

ACTA  
TECHNICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXI

FASCICULI 1—2



1960

ACTA TECHN. HUNG.

# ACTA TECHNICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők :

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla : 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

*Acta Technica*  
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

## INDEX

- Apor, K.*: Роль лемнискаты в установке поворотов при регулировании рек — *Apor, K.*: Die Rolle der Lemniskate bei der Absteckung der Krümmungen für Flußregulierungen — The Role of the Lemniscate in Laying out Bends for River Regulations — Le rôle de la lemniscate dans le jalonnement des courbes de régularisation des rivières ..... 175
- Barta, J.*: Das Becksche Stabilitätsproblem und verwandte Probleme — The Stability Problem of Beck and Related Problems — Le problème de stabilité de Beck et d'autres problèmes — *Барта, Й.*: Проблемы стабильности Бека и прочие проблемы ..... 241
- Berceli, T.*: Design of Helix Couplers — Konstruktion von Helixkopplern — Le dimensionnement des coupleurs hélicoïdes — *Берцели, Т.*: Конструирование соединителей геликс ..... 311
- Boldizsár, T.*: Calculation of the Efficiency of Mine Air Refrigeration in Dry Metal Mines — Berechnung des Wirkungsgrades der künstlichen Kühlung in trockenen Erzbergwerken — Calcul du rendement de la réfrigération dans les mines de minerais secs — *Больдижар, Т.*: Расчет эффективности искусственного охлаждения на сухих рудничных шахтах ..... 193
- Bosznay, Á.*: Über eine mögliche Ableitung der Falkschen Transformation — A Possible Deduction of the Falk Transformation — Une déduction possible des transformations de Falk — *Боснай, А.*: Один возможный вариант вывода трансформации Фалька ..... 203
- Bosznay, Á.*: Über die Anwendung der Falkschen Transformation auf Biegeschwingungen ausführende Schwingungssysteme — Application of the Falk Transformation to an Oscillating System Carrying out Flexural Oscillation — L'utilisation des transformations de Falk pour les systèmes d'oscillations dues à des vibrations de flexion — *Боснай, А.*: Применение трансформации Фалька к колебальной системе, выполняющей изгибательное колебание ..... 217
- Bölskei, E.*: Allgemeine Theorie der gekrümmten Schalen — General Theory of Bent Shells — La théorie générale des voiles minces — *Бёлскеи, Э.*: Общая теория гнутых оболочек ..... 391
- Csonka, P.*: The Extension of the Application-range of Macaulay's Method — Die Erweiterung des Anwendungsgebiets des Macaulay'schen Verfahrens — L'extension du champ d'application du procédé de Macaulay — *Чонка, П.*: Распространение области применения метода Мэколи ..... 3
- Csonka, P.*: Calculation of Paraboloid Shells of Revolution on a Base Comprising a Regular Triangle or Hexagon by the Relaxation Method — Die Berechnung von Rotations-paraboloid Schalen über einem regelmäßigen Dreieck- bzw. Sechseckgrundriß mit Hilfe des Relaxationsverfahrens — Une méthode de calcul par relaxation des coques paraboloides de révolution à plan triangulaire et hexagonal — *Чонка, П.*: Расчет при помощи релаксации оболочек с планом правильных трех- и шестиугольников и имеющих вид параболоидов вращения ..... 343
- Fodor, Gy.*: A. C. Impedance of Laminated Conductors — Die Wechselstromimpedanz von geschichteten Leitern — Impédance à courant alternatif des conducteurs stratifiés — *Фодор, Д.*: Импеданс переменного тока многослойных проводников 39

- Fuchs, E.* : Chemische Zusammensetzung und thermische Ausdehnung der zu den sogenannten Dumetdrähten verwendeten Fe-Ni-Legierungen — Chemical Composition of Fe-Ni-Alloys Used for So-called Dumet Wires and their Thermal Dimensional Change — Composition chimique et dilatation des alliages FeNi employés pour les fils „Dumet” — Фукс, Э.: Химический состав и тепловое изменение размеров Fe—Ni-сплавов, используемых для изготовления т. н. дюметных проволок 425
- Geszi, P. O.* : The Effect of Axial Conductance in the Corona Envelope upon the Inductance of the Conductor in the Presence of a Travelling Wave — Die Wirkung der Axialleitung in der Koronahülle auf die Induktivität des Leiters in der Anwesenheit von Wanderwellen — Effet de la conduite axiale sur l'inductivité du conducteur, en présence d'une onde progressive dans l'enveloppe corona — Гесзи, П. О.: Влияние аксиальной проводимости на индуктивность проводника в присутствии бегущей волны в чехле короны ..... 19
- Geszi, O. P.—Ludvig, Gy.* : The Moving of Overhead Conductors upon the Effect of Wind — Bewegung der Leiter von Freileitungen unter Einwirkung des Windes — Le mouvement des conducteurs des lignes de transmission sous l'action du vent — Гесзи, П. О., Людвиг, Д.: Движение проводов воздушных линий под воздействием ветра ..... 437
- Huszár, I.* : 25 Years of Photoelasticity in Hungary — 25 Jahre der Spannungsoptischen Forschung in Ungarn — Photoélasticité en Hongrie depuis 25 ans — Хусар, И.: 25 лет со времени начала производства в Венгрии испытаний напряжений оптическим способом ..... 281
- Koranyi, G. и Acs, M.* : Измерение силы адгезии между поверхностью стекла и стеклянным порошком — Korányi, G.—Acs, M. : Messung der Adhäsion zwischen Glasoberfläche und Glaspulver — Measurement of the Adhesion Force between Glass Surface and Glass Powder — Mesure de la force d'adhésion entre la surface du verre et la poudre de verre ..... 139
- Lipka, I.* : Geometrie der Wölbung von Laufflächen an Wälzlageringen — The Geometrics of Convex Raceways of Roller Bearings — Géométrie du bombage de la surface de roulement des bagues de roulement a galets — Липка, И.: Геометрия беговой дорожки подшипниковых колец ..... 359
- Peregy, J.* : Wirtschaftliche statisch unbestimmte Konstruktionen — Economical Statically Redundant Structures — Constrüctions hyperstatiques économiques — Переди, Й.: Экономичные статически неопределенные конструкции ..... 285
- Réczey, G.* : Methodik zur Ausarbeitung einer Mechanisierung der Bauindustrie, durch die optimale Leistungen erzielt werden — Methods for Developing Optimum-efficiency Mechanization in the Building Industry — Méthodes de développement d'une mécanisation garantissant le rendement optimum dans l'industrie du bâtiment — Рецей, Г.: Методика создания в строительной промышленности механизации, обеспечивающей максимальную производительность ..... 147
- Rohonyi, V.* : Angenäherte Berechnung der Starrheit gerader Kegelaradzähne — Approximate Calculation of the Stress in Straight Bevel Gear Teeth — Calcul approché de la rigidité des dents des engrenages coniques à denture droite — Рохони, В.: Приближенный расчет напряжения в прямых зубьях конической шестерни 25
- Szidarovszky, J.* : Die Beanspruchung von Stäben mit veränderlichem Querschnitt auf Biegung bei gleichzeitigem Druck — Stress Analysis of an Axially Compressed Bar under Lateral Loading — Efforts dans une barre de section variable, soumise à la flexion et compression simultanée — Сидаровский, Я.: Нагрузка изогнутых и сжатых стержней непостоянного сечения ..... 125
- Szidarovszky, J. Z.* : Natural Vibration of a Bar under Axial Force, Taking the Effect of Shear in Consideration — Eigenquerschwingungen eines auf Druck beanspruchten Stabes — Détermination de l'oscillation propre de barres comprimées à deux appuis, compte tenu de l'effet des forces de cisaillement — Сидаровский, Я.: Собственные колебания двухопорного сжатого бруса, учитывая действие срезающего усилия ..... 261

- Szőke, B.* : One Way to Cut down Power Requirement for Flour Milling — Ein Weg zur Minderung des Kraftbedarfes des Mahlens — Un moyen de réduire l'énergie nécessaire pour la mouture — *Сёке, Б.* : Одна из возможностей понижения энергорасхода помола ..... 13
- Szőke, B.* : The Economics of Machine Tool Efficiency — Die wirtschaftliche Untersuchung des Wirkungsgrades der Werkzeugmaschinen — Aspects économiques du rendement des machines-outils — *Сёке, Б.* : Экономический анализ к. п. д. в случае металлорежущих станков ..... 103
- Vajda, Gy.* : Absorption in mehrschichtigen Isolationen — Absorption in Multiple-layer Insulating Materials — L'absorption dans l'isolant stratifié — *Вайда, Д.* : Абсорбция в многослойном изоляционном материале ..... 269
- Valenta, J.* : État élastique des récipients cylindriques à couches multiples embattues a chaud — Spannungszustand von zylindrischen, mehrschichtigen, warm zusammengepressten Behältern — Distribution of Elastic Stresses in Cylindrical, Multi-layer Vessels, Assembled at Higher Temperature — *Валента, Й.* : Состояние упругих напряжений спрессованных в горячем состоянии многослойных цилиндрических сосудов ..... 227
- Vékassy, A.* : Examination of the Cover-factor and Specific Weight of Weft-knitted or Looped Basis Texture Based on the Exact Value of the Loop Length — Untersuchung des Dichtheit-Faktors und des spezifischen Gewichtes der Schußsystem-Strick- und Wirkwaren auf Grund des exakten Wertes der Maschenlänge — Analyse du facteur de densité et du poids des tricots de fond à système de trame, sur base de la valeur exacte de la longueur des mailles — *Векаши, А.* : Исследование показателя плотности и удельного веса вязанного и плетеного основного полотна уточной системы, исходя из точного значения длины петли ..... 69



ACTA  
TECHNICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXI



1960

ACTA TECHN. HUNG.





# THE EXTENSION OF THE APPLICATION-RANGE OF MACAULAY'S METHOD

P. CSONKA

D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY FOR STRUCTURAL AND TRANSPORT ENGINEERING  
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received February 27, 1959]

## 1. Introduction

In a previous paper MACAULAY's method [1, 2] known from the theory of beams has been generalized by the author [3]. By means of this generalization, the method in question became suitable for the solution of linear differential equations the external member of which is a sectionwise varying polynome. The generalization did not include the cases in which the external member possessed a singularity, although such cases frequently occur in technical practice. The present paper wishes to remedy this deficiency. Its aim is to extend the application-range of MACAULAY's method in the aforementioned instances, and at the same time, to draw a parallel between MACAULAY's method and the method based on LAPLACE-transformation.

## 2. The unit-functions

Let us introduce for the purpose of our discussions the unit-functions known from the theory of LAPLACE-transformation. Let us denominate as a unit-function of the zero order (Fig. 1) the function defined by the formula

$$u_0(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1, & x \geq a, \end{cases}$$

and as positive unit-functions of the order-numbers  $j = 1, 2, \dots$  the following functions (Fig. 2):

$$u_j(x-a) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{(x-a)^j}{j!}, & x \geq a. \end{cases}$$

Furthermore, let us introduce as negative unit-functions of the order-numbers  $j = -1, -2, \dots$  the functions defined by the below mentioned formula (Fig. 3):

$$u_j(x-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_{j+1}(x-a) - u_{j+1}(x-a-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Between the above unit-functions the following differential relations can be established:

$$\frac{d}{dx} u_j(x-a) = u_{j-1}(x-a),$$

$$\int u_{j-1}(x-a) dx = u_j(x-a) + C.$$

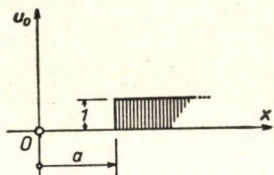


Fig. 1. Unit-function  $u_0(x-a)$

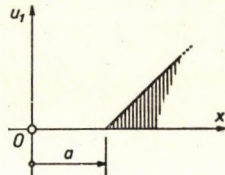


Fig. 2. Unit-functions  $u_1(x-a)$  and  $u_2(x-a)$

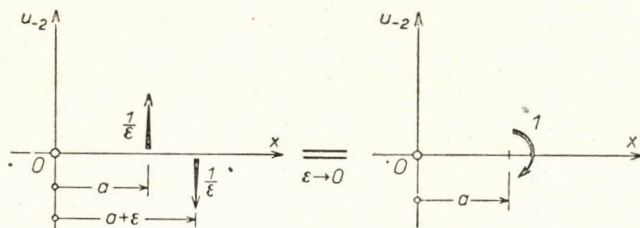
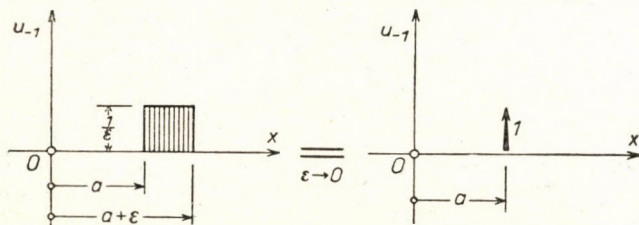
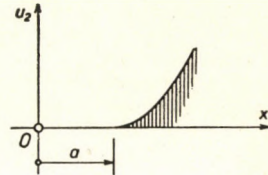


Fig. 3. Unit-functions  $u_{-1}(x-a)$  and  $u_{-2}(x-a)$

### 3. Macaulay's method

The aim of the following is to disclose the possibility of the application of MACAULAY'S method on differential equations that are defined along the section  $0 \leq x \leq l$ , and the external member of which  $p(x)$  possesses a singularity at a finite number of points, while, otherwise, it is a sectionwise varying polynome. Let us agree, that the initial- and the end-point of the range of definition, furthermore, the singularity-points, and finally, the places where the structure of the polynome expressing the external member changes, should

be termed *section-limits*. These limit-points are supplied with serial-numbers from 0 to  $m$ , their abscissas are marked by  $x_0, x_1, \dots, x_m$ . Among these  $x_0 = 0$ , and  $x_m = l$ .

For the application of MACAULAY'S method we have to express the external member  $p(x)$  of the differential equation with help of the previously introduced unit-functions by a formula valid at each point of the range of definition. By so doing, function  $p(x)$  will have the following structure:

$$p(x) = \Sigma \Sigma c_{ij} u_j(x - x_{i-1}),$$

where  $i$  refers to the serial-number of the section-limits, and  $j$  relates to the order-number of the unit-functions. The summarization must be extended over each section-limit, that is to say from  $i = 0$  to  $i = m$ , and over each unit-function introduced at these places.

Expressing the external member of the differential equation in accordance with the above, the procedure disclosed in paper [3] could also be applied on differential equations the external member of which possesses a singularity at a finite number of points.

The aforementioned procedure, in the instance of pure differential equations of the  $n$ -th order and of the form

$$y^{(n)}(x) = p(x) \tag{1}$$

becomes particularly simple. After an adequate transformation of the external member these equations can be written in the following form:

$$y^n(x) = \Sigma \Sigma c_{ij} u_j(x - x_{i-1}). \tag{2}$$

The solution of this differential equation is exceedingly simple. That is, by an  $n$ -times repeated integration of both sides of this differential equation we already obtain its general solution:

$$y(x) = \Sigma \Sigma c_{ij} u_{j+n}(x - x_{i-1}) + \sum_0^{n-1} A_k \frac{x^k}{k!}. \tag{3}$$

Coefficients  $A_k$  figuring in the above formula are integrating constants. Their values can be determined from the boundary conditions of the problem.

We have shown above the application of MACAULAY'S method in the case of pure differential equations of the  $n$ -th order. In a more general instance, thus, when the left-hand side of the differential equation consists of more than a single member, the procedure becomes somewhat more complicated. In such cases the solution of the problem needs the use of the method described in paper [3].

**Example**

Let us determine the deflection-function of the beam shown in Fig. 4 without the foregoing calculation of the bending moment.

First of all, let us put down the load-function of the beam. This can be expressed with the help of the known unit-function, by the following formula, valid along the whole length of the beam:

$$p(x) = R_A u_{-1}(x) - g u_0(x - x_1) + g u_0(x - x_2) + M u_{-2}(x - x_3).$$

Thus, using the relation

$$E J y^{IV}(x) = p$$

we can put down for the deflection-function of the beam the following differential equation of the fourth order:

$$E J y^{IV}(x) = R_A u_{-1}(x) - g u_0(x - x_1) + g u_0(x - x_2) + M u_{-2}(x - x_3).$$

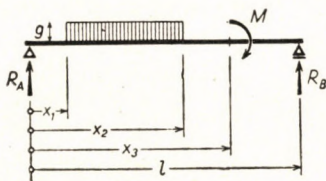


Fig. 4. Bent beam

Boundary conditions are:

$$y_0(0) = y_0(l) = y''(0) = y''(l) = 0.$$

In the case on hand we obtain the solution of the problem by a four times repeated integration of the differential equation:

$$E J y(x) = R_A u_3(x) - g u_4(x - x_1) + g u_4(x - x_2) + M u_2(x - x_3) + A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3 \frac{x^3}{3!}.$$

Integrating constants  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  and  $A_3$  can be determined from boundary conditions.

#### 4. The solution on the base of Laplace's transformation

It is known from the literature [4, 6] that the improper integral

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) \exp(-sx) dx \quad (4)$$

is usually understood to be the LAPLACE's transformed shape of the function  $f(x)$ , defined for values  $x \geq 0$  of the real variable  $x$ ; assuming that this really

exists. The aforementioned transformation establishes an unambiguous relation between the original function  $f(x)$  and the transformed function  $F(s)$ .

It is common knowledge that LAPLACE's transformation can be suitably used for the solution of differential equations; among others, also in the case of differential equations being the subject of our examinations. The course of the procedure will be shown below on hand of the solution of the pure differential equation (1) of the  $n$ -th order.

As an introducing step of the calculation the external member of the differential equation in question should be expressed with the help of unit-functions in the same way as in paragraph 3. Consequently, differential equation (1) will be formed as shown in formula (2). Afterwards, LAPLACE's transformation should be carried out on both sides of the differential equation, whereby in the given case our differential equation will obtain the following form:

$$s^n Y(s) - \sum_0^{n-1} y^{(k)}(0) s^{n-k-1} = \Sigma \Sigma c_{ij} \frac{1}{s^{j+1}} \exp(-x_{i-1}s). \quad (5)$$

The next step of our calculation is to solve the transformed equation for  $Y(s)$ , wherefrom we obtain the formula

$$Y(s) = \Sigma \Sigma c_{ij} \frac{1}{s^{j+n+1}} \exp(-x_{i-1}s) + \sum_0^{n-1} y^{(k)}(0) s^{-k-1}. \quad (6)$$

Then we invert LAPLACE's transformation on both sides of formula (6). By these means we obtain the relation

$$y(x) = \Sigma \Sigma c_{ij} u_{j+n}(x - x_{i-1}) + \sum_0^{n-1} y^{(k)}(0) u_k(x). \quad (7)$$

Taking into consideration the value of  $u_k(x)$ , we finally obtain the formula

$$y(x) = \Sigma \Sigma c_{ij} u_{j+n}(x - x_{i-1}) + \sum_0^{n-1} y^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

only formally deviating from formula (3), that is, the integrating constants  $A^k$  are here replaced by the values  $y^{(k)}(0)$ .

In other cases, that is, when the left-hand side of the differential equation consists of more than a single member, LAPLACE's transformation will also be more complicated than in the case of a pure differential equation of the  $n$ -th order. To illustrate the procedure to be followed we will show the solution for those two problems with the help of LAPLACE's transformation solved in paper [3] using MACAULAY's method.

### First example

Let us determine the deflection  $y$  of the axis-line of the bar shown in Fig. 5, as a function of the co-ordinate  $x$  starting from the left-hand end-point of the bar's axis-line.

In the case on hand bending moments  $m$  of the bar could be expressed using unit-functions in the following way:

$$m(x) = Py + R_A u_1(x) - Q_1 u_1(x - x_1) - Q_2 u_1(x - x_2).$$

In compliance with

$$E J y'' = -m$$

the differential equation to be solved is:

$$E J y'' + Py = -R_A u_1(x) + Q_1 u_1(x - x_1) + Q_2 u_1(x - x_2).$$

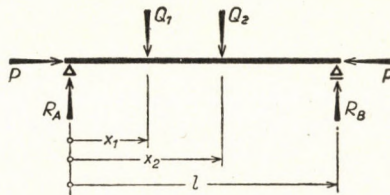


Fig. 5. Compressed and bent bar

Using notations introduced in paper [3], namely

$$a_2 \equiv \frac{E J}{P}, \quad c_{11} \equiv -\frac{R_A}{P}, \quad c_{21} \equiv \frac{Q_1}{P}, \quad c_{31} \equiv \frac{Q_2}{P}$$

the latter differential equation can be written in the following form:

$$a_2 y'' + y = c_{11} u_1(x) + c_{21} u_1(x - x_1) + c_{31} u_1(x - x_2). \quad (*)$$

Boundary conditions are:

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

Transforming equation (\*) according to LAPLACE's method we obtain the relation:

$$a_2 [s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)] + Y(s) = c_{11} \frac{1}{s^2} + c_{21} \frac{1}{s^2} \exp(-x_1 s) + \\ + c_{31} \frac{1}{s^2} \exp(-x_2 s).$$

Taking into consideration the first boundary condition, this relation can be put down in this way:

$$a_2 Y(s) = c_{11} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{a_2}} \cdot \frac{1}{s^2} + c_{21} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{a_2}} \cdot \frac{1}{s^2} \exp(-x_1 s) + \\ + c_{31} \frac{1}{s^2 + \frac{1}{a_2}} \cdot \frac{1}{s^2} \exp(-x_2 s) + y'(0) \frac{a_2}{s^2 + \frac{1}{a_2}}.$$

After carrying out the inverse transformation we obtain the equation:

$$y(x) = c_{11} \left( x - \sqrt{a_2} \sin \frac{x}{\sqrt{a_2}} \right) + c_{21} \left( x - x_1 - \sqrt{a_2} \sin \frac{x - x_1}{\sqrt{a_2}} \right) + \\ + c_{31} \left( x - x_2 - \sqrt{a_2} \sin \frac{x - x_2}{\sqrt{a_2}} \right) + y'(0) \sqrt{a_2} \sin \frac{x}{\sqrt{a_2}} .$$

The value  $y'(0)$  figuring in the latter, can be determined from the following relation, based on the second boundary condition:

$$c_{11} \left( l - \sqrt{a_2} \sin \frac{l}{\sqrt{a_2}} \right) + c_{21} \left( l - x_1 - \sqrt{a_2} \sin \frac{l - x_1}{\sqrt{a_2}} \right) + \\ + c_{31} \left( l - x_2 - \sqrt{a_2} \sin \frac{l - x_2}{\sqrt{a_2}} \right) + y'(0) \sqrt{a_2} \sin \frac{l}{\sqrt{a_2}} = 0 .$$

### Second problem

Let us determine bending moments  $m$  of the bar shown in Fig. 5, without previously establishing the bar's deflection-function.

In such a case the moment-function can be expressed with the help of unit-functions in this way:

$$m(x) = Py + R_A u_1(x) - Q_1 u_1(x - x_1) - Q_2 u_1(x - x_2).$$

After a twice repeated differentiation we obtain the following equation herefrom:

$$m'' = Py'' + R_A u_{-1}(x) - Q_1 u_{-1}(x - x_1) - Q_2 u_{-1}(x - x_2).$$

Using relation

$$E J y'' = -m$$

and

$$\frac{P}{EJ} = \frac{1}{a_2},$$

respectively, the latter equation can be written in the following form:

$$m'' + \frac{1}{a_2} m = R_A u_{-1}(x) - Q_1 u_{-1}(x - x_1) - Q_2 u_{-1}(x - x_2). \quad (**)$$

Boundary conditions are:

$$m(0) = 0, \quad m(l) = 0.$$

The above differential equation (\*\*) somewhat differs from the equation figuring in paper [3]. The deviation is caused by the fact, that the present equation is defined at each point of the beam's axis-line, thus, at the points  $x = x_1$  and  $x = x_2$  too; contrary to the differential equation in paper [3], not defined at the mentioned points.

With the help of LAPLACE's transformation we can deduce from equation (\*\*) the relation

$$s^2 M(s) - sm(0) - m'(0) + \frac{1}{a_2} M(s) = R_A - Q_1 \exp(-x_1 s) - Q_2 \exp(-x_2 s),$$

and from this one — using the first boundary condition — we obtain the equation:

$$M(s) = R_A \frac{1}{s^2 + \frac{1}{a_2}} - Q_1 \frac{1}{s^2 + \frac{1}{a_2}} \exp(-x_1 s) - \\ - Q_2 \frac{1}{s^2 + \frac{1}{a_2}} \exp(-x_2 s) + m'(0) \frac{1}{s^2 + \frac{1}{a_2}}.$$

After the execution of the inverse transformation, we obtain for the moment-function in demand, the formula:

$$m(x) = [R_A + m'(0)] \sqrt{a_2} \sin \frac{x}{\sqrt{a_2}} - Q_1 \sqrt{a_2} \sin \frac{x - x_1}{\sqrt{a_2}} - Q_2 \sqrt{a_2} \sin \frac{x - x_2}{\sqrt{a_2}}.$$

The still unknown value  $m'(0)$  figuring in this formula can be determined with the help of the second boundary condition.

### 5. Comparison of the two methods

Drawing a parallel between MACAULAY's and LAPLACE's methods we come to some interesting conclusions.

First of all, we can observe that both methods use the same key in the introduction part of the calculation, that is, they express the external member of the differential equation with the help of unit-functions by a formula of identical structure, valid at each point of the range of definition. Thus, the procedure to be followed, is identical, in this respect, in the case of both methods.

Referring to pure differential equations of the  $n$ -th order, we can also arrive at an interesting determination. There is no doubt, that in such a case MACAULAY's method should be regarded as the more simple one, directly supplying the final result without intermediate calculations whereas in LAPLACE's method transformation and inverse transformation are by all means to be made as intermediate calculations. Since these intermediate calculations are omitted when using MACAULAY's method, it seems possible to conceive this method as a simplified variation of LAPLACE's procedure.

In the instance of more generally formed differential equations with constant coefficients, both methods become more complicated. However, — MACAULAY's method is also much simpler under such circumstances at least in cases similar to the above illustrated examples.

An additional and determined advantage of MACAULAY's method is given by the fact, that its use does not need any assistance, contrary to LAPLACE's method, the use of which is as a rule only simple, when we dispose of adequate transformation tabulations.



## REFERENCES

1. MACAULAY, W. H.: Note on the Deflection of Beams. *The Messenger of Mathematics* 48/1919, pp. 129—130.
2. SOUTHWELL, R. W.: An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists. 2. Ed. (1941), pp. 187—189. Oxford University Press.
3. CSONKA, P.: Generalization of Macaulay's Method. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.* 24 (1959), pp. 109—120.
4. SALVADORI, M. G.—SCHWARZ, R. J.: Differential Equations in Engineering Problems. New York 1954, Prentice-Hall, Inc.
5. CHURCHILL, R. V.: Modern Operational Mathematics in Engineering. New York and London 1944, McGraw-Hill Book Company, Inc.
6. GARDNER, M. F.—BARNES, J. L.: Transients in Linear Systems, Vol. I. New York 1950, John Wiley and Sons, Inc.

## SUMMARY

Author has proved that MACAULAY's method [1, 2] known from the Theory of Beams, can after some generalization also be fairly well applied to the solution of linear differential equations, the external member of which is a sectionwise varying polynome.

In his present paper author points out, that the method in question could be further generalized, that is to say, it could also be successfully applied to the solution of differential equations, the external member of which possesses a singularity at a finite number of points. In such cases the introductory step of the calculation should express the external member of the differential equation. This is executed by suitably chosen unit-functions in a unified form, valid over the whole extent of the range of definition. After this transformation the method disclosed in paper [3] could also be applied without any change in the aforementioned general case.

The introducing step of the suggested procedure as being a completion of MACAULAY's method, completely agrees with the introducing step of the procedure using LAPLACE's transformation. Therefore, author compares the two methods to each other. He establishes, that in the case of pure differential equations of the  $n$ -th order, MACAULAY's method is essentially more simple than LAPLACE's procedure. In other cases, the advantages of MACAULAY's method are less conspicuous, though its application in such instances may also be favourable.

DIE ERWEITERUNG DES ANWENDUNGSGEBIETS  
DES MACAULAY'SCHEN VERFAHRENS

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser hat in einem früheren Aufsatz nachgewiesen, daß das aus der Trägerlehre bekannte MACAULAY'sche Verfahren [1, 2] nach einiger Verallgemeinerung [3] auch zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zweckdienlich angewendet werden kann, deren äußeres Glied ein abschnittsweise veränderliches Polynom ist.

In seinem vorliegenden Aufsatz weist der Verfasser darauf hin, daß das vorher erwähnte Verfahren auch noch weiter verallgemeinert werden kann; es ist nämlich auch zur Lösung solcher Differentialgleichungen erfolgreich brauchbar, deren äußeres Glied in einer endlichen Anzahl von Punkten eine Singularität aufweist. In solchen Fällen besteht der einleitende Schritt des Rechnungsganges darin, daß man das äußere Glied der Differentialgleichung mit Hilfe entsprechend definierter Einheitsfunktionen in einer für den gesamten Deutungsbereich gültigen Form ausdrückt. Nach dieser Umwandlung ist das im Aufsatz [3] erläuterte Verfahren auch im erwähnten allgemeineren Falle unverändert anwendbar.

Der einleitende Schritt des als Ergänzung der MACAULAY'schen Methode vorgeschlagenen Verfahrens gleicht genau dem einleitenden Schritt der LAPLACE'schen Methode. Aus diesem Grunde vergleicht der Verfasser die beiden Methoden miteinander. Er stellt fest, daß im Falle

reiner Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung das MACAULAY'sche Verfahren erheblich einfacher ist als das LAPLACE'sche. In anderen Fällen sind die Vorteile des MACAULAY'schen Verfahrens weniger augenfällig, doch kann die Anwendung desselben auch in solchen Fällen vorteilhaft sein.

## L'EXTENSION DU CHAMP D'APPLICATION DU PROCÉDÉ DE MACAULAY

P. CSONKA

### RÉSUMÉ

L'auteur avait déjà démontré qu'après une certaine généralisation (3), le procédé de Macaulay [1, 2], connu de la mécanique, pouvait aussi s'employer avec avantage dans le cas d'équations différentielles à coefficient constant, dont le membre extérieur est un polygone variable par périodes.

Dans la présente étude, l'auteur fait remarquer qu'on peut pousser plus loin la généralisation du procédé en question, notamment pour résoudre des équations différentielles, dont le membre extérieur possède une singularité en des points de nombre fini. Dans ces cas, on doit exprimer tout d'abord le nombre extérieur sous une forme unitaire valable dans tout le domaine d'interprétation, par introduction de fonctions d'unité convenablement définies. Cette transformation faite, le procédé exposé dans l'étude (3) peut être employée invariablement, même dans le cas plus généralisé en question.

La première étape du procédé, proposé comme complément du procédé de Macaulay, est identique à celle du procédé utilisant la transformation de Laplace. C'est pourquoi l'auteur compare les deux procédés. Il constate qu'en cas d'une équation différentielle d'ordre  $n$ , le procédé de Macaulay est essentiellement plus simple que la méthode de Laplace. Dans les autres cas, les avantages du procédé de Macaulay sont moins évidents, mais même alors, son application peut assurer certains avantages.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МЭКОЛИ

П. ЧОНКА

### РЕЗЮМЕ

Автор доказывает, что известный из учения о фермах метод Мэколи (1, 2) после некоторого обобщения (3) целесообразно применим и в случае таких дифференциальных уравнений с постоянным коэффициентом, внешний член которых — периодически переменный полином.

Автор в данной статье указывает на то, что упомянутый выше метод может быть обобщен и дальше, а именно может быть с успехом применен для решения таких дифференциальных уравнений, внешний член которых в конечной точке обладает сингулярностью. В таких случаях, во-первых необходимо выразить внешний член дифференциального уравнения посредством ввода соответственно определенных единичных функций на всем протяжении области их существования. После этих преобразований описанный в статье (3) метод может неизменно применяться и в упомянутых более общих случаях.

Первые шаги предложенного в дополнение к методу Мэколи метода точно совпадают с первыми шагами метода Лапласа, основанного на трансформации. Поэтому автор дает сравнение этих двух методов. Автор устанавливает, что в случае дифференциального уравнения чисто  $n$ -ного порядка метод Мэколи значительно проще метода Лапласа. В других случаях преимущества метода Мэколи не настолько очевидны, но и в этих случаях применение его может быть целесообразным.

# ONE WAY TO CUT DOWN POWER REQUIREMENT FOR FLOUR MILLING

B. SZÓKE

[Manuscript received March 17, 1959]

Mankind's earliest intention was to mill flour by means of cheap labour, that of servants [1] and prisoners [2] and cheap sources of power. The energy of wind and water had certainly been used first and foremost for driving mills. When, in 1838, on SZÉCHENYI's initiative, the „Pesti József Hengermalom Társaság” (Joseph Roller Mill Co., Budapest) was founded, more than 400 „brat-mills” had been grinding on the Danube and that only in the neighbourhood of Budapest [3].

Seeking for cheaper power sources explains, why forehearths for firing waste materials (*e. g.* corncob) have been ordered or wood-gas generators and internal combustion engines were provided by many mills.

Nowadays, one way to better economy with power and space consists in driving the whole roll line through one single gear box of high efficiency and coupling the adjacent roll stands consisting of roll pairs of equal gear ratio by mobile clutches, thus omitting the individual belting of each roll stand and their separate gear drives operating under unfavourable conditions. As the peripheral speed ratio between the breaking roll pairs is different from that of the grinding rolls, so is the connection in series possible only in the case of roll stands of equal speed. Nevertheless, in one of his papers [4] author pointed out, that by combining rolls of different diameter, not only certain technological and economical advantages are to be expected, but, beyond the reduced space requirements and decreased total number of teeth, the tooth-pressure will be less and the contact of the teeth to each other will be more favourable than in the case of roll pairs consisting of rolls of equal diameter.

Our present considerations should be limited to the case of how a roll pair of connected rolls of different diameters makes possible the connecting in series of two passages operating on different speed ratios (Fig. 1).

With one roll pair let it be

$A$  for the diameter of the fast running roll and  $n$  for its rotational speed;

$A \cdot k$  for the diameter of the slow running roll and  $n_1$  for its rotational speed;

$$\frac{v_A}{v_{Ak}} = i_1 \text{ for the desired ratio of the peripheral speeds of the rolls;}$$

for the other roll pair let it be

$B$  for the diameter of the fast running roll and  $n$  for its rotational speed;

$B \cdot k_1$  for the diameter of the slow running roll and  $n_1$  for its rotational speed;

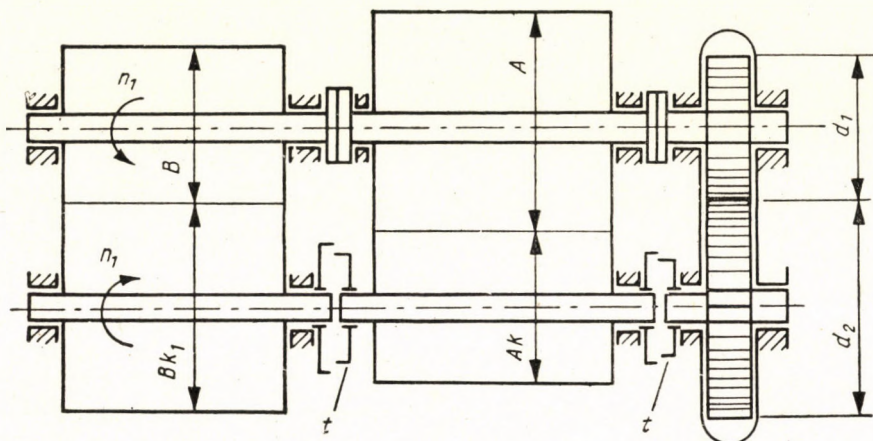


Fig. 1. Connecting in series of break and reduction roll pairs to a common gear drive

$\frac{v_B}{v_{Bk_1}} = i_2$  for the desired ratio of the peripheral speeds of the rolls will give

$$i_1 = \frac{A \pi n}{60} : \frac{A \cdot k \pi n_1}{60} = \frac{n}{k n_1} \quad (1)$$

and for the gear ratio

$$j = \frac{n}{n_1} = i_1 k = \frac{d_2}{d_1} \quad (2)$$

where  $d_1$  is the pitch diameter of the pinion and  $d_2$  that of the gear.

In addition

$$\frac{B \pi n}{60} : \frac{B \cdot k_1 \pi n_1}{60} = \frac{n}{k_1 n_1} = i_2 \quad (1a)$$

and the gear ratio has the same value as in equation (2)

$$j = \frac{n}{n_1} = i_2 k_1 = \frac{d_2}{d_1} \quad (2a)$$

so the equality of (2) and (2a) expresses the structural requirement of equidistant axes in both roll pairs.

For practical purposes a further requirement is the use of only two diameters of rolls and not of four. The condition for this can be written as

$$B \cdot k_1 = A \quad (3)$$

and

$$B = Ak$$

that is

$$\frac{B}{k} = A \quad (3a)$$

which results in

$$k_1 = \frac{1}{k}$$

and thus

$$kk_1 = 1 \quad (4)$$

The gear ratio is

$$j = i_1 k = i_2 k_1 = \frac{i_2}{k} \quad (5)$$

from which

$$\frac{i_2}{i_1} = k^2 \quad (6)$$

Adhering to speed ratios  $i_1$  and  $i_2$  which are desired in breaking and grinding passages respectively, the roll diameters  $A$  and  $B = Ak$  can be used in an arrangement opposite each other only when the ratio  $k$  is chosen according to the relation

$$k = \sqrt{\frac{i_2}{i_1}} \quad (6a)$$

For instance, take  $i_1 = 2.5$ ;  $i_2 = 1.5$ ;  $A = 250$  mm. In this case

$$k = \sqrt{\frac{1.5}{2.5}} = \sqrt{0.6} = 0.775$$

$$B = 250 \times 0.775 = 194 \text{ mm}$$

Further, take  $v_A = 5.5$  m/sec. Then

$$n = \frac{9.55 \times 5.5}{0.125} = 420 \text{ r. p. m.}$$

$$j = i_1 k = 2.5 \times 0.775 = 1.94$$

and

$$n_1 = \frac{420}{1.94} = 126 \text{ r. p. m.}$$

Finally

$$v_B = \frac{0.097 \times 420}{9.55} = 4.26 \text{ m/sec,}$$

and the pitch diameters of the gears are as follows:

$$d_1 = (A + B) : (1 + j) = 444 : 2.94 = 151 \text{ mm}$$

and

$$d_2 = 444 - 151 = 293 \text{ mm.}$$

In the Figure the mobile clutches are marked by  $t$ .

#### REFERENCES

1. The Bible, Exodus, ch. 11. v. 6.
2. *ibid.*, Judges, ch. 16. v. 21.
3. FURÓ, M.: A magyar gyáripár története. (History of the Hungarian Manufacturing Industry.) Magyar Gazdaságkutató Intézet, Budapest, 1944.
4. SZÓKE, B.: Járassunk-e együtt különböző átmérőjű örlőhengereket. (Should Grinding Rolls of Different Diameters be operated together?) Acta Technica, Budapest, vol. 24. fasc. 1—2. 1959.

#### SUMMARY

Since earliest times the demand was to make flour milling as cheap as possible and using as little energy as possible. Nowadays, one way to cut down power requirements for flour milling is the connection in series of roll pairs in the equal passages, whereby, instead of several gear drives operating under unfavourable conditions a single gear of high efficiency can be used.

In this paper it was proved, that the breaking and grinding rolls operating with different peripheral-speedratios can also be driven by a single gearing only, even when using only two different roll diameters.

#### EIN WEG ZUR MINDERUNG DES KRAFTBEDARFES DES MAHLENS

B. SZÓKE

#### ZUSAMMENFASSUNG

Mahlen mit möglichst billigem und geringem Kraftverbrauch ist eine uralte Bestrebung. Heute besteht eine der Methoden der Minderung des Kraftbedarfes des Mahlens in der Reihenschaltung der Walzen von gleichen Gängen, wodurch anstatt mehrerer unter ungünstigen Umständen arbeitenden Zahnradgetrieben ein einziges Getriebe mit hohem Wirkungsgrad Anwendung finden kann.

Im Aufsatz wird nachgewiesen, daß auch mit verschiedenen Umfangsgeschwindigkeitsverhältnissen laufende Schrot- und Mahlwalzen, bei zwei verschiedenen Walzendurchmessern, mit einem einzigen gemeinsamen Getriebe angetrieben werden können.

## UN MOYEN DE RÉDUIRE L'ÉNERGIE NÉCESSAIRE POUR LA MOUTURE

B. SZÓKE

### RÉSUMÉ

Le moyen d'effectuer la mouture des grains le moins cher possible et avec un minimum d'énergies, consiste de nos jours dans la connexion en série des cylindres des machines analogues, ce qui permet de remplacer plusieurs engrenages fonctionnant à des conditions défavorables, par un seul engrenage travaillant à bon rendement.

Dans son étude, l'auteur démontre qu'en cas d'utilisation de deux diamètres différents, les cylindres de broyage et les cylindres de convertissage travaillant à différents rapports de vitesses périphériques, peuvent aussi être commandés par un seul engrenage commun.

## ОДНА ИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПониЖЕНИЯ ЭНЕРГОРАСХОДА ПОМОЛА

Б. СЕКЕ

### РЕЗЮМЕ

Помол с расходом возможно наиболее дешевой и наименьшего количества энергии представляет давнишнюю проблему. В настоящее время один из методов понижения энергорасхода помола состоит в серийном включении валцов по одинаковым ходам, за счет чего вместо некоторых зубчатых передач, работающих в неблагоприятных условиях, можно использовать только один редуктор с высоким к. п. д.

В статье показано, что в случае применения двух различных диаметров валцов рушильные и мелющие валцы, работающие на разных соотношениях в тангенциальных скоростях, могут приводиться посредством одного общего приводного редуктора.





# THE EFFECT OF AXIAL CONDUCTANCE IN THE CORONA ENVELOPE UPON THE INDUCTANCE OF THE CONDUCTOR IN THE PRESENCE OF A TRAVELLING WAVE

P. O. GESZTI  
D. ENG. SC.

INSTITUTE FOR POWER RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received April 2, 1959]

We know from travelling wave theory that the travelling wave proceeding on an overhead line (in a non-ferromagnetic medium) and having  $L$  inductance and  $C$  capacity respectively, travels at a speed

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

The maximum speed to be obtained on a lossless line is the speed of light. It is also known that the shape of the wave is distorted by the different losses during its course, thus, having covered a comparatively short distance only, the front of the originally steep-fronted wave becomes flattened.

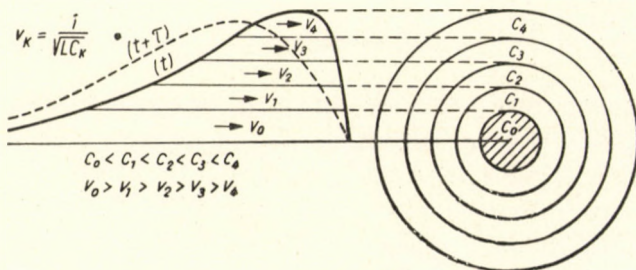


Fig. 1

The corona effect plays an important role in this phenomenon. Not much is known of the losses connected with the corona effect or else of their mechanism, for now it is the problem of travelling wave phenomena we are confronted with and the formulae we know refer to the losses of alternating currents of commercial frequency. In most of the cases these formulae have been the result of not so much purely theoretical but of semiempirical reasoning. A very interesting explanation is supplied in this connection by E. W. BOEHNE. (AIEE. Trans. Vol. 50, p. 558 Fig. 1.). In his opinion if the travelling

wave is divided into different layers — corresponding the different voltages — every voltage level is going to have a proportionally different corona envelope resulting in a different  $C_k$  capacity as well. Since the parts of bigger voltage possess also a bigger capacity — inductance  $L$ , however, is constant for every voltage section the travelling speed of each of the voltage levels will equal:

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{L C_k}} \quad (2)$$

Thus the parts of bigger voltage are travelling at a lower speed; the speed being the highest at the toe of the wave front where there is no increase in the capacity as a result of the corona effect.

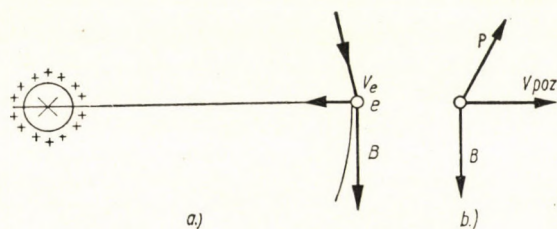


Fig. 2

Though the aforesaid train of thought fails to consider the losses in energy, it supplies an acceptable explanation for the flattening of the front of the travelling wave.

In other words this supposition means that the corona envelope can but conduct radially and does not conduct axially.

In our opinion, two points should be stressed in this connection.

The first one is that the corona envelope, like a concentric tube seems to be travelling together with the travelling wave. If we do not consider the time lag required for the corona envelope to be established, we may safely say that the diameter of the corona envelope will be the largest at the spot where the travelling wave reaches its crest. The charges appearing on the corona envelope are of the same kind as those proceeding in the conductor itself. Actually, this is the way the aforesaid increase of the capacity is taking place. Practically this means that outside the conductor the charge quantity moves together with the travelling wave. This creates an effect as if the cross section of the conductor, respectively the diameter of the latter had increased resulting in the decrease of the inner inductance, henceforth of the whole inductance as well.

The second point is the following one:

If we suppose that a positive charge — representing a cross section— is travelling in the conductor — see Fig. 2(a) perpendicularly in — to the area

of the paper, the negatively charged electrons will fly at a certain speed radially inward in the corona envelope as a result of field intensity whereas the positively charged ions will fly at a lower speed in an outward direction. Since, however, the charges are not fixed on the conductor, but are moving, a magnetic field is going to be formed around the conductor. (Their subordination takes place by the right-hand screw.) If the negatively charged electrons — which are travelling inward — are replaced by positive particles travelling outward at the same speed and having a charge equivalent to that of the above ones, practically nothing had been done from the point of view of the magnetic field of the current. The positive particle  $e$  travelling at a speed of  $v$  in the presence of  $B$  inductance is affected by a force

$$P = e [v \cdot B] \quad (3)$$

The mark  $[\ ]$  represents a vectorial product. If the speed is radial, this force removes the positive particle in an axial direction, *i. e.* outward the area of the paper and in this case the particles come to have not only a radial but also an axial speed component. It appears as if a part of the current in the corona envelope flew backward. Applying a steady state analogy, we are confronted with a phenomenon similar to that of the single conductor cable and of the sheath current.

If the speed of the particles in the corona envelope is no longer purely radial, the current is going to have an axial component. If a part of the current flows back right close to the conductor, this would create an effect as if the resultant of the loop distance of the return current had been decreased. This would mean a decrease in the induction as well. (Since the mass of the ions is by 3—4 order of magnitude larger than that of the electrons, their speed is small and thus their effect in this respect is negligible.) Since the peak of the voltage and also that of the current takes place at the same time, the axial force will reach its maximum simultaneously. There is no doubt as to the qualitative existence of this phenomenon though its quantitative significance may only have there any bearing where the value of  $B$  is high. The value of  $B$ , however, is directly proportional to the current flowing in the conductor and is inversely proportional to the distance from the axis of the conductor. In case of comparatively small cross sections — like the overhead ground wires — the radial distances from the axis of the conductor within the corona envelope may be small. Big currents on the other hand cause big inductions. (See Appendix). Quantitatively the above mentioned phenomena may have any importance mainly in case of small cross sections and of travelling waves of big currents.

Both of the effects mentioned result in the decrease of inductivity, and may partly compensate the effect of increase in capacity. In our opinion, if

we take the above effects into consideration we may better explain the phenomena taking place in the corona envelope and may have a better comprehension of the reasons for the change in the shape of the wave. It should be added still that as a result of the corona effect the peak current meters working on the magnetic principle might record in extreme cases erroneous data insofar as they record less current than that actually flowing in the conductor. This might be a result of the return current flowing in the corona envelope and decreasing the outer flux.

### Appendix

To illustrate the order of the forces affecting the electron in the corona envelope, we are giving hereunder a summary of the formulae relating to these forces.

a) Radial attracting (resp. repelling) force

$$P_r = e E \quad (4)$$

where  $P_r$  is the radial force affecting the electron

$$\left[ \frac{\text{Wsec}}{\text{cm}}, \text{ resp. dyn} \right]$$

$E$  field intensity [ $V/\text{cm}$ ], the charge of the electron

$$e = 1.603 \cdot 10^{-19} \text{ A sec.}$$

If we presume that in the corona envelope  $E \approx 30.000 \text{ V/cm}$

$$\begin{aligned} P_r = e E &= 1.6 \cdot 10^{-19} \left[ \frac{\text{Wsec}}{\text{cm}} \right] \approx 4,8 \cdot 10^{-15} \left[ \frac{\text{Wsec}}{\text{cm}} \right] = \\ &= 4,8 \cdot 10^{-14} \text{ kg} = 4,7 \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \end{aligned}$$

The order of radial speed for ionizing electrons at 760 Torr, is approximately

$$V_r = 2 \cdot 10^7 \text{ cm/sec.}$$

(See for instance A. ROTH: Hochspannungstechnik, Springer, Wien 1950. p. 168.)

b) magnetic deflecting force (always perpendicular to the direction of the speed of the electron, consequently if the speed is radial, the force is going to be an axial one.) To be obtained from equation 3.

$$B = 0.2 \frac{J}{x} \frac{\text{voltsec.}}{\text{cm}^2} 10^{-8} \quad (5)$$

where  $I$  is the current establishing magnetic induction [ $A$ ] and  $x$  represents the radial distance from the axis of the conductor [ $cm$ ].

If, for instance,  $x = 1$  [ $cm$ ] and  $I = 10.000 A$  representing a conductor of a comparatively larger cross section and a peak current of medium extent

$$B = 2,10^{-5} \frac{\text{voltsec}}{\text{cm}^2}$$

At the aforesaid radial speed:

$$\begin{aligned} P_{ax} &= 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^7 \left[ \frac{\text{Wsec}}{\text{cm}} \right] = 0,64 \cdot 10^{-16} \left[ \frac{\text{Wsec}}{\text{cm}} \right] = \\ &= 0 \cdot 064 \cdot 10^{-14} [\text{kg}] = 0,064 \cdot 10^{-8} \text{ dyn} \end{aligned}$$

If the current is larger, for instance  $50.000 A$ , but the cross section of the conductor is smaller ( $35-50-70 \text{ mm}^2$ ) and where  $x = 0,5 \text{ cm}$  might be a possible value, then  $B = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{voltsec}}{\text{cm}^2}$  and the deflecting magnetic force is:

$$\begin{aligned} P_{ax} &= 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^7 \left[ \frac{\text{Wsec}}{\text{cm}} \right] = 6,4 \cdot 10^{-15} \left[ \frac{\text{Wsec}}{\text{cm}} \right] = \\ &= 0,64 \cdot 10^{-14} [\text{kg}] = 0 \cdot 64 \cdot 10^{-8} [\text{dyn}] \end{aligned}$$

In this case the axial force will no longer be negligible beside the radially effective forces and it is to be supposed therefore that the electrons proceeding in the corona envelope will have a resultant axial speed component too. This effect will be the more apparent the bigger will be the current and the smaller the cross section of the conductor, for in this case the small  $x$  value in the induction-formula will result in a bigger induction.

#### SUMMARY

In the case of travelling waves of great current intensity and if the diameter of the conductor is small, the direction of conductance in the corona envelope will not be purely radial, as a result of the magnetic influence of the current in the conductor, but would — though to a small extent — contain an axial component as well. This may effect the resultant inductivity and thus the speed of the travelling as well as the distortion of the wave and the magnetic measurements.

DIE WIRKUNG DER AXIALLEITUNG IN DER KORONAHÜLLE AUF DIE  
INDUKTIVITÄT DES LEITERS IN DER ANWESENHEIT  
VON WANDERWELLEN

P. O. GESZTI

ZUSAMMENFASSUNG

Bei Stoßwellen von großer Stromintensität, wenn der Durchmesser des Leiters klein ist, wird die Richtung der Leitung in der Koronahülle zufolge der magnetischen Wirkung des Stromes im Leiter nicht rein radial sein, sondern sie wird — obwohl zu einem geringen Maße — auch axiale Komponente aufweisen. Dieser Umstand kann die resultierende Induktivität des Leiters, und dadurch auch die Fortschrittgeschwindigkeit, beziehungsweise die Wellenverzerrung und die magnetischen Messungen beeinflussen.

EFFET DE LA CONDUITE AXIALE SUR L'INDUCTIVITÉ DU CONDUCTEUR,  
EN PRÉSENCE D'UNE ONDE PROGRESSIVE DANS L'ENVELOPPE CORONA

P. O. GESZTI

RÉSUMÉ

En cas d'ondes de choc d'une intensité très élevée, si le diamètre du conducteur est faible, la direction de la conduite dans l'enveloppe corona ne sera pas tout à fait radiale, par suite de l'effet magnétique du courant, mais comprendra aussi un composant axial (assez minime).

Ceci peut influer sur l'inductivité résultante, et par là sur la vitesse d'avance, ainsi que sur la déformation d'onde et les mesures magnétiques.

ВЛИЯНИЕ АКСИАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТИ НА ИНДУКТИВНОСТЬ ПРОВОД-  
НИКА В ПРИСУТСТВИИ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В ЧЕХЛЕ КОРОНЫ

П. О. ГЕСТИ

РЕЗЮМЕ

В случае ударных волн очень большой силы тока, если диаметр проводника мал, вследствие магнитного эффекта тока направление проводимости в чехле короны не будет чисто радиальным, а будет иметь — хотя и очень небольшую — аксиальную составляющую. Это может влиять на индуктивность и этим и на поступательную скорость, то есть на искажение волны, на магнитные измерения.

# ANGENÄHERTE BERECHNUNG DER STARRHEIT GERADER KEGELRADZÄHNE

V. ROHONYI  
CLUJ (RUMÄNIEN)

[Eingegangen am 15. April 1959]

Es ist aus der Fachliteratur bekannt, daß die elastischen Formänderungen der geraden und schrägen Stirnradzähne großen Einfluß auf die dynamischen Zahnkräfte, Fußflankenabnutzung und Zahnradgeräusch haben [1, 2 und 3].

Die diesbezüglichen theoretischen und experimentellen Forschungen bilden heute die sicheren Grundlagen der Berechnung der Profilrücknahme. Diese Operation ist äußerst wichtig für die Sicherung eines stoß-, schwingungs- und geräuschfreien Betriebes der hochtourigen Stirnradgetriebe.

Diese Forschungen sollen logisch auch auf die Frage der elastischen Formänderungen der geraden Kegelradzähne ausgebreitet werden, damit man beurteilen könne, ob die Schlußfolgerungen der auf die elastischen Formänderungen der Stirnradzähne sich beziehenden Forschungen auch an Geradzahnkegelrädern anwendbar wären. Es ist nämlich zu berücksichtigen, daß die Linienlast wahrscheinlich nicht gleichförmig verteilt ist.

Diese Arbeit untersucht das Verteilungsgesetz der Linienlast längs der geraden Kegelradzähne zwecks Beantwortung der Frage, ob man eine Korrektur bei der Anwendung der Profilrücknahmeziffern der Stirnräder an Geradzahnkegelrädern berücksichtigen muß.

Was die Fertigungstechnik der Profilrücknahme an Geradzahnkegelrädern anbelangt, ist diese Frage bestimmt ähnlicherweise zu lösen, wie die Profilrücknahme der Stirnräder (nachträgliches Abwälzhobeln mit Hobelstählen vergrößerter Flankenwinkel, oder nachträgliches Abwälzschleifen auf kleineren Grundkreis).

Zur Berechnung des Verteilungsgesetzes der Linienlast müssen wir zuerst die Starrheit der Kegelradzähne untersuchen.

Zwecks Vereinfachung der Berechnung werden wir das Kranzprofil des Kegelrades als ein Trapez auffassen, dessen Seitenlinien zur Fußkegel-Erzeugenden senkrecht stehen (nicht zur Abwälz- oder Teilkegel-Erzeugenden). Diese Vereinfachung ist sicher zulässig, weil der Winkel klein ist. Aus den Bezeichnungen der Abb. 1 folgt:

$$h_1 = h_2 \frac{R_{pl} - b}{R_{pl}} \quad (1)$$

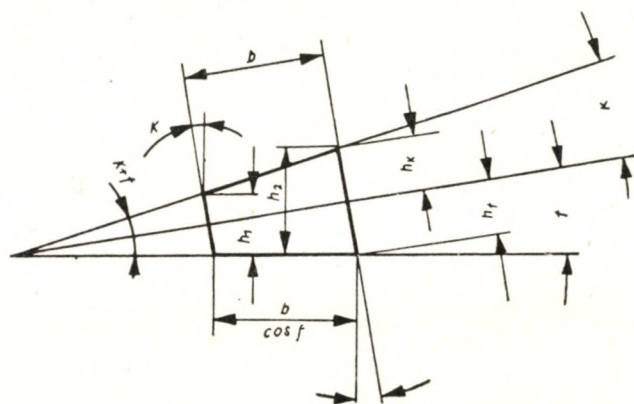
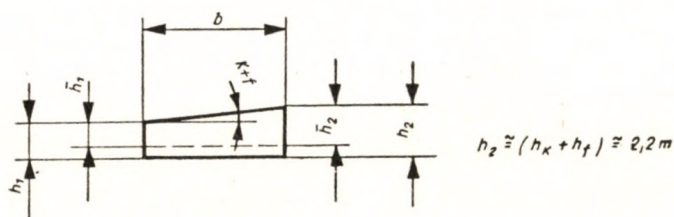
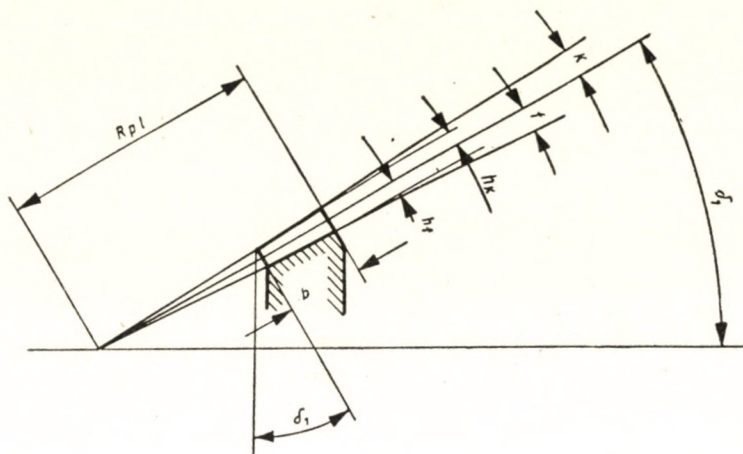


Abb. 1



oder

$$h_1 = h_2 - b \cdot \operatorname{tg}(k + f). \quad (2)$$

Nachdem die Bruchstelle ungefähr im Abstand 2 m von dem Zahnkopfkreis zu betrachten ist, kann man schreiben:

$$h_2 \approx 2 \text{ m} \quad (3)$$

$$h_1 \approx 2 \text{ m} - b \cdot \operatorname{tg}(k + f). \quad (4)$$

Es ist bekannt, daß die Starrheit des Zahnes umgekehrt der dritten Potenz des Biegehebelparms und direkt der Fußdickeverhältnis gleich ist. Diese Fußdicke werden wir konventionell in 2 m Tiefe vom Kopfkreis annehmen.

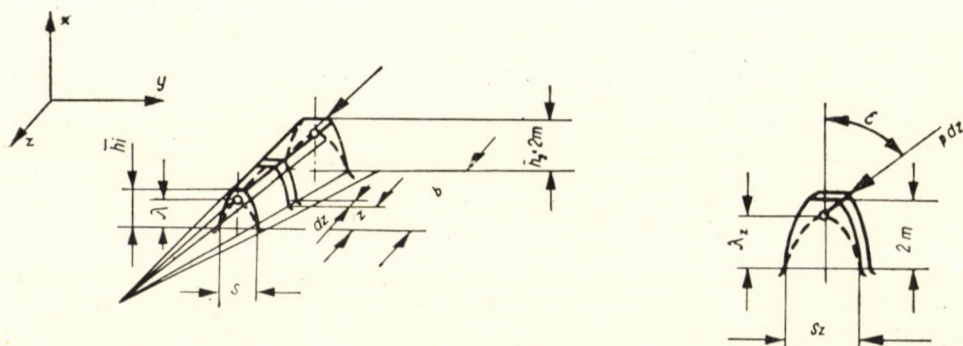


Abb. 2

Die Durchbiegung hat also folgenden Ausdruck:

$$f = \frac{P_y \cdot \lambda^3}{c J E} = \frac{P_y \cdot \lambda^3}{c E \frac{b s^3}{12}} = c_1 \frac{p \lambda^3}{s^3}. \quad (5)$$

wo

- $f$  die Durchbiegung in cm
- $P_y$  die Biegekraft in kg
- $\lambda$  der Biegehebelparm in cm
- $E$  der Elastizitätsmodul in  $\text{kg/cm}^2$
- $I$  der Trägheitsmodul in  $\text{cm}^4$
- $b$  die Zahnlänge in cm
- $s$  die Zahndicke in 2 m Abstand vom Kopfkreis in cm
- $p$  die Linienlast in  $\text{kg/cm}$

ist.

Schneidet man vom Zahn, im Abstand  $z$  von der inneren Stirnfläche des Kegelradzahnes, mit zwei parallelen Ebenen eine planparallele,  $dz$  dicke Profilschicht aus, so wird an der Kopfkante dieses elementaren Körpers die Kraft  $dP_y = p \cdot dz$  wirken. Die Durchbiegung dieser Schicht ist, wenn man näherungsweise nur den parabolischen Teil gleicher Biegefestigkeit berücksichtigt, (Abb. 2)

$$f_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{dP_y \cdot \lambda_z^3}{E \cdot dz \cdot s_z^3} = \frac{8}{E} \cdot \left( \frac{\lambda_z}{s_z} \right)^3 \cdot \frac{dP_y}{dz}, \quad (6)$$

in welchem Ausdruck

$\lambda_z$  den Biegehebelarm im Abstand  $z$  von der inneren Stirnfläche in cm, und  $s_z$  die Zahndicke im Abstand  $z$  vom Kopfkreis bezeichnet.

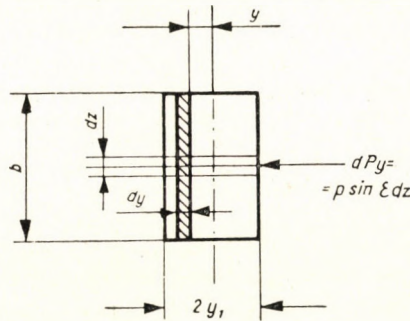


Abb. 3

Wegen der Kürze des Zahnes ist die Vernachlässigung der Scherkräfte nicht zulässig. Wir werden also auch den Formänderungsanteil der Scherkräfte berücksichtigen. Der bekannte Ausdruck dieser Formänderung ist [2]:

$$f_2 = \frac{1}{G} \int_0^{\lambda_z} \frac{dx}{dP_y} \int_F \tau_{xy}^2 dF, \quad (7)$$

wo

$G$  der Gleitmodul in  $\text{kg/cm}^2$ ,

$\tau_{xy}$  die tangentielle Beanspruchung in  $\text{kg/cm}^2$ ,

$dF$  das Flächenelement in  $\text{cm}^2$  ist.

Für rechteckige Querschnitte können wir den bekannten Ausdruck [4] der Tangentialbeanspruchung aufschreiben (Abb. 3):

$$\tau_{xy} = \frac{6 dP_y}{dz (2 y_1)^3} (y_1^2 - y^2) \quad (8)$$

und

$$\int_F \tau_{xy}^2 dF = \frac{36 dP_y^2 dz}{dz^2 (2y_1)^6} \int_{-y_1}^{+y_1} (y_1^2 - y^2)^2 dy =$$

$$= \frac{36 \cdot dz \cdot dP_y^2}{dz^2 \cdot (2y_1)^6} \left[ y_1^4 y - 2y_1^2 \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_{-y_1}^{+y_1} = \frac{3}{5} \frac{dP_y^2}{dz \cdot y_1}. \quad (9)$$

Damit wird

$$f_2 = \frac{1}{G} \int_0^{\lambda_z} \frac{3}{5} \cdot \frac{dP_y^2}{dz \cdot y_1} \cdot \frac{dx}{dP_y} = \frac{3}{5} \frac{dP_y}{G dz} \int_0^{\lambda_z} \frac{dx}{y_1}. \quad (10)$$

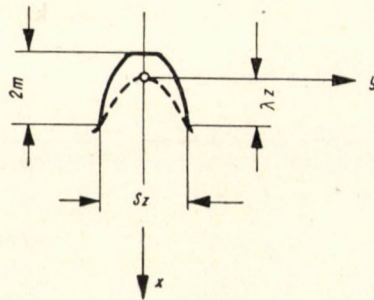


Abb. 4

Auf Grund der Ersatzparabel des Zahnprofils kann  $y_1$  in Abhängigkeit von  $s_z$  ausgedrückt werden (Abb. 4). Setzt man in die allgemeine Formel der Parabel  $-y^2 = 2px$  — die Werte  $s_z$  und  $\lambda_z$  ein, dann bekommt man:

$$\left( \frac{s_z}{2} \right)^2 = 2p\lambda_z$$

$$2p = \frac{s_z^2}{4\lambda_z}$$

$$y_1^2 = 2px = \frac{s_z^2}{4\lambda_z} \cdot x, \quad y_1 = \frac{s_z}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\lambda_z}} \quad (11)$$

Der Wert, laut Formel (11), von  $y_1$  wird in den Ausdruck der Formänderung eingesetzt und es wird nach  $x$  integriert

$$f_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{dP_y}{G dz} \int_0^{\lambda_z} \frac{dx}{\frac{s_z}{2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\lambda_z}}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{dP_y \sqrt{\lambda_z}}{G dz \cdot s_z} \int_0^{\lambda_z} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{12}{5} \cdot \frac{dP_y}{G dz} \cdot \left( \frac{\lambda_z}{s_z} \right). \quad (12)$$

Laut Gesetze der Superposition der Formänderungen wird die totale Formänderung gleich der Summe der Teilformänderungen  $f_1$  und  $f_2$  sein:

$$f_{tot} = f_1 + f_2 = \frac{8}{E} \left( \frac{\lambda_z}{s_z} \right)^3 \frac{dP_y}{dz} + \frac{12}{5G} \left( \frac{\lambda_z}{s_z} \right) \cdot \frac{dP_y}{dz}. \quad (13)$$

Von diesem Ausdruck kann man die Funktion  $P_y = f(z)$  bestimmen, wenn man  $f_{tot}$  als konstant betrachtet. Diese Annahme ist zulässig, weil der Gegenzahn in der Nähe des Fußkegels belastet ist. Nachdem das Durchbiegungsglied mit der dritten Potenz, das Scherglied mit der ersten Potenz der

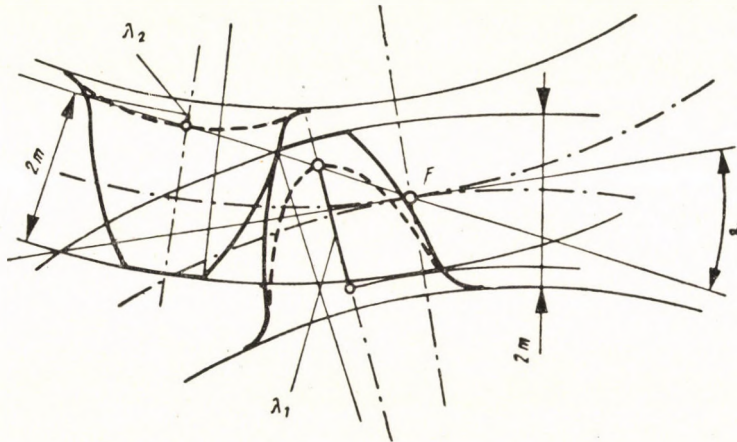


Abb. 5

Scheitelhöhe der Parabel abnimmt und der kritische (Bruch-) Querschnitt des Zahnes 2 m weit vom Kopfkreis festgelegt wurde, kann der Gegenzahn wohl starr betrachtet werden. (Abb. 5).

Aus der Gleichung (13) ist der Wert von  $dP_y$  ableitbar und die Integration kann längs des Zahnes durchgeführt werden.

Aus der Gleichung (13) folgt:

$$\int_0^z dP_y = f_{tot} \int_0^z \frac{dz}{\frac{8}{E} \left( \frac{\lambda_z}{s_z} \right)^3 + \frac{12}{5G} \left( \frac{\lambda_z}{s_z} \right)}. \quad (14)$$

Zuerst werden wir  $s_z$  und  $\lambda_z$  als Funktionen von  $z$  ausdrücken; laut Abb. 6:

$$s_z = s + 2z \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} = s + c_1 z \quad (15)$$

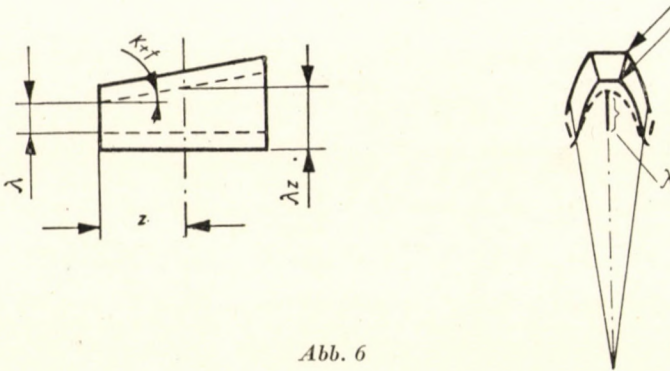
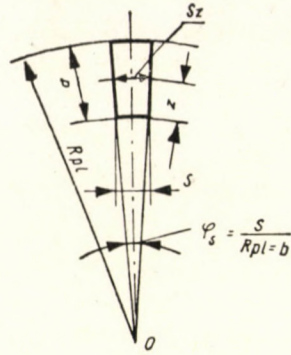


Abb. 6

wo

$$c_1 = 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} \quad \text{und} \quad \varphi_s = \frac{S}{R_{pl} - b}$$

und

$$\lambda_z = \lambda + z \operatorname{tg} (k + f) = \lambda + c_2 z \tag{16}$$

wo

$$c_2 = \operatorname{tg} (k + f)$$

ist.

Setzen wir diese Ausdrücke in Gleichung (14) ein, dann erhalten wir den Ausdruck:

$$\int_0^z dP_y = f_{tot} \int_0^z \frac{dz}{\frac{8}{E} \left( \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} \right)^3 + \frac{12}{5G} \left( \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} \right)} \tag{17}$$

als die totale Biegekraft des Zahnes.

Dieses Integral wird durch Partialbruchzerlegung gelöst, man kann also schreiben:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u(u-c)^2(u^2+r^2)} = \int_{u_1}^{u_2} \left[ \frac{A}{u} + \frac{B}{u-c} + \frac{C}{(u-c)^2} + \frac{Du+E}{u^2+r^2} \right] du.$$

Die Zähler der Partialbrüche werden folgenderweise bestimmt:

$$1 \equiv A(u-c)^2(u^2+r^2) + Bu(u-c)(u^2+r^2) + Cu(u^2+r^2) + (Du+E)u(u-c)^2.$$

Aus obiger Identität folgt, daß die Summe der Faktoren der Unbekannten erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung nach der Reihe gleich Null, und das freie Glied gleich 1 sein muß. Diese Bedingungen geben 5 Gleichungen für die Bestimmung der 5 unbekanntenen Zähler der Partialbrüche.

$$\begin{aligned} A + B + D &= 0 \\ -2cA - cB + C + E - 2cD &= 0 \\ A(c^2 + r^2) + r^2B + c^2D - 2cE &= 0 \\ -2cr^2A - cr^2B + r^2C + c^2E &= 0 \\ Ac^2r^2 &= 1 \end{aligned}$$

Diese Zähler sind folgende:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{c^2 r^2} \\ B &= \frac{(c^2 - r^2) - 4c^2}{c^2 (c^2 + r^2)^2} \\ D &= \frac{4c^2 - (c^2 - r^2)}{c^2 (c^2 + r^2)^2} - \frac{1}{c^2 r^2} \\ E &= \frac{1}{2c} \left[ \frac{1}{c^2} - \frac{(c^2 - r^2)^2 - 4c^2(c^2 - r^2)}{c^2 (c^2 + r^2)^2} \right] \\ C &= -\frac{1}{2c^3} + \left( \frac{c^2 - r^2}{2c} - c \right) \frac{(c^2 - r^2) - 4c^2}{c^2 (c^2 + r^2)^2} \end{aligned}$$

Zwecks Vereinfachung der Rechnung führen wir folgende Konstanten ein:

$$a = \frac{8}{E}, \quad \bar{b} = \frac{12}{5G}$$

und machen folgende Substitution:

$$u = \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z}.$$

Davon berechnen wir den Ausdruck von  $dz$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \lambda + c_2 z &= u s + u c_1 z \\ c_2 z - u c_1 z &= u s - \lambda & z &= -\frac{u s - \lambda}{c_2 - u c_1} \\ z(c_2 - u c_1) &= u s - \lambda \\ dz &= \frac{(c_2 - u c_1) s + (u s - \lambda) c_1}{(c_2 - u c_1)^2} du, \\ dz &= \frac{c_2 s - \lambda c_1}{(c_2 - u c_1)^2} du. \end{aligned} \tag{18}$$

Damit kann man den Ausdruck unter dem Integralzeichen wie folgt schreiben:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{c_2 s - \lambda c_1}{(a u^3 + \bar{b} u)(c_2 - u c_1)^2} du = m \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(a u^3 + \bar{b} u)(c_2 - u c_1)^2},$$

wenn  $c_2 s - \lambda c_1 = m$  ist.

Das Integral kann weiter vereinfacht werden:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u(c_2 - u c_1)^2 (a u^2 + \bar{b})} = + \frac{1}{a c_1^2} \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{u \left(u - \frac{c_2}{c_1}\right)^2 \left(u^2 + \frac{\bar{b}}{a}\right)}.$$

Setzt man  $\frac{\bar{b}}{a} = r^2$  und  $\frac{c_2}{c_1} = c$ , dann lautet das Integral:

$$\int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{u(u-c)^2(u^2+r^2)}. \tag{19}$$

Nun werden die Teilintegrale nach bekannten Integrationsformeln gelöst:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{A}{u} du = A \ln \left( \frac{u_2}{u_1} \right)$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{B}{u-c} du = B \ln \frac{u_2-c}{u_1-c}$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{C}{(u-c)^2} du = - \left| \frac{C}{u-c} \right|_{u_1}^{u_2} = -C \left[ \frac{1}{u_2-c} - \frac{1}{u_1-c} \right]$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{Du+E}{u^2+r^2} du = D \int_{u_1}^{u_2} \frac{u}{u^2+r^2} du + E \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^2+r^2} =$$

$$= \frac{D}{2} \ln \frac{u_2^2+r^2}{u_1^2+r^2} + \frac{1}{r} E \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u_2}{r} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u_1}{r} \right).$$

Nachdem laut voriger Substitution

$$u = \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} \text{ ist,}$$

werden die Grenzen der Integrierung folgende Werte haben:

$$\text{bei } z=0 \quad u_1 = \frac{\lambda}{s}$$

$$\text{bei } z=z \quad u_2 = \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z}.$$

Setzen wir diese Grenzen in obige Teilintegrale ein, dann bekommen wir:

$$\ln \frac{u_2}{u_1} = \ln \frac{s}{\lambda} \cdot \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z}$$

$$\ln \frac{u_2-c}{u_1-c} = \ln \frac{\frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} - c}{\frac{\lambda}{s} - c} = \ln \frac{s}{\lambda - c s} \left[ \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} - c \right]$$

$$\frac{1}{u_2-c} - \frac{1}{u_1-c} = \frac{1}{\frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} - c} - \frac{1}{\frac{\lambda}{s} - c} = \frac{1}{\frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} - c} - \frac{s}{\lambda - c s}$$



$$\ln \frac{u_2^2 + r^2}{u_1^2 + r^2} = \ln \frac{\left(\frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z}\right)^2 + r^2}{\frac{\lambda^2}{s_2} + r^2} = \ln \frac{s^2}{\lambda^2 + s^2 r^2} \left[ \left(\frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z}\right)^2 + r^2 \right]$$

$$\text{arc tg } \frac{u_2}{r} - \text{arc tg } \frac{u_1}{r} = \text{arc tg } \frac{1}{r} \left( \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} \right) - \text{arc tg } \frac{\lambda}{r s}$$

Das Endresultat der Integrierung gibt die Gesamtkraft des geraden Kegelradzahnes:

$$P_y = f_{tot} m \frac{1}{a c_1^2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u(u-c)^2(u^2+r^2)} = f_{tot} \frac{m}{a c_1^2} \left\{ A \ln \frac{s}{\lambda} \cdot \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} \right.$$

$$+ B \ln \frac{s}{\lambda - c s} \left[ \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} - c \right] - C \left[ \frac{1}{\frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} - c} - \frac{s}{\lambda - c s} \right] \quad (20)$$

$$+ \frac{1}{2} D \ln \frac{s^2}{\lambda^2 + s^2 r^2} \left[ \left(\frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z}\right)^2 + r^2 \right] + \frac{1}{r} E \left[ \text{arc tg } \frac{1}{r} \left( \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} \right) - \right.$$

$$\left. - \text{arc tg } \frac{\lambda}{r s} \right] \left. \right\}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß das Verteilungsgesetz der Linienlast längs des Zahnes nicht konstant ist: der Ausdruck enthält vier transzendente und ein hyperbolisches Glied.

Nennen wir den Ausdruck  $\frac{P_y}{f_{tot}}$  die »reduzierte Starrheit« des Zahnes, dann zeigt folgende Funktion das Verteilungsgesetz dieser Starrheit:

$$\frac{P_y}{f_{tot}} = \frac{m}{a c_1^2} \left\{ \frac{1}{c_2 r_2} \ln \frac{s}{\lambda} \cdot \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} + \frac{(c^2 - r^2) - 4 c^2}{c^2 (c^2 + r^2)^2} \ln \frac{s}{\lambda - c s} \left[ \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} - c \right] \right.$$

$$- \left[ -\frac{1}{2 c^3} + \left( \frac{c^2 - r^2}{2 c} - c \right) \frac{(c^2 - r^2) - 4 c^2}{c^2 (c^2 + r^2)^2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} - c} - \frac{s}{\lambda - c s} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{4 c^2 - (c^2 - r^2)}{c^2 (c^2 + r^2)} \frac{1}{c^2 r^2} \right] \ln \frac{s^2}{\lambda^2 + s^2 r^2} \left[ \left(\frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z}\right)^2 + r^2 \right] + \frac{1}{2 c r} \left[ \frac{1}{c^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(c^2 - r^2)^2 - 4 c^2 (c^2 - r^2)}{c^2 (c^2 + r^2)^2} \right] \cdot \left[ \text{arc tg } \frac{1}{r} \left( \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} \right) - \text{arc tg } \frac{\lambda}{r s} \right] \left. \right\} \quad (21)$$

*Beispiel:* Ein Kegelradgetriebe hat bei einem Achsenwinkel  $\delta = 90^\circ$  und einen Eingriffswinkel  $\alpha = 20^\circ$ ,  $z_1 = 18$  und  $z_2 = 36$  Zähne, die Übersetzung ist  $i = 2$ . Modul  $m = 4,5$  mm und  $b = x z$ . Die Rechnung gibt folgende Resultate:

$x$	$\left[ \frac{\lambda + c_2 z}{s + c_1 z} \right]^2$	$\frac{P}{f_{tot}}$ kg/cm
$\frac{1}{4}$	0,7467	148 956
$\frac{1}{2}$	0,7744	299 087
$\frac{3}{4}$	0,7955	433 131
1	0,8159	582 405

Diese reduzierten Starrheitsziffern können mit einer  $\frac{P}{f_{tot}} = f(z)$  Kurve dargestellt werden, laut Abb. 7. In die Figur sind die Abweichungen der Starrheitswerte von der Geraden (also von einer konstanten Starrheit) eingeschrieben.

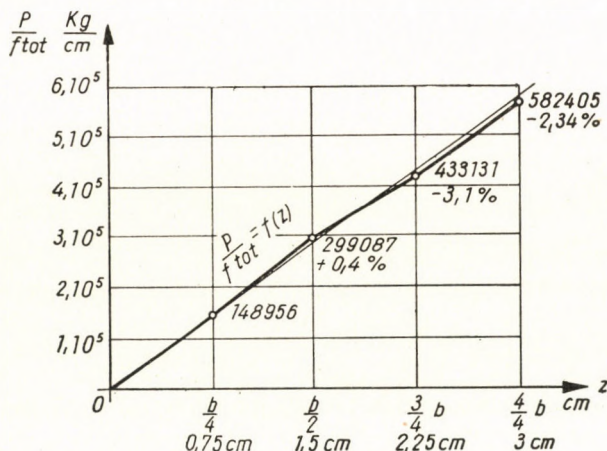


Abb. 7

Auf Grund dieser Ziffern kann man mit Sicherheit feststellen, daß diese Abweichungen von einer gleichmäßigen Starrheit bei geraden Kegelradzähnen *nicht* berücksichtigt werden dürfen, weil unvermeidliche Montagefehler und die Durchbiegung der Ritzelwelle die Größenordnung dieser Abweichungen überschreiten.

## SCHRIFTTUM

1. WEBER—BARNASCHEK: Formänderungen und Profilirücknahme. Heft II, Schriftenreihe Antriebstechnik, 1953, Vieweg & Sohn, Braunschweig.
2. WALKER, HARRY: Gear Tooth Deflection and Profile Modification, The Engineer, 1938, X; 1940, VIII.
3. VIDÉKY, EMIL: Tip Relief on Spur Gears, Acta Technica Scientiarum Hungaricae, Tom. X. Fasc. 1—2, 1955.
4. TEN BOSCH, M.: Berechnung der Maschinenelemente, 1953, Springer Verlag, Berlin.
5. ROHONYI, W.: Angerechnete Berechnung der Starrheit gerader Kegelradzähne, Z. V. D I., 1960.

## ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Beurteilung der Starrheit der geraden Kegelradzähne wird der Schubspannungsanteil der Formänderung wegen der Schwerfälligkeit der Rechnung nicht berücksichtigt, aber es ist ein Gegenstand ständiger Diskussionen, ob diese Vernachlässigung auch wirklich erlaubt ist.

In der Arbeit weist der Verfasser nach, daß der Schubspannungsanteil der Formänderung die gleichmäßige Biegestarrheit der Zähne nur in vernachlässigbarem Maße beeinflusst (3,1%).

APPROXIMATE CALCULATION OF THE STRESSES IN STRAIGHT  
BEVEL GEAR TEETH

W. ROHONYI

## SUMMARY

When evaluating the strength of bevel gear teeth, the part of the deformation due to shear stresses is not considered because of the difficulties of calculation. But it is a subject of constant discussions whether this neglect is justified.

In the present paper the author proves that the part of the deformation corresponding to the shear stress has only a negligible influence (3.1%) on the uniform bending rigidity of the teeth.

CALCUL APPROCHÉ DE LA RIGIDITÉ DES DENTS DES ENGRENAGES CONIQUES  
À DENTURE DROITE

V. ROHONYI

## RÉSUMÉ

Dans la détermination de la résistance de la denture droite d'engrenages coniques, la partie de la déformation correspondant à la tension de cisaillement est négligée en raison de la complexité des calculs, mais la question de savoir si cette approximation est permise, fait l'objet de nombreuses discussions.

L'auteur démontre que la partie de la déformation correspondant à la tension de cisaillement n'influe sur la rigidité à la flexion uniforme des dents que d'une façon négligeable (3,1%).

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗУБЬЕВ  
КОНИЧЕСКИХ ШЕСТЕРЕН

В. РОХОНИ

## РЕЗЮМЕ

При определении прочности прямых зубьев конических шестерен часть деформации, падающая на напряжение сдвига, из-за сложности расчетов не принимается во внимание, но предметом постоянного диспута является вопрос: допустимо ли такого рода пренебрежение.

Автор в настоящей своей статье доказывает, что часть деформации, падающая на напряжение сдвига, воздействует на равномерную жесткость изгиба зубьев лишь в пренебрежимой мере (3,1%).

# A. C. IMPEDANCE OF LAMINATED CONDUCTORS\*

GY. FODOR

TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST, INSTITUTE FOR THEORETICAL ELECTRICAL ENGINEERING

[Manuscript received May 14, 1959]

## 1. Preliminaries

The A. C. impedance of laminated conductors plays a part in many fields of application. In the case of conductors transmitting sinusoidal current it is the value of the resistance which is first of all important because the arising losses are obtained from the A. C. resistance  $R$  in the form  $P = R I^2$ . In the field of microwave engineering the losses, arising in the metal armouring which encircles the space of wave guides, resp. cavity resonators, define the ratio of damping, resp. the quality factor. As the ratio of damping is directly proportional to the A. C. resistance  $R$ , while the quality factor of the cavity resonator is inversely proportional to it [1 and 2] it is sufficient to investigate the A. C. resistance  $R$  of the metal wall. As a third field of application radar engineering can be mentioned, or in general, the reflection of electromagnetic waves from metal surfaces. To calculate the reflection factor the values of A. C. resistance and reactance are equally needed.

It is known that the field of A. C. is not uniformly distributed in the cross section of the conductor but it is "displaced" in the direction from where the energy penetrates into the conductor. This is called the "outer" surface of the conductor. Owing to this, A. C. resistance  $R$  which is decisive for the losses (damping) will be greater than D. C. resistance  $R_d$  computed in the elementary way. The rate of current displacement, *i. e.* also the growth of resistance is basically characterized by the cross section dimensions of the conductor on one hand and, on the other hand, by the so-called skin depth (a quantity of length dimension):

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}}. \quad (1.1)$$

In (1.1)  $\mu = \mu_0 \mu_r$  where  $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$  Vs/Am is the permeability of the conductor ( $\mu_r = 1$  for non-ferromagnetic media),  $\gamma$  is its conductance measured

\*Abridged text of the Eng. D. thesis presented at the Department of Electrical Engineering of the Technical University, Budapest.

in S/m units ( $\gamma = 58 \cdot 10^6$  S/m for copper) and  $f$  is the frequency in Hz. The formula gives the value of  $\delta$  in metres. The skin depths of several important materials are given in Fig. 1 as functions of frequency.

Under certain conditions (but not in general) electromagnetic field strength in a  $\delta$  depth falls to the  $e = 2,718$ th part of its surface value. The smaller the skin depth the more powerful, under otherwise equal conditions,

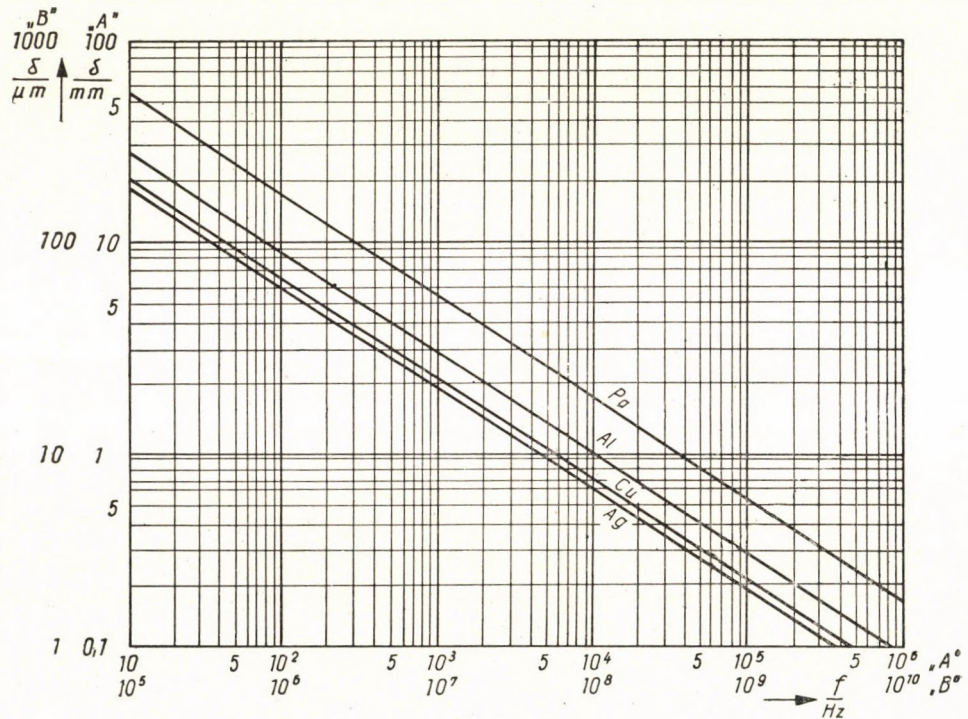


Fig. 1. Dependence of skin depth on frequency  
 Scale "A"  $10 \text{ Hz} < f < 10^6 \text{ Hz}$ ;  $0,1 \text{ mm} < \delta < 100 \text{ mm}$   
 Scale "B"  $10^5 \text{ Hz} < f < 10^{10} \text{ Hz}$ ;  $1 \mu\text{m} < \delta < 1000 \mu\text{m}$

are the displacements of current and field strengths and, therefore, at the same time, the greater is the A. C. resistance which determines the losses.

In order to decrease the losses it is usual to employ a layer of a material of better conductance, e. g. of silver, on the surface of the conductor. In this way the resistance will be more or less the same as that of the whole conductor made of a material of better conductance, though more expensive. At first sight one might possibly be led to the conclusion that the resistance will be smaller when the layer of better conductance is thicker. But also another effect arises consisting of the uneven dispersion of the current, not only in its amplitude but also in its angle of phase. Therefore such a condition is not impossible that

we can get lower losses with the laminated conductor than with one wholly made of material of higher conductance.

In the following the very problem will be treated, whether such an optimum thickness of layer exists and what its value is. First of all, the conditions in an infinite half-space which also refer to the case of the plate, will be discussed, later it will be examined to what extent the resistance of a conductor of circular section, resp. pipe-shape can be approached by the resistance of the half-space, resp. that of the plate.

## 2. Method of calculation

Under quasi-stationary conditions the density of the displacement current may be neglected as compared to the density of the conduction current, *i. e.*  $\gamma \gg \omega \epsilon$ . Inside the conductors this condition will be satisfied in case of  $f < 10^{18}$  Hz, *i. e.* with all frequencies occurring in practice, up to now.

Solving the Maxwell equations valid under quasi-stationary conditions, with regard to the boundary conditions, we can calculate the A. C. impedance from the relation:

$$Z = R + j \omega L = \frac{E_0 l}{\hat{I}}. \quad (2.1)$$

$E_0$  is the electrical field strength existing on the outer surface of the conductor,  $\hat{I}$  is the peak value of the current,  $R$ , respectively,  $L$  are the coefficients of the A. C. resistance, resp. the inner self-inductance.

## 3. Laminated half-space

It is known that the A. C. resistance of a portion of the homogeneous half-space, of  $l$  length,  $h$  width and  $\gamma_1, \mu_1$  material constants is given by the formula [1, 3]:

$$R = \omega L = \frac{l}{\gamma_1 h \delta_1} \equiv R_1. \quad (3.1)$$

If the thickness of this layer is  $d$  and if another half-space of  $\gamma_2, \mu_2$  material constants is located under it (Fig. 2) the formula of the A. C. impedance is

$$R = j \omega L = (1 + j) R_1 \frac{\text{sh}(1 + j) u + \alpha \text{ch}(1 + j) u}{\text{ch}(1 + j) u + \alpha \text{sh}(1 + j) u}, \quad (3.2)$$

where

$$u = \frac{d}{\delta_1}, \quad (3.3)$$

$$\alpha = \frac{\mu_2 \delta_2}{\mu_1 \delta_1} = \sqrt{\frac{\mu_2 \gamma_1}{\mu_1 \gamma_2}}. \quad (3.4)$$

In case  $d \rightarrow \infty$ , i. e.  $u \rightarrow \infty$  also  $R \rightarrow R_1$ . Separating real and imaginary parts, after elementary rearrangement we get [4]:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{(\alpha^2 + 1) \operatorname{sh} 2u + 2\alpha \operatorname{ch} 2u + (\alpha^2 - 1) \sin 2u}{(\alpha^2 + 1) \operatorname{ch} 2u + 2\alpha \operatorname{sh} 2u - (\alpha^2 - 1) \cos 2u}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\omega L}{R_1} = \frac{(\alpha^2 + 1) \operatorname{sh} 2u + 2\alpha \operatorname{ch} 2u - (\alpha^2 - 1) \sin 2u}{(\alpha^2 + 1) \operatorname{ch} 2u + 2\alpha \operatorname{sh} 2u - (\alpha^2 - 1) \cos 2u}. \quad (3.6)$$

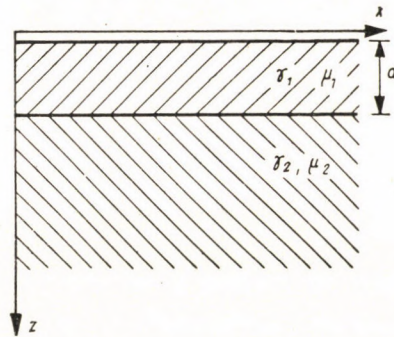


Fig. 2. Arrangement of a laminated half-space

If  $u \gg 1$ , respectively  $u \ll 1$ , much simpler approximate formulae can be had. In case of  $u \gg 1$ , neglecting  $e^{-4u}$ , we get

$$\frac{R}{R_1} = 1 + 2 \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-2u} (\cos 2u + \sin 2u), \quad (3.7)$$

$u \gg 1$

$$\frac{\omega L}{R_1} = 1 + 2 \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-2u} (\cos 2u - \sin 2u). \quad (3.8)$$

If  $u \ll 1$  an expansion in series can be made:

$$\frac{R}{R_1} = \alpha \left[ 1 - 2(\alpha^2 - 1)u^2 + 4(\alpha^2 - 1) \left( 1 - \frac{1}{3\alpha^2} \right) u^3 \right], \quad (3.9)$$

$u \ll 1$

$$\frac{\omega L}{R_1} = \alpha - 2(\alpha^2 - 1)u. \quad (3.10)$$



As  $\alpha R_1 = R_2$ , this result means that in case  $d \rightarrow 0$   $R = \omega L = R_2$ , i. e. the resistance and the reactance are equal to the A. C. resistance of the respective portion of the medium of the material constant  $\gamma_2, \mu_2$  and that of course is physically right.

If the lower layer is an insulator, with limit values  $\gamma_2 \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$  we obtain the impedance of a plate, having a thickness  $d$  :

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\text{sh } 2u + \sin 2u}{\text{ch } 2u - \cos 2u}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\omega L}{R_1} = \frac{\text{ch } 2u - \sin 2u}{\text{ch } 2u - \cos 2u}. \quad (3.12)$$

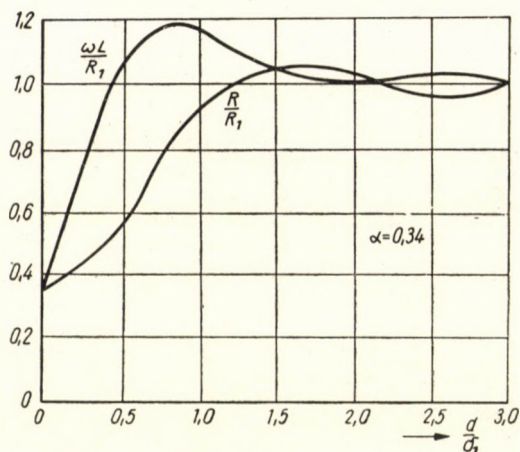


Fig. 3. Resistance and reactance of a laminated half-space.  $\alpha = 0,34$  [3]

The approximate relations are:

$$\frac{R}{R_1} = 1 + 2e^{-2u}(\cos 2u + \sin 2u), \quad (3.13)$$

$$u \gg 1$$

$$\frac{\omega L}{R_1} = 1 + 2e^{-2u}(\cos 2u - \sin 2u). \quad (3.14)$$

The values of  $R/R_1$ , respectively  $\omega L/R_1$  are shown in Figs. 3–5 as functions of  $u$ , for the cases  $\alpha = 0,34$ ;  $\alpha = 1,6$  and  $\alpha = 5$  [3]. In Fig. 6 the values are given for the case of  $\alpha = \infty$ , i. e. those related to the plate. It may be noticed that all the curves have several extreme values.

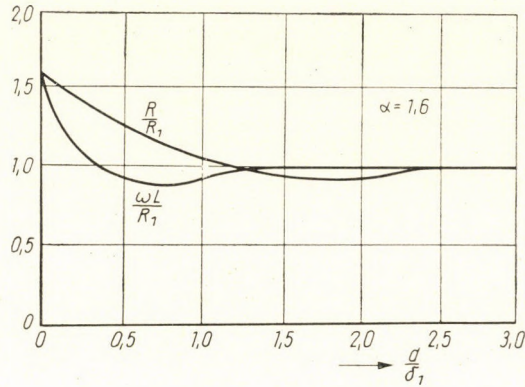


Fig. 4. Resistance and reactance of a laminated half-space.  $\alpha = 1,6$  [3]

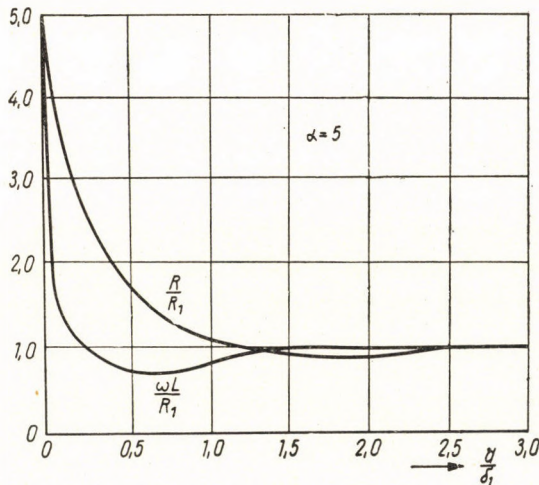


Fig. 5. Resistance and reactance of a laminated half-space.  $\alpha = 5$  [3]

It is to be noted that, strictly speaking, in case of insulators, only the density of the conduction current will be zero, and so the density of the displacement current cannot be neglected. Rigorously, the substitution  $\gamma_2 \rightarrow j\omega\epsilon_0$  should be made and then we obtain:

$$\delta_2 = \frac{c}{\pi f \sqrt{2j}}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_1}{\mu_1 j \omega \epsilon_0}}. \quad (3.15)$$

As  $|\alpha| \gg 1$  and  $|\delta_2|$  are very large, their consideration in the formulae (3.11–12) should result only unimportant corrections. Therefore, they will not be taken into consideration in the following either.

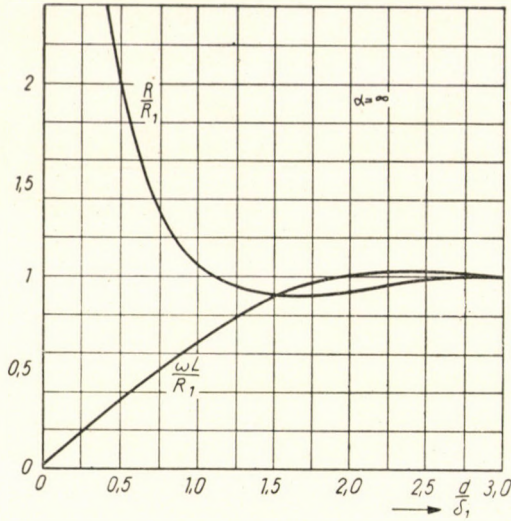


Fig. 6. Resistance and reactance of a plate ( $a = \infty$ )

#### 4. Extreme values of resistance as functions of layer thickness

As  $R_1$  is independent of the layer thickness and  $u = d/\delta_1$  is proportional to the layer thickness, it is possible to investigate  $R/R_1$ , respectively  $\omega L/R_1$  in function of  $u$  instead of  $R$  and  $\omega L$  in function of  $d$ . The resistance has an extreme value where

$$\frac{d}{du} \left( \frac{R}{R_1} \right) = 0. \quad (4.1)$$

After differentiation of the formula (3.5), the following equation is obtained to calculate the point of extreme values:

$$[(a^2 + 1) \operatorname{sh} 2u + 2a \operatorname{ch} 2u] \sin 2u = 0.$$

As the expression in brackets cannot be equal to 0, we have

$$\sin 2u = 0, \quad u = m \frac{\pi}{2}; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

for the point of extreme values.

It is easy to prove by means of a second differentiation that in case of  $a > 1$  we obtain the minimum values for  $m = 1, 3, 5, \dots$  and the maximum values for  $m = 0, 2, 4, 6, \dots$ . If  $a < 1$ , the maximum and minimum values are

exchanged. Evidently, in case of  $a > 1$  the most important is the first minimum, arising at

$$u_0 = \frac{\pi}{2}, \quad d_0 = \frac{\pi}{2} \delta_1. \quad (4.3)$$

Substituting it in formula (3.5) we obtain the minimum resistance :

$$\frac{R_0}{R_1} = 1 - \frac{2 \frac{a-1}{a+1} e^{-\pi} \left( 1 + \frac{a-1}{a+1} e^{-\pi} \right)}{1 + \frac{a-1}{a+1} e^{-\pi} \left( 1 + \frac{a-1}{a+1} e^{-\pi} \right)}. \quad (4.4)$$

Expanding it in series in powers of  $e^{-\pi} = 0,043$  and introducing the indication

$$\zeta \equiv \frac{a-1}{a+1}, \quad -1 \leq \zeta \leq +1 \quad (4.5)$$

we obtain the following relations:

$$\begin{aligned} \frac{R_0}{R_1} &= 1 - 2\zeta e^{-\pi} + 2\zeta^2 e^{-2\pi} = \\ &= 1 + 8,64 \cdot 10^{-2} \zeta + 3,7 \cdot 10^{-3} \zeta^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

It follows from the relations (4.4) or (4.6) that in case of  $a > 1$  (the upper layer is a better conductor or the lower layer is a ferromagnetic one)  $R/R_1$  has not only a local minimum but an absolute one at the point  $u = \pi/2$ . This means that under such conditions the resistance will be smaller than with the conductor fully made of a material of higher conductivity. Nevertheless, the difference is not very high. If  $a = 1$  (*i. e.* the material of both layers is the same) then, of course,  $R/R_1 = R_0/R_1 = 1$ . The highest difference occurs in case of  $a = \infty$  (*i. e.* if the lower layer is an insulator). The resistance of the plate having a thickness of  $d_0 = \pi \delta_1/2$  is:

$$\frac{R_0}{R_1} = 1 - \frac{2 e^{-\pi} (1 + e^{-\pi})}{1 + e^{-\pi} (2 + e^{-\pi})} = 1 - 0,0832 = 0,9186. \quad (4.7)$$

This means that the resistance is lower by 8,32% than in case of infinite thickness. The problem is, therefore, interesting merely from the economical point of view: it is not worth applying a layer of the expensive material thicker than  $d_0$ . Otherwise the resistance instead of decreasing would slightly increase.

To illustrate this fact, let us calculate the resistance for a layer whose thickness is the double of the optimum, *i. e.* in case of  $u = \pi$ . If  $a > 1$  then, according to (4.2) there is a local maximum. Substituting into (3.5) and making an elementary rearrangement we obtain:

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{2 \zeta e^{-2\pi} (1 - \zeta e^{-2\pi})}{1 - \zeta e^{-2\pi} (2 - \zeta e^{-2\pi})} \approx 1 + 3,73 \cdot 10^{-3} \zeta, \quad u = \pi.$$

This means that the resistance is roundly exceeded by  $0,09 \zeta \cdot R_1$  the value corresponding to the optimum case. The most striking difference occurs in the case of a plate. If the plate has a thickness which is the double of the optimum its resistance becomes roundly higher by 10%.

As already mentioned in the Preliminaries, the reason for this external effect is to be found in the current distribution. It can be proved that the intensity of the current conveyed through the lower layer differs, in case of  $u = (2\nu + 1)\pi/2$  by  $90^\circ$  from the total current, while in case of  $u = 2\nu\pi/2$  it is in phase with it.

Considering this phenomenon from the point of view of wave theory, it must be observed that the values of both the damping factor and the phase factor are equal to  $1/\delta$  in the case of metals. Thus the wavelength measured in metals is

$$\Lambda = 2\pi\delta. \quad (4.8)$$

Thus  $d_0 = \pi\delta_1/2 = \Lambda_1/4$  or speaking generally: the resistance of a laminated conductor has an extreme value if the layer thickness is an integral multiple of the quarter of the wavelength measured in the upper layer.

### 5. Extreme value of the resistance as a function of conductivity

As an interesting fact, it may be mentioned that the resistance of the laminated half-space has an extreme value in function of the conductivity  $\gamma_1$ , though it seems more evident that  $R$  is smaller when  $\gamma_1$  becomes higher. This is not demonstrated by our former calculations, because  $R_1$  and  $a$  themselves are functions of  $\gamma_1$ .

Let us introduce the following notations:

$$x^2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad (5.1)$$

$$a = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \frac{d}{\delta_2}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}, \quad a = bx. \quad (5.2)$$

If none of the media is a ferromagnetic one, then  $b = 1$  and  $a = d/\delta_2$  where  $\delta_2$  is skin depth in the lower medium. The expression for the A. C. resistance is, on the base of (3.5):

$$R = \frac{R}{R_1} R_1 = \frac{l \omega \mu_1 d}{2h} \frac{1}{ax} \frac{(b^2 x^2 + 1) \operatorname{sh} 2ax + 2bx \operatorname{ch} 2ax + (b^2 x^2 - 1) \sin 2ax}{(b^2 x^2 + 1) \operatorname{ch} 2ax + 2bx \operatorname{sh} 2ax - (b^2 x^2 - 1) \cos 2ax}. \quad (5.3)$$

If  $\gamma_1 \rightarrow \infty$ , *i. e.*  $x \rightarrow \infty$ , then evidently  $R \rightarrow 0$ . Respectively, if  $\gamma_1 \rightarrow 0$ , *i. e.*  $x \rightarrow 0$ , then, expanding in series in powers of  $x$ , we get

$$R = R_2 \left[ 1 + \left( \frac{2}{3} \frac{a}{b} + 1 \right) 2a^2 x^2 - 2 \left( \frac{4}{3} \frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{3} \frac{a}{b} + 1 \right) a^2 b^2 x^4 \right]. \quad (5.4)$$

If the upper layer is an insulator ( $x = 0$ ), then, of course, we have  $R = R_2$ . It can be seen from (5.4) that the A. C. resistance  $R$  increases at first proportionally to  $x^2$ , *i. e.* to  $\gamma_1$ . Since if  $\gamma_1 \rightarrow \infty$ , so  $R \rightarrow 0$ , it follows that there is at least one maximum. From the approximate formula (5.4) we obtain for the point of the extreme value

$$b^2 x^2 = \frac{\frac{2}{3} \frac{a}{b} + 1}{2 \left( \frac{4}{3} \frac{a^2}{b^2} + \frac{8}{3} \frac{a}{b} + 1 \right)} = \frac{1}{2} \frac{1}{2 \frac{a}{b} + 1}. \quad (5.5)$$

Finally, we obtain a simple relationship not for the quotient  $\gamma_1/\gamma_2$  but for the quotient  $\mu_2 \gamma_1/\mu_1 \gamma_2$  in function of  $a/b = \mu_1 d/\mu_2 \delta_2$ :

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{d}{\delta_2} + 1}. \quad (5.6)$$

Substituting this into (5.4) the value of the maximum resistance will be

$$\frac{R}{R_2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \frac{\frac{2}{3} \frac{a}{b} + 1}{2 \frac{a}{b} + 1}. \quad (5.7)$$

If none of the layers is a ferromagnetic one, then  $b^2 = \mu_2/\mu_1 = 1$  and in such a case the magnitude and the position of the extreme value are functions of the parametre  $a = d/\delta_2$ :

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2a+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{2 \frac{d}{\delta_2} + 1}, \quad (5.8)$$

$$\frac{R}{R_2} = 1 + \frac{a^2}{2} \frac{\frac{2}{3}a+1}{2a+1} = 1 + \frac{d^2 \frac{2}{3} \frac{d}{\delta_2} + 1}{\delta_2^2 2 \frac{d}{\delta_2} + 1}. \quad (5.9)$$

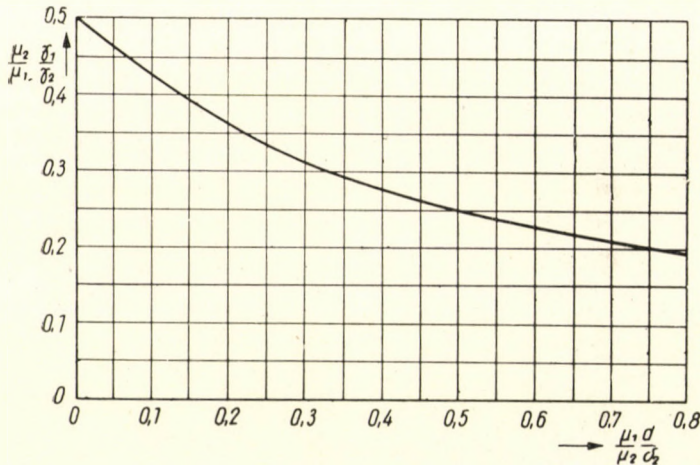


Fig. 7. Conductivity  $\gamma_1$  belonging to the maximum resistance, as function of layer thickness

While  $a < 1$  also  $ax < 1$ , and thus, the expansions in series are legitimate. In Fig. 7 the quotient  $\gamma_1/\gamma_2$ , which ensures the maximum, is shown as a function of  $a = d/\delta_2$ . (In the general case the ordinates are  $\mu_2\gamma_1/\mu_1\gamma_2$  and the abscissae are  $\mu_1d/\mu_2\delta_2$ ). On the other hand, in Fig. 8 the values of the maximum resistance are shown also as a function of  $d/\delta_2$ , resp.  $\mu_1d/\mu_2\delta_2$ .

Our result can be interpreted in the following way. Applying a layer of fixed thickness and lower conductivity, a homogeneous half-space ( $\gamma_1 < \gamma_2$  or more generally  $\gamma_1/\mu_1 < \gamma_2/\mu_2$ ), we obtain the total loss, *i. e.* the A. C. resistance  $R$  is increased ( $R/R_2 > 1$ ). If  $\gamma_1/\gamma_2$  is very small, this effect is not important, because the total current conveyed by the upper conductor is very small. As  $\gamma_1/\gamma_2$  grows the "resistance of the upper layer" is ever decreasing and on the other hand, the current conveyed by it is ever growing. Between the two

effects the latter is the predominating one at the beginning, while the first one dominates later, so that the loss and thus also  $R$  have a maximum.

The existence of such a maximum is shown also in [6], however, only within the field of a numerical example related to the laminated cylindrical conductor. In the figure published there, the position of the very flat maximum can scarcely be observed.

We have not made more detailed calculations (*e. g.* for the case  $a > 1$ ) because this extreme value has no practical significance. Its existence, never-

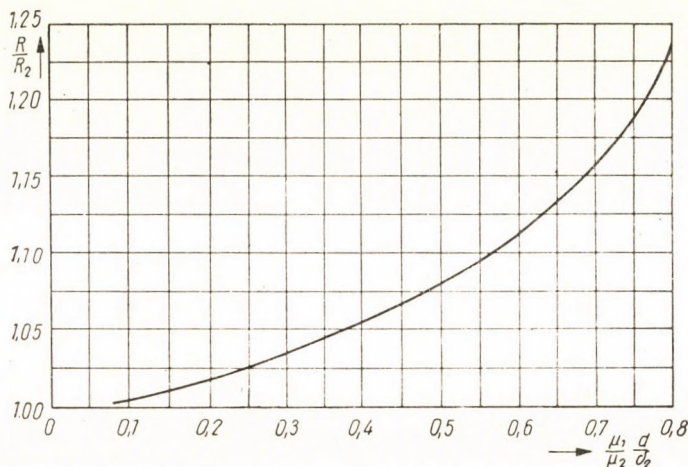


Fig. 8. Maximum resistance in function of layer thickness

theless, proves that the resistance of the laminated conductors depends on the parameters not so unambiguously as one might expect on the basis of a preliminary investigation.

## 6. Extreme values of the reactance

From the practical point of view, the extreme values of the reactance have no special significance, however, for the sake of full discussion let us investigate at which layer thickness has the reactance a maximum, resp. minimum value. Relating to the point of the extreme value the following relation can be found:

$$(a^2 + 1) \operatorname{ch} 2u \cos 2u + 2a \operatorname{sh} 2u \cos 2u - (a^2 - 1) = 0.$$

This equation is of the second degree in  $a$  and thus it can be solved for it:

$$a = \frac{\operatorname{sh} 2u \cos 2u + \sin 2u}{1 - \operatorname{ch} 2u \cos 2u}. \quad (6.1)$$



On this basis, the  $u$  values attached to the different  $a$  values are given in Fig. 9. If  $a > 1$ , then at this point  $\omega L/R_1$  has a minimum, if  $a < 1$ , then there is a maximum. The next root point is, as can be concluded from the roughly outlined figure of (6.1) in the environment of  $2u = 3\pi/2$ . Putting  $2u = 3\pi/2 + \varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) and expanding in series in powers of  $\varepsilon$  we obtain the following approximation for the point of the next extreme value

$$u = 2,365. \quad (6.2)$$

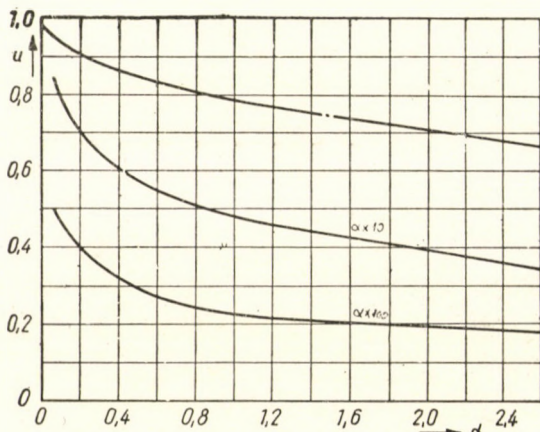


Fig. 9.  $u = d/\delta$ , extreme value points of reactance in function of parameter  $a$

This is independent, with very good approximation, of the value of  $a$ . With the knowledge of  $u$ , which corresponds to the extreme value, we can calculate the layer thickness from the relation:

$$d = u \delta_1. \quad (6.3)$$

Taking the calculation in § 5 as a pattern, the extreme values of  $\omega L$  can also be obtained as functions of the conductivity, resp. the permeability.

### 7. Half-space with double lamination

It was shown in § 5 that, taking an adequate layer thickness, it is possible to obtain a minimum resistance which is smaller than that of a half-space wholly filled up with material of higher conductivity. As a development of this case let us investigate the conditions under which two layers of different materials and layer thicknesses are applied on an infinite half-space of  $\gamma_3, \mu_3$

material constants (Fig. 10). If  $\gamma_3 \rightarrow 0$  we have the case of a plate with two layers.

It can be expected, in advance, that no important change of conditions will be caused by the third layer. Nevertheless, the problem is interesting not only from the point of view of diminishing the losses. It is impossible, namely, for technological reasons, to apply a silver layer immediately on a copper base but an intermediate layer (made generally of palladium) is needed too [2]. In fact, the silver plated copper surface is, therefore, a surface with double

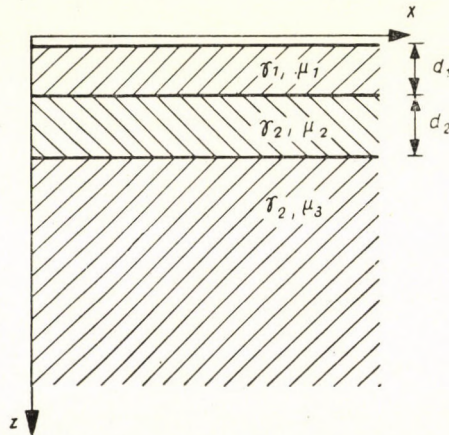


Fig. 10. Arrangement of half-space with double lamination

coating. An eventual anti-corrosion coating can be similarly explained. Another sphere of problems where double lamination may play a part, is the realization of a prescribed reflection coefficient [7].

Using the general method we have the following expression for the impedance:

$$\frac{R + j\omega L}{R_1} = (1 + j) \frac{\zeta \beta \operatorname{ch}(1 + j)(u - v) - \zeta \operatorname{sh}(1 + j)(u - v) + \beta \operatorname{ch}(1 + j)(u + v) + \operatorname{sh}(1 + j)(u + v)}{\zeta \beta \operatorname{sh}(1 + j)(u - v) - \zeta \operatorname{ch}(1 + j)(u - v) + \beta \operatorname{sh}(1 + j)(u + v) + \operatorname{ch}(1 + j)(u + v)}. \quad (7.1)$$

The meaning of the abbreviations is similar to the previous:

$$a = \frac{\gamma_1 \delta_1}{\gamma_2 \delta_2} = \sqrt{\frac{\mu_2 \gamma_1}{\mu_1 \gamma_2}}, \quad \beta = \frac{\gamma_2 \delta_2}{\gamma_3 \delta_3} = \sqrt{\frac{\mu_3 \gamma_2}{\mu_2 \gamma_3}}, \quad (7.2)$$

$$R_1 = \frac{l}{\gamma_1 \delta_1 h}, \quad (7.3)$$

$$\zeta = \frac{a-1}{a+1}. \quad (7.4)$$

Using the formulae of addition, after transforming the complex denominator into a real one and after a lengthy rearrangement we get the following expressions for resistance and reactance:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\varphi_1(u, v)}{\psi(u, v)}, \quad \frac{\omega L}{R_1} = \frac{\varphi_2(u, v)}{\psi(u, v)}; \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(u, v) \equiv & \zeta^2 [a \operatorname{sh} 2(u-v) - c \operatorname{ch} 2(u-v) + b \sin 2(u-v)] + \\ & + 2\zeta [a \operatorname{ch} 2v + c \operatorname{sh} 2v] \sin 2u + 2\zeta b \operatorname{sh} 2u \cos 2v + a \operatorname{sh} 2(u+v) + \\ & + c \operatorname{ch} 2(u+v) + b \sin 2(u+v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(u, v) \equiv & \zeta^2 [a \operatorname{sh} 2(u-v) - c \operatorname{ch} 2(u-v) - b \sin 2(u-v)] - \\ & - 2\zeta [a \operatorname{ch} 2v + c \operatorname{sh} 2v] \sin 2u + 2\zeta b \operatorname{sh} 2u \cos 2v + \\ & + a \operatorname{sh} 2(u+v) + c \operatorname{ch} 2(u-v) - b \sin 2(u+v), \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \psi(u, v) \equiv & \zeta^2 [a \operatorname{ch} 2(u-v) - c \operatorname{sh} 2(u-v) - b \cos 2(u-v)] - \\ & - 2\zeta [a \operatorname{ch} 2v + c \operatorname{sh} 2v] \cos 2u + 2\zeta b \operatorname{ch} 2u \cos 2v + \\ & + a \operatorname{ch} 2(u+v) + c \operatorname{sh} 2(u-v) - b \cos 2(u+v). \end{aligned}$$

The following abbreviations were introduced:

$$a \equiv \beta^2 + 1, \quad b \equiv \beta^2 - 1, \quad c \equiv 2\beta. \quad (7.7)$$

As  $R/R_1 \approx 1$ , unless  $u$  is very small, it is more suitable to write the relation of resistance in the following way:

$$\frac{R}{R_1} = 1 + \frac{\varphi_3(u, v)}{\psi(u, v)}, \quad (7.8)$$

where  $\psi$  is the function given in (7.6) and

$$\begin{aligned} \varphi_3(u, v) \equiv & 2\zeta [a \operatorname{ch} 2v + c \operatorname{sh} 2v] [\sin 2u + \cos 2u] + b [\sin 2(u+v) + \\ & + \cos 2(u+v)] + \zeta^2 b [\sin 2(u-v) + \cos 2(u-v)] - \\ & - 2\zeta b e^{-2u} \cos 2v - (a-c) e^{-2(u+v)} - \zeta^2 (a+c) e^{-2(u-v)}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

If  $v = 0$  we return to the expressions (3.5), resp. (3.6) with the difference that we have  $a\beta$  here instead of  $a$  there. On the other hand, if  $u = 0$  then we return again to the expressions (3.5), resp. (3.6) but the part of  $a$ ,  $u$ , resp.  $R_1$  are taken up by  $\beta$ ,  $v$ , resp.  $R_2$ .

In case of a plate  $\gamma_3 \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow \infty$  so that

$$\begin{aligned}\varphi_1(u, v) &= \zeta^2 [\operatorname{sh} 2(u - v) + \sin 2(u - v)] + 2\zeta [\operatorname{ch} 2v \sin 2u + \\ &\quad + \operatorname{sh} 2u \cos 2v] + \operatorname{sh} 2(u + v) + \sin 2(u + v), \\ \varphi_2(u, v) &= \zeta^2 [\operatorname{sh} 2(u - v) - \sin 2(u - v)] - 2\zeta [\operatorname{ch} 2v \sin 2u - \\ &\quad - \operatorname{sh} 2u \cos 2v] + \operatorname{sh} 2(u + v) - \sin 2(u + v), \\ \varphi_3(u, v) &= 2\zeta \operatorname{ch} 2v [\sin 2u + \cos 2u] + \sin 2(u + v) + \cos 2(u + v) + \\ &\quad + \zeta^2 [\sin 2(u - v) + \cos 2(u - v)] - 2\zeta \cos 2v e^{-2u} - \\ &\quad - e^{-2(u-v)} - \zeta^2 e^{-2(u-v)}, \\ \psi(u, v) &= \zeta^2 [\operatorname{ch} 2(u - v) - \cos 2(u - v)] - 2\zeta [\operatorname{ch} 2v \cos 2u - \\ &\quad - \operatorname{ch} 2u \cos 2v] + \operatorname{ch} 2(u + v) - \cos 2(u + v).\end{aligned}\tag{7.10}$$

If  $u = 0$ , resp.  $v = 0$  we return here also to resistance, resp. reactance of the simple plate.

### 8. Extreme values of the resistance of a two-layer conductor

The extreme values of the resistance of a two-layer conductor can be calculated from the stipulations:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{R}{R_1} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{R}{R_1} \right) = 0.\tag{8.1}$$

To determine the existence and character of the extreme value we ought also to calculate the second derivates of the function. Since the function is very complicated, we have omitted to do it, because the problem can be solved on the basis of our former calculations by substitution.

An explicit working up of the relations (8.1) means, on basis of (7.5) and (7.6) an elementary but lengthy calculation. Finally, we have the following two equations for the points  $u$  and  $v$  of the extreme values:

$$\begin{aligned}
& \zeta^4 b [a \operatorname{sh} 2(u - v) - c \operatorname{ch} 2(u - v)] \sin 2(u - v) + \\
& + 2\zeta^3 [a \operatorname{ch} 2v + c \operatorname{sh} 2v] [a \operatorname{sh} 2(u - v) - c \operatorname{ch} 2(u - v)] \sin 2u + \\
& + 2\zeta^3 b^2 \operatorname{sh} 2u \sin 2(u - v) \cos 2v + \\
& + 6\zeta^2 b [a \operatorname{ch} 2v + c \operatorname{sh} 2v] \operatorname{sh} 2u \sin 2u \cos 2v - \\
& - 2\zeta^2 b [a \operatorname{sh} 2v + c \operatorname{ch} 2v] \operatorname{ch} 2u \cos 2u \sin 2v + \\
& + 2\zeta [a \operatorname{ch} 2v + c \operatorname{sh} 2v] [a \operatorname{sh} 2(u + v) + c \operatorname{ch} 2(u + v)] \sin 2u + \\
& + 2\zeta b^2 \operatorname{sh} 2u \sin 2(u + v) \cos 2v + \\
& + b [a \operatorname{sh} 2(u + v) + c \operatorname{ch} 2(u + v)] \sin 2(u + v) = 0, \\
& \zeta^4 [a \operatorname{sh} 2(u - v) + c \operatorname{ch} 2(u - v)] \sin 2(u - v) + \quad (8.2) \\
& + 2\zeta^3 b [\operatorname{sh} 2u \sin 2u - \operatorname{ch} 2v \sin 2v] + \\
& + 2\zeta^2 [a \operatorname{ch} 2v + c \operatorname{sh} 2v] \operatorname{sh} 2u \cos 2u \sin 2v + \\
& + 2\zeta^2 [a \operatorname{sh} 2v + c \operatorname{ch} 2v] \operatorname{ch} 2u \sin 2u \cos 2v + \\
& + 2\zeta [a \operatorname{sh} 2v + c \operatorname{ch} 2v] \sin 2v - \\
& - 2\zeta b \operatorname{sh} 2u \sin 2u - [a \operatorname{sh} 2(u + v) - c \operatorname{ch} 2(u + v)] \sin 2(u + v) = 0.
\end{aligned}$$

Usually, to solve the system of transcendent equations (8.2) seems to be a quite hopeless task. Fortunately, we can observe that every term contains one of the following multiplication factors:

$$\sin 2u, \sin 2v, \sin 2(u + v), \sin 2(u - v).$$

From this it can be concluded that

$$u = m \frac{\pi}{2}, \quad v = n \frac{\pi}{2} \quad (8.3)$$

are without doubt a pair of solution at any integer value of  $m$  and  $n$ . According to the results obtained in § 4, it can be supposed that in case of  $a > 1$ , with the choice of  $m = 1$ , *i. e.* in case of

$$u_0 = \frac{\pi}{2}, \quad d_{10} = \frac{\pi}{2} \delta_1 \quad (8.4)$$

the resistance has a minimum. Let us now investigate the expressions of resistance for  $v = 0$ ,  $v = \pi/2$ ,  $v = \pi$  and  $v = \infty$ . As mentioned before in case of

$v = 0$  the expression (3.5) is obtained by the substitution  $a \rightarrow \infty$ . If further  $u = \pi/2$ , then from the approximate relationship (4.6)

$$\frac{R}{R_1} = 1 - 2 \frac{a\beta - 1}{a\beta + 1} e^{-\pi} + 2 \left( \frac{a\beta - 1}{a\beta + 1} \right)^2 e^{-2\pi}, \quad u = \frac{\pi}{2}, \quad v = 0. \quad (8.5)$$

If  $u = \pi/2$  and  $v = \pi/2$ , then

$$\frac{R}{R_1} = \frac{(\beta^2 + 1) \operatorname{sh} 2\pi + 2\beta \operatorname{ch} 2\pi - 2\zeta(\beta^2 - 1) \operatorname{sh} \pi - 2\zeta^2 \beta}{(\beta^2 + 1) \operatorname{ch} 2\pi + 2\beta \operatorname{ch} 2\pi + 4\zeta(\operatorname{ch} \pi + \beta \operatorname{sh} \pi) + 2\zeta^2 - \beta^2 + 1}. \quad (8.6)$$

Developing a progression in powers of  $e^{-\pi}$

$$\frac{R}{R_1} = 1 - 2 \frac{a-1}{a+1} e^{-\pi} + \frac{2}{1+\beta} \left[ \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^2 - 1 + \beta \right] e^{-2\pi}, \quad u = \frac{\pi}{2}, \quad v = \frac{\pi}{2}. \quad (8.7)$$

If  $u = \pi/2$  and  $v = \pi$ , then, with a similar approximation,

$$\frac{R}{R_1} = 1 - 2 \frac{a-1}{a+1} e^{-\pi} + 2 \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^2 e^{-2\pi}, \quad u = \frac{\pi}{2}, \quad v = \pi. \quad (8.8)$$

Finally, if  $v \rightarrow \infty$  and  $u = \pi/2$ , then according to (4.6)

$$\frac{R}{R_1} = 1 - 2 \frac{a-1}{a+1} e^{-\pi} + 2 \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^2 e^{-2\pi}, \quad u = \frac{\pi}{2}, \quad v = \infty. \quad (8.9)$$

Comparing (8.8) and (8.9), it can be seen that if  $v \geq \pi$  then the lower layer plays practically no part. On the other hand, comparing (8.5) and (8.9) it follows that if  $a\beta > a$ , i. e.  $\beta > 1$  (the intermediate layer is a better conductor than the lowest one) then the intermediate layer will only increase the resistance because the coefficient of  $e^{-\pi}$  is, in the case of  $v = 0$  a larger negative number than in case of  $v \rightarrow \infty$ . If  $\beta < 1$  then the situation is reversed. Observing the coefficients of  $e^{-2\pi}$ , after comparison of (8.7) with (8.8) it can be found that in case of

$$\beta < \frac{(\alpha + 1)^2}{4\alpha} > 1 \quad (8.10)$$

there is a minimum at the point  $v = \pi/2$  and a maximum in the contrary case. In any case these effects are very small because of  $e^{-2\pi} = 1,87 \cdot 10^{-3}$ .

If  $\gamma_3 \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ , then we obtain the case of a two-layer plate. Restricting ourselves to the given case of  $u = \pi/2$  we have the following connections:

$$\frac{R}{R_1} = 1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-2\pi}, \quad u = \frac{\pi}{2}, \quad v = 0; \quad (8.11)$$

$$\frac{R}{R_1} = 1 - 2\zeta e^{-\pi} + 2e^{-2\pi}, \quad u = \frac{\pi}{2}, \quad v = \frac{\pi}{2}, \quad (8.12)$$

$$\frac{R}{R_1} = 1 - 2\zeta e^{-\pi} + 2\zeta^2 e^{-2\pi}, \quad u = \frac{\pi}{2}, \quad v = \pi. \quad (8.13)$$

Since  $\zeta < 1$  so the resistance is the lowest in case of  $v = 0$  ( $d_2 = 0$ ) and has a maximum at  $v = \pi/2$ . If  $\zeta < e^{-\pi}$ , i. e.  $a < 1,090$ , then, in case of  $v = \pi/2$ ,  $R/R_1$  may be even larger than 1, so that, the minimum ensured by  $u = \pi/2$  "vanishes". Considering the antecedents in § 4 this is not surprising, as it was shown there that, even in case of a plate of homogeneous material it is inadequate to select a plate which is thicker than the optimum.

The distribution of the current in this case also is a special one, supposing  $u = \pi/2$  and  $v = \pi/2$ ;  $I_3$  is just in the opposite phase against  $I$  while  $I_2 + I_3$  is lagging behind  $I$  by  $90^\circ$ .

It must be stressed here that the pair of solutions  $u = m\pi/2$ ,  $v = n\pi/2$  do not mean in any way that with a fixed  $v$ , the ratio  $R/R_1$  as a function of  $u$  must have extreme values exclusively at the point  $u = m/2$ . The solution of the first equation in (8.2) according to  $u$  is also a hopeless task. However, the most interesting is the investigation of the case when  $u < 1$ . If  $u \rightarrow 0$ , then

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{R}{R_1} \right) = -K(\beta^2 - 1) \sin 2v, \quad (8.14)$$

where  $K$  is a positive number (depending on  $v$ ). If  $v \neq n\pi/2$ , then it differs from zero. It is known that in case of  $a > 1$   $R/R_1$  has a minimum at point  $u = \pi/2$  (or at least its environment). If on the other hand  $\beta < 1$  and  $2v < \pi$  then according to (8.14)  $R/R_1$  as a function of  $u$  at first increases, therefore the maximum is shifted from point  $u = 0$ . Supposing  $u < 1$  we get, after expanding in series the first equation in (8.2) in powers of  $u$ , the following relation concerning the point of the first extreme value:

$$u = \frac{(\beta^2 + 1) \operatorname{sh} 2v + 2\beta \operatorname{ch} 2v}{2f(v)} (1 + \zeta^2) \sin 2v, \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} f(v) = & - (1 + \zeta^2) [(\beta^2 + 1) \operatorname{sh} 2v + 2\beta \operatorname{ch} 2v] \cos 2v - \\ & - (1 + \zeta^2) [(\beta^2 + 1) \operatorname{ch} 2v + 2\beta \operatorname{sh} 2v] \sin 2v - \\ & - 2\zeta(\beta^2 - 1) \sin 2v \cos 2v - \\ & - \frac{2\zeta}{(1 - \zeta^2)(\beta^2 - 1)} [(\beta^2 + 1) \operatorname{sh} 2v + 2\beta \operatorname{ch} 2v] [(\beta^2 + 1) \operatorname{ch} 2v + 2\beta \operatorname{sh} 2v - \zeta^2]. \end{aligned} \quad (8.16)$$

The shifting of the extreme value point in the vicinity of  $u = m \pi/2$  can be similarly calculated. This has, nevertheless, no special importance. The first extreme value is interesting, because it shows that in case of applying a layer of lower conductivity than that of the base (index 3), the resistance will increase, instead of decreasing, if the surface coating is too small. This layer must, therefore, be positively thicker than the value of  $u$  fixed by (8.15). This increase of resistance, as well as the minimum resistance are caused by the unequal distribution of the current.

### 9. Impedance of the laminated cylindrical conductor

In most practical cases instead of a plate shaped arrangement, we find a cylindrical one. The impedance of the laminated cylindrical conductor (Fig. 11) is

$$\frac{R + j \omega L}{R_1} =$$

$$= (j - 1) \frac{\alpha J_{021} (J_{010} H_{111}^{(1)} - J_{111} H_{010}^{(1)}) + J_{121} (J_{011} H_{010}^{(1)} - J_{010} H_{011}^{(1)})}{\alpha J_{021} (J_{110} H_{111}^{(1)} - J_{111} H_{110}^{(1)}) + J_{121} (J_{011} H_{110}^{(1)} - J_{110} H_{011}^{(1)})}. \quad (9.1)$$

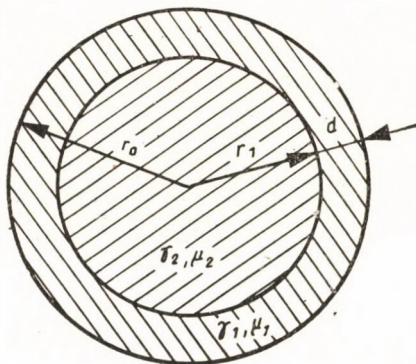


Fig. 11. Laminated solid cylindrical conductor

$J_n(x)$  resp.  $H_n^{(1)}(x)$  is the Bessel-function of the  $n$ -th order resp. the Hankel-function of the first kind. Further

$$J_{010} \equiv J_0 \left( \frac{j-1}{\delta_1} r_0 \right), \quad J_{011} \equiv J_0 \left( \frac{j-1}{\delta_1} r_1 \right), \text{ etc.}$$

With the same method the impedance of a cylindrical hollow conductor can be calculated (Fig. 12). Such are e. g. the laminated feedback of a coaxial



cable or the coated wall of a wave guide. While in the first case the coefficient of the Hankel-function in the range  $0 < r < r$  must be taken as zero because it convergates to infinite when  $r \rightarrow 0$ , on the other hand, in the present case the coefficient of the Bessel-function must be taken as zero, because it will become infinite in case of  $r \rightarrow \infty$ . Strictly speaking this solution is right only in that case if the outer radius is infinite. If, on the other hand,  $(r_2 - r_1) \ll \delta_2$  then the

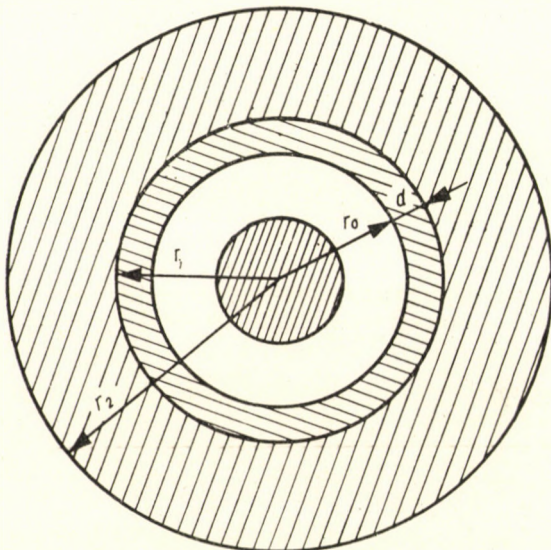


Fig. 12. Laminated hollow cylindrical conductor with internal feedback

result will not be influenced by the fact that  $r_2$  is finite. Finally, in the expression of the impedance the substitutions  $J_{021} \rightarrow H_{021}^{(1)}$ ,  $J_{121} \rightarrow H_{121}^{(1)}$  must be made so, that we have for the case shown in Fig. 12.

$$\frac{R + j\omega L}{R_1} = - (j - 1) \frac{\alpha H_{021}^{(1)} (J_{010} H_{111}^{(1)} - J_{111} H_{010}^{(1)}) + H_{121}^{(1)} (J_{011} H_{010}^{(1)} - J_{010} H_{011}^{(1)})}{\alpha H_{021} (J_{110} H_{111}^{(1)} - J_{111} H_{110}^{(1)}) + H_{121}^{(1)} (J_{011} H_{111}^{(1)} - J_{110} H_{011}^{(1)})} \quad (9.2)$$

Though the functions occurring in (9.1) and (9.2) are available in tabular form, this relation, nevertheless, demands too lengthy calculations to be serviceable in practice (namely the functions  $J$  and  $H$  are themselves complex). Our task is to transform this relation into a form more suitable for approximate calculations. First of all the high frequency case is considered here when generally  $r_1/\delta_1 \gg 1$ .

The most obvious is to state that the curvature has no great influence if the skin depth is small compared to the radius. It follows from this that a good approximation is obtained by applying the relations (3.5—3.10) as given in § 3 for the laminated half-space. The outer (resp. inner) circumference of the conductor must be taken instead of the width  $h$  so that  $h = 2 r_0 \pi$  and thus

$$R_1 = \frac{1}{\gamma_1 2 r_0 \pi \delta_1} . \quad (9.3)$$

At the same time it is evident that a finite curvature requires some correction the latter being smaller when the relation  $\delta_1/r_0$  is smaller. Such approximate relations are known. Handbook [5] essentially surveys the results as given in paper [6]. Nevertheless, these relations are still too complicated, because the separation of the complex impedance into real and imaginary terms must be made in each case one by one. On this basis not even the character of the extreme value can be investigated.

In the following only the correction concerning resistance will be calculated because reactance under such conditions is otherwise very small and, therefore, has no essential importance.

### 10. High-frequency resistance of the laminated cylindrical conductor

Let us investigate the resistance of the laminated cylindrical conductor in the case when the radii of the conductor are much greater than the skin depths. Then

$$\frac{r_0}{\delta_1} \gg 1, \quad \frac{r_1}{\delta_1} \gg 1, \quad \frac{r_1}{\delta_2} \gg 1 .$$

Under such conditions the cylindrical functions can be approximated by Hankel's semiconvergent series for big arguments. These have substantially the form

$$K \frac{e^{\pm r/\delta}}{\sqrt{r/\delta}} \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{(r/\delta)^k} .$$

Neglecting the terms of the order  $(\delta/r)^2$  and those of higher order, the expression of the resistance can be divided into two parts. The first term corresponds to the resistance of a laminated half-space which has a  $d$  layer thickness and an  $h = 2 r_0 \pi$  width and this will be designated by  $R^*$ . The second term corresponds to the correction required for the curvature. Omitting the lengthy calculations only the final results are given here.

In first approximation, in case of either solid or hollow conductors  $R/R_1 = R^*/R_1$ , where, according to (3.5),

$$\frac{R^*}{R_1} = \frac{(\alpha^2 + 1) \operatorname{sh} 2u + 2\alpha \operatorname{ch} 2u + (\alpha^2 - 1) \sin 2u}{(\alpha^2 + 1) \operatorname{ch} 2u + 2\alpha \operatorname{sh} 2u - (\alpha^2 - 1) \cos 2u}. \quad (10.1)$$

Approximate forms of this relation were already given in § 3. The corrections expressing the curvature are of the order  $\delta/r$ . With the notation in Figs. 11 and 12 the correction terms for solid, resp. hollow arrangements vary only in sign:

$$\frac{R}{R_1} = \frac{R^*}{R_1} \pm \frac{\delta_1}{2r_0} \pm \left( 3 \frac{\alpha^2 - 1}{2} \frac{\delta_1}{r_0} - \frac{3\alpha^2 + 1}{2} \frac{\delta_1}{r_1} + 2\alpha \frac{\delta^2}{r_1} \right) \psi_0(u), \quad (10.2)$$

where

$$\begin{aligned} \psi_0(u) &= \frac{(\alpha^2 + 1) \operatorname{ch} 2u \cos 2u + 2\alpha \operatorname{sh} 2u \cos 2u - \alpha^2 + 1}{N(u)}, \\ N(u) &= (\alpha^4 + 6\alpha^2 + 1) \operatorname{ch} 4u + 4\alpha(\alpha^2 + 1) \operatorname{sh} 4u - \\ &\quad - 4(\alpha^2 - 1) [(\alpha^2 + 1) \operatorname{ch} 2u + 2\alpha \operatorname{sh} 2u] \cos 2u + \\ &\quad + (\alpha^2 - 1)^2 (2 + \cos 4u). \end{aligned} \quad (10.3)$$

In (10.2) the positive sign corresponds with the solid conductor, the negative sign corresponds with the hollow one. It can be seen from (10.3) that in case of  $u > 1$  we get  $\psi_0(u) \ll 1$  and thus

$$\frac{R}{R_1} = \frac{R^*}{R_1} \pm \frac{\delta_1}{2r_0}, \quad u = \frac{d}{\delta_1} > 1. \quad (10.4)$$

On the other hand, if  $u = 0$ , then  $\psi_0(u) = 0,25$ . Since in such a case, we can write  $r_1 \approx r_0$  then

$$\frac{R}{R_1} = \frac{R^*}{R_1} \pm \frac{\delta_2}{2r_0}, \quad u \ll 1. \quad (10.5)$$

Finally, we have concluded that the resistance of a solid conductor is somewhat higher, that of the hollow one somewhat lower, than the resistance of an equivalent planar arrangement. This is fully understandable, because in the first case the circumference of the conductor is always smaller than at the outline ( $r = r_0$ ) while in the second case it is always greater.

### 11. Impedance of a conductor with annular cross section

In case of a conductor with annular cross section (tubular one) the second layer is an insulator so that  $\gamma_2 = 0$  and thus  $a \rightarrow \infty$  and  $1/\delta_2 = 0$ . Then  $J_{021} \rightarrow 0_{121}$ ,  $J_{121} \rightarrow 0$ ,  $H_{021}^{(1)} \rightarrow \infty$  and  $H_{121}^{(1)} \rightarrow \infty$ . Concerning the impedance of an externally induced tube, from (9.1) is obtained

$$\frac{R + j\omega L}{R_1} = (j - 1) \frac{J_{010} H_{111}^{(1)} - J_{111} H_{010}^{(1)}}{J_{110} H_{111}^{(1)} - J_{111} H_{110}^{(1)}}. \quad (11.1)$$

Should the impedance of an internally excited tube be calculated the following limit values are to be taken into consideration

$$\frac{1}{\alpha} \frac{H_{121}^{(1)}}{H_{020}^{(1)}} \sim x \frac{\frac{2}{\pi x}}{\ln \frac{1}{x}} \rightarrow 0, \text{ if } x \rightarrow 0,$$

where  $x \sim \sqrt{\gamma_2}$ . It follows from this that, for an internally excited tubular conductor from (9.2) we have:

$$\frac{R + j\omega L}{R_1} = - (j - 1) \frac{J_{010} H_{111}^{(1)} - J_{111} H_{010}^{(1)}}{J_{110} H_{111}^{(1)} - J_{111} H_{110}^{(1)}}. \quad (11.2)$$

It can be seen that it is sufficient only to make the transition  $a \rightarrow \infty$  formally in both cases. Considering the preceding, the following relation can be given concerning the resistance of a tubular conductor.

$$\frac{R}{R_1} = \frac{R^*}{R_1} \pm \frac{\delta_1}{2r_0} \pm 3 \frac{\delta_1}{2r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \psi_1(u), \quad (11.3)$$

$$\frac{R^*}{R_1} = \frac{\text{sh } 2u + \sin 2u}{\text{ch } 2u - \cos 2u}, \quad (11.4)$$

$$\psi_1(u) = \frac{\text{ch } 2u \cos 2u - 1}{\text{ch } 4u - 4 \text{ch } 2u \cos 2u + \cos 4u + 2}. \quad (11.5)$$

The upper sign corresponds with the externally induced tube, the lower sign with the internally excited one. If  $u > 1$  then  $\varphi_1(u) \ll 1$ . On the other hand, if  $u \rightarrow 0$  then it can be proved by means of a limit calculation that  $\varphi_1(u) = -1/12$ . As in this case  $r_0/r_1 \approx 1$ , the relation

$$\frac{R}{R_1} = \frac{R^*}{R_1} \pm \frac{\delta_1}{2r_0} \quad (11.6)$$

can be used in both cases. The following somewhat more exact relation is valid if  $u < 1$

$$\frac{R}{R_1} = \frac{R^*}{R_1} \pm \frac{\delta_1}{2r_0} (1 + 2u), \quad u < 1. \quad (11.7)$$

## 12. Extreme values of the A. C. resistance of a laminated cylindrical conductor

According to the results of the calculations as expressed in § 10 and 11, the high frequency resistance of laminated cylindrical conductors, resp. of annular cross section conductors differs only by a correction factor from the resistance of laminated cylindrical conductors, resp. plates. This correction factor contains two parts. The part  $\delta_1/2r_0$  is independent of the layer thickness. As the second part which is proportional to  $\psi_0(u)$ , resp.  $\psi_1(u)$  is smaller than the former, it can be stated, with a good approximation, that the resistance has extreme values in function of the layer thickness at the points

$$d = k \frac{\pi}{2} \delta_1 \quad (12.1)$$

just as in the case of a laminated half-space or of a plate. If  $a > 1$  then the first extreme is a minimum here, also while it is a maximum if  $a < 1$ . The minimum resistance can be calculated on basis of (4.6) or (4.7) taking into consideration the corrections of § 10 and 11. In case of a coating having a thickness  $d_0 = \delta_1 \pi/2$

$$\frac{R_0}{R_1} = 1 - 8,64 \cdot 10^{-2} \zeta + 3,7 \cdot 10^{-3} \zeta^2 \pm \frac{\delta_1}{2r_0}, \quad (12.2)$$

while in case of a tube having a thickness  $d_0 = \delta_1 \pi/2$

$$\frac{R_0}{R_1} = 0,9168 \pm \frac{\delta_1}{2r_0}. \quad (12.3)$$

The upper sign is valid for external and the lower one for internal excitation.

Since according to the results of § 10 and 11 under the conditions  $\delta/r_0 \ll 1$  which is generally the case with high frequencies, the corrections required for the curvature is insignificant, we have not made the calculation for the cylindrical conductor with a double coating. As a first approximation we obtain, namely, the same resistance as in the arrangement of a two-layered plate. As a second approximation the corrections deducted in § 10, resp. 11

can be applied, if, however,  $u = d_1/\delta_1$  and  $v = d_2/\delta_2$  are not very small, the influence of a third layer on the otherwise already small correction factor is obviously almost negligible.

### 13. Investigation of the silver-palladium-copper system

To give a numerical illustration of our calculations, let us investigate the conditions existing on a silvered copper surface. As mentioned before, an intermediate palladium layer is also needed for technological reasons. The value of the material characteristics are [2]:

1. Silver  $\gamma_1 = 62,75 \text{ Smm}^2/\text{m}$
2. Palladium  $\gamma_2 = 9,07 \text{ Smm}^2/\text{m}$
3. Copper  $\gamma_3 = 58 \text{ Smm}^2/\text{m}$

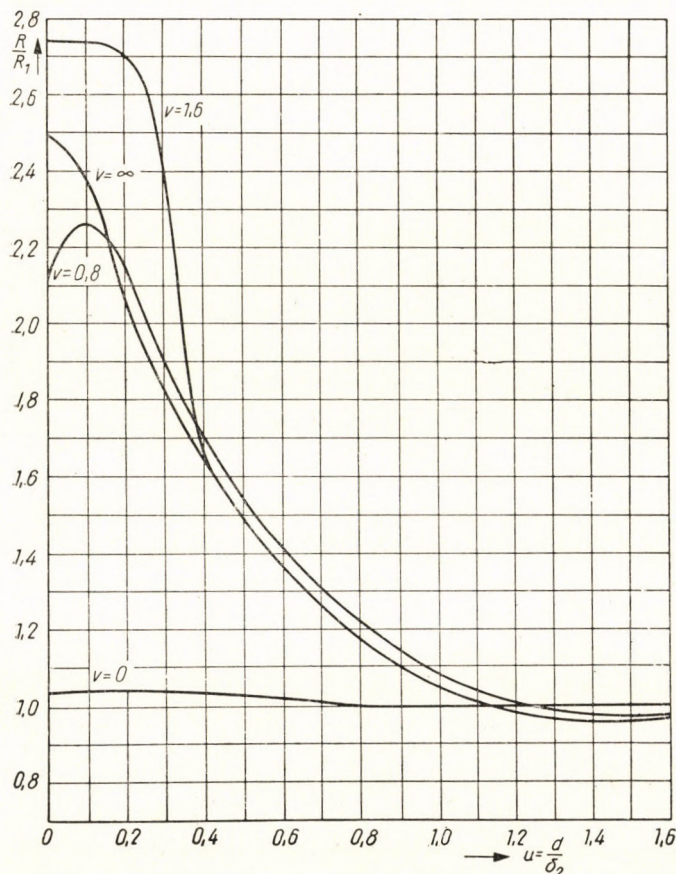


Fig. 13. Varying of the resistance in function of the thickness of the upper layer. The thickness of the second layer is constant at each single curve

As none of the media is ferromagnetic, we can write for each of them

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V_s}{Am}$$

Hence

$$a = 2,62; \beta = 0,396; a\beta = 1,041; \zeta = 0,447.$$

In Fig. 13 the varying  $R/R_1$  is given as a function of  $u$ , supposing  $v = \text{const}$ . In case of a constant frequency the variable  $u = d_1/\delta_1$  is proportional

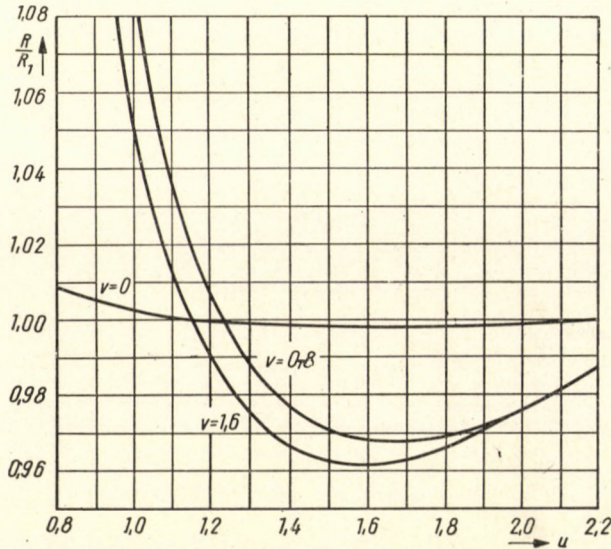


Fig. 14. Varying of the resistance in the environment of the minimum as function of the thickness of upper layer. The thickness of the second layer is constant at each single curve

to the layer thickness of silver, while the parametre  $v = d_2/\delta_2$  is proportional to that of palladium. This case  $v = 0$  means that silver and copper are in immediate contact. If, on the other hand,  $v = \infty$  then the thickness of the palladium layer is infinite. These two curves can be plotted from (3.5) in case of  $v = 0$ , by means of the substitution  $a \rightarrow a\beta$  while in case of  $v = \infty$  by means of the substitution  $a \rightarrow \beta$ . The other two curves ( $v = 0,8$  and  $v = 1,6$ ) were plotted on the basis of (7.8).

The environment of the point  $u = \pi/2$  is shown enlarged in Fig. 14. It can actually be seen that the minimum resistance has a minimum in case of  $v = \pi/2$ . (To simplify the calculation the curve belonging to  $v = 1,6$  and not that belonging to  $v = \pi/2 = 1,57$  was plotted here, however, the variations here are so slow that practically no difference exists.) The curve belonging to

$v = \infty$  practically coincides above  $u = 0,4$  with the curve whose parametre value is  $v = \pi/2 \approx 1,6$  (yet theoretically according to (8.7) the minimum resistance in case of  $v = \pi/2$  is somewhat lower than at  $v = \infty$ ).

In Fig. 13 the effect which was mentioned in connection with the relation (8.14) can be observed, *i. e.* the fact that if  $0 < v < \pi/2$  then the resistance is at first growing in case of a thin silver coating. The point of the first maximum calculated from (8.15) is given by the curve in Fig. 15. In case of  $v = 0,8$  we obtain  $u = 0,077$  in good accordance with the value which can be read also in Fig. 13. Most significant is this effect, of course, in case of  $v = \pi/2$ . Namely, in the case  $u = 0$ , *i. e.* there is only one coating, the resistance has

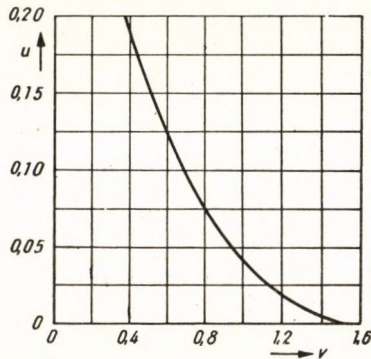


Fig. 15. Point  $u = d_1/\delta_1$  of the first maximum of the resistance as function of the parametre  $v = d_2/\delta_2$

a maximum at  $v = \pi/2$ , because the upper layer (palladium) is a worse conductor than the lower one (copper).

According to the establishments of § 12, these characteristics can also be essentially found with a conductor of circular cross section, if the radius of the conductor is much greater than the skin depth. Skin depth as functions of frequency can be read on Fig. 1.

#### REFERENCES

- 1a. SIMONYI, K.: Elméleti villamosságatan. (Theory of electrical engineering.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1958.
- 1b. SIMONYI, K.: Theoretische Elektrotechnik. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1956.
2. ISTVÁNFY, E.: Mikrohullámok technikája és rádiólokátorok. (Technology of micro-waves and radiolocators.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.
3. RAMO, S.—WHINNERY, J. R.: Fields and Waves in Modern Radio. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1945.
4. FODOR, GY.: Kvázistacionárius terek. (Quasi-stationary fields.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.



5. Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker III. Verl. für Radio-Kinotechnik GmbH, Berlin, 1957.
6. KRUSSE, H.—ZINKE, O.: Stromverdrängung in geschichteten zylindrischen Leitern. Hochfrequenztechnik und Elektroakustik 44. 6. p. 185. 1934.
7. BECKMANN, P.: The Reflection of Electromagnetic Waves and Synthesis of Media. Acta Technica, Praga, 1956.
8. JAHNKE—EMDE: Tafeln höherer Funktionen. B. G. Taubner Verlagsg., Leipzig, 1952.

### SUMMARY

Starting out from the well-known relations of the laminated half-space, we have calculated the extreme value of A. C. resistance and reactance as functions of layer thickness. It can be stated that, if the material of the upper layer is a better conductor, the resistance has a minimum in case of a layer thickness (or plate thickness) of  $d = \delta_1\pi/2$  and this minimum is lower than the resistance of a half-space wholly made of this material of better conductivity. This difference is, however, not significant.

An expression for the resistance and reactance of a half-space with double lamination resp. of a two-layered plate was determined. If the upper layer is the best conductor and the intermediate layer is the worst one, then the resistance has a minimum at  $d_1 = \delta_1\pi/2$  and  $d_2 = \delta_2\pi/2$ . Under such conditions the application of very thin coatings will not diminish but, on the contrary, will increase the resistance.

Finally, an approximate relation was set up concerning the cylindrical laminated conductors of circular resp. annular cross sections. As a first approximation the same relations were found as for an equivalent planar arrangement. As a second approximation correction terms were obtained which depend on the kind of excitation (method of feedback). As the correction terms can be considered as independent of the layer thickness (wall thickness), therefore, in a second approximation, we also find valid the same establishments concerning the extreme values as with the laminated half-space. Neglecting further corrections this was found right, if the skin depth is much smaller than the radius of the conductor.

## DIE WECHSELSTROMIMPEDANZ VON GESCHICHTETEN LEITERN

GY. FODOR

### ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der bekannten Zusammenhänge für den geschichteten Halbraum wurden die Extremwerte der Wechselstromwiderstand und der Reaktanz in Abhängigkeit von der Schichtdicke bestimmt. Es kann festgestellt werden, daß, wenn der Stoff der oberen Schicht besser leitet, für eine Schichtdicke (oder Blechdicke) von  $d_1 = \delta_1\pi/2$  der Widerstand ein Minimum aufweist, welches kleiner ist als wenn der ganze Halbraum aus diesem Stoff mit besserer Leitfähigkeit bestehen würde, obgleich der Unterschied nicht bedeutend ist.

Die Ausdrücke für den Widerstand und die Reaktanz des mit doppelter Schichtung versehenen Halbraums bzw. der zweischichtigen Platte wurden bestimmt. Wenn die obere Schicht der beste Leiter ist und die mittlere der schlechteste, so hat der Widerstand für  $d_1 = \delta_1\pi/2$  und  $d_2 = \delta_2\pi/2$  ein Minimum. Unter solchen Bedingungen verringert die Verwendung von ganz schwachen Überzügen den Widerstand nicht, sondern vergrößert ihn.

Schließlich wurde ein annähernder Zusammenhang für den zylindrischen geschichteten Leiter mit Kreisquerschnitt und den zylindrischen Leiter mit Kreisringquerschnitt bestimmt. In erster Annäherung ergaben sich Korrektionsglieder, welche von der Art der Erregung (der Leg der Stromrückführung) abhängen. Da die Korrektionsglieder als von der Schichtdicke (Wandstärke) unabhängig angesehen werden können, sind auch in zweiter Annäherung, was die Extremwerte anbetrifft, für die zylindrischen Leiter dieselben Feststellungen gültig wie für den geschichteten Halbraum. Die Vernachlässigung der weiteren Korrekturen ist dann berechtigt, wenn die Eindringtiefe viel kleiner ist als der Halbmesser des Leiters.

## IMPÉDANCE A COURANT ALTERNATIF DES CONDUCTEURS STRATIFIÉS

Gy. FODOR

## RÉSUMÉ

Partant des relations connues relatives au demi-espace stratifié, on a déterminé les valeurs extrêmes de la résistance et de la réactance à courant alternatif, en fonction de l'épaisseur de la couche. On peut établir que si la matière de la partie supérieure est meilleure conductrice, alors en cas d'une épaisseur de couche  $d = \delta_1 \pi/2$ , la résistance possède un minimum qui est plus petit que si le demi-espace était entièrement composé de cette matière meilleure conductrice; mais la différence n'est pas importante.

On a établi l'expression de la résistance et de la réactance de demi-espace à double stratification et de la lame à double couche. Si la couche supérieure est la meilleure conductrice, et celle du milieu la moins bonne, alors la résistance a un minimum en cas de  $d_1 = \delta_1 \pi/2$  et  $d_2 = \delta_2 \pi/2$ . Dans ces conditions particulières, l'emploi de revêtements très petits n'augmente pas, mais diminue la résistance.

On a finalement déterminé une équation approchée pour le conducteur cylindrique stratifié à section circulaire, et pour le conducteur cylindrique à section annulaire. Dans une première approximation, on obtient les mêmes relations que pour l'arrangement des plans équivalents. Dans une deuxième approximation, on obtient des facteurs de correction dépendant du mode d'excitation (de la position du retour de courant). Les facteurs de correction pouvant être considérés comme indépendants de l'épaisseur de couche (épaisseur de la paroi), au point de vue des valeurs extrêmes, les conclusions valables pour les demi-espaces stratifiés le sont aussi, même dans une deuxième approximation, pour les conducteurs cylindriques. L'omission des autres corrections est justifiée lorsque la profondeur de pénétration est beaucoup plus faible que le rayon du conducteur.]

## ИМПЕДАНС ПЕРЕМЕННОГО ТОКА МНОГОСЛОЙНЫХ ПРОВОДНИКОВ

Д. ФОДОР

## РЕЗЮМЕ

Исходя из познания взаимозависимостей многослойного полупространства, были установлены предельные значения сопротивления переменного тока и реактанса в зависимости от толщины слоя. Можно установить, что если материал верхнего слоя лучший проводник, то в случае толщины слоя (или пластины)  $d = \delta, \pi/2$  сопротивление имеет минимум, который меньше, чем если б все полупространство состояло из этого материала с лучшей проводимостью, хотя разница незначительна.

Определено выражение сопротивления и реактанса полупространства с двойной слоистостью, т. е. двухслойной пластины. Если верхний слой наилучший проводник, а средний — наихудший, то минимум сопротивления мы имеем в случае  $d_1 = \delta_1 \pi/2$  и  $d_2 = \delta_2 \pi/2$ . При таких условиях применение совсем малых покрытий не уменьшает, а увеличивает сопротивление.

Наконец, приближенно определена взаимозависимость для многослойного цилиндрического проводника с круглым сечением, т. е. цилиндрического проводника с кольцевым сечением. В первом приближении получены те же зависимости, как для эквивалентного внутриплоскостного распределения. Во втором приближении появились коррекционные члены, зависящие от метода возбуждения (от положения возврата тока). Ввиду того, что коррекционные члены можно рассматривать как независимые от толщины слоя (толщины стенок), то и по второму приближению с точки зрения предельных значений для цилиндрических проводников действительны те же определения, что для многослойного полупространства. Пренебрежение дальнейшими коррекциями справедливо в том случае, если глубина проникновения намного меньше радиуса проводника.

# EXAMINATION OF THE COVER-FACTOR AND SPECIFIC WEIGHT OF WEFT-KNITTED OR LOOPED BASIS TEXTURE BASED ON THE EXACT VALUE OF THE LOOP LENGTH

A. VÉKÁSSY

DEPARTMENT OF TEXTILE TECHNOLOGY AND LIGHT INDUSTRY, TECHNICAL UNIVERSITY,  
BUDAPEST

[Manuscript received May 28, 1959]

The prototype of weft-knitted or looped fabrics is the so-called Ferrot fabric, which, according to the principles of interlacing, is of the most simple texture. A considerable part of the goods manufactured by the Hosiery Trade is produced by this interlacing.

Concerning an article of a certain type, one of the most important demands imposed on the Manufacturing Industry is always to produce an identical quality. To achieve this the technical data of the texture has to be given in an unambiguous manner.

For a Ferrot fabric type weft-knitted base texture the data are as follows:

## *Data of yarn :*

1. quality of material,
2. yarn count,
3. twist,
4. breaking force.

## *Data of texture :*

- a) density of the row of loops,
- b) density of wales,
- c) length of yarn taken up by one loop,
- d) weight per square meter.

As the Knitting Rooms receive already delivered yarn, there is only the possibility to alter the data of the texture. Whichever alteration or the change of any data would affect the rest of the data.

Among the characteristics of the texture the specific weight ( $\text{g/m}^2$ ) is the most important from the commercial point of view. The change of this may take place in two ways; *i. e.*

1. by altering the yarn count (when changing over to another article),
2. by altering the length of yarn taken up by one loop (if the extent of crimping of yarn is altered in the same article).

The exact setting of the specific weight of the texture can be done the quickest and the safest on basis of the yarn length contained in one loop.

One of the characteristics unambiguously determining the texture is the cover factor, which can be determined on basis of the loop length:

$$\sigma = \frac{l}{\delta}$$

The measuring of the loop length can be done both practically and theoretically. The practical method is based on development. This is a quick and sufficiently exact procedure, and is entirely suitable in working practice. The theoretical method determines the loop length by calculation from the geometrical arrangement of the texture.

#### Calculation of loop length in case of regular-close texture according to Dalidovich and Doyle

The length of the loop was calculated by the English DOYLE and the Soviet DALIDOVICH from the weft of an idealized texture visible on Fig. 1.

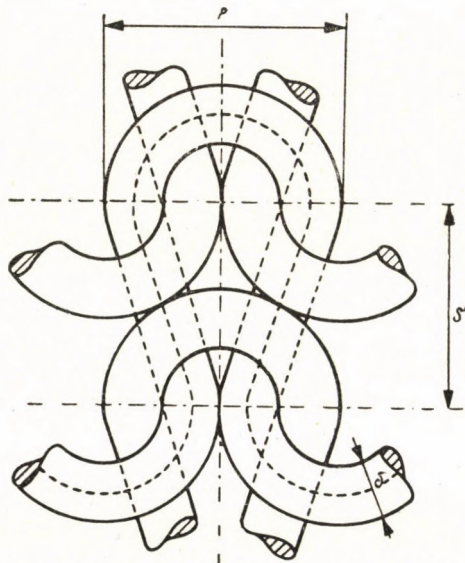


Fig. 1. Idealized loop-meshing according to DOYLE and DALIDOVICH

Limitations for carrying out the calculation:

1. the yarn must be without distortion, must be entirely even, and all its cross sections must be circular,

2. the projection of the texture must consist only of circular arches and straight pieces, the individual loop parts must contact each other only as points.

In case of texture of regular density the wale space ( $P$ ) is four times the yarn diameter (Fig. 2)

$$P = 4\delta.$$

The space of row of loops ( $S$ ) from the  $ABC$  triangle, since  $\alpha = 60^\circ$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} = \frac{2S}{P}$$

$$S = \frac{P\sqrt{3}}{2} = 2\delta\sqrt{3}.$$

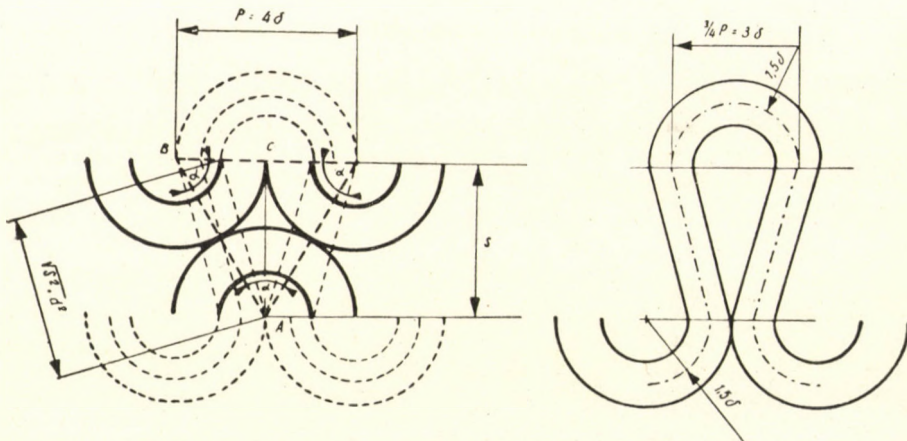


Fig. 2. Relation of wale space and loop-row space

Thus the length of the plane projection of the loop:

$$l = \frac{3P}{4}\pi + 2\sqrt{S^2 + \delta^2}$$

$$l = 3\delta\pi + 2\sqrt{13}\delta^2$$

$$l = \delta(3\pi + 2\sqrt{13}) = 16,64\delta.$$

This formula is very simple and easy to handle. The necessary setting data of the texture (density of wales, density of row of loops, specific weight of the texture) can be established from the yarn number.

Besides the above advantages the formula has the following disadvantages:

1. it refers to plane projection of such an imaginary loop, which does not exist in reality,
2. the length of the loops of the regular-close texture, constructed with a specified yarn diameter, is not identical with the length of the loops knitted from the yarn in a distortionless manner,
3. the formula is not a general, but only a specific solution, valid exclusively for the above-stated geometrical relations.

### Length of loop space-curve

If a more accurate value of the length of yarn forming the loop is to be attained, it has unconditionally to be taken into consideration that these should describe a space-curve.

In conformity with reality, one may arrive nearest to the space curve of the loop in accordance with Fig. 3 : the first picture is conformable to the plane

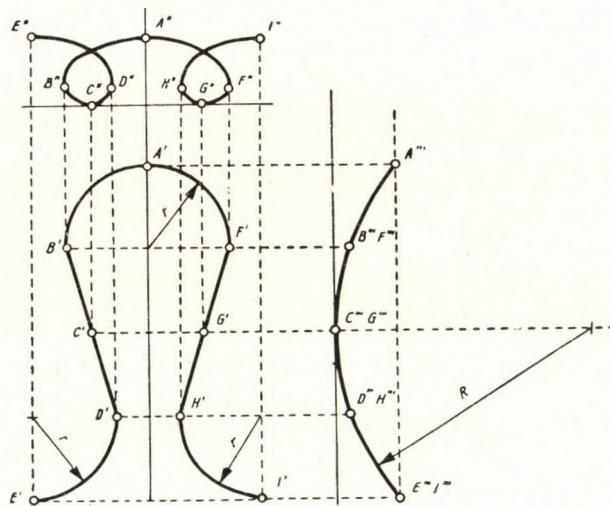


Fig. 3. Space-curve of loop

projection, assumed in the approximate calculations, the third picture conforms with a cylinder jacket with radius  $R$ , thus the second picture — resultant from the other two — will be cycloid-like.

The loop consists of four equally long parts:  $\widehat{AC} = \widehat{CE} = \widehat{AG} = \widehat{GI} = \frac{l}{4}$ , therefore it is sufficient to calculate the length of one section only (e. g.  $\widehat{AC}$ ).

The complete loop can be produced as a cylinder surface  $H$  with horizontal axis and radius  $R$ , and its perpendicular three cylinder surfaces  $F$ ,  $F_1$ , and  $F_2$  with radius  $r$ , as well as the joining penetration curve (Fig. 4) of the planes  $S$  and  $S_1$  parallel to the creators of the latter cylinder surfaces. In fact the above-quoted result in two symmetrical loop space-curves ( $E_1 A_1 I_1$  and  $E_2 A_2 I_2$ ).

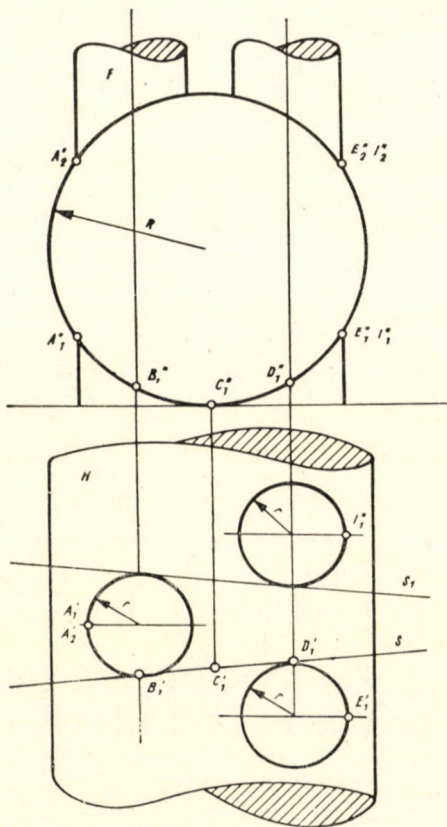


Fig. 4. Representation of the loop space-curve by penetration of cylinder surfaces

Contemplating only the nearer branch ( $A_1 E_1$ ) of the lower space-curve ( $E_1 A_1 I_1$ ), it is revealed that curve  $A_1 B_1$  arises from the penetration of cylinder jackets  $H$  and  $F$ , the curve  $B_1 D_1$  from the penetration of surfaces  $H$  and  $S$ , whilst curve  $D_1 E_1$  from the penetration of cylinder jackets  $H$  and  $F_1$ . It has already been established, that  $\overline{A_1 C_1} = \overline{C_1 E_1}$ , therefore, only the length of the quarter-loop  $A_1 B_1 C_1$ , arising from surfaces  $H_1$ ,  $F$ , and  $S$  has to be determined, which is thus made up of two parts:

$$\begin{aligned} \overline{A_1 B_1} &= s_1 \text{ penetration curve of cylinder jackets } H \text{ and } F \\ \overline{B_1 C_1} &= s_2 \text{ penetration curve of surfaces } H \text{ and } S. \end{aligned}$$

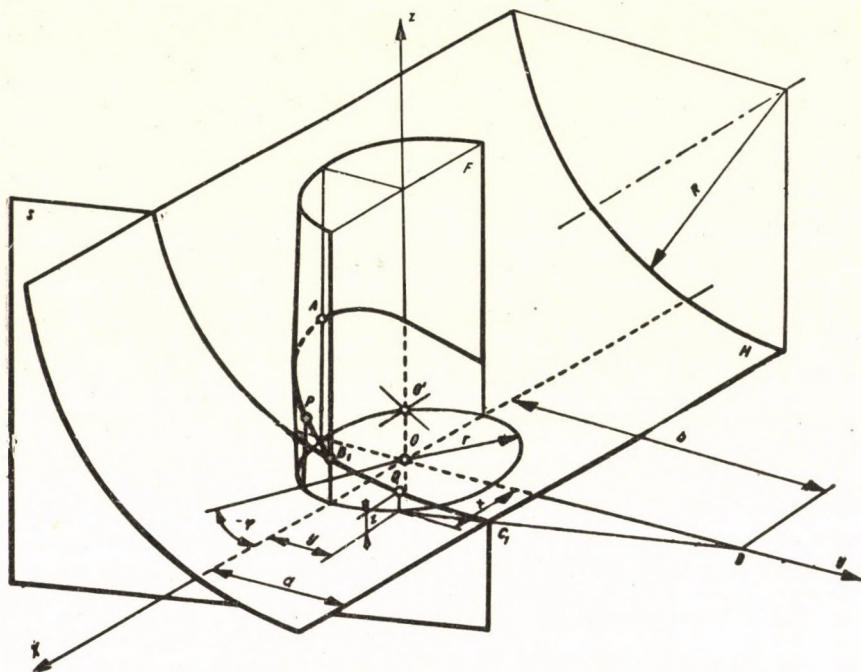


Fig. 5. Arrangement in the co-ordinate system of space of the surface portions needed for creating the quarter-loop space-curve  $A_1B_1C_1$

Figure 5 shows the photograph of the surface details required for the origination of the  $A_1B_1C_1$  quarter-loop space-curve, and of the co-ordinate system of space.

#### Equation of space-curve portion $s_1$

The equation of the straight circular cylinder  $F$ , with basic radius  $r$  :

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

The base circle of the circular cylinder  $H$ , with basic radius  $R$  lies on the co-ordinate plane  $yz$  and touches axis  $y$ . Its equation is:

$$(y - a)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

$$(y - a)^2 + z^2 - 2Rz = 0.$$

If we chose as parameter the angular displacement  $\varphi$  (Fig. 5), the co-ordinates of the projection on the plane  $xy$  of the space-curve  $A_1B_1$  :

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$



As the penetration curve solves the equation of both cylinders, one may write

$$(r \cdot \sin \varphi - a)^2 + z^2 - 2Rz = 0$$

$$z_{12} = R \pm \sqrt{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2}.$$

The two cylinders result in two penetration curves. As the co-ordinates of the point lying on the curve nearest to co-ordinate plane  $xy$  are required of the cover points, the smaller radix is taken:

$$z = R - \sqrt{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2}.$$

The parameter equation-system of the penetration curve  $A_1B_1$  is, therefore,

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$z = R - \sqrt{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2}. \quad (1)$$

#### Equation of space-curve portion $s_2$

The  $B_1C_1$  space-curve of  $s_2$  arch length joins the foregoing, and is brought about by intersecting the plane surface  $S$  the straight circular cylinder, which has a basic radius  $R$ , and is parallel to the co-ordinate axis  $x$ . Plane  $S$  intersects section  $r$  from the co-ordinate axis  $x$ , and is parallel to axis  $z$ . Calling  $b$  the distance cut off from axis  $y$ , the equation of the plane is

$$\frac{x}{r} + \frac{y}{b} = 1.$$

The equation-system of the sought space-curve  $B_1C_1$  is analytically given by the equation-system:

$$(y - a)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

$$\frac{x}{r} + \frac{y}{b} = 1.$$

With the form of the first equation solved  $z$ , one reckons with a root with a negative sign, because the branch of the space-curve nearest to the plane  $xy$  is taken into consideration. The parameter form of the equation-

system, if the  $y = t$  value is chosen as parameter:

$$\begin{aligned}x &= r \left( 1 - \frac{t}{b} \right) \\y &= t \\z &= R - \sqrt{R^2 - (t - a)^2}.\end{aligned}\tag{2}$$

For the purpose of determining the quarter-loop length, the arch-lengths  $s_1$  and  $s_2$  of the already known parameter equation-system space-curve parts have to be calculated.

### Length of space-curve $s_1$

In order to determine the arch-length  $s_1$ , the differential quotient of each equation-system (1) taken according to  $\varphi$  parameter is to be formed:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\varphi} &= -r \cdot \sin \varphi \\ \frac{dy}{d\varphi} &= r \cdot \cos \varphi \\ \frac{dz}{d\varphi} &= \frac{r(r \cdot \sin \varphi - a) \cdot \cos \varphi}{\sqrt{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2}}.\end{aligned}$$

Square amount of the differential quotients:

$$\begin{aligned}ds_1^2 &= \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\varphi} \right)^2 = r^2 + \frac{r^2(r \cdot \sin \varphi - a)^2 \cdot \cos^2 \varphi}{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2} \\ ds_1^2 &= \frac{R^2 r^2 - r^2(r \sin \varphi - a)^2(1 - \cos^2 \varphi)}{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2} \\ ds_1^2 &= r^2 \frac{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2 \cdot \sin^2 \varphi}{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2} \\ ds_1^2 &= r^2 \frac{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2 \cdot \sin^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi - R^2 \sin^2 \varphi}{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2} \\ ds_1^2 &= r^2 \left[ \sin^2 \varphi + \frac{R^2(1 - \sin^2 \varphi)}{R^2 - (r \sin \varphi - a)^2} \right]\end{aligned}$$

$$ds_1 = r \sqrt{\sin^2 \varphi \frac{R^2 \cos^2 \varphi}{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2}}$$

$$ds_1 = R \cdot r \frac{\cos \varphi}{\sqrt{R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \varphi [R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2]}{R^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$ds_1 = r \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r \cdot \sin \varphi - a}{R}\right)^2}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \varphi [R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2]}{R^2 \cos^2 \varphi}}$$

As the second expression below the roots in interval of  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  is in absolute value below 1

$$\left| \frac{r \cdot \sin \varphi - a}{R} \right| < 1$$

$$\left| \frac{\sin^2 \varphi [R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2]}{R^2 \cos^2 \varphi} \right| < 1$$

the binomials below the roots can be expanded in binomial series, and these series are convergent. (For the sake of expanding in series one does not integrate between the limits  $\varphi = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ , but between the limits  $\varphi = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$  and double the sum is taken. This means a slight error, which, however, is technically permissible.)

The sought for arch-length is therefore:

$$s_1 = 2r \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r \cdot \sin \varphi - a}{R}\right)^2}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \varphi [R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2]}{R^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi$$

Having made the expansion in series:

$$s_1 = 2r \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r \cdot \sin \varphi - a}{R}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{r \cdot \sin \varphi - a}{R}\right)^4 + \right. \\ \left. + \frac{15}{48} \left(\frac{r \cdot \sin \varphi - a}{R}\right)^6 + \dots \right] \cdot \left[ 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \varphi [R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2]}{R^2 \cos^2 \varphi} - \frac{1}{8} \left(\frac{\sin^2 \varphi [R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2]}{R^2 \cos^2 \varphi}\right)^2 + \dots \right] d\varphi$$

After having carried out the multiplication and neglected the higher rate terms, the following expression is gained as regards arch-length:

$$s_1 = 2r \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \left\{ \cos \varphi + \frac{1}{2} \left( \frac{r \cdot \sin \varphi - a}{R} \right)^2 \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \varphi [R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2]}{R^2 \cos \varphi} \right\} d\varphi + \\ s_1 = 2r \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi + \frac{r}{R^2} \int_0^{-\frac{\pi}{4}} (r \cdot \sin \varphi - a)^2 \cos \varphi d\varphi + \\ + \frac{r}{R^2} \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \varphi [R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2]}{\cos \varphi} d\varphi$$

Let it be:

$$u = \sin \varphi \\ du = \cos \varphi d\varphi$$

$$s_1 = 2r \left[ \sin \varphi \right]_0^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{r}{R^2} \int_0^{\sin^{-\frac{\pi}{4}}} (r \cdot u - a)^2 du + \\ + \frac{r}{R^2} \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \varphi [R^2 - (r \cdot \sin \varphi - a)^2]}{\cos \varphi} d\varphi \\ s_1 = -r\sqrt{2} + \frac{r}{R^2} \left[ \frac{r^2}{3} u^3 - rau^2 + a^2 u \right]_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + r \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} d\varphi - \\ - \frac{r^3}{R^2} \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 \varphi}{\cos \varphi} d\varphi \\ + \frac{2r^2 a}{R^2} \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} d\varphi - \frac{r \cdot a^2}{R^2} \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} d\varphi$$

$$s_1 = -r\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{r^3}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2 a}{R^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r a^2}{R^2} + \frac{r(R^2 - a^2)}{R^2} \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} d\varphi -$$

$$- \frac{r^3}{R^2} \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 \varphi}{\cos \varphi} d\varphi + \frac{2r^2 a}{R^2} \int_0^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} d\varphi.$$

For the purpose of calculating the integrals, substitute  $u = \sin \varphi$ . In this case

$$\varphi = \arcsin u$$

$$d\varphi = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1-u^2}.$$

After carrying out the integral transformation, the arch-length is:

$$s_1 = -r\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{r^3}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2 a}{R^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r a^2}{R^2} + \frac{r(R^2 - a^2)}{R^2} \int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2}{1-u^2} du +$$

$$+ \frac{2r^2 a}{R^2} \int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^3}{1-u^2} du - \frac{r^3}{R^2} \int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^4}{1-u^2} du$$

$$s_1 = -r\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{r^3}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2 a}{R^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r a^2}{R^2} - \frac{r(R^2 - a^2)}{R^2} \int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du - \frac{2r^2 a}{R^2} \int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( u + \frac{u}{u^2 - 1} \right) du +$$

$$+ \frac{r^3}{R^2} \int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( u^2 + 1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du$$

$$\begin{aligned}
 s_1 = & -r\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{r^3}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2 a}{R^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r a^2}{R^2} - \frac{r(R^2 - a^2)}{R^2} \left[ u \right]_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \\
 & - \frac{r^2 a}{R^2} \left[ u^2 \right]_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{r^3}{3R^2} \left[ u^3 \right]_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{r^3}{R^2} \left[ u \right]_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \\
 & + \frac{r(R^2 - a^2 - r^2)}{R^2} \int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1-u^2} - \frac{r^2 a}{R^2} \int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-2u}{1-u^2} du.
 \end{aligned}$$

The integration can be made after having resolved the fractional function in the last integral but one into portion fractions. The numerator of the fractional function in the last integral is the differential quotient of the denominator, therefore its integral is the natural logarithm of the denominator. Thus the arch-length is

$$\begin{aligned}
 s_1 = & -r\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{r^3}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2 a}{R^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r a^2}{R^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r(R^2 - a^2)}{R^2} - \\
 & - \frac{r^2 a}{2R^2} - \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{r^3}{R^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r^3}{R^2} + \frac{r(R^2 - a^2 - r^2)}{R^2} \int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left( \frac{1}{2(1-u)} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2(1+u)} \right) du - \frac{r^2 a}{R^2} \left[ \ln(1-u^2) \right]_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
 s_1 = & -r\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{r^3}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^2 a}{R^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r a^2}{R^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r(R^2 - a^2)}{R^2} - \frac{r^2 a}{2R^2} - \\
 & - \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{r^3}{R^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r^3}{R^2} + \frac{r(R^2 - a^2 - r^2)}{2R^2} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} - \frac{r^2 a}{R^2} \ln \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

The arch-length of the space-curve portion in question is, therefore,

$$\begin{aligned}
 s_1 = & \frac{r(R^2 - a^2 - r^2)}{2R^2} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} - \frac{r^2 a}{R^2} \ln \frac{1}{2} - \\
 & - \frac{r}{6R^2} (3\sqrt{2} R^2 + 4\sqrt{2} r^2 + 6ra + 6\sqrt{2} a^2). \quad (3)
 \end{aligned}$$

As the curve portion  $s_1$  is in the negative part of the co-ordinate-system (Fig. 5), negative value is obtained for  $s_1$ .

Since the arch-length, as scalar quantity, is needed, the absolute value of the result obtained here is substituted when determining the numerical arch-length.

### Length of space curve $s_2$

For the calculation of the length of space-curve  $s_2$  the differential-quotients of the parameter equation-system (2) are formed according to parameter  $t$ :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{r}{b}$$

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{t-a}{\sqrt{R^2-(t-a)^2}}$$

Square amount of the differential quotients:

$$ds_2^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{r^2}{b^2} + 1 + \frac{(t-a)^2}{R^2-(t-a)^2}$$

$$ds_2^2 = \frac{r^2+b^2}{b^2} \left(1 + \frac{b^2(t-a)^2}{(r^2+b^2)[R^2-(t-a)^2]}\right).$$

The arch-length of the space-curve branch is therefore:

$$s_2 = \frac{\sqrt{r^2+b^2}}{b} \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2(t-a)^2}{(r^2+b^2)[R^2-(t-a)^2]}} dt$$

Since  $R > a$ , therefore the second term below the root remains in absolute value within interval  $0 \leq t \leq a$ , always below 1, *i. e.*

$$\left| \frac{b^2-(t-a)^2}{(r^2+b^2)[R^2-(t-a)^2]} \right| < 1;$$

the root expression can be expanded in binomial series, and the series being convergent, produces the arch-length of the sought for space-curve.

Having carried out the expansion in series:

$$s_2 = \frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{b} \int_0^a \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{b^2 (t-a)^2}{(r^2 + b^2) [R^2 - (t-a)^2]} - \frac{1}{8} \frac{b^4 (t-a)^4}{(r^2 + b^2)^2 [R^2 - (t-a)^2]^2} \right\} dt.$$

Retaining the first two terms of the row

$$s_2 = \frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{b} \int_0^a dt + \frac{b}{2\sqrt{r^2 + b^2}} \int_0^a \frac{(t-a)^2}{R^2 - (t-a)^2} dt.$$

If  $u = t-a$ , then  $du = dt$ , and thus

$$s_2 = \frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{b} \int_0^a dt - \frac{b}{2\sqrt{r^2 + b^2}} \int_{-a}^0 \frac{-u^2 + R^2 - R^2}{R^2 - u^2} du$$

$$s_2 = \frac{\sqrt{r^2 + b^2}}{b} a - \frac{b}{2\sqrt{r^2 + b^2}} \int_{-a}^0 du + \frac{bR^2}{2\sqrt{r^2 + b^2}} \int_{-a}^0 \frac{du}{R^2 - u^2}.$$

Resolving the fractional function of the latter integral into partial fractions:

$$s_2 = \frac{a\sqrt{r^2 + b^2}}{b} - \frac{ab}{2\sqrt{r^2 + b^2}} + \frac{bR^2}{2\sqrt{r^2 + b^2}} \left\{ \int_{-a}^0 \frac{du}{2R(R+u)} + \int_{-a}^0 \frac{du}{2R(R-u)} \right\}$$

$$s_2 = \frac{2a(r^2 + b^2) - ab^2}{2b\sqrt{r^2 + b^2}} + \frac{bR^2}{2\sqrt{r^2 + b^2}} \left\{ \frac{1}{2R} \ln(R+u) - \frac{1}{2R} \ln(R-u) \right\}_{-a}^0$$

$$s_2 = \frac{2ar^2 + ab^2}{2b\sqrt{r^2 + b^2}} - \frac{b \cdot R}{4\sqrt{r^2 + b^2}} \left[ \ln \frac{R+u}{R-u} \right]_{-a}^0$$

$$s_2 = \frac{2r^2a + ab^2}{2b\sqrt{r^2 + b^2}} - \ln \frac{R-a}{R+a}.$$



The arch-length is therefore

$$s_2 = \frac{1}{4b\sqrt{r^2 + b^2}} \left( 4ar^2 + 2ab^2 - b^2 R \ln \frac{R-a}{R+a} \right). \quad (4)$$

*Full length of the loop-space curve*

The full loop-length:  $l = 4(s_1 + s_2)$ . Thus with the substitution of values  $s_1$  and  $s_2$

$$\begin{aligned} l = 4 & \left[ -\frac{r}{6R^2} \left( 3\sqrt{2}R^2 + 4\sqrt{2}r^2 + 6ra + 6\sqrt{2}a^2 \right) + \right. \\ & + \frac{r(R^2 - a^2 - r^2)}{2R^2} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} - \frac{r^2 a}{R^2} \ln \frac{1}{2} + \\ & \left. + \frac{1}{4b\sqrt{r^2 + b^2}} \left( 4ar^2 + 2ab^2 - b^2 R \ln \frac{R-a}{R+a} \right) \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

**Calculation of the loop-length of regular-close texture**

With regular-close texture the value  $l = 16,64 \delta$  is obtained, only if the plane projection is taken into consideration (page 70).

Taking into consideration the difference in length between the plane projection and space-curve, the constant 16,64 can be revised, according to equation (5), if the data in equation (5) are expressed in the function of yarn diameter.

Data quoted in equation (5):  $r, a, b, R$ .

Radius of loop head curve plane projection:  $r = 1,5 \delta$  (Fig. 2).

Comparing Figures 5 and 6:

$$a = \frac{S}{2} = \sqrt{3} \delta = 1,732 \delta$$

$$b = 3\sqrt{3} \delta = 3a = 5,196 \delta$$

because

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\delta}{s} = \frac{\delta}{2\delta\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$b = \frac{1,5\delta}{\operatorname{tg} \beta} = 1,5\delta \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \delta.$$

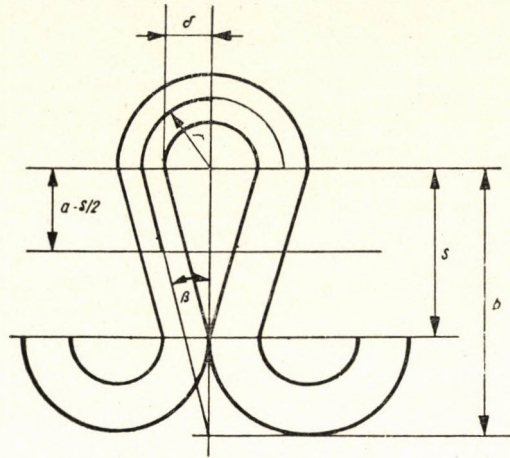


Fig. 6. Plane projection of the loop

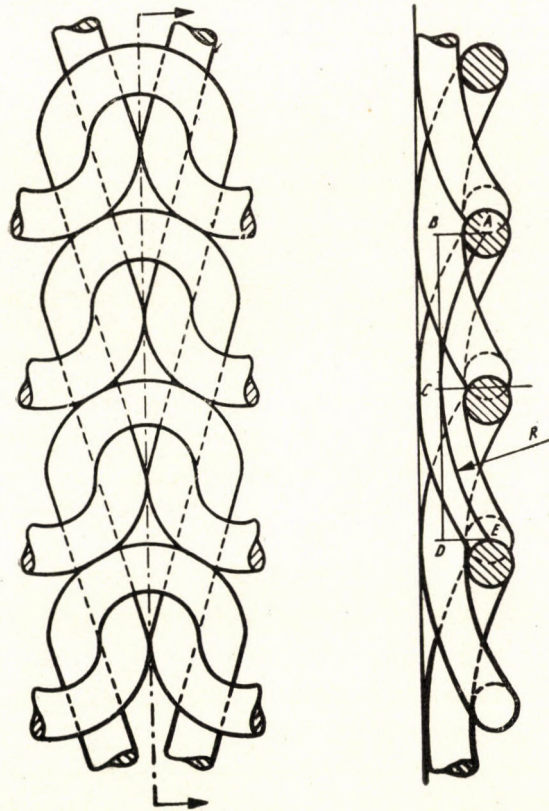


Fig. 7. Top-view and side-view of regular-close wales

Taking into consideration Figures 7 and 8,  $R$  may also be calculated in the function of  $\delta$ . Only a very slight error occurs, if  $DE$  is considered equal to the yarn diameter.

$$\overline{DE} = \delta$$

$$\overline{BC} = \overline{CD} = \frac{S}{2} + 1,5 \delta = \delta \sqrt{3} + 1,5 \delta = (\sqrt{3} + 1,5) \delta$$

$$\overline{CD} = K \cdot \delta = 3,232 \delta.$$

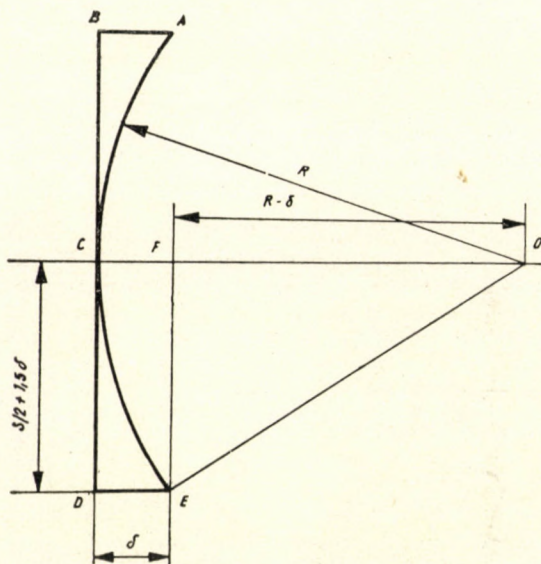


Fig. 8. Determination of axis  $R$  on basis of the side-view of the loop

From the triangle  $FEO$  :

$$R^2 = (R - \delta)^2 + K^2 \delta^2$$

$$R^2 = R^2 - 2 R \delta + \delta^2 + K^2 \delta^2$$

$$2 R \delta = \delta^2 + K^2 \delta^2$$

$$R = \frac{\delta^2 (1 + K^2)}{2 \delta} = \frac{1 + K^2}{2} \delta = \frac{1 + 10,446}{2} \delta = 5,723 \delta$$

substituting the values  $r$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $R$  into the parts of formula (5)

$$-\frac{r}{6R^2} (3\sqrt{2} R^2 + 4\sqrt{2} r^2 + 6ra + 6\sqrt{2} a^2) = -1,471 \delta$$

$$\frac{r(R^2 - a^2 - r^2)}{2R^2} \ln \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = -1,1103 \delta$$

$$- \frac{r^2 a}{R^2} \ln \frac{1}{2} = 0,08 \delta$$

$$\frac{1}{4b\sqrt{r^2 + b^2}} \left( 4ar^2 + 2ab^2 - b^2 R \ln \frac{R-a}{R+a} \right) = 1,83 \delta.$$

Thus

$$l = 4\delta (| -1,471 - 1,1103 + 0,08 | + | 1,83 |) = 4\delta \cdot 4,3313$$

$$l = 17,33 \delta.$$

Instead of the 16,64 factor, a 17,33 factor was obtained, which expresses the difference between the plane-curve and the space-curve. The difference is 4,14%.

#### The closest texture

The regular-close knitted texture (Fig. 1), which meets the  $P = 4\delta$  and  $S = 2\sqrt{3}\delta$  texture setting data, is generally considered the closest texture.

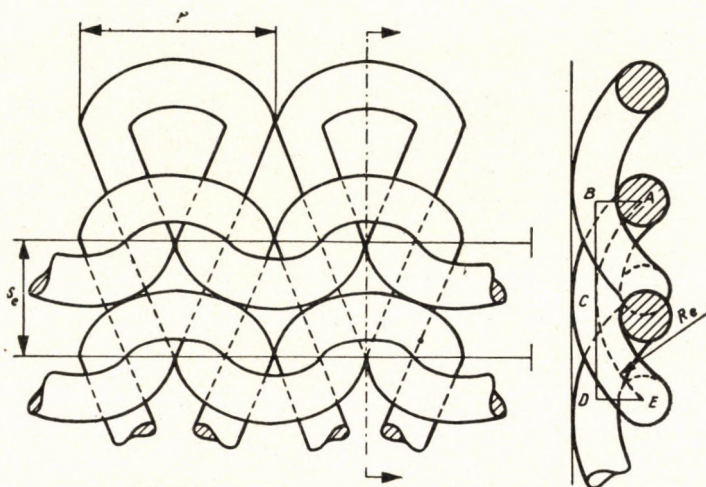


Fig. 9. Closest basis texture

Tests have shown, however, that by increasing the density of the loops, the head of the loops becomes very flat, and with unaltered  $P = 4\delta$  loop row space, the half-circles of the loop heads and loop feet become elliptical (Fig. 9).

Since, when calculating the length of the loop space curve, it was assumed, that the loop head and loop foot are brought about as the penetration curve

of two straight circular cylinders with  $r$ , respectively  $R$  radius perpendicular to each other, therefore with the closest basis texture the space-curve  $s_{1e}$  may originate as the penetration curve of a circular cylinder with radius  $R_e$ , and an elliptical straight cylinder perpendicular to it (Figs. 10, 11). The  $s_{2e}$  space-curve joining the  $s_{1e}$  space-curve can, as in the previous case, be obtained

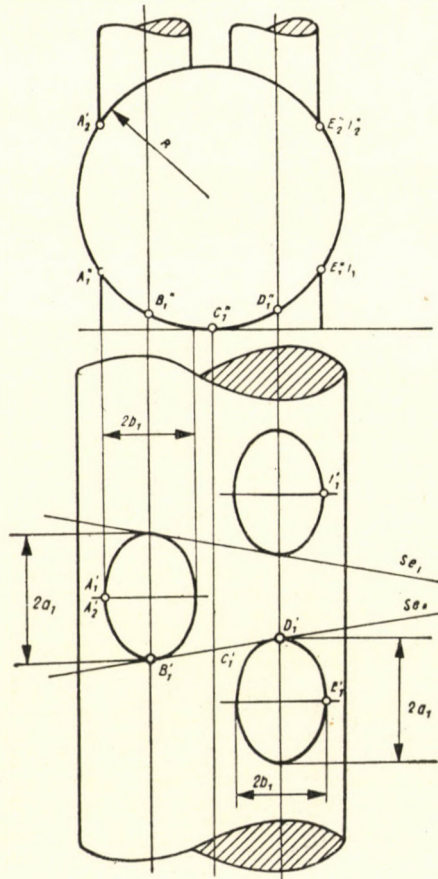


Fig. 10. Representation of the loop space-curve of the closest texture by the penetration of the circular and elliptical cylinders

as the penetration of the cylinder with radius  $R_e$  perpendicular to the plane  $S_{ell}$ , and the co-ordinate plane  $zy$ . The distance  $a_1$ , *i. e.* half the large axis of the median of the loop head ellipse — since the  $P = 4 \delta$  relation is still valid — is conform to the previous radius  $r$ , thus

$$a_1 = 1,5\delta.$$

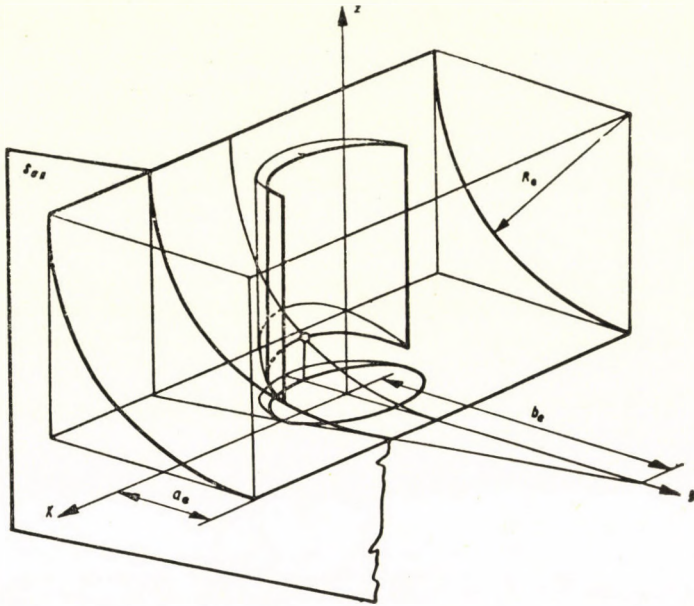


Fig. 11. Arrangement in the co-ordinate of space of the surface portions needed for creating the quarter loop space-curve of the closest texture

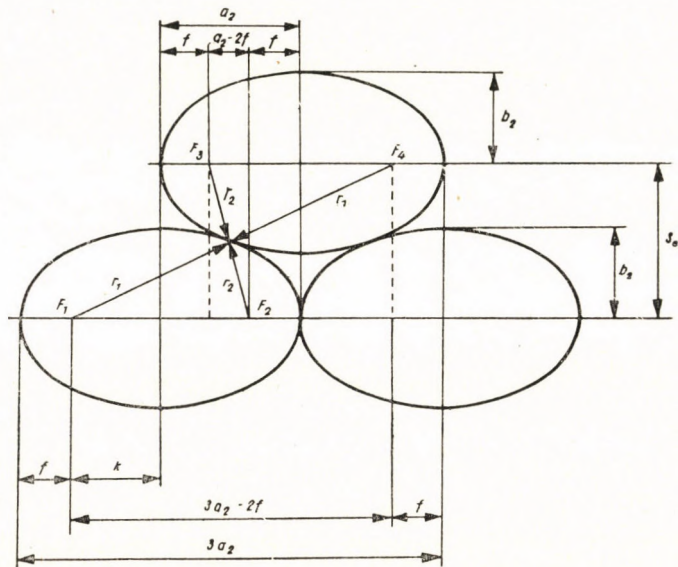


Fig. 12. Contacting outer ellipses of loop heads and loop feet

According to the evaluation of the enlarged photographs, half the small axis of the median of the loop head ellipse

$$b_1 = \frac{9}{10} \delta.$$

The dimension is equal to half the loop row space  $S_e$ . The calculation of the loop row space  $S_e$  requires, however, special consideration.

The loop row space, as illustrated by Fig. 9, may be determined from the assumed contact of the outside ellipses of the loop heads and loop feet. The distance of the large axes of the contacting ellipses is just the loop row space.

From the contacting of the ellipses and their position to each other — taking into consideration Figs. 9 and 12 — it follows:

$$\begin{aligned} S_e^2 &= (2r_1)^2 - (3a_2 - f \cdot 2)^2 \\ S_e^2 &= (2r_2)^2 - (a_2 - 2f)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

From the interpretation of the ellipse:

$$r_1 + r_2 = 2a_2.$$

Therefore

$$\begin{aligned} S_e^2 &= (4a_2 - 2r_2)^2 - (3a_2 - 2f)^2 \\ S_e^2 &= (2r_2)^2 - (a_2 - 2f)^2 \\ (4a_2 - 2r_2)^2 - (3a_2 - 2f)^2 &= (2r_2)^2 - (a_2 - 2f)^2. \end{aligned}$$

After arrangement and reduction:

$$r_2 = \frac{a_2 + f}{2}.$$

Expression of the required  $f$  value in the function of  $a_2$ :

$$f = a_2 - k$$

$$k = \sqrt{a_2^2 - b_2^2}$$

$$a_2 = a_1 + \frac{\delta}{2} = 1,5\delta + \frac{\delta}{2} = 2\delta$$

$$b_2 = b_1 + \frac{\delta}{2} = \frac{9}{10}\delta + \frac{\delta}{2} = 1,4\delta.$$

With substitution of these:

$$k = \sqrt{4\delta^2 - 1,96\delta^2} = \sqrt{2,04}\delta$$

$$f = 2\delta - \delta\sqrt{2,04} = 0,57\delta$$

$$r_2 = \frac{a_2 + f}{2} = \frac{2\delta + 0,57\delta}{2} = 1,285\delta.$$

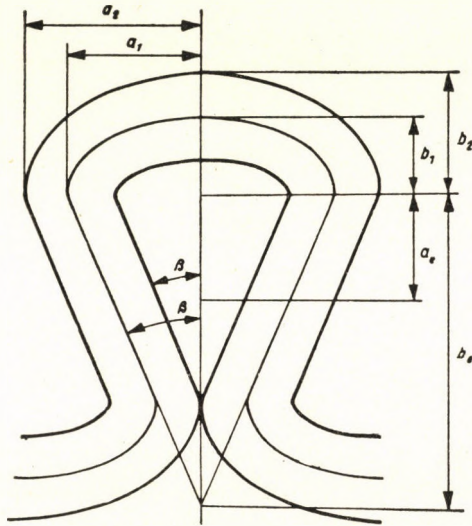


Fig. 13. Plane projection of the loop of the closest texture

Having re-substituted these into equation (6):

$$S_e^2 = (2 \cdot 1,285\delta)^2 - (2\delta - 2 \cdot 0,57\delta)^2$$

$$S_e = \delta\sqrt{5,87} = 2,42\delta$$

$$a_e = \frac{S_e}{2} = 1,21\delta.$$

Knowing the loop-row space, the dimension  $b_e$  may also be calculated, taking Fig. 13 into consideration.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_1}{b_e}, \quad \text{on the other hand} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\delta}{S_e}$$

$$b_e = \frac{a_1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{S_e \cdot a_1}{\delta} = \frac{2,42\delta \cdot 1,5\delta}{\delta} = 3,63\delta.$$



Similarly the value  $R_e$  can be expressed by taking into consideration Figures 9 and 14.

$$R_e^2 = \left( \frac{S_e}{2} + b_1 \right)^2 + (R_e - \delta)^2$$

$$R_e^2 = (1,21 \delta + 0,9 \delta)^2 + R_e^2 - 2 R_e \delta + \delta^2$$

$$R_e = \frac{5,45 \delta^2}{2 \delta} = 2,725 \delta.$$

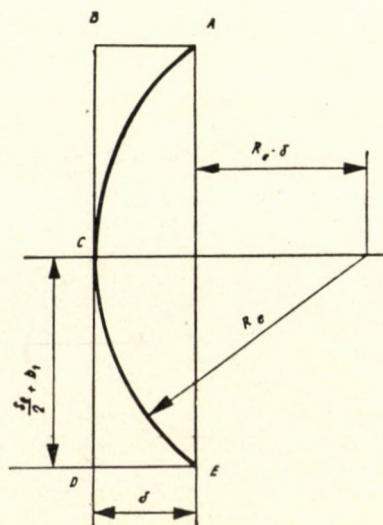


Fig. 14. Determination of the axis  $R_e$  on basis of the side-view of the loop of the closest texture

Therefore, the data required for the loop length in the function of  $\delta$ :

$$a_1 = 1,5 \delta$$

$$b_1 = 0,9 \delta$$

$$a_e = 1,21 \delta$$

$$b_e = 3,63 \delta$$

$$R_e = 2,725 \delta.$$

After having cleared up the dimensions pertaining to the elliptical loop-shape, the equations of the space-curves  $s_{1e}$  and  $s_{2e}$ , and their lengths have to be established.

#### Length of the space-curve $s_{1e}$

Equation of the basis curve of the elliptical cylinder with axis  $z$ :

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad (7)$$

in which  $a_1$  is half the large axis, and  $b_1$  half the small axis. Equation of the base circle in the straight circular cylinder with axis  $R_e$  standing on plane  $xy$  :

$$(y - a_e)^2 + (z - R_e)^2 = R_e^2. \quad (8)$$

Choosing as parameter the angular displacement  $\varphi'$  (Fig. 15)

$$x = a_1 \cdot \cos \varphi' \quad (9)$$

$$y = b_1 \cdot \sin \varphi'.$$

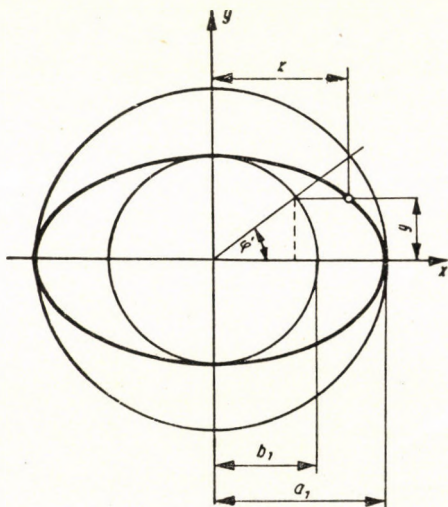


Fig. 15. Generatrix of the elliptical cylinder

The  $y$  values of the penetration curve satisfy both equations (8) and (9), therefore,

$$(b_1 \cdot \sin \varphi' - a_e)^2 + z^2 - 2 R_e z = 0.$$

As the smaller root is required:

$$z = R_e - \sqrt{R_e^2 - (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2}.$$

The parameter equation-system of the space-curve portion  $s_{1e}$  is

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cdot \cos \varphi' \\ y &= b_1 \cdot \sin \varphi' \\ z &= R_e - \sqrt{R_e^2 - (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

The derivatives according to parameter  $\varphi'$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi'} &= -a_1 \sin \varphi' \\ \frac{dy}{d\varphi'} &= b_1 \cos \varphi' \\ \frac{dz}{d\varphi'} &= \frac{b_1 (b_1 \sin \varphi' - a_e) \cos \varphi'}{\sqrt{R_e^2 - (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2}} \\ ds_{1e}^2 &= \left(\frac{dx}{d\varphi'}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi'}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi'}\right)^2 = a_1^2 \sin^2 \varphi' + b_1^2 \cos^2 \varphi' + \\ &\quad + \frac{b_1^2 (b_1 \cdot \sin \varphi' - a_e)^2 \cos^2 \varphi'}{R_e^2 - (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2} \\ ds_{1e}^2 &= \frac{R_e^2 (a_1^2 \sin^2 \varphi' + b_1^2 \cos^2 \varphi') - a_1^2 \sin^2 \varphi' (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2}{R_e^2 - (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2} \\ ds_{1e}^2 &= \frac{a_1^2 \sin^2 \varphi' [R_e^2 - (b_1 \cdot \sin \varphi' - a_e)^2] + R_e^2 b_1^2 \cos^2 \varphi'}{R_e^2 - (b_1 \cdot \sin \varphi' - a_e)^2} \\ ds_{1e}^2 &= a_1^2 \sin^2 \varphi' \left\{ 1 + \frac{R_e^2 b_1^2 \cos^2 \varphi'}{a_1^2 \sin^2 \varphi' [R_e^2 - (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2]} \right\}. \end{aligned}$$

The arch-length:

$$s_{1e} = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} a_1 \cdot \sin \varphi' \sqrt{1 + \frac{R_e^2 b_1^2 \cos^2 \varphi'}{a_1^2 \sin^2 \varphi' [R_e^2 - (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2]}} d\varphi'.$$

(For the sake of expansion in series by integration between  $\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$  limits, and by taking double the value).

Expanding in binomial series the function below the square root, and retaining the first two terms:

$$s_{1e} = 2 a_1 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin \varphi' \left\{ 1 + \frac{R_e^2 b_1^2 \cos^2 \varphi'}{2 a_1^2 \sin^2 \varphi' [R_e^2 - (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2]} \right\} d\varphi'.$$

(11)

$$s_{1e} = a_1 \sqrt{2} \frac{b_1^2 R_e^2}{a_1} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi'}{\sin \varphi' [R_e^2 - (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2]} d\varphi'.$$

Applying substitution  $t = \operatorname{tg} \varphi'/2$  when calculating the rest of the integral:

$$\sin \varphi' = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos \varphi' = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad d\varphi' = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Substituted:

$$I_1 = \int \frac{\cos^2 \varphi'}{\sin \varphi' [R_e^2 - (b_1 \sin \varphi' - a_e)^2]} d\varphi' = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left[R_e^2 - \left(b_1 \frac{2t}{1+t^2} - a_e\right)^2\right]}$$

$$I_1 = \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t \{R_e^2 (1-t^2)^2 - [2b_1 t - a_e (1+t^2)]^2\}}.$$

Transformed:

$$I_1 = \frac{1}{R_e^2 - a_e^2} \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t \left(t^2 + \frac{2b_1}{R_e - a_e} t + 1\right) \cdot \left(t^2 - \frac{2b_1}{R_e + a_e} t + 1\right)} = \frac{1}{R_e^2 - a_e^2} I_{11}$$

After having introduced the undernoted signs with the indefinite integral  $I_{11}$ , and resolving them into detail fractions:

$$k_1 = \frac{2b_1}{R_e - a_e} = 1,47, \quad k_2 = \frac{2b_1}{R_e + a_e} = 0,426$$

$$I_{11} = \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t(t^2 + k_1 t + 1)(t^2 - k_2 t + 1)} = \int \frac{A}{t} dt + \int \frac{Bt + C}{t^2 + k_1 t + 1} dt +$$

$$+ \int \frac{Dt + E}{t^2 - k_2 t + 1} dt = J_1 + J_2 + J_3. \quad (12)$$

Values obtained for the constants:

$$A = 1; \quad B = 0; \quad C = \frac{4 - k_1^2}{k_1 + k_2}; \quad D = 0, \quad E = \frac{-4 + k_2^2}{k_1 + k_2}.$$

Thus

$$J_2 = \int \frac{Bt + C}{t^2 + k_1 t + 1} dt = C \int \frac{dt}{t^2 + k_1 t + 1} = C \int \frac{dt}{\left(t + \frac{k_1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{k_1^2}{4}}.$$

Again applying substitution:

$$u = t + \frac{k_1}{2}; \quad du = dt$$

$$J_2 = C \int \frac{du}{u^2 + \frac{4 - k_1^2}{4}}.$$

For bringing on to basic integral:

$$u^2 = \frac{4 - k_1^2}{4} z^2; \quad u = z \sqrt{\frac{4 - k_1^2}{4}}; \quad du = \frac{\sqrt{4 - k_1^2}}{2} dz$$

$$\begin{aligned} J_2 &= C \frac{\sqrt{4 - k_1^2}}{2} \int \frac{dz}{\frac{4 - k_1^2}{4} (z^2 + 1)} = C \frac{2}{\sqrt{4 - k_1^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z = \\ &= C \frac{2}{\sqrt{4 - k_1^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t + k_1}{\sqrt{4 - k_1^2}}. \end{aligned}$$

Calculating in the same way:

$$J_3 = \int \frac{Dt + E}{t^2 - k_2 t + 1} dt = E \int \frac{dt}{t^2 - k_2 t + 1} = E \frac{2}{\sqrt{4 - k_2^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t - k_2}{\sqrt{4 - k_2^2}}.$$

Resubstituted into formula (12)

$$I_{11} = \int \frac{A}{t} dt + C \frac{2}{\sqrt{4 - k_1^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t + k_1}{\sqrt{4 - k_1^2}} + E \frac{2}{\sqrt{4 - k_2^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t - k_2}{\sqrt{4 - k_2^2}}.$$

Since

$$A = 1; \quad C \frac{2}{\sqrt{4 - k_1^2}} = 1,43; \quad E \frac{2}{\sqrt{4 - k_2^2}} = 2,06;$$

$$\frac{2t - k_1}{\sqrt{4 - k_1^2}} = \frac{2t - 1,47}{1,36}; \quad \frac{2t - k_2}{\sqrt{4 - k_2^2}} = \frac{2t - 0,426}{1,954};$$

$$I_1 = \frac{1}{R_c^2 - a_c^2} \left( \ln t + 1,43 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t - 1,47}{1,36} + 2,06 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t - 0,426}{1,954} \right).$$

Resubstituting into formula (11) and taking the limits corresponding to variant  $t$

$$s_{1e} = a_1 \sqrt{2} + \frac{b_1^2 R_e^2}{a_1} \cdot \frac{1}{R_e^2 - a_e^2} \left[ \ln t + 1,43 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t - 1,47}{1,36} + \right. \\ \left. + 2,06 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t - 0,426}{1,954} \right]_{t = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}^{t = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}. \quad (13)$$

#### Length of space-curve $s_{2e}$

The length of the space-curve  $s_{2e}$  can be calculated on a similar basis as that of  $s_2$ , because the penetration curve of cylinder and plane is similarly being dealt with, but when applying formula (4), the changed dimensions will have to be taken into consideration. Thus

$$s_{2e} = \frac{1}{4 b_e \sqrt{a_1^2 + b_e^2}} \left( 4 a_e a_1^2 + 2 a_e b_e^2 - b_e R_e \ln \frac{R_e - a_e}{R_e + a_e} \right). \quad (14)$$

#### Length of loop-curve with closest texture

Whole length of loop:  $l_e = 4 (s_{1e} + s_{2e})$ . Substituting the previously calculated values of  $a_1, b_1, a_e, b_e$  and  $R_e$  into equations (13) and (14)

$$s_{1e} = 2,12 \delta + 4,01 \delta^3 \frac{1}{5,962 \delta^2} \left[ \ln t + 1,43 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t - 1,47}{1,36} + \right. \\ \left. + 2,06 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2t - 0,426}{1,954} \right]_{t = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}^{t = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}$$

$$s_{1e} = 2,1149 \delta$$

$$s_{2e} = \frac{1}{57,035 \delta^2} (10,89 \delta^3 + 31,888 \delta^3 + 34,273 \delta^3) = 1,3484 \delta$$

$$l_e = 4 \delta (2,1149 + 1,3484) = 13,85 \delta.$$

The value of  $s_{1e}$  needs correction, because — for the sake of expansion in series — the integration was carried out between limits  $\varphi' = \left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$ , and double the value obtained was taken.

Since with the ellipse  $\varphi' = 0 - \frac{\pi}{4}$ , and the arch-lengths pertaining to parameters  $\varphi' = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$  are different (Fig. 16), the error will be corrected in relation to the length of the plane-projection  $s_1$  and  $s_{11}$ .

Arch-length of ellipse:

$$L = a_1 \int_0^{\varphi'} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi'} d\varphi'$$

where

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1}.$$

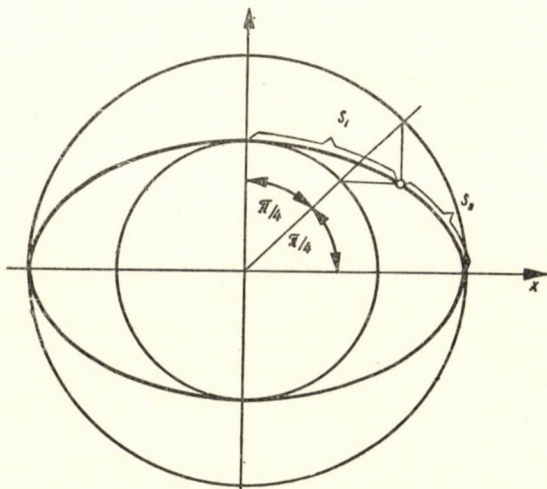


Fig. 16. Various arch-lengths pertaining to the parameters  $\varphi' = 0 - \frac{\pi}{4}$  and  $\varphi' = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$

Expanding in series the expression below the root, and omitting the fourth expression, the arch-length belonging to the angle between  $\varphi' = 0 - \frac{\pi}{4}$  is

$$s_1 \approx a_1 \int_0^{\pi/4} \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 \varphi' - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \cos^4 \varphi' \right) d\varphi' \quad (15)$$

the arch-length belonging to the angle between  $\varphi' = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$  is :

$$s_{II} \approx a_1 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cos^2 \varphi' - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \cos^4 \varphi' \right) d\varphi'. \quad (16)$$

Integrals under (15) and (16), *i. e.* relation of the  $s_I$  and  $s_{II}$  arch-lengths

$$\eta = \frac{s_I}{s_{II}} = \frac{a_1 \left( 1 - \frac{A\pi}{4} - B \right)}{a_1 \left( 1 - \frac{A\pi}{4} + B \right)}$$

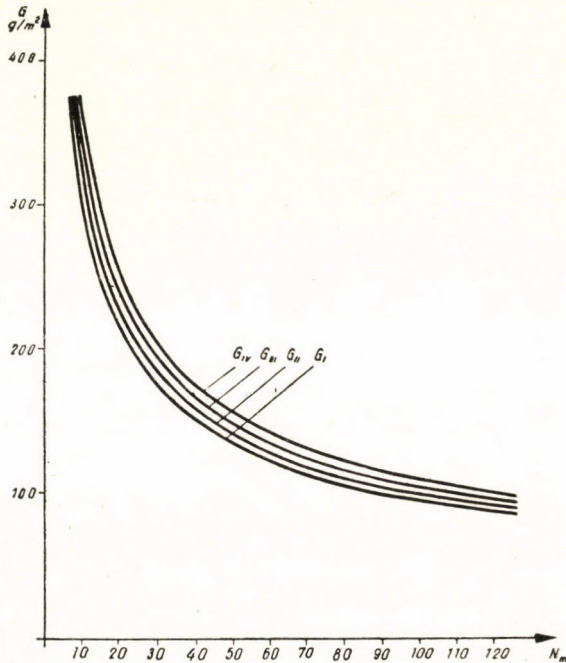


Fig. 17. Variation of the specific weight of the basis texture in the function of yarn count, with varying cover-factor values

where

$$A = \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{3\varepsilon^4}{64}; \quad B = \frac{\varepsilon^2}{8} + \frac{\varepsilon^4}{32}.$$

If half the large axis of the ellipse is  $1,5\delta$ , and half the small axis is  $0,9\delta$ , then  $\varepsilon = 0,8$ , and thus  $A = 0,179$ ,  $B = 0,0928$ , consequently

$$\eta = \frac{1 - 0,1405 - 0,0928}{1 - 0,1405 + 0,0928} = 0,8928.$$

As formula (11) gives double the longer arch-length between limits  $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}$ , the corrected length of the loop head space-curve is:



$$s_{1ek} = \left( \frac{s_{1e}}{2} + \eta \frac{s_{1e}}{2} \right) = (1 + \eta) \frac{s_{1e}}{2} = 1,8928 \frac{2,1149}{2} = 2,0007 \delta.$$

Taking this correction into consideration, the length of the loop space-curve with the closest texture is:

$$l_{ek} = 4(s_{1ek} + s_{2e}) = 4(2,0007 + 1,3484) \delta = 13,3964 \delta \approx 13,40 \delta.$$

### SUMMARY

The results of the experiment may be summarized as follows:

The study elucidates, on an analytical basis, the loop length of weft-knitted basis texture, which enables a more accurate analytical calculation of the most characteristic data, *viz*: cover-factor and specific weight of texture. The first part deals with the calculation of the length of the loop space-curve, and equation (5) gives a formula for its determination in general cases. Starting from the formula referring to general cases, it was possible to determine the cover factor of regular-close texture, characterized by the texture setting — data  $P=4\delta$ , and  $S = 2\sqrt{3}\delta$ , for which DOYLE and DALIDOVICH gave the approximate value  $\sigma = 16,64$ . The value calculated on space-curve basis is  $\sigma = 17,33$ .

Test was carried out with regard to texture with close basis. It was established that, by increasing the density of the loops, the loop heads become flat and by retaining the wale-space  $P = 4\delta$ , the space of row of loops becomes considerably smaller.

In the second part of the study the cover-factor of the closest basis texture was calculated, where the loop head space-curve was given as the penetration of elliptical and straight circular cylinders. As cover-factor of texture with maximum close basis, the value  $\sigma_{\max} = 13,40$  was obtained.

#### Numerical summary of the results

	Wale space $P$	Space of row of loops $S$	Cover factor $\sigma$	Specific weight $G$ g/m <sup>2</sup>
Based on the plane projection of the loop of a regular-close-texture .	$4 \delta$	$2\sqrt{3} \delta$	16,64	$G_I = \frac{952}{\sqrt{N_m}}$
Based on the space curve of the loop of a regular-close-texture . . . . .	$4 \delta$	$2\sqrt{3} \delta$	17,33	$G_{II} = \frac{991,5}{\sqrt{N_m}}$
Based on the plane projection of the loop of the closest texture . . . .	$4 \delta$	$2,42 \delta$	12,77	$G_{III} = \frac{1052}{\sqrt{N_m}}$
Based on the space-curve of the loop of the closest texture . . . . .	$4 \delta$	$2,42 \delta$	13,40	$G_{IV} = \frac{1067}{\sqrt{N_m}}$

The change of the specific weight of the basis texture in the function of yarn number (taking into consideration the yarn specific weight of  $\gamma_f = 0,81$ ) — in the enumerated four instances — is shown on Fig. 17. As can be seen, the correct values of the cover-factor essentially influence the specific weight of the texture, which is one of its most important characteristics.

UNTERSUCHUNG DES DICHTHEIT-FAKTORS UND DES SPEZIFISCHEN  
GEWICHTES DER SCHUSSYSTEM-STRICK- UND WIRKWAREN AUF GRUND DES  
EXAKTEN WERTES DER MASCHENLÄNGE

A. VÉKÁSSY

ZUSAMMENFASSUNG

Das Studium erörtert auf analytischer Basis die Maschenlänge der Schußsystem-Strick- und Wirkwaren, wodurch die pünktlichere analytische Kalkulation der kennzeichnendsten Daten der Ware: des Dichtheit-Faktors und des spezifischen Gewichtes, ermöglicht wird. Der erste Teil befaßt sich mit der Kalkulation der Maschenraumkurve; und die Gleichung (5) gibt eine Formel zum Definieren derselben in allgemeinen Fällen an. Von der sich auf allgemeine Fälle beziehenden Formel ausgehend, ist es gelungen, den Dichtheit-Faktor der sogenannten regulären und mit den Waren-Einstellenden  $P = 4\delta$  und  $S = 2\sqrt{3}\delta$  gekennzeichneten Grundware zu definieren, betreffs dessen DOYLE und DALIDOVICH den approximativen Wert  $\sigma = 16,64$  angaben. Der auf Grund der Raumkurve kalkulierte Wert ist  $\sigma = 17,33$ .

Untersuchungen wurden geführt mit Bezug auf maximaldichte Grundware. Es wurde festgestellt, daß durch das Verstärken der Maschendichtheit die Maschenköpfe platt werden; und bei Beibehalten des Maschenstäbchen-Abstandes  $P = 4\delta$  der Maschenreihe-Abstand sich wesentlich verkleinert.

Im zweiten Teil des Studiums wurde der Dichtheit-Faktor der Grundware mit dichtester Struktur errechnet, bei welchem die Maschenkopf-Raumkurve sich als der Durchgriff eines elliptischen und geraden kreisförmigen Zylinders ergab. Als Dichtheit-Faktor der maximaldichten Grundware wurde der Wert  $\sigma_{\max} = 13,44$  berechnet.

*Zusammenfassung der numerischen Resultate*

	Maschen- stäbchen- Abstand $P$	Maschen- reihe- Abstand $S$	Dichtheit- Faktor $\sigma$	Spezifisches Gewicht $G$ g/m <sup>2</sup>
Auf Grund der Ebene-Projektion der Masche der regulär-dichten Ware	$4\delta$	$2\sqrt{3}\delta$	16,64	$G_I = \frac{952}{\sqrt{N_m}}$
Auf Grund der Maschen-Raumkurve der regulär-dichten Ware . . . . .	$4\delta$	$2\sqrt{3}\delta$	17,33	$G_{II} = \frac{991,5}{\sqrt{N_m}}$
Auf Grund der Ebene-Projektion der Masche der maximal-dichten Ware	$4\delta$	$2,42\delta$	12,77	$G_{III} = \frac{1052}{\sqrt{N_m}}$
Auf Grund der Maschen-Raumkurve der maximal-dichten Ware . . . . .	$4\delta$	$2,42\delta$	13,40	$G_{IV} = \frac{1067}{\sqrt{N_m}}$

Die Änderung des spezifischen Grundwaren-Gewichtes in der Funktion der Garnnumerierung (mit Beachtung des spezifischen Garngewichtes  $\gamma_j = 0,81$ ) veranschaulicht in den angeführten vier Fällen — Fig. Nr. 17.

Die korrekten Werte des Dichtheit-Faktors beeinflussen — wie ersichtlich — das spezifische Gewicht, welches eines der wichtigsten charakteristischen Kennzeichen der Ware ist, wesentlich.

ANALYSE DU FACTEUR DE DENSITÉ ET DU POIDS DES TRICOTS DE FOND  
À SYSTÈME DE TRAME, SUR BASE DE LA VALEUR EXACTE DE LA LONGUEUR  
DES MAILLES

A. VÉKÁSSY

RÉSUMÉ

L'étude définit, par la méthode analytique, la longueur de la maille des tricots de fond à système de trame, cette donnée permettant un calcul analytique plus précis des principales caractéristiques des tricots (facteur de densité, poids).

La première partie traite du calcul de la longueur de la courbe gauche des mailles, et l'équation (5) présente une formule pour définir celle-ci dans le cas le plus général. En partant de la formule se rapportant au cas général, il a été possible de déterminer le facteur de densité des tricots de fond d'une densité dite régulière, caractérisés par les données de réglage  $P = 4\delta$  et  $S = 2\sqrt{3}\delta$ . Pour ce facteur, DOYLE et DALIDOVICH ont indiqué la valeur approximative de  $\sigma = 16,64$ ; la valeur calculée sur base de la courbe gauche est:  $\sigma = 17,33$ .

On a également procédé à l'examen de tricots de fond à densité maximum. On a pu constater qu'en augmentant la densité des mailles, les têtes de mailles s'aplatissent, et en cas d'un espacement de colonnes de mailles  $P = 4$ , l'espacement des lignes de mailles diminuera sensiblement.

La seconde partie de l'étude s'occupe du calcul du facteur de densité d'un tricot de fond à densité maximum, où la courbe gauche des têtes de mailles résulte de l'interférence d'un cylindre elliptique et d'un cylindre droit. Le facteur de densité du tricot de fond de densité maximum était de  $\sigma_{\max} = 13,40$ .

*Données numériques*

	Espacement des colonnes de mailles $P$	Espacement des lignes de mailles $S$	Facteur de densité	Poids $G$ g/m <sup>2</sup>
Tricot de fond à structure régulière, d'après la projection plane de la maille .....	$4\delta$	$2\sqrt{3}\delta$	16,64	$G_I = \frac{952}{\sqrt{N_m}}$
Tricot de fond à structure régulière, d'après la courbe gauche de la maille .....	$4\delta$	$2\sqrt{3}\delta$	17,33	$G_{II} = \frac{991,5}{\sqrt{N_m}}$
Tricot de densité maximum, d'après la projection plane de la maille ...	$4\delta$	$2,42\delta$	12,77	$G_{III} = \frac{1052}{\sqrt{N_m}}$
Tricot de densité maximum, d'après la courbe gauche de la maille .....	$4\delta$	$2,42\delta$	13,40	$G_{IV} = \frac{1067}{\sqrt{N_m}}$

La figure 17 illustre, dans les quatre cas mentionnés, les variations du poids du tricot de fond en fonction du titre du fil (pour fils de poids spécifique:  $\gamma_f = 0,81$ ). On voit que les valeurs correctes du facteur de densité influencent essentiellement la valeur du poids, une des caractéristiques principales du tricot.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ПЛОТНОСТИ И УДЕЛЬНОГО ВЕСА ВЯЗАННОГО И ПЛЕТЕНОГО ОСНОВНОГО ПОЛОТНА УТОЧНОЙ СИСТЕМЫ, ИСХОДЯ ИЗ ТОЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛИНЫ ПЕТЛИ

А. ВЕКАШИ

РЕЗЮМЕ

Результаты исследования можно обобщить в нижеследующем. В работе аналитическим путем рассматривается длина петли основного полотна уточной системы, и это дает возможность более точного аналитического вычисления самых характерных показателей полотна — показателя плотности и удельного веса. Первая часть статьи обсуждает вычисление длины кривой площади петли и для общего случая дает формулу (5) — для ее определения. Исходя из формулы, для общего случая удалось определить так называемый показатель нормальной плотности основного полотна при данных значениях заправки полотна  $P = 4\delta$  и  $2\sqrt{3}\delta$ , который по данным Дойле и Далидовича  $\sigma = 16,64$ . Значение, вычисленное на основании кривой площади, будет  $\sigma = 17,33$ .

Проводилось исследование основного полотна с максимальной плотностью. Было установлено, что при увеличении плотности петел головки петел сплющиваются и при сохранении интервала петельных палочек  $P = 4$  интервал петельных рядов значительно сокращается.

Во второй части работы был вычислен показатель плотности самого густого основного полотна, где кривая площади головки петли эллиптическая. Для основного полотна максимальной плотности мы получили показатель  $\sigma_{\max} = 13,40$ .

Числовое обобщение результатов

	Интервал петельных палочек $P$	Интервал петельных рядов $S$	Показатель плотности $\sigma$	Удельный вес $G \text{ g/m}^2$
Полотно нормальной плотности на основании проекции петли .....	$4\delta$	$2\sqrt{3}\delta$	16,64	$G_I = \frac{952}{\sqrt{N_m}}$
Полотно нормальной плотности на основании кривой площади петли ..	$4\delta$	$2\sqrt{3}\delta$	17,33	$G_{II} = \frac{991,5}{\sqrt{N_m}}$
Полотно наивысшей плотности на основании проекции петли .....	$4\delta$	$2,42\delta$	12,77	$G_{III} = \frac{1052}{\sqrt{N_m}}$
Полотно наивысшей плотности на основании кривой площади петли .....	$4\delta$	$2,42\delta$	13,40	$G_{IV} = \frac{1067}{\sqrt{N_m}}$

Изменение удельного веса основного полотна в зависимости от нумерации пряжи (учитывая удельный вес нити  $\gamma_f = 0,81$ ) — для четырех перечисленных случаев — показывает график 17. Как видно, правильные значения показателя плотности значительно влияют на удельный вес полотна, т. е. на один из самых важных характеристик полотна.

# THE ECONOMICS OF MACHINE TOOL EFFICIENCY

B. SZÓKE

[Manuscript received March 19, 1958]

## I. The development trends of machine tools

It is a well known fact that in the same way as the construction of battleships is decisively affected by the development of the offensive artillery weapons, the construction of machine tools is considerably influenced by the appearance of tools having a greater load capacity and heat resistance.

While by the end of the last century it was the cone lathe which was developed for carbon steel tools, the beginning of the 20th century brought machines to be used for alloy steel tools. These machines had a considerably larger capacity and were characterized by a higher speed range. The carbide tools appearing in the mid twenties<sup>1</sup> required a further improvement of the adjustability, power and rigidity of the machines — together with a corresponding increase of speed steps.

To the question whether the development of machine tools has met the requirements in every respect, the answer must be a definitely negative one. Abiding by the example of the lathe there will be many who, having worked in workshops in the first decades of our century, will remember the operators having an actual dislike for gear lathes, particularly in the case of a finishing job. The reason for their dislike was the fact that these machines have often been "copying" because of the inaccurate gears mounted at the central part of the main spindle. This "copying" was the name given to the phenomenon that no accurate cylindrical surface could be obtained as a result of the periodical vibrations of the main spindle.

Examining the main drives from the point of view of power consumption, we come across several widely used solutions which leave very much to be desired *in respect of design*.

It is a well-known fact that the cutting edge geometry applied in the tool design, the degree of wear of the tool and the formation of a built-up edge, are factors considerably affecting power consumption, though this is a question independent from the drive.

As compared to the machines used in the last century, power consumption is now definitely diminished by the introduction of gear cutting and grinding machines which are working accurately and by the application of extremely

accurate roller bearings. It should be noted, however, that all these achievements are due not so much to the ingenuity of the designers as to the development of workshop technology. The fact that designing inventiveness may be in advance to workshop technology has already been stressed by the author elsewhere [7] inasmuch as he has pointed out the complete identity of JAMES WATT's rolling contact bearing to the one used nowadays. The present paper will discuss merely those points of designing which, considering machine elements of equal perfection, might result in drives having a greater efficiency than those of many machine tools in use now.

Now, in the middle of our century, production uses the most up-to-date workshop technology, yet it is a common occurrence that designing takes into consideration only compliance with the technological requirements and fails to strive for better efficiency with respect to power consumption. In this way only may it occur that more than a fourth, often more than three fourth of the input energy is being absorbed by the internal friction of the machines.

## II. Efficiency impairing conditions

The designer of machine tools can often trace the cause of excessive power consumption of the machine to conditions which might have been avoided by careful construction. This is the case, for instance, with splash lubrication where — at high speed — frictional losses increase by the third power of r. p. m. The idle multiple disc clutch, the gear-shift fork having an intensive friction or the bearings of high-speed shafts might be responsible too for energy losses. All of them can be helped.

A considerable energy loss occurs when the machine is started or stopped. At starting, work equivalent to the kinetic energy of the rotating masses is converted into heat and at each stopping the kinetic energy of the masses will be converted into heat again.

But one of the main reasons for the bad mechanical efficiency of the machine tools is the impracticable way of directing the energy flow. From this point of view, let us consider the transmission system of some of the most widely used lathes:

In Fig. 1. shaft No. I is driven by the motor, whereas shaft No. II is driven by shaft No. I through a gearing. The cluster of three gears sliding on that keyed shaft provides three different speeds on shaft No. III. The twin gear sliding on shaft No. IV is thus capable of producing six different speeds. Following now the connection for the highest speed, we see that the left-side wheel of shaft No. VI, having also internal teeth serving as a claw clutch, can be engaged directly with the right-side wheel of shaft No. IV, whereas the right-side wheel of shaft No. VI, if shifted to the right, can be engaged with the smaller gear of main spindle No. IX.

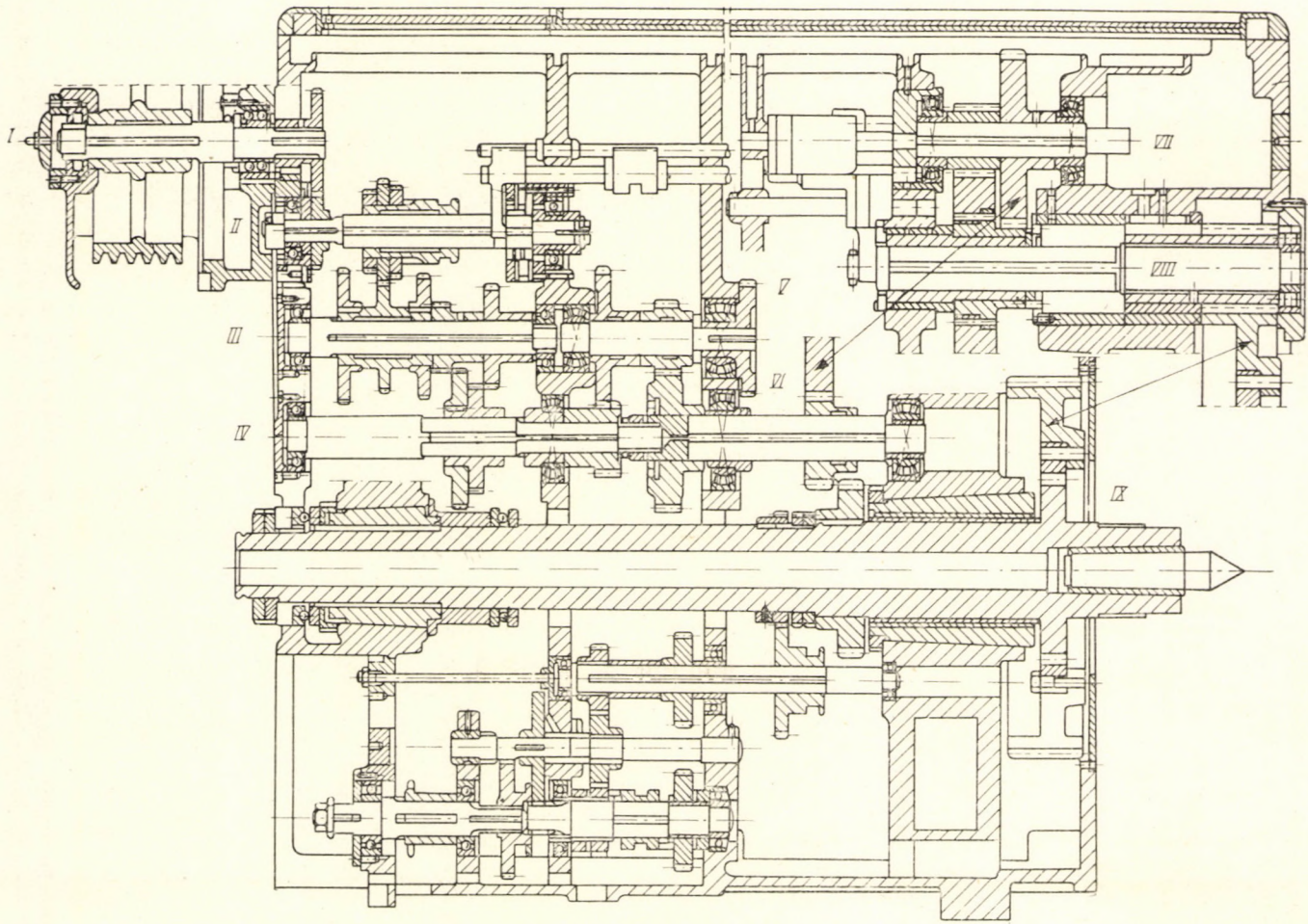


Fig. 1. The headstock of a lathe of higher output

In accordance with the abovesaid, the driving and the driven wheels of the following shafts are to be considered for computing the gear ratio:

$$\frac{\text{Motor}}{\text{I}} \cdot \frac{\text{I}}{\text{II}} \cdot \frac{\text{II}}{\text{III}} \cdot \frac{\text{III}}{\text{IV}} \cdot \frac{\text{VI}}{\text{IX}}$$

*i. e.* altogether five transmissions.

Following the connecting schema of the lowest speed range, we shall have to drive from shaft No. IV to shaft No. V, from shaft No. V to shaft No. VI,

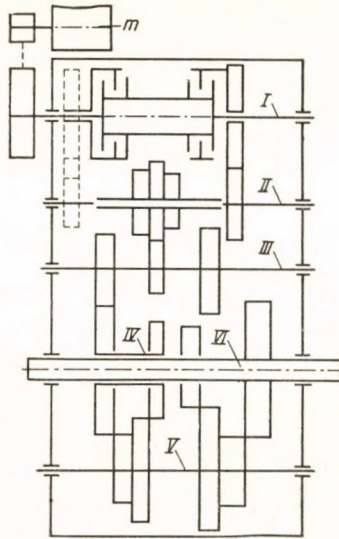


Fig. 2. The headstock of a capstan lathe

then to shaft No. VII, then to shaft No. VIII, and finally from shaft No. VIII to the main gear of the spindle by means of the gear on the right end of the shaft.

The intermediate drives included in calculating the gear ratio are:

$$\frac{\text{Motor}}{\text{I}} \cdot \frac{\text{I}}{\text{II}} \cdot \frac{\text{II}}{\text{III}} \cdot \frac{\text{III}}{\text{IV}} \cdot \frac{\text{IV}}{\text{V}} \cdot \frac{\text{V}}{\text{VI}} \cdot \frac{\text{VI}}{\text{VII}} \cdot \frac{\text{VII}}{\text{VIII}} \cdot \frac{\text{VIII}}{\text{IX}}$$

*i. e.* altogether nine transmissions.

In the case of a gear system as shown by Fig. 2, both the 6 high speeds and the 6 low speeds are obtained *with 6 transmissions*.

Likewise 6 transmissions are required to obtain the 18 different numbers of revolution including both high-speed and low-speed ones with the arrangement illustrated by Fig. 3.



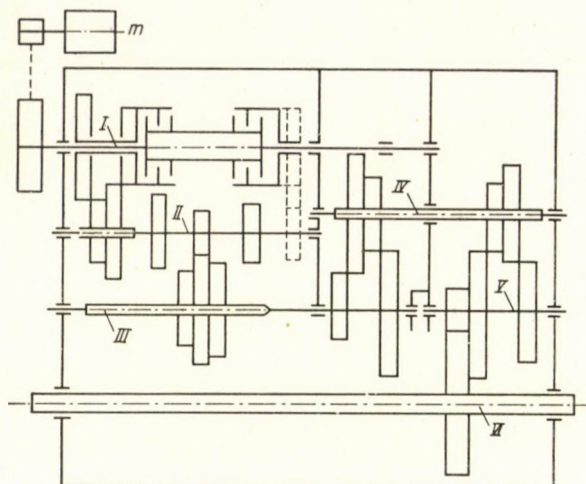


Fig. 3. The headstock of a medium-size lathe

This superfluous number of transmissions however, absorbs a considerable energy not only when idling but also and particularly under load.

The drive illustrated by Fig. 4 represents a much better way of *directing the energy flow*. This system preserves both advantages of the old cone system inasmuch as at high speed, *the main spindle is working as early as in the second stage* after the motor, while *the countershaft gears do not participate in rotation* at these high speeds and thus do not disturb the cleanness of the finishing cuts.

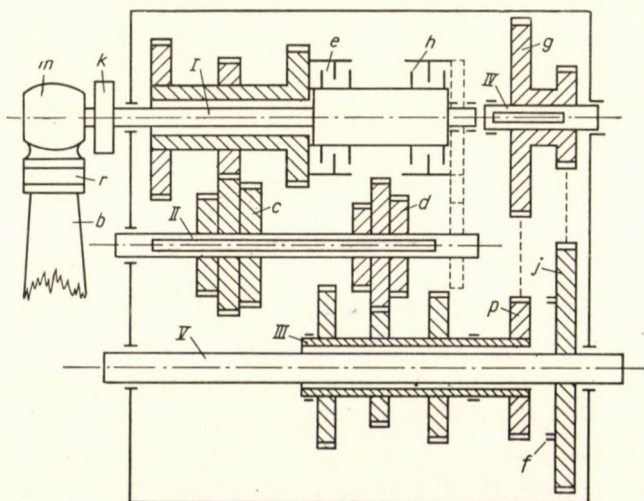


Fig. 4. A headstock where at high speeds the energy flow avoids part of the transmissions

From Fig. 4 it will be apparent that if gear  $p$  of the relieving hollow shaft is connected to the main spindle, it will be the latter which will work in the second stage, 9 different speeds being available. If, however, the hollow shaft is connected to the countershaft gear, the main spindle will be working after four steps and at nine low speeds.

The following equation could be established between the cutting power

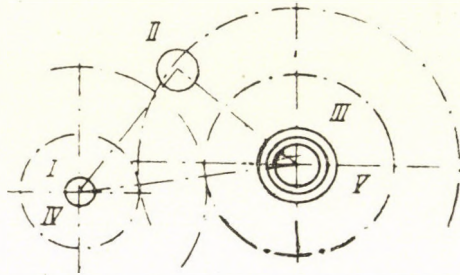


Fig. 4a. Cross section of the same headstock

$N_f$  delivered by the main spindle and the motor power  $N_m$  supplied by the motor shaft:

$$N_f = N_m \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5 \eta_6$$

where

$$\eta_1 \dots \eta_6$$

stand for the efficiencies of the 6 subsequent transmissions.

If the number of drives is but two, a smaller motor is sufficient to provide the same cutting power, *i. e.*

$$N_f = N_{m0} \eta_1 \eta_2$$

this means that

$$N_m = \frac{N_{m0}}{\eta_3 \eta_4 \eta_5 \eta_6} = \frac{N_{m0}}{\eta}$$

where

$$\eta = \eta_3 \eta_4 \eta_5 \eta_6$$

represents the impaired efficiency if comparing these two drives.

The efficiency of a carefully ground new gear might even exceed 98%. With an used gear and after some wear, including also the losses by bearing and lubricant friction, this efficiency may drop to values as low as 0.95–0.85, according to tests [1].

With machine tools the efficiency is further deteriorated by the fact that the gears are not fixed on to the shafts but can be shifted in most of the cases.

Table I summarizes the results of the power and efficiency tests carried out with a new experimental machine of the Institute for Machine Tool Development, the type ET-200 lathe [8]. The table includes also the efficiency calculated from the above readings for one pair of gears. The speed diagramm of the same machine is illustrated by Fig. 5. At calculating the efficiency  $\eta_h$  of the drive, the efficiency of the electric motor, was taken as 82%, as indicated

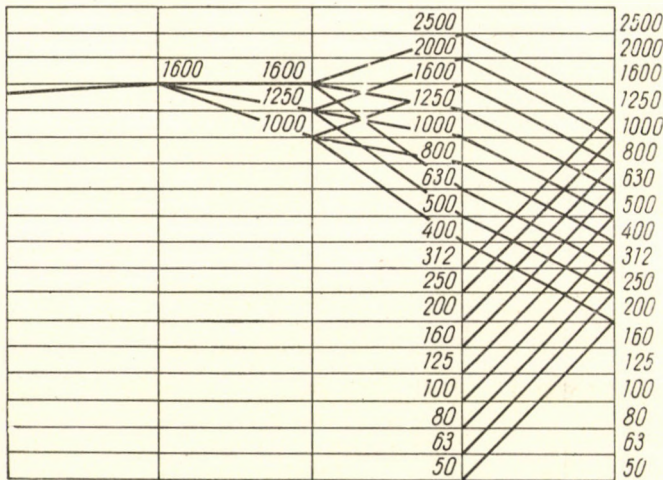


Fig. 5. Speed scheme of the ET-200 lathe

by the Ganz Works, whereas the efficiency of the belt drive, computed from the belt slip, made out 96.5%.

The efficiency for one transmission — in the low-speed range — was computed on the basis of the following assumption:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = \sqrt[4]{\eta_h}$$

In the high-speed range, the efficiency was calculated on the basis of the assumption that

$$\eta_1 = \eta_2 = \sqrt{\eta_h}$$

As compared to reality, slightly better values are considered if an average value of 0.975 is taken. In this case the efficiency loss, when comparing the two drives, will be:

$$\eta = \eta_3 \eta_4 \eta_5 \eta_6 = 0.975^4 = 0.9$$

Thus a 10% drop in the efficiency of the drive can easily be avoided by decreasing the number of transmission stages. An improved efficiency has great

significance with machine tools and generally with energy-consuming machines, all the more so as ahead of them there are many transfers of energy where — in most of the cases — the loss of energy is considerable. Fig. 6 illustrates the fact

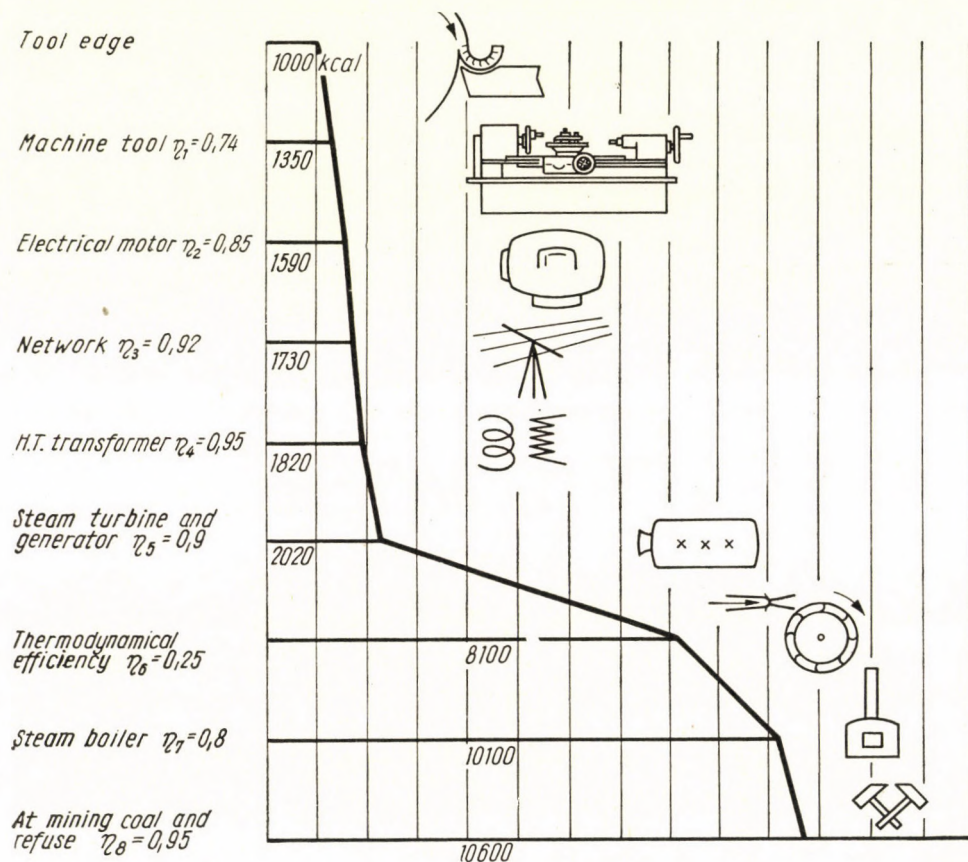


Fig. 6. 10.600 kcal minecoal corresponds to 1000 kcal cutting energy

that an economy of 1000 kcal at the tool tip results in an economy of 10 600 kcal in mine coal.

### III. The economic importance of improved efficiency

Let us investigate now what is the economic significance of saving  $p\%$  of the yearly driving energy costs  $K$  if we succeed in improving the efficiency when designing machine tools.

If  $z$  new machines are put into service yearly and the life of a machine is  $n$  years, the economy will be

- in the first year:  $k_1 = 0.01 Kpz$
- in the second:  $k_2 = 0.01 Kp 2 z$
- .....
- in the  $n^{\text{th}}$  year:  $k_n = 0.01 Kpnz$

Thus in  $n$  years the economy will be

$$\sum_{i=1}^n k_i = 0.01 Kpz (1+2+\dots+n) = \frac{(1+n)n}{200} Kpz$$

The columns of Fig. 7 illustrate the total number of machines operated in subsequent years during 15 years, provided the life of a machine,  $n$ , is 8 years.

Since in the  $(n + 1)^{\text{th}}$  year the first  $z$  machines drop out, and in every coming year this same drop-out has to be taken into consideration, the number

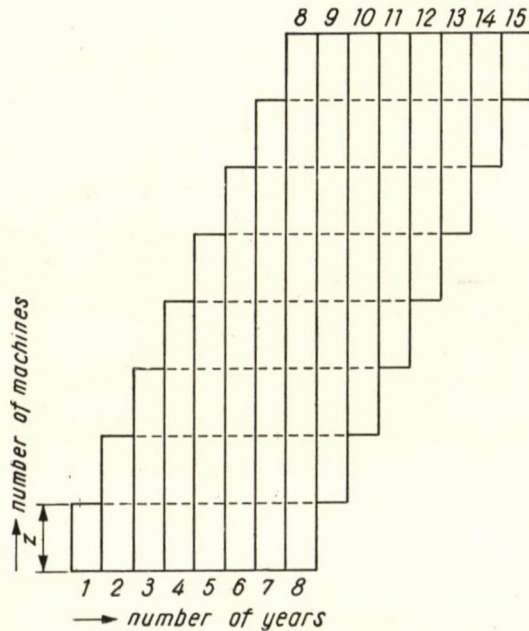


Fig. 7. The number of machines operating in subsequent years

of the machines still being operated until the end of the year  $(2n) - 1$  will be from the year  $(n + 1)$  on

$$(n - 1)z, (n - 2)z \dots 2z, z.$$

The sum of this arithmetic progression consisting of  $(n - 1)$  members is

$$\frac{n(n-1)z}{2}$$

Accordingly the economy in driving power is

$$\sum_{i=n+1}^{2n-1} k_i = \frac{nzKp(n-1)}{200}$$

The total saving will be

$$M = [(1+n)n + (n-1)n] \frac{Kpz}{200} = \frac{n^2}{100} Kpz \quad (1)$$

By the way, this is proved simply if the economies are added as per the cross lines of Fig. 7.

In the case the machine tool is designed in a spirit endeavouring to attain better efficiency, the operating cost of the machine — instead of being  $K$  — will be:

$$K_0 = K \left( 1 - \frac{p}{100} \right) = K \frac{100-p}{100} \quad (2)$$

In  $n$  years the operating costs of the machine will make out

$$n K_0 = nK \frac{100-p}{100}$$

in other words the number of machines which can be operated with the economized energy  $M$  is:

$$x = \frac{M}{nK_0} = \frac{n^2 Kpz}{100} \times \frac{100}{nK(100-p)}$$

that is

$$x = \frac{npz}{100-p} \quad (3)$$

In a given case, if the number of machines put into service yearly is  $z = 500$  pieces,

their life

$$n = 25 \text{ years,}$$

and the economy

$p = 10\%$  the economy obtained with the machines put into service during the corresponding period will be according to (1)

$$M = 25^2 \times 10 \times 500 K \times 0,01$$

$$M = 31\,250 K \quad (1a)$$

The number of machines which could be operated from their installation till their scrapping with the energy thus saved is

$$x = \frac{25 \times 10 \times 500}{90} = 1389. \quad (3a)$$

This means that the economy provides for all the power requirements of these 1389 machines for a period of 25 years.

#### IV. The coal equivalent of the economy

In order to establish the value of  $K$ , *i. e.* the energy requirement of a single machine in one year, we will consider as an example, a machine tool the average energy consumption of which is 5 kW and which is working 16 hours daily for 300 working days a year in two shifts.

The yearly energy requirement will be:

$$5 \times 16 \times 300 = 24\,000 \text{ kWh, } i. e.$$

$$24\,000 \times 864 = 20.736 \times 10^6 \text{ kcal.}$$

As illustrated by Fig. 6, 1 kcal consumption measured at the cutting edge of the machine tool is equal to about 10 kcal coal in the coalmine, *i. e.*

$$10 \times 20.736 \times 10^6 = 207.36 \times 10^6 \text{ kcal.}$$

If this quantity is recalculated to coal of 4000 kcal/kg, the coal consumption will amount to

$$K = 51.84 \times 10^3 \text{ kg, } i. e.$$

52 tons in round figures.

According to expression (1a) the total economy of coal is

$$M = 31\,250 \times 52 = 1\,625\,000 \text{ tons.}$$

Taking now into consideration the known expression (2) existing between  $p\%$  and  $\eta$  efficiency,

$$\frac{100 - p}{100} = \eta = \frac{K_0}{K} \quad (4)$$

the above results could be obtained with an improvement by 10%, as per

$$\eta = 0.9 = \frac{K_0}{K}.$$

### V. Illustration of the economy

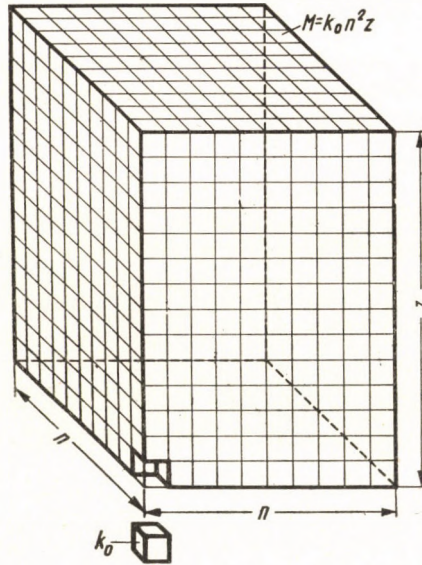
The formula (1) for the total economy  $M$  could be expressed in the following way too:

$$M = \frac{Kp}{100} z n^2 = k_0 z n^2 \quad (1b)$$

where

$$k_0 = \frac{Kp}{100}$$

represents the economy obtained with a single machine in one year. The second member,  $z$  stands for the number of new machines put into operation yearly



8. Representation of the economy  $M$

and is to be considered but as a simple proportion factor. The third member could be illustrated as the surface of a square with the side  $n$ .

If we assume arbitrary values for the lifetime  $n$  of the machine and the number  $z$  of machines put into service yearly, the expression (1b) will facilitate illustrating the economy  $M$ .

The small cube shown in Fig. 8 indicates the savings of one machine in one year, whereas the volume of the prism with the edges  $n \times n$  and  $z$  represents the total saving  $M$ .



## VI. Some other points concerning the improvement of efficiency

While in the case of *energy supplying* plants and machines the creative human spirit has been fighting for the improvement of efficiency, in the case of *energy consuming* machines this point of view — as proved by the examples quoted — is hardly considered, although the energy used with these machines appears in a much more expensive, “several times filtered” form, *i. e.* the energy has several times suffered losses, as expressed by the efficiency of each transformation.

Apart from the fact that in the industrial countries about 15% of the total power consumption is absorbed by machine tools and that the power requirement for the machine tools is steadily increasing, the results indicated hereabove are far from illustrating the complete extent of damages caused to the national economy [6]. As a result of the energy consuming machines having a lower efficiency, larger electric motors, bigger transmission lines and bigger power stations are needed. FRIGYES LOMB has pointed out that modestly calculated, an economy of about 12 million forints in electrical investments could be achieved in 8 years if we could consider 4.5 kW instead of 5 kW for 500 new machine tools a year.

## VII. Some suggestions for improving the mechanical efficiency of the drive

### 1. The “bifurcating” of the operating chain

Practically this design principle means that a part of the built-in gear drives, needed for forming low speeds only, will be simply avoided in the high speed stages. If we compare Figs. 1–3 with Fig. 4, the advantage of this principle will be obvious. From Figs. 4 and 4a it will be apparent that in the headstock there are only *three* shaft holes needed, since the centre-lines of shafts No. I and IV are brought into one straight line. At one of the author’s designs which has been manufactured, the working shaft runs at twelve different speeds between  $n = 100$  and  $n = 1250/m$  at the second step counted from the first shaft of the drive. With low speeds, *i. e.* between  $n = 6$  and  $n = 80/m$  it produces 12 different speeds at the fourth step.

### 2. Rationalized reversal by “switch-back” and the placing of the automatic brake

Fig. 9 shows that type of reversing device used at present, which contains a twin disc clutch and is capable of providing as many different speeds in reverse motion as it does in forward motion. No. 2 wheel of shaft No. II is driven by the electric motor *m* through clutch *k*, shaft I, clutch *e* (“forward”) and gear 1.

The wheel 5 of shaft No. II is driven through the intermediate wheel 4 of shaft No. III by the gear 3 of the clutch *h* (backward).

Wheels No. 6, 7, 8, 9 are keyed onto shaft No. II. Shaft No. IV can be operated, in the *second transmission stage counted from the first shaft*, at four

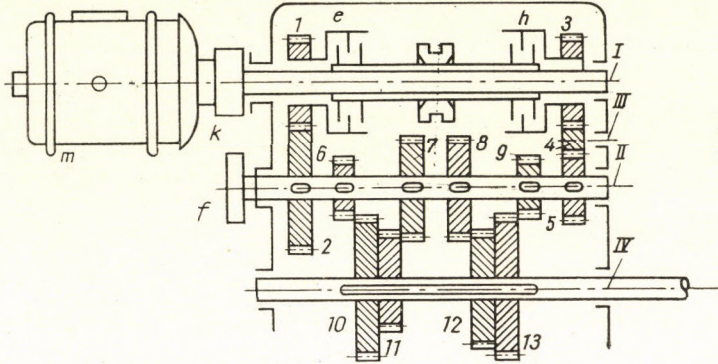


Fig. 9. Usual design of reversing device with friction clutch

different speeds by the adjustment of the sliding gear clusters consisting of gear pairs 10, 11 and 12, 13 to be found on the shaft.

However, with the design illustrated in Fig. 10, the author has succeeded, on a drive of 45–60 HP which now is operating at the Iron Industry Research

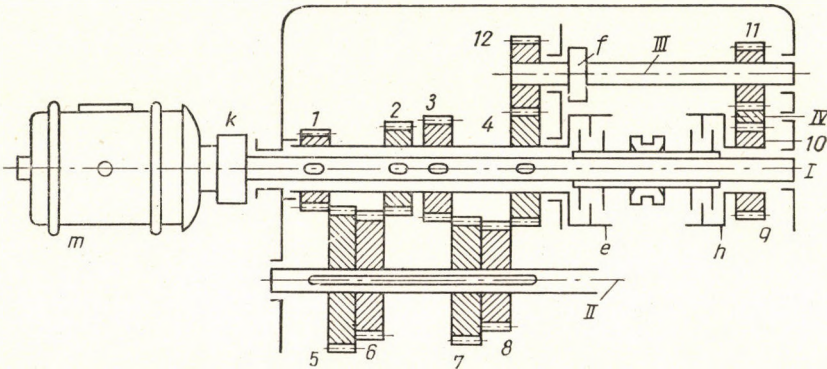


Fig. 10. The reversing device applied by the author and resulting in saving one transmission in the forward motion

Institute in Budapest, to attain the four different speeds on shaft II by *one single step*. By having grouped the components in this way a considerable improvement in the mechanical efficiency has been obtained without using more parts than with the traditional design of Fig. 9.

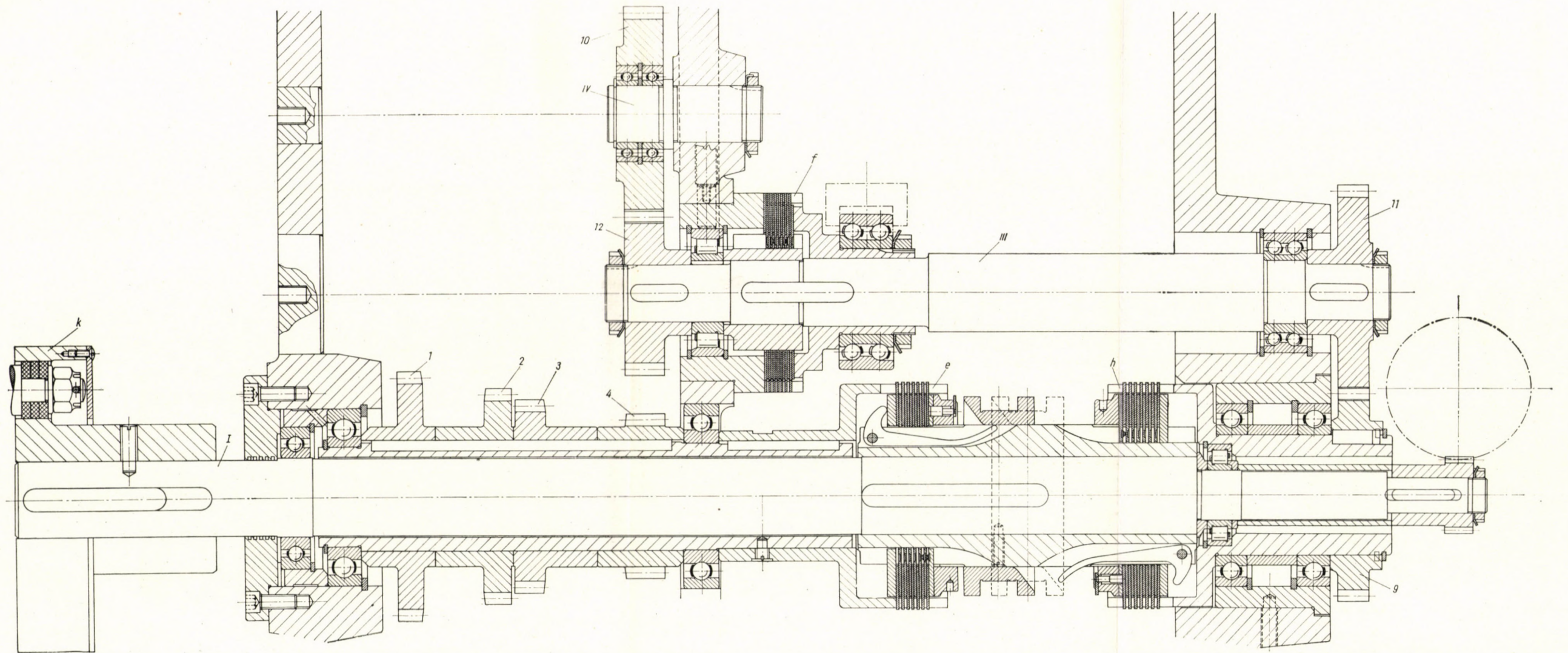


Fig. 10a. The drawing of the reversing device combined with an automatic brake



There is a considerable difference in comparison to the usual design because in this case not only one gear is put on the hub of the "forward" clutch but as many (*e. g.* three or four) as there are transmissions required in the first step; the wheel of the "reverse" clutch is not connected to the next shaft, but it is meshing *with the gear mounted on the hub of the "forward" clutch*. The wheel 9 of the "reverse" clutch drum *h* (Fig. 10) is connected to the wheel 4 of the drum of the forward clutch *e* through the intermediary wheel 10 of shaft IV and through wheels 11 and 12 of shaft III.

With the design shown in Fig. 9 the brake drum *f* is put on the shaft II whereas in Fig. 10 it is on shaft III. There are several machines including also some enjoying a good reputation even on the world market where the brake drum is placed on one of the remoter shafts, though this way of construction is absolutely unsatisfactory and quick wear or fracture of the gears is risked. The author has already stressed this point elsewhere [9]. If in the central position of the clutch sleeve it is not the clutch drum or the shaft driven by its gear which is arrested by the brake, the sliding gears find rotating gears beside them, since in the *central position of the sliding gear* the clutch drums and the shafts driven by their gears will be brought into rotation by the friction of the internal and external clutch discs and by the bearing friction of the clutch drums turning on the input shaft.

By applying the principle of "switch-back", a transmission can be saved in the forward motion — as compared to the conventional solution of Fig. 9 — whereas in reverse we have an additional transmission. With some of the machines — as for instance with lathes and planers — the total power is nearly always transmitted in the forward motion and not in the idle return motion. Thus the saving of one transmission step results in saving "*waste energy*" by improving the efficiency of the drive. This possibility is never thought of.

Fig. 10a shows the workshop drawing of the reversing device combined with an automatic brake.

### 3. *Considering of the statistical frequency distribution for establishing the series of speeds*<sup>1</sup>

Even a machine working with a good efficiency can by no means secure economical production, if the series of speeds is too coarse and if in consequence the machine has to work at a considerably lower cutting speed than required. Therefore the problem arises whether we may reckon with a decrease of the working time, in the case of a drive with a given number of steps, if we change the geometrical series of the speeds. If we require that the specific work time of the chips produced during the whole machine life should be minimum, we have to consider also the statistical frequency distributions of the diameter and of the material of the work put on the lathe. According to Ing. H. J.

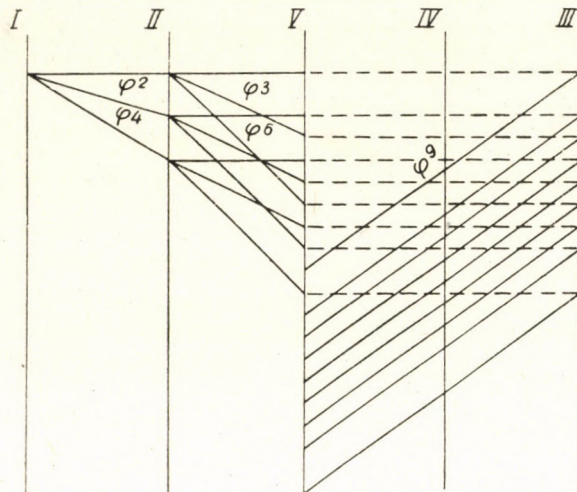


Fig. 11. Speed scheme for 18 steps, the common ratio rising at the extremities

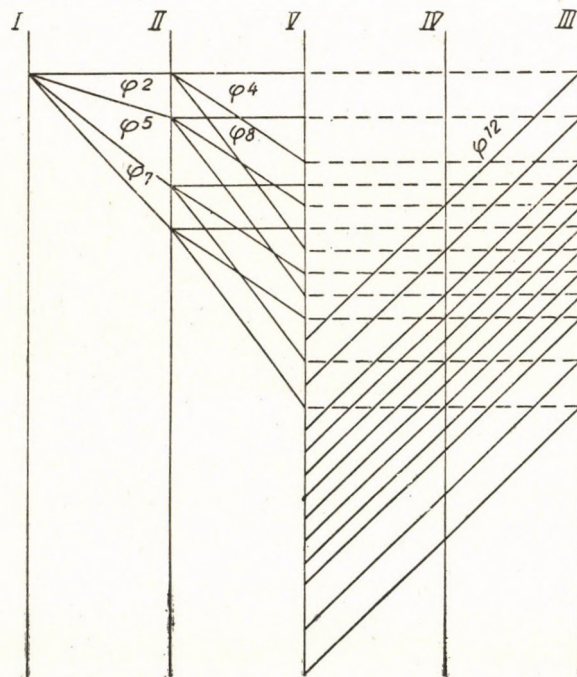


Fig. 12. Speed scheme with 24 steps, with two increased ratios up at each extremity

BURMEISTER [10] a lathe of swing  $D$  will most often work on pieces which have a diameter of  $\frac{1}{3} D$  to  $\frac{2}{3} D$ . Therefore the author's idea [11] that the geometrical series of the speeds should be formed with a smaller common ratio in

the middle and with a higher one at the extremities, seems to be motivated. The speed scheme of 18 steps illustrated by Fig. 11 can be applied to the design shown by Fig. 4, where the common ratio after the lowest speed and before the highest one will be  $2\varphi$ . With a similar shaft arrangement, Fig. 12, can be used which illustrates a speed scheme of 24 steps with a ratio  $2\varphi$  at the two first and the two last speeds. If  $\varphi = 1.26$ , this solution provides a 500-fold adjustability, which represents an extra advantage in some of the cases (*e. g.* the cutting of steep threads, the turning of light metals). If we are content with a smaller rate of adjustability, we will obtain in the central part of the series finer steps of revolution numbers for the pieces the diameters of which occur very often.

#### 4. *Considering the statistical frequency distribution for establishing the motor output Delta and star connection of the motor*

The curve of  $N = \frac{Pv}{75}$  HP pitched against the surface speed  $v$  and the main cutting force  $P$  is an equilateral hyperbola. If the curve of the most economical cutting edge life  $T = CPv^n$  is traced by BRAUER's method for plotting polytropic curves [12], we will obtain the point of intersection of the two curves defining those simultaneous values of  $v$  and  $P$  at which both the machine and the tool [15] are well utilized (Fig. 13).

It seems to be only reasonable therefore to choose the output of the driving motor in such a way that the values of  $P$  and  $v$  are calculated on the basis of statistical frequency.

With a higher motor output and with carbide-tipped tools, delta connection and with high-speed steel, star connection is to be applied. Thus a favourable efficiency can be obtained even if the motor is working at a smaller output.

#### 5. *Energy saving by decreasing the kinetic energy of gears*

In the case of machine tools it is in the character of the work they perform that some or all of the shafts of the machine are not always in motion, but will stop then and now and will start moving again either in a direction identical to the previous one or contrary to it. Braking the masses in motion and starting them again is accompanied by the known *loss in energy*. The author has pointed out [13] already that *the designer has an opportunity to reduce these losses to the "lowest existing" minimum value by choosing the gear ratio properly.*

From a given revolution number  $n$  the revolution number  $\frac{n}{j}$  can be obtained by arbitrarily selecting the gear ratio for the intermediate speed  $\frac{n}{x}$  (Fig. 14). There will be, however, a single  $x$  value which could be approximated

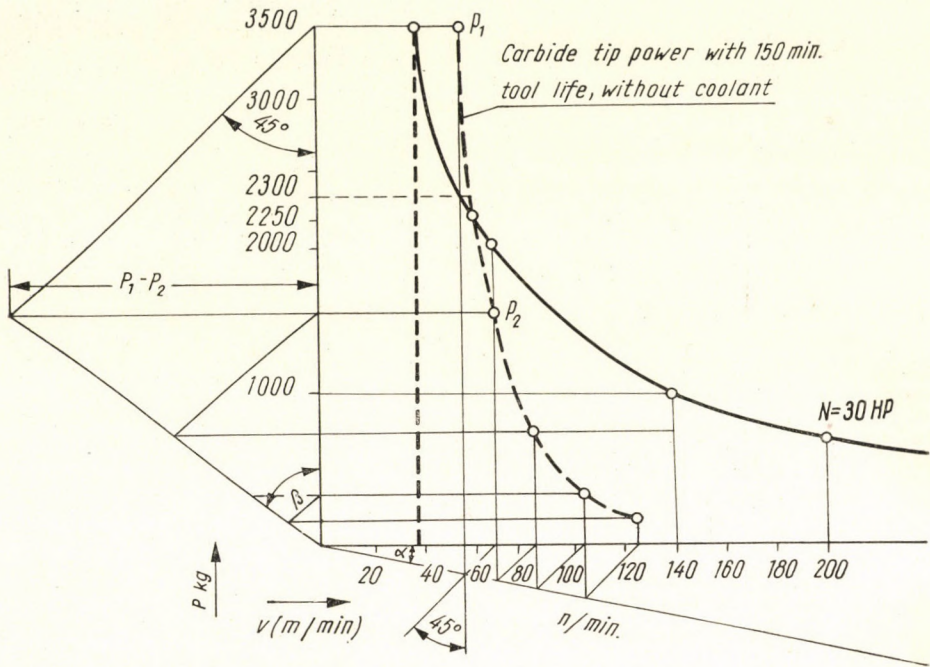


Fig. 13. A comparison between tool output and machine output

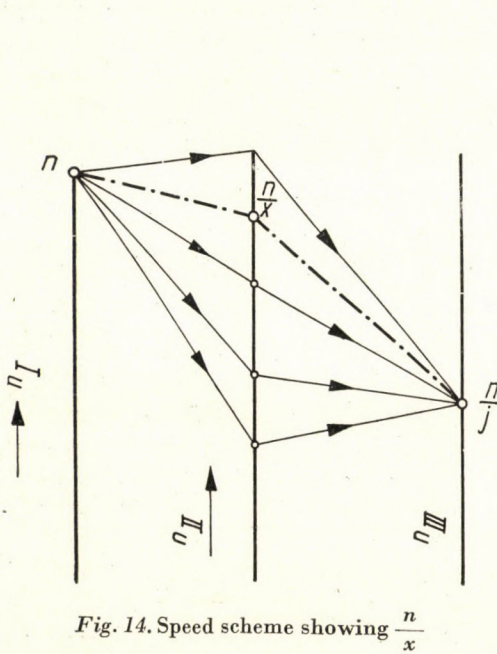


Fig. 14. Speed scheme showing  $\frac{n}{x}$

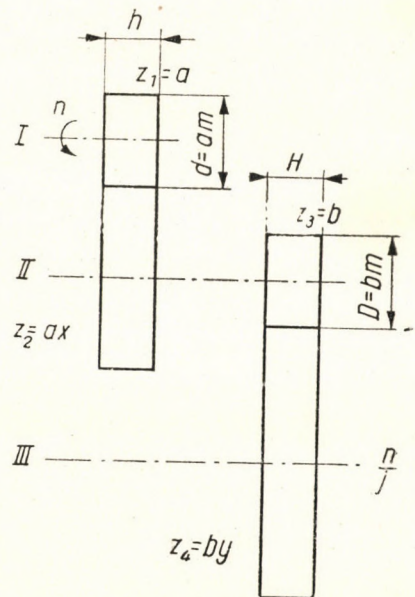


Fig. 14a. Double transmission



vely determined by the equation

$$x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 8j^2}}{2}} \quad (5)$$

provided the number of teeth  $z_1$  (Fig. 14a) is chosen to be the smallest and provided the tooth width  $H$  is dimensioned according to the torque to be transferred.

In the paper mentioned above the author has proven by examples, that at equal modules, the transmission constructed with the smallest possible loss of kinetic energy is very advantageous, considering space requirement as well as the total number of teeth and the total weight, and presents favourable features not only from the point of view of energy consumption but also in respect of manufacturing costs.

This solution has been further developed by dr. I. LIPKA for two intermediate transmissions, *i. e.* for three transmissions [14]. Having checked by his method of computation a certain machine tool, he found that the kinetic energy of the rotating shafts was 11.74 mkg instead of the 7.14 mkg it would have been possible to obtain. This means that the machine works with a loss of kinetic energy which was higher by 65% than the loss at which it would have been able to work had the designer thought of decreasing this "waste energy" as well.

In the case of planers, thread-cutting machines etc. where reversion is continuously repeated, this problem should also be duly considered.

**Table I**  
*Mechanical efficiency of one stage on a new experimental lathe*

R. p. m.		Power, W		Mechanical efficiency	
nominal	measured	input	brake	main drive	of one stage
$n_n$	$n_f$	$W_0$	$W_f$	$\eta_h^*$	$\eta_1$
50	50,5	5670	3470	77,8	91,2
63	64	7100	4700	83,5	95,6
80	81	9100	6230	86,8	96,0
100	100	11150	8160	92,0	98,0
125	125,5	13750	9980	91,7	97,8
160	158	14700	10280	88,6	97,0
200	198	14800	10350	88,6	97,0
250	249,5	14700	10280	88,6	97,0
315	314	14800	10110	86,5	96,4
400	397	14800	10170	87,3	93,4
500	500	14400	9500	83,5	91,4
630	631	14850	9900	84,5	91,9
800	790	14600	9730	84,5	91,9
1000	995	14850	9900	84,4	91,8
1250	1250	15000	10400	87,8	93,7
1600	1595	14800	9180	78,6	88,6
2000	1995	14750	8540	73,4	85,6
2500	2503	14500	7760	67,8	82,3

\*  $\eta_h$  deduced from the total efficiency, with 82% efficiency of the electrical motor and 96.5% efficiency of the belt drive.

## REFERENCES

1. "Hütte" des Ingenieurs Taschenbuch 26. Auflage II. Band. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1931.
2. SCHLESINGER, G.: Die Werkzeugmaschinen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1936.
3. H. C. Ачеркан: Расчет и конструирование металлорежущих станков Москва 1949.
4. KAZINCZY, L.: Szerszámgépek (Machine Tools). Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.
5. SZŐKE, B.: Szerszámgépek az energiagazdálkodás tükrében (Machine Tools in the Economics of Energy). Gép, 1953, No. 8. page 365.
6. LOMB, F.: Hozzászólás "Szőke Béla: Szerszámgépek az energiagazdálkodás tükrében" c. tanulmányához. (Comments on B. Szőke's Report: Machine Tools in the Economics of Energy.) Gép, vol. 1953, No. 12, page 562.
7. SZŐKE, B.: A műhelytechnika feladatai (The Tasks of Workshop Technology). Természettudományi Közöny. May 1931. No. 10, page 314.
8. Szerszámgépfejlesztő Intézet (Institute for Machine Tool Development) (at that time: Mintagépgyár). Az ET—200 eszterga 1951. okt. 1—10-ig végzett mérései. (Measurements on lathe type ET—200 performed on 1—10th October, 1951.)
9. SZŐKE, B.: Törésveszély fogaskerék tolótömböknél (The Risk of Breakage with Sliding Gear Clusters). Gép, June 1955, No. 6, page 232.
10. BURMESTER, H. J.: Über die Wahl der Schnittbedingungen beim Drehen, Werkstatt und Betrieb, Verlag Carl Hamer, München, 27. Jahrgang 1949, Heft Juni.
11. SZŐKE, B.: Áttételes hajtás szerszámgépekhez, főleg esztergapadokhoz (Transmission Drives for Machine Tools, especially for Lathes). Patent Application SO—15/26160 Aug. 18, 1949.
12. SZŐKE, B.: Az eszterga terhelhetősége (The Load Capacity of the Lathe). Gép, No. 10, Oct. 1955, page 377.
13. SZŐKE, B.: Áttétel szerkesztése a legkisebb lendületvesztéssel (Transmission Construction with Minimum Loss of Kinetic Energy). Gép, 1952, No. 10, page 446.
14. LIPKA, I.: Minimális lendületvesztésű hajtóművek számítása (The Computation of Drives with Minimal Loss of Kinetic Energy). Gép, 1955, page 277.
15. SZŐKE, B.: Special Features of the Loadability of Lathes, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tom. XXIX. Fasc. 1—2, page 57.

## SUMMARY

While at the designing of energy supplying machines due care is taken to achieve a high efficiency, in the case of the energy-consuming machines tools and other machines, mostly technological requirements are complied with and the efforts to ensure a high efficiency are neglected. This shortcoming is all the more so important as the new machining tools require a steadily increasing output on the part of the machine tools. The energy used has suffered already several losses by transformation and thus has a higher price.

Having enumerated some of the circumstances which impair efficiency, we calculate the economy possible if the flow of energy were directed in a way different from the frequently used kinematic chain.

We prove that if the efficiency is improved by  $p\%$ , the economy to be obtained will be

$$M = \frac{n^2 Kpz}{100}$$

where  $z$  stands for the number of machines marketed yearly,  $K$  represents the yearly cost of energy consumption per machine and  $n$  is the life of one machine, expressed in years.

With this saving a number of

$$x = \frac{npz}{100 - p}$$

new machines could be operated.

In the followings the author presents some of his suggestions as to the improvement of efficiency and the decrease of the main working time. Some of these suggestions already been realized in practice as well.

## DIE WIRTSCHAFTLICHE UNTERSUCHUNG DES WIRKUNGSGRADES DER WERKZEUGMASCHINEN

B. SZÖKE

### ZUSAMMENFASSUNG

Während bei der Konstruktion der Kraftmaschinen der gute Wirkungsgrad eine wichtige Rolle spielt, werden bei den Werkzeugmaschinen und im Allgemeinen bei den Arbeitsmaschinen, die Energie verbrauchen, bloß die technologischen Anforderungen vor Auge gehalten; das Streben um einen besseren Wirkungsgrad zu erzielen wird in diesen Fällen in den Hintergrund gedrückt. Dieser Mangel ist um so schwerwiegender, als die neuen Bearbeitungswerkzeuge eine immer steigende Leistung seitens der Werkzeugmaschinen erfordern. Die in diesen Fällen zum Verbrauch gelangende Energie hat schon mehrmals Wirkungsgrad-Verluste erlitten, so daß diese Energie bereits einen höheren Einheitspreis hat.

Nach einigen den Wirkungsgrad ungünstig beeinflussenden Eigenschaften der Konstruktion wird durch Berechnungen kontrolliert: was für ein Ersparnis könnte erzielt werden falls der Energiefluß auf einer von dem oft vorkommenden kinematischen System abweichenden Weise geleitet wäre.

Es wird bewiesen daß im Falle einer Wirkungsgradverbesserung von  $p\%$  die erzielbare Ersparnis

$$M = \frac{n^2 Kpz}{100}$$

ist, wo  $z$  die Zahl der in einem Jahr in Umlauf gebrachten Maschinen ist,  $K$  steht für die jährlichen Spesen des Energieverbrauches pro Maschine und  $n$  stellt die Lebensdauer der Maschinen in Jahren dar.

Mit dieser Ersparnis können

$$x = \frac{npz}{100 - p}$$

Maschinen im Betrieb gehalten werden.

Nach den Obigen legt der Author einige mit der Verbesserung des Wirkungsgrades und mit der Herabsetzung der Arbeitszeit zusammenhängende Vorschläge vor, die schon auch in Praxis angewandt worden sind.

## ASPECTS ÉCONOMIQUES DU RENDEMENT DES MACHINES-OUTILS

B. SZÖKE

### RÉSUMÉ

Tandis que, dans les projets de construction des machines motrices, on prend grand soin d'atteindre un rendement élevé, pour les machines-outils consommatrices d'énergie, et en général pour toutes les machines productrices de travail, on ne cherche qu'à remplir les conditions imposées par la technologie, la recherche d'un bon rendement étant négligée. Cette insuffisance est d'autant plus grave que les nouveaux outils exigent des machines-outils des puissances toujours plus élevées, et que l'énergie utilisée ayant déjà passé par plusieurs transformations a subi des pertes, et son prix unitaire s'en trouve accru.

Après le rappel de quelques particularités de construction ayant pour effet de réduire le rendement, un calcul montre l'économie pouvant être réalisée si l'énergie suit un chemin différent de l'enchaînement cinématique très souvent utilisé.

L'auteur démontre qu'en cas d'une amélioration  $p\%$  du rendement, l'économie possible est

$$M = \frac{n^2 Kpz}{100}$$

où  $z$  signifie le nombre annuel des machines mises en service,  $K$  les frais annuels de dépenses d'énergies pour une machine, et  $n$  la durée de vie d'une machine en années.

Avec cette économie, on pourrait exploiter

$$x = \frac{npz}{100 - p}$$

machines en plus.

L'auteur fait enfin quelques propositions en vue de l'amélioration du rendement et de la réduction du temps d'usinage actif, dont il a déjà utilisé quelques-unes dans la pratique.

## ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ К. П. Д. В СЛУЧАЕ МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКОВ

Б. СЁКЕ

### РЕЗЮМЕ

При проектировании машин для выработки энергии повышенное внимание уделяется достижению высокого к. п. д., в случае же потребляющих энергию металлорежущих станков и вообще выполняющих работу машин обращают внимание лишь на удовлетворение технологических требований, а стремление достигнуть высокий к. п. д. отодвигается на задний план. Этот недостаток становится все более веским, так как новые обрабатывающие инструменты требуют от металлорежущих станков приложения все больших и больших мощностей и поступающая на использование энергия претерпела уже многократное падение к. п. д. и таким образом повышается ее единичная стоимость.

После указания нескольких конструктивных особенностей, ухудшающих к. п. д., расчетным методом производится проверка степени экономии, которую можно было бы достигнуть, если бы поток энергии подводился отличающимся от очень часто встречающейся кинематической цепи образом.

Показано, что достижимая экономия при улучшении к. п. д. на  $p\%$  составляет

$$M = \frac{n^2 Kpz}{100},$$

где  $z$  — число вводимых ежегодно в строй машин;  
 $K$  — стоимость расхода энергии на машину в год;  
 $n$  — срок службы машин в годах.

Такая экономия позволила бы в год включить в сеть машины в количестве

$$x = \frac{npz}{100 - p}.$$

После этого автор сообщает несколько предложений по улучшению к. п. д. и основного времени работы, из которых некоторые им были применены уже на практике.

# DIE BEANSPRUCHUNG VON STÄBEN MIT VERÄNDERLICHEM QUERSCHNITT AUF BIEGUNG BEI GLEICHZEITIGEM DRUCK\*

J. SZIDAROVSKY

UVATERV ENTWURFSBÜRO FÜR STRASSEN UND EISENBAHNEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 29. August 1958]

## Einleitung

In der Ingenieurpraxis kommen oft Stäbe vor, die gleichzeitig auf Biegung und Druck beansprucht werden. Das Biegemoment kann nur in den seltensten Fällen in geschlossener Form dargestellt werden. Deshalb rechnet der praktische Ingenieur entweder mit einem konstant angesehenen Querschnitt oder aber er verwendet eine schrittweise Näherung.

Das zuerst genannte Verfahren befriedigt in den meisten Fällen die in den statischen Berechnungen erforderte Genauigkeit nicht; außerdem kann die Größenordnung des Fehlers nicht geschätzt werden. Bei dem zweiten Verfahren wird als erste Näherung die Druckkraft außer acht gelassen und nur die durch die Querlasten verursachten Biegemomente bestimmt. Nun folgt die Bestimmung der Ausbiegung der Stabachse und die des Biegemomentes, das durch die exzentrisch gewordene Axialkraft hervorgerufen wird. Dieses zusätzliche Moment erhöht die Ausbiegung, wodurch wieder ein neues Moment und eine weitere Ausbiegung entsteht. Auf diese Weise nehmen die Momentenwerte von Schritt zu Schritt zu, ihr Zuwachs ist aber, leider, zu langsam.

Im folgenden soll nun ein neues — ebenfalls iteratives — Näherungsverfahren vorgeführt werden, das eine viel bessere Konvergenz als das übliche Verfahren aufweist.

## 1. Die theoretischen Grundlagen des iterativen Näherungsverfahrens

Die Gleichgewichtsgleichung eines gleichzeitig auf Biegung und Druck beanspruchten Stabes lautet (Abb. 1):

$$M_I(x) + P \eta(x) = M(x) . \quad (1,1)$$

Nach zweimaligem Differenzieren und Einsetzen des Zusammenhanges

$$\eta'' = - \frac{M(x)}{EJ(x)}$$

\* Preisgekrönte Arbeit der Klasse für Technische Wissenschaften der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

gewinnt man die Differentialgleichung des gleichzeitig gebogenen und gedrückten Stabes:

$$M''(x) - \frac{P}{EJ(x)} M(x) = M_t''(x) = -p_t(x). \quad (1,1a)$$

In diesen Formeln bedeuten  $M(x)$  das gesuchte Biegemoment,  $\eta(x)$  die Durchbiegung,  $M_t(x)$  das Biegemoment infolge der Querlast  $P_t(x)$  unter Außerachtlassung der Druckkraft,  $E$  den Elastizitätsmodul,  $P$  die Druckkraft, von der vorausgesetzt wird, daß sie konstant ist, und  $J(x)$  das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes (Abb. 1).

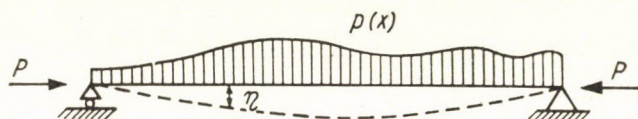


Abb. 1

Wird der Ausdruck

$$k^2(x) = \frac{P}{EJ(x)} \quad (1,2)$$

eingeführt, dann ist

$$M''(x) + k^2(x) M(x) = M_t''(x). \quad (1,3)$$

Nun möge dasselbe Störungsmoment  $M_t(x)$  den mit der konstanten Druckkraft  $P_0$  belasteten Stab von konstantem Trägheitsmoment  $J_0$  belasten. Dieser Stab soll *Ersatzstab* genannt werden. Die Differentialgleichung dieses Stabes ist

$$M''^*(x) + k_0^2 M^*(x) = M_t''(x), \quad (1,3a)$$

worin

$$k_0^2 = \frac{P_0}{EJ_0}, \quad (1,2a)$$

und  $M^*(x)$  das auftretende Biegemoment ist. Gleichung (1,3a) wird von (1,3) subtrahiert:

$$M_1''(x) + k^2(x) M_1(x) = -p_1(x), \quad (1,4)$$

worin

$$M_1(x) = M(x) - M^*(x), \quad (1,5)$$

und

$$p_1(x) = -M^*(x) [k_0^2 - k^2(x)] \quad \text{ist.} \quad (1,6)$$

Der letztere Wert soll die *erste Ergänzungsbelastung* genannt werden. Die Differentialgleichung (1,4) hat genau die gleiche Form wie (1,3), nur ist die Belastung eine andere.

Würde der ursprüngliche Stab mit der ersten Ergänzungsbelastung  $p_1(x)$  belastet, und wären die in ihm hervorgerufenen Momente  $M_1(x)$  bekannt, so wären die gesuchten Momente  $M(x)$  des ursprünglichen Stabes:

$$M(x) = M^*(x) + M_1(x).$$

Leider können wir aber  $M_1(x)$  aus der Differentialgleichung (1,6) im allgemeinen nicht berechnen und so sind wir gezwungen, uns einer Näherungslösung zu bedienen. Hierzu belasten wir den Ersatzstab mit der ersten Ergänzungsbelastung  $p_1(x)$ . Die Differentialgleichung ist dann

$$M_1^{*''}(x) + k_0^2 M_1^*(x) = - p_1(x). \quad (1,4a)$$

Wird (1,4a) von Gleichung (1,4) subtrahiert

$$M_2''(x) + k_0^2(x) M_2(x) = - p_2(x),$$

worin

$$M_2(x) = M_1(x) - M_1^*(x),$$

so ergibt sich als *zweite Ersatzbelastung*

$$p_2(x) = - M_1^*(x) [k_0^2 - k^2(x)].$$

Mit der Wiederholung des obigen Vorganges ist die  $n$ -te Differentialgleichung

$$M_n''(x) + k_0^2(x) M_n(x) = - p_n(x), \quad (1,7)$$

deren Näherungslösung  $M_n^*(x)$  die Differentialgleichung

$$M_n^{*''}(x) + k_0^2 M_n^*(x) = - p_n(x) \quad (1,7a)$$

liefert. Die auf der rechten Seite vorkommende  $n$ -te Ersatzbelastung ist

$$p_n(x) = - M_{n-1}^*(x) [k_0^2 - k^2(x)], \quad (1,8)$$

und schließlich ist das gesuchte Moment:

$$M(x) = M^*(x) + M_1^*(x) + M_2^*(x) + \dots \quad (1,9)$$

Dieses Verfahren ist also ein iteratives Näherungsverfahren, bei dessen Ableitung keinerlei Bedingungen bezüglich der Wahl von  $k_0^2$  gestellt wurden, das demzufolge theoretisch beliebig sein kann. So würden wir also auch im Falle von  $k_0^2 = 0$  zu demselben Endresultat gelangen. Es ist jedoch zweckmäßig, diese Größe  $k_0^2$  so zu wählen, daß sie irgendeinem Durchschnittswert von  $k^2(x)$  entspricht.

## 2. Der Zusammenhang zwischen dem vorgeführten Verfahren und dem bekannten iterativen Näherungsverfahren

Wird  $k_0^2 = 0$  angenommen, so unterscheidet sich die neue Methode im wesentlichen nicht von der in der »Einleitung« erwähnten alten schrittweisen Näherungsmethode. Dies sei im folgenden bewiesen.

Bei dem in der Einleitung erwähnten alten Verfahren wird als erster Schritt das Moment

$$\bar{M} = - \iint p_t dx dx \quad (2,1)$$

bestimmt. Damit kann die Durchbiegung

$$\eta = - \iint \frac{M}{EJ(x)} dx dx$$

festgestellt werden.

Beim zweiten Schritt ist das Moment

$$\bar{M}_1 = P\eta = -P \iint \frac{\bar{M}}{EJ(x)} dx dx.$$

Die Belastung, die dieses Moment verursacht, hat die Größe

$$\bar{p}_1 = \frac{d^2}{dx^2} \bar{M}_1 = - \frac{P}{EJ(x)} \bar{M}. \quad (2,2)$$

Durch eine Wiederholung dieses Vorganges ergibt sich

$$\bar{p}_2 = - \frac{P}{EJ(x)} \bar{M}_1 = - \frac{P}{EJ(x)} \iint p_1 dx dx, \quad (2,3)$$

und so weiter.

Dieselbe Aufgabe wird im Falle  $k_0^2 = 0$  beim neuen Verfahren folgenderweise gelöst. Man geht von der Gleichung (1,1a) aus, die jetzt folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$M^{*n} = - p_t(x).$$



Das heißt,

$$M^* = - \int \int p_t(x) dx dx ,$$

das nach (2,1) mit  $\bar{M}$  übereinstimmt.

Als zweiter Schritt wird auf Grund der Formeln (1,6) die Belastung

$$p_1(x) = - M^*(x) [k_0^2 - k^2(x)]$$

bestimmt. Da  $k_0^2 = 0$ , und nach (1,2)  $k^2(x) = \frac{P}{EJ(x)}$  ist, so geht die vorige Gleichung in die folgende über:

$$p_1 = - \frac{P}{EJ(x)} M^*, \quad (2,4)$$

was mit (2,2) übereinstimmt. Auf ähnliche Weise ist

$$p_2 = - \frac{P}{EJ(x)} M_1^*,$$

was wieder mit (2,3) übereinstimmt.

Dadurch sind beide Verfahren — und auch ihre Konvergenz — im wesentlichen identisch, nur ist das vorgeführte Verfahren bequemer, denn während beim üblichen Verfahren beim Träger mit veränderlichem Trägheitsmoment *die Durchbiegung aus dem Moment* bestimmt werden muß, so ist beim vorgeführtem Verfahren *das Moment aus einer verteilten Last* zu ermitteln.

Ist auf dem Ersatzträger  $k_0 \neq 0$ , so sinkt der Wert von  $p$  nach (1,8) stärker; mit anderen Worten: die Konvergenz ist besser, da

$$k_0^2 - k^2(x) < k^2(x) \text{ ist.}$$

Ist dagegen  $J_0$  der Durchschnittswert des Trägheitsmoments  $J(x)$ , so ändert der Koeffizient

$$k^2(x) - k_0^2 = P \frac{J(x) - J_0}{J_0 J(x)}$$

innerhalb der Länge  $l$  sein Vorzeichen. Deshalb hat die erste Ergänzungsbelastung ein wechselndes Vorzeichen, wodurch eine große Verringerung des Momentes erfolgt, und die Konvergenz des Verfahrens bedeutend zunimmt.

### 3. Der an beiden Enden gelenkig gelagerte Druckstab

Ist ein Stab an seinen beiden Enden gelenkig gelagert, und ist ferner  $k_0^2 = 0$ , d. h., es tritt keine Druckkraft auf, so kann unmittelbar eingesehen werden, daß einige Werte von  $M^*(x)$ , d. h.  $M^*(x_1)$ ,  $M^*(x_2) \dots M^*(x_n)$  durch die Belastung der zu den verschiedenen Abszissen  $x_1 \dots x_n$  gehörenden Einflußlinien bestimmt werden können. Ebenso können die Werte  $M_1^*(x_1)$ ,  $M_1^*(x_2)$ ,  $\dots M_1^*(x_n)$  ermittelt werden, doch ist in diesem Falle die äußere Belastung  $p_1(x_1) = M^*(x) [k_0^2 - k^2(x)]$ . Dasselbe Verfahren kann auch dann angewendet werden, wenn  $k_0^2 \neq 0$  ist. Zu diesem Zweck wird für den Fall  $k_0^2 \neq 0$  die (Green'sche) Einflußfunktion bestimmt, deren Werte die Ordinaten der Einflußlinien angeben.

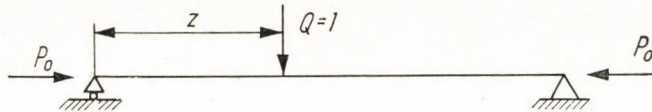


Abb. 2

Die allgemeine Lösung der (sich auf den Ersatzstab beziehenden) homogenen Form der Differentialgleichung ist unter Berücksichtigung der Randbedingung  $[M_0(0) = 0]$  im Anfangszustand

$$M^*(x) = M_0^* \sin k_0 x. \quad (3,1)$$

Möge den Ersatzstab im Punkte  $z$  eine äußere Kraft  $Q = 1$  t belasten (Abb. 2). Die Lösung der Differentialgleichung (1,3a) lautet dann:

$$\left. \begin{aligned} M_l^*(x) &= M_l^* \sin k_0 x ; z \geq x \\ M_r^*(l-x) &= M_r^* \sin k_0(l-x) ; z \leq x \end{aligned} \right\} \quad (3,2)$$

Im Punkt  $x = z$  sind beide Momente gleich groß:

$$M_l^*(z) = M_r^*(l-z),$$

und dadurch ist

$$M_l^* \sin k_0 z = M_r^* \sin k_0(l-z). \quad (3,3)$$

An derselben Stelle ist in der Querkraft  $R_{(x)}^*$  ein Sprung von einer Einheit, also

$$R_l^*(z) = M_l^{*'}(z) = 1 - R_r^*(l-z) = 1 - M_r^{*'}(l-z).$$

Wird (3,2) eingesetzt, so entsteht

$$M_l^* k_0 \cos kz = 1 - M_r^* k_0 \cos k(l - z). \quad (3,4)$$

Da

$$\sin k_0 z \cos k_0(l - z) + \cos k_0 z \sin k_0(l - z) = \sin k_0 l \quad \text{ist,}$$

sind aus den Gleichungen (3,3) und (3,4) die Größen der Konstanten:

$$M_l^* = \frac{\sin k_0(l - z)}{k \sin k_0 l},$$

$$M_r^* = \frac{\sin k_0 z}{k \sin k_0 l}.$$

Werden diese Größen in (3,2) eingesetzt, so liefern die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} m(x) = M^*(x) &= \frac{1}{k_0} \cdot \frac{\sin k_0 x}{\sin k_0 l} \sin k_0(l - z); & z \geq x \\ \text{und} \\ m(x) = M^*(x) &= \frac{1}{k_0} \cdot \frac{\sin k_0(l - x)}{\sin k_0 l} \sin k_0 z; & z \leq x \end{aligned} \right\} \quad (3,5)$$

die Momenteneinflußlinien des Punktes  $x$ .

Aus der Formel (1,2a) ist

$$k_0 = \sqrt{\frac{P_0}{EJ}} = \frac{c}{l},$$

und daraus

$$c = lk_0 = l \sqrt{\frac{P_0}{EJ}} = \pi \sqrt{\frac{P_0}{P_E}}, \quad (3,6)$$

worin

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \quad \text{ist.}$$

Werden die Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, \\ \zeta &= \frac{z}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (3,7)$$

eingeführt, so sind die gesuchten Einflußfunktionen:

$$\left. \begin{aligned} m(\zeta) &= l \frac{\sin c(1-\xi)}{c \sin c} \sin c \zeta; & z \leq x \\ m(\zeta) &= l \frac{\sin c \xi}{c \sin c} \sin c(1-\zeta); & z \geq x \end{aligned} \right\} \quad (3,8)$$

Ist  $c = 0$ , so kann einfach — entweder durch Reihenentwicklung oder durch unmittelbare Ableitung — bewiesen werden, daß

$$\left. \begin{aligned} m(\zeta) &= (1-\xi) \zeta; & z \leq x \\ m(\zeta) &= \xi(1-\zeta); & z \geq x \end{aligned} \right\} \quad (3,8a)$$

Ist  $P$  eine Zugkraft, so treten in den Formeln (3,8) die hyperbolischen Funktionen an die Stelle der Kreisfunktionen, somit ist

$$\left. \begin{aligned} m(\zeta) &= \frac{l}{c} \cdot \frac{\operatorname{sh} c(1-\xi)}{\operatorname{sh} c} \operatorname{sh} c \cdot \zeta; & z \leq x \\ \text{und} \\ m(\zeta) &= \frac{l}{c} \cdot \frac{\operatorname{sh} c \xi}{\operatorname{sh} c} \operatorname{sh} c(1-\zeta); & z \geq x \end{aligned} \right\} \quad (3,9)$$

Bei Druckstäben ist im Hinblick auf die notwendige Sicherheit die Druckkraft kleiner als die kritische Kraft, d. h.,  $P_E = nP$ . Bei gedrückten und gebogenen Stäben ist allgemein  $n > 1,5$ .

Deshalb ist

$$\frac{P}{P_E} < \frac{1}{1,5}$$

und

$$c < \frac{\pi}{\sqrt{1,5}} \sim 2,56.$$

Für den gedrückten Stab wurden aus der Formel (3,8) die Funktionswerte

$$\frac{\sin c \xi}{c \sin c} \sin c(1-\zeta) \quad \text{und} \quad \frac{\sin c(1-\xi)}{c \sin c} \sin c \zeta,$$

für die Größen

$$\xi = 0; 0,1; \dots; 0,9; 1,0$$

$$\zeta = 0; 0,1; \dots; 0,9; 1,0$$

und

$$c = 0; 1,4; 1,8; 2,0; 2,2; 2,3; 2,4; 2,45; 2,50; 2,55$$

bestimmt. Diese werden in einer Tabelle zusammengefaßt. Die obigen Werte für  $c$  sind so ausgewählt worden, daß mit seinen aufeinanderfolgenden Werten die Ordinatendifferenzen der Einflußlinie der Trägermitte im großen und ganzen  $0,05 l$  seien.

#### 4. Der Stab mit konstantem Querschnitt

Ist der Querschnitt des Stabes konstant, so können die in Abschnitt 3 erläuterten, im voraus verfertigten Einflußlinien für die praktische Berechnung unmittelbar — ohne die schrittweise Näherung — verwendet werden. Nach der Bestimmung des Effektivwertes von

$$C = l \sqrt{\frac{P_0}{EJ_0}}$$

werden die Ordinaten der Momenteneinflußlinie durch lineare Interpolation der zu den zwei Nachbarwerten von  $c$  gehörenden Einflußlinienordinaten berechnet. Dieses Verfahren befriedigt die Genauigkeitsansprüche der Praxis; dadurch liefert die Belastung dieser Einflußlinie unmittelbar das gesuchte Moment.

Das vorgeführte Verfahren kann auch bei anderen Aufgaben, z. B. bei der Berechnung von Hängebrücken, angewandt werden.

#### 5. Zahlenbeispiel

Gegeben ist ein Träger auf zwei Stützen, waagrecht gelagert, mit einer Stützweite  $l = 800$  cm, der mit einer lotrechten gleichmäßig verteilten Kraft  $q = 0,250$  t/m und einer waagrecht gerichteten zentrischen Druckkraft von  $P = 30$  t belastet ist. Die Steifigkeit des Trägers

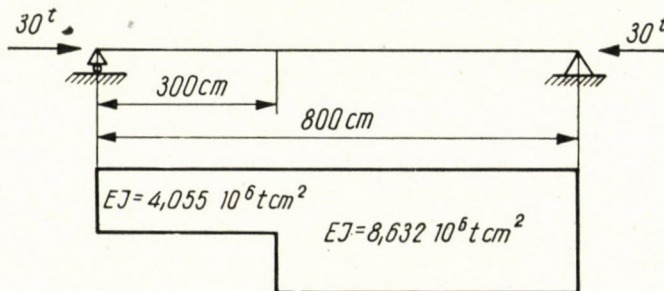


Abb. 3

beträgt auf dem linksseitigen Abschnitt von  $300$  cm Länge  $EJ = 4,055 \cdot 10^6 \text{ tcm}^2$ , auf dem rechtsseitigen von  $500$  cm Länge  $EJ = 8,632 \cdot 10^6 \text{ tcm}^2$  (Abb. 3.). Es ist das in der Mitte auftretende Moment festzustellen. Dieses Zahlenbeispiel war in einer vorangegangenen Untersuchung [3] bereits eingehend gelöst worden.

Nach den Formeln der zitierten — [3,31] und [3,32] — Untersuchung sind die Biegemomente

$$M(x) = 5,196 \sin 2,72 \cdot 10^{-3}x + 3,38 \cos 2,72 \cdot 10^{-3}x - 3,38; \quad 0 \leq x \leq 300 \text{ cm},$$

und

$$M(x) = 1,600 \sin 1,864 \cdot 10^{-3}(x - 300) + 9,922 \cos 1,864 \cdot 10^{-3}(x - 300) - 7,20; \\ 300 \leq x \leq 800 \text{ cm}.$$

In der Trägermitte ( $x = 400 \text{ cm}$ ) hat es die Größe

$$M_{(400)} = 2,85 \text{ tm}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} k_l &= 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1} && 0 \leq x \leq 300 \text{ cm} \\ k_l^2 &= 7,3984 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-2} \\ k_r &= 1,864 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1} && 300 \leq x \leq 800 \text{ cm} \\ k_r^2 &= 3,4745 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-2} \end{aligned}$$

Die durchschnittliche Steifigkeit ist

$$EJ = \frac{3 \cdot 4,055 \cdot 10^6 + 5 \cdot 8,632 \cdot 10^6}{8} = 6,916 \cdot 10^6 \text{ tcm}^2$$

und der zugeordnete Wert von  $k$  ist nach (2,6)

$$k = \sqrt{\frac{30}{6,912 \cdot 10^6}} = 2,083 \cdot 10^{-3}.$$

Nach Formel (3,3) ist

$$c = k_0 l = 2,083 \cdot 800 \cdot 10^{-3} = 1,666.$$

Die Berechnung wird auf diese Weise mit der Benützung der dem nächsten  $c$  zugeordneten Einflußlinien durchgeführt. Als solche können z. B. die Einflußlinien für  $c = 1,8$  benützt werden. Die Ordinaten der Einflußlinien wurden Tabelle I entnommen und sind in Abbildung 4 eingetragen.

$C = 1,8$

**Tabelle I**

*Druckstab*

Abszisse	Die Ordinaten der Momenteneinflußlinie im Querschnitt $\xi$ : m ( $\zeta$ )				
	$\xi = 0,1$	$\xi = 0,2$	$\xi = 0,3$	$\xi = 0,4$	$\xi = 0,5$
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,10201	0,10126	0,09724	0,09008	0,08000
0,2	0,10126	0,19924	0,19133	0,17724	0,15742
0,3	0,09724	0,19133	0,27926	0,25869	0,22976
0,4	0,09008	0,17724	0,25869	0,33176	0,29466
0,5	0,08000	0,15742	0,22976	0,29466	0,35005
0,6	0,06734	0,13251	0,19340	0,24803	0,29466
0,7	0,05251	0,10332	0,15080	0,19340	0,22976
0,8	0,03598	0,07079	0,10332	0,13251	0,15742
0,9	0,01828	0,03598	0,05251	0,06734	0,08000
1,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Die  $c$  zugeordneten Koeffizienten sind:

$$k_0 = \frac{c}{l} = \frac{1,8}{800} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$

$$k_0^2 = 5,0625 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-2}$$

$$k_0^2 - k(x)^2 = (5,0625 - 7,3984) 10^{-6} \text{ cm}^{-2} - 2,3359 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-2} = 2,3359 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2};$$

$$x < 300 \text{ cm}$$

$$k_0^2 - k(x)^2 = (5,0625 - 3,4745) 10^{-6} \text{ cm}^{-2} = 1,5880 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-2} = 1,5880 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2};$$

$$x > 300 \text{ cm}$$

Die Belastung beträgt:  $q = 0,25 \text{ t/m}$ .

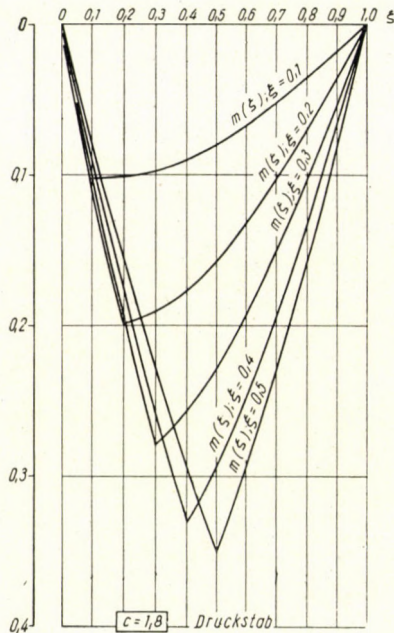


Abb. 4

Wir belasten die Einflußlinie mit konzentrierten Kräften im Querschnitt der gerechneten Einflußlinienordinaten. Diese Kräfte sind je  $0,8 \text{ m}$ :

$$Q = (0,25 \text{ t/m}) 0,8 \text{ m} = 0,2 \text{ t}.$$

Wird damit die zu  $c = 1,8$  zugeordnete Einflußlinie  $m(z)$  belastet, so ist das Moment

$$M_1^*(z) = \Sigma Qm(z)l = \Sigma 0,2 \cdot m(z) \cdot 8,0 = 1,6 \Sigma m(z).$$

(Diese Berechnung ist ein wenig zu Ungunsten der Sicherheit, weil die Belastung der äußersten  $0,4 \text{ m}$  langen Trägerabschnitte vernachlässigt werden.)

$$M^*(0,8 \text{ m}) = 1,0315 \text{ tm},$$

$$M^*(1,6 \text{ m}) = 1,8075 \text{ tm},$$

$$M^*(2,4 \text{ m}) = 2,4901 \text{ tm},$$

$$M^*(3,2 \text{ m}) = 2,8699 \text{ tm},$$

$$M^*(4,0 \text{ m}) = 2,9980 \text{ tm},$$

$$M^*(4,8 \text{ m}) = 2,8699 \text{ tm},$$

$$M^*(5,6 \text{ m}) = 2,4901 \text{ tm},$$

$$M^*(6,4 \text{ m}) = 1,8705 \text{ tm},$$

$$M^*(7,2 \text{ m}) = 1,0315 \text{ tm}.$$

Aus diesen Momenten kann die verteilte Last  $p_1$ , die in Abschnitten von je 0,8 m durch eine konzentrierte Kraft  $Q_1$  ersetzt wird, berechnet werden.

$$\begin{aligned} Q_1(0,8 \text{ m}) &= -1,0315 \text{ tm} \cdot 0,8 \text{ m} (-2,3359 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2}) = \\ &= -1,0315 \text{ tm} (-1,86872 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}) = 0,01928 \text{ t}, \end{aligned}$$

$$Q_1(1,6 \text{ m}) = -1,8075 (-1,86872 \cdot 10^{-2}) = 0,03378 \text{ t},$$

$$Q_1(2,4 \text{ m}) = -2,4901 (-1,86872 \cdot 10^{-2}) = 0,04653 \text{ t},$$

$$\begin{aligned} Q_1(3,2 \text{ m}) &= -2,8699 \cdot 0,8 \cdot 1,5880 \cdot 10^{-2} = \\ &= -2,8699 \text{ tm} \cdot 1,2704 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1} = -0,03646 \text{ t}, \end{aligned}$$

$$Q_1(4,0 \text{ m}) = -2,9980 \cdot 1,2704 \cdot 10^{-2} = -0,03809 \text{ t},$$

$$Q_1(4,8 \text{ m}) = -2,8699 \cdot 1,2704 \cdot 10^{-2} = -0,03646 \text{ t},$$

$$Q_1(5,6 \text{ m}) = -2,4901 \cdot 1,2704 \cdot 10^{-2} = -0,03163 \text{ t},$$

$$Q_1(6,4 \text{ m}) = -1,8705 \cdot 1,2704 \cdot 10^{-2} = -0,02376 \text{ t},$$

$$Q_1(7,2 \text{ m}) = -1,0315 \cdot 1,2704 \cdot 10^{-2} = -0,01310 \text{ t}.$$

Mit diesem Kräftesystem  $Q_1$  wird die Einflußlinie belastet:

$$M_1^*(z) = \Sigma Q_1 m(z) l.$$

Die gewonnenen Momente sind:

$$M_1^*(0,8 \text{ m}) = -0,0121 \text{ tm},$$

$$M_1^*(1,6 \text{ m}) = -0,0391 \text{ tm},$$

$$M_1^*(2,4 \text{ m}) = -0,0926 \text{ tm},$$

$$M_1^*(3,2 \text{ m}) = -0,1802 \text{ tm},$$

$$M_1^*(4,0 \text{ m}) = -0,2330 \text{ tm},$$

$$M_1^*(4,8 \text{ m}) = -0,2479 \text{ tm},$$

$$M_1^*(5,6 \text{ m}) = -0,2259 \text{ tm},$$

$$M_1^*(6,4 \text{ m}) = -0,1713 \text{ tm},$$

$$M_1^*(7,2 \text{ m}) = -0,0924 \text{ tm}.$$

Aus diesen Momenten sind die Belastungen, die auf obige Weise berechnet wurden, über den einzelnen Ordinaten der Einflußlinie:

$$Q_2(0,8 \text{ m}) = 0,0121 \text{ tm} (-1,86872 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}) = -0,00023 \text{ t},$$

$$Q_2(1,6 \text{ m}) = 0,0391 \text{ tm} (-1,86872 \cdot 10^{-2}) = -0,00073 \text{ t},$$

$$Q_2(2,4 \text{ m}) = 0,0926 \text{ tm} (-1,86872 \cdot 10^{-2}) = -0,00173 \text{ t},$$

$$Q_2(3,2 \text{ m}) = 0,1802 \text{ tm} \quad 1,2704 \cdot 10^{-2} = 0,00229 \text{ t},$$

$$Q_2(4,0 \text{ m}) = 0,2330 \text{ tm} \quad 1,2704 = 0,00296 \text{ t},$$

$$Q_2(4,8 \text{ m}) = 0,2479 \text{ tm} \quad 1,2704 = 0,00315 \text{ t},$$

$$Q_2(5,6 \text{ m}) = 0,2259 \text{ tm} \quad 1,2704 = 0,00287 \text{ t},$$

$$Q_2(6,4 \text{ m}) = 0,1713 \text{ tm} \quad 1,2704 = 0,00218 \text{ t},$$

$$Q_2(7,2 \text{ m}) = 0,0924 \text{ tm} \quad 1,2704 = 0,00117 \text{ t}.$$



Wird die Einflußlinie der Trägermitte ( $x = 4,0$  m) mit den obigen Belastungen belastet, so ist das Moment

$$M_2^*(4,0 \text{ m}) = 0,00257 \text{ tm.}$$

Dadurch ist das Moment im mittleren Querschnitt

$$M(4,0 \text{ m}) \cong 2,9980 - 0,2330 + 0,0257 = 2,7907 \text{ tm.}$$

Dieses Zahlenbeispiel zeigt die starke Konvergenz des vorgeführten Verfahrens.

Infolge der unmittelbaren Belastung der Einflußlinie (bei konstanter Steifigkeit) ist das Moment  $M^* = 2,998$  tm, und die Abweichung  $+5,2\%$ .

Infolge der zweiten Laststellung ist  $M = 2,998 - 0,233 = 2,765$  tm, und die Abweichung  $-2,98\%$ .

Infolge der dritten Laststellung ist  $M = 2,7907$  tm mit einer Abweichung von  $-2,08\%$ .

Die Abweichung  $2,08\%$  rührt davon her, daß die Fläche der Einflußlinie nicht mit der tatsächlichen (und fiktiven) verteilten Belastung belastet worden war, sondern mit einer konzentrierten Ersatzbelastung. Der Fehler wäre viel kleiner gewesen, wenn man mit Rücksicht auf die verteilte Last die Flächenberechnung mit der Simpsonschen Regel durchgeführt hätte.

### SCHRIFTTUM

1. RUNGE, C.—KÖNIG, H.: Vorlesungen über numerisches Rechnen (Berlin, Springer 1924).
2. COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen (Berlin, Springer 1955).
3. SZIDAROVSKY, J.: Eine praktische Methode zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten (Acta Technica, Ac. Sc. Hung. 24 (1959), pp. 85—94).

### ZUSAMMENFASSUNG

Der vorliegende Aufsatz schlägt ein gut konvergierendes iteratives Näherungsverfahren zur Berechnung der Beanspruchung eines gleichzeitig auf Druck und Biegung beanspruchten Stabes für den praktischen Ingenieur vor.

Die Anwendung dieser Methode wird an einem Zahlenbeispiel vorgeführt.

### STRESS ANALYSIS OF AN AXIALLY COMPRESSED BAR UNDER LATERAL LOADING

J. SZIDAROVSKY

#### SUMMARY

This paper presents practical engineers a successive approximation of good convergence in the use of analysing axially compressed bars under lateral loading.

Application of this method is demonstrated by a numerical example.

### EFFORTS DANS UNE BARRE DE SECTION VARIABLE, SOUMISE A LA FLEXION ET COMPRESSION SIMULTANÉE

J. SZIDAROVSKY

#### RÉSUMÉ

L'auteur recommande aux ingénieurs praticiens une méthode approchée de bonne convergence pour le dimensionnement des barres soumises à la flexion et à la compression simultanée. Pour faciliter les calculs, l'auteur communique des tables.

Un exemple numérique sert à montrer l'application de la méthode.

НАГРУЗКА ИЗОГНУТЫХ И СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НЕПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ  
Я. СИДАРОВСКИ

РЕЗЮМЕ

В работе для инженеров-практиков предлагается хорошо сходящийся постепенный приближенный метод расчета одновременно сжатых и изогнутых стержней. В интересах облегчения вычислительной работы приводятся также вспомогательные таблицы.

Применение предлагаемого метода демонстрируется числовым примером.

# ИЗМЕРЕНИЕ СИЛЫ АДХЕЗИИ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЬЮ СТЕКЛА И СТЕКЛЯННЫМ ПОРОШКОМ

д-р хим. наук Г. КОРАНИ и М. АЧ  
ИССЛ. ИНСТ. ОСНОВН. ХИМИЧЕСКОЙ ПРОМ., ВЕСПРЕМ, ВЕНГРИЯ

(Поступило 1 сент. 1958 г.)

С целью исследования поверхностной структуры щёлочно-известковых силикатных стекол стало необходимым измерить адгезию на поверхности. Такие измерения в атмосферных условиях ещё неизвестны. Бузаг (Buzágh) в зависимости от разных свойств электролитов, с помощью кварцевой пыли исследовал в электролитном растворе изменение условий адгезии стеклянных поверхностей. Порошковый адгезионный метод позволил очень чувствительно наблюдать характерные изменения поверхностных процессов. Эти исследования заставили нас изучить возможности применения порошкового адгезионного метода при атмосферных условиях и мы считали, что возникающая между идентичными в отношении материала стеклянным порошком и поверхностью листового стекла адгезия или изменение её на pewno дадут ценные сведения о структуре или состоянии стеклянной поверхности.

## И. Теоретические рассуждения

Если твёрдое вещество различного гранулометрического состава нанести на некоторую горизонтальную поверхность, а затем повернуть плоскость этой поверхности на  $180^\circ$ , тогда некоторые зёрна скатятся с поверхности, а другие в силу адгезии прилипнут к ней. Для наиболее крупных зёрен, прилипающих к повернутой поверхности, действительно уравнение

$$t \cdot p = m \cdot g, \quad (1)$$

где  $t$  — величина площади проекции данного зерна, предполагая перпендикулярную проекцию;

$p$  — удельная адгезия поверхности;

$m$  — масса зерна;

$g$  — ускорение силы тяжести.

Если имеем геометрически правильные тела, то можно непосредственно применить уравнение (1), потому что в случае самого тяжёлого зерна,

прилипающего к поверхности, данные измерения геометрических размеров и поверхности прилипания можно непосредственно подставить в уравнение. Однако в случае стеклянного порошка, получение геометрически правильных тел можно представить лишь так, что стеклянное вещество подвергается термической обработке; это же существенно изменяет поверхностную структуру. Таким образом, уравнение (1) следует преобразовать так, чтобы его можно было применить и в случае зёрен неправильных форм.

С целью определения коэффициента формы можно выполнить следующее вычисление. Функцию распределения площадей прилипания зёрен неправильных форм, лежащих на горизонтальной поверхности, отобразить такой гистограммой, на которой ордината отображает  $p_1, p_2 \dots p_n$  — частоты, соответствующие отдельным размерам площадей, а абсцисса отображает  $t_1, t_2 \dots t_n$  — размер площадей прилипания. После переворачивания поверхности для характеристики прилипших, но висячих зёрен же подходит такая гистограмма, на которой на ординате отложены частоты  $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_k$ , а на абсциссе — размеры площадей  $t_1, t_2 \dots t_k$ . Применяя приближённые интегральные суммы Лебега

$$\sum_{i=1}^n t_i p_i = T_1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^k t_i \pi_i = T_2 \quad (3)$$

и введя выражение

$$t_{n-m} = t_{\text{крит}},$$

средний линейный размер т. н. «критических зёрен» будет

$$a = \sqrt{t_{\text{крит}}}. \quad (4)$$

Для определения средней площади поверхности прилипания зёрен, можно вывести частное

$$\frac{\sum_{i=1}^k t_i \pi_i}{\sum_{i=1}^k \pi_i} = \bar{i}, \quad (5)$$

где  $\bar{i}$  — средняя площадь поверхности прилипания зёрен, по которой можно определить виртуальную длину ребер зёрен, применяя выражение

$$\sqrt{\bar{i}} = b. \quad (6)$$

Ввиду того, что зёрна не являются кубикообразными и поверхность их прилегания также нельзя считать за ровную поверхность, отклонение от кубикообразной формы прилегания в плоскости можно выразить уравнением

$$a b^3 = \bar{k}, \quad (7)$$

где  $\bar{k}$  — средний объем зёрен;

$a$  — коэффициент, учитывающий вышеуказанные отклонения.

Можно предположить, что форма зёрен разных средних размеров является идентичной, следовательно выражения (6) и (7) действительны также для зёрен критических размеров, то есть

$$a \cdot a^3 = k; \quad (8)$$

$$a^2 = t_{\text{крит}}, \quad (9)$$

где  $k$  — объем зёрен критических размеров.

Если плотность материала зёрен будет  $\rho$ , то уравнение (1) можно записать в следующем измененном виде:

$$t_{\text{крит}} \cdot p = k \cdot \rho \cdot g. \quad (10)$$

Подставив уравнения (8) и (9) в уравнение (10), получим выражение

$$a^2 \cdot p = a \cdot a^3 \cdot \rho \cdot g. \quad (11)$$

Однако из уравнений (6) и (7) следует, что

$$a = \frac{\bar{k}}{\bar{t}^{\frac{3}{2}}}, \quad (12)$$

таким образом удельную силу адгезии можно выразить уравнением

$$p = \frac{\bar{k}}{\bar{t}^{\frac{3}{2}}} \cdot a \cdot \rho \cdot g. \quad (13)$$

## II. Применённый метод измерения

Из уравнений (12) и (13) следует, что для определения силы адгезии необходимо измерить степень отклонения формы зёрен от кубикообразности и средний линейный размер т. н. критических зёрен.

### А) Метод измерения коэффициента формы зёрен

Пропуская 50 г молотого щелочно-известкового силикатного стекла через серию сит с отверстиями в 120, 150, 170, 200 и 240 меш, ситовые остатки на отдельных подситках переводились на предметное стекло, после чего производилась микроскопическая съёмка проб при прибл. 20-кратном увеличении.

На позитивном изображении снимков, которое было сделано при трехкратном увеличении отдельных снимков, можно измерить площадь проекции зёрен, и, исходя из кратности увеличения, можно вычислить действительную площадь, то есть величину  $\bar{l}$ . Для определения среднего объёма зёрен с помощью интегрирующего стола под микроскопом следует подсчитать небольшие образцы порошка известного веса (размером  $15 \times 15$  мм), насыпанные на стеклянную пластинку, затем определить прирост веса пластинки. Если известны плотность стеклянной массы, число и общий вес зёрен, тогда можно вычислить средний объём одного зерна ( $\bar{V}$ ). Взвешивание около 10 000 шт зёрен для каждой фракции даст удовлетворительные данные средних значений.

### Б) Метод измерения средних линейных размеров критических зёрен

Пропуская размол щелочно-известкового силикатного стекла через серию сит с отверстиями в 80 и 240 меш, образцы, отобранные от ситового остатка, монократным слоем следует насыпать на стеклянную пластинку с очищенной поверхностью, изготовленную из идентичного материала. После этого, с помощью упомянутого в п. А метода делаются микроскопические снимки, а на снимках можно измерить площади проекции зёрен. Повернув стеклянную пластинку вниз, спадают те зёрна, размер которых больше критического, и с помощью фотоснимка вновь можно измерить проекции площадей прилипших зерен. Отмечая результаты измерений на гистограммах, с помощью уравнений (2—4) можно вычислить средние линейные размеры ( $a$ ) критических зёрен.

При каждом измерении применялся порошок, изготовленный из нешлифованного листового стекла, и пластинки, изготовленные из идентичного стекла. Синтез показал следующий состав стекла:  $\text{SiO}_2$  71,5%;  $\text{Na}_2\text{O}$  15,3%;  $\text{Al}_2\text{O}_3$  1,9%;  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  0,2%;  $\text{CaO}$  7,6%;  $\text{MgO}$  3,5%.

## III. Результаты измерений

Результаты измерений по коэффициенту формы зёрен в области средних линейных размеров зёрен 90—120  $\mu$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

$b(\mu)$	$a$
90	0,36
100	0,37
110	0,35
120	0,38

Измерения адгезии, излагаемые позднее, проводились вообще с помощью порошков, средний размер зёрен которых был равен  $100 \mu$ . Поэтому, при определении коэффициента формы в случае порошков с диаметром зёрен  $100 \mu$  полученный результат учитывался как средняя из 5 параллельных измерений. Расчётная погрешность измерения составляет  $4\%$ , следо-

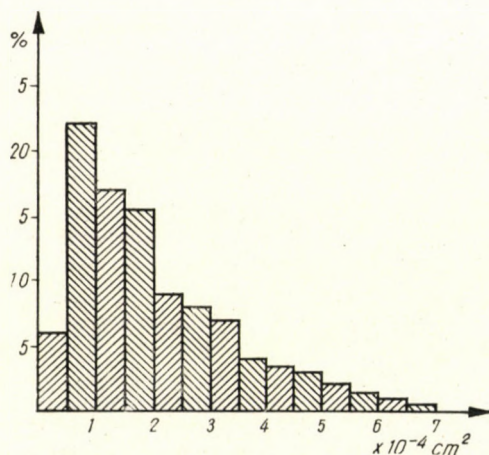


Рис. 1

вательно можно установить, что в области исследованных размеров зёрен отклонение от кубикообразной формы практически независит от размера зёрен.

Для измерения удельной адгезии, прежде всего, необходимо определить гранулометрический состав используемого порошка. На рис. 1 а дана гистограмма порошка, нанесённого на стеклянную пластинку до поворота пластинки вниз, на основе измерения площадей  $1000 \text{ шт}$  зёрен.

При измерении адгезии в обязательном порядке следует тщательно очистить поверхность стеклянных пластинок. Поэтому при измерениях поверхность стеклянных пластинок промывалась холодной хромистой серной кислотой, потом водопроводной водой, затем дистиллированной водой, спиртом, ацетоном и повторно промывалась ацетоном и сушилась на от-

крытом воздухе. Во второй серии измерений, выполнив эти же приемы очистки, стеклянные пластинки после их сушки были проведены над пламенем и измерения производились непосредственно после этой операции. В третьей серии измерений пластинки после промывки дистиллированной водой сушились на открытом воздухе и после завершения их сушки измерения производились, пренебрегая дальнейшей селективной очисткой.

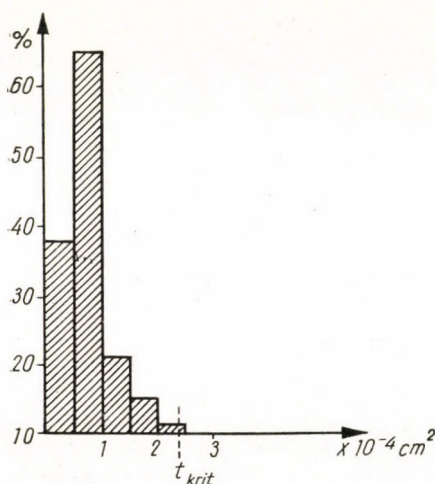


Рис. 2

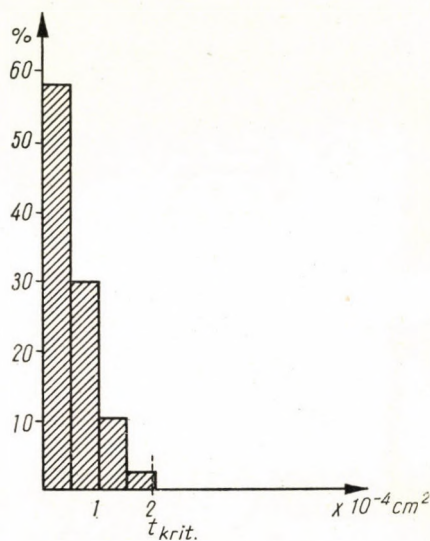


Рис. 3

Распределение размеров зёрен по площади зёрен, сцепившихся и после поворота пластинки вниз, изображено для первой серии опытов на рис. 2, второй серии опытов — на рис. 3, а третьей серии опытов — на рис. 4. При каждой серии опытов из числа зёрен, прилипающих к повернутой вниз стеклянной пластинке, измерялась изложенным в п. II методом площадь, занимаемая 600 шт зёрен.

Результаты измерений адгезии даны в табл. 2.

Таблица 2

Номер серии измерений	$t_{\text{крит}}$ ( $10^{-4}/\text{см}^2$ )	$p$ (дин/см <sup>2</sup> )
1	2,37	$14,0 \pm 0,6$
2	1,95	$12,7 \pm 0,8$
3	2,96	$15,6 \pm 0,6$



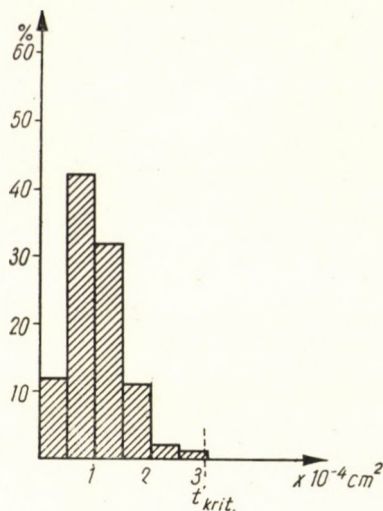


Рис. 4

На основе результатов измерений можно сделать вывод, что на прочность сцепления между поверхностью стекла и стеклянным порошком не влияют в значительной мере изменения изложенных выше методов обработки поверхности.

## ЛИТЕРАТУРА

- BUZÁGH, A.: Kolloidika. Akadémiai Kiadó Budapest (Коллоидика. Изд. АН Венгрии, Будапешт), 1951.  
 BUZÁGH, A.: Kolloidik. Dresden, 1936.  
 FREUDLICH, H.: Kapillarchemie II. Leipzig, 1933.  
 GRUVER: Glass Industry 37, 1956. 77, 94, 100.  
 BUZÁGH, A.: Kolloid-Z. 47. (1929) 370, 51. (1930) 105, 230, 52. (1930) 46. Kolloidchem. 32. (1930) 114.

## РЕЗЮМЕ

1. Форма зёрен размола стекла со средними линейными размерами в  $90-120 \mu$  независимо от размеров зёрен в одинаковой мере отклоняется от кубикообразной формы.
2. Идентичная форма разных зёрен размола стекла позволяет применить порошкоадгезионный метод для измерения удельной прочности сцепления между поверхностью стекла и стеклянным порошком.
3. Прочность сцепления между щелочно-известковым силикатным стеклянным порошком и поверхностью листового стекла идентичного состава находится в пределах  $12-16 \text{ дин/см}^2$ .

## MESSUNG DER ADHÄSION ZWISCHEN GLASOBERFLÄCHE UND GLASPULVER

G. KORÁNYI und M. ÁCS

## ZUSSAMMENFASSUNG

1. Bei einem Glasmahlgut mit einer durchschnittlichen linearen Korngröße von 90 bis 120  $\mu$  ist das Maß der Abweichung der Kornform von der Würfelform unabhängig von der Korngröße.
2. Die Formgleichheit der Körner von Glasmahlgütern ermöglicht die Anwendung der Pulveradhäsionsmethode zur Messung der spezifischen Adhäsion zwischen Glasoberfläche und Glaspulver.
3. Die Adhäsionskraft zwischen dem Pulver eines Kalkalkalisilikatglases und einer Flachglasoberfläche von gleicher Zusammensetzung beträgt 12 bis 16 dyn/cm<sup>2</sup>.

## MEASUREMENT OF THE ADHESION FORCE BETWEEN GLASS SURFACE AND GLASS POWDER

G. KORÁNYI and M. ÁCS

## SUMMARY

1. In the case of particles of powdered glass with an average linear diameter of 90 to 120  $\mu$  the degree of deviation from the cubic form is independent of the diameter of the particle.
2. The identical form of the particles of powdered glass enables the use of the powder-adhesion method to measure the specific adhesion between the glass surface and the glass powder.
3. The adhesion between the powder of a lime alkali silicate glass and a sheet glass surface of the same composition ranges from 12 to 16 dyne/sq. cm.

## MESURE DE LA FORCE D'ADHÉSION ENTRE LA SURFACE DU VERRE ET LA POUDRE DE VERRE

G. KORÁNYI—M. ÁCS

## RESUMÉ

1. Les grains de la poudre de verre, d'une dimension linéaire moyenne de 90 à 120 microns présentent, par rapport à la forme cubique, un écart identique, indépendant de la granulation.
2. La forme identique des différents grains de la poudre de verre rends possible l'application de la méthode d'adhésion des poudres, pour mesurer la force spécifique d'adhésion entre la surface du verre et la poudre de verre.
3. La force adhésive entre la poudre de verre de silicate alcalin de calcium et la surface du verre plat de la même composition varie de 12 à 16 dyne/cm<sup>2</sup>.

# METHODIK ZUR AUSARBEITUNG EINER MECHANISIERUNG DER BAUINDUSTRIE, DURCH DIE OPTIMALE LEISTUNGEN ERZIELT WERDEN

G. RÉCZEY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

ENTWURFSBUREAU FÜR DAS VERKEHRS- UND TRANSPORTWESEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 19. September 1958]

## Einleitung

Infolge ihrer zahlreichen Eigentümlichkeiten nimmt die Bauindustrie unter den Erzeugungsprozessen eine Sonderstellung ein. Diesen Eigentümlichkeiten liegen folgende Umstände zu Grunde, u. zw.:

das äußerst heterogene Profil der Bauindustrie, das als solches in zweierlei Beziehungen aufzufassen ist: einerseits kommen nämlich vielerlei Arten von Gebäuden und Bauwerken\* hinsichtlich ihrer Instandhaltung — und andererseits hinsichtlich ihrer Erneuerung, bzw. Neuerstellung in Betracht;

der mit der unmittelbaren Durchführung der Bauarbeiten betraute Baubetrieb wird nicht als ortsgebundener Betrieb organisiert, sondern stets fallweise, je nach den Anforderungen und Gegebenheiten des Arbeitsplatzes, wobei der Charakter\*\* des Betriebs sowohl örtlichen als auch zeitlichen Veränderungen unterworfen ist;

jede Bauaufgabe kann nach vielerlei, von einander abweichenden Konstruktions- und Durchführungsmöglichkeiten gelöst werden, wobei die der Bauindustrie zur Verfügung stehenden Investitionsgüter (Maschinen, Geräte u. s. w.) einzeln und für sich allein bei den verschiedensten Bauverfahren zum Einsatz gebracht werden können.

Wegen ihres heterogenen Profils steht die Bauindustrie mit tatsächlich jedem Zweige der Volkswirtschaft in Verbindung — was sowohl für die produktive als auch für inproduktive Zweige gilt. Die Bauindustrie nimmt im Rahmen der erweiterten, sozialistischen Reproduktion stets an den Investitionsarbeiten teil. Dieser Umstand erklärt die äußerst stürmische Entwicklung die die ungarische Bauindustrie im Verlaufe der letzten Jahre durchgemacht

\* Straßen, Eisenbahnen, Brücken, Wohngebäude, öffentliche Bauten, landwirtschaftliche Gebäude, Lagerhäuser, industrielle Bauten, Wasserbauten, Tunnellbauten u. s. w., die auch hinsichtlich ihrer Größenordnung verschiedene Charaktere aufweisen, weswegen wiederum eine richtige Maßeinheit zur zahlenmäßigen Erfassung in der Bauindustrie nur unter den größten Schwierigkeiten zu ermitteln ist.

\*\* Deshalb sind Baustellen weitaus elastischer organisiert als ortsgebundene Betriebe, auf eben diesen Umstand ist die weitgehende organisatorische Gegliedertheit der Bauindustrie zum Gutteile zurückzuführen.

hat.\* Diese Entwicklung erfolgte nicht nur in mengenmäßiger, sondern auch in gütemäßiger Hinsicht. Aus einer kleingewerblichen Bauindustrie von handwerklichem Charakter entwickelte sich vor unseren Augen eine Bauindustrie, von der ruhig behauptet werden kann, daß sie den Charakter einer Großindustrie besitzt. Diesen Charakter erhält sie in erster Linie dank der großzügigen Entwicklung, die ihre Mechanisierung genommen hat.

In der Geschichte der Erzeugung materieller Güter eröffnet der Einsatz von Maschinen im allgemeinen ein neues Kapitel. Jene Entwicklung beispiellosen Ausmaßes, die die Steigerung der Produktivität als Auswirkung des technischen Fortschrittes im Verlaufe der jüngstvergangenen zwei Jahrhunderte zu verzeichnen hatte, kann eigentlich als eine Folgeerscheinung der Mechanisierung bewertet werden. Es steht hiebei außer Zweifel, daß die Bauindustrie in aller Welt unter sämtlichen Produktionszweigen derjenige war, in dem der weitgehende Einsatz von Maschinen am spätesten erfolgte. Diese Tatsache ist teilweise aus den obenerwähnten Eigentümlichkeiten zu erklären. Weiters kann hieraus die Erklärung für den Umstand abgeleitet werden, laut dem in der oben umschriebenen Gesamtheit der Bauindustrie bei Ausgestaltung des Volumens der Bauproduktion, dem Einsatze von Maschinen noch keine entscheidende, richtungweisende Rolle zukommt.

In der Vergangenheit war diese Rolle besonders klein, da von einer Mechanisierung des Bauwesens in Ungarn praktisch erst ab 1950 gesprochen werden kann. Im Verlaufe der seither verflossenen wenigen Jahre, wurden jedoch auch gleichzeitig die Möglichkeiten geschaffen, Fragen die im Zusammenhange mit der Mechanisierung der Bauindustrie auftauchen, auch auf Grundlage wissenschaftlich untermauerter Methoden zu behandeln. Gleichzeitig\*\* ergab sich auch die Notwendigkeit eine Konzeption auszuarbeiten, durch die im Ergebnisse einer zusammengefaßten Untersuchung sämtlicher technischen, wirtschaftlichen und sozialen Faktoren, bei weitgehendem Einsatze maschineller Vorrichtungen, eine Steigerung der Leistungsfähigkeit der Bauindustrie zu erzielen ist und weiters — innerhalb des gesamten Fragenkomplexes — Ort und Rolle der Mechanisierung ermittelt werden kann.

Zu diesem Zwecke ist in erster Linie eine Methode, auszuarbeiten, an Hand welcher eine derartige Untersuchung vorgenommen werden kann. Eine derartige Fundierung erweist sich um so notwendiger, als gerade wegen des Fehlens einer solchen Methode auf dem Gebiete der Mechanisierung der Bauindustrie, sowohl in wissenschaftlicher\*\*\* als auch in praktischer Hinsicht noch

\* Wenn das Bauvolumen von 1949 mit 100 angenommen wird, so beträgt der Index des Produktionsvolumens für das Jahr 1957 mehr als 200 (wobei beispielsweise für 1953 der Jahresindex 240 betrug). Hiebei betrug der Absolutwert der Produktion mehr als 10 Milliarden Forint.

\*\* Dies wird durch das Vorhandensein eines Maschinenparks bestätigt, dessen Wert eine Milliarde Forint übersteigt.

\*\*\* Das Ausmaß ihrer Bedeutung wird auch von Seiten der Praxis, nämlich von Seiten der Verfahrenstechnik, in immer größerem Ausmaße anerkannt.

recht viel Neuland der Bearbeitung harret. Das Schrifttum, das sich mit der Mechanisierung der Bauindustrie befaßt, erschöpft sich im Wesentlichen in der Beschreibung einzelner bautechnischer, maschineller Einrichtungen, weiters in der Angabe technischer Kennziffern und der Verfahrenstechnik, die bei den in Frage kommenden mechanisierten Arbeiten zur Anwendung zu kommen hat. Zur Gänze fehlt eine technische Analyse der Mechanisierung selbst, ebenso wie dazugehörige umfassende wirtschaftliche Analyse und schließlich fehlt auch eine Arbeit, die sich mit den Voraussetzungen der wirtschaftlichen Wirksamkeit eines Einsatzes von Maschinen befaßt. Aus diesem Grunde dürfte es also von Interesse sein eine Methodik auszuarbeiten, auf deren Grundlage:

1. die Wirtschaftlichkeit einer gegebenen Maschine beurteilt werden kann, wobei selbstverständlich die wichtigsten Kennziffern die zur Bestimmung der Wirtschaftlichkeit benötigt werden, als bekannt vorauszusetzen sind;

2. die tatsächliche Rolle die der Mechanisierung zukommt zu umreißen, wobei wiederum der gesamte Bauvorgang als organisches Ganzes aufzufassen ist;

3. in der Praxis eine optimale Nutzung des vorhandenen Maschinenparks gewährleistet werden kann, wobei natürlich die gestellte Aufgabe als bekannt vorausgesetzt werden muß;

4. die Richtlinien für eingehende Untersuchungen ausgearbeitet werden können, die wieder im Dienste der Forschung auf dem Gebiete der Weiterentwicklung der Mechanisierung stehen.\* Im Rahmen der vorliegenden Arbeit war uns leider nicht die Möglichkeit geboten, zur Bestätigung einer tatsächlichen Brauchbarkeit der Methode, frisch aufgenommenes statistisches Material heranzuziehen. Die angeführten Beispiele enthalten Zahlenwerte, die den Normen der Bauindustrie sowie den Ausgangsdaten der bauwirtschaftlichen Kalkulation entnommen wurden. Eine laufende Statistik der Mechanisierung der Bauindustrie hat ja auch bei weitem keinen solchen Umfang, der — auch bei allerbescheidensten Ansprüchen — im Falle eines Einsatzes der Methode notwendig wäre. Es kann als sicher angenommen werden, daß zur Errechnung der diesbezüglichen Effektivwerte nur die repräsentative Statistik als zweckmäßig herangezogen werden kann. Eine Aufnahme derartigen Charakters kann jedoch nur erst nach Festlegung einer endgültigen Analysenmethode stattfinden, falls nämlich die Zweckmäßigkeit und Notwendigkeit derart erfaßbarer Informationen auch anderweitig bewiesen ist. Gerade dieser zu führender Beweis stellt Ziel und Zweck der vorliegenden Arbeit dar.

\* Hiebei ist eigentlich von einer mikroökonomischen Methode die Rede, die nicht nur eine Anschauung über die Mengenverhältnisse zu vermitteln im Stande ist, sondern auch die Möglichkeit bietet, den zwischen den einzelnen wirtschaftlichen Faktoren bestehenden Zusammenhang zahlenmäßig zu erfassen.

## 1. Wirksamkeit der Mechanisierung in wirtschaftlicher Hinsicht

Die bautechnische Maschine im heutigen Sinne des Wortes ist als ein dem Werkzeug verschiedenes Produktionsmittel anzusehen, wobei sie (gemäß des Ausgangspunktes der industriellen Revolution des XVIII. Jahrhunderts) durch die Tatsache charakterisiert wird, daß sie — und das ist die technische Seite der Sache — über einen Antrieb verfügt, der von irgend einer Naturkraft gespeist wird und dadurch in der Lage ist, im Gegensatze zur bisherigen Handarbeit, einen einzelnen, mit seinem Werkzeuge arbeitenden Handwerker durch eine Vorrichtung zu ersetzen, die eine wirksame Verwendung der zur Herstellung der Maschine aufgewendeten Arbeit realisiert — was letzteres wiederum die wirtschaftliche Seite der Sache wäre. Hiebei dreht es sich auch um die Frage, ob die zur Herstellung der Maschine aufgewendete Arbeit zusammen mit jener die zum Betriebe der Maschine im Laufe ihrer ganzen Lebenszeit notwendig ist, weniger ausmacht als jene Arbeitsmenge die dann aufgewendet werden müßte, falls die Maschine nicht hergestellt würde und die gesamte, von der Maschine verrichtete Arbeit mit der Hand verrichtet werden müßte. Der Einsatz der Maschine in der Bauindustrie hat — falls die Maschine der oben definierten Forderung entspricht — zur Folge, daß:

a) die Produktionsgeschwindigkeit des mechanisierten Arbeitsganges bedeutend ansteigt;

b) der auf die Einheit des Produkts entfallende Verbrauch von menschlicher Arbeit, verringert wird;

c) die Nettoproduktivität der menschlichen Arbeit ansteigt. (Über den Produktionswert der durch die Maschine verrichteten Arbeit, nämlich den Quotienten aus »added value« und dem Arbeitsverbrauch, siehe weiter unten u. zw. unter (4).);

d) die Selbstkosten einer jeweiligen Einheit des Bauvorhabens sinken.

Die Produktionsgeschwindigkeit des Arbeitsganges kann durch die Menge des in der Zeiteinheit hergestellten Produkts ausgedrückt werden, wobei natürlich die technischen Kennziffern des Produkts sowie das bei seiner Herstellung angewandte Verfahren konstant gehalten werden müssen. Auf diese Weise ergibt sich auch im Falle zweier verschiedener Verfahren die zur Herstellung ein und desselben Produkts angewandt werden der Ausdruck:

$$L = \frac{q}{q_k} \quad (1)$$

nämlich das Leistungsäquivalent, bei dem  $q$  die Produktionsgeschwindigkeit des mechanisierten- und  $q_k$  die Produktionsgeschwindigkeit des mit der Hand verrichteten Arbeitsganges darstellen. Das Leistungsäquivalent jeder Maschinentype hängt von der Art des maschinell hergestellten Produktes, sowie vom Herstellungsverfahren ab. Es stellt also bei weitem keine einmalige, konstante

Kennziffer dar. Der Wirkungsgrad der Maschine wird nicht nur von der Maschine selbst, sondern auch von der Art und Weise ihrer Verwendung und Handhabung bestimmt.

Werden die auf eine Einheit des Produktes entfallenden Anteile des Verbrauchs an menschlicher Arbeit miteinander verglichen, so besitzt der Ausdruck des Arbeitsäquivalents den gleichen Charakter wie der des Leistungsäquivalents. Im Ausdrucke

$$L_e = \frac{e_k}{e} \tag{2}$$

stellt  $e_k$  den im Falle von Handarbeit — und  $e$  den im Falle maschinell durchgeführter Arbeit auftretenden spezifischen Verbrauch an menschlicher Arbeit dar. In letzterem Falle muß außer der unmittelbar im Laufe des Produktionsverfahrens verbrauchten menschlichen Arbeit noch unbedingt jener Verbrauch an menschlicher Arbeit in Betracht gezogen werden, der sich aus Reparatur und Instandhaltung der Maschine ergibt, wobei besagter Arbeitsbedarf auf jeweils eine Betriebsstunde der Maschine zu beziehen ist. Der Wert  $(e_k - e)$  stellt die spezifische Einsparung an menschlicher Arbeit dar. In der unten angeführten Tabelle werden die Werte  $L$  und  $L_e$  für einige Maschinen der Bauindustrie angegeben:

	$L$	$L_e$
1. 0,35 m <sup>3</sup> -iger Bagger .....	50,1	20,6
2. 0,50 m <sup>3</sup> -iger Bagger .....	85,9	23,2
3. Kran auf LKW, ADA-3 .....	11,8	3,6
4. Kran auf LKW, K-52 .....	18,1	5,8
5. Kran auf LKW, K-104 .....	42,8	12,6
6. Turmkran von 6 Tonnenmetern .....	17,0	12,0
7. Turmkran von 12 Tonnenmetern .....	47,9	32,5
8. Turmkran von 20 Tonnenmetern .....	59,8	45,0
9. Trägerkran .....	13,1	11,0
10. Betonmischer von 100 Lit. Inhalt .....	7,3	6,2
11. Mörtelmischer .....	11,3	8,9
12. Mörtelpumpe .....	7,0	5,1
13. Erdbohrer .....	6,0	2,6
14. Mechanische Schaufel .....	9,6	4,0
15. Motorisierter Japaner .....	4,1	2,7

Bei Untersuchung der Wirksamkeit wird auf die folgenden zwei gleichzeitig gestellten Fragen im weitesten Sinne ihres Begriffes eine Antwort gesucht. Die Fragen lauten: wieviel menschliche und mechanische Arbeit braucht man zur Durchführung irgend einer gestellten Aufgabe und wie gestaltet sich im Falle einer gewählten Durchführungsart (Verfahrenstechnik) das Schicksal der noch nicht gelösten Aufgaben.

Ist nun für die Elemente der menschlichen Arbeit » $e$ « (die Menge menschlicher Arbeit, die zur Durchführung besagter Aufgabe benötigt wird) und für jene der mechanischen Arbeit » $h$ « (der Wert des im Verlaufe der Arbeit ver-

wendeten Materials sowie der Amortisation der maschinellen Einrichtung) eine gewisse Maßeinheit zu finden, die es ermöglicht beide Werte messungstechnisch miteinander zu vergleichen, so kann jene Menge des Produkts die im Verlaufe des Erzeugungsvorganges hergestellt und der Gesellschaft zur Verfügung gestellt wird, im Werte von »e« verrechnet werden.\* Hierbei wird das Produktionsergebnis des Erzeugungsvorganges folgendermaßen ausgedrückt:

$$F = h + e. \tag{3}$$

Die ausschlaggebende Produktivität beträgt somit

$$T = \frac{F - h}{v} \tag{4}$$

und ist aus dem in Abb. 1. dargestellten Wirksamkeitsdiagramm in ihrem Verhältnisse zu den Selbstkosten und zum Produktionswert gut ersichtlich.

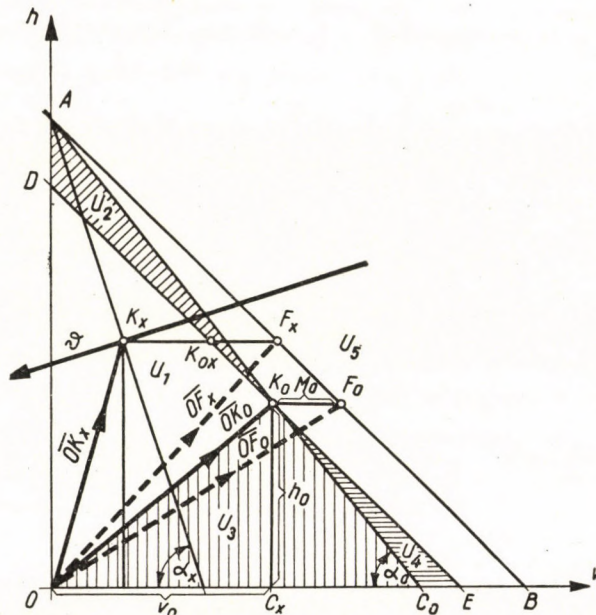


Abb. 1. Wirksamkeitsdiagramm

Im rechtwinkligen Koordinatensystem  $(vh)^{**}$  bezeichnet der Radiusvektor  $\overline{OF}_0$  den Vorgang  $F_0$  und der Radiusvektor  $\overline{OK}_0$  dessen Selbstkosten  $K_0$ .

\* Also eigentlich  $e = v + m$  sobald man die Bezeichnungen von Karl Marx verwendet.  
 \*\*  $v$  und  $h$  in gleichem Maßstabe.



Die Vektorkoordinaten sind:

$$F_0[(v_0 + m_0), h_0] \quad (5)$$

$$K_0[v_0, h_0] \quad (6)$$

wobei

$v_0$  der Gesamtverbrauch an menschlicher Arbeit,

$h_0$  der Gesamtverbrauch an mechanischer Arbeit — und

$m_0$  die Produktmenge, die im Verlaufe des Erzeugungsvorganges für die Gesellschaft hergestellt wurde, sind.

Einer Ausweitung des Vorganges sind keine Grenzen gesetzt. Man kann sowohl unmittelbar einzelne Maschinen miteinander vergleichen, sowie auch auf Grund des gleichen Prinzips die Zusammenstellung ganzer Bauvorgänge. Die Ausdehnung eines solchen Vorganges ist dabei weder räumlich noch zeitlich begrenzt. Ist nun der Inhalt der Aufgabe  $F$  dementsprechend gegeben, so kann auch in einer Sicht von mehreren Jahren beispielsweise die Frage der Entwicklung der Vorfabrikation in volkswirtschaftlicher Hinsicht untersucht werden. Das Geschick der noch nicht gelösten Aufgaben wird gemäß der Alternativen in einem überlappungsfreien, komplementären Aufgabenkomplexe  $F^x$  zusammengefaßt, wobei  $(F + F^x)$  einen geschlossenen Untersuchungskreis bilden.

Abweichend von der in der Vektoralgebra üblichen Auswertung beträgt der Absolutwert von  $\overline{OF}_0$

$$\overline{OF}_0 = v_0 + m_0 + h_0 = F_0 \quad (7)$$

und gleichfalls

$$\overline{OK}_0 = v_0 + h_0 = K_0. \quad (8)$$

Es kann leicht bewiesen werden, daß die Gleichung der Geraden  $(AB)$

$$h = -v + F_0 \quad (9)$$

lautet, falls  $h$  und  $v$  fließende Koordinaten bezeichnen, weiters die Gleichung der Geraden  $(DE)$

$$h = -v + K_0 \quad (10)$$

und die Gleichung der Geraden  $(AC_0)$

$$h = -v \cdot T_0 + F_0 \quad (11)$$

ist, falls

$$T_0 = \frac{v_0 + m_0}{v_0} = \text{tg } \alpha. \quad (12)$$

Jener Punkt der unter (9) angeführten Geraden, der in das erste Ebenen- viertel fällt, stellt den geometrischen Ort der Vorgänge gleichen Produktions- wertes dar. Die unter (10) angeführte Gerade ist der geometrische Ort der Vor- gänge mit gleichen Selbstkosten und die unter (11) angegebene Gerade ist wei- ters jener für Vorgänge mit gleicher Nettoproduktivität.

Beträgt nun der Radiusvektor  $\overline{OK}_x$  der die Selbstkosten irgend eines Vor- ganges  $x$  bezeichnet und Gebrauchswerte liefert, die denen des Grundvorganges gleich sind — bzw. der Radiusvektor  $\overline{OF}_x$  der den Produktionswert bezeichnet, laut (7):

$$\overline{OF}_x = v_x + m_x + h_x = F_x \quad (13)$$

so ist

$$F_x = F_0. \quad (14)$$

Die Vektorenkoordinaten lauten:

$$\overline{OF}_x [(v_x + m_x), h_x] \quad (15)$$

$$\overline{OK}_x [v_x, h_x]. \quad (16)$$

Es kann bewiesen werden, daß

$$T = \frac{v_x + m_x}{v_x} = \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{F_0 - h_x}{v_x} \quad (17)$$

und die Gleichung der Geraden ( $AC$ )

$$h = -v \cdot T_x + F_0 \quad (18)$$

ausmacht.

Je nachdem nun der Endpunkt des Radiusvektors  $\overline{OK}_x$

in die Ebene  $U_1 = OK_0D \Delta$  oder

in die Ebene  $U_2 = DK_0A \Delta$  oder

in die Ebene  $U_3 = OC_0K_0 \Delta$  oder

in die Ebene  $U_4 = K_0C_0E \Delta$

oder weiter in die außerhalb der Ebenen ( $U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ ) fallenden Ebene  $U_5$  fällt, so können beim Vergleiche des Grundvorganges mit dem Vor- gange  $x$  die in der nachfolgenden Tabelle zusammengefaßten Aussagen gemacht werden.

	Selbstkosten	Netto- produktivität	$\frac{h}{v}$
Ist der Punkt $K_x$ in der Ebene			
$U_1$	kleiner	größer	größer
$U_2$	größer	größer	größer
$U_3$	kleiner	größer	kleiner
$U_4$	kleiner	kleiner	kleiner
$U_5$	größer	kleiner	?

Das Verhältnis\*  $h : v$ , nämlich das, des spezifischen Verbrauches mechanischer Arbeit gegenüber dem, menschlicher Arbeit, dient eigentlich zur Charakterisierung des Grades der Mechanisierung. Darum weisen die Punkte der Ebene  $U_3$  und  $U_4$  im allgemeinen nicht in Richtung einer Steigerung der Mechanisierung, da in diesen Punkten das Verhältnis  $h : v$  kleiner ist als beim Grundvorgang. Eine allgemeine Folge der Mechanisierung ist ja gerade, daß die Menge der in die Maschine investierten Arbeit anwächst (und damit die Amortisation der Maschine, also der Wert von  $h$ ) und damit die unmittelbar beim Arbeitsgange verbrauchte Arbeitsmenge geringer wird. Man kann jedoch damit rechnen, daß die befriedigende Lösung eben gerade in diesen Bereich fallen wird. In einem solchen Falle wäre es als erwiesen anzunehmen, daß es zu einer »Übermechanisierung« des Grundvorganges gekommen ist. Die Punkte der Ebene  $U_1$  weisen auf die vorteilhafteste Variante hin, da hier jede charakteristische Kennziffer auf bessere Resultate weist als beim Grundvorgange erzielt wurden.

Die Ebene  $U_2$  charakterisiert hingegen gerade jene Vorgänge, deren Durchführung trotz ihrer steigenden Kosten auch zu einem Resultat in volkswirtschaftlicher Hinsicht führen, nämlich zu einer Steigerung der Nettoproduktivität der menschlichen Arbeit.

Es muß jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß diese rein wirtschaftlichen Überlegungen nicht die einzige Grundlage für einen zutreffenden Entscheid über die Mechanisierung in irgend einem gegebenen Falle darstellen dürfen. Eine Verbesserung der Qualität des Erzeugnisses, die Befreiung des Menschen von schwerer und gesundheitsschädlicher Arbeit, u. s. w., stellen auch dann einen ausreichenden Grund für die Mechanisierung dar, wenn auch der für den Vorgang charakteristische Punkt  $K_x$  in die Ebene  $U_5$  fällt.

Das Wirksamkeitsdiagramm bietet die Möglichkeit die Aussichten für die Wirksamkeit irgendeiner geplanten Maschine abzuschätzen, bzw. die Grenzen der wirtschaftlichen und technischen Parameter der zu entwerfenden Maschine

\* Eigentlich die »organische Zusammensetzung des Kapitals«.

zu umreißen. Man betrachte auch den Vektor  $\overline{23}$  in Abb. 2, nämlich die charakteristischen Kennwerte der mechanischen Arbeit des Vorganges. An Stelle der ursprünglichen Menge von Handarbeit  $\overline{02}$ , betrage wegen der Mechanisierung der Arbeitsmenge  $\overline{P'2'}$  die Restmenge von Handarbeit — als Verbrauch menschlicher Arbeit  $\overline{OP'}$ . Somit ist  $P$  der Ausgangspunkt des Vektors  $G_x$  der

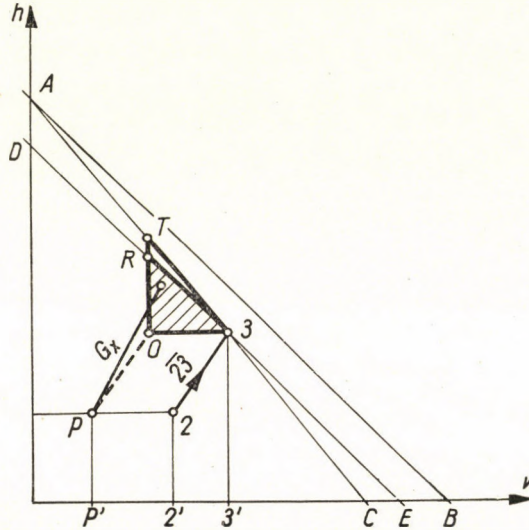


Abb. 2. Untere Grenze der Wirksamkeit einer Maschine neuen Typs

resultierenden Mechanisierung. Eine der Komponenten des neuen Vektors stellt eine Wiederholung des früheren Vorganges dar, wonach also  $\overline{PQ}$  gleich dem Vektor  $\overline{23}$  ist. Der Endpunkt des Vektors  $G_x$  der Mechanisierung, die die menschliche Arbeit  $\overline{P'2'}$  ersetzt, hat im Dreieck  $R3Q$ , schlechtesten Falls im Dreieck  $F3Q$ , zu liegen. Die erste Voraussetzung bedeutet eine Selbstkostensenkung — die zweite bedeutet nur eine Steigerung der Produktivität. Das Dreieck  $R3Q$  entspricht ohnehin dem Felde  $U_1$  — und das Dreieck  $F3Q$  dem Felde  $U_2$ .

Die Funktion mit drei Veränderlichen von (17) kann im ersten Raumachtel in irgendeinem rechtwinkligen Koordinatensystem  $(v, h, nt)$  dargestellt werden. Jeder beliebige Punkt  $P$  der in Abb. 3 dargestellten Fläche gibt die Nettoproduktivität  $T_x$  eines Vorganges an, der mit den Selbstkosten von  $(v_x + h_x)$  verbunden ist. Die Fläche schneidet die Koordinatenebene  $nt, v$  in dem zum Werte  $h = 0$  gehörigen

$$T = \frac{F_0}{v} \tag{19}$$

-förmigen Hyperbole.

Nehmen wir nun einen beliebigen Punkt  $P$  der Fläche, zu dem die Selbstkosten  $K$  und die Nettoproduktivität  $T_p$  gehören. Legen wir weiters im Punkte  $K$  eine zur Achse  $T$  parallele Projektionsebene mit der Führungslinie  $z$ . Diese Projektionsebene schneidet aus der Umgebung des Punktes  $P$  das Bogensegment  $(P_1) - (P_2)$  aus. Wird nun der Winkel der von der Führungslinie der

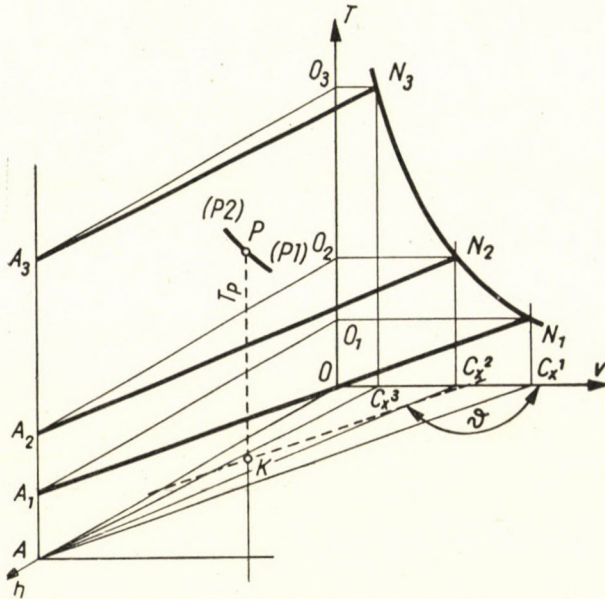


Abb. 3. Die Oberfläche  $nt = f(hv)$

Ebene und der Achse  $v$  eingeschlossen wird mit  $\vartheta$  bezeichnet, so lautet der Gradient im Punkte  $P$

$$\Theta = [\text{grad } P]_z = \frac{\partial Tz}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial v} \cos \vartheta + \frac{\partial T}{\partial h} \sin \vartheta. \quad (20)$$

Das Maximum des Gradienten ergibt sich aus der Voraussetzung:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = 0 \quad (21)$$

auf Grundlage von (17), u. zw.:

$$\frac{\partial T}{\partial v} = - \frac{F_0 - h}{v^2} \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial h} = - \frac{1}{v} \quad (23)$$

also

$$\Theta = \frac{F_0 - h}{v^2} \cos \vartheta - \frac{1}{v} \sin \vartheta \quad (24)$$

und nach Lösung der sich aus Vorschrift (21) ergebenden Gleichung:

$$\frac{F_0 - h}{v^2} \sin \vartheta - \frac{1}{v} \cos \vartheta = 0 \quad (25)$$

ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \vartheta = - \frac{v}{F_0 - h} = - \frac{v}{m + v} \quad (26)$$

Das heißt, die Führungslinie der Ebene  $z$  steht in  $K$  zur Geraden ( $AC$ ) senkrecht. Zurück nun zu Abb. 1.: wird der Vorgang  $K$  in Richtung  $\vartheta$  weiterentwickelt, so ist mit einem Anwachsen von  $T$  in größerem Ausmaße zu rechnen.

Als wirtschaftliches Ergebnis der Mechanisierung ist allgemein eine Verminderung der auf die Einheit entfallenden Kosten festzustellen. Dies wird auch von der unten angeführten Tabelle bestätigt, deren Zahlenwerte auf Grund der geplanten Normen für mechanische Geräte vom Jahre 1956 ermittelt wurden.

	Selbstkosten der Handarbeit	Selbstkosten der mech. Arbeit	Nettoproduktivität
1. Ausmischen von 1 m <sup>3</sup> Beton in der Betonmischmaschine .....	23,79	11,79	2,71
2. Ausmischen von 1 m <sup>3</sup> Mörtel in der Mörtelmischmaschine .....	21,42	12,03	2,36
3. Beförderung von 3,6 t Material in eine Höhe von 18 m mittels Turmkran .....	113,09	32,90	5,23
4. Beförderung von 1 m <sup>3</sup> Schotter auf eine Höhe von 7 m mittels Förderband .....	15,81	11,09	2,07
5. Beförderung von 0,5 t Material auf eine Höhe von 10 m mittels Trägerkran .....	13,93	7,48	3,29
6. Beförderung von 1 m <sup>3</sup> Mörtel auf eine Höhe von 6 m mittels Mörtelpumpe .....	33,24	8,21	5,68
7. Ausheben und Aufschütten von 1 m <sup>3</sup> Erdreich mittels Bagger .....	14,65	5,68	4,77

In Folge des Maschinenverschleißes können jedoch die Einheitskosten der Produktion an Hand einer zeitfunktionell ansteigenden Kurve dargestellt werden. Bei gleichbleibendem Preise des Erzeugnisses weisen somit die spezifischen Einsparungen eine rückläufige Tendenz auf, wie aus Abb. 4 — näm-

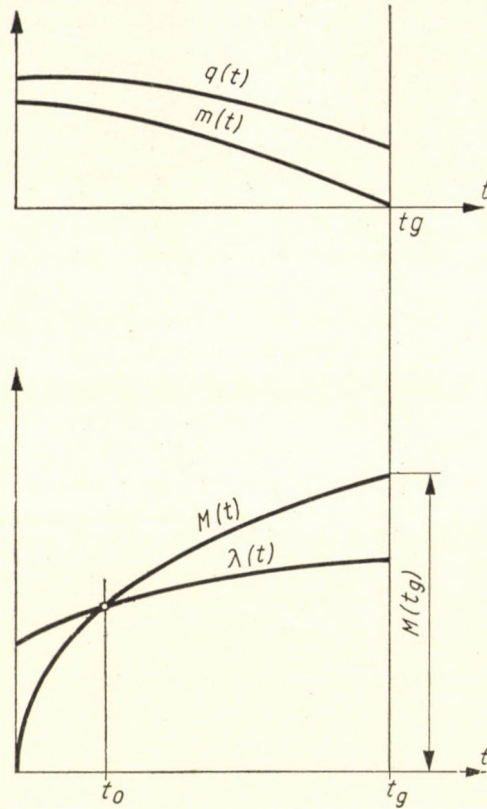


Abb. 4. Bestimmung der oberen Grenze der Amortisationszeit und der wirtsch. Lebensdauer

lich der Kurve  $m(t)$  — zu ersehen ist. Ebenso sinkt die Leistung  $q(t)$  und schließlich die auf die Zeiteinheit  $x(t)$  entfallende Einsparung, wobei

$$x(t) = m(t) \cdot q(t). \tag{27}$$

Die Gesamteinsparung im Laufe der Zeit  $J$  beträgt

$$M(t) = \int_0^J x(t) dt = \int_0^J m(t) \cdot q(t) dt \tag{28}$$

und ist selbst eine Funktion der Zeit.

Das Opfer, das bei Inbetriebsetzung einer Maschine gebracht wurde, kann zahlenmäßig durch den Investitionswert  $A$  der Maschine ausgedrückt werden. Wird nun dieser Wert  $A$  nicht zur besprochenen Mechanisierung angewendet, sondern in einem anderen Zweige der Volkswirtschaft nutzbringend eingesetzt, so wurde gleichfalls eine Einsparung erzielt, die durch einen Ausdruck von der Form

$$\lambda(t) = A(1 + \delta_n)^t \tag{29}$$

erfaßt werden kann, wobei  $\delta_n$  der normgemäße Wert des Strumilinschen Koeffizienten der relativen Wirksamkeit ist.

$\lambda(t)$  ist wiederum eine Funktion der Zeit. Schneiden\* sich nun die Funktionen  $M(t)$  und  $\lambda(t)$  in irgend einem Punkte mit der Abszisse

$$t_0 < t_g \quad (30)$$

so ist die Wirksamkeit der Maschineninvestition als gesichert anzusehen,  $t_0$  ist hierbei die Amortisationsspanne. Die von der Maschine zu ihren Lebzeiten geleistete Einsparung beträgt:

$$M_g = M(t_g) - \lambda(t_g) = M(t_g) - A(1 + \delta_n)^{t_g}. \quad (31)$$

Beträgt jedoch längs der Kurve

$$M(t) < (t) \quad (32)$$

so zeitigt die Mechanisierung keinerlei vom wirtschaftlichen Standpunkte aus nachweisbares Ergebnis.\*\*

Der Vorgang einer Verbesserung der Wirtschaftlichkeit der Maschine kann aus einer Reihe von Diagrammen in Abb. 5 ersehen werden. Die spezifische Einsparung beträgt

$$m(t) = a(t) - k(t) \quad (33)$$

nämlich die Differenz zwischen Preis und Kosten.  $A(t)$  charakterisiert die Veränderung des Buchwertes des Investitionsfondes. Nehmen wir nun in unserer ersten Aufgabe an, daß die Industrie eine neue Maschine hohen Wirkungsgrades allgemein einführt, die den Wert von  $a(t)$  senkt. Für uns stellt sich nun die Frage, ob es sich in unserem Falle auszahlt die neue Maschine zu erwerben und sie im Zeitpunkte  $t_1$  in Betrieb zu nehmen, da wir doch eine Maschine älteren Typs besitzen. An Hand der Bezeichnungen in Abb. 6 stellt sich nun der Gedankengang folgendermaßen dar: falls die neue Maschine nicht aufgetaucht wäre, so hätten wir bis zum Zeitpunkte  $t_g$  das Ergebnis  $M_0$  erzielt. Infolge des Auftauchens der neuen Maschine ist die Lebensdauer unserer Maschine  $t_2 < t_1$  und kann bis zum Zeitpunkte  $t_2$  mit der alten Maschine ein Ergebnis von  $M_1$  und mit der neuen Maschine ein solches von  $M_2$  erzielt werden. Bis zum Zeitpunkte  $t_1$  muß hingegen ein finanzielles Opfer in der Größe von  $A =$

\* Wobei sich  $t_g$  aus der Bedingung  $m(t_g) = 0$  ergibt, sobald also die mechanische Arbeit keine Einsparung mehr darstellt.

\*\* Aber auch sonstige Punkte können in einem derartigen Falle eine Mechanisierung begründet erscheinen lassen.



=  $A_1 + A_2$  gebracht werden, wobei  $A_1$  den Buchwert der alten Maschine im Zeitpunkte  $t_1$  — und  $A_2$  den Einkaufswert der neuen Maschine darstellen. Im

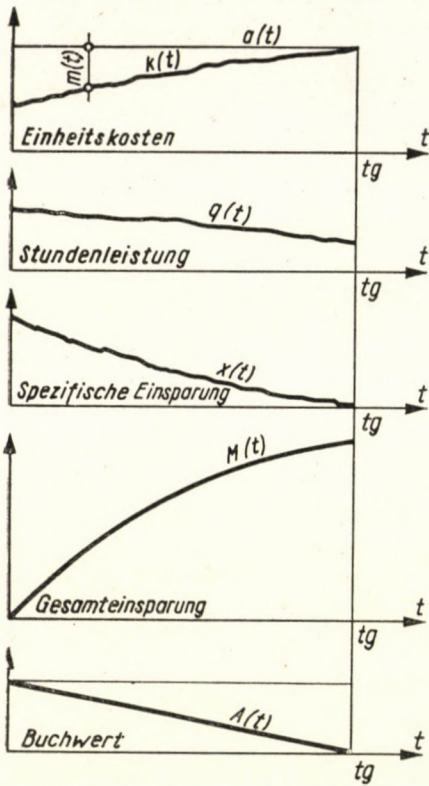


Abb. 5. Darstellung der maßgebenden Faktoren

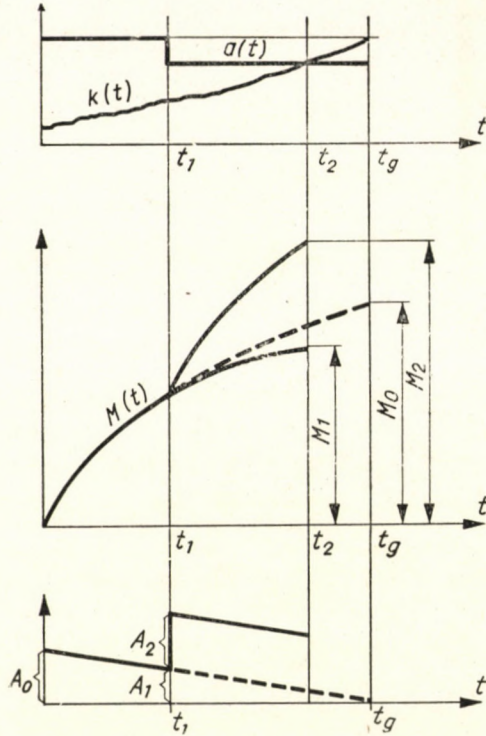


Abb. 6. Untersuchung der Wirksamkeit

Zeitraume  $(t_2 - t_1)$  beträgt der Wert des besagten finanziellen Ausfalls:

$$\Phi = A(1 + \delta_n)^{(t_2 - t_1)}. \tag{34}$$

Ist nun

$$\Phi > M_2 - M_1 \tag{35}$$

so kann der Austausch der Maschinen nicht als wirtschaftlich bezeichnet werden.

Als zweite Aufgabe können wir auch die Frage aufwerfen, ob es sich auch dafürsteht eine bessere Maschine einzusetzen als die bisherige, auch dann wenn diese bessere Maschine noch nicht überall eingeführt ist, oder aber das Auslaufen der Lebenszeit der bisher in Gebrauch befindlichen Maschine abzuwarten. Die hiebei herrschenden Umständen werden in Abb. 7 gezeigt. Auf Grund

des Obengesagten braucht nunmehr bloß ermittelt werden, welches Ausmaß das zu erwartende finanzielle Opfer haben wird, falls wir den Austausch nicht im Zeitpunkte  $t_1$  durchführen. All diese Angaben müssen hinsichtlich des Zeit-

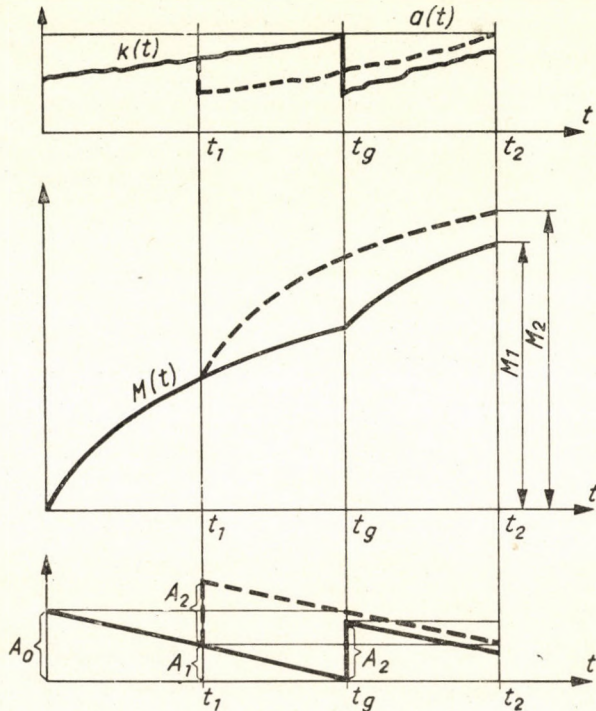


Abb. 7. Einsatz der Maschine neuen Typs

punktes  $t_2$  gemacht werden, wobei  $(t_2 - t_1)$  die Lebensdauer der neuen Maschine darstellt. Es liegt auf der Hand, daß

$$\Phi = [A(1 + \delta_d)^{(t_g - t_1)} - A_2] (1 + \delta_n)^{(t_2 - t_g)} \quad (36)$$

da das erste Glied des Ausdruckes in der eckigen Klammer jenes Ergebnis darstellt, das der finanzielle Verlust  $A$  bis zum Zeitpunkte  $t_g$  auch in einem anderen Zweige der Volkswirtschaft gezeitigt hätte. Jedenfalls müssen hievon die Kosten von  $A_2$  gedeckt werden. Ein bereits im Zeitpunkte  $t_1$  erfolgreicher Austausch der Maschine ist nur dann begründet, falls

$$\Phi < M_2 - M_1 \quad (37)$$

also der Einsatz der neuen Maschine bessere Ergebnisse zeitigte.

**2. Optimalleistung des Maschinenparks der Unternehmung**

Die Bedeutung der Bezeichnungen sei wie folgt:

$V$  das Volumen des Bauvorhabens in natürlichen Einheiten,

$T$  der Wert des Bauvorhabens in Forint,

$A, B, C$  die zum Einsatz gelangenden Maschinen,

$a_A, a_B, a_C$  der Bedarf des Bauvorhabens an spezifischen Maschinenstunden,

$b_A, b_B, b_C$  die spezifische Arbeitsstundeneinsparung für jede Bauvorhabeneinheit bei Einsatz der Maschinen  $A, B, C$ ,

$K_A, K_B, K_C$  der Fond von Arbeitsstunden, der im Laufe des Zeitraums der Untersuchung dem Maschinenpark der Unternehmung zur Verfügung steht.

Nehmen wir nun an, die Unternehmung erstelle  $m$  Arten von Bauvorhaben und für jede derselben wurden die Werte von  $V, T, a_A, b_A$  ermittelt. Dieselben wurden nun in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	$F_1$	$F_2$	...	$F_m$	
$A$	$a_{A1}$	$a_{A2}$	...	$a_{Am}$	$K_A$
$B$	$a_{B1}$	$a_{B2}$	...	$a_{Bm}$	$K_B$
$C$	$a_{C1}$	$a_{C2}$	...	$a_{Cm}$	$K_C$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$N$	$a_{N1}$	$a_{N2}$	...	$a_{Nm}$	$K_N$
	$\frac{T_1}{v_1}$	$\frac{T_2}{v_2}$	...	$\frac{T_m}{v_m}$	
	$\sum_A^N b_1$	$\sum_A^N b_2$	...	$\sum_A^N b_m$	
	$x_1$	$x_2$	...	$x_m$	

wobei die Elemente der letzten Reihe die im Verlaufe des Zeitraumes der Untersuchung, für jede Art von Bauvorhaben herstellbaren Mengen sind.

Besonders bemerkenswert sind die Elemente der Matrix

$$A = \begin{vmatrix} a_{A1} & \dots & a_{Am} \\ a_{N1} & \dots & a_{Nm} \end{vmatrix}$$

Diese können und müssen an Hand eines eingehenden Organisationsplanes ermittelt werden. Diese Matrix charakterisiert in ihren Einzelheiten das Niveau

der Verfahrenstechnik. Offensichtlich bestehen folgende Ungleichmäßigkeiten:

$$\begin{aligned}
 x_1 \cdot a_{A1} + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_m \cdot a_{Am} &\leq K_A \\
 x_1 \cdot a_{B1} + x_2 \cdot a_{B2} + \dots + x_m \cdot a_{Bm} &\leq K_B \\
 &\vdots \\
 x_1 \cdot a_{N1} + x_2 \cdot a_{N2} + \dots + x_m \cdot a_{Nm} &\leq K_N
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Das Ungleichmäßigkeitssystem muß derart gelöst werden, daß die Funktionen die die Optimalbedingungen umschreiben

$$Z_1 = \frac{T_1}{V_1} \cdot x_1 + \frac{T_2}{V_2} \cdot x_2 + \dots + \frac{T_m}{V_m} \cdot x_m
 \tag{39}$$

bzw.

$$Z_2 = \sum_A^N b_1 \cdot x_1 + \sum_A^N b_2 \cdot x_2 + \dots + \sum_N^A b_m x_m
 \tag{40}$$

ein Maximum aufweisen. Diese Aufgabe ist mittels des Algorithmus der linearen Programmierung zu lösen und ergibt eine exakte Lösung der Frage der Maschinenverteilung. Die Bestleistung wird von den Werten  $x(x_1, x_2 \dots x_m)$  in den Funktionen  $Z_1$  und  $Z_2$  definiert.

Hiebei sind jene Möglichkeiten zu beachten, die uns dank der mathematischen Erfassung der sogenannten definierenden Voraussetzungen zur Verfügung stehen. Auf diese Weise kann jede Gegebenheit die sich in der Praxis bietet, in das Gleichungssystem eingebaut werden und die gewonnenen Resultate umschreiben mit ausreichender Genauigkeit das, unter den gegebenen Umständen erreichbare Optimum. An Stelle des betriebseigenen Maschinenparks können wir hiebei auch von dem des ganzen Industriezweiges ausgehen, wobei die Lösung die Profilierung des ganzen Bauvolumens vor Augen führt.

### 3. Die Rolle der Mechanisierung bei der Gestaltung des Umfangs der Bauproduktion

Der Zusammenhang zwischen dem Produktionsvolumen ( $T$ ) und den Faktoren ( $a, b, c, d, u. s. w.$ ), die die Gestaltung des jeweiligen Volumens definieren, kann mathematisch in Form einer Funktion wie

$$T = f(a, b, c, d, \dots)
 \tag{41}$$

niedergeschrieben werden. Der partielle Differentialquotient der Funktion der Produktion ist die differentielle Produktivität des diesbezüglichen Produktions-

faktors. Wenn dies in irgend einer Proportion zur statistischen Produktivität steht, also allgemein ausgedrückt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial a} &= \alpha \frac{T}{a} \\ \frac{\partial T}{\partial b} &= \beta \frac{T}{b} \\ \frac{\partial T}{\partial c} &= \gamma \frac{T}{c}\end{aligned}\quad (42)$$

so führt die Integrierung der Gleichung zu einer Funktion mit der Form

$$T = A \cdot a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \quad (43)$$

wobei  $A$  die Integrationskonstante ist. Erweise sich nun im Falle zweier Faktoren, daß

$$\alpha + \beta = 1 \quad (44)$$

wobei wir also unter Einsetzung von

$$\alpha = k \quad (45)$$

$$\beta = 1 - k \quad (46)$$

in (43) den modifizierten Ausdruck

$$T = A \cdot a^k \cdot b^{(1-k)} \quad (47)$$

erhalten.

Stellt nun » $a$ « den durchschnittlichen Arbeiterstand der Bauindustrie\* (in 1000 Mann) im Verlaufe eines Jahres — und » $b$ « den investierten Wert des Maschinenparkes in Forint (100 Mill.) dar, so brauchen nach Umordnung des auf Grund der Angaben aus den Jahren 1951—56 gerechneten Ausdruckes

$$\frac{T}{a} = A \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{1-k} \quad (48)$$

bzw. nach dessen Logarithmierung

$$\log \frac{T}{a} = \log A + (1 - k) \log \frac{b}{a} \quad (49)$$

\* Die Angaben der Betriebe des Ministeriums für Bauwesen.

in der so erhaltenen Gleichung der Geraden, nur mehr die Konstanten  $A$  und  $(1 - k)$  ermittelt werden.

Nach Lösung der Normalgleichung erhalten wir den Zusammenhang

$$T = 33380,7 \cdot a^{0,925} \cdot b^{0,075}. \quad (50)$$

Der Korrelationskoeffizient ergab sich mit 0,97435. Die Streuung von  $(1 - k)$  betrug  $\pm 0,01211$  — die von » $A$ «  $\frac{+390}{-372}$ , und der durchschnittliche Fehler des Korrelationskoeffizienten 0,02066. All dies weist auf einen engen Zusammenhang hin.

Laut (50) steigt bei gleichzeitiger Erhöhung des Arbeiterstandes und des Maschinenparks um je 1%, das Volumen der Erzeugung um 1%: u. zw. zu 92,5% infolge der Steigerung des Arbeiterstandes und zu 8,5% infolge der Mechanisierung.

Die Funktionskonstante » $A$ « stellt den Meßwert des Standes der Technik dar. Sie gestaltete sich im Verlaufe des untersuchten Zeitraumes folgendermaßen:

1951 ...	$A = 100$
1952 ...	$A = 98,5$
1953 ...	$A = 97,5$
1954 ...	$A = 97,8$
1955 ...	$A = 98,5$
1956 ...	$A = 100$

Die Indexreihe weist auf die Notwendigkeit hin, bezüglich der Mechanisierung neue Wege zu suchen, u. zw. solche Wege die nebst einer ständigen Weiterentwicklung der Verfahrenstechnik im Bauwesen, auch eine gesteigerte Verbesserung der wirtschaftlichen Erfolge zu gewährleisten in der Lage sind. Am dargestellten Modell wurde ausschließlich die Rolle der wesentlichsten Wirtschaftsfaktoren zahlenmässig erfaßt. Hiemit soll nicht gesagt sein, daß es keinerlei weitere wichtige Wirtschaftsfaktoren gäbe, deren Gestaltung in der Lage wäre, das Produktionsvolumen zu beeinflussen. Auf eben einige der hierauf bezüglichen mikroökonomischen Zusammenhänge wurde im ersten Teile der Arbeit hingewiesen.

### Anhang

(Praktische Berechnungen)

Jene Werte die die Daten der Arbeitskraftäquivalente zusammenfassen, sind hinsichtlich Maschinentype und Woche zusammen mit den Berechnungen über die Nettoproduktivität der menschlichen Arbeit in Tabelle 1 enthalten. Hiebei bildet überall die Handarbeit die Vergleichsgrundlage. Bei Ermittlung der Werte in Forint, wurde von dem im Normenheft von 1956 in konstanten Preisen ausgedrückten Daten ausgegangen. Beim Turmkran nahmen wir 1600 Hebungen — bei der Schotterbeförderung 2000 m<sup>3</sup> — bei der Mörtelbeförderung 500 m<sup>3</sup> — und schließlich beim Trägerkran 800 Hebungen als Kalkulationsgrundlage an.

**Tabelle I.**  
Berechnung des Arbeitskraftäquivalents

	a	b	c	d	e	f	g	h
Ausmischen von 1 m <sup>3</sup> Beton im Betonmischer	3,10	23,10	0,69	23,79	0,72	24,51		A
		7,41	4,38	11,79	12,72	24,51		B
		0,94	0,03	0,97	0,03	1,00	1,03	C
		0,30	0,18	0,48	0,52	1,00	2,72	D
Ausmischen von 1 m <sup>3</sup> Mörtel im Mörtelmischer	2,85	20,80	0,62	21,42	0,64	22,06		A
		7,25	4,78	12,03	10,03	22,06		B
		0,94	0,03	0,97	0,03	1,00	1,03	C
		0,33	0,22	0,55	0,45	1,00	2,36	D
Beförderung von 3,6 t auf eine Höhe von 18 m mit dem Turm- kran	4,87	108,75	4,34	113,09	3,39	116,48		A
		20,18	12,72	32,90	83,58	116,48		B
		0,94	0,03	0,97	0,03	1,00	1,03	C
		0,17	0,11	0,28	0,72	1,00	5,23	D
Beförderung von 1 m <sup>3</sup> Schotter auf eine Höhe von 6 m mittels Förderband	3,00	13,54	2,27	15,81	0,47	16,28		A
		4,63	6,46	11,09	5,19	16,28		B
		0,83	0,14	0,97	0,03	1,00	1,00	C
		0,29	0,40	0,69	0,31	1,00	2,07	D
Beförderung von 0,5 t auf eine Höhe von 10 m mittels Träger- kran	4,85	13,49	0,44	13,93	0,41	14,34		A
		3,06	4,42	7,48	6,86	14,34		B
		0,94	0,03	0,97	0,03	1,00	1,03	C
		0,21	0,31	0,52	0,48	1,00	3,29	D
Beförderung von 1 m <sup>3</sup> Mörtel auf eine Höhe von 6 m mittels Mörtelpumpe	5,80	30,57	2,67	33,24	1,00	34,24		A
		5,29	2,92	8,21	26,03	34,24		B
		0,90	0,07	0,97	0,03	1,00	1,03	C
		0,16	0,09	0,25	0,75	1,00	5,68	D
Ausheben von 1 m <sup>3</sup> Erdreich und seine Beförderung in eine Ent- fernung von 20 m mittels Bagger	5,12	14,25	0,40	14,65	0,40	15,10		A
		2,79	2,89	5,68	9,42	15,10		B
		0,94	0,03	0,97	0,03	1,00	1,03	C
		0,17	0,19	0,36	0,64	1,00	4,77	D

Die Spalten der Tabelle sind:

- a. Das Arbeitskraftäquivalent  $L_0$ ,
- b. der Wert der menschlichen Arbeit/Produktivität,
- c. der übertragene Arbeitswert/Produktivität,
- d. die Selbstkosten/Produktivität,
- e. Akkumulation/Produktivität (Nutzen),
- f. Produktionswert/Produktivität,
- g. Nettoproduktivität der menschlichen Ar-

beit ( $T$ ),

- h. Die Bedeutung der hier aufscheinenden Buchstaben:  
 A ... Handarbeit in Forint,  
 B ... mechanische Arbeit in Forint,  
 C ... Handarbeit mit den Konstruk-  
 tionskoeffizienten,  
 D ... mechanische Arbeit mit den  
 Konstruktionskoeffizienten.

Tabelle II

Berechnung der optimalen wirtschaftlichen Lebensdauer der Amortisationszeit eines Baggers von 1 m<sup>3</sup> Schaufelinhalt.

Die Ausgangsdaten sind wie folgt:

Jahr	a	b	c	d	e	f	g	h	j
1	2400	50	120	120	—	0,95	1,00	4,05	500
2	2400	50	120	130	—	0,95	1,08	3,97	480
3	2200	50	110	150	180	0,95	3,00	2,05	2,30
4	2200	50	110	150	—	0,95	1,36	3,69	400
5	2000	48	96	170	180	0,99	3,65	1,36	140
6	2000	48	96	170	—	0,99	1,76	3,25	320
7	2000	48	96	170	200	1,01	3,86	1,13	110
8	1800	45	81	180	—	1,06	2,22	2,72	220
9	1800	45	81	200	200	1,06	5,18	-0,24	-20
10	1600	45	72	200	—	1,08	2,78	2,14	70
11	1500	40	60	220	260	1,22	8,00	-3,22	-193
12	1400	40	56	220	—	1,22	3,90	0,88	50
13	1300	35	45	250	—	1,51	5,47	-0,98	-45
14	1200	30	36	250	320	1,73	15,90	-11,63	-420
15	1100	20	22	250	—	1,75	11,40	-8,15	-189
16	1000	20	20	300	320	1,85	31,00	-27,85	-550

Die Spalten der Tabelle bedeuten:

- a ... Betriebsstunden/Jahr,
- b ... m<sup>3</sup>/Betriebsstunde, jährl. durchschnittl. Stundenleistung,
- c ... Jahresproduktion in 1000 m<sup>3</sup>,
- d ... jährl. Instandhaltungskosten, in 1000 Forint,
- e ... jährl. Reparaturkosten in 1000 Forint,
- f ... Material- und Lohnkosten auf 1m<sup>3</sup> Erdreich berechnet Ft/m<sup>3</sup>,
- g ... Einheitskosten von Reparaturen (d + e) : c in Ft/m<sup>3</sup>,
- h ... Einsparung, bezogen auf den Einheitspreis von 6 Ft/m<sup>3</sup> in Ft/m<sup>3</sup>,
- j ... Jährliche Einsparung in 1000 Ft.

Für einen Bagger mit 1 m<sup>3</sup> Schaufelinhalt berechneten wir die Amortisationszeit, die Wirtschafts- und die optimale Lebensdauer. Die Ausgangsdaten sind in Tabelle II zusammengefaßt.

Der Investitionswert beträgt: A = 750 000 Ft.

Die Kennziffer für die Optimalbedingung hat die allgemeine Form:

$$\frac{\sum c}{A + \sum (d + e)}$$



Hieraus ergaben sich folgende Werte:

bei Lebensdauer der Maschine von 1 Jahr, beträgt der Wert	
	der Kennziffer 0,138
2	0,240
3	0,262
4	0,310
5	0,304
6	0,326
7	0,315
8	0,236
9	0,306
10	0,310
11	0,284
12	0,284
13	0,276
14	0,250
15	0,242
16	0,220

Die in den Spalten «a», «b», «d» und «e» der Tabelle II enthaltenen Daten ermittelten wir durch Schätzung; im Durchschnitt stimmen sie mit den Angaben des Normenhefts von ÉTI (Forschungsinstitut für Bauwesen) überein, die zeitlichen Änderungen schätzten wir auf Grund von Angaben aus der Praxis. Im gegebenen Falle ist eine statistische Untermauerung dieser Daten nötig. Mit Absicht setzten wir nicht für jedes Jahr eine Generalreparatur fest und so entstand ein gewisser Einklang zwischen der Zeit eines Arbeitszyklus und der Anzahl von Arbeitsstunden.

Auf Grund obiger Daten liegt die wirtschaftliche Lebensdauer zwischen 6 und 7 Jahren. Die Amortisationszeit wurde auf Grund von Abb. 8 auf graphischem Wege ermittelt. Die Kurve von  $M(t)$  ergab sich aus den einzelnen, in der Spalte «j» der Tabelle enthaltenen

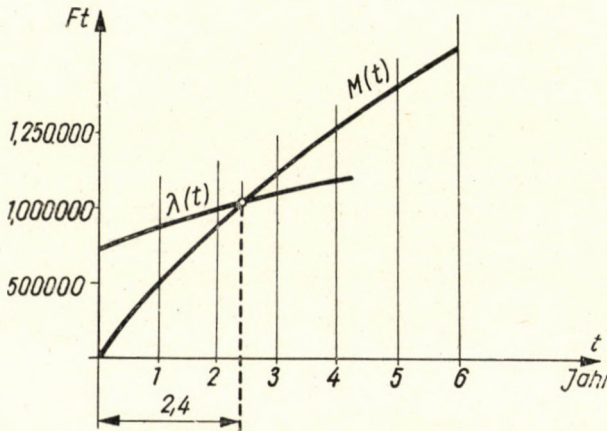


Abb. 8. Amortisationszeit eines Baggers mit 1 m<sup>3</sup> Schaufelinhalt

Daten, während die Form von  $(t)$  auf Grundlage eines durchschnittlichen Wirkungsfaktors von 0,1 errechnet wurde. Im Gegensatz zu den  $M(t)$ -Werten 0—500—980—1210 ergaben sich der Reihe nach die Werte mit 750—825—907—998. Der Schnittpunkt lag zwischen 2 und 3 Jahren, die Amortisation beträgt demnach ungef. 2,4 Jahre.

An Hand von Abb. 9 ermittelten wir auch auf graphischem Wege die optimale Lebensdauer. Wir wählten hiezu die Kurve, die sich den unteren Werten der Schwankungen anschmiegt, wobei zu sehen ist, daß auch die obersten Werte zu keiner wesentlich kürzeren Zeit geführt hätten. Laut unserer Wahl beträgt  $t_g = 11,5$  Jahre.

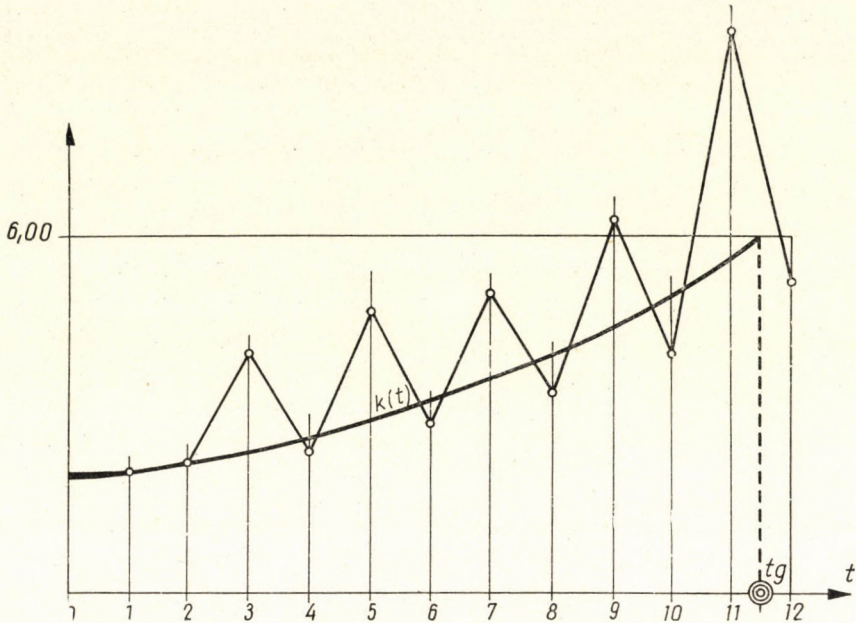


Abb. 9. Wirtschaftliche Lebensdauer eines Baggers mit  $1 \text{ m}^3$  Schaufelinhalt

Für die bezeichneten Maschinen und die genannten Verfahren betragen die optimale Kapazitäten wie folgt:

	Leistung	Tageskapazität	Jahreskapazität
Betonmischer .....	$5 \text{ m}^3/\text{h}$	$24 \text{ m}^3/\text{Tag}$	$5700 \text{ m}^3/\text{Jahr}$
Mörtelmischer .....	$4 \text{ m}^3/\text{h}$	$19 \text{ m}^3/\text{Tag}$	$4700 \text{ m}^3/\text{Jahr}$
Turmkran, beim Einbau von größeren Elementen als $0,5 \text{ t}$ .....	$10 \text{ t}/\text{h}$	$80 \text{ t}/\text{Tag}$	$15\,000 \text{ t}/\text{Jahr}$
Förderband für Schotter mit Zubringung mit der Hand .....	$5 \text{ m}^3/\text{h}$	$40 \text{ m}^3/\text{Tag}$	$10\,000 \text{ m}^3/\text{Jahr}$
Mörtelpumpe .....	$4 \text{ m}^3/\text{h}$	$25 \text{ m}^3/\text{Tag}$	$6000 \text{ m}^3/\text{Jahr}$
Trägerkran, mit einer Förderung von $500 \text{ kg}$ auf eine Höhe von $25 \text{ m}$ .....	$5 \text{ t}/\text{h}$	$35 \text{ t}/\text{Tag}$	$6000 \text{ t}/\text{Jahr}$
Bagger mit Zugseil, bei Erdreich der Klasse I und II, unter Deponierung des Erdreichs .....	$70 \text{ m}^3/\text{h}$	$500 \text{ m}^3/\text{Tag}$	$90\,000 \text{ m}^3/\text{Jahr}$

Die Abhängigkeit der Gesamtkosten von der Produktionsgeschwindigkeit zeigen wir an folgendem Beispiele. Es handelt sich hiebei um die maschinelle Herstellung von  $3000 \text{ m}^3$  Mörtel. Untersuchen wir nun vier Fälle: Leistungen von  $10-19-22-33 \text{ m}^3/\text{Tag}$ . Die letzten drei Zahlenwerte entsprechen eben den Tageskapazitäten der Mörtelmischer  $150 \text{ l}$  und  $216 \text{ l}$ . Dieser für eine optimale Maschinennutzung erstellte Wert ergibt gleichfalls ein Minimum. Fällt die tatsächlich gewünschte Leistung unter diese Schnittpunktwerte, so bieten sich zwei Möglichkeiten. Man muß nämlich die Mehrkosten die aus einer geringeren Nutzung der Maschine auflaufen auf sich nehmen — nämlich die Lohnkosten ungenutzter Maschinenstunden — oder

nämlich die Mehrkosten die aus einer teilweisen Handarbeit erwachsen. In diesem einfachen Falle genügt der Vergleich der Rohkosten der maschinellen Arbeit. Demnach lautet die gewählte Tabelle:

	A	B	C	D
Leistung .....	10 m <sup>3</sup> /Tag	19 m <sup>3</sup> /Tag	22 m <sup>3</sup> /Tag	38 m <sup>3</sup> /Tag
Bezeichnung der Maschine .....	Mörtelmischer 216 l	Mörtelmischer 216 l	Mörtelmischer 150 l	Mörtelmischer 216 l
Anzahl der Maschinen..	1 Stück	1 Stück	2 Stück	2 Stück
Gesamtmenge .....	3000 m <sup>3</sup>	3000 m <sup>3</sup>	3000 m <sup>3</sup>	3000 m <sup>3</sup>
Betriebsstunden .....	856	856	750	428
Kosten .....	48 729 Ft	42 492 Ft	43 353 Ft	43 349 Ft

Die Verhältnisse werden in Abb. 10 veranschaulicht. In dieser Abbildung verbanden wir die dem Mörtelmischer 216 l zugehörigen Punkte A — B — D, wobei wir bemerken, daß die Punkte des Diagramms nicht im Sinne einer sachgemäßen Interpretation für die Zwischen-

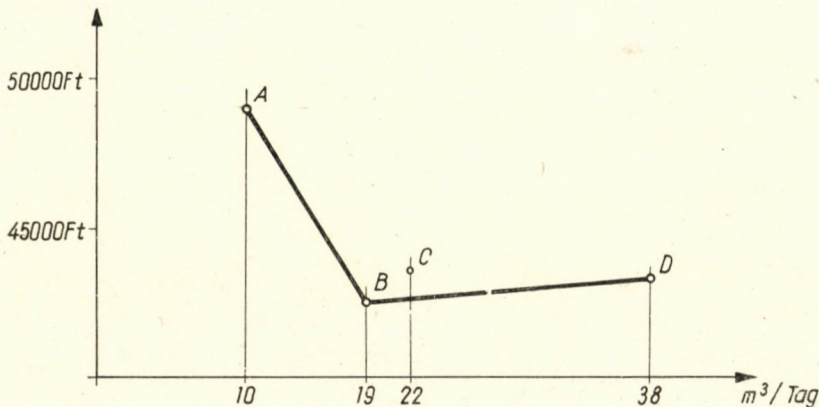


Abb. 10. Kostenkurve eines Mörtelmischers

geschwindigkeiten gültig sind: die tatsächlichen Unterschiede sind jedoch derartig gering, daß zu einer praktischen Orientierung die Punkte annehmbare Werte darstellen. Dies ist aber nur solange gültig, bis wir keine Handarbeit zur Gewährleistung von Leistungsunterschieden einschalten. Punkt C zeigt, daß sich die Kosten ändern, falls wir in den Grenzen von 19 — 22 m<sup>3</sup>/Tag zwei Stück Mörtelmischer vom Typ 150 l einsetzen. Die Kostenunterschiede sind sichtlich gering. Die Einsparung ist im Verlaufe der Durchlaufzeit gleichwohl außerordentlich bedeutend, das Verhältnis von A zu D entspricht nämlich einem Verhältnis von 300 : 79. Die Erklärung hierfür ist in der Tatsache zu suchen, daß die Instandhaltungskosten den geleisteten Arbeitsstunden proportionell sind, was technisch auch an sich vollkommen begründet ist. Demzufolge spielt bei den Kostenwerten nur der Unterschied der Aufmarschkosten eine Rolle, was aber bei dieser kleinen Maschineneinheit keine ausschlaggebenden Mehrkosten darstellt.

Schließlich behandeln wir das Untersuchungsverfahren im Zusammenhange mit der Entwicklung der Mechanisierung, und zwar auf Grund der in Tabelle 1 angeführten Parameter des Betonmischers, wobei wir die Konstruktionsfaktoren sowie das Wirksamkeitsdiagramm benutzen. Wie ersichtlich, beträgt:

die menschliche Arbeit .....	7,41 Ft/m <sup>3</sup> = e
die verbrauchte übertragene Arbeit .....	4,38 Ft/m <sup>3</sup> = h
Selbstkosten .....	23,79 Ft/m <sup>3</sup> = k
Gesamtnutzen .....	12,72 Ft/m <sup>3</sup> = m

Für die Selbstkosten erhalten wir nach Analyse der Kostensätze bei Übergang auf die Konstruktionsfaktoren, folgendes Ergebnis:

	1	2	3	4
Lohn des Maschinenarbeiters .....	0,220	0,075	0,220	0,075
Lohn des Instandhalters .....	0,095	0,095	0,048	0,048
Treibstoff .....	0,075	0,075	0,075	0,075
Reparaturmaterial und Amortisation	0,110	0,110	0,055	0,055
Nutzen .....	0,500	0,645	0,602	0,747
Nettoproduktivität .....	2,72	5,20	3,50	7,63

Die Verhältnisse sind aus Abb. 11 ersichtlich. Punkt 1 zeigt den untersuchten Grundfall, in dem die Nutzung der Schichtzeit 30% des Normenwertes ausmacht. Punkt 2 entspricht dem

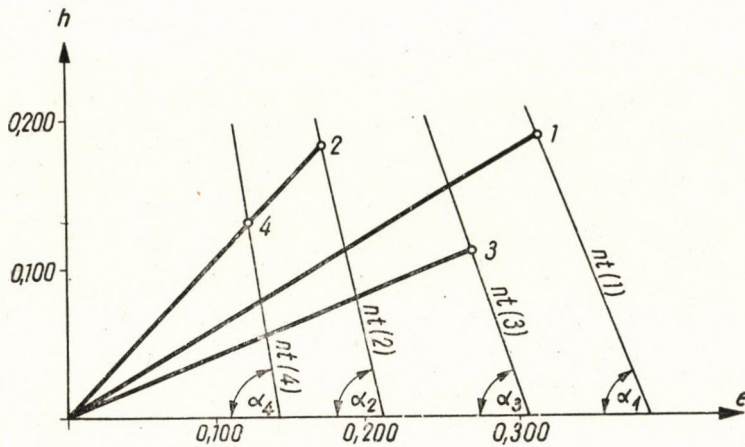


Abb. 11. Entwicklung eines Betonmischers

Werte einer 100%-igen Nutzung der Schichtzeit. Auffallend ist der sprunghafte Anstieg der Nettoproduktivität.

Punkt 3 bezieht sich auf den Fall in dem es gelingt, die Instandhaltungskosten und Abschreibungskosten auf die Hälfte zu vermindern. Die Möglichkeit hiezu ergibt sich aus einer modernen, leichten Konstruktion, aus einer Steigerung der Produktivität der Maschinenreparaturarbeiten, oder aus der verhältnismäßigen Steigerung der Leistungsfähigkeit der Maschine. Auch hiebei können Ergebnisse erzielt werden, wie aus dem Verhältnis der Nettoproduktivitäten zu ersehen ist. Auffallend ist hiebei jedenfalls, daß die relative Verbesserung verhältnismäßig geringer ist. Punkt 4 demonstriert schließlich jenen Fall, in dem beide der erwähnten Abänderungen zur Durchführung gelangen.

## SCHRIFTTUM

- KREKO, B.—BACSKAY, Z.: Einführung in die lineare Programmierung. (Verl. f. Volkswirtschaft und Rechtswissenschaft, Budapest 1957.) (ungarisch)
- CHARNES, A.—COOPER, W. W.—HENDERSON, A.: An Introduction to Linear Programming. New York, 1956.
- KÁDAS, K.: Sowjetische Methoden zur Beurteilung der wirtschaftlichen Wirksamkeit von Investitionen, die einer Hebung des technischen Niveaus dienen. (Ung. Verkehrsrundschau, 1952, No. 2—3.) (ungarisch).
- RÉCZEY, G.: Planmäßige Instandhaltung von Arbeitsmaschinen im Straßen- und Eisenbahnbau. (Verlag für Verkehrswesen, Bpest, 1954.) (ung.)
- TAKÁCS, I.: Die Verwendung von Baumaschinen. (Buch- und Zeitschriftenverlag der Bauindustrie, Bpest, 1953.) (ung.)
- Етельянов, А.: О методах определения экономической эффективности применения машин в советском хозяйстве. (А. ЖЕМЕЛЯНОВ: Über die Methoden zur Bestimmung der wirtschaftlichen Wirksamkeit des Einsatzes von Maschinen in der sowjetischen Wirtschaft.) Вопросы экономики, 1949. 11.
- Консон, А. С.: Экономическая эффективность новой техники. (А. S. KONSON: Die wirtschaftliche Wirksamkeit der neuen Technik.) Госполитиздат, 1958.

## ZUSAMMENFASSUNG

Zum Ausgangspunkte der gesamten Abhandlung wird die Frage der wirtschaftlichen Wirksamkeit der Mechanisierung genommen. Wir halten es für notwendig, daß nebst Senkung der Selbstkosten, auch eine Steigerung der Produktivität der menschlichen Arbeit zur Geltung zu kommen habe. Zur Darstellung einer derartig interpretierten Wirksamkeit wird ein neues Verfahren vorgeführt. Nach entsprechender Fundierung kann die Erstellung eines optimalen Programms für ein Unternehmen — ja für den ganzen Industriezweig — dem Algorithmus der linearen Programmierung anvertraut werden. Die Rolle der Mechanisierung wird mittels einer linearen, homogenen Produktionsfunktion dargestellt. Eine Anwendung der vorgeführten mathematischen Verfahren wird durch Aufnahme repräsentativer, statistischer Angaben ermöglicht, wodurch man auf jede Frage in der Wirtschaft, die mit der Mechanisierung im Zusammenhange steht, Antwort erhält u. zw. angefangen von Problemen am Arbeitsplatze selbst bis zu den diesbezüglichen Problemen der Bauindustrie — ja sogar der Volkswirtschaft selbst.

Die Arbeit stellt einen Auszug aus der Dissertation zur Kandidatur des Autors dar.

METHODS FOR DEVELOPING OPTIMUM-EFFICIENCY MECHANIZATION  
IN THE BUILDING INDUSTRY

G. RÉCZEY

## SUMMARY

The economical efficiency of mechanization is the starting point of the whole discussion. Besides reduction of costs, it is thought that the net increase of the efficiency of live labour must be asserted. A new method is shown for representing the efficiency defined in this way. The preparation of the optimum program of an enterprise or — if we wish so — of the whole branch of industry can be trusted, after providing the necessary bases, to the algorithm of linear programming. The role of mechanization is shown by means of a linear, homogeneous production function. The mathematical methods which are shown may be used after representative statistical collection of data and thus we get an answer to every question of mechanization related to economics, beginning from the problems on the work site up to those concerning the whole branch of industry and the whole national economy.

## MÉTHODES DE DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉCANISATION GARANTISSANT LE RENDEMENT OPTIMUM DANS L'INDUSTRIE DU BATIMENT

G. RÉCZEY

### RÉSUMÉ

L'efficacité économique de la mécanisation est le point de départ de tout le traitement. L'auteur conclut qu'à part la réduction du prix de revient, on doit considérer l'augmentation de la productivité nette du travail vivant. Une méthode nouvelle est montrée pour la représentation de l'efficacité définie de cette façon. Après avoir créé les bases nécessaires, la confection du programme optimum de l'entreprise — si l'on veut, de toute une branche de l'industrie — peut être confié à l'algorithme de la programmation linéaire. Le rôle de la mécanisation est montré à travers une fonction de production homogène linéaire. Après un relevé statistique représentatif des données, il y a possibilité d'appliquer les méthodes mathématiques exposées et ainsi on obtient la réponse sur toutes les questions économiques concernant la mécanisation, à commencer des problèmes concernant un chantier jusqu'à ceux relatifs à la branche de l'industrie entière ou concernant toute l'économie nationale.

## МЕТОДИКА СОЗДАНИЯ В СТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ МЕХАНИЗАЦИИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕЙ МАКСИМАЛЬНУЮ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ

Г. РЕЦЕИ

### РЕЗЮМЕ

Экономическая эффективность является исходной точкой всей работы. Наряду со снижением себестоимости следует добиваться также производительности нетто физического труда. Демонстрируется простой метод для изображения трактуемой таким образом эффективности. Составление программы предприятия (или же некоторой отрасли промышленности) после соответствующего обоснования можно осуществить при помощи линейного алгоритма. Роль же механизации иллюстрируется при помощи линейной гомогенной производственной функции. Применение упомянутых здесь математических методов возможно осуществить после снятия выборочных статистических данных и, таким образом, можно получить ответ на все экономические по своему характеру вопросы механизации, начиная от проблем рабочих мест и включая проблемы отдельных отраслей промышленности и всего народного хозяйства.

# РОЛЬ ЛЕМНИСКАТЫ В УСТАНОВКЕ ПОВОРОТОВ ПРИ РЕГУЛИРОВАНИИ РЕК

К. АПОР

(Поступило 20 окт. 1958 г.)

## Введение

Закономерность поворотов при регулировании рек установлена французским инженером Фаргом, который, исходя из функциональных соображений, разложил кривую, соответствующую характеру реки в функциональный ряд. Только синусоидальная часть кривой, названной им спиральной воллютой, согласовывается с линией разбивки; части кривой, лежащие за максимальной и минимальной точками, которые изображают собственную спиральную воллюту, при разбивке линии регулирования реки никакой роли не играют.

Разложенное в ряд уравнение синусоиды, даже бисинусоиды, используемое в целях регулирования рек, делает необходимую при регулировании разбивку весьма обстоятельной. Расчёт разбивочных данных лемнискаты менее сложен и поэтому сам Фарг, исходя из технических причин разбивки, также применял разбивку на основе лемнискаты.

Регулирование горных рек определённо требует синусоидальную, а при больших уклонах дна бисинусоидальную наноску линии. Причём реки Альфёльда, имеющие небольшой уклон дна, более соответствуют линии лемнискаты. Тисса, например, на Альфёльде перед регулированием образовывала возвращающееся в себя русло, после регулировки течение оставило петлю и вода протекала прямо в нижнее русло, составляющее её продолжение (т. е. петли). Конечно, применение лемнискаты в целях регулирования рек полностью не целесообразно, так как целью не является возвращающееся в себя русло. Однако, отдельные части лемнискаты успешно используемы: в случае рек Альфёльда часть кривой вблизи верхней точки, которая немного отклоняется от дуги окружности, а в случае горных рек часть кривой вблизи инфлекссионной точки, весьма хорошо приближающаяся к синусоидальной кривой. Технику разбивки значительно упрощает использование открытой автором и описанной им в предыдущей работе прямой директрисы, математическая интерпретация которой дана там же. В данной работе дан только графический метод, также как и начертательная геометрия или графостатика, тоже ограничиваются черчением.

### 1. Использование метода стационарирования круглыми числами при разбивке лемнискаты

Лемниската — геометрическое место точек, произведение расстояния которых от точки фокуса  $n_1$  и  $n_2$  является постоянной величиной:  $n_1 \times n_2 = a$ . Вектор радиуса лемнискаты:  $\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$  по полярному уравнению, где  $\rho$  — расстояние окружной точки от начальной точки 0;  $a$  — расстояние между двумя фокусами;  $\varphi$  — угол наклона радиус вектора к прямой, соединяющей две точки фокусов.

Если расстояние от максимальной точки до начальной точки 10 см, то так как для максимальной точки  $\varphi = 0$ ,  $a = \frac{\rho}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07$  является расстоянием фокуса от точки 0.

Уравнение лемнискаты в прямоугольной системе координат выглядит следующим образом:  $(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$ .

Во времена Фарга, более пятидесяти лет тому назад, эти два уравнения имелись в распоряжении при разбивке на местности. Графический метод был совершенно неизвестен.

Выведенные Фаргом интегральные уравнения

$$x = \int \cos \left( c \frac{2s}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \frac{s}{S} \right)$$

$$y = \int \sin \left( c \frac{2S}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \frac{s}{S} \right)$$

непригодны для разбивки, но на их основе автору удалось разработать построение синусоиды как на бумаге, так и графическим путём, при разбивке на местности геометрически точным способом прямолинейной директрисы и стационарирования круглыми числами.

Уравнения лемнискаты можно использовать при расчёте разбивочных точек. По этой причине Фарг перешёл к разбивке лемнискаты.

Уравнение синусоиды полностью соответствует природным данным изгибов горных рек. Лемнискаты, в свою очередь, характеризуют изгибы рек, протекающих по низменности.

Простой метод разбивки синусоиды дан автором в работе «Упрощённая разбивка спиральной волюты Фарга».

Построение лемнискаты на бумаге производится на основе уравнения  $n_1 \times n_2 = \frac{1}{2} a$ , где  $n_1$  и  $n_2$  — расстояние точек лемнискаты от двух фокусов;  $a$  — расстояние между фокусами. Для построения на бумаге полярное уравнение менее применимо из-за необходимости расчёта угловой функции. Оно применялось при разбивке на местности, но для его применения необ-



ходим угломер, причём весьма выгодно, если прибор оснащен дальномером. Уравнение координат по  $Y$  и  $X$  соответствовало бы, но в обоих случаях мы имеем дело с уравнением четвёртой степени, а это требует сложных расчётов. Разработанный автором метод стационарирования директрисы круглыми числами даёт возможность быстрого построения лемнискаты на бумаге и разбивки на местности.

На рис. 1 дано построение правильной лемнискаты, у которой расстояние между максимальными точками 20 см; расстояние от максимальной точки до инфлекссионной точки 10 см; расстояние между фокусами  $10 \times \sqrt{2} = 14,14$ . От точки 0 фокусные точки находятся на расстоянии 7,07 см. Любую точку лемнискаты можно получить на основе уравнения произведения двух расстояний от фокусов  $n_1 n_2 = 50$ . Значит, если точка лемнискаты находится на расстоянии 5 см от одного фокуса, то от другого фокуса она может быть отдалена только на 10 см, так как  $5 \times 10 = 50$ . Проведя прямую от фокусов окружности, радиусы которых соответствуют вышеуказанным расстояниям, и пересекая их между собой, получим четыре точки правильной лемнискаты. Планирование четырёх следующих точек с любым произведением  $u_1 \cdot u_2 = 2a^2 = 50$  продолжим с таким расчётом, чтобы точки лежали так близко друг к другу, чтобы длина дуги практически могла быть заменена длиной хорды. Если необходимо найти инфлекссионную точку, тогда  $\left(\frac{10}{2} \sqrt{2}\right)^2 = 50$ , а в случае максимальных точек

$$\frac{20 - 10\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{20 + 10\sqrt{2}}{2} = \frac{400 - 200}{4} = 50.$$

Так максимальные точки друг от друга находятся на расстоянии 20 см, а от инфлекссионной точки, т. е. от точки 0 на расстоянии 10 см, так их и надо расставлять.

При разбивке на местности, когда разбивается обычно не вся лемниската, а только часть её, настолько — насколько природа водотока этого требует, этот метод построения не может быть применён, так как не вероятно, что на местности вся площадь лемнискаты будет хорошо просматриваться. Но вышеописанное построение на бумаге является самым простым методом и в таком случае всю площадь лемнискаты можно рассмотреть. На бумаге можно построить лемнискату во всем ее объеме и при помощи уже вышеуказанных стационарирования круглыми числами и директрисы.

В общем, всю лемнискату определяет и одна четвёртая часть её, лежащая между максимальной и инфлекссионной точками, так как остальные части являются только её симметричным отображением. Стационарирование одного см-а вышеуказанной части определяет 13 см-ов дуги

$$l = b \sqrt[4]{2\sqrt{2}} = b \sqrt[8]{8}; \quad b = 10 \quad l = 10 \sqrt[8]{8} = 13.$$

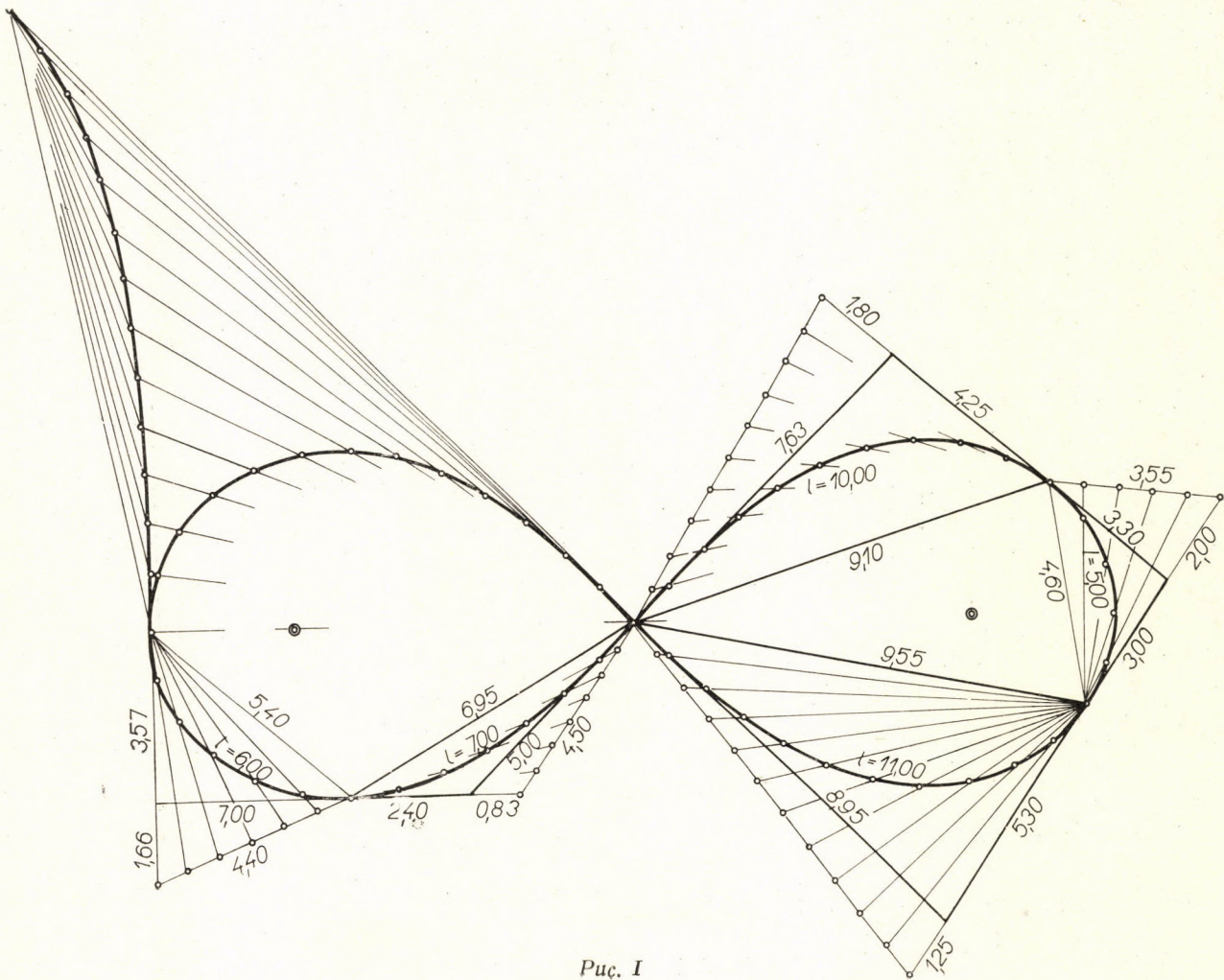


Рис. I

Вопрос: какая директриса принадлежит к нему, если нам необходимо из инфлекссионной точки по окружным направлениям, определённым директрисами, спланировать лемнискату методом стационарирования круглыми числами.

Из рис. I ясно видно, что в случае правильной лемнискаты невозможно спланировать при помощи директрисы полную четверть дуги, а надо применить кривую синусоидального характера как директрису, длина дуги которой точно соответствует длине дуги, спланированной лемнискаты. А этот факт требует свободное место и свободный обзор, которые на местности обычно не бывают в нашем распоряжении.

Редуцированная директриса на половинном расстоянии тоже не применима, потому что она зашла бы в русло водотока или даже за него. Но если при помощи касательных разделить лемнискату на две части, как это видно в левом нижнем углу рис. I, тогда части вблизи максимальной точки лежащей тангенсоиды и вблизи инфлекссионной точки лежащей синусоидальной кривой могут быть разбиты при помощи прямой директрисы. Для приближенного определения длины дуги служит очень простое уравнение  $\frac{2a + b + c}{3} = l$ , где  $a$  — длина хорды;  $b$  — большая касательная;  $c$  — меньшая касательная.

Уравнение  $\frac{2a + b + c}{3} = l$  даёт длину не всей длины лемнискаты, а только приблизительную длину одной её части. Её преимущество, что она может быть вычислена и в уме. При разбивке на местности малых длин на точную длину влияют и другие факторы (линия регулирования, берегозащитные устройства, земляные работы и т. д.), и только во втором туре определяется точная длина дуги. В отношении частей дуги правильной лемнискаты в треугольник, образованный касательными и хордой, в случае заданной длины можно вписать только часть одного отрезка правильной лемнискаты.

#### *Зависимость длины $l$ от сторон треугольника.*

На рис. I части дуги вписаны касательными и хордой, все данные уже готовы. На основе готовых данных надо определить, каким образом можно быстро и просто вычислить по данным касательной и хорды приближенную длину дуги, потому что на местности имеются не длина дуги, а только стороны треугольника.

$$l = f(a, b, c).$$

Чем длиннее стороны треугольника, тем длиннее  $l$ . Рассчитанная по сторонам треугольника средняя длина  $\frac{a + b + c}{3}$  представляет длину одной сто-

роны, причём длина части дуги лемнискаты немного длиннее её, т. е.

$$\frac{a + b + c}{3} < l,$$

чтобы длины были равны, в числитель необходимо ввести ещё один фактор

$$\frac{xa + b + c}{3} = l,$$

откуда

$$xa + b + c = 3l$$

$$x = 3l - b - c$$

$$x = \frac{3l - (b + c)}{a}$$

Для определения  $x$  имеются в распоряжении следующие данные:

	$l$	$b$	$c$	$a$			
1	6,00	4,00	3,57	5,40			
2	7,00	5,00	2,40	6,95			
3	10,00	7,63	4,25	9,10			
4	5,00	3,30	3,00	4,60			
5	11,00	8,95	5,30	9,55			
	$3l - (b + c)$	$3l - (b + c)$			$3l - (b + c): a = x$		
1	18 — 7,57 = 10,43				10,43	5,40 = 1,93	
2	21 — 7,40 = 13,60				13,60	6,95 = 1,96	
3	30 — 11,88 = 18,15				18,15	9,10 = 1,99	
4	15 — 6,30 = 8,70				8,70	4,60 = 1,89	
5	33 — 14,25 = 18,75				18,75	9,55 = 1,96	
					<hr/>		
					$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9,73$		

Среднее значение на основе приведенных данных будет

$$x_{cp} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{9,73}{5} = 1,94.$$

Кроме вышеупомянутых 5-ти примеров можно, конечно, начертить любое количество примеров, но для расчёта в первом приближении достаточно и значение  $x = 2$ . Обычно вблизи инфлекссионной точки значение  $x$  ближе к 2, вблизи максимальной точки значение  $x$  меньше. Расстояние между конечной точкой директрисы от точки пересечения касательных в продолжении более короткой касательной может быть измерено только в случае кривой синусоидального характера, по формуле  $\delta = \frac{c^2}{a}$ . В случае тангенсоидальных и смешанных кривых оказываются значительные от-

клонения, как это показывают длины  $\delta_1$ , нанесённые на рис. I. Вместо расчёта проще, если на местности в случае кривых тангенсоидального порядка направление директрисы возьмём перпендикулярным к направлению, определённому направляющей точкой и лежащей в средней части стационарированной точки. В случае кривых смешанного порядка направление отодвигается в сторону более короткой касательной настолько, насколько синусоидальность кривой возрастает. Практическое значение стационарированной круглыми числами разбивки регулировочной линии состоит в том, что неповреждённый речной берег (цельность которого необходимо обеспечить относительно дешёвым, но хорошим берегозащитным устройством) стационарируется по береговой линии, проводя касательную стационарирования, находится нижняя точка на более длинной касательной линии и направляющей точкой. Если она находится внутри пересечения касательных, то кривая тангенсоидального порядка, если она находится за точкой пересечения касательных (смотри середину правой стороны рис. I и также внизу левой стороны часть, примыкающую к инфлекссионной точке), то уравнение  $\delta = \frac{c^2}{a}$  может быть применено и в случае правильной лемнискаты. Не так даже важно любой ценой строить кривую правильной лемнискаты, а важно наметить линию берега, приспособляясь к природе реки, в правильную, плавную кривую лемнискатоидного характера.

## 2. Лемниската с прямой директрисой

Правильная лемниската на рис. II спроектирована таким образом, чтобы произведения расстояний любых точек лемнискаты от фокусных точек было постоянными,  $n_1 \times n_2 = 50$ . Лемнискату, однако, можно спроектировать и методом, разработанным автором, то есть при помощи директрисы, стационарированием круглых чисел. Известно, что длина четверти дуги лемнискаты 13,0, так что длина директрисы тоже должна равняться 13,0. Из вышесказанного также известно, что наружная директриса выходит из максимальной точки лемнискаты и кончается у инфлекссионной касательной. Радиусы, по которым проходит стационарирование круглых чисел, в данном случае даны присутствием стационарирования лемнискаты. Так что задача является обратной. Следует определить директрису, относящуюся к стационарированной правильной лемнискате. В случае наружной директрисы, проходя по радиусам с первоначальной стационарной единицей, равной 1, получим кривую синусоидального порядка. Это проектирование наружной директрисы к правильной лемнискате на полурасстоянии, то есть на расстоянии 0,5 стационарных единиц показано на рис. II.

Возникает вопрос: какая кривая получается в случае применения прямых директрис с той лишь разницей, что теперь дана длина директрисы, которая равна намечающейся длине дуги. Кроме того, намечающуюся дли-

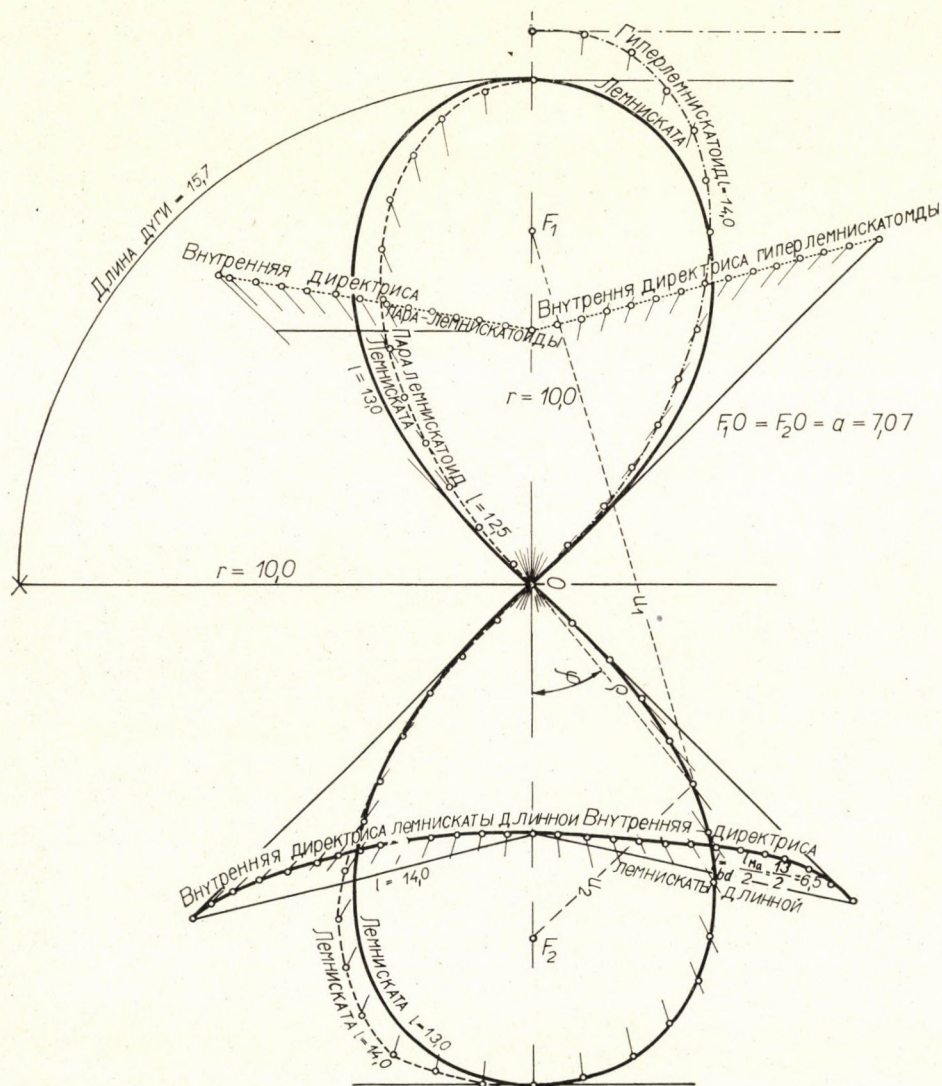


Рис. II

ну следует выбрать таким образом, чтобы она была в геометрической пропорции с имеющимися данными, т. е.  $r$  должна изображать на рисунке среднюю геометрическую между расстоянием инфлексивной точки лемнискаты от

её максимальной точки и длиной четверти дуги круга, описанной этим расстоянием — радиусом  $r$ , т. е.  $r:l = l:\frac{\pi r}{2}$

Из этого следует:  $l^2 = \frac{\pi r^2}{2}$  и  $l = r \sqrt{\frac{\pi r}{2}}$  в данном случае  $r = 10$  см.

(Изображение на рисунке ограничено  $l' = \frac{r}{2} = 5$  см.) Вычисление производится по наружной директрисе, так что внутренняя директриса изображена на рисунке в полумасштабе, т. е. вместо 1 см измеряется 0,5 см.

Даны:  $l = d = r \sqrt{\frac{\pi}{2}}$   $r = b = 10$ ,  $\alpha = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ , следует определить, какого размера должна быть отмеченная на инфлекссионной касательной сторона  $c$  на рис. III  $c = ?$

Это вычисление имеет важное значение в случае разбивки на местности, так как, описав на бумаге окружность длиной дуги в сечении касательной к инфлекссионной точке, получим расстояние  $c$ , но на местности этого сделать нельзя, а вместо этого расстояние  $c$  следует вычислить от точки пересечения касательной к инфлекссионной и предельной точке. По вышеупомянутым данным вычисляется угол  $\beta$ :

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{10 \sin 45^\circ}{\frac{10}{\sqrt{2}}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{10}{\sqrt{\pi}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

lg 10 = 1,0000000  
 lg  $\sqrt{\pi}$  = 0,2485749  
 lg sin  $\beta$  = 9,7514251  
 4074  
 1177 : 208

поэтому  $\beta = 34^\circ 21' 40''$   
 $\beta = 34^\circ 20' 46''$

$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$

$\alpha = 135^\circ 00' 00''$   
 $\beta = 34^\circ 20' 46''$   
 $\alpha + \beta = 169^\circ 20' 46''$

179° 59' 60''  
 — 169° 20' 46''

lg sin 10° 39' 14'' = 9,2668352  
 444

$\gamma = 10^\circ 39' 14''$

92668800

$c = \frac{d \sin \gamma}{\sin \alpha}$   $d = \sqrt{\frac{\pi r}{2}} = ? r = 10$

$d = 12,5431$   
 lg  $r = 1,0980589$   
 lg sin  $\gamma = 9,2668800$   
 10,3649389  
 lg sin  $\alpha = 9,8494850$   
 0,5154539

lg  $\sqrt{\pi} = 0,2485749$   
 lg  $\sqrt{2} = 0,1505160$   
 lg  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0,0980589$   
 lg 10 = 1,0000000  
 lg  $d = 1,0980589$

550

39

$N \lg = 0,5154539 = 3,266177$

$c = 3,266177$

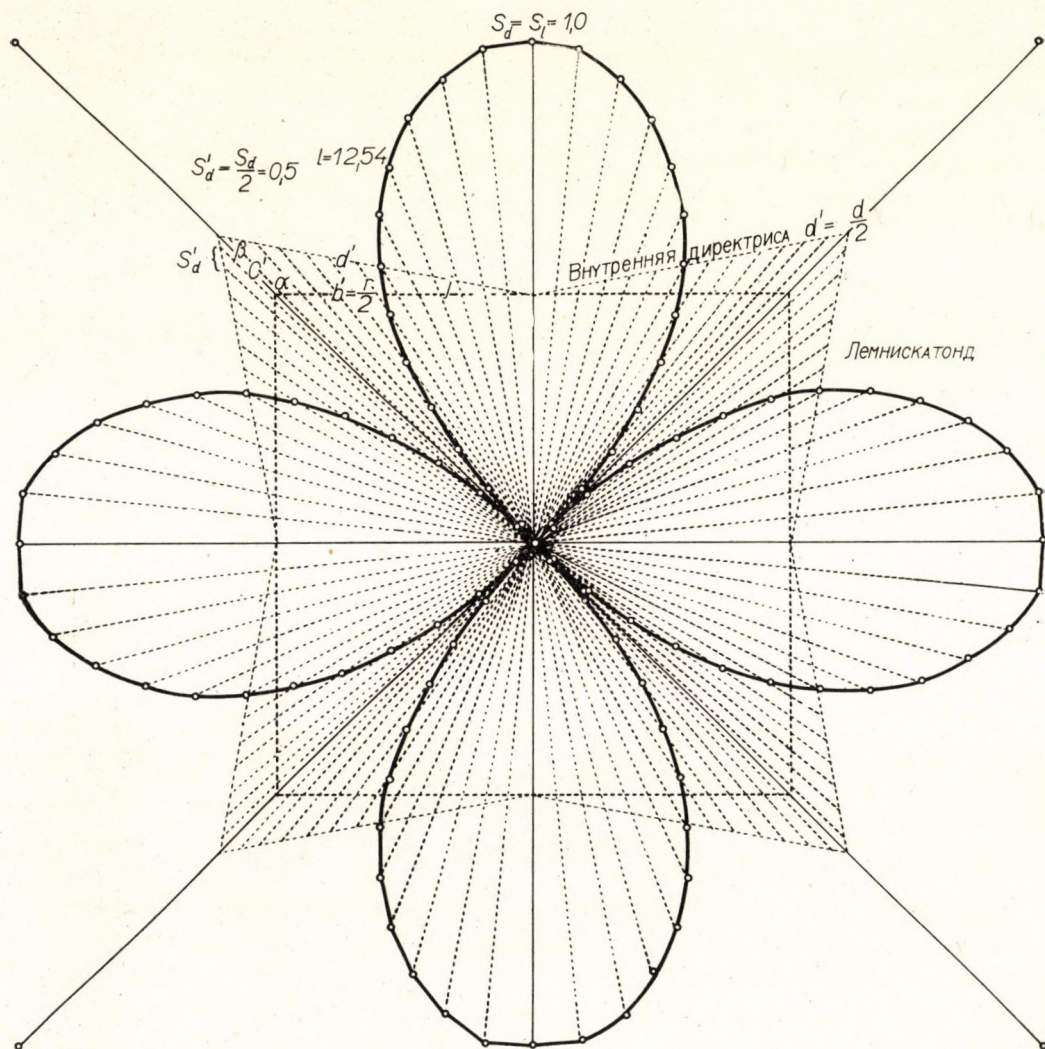


Рис. III

Проверочное вычисление:

$$\begin{array}{rcl}
 b = d \sin \beta & \lg d = 1,0980589 & b = N \lg 0,9999990 = 10,0 \\
 \sin \alpha \lg \sin \beta = 9,7514251 & & \\
 & 10,8494840 & \\
 \lg \sin \alpha = 9,8494850 & & b = 10,0 \\
 \lg 10 = 0,9999990 & & 
 \end{array}$$

В результате получены данные:

$$\begin{array}{rcl}
 Z = d = r \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 12,5431 & & \alpha = 135^\circ 00' 00'' \\
 v = b = 10,0000 & & \beta = 34^\circ 20' 46'' \\
 c = 3,66177 & & \gamma = 10^\circ 39' 14'' \\
 & & \hline
 \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ 00' 00''
 \end{array}$$



Так как на рис. III применена внутренняя директриса, длина которой равна половине длины наружной директрисы, поэтому:

$$d' = \frac{d}{2} = 6,27155$$

$$b' = \frac{b}{2} = 5,0000$$

$$c' = \frac{c}{2} = 1,83089$$

Углы вследствие подобия треугольников остаются неизменными.

Стационарная единица внутренней директрисы:

$$S'd = \frac{Sd}{2} = 0,50000.$$

А стационарная единица длины дуги:

$$Sd = 1,00000 \text{ также неизменна.}$$

Такие вычисления проводятся в исключительных случаях в зависимости от важности задачи и условий местности. Редко требуется построение полной длины для лемнискатоида при помощи одной директрисы. Все это было необходимо демонстрировать для того, чтобы доказать, что правильная лемниската не — единственная кривая, пользование которой должно быть безусловным, хотя разработанный автором и им впервые применённый метод проектирования стационарирования директрис округленными числами позволяет также и её проектирования. Кроме того, изгибы рек Альфёльда дают изображения самых различных кривых, равномерное переходное проектирование которых можно решить с помощью прямых директрис.

На рис. II обозначенный пунктиром лемнискатоид с прямой директрисой, длина дуги которого короче правильной лемнискаты, является паралемнискатоидом, а обозначенный штрихпунктиром лемнискатоид, длина дуги которого больше длины дуги правильной лемнискаты, является гиперлемнискатоидом.

При регулировании равнинных рек можно исходить из измерений длины берега и использовать это для проектирования директрисы. В таком случае  $l \geq l_c$ , или же на рисунке:

$$d_2 = l_{Mp} = 14 > l_{Mp} = 13 > l_M = d_M = 12,54,$$

где  $l_{Mp}$  — длина правильной лемнискаты;

$l_2$  — длина гиперлемнискатоида;

$l_M$  — длина паралемнискатоида.

Эти величины всегда равны длине относящихся длин директрис без редукции.

Касательные к вершинам подобных лемнискатоидов смещены по отношению к правильной лемнискате (лемниската Бернулли), касательные к инфлекссионным точкам равнозначны, в противоположность искажённым лемнискатам, которые, исходя из проектирования, являются производными правильных лемнискат, так как их точки совпадают, в инфлекссионной точке изменяется угол между касательными, а касательные к вершинам отклонены в сторону искажения.

### 3. Отношение прочих геометрических кривых к тангенсоидной и синусоидной кривым

В верхней части с левой стороны рис. IV спроектирована обычным методом четверть эллипса, т. е. так, чтобы сумма расстояний её любой точки от фокусов равнялась большей оси. Приближённый к эллипсу тангенсоид совпадает только в касательных точках, между ними отклоняется внутрь и максимум отклонения достигается в половине длины четверти кривой. То же наблюдается между построенной из касательной параболы и тангенсоидом, которые находятся с правой стороны рис. IV. Если вместо прямой директрисы применить аналогично показанному на рис. I прием методом криволинейной директрисы, точки стационарирования круглыми числами полностью следовали бы за линией геометрической кривой.

Спроектированная в левой нижней части рис. IV гипербола (разность расстояний от фокусов равна расстоянию между вершинами) — характерная синусоида, вписанная в треугольник с тупым углом, отклонение которой в масштабах бумаги определить невозможно, т. е. практически две кривые совпадают.

### 4. Тангенсоид и тангентоид с общими касательными

Инфлекссионная и находящаяся в бесконечности асимптотическая касательная точка тангенсоиды и тангентоида на рис. V совпадают. Существенное характерное отличие заключается в том, что тангенсоид пересекает ось  $X$ , а тангентоид только касается её. С первого взгляда этот рисунок, приведённый в целях сравнения, кажется имеет чисто теоретический интерес, но если речь идёт о разрешении вопроса планировки дорог или канала с направлением линии, когда по оси  $Y$  проходящая дорога косо пересекает канал, то правильную конвекцию русла даст планирование по тангентоиду.

### 5. Практические следствия

На рис. IV дано русло медленно текущего водотока, природное построение береговой линии которого принято, на высоком берегу необходимо

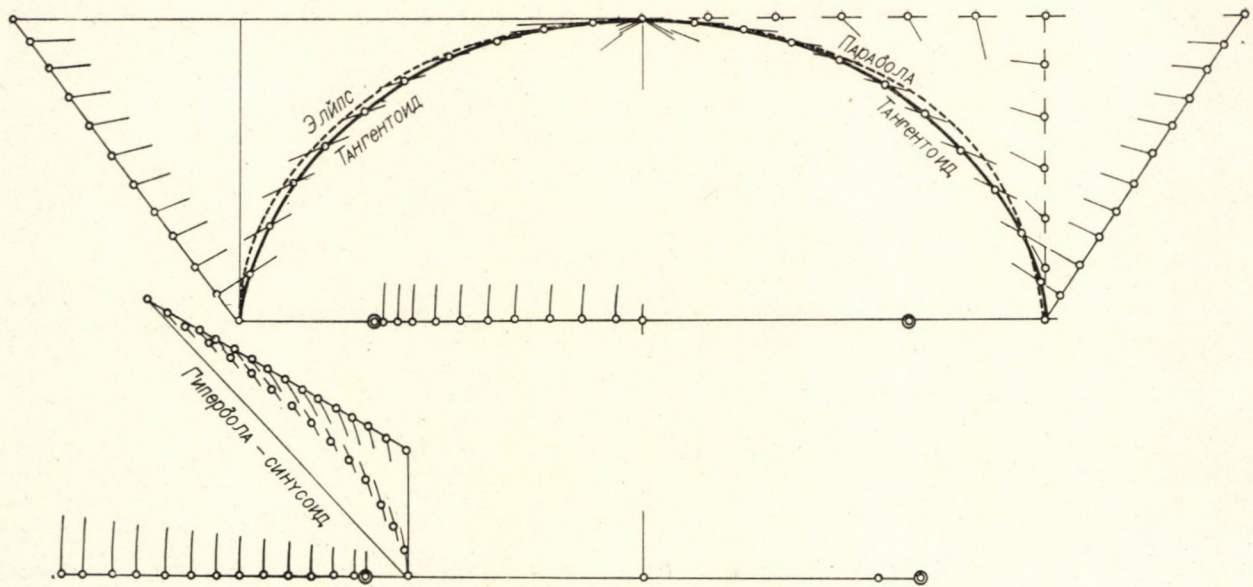


Рис. IV

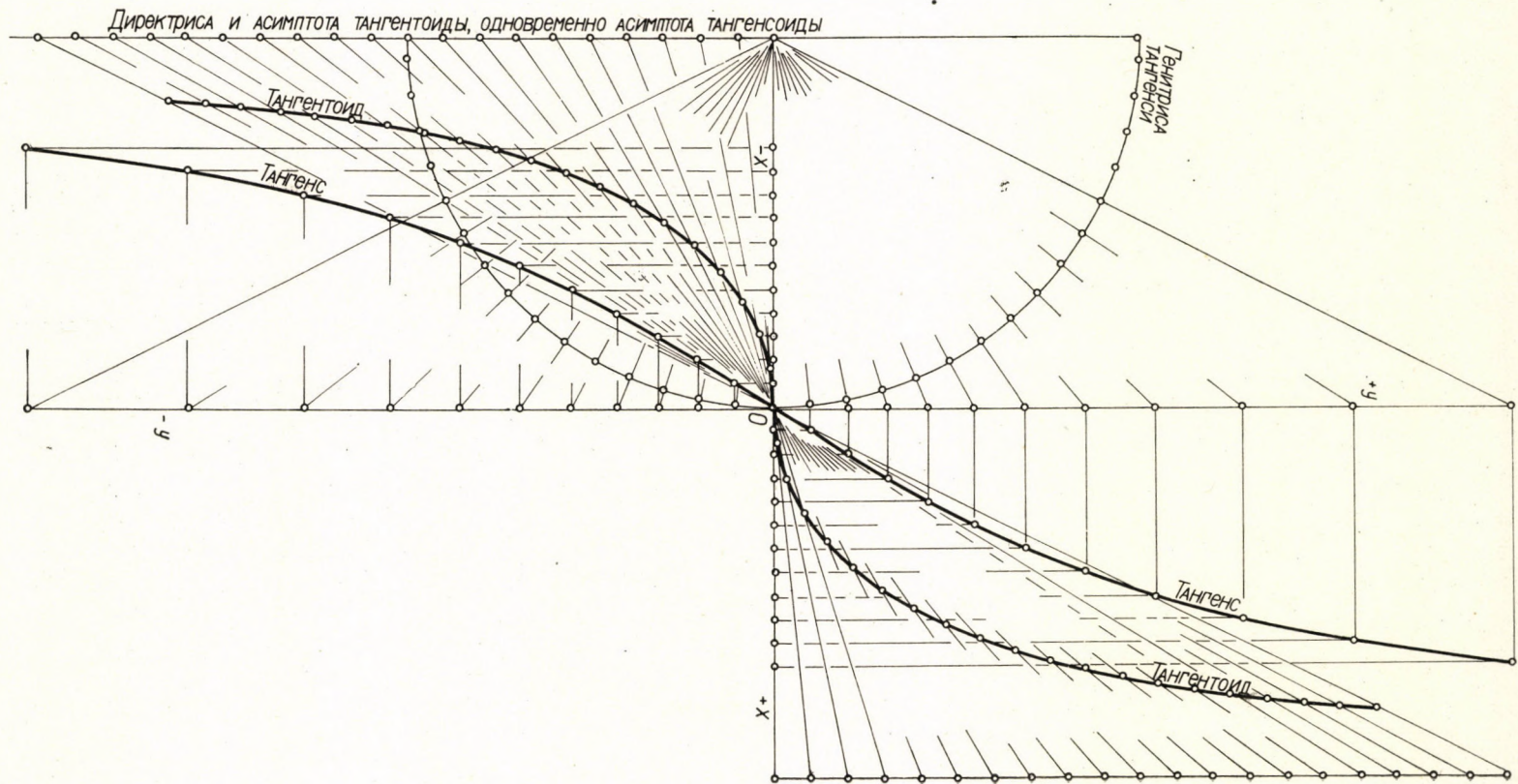


Рис. V

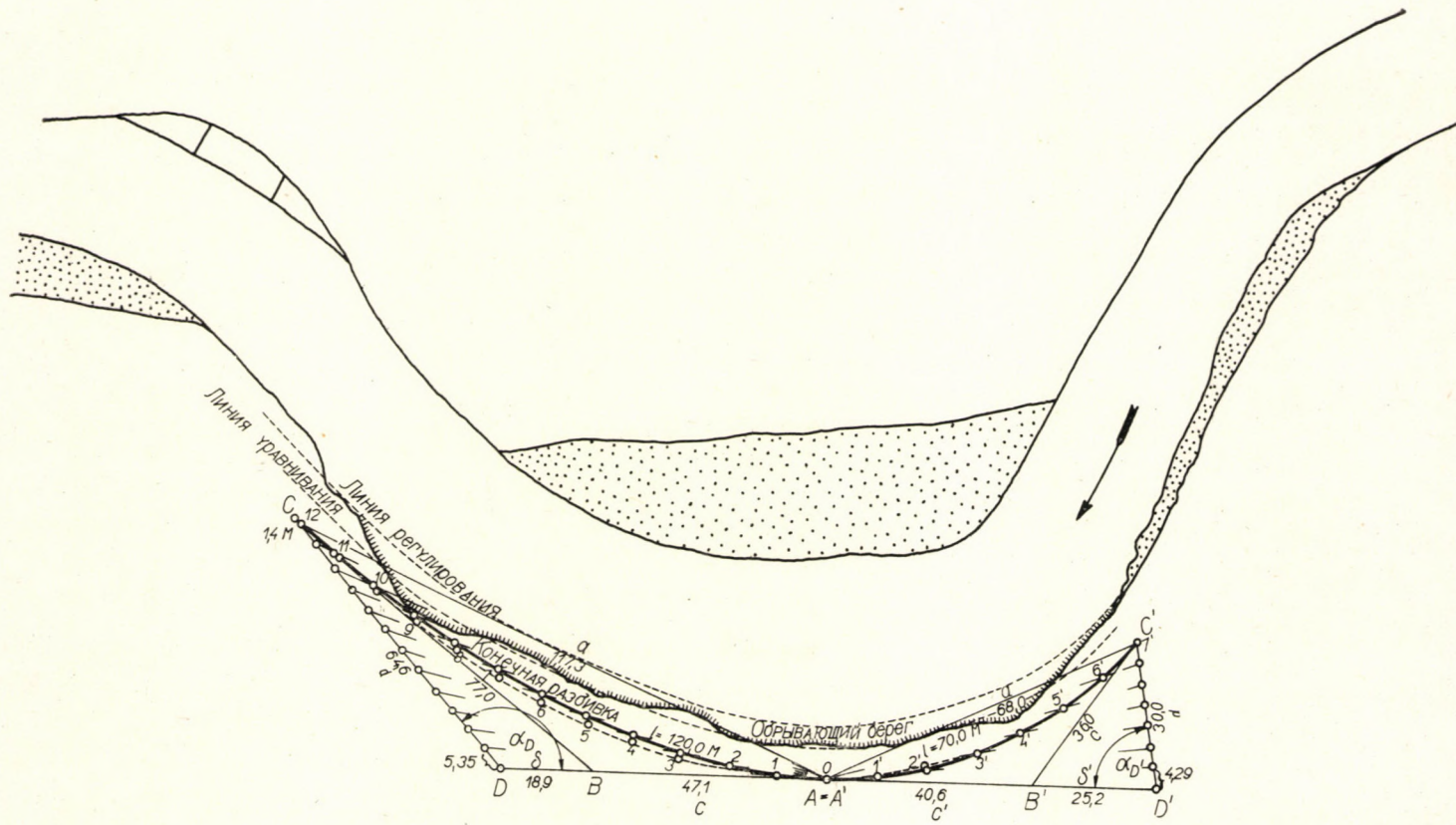


Рис. VI

зафиксировать линию берегового укрепления при помощи прямолинейной директрисы.

В виде подготовки линии регулирования на карте пунктиром чертится приближенная нивелированная линия. Около 4—5 м параллельно ей в русле проходит линия регулирования, которую из-за течения можно будет назначить с берега только во время стройки. На берегу примерно на расстоянии 4—5 м параллельно нивелированной линии через каждые 10 м наметим колами приблизительное место кривой, которая на рисунке также обозначена пунктиром.

Разобьем касательные к этим приближенным кривым так, чтобы касательные  $BA$  и  $A'B'$  совпали. Определим точки  $B$  и  $B'_1$  — точки пересечения касательных  $AB$ ,  $BC$  и касательных  $A'B'$  и  $B'C'$ . Смерим стороны треугольников  $ABC$ :  $AB = 47,1$  м  $BC = 77,0$  м  $AC = 117,5$  м в которых лежит приближенная кривая длиной 120 м и треугольник  $A'B'C'$ :  $A'B' = 40,6$ ,  $B'C' = 36,0$ ,  $A'C' = 68,0$  м с приближенной кривой длиной 70 м.

Точка  $D$  директрисы получается из расстояния  $DB$  по  $BD = \delta = \frac{c^2}{a} = \frac{47,2}{117,5} = 18,9$  м, и по  $B'D' = \delta' = \frac{40,6^2}{68,0} = 25,2$  м. После пометки кольшками точек  $D$  и  $D'$ , необходимо смерить расстояния  $CD$  и  $C'D'$ :  $d = 64,6$  м и  $d' = 30,0$  м. Разделив расстояние  $d = 64,6$  м и  $d' = 30,0$  м. Разделив расстояние  $d = 64,6$  м на 12, а  $d' = 30,0$  м на 7 равных частей, стационарная единица  $d$  будет  $S_0 = 5,35$  м, а стационарная единица  $d'$  будет  $S'_0 = 4,29$  м.

Планируемая по директрисе кривая  $AC = 120$  м длины передвинется в сторону воды, пройдет более коротким путем и ее точка  $C$  переместится на 1,4 м дальше. Из начальной приближенной линии только точка  $A$ , точка 1 и точка 2 останутся на месте.

С другой стороны, у кривой  $A'C'$  переместится только точка 2. Значит приближенная линия  $AC$  не вполне является синусоидой. Тангентоидный характер кривой  $A'C'$  более удачен, т. к. переместилась только ее точка 2. Характер кривых показывает также и углы между кривой и директрисой, т. к.  $\alpha_0 > 90$  определяет синусоидный, а  $\alpha_0 \leq 90$  тангентоидный характер.

Практическое значение планировки регулирования, проведенного на берегу, заключается и в том, что поперечные сечения строящегося берегозащитного укрепления без исключения перпендикулярны к оси укрепления.

Значит, не может иметь место случай, как при съемках с многоугольной линией, когда поперечные сечения перпендикулярны только к многоугольной линии, а ось укрепления, за исключением одного или двух случаев, пересекают под углом. Кроме этого, достаточно закрепить камнями вершины треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ , т. к. по ним всегда можно рассчитать место  $D$  и  $D'$ .

## Окончание

Функциональные отношения можно найти в предыдущей работе автора «Упрощенный метод разбивки спиральной волюты Фарга при регулировании горных рек».

Вышеописанный графический метод в случае рек Альфёльда (у которых динамическое влияние наводнения даже не приближается к горным рекам) не требует строгого определения даже точки  $A = A'$ . С другой стороны, важно, чтобы и в последнем случае из инфлекссионной точки до верхней точки соответственным переходом, характерным природе реки, достичь максимум кривизны, т. е. кривизну с наименьшим радиусом. Этим достигается обеспечение правильной планировки для строящегося берегового укрепления, достигается освобождение от кривой, затрудняющей проектирование, составленной из окружностей с разными радиусами, и на правильной регулировочной линии можно построить прочное береговое укрепление на долгие годы с наименьшими затратами.

## РЕЗЮМЕ

Четверть лемнискаты от её инфлекссионной точки до верхней точки переходит плавно и поэтому весьма подходит для разбивки поворотов медленно текущих равнинных рек. Точка соприкосновения с касательной делит четверть лемнискаты на две части. Часть лемнискаты, лежащую между инфлекссионной точкой и точкой соприкосновения, можно использовать в случае верхнего течения с большим углом наклона, но для этой цели более целесообразно пользоваться методом, разработанным автором и изложенным в связи с изгибами горных рек, т. е. при помощи прямой директрисы разбить синусоидальную кривую, которая позволит разбить и спиральную волюту Фарга. Лемниската, в свою очередь, лучше приспособлена к постоянным долинным рек. Прямая директриса и метод стационарирования округленными числами лемнискатоиды несколько отличаются от проектирования и разбивки уже упомянутой синусоиды, т. к. в данном случае в прямоугольном треугольнике гипотенуза и меньший катет являются касательными, а большая касательная служит хордой. На местности, соблюдая правильную береговую линию реки, спланировав и сделав разбивку, можно обеспечить прочную линию для береговых укреплений.

Сообщение распространяется на сравнение с геометрическими кривыми, на сравнения с тангенсоидой и подробно знакомит с графическим методом на местности.

DIE ROLLE DER LEMNISKATE BEI DER ABSTECKUNG  
DER KRÜMMUNGEN FÜR FLUSSREGULIERUNGEN

K. APOR

## ZUSAMMENFASSUNG

Das Viertel der Lemniskate zwischen dem Wendepunkt und dem Scheitel verläuft als Übergangskurve, und daher ist es gut geeignet für die Auslegung der Bögen von langsamen Flachlandflüssen. Der Berührungspunkt der zur Achse parallelen Tangente teilt auch diesen Viertelbogen in zwei Teile. Den Teil der Kurve vom Wendepunkt bis zu diesem Berührungspunkt kann man auch in den Oberläufen mit größerem Gefälle benützen, jedoch ist es zweckmäßiger, hierfür die vom Verfasser ausgearbeitete und für die Bögen von Gebirgsflüssen dargelegte Methode zu benützen: mit Hilfe einer geraden Leitlinie wird eine Sinuslinie abgesteckt,

welche auch die Absteckung der Spiralvolute von Fargue ermöglicht. Demgegenüber paßt sich die Lemniskate den Charakteristiken der Bögen im Flachland besser an. Die erwähnte Methode der geraden Leitlinie und der runden Anzahl von Stationierungen bei der Lemniskatoide weicht etwas von der erwähnten Konstruktion und Absteckung der Sinusoide ab, weil hier im rechtwinkligen Dreieck die Hypothenuse und die kürzere Kathete als Tangenten benützt werden und die längere Kathete die Rolle des Armes übernimmt. Wenn man dies im Gelände unter Beibehaltung der gesunden Uferlinie des Flusses konstruiert und absteckt, kann für die Ufersicherung eine dauerhafte Linie gesichert werden.

Die Arbeit behandelt auch den Vergleich mit den geometrischen Kurven und der Tangenskurve und behandelt ausführlich das graphische Verfahren an Ort und Stelle.

## THE ROLE OF THE LEMNISCATE IN LAYING OUT BENDS FOR RIVER REGULATIONS

K. APOR

### SUMMARY

The quarter of the lemniscate between the point of inflexion and the apex is a transition curve and therefore it is very suitable for laying out the bends of slow rivers in plains. The contact point of the tangent which is parallel to the axis, again divides this quarter of the curve into two parts. The part of the curve between the inflexion point and this contact point can be used also on the upper courses of rivers having larger falls, but the method worked out by the author, and discussed in connection with the bends of mountain rivers, is more suitable for this purpose. This method consists in laying out a sinusoid curve with the aid of a straight directrix, which permits also laying out of the Fargue spiral volute. On the other hand, the lemniscate better suits the constants of bends in plains. The method of the straight directrix and of a round number of stations for the lemniscate differs somewhat from the above mentioned construction and laying-out of the sinusoid, because here the hypotenuse and the smaller side of the right-angled triangle are used as tangents, while the larger side takes over the role of the arm. Constructing and laying out this in situ, retaining the sound river bank line, a durable line can be secured for the bank protection works.

The paper deals also with the comparison with geometric curves and the tangent curve and discusses in detail the graphical method in situ.

## LE RÔLE DE LA LEMNISCATE DANS LE JALONNEMENT DES COURBES DE RÉGULARISATION DES RIVIÈRES

K. APOR

### RÉSUMÉ

Le quart de la lemniscate s'étendant du point d'inflexion au sommet, passe par une transition, et par conséquent se prête bien au jalonnement des méandres des rivières de plaine au cours lent. Le point de contact de la tangente parallèle à son axe divise ce quart de courbe également en deux parties. Celle située entre le point d'inflexion et le point de contact, peut être aussi utilisée sur les sections de rivières à plus forte pente, mais dans ce cas, il est préférable d'employer la méthode élaborée par l'auteur et exposée à propos de la régularisation des courbes des rivières torrentielles, en traçant, à l'aide de la droite directrice, une courbe sinusoïde rendant aussi possible le tracé de la volute en spirale de Fargues. Par contre, la lemniscate se conforme mieux aux constantes des méandres dans les plaines. La méthode de la droite directrice et des points de stationnement à chiffres ronds de la lemniscatoïde diffère quelque peu du tracé et du jalonnement de la sinusoïde, car ici on emploie l'hypoténuse et le petit côté de l'angle droit dans le triangle rectangle en guise de tangentes, tandis que le grand côté de l'angle droit a pris le rôle du bras. En le traçant et en le jalonnant, tout en maintenant la partie saine du rivage, on peut assurer une ligne bien durable pour l'ouvrage de protection du rivage.

L'étude s'étend aussi à la comparaison avec les courbes géométriques et la courbe tangente, et fait connaître en détail le procédé graphique pouvant être utilisé sur place.



# CALCULATION OF THE EFFICIENCY OF MINE AIR REFRIGERATION IN DRY METAL MINES

Prof. T. BOLDIZSÁR  
D. ENG. SC.

DEPARTMENT II. FOR MINE MACHINERY, TECHNICAL UNIVERSITY MISKOLC, HUNGARY

[Manuscript received November 3, 1958]

In one of my previous papers [1] it was shown, that the exact solution of the differential equation of heat conduction could be used to compute the temperature rise of dry air in mine airways. It was shown, that the quantity of heat flowing from the rock to the airway, excluding all other effects, is

$$q = \lambda \cdot \tau \cdot F(\psi) \quad (1)$$

where  $\lambda$  is the coefficient of heat conductivity of the rock in kcal/m, h, °C,  $\tau$  is the difference in temperature between virgin rock and air in deg. C, and  $F(\psi)$  stands for the expression

$$F(\psi) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\psi\beta^2}}{J_0^2(\beta r) + Y_0^2(\beta r)} \frac{d\beta}{\beta} \quad (2)$$

where  $J_0$  and  $Y_0$  are Bessel functions,  $\beta$  is the variable of the integral and  $\psi = \frac{at}{R^2}$ ,  $a$  is the thermometric conductivity of the rock in m<sup>2</sup>/h,  $R$  is the radius of the airway in m,  $t$  is the time in hours during which the air has flown through the airway. There is no need for the mining engineer to compute with Bessel functions and integrals with infinite limits, as there are tables from which values of  $F(\psi)$  can easily be obtained [3].

It has been shown [1] that the temperature rise of the air passing through an airway of  $z$  meters length, can also be calculated, with the help of the following equations: For horizontal airways:

$$\tau = \tau_0 \exp \left( - \frac{\lambda \cdot F(\psi) \cdot z}{V \cdot C_p} \right) \quad (3)$$

For vertical shafts:

$$\tau = \left[ \tau_0 - \frac{V \cdot C_p}{\lambda \cdot F(\psi)} \left( \frac{1}{gg} - \frac{A\gamma}{C_p} \right) \right] \exp \left( - \frac{\gamma \cdot F(\psi) \cdot y}{V \cdot C_p} \right) + \frac{V \cdot C_p}{\lambda \cdot F(\psi)} \left( \frac{1}{gg} - \frac{A\gamma}{C_p} \right) \quad (4)$$

For inclined shafts:

$$\tau = \left[ \tau_0 - \frac{V \cdot C_p \cdot \sin \varepsilon}{\lambda \cdot F(\psi)} \left( \frac{1}{gg} - \frac{A\gamma}{C_p} \right) \right] \exp \left( - \frac{\lambda \cdot F(\psi) z}{V \cdot C_p} \right) + \frac{V \cdot C_p \cdot \sin \varepsilon}{\lambda \cdot F(\psi)} \left( \frac{1}{gg} - \frac{A\gamma}{C_p} \right) \quad (5)$$

where  $\tau$  is the temperature difference between virgin rock and air at the end of the airway cross section investigated in °C,  $\tau_0$  being the same at the beginning,  $y$  and  $z$  is the length of the airway in  $m$ ,  $V$  is the quantity of air in  $m^3/h$ ,

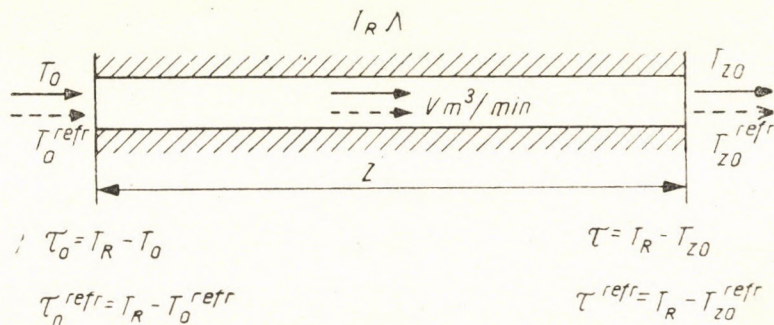


Fig. 1.

$C_p$  is the specific heat of air in  $\text{kcal/m}^3, ^\circ\text{C}$ ,  $\gamma$  is the specific weight of air in  $\text{kg/m}^3$ ,  $gg$  is the geothermal gradient in  $\text{m}/^\circ\text{C}$ ,  $A$  is the heat equivalent of mechanical work in  $\text{kcal/mkg}$ ,  $\varepsilon$  is the slope of the inclined airway in degrees. For shafts sunk from the surface  $\tau_0 = 0$ .

Examining the temperature rise of the refrigerated air in horizontal airways (Fig. 1), by means of Equation (3), we must keep in mind that the temperature of the air streaming into the drift will drop by  $\vartheta_0 = T_0 - T_0^{\text{refr}}$  under the effect of the refrigeration plant;  $T_0^{\text{refr}}$  denotes the temperature of the air at the moment of its leaving the refrigeration plant. The temperature drop of the air streaming along a horizontal drift  $z$  meters long, will be obtained by subtraction two sets of the Equation (3) substituting values with and without refrigeration

$$\tau = \tau_0 \exp \left( - \frac{\lambda \cdot F(\psi) z}{V \cdot C_p} \right)$$

$$\tau^{\text{refr}} = \tau_0^{\text{refr}} \exp \left( - \frac{\lambda \cdot F(\psi) z}{V \cdot C_p} \right)$$

$$\tau^{\text{refr}} - \tau = [\tau_0^{\text{refr}} - \tau_0] \exp \left( - \frac{\lambda \cdot F(\psi) z}{V \cdot C_p} \right)$$

and

$$T_{z0} - T_{z0}^{refr} = (T_0 - T^{refr}) \exp \left( - \frac{\lambda \cdot F(\psi) z}{V \cdot C_p} \right)$$

and using a simpler notation with  $\vartheta = T_{z0} - T_{z0}^{refr}$

$$\vartheta = \vartheta_0 \exp \left( - \frac{\lambda \cdot F(\psi) z}{V \cdot C_p} \right) \quad (6)$$

Fig. 2 illustrates the value of  $\vartheta$  for two values of  $R$  and  $V$  for three values of  $\vartheta_0$ , according to Equation (6) in a sandstone drift where  $z = 5000$  m, and

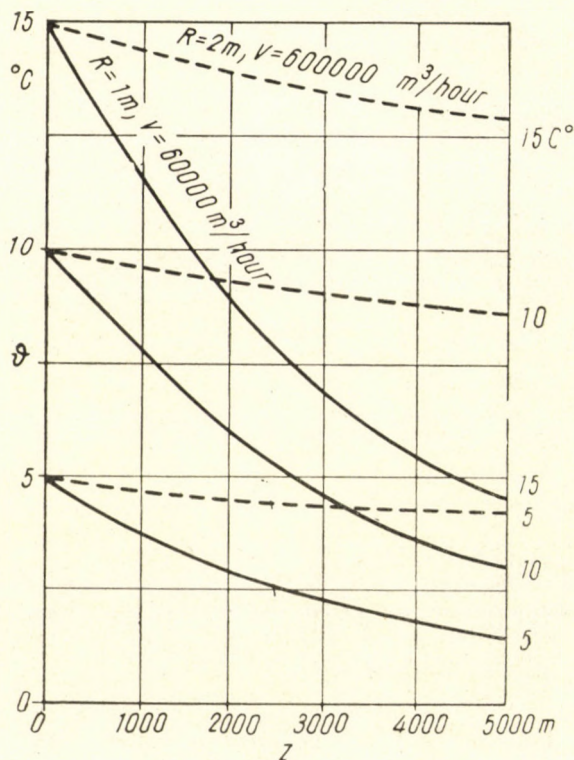


Fig. 2. The decrease of air temperature after  $10^4$  hours, caused by refrigeration plant (rock conductivity  $\lambda = 1,7$  kcal/m, h, °C, thermal diffusivity  $a = 2,8 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>/h)

$t = 10\,000$  hours. It can be seen that the effect of the initial cooling drops all along the length of the drift so that a considerable portion of the cooling calories have no effect any more near the working places.

Fig. 3 is based on the data of Fig. 2, and shows with  $T_k = 40$  °C virgin-rock temperature, the actual temperature of the air leaving a drift of  $z$  meters. The greater the cooling of the air, the greater is the rise in the air temperature of the drift. A good method to decrease temperature near the working

places in this case, is therefore not to aim at a greater degree of cooling to a rather low temperature, but to spend the cooling calories on a lesser cooling of a large quantity of air.

Since the cooling effect along the length of the airway decreases as an expo-

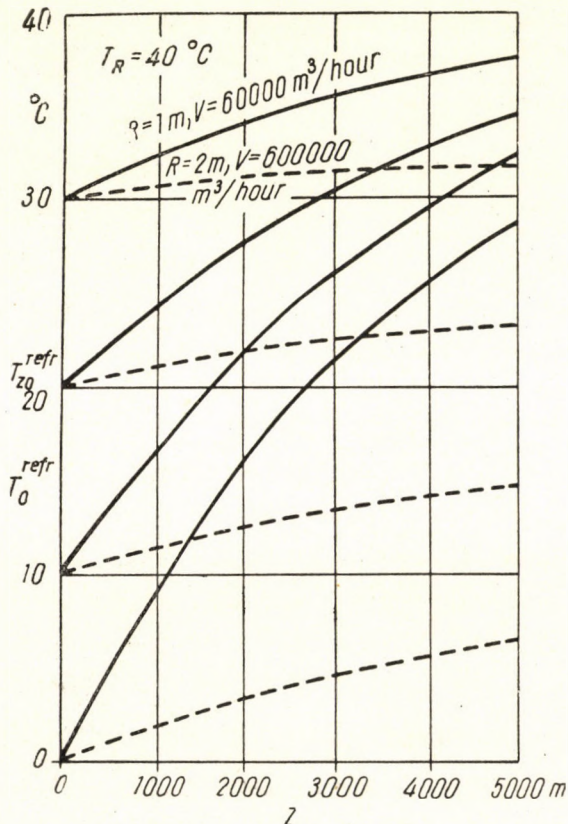


Fig. 3. Temperature of air flowing through drifts with the same data as in Fig. 1

ponential function, it seems — at first glance — advisable to erect the refrigeration plant near to the working places where the cooling is needed.

Examining cooling in a shaft by Equation (4) when the refrigeration plant is located on the surface. In this case  $\tau_0$  is not zero; but  $\tau_0 = \tau_0^{\text{refr}}$  i. e. the temperature drop of the intake air caused by refrigeration (Fig. 4). Then with the notations

$$\sigma = \frac{\lambda \cdot F(\psi)}{V \cdot C_p} \quad \text{and} \quad \delta = \left( \frac{1}{gg} - \frac{A\gamma}{C_p} \right)$$

$$\tau^{\text{refr}} = \left[ \tau_0^{\text{refr}} - \frac{\delta}{\sigma} \right] e^{-\sigma y} + \frac{\delta}{\sigma} \quad (7)$$

After regrouping the Equation

$$\tau^{refr} = \tau_0^{refr} e^{-\sigma y} + \frac{\delta}{\sigma} (1 - e^{-\sigma y}) \tag{7a}$$

The second part of the Equation (7)  $\frac{\delta}{\sigma} (1 - e^{-\sigma y})$  gives the value of  $\tau$  when no refrigeration is taking place (cf. Equation (4)). From this it becomes

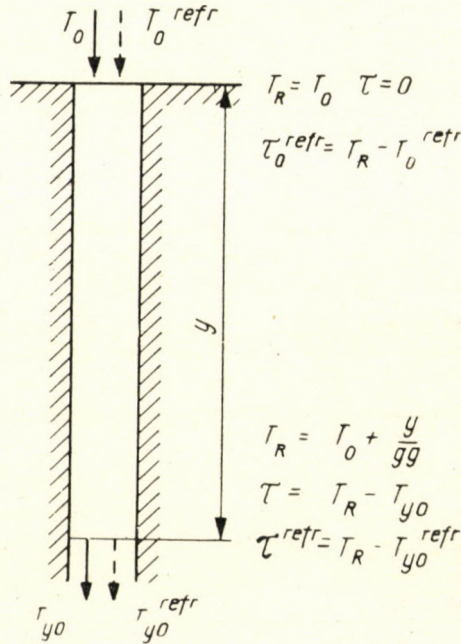


Fig. 4

obvious that the cooling produced by the refrigeration plant, i. e. the value of  $\vartheta$ , will be equal to the first part of the equation:

$$\vartheta = \tau^{refr} - \tau = \tau_0^{refr} e^{-\sigma y}$$

since  $\tau_0 = 0$  when no refrigeration takes place. With the previous notations

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\sigma y} \tag{8}$$

Equations (6) and (8) are identical, a fact which suggests that in vertical and in inclined shafts the efficiency of a refrigeration plant located on the surface with reference to the uncooled state can be computed in the same way as in hori-

*zontal airways*. Accordingly in a shaft  $y$  meters long and linked to a drift of  $z$  metres length, the drop of air temperature at the end of  $y + z$  length will be

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-\sigma(y+z)} \quad (9)$$

where  $\vartheta_0$  is the temperature drop of the air in the refrigeration plant.

The efficiency of artificial cooling in a drift may be ascertained, since it can be determined, how many refrigeration calories are needed for cooling the temperature of the incoming air and, further on, how much smaller the temperature rise of the air at the working place will be, as against the uncooled state. The former gives the intake of refrigeration calories, the latter multiplied by the specific heat of the air gives the value of the utilizable refrigeration calories, while the quotient of the useful and input calories will present the efficiency of artificial cooling of mine air. Since the quantity of air and its specific heat are the same all over the particular section of the drift examined, the proportion between the various values of the cooling can be expressed by temperature differences. According to Equations (6) and (8) artificial cooling reduces air temperature at the working place by  $\vartheta$  when the temperature of the air entering the refrigeration plant has been reduced by  $\vartheta_0$ . The efficiency defined by the above considerations is

$$\eta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = e^{-\sigma(y+z)} = \exp \left[ - \frac{\lambda \cdot F(\varphi)}{V \cdot C_p} (y + z) \right] \quad (10)$$

The expression of mine air cooling efficiency takes a form that seems to be relatively simple, yet actually it contains six independent variables such as  $\lambda$ ,  $a$ ,  $t$ ,  $R$ ,  $z$  and  $V$ . In addition to geometrical and thermal factors, the efficiency of cooling depends on the length of the airway and on the volume of air and the time of ventilation, but *it is not affected by depth and virgin rock temperature*.

Figs. 5 and 6 illustrate cooling efficiency in terms of drift length and time, in two practical instances. In Fig. 5 a relatively large volume of air is passing through a shaft and a drift, both of considerable cross sections. Up to a length of 3000 meters of the drift  $\eta_{refr} = 95$  per cent, when the period of ventilation was 1000 hours. This means, that 95 per cent of the cooling effect of a refrigerating plant set up at the surface will be utilized at the bottom of the shaft, and even in the main intake airway.

In the second instance the main air-current will be split into several branches in the mine. Fig. 6 shows the efficiency in the case of an air-current of 200 m<sup>3</sup>/min. streaming through a circular drift of 1 meter radius and 1000 meters length. After 10000 hours, i. e. in about 13 months, the value of  $\eta_{refr} = 22$  per cent, at the end of the drift. This practical example shows that *the cooling effect is slight in the branch currents of ventilation*.

As a further example, in a mine with a ventilation installation located centrally at the surface, the utilizable volume of air amounts to about 3400 m<sup>3</sup>/min. out of a total of 5000 m<sup>3</sup>/min. supplied by the ventilator; the loss of 30 per cent is due to short-circuiting. The main air current after passing the refrigeration plant and the downcast shaft of 1500 m, the main intake airway of also 1500 m length flows to the workings. The efficiency of refrigeration, as in the example in Fig. 5, is 95 per cent. The utilizable volume of air divides

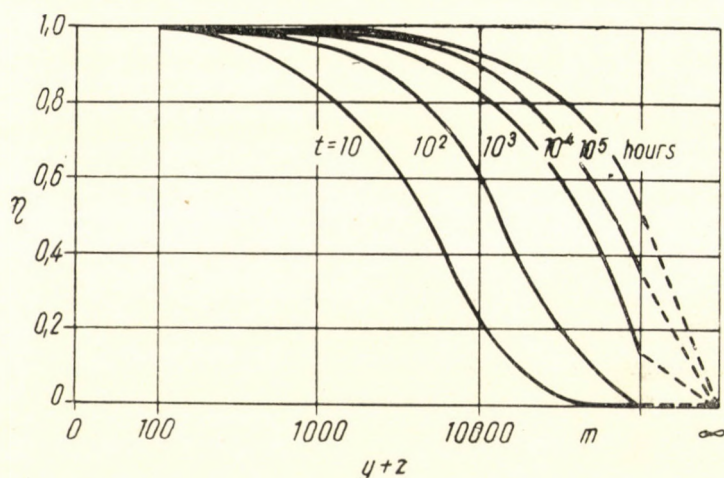


Fig. 5. The efficiency of mine air refrigeration on shafts and main airways ( $R = 3,3$  m,  $V = 5000$  m<sup>3</sup>/min,  $\lambda = 2,16$  kcal/m, h, °C,  $a = 4,1 \cdot 10^{-3}$  m<sup>3</sup>/h)

into 17 branches, each of 1000 meters length and 200 m<sup>3</sup>/min. air, with an efficiency of 22 per cent (see Fig. 6). The total efficiency of cooling

$$\eta_{\text{refr}} = 0,7 \cdot 0,95 \cdot 0,22 = 0,146$$

This numerical result under the above described circumstances has been confirmed by practical experiences concerning the inefficiency of central air cooling installations that are located on the surface.

The introduction of efficiency by Eq. (10) renders possible the prediction of air temperature and the design of efficient mine refrigeration plants by establishing the proper relation between the quantities which govern the process of temperature rise of mine air owing to rock heat. This concept may help to avoid mistakes owing to undue generalization of some practical observations concerning the effectivity of installed air cooling plants by applying the results to the design of air refrigeration in other mines. Thus, the results obtained in Figs. 2, 3, 5 and 6 of this paper, cannot be generalized. Even the central refrigeration plant located on the surface can be very efficient if certain principles are observed. Each practical problem has to be solved with their own data and the help of the Equation (10).

It must be borne in mind that the solution of the problem given in this paper is good only in such cases where other heat effect than of rock heat and refrigeration are excluded, or the effect of other heat sources do not practically influence the temperature distribution of the mine air. The considera-

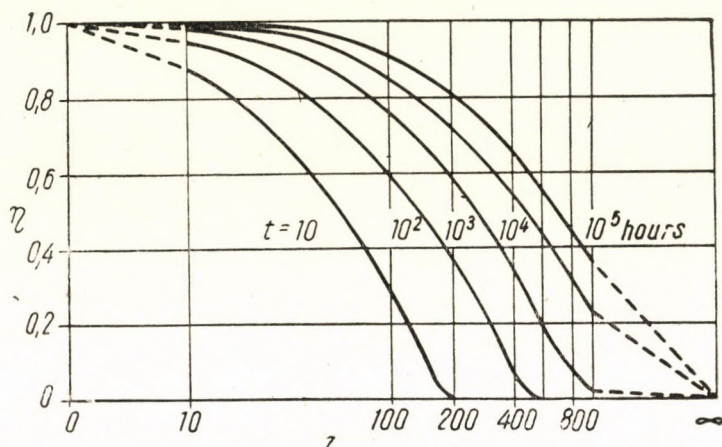


Fig. 6. The efficiency of mine air refrigeration in a roadway of 2 m diameter ( $V = 200 \text{ m}^3/\text{min}$ .  
 $\lambda = 2,16 \text{ kcal/m, h, } ^\circ\text{C}$ ,  $a = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$ )

tion of other heat sources including the effect of vaporization of moisture will later be investigated in another paper.

#### REFERENCES

1. BOLDIZSÁR, T.: The thermal field of the earth's crust and its influence on the ventilation of deep and hot mines. Acta Technica Acad. Sci. Hung. Tom. XVI. (1957) pp. 415—428.
2. BOLDIZSÁR, T.: Computation of air temperature in vertical shaft. Publications Fac. Mining and Geotechnics Sopron. Vol. XIX. (1956) pp. 89—92.
3. JAEGER, J. C., CLARKE, M.: Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A—61 (1942) pp. 229—230.

#### SUMMARY

An endeavour was made to define the efficiency of mine air refrigeration. This efficiency is independent of depth and virgin rock temperature and its value is the same for horizontal, vertical and inclined airways. The use of this concept enables the calculation of the possible effect of mine air refrigeration plant on the temperature of working places and helps to choose the suitable location of such plants.

#### BERECHNUNG DES WIRKUNGSGRADES DER KÜNSTLICHEN KÜHLUNG IN TROCKENEN ERZBERGWERKEN

T. BOLDIZSÁR

#### ZUSAMMENFASSUNG

Nach Definition des Wirkungsgrades der künstlichen Kühlung sowie Aufstellung des analytischen Ausdrucks hierfür kann festgestellt werden, daß der Wirkungsgrad von der Tiefe des Bergwerks und von der Temperatur des unberührten Gesteins unabhängig ist. Sein Wert



ist derselbe für waagrechte, senkrechte und schräge Wetterstollen. Die Benützung dieses Begriffs ermöglicht die Vorausberechnung der durch die Kühleinrichtung verwirklichbaren Wirkung und die Wahl des Platzes für diese Einrichtungen.

### CALCUL DU RENDEMENT DE LA RÉFRIGÉRATION DANS LES MINES DE MINÉRAIS SECS

T. BOLDIZSÁR

#### RÉSUMÉ

D'après la définition et l'expression analytique de la réfrigération artificielle, on peut établir que celle-ci est indépendante de la profondeur de la mine et de la température de la roche ferme. Sa valeur reste la même pour les galeries de conduite d'air horizontales, verticales ou inclinées. L'emploi de la notion exacte permet le calcul préalable du rendement que peuvent donner les installations de réfrigération, ainsi que le choix de leur emplacement le plus avantageux.

### РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСКУССТВЕННОГО ОХЛАЖДЕНИЯ НА СУХИХ РУДНИЧНЫХ ШАХТАХ

T. БОЛЬДИЖАР

#### РЕЗЮМЕ

После определения эффективности искусственного охлаждения и вывода его аналитического выражения можно установить, что эффективность является независимой от глубины шахты и температуры незатронутой породы. Величина ее идентична для горизонтальных, вертикальных и наклонных вентиляционных штолен. Использование этого понятия позволяет производить предварительный расчет эффекта, который может быть создан холодильными установками, далее выбрать место размещения холодильных установок.



# ÜBER EINE MÖGLICHE ABLEITUNG DER FALKSCHEN TRANSFORMATION

Á. BOSZNAY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST, LEHRSTUHL FÜR TECHNISCHE MECHANIK  
DER FAKULTÄT ELEKTROINGENIEURWESEN

[Eingegangen am 21. Januar 1959]

## Einleitung 1. Zielsetzung vorliegender Arbeit

Zur Zurückführung eines dämpfungsfreien Schwingungssystems mit endlich vielen Freiheitsgraden auf eine schlichte, nebenschlußfreie Schwingerkette mit den gleichen Eigenfrequenzen wurde in 1955 von S. FALK ein endliches Iterationsverfahren angegeben [1]. In seinem Aufsatz wurde die Ableitung der Grundformeln des Verfahrens nicht mitgeteilt, daher versuchte ich, dieselben abzuleiten [6]. FALK erwähnt in seiner Arbeit, daß sie einen abgekürzten Auszug seiner Doktor-Dissertation [7] darstellt. Aus diesem Grunde erschien es als möglich, die in [1] fehlende Ableitung in der ursprünglichen Dissertation aufzufinden; leider aber konnte [7] in den Budapester Bibliotheken nicht aufgefunden werden. Auf mein Ersuchen war jedoch Herr FALK so liebenswürdig, den Teil seiner ursprünglichen Dissertation, der die Ableitung seiner Formeln enthält, mir zukommen zu lassen. Auf Grund der ursprünglichen Arbeit konnte ich mich darüber überzeugen, daß sich meine Ableitung von der ursprünglichen Falkschen Ableitung unterscheidet. Vorliegende Arbeit hat zum Ziele, diese eigene Ableitung vorzuführen.

## 2. Über die Eigenschaften der Matrizen von schlichten nebenschlußfreien kettenartigen Schwingungssystemen

Zwei Varianten eines der einfachsten Schemata eines solchen Schwingungssystems — das wir in der Folge als ein Schwingungssystem vom Typ a) bezeichnen wollen — sind in Abb. 1 dargestellt. Es gilt folgendes Bewe-

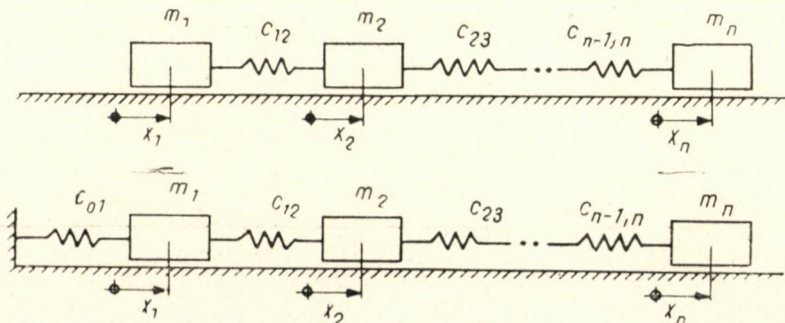


Abb. 1

gungsgleichungssystem (vorausgesetzt, daß alle Federn kraftfrei sind, wenn sämtliche  $x_i = 0$  sind, und daß die Ausschläge genügend klein sind):

$$m_1 \ddot{x}_1 = - \left( \frac{1}{c_{01}} + \frac{1}{c_{12}} \right) x_1 + \frac{1}{c_{12}} x_2$$

-----

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{1}{c_{k-1,k}} x_{k-1} - \left( \frac{1}{c_{k-1,k}} + \frac{1}{c_{k,k+1}} \right) x_k + \frac{1}{c_{k,k+1}} x_{k+1}$$

-----

$$m_n \ddot{x}_n = \frac{1}{c_{n-1,n}} x_{n-1} - \frac{1}{c_{n-1,n}} x_n.$$

Hier ist  $m_k > 0$  und  $c_{j,k} > 0$ .

In der oberen Variante der Abb. 1 ist  $\frac{1}{c_{01}} = 0$ .

Es ist beachtenswert, daß es bis 1933 die Auffassung herrschte, daß bei der Beschreibung der Torsionsschwingungen der Kurbelwelle von Verbrennungsmotoren dieses Modell bzw. dieses Differentialgleichungssystem angewendet werden muß. Die ersten zwei-drei Eigenfrequenzen und die zugehörigen Schwingungsformen wurden durch dieses Modell in der Tat in gehöriger Übereinstimmung mit der Erfahrung geliefert. GRAMMEL [2] wies darauf hin, daß im gegebenen Fall dieses Modell unbedingt falsche Resultate ergibt. Später wurde es gemeinsam mit KLOTTER und SANDEN [3] nachgewiesen, daß die Federn eines einwandfreien Modells in der Weise angeordnet werden müssen, daß zwei beliebige Massen des Modells auch unmittelbar mit Federn verbunden sind. Dies wird teilweise durch die Krümmung der Kurbelwelle, teilweise durch die statische Unbestimmtheit der Aufgabe, teilweise aber durch den Umstand bedingt, daß die Kurbelwellenzapfen nicht durch reine Momente, sondern durch Kräfte belastet werden. Durch die umfangreichen vergleichenden Berechnungen von KIMMEL [4] wurden die Aussagen von [3] auch numerisch bestätigt, wobei auch der Umstand bestätigt wurde, daß die ersten zwei-drei kleinsten Eigenfrequenzen und die zugehörigen Schwingungsbilder durch das Modell der Abb. 1 mit der erforderlichen Annäherung wiedergegeben werden, wenn die fragliche Schwingungsform in der zu den homogenen Teilen der Maschine gehörenden Sektion keinen Knotenpunkt besitzt.

Durch Einführung der folgenden Matrizen:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_a = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & m_k & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & m_n & & \end{bmatrix}$$

und

$$\bar{U}_a = - \begin{bmatrix} \overset{1)}{c_{01}} & \overset{2)}{c_{12}} & & & & & \\ -\left(\frac{1}{c_{01}} + \frac{1}{c_{12}}\right) & \frac{1}{c_{12}} & & & & & \\ & & \frac{1}{c_{k-1,k}} & & & & \\ & & & -\left(\frac{1}{c_{k-1,k}} + \frac{1}{c_{k,k+1}}\right) & & & \\ & & & & \frac{1}{c_{k,k+1}} & & \\ & & & & & & \frac{1}{c_{n-1,n}} - \frac{1}{c_{n-1,n}} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1) \\ k) \\ n) \end{matrix}$$

kann unser Bewegungsgleichungssystem in die folgende Form gebracht werden:

$$\bar{E}_a \cdot \ddot{\bar{x}} = - \bar{U}_a \cdot \bar{x}, \tag{1}$$

wobei die Multiplikation mit einer Matrix durch einen Punkt angedeutet wird. (In den obigen Matrizen bedeuten die leer gelassenen Stellen Nullelemente.)

Auf Grund eines Vergleiches mit der Bewegungsgleichung  $m\ddot{x} = -\frac{1}{c}x$  eines Systems mit einem Freiheitsgrad können wir  $\bar{E}_a$  als Massen-,  $\bar{U}_a$  als Federmatrix bezeichnen. Da die kinetische Energie des Systems durch die quadratische Form  $\frac{1}{2} \dot{\bar{x}}^* \cdot \bar{E} \cdot \dot{\bar{x}}$  (dabei wird die Operation der Transponierung durch einen Stern angedeutet) und die potentielle Energie des Systems durch die quadratische Form  $\frac{1}{2} \bar{x}^* \cdot \bar{U}_a \cdot \bar{x}$  dargestellt wird, so erscheint die Benennung von  $E_a$  als Matrix der kinetischen Energie, die von  $\bar{U}_a$  als Matrix der potentiellen Energie ebenfalls als gerechtfertigt.

Aus der oben ausführlich angegebenen Form von  $\bar{E}_a$  und  $\bar{U}_a$  kann abgelesen werden, daß  $\bar{E}_a$  eine lediglich positive Elemente enthaltende, positiv definite diagonale Matrix darstellt;  $\bar{U}_a$  stellt eine symmetrische kontinuierante Matrix dar (ein Schwingungssystem mit solcher Federmatrix wird als ein kettenartiges, nebenschlußfreies Schwingungssystem bezeichnet) mit lauter positiven Elementen in ihrer Hauptdiagonalen, überdies aber mit lauter negativen Elementen. Eine weitere charakteristische Eigenschaft von  $\bar{U}_a$  besteht darin, daß — mit Ausnahme der ersten Reihe und Kolonne, wenn  $\frac{1}{c_{01}} \neq 0$

ist — bei der Addition der Elemente einer beliebigen Reihe oder Kolonne Null erhalten wird. Ein kettenartiges, nebenschlußfreies Schwingungssystem mit einer solchen Federmatrix wird als schlicht bezeichnet.

Aber auch das Umgekehrte der im ersten Absatz erörterten Erkenntnis gilt in dem Sinne, daß die Matrix-Differentialgleichung  $\bar{E} \cdot \ddot{\bar{x}} = -\bar{U} \cdot \bar{x}$  eines Schwingungssystems nur dann *unmittelbar* als ein Differentialgleichungssystem eines Modells vom Typ a) gedeutet werden kann, wenn die entsprechenden Eigenschaften von  $\bar{E}$  bzw.  $\bar{U}$  mit den oben angeführten Eigenschaften von  $\bar{E}_a$  bzw.  $\bar{U}_a$  übereinstimmen. Die Zurückführung eines allgemeinen Schwingungssystems mit den Matrizen  $\bar{E}$  und  $\bar{U}$  auf ein Schwingungssystem vom Typ a) bedeutet somit soviel, daß wir es versuchen, das gegebene Schwingungssystem in eine gegenseitige und eindeutige Beziehung zu bringen mit einem Schwingungssystem (mit der gleichen Anzahl an Freiheitsgraden), dessen Massen- bzw. Federmatrizen über die eben erkannten Eigenschaften von  $\bar{E}_a$  bzw.  $\bar{U}_a$  verfügen.

### 3. Zurückführung eines allgemeinen Schwingungssystems auf ein kettenartiges, nebenschlußfreies Schwingungssystem

Die die Bewegung des zurückzuführenden Schwingungssystems beschreibende Matrix-Differentialgleichung sei von der Form:

$$\bar{E} \cdot \ddot{\bar{x}} = -\bar{U} \cdot \bar{x}. \quad (2)$$

$\bar{E}$  — als Matrix der kinetischen Energie — ist positiv definit, besitzt reelle Elemente und ist symmetrisch. Bei Voraussetzung von »kleinen« Schwingungen sind die Elemente von  $\bar{E}$  konstant, und wenn die rücklenkenden Kräfte von einem elastischen Körper (bzw. von elastischen Körpern) herrühren, und wenn die Koordinaten in der geeigneten Reihenfolge in der Kolonnenmatrix  $\bar{x}$  angeordnet werden, so besitzt auch  $\bar{U}$  konstante reelle Elemente und wird auf Grund der Maxwell'schen Sätze der Elastizitätslehre als eine symmetrische Matrix erhalten, mit lauter positiven Elementen in ihrer Hauptdiagonalen. Bezüglich des Vorzeichens der übrigen Elemente von  $\bar{U}$  ist eine derartige Gebundenheit nicht vorhanden.

Die folgende (aus zwei Absätzen bestehende) Überlegung läßt es vermuten, daß für die fragliche Zurückführung eine Möglichkeit besteht.

Es ist bekannt, daß einer Matrix-Differentialgleichung vom Typ  $\bar{B} \cdot \ddot{\bar{x}} = \bar{A} \cdot \bar{x}$  auf dem Wege des Auffindens einer Lösung von der Form  $\bar{x} = \bar{x}_0 \cdot e^{\lambda t}$  eine sogenannte Eigenwertaufgabe  $\lambda^2 \bar{B} \cdot \bar{x}_0 = \bar{A} \cdot \bar{x}_0$  zugeordnet werden kann. Sind nun  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  reelle symmetrische Matrizen mit konstanten Elementen, und ist  $\bar{B}$  positiv definit, so wird durch diese Eigenwertaufgabe — obschon nicht unbedingt eindeutig — ein orthonormiertes Eigenvektorsystem bestimmt,

das aus  $n$  voneinander linear unabhängigen Vektoren besteht. Wir wollen diese Vektoren mit  $\bar{x}_{01}, \dots, \bar{x}_{0n}$  bezeichnen. Es ist auch bekannt, daß wenn wir mit Hilfe der »Normalkoordinatenmatrix«  $(\bar{x}_{01}, \dots, \bar{x}_{0n}) = \bar{N}$  an Stelle von  $\bar{x}$  die »Normalkoordinaten«

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{bmatrix} = \bar{N}^{-1} \cdot \bar{x}$$

eingeführen, so können wir die ursprüngliche Differentialgleichung in der Form:  $\bar{B}_n \cdot \ddot{\bar{n}} = \bar{A}_n \cdot \bar{n}$  anschreiben. Hier ist  $\bar{B}_n = \bar{N}^* \cdot \bar{B} \cdot \bar{N}$  und  $\bar{A}_n = \bar{N}^* \cdot \bar{A} \cdot \bar{N}$ , wobei beide diagonale Matrizen darstellen. Anschaulich bedeutet dies soviel, daß das ursprüngliche, aus  $n$  Gleichungen bestehende skalare Differentialgleichungssystem in  $n$  voneinander unabhängige Differentialgleichungen zerfällt; die  $k$ -te Gleichung hat die Form:

$$n_k = \lambda_k^2 \cdot n_k.$$

$\lambda_k^2$  stellt den dem  $k$ -ten Eigenvektor zugehörenden Eigenwert, bzw. Eigenfrequenzquadrat dar.

Die in den Differentialgleichungen (1) und (2) vorkommenden Matrizen  $\bar{E}_a$  und  $\bar{E}$  genügen den im vorigen Absatz in Zusammenhang mit  $\bar{B}$  gemachten Annahmen, und  $\bar{U}_a$  und  $\bar{U}$  genügen den in Zusammenhang mit  $\bar{A}$  gemachten Annahmen. Wir könnten somit sowohl bei (1) wie auch bei (2) Normalkoordinaten einführen; durch Anschreiben beider Gleichungen in ihren eigenen Normalkoordinaten würden wir zwei, in einzelne Gleichungen zerfallene Differentialgleichungssysteme der gleichen Form erhalten. Letzten Endes kann somit das in die eigenen Normalkoordinaten transformierte Differentialgleichungssystem des allgemeinen Schwingungssystems *auch in der Weise gedeutet werden*, daß es in die eigenen Normalkoordinaten transformierte Differentialgleichungssystem eines Modells vom Typ a) darstellt. Obschon durch diese Deutung das allgemeine Schwingungssystem auf ein Schwingungssystem von Typ a) zurückgeführt werden kann, doch kann diese Zurückführung nur dann durchgeführt werden, wenn ein orthonormiertes Eigenvektorsystem der Aufgabe (2) bekannt ist, wozu aber die Eigenwerte der Aufgabe bekannt sein müssen. Soll somit die Zurückführung die Bestimmung der Eigenfrequenzen erleichtern, so bietet die obige Zurückführung keinen Vorteil; sie kann nicht einmal durchgeführt werden, da sie bereits die Kenntnis der Eigenfrequenzen voraussetzt. Nichtsdestoweniger wird es jedoch durch die obige Überlegung wahrscheinlich gemacht, daß das allgemeine Schwingungssystem mit einem System von Typ a) in eine gegenseitige und eindeutige Beziehung gebracht werden kann.

Die obige Überlegung trachtete das allgemeine Schwingungssystem mit einem System von Typ a) in der Weise in Beziehung zu bringen, daß die Differentialgleichungssysteme von *beiden* Systemen in die eigenen Normalkoordinaten transformiert wurden. Auf Grund dieses Gedankens erscheint es als wahrscheinlich, daß das Differentialgleichungssystem des allgemeinen Schwingungssystems *allein* in von den anschaulichen unterschiedlichen und von ihnen homogen linear abhängenden Koordinaten angeschrieben werden kann, in denen das Differentialgleichungssystem als das Differentialgleichungssystem eines Schwingungssystem von Typ a) gedeutet werden kann.

Wir wollen den gesuchten »neuen« Koordinatenvektor mit

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ bezeichnen.}$$

Nach unserer Annahme ist  $\bar{y} = \bar{T}^{-1} \cdot \bar{x}$ . Über die einstweilen unbekannte  $\bar{T}$  wollen wir voraussetzen, daß sie eine nicht singuläre quadratische Matrix mit konstanten Elementen darstellt.

Die potentielle Energie von (2) beträgt in den neuen Koordinaten:

$$U = \frac{1}{2} \bar{x}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{x} = \frac{1}{2} (\bar{T} \cdot \bar{y})^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{T} \cdot \bar{y} = \frac{1}{2} \bar{y}^* \cdot \bar{T}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{T} \cdot \bar{y},$$

und die kinetische Energie beträgt:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \dot{\bar{x}}^* \cdot \bar{E} \cdot \dot{\bar{x}} = \frac{1}{2} (\bar{T} \cdot \dot{\bar{y}})^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{T} \cdot \dot{\bar{y}} = \frac{1}{2} \dot{\bar{y}}^* \cdot \bar{T}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{T} \cdot \dot{\bar{y}},$$

das heißt, daß die mit  $\bar{U}_T$  zu bezeichnende neue Federmatrix  $\bar{U}_T = \bar{T}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{T}$ , und die mit  $\bar{E}_T$  zu bezeichnende neue Massenmatrix  $\bar{E}_T = \bar{T}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{T}$  ist. Von der bezüglich der Kolonnenmatrizes als partitioniert genommenen  $\bar{T} = [\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n]$  müssen wir nach Punkt 2 unserer Arbeit fordern, daß für die Elemente  $\bar{t}_i^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k = \bar{t}_k^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_i$  von  $\bar{U}_T$  und  $\bar{t}_i^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_k = \bar{t}_k^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_i$  von  $\bar{E}_T$  die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\bar{t}_i^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k = 0, \quad |i - k| > 1 \quad [\bar{U}_T \text{ sei kontinuierant}] \quad (3)$$

$$\bar{t}_i^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_k = 0, \quad i \neq k \quad [\bar{E}_T \text{ sei diagonal}] \quad (4)$$

$$\bar{t}_i^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_i > 0, \quad [\bar{U}_T \text{ enthalte in der Hauptdiagonalen positive Elemente}] \quad (5)$$

$$\bar{t}_i^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k < 0, \quad |i - k| = 1 \quad [\text{Die nicht verschwindenden Elemente von } \bar{U}_T \text{ außerhalb der Hauptdiagonalen seien negativ}] \quad (6)$$

$$\bar{t}_i^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_i > 0, \quad [\text{Die nicht verschwindenden Elemente von } \bar{E}_T \text{ seien positiv}] \quad (7)$$



Die Befriedigung der auf die Reihensummen bezüglichen Bedingung behandelt unsere Arbeit nicht. Von FALK [1] wird es abgeleitet, daß durch die den übrigen Bedingungen genügenden Matrizes  $\bar{E}_T$  und  $\bar{U}_T$ , nach einer mit einer äußerst einfach zu bestimmenden diagonalen Matrix  $\bar{S} = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$  vorgenommenen Kongruenz-Transformation, auch dieser letzteren Bedingung genügt wird. Die den gesamten Vorschriften genügenden Massen- und Feder-matrizes sind somit:  $\bar{S}^* \cdot \bar{E}_T \cdot \bar{S}$  und  $\bar{S}^* \cdot \bar{U}_T \cdot \bar{S}$ . Die  $s_i - s_k$  können dabei eben aus der Bedingung bestimmt werden, daß die Reihensummen von  $\bar{S}^* \cdot \bar{U}_T \cdot \bar{S}$  (vielleicht mit Ausnahme der ersten oder letzten Reihensumme) verschwinden müssen.

Auf Grund des vorangehenden ist die (bereits in der Einleitung vorliegen-der Arbeit erwähnte) bezüglich der Brauchbarkeit der Transformation bedeut-same Tatsache leicht einzusehen, daß die Eigenfrequenzen des durch die Trans-formation erhaltenen Schwingungssystems mit den Eigenfrequenzen des ur-sprünglichen Schwingungssystems übereinstimmen. Die charakteristische Gleichung des ursprünglichen Schwingungssystems lautet nämlich:

$|\lambda^2 \bar{E} + \bar{U}| = 0$  (durch die zwei vertikalen Linien wollen wir die Bildung einer Determinanten andeuten), während wir für das transformierte System, unter Verwendung eines bekannten Determinantensatzes, die folgende charak-teristische Gleichung erhalten:

$$\begin{aligned} |\lambda^2 \bar{S}^* \cdot \bar{T}^* \bar{E} \cdot \bar{T} \cdot \bar{S} + \bar{S}^* \cdot \bar{T}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{T} \cdot \bar{S}| &= |\bar{S}^* \cdot \bar{T}^* \cdot (\lambda^2 \bar{E} + \bar{U}) \cdot \bar{T} \cdot \bar{S}| = \\ &= |\bar{S}^* \cdot \bar{T}^*| \cdot |\bar{T} \cdot \bar{S}| \cdot |\lambda^2 \bar{E} + \bar{U}| = 0, \end{aligned}$$

das heißt, sie unterscheidet sich von der vorigen nur in einem  $\lambda$  nicht enthal-tenden konstanten Faktor; sie besitzen somit die gleichen Wurzeln.

Bei der Aufsuchung der den Bedingungen (3)–(7) genügenden Matrix  $\bar{T}$  wollen wir uns an das von LÁNCZOS konstruierte endliche Iterationsverfahren [5] anlehnen. Eine Zielsetzung dieses Verfahrens kann auch folgendermaßen for-muliert werden: die quadratische Form  $Q = \bar{\xi}^* \cdot \bar{Q} \cdot \bar{\xi}$  muß in einer solchen neuen Veränderlichen  $\bar{\eta} = \bar{K}^{-1} \cdot \bar{\xi}$  angeschrieben werden, daß die Matrix der quadratischen Form in dieser neuen Veränderlichen konstant sei.

Wir wollen voraussetzen, daß  $\bar{K}^{-1}$  nicht singulär ist. Der Ausdruck von  $Q$  mit  $\bar{\eta}$  lautet:

$$Q = \bar{\xi}^* \cdot \bar{Q} \cdot \bar{\xi} = (\bar{K} \cdot \bar{\eta})^* \cdot \bar{Q} \cdot \bar{K} \cdot \bar{\eta} = \bar{\eta}^* \bar{K}^* \cdot \bar{Q} \cdot \bar{K} \cdot \bar{\eta} = \bar{\eta}^* \cdot \bar{R} \cdot \bar{\eta},$$

wobei  $\bar{R} = \bar{K}^* \cdot \bar{Q} \cdot \bar{K}$  ist. Die Matrix von  $Q$  in der neuen Veränderlichen ist somit  $\bar{R}$ .

Die fragliche Zielsetzung des Verfahrens von LÁNCZOS kann somit kürzer formuliert werden: es wird  $\bar{K}$  gesucht, so daß  $\bar{R}$  konstant sei.

Zur Bestimmung von  $\bar{K} = [\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n]$  gibt [5] (mit einer anderen Bezeichnung) das folgende endliche Iterationsverfahren (rekursive Formelfolge) an.  $\bar{k}_1$  kann beliebig angenommen werden, wonach  $\bar{k}_2$  wie folgt berechnet werden kann:

$$\bar{k}_2 = \bar{Q} \cdot \bar{k}_1 + a_1 \cdot \bar{k}_1,$$

und nun folgen die übrigen:

$$\bar{k}_i = \bar{Q} \cdot \bar{k}_{i-1} + a_{i-1} \bar{k}_{i-1} + \beta_{i-2} \bar{k}_{i-2}, \quad i = 3, \dots, n. \quad (8)$$

Hier ist

$$a_1 = - \frac{\bar{k}_1^* \cdot \bar{Q} \cdot \bar{k}_1}{\bar{k}_1^* \cdot \bar{k}_1}; \quad \beta_{i-2} = - \frac{\bar{k}_{i-2}^* \cdot \bar{Q} \cdot \bar{k}_{i-1}}{\bar{k}_{i-2}^* \cdot \bar{k}_{i-2}}.$$

Unter unseren Bedingungen könnte durch dieses Verfahren nur der Bedingung (3) genügt werden (indem an Stelle von  $\bar{K}$   $\bar{T}$  und an Stelle von  $\bar{Q}$   $\bar{U}$  geschrieben werden würde). Es erscheint jedoch als möglich, dieses Verfahren in dem Maße zu verallgemeinern, daß neben (3) auch (4) genügt wird. Auf Grund von (8) wollen wir einen Versuch machen, die Methode in der folgenden Form zu verallgemeinern, indem an Stelle von  $\bar{k}_i$   $\bar{t}_i$ , an Stelle von  $\bar{Q}$   $\bar{U}$  geschrieben wird: es sei  $\bar{t}_1$  auch jetzt beliebig angenommen, und es sei vorausgesetzt, daß  $\bar{t}_2$  die folgende Struktur zukommt:

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_2 &= \bar{D} \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_1 + \gamma_1 \bar{t}_1, \\ \text{und } \bar{t}_i &\text{ habe die folgende Form:} \\ \bar{t}_i &= \bar{D} \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_{i-1} + \gamma_{i-1} \bar{t}_{i-1} + \varepsilon_{i-2} \bar{t}_{i-2}, \quad i = 3, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Matrix  $\bar{D}$  und die Skalare  $\gamma_i$ ,  $\varepsilon_i$  sind unbekannt, und wir wollen es versuchen, sie im nachstehenden derart zu bestimmen, daß durch dieselben (3) und (4) genügt werde.

Nach (4) muß  $\bar{t}_2^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1 = 0$  sein. Auf Grund von (9) können wir es ausführlich anschreiben:

$$(\bar{D} \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_1 + \gamma_1 \bar{t}_1)^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1 = \bar{t}_1^* \cdot \bar{U}^* \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1 + \gamma_1 \bar{t}_1^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1 = 0,$$

und da  $\bar{U}^* = \bar{U}$  ist, ergibt sich hieraus:

$$\gamma_1 = - \frac{\bar{t}_1^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1}{\bar{t}_1^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1}. \quad (10)$$

Rechnen wir in dem Ausdruck von  $\bar{t}_3$  nach (9), nach der Analogie von (10), versuchsweise mit dem Werte:

$$\gamma_2 = - \frac{\bar{t}_2^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2}{\bar{t}_2^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2}, \quad (11)$$

so lautet die zu befriedigende Gleichung  $\bar{t}_3^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1 = 0$  ausführlich angeschrieben:

$$\begin{aligned} & (\bar{D} \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_2 + \gamma_2 \bar{t}_2 + \varepsilon_1 \bar{t}_1)^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1 = \bar{t}_2^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1 - \\ & - \frac{\bar{t}_2^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2}{\bar{t}_2^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2} \cdot \bar{t}_2^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1 + \varepsilon_1 \bar{t}_1^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1 = 0. \end{aligned}$$

Das zweite Glied der rechten Seite verschwindet wegen  $\bar{t}_2^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1 = 0$ , so daß

$$\varepsilon_1 = - \frac{\bar{t}_2^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1}{\bar{t}_1^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1} \quad (12)$$

wird.

Der durch  $\bar{t}_3$  und  $\bar{t}_2$  nach (4) zu befriedigenden Gleichung  $\bar{t}_3^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2 = 0$  wird durch die bisher bestimmten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  bei jedem Wert von  $\bar{D}$  und  $\varepsilon_1$  genügt. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} & \bar{t}_3^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2 = (\bar{D} \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_2 + \gamma_2 \bar{t}_2 + \varepsilon_1 \bar{t}_1)^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2 = \\ & = \left( \bar{D} \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_2 - \frac{\bar{t}_2^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2}{\bar{t}_2^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2} \bar{t}_2 + \varepsilon_1 \bar{t}_1 \right)^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2 = \\ & = \bar{t}_2^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2 - \frac{\bar{t}_2^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2}{\bar{t}_2^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2} \bar{t}_2^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2 + \varepsilon_1 \bar{t}_1^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_2, \end{aligned}$$

wobei das erste und zweite Glied zusammen Null ergeben, und auch der Faktor von  $\varepsilon_1$  ist gleich Null.

Wird der auf Grund von (9) und (10) angeschriebene Ausdruck von  $\bar{t}_2$  mit  $\bar{t}_3^* \cdot \bar{D}^{-1}$  von links multipliziert, so erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\bar{t}_3^* \cdot \bar{D}^{-1} \cdot \bar{t}_2 = \bar{t}_3^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_1 - \frac{\bar{t}_1^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1}{\bar{t}_1^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1} \bar{t}_3^* \cdot \bar{D}^{-1} \cdot \bar{t}_1.$$

Das erste Glied der rechten Seite muß nach (3) verschwinden. Dies kann z. B. dadurch erreicht werden, daß die übrigen Glieder der Gleichung durch entsprechende Wahl der noch freien  $\bar{D}$  gleich Null gesetzt werden. Es muß gleich Null gesetzt werden  $\bar{t}_3^* \cdot \bar{D}^{-1} \cdot \bar{t}_2$  und (zweckmäßigerweise) auch  $\bar{t}_3^* \cdot \bar{D}^{-1} \cdot \bar{t}_1$ . Auf Grund des vorangehenden kann dies am einfachsten durch die Wahl

$\bar{D}^{-1} = \pm \bar{E}$  erreicht werden. Durch diese Wahl werden auch die Ausdrücke von  $\gamma_1, \gamma_2$  und  $\varepsilon_1$  glücklicherweise vereinfacht. Wie wir es später sehen werden (siehe Formel (17)), besteht (6) nur bei Wahl von  $\bar{D}^{-1} = -\bar{E}$ , weswegen wir in der Folge mit dieser Wahl rechnen werden.

Durch  $\bar{i}_1, \bar{i}_2$  und  $\bar{i}_3$  wird von nun an den Bedingungen (3) und (4) genügt. Auf Grund von (10), (11) und (12) läßt es sich erfolgreich an, die übrigen  $\varepsilon$  und  $\gamma$  in der folgenden Weise zu bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i &= -\frac{\bar{i}_i^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_i}{\bar{i}_i^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_i} = \frac{\bar{i}_i^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_i}{\bar{i}_i^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_i} \text{ und} \\ \varepsilon_i &= -\frac{\bar{i}_{i+1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{D}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_i}{\bar{i}_i^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_i} = \frac{\bar{i}_{i+1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_i}{\bar{i}_i^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_i} = \frac{\bar{i}_i^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_{i+1}}{\bar{i}_i^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_i} . \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Hier wurde in Betracht gezogen, daß an Hand von  $\bar{D} = -\bar{E}^{-1}$  und  $(\bar{E}^{-1})^* = \bar{E}^{-1}$   $\bar{D}^* = \bar{D}$  ist.

Die in Zusammenhang mit der transformierenden Matrix  $\bar{T}$  erhaltenen Ergebnisse und der versuchsweise Ansatz (13) werden wie folgt zusammengefaßt:

$\bar{i}_1$  kann beliebig angenommen werden,

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_2 &= -\bar{E}^{-1} \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_1 + \frac{\bar{i}_1^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_1}{\bar{i}_1^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_1} \bar{i}_1, \\ \bar{i}_i &= -\bar{E}^{-1} \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_{i-1} + \frac{\bar{i}_{i-1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_{i-1}}{\bar{i}_{i-1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_{i-1}} \bar{i}_{i-1} + \\ &\quad + \frac{\bar{i}_{i-2}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_{i-1}}{\bar{i}_{i-2}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_{i-2}} \bar{i}_{i-2}, \quad i=3, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Durch vollständige Induktion kann es nachgewiesen werden, daß die den versuchsweise Ansatz (13) enthaltenden Formeln (14) den Bedingungen (3) und (4) Genüge leisten. Es sei nämlich angenommen, daß die ersten  $k$  Vektoren  $\bar{i}$  auf Grund von (14) bereits bestimmt worden sind,  $k < n$ , und daß diese den Bedingungen (3) und (4) Genüge leisten. Der  $k+1$ -te Vektor  $\bar{i}$  ergibt sich dann zu

$$\bar{i}_{k+1} = -\bar{E}^{-1} \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_k + \frac{\bar{i}_k^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_k}{\bar{i}_k^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_k} \bar{i}_k + \frac{\bar{i}_{k-1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_k}{\bar{i}_{k-1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{i}_{k-1}} \bar{i}_{k-1} .$$

Wir wollen dies von links mit  $\bar{t}_j^* \cdot \bar{E}$  multiplizieren:

$$\begin{aligned} \bar{t}_j^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{k+1} = & -\bar{t}_j^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k + \frac{\bar{t}_k^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k}{\bar{t}_k^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_k} \bar{t}_j^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_k + \\ & + \frac{\bar{t}_{k-1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k}{\bar{t}_{k-1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{k-1}} \bar{t}_j^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{k-1} . \end{aligned} \tag{15}$$

Die Werte der auf der rechten Seite von (15) vorkommenden drei Glieder, die auf Grund der Grundannahme unseres Induktionsverfahrens berechnet wurden, sind für die Werte  $j = 1, 2, \dots, k - 2, k - 1, k$  in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt:

Glied 1.	Glied 2.	Glied 3.	$j$
0	0	0	1
0	0	0	2
0	0	0	⋮
0	0	0	⋮
0	0	0	$k-2$
$-\bar{t}_{k-1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k$	0	$\bar{t}_{k-1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k$	$k-1$
$-\bar{t}_k^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k$	$\bar{t}_k^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k$	0	$k$

Auf Grund der Tafel verschwindet  $\bar{t}_j^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{k+1}$  nach (15) für  $j = 1, 2, \dots, k$ , das heißt,  $\bar{t}_{k+1}$  befriedigt (4).  $\bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{k+1} \neq 0$ , da  $\bar{E}$  positiv definit ist, und da  $\bar{E}_T$  aus  $\bar{E}$  durch Kongruenz-Transformation abgeleitet wurde, muß auch  $\bar{E}_T$  positiv definit sein, und sie könnte es nicht sein, wenn auch nur ein einziges ihrer Elemente (in der Hauptdiagonalen) verschwinden würde. Somit wurde das Bestehen von (7) bewiesen.

Zur Untersuchung der Erfüllung von (3) wollen wir  $\bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_j$  bilden. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\begin{aligned} \bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_j = & -\bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_{j-1} + \frac{\bar{t}_{j-1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_{j-1}}{\bar{t}_{j-1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{j-1}} \bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{j-1} + \\ & + \frac{\bar{t}_{j-2}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_{j-1}}{\bar{t}_{j-2}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{j-2}} \bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{j-2} . \end{aligned} \tag{16}$$

Die nachstehende Tabelle enthält die Werte der linken Seite von (16) und die des zweiten und dritten Gliedes der rechten Seite, auf Grund der Grundannahme unseres Induktionsverfahrens und der mit Hilfe der vorigen Tabelle gewonnenen Ergebnisse, für die Werte von  $j - 1 = 1, 2, \dots, k - 1, k$ .

Linke Seite	Rechte Seite		$j-1$
	2. Glied	3. Glied	
0	0	0	1
0	0	0	2
0	0	0	⋮
0	0	0	$k-1$
$\bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{k+1}$	0	0	$k$

Auf Grund der Tafel ist nach (16)  $\bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_{j-1} = 0$  für  $j - 1 = 1, 2, \dots, k - 1$ . Durch  $\bar{t}_{k+1}$  wird somit auch (3) genügt. Damit wurde es nachgewiesen, daß die Formeln (14) den Bedingungen (3) und (4) Genüge leisten.

Nach der letzten Reihe derselben Tafel und nach (16) erhalten wir:

$$\bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{k+1} = -\bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k, \quad (17)$$

und da hier die linke Seite nach dem in Zusammenhang mit der Untersuchung von (15) Gesagten positiv ist, so besteht auch (6). (5) besteht hingegen nur dann für jeden  $i$ , wenn  $\bar{U}$  positiv definit oder positiv semidefinit ist. (In der Hauptdiagonalen einer positiv semidefiniten Matrix kann im allgemeinen auch ein Null-Element vorkommen, dann sind aber in der Reihe und Kolonne des Null-Elementes der Hauptdiagonalen alle übrigen Elemente ebenfalls gleich Null. In unserem Falle kann dies wegen der semidefiniten Beschaffenheit von  $\bar{U}$  nicht vorkommen, da wegen (17) in jeder Reihe und Kolonne von  $\bar{U}$  mindestens zwei nicht verschwindende Elemente vorkommen müssen.)

Die abgeleiteten und untersuchten Formeln (14) stimmen mit den in [1] mitgeteilten Formeln (15a) überein, wodurch unser Ziel erreicht wurde.

## SCHRIFTTUM

1. FALK, S.: Die Abbildung eines allgemeinen Schwingungssystems auf eine einfache Schwingerkette. Ing. Arch. XXIII. Band (1955), S. 314.
2. GRAMMEL, R.: Über die Torsion von Kurbelwellen. Ing. Arch. IV. Band (1933), S. 287.
3. GRAMMEL, R.—KLOTTER, K.—V. SANDEN, K.: Die elastischen Verformungen von Kurbelwellen bei Torsionsschwingungen. Ing. Arch. VII. Band (1936), S. 439.
4. KIMMEL, A.: Grundsätzliche Untersuchungen über die bei den Drehschwingungen von Kurbelwellen maßgebende Drehsteifigkeit. Ing. Arch. X. Band (1939), S. 196.
5. LÁNCZOS, C.: An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of linear Differential and Integral Operators, Proceeding of the second Symposium on Large Scale Digital Computing Machinery. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951. S. 164—206.
6. BOSZNYAY, Á.: Többszabadságfokú lengőrendszerek sajátkörfrekvencia és gerjesztett lengések meghatározásának egy módszeréről és annak gyakorlati alkalmazásáról. A Tudományos Minősítő Bizottság által elfogadott kandidátusi disszertáció. Bpest, 1956. Benyújtásra került: 1956. július 9-én. (Über eine Methode und deren praktische Verwendung der Bestimmung der Eigenkreisfrequenz und des erregten Schwingungsbildes eines Schwingungssystems mit mehreren Freiheitsgraden. Kandidatsdissertation. Bpest. 1956. Eingereicht am 9. Juli 1956.)
7. FALK, S.: Die Berechnung der Torsionseigenschwingungszahlen verzweigter Maschinenanlagen. Braunschweig, 1953.

## ZUSAMMENFASSUNG

In 1955 wurde von S. FALK ein Iterationsverfahren angegeben, mit Hilfe dessen ein gegebenes, dämpfungsloses Schwingungssystem mit endlich vielen Freiheitsgraden auf ein schlichtes, kettenartiges, nebenschlußfreies Schwingungssystem mit den gleichen Eigenfrequenzen zurückgeführt werden kann [1]. In der Arbeit von FALK wurde die Ableitung seiner Formeln nicht mitgeteilt. In der vorliegenden Arbeit wird das von C. LÁNCZOS entwickelte — ein anderes Ziel verfolgende — endliche Iterationsverfahren [5] in der Weise verallgemeinert, daß hierdurch die Grundformeln der Falkschen Zurückführung abgeleitet werden können.

## A POSSIBLE DEDUCTION OF THE FALK TRANSFORMATION

Á. BOSZNYAY

## SUMMARY

In 1955, S. FALK published a method of finite iteration for reducing an undamped oscillating system having a finite number of degrees of freedom to a smooth, chain-like, unshunted oscillating system having the same eigenfrequencies [1]. His paper did not contain the deduction of the basic formulae of the method. The present paper generalizes the finite iteration method of C. LÁNCZOS [5] — serving an other purpose — in such a way that it can be used also for deducing the basic formulae of the Falk reduction.

## UNE DÉDUCTION POSSIBLE DES TRANSFORMATIONS DE FALK

Á. BOSZNYAY

## RÉSUMÉ

S. FALK a présenté, en 1955, un procédé à itération à l'aide duquel un système oscillant sans amortissement et à degrés de liberté limités, peut être ramené à un système oscillant simple du type à chaîne sans shuntage, ayant la même fréquence naturelle [1]. L'ouvrage de Falk n'a pas donné la déduction des formules de base de ce procédé. Dans la présente étude, les procédés à itérations limitées [5], développés par C. LÁNCZOS dans un but différent, sont généralisés de façon telle, qu'on en peut déduire les formules de base auxquelles se ramènent les équations de Falk.

## ОДИН ВОЗМОЖНЫЙ ВАРИАНТ ВЫВОДА ТРАНСФОРМАЦИИ ФАЛЬКА

А. БОСНАИ

## РЕЗЮМЕ

В 1955 г. Ш. Фальк сообщил конечный итерационный метод для сведения недемпфируемой конечной колебательной системы со многими степенями свободы к простой цепеобразной колебательной системе без шунта, соответствующей первой и обладающей собственными частотами (1). Однако, автор в своей работе не сообщил вывод основных формул предложенного им метода. В данной работе дается такого рода обобщение построенного Ц. Ланцош конечного итерационного метода (5), — служащего для других целей, — что возможно на основе его вывести основные формулы сведения Фалька.



# ÜBER DIE ANWENDUNG DER FALKSCHEN TRANSFORMATION AUF BIEGESCHWINGUNGEN AUSFÜHRENDE SCHWINGUNGSSYSTEME

Á. BOSZNAY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST, LEHRSTUHL FÜR TECHNISCHE MECHANIK DER FAKULTÄT  
ELEKTROINGENIEURWESEN

[Eingegangen am 21. Januar 1959]

## 1. Einleitung. Zielsetzung vorliegender Arbeit

In 1955 wurde von S. FALK [1] eine Methode angegeben zur rechnerischen Bestimmung eines *schlichten, kettenartigen, nebenschlußfreien* Schwingungssystems, das mit einem gewissen allgemeinen Bedingungen genügenden, dämpfungsfreien Schwingungssystem mit endlich vielen Freiheitsgraden in eine gegenseitige und eindeutige Beziehung gebracht werden kann. Die Bedeutung seiner Methode, die auch als Transformation bezeichnet werden kann, liegt darin, daß die Eigenfrequenzen des schlichten, nebenschlußfreien kettenartigen Schwingungssystems und die Amplituden der erregten stationären Schwingungen viel leichter als die der mehr komplex aufgebauten Schwingungssysteme berechnet werden können. Der Umstand, daß die Eigenfrequenzen hinsichtlich der Transformation invariant sind, ist dabei als glücklich zu bezeichnen.

Vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, die Aufmerksamkeit auf eine in [1] ausgesprochen nicht erwähnte Anwendung der Transformation zu lenken, die besondere Vorteile verheißt.

## 2. Grundformeln der Falkschen Transformation

Die Bewegungsmatrixgleichung des zu untersuchenden allgemeinen Schwingungssystems mit  $n$  Freiheitsgraden sei von der Form:

$$\bar{E} \cdot \ddot{\bar{x}} = - \bar{U} \cdot \bar{x}. \quad (1)$$

$\bar{E}$  stellt die Matrix der kinetischen Energie dar; sie ist positiv definit, enthält konstante, reelle Elemente und ist symmetrisch.  $\bar{U}$  ist ebenfalls eine symmetrische Matrix mit konstanten reellen Elementen und mit lauter positiven Elementen in der Hauptdiagonalen.  $\bar{x}$  stellt eine aus den Koordinaten gebildete Kolonnenmatrix dar. Das Zeichen  $\cdot$  deutet eine Matrixmultiplikation, das Zeichen  $*$  Transponierung an.

Mit Hilfe der Falkschen Formeln können wir an Stelle von  $\bar{x}$ , durch die Transformation  $\bar{x} = \bar{T} \cdot \bar{S} \cdot \bar{z}$ , eine neue Koordinatenmatrix einführen, wobei die Transformation am zweckmäßigsten in zwei Stufen vorgenommen wird.  $\bar{T}$  und  $\bar{S}$  sind quadratische Matrizen mit konstanten Elementen,  $\bar{S}$  stellt eine diagonale Matrix dar. Werden beide Seiten der Gleichung [1] von links mit  $\bar{S}^* \cdot \bar{T}^*$  multipliziert, so erhält sie in  $\bar{z}$  die folgende Form:

$$\bar{S}^* \cdot \bar{T}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{T} \cdot \bar{S} \cdot \bar{z} = - \bar{S}^* \cdot \bar{T}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{T} \cdot \bar{S} \cdot \bar{z}. \quad (2)$$

$$\bar{S}^* \cdot \bar{T}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{T} \cdot \bar{S} = \bar{E}_a \quad \text{und} \quad \bar{S}^* \cdot \bar{T}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{T} \cdot \bar{S} = \bar{U}_a$$

stellen die Matrizen der kinetischen und potentiellen Energie des transformierten Schwingungssystems dar. Wenn  $\bar{T}$  und  $\bar{S}$  in der nachstehenden Weise

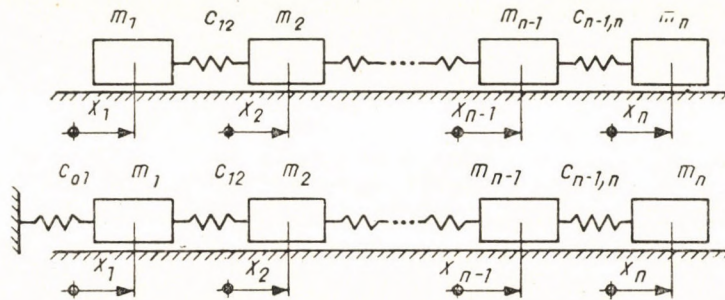


Abb. 1

bestimmt werden, und wenn die charakteristische Gleichung  $(\lambda^2 \bar{E} + \bar{U}) = 0$  von (1) nur einfache Wurzeln besitzt, so kann (2) als das Bewegungsgleichungssystem des in der Abb. 1 dargestellten schichtartigen, nebenschlußfreien, kettenartigen Schwingungssystems gedeutet werden.

$\bar{E}_a$  und  $\bar{U}_a$  können mit den Parametern des in Abb. 1. dargestellten Schwingungssystems wie folgt ausgedrückt werden:

$$\bar{E}_a = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & \\ & & m_k & & & & & \\ & & & \dots & & & & \\ & & & & & & & m_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{U}_a = - \begin{bmatrix} & \overset{1}{- \left( \frac{1}{c_{01}} + \frac{1}{c_{12}} \right)} & \overset{2}{\frac{1}{c_{12}}} & & & & & \\ & & & \overset{k-1}{\frac{1}{c_{k-1,k}}} & \overset{k}{- \left( \frac{1}{c_{k-1,k}} + \frac{1}{c_{k,k+1}} \right)} & \overset{k+1}{\frac{1}{c_{k,k+1}}} & & & \\ & & & & & & & & \overset{n-1}{\frac{1}{c_{n-1,n}}} & \overset{n}{\frac{1}{c_{n-1,n}}} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ \\ (k) \\ \\ (n) \end{matrix}$$

Dieses Schwingungssystem besitzt die gleichen Eigenfrequenzen wie das ursprüngliche, da sich die linke Seite der auf Null reduzierten charakteristischen Gleichung von (2) von der von (1) nur durch einen von  $\lambda$  unabhängigen Faktor unterscheidet. Die Schwingungsformen sind hingegen nicht invariant; einem Eigenvektor  $\bar{z}_0^{(i)}$  des transformierten Systems entspricht im ursprünglichen System der Eigenvektor  $\bar{x}_0^{(i)} = \bar{T} \cdot \bar{S} \cdot \bar{z}_0^{(i)}$ .

Der erste Schritt besteht darin, daß die auf die Kolonnenvektoren partitionierte Matrix  $\bar{T} = (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n)$  bestimmt wird. Nach FALK

kann  $\bar{t}_1$  beliebig angenommen werden,

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_2 &= -\bar{E}^{-1} \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_1 + \frac{\bar{t}_1^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_1}{\bar{t}_1^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_1}, \\
 \bar{t}_i &= -\bar{E}^{-1} \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_{i-1} + \frac{\bar{t}_{i-1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_{i-1}}{\bar{t}_{i-1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{i-1}} \bar{t}_{i-1} + \frac{\bar{t}_{i-2}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_{i-1}}{\bar{t}_{i-2}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{i-2}} \bar{t}_{i-2}, \\
 & \qquad \qquad \qquad i = 3, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Außerdem besteht noch die Gleichung:

$$\bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{E} \cdot \bar{t}_{k+1} = -\bar{t}_{k+1}^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{t}_k.
 \tag{4}$$

Im zweiten Schritt müssen die Elemente der Matrix

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & s_n \end{bmatrix}$$

in der Weise bestimmt werden, daß die Summe der Elemente in der  $n$ -ten,  $n - 1$ -ten,  $\dots$ , 2-ten Reihe von  $\bar{U}_a$  verschwindet. Das diese Bedingung ausdrückende Gleichungssystem kann in den  $s_i$  stets auf eine homogene lineare Form gebracht werden, mit dem Rang  $n - 1$ , so daß z. B.  $s_n$  beliebig angenommen werden kann, und da das Gleichungssystem stufenweise aufgebaut ist, können sämtliche Unbekannten, rückwärts fortschreitend, bestimmt werden. Zuletzt wird aus der zweiten Reihe des Gleichungssystems  $s_1$  erhalten. Die Summe der Elemente der ersten Reihe von  $\bar{U}_a$  ist somit nicht unbedingt gleich Null, vielmehr verschwindet diese Summe nur, wenn die charakteristische Gleichung des untersuchten Schwingungssystems eine Null-Wurzel besitzt. In dem von uns untersuchenden Fall ist Null keine Wurzel der charakteristischen Gleichung, und so ist die Summe der Elemente der ersten Reihe von  $\bar{U}_a$  von Null unbedingt unterschiedlich.

### 3. Transformation eines Biegeschwingungen ausführenden Schwingungssystems

In [1] wird ausdrücklich erwähnt, daß die Transformation (außer den sonstigen Anwendungsmöglichkeiten) an *all den Schwingungssystemen* durchgeführt werden kann, deren Matrizen  $\bar{E}$  und  $\bar{U}$  symmetrisch sind,  $\bar{E}$  positiv definit und  $\bar{U}$  positiv definit oder semidefinit ist. Die Beispiele von FALK sind jedoch nicht derart allgemein; sie schließen sich an Modelle an, die aus punktierten, in einer Geraden geführten Massen und dazwischen geschalteten masselosen Federn bestehen. So erstrecken sich die Beispiele von den am häufigsten vorkommenden praktischen Fällen lediglich auf die Torsionsschwingungen der Kurbelwellen. Aus diesem Grunde erscheint es als der Mühe wert, die Aufmerksamkeit in einem nicht minder wichtigen und ebenfalls häufig vorkommenden Fall auf die Anwendbarkeit der Transformation zu lenken. Es handelt sich um die Bestimmung der Eigenfrequenzen und kritischen Umdrehungszahlen der Biegeschwingungen von Rotoren (z. B. Rotoren von Turbogeneratoren oder Turbinen). Das in den natürlichen Koordinaten angeschriebene Bewegungsgleichungssystem des hier üblichen Modells kann nicht in der Weise gedeutet werden, daß es das Bewegungsgleichungssystem eines Modells darstellt, das aus punktierten Massen und den dazwischen geschalteten masselosen Federn besteht. Auch ist im allgemeinen kein einziges Element der Federmatrix des Modells gleich Null. Sollen somit außer den durch eine andere Methode [2] äußerst genau und in einfacher Weise zu bestimmenden höchsten und niedrigsten Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen oder den kritischen Umdrehungszahlen mehrere, gegebenenfalls sämtliche Eigenfrequenzen oder Umdrehungszahlen bestimmt werden, so erscheint es als zweckdienlich, die vorherige (FALKsche) Transformation des Schwingungssystems und anschließend die Bestimmung der (mit den des ursprünglichen Systems übereinstimmenden) Eigenfrequenzen des transformierten Systems durchzuführen. Hierdurch werden wesentlich schneller und mit weniger Fehlermöglichkeit Resultate erzielt als mit der das ursprüngliche System unmittelbar behandelnden Methode, da sich die Bestimmung der Eigenfrequenzen des schlichten, kettenartigen, nebenschlußfreien Systems im allgemeinen wesentlich einfacher gestaltet. Besondere Vorteile verspricht diese Methode, wenn die Eigenfrequenzen des transformierten Systems nach einer von mir erprobten Methode [3] schneller als mit Hilfe der bisher bekannten Verfahren bestimmt werden.

Im nachstehenden wollen wir diese Methode an Hand eines zahlenmäßigen Beispiels zur Bestimmung der Biegeschwingungseigenfrequenzen eines Dreischiebenrotors vorführen. Der Einfachheit halber werden in unserem Beispiel die Scheiben als Massenpunkte modelliert. Wie es aber aus dem vorangehenden hervorgeht, würde es keine Schwierigkeiten bereiten, die durch die Schiefstellung der Scheiben hervorgerufene Wirkung mit in Betracht zu ziehen. Das Beispiel wurde aus [4] genommen. In [4] werden die Eigenfrequenzen

durch Anschreiben und Lösung der charakteristischen Gleichung bestimmt. Das Modell des Beispiels wurde in Abb. 2 dargestellt. Die Matrizen der kine-

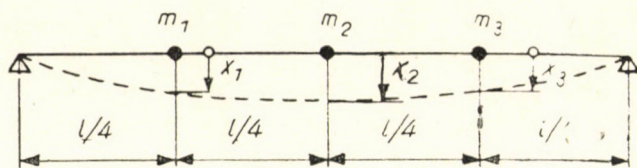


Abb. 2

tischen und der potentiellen Energien in natürlichen Koordinaten lauten nach [4]:

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \frac{1kp}{g} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}; \quad g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$\bar{U} = \frac{1}{28\beta} \begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 \\ -22 & 32 & -22 \\ 9 & -22 & 23 \end{bmatrix}; \quad \beta = \frac{l^3}{768 EI} \text{ cm kp}^{-1}.$$

Hoffentlich wird es kein Mißverständnis verursachen, daß hier  $E$  den Elastizitätsmodul des Stabmaterials und  $I$  das auf die Biegungsachse berechnete Trägheitsmoment des als konstant betrachteten Kreisquerschnittes des Stabes darstellt.

Die Berechnung wird zweckdienlicherweise mit den dimensionslosen Matrizen

$$\bar{E}^0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ und } \bar{U}^0 = \begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 \\ -22 & 32 & -22 \\ 9 & -22 & 23 \end{bmatrix}$$

durchgeführt. Die zu diesen Matrizen gehörenden dimensionslosen Eigenkreisfrequenzen  $\alpha_i^0$  hängen mit den Werten  $\alpha_i$  des ursprünglichen Modells in folgender Weise zusammen:

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^0}{\sqrt{\frac{1}{g} 28\beta}}.$$

Als Ausgangspunkt wollen wir  $\bar{i}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  wählen und wir erhalten:

$$\bar{i}_1^* \cdot \bar{E}^0 \cdot \bar{i}_1 = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 10,$$

$$\bar{i}_1^* \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{i}_1 = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 23 & -22 & 9 \\ -22 & 32 & -22 \\ 9 & -22 & 23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 23,$$

$$\bar{E}^{0-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/21 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}^{0-1} \bar{U}^0 = \begin{bmatrix} 23/10 & -22/10 & 9/10 \\ -22/21 & 32/21 & -22/21 \\ 9/10 & -22/10 & 23/10 \end{bmatrix},$$

$$\bar{i}_2 = -\bar{E}^{0-1} \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{i}_1 + \frac{\bar{i}_1^* \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{i}_1}{\bar{i}_1^* \cdot \bar{E}^0 \cdot \bar{i}_1} \bar{i}_1 = \begin{bmatrix} -23/10 \\ 22/21 \\ -9/10 \end{bmatrix} + \frac{23}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22/21 \\ -9/10 \end{bmatrix},$$

$$\bar{i}_2^* \cdot \bar{E}^0 \cdot \bar{i}_2 = [0 \ 22/21 \ -9/10] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 22 \\ -9 \end{bmatrix} = 31,14,$$

$$\bar{i}_1^* \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{i}_2 = -\bar{i}_2^* \cdot \bar{E}^0 \bar{i}_2 = -31,14,$$

$$\bar{i}_2^* \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{i}_2 = [0 \ 22/21 \ -9/10] \cdot \begin{bmatrix} -31,14 \\ 53,32 \\ -43,74 \end{bmatrix} = 95,22,$$

$$\bar{i}_3 = -\bar{E}^{0-1} \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{i}_2 + \frac{\bar{i}_2^* \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{i}_2}{\bar{i}_2^* \cdot \bar{E}^0 \cdot \bar{i}_2} \bar{i}_2 + \frac{\bar{i}_1^* \cdot \bar{U} \cdot \bar{i}_2}{\bar{i}_1^* \cdot \bar{E}^0 \cdot \bar{i}_1} \bar{i}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 3,114 \\ -2,540 \\ 4,370 \end{bmatrix} + \frac{95,22}{31,14} \begin{bmatrix} 0 \\ 22/21 \\ -9/10 \end{bmatrix} - \frac{31,14}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,67 \\ 1,62 \end{bmatrix},$$

$$\bar{i}_3^* \cdot \bar{E}^0 \cdot \bar{i}_3 = [0 \ 0,67 \ 1,62] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 14,08 \\ 16,20 \end{bmatrix} = 35,5,$$

$$\bar{i}_3^* \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{i}_2 = [0 \ 0,67 \ 1,62] \cdot \begin{bmatrix} -31,14 \\ 53,32 \\ -43,74 \end{bmatrix} = -35,5,$$

$$\bar{i}_3^* \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{i}_3 = [0 \ 0,67 \ 1,62] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 18,55 \\ 22,49 \end{bmatrix} = 48,7,$$

$$\bar{T}^* \cdot \bar{E}^0 \cdot \bar{T} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 31,14 & 0 \\ 0 & 0 & 35,5 \end{bmatrix}, \quad \bar{T}^* \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{T} = \begin{bmatrix} 23 & -31,14 & 0 \\ -31,14 & 95,22 & -35,5 \\ 0 & -35,5 & 48,7 \end{bmatrix}.$$

Nun wird die erste Gleichung des zur Bestimmung der Elemente der Matrix

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$$

dienenden Gleichungssystems durch  $s_1$ , die zweite durch  $s_2$ , usw. vereinfacht, und so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 23s_1 - 31,14s_2 &= 0, \\ -31,14s_1 + 95,22s_2 - 35,5s_3 &= 0, \\ -35,5s_2 + 48,7s_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist zweiten Ranges, und so können wir von den Unbekannten eine im voraus annehmen. Wird  $s_3 = 1$  angenommen, so ergibt sich  $s_2 = 1,375$  und  $s_1 = 3,065$ . Die endgültigen Massen- und Federmatrizen gestalten sich somit folgendermaßen:

$$\bar{S}^* \cdot \bar{T}^* \cdot \bar{E}^0 \cdot \bar{T} \cdot \bar{S} = \begin{bmatrix} 94,0 & 0 & 0 \\ 0 & 58,6 & 0 \\ 0 & 0 & 35,5 \end{bmatrix}$$

und

$$\bar{S}^* \cdot \bar{T}^* \cdot \bar{U}^0 \cdot \bar{T} \cdot \bar{S} = \begin{bmatrix} 216 & -131 & 0 \\ -131 & 179,8 & -48,8 \\ 0 & -48,8 & 48,8 \end{bmatrix}.$$

Durch einen Vergleich dieser Matrizen mit den Matrizen  $\bar{E}_a$  und  $\bar{U}_a$  unter Punkt 2 wurden die Maßzahlen der Federkonstanten und Massen des transformierten »dimensionslosen« Modells bestimmt. Das gewonnene Modell und die entsprechenden Maßzahlen wurden in Abb. 3 dargestellt. Die Eigen-

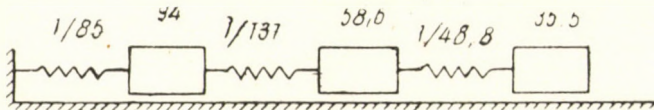


Abb. 3

kreisfrequenzen wurden durch eine graphische Abwandlung der in [3] vorgeschlagenen Methode bestimmt und dabei gefunden, daß dieselben von den in [4] angegebenen genauen Werten, wegen der Ungenauigkeiten der Berechnung und der Konstruktion, in der Reihenfolge der zunehmenden Kreisfrequenzen nur um +0,8, -1,7 und -0,62% abweichen.

## SCHRIFTTUM

1. FALK, S.: Die Abbildung eines allgemeinen Schwingungssystems auf eine einfache Schwingerkette. Ing. Arch. XXIII, Band. 1955. S. 314.
  2. BIEZENO-GRAMMEL: Technische Dynamik. 2. Auflage, Springer, Berlin, 1953. S. 205—209.
  3. BOSZNAY, Á.: Többszabadságfokú lengőrendszerek sajátkörfrekvencia és gerjesztett lengés-kép meghatározásának egy módszeréről és annak gyakorlati alkalmazásáról. Kandidátusi disszertáció, Bpest, 1956. Benyújtásra került: 1956. július 9-én. (Über eine Methode und deren praktische Verwendung zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen und des angeregten Schwingungsbildes von Schwingungssystemen mit mehreren Freiheitsgraden. Kandidatsdissertation, Bpest, 1956. Eingereicht am 9. Juli 1956.)
- BOSZNAY, Á.: Eine Methode der zahlenmäßigen Bestimmung der Eigenwerte (z. B. Eigenfrequenzen) und der Eigenvektoren (z. B. Schwingungsformen) mit besonderer Rücksicht auf die technischen Eigenwertaufgaben. Periodica Polytechnica. 1959. Vol. 3. No. 3. S. 205—221.
4. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949. S. 259.

## ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegende Arbeit lenkt an Hand eines zahlenmäßigen Beispiels die Aufmerksamkeit auf die Anwendung der von FALK mitgeteilten Transformationsformeln [1], die bei der Bestimmung der Eigenfrequenzen und der kritischen Umdrehungszahlen eines Biegeschwingungen ausführenden Schwingungssystems besondere Vorteile bietet. Gleichzeitig wird es vorgeschlagen, das vom Autor bereits früher entwickelte Verfahren zur Ermittlung der Eigenfrequenzen [3], zur Lösung des Problems, mit der Falkschen Transformation zu vereinigen.

## APPLICATION OF THE FALK TRANSFORMATION TO AN OSCILLATING SYSTEM CARRYING OUT FLEXURAL OSCILLATION

Á. BOSZNAY

## SUMMARY

With the aid of a numerical example, the paper attracts the attention to the advantages of using the transformation formulae published by FALK [1] for computing the eigenfrequencies and the critical rotational speeds of an oscillating system capable of flexural oscillations. At the same time, the author proposes connecting with the FALK transformation, for solving the problem, a method elaborated by him earlier for determining the eigenfrequencies [3].

## L'UTILISATION DES TRANSFORMATIONS DE FALK POUR LES SYSTÈMES D'OSCILLATIONS DUES À DES VIBRATIONS DE FLEXION

Á. BOSZNAY

## RÉSUMÉ

A l'aide d'un exemple numérique, l'étude attire l'attention sur l'avantage de l'utilisation des formules de transformation de FALK [1], dans la détermination de la fréquence naturelle et du nombre de tours critique d'un système d'oscillations dû à des vibrations de flexion. Elle propose en même temps que le procédé de détermination de la fréquence naturelle élaborée par l'auteur [3] soit combiné avec la transformation de FALK en vue de la solution du problème.



ПРИМЕНЕНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ ФАЛЬКА К КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ,  
ВЫПОЛНЯЮЩЕЙ ИЗГИБАТЕЛЬНОЕ КОЛЕБАНИЕ

А. БОСНАИ

## РЕЗЮМЕ

В работе при помощи числового примера обращается внимание читателей на преимущества применения трансформационных формул [1], сообщенных Фальком, для определения собственной частоты, соответственно, критического числа оборотов колебательной системы, способной выполнять изгибательные колебания. Одновременно предлагается объединение трансформации Фалька и собственного метода автора [3], служащего для определения собственной частоты и разработанного им ранее.



# ÉTAT ÉLASTIQUE DES RÉCIPIENTS CYLINDRIQUES A COUCHES MULTIPLES EMBATTUES A CHAUD

J. VALENTA

CAND. DES SCIENCES TECHN.

INSTITUT NATIONAL DES RECHERCHES THERMOTECNIQUES, PRAGUE

[Manuscrit présenté le 8 mai 1959]

## Introduction

La solution théorique des problèmes concernant l'état de tension des récipients cylindriques à couches multiples embattues à chaud a été étudiée par plusieurs auteurs ([1], [5], [8] etc...). Le rapport optimum  $\frac{r_{n+1}}{r_0}$  dans lequel  $r_{n+1}$  et  $r_0$  sont le rayon extérieur, respectivement le rayon intérieur du

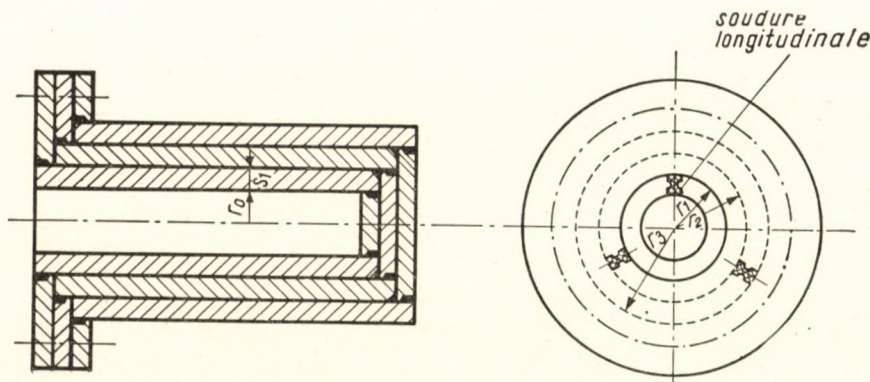


Fig. 1. Schéma de construction d'un récipient à couches multiples

récipient, est dérivé par ces auteurs de la condition de minimum soit de l'aire de la section du récipient à couches multiples [8], soit de la tension de cisaillement [5], respectivement de la tension circonférentielle [1] sur le rayon intérieur de chaque cylindre. Dans tous les ouvrages cités plus haut, les rayons des couches embattues sont donnés par les rapports  $\frac{r_{k+1}}{r_k} = \text{const}$ , où  $r_{k+1}$  et  $r_k$  sont le rayon extérieur, respectivement le rayon intérieur de la couche  $k$ .

Dans le travail présenté, on résout quelques cas de l'état de tension des récipients cylindriques à couches multiples, récipients qui sont composés de cylindres d'épaisseur égale, excepté le cylindre intérieur. Au point de vue de la fabrication, ces récipients offrent le maximum d'avantages. Ainsi, on détermine l'état d'un récipient cylindrique idéalement précontraint, et on établit la limite entre un cylindre précontraint et un cylindre à parois épaisses (fig. 1).

### Récipient cylindrique soumis à une pression intérieure et à une chute de température

On suppose que le récipient est capable d'une dilatation thermique libre, et que la température d'un point quelconque dans la paroi du récipient cylindrique n'est qu'une fonction de son rayon. L'influence de la différence entre le matériel composant le cylindre intérieur et celui composant les couches, est exprimée par l'introduction d'un module d'élasticité réduit  $E_t$ , et à l'aide d'un coefficient de dilatation thermique  $\beta_t$ . La répartition réelle de la température à travers la paroi du récipient à couches multiples, répond alors à la répartition de la température dans un cylindre à parois épaisses de même dimensions.

Dans ce cas, la tension circonférentielle radiale et axiale est donnée par la relation [4]

$$\begin{aligned}\sigma_{rk}^{(t)} &= K_t \left[ 1 - \frac{a_{n+1}^2 \left( 1 + \frac{1}{a_k^2} \right)}{a_{n+1}^2 - 1} \lg a_{n+1} + \lg a_k \right], \\ \sigma_{rk}^{(t)} &= K_t \left[ - \frac{a_{n+1}^2 (a_k^2 - 1)}{(a_{n+1}^2 - 1) a_k^2} \lg a_{n+1} + \lg a_k \right], \\ \sigma_{zk}^{(t)} &= K_t \left[ 1 - \frac{2a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - 1} \lg a_{n+1} + 2 \lg a_k \right],\end{aligned}\quad (1)$$

où

$$K_t = \frac{E_t \beta_t (t_0 - t_{n+1})}{2(1 - \mu) \lg a_{n+1}}, \quad E_t = \frac{E_{1t} \cdot S_1}{r_{n+1} - r_0} \left( 1 + \frac{n \cdot s}{s_1} \frac{E_{2t}}{E_{1t}} \right);$$

Une relation similaire est valable aussi pour  $\beta_t$ .

Par la suite, on utilise les notations suivantes:

- $n$  ... nombre de couches,
- $s_1$  ... épaisseur du cylindre intérieur,
- $s$  ... épaisseur de la couche,
- $t_0, t_{n+1}$  ... température intérieure et extérieure de la paroi du récipient,
- $E_{1t}, E_{2t}$  ... modules d'élasticité du cylindre intérieur et des couches, à la température moyenne de la paroi du récipient cylindrique,
- $\mu$  ... valeur réciproque du coefficient de Poisson,
- $\lg$  ... logarithme naturel,

$$a_k = \frac{rk}{r_0}, \quad a_{n+1} = \frac{r_{n+1}}{r_0} \text{ (fig. 2).}$$

Après l'embattage des cylindres, les tensions circonférentielles de compression prennent naissance dans les couches intérieures, par le refroidissement de chacun. La valeur de cette tension produite par le retrait des cylindres est

déterminée par l'excédent, c'est-à-dire par la différence entre l'alésage du cylindre extérieur et le rayon extérieur du cylindre intérieur. L'excédent doit être établi de façon telle, que l'échauffement du cylindre extérieur avant l'embattage ne provoque pas un changement des qualités mécaniques du matériel composant ce cylindre. On peut négliger les tensions axiales provoquées par le retrait des cylindres [4].

Dans ce qui suit, nous supposons que les sections transversales suffisamment distantes du bord du récipient restent planes, même après la défor-

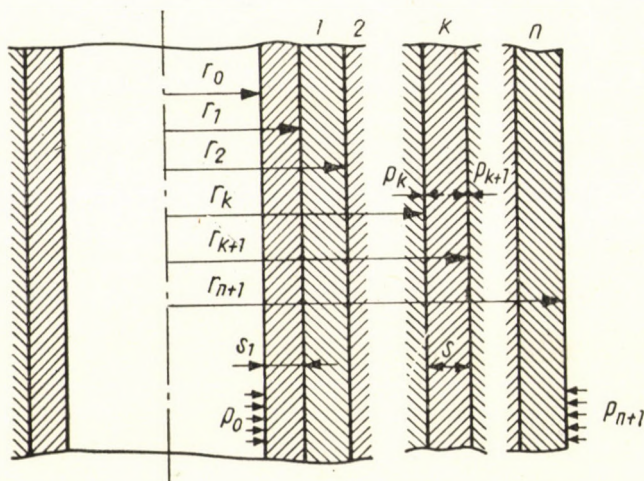


Fig. 2

mation. Nous déterminerons ensuite les tensions circonférentielle et radiale naissant dans la paroi de la couche  $k$ , qui ont été produites par la pression intérieure, à l'aide des relations indiquées par LAMÉ [4]

$$\sigma_{\theta k} + \frac{1}{\alpha_{k+1}^2 - \alpha_k^2} \left[ (\alpha_k^2 p_k - \alpha_{k+1}^2 p_{k+1}) + (p_k - p_{k+1}) \frac{\alpha_{k+1}^2 \alpha_k^2}{\alpha^2} \right], \quad (2)$$

$$\sigma_{rk} = \frac{1}{\alpha_{k+1}^2 - \alpha_k^2} \left[ (\alpha_k^2 p_k - \alpha_{k+1}^2 p_{k+1}) - (p_k - p_{k+1}) \frac{\alpha_{k+1}^2 \alpha_k^2}{\alpha^2} \right],$$

$$\alpha_k \leq \alpha \leq \alpha_{k+1}$$

où  $p_k$  et  $p_{k+1}$  signifient la pression sur le rayon intérieur de la couche  $k$ , respectivement  $(k+1)$ , provoquée par la pression intérieure et extérieure et par le retrait de  $n - (k-1)$  cylindres.

On fait l'usage le plus avantageux de la matière dans le cas, où la plus grande tension réduite dans chaque couche, c'est-à-dire sur le rayon intérieur de chaque couche est égale à la valeur admissible de  $\frac{\sigma_s^{(t)}}{\kappa}$ . Si l'on applique l'hypo-

thèse des tensions maxima de cisaillement (l'hypothèse de GUEST), on a sur le rayon intérieur de la couche  $k$

$$\sigma_{tk} + \sigma_{tk}^{(t)} - (\sigma_{rk} + \sigma_{rk}^{(t)}) \leq \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa}. \quad (3)$$

En substituant des équations (1) et (2) on obtiendra, après une transformation simple, l'équation

$$p_k - p_{k+1} = \left( \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa} - K_t \right) \frac{a_{k+1}^2 - a_k^2}{2 a_{k+1}^2} + K_t \frac{a_{n+1}^2 \lg a_{n+1}}{a_{n+1}^2 - 1} \left( \frac{1}{a_k^2} - \frac{1}{a_{k+1}^2} \right), \quad (4)$$

où  $\sigma_s^{(t)}$  représente la limite d'étirage du matériel à la température d'exploitation  $t_0$ , et  $\varkappa$  le coefficient de sécurité.

La condition de la résistance d'une couche quelconque donnée du récipient cylindrique est, en réalité, une équation différentielle linéaire inhomogène du premier ordre, aux coefficients constants. En écrivant le côté droit de cette équation différentielle sous la forme

$$p_{k+1} - p_k = -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa} - K_t \right) \left[ \frac{2}{\frac{r_0 + s_1}{s} + k} - \frac{1}{\left( \frac{r_0 + s_1}{s} + k \right)^2} \right] + K_t \frac{a_{n+1}^2 \lg a_{n+1}}{a_{n+1}^2 - 1} \left( \frac{1}{a_{k+1}^2} - \frac{1}{a_k^2} \right),$$

on peut écrire la solution générale:

$$p_k = \varphi - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa} - K_t \right) \int_0^k \varphi(u) \Delta u + K_t \frac{a_{n+1}^2 \lg a_{n+1}}{a_{n+1}^2 - 1} \cdot \frac{1}{a_k^2} \quad (5)$$

où

$$\varphi(u) = \frac{2}{\frac{r_0 + s_1}{s} + u} - \frac{1}{\left( \frac{r_0 + s_1}{s} + u \right)^2}.$$

On peut déterminer la somme  $\int_0^k \varphi(u) \Delta u$  de la manière suivante:

Étant donnée la fonction rationnelle

$$\varphi(u) = \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{(u+c)^{i+1}}, \quad (6)$$

on peut exprimer sa somme sous la forme [6]:

$$\int_0^k \varphi(u) \Delta u = \sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{b_i}{i!} \Psi^{(i)}(u+c) - b_0 \lg c + \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{ic^i}, \quad (7)$$

où  $\Psi(u)$  représente la fonction dite digamma. La dernière est définie par la formule

$$\psi(u) = \frac{d \lg \Gamma(u)}{du}$$

si la fonction gamma est marquée par  $\Gamma(u)$ .

En établissant la somme (5) à l'aide de l'expression (7), et en tenant compte de la condition à la limite sur le rayon extérieur  $r_{n+1}$  du récipient cylindrique précontraint  $\sigma_r = p_{n+1}$ , on obtiendra

$$p_k = p_{n+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa} - K_t \right) F(r_k, s) + K_t \frac{\lg a_{n+1}}{a_{n+1}^2 - 1} \left( \frac{a_{n+1}^2}{a_k^2} - 1 \right), \quad (8)$$

où

$$F(r_k, s) = f(r_{n+1}, s) - f(r_k, s) = 2 \Psi \left( 1 + \frac{r_{n+1}}{s} \right) + \Psi' \left( 1 + \frac{r_{n+1}}{s} \right) - \left[ 2 \Psi \left( 1 + \frac{r_k}{s} \right) + \Psi' \left( 1 + \frac{r_k}{s} \right) \right].$$

La pression extérieure exercée sur le récipient est désignée par  $p_{n+1}$ . La fonction digamma  $\Psi(x)$ , respectivement la fonction trigamma  $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi'$  sont données par nous sous forme d'un tableau [3]. Le graphique auxiliaire de la fig. 3 facilitera les calculs numériques.

Si le matériau et l'épaisseur du cylindre intérieur sont identiques à ceux des couches extérieures, la différence admissible des pressions extérieures est exprimée par l'équation

$$p_0 - p_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa} - K_t \right) F(r_0, s) + K_t \lg a_{n+1}. \quad (9)$$

Au cas contraire ( $s \neq s_1$ )

$$p_0 - p_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa_1} - K_t \right) \frac{a_1^2 - 1}{a_1^2} + \left( \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa} - K_t \right) f(r_1, s) \right] + K_t \lg a_{n+1}, \quad (10)$$

$\bar{\sigma}_s^{(t)}$  étant la limite d'étirage du matériel composant le cylindre intérieur à la température  $t_0$ ,  $\varkappa_1$  — étant le coefficient de sécurité à l'égard de la limite d'étirage  $\bar{\sigma}_s^{(t)}$  mentionnée plus haut.

Le premier terme du côté droit de l'équation (10) nous indique l'influence du cylindre intérieur, le deuxième l'influence de la précontrainte de  $n$  couches et le troisième l'influence des contraintes thermiques.

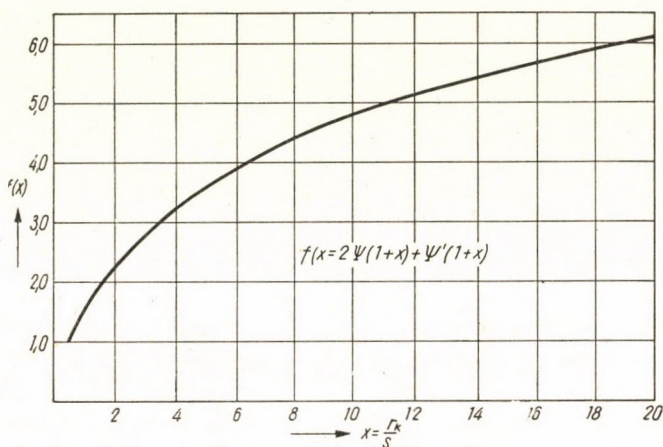


Fig. 3

On déterminera les excédents  $\Delta_k$  de la différence entre les déformations radiales du rayon intérieur du cylindre  $k$  et celles du rayon extérieur du cylindre  $(k - 1)$ , c'est-à-dire

$$\Delta_k = u_k - u_{k-1}, \quad (11)$$

en écrivant

$$\frac{u_k}{r_k} = \frac{1}{E_k} [\sigma_{t_k} + \sigma_{t_k}^{(t)} - \mu(\sigma_{zv} - p_k)], \quad (12)$$

$$\frac{u_{k-1}}{r_k} = \frac{1}{E_{k-1}} [\bar{\sigma}_{t(k-1)} + \bar{\sigma}_{t(k-1)}^{(t)} - \mu(\sigma_{zv} - p_k)],$$

où  $\bar{\sigma}_{t(k-1)}$  signifie la tension circonférentielle sur le rayon extérieur de la couche  $(k - 1)$ , tandis que l'expression  $\sigma_{zv} = \frac{\sigma_{t_k} + \sigma_{r_k}}{2} + \sigma_{z_k}^{(t)}$  indique la tension axiale provoquée par la pression intérieure et par la chute de température.

En substituant les expressions correspondantes de l'équation (1), respectivement de l'équation (2), dans les relations (12), on obtiendra ( $E_{k-1} = E_k = E_{2t}$ )

$$\frac{\Delta_k}{r_k} = \frac{1}{E_{2t}} \left( \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa} - K_t \right) \left( 1 - \frac{a_{k-1}^2}{a_k^2} \right). \quad (13)$$



Pour  $k = 1$  on a

$$\frac{\Delta_1}{r_1} = \frac{1}{E_{2t}} \left\{ \left[ \left( \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa} - K_t \right) - \frac{E_{2t}}{E_{1t}} \left( \frac{\bar{\sigma}_s^{(t)}}{\varkappa_1} - K_t \right) \frac{1}{a_1^2} \right] + \left[ (1 - \mu) P_1^{(t)} + \frac{\mu P_0}{a_{n+1}^2 - 1} + \mu \sigma_{21}^{(t)} - K_t \right] \left( \frac{E_{2t}}{E_{1t}} - 1 \right) \right\}, \quad (14)$$

où

$$P_1^{(t)} = \left[ K_t \left( 1 - \frac{2 a_{n+1}^2 \lg a_{n+1}}{a_{n+1}^2 - 1} \right) - \frac{\bar{\sigma}_s^{(t)}}{\varkappa_1} \right] \frac{a_1^2 - 1}{2 a_1^2} + P_0.$$

L'expression (13) est intéressante du fait que pour  $K_t < \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa}$  il résulte des excédents positifs, tandis que pour  $K_t > \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa}$ , on obtiendra  $\Delta_k < 0$ , ce qui indique que l'on doit embattre les cylindres avec un certain jeu.

Dans le cas où  $K_t \simeq \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa}$  (échauffement intérieur), les excédents  $\Delta_k$  sont nuls [ne tenant pas compte de  $\sigma_s^{(t)} \neq \bar{\sigma}_s^{(t)}$ , voir l'équation (14)]. Cela signifie, en réalité, que l'on peut remplacer le récipient cylindrique à couches multiples par un récipient aux parois épaisses de même dimensions. A proprement parler, le cas  $K_t = \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa}$  indique la limite entre un récipient précontraint et un récipient composé de cylindres embattus sans excédent de retrait.

Par la suite, il nous faut vérifier la précontrainte du cylindre intérieur, respectivement du cylindre extérieur. Si la pression de service n'agit pas, le cylindre intérieur est soumis à des précontraintes de pression extérieures, causées par l'embattage de  $n$  cylindres. Selon l'hypothèse des tensions de cisaillement maxima (hypothèse de GUEST), on obtiendra dans ce cas sur le rayon  $r_0$  du cylindre intérieur, la condition suivante:

$$\varkappa_2 \geq \frac{\varkappa_1}{\frac{\varkappa_1}{\bar{\sigma}_s^{(t)}} \left[ 2(P_0 - P_{n+1}) \frac{a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - 1} + K_t \left( 1 - \frac{2 a_{n+1}^2 \lg a_{n+1}}{a_{n+1}^2 - 1} \right) \right] - 1}, \quad (15)$$

où  $\varkappa_2$  est le coefficient de sécurité du cylindre intérieur, par rapport à l'excès de pression extérieur.

Sous l'influence de l'échauffement intérieur, les cylindres extérieurs sont soumis à une sollicitation plus grande que les cylindres intérieurs. Cherchons à présent le cas limite, dans lequel les fibres extérieures du cylindre  $n$  rempliront encore la condition de résistance formulée par GUEST, c'est-à-dire

$$\sigma_{t(n+1)} + \sigma_{i(n+1)}^{(t)} + P_{n+1} \leq \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa}. \quad (16)$$

Après substitution de l'équation (1) et (2), on obtiendra

$$2(p_n - p_{n+1}) \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2} + K_t \left[ 1 - \frac{2 \lg \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}^2 - 1} \right] \leq \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa}. \quad (17)$$

A l'aide de l'équation (4), on calcule pour  $k = n$  et on le substitue dans l'équation (17); après une transformation simple, il en résulte:

$$K_t = \frac{E_t \beta_t (t_0 - t_{n+1})}{2(1 - \mu) \lg \alpha_{n+1}} \leq \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa}. \quad (18)$$

Si la chute de température est telle que la condition (18) est remplie, les fibres extérieures du cylindre  $n$  seront sollicitées toujours au-dessous de la limite admise.

Une autre limitation de la validité de la condition (4) résulte du fait suivant: on a supposé jusqu'à présent que la différence des tensions axiales provoquées par la chute de température et par la pression de service, n'exède pas la valeur de la pression de service. A des chutes de température plus élevées ( $t_0 - t_{n+1}$ ), il peut arriver que la différence

$r = r_0$ :

$$p_0 - \Delta \sigma_{z_0} < 0, \quad (19)$$

où

$$\Delta \sigma_{z_0} = |\sigma_{z_0}^{(t)}| - \sigma_{z_0}'' ,$$

et où  $\sigma_{z_0}''$  représente la contrainte due à la pression intérieure.

Mais dans ce cas, l'hypothèse de GUEST n'est plus valable sous la forme mentionnée ci-dessus (4). Par conséquent, en remplaçant  $\Delta \sigma_{t_0}$  dans l'expression (19), on obtient

$$p^0 - \left\{ K_t \left[ \frac{2 \alpha_{n+1}^2 \lg \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}^2 - 1} - 1 \right] - \frac{p^0}{\alpha_{n+1}^2 - 1} \right\} \geq 0. \quad (20)$$

Il s'ensuit que

$$\frac{p_0}{K_t} \geq 2 \lg \alpha_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}^2 - 1}{\alpha_{n+1}^2}. \quad (21)$$

Si l'inégalité (21) ci-dessus n'est pas remplie, les fibres intérieures sont plus sollicitées que l'on n'a supposé auparavant. Parce que l'hypothèse de la résistance formulée par GUEST se trouve sur le côté de la plus grande sécurité, on peut tenir compte, même dans ce cas, de la condition (4), et effectuer le

contrôle supplémentaire de la sollicitation exercée sur les fibres intérieures ( $r = r_0$ )

$$\sigma_{t_0} + \sigma_{t_0}^{(t)} + \sigma_{20}^{(t)} \leq \frac{\bar{\sigma}_s^{(t)}}{\kappa_1}. \quad (22)$$

### Exemple

Il faut établir le nombre et l'épaisseur des couches d'un récipient embattu à rayon intérieur  $r_0 = 7,62$  cm, soumis à une pression interne  $p_0 = 3800$  kg/cm<sup>2</sup>. Soit  $t_0 = 350$  °C la température intérieure dans le récipient. Le matériau et l'épaisseur du cylindre intérieur et des couches sont les mêmes, c'est-à-dire  $s_1 = s$ ,  $\bar{\sigma}_s^{(t)} = \sigma_s^{(t)} = 5600$  kg/cm<sup>2</sup>;  $\kappa_1 = \kappa = 1, 2$ ,  $E_{1t} = 1,77 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\beta_t = 134 \cdot 10^{-7}$  1/°C. Sous l'influence de la chute de température, le récipient sera déchargé en partie. Par conséquent, on posera, en première approximation,  $n = 2$  et  $s = 6$  cm. Ensuite, on effectuera le contrôle du coefficient de sécurité  $\kappa$  selon l'équation (9).

A l'aide du diagramme (fig. 3), on déterminera d'abord  $F(r_0, s)$ :

$$\begin{aligned} f(r_{n+1}, s) &= 3,33, \\ f(r_0, s) &= 1,72, \\ f(r_0, s) &= f(r_{n+1}, s) - f(r_0, s) = 1,61. \end{aligned}$$

On déterminera la température  $t_{n+1}$  sur la surface extérieure du récipient à l'aide de l'expression empirique [9]

$$t_0 - t_{n+1} = 2(r_{n+1} - r_0),$$

( $r_{n+1}, r_0$  en millimètres),

si l'on ne peut pas démontrer que la chute de température est moins élevée.

Ensuite, on obtiendra

$$K_t = \frac{1,77 \cdot 10^6 \cdot 134 \cdot 10^{-7} \cdot 36}{2(1 - \mu) \lg \frac{25,62}{7,62}} \doteq 503 \text{ kg/cm}^2$$

Il ressort de l'équation (9) que

$$\kappa = \frac{5600 \cdot 1,61}{2[3800 - 503(1,212 - 1,61)]} \doteq 1,22$$

(ce qui remplit les conditions).

En effectuant le contrôle à une sollicitation plus modérée, on obtiendra (15)

$$\kappa_2 \doteq 1,92$$

(ce qui remplit les conditions).

On a donc

$$\frac{\sigma_s^{(t)}}{\kappa} = \frac{5600}{1,22} \doteq 4600 \text{ kg/cm}^2.$$

Donc la condition (18) est remplie, mais il faut, en outre, remplir la condition (21). En substituant, on peut voir que cette condition est remplie à son tour. A la fin, on calculera les excédents comme suit (13):

$$\Delta_1 = \frac{13,62}{1,77 \cdot 10^6} \left[ \frac{5600}{1,22} - 503 \right] \left[ 1 - \left( \frac{7,62}{13,62} \right)^2 \right] \doteq 0,022 \text{ cm},$$

et pareillement

$$\Delta_2 = 0,024 \text{ cm.}$$

La température d'échauffement des cylindres individuels sera la suivante:

$$t_k = t_v + \frac{2\Delta_k + v}{2\beta_t \cdot r_k},$$

$t_v = 20^\circ\text{C}$ , étant la température du cylindre intérieur, et  
 $v = (0,006-0,012)\sqrt{0,2r_k}$  le jeu laissé pour le montage.

En substituant, on obtiendra

$$t_1 = 20 + \frac{2 \cdot 0,022 + 0,01 \sqrt{0,2 \cdot 13,62}}{2 \cdot 134 \cdot 10^{-7} \cdot 13,62} = 189^\circ\text{C},$$

$$t_2 = 150^\circ\text{C}.$$

Le projet du récipient cylindrique à couches multiples peut être établi de la manière suivante:

$$r_0 = 7,62 \text{ cm, } s = 6 \text{ cm, } n = 2, \Delta_1 = 0,022 \text{ cm, } \Delta_2 = 0,024 \text{ cm.}$$

### Nombre infini de couches

Exécutons à présent la passage à la limite de l'expression (9) pour  $s \rightarrow 0$ . A cette fin, il faut d'abord rappeler quelques relations auxiliaires. En effet, on peut aussi écrire la fonction digamma  $\Psi(x)$  sous la forme [3]:

$$\Psi(x) = \lg x - \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{x+i} - \lg \left( 1 + \frac{1}{x+i} \right) \right]. \quad (23)$$

Pour la fonction trigamma et les dérivées plus hautes de  $\Psi(x)$ , on a le développement [3]

$$\frac{d^m}{dx^m} \Psi(x) = (-1)^{m+1} \cdot m! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(x+i)^{m+1}}. \quad (24)$$

La limite de l'expression (24) est nulle pour  $|x| \rightarrow \infty$ . En appliquant les relations auxiliaires mentionnées plus haut, on obtiendra l'équation suivante:

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(r_0, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ 2 \lg \frac{a_{n+1} + \frac{s}{r_0}}{1 + \frac{s}{r_0}} - 2 \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{1 + \frac{r_{n+1}}{s} + i} - \frac{1}{1 + \frac{r_0}{s} + i} \right] + \lg \frac{1 + \frac{1}{1 + \frac{r_0}{s} + i}}{1 + \frac{1}{1 + \frac{r_{n+1}}{s} + i}} \right\} = 2 \lg a_{n+1}. \quad (25)$$

et ensuite

$$\lim_{s \rightarrow 0} (p_0 - p_{n+1}) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa} - K_t \right) F(r_0, s) + K_t \lg a_{n+1} \right] = \frac{\sigma_s^{(t)}}{\varkappa} \lg a_{n+1}. \quad (26)$$

L'expression (26) nous indique la valeur maximum de la sollicitation admise pour le récipient précontraint, qui est indépendante de la chute de température; cependant, l'évolution des contraintes réduites s'approche de l'idéale, c'est-à-dire chaque fibre est exploitée jusqu'à la limite extrême admise. Pour les raisons citées, il faut adopter pour les paramètres plus élevés ( $p_0, r_0$ ) une construction précontrainte composée d'un nombre plus grand de couches, comme par exemple la construction enveloppée de bandes profilées [2], [7], [11], à couches multiples [12], etc. . .

Pour  $\varkappa = 1$ , l'expression (26) indique la différence des pressions extérieures provoquant la plasticité totale du cylindre à parois épaisses, composé d'une matière idéalement plastique, et ayant des dimensions égales à celles du récipient envisagé.

Dans un récipient cylindrique embattu, l'évolution de la contrainte provoquée par la pression intérieure, ou éventuellement par la pression extérieure, correspond à l'évolution dans un cylindre à parois épaisses de mêmes dimensions. Établissons la preuve mathématique de cette affirmation.

Dans un système de cylindres, prenons à présent deux couches  $k$  et  $(k + 1)$  soumises à des pressions  $p_k, p_{k+1}$  et  $p_{k+2}$  (fig. 2). La condition d'après laquelle la déformation radiale résultante du rayon de contact  $r_k$  de l'un et de l'autre cylindre doit être nulle, donne

$$\frac{r_k^2}{r_{k+1}^2 - r_k^2} p_k - \frac{r_{k+1}^2 (r_{k+2}^2 - r_k^2)}{(r_{k+2}^2 - r_{k+1}^2)(r_{k+1}^2 - r_k^2)} p_{k+1} + \frac{r_{k+2}^2}{r_{k+2}^2 - r_{k+1}^2} p_{k+2} = 0. \quad (27)$$

L'équation (27) est une équation aux différences du deuxième ordre, aux coefficients variables du quatrième degré. Introduisons encore, par le rapport  $x = \frac{r_k}{s}$  une variable indépendante  $x$  et une nouvelle fonction  $y(x) = x^2 p(x)$ . En les substituant dans l'équation (27), on obtiendra

$$(2x + 3)y(x) - 4(x + 1)y(x + 1) + (2x + 1)y(x + 2) = 0. \quad (28)$$

L'équation aux différences (28) a deux solutions linéaires indépendantes. La première solution est la constante arbitraire  $\varphi$ . A l'aide de la transformation Abelienne [3] et de la solution connue, on peut abaisser l'ordre de l'équation aux différences.

Il est connu de l'algèbre que

$$\sum_{i=0}^n a_i b_i = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i - b_{i+1}) \sum_{m=0}^i a_m + b_n \sum_{m=0}^n a_m. \quad (29)$$

Soit l'équation aux différences de l'ordre  $n$  aux coefficients variables

$$u_0(x) y(x) + u_1(x) y(x+1) + \dots + u_n y(x+n) = 0. \quad (30)$$

En introduisant une nouvelle variable indépendante sous la forme du produit de la solution connue  $y_1(x)$  et de la fonction cherchée, nous aurons

$$y_2(x) = y_1(x) w(x),$$

et à l'aide de la transformation (29), l'équation aux différences (30) prend la forme

$$-\sum_{i=0}^{n-1} \Delta w(x+i) \sum_{m=0}^i u_m(x) y_1(x+m) + w(x+n) \sum_{i=0}^n u_i(x) y_1(x+i) = 0. \quad (31)$$

Le dernier membre de l'équation (31) constitue la solution de l'équation (30), et il est nul.

Dans notre cas  $n = 2$ , avec la notation  $\Delta w(x) = w_1(x)$ , nous avons

$$(2x+3) y_1(x) w_1(x) + w_1(x+1) [(2x+3) y_1(x) - 4(x+1) y_1(x+1)] = 0$$

En remplaçant  $y_1(x)$  et en prenant les logarithmes, on obtiendra

$$\Delta \lg w_1(x) = \lg \frac{2x+3}{2x+1},$$

où

$$\lg w_1(x) = \lg w_1(x+1) - \lg w_1(x),$$

resp.

$$w_1(x) = e^{\int_0^x \lg \frac{u+\frac{3}{2}}{u+\frac{1}{2}} \Delta u} \quad (32)$$

La somme  $\int_0^x \lg \frac{u+\frac{3}{2}}{u+\frac{1}{2}} \Delta u$  peut être déterminée de la manière suivante.

On a, comme il est connu, pour la fonction gamma

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

En utilisant les logarithmes, on obtiendra

$$\begin{aligned} \lg \Gamma(x+1) - \lg \Gamma(x) &= \Delta \lg \Gamma(x) = \lg x \\ \lg \Gamma(x) &= \int_0^x \lg u \, \Delta u \\ \Gamma(x) &= e^{\int_0^x \lg u \, \Delta u} \end{aligned} \quad (33)$$

En comparant les équations (32) et (33), on obtient

$$w_1(x) = \frac{\Gamma\left(x + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} = x + \frac{1}{2},$$

de sorte que

$$w(x) = \int_0^x \left(u + \frac{1}{2}\right) \Delta u = \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

En conséquence, la solution de l'équation aux différences (27) sera

$$p(x) = C_1 + \frac{C_2}{x^2}. \quad (34)$$

L'expression (34) est la solution de Lamé bien connue.

#### LITTÉRATURE

1. COX, L. H.: Design of Built-up Cylinders, Engineer, vol. 164, 1936, pp. 179.
2. CSONKA, P.: Calculation of Prestresses in Strip-wound High-pressure Vessels, Acta Technica XIV, 1—2, 1956, pp. 127.
3. DAVIS, H. T.: Tables of Higher Mathematical Functions, The Principia Press, Bloomington vol. I—1934, vol. II—1936.
4. KANTOROWITSCH, Z. B.: Berechnungsgrundlagen der chem. Maschinen und Apparatur, Moskau, 1952 (russe) S. 240.
5. MANNING, W. D. R.: The Design of Compound Cylinders for High Pressure Service, Engineering, vol. 163, 1947, pp. 349.
6. NÖRLUND, N. E.: Differenzenrechnung, Berlin 1924.
7. REUSS, E.: Stress Analysis of Strip-wound High-pressure Vessels by the Theory of Anisotropic Elastic Bodies, Acta Technica XIV, 1—2, 1956, pp. 113.
8. STRUB, R. A.: Distribution of Mechanical and Thermal Stresses in Multi-layer Cylinders, Trans. of the ASME I, vol. 75, No. 1, 1953, pp. 73.
9. VALENTA, J.: Nalisované nádoby, Strojnický Sborník, č. 20, 1958, str. 131.
10. VALENTA, J.: Vinuté nádoby, Rozpravy ČSAV, Řada TV 67, č. 4, 1957, str. 1—60.
11. VALENTA, J.: Die Beanspruchung gewickelter Behälter, Konstruktion 10, H 10, 1958, S. 394.
12. VALENTA, J.: Vícevrstvé nádoby, Strojřinství 8, č. 8, 1958, str. 563.

## RÉSUMÉ

L'auteur résout quelques cas de l'état de tension des récipients cylindriques à couches multiples embattues à chaud, composés de cylindres d'épaisseurs égales. Les résultats ont été obtenus à l'aide d'une solution de l'équation aux différences du premier ordre et exprimée par les fonctions digamma et trigamma. L'auteur a cité aussi le cas d'un récipient idéalement précontraint, et défini la limite entre un récipient cylindrique précontraint et un cylindre aux parois épaisses.

SPANNUNGSZUSTAND VON ZYLINDRISCHEN,  
MEHRSCICHTIGEN, WARM ZUSAMMENGEPRÉSSTEN BEHÄLTERN

J. VALENTA

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit bringt Lösungen für einige Fälle des Spannungszustands von zylindrischen, mehrschichtigen, warm zusammengesetzten Behältern, welche aus Zylindern mit gleicher Wandstärke bestehen. Die Lösungen wurden mittels der Differenzgleichung erster Ordnung erhalten und durch Digamma- und Trigamma-Funktionen ausgedrückt. Es wird auch der Fall eines ideal vorbeanspruchten Behälters besprochen und die Grenze zwischen einem vorbeanspruchten zylindrischen Gefäß und einem dickwandigen Zylinder definiert.

DISTRIBUTION OF ELASTIC STRESSES IN CYLINDRICAL, MULTI-LAYER VESSELS  
ASSEMBLED AT HIGHER TEMPERATURE

J. VALENTA

## SUMMARY

The author solves several cases of the stress distribution in multi-layer, cylindrical vessels assembled at higher temperature, which consist of cylinders with equal wall thicknesses. The results are obtained by solving the difference equation of the first order, and are expressed by digamma and trigamma functions. The author cites also the case of an ideally pre-stressed vessel and defines the limit between a pre-stressed cylindrical vessel and a thick-walled cylinder.

СОСТОЯНИЕ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ СПРЕССОВАННЫХ В ГОРЯЧЕМ  
СОСТОЯНИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СОСУДОВ

Й. ВАЛЕНТА

## РЕЗЮМЕ

Автор решает несколько случаев таких спрессованных в горячем состоянии многослойных сосудов, которые состоят из слоев одинаковой толщины. Результаты выводятся автором путем решения дифференциального уравнения первой степени, и выражаются дигамма и тригамма функциями. Автор рассматривает также случай идеально предварительно напряженного сосуда и определяет границу между цилиндрическим сосудом с предварительным напряжением и толстостенным цилиндром.



# DAS BECKSCHE STABILITÄTSPROBLEM UND VERWANDTE PROBLEME

J. BARTA

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 2. Februar 1960]

## 1. Der Zweck des Aufsatzes

Der vorliegende Aufsatz bezieht sich auf dämpfungsfreie (reibungslöse) elastische Gebilde. Die Theorie der Stabilität der Ruhestellung dieser Gebilde, die in der Baustatik zumeist Theorie der Knickung genannt wird, wurde in den letzten Jahren von schweizerischen Autoren durch neue Gedanken bereichert [1, 2]. Ein prägnantes Beispiel, wo eben die neuen Gedanken zur richtigen Lösung führten, ist das Becksche Stabilitätsproblem. Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist die Lösung des Beckschen Stabilitätsproblems und einiger verwandten Probleme darzulegen. Des besseren Verständnisses wegen wird vor allem die Theorie auf Grund der neuen Gedanken, in einer knappen Form, zusammengestellt. Die Lösung des Beckschen Stabilitätsproblems wird aus der Originalarbeit von M. BECK [2] übernommen.

## 2. Kurzer Abriss der Theorie der Stabilität der Ruhestellung eines elastischen Gebildes

### *Das elastische Gebilde*

Das elastische Gebilde sei ein idealisierter Körper (Stab, Scheibe, Platte, Bogen, usw.), wie es in der Baustatik angenommen wird. Falls es nicht anders gesagt wird, wird vorausgesetzt, daß das elastische Gebilde in der unbelasteten Ruhestellung frei von Spannkraften ist, das heißt, in ihm keine Eigenspannkraften herrschen.

### *Die Ruhestellung*

Über die Ruhestellung des belasteten elastischen Gebildes, deren Stabilität untersucht werden soll, wollen wir folgendes voraussetzen: sie ist aus der Ruhestellung des unbelasteten elastischen Gebildes durch ein proportionales, monotones, unendlich langsames Anwachsen der Lastkräfte entstanden.

### *Die Definition der Stabilität der Ruhestellung eines elastischen Gebildes*

Die Definition der Stabilität der Ruhestellung eines elastischen Gebildes ist mehr oder minder willkürlich. Im Abschnitt 5 wird gezeigt, daß es durch gewisse äußere Kraft belastete elastische Gebilde gibt, deren Ruhestellung nach einer Definition stabil, nach einer anderen aber instabil ist.

Bei der Definition der Stabilität der Ruhestellung eines elastischen Gebildes schließen wir uns der Auffassung von F. KLEIN an: wir nennen eine Ruhestellung stabil, wenn die Störungen dauernd klein bleiben, falls man die Anfangsstörung hinreichend klein wählt; in jedem anderen Falle nennen wir die Ruhestellung instabil.

Zwei Arten der Anfangsstörung werden in Betracht genommen:  $\alpha$ ) die Anfangsstörung des Ortes, d. h. dem elastischen Gebilde werden Anfangsstellungen erteilt, die von seiner Ruhestellung verschieden sind,  $\beta$ ) die Anfangsstörung der Geschwindigkeit, d. h. dem elastischen Gebilde werden Anfangsgeschwindigkeiten erteilt, die von Null verschieden sind.

### *Die Definition der Knicklast*

Sind alle Lastkräfte gleich Null, so ist die Ruhestellung des elastischen Gebildes offenbar stabil, denn in diesem Falle ruft eine hinreichend kleine Anfangsstörung, wie es in der Schwingungslehre gezeigt wird, nur eine kleine harmonische Schwingung des elastischen Gebildes hervor. Stellen wir uns nun ein Wertsystem der Lastkräfte vor, das durch ihr proportionales, monotones, unendlich langsames Anwachsen die Ruhestellung des unbelasteten elastischen Gebildes in die Ruhestellung des belasteten elastischen Gebildes überführt. Wird durch dieses Anwachsen ein solches Wertsystem der Lastkräfte das erstemal erreicht, für welches die Ruhestellung des elastischen Gebildes nicht mehr stabil ist, so ist es die Grenze für die Stabilität der Ruhestellung des belasteten elastischen Gebildes. Dieses Wertsystem der Lastkräfte wird kritische Last oder Knicklast genannt.

### *Die kinetisch-statische Methode*

Diese Methode wird im Schrifttum [1, 2] zumeist kinetische Methode genannt. H. L. LANGHAAR [3] nennt sie dynamische Methode. Wir nennen sie aus unten angeführtem Grunde kinetisch-statische Methode. Wir beschreiben sie wie folgt.

Man stellt sich vor, daß das belastete elastische Gebilde von der Ruhestellung, deren Stabilität untersucht werden soll, ausgelenkt ist. Die Auslenkung sei durch die Koordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_n$  gekennzeichnet. Unter der Benützung dieser Koordinaten schreibt man die Differentialgleichungen für jene

Auslenkung\* des belasteten elastischen Gebildes an, welche zufolge der Anfangsstörungen  $\alpha$  bzw.  $\beta$  eintritt. Diese Differentialgleichungen sind linear im Bezug auf  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , da die Kleinsche Definition hinreichend kleine Störungen voraussetzt. Sie haben also die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 &= (L_{11} - S_{11}) q_1 + (L_{12} - S_{12}) q_2 + \dots + (L_{1n} - S_{1n}) q_n, \\ m_2 \ddot{q}_2 &= (L_{21} - S_{21}) q_1 + (L_{22} - S_{22}) q_2 + \dots + (L_{2n} - S_{2n}) q_n, \\ \dots &\dots \\ m_n \ddot{q}_n &= (L_{n1} - S_{n1}) q_1 + (L_{n2} - S_{n2}) q_2 + \dots + (L_{nn} - S_{nn}) q_n. \end{aligned} \right\} (1)$$

$q$ -freie Glieder kommen in (1) nicht vor, weil  $q_1, q_2, \dots, q_n$  so gewählt sind, daß in der belasteten Ruhestellung  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$  ist.  $L_{hj} q_j$  sind die von den Lastkräften herrührenden Glieder.  $-S_{hj} q_j$  sind die von den Spannekräften herrührenden Glieder. Z. B. in der Gleichung (8),  $Pq/l$  ist das von der Lastkraft herrührende Glied,  $-Cq/l^2$  ist das von der Spannkraft herrührende Glied. Die Funktionen

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \dots, q_n = q_n(t), \quad (2)$$

die jene Auslenkung (Bewegung und ausgelenkte Ruhestellung) des belasteten elastischen Gebildes charakterisieren, welche infolge der Anfangsstörungen  $\alpha$  und  $\beta$  eintritt, ergeben sich als die Lösung der Differentialgleichungen (1). Als eine Konsequenz der Kleinschen Definition hat man also den Satz 1: »Die Ruhestellung des belasteten elastischen Gebildes ist dann und nur dann stabil, wenn die Funktionen (2) bei jeden Anfangswerten von  $q_1, q_2, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$  für  $t \rightarrow \infty$  endlich bleiben.« Auf diesem Satz beruht die kinetisch-statische Methode.

### Bemerkung I

Diese Bemerkung bezieht sich auf eine Lösung (2) der Gleichungen (1), welche die Form

$$q_1 = A_1 \sin(\omega t + \psi), q_2 = A_2 \sin(\omega t + \psi), \dots, q_n = A_n \sin(\omega t + \psi) \quad (3)$$

hat, wobei  $A_1, A_2, \dots, A_n$  Konstanten und nicht alle gleich Null sind. Setzt man (3) in (1) ein, so erhält man  $n$  Gleichungen, die homogen linear in bezug auf  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür,

\* Und zwar sowohl für die Bewegung, als auch für die ausgelenkte Ruhestellung. Aus diesem Grunde nennen wir diese Methode kinetisch-statische Methode.

daß die  $n$  homogenen linearen Gleichungen nicht nur die Lösung  $A_1 = A_2, = \dots = A_n = 0$  besitzen, ist

$$\begin{vmatrix} -L_{11} + S_{11} - m_1 \omega^2 & -L_{12} + S_{12} & \dots & -L_{1n} + S_{1n} \\ -L_{21} + S_{21} & -L_{22} + S_{22} - m_2 \omega^2 & \dots & -L_{2n} + S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -L_{n1} + S_{n1} & -L_{n2} + S_{n2} & \dots & -L_{nn} + S_{nn} - m_n \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Entwickelt man die in (4) stehende Determinante, so sieht man, daß die Gleichung (4) eine algebraische Gleichung ist, die aus den gegebenen Konstanten, aus den Lastwerten und aus den geraden Potenzen von  $\omega$  aufgebaut ist. Damit ist die Untersuchung des Endlichbleibens der Funktionen (3) auf die Untersuchung der Wurzeln  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}$  der algebraischen Gleichung (4) zurückgeführt. Da die Differentialgleichungen (1) homogen linear sind, bilden die mit Hilfe der Wurzeln  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}$  angeschriebenen Funktionen

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \psi_2) + A_1^{(3)} \sin(\omega_3 t + \psi_3) + \dots \\ q_2 &= A_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \psi_2) + A_2^{(3)} \sin(\omega_3 t + \psi_3) + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ q_n &= A_n^{(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_n^{(2)} \sin(\omega_2 t + \psi_2) + A_n^{(3)} \sin(\omega_3 t + \psi_3) + \dots \end{aligned}$$

ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichungen (1).

Nun weiß man aus der Algebra, daß die Wurzeln

$$\omega = a + bi, \quad \omega = a - bi \quad (5)$$

paarweise auftreten. Setzt man (5) in (4) ein und macht man  $t \rightarrow \infty$ , so sieht man, daß alle  $q_j$  dann und nur dann beschränkt bleiben, wenn alle Wurzelquadrate  $\omega^2$  nichtnegativ reell sind. Es gilt also der Satz 2: »Alle Funktionen (3) bleiben für  $t \rightarrow \infty$  dann und nur dann endlich, wenn alle Wurzelquadrate  $\omega^2$  der Gleichung (4) nichtnegativ reell sind.«

### Bemerkung II

Nicht immer hat die Lösung (2) der Differentialgleichungen (1) die Form (3). Denn zum Beispiel die Differentialgleichung  $\ddot{q} = -k^2 q$  hat wohl die Lösung  $q = A \sin(kt + \psi)$ , aber die Differentialgleichung  $\ddot{q} = 0$  hat die Lösung  $q = a + bt$ . Merkwürdig ist in diesem Beispiel, daß die zweite Differentialgleichung aus der ersten durch  $k \rightarrow 0$  entsteht, doch entsteht nicht die Lösung der zweiten aus der Lösung der ersten durch  $k \rightarrow 0$ . Die Lösungsmöglichkeiten der Differentialgleichungen (1) sind also durch den Ansatz (3) nicht immer erschöpft.

*Bemerkung III*

Bei der Beschreibung der kinetisch-statischen Methode haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Masse des elastischen Gebildes aus Punktmassen von endlicher Anzahl besteht, die durch massenlose Verbindungen zueinander und zum festen Untergrund geknüpft sind, wie es z. B. in der Abb. 3 und 4 der Fall ist. Ist die Masse des elastischen Gebildes kontinuierlich verteilt, wie z. B. in Abb. 6, so wird man die beschriebene kinetisch-statische Methode sinngemäß anwenden.

*Bemerkung IV*

Wenn die Last aus mehreren Kräften besteht, so wird das proportionale monotone Anwachsen der Lastkräfte, wie es üblich ist, durch einen gemeinsamen positiven Faktor  $\lambda$  gekennzeichnet, welcher von Null an monoton zunimmt. Die Knicklast wird dann durch den Knickwert  $\lambda_k$  erklärt.

*Die Last*

Der Allgemeinheit halber setzen wir voraus, daß die auf das elastische Gebilde angreifende Last aus Dynamen besteht. Eine solche Dyname sei durch ihre Komponenten  $P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z$  charakterisiert und ihr Angriffspunkt ist ein Punkt des elastischen Gebildes.

*Die Definition der konservativen Last*

Erleidet der Angriffspunkt der Dyname eine Verschiebung von den Komponenten  $u, v, w$  und eine Verdrehung von den Komponenten  $\varphi, \psi, \chi$ , so leistet die Dyname die Arbeit

$$\int_{\substack{u, v, w, \varphi, \psi, \chi, \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0}} (P_x du + P_y dv + P_z dw + M_x d\varphi + M_y d\psi + M_z d\chi). \quad (6)$$

Eine Dyname heißt konservativ, wenn der Wert des Integrals (6) bei festen oberen Grenzen vom Integrationswege unabhängig ist, das heißt, wenn es eine Funktion  $F(u, v, w, \varphi, \psi, \chi)$  gibt, woraus die Komponenten der Dyname sich nach den Formeln

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{\partial F}{\partial u}, & P_y &= \frac{\partial F}{\partial v}, & P_z &= \frac{\partial F}{\partial w}, \\ M_x &= \frac{\partial F}{\partial \varphi}, & M_y &= \frac{\partial F}{\partial \psi}, & M_z &= \frac{\partial F}{\partial \chi} \end{aligned} \quad (7)$$

berechnen lassen.\* Die auf das elastische Gebilde angreifende Last heißt konservativ, wenn sie aus konservativen Dynamen besteht.

### *Die Definition der gebundenen Last*

Eine auf das elastische Gebilde angreifende Dynamie heißt gebunden, wenn ihr Angriffspunkt zu einem Punkte des elastischen Gebildes gebunden ist. Die auf das elastische Gebilde angreifende Last heißt gebunden, wenn sie aus gebundenen Dynamen besteht.

### *Die statische Methode und die energetische Methode*

Vermittels des Satzes 2, der Gleichheit  $S_{hj} = S_{jh}$  und der bekannten Eigenschaft einer Säkulargleichung kann man folgendes beweisen: Ist die auf das elastische Gebilde angreifende Last konservativ und gebunden, und ist das elastische Gebilde ungedämpft (reibunglos), so kann die kinetisch-statische Methode sowohl durch die statische Methode, als auch durch die energetische Methode ersetzt werden.

Ist die auf das elastische Gebilde angreifende Last nichtkonservativ oder nichtgebunden, so liefern im allgemeinen weder die statische noch die energetische Methode den richtigen Wert der Knicklast. Diese Entdeckung rührt von H. ZIEGLER her [1]. In unserem illustrativen Beispiel im Abschnitt 5 führt die statische Methode zu einem falschen Resultat und verliert die energetische Methode ihren Sinn, also darf dort von den drei Methoden nur die kinetisch-statische Methode angewendet werden.

Die statische Methode unterscheidet sich von der kinetisch-statischen Methode darin, daß die ins Auge gefaßten Auslenkungen nicht mehr Bewegungen und Ruhestellungen, sondern nur Ruhestellungen sind, d. h. man nimmt schon von vornherein an, daß die Glieder an den linken Seiten der Differentialgleichungen (1) verschwinden und die Ruhestellung wird dann instabil genannt, wenn es in ihrer nächsten Umgebung eine ausgelenkte Ruhestellung gibt. Damit wurde aber gar nicht gesagt, daß jedes belastete elastische Gebilde eine ausgelenkte Ruhestellung haben kann, denn z. B. in dem in der Abb. 6 dargestellten Fall existiert keine ausgelenkte Ruhestellung, wie es im Abschnitt 6 plausibel gemacht wird.

Die energetische Methode besteht darin, daß man jene Arbeit  $L$  der Lastkräfte bzw. jene Änderung  $\Delta$  der Deformationsenergie ins Auge faßt, welche geleistet wird bzw. entsteht, wenn das belastete elastische Gebilde aus der gegebenen Ruhestellung in eine ausgelenkte Stellung (Anfangsstörung  $a$ ) hin-

\* In unseren Erörterungen (z. B. im Abschnitt 8) ist diese Definition so zu verstehen, daß  $u, v, w, \varphi, \psi, \chi$  hinreichend klein sind.

übergeführt wird. Ist für jede ausgelenkte Stellung  $L - \Delta < 0$ , so ist die gegebene Ruhestellung stabil. Gibt es eine solche ausgelenkte Stellung, für welche  $L - \Delta > 0$  ist, so ist die gegebene Ruhestellung instabil.

### 3. Ein illustratives Beispiel, wo die Last konservativ und gebunden ist

Das ebene Gebilde (Abb. 1) besteht aus der Punktmasse  $m$  und aus dem masselosen starren Stab von der Länge  $l$ , und wird durch das elastische Gelenk  $C$  an den festen Untergrund geknüpft. Die Federkonstante des Gelenkes sei ebenfalls mit  $C$  bezeichnet; dies bedeutet, daß das Rückstellmoment bei einer mit dem Winkel  $q$  charakterisierten Auslenkung den Wert  $Cq$  hat. Gewichte sollen außer acht gelassen werden. Die einzige äußere Kraft ist die Last  $P$ . Man soll die Knicklast  $P_k$  berechnen.

A. Die kinetisch-statische Methode wird wie folgt angewendet. Das Beschleunigungsgesetz liefert die Differentialgleichung  $ml^2\ddot{q} = Plq - Cq$ , wobei  $ml^2$  das Trägheitsmoment,  $Plq - Cq$  die Momentensumme in bezug auf den Drehpunkt ist. Wir haben also die Differentialgleichung

$$m\ddot{q} = \left( \frac{P}{l} - \frac{C}{l^2} \right) q. \quad (8)$$

Laut des Satzes 1 sollen alle mögliche Bewegungen d. h. alle Lösungen  $q(t)$  der Differentialgleichung (8) untersucht werden, ob sie für  $t \rightarrow \infty$  endlich bleiben oder nicht. Zuerst sei jene  $q(t)$  untersucht, die von der Form

$$q = A \sin(\omega t + \psi) \quad (9)$$

ist. Wird (9) in (8) eingesetzt, so entsteht die Gleichung

$$-\frac{P}{l} + \frac{C}{l^2} - m\omega^2 = 0. \quad (10)$$

Laut des Satzes 2 bleibt die Funktion (9) für  $t \rightarrow \infty$  dann und nur dann endlich, wenn der aus (10) berechnete Wert  $\omega^2$  nichtnegativ reell ist, wenn also

$$P \leq \frac{C}{l} \quad (11)$$

ist. Laut der Bemerkung II sollen wir aber auch den Fall betrachten, wo die

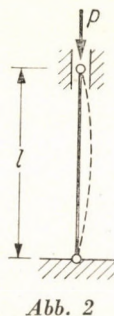
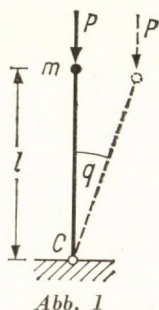
Gleichung (8) eine solche Lösung  $q(t)$  besitzt, welche nicht von der Form (9) ist. Dieser Fall tritt ein, wenn

$$P = \frac{C}{l} \quad (12)$$

ist. In diesem Falle hat die Differentialgleichung (8) die Gestalt  $\ddot{q} = 0$  und ihre Lösung ist

$$q = a + bt. \quad (13)$$

Diese Funktion kann für  $t \rightarrow \infty$  unendlich werden, wenn die Anfangsstörung  $\beta$  vorhanden ist. Mit (9) und (13) haben wir alle Lösungsmöglichkeiten der Gleichung



chung (8) erschöpft. Im Falle  $P = C/l$  kann (9) nicht unendlich werden, aber (13) kann es sein. Wir haben also das Resultat  $P_k = C/l$ .

B. Die statische Methode wird wie folgt angewendet. Der Winkel  $q$  soll jetzt eine ausgelenkte Ruhestellung charakterisieren. Für die ausgelenkte Ruhestellung liefert das Gleichgewichtsgesetz die Gleichung

$$P_k l q - Cq = 0,$$

woraus  $P_k = C/l$  sich ergibt.

C. Die energetische Methode wird wie folgt angewendet. Der Winkel  $q$  soll jetzt eine ausgelenkte Stellung charakterisieren. Dann ist  $L = Pl(1 - \cos q)$  und  $\Delta = Cq^2/2$ . Ist

$$Pl(1 - \cos q) - \frac{Cq^2}{2} \leq 0,$$

so ist die Ruhestellung des belasteten Gebildes  $\frac{\text{stabil}}{\text{instabil}}$ . Diese Ungleichung läßt sich mit  $1 - \cos q = q^2/2$  in der Gestalt

$$\frac{Plq^2}{2} - \frac{Cq^2}{2} \leq 0$$

d. h.  $P \leq C/l$  schreiben. Es ist also  $P_k = C/l$ .



#### 4. Die Herleitung der Formel $P_k = \pi^2 a/l^2$

Diese wohlbekannte Formel gibt die Knicklast für den in der Abb. 2 dargestellten Eulerschen Grundfall an. Die Last ist konservativ und gebunden. Zur Herleitung der Formel kann man daher sowohl die kinetisch-statische, als auch die statische bzw. energetische Methode verwenden. Viele Lehrbücher [4] verwenden die statische Methode. W. MÜLLER verwendet in seinem neuen Buch [5] sowohl die energetische (S. 247), als auch die kinetisch-statische Methode (S. 294). Er weist (S. 294) auf die formale Verwandtschaft der Schwingung mit der Knickung hin. Nach unserer obigen Erörterung handelt es sich nicht nur um eine formale Verwandtschaft, sondern auch um eine kinetisch-statische Definition der Knickkraft d. h. um einen Satz, der uns unter gewissen Bedingungen die kinetisch-statische Methode durch die statische Methode oder durch die energetische Methode zu ersetzen erlaubt.

#### 5. Ein illustratives Beispiel, wo die Last weder konservativ noch gebunden ist

Das ebene Gebilde, das aus zwei gleichen Punktmassen und aus zwei massenlosen starren Stäben besteht, ist in der Abb. 3 dargestellt. Die zwei gelenken sind elastisch und jedes ist durch die Federkonstante  $C$  charakteri-

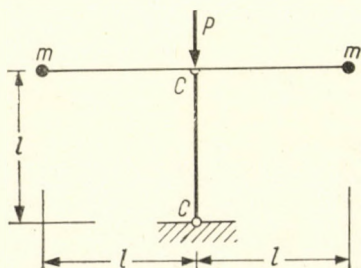


Abb. 3

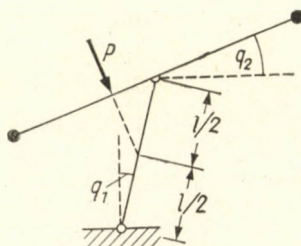


Abb. 4

siert. Die Gewichte sollen außer acht gelassen werden. Die einzige äußere Kraft ist die Last  $P$ , die auf den oberen Stab immer senkrecht auf ihn angreift und auf den Mittelpunkt des unteren Stabes gerichtet ist. Eine ausgelenkte Stellung ist in der Abb. 4 veranschaulicht. Man soll für die in Abb. 3 dargestellte belastete Ruhestellung die Knicklast  $P_k$  berechnen.

Da die Last nichtkonservativ und nichtgebunden ist, ist die Anwendung der kinetisch-statischen Methode statthaft. Von der Anwendung der statischen Methode, die wir hier nur zum lehrreichen Vergleich anführen, kann man in diesem Beispiel kein richtiges Resultat erwarten. Die Anwendung der ener-

getischen Methode ist hier nicht möglich, denn  $L$  hängt jetzt nicht nur von der Stellung, sondern auch vom Weg ab.

A. Die kinetisch-statische Methode wird wie folgt angewendet. Wir benutzen die Gleichungen, die sich auf Grund des Beschleunigungsgesetzes

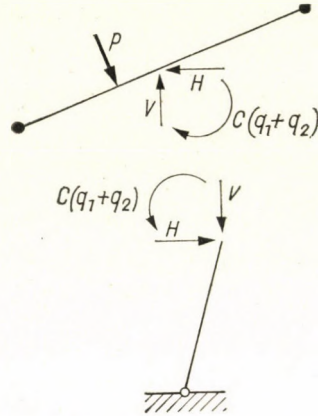


Abb. 5

für die beiden Teile (Abb. 5) anschreiben lassen. Aus diesen Gleichungen eliminieren wir  $H$  und  $V$ . In dieser Weise erhalten wir die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} 2 ml^2 \ddot{q}_1 &= (Pl - 2C) q_1 + (Pl - C) q_2, \\ 2 ml^2 \ddot{q}_2 &= \left(\frac{Pl}{2} - C\right) q_1 + \left(\frac{Pl}{2} - C\right) q_2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Auf diese Gleichungen wenden wir den Satz 1 an. Der Ansatz

$$q_1 = A_1 \sin(\omega t + \psi), \quad q_2 = A_2 \sin(\omega t + \psi) \quad (15)$$

führt zu homogenen linearen Gleichungen, aus welchen

$$\begin{vmatrix} -Pl + 2C - 2ml^2\omega^2 & -Pl + C \\ -\frac{Pl}{2} + C & -\frac{Pl}{2} + C - 2ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

das heißt

$$(2ml^2\omega^2)^2 + \left(\frac{3}{2}Pl - 3C\right) 2ml^2\omega^2 - \frac{PlC}{2} + C^2 = 0 \quad (16)$$

folgt. Laut des Satzes 2 bleiben die Funktionen (15) für  $t \rightarrow \infty$  dann und nur

dann endlich, wenn der aus (16) berechnete Wert  $\omega^2$  nichtnegativ reell ist,\* wenn also

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}Pl - 3C &\leq 0, \\ -\frac{PlC}{2} + C^2 &\geq 0, \\ \left(\frac{3}{2}Pl - 3C\right)^2 - 4\left(-\frac{PlC}{2} + C^2\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

ist. Aus diesen Ungleichungen folgt

$$-\infty \leq P \leq \frac{10C}{9l}. \quad (17)$$

Laut der Bemerkung II sollen wir im klaren darüber sein, ob die Differentialgleichungen (14) auch eine solche Lösung haben, welche nicht von der Form (15) ist. Deshalb eliminieren wir  $q_2$  bzw.  $q_1$  aus (14), wodurch eine Differentialgleichung vierter Ordnung für  $q_1$  und eine für  $q_2$  entsteht. Wir fassen die dazu gehörigen charakteristischen Gleichungen ins Auge, und wir finden, daß die Differentialgleichungen vierter Ordnung mehrfache Wurzeln dann und nur dann besitzen, wenn  $P = \frac{10C}{9l}$  oder  $P = \frac{2C}{l}$  ist. Die Differentialgleichungen (14) können also eine Lösung, welche nicht von der Form (14) ist, höchstens dann haben, wenn  $P = \frac{10C}{9l}$  oder  $P = \frac{2C}{l}$  ist. Aus dieser Feststellung und aus (17) folgt, daß  $P_k = \frac{10C}{9l}$  ist, wenn der Pfeilsinn der Last nach Abb. 3 und 4 ist, und die Ruhestellung für jeden Lastwert  $P$  stabil ist, wenn der Pfeilsinn entgegengesetzt ist.

B. Die statische Methode wird wie folgt angewendet. Die Winkel  $q_1$  und  $q_2$  sollen jetzt eine ausgelenkte Ruhestellung charakterisieren. Für die ausgelenkte Ruhestellung liefert das Gleichgewichtsgesetz die folgenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} P_k \frac{l}{2} (q_1 + q_2) - Cq_1 &= 0, \\ -P_k \frac{l}{2} (q_1 + q_2) + C(q_1 + q_2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

\* Hier beziehen wir uns auf den Hilfssatz: »Die beiden Wurzeln der Gleichung  $x^2 + bx + c = 0$  sind dann und nur dann nichtnegativ reell, wenn  $b \leq 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $b^2 - 4c \geq 0$  ist.«

die die Momentensumme für den oberen Stab und für die beiden Stäbe ausdrücken. Diese Gleichungen folgen selbstverständlich auch unmittelbar aus (14), wenn dort  $q_1 = \text{Konst.}$ ,  $q_2 = \text{Konst.}$ ,  $P = P_k$  gesetzt wird. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gleichungen (18) nicht nur die Lösung  $q_1 = q_2 = 0$  besitzen, ist

$$\begin{vmatrix} P_k l/2 & P_k l/2 - C \\ -P_k l/2 + C & -P_k l/2 + C \end{vmatrix} = 0,$$

woraus das falsche Resultat  $P_k = 2 C/l$  folgt.

## 6. Das Becksche Stabilitätsproblem

Das Becksche Stabilitätsproblem ist das folgende: Das ebene elastische Gebilde ist ein an einem Ende eingespannter schlanker elastischer Stab von

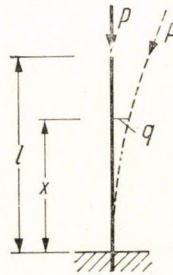


Abb. 6

konstantem Querschnitt. Er ist durch eine am freien Ende stets in der Richtung der Tangente angreifende Druckkraft  $P$  belastet (Abb. 6). Das Gewicht soll außer acht gelassen werden. Man soll die Knicklast  $P_k$  berechnen.

Die Last ist hier, wie man sieht, gebunden aber nicht konservativ.

Da die Last nichtkonservativ ist, ist die Anwendung der kinetisch-statischen Methode statthaft. Die Anwendung der statischen Methode [7, 8] führt zu  $P_k = \infty$ , weil eine ausgelenkte Ruhestellung überhaupt nicht vorstellbar ist (ein  $\frac{\text{positives}}{\text{negatives}}$  Biegemoment kann keine  $\frac{\text{negative}}{\text{positive}}$  Krümmung hervorrufen). Das Resultat  $P_k = \infty$  ist aber offenbar falsch. Die Anwendung der energetischen Methode ist hier nicht möglich, denn  $L$  hängt jetzt nicht nur von der Stellung, sondern auch vom Weg ab. Die richtige Lösung des Problems, die also auf der Anwendung der kinetisch-statischen Methode beruht, rührt von M. BECK [2] her und wird wie folgt skizziert.

Jetzt ist die Masse kontinuierlich verteilt. Daher wird das Verfahren, das in den Absätzen 3 A und 5 A auf aus Punktmassen bestehende Gebilde angewendet war, sinngemäß verfolgt. Das Beschleunigungsgesetz (d. h. das Gleichgewichtsgesetz der wirklichen Kräfte und der Trägheitskräfte) und die bekannte Differentialgleichung der elastischen Linie (d. h. das Elastizitätsgesetz des Stabes) liefern die Gleichung

$$aq'' = P[q(l,t) - q'(l,t)(l-x) - q] - \int_x^l \ddot{q}(\xi,t)(\xi-x)\rho F d\xi, \quad (19)$$

wobei  $a$  die Biegesteifigkeit,  $\rho$  die Dichte,  $F$  die Querschnittsfläche ist.  $a$ ,  $\rho$ ,  $F$  sind also Konstanten. Die Lösungen  $q(x,t)$  der Gleichung (19) müssen die Randbedingungen

$$q(0,t) = q'(0,t) = q''(l,t) = q'''(l,t) = 0 \quad (20)$$

erfüllen. Aus (19) folgt durch zweimalige Differentiation nach  $x$

$$a q^{IV} + Pq'' + \rho F \ddot{q} = 0. \quad (21)$$

Der Ansatz

$$q(x,t) = X(x) \sin(\omega t + \psi) \quad (22)$$

führt zur Differentialgleichung

$$a X^{IV} + PX'' - \rho F \omega^2 X = 0 \quad (23)$$

mit den Randbedingungen

$$X(0) = X'(0) = X''(l) = X'''(l) = 0. \quad (24)$$

Die zu (23) gehörige charakteristische Gleichung ist  $a r^4 + Pr^2 - \rho F \omega^2 = 0$ ,  
woraus

$$r_1 = \sqrt{-\frac{P}{2} + \sqrt{(P/2)^2 + a\omega^2}}, \quad r_2 = i \sqrt{\frac{P}{2} + \sqrt{(P/2)^2 + a\omega^2}} = i \bar{r}_2$$

folgt, mit den Abkürzungen  $p = P/a$ ,  $a = \rho F/a$ . Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (23) erscheint in der Form

$$X(x) = A \cosh r_1 x + B \sinh r_1 x + C \cos \bar{r}_2 x + D \sin \bar{r}_2 x. \quad (25)$$

Wird diese Funktion in (22) eingeführt, und wird dann (22) in (19) und (20) eingesetzt, so erhält man homogene lineare Gleichungen für  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese homogenen linearen Gleichungen nicht nur die Lösung  $A = B = C = D = 0$  besitzen, ist

$$2a\omega^2 + p^2 + 2a\omega^2 \cosh r_1 l \cos \bar{r}_2 l + \sqrt{a\omega^2} p \sinh r_1 l \sin \bar{r}_2 l = 0. \quad (26)$$

Wir wollen im Sinne der Bemerkung II nicht vergessen, zu kontrollieren, ob alle Lösungsmöglichkeiten der Gleichung (19) durch die Ansätze (22) und (25) erschöpft sind. Eine leichte Überlegung zeigt, daß es noch einen Ansatz gibt, der der Gleichung (19) genügt. Er lautet

$$q(x,t) = \left( A + Bx + C \cos \sqrt{\frac{P}{a}} x + D \sin \sqrt{\frac{P}{a}} x \right) (1 + Et). \quad (27)$$

Dieser Ansatz erfüllt die Randbedingungen (20) nur dann, wenn  $A = B = C = D = 0$  ist. Daher fällt der Ansatz (27) weg. Es bleibt also nur die Gleichung (26), woraus  $P_k$  berechnet werden soll.

Die Gleichung (26) ist transzendent. Sie ordnet jedem Wert von  $P$  unendlich viele Werte von  $\omega^2$  zu. Die zu  $P = 0$  gehörigen Werte sind  $\omega^2 = \frac{1,875^4}{a l^4}$ ,  $\frac{4,694^4}{a l^4}$ ,  $\frac{7,855^4}{a l^4}$ , ..., also die Eigenfrequenzquadrate des schwingenden unbelasteten Stabes [6], die sämtlich nichtnegativ reell sind. Nimmt  $P$  von Null an zu, so ist  $P_k$  dann erreicht, wenn  $\omega^2$  zum erstenmal vom nichtnegativen reellen Wert in einem negativen oder nichtreellen Wert übergeht. In dieser Weise führt die Berechnung zu dem Resultat  $P_k = 20,05 a/l^2$ , wenn die Last eine tangentielle Druckkraft ist (Abb. 6). Ferner ergibt sich, daß die Ruhestellung für jeden Lastwert  $P$  stabil ist, wenn die Last eine tangentielle Zugkraft ist.

## 7. Das Gegenstück zum Beckschen Stabilitätsproblem

Das Stabilitätsproblem, das das Gegenstück zum Beckschen Stabilitätsproblem darstellt, ist das folgende: Das ebene elastische Gebilde (Abb. 7) besteht aus einem an einem Ende eingespannten schlanken Stab von konstantem Querschnitt und aus einem zu ihm (rechtwinklig an seinem freien Ende) befestigten masselosen starren Stab. Die Achse der zweiten ist also stets normal zur elastischen Linie der ersten. Die Gewichte sollen außer acht gelassen werden. Die einzige äußere Kraft ist die Last  $P$ , die auf den masselosen starren Stab angreift, und ihre Wirkungslinie stets in die  $x$ -Achse fällt. Eine ausgeglichene Ruhestellung ist in Abb. 8 veranschaulicht. Man soll für die in Abb. 7 dargestellte Ruhestellung die Knicklast  $P_k$  berechnen.

Die Last ist hier, wie man sieht, konservativ aber nicht gebunden. Aus diesem Grunde betrachten wir dieses Stabilitätsproblem als Gegenstück zum Beckschen Stabilitätsproblem.

Wir gehen von denselben Überlegungen aus, wie in Abschnitt 6. Die ent-

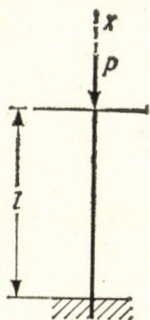


Abb. 7

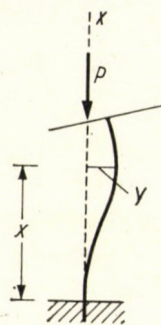


Abb. 8

sprechenden Gleichungen wollen wir hier mit je einem Stern bezeichnen. Statt  $q(x, t)$  schreiben wir hier  $y(x, t)$ .

$$ay'' = -Py - \int_x^l \ddot{y}(\xi, t) (\xi - x) \rho F d\xi, \quad (19^*)$$

$$y(0) = y'(0) = ay''(l) + Py(l) = ay'''(l) + Py'(l) = 0, \quad (20^*)$$

$$ay^{IV} + Py'' + \rho F \ddot{y} = 0, \quad (21^*)$$

$$y(x, t) = U(x) \sin(\omega t + \psi), \quad (22^*)$$

$$aU^{IV} + PU'' - \rho F \omega^2 U = 0, \quad (23^*)$$

$$U(0) = U'(0) = aU''(l) + PU(l) = aU'''(l) + PU'(l) = 0. \quad (24^*)$$

Wir definieren eine Funktion  $X(x)$  mittels der Funktion  $U(x)$  wie folgt:

$$X(x) = aU''(l-x) + PU(l-x). \quad (28)$$

Hieraus erhalten wir durch Differentiationen die weiteren Formeln

$$X'(x) = -aU'''(l-x) - PU'(l-x), \quad (29)$$

$$X''(x) = aU^{IV}(l-x) + PU''(l-x) = \rho F \omega^2 U(l-x), \quad (30)$$

$$X'''(x) = -aU^V(l-x) - PU'''(l-x) = -\rho F \omega^2 U'(l-x), \quad (31)$$

$$X^{IV}(x) = aU^{VI}(l-x) + PU^{IV}(l-x) = \rho F \omega^2 U''(l-x). \quad (32)$$

Die drei Gleichungen (28), (30), (32) multiplizieren wir mit  $-\varrho F \omega^2$  bzw.  $P$  bzw.  $\alpha$ , und dann addieren wir diese drei Gleichungen. In dieser Weise entsteht die Differentialgleichung

$$\alpha X^{IV} + PX'' - \varrho F \omega^2 X = 0. \quad (33)$$

Ferner folgt aus (28), (29), (30), (31) mit Rücksicht auf (24\*), daß die Randbedingungen

$$X(0) = X'(0) = X''(l) = X'''(l) \quad (34)$$

bestehen. Wir gelangen zur Eigenwertaufgabe (33), (34). Diese ist aber dieselbe, wie die Eigenwertaufgabe (23), (24). Daher benützen wir hier das von M. BECK [2] berechnete Resultat unseres Abschnittes 6. Für den in der Abb. 7 dargestellten Fall ist also  $P_k = 20,05 a/l^2$ , und die Ruhestellung ist für jeden Lastwert  $P$  stabil, wenn der Pfeil der Lastkraft eingengesetzt ist.

### 8. Ein Beispiel, wo die Ruhestellung des gezogenen Stabes instabil ist

Das ebene elastische Gebilde (Abb. 9) besteht aus einem an einem Ende eingespannten schlanken elastischen Stab von konstantem Querschnitt und

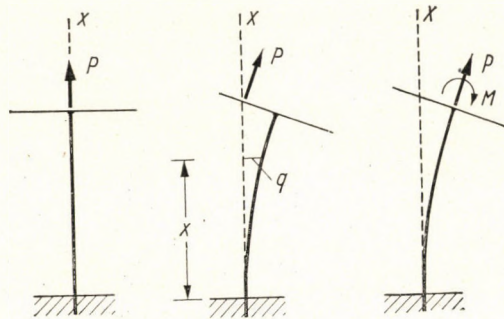


Abb. 9, 10, 11

aus einem zu ihm (rechtwinklig, an seinem freien Ende) befestigten masselosen starren Stab. Die Achse der zweiten ist also stets normal zur elastischen Linie der ersten. Die Gewichte sollen außer acht gelassen werden. Die einzige äußere Kraft ist die Last  $P$ , die auf den masselosen starren Stab (immer senkrecht auf ihm) angreift, und ihr Angriffspunkt stets in die  $x$ -Achse fällt. Eine ausgelenkte Ruhestellung ist in Abb. 10 veranschaulicht. Man soll für die in der Abb. 9 dargestellte Ruhestellung die Knicklast  $P_k$  berechnen.



Die gegebene Last  $P$  (Abbildungen 9 und 10) ist offenbar sowohl statisch als auch kinetisch der Dyname  $P$ ,  $M$  äquivalent (Abb. 11). Diese Dyname hat die Komponenten  $P_x = P$ ,  $P_y = P \chi$ ,  $M_z = Pv$ , wobei durch  $u$ ,  $v$ ,  $\chi$  die Verschiebung und die Verdrehung des freien Endes des elastischen Stabes charakterisiert sind. Man erkennt, daß  $F = Pu + Pv \chi$  eine solche Funktion ist, aus welcher  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $M_z$  sich gemäß der Formeln (7) berechnen lassen. Die Last ist also konservativ. Ferner ist sie gebunden. Daher darf die statische Methode angewendet werden. Dies geschieht wie folgt.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet

$$\alpha q'' = P_k [q + q'(l) (l - x)]. \quad (35)$$

Die Randbedingungen sind

$$q(0) = q'(0) = \alpha q''(l) - P_k q(l) = q'''(l) = 0. \quad (36)$$

Aus (35) folgt durch zweimalige Differentiation nach  $x$

$$\alpha q^{IV} - P_k q'' = 0. \quad (37)$$

Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$q(x) = A \cosh \sqrt{\frac{P_k}{\alpha}} x + B \sinh \sqrt{\frac{P_k}{\alpha}} x + Cx + D. \quad (38)$$

Wird (38) in (35) und (36) eingeführt, so ergeben sich homogene lineare Gleichungen für  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Gleichungen nicht nur die Lösung  $A = B = C = D = 0$  besitzen, ist

$$\sqrt{\frac{P_k}{\alpha}} l \sinh \sqrt{\frac{P_k}{\alpha}} l - \cosh \sqrt{\frac{P_k}{\alpha}} l = 0. \quad (39)$$

Hieraus folgt  $P_k = 1,44 a/l^2$ . Dies ist also die Knicklast, wenn die Last eine Zugkraft nach Abbildungen 9 und 10 ist.

Ist in diesem Stabilitätsproblem die Last  $P$  eine Druckkraft (Abb. 12 und 13), so gelangt man anstatt der Gleichung (39) zur Gleichung

$$\sqrt{\frac{P_k}{\alpha}} l \sin \sqrt{\frac{P_k}{\alpha}} l + \cos \sqrt{\frac{P_k}{\alpha}} l = 0, \quad (40)$$

woraus  $P_k = 7,82 a/l^2$  folgt.

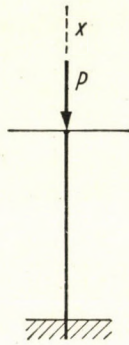


Abb. 12

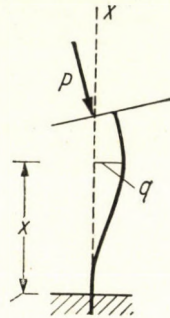


Abb. 13

### 9. Kritische Bemerkung über die Definition der Stabilität der Ruhestellung eines elastischen Gebildes

Wir haben schon erwähnt, daß die Definition der Stabilität der Ruhestellung eines elastischen Gebildes mehr oder minder willkürlich ist. Der kinetisch-statischen Methode wurde in diesem Aufsatz die *Kleinsche Definition* zugrundegelegt. Eine *engere Definition* ist die folgende: Ist die Ruhestellung eines elastischen Gebildes eine solche, daß jede hinreichend kleine Störung nur zu einer Bewegung in der nächsten Umgebung der Ruhestellung führt, so heißt sie stabil. Ist die Ruhestellung eines elastischen Gebildes eine solche, daß nicht mehr jede hinreichend kleine Störung nur zu einer Bewegung in der nächsten Umgebung der Ruhestellung führt, so heißt sie instabil. (Wenn also nicht nur die gegebene Ruhestellung, sondern in ihrer nächsten Umgebung auch eine ausgelenkte Ruhestellung existiert, so soll die gegebene Ruhestellung instabil heißen.)

Um zu illustrieren, daß diese Definition zu eng ist und deshalb in gewissen Fällen zu einem falschen Resultat führt, sei das folgende Beispiel erwähnt: Im in Abb. 1 dargestellten Fall soll eine Reibung zwischen der Punktmasse und der festen Ebene (Zeichenebene) herrschen und die Last sei  $P < C/l$ . Diese Ruhestellung ist laut der bloßen Anschauung stabil, aber laut der engeren Definition ist sie als instabil zu bezeichnen.

Schließlich erwähnen wir, daß in den in unseren Abschnitten 3 bis 8 behandelten Beispielen sowohl die Kleinsche Definition, als auch die engere Definition zu demselben Wert  $P_k$  führt.

#### SCHRIFTTUM

1. ZIEGLER, H.: Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. Ing.-Arch. 20, 49 (1952).  
ZIEGLER, H.: On the concept of elastic stability, Advances in Appl. Mech. 4, (Academic Press, New York 1956).
2. BECK, M.: Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, ZAMP, 3, 225 (1952).

3. LANGHAAR, H. L.: General theory of buckling, Appl. Mech. Rev. 11, 585 (1958).
4. Siehe z. B. das Buch: F. CHMELKA und E. MELAN, Einführung in die Festigkeitslehre (Springer, Wien 1948) S. 252.
5. MÜLLER, W.: Theorie der elastischen Verformung (Geest und Portig, Leipzig 1959).
6. Siehe z. B. das Buch: I. SZABÓ, Höhere technische Mechanik (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1956) S. 78.
7. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (Geest und Portig, Leipzig 1949) S. 41.
8. PFLÜGER, A.: Die Stabilitätsprobleme der Elastostatik (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950) S. 217.

### ZUSAMMENFASSUNG

M. Beck hat das Stabilitätsproblem gelöst, das darin besteht, daß der kritische Wert jener Drucklast berechnet werden soll, welche an das freie Ende des einseitig eingespannten Stabes stets tangential angreift. Die Lösung dieses Problems wird hier angeführt und die dazu notwendige Methode wird erläutert. Vermittels derselben Methode werden einige verwandte Probleme gelöst. Eines von diesen führt zu dem merkwürdigen Ergebnis, daß es gewisse Zuglast gibt, wofür die Ruhestellung des Stabes instabil sein kann.

### THE STABILITY PROBLEM OF BECK AND RELATED PROBLEMS

J. BARTA

#### SUMMARY

M. BECK has solved the buckling problem which consists in finding the critical load, if the load acts on the free end of a bar the other end of which is built in. The solution of this problem is recapitulated and the basic principles of the employed method are developed. By means of the same method, several related problems are solved. One of these illustrates that, under the action of certain tensional load, the equilibrium of the bar may be unstable.

### LE PROBLEME DE STABILITÉ DE BECK ET D'AUTRES PROBLEMES

J. BARTA

#### RÉSUMÉ

M. BECK a calculé la valeur critique de la charge compressive agissant tangentiellement sur l'extrémité libre d'une barre, dont l'autre extrémité est encastrée. L'auteur présente la solution de ce problème, et interprète la méthode employée. Quelques autres problèmes de même genre sont résolus par la même méthode. L'un de ceux-ci aboutit au résultat, que l'équilibre de la barre peut devenir instable sous l'action de certaines charges de traction.

### ПРОБЛЕМЫ СТАБИЛЬНОСТИ БЕКА И ПРОЧИЕ ПРОБЛЕМЫ

И. БАРТА,

#### РЕЗЮМЕ

М. Бек решил задачу стабильности балки, закрепленной на одном конце и на которую на другом конце действует тангенциальная нагрузка. Излагается решение этой задачи. Используя эти же принципы, решается еще несколько подобных задач. Одна из них дает интересный результат: в состоянии покоя балки под влиянием определенной нагрузки являются неустойчивыми.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1960. VIII. 9. — Terjedelem: 23 (A/5) ív 115 ábra, 1 melléklet

---

1960. 51868 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

## INDEX

- Csonka, P.* : The Extension of the Application-range of Macaulay's Method — Die Erweiterung des Anwendungsgebiets des Macaulay'schen Verfahrens — L'extension du champ d'application du procédé de Macaulay — *Чонка, П.* : Распространение области применения метода Мэколи ..... 3
- Szöke, B.* : One Way to Cut down Power Requirement for Flour Milling — Ein Weg zur Minderung des Kraftbedarfes des Mahlens — Un moyen de réduire l'énergie nécessaire pour la mouture — *Сёке, Б.* : Одна из возможностей понижения энергорасхода помола ..... 13
- Geszi, P. O.* : The Effect of Axial Conductance in the Corona Envelope upon the Inductance of the Conductor in the Presence of a Travelling Wave — Die Wirkung der Axialleitung in der Koronahülle auf die Induktivität des Leiters in der Anwesenheit von Wanderwellen — Effet de la conduite axiale sur l'inductivité du conducteur, en présence d'une onde progressive dans l'enveloppe corona — *Гести, П. О.* : Влияние аксиальной проводимости на индуктивность проводника в присутствии бегущей волны в чехле короны ..... 19
- Rohonyi, V.* : Angenäherte Berechnung der Starrheit gerader Kegelaradzähne — Approximate Calculation of the Stresses in Straight Bevel Gear Teeth — Calcul approché de la rigidité des dents des engrenages coniques à denture droite — *Рохони, В.* : Приближенный расчет напряжения в прямых зубьев конических шестерен ... 25
- Fodor, Gy.* : A. C. Impedance of Laminated Conductors — Die Wechselstromimpedanz von geschichteten Leitern — Impédance à courant alternatif des conducteurs stratifiés — *Фодор, Д.* : Импеданс переменного тока многослойных проводников 39
- Vékássy, A.* : Examination of the Cover-factor and Specific Weight of Weft-knitted or Looped Basis Texture Based on the Exact Value of the Loop Length — Untersuchung des Dichtigkeit-Faktors und des spezifischen Gewichtes der Schußsystem-Strick- und Wirkwaren auf Grund des exakten Wertes der Maschenlänge — Analyse du facteur de densité et du poids des tricots de fond à système de trame, sur base de la valeur exacte de la longueur des mailles — *Векаши, А.* : Исследование показателя плотности и удельного веса вязанного и плетеного основного полотна уточной системы, исходя из точного значения длины петли ..... 69
- Szöke, B.* : The Economics of Machine Tool Efficiency — Die wirtschaftliche Untersuchung des Wirkungsgrades der Werkzeugmaschinen — Aspects économiques du rendement des machines-outils — *Сёке, Б.* : Экономический анализ к. п. д. в случае металлорежущих станков ..... 103
- Szidarovszky, J.* : Die Beanspruchung von Stäben mit veränderlichem Querschnitt auf Biegung bei gleichzeitigem Druck — Stress Analysis of an Axially Compressed Bar under Lateral Loading — Efforts dans une barre de section variable, soumise à la flexion et compression simultanée — *Сидаровски, Я.* : Нагрузка изогнутых и сжатых стержней непостоянного сечения ..... 125
- Корани, Г. и Ач, М.* : Измерение силы адгезии между поверхностью стекла и стеклянным порошком — *Korányi, G.—Ács, M.* : Messung der Adhäsion zwischen Glasoberfläche und Glaspulver — Measurement of the Adhesion Force between Glass Surface and Glass Powder — Mesure de la force d'adhésion entre la surface du verre et la poudre de verre ..... 139

<i>Réczey, G.</i> : Methodik zur Ausarbeitung einer Mechanisierung der Bauindustrie, durch die optimale Leistungen erzielt werden — Methods for Developing Optimum-efficiency Mechanization in the Building Industry — Méthodes de développement d'une mécanisation garantissant le rendement optimum dans l'industrie du bâtiment — Рецеу, Г.: Методика создания в строительной промышленности механизации, обеспечивающей максимальную производительность .....	147
<i>Apor, K.</i> : Роль лемнискаты в установке поворотов при регулировании рек — Apor, K.: Die Rolle der Lemniskate bei der Absteckung der Krümmungen für Flußregulierungen — The Role of the Lemniscate in Laying Out Bends for River Regulations — Le rôle de la lemniscate dans le jalonnement des courbes de régularisation des rivières .....	175
<i>Boldizsár, T.</i> : Calculation of the Efficiency of Mine Air Refrigeration in Dry Metal Mines — Berechnung des Wirkungsgrades der künstlichen Kühlung in trockenen Erzbergwerken — Calcul du rendement de la réfrigération dans les mines de minerais secs — Болдизсар, Т.: Расчет эффективности искусственного охлаждения на сухих рудничных шахтах .....	193
<i>Bosznay, Á.</i> : Über eine mögliche Ableitung der Falkschen Transformation — A Possible Deduction of the Falk Transformation — Une déduction possible des transformations de Falk — Боснау, А.: Один возможный вариант вывода трансформации Фалька .....	203
<i>Bosznay, Á.</i> : Über die Anwendung der Falkschen Transformation auf Biegeschwingungen ausführende Schwingungssysteme — Application of the Falk Transformation to an Oscillating System Carrying out Flexural Oscillation — L'utilisation des transformations de Falk pour les systèmes d'oscillations dues à des vibrations de flexion — Боснау, А.: Применение трансформации Фалька к колебательной системе, выполняющей изгибательное колебание .....	217
<i>Valenta, J.</i> : État élastique des récipients cylindriques à couches multiples embattues à chaud — Spannungszustand von zylindrischen, mehrschichtigen, warm zusammengepreßten Behältern — Distribution of Elastic Stresses in Cylindrical, Multi-layer Vessels, Assembled at Higher Temperature — Валента, Й.: Состояние упругих напряжений спрессованных в горячем состоянии многослойных цилиндрических сосудов .....	227
<i>Barta, J.</i> : Das Becke'sche Stabilitätsproblem und verwandte Probleme — The Stability Problem of Beck and Related Problems — Le problème de stabilité de Beck et d'autres problèmes—Барта, Й.: Проблемы стабильности Бека и прочие проблемы .....	241

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

*Acta Technica*

*Budapest V., Nádor u. 7.*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.





ACTA  
TECHNICA  
ACADEMIAE SCIENTIARUM  
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS  
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,  
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT  
A. GELEJI

TOMUS XXXI

FASCICULI 3—4



1960

ACTA TECHN. HUNG.

# ACTA TECHNICA

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V. ALKOTMÁNY UTCA 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

*Acta Technica*

*Budapest V. Nádor utca 7.*

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V. Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I. Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

---

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

*Acta Technica*

*Budapest V. Nádor utca 7.*

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I. Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

# NATURAL VIBRATION OF A BAR UNDER AXIAL FORCE, TAKING THE EFFECT OF SHEAR IN CONSIDERATION

J. SZIDAROVSKY

"UVATERV" HIGHWAY AND RAILROAD PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received August 29, 1958]

## 1. Introduction

When the angular frequency of a vibrating elastic bar is determined, the effect of shear force is not taken into account.

In the following the natural modes of lateral vibration of an axially loaded two-hinged bar with a constant section will be determined with due regard to the effect of shear.

In the present investigation the shear force and the force of inertia are to be determined on the bar deflected by the bending moment and shear force, that is to say the investigation is performed on the shape of the deflected bar.

The derived formula gives the relation between the natural frequency and the critical force.

The method of investigation may be applied for other boundary conditions, too.

## 2. State of dynamic equilibrium

The external forces acting on a particle  $dx$  along length of the bar, are in equilibrium with the internal forces acting on the boundary of this particle. This statement is valid only for statical state, but if the force of inertia is taken as an external force according to d'Alembert's principle, in this case the statement, as above, is valid for the vibrating state, too.

When in equilibrium the sum of projection of forces is zero. This statement may be applied to a particle, and so the sum of the vertical projection of external forces acting on this particle, and of the alteration in shear force along the particle, is zero.

$\mu$  is the mass of a unit length of the bar,  $y$  is the vertical deflection, so the force of inertia along length  $dx$  — according to d'Alembert's principle is

$$dr_{\mu} = - \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} y dx. \quad (2,1)$$

Another external force is the  $P$  axial compressive force resulting in bending moment  $Py$ . The same bending moment is produced by a distributed force

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} Py,$$

from which the external force acting on this particle is

$$dr_P = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} Py dx. \quad (2,2)$$

The alteration in shear force along length  $dx$  calculated from total bending moment  $M$ , containing the bending effect of axial force  $P$ , is

$$dr_M = +\frac{\partial^2}{\partial x^2} M dx. \quad (2,3)$$

In this calculation the effect of rotary inertia is neglected.

The sum of these forces, as above, is zero. After dividing it with  $dx$ , the

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} y - \frac{\partial^2}{\partial x^2} M + \frac{\partial^2}{\partial x^2} Py = 0 \quad (2,4)$$

partial differential equation is produced.

The deflection owing to bending moment and shear force is

$$y = -\iint \frac{M}{EI} dx dx + \int \frac{T}{EA} dx \quad (2,5)$$

in which the total shear force is

$$T = \frac{\partial}{\partial x} M. \quad (2,6)$$

In these  $E$  is Young's modulus,  $I$  the gross secondary (inertia) moment and  $A$  the equivalent area. For solid beams

$$A = \frac{GF}{E\varrho}$$

where  $G$  is torsional modulus,  $F$  is the sectional gross area and  $\varrho$  is a factor of shape. For web-plate girders

$$A = \frac{GF_w}{E}$$

where  $F_w$  is the gross area of web-plate.

### 3. Solution of the differential equation for constant section

$\mu$ ,  $P$ ,  $I$ ,  $E$  and  $A$  are constant along the whole span of the bar. The differential equation (2,4) is solved by separating the variables. The parameter

$$- \iint M dx dx = w(x) v(t) \quad (3,1)$$

is applied, where  $w(x)$  is a function of  $x$  only and  $v(t)$  is that of  $t$  only.

Using (2,5), (2,6) and (3,1), the differential equation (2, 4) turns into

$$w^{IV} v \left(1 - \frac{P}{EA}\right) + \frac{P}{EI} w^{II} v + \frac{\mu}{EI} w v^{II} - \frac{\mu}{EA} w^{II} v^{II} = 0,$$

from which the separated differential equation

$$\frac{w^{IV} \left(1 - \frac{P}{EA}\right) + \frac{P}{EI} w^{II}}{\frac{\mu}{EI} w - \frac{\mu}{EA} w^{II}} = - \frac{v^{II}}{v} = \omega^2 = \text{const} \quad (3,2)$$

is produced.

The left side of this equality is a function of  $x$  only, the right side is that of  $t$  only, so the value of this equality  $\omega^2$ , is constant.

From (3,2)

$$w^{IV} \left(1 - \frac{P}{EA}\right) + w^{II} \left(\frac{P}{EI} + \frac{\mu\omega^2}{EA}\right) - w \frac{\mu\omega^2}{EI} = 0. \quad (3,3)$$

The solution of this linear differential equation of the fourth order is

$$w = B_1 \text{sh } \kappa_1 x + B_2 \text{ch } \kappa_1 x + B_3 \sin \kappa_2 x + B_4 \cos \kappa_2 x, \quad (3,4)$$

in which

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \sqrt{c^4 + k^4 - c^2}, \\ \kappa_2 &= \sqrt{c^4 + k^4 + c^2}, \end{aligned} \quad (3,5)$$

moreover,

$$\begin{aligned} 2c^2 &= \frac{\frac{P}{EI} + \frac{\mu\omega^2}{EA}}{1 - \frac{P}{EA}}, \\ k^4 &= \frac{\mu\omega^2}{EI \left(1 - \frac{P}{EA}\right)}. \end{aligned} \quad (3,6)$$

From equality (3,2)

$$v'' + \omega^2 v = 0.$$

The solution of this homogeneous linear differential equation of the second order is

$$v = D \sin(\omega t + \alpha). \quad (3,7)$$

So  $\omega$  is the natural frequency.

From relations (3,1), (3,4) and (3,7) the bending moment

$$M(x, t) = - (B_1 \kappa_1^2 \operatorname{sh} \kappa_1 x + B_2 \kappa_1^2 \operatorname{ch} \kappa_1 x - B_3 \kappa_2^2 \sin \kappa_2 x - B_4 \kappa_2^2 \cos \kappa_2 x) D \sin(\omega t + \alpha) \quad (3,8)$$

is easily to be derived.

And from Eqs. (2,4), (2,5), (3,1), (3,4) and (3,7) the deflection-line

$$y(x, t) = \left[ B_1 \left( -\frac{1}{EI} + \frac{\kappa_1^2}{EA} \right) \operatorname{sh} \kappa_1 x + B_2 \left( -\frac{1}{EI} + \frac{\kappa_1^2}{EA} \right) \operatorname{ch} \kappa_1 x + B_3 \left( -\frac{1}{EI} - \frac{\kappa_2^2}{EA} \right) \sin \kappa_2 x + B_4 \left( -\frac{1}{EI} - \frac{\kappa_2^2}{EA} \right) \cos \kappa_2 x \right] D \sin(\omega t + \alpha) \quad (3,9)$$

is produced.

#### 4. Natural frequency of a two hinged bar

At places  $x = 0$  and  $x = l$  of a two hinged bar the vertical deflection and the bending moment vanish (Fig. 1). So the boundary conditions are

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0, \\ y(l, t) &= 0, \\ M(0, t) &= 0, \\ M(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4,1)$$

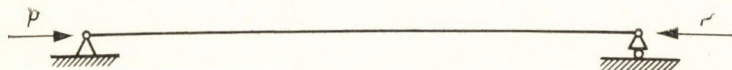


Fig. 1

The symbols

$$\left(-\frac{1}{EI} + \frac{\kappa_1^2}{EA}\right)M + EIy = U_1 \quad (4,2)$$

and

$$\left(-\frac{1}{EI} - \frac{\kappa_2^2}{EA}\right)M - EIy = U_2 \quad (4,3)$$

are used.

After having substituted these into Eqs. (3,8) and (3,9), the values obtained from boundary conditions at  $x = 0$  are zero both for  $U_1$  and  $U_2$ , thus  $B_2 = B_4 = 0$ .

Values of these are zero at  $x = l$ , too, thus

$$B_3 \sin \kappa_2 l = 0,$$

$$B_1 \operatorname{sh} \kappa_1 l = 0.$$

As  $\kappa_1 l \neq 0$ ,  $B_1 = 0$ , for the non-trivial solution

$$\sin \kappa_1 l = 0$$

from which

$$\kappa_2 = \frac{\nu\pi}{l}.$$

Based on (3,5)

$$\sqrt{\sqrt{c^4 + k^4} + c^2} = \frac{\nu\pi}{l}$$

from which the eigenvalue of  $\nu$ -th order for the differential equation (3,3) covering the boundary conditions as above, is

$$k_\nu^4 = \frac{\nu^4 \pi^4}{l^4} - 2c^2 \frac{\nu^2 \pi^2}{l^2}$$

after substituting this into Equ. (3,6)

$$\frac{\mu\omega_\nu^2}{E\left(1 - \frac{P}{EA}\right)I} = \frac{\nu^4 \pi^4}{l^4} - \left[ \frac{P}{E\left(1 - \frac{P}{EA}\right)I} + \frac{\mu\omega_\nu^2}{E\left(1 - \frac{P}{EA}\right)A} \right] \frac{\nu^2 \pi^2}{l^2}$$

from which

$$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{l} \sqrt{\frac{\frac{\nu^2 \pi^2 EI}{l^2} - P\left(1 + \frac{\nu^2 \pi^2 EI}{EA l^2}\right)}{\mu\left(1 + \frac{\nu^2 \pi^2 EI}{EA l^2}\right)}}.$$

If the compressing force  $P_{cr}$  is considered as a critical force, under the effect of which the bar is in equilibrium not only in the original shape but also in a certain natural one, though somewhat different from it, so the  $\nu$ -th Euler's critical force [2] — considering the effect of shear force — is

$$P_{cr\nu} = \frac{\nu^2 \pi^2 EI}{\left(1 + \frac{\nu^2 \pi^2 I}{Al^2}\right) l^2}$$

thus the natural frequency of  $\nu$ -th order is

$$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{P_{cr\nu} - P}. \quad (4,4)$$

The investigation of natural vibration of a two hinged bar, neglecting the effect of shear force, has produced a result of similar contents [1].

### 5. Example

The natural frequencies of a steel joist I. 40. are to be developed. This joist, is a two hinged bar under 40 t axial force, with 5,00 m span. Vibration in plane  $y-y$  is possible owing to constructional reasons (Fig. 2).

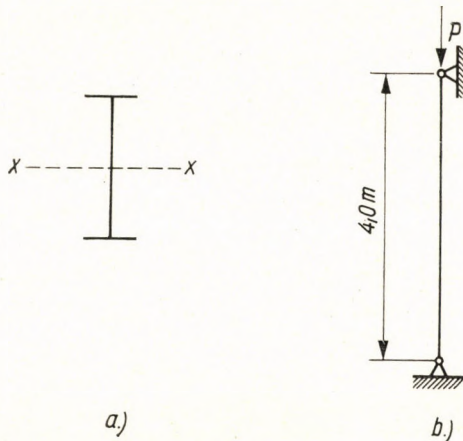


Fig. 2

Data:

weight

$$q = 92.6 \text{ kg m}^{-1}$$

mass

$$\mu = \frac{926 \text{ g cm}^{-1}}{981 \text{ cm sec}^{-2}} = 0.944 \text{ g cm}^{-2} \text{ sec}^{-2}$$

span

$$l = 500 \text{ cm}$$



inertia moment relating to axis  $x$   $y_x = 29210 \text{ cm}^4$

area of web  $F_w = 57.6 \text{ m}^2$

equivalent area relating to axis  $x$   $A = \frac{G}{A} F_w = 22.1 \text{ m}^2$

Euler's critical load

$$P_{crv} = \frac{\nu^2 \pi^2 EI}{l^2 \left( 1 + \frac{\nu^2 \pi^2 I}{At^2} \right)} = 2420t \frac{\nu^2}{1 + 0.052 \nu^2}.$$

Furthermore

$$\frac{\pi}{l \sqrt{\mu}} = \frac{3.14}{500 \sqrt{0.944}} = 6.47 \cdot 10^{-3} \text{ g}^{-1} \text{ cm sec}^{-2}$$

so the natural frequencies are

$$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{l \sqrt{\mu}} \sqrt{P_{cr} - P} = 6.47 \cdot 10^{-3} \nu \sqrt{2420 \frac{\nu^2}{1 + 0.052 \nu^2} - 42}.$$

When effect of the shear is neglected

$$\omega_\nu^* = 6.47 \cdot 10^{-3} \nu^2 \sqrt{2420} = 318 \cdot 10^{-3} \nu^2.$$

The Table shows the first four natural frequencies calculated with formulas as above, and with the neglect of the effect of shear force.

The comparison justifies the fact that the neglect of the effect of shear force — especially for higher frequencies — is not always reasonable.

Table

$\nu$	$\omega_\nu$	$\omega_\nu^*$	Difference in percentage
1	307	316	3
2	1156	1271	10
3	2360	2861	21
4	3758	5088	35

#### REFERENCES

1. TIMOSHENKO: Vibration Problems in Engineering (3rd edition, 1955).
2. TIMOSHENKO: Theory of Elastic Stability (1936).

#### SUMMARY

In this study, the natural modes of transverse vibration of an axially loaded two hinged bar with constant section will be determined with due regard to the effect of shear. The method of investigation may be applied for other boundary conditions, too.

## EIGENQUERSCHWINGUNGEN EINES AUF DRUCK BEANSPRUCHTEN STABES

J. SZIDAROVSKY

## ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegende Arbeit bestimmt die Eigenquerschwingungen eines auf Druck beanspruchten einfachen Stabes mit konstantem Querschnitt mit Rücksicht auf den Einfluß des Schubes. Das Verfahren ist auch für andere Randbedingungen brauchbar.

DÉTERMINATION DE L'OSCILLATION PROPRE DE BARRES COMPRIMÉES  
A DEUX APPUIS, COMPTE TENU DE L'EFFET DES FORCES DE CISAILLEMENT

J. SZIDAROVSKY

## RÉSUMÉ

L'étude détermine l'oscillation propre de barres à deux appuis de profil constant, comprimées dans la direction de l'axe, en tenant compte de l'effet des forces de cisaillement. Le procédé peut aussi s'appliquer en cas d'autres conditions limités.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХОПОРНОГО СЖАТОГО БРУСА, УЧИТЫВАЯ  
ДЕЙСТВИЕ СРЕЗАЮЩЕГО УСИЛИЯ

Я. СИДАРОВСКИЙ

## РЕЗЮМЕ

В статье определяются собственные колебания двухопорного, сжатого по осевому направлению бруса постоянного сечения, учитывая действие срезающего усилия. Этот способ может применяться и в случае других предельных условий.

# ABSORPTION IN MEHRSCHICHTIGEN ISOLATIONEN

GY. VAJDA

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR ELEKTRISCHE ENERGIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 16. Juni 1959]

## 1. Zweischichtige Isolierung

Es ist ein allgemeiner Gebrauch in der Literatur, die Untersuchung von inhomogenen oder mehrschichtigen Isolierungen auf die Untersuchung von zwei in Serie geschalteten Schichten zurückzuführen. Die Strom- und Feldverteilung im homogenen elektrischen Feld hat WAGNER geklärt [1], seine Methode ist

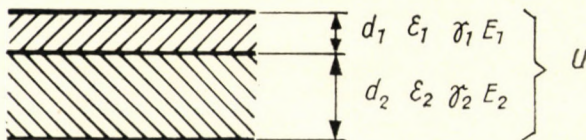


Abb. 1. Zweischichtige Isolierung

allgemein anerkannt worden [2]. Bei der zweischichtigen Isolierung nach Abb. 1 ist  $d$  die Schichtdicke,  $\gamma$  die Leitfähigkeit für Gleichstrom,  $\varepsilon$  die absolute dielektrische Konstante ( $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ) und  $E$  die Feldstärke.

Bei der Einschaltung einer konstanten Spannung ist die Spannung

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U \quad (1)$$

und nach den Gleichungen, die die Kontinuität des Stromes ausdrücken

$$\gamma_1 E_1 + \varepsilon_1 \frac{dE_1}{dt} = \gamma_2 E_2 + \varepsilon_2 \frac{dE_2}{dt} \quad (2)$$

kann die Differentialgleichung für die Feldstärke in der ersten Schicht

$$\frac{dE_1}{dt} (\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1) + E_1 (\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1) = \gamma_2 U \quad (3)$$

angeschrieben werden, deren Lösung die folgende ist

$$E_1 = \frac{(\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2) d_2 U}{(\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1) \cdot (\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1)} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) + \frac{\gamma_2 U}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}, \quad (4)$$

wo die Zeitkonstante  $T$ :

$$T = \frac{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} \text{ ist.} \quad (5)$$

Die Feldstärke  $E_2$  ist symmetrisch zu  $E_1$ , auf Grund der Gl. (2) ist die Stromdichte

$$G = \frac{(\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2)^2 d_1 d_2 U}{(\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1)^2 (\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1)} \exp\left(-\frac{t}{T}\right) + \frac{\gamma_1 \gamma_2 U}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}. \quad (6)$$

Bei Entladung fallen die konstanten Glieder fort, die variablen Glieder dagegen wechseln das Vorzeichen in den Gleichungen (4) und (6).

Für Wechselstrom ergeben sich ähnliche Zusammenhänge mit dem Unterschied, daß in den konstanten Gliedern bzw. in den Nennern der variablen Glieder statt der Leitfähigkeit für Gleichstrom die komplexe Leitfähigkeit

$$\bar{\gamma}_i = \gamma_i + j\omega\varepsilon_i \quad (7)$$

einzusetzen ist, und natürlich wird die Gleichspannung  $U$  durch  $U_{\max} e^{j\omega t}$  ersetzt.

Gleichung (6) kann auch so aufgefaßt werden, daß die erste Komponente des Stromes den Absorptionsstrom beschreibt, das zweite Glied ist der Kriechstrom.

Die Größenordnung der Zeitkonstante  $T$  (Relaxationszeit) hängt in erster Linie von der Leitfähigkeit ab. Bei starken und guten Isolierschichten kann es Größenordnungen von einigen Stunden geben. Zum Beispiel: wenn  $d_1 = d_2 = 0,1 \text{ cm}$ ,  $\varepsilon_1 = 1 \cdot 8,86 \cdot 10^{-14} \frac{A \text{ sec}}{V \text{ cm}}$ ,  $\varepsilon_2 = 10 \cdot 8,86 \cdot 10^{-14} \frac{A \text{ sec}}{V \text{ cm}}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 10^{-16} \frac{A}{V \text{ cm}}$ , dann ist  $T \approx 5 \cdot 10^3 \text{ Sek.}$  auf Grund der Gleichung (5).

Die Relaxationszeiten können sich zwischen weiten Grenzen bewegen, wie zum Beispiel im Falle einer auf dem Isolierstoff haftenden dünnen Wasserschicht, wo

$$d_1 = 1 \text{ cm}, d_2 = 0,001 \text{ cm}, \varepsilon_1 = 4 \cdot 8,86 \cdot 10^{-14} \frac{A \text{ sec}}{V \text{ cm}},$$

$$\varepsilon_2 = 80 \cdot 8,86 \cdot 10^{-14} \frac{A \text{ sec}}{V \text{ cm}}, \quad \gamma_1 = 10^{-14} \frac{A}{V \text{ cm}},$$

$$\gamma_2 = 10^{-4} \frac{A}{V \text{ cm}} \quad \text{und} \quad T \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ sec ist.}$$

### 2. Mehrschichtige Isolierung

Im allgemeinen gibt es meistens nicht zwei, sondern mehr Schichten, bzw. kann die Isolierung nur durch ein mehrschichtiges Modell ersetzt werden. Die Berechnung von WAGNER kann auch für diesen Fall verallgemeinert werden. Ist  $n + 1$  die Zahl der Schichten, so können die Gleichungen (1) und (2) für das homogene Feld in der Form

$$\sum_{i=1}^{n+1} E_i d_i = U \tag{8}$$

$$\gamma_i E_i + \varepsilon_i \frac{dE_i}{dt} = \text{konst.} \tag{9}$$

angeschrieben werden. Bei der Einschaltung einer konstanten Spannung  $U$  kann für die Feldstärke  $E_i$  der Schicht  $i$  die folgende Differentialgleichung angeschrieben werden:

$$a_n \frac{d^n E_i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} E_i}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 E_i}{dt^2} + a_1 \frac{dE_i}{dt} + a_0 E_i = bU. \tag{10}$$

Die Koeffizienten der Gleichung sind:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{j=1}^{n+1} \left( d_j \prod_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k \right) & k \neq j \\ a_{n-1} &= \sum_{j=1, k=1}^{n+1} \left( d_j \gamma_k \prod_{l=1}^{n+1} \varepsilon_l \right) & j \neq k \neq l \\ &\vdots \\ a_1 &= \sum_{j=1, k=1}^{n+1} \left( d_j \varepsilon_k \prod_{l=1}^{n+1} \gamma_l \right) & j \neq k \neq l \\ a_0 &= \sum_{j=1}^{n+1} d_j \prod_{k=1}^{n+1} \gamma_k & j \neq k \\ b &= \prod_{j=1}^{n+1} \gamma_j & j \neq i. \end{aligned} \tag{11}$$

Die charakteristische Gleichung dieser Differentialgleichung ist

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \tag{12}$$

wo  $\lambda = 0$  wegen  $a_0 \lambda^0 \neq 0$ , keine Wurzel ist, es gibt keine positive Wurzel, da die Vorzeichen in der Gleichung nicht wechseln, komplexe Wurzeln gibt es

ebenfalls nicht. Es kann nämlich bewiesen werden, daß die resultierende operatorische Impedanz des Systems

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{d_i}{\gamma_i + p\varepsilon_i}$$

nur reelle  $p$  Wurzeln haben kann, wenn es in eine Spannungsquelle mit einem inneren Widerstand größer als 0 geschaltet wird.

Die charakteristische Gleichung hat also im allgemeinen Fall  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  negative Wurzeln, und die Lösung ist

$$E_i = \sum_{j=1}^n A_j \exp\left(-\frac{t}{T_j}\right) + B \quad T_j = -\frac{1}{\lambda_j}. \quad (13)$$

Die Stromdichte ist

$$G = \gamma_i E_i + \varepsilon_i \frac{dE_i}{dt} = UC_0 + U \sum_{j=1}^n C_j \exp\left(-\frac{t}{T_j}\right). \quad (14)$$

Die Konstanten der Gleichungen (13) und (14), d. h. ( $A_j, B, T_j, C_j, C_0$ ) sind aus den Kombinationen der für die Isolierung charakteristischen Konstanten, d. h. dielektrischen Konstanten, Leitfähigkeiten und Schichtdicken gebildet. Nach Gleichung (14) ist der Strom die Summe von  $n$  exponentialen Gliedern, und das System hat  $n$  Relaxationszeiten.

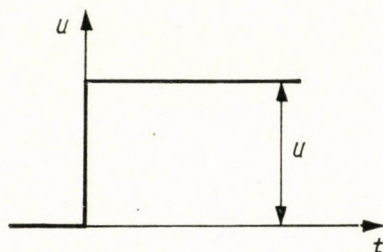


Abb. 2. Spannungssprung

Gleichung (14) beschreibt die Änderung der Stromdichte in der Zeit wenn die zeitliche Änderung der Spannung der Funktion in Abb. 2 entspricht

Die Zusammenhänge können auch auf Wechselspannungen erstreckt werden. Nach dem Satz von DUHAMEL ist die Stromdichte im Zeitpunkt

$$G_i = C_0 \cdot u(t) + \sum_{j=1}^n C_j \int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_j}\right) d\tau. \quad (15)$$

Da die Summierung und das Integral voneinander unabhängig sind, so konnten in der Formel die beiden Operationen vertauscht werden.

Im Falle einer Sinusspannung ist

$$u = U_0 \sin \omega t \tag{16}$$

$$\frac{du}{d\tau} = \omega U_0 \cos \omega \tau. \tag{17}$$

Das Integral

$$\int_0^t \omega U_0 \cos \omega \tau \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_j}\right) d\tau = \omega U_0 \exp\left(-\frac{t}{T_j}\right) \int_0^t \cos \omega \tau \exp \frac{\tau}{T_j} d\tau \tag{18}$$

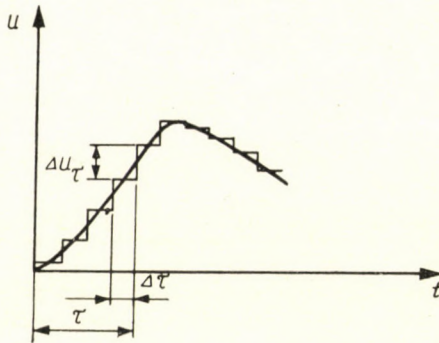


Abb. 3. Annäherung der Wechselspannung durch eine Stufenkurve

kann partiell integriert werden. Nach Integration und Substitution wird

$$G_t = C_0 U_0 \sin \omega t + \sum_{j=1}^n C_j \frac{\omega T_j}{(\omega T_j)^2 + 1} \omega U_0 \exp\left(-\frac{t}{T_j}\right) \cdot \left[ \exp \frac{t}{T_j} \left( T_j \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \cos \omega t \right) - \frac{1}{\omega} \right] = C_0 \cdot U_0 \sin \omega t + \tag{19}$$

$$+ \omega U_0 \sum_{j=1}^n C_j \frac{\omega T_j}{(\omega T_j)^2 + 1} \cdot \left[ T_j \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \cos \omega t - \frac{1}{\omega} \exp\left(-\frac{t}{T_j}\right) \right]$$

Der Strom hat also mit der Spannung gleichphasige, ferner der Spannung um 90° voreilende periodische, sowie exponentiell abnehmende Komponenten.

Die Leistung im untersuchten Isolierungsteil ist

$$N = uG_t = C_0 U_0^2 \sin^2 \omega t + \omega U_0^2 \sum_{j=1}^n C_j \frac{T_j}{(\omega T_j)^2 + 1} \cdot \left[ T_j \sin^2 \omega t \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cos \omega t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_j}\right) \right]. \tag{20}$$

Der Verlust ist während einer beliebigen Periode

$$t_2 - t_1 = T$$

$$W_1 = \int_{t_1}^{t_2} N dt, \quad (21)$$

wo  $\omega t_1 = (k-1)2\pi$ ,  $\omega t_2 = k2\pi$ ,  $k > 0$  und ganze Zahl ist, d. h.  $k$  bezeichnet die Periode, von der Einschaltung gerechnet, die untersucht wird.

Nach Berechnung der Integrale wird

$$W_1 = \frac{T}{2} C_0 U_0^2 + \frac{T}{2} U_0^2 \sum_{j=1}^n C_j \frac{(\omega T_j)^2}{(\omega T_j)^2 + 1} +$$

$$+ U_0^2 \sum_{j=1}^n C_j \frac{(\omega T)^2 \cdot T_j}{[(\omega T_j)^2 + 1]^2} \exp\left(-k \frac{2\pi}{\omega T_j}\right) \left[1 - \exp\left(\frac{2\pi}{\omega T_j}\right)\right]. \quad (22)$$

Mit den Bezeichnungen  $\omega T_j = x_j$  und  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  wird

$$W_1 = \frac{\pi}{\omega} C_0 U_0^2 + \frac{\pi}{\omega} U_0^2 \sum_{j=1}^n C_j \frac{x_j^2}{x_j^2 + 1} +$$

$$+ \frac{1}{\omega} U_0^2 \sum_{j=1}^n C_j \frac{x_j^3}{(x_j^2 + 1)^2} \exp\left(-k \frac{2\pi}{x_j}\right) \left[1 - \exp\left(\frac{2\pi}{x_j}\right)\right]. \quad (23)$$

Diese Gleichung gibt auch über den Verlustfaktor Bescheid, da der Verlust je Sekunde

$$W = U_{eff}^2 \omega C \operatorname{tg} \delta = \frac{U_0^2}{2} \cdot 2\pi f C \operatorname{tg} \delta = f \cdot (\pi U_0^2 C \operatorname{tg} \delta) = f \cdot (W_1) \text{ betr\u00e4gt.} \quad (24)$$

In Gleichung (24) ist der Koeffizient in Klammern nichts anderes, als der Verlust je Sekunde  $W_1$ .  $C$  ist selbstverst\u00e4ndlich die Kapazit\u00e4t je Fl\u00e4cheneinheit. Auf Grund der Gleichung (24) wird

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{W_1}{\pi U_0^2 C}$$

und aus Gleichung (23)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{C_0}{\omega C} + \frac{1}{\omega C} \sum_{j=1}^n C_j \frac{x_j^2}{x_j^2 + 1} +$$

$$+ \frac{1}{\pi \omega C} \sum_{j=1}^n C_j \frac{x_j^3}{(x_j^2 + 1)^2} \exp\left(-k \frac{2\pi}{x_j}\right) \left[1 - \exp\left(\frac{2\pi}{x_j}\right)\right]. \quad (25)$$



Der Verlustfaktor besteht aus drei Komponenten, wo die erste Konstant ist, die zweite von den Zeitkonstanten der Absorptionsvorgänge, die dritte ebenfalls von den Zeitkonstanten der Absorptionsvorgänge, jedoch mit der Zeit exponentiell abnehmend, abhängt. Diese dritte Komponente kann nur dann vernachlässigt werden, wenn eine genügend lange Zeit seit der Einschaltung vergangen ist.

Der Verlust in der Zeiteinheit beträgt, angenommen daß die Frequenz eine ganze Zahl ist und daß am Anfang des untersuchten Abschnittes  $k = k_1$ , am Ende  $k = k_2$  ist,

$$W = \sum_{k_1}^{k_2} W_1$$

$$W = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 + \frac{1}{2} U_0^2 \sum_{j=1}^n C_j \frac{x_j^2}{x_j^2 + 1} + \frac{1}{\omega} U_0^2 \sum_{j=1}^n C_j \frac{x_j^3}{(x_j^2 + 1)^2} \left[ \exp\left(-k_2 \frac{2\pi}{x_j}\right) - \exp\left(-k_1 \frac{2\pi}{x_j}\right) \right]. \quad (26)$$

Gemäß Gleichungen (25) und (26) wird der Verlustfaktor und der Verlust in der Zeiteinheit nur nach einer gewissen, von der Dämpfung der Absorptionsvorgänge abhängigen Zeit konstant.

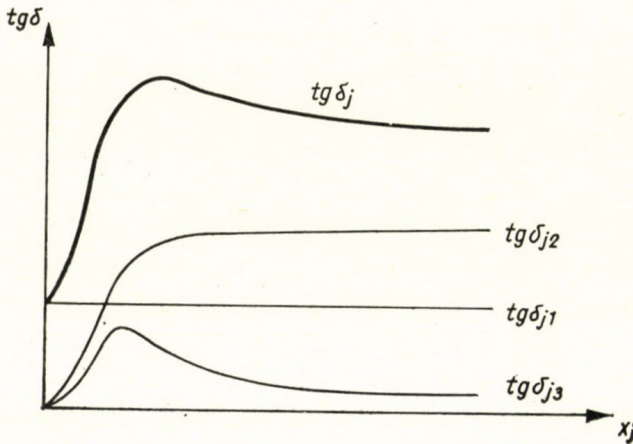


Abb. 4. Abhängigkeit des Verlustfaktors von der normalisierten Relaxationszeit

$$\text{tg } \delta_{j1} = \frac{C_0}{\omega C}$$

$$\text{tg } \delta_{j2} = \frac{1}{\omega C} C_j \frac{x_j^2}{x_j^2 + 1}$$

$$\text{tg } \delta_{j3} = \frac{1}{\pi \omega C} C_j \frac{x_j^3}{(x_j^2 + 1)^2} \left[ e^{-k \frac{2\pi}{x_j}} - e^{-(k+1) \frac{2\pi}{x_j}} \right]$$

Bei Untersuchung der zur  $j$ -ten Relaxationszeit gehörenden Komponenten zeigt Abb. 4 Änderung der einzelnen Faktoren und des Verlustfaktors als Funktion der normalisierten Relaxationszeit  $x_j = \omega T_j$ . Die Kurve zeigt gleichzeitig bei einer konstanten Frequenz den Einfluß der Relaxationszeit, und gemäß der Kurve ist der Verlustfaktor über eine gewisse Zeit hinaus von der Relaxationszeit praktisch unabhängig.

Abb. 5 zeigt als Funktion der Frequenz die Änderung der einzelnen Komponenten und des Verlustfaktors.

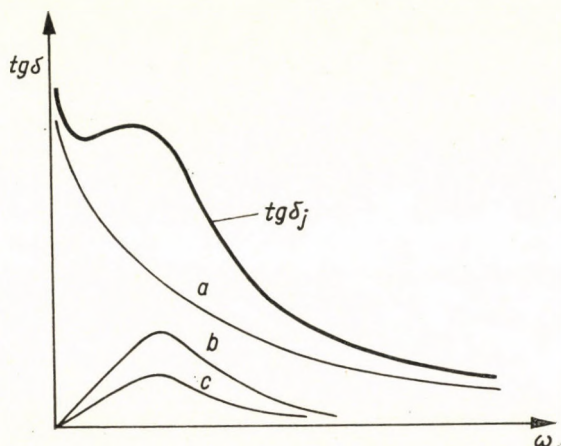


Abb. 5. Abhängigkeit des Verlustfaktors von der Frequenz

$$a: \operatorname{tg} \delta_{j1} = \frac{C_0}{\omega C}$$

$$b: \operatorname{tg} \delta_{j2} = \frac{1}{\omega C} \cdot C_j \frac{x_j^2}{x_j^2 + 1}$$

$$c: \operatorname{tg} \delta_{j3} = \frac{1}{\pi \omega C} C_j \frac{x_j^3}{(x_j^2 + 1)^2} \left[ e^{-k \frac{2\pi}{x_j}} - e^{-(k+1) \frac{2\pi}{x_j}} \right]$$

Wenn die Orte für die Höchstwerte der einzelnen Komponenten stark abweichen, so wird es in der resultierenden Kurve mehrere örtliche Höchstwerte geben. Sowohl in der Abb. 4 als auch in Abb. 5 vermindern sich die absoluten Werte mit der Zeit und werden nur im Zeitpunkt entsprechend dem Fall  $\operatorname{tg} \delta_{j3} \sim 0$  konstant.

Es muß betont werden, daß diese Erörterungen nur für die Frequenz- bzw. Zeitbereiche gelten, wo die Relaxationszeit der wahren Polarisationsvorgänge vernachlässigbar klein ist.

Für mehrschichtige Isolierstoffe wurden die der Abb. 5 entsprechenden charakteristischen Kurven auch experimentell ermittelt, die Abb. 6 und Abb. 7 zeigen als Beispiel, nach Angaben von HIPPEL [3], die Frequenzabhängigkeit

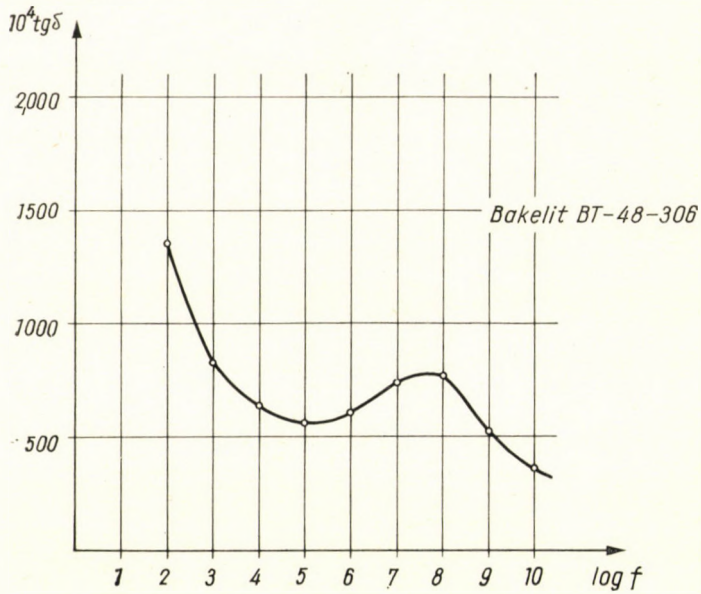


Abb. 6. Abhängigkeit des Verlustfaktors von der Frequenz für Isolierung aus Bakelit BT-48-306

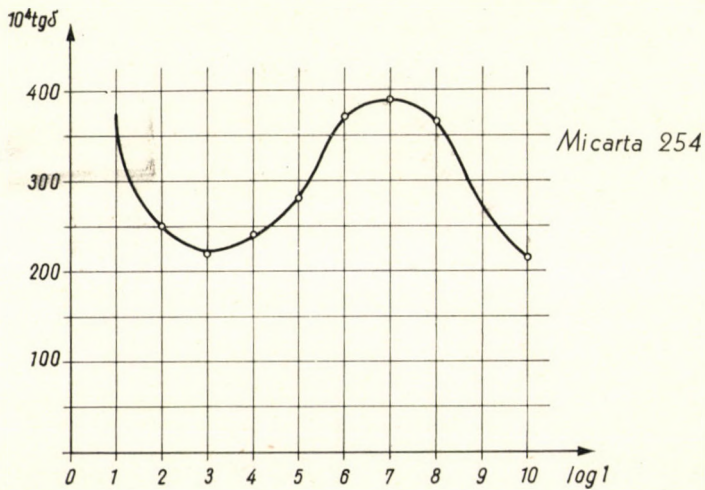


Abb. 7. Abhängigkeit des Verlustfaktors von der Frequenz für Isolierung aus Micarta 254

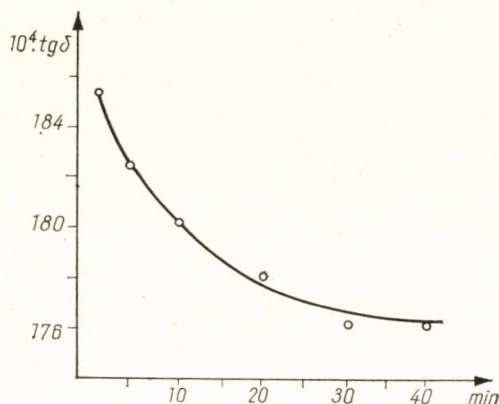


Abb. 8. Abhängigkeit des Verlustfaktors von der Zeit bei einem Transformator

des Verlustfaktors für eine bakelisierte Papierisolierung (Abb. 6) und für eine Glimmerisolierung (Abb. 7). Abb. 8 zeigt die Zeitabhängigkeit des Verlustfaktors bei der Isolierung eines Transformators.

#### SCHRIFTTUM

1. WAGNER, K. W.: Die Isolierstoffe der Elektrotechnik. Schering. Berlin. 1924.
2. SZKANAVI, G. I.: Die Physik der Dielektrika. Akademischer Verlag. Budapest. 1953.
3. HIPPEL, A. R.: Dielectric materials and applications. Chapman and Hall. London. 1954.

#### ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz zeigt eine Möglichkeit, wie die Diskussion der zweischichtigen Isolierungen auf mehrschichtige Isolierungen ausgedehnt werden kann. Auf Grund der Zusammenhänge wird ein Versuch gemacht, den Verlustfaktor und den Verlust von mehrschichtigen Isolierungen zu bestimmen. Die Arbeit weist darauf hin, daß der Verlustfaktor zwischen gewissen Grenzen auch von der Zeit abhängig sein kann, und zeigt die Abhängigkeit des Verlustfaktors von der Relaxationszeit der Absorptionsvorgänge und der Frequenz. Das letztere wird auch mit Ergebnissen von Experimenten verglichen.

#### ABSORPTION IN MULTIPLE-LAYER INSULATING MATERIALS

GY. VAJDA

#### SUMMARY

The present paper shows a possibility to extend the theorem of double-layer insulators to multiple-layer insulations. An attempt is made to determine the coefficient of losses and the losses of multiple-layer insulations. The paper draws your attention to the fact, that the coefficient of losses can be, within certain limits, a function of time. It also shows, that the coefficient of losses is a function of the relaxation time of the absorption phenomena and of frequency. The latter is also compared with experimental results.

## L'ABSORPTION DANS L'ISOLANT STRATIFIÉ

GY. VAJDA

## RÉSUMÉ

L'auteur indique une possibilité d'étendre l'étude des isolants à deux couches à celle des isolants à couches multiples. Sur la base des relations existantes, l'auteur essaye de déterminer les pertes et le facteur de perte dans les isolants stratifiés. Il attire l'attention sur le fait que, dans certaines limites, le facteur de perte peut aussi dépendre du temps, et démontre dans quelles conditions le facteur de perte dépend de la fréquence et du temps de relaxation des phénomènes d'absorption. Une confrontation avec des résultats d'essais termine l'étude.

## АБСОРБЦИЯ В МНОГОСЛОЙНОМ ИЗОЛЯЦИОННОМ МАТЕРИАЛЕ

Д. ВАЙДА

## РЕЗЮМЕ

В статье показана возможность развития метода трактовки двухслойных изоляционных материалов для случая многослойных изоляционных материалов. На основе зависимостей сделана попытка определения коэффициента потерь и потерь слоистых изоляций. Обращается внимание читателей на то, что коэффициент потерь в определенных пределах может зависеть также от времени, и показано, что каким образом зависит коэффициент потерь от времени релаксации абсорбционных процессов и от частоты. Последняя сравнивается также с опытными данными.



# 25 YEARS OF PHOTOELASTICITY IN HUNGARY

I. HUSZÁR

CAND. OF TECHN. SC.

DEPARTMENT FOR MECHANICS, TECHNICAL UNIVERSITY, MISKOLC (HUNGARY)

[Manuscript received July 14, 1959]

The photoelasticity is prominent among the experimental methods of stress analysis. The fundamental physical laws involved were discovered at the beginning of the nineteenth century by BREWSTER. Their first application, however, which may also be regarded as the beginning, took place only in 1891.

The first trace in the history of photoelasticity in Hungary that should be mentioned, is the appearance in 1901 in Budapest of a paper [1] by MESNAGER, in which he describes photoelasticity equipment, outlines the principles of the method and emphasizes its importance in technical practice.

It was, however, only in the thirties that work on photoelasticity was begun. At this period VÁSÁRHELYI was working in the laboratories of the famous *École Nationale des Ponts et Chaussées* in Paris. In his first publication [2], which appeared in French in 1934, he reports on his experiments at the *École Nationale*. His investigations concerned the distributed load transmitted at the place of contact to bodies resting on soils of different qualities. His paper [3] published in 1935 is the first in the Hungarian language on the subject. In it he describes the method and shows some examples of its application. In another paper [4] he discusses the stress patterns for various types of seam and welded joints. Procedure, using a bent compensator, making it possible to obtain a continuous fringe order curve in a single picture for any cross-section, is described.

A paper [5] published at this period by SZMODITS, in which he proposes measurements using oblique illumination and works out the necessary initial relations, is also worthy of mention.

VÁSÁRHELYI reported on his research in further papers [6]. In his dissertation [7] he describes a new method of evaluating photoelastic measurements. This was published in Hungarian [8, 9], German [10] and English [11]. The essence of the procedure, which is based on the Lamé-Maxwell equations, is to determine the various principal stresses by summing up differences along the stress trajectories. In contrast to FILON's method, however, calculation takes place along a straight line, as in the case of FROCHT. Starting from any point

of the cross section concerned, he proceeds along one of the stress trajectories, then returns again to the same section along another stress trajectory, and so forth. This saw-tooth line is the line of summation. The procedure may easily be carried out in tabular form and its exactness is similar to that of other procedures. Straight lines may, moreover, be substituted for curved portions formed from the stress trajectories, thus speeding the calculations. A new procedure is also described here to eliminate subjective error in drawing the stress trajectories. Films of the various isoclinics, taken at sufficiently small intervals, are each separately projected on the same photo-sensitive paper, with a rectangular network parallel to the principal stress direction placed before the picture. The image of this network illuminated by the bright band corresponding to the isoclinics, *i. e.* a section of the tangents to the trajectories, will then appear on the picture. The result is a so-called principal stress pattern, with whose aid the trajectories may easily be drawn. This method is excellently suited for the determination of the saw-tooth edges in the procedure previously described.

Mention must here be made of the fact that HETÉNYI, the editor of the Handbook of Experimental Stress Analysis, who has achieved many results in photoelasticity, was born in Hungary.

After the Second World War no optical stress analysis was made in Hungary for some time. The first detailed, comprehensive work in Hungarian language [12] was published in 1953, to be followed by numerous instructive notes and papers [13, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34].

Work at Research Institutes was also started [14], precisely in respect to the production of the polarization filters that are the most important parts of the optical equipment. On the other hand papers [16, 23, 25] tell of several industrial applications.

Scientific papers [15, 22, 26, 32, 35, 36] have reported on the most significant results. One of these [26] raises an interesting problem. If the obstacle to the analytical solution of a plane-problem is that one of the boundary conditions is not known, this condition may be determined by measurements and the analysis may then be continued by computing, using the measured value. Mention should also be made of papers on the determination of the stress concentration factors of curved bars with grooves [36] and one on the errors of optical benches [35].

Finally it should be emphasized that the aim of this brief review is merely to present some picture of the photoelasticity that was started in Hungary just 25 years ago. The bibliography will enable more detailed information to be found.



## BIBLIOGRAPHY

1. MESNAGER, A.: Mesures des efforts intérieurs dans les solides, et applications. Nemzetközi Anyagvizsgálók Szövetsége. Budapest, 1901, pp. 1—25.
2. VÁSÁRHELYI, DEZSŐ: Détermination de la réaction du terrain par expérience photoélastométrique. Science et Industrie Travaux. 1934, 18. 23., pp. 491—492.
3. VÁSÁRHELYI, DEZSŐ: Photoelasticity. Stress determination by an optical method. (A fotoelaszticitás mérésének optikai útján.) Anyagvizsgálók Közönlönye, Budapest, 1935, 3., pp. 3—19.
4. VÁSÁRHELYI, DEZSŐ: Simplified procedure for the optical determination of interior stresses. (Egyszerűsített eljárás belső feszültségek optikai meghatározására.) Anyagvizsgálók Közönlönye, Budapest, 1938, 1., pp. 25—38.
5. SZMODITS, KÁZMÉR: Optical stress measurement with obliquely incident rays. (Optikai feszültségmérés ferdén beeső sugárral.) Technika, Budapest, 1938, pp. 385—386.
6. VÁSÁRHELYI, DEZSŐ: Optical stress determination, its applications and latest development trends. (Az optikai feszültségmeghatározás, alkalmazása és fejlődésének legújabb irányai.) Hegesztőipar, Budapest, 1943, 6., pp. 4—8.
7. VÁSÁRHELYI, DEZSŐ: Optical stress determination. Dissertation for a doctor's degree. (Optikai feszültségmeghatározás.) Politechnical University, Budapest, 1944.
8. VÁSÁRHELYI, DEZSŐ: A new method for the evaluation of photoelastic measurements. I. (Feszültségoptikai mérési eredmények kiértékelésének újabb módszere. I.) Technika, Budapest, 1946, No. 249., pp. 35—39.
9. VÁSÁRHELYI, DEZSŐ: A new method for the evaluation of photoelastic measurements. II. (Feszültségoptikai mérési eredmények kiértékelésének újabb módszere. II.) Technika, Budapest, 1946, No. 250., pp. 63—67.
10. VÁSÁRHELYI, DEZSŐ: Ein neues Auswertungsverfahren für Spannungsoptische Untersuchungen. Österreichisches Ingenieur-Archiv. 1946. Bd. II., pp. 64—76.
11. VÁSÁRHELYI, DEZSŐ: Contribution to the Calculation of Stresses from Photoelastic values. Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, 1951, Vol. 9., pp. 27—34.
12. HUSZÁR, ISTVÁN: The structure and methods of strength of materials. (A szilárdságtan felépítése és módszerei.) Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1953, pp. 141—199.
13. DZSIDA, OTTÓ: The photoelastic investigation of models of galleries and stopes. (Vágat és fejtésmoდეllek fotoelasztikus vizsgálata.) Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1953, pp. 1—54.
14. SZIMÁN, OSZKÁR: Polarization filters. (Polarizációs szűrők.) Vegyipari Kutató Intézet Közleményei, Bpest, 1953, I, pp. 54—71.
15. HUSZÁR, ISTVÁN: The symmetrical reinforcement of bars subjected to bending loads. (Hajlításra terhelt rudak szimmetrikus megerősítése.) Dissertation for a candidate's degree. Magyar Tudományos Akadémia Budapest, 1954.
16. SZMODITS—RÓZSA: Photoelastic experiments at the Research Institute for Building Science. (Az Építéstudományi Intézet feszültségoptikai kísérletei.) Építésügyi Kiadó, Budapest, 1954, pp. 1—44.
17. THAMM, FRIGYES: Stress distribution on locomotive components. (Feszültségeloszlás mozdonyalkatrészekén.) MTI, Budapest, 1954.
18. SZABÓ, LAJOS: Photoelasticity and the possibilities for utilizing its results. (Feszültségoptika és eredményeinek felhasználási lehetőségei.) Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1954, pp. 1—145.
19. SZMODITS, KÁZMÉR: Photoelasticity and its practical application. (Feszültségoptika és gyakorlati alkalmazása.) Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1954, pp. 1—65.
20. THAMM, ISTVÁN: New methods of stress measurement, II. (Újabb feszültségmérő eljárások. II.) Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1955, pp. 32—85.
21. HUSZÁR, ISTVÁN: Stress measurement in structures. (Feszültségmérés szerkezeteken.) Mérés és Automatika, Budapest, 1956, 1., pp. 12—13.
22. HUSZÁR, ISTVÁN: The symmetrical reinforcement of bars subjected to bending loads. (Hajlításra terhelt rudak szimmetrikus megerősítése.) Magyar Tudományos Akadémia VI. Oszt. Közleményei, Budapest, 1956, XVIII., 1—4, pp. 227—238.
23. HUSZÁR, ISTVÁN: Photoelastic analysis of the steering arm of a motor vehicle. (Gépkocsi irányozókar optikai feszültségvizsgálata.) Járművek, Mezőgazdasági Gépek, Budapest, 1957, 2., pp. 87—93.
24. THAMM, FRIGYES: The fundamentals of photoelastic analysis. (Az optikai feszültségvizsgálat alapjai.) Mérés és Automatika, Budapest, 1957, 2, pp. 49—59.
25. HUSZÁR, ISTVÁN: Photoelastic analysis at the service of scientific research and of industry.

- (Optikai feszültségvizsgálat a tudományos kutatás és az ipar szolgálatában.) A Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei, Miskolc, 1957, I., pp. 337—345.
26. HUSZÁR ISTVÁN: Das Spannungsfeld im Streifen eines zugbeanspruchten T-förmigen Flachstabes. Acta Technica, Budapest, 1958, XIX, 3—4., pp. 333—352.
  27. HUSZÁR, ISTVÁN: Photoelasticity. (Optikai feszültségvizsgálat.) Természettudományi Közlöny, Budapest, 1958, 8., pp. 357—360.
  28. THAMM, FRIGYES: Simple photoelastic analysis apparatus. (Egyszerű optikai feszültségvizsgáló berendezés.) Mérés és Automatika, Budapest, 1958, 7—8., pp. 208—214.
  29. HUSZÁR, ISTVÁN: Photoelastic analysis as a means to economic design. (Optikai feszültségvizsgálat mint a gazdaságos méretezés egyik eszköze.) Gép, Budapest, 1958, 5—6., pp. 163—173.
  30. KAPOLYI LÁSZLÓ: Photoelasticity in the rock-mechanics (Fotorugalmasság a kőzetmechanikában.) Bányászati Lapok, Budapest, 1958, 7., pp. 459—466.
  31. THAMM, FRIGYES: Photoelastic analysis. (Optikai feszültségvizsgálat.) Műszaki Élet, Budapest, 1958, XII. 26. p. 7.
  32. HUSZÁR, ISTVÁN: Extracts from a dissertation for the candidate's degree on "The symmetrical reinforcement of bars subjected to bending loads." (Kivonat a „Hajlításra terhelt rudak szimmetrikus megerősítése” című kandidátusi értekezésből.) A Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei, Miskolc, 1959, III. pp. 171—207.
  33. HUSZÁR, ISTVÁN: Stress measurements. (Feszültségmérések.) Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1959, pp. 145—186.
  34. HUSZÁR, ISTVÁN: 25 Years of Photoelasticity in Hungary. (Az optikai feszültségvizsgálat 25 éve Magyarországon.) Mérés és Automatika, Budapest, 1959. 12., pp. 353—360.
  35. THAMM, FRIGYES: Die Bildfehler des einfachen Polariscops. Periodica Polytechnica, Budapest, 1960. 4. pp. 19—40.
  36. HUSZÁR, ISTVÁN—S. NAGY, SÁNDOR: Die Formfaktoren von kreisförmig gekrümmten Stäben mit halbkreisförmigen Kerben. Acta Technica, Budapest (In print).

## SUMMARY

This study gives an account of photoelasticity researches carried out by Hungarian experts in Hungary; the results are specified in a detailed list of literary work.

## 25 JAHRE DER SPANNUNGSOPTISCHEN FORSCHUNG IN UNGARN

I. HUSZÁR

## ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser gibt ein klares Bild von den von ungarischen Fachleuten in Ungarn ausgeführten spannungsoptischen Forschungen, deren Ergebnisse in einem genauen literarischen Verzeichnis angeführt sind.

## PHOTOÉLASTICITÉ EN HONGRIE DEPUIS 25 ANS

I. HUSZÁR

## RÉSUMÉ

L'étude donne une description des recherches de photoélasticité qui furent exécutés en Hongrie et mentionne les recherches effectuées dans ce sens par les auteurs hongrois. Les résultats de ces recherches sont énumérés dans le répertoire détaillé de la littérature qui s'y rapporte.

## 25 ЛЕТ СО ВРЕМЕНИ НАЧАЛА ПРОИЗВОДСТВА В ВЕНГРИИ ИСПЫТАНИЙ НАПРЯЖЕНИЙ ОПТИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

И. ХУСАР

## РЕЗЮМЕ

В работе дается обзор производства в Венгрии испытаний напряжений оптическим способом и исследований венгерских авторов, выполненных ими за границей; результаты этих исследований перечисляется в подробном литературном списке.

# WIRTSCHAFTLICHE, STATISCH UNBESTIMMTE KONSTRUKTIONEN

J. PEREDY

ARBEITSGEMEINSCHAFT FÜR BAU- UND VERKEHRSWESSEN DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER  
WISSENSCHAFTEN, FORSCHUNGSGRUPPE FÜR FESTIGKEITSLEHRE, BUDAPEST

[Eingegangen am 31. August 1959]

Der Verfasser hat zum Entwurf wirtschaftlicher Tragwerke in einem früheren Aufsatz ein Verfahren vorgeschlagen [1] und die Anwendung dieser Methode auf dem Gebiete der statisch bestimmten Konstruktionen untersucht. Die vorliegende Studie bildet die organische Fortsetzung des früheren Aufsatzes und behandelt die Anwendung des im 1. und 2. Kapitel des Aufsatzes [1] ausführlich erörterten Wirtschaftlichkeitsverfahrens für den Fall aus elastischem, bzw. plastischem Material bestehender, statisch unbestimmter Konstruktionen. Das erste Kapitel der vorliegenden Arbeit gibt einen kurzen Überblick über die im Aufsatz [1] ausführlich erörterten und auch hier vorkommenden Begriffe und Bezeichnungen; das 2. und 3. Kapitel befaßt sich mit aus elastischem, das 4. Kapitel aber mit aus plastischem Material bestehenden statisch unbestimmten Konstruktionen. Das 5. Kapitel enthält ein praktisches Beispiel, dessen Ausarbeitung genau dem Gedankengang des Aufsatzes folgt, so daß das Verständnis der Kapitel 1—4 erleichtert wird, wenn man beim Durchlesen dieser Kapitel auch das im 5. Kapitel behandelte praktische Beispiel mit Aufmerksamkeit verfolgt.

## 1. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Zum Verständnis des vorliegenden Aufsatzes ist die Kenntnis des 1. und 2. Kapitels des im Schrifttum unter [1] angeführten Aufsatzes unerlässlich. In der Folge geben wir eine kurze Übersicht der dort vorkommenden und auch in diesem Aufsatz verwendeten Grundbegriffe und Bezeichnungen.

$T$  — ist die Achse bzw. die Mittelfläche der Konstruktion, ein Bereich des geometrischen Raumes.

$P$  — ist ein Punkt des Bereiches  $T$ .

$\bar{G}$  — sind die Detailangaben der Konstruktion (z. B. die Querschnittsabmessungen, die Plattendicke, usw.)\*

\* Die mit einem oberen Strich versehenen Buchstabenzeichen (z. B.  $\bar{G}$ ) sind im allgemeinen die zusammengefaßten Symbole mehrerer skalarer Angaben, d. h. sie bedeuten Vektoren. In diesem Aufsatz ist unter dem Wort Vektor nicht unbedingt ein dreidimensionaler Vektor zu verstehen, die an den dreidimensionalen Raum gebundenen Operationen der Vektoranalysis gelangen nicht zur Anwendung.

$\bar{G} = \bar{G}(P)$  — ist eine Funktion die in jedem einzelnen Punkte des Bereiches  $T$  die Detailangaben liefert.

$\bar{Y}$  — ist die Innenkraft.

$\bar{Y} = \bar{Y}(P)$  — ist die Innenkraftverteilung, eine Funktion, die in jedem einzelnen Punkte des Bereiches  $T$  den Wert der Innenkraft liefert. Im Falle einer statisch unbestimmten Konstruktion existieren mehrere solche Innenkraftverteilungen, die die gegebene Belastung im Gleichgewicht halten können. Jede beliebige, statisch mögliche Innenkraftverteilung  $\bar{Y}(P)$  kann in der Form

$$\bar{Y}(P) = \bar{Y}_0(P) + \bar{Y}_i(P)$$

angeschrieben werden, wo

$\bar{Y}_0(P)$  — eine beliebige Innenkraftverteilung ist, die die gegebene Belastung im Gleichgewicht halten kann (eine Partikularlösung der inhomogenen Gleichgewichtsgleichungen) und

$\bar{Y}_i(P)$  — eine entsprechende Grundverteilung, d. h. eine solche Innenkraftverteilung ist, die im unbelasteten Zustand der Konstruktion das Gleichgewicht gewährleistet und nicht überall mit Null identisch ist (eine entsprechend gewählte Lösung der homogenen Gleichgewichtsgleichungen).

$A$  — sind die spezifischen Kosten.

$a$  — ist die Meßzahl der Wirtschaftlichkeit,

$$a = \int_T A \cdot dt.$$

$G = \bar{G}(\bar{Y})$  — ist eine Funktion, die jeder Innenkraft die wirtschaftlichsten und gleichzeitig die dem Tragen der gegebenen Innenkraft noch entsprechenden Detailangaben (z. B. Querschnittsabmessungen) zuordnet.

$A = A(\bar{Y})$  — ist eine Funktion, die jeder Innenkraft die spezifischen Kosten der der gegebenen Innenkraft noch mit Sicherheit entsprechenden und gleichzeitig wirtschaftlichsten Detailangaben zuordnet.

$\int_T A(Y) dT = Min!$  — ist die Wirtschaftlichkeitsminimumbedingung.

$\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$  — ist die Lösung der Wirtschaftlichkeitsminimumbedingung, d. h. die wirtschaftlichste Innenkraftverteilung.

$\bar{G} = \bar{G}_A(P)$  — ist die die wirtschaftlichsten Detailangaben liefernde Funktion, die man in der Weise erhält, daß man in jedem einzelnen Punkte  $P$  der Konstruktion die zur Funktion  $\bar{Y}_A(P)$  gehörende Innenkraft bestimmt und aufsucht, welche Detailangaben (z. B. Querschnittsabmessungen) die Funktion  $G = \bar{G}(\bar{Y})$  dieser Innenkraft zuordnet.

## 2. Ein Satz der technischen Elastizitätslehre

Im 2. und 3. Kapitel dieses Aufsatzes soll untersucht werden, ob die nach dem im vorangehenden kurz zusammengefaßten Wirtschaftlichkeitsentwurfsverfahren gestaltete, aus elastischem Material bestehende, statisch unbestimmte Konstruktion der Sicherheit entspricht. Die Untersuchung wird auf Grund des auf die ergänzende Formänderungsarbeit bezüglichen, bekannten Satzes der technischen Elastizitätslehre durchgeführt werden. Aus diesem Grunde wird dieser Satz in der Folge erörtert, und es werden auch einige, im Hinblick auf die weiteren wichtige Feststellungen abgeleitet werden.

Wenn auf einen elastischen Körper äußere Kräfte wirken, entstehen in ihm innere Kräfte, die Formänderungen hervorrufen. Die Formänderungen können dadurch gekennzeichnet werden, daß man in jedem Punkte des Bereiches  $T$  die Werte der spezifischen Formänderungen angibt. Die spezifische Formänderung kann in den einzelnen Punkten im allgemeinen mit Hilfe mehrerer skalarer Angaben (spezifische Winkelverdrehungen und spezifische Verschiebungen) angegeben werden, die in einen Vektor zusammengefaßt werden können. Der Vektor der spezifischen Formänderung wird mit  $\bar{D}$  bezeichnet. Der in einem Punkte  $P$  des Bereiches  $T$  auftretende spezifische Formänderungsvektor ist durch die zu dem betreffenden Punkte gehörenden Detailangaben (z. B. die Querschnittsabmessungen) und die in diesem Punkt auftretende Innenkraft  $\bar{Y}$  vollkommen bestimmt:

$$\bar{D} = \bar{D}(\bar{G}, \bar{Y}),$$

d. h., daß  $\bar{D}$  eine Funktion von  $\bar{G}$  und  $\bar{Y}$  ist.

Im Falle aus elastischem Material bestehender Konstruktionen ist der Zusammenhang zwischen der spezifischen Formänderung und der Innenkraft gegenseitig eindeutig: zu jedem  $\bar{Y}$  gehört ein gewisses  $\bar{D}$  und zu jedem  $\bar{D}$  ein gewisses  $\bar{Y}$ . Für eine aus elastischem Material bestehende Konstruktion ist noch charakteristisch, daß jede beliebige Änderung der Innenkraft  $\Delta\bar{Y}$  eine Änderung  $\Delta\bar{D}$  der spezifischen Formänderung zur Folge hat, bei der die Innenkraftveränderung  $\Delta\bar{Y}$  eine positive spezifische Arbeit leistet:

$$\Delta\bar{Y} \cdot \Delta\bar{D} \geq 0. \quad (1)$$

(In der obigen Formel gilt das Gleichheitszeichen nur für den Fall  $\Delta\bar{Y} = 0$ .)

Die technische Festigkeitslehre verwendet zur Charakterisierung des Zustandes der Konstruktionen auch den Begriff der *spezifischen ergänzenden Formänderungsarbeit*. Wenn in einem Punkte  $P$  des Bereiches  $T$  eine Innenkraft  $\bar{Y}$  wirkt, dann versteht man unter der zu diesem Punkte gehörenden spezifischen ergänzenden Formänderungsarbeit das Integral

$$L = \int_0^{\bar{Y}} \bar{D}(\bar{G}, \bar{Y}) d\bar{Y}.$$

Wenn das Material elastisch ist, dann hängt der Wert von  $L$  von der Art und Weise, wie die Innenkraft von Null bis  $\bar{Y}$  anwächst, nicht ab, daher ist  $L$  nur von den Detailangaben  $\bar{G}$  und der Innenkraft  $\bar{Y}$  abhängig:

$$L = L(\bar{G}, \bar{Y}).$$

Die spezifische ergänzende Formänderungsarbeit ist eine skalare Größe, die nicht negativ sein kann und den Wert Null nur dann aufnehmen kann, wenn auch die Innenkraft  $\bar{Y}$  selbst gleich Null ist.

Ein Tragwerk sei durch seinen Bereich  $T$  (z. B. seine Achse) und seine Detailangaben  $\bar{G} = \bar{G}(P)$  (z. B. seine Querschnittsabmessungen) gegeben. Wenn in diesem Tragwerk eine Innenkraftverteilung  $\bar{Y}(P)$  entsteht, dann kann in jedem Punkte des Tragwerkes, in Kenntnis der zu dem gegebenen Punkt gehörenden Detailangaben  $\bar{G}$  und der Innenkraft  $\bar{Y}$ , die spezifische ergänzende Formänderungsarbeit  $L$  berechnet werden. Das auf den Bereich  $T$  bezügliche Integral der zu den einzelnen Punkten des Bereiches gehörenden spezifischen ergänzenden Formänderungsarbeiten  $L$  wird die *ergänzende Formänderungsarbeit* der Konstruktion genannt und mit  $l$  bezeichnet:

$$l = \int_T L(\bar{Y}) dT.$$

Die ergänzende Formänderungsarbeit  $l$  der Konstruktion ist eine skalare Größe, die als das Integral nicht negativer skalarer Größen nicht negativ sein, und den Nullwert nur in einzelnen trivialen Fällen annehmen kann (z. B. wenn die Innenkraft in allen Punkten gleich Null ist).

Wir wollen voraussetzen — wie dies in der technischen Festigkeitslehre in weitem Kreise üblich ist — daß vom Gesichtspunkte der Untersuchung des Gleichgewichtes der Konstruktion aus betrachtet die Formänderungen der Konstruktion vernachlässigt werden können. In diesem Falle kann jede Innenkraftverteilung, die die gegebene Belastung im Gleichgewicht zu halten im Stande ist, in der Form

$$\bar{Y}(P) = \bar{Y}_0(P) + \bar{Y}_i(P)$$

angeschrieben werden. Wenn man die Verträglichkeitsbedingungen nicht in Betracht zieht, dann kann jede statisch mögliche Innenkraftverteilung zustandekommen und man kann zu jedem  $\bar{Y}(P)$  die dazugehörige ergänzende Formänderungsarbeit

$$l = \int_T L(\bar{Y}) dT$$

berechnen. Die Verträglichkeitsbedingungen wird aber von diesen nur jene Innenkraftverteilung erfüllen, zu der die kleinste ergänzende Formänderungsarbeit gehört, d. h. die die Lösung der Minimumaufgabe

$$I = \int_T L(\bar{Y}) dT = \text{Min!}$$

(im weiteren Minimumaufgabe der Elastizitätslehre) ist. Mit Rücksicht auf den Umstand, daß  $I$  nicht negativ sein kann, hat die Minimumaufgabe der Elastizitätslehre immer eine Lösung.

Im vorangehenden wurden einige bekannte Sätze der technischen Elastizitätslehre zusammengefaßt. Im Zusammenhang mit diesen kann eine vom Gesichtspunkte der weiteren Erörterungen aus wichtige Feststellung abgeleitet werden.

Wir wollen in erster Linie untersuchen, wie sich die Änderung der spezifischen ergänzenden Formänderungsarbeit  $L$  im Falle eines fixen  $\bar{G}$  und eines veränderlichen  $\bar{Y}$  gestaltet:

$$\Delta L = L(\bar{Y}_0 + \Delta\bar{Y}) - L(\bar{Y}_0) = \int_{\bar{Y}_0}^{\bar{Y}_0 + \Delta\bar{Y}} \bar{D}(\bar{Y}) \cdot d\bar{Y}.$$

Wir wollen das auf der rechten Seite stehende Integral auf Grund des Mittelwertsatzes der Integralrechnung schätzen:

$$\Delta L = \int_{\bar{Y}_0}^{\bar{Y}_0 + \Delta\bar{Y}} \bar{D}(\bar{Y}) d\bar{Y} = [\bar{D}(\bar{Y}_0 + \vartheta \Delta\bar{Y})] \Delta\bar{Y}.$$

Der in dieser Schätzung vorkommende Wert der Funktion  $\bar{D} = D(\bar{Y})$  bezieht sich bekanntlich auf die zwischen  $\bar{Y}_0$  und  $\bar{Y}_0 + \Delta\bar{Y}$  liegende Stelle  $\bar{Y}_0 + \vartheta \Delta\bar{Y}$ , daher ist

$$0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Der Ausdruck  $[\bar{D}(\bar{Y}_0 + \vartheta \cdot \Delta\bar{Y})] \cdot \Delta\bar{Y}$  kann offensichtlich in der Form der folgenden Summe angeschrieben werden

$$\begin{aligned} \Delta L &= [\bar{D}(\bar{Y}_0 + \vartheta \cdot \Delta\bar{Y})] \cdot \Delta\bar{Y} = [\bar{D}(\bar{Y}_0) + \Delta_\vartheta \bar{D}] \Delta\bar{Y} = \\ &= \bar{D}(\bar{Y}_0) \Delta\bar{Y} + \Delta_\vartheta \bar{D} \cdot \Delta\bar{Y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Hier ist  $\Delta_\vartheta \bar{D}$  der zum Innenkraftzuwachs  $\vartheta \cdot \Delta\bar{Y}$  gehörende Formänderungszuwachs. Das Skalarprodukt dieser beiden kann nicht negativ sein [siehe diesbezüglich die Formel (1)], daher ist

$$\Delta_\vartheta \bar{D} \cdot (\vartheta \cdot \Delta\bar{Y}) \geq 0,$$

oder, wenn man auch noch das positive Vorzeichen von  $\vartheta$  in Betracht zieht,

$$\Delta_\vartheta \bar{D} \cdot \Delta \bar{Y} \geq 0.$$

Der Ausdruck  $\Delta_\vartheta \bar{D} \cdot \Delta \bar{Y}$  ist jedoch nichts anderes, als das in der Formel (2) vorkommende letzte Glied. Das letzte Glied auf der rechten Seite der Gleichung (2) auslassend und berücksichtigend, daß dieses im Sinne des vorangehenden größer als Null ist, erhält man die Ungleichung

$$\Delta L \geq \bar{D}(\bar{Y}_0) \cdot \Delta \bar{Y}. \quad (3)$$

In dieser Formel kann der Fall der Gleichheit — ähnlich wie bei der Formel (1) — nur dann eintreten, wenn  $\Delta \bar{Y}$  selbst auch gleich Null ist.

Die soeben gewonnene Ungleichung kann zur Untersuchung der Variation der ergänzenden Formänderungsarbeit  $l$  verwendet werden. Es sei  $\bar{Y}_0(P)$  eine statisch mögliche Innenkraftverteilung und wir wollen eine andere statisch mögliche Innenkraftverteilung  $\bar{Y}(P)$  auf solche Weise darstellen, daß wir zu  $\bar{Y}_0(P)$  das Produkt aus einer beliebigen (aber fixierten) Grundverteilung  $\bar{Y}_i(P)$  und aus einem nicht negativen (im übrigen aber frei veränderbaren) Parameter  $y_i$  hinzufügen:

$$\bar{Y}(P) = \bar{Y}_0(P) + y_i \cdot \bar{Y}_i(P).$$

Wenn die Detailangaben  $\bar{C}$  der Konstruktion (z. B. die Querschnittsabmessungen) gegeben sind, dann kann in jedem beliebigen Punkte  $P$  sowohl der zu  $\bar{Y}_0(P)$ , wie auch der zu  $\bar{Y}(P)$  gehörende Wert der spezifischen ergänzenden Formänderungsarbeit  $L$  berechnet werden, und für die Differenz dieser gilt die Ungleichung (3). In diesem Sinne und unter Berücksichtigung des Umstands, daß die Änderung der Innenkraft in diesem Falle

$$\Delta \bar{Y} = y_i \cdot \bar{Y}_i(P)$$

ist, gelangt man zu dem Ergebnis:

$$L(\bar{Y}) - L(\bar{Y}_0) = \Delta L \geq y_i \bar{D}(\bar{Y}_0) \cdot \bar{Y}_i.$$

Diese Ungleichung besteht in jedem Punkte der Konstruktion, sie besteht daher auch nach Integrierung ihrer beiden Seiten:

$$\int_T \Delta L dT \geq y_i \cdot \int_T \bar{D}(\bar{Y}_0) \cdot \bar{Y}_i \cdot dT.$$

Wenn man ferner berücksichtigt, daß das auf der linken Seite stehende Integra

$$\int_T \Delta L \cdot dT = \int_T L(\bar{Y}) dT - \int_T L(\bar{Y}_0) dT = l(\bar{Y}) - l(\bar{Y}_0) = \Delta l$$



ist, das heißt, daß es eben die Änderung der ergänzenden Formänderungsarbeit der Konstruktion ausdrückt, so erhält man die Ungleichung

$$\Delta l \geq y_i \cdot \int_T \bar{D}(Y_0) \cdot \bar{Y}_i \cdot dT. \quad (4)$$

Nachdem  $\bar{Y}_i$  nicht überall Null sein kann, so kann gemäß der die Formel (3) betreffenden Bemerkung der Fall der Gleichheit nur dann eintreten, wenn  $y_i$  gleich Null ist. Die soeben gewonnene Ungleichung wird in den Untersuchungen des folgenden Kapitels eine Rolle spielen.\*

### 3. Der Zusammenhang zwischen dem Wirtschaftlichkeitsprinzip und der Elastizitätslehre

Im vorigen Kapitel haben wir ein bekanntes Verfahren der Elastizitätslehre zusammengefaßt und einige Bemerkungen hinzugefügt. Wir wollen nun dieses Verfahren zur Untersuchung der Sicherheit irgendeiner, nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfenen, mit den Detailangaben  $\bar{G} = \bar{G}_A(P)$  gekennzeichneten Konstruktion anwenden. Die tatsächliche Innenkraftverteilung dieser Konstruktion wird die Lösung der Aufgabe

$$\int_T L(\bar{G}_A, \bar{Y}) dT = \text{Min!}$$

sein, d. h. die Lösung der für die die wirtschaftlichsten Detailangabenbesitzende Konstruktion angeschriebenen Minimumaufgabe der Elastizitätslehre. *Wenn die Lösung dieser Minimumaufgabe der Elastizitätslehre gerade die wirtschaftlichste Innenkraftverteilung  $Y = \bar{Y}_A(P)$  liefert, die die Grundlage des Entwurfes der Detailangaben  $\bar{G} = \bar{G}_A(P)$  bildete, dann gewährleistet die in Frage stehende Konstruktion offensichtlich auch die Sicherheit*, nachdem die Detailangaben  $\bar{G} = \bar{G}_A(P)$  (z. B. die Querschnittsabmessungen) gerade so bestimmt wurden, daß die Konstruktion in jedem Punkte der Innenkraftverteilung  $\bar{Y}_A(P)$  entsprechen soll. Bei der Bestimmung der wirtschaftlichsten Innenkraftverteilung  $\bar{Y}_A(P)$  wurde jedoch keine Rücksicht darauf genommen, daß  $\bar{Y}_A(P)$  im Interesse der Sicherheit der Konstruktion auch die Minimumaufgabe der Elastizitätslehre zu befriedigen hat. Aus diesem Grunde muß noch bewiesen werden, daß die über die Detailangaben (z. B. die Querschnittsabmessungen)  $\bar{G}_A(P)$  verfügbare wirtschaftliche Konstruktion die Sicherheit auch wirklich gewährleistet. Diese Beweisführung kann tatsächlich durchgeführt werden, wenn auch nicht ganz allgemein, so doch im Falle solcher Bedingungen, die einen Großteil

\* Wenn man bemerkt, daß das auf der rechten Seite der Ungleichung (4) stehende Integral gerade der nach  $y_i$  genommene Differentialquotient von  $l$  ist, dann kann man auch die Eindeutigkeit der Lösung der Minimumaufgabe der Elastizitätslehre einsehen.

der praktisch wichtigen Fälle umfassen. Bevor wir jedoch diese Beweisführung in die Wege leiten, müssen wir noch einen weiteren Umstand erwähnen.

Wenn man die im 2. Kapitel erörterten Gesetzmäßigkeiten der Elastizitätslehre im Zusammenhang mit einer nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfenen Konstruktion anzuwenden wünscht, so muß man in Betracht ziehen, daß die Detailangaben in diesem Falle besonderer Natur sind. Die nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfene Konstruktion verfügt nämlich in allen ihren Punkten über solche Detailangaben, die durch die Funktion  $G = \bar{G}(\bar{Y})$  der infolge der Innenkraftverteilung  $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$  in dem betreffenden Punkte entstehenden Innenkraft zugeordnet wurden. So ist

$$\bar{D} = \bar{D}[\bar{G}(\bar{Y}_A), \bar{Y}]$$

und

$$L = L[\bar{G}(\bar{Y}_A), \bar{Y}] = \int_0^{\bar{Y}} \bar{D}[\bar{G}(\bar{Y}_A), \bar{Y}] d\bar{Y},$$

das heißt, daß sowohl  $\bar{D}$ , wie auch  $L$  Funktionen von zwei Innenkräften — nämlich der nach der wirtschaftlichsten Innenkraftverteilung  $\bar{Y}_A(P)$  in dem betreffenden Punkte entstehenden Innenkraft  $\bar{Y}_A$ , und der nach einer beliebigen statisch möglichen Innenkraftverteilung  $\bar{Y}(P)$  im selben Punkte entstehenden Innenkraft  $\bar{Y}$  — sind. Wenn nur von dem Verlauf der Funktionen

$$\bar{D} = \bar{D}[\bar{G}(\bar{Y}_A), \bar{Y}] \quad \text{bzw.} \quad L = L[\bar{G}(\bar{Y}_A), \bar{Y}]$$

die Rede ist, dann spielt es selbstverständlich keine Rolle, welcher Innenkraftverteilung  $\bar{Y}_A$ , bzw.  $\bar{Y}$  entstammen; in einem solchen Falle sind  $\bar{Y}_A$ , bzw.  $\bar{Y}$  einfach als zwei unabhängige Veränderliche von einer Innenkraft-Dimension anzusehen. In den folgenden Untersuchungen spielt jene spezifische Formänderung bzw. spezifische Formänderungsarbeit eine wichtige Rolle, die in der nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfenen Konstruktion gerade infolge der die Grundlage des Entwurfes bildenden Innenkraftverteilung  $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$  entsteht. Diese im Falle  $\bar{Y} = \bar{Y}_A$  entstehende spezifische Formänderung

$$\bar{D} = \bar{D}[\bar{G}(\bar{Y}_A), \bar{Y}_A],$$

bzw. spezifische Formänderungsarbeit

$$L = L[\bar{G}(\bar{Y}_A), \bar{Y}_A]$$

werden wir die *charakteristische spezifische Formänderung*, bzw. die *charakteristische spezifische Formänderungsarbeit* der wirtschaftlichen Konstruktion nennen. Mit Hilfe dieser Begriffe wird es möglich, den folgenden, auf die Sicherheit

der wirtschaftlichen Konstruktion bezüglichem Satz zu formulieren und zu beweisen.

*I. Satz:* »Eine nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfene, aus elastischem Material bestehende Konstruktion ist nicht nur wirtschaftlich, sondern sie gewährleistet auch die Sicherheit, vorausgesetzt, daß die zwei folgenden Bedingungen erfüllt werden:

a) Die spezifische Kostenfunktion  $A = A(\bar{Y})$  ist überall nach  $\bar{Y}$  differenzierbar, oder es existiert wenigstens überall, nach jeder Richtung, ein rechts- und ein linksseitiger Differentialquotient.

b) Die Ableitung der spezifischen Kostenfunktion  $A$  ist der spezifischen Formänderung proportional, d. h.

$$\left[ \frac{dA}{d\bar{Y}} \right]_{\bar{Y}=\bar{Y}_A} = c \cdot D[\bar{G}(Y_A), \bar{Y}_A],$$

wo  $c$  eine von  $\bar{Y}_A$  unabhängige, im übrigen aber beliebige positive Konstante ist«. (Unter der Sicherheit der Konstruktion verstehen wir im Sinne der in der technischen Elastizitätslehre gebräuchlichen Deutung den Umstand, daß die Detailangaben der Konstruktion (z. B. die Querschnittsabmessungen) der Aufnahme der tatsächlichen, die Verträglichkeitsbedingungen erfüllenden Innenkräfte überall entsprechen.)

*Die Beweisführung.* — Zum Beweis des Satzes ist es hinreichend nachzuweisen, daß die tatsächliche, die Minimaufgabe der Elastizitätslehre befriedigende Innenkraftverteilung der wirtschaftlichen Konstruktion gerade die die Grundlage des Entwurfes bildende Innenkraftverteilung  $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$  ist; diesen Innenkräften entspricht nämlich die wirtschaftliche Konstruktion überall, nachdem sie so entworfen wurde. Daß die Funktion  $\bar{Y}_A(P)$  die Minimaufgabe der Elastizitätslehre tatsächlich befriedigt, kann man auf Grund des folgenden Gedankenganges einsehen.

Jede beliebige Innenkraftverteilung, die die gegebene Belastung im Gleichgewicht zu halten imstande ist, kann in der Form

$$\bar{Y}(P) = \bar{Y}_A(P) + y_i \cdot \bar{Y}_i(P)$$

angeschrieben werden, wo  $\bar{Y}_i(P)$  eine entsprechende Grundverteilung,  $y_i$  aber eine nicht negative Konstante darstellt. Im Sinne der Definition des Differentialquotienten erhält man nun im Falle eines entsprechenden kleinen  $y_i$  und mit Hilfe der Bedingung unter a) :

$$\int_T A(\bar{Y}) dT - \int_T A(\bar{Y}_A) dT = y_i \frac{d}{dy_i} \int_T A(\bar{Y}) dT = y_i \cdot \int_T \frac{dA}{d\bar{Y}} \bar{Y}_i dT.$$

Nachdem  $\bar{Y}_A(P)$  die Lösung der Wirtschaftlichkeitsminimierungsaufgabe

$$\int_T A(\bar{Y}) dT = \text{Min!}$$

ist, kann die linke Seite der obigen Gleichung nicht negativ sein, daher ist

$$\int_T A(\bar{Y}) dT - \int_T A(\bar{Y}_A) dT \geq 0,$$

und dasselbe gilt dann auch für die rechte Seite der Gleichung, d. h.:

$$y_i \int_T \frac{dA}{dY} \cdot \bar{Y}_i dT \geq 0.$$

Diese Ungleichung gilt auf Grund der bisherigen Ableitung nur im Falle eines entsprechend kleinen  $y_i$ , da jedoch die Formel in  $y_i$  linear ist, kann die Gültigkeit der Ungleichung auf beliebige Werte von  $y_i$  erstreckt werden. Wir wollen nun in die zur Diskussion stehende Ungleichung anstatt der spezifischen Kostenfunktion, unter Berücksichtigung der Bedingung unter *b*), die charakteristische spezifische Formänderung einsetzen und erhalten dadurch:

$$y_i \cdot c \int_T \bar{D}[\bar{G}(\bar{Y}_A), \bar{Y}_A] \cdot \bar{Y}_i dT \geq 0.$$

Wird der gemäß der Bedingung *b*) positive Faktor *c* ausgelassen, so nimmt die Ungleichung die Form

$$y_i \int_T \bar{D}[\bar{G}(\bar{Y}_A), \bar{Y}_A] \cdot \bar{Y}_i dT \geq 0$$

an. Wenn man diese soeben erhaltene Ungleichung mit der auf die vorliegende Untersuchung bezugnehmenden Form der früher angeschriebenen Ungleichung (4), d. h. mit

$$\Delta l \geq y_i \int_T \bar{D}[\bar{G}(\bar{Y}_A), \bar{Y}_A] \cdot \bar{Y}_i dT$$

vergleicht, so erhält man:

$$\Delta l = \int_T L(\bar{G}_A, \bar{Y}) dT - \int_T L(\bar{G}_A, \bar{Y}_A) \geq 0;$$

wo gemäß der im Zusammenhang mit der auf die Ungleichung (4) bezugnehmenden Bemerkung der Fall der Gleichheit nur dann eintreten kann, wenn  $y_i$  gleich Null ist, daher wenn  $\bar{Y}(P) = \bar{Y}_A(P)$  ist. Diesen Umstand berücksichti-

gend bedeutet die letztere Ungleichung, daß in einer über die Detailangaben  $\bar{G} = G(\bar{Y}_A)$  verfügbaren Konstruktion die kleinste ergänzende Formänderung zur Innenkraftverteilung  $\bar{Y}_A(P)$  gehört, dies aber bedeutet, daß die Lösung der auf die nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfene Konstruktion bezugnehmenden Minimaufgabe der Elastizitätslehre

$$\int_T L(\bar{G}_A, \bar{Y}) dT = \text{Min!}$$

gerade die wirtschaftlichste Innenkraftverteilung  $\bar{Y}_A(P)$  ist. Hiemit ist der Satz bewiesen.

\* \* \*

Die Erfüllung der im Zusammenhang mit dem I. Satz angeführten Bedingungen ist zur Gültigkeit der im Satz enthaltenen Behauptung nicht immer notwendig. In gewissen Fällen kann die nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfene Konstruktion die Sicherheit auch dann gewährleisten, wenn diese Bedingungen nicht erfüllt werden. Die Behandlung dieses Fragenkomplexes würde übermäßig zu Einzelheiten führen; anstatt dessen wollen wir lieber einen der wichtigsten Sonderfälle des I. Satzes erörtern.

*II. Satz:* »Wir erhalten eine der Sicherheit entsprechende Konstruktion, wenn:

a) die in der Wirtschaftlichkeitsminimaufgabe vorkommende spezifische Kostenfunktion die Form

$$A = A(\bar{Y}) = k_1 |Y|$$

hat (wo  $k_1$  eine positive Konstante ist) und

b) die Detailangaben der wirtschaftlichen Konstruktion so entworfen werden, daß die Größe der charakteristischen spezifischen Formänderung konstant ist, und ihr Vorzeichen mit dem von  $Y_A$  übereinstimmt:

$$\bar{D}[G(Y_A), Y_A] = k_2 \text{sign } Y_A,$$

wo  $k_2$  eine positive Konstante bedeutet.«

*Die Beweisführung.* — Um die Richtigkeit der obigen, wegen ihrer Wichtigkeit in der Form eines Satzes formulierten Behauptung zu rechtfertigen, werden wir nachweisen, daß diese ein Sonderfall des schon bewiesenen I. Satzes ist. Die der Bedingung a) des II. Satzes entsprechende spezifische Kostenfunktion  $A = k_1 |Y|$  kann nämlich überall differenziert werden (wenigstens existiert überall ein von rechts und links genommener Differentialquotient), es ist daher

$$\frac{dA}{dY} = k_1 \text{sign } Y,$$

und dies bedeutet die Erfüllung der Bedingung *a)* des I. Satzes. Im Sinne der Bedingung *b)* des I. Satzes muß aber die Gleichung

$$c \cdot D[\bar{G}(Y_A), Y_A] = \frac{dA}{dY}$$

bestehen, wo *c* eine beliebige, positive Konstante sein kann. Wenn man in dieser Gleichung für *c*  $k_1/k_2$  wählt, und in dieselbe die Ableitung von  $A(Y)$ , wie auch den gemäß der Bedingung II. *b)* festgesetzten Ausdruck der charakteristischen spezifischen Formänderung einsetzt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{k_1}{k_2} \cdot k_2 \operatorname{sign} Y = k_1 \operatorname{sign} Y,$$

die tatsächlich eine Identität ausdrückt und zeigt, daß in diesem Falle auch die Bedingung *b)* des I. Satzes erfüllt ist.

\* \* \*

In der ungarischen Fachliteratur wurde in neuerer Zeit in mehreren Aufsätzen ([2], [3], [4]) vorgeschlagen, daß als die Grundlage der Dimensionierung unserer Konstruktionen die sich aus der Minimumbedingung

$$\int |Y| dT = \operatorname{Min}!$$

ergebende Innenkraftverteilung anzusehen sei. Aus dem II. Satz wird ersichtlich, unter welchen Umständen dieses Verfahren zum Entwerfen aus elastischem Material bestehender, statisch unbestimmter Konstruktionen angewendet werden kann, ohne daß dabei die auf die Sicherheit bezüglichen Forderungen gefährdet werden. Dies ist vor allem in solchen Fällen möglich, wo die spezifische Kostenfunktion und die charakteristische spezifische Formänderungsfunktion die Bedingungen des II. Satzes genau erfüllen. Die vorhergenannte, auf den absoluten Wert der Innenkraft bezügliche Minimumbedingung kann aber auch dann angewendet werden, wenn die spezifische Kostenfunktion die Bedingung II. *a)* nur annähernd erfüllt, d. h. wenn

$$A(Y) \approx k_1 |Y|$$

ist. Die auf den absoluten Wert bezügliche Minimumbedingung kann auch in diesem Falle angewendet werden, vorausgesetzt, daß man die Querschnittsabmessungen der Konstruktion — den auf Grund dieser Bedingung erhaltenen Innenkräften entsprechend — derart entwirft, daß sie die Sicherheit querschnittsweise gewährleisten, und daß nebenbei auch die Bedingung 2*b* erfüllt

wird. Die auf diese Weise entworfene Konstruktion entspricht unbedingt der Sicherheit und ist vom Gesichtspunkte der Formänderungen aus betrachtet gleichmäßig beansprucht, wenn sie auch nicht gerade von »gleicher Festigkeit« bzw. die wirtschaftlichste ist. Wenn man in Betracht zieht, wie schwer es oft ist, z. B. die Querschnittsabmessungen eines statisch unbestimmten Fachwerkträgers oder eines Rahmens mit veränderlichen Querschnitt so zu entwerfen, daß diese mit der auf Grund der Elastizität berechneten Kräfteverteilung wenigstens im großen und ganzen übereinstimmen sollen, dann wird man dem von jedem Probieren und Erraten freien Annäherungsverfahren, das der II. Satz ermöglicht, gewiß den gebührenden Wert beimessen.

Im Zusammenhang mit dem II. Satz ist es lohnend, zu beobachten, daß sich die in ihm enthaltenen Gebundenheiten bloß auf die charakteristische spezifische Formänderung, nicht aber auf den Verlauf der ganzen spezifischen Formänderungsfunktion beziehen. Dies bedeutet so viel, daß wir in Kenntnis eines einzigen Formänderungskennwertes des Materials (z. B. der zur größten zulässigen spezifischen Formänderung gehörenden Beanspruchung) in der Lage sind, mit Hilfe der auf den absoluten Wert der Innenkraft bezüglichen Minimumbedingung eine solche Konstruktion zu entwerfen, die der Sicherheit unter allen Umständen und vom Elastizitätsgesetz des Materials unabhängig entspricht. Dies ist besonders dann bedeutsam, wenn das Elastizitätsgesetz des Materials unbekannt oder ungewiß ist.

#### 4. Konstruktionen aus plastischem Material

Die im 2. und 3. Kapitel enthaltenen Erörterungen beziehen sich nur auf aus elastischem Material bestehende Konstruktionen. Ein Teil der für die Konstruktionen zur Anwendung gelangenden Baustoffe besitzt aber ausgesprochen plastische Eigenschaften, und es wird in der Ingenieurpraxis immer üblicher, gewisse Konstruktionen auf der Grundlage der Plastizitätslehre zu berechnen. Im Zusammenhang mit diesem Umstand muß von den vorhergehend erörterten Sätzen unabhängig auch noch besonders untersucht werden, ob eine nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfene Konstruktion vom Gesichtspunkte der technischen Plastizitätslehre aus betrachtet als der Sicherheit entsprechend anzusehen sei. Diese Frage kann auf der Grundlage des sogenannten »statischen Fundamentalsatzes« der Plastizitätslehre leicht beantwortet werden.

Der statische Fundamentalsatz der Plastizitätslehre (siehe z. B. [5]) stellt fest, daß wenn für eine gegebene Konstruktion und Belastung eine diese Belastung statisch im Gleichgewicht haltende solche Innenkraftverteilung existiert, deren Innenkräften die Konstruktion in allen Punkten entspricht, dann kann diese Belastung nicht größer als die Bruchlast sein, und dies bedeutet,

daß die Konstruktion auch die Sicherheit gewährleistet. Aus diesem Fundamentalsatz folgt unmittelbar, daß die nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfene Konstruktion den Anforderungen der Sicherheit unbedingt entspricht. Die die Grundlage des Entwurfes der wirtschaftlichen Konstruktion bildende Innenkraftverteilung  $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$  hält nämlich einerseits die Belastung im Gleichgewicht (sie wurde ja aus der Schar derjenigen Innenkraftverteilungen ausgewählt, die die gegebenen Lasten im Gleichgewicht halten können), andererseits entspricht die Konstruktion in allen Ihren Punkten den Innenkräften  $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$  (sie wurde ja gerade dementsprechend entworfen). Das Wirtschaftlichkeitsverfahren kann daher zum Entwurf aus plastischem Material bestehender wirtschaftlichster, statisch unbestimmter Konstruktionen in allen Fällen verwendet werden, für die die Grundsätze der technischen Plastizitätslehre (darunter auch der statische Fundamentalsatz) anwendbar sind.

### 5. Praktisches Beispiel

Unsere Aufgabe bildet die Dimensionierung des in Abb. 1 dargestellten, an einem Ende eingespannten Trägers auf zwei Stützen. Wir wünschen den Träger mit veränderlichem Querschnitt zu entwerfen, und zwar so, daß sämtliche Querschnitte Rechtecke sein sollen, mit einer konstanten Breite  $b$  und einer entlang der Trägerachse stetig veränderlichen Höhe  $h = h(x)$ . Die Funktion  $h = h(x)$  ist vorderhand unbekannt; wir wollen diese so entwerfen, daß die Konstruktion den Anforderungen der Sicherheit entsprechen, aber den möglichst kleinsten Aufwand an Material erfordern soll. Der Anschaulichkeit halber werden wir nur die aus den Momenten entstehenden Beanspruchungen berücksichtigen; die Schubkräfte werden wir sowohl vom Gesichtspunkte des Materialverbrauches aus, wie auch bei der Untersuchung der Formänderung vernachlässigen. Wir werden die Aufgabe mit Hilfe des Wirtschaftlichkeitsverfahrens lösen, und im Laufe ihrer Ausarbeitung genau dem in den Kapiteln 1–4 dargelegten Gedankengang folgen.

In diesem Falle bedeutet  $T$  die Achse der Konstruktion und  $P$  deren Punkte. Die Punkte  $P$  sind durch den in Abb. 1 angedeuteten Abstand  $x$  gekennzeichnet, daher entspricht dem Bereich  $T$  der gerade Abschnitt  $0 \leq x \leq 1$ . Unter den Detailangaben  $\bar{G}$  sind die Breite  $b$  der Querschnitte und deren Höhe  $h$  zu verstehen. Die Funktion  $\bar{G}(P)$  liefert in jedem Punkt die Breite  $b$  und die Höhe  $h$ , nachdem aber  $b$  eine von vornherein festgesetzte Konstante ist, so entspricht der Funktion  $\bar{G} = \bar{G}(P)$  die Funktion  $h = h(x)$ .

Die Innenkraft  $\bar{Y}$  ist in diesem Falle das Biegemoment  $M$ , während unter der Innenkraftverteilung  $\bar{Y} = \bar{Y}(P)$  die Momentenlinie  $M = M(x)$  zu verstehen ist. Die Funktion  $\bar{Y}_0(P)$  ist eine Momentenlinie, die die gegebene Belastung im Gleichgewicht halten kann, im übrigen aber beliebig ist, wie z. B.



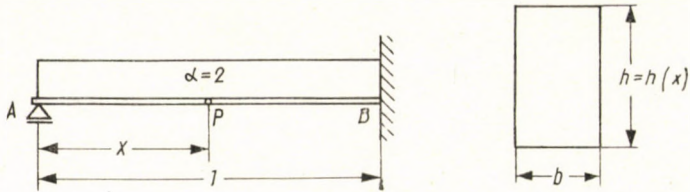


Abb. 1



Abb. 2

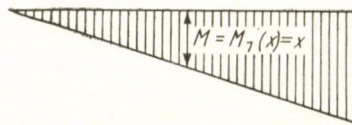


Abb. 3

die aus der Abb. 2 ersichtliche Momentenlinie  $M = M_0(x) = -x^2$ . Die Funktion  $\bar{Y}_i(P)$  ist eine solche Momentenlinie (eine sogenannte Grundmomentenlinie), die zu der äußeren Belastung Null gehört; eine solche ist die in Abb. 3 gezeigte Momentenlinie  $M = M_1(x) = x$ , aber auch jede andere Momentenlinie, die in der Form  $M = k \cdot x$  angeschrieben werden kann, welche Konstante auch  $k$  bedeuten möge. In diesem Falle sind in der einparametrischen Kurvenschar  $M = k \cdot x$  sämtliche »Grundmomentenlinien« inbegriffen, die Aufgabe ist statisch einfach unbestimmt. Infolgedessen können sämtliche statisch mögliche Momentenverteilungen als die Summe der Momentenlinie  $M = -x^2$  und irgendeiner Grundmomentenlinie  $M = k \cdot x$  dargestellt werden, d. h.

$$M = -x^2 + k \cdot x.$$

Im Interesse der Übersichtlichkeit messen wir die Wirtschaftlichkeit der Konstruktion einfach mit dem Materialverbrauch. Daher sind die spezifischen Kosten  $A$  der Querschnittsfläche proportional, der Proportionalitätsfaktor kann dagegen vernachlässigt werden, da er die Lösung der Minimaufgabe nicht beeinflusst, daher ist

$$A = b \cdot h.$$

Die Meßzahl der Wirtschaftlichkeit  $a$  gleicht in diesem Falle dem Rauminhalt der Konstruktion, d. h.

$$a = \int_0^l A \cdot dx = b \cdot \int_0^l h(x) dx.$$

Vom Material der Konstruktion wird vorläufig angenommen, daß es linear elastisch ist (mit dem Falle plastischen Materials werden wir uns am Ende dieses Kapitels noch separat befassen). Der Rechteckquerschnitt eines elastischen Materials kann vom Gesichtspunkte einer Momentenbeanspruchung  $M$  aus dann als entsprechend angesehen werden, wenn er die Ungleichung

$$|M| \leq \sigma \frac{b \cdot h^2}{6}$$

befriedigt. Einen zum Tragen eines gegebenen Momentes noch entsprechenden und gleichzeitig wirtschaftlichsten Querschnitt erhalten wir offenbar dann, wenn wir in der obigen Formel das Gleichheitszeichen als gültig betrachten und die frei veränderbare Abmessung  $h$  aus derselben ausdrücken:

$$h = \sqrt{\frac{6}{b \cdot \sigma}} \sqrt{|M|}.$$

Diese Funktion  $h$  entspricht im gegebenen Falle der Funktion  $\bar{G} = \bar{G}(\bar{Y})$ . Die Funktion  $A = A(\bar{Y})$  erhalten wir so, daß wir den oben erhaltenen Ausdruck für  $h$  in die Formel  $A = b \cdot h$  einsetzen:

$$A = \sqrt{\frac{6 \cdot b}{\sigma}} \sqrt{|M|}.$$

In Kenntnis der Funktion  $A = A(M)$  können wir die Wirtschaftlichkeitsminimumbedingung anschreiben, die nach dem Auslassen der keine Rolle spielenden Konstanten die folgende Form hat:

$$\int_0^1 \sqrt{|M|} dx = \text{Min!}$$

Mit Hilfe dieser Minimumbedingung müssen wir nun aus der Schar der statisch möglichen Momentenlinien die entsprechende auswählen. Wenn wir für  $M$  die die statisch möglichen Momentenlinien beschreibende Formel einsetzen, nimmt die Wirtschaftlichkeitsminimumbedingung die folgende Form an:

$$\int_0^1 \sqrt{|-x^2 + k \cdot x|} \cdot dx = \text{Min!}$$

Im Falle der als Beispiel dienenden, statisch einfach unbestimmten Konstruktion muß nur der eine Parameter  $k$  der Minimumbedingung entsprechend gewählt werden. Die Lösung dieser mathematischen Aufgabe liefert den Wert

$$k = 0,655 \dots,$$

d. h., daß in unserem Falle die wirtschaftlichste Innenkraftverteilung durch die Momentenlinie

$$M = M_A(x) = -x^2 + 0,655 \cdot x$$

gegeben ist. Die wirtschaftlichsten Detailangaben  $G = G_A(P)$  erhalten wir so, daß wir in den schon früher bestimmten Zusammenhang  $h = h(M)$  die Formel für  $M_A(x)$  einsetzen, d. h., daß wir in jedem Punkte die zum Tragen des der wirtschaftlichsten Momentenlinie entsprechenden Momentes notwendige kleinste Höhe  $h$  berechnen:

$$h = h(M_A) = \sqrt{\frac{6}{b \cdot \sigma}} \cdot \sqrt{|M_A|} = \sqrt{\frac{6}{b \cdot \sigma}} \cdot \sqrt{|-x^2 + 0,655 \cdot x|}. \quad (5)$$

Hiemit ist die zum Ziel gesetzte Aufgabe, der Entwurf der Querschnittshöhen, gelöst. Wir können als sicher annehmen, daß die auf den minimalen Materialverbrauch bezügliche Forderung auch erfüllt ist, die Lösung wurde ja gerade aus dieser Minimumbedingung abgeleitet. Es ist dagegen nicht ebenso offenbar, ob die erhaltene Konstruktion auch den Anforderungen der Sicherheit entspricht oder nicht. Diese Frage kann mit Hilfe des bekannten Verfahrens der Elastizitätslehre entschieden werden. Die hierzu notwendigen Begriffe werden wir in den folgenden Erörterungen zusammenfassen.

Die in der Konstruktion entstehenden spezifischen Formänderungen werden im gegebenen Falle spezifische Winkelverdrehungen, d. h. Krümmungen sein. Die Funktion  $\bar{D} = D(\bar{G}, \bar{Y})$  soll die Krümmungen als eine Funktion des Momentes  $M$  und der Querschnittsabmessungen angeben, d. h.:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{12 \cdot M}{E \cdot b \cdot h^3}.$$

Wie ersichtlich, entspricht einem jeden Moment eine gewisse Krümmung und jeder Krümmung ein gewisses Moment, das heißt, daß der Zusammenhang tatsächlich gegenseitig eindeutig ist; ferner wird die Ungleichung (1) ebenfalls erfüllt, die bloß den selbstverständlichen Umstand zum Ausdruck bringt, daß ein Anwachsen des Momentes ein Anwachsen, dessen Verminderung dagegen eine Verminderung der Krümmung nach sich zieht.

Die spezifische ergänzende Formänderungsarbeit kann nach der Formel

$$L = \int_0^M \frac{12 \cdot M}{E \cdot b \cdot h^3} dM = \frac{6 \cdot M^2}{E \cdot b \cdot h^3}$$

berechnet werden. Wenn für die Konstruktion eine statisch mögliche Momentenverteilung  $M = -x^2 + k \cdot x$  gegeben ist, dann liefert das Integral

$$l = \int_0^1 \frac{6 (-x^2 + k \cdot x)^2}{E \cdot b \cdot h^3} dx$$

die ergänzende Formänderungsarbeit der Konstruktion. Wenn  $b$  und  $h$  überall gegeben sind, dann wird nach dem bekannten Arbeitsminimumsatz, bei den

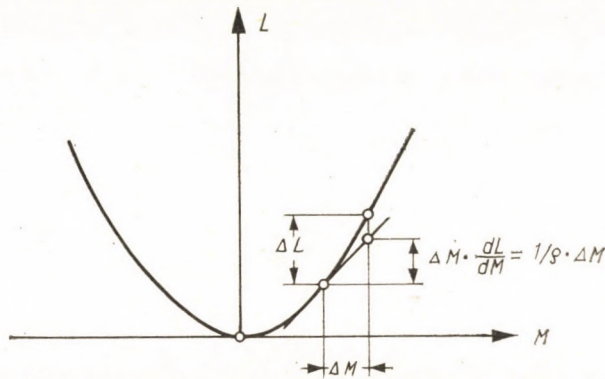


Abb. 4

gegebenen Querschnittsabmessungen, jene Momentenlinie die Verträglichkeitsbedingungen erfüllen, die die Lösung der Minimumbedingung

$$\int_0^1 \frac{6 (-x^2 + k \cdot x)^2}{E \cdot b \cdot h^3} dx = \text{Min!}$$

ist.

Wenn wir der Formel

$$L = \frac{6 \cdot M^2}{E \cdot b \cdot h^3}$$

entsprechend  $L$  als eine Funktion von  $M$  darstellen (siehe Abb. 4), dann meldet sich der Inhalt der im 2. Kapitel des Aufsatzes vorkommenden Ungleichung (3) in höchst augenscheinlicher Weise. Diese Ungleichung hat in unserem Falle die Form

$$\Delta L \geq \frac{1}{\rho} \cdot \Delta M.$$

Wenn wir hier in Betracht ziehen, daß

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dL}{dM}$$

ist, dann gelangen wir zur Ungleichung

$$\Delta L \geq \frac{dL}{dM} \cdot \Delta M,$$

die lediglich den Umstand feststellt, daß die Kurve der spezifischen ergänzenden Arbeitsfunktion vom positiven Zweig der  $L$ -Achse aus gesehen konkav

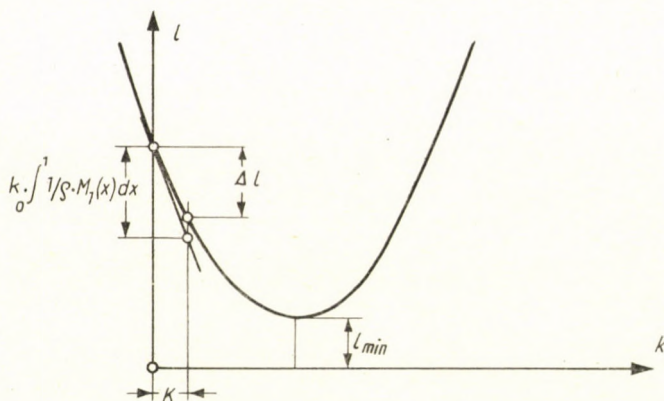


Abb. 5

ist. Denselben einfachen Sinn können wir bezüglich der ergänzenden Formänderungsarbeit der Ungleichung (4) beimessen (siehe Abb. 5).

Zur Untersuchung des der Sicherheit entsprechenden Wesens einer wirtschaftlichen Konstruktion hatten wir noch die Begriffe der charakteristischen spezifischen Formänderung und Formänderungsarbeit eingeführt. Die charakteristische Krümmung können wir auf die Weise berechnen, daß wir in die Formel für  $\frac{1}{\varrho}$  anstatt  $h$  die Funktion  $h = h(M_A)$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{12 M}{E \cdot b [h(M_A)]^3} = \frac{12 M}{E \cdot b \left[ \sqrt{\frac{6}{b \sigma}} \cdot |M_A| \right]^3} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sigma^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{E} \cdot \frac{M}{\sqrt{|M_A|^3}} \end{aligned}$$

und nachher  $M$  und  $M_A$  einander gleich setzen:

$$\left[ \frac{1}{\varrho} \right]_{\text{char}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sigma^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{E} \cdot \frac{1}{\sqrt{|M_A|}}.$$

Dies ist nichts anderes, als die in den nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfenen Querschnitten infolge des größten zulässigen Momentes auftretende Krümmung.

Im Sinne des I. Satzes ist der Umstand, daß eine nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfene Konstruktion der Sicherheit entspricht, von der Erfüllung zweier Bedingungen abhängig. Laut der Bedingung *a*) muß die Funktion

$$A = \sqrt{\frac{6b}{\sigma}} \cdot \sqrt{|M|}$$

(zum wenigsten von links und rechts) differenzierbar sein; diese Bedingung wird offenbar erfüllt. Gemäß der Bedingung *b*) dagegen muß die Gleichung

$$\left[ \frac{dA}{dM} \right]_{M=M_A} = c \left( \frac{1}{\varrho} \right)_{\text{char}}$$

bestehen, die nach entsprechender Substitution die Form

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{2}}}{\sigma^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|M_A|}} = c \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sigma^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{E} \cdot \frac{1}{\sqrt{|M_A|}} \quad (6)$$

annimmt. Mit Rücksicht auf den Umstand, daß  $c$  eine beliebige positive Konstante ist, wird auch die Bedingung *b*) erfüllt. So können wir als sicher annehmen, daß die nach der Formel (5) mit veränderlicher Querschnittshöhe entworfene Konstruktion gleichzeitig auch der Sicherheit entspricht.

Der Grundgedanke der auf den I. Satz bezüglichen Beweisführung ist grob formuliert einfach der folgende. Nachdem die Funktion

$$M = M_A(x) = -x^2 + 0,655 \cdot x$$

die Lösung der Wirtschaftlichkeitsminimierungsaufgabe

$$\int_0^1 A(M) dx = \int_0^1 \sqrt{|-x^2 + k \cdot x|} dx = \text{Min}!$$

ist, muß die Gleichung

$$\frac{d}{dk} \int_0^1 A(M) dx = \int_0^1 \frac{dA}{dM} \cdot x dx = 0$$

bestehen. In diesem Falle ist aber im Sinne der Bedingung *b*)

$$\frac{d}{dk} \int_0^1 L(M) dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{\varrho} \right]_{\text{char}} \cdot x dx = 0,$$

und dies bedeutet, daß die Lösung der Minimumaufgabe der Elastizitätslehre dieselbe, wie die der Wirtschaftlichkeitsminimumaufgabe ist. In der Konstruktion entsteht daher tatsächlich die Momentenlinie

$$M = -x^2 + 0,655 \cdot x,$$

dieser aber entsprechen alle Querschnitte, nachdem die Abmessung *h* gerade so bestimmt wurde.

Für die Zwecke der theoretischen Untersuchungen schien unter den bekannten Methoden der Festigkeitslehre die Arbeitsminimumbedingung als die geeignetste zu sein. Wenn wir aber im gegebenen Falle die Sicherheit der Konstruktion diesmal vom I. Satz unabhängig zu kontrollieren wünschen, dann ist es zweckdienlich, den Umstand zu untersuchen, ob im Falle der mit Hilfe der Formel (5) erhaltenen Abmessungen *h* die Momentenlinie

$$M = -x^2 + 0,655 \cdot x$$

die Verträglichkeitsbedingungen auch wirklich erfüllt, z. B. ob die Stütze *A* tatsächlich keine Verschiebung erleidet, d. h. ob das Integral

$$\int_0^1 x \frac{1}{\varrho} dx = 0$$

ist. Die hauptsächlichen Etappen der Berechnung sind — die keine Rolle spielenden Konstanten fortlassend — die folgenden:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x(-x^2 + 0,655 \cdot x)}{(|-x^2 + 0,655 \cdot x|)^{3/2}} dx &= \int_0^{0,655} \dots dx - \int_{0,655}^1 \dots dx = \\ &= \frac{\pi}{2} 0,655 - (\sqrt{0,345} + 0,655 \cdot \text{Arth} \sqrt{0,345}) = 0. \end{aligned}$$

Die Sicherheit der Konstruktion kann daher auch auf diese Weise nachgewiesen werden.

Es versteht sich von selbst, daß wenn die Ausarbeitung des Beispiels nicht der Veranschaulichung des Gedankenganges dieses Aufsatzes gedient hätte, dann die Lösung auf einem wesentlich kürzeren Wege hätte erlangt werden können. Es wäre hinreichend gewesen, die Berechnung bis zur Formel (5), d. h. bis zur Bestimmung der Höhenabmessungen  $h$  durchzuführen, und die Sicherheit der Konstruktion mittelst der Substitution in die Bedingung  $b$ ) des I. Satzes [siehe Formel (6)] zu kontrollieren. Ja es ist sogar nicht in jedem einzelnen Falle notwendig, diesen letzten Schritt zu unternehmen, da ja in der Formel (6) die auf die Achse und die Belastung der Konstruktion bezüglichen Angaben nicht vorkommen. Daher kann man aus dem Beispiel die Lehre ziehen, daß eine auf Biegung beanspruchte Konstruktion mit veränderlicher Querschnittshöhe, die auf der Grundlage des minimalen Materialverbrauches entworfen wurde, immer eine der Sicherheit entsprechende Konstruktion ist.

Die im ersten Absatz dieses Kapitels gestellte Aufgabe wurde vorhergehend für den Fall elastischen Materials gelöst. Das im Falle plastischen Materiales zu verfolgende Verfahren weicht bis zur Berechnung der Höhenabmessungen  $h$  (Formel 5) nur wenig von dem vorhergehend erörterten ab. Die Abweichung verursacht nur der Umstand, daß die Tragfähigkeit des plastischen Materiales in Bezug auf das Moment durch die Formel

$$|M| \leq \frac{b \cdot h^2}{4} \sigma = M_{gr}$$

ausgedrückt ist, daher von der elastischen Tragfähigkeit nur in einem konstanten Faktor abweicht. Nachdem ein konstanter Faktor die Wirtschaftlichkeitsminimumaufgabe nicht beeinflußt, muß als Grundlage der Querschnittsbemessung auch fernerhin die Momentenlinie

$$M = M_A(x) = -x^2 + 0,655 \cdot x$$

dienen, daher wird die Funktion  $h(x)$  der Formel (5) sehr ähnlich sein, d. h.:

$$h = \frac{2}{\sqrt{b\sigma}} \cdot \sqrt{|-x^2 + 0,655 \cdot x|}.$$

Von den auf diese Weise entworfenen, aus plastischem Material bestehenden Konstruktionen wurde im 4. Kapitel nachgewiesen, daß diese der Sicherheit entsprechen. Die dortigen Erörterungen erfordern keine besondere Erläuterung. Es wird aber nicht uninteressant sein, die Sicherheit der Konstruktion diesmal von dem im 4. Kapitel Gesagten unabhängig zu kontrollieren.



Konstruktionen aus plastischem Material entsprechen der Sicherheit, wenn ihre Bruchlast nicht kleiner als die tatsächliche Belastung ist. Zur Bestimmung der Bruchlast nehmen wir den aus der Abb. 6 ersichtlichen, über zwei plastische Gelenke verfügenden Bruchmechanismus an. Die Stelle des im Felde liegenden plastischen Gelenkes fixieren wir nicht, sondern kennzeichnen sie mit dem Abstand  $\xi$ . Die Arbeit der äußeren Kräfte ist

$$l_a = p \cdot l \cdot \frac{1}{2} = \frac{p}{2} \cdot l.$$

Zur Bestimmung der inneren Arbeit müssen die Winkelverdrehungen der pla-

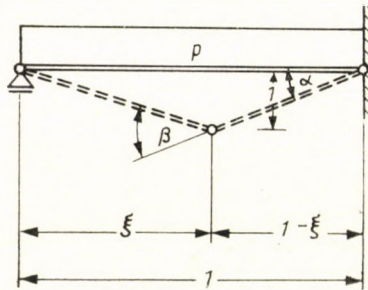


Abb. 6

stischen Gelenke wie auch die in den plastischen Gelenken wirkenden Momente bekannt sein. Die Ausdrücke für die relativen Winkelverdrehungen lauten:

$$\alpha = \frac{l}{1 - \xi} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{l}{\xi(1 - \xi)}.$$

Die Bruchmomente erhält man, indem in die Formel von  $M_{gr}$  die Konstruktionshöhe  $h$  nach der Formel (6) eingesetzt wird. So erhält man an der Stelle der Einspannung das Moment

$$M_{gr}(x = l) = 0,345,$$

und an der Stelle des im Felde liegenden plastischen Gelenkes das Moment

$$M_{gr}(x = \xi) = -\xi^2 + 0,655 \xi.$$

(Dieser letztere Wert ist deshalb von  $\xi$  abhängig, weil die Trägerhöhe veränderlich ist.) Mit Hilfe der obigen Werte ergibt sich für die innere Arbeit

$$l_i = \frac{0,345}{1 - \xi} + \frac{\xi(0,655 - \xi)}{\xi(1 - \xi)} = 1.$$

(Der Wert der inneren Arbeit ist daher von  $\xi$  unabhängig und so entfällt in diesem Falle die in der Plastizitätslehre übliche Minimalisierung. Dies weist darauf hin, daß das Fließen in allen Querschnitten gleichzeitig beginnt.) Die Bruchlast kann aus der Gleichung  $l_a = l_i$  berechnet werden:

$$\frac{P}{2} = 1,$$

d. h. daß  $p = 2$  ist. Die Bruchlast stimmt daher mit der tatsächlichen Belastung überein, das heißt, daß die Konstruktion der Sicherheit entspricht.

#### SCHRIFTTUM

1. PEREDY, J.: Die Planung wirtschaftlicher Tragwerke. *Acta Technica Acad. Sc. Hung.* Tom. XXIX., Fasc. 3—4., pp. 251—273 (1960).
2. PELIKÁN, J.: Theory of Highly Economical Reinforced Concrete Beams. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.* Tom. XVII., Fasc. 1—2., pp. 39—56 (1957).
3. VISY, Z.: Iterative Method for the Calculation of Moments on Highly Economical Reinforced Concrete Beams. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.* Tom. XXII., Fasc. 1—2., pp. 12—26 (1958).
4. PEREDY, J.: Über eine neue Minimumaufgabe der technischen Festigkeitslehre. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.* Tom XXIV., Fasc. 3—4., pp. 329—346 (1959).
5. GREENBERG, H. J. and PRAGER, W.: On Limit Design of Beams and Frames. *Trans. Amer. Soc. Engrs.* 117, 447 (1952).

#### ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz behandelt Fragen, die mit den im Aufsatz [1] erörterten Verfahren zum Entwurf wirtschaftlicher Konstruktionen zusammenhängen. Es wird darin nachgewiesen, daß das Wirtschaftlichkeitsverfahren in dem überwiegenden Teil der praktisch wichtigen Fälle vom Gesichtspunkt der Elastizitätslehre aus betrachtet eine der Sicherheit entsprechende Konstruktion ergibt, obzwar im Laufe des Entwerfens die Verträglichkeitsbedingungen zwecks Vereinfachung der Berechnung nicht ausdrücklich berücksichtigt wurden. Es wird ferner nachgewiesen, daß die nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfene, statisch unbestimmte Konstruktion in gewissen Fällen auch noch eine weitere vorteilhafte Eigenschaft besitzt, sie ist nämlich, was den Verlauf der Kurve des Elastizitätsgesetzes des Materials anbetrifft, nicht empfindlich, die Konstruktion gewährleistet die Sicherheit auch dann, wenn das Elastizitätsgesetz nicht linear ist. Schließlich wird im Aufsatz festgestellt, daß eine aus plastischem Material bestehende, nach dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfene, statisch unbestimmte Konstruktion in allen Fällen, wo die Grundsätze der technischen Plastizitätslehre anwendbar sind, unbedingt der Sicherheit entspricht.

#### ECONOMICAL STATICALLY REDUNDANT STRUCTURES

J. PEREDY

#### SUMMARY

The paper deals with questions referring to the method for designing economical structures discussed in paper [1]. It was proved, that structures designed according to the economical method are from the view-point of the Theory of Elasticity to be regarded as safe in the majority of practically important cases in spite of the fact that for a more simple

calculation the requirements of compatibility were not distinctly taken into account during the designing of the structures. Furthermore, it was shown, that a statically redundant structure designed in accordance with the economical method possesses an additional advantageous property, *i. e.*, such a structure is not sensitive to the run of the Law of Elasticity, it is also safe, if the Elasticity-Law is not linear. Finally, it was established, that statically redundant structures consisting of plastic material and designed in compliance with the economical method, are absolutely safe in all cases for which the principles of the technical Theory of Plasticity could be applied.

## CONSTRUCTIONS HYPERSTATIQUES ÉCONOMIQUES

J. PEREDY

### RÉSUMÉ

L'étude examine des problèmes relatifs à l'établissement de projets de constructions économiques, dont la méthode a été décrite dans une étude précédente (1). L'auteur démontre que, dans la grande majorité des cas pratiquement importants, la méthode d'économie garantit une construction sûre du point de vue de la théorie de l'élasticité, malgré que pendant l'établissement de projets de construction hyperstatique, les conditions de la compatibilité ont été négligées en vue de simplifier le calcul. L'auteur prouve aussi que les constructions réalisées suivant la méthode en question présentent, dans certains cas, un autre avantage: elles ne sont notamment pas sensibles à la forme de la loi d'élasticité de la matière; la construction restant sûre même quand la loi d'élasticité n'est pas linéaire. L'auteur constate enfin que la construction hyperstatique en matériau plastique, réalisée suivant la méthode d'économie, reste absolument sûre dans tous les cas où peuvent être utilisés les principes de la plasticité.

## ЭКОНОМИЧНЫЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Й. ПЕРЕДИ

### РЕЗЮМЕ

В статье разбираются описанные в работе (1) вопросы по методу проектирования экономических конструкций. Доказывается, что экономичный метод в большинстве важных с точки зрения практики случаев, принимая во внимание учение теории упругости приводит к результату надежной конструкции, несмотря на то, что в целях упрощения расчетов во время проектирования экономических статически неопределенных конструкций специально не были приняты во внимание требования неразрывности деформаций. Далее доказывается, что спроектированная по экономичному методу статически неопределенная конструкция в некоторых случаях имеет и в дальнейшем еще одно благоприятное качество, а именно — нечувствительна к закону упругости материала, конструкция и тогда надежна, если закон упругости является нелинейным. Наконец, статья устанавливает, что спроектированная по методу экономичности статически неопределенная конструкция из пластичного материала — во всех тех случаях, при которых применимы принципы технической пластичности — является неоспоримо надежной.



# DESIGN OF HELIX COUPLERS

T. BERCELI

CAND. OF TECHN. SC.

RESEARCH INSTITUTE FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received September 2, 1959]

## I. Introduction

Helix couplers are mainly used for coupling energy to and out of a travelling-wave tube [1, 2, 3]. In a helix coupled travelling-wave tube the propagation of microwave energy is slowed down by a helix transmission line surrounded on the outside by a glass tube which keeps the helix in position, and at the same time, provides a vacuum tight envelope for the inner space (Fig. 1). Inside the helix there is a beam of high velocity electrons delivering energy to amplify the wave. The beam is launched by an electron gun represented on the left side in Fig. 1 and collected by a collector electrode represented on the right side of Fig. 1. The electron gun, which consists of a cathode, a beam forming electrode and an accelerating electrode, produces a focused beam of electrons. The spreading of the beam is prevented by the magnetic field  $H$  of an external permanent magnet or electromagnet. The helix couplers are on the outer side of the glass envelope. The signal to be amplified enters the tube through the one helix at the cathode end and the amplified signal is coupled out of the tube by the other helix at the collector end. The helix couplers and the inner helix inside the tube are coupled both electrically and magnetically, thus, the coupling helices and the inner helix together, form a coupled transmission line system.

The input and output couplers of the travelling-wave tube must satisfy several requirements. The couplers through which energy is fed into and out of the travelling-wave tube must efficiently operate over a frequency band as wide as possible, and the losses should be kept at a comparative low level. The main advantage of the helix couplers is just in their wide transmission band exceeding one octave, and this makes it possible to take full advantage of the large band width of travelling-wave tubes. A helix-coupled travelling-wave tube can be operated over a band wider than one octave without any re-adjustment. A further advantage is that a helix coupler has small dimensions and makes the use of a thin cable possible. Thus, the energy transferring does not require much place at the input and output, which is particularly advantageous in the case when permanent magnets are used. However, there

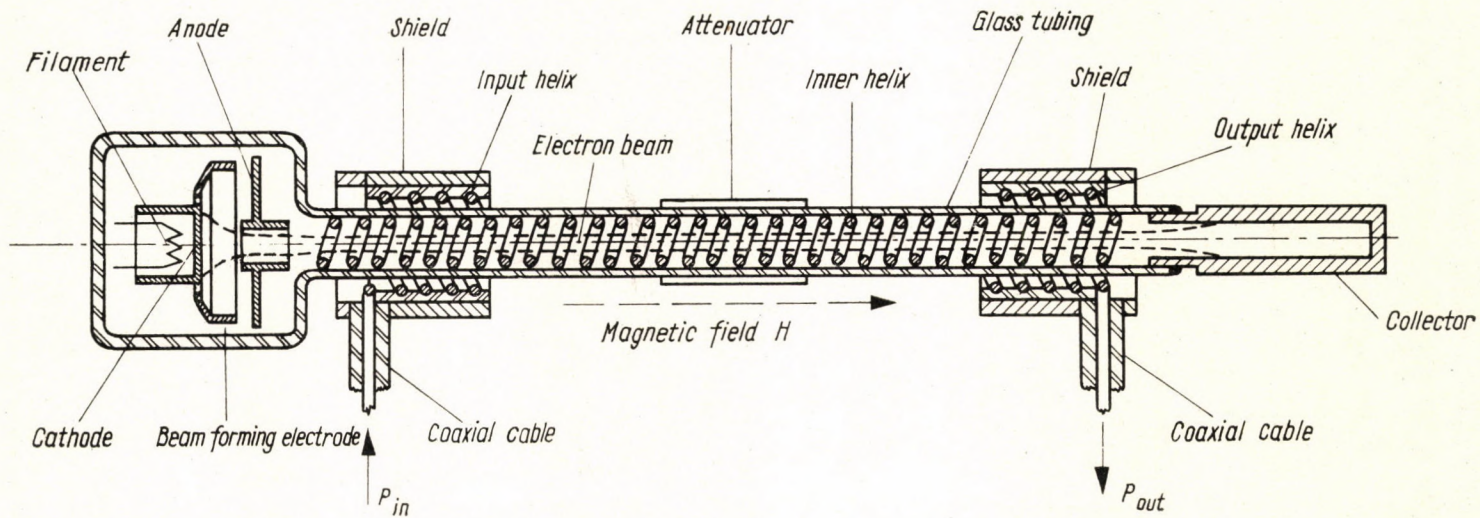


Fig. 1. Schematic cross section of a travelling-wave tube

is a disadvantage in using helix couplers because their standing-wave ratios and the losses in them are rather high.

This paper is based on a work performed at the Section I of the Institute for Telecommunication in Budapest.

## 2. Coupled transmission lines

Between two transmission lines permanently coupled along their axes there is a so-called spatial beating [4, 5]. The energy originally fed to one of the lines will gradually transfer to the other, then it returns, and the returned energy is again transferred to the other line, the whole process being then repeated along the lines. The fraction of the energy taking part in this spatial

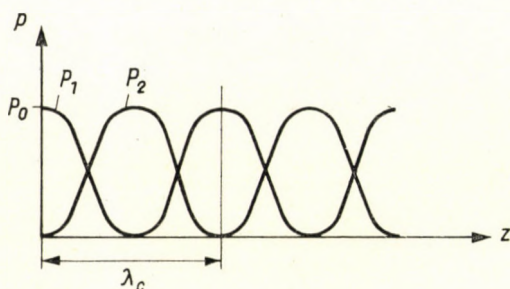


Fig. 2. Spatial beating between coupled transmission lines

beating depends on the phase velocities along the two transmission lines. If phase velocities in the two uncoupled lines have the same values the total energy surges to and fro. In this paper identical phase velocities are to be supposed in the coupled lines.

The spatial beating with total energy between two coupled lines is illustrated in Fig. 2. At the beginning the entire energy is in line 1, and the energy in line 2 is zero. Advancing along direction  $z$  the energy decreases in line 1 and increases in line 2 until the whole of it has been transferred to line 2, and line 1 has zero energy now. This process is repeated periodically. The coupling wavelength  $\lambda_c$  is defined as the length along which energy is transferred from line 1 to line 2 and then back again to line 1, so that the original conditions are re-established. This wavelength depends on the amount of coupling and is inversely proportional to it.

With helix couplers a single complete energy transfer is to be accomplished. Consequently, the phase velocity along the coupling helix must be the same as that along the inner helix.\* Further requirements are that the two

\* Because of the dispersion in the helices this requirement is slightly modified [6].

helices should be wound in an opposite direction to each other, and the coupling helix must have a length equal to the half coupling wavelength. The helices at the input and output being identically designed are to be considered together.

The analysis will be confined to passive networks, hence no electron beam is assumed as being in the inner helix. This is the case when the travelling-wave tube is switched off, that is, when its cathode is cold. The presence of the beam or the amplification of the input wave has very little effect on the results [7].

### 3. Course of design

The approximate dimensions of the helix couplers can be determined as follows. The dimensions of the inner helix in the travelling-wave tube are given, hence the phase velocity along this helix can be calculated. Afterwards a diameter is assumed for the wire of which the coupling helix will be wound, and the optimum diameter of the coupling helix is then determined. The phase velocity along the coupling helix must be the same as that along the inner helix. Having this condition and taking into account the assumed data the required pitch of the coupling helix can be calculated. Then the value of the coupling factor, and therefore, the required length of the coupling helix is to be determined.

The energy is applied to the coupling helix by a coaxial cable. In order to have a good matching between the cable and the coupling helix the latter should be shielded. The inner diameter of the shield is chosen in such a way that the characteristic impedance of the coupling helix should be equal to that of the coaxial cable.

This method only yields approximate results as the calculations are based on simplified assumptions. The first simplification was made on the calculation of the phase velocity along the inner helix in the travelling-wave tube. The real helix is regarded as a cylindrical surface of infinite length and zero thickness, the conductance of which is infinite in the directions of the turns and zero perpendicular to them. The effect of the glass envelope is neglected, though it obviously reduces the phase velocity. Hence, at the very beginning there is only an approximate formula at our disposal which gives only approximate values. In calculating the velocity of the wave along the coupling helix the same approximations are made, and the effects of the glass envelope and the insulating material supporting the helix are neglected. By such simplifications it is evident that only approximate results can be attained.

Therefore, in practical cases a series of experiments are needed in order to determine the most favourable dimensions. These experiments are based on the calculated values. However, the most favourable values of the pitch and



the length of the coupling helix as well as the shield diameter must be experimentally determined.

Our experiments were performed on two types of helix couplers with the cable positioned and connected in different ways. The cross sections of the helix couplers are represented in Fig. 3. Their main element is the helix embedded in insulating material and shielded. In case (a) the coaxial cable was in an axial direction, and after having been placed in, its inner conductor was soldered to the helix, the outer conductor being in contact with the metal case shielding the helix. In case (b) the cable was placed in a radial direction, and its bare inner conductor served to form the helix turns. The outer conduc-

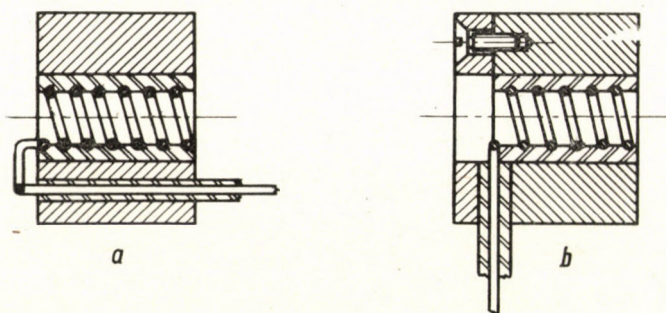


Fig. 3. Cross section of helix couplers

tor of the cable was fixed by a little disk to the metal house shielding the helix. The coaxial cables connected to the helices were short (10–20 cm) and ended in *N* type connectors. Measurements were made through these connectors.

#### 4. Approximate calculation

In the following an approximate method for calculating helix couplers is given. The cross section of the inner helix with the coupling helix is shown in Fig. 4 where the characteristic dimensions are indicated. In designing coupling helices the dimensions of the inner helix in the travelling-wave tube are known. These dimensions cannot be altered for they are determined by the required gain, power, efficiency, etc. of the tube. The available data are as follows:

- $a_1$  = mean radius of the inner helix,
- $m_1$  = pitch of the inner helix,
- $d_1$  = diameter of the wire of which the inner helix is wound,
- $f_m$  = mean frequency.

First, the phase velocity along the inner helix is to be determined. Calculation is based on simplified assumptions. The real helix is replaced by a helically conducting cylindrical tube of radius  $a_1$  and of infinite length and zero thickness. The effect of the glass envelope on phase velocity is neglected. In this case the phase velocity as a function of helix dimensions and frequency has the values given in Fig. 5 [8]. Here, the free-space propagation constant  $\beta_0$  is

$$\beta_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2 \pi f}{c} \quad (1)$$

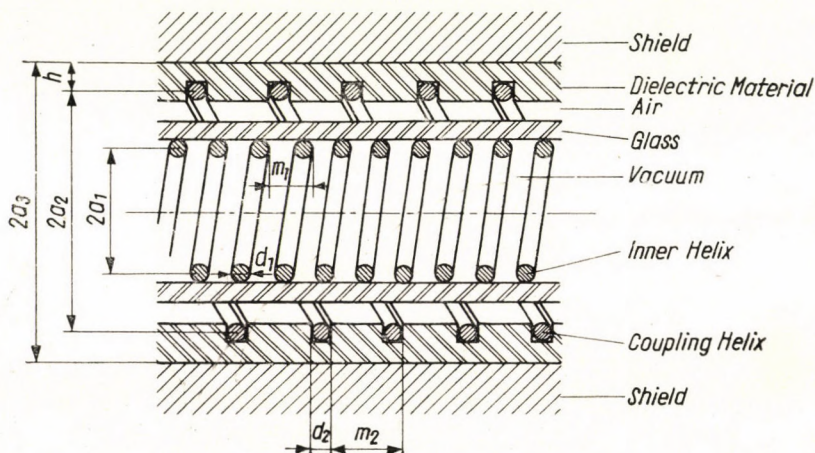


Fig. 4. Cross section of a coupling helix with the inner helix

where  $\omega$  is the angular frequency,  $c$  is the velocity of light in free space, and  $f$  is the frequency. In this figure,  $\psi$  is the pitch angle of the given helix. The tangent of this angle is

$$\tan \psi = \frac{m}{2 a \pi} \quad (2)$$

where  $m$  is the pitch and  $a$  the mean radius of the given helix. Finally, the phase velocity along the given helix is represented by  $v$  in Fig. 5.

Hereafter, the dimensions of the coupling helix must be determined. First, the wire diameter and the mean diameter of the coupling helix are chosen. The mean diameter has to be chosen in such a way that the inner diameter of the coupling helix should at least be a few tenths of a millimeter larger than the outer diameter of the glass tube, so that the helix coupler could be put onto the glass tubing. The phase velocity along the coupling helix must be equal to that along the inner helix. Taking these conditions into account the helix pitch is calculated with the assumed data and using Fig. 5. This

pitch may be obtained by several trials. An essential point is, however, that the two helices be wound in opposite directions.

Now let us determine the inner diameter of the shield around the coupling helix. Here, too, simplifications are made. Since the spacing between the coupling helix and shield is very small, the calculations could be made for a plane arrangement neglecting the effect of the adjacent turns, which in any case is small. In this case the coupling helix and its shield are replaced by a straight wire and a metal plate parallel to it (Fig. 6). In Fig. 6,  $d_2$  is the wire diameter

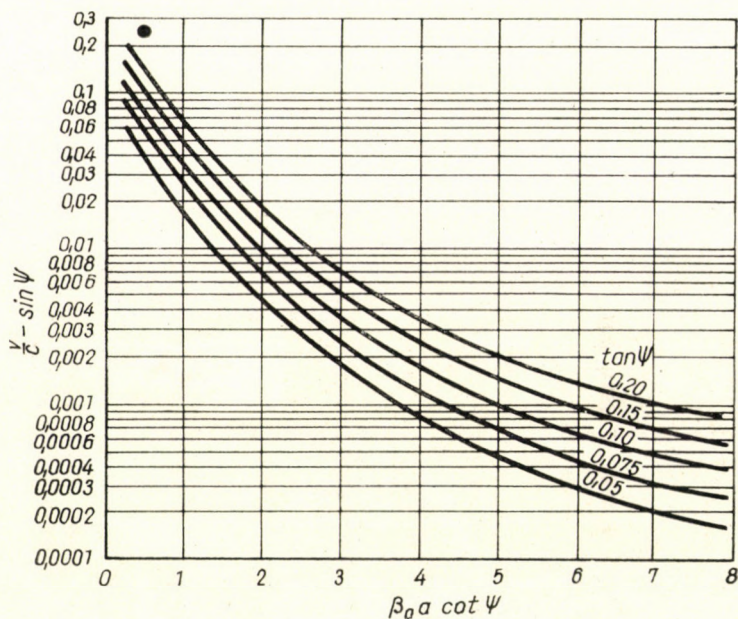


Fig. 5. Diagram for determining phase velocity along helices

of the coupling helix, and  $h$  is the distance of the wire's centre to the shield. Under these circumstances the characteristic impedance is given by

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \operatorname{ar} \cosh \frac{2h}{d_2} \quad (3)$$

where  $\epsilon_r$  is the relative dielectric constant of the medium. In the electromagnetic field of the coupling helix there are different dielectric materials. Taking into account only the insulator that holds the turns, equation (3) gives a good approximation. Thus, the distance  $h$  corresponding to the required characteristic impedance is

$$h = \frac{d_2}{2} \cosh \frac{Z_0 \sqrt{\epsilon_r}}{60} . \quad (4)$$

Hence the inner radius of the shield is

$$a_3 = a_2 + h \quad (5)$$

where  $a_2$  is the coupling-helix mean radius.

Further, in order to determine the length of the coupling helix the coupling factor must be known. If the phase velocities along the helices are equal, the factor of the coupling between the two helices is approximately [6]:

$$k_{1,2} = e^{-\beta(a_2 - a_1)} \quad (6)$$

where  $k_{1,2}$  is the factor of the coupling between the two helices, and  $\beta$  is the common phase constant of the propagation along the helices. This phase constant as a function of the phase velocity is expressed by

$$\beta = \frac{\omega}{v} \quad (7)$$

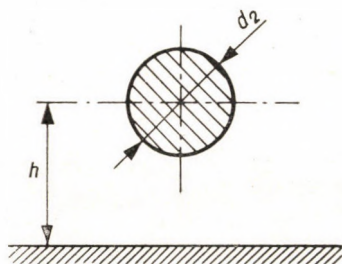


Fig. 6. Two-dimensional representation for evaluating the characteristic impedance of a coupling helix

In computing the coupling factor, the effect of shielding may also be taken into account. Then, as an approximation the shield itself is regarded as a helically conducting surface. In this way three coupling factors can be calculated. The resulting coupling factor is given by the formula [7]:

$$k = k_{1,2} \sqrt{\frac{1 - k_{2,3}^2}{1 - k_{1,3}^2}} \quad (8)$$

where  $k_{1,2}$ ,  $k_{2,3}$  and  $k_{1,3}$  are the coupling factors between the inner helix and coupling helix, the coupling helix and shield, and the inner helix and shield, respectively. These values are obtained from equation (6) by using the corresponding subscripts.

The coupling phase constant for synchronous helices is [6]:

$$\beta_c = 2 \beta k \quad (9)$$

Hence the coupling wavelength is

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\beta_c} = \frac{\pi}{\beta k}. \quad (10)$$

In order to completely transfer the energy, the length of the coupling helix must be equal to half of the wavelength  $\lambda_c$ , that is

$$L = \frac{\lambda_c}{2} = \frac{\pi}{\beta_c} \quad (11)$$

where  $L$  is the length of the coupling helix.

### 5. Optimum design

To arrive at an optimum dimensioning of the helix couplers, let us examine the relation between the coupling phase constant and the phase constant of the propagation along the uncoupled helix. This will, at the same time, give the approximate frequency dependence of the coupling phase constant, too, as the phase constant of the propagation along a helix is proportional to the frequency.

First of all, the expressions for the three coupling factors are written according to equation (6):

$$\left. \begin{aligned} k_{1,2} &= e^{-\beta(a_2-a_1)}, \\ k_{1,3} &= e^{-\beta(a_3-a_1)}, \\ k_{2,3} &= e^{-\beta(a_3-a_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Substituting equation (5) into (12) gives

$$\left. \begin{aligned} k_{1,2} &= e^{-\beta(a_2-a_1)}, \\ k_{1,3} &= e^{-\beta(a_2-a_1+h)}, \\ k_{2,3} &= e^{-\beta h}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Thus an interesting relation is obtained between the three coupling factors:

$$k_{1,3} = k_{1,2} k_{2,3}. \quad (14)$$

According to equations (8) and (13) the resulting coupling factor has the expression

$$k = e^{-\beta(a_2-a_1)} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\beta h}}{1 - e^{-2\beta(a_2-a_1+h)}}}. \quad (15)$$

The relation between the coupling phase constant and the single-helix phase constant is obtained by substituting equation (15) into equation (9) which gives

$$\beta_c = 2 \beta e^{-\beta(a_2 - a_1)} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\beta h}}{1 - e^{-2\beta(a_2 - a_1 + h)}}} \quad (16)$$

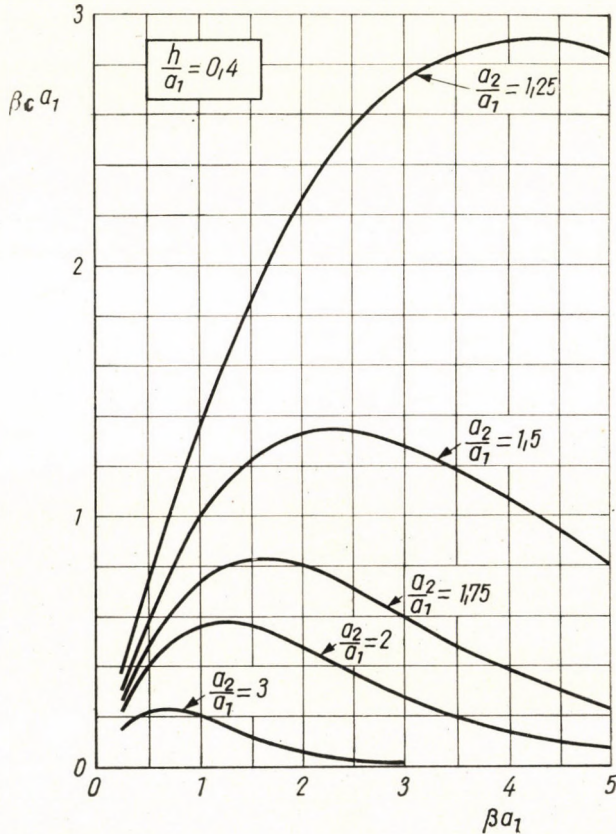


Fig. 7. Coupling phase constant as a function of the single-helix phase constant for different  $a_2/a_1$  values and  $h/a_1 = 0.4$

It is more to the point to have this equation written in a dimensionless form. To this end both sides of the equation are multiplied by  $a_1$  and the exponents transformed with the result

$$\beta_c a_1 = 2 \beta a_1 e^{-\beta a_1 \left( \frac{a_2}{a_1} - 1 \right)} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\beta \frac{h}{a_1}}}{1 - e^{-2\beta a_1 \left( \frac{a_2}{a_1} - 1 + \frac{h}{a_1} \right)}}} \quad (17)$$

Equation (17) includes two parameters:  $a_2/a_1$  = the ratio of the mean radius of the coupling helix to that of the inner helix;  $h/a_1$  = the ratio of the mean distance between the coupling helix and its shield to the inner-helix mean radius. Accordingly, equation (17) is represented by two diagrams.

In Fig. 7 the variation of  $\beta_c a_1$  with  $\beta a_1$  is shown for different values of  $a_2/a_1$ , with  $h/a_1 = 0.4$ . It can be seen that each curve has a maximum. With the increase of  $a_2/a_1$  the maximum is shifted towards the higher values of  $\beta a_1$ . Furthermore, it can be shown, too, that with  $\beta a_1$  kept at a constant value and  $a_2/a_1$  decreases,  $\beta_c a_1$  increases, *i. e.* with an inner helix of given radius the

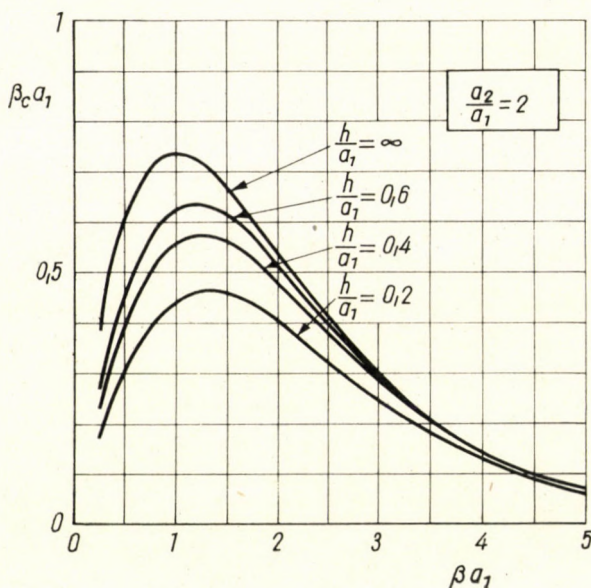


Fig. 8. Coupling phase constant as a function of the single-helix phase constant for different  $h/a_1$  values, with  $a_2/a_1 = 2$

complete energy transfer requires a shorter coupling helix, if the latter is nearer to the inner helix.

Fig. 8 shows the dependence of  $\beta_c a_1$  on  $\beta a_1$  for different  $\frac{h}{a_1}$  values and  $\frac{a_2}{a_1} = 2$ . The curve with  $h/a_1 = \infty$  corresponds to the case when the coupling helix is not shielded. The remaining curves indicate the effect of shielding. It is to be seen from this figure that considering the effect of the shield a lower value is obtained for  $\beta_c$ , thus equation (11) yields a longer coupling helix as compared to that obtained when the presence of the shield is neglected. Consequently, a better agreement with the experimental results would be attained if the effect of the shield is taken into account.

Furthermore, Fig. 8 shows that when keeping  $\beta a_1$  at a constant and decreasing  $h/a_1$  the value of  $\beta_c a_1$  is also decreased. Thus with an inner helix of an unaltered radius the length of the coupling helix increases as the spacing between the coupling helix and shield decreases. Finally, it is worth mentioning that the maximum of the curve  $\beta_c a_1$  is shifted to higher  $\beta a_1$  values when  $h/a_1$  is decreased.

In the vicinity of the maximum the coupling phase constant has a nearly constant value over a wide band as seen in Figs. 7 and 8. Therefore, the maximum of the curve  $\beta_c a_1$  must be kept at the mean frequency of the operating band when wide-band couplers are needed. In practical cases the mean frequency and the dimensions of the inner helix are given, and the value of  $h$  is determined by the characteristic impedance of the connecting cable. Thus,  $\beta a_1$  and  $h/a_1$  are known, and from these values the ratio of the two radii have to be determined in such a way as to give the maximum at the given value of  $\beta a_1$ .

In order to determine the position of the maximum,  $\beta_c$  must be differentiated with respect to  $\beta$  and the differential quotient made equal to zero. And so the equation

$$\frac{a_2}{a_1} - 1 - \frac{1}{\beta a_1} + \left( \frac{a_2}{a_1} - 1 + \frac{h}{a_1} \right) \frac{e^{-2\beta a_1 \left( \frac{a_2}{a_1} - 1 + \frac{h}{a_1} \right)}}{1 - e^{-2\beta a_1 \left( \frac{a_2}{a_1} - 1 + \frac{h}{a_1} \right)}} - \frac{h}{a_1} \frac{e^{-2\beta a_1 \frac{h}{a_1}}}{1 - e^{-2\beta a_1 \frac{h}{a_1}}} = 0 \quad (18)$$

is obtained. In the limit case when  $h/a_1 = \infty$ , equation (18) has the simpler form:

$$\frac{a_2}{a_1} - 1 - \frac{1}{\beta a_1} = 0. \quad (19)$$

This corresponds to the case when the distance of the shield to the coupling helix is infinite, that is when the coupling helix is not shielded. Consequently, the effect of the shield is given by the fourth and fifth terms at the left side of equation (18).

Equation (18) cannot be solved for  $a_2/a_1$ . Therefore this equation has numerically been solved for several values of  $\beta a_1$  and  $h/a_1$  by successive approximations. In Fig. 9, the optimum values for the ratio of radii  $a_2/a_1$  obtained by solving equation (18) are given as a function of  $\beta a_1$  for different values of  $h/a_1$ . It is apparent that taking the effect of shielding into account a higher value for the optimum radius ratio is obtained than without the shield. More-



over, it is to be seen that decreasing the spacing between the coupling helix and the shield the optimum ratio of the radii is increased.

The optimum design of a coupling helix is obtained as follows. Fig. 9 gives the optimum  $a_2/a_1$  ratio at the given values of  $\beta a_1$  and  $h/a_1$ . Knowing this ratio, the values of the coupling phase constant  $\beta_c$  in the middle of the band and at the two sides of it, are computed from equation (16). With the band

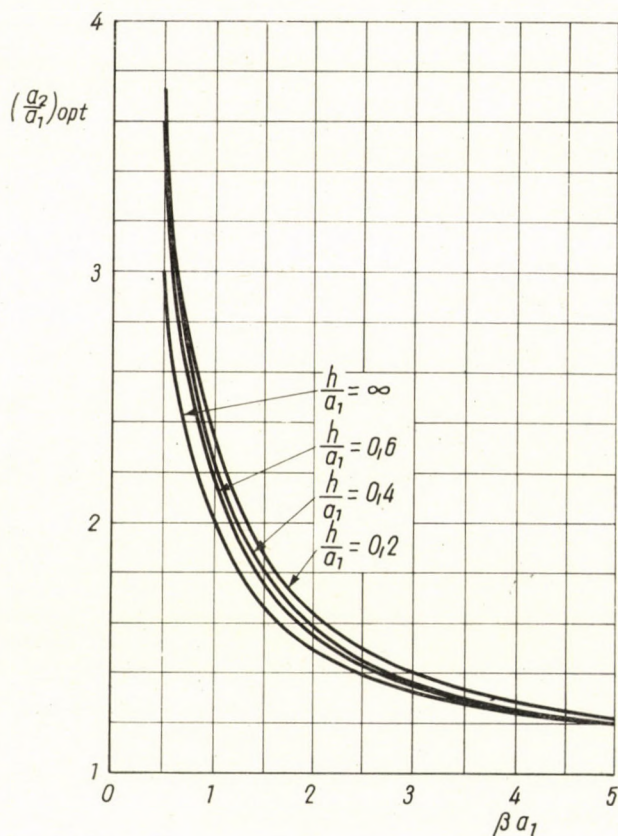


Fig. 9. Variation of optimum  $a_2/a_1$  ratio with  $\beta a_1$  for different  $h/a_1$  values

not too wide, the values of  $\beta_c$  at the two sides of the band are nearly equal. In this case the average value of  $\beta_c$  in the middle of the band and at the low frequency side of it is computed, and from this average value the required length of the coupling helix is determined by using equation (11). If the band width is large, the coupling phase constant  $\beta_c$  has substantially different values at the two sides of the band, as can be seen in Figs. 7 and 8. Then by trial the ratio  $a_2/a_1$  is increased until the values of  $\beta_c$  at the two edges of the band become equal.

### 6. Example illustrating the dimensioning of a helix coupler

Let us suppose that a helix coupler for a band from 2000 to 4000 Mc/s is to be designed. The inner helix in the travelling-wave tube has the dimensions:

mean radius	$a_1 = 1.68$ mm,
wire diameter	$d_1 = 0.38$ mm,
helix pitch	$m_1 = 0.68$ mm,
winding direction	right-handed,
outer diameter of the glass tubing	$= 5.3$ mm.

First of all, the phase velocity of the propagation along the inner helix should be determined. The calculations are made for the mean frequency  $f_m = 3000$  Mc/s. The propagation constant in free space is, according to equation (1)

$$\beta_0 = \frac{2 \pi f}{c} = \frac{2 \pi \cdot 3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 62.8 \text{ m}^{-1}$$

The tangent of the pitch angle is, according to equation (2),

$$\tan \psi_1 = \frac{m_1}{2a_1 \pi} = \frac{0.68}{2 \cdot 1.68 \pi} = 0.0645$$

Hence,

$$\beta_0 a_1 \cot \psi_1 = \frac{62.8 \cdot 1.68 \cdot 10^{-3}}{0.0645} = 1.63$$

The corresponding value in Fig. 5 is

$$\frac{v}{c} = \sin \psi_1 = 0.0095$$

Therefore, the ratio of the phase velocity to the velocity of light has the value of

$$\frac{v}{c} = \sin \psi_1 + 0.0095 \approx \tan \psi_1 + 0.0095 = 0.0645 + 0.0095 = 0.074$$

Now the dimensions of the coupling helix has to be determined. First, the wire diameter for the coupling helix is chosen. For transferring energy to the helix coupler a coaxial cable, type RK 19/A, manufactured in Hungary, is used. The inner conductor in this cable has a diameter of 0.7 mm. The turns of the coupling helix will be made of this conductor. Hence, the wire diameter for the coupling helix will be 0.7 mm.

The distance of the shield to the coupling helix will now be determined. The calculations are made using equation (4) with the condition that the characteristic impedance should be equal to that of the coaxial cable, which is 50 ohms. To support the winding a polystyrene material of a dielectric constant  $\epsilon_r = 2.54$  will be used. According to equation (4) the distance of the shield to the coupling helix is

$$h = \frac{d_2}{2} \cosh \frac{Z_0 \sqrt{\epsilon_r}}{60} = \frac{0.7}{2} \cosh \frac{50 \sqrt{2.54}}{60} = 0.7 \text{ mm.}$$

As a next step, the optimum value of  $a_2/a_1$  has to be determined. To this end the single-helix phase constant will be calculated using equation (7) which gives

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{\beta_0}{v/c} = \frac{62.8}{0.074} = 848 \text{ m}^{-1}$$

The parameters  $\beta a_1$  and  $h/a_1$  have the values:

$$\beta a_1 = 848 \cdot 1.68 \cdot 10^{-3} = 1.42,$$

$$\frac{h}{a_1} = \frac{0.7}{1.68} = 0.42.$$

Now, the optimum radius ratio  $a_2/a_1$  can readily be read from Fig. 9. Its value is

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)_{\text{opt}} = 1.85.$$

Therefore, the optimum mean radius for the coupling helix is

$$(a_2)_{\text{opt}} = 1.85 a_1 = 1.85 \cdot 1.68 = 3.1 \text{ mm.}$$

The mean diameter for the coupling helix is equal to twice this value, *i. e.*  $2 a_2 = 6.2 \text{ mm}$ . Hence, the coupling helix will have an inner diameter of 5.5 mm, that is 0.2 mm higher than the outer diameter of the glass tubing. This value is high enough for the helix coupler to be easily placed onto the glass tube.

The inner diameter of the shield can now be calculated by using equation (5) according to which

$$2 a_3 = 2 a_2 + 2 h = 2 \cdot 3.1 + 2 \cdot 0.7 = 7.6 \text{ mm}$$

The phase velocities along both helices must have the same value. From this condition the pitch of the coupling helix can be determined. The calculations are made by several trials. A value is chosen for  $\tan \psi_2$  and the corresponding phase velocity is calculated. If this velocity differs from that along the inner helix, another value is assumed for  $\tan \psi_2$ , according to the sign of the deviation, and the new phase velocity is compared with that along the inner helix. This process is continued until an appropriate value is obtained which in our case is

$$\tan \psi_2 = 0.0708.$$

Then,

$$\beta_0 a_2 \cot \psi_2 = \frac{62.8 \cdot 3.1 \cdot 10^{-3}}{0.0708} = 2.75$$

to which the value of

$$\frac{v}{c} - \sin \psi_2 = 0.0032$$

is found from Fig. 5. Hence, the phase velocity is

$$\frac{v}{c} = \sin \psi_2 + 0.0032 \approx \tan \psi_2 + 0.0032 = 0.0708 + 0.0032 = 0.074.$$

This is in actual agreement with the phase velocity along the inner helix. The helix pitch from equation (2) is found to be

$$m_2 = 2 a_2 \pi \tan \psi_2 = 2 \cdot 3.1 \pi \cdot 0.0708 = 1.38 \text{ mm.}$$

Since the inner helix is wound in a right-hand direction, the coupling helix must have left-handed turns.

To determine the length of the coupling helix the values of  $\beta_c$  in the centre of the band, and at the lower end of it, are needed. In the centre of the band the value of  $\beta_c$  according to equation (16) is

$$\begin{aligned} \beta_c &= 2 \beta e^{-\beta(a_2 - a_1)} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\beta h}}{1 - e^{-2\beta(a_2 - a_1 + h)}}} = \\ &= 2 \cdot 848 e^{-848(3.1 - 1.68)10^{-3}} \sqrt{\frac{1 - e^{-2 \cdot 848 \cdot 0.7 \cdot 10^{-3}}}{1 - e^{-2 \cdot 848(3.1 - 1.68 + 0.7)10^{-3}}}} = 432 \text{ m}^{-1}. \end{aligned}$$

The value of  $\beta_c$  at the lower end of the frequency band is calculated as follows. The phase velocities along the uncoupled inner helix and along the uncoupled coupling helix must be determined. The phase velocities along the uncoupled helices at the lower end of the band are slightly different, therefore, the mean value is taken as an approximation to calculate  $\beta$ . The latter having been obtained, equation (16) gives the value of  $\beta_c$ . At the lower end of the band

$$\beta'_c = 378 \text{ m}^{-1}.$$

The values of  $\beta_c$  obtained at the centre and lower end of the band are averaged. It gives

$$\bar{\beta}_c = \frac{\beta_c + \beta'_c}{2} = \frac{432 + 378}{2} = 405 \text{ m}^{-1} .$$

The length of the coupling helix is obtained by substituting this value of  $\beta_c$  into equation (11). It is found to be

$$L = \frac{\pi}{\bar{\beta}_c} = \frac{\pi}{405} = 7.75 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 7.75 \text{ mm} .$$

Finally, the calculated dimensions of the coupling helix are rounded up and recapitulated:

inner diameter	5.5 mm,
mean diameter	6.2 mm,
diameter of the shield	7.6 mm,
helix pitch	1.4 mm,
length	7.8 mm.

## 7. Principles of measurements

In the preceding section calculations were made in order to determine the dimensions of the coupling helices. However, these calculations only give rough approximate values, and a series of experiments was begun to obtain the correct dimensions. The measurements were made at frequencies from 2000 to 4000 Mc/s.

A microwave absorbent material gave matched loads terminating both ends of the inner helix. The coupling helix was placed onto the inner helix at approximate its centre. A slotted line was connected to the cable connector of the coupling helix through a conical taper, and the standing-wave ratio was measured. As the inner helix is terminated in matched loads, the standing-wave ratio, thus obtained, gives a measure of the efficiency of the coupling.

The standing-wave ratio of the helix coupler was measured in the band at several frequencies. Since a wide-band transmission has to be obtained, the variation of the standing-wave ratio, measured at a single frequency, with the dimensions, has no significance. Therefore, a new notion was introduced, namely that of the mean standing-wave ratio, which is defined as follows. The standing-wave ratio of the helix coupler is measured at equal distances on the investigated band, for example at 100 Mc/s distances, and the arithmetical mean value of the results thus obtained, is regarded as the mean standing-wave ratio. During the experiments the dependence of the mean standing-wave ratio on the dimensions of the helix couplers was studied. This method proved to be very useful in investigating wide-band elements.

It must be noted that the measured standing-wave ratio does not only characterise the helix coupler. There are reflections at the connections of the coupling helix and the coaxial cable, in the coaxial cable itself (owing to inner

irregularities), in the cable connector, and finally, in the conical taper at the slotted line. The measured value is the resultant of these reflections.

In addition, impedance and attenuation measurements were made in order to examine the possibility of an outer matching, and to determine the losses in the helix couplers.

For experimental purposes more than 200 helix couplers were made, and nearly 20 000 measurements were performed on them. A short evaluation of this enormous mass of data will be given in the following sections.

### 8. Couplers with polystyrene insulation

The aim was to determine experimentally the optimum dimensions of the helix couplers. A great variety of helix couplers with different dimensions were made, and by measurements on them the optimum dimensions were found. As a quantity for characterising the efficiency of coupling the mean standing-wave ratio was used.

The experiments began with helix couplers corresponding to the dimensions computed in Section 6. Accordingly, the data of the coupling helix were at the beginning as follows: wire diameter = 0.7 mm, inner diameter = 5.5 mm, shield diameter = 7.6 mm, helix pitch = 1.4 mm, length = 7.8 mm. The coupler was made in a form shown in Fig. 3(b), *i. e.* the coaxial cable was connected in a radial direction to the helix. A Hungarian made microwave coaxial cable type RK19/A with polythene insulation and 50 ohms characteristic impedance was used. The inner conductor of this cable has a diameter of exactly 0.7 mm. Therefore, the turns of the coupling helix were formed of the inner conductor of this cable, the insulation of which had been removed. A polystyrene insulation kept the turns in position. The coupling helices were wound left-handed, as a right-handed inner helix was used.

To obtain the optimum dimensions several series of measurements had to be performed. During these measurements the wire diameter and the inner diameter of the coupling helix were kept at a constant value and the length, pitch and shield altered. The three curves in Fig. 10 show the results.

First of all, the length was changed, the pitch and shield diameter being equal to 1.4 and 7.6 mm, respectively. The variation of the mean standing-wave ratio with the length of the coupling helix is shown in Fig. 10(a). As is to be seen, at a certain length, which is equal to 9 mm, a definite minimum is obtained.

The experiments continued with changes made in the helix pitch. The length was now made equal to 9 mm, that is to the previously obtained optimum value, while the shield diameter remained at 7.6 mm. The mean standing-wave ratio varied with the pitch of the coupling helix as shown in Fig.

10(b). Here, too, a definite minimum can be seen at a point where the pitch is 1.3 mm.

Finally, the shield diameter was changed. According to the previously obtained optimum values, the length and the pitch were chosen to be equal to 9 mm and 1.3 mm, respectively. The dependence of the mean standing-wave ratio on the shield diameter is shown in Fig. 10(c). The minimum is at a diameter equal to 7.3 mm.

The three sets of measurements previously described were made in order to determine the optimum dimensions. As could be seen, first the length of

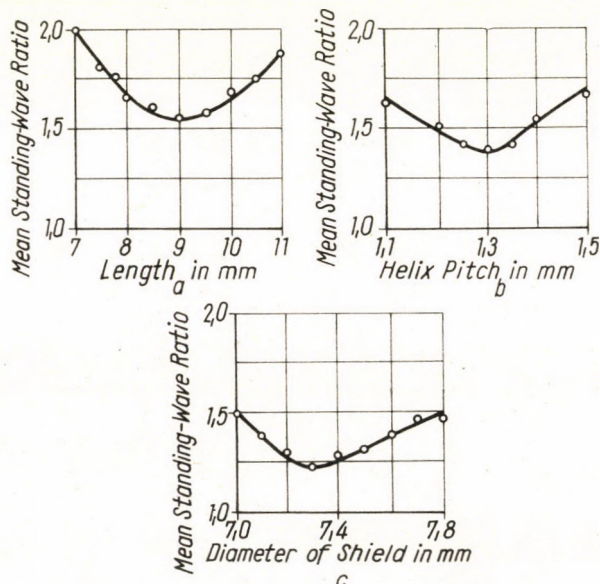


Fig. 10. Mean standing-wave ratio as a function of helix dimensions for helices of 0.7 mm wire diameter and polystyrene insulation

the coupling helix had been changed, and, after the optimum length had been determined, the pitch and then the shield diameter were altered. In this way a first approximation was obtained for the optimum dimensions of the coupling helix. Subsequently, further experiments were performed with the purpose of getting a better approximation. The length, pitch and shield diameter were again altered, but without any essential improvement. The reason for this is perhaps the fact that the difference between the calculated values and the experimentally obtained ones is small, only 10 to 20 per cent. Accordingly, a further improvement of the optimum values obtained by the first approximation was not attempted at the succeeding experiments.

Therefore, the optimum dimensions of the helix coupler with a 0.7 mm wire diameter are as follows: length = 9.0 mm, pitch = 1.3 mm, shield diameter =

= 7.3 mm. The frequency dependence of the standing-wave ratio of the helix coupler having optimum dimensions is shown in Fig. 11. The value of the standing-wave ratio is seen to be below 1.4 over the whole width of the band.

Further, measurements were made to determine the variation of the mean standing-wave ratio with the thickness of the disk which fixes the cable. Changing the thickness of the disk was found to have practically no effect on the standing-wave ratio. Additional experiments on coupling helices to which the coaxial cables were tangentially connected instead of the radial arrangement, yielded practically the same result.

Subsequently, the effect of the wire diameter on the mean standing-wave ratio was examined. For this purpose experiments were performed on helix

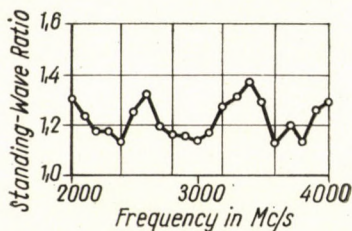


Fig. 11. Frequency dependence of the standing-wave ratio for a helix coupler with optimum dimensions, made of a wire of 0.7 mm diameter and polystyrene insulation

couplers with a 0.6 mm wire diameter. As previously, their inner diameter was equal to 5.5 mm. The arrangement is shown in Fig. 3(a). In this case, the coaxial cable connected to the helix is in an axial direction, its outer conductor being in contact with the shield, and its inner conductor is connected to the coupling helix. The experiments began with the optimum values obtained from the previous set of measurements. The results can be read from Fig. 12.

At the beginning of this experiment, the length of the coupling helix was altered. The pitch was 1.3 mm and the shield diameter 7.3 mm. The distance between the inner conductor of the coaxial cable and the coupling helix was 8 mm. The variation of the mean standing-wave ratio with the length of the coupling helix is shown in Fig. 12(a). Minimum was obtained at a length of 9.5 mm. Fig. 12(b) shows the effect of the shield-diameter variation. In this case, the length of the coupling helices is 9.5 mm, the pitch is 1.3 mm, the distance between the inner conductor of the coaxial cable and the coupling helix is 8 mm. Optimum value was obtained when the diameter equalled 7.2 mm.

The effect of changes in pitch is shown in Fig. 12(c). The length was 9.5 mm, the shield diameter had a value of 7.2 mm, and the cable-helix distance remained 8 mm. The optimum pitch had the same value as in the previous experiments. In addition, the influence of the distance between the inner

conductor of the coaxial cable and the coupling helix on the mean standing-wave ratio was investigated. This is shown in Fig. 12(d). The optimum value proved to be 7 mm.

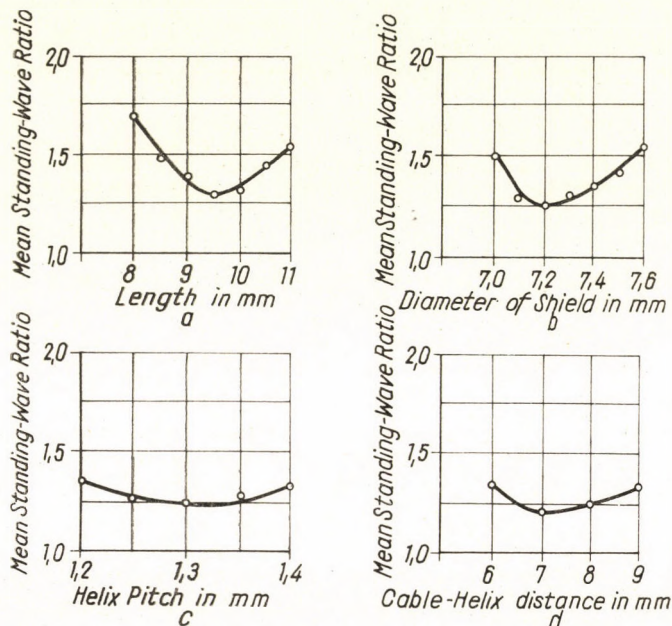


Fig. 12. Mean standing-wave ratio as a function of the helix dimensions for helices of 0.6 mm wire diameter and polystyrene insulation

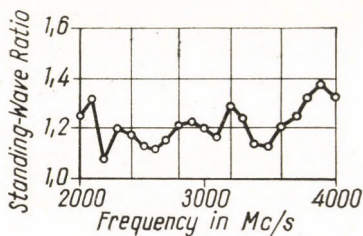


Fig. 13. Frequency dependence of the standing-wave ratio for a helix coupler with optimum dimensions, made of a wire of 0.6 mm diameter and polystyrene insulation

Accordingly, the optimum dimensions of a helix coupler with a 0.6 mm wire diameter are: length 9.5 mm, pitch 1.3 mm, shield diameter 7.2 mm, cable-helix distance 7 mm. The frequency dependence of the standing-wave ratio of a helix coupler having optimum dimensions is given in Fig. 13. The value of the standing-wave ratio is below 1.4 over the whole width of the band.



On making the following set of measurements, coupling helices with a 0.3 mm wire diameter were used in the arrangement shown in Fig. 3(a). As previously, the inner diameter of the coupling helix had a value of 5.5 mm. We started with the optimum values obtained from the previous set of measurements. The results are given by four curves in Fig. 14.

The shield diameter was changed at the beginning. The values were: helix pitch = 1.3 mm, length of the coupling helix = 9.5 mm, cable-helix dis-

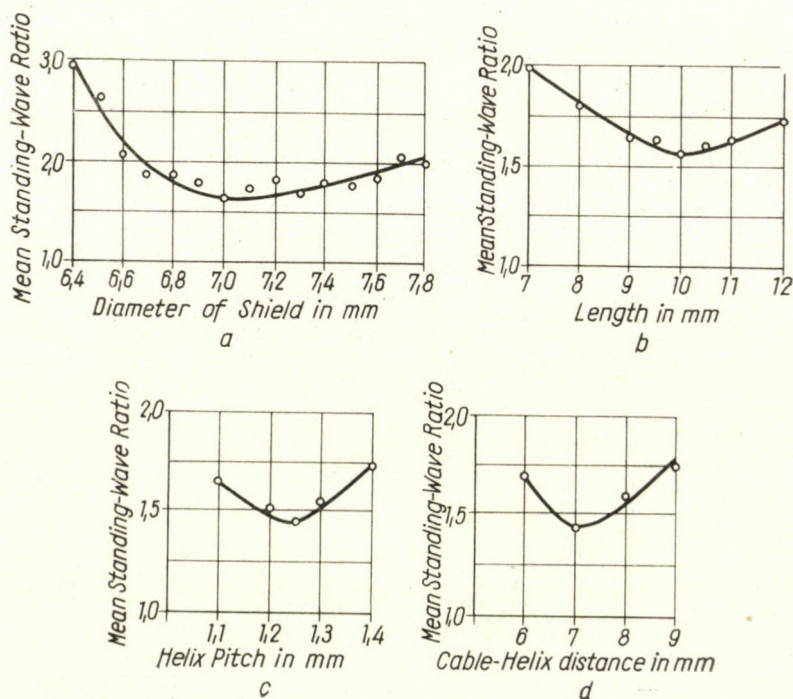


Fig. 14. Mean standing-wave ratio as a function of the helix dimensions for helices of 0.3 mm wire diameter and polystyrene insulation

tance = 7 mm. The dependence of the mean standing-wave ratio on shield diameter is shown in Fig. 14(a). Minimum standing-wave ratio is obtained at a shield diameter of 7.8 mm.

Subsequently, the length of the coupling helix was altered. Measurements were made with a pitch of 1.3 mm, and a shield diameter equal to the previously determined 7.0 mm. The distance between the cable and helix was also 7 mm. The optimum length proved to be 10 mm, as can be seen in Fig. 14(b). Fig. 14(c) shows the dependence on the pitch. In this case the dimensions were: length 10 mm, shield diameter 7.0 mm, distance between the cable and the helix 7 mm. The optimum value of the pitch is 1.25 mm. In addition,

the effect of the cable-helix distance on the mean standing-wave ratio was examined. The corresponding diagram is shown in Fig. 14(d). The optimum value remained 7 mm.

Consequently, a helix coupler with a wire diameter of 0.3 mm has its optimum dimensions as follows: length 10 mm, pitch 1.25 mm, shield diameter 7.0 mm, distance between the inner conductor of the coaxial cable and the coupling helix 7 mm. The frequency dependence of the standing-wave ratio of a helix coupler having optimum dimensions is given in Fig. 15. As is to be seen, the standing-wave ratio is below 1.6 over the whole width of the band.

Let a comparison be made between the results of the three sets of measurements. The thicker wire seems to be the more advantageous. With a wire diameter of 0.3 mm such a low standing-wave ratio could not be obtained as

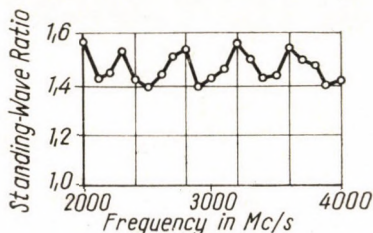


Fig. 15. Frequency dependence of the standing-wave ratio for a helix coupler with optimum dimensions, made of a wire of 0.3 mm diameter and polystyrene insulation

with the 0.6 or 0.7 mm wires. In addition, when altering the wire diameter the optimum values of pitch, length and shield diameter were changed, namely with decreasing wire diameter the optimum values of pitch and shield diameter decrease, and the optimum length increases.

### 9. Couplers with teflon insulation

The experiments were continued on helix couplers in which the insulating material supporting the turns was teflon. These helix couplers were constructed of a wire with 0.6 mm diameter in an arrangement according to Fig. 3(a). The inner diameter was 5.5 mm, as previously. We started with the optimum dimensions obtained on the polystyrene-insulated helix couplers with a wire diameter of 0.6 mm. The four curves of Fig. 16 show the results.

First of all, the value of shield diameter was altered (Fig. 16(a)). The chosen values were as follows: pitch = 1.3 mm, length = 9.5 mm, cable-helix distance = 7 mm. The optimum shield diameter was found to be 7.2 mm. Then, the helix pitch was altered (Fig. 16(b)). In this case the shield diameter

was 7.2 mm, length was 9.5 mm and the cable-helix distance 7 mm. An optimum pitch of 1.3 mm was obtained.

Subsequently, the length of the coupling helix was altered, but in a different way. The shield length remained 10 mm, and the helix screwed into the threads of the teflon insulation was gradually shortened by a quarter of a turn. From Fig. 16(c) it can be seen that there is no definite minimum, the mean standing-wave ratio is nearly constant over a rather wide band. The

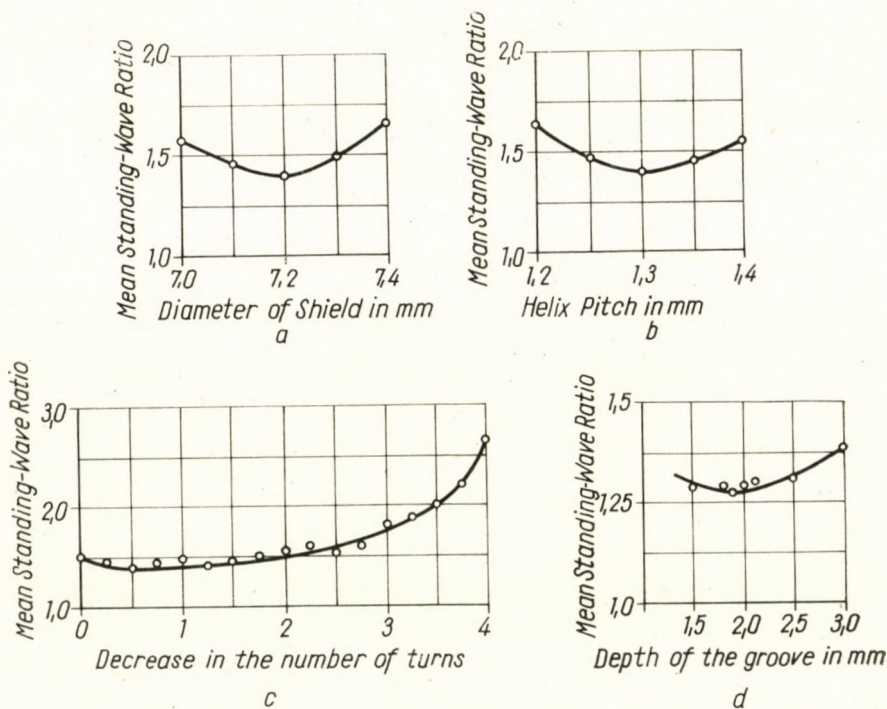


Fig. 16. Mean standing-wave ratio as a function of the helix dimensions for helices of 0.6 mm wire diameter and teflon insulation

mean standing-wave ratio began to increase considerably only when the helix had been shortened by more than three turns. The optimum value was reached with a helix shortened by about a  $\frac{1}{2}$  turn, that is, when its length was 9.4 mm.

To obtain a further improvement in mean standing-wave ratio a metal disk was placed on the end of the helix coupler, at which the first turn of the coupling helix was connected to the cable inner conductor. This metal disk had a groove in which a piece of the coupling-helix wire was placed and connected to the inner conductor of the cable. The groove had a width of 3 mm and a variable depth. The effect of the depth variation on the mean standing-wave ratio is shown in Fig. 16(d). The optimum value corresponds to 1.9 mm groove depth.

To sum up, the optimum values are: length = 9.4 mm, pitch = 1.3 mm, shield diameter = 7.2 mm, distance between the cable inner conductor and the coupling helix = 7 mm, groove depth = 1.9 mm. Fig. 17 shows the variation of the standing-wave of a helix coupler with these optimum dimensions as a function of frequency. From this figure it may be seen that the standing-wave ratio is below 1.5 over the entire frequency band.

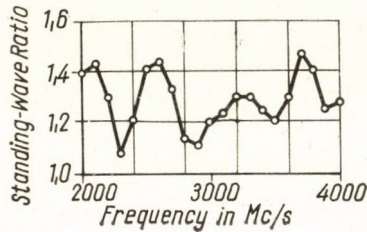


Fig. 17. Frequency dependence of the standing-wave ratio for a helix coupler with optimum dimensions, made of a wire of 0.6 mm diameter and teflon insulation

## 10. Two-terminal couplers

There were other helix couplers constructed in such a way, that both their ends were provided with cable connections. The connecting cables had connectors at the ends, and standing-wave ratio was measured. For this purpose the helix couplers were drawn onto the inner helix and approximately placed in the middle of it. The inner helix had matched terminations at both ends. One of the cable connections of the helix couplers was connected to a slotted line by means of a conical taper. Standing-wave ratio was measured in two cases: the cable connection at the other end of the helix coupler was terminated with a matched load in the first case, and left open in the second case.

Some of the helix couplers substantially gave the same results in both cases. This indicates that these couplers transfer a large part of the energy to the inner helix, and therefore the terminations have little effect. With other couplers considerably different results were obtained, in both cases indicating that only a small part of the energy is transferred to the inner helix. When their ends were left open, a high value for the standing-wave ratio was obtained, while with a matched load the standing-wave ratio decreased substantially.

## 11. Impedance measurements

The impedance of one of the helix couplers was measured as a function of frequency. This helix coupler was made in the form shown in Fig. 3(b) with the following data: pitch = 1.3 mm, length = 9 mm, shield diameter = 7.3

mm, wire diameter = 0.7 mm, inner diameter = 5.5 mm. The insulating material holding the turns was polystyrene. To measure the impedance the helix coupler was pulled over the inner helix and fixed approximately at a central position on it, the inner helix was terminated at both ends with

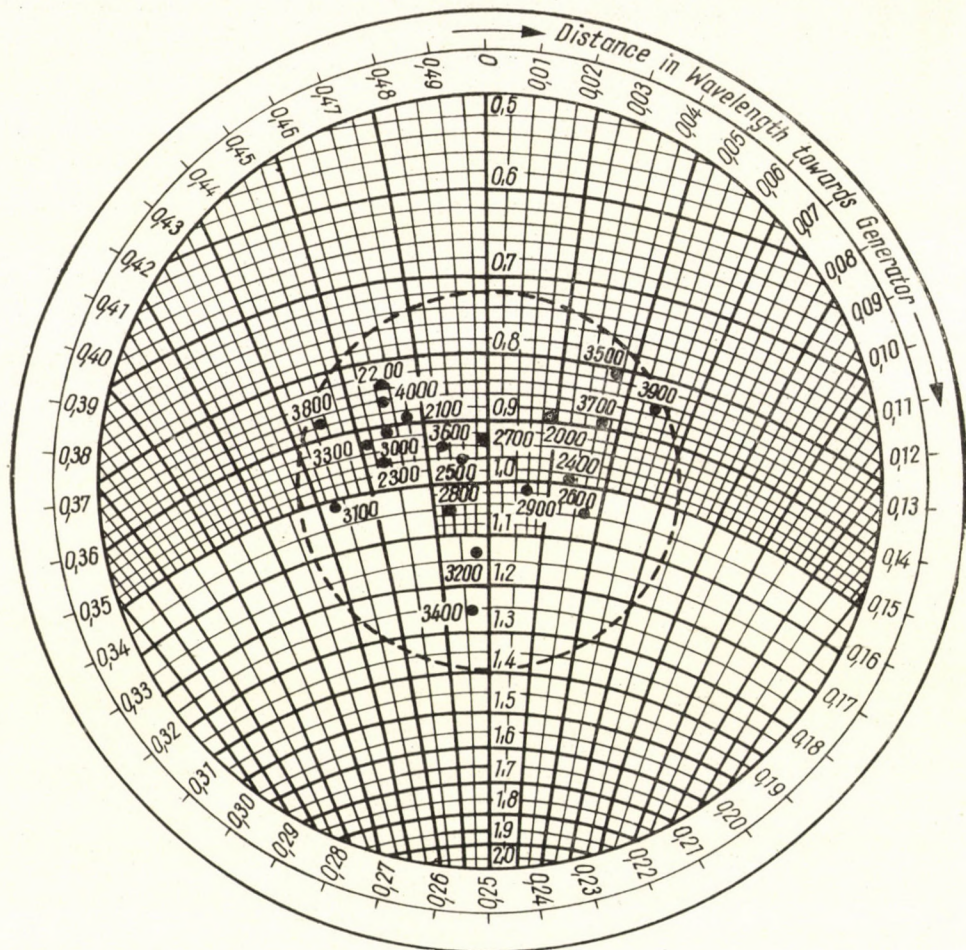


Fig. 18. Frequency dependence of the impedance for a helix coupler

matched loads, and a slotted line was connected through a conical taper to the cable connectors of the helix coupler. The impedance refers to the end of the cable connector.

The impedances measured at frequencies from 2000 to 4000 Mc/s are given in a Smith diagram shown in Fig. 18. The numbers at the points on the figure denote the frequencies. The values of the impedance are inside a circle which corresponds to 1.4 standing-wave ratio. As can be seen, the variation

of the impedance over a narrow band is not too large, therefore, the helix coupler can well be matched in a narrow frequency band to a wave-guide by means of matching elements in the latter.

## 12. Attenuation measurements

The attenuation of two helix couplers were measured. The helix couplers had polystyrene insulation and were constructed of a 0.7 mm diameter wire as shown in Fig. 3(b). Their dimensions were as follows: pitch = 1.3 mm, length = 9 mm, shield diameter = 7.3 mm, inner diameter = 5.5 mm. The insulating material fixing the turns was polystyrene. When making the

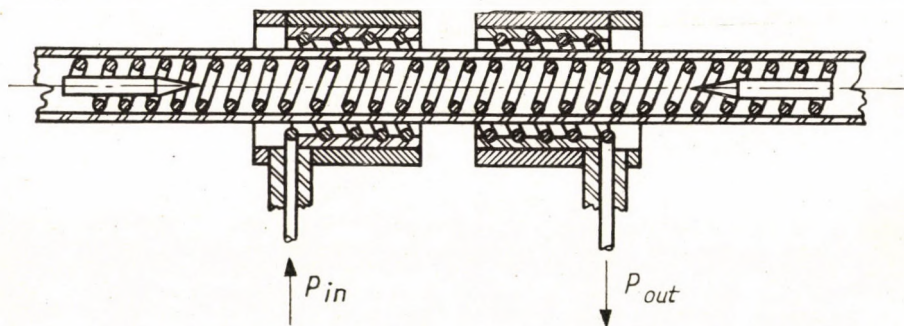


Fig. 19. Attenuation measurement on helix couplers

measurements, the helix couplers were drawn onto the inner helix beside each other (Fig. 19). Microwave power was applied through the cable connection to one of the helix couplers, and the power at the cable connection of the other helix coupler was measured. In this way, the energy entering the cable connection travelled along the cable of one of the helix couplers, was transmitted through the coupler to the inner helix, and from there it reached the power meter through the other helix coupler and its cable. Therefore, the sum of the attenuations in the two cables, in the two helix couplers and in a part of the inner helix was measured. The inner helix was terminated at both ends by its characteristic impedance to avoid reflections which might falsify the results. The helix couplers were shifted close to each other so that the section of the inner helix through which energy is transmitted should be as short as possible, causing a possible low additional attenuation. The attenuation measured in this way is given by curve 1 in Fig. 20. The attenuation is rather high and increases with frequency.

One of the helix couplers was then reversed in order for the energy to pass to the inner helix in the direction opposite to the other helix coupler. The attenuation in the two couplers between the cable connections was again measured (curve 2, Fig. 20) and found to be much higher than the previously obtained value. This indicates that a helix coupler acts as a directional coupler.

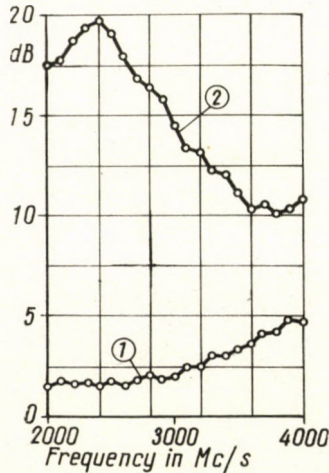


Fig. 20. Attenuation in helix couplers as a function of frequency. In the case of curve 1 energy is transferred to the inner helix from one helix coupler in the direction of the other helix coupler, while with curve 2 the position of the helix coupler is reversed

### 13. Manufacturing of helix couplers

The first helix couplers were made using the injection moulding technique in an arrangement shown in Fig. 3(b). A metal core with a housing was made with threads cut on the core. The end of the cable was bared and placed into the threads of the core. The housing consisted of the two parts clamped to each other, thus fixing the cable. Polystyrene was injected into the gap between the turns and the housing (Fig. 21), and then the core that held the

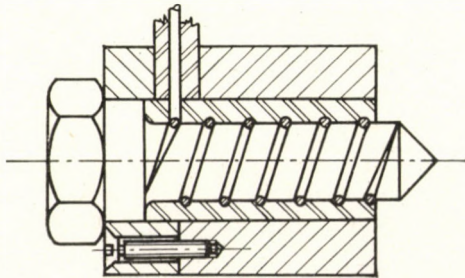


Fig. 21. Cross section of an injection-moulded helix coupler

winding was unscrewed. This technique had several disadvantages. The injected polystyrene material shifted the winding. Owing to the high pressure the cable was distorted and the polythene insulation in it was ejected. Much effort was made to keep the core and the housing in a concentric position during the injection moulding. The space between the turns and the housing being small the polystyrene often failed to run along and so did not fill up the space.

Another method was tried next to realize the form shown in Fig. 3(a). A wire was wound on a metal rod and put into a hole, the inner space of which was then filled with injected polystyrene. The outer surface of the polystyrene coating was lathe-turned to have the desired diameter. By these means far

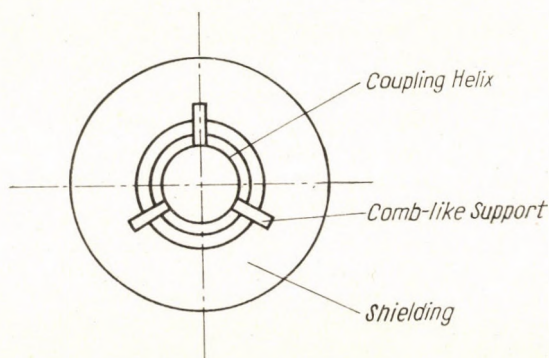


Fig. 22. Comb helix coupler

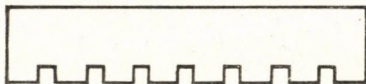


Fig. 23. Comb-like supporting plate

more precise helices could be produced, but difficulties were encountered with the injection moulding during which the turns were shifted as in the previous case.

Another investigated form was the so-called comb coupler, the cross section of which is shown in Fig. 22. The turns were supported by three insulating plates which were countersunk into the shielding metal case and placed at  $120^\circ$  to each other. The metal case consisted of two halves so that the grooves could be milled. The shape of the plates supporting the turns is shown in Fig. 23. It looks something like a comb, and that is why this type is called a comb-coupler. The rabbets were formed by milling. The distance between the adjacent rabbets is equal to the helix pitch. The width and depth of the rabbets are chosen in such a way that the wire could be placed into it. The three plates were placed in the three grooves so that the rabbets in the adja-



cent plates should be axially shifted to each other by one third of the pitch. The manufacturing of this type of the helices could quite easily be solved.

A different method was also used to produce comb-couplers. The housing, in this case, was not divided into two parts, and slotting was applied to make the grooves. The plates holding the turns were placed into the grooves, and the rabbets cut on a lathe. So a higher accuracy could be attained as compared to the above-mentioned techniques. However, strong reflections caused by the inhomogeneous dielectric material made the practical use of these comb-couplers impossible.

Finally, all the helix couplers were manufactured by turning on a lathe. A tolerance of  $\pm 0.01$  mm was allowable. Calibrated tap drills were made to cut the threads. The hole in the shielding case having been made, the insulating material was forced into it and the thread cut, using the calibrated tap drills. Then, the helix wound onto a rod was screwed into the threads of the insulating material. This method proved to be useful in producing helix couplers shown in Figs. 3(a) and 3(b). The above described results were obtained with helix couplers made by using this latter method.

#### 14. Conclusions

The design of helix couplers is based on the calculation of the coupling between the two coupled helices. In order to have an appropriate matching to the coaxial cable the coupling helix must be shielded. In calculating the coupling factor the effect of the shield, too, may be taken into account.

The coupling phase constant was determined, taking the effect of the coupling-helix shield into account. The effect of the shield decreases the coupling phase constant. This decrease depends on the distance of the coupling helix to the shield. By decreasing the distance the phase constant decreases.

The optimum radius of the coupling helix was determined considering the effect of the shield. Accordingly, the optimum radius is slightly higher as compared to the value obtained when the shield effect is neglected. Moreover, it has been found that a higher value for the length of the coupling helix is obtained when taking the effect of the shield into account. Consequently, the value obtained by using this calculation method is in better agreement to the experimental results.

Several experiments were performed to investigate the practical applicability of this new method of design. The experimentally determined optimum dimensions of the helix coupler differed from the calculated values by only 10 per cent average.

## REFERENCES

1. LACY, P. D.: Helix Coupled Traveling-Wave Tube. Electronics, Nov. 1954, pp. 132—135.
2. SFEKANOVICZ, W. W.—STERZER, F.: A Developmental Wide-Band, 100-Watt, 20 dB, S-Band Traveling-Wave Amplifier Utilizing Periodic Permanent Magnets. Proc. IRE, Jan. 1956, pp. 55—61.
3. BLATTNER, D. J.—VACCARO, F. E.: Electrostatically Focused Traveling-Wave Tube. Electronics, Jan. 1959, Vol. 32, No. 1, pp. 46—48.
4. Краснушкин, П. Е. — Хохлов, Р. В.: Пространственные биения в связанных волноводах. Журнал Технической Физики, Том XIX, стр. 931—942. Август 1949.
5. MILLER, S. E.: Coupled Wave Theory and Waveguide Applications. Bell Syst. T. J. 1954, pp. 677—693.
6. COOK, J. S.—KOMPNER, R.—QUATE, C. F.: Coupled Helices. Bell Syst. T. J. Jan. 1956, pp. 127—178.
7. WADE, G.—RYNN, N.: Coupled Helices for Use in Traveling-Wave Tubes. IRE Trans. Vol. ED-2, July, 1955, pp. 15—24.
8. PIERCE, J. R.: Traveling-Wave Tubes. D. Van Nostrand Co., Inc., New York, 1950.
9. CHEN, T. S.: Design and Performance of Coupled-Helix Transducers for Travelling-Wave Tubes. Journal of Electronics and Control. Apr. 1959, pp. 289—306.

## SUMMARY

Design problems of helix couplers are discussed with the aim of determining their optimum dimensions. First of all, an approximate calculation method of dimensioning helix couplers is given, then a new optimum dimensioning is described. The application of the new method is presented on a helix coupler for the 2000—4000 Mc/s frequency band.

In order to investigate the applicability of the proposed method, several experiments were made. The optimum dimensions obtained by these experiments are near to the calculated values, the mean difference between them being 10%. The dependence of the standing-wave ratio on wire diameter was experimentally investigated with the result that the use of a thicker wire is more advantageous. The frequency dependence of the impedance, the coupling losses and the directivity of the coupling were measured. Finally, manufacturing technique of helix couplers is described.

## KONSTRUKTION VON HELIXKOPPLERN

T. BERCELI

## ZUSAMMENFASSUNG

Der Kopplungsfaktor zwischen den beiden gekoppelten Helixen bestimmt die Dimensionen der Helixkoppler. Um die Koppelhelix dem koaxialen Kabel gut anpassen zu können, muß sie geschirmt werden. Bei Berechnung des Kopplungsfaktors kann auch die Wirkung der Koppelhelixabschirmung beachtet werden.

Der Phasenfaktor der zwischen den Koppelhelixen entstehenden Energiefluktuation wurde unter Beachtung der Wirkung der Koppelhelixabschirmung bestimmt. Dieser Phasenfaktor wird infolge der Abschirmung geringer. Die Größe der Verminderung hängt von der Entfernung zwischen Koppelhelix und Abschirmung ab. Mit der Abnahme der Entfernung nimmt auch der Phasenfaktor der Energiefluktuation ab.

Es wurde der optimale Radius der Koppelhelix unter Beachtung der Wirkung der Abschirmung bestimmt. Demnach ist der optimale Radius der Koppelhelix etwas größer als wenn die Wirkung der Abschirmung außer acht gelassen wird. Es wurde weiterhin festgestellt, daß der Längenwert der Koppelhelix höher ist, wenn auch die Wirkung der Abschirmung in Betracht gezogen wird. Dieses Dimensionierungsverfahren ergibt also Werte, die den bekannten Versuchsergebnissen näherstehen.

Um die praktische Anwendbarkeit dieses neuen Dimensionierungsverfahrens zu prüfen, wurden mehrere Versuchsserien ausgeführt. Die experimentell erhaltenen günstigsten Dimensionen der Helixkoppler zeigten im Durchschnitt bloß eine 10%-ige Abweichung von den mit dem neuen Dimensionierungsverfahren bestimmten Werten.

## LE DIMENSIONNEMENT DES COUPLEURS HÉLICOÏDES

T. BERCELI

## RÉSUMÉ

Les dimensions des coupleurs hélicoïdes sont déterminées par le facteur de couplage entre les deux hélices. Il faut blinder l'hélice couplante pour bien l'ajuster au câble coaxial. En calculant le facteur de couplage, il faut aussi tenir compte de l'effet du blindage de l'hélice couplante.

Compte tenu de cet effet, l'auteur a déterminé le facteur de phase de la fluctuation d'énergie se produisant entre les hélices couplantes. Ce facteur de phase est réduit par l'effet du blindage, la mesure de cette réduction dépendant de la distance entre l'hélice couplante et le blindage. En diminuant cette distance, on réduit aussi le facteur de phase de la fluctuation d'énergie.

La valeur du rayon optimum de l'hélice couplante a été déterminée en tenant compte de l'effet du blindage. Le rayon optimum de l'hélice couplante est ainsi un peu plus grand qu'il ne serait sans considération de ce dernier. On a également trouvé que la valeur de la longueur de l'hélice couplante est plus grande si l'on tient compte de l'effet du blindage. Le procédé de dimensionnement en question fournit donc une valeur plus conforme aux résultats connus, obtenus par des expériences.

Plusieurs séries d'essais ont été effectuées en vue de l'examen de l'applicabilité pratique de cette nouvelle méthode de dimensionnement. Les dimensions les plus favorables des coupleurs hélicoïdes, obtenues expérimentalement, ne présentent, en moyenne, qu'une différence de 10% par rapport aux valeurs déterminées par le nouveau procédé.

## КОНСТРУИРОВАНИЕ СОЕДИНИТЕЛЕЙ ГЕЛИКС

Т. БЕРЦЕЛИ

## РЕЗЮМЕ

Расчет соединителей геликс основывается на коэффициенте связи между двумя связанными геликсами. Соединительный геликс для удовлетворительного согласования с коаксиальным кабелем следует экранировать. При вычислении коэффициента связи следует учитывать также экранирующий эффект соединительного геликса.

Коэффициент фазы колебания энергии, возникающего между связанными геликсами, определен с учетом экранирующего эффекта соединительных геликсов. Коэффициент фазы колебания энергии уменьшается экранирующим эффектом. Степень уменьшения зависит от расстояния между соединительным геликсом и экранированием. Со снижением этого расстояния падает коэффициент связи колебания энергии.

Определена величина оптимального радиуса соединительного геликса с учетом экранирующего эффекта. Таким образом, оптимальный радиус соединительного геликса несколько больше, чем в случае, если не учитывается экранирующий эффект. Далее установлено, что для длины соединительного геликса получается большая величина, если будет учитываться также экранирующий эффект. Следовательно, предлагаемая методика расчета дает результаты, которые стоят ближе к опытным данным.

Для исследования практической применимости новой расчетной методики выполнено ряд серий опытов. Наиболее удовлетворительные размеры соединителя геликс, полученные опытным путем, отклоняются от полученных при помощи новой расчетной методики в среднем только на 10%.



# CALCULATION OF PARABOLOID SHELLS OF REVOLUTION ON A BASE COMPRISING A REGULAR TRIANGLE OR HEXAGON BY THE RELAXATION METHOD

P. CSONKA  
D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF STRUCTURAL AND TRANSPORT ENGINEERING OF THE HUNGARIAN  
ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received September 28, 1959]

## 1. Introduction

The calculation of paraboloid shells of revolution, centrally placed over a base comprising a regular triangle or hexagon, respectively (Fig. 1), can easily be made by plain analytical methods in the most simple cases of loading only. Therefore, particular attention should be paid to numerical methods offering the possibility for a relatively plain calculation of the shells in question, even for optionally arranged vertical loadings. Among the methods, suitable for this purpose, the *relaxation method* [1-3] is the best known and the most easy to handle.

For shells over a regular triangle or hexagon basis, respectively, it is expedient to carry out the relaxation on an *equilateral triangle-lattice* (Fig. 2) placed upon the shell's plan projection. By so doing, the value of the stress-function at the pivotal points can be calculated in a relatively simple way, and the determination of the internal forces belonging to the internal pivotal

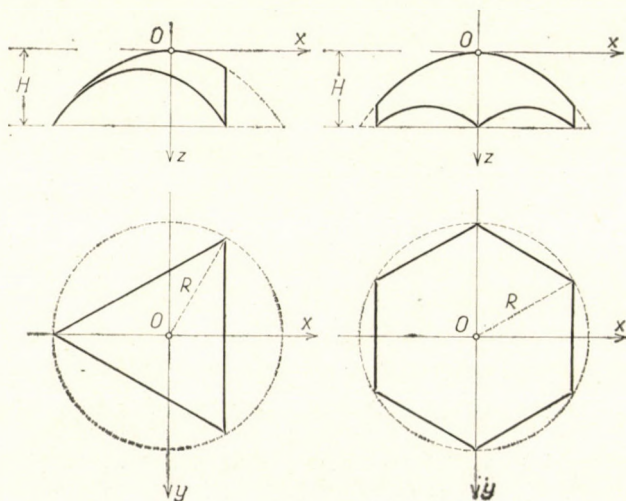


Fig. 1. Paraboloid shell of revolution on a base comprising a regular triangle or hexagon

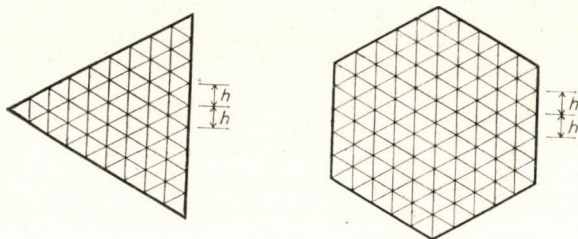


Fig. 2. Equilateral triangle-lattice

points causes no trouble either, whereas different difficulties appear at pivotal points situated on the boundary. The present paper introduces procedures suitable for the elimination of these difficulties.

## 2. Assumptions

Our calculations are based on the usual assumptions of the membrane theory of shells.

Concerning the edge-beams, we suppose, that these can only resist forces acting in their own plane. Owing to this condition, the shell cannot exert any lateral pressure on the edge beams.

Furthermore, we suppose, that the deformation of the shell and of the edge beams can proceed entirely freely and independently of each other.

## 3. Determination of the stress function

The equation of the middle surface of paraboloid shells of revolution, shown in Fig. 1, and referring to the system of coordinates  $\theta(x, y, z)$ , is

$$Z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2), \quad (1)$$

while the differential equation of the stress function  $F = F(x, y)$  of these shells is

$$F_{xx} + F_{yy} + \frac{R^2}{2H}Z = 0. \quad (2)$$

Herein  $F_{xx}$  and  $F_{yy}$  indicate the second derivative of the stress function according to  $x$  or  $y$ , respectively, while  $Z = Z(x, y)$  means the specific value of the projectional load. The meaning of the other notations is explained in Fig. 1.

Expressing the derivatives taken in directions  $x, y$  with derivatives made up in directions  $u, v, w$ , shown in Fig. 3, we obtain instead of differential equation (2) the following one:

$$F_{uu} + F_{vv} + F_{ww} + \frac{3R^2}{4H} Z = 0. \quad (3)$$

The solution of our problem demands the setting up of a function  $F$  corresponding to the above differential equation, the value of which is constant at

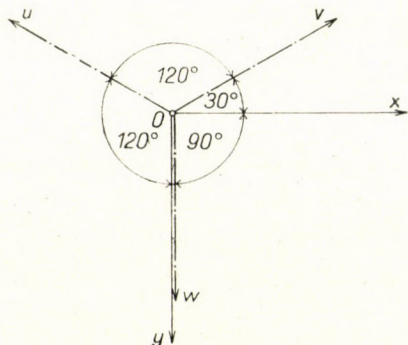


Fig. 3. Directions  $x, y$  and  $u, v, w$

all points of the shell's boundary. Choosing zero for the optional value of this constant, the boundary condition to be fulfilled is:

$$F_{\text{boundary}} = 0. \quad (4)$$

For setting up function  $F$  we apply an approaching procedure. During this course the shell's middle surface gets replaced by the equilateral triangle lattice shown in Fig. 2. The horizontal projections of its braces are parallel to the sides of the triangle basis or of the hexagon basis, respectively. At the same time, the derivatives figuring in differential equation (3) are approximately expressed by central differences. By so doing, and using notation

$$K \equiv \frac{3R^2 h^2}{4H} Z, \quad (5)$$

we obtain the difference equation

$$\sum_1^6 F_i - 6F + K = 0. \quad (6)$$

In the above two formulae  $F$  or  $Z$ , respectively, mean the value of the stress function or the load function taken at the examined pivotal point, while notations  $F_1, F_2, \dots, F_6$  indicate the values of the stress functions belonging to pivotal points 1, 2, ..., 6, being contiguous with the examined pivotal point. The numeration of the pivotal points in the vicinity of the examined one is explained in Fig. 4.

The stress function has to meet at the *internal* pivotal points of the lattice differential equation (6), at pivotal points *on the boundary*, however, it has to fulfil boundary condition (4).

We determine the value of the stress function belonging to the internal pivotal points by relaxation. In the first step of the calculation the value of the stress function, pertaining to the internal pivotal points, can arbitrarily be chosen. In the following step, these optional values become — aided by difference equation (6) — gradually justified, until the residuum

$$R = \sum_1^6 F_i - 6F + K \quad (7)$$

becomes at all internal pivotal points so small, as to be negligible. The calculation — chiefly, if the initial values  $F$  were suitably chosen and the well known maneuvers of relaxation were skilfully utilized — converges in a relatively short time.

#### 4. Calculation of projectional internal forces at internal pivotal points

After the determination of the stress function, for the calculation of the projectional internal forces, relations

$$n_x = F_{yy}, \quad n_{xy} = -F_{xy}, \quad n_y = F_{xx}, \quad (8)$$

well known from the theory of membrane shells, can be used. In the case on hand, however, it is expedient to turn from the derivatives according to  $x, y$  to the derivatives made up in directions  $u, v, w$ . If the axis directions  $u, v, w$  are arranged as is shown in Fig. 3, the modification in question can be done using formulae

$$\left. \begin{aligned} F_{xx} &= \frac{1}{3} (2F_{uu} + 2F_{vv} - F_{ww}), \\ F_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (F_{uu} - F_{vv}), \\ F_{yy} &= F_{ww}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$



By these replacements formulae (8) will obtain the following form:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= F_{ww}, \\ n_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (F_{vv} - F_{uu}), \\ n_y &= \frac{1}{3} (2F_{uu} + 2F_{vv} - F_{ww}). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

The knowledge of the above formulae offers the possibility for a relatively plain calculation of the internal forces at the internal pivotal points. Namely, at these points differential quotients figuring in formulae (10), can be expressed by the corresponding central differences [2] comparatively easily and generally with sufficient accuracy. So, *e. g.*

$$F_{uu} \cong \frac{1}{h^2} (F_1 - 2F + F_4),$$

and similar formulae are also valid for  $F_{vv}$  and  $F_{ww}$ . By substituting these into formulae (10), we obtain for the calculation of the internal forces the following approximate formulae:

$$\left. \begin{aligned} n_x &\cong \frac{1}{h^2} (F_2 + F_5 - 2F), \\ n_{xy} &\cong \frac{1}{\sqrt{3}h^2} (-F_1 + F_3 - F_4 + F_6), \\ n_y &\cong \frac{1}{3h^2} (2F_1 - F_2 + 2F_3 + 2F_4 - F_5 + 2F_6 - 6F). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

The last of the above formulae can also be written — with regards to relation (6) and the first formula in (11) — in the following form:

$$n_y = -n_x - \frac{2K}{3h^2}. \quad (12)$$

If the shell's centre is at the same time a pivotal point, and the load upon the shell is symmetrical to the shell's symmetry-planes, the value of internal forces arising at the centre of the shell can also be directly calculated, *i. e.:*

$$n_x = n_y = -\frac{K}{3h^2}, \quad n_{xy} = 0. \quad (13)$$

### 5. Calculation of projectional internal forces at pivotal points on the boundary

The calculation of projectional internal forces at pivotal points on the boundary is somewhat more wearisome than at internal pivotal points, because the stress function is not defined at pivotal points outside the boundary. In such cases the calculation can be made by using two different methods.

a) *First method.* — Derivatives figuring in formulae (10) should not be approached by central, but by lateral differences [2]. To assure a similar accu-

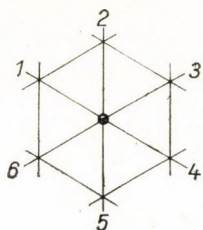


Fig. 4. Marking of points contiguous with the examined pivotal point

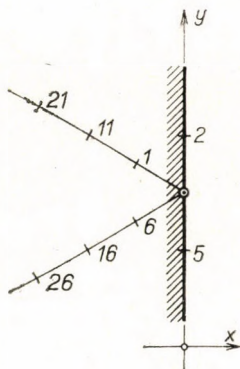


Fig. 5. Marking of points contiguous with the examined pivotal point situated on the side normal to the  $x$ -axis

racy as in the foregoing, we have to initiate into the calculation the value  $F$  of four instead of three pivotal points. E. g., at pivotal points on the side normal to the  $x$ -axis according to the explanation given in Fig. 5:

$$F_{uu} \cong \frac{1}{h^2} (2F - 5F_1 + 4F_{11} - F_{21}),$$

$$F_{vv} \cong \frac{1}{h^2} (2F - 5F_6 + 4F_{16} - F_{26}).$$

By this, internal forces belonging to the edge normal to the  $x$ -axis, are given by the following formulae:

$$n_x = 0,$$

$$n_{xy} \cong \frac{1}{\sqrt{3}h^2} (5F_1 - 5F_6 - 4F_{11} + 4F_{16} + F_{21} - F_{26}),$$

$$n_y \cong \frac{1}{3h^2} (-10F_1 - 10F_6 + 8F_{11} + 8F_{16} - 2F_{21} - 2F_{26} + 8F).$$

The above formulae cannot be applied at the following points of a shell over a triangle basis: corner points and the first and second pivotal points on the boundary from the corner. Thus, if we want to determine the value of internal forces in the vicinity of the corner points of the triangle base, we have to apply a lattice of an adequate closeness, or the lattice must adequately be confined, respectively.

*b) Second method.* — The essence of this method is the “continuation” of the stress function beyond the boundary. This demands, of course, the extension of the lattice beyond the shell’s circumference, furthermore, that the stress function should also be defined beyond the pivotal points on the boundary. This operation, however, cannot always be done in compliance with boundary conditions. In this respect, there is a difference between shells over a triangular or a hexagonal basis, respectively, and this is the very reason why we have to deal with these two problems separately.

*a) For shells over a triangular basis* the continuation of the stress function can always be realized in compliance with the boundary conditions. For drawing up the continuation, we have to take into account that the edge-beams cannot resist lateral pressure, and so the stress function must vanish at pivotal points falling into the elongation of the triangle-sides (points marked with small circles in Fig. 6). According to this, we know from the very first the value of  $F$  at  $3 \times 2 = 6$  external pivotal points. For the determination of the remaining values  $F$ , equations (6), set up for the pivotal points on the boundary are just sufficient.

It is generally expedient to make the calculation catenary-wise. We start out from an optional pivotal point on the boundary. Writing equation (6) for this point, two unknown values  $F$  will appear therein. By treating one of these, as for the time being an indefinite constant, the other can be expressed as a function of the former indefinite value. After this, going around in one direction, we take one pivotal point on the boundary after the other and write for each of them equation (6) separately. So we obtain in turn the values  $F$  pertaining

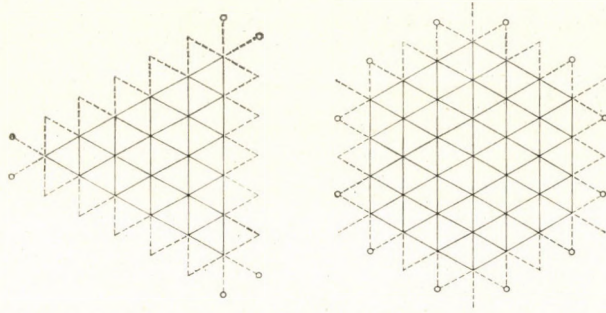


Fig. 6. Continuation of the lattice beyond the pivotal points on the boundary

to the individual external pivotal points as a function of the afore-mentioned indefinite value. This operation has to be continued until the last pivotal point on the boundary is reached. Now writing relation (6) also for this point, we obtain an equation in which the value  $F$ , taken in the beginning as indefinite, will appear as the only unknown. After the calculation of this unknown, the value  $F$  finally becomes known for all external pivotal points, and so, the approximate values of the internal forces can already be computed by using equations (11) and (12), respectively.

The recently outlined operation becomes exceedingly simple, if the load upon the shell is symmetrically arranged to the shell's vertical symmetry-planes. In this particularly simple case, only two values  $F$  deviating from zero appear, namely, in equation (6) written for the corner point, and these are, due to the symmetry, equal to each other. In such an instance, the afore-mentioned value  $F$  can immediately be expressed, *i. e.*:

$$F = -\frac{K}{2 \frac{h}{d}}$$

Thus, the value  $F$  pertaining to the other external pivotal points can immediately be determined in a definite way, too.

$\beta$ ) For shells over a hexagonal basis the continuation of the stress function beyond the boundary and at the same time a precise observance of the boundary conditions are not always possible. Yet, if the load on the shell is *symmetrically* arranged to the normal bisecting planes of the sides of the hexagonal basis, and at the same time the pivotal points divide the hexagon's sides into an *odd number* of parts, the problem can always be unambiguously solved. Similarly, a clean cut solution can also be obtained, if the arrangement of the load on the shell is *antimetrical* with respect to the normal bisecting planes of the hexagon's sides, but at the same time the pivotal points divide the sides of the hexagonal basis into an *even number* of parts.

For the verification of the above statement we have to know, that at the external pivotal points falling into the continuation of the hexagon's sides the value of  $F$  must be equal to zero. This fact is a consequence of boundary condition (4), as the edge beams are free of lateral pressure. Therefore, if the pivotal points divide each hexagon-side into  $n$  parts, then among the values  $F$  pertaining to the external pivotal points only  $(6n-6)$  values are unknown. For the determination of these, on the other hand, equations (6), which can be written for the pivotal points on the boundary, establish  $6n$  conditions. Thus, the number of the available equations is greater by 6 than the number of the unknown values  $F$ . That is to say, the equations in question are in general contradictory to each other, and this is the very reason why the problem cannot be solved for an optional loading.

If the load on the shell is *symmetrical* to the normal bisecting plane of the sides of the basis, the number of the unknown values  $F$  is — due to the symmetry —  $n/2$  or  $(n+1)/2$ , respectively, according to the even or odd nature of  $n$ , respectively. The number of the available from each other independent equations, however, is  $(n+2)/2$  or  $(n+1)/2$ , respectively. According to the above, if  $n$  is an *even number*, we have one more independent equation than unknown values  $F$ , consequently, under such circumstances the equations are, in general, contradictory to each other. Conversely, if  $n$  is an *odd number*, the number of equations complies with the number of unknowns, and by this, advancing from pivotal point to pivotal point, the problem can always be solved.

If the load on the shell is with respect to the bisecting planes of the basis's sides *antimetrically* arranged, the number of the unknown values  $F$  is — due to the antimetry  $n/2$  or  $(n-1)/2$ , respectively, depending on the even or odd nature of  $n$ . On the other hand, the number of the available and from each other independent equations is  $n/2$  or  $(n+1)/2$ , respectively. This is explained by the fact that owing to the antimetry, at the external pivotal points situated on the bisecting line,  $F$  is equal to zero, but at the bisecting pivotal points on the boundary equation (6) is fulfilled from the very first. According to the above, if  $n$  is an *even number*, the number of equations complies with the number of unknowns; conversely, if  $n$  is an *odd number*, we have one more equation independent of each other, than unknown values  $F$ . Consequently, in the case of an odd  $n$ , the equations are generally in contradiction to each other, but in the instance of an even  $n$ , the problem can always be solved in a clear cut manner.

In a given case it is expedient to start out the calculation from one of the corner points. Writing equation (6) for this point, only one unknown value  $F$  will appear therein, and this value can directly be determined from the equation in question. Advancing now from this corner point towards the middle of the side, and writing in turn equation (6) for the individual pivotal points, in turn

we obtain the values  $F$  at the external pivotal points. This operation must, of course, be continued until we arrive to the pivotal point on the boundary which is contiguous with the bisecting point of the side in question, because by this — owing to the symmetry or antimetry, respectively — all the necessary values  $F$  are already at our disposal. In this way, all the internal forces can already be calculated by formulae (11) and (12), respectively.

We have to mention, that for shells over a triangular, as well as over a hexagonal basis, certain values of internal forces can directly be calculated, without actually producing the continuation of the stress function. So, it is obvious, that along the lateral edge normal to the  $x$ -axis

$$n_x = 0,$$

and at the same place, owing to relation (12),

$$n_y = -\frac{2K}{3h^2}.$$

At the corner points the value of  $n_{xy}$  can also be directly calculated in a simple way, i. e.:

$$n_{xy} = \pm \frac{2K}{\sqrt{3}h^2}.$$

Among the two signs appearing in the latter formula, we have to choose — for a shell over a triangular or a hexagonal basis, respectively — that sign, which gives a value  $n_{xy}$  directed towards the middle of the side, or away from it, respectively.

Finally, we remark, that from the two methods dealt with in *a)* and *b)*, the method in *b)* is generally more accurate, the possibility of its application, however, is more restricted.

## 6. Numerical example

Let us apply the relaxation method of calculation for the shell shown in Fig. 7, and let us determine the internal forces caused by the dead-load, if the unit-weight of the shell in question related to the surface-unit of the middle surface is

$$g = 180 \text{ kg/m}^2.$$

The calculation will be carried out using the lattice shown in Fig. 7. In the case on hand — since the shell, as well as the load on it are symmetrical with respect to the vertical bisectrix planes — it would be sufficient to work with one sixth of the lattice.

During the calculation, we first of all determine, by using formula (5), the values  $K$ , depending on the load and belonging to the individual pivotal points (Fig. 8). This is followed by the calculation of values  $F$  at the internal pivotal points, and finally, at external pivotal points contiguous with the pivotal points on the boundary. As a result of this calculation we obtain the values written in Fig. 9. Herewith, we have all data at our disposal, necessary

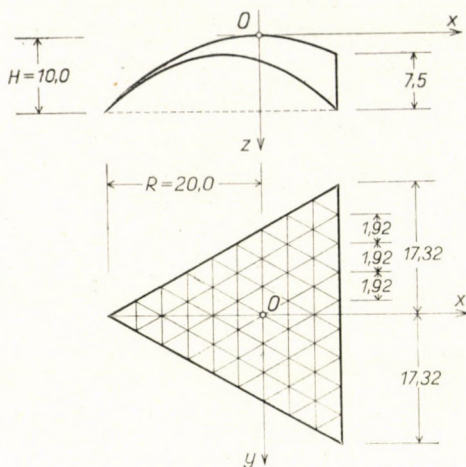


Fig. 7. Numerical example

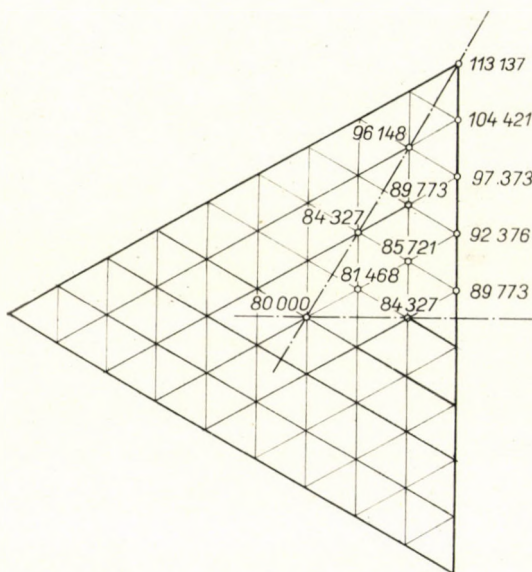


Fig. 8. Values K

for the calculation of the internal forces. This calculation itself can be carried out by using formulae (11) and (12), respectively.

The values of internal forces acting along the centre-line *AD* and the lateral edge *BC*, respectively, obtained as the final result of the afore-mentioned calculation, are shown by small circles in Fig. 10 and Fig. 11. In the same figures the diagrams drawn with thick lines represent the values of internal forces determined by the author in a previous paper [4] by analytical methods.

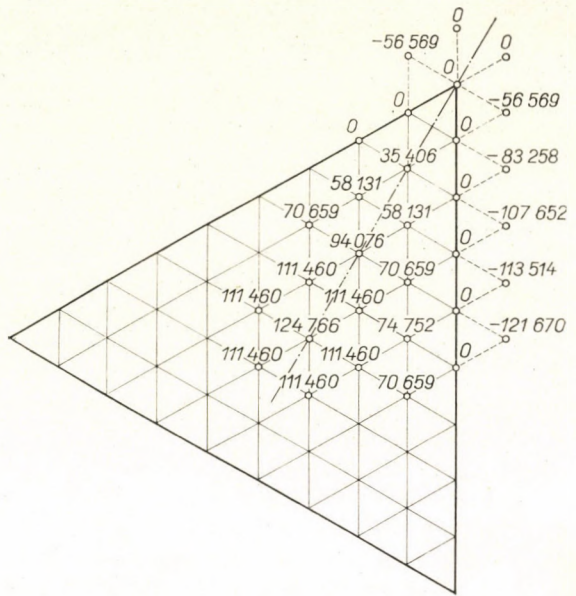


Fig. 9. Values F

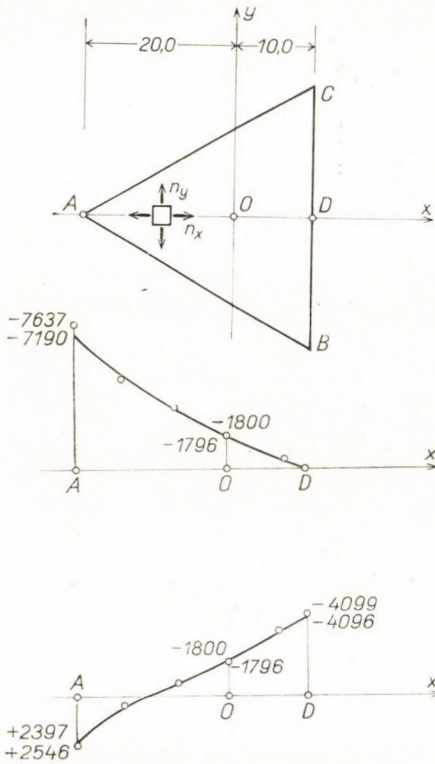


Fig. 10. Values of internal forces arising from dead-load along centre-line AD

From Fig. 10 and Fig. 11, it can clearly be established, that internal forces, calculated by using the approaching method introduced in this paper, do not considerably deviate from the accurate values, or from the approximate values calculated in paper [4]. This circumstance is therefore also noteworthy, because the lattice used in the present calculation was comparatively loose; and by confining the latter the accuracy of the calculation could easily be increased to the wanted degree.



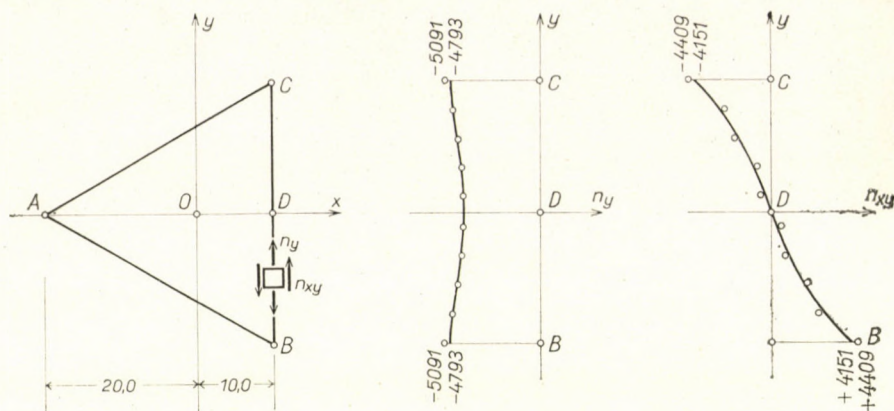


Fig. 11. Values of internal forces arising from dead-load along lateral edge BC

#### REFERENCES

1. SOUTHWELL, R. V.: *Relaxation Methods in Engineering Science*. A treatise on approximate computation. Oxford University Press, London (1951).
2. SALVADORI, M. G.—BARON, M. L.: *Numerical Methods in Engineering*. Prentice-Hall, Inc. New York (1952), pp. 45—90.
3. FLÜGGE, W.: *Das Relaxationsverfahren in der Schalenstatik. Beiträge zur angewandten Mechanik*. Federhofer-Girkmann Festschrift. Franz Deuticke Verlag, Wien (1950) pp. 17—35.
4. CSONKA, P.: *Paraboloid Shell over Equilateral Triangle Basis. Acta Technica Ac. Sc. Hung.* Tom. XXIX., Fasc. 3—4 (1960). In print.

#### SUMMARY

The present paper deals with the calculation of paraboloid shells of revolution on a base comprising a regular triangle or hexagon, respectively, basing on the usual assumptions of the membrane theory. The edge beams of these shells are assumed as being resistant to forces acting in their own plane only. The deformations of the edge beams and of the shell are taken as to be independent of each other.

The paper determines the values of the shell's stress function at the pivotal points of a suitably chosen triangular lattice, using the *relaxation method*. Hereupon, the approximate values of internal forces acting on the internal pivotal points can now be easily calculated. Difficulties only appear during the determination of the values of internal forces along the boundary. For the elimination of these difficulties the paper introduces two methods.

The first method uses for the approximation of differential quotients figuring in the formulae of internal forces, instead of central differences, lateral ones. The method in question is less accurate because of this. A further disadvantage is given by the fact, that in the instance of shells over a triangular basis the method fails in the vicinity of the corners.

The second method continues the stress function, in compliance with the boundary conditions and the difference-equation of the problem, beyond the points on the boundary. This offers the possibility for the approximation of the differential quotients appearing in the formulae of internal forces by using central differences also at points on the boundary. So, this method is relatively very precise. The only disadvantage is, that for shells over a hexagonal basis the method can only be used, if the triangular lattice divides the sides of the hexagon into an odd or an even number of parts, according to the fact, that the load on the shell is — with respect to the symmetry planes of the shell — symmetrical or antisymmetrical.

The paper is completed by a numerical example. The results of the latter are, in spite of the applied comparatively loose lattice, in good agreement with results obtained in another way [4].

DIE BERECHNUNG VON ROTATIONS-PARABOLOID-SCHALEN  
 ÜBER EINEM REGELMÄSSIGEN DREIECK- BZW. SECHSECKGRUNDRISSE  
 MIT HILFE DES RELAXATIONSVERFAHRENS

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der vorliegende Aufsatz befaßt sich mit der Berechnung von über einem regelmäßigen Dreieck-, bzw. Sechseckgrundriß aufgebauten Rotationsparaboloid-Schalen. Die Grundlagen der Berechnung bilden die gebräuchlichen Voraussetzungen der Membrantheorie. Bezüglich der in vertikalen Ebenen liegenden Randträger wird vorausgesetzt, daß diese nur den in ihrer eigenen Ebene wirkenden Kräften widerstehen können, und daß deren Formänderungen von den Formänderungen der Schale unabhängig sind.

Im Aufsatz wird der Wert der Spannungsfunktion der Schale in den Knotenpunkten eines entsprechend angenommenen Dreiecknetzes mit dem *Relaxationsverfahren* bestimmt. Nachher können die annähernden Werte der Schnittkraftprojektionen in den inneren Knotenpunkten schon einfach berechnet werden. Schwierigkeiten treten nur bei der Bestimmung der Randwerte der Schnittkräfte auf. Bezüglich dieser sind im Aufsatz zwei Verfahren bekanntgegeben.

Die erste Methode benützt zur Annäherung der in der Formel der Schnittkraftprojektionen erscheinenden Differentialgleichungen anstatt der zentralen Differenzen die lateralen Differenzen. Aus diesem Grunde ist das in Frage stehende Verfahren weniger genau. Eine gewisse Schwierigkeit bedeutet auch der Umstand, daß dieses Verfahren im Falle von über einem Dreieckgrundriß aufgebauten Schalen in der Nähe der Eckpunkte versagt.

Beim zweiten Verfahren wird die Spannungsfunktion den Randbedingungen und der Differentialgleichung des Problems entsprechend über die Randpunkte hinaus fortgesetzt. Hiedurch ergibt sich die Möglichkeit, die in den Formeln der Schnittkraftprojektionen erscheinenden Differentialquotienten auch in den Randpunkten mit Hilfe der zentralen Differenzen anzunähern. Auf diese Weise ist das zur Diskussion stehende Verfahren verhältnismäßig sehr genau. Ein Nachteil besteht nur darin, daß das erwähnte Verfahren im Falle von über einem Sechseckgrundriß liegenden Schalen nur dann angewendet werden kann, wenn das Dreiecknetz die Seiten des Sechseckes in eine ungerade Anzahl (bzw. in eine gerade Anzahl) von Teilen teilt, je nachdem die Belastung der Schale im Verhältnis zu deren Symmetrieebenen symmetrisch (bzw. antisymmetrisch) verteilt ist.

Der Aufsatz ist durch ein Zahlenbeispiel ergänzt, dessen Ergebnisse, trotz des verhältnismäßig schütterten Dreiecknetzes, mit den auf andere Art [4] gewonnenen Ergebnissen in gutem Einklang stehen.

UNE MÉTHODE DE CALCUL PAR RELAXATION DES COQUES PARABOLOÏDES  
 DE RÉVOLUTION A PLAN TRIANGULAIRE ET HEXAGONAL

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'auteur étudie le calcul de coques paraboloides de révolution, construites sur un plan en triangle ou hexagone régulier, en admettant les hypothèses habituelles de la théorie des membranes. On suppose que les arcs de rives de plan vertical de la coque ne résistent qu'aux efforts agissant dans leur propre plan, et que leurs déformations sont indépendantes de celles de la coque.

La valeur de la fonction de tension de la coque est déterminée par relaxation dans les noeuds d'un réseau à mailles triangulaires convenablement choisi, après quoi la valeur approchée des forces projectives de tension dans les noeuds intérieurs se calculera sans difficulté. Pour la détermination, moins aisée, des valeurs de contour des forces de tension, l'auteur fait connaître deux méthodes.

Pour l'approximation des dérivées figurant dans la formule des forces projectives de tension, la première méthode utilise des différences latérales au lieu de celles centrales, ce qui rend le procédé en question moins exact. Son autre inconvénient est qu'en cas de coques à plan triangulaire, le procédé se révèle inutilisable à proximité des coins.

Le second procédé continue la fonction de tension au delà des noeuds de bordure, conformément aux conditions au contour et à l'équation aux différences du problème, de sorte que les dérivées figurant dans les formules des forces de tension peuvent être approchées, même dans les noeuds de bordure, à l'aide des différences centrales. Le procédé en question en devient relativement très exact. Son seul inconvénient est qu'en cas de coques à plan hexagonal, il ne peut s'appliquer que si le réseau à mailles triangulaire divise les côtés de l'hexagone en des parties en nombre impair (ou pair), et si la charge de la coque est symétrique (resp. antisymétrique) par rapport aux plans de symétrie de la coque.

L'étude est complétée par un exemple numérique, dont les résultats montrent une bonne concordance avec ceux obtenus par une voie différente [4], malgré le réseau à mailles relativement espacé, utilisé par l'auteur.

## РАСЧЕТ ПРИ ПОМОЩИ РЕЛАКСАЦИИ ОБОЛОЧЕК С ПЛАНОМ ПРАВИЛЬНЫХ ТРЕХ- И ШЕСТИУГОЛЬНИКОВ, ИМЕЮЩИХ ВИД ПАРАБОЛОИДОВ ВРАЩЕНИЯ

П. ЧОНКА

### РЕЗЮМЕ

Настоящая статья занимается расчетом оболочек, имеющих форму параболоидов вращения, построенных над планом правильного трех- и шестиугольника, на основе принятых предположений мембранной теории. Предполагается, что опорные грани вертикальной плоскости сопротивляются только тем воздействиям сил, которые падают на их же собственные плоскости, и их деформации независят от деформаций оболочек.

Статья величину функции усилия определяет способом релаксации в удовлетворительно подобранных решетчатых точках трехугольной решетки фермы. После этого уже можно просто высчитать приблизительную величину проекционных напряженных усилий во внутренних точках решетки. Трудности наблюдаются только во время определения периметрической величины усилий напряжения. В связи с этим статья приводит два способа.

Первый способ для приближения производных, встречающихся в формулах проекционных напряженных усилий, использует латеральные дифференции вместо центральных дифференций. Поэтому этот вышеуказанный способ менее точен. Недостаток этого способа еще проявляется и в том, что он абсолютно не применим вблизи углов при наличии оболочек с планом трехугольников.

Второй способ функцию усилия, соответственно с периметрическими условиями и, соответственно, с дифференциальным уравнением, продолжает и дальше за периметрическими точками. Благодаря этому предоставляется возможность, чтобы приблизить фигурирующие в формулах усилий напряжения производные и в периметрических точках при помощи центральных дифференций. Таким образом, этот способ довольно точен. Недостатком его является лишь только то, что он применим в случае оболочек с шестиугольным планом только в том случае, если трехугольная решетка фермы делит грани шестиугольника на части с нечетным (или четным) числом, а нагрузка оболочки, — принимая во внимание симметричную плоскость оболочки, — является симметричной (или асимметричной).

Статья дополняется числовым примером. Результаты этого, несмотря на примененную довольно редкую решетку фермы, вполне соответствуют результатам, достигнутым другим путем [4].



# GEOMETRIE DER WÖLBUNG VON LAUFFLÄCHEN AN WÄZLAGERRINGEN

I. LIPKA

INSTITUT FÜR DAS ENTWICKELN VON WERKZEUGMASCHINEN,  
HALÁSZTELEK BEI BUDAPEST

[Eingegangen am 9. Oktober 1959]

Neuerdings werden die konischen Laufflächen in den Außenringen der Kegellager ballig geschliffen (s. Fig. 1). Diese Wölbung ist gering; die Pfeilhöhe  $\delta$  schwankt zwischen den Grenzen von  $5 \sim 30 \mu$  (s. Fig. 1a).

Der Zweck einer solchen Gestaltung ist die mögliche Hebung der Lebensdauer dadurch, daß die Lastverteilung entlang der Erzeugenden des Roll-

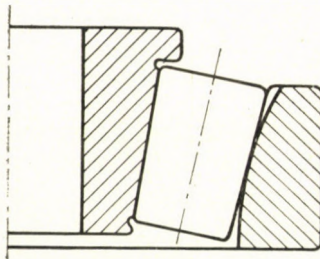


Fig. 1

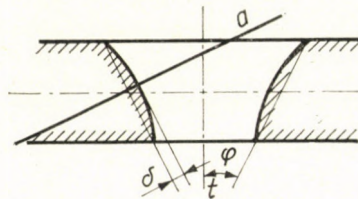


Fig. 1a

körpers (der Kegelrolle) möglichst gleichmäßig wird. Es soll hier gleich ein weiterer Vorteil der balligen Lauffläche vermerkt werden: ein Lager dieser Bauart kann sich axial mit einem Spiel von  $\frac{1}{4}^\circ \sim \frac{1}{2}^\circ$  einstellen; hiedurch werden gewisse infolge einer Wellendurchbiegung auftretende Spannungen eliminiert.

LUNDBERG untersuchte [1] die Spannungsverteilung, die auftritt, falls sich Zylinder und Kegel endlicher Länge berühren; er konnte eine gesetzmäßige

Gestaltung des Spiels zwischen den unbelasteten Erzeugenden feststellen, wodurch unter Last eine gleichmäßige Belastungsverteilung erzielt wird.

Zur Erreichung einer balligen Lauffläche muß die Achse der Schleifspindel in eine bestimmte Richtung umgestellt werden. Zu diesem Zweck wird das Werkstück (der Lagerring) relativ zur Schleifspindel um zwei Achsen: um eine waagerechte und um eine andere, zur ersten senkrecht stehende Achse entsprechend verstellt. In der Praxis kombiniert man einen um die waagerechte Achse verstellbaren Tisch mit einer darauf montierten und um die senkrechte Achse drehbaren Rundplatte. Das Werkstück wird in dieser Rundplatte ein-

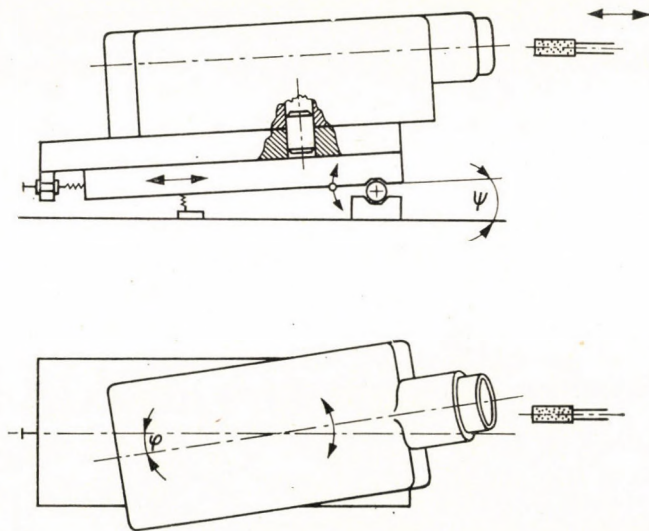


Fig. 2

gespannt (s. Fig. 2). Vorerst stellen wir uns die Lauffläche in ihrer Anfangslage vor, in welcher die Erzeugende der ursprünglichen Kegelfläche mit der Erzeugenden des Schleifzylinders zusammenfällt: in dieser Lage würde durch das Schleifwerkzeug in dem sich um die  $t$ -Achse drehenden Ring eine genaue Kegelfläche ausgebildet werden. Wenn man aber den Ring aus dieser Anfangslage noch um eine zu der Kegelerzeugenden senkrechte  $a$ -Achse um den Winkel — Kippwinkel —  $\psi$  verstellt, so entsteht durch die Schleifoperation eine neue auf die ursprüngliche Kegelfläche durch Abwicklung superponierte Wölbungsfläche, deren Pfeilhöhe von der Größe des Kippwinkels  $\psi$  abhängt. Betrachten wir die relativ zum Werkstück entstandene Bewegung des Schleifzylinders, so können wir feststellen, daß die resultierende Umdrehungsfläche durch Abwicklung erzeugt wird und eine Hüllfläche der durch die einzelnen Zylindererzeugenden beschriebenen Hyperboloide darstellt.

In unserer Abhandlung wollen wir zuerst das Gleichungssystem zur Bestimmung dieser Umdrehungsfläche aufstellen. Anschließend bestimmen wir den axialen Schnitt, d. h. die Profilkurve der Umdrehungsfläche, um die Pfeilhöhe  $\delta$  ermitteln zu können. Im weiteren wird bewiesen, daß bei unverändertem Kippwinkel  $\psi$  die Pfeilhöhe  $\delta$  abnimmt, falls der Durchmesser des Schleifzylinders (z. B. durch Abnützung des Schleifsteins) kleiner wird. Betrachten wir nun den Grenzfall eines Schleifzylinders mit dem Durchmesser Null; in diesem Falle ist es sofort einleuchtend, daß die Umdrehungsfläche ein einschaliges Hyperboloid darstellt. Auch geht es aus unseren Gleichungen hervor, daß bei einem Null-Durchmesser des Schleifzylinders die Profilkurve in eine Hyperbel übergeht.

Es soll hier gleich auf eine frühere Theorie hingewiesen werden, nach welcher ein Schleifzylinder mit endlichem Durchmesser, unabhängig vom jeweiligen Wert des Durchmessers, ein einschaliges Hyperboloid erzeugen soll; nun ist es klar, daß man mit einer Schleifspindeleinstellung, die auf Grund dieser früheren Theorie errechnet wurde, niemals die gewünschte Wölbung erreichen konnte.

Zum Schluß wollen wir ein Beispiel zur Anwendung unserer Theorie anführen, indem wir zu einem gegebenen Ring die Pfeilhöhe  $\delta$  aus den gegebenen Werten des Schleifsteindurchmessers und des Kippwinkels  $\psi$  errechnen.

### 1. Das Gleichungssystem zur Bestimmung der abgewickelten Umdrehungsfläche

Wir nehmen ein räumliches, rechtwinkliges Koordinatensystem  $(x, y, z)$  an, dessen  $z$ -Achse mit der Achse des Ringes, und dessen Ebene  $(x, y)$  mit der Symmetrieebene (Halbierungsebene) des Ringes zusammenfällt (s. Fig. 3).

An einem Schleifzylinder mit dem Halbmesser  $r$  stellen wir uns eine Erzeugende vor, die mit einer in der Ebene  $(x, z)$  enthaltenen Erzeugenden der

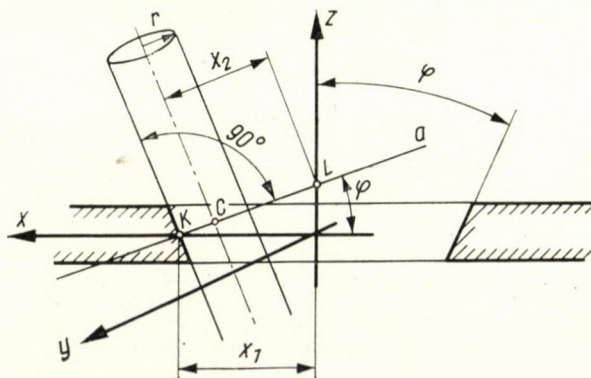


Fig. 3

Kegelfläche zusammenfällt. In dem in der Halbierungsebene des Ringes liegenden Punkt  $K$  dieser Erzeugenden ziehen wir eine in der Ebene  $(x, z)$  liegende Achse  $a$ , u. zw. in senkrechter Richtung zu der Erzeugenden der Kegelfläche. Der Ring wird um diese  $a$ -Achse um den Winkel  $\psi$  verdreht, um die gewünschte Balligkeit zu erzielen. Die analytische Beschreibung verlangt zuerst eine Betrachtung der relativen Bewegungsverhältnisse. Die Untersuchung wird einfacher, wenn wir den Ring als feststehend annehmen und statt dessen die Schleifsteinachse um die Achse  $a$  um einen Winkel  $\psi$  umstellen und dann mit dem Schleifzylinder eine Drehbewegung um die Achse des feststehenden Ringes

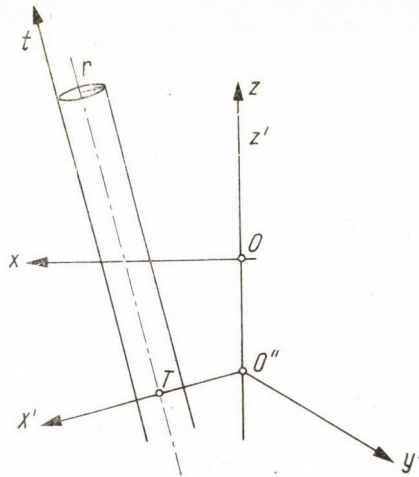


Fig. 4

ausführen lassen. Da der Schleifzylinder um eine zur Erzeugenden senkrechte  $a$ -Achse um den Winkel  $\psi$  gekippt wurde, sind die Schleifsteinachse und die Koordinatenachse  $z$  windschiefe Geraden. Die Normaltransversale  $\overline{O''T}$  zwischen Schleifsteinachse und  $z$ -Achse (Fig. 4) soll zugleich die Achse  $x'$  eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystems  $(x', y', z')$  sein, wobei  $z'$  mit der Achse  $z$  identisch ist.

Wir wollen den Winkel zwischen Schleifsteinachse und  $z$ -Achse mit  $\nu$ , und den Abstand  $\overline{O''T}$  mit  $\xi$  bezeichnen; so lautet das Gleichungssystem der Schleifzylindermantelfläche, in Parameterform, wie folgt:

$$\begin{aligned}x' &= \xi + r \cos \alpha \\y' &= a \sin \alpha - t \sin \nu \\z' &= t \cos \nu\end{aligned}$$

wo

$$a = \frac{r}{\cos \nu},$$



und  $r$  als Halbmesser des Schleifzylinders,  $a$  und  $t$  als Parameter gelten. Der Parameter  $t$  durchläuft alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$ , daher kann man statt  $t$  auch  $-t$  schreiben, da dies nur die Durchlaufrichtung ändert. Es gilt also für den Zylindermantel:

$$\begin{aligned} x' &= \xi + r \cos a \\ y' &= a \sin a + t \sin \nu \\ z' &= -t \cos \nu. \end{aligned} \tag{1}$$

Wie bereits erwähnt, wollen wir in unseren Betrachtungen die relative Bewegung eines um die Achse  $z = z'$  des als feststehend gedachten Ringes eine drehende Bewegung ausführenden Schleifzylinders vor Augen halten. In diesem System beschreibt jede einzelne Erzeugende des Zylindermantels ein einschaliges Hyperboloid. Die Hüllfläche dieser Hyperboloidenschar ergibt die ballige durch den Schleifzylinder erzeugte Lauffläche. Es soll der Drehwinkel um die  $z$ -Achse mit  $\lambda$  bezeichnet werden; dann läßt sich für die Hyperboloidenschar das Gleichungssystem in Parameterform auf Grund der Mantelgleichungen (1) folgenderweise aufstellen:

$$\begin{aligned} x' &= (\xi + r \cos a) \cos \lambda - (a \sin a + t \sin \nu) \sin \lambda \\ y' &= (\xi + r \cos a) \sin \lambda + (a \sin a + t \sin \nu) \cos \lambda \\ z' &= -t \cos \nu. \end{aligned}$$

Hier sind  $a$ ,  $t$  und  $\lambda$  die Parameter. Bei einem festen gegebenen Wert  $a$  stellt dieses Gleichungssystem ein einschaliges Hyperboloid dar. Um das Gleichungssystem der Hüllfläche zu finden, müssen wir in den obigen Gleichungen einen der Parameter eliminieren. Zu diesem Zweck muß die Jacobische Funktionaldeterminante des Systems gebildet werden. (Einfachheitshalber sollen die Striche fortgelassen werden). Diese lautet:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{vmatrix}.$$

Drücken wir aus der Gleichung  $D = 0$  einen der Parameter mit Hilfe der anderen beiden aus und setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichungen der Hyper-

boloidenschar ein, so ergibt sich das Gleichungssystem der Hüllfläche mit zwei Parametern. (Über die Methode des Verfassers zur Bestimmung der Hüllfläche siehe den Beitrag [2]).

Wir errechnen die partiellen Differentialquotienten; sie lauten:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = -r \sin a \cdot \cos \lambda - a \cos a \cdot \sin \lambda;$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = -r \sin a \cdot \sin \lambda + a \cos a \cdot \cos \lambda;$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 0;$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\sin v \cdot \sin \lambda;$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sin v \cdot \cos \lambda; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = -\cos v;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -(\xi + r \cos a) \sin \lambda - (a \cdot \sin a + t \sin v) \cos \lambda;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = (\xi + r \cos a) \cos \lambda - (a \sin a + t \sin v) \sin \lambda;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0.$$

Entwickeln wir die Determinante  $D$  nach der dritten Spalte; da nun

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0,$$

so erhalten wir die folgende einfache Formel:

$$D = \cos v \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Diese Determinante (2) zweiten Grades läßt sich als die Summe aus folgenden vier Determinanten ausdrücken:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r \sin a \cos \lambda - a \cos a \sin \lambda & -r \sin a \sin \lambda + a \cos a \cdot \cos \lambda \\ -(\xi + r \cos a) \sin \lambda & (\xi + r \cos a) \cos \lambda \end{vmatrix} + \\ & + \begin{vmatrix} -r \sin a \cos \lambda - a \cos a \cdot \sin \lambda & -r \sin a \sin \lambda + a \cos a \cos \lambda \\ -(a \sin a + t \cdot \sin \nu) \cos \lambda & -(a \sin a + t \sin \nu) \sin \lambda \end{vmatrix} = \\ & = (\xi + r \cos a) \begin{vmatrix} -r \sin a \cos \lambda & -r \sin a \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{vmatrix} + \\ & + (\xi + r \cos a) \begin{vmatrix} -a \cos a \cdot \sin \lambda & a \cos a \cos \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{vmatrix} + \\ & + (a \sin a + t \sin \nu) \begin{vmatrix} -r \sin a \cos \lambda & -r \sin a \sin \lambda \\ -\cos \lambda & -\sin \lambda \end{vmatrix} + \\ & + (a \sin a + t \sin \nu) \begin{vmatrix} -a \cos a \sin \lambda & a \cos a \cos \lambda \\ -\cos \lambda & -\sin \lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Da die Determinanten im zweiten und dritten Glied gleich Null sind, so lautet die Determinante (2) zweiten Grades in vereinfachter Form:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = -(\xi + r \cdot \cos a) r \cdot \sin a + (a \cdot \sin a + t \cdot \sin \nu) a \cdot \cos a = \\ & = (a^2 - r^2) \sin a \cdot \cos a - r \cdot \xi \cdot \sin a + a \cdot t \cdot \sin \nu \cdot \cos a. \end{aligned}$$

Wenn dieser Ausdruck verschwindet, d. h. wenn

$$t = \frac{r\xi \sin a - (a^2 - r^2) \sin a \cdot \cos a}{a \cdot \cos a \cdot \sin \nu}$$

ist, dann ist auch der Wert der Determinante  $D$  gleich Null (da  $\cos \nu \neq 0$  ist).

Wie bereits festgestellt, ist

$$a = \frac{r}{\cos \nu}$$

und

$$\frac{a^2 - r^2}{a} = r \operatorname{tg} \nu \sin \nu,$$

daher wird  $D$  (nach der Formel für  $t$ ) verschwinden, falls:

$$t \cdot \sin \nu = \xi \cos \nu \cdot \operatorname{tg} a - r \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot \sin \nu \cdot \sin a$$

und wenn zugleich

$$t \cdot \cos \nu = \xi \cdot \cos \nu \cdot \operatorname{ctg} \nu \cdot \operatorname{tg} a - r \cdot \sin \nu \cdot \sin a$$

ist. Wir wollen diese Ausdrücke in die Gleichungen der Flächenschar einsetzen, um die Gleichungen der Hüllfläche zu erhalten:

$$x = (\xi + r \cos a) \cos \lambda - (a \sin a + \xi \cos \nu \operatorname{tg} a - r \operatorname{tg} \nu \sin \nu \sin a) \sin \lambda;$$

$$y = (\xi + r \cos a) \sin \lambda + (a \sin a + \xi \cos \nu \operatorname{tg} a - r \operatorname{tg} \nu \sin \nu \sin a) \cos \lambda;$$

$$z = r \sin \nu \sin a - \xi \cos \nu \operatorname{ctg} \nu \operatorname{tg} a;$$

hier sind  $a$  und  $\lambda$  Parameter. Diese Gleichungen können vereinfacht werden; mit Hilfe der Formel  $a = \frac{r}{\cos \nu}$  können nämlich die Koeffizienten für  $\sin \lambda$  und  $\cos \lambda$  die folgende einfachere Form erhalten:

$$a \sin a + \xi \cos \nu \operatorname{tg} a - r \operatorname{tg} \nu \sin \nu \sin a = \operatorname{tg} a \cos \nu (\xi + r \cos a);$$

die Gleichungen der Hüllfläche nehmen ebenfalls die folgende Form an:

$$x = (\xi + r \cos a) (\cos \lambda - \operatorname{tg} a \cos \nu \sin \lambda),$$

$$y = (\xi + r \cos a) (\sin \lambda + \operatorname{tg} a \cos \nu \cos \lambda),$$

$$z = r \sin \nu \sin a - \xi \cos \nu \operatorname{ctg} \nu \operatorname{tg} a.$$

(3)

## 2. Gleichungssystem der Profilkurve der durch den Schleifzylinder erzeugten Lauffläche

Man erhält die gesuchte Profilkurve der Lauffläche als Axialschnitt der im vorigen Kapitel abgeleiteten Hüllfläche. Ein solcher Axialschnitt kann ge-

wonnen werden, wenn  $y = 0$  gesetzt wird. Aus der unter (3) angeführten ersten und zweiten Gleichung ergibt sich unmittelbar:

$$x^2 + y^2 = (\xi + r \cos a)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 a \cos^2 \nu).$$

Wenn also  $y = 0$  ist, so ist

$$x = (\xi + r \cos a) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cos^2 \nu}.$$

Durch Kopplung des Ausdruckes  $x$  mit dem von  $z$  aus (3) erhalten wir für die Profilkurve das folgende Gleichungssystem in Parameterform:

$$\begin{aligned} x &= (\xi + r \cos a) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cos^2 \nu} \\ z &= r \sin \nu \sin a - \xi \cos \nu \operatorname{ctg} \nu \operatorname{tg} a, \end{aligned} \quad (3')$$

mit dem Winkel  $a$  als Parameter.

Diese Gleichungen können auch direkt abgeleitet werden. Auf Grund des Gleichungssystems (1) des Schleifzylindermantels, und nach Fortlassung der Striche ergibt sich:

$$\begin{aligned} x &= \xi + r \cos a \\ y &= a \sin a + t \sin \nu \\ z &= -t \cos \nu. \end{aligned}$$

Bedeutet hier  $a$  einen festen Wert, so entspricht dem Gleichungssystem eine einzige Gerade im Raum, d. h. eine einzige Zylindererzeugende. Zur Bestimmung des Schnittpunktes irgendeiner Erzeugenden mit der Ebene  $z = \text{Konstant}$  erhalten wir folgende Koordinatenwerte:

$$\begin{aligned} x &= \xi + r \cos a \\ y &= a \cdot \sin a - z \operatorname{tg} \nu. \end{aligned} \quad (4)$$

Nun ist  $z = \text{Konstant}$ , und  $a$  ist veränderlich. Als Schnittkurve der erzeugten Lauffläche mit der Ebene  $z = \text{Konstant}$  erhalten wir einen Kreis. Dieser Kreis wird durch die Erzeugende der Mantelfläche beschrieben, deren Schnittpunkt mit der Ebene  $z = \text{Konstant}$  am weitesten von der  $z$ -Achse entfernt ist, d. h. für welche der Wert von  $\varrho^2 = x^2 + y^2$  mit den unter (4) ausgedrückten  $x$  und  $y$  das Maximum erreicht.

Der Vollständigkeithalber soll hier bemerkt werden, daß wir in der Ebene  $z = \text{Konstant}$  eigentlich zwei Kreise der Hüllfläche erhalten, denn in der Gesamtheit der in dieser Ebene liegenden Schnittpunkte beschreibt auch

der Schnittpunkt der zur  $z$ -Achse am nächsten liegenden Erzeugenden ebenfalls einen in der Hüllfläche enthaltenen Kreis (Fig. 4a). Im folgenden aber wollen wir nur den Kreis betrachten, der von dem Schleifzylinder auf der Lauffläche erzeugt wird. Gemäß (4) ergibt sich:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = (\xi + r \cos a)^2 + (a \cdot \sin a - z \cdot \operatorname{tg} \nu)^2 \quad (4')$$

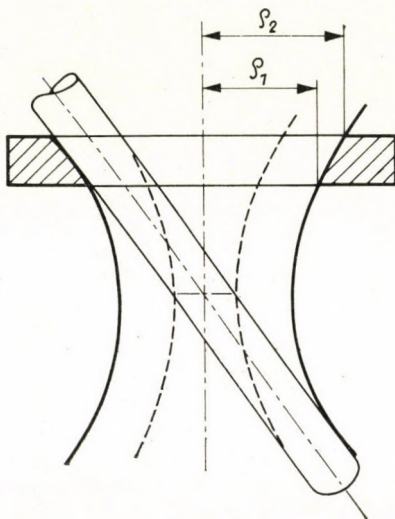


Fig. 4a

und für das Maximum von  $\varrho$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varrho^2}{\partial a} &= (\xi + r \cdot \cos a) (-r \cdot \sin a) + (a \sin a - z \operatorname{tg} \nu) a \cos a = \\ &= -\xi r \sin a - r^2 \sin a \cdot \cos a + a^2 \sin a \cdot \cos a - z \cdot a \cdot \cos a \operatorname{tg} \nu = 0, \end{aligned}$$

daher ist:

$$z = \frac{(a^2 - r^2) \sin a \cdot \cos a - \xi \cdot r \cdot \sin a}{a \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot \cos a}.$$

Wie es schon festgestellt wurde:

$$\frac{a^2 - r^2}{a} = r \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot \sin \nu, \quad \text{und} \quad a = \frac{r}{\cos \nu};$$

also wird durch Umwandlung des früher erhaltenen  $z$ -Wertes:

$$z = r \cdot \sin \nu \cdot \sin a - \xi \cos \nu \cdot \operatorname{ctg} \nu \cdot \operatorname{tg} a,$$

und dieser Wert stimmt mit dem unter (3') gewonnenen Ausdruck überein. Wir wollen nun diesen Wert in die Formel (4') für  $\rho^2$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (\xi + r \cdot \cos a)^2 + \\ &+ \left( \frac{r}{\cos \nu} \sin a - r \cdot \sin \nu \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot \sin a + \xi \cos \nu \cdot \operatorname{tg} a \right)^2 = \\ &= (\xi + r \cos a)^2 + \cos^2 \nu \cdot \operatorname{tg}^2 a (\xi + r \cos a)^2 = \\ &= (\xi + r \cos a)^2 \{1 + \cos^2 \nu \cdot \operatorname{tg}^2 a\}. \end{aligned}$$

Daher ist:

$$\rho = (\xi + r \cdot \cos a) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cdot \cos^2 \nu},$$

der also mit dem unter (3') gewonnenen Ausdruck für  $x$  übereinstimmt.

Da in den Gleichungen (3') der Profilkurve der Parameter  $a$  alle Werte von  $-\pi$  bis  $\pi$  durchläuft, kann statt  $a$  auch  $-a$  geschrieben werden, weil hiedurch nur die Durchlaufrichtung vertauscht wird. Daher gilt für die Profilkurve das folgende Gleichungssystem in Parameterform:

$$\begin{aligned} x &= \rho = (\xi + r \cos a) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cdot \cos^2 \nu} \\ z &= \xi \cos \nu \cdot \operatorname{ctg} \nu \cdot \operatorname{tg} a - r \cdot \sin \nu \cdot \sin a. \end{aligned} \quad (3'')$$

Hier bedeutet  $\xi$  die Länge der Normaltransversalen zwischen der um den Winkel  $\psi$  gekippten Schleifsteinachse und der  $z$ -Achse (Ringachse), und  $\nu$  ist der Winkel zwischen Schleifsteinachse und  $z$ -Achse;  $r$  ist der Halbmesser des Schleifzylinders; der Winkel  $a$  ist der Parameter.

Betrachten wir den besonderen Fall, wo der Halbmesser des Schleifzylinders in Verhältnis zum Ringdurchmesser vernachlässigt werden kann, d. h. wenn  $r = 0$  ist. Wie bereits erwähnt, erhalten wir für diesen Fall an Stelle einer Hüllfläche ein einschaliges Hyperboloid als die durch den Schleifstein erzeugte Lauffläche. Wenn nämlich  $r = 0$  ist, so vereinfachen sich die Gleichungen (3'') der Profilkurve wie folgt:

$$\begin{aligned} x &= \rho = \xi \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cdot \cos^2 \nu} \\ z &= \xi \frac{\cos^2 \nu}{\sin \nu} \cdot \operatorname{tg} a. \end{aligned}$$

Setzen wir hier nach (7) den Wert

$$\xi = \frac{x_2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin \nu} = \frac{x_1}{\cos \varphi} \frac{\sin \psi \cdot \cos \varphi}{\sin \nu} = \frac{x_1 \sin \psi}{\sin \nu}$$

ein, so ergibt sich:

$$\varrho = \frac{x_1 \sin \psi}{\sin \nu} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \nu}$$

und

$$z = x_1 \operatorname{ctg}^2 \nu \cdot \sin \psi \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Drücken wir aus der zweiten Gleichung den Wert von  $\operatorname{tg} \alpha$  aus, und setzen wir ihn in die erste Gleichung ein, so erhalten wir für  $\varrho$  und  $z$  die folgende Gleichung zweiten Grades:

$$\varrho^2 = \frac{x_1^2 \sin^2 \psi}{\sin^2 \nu} + z^2 \operatorname{tg}^2 \nu;$$

das ist die Gleichung einer Hyperbel, mit den reellen bzw. imaginären Halbachsen:

$$\frac{x_1 \sin \psi}{\sin \nu} \quad \text{bzw.:} \quad \frac{x_1 \sin \psi}{\sin \nu \cdot \operatorname{tg} \nu}.$$

Es soll noch der in den Gleichungen (3'') der Profilkurve vorkommende Winkel  $\nu$  und die Länge  $\xi$  bestimmt werden; zu diesem Zweck muß jener Einheitsvektor  $\mathbf{a}$  betrachtet werden, der mit der in der Ebene  $(x, z)$  liegenden Erzeugenden des stumpfen Kegels der Lauffläche (laut Fig. 3) zusammenfällt; selbstverständlich gilt hiefür

$$\mathbf{a} = \{\sin \varphi; 0; \cos \varphi\}.$$

Wird nun der Vektor  $\mathbf{a}$  um die zu ihm senkrechte  $a$ -Achse um den Winkel  $\psi$  verdreht, so gewinnt man den Einheitsvektor:

$$\mathbf{a}_\psi = \{x_a; y_a; z_a\}, \quad \text{wobei} \quad x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = 1,$$

mit welchem für die um den Winkel  $\psi$  verdrehte Schleifsteinachse die Richtungskosinus-Werte bestimmt sind.

Da das vektorielle Produkt aus den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a}_\psi$  einen zu  $\mathbf{a}$  senkrechten und in der Ebene  $(x, z)$  liegenden Vektor ergibt, erhalten wir für den betreffenden Produktvektor aus Fig. 3 folgende Koordinaten:

$$\sin \psi \cdot \cos \varphi; 0; -\sin \psi \cdot \sin \varphi.$$

Also ist

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a}_\psi = \{\sin \psi \cdot \cos \varphi; 0; -\sin \psi \cdot \sin \varphi\}.$$



Daher gilt:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \{\sin \psi \cdot \cos \varphi; 0; -\sin \psi \cdot \sin \varphi\}$$

und also

$$\begin{aligned} -y_a \cdot \cos \varphi &= \sin \psi \cdot \cos \varphi \\ x_a \cdot \cos \varphi - z_a \sin \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Weil nun

$$x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = 1,$$

erhalten wir:

$$x_a = \cos \psi \cdot \sin \varphi; y_a = -\sin \psi; z_a = \cos \psi \cdot \cos \varphi.$$

Hier erhielten wir die Richtungskosinus-Werte der um den Winkel  $\psi$  verdrehten Schleiﬂzylinderachse im Koordinatensystem  $(x, y, z)$  (Fig. 3). Folglich gilt für den Winkel  $\nu$  zwischen Schleiﬂsteinachse und  $z$ -Achse:

$$\cos \nu = \cos \psi \cdot \cos \varphi. \quad (5)$$

Es soll noch die Länge der Normaltransversalen  $\xi$  bestimmt werden; zuerst stellen wir das Gleichungssystem der Schleiﬂsteinachse für ein räumliches Koordinatensystem auf. Es soll der Schnittpunkt der  $a$ -Achse mit der  $z$ -Achse als  $L$  bezeichnet werden, und es sei:

$$CL = x_2,$$

und der Halbmesser des in der Halbierungsebene  $(x, y)$  liegenden Kreises:

$$OK = x_1.$$

Aus Fig. 3 sind die Koordinaten des Punktes  $C$ :

$$x_2 \cdot \cos \varphi, 0, r \cdot \sin \varphi.$$

Im räumlichen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  mit dem Ursprung  $O$  ergibt sich für die Schleiﬂzylinderachse das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x &= x_2 \cos \varphi + t \cos \psi \cdot \sin \varphi; \\ y &= -t \sin \psi; \\ z &= r \cdot \sin \varphi + t \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Zur Bestimmung der Länge der Normaltransversalen  $\xi$  der zwei Geraden (der Schleifsteinachse und der  $z$ -Achse) bilden wir das gemischte Produkt der Richtungsvektoren dieser zwei Geraden und des verbindenden Vektors zwischen je einem Punkte dieser Geraden; wenn wir nun das gemischte Produkt mit dem absoluten Wert des Normalvektors der beiden Richtungsvektoren dividieren, erhalten wir den Wert von  $\xi$ . Gemäß des oben für die Schleifzylinderachse abgeleiteten Gleichungssystems erhalten wir die zwei Richtungsvektoren:

$$\{0; 0; 1;\} \quad \text{und} \quad \{\cos \psi \cdot \sin \varphi; -\sin \psi; \cos \psi \cdot \cos \varphi;\}.$$

Für den Verbindungsvektor zwischen je einem Punkt der beiden Achsen ergibt sich:

$$\{x_2 \cdot \cos \varphi; 0; r \sin \varphi;\}.$$

Der Normalvektor (Vektorprodukt) der zwei Richtungsvektoren ist nun:

$$\{\sin \psi; \cos \psi \cdot \sin \varphi; 0;\}$$

und daher:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cdot \sin^2 \varphi}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \psi \cdot \sin \varphi & -\sin \psi & \cos \psi \cdot \cos \varphi \\ x_2 \cdot \cos \varphi & 0 & r \cdot \sin \varphi \end{vmatrix} = \\ &= \frac{x_2 \cos \varphi \cdot \sin \psi}{\sqrt{\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cdot \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen läßt nach (5) folgenderweise vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \sin^2 \varphi &= 1 - \cos^2 \psi + \cos^2 \psi \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \psi \cos^2 \varphi = \\ &= 1 - \cos^2 \nu = \sin^2 \nu; \end{aligned}$$

also gilt für die Länge der Normaltransversalen:

$$\xi = \frac{x_2 \cos \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \nu}, \quad (7)$$

wobei laut Fig. 3

$$x_2 = \overline{CL} = \frac{x_1}{\cos \varphi} - r \text{ ist;}$$

$\varphi$  ist der halbe Öffnungswinkel der vorbereiteten kegeligen Lauffläche, und  $\psi$  bedeutet den Kippwinkel des Ringes.

Es soll noch die Strecke  $O''O$  (Fig. 4), d. h. der Koordinatenwert  $z$  des Fußpunktes  $O''$  der Normaltransversalen im Koordinatensystem mit dem Ur-

sprung  $O$  bestimmt werden. Die Richtungskosinuswerte der Normaltransversalen im System mit dem Ursprung  $O$  sind die folgenden:

$$\cos \kappa = \frac{\sin \psi}{\sin \nu}; \quad \cos \lambda = \frac{\cos \psi \sin \varphi}{\sin \nu}; \quad \cos \mu = 0.$$

Für die Koordinate  $x$  des Fußpunktes  $T$  der Schleifsteinachse gilt (Fig. 4):

$$\xi \cos \kappa = \frac{x_2 \cos \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \nu} \frac{\sin \psi}{\sin \nu} = \frac{x_2 \cos \varphi \cdot \sin^2 \psi}{\sin^2 \nu}.$$

Nun ist aber  $T$  ein Punkt der Schleifsteinachse und deshalb können wir laut (6) für einen bestimmten Wert des Parameters  $t$  die Koordinate  $x$  des Punktes  $T$  dem Ausdruck  $(\xi \cdot \cos \kappa)$  gleichsetzen, d. h.:

$$x_2 \cos \varphi + t \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi = \frac{x_2 \cos \varphi \sin^2 \psi}{\sin^2 \nu},$$

daher:

$$t \cdot \cos \psi \sin \varphi = x_2 \cos \varphi \left( \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \nu} - 1 \right).$$

Laut (5) ist:

$$\sin^2 \psi = 1 - \frac{\cos^2 \nu}{\cos^2 \varphi},$$

und daher ist:

$$t \cdot \cos \psi \sin \varphi = -x_2 \cos \varphi \cdot \operatorname{ctg}^2 \nu \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

oder auch:

$$t \cdot \cos \psi = -x_2 \operatorname{ctg}^2 \nu \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Hiemit können wir laut (6) die Koordinate  $z$  des Fußpunktes  $O''$  der Normaltransversalen, die wir mit  $\bar{z}$  bezeichnen wollen, folgenderweise bestimmen:

$$\bar{z} = r \sin \varphi - x_2 \operatorname{ctg}^2 \nu \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi = r \sin \varphi - x_2 \operatorname{ctg}^2 \nu \cdot \sin \varphi.$$

Da nun

$$x_2 = \frac{x_1}{\cos \varphi} - r \text{ ist,}$$

so gilt

$$\bar{z} = - \left( x_1 \operatorname{ctg}^2 \nu \operatorname{tg} \varphi - r \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \nu} \right). \quad (7')$$

### 3. Bestimmung des Richtungstangenten der Profilkurve

Um die Pfeilhöhe  $\delta$  als Maß der Balligkeit zu errechnen, müssen wir den Verlauf der Profilkurve der durch das Schleifen erzeugten Lauffläche kennen. Zu diesem Zwecke soll der Differentialquotient der Profilkurve nach (3'') errechnet werden. Als erster Hilfwert soll der Differentialquotient  $\frac{d\rho}{da}$  dienen:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{da} &= \frac{d}{da} \left\{ (\xi + r \cos a) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cos^2 \nu} \right\} = \\ &= \frac{-r \sin a (1 + \operatorname{tg}^2 a \cos^2 \nu) + (\xi + r \cos a) \operatorname{tg} a \frac{\cos^2 \nu}{\cos^2 a}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cos^2 \nu}} = \\ &= \frac{-r (\cos^2 a + \sin^2 a \cos^2 \nu) \cos a + (\xi + r \cos a) \cos^2 \nu}{\cos^3 a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cdot \cos^2 \nu}} \cdot \sin a. \end{aligned}$$

Als zweiter Hilfwert gilt der Differentialquotient

$$\begin{aligned} \frac{dz}{da} &= \frac{d}{da} \left\{ \xi \cos \nu \cdot \operatorname{ctg} \nu \cdot \operatorname{tg} a - r \sin \nu \cdot \sin a \right\} = \\ &= \xi \cos \nu \cdot \operatorname{ctg} \nu \frac{1}{\cos^2 a} - r \sin \nu \cdot \cos a = \frac{\xi \cos^2 \nu - r \sin^2 \nu \cdot \cos^2 a}{\sin \nu \cdot \cos^2 a}. \end{aligned}$$

Der Differentialquotient  $\frac{d\rho}{da}$  läßt sich vereinfachen:

da

$$\begin{aligned} -r \sin^2 a \cdot \cos^2 \nu \cdot \cos a + r \cos a \cdot \cos^2 \nu &= r \cos a \cdot \cos^2 \nu (1 - \sin^2 a) = \\ &= r \cos^3 a \cdot \cos^2 \nu, \end{aligned}$$

deshalb ist

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{da} &= \frac{\xi \cos^2 \nu - r \cdot \cos^3 a + r \cos^3 a \cdot \cos^2 \nu}{\cos^3 a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cdot \cos^2 \nu}} \cdot \sin a = \\ &= \frac{\xi \cos^2 \nu - r \cos^3 a \sin^2 \nu}{\cos^3 a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cdot \cos^2 \nu}} \cdot \sin a. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der gewonnenen Ausdrücke für  $\frac{d\rho}{da}$  und  $\frac{dz}{da}$  erhält man:

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{d\rho}{da} : \frac{dz}{da} = \frac{\sin \nu \cdot \cos^2 a \cdot \sin a}{\cos^3 a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cdot \cos^2 \nu}};$$

hieraus ist endlich der gesuchte Differentialquotient:

$$\frac{d\rho}{dz} = \operatorname{tg} \alpha \frac{\sin \nu}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \nu}} \quad (8)$$

#### 4. Bestimmung der Pfeilhöhe als Maß der Balligkeit

Zur Bestimmung des Wertes  $\delta$  wählen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem der Fußpunkt  $O''$  der Normaltransversalen der Steinachse

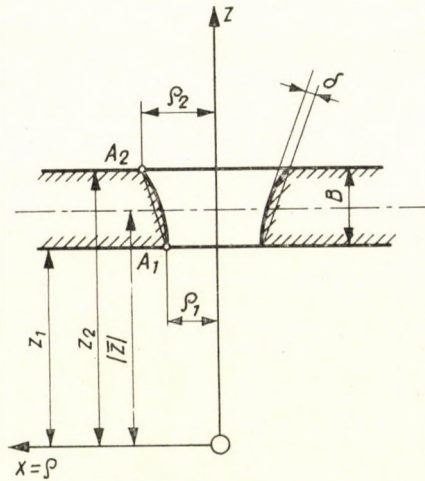


Fig. 5

und der  $z$ -Achse als Ursprung, und die Normaltransversale als  $x$ -Achse angenommen wird. Wir hatten in demselben Koordinatensystem die Gleichung (3'') der Profilkurve abgeleitet. Betrachten wir (Fig. 5) die Strecke der Profilkurve zwischen den Punkten  $A_1$  und  $A_2$  in der Ebene  $(x, z)$ , indem wir laut (3'')  $\rho = x$  setzen.

Die Dicke des Ringes sei:  $B = (z_2 - z_1)$ . Die Gleichung der Sehne zwischen  $A_1$  und  $A_2$  läßt sich aus den Koordinaten dieser Punkte wie folgt anschreiben:

$$\frac{\rho - \rho_1}{z - z_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{z_2 - z_1} ;$$

daher ist

$$\rho = mz + \frac{\rho_1 z_2 - z_1 \rho_2}{z_2 - z_1} ,$$

wo

$$m = \frac{\rho_2 - \rho_1}{z_2 - z_1} \text{ ist,}$$

und  $\varrho_1, \varrho_2$  sind die Halbmesser der Grenzkreise. Um die Koordinaten  $\varrho$  (d. h.  $x$ ) der Sehnenpunkte von jenen der Profilkurve voneinander unterscheiden zu können, wollen wir  $\varrho$  als Symbol für die Koordinaten  $x$  der Profilkurve beibehalten, und  $\varrho'$  soll die entsprechende Koordinate eines Sehnenpunktes bezeichnen. So ergibt sich die folgende Gleichung für die Sehne:

$$\varrho' = mz + \frac{\varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2}{z_2 - z_1}.$$

Die Kurvenkoordinate  $\varrho$  ist eine Funktion von  $z$ , d. h.:

$$\varrho = \varrho(z).$$

Jetzt bestimmen wir den Maximalwert der Differenz:

$$\varrho' - \varrho(z),$$

da das Maß  $\delta$  der Wölbung durch diesen Maximalwert bestimmt ist; in Formel ausgedrückt ist

$$\max [\varrho' - \varrho(z)] = s_{\max},$$

und laut Fig. 1a folgt die Gleichung:

$$\delta = s_{\max} \cdot \cos \varphi.$$

Nun sollen die Nullstellen des Differentialquotienten

$$\frac{d}{dz} [\varrho' - \varrho(z)]$$

bestimmt werden. Mittels der Formel (8) und des für  $\varrho'$  gewonnenen Ausdruckes ergibt sich:

$$\frac{d}{dz} [\varrho' - \varrho(z)] = m - \frac{d\varrho(z)}{dz} = m - \operatorname{tg} \alpha \frac{\sin \nu}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \nu}}.$$

Dieser Differentialquotient verschwindet bei dem Wert  $\alpha_0$ , für den die folgende Gleichung gilt:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\sin \nu}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \cos^2 \nu}} = m,$$

und daraus:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{m}{\sqrt{\sin^2 \nu - m^2 \cos^2 \nu}} = \frac{m}{\cos \nu \sqrt{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}};$$

und:

$$\cos a_0 = \operatorname{ctg} \nu \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}{1 + m^2}}, \quad \text{bzw.:} \quad \sin a_0 = \frac{m}{\sin \nu \sqrt{1 + m^2}}.$$

Nun lassen sich die dem Parameterwert  $a_0$  zugeordneten Werte  $\varrho_0$  und  $z_0$  folgenderweise bestimmen: nach (3'') ist:

$$\begin{aligned} z_0 &= \xi \cos \nu \cdot \operatorname{ctg} \nu \cdot \operatorname{tg} a_0 - r \sin \nu \cdot \sin a_0 = \\ &= \xi \operatorname{ctg} \nu \frac{m}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}} - r \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Werte von  $\cos a_0$  und  $\operatorname{tg} a_0$  bzw. durch Einsetzen dieser Werte in den Ausdruck des Wertes von  $\varrho_0$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= (\xi + r \cos a_0) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a_0 \cos^2 \nu} = \\ &= \left( \xi + r \operatorname{ctg} \nu \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}{1 + m^2}} \right) \frac{\operatorname{tg} \nu}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}} = \\ &= \xi \frac{\operatorname{tg} \nu}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}} + \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}}. \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes der Profilkurve, für welche  $[\varrho' - \varrho(z)]$  ein Maximum ist, sind also die folgenden:

$$\begin{aligned} z_0 &= \xi \operatorname{ctg} \nu \frac{m}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}} - r \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}, \\ \varrho_0 &= \xi \frac{\operatorname{tg} \nu}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}} + \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}}. \end{aligned}$$

Es gilt für das Maximum der Abweichung zwischen Sehne und Kurve:

$$s_{\max} = mz_0 + \frac{\varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2}{z_2 - z_1} - \varrho_0$$

und mit Hilfe der oben erhaltenen Werte  $z_0$  und  $\varrho_0$ :

$$\begin{aligned} s_{\max} &= \xi \operatorname{ctg} \nu \frac{m^2}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}} - r \frac{m^2}{\sqrt{1 + m^2}} + \frac{\varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2}{z_2 - z_1} - \\ &- \xi \frac{\operatorname{tg} \nu}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}} - \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}} = \xi \frac{\operatorname{ctg} \nu \cdot m^2 - \operatorname{tg} \nu}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2}} - \\ &- r \sqrt{1 + m^2} + \frac{\varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2}{z_2 - z_1}; \end{aligned}$$

vereinfacht geschrieben:

$$s_{\max} = -\xi \operatorname{ctg} \nu \sqrt{\operatorname{tg}^2 \nu - m^2} - r \sqrt{1 + m^2} + \frac{\varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2}{z_2 - z_1},$$

wo laut Formel (5)

$$\cos \nu = \cos \psi \cdot \cos \varphi \text{ ist;}$$

und nach (7):

$$\xi = \frac{x_2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin \nu}; \quad x_2 = \frac{x_1}{\cos \varphi} - r; \quad m = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{z_2 - z_1}.$$

Mit Berücksichtigung des Wertes von  $\xi$  aus (7) kann für  $s_{\max}$  folgende Formel geschrieben werden

$$s_{\max} = -x_2 \frac{\cos \varphi \sin \psi}{\sin \nu} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{ctg}^2 \nu} - r \sqrt{1 + m^2} + \frac{\varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2}{z_2 - z_1}. \quad (9)$$

Ferner können mit Hilfe von (7) die Werte  $\varrho$  und  $z$  [siehe (3'')] folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \varrho &= \left( \frac{x_2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin \nu} + r \cos \alpha \right) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \nu}; \\ z &= x_2 \frac{\cos \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \nu} \cdot \frac{\cos^2 \nu}{\sin \nu} \cdot \operatorname{tg} \alpha - r \cdot \sin \nu \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (9'')$$

Auf Grund der Fig. 5 können  $z_1$  und  $z_2$  in (9) noch in der Form ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} z_1 &= |\bar{z}| - \frac{B}{2}; \\ z_2 &= |\bar{z}| + \frac{B}{2}; \end{aligned} \quad (9''')$$

wo nach (7') die Gleichung gilt:

$$|\bar{z}| = x_1 \operatorname{ctg}^2 \nu \cdot \operatorname{tg} \varphi - r \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \nu}.$$

Dies ist also der Abstand  $\overline{O''O}$  (s. Fig. 4), wobei  $B$ , wie bereits erwähnt, die Dicke des Ringes ist.



**5. Zusammenhang zwischen dem Maß der Wölbung und der Änderung des Schleifsteindurchmessers**

Es soll hier der Beweis geführt werden, daß bei unverändertem Stellwinkel  $\psi$  das Maß  $\delta$  der Wölbung verringert wird, wenn der Durchmesser des Schleifzylinders (infolge Steinabnutzung) abnimmt.

Wir betrachten erstens den Bruch in der Formel (9):

$$\frac{\varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2}{z_2 - z_1}.$$

Da nach (9''):

$$z_1 = |\bar{z}| - \frac{B}{2}, \quad \text{und} \quad z_2 = |\bar{z}| + \frac{B}{2} \text{ ist,}$$

und weil nach einer früheren Bezeichnung:

$$\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{B} = m,$$

deshalb ist

$$\frac{\varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2}{z_2 - z_1} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - m |\bar{z}|.$$

Mit Hilfe der Gleichung  $x_2 = \frac{x_1}{\cos \varphi} - r$  und mit dem Wert  $\bar{z}$  laut (7') und  $s_{\max}$  laut (9), ergibt sich:

$$\begin{aligned} s_{\max} &= \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - m \left( x_1 \operatorname{ctg}^2 \nu \cdot \operatorname{tg} \varphi - r \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \nu} \right) - r \sqrt{1 + m^2} - \\ &\quad - \left( \frac{x_1}{\cos \varphi} - r \right) \frac{\cos \varphi \sin \psi}{\sin \nu} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{ctg}^2 \nu} = \\ &= \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - m x_1 \operatorname{ctg}^2 \nu \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{x_1 \sin \psi}{\sin \nu} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{ctg}^2 \nu} + \\ &\quad + r \left\{ \frac{m \sin \varphi}{\sin^2 \nu} - \sqrt{1 + m^2} + \frac{\cos \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \nu} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{ctg}^2 \nu} \right\}. \end{aligned}$$

Unsere auf die Wölbungsverhältnisse bezüglichen und in großem Ausmaße durchgeführten numerischen Berechnungen ergaben das Resultat, daß die Gleichstellung

$$m \sim \operatorname{tg} \varphi$$

mit großer Annäherung gelten kann. (NB. Um diese Annäherung zu erfassen, muß darauf hingewiesen werden, daß die  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  Werte in der Gleichung

$m = \left( \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{B} \right)$  den Halbmesser des oberen bzw. des unteren Grenzkreises der abgewickelten Lauffläche bedeuten und daß also der Wert  $m$  jedenfalls von dem Tangentenwert des halben Öffnungswinkels  $\varphi$  abweichen muß, die durch die ursprüngliche stumpfe Kegelfläche bestimmt ist.) Jetzt soll — gemäß obiger Formel — in dem Ausdruck zwischen den geschlungenen Klammern in der oben abgeleiteten Formel für  $s_{\max}$  an Stelle von  $m$  der Wert  $\operatorname{tg} \varphi$  eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{m \sin \varphi}{\sin^2 \nu} - \sqrt{1 + m^2} + \frac{\cos \varphi \cdot \sin \psi}{\sin^2 \nu} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{ctg}^2 \nu} \right\} = \\ & = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi \cdot \sin^2 \nu} - \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{\sin \psi}{\sin^2 \nu} \sqrt{\sin^2 \nu \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \nu}. \end{aligned}$$

Laut (5) ist aber  $\cos^2 \nu = \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi$ , d. h.:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \nu \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \nu} &= \sqrt{(1 - \cos^2 \nu) \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \nu} = \\ &= \sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \nu} = \sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi} = \cos \varphi \cdot \sin \psi, \end{aligned}$$

und somit ergibt sich für den Ausdruck in den geschlungenen Klammern:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi \cdot \sin^2 \nu} - \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{\cos \varphi \cdot \sin^2 \psi}{\sin^2 \nu} = \\ & = \frac{\sin^2 \varphi - \sin^2 \nu + \sin^2 \psi \cos^2 \varphi}{\cos \varphi \cdot \sin^2 \nu} = \frac{1 - \sin^2 \nu - \cos^2 \nu}{\cos \varphi \cdot \sin^2 \nu} = 0. \end{aligned}$$

Es kann also in der obigen Formel für  $s_{\max}$  der Ausdruck zwischen den geschlungenen Klammern vernachlässigt werden. Wenn wir nun die Gleichstellung von  $m = \operatorname{tg} \varphi$  auch in den anderen Gliedern geltend machen, so erhalten wir die Annäherungsformel:

$$\begin{aligned} s_{\max} &\sim \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - x_1 \left[ \operatorname{ctg}^2 \nu \operatorname{tg}^2 \varphi + \right. \\ & \left. + \frac{\sin \psi}{\cos \varphi \cdot \sin^2 \nu} \sqrt{\sin^2 \nu \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \nu} \right]. \end{aligned}$$

Nun ist aber der Wurzelausdruck in den eckigen Klammern:

$$\sqrt{\sin^2 \nu \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \nu} = \cos \varphi \cdot \sin \psi;$$

und weil

$$\cos^2 \nu = \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi \text{ ist,}$$

so wird

$$\operatorname{ctg} \nu \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\cos^2 \nu \cdot \sin^2 \varphi}{\sin^2 \nu \cdot \cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \psi \cdot \sin^2 \varphi}{\sin^2 \nu}$$

und der Klammerwert:

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg}^2 \nu \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{\sin \psi}{\cos \varphi \sin^2 \nu} \sqrt{\sin^2 \nu \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \cos^2 \nu} = \\ & = \frac{\cos^2 \psi \cdot \sin^2 \varphi}{\sin^2 \nu} + \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \nu} = \frac{\cos^2 \psi \sin^2 \varphi + \sin^2 \psi}{\sin^2 \nu} = \\ & = \frac{\cos^2 \psi \sin^2 \varphi + 1 - \cos^2 \psi}{\sin^2 \nu} = \frac{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \varphi}{\sin^2 \nu} = \frac{\sin^2 \nu}{\sin^2 \nu} = 1. \end{aligned}$$

Wir haben also für  $s_{\max}$  als gute Annäherung die folgende einfache Formel gewonnen:

$$s_{\max} \sim \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - x_1.$$

Hier sind, wie bereits erwähnt,  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die Halbmesser des oberen bzw. des unteren Grenzkreises der in den Ring durch Abwicklung eingeschliffenen Lauf­fläche und  $x_1$  ist der Halbmesser des Kreises in der Halbierungsebene des Ringes.

Wir können mit Hilfe dieser Formel beweisen, daß mit abnehmendem Schleifsteinhalbmesser  $r$  auch der Wert der Pfeilhöhe  $\delta$  abnehmen muß, falls der Winkel  $\psi$  unverändert bleibt.

Betrachten wir die Ebenen der Grenzkreise mit den Halbmessern  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  und stellen wir fest, daß jede dieser Ebenen eine Ellipse als Schnittkurve mit dem Schleifzylindermantel enthält, wobei der Halbmesser des Schleif­zylinders mit  $r$ , und der Kippwinkel der Schleifzylinderachse mit  $\psi$  bezeichnet sind. Es ist klar, daß bei der abwickelnden Schleifbearbeitung der Lauffläche der Grenzkreis durch den Punkt der Ellipse beschrieben wird, der von der Ringachse am weitesten entfernt ist, wenn wir nämlich die relative Bewegung des Schleifkörpers vor Augen halten, also den Ring als unbeweglich und den Schleifzylinder als einen sich um die Ringachse drehenden Körper vorstellen.

Wenn nun der Halbmesser  $r$  des Schleifzylinders abnimmt, so entsteht in der Ebene des Grenzkreises eine Ellipse als Schnittkurve, die im Inneren der vorigen Ellipse liegt und demgemäß kleiner als jene ist. Der von der Ring­achse am weitesten entfernt liegende Punkt der kleineren Ellipse liegt zur Ringachse näher als der entsprechende Punkt der größeren Ellipse. Daher ist es klar, daß jeder durch den schmälere Schleifzylinder erzeugte Grenzkreis einen kleineren Durchmesser als jener Grenzkreis hat, der durch den größeren Schleifzylinder erzeugt wurde. Im Sinne der Annäherungsformel wird auch der Wert von  $s_{\max}$  kleiner.

Es soll noch hier bemerkt werden, daß man bei Unterlassung des Rechenverfahrens, nur mit Hilfe von Einstellungsproben weder die gewünschte Wölbung erzielen, noch die symmetrische Lage des Gipfelpunktes sichern kann, und dies sogar bei Beibehaltung der vorgeschriebenen Werte von  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  (Fig. 5). Offenbar wird durch einem derartigen Herstellungsverfahren die Qualität nicht gefördert.

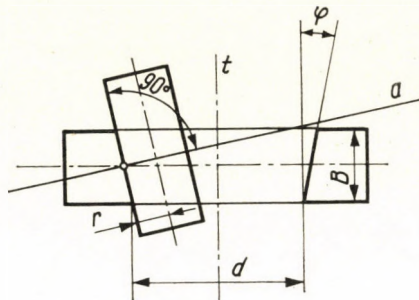


Fig. 6

#### 6. Anwendung der Theorie auf einen gegebenen Lagerring

Als Ausgangspunkt wählen wir die Lauffläche eines vorbearbeiteten stumpfen Kegels (Fig. 6) mit folgenden Daten:

$$\varphi = 15^\circ; d = 70 \text{ mm}; B = 16 \text{ mm}$$

Aus diesen Daten erhalten wir den Wert  $x_1$ , d. h. den Halbmesser des Kreises in der Halbierungsebene des Ringes:

$$x_1 = \frac{d}{2} + \frac{B}{2} \operatorname{tg} \varphi$$

Mit Hilfe der Werte:

$$\cos \varphi = 0,9659258$$

$$\sin \varphi = 0,2588190$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,2679492$$

erhalten wir:

$$\frac{B}{2} \operatorname{tg} \varphi = 2,14359$$

und

$$x_1 = 37,14359.$$

Der Halbmesser  $r$  des Schleifzylinders soll als  $0,8 \frac{d}{2} = 28 \text{ mm}$  angenommen werden. Als Winkel  $\psi$  wählen wir:

$$\psi = 4^\circ 45'$$

$$\cos \psi = 0,9965655$$

$$\sin \psi = 0,0828082$$

nach (5) ist

$$\cos \nu = 0,9626083$$

und hieraus gewinnt man die Werte:

$$\begin{aligned} \sin \nu &= 0,2708990 \\ \operatorname{ctg} \nu &= 3,5533832 \\ \cos^2 \nu &= 0,9266147 \\ \sin^2 \nu &= 0,0733862 \\ \operatorname{ctg}^2 \nu &= 12,6265322 \end{aligned}$$

Ferner wird:

$$\frac{\cos^2 \nu}{\sin \nu} = \operatorname{ctg} \nu \cos \nu = 3,4205162$$

und der Bruch in Formel (9):

$$\frac{\cos \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \nu} = 0,2952635$$

Nach der Formel  $x_2 = \frac{x_1}{\cos \varphi} - r$  ist:

$$x_2 = \frac{37,14359}{0,9659258} - 28 = 38,45388 - 28 = 10,45388.$$

Ferner ergibt sich:

$$x_1 \operatorname{ctg}^2 \nu \cdot \operatorname{tg} \varphi = 125,66676$$

und:

$$r \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \nu} = 28 \cdot 3,5268075 = 98,75061$$

daher nach Formel (7'):

$$|\bar{z}| = 26,91615$$

und nach Formel (9''):

$$z_1 = 18,916$$

$$z_2 = 34,916$$

Diese Hilfswerte dienen zur Berechnung der Halbmesserwerte der generierten Grenzkreise. Hierzu verwenden wir die zwei Gleichungen nach (9').

Zuerst muß man den Wert des Parameters  $\alpha$  nach der zweiten Gleichung von (9') errechnen, für den  $z = z_1$  gilt; mit diesem  $\alpha$ -Wert erhalten wir nach der ersten Gleichung von (9') den Halbmesser des unteren Grenzkreises in der durch den Schleiﬂzyylinder erzeugten Laufﬂäche. Aus den vorigen Hilfswerten ergeben sich:

$$\frac{\cos \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \nu} = 0,2952635$$

$$x_2 = 10,45388$$

und

$$\frac{\cos^2 \nu}{\sin \nu} = 3,4205162;$$

deshalb ist:

$$x_2 \frac{\cos \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \nu} \cdot \frac{\cos^2 \nu}{\sin \nu} = 10,55793$$

Da nun

$$r \sin \nu = 7,58517 \text{ ist,}$$

so wird mit dem Wert

$$z = z_1 = 18,916$$

die zweite Gleichung von (9'):

$$10,55793 \operatorname{tg} \alpha - 7,58517 \sin \alpha = 18,916.$$

Praktisch erhalten wir den gesuchten  $\alpha$ -Wert mit dem Iterationsverfahren. Als Ausgangswert nehmen wir für  $\alpha$  einen Winkel an, für den  $\sin \alpha = 0,92$  ist. Mit diesem Wert ergibt sich nach obiger Gleichung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{18,916 + 6,97836}{10,55793} = 2,45260.$$

Die trigonometrischen Tafeln liefern uns zu diesem Tangentenwert (annäherungsweise) den Winkelwert:

$$\alpha = 67^\circ 49'$$

und weiters:

$$\operatorname{tg} \alpha = 2,45246$$

$$\sin \alpha = 0,92598$$

$$\cos \alpha = 0,37757$$

Bezeichnen wir nun die linke Seite unserer Gleichung mit  $f(\alpha)$ , d. h.

$$f(\alpha) \equiv 10,55793 \operatorname{tg} \alpha - 7,58517 \sin \alpha;$$

so lautet die Gleichung für  $\alpha$  in der auf 0 reduzierten Form:

$$f(\alpha) - 18,916 = 0.$$

Für den Wert  $\alpha_0 = 67^\circ 49'$  gilt für  $f(\alpha_0)$ :

$$f(\alpha_0) = 18,86918,$$

und daher ist

$$f(\alpha_0) - 18,916 = -0,04682,$$

d. h. der angenommene Ausgangswert von  $\alpha_0 = 67^\circ 49'$  liefert uns nicht die gewünschte Genauigkeit. Wir wollen die Newtonsche Näherungsformel anwenden; derzufolge erhalten wir:

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0) - 18,916}{f'(\alpha_0)},$$

wobei  $f'(\alpha)$  den Differentialquotienten der Funktion  $f(\alpha)$  nach  $\alpha$  bezeichnet, d. h.

$$f'(\alpha) = \frac{10,55793}{\cos^2 \alpha} - 7,58517 \cos \alpha.$$

Selbstverständlich ist der Wert von  $\alpha$  in Radian einzusetzen: als Tabellenwert erhalten wir hierfür:

$$\alpha_0 = 1,18362412$$

Da:

$$f'(\alpha_0) = \frac{10,55793}{0,14256} - 2,86393 = 74,05955 - 2,86393 = 71,19562$$

ist, erhalten wir nach der Newtonschen Formel den Annäherungswert:

$$\alpha = 1,18362412 + \frac{0,04682}{71,19562} = 1,18362412 + 0,00065762 = 1,18428174.$$

Dieser Radianwert entspricht einem Wert in Grad:  $67^\circ 51' 16''$  und die Tabellenwerte sind:

$$\operatorname{tg} \alpha = 2,4570967$$

$$\sin \alpha = 0,9262292$$

$$\cos \alpha = 0,3769609$$

Mit diesem  $\alpha$  ergibt sich:

$$f(\alpha) = 25,94185 - 7,02561 = 18,9162.$$

Der Zahlenwert bis zu einer Genauigkeit von Tausendsteln:

$$f(\alpha) = 18,916$$

kann also als hinreichend genau erachtet werden. Der Halbmesser des unteren Grenzkreises  $\varrho_1$  ergibt sich nach Formel (9'). Aus den Werten:

$$x_2 \frac{\cos \varphi \cdot \sin \tau}{\sin \nu} = 10,45388 \cdot 0,2952635 = 3,0866492,$$

$$r \cdot \cos \alpha = 10,5549052$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \nu} = \sqrt{6,5942737} = 2,5679318$$

erhalten wir:

$$\varrho_1 = (3,0866492 + 10,5549052) \cdot 2,5679318 = 13,6415544 \cdot 2,5679318 = 35,0306.$$

Mit anderen Worten, an der unteren Stirnfläche des Ringes entsteht ein abgewickelter Grenzkreis mit dem Halbmesser:

$$\varrho_1 = 35,0306.$$

Um den Halbmesser des oberen Grenzkreises zu erhalten, setzen wir auf der rechten Seite der Gleichung (9<sub>2</sub>) den Zahlenwert:  $z_2 = 34,916$  und so erhalten wir

$$f(\alpha) = 10,55793 \operatorname{tg} \alpha - 7,58517 \sin \alpha = 34,916.$$

Als erste Annahme wählen wir den Wert:

$$\sin \alpha = 0,97,$$

und damit ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{34,916 + 7,35761}{10,55793} = 4,00397.$$

Für die Annahme:

$$\alpha_0 = 75^\circ 58' 40''$$

finden wir:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = 4,00416$$

$$\sin \alpha_0 = 0,97020$$

$$\cos \alpha_0 = 0,24230$$

$$\cos^2 \alpha_0 = 0,05871,$$

und daher ist für den gewählten  $\alpha_0$ :

$$f(\alpha_0) = 42,27564 - 7,35913 = 34,91651,$$

d. h.

$$f(\alpha_0) - 34,916 = 0,00051.$$

Dieser  $\alpha$  Wert entspricht beinahe der gewünschten Genauigkeit. Nun soll zur Erhöhung der Genauigkeit der Ausgangswert etwas niedriger angesetzt werden:

$$\alpha_0 = 75^\circ 58' 39''$$

Dann ist

$$\operatorname{tg} \alpha = 4,0040817$$

$$\sin \alpha = 0,9702006$$

$$\cos \alpha = 0,2423029$$

und so erhalten wir für

$$f(\alpha) = 42,27481 - 7,35914 = 34,9156 \dots \sim 34,916,$$

welcher Wert bereits als hinreichend genau betrachtet werden kann.

Den Halbmesser  $\varrho_2$  errechnen wir aus folgenden Werten:

$$r \cdot \cos \alpha = 6,784\,4812$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \nu} = \sqrt{15,8561086} = 3,9819729.$$

und dann wird

$$\varrho_2 = (3,0866492 + 6,784412) \cdot 3,9819729 = 9,8711304 \cdot 3,981972 = 39,3066.$$

Also ergibt sich

$$\varrho_2 = 39,3066.$$

Nun sind wir in der Lage, den Wert der Pfeilhöhe als Maß der Wölbung zu errechnen; hiezu bestimmen wir die Abweichung  $s_{\max}$  nach der Formel (9).

Da:

$$\begin{aligned} \varrho_1, z_2 &= 1223,12843 \\ -z_1 \varrho_2 &= -743,52365 \\ \varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2 &= 479,60478 \end{aligned}$$

ist, so folgt:

$$\frac{\varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2}{z_2 - z_1} = \frac{479,60478}{16} = 29,97530$$

und weiters

$$m = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{z_2 - z_1} = \frac{4,2760}{16} = 0,26725,$$

daher

$$\sqrt{1 + m^2} = \sqrt{1,0714226} = 1,0350954,$$

und

$$r \sqrt{1 + m^2} = 28,98267.$$

In der Formel für  $s_{\max}$  ist der Wurzel Ausdruck:

$$\sqrt{1 - m^2 \operatorname{ctg}^2 \nu} = \sqrt{1 - 0,9018193} = \sqrt{0,0981807} = 0,31333799.$$

Multiplizieren wir den Wurzel Ausdruck mit dem Faktor:

$$x_2 \frac{\cos \varphi \cdot \sin \psi}{\sin \nu} = 3,0866492,$$

so ist das Produkt:

$$x_2 \frac{\cos \varphi \sin \psi}{\sin \nu} \cdot \sqrt{1 - m^2 \operatorname{ctg}^2 \nu} = 0,96716,$$

und für  $s_{\max}$  ergibt sich

$$s_{\max} = -0,96716 - 28,98267 + 29,97530 = 29,97530 - 29,94983 = 0,02547$$

Schießlich ergibt das Maß der Wölbung aus:

$$\delta = 0,02547 \cos \varphi = 0,0246 \dots$$

Als Endergebnis haben wir für  $\psi = 4^\circ 45'$  und  $r = 28$  eine Wölbungspfeilhöhe:  $\delta = 0,025$  mm.

Wir wollen an Hand dieses Beispiels noch den Fall errechnen, wie weit eine Abnahme der Pfeilhöhe eintritt, falls wir — bei unverändertem Winkel  $\psi$  — mit einem etwas abgenutzten Stein, also mit einem Zylinder arbeiten, dessen Halbmesser kleiner geworden ist.

Die Abnutzung des Schleifsteines soll einen Halbmesser von  $r = 16$  mm ergeben. Alle Werte, die in der vorhin abgeleiteten Berechnung als unabhängig von dem Wert  $r$  errechnet worden sind, können wir ohne weiteres verwenden. Errechnen wir nun die von  $r$  abhängigen Werte  $x_2$  und  $\bar{z}$ .

Wir haben:

$$\frac{x_1}{\cos \varphi} = 38,45388$$

und mit  $r = 16$ :

$$x_2 = \frac{x_1}{\cos \varphi} - r = 22,45388.$$



Unverändert haben wir

$$x_1 \operatorname{ctg}^2 \nu \operatorname{tg} \varphi = 125,66675$$

und

$$\frac{\sin \varphi}{\sin^2 \nu} = 3,5268075,$$

daher aus (7')

$$|\bar{z}| = 125,66675 - 16 \cdot 3,5268075 = 125,66675 - 56,42892 = 69,23784,$$

und auf Grund (9'')

$$z_1 = 61,238$$

$$z_2 = 77,238.$$

Ferner haben wir noch

$$r \sin \nu = 4,33438,$$

und die Gleichung (9') zur Lösung von  $\varrho_1$  lautet mit dem Wert  $z_1 = 61,238$  wie folgt:

$$22,45388 \cdot 0,2951635 \cdot 3,4205162 \operatorname{tg} \alpha - 4,33438 \sin \alpha = 22,67738 \operatorname{tg} \alpha - 4,33438 \sin \alpha = 61,238.$$

Für  $\sin \alpha$  sei die erste Annahme:  $\sin \alpha = 0,94$ ; hiemit ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{61,238 + 4 \cdot 0,7432}{22,67738} = 2,88006.$$

Nehmen wir  $\alpha_0 = 75^\circ 51' 10''$  an, so sind:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = 2,88015$$

$$\sin \alpha_0 = 0,94468$$

$$\cos \alpha_0 = 0,32800$$

$$\cos^2 \alpha_0 = 0,10758$$

und wir erhalten:

$$f(\alpha_0) = 65,31426 - 4,09460 = 61,21966,$$

d. h.

$$f(\alpha_0) - 61,238 = -0,01834.$$

Da nun

$$f'(\alpha_0) = \frac{22,67738}{0,10758} - 4,33438 \cdot 0,32800 = 210,795 - 1,422 = 209,373$$

ist, und der Winkel  $\alpha_0 = 70^\circ 51' 10''$  in Radian:  $\alpha_0 = 1,23661426$  ist, so gewinnen wir mit der Newtonschen Formel den Näherungswert:

$$\alpha = 1,23661426 + \frac{0,01834}{209,373} = 1,23661426 + 0,00008759 = 1,23670185.$$

Im Gradmaß ausgedrückt ist  $\alpha = 70^\circ 51' 28''$ ,  
und hierzu

$$\operatorname{tg} \alpha = 2,8809598$$

$$\sin \alpha = 0,9447075$$

$$\cos \alpha = 0,3279142$$

Mit diesen Werten ergibt sich:

$$f(\alpha) = 65,33262 - 4,09472 = 61,23790 = 61,238,$$

d. h. der Wert von  $\alpha$  kann als hinreichend genau erachtet werden. Nun läßt sich der Wert von  $\varrho_1$  errechnen. Da

$$r \cdot \cos \alpha = 5,246627,$$

und die übrigen Werte sind:

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 v} = \sqrt{8,6908368} = 2,9480225;$$

$$\frac{x_2 \cos \varphi \sin \psi}{\sin v} = 22,45388 \cdot 0,2952635 = 6,62981;$$

so erhalten wir:

$$\varrho_1 = (6,62981 + 5,24663) \cdot 2,94802 = 11,87644 \cdot 2,94802 = 35,0120.$$

Der in der unteren Stirnfläche durch Schleifen erzeugte Grenzkreis hat also den Halbmesser:

$$\varrho_1 = 35,0120.$$

Zur Bestimmung des Halbmessers  $\varrho_2$  muß man, da

$$z_2 = 77,238$$

ist, erst die folgende Gleichung lösen:

$$22,67738 \operatorname{tg} \alpha - 4,33438 \sin \alpha = 77,238.$$

Der genaue Winkelwert ist:  $\alpha = 74^\circ 26' 6''$  und hiezu:

$$\operatorname{tg} \alpha = 3,5900630$$

$$\sin \alpha = 0,9633267$$

$$\cos \alpha = 0,2683314;$$

mit diesen Zahlenwerten ergibt sich:

$$f(\alpha) = 81,41322 - 4,17542 = 77,2378 = 77,238$$

als hinreichend genauer Wert. Da nun

$$r \cos \alpha = 4,2933024$$

und

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 v} = \sqrt{12,9427223} = 3,597599$$

sind, so erhalten wir für

$$\varrho_2 = (6,62981 + 4,29330) \cdot 3,597599 = 10,92311 \cdot 3,597599 = 39,2970.$$

Wir können jetzt nach (9) die maximale Abweichung  $s_{\max}$  errechnen:

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varrho_1 z_2 &= 2704,25686 \\ - z_1 \varrho_2 &= -2406,46969 \\ \hline &297,78717, \end{aligned}$$

daher ist

$$\frac{\varrho_1 z_2 - z_1 \varrho_2}{z_2 - z_1} = \frac{297,78717}{16} = 18,61169.$$

Ferner ist

$$m = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{z_2 - z_1} = \frac{4,2850}{16} = 0,26781,$$

und daher

$$\sqrt{1 + m^2} = \sqrt{1,071722} = 1,035240,$$

also gilt

$$r \sqrt{1 + m^2} = 16,56384.$$

Der Wurzel Ausdruck in der Formel für  $s_{\max}$  wird:

$$\sqrt{1 - m^2 \operatorname{ctg}^2 v} = \sqrt{1 - 0,9056027} = \sqrt{0,0943973} = 0,3072414.$$

Multipliziert man den Wurzelwert mit dem Wert:

$$x_2 \frac{\cos \varphi \sin \psi}{\sin \nu} = 6,62981,$$

so wird:

$$x_2 \frac{\cos \varphi \sin \psi}{\sin \nu} \sqrt{1 - m^2 \operatorname{ctg}^2 \nu} = 6,62981 \cdot 0,3072414 = 2,03695.$$

Es folgt mit Hilfe der vorigen Werte:

$$s_{\max} = -2,03695 - 16,56384 + 18,61169 = 18,61169 - 18,60079 = 0,0109.$$

Schließlich erhalten wir die Pfeilhöhe:

$$\delta = s_{\max} \cdot \cos \varphi = 0,0109 \cdot 0,9659 = 0,0105 = 0,011 \text{ mm.}$$

Es ist also das Minderungsverhältnis des Schleifzylinderdurchmessers  $28:16 = 1,75$ , dagegen ist das Verhältnis der Abnahme der Pfeilhöhe der Wölbung:  $25 : 11 = 2,27$ .

#### SCHRIFTTUM

1. LUNDBERG: Elastische Berührung zweier Halbräume. *Forschung*, Bd. 10. 1939. Nr. 5.
2. LIPKA, I.: Bemerkungen zur Arbeit von I. Drahos jun., L. Hornyik und M. Hosszu: „Mathematische Lösung eines Problems der Werkzeuggeometrie.“ *Mitteilungen des mathem. Forsch. Instituts der Ung. Akad. der Wissenschaften*. Jahrg. III. Heft: 3—4, 1958 (ungarisch).

#### ZUSAMMENFASSUNG

Neuerdings wird die Lauffläche im Außerring eines Kegellagers als eine ballige Kegel­fläche ausgebildet. Hiedurch wird die Lebensdauer des Lagers erhöht, indem man eine prak­­tisch gleichmäßige Belastung entlang der Erzeugenden einer Rolle erzielt. Ein entsprechend eingestellter Schleifzylinder erzeugt eine dem einschaligen Hyperboloid ähnliche Umdrehungs­fläche als Hüllfläche einer Hyperboloidenschar. In der Abhandlung wird die durch das Schleifen abgewickelte Umdrehungsfläche analytisch behandelt und hierfür ein Gleichungssystem mit zwei Parametern abgeleitet. Der Axialschnitt dieser Fläche liefert die Profilkurve der Lauf­fläche. Mit Hilfe dieser Profilkurve kann das Maß der Balligkeit berechnet werden. Diese Wölbung hängt von folgenden fünf Parametern ab: Einstellwinkel des Schleifzylinders, Durch­messer des Grenzkreises der stumpfkegelförmigen Ausgangsfläche, der Öffnungswinkel dieses Kegels, die Dicke des Ringes, Durchmesser des Schleifzylinders. Es wird der Beweis geführt, daß eine Abnahme des Schleifzylinderdurchmessers — bei unverändertem Stellwinkel — auch die Abnahme der Pfeilhöhe der Wölbung zur Folge hat. Abschließend wird ein Beispiel der numerischen Berechnung angeführt.

#### THE GEOMETRICS OF CONVEX RACEWAYS OF ROLLER BEARINGS

I. LIPKA

#### SUMMARY

Nowadays, the tapered roller bearings are built with a bombed raceway on the outer ring, in order to reach a longer life, ensured by a more equal distribution of load along the length of a roller. This bombed conical surface is an envelope-surface of a set of unparted hyperboloids generated by a cylindrical grinding tool that was adjusted in a geometrically skew position to the ring axis. The paper deals with the resulting surface by deducing a system of equalities with two parameters. The profile curve given as the axial section of the enveloping surface represents the measure of convexity of the raceway. This measure is a function of the following five parameters: the position angle of the grinding cylinder, the

diameter of the grinding cylinder, the diameter of the base circle of the initial conical surface, the apex angle of this conical surface, the height of the ring. It was proved that the functional interdependence according to which the decrease of this diameter involves the decrease of the height of bombing, when the angle of position remains the same only. Finally, an example of computing is given.

## GÉOMÉTRIE DU BOMBAGE DE LA SURFACE DE ROULEMENT DES BAGUES DE ROULEMENTS A GALETS

I. LIPKA

### RÉSUMÉ

La surface de roulement des bagues extérieures des roulements à galets coniques est, depuis un certain temps, légèrement bombée. On augmente ainsi considérablement la durée de vie du roulement, grâce à une distribution plus équilibrée le long de la génératrice des galets. La surface finale de la bague est l'enveloppe d'une famille d'hyperboloïdes de révolution à une nappe, engendrés par les génératrices d'une meule cylindrique ajustée à un certain angle, en biais par rapport à l'axe de la bague. Un système d'équations à deux paramètres a été déduit pour définir cette enveloppe. Donné, comme une courbe, dans la section axiale de la bague, le profil de l'enveloppe sert à mesurer la convexité. Cette mesure dépend de cinq paramètres, qui sont: l'angle de position de l'axe de la meule cylindrique, le diamètre de base de la surface de roulement primitive en cône tronqué, son angle d'ouverture et sa hauteur (épaisseur de la bague). On peut démontrer qu'avec la diminution du diamètre de la meule cylindrique, la valeur de la convexité de la surface résultante diminue à son tour.

Un exemple numérique donné en fin de l'étude illustre le mode d'application de la théorie.

## ГЕОМЕТРИЯ БЕГОВОЙ ДОРОЖКИ ПОДШИПНИКОВЫХ КОЛЕЦ

И. ЛИПКА

### РЕЗЮМЕ

В последнее время беговая дорожка в виде усеченного конуса внешнего кольца конусных роликоподшипников шлифуется несколько выпуклой. Цель этого заключается в том, чтобы распределение нагрузки вдоль образующей роликов было равномерным, это значительно повышает срок службы подшипников. Цилиндрический шлифовальный круг, настроенный в соответствующем положении, в беговой дорожке кольца подшипника изготовляет поверхность, которая похожа на гиперboloид вращения с одной рубашкой. Эта изготовленная шлифовальным кругом поверхность представляет собою огибающую поверхность семейства гиперboloидов вращения с одной рубашкой. В работе детально рассматривается поверхность вращения, изготовленная шлифовальным кругом, и выводится для этой поверхности система уравнений с двумя параметрами. Сечение оси этой поверхности дает кривую профиля беговой дорожки подшипникового кольца. При помощи профильной кривой можно определить степень выпуклости беговой дорожки. Степень выпуклости беговой дорожки зависит от пяти параметров, а именно: угла установки шлифовального круга, диаметра основного круга исходной беговой поверхности в виде усеченного конуса, далее от его высоты (толщины кольца) и угла раскрытия и, наконец, от диаметра шлифовального круга. Можно доказать, что в случае уменьшения диаметра шлифовального круга уменьшается также степень выпуклости.

В завершение метод применения теории демонстрируется детально разработанным числовым примером.

# ALLGEMEINE THEORIE DER GEKRÜMMTEN SCHALEN

E. BÖLCSKEI

TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR BAUINDUSTRIE UND VERKEHR BUDAPEST,  
LEHRSTUHL FÜR BRÜCKENBAU

[Eingegangen am 12. Oktober 1959]

## 1. Ziel der Abhandlung

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist, die auf das räumliche Achsenkreuz bezogenen allgemeinen Gleichgewichts- und Formänderungsgleichungen der Schalen (gekrümmten Platten) herzuleiten. Es wird eine beliebige Belastung, allgemeine Mittelflächenform und konstante Stärke vorausgesetzt.

## 2. Berechnungsgrundlagen

Bei unseren Berechnungen setzen wir folgendes voraus:

- a) Eine geringe Plattenstärke im Vergleich zu den anderen beiden Abmessungen.
- b) Der auf der Normalen der Mittelfläche befindliche Punkt fällt nach der Formänderung in die Normale der deformierten Mittelfläche.
- c) Im Verhältnis zur Plattenstärke eine geringe Formänderung.
- d) Homogener und isotroper Stoff, der das Hookesche Gesetz verfolgt, d. h. es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Dehnungen und Spannungen.
- e) Die zur Mittelfläche senkrechten Spannungen sind gering und werden vernachlässigt.

## 3. Geometrische Charakteristiken der Mittelfläche

Die Gleichung der Mittelfläche der unbelasteten gekrümmten Schale sei

$$z = f(x, y).$$

Bezeichnen wir, wie üblich, die ersten Differentialquotienten mit

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

die zweiten Differentialquotienten mit

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Der Ortsvektor eines Punktes  $A$  der Mittelfläche (Bild 1) und der absolute Wert dieses Vektors seien

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

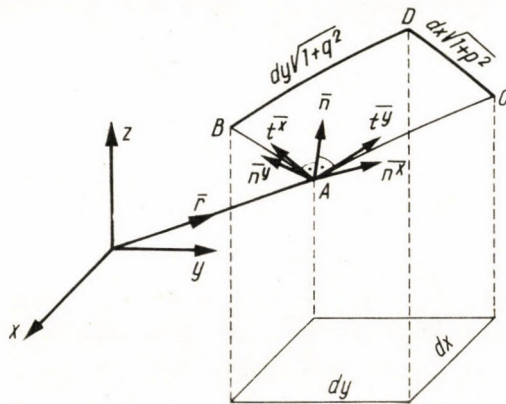


Bild 1

$\vec{t}^x$  bzw.  $\vec{t}^y$  sind die Tangentenvektoren der den Ebenen  $zx$  bzw.  $zy$  parallelen Schnittkurven der Mittelfläche. Ihre Projektionen und absolute Werte sind

$$\vec{t}^x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \quad \vec{t}^y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{bmatrix}$$

$$|\vec{t}^x| = \sqrt{1 + p^2} \quad |\vec{t}^y| = \sqrt{1 + q^2} \quad (1)$$

Der Normalenvektor der Oberfläche ergibt sich als ein Vektorprodukt der Vektoren  $\vec{t}^x$  und  $\vec{t}^y$ . Die Projektionen und der absolute Wert des Normalenvektors sind daher

$$\vec{n} = \vec{t}^x \cdot \vec{t}^y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1 + p^2 + q^2} = T. \quad (2)$$

In unserem weiteren Berechnungen werden wir den zu den Vektoren  $\bar{t}^x$  und  $\bar{n}$  senkrechten Vektor  $\bar{n}^x$  und den zu den Vektoren  $\bar{t}^y$  und  $\bar{n}$  senkrechten Vektor  $\bar{n}^y$  brauchen. Diese Vektoren und ihre absoluten Werte lassen sich in der Form

$$\bar{n}^x = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -p & -q & 1 \\ 1 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -pq \\ 1 + p^2 \\ q \end{vmatrix} \quad \bar{n}^y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & q \\ -p & -q & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + q^2 \\ -pq \\ p \end{vmatrix}$$

$$|\bar{n}^x| = T \sqrt{1 + p^2} \quad |\bar{n}^y| = T \sqrt{1 + q^2} \quad (3)$$

anschreiben. Das sich über dem rechteckigen Element  $dx dy$  der Ebene befindliche Element der Mittelfläche ist ein Flächenelement allgemeiner Form. Dieses Flächenelement kann als ein in der Tangentialebene der Mittelfläche befindliches Parallelogramm mit den Seitenlängen  $dx \sqrt{1 + p^2}$  bzw.  $dy \sqrt{1 + q^2}$  betrachtet werden. Seine zu den Koordinatenebenen  $|xz|$  bzw.  $|yz|$  parallelen Seiten schließen den Winkel  $a$  ein. Für diesen Winkel lassen sich die Beziehungen

$$\cos a = \frac{pq}{\sqrt{1 + p^2} \sqrt{1 + q^2}}; \quad \sin a = \frac{T}{\sqrt{1 + p^2} \sqrt{1 + q^2}} \quad (4)$$

anschreiben. Die Schale hat die Dicke  $v$ , in Richtung der Flächennormalen gemessen. Das Schalenelement, das zu dem soeben beschriebenen Flächenelement gehört, ist nicht prismatisch, sondern stellt infolge der Zweirichtungsverkrümmung ein »schartenförmiges« Element mit Ausbreitung in Richtung der konvexen Seite dar. Der in Richtung der Schalenstärke parallel der Tangentialebene genommene Querschnitt wird ebenfalls eine Parallelogrammenform aufweisen, wo der durch die Seiten eingeschlossene Winkel dem entsprechenden Winkel der Mittelfläche gleich, die Seitenlänge aber ungleich ist. Die Seitenlänge des über der Mittelfläche in Höhe  $v$  befindlichen Flächenelements ist nämlich durch die Formeln

$$ds^{xv} = \sqrt{1 + p^2} \frac{R^x + v}{R^x}$$

$$ds^{yv} = \sqrt{1 + q^2} \frac{R^y + v}{R^y} \quad (5)$$

darstellbar, wo  $R^x$  bzw.  $R^y$  Krümmungshalbmesser einer durch die Tangentenvektoren  $\bar{t}^x$  bzw.  $\bar{t}^y$  der Mittelfläche und durch den Normalvektor  $\bar{n}$  — d. i. in beiden Fällen eine Normalebene — bestimmten Ebene sind. Die Krümmung der Normalquerschnitte ist im allgemeinen durch die Formeln

$$\frac{1}{R} = \frac{ra^2 + 2sab + b^2}{T}$$

zu bestimmen, wo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  Richtungskosinus der Tangente des Normalquerschnittes bedeuten. Die Krümmung des im  $t^x$  bzw.  $t^y$  liegenden Normalquerschnitts ist daher

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R^x} &= \frac{r}{(1+p^2)T} \\ -\frac{1}{R^y} &= \frac{t}{(1+q^2)T} \end{aligned} \quad (6)$$

### Gleichgewichtsgleichungen

Fassen wir das Gleichgewicht des aus der Mittelfläche  $z = f(x, y)$  herausgeschnittenen Elementes mit einem Grundriß  $dx \, dy$  ins Auge. Seien die auf

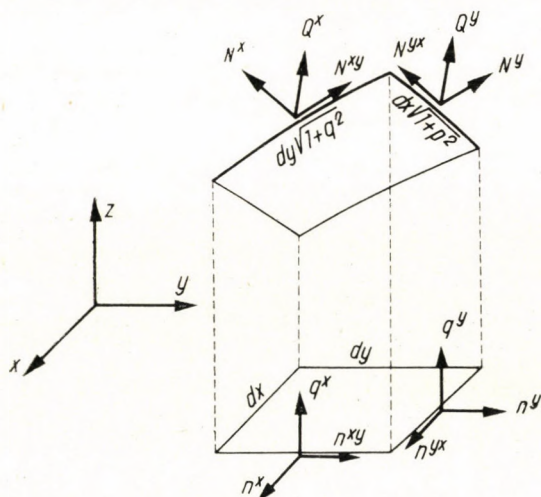


Bild 2

die Schalenoberfläche wirkenden und in der Tangentialebene der Oberfläche liegenden, den Ebenen  $xz$  bzw.  $yz$  parallelen wirklichen Spannkraften mit  $N^x$  bzw.  $N^y$  bezeichnet. Die spezifischen Werte der in der Tangentialebene auftretenden Querkräfte gleicher Richtung seien durch  $N^{xy}$  bzw.  $N^{yx}$  ausgedrückt. Weiters benötigen wir noch die der Oberflächennormalen  $n$  parallelen Querkräfte  $Q^x$  bzw.  $Q^y$  (Bild 2). Die wirklichen Biegemomente (Bild 3) werden auf analoge Weise erklärt und bezeichnet. Seien  $M^x$  und  $M^y$  wirkliche Momente, welche die Biegung in der Richtung  $x$  bzw.  $y$  hervorrufen, deren Vektoren senkrecht zu der entsprechenden Biegungsebene stehen.  $M^{xy}$  bzw.  $M^{yx}$  sind die analoge Weise erklärten Torsionsmomente.



Das Gleichgewicht der auf das jetzt beschriebene Schalelement wirkenden Kräfte wird durch drei Projektions- und drei Momentengleichungen ausgedrückt. Um das Schreiben zu erleichtern haben wir die auf das Schalelement wirkenden Kräfte in der Tabelle I, die Momente in der Tabelle II zusammengestellt, wobei Größen der Kräfte bzw. Momente, sowie die Projektionen der Richtungsvektoren angegeben sind.

Tabelle I

Die Größe des Kraftvektors	Der Richtungskosinus		
	x	y	z
	des Einheitsvektors		
$N_x \sqrt{1+q^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$N_{xy} \sqrt{1+q^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$
$Q_x \sqrt{1+q^2}$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$
$N_y \sqrt{1+p^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$
$N_{yx} \sqrt{1+p^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$Q_y \sqrt{1+p^2}$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$

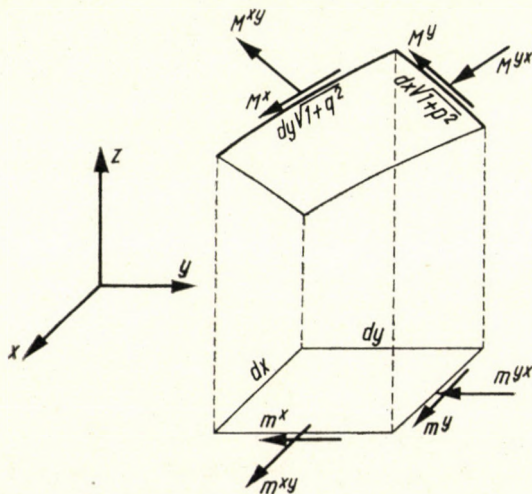


Bild 3

Tabelle II.

Die Größe des Momentenvektors	Der Richtungskosinus		
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
	des Einheitsvektors		
$-M^x \sqrt{1+q^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{p}{\sqrt{1+q^2}}$
$M^{xy} \sqrt{1+q^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$N^{xy} T$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$
$-Q^x \sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}$	$-\frac{pq}{T \sqrt{1+p^2}}$	$\frac{1+p^2}{T \sqrt{1+p^2}}$	$\frac{p}{T \sqrt{1+p^2}}$
$M^y \sqrt{1+p^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$	0	$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$
$-M^{yx} \sqrt{1+p^2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$	$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$
$-N^{yx} T$	$-\frac{p}{T}$	$-\frac{q}{T}$	$\frac{1}{T}$
$Q^y \sqrt{1+p^2} \sqrt{1+q^2}$	$\frac{1+q^2}{T \sqrt{1+q^2}}$	$-\frac{pq}{T \sqrt{1+q^2}}$	$\frac{p}{T \sqrt{1+q^2}}$

Es sei die in Richtung *x*, *y* bzw. *z* gemessene Intensität der auf die Koordinatenebenen bezogenen Belastung der Schalenfläche durch die Belastungsfunktionen

$$X_0(x, y), Y_0(x, y), Z_0(x, y)$$

charakterisiert.

Zwecks Vereinfachung unserer Berechnungen werden die Gleichgewichtsgleichungen nicht für die wirklichen Kräfte bzw. Momente, sondern für die sog. reduzierten Kräfte bzw. Momente aufgestellt. Die reduzierten Kräfte bzw. Momente bedeuten die in der waagerechten Ebene gemessene Intensität der Projektionen in Richtung *x*, *y*, *z* der wirklichen Kräfte bzw. Momente. Die reduzierten Kräfte bzw. Momente werden mit den entsprechenden kleinen Buchstaben und den gleichen Indexen bezeichnet.

Die reduzierten Kräfte werden auf Grund des Bildes 2 aus den wirklichen Kräften mit Hilfe der nachstehenden Formeln berechnet;

$$\begin{aligned} n^x &= N^x \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}} & n^y &= N^y \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}} \\ n^{xy} &= N^{xy} & n^{yx} &= N^{yx} \end{aligned}$$

$$q^x = Q^x \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad q^y = Q^y \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad (7)$$

Die reduzierten Momente können auf Grund des Bildes 3 mit Hilfe der nachstehenden Beziehungen aus den wirklichen Momenten berechnet werden.

$$\begin{aligned} m^x &= M^x & m^y &= M^y \\ m^{xy} &= M^{xy} \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}} & m^{yx} &= M^{yx} \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

Auf Grund der Tabellen I bzw. II können wir die Gleichgewichtsgleichungen der Kräfte bzw. Momente anschreiben. Zwecks der Abkürzung führen wir aber sofort die reduzierten Kräfte bzw. Momente ein.

$$\begin{aligned} n_x^x + n_y^{yx} - (pq^x)_x - (pq^y)_y + X_0 &= 0 \\ n_x^{xy} + n_y^y - (qq^x)_x - (qq^y)_y + Y_0 &= 0 \\ (pn^x)_x + (qn^y)_y + (qn^{xy})_x + (pn^{yx})_y + q_x^x + q_y^y + Z_0 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} m_x^{xy} + m_y^y - p(n^{xy} - n^{yx}) + pqq^x + (1+q^2)q^y &= 0 \\ m_x^x + m_y^{yx} - q(n^{xy} - n^{yx}) + (1+p^2)q^x + pqq^y &= 0 \\ -(qm^x)_x + (pm^{xy})_x + (pm^y)_y - (qm^{yx})_y + (n^{xy} - n^{yx}) - \\ - qq^x + pq^y &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Nach Durchführung der Operationen in den Gleichungen, sodann nach Abziehen des  $p$ -fachen der ersten und des  $q$ -fachen der zweiten Gleichung, ergeben sich folgende Beziehungen.

$$\begin{aligned} n_x^x + n_y^{yx} - (pq^x)_x - (pq^y)_y + X_0 &= 0 \\ n_x^{xy} + n_y^y - (qq^x)_x - (qq^y)_y + Y_0 &= 0 \\ rn^x + s(n^{xy} + n^{yx}) + tn^y T(Tq^x)_x + T(Tq^y)_y + \\ + Z_0 - pX_0 - qY_0 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} m_x^{xy} + m_y^y - p(n^{xy} - n^{yx}) + pqq^x + (1+q^2)q^y &= 0 \\ m_x^x + m_y^{yx} + q(n^{xy} - n^{yx}) + (1+p^2)q^x + pqq^y &= 0 \\ rm^{xy} - s(m^x - m^y) - tm^{yx} + T^2(n^{xy} - n^{yx}) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Werden die Werte  $q^x$  und  $q^y$  aus der ersten und zweiten Gleichung von (12) ausgedrückt und in die Gleichungen (11) bzw. in die dritte Gleichung von (12) eingesetzt, so erhalten wir folgende vier Beziehungen.

$$\begin{aligned}
& n_x^x + n_y^{yx} + \left[ \frac{p(1+q^2)}{T^2} (m_x^x + m_y^{yx}) - \frac{p^2 q}{T^2} (m_x^{xy} + m_y^y) + qp(n^{xy} - n^{yx}) \right]_x + \\
& + \left[ -\frac{p^2 q}{T^2} (m_x^x + m_y^{yx}) + \frac{p(1+p^2)}{T^2} (m_x^{xy} + m_y^y) - p^2(n^{xy} - n^{yx}) \right]_y + X_0 = 0 \\
& n_x^{xy} + n_y^y + \left[ \frac{q(1+q^2)}{T^2} (m_x^x + m_y^{yx}) - \frac{q^2 p}{T^2} (m_x^{xy} + m_y^y) + q^2(n^{xy} - n^{yx}) \right]_x + \\
& + \left[ -\frac{q^2 p}{T^2} (m_x^x + m_y^{yx}) + \frac{q(1+p^2)}{T^2} (m_x^{xy} + m_y^y) - pq(n^{xy} - n^{yx}) \right]_y + Y_0 = 0 \\
& rn^x + s(n^{xy} + n^{yx}) + tn^y + \\
& + T \left[ -\frac{1+q^2}{T} (m_x^x + m_y^{yx}) + \frac{pq}{T} (m_x^{xy} + m_y^y) - qT(n^{xy} - n^{yx}) \right]_x + \\
& + T \left[ \frac{pq}{T} (m_x^x + m_y^{yx}) - \frac{1+p^2}{T} (m_x^{xy} + m_y^y) + pT(n^{xy} - n^{yx}) \right]_y + \\
& + Z_0 - pX_0 - qY_0 = 0 \tag{13}
\end{aligned}$$

$$rm^{xy} - s(m^x - m^y) - tm^{yx} + T^2(n^{xy} - n^{yx}) = 0$$

In der Gleichung (13) finden wir nur noch die folgenden 8 Unbekannten:

$$n^x, n^y, n^{xy}, n^{yx}$$

$$m^x, m^y, m^{xy}, m^{yx}$$

### 5. Die Formänderung

Untersuchen wir die Bewegungen eines über der Mittelfläche der Schalenform  $z = f(x, y)$  in Höhe von  $v$  befindlichen Punktes. Die Bewegungen der Mittelfläche in den Richtungen  $x, y, z$  werden durch die Bewegungsfunktionen

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y); \quad \zeta = \zeta(x, y)$$

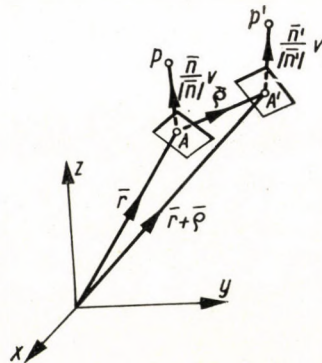


Bild. 4

charakterisiert. Nach Eintreten der Formänderung übergeht der über der Mittelfläche in der Höhe von  $v$  befindliche Punkt in die Stellung  $P'$  (Bild 4). Die Bewegung  $\overline{PP}' = \bar{e}^v$  setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Die erste Komponente ergibt sich aus der reinen Verschiebung, die durch die Bewegungsfunktionen  $\xi \eta \zeta$  charakterisiert werden kann. Die zweite Komponente stellt eine durch die Verdrehung des Mittelflächennormalvektors entstehende Bewegung dar, deren Komponenten mit den Funktionen  $\Xi, H, Z$  ausgedrückt werden können.

Der Ortsvektor des Punkts  $P$  ist

$$\bar{P} = \bar{r} + \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} v,$$

und der Ortsvektor des Punkts  $P'$  ist

$$\bar{P}' = \bar{r} + \bar{q} + \frac{\bar{n}'}{|\bar{n}'|} v,$$

wobei  $\bar{q}$  der Bewegungsvektor,  $\bar{n}$  der Normalvektor der ursprünglichen Fläche und  $\bar{n}'$  der Normalvektor der deformierten Fläche sind. Der Bewegungsvektor ist daher

$$\overline{PP}' = \bar{e}^v = \bar{q} + \left[ \frac{\bar{n}'}{|\bar{n}'|} - \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \right] v$$

Die in diesen Vektorgleichungen ausgedrückten Größen können auf Grund der Flächentheorie bestimmt werden.

Im deformierten Zustand ist der Normalvektor der Fläche

$$\bar{n}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 + \xi_x & \eta_x & p + \zeta_x \\ \xi_y & 1 + \eta_y & q + \zeta_y \end{vmatrix}$$

oder, was dasselbe ist

$$\bar{n}' = \begin{bmatrix} -p + (q\eta_x - p\eta_y - \zeta_x) \\ -q + (-q\xi_x + p\xi_y + \zeta_y) \\ +1 + (\xi_x + \eta_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Der absolute Wert dieses Vektors ist

$$|\bar{n}'| = \sqrt{1 + p^2 + q^2 + 2(-pA - qB + C) + A^2 + B^2 + C^2}$$

Vernachlässigen wir im Ausdruck  $\bar{n}'$  die zweiten Potenzen der die Formänderungsglieder enthaltenden Größen  $A, B, C$  — als kleine Größen zweiter Ordnung —, so erhalten wir die Beziehung

$$|\bar{n}'| = T \left( 1 + \frac{-pA - qB + C}{T^2} \right)$$

Setzen wir die obigen Größen in die Matrix des Verschiebungsvektors ein, so gelangen wir zu der Beziehung

$$\bar{e}^v = \begin{bmatrix} \xi + \frac{1}{T} (-p + A) \left( 1 + \frac{pA + qB - C}{T^2} \right) v + \frac{p}{T} v \\ \eta + \frac{1}{T} (-q + B) \left( 1 + \frac{pA + qB - C}{T^2} \right) v + \frac{q}{T} v \\ \zeta + \frac{1}{T} (1 + C) \left( 1 + \frac{pA + qB - C}{T^2} \right) v - \frac{1}{T} v \end{bmatrix}$$

d. h.

$$\bar{e}^v = \begin{bmatrix} \xi + \frac{V}{T^3} \{ (1 + q^2) (p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) - pq(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y) \} \\ \eta + \frac{V}{T^3} \{ -pq(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) + (1 + p^2) (p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y) \} \\ \zeta + \frac{V}{T^3} \{ p(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) + q(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y) \} \end{bmatrix}$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes bedeutet die reine Verschiebung, das zweite aber die Bewegung, die infolge der Verdrehung der Flächennormale entstanden ist. Bezeichnen wir letztere — wie bereits gesagt — mit den entsprechenden griechischen Majuskeln, so erhalten wir die Beziehungen

$$\bar{e}^v = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} \Xi \\ H \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \psi \\ \chi \end{bmatrix}.$$

## 6. Spezifische Dehnungen und Winkelveränderung

Bestimmen wir die bei einem in der Höhe  $v$  befindlichen Flächenelement des geprüften parallelogrammförmigen Schalenelements auftretenden spezifischen Dehnungen. Unter spezifischer Dehnung verstehen wir — auch im schiefwinkligen — den Quotienten der geprüften Projektion des Verschiebungsvektors und der ursprünglichen Seitenlänge, oder

$$\varepsilon^{xv} = \frac{\bar{e}^v}{|i^{xv}|} \cdot \frac{i^x}{|i^x|},$$

wo

$$\bar{r}^v = \begin{bmatrix} x - \frac{P}{T} v \\ y - \frac{q}{T} v \\ z + \frac{1}{T} v \end{bmatrix} \quad \dot{i}^{xv} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{v}{T^3} \{r(1 + q^2) - pqs\} \\ 0 - \frac{v}{T^3} \{s(1 + q^2) - pqt\} \\ p - \frac{v}{T^3} \{pr + qs\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - vD \\ 0 - vE \\ p - vF \end{bmatrix}.$$

Die Länge, bzw. der absolute Wert dieses Vektors ist nach Vernachlässigung der quadratischen Glieder

$$\begin{aligned} |\dot{i}^{xv}| &= \sqrt{1 - 2vD + p^2 - 2vpF} = \sqrt{1 + p^2} \sqrt{1 - \frac{2v}{1 + p^2}(D + pF)} = \\ &= \sqrt{1 + p^2} \left\{ 1 - \frac{v}{(1 + p^2) T^3} r(1 + p^2 + q^2) \right\} = \\ &= \sqrt{1 + p^2} \left\{ 1 - \frac{r}{(1 + p^2) T} v \right\} = \sqrt{1 + p^2} \frac{R^x + v}{R^x}. \end{aligned}$$

Die gesuchte spezifische Dehnung ist daher

$$\epsilon^{xv} = \frac{R^x}{R^x + v} \left\{ \frac{\xi_x + p \zeta_x}{1 + p^2} + v \frac{\Xi_x + pZ_x}{1 + p^2} \right\}. \tag{14}$$

Auf Grund eines ähnlichen Gedankenganges findet man

$$\epsilon^{xy} = \frac{R^y}{R^y + v} \left\{ \frac{\eta_y + q \zeta_y}{1 + q^2} + v \frac{H_y + qZ_y}{1 + q^2} \right\}. \tag{15}$$

Wir haben noch den Wert der Winkelveränderung zu bestimmen. Unter Winkelveränderung verstehen wir die Verzerrung des durch die Achsen eingeschlossenen Winkels des schiefwinkligen Koordinatensystems. Dies setzt sich aus zwei Teilen zusammen (Bild 5).

$$\begin{aligned} \gamma^v &= \gamma^{1v} + \gamma^{2v} \\ \gamma^{1v} &= \frac{e^{xv}}{|\dot{i}^{xv}|} \frac{\bar{n}^x}{|\bar{n}^x|} \\ \gamma^{2v} &= \frac{e^{yv}}{|\dot{i}^{yv}|} \frac{\bar{n}^y}{|\bar{n}^y|} \end{aligned}$$

Daher

$$\gamma^{1v} = \frac{R^x}{R^x + v} \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} [\xi_x + v \Xi_x, \eta_x + v H_x, \zeta_x + v Z_x] \frac{1}{T \sqrt{1 + p^2}} \begin{bmatrix} -pq \\ 1 + p^2 \\ q \end{bmatrix}$$

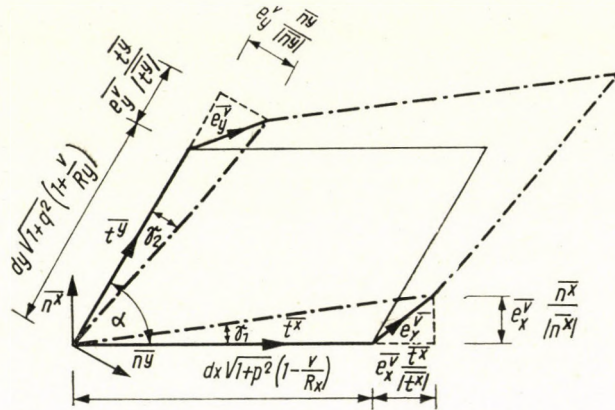


Bild 5

Nach der Entwicklung erhalten wir:

$$\gamma^{1v} = \frac{R^x}{R^x + v} \frac{1}{T(1 + p^2)} [-pq \xi_x + (1 + p^2) \eta_x + q \zeta_x + v \{-pq \varepsilon_x + (1 + p^2) H_x + q Z_x\}]$$

Durch einen ähnlichen Gedankengang ergibt sich:

$$\gamma^{2v} = \frac{R^y}{R^y + v} \frac{1}{T(1 + q^2)} [(1 + q^2) \xi_y - pq \eta_y + p \zeta_y + v \{(1 + q^2) \varepsilon_y - pq H_y + p Z_y\}] \quad (16)$$

## 7. Die Kompatibilitätsbedingung

Die Verschiebung eines Punktes in Höhe  $v$  über einem beliebigen Punkt  $P$  der Schalenmittelfläche wird durch die Beziehung

$$e^v = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} \varepsilon \\ H \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \psi \\ \chi \end{bmatrix}$$

beschrieben, wo die erste Spalte die aus der reinen Verschiebung resultierende, die zweite aber die Bewegung beschreibt, die infolge der Winkeländerung der Oberflächennormalen entsteht. Die in Höhe  $v$  über der Mittelfläche gemessenen Dehnungen und Winkeländerungen können durch die Gleichungen (14), (15) und (16) gekennzeichnet werden. Hieraus ist leicht ersichtlich, daß

$$\xi_x + p \zeta_x + v (\varepsilon_x + p Z_x) = \frac{R^x + v}{R^x} (1 + p^2) \varepsilon^{xv} = P$$



$$\begin{aligned} \eta_y + q\zeta_y + v(H_y + qZ_y) &= \frac{R^y + v}{R^y} (1 + q^2) \varepsilon^{yv} = Q \\ \eta_x + q\zeta_x + v(H_x + qZ_x) &= \frac{R^x + v}{R^x} (T\gamma^{1v} + pq\varepsilon^{xv}) = S_1 \\ \xi_y + p\zeta_y + v(\Xi_x + pZ_y) &= \frac{R^y + v}{R^y} (T\gamma^{2v} + pq\varepsilon^{yv}) = S_2 \end{aligned} \tag{17}$$

Wird die an der Stelle  $y$  zweimal abgeleitete erste Gleichung und die an der Stelle  $x$  zweimal abgeleitete zweite Gleichung von der Summe der dritten und vierten Gleichungen subtrahiert, so erhalten wir die Beziehung:

$$rX_{yy} - 2sX_{xy} + tX_{xx} = (S_1 + S_2)_{xy} - P_{yy} - Q_{xx} \tag{18.1}$$

Es bestehen ferner auch die Beziehungen

$$\Phi_x = P - pX_x \tag{18.2}$$

$$\psi_y = Q - qX_y. \tag{18.3}$$

In diesen drei Differentialgleichungen kommen die Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Schalenmittelfläche, die spezifischen Dehnungen  $\varepsilon^{xv}$  und  $\varepsilon^{yv}$ , die Winkeländerungen  $\gamma^v = \gamma^{1v} + \gamma^{2v}$ , sowie die unbekanntenen Funktionen  $\Phi, \Psi, \chi$  vor, die in Kenntnis der vorerwähnten Größen bei entsprechenden Randbedingungen eindeutig bestimmt werden können. Nach der Bestimmung der Funktionen  $\Phi, \Psi, \chi$  können wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \xi + \frac{v}{T^3} [(1 + q^2)(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) - pq(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y)] &= \Phi \\ \eta + \frac{v}{T^3} [-pq(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) + (1 + p^2)(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y)] &= \Psi \\ \zeta + \frac{v}{T^3} [p(p\xi_x + q\eta_x - \zeta_x) + q(p\xi_y + q\eta_y - \zeta_y)] &= \chi \end{aligned} \tag{19}$$

anschreiben, woraus die Funktionen  $\xi, \eta$  und  $\zeta$ , ebenfalls bei entsprechenden Randbedingungen, bestimmt werden können.

### 3. Spezifische innere Kräfte und Momente

Prüfen wir den Teil der Schale, der sich über dem Element mit dem Grundriß  $dx dy$  befindet, und durch Ebenen aus der Platte herausgeschnitten wird, die den Tangentialvektoren der Mittelfläche und dem Normalvektor parallel stehen.

Die auf den ausgeschnittenen Flächen der Platte wirkenden spezifischen Kräfte werden durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 N^x &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \sigma^x dv & M^x &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^y + v}{R^y} v \sigma^x dv \\
 N^y &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^x + v}{R^x} \sigma^y dv & M^y &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^x + v}{R^x} v \sigma^y dv \\
 N^{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \tau^{xy} dv & M^{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^y + v}{R^y} v \tau^{xy} dv \\
 N^{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^x + v}{R^x} \tau^{yx} dv & M^{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^x + v}{R^x} v \tau^{yx} dv \\
 Q^x &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \tau^{xz} dv & Q^y &= - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^x + v}{R^x} \tau^{yz} dv.
 \end{aligned} \tag{20}$$

bestimmt. In diesen Gleichungen bedeuten  $\sigma^x$ ,  $\sigma^y$ ,  $\tau^{xy}$ ,  $\tau^{yx}$ ,  $\tau^{xz}$ ,  $\tau^{yz}$  die im schiefwinkligen System gedeuteten Spannungen.

### 9. Das Hookesche Gesetz in schiefwinkligen Koordinaten

Ein im Grundriß rechteckiges Flächenelement wird auf der Schalenfläche in der Wirklichkeit die Form eines schiefwinkligen Parallelogramms aufweisen. Wir benötigen daher die Zusammenhänge zwischen den im Koordinatensystem  $xy$  mit einem Neigungswinkel  $\alpha$  erklärten  $\sigma^x$ ,  $\sigma^y$  bzw.  $\tau^{xy}$ ,  $\tau^{yx}$  Spannungen, sowie den im selben System erklärten Dehnungen  $\varepsilon^x$ ,  $\varepsilon^y$  und der Winkelverzerrung  $\gamma$ . Das ist das Hookesche Gesetz, dessen Gültigkeit für die schiefwinkligen Koordinaten durch P. LARDY bestimmt wurde [3]. Diese Beziehungen — unter Weglassen der Herleitungen — führen wir im folgenden an:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^x &= \frac{1}{E \sin \alpha} [\sigma^x + (\cos^2 \alpha - \mu \sin^2 \alpha) \sigma^y + 2 \tau \cos \alpha] \\
 \varepsilon^y &= \frac{1}{E \sin \alpha} [\sigma^y (\cos^2 \alpha - \mu \sin^2 \alpha) + \sigma^x + 2 \tau \cos \alpha] \\
 \gamma &= \frac{1 + \mu}{E} [\sigma^x \cos \alpha + \sigma^y \cos \alpha + 2 \tau].
 \end{aligned}$$

Wollen wir die Spannungen mit Hilfe der spezifischen Dehnungen bzw. der Winkelveränderung aus diesen Gleichungen ausdrücken, so ist das Gleichungssystem mit drei Unbekannten für die Spannungen zu lösen.

Drücken wir die Winkelfunktionen mit den partialen Differentialquotienten der Mittelflächengleichung aus, so erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma^x &= \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{\sqrt{1 + p^2} \sqrt{1 + q^2}}{T^2} \{T(\varepsilon^x + \mu \varepsilon^y) - \gamma pq\} \\ \sigma^y &= \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{\sqrt{1 + p^2} \sqrt{1 + q^2}}{T^2} \{T(\mu \varepsilon^x + \varepsilon^y) - \gamma pq\} \\ \tau &= \frac{E}{2(1 - \mu^2)} \frac{1}{T^2} \{ \gamma [2(1 + p^2)(1 + q^2) - (1 + \mu) T^2] - \\ &\quad - (1 + \mu)(\varepsilon^x + \varepsilon^y) pq T \}. \end{aligned} \tag{21}$$

### 10. Spezifische innere Kräfte und Momente in Abhängigkeit von der Formänderung

Setzen wir die Beziehungen der spezifischen Dehnungen (14), (15) bzw. der Winkelveränderung (16) in die Formel der Spannungen ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma^x &= a \frac{R^x}{R^x + v} (\delta^x + v \Delta^x) + a \frac{R^y}{R^y + v} (\vartheta^x + v \Theta^x) \\ \sigma^y &= a \frac{R^x}{R^x + v} (\delta^y + v \Delta^y) + a \frac{R^y}{R^y + v} (\vartheta^y + v \Theta^y) \\ \tau &= \frac{a}{2} \frac{R^x}{R^x + v} (\vartheta^{xy} + v \Delta^{xy}) + \frac{a}{2} \frac{R^y}{R^y + v} (\vartheta^{xy} + v \Theta^{xy}) \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} \vartheta^x &= \frac{\sqrt{1 + p^2} \sqrt{1 + q^2}}{T^3} \{ (1 + q^2) \xi_x - pq \eta_x + p \zeta_x \} \\ \Delta^x &= \frac{\sqrt{1 + p^2} \sqrt{1 + q^2}}{T^3} \{ (1 + q^2) \Xi_x - pq H_x + p Z_x \} \\ \vartheta^x &= \frac{\sqrt{1 + p^2} \sqrt{1 + q^2}}{(1 + q^2) T^3} \{ - (1 + q^2) pq \zeta_y + (p^2 q^2 + \mu T^2) \eta_y - \\ &\quad - (p^2 q - \mu q T^2) \zeta_y \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta^x &= \frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{(1+q^2)T^3} \left\{ -(1+q^2)pq \Xi_y + (p^2q^2 + \mu T^2) H_y - \right. \\
&\quad \left. - (p^2q - \mu qT^2) Z_y \right\} \\
\delta^y &= \frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{(1+p^2)T^3} \left\{ (p^2q^2 + \mu T^2) \xi_x - pq(1+p^2) \eta_x - \right. \\
&\quad \left. - (p^2q^2 - \mu pT^2) \zeta_x \right\} \\
\Delta &= \frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{(1+p^2)T^3} \left\{ (p^2q^2 + \mu T^2) \Xi_x - pq(1+p^2) H_x - \right. \\
&\quad \left. - (pq^2 - \mu pT^2) Z_x \right\} \\
\vartheta^y &= \frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{T^3} \left\{ -pq \xi_y + (1+p^2) \eta_y + q \zeta_y \right\} \\
\Theta^y &= \frac{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}{T^3} \left\{ -pq \Xi_y + (1+p^2) H_y + qZ_y \right\} \\
\delta^{xy} &= \frac{1}{(1+p^2)T^3} \left\{ [T^2(1-\mu) + 2p^2q^2] [-pq \zeta_x + (1+p^2) \eta_x + \right. \\
&\quad \left. + q \zeta_x] - (1+\mu) pqT^2(\xi_x + p \zeta_x) \right\} \\
\Delta^{xy} &= \frac{1}{(1+p^2)T^3} \left\{ [T^2(1-\mu) + 2p^2q^2] [-pq \Xi_x (1+p^2) H_x + \right. \\
&\quad \left. + qZ_x] - (1+\mu) pqT^2(\Xi_x + qZ_x) \right\} \\
\vartheta^{xy} &= \frac{1}{(1+q^2)T^3} \left\{ [T^2(1-\mu) + 2p^2q^2] [(1+q^2) \xi_y - pq \eta_y + \right. \\
&\quad \left. + p \zeta_y] - (1+\mu) pqT^2(\eta_y + q \zeta_y) \right\} \\
\Theta^{xy} &= \frac{1}{(1+q^2)T^3} \left\{ [T^2(1-\mu) + 2p^2q^2] [(1+q^2) \Xi_y - pqH_y + \right. \\
&\quad \left. + pZ_y] - (1+\mu) pqT^2(H_y + qZ_y) \right\}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Auf Grund obiger Angaben bestimmen wir im weiteren die Werte der tatsächlichen spezifischen Kräfte und Momente:

$$N^x = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \sigma^x dv = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \frac{R^x}{R^x + v} (\delta^x + v \Delta^x) dv +$$

$$+ a \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^y + v}{R^y} \cdot \frac{R^y}{R^y + v} (\vartheta^x + v \Theta^x) dv.$$

Führen wir die vorgeschriebenen Integrationen durch:

$$N^x = a \frac{R^x}{R^y} \delta^x \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^y + v}{R^x + v} dv + a \frac{R^x}{R^y} \Delta^x \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^y + v}{R^x + v} v dv + a \vartheta^x \int_{-h/2}^{h/2} dv +$$

$$+ a \Theta^x \int_{-h/2}^{h/2} v dv = \text{I} + \text{II} + \text{III} + \text{IV}$$

$$\text{I} = a \frac{R^x}{R^y} \delta^x \left[ v + (R^y - R^x) \log \left( 1 + \frac{v}{R^x} \right) \right]_{-h/2}^{+h/2} =$$

$$= a \frac{R^x}{R^y} \delta_x \left[ h + (R^y - R^x) \log \frac{1 + \frac{h}{2R^x}}{1 - \frac{h}{2R^x}} \right] =$$

$$= a \frac{R^x}{R^y} \delta^x \left[ h + (R^y - R^x) \left( \frac{h}{R^x} + \frac{h^3}{hR^{x3}} + \dots \right) \right] \cong$$

$$\cong a \frac{R^x}{R^y} \delta^x \left[ h \frac{R^y}{R^x} + \frac{h^3}{12} \frac{R^y - R^x}{R^{x3}} \right] =$$

$$= ah \delta^x + \frac{dh^3}{12} \frac{1}{R^x} \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right) \delta^x$$

$$\text{II} = a \frac{R^x}{R^y} \Delta^x \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ v + (R^y - R^x) \frac{v}{R^x + v} \right\} dv =$$

$$= a \frac{R^x}{R^y} \Delta^x \left[ \frac{v^2}{2} + (R^y - R^x) \left\{ v - R^x \log \left( 1 + \frac{v}{R^x} \right) \right\} \right]_{-h/2}^{+h/2} =$$

$$= a \frac{R^x}{R^y} \Delta_x (R^y - R^x) \left( h - R^x \log \frac{1 + \frac{h}{2R^x}}{1 - \frac{h}{2R^x}} \right) =$$

$$= a \frac{R^x}{R^y} \Delta^x (R^y - R^x) \left[ h - R^x \left( \frac{h}{R^x} + \frac{h^3}{12R^{x3}} + \dots \right) \right] \cong$$

$$\cong \frac{ah^3}{12} \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \Delta^x$$

$$\text{III} = a h \vartheta^x$$

$$\text{IV} = a \Theta^x \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{-h/2}^{+h/2} = 0.$$

Letzten Endes ist daher:

$$N^x = ah (\delta^x + \vartheta^x) + \frac{a h^3}{12} \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \left( \Delta^x - \frac{\delta^x}{R^x} \right).$$

Durch einen ähnlichen Gedankengang können wir die Ausdrücke für die weiteren Kräfte und Momente bestimmen. Die Teilrechnungen vernachlässigend gelangen wir zuletzt zu folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} N^x &= L(\delta^x + \vartheta^x) + K \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \left( \Delta^x - \frac{\delta^x}{R^x} \right) \\ N^y &= L(\delta^y + \vartheta^y) + K \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right) \left( \Theta^y - \frac{\vartheta^y}{R^y} \right) \\ N^{xy} &= \frac{L}{2} (\delta^{xy} + \vartheta^{xy}) + \frac{K}{2} \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \left( \Delta^{xy} - \frac{\delta^{xy}}{R^x} \right) \\ N^{yx} &= \frac{L}{2} (\delta^{xy} + \vartheta^{xy}) + \frac{K}{2} \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right) \left( \Theta^{xy} - \frac{\vartheta^{xy}}{R^y} \right) \\ M^x &= -K \left[ \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \delta^x + \Delta^x + \Theta^x \right] \\ M^y &= -K \left[ \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right) \vartheta^y + \Delta^y + \Theta^y \right] \\ M^{xy} &= -\frac{K}{2} \left[ \left( \frac{1}{R^y} - \frac{1}{R^x} \right) \delta^{xy} + \Delta^{xy} + \Theta^{xy} \right] \\ M^{yx} &= -\frac{K}{2} \left[ \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right) \vartheta^{xy} + \Delta^{xy} + \Theta^{xy} \right]. \end{aligned} \tag{23}$$

## 11. Allgemeine Differentialgleichung der gekrümmten Schalen

Anläßlich der Behandlung der Gleichgewichtsgleichungen haben wir bewiesen, daß eine Beziehung (13) zwischen den Unbekannten  $n^x, n^y, n^{xy}, n^{yx}, m^x, m^y, m^{xy}, m^{yx}$  besteht.

Setzen wir in diese für die reduzierten Kräfte bzw. Momente angeschriebenen Gleichungen die durch die Verschiebungsfunktionen  $\zeta, \eta, \xi$  ausgedrück-

ten und sodann entsprechend reduzierten Werte der tatsächlichen Kräfte bzw. Momente ein, so erhalten wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} g(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, X_0, Y_0, Z_0) &= 0 \\ h(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, X_0, Y_0, Z_0) &= 0 \\ i(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, X_0, Y_0, Z_0) &= 0 \\ j(p, q, r, s, t, \xi, \eta, \zeta, X_0, Y_0, Z_0) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

In obigen vier Gleichungen kommen nur noch die Unbekannten  $\xi, \eta, \zeta$  vor.

Es stehen uns vier Gleichungen mit drei Unbekannten zur Verfügung wir können aber beweisen, daß die vierte Gleichung zur Identität führt, so daß wir nach Weglassen dieser im Endresultat ein Differentialgleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten erhalten. Bei den entsprechenden Randbedingungen lösen wir dieses Gleichungssystem, und so können die Verschiebungsfunktionen  $\xi, \eta, \zeta$  bestimmt werden, und in deren Kenntnis sind auf Grund der Endformeln des vorigen Kapitels die inneren Kräfte bestimmbar.

Diese Differentialgleichungssystem kann daher für gekrümmte Schalen beliebiger Form und beliebiger Belastung verwendet werden. Im Falle einer konkreten Aufgabe haben wir daher nur die ersten bzw. zweiten Differentialquotienten aus der Gleichung der fraglichen Fläche zu bilden und diese in obige Gleichung einzusetzen. Aus der so gewonnenen Gleichung können die Bewegungen und inneren Kräfte der Mittelfläche der geprüften Schale bestimmt werden.

Somit haben wir die Aufgabensetzung der Einleitung erfüllt. Zum Beweis der Verwendbarkeit dieser Lösung führen wir im folgenden einige charakteristische Beispiele an. Obige Gleichung ist nämlich für Behandlung von Problemen der Planplatten, Scheiben, Membranschalen und Krummschalen beliebiger Form geeignet.

## 12. Beispiele

### a) Die Differentialgleichung der ebenen Platte

Die Gleichung der Fläche ist in diesem Falle  $z = f(x, y) = 0$ , daher ist

$$p = q = r = s = t = 0$$

Die Belastung sei  $Z_0 = p(x, y) \quad X_0 = Y_0 = 0$ .

Nachdem keine Druck- und Schnittkräfte vorhanden sind, gestalten sich die Gleichgewichtsgleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned} q_x^x + q_y^y + p(x, y) &= 0 \\ m_x^x + m_y^{yx} + q^x &= 0 \\ m_x^{xy} + m_y^y + q^y &= 0 \end{aligned}$$

Wir setzen die nach  $x$  differenzierte zweite und nach  $y$  differenzierte dritte Gleichung in die erste Gleichung ein:

$$-m_{xx}^x - 2m_{xy}^{xy} - m_{yy}^y + p(x, y) = 0.$$

Die Momente sind

$$m^x = K(\zeta_{xx} + \mu\zeta_{yy})$$

$$m^y = K(\mu\zeta_{xx} + \zeta_{yy})$$

$$m^{xy} = (1 - \mu) K\zeta_{xy}.$$

Werden diese in die Gleichgewichtsgleichung eingesetzt, so ergibt sich die Beziehung

$$\zeta_{xxxx} + 2\zeta_{xxyy} + \zeta_{yyyy} = \frac{1}{K} p(x, y).$$

#### b) Die Differentialgleichung einer Scheibe

Die Mittelfläche der Scheibe ist eine Ebene, deren Gleichung  $z = 0$  ist, daher ist

$$p = q = r = s = t = 0.$$

Die Belastung fällt in die Ebene der Scheibe. Daher haben wir

$$Z_0(x, y) = 0, \quad X_0(x, y) = X_0, \quad Y_0(x, y) = Y_0.$$

Es tritt keine Biegung auf, so daß wir im vorhinein wissen, daß

$$m^x = 0, \quad m^y = 0, \quad m^{xy} = 0, \quad q^x = 0, \quad q^y = 0$$

ist. Gehen wir aus der Formänderungsgleichung aus. Sie hat im Falle einer ebenen Platte die Form

$$(S_1 + S_2)_{xy} - P_{yy} - Q_{xx} = 0.$$

Die Formänderungen können durch die Beziehungen

$$\varepsilon_{yy}^{xy} + \varepsilon_{xx}^{xy} = \gamma_{xy}^y$$

$$\varepsilon^{xy} = \frac{1}{E} (n^x - \mu n^y) \quad \varepsilon^{xy} = \frac{1}{E} (n^y - \mu n^x) \quad \gamma^y = \frac{2(1 + \mu)}{E} n^{xy}$$

bestimmt werden. Werden diese in die Formänderungsgleichungen eingesetzt, so erhalten wir

$$n_{yy}^x - \mu n_{yy}^y + n_{xx}^y - \mu n_{xx}^x = 2(1 + \mu) n_{xy}^{xy}.$$



Führen wir nun die Spannungsfunktion ein. Wie bereits bekannt, ist

$$n^x = hF_{yy} \quad n^{xy} = -hF_{xy} \quad n^y = hF_{xx}$$

daher ist

$$F_{yyyy} + F_{xxxx} - 2\mu F_{xxyy} = -2F_{xxyy} - 2\mu F_{xxyy},$$

d. h.

$$F_{xxxx} + 2F_{xxyy} + F_{yyyy} = 0.$$

Dies ist also die Differentialgleichung der Scheibe, anders gesagt die des zweiachsigen Spannungszustandes.

c) *Formänderung der Platte bei ungleichmäßiger Erwärmung*

$$z = 0, \quad p = q = r = s = t = 0$$

$$\varepsilon^{xy} = \varepsilon^{yx} = a \left( t^0 + \frac{a}{h} t^1 \right); \quad \gamma = 0$$

$$P = a \left( t^0 + \frac{v}{h} t^1 \right); \quad Q = a \left( t^0 + \frac{v}{h} t^1 \right); \quad S_1 = S_2 = 0$$

Die Gleichung (18.1) führt zur Identität, wobei wir auf Grund der Gleichungen (18.2) und (18.3)

$$\Phi_x = a \left( t^0 + \frac{v}{h} t^1 \right)$$

$$\Psi_y = a \left( t^0 + \frac{v}{h} t^1 \right)$$

erhalten, und so ist

$$\Phi = a \left( t^0 + \frac{v}{h} t^1 \right) x + c(y) \quad \text{und}$$

$$\Psi = a \left( t^0 + \frac{v}{h} t^1 \right) y + c(x).$$

Auf Grund der Gleichungen (19) erhalten wir

$$\xi - v\zeta_x = a \left( t^0 + \frac{v}{h} t^1 \right) x + c_1(y) + vc_2(y),$$

$$\eta - v\zeta_y = a \left( t^0 + \frac{v}{h} t^1 \right) y + c_3(x) + vc_4(x).$$

Auf Grund der mit  $v$  nicht multiplizierten Glieder kann geschrieben werden :

$$\xi = at^0 x + c_1(y),$$

$$\eta = at^0 y + c_3(x).$$

Auf Grund der mit  $v$  multiplizierte Glieder aber ist

$$-\zeta_x = a \frac{t^1}{h} x + c_2(y),$$

$$-\zeta = a \frac{t^1}{h} \frac{x^2}{2} + c_2(y) x + c_5(y),$$

bzw.

$$-\zeta_y = a \frac{t^1}{h} y + c_4(x),$$

$$-\zeta = a \frac{t^1}{h} \frac{y^2}{2} + c_4(x) y + c_6(y),$$

$$-\zeta = \frac{a}{2} \frac{t^1}{h} (x^2 + y^2) + dxy.$$

Nehmen wir an, daß die Bewegung der Platte im Koordinatenursprung verhindert wird, so ist

$$x = y = 0 \quad \xi = \eta = \zeta = 0$$

$$\xi = at^0 x$$

$$\eta = at^0 y$$

$$\zeta = -\frac{a}{2} \frac{t^1}{h} (x^2 + y^2).$$

Die Mittelfläche der Platte nimmt daher gleichzeitig mit der Ausdehnung eine elliptisch-paraboloidische Form an.

#### d) Plattenbeulung

Die gebeulte Platte (Bild 6) hat ursprünglich eine ebene Fläche. Schreiben wir die Gleichgewichtsgleichungen für die gebeulte Form  $z = \zeta(xy)$  an und nehmen wir an, daß die zweite Potenz dieser und deren Differentialquotienten gleich Null sind, so daß

$$\zeta = \zeta_x^2 = \zeta_x \zeta_y = \zeta_y^2 = 0.$$

Die Gleichgewichtsgleichungen können in der Form

$$\begin{aligned} n_x^x + n_y^{yx} + X_0 &= 0 & m_x^x + m_y^{yx} + q^x &= 0 \\ n_x^{xy} + n_y^y + Y_0 &= 0 & m_x^{xy} + m_y^y + q^y &= 0 \\ \zeta_{xx} n^x + 2 \zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y + q_x^x + q_y^y &= 0 & n^{xy} - n^{yx} &= 0 \end{aligned}$$

angeschrieben werden. Werden die Werte von  $q^x$  und  $q^y$  aus der vierten und

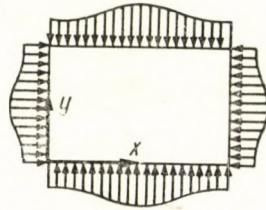


Bild 6

fünften Gleichungen ausgedrückt und in die dritte eingesetzt, so erhalten wir die Beziehung

$$\zeta_{xx} n^x + 2 \zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y - m_x^x - 2m_{xy}^{xy} - m_y^y = 0.$$

Im Falle unserer Annahmen wird

$$\left. \begin{aligned} m^x &= K(\zeta_{xx} + \mu \zeta_{yy}), \\ m^y &= K(\zeta_{yy} + \mu \zeta_{xx}), \\ m^{xy} &= (1 - \mu) K \zeta_{xy}. \end{aligned} \right\}$$

Werden diese Ausdrücke in unsere obige Gleichung eingesetzt, so erhalten wir die Beziehung

$$\zeta_{xx} n^x + 2 \zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y - K[\zeta_{xxxx} + 2 \zeta_{xxyy} + \zeta_{yyyy}] = 0$$

oder als Endresultat:

$$K(\Delta \Delta \zeta) - [\zeta_{xx} n^x + 2 \zeta_{xy} n^{xy} + \zeta_{yy} n^y] = 0.$$

Wie bekannt, ist dies die Differentialgleichung der Plattenbeulung.

e) *Differentialgleichung von Membranschalen*

Im Falle eines Membranspannungszustandes ist

$$m^x = m^y = m^{xy} = q^x = q^y = 0.$$

Die Gleichgewichtsgleichungen lauten daher:

$$\begin{aligned} n_x^x + n_y^{yx} + X_0 &= 0; \quad n_y^y + n_x^{xy} + Y_0 = 0; \\ rn^x + s(n^{xy} + n^{yx}) + tn^y + Z_0 - pX_0 - qY_0 &= 0. \end{aligned}$$

Es kann leicht eingesehen werden, daß

$$n^{yx} = n^{xy}.$$

Und wenn die Spannungsfunktion eingeführt wird, so erhalten wir das Endresultat:

$$rF_{yy} - 2sF_{xy} + tF_{xx} + (Z_0 - pX_0 - qY_0) = 0.$$

Dies ist die wohlbekannte Differentialgleichung der Membranschalen.

#### f) Formänderung der Membranschalen

Die Membranschalen haben keine Biegesteifheit und können als Platten vorgestellt werden, deren Dickenmaß dem Grenzwert  $v = 0$  zustrebt. Unter Beachtung dieser Eigenschaft erhalten wir die Kompatibilitätsbedingungen der Membranschalen:

auf Grund der Gleichungen (17) ist

$$\begin{aligned} P &= (1 + p^2) \varepsilon^x \\ Q &= (1 + q^2) \varepsilon^y \\ S_1 + S_2 &= pq(\varepsilon^x + \varepsilon^y) + T\gamma \end{aligned}$$

die Gleichungen (19) sind:

$$\begin{aligned} \Phi &= \xi \\ \Psi &= \eta \\ \chi &= \zeta \end{aligned}$$

und so die Gleichungen (18) können in der Form

$$\begin{aligned} r \zeta_{yy} - 2s \zeta_{xy} + t \zeta_{xx} &= (S_1 + S_2)_{xy} - P_{yy} - Q_{xx} \\ \xi_x &= P - p\zeta_x \\ \eta_y &= Q - q\zeta_y \end{aligned}$$

geschrieben werden. Werden die inneren Kräfte in Kenntnis der Unterstützungsart und Belastung der Membranschale bestimmt, so können hieraus die Größen  $\varepsilon^x$ ,  $\varepsilon^y$  und  $\gamma$  bzw.  $P$ ,  $Q$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  berechnet werden. In Kenntnis dieser Größen können die Funktionen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  aus dem obigen Differentialgleichungssystem ermittelt werden, die die Bewegung der Mittelfläche beschreiben.

g) *Flache Schalen*

Untersuchen wir die flache Schale, deren Mittelfläche durch die Gleichung  $z = f(x, y)$  beschrieben wird. Wir verstehen unter einer flachen Schale eine solche Schalenkonstruktion, bei welcher die höheren Potenzen der Ableitung erster Ordnung der Schalengleichung in Bezug auf die Einheit vernachlässigt werden können, d. h.

$$1 + p^2 \cong 1 + q^2 \cong 1 + p^2 + q^2 \cong 1,$$

und so lassen sich die Krümmungen in der Richtung  $x$  und  $y$  der Mittelfläche wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{R^x} = -r; \quad \frac{1}{R^y} = -t.$$

Hieraus folgt, daß die tatsächlichen spezifischen Kräfte, Scherkräfte, Momente, Torsionsmomente, Schnittkräfte der Querrichtung den entsprechenden reduzierten Kräften bzw. Momenten annähernd gleich sind.

Es soll nur die Belastung der Richtung  $z$  auf die Schale wirken, d. h., es sei

$$Z_0 \neq 0; \quad X_0 = Y_0 = 0.$$

Der Einfachheit halber nehmen wir ferner an, daß der Faktor der transversalen Kontraktion  $\mu = 0$  ist, so daß

$$L = hE; \quad K = \frac{h^3 E}{12}.$$

Bei einer flachen Schale können wir annehmen, daß das Produkt der die Bewegung der Mittelfläche beschreibenden Funktionen  $\xi, \eta, \zeta$  bzw. deren Ableitungen und der Differentialquotienten der Oberflächengleichung gegen die nicht multiplizierten Glieder vernachlässigt werden kann. Bei dieser Annahme können die Gleichungen (22) in einer wesentlich einfacheren Form,

$$\begin{array}{lll} \delta^x = \xi_x & \delta^{xy} = \eta_x & \delta^y = 0 \\ \Delta^x = \Xi_x = -\zeta_{xx} & \Delta^{xy} = H_x = -\zeta_{xy} & \Delta^y = 0 \\ \vartheta^x = 0 & \vartheta^{xy} = \xi_y & \vartheta^y = \eta_y \\ \Theta^x = 0 & \Theta^{xy} = \Xi_y = -\zeta_{xy} & \Theta^y = H_y = -\zeta_{yy} \end{array}$$

geschrieben werden, nachdem

$$\begin{array}{l} \Xi = -\zeta_x, \\ H = -\zeta_y, \\ Z = 0 \end{array}$$

ist

Die unter (23) angeführten Ausdrücke der tatsächlichen bzw. reduzierten spezifischen inneren Kräfte bzw. Momente werden gleichfalls wesentlich einfacher, weil die mit  $\pm \left( \frac{1}{R^x} - \frac{1}{R^y} \right)$  multiplizierten Glieder gegen die übrigen vernachlässigt werden können und so ist

$$N^x = n^x = L(\delta^x + \vartheta^y) = L\xi_x,$$

$$N^y = n^y = L(\delta^y + \vartheta^x) = L\eta_y,$$

$$N^{xy} = N^{yx} = n^{xy} = n^{yx} = \frac{L}{2}(\delta^{xy} + \vartheta^{xy}) = \frac{L}{2}(\xi_y + \eta_x),$$

$$M^x = m^x = -K(\Delta^x + \Theta^x) = K\zeta_{xx},$$

$$M^y = m^y = -K(\Delta^y + \Theta^y) = K\zeta_{yy},$$

$$M^{xy} = M^{yx} = m^{xy} = m^{yx} = -\frac{K}{2}(\Delta^{xy} + \Theta^{xy}) = K\zeta_{yx}.$$

Schreiben wir ferner die Gleichungen (11) und (12) an. Mit Rücksicht auf die flache Schale wird das Produkt der transversalen Schnittkräfte und der partialen Ableitungen erster Ordnung der Schalenmittelfläche gegen die nicht multiplizierten Glieder ebenfalls vernachlässigt, und so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$n_x^x + n_y^{yx} = 0$$

$$n_x^{xy} + n_y^y = 0$$

$$rn^x + 2sn^{xy} + tn^y + q_x^x + q_y^y + Z_0 = 0$$

$$m_x^x + m_y^{yx} + q^x = 0$$

$$m_x^{xy} + m_y^y + q^y = 0$$

$$rm^{xy} - s(m^x - m^y) - tm^{yx} = 0.$$

Führen wir die Spannungsfunktion ein, es sei somit:

$$n^x = F_{yy}; \quad n^{xy} = n^{yx} = -F_{xy}; \quad n^y = F_{xx};$$

setzen wir dann die aus der vierten und fünften Gleichungen ausgedrückten Größen  $q^x$  und  $q^y$  in die dritte Gleichung ein, so erhalten wir die Beziehung

$$rF_{yy} - 2sF_{xy} + tF_{xx} - K(\zeta_{xxxx} + 2\zeta_{xxyy} + \zeta_{yyyy}) + Z_0 = 0. \quad (25)$$

Die Spannungsfunktion befriedigt automatisch die ersten zwei Gleichungen. Die letzte Gleichung kann vernachlässigt werden, nachdem sie annähernd zur Identität führt.

In der obigen Gleichung kommen zwei Unbekannten  $F$  und  $\zeta$  vor, zu deren Bestimmung eine weitere Beziehung benötigt wird. Untersuchen wir die

Bedingung der Kompatibilität unter Beachtung der Vernachlässigungen der Gleichungen (21):

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon^{xv} \\ Q &= \varepsilon^{yv} \\ S_1 + S_2 &= \gamma^{1v} + \gamma^{2v} = \gamma. \end{aligned}$$

Nachdem  $\cos \alpha = 0$ ,  $\sin \alpha = 1$  und  $\mu = 0$ , so ist

$$\begin{aligned} \varepsilon^{xv} &= \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E} \left( \frac{n^x}{h} + 12 v \frac{m^x}{h^3} \right) = \frac{F_{yy}}{L} + v \zeta_{xx} \\ \varepsilon^{yv} &= \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} \left( \frac{n^y}{h} + 12 v \frac{m^y}{h^3} \right) = \frac{F_{xx}}{L} + v \zeta_{yy} \\ \gamma &= \frac{2\tau_{xy}}{E} = \frac{2}{E} \left( \frac{n^{xy}}{h} + 12 v \frac{m^{xy}}{h^3} \right) = -2 \frac{F_{xy}}{L} + v \zeta_{xy}. \end{aligned}$$

Auf Grund der Gleichungen (19) ist

$$\begin{aligned} \Phi &= \xi - v \zeta_x, \\ \Psi &= \eta - v \zeta_y, \\ \chi &= \zeta \end{aligned}$$

und so sind die Gleichungen (18):

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \frac{F_{yy}}{L} + v \zeta_{xx}, \\ \Psi_y &= \frac{F_{xx}}{L} + v \zeta_{yy}, \end{aligned} \tag{26}$$

$$r \zeta_{yy} - 2s \zeta_{xy} + t \zeta_{xx} + \frac{1}{L} (F_{yyyy} + 2F_{xxyy} + F_{xxxx}) = 0.$$

In den Gleichungen (25) und (26) kommen nur die unbekanntnen Funktionen  $\zeta$  und  $F$  vor, die bei entsprechenden Randbedingungen eindeutig bestimmt werden können.

Zwecks einer weiteren Vereinfachung führen wir die folgenden Operatoren ein:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \bar{\Delta} &= r \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2s \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{aligned}$$

und so können unsere Gleichungen in der Form

$$\bar{\Delta}F - K\Delta\Delta\zeta + Z_0 = 0$$

$$L\bar{\Delta}\zeta + \Delta\Delta F = 0$$

geschrieben werden. Dieses System, bestehend aus zwei partialen Differentialgleichungen vierter Ordnung mit zwei Variablen, kann auf eine einzige partielle Differentialgleichung achter Ordnung zurückgeführt werden. Führen wir die Bezeichnungen

$$F = -L\bar{\Delta}\Omega$$

bzw.

$$\zeta = \Delta\Delta\Omega$$

ein, so geht die erste Gleichung in die Form

$$L\bar{\Delta}\Delta\Omega + K\Delta\Delta\Delta\Delta\Omega = Z_0$$

über, wobei die zweite Gleichung zur Identität führt. Dies ist daher die allgemeine Differentialgleichung der flachen Schalen.

Das erste Glied rückt Belastungen, die durch die Membrankräfte (Bogenwirkung) ausgeglichen sind, das zweite aber Belastungen, die durch die Biegemomente (Trägerwirkung) ausgeglichen sind, aus.

Nach Lösung der Differentialgleichung bei entsprechenden Randbedingungen kann die Funktion  $\Omega$  bestimmt werden, woraus die inneren Kräfte, Momente, usw. auf Grund der Beziehungen

$$n^x = -L\bar{\Delta}\Omega_{yy}$$

$$n^y = -L\bar{\Delta}\Omega_{xx}$$

$$n^{xy} = +L\bar{\Delta}\Omega_{xy}$$

$$m^x = K\Delta\Delta\Omega_{xx}$$

$$m^y = K\Delta\Delta\Omega_{yy}$$

$$m^{xy} = K\Delta\Delta\Omega_{xy}$$

$$q^x = -K\Delta\Delta\Delta\Omega_x$$

$$q^y = -K\Delta\Delta\Delta\Omega_y$$

ermittelt werden können.

#### h) Die Biegung einer Kreiszylinderschale

Gleichung und Differentialquotienten der Fläche lauten:

$$z = \sqrt{R^2 - y^2} \quad p = r = s = 0$$

$$z_y = q = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}; \quad z_{yy} = t = -\frac{R^2}{(\sqrt{R^2 - y^2})^3}$$



Die Krümmung ist

$$\frac{1}{R}$$

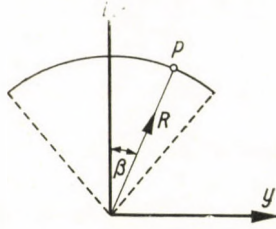


Bild 7

Mit Rücksicht darauf, daß die durch W. FLÜGGE abgeleiteten Beziehungen in Zylinderkoordinaten angegeben sind, transformieren wir unsere obigen Formeln in dieses Koordinatensystem (Bild 7):

$$z = \sqrt{R^2 - y^2} = R \cos \beta$$

$$y = R \sin \beta$$

$$z_y = - \frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}} = - \operatorname{tg} \beta.$$

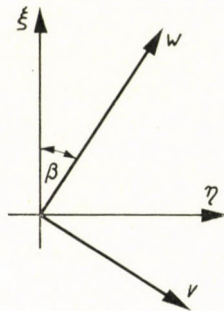


Bild 8

Transformieren wir auch die Verschiebungen (Bild 8):

$$\xi = u$$

$$\eta = v \cos \beta + w \sin \beta$$

$$\zeta = -v \sin \beta + w \cos \beta.$$

Nach Bildung der entsprechenden Differentialquotienten der Fläche und der

Verschiebungsfunktion und nach Einsetzen in die Gleichungen (12), erhalten wir die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \delta^x &= \xi_x = u_x & \vartheta^x &= \mu \frac{\eta_y + q\zeta_y}{1 + q^2} = \frac{\mu}{R} (w + v_\beta) \\ \delta^y &= \mu \xi_x = \mu u_x & \vartheta^y &= \frac{\eta_y + q\zeta_y}{1 + q^2} = \frac{1}{R} (w + v_\beta) \\ \delta^{xy} &= (1 - \mu) \frac{\eta_x + q\zeta_x}{\sqrt{1 + q^2}} = (1 - \mu) v_x & \vartheta^{xy} &= (1 - \mu) \frac{\zeta_y}{\sqrt{1 + q^2}} = (1 - \mu) \frac{u_\beta}{R} \\ \Delta^x &= \Xi_x = -w_{xx} & \Theta_x &= \mu \frac{H_y + qZ_y}{1 + q^2} = \frac{\mu}{R^2} (v_\beta - w_{\beta\beta}) \\ \Delta^y &= \mu \Xi_x = -\mu w_{xx} & \Theta_y &= \frac{H_y + qZ_y}{1 + q^2} = \frac{1}{R^2} (v_\beta - w_{\beta\beta}) \\ \Delta^{xy} &= (1 - \mu) \frac{H_x + qZ_x}{\sqrt{1 + q^2}} = (1 - \mu) \frac{1}{R} (v_x + w_{\beta x}) & \Theta^{xy} &= (1 - \mu) \frac{\Xi_y}{\sqrt{1 + q^2}} = -(1 - \mu) \frac{w_{\beta x}}{R} \end{aligned}$$

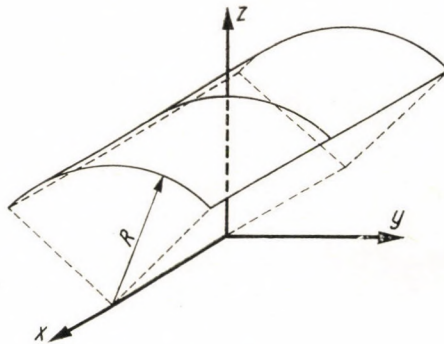


Bild 9

Werden diese in die Gleichung (23) eingesetzt, so erhalten wir die Ausdrücke für die tatsächlichen Kräfte und Momente:

$$\begin{aligned} N^x &= L \left[ u_x + \frac{\mu}{R} (v_\beta + w) \right] + \frac{K}{R} (-w_{xx}) \\ N^y &= L \left[ \mu u_x + \frac{1}{R} (v_\beta + w) \right] - \frac{K}{R} \left( -\frac{w}{R^2} - \frac{w_{\beta\beta}}{R^2} \right) \\ N^{xy} &= L \frac{1 - \mu}{2} \left( v_x + \frac{\mu_\beta}{R} \right) + \frac{K}{2R} (1 - \mu) \left( \frac{v_x}{R} - \frac{w_{\beta x}}{R} \right) \\ N^{yx} &= L \frac{1 - \mu}{2} \left( v_x + \frac{u_\beta}{R} \right) - \frac{K}{2R} (1 - \mu) \left( -\frac{w_{\beta x}}{R} - \frac{u_\beta}{R^2} \right) \end{aligned}$$

$$M^x = \frac{K}{R} \left( -u_x + Ru_{xx} - \frac{\mu}{R} v_\beta + \frac{\mu}{R} w_{\beta\beta} \right)$$

$$M^y = \frac{K}{R} \left( R\mu w_{xx} + \frac{w_{\beta\beta}}{R} + \frac{w}{R} \right)$$

$$M^{xy} = \frac{K}{2R} (1 - \mu) (-2v_x + 2w_{\beta x})$$

$$M^{yx} = \frac{K}{2R} (1 - \mu) \left( \frac{u_\beta}{R} - v_x + 2w_{\beta x} \right).$$

Und wenn die letzteren in die Gleichgewichtsgleichung (13) eingesetzt werden, ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$R^2 u_{xx} + \frac{1 - \mu}{2} u_{\beta\beta} + \mu R w_x + \frac{1 + \mu}{2} R v_{x\beta} + \\ + \frac{K}{R^2 L} \left[ \frac{1 - \mu}{2} u_{\beta\beta} - R^3 w_{xxx} + \frac{1 - \mu}{2} R w_{x\beta\beta} \right] + \frac{XR^2}{L} = 0.$$

$$\frac{1 + \mu}{2} R u_{x\beta} + v_{\beta\beta} + \frac{1 - \mu}{2} R^2 v_{xx} + w_\beta + \frac{K}{R^2 L} \left[ \frac{3(1 - \mu)}{2} R^2 v_{xx} - \right. \\ \left. - \frac{3 - \mu}{2} R^2 w_{xx\beta} \right] + \frac{YR^2}{L} = 0$$

$$\mu R u_x + v_\beta + w + \frac{K}{R^2 L} \left[ \frac{1 - \mu}{2} R u_{x\beta\beta} - R^3 u_{xxx} - \frac{3 - \mu}{2} R^2 v_{xx\beta} + \right. \\ \left. + R^4 w_{xxxx} + 2R^2 w_{xx\beta\beta} + w_{\beta\beta\beta\beta} + 2w_{\beta\beta} + w \right] + \frac{ZR}{L} = 0.$$

Die vierte Gleichung führt zu einer Identität, wovon man sich leicht überzeugen kann. Die Gleichungen sind mit dem durch W. FLÜGGE abgeleiteten Gleichungen vollkommen identisch. Dies ist zugleich eine Kontrolle der von uns abgeleiteten Formeln.

#### SCHRIFTTUM

1. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen (Verlag von J. Springer, Berlin 1934).
2. GIRKMAN, K.: Flächentragwerke (Springer-Verlag, Wien 1946).
3. LARDY, P.: Die Elastizitätstheorie der Parallelogrammförmigen Scheibe (Schweizerische Bauzeitung, 1949. Nr. 11. p. 419—422).
4. BÖLCSKEI, E.: Deformation des voiles minces (Acta Technica Hungarica, Tom. V. Fasc. 4. p. 489—506).
5. WLASOW, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik (Akademie Verlag, Berlin 1953).
6. FUCHSSTEINER, W. — SCHADER, A.: Allgemeine Schalen Grundgleichungen (Beton- und Stahlbetonbau, 1956. Jul. p. 145—153).

## ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz stellt die allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen der allgemein krumm-förmigen Schalen (gekrümmten Platten) konstanter Dicke in Bezug auf ein rechtwinkliges räumliches Koordinatensystem unter Mitspielung der sog. reduzierten Kräfte bzw. Momente auf. Unter reduzierten Kräften bzw. Momenten werden die auf die  $xy$  Koordinatenebene bezogenen spezifischen Projektionskräfte bzw. Momente verstanden. Der Aufsatz beschreibt die spezifischen Dehnungen und Winkelverzerrungen mit Hilfe der Verschiebungskomponenten ( $\xi, \eta, \zeta$ ) in Richtung  $xy$  bzw.  $z$  der Schalenmittelfläche, legt sodann die Kompatibilitätsbedingungen der Schalen fest. Unter Heranziehung der im schiefwinkligen Koordinatensystem gültigen Hookeschen Gesetzes werden die spezifischen inneren Kräfte bzw. Momente bestimmt. Nach Einführung dieser Größen in die Gleichgewichtsgleichungen werden zum Schluß 3 Gleichungen erhalten, in welchen nur noch 3 Unbekannte, nämlich die Verschiebungsfunktionen  $\xi, \eta, \zeta$  der Mittelfläche vorkommen. Nach Lösung dieses Differentialgleichungssystems, unter geeigneten Randbedingungen können die Verschiebungsfunktionen und hieraus die inneren Kräfte bestimmt werden.

Dieses Differentialgleichungssystem kann für gekrümmte Schalen beliebiger Form und beliebiger Belastung angeschrieben werden. Die Arbeit führt manche Beispiele zum Beweis der Verwendbarkeit der Berechnungsergebnisse an, wobei die grundlegenden Differentialgleichungen der Planplatten, Schalen, Membranschalen, Flachschen, der Beulung, der Zylinderschalen, usw. abgeleitet werden.

## GENERAL THEORY OF BENT SHELLS

E. BÖLCSKEI

## SUMMARY

In this paper the general equilibrium equations of bent shells (curved plates) having constant thickness and general shape, are established. The load is arbitrary. Spatial rectangular system of coordinate, and so-called reduced forces and moments, will be used. As is usual, the reduced force and moment here denote the projections of force and moment on the coordinate plane  $xy$ . By means of the displacement components  $\xi, \eta, \zeta$  of the middle surface, the strain components and the compatibility condition will be derived. Employing the Hooke's law and skew coordinates, the internal forces, (reduced forces and moments) will be expressed. Introducing these into the equilibrium equations, one obtains three differential equations in which as an unknown function the displacements  $\xi \eta \zeta$  occur only. These are the differential equations which must be solved, if we want to determine the displacements  $\xi \eta \zeta$ . Meanwhile, the boundary conditions must be fulfilled. From all these the internal forces can be computed.

The differential equations are lengthily treated for the following cases: to derive the basic equations for bent plane plates, for disks, for membrane shells, for shells of small curvature, for buckling of plates and for cylindrical shells.

## LA THÉORIE GÉNÉRALE DES VOILES MINCES

E. BÖLCSKEI

## RÉSUMÉ

En utilisant des coordonnées orthogonales dans l'espace et les notations usuelles pour les forces sectionnelles réduites (forces et moments), l'auteur établit les expressions à l'aide desquelles on peut calculer les composants des déformations, comme fonctions des déplacements  $\xi \eta \zeta$ . De la même manière, il établit aussi la condition de compatibilité. En utilisant la loi de Hooke et les coordonnées obliques, il trouve les expressions valables pour les forces sectionnelles. En les introduisant dans l'équation d'équilibre, on reçoit les équations différentielles, où les déplacements  $\xi \eta \zeta$  sont les fonctions inconnues. La résolution de ces équations différentielles conduit aux fonctions cherchées. Cependant, les conditions au contour doivent naturellement être remplies.

Les équations différentielles sont établies pour des problèmes spéciaux. Les équations fondamentales sont, données pour la flexion des plaques, disques, voiles minces sans résistance de flexion, pour le voilement des plaques et pour les voûtes cylindriques.

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ГНУТЫХ ОБОЛОЧЕК

Э. БЕЛЧКЕИ

### РЕЗЮМЕ

Статья выводит относящиеся к пространственной прямоугольной системе координат уравнения с постоянным равновесием на гнутые, постоянной толщины оболочки, по усмотрению нагруженные, имеющие форму общей кривой плоскости (кривые пластинки), используя так называемые редуцированные силы и моменты. Под редуцированными силами и моментами понимаются удельные проекционные силы и моменты, относящиеся к координатной плоскости  $xu$ . При помощи компонентов  $(\xi, \eta, \zeta)$  сдвига в направлении  $xu$  и  $z$  средней плоскости оболочки даются удельное растяжение и угловое искажение оболочки, а затем определяются условия возможности сложения оболочек. Принимая во внимание закон Гука, существующий в косоугольной системе координат, определяются удельные внутренние силы и моменты. После введения этих последних в уравнения равновесия, в конце концов получаются 3 дифференциальные уравнения, в которых имеется только 3 неизвестные функции  $(\xi, \eta, \zeta)$  сдвига средней плоскости. Решив это дифференциальное уравнение при соответствующих краевых условиях, можно определить функции сдвига и из них — внутренние силы.

Эту систему дифференциального уравнения можно применить и для гнутых оболочек любой формы и любой напряженности. Для подтверждения возможности применения результатов в статье дано довольно много примеров и выведены основные дифференциальные уравнения для различных задач (плоские пластинки, диски, оболочки мембраны, плоские оболочки, вмятины, гнутые оболочки круговой клепки и т. д.).



# CHEMISCHE ZUSAMMENSETZUNG UND THERMISCHE AUSDEHNUNG DER ZU DEN SOGENANTEN DUMETDRÄHTEN VERWENDETEN Fe-Ni-LEGIERUNGEN

E. G. FUCHS

EISENFORSCHUNGSINSTITUT, BUDAPEST

[Eingegangen am 16. November 1959]

## I. Einleitung

In die Glaskolben der Glühlampen, der Elektronenröhren und anderer vakuumtechnischer Erzeugnisse werden zur Durchleitung des elektrischen Stromes Metallfäden eingeschmolzen. Die Glaskörper müssen während der Fabrikation, während des Betriebes und bei Zimmertemperatur luftdicht

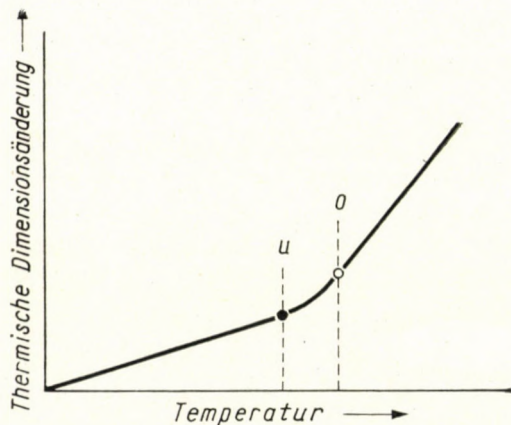


Bild 1. Schematische Ausdehnungskurve einer als Dumet verwendeten Fe-Ni-Legierung. Zwischen der unteren  $u$  und der oberen  $o$  Grenztemperatur der magnetischen Umwandlung ändert sich der Ausdehnungskoeffizient erheblich

schließen. Dieser luftdichte Verschluß kann nur dann gesichert werden, wenn die thermische Ausdehnung des Glases und des Metalls im Bereich zwischen der niedrigsten Lagertemperatur und der etwa bei 420–450° C liegenden Erweichungstemperatur des Glases bei allen Temperaturen annähernd gleich ist. Widrigenfalls springt das Glas an der Stelle, wo es sich mit dem Metall berührt, oder es löst sich vom Metall ab und die Gasfüllung, das Vakuum geht zugrunde [1, 2]. Die durchstoßenden Metallfäden werden schon seit langem aus sogenanntem Dumet gemacht, dessen Kern eine etwa 42% Nickel enthaltende Eisenlegierung ist. Dieser Fe-Ni-Kern wird von einem Kupfer-

überzug, der etwa 20–30% des Gesamtquerschnittes des Drahtes beträgt, umgeben, damit einerseits die größere thermische Ausdehnung des Glases angenähert, anderseits eine bessere elektrische Leitfähigkeit gesichert werde. Die Verwendung des Dumets wird dadurch erschwert, daß die in Frage kommenden Eisenlegierungen auch eine magnetische Umwandlung zeigen. Der Ausdehnungskoeffizient ändert sich nämlich um den Curie-Punkt plötzlich und erheblich. Bild 1 stellt die Verhältnisse angenähert dar. Da die Fe-Ni-Legierung sich nur bei Temperaturen unter dem anomalen Temperaturbereich gleichmäßig zusammenzieht, kann eine gleichmäßige Zusammenziehung parallel mit dem spröden Glas nur unter dem Curie-Punkt vor sich gehen. Es ist also wünschenswert, daß beim Einschmelzen die anomale Ausdehnung der Fe-Ni-Legierung oberhalb des Erweichungspunktes des Glases eintrete.

## 2. Zielsetzung

Die Eigenschaften der Fe-Ni-Legierungen hängen von der chemischen Zusammensetzung, in erster Linie vom Nickelgehalt ab. Die chemische Zusammensetzung der hergestellten Legierungen kann jedoch nur in gewissen Grenzen bei einem bestimmten Wert gehalten werden; ja, sie kann in Abhängigkeit von der Fabrikationseinrichtung, bzw. von dem angewandten metallurgischen Prozeß verschieden sein. Der Zusammenhang zwischen der chemischen Zusammensetzung und der thermischen Ausdehnung ist nicht hinreichend bekannt. Das wurde trotz jahrzehntelanger Erfahrungen wiederholt zur Ursache von Ausschuß, der zeitweise nur bei Fertigwaren in Erscheinung trat. Deshalb erwies es sich als notwendig, zu untersuchen, wie und in welchem Maße die chemische Zusammensetzung der in Frage kommenden Fe-Ni-Legierungen, d. h. der Ni-Gehalt, sowie die Menge der übrigen Begleitelemente und Verunreinigungen sich 1. *auf die Grenztemperaturen der mit der magnetischen Umwandlung zusammenhängenden Ausdehnungsanomalie* und 2. *auf die thermischen Ausdehnungskoeffizienten* auswirkt.

## 3. Untersuchungsmaterial

Für die Untersuchungen standen ursprünglich zehnerlei der industriellen Herstellung entstammende Fe-Ni-Legierungen zur Verfügung. Da dieses Material nicht einmal zur Orientierung ausgereicht hätte, wurden auch in einem Induktionsofen des Forschungsinstitutes Chargen von einigen kg angefertigt. Man war bestrebt, ihre chemische Zusammensetzung so zu variieren, daß mit ihrer Hilfe die Wirkung der einzelnen Elemente innerhalb der Grenzen ihres Vorkommens in dem industriellen Dumet studiert werden könne. Nach



Umschmieden wurden zu den Untersuchungen 32 solche Chargen verwendet, im ganzen wurden daher die in weiteren zu beschreibenden Zusammenhänge an 42 verschiedenen Untersuchungsmaterialien bestimmt. Die Daten des verwendeten Untersuchungsmaterials wurden in Tabelle 1 zusammengefaßt.

Tabelle 1

Bezeichnung der Probe	Chemische Zusammensetzung								Untere	Obere	Wärmeausdehnungs-koeff. (100—300 °C) $\alpha, 10^{-6}$ Grad
	C	Si	Mn	S	P	Cu	Ni	Cr	Grenztemperatur der Ausdehnungs-anomalie		
1.	0,03	0,01	0,44	0,014	0,006	0,06	43,8	ny	344	422	5,5
2.	0,03	0,01	0,30	0,012	0,010	0,35	43,9	ny	369	437	5,8
3.	0,03	0,65	0,37	0,015	0,004	0,07	43,0	0,02	317	379	5,3
4.	0,03	0,45	0,37	0,014	0,001	0,08	43,0	0,02	328	385	5,4
5.	0,05	0,67	0,44	0,014	0,007	0,08	42,9	0,12	314	373	5,3
6.	0,04	0,02	0,27	0,010	0,006	0,05	44,0	0,02	359	439	5,7
7.	0,05	0,02	0,22	0,008	0,111	0,03	43,8	0,01	356	439	6,3
8.	0,03	0,01	0,22	0,079	0,004	0,07	43,0	ny	355	404	5,3
9.	0,04	0,05	0,24	0,012	0,002	0,05	43,6	0,02	354	430	5,5
10.	0,06	0,01	0,14	0,012	0,013	0,05	43,4	0,02	360	433	5,7
11.	0,18	0,01	0,14	0,014	0,010	0,05	43,1	0,03	354	418	5,7
12.	0,09	0,01	0,22	0,011	0,003	0,04	43,2	ny	363	425	6,2
13.*	0,03	0,15	1,26	0,013	0,014	0,35	43,3	—	335	384	6,2
14.*	0,03	0,04	0,88	0,004	0,023	0,04	42,7	—	330	390	5,4
15.*	0,06	0,15	1,28	0,012	0,012	0,33	46,0	—	374	422	7,4
16.*	0,04	0,10	0,90	0,022	0,011	0,32	44,0	—	361	417	6,6
17.*	0,03	0,07	1,30	0,016	0,010	0,38	44,2	—	355	420	6,8
18.*	0,05	0,12	1,10	0,018	0,011	0,33	43,5	—	339	405	6,1
19.*	0,04	0,06	0,82	0,008	0,010	0,18	43,8	—	354	421	6,4
20.*	0,05	0,15	0,72	0,014	0,018	0,23	43,3	—	351	416	6,2
21.*	0,06	0,14	1,20	0,014	0,014	0,35	43,7	0,08	344	408	6,3
22.	0,05	0,01	0,18	0,010	0,002	—	43,3	—	374	424	6,4
23.	0,04	0,02	0,44	0,009	0,005	—	43,5	—	370	425	6,2
24.	0,04	0,02	0,64	0,012	0,011	—	42,5	—	364	429	6,2
25.	0,04	0,02	0,76	0,008	0,013	—	43,4	—	355	406	5,9
26.	0,06	0,07	0,33	0,012	0,005	—	39,9	—	323	378	4,4
27.	0,04	0,02	0,32	0,013	0,010	—	41,1	—	339	400	4,9
28.	0,05	0,02	0,28	0,010	0,003	—	42,0	—	362	417	5,7
29.	0,05	0,01	0,24	0,013	0,009	—	42,8	—	375	425	5,9
30.	0,04	0,02	0,94	0,008	0,009	—	43,7	—	368	419	6,3
31.	0,04	0,09	0,84	0,006	0,006	—	43,3	—	358	414	6,4
32.	0,05	0,10	0,80	0,010	0,009	—	43,5	—	352	416	6,4
33.	0,05	0,18	0,84	0,010	0,016	—	43,1	—	347	400	6,1
34.	0,05	0,08	0,91	0,006	0,005	—	42,4	—	332	413	5,6
35.	0,04	0,10	0,92	0,007	0,007	0,04	42,3	—	331	412	5,6
36.	0,05	0,03	0,88	0,006	0,014	0,19	42,2	—	331	413	5,3
37.	0,05	0,01	0,82	0,007	0,004	0,10	41,1	—	337	400	5,7
38.	0,05	0,06	0,82	0,007	0,010	—	40,9	—	318	383	5,1
39.	0,05	0,02	0,78	0,009	0,003	—	41,6	—	323	389	5,2
40.	0,06	0,01	0,68	0,009	0,015	—	41,4	—	338	392	5,3
41.	0,06	0,12	0,61	0,009	0,010	—	41,6	—	332	413	5,3
42.*	0,03	0,18	0,88	0,005	0,011	0,02	41,8	0,06	347	417	6,0

ny = Spuren.

\* Industrielle Charge.

#### 4. Das Untersuchungsverfahren

Die thermische Ausdehnung wurde mit einem optisch registrierenden Differentialdilatometer System CHEVENARD gemessen. Zu seinem Wärmeregler wurde eine Leitkurve hergestellt, die eine Erwärmungs- und Abkühlungsgeschwindigkeit von 2°/Minute sicherte. Die dilatometrischen Untersuchungen wurden zwischen etwa 20 und 550° C durchgeführt.\*

Als das zu den Untersuchungen im allgemeinen verwendete lichtempfindliche Papier daraufhin untersucht wurde, wie stark seine Dimensionen durch Entwickeln und Trocknen beeinflußt werden, ergab es sich, daß sich die Dimensionen des Papiers, ganz unberechenbar, auch um  $\pm 2-3\%$  ändern können. Das hätte aber die Untersuchungsergebnisse fälschen können. Deshalb wurden zur Registrierung Röntgenfilme verwendet; ihre Dimensionsänderungen von höchstens 1–2 Zehntel % können nämlich schon vernachlässigt werden.

Die Genauigkeit des Verfahrens wurde so im wesentlichen durch die Ungenauigkeit beim Ablesen der Temperaturen sowie durch die Ungenauigkeit der Koordinaten der Kurve begrenzt; der Fehler in den Temperaturwerten kann auf etwa  $\pm 5-10^\circ$  C geschätzt werden. Die Auswertungen sind natürlich auch durch die unvermeidlichen Mängel der chemischen Analysen belastet.

#### 5. Ergebnisse

##### 5.1. Die Grenztemperaturen der mit der magnetischen Umwandlung zusammenhängenden Ausdehnungsanomalie

5.1.1. *Die Wirkung des Gehaltes an Mn.* Zur Prüfung der Wirkung des Mangangehaltes wurden aus dem Untersuchungsmaterial solche Legierungen ausgewählt, in denen der Ni- und Si-Gehalt innerhalb möglichst enger Grenzen liegt, nämlich die Nummern 10, 11, 22, 12, 9, 6, 2, 1, 23, 20, 25, 32, 19, 31, 16, 18, 21, 13 der Tabelle 1 (nach steigendem Mangangehalt geordnet). Bild 2 zeigt die mit der Umwandlung zusammenhängenden Grenztemperaturen in einem Diagramm zusammengefaßt. Man kann feststellen, daß bei steigendem Mn-Gehalt der Bereich der anomalen Ausdehnung sich nach niedrigeren Temperaturen verschiebt, daß aber die Größe des Temperaturbereichs etwa gleich bleibt. Nach den auf Grund der Meßpunkte einzuzeichnenden Geraden fällt die untere Grenztemperatur der etwa 43–44% Nickel enthaltenden Eisenlegierungen von 365° C auf 345° C ab, die obere Grenztemperatur hingegen von 430° C auf 410° C, sofern der Mangan-

\* Herrn Dipl. Physiker Szabolcs SZENTPÉTERY danke ich an dieser Stelle für seine liebenswürdige Mitwirkung bei der Auswertung der dilatometrischen Aufnahmen.

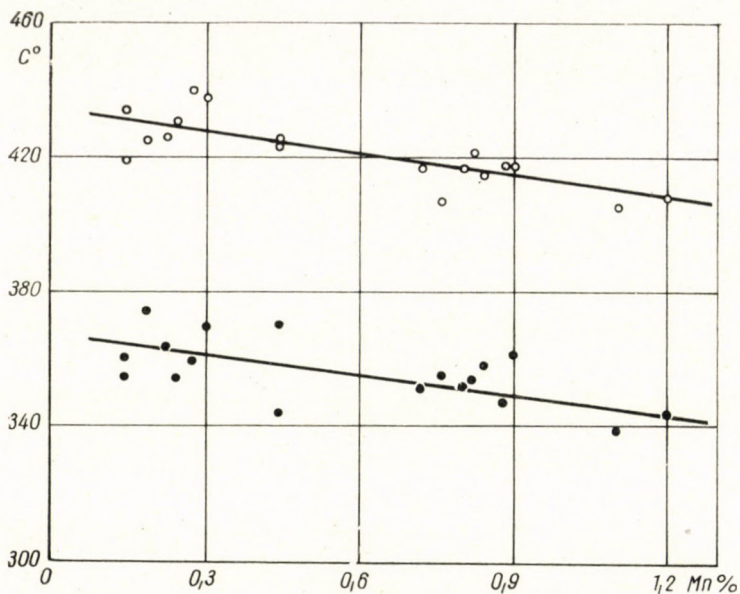


Bild 2. Wirkung des Mn-Gehaltes auf die untere (●), bzw. obere (○) Grenztemperatur der mit der magnetischen Umwandlung zusammenhängenden thermischen Ausdehnungsanomalie

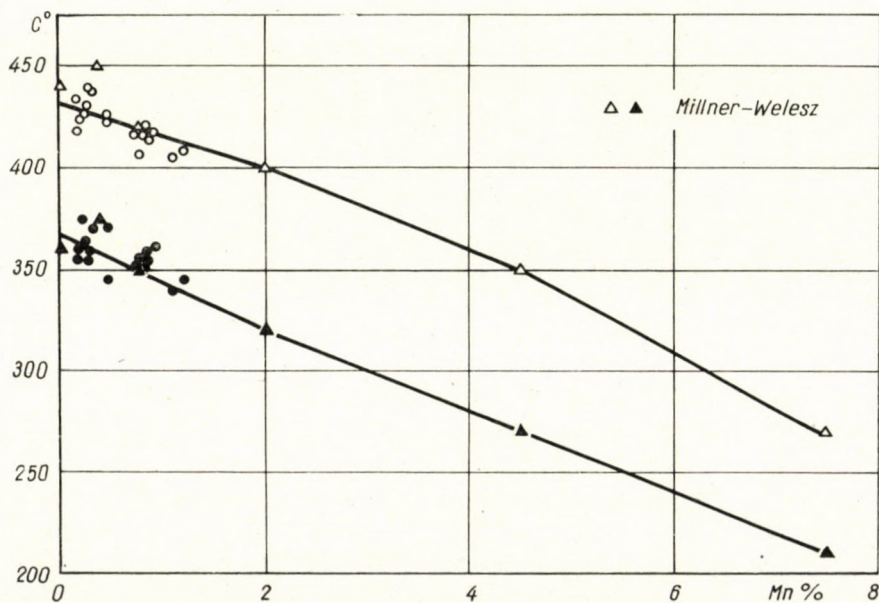


Bild 3. Die Werte des Diagramms Bild 1 und die Millner-Welesz-schen Werte [2] in ein gemeinsames Diagramm zusammengefaßt

gehalt von 0,1 auf 1,1% Mn-Gehalt steigt. Wenn also der Mn-Gehalt um 0,1% steigt, fallen die Grenztemperaturen um etwa  $2^{\circ}\text{C}$ .

Vor einigen Jahren unternahmen T. MILLNER und R. WELESZ Untersuchungen an Legierungen ähnlicher Zusammensetzung, aber mit viel größerem Mn-Gehalt [2]. Wenn man ihre Ergebnisse mit den jetzigen Ergebnissen in ein einheitliches Diagramm zusammenfaßt, zeigt es sich, daß sich die Grenztemperaturen der thermischen Ausdehnungsanomalie als Funktion des Mn-Gehaltes einander gut anschließen (Bild 3); dieser Umstand beweist ferner, daß der im ursprünglichen Diagramm der erwähnten Verfasser vorhandene, aus der Reihe fallende Wert nicht durch den Mn-Gehalt verursacht wird.

5.1.2. *Die Wirkung des Gehaltes an Ni.* Zur Feststellung der Wirkung des Ni-Gehaltes wurden alle untersuchten Legierungen verwendet, ausgenommen Nr. 3, 4 und 5 mit hohem Si-Gehalt. Da die einzelnen Proben einen sehr abweichenden Mn-Gehalt aufwiesen, erschien es als nützlich und möglich, die gemessenen Temperaturen mit Hilfe der im vorangehenden beschriebenen Wirkung des Mn-Gehaltes zu korrigieren. Die Korrektur wurde so vorgenommen, daß bei jeder Legierung für je 0,1% Abweichung des Mn-Gehaltes von dem nominellen Mn-Gehalt von 0,9% je  $2^{\circ}\text{C}$  von dem gemessenen Wert sinngemäß abgezogen, oder ihm zugerechnet wurden.

Bild 4 enthält die so korrigierten Werte. Trotz der verschiedenen Nebenwirkungen läßt sich die übrigens bekannte Tatsache gut ablesen, daß ein höherer Ni-Gehalt auch eine höhere Grenztemperatur bedingt. Den Geraden nach, die auf Grund der Messungsergebnisse eingezeichnet werden können, steigt die untere Grenztemperatur der Ausdehnungsanomalie der Fe-Ni-Legierungen mit 0,9% Mn von  $314^{\circ}\text{C}$  auf  $368^{\circ}\text{C}$ , die obere Grenztemperatur von  $375^{\circ}\text{C}$  auf  $438^{\circ}\text{C}$ , sofern der Ni-Gehalt von 40 auf 45% steigt. Wenn also der Ni-Gehalt um 1% steigt, steigen die Grenztemperaturen um rund  $11^{\circ}\text{C}$ .

5.1.3. *Die Wirkung des Si-Gehaltes.* Um die Wirkung des Si-Gehaltes zu untersuchen, wurden die Grenztemperaturen dem oben beschriebenen Prinzip gemäß auf einen nominellen 0,9%igen Mn-Gehalt, bzw. 42%igen Ni-Gehalt korrigiert, damit die störenden Wirkungen des Mn-Gehaltes und des Ni-Gehaltes möglichst ausgeschaltet werden. Die so erhaltenen Werte wurden im Bild 5 zusammengefaßt. — Die Wirkung des Si-Gehaltes läßt sich auf Grund der zur Verfügung stehenden Angaben schwer eindeutig feststellen, weil einesteils sich nur wenige auf einen größeren Si-Gehalt beziehen, andernteils die Punkte mit kleinem Si-Gehalt auch nach der Korrektur erheblich streuen. Letztere Erscheinung kann außer durch die verschiedenen, nicht zu eliminierenden Nebenwirkungen auch durch die schon erwähnte Ungenauigkeit der Analyse, bzw. durch die Ungenauigkeit der dilatometrischen Messungen gefördert werden. Wenn auch alle diese Umstände in Betracht gezogen werden, scheint es doch, als ob die Zunahme des Si-Gehaltes von

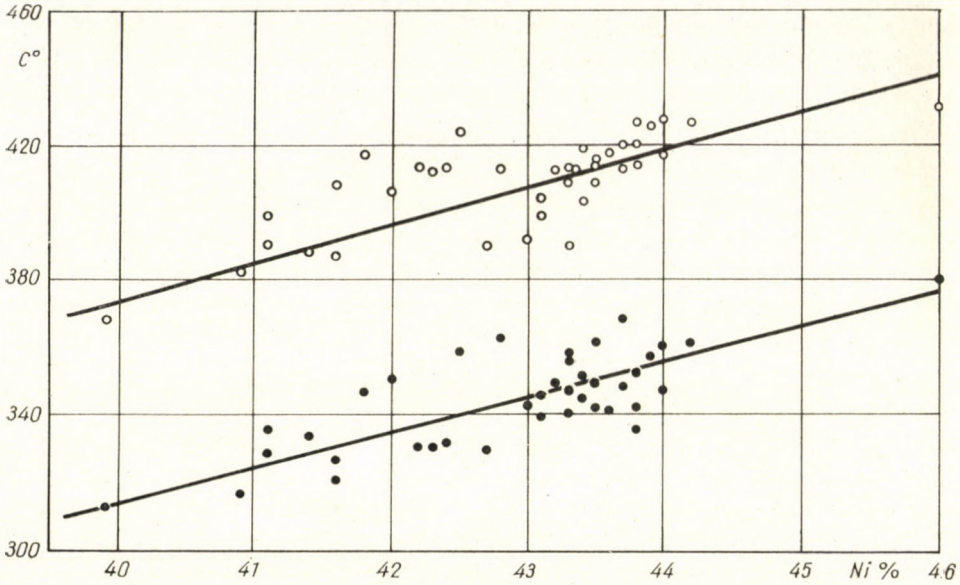


Bild 4. Wirkung des Ni-Gehaltes auf die untere (●), bzw. obere (○) Grenztemperatur der mit der magnetischen Umwandlung zusammenhängenden thermischen Ausdehnungsanomalie, korrigiert auf einen nominellen Mn-Gehalt von 0,9%

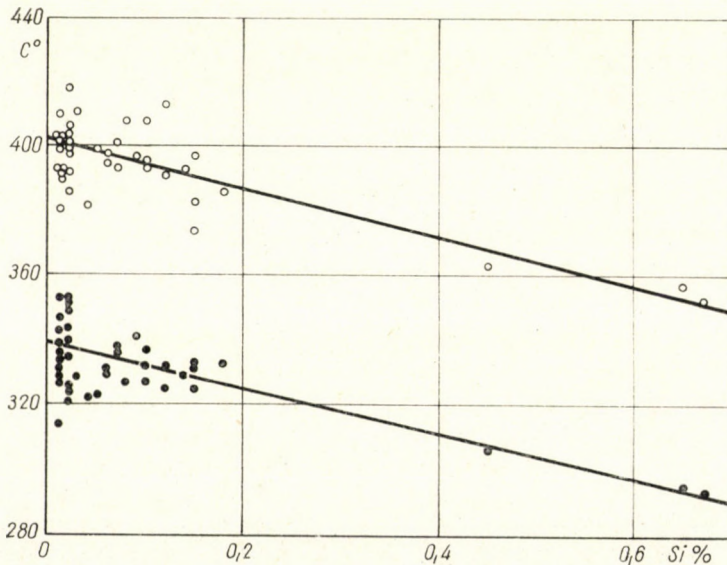


Bild 5. Wirkung des Si-Gehaltes auf die Grenztemperaturen, korrigiert auf einen nominellen Mn-Gehalt von 0,9% und einen Ni-Gehalt von 42%

0,0% auf 0,7% die obere Grenztemperatur der etwa 42% Ni und 0,9% Mn enthaltenden Eisenlegierungen von 402° C auf 350° C, die untere Grenztemperatur von 340° C auf 290° C ermäßigte. Demgemäß bewirkt 0,1% Si eine Verminderung der Grenztemperaturen um rund 7° C, d. h. um 3,5-mal mehr als die gleiche Menge Mn.

5.1.4. *Die übrigen Begleitelemente bzw. Verunreinigungen* ändern sich in den untersuchten Proben so wenig, daß ihre Wirkung nicht abgesondert werden kann, teils wegen der bedeutend größeren Wirkungen der oben beschriebenen Bestandteile, teils wegen der ziemlich großen Unsicherheit der Messungen. Deshalb ist es wahrscheinlich, daß ihr Einfluß in der Praxis vernachlässigt werden kann.

Es möge bemerkt werden, daß die Eigenschaften der einzelnen Fe-Ni-Legierungen durch die Umstände der Herstellung nur wenig beeinflusst wurden; trotz der vollkommen abweichenden Technologien der Herstellung zeigte sich zwischen den industriellen und den Untersuchungschargen eigener Produktion kein wesentlicher Unterschied.

## 5.2. Die Veränderung der Ausdehnungskoeffizienten

5.2.1. *Die Wirkung des Nickels.* Zum Studium des Zusammenhanges zwischen dem Ni-Gehalt und den durchschnittlichen Ausdehnungskoeffizienten im Bereich von 100–300° C wurde das Diagramm Bild 6 zusammengestellt. Es läßt sich feststellen, daß die einzelnen Punkte sehr streuen; man kann aber im allgemeinen erkennen, daß die Werte der Ausdehnungskoeffi-

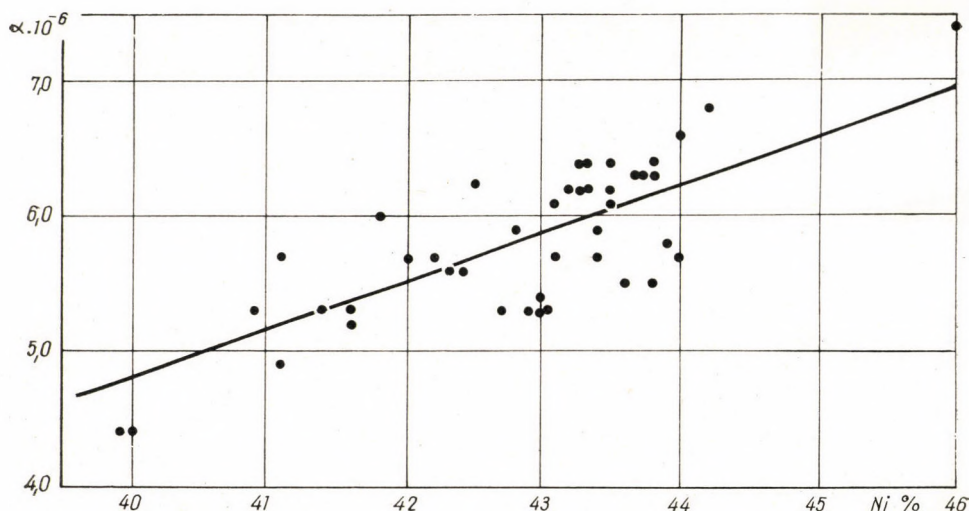


Bild 6. Wirkung des Ni-Gehaltes auf den durchschnittlichen Ausdehnungskoeffizienten der untersuchten Legierungen zwischen 100–300° C

zienten in Übereinstimmung mit der Fachliteratur innerhalb der untersuchten Grenzen mit steigendem Ni-Gehalt im wesentlichen linear anwachsen. Wenn man die Näherungsgerade zu Grunde legt, die in den Punkthaufen eingezeichnet werden kann, scheint bei einer Erhöhung des Ni-Gehaltes von 40% auf 45% der Ausdehnungskoeffizient von  $4,8 \cdot 10^{-6}$  auf  $6,6 \cdot 10^{-6}$  je Grad zu steigen.

5.2.2. *Die Begleitelemente und die Verunreinigungen* verändern mit ihren in den untersuchten Proben vorhandenen Mengen im allgemeinen den Ausdehnungskoeffizienten nur wenig. Es konnte aber nicht näher bestimmt werden, welches Element auf welche Weise und in welchem Maße wirkt, weil die Zahl der Proben gering und die der Verunreinigungen groß war, und weil die Untersuchungen zu diesem Zweck zu ungenau waren.

## 6. Folgerungen

Die Untersuchungen ergaben, daß der Temperaturbereich der mit der magnetischen Umwandlung verbundenen thermischen Ausdehnungsanomalie der in dem Dumet üblichen Fe-Ni-Legierungen nicht über dem Erweichungspunkt des Glases liege. Ferner zeigte es sich, daß die Wirkung einiger Legierungsbestandteile sowohl auf die Grenztemperaturen wie auch auf die Ausdehnungskoeffizienten im Wesen bestimmt werden kann. Es ist aber offenbar, daß die Verhältnisse viel verwickelter sind, als daß man nur von der chemischen Zusammensetzung allein verläßlich auf die konkreten Dimensionsänderungen einer gegebenen Legierung folgern könnte, um von den übrigen Umständen, z. B. Ungenauigkeit der Analyse, Wirkung der Fabrikationstechnologie nicht zu reden. Deshalb können die Ergebnisse von Punkt 5 bei den Fabrikations- und Übernahmeverordnungen der Fe-Ni-Legierungen mit gewünschter thermischer Dimensionsänderung nur vorbehaltlich der beschriebenen Unsicherheiten verwendet werden. Zur Herstellung von Dumetdrähten mit Kupferüberzug, deren Ausdehnungseigenschaften denen des Glases am ähnlichsten sind, scheint es am zweckmäßigsten, auch fernerhin jede Charge der Fe-Ni-Legierung mit dem Dilatometer zu prüfen. Das ist viel billiger, einfacher und schneller durchzuführen, als die chemische Analyse auf zahlreiche Komponenten mit der übrigens notwendigen Genauigkeit, die dennoch nicht hinreichend ist.

Die übliche dilatometrische Untersuchung gibt aber nur für die longitudinale Dimensionsänderung der Fe-Ni-Legierung Werte, vom Dumet mit Kupferüberzug sagt sie unmittelbar nichts aus.

Aus den beschriebenen Untersuchungen ergibt sich also auch, daß es zur verläßlichen Herstellung von Dumetdurchleitungsdrähten mit Kupferüberzug nicht genügt, eine entsprechende chemische Zusammensetzung richtig vorzuschrei-

*ben und diese einzuhalten. Dazu ist auch die Anwendung eines Verfahrens unerlässlich, mit dem man für jede Charge auf Grund der gemessenen Werte der thermischen longitudinalen Dimensionsänderungen der Fe-Ni-Legierungen sicher feststellen kann, welche Dicke der Kupferüberzug haben muß, damit der Draht den Dilatationseigenschaften des Glases am besten entspreche.*

#### SCHRIFTTUM

1. T. MILLNER: Vasnikkel ötvözetek hőkiterjedési tulajdonságainak összefüggése mágnese sajátságokkal. (Der Zusammenhang zwischen den thermischen Ausdehnungseigenschaften und den magnetischen Eigenschaften von Eisen-Nickel-Legierungen.) Műnői Továbbképző Intézet. 1954. 2402. sz. Budapest.
2. T. MILLNER, R. WELESZ: Effect of Manganese Content on the Thermal Expansion Coefficient and Magnetic Properties of the So-Called Dumet Iron-Nickel Alloys. (Einfluß des Mangangehaltes auf den thermischen Ausdehnungskoeffizienten und auf die magnetischen Eigenschaften der sog. Dumet Eisen-Nickel-Legierungen.) Acta Technica, 1956. Bd. 14. Budapest. S. 279—291.

#### ZUSAMMENFASSUNG

In der Vakuumtechnik sind gewisse Fe-Ni-Legierungen im Gebrauch, um Strom durch Glas zu leiten. Es wurde die Wirkung der legierenden bzw. begleitenden Elemente auf die Grenztemperaturen der mit der magnetischen Umwandlung zusammenhängenden Ausdehnungsanomalie dieser Fe-Ni-Legierungen, ferner auf den durchschnittlichen Ausdehnungskoeffizienten zwischen 100—300° C untersucht, und zwar innerhalb der Grenzen der zu diesen Zwecken üblichen chemischen Zusammensetzung.

Es war zwar möglich, die Wirkung einiger Elemente (Ni, Mn, Si) im wesentlichen festzustellen, dennoch kann man die thermischen Dimensionsänderungen der einzelnen Legierungen aus der chemischen Zusammensetzung allein nicht bestimmen. Zur verlässlichen Herstellung der stromdurchleitenden Dumetdrähte mit Kupferüberzug reicht also eine richtige Festsetzung der entsprechenden chemischen Zusammensetzung und ihre Einhaltung nicht aus. Dazu ist auch die Anwendung eines Verfahrens notwendig, mit dem man auf Grund der gemessenen thermischen longitudinalen Dimensionsänderung der Fe-Ni-Legierung für jede Charge die Dicke des Kupferüberzuges feststellen kann, damit die Ausdehnung der so hergestellten Drähte den Eigenschaften des Glases am besten entspreche.

#### CHEMICAL COMPOSITION OF FeNi ALLOYS USED FOR SO-CALLED DUMET WIRES AND THEIR THERMAL DIMENSIONAL CHANGE

E. G. FUCHS

#### SUMMARY

Vacuum engineering makes use of certain FeNi alloys for carrying current through glass. The effect of alloying, resp. accompanying elements produced on the extreme temperatures of heat expansion anomaly connected with the magnetic transformation of these FeNi alloys and on the mean heat expansion coefficient between 100 and 300° C was examined. The usual composition limits of the alloys used for this purpose were kept during this examination.

It was possible to essentially determine the effect of some elements (Ni, Mn, Si), yet the thermal dimensional changes of some alloys could not be specified simply by their chemical composition. For this reason, it is not sufficient for the reliable production of copper-clad current-carrying Dumet wires to be correctly determined and to keep to the prescriptions concerning the adequate chemical composition. In this case the application of a method



becomes necessary which permits the specification for each charge — on the basis of the thermal longitudinal change of dimension of the FeNi alloy — the copper cover breadth of the wires with a dilatation the most adequate for the characteristic of glass.

### COMPOSITION CHIMIQUE ET DILATATION DES ALLIAGES FeNi EMPLOYÉS POUR LES FILS «DUMET»

E. G. FUCHS

#### RÉSUMÉ

Certains alliages FeNi sont utilisés par la technique du vide poussé, pour la conduction du courant à travers le verre. On a examiné l'effet que les éléments d'alliage et les éléments secondaires ont, d'une part, sur les températures limites de l'anomalie de dilatation, consécutives à la transformation magnétique de ces alliages, et d'autre part sur le coefficient moyen de la dilatation entre 100° et 300° C. L'examen est renté entre les limites des compositions habituelles des alliages FeNi en question.

Si l'effet de certains éléments a pu être fixé pour l'essentiel (Ni, Mn, Si), il n'est pas possible de déterminer les variations de la dilatation de chaque alliage à partir de sa seule composition chimique. Pour la fabrication des fils conducteurs «Dumet» à revêtement de cuivre, il ne suffit donc pas de bien établir et d'observer les prescriptions relatives à la bonne composition chimique. Il y faut aussi une méthode permettant de déterminer, pour chaque dose, l'épaisseur du revêtement de cuivre à donner aux fils dont la dilatation répondra le mieux aux caractéristiques du verre, cette détermination se faisant à partir des données mesurées de la dilatation longitudinale de l'alliage.

### ХИМИЧЕСКИЙ СОСТАВ И ТЕПЛОВОЕ ИЗМЕНЕНИЕ РАЗМЕРОВ Fe-Ni-СПЛАВОВ ИСПОЛЗУЕМЫХ ДЛЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ Т. Н. ДЮМЕТНЫХ ПРОВОЛОК

Э. Г. ФУКС

#### РЕЗЮМЕ

В вакуумной технике для токопроводки используются определенные железо-никельные сплавы. Исследовано действие легирующих и сопровождающих элементов на предельные температуры аномалии теплового расширения, связанного с магнитным преобразованием этих железо-никельных сплавов, а также на средний коэффициент теплового расширения в пределах температур 100—300 °C, при этом в случае обычных пределов по составу используемых для этой цели сплавов.

Действие отдельных элементов можно было определить (Ni, Mg, Si) по существу, все-таки только по химическому составу нельзя определить изменения размеров различных сплавов от температуры. Следовательно, для надежного изготовления токоведущих дюметных проволок с медной оболочкой недостаточно правильное определение ТУ на соответствующий химический состав и их выдерживание. Для этого необходимо применить также и такой метод, при помощи которого на основе данных замеров изменения длины от теплового воздействия представляется возможным определить для каждой плавки толщину изготавливаемой медной оболочки проволок, наиболее подходящих по дилатации для свойств данной плавки стекла.



# THE MOVING OF OVERHEAD CONDUCTORS UPON THE EFFECT OF WIND

O. P. GESZTI D. ENG. SC. and Gy. LUDVIG

INSTITUTE FOR POWER RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received February 1, 1960]

## Introduction

At the design of overhead lines the shaping of the tower construction and the determination of the distance between the phase conductors and the shielding ground conductors are problems claiming a very important and complex economic and technical decision. The distance between phase conductors and ground conductors might be influenced by electric and mechanical factors; it is the latter this study is going to discuss now.

Due to economic reasons, the mutual distance of the conductors is tried to be selected as small as possible since thus the weight of the towers and consequently also the specific expenses of the conductor might be considerably reduced. Extremely small distances could be obtained in the case the conductors were to stay invariably at stillstand and were to change their sag — though to an identical extent on all the conductors — upon the effect of temperature only. Sleet itself may cause difficulties since it might occur that while one of the conductors becomes metallic, the other one will still be covered with sleet, in consequence of which there will no longer prevail the ideal condition according to which phase conductors form parallel chain curves with each other and approximate ones with the shielding wires. Taking thus only static conditions into consideration, conductors might approach each other considerably.

If ice drops from one of the conductors suddenly, the conductor would spring up (galloping) and might make contact with another one. (In the case of high-voltage lines short circuit might take place between the phases without metallic contact of the phase wires, too, provided the conductors got closer to each other than the corresponding air gap which withstands the 50 cycles system voltage.)

The aforesaid slow and quick sag-changes do not deflect the conductors from the vertical plain (which is longitudinal to the conductor) and are of secondary significance from the point of view of determining the mutual distance of conductors. Much more important than the above motions are those, which are perpendicular to the line, as a result of the wind. Depending from the intensity of the wind and its changes in time and from other initial conditions and characteristics, this motion may be of several types. As far as we

know, no precise mathematical solution has yet been found in connection with this problem, since it is very complicated and presents a number of mathematical difficulties.

In the beginning, phase distances were determined on the basis of formulae indicated by large construction firms. The empirical formulae present cabalistic functions between the minimal phase distance, the system voltage, the sag and the specific weight of the conductor. Formulae of this kind have already been published in several overhead line standards as well.

In Hungary it was the late L. VEREBÉLY, Correspondent Member of the Hungarian Academy of Sciences, who has first attempted to substitute swing conductors by a physical pattern in order to be able to determine phase dis-

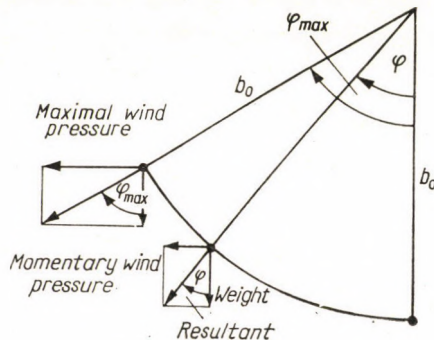


Fig. 1

tances more concretely [1]. According to this method the conductors are substituted by pendulums, the length of which is equal to the maximal sag. (See Fig. 1.) The maximum amplitude of the pendulum is indicated by the direction of the resultant of the conductor weight and of the standard maximal wind intensity. According to Verebely's method conductors are moving along on such circular arcs the radii of which are the length of the pendulums (maximal sag) and the swing goes out to the maximal angle. According to his theory conductors cover this circular course on basis of the laws valid for pendulum motion.

He determined the position of the pendulums in the  $\frac{1}{12}$  parts of the quarter of the whole swing time. Then he drew a diagram where he indicated the minimal distance having taken place with the different phase shifts of the conductors examined; thus a diagram can be obtained for the different phase shifts and one is enabled to get the lowest value of the minimal distances. If this is lower than the safety distance stipulated for the given voltage, the danger of collision is to be reckoned with. One of the greatest merits of this method is that it had been the first to have ever tried to present a physical picture about the process of collision.

Á. MATICS has developed this method [2]. Though not adding to the physical picture he replaces the construction process with a mathematical method and came to some general conclusions as well.

### The curve of static deviation

The question arises: to what extent do the overhead conductors approximate the pendulum-like motion in reality? The conductor might swing in this way if it is deviated from its normal, balanced state and is left to swing freely. If the angle of deviation is not too big, the conductor would actually swing

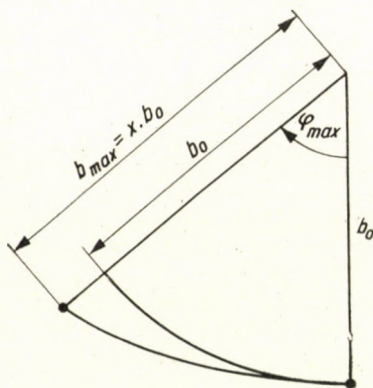


Fig. 2

with an almost constant sag. The maximal swing angle is in this case small, so it is not characteristic and can therefore by no means be applied to investigate the problem of the collision of overhead conductors. If it is the maximal wind intensity indeed, which determines the maximal angle of deviation, we will have to suppose that for a time wind had blown out the conductor into this position. In this case, however, the conductor is stressed not only by the distributed load of the weight but also by the resultant of the wind pressure plus the weight. The value of this resultant is — particularly with aluminium conductors — considerably bigger than that of the original weight. As a consequence, the sag of the conductor in the blown-out condition will be bigger. If the intensity of the wind is slowly decreasing from this extreme position of the conductor, the angle of deviation of the conductor would keep on decreasing too, until it gets back to its normal suspended position. So we can't speak of swings. In this case, different sags belong to different wind intensities (to the different angles of deviation). So the lowest point of the conductor does not move on a circular arc but rather on a spiral-like curve, (see Fig. 2) and

since in this case there are no swings, the concept of swing-time or phase lag time can not be used. It could be stated, however, that the plains of the blown out and vertically hanging conductors include an angle with each other, which angle is a function of the intensity of the wind.

The equation of the above-mentioned spiral was given by the author in 1948 [3].

The symbols to be used are the following:

- $\beta_0$  the percentual sag of the conductor of a given condition in windstill position
- $\beta$  the percentual sag in the blown-out position of the conductor
- $a$  span [m]
- $\gamma_0$  the specific weight of the metallic conductor [kg/dm<sup>3</sup>]
- $\gamma$  the virtually increased specific weight of the blown-out conductor [kg/dm<sup>3</sup>]
- $E$  the elasticity modulus of the material of the conductor [kg/cm<sup>2</sup>]
- $\varphi$  the angle of the plain of the blown-out conductor included with the longitudinal perpendicular plain of the conductor (its maximum to be calculated from the maximal standard wind intensity).

The basic equation of sag of the conductors is valid in the case, too, temperature does not change at all,  $t = t_0$ ;  $\Delta t = 0$ . The apparent specific weight of the conductor blown out by the wind, is:

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{\cos \varphi} \quad (1)$$

where  $\varphi$  stands for a momentary angle position. (Fig. 1.)

If  $\Delta t = 0$ , the equation of equilibrium is (2):

$$\frac{267}{10^6} (\beta^2 - \beta_0^2) + 1.25 \frac{a}{E} \left( \frac{\gamma_0}{\beta_0} - \frac{\gamma}{\beta} \right) = 0. \quad (2)$$

(Obviously the thermal expansion coefficient is not included in the formula.) If equation (2) is thrown according to powers of  $\beta$  and taking also (1) into consideration:

$$\beta^3 + \beta \left( \frac{1.25 \cdot 10^6}{267} \frac{a}{E} \frac{\gamma_0}{\beta_0} - \beta_0^2 \right) - \frac{1.25 \cdot 10^6}{267} \frac{a}{E} \frac{\gamma_0}{\cos \varphi} = 0 \quad (3)$$

( $\varphi$  is always smaller than  $90^\circ$ , thus the equation is valid).

If the material of the conductor ( $\gamma_0$  and  $E$ ) and its other characteristics ( $a$  and  $\beta_0$ ) are known, a percentual sag of  $\beta$  belonging to any  $\varphi$  angle can be calculated on the basis of the equation (3). If  $\varphi = 0$ , i. e.  $\cos \varphi = 1$ , the solution of equation (3) is  $\beta = \beta_0$ , meaning that no elongation is present.

It seems to be more practical to write up the equation (3) with regard to the comparative elongation  $\frac{\beta}{\beta_0} = x$ .

$$x^3 + x \left( \frac{1.25 \cdot 10^6 \cdot a \gamma_0}{267 \cdot E \cdot \beta_0^3} - 1 \right) - \frac{1.25 \cdot 10^6}{267 E} \frac{a}{\beta_0^3} \frac{\gamma_0}{\cos \varphi} = 0 \quad (4)$$

Let be

$$A = \left( \frac{1.25 \cdot 10^6}{267} \frac{\gamma_0}{E} \right) \frac{a}{\beta_0^3} = A' \lambda(a, \beta_0) \quad (5)$$

Thus the new form of equation (4) is:

$$x^3 + x(A - 1) - \frac{A}{\cos \varphi} = 0. \quad (6)$$

In equation (5) the material constant  $A'$  is a function only of  $\gamma_0$  and  $E$ .

The values of  $A'$ , pending the material of the conductor is:

cadmium copper, copper, bronze	.....	0.0410	}	(I.)
aluminum	.....	0.0234		
aludure, aldrej	.....	0.0219		
A.C.S.R.	.....	0.0222		
steel	.....	0.0205		

In the case of a given  $a$  and  $\beta_0$  the value of the function  $\lambda(a, \beta_0)$  is to be obtained from the diagram illustrated by Fig. 3. Knowing  $A'$  and  $\lambda$ ,  $A$  can be calculated from (5) and can be substituted in equation (6) which affords a possibility to solve it for any  $\varphi$  and any  $\cos \varphi$ , respectively. The solution of equation (6) is represented by the diagram illustrated on Fig. 4.

The procedure will be still much simpler if we have a Truxa diagram at our disposal [4]. Starting from a given windstil sag point, we will look for the  $a \cdot \gamma$  value, rated with a  $\gamma$  value corresponding to the standard wind pressure (this is to be reached through an isotherm) and in this way we can immediately read the required  $\beta$  value in the new point and so also  $x$  can be calculated. Apart from its quickness, the other advantage of this method is the fact that the value of the mechanical stress can be read directly.

If we wish to construct the curve of spiral exactly, we have to assume different  $\varphi$  angles up to the maximal  $\varphi$  angle to be calculated from the standard wind intensity. In this case we must solve our equation both for  $x$  and  $\beta$  which belong to them. Any point of the curve of the static deviation can be obtained in this way (Fig. 2).

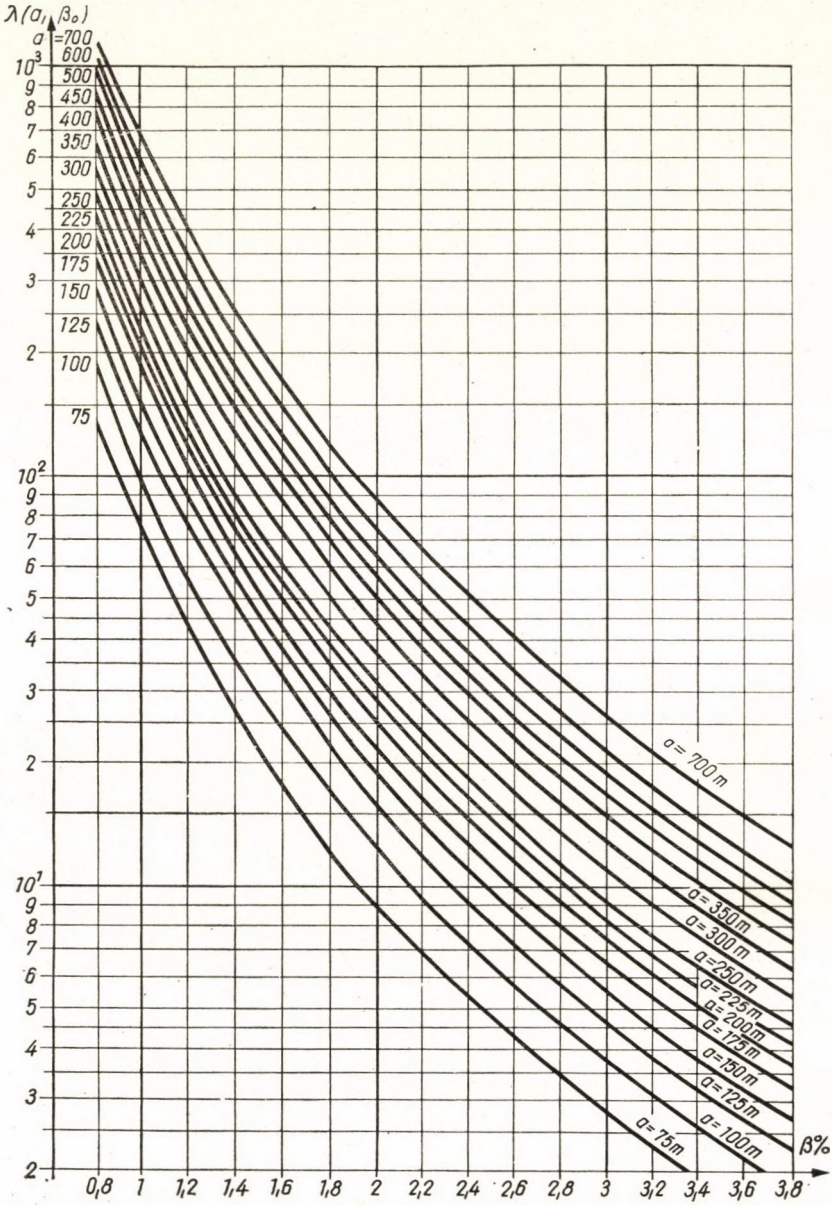


Fig. 3

It can be proved that it is sufficient to calculate that  $x$  value only which belongs to the maximal  $\varphi$  owing to the fact that the curve might be substituted by such a circular arc that passes through the points of sags corresponding to the maximal wind intensity and stillstand (Fig. 5). The formula of cosine



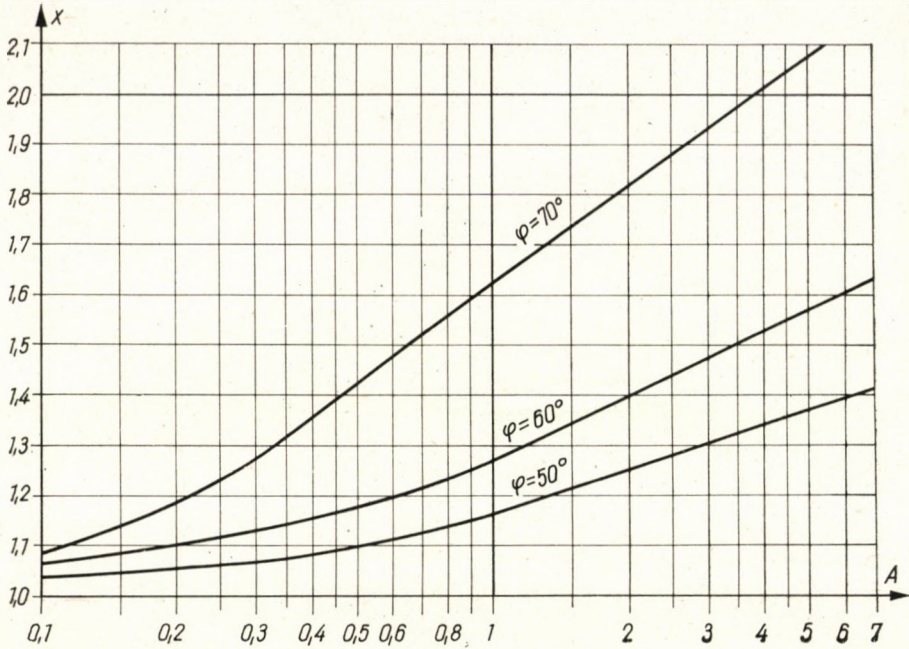


Fig. 4

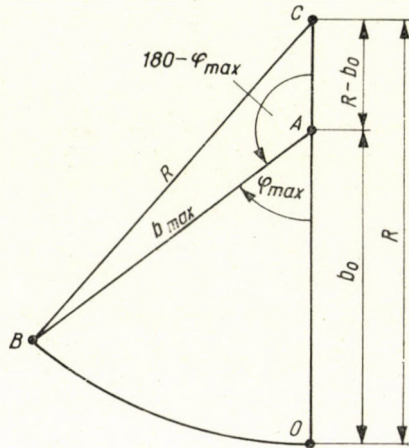


Fig. 5

can be applied to the  $ABC$  triangle of the figure:

$$R^2 = (R - b_0)^2 + (xb_0)^2 - 2(R - b_0)xb_0 \cos(180 - \varphi). \quad (7)$$

After throwing the equation:

$$R = \frac{b_0}{2} \frac{1 + x^2 - 2x \cos \varphi}{1 - x \cos \varphi}. \quad (8)$$

This circular arc with radius  $R$  might substitute — with an exactitude corresponding to practical requirements — the course of the lowest point in the case of such a wind, the intensity of which is steadily on the increase from 0 to the maximum. If the wire is suspended onto a suspension insulator with a length  $s$ , in principle the swing plain determined by the rigid centre-line of the suspended insulators would include an angle with the plain of the deviated conductor. (See Fig. 6.)

Since the consideration of this angle difference affects our calculations in the second order of magnitude only, we shall come to an acceptable result

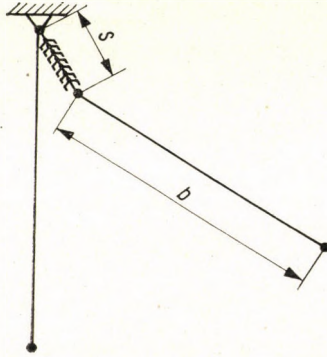


Fig. 6

in the case too, if it is presumed that both the swinging conductor and the insulator are on the very same plain. Thus the value of the resultant  $x$  is:

$$x_{\text{resultant}} = \frac{xb_0 + s}{b_0 + s} = \frac{x + \frac{s}{b_0}}{1 + \frac{s}{b_0}} = \frac{x + \sigma}{1 + \sigma} \quad (9)$$

where

$$\sigma = \frac{s}{b_0} . \quad (9a)$$

Knowing the resultant  $x$ ,  $R$  can be calculated.

Summing up our results it can be stated that if the intensity of the horizontal wind perpendicular to the line is increasing from 0 to the maximum gradually, the course of the lowest point of the conductor can be determined, i. e. it can be substituted by a corresponding circular arc section with an exactitude sufficient for practical purposes. If the position of two neigh-

bouring conductors is to be examined, it will be found that such curves can be drawn for both of them. It should not be neglected however, that these curves are of a statical character and therefore at an identical time both conductors are at such a point on their own characteristic curve that corresponds to the identical wind pressure. If the cross section of both conductors is the same and also their material is identical, the conductors will have an identical angle position. If the intensity of the wind changes, the conductor will take up a new position on the statical curve. This new state of equilibrium will correspond to the new wind intensity. This applies to very slow changes only. If the change is finite and sudden, the elongation and the angle position of the conductor will undergo changes as well; the conductor will no longer move away on the curve mentioned above, but will step out of it like it had done in the case of galloping (the case when ice falls off the conductors).

Summing up, it can be pointed out that if the change is extremely slow, the lowest point of the conductor will stay on the statical curve but there will be no pendulum-like swing, since this time the motion is not caused by the potential energy being transformed into kinetic energy but by the change in wind intensity which is completely independent from either of them. If, however, the change in wind intensity is taking place suddenly, the lowest point of the conductor would not follow the statical curve — as it is going to be proved hereunder.

### The characteristics of the dynamic state

Let us suppose that upon the effect of the wind the conductor is already in a blown-out condition. Let the angle of deviation be:  $\varphi$  (usually  $\varphi_{\max}$ ). With such a condition of the conductor let us investigate that — pessimistic — case when the wind stops blowing all of a sudden, it ceases shocklike. In practice such a case might occur and if the problem is approached in this way that would considerably facilitate the drawing of the theoretical conclusions as well. In order to come to a suitable physical picture as well as to simplify calculations, we substitute the overhead conductor by an  $M_r$  mass suspended on a spring. This mass is moving in a plain which is perpendicular to the axes of the conductor. (Fig. 7.)

Our subsequent task is to determine the main characteristics of our model for a given power transmission line. In the course of our calculations significant simplifications are to be performed but should we fail to do so, our problem could not be solved in such a way as would meet practical requirements.

First of all we determine the reduced length of the power transmission line — a physical pendulum in this case — which has been suspended on suspension insulators with a length  $s$ . (The span is  $a$ .) On Fig. 7 it is the value of

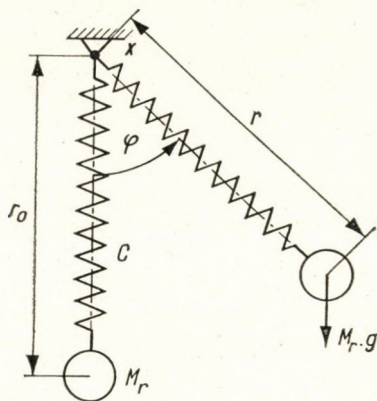


Fig. 7

$r_0$  which represents the reduced length of the physical pendulum performing small deviations and maintaining its length all the time. According to our supposition the moment of inertia of the insulator chain on the  $x$  axis is negligible as compared to the moment of inertia of the conductor. The shape of the conductor is going to be considered as that of a parabola of the second order (Fig. 8).

In this way

$$y = s + b_0 - kx^2 \quad (10)$$

on the  $x = \frac{a}{2}$  place  $y = s$ , thus  $k = \frac{4b_0}{a^2}$ .

Taking into consideration (9a), where  $\sigma = \frac{s}{b_0}$

$$y = b_0 \left( 1 + \sigma - \frac{4x^2}{a^2} \right). \quad (11)$$

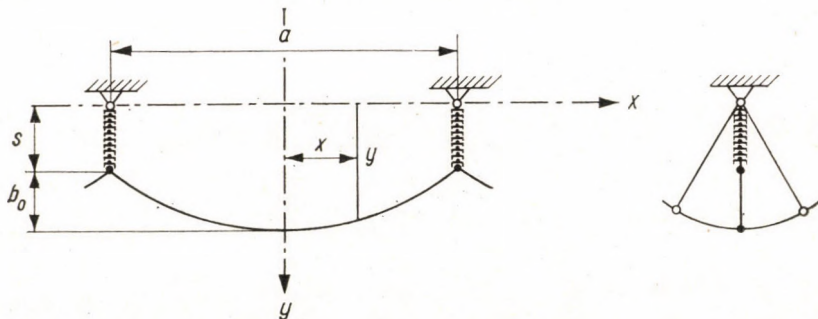


Fig. 8

The reduced length of the physical pendulum therefore is:

$$r_0 = \frac{\Theta}{my_s} = \frac{\frac{q\gamma}{g} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} y^2 dx}{\frac{q\gamma}{g} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} y dx} = b_0 \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(1 + \sigma - \frac{4x^2}{a^2}\right)^2 dx}{\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(1 + \sigma - \frac{4x^2}{a^2}\right) dx} \quad (12)$$

where  $\Theta$  is the moment of inertia of the physical pendulum (of the parabola) on the  $x$  axis,  $y_s$  stands for the ordinate of the centre of gravity,  $q$  represents the cross section of the conductor,  $\gamma$  is the actual specific weight of the conductor and  $g$  stands for the acceleration of gravity.

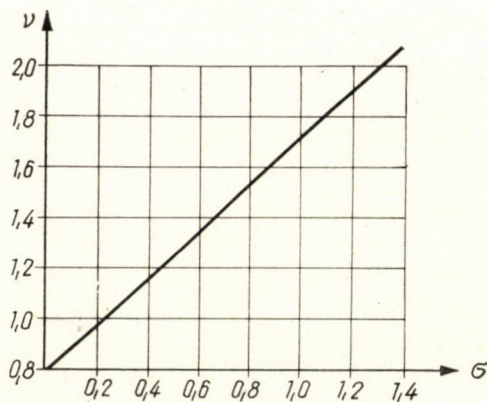


Fig. 9

Performing the integration and substituting the limits:

$$r_0 = b_0 \frac{\frac{8}{15} + \frac{4}{3} \sigma + \sigma^2}{\frac{2}{3} + \sigma} = b_0 \left( 0.8 + 0.8 \sigma + \frac{3 \sigma^2}{10 + 15 \sigma} \right) \quad (13)$$

The expression (13) could be indicated in the form of

$$r_0 = v b_0$$

as well. On Fig. 9 the value of  $v$  was illustrated as plotted against  $\sigma$ .

Subsequently, the spring rate  $c$  of the overhead wire is going to be determined and it will be examined what error is going to be committed if we pre-

sume the elongation to be proportional to the load. For a given power transmission line, expression (2) is valid at a constant temperature.

Let us introduce the symbols  $\beta = A\beta_0$  and  $\gamma = \Gamma\gamma_0$  (on the statical curve  $x = A$  actually but in this case it is always  $\gamma = \frac{\gamma_0}{\cos \varphi}$ ). Throwing expression (2) with the application of the above symbols:

$$\frac{267}{10^6} \beta_0^3 (A^2 - 1) + \frac{1.25 \cdot a\gamma_0}{E\beta_0} \left( 1 - \frac{\Gamma}{A} \right) = 0. \quad (14)$$

This equation is in fact similar to that of (4). With another throwing it is:

$$\frac{267 \cdot \beta_0^3 E}{10^6 \cdot 1.25 \cdot a\gamma_0} A^3 + \left( 1 - \frac{267 \beta_0^3 E}{10^6 \cdot 1.25 \cdot a\gamma_0} \right) A - \Gamma = 0 \quad (15)$$

and by using expression (5), respectively:

$$\frac{1}{A} A^3 + \left( 1 - \frac{1}{A} \right) A - \Gamma = 0 \quad (16)$$

or for the sake of a better survey:

$$\frac{1}{A} = K \quad (16a)$$

and thus (16) is:

$$\Gamma = (1 - K) A + K A^3. \quad (17)$$

The relationship between  $\Gamma$  and  $A$  for different parameters is shown by Fig. 10. Here it seems to be practical to use the variables:  $A^* = A - 1$  and  $\Gamma^* = \Gamma - 1$ .

In point  $A = 1$ , the tangent of the curve is

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\Gamma}{dA} = (1 - K) + 3KA^2 = 1 + 2K = \frac{A + 2}{A}. \quad (18)$$

On Fig. 10, the straight lines corresponding to (18) have been shown by dotted lines. From these figures it is apparent that in our qualitative examinations a spring constant corresponding to  $\operatorname{tg} \alpha = 1 + 2K$  can be calculated with.

On Fig. 7, the mass off the overhead wire has been substituted by a mass marked  $M_r$ . In our subsequent examinations the mass of the conductor can be considered as a substituting mass mainly due to some mechanical con.

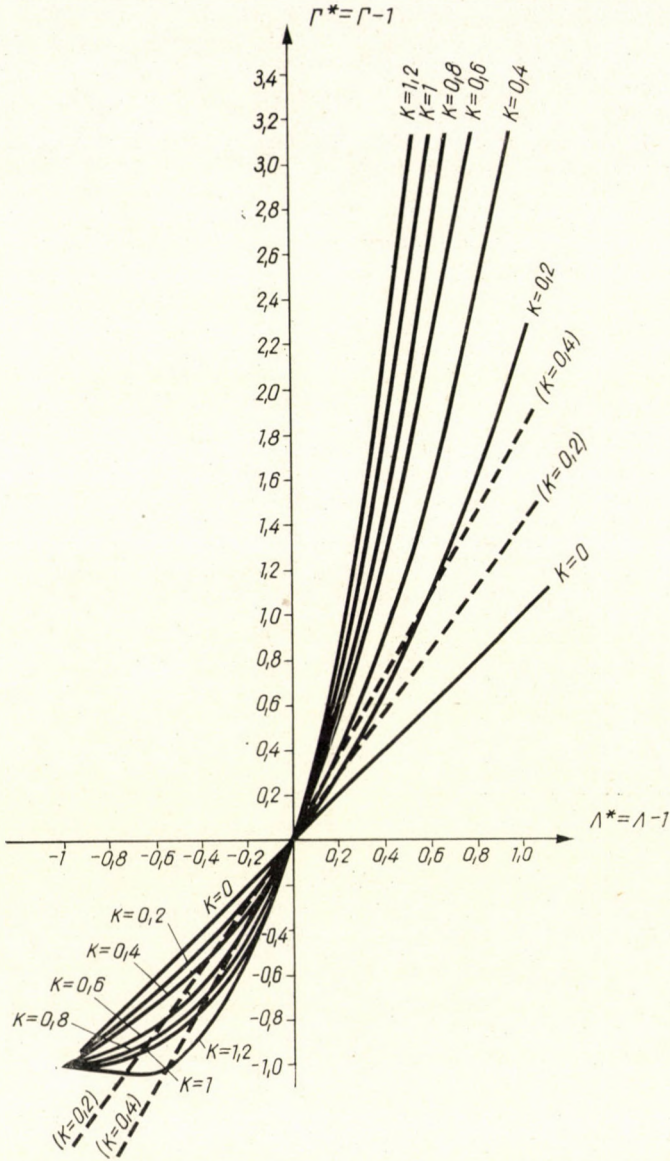


Fig. 10

siderations, but should we assume a mass of any size, we are going to arrive at the same results provided the spring constant is determined in accordance with the mass assumed.

To illustrate all what has been said here above, an example is shown:

$$\text{span: } 250 \text{ m} = a, \beta_0 = 2.5\% \text{ (at } + 40^\circ \text{ C).}$$

The material of the conductor is A. C. S. R., with a nominal cross section of 150 mm<sup>2</sup>. (The actual cross section is 174.3 mm<sup>2</sup>.) The length of the insulator chain system is  $s = 1.4$  m. The reduced length of the substitute system is, since

$$b_0 = a \beta_0 = 6.25 \text{ m}$$

$$\sigma = \frac{s}{b_0} = 0.224.$$

On the basis of Fig. 9,  $\nu = 0.99$ , so

$$r_0 = b_0 \nu = 6.20 \text{ m.}$$

According to diagram 3, the value of  $\lambda$  is 16.2, whereas from table I the value of  $A'$  for A. C. S. R. is 0.0222. Thus

$$A = \lambda A' = 16.2 \cdot 0.0222 = 0.36 \text{ and}$$

$$K = \frac{1}{0.36} = 2.78.$$

$$\frac{dA}{d\Gamma} = \frac{1}{1 + 2K} = \frac{1}{6.56} = 0.152$$

$$b_{0red} = r_0 - s = 6.20 - 1.40 = 4.80 \text{ m.}$$

The elongation of the spring upon the effect of the suspended substituting mass:

$$y_0 = b_{0red} \cdot \frac{dA}{d\Gamma} = 4.80 \cdot 0.152 \cong 0.73 \text{ m.}$$

consequently the length of the spring in unloaded condition:

$$l_0 = r_0 - y_0 = 6.20 - 0.73 = 5.47 \text{ m.}$$

For instance, if the constant of the spring being at our disposal is  $c = 34$  cm/kg, the weight of the substituting mass to be suspended on the spring:

$$M_g = \frac{y_0}{c} = \frac{73}{34} = 2.14 \text{ kg.}$$

It is obvious therefore that all the data we might be in want of for both the mathematical calculations and the model tests are at our disposal. The steps of the procedure are summed up in a table to be found at the end of this report.

### The differential equation of the equivalent system

We have determined so far the characteristics of the equivalent system with two degrees of freedom substituting the overhead conductor. Subsequently, we are going to examine the way this system is moving in the case of the conditions mentioned in the introduction. On Fig. 11 we have repeatedly drawn up the scheme of the equivalent system.

Upon the effect of the horizontal  $P_1$  wind the substituting pendulum would deviate at a  $\varphi_1$  angle.



According to the equation of the equilibrium:

$$Mgr_1 \sin \varphi_1 = P_1 r_1 \cos \varphi_1 \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = P_1/Mg \quad (20)$$

since

$$R = Mg/\cos \varphi_1, \quad (21)$$

the spring-elongation upon the effect of  $R$  is:

$$y_1 = y_0/\cos \varphi_1, \quad (22)$$

$$r_1 = l_0 + \frac{y_0}{\cos \varphi_1}.$$

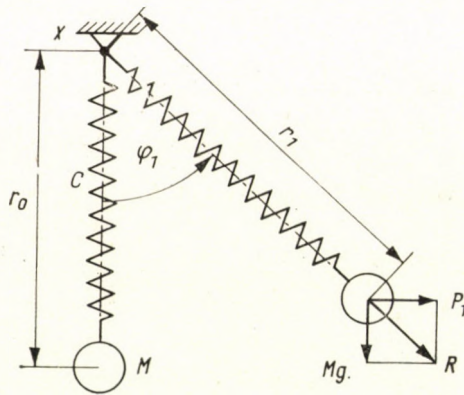


Fig. 11

We are going to examine the motion of the mass  $M$  after the sudden ceasing of the  $P_1$  force. The differential equations of the motion are expressed by the help of the Lagrangeian equation:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial K}{\partial q_r} = Q_r. \quad (23)$$

The kinetic energy of the system:

$$K = \frac{1}{2} Mv^2. \quad (24)$$

The second power of the velocity of the  $M$  mass:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (25)$$

$q_1 = r$  and  $q_2 = \varphi$  are the generalized coordinates.

$$K = \frac{1}{2} M [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2] \quad (26)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{r}} = M\dot{r}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{r}} = M\ddot{r} \quad (27)$$

$$\frac{\partial K}{\partial r} = Mr\dot{\varphi}^2. \quad (28)$$

The generalized force component in the direction  $r$

$$Q_1 = Mg \cos \varphi - \frac{r - l_0}{c}. \quad (29)$$

Substituting:

$$M\ddot{r} + Mr\dot{\varphi}^2 = Mg \cdot \cos \varphi - \frac{r - l_0}{c} * \quad (30)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = Mr^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = M(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}) \quad (31)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0. \quad (32)$$

The generalized force component in the  $\varphi$  direction:

$$Q_2 = -Mg \cdot r \cdot \sin \varphi. \quad (33)$$

Substituting:

$$M \cdot (2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}) = -Mg \cdot r \cdot \sin \varphi. \quad (34)$$

Simplifying the differential equation (30) and (34) and introducing the symbols

$$a^2 = \frac{1}{Mc}$$

$$\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2 = g \cdot \cos \varphi - a^2(r - l_0) \quad (35)$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -g \cdot \sin \varphi. \quad (36)$$

The differential equation written up here is a very complicated one and its solution in a closed form is not known. Instead of a lengthy calculation we have determined the motion conditions of the conductor, i. e. those of the equivalent system with a model test. Hereunder we report on the model test performed on the Technical Mechanical Institute of the Technical University in Budapest.

\* In the differential equation  $Mr\dot{\varphi}^2$  is the centrifugal force affecting the conductor while in motion. When creating the equivalent system, we have assumed this force to be evenly distributed in the full length of the conductor and considered its size to be proportional to the reduced length of the substituting physical pendulum. The error caused by this assumption has been calculated in the Appendix.

### The description of the model test

On basis of the above point the construction of the model test in principle was already given. At its realization we have endeavoured to be able to investigate the motion of any overhead conductor with comparatively simple means. We have connected a small bulb to the mass suspended on the spring. The bulb was supplied with current from a torch battery. We have fixed a

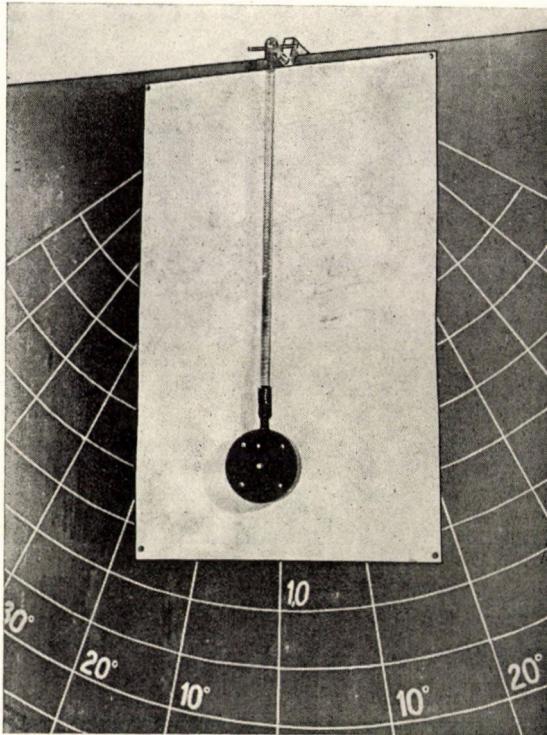


Fig. 12

polar coordinate system on a blackboard of suitable size and have suspended the equivalent pendulum of the power transmission line onto the origo of the coordinate system. (On Fig. 12, we have placed a white inlay behind the mass and the spring, otherwise they would be undetectable for the eye because of the black background.) During the motion the bulb which has been suspended onto the mass covers a plain curve in front of the coordinate system. This can be photoed. If a disc is being rotated in front of the lens of the camera during the shooting at a constant and known angle velocity (Fig. 13), the line drawn by the lamp would be broken at intervals on the snapshot. In this way we will

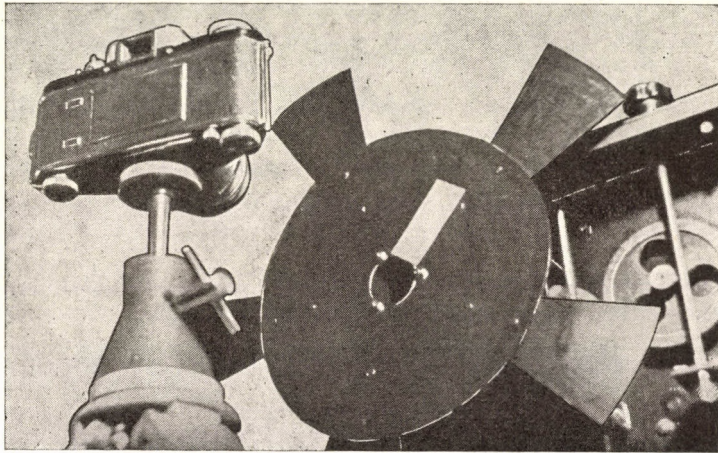


Fig. 13

know the momentary position of the point also plotted against time. A photo taken in this way is illustrated by Fig. 14.

When beginning the test we have placed a piece of wire between the  $M$  mass and the spring and we have chosen its length so that the length of the pendulum should be  $r_0$  determined formerly. We have fixed a small hook onto the flank of the cylindrical mass and have then looped a thread into it, drawing it horizontally until the pendulum was placed at the supposed  $\varphi_1$  angle. Having opened the lock of the camera, the mass was started by the letting loose of the thread.

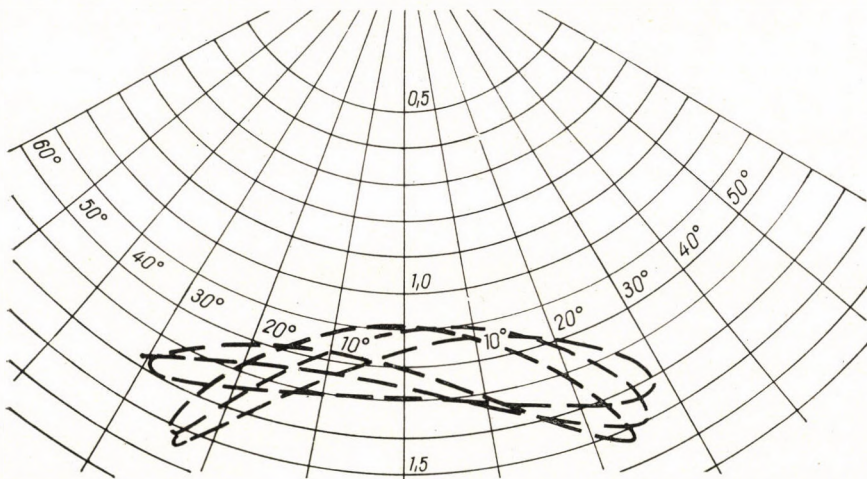


Fig. 14

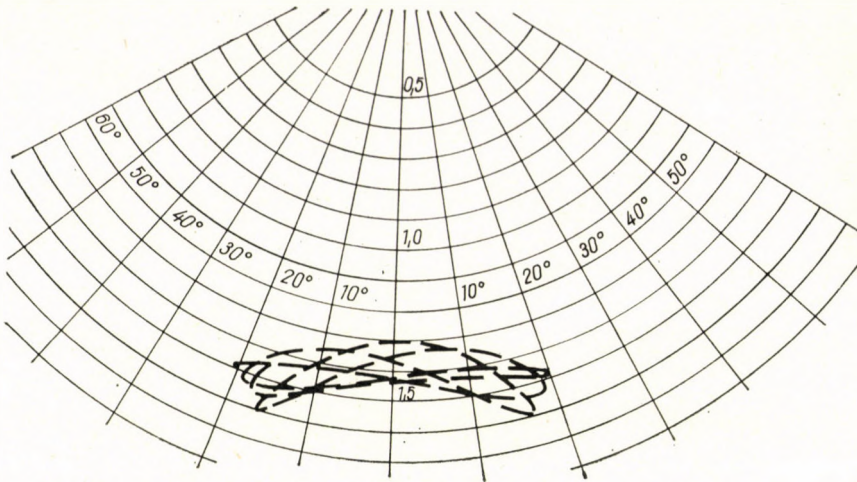


Fig. 15

The mass has been started from an initial position of  $\varphi_1 = 20^\circ$ ,  $30^\circ$  and  $40^\circ$ . No starting was performed from the  $\varphi_1 = 50^\circ$  position due to the fact that during motion the spring would get so much shortened in this case that its windings would collide on each other.

The starting at  $20^\circ$  is illustrated by Fig. 15; the starting at  $30^\circ$  by Fig. 16 and the starting at  $40^\circ$  is represented by Fig. 17. The time mark of the photos is  $1/10$  sec., i. e. the lens of the camera was shielded by the apparatus to be seen on Fig. 13, in every tenth second.

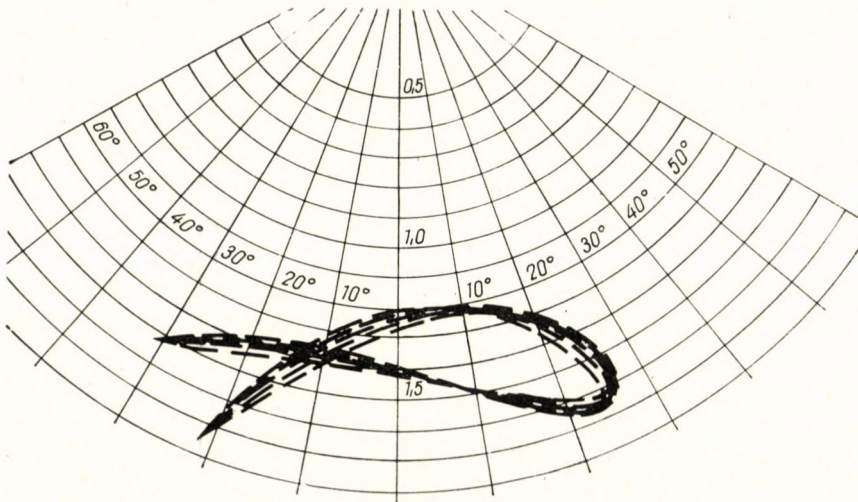


Fig. 16

If we are watching this motion, we can state that it deviates from the circular arc considerably, thus if we examine the collisions of power transmission lines, it is erroneous to presume that the lowest point of the conductor would move on a circular arc. The next chapter will discuss the test series we have performed in order to determine some general laws to be used.

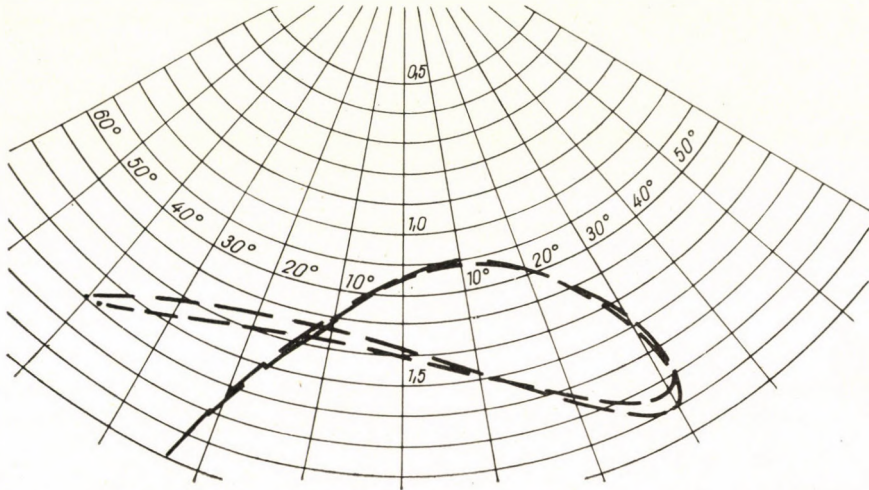


Fig. 17

#### A test series to study the motion of transmission conductors

In the case of the above discussed conditions, the course of the motion of the transmission conductors is determined by three data:

- a)  $r_0$  — the reduced sag of the conductor,
- b)  $y_0$  — the elongation of the spring upon the effect of the equivalent mass suspended,
- c)  $\varphi_1$  — the angle of the starting.

With the help of what has been said hereabove, all these characteristics can be calculated for any overhead wire, so we can complete the model of the conductor and are enabled to study the motion of the conductor after the shock-like ceasing of the wind in the way discussed in the preceding chapter.

In the case of a larger conductor's sag, where the sag is several metres long, the completion of the model is not easy since the space requirements are very big. Owing to this fact we have studied the possibility of investigating this phenomenon on a smaller model scale.

Let us mark the characteristics of the smaller model scale with  $r_0^*$  and  $y_0^*$  and let be  $r_0^* = a r_0$  and  $y_0^* = a y_0$ . On basis of the differential equations previously discussed it can be stated that  $r^* = a r$  and  $\varphi^* = \varphi$ , i. e. the course

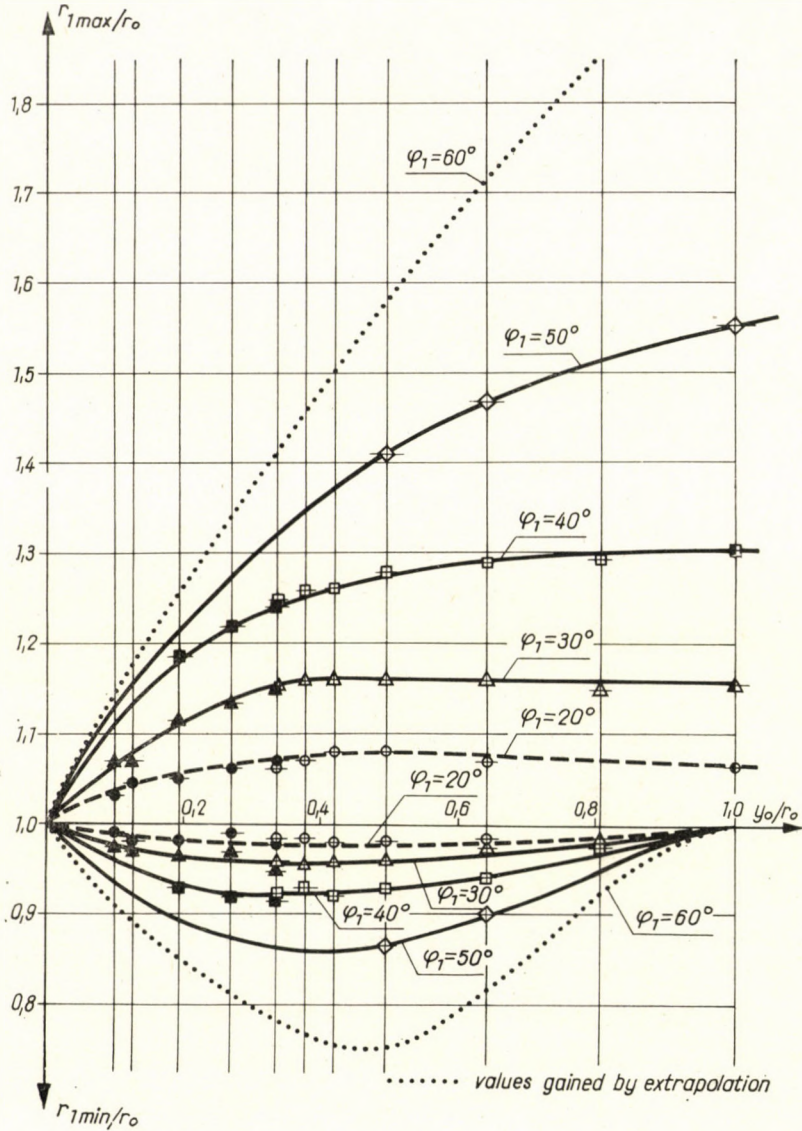


Fig. 18

covered by the mass of the model is geometrically similar to the one covered by the mass of the original equivalent system. The prerequisite condition of this, however, is that the  $\varphi_1^*$  angle of the starting should be equal to  $\varphi_1$ . The motion of the model is quicker than that of the original equivalent system, namely, according to the model law concluded the time constant of the motion is decreased at the proportion of  $\sqrt{a}$ .

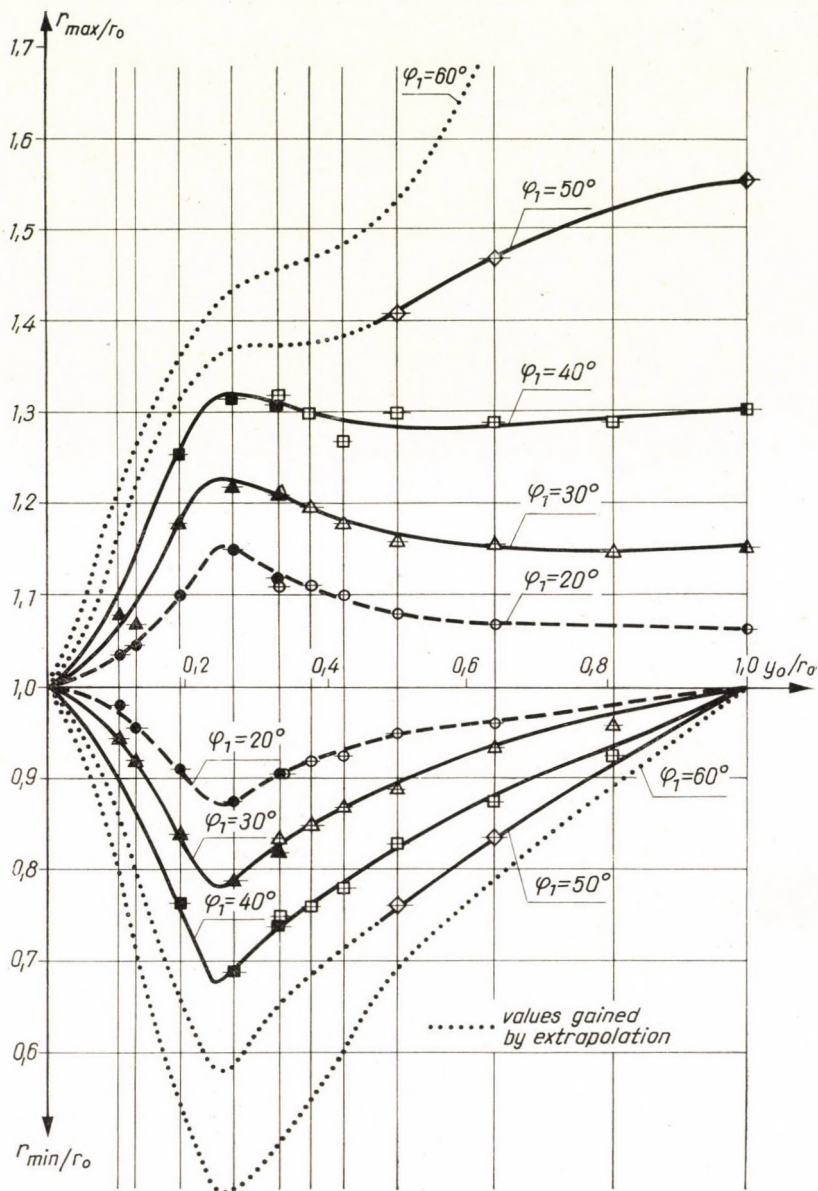


Fig. 19

It is obvious from the model-law that the character of the motion is determined by the relation  $y_0/r_0$ . With a model as that shown on Fig. 12, the value of  $r_0$  can be altered by the length of a piece of wire placed between the mass and the spring. In the course of the test series performed and to be discussed hereunder we have applied two kinds of springs. ( $y_0 = 48.3$  cm and



$y_0 = 14$  cm.) We have read the maximum and minimum values  $r$  has reached during the first swing, then we have read the largest maximum and the smallest minimum values; being able to do so, since several swings have been taken on the same photo. We have compared these extreme values to  $r_0$  and — plotted against  $y_0/r_0$  — have illustrated it in a diagram as per Figs. 18. and 19. If  $y_0/r_0 = 0$ , the mass moves along on a circular course the radius of which is  $r_0$ . Thus  $r_{\max}/r_0 = 1$  and  $r_{\min}/r_0 = 1$ . As testified by our photos, the mass  $M$  moves straight horizontally if  $y_0/r_0 = 1$ . For the assumed start this can be proved

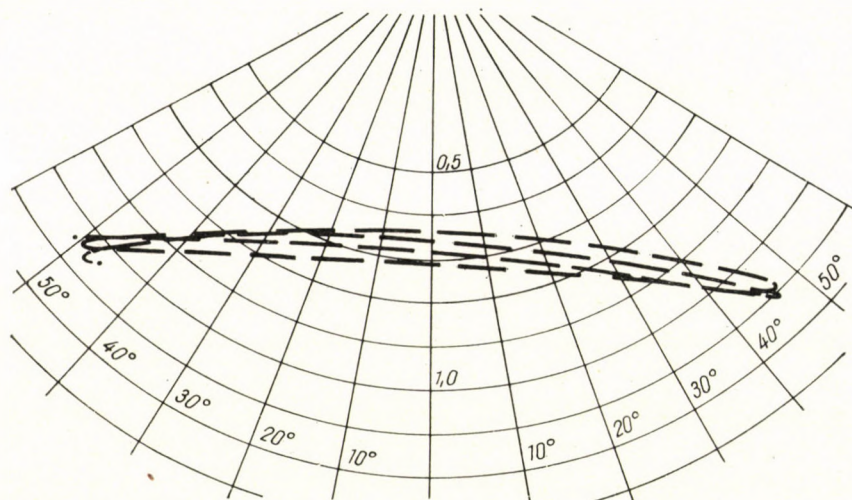


Fig. 20

theoretically as well. For the sake of more exact results the value of the  $r_{\max}/r_0$  relation has been determined with calculation in this case.

Comparing Figs. 18 and 19, we can state the following:

a) If  $y_0/r_0 > 0.5$ , the first maximum will be the maximal one. A case of this type is illustrated by the swing curve shown on Fig. 20. It can be seen on this figure that the mass reaches the  $r_{\max}$  value at an extreme position. The angle belonging to the extreme position is somewhat smaller than that of the start.

b) If  $y_0/r_0$  is between 0.5 and 0.25, the mass will arrive at the first maximum with an extreme position again, but during the motion the value of  $r_{\max}$  will increase and will surpass that of the first maximum. On Fig. 21 it is to be noticed that the bigger is  $r_{\max}$ , the smaller is angle  $\varphi$  which belongs to it. This is only obvious on basis of the conservation of energy principle.

c) On Fig. 19 it can be seen that the maximal maximum and the minimal minimum arrive at their extreme value in the range  $y_0/r_0 = 0.25$ . As an explanation for this phenomenon, we may point out that if  $y_0/r_0 = 0.25$ , the

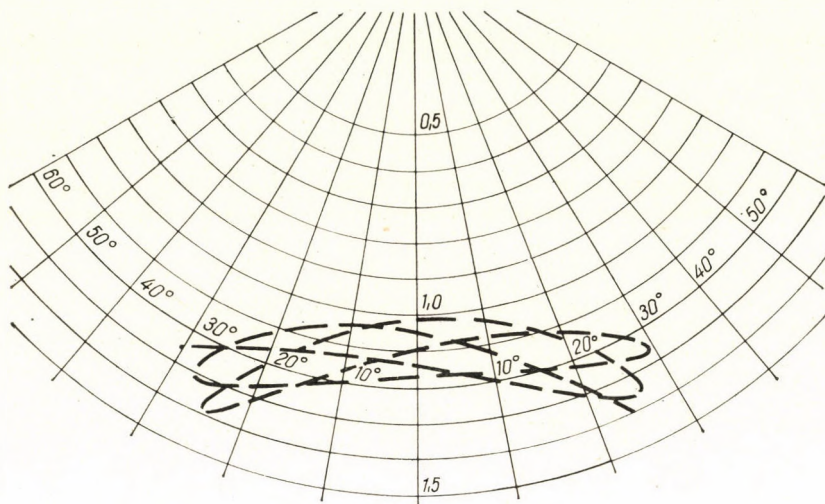


Fig. 21

frequency of natural swing in the swing system composed of the mass and of the spring is exactly the double of the frequency of the mathematical pendulum suspended on a thread the length of which is  $r_0$ . During the motion the centrifugal force acting upon the mass reaches a maximal value twice per each swing, so the swinging system is excited in accordance with its own frequency. — A motion of this character is shown by Fig. 22. Here  $y_0/r_0 = 0.193$ .

d) If  $y_0/r_0 < 0.25$ , the first maximum will be obtained sooner than the maximal angle of deviation. If we are far enough from the  $y_0/r_0 = 0.25$  value,

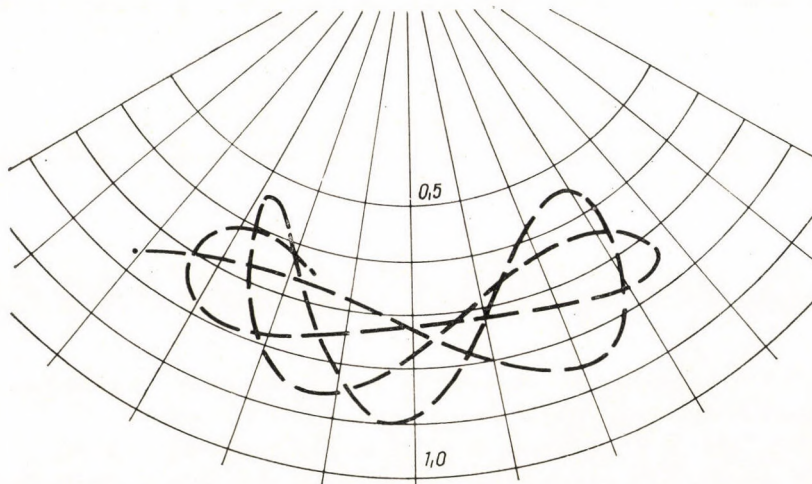


Fig. 22

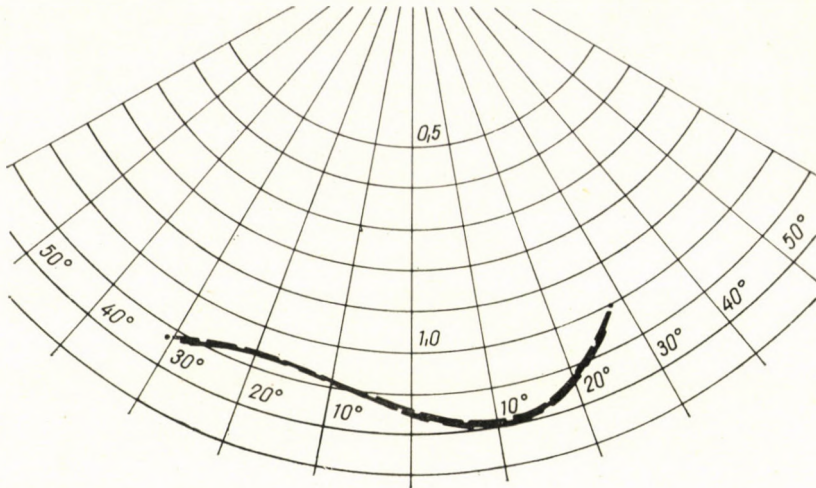


Fig. 23

the first maximum will be generally the maximal maximum, too. Fig. 23 represents such a type of motion ( $y_0/r_0 = 0.127$ ). Several swings have been taken on the photo. It is interesting to observe that the mass has been covering the same course all the time. Similar phenomena could be observed in several other cases as well. (See for instance Figs. 16 and 17.) From our point of view this has no special significance.

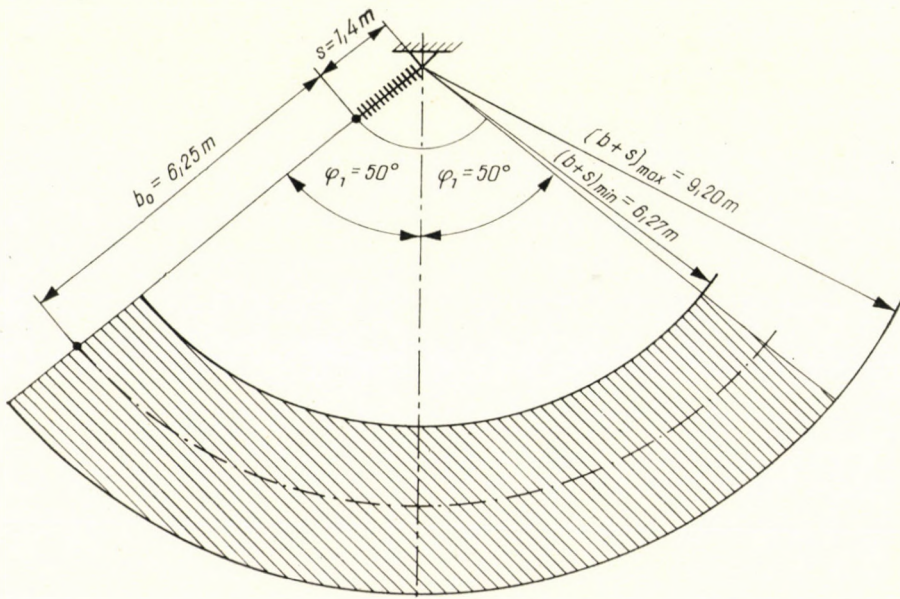


Fig. 24

The practical application of these points is going to be proved by the example previously introduced. We have seen that  $r_0 = 6.20$  and  $y_0 = 0.73$  Thus  $\frac{y_0}{r_0} = \frac{0.73}{6.20} = 0.118$ .

The maximal angle of deviation is  $\varphi_1 = 51^\circ 9'$ , which is calculated from the standard maximal wind intensity (up to a height of 0–25 meters). (For the sake of a better survey of the example we shall take the angle of start  $\varphi_1 = 50^\circ$ .) With  $\varphi_1 = 50^\circ$  if  $y_0/r_0 = 0.118$  the maximal maximum  $\frac{r_{\max}}{r_0} = 1.20$  and  $\frac{r_{\min}}{r_0} = 0.82$  (Fig. 19).

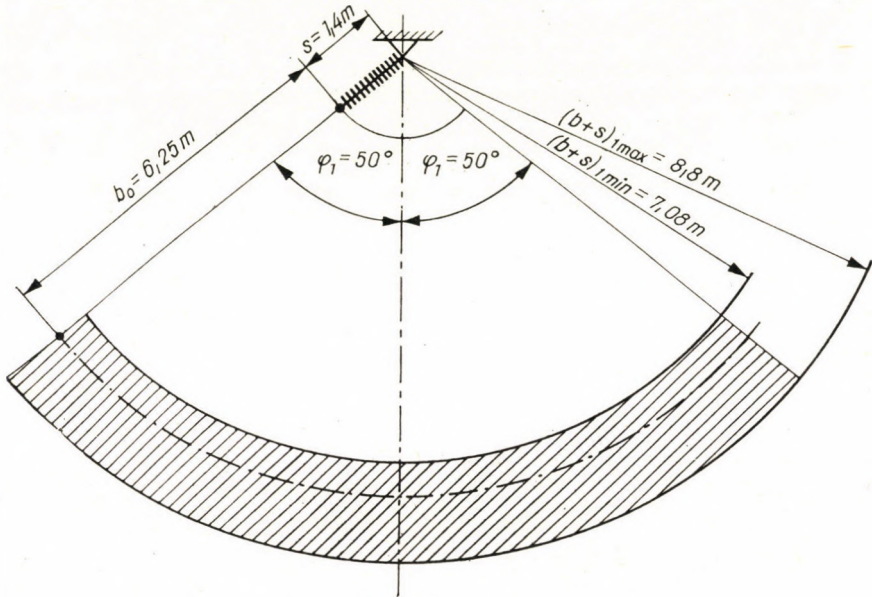


Fig. 25

The radial distance of the lowest point of the conductor will change at the same rate. In our example  $b_0 = 6.25$  m

$$s = 1.4 \text{ m, thus}$$

$$b_0 + s = 7.65 \text{ m and}$$

$$(b + s)_{\max} = 7.65 \cdot 1.20 = 9.20 \text{ m}$$

$$(b + s)_{\min} = 7.65 \cdot 0.82 = 6.27 \text{ m}$$

On basis of these extreme values we have illustrated on Fig. 24 that area, the lowest point of the conductor is sure not to leave. From Fig. 18 we may take out the first maximum and minimum values:

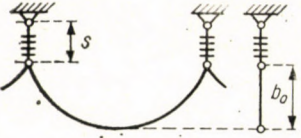
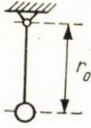
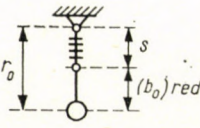
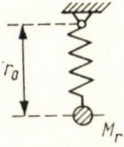
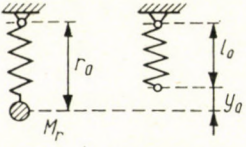
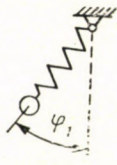
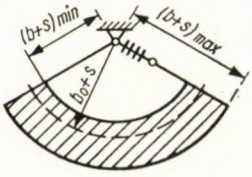
$$\frac{r_1 \max}{r_0} = 1.15 \text{ and } \frac{r_1 \min}{r_0} = 0.925$$

$$(b + s)_1 \max = 7.65 \cdot 1.15 = 8.80 \text{ m}$$

$$(b + s)_1 \min = 7.65 \cdot 0.925 = 7.08 \text{ m}$$

In accordance with the values calculated, Fig. 25. represents that area which the lowest point of the overhead wire would certainly not leave during

Summary Table for the Determination of the Characteristics of the Dynamic State

Denomination	The scheme of the system	The relation to be applied	Notes
The conductor to be substituted			
The equivalent pendulum		$r_0 = b_0 \cdot \nu$	the value of $\nu$ to be obtained from Fig. 9 on basis of the relation $\sigma = s/b_0$
The determination of the reduced sag of the conductor		$(b_0)_{red} = r_0 - s$	
Substitution with spring and with a reduced mass			the length of the spring loaded by $M$ mass, is $r_0$ , this being equal to the reduced length of the physical pendulum
The determination of the unloaded length of the spring ( $l_0$ ) and its elongation ( $y_0$ )		$l_0 = r_0 - y_0$ $y_0 = (b_0)_{red} \frac{d\Delta}{d\Gamma}$	$\frac{d\Delta}{d\Gamma} = \frac{1}{1 + 2K}$
The application of the results of the model test			we determine the $r_{1max}/r_0$ , $r_{1min}/r_0$ ; $r_{max}/r_0$ , $r_{min}/r_0$ values belonging to $y_0/r_0$ relation of the equivalent system on basis of Figs. 18 and 19, considering also the starting angle of $\varphi_1$
The application of the results for the original transmission line		$(b+s)_{max} = (b_0+s) \frac{r_{max}}{r_0}$ $(b+s)_{min} = (b_0+s) \frac{r_{min}}{r_0}$	

the half-swing which follows the shocklike ceasing of the wind. We mention, that the swing curve of the above-illustrated example is similar to that shown in Fig. 23.

If we compare the figures, we will be able to see that the first swing is restricted to a considerably smaller area than the one we could observe if we considered the continuation of the motion. The model tests and our deductions have not taken into consideration the resistance of the air. Conditions upon the effect of same will be more favourable.

### Appendix

During motion the conductor is being affected by a centrifugal force as well. We are going to investigate now what is the extent of the error we have committed by having determined the equivalent system with an approximation according to which the centrifugal force had been assumed to be evenly distributed on the conductor instead of having considered its actual distribution and having been calculated with the reduced length of the equivalent physical pendulum.

Let us suppose that the conductor illustrated on Fig. 1 and having a specific weight of  $\gamma_0$  moves around the  $x$  axis at a constant  $\omega$  angle velocity and that the field of force is such that the weight direction is always the  $y$  axis rotating along with the wire.

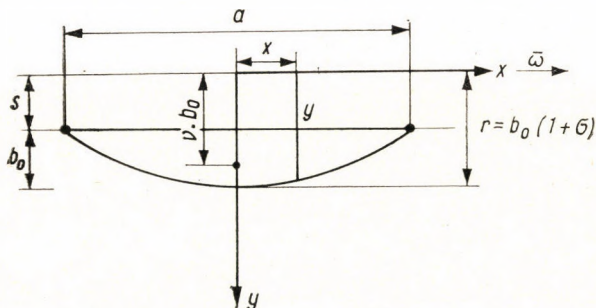


Fig. 1

In accordance with this assumption the  $y$  force acting upon the unity volume of the conductor on the point  $x$

$$\gamma = \gamma_0 \left[ 1 + \frac{b_0 \omega^2}{g} \left( 1 + \sigma - \frac{4x^2}{a^2} \right) \right] = \gamma(x) \quad (1)$$

(where  $g$  stands for the acceleration of gravity).

In the case of the equivalent system, in the full length of the line:

$$\gamma_H = \gamma_0 \left( 1 + \frac{b_0 \omega^2}{g} \cdot v \right)$$

where  $v b_0$  is the reduced length of the equivalent physical pendulum.

(In these calculations we have been working with the approximate value  $v = 0.8(1 + \sigma)$ .)

Let us now use the symbols:  $\Gamma = \frac{\gamma}{\gamma_0}$  and  $\Gamma^* = \frac{\gamma}{\gamma_0} - 1 = \frac{b_0 \omega^2}{g} \left( 1 + \sigma - \frac{4x^2}{a^2} \right)$

According to the work "Die Differential-Gleichungen der Technik und Physik" by HORT—THOMA (5th edition, page 129):

$$H \frac{d^2 y^*}{dx^2} = -q \cdot \gamma(x) \quad (3)$$

where  $H$  stands for the horizontal component of the force in the conductor,  $q$  stands for the cross section of the conductor. Taking into consideration the limit conditions, and substituting thus the value of  $\gamma$ , the solution of the differential equation is:

$$y^* = r_{\max}^* - \frac{A}{H} \frac{x^2}{2} + \frac{B}{H} \frac{x^4}{12} \quad (4)$$

here  $r_{\max}^*$  is the ordinate of the lowest point of the line.

$$A = q \cdot \gamma_0 \left[ 1 + \frac{b_0 \omega^2}{g} (1 + \sigma) \right] \quad (5)$$

$$B = q \cdot \gamma_0 \cdot 4 \frac{b_0 \omega^2}{g \cdot a^2} \quad (6)$$

If the load is  $\gamma_0$ , the ordinate of the lowest point of the line  $r_0 = b_0(1 + \sigma)$ . In this case the horizontal component of the force being present in the conductor is:

$$H_0 = \frac{q \cdot \gamma_0 a^2}{8b_0} \quad (7)$$

If the load is  $\gamma$ , provided the symbol  $R = \frac{r_{\max}^*}{r_0}$  is introduced:

$$H = \frac{A \frac{a^2}{8} - B \frac{a^4}{192}}{b_0 [R(1 + \sigma) - \sigma]} \quad (8)$$

In consequence of the  $\gamma - \gamma_0$  change of load the elastic elongation of the wire will be:

$$s - s_0 = \frac{H - H_0}{q \cdot E} s_0 \quad (9)$$

With a load of  $\gamma_0$  the length of the wire with the usual approximation:

$$s_0 = a \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{2b_0}{a} \right)^2 \right] \quad (10)$$

With a  $\gamma$  load the length of the wire can be determined by integration:

$$s = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \sqrt{1 + (y^*)^2} dx \approx \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} (y^*)^2 \right] dx \quad (11)$$

Performing the integration and substituting the limits:

$$s = a + \frac{A^2}{H^2} \frac{a^3}{24} - \frac{AB}{H^2} \cdot \frac{a^5}{240} + \frac{B^2}{H} \cdot \frac{a^3}{8064} \quad (12)$$

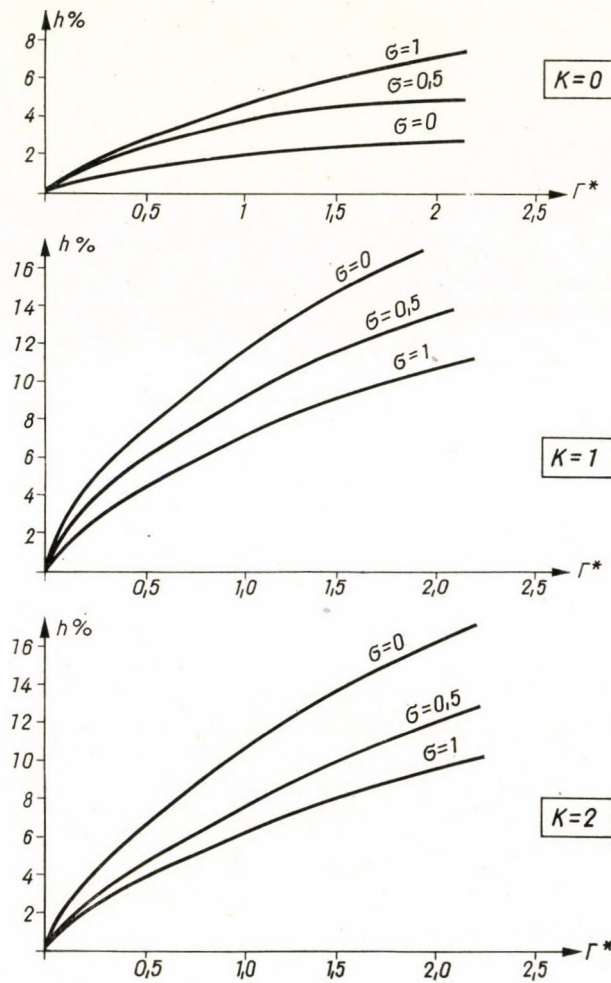


Fig. 2

Substituting the values of  $s$ ,  $s_0$ ,  $H$  and  $H_0$  and applying also in this case the symbol

$$K = \frac{267 \cdot E \cdot \beta_0^3}{1,25 \cdot 10^6 \cdot \gamma_0 \cdot a} \quad (13)$$

we perform the operation and get:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{K} \left[ 1 + \sigma + \frac{\Gamma^*}{4.8} \frac{5 + 6 \cdot \sigma}{1 + \sigma} - R(1 + \sigma) \right] \left[ 1 + \frac{8}{3} \beta_0^2 \right] = \\ & = [R(1 + \sigma) - \sigma]^3 \left[ 1 - \frac{\Gamma^*}{12(1 + \sigma)} \right] - [R(1 + \sigma) - \sigma] \end{aligned} \quad (14)$$

Since practically the value of  $\beta_0 = \frac{b_0}{a}$  is low as a rule (maximum 2–3%), no significant error is committed, if we neglect the expression  $\frac{8}{3} \beta_0^2$ .



If we assume concrete values for  $K$ , for  $\sigma$  and  $R$ ,  $\Gamma^*$  can be easily calculated from the above equation.

Supposing that the specific weight  $\gamma_H$  is constant all along the wire, we have determined in this study that

$$\Gamma^* = (1 - K) A + K A^3 - 1 \quad (15)$$

In this way also  $A = \frac{b}{b_0}$  can be determined if  $\Gamma^*$  is known. The maximal sag in this case:

$$r_{\max} = b + s = b_0 (A + \sigma) \quad (16)$$

Introducing the symbol  $R_H = \frac{r_{\max}}{r_0} = \frac{A + \sigma}{1 + \sigma}$  the error caused by the equivalent system due to the neglect of the uneven distribution of the centrifugal force:

$$h = \frac{R - R_H}{R} \cdot 100\% \quad (17)$$

We have determined the extent of the error for the case  $K = 0$ ,  $K = 1$  and  $K = 2$ , assuming  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = 0.5$ ,  $\sigma = 1$  values. On Fig. 2 we have illustrated the extent of the error as plotted against  $\Gamma^*$ .

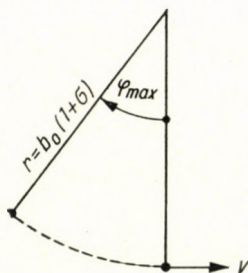


Fig. 3

Let us determine the value of  $H$  in the case of the example discussed in the study. In this case  $K = 2.78$  and  $\sigma = 0.224$ , whereas the value of  $\Gamma^*$  can be calculated by means of the relation

$$\Gamma^* = \frac{b_0 \omega^2}{g} (1 + \sigma).$$

The value of  $\omega$  can be determined by means of the energy law, as if the lowest point of the conductor were moving on a circular course the radius of which is  $r = b_0 (1 + \sigma)$  (see Fig. 3)

$$v^2 = 2 g b_0 (1 + \sigma) (1 - \cos \varphi_{\max}) = b_0^2 \omega^2 (1 + \sigma)^2.$$

From this:

$$\Gamma^* = \frac{b_0 \omega^2}{g} (1 + \sigma) = 2 (1 - \cos \varphi_{\max})$$

In our example  $\varphi_{\max} = 50^\circ$ , thus

$$\Gamma^* = 2 (1 - 0.643) = 0.714$$

With these values the error is

$$h = 6.4\%$$

With tests of qualitative character this is still permissible.

## REFERENCES

1. VEREBÉLY, L.: Electric Transmission (Villamos erőátvitel), Vol. III. Budapest, 1948. Post-graduate Engineering School (Mérnöki Továbbképző Intézet).
2. MATICS, Á.: The Examination of the Collision of Overhead Wires. Elektrotechnika, 1943, No. 4, page 79. (Szabadvezetékek összelengésének vizsgálata.)
3. DR. GESZTI, O. P.: The Collision of Overhead Wires. Magyar Technika, 1958. Copy No. 8, page 148. (Szabadvezetékek összelengése).
4. TRUXA: Schaulinien zu raschen Ermittlung des Durchhanges und der Beanspruchung von Leitungsseilen. E. u. M. 1923 H. 34, page 493.

## SUMMARY

If the intensity of the horizontal wind acting upon the conductor perpendicularly is increasing gradually, the lowest point of the conductor moves on the so-called static characteristic curve. In possession of the characteristics of the transmission line this can be determined.

The other extreme case takes then place when the maximal constant wind intensity ceases suddenly. This time the blown-out conductor — as an elastic system — does not get into its elastic state through a simple swing motion but covers a curve which is determined by the characteristics of the transmission line, while the distance of its lowest point from the point of suspension will be changing. During the motion the distance will arrive at a maximum the value of which can be determined according to the present report.

Though on the basis of this study there is a possibility to design a transmission line where the collision can be excluded with an utmost certainty, the economical realization of this is confronted with many difficulties. Anyhow, circumspect designing may reduce the probability of a collision.

When designing transmission lines, it is advised to take into consideration the relationship  $\frac{y_0}{r_0}$  possibly so that its value should not be in the 0.25 range, since it is this range where the danger of collision is the most acute.

It is advisable further that on basis of the swing pictures presented the probable figure of the swing pictures should be drawn onto the two conductors examined for collision and the mutual distance of the conductors should be controlled by the phase shifts, respectively, by the synchronisms to be read from the swing pictures.

## BEWEGUNG DER LEITER VON FREILEITUNGEN UNTER EINWIRKUNG DES WINDES

P. OTTO GESZTI—GY. LUDVIG

### ZUSAMMENFASSUNG

Wenn die Stärke des horizontalen Windes, der lotrecht auf den Leiter einwirkt, langsam zunimmt, bewegt sich der tiefste Punkt des Leiters auf der sogenannten statischen Kennkurve. Dies kann festgestellt werden, wenn die Kennwerte der Fernleitung bekannt sind.

Der zweite Extremfall erfolgt, wenn die größte konstante Windstärke sprungweise aufhört. In diesem Fall gerät die ausgeblasene Leitung als elastisches System nicht mit einer einfachen Schwingbewegung in ihren elastischen Zustand, sondern beschreibt eine durch die Kennwerte der Fernleitung bestimmte Kurve, wobei sich die zwischen ihrem tiefsten Punkt und dem Aufhängepunkt gemessene Entfernung verändert. Während der Bewegung erreicht diese Entfernung ihr Maximum, dessen Wert der gegenwärtigen Studie entsprechend bestimmt werden kann.

Auf Grund der Studie ist es zwar möglich eine Fernleitung zu entwerfen, bei welcher das Zusammenschwingen mit vollkommener Sicherheit ausgeschlossen werden kann, wirt-

schaftlich wird dies jedoch nicht verwirklicht werden können. Wird der Entwurf aber mit großer Umsicht verfertigt, so kann auch die Wahrscheinlichkeit des Zusammenschwingens vermindert werden.

Beim Entwurf von Fernleitungen ist es empfehlenswert, das Verhältnis  $\frac{y_0}{r_0}$  zu beachten, dessen Wert keineswegs um 0,25 betragen soll, da in dieser Größenordnung die Gefahr des Zusammenschwingens größer ist.

Es wird weiterhin empfohlen auf Grund der mitgeteilten Schwingungsbilder das wahrscheinliche Diagramm der Schwingungsbilder auf die nach ihrer Zusammenschwingung geprüften beiden Leiter aufzutragen und die gegenseitige Entfernung der Leiter mittels der Gleichzeitigkeiten bzw. Phasenverschiebungen, die von den Schwingungsbildern abgelesen werden können, zu kontrollieren.

## LE MOUVEMENT DES CONDUCTEURS DES LIGNES DE TRANSMISSION SOUS L'ACTION DU VENT

P. O. GESZTI — GY. LUDVIG

### RÉSUMÉ

Si la force du vent horizontal agissant perpendiculairement au conducteur s'intensifie graduellement, le point le plus bas du conducteur se déplace sur la courbe caractéristique dite statique, qui peut être déterminée en connaissance des caractéristiques de la ligne de transmission.

L'autre cas extrême se produit, si la plus grande force constante du vent s'arrête par sauts. Dans ce cas la ligne purgée, en tant que système élastique, n'arrive pas à son état d'élasticité par un simple mouvement oscillatoire, mais décrit une courbe déterminée par les caractéristiques de la ligne de transmission, tout en changeant la distance mesurée entre son point le plus bas et le point de suspension. Pendant le mouvement, cette distance atteint un maximum, dont la valeur peut être déterminée selon l'étude.

Bien que, sur la base de celle-ci, il soit possible de construire une ligne de transmission, où la collision est éliminée de façon certaine, la réalisation n'en serait pas économique. Mais la probabilité de la collision peut être réduite au moment de l'établissement des projets.

En construisant des lignes de transmission, on aura avantage à tenir compte de la proportion  $\frac{y_0}{r_0}$ , dont la valeur ne doit pas être voisine de 0,25, le danger de la collision étant ici plus fort.

Il est recommandable, en outre, de dessiner, selon les images d'oscillation indiquées, la figure probable des images d'oscillation sur les deux conducteurs examinés du point de vue de la collision, et de contrôler la distance mutuelle des conducteurs au moyen des synchronismes ou déphasages indiqués par les images d'oscillation.

## ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВЕТРА

П. О. ГЕСТИ и Д. ЛЮДВИГ

### РЕЗЮМЕ

Если сила горизонтального по своему направлению и перпендикулярного к проводу ветра постепенно возрастает, тогда низк глубоколежащая точка провода сдвигается по так называемой статической характеристике. Последняя может быть определена, если известны параметры воздушной линии.

Другой крайний случай имеет место тогда, когда наибольшая постоянная сила ветра прекратится скачкообразно. В этом случае отклоненный силой ветра провод как эластичная система возвращается в состояние покоя не при помощи простого колеба-

тельного движения, а описывает кривую, определенную параметрами воздушной линии, в то же время изменяется расстояние между наиболее низкой точкой провода до точки подвешивания. При движении это расстояние достигает максимума, величина которого может быть определена на основе работы.

На основе работы можно спроектировать такую воздушную линию, в случае которой можно полностью исключить возможность захлестывания проводов, однако это решение нельзя осуществить экономически выгодно. В случае обстоятельного проектирования вероятность захлестывания можно уменьшить.

Для проектирования воздушных линий можно рекомендовать, чтобы учитывалось соотношение  $\frac{y_0}{r_0}$  и чтобы его значение не было близко к 0,25, так как при таком значении опасность захлестывания может достигнуть максимум.

Далее, можно предложить, чтобы для двух проводов, исследуемых на захлестывание на основе сообщенных эпюр колебаний, строить вероятные эпюры колебаний и при помощи отсчитываемых с эпюр колебаний одновременностей и сдвигов фаз проверить расстояние между проводами.

## INDEX

- Szidarowsky, J. Z.*: Natural Vibration of a Bar under Axial Force, Taking the Effect of Shear in Consideration — Eigenquerschwingungen eines auf Druck beanspruchten Stabes — Détermination de l'oscillation propre de barres comprimées à deux appuis, compte tenu de l'effet des forces de cisaillement — *Сидаровский, Я.*: Собственные колебания двухопорного сжатого бруса, учитывая действие срезающего усилия ..... 261
- Vajda, Gy.*: Absorption in mehrschichtigen Isolationen — Absorption in Multiple-layer Insulating Materials — L'absorption dans l'isolant stratifié — *Вайда, Д.*: Абсорбция в многослойном изоляционном материале ..... 269
- Huszár, I.*: 25 Years of Photoelastic Stress Analysis in Hungary — 25 Jahre der Spannungsoptischen Forschung in Ungarn — L'examen optique de la tension en Hongrie — *Хусар, И.*: 25 лет со времени начала производства в Венгрии испытаний напряжений оптическим способом ..... 281
- Peredy, J.*: Wirtschaftliche, statisch unbestimmte Konstruktionen — Economical Statically Redundant Structures — Constructions hyperstatiques économiques — *Переди, Й.*: Экономичные статически неопределенные конструкции ..... 285
- Berceli, T.*: The Design of Helix Couplers — Konstruktion von Helixkopplern — Le dimensionnement des copulants hélicoïdes — *Берцели, Т.*: Конструирование соединителей геликс ..... 311
- Csonka, P.*: Calculation of Paraboloid Shells of Revolution on a Base Comprising a Regular Triangle or Hexagon by the Relaxation Method — Die Berechnung von Rotationsparaboloid-Schalen über einem regelmäßigen Dreieck- bzw. Sechseckgrundriß mit Hilfe des Relaxationsverfahrens — Une méthode de calcul par relaxation des coques paraboloides de révolution à plan triangulaire et hexagonal — *Чонка, П.*: Расчет припомощи релаксации оболочек с планомправильных трех- и шестигульников, имеющих вид параболоидов вращения ..... 343
- Lipka, I.*: Geometrie der Wölbung von Laufflächen an Wälzlageringen — The Geometrics of Convex Raceways of Roller Bearings — Géométrie du bombage de la surface de roulement des bagues de roulement à galets — *Липка, И.*: Геометрия беговой дорожки подшипниковых колец ..... 359
- Bölcskei, E.*: Allgemeine Theorie der gekrümmten Schalen — General Theory of Bent Shells — La théorie générale des voiles minces — *Белцкеи, Э.*: Общая теория гнутых оболочек ..... 391
- Fuchs, E.*: Chemische Zusammensetzung und thermische Ausdehnung der zu den sogenannten Dumetdrähten verwendeten Fe-Ni-Legierungen — Chemical Composition of FeNi Alloys Used for so-called Dumet Wires and their Thermal Dimensional Change — Composition chimique et dilatation des alliages FeNi employés pour les fils Dumet — *Фукс, Э.*: Химический состав и тепловое изменение размеров Fe-Ni-сплавов, используемых для изготовления т. н. дюметных проволок ..... 425
- Geszi, O. P.* — *Ludvig, Gy.*: The Moving of Overhead Conductors upon the Effect of Wind — Bewegung der Leiter von Freileitungen unter Einwirkung des Windes — Le mouvement des conducteurs des lignes de transmission sous l'action du vent — *Гесзи, П. О., Людвиг, Д.*: Движение проводов воздушных линий под воздействием ветра ..... 437



The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

*Acta Technica*  
*Budapest V. Nádor utca 7.*

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I. Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

---

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante :

*Acta Technica*  
*Budapest V. Nádor utca 7.*

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I. Fő utca 32. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

---

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу :

*Acta Technica*  
*Budapest V. Nádor utca 7.*

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest, I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

