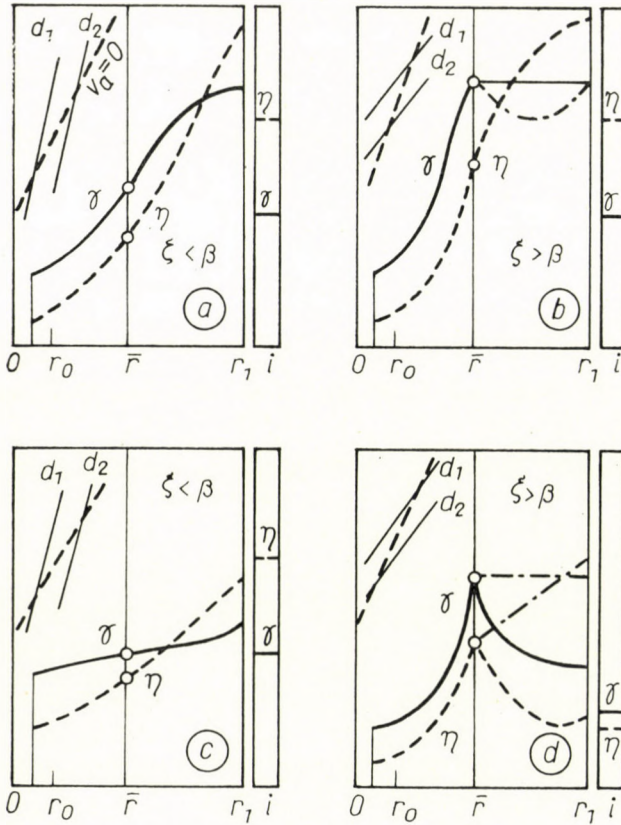


Fig. 8

of the suspension fed; at the underflow the suspension of high specific gravity coming from the environment of the radius r_1 , at the overflow that with low specific gravity, coming from the environment of radius r_0 is leaving.

According to drawing b) when $\zeta > \beta$ the separating sp.gr. is considerably higher than that of the entering suspension. This suspension of high specific gravity would really remain stable, if the entering suspension contains coarser grains in enough quantity to form and keep up also between \bar{r} and r_1 at the loci of higher axial velocities the higher sp.gr. of the suspension appearing at \bar{r} .

Otherwise, namely, the centrifugal force would cause the suspension fractions with different sp.gr.-s to be arranged according to sp.gr.-s diminishing with the radius and as the suspension layer with high specific gravity formed here is torn off, every now and then, along line $v_a = 0$, the sp.gr. of the suspension fluctuates. This has of course a bad effect on the sharpness of separation by sp.gr.

Drawing c) illustrates the behaviour of the fine grain suspension when $\zeta < \beta$, the sp.gr. of the suspension is throughout almost equal to the one entering or is only slightly different from the sp.gr. of the in- and outlet, unless

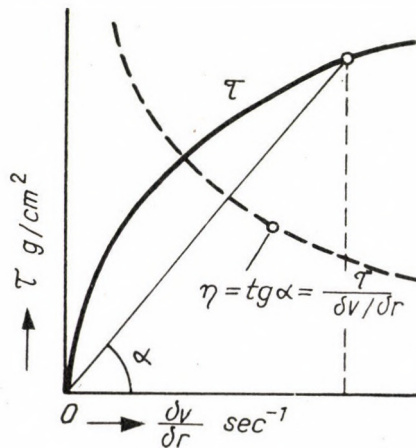


Fig. 9

one part of the grains is not fine enough, so that the dislocation compared to the medium is entirely eliminated.

In drawing d) the behaviour of the fine grain suspension and that of the pulp is shown, when $\zeta > \beta$. At place \bar{r} a suspension with a specific gravity considerably higher than that of the pulp feed will be formed, which is, however, roughly fluctuating in consequence of medium fractions of great specific gravity being torn off every now and then, if the entering pulp does not contain grains in a quantity sufficient to produce a suspension of great specific gravity also in the section between \bar{r} and r_1 .

The sharpest separation by specific gravity is guaranteed under circumstances as shown in drawing c) the separation according to state as shown in drawing a) is a less sharp one, while the minimum sharpness of separation occurs in a state as is set down in drawing d).

The separation by specific gravity as happens, when the pulp is hydrocycloned in its "own lye" without a separate suspension being added, may be interpreted by the state shown in drawing d).

Out of the previously-deducted equations describing the relationship of exponent n , $b = \sqrt{H_{v1}/H_{s1}}$ and $a = \frac{r_1}{\varphi r_0}$ for drawing c) that with condition $\gamma = \text{const.}$ is roughly valid; for drawing a), the linear change of γ between r_1 and r_0 holds good, while the relationship when γ is const. between r_1 and \bar{r} and linear between \bar{r} and r_0 keeps roughly valid for drawings b) and d).

The drawings in Figure 8 also show the approximate variation in viscosity. The viscosity of the suspensions having the same specific gravity as those fed, is to be lower in the cyclone than it is in the entering duct and the viscosity of the suspension with constant specific gravity also diminishes with the radius decreasing. This phenomenon is due to the pseudo-plastic character of suspensions the viscosity of which decreases with an increase in shear force or velocity gradient (Figure 9). The velocity gradient is given by the derivative of the velocity by r . For the tangential velocity component this is $\frac{dv_t}{dr} = \frac{-nv_{t1}r_1^2}{r^{1+n}} = \frac{-nv_t}{r}$.

By decrease in radius v_t increases and $\frac{dv_t}{dr}$ does so even more.

Whether the grain size being in state of equilibrium were to increase ($\zeta > \beta$) or not ($\zeta < \beta$) when advancing along line $v_a = 0$ towards the apex, *i. e.* whether the cyclone is suitable for sp.gr. separation in "own lye" depends also on the apex angle of the cyclone. Lines $d = \text{const.}$ in Figure 1 — taking into consideration their shape along the whole length — are nearly parallel to the cyclone shell. (Advancing toward the apex of the cyclone the angle they include with the axis being smaller, that the one in the vicinity of the juncture to the cylindrical section being greater than the angle of the apex of the cyclone.) Thus, it may be written that $\zeta = a \pm \Delta$ where Δ is a relatively small angle. Thus it can be roughly assumed that $\zeta - \beta$ has its maximum where $a - \beta$ has its maximum. But $a - \beta$ has its peak value when $\text{tg}(a - \beta) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } a \text{tg } \beta}$ has its maximum. By substituting for

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{tg } a}{x} \quad \text{where } x = \frac{r_1}{\bar{r}},$$

$$\text{tg}(a - \beta) = \frac{\text{tg } a \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x} \text{tg}^2 a}$$

and by making the derivative of the latter by $\text{tg } a$ equal to zero, we find the maximum to be at $\text{tg } a = \sqrt{x}$, *i. e.* $a_{opt} = \text{arc tg } \sqrt{x}$.

In Table 6 the values for a at different values for $a - \beta$ and $1/x$, furthermore those for a_{opt} and $(a - \beta)_{\max}$ for given values of $1/x$ are listed. In Figure

10 the alteration in $(\alpha - \beta)$ as a function of α i. e. of α_{opt} and the shape of $(\alpha - \beta)_{max}$ as a function of $1/x$ are shown.

$$\left[(\alpha - \beta)_{max} = \text{arc tg} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1/x}}{2} \right]$$

The value of $1/x$ lies in practice, between 0,2 and 0,6. According to BRADLEY [2], is $1/x = 0,38$, to this $\alpha_{opt} = 58^{\circ}20'$ and $(\alpha - \beta)_{max} = 26^{\circ}35'$ pertain.

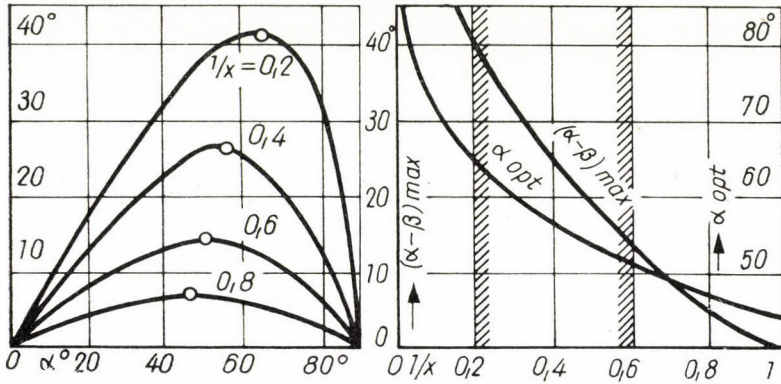


Fig. 10

Table 6

α°	$l_x = 0,2$	0,4	0,6	0,8
20	15°51'	11°44'	7°40'	3°45'
40	30°28'	21°25'	13°15'	6°05'
60	40°51'	25°18'	13°53'	5°47'
80	33°29'	14°55'	6°56'	2°40'
α_{opt}	65°55'	57°40'	52°15'	48°12'
$(\alpha - \beta)_{max}$	41°52'	25°25'	14°29'	6°28'

The possibility of a dense stable heavy suspension to be formed along line $v_a = 0$ is given first of all in cyclones with a blunt apex angle, the optimal half-apex angle lies between 52° and 65° . In such cyclones along cone surface $v_a = 0$ from the pulp grains of the aqueous feed, without an added heavy suspension, a "stagnant" heavy suspension might be formed.

As is also shown in Figure 10 in the environment of the optimal α the alteration in $(\alpha - \beta)$ is not too great. E. g. at $1/x = 0,4$, where α_{opt} is $57^{\circ}40'$

and $(\alpha - \beta) = 25^\circ 25'$ to $\alpha = 35^\circ$ for $(\alpha - \beta)$ the value of about 20° pertains. The decrease is altogether 20%. On the other hand in a cyclone with $\alpha = 10^\circ$ the value of $(\alpha - \beta)$ decreases to 6° . In such slender cyclones the formation of a stagnant heavy suspension is not to be expected.

For cyclone-washing in "own lye", carried out without an added separate suspension the globe-cyclones proved to be also suitable with a lower part consisting of a sphere instead of a cone [7]. Here the non-tangential flow of the medium advancing towards the underflow becomes increasingly radial, on account of the axial flow. The gradual increase of velocity v_r , however, causes the grain size d being in the state of equilibrium to increase too, thus cyclones of this type are very suitable to produce as advancing step by step along line $v_0 = 0$ towards the underflow becoming gradually higher, *i. e.* to bring about a stagnant heavy suspension along line $v_a = 0$.

REFERENCES

1. F. J. FONTAIN and C. DIJKSMAN: The hydrocyclone, its application and its explanation' Recent developments in mineral dressing. London, Instn. Min. Metall., 1953, 229—245.
2. D. BRADLEY: A theoretical study of the hydraulic cyclone. The Industrial Chemist. Sept. 1958, 473—480.
3. E. O. LILGE, T. E. FREGREN and G. R. PURDY: Apparent viscosities of heavy media and the Driessen cone. Bull. of the Instn. Min. Metall., March 1958, No. 616, Vol. 67, Part 6, 1957—58, 229—249.
4. W. F. CAREY: Bull. Instn. Min. Metall., June 1958, No. 619, p. 479.
5. D. F. KELSALL: A study of the motion of solid particles in a hydraulic cyclone. Recent developments in mineral dressing. London, Instn. Min. Metall., 1953, 209—227.
6. G. TARJÁN: On the heavy suspension developing in the hydrocyclone. Acta Technica Ac. Sc. Hung., Tom. XXI, Fasc. 3—4, 1958., 387—402.
7. E. HOFFMANN: Aufbereitung von Feinkohle in Hoch-, Mittel- und Niederdruckzyklonen. Glückauf 90 (1954) Heft 39/40, 1262—1268.

SUMMARY

The medium-parts leaving at the upper- and underflow of the cyclone are separated from each other by the cone surface of the zero axial velocity; the grains rotating here in equilibrium give the limit grain size of the classification and the specific gravity of the heavy suspension being formed here is the specific gravity of separation effected by the separating cyclone involved.

Pressure and velocity as measured in the inlet duct may be different from the pressure and velocity appearing at the periphery (on radius r_1) of the cyclone; under normal operating conditions the total peripheral pressure head $H_{v1} + H_{s1}$ is about 84% of the overall pressure head $H_{vi} + H_{si}$ as is to be observed in the inlet duct.

$$H_s = \frac{P}{\gamma}, \quad H_v = \frac{v_t^2}{2g}, \quad dp = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v_t^2}{r} dr,$$

here is $v_t r^n = v_{t1} r_1^n = \text{const.}$ The specific gravity of the medium γ might be constant between r_1 and r_0 (radius of the outlet) or might alter with r *e. g.* 1. from r_1 to r_0 decrease linearly or might as well be 2. constant between r_1 and \bar{r} and decrease linearly from \bar{r} to r_0 . By making

the integration $\int_{p_1}^0 dp$ and the substitutions

$$b = \sqrt{\frac{H_{v1}}{H_{s1}}} = \frac{v_{t1}}{\sqrt{2gp_1/\gamma_1}} \quad a = \frac{r_1}{\varphi r_0}$$

(where $\varphi \cong 0,6 - 0,7$) $x = r_1/\bar{r}$ $k = \gamma_1/\gamma_0$ in case $\gamma = \text{const.}$ we get the relationship $\frac{1}{b^2} = \frac{a^{2n}-1}{n}$ while in case 1. the equation

$$\frac{1}{b^2} = \frac{(a^{2n}-1)(a-k)}{n(a-1)k} + \frac{2(a^{2n}-a)(k-1)}{(2n-1)(a-1)k}$$

and in case 2. the equation

$$\frac{1}{b^2} = \frac{x^{2n}-1}{n} + \frac{(a^{2n}-x^{2n})(a-kx)}{n(a-x)k} + \frac{2(a^{2n-1}-x^{2n-1})ax(k-1)}{(2n-1)(a-x)k}$$

will be obtained. When a is constant, n decreases with b increasing. n may lie theoretically between -1 and $+1$, practically it lies between 0 and $+1$. The increase in the diameter of the inlet duct and the increase in the apex angle of the cyclone causes n to increase and by increasing the length of the cylindrical section of the cyclone, n decreases; by increasing the entering pressure or by enlarging one of the outlets, n does not alter at all or suffers only a slight change. If $\gamma = \text{const.}$ $n \cong 0,72 + 2,2/a - 2b$, if $n < 0,5$ and $n \cong 1 + 5/a - 4,55/b$, if $n > 0,5$.

Grain sizes rotating in state of equilibrium are described at different Reynolds' numbers by the following equations:

$$\text{Re} < 1/\text{STOKES} \quad \text{Re} = 30-300 \text{ (ALLEN)} \quad \text{Re} < 800 \text{ (NEWTON)}$$

$$d = \sqrt{\frac{18 \eta g r v_r}{(\delta - \gamma) v_t^2}} \quad d = \left(\frac{15 \sqrt{g \eta \gamma r v_r^{3/2}}}{(\delta - \gamma) v_t^2} \right)^{2/3} \quad d = \frac{0,32 \gamma r v_r^2}{2(\delta - \gamma) v_t^2}$$

The average values of r , v_r , v_t , γ and η valid at the locus of zero axial velocity have to be substituted into the above equations. The correctness of the values received for d should be controlled by Reynolds' number $\text{Re} = dv_r \gamma / \eta g$.

In the cyclone there is a heavy suspension forming when advancing towards the apex of the cyclone along the line of zero axial velocity, gradually higher grain sizes are in state of equilibrium. The possibility for this happening is greater in obtuse-angle cyclones, where the angle included by the generatrix of the cyclone with the zero axial velocity line is great, too. In such cyclones only from the pulp grains of the aqueous charge without a heavy suspension being fed, a stagnant heavy suspension might be formed.

EINIGE THEORETISCHE FRAGEN DER KLASSIER- UND WASCHHYDROZYKLONE

G. TARJÁN

ZUSAMMENFASSUNG

Im Zyklon werden Über- und Unterlauf durch die zylindrische Fläche der axialen Geschwindigkeit = 0 voneinander getrennt; die hier im Gleichgewichtszustand umlaufenden Körner ergeben die Grenzkörnergröße der Klassifikation, und die sich hier herausbildende Schwertrüben-Dichte ist die Trennungswichte des Waschzyklons.

Die Geschwindigkeits- und Druckwerte, wie sie im Einlaufstutzen meßbar sind, können von denjenigen am Umfang des Zyklons (auf Radius r_1) auftretenden abweichen; unter normalen Bedingungen macht die gesamte peripherische Druckhöhe = $H_{v1} + H_{s1}$ etwa 84 v.H. der Gesamtdruckhöhe $H_{vt} + H_{st}$ im Eintrittstutzen aus. $H_s = \frac{P}{\gamma}$, $H_v = \frac{v_t^2}{2g}$, $dp = \frac{\gamma}{2} \frac{v_t^2}{r} dr$,

hier ist $v_t r^n = v_{t1} r_1^n = \text{konst.}$ Die Wichte des Mediums kann zwischen r_1 und r_0 (Halbmesser der Auslauföffnung) gleichbleibend oder mit r veränderlich sein, sie kann z. B. 1. von r_1 bis r_0 linear abnehmen oder 2. von r_1 bis \bar{r} gleichbleibend sein und zwischen \bar{r} und r_0 linear abnehmen. Nach Durchführung des Integrals $\int_{p_1}^0 dp$ und der Substitutionen

$$b = \sqrt{\frac{H_{v1}}{H_{s1}}} = \frac{v_{t1}}{\sqrt{2g\rho_1/\gamma_1}}, \quad a = \frac{r_1}{\varphi r_0}$$

wo $\varphi = 0,6-0,7$, $x = r_1/\bar{r}$, $k = \gamma_1/\gamma_0$ erhalten wir, wenn $\gamma = \text{konst.}$ ist, die Gleichung $\frac{1}{b^2} = \frac{a^{2n} - 1}{n}$ im Fall 1. die Gleichung

$$\frac{1}{b^2} = \frac{(a^{2n} - 1)(a - k)}{n(a - 1)k} + \frac{2(a^{2n} - a)(k - 1)}{(2n - 1)(a - 1)k}$$

im Fall 2. die Gleichung

$$\frac{1}{b^2} = \frac{x^{2n} - 1}{n} + \frac{(a^{2n} - x^{2n})(a - kx)}{n(a - x)k} + \frac{2(a^{2n-1} - x^{2n-1})ax(k - 1)}{(2n - 1)(a - x)k}$$

Bei konstantem a wird mit steigendem b n abnehmen. Der Wert von n liegt in der Theorie zwischen -1 und $+1$, praktisch zwischen 0 und $+1$. Wird der Halbmesser des Einlaufstutzens und der Spitzwinkel des Zyklons größer, nimmt auch n zu, während bei einer Verlängerung des zylindrischen Teils des Zyklons n abnimmt; durch Steigerung des Eintrittsdruckes oder Vergrößerung einer der Auslauföffnungen wird sich n überhaupt nicht oder nur geringfügig ändern. Wenn γ gleichbleibend und $n < 0,5$ ist, wird $n \cong 0,72 + 2,2/a - 2b$ und wenn $n > 0,5$ ist, wird $n \cong 1 + 5/a - 4,55b$.

Die für die im Zyklon im Gleichgewichtszustand umlaufenden Korngrößen bei verschiedenen Reynolds-Zahlen gültigen Gleichungen sind wie folgt:

$$\begin{array}{lll} \text{Re} < 1 \text{ (STOKES)} & \text{Re} = 30-300 \text{ (ALLEN)} & \text{Re} > 800 \text{ (NEWTON)} \\ d = \sqrt{\frac{18 \eta g r v_r}{(\delta - \gamma) v_t^2}} & d = \left(\frac{15 \sqrt{g \eta \gamma r v_r^{3/2}}}{2(\delta - \gamma) v_t^2} \right)^{2/3} & d = \frac{0,32 \gamma r v_r^2}{(\delta - \gamma) v_t^2} \end{array}$$

In die Gleichungen sind die an der Stelle der axialen Geschwindigkeit = 0 gültigen Durchschnittswerte von r , v_r , v_t , γ und η einzusetzen. Die Richtigkeit der ermittelten d -Werte soll durch die Reynoldszahl $\text{Re} = dv_r \gamma / \eta g$ überprüft werden.

Im Zyklon bildet sich eine „stabile“ Schwertrübe aus, falls entlang der Linie der axialen 0-Geschwindigkeit in Richtung nach der Zyklonspitze vorwärtsschreitend sich allmählich wachsende Korngrößen im Gleichgewichtszustand befinden. Die Möglichkeit hierzu ist am ehesten in stumpfwinkligen Zyklonen gegeben, wo auch der Winkel den die Mantellinie der Zyklonspitze und die axiale 0-Geschwindigkeitslinie miteinander einschließen, ebenfalls groß ist. In solchen Zyklonen kann sich allein aus Körnchen der wässrigen Aufgabe, ohne Hinzufügung von Schwertrübe, eine stagnierende schwere Suspension ausbilden.

QUELQUES QUESTIONS THÉORIQUES SUR LES CYCLONES HYDRAULIQUES DE TRIAGE ET D'ENRICHISSEMENT

G. TARJÁN

RÉSUMÉ

La matière sortant par les deux ouvertures de sortie du cyclone est séparée par la surface conique de la vitesse axiale zéro; les grains y circulant en équilibre, déterminent les dimensions limites des grains pour le triage, et c'est la densité de la suspension lourde se produisant à cet endroit, qui est la densité de séparation des cyclones d'enrichissement.

La pression et la vitesse mesurables dans le tuyau d'entrée peuvent être différentes de la pression et de la vitesse à la circonférence (rayon r_1) du cyclone; dans des conditions normales la hauteur de pression totale circonférentielle $H_{v1} + H_{s1}$ est 84% env. de la hauteur de pression totale $H_{vi} + H_{si}$ à l'intérieur du tuyau d'entrée.

$$H_s = \frac{P}{\gamma}, \quad H_v = \frac{v_t^2}{2g} \quad dp = \frac{\gamma}{g} \frac{v_t^2}{r} dr, \quad \text{où } v_t r^n = v_{t1} r_1^n = \text{const.}$$

La densité γ de la matière entre r_1 et r_0 (rayon de l'ouverture de sortie) peut être constante ou peut varier avec r . Par ex., 1° de r_1 à r_0 elle diminue linéairement, ou 2° de r_1 à \bar{r} elle est constante, de \bar{r} à r_0 elle diminue linéairement. En intégrant l'expression $\int_{P_1}^0 dp$, et introduisant les notations

$$b = \sqrt{\frac{H_{v1}}{H_{s1}}} = \frac{v_{t1}}{\sqrt{2gp_1/\gamma_1}}, \quad a = \frac{r_1}{\varphi r_0}, \quad (\text{où } \varphi \cong 0,6 \text{ à } 0,7),$$

$$x = r_1/\bar{r}, \quad k = \gamma_1/\gamma_0$$

nous arrivons, dans le cas de $\gamma = \text{const.}$, à l'équation $\frac{1}{b^2} = \frac{a^{2n} - 1}{n}$, dans le cas 1° à l'équation

$$\frac{1}{b^2} = \frac{(a^{2n} - 1)(a - k)}{n(a - 1)k} + \frac{2(a^{2n} - a)(k - 1)}{(2n - 1)(a - 1)k},$$

dans le cas 2° à l'équation

$$\frac{1}{b^2} = \frac{x^{2n} - 1}{n} + \frac{(a^{2n} - x^{2n})(a - kx)}{n(a - x)k} + \frac{2(a^{2n-1} - x^{2n-1})a x(k - 1)}{(2n - 1)(a - x)k}.$$

Dans le cas de $a = \text{const.}$, si b augmente, n diminue. n peut varier théoriquement entre -1 et $+1$, pratiquement entre 0 et $+1$. Avec l'augmentation du diamètre du tuyau d'entrée et de l'angle conique du cyclone, n augmente; avec celle de la longueur de la partie cylindrique du cyclone, n diminue; en augmentant la pression d'entrée ou une des ouvertures de sortie, n ne varie pas ou sa variation est faible. Dans le cas de $\gamma = \text{const.}$, $n \cong 0,72 + 2,2/a - 2b$, si $n < 0,5$; et $n \cong 1 + 5/a - 4,55b$, si $n > 0,5$.

Les dimensions des grains circulant en équilibre dans le cyclone sont exprimées par les équations suivantes valables pour différents nombres de Reynolds:

$$\begin{array}{lll} \text{Re} < 1 \text{ (STOKES)} & \text{Re} = 30 - 300 \text{ (ALLEN)} & \text{Re} > 800 \text{ (NEWTON)} \\ d = \sqrt{\frac{18 \eta g r v_r}{(\delta - \gamma) v_t^2}} & d = \left(\frac{15 \sqrt{g \eta \gamma r} v_r^{3/2}}{2(\delta - \gamma) v_t^2} \right)^{2/3} & d = \frac{0,32 \gamma r v_r^2}{(\delta - \gamma) v_t^2}. \end{array}$$

Les valeurs à substituer dans ces équations sont les valeurs moyennes de r , v_r , v_t , γ et η valables à l'endroit de la vitesse axiale zéro. L'exactitude de la valeur obtenue doit être contrôlée avec le nombre de Reynolds $\text{Re} = dv_r \gamma / \eta g$.

Dans le cyclone, une suspension lourde "stable" se forme si, en avançant sur la ligne de la vitesse axiale zéro vers le sommet du cyclone, les dimensions de grains en équilibre deviennent de plus en plus grandes. C'est le cas surtout dans les cyclones d'angle obtus, où l'angle formé par la ligne génératrice du cône du cyclone et par la ligne de la vitesse axiale zéro est grand. Dans de tels cyclones, une suspension lourde "stagnante", constituée de grains du boue du dosage aqueux, peut aussi se former sans l'introduction d'une suspension lourde.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ КЛАССИФИЦИРУЮЩИХ И ОБОГАТИТЕЛЬНЫХ ГИДРОЦИКЛОНОВ

Г. ТАРЬЯН

РЕЗЮМЕ

Среда, уходящая через два выходных отверстия циклона, разделяется друг от друга конической поверхностью при аксиальной скорости равной нулю; циркулирующие здесь в равновесии зерна определяют предельную крупность классифицируемых зерен, и удельный вес формирующейся здесь тяжелой суспензии определяет сепарационный удельный вес обогатительных циклонов.

Давление и скорость, измеримые во внутренней трубе, могут отличаться от давления и скорости на периметре циклона (на радиусе r_1); при нормальных условиях общая высота нагнетания на периметре $H_{vt} + H_{st}$ составляет приблизительно 84% от наблюдающейся общей высоты нагнетания в трубе $H_{vt} + H_{st}$, т. е.

$$H_s = p, H_v = \frac{v_t^2}{2g} \cdot dp = \frac{\gamma}{g} \frac{v_t^2}{r} dr, \text{ здесь } v_t r^n = v_{t1} r_1^n \text{ конст.}$$

Удельный вес среды γ может быть в пределах r_1 и r_0 (радиус выходного отверстия) константным, или изменяться с r , например, 1) падает линейно с r_1 до r_0 , или 2) остается константным от r_1 до r , а с r до r_0 линейно падает. Произведя интегрирование $\int_{r_1}^0$ и введя обозначения

$$b = \sqrt{\frac{H_{vt}}{H_{st}}} = \frac{v_{t1}}{\sqrt{2g\rho_1/\gamma_1}}, \quad a = \frac{r_1}{c r_0},$$

$$(\text{где } c \cong 0,6 - 0,7), \quad x = r_1/\bar{r}, \quad k = \gamma_1/\gamma_0,$$

в случае $\gamma = \text{конст.}$ для уравнения

$$\frac{1}{b^2} = \frac{a^{2n} - 1}{n}$$

в 1) случае получим уравнение

$$\frac{1}{b^2} = \frac{(a^{2n} - 1)(a - k)}{n(a - 1)k} + \frac{2(a^{2n} - a)(k - 1)}{(2n - 1)(a - 1)k},$$

а в случае 2) уравнение

$$\frac{1}{b^2} = \frac{x^{2n} - 1}{n} + \frac{(a^{2n} - x^{2n})(a - kx)}{n(a - x)k} + \frac{2(a^{2n-1} - x^{2n-1})ax(k - 1)}{(2n - 1)(a - x)k}$$

в случае $a = \text{конст.}$, с ростом b падает n . Теоретически n изменяется в пределах -1 и $+1$, а на практике изменяется в пределах от 0 до $+1$. С ростом диаметра входной трубы и угла конусности циклона n возрастает, с увеличением длины цилиндрической части циклона n падает, с увеличением давления на входе или увеличением диаметра одного из выходных отверстий n или не изменяется совершенно или же только незначительно. В случае $\gamma = \text{конст.}$

$$n \cong 0,72 + 2,2/a - 2b \quad \text{если } n < 0,5 \text{ и}$$

$$n \cong 1 + 5/a - 4,55b, \quad \text{если } b > 0,5.$$

Уравнения, действительные для циркулирующих в циклоне в равновесии зерен различной крупности при различных значениях числа Рейнольдса (Re):

$$Re < 1 \text{ (Стокс)} \qquad Re = 30-300 \text{ (Аллен)} \qquad Re > 800 \text{ (Ньютон)}$$

$$d = \sqrt{\frac{18 \gamma g r v_r}{(\delta - \gamma) v_t}} \qquad d = \left(\frac{15 \sqrt{g \gamma r v_r^{3/2}}}{2(\delta - \gamma) v_t^2} \right)^{3/2} \qquad d = \frac{0,32 \gamma r v_r^2}{(\delta - \gamma) v_t^2} .$$

В уравнение необходимо подставить средние значения r , v_r , v_t , γ , действительные для аксиальной скорости O . Правильность полученных значений величины d проверяется числом Рейнольдса

$$Re = d v_r / g .$$

В циклоне образуется «стабильная» тяжелая суспензия, если на линии аксиальной скорости, O , двигаясь в сторону к вершине циклона, в равновесии находятся зерна с постепенно все возрастающей крупностью. Такое положение может возникнуть сильнее всего в случае тупоугольных циклонов, у которых между образующей конуса циклона и линией аксиальной скорости O имеется большой угол. В таких циклонах без введения тяжелой суспензии может образоваться «неподвижная» тяжелая суспензия также из самих зерен пульпы водного раствора.

BESTIMMUNG DES RESTAUSTENITGEHALTES GEHÄRTETER STÄHLE MIT RÖNTGEN-FEINSTRUK- TURANALYSE*

E. G. FUCHS

EISENFORSCHUNGSINSTITUT, BUDAPEST

BERICHT Nr. 14. DER METALLURGISCHEN ARBEITSGEMEINSCHAFT DER UNGARISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 4. Februar 1960]

I. Einleitung

Das Härten der Stähle beruht auf der allotropen $\gamma - \alpha$ Umwandlung des Eisens, bzw. darauf, daß diese Modifikationen verschiedene Mengen des Kohlenstoffes lösen können. Das flächenzentrierte, kubische Gitter des bei höherer Temperatur stabilen γ -Eisens, das man metallographisch *Austenit* nennt, kann Kohlenstoff bis zu 1,7% (nach den neuesten Daten bis zu 2%) interstitial gelöst halten. Die bei niedrigerer Temperatur stabile α -Modifikation, der kubisch raumzentrierte *Ferrit*, vermag im Gleichgewichtszustand höchstens einige Tausendstel Prozente Kohlenstoff gelöst zu enthalten. — Die $\gamma - \alpha$ allotrope Umwandlung findet auch dann statt, wenn der Stahl von einer höheren Temperatur abgeschreckt, also gehärtet wird. Die im Austenit gelösten Kohlenstoffatome sind aber dann wegen der Kürze der Zeit nicht imstande, aus den sich umwandelnden Kristalliten dem Gleichgewichtszustand entsprechend herauszudiffundieren und bleiben im Gitter. Das so entstandene α -Eisen ist also mit Kohlenstoff übersättigt: es entsteht *Martensit*. Das Gitter des Martensits stimmt im Wesentlichen mit dem des Ferrits überein; infolge des hineingepreßten großen Kohlenstoffgehalts wird aber das Gitter einigermaßen deformiert, was sich in der Vergrößerung des Gitterparameters zeigt. Im Grenzfall kann das kubische Gitter leicht tetragonal verzerrt werden. (Tetragonaler Martensit.)

Beim Härten wird der Austenit meistens nicht vollkommen zum Martensit, sondern ein Teil desselben bleibt als sogenannter *Restaustenit* zurück und verursacht unangenehme Folgeerscheinungen. Einesteils vermindert er nämlich die Härte des gehärteten Stahles, andererseits kann er mit der Zeit in andere Gefügebestandteile übergehen. Die durch den Restaustenit verursachte mindere Härte kann z. B. Schneidwerkzeuge zum Ausschluß machen oder es können infolge der späteren Zersetzung des Austenits innere Spannungen, Maßänderungen, ja sogar Brüche auftreten. Wenn man dabei in Betracht zieht, daß

* Teil der Kandidaten-Dissertation des Verfassers.

Kugellager oder Kaliberlehren schon bei einer Maßänderung von einigen Mikron unbrauchbar werden können, so ist es klar, daß diese Erscheinung auch vom wirtschaftlichen Gesichtspunkte aus nicht gleichgültig ist.

Die Menge, das Auftreten und der Verlauf der Zersetzung des Restaustenits wurde ziemlich oft untersucht. — Die älteste und unmittelbarste Methode zur Ermittlung des Restaustenitgehaltes ist die *metallmikroskopische Gefügeuntersuchung*. Sie hat den großen Vorteil, daß man dazu keine besondere Prüfeinrichtung braucht und daß sie praktisch in jedem metallographischen Laboratorium durchgeführt werden kann. Sie hat aber auch den Nachteil, daß sie für die Bestimmung eines Austenitgehaltes von weniger als 10%, ja manchmal schon von 20% an nicht anwendbar ist. Mit ihr kann der Austenitgehalt unter 10% in einem Feinkorngefüge meistens überhaupt nicht nachgewiesen werden.

Die Prüfung mit dem *Dilatometer* ist in mehreren Beziehungen brauchbarer. Hierbei wird der Austenitgehalt des Probekörpers durch Wärmezufuhr in stabilere Gefügebestandteile umgewandelt. Aus der damit zusammenhängenden Volumenänderung ist es möglich, auf die Einzelheiten des Umwandlungsprozesses und auf den ursprünglichen Austenitgehalt des Probekörpers zu schließen. — Aus dem Wesen dieses Verfahrens folgt, daß man nur einen zum Dilatometer passenden Probekörper prüfen kann, und daß sich das Gefüge der Probe während der Prüfung verändert.

Viele wertvolle Ergebnisse wurden mit *magnetischen* Messungen erzielt. Dem Austenit gegenüber ist die α -Modifikation des Eisens ferromagnetisch. Man mißt also die Magnetisierbarkeit der aus Martensit und Austenit bestehenden Proben und errechnet das Verhältnis der Gefügebestandteile unter Benutzung der magnetischen Daten des Martensits und Austenits.

Aus dem Vorhergehenden ist es ersichtlich, daß die verschiedenen Methoden zur Bestimmung des Restaustenitgehaltes nur in beschränktem Maße anwendbar sind. Der Restaustenitgehalt unter 10% kann mit ihnen kaum ermittelt werden, und es können nur Proben von gegebenen Maßen untersucht werden. Bei der Untersuchung mit dem Dilatometer verändert sich außerdem auch das Gefüge des Probekörpers. Die Probe oder das Fabrikat wird daher für eine weitere Prüfung oder für die Benutzung meistens unbrauchbar.

2. Zielsetzung

Die *Phasenanalyse mittels Röntgenstrahlbeugung* wird von den in der Einleitung besprochenen Nachteilen nicht belastet. Diese Methode ist für gewisse Untersuchungen schon seit langem gebräuchlich, für die Ermittlung des Restaustenits ist sie aber bis jetzt kaum angewendet worden. Wir waren deshalb bestrebt, die Veröffentlichungen über die Bestimmung des Rest-

austenitgehaltes mittels Röntgenstrahlbeugung zu überprüfen und die bekannten Methoden weiterführend ein auch in Betrieben anwendbares, schnelles, möglichst einfaches und zerstörungsfreies Verfahren auszuarbeiten.

3. Die bisher gebräuchlichen Methoden der Röntgenstrahlbeugung zur Ermittlung des Austenitgehaltes

Die ersten mittels Röntgenstrahlbeugung gewonnenen Ergebnisse zur Ermittlung des Austenitgehaltes in gehärteten unlegierten Stählen wurden 1931 von TAMARU und SEKITO veröffentlicht [1]. TAMARU und SEKITO belichteten in einer umgestalteten Debye-Scherrer-Kammer abwechselnd die Probe und einen als Vergleichsstoff benützten Goldstreifen. Auf den Austenitgehalt fol-

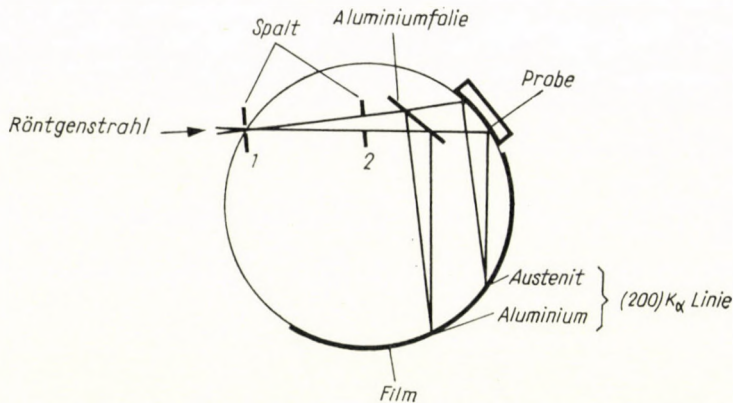


Bild 1. Aufnahmeanordnung zur Bestimmung des Austenitgehaltes der Stähle mittels Röntgen-Feinstruktur-Analyse nach Gardner, Cohen und Antia [2]

gerten sie aus den (220) K_α-Reflexen des Austenits und des Goldes, indem sie die mit dem Mikrodensitometer gemessenen Höchstwerte der Schwärzungen miteinander verglichen. Auf diese Weise wurden die sich bei der Entwicklung der einzelnen Filme möglicherweise ergebenden Unterschiede eliminiert. Als Etalon wurde eine an einer hoch manganhaltigen, aus reinem Austenit bestehenden Stahlprobe angefertigte Aufnahme verwendet.

Die Methode wurde im Jahre 1943 von GARDNER, COHEN und ANTIA weiterentwickelt [2]. Sie benützten dabei eine Phragmén-Kammer nach Schema des Bildes 1. Das leicht divergente Strahlenbündel einer Röntgenröhre mit Chrom-Anode wurde mit Spalten verengt. Die Spalte 1, das Probestück und der Film sind auf dem Umfang eines Kreises untergebracht. Die im Sinne des SEEMANN—BOHLIN'schen Fokussierprinzipes entstehenden Reflexe erscheinen auf dem Film als verhältnismäßig starke, scharfe Linien. Mit einer entsprechen-

den geometrischen Anordnung erreichten sie, daß die verwendeten Austenitlinien, vor allem die (200) K_α -Linie gut meßbar waren. — In den Weg des primären Röntgenstrahls legten sie eine Aluminiumfolie. Die entsprechend angeordnete Folie läßt einen großen Teil der Röntgenstrahlen durch und kann so mit dem Probestück zugleich belichtet werden, ohne daß die Entstehung der von der Probe reflektierten Reflexe gestört werde. Die zum Vergleich benützte Al (200) K_α -Reflexion fällt auf eine Stelle des Films, wohin andere Reflexionen nicht auftreffen. Da nun die Aluminiumfolie immer den gleichen Bruchteil der Röntgenstrahlen reflektiert, verändern sich die Ergebnisse nicht, wenn sich die Intensität des untersuchenden Röntgenstrahles während der Aufnahme ändert. Die relative Intensität der Austenit- und Aluminiumreflexe hängt deshalb nur vom Austenitgehalt der Probe ab. — Beim Verfahren wurden die maximalen Intensitäten der Reflexe verglichen; der Austenitgehalt unter 10% konnte aber mehr nur abgeschätzt werden. Die zahlenmäßigen Werte wurden auf Grund von Etalons bestimmt, deren Austenitgehalt vorher mittels metallographischer Gefügenuntersuchung festgestellt wurde.

FLETCHER und COHEN haben das Verfahren dadurch verbessert, daß sie die Probestücke vor der Röntgendiffraktions-Untersuchung auf 150° C erwärmten [3]. In diesem Falle wird das tetragonale Gitter des Martensits kubisch, wodurch sich die (110) und (101) Reflexe vereinigen. Infolgedessen ist es möglich, die (111) Reflexion des Austenits genauer zu messen. Da nun die (111) Reflexion viel intensiver als die (200) Austenit-Reflexion ist, war es möglich, mit der Benützung derselben auch die Empfindlichkeit der Methode zu steigern.

NETSCHWOLODOW gestaltete sein 1936 veröffentlichtes Verfahren auf Grund einer anderen Überlegung: dasselbe kann als Methode der homologen Linienpaare betrachtet werden [4]. Er erkannte, daß es nicht notwendig ist, den Austenitgehalt auf einen fremden Vergleichsstoff zu beziehen und bestimmte die prozentuale Zusammensetzung, bei der die Austenit-, bzw. Martensitreflexe des Stahles die gleiche Schwärzung aufweisen und stellte die Ergebnisse in einer Tabelle von 12 Linienpaaren zusammen. Auf der Röntgenaufnahme sind nur die ungefähr die gleiche Schwärzung aufweisenden γ -, bzw. α -Reflexe auszuwählen und der Austenitgehalt des Probekörpers kann von der Tabelle abgelesen werden. Auch die Densitometrierung der Linien ist überflüssig: zu einer Messung von ungefähr ± 10 prozentigen Genauigkeit genügt eine Abschätzung mit dem Auge. Die Ermittlung eines Austenitgehaltes unter 10—15% stößt aber schon auf Schwierigkeiten.

Die Methode wurde später von PALATNIK und FUKS weiterentwickelt [5], [6]. Sie faßten die relative Intensität der K_α und K_β Linien des Austenits, bzw. Martensits, sowie die dazugehörigen Austenitgehalte in einer Tabelle zusammen. Bei der Berechnung berücksichtigten sie die auf die Reflexionsintensität einwirkenden, bekannten wichtigeren Faktoren. Aus der 34 homologe Linien-

paare enthaltenden Tabelle ist es nach den Verfassern möglich, die Austenitgehalte über 4% mit einem Fehler von $\pm 5\%$ zu bestimmen. PALATNIK und FUKS haben das Verfahren auch dadurch verbessert, daß sie außer der maximalen Reflexionsintensität auch die Breite der Reflexe in Betracht zogen. Für den wirklichen Austenitgehalt V_γ leiteten sie den Zusammenhang

$$V_\gamma = \frac{J \cdot V'_\gamma}{J \cdot V'_\gamma + (100 - V'_\gamma)} \cdot 100\% \quad (1)$$

ab, in welchem V'_γ den aus der Tabelle sich ergebenden Wert, J das Breitenverhältnis der verwendeten γ und α Linien bedeutet.

Wie wir sahen, betrachtete man bei den besprochenen Methoden die *maximale Intensität* der Reflexe, also den *Gipfelwert* der meistens mittels Mikrodensitometers festgestellten Schwärzungskurve als der Menge der einzelnen Phasen proportional. Auch bei der Methode von NETSCHWOLODOW liegt es ähnlich, da bei der subjektiven Beurteilung der Linienschwärzungen meistens die Wirkung der schwärzesten Teile zur Geltung kommt. Es ist aber nur dann gerechtfertigt, die maximale Intensität der Reflexe der Menge der verschiedenen Phasen als proportional zu betrachten, wenn die Gitter unverzerrt und ihre Parameter überall die gleichen sind. Diese Bedingung wird im allgemeinen von dem ferritischen Gefüge des Kohlenstoff nicht oder nur wenig enthaltenden, geglühten, unlegierten Stahls erfüllt. Die Gitterabmessungen des im gehärteten Stahl befindlichen Austenits, besonders aber des Martensits, ändern sich hingegen innerhalb beträchtlich breiter Grenzen und sind ziemlich stark verzerrt. Auch die in der Fachliteratur veröffentlichten Gitterparameter sind nur Durchschnittswerte.

Es wurde festgestellt, daß die kristallinen Stoffe mit verzerrten, ungleichmäßigen Gittern von der Intensität, bzw. Energie des untersuchenden Röntgenstrahls praktisch einen gleich großen Teil in die verschiedenen Richtungen reflektieren wie die nichtverzerrten Stoffe. Während aber an den letzteren scharfe, schmale Reflexe zustandekommen, werden die Reflexe eines verzerrten Gitters mehr oder weniger diffus. — Wenn man die Kurve der Intensitätsverteilung eines unter den gleichen Bedingungen entstandenen und aufgefangenen Reflexes graphisch darstellt, ergeben sich also in dem einen Falle hohe und schmale, im anderen Falle flache und breite Kurven. Die durch die Kurve begrenzte Fläche, die sogenannte integrierte Intensität kann aber für unsere Überlegungen als unverändert angenommen werden. Dies alles weist darauf hin, daß es zweckdienlicher ist, statt den Höchstwerten die integrierten Reflexintensitäten zur Unterlage der Bestimmungen zu wählen.

AVERBACH und COHEN veröffentlichten in 1948 zum erstenmal die Beschreibung einer Methode, welche die Menge des Restaustenits auf Grund der *integrierten Intensität* der Reflexe bestimmt [7]. — Damit die Grundschrägung

der Filme möglichst gering sei, und man auch kleine Austenitgehalte von 1–10% genau bestimmen könne, wurde die angewandte Co-K_α -Strahlung mit einem Steinsalzkristall monochromatisiert. Die Aufnahmen wurden in einer evakuierten Debye-Scherrer-Kammer hergestellt und zwar so, daß das BRAGG—BRENTANO'sche Fokussier-Prinzip zur Geltung komme.

Später wurde zur Verminderung der Belichtungszeit ein gebogener und geschliffener (JOHANNSON'scher) Steinsalz-Monochromator, und zur Verminderung der Grundschwärzung Fe-K_α -Strahlung angewendet. Auch die Evakuierung der Kammer wurde unterlassen. Die Anordnung ist aus Bild 2 ersichtlich [8]. An den Proben wurden metallographische Schriffe hergestellt, welche geätzt untersucht wurden.

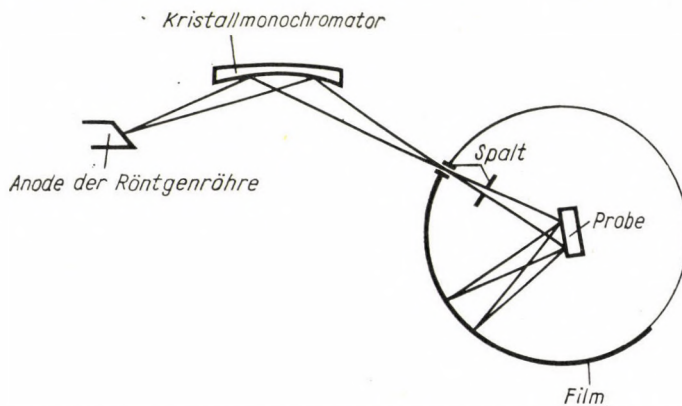


Bild 2. Aufnahmeanordnung von Averbach und Cohen [8]

Den Austenitgehalt bestimmte man im Wesen auf Grund folgender Überlegungen:

Es ist bekannt, daß kristalline Stoffe, so auch die Metalle, monochromatische Röntgenstrahlen im Sinne der BRAGG'schen Gleichung in bestimmte Richtungen reflektieren. Die Lage dieser sogenannten *Reflexe* hängt von der Kristallstruktur und den Gitterparametern des reflektierenden Stoffes ab, während ihre relative Intensität unter gegebenen Aufnahmebedingungen konstant bleibt. Bei einer Mischung mehrerer kristalliner Stoffe entwickelt jeder Bestandteil unabhängig von den anderen sein eigenes Reflexsystem. Dabei bleibt die relative Intensität der einzelnen Reflexsysteme — mit gewissen Einschränkungen — der Menge der Phasen proportional.

Das Gefüge der zu untersuchenden Stahlarten besteht — abgesehen von etwaigen Karbiden — aus Martensit und Austenit. Da auch der tetragonale Martensit im Wesen ein α -Gitter aufweist und der Restaustenit ein γ -Gitter zeigt, erscheinen auf den mit Röntgenstrahlbeugung hergestellten Aufnahmen die dem kubisch-raumzentrierten α -Eisen, bzw. dem kubisch-flächenzentrier-

ten γ -Eisen entsprechenden Reflexe. Unabhängig vom etwaigen Vorkommen einer anderen Phase, gilt für die Intensität jedes entstehenden Reflexes unter gleichen Aufnahmebedingungen, daß

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \text{konst} \cdot R \cdot A(\theta) \cdot V_\alpha = \\ &= \text{konst} \cdot \frac{1}{v_\alpha^2} \cdot F^2 \cdot m \cdot (L \cdot P) \cdot e^{-2M} \cdot A(\theta) \cdot V_\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

ist, wobei

- P_α die Intensität des Reflexes der α -Phase,
- R ein der Intensität des Reflexes proportionaler Koeffizient,
- v_α das Volumen der Elementarzelle der α -Phase,
- F der Strukturfaktor der Elementarzelle,
- m die Flächenhäufigkeitszahl,
- L der Lorentz-Faktor,
- P der Polarisationsfaktor,
- e^{-2M} der Debye-Waller'sche Temperaturkoeffizient,
- $A(\theta)$ der Absorptionsfaktor der Probe,
- θ der Bragg'sche Reflexwinkel, und
- V das Volumen der α -Phase des von der Strahlung erfaßten Materiales

ist. Bei Austenitreflexen steht selbstverständlich γ an der Stelle der α -Indexe.

AVERBACH und COHEN haben zur Ermittlung des Austenitgehaltes die (220) und (311) Reflexe des Austenits, bzw. die (200), (211) und (220) Reflexe des Martensits benützt: bei der Densitometrierung der Filme bestimmten sie die integrierte Intensität P_γ bzw. P_α dieser Reflexe. Für jeden Reflex errechneten sie die Werte

$$\frac{P}{R} = A(\theta) \cdot V \quad (3)$$

und da sie die Abhängigkeit der A Absorptionsfaktoren vom Winkel θ nicht für genügend bekannt voraussetzten, bestimmten sie die Menge des Austenits aus den $A(\theta) \cdot V$ Werten mit Hilfe von Interpolierung auf den Diagrammen $A(\theta) \cdot V = f(\theta)$ graphisch. — Da die im Zusammenhang (2) vorkommende Konstante bei dem In-Verhältnis-stellen ausfällt, wurde sie nicht in Betracht gezogen.

Die Untersuchungen waren sehr langwierig, die Auswertung einer Aufnahme nahm auch mit Übung etwa anderthalb Stunden in Anspruch. Die R -Werte ändern sich mit den Gitterparametern und den mit diesen zusammenhängenden Reflexwinkeln. — Der Kohlenstoffgehalt wirkt namentlich auf die Gitterparameter ziemlich stark. Selbstverständlich können nur die sich im umwandelnden Austenit gelösten C-Atome, — nicht aber die z. B. in der Form ungelösten Karbids vorhandenen — eine Rolle spielen. Deshalb mußte man die Menge der in der Probe vorhandenen Karbide mit einem Metallmikroskop bei jeder genauen Untersuchung bestimmen und auf Grund dessen die Berechnungen mit Hinsicht auf einen korrigierten Kohlenstoffgehalt vornehmen.

BEU vervollkommnete das Verfahren im Jahre 1952 [9]. Zur Verminderung der Belichtungszeit wandte er statt Steinsalz- einen Quarz-Monochromator an. Außer den schon erwähnten fünf Reflexen nahm er auch den Reflex (222) des Austenits in Anspruch. Er wies nach, daß das graphische Interpolieren überflüssig ist, da bei gleichzeitiger Berücksichtigung mehrerer Reflexe die Ungenauigkeiten der Absorptionsfaktoren keine Rolle spielen. Er vereinfachte das Verfahren auch dadurch, daß er die Menge der Karbide ähnlich der des Austenits mit dem Röntgenstrahlbeugungsverfahren ermittelte. Auf diese Weise nahm die Auswertung nur etwa eine halbe Stunde in Anspruch. — BEU gab eine Darstellung von der Brauchbarkeit und den Vorteilen der mit dem GEIGER—MÜLLER'schen Zählrohr durchgeführten unmittelbaren Strahlenintensitäts-Messungen [10], worauf auch AVERBACH in einem Artikel hinwies [11].

Das ursprüngliche Auswertungsverfahren [7] von AVERBACH und COHEN versuchte neulich KHOL in einem Aufsatz dadurch schneller zu gestalten, daß er zu den Berechnungen — in Verbindung mit der Besprechung eines Quarzkristall-Monochromators — Nomogramme veröffentlichte [12].

4. Die Grundlagen des ausgearbeiteten Untersuchungsverfahrens

Aus dem Überblick der bisherigen Röntgenstrahlbeugungs-Methoden zur Ermittlung des Austenitgehaltes ist es ersichtlich, daß die vorliegende Fachliteratur ziemlich spärlich ist. Dazu kommt, daß die meisten besprochenen Verfahren den Austenitgehalt auf die Intensität der an einem fremden Vergleichsstoff zugleich ermittelten Reflexe beziehen. Dadurch haben sie alle den Nachteil, daß man sie irgendwie eichen muß, sonst ergeben sie nur willkürliche Verhältniszahlen. Auch die anderen Methoden zur Ermittlung des Austenitgehaltes, wie das metallographische, das Dilatometer- und das magnetische Verfahren, können gerade zur Herstellung solcher Etalons nicht einwandfrei benützt werden. Eben deshalb war es eine wichtige Erkenntnis, daß der Austenitgehalt, wie bei den magnetischen Methoden, auch bei der Untersuchung mit Röntgenstrahlbeugung auf den Martensit als einen inneren Vergleichsstoff bezogen werden kann. Da die relative Intensität der einzelnen Austenit- und Martensit-Reflexe auf Grund theoretischer Überlegungen mit einer ziemlich hohen Genauigkeit berechnet werden kann, wurde die äußere Eichung überflüssig.

Aus der Fachliteratur geht zugleich hervor, daß eine der Zielsetzung entsprechende Methode nur auf die Energie (d. h. auf die integrierte Intensität) der Reflexe aufgebaut werden darf. Bei der Ausarbeitung der eigenen Methode konnten wir uns deshalb nur auf die Vorarbeiten von NETSCHWOLODOW, bzw.

AVERBACH, COHEN und ihre Nachfolger stützen. Die gründliche Analyse der ersteren führte zum Ergebnis, daß die Weiterentwicklung derselben zweier Umstände wegen nicht zweckdienlich ist. Einesteils führt die Abschätzung der Intensitäten mit dem Auge auch mit der unter Zusammenhang (1) angegebenen Korrektur eine ziemlich hohe Fehlermöglichkeit mit sich. (Das Messen der Filme in ihrer ganzen Länge mit dem Mikrodensitometer — was übrigens unvermeidlich wäre, — würde bedeutende Arbeit und Zeit beanspruchen.) Andererseits — und das ist das Wichtigere, — ist es bei der Berechnung der homologen Linienpaare nicht möglich, die aus den verschiedenen Verzerrungen des Gitters der gehärteten Stähle entstehenden scheinbaren Temperaturkoeffizienten in Betracht zu ziehen; dieser Umstand vermag aber die Messergebnisse zu beeinträchtigen. — Mit Rücksicht auf diese Überlegungen wurden bei der von uns entwickelten Methode die Vorarbeiten von AVERBACH, COHEN und ihrer Nachfolger zugrunde gelegt. Es wurde die Geltung des Zusammenhanges (2) übernommen, welche mit einer Reduktion nach BEU auf die kürzere Form

$$P_a = G_a \cdot V_a \quad (4)$$

gebracht werden kann [9]. Hier ist also

$$G_a = \frac{1}{v_a^2} \cdot F^2 \cdot m \cdot (L \cdot P) \cdot e^{-2M} \cdot A(\theta) . \quad (5)$$

Wenn wir im Sinne unserer Überlegungen die für die Austenit- und Martensitreflexe gewonnenen Gleichungen (4) jede für sich addieren und die Summen miteinander dividieren, so ergibt sich, daß

$$\frac{\Sigma P_\gamma}{\Sigma P_a} = \frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_a} \cdot \frac{V_\gamma}{V_a} \quad (6)$$

ist. Den Zusammenhang

$$V_a + V_\gamma = 100\% \quad (7)$$

in Betracht gezogen erhält man für die Bestimmung des Austenitgehaltes folgende neue, allgemeingültige Gleichung:

$$V_\gamma = \frac{\frac{\Sigma P_\gamma}{\Sigma P_a} - \frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_a}}{\frac{\Sigma P_\gamma}{\Sigma P_a} + \frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_a}} \cdot 100\% . \quad (8)$$

Der Zusammenhang (8) gibt den Austenitgehalt als Funktion der gemessenen Intensität der zugrundegelegten Reflexe des Austenits und Martensits P_γ

und P_α , bzw. der aus den zu diesen Reflexen errechenbaren Koeffizienten G erhaltenen *Quotienten* an.

Der Wert der im Zusammenhang (2) vorkommenden Konstanten ist unter gegebenen Umständen für jeden Reflex gleich, er ist unabhängig vom Material der Probe und fällt so bei der Bildung der Quotienten aus. Er wird deshalb außer Betracht gelassen.

Wenn der Stahl bei der Untersuchung außer Martensit und Austenit auch andere Gefügebestandteile, z. B. Karbid enthält, also statt des Zusammenhangs (7) die Gleichung

$$V_\alpha + V_\gamma = 100 - \text{Karbid}\% \quad (9)$$

gilt, dann ist es zweckdienlich, ihre Quantitäten metallographisch, mit der Rosiwal-Methode zu bestimmen und die Austenitgehalte diesem gemäß zu korrigieren. Kleinere Mengen anderer Phasen können zumeist vernachlässigt werden.*

Die Gleichung (8) bildet die Grundgleichung des ausgearbeiteten Verfahrens.

Der auf der rechten Seite stehende Quotient $\frac{\sum P_\gamma}{\sum P_\alpha}$ muß aus der integrierten Intensität der Reflexe bestimmt werden. — Die letzteren können auf zweierlei Weise gemessen werden. Das eine, früher fast ausschließlich angewandte Verfahren ist das photographische. Dabei werden die Reflexe auf Röntgenfilm aufgefangen und nach der Entwicklung und Fixierung mit einem Mikrodensitometer ausgemessen. — Ein neuerdings oft angewendetes Verfahren mißt die Strahlenintensität unmittelbar mit dem Zählrohr von Geiger und Müller. Bei beiden Verfahren muß die Strahlenintensität als Funktion der Reflexionsrichtung aufgezeichnet werden: dies geschieht bei den Registriervorrichtungen der modernen Mikrodensitometer und Diffraktometer automatisch (vgl. z. B. Bild 5). Es müssen nun die zu den Reflexen gehörigen, unter den glockenartigen Kurven befindlichen — sich über die Werte der Grundschwärzung erhebenden — Gebiete mit einem Planimeter bestimmt werden. Dadurch erhält man der integrierten Reflexionsintensität proportionale Größen. Da aber im Zusammenhang (8) nur die Quotienten der integrierten Intensitäten vorkommen, genügen zur Bestimmung des Austenitgehaltes statt ihrer absoluten Werte auch die ihnen proportionalen Flächen.

Bei der Untersuchung der gleichfalls auf der rechten Seite des Zusammenhangs (8) vorkommenden, zu den benützten Reflexen gehörigen G Werte kann festgestellt werden, daß ihre Größe bei einer gegebenen Reflexion und Aufnahmeanordnung nur von der Änderung des Elementarzellen-Volumens v

* Nehmen wir an, daß auf Grund der Gleichung (8) die Untersuchung mit Röntgenstrahlbeugung z. B. 10% Restaustenit ausweist. Auch 2% in Betracht gezogenes Eisenkarbid (Zementit) ändert das Ergebnis nur auf 9,8%.

(also von der der Gitterparameter), bzw. in kleinerem Maße von der Veränderung des damit zusammenhängenden Reflexionswinkels abhängt. — Da die Volumina der Elementarzellen im G Wert jeder Austenit-, bzw. Martensit-reflexion die gleichen sind — vgl. Gleichung (5), — können sie in den Quotienten $\frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_\alpha}$ vor die Σ Zeichen in der Form $\left(\frac{v_\alpha}{v_\gamma}\right)^2$ gesetzt werden.

Es ist bekannt, daß — wenn man die Wirkung etwaiger Legierelemente außer Betracht läßt, — die Gitterdimensionen sowohl des Austenits, wie auch

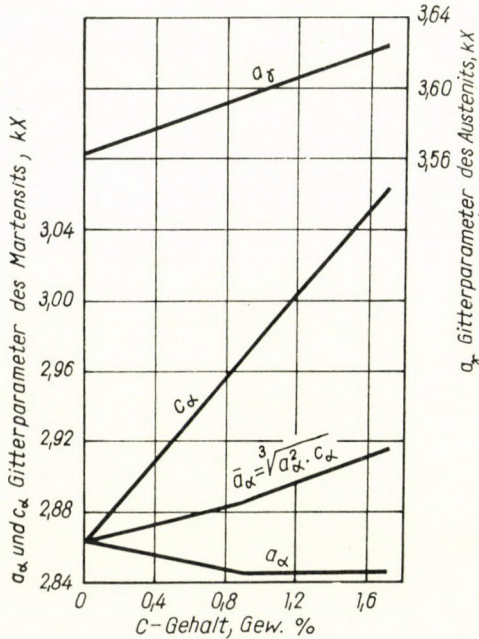


Bild 3. Gitterabmessungen des Austenits und Martensits als Funktion des Kohlenstoffgehaltes (Nach [14] und [15])

des Martensits, bzw. die sich daraus ergebenden Volumen der Elementarzellen entscheidend durch den Kohlenstoffgehalt bestimmt sind. Die zahlenmäßigen Werte sind in Bild 3, bzw. 4 zusammengefaßt. Die Größe des erwähnten Ausdrucks $\left(\frac{v_\alpha}{v_\gamma}\right)^2$ ist aber, wie es auch aus Bild 4 hervorgeht, vom Kohlenstoffgehalt praktisch unabhängig. — Auf Grund einer ähnlichen Überlegung kann der Quotient auch von anderen Faktoren des G Koeffizienten, welche sich übrigens mit dem Kohlenstoffgehalt, bzw. den Gitterabmessungen wesentlich weniger verändern und sich nur mit einer gewissen Annäherung bestimmen lassen, für unabhängig betrachtet werden.

Aus diesen, für das ausgearbeitete Prüfverfahren wesentlichen Feststellungen ergibt sich, daß der in der Gleichung (8) vorkommende Quotient $\frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_\alpha}$ für jede gegebene Aufnahmeanordnung und bezüglich der gegebenen Reflexe praktisch konstant und ein für allemal berechenbar ist. Um den Austenitgehalt

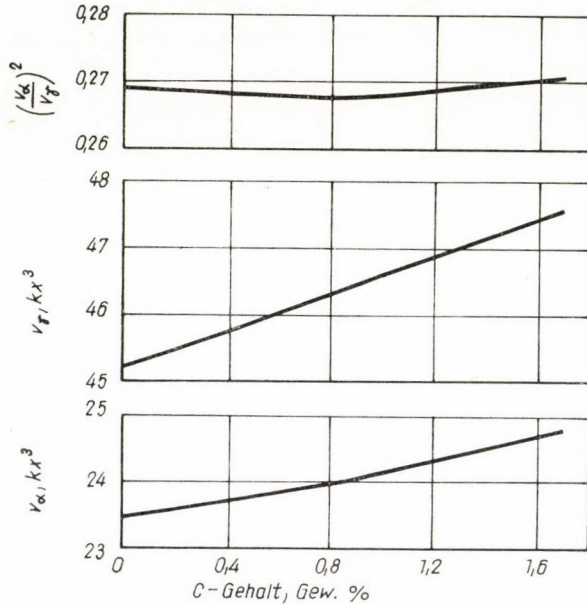


Bild 4. Das Volumen der Elementarzellen vom Austenit- und Martensitgitter als Funktion der Kohlenstoffgehaltes

mit Hilfe der Gleichung (8) ermitteln zu können, muß man also nur den Quotienten $\frac{\Sigma P_\gamma}{\Sigma P_\alpha}$ bestimmen. Dadurch wird die Auswertung unvergleichlich einfacher und schneller als bisher.

5. Berechnung der G Koeffizienten

Um den Koeffizienten $\frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_\alpha}$ in der Gleichung (8) bestimmen zu können, wird der im Sinne des Zusammenhanges (5) berechnete G Wert jeder, bei der Untersuchung verwendeten Reflexion benötigt. Wie gezeigt wurde, sind die bisherigen Verfahren mittels Feinstruktur-Analyse auf verschiedene Reflexionen gegründet gewesen. Deshalb, und um eine bessere Übersicht zu bekommen, zeigt Bild 5 zwei Aufnahmen, welche mit einem sowjetischen Diffraktometer

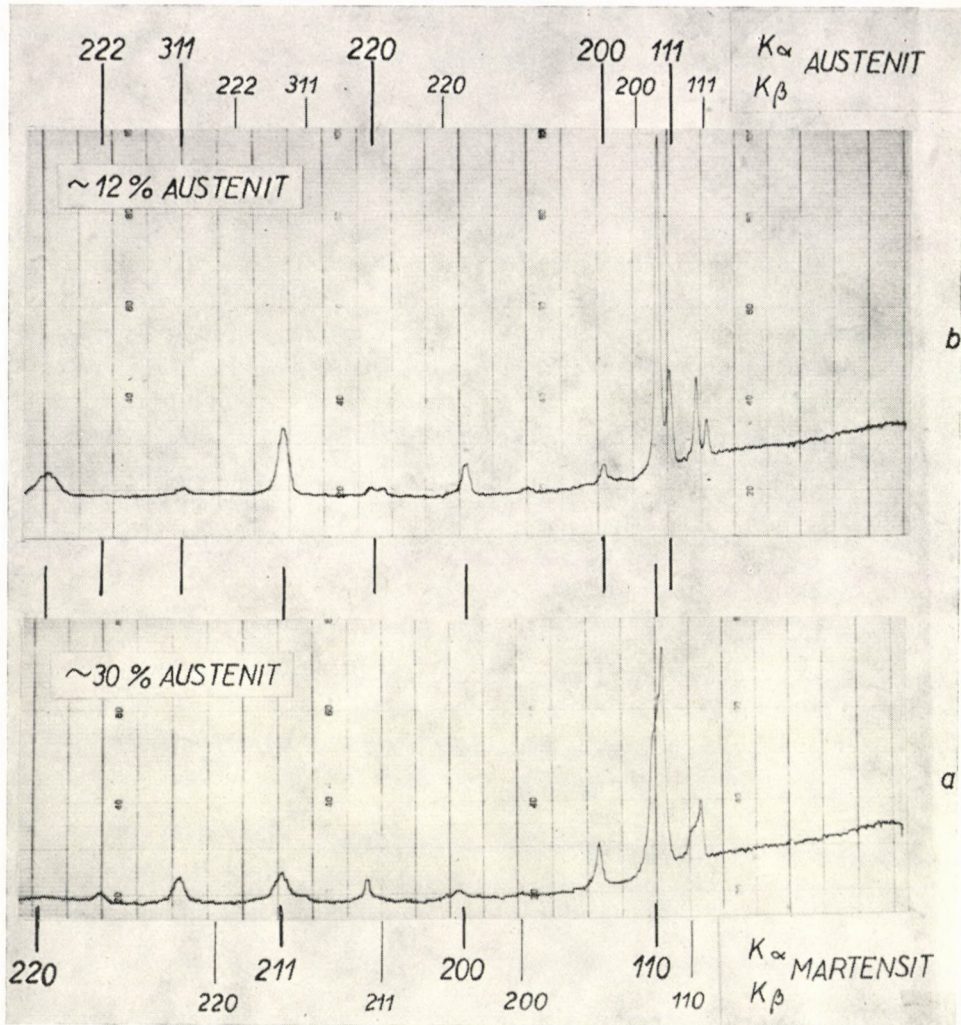


Bild 5. Aufnahme mit Röntgenstrahlbeugung von einer a) gehärteten und b) gehärteten und angelassenen Kugellager-Stahlprobe; aufgenommen mit Fe-K $_{\alpha+\beta}$ Strahl im Gebiet des Reflexwinkels $\theta \approx 10-75^\circ$. Das Gefüge beider Proben besteht nur aus Martensit und Restaustenit

Typ URS — 50 I und mit Fe-K $_{\alpha+\beta}$ Strahlung an einer von hoher Temperatur gehärteten, bzw. an einer ähnlich gehärteten, aber dann angelassenen Kugellager-Stahlprobe aufgenommen wurden. Die Aufnahmen umfassen die vom Martensit und Austenit ungefähr zwischen dem Winkel $\theta = 10-75^\circ$ entstehenden Reflexe. Auf dem Bild kann man klar erkennen, daß die Reflexe des angelassenen (kubischen) Martensits verhältnismäßig schmal und hoch sind. Die Reflexe des einigermaßen verzerrten, innerhalb breiterer Grenzen verschiedene Gitterabmessungen aufweisenden tetragonalen Martensits sind hingegen

mehr oder weniger flach und breit. Auf die Linie (220) des Martensits kann z. B. nur aus der stärkeren Grundschwärzung gefolgert werden.

Zur Bestimmung des Austenitgehaltes zeigten sich die auch von BEU benützten sechs Reflexe, die K_α Reflexe (200), (311), (222) des Austenits (γ -Eisen) und die K_α Reflexe (200), (211), (220) des Martensits (α -Eisen) als die brauchbarsten. Ihre Grundschwärzung ist nahezu die gleiche und die Reflexe können verhältnismäßig gut voneinander getrennt werden. Man kann also die der integrierten Intensität proportionalen Flächenteile leichter als die anderen messen. Außerdem gleicht sich infolge der ungefähr symmetrischen Lage der Austenit- und Martensitreflexe auch die Wirkung des aus der Gitterverzerrung entstehenden und in der Gleichung (5) nicht in Betracht ziehbaren, scheinbaren Temperaturkoeffizienten praktisch aus. — Im Folgenden wurden die G Werte dieser Reflexe berechnet. Wir waren bestrebt, immer die am verlässlichsten erscheinenden Daten bekannter Herkunft zu verwenden. Deshalb übergangen wir manchmal neuere oder von anderen Verfassern für ähnliche Zwecke schon gebräuchte Daten, obzwar sich nennenswerte Abweichungen für den Wert der $\frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_\alpha}$ Ausdrücke nicht ergaben.

Für die Bestimmung des Restaustenits ist die Co- K_α und Fe- K_α Strahlung am geeignetsten. Deshalb wurden auch die Berechnungen für die Wellenlängen λ Co- $K_\alpha = 1,787$ kX und λ Fe- $K_\alpha = 1,934$ kX [13] durchgeführt. Die Teilergebnisse, welche sich für die in Betracht kommenden Aufnahmenanordnungen in der im folgenden beschriebenen Weise ergeben, umfaßt Tabelle 1.

5.1. *Das Volumen der Elementarzellen (v)* kann aus den Gitterparametern bestimmt werden: beim unlegierten Stahl hängt es hauptsächlich vom Kohlenstoffgehalt ab (Bild 3 und 4). Da der Kohlenstoffgehalt auf den Wert des Quotienten $\frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_\alpha}$ praktisch keine Wirkung hat, — wie schon in Punkt 4 darauf hingewiesen wurde, — wurde den Berechnungen ein Stahl von mittlerem, 1%igen Kohlenstoffgehalt zugrunde gelegt. Die sich auf diese Weise ergebenden Volumen sind in der 2. Kolumne der Tabelle 1 zu finden.

5.2. *Die Reflexionswinkel (θ)*. Der Austenit hat ein kubisch flächenzentriertes Gitter. Sein Gitterparameter beträgt bei 1% C-Gehalt $a_\gamma = 3,598$ kX. Das Gitter des Martensits ist meistens leicht tetragonal und weicht vom kubisch raumzentrierten Gitter des reinen Eisens kaum etwas ab. Auf den Röntgen-Feinstruktur-Aufnahmen können somit die im Prinzip sich auflösenden, z. B. (211), (121), (112) Martensitreflexe nicht voneinander getrennt werden, es verändert sich höchstens die Form ihrer Intensitätsverteilungskurve. Hievon war schon im Zusammenhang mit Bild 5 die Rede. Die Fläche unter der Kurve ist der aus dem Zusammenhang (5) errechneten Reflexionsintensität proportional, unabhängig davon, ob sich etwa einzelne Reflexionen aufgelöst haben

Tabelle 1

Größe der zur Berechnung der G Werte notwendigen Faktoren der ausgewählten sechs Reflexe nach dem Zusammenhang (5) — für die Aufnahmeanordnungen, die als am leichtesten zu verwirklichen erscheinen

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	
Reflex	ν kX^3	m	e^{-2M}	Co—K α						Fe—K α						
				θ	F	L. P	L. P mit NaCl SiO $_2$ Kristall- monochromator	A'(θ)	θ°	F	L. P	L. P mit NaCl SiO $_2$ Kristall- monochromator	A'(θ)			
Austenit	(220)	12	0,9525	44°37'	38,00	1,427	1,424	1,424	0,4523	49°29'	54,00	1,367	1,350	1,354	0,4512	
	(311)	46,58	24	0,9352	55°27'	33,20	1,467	1,405	1,421	0,5329	63°3'	49,20	1,874	1,669	1,721	0,5314
	(222)	8	0,9299	59°21'	31,60	1,634	1,519	1,549	0,5491	68°35'	47,60	2,439	2,075	2,167	0,5438	
Martensit	(200)	6	0,9623	38°13'	20,80	1,761	1,721	1,729	0,3675	42°1'	28,80	1,522	1,511	1,513	0,3693	
	(211)	24,11	24	0,9448	49°15'	18,00	1,367	1,353	1,356	0,4944	55°2'	26,00	1,452	1,388	1,404	0,4941
	(220)	12	0,9278	61°1'	15,60	1,732	1,590	1,626	0,5539	71°12'	23,60	2,827	2,365	2,483	0,5463	

oder nicht. Deshalb kann auch der tetragonale Martensit so behandelt werden, als ob er ein kubisches Gitter mit einem Gitterparameter $\bar{a}_a = \sqrt{a^2 \cdot c} = \sqrt{24,11} = 2,889 \text{ kX}$ besitzen würde. (Vgl. Bild 3.)

Zwischen dem Reflexionswinkel θ , der Wellenlänge des zu untersuchenden Röntgenstrahls λ , dem Gitterparameter a und dem Millerindex h, k und l der reflektierenden Netzebenen kann für jede Reflexion der kubischen Kristalle der allgemein bekannte Zusammenhang

$$\sin^2 \theta = \frac{\lambda^2}{4 \cdot a^2} \cdot (h^2 + k^2 + l^2) \quad (10)$$

angeschrieben werden. Die mit diesem berechneten Reflexionswinkel sind in Kolumne 5, bzw. 11 der Tabelle 1 zusammengefaßt.

5.3. *Die Strukturfaktoren (F).* Bei Gittern aus gleichen Atomen bestehen die Strukturfaktoren F gemäß des Zusammenhanges

$$F = S \cdot f \quad (11)$$

aus zwei Teilen. Der Wert S wird ausschließlich durch die Eigentümlichkeiten der Gitterstruktur bestimmt. Im Falle zustandekommender Reflexe ist bei einem flächenzentriert kubischen Gitter $S_f = 4$, bei einem raumzentriert kubischen Gitter $S_a = 2$. — Die Atomstrefaktoren f können am leichtesten mit Hilfe von Tabellen bestimmt werden [16]. — Da die Wellenlänge der Co—K $_{\alpha}$ Strahlung nahe bei der Absorptionskante des Eisens liegt, muß hier auch eine Korrektion nach HÖNL angewendet werden. Der Atomfaktor ergibt sich dann aus dem Zusammenhang

$$f = f_0 - \Delta f, \quad (12)$$

wobei f_0 der aus einer Tabelle [16] entnommene Atomfaktor-Wert, Δf das ebenfalls aus Tabellen [17], [18] zu errechnende Korrektionsglied ist. Bei der Untersuchung des Eisens mit Co—K $_{\alpha}$ Strahlung ist der Wert des letzteren $\Delta f = 4$.

Die im obigen Sinne errechneten Strukturfaktoren F wurden in Kolumne 6, bzw. 12 der Tabelle 1 zusammengestellt.

5.4. *Die Flächenhäufigkeitszahlen (m)* der benutzten Reflexe wurden einem Handbuch entnommen [16] und sind in Kolumne 3 der Tabelle 1 zu finden.

5.5. *Die LORENTZ- und Polarisationsfaktoren (L. P).* Wenn wir bei der Untersuchung mit Röntgenstrahlbeugung die aus der Röntgenröhre heraus tretenden Röntgenstrahlen unmittelbar, höchstens mit einem β -Filter mono-

chromatisiert, benützen, so können die L Lorentz-, bzw. P Polarisationsfaktoren auf Grund des Zusammenhanges

$$L \cdot P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos^2 2\theta}{\sin^2 \theta \cdot \cos \theta} \quad (13)$$

berechnet werden [19]. Die konkreten Berechnungen werden durch eine Tabelle vereinfacht [16]. Die so bestimmten Werte $L \cdot P$ sind in Kolumne 7, bzw. 13 der Tabelle 1 zu finden.

Wenn der zur Untersuchung verwendete Röntgenstrahl mit einem Kristallmonochromator monochromatisiert ist, muß man auch seine Polarisiertheit in Betracht ziehen. Die Lorentz- und Polarisationsfaktoren können in diesem Falle nach WARREN aus der Formel

$$L \cdot P = \frac{1 + \cos^2 2\theta_m \cdot \cos^2 2\theta}{\sin \theta \cdot \sin 2\theta} \quad (14)$$

berechnet werden [17]. θ_m ist der Reflexwinkel des Kristallmonochromators, θ der des vom Probestück stammenden Reflexes.

Am leichtesten sind *Steinsalz*-Einkristallmonochromatoren herzustellen; bei diesen gelangt die (200) Reflexion des NaCl als Untersuchungsstrahl zur Benutzung. Wenn man den Gitterparameter $a_{\text{NaCl}} = 5,626$ kX zugrunde legt [19], entsprechen der Strahlung Co-K $_{\alpha}$, bzw. Fe-K $_{\alpha}$ die Reflexionswinkel

$$\theta_{m \text{NaCl}} = 18^\circ 31' \quad (\text{Co} - \text{K}_{\alpha});$$

bzw.

$$\theta_{m \text{NaCl}} = 20^\circ 6' \quad (\text{Fe} - \text{K}_{\alpha}).$$

Die mit ihrer Benützung auf Grund des Zusammenhanges (14) berechneten $L \cdot P$ Werte sind in Kolumne 8, bzw. 14 der Tabelle 1 zusammengefaßt.

Der andere verhältnismäßig leicht herstellbare Kristallmonochromator wird aus Quarz gefertigt; der zur Untersuchung verwendete, monochromatische Röntgenstrahl ist dann der (101) Reflex des *Quarz*-Einkristalls. Wenn man den Gitterparameter $a_{\text{SiO}_2} = 4,90$ kX des hexagonalen Quarzes, bzw. dessen Achsenverhältnis $\left(\frac{c}{a}\right)_{\text{SiO}_2} = 1,10$ zugrunde legt [19], so gehören zur Co-K $_{\alpha}$, bzw. Fe-K $_{\alpha}$ Strahlung die Reflexwinkel

$$\theta_{m \text{SiO}_2} = 15^\circ 33' \quad (\text{Co} - \text{K}_{\alpha});$$

bzw.

$$\theta_{m \text{SiO}_2} = 16^\circ 52' \quad (\text{Fe} - \text{K}_{\alpha}).$$

Die mit ihrer Benützung aus dem Zusammenhang (14) berechneten $L \cdot P$ Werte sind in Kolumne 9, bzw. 11 der Tabelle 1 zu finden.

5.6. Die DEBYE-WALLER'schen Temperatur-Koeffizienten (e^{-2M}). In dem mit e^{-2M} ausgedrückten Debye-Waller'schen Temperaturkoeffizienten ist

$$M = B \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2}, \quad (15)$$

wobei θ den Reflexionswinkel, λ die Wellenlänge des Röntgenstrahles bezeichnet, und

$$B = \frac{6 h^2}{m_a \cdot k \cdot \theta} \cdot \left\{ \frac{\Phi(x)}{x} + \frac{1}{4} \right\} \quad (16)$$

ist. Die Masse der das Gitter aufbauenden Atome ist hier mit m_a , die PLANCK'sche Konstante mit h , die BOLZMANN'sche Konstante mit k angegeben. Daraus ergibt sich

$$x = \frac{\theta}{T}, \quad (17)$$

wobei θ die sogenannte charakteristische Temperatur des Stoffes, T die absolute Temperatur bezeichnet. Die Funktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\xi d\xi}{e^\xi - 1} \quad (18)$$

wird in einer für Berechnungen bequemen Form in einer Tabelle mitgeteilt. Es wurde der Wert der charakteristischen Temperatur

$$\theta = 453 \text{ K}^\circ$$

benutzt [16].

Die so berechneten DEBYE-WALLER'schen Temperaturkoeffizienten, welche für die Untersuchungsstrahlen Co-K α und Fe-K α gleicherweise giltig sind, sind in Kolumne 4 der Tabelle 1 zusammengestellt.

5.7. Die Absorptionsfaktoren ($A(\theta)$). Zur Ermittlung des Restaustenits sind diejenigen Aufnahmeanordnungen am geeignetsten, bei welchen die ebene Probefläche mit dem Primärstrahl einen Winkel φ einschließt. Der Absorptionsfaktor kann dann mit dem Zusammenhang

$$A(\theta) = \frac{q}{\bar{\mu}} \cdot \frac{\sin(2\theta - \varphi)}{\sin(2\theta - \varphi) + \sin \varphi} = \frac{q}{\bar{\mu}} \cdot A'(\theta) \quad (19)$$

ausgedrückt werden [21], [22], [10]. In der Formel bedeutet q die Querschnittsfläche des Röntgenstrahlbündels, $\bar{\mu}$ den durchschnittlichen Absorptionskoeffizienten des Probematerials, und θ den Reflexionswinkel. Da nun q und $\bar{\mu}$ unter gegebenen Aufnahmebedingungen konstant bleiben und deshalb aus dem $\frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_\alpha}$ der zur Bestimmung des Austenits dienenden Gleichung ausfallen, genügt

es bei den Berechnungen den Zusammenhang

$$A'(\theta) = \frac{\sin(2\theta - \varphi)}{\sin(2\theta - \varphi) + \sin \varphi} \quad (20)$$

zu benützen.

Bei Filmregistrierung ist es zweckdienlich, entsprechend dem mittleren Reflexionswinkel der sechs zugrunde gelegten Reflexe, bei der Anwendung der Co—K $_{\alpha}$ Strahlung $\varphi = 50^{\circ}$ und bei Fe—K $_{\alpha}$ Strahlung $\varphi = 56^{\circ}$ einzustellen. Das BRAGG—BRENTANO'sche Fokussierprinzip wird nämlich auf diese Weise für alle Reflexe verhältnismäßig am besten angenähert. — Die nach dem Dargelegten berechneten $A'(\theta)$ Absorptionsfaktoren findet man in Kolumne 10, bzw. 16 der Tabelle 1.

Bei der Messung der Strahlenintensität mit dem Geiger—Müller'schen Zählrohr verdreht sich auf dem Goniometer der gebräuchlichen Diffraktometer mit der Verschiebung des Zählrohres zugleich auch die Probe und zwar mit halber Winkelgeschwindigkeit. Daher gilt immer $\varphi = \theta$, und für den Wert des Absorptionsfaktors — unabhängig vom Reflexionswinkel $A(\theta) = \frac{1}{2}$.

3.8. *Zusammenfassung der Teilergebnisse.* Als Ergebnis der bisherigen Berechnungen können die G Koeffizienten der einzelnen Reflexionen aus dem Zusammenhang (5) schon bestimmt werden. Für jene Aufnahmeanordnungen, die wohl am leichtesten zu verwirklichen sind, wurden die auf diese Weise berechneten Werte in Tabelle 2 zusammengefaßt.

6. Bemerkungen für die Praxis

Aus dem bisher Dargelegten geht hervor, daß man zur Ermittlung des Restaustenits mit dem beschriebenen Verfahren nur die integrierte Intensität der benutzten Reflexe mit irgendeiner Aufnahmeordnung zu messen braucht. Die älteren Röntgenapparate registrieren meistens mit *Film* und sind mit DEBYE—SCHERRER-, bzw. Rückstrahl-Kammern versehen. Zur Bestimmung des Restaustenits sind jene geeigneter; man braucht nur statt der ursprünglichen Präparathalter zur Unterbringung der zu untersuchenden Proben neue Probehalter anzufertigen (vgl. z. B. [24]). — Mit einem Diffraktometer kann man aber bequemer und schneller Ergebnisse erzielen, da dieses die Intensitäts-Verteilungskurven automatisch aufzeichnet. — Es ist zweckdienlich, grobkörnige Proben in ihrer untersuchten Ebene zu drehen, damit die Reflexionsringe gleichmäßiger werden. Auf diese Weise kann man zugleich die Probe auf einer größeren Fläche untersuchen. — Der Kristallmonochromator kann bei photographischer Registrierung ebenso wie bei den Diffraktometern angewandt werden.

Tabelle 2

Die G Werte der ausgewählten Reflexe für die Aufnahmeanordnungen, die als am leichtesten zu verwirklichen erscheinen

1.		2.	3.	4.	5.	6.	7.
Reflex	Co			Fe			
	K α	K α ,NaCl	K α ,SiO $_2$	K α	K α ,NaCl	K α ,SiO $_2$	
Filmregistrierung							
Austenit	(220)	4,907	4,899	4,899	9,474	9,356	9,384
	(311)	8,913	8,536	8,633	24,938	22,210	22,902
	(222)	3,072	2,856	2,912	10,303	8,765	9,154
Martensit	(200)	2,781	2,718	2,731	4,630	4,597	4,603
	(211)	8,541	8,454	8,473	18,919	18,085	18,293
	(220)	4,472	4,105	4,198	16,473	13,780	14,468
Zählrohr-Registrierung							
Austenit	(220)	5,425	5,416	5,416	10,499	10,368	10,399
	(311)	8,363	8,010	8,101	23,463	20,896	21,547
	(222)	2,797	2,600	2,652	9,474	8,060	8,417
Martensit	(200)	3,784	3,698	3,715	6,270	6,224	6,233
	(211)	8,639	8,550	8,569	19,145	18,301	18,512
	(220)	4,036	3,705	3,789	15,078	12,614	13,243

Mit Röntgenstrahlbeugung kann nur die Oberfläche der Proben untersucht werden. Die Röntgenstrahlen der gebräuchlichen Wellenlängen dringen nämlich nur ungefähr 0,01 mm tief mit nennenswerter Intensität in die Metalle ein. Dieser Umstand ist manchmal besonders vorteilhaft, so z. B. bei der Untersuchung zementierter Stähle. Es ist sehr wichtig, daß der Austenitgehalt der untersuchten Oberflächenteile für die Proben wirklich charakteristisch sei, sonst kann es zu Fehlschlüssen kommen. Man muß also die möglicherweise entkohlte Schicht entfernen und die Oberfläche überhaupt mit großer Umsicht vorbereiten. Es ist bekannt, daß auch bei dem sorgfältigsten Schleifen eine Erwärmung, bzw. Verformung eintreten kann, welche möglicherweise die Phasen verändert. Es ist deshalb zweckdienlich, mit Wasserkühlung zu schleifen und die verformte oberste Schicht durch Elektrolyse zu entfernen. Es ist aber nicht notwendig, daß die Oberfläche kratzerfrei als metallographischer Schliff poliert sei.

Ein besonderer Vorteil des Verfahrens besteht darin, daß man mit ihm Stücke beliebiger Größe zu untersuchen imstande ist, und daß es deshalb als eine *zerstörungsfreie Methode* angesehen werden kann. Die zu untersuchenden

Abmessungen sind somit höchstens durch die Gegebenheiten des Röntgenapparates, z. B. durch die Abmessungen der Kammer oder des Goniometers begrenzt.

Die Stähle, deren Restaustenitgehalt zu bestimmen ist, können meistens als unlegiert betrachtet werden. Auch die in der Tabelle 2 berechneten G Werte sind für diesen Fall ermittelt. Das Legieren mit Chrom verändert die Lage nicht, da der Atomradius des Chroms (1,28 kX) mit dem des Eisens (1,27 kX) nahezu übereinstimmt [13], somit auf das Gitter des Eisens keine wesentliche Wirkung hat. Die Daten der Tabelle 2 können mit guter Näherung auch bei mit anderen Elementen mäßig legierten Stählen angewendet werden. Diese Elemente ändern zwar mehr oder weniger die Gitterparameter, ihre Wirkung wird aber dadurch ausgeglichen, daß sich der Austenitgehalt als Funktion von Quotienten ergibt, — ähnlich wie es auch in Verbindung mit der Wirkung des Kohlenstoffgehaltes schon erörtert wurde.

Das beschriebene Verfahren kann der Zielsetzung entsprechend allgemein angewendet werden. Die Methode ist zerstörungsfrei, einfacher und schneller als die bisherigen. Besonders wenn man den Zusammenhang (8) in der im folgenden zu beschreibenden graphischen Darstellung gebraucht, ergibt sich der Austenitgehalt mit dem neuen Verfahren innerhalb einiger Minuten. Dabei führt die neue Auswertungsmethode trotz geringer Vernachlässigungen zu mindestens so genauen Ergebnissen wie die früheren. Die bisher von Fall zu Fall zu bestimmenden, Durchschnittswerte bedeutenden Gitterparameter konnten nämlich ohnedies nur angenähert ermittelt werden. Dazu kommt, daß sich in jede langwierige und umständliche Berechnung nur zu leicht Fehler einschleichen und die Ergebnisse unbemerkt verfälschen. Bei dem neuen Verfahren kann dies kaum vorkommen.

7. Auswertungsdiagramme

Wir sahen, daß man den Restaustenitgehalt des gehärteten Stahles mit Hilfe des Zusammenhanges (8) aus den gemessenen Werten der Intensität der zu benutzenden Austenit- bzw. Martensitreflexion $\left(\frac{\Sigma P_\gamma}{\Sigma P_\alpha}\right)$ und aus den zu den Reflexionen gehörigen G Werten $\left(\frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_\alpha}\right)$ ermitteln kann. Es wurde auch gezeigt, daß die letzteren Quotienten bei einer gegebenen Aufnahmeanordnung und gegebenen Reflexionen praktisch konstant sind. Es liegt deshalb auf der Hand, daß man die praktische Auswertung mit Hilfe von Diagrammen bequemer gestalten kann, deren Abszissen die aus den Messungsergebnissen zu ermittelnden $\frac{\Sigma P_\gamma}{\Sigma P_\alpha}$ Ausdrücke sind und deren Ordinate unmittelbar die dazu gehörigen Austenitgehalte angeben.

Für die Untersuchungen wurden ursprünglich sechs Reflexionen ausgewählt. Im Laufe der Versuche konnte aber festgestellt werden, daß es keinen Sinn hat, immer alle sechs zu verwenden. Meistens wurden deshalb nur die (220) und (311) Austenit-, bzw. die (211) Martensitreflexionen herangezogen. Diese liegen — wie das auch aus Bild 5 hervorgeht — ziemlich nahe beieinander und lösen sich klar von den anderen Reflexionen ab. (Die störenden β -Linien zeigen bei Anwendung eines β -Filters keine merkbare Intensität.) Wenn man die Untersuchungen auf die genannten drei Reflexionen gründet, müssen die Filme nur etwa zur halben Länge densitometriert werden, bzw. muß man mit dem Diffraktometer nur ein etwa halb so großes Winkelgebiet von Reflexionen ausmessen, als wenn man sechs Reflexionen auswertet. Dadurch kann bedeutende Zeit gespart werden. Beim Diffraktometer hat die Verminderung der Aufnahmezeit auch den Vorteil, daß während der gleichen Zeit nahezu doppelt so viel Untersuchungen durchgeführt werden können. — Zwischen den Ergebnissen der mit drei und der mit sechs Reflexionen durchgeführten Auswertungen konnten — bei Anordnungen ohne Kristallmonochromator — keine wesentlichen Genauigkeitsunterschiede wahrgenommen werden. Dies darf man z. T. darauf zurückführen, daß — besonders bei Proben mit stärker tetragonalem Martensit, — die (220) Martensitreflexion diffus und die (222) Austenitreflexion schwach ist. Statt drei, sechs Reflexionen zu benützen, lohnt es sich also nur dann, wenn es sich um angelassenen, kubischen Martensit aufweisende Stähle und mit einem Monochromator durchgeführte Präzisionsuntersuchungen handelt, und auf diese Weise die Genauigkeit der Messungen, — welche übrigens zumeist von den Aufnahmebedingungen abhängt, — erhöht werden soll.

Mit Rücksicht auf das Vorgetragene sind die Diagramme auf Grund der Tabelle 2 für das Auswertungsverfahren mit 3 und 6 Reflexionen konstruiert worden. Analytisch ist der Zusammenhang (8) die implizite Gleichung einer verschobenen und um 45° verdrehten gleichschenkligen Hyperbel. Die Hyperbel geht durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems $\frac{\Sigma P_\gamma}{\Sigma P_\alpha} \sim V_\gamma$ hindurch. Die horizontale Asymptote schneidet die Ordinate bei dem Austenitwert $V_\gamma = 100\%$, die vertikale Asymptote die Abszisse bei dem Wert $\frac{\Sigma P_\gamma}{\Sigma P_\alpha} = -\frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_\alpha}$. Damit also das Diagramm auch bei wenig α -Phasen enthaltenden, austenitischen Legierungen anwendbar sei, ist es zweckdienlich, auf der Abszisse eine Logarithmenskala zu benützen.

Die auf diese Weise ermittelten Kurven für *Restaustenit* = $f \frac{\Sigma P_\gamma}{\Sigma P_\alpha}$ sind in Bild 6 und 7 zusammengefaßt. Die Aufnahmeanordnung übt auf die Auswertungsdiagramme keine nennenswerte Wirkung aus, da die Quotienten $\frac{\Sigma G_\gamma}{\Sigma G_\alpha}$, welche sich auf die gegebenen Reflexe, bzw. auf die Wellenlänge der

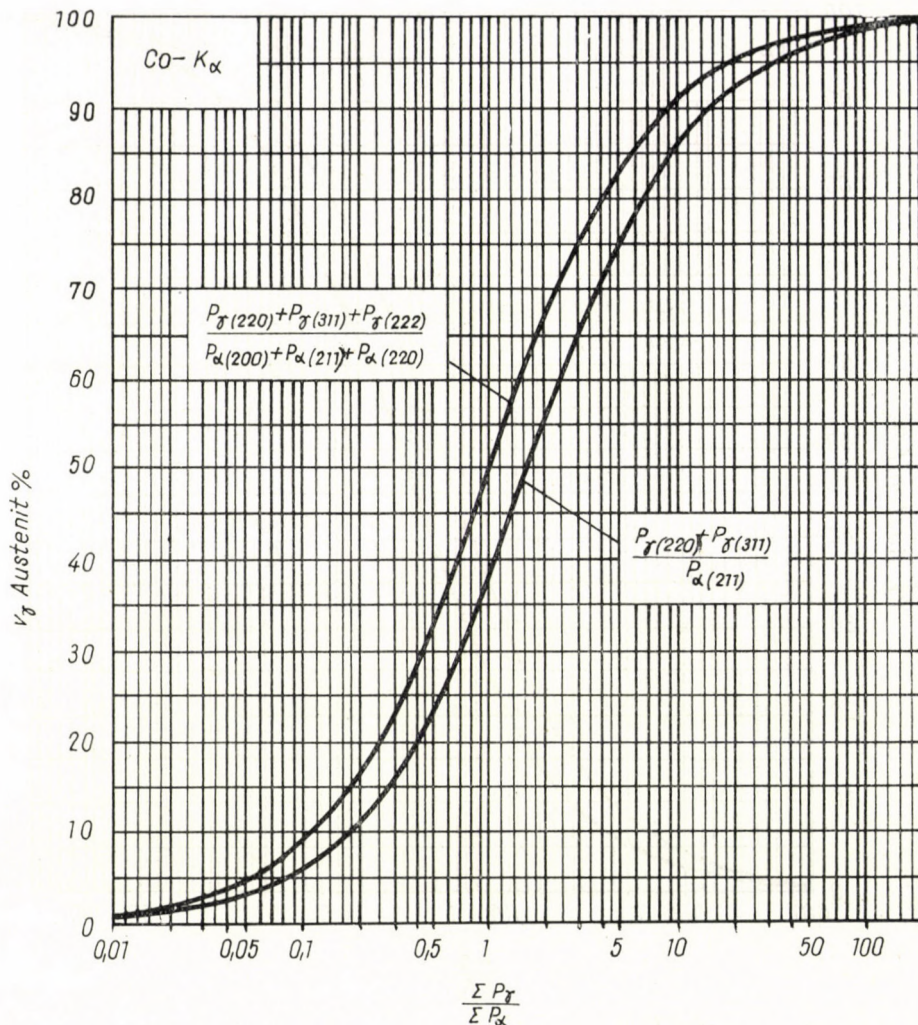


Bild 6. Restaustenit = $f\left(\frac{\Sigma P_{\gamma}}{\Sigma P_{\alpha}}\right)$ Auswertungskurven, berechnet auf Grund des Zusammenhanges (8), bzw. der Tabelle 2. Co—K_α-Strahlung

verwendeten untersuchenden Röntgenstrahls beziehen, nahezu die gleichen sind. Die feststellbaren Unterschiede lohnt es sich nur dann in Betracht zu ziehen, wenn man den Prozentsatz des Restaustenitgehaltes mit einer Genauigkeit von Dezimalbrüchen angeben will. In der Praxis ist dies im allgemeinen überflüssig. Es hat auch keinen Zweck, derart genaue Zahlenwerte anzustreben, da auch die Planimetrierung nicht fehlerfrei ist, und auch die G Werte nicht exakt genau sind.

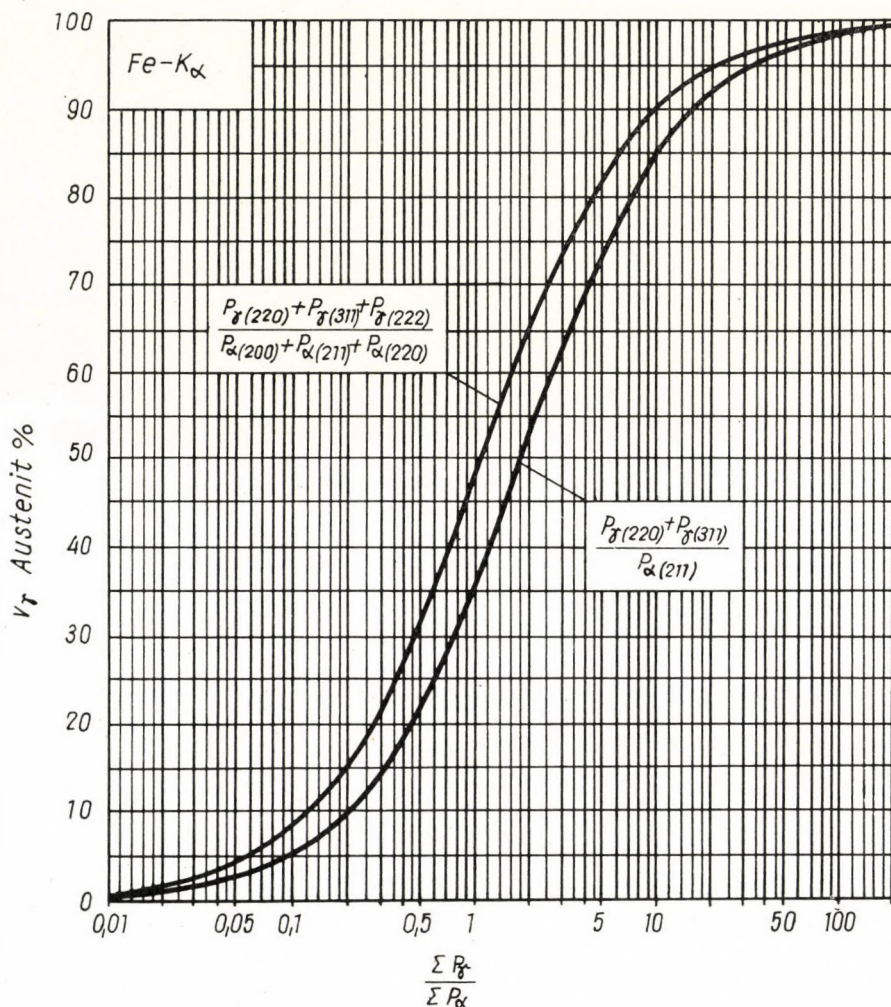


Bild 7. Restaustenit = $f\left(\frac{\sum P_{\gamma}}{\sum P_{\alpha}}\right)$ Auswertungskurven, berechnet auf Grund des Zusammenhanges (8), bzw. der Tabelle 2. Fe—K $_{\alpha}$ Strahlung.

SCHRIFTTUM

1. TAMARU, K., SEKITO, S.: Sci. Repts. Tohoku Imp. Univ. 1931. 20. I. 377—394.
2. GARDNER, F. S., COHEN, M., ANTIA, D. P.: Trans. AIME, 1943. II. 306—317.
3. FLETCHER, S. M., COHEN, M.: Trans. ASM. 34. 1945. 216.
4. Печволодов: Сборник «Рентгенография в применении к исследованию материалов», ОНТИ (1936).
5. Палатник и Фукс: Ученые записки Харьковского университета, XXX, стр. 213—235 (1950).
6. Ланда, Р. А.: Заводская лаборатория, № I, стр. 83—87, 1956.
7. AVERBACH, B. L., COHEN, M.: Trans. AIME, Metals Technology, Febr. 1948. 401—415.
8. AVERBACH, B. L., CASTLEMAN, L. S., COHEN, M.: Trans. ASM. 42. 1950, 112—120.

9. BEU, K. E.: Trans. AIME, J. of Metals, Dec. 1952. 1327—1328.
10. BEU, K. E.: Trans. AIME, J. of Metals, Nov. 1953. 1539—1540.
11. AVERBACH, B. L.: Trans. AIME, J. of Metals, Jan. 1953. 87—88.
12. KHOL, FR.: Hutnické Listy, 1957. 12. 299—302.
13. LANDOLT—BÖRNSTEIN: Zahlenwerte und Funktionen. 1. Teil, Berlin 1950, Springer.
14. *Phase Transformation in Solids*. Symposium. New-York, John Wiley and Sons, Inc.; London 1951, Chapman and Hall Ltd.
15. HONDA, K., NISHIYAMA, Z.: Sci. Rep. Tohoku Univ. 21. 1932. 299—331
16. *Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen*. Band II. Berlin 1935, Gebrüder Borntraeger.
17. HÖNL, H.: Annalen der Physik, 1933. 18. 625.
18. TAYLOR, A.: An Introduction to X-Ray Metallography. London 1945, Chapman and Hall Ltd.
19. GLOCKER, R.: Materialprüfung mit Röntgenstrahlen. 3. Aufl. Berlin 1949, J. Springer.
20. WESTPHAL, W. H.: Physikalisches Wörterbuch. Berlin 1952, J. Springer.
21. WILCHINSKY, Z.: J. of Applied Physics. 1944, 15. 812.
22. PEISER, H. S., ROOKSBY, H. P., WILSON, A. J. C.: X-Ray Diffraction by Polycrystalline Materials. The Inst. of Physics, London 1955.
23. VERÓ, J.: Az ipari vasötvözetek metallográfiája I. (Metallographie der industriellen Eisen-Legierungen, I. Teil.) Budapest 1960, Akadémiai Kiadó.
24. SZÁNTÓ, I.—FUCHS, E.: Mérés és Automatika, Budapest 1955. 3. 214—218.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Restaustenitgehalt gehärteter Stähle kann mit den üblichen metallographischen, Dilatometer- und magnetischen Methoden nur unter bestimmten Bedingungen ermittelt werden. Dabei ist das Zerschneiden der Werkstücke, bzw. die Veränderung ihres Gefüges meistens unvermeidlich.

Für vielseitige, zerstörungsfreie Untersuchungen erschien das Röntgendiffraktionsverfahren geeignet. Deshalb wurden die in der Fachliteratur zerstreuten Abhandlungen aufgearbeitet, die die Ermittlung des Austenitgehaltes mit Hilfe von Röntgenstrahlbeugung behandeln. Es konnte für Bestimmung des Restaustenitgehaltes ein Zusammenhang abgeleitet werden, der von der chemischen Zusammensetzung des Stahles im wesentlichen unabhängig ist. Die Grundlage der Ermittlung besteht darin, daß die integrierte Intensität der Austenit- und Martensitreflexe der Menge dieser Phasen proportional ist.

Für die ausführbar erscheinenden Aufnahmeanordnungen wurden die zur konkreten Auswertung notwendigen Konstanten berechnet. Zu dem auf drei, bzw. sechs Reflexe gegängelten Verfahren wurden Auswertungskurven bestimmt. Dadurch wurde es möglich, daß gegenüber der früheren, mindestens eine halbe Stunde beanspruchenden Auswertung der Austenitgehalt des Stahles aus den integrierten Reflexionsintensitäten innerhalb von 1—2 Minuten mit zufriedenstellender Genauigkeit ermittelt werden kann.

DETERMINATION OF THE RESIDUAL AUSTENITE CONTENT IN HARDENED STEELS BY X-RAY DIFFRACTION

E. G. FUCHS

SUMMARY

The determination of the residual austenite content in hardened steels by the usual metallographic, dilatometric and magnetic methods can be determined under certain circumstances only. Thus, cutting up of the specimens and modification of their structure respectively becomes mostly unavoidable.

For versatile, non-destructive testing the X-ray method seemed to be suitable. Therefore, the not too numerous papers scattered throughout technical literature, which deal with the X-ray diffractational method for the determination of the austenite content were treated.

For the determination of the residual austenite content a relationship essentially independent of the steel composition has been deduced. The determination is based upon the fact,

that the integrated reflection of austenite and martensite are proportional to the amount of these phases.

For any roentgenographical arrangement that seemed reasonable, constants needed for the concrete evaluation were computed. Evaluation curves were plotted for the method based on 3 and 6 reflections, respectively. Thus, from the integrated intensity of reflection data of satisfying accuracy for the austenite content of the steel involved can be obtained within 1 or 2 minutes, while the evaluation used up till now required at least half of an hour.

DÉTERMINATION PAR RADIODIFFRACTION DU CONTENU RÉSIDUEL EN AUSTÉNITE DES ACIERS TREMPÉS

E. G. FUCHS

RÉSUMÉ

Le contenu résiduel en austénite des aciers trempés ne peut être déterminé que sous certaines conditions par les méthodes métallographiques, dilatométriques et magnétiques en usage. La destruction, ou la modification de la structure de la matière devient ainsi inévitable dans la plupart des cas.

Le procédé de radiodiffraction semblant convenir le mieux pour les essais multiples sans destruction, l'auteur a utilisé les quelques études parues jusqu'à présent sur la détermination par radiodiffraction du contenu en austénite. Il en déduit une relation pour déterminer le contenu résiduel en austénite. Cette relation est, en principe, indépendante de la composition de l'acier. Le détermination est basée sur le fait que l'intensité intégrée des réflexions de l'austénite et de la martensite est proportionnelle à ces phases.

Pour les dispositions d'essais semblant être réalisables, l'auteur a calculé les constantes nécessaires en vue d'une évaluation concrète. Il a établi des courbes caractéristiques pour les procédés basés sur 3 ou 6 réflexions. Ainsi, en partant des intensités de réflexion intégrées, les résultats pratiquement assez exacts donnent le contenu en austénite de l'acier, peuvent être obtenus en 1 à 2 minutes, alors que la durée de l'évaluation par les anciennes méthodes est au moins d'une demi-heure.

РЕНТГЕНДИФФРАКЦИОННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ОСТАТОЧНОГО АУСТЕНИТА ЗАКАЛЕННЫХ СТАЛЕЙ

Э. Г. ФУКС

РЕЗЮМЕ

Содержание остаточного аустенита в случае закаленных сталей можно определить с помощью применяемых металлографических, dilatометрических и магнитных методов только при определенных условиях. Таким образом, в большинстве случаев нельзя избежать измельчения и, соответственно, изменения структуры.

Для многосторонних исследований без разрушения оказался подходящим рентгенодифракционный метод. Поэтому были обработаны данные, разбросанно встречающиеся в технической литературе, рассматривающей вопросы рентгенодифракционного определения содержания аустенита. Для определения содержания остаточного аустенита выведена такая зависимость, которая, по существу, независима от состава стали. Основой определения является то, что интегрированная интенсивность рефлексий аустенита и мартенсита пропорциональна количеству этих фаз.

Для схем съемки, которые казались осуществимыми, были вычислены постоянные, необходимые для конкретной оценки. Для методов, — основывающихся на рефлексии 3 и, соответственно, 6, — были определены оценочные кривые. Таким образом, по интегрированным интенсивностям рефлексий в противоположность с ранее требовавшимся временем не менее 30 мин, теперь можно получить данные о содержании аустенита в стали с практически удовлетворительной точностью за время в 1—2 мин.

THE REGULATION OF THE RADIAL FLOW IMPELLER BY ADJUSTING THE IMPELLER BLADES

I. KURUTZ

TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST, FLUID MECHANICS DEPARTMENT

[Manuscript received March 24, 1960]

As a rule, the regulation of radial flow fans in the case of an operation with constant revolution numbers takes place by adjusting the guide vanes placed in front of the impeller and by altering the spin of the medium entering the impeller. One of the features of this regulation method is that if the rate of flow is decreased, the total pressure increase in the working point of the highest efficiency, which belong to the different setting angles of the guide vanes, will be almost constant. In such cases, therefore, when the loss of the system connected with the fan is quadratically proportional to the rate of flow, this regulation method cannot be considered as the most economical one.

The altering of the setting angles of impeller blades has been a well-introduced and economical regulation method for a long time as far as the axial flow machines are concerned. It seems to be practical, therefore, that this method should be investigated also from the point of view as to whether it could be applied to the regulation of radial flow machines as well. Experiments of this sort have already been carried out and there are already such hydraulic torque-converters in use (Krupp) in which the blades of the pump impeller can be adjusted during the operation by turning them around an axis parallel to the rotation axis.

Theoretical and practical investigations were made to clear up this problem. The dimensions of the impeller having been applied in the course of our former tests and used in the present investigation as well, are given on Fig. 1. The mean line of the 6 blades in their normal state — in the position marked $\alpha = 0^\circ$ on the figure — is a logarithmic spiral, on which a symmetrical profile of Göttingen 409 has been imposed. The selection of a profile blade is motivated by the fact that, on the one hand, the adjustment can be performed in a much easier way constructionally than with a thin sheet blade, and on the other hand, it is to be expected that with a profile blade, the leading edge of which had already been well rounded, a high efficiency can be obtained within a wider range.

The blades have been turned approximately around their centre of gravity so that the centrifugal force exerts upon the blades a very low momentum only.

In the theoretical part of our investigations we have determined the theoretical characteristic curve of the impeller for that case in which the blades are in their normal state ($\alpha = 0^\circ$), respectively for the cases they are turned off at $\alpha = 10^\circ$ then at $\alpha = 20^\circ$.

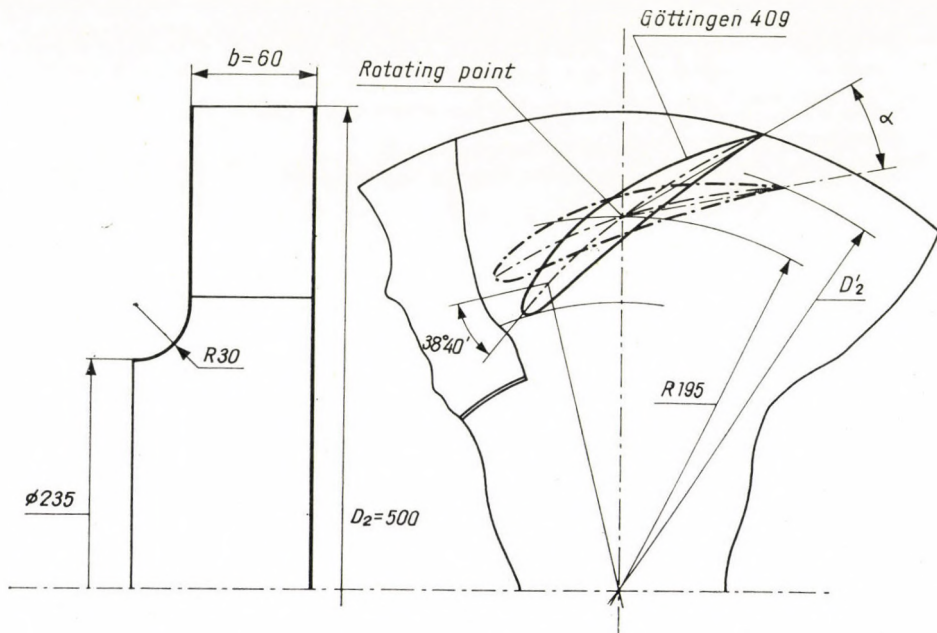


Fig. 1

The total pressure increase (Δp_t) and the rate of flow (Q) are both indicated with the dimensionless coefficients which are in standard use in the literature. Thus, the pressure coefficient will be:

$$\psi = \frac{\Delta p_t}{\frac{\rho}{2} u_2^2},$$

the capacity coefficient is:

$$\varphi^* = \frac{Q}{D_2 \pi b u_2}.$$

In the above relations u_2 means the peripheral speed of the impeller, ρ represents the density of the flowing medium; as to the other data the required information are supplied by Fig. 1.

The computation of the theoretical characteristic curve was made with the help of HOFFMEISTER's method [1]. The advantage of this method — which is the application of SCHLICHTING's computation method for a straight

cascade of airfoils [2] on a circular cascade of airfoils — is the fact that the computations can be made comparatively quickly and easily. Its applicability is, however, limited to a certain extent by the fact that the distribution of the circulation formed in the neighbourhood of the blades and taking place along the mean line are indicated by a GLAUERT (modified Fourier) series, only the first three members of which are taken into consideration. In our computations, however, which refer to even blade curves and to correspondingly smooth circulation distributions — free from any sudden changes — this neglect calls forth no important error at all.

HOFFMEISTER's method can be applied to the computation of impellers with infinitely thin (sheet) blades. In his above-quoted work SCHLICHTING pointed out that, in the case of a single blade the thickness affects only the velocity distribution around the blade and has no influence upon the circulation distribution. The latter depends on the shape of the mean line only. The influence of the thickness — in the case of a cascade arrangement of the blades — is increased when the solidity of the cascade is increased, *i. e.* the distance between the blades forming the cascade is decreased. Thus, we can reckon in advance the difference shown between the computations and the measurements performed with impellers of the profile blade type.

It is a matter of course that when the blades of the impeller are turned, the diameter of the circle determined by the trailing edge of the blades will be decreased too, so that the original external diameter of D_2 will diminish to D'_2 (see Fig. 1). In the course of the computations the pressure coefficient and the capacity coefficient according to this D'_2 decreased diameter is to be obtained. However, in order to make an easier comparison, it seems to be more practical to also refer the characteristics of the impeller with an adjusted blade to the original external diameter. With this aim in view, let us express the total pressure increase both with the pressure coefficient referring to the original diameter and with the one referring to the decreased diameter:

$$\frac{\rho}{2} \left(\frac{D_2}{2} \right)^2 \omega^2 \psi = \frac{\rho}{2} \left(\frac{D'_2}{2} \right)^2 \omega^2 \psi'.$$

Here ψ' stands for the pressure coefficient obtained in the course of computation. It refers to the changed diameter. The pressure coefficient referring to the original diameter will be — on basis of the above expression:

$$\psi = \psi' \left(\frac{D'_2}{D_2} \right)^2.$$

With the same train of thought:

$$D_2 \pi b \frac{D_2}{2} \omega \varphi^* = D'_2 \pi b \frac{D'_2}{2} \omega \varphi^{*'}.$$

If the capacity coefficient is also referring to the original diameter:

$$\varphi^* = \varphi^{*'} \left(\frac{D_2'}{D_2} \right)^2.$$

The theoretical characteristic curves thus obtained are illustrated by diagram No. 2. The point corresponding to the optimal operating condition (when the stagnation point is on the blade tip) for each setting angle has been indicated by a double circle.

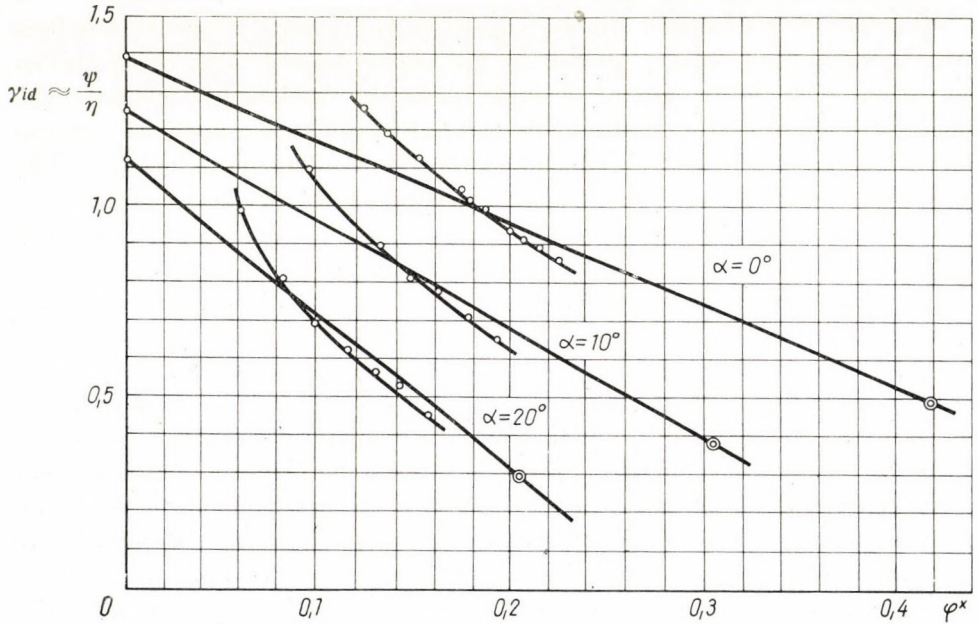


Fig. 2

In the course of the measurements, the impeller was examined in such a way that it was fitted into a spiral casing the dimensions of which are illustrated on Fig. 3. The characteristic curves measured at the normal state and at two turned-off blade positions — are indicated on diagram No. 4 together with the dimensionless coefficients referring to the original diameter.

In the computed characteristic curves the ideal pressure coefficients (ψ_{id}) being valid in the case of the flow of an ideal medium (loss-free flow) was plotted against φ^* .

In the case of a separation-free flow, the measured values yield a good approximation of the ψ_{id} value on basis of the relation hereunder:

$$\psi_{id} \approx \frac{\psi}{\eta};$$

where η represents the measured overall efficiency of the machine. The characteristic curves obtained in this way from the measurement values, have also been plotted on diagram No. 2.

It can be seen that, especially with low φ^* values, the characteristic curves of the measurements are — as a rule — steeper than those obtained by computation. Approaching the φ^*_{opt} value obtained with computation and corresponding to the optimal operational condition, the measured curve will become parallel to the computed one, though passing below it. At low φ^* values, however, it was the measurement which yielded higher ψ_{id} pressure coeffi-

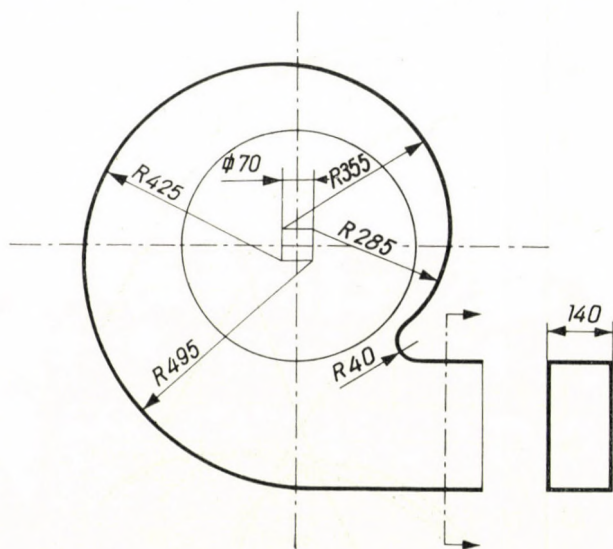


Fig. 3

icients. The explanation for these differences can be found partly in the fact that the tests were performed with profile blades, whereas the computations refer to infinitely thin sheet blades. The influence of profiling — especially with cascade arrangements of a greater solidity which belong to the larger α setting angles — cannot completely be neglected any longer. In the case of low φ^* values, the operational condition will be far from the φ^*_{opt} , so that separations of a higher extent are likely to take place. As a result of this, efficiency will decrease and $\frac{\psi}{\eta}$ will increase considerably. Another reason for the difference between the computed characteristic curve and the measured one might be the fact that due to the flow pattern which is formed in the impeller as a result of the turning in from axial to radial direction, and in consequence of the boundary layer established along the front and the rear disc, no two-dimensional

flow is present, though it was the latter, which we presumed at our computations.

Apart from the above facts it can be safely said that — especially in the range of the maximal efficiency — both the measured and the computed characteristic curves are in good accordance. Thus, the computation method

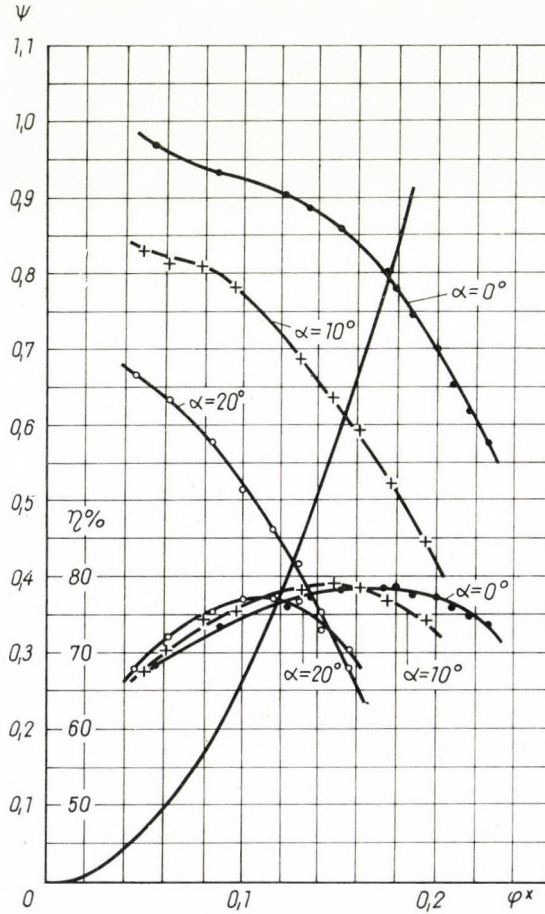


Fig. 4

applied can be considered as very practical for the determination of the operational characteristics of impellers, the blades of which are curved backward.

In order to estimate the efficiency and economicality of the regulation to be obtained by altering the setting angles of the blades, a parabola was drawn on diagram No. 4, starting from the origo across the highest efficiency point of the characteristic curve which corresponded to the $\alpha = 0^\circ$ blade setting angle. This parabola which, plotted against the rate of flow, indicates the

total pressure increase to be established, intersects the characteristic curves corresponding to the $\alpha = 10^\circ$ and $\alpha = 20^\circ$ blade setting angles almost equal at the point which has the highest efficiency. The maximal value of the efficiency — which had originally been rather low at this type of impeller — decreases by 4% at the setting angle of $\alpha = 20^\circ$. This setting, however, results in an approximately 35% fall in the flowing medium volume.

To compare the regulation method indicated here above and the regulation with adjustable guide vanes placed in front of the impeller, with the so-called guide vane regulator, the results of HERZOG's measurements were used [3]. These measurements had been performed with the impeller shown on Fig. 1. In front of the inlet of the impeller there were guide vanes which could

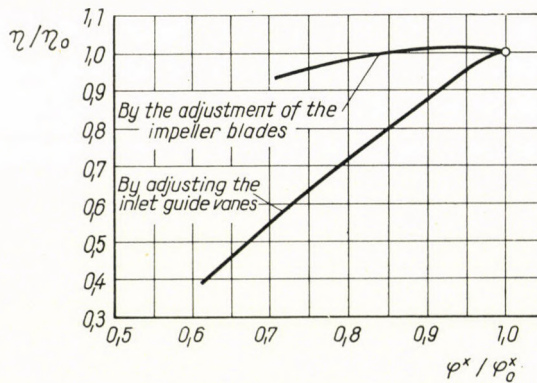


Fig. 5

be turned around radial bolts. The maximal efficiency to be obtained in the normal position of the impeller blades, respectively in that of the guide vanes was marked with η_0 , whereas the corresponding capacity coefficient was marked with φ_0^* . Assuming a quadratic relationship between the rate of flow of the impeller and the resistance to be overcome, the η/η_0 values belonging to the φ^*/φ_0^* values decreasing by regulation are indicated on diagram No. 5. It is striking that by adjusting the impeller blades a considerably better efficiency can be obtained.

On basis of the above facts, it can be stated that the regulation of the radial flow impellers by the turning of the blades is both efficient and economical. The fact, however, that under certain circumstances the simple and safe construction of the device which is to turn the blades might present difficulties, makes further considerations in this respect necessary.

LITERATURE

1. HOFFMEISTER, M.: Entwicklung von radialen Laufschaufeln unter Benutzung des Singularitätenverfahrens. Maschinenbautechnik, 8. 1959. 77.
2. SCHLICHTING, H.: Berechnung des reibungslosen, inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes, ebenes Schaufelgitter. VDI Forschungsheft. 447.
3. HERZOG, P.: Radiális átömlésű kazánventilátorok szabályozása. (The regulation of radial flow boiler fans.) Magyar Energiagazdaság. 7. 1954. 448.

SUMMARY

The regulation of radial flow fans and pumps can be solved in such a way that the blades of the impeller are turned around an axis parallel to the rotational one. On basis of the theoretical and practical examinations performed, the present study illustrates the influence of this regulation method on the characteristic curves. The results prove that under certain conditions this method might be more advantageous than the swirl regulation made by means of the guide vanes placed in front of the impeller.

LEISTUNGSREGULIERUNG DES RADIAL DURCHSTRÖMTEN LAUFRADES
DURCH UMSTELLUNG DER LAUFSCHAUFELN

I. KURUTZ

ZUSAMMENFASSUNG

Die Regulierung von Gebläsen und Pumpen mit radial durchströmten Laufrädern läßt sich durch Verdrehung der Laufschaufeln um eine Achse parallel zur Drehachse lösen. Auf grund von theoretischen und experimentellen Untersuchungen wird in der Abhandlung der Einfluß dieser Regulierungsart auf den Verlauf der Kennlinien erörtert. Die Ergebnisse zeigen, daß diese Methode unter Umständen derjenigen der Drallregulierung durch einen vor dem Laufrad angebrachten verstellbaren Umlenkschaufel-Kranz überlegen sein kann.

RÉGLAGE DU DÉBIT D'UNE ROUE CENTRIFUGE PAR LE DÉPLACEMENT
ANGULAIRE DES AUBES

I. KURUTZ

RÉSUMÉ

Le réglage des ventilateurs et pompes centrifuges peut être réalisé par le pivotement des ailettes de la roue centrifuge autour d'un axe parallèle à l'arbre de la roue. L'auteur se basant sur les résultats d'essais théoriques et pratiques, démontre l'effet de cette méthode de réglage sur la forme des courbes caractéristiques. Les résultats prouvent l'avantage de cette méthode dans certains cas particuliers, par rapport au réglage à impulsion rotatoire (Drallregelung) réalisé par des aubes fixes réglables, disposés devant la roue centrifuge.

РЕГУЛИРОВАНИЕ МОЩНОСТИ РАБОЧИХ КОЛЕС РАДИАЛЬНОГО ПЕРЕЛИВА
УСТАНОВКОЙ ЛОПАСТЕЙ РАБОЧИХ КОЛЕС

Э. КУРУЦ

РЕЗЮМЕ

Регулирование вентиляторов и насосов радиального перелива может быть решено поворотом лопастей рабочих колес вокруг оси, параллельной оси вращения. Работа на основе данных теоретических и опытных исследований показывает воздействие этого метода регулирования на сход характеристик. Результаты показывают, что этот метод при определенных условиях является более выгодным, чем регулирование импульса вращения при помощи расположенного перед рабочим колесом регулируемого венца направляющих лопастей.

BUCKLING OF BARS ELASTICALLY BUILT-IN ALONG THEIR ENTIRE LENGTH

P. CSONKA
D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF STRUCTURAL ENGINEERING OF THE HUNGARIAN ACADEMY
OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received March 31, 1960]

The solution of different problems on stability is, in general, exceedingly complicated and mostly it is impossible to express the magnitude of the critical force by a simple closed formula. The task to be dealt with in the following, *i. e.*, the problem of a prismatic bar elastically built-in along its whole length (Fig. 1) should be regarded as an exceptional case, because the solution of this problem is, for the usual modes of supporting, extraordinarily simple.

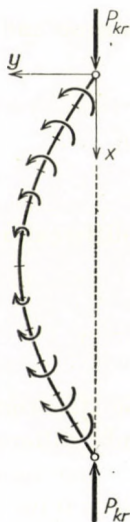


Fig. 1. Buckling of an elastically built-in bar

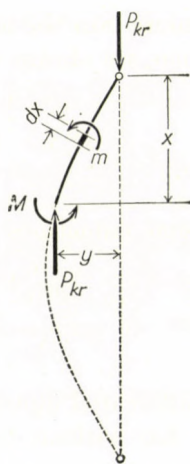


Fig. 2. Balancing of the cut-off part of the bar

Data referring to the bar to be investigated should be denoted as follows: the length of the bar by l , its moment of inertia decisive from the view-point of buckling by J , the modulus of elasticity of the material of the bar at the very moment of buckling by E , the "coefficient of embedding" of the elastic building-in defined according to ZIMMERMANN, *i. e.*, the moment necessary for

unit-rotation of the cross sections by k , and the critical value of the compressive force P acting on the bar by P_{cr} .

For the determination of the value P_{cr} the method of equilibrium or the energy method can be used expediently.

1. If using the *method of equilibrium*, for the cut-off part of the bar imagined as being cut in two (Fig.2) the moment equation expressing the condition of equilibrium should be written:

$$P_{cr} y = \int_0^x m dx - M = 0.$$

In the above formula M means the bending moment and m the moment of elastic building-in, respectively; their values are:

$$M = - EJ \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad m = k \frac{dy}{dx}.$$

Replacing these values into the above moment equation and carrying out the indicated integration, we obtain the equation

$$P_{cr} y - ky + EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

From this, after some reductions we arrive to the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P_{cr} - k}{EJ} y = 0.$$

The above differential equation is of the same structure as the differential equation of a bar without building-in. The only difference between the two equations is that here, in contrast to the mentioned more simple case, we have $P_{cr} - k$ instead of P_{cr} . Thus, if for $k = 0$ the value of the critical force was P_0 , then in our case it is

$$P_{cr} - k = P_0,$$

i. e.,

$$P_{cr} = P_0 + k.$$

According to the above, the *critical compressive force of a bar elastically built-in along its whole length is obtained by increasing the critical compressive force of a non built-in bar by the coefficient of the embedding of building-in.*

From the above deduction we can draw the interesting conclusion that *in the case of an elastic building-in the deflection curve of the bar is the same, as if the bar were not built-in elastically.*

2. The use of the *energy method* is also fairly simple. In this case the external work, *i. e.*, the work of the loading forces is

$$L_e = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx,$$

the work of the internal forces, on the other hand is

$$L_i = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

The first member on the right-hand side of the latter equation expresses the work of bending of the axis of the bar, the second member, however, the work necessary for overcoming the elastic building-in. The condition of equilibrium is

$$L_e - L_i = 0,$$

that is

$$\frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx - \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{k}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = 0.$$

From here we obtain

$$\frac{P - k}{EJ} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx.$$

The latter equation evidently gives the minimum value for P — this is the critical force P_{cr} we sought for — when the value of the expression $P - k$ reaches its minimum. It follows from this that for $k \neq 0$ the buckling deformation of the bar is of the same form, as it would occur if k were equal to zero. The above equation at the same time indicates that the previously proved expression

$$P_{cr} - k = P_0$$

is obviously right.

Applications

According to the above, the critical compressive force of a bar elastically built-in along its whole length can be calculated by the following formulae.

If one end of the bar is entirely free and the other end is completely built-in

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} + k ;$$

on the other hand, if both ends of the bar are hinged

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} + k .$$

Conversely, if one bar-end is completely built-in and the other end is supported hinge-like, the critical force is

$$P_{cr} \approx \frac{2\pi^2 EJ}{l^2} + k ;$$

finally, for a bar built-in at both ends the critical force is

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} + k .$$

SUMMARY

The paper deals with the determination of the critical force of centrally compressed bars elastically built-in along their entire length. It is proved that the deflection curve of an elastically built-in bar is the same, as if the bar were not built-in elastically. The critical force of the bars dealt with is greater by the coefficient of the elastic embedding than for elastically not built-in bars.

DIE KNICKUNG EINES ENTLANG SEINER GANZEN LÄNGE ELASTISCH EINGESPANNTEN STABES

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz beschäftigt sich mit der Bestimmung der kritischen Druckkraft des auf mittigen Druck beanspruchten, entlang seiner ganzen Länge elastisch eingespannten Stabes. Es wird nachgewiesen, daß der elastisch eingespannte Stab bei der Knickung in derselben Weise gebogen wird, wie der nicht eingespannte Stab. Die kritische Druckkraft ist um den Bettungs-Koeffizienten größer als die eines elastisch nicht eingespannten Stabes.

FLAMBAGE D'UNE BARRE ÉLASTIQUEMENT ENCASTRÉE
SUR TOUTE SA LONGUEUR

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'auteur détermine la force de compression critique d'une barre comprimée concentriquement, et encastrée élastiquement sur toute sa longueur. Il démontre que celle-ci prend la même courbure, au cours du flambage, que la barre non encastrée élastiquement. La force de compression critique s'augmente du coefficient de raideur de l'encastrement élastique, par rapport à celle supportée par les barres non encastrées élastiquement sur toute leur longueur.

ПРОГИБ СТЕРЖНЯ, ЗАЖАТОГО ЭЛАСТИЧНО ПО ВСЕЙ ДЛИНЕ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Работа рассматривает определение критического усилия давления стержня, зажато эластично по всей длине и работающего на центральное давление. Показано, что эластично зажатый стержень при прогибе изгибается в такой же форме, как и эластично не зажатый стержень. Критическое усилие давления имеет большую величину в случае упругого зажатия, чем в случае неэластичного зажатия.

EINIGES ÜBER DIE EIGENSCHAFTEN DER CHARAKTERISTISCHEN GLEICHUNG BEI TORSIONSSCHWINGUNGEN

A. BALOGH

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 5. Juli 1960]

Für ein System von 5 Massen ist die charakteristische Determinante:

$$B_5 = \begin{vmatrix} w^2 - u_{11} & u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & w^2 - u_{12} - u_{22} & u_{22} & 0 & 0 \\ 0 & u_{23} & w^2 - u_{23} - u_{33} & u_{33} & 0 \\ 0 & 0 & u_{34} & w^2 - u_{34} - u_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{45} & w^2 - u_{45} \end{vmatrix} \quad (1)$$

woselbst c in kgcm der Steifigkeitswert der Welle, I das Trägheitsmoment der Masse in kgcmsec², w die Kreisfrequenz bedeutet. Es sei:

$$u_{nm} = \frac{c_n}{I_m} \quad (2)$$

Wird die Determinante 1 entwickelt und gleich 0 gesetzt, so erhält man die charakteristische Gleichung der Torsionsschwingung.

An der Determinante 1 sollen einige Umgestaltungen vorgenommen werden, und zwar:

1. die letzte Kolonne soll zu der vorletzten addiert werden,
2. die vorletzte Zeile mit -1 multipliziert soll zu der letzten Zeile addiert werden.

Hiemit übergeht die Determinante 1 in die Folgende:

$$B_5 = \begin{vmatrix} w^2 - u_{11} & u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & w^2 - u_{12} - u_{22} & u_{22} & 0 & 0 \\ 0 & u_{23} & w^2 - u_{23} - u_{33} & u_{33} & 0 \\ 0 & 0 & u_{34} & w^2 - u_{34} & u_{44} \\ 0 & 0 & -u_{34} & u_{34} & w^2 - u_{44} - u_{45} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Die Determinante 3 soll nach der letzten Kolonne entwickelt werden:

$$B_5 = (w^2 - u_{44} - u_{45}) B_4 - u_{44} \begin{vmatrix} w^2 - u_{11} & u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & w^2 - u_{12} - u_{22} & u_{22} & 0 \\ 0 & u_{23} & w^2 - u_{23} - u_{33} & u_{33} \\ 0 & 0 & -u_{34} & u_{34} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Die letzte Kolonne der Determinante in 4. soll zu der vorletzten addiert werden, und die so erhaltene Determinante soll nach der letzten Reihe entwickelt werden, wobei man erhält:

$$B_5 = (w^2 - u_{44} - u_{45}) B_4 - u_{44} u_{34} \begin{vmatrix} w^2 - u_{11} & u_{11} & 0 \\ u_{12} & w^2 - u_{12} - u_{22} & u_{22} \\ 0 & u_{23} & w^2 - u_{23} \end{vmatrix} \quad (5)$$

oder

$$B_5 = (w^2 - u_{44} - u_{45}) B_4 - u_{34} u_{44} B_3 \quad (6)$$

Aus 6 ist zu ersehen, daß die charakteristische Gleichung für 5 Massen aus jener von 4 (B_4) und 3 (B_3) berechnet werden kann. Die Auflösung einer entsprechenden Determinante fällt daher fort, was eine bedeutende Vereinfachung der Rechnung bedeutet.

Die vorgeführte Ableitung kann in gleicher Weise auf ein System von n Massen ausgedehnt werden, und dies erfordert nichts Neues. Das Ergebnis ist:

$$B_n = (w^2 - u_{n-1,n-1} - u_{n-1,n}) B_{n-1} - u_{n-2,n-1} u_{n-1,n-1} B_{n-2}. \quad (7)$$

Als Beispiel soll für ein System von 6 Massen die Gleichung 7 angeschrieben werden.

$$B_6 = (w^2 - u_{55} - u_{56}) B_5 - u_{45} u_{55} B_4 \quad (8)$$

Es soll nun B_6 aus B_5 und B_4 berechnet werden, und die entsprechenden charakteristischen Gleichungen sind in Zahlentafel I unter I (bzw. unter II) zu finden. Diese Rechnungen wurden in den Zahlentafeln 3—7 zusammengestellt und auch tatsächlich durchgeführt, und zwar für jede Potenz von w möglichst in einer gesonderten Zahlentafel.

Zahlentafel I

$$\begin{aligned} B_5 = w^8 & - \left(c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} + c_2 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} + c_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} + c_4 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} \right) w^6 + \\ & + \left[c_1 c_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} + c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \left(c_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} + c_4 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} \right) + \right. \\ & + c_2 c_3 \frac{I_2 + I_3 + I_4}{I_2 I_3 I_4} + c_2 c_4 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} + c_3 c_4 \frac{I_3 + I_4 + I_5}{I_3 I_4 I_5} \left. \right] w^4 - \\ & - \left(c_1 c_2 c_3 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} + c_2 c_3 c_4 \frac{I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{I_2 I_3 I_4 I_5} + \right. \\ & + c_1 c_2 c_4 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} \cdot \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} + c_1 c_3 c_4 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{I_3 + I_4 + I_5}{I_3 I_4 I_5} \left. \right) w^2 + \quad (I) \\ & + c_1 c_2 c_3 c_4 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5} w^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_4 = w^6 - & \left(c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} + c_2 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} + c_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} \right) w^4 + \left(c_1 c_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} + \right. \\
 & + c_2 c_3 \frac{I_2 + I_3 + I_4}{I_2 I_3 I_4} + c_1 c_3 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} \left. \right) w^2 - \\
 & - c_1 c_2 c_3 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} w^0
 \end{aligned} \quad (II)$$

$$B_6 = \left[w^2 - c_5 \left(\frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right) \right] B_5 - \frac{c_4}{I_5} \frac{c_5}{I_5} B_4 \quad (III)$$

Zahlentafel 2

Für B_5 entnimmt man aus Zahlentafel 1 die folgenden Werte:

w^8	w^6	w^4	w^2	w^0
	c_1	$c_1 c_2$	$c_1 c_2 c_3$	$c_1 c_2 c_3 c_4$
	c_2	" c_3	" $c_2 c_4$	
	c_3	" c_4	" $c_3 c_4$	
	c_4	$c_2 c_3$	$c_2 c_3 c_4$	
		" c_4		
		$c_3 c_4$		

Die Zahl der Glieder:

$$\begin{aligned}
 1 + 4 + 6 + 4 &= 16 = 2^4 \\
 \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} &= 16 = 2^4
 \end{aligned}$$

Für B_4 entnimmt man aus Zahlentafel 1 die folgenden Werte:

w^6	w^4	w^2	w^0
	c_1	$c_1 c_2$	$c_1 c_2 c_3$
	c_2	" c_3	
	c_3	$c_2 c_3$	

Die Zahl der Glieder:

$$\begin{aligned}
 1 + 3 + 3 + 1 &= 8 \\
 \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} &= 8 = 2^3
 \end{aligned}$$

Zahrentafel 3

$$+ w^{10}, - w^8$$

$$w^{10} - \left[c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} + c_2 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} + c_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} + c_4 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} + \right. \\ \left. + c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right] w^8 \quad (\text{IV})$$

Zahrentafel 4

$$+ w^6$$

$$+ \left[c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} + c_2 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} + c_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} + c_4 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} \right] \cdot \left[c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right] - \\ - \frac{c_4 c_5}{I_5 I_5} + \left[c_1 c_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} + c_2 c_3 \frac{I_2 + I_3 + I_4}{I_2 I_3 I_4} + c_3 c_4 \frac{I_3 + I_4 + I_5}{I_3 I_4 I_5} + \right. \\ \left. + c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \left(c_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} + c_4 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} \right) + c_2 c_4 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} \right] \quad (\text{V})$$

$$c_4 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} + c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} - c_4 c_5 \frac{1}{I_5 I_5} = c_4 c_5 \frac{I_4 + I_5 + I_6}{I_4 I_5 I_6} \quad (\text{VI})$$

$$+ \left[c_1 c_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} + c_2 c_3 \frac{I_2 + I_3 + I_4}{I_2 I_3 I_4} + c_3 c_4 \frac{I_3 + I_4 + I_5}{I_3 I_4 I_5} + \right. \\ \left. + c_4 c_5 \frac{I_4 + I_5 + I_6}{I_4 I_5 I_6} + c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \left(c_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} + c_4 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} + c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right) + \right. \\ \left. + c_2 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} \left(c_4 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} + c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right) + c_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right] \quad (\text{VII})$$

Zahrentafel 6

$$- w^4$$

$$\left[c_1 c_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} + c_2 c_3 \frac{I_2 + I_3 + I_4}{I_2 I_3 I_4} + c_3 c_4 \frac{I_3 + I_4 + I_5}{I_3 I_4 I_5} + c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \right. \\ \left. \left(c_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} + c_4 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} \right) + c_2 c_4 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} \right] \cdot \left(c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right) + \\ + \left(c_1 c_2 c_3 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} + c_2 c_3 c_4 \frac{I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{I_2 I_3 I_4 I_5} + \right.$$

$$+ c_1 c_2 c_4 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} + c_1 c_3 c_4 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{I_3 + I_4 + I_5}{I_3 I_4 I_5} \Big) -$$

$$- \left(c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{c_4 c_5}{I_5 I_5} + c_2 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} \frac{c_4 c_5}{I_5 I_5} + c_3 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} \frac{c_4 c_5}{I_5 I_5} \right) \quad (\text{VIII})$$

$$c_1 c_4 c_5 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} - c_1 c_4 c_5 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{c_4 c_5}{I_5 I_5} =$$

$$= c_1 c_4 c_5 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{I_4 + I_5 + I_6}{I_4 I_5 I_6} \quad (\text{IX})$$

$$c_3 c_4 c_5 \frac{I_3 + I_4 + I_5}{I_3 I_4 I_5} \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} - c_3 c_4 c_5 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} \frac{I_1}{I_5 I_5} =$$

$$= c_3 c_4 c_5 \frac{I_3 + I_4 + I_5 + I_6}{I_3 I_4 I_5 I_6}$$

$$c_2 c_4 c_5 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} -$$

$$- c_2 c_4 c_5 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} \frac{I_1}{I_5 I_5} = c_2 c_4 c_5 \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} \frac{I_4 + I_5 + I_6}{I_4 I_5 I_6}$$

$$- \left(c_1 c_2 c_3 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} + c_2 c_3 c_4 \frac{I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{I_2 I_3 I_4 I_5} + \right.$$

$$\left. + c_3 c_4 c_5 \frac{I_3 + I_4 + I_5 + I_6}{I_3 I_4 I_5 I_6} + c_1 c_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} \left(c_4 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} + c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right) \right) +$$

$$+ c_1 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \left(c_3 c_4 \frac{I_3 + I_4 + I_5}{I_3 I_4 I_5} + c_4 c_5 \frac{I_4 + I_5 + I_6}{I_4 I_5 I_6} + c_3 c_5 \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right) +$$

$$+ c_2 c_3 c_5 \frac{I_2 + I_3 + I_4}{I_2 I_3 I_4} \cdot \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} + c_2 c_4 c_5 \frac{I_2 + I_3}{I_3 I_4} \frac{I_4 + I_5 + I_6}{I_4 I_5 I_6} \Big) \quad (\text{X})$$

Zahlentafel 6

+ w²

$$\left[c_1 c_2 c_3 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} + c_2 c_3 c_4 \frac{I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{I_2 I_3 I_4 I_5} + c_1 c_2 c_4 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} + c_1 c_3 c_4 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{I_3 + I_4 + I_5}{I_3 I_4 I_5} \right] \left[- c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + c_1 c_2 c_3 c_4 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5} - \\
& - \left[c_1 c_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} \frac{c_4 c_5}{I_4 I_5} + c_2 c_3 \frac{I_2 + I_3 + I_4}{I_2 I_3 I_4} \frac{c_4 c_5}{I_5 I_5} + c_1 c_3 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \cdot \right. \\
& \quad \left. \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} \frac{c_4 c_5}{I_5 I_5} \right] \tag{XI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 c_2 c_4 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5} c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} - c_1 c_2 c_4 c_5 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} \frac{1}{I_5 I_5} = \\
= c_1 c_2 c_4 c_5 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} \frac{I_4 + I_5 + I_6}{I_4 I_5 I_6} \tag{XII}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[c_1 c_2 c_3 c_4 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5} + c_2 c_3 c_4 c_5 \frac{I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6}{I_2 I_3 I_4 I_5 I_6} + \right. \\
& + c_1 c_2 c_3 c_5 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} + c_1 c_2 c_4 c_5 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} \frac{I_4 + I_5 + I_6}{I_4 I_5 I_6} \\
& \quad \left. + c_1 c_3 c_4 c_5 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{I_3 + I_4 + I_5 + I_6}{I_3 I_4 I_5 I_6} \right] \tag{XIII}
\end{aligned}$$

Zahlentafel 7

- w^0

$$\begin{aligned}
c_1 c_2 c_3 c_4 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5} \left(-c_5 \frac{I_5 + I_6}{I_5 I_6} \right) - \\
- c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} \cdot \frac{I_1}{I_5 I_5} = \\
= c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6}{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6} \tag{XIV}
\end{aligned}$$

Aus den bisherigen Ausführungen entnimmt man die folgenden Ergebnisse:

1. Die Beiwerte sind zusammengestellt aus Ausdrücken von folgender Form:

$$f(c, I) = c_k c_{k+1} \dots c_{n-1} \frac{I_k + I_{k+1} + \dots + I_n}{I_k I_{k+1} \dots I_n} = L_{k, k+1 \dots n}, \tag{9}$$

also eine Funktion von c und I , wo $k < n$ ist. Führt man aber die Bezeichnung L ein, so hat man:

$$B_5 = w^8 - [L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{45}] w^6 + [L_{123} + L_{234} + L_{345} + L_{12}(L_{34} + L_{45}) + L_{23}L_{45}] w^4 - [L_{1234} + L_{2345} + L_{123}L_{45} + L_{12}L_{345}] w^2 + L_{12345} w^0 = 0 \quad (10)$$

Wenn der Index aus mehr als 3 Zahlen besteht, so soll es folgenderweise gekürzt werden: z. B. $L_{12345} = L_{12 \cdot 5}$. Oder:

$$\begin{aligned} B_6 = & w^{10} - (L_{12} + L_{23} + L_{34} + L_{45} + L_{56}) w^8 + \\ & + [L_{123} + L_{234} + L_{345} + L_{456} + L_{12}(L_{34} + L_{45} + L_{56}) + L_{23}(L_{45} + L_{56}) + \\ & \quad + L_{34}L_{56}] w^6 - \\ & - [L_{12 \dots 4} + L_{23 \dots 5} + L_{34 \dots 6} + L_{123}(L_{45} + L_{56}) + L_{12}(L_{345} + L_{456} + L_{34}L_{56}) + \\ & \quad + L_{234}L_{56} + L_{23}L_{456}] w^4 + \\ & + [L_{12 \dots 5} + L_{23 \dots 6} + L_{12 \dots 4}L_{56} + L_{123}L_{456} + L_{12}L_{34 \dots 6}] w^2 - L_{12 \dots 6} = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

Betrachtet man die Ausdrücke in den Klammern, so sieht man sofort, daß einzelne Ausdruckteile sich wiederholen, wofür wieder Bezeichnungen eingeführt werden können, wodurch die rechnerische Arbeit vermindert wird.

$$\begin{aligned} L_{56} &= L_{56} & L_{12}L_{34-6} + L_{23}L_{45-6} + L_{34}L_{56} &= \Delta_{12-6} \\ L_{45} + L_{56} &= L_{45-6} & L_{23}L_{45-6} + L_{34}L_{56} &= \Delta_{23-6} \\ L_{45-6} + L_{34} &= L_{34-6} & L_{34}L_{56} &= \Delta_{34-6} \\ L_{34-6} &= L_{23} = L_{23-5} \\ L_{23-6} + L_{12} &= L_{12-6} & L_{123}L_{34-6} + L_{234}L_{56} &= \Delta_{123-6} \\ & & L_{234}L_{56} &= \Delta_{234-6} \\ & & L_{12 \cdot 4}L_{56} &= \Delta_{12 \cdot 4-6} \\ L_{456} &= L_{456} & \Delta_{12-6} + L_{123-6} &= \lambda_{123-6} \\ L_{456} + L_{345} &= L_{345-6} & \Delta_{123-6} + L_{12 \cdot 4-6} &= \lambda_{12 \cdot 4-6} \\ L_{345-6} + L_{234} &= L_{234-6} & \Delta_{34-6} + L_{345-6} &= \lambda_{345-6} \\ L_{234-6} + L_{123} &= L_{123-6} & L_{123 \cdot 5-6} + L_{12 \cdot 4}L_{56} &= \lambda_{12 \cdot 5-6} \\ L_{34 \cdot 6} &= L_{34 \cdot 6} \\ L_{34 \cdot 6} + L_{23 \cdot 5} &= L_{23 \cdot 5-6} \\ L_{23 \cdot 5-6} + L_{12 \cdot 5} &= L_{12 \cdot 4-5} \end{aligned} \quad (12)$$

Diese Bezeichnungen können verschiedenartig gewählt werden. Eine sehr brauchbare Zusammenstellung solcher Bezeichnungen findet man unter 12, die zugleich für B_6 Anwendung fand.

$$\begin{aligned}
 B_6 = w^{10} - L_{12-6} w^8 + & \left[L_{123-6} + \overbrace{L_{12} L_{34-5} + L_{23} L_{45-6} L_{56}}^{\Delta_{12-6}} \right] w^6 - \\
 & \left[L_{12 \cdot 4-6} + \overbrace{L_{123} L_{34-6} + L_{234} L_{56}}^{\lambda_{12,4-6}} \right] + L_{12} \left(\overbrace{L_{345-6} + L_{34} L_{56}}^{\lambda_{345-6}} \right) + L_{23} L_{456} w^4 + \\
 & \left[\overbrace{L_{123.5-6} + L_{12.4} L_{56}}^{\lambda_{12.5-6}} \right] + L_{123} L_{345} + L_{12} L_{345} w^2 - \\
 & \overbrace{L_{12.4-6}}^{\Delta_{12,4-6}} - L_{12..6} = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

Setzt man die Bezeichnungen in die Gleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 B_6 = w^{10} - L_{12-6} w^8 + \lambda_{123-6} w^6 - (\lambda_{12 \cdot 4-6} + L_{12} \lambda_{345-6} + L_{23} L_{456}) w^4 + \\
 + (\lambda_{12.5-6} + L_{123} L_{456} + L_{12} L_{34.6}) w^2 - L_{12..6} = 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Hiemit wurde mit Hilfe der charakteristischen Gleichungen der 4 (B_4) und 5 (B_5) Massensysteme jene für 6 Massen (B_6) ermittelt. Die Beiwerte für die einzelne Potenzen sind die folgenden:

für w^{10} und w^8	Formel	IV	in Zahlentafel	3
für w^6	„	VII	„	4
für w^4	„	X	„	5
für w^2	„	XIII	„	6
für w^0	„	XIV	„	7

Diesen Beiwerten entnimmt man für die c Werte folgende Zusammenstellung:

w^{10}	w^8	w^6	w^4	w^2	w^0
	c_1	$c_1 c_2$	$c_1 c_2 c_3$	$c_1 c_2 c_3 c_4$	$c_1 c_2 c_3 c_4 c_5$
	c_2	„ c_3	„ „ c_4	„ „ „ c_5	
	c_3	„ c_4	„ „ c_5	„ „ $c_4 c_5$	
	c_4	„ c_5	$c_1 c_3 c_4$	„ $c_3 c_4 c_5$	
	c_5	$c_2 c_3$	„ „ c_5	$c_2 c_3 c_4 c_5$	
		„ c_4	$c_1 c_4 c_5$		
		„ c_5	$c_2 c_3 c_4$		
		$c_3 c_4$	„ „ c_5		
		„ c_5	$c_2 c_4 c_5$		
		$c_4 c_5$	$c_3 c_4 c_5$		

Die Zahl der Glieder:

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

$$\begin{matrix} (5) + (5) + (5) + (5) + (5) + (5) = 32 = 2^5 \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \end{matrix}$$

Dieser Vorgang kann weiter fortgesetzt werden, und kann z. B. mit B_5 und B_6 , B_7 für ein System von 7 Massen ermittelt werden, u. s. w. Dies bringt aber nichts Neues!

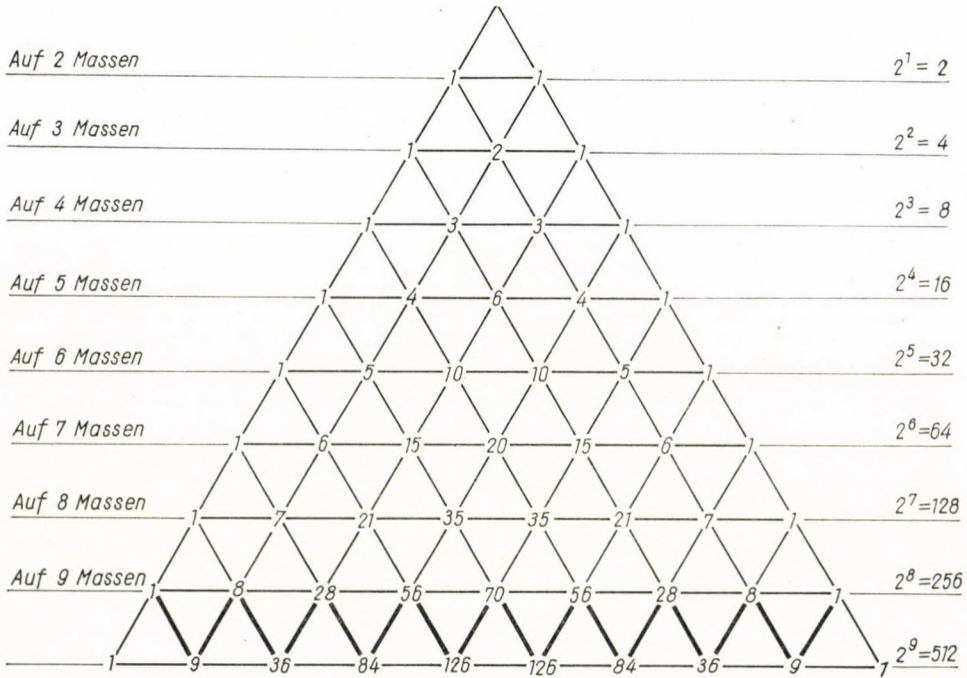


Abb. 1

2. In dem hier vorgeführten Beispiel ist die auszuführende Rechnung in III angegeben, und man sieht sofort, daß der Faktor für B_5 (bei B_6) ausschlaggebend ist, und zwar:

$$w^2 \text{ und } -c_5 \frac{I_4 + I_5}{I_4 I_5}$$

und das zweite Glied in III nur zur Ergänzung dient.

Es folgt daher, wenn man von B_5 auf B_6 übergeht, daß sich die Zahl der Glieder verdoppelt. Die Gliederzahl bei B_5 war 16, und ist bei B_6 32. Dies gilt natürlich für B_7, B_8, \dots, B_n .

Aus der bisherigen Zusammenstellung ist auch zu ersehen, daß die Beiwerte bei den Potenzen auch durch die Kombinatorik ermittelt werden können. Hiezu wurde Zahlentafel 8 aufgestellt.

Die in Zahlentafel 8 angegebene Zahlen werden übersichtlich mit Hilfe des Pascal'schen Dreieckes dargestellt, wie dies aus Abb. 1 ersichtlich ist. Für ein System vom 10 Massen erhält man z. B. aus dieser Abbildung die Gesamtzahl der Glieder: 572, und die Gliederzahlen für die einzelnen Potenzen sind:

$$1. w^{18}, - 6 w^{16}, + 36 w^{14}, - 84 w^{12}, + 126 w^{10}, - 126 w^8, + 84 w^6, - 36 w^4, - 9 w^2, + 1 w^0$$

Dies kann natürlich für weitere Massenzahl erweitert werden, was nichts Neues erfordert (für die Potenz 12 ist z. B. die Gliederzahl 84 und das Vorzeichen negativ).

3. Die *c* Werte wurden ebenfalls nach den Potenzen von *w* geordnet zusammengestellt (15). Die hieraus entnehmende Gesetzmäßigkeit gestattet eine solche Zusammenstellung für eine beliebige Massenzahl aufzustellen, die bei der Aufstellung der *L* Werte gute Hilfe leistet.

Zahlentafel 8

	9m	8m	7m	6m	5m	4m
w^{16}	$\binom{8}{0} = 1$					
w^{14}	$\binom{8}{1} = 8$	$\binom{7}{0} = 1$				
w^{12}	$\binom{8}{2} = 28$	$\binom{7}{1} = 7$	$\binom{6}{0} = 1$			
w^{10}	$\binom{8}{3} = 56$	$\binom{7}{2} = 21$	$\binom{6}{1} = 6$	$\binom{5}{0} = 1$		
w^8	$\binom{8}{4} = 70$	$\binom{7}{3} = 35$	$\binom{6}{2} = 15$	$\binom{5}{1} = 5$	$\binom{4}{0} = 1$	
w^6	$\binom{8}{5} = 56$	$\binom{7}{4} = 35$	$\binom{6}{3} = 20$	$\binom{5}{2} = 10$	$\binom{4}{1} = 4$	$\binom{3}{0} = 1$
w^4	$\binom{8}{6} = 28$	$\binom{7}{5} = 21$	$\binom{6}{4} = 15$	$\binom{5}{3} = 10$	$\binom{4}{2} = 8$	$\binom{3}{1} = 3$
w^2	$\binom{8}{7} = 8$	$\binom{7}{6} = 7$	$\binom{6}{5} = 6$	$\binom{5}{4} = 5$	$\binom{4}{3} = 4$	$\binom{3}{2} = 3$
w^0	$\binom{8}{8} = 1$	$\binom{7}{7} = 1$	$\binom{6}{6} = 1$	$\binom{5}{5} = 1$	$\binom{4}{4} = 1$	$\binom{3}{3} = 1$
	256	128	64	32	16	8

Als Ergänzung soll noch die Notwendigkeit der Einführung der Bezeichnungen an Hand beiliegender Zusammenstellung gezeigt werden.

$n = 1$	$2^n = 2$	$n = 10$	$2^n =$	1 024
2	4	11		2 048
3	8	12		4 096
4	16	13		8 192
5	32	14		16 384
6	64	15		32 768
7	128	16		65 536
8	256	17		131 072
9	512	18		262 144
		19		524 288

Hier findet man die Werte von 2^n , woraus zu ersehen ist, daß für ein System von 8 Massen mit $n = 7$ die Zahl sämtlicher Glieder 128 ist. Nimmt man aber die von uns vorgeschlagene Bezeichnungen in Anspruch, so erhält man Gleichung (16). Es soll bemerkt werden, daß in dieser Gleichung ebenfalls Wiederholungen vorkommen, so daß fallweise weitere Bezeichnungen angewendet werden können, besonders bei noch höheren Massenzahlen.

$$\begin{aligned}
 & w^{16} - L_{12-8} w^{12} + \lambda_{123-8} w^{10} - [\lambda_{123.4-8} + L_{12} \lambda_{345-8} + \\
 & + L_{23} \lambda_{456-8} + L_{34} \lambda_{567-8} + L_{45} L_{678}] w^8 + \\
 & + [\lambda_{12.5-8} + L_{123} \lambda_{456-8} + L_{234} \lambda_{567-8} + L_{345} L_{678} + \\
 & + L_{12} (\lambda_{34.6-8} + L_{34} \lambda_{567-8} + L_{45} L_{678}) + \\
 & + L_{23} (\lambda_{45.7-8} + L_{45} L_{678}) + L_{34} L_{567.8}] w^6 - \\
 & - [\lambda_{12.6-8} + L_{12-8} \lambda_{567-8} + L_{123} (\lambda_{45.8} + L_{45} L_{678}) + \\
 & + L_{12} (\lambda_{34.7-8} + L_{345} L_{678} + L_{34} L_{56.8}) + L_{23.5} L_{678} + L_{234} L_{56.8} + \\
 & + L_{23} L_{456-8}] w^4 + [L_{12.7-8} + L_{12.5-8} L_{678} + L_{12.4} L_{56.8} + L_{123} L_{45.8} + \\
 & + L_{12} L_{34.8}] w^2 - L_{12.8} = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 & *(n) + (n) + (n) + \dots + (n) = 2^n \\
 & \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \quad \quad \quad n \\
 & (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) = 2^{n+1} \\
 & \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \quad \quad \quad n + 1
 \end{aligned}$$

Die hier benützten Bezeichnungen findet man in den Zahlentafeln der ungarischen Ausgabe.

ZUSAMMENFASSUNG

Die bisherigen Kenntnisse über die charakteristischen Gleichungen der Torsionsschwingungen wurden erweitert, und zugleich eine Gesetzmäßigkeit der Beiwerte der einzelnen Potenzen der Gleichungen ermittelt.

Als Ergänzung wird durch Einführung von Bezeichnungen die Aufstellung der charakteristischen Gleichung vereinfacht und die Möglichkeit gezeigt, diese vereinfachte Gleichung für eine beliebige Massenzahl sofort anschreiben zu können.

ON SOME FEATURES OF THE CHARACTERISTIC EQUATIONS OF TORSION OSCILLATIONS

A. BALOGH

SUMMARY

The present knowledge of the characteristic equation of the torsion vibrations is being extended and the laws governing the coefficients pertaining to the single powers of the equation are established.

In addition to the introduction of the terms the characteristic equation may be set up in a more simple way and simultaneously it is shown, how this reduced equation can immediately be written for any arbitrary mass number.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ÉQUATIONS CARACTÉRISTIQUES DES VIBRATIONS DE TORSION

A. BALOGH

RÉSUMÉ

L'auteur se propose d'approfondir les connaissances relatives à l'équation caractéristique de la vibration de torsion, et établit la loi des coefficients appartenant aux puissances de l'équation.

Pour compléter l'étude, il démontre qu'en introduisant certaines notations, l'établissement de l'équation caractéristique peut être simplifiée. Il montre aussi comment l'équation simplifiée peut être immédiatement écrite pour un nombre de masses quelconque.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТОРСИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

A. БАЛОГ

РЕЗЮМЕ

Данные по характеристическим уравнениям торсионных колебаний расширяются и определяются закономерности коэффициента, соответствующие отдельным степеням уравнения.

В дополнение, введением обозначений, упрощается вывод характеристических уравнений и одновременно показано, каким образом можно немедленно вывести это упрощенное уравнение для произвольного массового числа.

COLLOQUIUM ON MICROWAVE COMMUNICATIONS

A Colloquium on Microwave Communications arranged by the Hungarian Academy of Sciences (Dept. of Eng. Sciences) and the Society on Telecommunications was held in Budapest, on November 10—13, 1959.

Sixteen foreign and about one hundred Hungarian scientists and experts representing various foreign and Hungarian scientific and industrial bodies attended the Colloquium. The guests included Austrian, Czecho-Slovak, English, French, German, U.S.A. and U.S.S.R. scientists. The U.S.S.R. Academy of Sciences and the Popov Society were represented by Professor V. I. SIFOROV, Corr. Member, The Institute of Radio Engineers by Dr. D. B. SINCLAIR, Vice President, and The Institution of Electrical Engineers by Mr. L. LEWIN. 31 papers were read on the following subjects:

1. Systems analysis
2. Microwave electronics
3. Microwave circuits
4. Electronics
5. Propagation

The Colloquium offered an excellent opportunity for the exchange of ideas in the field of Microwave Communications.

The following papers were presented to the Colloquium:

November, 10

- G. BOGNÁR, Member of the Hungarian Academy of Sciences
Opening address
- L. LEWIN, Standard Telecommunication Laboratories, Harlow, England,
Diversity Reception and automatic phase correction
Location of antennas in a space diversity system. Moving picture demonstration of signal level via two antennas. Automatic signal combining circuit. Diversity gain of the system.
- H. DOBESCH, Laboratories for Radio and Television, Berlin,
Interpretation of moments in time and frequency domain
Survey of moments. Addition laws of cascade connected networks. Relation between moments and time functions and between moments and frequency functions respectively.
- S. CSIBI, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Radio frequency interference in FM-systems

Analysis of radio frequency interchannel interference in frequency modulated multi-RF channel radio relay systems, with the application of r.m.s. noise criterion. Interference caused by RF channels of different carrier frequencies and by antenna back-radiation are treated, pointing out critical loading conditions. Fading effects are estimated.

- P. RÓNA, Telecommunication Research Institute, Budapest,
On the addition of wave-guide echo noises
Feeders having several reflection sources. Noise determination as a function of parameters which can be readily measured on the wave-guide assembly.
- H. SULANKE, Laboratories for Radio and Television, Berlin,
Special characteristics of time-functions in the case of cascade-connected networks.
Variation of overshoot and rise time in the case of cascade connection of n four-poles.
- G. PRIBELSZKY, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Waveform analysis in broad-band TV—FM systems
Carrier-to-baseband distortion transformations assuming steady state conditions, finite input spectrum, and small systems-nonlinearity. According to calculations, the output FM-signal is a function of the time derivatives of the input signal.
- T. HOFFMANN, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Application of molecular amplifiers in radio-relay systems
Possible application of molecular amplifiers in radio-relay systems, as low-noise preamplifiers. A new type of gas-tube microwave amplifier the "Phototron" is described.
- A. BUDINCSEVICS, A. DALLOS, T. HORVÁTH, J. NAGY, Telecommunication Research Institute, Budapest,
External cavity interdigital metal-ceramic magnetron
Physical and chemical problems of metal-ceramic tubes. Experiences gained on metal-ceramic interdigital magnetrons.
- J. ERDÉLYI, G. GELLÉN, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Reflex klystron developed for the GTT4000/600 radio relay system
Comparison with similar foreign types. Main aspects of design. Formation of the electron-gun and the reflector space. Constructional and technicolgical problems. Brief description of the tube developed.

November, 11.

- P. BECKMANN, Czecho-Slovak Academy of Sciences, Institute for Radio Techniques and Electronics, Prague,
On the mechanism of tropospheric scatter propagation
Comparison of the scatter theory and the reflection theory. Fluctuations of the received signal is estimated by the reflection theory.
- J. C. SIMON, C.S.F., Paris (presented by F. du Castel, Paris)
Measurement of transmission coefficient in the case of tropospheric scatter propagation
Measured results on a 300 km hop. Analytical evaluation of experimental data. Statistical independence of time and frequency variations.
- F. DU CASTEL, National Telecommunication Center, Paris (CNET)
The role of reflections in tropospheric scatter propagation
- J. ERDÉLYI and G. GELLÉN, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Travelling wave tube developed for the GTT4000/600 radio relay system
Comparison with analogue foreign types. Main aspects of design. Constructional and technological problems. Description of the travelling-wave tube developed.
- T. BERCELLI, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Microwave designing problems of travelling-wave amplifiers
Design of 4 kMc/s travelling-wave amplifier suitable for trunk networks. AM-PM conversion. Noise problems. Description of a travelling-wave tube amplifier for measurement purposes. Some notes on optimum design of helix couplers.
- T. HORVÁTH and J. PINTÉR, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Silicon crystal — diodes developed for the GTT4000/600 radio relay system
Methods for the measuring low-level and high-level mixer crystals. Technological problems. Measured characteristics.

November, 12.

- V. I. SIFOROV, U.S.S.R., Academy of Sciences, Institute of Radio Engineering and Electronics, Moscow,

RF-channels having stochastically varying parameters

Channels of slowly and quickly varying parameters. Evaluation of the loss in channel-capacity due to stochastic variations.

- A. D. FORTUSHENKO, Radio Research Institute, Moscow,
Main lines of development of radio-relay systems in the U.S.S.R.
A short history of the radio-relay links development in the U.S.S.R. and the main features of system R600 are given.
- E. ÁCS, Telecommunication Research Institute, Budapest,
A new microwave power standard
A new method avoiding the difficulties encountered with the known methods for measuring small and medium powers is described.
- G. ALMÁSSY, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Measuring low standing wave ratios
Comparison of different kinds of measuring possibilities. A new system for measuring small voltage standing wave ratio.
- G.Y. ENZSÖL, C. GÉHER, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Resonant ferrite isolators developed for the GTT4000/600 radio relay system
Choice of ferrite isolators with suitable properties for given reflection parameters. Application for narrow band and broad band ferrite isolators.
- SZ. MARKÓ, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Field displacement ferrite isolators
Theoretical considerations, constructional problems, measured characteristics of field displacement isolators working in the 4 kMc/s band.
- L. LEWIN, Standard Telecommunication, Laboratories, Harlow,
Long distance transmission by round wave-guides
Description of the experimental system developed by the Standard Laboratories. Moving picture demonstration of the equipment and a TV-picture which has been transmitted via the system.
- I. SCHMIDEG, B.H.G. Budapest,
Noise considerations in PPM-systems
The contribution of various noise sources is analysed, advantages of using narrow pulses is pointed out. Considerations of the second detector circuit of the PPM-receiver.
- I. NEDBÁL, B.H.G. Budapest,
Demodulation of PPM-signals
Analysis of a receiver-filter giving maximum signal-to-noise ratio.
- N. SZABÓ, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Linearization of broad-band video amplifiers using no negative feedback
Non-linear plate or cathode resistances. A new type of circuit is described using a tube and a n-p-n transistor, having a distortion of cca. 0,01 per cent.
- T. SÁRKÁNY, Telecommunication Research Institute, Budapest
A new frequency modulator circuit for radio relay systems
A new IF-modulator is described using three double-triodes, each stage having a phase shift of 120 degrees. The modulator has inherently low amplitude modulation and satisfies CCIR-recommendations for television and multichannel transmission up to 240 channels.
- M. HERPY, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Remote control system for the GTT4000/600 radio relay system
The automatic change over and remote control system of under development is described. Questions arising in unattended service are treated.

November, 13.

- A. V. PROSIN, U.S.S.R. Academy of Sciences, Institute for Radio Engineering and Electronics, Moscow,
General problems in scatter propagation
A new type of generalized correlation function is introduced. Results are applied to determine antenna gain-loss and noise due to selective fading.
- G. REITER, Telecommunication Research Institute, Budapest,
Analysis of high-level mixers for radio relay lines
Characteristics of the high-level mixer are determined taking into account measured d-c crystal characteristics. The dependence of conversion loss is expressed as a function of terminal impedances.

I. FRIGYES, B.H.G. Budapest,

Microwave band-rejection filters with great attenuation

Impedance elements suitable for band-rejection filters are considered. Analysis of multi-element filters. The effect of spurious modes. Use of filter in broad frequency band. Filters with more than one rejection band. Results of measuring.

S. TÓTH, Telecommunication Research Institute, Budapest,

Dispersion measurements on slowing lines

The dispersion lines form part of the feedback-loop of a travelling wave tube amplifier. The wavelength in the slowing line is determined from the phase shift arising in the feedback-loop.

I. TORMA, Telecommunication Research Institute, Budapest,

Design problems of cavity resonators used for klystron oscillators

A new type of circuit capable of eliminating mode-interference in wide range microwave oscillators.

G. BOGNÁR, Member of the Hungarian Academy of Sciences,

Closing address

G. Bognár

Member of the Hungarian Academy
of Sciences

SUMMARY

A brief resumé of the papers read to the Colloquium on Microwave Communications arranged by the Hungarian Academy of Sciences (Dept. of Eng. Sciences) and the Society of Telecommunication in Budapest, on 10-13, November, 1959.

KOLLOQUIUM FÜR RICHTFUNKVERBINDUNGEN

G. BOGNÁR

ZUSAMMENFASSUNG

Bericht über das Kolloquium für Richtfunkverbindungen, veranstaltet durch die Ungarische Akademie der Wissenschaften (Klasse für Technische Wissenschaften) und den Wissenschaftlichen Verein für Nachrichtentechnik vom 10. bis 13. November, 1959 in Budapest.

COLLOQUE SUR LES LIAISONS HERTZIENNES

G. BOGNÁR

RÉSUMÉ

Compte rendu du Colloque sur les liaisons hertziennes, organisé par l'Académie des Sciences de Hongrie (Section des Sciences Techniques) et l'Association Scientifique Hongroise de la Télécommunication, du 10 au 13 novembre 1959, à Budapest.

КОЛЛОКВИУМ ПО МИКРОВОЛНОВОЙ СВЯЗИ

Г. БОГНАР

РЕЗЮМЕ

В статье сообщается о коллоквиуме по микроволновой связи, состоявшемся в период с 10 по 13 ноября 1959 г. в Будапеште и организованном Академией наук Венгрии (Отделением технических наук) и Научно-техническим обществом связи.

DIVERSITY RECEPTION AND AUTOMATIC PHASE CORRECTION*

L. LEWIN A.M.I.E.E.

STANDARD TELECOMMUNICATION LABORATORIES, LONDON ROAD, HARLOW, ESSEX, ENGLAND

Introduction

There are three possible forms of fading anticipated with micro-wave propagation. 1. The formation of ducts which could lead the energy away from the intended path. 2. Change of refractive index gradient, causing obstruction of the path. 3. Change of interference pattern.

Of these three forms, the first, which is unlikely to be overcome by means of a height diversity system, is beyond the scope of this paper. The second can occur over both land and sea. The third is largely confined to oversea paths, since the reflection coefficient over the majority of land paths is not sufficient, owing to surface roughness, to produce a minimum of the interference pattern sufficiently deep to be troublesome. The change of interference pattern can come either from tidal variations or from changes in the refractive index gradient.

1. The interference pattern

1.1. *Effective earth radius*

A uniform gradient of refractive index causes a bending of the rays either towards or away from the earth. The effect can be considered by the use of an effective earth radius, R_e in place of the geometric radius R_0 , the propagation being taken as rectilinear. The ratio R_e/R_0 is denoted by K , and its usual value is about 4/3. When considering the propagation conditions over a path, it is usual to consider the earth's radius thus increased, though sometimes calculations may be made with the geometric radius R_0 .

However, K does not stay constant with varying meteorological conditions. For example, during a three weeks' run at 4000 Mc/s over the Firth of Forth, values varying from 0.7 through infinity to -10 were found. These figures certainly do not represent the limits which can be attained. The lower

* The paper was read by the author on the Colloquium of Microwave Communication in Budapest, on November 10, 1959.

limit can be less than 0.4 and K runs through infinity (flat earth) to a value of about -1 (negative curvature). It is apparent that a path giving reasonable clearance for, say, $K = 4/3$ will give grazing conditions for a somewhat smaller value, whilst at the lower limit the earth will obstruct any direct path. Although the smaller values are rare — K may be less than 0.6 for about 1/2 to 4% of the time — fades must be expected on such occasions, unless the aerials have been deliberately located high enough to overcome these extreme conditions.

1.2. *The curvature constant C*

The experimentally determined range of K — a small positive value increasing through infinity to a small negative value — makes it an unsuitable quantity for the description of the phenomena it represents, and, particularly, for the plotting of curves. A more convenient quantity is $1/K$, and this ranges from about 2.5 through zero to -1 .

It is desirable to have a separate symbol to represent $1/K$, or, what is the same thing, the ratio R_0/R_e ; and since this is a measure of the path curvature, the symbol C seems appropriate, and will be used throughout this paper.

1.3. *The interference pattern*

Under normal conditions, two rays will reach one antenna from another — the direct ray and a reflected ray. These rays are of different lengths, and the phase difference between them is given approximately by: —

$$\Phi = \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda D} \left[1 - \frac{CD^2}{4R_0(h_1 + h_2)} \right]^2 \quad (1)$$

where D = distance between antennas

h_1, h_2 = antenna heights

λ = free space wavelength

R_0 = geometric earth radius

R_e = effective earth radius

$C = R_0/R_e$.

This formula is approximate, but holds, when the heights are of the same order, under all path conditions, and holds when the heights are somewhat different under path conditions not too near grazing. As an extreme example, if $h_1 = 9h_2$ and the path is a near grazing one, the formula gives the factor of CD^2 about 20% too low. Under most conditions the formula is accurate to within a percent or two.

The field at a receiving antenna is given by

$$E = 2E_0 \sin \left(\frac{1}{2} \Phi \right) \quad (2)$$

where E_0 is the field that would have been produced in free space. Equation (2) assumes perfect reflection at the earth's surface. This holds approximately for a water path, and so a zero or very near zero will occur if Φ is a multiple of 2π . If the reflection coefficient were r , then the minimum would be $E_0(1 - r)$, and with a value of r for an overland path of the order of 0.6 it is apparent that deep fades from this cause should not be expected in this case.

It would appear from equation (1) that a minimum could be avoided by choosing $\Phi = (2n + 1)\pi$ so as to sit at a maximum of the vertical space pattern. However, the effect of the term involving C/R_0 in (1) is important and with the range of C from 2.5 to -1 it is apparent that Φ can run through several cycles. Moreover, tides can alter the effective heights of the antennas by raising or lowering the height of the reflection plane, and this alone makes the choice of a suitable height difficult. The variations are the less, of course, the lower the heights, but if low values are chosen then variations of C towards the upper end of its range will cause obstruction of the path and a cut-off of direct radiation.

The obvious way to overcome the difficulty is to use two antennas suitably spaced, so that the one is at a maximum of the interference pattern when the other is at a minimum. In this way a non-zero signal at one or other of the antennas is ensured. This is the height-diversity system, and the spacing may be determined either experimentally, or from the formula. In either case a value of C of about $3/4$ is involved. A drawback of this method is that the spacing of the maxima and minima is itself a function of C . It is possible to arrange heights such that diversity performance is adequate under normal conditions, but then both antennas can be located at minima under extreme conditions. These occur for the larger negative values of C , for which the factor of h_1h_2 in equation (1) is largest, and the maximum to minimum spacing accordingly smallest. It is only necessary for a factor of two to one to be involved due to the change of C from $3/4$ to a smaller or negative value in order that a spacing that was originally a maximum to minimum become one of minimum to minimum. Of course, under the conditions visualised, the two antennas *might* happen to be both at maxima, and fading avoided, but this condition cannot be relied on. In the first place tidal variations could turn both maxima into minima. Alternatively, the precise heights to give just the required effect might be inconvenient or difficult to determine. But there would appear to be a more serious objection. It has been assumed so far that the quantity C can be treated as a constant over the path. It is more than likely especially when extreme values are involved, that it varies somewhat with height, so that the direct and reflected rays suffer slightly different curvatures. The effect will be to introduce a further phase change between the rays over and above that assumed in equation (1). The effect of such an additional term is to make the precise placing of the maxima and minima of the height pattern indeterminate, so

that it becomes essential to avoid a diversity spacing which could space the antennae by the wavelength of the diversity pattern.

1.4. Recommendations

It is proposed in the light of the present analysis that a diversity spacing be used in which:

1. The top antenna is at such a height as to give a clearance path under the largest positive value of C visualised.

2. The spacing between the antennas be chosen such as to be appreciably less than a half wavelength of the vertical interference pattern at the largest negative value of C anticipated.

Under these conditions the upper antenna can receive when conditions are near grazing, whilst the lower antenna cannot. As C decreases to negative values, the interference pattern runs through both antennae with a shorter and shorter pattern wavelength. Under the extreme conditions of large negative C the antenna spacing is still small enough to ensure that one or the other can pick up a non-zero signal.

Denoting by C_1 and C_2 the extreme values of C involved, the design equations can be written

$$\Phi_1 = \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda D} [1 - \gamma_1]^2, \quad \gamma_1 = \frac{C_1 D^2}{2R_0(h_1^{\frac{1}{2}} + h_2^{\frac{1}{2}})^2} \quad (2a)$$

$$\delta\Phi_2 = \frac{4\pi \cdot h_1 \cdot \delta h_2}{\lambda D} (1 - \gamma_2), \quad \gamma_2 = \frac{C_2 D^2}{4R_0(h_1 + h_2)} \quad (3)$$

(Note that the factor $(1 - \gamma_2)$ is not squared.)

Here, C_1 and C_2 are usually about 2.5 and -1 respectively, whilst Φ_1 and $\delta\Phi_2$ are respectively the extreme phase angle and the extreme diversity phase difference. They are related to the received fields by $E/E_0 = 2 \sin (1/2 \Phi_1)$ and $2 \sin (1/2 \delta\Phi_2)$ respectively. These quantities will usually be taken the same, so that, bearing in mind that Φ_1 will be small, whilst $\delta\Phi_2$ will correspond to nearly a period, we get

$$\Phi_1 = 2\pi - \delta\Phi_2 \approx E_{\min}/E_0 \quad (4)$$

E_{\min} is given by the fading requirements, e. g. $E_{\min}/E_0 = 1/10$ for a 20 db fade below free-space.

Equation (2a) is a design equation for the height of the top aerial at either end. Usually one of these heights is prescribed by the permissible heights at a terminal building, or the height of the antenna of the previous hop. If, however, there is a choice, it would seem best to take $h_1 = h_2$ and avoid unnecessarily large heights.

With h_1 and h_2 determined, equation (3) gives the height spacing below h_1 at which the diversity mirror is to be set. It should be noticed that if appreciable tides are present, then h_1 and h_2 in equation (2a) should be taken above high tide, whilst in equation (3) they should be taken above low tide, in order to allow for extreme conditions.

1.5. Example

We shall take as an example a 30 mile hop, with equal heights at each end, the free space wavelength being 7.6 cms. For C_1 we take, not the extreme value 2.5 but the smaller figure of 1.6. Then, for a fading loss of 20 db, equation (2a) gives a height of 258'. Equation (3) then gives the diversity spacing as 45', and the combination of antennas is good to a value C_2 of -1 .

The usual diversity formula gives a spacing of 70'. Two pairs of curves are shown in Fig. 1, plotted against C , corresponding to $\Delta h = 45'$ and $70'$. It is seen that for $\Delta h = 70'$ there is a zero on both antennae at the value $C = -0.15$, and that this value is shifted to past $C = -1$ by the choice of the smaller height difference.

In both cases there is a cut-off at about $C_1 = 1.7$. If this is to be avoided the antenna heights have to be increased accordingly. In general there will be a compromise between the large heights necessary to guarantee fade-free conditions and the value of C_1 chosen for design purposes. This latter must be found from suitable statistics for the region, and depends on the percentage time for which the service is permitted to be out of action. The effect of a 20' tide is shown in Fig. 2 for the case of $\Delta h = 45'$. It is seen that at low tide the double interference minimum has moved in to $C_2 = -1$, whilst at high tide the cut-off has shifted to $C_1 = 1.65$. If this latter change is serious — its effect can only be found from a curve relating values of C to the percentage time they occur — then the antenna heights must be designed with the tides in mind, as described in the previous section.

2. Experimental confirmation

2.1. Site data

In order to check the basis on which the above analysis has been made, propagation tests were made over a 30 mile over water path using 4' diameter parabolic dishes at a wavelength around 7 cms. The transmitter height was 650' and the two diversity receivers were at 557' and 538'. These heights give plenty of clearance to both antennas under all propagation conditions, and an extreme value for $\delta\Phi/2\pi$ of 0.73 ($1 - 0.24 C_2$). The transmission should therefore give up to a 12 db simultaneous fade on both antennas if $C_2 = -1$.

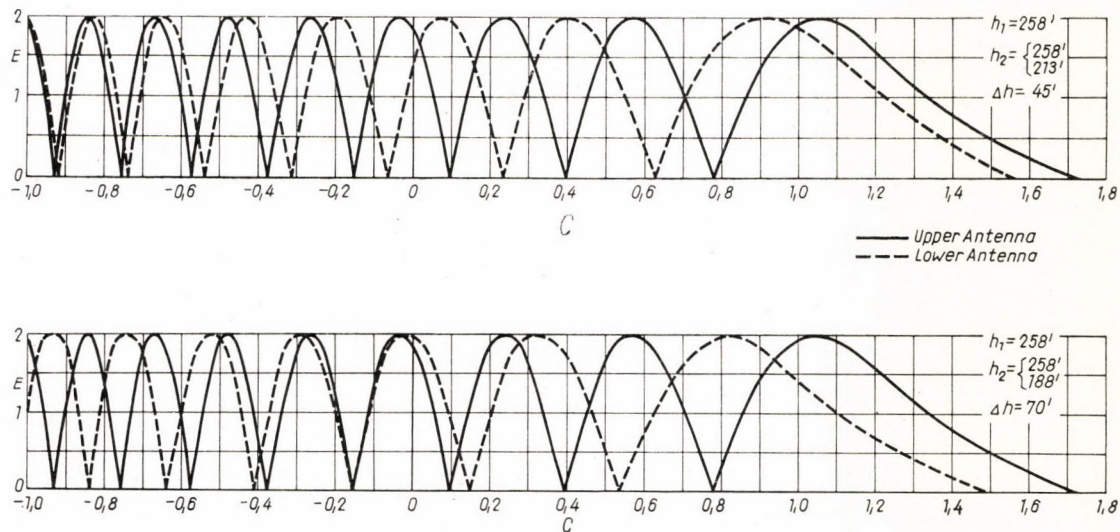


Fig. 1. Effect of change of diversity spacing from 70' to 45'

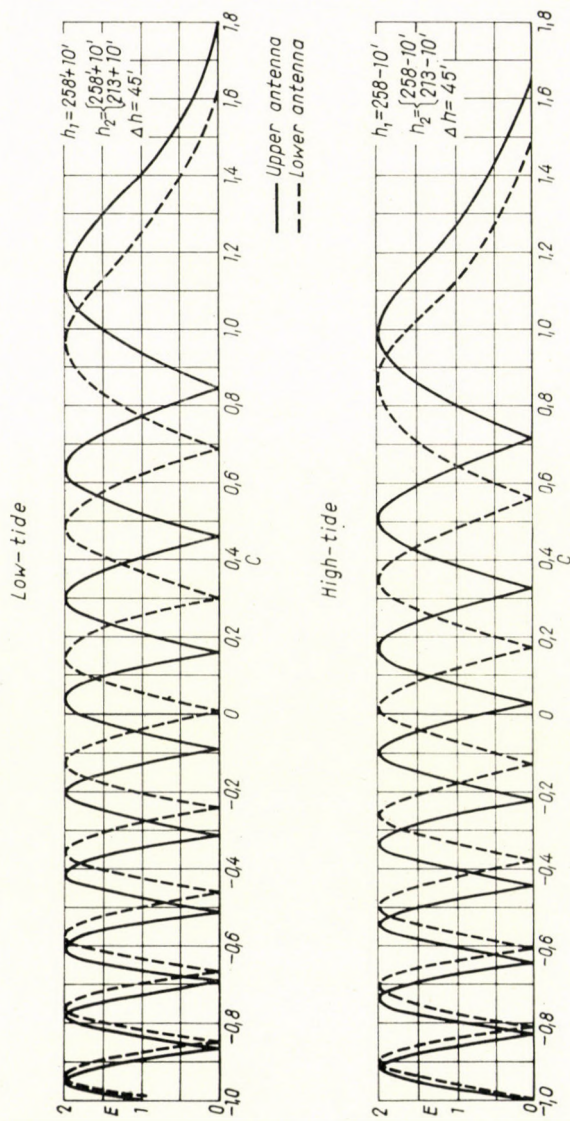


Fig. 2. Effect of 20' tides (diversity spacing 45')

2.2. Swept frequency method

The transmitter was frequency swept from 4000 to 4600 Mc/s. According to equation (1), the effect should be approximately the same as a corresponding change in the receiver height, and as it was not practicable to vary the receiver height rapidly, the frequency varying method was chosen instead.

2.3. Display method

In order to sweep the transmitter frequency, a rectangular vane was rotated in the transmitter resonator. This gave a frequency variation which was approximately sinusoidal with vane angle. With a sinusoidal instead of a saw-tooth waveform on an oscillograph sweep the horizontal display could therefore be made proportional to frequency, provided the sweep voltage could be syn-

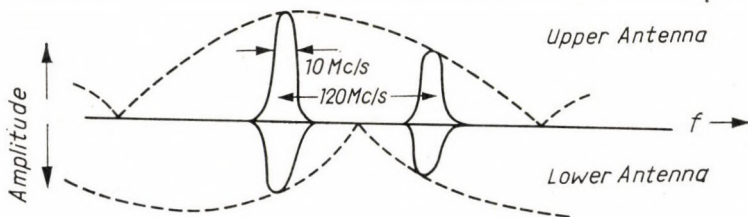


Fig. 3. Swept frequency display of diversity reception

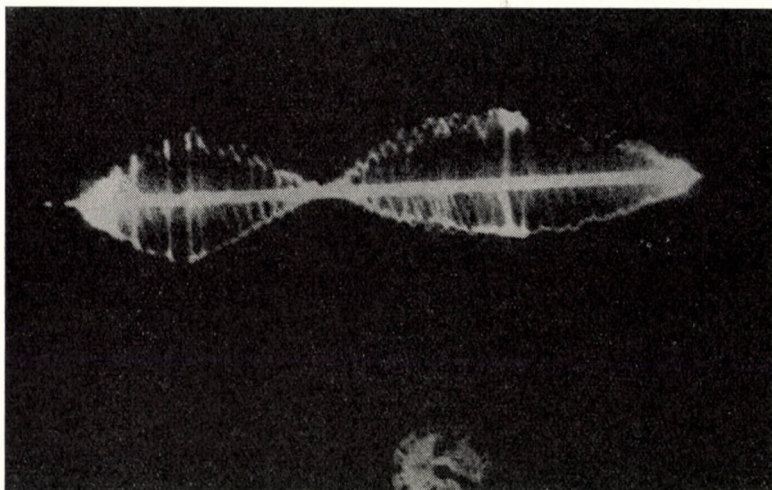
chronised with the vane position. At the receiver end, with a local oscillator of frequency f and an I. F. amplifier 10 Mc/s wide, centred at 60 Mc/s, two display peaks therefore appear on the oscillograph trace, corresponding to frequencies $f \pm 60$ Mc/s at the transmitter. If f varies slowly over the band the two display peaks cover the whole area, and a time exposure photograph will show an illuminated region whose edge is the envelope of the individual peaks, and therefore represents the frequency response of the apparatus plus propagation path loss. A schematic representation is shown in Fig. 3. The frequency variation of the apparatus over the band was not much in excess of 2 db, so that, as the whole process takes about 1 second with a 50 c/s sweep rate at the transmitter, the photograph gives practically an instantaneous representation of the path propagation conditions.

2.4. Results

In this way, using a double beam oscilloscope, a simultaneous representation of the performance from both diversity receiving antennas was displayed. It was found that, for most of the time, the minimum of the one pattern was well interleaved with that of the other pattern, often remaining stable for long

periods, and moving slowly across the display with the tides. The photographs were taken at the rate of one frame/minute, with about 1 second exposure so that changes occurring within the minute would be lost, whilst changes within the second could cause a doubling of the picture (due to the pair of display peaks used.) Occasionally films were found with profound changes from minute to minute, and one or two frames gave an indication of doubling. But mostly the traces were straightforward, slowly varying, and of the expected sinusoidal form.

On one rare occasion during hot still weather the minima from the two receiver patterns ceased to interleave, and almost coincided. Soon after-

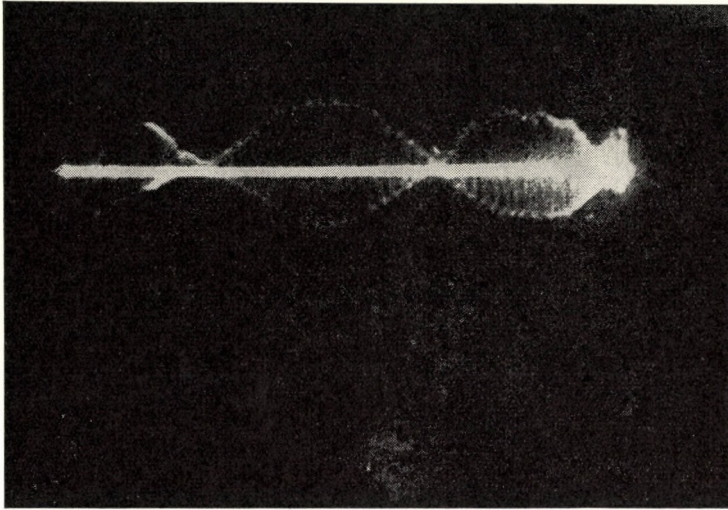


A) Simultaneous fades due to choice of excessive (34') diversity spacing

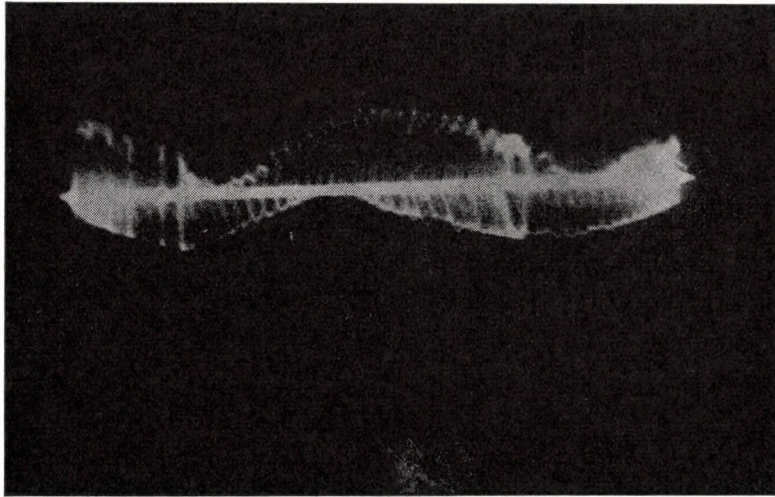
ward the minima filled in and a nearly uniform frequency response over the frequency band indicated the absence of an interference pattern, possibly due to ducting. The amplitude swelled by about 6 db above free space and then dropped to 6 db below, before becoming normal again. If the near coincident minima are to be interpreted on the basis of the hypotheses leading to equation (1) then an extreme value of $C_2 = -1.5$ is indicated.

A number of photographs follow to indicate the range of responses encountered. In each case the upper trace represents the response from the upper antenna and the lower from the lower antenna. Zero response is shown by the base line separating the two, the lower antenna response being inverted so as to "hang down" from the base line.

Photograph A shows the response taken during an early measurement when the antenna diversity spacing was 34'. This corresponds to a complete

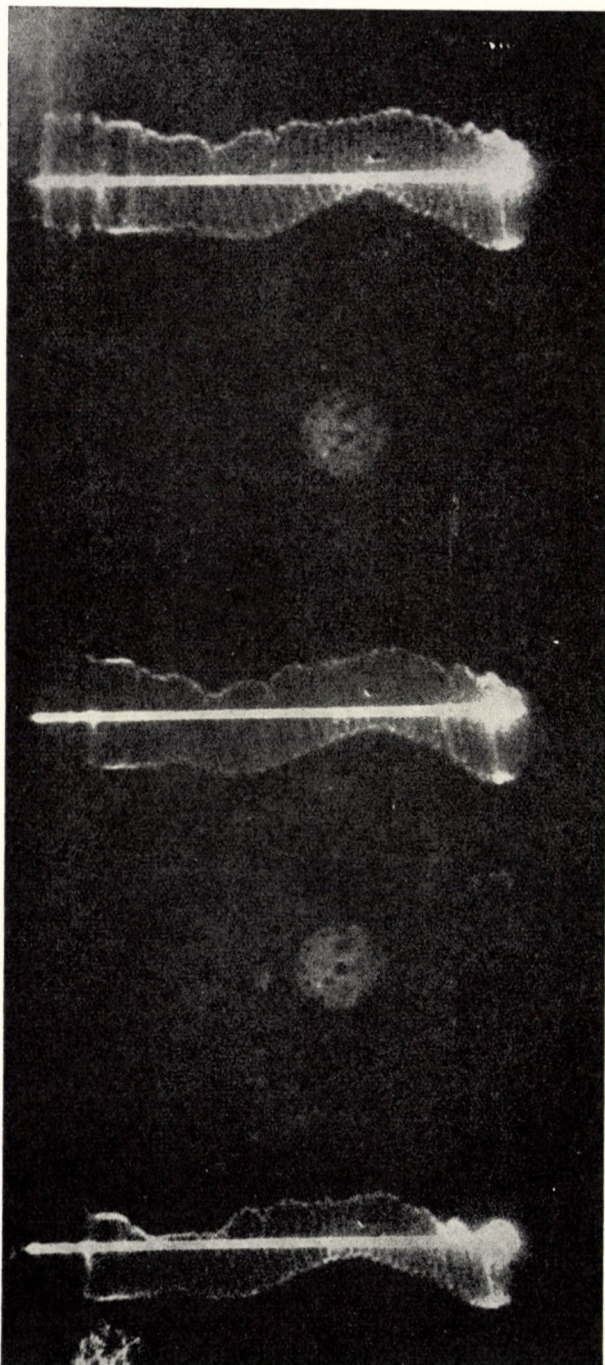


B) Simultaneous fades due to abnormal propagation conditions. Diversity spacing equals 19'

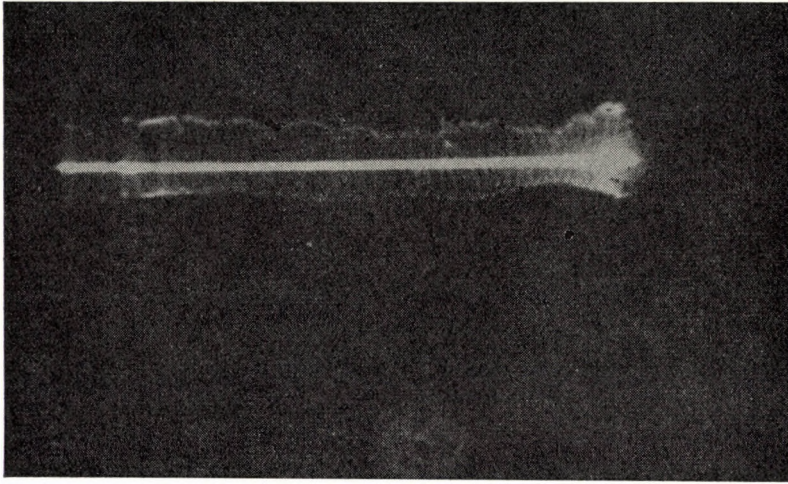


C) Normal well-interleaved response

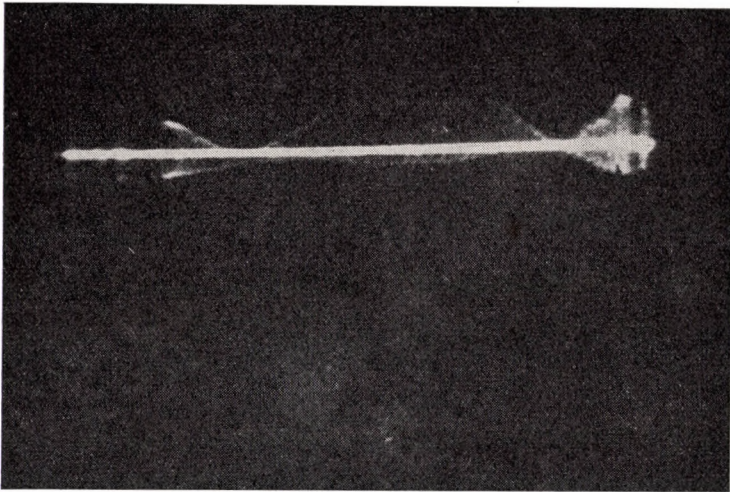
period under normal conditions, and it can be seen that the responses give coincident minima. Photograph B, on the other hand, was taken during hot calm weather, with a slight seamist, with the diversity spacing the design value of 19'. The near-coincident minima are quite exceptional, and exhibited this form for only a few minutes. Photograph C shows well-interleaved minima.



D) Three consecutive frames, showing partial filling in of the zero from the upper antenna only



E) Substantially constant field at both antennas



F) Much reduced field at lower antenna

This form occurred by far the greater part of the time, under both normal and abnormal propagation conditions.

Photograph D shows three consecutive frames, in which the response from the lower antenna is normal and substantially unvarying, whilst the upper antenna response shows, over a period of three minutes, a partial filling in of the zero. This effect must be associated with ducting, since the reflection at the sea could hardly be complete for one antenna and nearly absent for the

other. Photograph E shows a later frame, in which both antennas receive substantially constant fields with almost complete absence of sea reflection effects.

Photograph F shows a normal pattern on the upper antenna, and the near absence of response from the lower. The condition occurred during a period of rapidly changing response, and only lasted a few minutes.

Several lengths of film have been joined together, and can be displayed as a moving picture showing in a dramatic way the extreme steadiness of the patterns for hours at a time, followed by very rapid variations as conditions change.

3. The combination of diversity antenna signals — Preliminary results

3.1. Automatic phase combination

In order to utilise the signals from the two diversity antennas it has been the practice to combine or to switch the separate I. F. outputs. This method has some disadvantages. In addition to the switching time which may be involved, the use of two separate I. F. receivers is uneconomical. If the combination can be done at R. F., apparatus may be saved and improved performance obtained.

3.2. Microwave phasing junction

As part of the propagation tests described above, an automatic phasing network was examined. Shown schematically in Fig. 4, its purpose is to combine in as best a way as possible, the outputs from two receiver mirrors spaced in height diversity at such a spacing that, over a large period of time, at

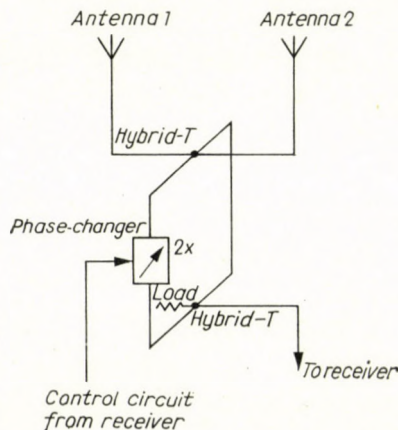


Fig. 4. Schematic representation of microwave phasing junction

least one mirror receives a usable R. F. signal. The particular arrangement shown has the property that, with the phase changer correctly set, the output is at least as great as the greater of the individual receiver outputs: depending on their relative phases and amplitudes, up to the sum of the separate received powers can be combined. If E_1 and E_2 are the relative amplitudes of the separate received signals, and Φ is their relative phase, the combined power output is proportional to

$$P = E_1^2 \cos^2 x + E_2^2 \sin^2 x - E_1 E_2 \sin \Phi \sin (2x) \quad (5)$$

where $2x$ is the phase angle introduced by the phase changer.

This function has turning points at values of x given by $\tan (2x) = 2 E_1 E_2 \sin \Phi / [E_2^2 - E_1^2]$. The maximum value of P , considered as a function of Φ is

$$P_0 = \frac{1}{2} [E_1^2 + E_2^2 + \sqrt{E_1^4 + E_2^4 - 2 E_1^2 E_2^2 \cos 2\Phi}] \quad (6)$$

When the phase between the two signals is not determined, the least value of (6) is when $\Phi = 0$ and is given by

$$P_0 = \frac{1}{2} [E_1^2 + E_2^2 + |E_1^2 - E_2^2|]$$

i. e. the greater of E_1^2 or E_2^2 .

If $\Phi = 90^\circ$, $P_0 = E_1^2 + E_2^2$, and the sum of the powers is received. (In order always to get the sum of the powers it would be necessary to control Φ , *i. e.* an additional phase changer would be required. The gain resulting from such an additional complication has not been thought worthwhile.)

If one aerial is involved in a fade, one of the amplitudes, say E_1 , is zero. From (6) the output is seen to be $P = E_2^2$, *i. e.* the full power from the the other aerial.

3.3. The phase-changer

This consists of a hybrid-T with two movable pistons in the side arms. The pistons are ganged together but displaced by a quarter wavelength, so that a wave entering the E -arm leaves via the H -arm after undergoing a phase change given by double the distance from the junction to the pistons. This phase-changer suffers from the disadvantage that it cannot change phase indefinitely in one direction: the pistons are stopped either at the junction or at the end of the side arm runs. In order to overcome this difficulty a pair of relays are installed so that at the end of a run the pistons are moved forward

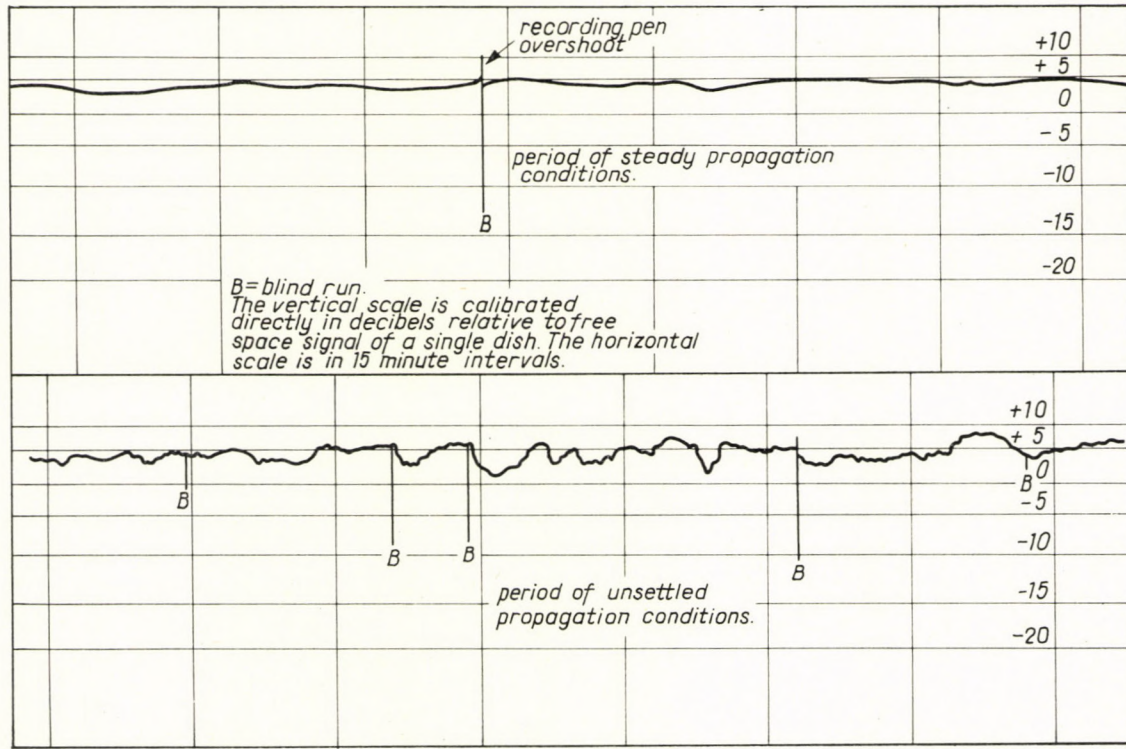


Fig. 5. Combined diversity reception — typical record, including blind runs, of microwave phasing junction

automatically a half-wavelength, thus recovering the phase and permitting further movement in the original direction. These "blind runs" take the phase-changer through all phase angles, and the combined output from the phasing junction runs rapidly through a minimum. This minimum will appear like a very rapid fade. Some typical blind runs, as shown on the recording chart, are given in Fig. 5. Although a shortcoming of this apparatus, these apparent fades give an indication of the possible fading depth at that moment.

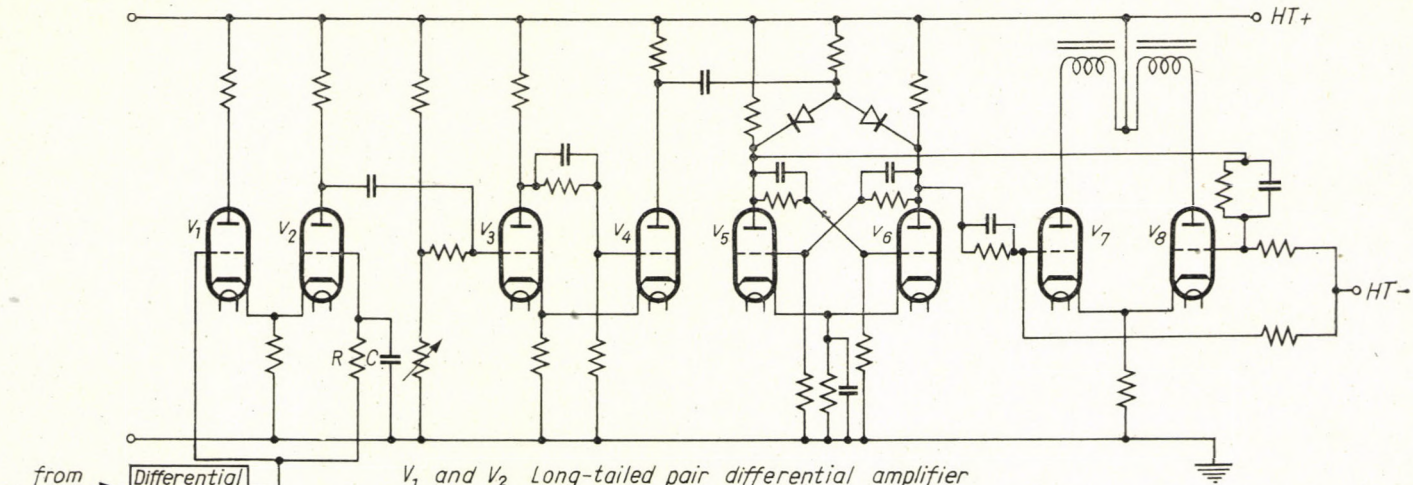
3.4. *Method of operation*

As used on the tests, the phase-changer functioned both as a phase-sensing mechanism, and as a phase corrector. The pistons were driven continuously, and control circuits were arranged to operate in such a way that when the output signal into the receiver had fallen from its recent average value by a specified amount the direction of travel was reversed. The pistons therefore hunted continuously about the position of optimum phase. As this optimum position varied, so the pistons followed it. The rate of travel of the pistons was about 2 cm in a second, and, under steady conditions, the total hunting amplitude, corresponding to a sensitivity level of around 0.5 db, was about 1 cm. It varied, of course, with the signal in the phasing arm of the phasing junction, and when this signal, due to chance cancellation of the incoming signals, had dropped to a small enough level, relative to the signal in the other arm, the phase-changer became inoperative, the pistons running the whole length of the guide until reversed by the relay stops. These runs, of course, have no effect on the output, and as soon as the signal in the phasing arm has risen sufficiently to trigger the control apparatus, the pistons begin hunting again about their optimum position.

Thus, when the setting of the phase-changer is unimportant, from the point of view of the combined signal, the pistons run freely from one end of their traverse to the other. When the setting matters, they oscillate about the optimum position. The take-over from one condition to the other depends on the sensitivity level at which the control circuits operate. With the device set up on the bench, it was, in fact, extremely difficult to find this region of free runs.

3.5. *Control circuits*

The control circuits used on the trials are shown in Fig. 6. Very briefly, the operation is as follows. The instantaneous signal is compared to a reference signal obtained from the output by integrating over a 20 sec period. The difference voltage is applied to a flip-flop whose output triggers a binary counter. Thus every time that the instantaneous signal passes the reference signal by a given threshold level the binary counter gives an output. This output operates



from receiver
A.G.C.

Differential
amplifier

V_1 and V_2 Long-tailed pair differential amplifier

V_3 and V_4 Schmitt flip-flop.

V_5 and V_6 Eccles-Jordan binary counter

V_7 and V_8 Long-tailed pair output stage, feeding magnetic brakes.

RC for long-time constant integrating circuit

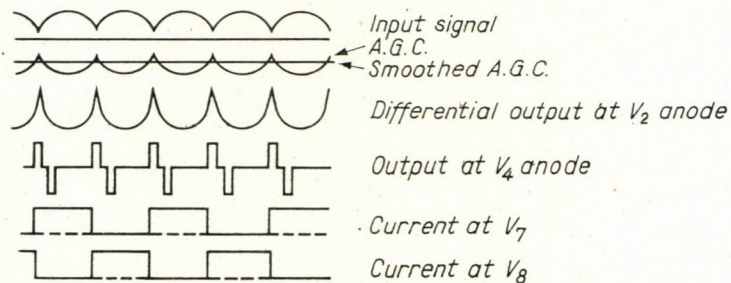


Fig. 6. Control circuit for phasing junction

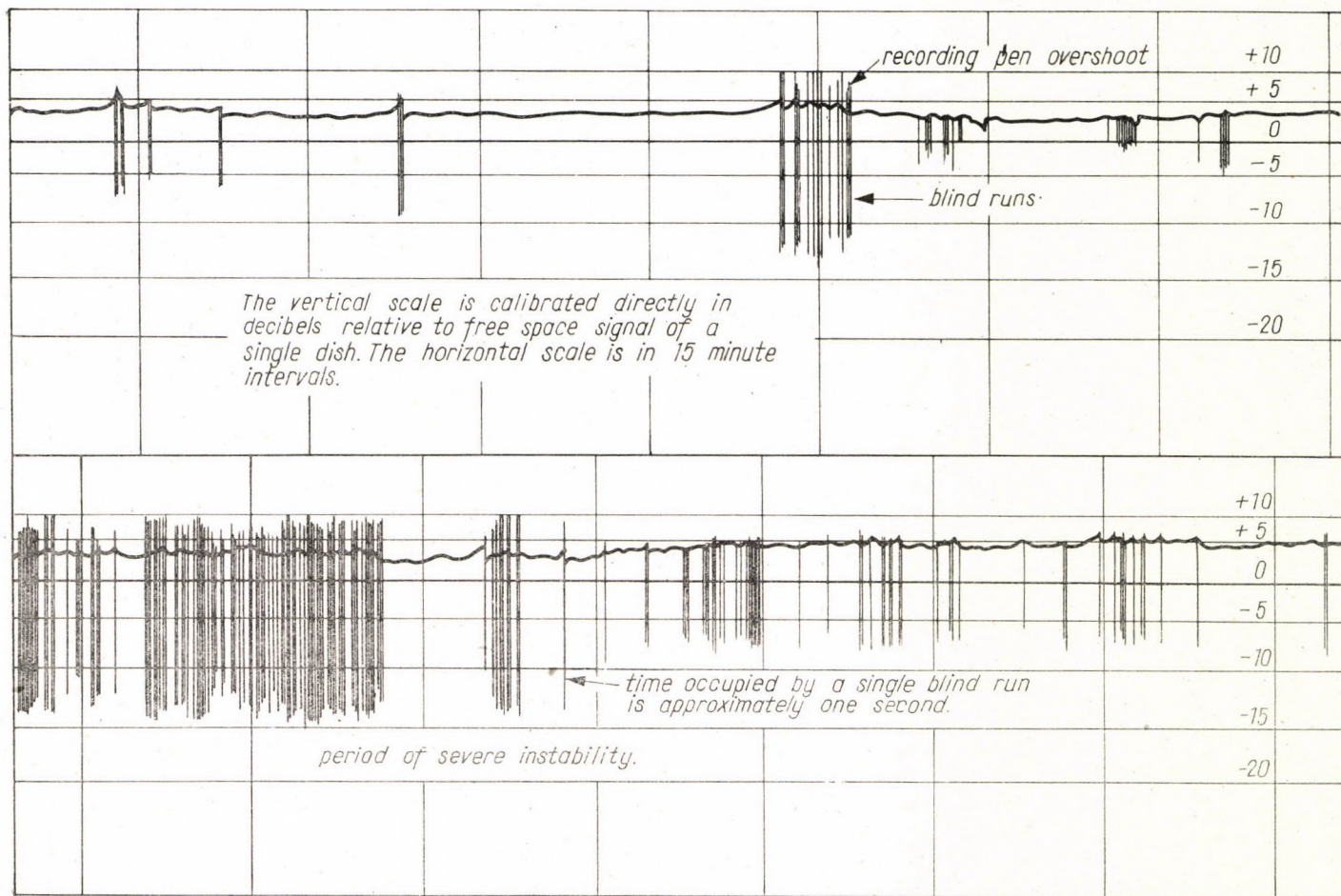


Fig. 7. Combined diversity reception — record, including periods of blind runs due to unstable motor control

in turn each of a pair of magnetic brakes. A continuously running synchronous motor provides the motion of the piston-pair, the direction of movement being determined by the momentary condition of the magnetic brakes, which control the drive mechanism to the pistons. In practice the gain required of the amplifier in the control circuits was such as to bring the whole system on the verge of instability, and the operation over a period could not be considered satisfactory. However, a separation of the phase-sensing and phase-correcting functions should lead to a much better design of control circuit, and this work is described in section 4.

Fig. 7 shows the behaviour of the output during a period of control circuit instability. It is seen that the general level remains at its optimum, the effect of the instability being to introduce momentary "mock fades".

3.6. *Duration of the tests*

The tests of the microwave phasing junction occupied the period 13th August to 4th October 1953, a total of 1246 hours. Of this period the control motor was in a running condition for 303 hours and for 693 hours it was switched off. During the remaining 250 hours, the apparatus was not working for reasons which included failure of equipment, failure of power supplies, etc. Most of this outage occurred at one time and was due to damage caused by gales. In preparing the fading data no account has been taken of this equipment failure period, and it has been omitted from the totals, which therefore cover a period of 996 hours.

3.7. *Analysis of data with motor on*

A typical recording is shown in Fig. 5. The general level is so constant over a period that it was considered impracticable to analyse the data in the usual way into fading ranges. Accordingly, the highest and lowest signal in each hour of record was noted, and from this the histograms in Fig. 8 have been prepared. Fig. 8a shows the distribution of hourly maxima, relative to the free space value of a single mirror. The smooth curve drawn is an assessment of the limiting shape that would have been assumed if a much longer recording had been available.

Theoretically, an extreme value of +9 db over a single mirror in free space is to be expected in the case in which both diversity mirrors sit at a maximum of the space pattern, and also receive in quadrature. Such an occurrence should be very rare, and in fact no points at +9 db were recorded. However, for 0.3% of the recordings +7.5 db was attained, and the +5 db hourly maximum was of relatively common occurrence. A peak is reached at 0 db, and no maxima were recorded below -2 db. Between +2 and +5 db there is a rather flat plateau, and it is not clear whether this might not be "ironed out"

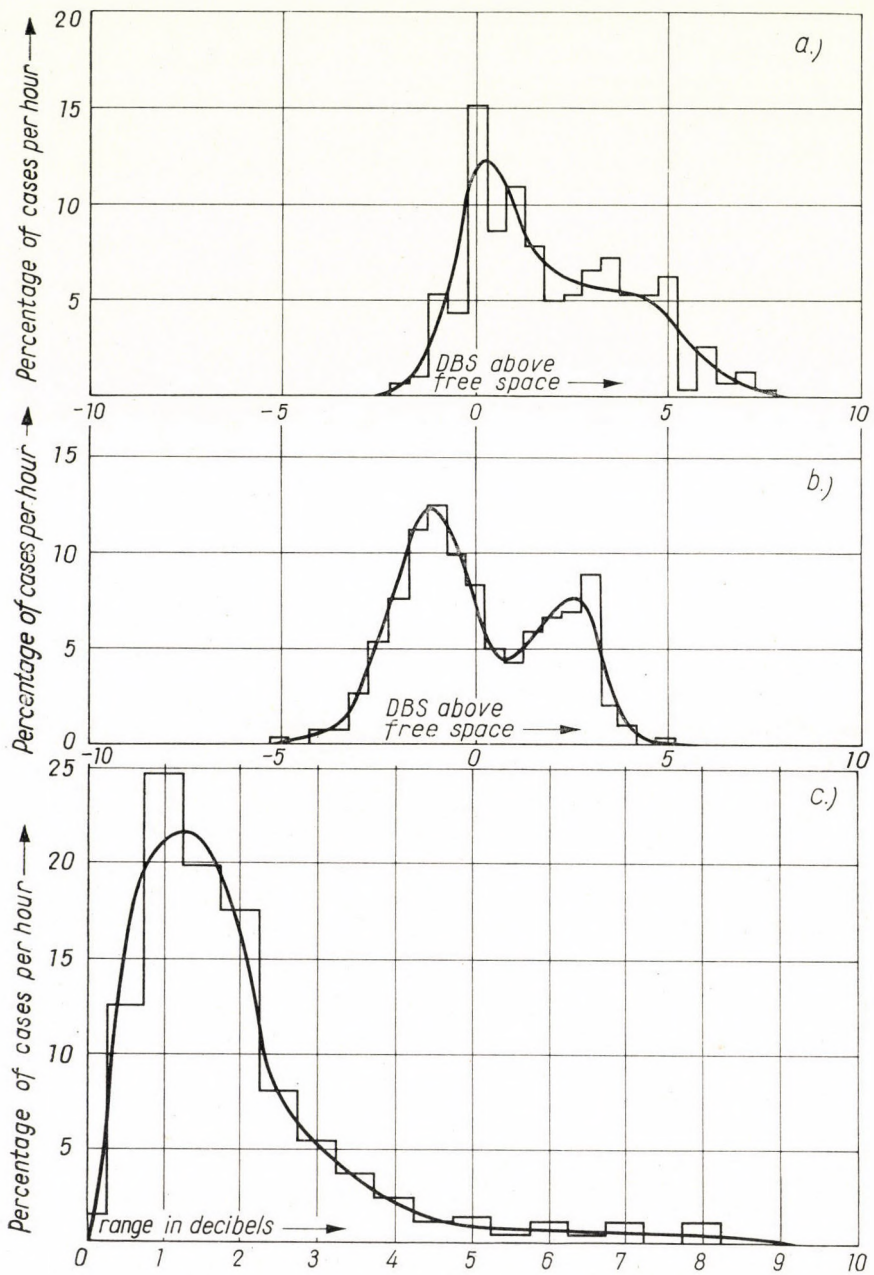


Fig. 8. Hourly data for automatic phasing junction

if more recordings were available. However, the distribution of hourly minima, shown in Fig. 8*b*, has this plateau clearly replaced by a double hump. The extremes recorded for hourly minima lie in the range -5 db to $+5$ db with the two peaks at -1 db and $+2.5$ db.

Fig. 8*c* shows the distribution of the hourly maximum to minimum range. There is a sharp peak at 1 db range, with a long tail reaching to 8 db. Whilst the very high maxima are associated with large ranges, there is a strong tendency for medium to high level maxima to be associated with small ranges, and for the lower level maxima to be associated with relatively larger ranges.

The significance of these results in terms of propagation conditions cannot be ascertained without reference to other results taken during the trials. However, the rise in range for the very large maxima is probably due to the production at the receivers of a vertical space pattern in which the height recurrence period approaches the antenna spacing. Under such circumstances the two aerials can both pick up large signals if they sit near maxima of the pattern, but if the pattern shifts the signals will *both* drop appreciably, with a correspondingly large maximum to minimum range.

Fig. 9 shows a fade-frequency curve abstracted from the smoothed out assessments of the histograms of Fig. 8. The hourly maxima and minima data, which form extreme limits to the fading curve, are shown and the (presumed true) fading curve has been drawn midway between these limits. In fact, the extremes are so close that there is little room for error in this approach. The $+5$ db level is exceeded for 0.5% of the time, and the free space level for 50% of the time. At the other limit, a "fade" of -4 db or less occurs for only 0.2% of the time, and no points at all below -5 db were noted during the period of the tests.

This extraordinarily good record calls for comment, particularly in relation to other fading data taken on the same overwater path in previous years. Fig. 10 shows the fading record from a single dish, taken during 1452 hours in the same period of the previous year (1952). Also shown is the response of the *better* of two dishes with a diversity spacing of 20 ft. The single dish record shows without doubt that very deep fades occur on this route. The double dish record, however, ought not to be appreciably worse (at most, by 3 db) than the 1953 record, since automatic combination can, at best, add the powers of the two dishes. A discrepancy in the lower part of the curves of about 5 db therefore needs to be accounted for. Some of this may be genuine, due to different propagation conditions and to the effects of a slightly different diversity spacing, 19', in the 1953 trials. However, there is little doubt that the 1952 fading results, as here recorded, are too pessimistic. The recorder used was a double pen recorder, and the thickness of line of the ink trace corresponded with about twelve to fifteen seconds of recording time. Brief fades which might have lasted only a second or so — such rapid fades were indeed noticed on the

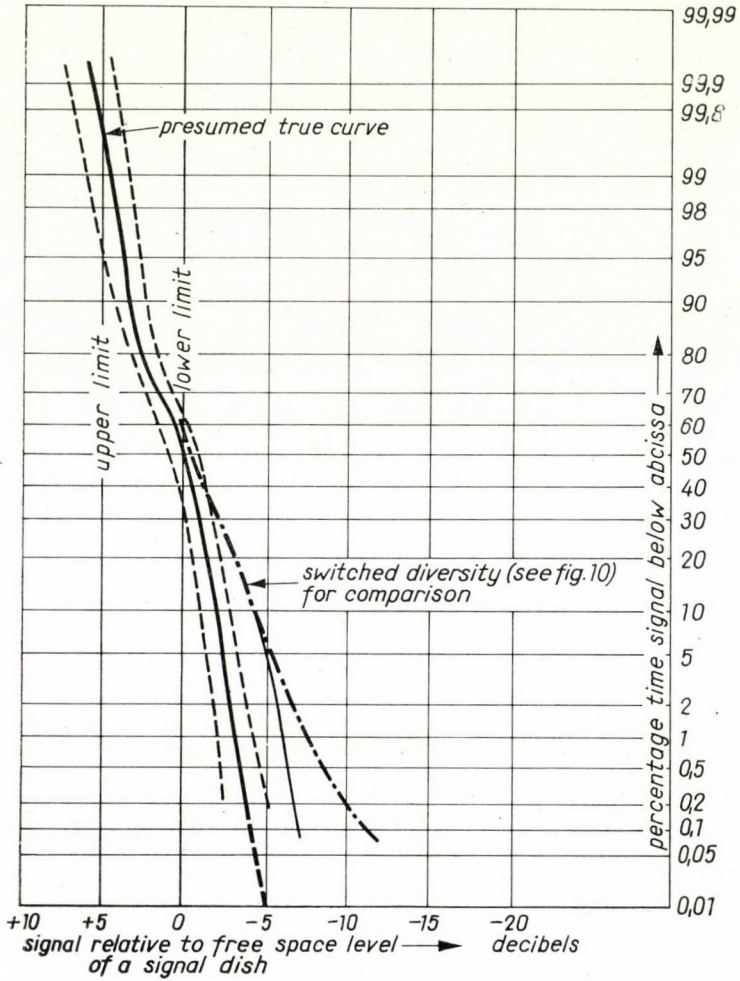


Fig. 9. Combined diversity reception — fading VS. time response for automatic phasing junction (1953)

site — are abstracted as half minute fades. This alone makes the record unreliable in the region of less than 1% of the time. However, since simultaneous fades are involved in the double dish measurements, there arises, in addition, the need to read two recordings, and decide whether or not they are simultaneous. This again involves the thickness of the ink line, and also the initial accuracy of the pen settings. It is apparent that, faced with this difficulty in interpretation, an observer is likely to err on the cautious side, and record a “simultaneous fade” if the ink lines of the recordings are merely rather near to each other in position. Only an automatic recorder with a sufficiently fine resolving time can be adequate to deal with the double-dish arrangement.

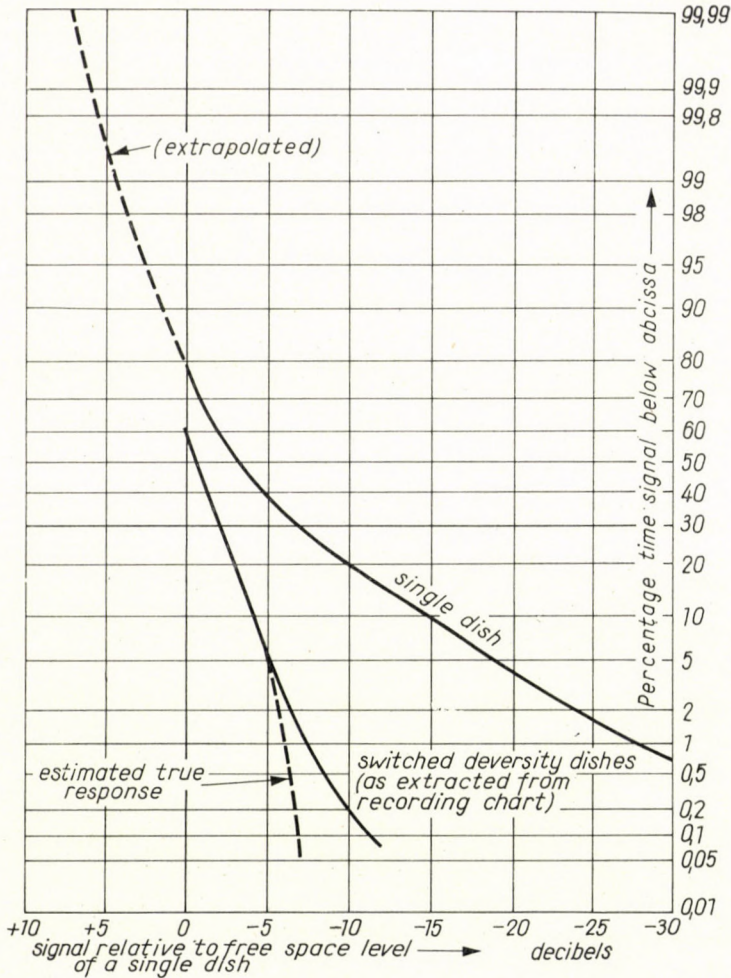


Fig. 10. Single antennas — fading VS. time responses for single and switched dishes (1952)

Accordingly, the discrepancy with previous results will be ignored, and the results presented in Fig. 9 taken as typical of the performance of the apparatus over the particular overwater path and period concerned. It should be stressed, of course, that a good performance is bound up with an adequate diversity behaviour: the automatic phasing junction can only combine the signals which exist from moment to moment at the two dishes, and a genuinely simultaneous fade would appear as such in the records. In particular, the limiting fade depth of -5 db should not be taken as an indication of the fading depth likely to be encountered on other sites or during quite different propagation conditions.

4. The combination of diversity antenna signals — Improved version

4.1. *Microwave phasing junction*

A simpler system is used than that described in section 3. The two antennas feed into the side arms of a hybrid-T, one of whose remaining arms goes to the receiver, whilst the fourth is terminated in a dummy load. In the arm from the lower antenna there is inserted the phase shifting apparatus. It is seen that this combination can give the same maximum output as the previous method, but that its properties are somewhat different. In particular, if one antenna receives a zero signal, the present network will deliver to the receiver only half of the power received by the other. The earlier network could deliver all the power. On the other hand, if the signals arrive in phase or antiphase and of equal amplitude the present network will give a 3 db improvement over the former version. In a true diversity system, operating within an interference pattern, therefore, there is nothing to choose most of the time. But in the case in which the lower of the two antennas is cut off from line of sight by the earth bulge for an appreciable part of the time, the earlier network can offer some improvement. A similar advantage also occurs in the rare deep fades when both antennas are near zeros of the interference pattern.

4.2. *The phase changer*

The shortcomings of the previous phase changer were connected primarily with its limited phase excursion: beyond a certain point it was necessary to make a blind run of half a wavelength in order to pick up a point at which the phase excursion could continue. A rotary phase changer of well known design can overcome this limitation and is capable of an indefinite phase excursion in either direction. It therefore meets all the requirements of the situation.

4.3. *The phase modulator*

In the earlier experiments the reference phase modulation signal required to actuate the control circuits was obtained by reciprocating movements of the phase changer itself, the repetition rate being determined by the rate of travel of the pistons, and of the order of 1 c/s. This is a little on the slow side; but more disturbing is the combination of the two functions of phase sensing and phase correction in the one device. As mentioned previously, the control circuits sometimes initiated unstable operation, with continual "hunting" of the pistons.

The two functions are separated in the improved version of the apparatus, and a separate phase modulator is introduced alongside the rotary phase changer. It consists of a ferrite block to one side of a section of rectangular

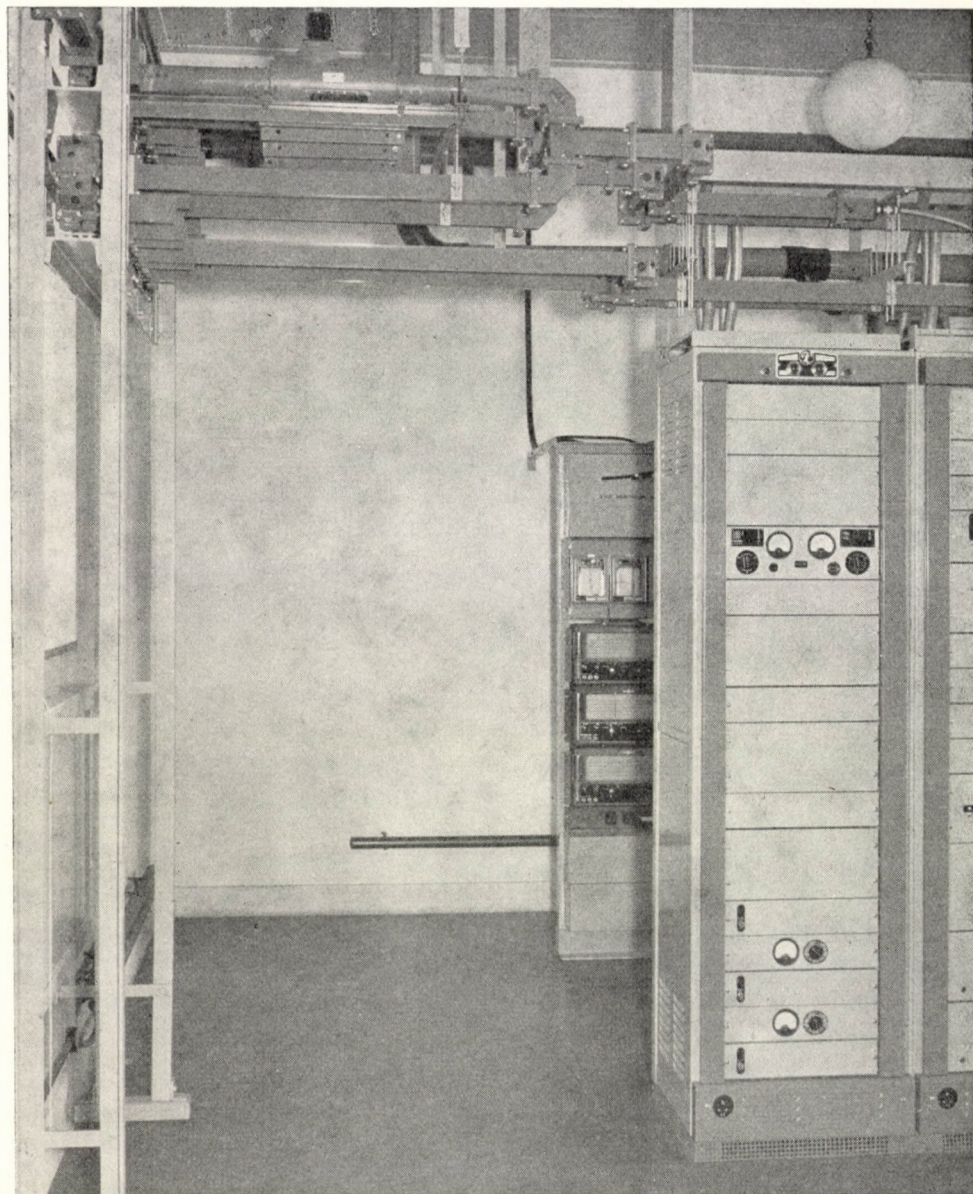


Fig. 11. Microwave phasing junction and channel insertion filters of microwave link relay station

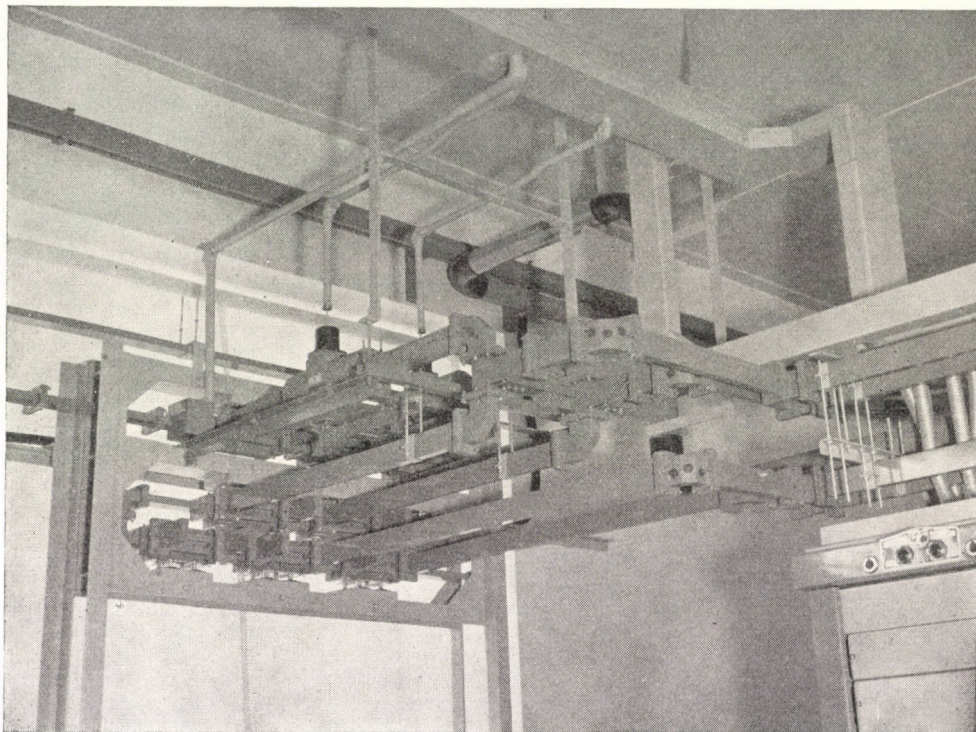


Fig. 12. Close-up of Fig. 11, showing ferrite modulator

waveguide, and a solenoid external to the waveguide is fed from a 35 c/s source. A peak phase deviation of about 0.3 radians is produced with a spurious amplitude modulation of less than 0.05 db peak. The through loss is less than $\frac{1}{4}$ db and the voltage reflection coefficient less than 1% in the 4000 Mc/s band. These figures are believed adequate for operation with a high quality radio link.

The combination of two vectors with a 35 c/s phase modulation gives rise at this frequency to a slight amplitude modulation which goes through zero and changes sign when the two vectors are in phase. Therefore, a phase sensitive detector at 35 c/s can be used to extract information from the combined signal, and which can then be utilised to drive the rotary phase changer by the amount necessary to phase the signals. The signal to drive the control circuit can be taken from the main I. F. receiver.

4.4. *Multi-channel network*

At a radio link repeater the same antenna may be used for several adjacent radio carriers. These are then separated in a channel-dropping filter net-

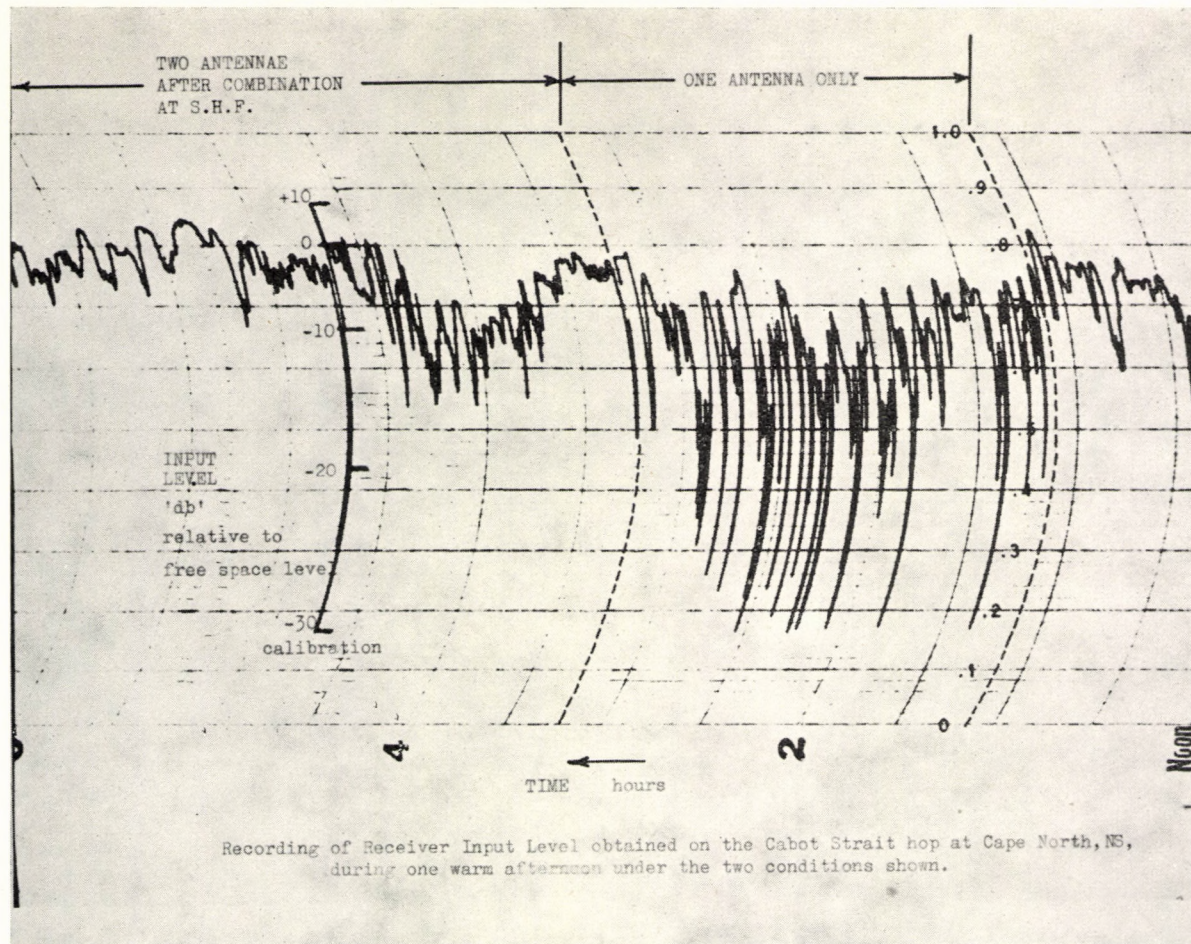


Fig. 13. Combined diversity reception — extract from chart of cabot straits link

work for individual amplification. The phase modulator discussed above is arranged to be common to all these channels, though each has its own phase shifter and control circuit. In Figs. 11 and 12, is shown an installation of the complete apparatus, including the phase modulator, and three channel insertion feeders each with its own rotary phase changer and combining hybrid-T. Also shown are the three channel insertion filters for the transmitter.

4.5. Test results

A circuit at 4000 Mc/s has been installed across the Cabot Strait at Cape North, Canada. The distance is 69 miles, and the antenna heights above sea level at the two ends are 1420 and 650 feet. The diversity spacings are 30 feet and 15 feet respectively, the dishes being 14 feet in diameter.

A typical result is shown in Fig. 13 taken during a warm afternoon. The right hand part of the trace refers to the pick-up of a single antenna only. It is seen that fades of 30 db below free space are quite common.

The left hand part represents the combined signal from the two antennas. It is seen that there is a general rise in level at the maxima, whilst the fading level is reduced to about 15 db. An immediate recovery of about 10 db is seen at the moment of combination. (The deep mark in the centre of this part of the chart is a calibration mark.)

It is apparent that both the combining system and the diversity design are operating satisfactorily during the period covered by this chart. It should, perhaps, be mentioned that 69 miles is a much greater over-water path than is usually used on microwave links.

5. Appendix

Received power levels

5.1. The hourly range and maximum

Fig. 14 shows a plot of the average hourly range, for the combined diversity antennas, versus the hourly maxima (decibels above a single free space dish). The association of a large range with a large maximum is clear, and in section 3.7 a possible explanation was given in terms of a field pattern with short height period moving across the two antennas. That this explanation may well be correct in the region of high hourly maxima may be seen from equation (6) in which the appropriate values $E_1 = 2 \sin \theta$, $E_2 = 2 \sin \psi$ and $\Phi = \theta - \psi$ are inserted. Here, θ and ψ represent the positions at which the receiver antennas sit on the vertical space pattern. The equation can be put in the form

$$P = 2 \left\{ 1 - \cos (\theta + \psi) \cos (\theta - \psi) + \right. \\ \left. + |\sin (\theta - \psi)| \sqrt{1 + \cos^2 (\theta - \psi) - 2 \cos (\theta + \psi) \cos (\theta - \psi)} \right\} \quad (7)$$

For a fixed difference $\theta - \psi$ this expression has a maximum at $\theta + \psi = 180^\circ$ and a minimum at $\theta + \psi = 360^\circ$. If the vertical space pattern is imagined to "slide" past the two antennas without change in pattern wavelength, then the maximum reached will be

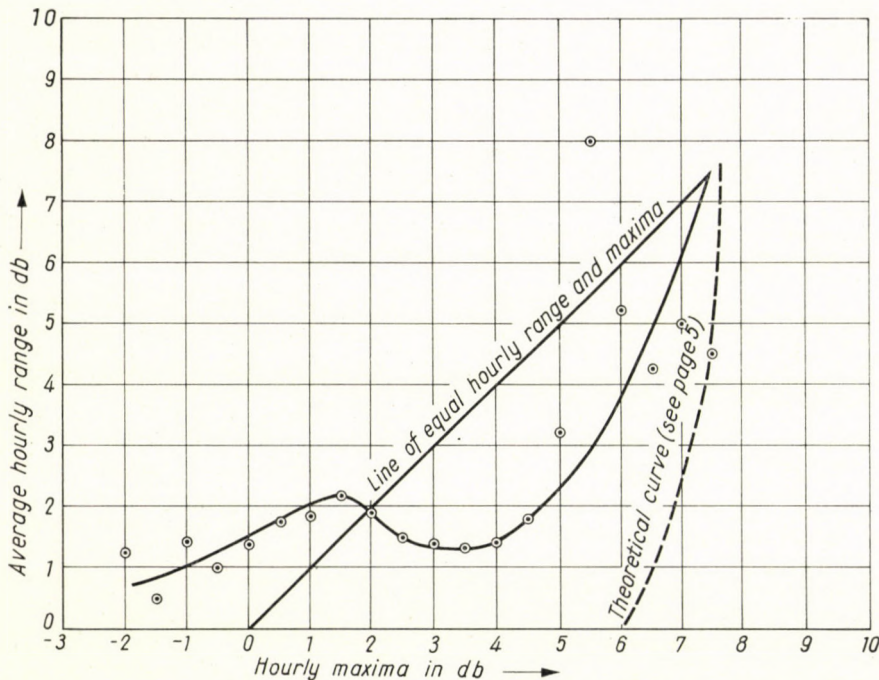


Fig. 14. Combined diversity reception — average hourly range versus hourly maximum

$P_{\max} = [1 + |\sin(\theta - \psi)| + |\cos(\theta - \psi)|]^2$ and the corresponding minimum will be $P_{\min} = [1 + |\sin(\theta - \psi)| - |\cos(\theta - \psi)|]^2$. On the rather naive assumption that, over the course of an hour, nothing more involved than this occurs, it is possible, by varying $\theta - \psi$, to make a plot of P_{\max} against range, resulting in the dashed curve of Fig. 14. The agreement (in the high maximum part of the curve) between the experimental points and the theoretical curve is not very striking, though the similarity is perhaps more than a coincidence. In particular, the theory predicts a greatest maximum of 7.66 db, which was nearly attained, but not exceeded, during the test. (9 db would be possible if the phases of the received signals were completely uncorrelated.) However, this simple theory cannot account for the existence of any maxima at all below +6 db, and it is apparent that a more involved explanation is required, at least in this region.

5.2. Single dish

Relative to the free space level of an isolated dish, a single antenna receives a power $P = 4 \sin^2 \theta$ where θ is the angle on the vertical space pattern at which the antenna is located. Assuming all values of θ are equally likely to be covered over a period, the average value of P is

$$P = (1/\pi) \int_0^\pi 4 \sin^2 \theta d\theta = 2 \tag{8}$$

Thus a single antenna should have an average power $10 \log_{10} 2 = 3$ db above the free space value.

This result is based on taking the logarithm of the level of the average power. A somewhat different result follows by investigating the average power level. (The difference is due to the fact that the logarithm of an average is not, in general, equal to the average of the logarithm.) In the particular case of a single antenna this latter investigation can be done without

difficulty, but for more complicated systems the mathematics become very involved. The average level in decibels for the single antenna is easily seen to be given by

$$10(1/\pi) \int_0^{\pi} \log_{10} (4 \sin^2 \Theta) d\Theta = 10 [2 \log_{10} 2 + (4/\pi) \int_0^{\pi/2} \log_{10} \sin \Theta d\Theta] = 0 \quad (9)$$

on using the result $\int_0^{\pi/2} \log \sin \Theta d\Theta = -(\pi/2) \log 2$.

Hence there is a difference of 3 db in the two cases. As a single dish is given to severe fading, whilst the various diversity systems discussed here are not, it would appear safe to ignore for them any difference in the two methods of averaging. The numerical effects of such a difference should only be noticeable when large negative decibels occur for an appreciable fraction of the time, and in the extreme case of a single dish this only amounts to 3 db.

5.3. Switched diversity dishes

The average power level from the better of two dishes is

$$P = (1/\pi)^2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} 2[\sin^2 \psi + \sin^2 \Theta + |\sin^2 \psi - \sin^2 \Theta|] d\psi d\Theta \quad (10)$$

Here Θ and ψ are the angles on the vertical space pattern at which the antennae are located. Over a period it is assumed that all values of Θ and ψ are equally likely. Equation (10) reduces to

$$P = 2 + (8/\pi^2) \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\psi} (\sin^2 \psi - \sin^2 \Theta) d\Theta + \int_{\psi}^{\pi/2} (\sin^2 \Theta - \sin^2 \psi) d\Theta \right\} d\psi = 2 + 8/\pi^2 = 2.81 \quad (11)$$

Thus the average power of the switched diversity dishes is $10 \log_{10} 2.81 = 4.5$ db above free space for a single dish.

It might be objected that the above formula does not sufficiently take into account the nature of the diversity spacing of the dishes. An estimate of any error involved may be made by taking the extreme case of exact diversity spacing the whole of the time, i. e. $\psi = \Theta + \pi/2$. The expression for P then is

$$P = (1/\pi) \int_0^{\pi} 2[\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta + |\sin^2 \Theta - \cos^2 \Theta|] d\Theta = 2 + 4/\pi = 3.27$$

This corresponds to a power level of 5.15 db, which is only 0.65 db greater than that given in equation (11). It is concluded that the value given in equation (11) cannot be appreciably out.

5.4. Automatically-combined diversity dishes

The formula for this system is taken from equation (7). In that equation take $|\Theta - \psi| = X$ and $\Theta + \psi = Y$ and assume all values of X and Y are equally likely in the range 0 to π and 0 to 2π respectively. On account of the form of the integrand, the latter range can be replaced by 0 to π and the expression doubled, the resulting equation for the average power being

$$P = (1/\pi^2) \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} 2[1 - \cos X \cos Y + \sin X \sqrt{1 - 2 \cos X \cos Y + \cos^2 X}] dX dY \quad (12)$$

The first two terms integrate to 2, and the third is transformed by putting X in terms of Z through $\cos X - \cos Y = \sin Y \operatorname{Sh} Z$.

The Z integration is straightforward and a new variable $y = Y/2$ taken. After some manipulation it is found that

$$P = 2 + (16/\pi^2) [2/3 + \int_0^{\pi/2} \sin^2 y \cos^2 y \operatorname{Sh}^{-1}(\cot y) dy] \tag{13}$$

integration by parts yields

$$P = 2 + (2/\pi^2) [5 + \int_0^{\pi/2} y \operatorname{cosec} y dy] \tag{14}$$

The last integral is equal to twice Catalan's constant $G = .916$ giving $P = 3.385$.

Thus the level of the average power of the automatically combined dishes is $10 \log_{10} 3.385 = 5.3$ db above free space for a single dish. The effect of assuming the extreme case of exact diversity the whole of the time leads, from equation (6) with $E_1 = 2 \cos \Theta$, $E_2 = 2 \sin \Theta$ and $\Phi = 90^\circ$, to the expression

$$P = (1/\pi) \int_0^\pi 2[\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta + \sqrt{\cos^4 \Theta + \sin^4 \Theta + 2 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta}] d\Theta = 4$$

The power level is thus + 6 db, which is only 0.7 db greater than that given by equation (14).

It is concluded that, as with the case of the switched dishes, the assumptions on the correlation between the variables Θ and ψ have adequately taken into account the nature of the diversity spacing between the dishes, so far as average power levels are concerned.

In comparing the automatic with the switched diversity, it should be confirmed that the same basis of averaging has been used. In equation (10), Θ and ψ have been assumed uniformly distributed, whilst in equation (12) the variables were X and Y . However, X and Y could also have been used in (10) and it can be checked readily that the same result obtains if this change is made. Accordingly, it can be taken that the gain of the automatically combined over the switched dishes is $5.3 - 4.5 = 0.8$ db. (Virtually the same result is arrived at also, if the extreme values 6 and 5.15 db are used.)

A direct confirmation of this result can be obtained from equation (6). Let E_1 be the greater of the two signals. Then relative to E_1 , which is the signal from the switched dishes, the power level is

$$P = \frac{1}{2} (1/\pi) \int_0^\pi \int_0^1 [1 + y^2 + \sqrt{1 - 2y^2 \cos 2\Phi + y^4}] dx dy \tag{15}$$

Here $y = E_2/E_1$, and all values of y from 0 to 1 have been assumed equally likely, as have all values of phase difference from 0 to π . Carrying out the Φ integration in terms of the complete elliptic integral of the second kind, $E(k)$, of modulus k , it is found that

$$P = 2/3 + (1/\pi) \int_0^1 (1 + y^2) E\left(\frac{2y}{1+y^2}\right) dy \tag{16}$$

The integral does not appear capable of expression in closed terms, but it is easily evaluated numerically to give

$$P = 1.193.$$

The level of the average power of the automatically combined dishes is therefore $10 \log_{10} 1.193 = 0.8$ db above that of the switched diversity pair. The agreement with the value found above by an independent method is satisfying, and since a rather different averaging procedure has been used, the numerical equality of the two results shows that the method is relatively insensitive to the basis of the statistics.

As mentioned above, the results refer to the level of the average power. The average power level may differ slightly, up to 3 db for the single dish, where relatively frequent severe fades are effective in reducing the figure. It is not thought that the numerical effect is much larger than 0.5 db in the other cases, however, on account of the higher level of the signal the bulk of the time.

5.5. Comparison with experiment

The average levels for the maximum and minimum per hour of the automatically combined diversity dishes, as obtained from the tests, are 1.95 and 0.08 db respectively, giving an average level of the mean of 1.02 db. The level of the average power can also be found from the figures. It is 2.47 db from the hourly maximum and 0.52 from the hourly minimum. If these are averaged the value 1.49 db is found. If, however, the maximum and minimum powers are first averaged, and then the logarithm taken, the value 1.60 db is found. Thus the difference in the methods of averaging is of the order of 0.5 db, and if the value 1.60 db is taken for comparison with theory, a discrepancy of $5.3 - 1.6 = 3.7$ db appears.

The corresponding figures for the switched diversity dishes are not available, but in the important region from 20% of the time to 60% of the time the difference between the switched and the automatic diversity fading curves is between 5 and 0.5 db, an average difference of about 1 db. This confirms the theoretical difference, but also puts the level of the switched diversity curves out by 3.7 db.

The figures for the single dish were obtained by making a reasonable extrapolation of the curve from the existing figures into the missing region of the 20% of the time during which the aerial was above free space level. The figures are: Level of average power, 1.82 db, average power level - 5.07 db. The difference between these, 3.25 db, compares well with the theoretical 3 db, but the over-all level is some 5 db too low.

These figures may be taken to confirm the theory so far as the relative levels are concerned, but the absolute levels predicted are all too high. Moreover, as pointed out in section 3.7, the assumptions made there are unable to account for the existence of hourly maxima below the + 6 db level. Three possible explanations are, (a) faults in the experimental set up, including possible instrumental and calibration errors, (b) inadequacy of the very simple averaging procedures used, and (c) failure of the simple two ray theory on which the formulae are based.

Calibration and other errors are estimated at ± 2 db: it does not seem likely that they are the main cause. Part of the onus for the disagreement between theory and experiment must no doubt go to the second possibility. It will not be possible to improve the averaging procedure until the analysis of other data obtained during the trials have indicated just how the vertical space pattern changes with time. So far as the third cause is concerned, occasional signals on the single dish at more than the + 6 db level certainly point to other factors being operative at least part of the time; and it is suspected that an improved account of the propagation phenomena involved will make it possible to explain the remaining divergencies.

Acknowledgements

Many of the author's colleagues participated in the preparation and running of the tests whose results are described above. In particular, mention should be made of Mr J. LIPINSKI who was responsible for the optical and photographic features, Mr. J. B. SETCHFIELD who designed and prepared the display equipment, Mr. V. H. KNIGHT who constructed the swept frequency apparatus, and Mr. E. PETHICK who was responsible for the automatic phasing junction. The tests were run by staff from the microwave and planning departments. Thanks are due to Messrs. Standard Telecommunication Laboratories Ltd. for permission to publish the paper.

SUMMARY

The interference between the direct ray and a ground reflected ray gives rise, at the receiver of a communication link, to a field pattern in the vertical plane consisting of sinusoidal nodes and maxima. The position and pattern-wavelength of this field depends on the receiver and transmitter heights and spacing, and also on propagation conditions via an effective curvature parameter C . This parameter varies in time, and is the cause of most fading at a single antenna. Its range determines the optimum spacing of a pair of diversity antennas. Experiments using a pair of mirrors, a varying transmitter frequency, and photographs of oscilloscope traces indicate an extreme value of C over water of -1.5. A moving film display shows that conditions can vary rapidly from minute to minute although at other times the display is steady for hours at a time.

An automatic phasing junction can be inserted in the feed to two diversity antennae. The drive for the phasing element is taken from the receiver. A combined signal, nowhere smaller than the greater of the received signals, is obtained from the combining unit, and when the diversity spacing is chosen with regard to the extreme values of curvature obtained on the path, an excellent over-all response is ensured.

DIVERSITY-EMPFANG UND AUTOMATISCHE PHASENKORREKTION

L. LEWIN

ZUSAMMENFASSUNG

Die Interferenz zwischen dem direkten Strahl und dem vom Erdboden reflektierten Strahl ergibt an der Empfangsstelle eine Feldverteilung in der vertikalen Ebene, welche sinusoidale Knotenpunkte und Maxima aufweist. Die Lage und die Periode dieser Verteilung sind durch die Höhenlagen von Sender und Empfänger sowie durch ihre Entfernung bestimmt, und hängen über den effektiven Krümmungsparameter C hinaus auch von den Verhältnissen der Wellenfortpflanzung ab. Der Parameter C ändert sich mit der Zeit und verursacht größtenteils den Empfangsschwund an Einzelantennen. Sein Änderungsbereich bestimmt den optimalen Abstand zwischen den beiden Antennen eines Diversity-Paares. Versuche, die über Wasser mit einem Spiegelpaar und einem Sender veränderlicher Frequenz ausgeführt wurden, ergaben an Hand von Oszilloskopaufnahmen für den Parameter C einen extremen Wert von $-1,5$. Eine Filmaufnahme des zeitlichen Verlaufes zeigt, daß die Verhältnisse sich von Minute zu Minute sehr schnell ändern können, daß aber manchmal das Bild auch mehrere Stunden lang unverändert bleibt.

In die Zuleitungen zu den beiden Diversity-Antennen kann ein durch den Empfänger geregelter automatischer Phasenschieber eingeschaltet werden. Das kombinierte Signal, das in einer Addierstufe zusammengesetzt wird, ist niemals schwächer als der stärkste der beiden empfangenen Signale. Falls der Diversity-Abstand entsprechend dem extremen Wert der Streckenkrümmung gewählt wird, kann ein gleichmäßig guter Empfang gesichert werden.

[RÉCEPTION DIVERSITY ET CORRECTION DE PHASE AUTOMATIQUE

L. LEWIN

RÉSUMÉ

A l'endroit du récepteur d'une liaison hertzienne, le champ varie sinusoidalement dans le plan vertical, en raison de l'interférence du rayon direct avec le rayon reflété par le sol: des valeurs minima et maxima s'alternent. Les lieux des maxima et les distances entre les points ayant la même phase dépendent de l'écartement entre les antennes de transmission et de réception, de leur hauteur audessus du sol, et du paramètre C dit coefficient de courbure effectif, qui caractérise les conditions de propagation. Le paramètre C varie en fonction du temps; en cas d'une seule antenne, c'est la cause la plus fréquente de l'évanouissement. La grandeur de la variation détermine la distance optimale entre les antennes diversity. Des expériences faites avec deux miroirs réflecteurs et fréquence de transmission variée, ainsi que les photographies des traces d'oscilloscope, mettent bien en évidence une valeur extrême $C = -1,5$ sur eau. Une bande d'images montre que, tantôt les conditions de propagation changent rapidement, de minute en minute, et tantôt elles restent inchangées pendant plusieurs heures.

Dans le circuit d'alimentation des deux antennes diversity, on insère un correcteur de phase automatique. Le correcteur de phase est commandé par le signal du récepteur. Le signal résultant obtenu du circuit d'addition n'étant jamais surpassé par le plus grand des signaux reçus, si l'on choisit la distance diversity en tenant compte des valeurs extrêmes de C qui se présentent sur la liaison, des conditions de transmission excellentes peuvent être obtenues.

ДИВЕРЗИТНЫЙ ПРИЕМ И АВТОМАТИЧЕСКАЯ КОРРЕКЦИЯ ФАЗЫ

Л. ЛЕВИН (Харло, Англия)

РЕЗЮМЕ

Вследствие интерференции прямого и отраженного от земной поверхности луча в пункте расположения приемника радиосвязи напряженность поля вертикальной плоскости изменяется синусоидально, чередуются точки максимумов и минимумов. Расположение максимумов и расстояние точек одинаковой фазы зависит от величины расстояния между антеннами передатчика и приемника, от высоты над земной поверхностью и от так называемого эффективного коэффициента кривизны C , характеризующего условия распространения радиоволн. Параметр C изменяется в функции времени и в случае одной единственной антенны это изменение является наиболее частой причиной фединга.

Изменение величины данного параметра определяет оптимальное расстояние между парой диверзитных антенн. По фотоснимкам осциллокопических изображений результатов измерений с двумя антеннами и с изменившейся частотой передачи определено экстремальное значение $C = -1,5$ над водной поверхностью.

Кадры кинофильма показывают, что условия распространения в одном случае меняются очень быстро, т. е. с минуты на минуту, а в другом остаются неизменными даже в течение нескольких часов.

В цепь испытания двух диверзитных антенн мы включили автоматический корректор фазы. Фазовый корректор регулирует сигналы приемника. Исходящий сигнал суммирующего каскада не может быть меньше большего принятого сигнала, т. е. если диверзитное расстояние определяется по экстремальному значению C , для данного случая можно достигнуть хорошие условия передачи.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

INDEX

- Kollár, L.* : Stability of Bent Shell-Arches — Über die Stabilität auf Biegung beanspruchter Schalenbögen — Stabilité des voiles en arc fléchis — *Коллар, Л.* : Стабильность изогнутых арок в виде оболочек 267
- Fekete, L.* : Neue Methoden der Schlackenberechnung in der NE-Metallurgie — New Methods for the Computation of Slag in Metallurgy—Nouvelles méthodes de calcul de scorie dans la métallurgie des métaux — *Фекете, Л.* : Новый метод расчета шлаков в цветной металлургии 299
- Barta, J.* : Schranken für die Knicklast des einseitig eingespannten dünnen Stabes von veränderlichem Querschnitt — Bounds for the Buckling Load of a Thin Column Clamped at one End and Having Varying Cross Sections — Bornes pour la valeur critique de la charge compressive d'une barre mince aux sections variables, encastrée à une extrémité — *Барта, И.* : Пределы критической нагрузки тонкого стержня переменного течения, зажатого на одном конце 321
- Lázár, J.* : Untersuchungen über die Korngrößenverteilung feingebrochener Materialhaufen — Investigations on the Granulometric Composition of Desintegrated Aggregations as Produced by Comminuting Machines — Recherches sur la distribution des grains dans un agglomérat concassé par des concasseurs fins — *Лазар, Й.* : Исследования гранулометрического состава множеств, измельченных тонкодробящими машинами 325
- Dulácska, E.* : Die Biegetheorie der langen, flachen, elastischen Kreiszyinderschalen — The Bending Theory of Long Oblate Circular-cylindrical Shells — Théorie de flexion des voiles cylindriques circulaires longs, aplatis et élastiques — *Дулачка, Э.* : Теория изгиба длинных, плоских и эластичных круглоцилиндрических оболочек 343
- Tarján, G.* : Some Theoretical Questions on Classifying and Separating Hydrocyclones — Einige theoretische Fragen der Klassier- und Waschhydrozyklone — Quelques questions théoriques sur les cyclones hydrauliques de triage et d'enrichissement — *Тарьян, Г.* : Некоторые теоретические вопросы классифицирующих и обогачительных гидроциклинов 357
- Fuchs, E. G.* : Bestimmung des Restaustenitgehaltes gehärteter Stähle mit Röntgen-Feinstrukturanalyse — Determination of the Residual Austenite Content in Hardened Steels by X-Ray Diffraction — Détermination par radiodiffraction du contenu résiduel en austénite des aciers trempés — *Фукс, Э.* : Рентгенодифракционное определение содержания остаточного аустенита закаленных сталей 389
- Kurutz, I.* : The Regulation of the Radial Flow Impeller by Adjusting the Impeller Blades — Leistungsregulierung des radial durchströmten Laufrades durch Umstellung der Laufschaufeln — Réglage du débit d'une roue centrifuge par le déplacement angulaire des aubes — *Курутц, И.* : Регулирование мощности рабочих колес радиального перелива установкой лопастей рабочих колес 415
- Csonka, P.* : Buckling of Bars Elastically Built-in along Their Entire Length — Die Knickung eines entlang seiner ganzen Länge elastisch eingespannten Stabes — Flambage d'une barre élastiquement encastrée sur toute sa longueur — *Чонка, П.* : Прогиб стержня, зажатого эластично по всей длине 423
- Balogh, A.* : Einiges über die Eigenschaften der charakteristischen Gleichung bei Torsionsschwingungen — On some Features of the Characteristic Equations of Torsion Oscillations — Quelques propriétés des équations caractéristiques des vibrations de torsion — *Балог, А.* : Некоторые свойства характеристических уравнений торсионных колебаний 429
- Bognár, G.* : Colloquium on Microwave Communications — Kolloquium für Richtfunkverbindungen — Colloque sur les liaisons hertziennes — *Богнар, Г.* : Коллоквиум по микроволновой связи 441
- Lewin, L.* : Diversity Reception and Automatic Phase Correction — Diversity-Empfang und automatische Phasenkorrektion — Réception diversity et correction de phase automatique — *Левин, Л.* : Диверзитный прием и автоматическая коррекция фазы 445