

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY
G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXI

FASCICULI 1—2



1958

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V. ALKOTMÁNY UTCA 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V. Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Acta Technica

Tomus XXI

- Bajcsay, P. and Lovass-Nagy, V.:* A New Method of Applying Hypermatrices in the Theory of Multiphase Systems — Über eine neue Anwendung der Hypermatrizen in der Theorie der Mehrphasensysteme — Une nouvelle application des hypermatrices à la théorie des systèmes multiphasés — П. Байчау и В. Ловаш-Надь: О новой возможности применения гиперматриц в теории многофазных систем 363
- Boldizsár, T.:* Calculation of the Temperature Rise of Mine Air Flow with Regard to the Effect of its Water Vapour Content — Berechnung der Erwärmung von durch Bergwerksstollen strömender Luft unter Berücksichtigung der Änderung des Wasserdampfgehaltes — Calcul du réchauffement de l'air circulant dans les galeries de mines, compte tenu des variations de la teneur en vapeur d'eau — Т. Болдизсар: Расчет нагрева горного воздуха, движущегося по горным штрекам, учитывая воздействие изменения содержания водяного пара ... 113
- Buzás, L.:* Graphical Kinematic Analysis Methods. Application of Rotated Vectors — Graphische Methoden des kinematischen Untersuchungsverfahrens. Anwendung von umgekehrten Vektoren — Méthodes graphiques d'analyse cinématique — Л. Бузаш: Методы кинематического графического анализа. Применение метода сдвинутых векторов 87
- Craemer, H.:* An Approximative Method for the Analysis of Disks by Decomposition into Strips — Annähernde Berechnung von Scheiben durch Zerlegung in Streifen — Calcul approximatif des disques, par décomposition en bandes — Х. Кремер: Аппроксимационный метод анализа шайб при их разложениях на полосы 3
- Csonka, P.:* Les équations de Clapeyron ont 100 ans — Die Clapeyronschen Gleichungen werden seit 100 Jahren angewendet — Clapeyron's Equations are in Use since 100 Years — П. Чонка: Столетие уравнений Клапейрона 423
- Domony, A.:* Einfluss verschiedener Verunreinigungen auf den Korrosionswiderstand des Reinstaluminiums im Wasser bei erhöhten Drucken und Temperaturen — The Effect of Different Impurities on the Corrosion-resistivity of Super-pure Aluminium in Water of High Temperature and High Pressure — L'effet de différentes impuretés sur la résistance à la corrosion de l'aluminium super-pur, dans l'eau de haute température et de haute pression — А. Домонь: Влияние различных примесей на сопротивление коррозии очень чистого алюминия в воде высокой температуры и высокого давления 123
- Domony, A.:* Verteilung der im Aluminium befindlichen Kalzium-Verunreinigungen und ihr Einfluss auf die elektrische Leitfähigkeit des Metalls — Distribution of Calcium Impurities in the Aluminium and their Influence on the Electric Conductivity of the Metal — La répartition des impuretés de calcium dans l'aluminium et son influence sur la conductibilité électrique des métaux — А. Домонь: Распределение примеси кальция в алюминии и влияние этой примеси на электропроводимость металла 295
- Egri, I. and Hering, J.:* Remarks on L. Tihanyi's Paper on »The Dimensioning of Shielding Walls against Gamma Radiation« — Diskussionsbeitrag zur Arbeit von L. Tihanyi: »Dimensionierung von Schutzwänden gegen Gammastrahlung« — Discussion du travail de L. Tihanyi: »Dimensionnement des murs de protection contre le rayonnement Gamma« — И. Эгри и Й. Херинг: К статье Л. Тихани »Расчет защитных стенок от γ -лучей« 291

- Egri, I.* : Eine Ultraschall-Durchstrahlungsmethode zur Immersionsprüfung von Metallblechen und der Vergleich derselben mit der Frequenzmodulationsmethode — A Newly Developed Method for the Immersed Ultrasonic Transmission Testing of Metal Plates and its Comparison with the Frequency Modulation Method — Méthode pour le contrôle de l'immersion des tôles par transmission ultrasonique, et comparaison avec la méthode à modulation de fréquence — *И. Эгри*: Метод разработанных для иммерсионного контроля металлических листов с помощью ультразвукового просвечивания, и сравнение этого метода с методом частотной модуляции 327
- Fáy, Cs.* : Theoretische Grundlagen der Modellgesetze und Umrechnung der Messergebnisse an Überdruckturbinen — Theoretical Bases of the Model-laws and the Conversion Methods of Measuring Results for Reaction Water Turbines — Bases théoriques des lois des modèles et calcul des résultats de mesure sur turbines hydrauliques à réaction — *Ч. Фай*: Теоретические основы законов моделирования и пересчет данных измерений для турбин с щелевым избыточным давлением 403
- Geszt, P. O.* : A New Synchronising Method for System Disturbance Conditions — Eine neue Methode für die Synchronisierung bei gestörtem Netz — Une méthode nouvelle pour la synchronisation sous conditions de services anormales — *П. О. Гесту*: Новый метод синхронизации при аварийных режимах 243
- Hering, J.* : Cardano-Gelenkwellenkupplungen — (Cardano's) Universal Shaft Couplings — Accouplements Cardan — *Й. Херинг*: Карданные сцепления 309
- Kovács, Gy.* : Theoretical Investigation into Micro-seepage — Theoretische Untersuchung der Mikrofiltration — Étude théorique de la microfiltration — *Д. Ковач*: Теоретическое исследование микрофльтрации 173
- Lipka, I.* : Investigation into the Deformation of Shafts and the Problem of Minimizing Deformation — Untersuchung der Formänderung von Wellen und das Problem der Verringerung der Formänderung — L'examen de la déformation des arbres, et le problème de la réduction des déformations — *И. Липка*: Исследование деформации валов и проблема снижения деформации 27
- Lovass-Nagy, V., and Szendy, K.* : Surge Phenomena in Electromagnetic Coils Analysed by Hypermatrix Methods — Untersuchung der durch Stösswellen verursachten transienten Erscheinungen in einer elektromagnetischen Spule mit Hilfe von Hypermatrizen — Examen des phénomènes transitoires causés par une onde de choc dans une bobine électromagnétique, à l'aide d'hypermatrices — *Ловаш-Надь В. и Сеню К.*: Исследование переходных явлений, вызванных ударной волной в электромагнитных обмотках, при помощи гиперматриц 427
- Magyarosy, E., Máriássy, M., Perczel, Á.* : L'examen des causes de pertes en Al_2O_3 après la lessive dans le procédé Bayer — Untersuchung der Ursachen der Al_2O_3 -Verluste nach der Aufschliessung bei der Tonerdegewinnung nach dem Bayer-Verfahren — Investigation of the Causes of Al_2O_3 Losses after Digestion at Alumina Production by the Bayer Method — *И. Мадьяроши, М. Мариаши и А. Перцель*: Исследование причин потерь Al_2O_3 после разложения в случае глиноземного производства по Байеру 275
- Széki, P.* : The Determination by Oxydation of Austenitic Grain Size in Mild Steel — Bestimmung der Korngrösse von Austenit in niedriggekohltem Stahl durch Oxydation — Détermination par oxydation de la grandeur des grains d'austénite contenus dans l'acier doux — *П. Секи*: Определение крупности аустенита низкоуглеродистой стали окислением 79
- Szeniczai, L.* : Beitrag zur zeitgemässen Berechnung der Kegelräder — Study on a New Method of Calculation of Bevel Gears — Essai d'un calcul moderne des engrenages concourants — *Л. Сеницзеи*: К современному расчету конических зубчатых колес 207
- Szóke, B.* : Dynamics of Gears with Feather Keys — Das Kräftespiel von Zahnradern mit Federverbindung — Le jeu de forces sur engrenages avec languettes — *Б. Сёке*: Работа в случае зубчатых колес с пазом и пружиной 11

- Tarján, G.*: On the Heavy Suspension Developing in the Hydrocyclone — Über die im Hydrozyklon zur Entwicklung gelangende Schwertsuspension — De la suspension lourde se formant dans l'hydrocyclone — *Г. Тарьян*: О образующихся в гидроциклоне тяжелых суспензиях 387
- Tarnay, K.*: The Application of Network Theory to the Theory of Vacuum Tube Feedback Oscillators — Anwendung der Vierpoltheorien in der Theorie der rückgekoppelten Röhrengeneratoren — L'emploi de la théorie des réseaux dans la théorie des oscillateurs à tubes — *К. Тарнай*: Применение теории сетей в теории электронных частотных возбуждителей с обратной связью 347
- Tihanyi, L.*: The Dimensioning of Shielding Walls against Gamma Radiation — Die Dimensionierung von Schutzwänden gegen Gammastrahlung — Le calcul des murs de protection contre les rayons gamma *Л. Тихани*: Расчет защитных стенок от γ -лучей 255
- Tóth, G. und Waigand, F.*: Festigkeit der Treibriemenleder bei dauernder Beanspruchung — The Strength of Pelting Leather under Permanent Load — La résistance à la traction des courroies de transmission en cuir aux charges prolongées — *Г. Тот* и *Ф. Вайганд*: Прочность кож машинных ремней в случае длительной нагрузки 197
- Vajda, Gy.*: The Influence of the Material Properties of Electrodes upon the Breakdown Potential — Einfluss der Werkstoffeigenschaften der Elektroden auf die Durchschlagsspannung — Influence des caractéristiques de la matière des électrodes sur la tension de rupture — *Д. Вайда*: Влияние материальных свойств электродов на напряжение пробоя 141
- Vörös, I.*: Theoretical Investigations into the Production of Gears by Hot Rolling — Theoretische Forschungen über durch Heisswalzen hergestellte Zahnräder — Recherches théoriques sur le laminage à chaud des engrenages — *И. Вэрэш*: Теоретические исследования в области изготовления зубчатых колес при помощи горячей прокатки 47

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXI



1958

AN APPROXIMATIVE METHOD FOR THE ANALYSIS OF DISKS BY DECOMPOSITION INTO STRIPS

H. CRAEMER

FISCHERHUDE VIA BREMEN

[Manuscript received August 2, 1955]

In determining stresses or deformations of a rectangular elastic disk, mostly Airy's stress-function is used. In its common form, it applies to disks of constant thickness loaded only along its edges. If there are loads on the surface itself, e. g. own weight, or of the thickness is variable, a generalized stress-function can be established but its integration often involves complex arithmetic or is infeasible. The writer therefore hopes that an approximative method which applies to any loading and to thicknesses and elasticity moduli variable in one direction will be welcome.

Its basic idea consists in decomposing the disk into strips of constant thickness and assuming that the bending strains and, in case of a constant elasticity modulus, the stresses are linear in each strip but not in the disk as a whole, see the schematical Fig. 1, also Fig. 5. Then, the deflection of the center-line of each strip can easily be expressed as a function of the normal and tangential stresses acting along the contact-lines between them. On the other hand, the normal stresses in the contact-lines tend to change the distance between the center-lines of the strips and this will yield a geometrical condition which will furnish the solution.

The following notations, abbreviations and further assumptions will be used in the investigation :

All loads are assumed to act in the contact-lines, see Fig. 1 ; p_k , q_k = normal and tangential loads per unit length.

n_{kk} , n_k , $k + 1$ = normal forces per unit run acting on strip "k" in its edges k and $k + 1$; s_{kk} and $s_{k,k+1}$ tangential forces ; S_k entire shear in strip, see Fig. 2.

w_k deflection of center-line of strip k in direction of strip $k - 1$; E_k elasticity modulus in strip a_k . This variability of the elasticity modulus will be useful in soil mechanics problems ; ϵ strains in contact-lines, σ stresses in case of $E = \text{const.}$ x , dx see Fig. 2 ; l span or any length used as a unit ; x_l and $x_r = l - x_l$ distances from left and right support.

$$\xi = x/l, \quad \xi_l = x_l/l, \quad \xi_r = x_r/l. \quad (1.1)$$

$$f' = df/d\xi \quad (1.2)$$

derivative of any function.

$$n_k = \frac{1}{2} (n_{k-1,k} + n_{kk}), \quad s_k = \frac{1}{2} (s_{k-1,k} + s_{kk}). \quad (1.3)$$

$$C_\xi = e^{-\xi} \cos \xi; \quad S_\xi = e^{-\xi} \sin \xi \quad (1.4)$$

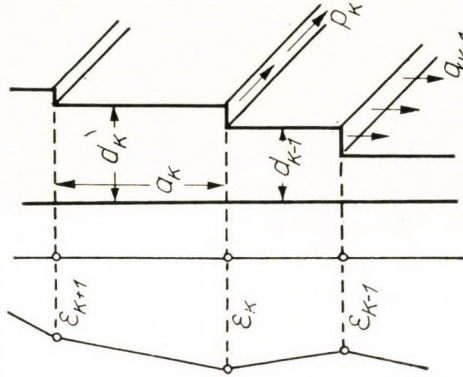


Fig. 1

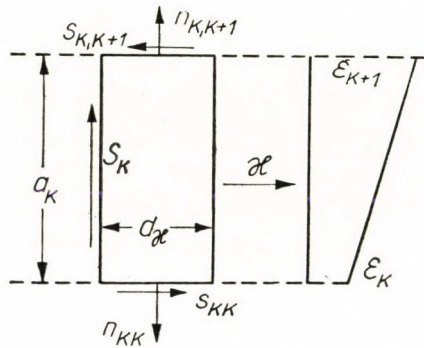


Fig. 2

are functions used in the example, their derivatives are

$$C'' \xi = -2 S \xi, \quad S'' \xi = -2 C \xi. \quad (1.5)$$

Now, from the equilibrium of the element shown in Fig. 2 we find

$$l(s_{kk} - s_{k,k+1}) + \frac{1}{2} (\epsilon_k + \epsilon_{k+1}), E_k a_k d_k = 0, \quad (2.1)$$

$$l(n_{kk} - n_{k,k+1}) + S'_k = 0, \quad (2.2)$$

$$l S_k - \frac{1}{2} l a_k (s_{kk} + s_{k,k+1}) - \frac{E_k a_k^2 d_k}{12} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})' = 0. \quad (2.3)$$

Moreover, if an infinitely narrow strip between strip s $k-1$ and k considered according to Fig. 3, we find, when (1.3) is used

$$\left. \begin{aligned} n_{k-1,k} \text{ resp. } n_{kk} &= n_k \mp \frac{1}{2} q_k, \\ s_{k-1,k} \text{ resp. } s_{kk} &= s_k \mp \frac{1}{2} p_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.4ab)$$

The unit shears can be expressed from (2.1) and (2.3) as follows

$$\left. \begin{aligned} s_{kk} &= \frac{S_k}{a_k} - \frac{E_k a_k d_k}{6l} (2\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1})' \text{ and} \\ s_{k,k+1} &= \frac{S_k}{a_k} + \frac{E_k a_k d_k}{6l} (\varepsilon_k + 2\varepsilon_{k+1})', \end{aligned} \right\} \quad (2.5ab)$$

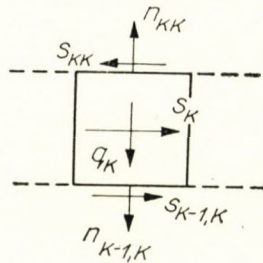


Fig. 3

therefore also

$$s_{k-1,k} = \frac{S_{k-1}}{a_{k-1}} + \frac{E_{k-1} a_{k-1} d_{k-1}}{6l} (\varepsilon_{k-1} + 2\varepsilon_k)' \quad (2.5c)$$

If, then, (2.5a) is subtracted from (2.5c) and (2.4b) is used, we arrive at

$$\begin{aligned} -p_k &= \frac{S_{k-1}}{a_{k-1}} - \frac{S_k}{a_k} + \frac{1}{6l} [E_{k-1} a_{k-1} d_{k-1} (\varepsilon_{k-1} + 2\varepsilon_k)' + \\ &\quad + E_k a_k d_k (2\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1})']. \end{aligned} \quad (2.5d)$$

Herein, after differentiation, S_{k-1} and S_k can be eliminated by (2.2); when (2.4a) is used, this leads to

$$\begin{aligned}
 & E_{k-1} a_{k-1} d_{k-1} \varepsilon_{k-1}'' + 2(E_{k-1} a_{k-1} d_{k-1} + E_k a_k d_k) \varepsilon_k'' + \\
 & + E_k a_k d_k \varepsilon_{k+1}'' = 6 l^2 \left\{ \frac{n_{k-1}}{a_{k-1}} - \left(\frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} \right) n_k + \frac{n_{k+1}}{a_k} \right\} - \\
 & - 6 l p'_k + 3 l^2 \left[\frac{q_{k-1}}{a_{k-1}} + \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \right) q_k - \frac{q_{k+1}}{a_k} \right], \quad (k \geq 2).
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Eq. (2.6) holds for ordinal numbers $k \geq 2$. In case of $k = 1$ we express S_1 in (2.5a) by (2.2) and use (2.4a), which yields

$$E_1 a_1 d_1 (2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2)'' = 6 \left(\frac{n_2 - n_{11} - \frac{1}{2} q_2}{a_1} l - s'_{11} \right) l. \quad (2.6e)$$

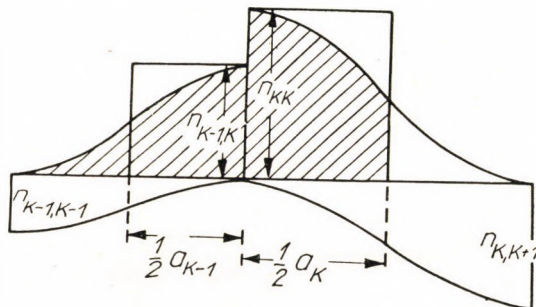


Fig. 4

Another relation between ε and n is obtained from a consideration of the deformations. It is well-known that, when the bending stresses are linearly distributed across the section, the normal stresses n/d follow a cubic parabola, Fig. 4. From this, by integration, the change in distance between the centerlines of 2 adjoining strips can be determined to be

$$\begin{aligned}
 w_{k-1} - w_k = \frac{1}{32} \left\{ \frac{a_{k-1}}{E_{k-1} d_{k-1}} (3 n_{k-1,k-1} + 13 n_{k-1,k}) + \right. \\
 \left. + \frac{a_k}{E_k d_k} (13 n_{kk} + 3 n_{k,k+1}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Now, generally there is no great difference between a , d and E in 2 adjoining strips and the shaded areas in Fig. 4 are not much different from the indicated rectangles. Therefore, in an approximative procedure we can write

$$w_{k-1} - w_k = \frac{a_{k-1} + a_k}{E_{k-1} d_{k-1} + E_k d_k} \cdot n_k, \quad (3.1)$$

whereby (1.3) has been used.

In turn, from well-known relations we have

$$w_k'' = \frac{-\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}}{a_k} l^2. \quad (3.2)$$

Thus, by combining (3.1) and (3.2), we obtain

$$\frac{\varepsilon_{k-1}}{a_{k-1}} - \left(\frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} \right) \varepsilon_k + \frac{\varepsilon_{k+1}}{a_k} = - \frac{a_{k-1} + a_k}{E_{k-1} d_{k-1} + E_k d_k} \cdot \frac{n_k''}{l^2}, \quad (k \geq 2). \quad (3.3)$$

From the reasoning leading to (3.3) it follows that this equation is meaningless for numbers $k < 2$.

If n_k'' is expressed by (3.3) and substituted into (2.6), one gets a differential equation of 4th order for ε only. As the result is rather complex we confine ourselves to a case of a regular system with constant E , d and a without internal loads ($p = q = 0$). This yields, when E_e is replaced by σ ,

$$a^4 (\sigma_{k-1} + 4 \sigma_k + \sigma_{k+1})'''' = 6 l^4 (-\sigma_{k-2} + 4 \sigma_{k-1} - 6 \sigma_k + 4 \sigma_{k+1} - \sigma_{k+2}), \quad (k \geq 3). \quad (4.1)$$

For $k = 2$, we use the specialized form of (2.6), express n_2 and n_3 by (3.3) and put $n_1 = n_{11}$; the result is

$$a^4 (\sigma_1 + 4 \sigma_2 + \sigma_3)'''' = 6 \frac{a^2 l^2}{d} n_{11}'' + 6 l^4 (2 \sigma_1 - 5 \sigma_2 + 4 \sigma_3 - \sigma_4). \quad (4.1e)$$

In the case of $k = 1$, from (2.6E) and (3.3) we obtain

$$a^4 (2 \sigma_1 + \sigma_2)'''' = -6 l^4 (\sigma_1 - 2 \sigma_2 + \sigma_3) - \frac{6}{d} (a^2 l^2 n_{11}'' + s_{11}''' a^3 c). \quad (4.1ee)$$

We now demonstrate the application of the method for a simple example. As such we select a problem (1) which has already been solved rigorously, viz. a disk with thickness $d = 1$ and square elevation uniformly loaded at its lower horizontal edge by $q_1 = 1$ and supported by shears along its vertical edges in such a way that in these edges no deflection w_k occurs, see Fig. 5, left. We assume $l = 3a$; then, as $n_{11}'' = q_1'' = 0$, (4.1E) yields

$$(\sigma_1 + 4 \sigma_2 + \sigma_3)'''' = 486 (2 \sigma_1 - 5 \sigma_2 + 4 \sigma_3 - \sigma_4). \quad (5.1)$$

A similar equation is got if the edges are counted the other way, viz.

$$(\sigma_2 + 4\sigma_3 + \sigma_4)''' = 486(-\sigma_1 + 4\sigma_2 - 5\sigma_3 + 2\sigma_4). \quad (5.2)$$

In addition, 2 algebraic equations can be found from the equilibrium of a vertical section, viz.

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 + \sigma_4 = 0 \quad \text{from the normal force, and} \quad (5.3)$$

$$7(\sigma_1 - \sigma_4) + 6(\sigma_2 - \sigma_3) = \frac{1}{2} \cdot 27(1 - 4\xi^2) \quad (5.4)$$

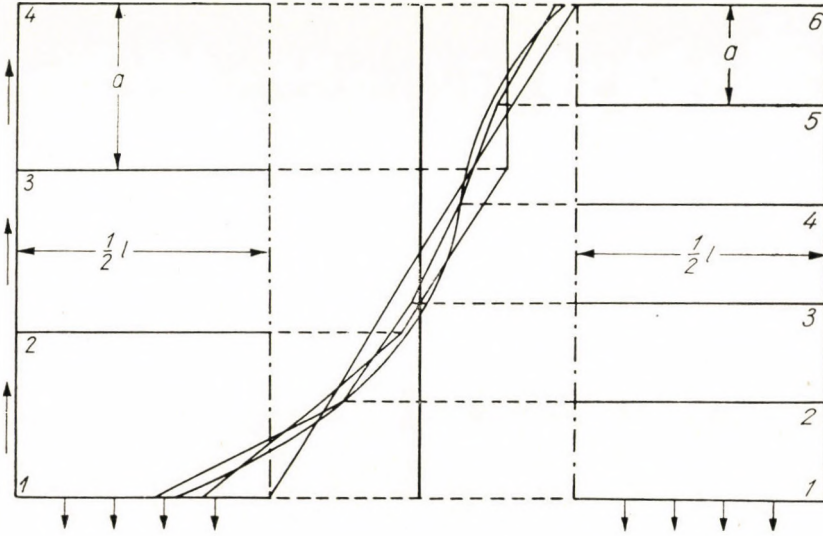


Fig. 5

from the moment, ξ being counted from the middle of the span. By rearranging we obtain

$$\begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma_4)''' + 486(\sigma_1 + \sigma_4) &= 0 \\ (\sigma_1 - \sigma_4)''' + 486 \cdot \frac{27}{5} \left(\sigma_1 - \sigma_4 - \frac{3}{2} + 6\xi^2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5a,b)$$

Taking symmetry into account, the solutions can be written

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_4 = A(C\ 3,320\ \xi_l + C\ 3,320\ \xi_r) + B(S\ 3,320\ \xi_l + \\ + S\ 3,320\ \xi_r) \quad \text{and} \end{aligned} \quad (5.6a,b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_4 = \frac{3}{2} - 6\xi^2 + D(C\ 5,061\ \xi_l + C\ 5,061\ \xi_r + \\ + E(S\ 5,061\ \xi_l + S\ 5,061\ \xi_r)). \end{aligned}$$

By consideration of (1.4) and (1.5), this can easily be proved to be correct.

The constants A , B , D , and E above depend on the boundary conditions. First, over the supports

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0 \quad (\xi_l = 0, \quad \xi_r = 0). \quad (5.7)$$

Moreover, as w_k is prescribed in that cross-section, (3.1) yields

$$n_2 = n_3 = 0, \quad (\xi_l = 0, \quad \xi_r = 0). \quad (5.8)$$

If, further, (2.6) is applied for $k = 2$ and $k = 3$ and (5.8) is used, we obtain

$$(\sigma_1 + 4\sigma_2 + \sigma_3)'' = 54 \quad \text{and} \quad (\sigma_2 + 4\sigma_3 + \sigma_4)'' = 0$$

or, if (5.3) and (5.4) are taken into account

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma_4)'' - 36 \\ (\sigma_1 - \sigma_4)'' = -\frac{216}{5} \quad (\xi_l = 0, \quad \xi_r = 0) \end{aligned} \right\} \quad (5.9a,b)$$

In this way, 2 equations containing the unknown constants are got from two eqs. (5.7) and 2 more from (5.9). The result is

$$A = 0,01126; \quad B = 1,693; \quad D = 0,003613; \quad E = 0,6077. \quad (5.10)$$

In Fig. 5, besides the rigorous solution (1) and the one according to Navier, the stresses σ at midspan, computed by (5.3), (5.4), (5.6) and (5.10) are stated. Although the result is far from being precise, the general trend is already visible.

A better coincidence, of course, is found with $l = 5$ a, see right side of Fig. 5. In this case, the following equations are found after some rearranging

$$\left\{ \sigma_1 + \sigma_6 + 4(\sigma_2 + \sigma_5) + \sigma_3 + \sigma_4 \right\}'''' = 3750 \left\{ 2(\sigma_1 + \sigma_6) - 5(\sigma_2 + \sigma_5) + 3(\sigma_3 + \sigma_4) \right\}, \quad (6.1)$$

$$\left\{ \sigma_2 + \sigma_5 + 5(\sigma_3 + \sigma_4) \right\}'''' = -3750 \left\{ (\sigma_1 + \sigma_6) + 3(\sigma_2 + \sigma_5) - 2(\sigma_3 + \sigma_4) \right\}, \quad (6.2)$$

$$\left\{ \sigma_1 - \sigma_6 + 4(\sigma_2 - \sigma_5) + \sigma_3 - \sigma_4 \right\}'''' = 3750 \left\{ 2(\sigma_1 - \sigma_6) - 5(\sigma_2 - \sigma_5) + 5(\sigma_3 - \sigma_4) \right\}, \quad (6.3)$$

$$\left\{ \sigma_2 - \sigma_5 + 3(\sigma_3 - \sigma_4) \right\}'''' = -3750 \left\{ (\sigma_1 - \sigma_6) + 5(\sigma_2 - \sigma_5) - 10(\sigma_3 - \sigma_4) \right\}, \quad (6.4)$$

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 + 2\sigma_4 + 2\sigma_5 + \sigma_6 = 0, \quad (6.5)$$

$$13(\sigma_1 - \sigma_6) + 18(\sigma_2 - \sigma_5) + 6(\sigma_3 - \sigma_4) = 37,5(1 - 4\xi^2). \quad (6.6)$$

On principle, the solution is found by the same reasoning as in the former case. Again, the bending stresses at mid-span are plotted in fig. 5; they coincide well with those obtained in the strict solution. The writer wants to emphasize, however, that the main value of the new method consists in its applicability to problems for which no rigorous solution is feasible.

REFERENCE

H. CRAEMER, Stresses in wall-shaped beams; ZAMM **10** (1930).

SUMMARY

The disk is considered to be composed of a sufficient number of strips and the bending stresses are assumed to be linear between any two contact-lines. Then, taking into account the geometrical conditions valid for two adjoining strips, two simultaneous differential equations of second order or one of the fourth order can be derived for each strip. In an illustrative example, the results obtained by the method are compared with the rigorous solution.

ANNÄHERNDE BERECHNUNG VON SCHEIBEN DURCH ZERLEGUNG IN STREIFEN

H. CRAEMER

ZUSAMMENFASSUNG

Die Scheibe wird in eine genügende Anzahl von Streifen zerlegt und es wird angenommen, dass die Biegespannungen zwischen je zwei der so gebildeten Kontaktlinien linear verlaufen. Aus den Verträglichkeitsbedingungen zwischen je zwei benachbarten Streifen ergeben sich je zwei simultane Differentialgleichungen 2. Ordnung oder eine der 4. Ordnung. Die Methode wird auf einen Fall angewandt, für den die strenge Lösung bereits bekannt ist.

CALCUL APPROXIMATIF DES DISQUES, PAR DÉCOMPOSITION EN BANDES

H. CRAEMER

RÉSUMÉ

Le disque est décomposé en un nombre suffisant de bandes, et l'on suppose que les tensions de flexion entre deux des lignes de contact ainsi formées sont linéaires. Les conditions de compatibilité entre deux bandes voisines, donnent deux équations différentielles simultanées du deuxième ordre, ou une équation différentielle du quatrième ordre. La méthode est appliquée à un cas, dont la solution exacte est déjà connue.

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ШАЙБ ПРИ ИХ РАЗЛОЖЕНИИ НА ПОЛОСЫ

Х. КРЕМЕР

РЕЗЮМЕ

Шайба разлагается на достаточное число полос и принимается, что напряжения изгиба между каждыми двумя образованными таким образом контактными линиями имеют линейный сбер. На основе условий совместимости между каждыми двумя смежными полосами получается по два дифференциальных уравнения второй степени или одно четвертой степени. Метод демонстрируется для случая, для которого известен строгий метод решения.

DYNAMICS OF GEARS WITH FEATHER KEYS

B. SZŐKE

[Manuscript received September 21, 1956]

Often in the investigation of some effects occurring in gearing such as noise, oscillations, loosening, breaks, etc., the dynamics of efforts caused during rotation by keying fits is disconsidered. As a characteristic example may be quoted that in the analysis of belt drive the older, as well as the newer textbooks contend themselves with the scalar expression of peripheral force

$$P = T_l - T_r$$

where T_l is the pull produced in the leading (driving) and T_r that arising in the return branch of the belt, instead of pointing out the vectorial sum of the two forces

$$\bar{Q} = \bar{T}_l + \bar{T}_r$$

From Fig. 1a is evident that this force Q actually effective on arm R_1 produces rotation, and only its knowledge enables to determine the instantaneously arising shaft reaction A (vector diagram 1b) with consideration of key force E .

Since the dynamic effects of the arising forces *may cause* trouble especially in feather-keyed gears, the aim of this paper is to analyze the efforts arising in these.

I. The oscillation of shaft reaction in feather-keyed gears

In gears peripheral force P and thus load Q acting on the tooth occupy an invariable position in space in relation to the centre of the shaft O . On the other hand the key rotating together with the shaft of radius r causes that shaft reaction A , balancing the tooth load Q acting on the wheel and key force E , will vary even within one revolution.

More intensive examination of the efforts taking place between the bore of the wheel hub and the shaft within one revolution explains several effects experienced in every day's practice.

Fig. 2a shows the gear in a position when the key has turned by some angle φ from point H_0 chosen in a way that the centre line H_0O of the key be square with tooth load

$$Q = \frac{P}{\cos \alpha}$$

where P is the circumferential force acting at the principal point F , and α is the pressure angle. The straight line of force Q , the contact line, touches base circle of radius r_a at point N .

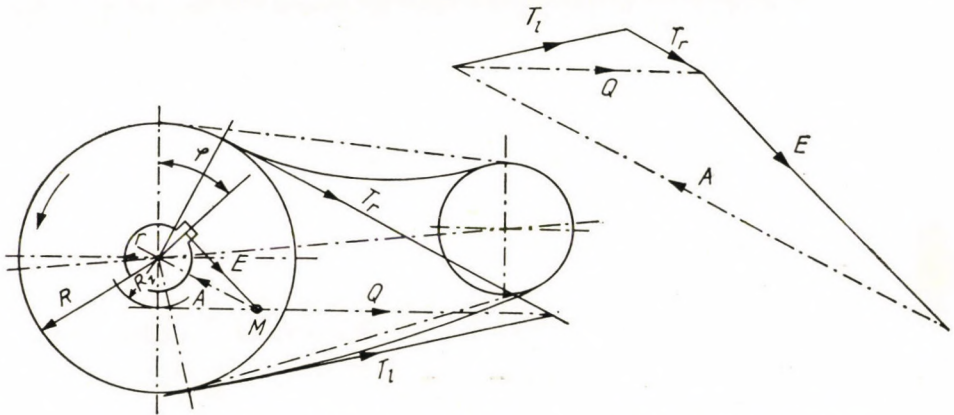


Fig. 1a. Forces acting in belt drive

Fig. 1b. Vector diagram

On the basis of the afore-said reaction force A acting on the bore of the wheel is easily drawn in Fig. 2a, the trace of which will be line OM ; its magnitude is determined by the vector triangle drawn in Fig. 2b to force Q known.

Reaction A can also be computed easily for any arbitrary angle φ . From the diagram may namely be written with notations of the figure that

$$\triangle H_v N_v O_v \approx \triangle MJO \approx \triangle HON$$

On the basis of this similitude

$$H_v N_v : H_v O_v = HN : HO$$

that is

$$A : Q = \sqrt{r^2 + r_a^2 + 2r r_a \cos \varphi} : r$$

whence

$$A = \frac{Q}{r} \sqrt{r^2 + r_a^2 + 2r r_a \cos \varphi} \dots \tag{1}$$

further

$$E = Q \frac{r_a}{r} \dots \quad (2)$$

From formula (1) may be read the following limit cases :

At $\varphi = 0 \quad A = \frac{Q}{r} (r_a + r) = E + Q$

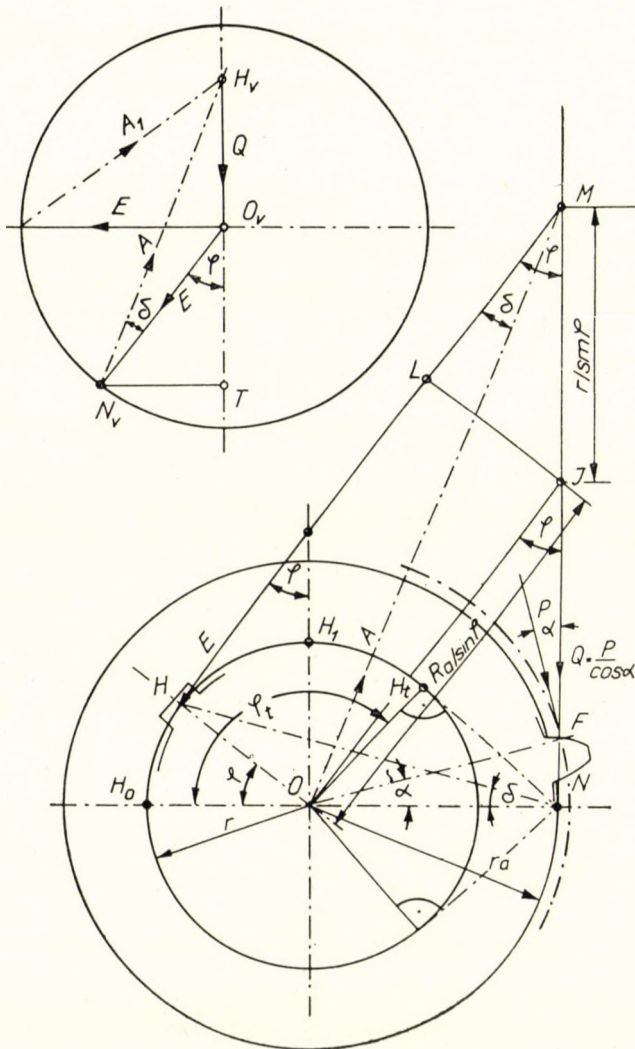


Fig. 2a. Determination of shaft reaction in keyed gear

Fig. 2b. Vector diagram

$$\begin{aligned} \text{At } \varphi = 90^\circ \quad A &= \frac{Q}{r} \sqrt{r^2 + r_a^2} = E \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_a}\right)^2} \\ \text{At } \varphi = 180^\circ \quad A &= \frac{Q}{r} (r_a - r) = E - Q \\ \text{At } \varphi = 270^\circ \quad A &= \frac{Q}{r} \sqrt{r^2 + r_a^2} = E \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_a}\right)^2} \end{aligned}$$

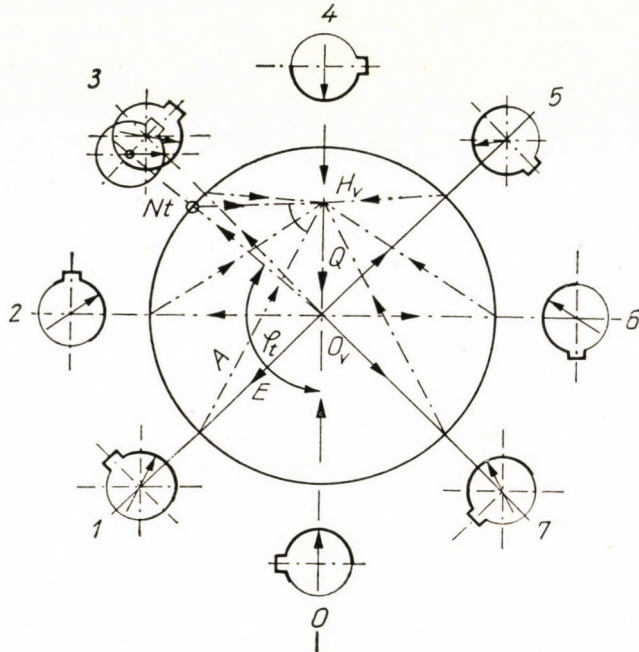


Fig. 2c. Variation of the direction of shaft reaction in relation to the middle of the key during one revolution

Therefore the following may be stated :

Key force E is a rotating vector, which does not change its magnitude during rotation of the shaft and lags by 90° behind the middle radius of the key OH (Fig. 2a), its angular velocity equals that of the shaft, the end point N_v of its vector describes the circle of centre O_v and radius E (Fig. 2b).

Vector Q of the tooth load is stationary.

Exceptional cases disregarded, the radius of the pitch circle is greater than the radius of the shaft, or of the key, thus

$$Q = H_v O_v < E = O_v N_v$$

Shaft reaction A is similarly a rotating vector whose centre is H_v , but its angular velocity does not agree with that of the shaft, its magnitude is not

constant, but it exerts a pulsatory effect on the bore of the hub. Its rotating end point is that of vector E , but its stationary origin coincides with that of vector Q .

Fig. 2c shows the variation of reaction A acting on the shaft bore of the gear every eighth part of one revolution and for each position also shows which part takes the pressure in relation to the keyseat.

A more perspicuous picture of the amplitudes of the pulsations of shaft reaction force A is obtained, if the variation of shaft load is plotted in terms of angle φ . This is shown in Fig. 3.

On the basis of Fig. 2c the following may be stated :

During rotation always the same half of the bore receives pressure.

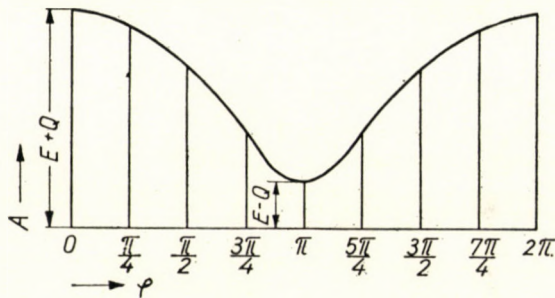


Fig. 3. Variation of the magnitude of shaft reaction in terms of the angle of rotation

From origin O to position 4 the shaft load decreases and the key tends to press itself into the keyseat, during the other half revolution the shaft load increases and the key strives to pull itself out from the keyseat. This penetration and pulling out of the key, as far as the ease of fit allows it (for instance with a feather key), presents itself most in a position, where force A makes the smallest angle with the middle plane of the key OH . This angle is with notations of Fig. 2a and 2b

$$\sphericalangle MOH = 90^\circ - \delta$$

Evidently $\sphericalangle MOH$ will be smallest where

$$\delta = \sphericalangle O_v N_v H_v = \sphericalangle ONH$$

is largest, that is, at position φ_t of angle φ , where NH_t contacts the circle of radius r , and $\sphericalangle OHN$ is a right angle.

In Fig. 2c the vector $A = N_t H_v$ square with $O_v H_v$ yields that shaft reaction whose direction includes the minimum angle with middle plane OH of the key at the first half turn.

From Fig. 2a is directly evident that at this extreme value

$$\cos \varphi_t = -\cos (180^\circ - \varphi_t) = \frac{r}{r_a} = \frac{Q}{E} \quad (3)$$

and from Fig. 2c may be written that at this position

$$A = \sqrt{E^2 - Q^2} = E \sin \varphi_t \dots \quad (4)$$

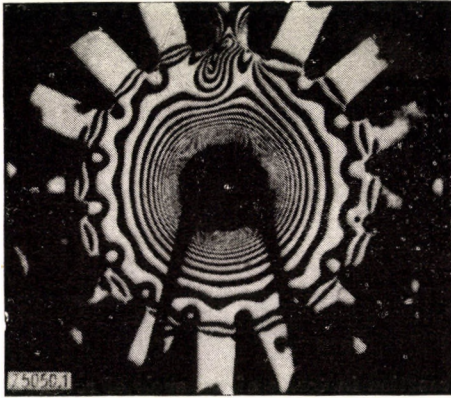


Fig. 4. Pattern of the stress state of gear tightly mounted on the shaft with top tooth loaded (Pressure on tooth from left to right) [1]



Fig. 5. Pattern of the stress state of feathered gear with top tooth loaded (Pressure on tooth from left to right) [1]

II. Photo-elastic pictures

This paper aims at the investigation of effects of motion occurring in gears fastened by feather or sliding keys, under the effect of pulsatory reactions, but *photo-elastic pictures* taken in polarized light from transparent gear models of plastics so lucidly manifest the distribution of power impulses occurring and thereby confirm these statements that it is worth while to extend on them.

Fig. 4 presents the plane stress distribution in the body of a gear tightly pulled up on the shaft, without feather, and Fig. 5 that of a gear feathered on, by *streamline fillets* (isochromatics). In both cases the top tooth was loaded by a pressure from left to right [1].

The streamline fillets of shear stresses corresponding to identical normal stresses $\sigma_1 - \sigma_2$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

surround the shaft in regular circles in Fig. 4; in Fig. 5 the effects of key force E and shaft reaction A present themselves.

The effect of shaft reaction A on the development of streamline fillets can be more easily evaluated if it is considered first what effect is produced by some accessory compressive force on the photo-elastic picture of a test specimen under pure bending stress.

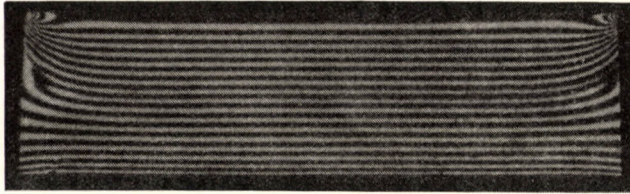


Fig. 6a. Streamline fillets in test specimen subjected to pure bending [2]

Fig. 6a shows the streamline fillets of a solid test specimen in such stress state, Fig. 7a those of a bar with an internal hole [2]. In both above the colour line of O -order, corresponding to the neutral fibre, black streaks indicate regions of equal shear stress of the compression zone, streaks below this line those of the tension zone. Streamline fillets of highest order are running along the borders.

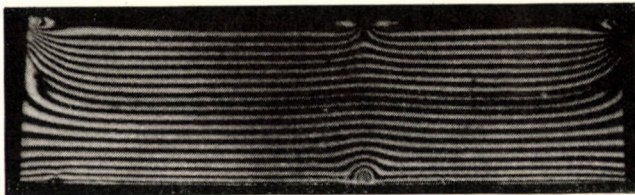


Fig. 6b. Streamline fillets under the effect of two additional indenting pressures [2]

Fig. 6b shows the change of streamline fillets under the effect of the indenting compression test. At the bottom, where tensile stresses σ_1 are higher than in the inside of the bar, the indenting compression raises new stresses of higher order, since it tends to *stretch* fibres in *tension*, and in consequence of this the streamline fillets penetrate from the borders inward. In the upper compression zone, where compressive stresses σ_1 are acting, the indenting compression test reduces local stress, because it tends to *stretch* fibres in compression, and in consequence of this streamline fillets of lower order strive forward into the compression zone.

An entirely analogous case is found in Fig. 7b, where at the upper part of the hole the indenting compression finds *fibres in compression* and tends to

stretch them, the *stress decreases*, and in consequence of this the fibres of lower stress σ_1 strive to progress upward, so that the top streamline even breaks at the middle. The indentation compression acting on the lower rim of the hole tends to stretch fibres in tension, whereby local stresses increase, and from the bottom of the bar streamline fillets bend toward the compression zone [2].

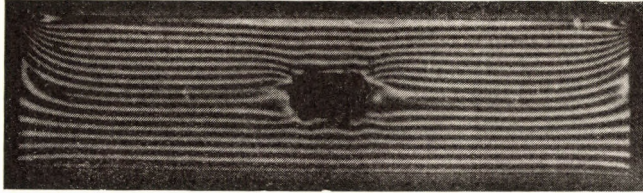


Fig. 7a. Streamline fillets in holed test specimen subjected to pure bending [2]

Returning to Fig. 5 it can be laid down as a fact that shaft reaction A directed toward the point of intersection of vertical force E acting from top downward and load Q acting on the top tooth from left to right — analogously to Fig. 7b — by exerting pressure on fibres in tension diverts the streamline fillets

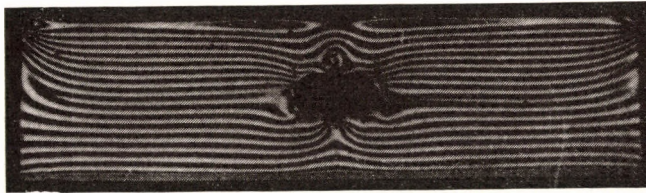


Fig. 7b. Streamline fillets under the effect of indenting pressures acting on hole rims [2]

of higher order toward the compression zone. Under these efforts besides the isochromatic spot of zero order in the middle of the root of the tooth, there appears another spot of zero order between the tooth and the bore, surrounded by the colour line of 1-order; the tendency of principal streamline fillets of 2-order toward the bore indicates the shaft reaction A present.

Of course the optical image of the stress state changes during the revolution of the gear in the sense as follows from Fig. 2c.

III. Probable effects of dynamic efforts

In large gears, where force Q is relatively small in relation to E , the angle characteristic from the viewpoint of wheel slip comes up after the first quarter turn, when it cannot be dangerous, because it is almost perpendicular to the middle plane of the key. In small gears, however, where for reasons of economy

the thickness of the hub is limited, it presents more danger, especially if the higher number of revolutions of the small gear is considered.

Upon reversal of the gear that half of the bore takes up the shaft load which was unloaded at the former sense of rotation.

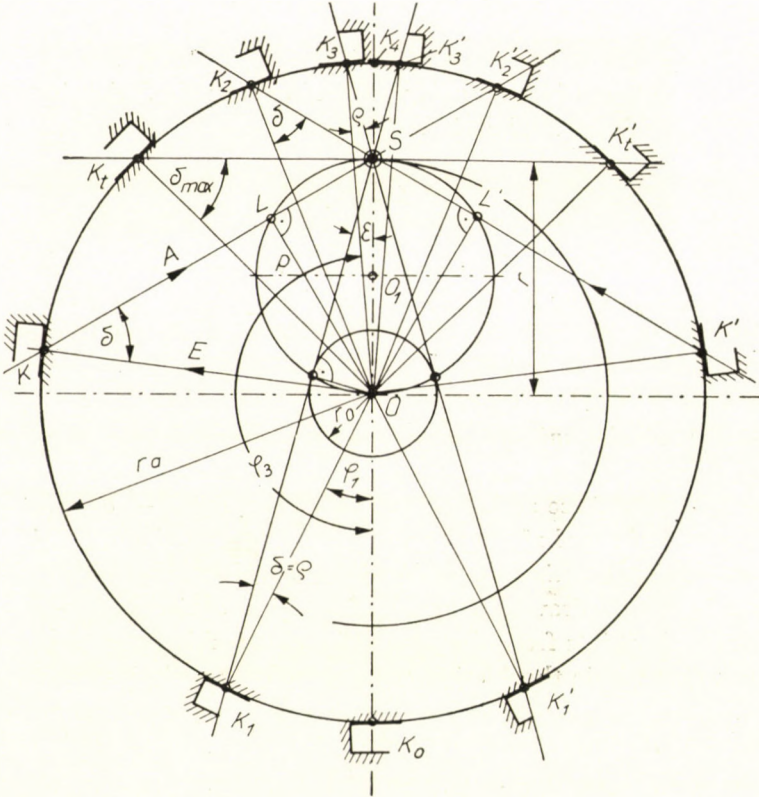


Fig. 8. Steps of displacement of wheel body in relation to the shaft

From these statements some important conclusions may be drawn. From formula (2) follows that if the scale is chosen that

$$Q = r$$

then according to Fig. 8

$$E = r_a \cdot$$

Let the friction angle between key and keyslot be ϱ , then from any point K on the periphery of the circle of radius r_a is visible at angle ϱ the radius r_0 of the circle drawn with centre at O , whose length is

$$r_0 = r_a \sin \varrho \dots \dots \dots (5)$$

On the other hand, if above shaft radius r , chosen for diameter, a *Thales* circle is drawn, then for angle δ included by forces E and A pertaining to any point K of the circle of radius r_a with notations of the figure

$$\sin \delta = \frac{OL}{OK} = \frac{p}{r_a}$$

that is, in the course of rotation of vector A about pole S the side of the right-angled triangle of the *Thales* circle OSL

$$OL = p$$

varies proportionately to the sine of angle δ .

Position K_iS , pertaining to δ_{\max} and tangent to the circle of radius r is of particular importance because the angles δ of shaft reactions KS and K_2S , which are opposite-hand views of K_iS , are uniform, since the same p belongs to both directions. *Therefore at such positions the conditions of slip and of the fit of the key are also uniform.*

On the other hand, in reflected image positions in relation to OS , such as KS and $K'S$ the force acting on one side at angle $90^\circ - \delta$ tends to approach the keyed half of the shaft to the wheel hub, and on the other side a force of the same magnitude, acting at angle $90^\circ + \delta$ makes an effort to remove it.

Two tangents drawn from pole S to friction circle of radius r_0 cut out four remarkable points from the circle of radius r_a : between K'_1 and K_1 shaft reaction A falls within the friction cone, therefore no slip is possible at the key-seat; from K_1 to K_3 the *wheel body moves radially in relation to the shaft centre*; from K_3 to K'_3 the fit is again tight; from K'_3 to K'_1 the *wheel body makes a radial movement in opposite sense to the former.*

However slight be the friction, there is no slip in positions K_0 and K_4 .

The angle

$$K_0OK_1 = \varphi_1$$

at which slip starts may be determined from $\triangle OSK_1$; namely with notations of the figure

$$\sin \varepsilon = \frac{r_a \sin \varrho}{r} = \frac{r_0}{r} \quad (6)$$

and

$$\varphi_1 = \varepsilon + \varrho \quad (7)$$

But to $\sin \varepsilon$ pertains also the value of

$$\sphericalangle OSK_3 = 180^\circ - \varepsilon$$

from which angle

$$\sphericalangle K_4OK_3 = 180^\circ - \varphi_3$$

is determinable, namely from $\triangle SOK_3$

$$\varphi_3 = \sphericalangle K_0OK_3$$

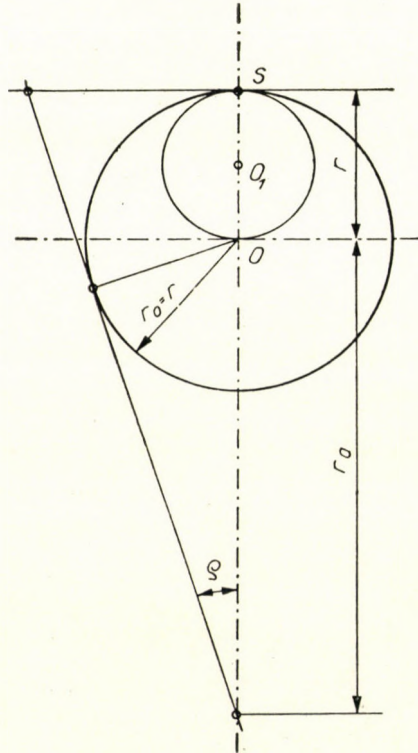


Fig. 9. Limit case of displacement of wheel body in relation to shaft

as external angle

$$\varphi_3 = 180^\circ - \varepsilon + \varrho. \quad (8)$$

On the other hand, angle K_1OK_3 , within which slip takes place

$$\varphi_3 - \varphi_1 = 180^\circ - 2\varepsilon. \quad (9)$$

From Fig. 8 and 9 is evident that the limit position at which movement still takes place, comes up when

$$r_0 \leq r$$

that is, with consideration of (5)

$$r_a \leq \frac{r}{\sin \varrho} \quad (10)$$

According to Fig. 9 presenting the limit position separately

$$\operatorname{tg} \varrho = \mu = \frac{r}{\sqrt{r_a^2 - r^2}} \quad (11)$$

If the value of $\sin \varrho$ is taken for 0, 1, then according to (10) *the described effect may occur in all gears sitting loosely on their shafts, of which the diameter of the pitch circle does not exceed ten times the diameter of the shaft bore. Gears of this order of size are found in motor vehicles, machine tools and in general in most sliding change gears.*

IV. Consequences of slipping caused by pulsating shaft reaction

In case of loosening of keys, according to experience more frequent with reversing shafts, it is usually said that the "key was driven out". However, it is evident from Fig. 2c that in some cases this loosening of the key can be brought about not only by force E directly acting on the key but may be furthered by resultant A of key force E and tooth load Q , especially if the fit of shaft and bore is inadequate, or is too loose for service requirements and thus permits radial movement of the key.

In *slip-feather joints*, where the possibility of shifting change gears calls for easier fit, the pulsatory effect deserves special attention. That is to say, the requirement of a thicker shaft for the larger gear to transmit the greater torque may cause that the radial movement of the wheel body in relation to the shaft centre, imagined as stationary in space, occurs with the fast-moving pinion as well as with the slow-running large gear. The distance between centres of the mating gears thus varies rhythmically because of composition of movements according to the number of revolutions of the pinion and the gear ratio. The vibration effect thus occurring may be a *sound source* too.

Gears of elastic material pressed against each other are slid in space relatively to each other, which may bring into vibration both wheel bodies. Already with shafts of 50—60 mm diameter in sliding change gears a clearance of 0,04—0,05 mm may be reckoned with between the wheel bore and the shaft, that is, in the two mating gears a relative displacement of the order of magnitude of one tenth of a mm can come about, even if the gears are most precisely cut and balanced.

Another sound source may be *knocking* of the wheel body against its own shaft, which is repeated as afore-said *twice per revolution*. For this reason, for instance, some gear running at 3900 revolutions per minute can strike 7800 blows per minute, or 130 blows per second upon its own shaft, which may produce a "C" tone corresponding to that already.

The effect dealt with of course cannot come up in gears where two opposite sliding keys are perfectly uniformly seated or with spline shafts, where the splines have perfectly uniform fit. Since this cannot always be realized by routine shop techniques, the described effects as one cause of gear noise, may be supposed even with such gearing. It is not superfluous to remark this, because the noise arising at the rated number of revolutions and its harmonics is in general attributed to errors of gear cutting, or the knocks caused by lack of balance, may be to vibrations caused by the clutch [3].

Surely clutches may be very often sources of very disagreeable noises, yet according to the afore-said it would be worth while to pay attention to relative movements arising between the wheel body and its shaft at experiments on gear noise, because it can be taken for certain that a source of noise so far disconsidered has been discovered.

The above considerations also give an answer to the "mystery" occurring in practice, why gear noise often ceases during search for the fault. It happens, namely, that the assembly is disassembled for a new check, and since no fault is found in parts, is reassembled, and the noise ceases. In this case the afore-treated force effect might have been active at the first assembly, and at the reassembly the gears have been mounted on the splined shaft so that the splines opposite to one another have acquired a uniform fit.

At the effects so far mentioned the middle line of the shaft was supposed to be stationary. It may occur, however, that at the gear drives characterized by equation (10) the gear body seated loosely on the shaft under the effect of tooth load Q and key reaction E exerts upon the shaft twice per revolution such an impulse which produces the disturbance of resonance. In such case from the viewpoint of resonance not the double number of revolutions has to be considered, but

$$\sphericalangle K_t OK'_t = 180^\circ - \delta_{\max}$$

pertaining to the optimum position of slip denoted by K_t and K'_t of Fig. 8, or the corresponding round angle

$$\sphericalangle K'_t OK_t = 180^\circ + 2 \delta_{\max}$$

where

$$\sin \delta_{\max} = \frac{r}{r_a}$$

Instead of further enumeration of effects in connection with the pulsating efforts it is remarked only that it is largely to be attributed to these that the efficiency of sliding-gear type transmissions is much lower than that of gears mounted tight on their shafts.

REFERENCES

1. Dr. Ing. G. LEHNERT: Qualitative Bestimmung von Verzahnungsfehler durch Messen der Zahnverformung im Eingriff und unter Betriebslast. VDI. Zeitschrift. 1954. Nr. 8. S. 213—220.
2. Prof. Dr. L. FÖPPL u. Prof. Dr. E. MÖNCH: Praktische Spannungsoptik. Springer-Verlag, Berlin, 1950.
3. Dr. Ing. H. ZINK: Geräuschuntersuchungen an Zahnradgetrieben. VDI. Zeitschrift 1956. Nr. 8. S. 297—360.
4. M. M. FROCHT: Photoelasticity. New York. 1948. (With other literature cited).

SUMMARY

In feather-keyed gears due to the keying fit the shaft reaction is a vector of varying in magnitude within one revolution rotating about a point outside of the centre of revolutions. In sliding gear type transmissions therefore, in case when the radius of the base circle is smaller than the ratio of the radius of the shaft to the sine of the friction angle, the wheel body undergoes two displacements per revolution in relation to the shaft centre imagined as stationary. The paper treats the magnitude of the efforts arising and the determination of the positions of displacements pointing out that this phenomenon may play the part of a sound source so far disconsidered in gear drives, may cause resonance in properly cut and well-balanced gears and serve as an explanation of several practical observations that appeared otherwise as mysterious.

DAS KRÄFTESPIEL VON ZAHNRÄDERN MIT FEDERVERBINDUNG

B. SZÓKE

ZUSAMMENFASSUNG

Bei Zahnrädern mit Nut und Feder ist infolge der Federverbindung die Wellenreaktion innerhalb einer Umdrehung ein Vektor veränderlicher Grösse, der sich um einen Punkt ausserhalb des Drehungsmittelpunktes dreht. Infolgedessen erleidet bei Zahnradgetrieben mit Gleitfederverbindung in Fällen, wo der Halbmesser des Grundkreises kleiner ist als der Quotient des Wellenhalbmessers zum Sinus des Reibungswinkels, der Zahnradkörper im Verhältnis zu dem als unbeweglich gedachten Drehmittelpunkt innerhalb einer Umdrehung zwei Verschiebungen. Der Aufsatz behandelt die Grösse der auftretenden Kräfte und die Bestimmung des Ortes der Verschiebungen, indem darauf verwiesen wird, dass diese Erscheinung bei Zahnradgetrieben als bisher unbeachtete Geräuschquelle auftritt, bei richtig verzahnten und gut ausgewuchteten Rädern Resonanz verursacht und als Erklärung mehrerer praktischer Erfahrungen dienen kann, die sonst vielfach als rätselhaft erschienen.

LE JEU DE FORCES SUR ENGRENAGES AVEC LANGUETTES

B. SZÓKE

RÉSUMÉ

Dans les engrenages avec languettes la réaction de l'arbre est à cause du reserrage un vecteur de grandeur variable au cours d'une révolution, tournant autour d'un point en dehors du centre de rotation. En conséquence de cela aux engrenages de rechange avec languettes colissantes au cas où le rayon du cercle de base est plus petit que le rapport du rayon de l'arbre au sinus de l'angle de frottement, le corps de la roue dentée fait deux mouvements par révolution

par rapport au centre de l'arbre, imaginé comme immobile. L'étude traite la grandeur des forces en jeu et la détermination des lieux des mouvements, en indiquant que ce phénomène peut servir d'une source de bruit jusqu'à présent ignorée dans l'étude des engrenages. Aux engrenages à denture impeccable et bien balancés cela peut causer des troubles de résonance, et peut servir d'explication de plusieurs expériences pratiques, prises jusqu'à présent pour énigmatiques.

РАБОТА В СЛУЧАЕ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС С ПАЗОМ И ПРУЖИНОЙ

Б. СЕКЕ

РЕЗЮМЕ

В случае зубчатых колес с пазом и пружиной вследствие клинения реакция оси в пределах одного оборота представляет собою вектор переменной величины, вращающийся вокруг точки, лежащей вне центра вращения. Вследствие этого в случае зубчатых колес с подвижным клином, когда радиус основного круга меньше радиуса оси и частного синуса угла трения, тогда тело зубчатого колеса по сравнению с центром оси, предполагаемой неподвижным, за каждый оборот совершает сдвига. Рассматривается величина возникающих сил и определяется место сдвигов, указывая, что это явление может фигурировать в случае зубчатых приводов в качестве звукового источника, до сего времени не учтенного; в случае правильно обработанных и хорошо сбалансированных зубчатых колес может вызвать резонанс и служит в качестве объяснения ряда таких практически установленных явлений, которые, между прочим, были загадкой.

INVESTIGATION INTO THE DEFORMATION OF SHAFTS AND THE PROBLEM OF MINIMIZING DEFORMATION

I. LIPKA,

INSTITUTE FOR THE DEVELOPMENT OF MACHINE TOOL-CONSTRUCTION, HALÁSZTELEK, NEAR BUDAPEST

[Manuscript received October 11, 1956]

Introduction

In this paper we are dealing with the deflection of machine tool-shafts, caused principally by bending stresses, and with the question of reducing the deformation. The subject of our investigations are the shafts employed in machine tools, called main spindles, which are designed to clamp and hold the work piece. The main spindles are quills which deform to various extents as a consequence of the bending and torsion forces, and such deformations may greatly influence the precision of machining. However, the precision of machining does not solely depend on the elastic deformation in the shape of the spindle, but also on the elastic deformation and placing of the spindle supports, i. e. the employed bearings, and on the deformation of the work piece and of the clamping elements. The precision of the machining of the work piece clamped on the end of the spindle is essentially influenced by the deflection of the spindle-end caused by elastic deformations. We are dealing in the following with the problem of reducing the deflection, and the real purpose of our investigations is to find a solution of the following problem: What should be the distance between the two supports, the bearings, of a given main spindle, to reduce the deflection of the spindle-end to the possible minimum? Accordingly, we have to find the optimum distance of bearings from the standpoint of deformation.

I. Determination of the deflection of spindles with constant cross-section

As has been pointed out the side deflection of a work piece in machine tools belonging to the group of lathes is if the piece is machined with a cantilever clamping, a result of the deformation not only of the spindle but of the whole system consisting of the spindle, the spindle supports (spindle-bearings), the holding elements of the work-piece, and the work piece itself. The rigidity of this system is greatly affected by the constructional built-up

of the frontal spindle-bearing. To increase rigidity, specially constructed, cylindrical roller bearings arranged in double rows, with a cone in their inner ring, and close-setted rollers, are used at present. The stiffness of such bearings is considerably larger than that of ordinary roller-bearings.

Departing from this principle we can, in calculating the rigidity of spindles, take the conducting effect of the frontal bearing into consideration by introducing an auxiliary bending moment M_b which has a sense opposite to the bending moment generated by the cutting force on the frontal bearing, and the magnitude, of which is

$$M_b = \varkappa \cdot M_0 \quad 0 \leq \varkappa < 1$$

where M_0 indicates the bending moment on the frontal support caused by the cutting force. In the literature the following is found concerning the deflection of the ends of spindles with *constant cross-section* [1], [2]:

$$y = \frac{1}{3EI} \left[P_1 c^2 (l + c) - 0.5 P_2 a b c \cdot \left(1 + \frac{a}{l} \right) - M_b l \cdot c \right] \quad (1)$$

where

y = value of the deflection of the spindle, in the vertical of force P (cm)

E = modulus of elasticity of the spindle material (kg/cm²)

I = secondary moment of inertia (cm⁴) of the cross-section of a spindle with constant cross-section

P_1 = cutting force (kg)

l = distance of two supports (bearings) (cm)

a, b, c = length of intervals marked in Fig. 1 (cm)

P_2 = force exerted on the spindle by the spindle-driving gear (kg)

Accordingly, the value of the moment M_b arising at the frontal bearing is:

$$M_b = \varkappa M_0 \approx \varkappa P_1 c$$

where the value of \varkappa is given in the literature as 0,3 [1], provided the frontal support is a slide bearing, two roller bearings, or a double-row roller bearing. If the frontal support is a roller bearing, \varkappa can be taken as equal to zero.

The first bracketed member of the expression (1) divided by $(3EI)$ is the value of the deflection of the double-supported beam loaded on the cantilever, in the vertical of force $P_1 \cdot c$ (s. [3] p. 129). The angular deflection at the frontal support of the beam loaded between the supports by force P_2 (s. [3] p. 125.) being

$$\varphi_b = \frac{P_2 a b}{6EI} \left(1 + \frac{a}{l} \right),$$

the rise of the beam in the vertical of force P_1 , as effected by force P_2 , is equal to $c \varphi_b$, the second member of the expression (1). Finally, as the bending moment M_b arising at the frontal support causes an angular deviation, $\varphi_B = M_b l / 3EI$ (s. [3] p. 126.), and this bending moment M_b causes a rise of the end of the beam the magnitude of such rise is

$$c \varphi_B = \frac{M_b l c}{3 E I}$$

which corresponds to the third member of expression (1).

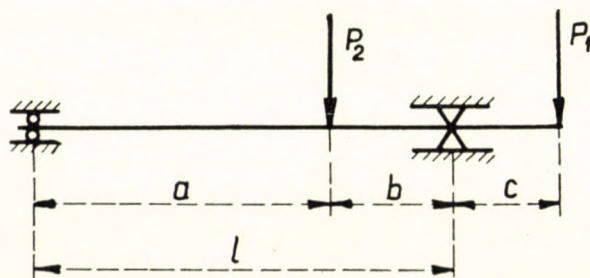


Fig. 1

II. Solution of the problem for spindles with constant cross-section

To solve the problem pointed in the introduction, we have to find the optimum bearing distance in respect of which the deflection of the spindle-end will be minimal. The position of the spindle-driving gear is assumed to be fixed which means that we regard the interval a , together with centre-distance c , as constant, while the bearing distance is regarded as variable.

$$b = l - a,$$

and $M_b = \varkappa \cdot P_1 \cdot c$, the expression of deflection y given under (1) can be written as follows

$$3 E I y = (1 - \varkappa) P_1 c^2 l + P_1 c^3 - 0,5 P_2 a c \frac{l^2 - a^2}{l}$$

Now, as the equation

$$3 E I \frac{dy}{dl} = (1 - \varkappa) P_1 c^2 - 0,5 P_2 a c \left(1 + \frac{a^2}{l^2} \right) = 0$$

solved for l has ordinarily a positive root l_0

$$l_0 = \sqrt{\frac{P_2 a^3}{2(1 - \varkappa) P_1 c - P_2 a}}, \quad (2)$$

the function y has an extreme. As, however, the following inequality holds for every value of l

$$3EI \frac{d^2 y}{dl^2} = \frac{P_2 a^3 c}{l^3} > 0,$$

the function y has a minimum at locus l_0 .

Example: The main spindle of a small-scale precision lathe has the following dimensions: $a = 200$ mm, $c = 130$ mm, $l = 265$ mm. The cutting force $P_1 = 100$ kg; $P_2 = 75$ kg. According to formula (2) the optimum bearing distance, if $\alpha = 0,3$,

$$l_0 = \sqrt{\frac{75 \cdot 800}{1,4 \cdot 100 \cdot 13 - 75 \cdot 20}} = \sqrt{\frac{600\,000}{320}} = \sqrt{1875} = 43,3 \text{ cm.}$$

We calculate the value of deflection y for the actual ($l = 26,5$ cm) and the optimal ($l_0 = 43,3$) bearing distance. As the inside diameter of the spindle $d = 2,1$ cm, the chosen mean diameter of a spindle with a variable cross-section $D = 3,3$ cm gives a moment of inertia $I = 0,05(D^4 - d^4) = 4,957$ cm⁴. According to formula (1), the deflection of the spindle-end for $l = 26,5$ cm (if $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm²) is

$$y = \frac{1}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 4,957} \left[100 \cdot 13^2 (26,5 + 13) - 0,5 \cdot 75 \cdot 20 \cdot 6,5 \cdot 13 \left(1 + \frac{20}{26,5} \right) - 0,3 \cdot 100 \cdot 13^2 \cdot 26,5 \right] = 0,0135 \text{ cm.} = 0,135 \text{ mm,}$$

and for the optimal bearing distance $l_0 = 43,3$ cm, $y = 0,128$ mm. The difference between the two values of y is small, making not more than 0,007 mm.

This is due to the fact that, instead of a spindle with a variable cross-section, we have made our calculation with a spindle of constant cross-section and a mean diameter which is just a slight approach to actual conditions as will be seen later, where the same computations will be performed in respect of spindles with varying cross-sections.

In determining the optimal bearing distance, the cross-section of the spindle has not played any part whatever, the value of expression (2) being independent of spindle diameter. The formula to determine the deflection of the spindle-end (1) refers to spindles of a constant cross section. In reality, the spindles are made with variable cross-sections to meet design requirements, and so we have to investigate the deformation of spindles with *variable cross-sections*.

III. Calculation of the deformation of spindles with variable cross-sections

To determine the deflection of such spindles, i. e. to generalize the formula (1) for variable values of I , we have — in accordance with part 1 — to the following: *a*) the deflection of overhanging-loaded beams with variable cross-section in the vertical of the loading force; *b*) the angular deflection

φ_B caused by the auxiliary bending moment M_b at the frontal support
 c) the angular deflection φ_b at the frontal bearing of beams loaded with force P_2 between the supports.

a) Let us examine the spindle shown in Fig. 2 which is loaded on the cantilever with force P , supported at two points and consisting of six compartments. As will be seen in the following the assumption of precisely six compartments does not impair general applicability.

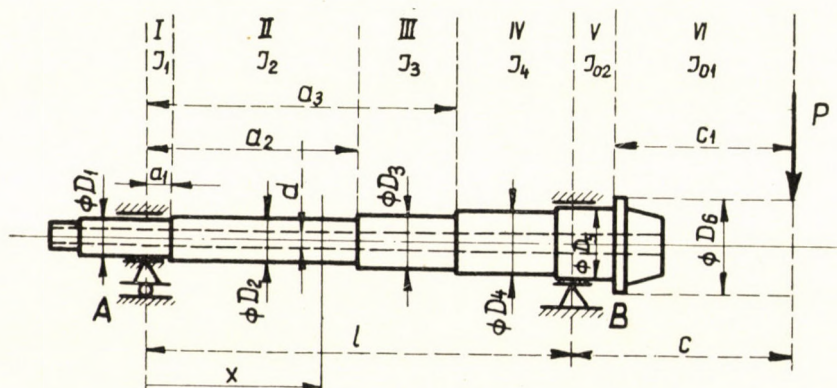


Fig. 2

Let us determine the angular deflection of the cross-section in the vertical of support B, caused by moment $M_0 = P \cdot c$. For this purpose we establish the equation of the elastic line for the sections between the supports. As the reaction force

$$A = \frac{M_0}{l},$$

the equation of the elastic line for the first section, if the positive axis y is directed downwards, is

$$I_1 E y'' = -\frac{M_0}{l} x \quad 0 \leq x \leq a_1,$$

where the abscissa x is calculated from the vertical of reaction force A . Similarly, for the subsequent sections II, III and IV

$$\text{II.} \quad I_2 E y'' = -\frac{M_0}{l} x \quad a_1 \leq x \leq a_2;$$

$$\text{III.} \quad I_3 E y'' = -\frac{M_0}{l} x \quad a_2 \leq x \leq a_3;$$

$$\text{IV.} \quad I_4 E y'' = -\frac{M_0}{l} x \quad a_3 \leq x \leq l.$$

Integration is performed by sections. For section I

$$E y' = -\frac{M_0}{2lI_1}x^2 + c_1 \quad (3)$$

I.

$$E y = -\frac{M_0}{6lI_1}x^3 + c_1x + c_2. \quad (3')$$

By performing integration also for the other three sections, we come to the following expressions :

$$E y' = -\frac{M_0}{2lI_2}x^2 + \gamma_1 \quad (4)$$

II.

$$E y = -\frac{M_0}{6lI_2}x^3 + \gamma_1x + \gamma_2 \quad (4')$$

III.

$$E y' = -\frac{M_0}{2lI_3}x^2 + \delta_1 \quad (5)$$

$$E y = -\frac{M_0}{6lI_3}x^3 + \delta_1x + \delta_2 \quad (5')$$

IV.

$$E y' = -\frac{M_0}{2lI_4}x^2 + \varkappa_1 \quad (6)$$

$$E y = -\frac{M_0}{6lI_4}x^3 + \varkappa_1x + \varkappa_2 \quad (6')$$

The eight integration constants are determined by the boundary conditions. For the initial point of section I, i. e. for $x = 0$, $y = 0$ and thus in accordance with (3')

$$c_2 = 0.$$

As the elastic line of the beam is a continuous curve with a constantly varying tangent, the y' values of formulae (3) and (4) must agree at the boundary point of sections I and II, at $x = a_1$. Here, also the values of y are equal and thus the right-hand sides of formulae (3') and (4') are also equal for $x = a_1$. Accordingly, we can write the following equations :

$$-\frac{M_0}{2lI_1}a_1^2 + c_1 = -\frac{M_0}{2lI_2}a_1^2 + \gamma_1 \quad (7)$$

$$-\frac{M_0}{6lI_1}a_1^3 + c_1a_1 = -\frac{M_0}{6lI_2}a_1^3 + \gamma_1a_1 + \gamma_2 \quad (7')$$

In like manner, in respect of the boundary points of sections II and III, i. e. for $x = a_2$, the right hand side of (4) being equal to the right hand side of (5) and that of (4') to that of (5'),

$$-\frac{M_0}{2lI_2} a_2^2 + \gamma_1 = -\frac{M_0}{2lI_3} a_2^2 + \delta_1 \quad (8)$$

$$\frac{M_0}{6lI_2} a_2^3 + \gamma_1 a_2 + \gamma_2 = -\frac{M_0}{6lI_3} a_2^3 + \delta_1 a_2 + \delta_2 \quad (8')$$

Finally, for $x = a_3$ from (5) and (6) and from (5') and (6')

$$-\frac{M_0}{2lI_3} a_3^2 + \delta_1 = -\frac{M_0}{2lI_4} a_3^2 + \varkappa_1 \quad (9)$$

$$-\frac{M_0}{6lI_3} a_3^3 + \delta_1 a_3 + \delta_2 = -\frac{M_0}{6lI_4} a_3^3 + \varkappa_1 a_3 + \varkappa_2. \quad (9')$$

Calculating now the value of γ_2 from (7) and (7'),

$$\gamma_2 = \frac{M_0 a_1^3}{3l} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right).$$

Further, utilizing the value of γ_2 obtained from (8) and (8'), we have

$$\delta_2 = \frac{M_0 a_1^3}{3l} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{M_0 a_2^3}{3l} \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right).$$

Finally, from the value of δ_2 in (9) and (9') we obtain

$$\varkappa_2 = \frac{M_0 a_1^3}{3l} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{M_0 a_2^3}{3l} \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) + \frac{M_0 a_3^3}{3l} \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_4} \right).$$

The angular deflection of the cross-section in the vertical of the frontal support B is equal to the angle φ_0 given by the tangent of the elastic line at point B, and by the horizontal axis. As there are small angles only,

$$\varphi_0 = \text{tg } \varphi_0 = y', \text{ for } x = l,$$

and thus, according to (6),

$$\varphi_0 = \frac{1}{E} \left\{ -\frac{M_0}{2I_4} l + \varkappa_1 \right\}.$$

The value of κ_1 can be calculated from (6') since the value of κ_2 is known from the foregoing. Furthermore,

$$y = 0 \text{ for } x = l$$

because the displacement y in the vertical of B is equal to zero. Accordingly, from (6')

$$\begin{aligned} \kappa_1 = & \frac{M_0}{6 I_4} l + \frac{M_0 a_1^3}{3 l^2} \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) + \frac{M_0 a_2^3}{3 l^2} \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) + \\ & + \frac{M_0 a_3^3}{3 l^2} \left(\frac{1}{I_4} - \frac{1}{I_3} \right). \end{aligned}$$

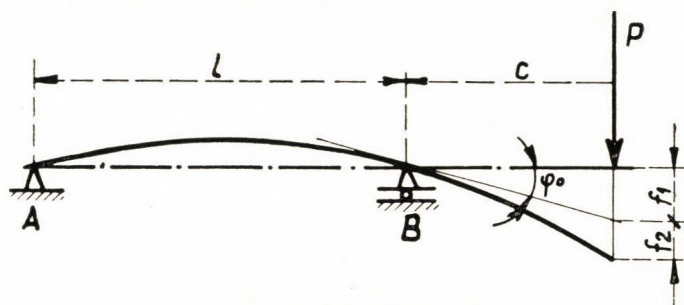


Fig. 3

If we substitute this value in the above-mentioned expression of φ_0 , and bear in mind that in accordance with Fig. 2 $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$ we obtain the following expression for the positive value of the angular deflection of the cross-section in the vertical of support B

$$\varphi_0 = \frac{M_0}{3 E I_4} l + \frac{M_0}{3 E l^2} \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) \quad (10)$$

It is obvious, that, if the number of section within the support distance is generally assumed to be n the summation in the expression (10) for the angular deflection in the vertical of cross-section B caused by moment M_0 lowers the range from $i = 1$ to $i = n$.

Now we are in the position to determine the deflection f of beams with a variable cross-section in the vertical of force P . This will consist of two parts (v. Fig. 3):

$$f = f_1 + f_2$$

If we regard the cantilever part consisting of two compartments (Fig. 2) as an embedded beam with angle φ_0 and do not load the end of the beam with

force P , the deflection of the beam-end will be $f_1 = \varphi_0 \cdot c$. A loading of the beam-end *with* force P , will then result in a further deflection

$$f_2 = \frac{P c_1^3}{3 E I_{01}} + \frac{P}{3 E I_{02}} (c^3 - c_1^3).$$

If we substitute the value $M_0 = P \cdot c$ for M_0 which appears in the expression $f_1 = \varphi_0 \cdot c$, contained in formula (10), we obtain the following formula for the deflection :

$$f = \frac{P c_1^3}{3 I_{01} E} + \frac{P}{3 E I_{02}} (c^3 - c_1^3) + \frac{P c^2 l}{3 E I_4} + \frac{P c^2}{3 E l^2} \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) \quad (11)$$

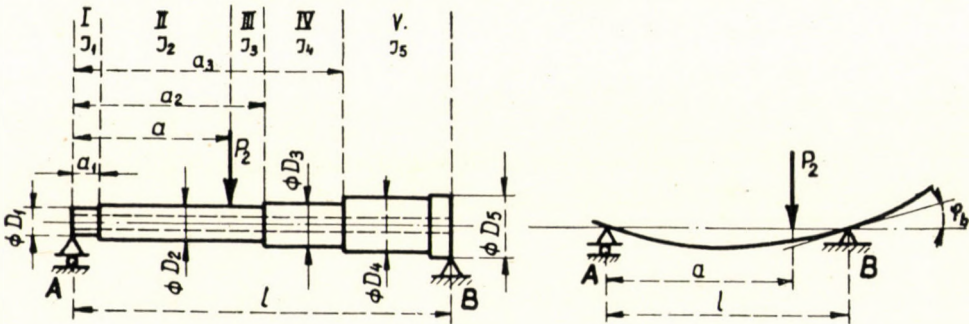


Fig. 4

b) Relying on formula (10) we are now able to express the angular deflection φ_B on the frontal bearing as caused by the auxiliary bending moment M_b . Its sense is opposite to that of the angular deflection φ_0 , since moment M_b has likewise an opposite sense to that of moment M_0 . As $M_b = \kappa M_0 = \kappa P \cdot c$, according to (10),

$$\varphi_B = \frac{\kappa \cdot P c}{3 E I_4} l + \frac{\kappa \cdot P c}{3 E l^2} \cdot \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right)$$

and so the moment M_b causes the rise of the beam's end

$$c \cdot \varphi_B = \frac{\kappa P c^2}{3 E I_4} l + \frac{\kappa \cdot P c^2}{3 E l^2} \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) \quad (12)$$

c) Finally, we determine the angular deflection at the frontal bearing of a beam loaded with force P_2 within its support distance. P_2 means the force exerted on the spindle by the spindle-driving gear in the second section of

the spindle in question. (Fig. 2.). Therefore, to apply the equation of elastic line, we must divide section II. in two new sections (v. Fig. 4).

As the reacting forces at the beam supports are

$$A = P_2 \frac{l-a}{l}, \quad B = P_2 \frac{a}{l}$$

the equation of the elastic line for the first section

$$\text{I.} \quad EI_1 y'' = -Ax, \quad 0 \leq x \leq a_1,$$

where the abscissa x has to be calculated from the vertical of reacting force A .

For the second section

$$\text{II.} \quad EI_2 y' = -Ax, \quad a_1 \leq x \leq a.$$

For the third section, with regard to the above expressions of A and B

$$\text{III.} \quad EI_2 y'' = B(x-l), \quad a \leq x \leq a_2.$$

For sections IV and V, the equation of the elastic line will be similar

$$\text{IV.} \quad EI_3 y'' = B(x-l), \quad a_2 \leq x \leq a.$$

$$\text{V.} \quad EI_4 y'' = B(x-l) \quad a_3 \leq x \leq l.$$

Integrating for each section, we obtain the following expressions :

$$\text{I.} \quad EI y' = -\frac{A}{2I_1} x^2 + c_1 \quad (13)$$

$$EI y = -\frac{A}{6I_1} x^3 + c_1 x + c_2 \quad (13')$$

$$EI y' = -\frac{A}{2I_2} x^2 + \gamma_1 \quad (14)$$

$$\text{II.} \quad EI y = -\frac{A}{6I_2} x^3 + \gamma_1 x + \gamma_2 \quad (14')$$

$$EI y' = \frac{B}{2I_2} (x-l)^2 + \delta_1 \quad (15)$$

III.

$$Ey = \frac{B}{6I_2} (x-l)^3 + \delta_1 x + \delta_2 \quad (15')$$

$$Ey' = \frac{B}{2I_3} (x-l)^2 + \lambda_1 \quad (16)$$

IV.

$$Ey = \frac{B}{6I_3} (x-l)^3 + \lambda_1 x + \lambda_2 \quad (16')$$

$$Ey' = \frac{B}{2I_4} (x-l)^2 + \mu_1 \quad (17)$$

V.

$$Ey = \frac{B}{6I_4} (x-l)^3 + \mu_1 x + \mu_2 \quad (17')$$

Since, for $x = 0$, $y = 0$, according to (13') $c_2 = 0$. On the strength of the equivalence of the values y' and y at the boundary points, we obtain from equations (13), (14) and (13'), (14')

$$\gamma_2 = \frac{A a_1^3}{3} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right).$$

By utilizing the obtained for γ_2 , we have from equations (14), (15) and (14') (15')

$$\delta_2 = \frac{A a_1^3}{3} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{B(a-l)^2}{6I_2} (2a+l) + \frac{A a^3}{3I_2}.$$

In like manner, from (15), (16) and (15'), (16')

$$\begin{aligned} \lambda_2 = & \frac{A a_1^3}{3} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{B(a-l)^2}{6I_2} (2a+l) + \frac{A}{3I_2} a^3 + \\ & + \frac{B(a_2-l)^2 (2a_2+l)}{6} \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right). \end{aligned}$$

Finally, from (16), (17) and (16'), (17')

$$\begin{aligned} \mu_2 = & \frac{A}{3I_2} a^3 + \frac{B(a-l)^2}{6I_2} (2a+l) + \frac{A a_1^3}{3} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \\ & + \frac{B}{6} (a_2-l)^2 (2a_2+l) \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) + \\ & + \frac{B}{6} (a_3-l)^2 (2a_3+l) \left(\frac{1}{I_4} - \frac{1}{I_3} \right). \end{aligned}$$

We can now establish the value of the angle $\varphi_b = \text{tg } \varphi_b = y'$, ($x = l$) between the tangent at point B of the elastic line and the horizontal axis. From equation (17) $\varphi_b = \mu_1/E$ ($x = l$) and from (17') $\mu_1 = -\mu_2/l$ as for $x = l$, $y = 0$. Finally, substituting the values of reaction forces $A = P_2(l-a)/l$ and $B = P_2 a/l$ in μ_2 , we obtain the following expression for the positive value of angle φ_b :

$$\begin{aligned} \varphi_b = \frac{P_2}{E} \left\{ \frac{l-a}{l^2} \frac{a^3}{3 I_2} + \frac{a}{l^2} \frac{(a-l)^2 (2a+l)}{6 I_2} + \right. \\ \left. + \frac{l-a}{l^2} \frac{a_1^3}{3} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{a}{l^2} \frac{(a_2-l)^2 (2a_2+l)}{6} \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a}{l^2} \frac{(a_3-l)^2 (2a_3+l)}{6} \left(\frac{1}{I_4} - \frac{1}{I_3} \right) \right\} \end{aligned}$$

After rearrangement, the formula can be written as

$$\begin{aligned} \varphi_b = \frac{P_2}{E} \left\{ \frac{a}{3 l^2} \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i} \right) + \frac{1}{l} \left[-\frac{a^3}{6 I_2} + \frac{a_1^3}{3} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a}{2} \sum_{i=2}^3 a_i^2 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) \right] + l \frac{a}{6 I_4} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

On the basis of $a)$, $b)$ and $c)$ we can now determine the deflection of spindles with a variable cross-section if loaded by forces P_1 and P_2 ; in other words, we can write the generalized formula (1) applying to spindles with a variable cross-section. This deflection y has the following three components:

$$y = f - c \cdot \varphi_B - c \cdot \varphi_b$$

whence through formulae (11), (12) and (18) and by taking $P = P_1$ in equation (11), we have as deflection

$$\begin{aligned} y = \frac{P_1 c_1^3}{3 I_{01} E} + \frac{P_1}{3 I_{02} E} (c^3 - c_1^3) + \frac{P_1 c^2 l}{3 I_4 E} (1 - \varkappa) + \\ + (1 - \varkappa) \frac{P_1 c^2}{3 E l^2} \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) - \\ - \frac{P_2 c}{E} \left\{ \frac{a}{3 l^2} \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{l} \left[-\frac{a^3}{6 I_2} + \frac{a_1^3}{3} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{a}{2} \sum_{i=2}^3 a_i^2 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) \right] + l \frac{a}{6 I_4} \right\} \end{aligned} \quad (1')$$

IV. Determination of the optimum bearing distance for spindles with variable cross-section

That bearing distance is to be determined for spindles with a variable cross-section, for which deflection is minimal. Let us take the spindle that consists of the sections as given in Fig. 2. We shall consider the length of sections I, II and III as fixed, and that of IV as variable. Therefore, values a , a_1 , a_2 and a_3 , as well as centredistance c are constants, whereas the bearing distance l is variable. We want now to find the minimum of expression (1'), given for the deflection y . For this purpose, we solve for l the following equation

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} \frac{dy}{dl} = & -2 \frac{(1-\nu)P_1c + P_2a}{3} \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) \frac{1}{l^3} + \\ & + \frac{P_2}{l^2} \left[-\frac{a^3}{6I_2} + \frac{a_1^3}{3} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{a}{2} \sum_{i=2}^3 a_i^2 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) \right] + \\ & + \frac{2P_1c(1-\nu) - P_2a}{6I_4} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

where l is raised to the third power.

The root of this equation supplies the locus of the extreme of function y . We calculate also the second differential quotient of y :

$$\begin{aligned} \frac{E}{c} \frac{d^2y}{dl^2} = & 2 \{ (1-\nu)P_1c + P_2a \} \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) \frac{1}{l^4} - \\ & - \frac{2 \cdot P_2}{l^3} \left[-\frac{a^3}{6I_2} + \frac{a_1^3}{3} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{a}{2} \sum_{i=2}^3 a_i^2 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

It is obvious from this formula that if

$$P_2 = 0$$

i. e. if the spindle is not driven by elements directly wedged on the spindle or by elements fitted with bearings, but by the so-called *relieved-drive* which exerts only torsional stresses on the spindle, we shall invariable have

$$\frac{E}{c} \frac{d^2y}{dl^2} = 2(1-\nu) \frac{P_1c}{l^4} \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) > 0,$$

so that the extreme of function y is a *minimum*.

Example. Let us again examine the spindle appearing in Fig. 2. The force P_2 , which operates within the bearing distance, arises in section II. (v. Fig. 4) The coordinates of the boundary points of the individual sections are these: $a_1 = 2,5$ cm, $a_2 = 21,5$ cm, $a_3 = 25,5$ cm, while the coordinate of the vertical of force P_2 $a = 20$ cm. As regards the cantilever: $c_1 = 6$ cm, $c = 13$ cm. The outside diameters of the individual sections are $D_1 = 3$ cm, $D_2 = 3,3$ cm, $D_3 = 4$ cm, $D_4 = 4,1$ cm, $D_5 = 4,3$ cm, $D_6 = 6$ cm.

The inside diameter $d = 2,1$ cm. The acting forces are $P_1 = 100$ kg, $P_2 = 75$ kg. The elasticity modulus $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm². The value of factor \varkappa is assumed to be 0,3.

The cross-sections are circular rings, and their moment of inertia is as follows:

$$I_1 = 0,05 (3^4 - 2,1^4) = 3,0776 \text{ cm}^4; \quad I_2 = 0,05 (3,3^4 - 2,1^4) = 4,9572 \text{ cm}^4; \quad I_3 = 11,8276 \text{ cm}^4; \quad I_4 = 13,1564 \text{ cm}^4; \quad I_{02} = 0,05 \cdot 4,3^4 = 17,0940 \text{ cm}^4; \quad I_{01} = 0,05 \cdot 6^4 = 64,800 \text{ cm}^4.$$

The reciprocal values of these moments are as follows:

$$1/I_1 = 0,3249, \quad 1/I_2 = 0,2017, \quad 1/I_3 = 0,0845, \quad 1/I_4 = 0,0760$$

and with these

$$\sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) = 1307,6442.$$

Now we calculate the values of the coefficients in equation (19):

$$\frac{2 P_1 c (1 - \varkappa) - P_2 a}{6 I_4} = \frac{1,4 \cdot 1300 - 75 \cdot 20}{78,9384} = 4,05378.$$

The value of the coefficient of $1/l^2$ is:

$$75 \left[-\frac{8000}{29,7432} + 0,6417 + 10 \cdot 59,7028 \right] = 24652,553.$$

Finally, the value of the coefficient $-\frac{1}{l^3}$ is as follows:

$$2 \frac{0,7 \cdot 1300 + 75 \cdot 20}{3} 1307,6442 = 2100948,392.$$

With these values, we obtain for l , according to (19), the following cubic equation:

$$4,05379 l^3 + 24652,553 l - 2100948,392 = 0;$$

or, divided by the coefficient of l^3 :

$$l^3 + 6081,3591 l - 518267,693 = 0.$$

This equation has exactly one positive root l_0 (because in the series of coefficients there is exactly one reversal of signs). Its value, calculated with the Cardan formula, is $l_0 = 56,1$ cm. In respect of this value the deflection y has really a minimum, because — taking into account the above calculated values of coefficients (19) — it follows from (20) that

$$\frac{E}{c} \frac{d^2 y}{d l^2} = \frac{1}{56,1^3} \left[\frac{3,2100948,392}{56,1} - 2 \cdot 24652,553 \right] = \frac{1}{56,1^3} [112350,1 - 49305,1] > 0.$$

Now we calculate the value of y from formula (1') for a bearing-distance of $l = 26,5$ cm.

$$y = 0,00005 + 0,00184 + 0,00378 + 0,00350 - 0,000464 \left\{ -12,41385 + 12,40380 + 6,71409 \right\} = 0,00917 - 0,00311 = 0,0061 \text{ cm.}$$

Therefore, for $l = 25,6$ cm, the deflection of the spindle-end $y = 0,061$ mm, while — according to equation (1') — for the optimum bearing distance $l_0 = 56,1$ cm.

$$y = 0,00005 + 0,00184 + 0,00800 + 0,00078 - 0,000464 \left\{ -2,76994 + 5,85918 + 14,21360 \right\} = 0,01067 - 0,00803 = 0,0026 \text{ cm.}$$

Therefore, for the optimum bearing distance, $l_0 = 56,1$ cm, the value of deflection $y = 0,026$ mm. However, this excessively large bearing distance cannot be realized in practice. In such cases, we must try to enlarge the diameter of the spindle simultaneously with increasing the bearing distance to the permissible extent, so as to reduce the magnitude of the spindle-end deflection.

As an example, let us enlarge the diameter of the various sections in the following manner: $D_1 = 3,5$ cm, $D_2 = 4$ cm, $D_3 = 4,5$ cm, and $D_4 = 4,6$ cm. The bearing distance should be $l = 40$ cm. Other dimensions remain unchanged. The numerical values of the various terms in expression (1') of deflection will be as follows:

$$y = 0,00005 + 0,00184 + 0,00351 + 0,00048 - 0,000464 \left\{ -1,69638 + 1,77620 + 6,22619 \right\} = 0,00588 - 0,00293 = 0,00295 \text{ cm.}$$

By such modification of the bearing distance and the spindle dimensions, we have — from the viewpoint of deformation — well approached the optimum in respect of the original idimensions.

V. Determination of optimum bearing distance for spindles not loaded with bending stresses (relieved drive)

It has already been mentioned that, if the spindle-drive is relieved, i. e. if the bending force acting between the supports $P_2 = 0$, the second differential quotient of function y will be positive, so that the deflection y will always have a minimum. In this case we obtain from equation (19) the following expression for the optimum bearing distance l_0

$$l_0 = \sqrt[3]{2 I_4 \cdot \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right)}. \quad (21)$$

It is to be seen from this formula that the value of optimum bearing distance l_0 depends only from the coordinates of the boundary points of the sections and the moments of inertia of the cross-sections. Accordingly, it is, for instance, *independent* from the choice of the value factor κ which determines the auxiliary bending moment M_b . In this case, when $P_2 = 0$, the following rather interesting consideration imposes itself:

If we increase the diameter of every section by the *same* value, that of the optimum bearing distance will *decrease*.

We can prove this thesis in the following manner: let us multiply every term of the sum under the cuberoot in formula (21) with factor I_4 . Let us further write out the terms of the sum in the following rearrangement:

$$I_4 \sum_{i=1}^3 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) = a_1^3 \frac{I_4}{I_1} + (a_2^3 - a_1^3) \frac{I_4}{I_2} + (a_3^3 - a_2^3) \frac{I_4}{I_3} - a_3^3. \quad (22)$$

We can demonstrate that the value of the fractions I_4/I_1 , I_4/I_2 , I_4/I_3 diminishes

if we increase the diameter D_i of every section with the same positive value δ . The moment of inertia of the annulus being

$$I_i = 0,05 [(D_i + \delta)^4 - d^4],$$

we have to show that

$$\frac{D_4^4 - d^4}{D_i^4 - d^4} > \frac{(D_4 + \delta)^4 - d^4}{(D_i + \delta)^4 - d^4} \quad (23)$$

Subtracting the right-hand side of the inequality from its left-hand side

$$\begin{aligned} & \frac{D_4^4 - d^4}{D_i^4 - d^4} - \frac{(D_4 + \delta)^4 - d^4}{(D_i + \delta)^4 - d^4} = \\ = & \frac{D_4^4(D_i + \delta)^4 - D_i^4(D_4 + \delta)^4 + d^4 \{4\delta(D_4^3 - D_i^3) + 6\delta^2(D_4^2 - D_i^2) + 4\delta^3(D_4 - D_i)\}}{(D_i^4 - d^4) \cdot ((D_i + \delta)^4 - d^4)} \quad (24) \end{aligned}$$

and as

$$D_4 > D_i$$

therefore

$$D_4 \cdot (D_i + \delta) > D_i (D_4 + \delta), \quad (\delta > 0)$$

and thus the value of the difference in the numerator of (24)

$$D_4^4 (D_i + \delta)^4 - D_i^4 \cdot (D_4 + \delta)^4$$

will be positive. Likewise positive is the expression in the brace of the nominator, since $D_4 > D_i$. Accordingly, the nominator of (24) is positive from which it follows that the inequality (23) is valid. It is thus proved that the value of fractions I_4/I_i ($i = 1, 2, 3$) diminishes if we increase the diameters D_i by the same δ . But also the value of (22) diminishes along with the diminution of fractions I_i/I_i since $a_1 < a_2 < a_3$, and so $a_2^3 - a_1^3 > 0$ and $a_3^3 - a_2^3 > 0$. Thus we have demonstrated that the value of (21) diminishes if the diameters D_i are increased by the same value.

It is likewise to be seen from formula (22) that if we increase, for example, the diameter of the last section (that with the greatest diameter) only, i. e. if we increase merely the value of I_4 , while that of the other moments of inertia remain unchanged, the optimum bearing distance will not decrease but increase.

Example

Let us now examine the main spindle of universal lathe which has stood the test of practice, one which has larger dimensions than those of the preceding example. The spindle-drive is relieved, i. e. $P_2 = 0$. The cutting force, $P_1 = 1000$ kg. The co-ordinates of dimensions

and the outside diameters are as follows :

$$a_1 = 1 \text{ cm}, a_2 = 22 \text{ cm}, a_3 = 48 \text{ cm}, a_4 = 56,8 \text{ cm},$$

$$c_1 = 13 \text{ cm}, c = 16 \text{ cm}, D_1 = 55 \text{ mm}, D_2 = 58 \text{ mm}, D_3 = 65 \text{ mm}, D_4 = 70 \text{ mm},$$

$$D_5 = 74 \text{ mm}, D_6 = 85 \text{ mm}, D_7 = 102 \text{ mm}, \text{ inside diameter } d = 40 \text{ mm}.$$

Let us examine how close the actual bearing distance $l = 58 \text{ cm}$ under construction is to the optimum value. The moments of inertia of the cross-sections are as follows :

$$I_1 = 32,9531 \text{ cm}^4, I_2 = 43,7825 \text{ cm}^4, I_3 = 76,4531 \text{ cm}^4, I_4 = 107,25 \text{ cm}^4, I_5 = 137,1329 \text{ cm}^4$$

$$I_{01} = 541,2161 \text{ cm}^4, I_{02} = 261,0031 \text{ cm}^4;$$

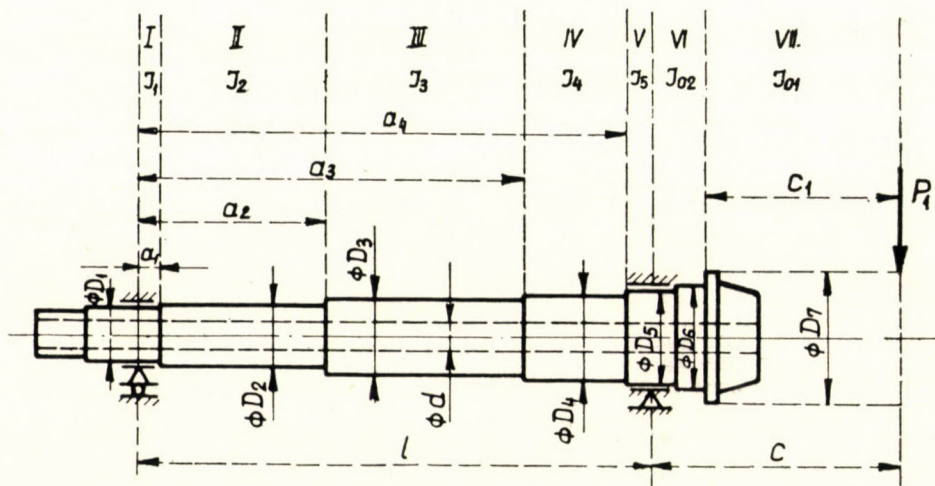


Fig. 5

and applying them,

$$\sum_{i=1}^4 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) = 891,7563.$$

The value of optimum bearing distance, according to (21) is :

$$l_0 = \sqrt[3]{2 \cdot 137,1329 \cdot 891,7563} = \sqrt[3]{244578,255} = 62,5 \text{ cm}.$$

The actual bearing distance of 58 cm is, therefore, only 4,5 cm smaller than the optimum value. The formula (1') for determining the deflection y since $P_2 = 0$, changes as follows :

$$y = \frac{P_1 c_1^3}{3 E I_{01}} + \frac{P_1}{3 E I_{02}} (c^3 - c_1^3) +$$

$$+ \frac{P_1 c^2 l}{3 E I_5} (1 - \varkappa) + (1 - \varkappa) \frac{P_1 c^2}{3 E l^2} \sum_{i=1}^4 a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right)$$

Hence, since $l = 58 \text{ cm}$, and $\varkappa = 0,3$, the deflection of spindle-end

$$y = 0,00064 + 0,00115 + 0,01203 + 0,00754 = 0,0214 \text{ cm}$$

and the deflection for the bearing distance $l = 62,5 \text{ cm}$

$$y = 0,00064 + 0,00115 + 0,01296 + 0,00649 = 0,0212 \text{ cm}.$$

The difference between the two deflections being slight we can say that the bearing distance of the construction $l = 58$ cm is conveniently close to the optimum value.

Finally, we examined the main spindle of a large-sized universal lathe with relieved drive. Its determinative data are: $a_1 = 4$ cm, $a_2 = 72$ cm, $a_3 = 99$ cm, $D_1 = 11$ cm, $D_2 = 12$ cm, $D_3 = 12,5$ cm, $D_4 = 14$ cm, $d = 8$ cm. The cantilever part consists of one compartment, with a diameter of $D_5 = 16$ cm, and $c = 23$ cm. The bearing distance $l = 109,5$ cm.

The optimum bearing distance of this main spindle was calculated as $l_0 = 117$ cm. Hence it differs from the actual value of $109,5$ cm by not more than $7,5$ cm. If $P_1 = 2000$ kg the deflection will be $y = 0,0132$ cm for $l = 117$ cm, and $y = 0,0133$ cm for $l = 109,5$ cm. The difference between the two values is here likewise small.

REFERENCES

1. P. G. JEGERMAN, V. A. BRAVICSEV, L. A. KORSZOV, L. A. KUPERMANN: Raszcot i konstruirovanyije metalloreszuscsh shtankov. *Mazgiz*. 1950. p. 121.
2. L. KAZINCZY: *Szerszámgépek I. (Machine-tools)* 1955. p. 547.
3. Á. MUTNYÁNSZKY: *Szilárdságtan (Statics)* Budapest, 1956. (Hungarian).

SUMMARY

The main spindle-called quills and employed on machine tools-are deformed by loading forces (cutting and driving force). This affects very considerably the precision of machining. The deflection of the spindle-end depends not merely on the elastic deformation but on the spindle bearing-distance as well.

The present paper deals with the elastic deformation of spindles consisting of compartments with variable cross-sections and determines the extreme value with a view to minimizing the deflection of the spindle-end. It is demonstrated that there is an optimal bearing distance at which the deflection is minimal. With relieved drive (when the driving elements are not directly wedged on the spindle), it was found that the optimum bearing distance is decreased if we increase the diameters of the spindle compartments by the same value. A few practical examples show to what extent the actual bearing distance approaches optimum.

UNTERSUCHUNG DER FORMÄNDERUNG VON WELLEN UND DAS PROBLEM DER VERRINGERUNG DER FORMÄNDERUNG

I. LIPKA

ZUSAMMENFASSUNG

Die in Werkzeugmaschinen verwendeten und als Spindeln bekannten Hohlwellen erleiden zufolge der Belastungen (Zerspannungskraft, Antriebskraft) Formänderungen, welche die Genauigkeit der auf den Maschinen stattfindenden Bearbeitungsoperationen in hohem Masse beeinflussen. Die Durchbiegung des Spindelendes hängt nicht nur von der elastischen Formänderung, sondern auch von der gegenseitigen Entfernung der beiden Spindellager ab. Die Arbeit befasst sich mit der elastischen Formänderung der Spindel mit abschnittsweise veränderlichem Querschnitt und behandelt im Zusammenhang damit die Minimalwertaufgabe für die Verringerung der Durchbiegung des Spindelendes. Die Untersuchung dieser Extremtaufgabe zeigt, dass eine optimale Lagerentfernung existiert, für welche die Durchbiegung minimal ist. Im Falle eines entlasteten Antriebes — wenn der Antrieb der Spindel nicht durch unmittelbar auf die Spindel aufgekeilte oder auf sie gelagerte Elemente erfolgt — verringert eine Vergrößerung der einzelnen Spindelabschnittsdurchmesser um gleiche Beträge die optimale Lagerentfernung. Einige aus der Praxis entnommene Beispiele zeigen, in welchem Masse die tatsächlichen Lagerentfernungen eine Annäherung des optimalen Wertes darstellen.

L'EXAMEN DE LA DÉFORMATION DES ARBRES, ET LE PROBLÈME DE LA RÉDUCTION DES DÉFORMATIONS

I. LIPKA

RÉSUMÉ

Les arbres creux utilisés dans les machines-outils, connus sous le nom de broches, sont déformés sous l'action des charges (forces d'usinage, force motrice), ce qui influence grandement la précision de l'usinage exécuté sur la machine. La déflexion de l'extrémité de la broche dépend non seulement des déformations élastiques, mais aussi de la distance entre les deux paliers de la broche. L'auteur discute la déformation élastique de la broche composée de tronçons à sections différentes, et traite le problème de minimum relatif à la réduction de la déflexion de la broche. La discussion du problème de la valeur extrême montre, qu'il existe une distance optimum des paliers, pour laquelle la déflexion est au minimum. En cas d'une commande soulagée — quand la broche n'est pas commandée par des éléments calés ou logés directement sur la broche — un accroissement, par des valeurs égales, des diamètres des différents tronçons réduit la distance optimum des paliers. Quelques exemples pris dans la pratique montrent, dans quelle mesure les distances effectives des paliers approchent la valeur optimum.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ВАЛОВ И ПРОБЛЕМА СНИЖЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ

И. ЛИПКА

РЕЗЮМЕ

Трубчатые валы, применяемые в металлообрабатывающих станках и называемые главными шпинделями, под воздействием прикладываемых усилий (усилие резания, приводное усилие) претерпевают деформацию, что сильно воздействует на точность производимой на станке обработки. Прогиб конца шпинделя зависит не только от упругой деформации, но и от расстояния между двумя подшипниками шпинделя. Работа посвящена упругой деформации шпинделя, состоящего из отрезков переменного сечения, и в связи с этим рассматривается задача предельных значений, необходимых для снижения прогиба конца шпинделя. Разбор задачи предельного значения показывает, что существует некоторое оптимальное значение расстояния между подшипниками, при котором прогиб получается наименьшим. В случае ненагруженного привода — т. е. когда привод шпинделя осуществляется не при помощи элементов, посаженных непосредственно на шпиндель или через подшипник — увеличение диаметра отдельных отрезков шпинделя на идентичную величину снижает оптимальное расстояние между подшипниками. Ряд практических примеров показывает, насколько приближаются применяемые действительно расстояния между подшипниками к оптимальной величине.

THEORETICAL INVESTIGATIONS INTO THE PRODUCTION OF GEARS BY HOT-ROLLING

Prof. I. VÖRÖS
CAND. OF ENG. SC.

UNIVERSITY OF TECHNICAL SCIENCES, BUDAPEST. DEPARTMENT OF MACHINE ELEMENTS

[Manuscript received May 2, 1957]

1. Equipment for the hot-rolling of gears

Several disadvantages of gear cutting have drawn attention to the production of gears by the hot-rolling process. Such disadvantages are: long processing time with the consequent high power-consumption, expensive tools and machinery for toothing, and a higher consumption of material due to the waste of chips. On the other hand, the manufacture of gears produced by hot-rolling is more productive and economical. For example, with the cutting process 8 wheels of a given size can be produced per hour, as against 40 such pieces if the method of hot-rolling is applied.

The problem of producing gears by hot-rolling began to be studied as far back as the end of the last century. In America, COMLEY was the first to tackle the problem in 1872. However, the experiments made no headway which was mainly due to the fact that blanks were heated in separate furnaces, clamping of the heated work-piece on the rolling machine was tiresome and took a long time, during which a considerable amount of scale was accumulating moreover, the use of the method in question made it inevitable that the thick layer of scales was rolled into the flank of the teeth, and that in the meantime, temperature of the blank dropped considerably. If toothing was to be executed in a shorter time, large power effect had to be applied which caused early deterioration of the tool.

Heating by means of high-frequency induction had a beneficial effect on the process: the work-piece can be heated rapidly on the rolling machine itself whereby scaling is reduced, and also heat can be imparted during the process of rolling with a view to preventing rapid cooling.

Hot-rolling of gears can be executed in two different ways: first by means of forced engagement between the blank to be rolled and the rolling master-gears. In this case the work-piece of an appropriate dia., clamped after heating, is forced to revolve — at a ratio suited to the number of teeth — between the master-gears which are likewise in forced engagement; penetrating gradually to the foot diameter of the wheel, the master-gears generate the teeth during

their rotation. With the second method, the workpiece — placed on a mandrel — can revolve freely while the approaching master-gears penetrate into the glowing work piece between them, force it to rotate and thus generate the teeth. Upon the initiative of JÁNOS PAXIÁN and ANTAL CSEPERKÁLOVICS, the second method has been adopted in Hungary and is being applied in the *Csepel Works*.

The theoretical researches carried out at the Department of Machine-Elements of the Technical University of Budapest refer to both methods of hot-rolling.

In the gear-rolling machine as used at the *Csepel Works* (Fig. 1), the cylindrical blank is placed upon a pin located between two master-gear tools.

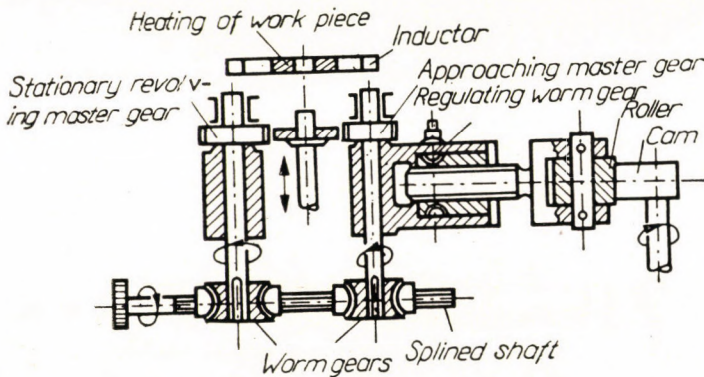


Fig. 1

The pin raises the blank into the inside of the circular high-frequency inductor above the master gears, where, after current has been switched on, heating is continued for a specified length of time. After obtaining the required temperature, the pin again lowers the work piece between the tools. Thereafter the tools start approaching, and finally penetrate into the work. The tools revolve round a vertical shaft and are driven from below, through a worm-gear. One of the master-gears is in the framework, the other on a movable slide; their movement, i. e. their approaching the work piece, is actuated by a roller, thrust by a cam. The worm of the worm-gear driving the movable tool is on a spline shaft so as to permit a revolution of the tool during approach. The work-piece together with its supporting pin, has also to be advanced at half speed towards the tool embedded in the framework. The master-gears are water-cooled in order to prevent them from warming up excessively during the continuous work.

2. Tooth profile-drawing device

For the determination of the amount of material required to fill the volume of the tooth, the cross-section area of the tooth must be known. The quickest method to determine the area of the teeth is that of planimetry. For this purpose, a mechanical tooth-profile drawing device, based on the generating principle of the gears, has been developed with the collaboration of JENŐ JUREK and

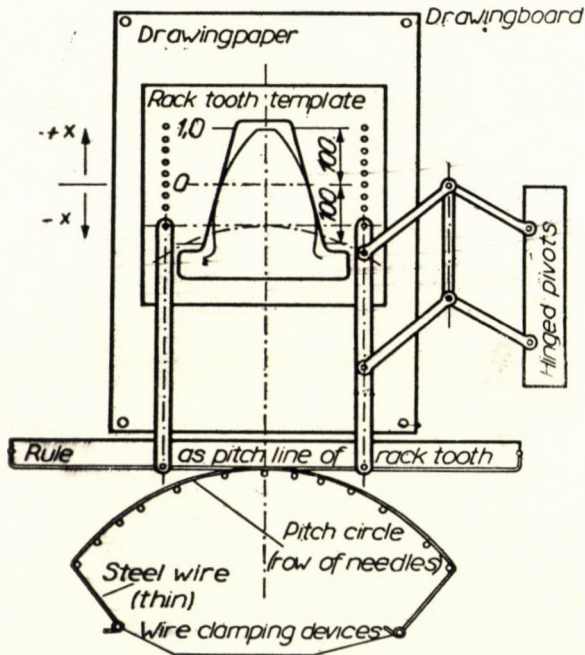


Fig. 2

BÉLA BÍRÓ (Fig. 2). The device can be mounted on a drawing board. Based upon the principle of the machines of the Maag-type, the tracing of the teeth is carried out by the generating process with the use of a rack. In order to reduce the effect of the inaccurate drawings, the rack template is large: module $m = 100$ mm. In correspondence with the finishing tool of the Maag-type the template was provided with an aperture corresponding to a tooth-height of $h = \frac{13}{6}m$. This plate has to roll down the pitch circle of the wheel at the pitch line of the rack. The different positions taken by the rolling rack cut into plate may be traced at the edge of the rack on a drawing paper placed underneath, and the tooth-profile is given by their enveloping curve.

The pitch circle of the wheel was marked out on the tooth profile drawing device by a row of needles as shown in the lower part of the figure. The pure

rolling of the line of the rack tool down the pitch circle is ensured by two thin steel wires. One end of the steel wires is fixed to a clamp, on both sides they overlie the row of needles, right and left of the centre they run along the rule, and their other end is fixed to the two ends of the rule. The rule, as rack-

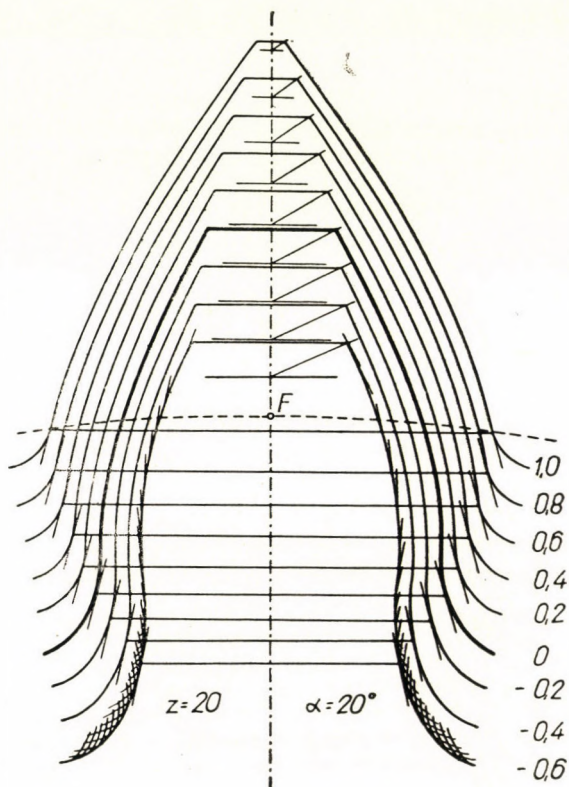


Fig. 3

tooth pitch line, may perform a pure roll down the pitch circle as given by the row of needles, such pure roll being ensured by the steelwires.

Since the row of needles might interfere with the undisturbed position of the drawing paper beneath the rack it is not placed directly on the rolling rule ; instead, the rolling displacement is led by vertical parallelogram guidance to the rack template. The lower pins of the vertical rod have to be developed at the rolling lower edge of the rule. The vertical position of the rods in any position of the rolling rule is ensured by double parallelogram guidance joined to the right rod, the pins fastened to the drawing board constituting its two extreme articulations on the right. By means of the double guidance, the rack template follows the rolling displacement of the lower rule with accuracy.

With the aid of the device tooth profiles corresponding to various profile displacements i. e. correction coefficients may be traced. For this purpose holes corresponding to positive and negative profile displacement steps are provided at both edges of the template. The upper hinging points of the vertical parallelogram can be placed in these bores, so that by rolling the template tooth profiles

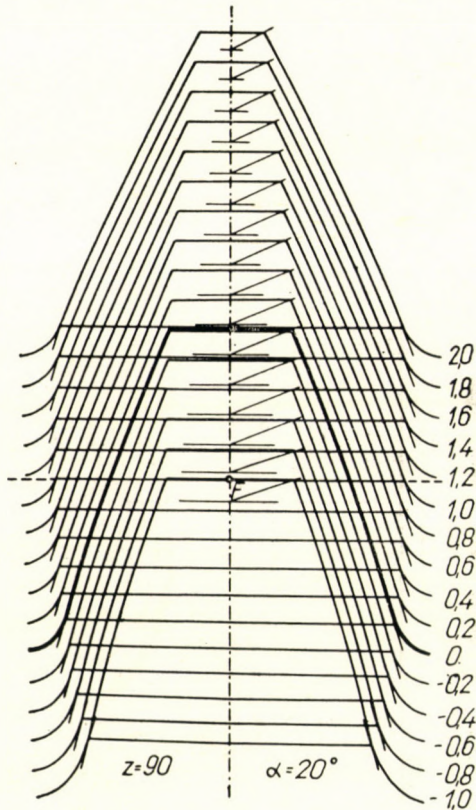


Fig. 4

corresponding to various profile displacements are obtained. For instance, the hinging points in the figure are in a position $x_1 = +0,6$ of correction coefficient.

The described device enabled us to trace, by means of a rack template with a pressure angle of $\alpha = 20^\circ$, tooth profiles corresponding to various tooth-number steps and \pm displacements, i. e. the entire range of toothings. For smaller tooth numbers only a few tooth profiles could be traced within the lower and upper limits fixed by the undercut and tapering, while for larger tooth numbers, in addition to normal tooth, corrected values corresponding to 15 profile displacements have been traced between -1 and $+2$ correction coefficients in steps

of 0.2. For example, Fig. 3 shows profile shapes for a wheel of 20 teeth, and Fig. 4 illustrates 16 profiles for a wheel of 90 teeth.

Tooth area at $m=1$ mm from $x=+0,4$ to $x=-1,0$ $\alpha=20^\circ$

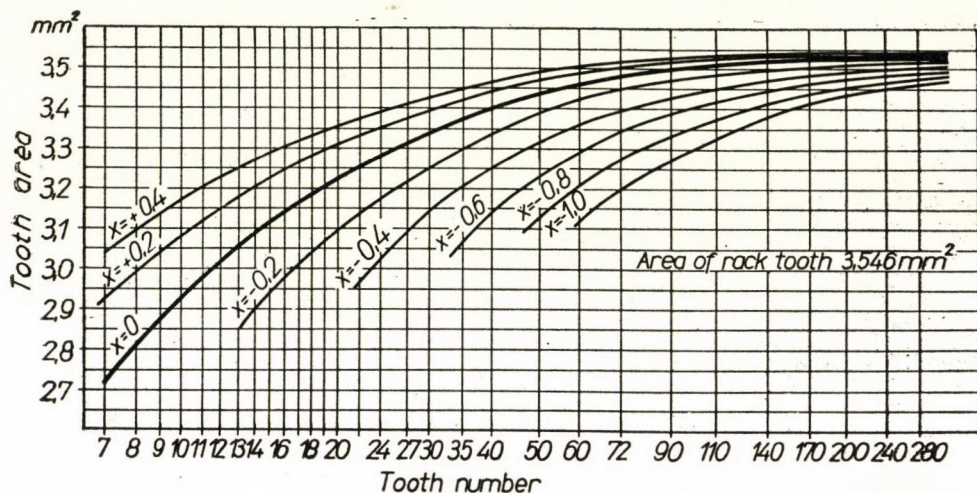


Fig. 5

Tooth area at $m=1$ mm from $x=+0,6$ to $x=+2,0$ $\alpha=20^\circ$

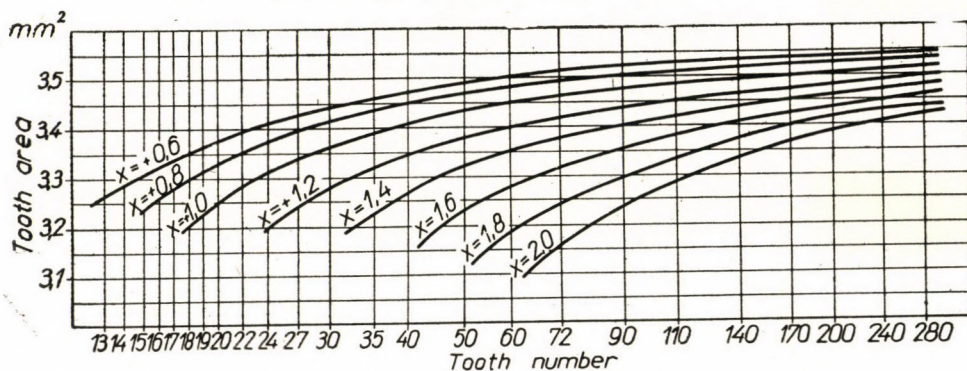


Fig. 6

At $m = 100$ mm applied on the rack template the pitch radii for larger tooth numbers ought to have been drawn with a large radius. To draw long radii is cumbersome. Therefore, the pitch circle for larger tooth numbers was marked out by calculating the coordinates of the position of the needles.

By planimentering the tooth profiles traced in this way, the area of the teeth, and by multiplying with the width of the wheel, the volume of the teeth can be determined. Figures 5 and 6 show the ascertained tooth areas with reference to a module of 1 mm. Fig. 5 contains tooth areas for the normal gear, i. e. for a profile displacement between $+0,4$ and -1 , while fig. 6 contains them

between $x = +0,6$ and $+2$. The tooth areas may also be indicated in the form of a table. (Table No. I.) From these values, referred to module $m = 1$ mm, the areas of teeth for various other moduli can be determined by multiplying with the square of the module.

3. Calculation of the initial diameter

When producing gears by way of rolling, the first thing to be determined is the initial diameter of the blank. In doing so, requirements must be satisfied :

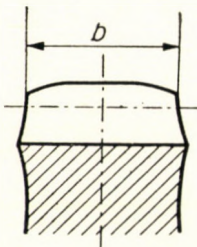


Fig. 7

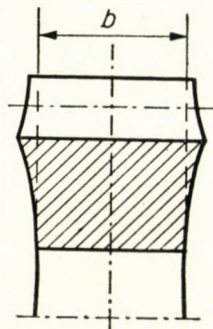


Fig. 8

1. There shall be sufficient material in the rough cylindrical full disc to provide for the toothing.

2. Since, at the beginning of the operation, first the addendum circle of the master-gear starts working on the cylindrical surface of the work piece, the teeth on the addendum circle of the master-gear have, during one revolution of the blank, to provide its circumference with the same number of uniform pitches as there are teeth on the wheel under production so as to start the process of rolling-in at a uniform tooth pitch.

Let us now examine what diameter the full disc requires to satisfy the above-mentioned two requirements.

According to the first, in case of shortage of material it cannot be squeezed out in radial direction everywhere, the tooth cannot be developed up to the addendum circle towards the edges of the wheel, and, consequently, the surface at the addendum cylinder will be convex (Fig. 7). On the other hand, if there is excess of material, too much superfluous material has to be pressed to the side and, though the tooth will be developed up to the addendum circle, more deformation-work will be required and the subsequent turning work will be correspondingly more (Fig. 8). Therefore, the diameter of the full disc should be selected in such a manner that the material pressed out of the tooth-space be sufficient for the tooth in the full width of the wheel up to the diameter of

the addendum circle. By multiplying the area of a tooth with the tooth number of the wheel, the area required for all teeth is obtained. By adding this to the area which corresponds to the dedendum circle we obtain an areal amount, and it is from this amount that the initial diameter of the full disc d_t , corresponding to the tooth area, has to be calculated. Referred to the pitch circle, the radial position of the circumference of the full disc depends on the profile displacement. The distance between the pitch circle and the circle of the full disc, referred to the unit module, can be denoted by the coefficient ξ_t . We

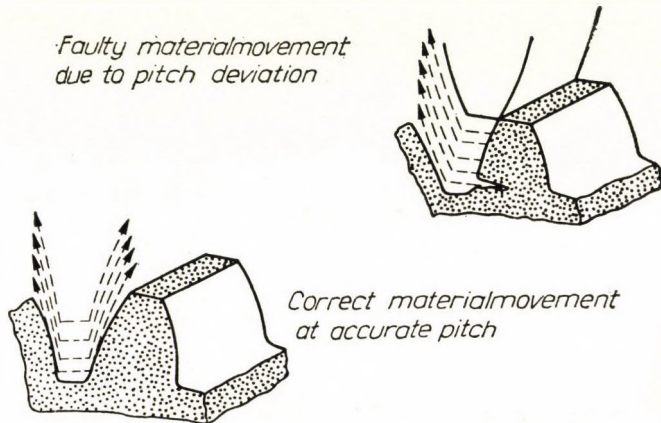


Fig. 9

obtain the diameter of the full disc by adding to or deducting from the diameter of the pitch circle the double product of the area coefficient ξ_t and of the module according to its sign. If the diameter of the pitch circle is denoted by d and the initial diameter of the full disc by d_t , the following formula can be used for the required calculation :

$$d_t = d + 2 \xi_t m \quad (1)$$

By applying the data contained in Table I, the area coefficients ξ_t to be used in formula (1) can be computed and tabled (Table II). The minus sign in the table signifies that the diameter of the full disc is below the pitch circle, and that, accordingly, this is the sign to be employed in formula (1). The initial diameter, i. e. that corresponding to the tooth area, can thus be calculated easily and quickly.

According to the second requirement, the initial diameter should be such as to permit the tooth pitch on the addendum circle of the tool to be transferred to the circumference of the heated work-piece as many times as there are tooth numbers on the wheel under production in order to avoid faulty pitch, which would cause tooth suppression at one or several points. In cases of larger deviations as regards pitch, the tool will follow a different path at each of its revolutions and cause the material to be crumpled and squeezed (Fig. 9).

Table II

Area coefficients at $m = 1$ mm, $\alpha = 20^\circ$ generated with Maag-tool of $c = \frac{1}{6} m$

| Profile displacement | Tooth number | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 72 | 90 | 110 | 140 | 170 | 200 | 240 | 280 | | |
| -1,0 | | | | | | | | | | | | -1,12 | -1,10 | -1,09 | -1,08 | -1,07 | -1,07 | -1,06 | -1,06 | -1,05 | |
| -0,8 | | | | | | | | | | | | -0,91 | -0,90 | -0,88 | -0,87 | -0,87 | -0,86 | -0,86 | -0,85 | -0,85 | -0,85 |
| -0,6 | | | | | | | | | | | | -0,70 | -0,69 | -0,68 | -0,67 | -0,66 | -0,66 | -0,65 | -0,65 | -0,65 | -0,65 |
| -0,4 | | | | | | | | | | | | -0,50 | -0,48 | -0,47 | -0,46 | -0,46 | -0,45 | -0,45 | -0,45 | -0,45 | -0,45 |
| -0,2 | | | | | | | | | | | | -0,31 | -0,30 | -0,30 | -0,27 | -0,26 | -0,26 | -0,25 | -0,25 | -0,24 | -0,24 |
| 0,0 | -0,11 | -0,10 | -0,10 | -0,09 | -0,09 | -0,08 | -0,08 | -0,06 | -0,05 | -0,05 | -0,05 | -0,04 | -0,04 | -0,04 | -0,04 | -0,04 | -0,04 | -0,04 | -0,04 | -0,04 | |
| +0,2 | 0,09 | 0,10 | 0,11 | 0,11 | 0,12 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,15 | 0,15 | 0,16 | 0,16 | 0,16 | 0,16 | 0,16 | 0,16 | 0,16 | 0,16 | 0,16 | 0,16 | |
| +0,4 | 0,27 | 0,28 | 0,29 | 0,30 | 0,31 | 0,32 | 0,32 | 0,34 | 0,35 | 0,35 | 0,35 | 0,36 | 0,36 | 0,36 | 0,36 | 0,36 | 0,36 | 0,36 | 0,36 | 0,36 | |
| +0,6 | | | 0,46 | 0,48 | 0,49 | 0,50 | 0,50 | 0,53 | 0,54 | 0,54 | 0,55 | 0,55 | 0,55 | 0,55 | 0,56 | 0,56 | 0,56 | 0,56 | 0,56 | 0,56 | |
| +0,8 | | | | | 0,64 | 0,66 | 0,67 | 0,71 | 0,72 | 0,73 | 0,74 | 0,74 | 0,74 | 0,74 | 0,75 | 0,75 | 0,75 | 0,75 | 0,75 | 0,75 | |
| +1,0 | | | | | | 0,81 | 0,83 | 0,87 | 0,90 | 0,91 | 0,92 | 0,92 | 0,93 | 0,93 | 0,93 | 0,94 | 0,94 | 0,95 | 0,95 | 0,95 | |
| +1,2 | | | | | | | | 1,04 | 1,07 | 1,08 | 1,10 | 1,10 | 1,11 | 1,12 | 1,12 | 1,13 | 1,13 | 1,14 | 1,14 | 1,14 | |
| +1,4 | | | | | | | | | 1,24 | 1,26 | 1,27 | 1,28 | 1,29 | 1,30 | 1,31 | 1,32 | 1,32 | 1,32 | 1,32 | 1,33 | |
| +1,6 | | | | | | | | | | 1,43 | 1,44 | 1,46 | 1,48 | 1,49 | 1,50 | 1,51 | 1,52 | 1,52 | 1,52 | 1,52 | |
| +1,8 | | | | | | | | | | | 1,61 | 1,63 | 1,65 | 1,67 | 1,68 | 1,69 | 1,70 | 1,71 | 1,71 | 1,71 | |
| +2,0 | | | | | | | | | | | | 1,80 | 1,83 | 1,85 | 1,87 | 1,88 | 1,90 | 1,90 | 1,90 | 1,90 | |

For the production of wheels with faultless toothing it is therefore necessary to fulfil this condition of circular pitches.

To be able to calculate the hot diameter of the blank, the coefficient of thermal expansion of steel materials must be known. According to HÜTTE, the following mm elongations of mild steel have to be taken into consideration between the several temperature limits :

| | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 0—100 | 0—200 | 0—300 | 0—400 | 0—500 | 0—600 | 0—700 |
| 1,17 | 2,45 | 3,83 | 5,31 | 6,91 | 8,60 | 10,40 mm |

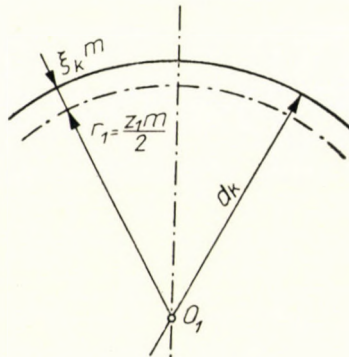


Fig. 10

Evaluating from these data the thermal-expansion coefficient α_t for formula

$$l' = l(1 + \alpha_t t) . \tag{2}$$

Its value is found to rise linearly and gives the following formula :

$$\alpha_t = (11,18 + 0,00525 t) 10^{-6} \tag{3}$$

In the following, the heated values of the several distances will be marked by an upper index.

By ascertaining the coefficient of thermal expansion α_t to be used in formula (2) with the aid of formula (3) which is taken to remain valid up to a temperature of 1000° C we arrive at the values contained in Table III regarding the higher temperature considered for hot-rolling :

Table III

| Temperature | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 °C |
|----------------------------|---------|---------|--------|--------|---------|-----------------------|
| Values of α_t | 13,81 | 14,39 | 14,86 | 15,38 | 15,91 | $16,43 \cdot 10^{-6}$ |
| $(1 + \alpha_t t)$ | 1,00691 | 1,00863 | 1,0104 | 1,0123 | 1,01432 | 1,01643 |

The circumference of the addendum circle of a tool with tooth number z_s produced with profile displacement x_s is

$$(z_s + 2 + 2 x_s) m \pi. \quad (4)$$

According to Fig. 10, in a full disc required for a gear with z_1 teeth, the increment beyond the pitch-circle radius — by means of which the radius, i. e. circumference, corresponding to the uniform pitch of the tool addendum circle is obtained — bears the symbol $\xi_k m$. By introducing this unknown factor ξ_k , the circumference of the hot blank, calculated as per formula (2), is this :

$$(z_1 + 2 \xi_k) m \pi (1 + a_t t) \quad (5)$$

To find the pitch on the addendum circle of the tool and on the circumference of the blank to be used for the gear divide the circumferences expressed in the above two formulae by the corresponding tooth numbers.

The two pitches must agree ; consequently, the following equation can be written :

$$\frac{(z_s + 2 + 2 x_s) m \pi}{z_s} = \frac{(z_1 + 2 \xi_k) m \pi (1 + a_t t)}{z_1} \quad (5a)$$

From this, by reduction and rearrangement, the value of the specific increment of the initial diameter can be expressed :

$$\xi_k = \frac{z_1}{z_s} \left[\frac{2(1 + x_s) - z_s a_t t}{2(1 + a_t t)} \right] \quad (6)$$

If $x_s = 0$:

$$\xi_k = \frac{z_1}{z_s} \left[\frac{2 - z_s a_t t}{2(1 + a_t t)} \right] \quad (7)$$

Having calculated ξ_k , diameter d_k corresponding to the whole-number circumferential pitch :

$$d_k = d + 2 \xi_k m \quad (8)$$

With positive profile displacement the dedendum circle of the wheel is displaced further outward, the measure of this displacement corresponding to that of the profile displacement. Therefore, the initial diameter d_i corresponding to the tooth area rises in accordance with curve d_i in Fig. 11. Diameter d_k , according to formula (8), is independent of the profile-displacement on the wheel under production, being affected only by the data of the master-gear tool and the temperature at which the process of rolling-in takes place. Drawing also diameter

d_k in Fig. 11, the two lines will intersect at point M . The figure shows the initial diameter of a wheel with $z_1 = 22$ teeth if a tool with $z_s = 44$ teeth is used and the value of the module $m = 2,5$. If the values of the profile displacements before the point of intersection M , are positive, d_k will be larger than the diameter corresponding to the tooth area. In the figure, the deviation is largest if profile displacement is zero, i. e. at normal gear. The amount of material corresponding to the difference between the two diameters has to be pressed out to the side. The volume pressed to the side at wheel width "b" is obtained by subtracting

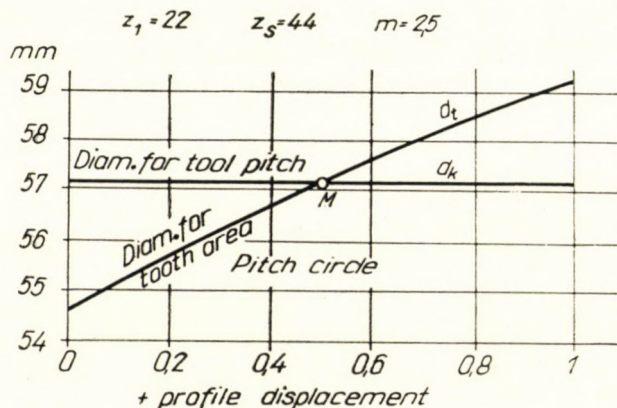


Fig. 11

from each other the volumes corresponding to the two diameters :

$$V = \frac{(d_k^2 - d_t^2) \pi}{4} b. \quad (9)$$

The material squeezed to the side has to be removed by turning. In order to release the tool used for the operation from the excessive sideways pressure of the material, the full disc may be so made as to have a limine a smaller volume by turning its outside corner in accordance with Fig. 12. However, the entire volume V cannot be removed because a certain amount of sideways pressure is unavoidable even at point M . Because of this pressure, diameter d_t must be larger than the value calculated in formula (1). It may be necessary to slightly modify, i. e. increase the theoretically-calculated diameter in order to permit the material of the tooth to swell to the full height of the tooth even at the edges of the wheel.

Beyond point M in Fig. 11, the quantity of material required for the tooth-area is larger than the volume required by the tool pitch ; in other words, the material is not sufficient if the full disc has the diameter d_k .

In such cases the requirement of having both initial uniform addendum circle-pitch and sufficient material can be complied with in three different ways :

1. We enlarge the initial diameter of the material according to Fig. 13 and have indentations machined into the surface of the circumference of the blank at equal distances which correspond to the pitch of the addendum circle p_{sa} of the tool : this must be made so that the depth of the indentations come to lie on diameter d_k which latter is in correspondence with the uniform circular

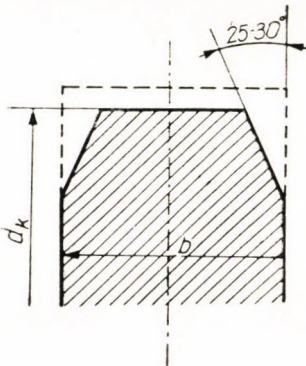


Fig. 12

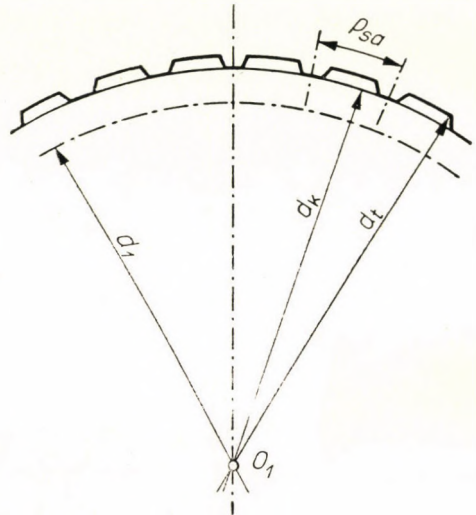


Fig. 13

pitch ; the amount of material between diameters d_t and d_k shall provide for the deficiency. In such cases, care must be taken that, after the heating is finished, the master-gears start rolling-in at the indentation.

2. If diameter d_t is but slightly larger than diameter d_k , the tools may be pressed into the hot disc without rotation, the tools starting to rotate only after the periphery corresponding to diameter d_k has been reached.

3. A third method would be to apply another tool with a diameter increased by a positive profile displacement sufficient for the circular pitch required by the wheel. On the other hand, when wheels with normal tothing are rolled, the initial diameter can be brought nearer the diameter determined by the volume of material if we apply a negative profile displacement.

With the machine described, it is the dedendum circle of the tool that gives to the addendum circle of the blank the final diameter, while the clearance curve is shaped by the addendum circle of the tool. If the addendum circle of the blank is larger it can be adjusted by turning.

The full height of the tooth of the tool must be increased on account of the thermal expansion of the tooth of the wheel ; the increased height has

is negligible. Both the base circle and the pitch circle of the work piece expand under the effect of heating. The centre distance of rolling-in is obtained by adding the radius of the addendum circle of the tool to the radius of the hot dedendum circle of the work piece. Let us assume that according to Figure 14 the resulting centre distance has a value of C_0 corresponding to normal toothing. Assuming pure roll on this centre distance the rolling circles will in proportion to gear ratio, be on radius r_s on the tool, and, because of its cold condition on radius r_1 on the work piece; therefore, in respect of the work piece, $r'_{g1} = r_1$.

The gear ratio is determined by the ratio between the number of teeth of the tool and that of the gear under production i. e. by that of their radii in pure rolling, thus:

$$i = \frac{z_s}{z_1} = \frac{r_s}{r_1}$$

The sum of the two radii is the centre distance C_0 ; i. e., $r_s + r_1 = C_0$. At centre distance C_0 , the tool is in pure rolling with the radius of pitch circle r_s , where the tool is assumed to have a pressure angle of α_s . This pressure angle is determined by the ratio between the radius of the base circle of the tool and that of its pitch circle in pure rolling; thus,

$$\cos \alpha_s = \frac{r_{bs}}{r_s} \quad (11)$$

Drawing the contact line beyond pitch point P and drawing a normal to this contact line from wheel-centre O_1 , the length of this perpendicular gives the radius of the hot base-circle of the involute evolving on the gear in hot condition which is denoted by r'_{b1} . Namely, the pressure line determined by the tool has to be in contact with the hot base-circle of the wheel. This base-circle radius of the wheel in hot condition is, owing to thermal expansion, larger than the cold base radius. The relation between them:

$$r'_{b1} = r_{b1}(1 + \alpha_t t). \quad (12)$$

The dimension of the cold pitch-circle radius in hot condition is this:

$$r'_1 = r_1(1 + \alpha_t t). \quad (13)$$

This hot pitch-circle of a larger radius passes through point A in the Figure. In the involute formed on the wheel, the standard pressure angle α must lie at this point because both its base-circle and pitch-circle have expanded in proportion to factor $(1 + \alpha_t t)$.

The tangent drawn from involute point A in hot condition, too, must touch the base-circle of radius r'_{b1} determined by pressure angle α_s of the tool. On cooling, radius r'_1 , of point A shrinks to value r_1 and base-circle radius r'_{b1} to value r_{t1} . The relation between the two distances :

$$\frac{r'_{b1}}{r'_1} = \frac{r_{b1}}{r_1} = \cos \alpha. \quad (14)$$

The figure shows that on rolling at normal centre distance C_0 , the pressure angle α_s of the tool should be smaller than the standard pressure angle of the wheel under production since, on the hot pitch-circle, angle α must be at point A which is further outward. The situation is similar to the process in which a gear with $\alpha = 20^\circ$ has to be made on a grinding machine of the Maag-type with an oblique grindstone which has a pressure angle below 20° , i. e. $\alpha = 15^\circ$.

Consequently, on pitch-circle radius r_s , the involute angle of the tool is α_s which can be expressed also by radius r'_{b1} of the base-circle of the hot wheel in this way :

$$\cos \alpha_s = \frac{r'_{b1}}{r'_{g1}} \quad (15)$$

Substituting the following relations :

$r'_{b1} = r_{b1} (1 + \alpha_t t)$ and $r'_{g1} = r_1$, the following is obtained :

$$\cos \alpha_s = \frac{r_{b1} (1 + \alpha_t t)}{r_1}. \quad (16)$$

Since in the above formula: $\frac{r_{b1}}{r_1} = \cos \alpha$, by substitution we have

$$\cos \alpha_s = \cos \alpha (1 + \alpha_t t). \quad (17)$$

This formula gives the relation between standard pressure angle α and the pressure angle of the tool α_s , required for the tool.

Calculating on basis of the formula, Table IV indicates those pressure angles α_s of the tool which should be used for producing the master-gear at the temperatures indicated in the first row of the table so as to ensure that the wheels

Table IV

| Temperature | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 °C |
|-------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| For $\alpha = 20^\circ$ | 18°36'33" | 18°17'30" | 17°57'45" | 17°36'30" | 17°14' |

are produced with the standard pressure angle $\alpha = 20^\circ$. The rolling temperature must be kept at a constant value corresponding to this pressure angle of the tool, in order to ensure uniform profile curvature.

It follows that the value of the pressure angle of the pitch-circle of the hot-rolling tool should be smaller than the standard pressure angle of 20° of the pitch-circle of the wheel produced. By means of tools with a pressure angle $17\frac{1}{2}^\circ$, as used in some countries, it would be possible to produce a wheel with 20° at a temperature of 930°C , i. e. at a rather high value.

5. Hot-rolling of normal wheels

Let us now examine what tooth-thickness is required for the master-gear tool for the production of normal gears. Tooth-thickness of the normal gear in cold condition: $\hat{s}_0 = \frac{m\pi}{2}$, in hot condition

$$s'_0 = \frac{m\pi}{2} (1 + \alpha_t t). \quad (18)$$

According to Fig. 14, the normal gear is produced at normal centre distance C_0 ; in this case pitch-circle radius r_s of the tool is in pure rolling at pitch radius r_1 in correspondence to the cold condition of the gear. The pitch-circle of the

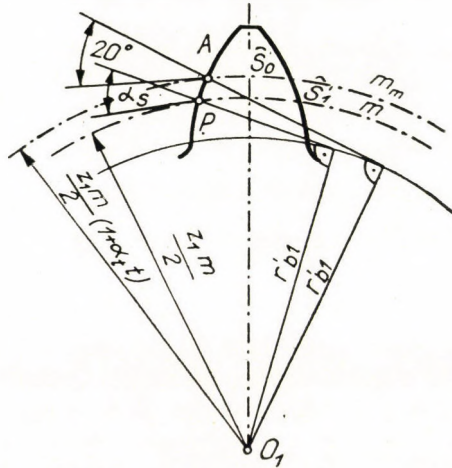


Fig. 15

gear expands in hot condition to point A , and it is there that the above-mentioned hot tooth-thickness \hat{s}'_0 must be present (Fig. 15). Taking this tooth-thickness as point of departure, hot tooth-thickness at point P — to be denoted by \hat{s}'_i —

can be calculated. It is to point A that the normal pressure angle a , and to point P of the involute further inside that angle a_s of the tool belongs. With these angles at point P — to which radius r_1 belongs — the tooth-thickness is this :

$$\widehat{s}'_1 = 2 r_1 \left(\frac{\widehat{s}'_0}{2 r_1} + \text{inv } a - \text{inv } a_s \right) \quad (19)$$

Substituting, according to formulae (18) and (13), the hot lengths in the first member in brackets, and making the necessary reductions we have

$$\widehat{s}'_1 = 2 r_1 \left(\frac{m \pi}{4 r_1} + \text{inv } a - \text{inv } a_s \right). \quad (20)$$

Substituting value $r_1 = \frac{z_1 m}{2}$ and reducing :

$$\widehat{s}'_1 = \frac{\pi}{2} + z_1 (\text{inv } a - a_s) m \quad (21)$$

On rolling-in at the normal centre distance, the pitch : $p = m\pi$. This pitch is composed of the above-mentioned tooth-thickness \widehat{s}'_1 and the required tooth-thickness of the tool. Consequently, the tooth-thickness of the tool is obtained by deducting the hot tooth-thickness expressed in formula (21) from pitch p :

$$\widehat{s}_0 = \frac{\pi}{2} - z_1 (\text{inv } a - \text{inv } a_s) m. \quad (22)$$

This formula shows first that the tooth-thickness of the tool should be smaller at pitch-circle than the normal tooth-thickness of $\frac{m \pi}{2}$. It also follows that the tooth-thickness of the tool also depends on the number of teeth (z_1) of the gear to be manufactured. This means that, theoretically, with one and the same tool no normal gear with just any number of teeth can be produced, but that different tools have been used for the manufacture of gears with a different number of teeth. Table V contains the tooth-thickness calculated on basis of formula (22) at module $m = 1$, for three temperatures. The second part of the table contains increment $\Delta \frac{\pi}{2} = 1,571 \cdot a_t$ of the normal cold tooth-thickness

$\left(\frac{\pi}{2} = 1,571 \right)$ which results from simple heating, as also the differences in tooth-thickness corresponding to tooth number z_1 . It can be seen that, with higher tooth numbers, the differences represent rather high values. This is due to the

fact that, with higher tooth numbers, the pitch-circle radius is of higher value and that therefore, with warming-up, point *A* in the figure is shifted further out from pitch point *P*.

The fact that the value of the tooth-thickness at pitch circle of the master-gear tool varies according to the tooth number of the gear to be manufactured would require a large stock of master-gears. However, the number of master-gears can be reduced by altering the normal centre distance and pushing the

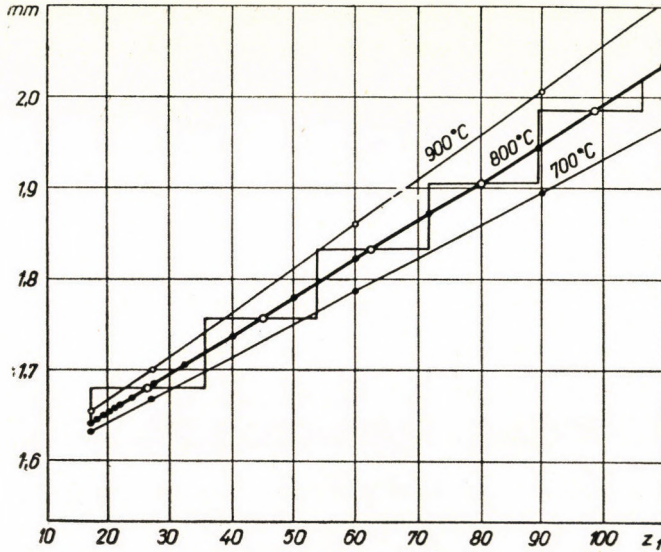


Fig. 16

master-gears further into or pulling it further out of the work piece. This displacement may be effected within the permissible limits of the tooth-tip clearance of the wheel. As limits of the tip clearance values $c_{\min} = 0,167$ m and $c_{\max} = 0,40$ m can be considered. Between these two limits, at $m = 1$, a radial displacement of $400 - 167 \cong 232$ μ is admissible. In the pitch-circle, tooth-thickness will increase by appr. $\frac{1}{3}$ of this value since, for instance, with rolling-in at a temperature of 800°C , $\text{tg } 17^\circ 57' 45'' \cong \frac{1}{3}$. In this way at tooth-thickening of appr. 80 μ can be realized by varying the tip-clearance within the above-mentioned limits.

Fig. 16 indicates the variations of the tooth-thickness at different temperatures from tooth number $z_1 = 17$ on. The 80 μ steps of tooth-thickening resulting from this variation of the tooth tip-clearance within the admissible limits are also traced for the 800°C line. The horizontal lines of the steps indicate certain tooth-number groups. These tooth-number groups can be made by means of one and the same master-gear couple.

Table V
Tooth-thicknesses and tooth-thickness differences
at $m = 1$

| Temp. °C | $\frac{\pi}{2} (1 + a_t t)$ | 17 | 27 | 60 | 90 | $\Delta \frac{\pi}{2}$ | 17 | 27 | 60 | 90 |
|-------------|-----------------------------|--|-------|-------|-------|------------------------|---|-----|-----|-----|
| | | tooth-thickness in mm at tooth number above | | | | | difference in μ at tooth number above | | | |
| 0 | 1,571 | 1,571 | 1,571 | 1,571 | 1,571 | — | — | — | — | — |
| 700 | 1,587 | 1,632 | 1,668 | 1,786 | 1,894 | 16 | 61 | 97 | 215 | 324 |
| 800 | 1,590 | 1,642 | 1,685 | 1,824 | 1,950 | 19 | 72 | 114 | 253 | 379 |
| 900 | 1,593 | 1,653 | 1,702 | 1,840 | 2,007 | 22 | 82 | 131 | 269 | 436 |

The tooth numbers of these are the values where the horizontal lines of the grades intersect the oblique line. These mean tooth numbers and the tooth-number-groups that can be produced by them, as calculated from the above figure, are the following:

| | |
|---------------------------------------|--------|
| with a tool of mean tooth-number 26 : | 17— 35 |
| with a tool of mean tooth-number 44 : | 36— 54 |
| with a tool of mean tooth-number 62 : | 55— 72 |
| with a tool of mean tooth-number 80 : | 73— 89 |
| with a tool of mean tooth-number 80 : | 90—107 |

tooth-number groups can be produced.

With this grouping, gears with tooth numbers between 17—107 can be manufactured by not more than five tools. To put this manner of manufacture into practice, the master-gear tool must be provided with a tooth tip-clearance which, while the master-gear is displaced in radial direction, is still large enough to ensure even in the required normal hot addendum circle for the wheel to be produced. For this purpose, the tool must have a tooth tip-clearance

$$c = \frac{0,232}{2} m = 0,116 m$$

in accordance with Fig. 17. The addendum-circle radius of the wheel produced by a tool corresponding to the mean tooth number will increase by this value. The addendum-circle of the master-gear tool has to be, outside its pitch-circle, beyond the module of unit value so large as to reach the dedendum circle of the wheel to be produced. In a position corresponding to the mean tooth-number, the following value is required for this purpose : $(0,167 + 0,116) m = 0,283 m$. Consequently, the full-tooth-height of the master-gear tool, corresponding to the hot condition of the wheel to be produced, is the following : $(0,116 + 2 + 0,283) m (1 + a_t t) \approx 2,4 m (1 + a_t t)$.

If gears indicated within the above-mentioned tooth-number groups are produced by such a tool, the tooth tip-clearance at the lower wheels of the groups will have the highest admissible value, i. e. $0,4 m$, while — at the upper wheels of the groups — the tooth tip-clearance will have the lowest admissible value i. e. appr. $0,167 m$. The addendum-circle radii of the last mentioned gears will be increased by the double of the tooth tip-clearance of $0,116 m$ of the tool, i. e. by a value of $0,232 m$. This excess value must therefore be removed by turning the addendum circle of the gear. Such turning will not be necessary

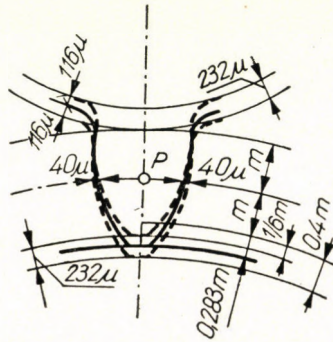


Fig. 16

or the lower, smallest tooth-numbers of the groups because these are produced at the innermost position of the tool. On the other hand, in this category the tip-clearance will be largest at the roots of the teeth. The centre distance can have a value of C_0 only at mean tooth-numbers, therefore — when producing small wheels of the respective groups — the centre distance has to be reduced, while — when making large wheels — it has to be increased within the limit of 232μ . The mathematically exact centre distance can be determined by involutometric calculation as dealt with below; doing so we depart from the fact that the tooth-thickness at pitch-circle is known.

The fact that, in the case of certain tooth-numbers, a portion of the addendum circle of the wheels must be removed by turning an advantage because it is not an involute but a transitional trochoid that is formed at the root-portion of the tool which, as a rule, cannot appropriately generate the profile at the tip-portion of the wheel. On the other hand, it is expedient to grind the profile of the tool at the crest in the shape of an arc, in order to avoid an angular impression of the wheel in manufacture, and also to permit the fillet at the dedendum-circle of the wheel to develop as an arc of large radius. Such fillet improves the strength of the root of the gears from the point of view of bending stress, since the stress-concentration effect is thus reduced.

In the foregoing it has been assumed that the body of the wheel expands evenly under the influence of heat. In reality, with high-frequency heating, the

inductor heats the wheel-body at the outside diameter stronger, the inside portions remaining colder. This particularly applies to wheels with large diameter, i. e. a large tooth-number. This consideration modifies the described theory and requires for wheels with a larger diameter, a more through study of matters regarding temperature, i. e. the conditions of expansion arising in the wheel-body.

According to the suggestion of JÁNOS PAXIÁN and TIBOR HOMPOLA, the calculation and production of gears with normal toothing can be simplified by using a tool which is dimensioned as though it, too, were in a hot condition. Assuming linear thermal expansion, the dimensions of the gear to be produced will, if heated to temperature t , increase by a factor $(1 + \alpha_t)$ (Fig. 15). This may be regarded as though the wheel were not of module m , but of module $m_m = m(1 + \alpha_t)$. The measurements of the heated tool can also be calculated with this module m_m . In this case we shall, however, have to deviate from the standardized module and apply a fractional module which renders the production and control of the tool more difficult. Calculating with this hot module m_m , the pitch-circle radius of the tool will be :

$$r_s m = \frac{z_s m_m}{2} = \frac{z_s}{2} m (1 + \alpha_t t) \quad (23)$$

If we employ this module, the operation can be carried out with a centre-distance, at which this pitch-circle is in pure rolling with the hot pitch-circle of the wheel.

In this case the centre distance — to be denoted by the symbol C_m — is the sum of the two pitch-circle radii :

$$C_m = \frac{z_1 + z_s}{2} m_m = \frac{z_1 + z_s}{2} m (1 + \alpha_t t) = C_0 (1 + \alpha_t t). \quad (24)$$

If rolling-in is carried out with this centre distance, the pressure angle can be the standard $\alpha = 20^\circ$ because the pure rolling on the gear is shifted to the circle passing through point A in Fig. 15. The master-gear tool can now be constructed with a pressure angle of 20° . Since the tooth-thickness of the gear at this hot pitch-circle is

$$\hat{s}'_0 = \frac{m \pi}{2} (1 + \alpha_t t) = \frac{m_m \pi}{2}, \quad (25)$$

the tooth-thickness of the tool can be the same at its pitch-circle supposed to be hot, because they jointly give the pitch $p_m = m\pi(1 + \alpha_t t)$. The tooth-thickness of the master-gear tool produced with this hot module will be thicker on

the pitch-circle which corresponds to the standard module m . Pitch-circle radius corresponding to the standard module: $r_s = \frac{z_s m}{2}$ is smaller than $r_{sm} = r_s (1 + a_t)$ supposed to be hot. Conditions regarding the two pitch-circles on the hot tool are equal to those of the hot wheel with z_1 teeth in Fig. 15. Therefore, the pressure angle on the pitch-circle r_s of the tool will be α_s . The thickness of the tooth with tooth number z_s can also be calculated from a formula similar to formula (22), i. e. the tooth-thickness of the tool at pitch-circle radius r_s corresponding to standard module m is the following:

$$s_s = \left[\frac{\pi}{2} + z_s (\text{inv } 20^\circ - \text{inv } \alpha_s) \right] m. \quad (26)$$

Since with gearing at centre distance C_m , the tooth-thickness of the tool and that of the wheel agree at pitch-circle radius r_{sm} and r'_1 , the master-gear tool may be produced with a tool of the Maag-type whose tooth-thickness and tooth-space thickness at pitch line agree and whose pressure angle is also 20° . This greatly simplifies manufacture. However, it has the considerable drawback that module m_m is not the standard tool-module. Therefore, we shall continue to work with cold standard module m . Using this module, the pressure angle at pitch-circle r_s of the tool has to be smaller than standard value $a = 20^\circ$ [calculating with formula $\cos \alpha_s = \cos 20^\circ (1 + a_t)$] and the tooth-thickness too, has to be smaller at its pitch-circle. According to the foregoing, the tooth thickness at pitch-circle, for producing normal gears, is

$$\hat{s}_{s0} = \left[\frac{\pi}{2} - z_1 (\text{inv } 20^\circ - \text{inv } \alpha_s) \right] m. \quad (27)$$

6. Determination of the tooth-thickness at general centre distance

Gear production by means of hot-rolling has the strongest resemblance to gearing by means of the pinion cutter of the Fellows-type, for the tooth flanks are shaped in both cases by a tool with a finite number of tooth. In the hot-rolling process conditions are, however, more restricted; while in gearing by means of pinion cutter agrees with that of the pitch-circle of the wheel produced, according to the above conclusions the pressure angle of the pitch-circle of the hot-rolling tool has to be smaller than the standard pressure angle of 20° of the pitch-circle of the wheel produced.

If the operation of rolling is not carried out at the normal centre distance or at centre distance $C_m = C_0 (1 + a_t)$, calculated with module m_m of a tool with module m_m , the tooth-thickness can be determined by involutometric calculation. This is necessary also in the case of a profile displacement x_s being applied on the tool.

Tooth-thickness at pitch-circle r_s of the tool, in case of profile displacement x_s , is

$$\widehat{s}_s = m \left(\frac{\pi}{2} + 2 x_s \operatorname{tg} \alpha_s \right) \quad (28)$$

Should the rolling-in be effected at a centre distance C_g which is different from the normal centre distance (Fig. 18), the pressure angle will have the

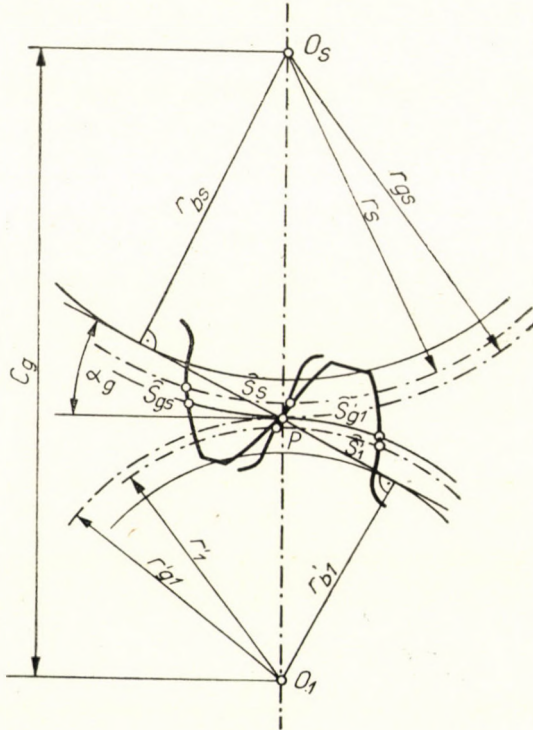


Fig. 18

value α_g . In the case of rolling-in at centre distance C_g , pressure angle α_g of the gear can be calculated from the equation arrived at by the summation of the base-circle radii. According to Fig. 14, the sum of the radii of the hot base-circle and the base-circle of the tool:

$$r'_{b1} + r_{bs} = r_1 \cos \alpha_s + r_s \cos \alpha_s = C_0 \cos \alpha_s. \quad (29)$$

According to Fig. 18, these same base-circles can be expressed by the rolling circles and the pressure angle α_g in the following manner:

$$r'_{b1} + r_{bs} = r'_{g1} \cos \alpha_g + r_{gs} \cos \alpha_g = C_g \cos \alpha_g. \quad (30)$$

By equalizing the right sides, angle α_g can be calculated :

$$\cos \alpha_g = \frac{C_0}{C_g} \cos \alpha_s . \quad (31)$$

Expressing by the tooth-numbers and the module :

$$\cos \alpha_g = \frac{z_1 + z_2}{2C_g} m \cdot \cos \alpha_s . \quad (32)$$

Since the addendum-circle of the tool has to shape the dedendum-circle of the hot gear, centre distance C_g is the sum of the addendum-circle radius of the tool and the hot dedendum-circle radius r_{i1} of the gear, i. e.

$$C_g = R_s + r_{i1} (1 + a_l t) . \quad (33)$$

At centre distance C_g the radii of the rolling circles are the following : r_{gs} on the tool : r'_{g1} on the heated wheel. This radii result according to the gear ratio, i. e. in proportion to the tooth-number of the tool and that of the wheel to be produced ; therefore,

$$\frac{r_{gs}}{r'_{g1}} = i = \frac{z_s}{z_1} .$$

Sum of the two radii : $r_{gs} + r'_{g1} = C_g$. The rolling circles expressed by the gear ratio, from these two equations :

$$r_{gs} = C_g \frac{i}{i+1} \quad \text{and} \quad r'_{g1} = C_g \frac{1}{i+1} . \quad (34)$$

Base radius of the tool : $r_{ts} = r_s \cos \alpha_s$. Having calculated this base-circle radius and the rolling-circle radius r_{gs} , pressure angle α_g can be expressed by these, too :

$$\cos \alpha_g = \frac{r_{bs}}{r_{gs}} . \quad (35)$$

After calculating tooth-thickness \hat{s}_s at pitch-circle r_s of the tool according to formula (28), tooth-thickness at rolling-circle r_{gs} can be determined by involu-tometry with the aid of the following formula applying to tooth-thicknesses :

$$\bar{s}_{gs} = 2 r_{gs} \left(\frac{s_s}{2 r_s} + \text{inv } \alpha_s - \text{inv } \alpha_g \right) . \quad (36)$$

At the rolling circles, it is the pitch p'_g of the hot wheel which is being rolled-in. This pitch can be determined from the centre distance C_g and the sum of the tooth numbers with the aid of the following formula :

$$p'_g = m'_g \pi = \frac{2 C_g \cdot \pi}{z_1 + z_s} \quad (37)$$

Subtracting the tooth-thickness at rolling circle \widehat{s}_{gs} of the tool, as calculated from formula (36), from this pitch p'_g , tooth-thickness \widehat{s}'_{g1} at the rolling circle of the hot wheel is obtained :

$$\widehat{s}'_{g1} = p'_g - s_{gs} \quad (38)$$

This tooth-thickness in hot condition is converted into the cold condition by applying the thermal-expansion formula :

$$\widehat{s}_{g1} = \frac{\widehat{s}'_{g1}}{1 + \alpha_t t} \quad (39)$$

The rolling-circle radius of the wheel in hot condition is converted into the cold condition in the same manner :

$$r_{g1} = \frac{r'_{g1}}{1 + \alpha_t t} \quad (40)$$

By means of tooth-thickness \widehat{s}_{g1} and rolling-circle radius r_{g1} , tooth-thickness at cold pitch-circle r_1 of the wheel can be determined with the aid of the formula of involutometry relative to tooth-thicknesses as already applied :

$$\widehat{s}_1 = 2 r_1 \left(\frac{\widehat{s}_{g1}}{2 r_{g1}} + \text{inv } \alpha_g + \text{inv } \alpha \right) \quad (41)$$

According to the foregoing, pressure angle α at the pitch-circle of the wheels produced depends on the temperature applied ; knowing pressure angle α_s of the tool it can be precalculated with the aid of the following formula :

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha_s}{1 + \alpha_t t} \quad (42)$$

For the production of normal gears, the value of tooth-thickness at their pitch-circle in cold condition is $\frac{m \pi}{2}$. If profile displacement x_1 is required in the wheel to be produced, thickness s_1 will have the following value :

$$s_1 = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (43)$$

In the case of wheels produced by hot-rolling attention has to be paid to the fact that the value of profile displacement at their outside diameter can considerably deviate from the profile displacement at their tooth-thickness, since — taking thermal expansion of the master-gear tool into consideration — the teeth of the tool are usually thinned out without altering their outside diameter; thus, two kinds of profile displacements are possible, one referring to the outside diameter, the other to the tooth-thickness.

Should differences in temperature occur when wheels of the same series are rolled-in the values of tooth-thickness and pressure angle will be different on the two wheels owing to change of temperature. To avoid this, temperature has to be strictly controlled.

7. Determination of the dimensions of the master-gear tool

In order to ensure the necessary backlash between the teeth of the matching gears the tooth-thickness of the tool should be slightly increased, as the operation of rolling-in takes place with no backlash engagement.

As regards tooth-thickness a certain amount of scaling must be taken into consideration, by reason of which the teeth will emerge from the rolling operation somewhat thinner than calculated. This can be taken into consideration by applying between the teeth the largest backlash admissible according to the standard. The scaling has a more harmful effect on the tooth-thickness than on the outside diameter because, in gears, the outside diameter which, when engaging, comes to be positioned at tooth tip-clearance is not so very sensitive.

For tothing a given gear by hot-rolling, the master-gear tool is to be calculated in the following manner: tooth number z_1 and pressure angle of the gear — which is the standard $\alpha = 20^\circ$ — are given.

Tooth-thickness of the gear has to be calculated at a point corresponding to its cold pitch-circle, to which a tooth backlash z is added, the latter being standardized in the direction of the pressure line. For one wheel, half of the tooth backlash is to be considered; this value is, however, to be taken in the direction of the pitch-circle and is obtained through a division by $\cos \alpha$. The required tooth-thickness is, therefore,

$$\hat{s}_1 = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha \right) - \frac{z}{2 \cos \alpha}. \quad (44)$$

If the wheel is required to be produced with finishing — for instance, grinding-tolerance — a certain further value is to be added in the direction of the pitch-circle.

The temperature of the operation is to be fixed : a higher mean temperature can be chosen for smaller, a lower for larger wheels since larger wheels do not reach such high temperatures throughout their body as do smaller wheels. This, however, applies only to induction heating or to circumferential heating by means of gas flame. For the temperature, the value of thermal-expansion coefficient a_t and the pertinent value $(1 + a_t t)$ are taken from Table I.

Tooth-number z_s of the master-gear tool is now selected, and it is expedient to make it higher than the tooth-number of the wheel so as to obtain for the operation as large a contact-ratio value as possible.

Tooth-height h' , required for the master-gear tool, is to be calculated: it corresponds to the height of tooth calculated for the thermal expansion of the wheel. If tooth tip-clearance factor is denoted by c_0

$$h' = (2 + c_0) m (1 + a_t t). \quad (45)$$

The addendum-circle of the tool has to shape the dedendum-circle of the hot wheel, while the dedendum-circle of the tool forms the addendum-circle of the wheel. It is in accordance with this requirement that the addendum-circle, dedendum-circle of the tool and the value of profile displacement required at the addendum-circle of the tool have to be calculated. The hot dedendum-circle radius r'_{i1} of the wheel

$$r'_{i1} = r_{i1} (1 + a_t t). \quad (46)$$

Addendum-circle radius R_s of the tool is to be selected with the consideration that initial diameter d_k of the blank, corresponding to the pitch on the addendum-circle of the tool at this radius, should be a few mm larger than diameter d_t which corresponds to the tooth area. To find the diameter of the dedendum-circle r_{is} , required for the tool, hot tooth-height h' is to be subtracted from the addendum-circle radius R_s , i. e.

$$r_{is} = R_s - h'. \quad (47)$$

To determine the required profile displacement of the tool pitch-circle radius is to be subtracted from the addendum-circle radius of the tool, and this gives the addendum of the tool :

$$a_s = R_s - r_s. \quad (48)$$

Subtracting from this value tooth-height $a_0 = m$, corresponding to the normal wheel, the difference is equalized by profile displacement $x_s m$

$$a_s - m = x_s m . \quad (49)$$

From this, profile displacement x_s at the addendum-circle of the tool can be determined, which in its turn helps us to ascertain the initial diameter of the wheel from formula (6).

Addendum-circle radius R_s of the tool, if added to hot dedendum-circle radius of the wheel with z_1 teeth, gives the sum which indicates the centre distance C_g :

$$r'_{i1} + R_s = C_g . \quad (50)$$

Gear ratio is now calculated from the tooth numbers, and — with the aid of the gear ratio — rolling circles corresponding to pure rolling at centre distance C_g are calculated. In toothing at centre distance C_g , the contact line shall touch the hot base circle of the gear which passes through pitch point P of the rolling circle as determined by r'_{g1} . From this, the pressure angle of the rolling can be calculated with the aid of the following formula :

$$\cos \alpha_g = \frac{r_1 \cos \alpha (1 + \alpha_t t)}{r'_{g1}} . \quad (51)$$

At general centre distance, i. e. also for gearing with pressure angle α_g , pressure angle α_s of the tool can be calculated by means of formula (17), which means that the pressure angle of the tool is independent of the centre distance of rolling, being only a function of rolling temperature.

To calculate the tooth-thickness of the tool, first the tooth-thickness of the wheel has to be determined at cold-rolling circle of r_{g1} .

The cold-rolling circle radius corresponding to the radius of the hot-rolling circle is found from the following formula :

$$r_{g1} = \frac{r'_{g1}}{(1 + \alpha_t t)} . \quad (52)$$

Cold tooth-thickness \widehat{s}_{g1} on this rolling circle can be calculated from the known tooth-thickness \widehat{s}_1 with the aid of the following formula :

$$\widehat{s}'_{g1} = 2 r_{g1} \left(\frac{s_1}{2 r_1} + \text{inv } \alpha - \text{inv } \alpha_g \right) .$$

Its value in hot condition :

$$\widehat{s}'_{g1} = \widehat{s}_{g1} (1 + a_t t). \quad (53)$$

This hot-rolling circle value has to be subtracted from rolling-circle pitch p'_g in hot condition, and in this way the thickness required at the rolling-circle of the tool is obtained, i. e.

$$\widehat{s}_{gs} = p'_g - \widehat{s}'_{g1}. \quad (54)$$

This has to be converted to pitch-circle r_s of the master-wheel, or — in other words — tooth-thickness \widehat{s}_s at pitch-circle has to be determined by means of the following formula :

$$\widehat{s}_s = 2 r_s \left(\frac{\widehat{s}_{gs}}{2 r_{gs}} + \text{inv } a_g - \text{inv } a_s \right). \quad (55)$$

This is the tooth-thickness which must be reached at pitch-circle r_s of the master-gear tool in order to obtain the required tooth-thickness s_1 at radius r_1 of the wheel in cold condition. The tooth-thickness corresponding to the calculated one, is specified in this way for the workshop to enable it to make the master-gear tool. By hot-rolling, also helical gears can be produced ; the rolling-in of gears with helical teeth is even easier because the engagement is more uniform due to inclined tooth form.

8. Strength tests

The curving fibres of the raw material of hot-rolled gears are not indented in the course of the toothing process in the same manner as are those of gears manufactured by the process of cutting. Due to this more favourable arrangement of fibres at the tooth roots, the tooth are more resistant to bending stress. For the determination of the numerical value of this property, bending strength fatigue tests have been carried out by means of an electronic pulsator, type Amsler, in the arrangement as indicated in Fig. 19. The wheels tested were made of Cr 80, with 24 teeth, normal gearing $\alpha=20^\circ$, module $m = 2,5$ width $b = 0,9$ cm. As indicated in the figure, the lower loading jaw of the pulsator, connected to a dynamometer, acted upon one of the lower teeth of the wheel supported above by two teeth, and exerted a repeated stress on the edge of the tooth-tip. Fig. 20 shows the result of the test. According to the figure, the fatigue limit of bending strength was reached at $53,6 \text{ kg/mm}^2$ for the wheel produced by cutting, while — for the wheel produced by hot-rolling — the

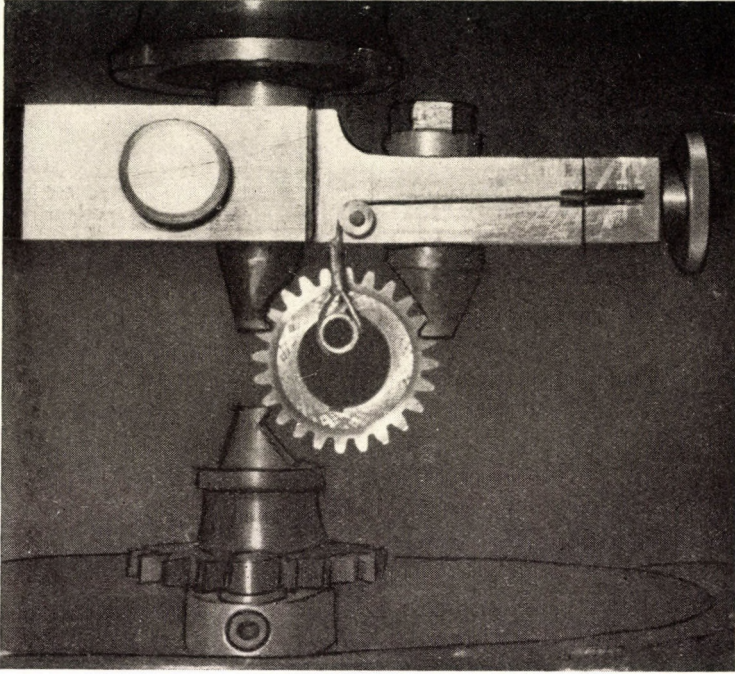


Fig. 19

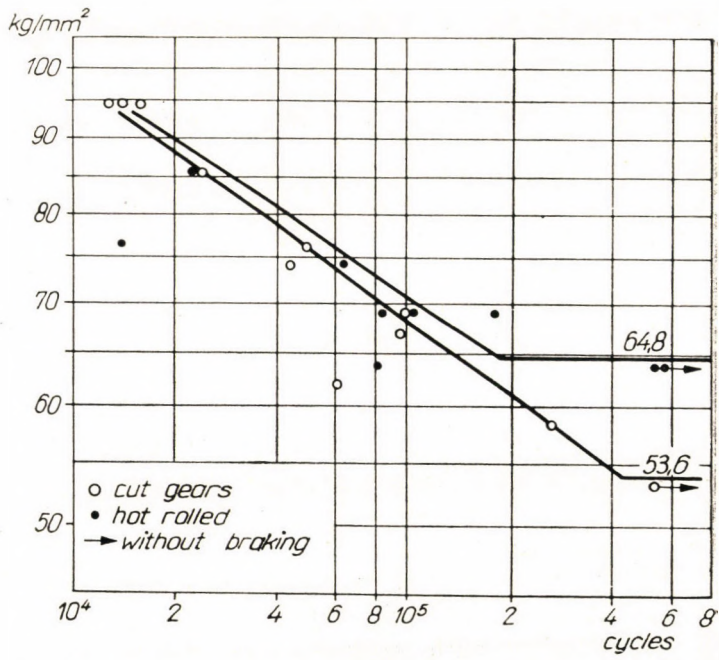


Fig. 20

fatigue limit of bending strength was reached at a value appr. 20% higher : at 64,8 kg/mm². Although up to now we could test only one material and did it only with one gear measurement, even this single test has proved the superiority of hot-rolling as regards better utilization of gear material.

SUMMARY

Several disadvantages of gear-cutting have drawn attention to gear production by hot-rolling, one of its great advantages being higher efficiency. Hot-rolling can be executed on a blank freely revolving between the master-gears, or by way of a forced engagement between master-gears and blank. Though research in Hungary has been conducted on freely revolving blanks, the theoretical findings apply to both cases. Referring in the first place to the choice of the initial diameter of the blank, the said results are based partly on the volume of the teeth, partly on the pure rolling-down of the addendum circle of the master-gear tool on the work-piece. The determination of the area of the teeth was made with the aid of a tooth profile drawing device, by planimetry of the area of the teeth drawn to an enlarged scale. The ratio between the pressure-angles of the tool and of the gear to be produced depends on the temperature at which the blank is rolled in.

With the aid of the deduced relation, the pressure angle of the tool, ensuring a correct tooth-curve, can be determined. Also the tooth-thickness produced by the tool depends on temperature, that is, on the thermal expansion of the blank, and can be determined by involu-metric calculation.

With this method the tooth-thickness required on the master-gear tool can also be pre-calculated, whether normal gears or such with profile displacement are to be produced.

Some fatigue bending tests, executed with electronic pulsator, have shown that — because of the better arrangement of material fibres — the fatigue limits of hot-rolled gears are about 20% higher than those of machine-cut gears.

THEORETISCHE FORSCHUNGEN ÜBER DURCH HEISSWALZEN HERGESTELLTE ZÄHRÄDER

I. VÖRÖS

ZUSAMMENFASSUNG

Mehrere Nachteile der durch spanabhebende Verformung hergestellten ZÄhräder haben die Aufmerksamkeit auf die Herstellung von ZÄhrädern durch Heisswalzen gelenkt. Ein grosser Vorteil dieses Verfahrens ist dessen hohe Produktivität. Das Heisswalzen kann ausgeführt werden mit einem sich zwischen den Haupträdern frei drehendem Rohling oder auf solche Weise, daß zwischen Haupträdern und Werkstück Zwangsverbindung besteht. Obgleich in Ungarn die Forschungen mit sich frei drehendem Werkstück angestellt wurden, gelten die theoretischen Feststellungen für beide Fälle. Diese beziehen sich in erster Linie auf die Wahl des Ausgangsdurchmessers des Rohlings, wozu teils das Zahnvolumen, teils die Forderung der reinen Abwälzung des Kopfkreises des Hauptradwerkzeuges auf dem Werkstück als Grundlage dient. Die Bestimmung der Zahnfläche erfolgt mittels des Zahnformzeichengeräts, durch Planimetrieren der Fläche von in grossen Abmessungen aufgezeichneten Zähnen. Der Zusammenhang zwischen den Eingriffswinkeln des Werkzeuges und des herzustellenden Rades hängt von der Einwalztemperatur des Rohlings ab.

Mit Hilfe der abgeleiteten Beziehung kann der die richtige Zahnkurve sichernde Werkzeugeingriffswinkel bestimmt werden. Die durch das Werkzeug hergestellte Zahnstärke hängt auch von der Temperatur, bzw. von der Wärmeausdehnung des Werkstückes ab und kann durch evolventenmetrische Berechnungen bestimmt werden.

Durch diese Berechnung kann auch die auf dem Hauptradwerkzeug benötigte Zahnstärke vorausberechnet werden, ungeachtet dessen, ob ein Elementarrad oder ein Zahnrad mit Profilver-schiebung hergestellt werden soll.

Einige mit dem Amslerschen Pulsator ausgeführte Zahnwurzel-Biegefestigkeitsversuche zeigten, dass heissgewalzte ZÄhräder infolge der vorteilhafteren Anordnung der Materialfasern eine um etwa 20% höhere Ermüdungsgrenze gegenüber den durch spanabhebende Verformung angefertigten Rädern besitzen.

RECHERCHES THÉORIQUES SUR LE LAMINAGE À CHAUD DES ENGRENAGES

I. VÖRÖS

RÉSUMÉ

Certain inconvénients de la fabrication des engrenages par usinage, ont attiré l'attention à leur production par laminage à chaud, dont un grand avantage consiste dans sa meilleure productivité. Le laminage à chaud peut se pratiquer sur une pièce à travailler tournant librement entre les roues maîtresses, ou de manière qu'il y ait liaison forcée entre les roues maîtresse et la pièce. Quoiqu'en Hongrie, les recherches aient porté sur des pièces à travailler tournant librement, les constatations théoriques sont valables pour les deux cas. Celles-ci concernent, principalement le choix du diamètre initial de la pièce, basé en partie sur le volume de la dent et en partie sur la demande de roulement pur du cercle de tête de la roue maîtresse servant d'outil. La détermination de la surface de la dent se fait à l'aide d'un appareil à dessiner le profil de la dent, par planimétrage des surfaces des dents reproduites en grandes dimensions. Le rapport entre l'angle de pression de l'outil et celui de la roue à fabriquer, dépend de la température d'entrée de la pièce entre les roues maîtresses.

À l'aide du rapport déduit, on peut déterminer l'angle de pression de l'outil assurant une denture correcte. L'épaisseur de la dent produite par l'outil dépend aussi de la température, c'est-à-dire de la dilatation thermique de la pièce à travailler, et peut être déterminée par calcul involutométrique.

Par ce calcul, on peut déterminer à l'avance l'épaisseur de la dent sur la roue maîtresse, pour la fabrication d'une roue élémentaire aussi bien, que pour celle d'une roue à profil déplacé.

Quelques essais de résistance à la flexion du pied de la dent, exécutés avec pulsateur électronique, ont démontré que les engrenages laminés à chaud possèdent une limite de fatigue supérieure d'environ 20% à celle des engrenages produits par usinage, par suite de la répartition plus favorable des fibres des matériaux à travailler.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ПРИ ПОМОЩИ ГОРЯЧЕЙ ПРОКАТКИ

И. ВЕРЕШ

РЕЗЮМЕ

Ряд недостатков изготовления зубчатых колес при помощи методов резания металла заставили обратить внимание на изготовление зубчатых колес методом горячей прокатки; одним из больших преимуществ этого метода является высокая производительность. Горячая прокатка может быть выполнена, применяя способ свободно вращающейся заготовки между инструментом, или же путем создания принудительной связи между инструментом и заготовкой. Несмотря на то, что в Венгрии исследования производились по принципу обработки — свободно вращающейся заготовки, теоретические определения действительны для обоих вариантов обработки. Эти касаются, в первую очередь, выбора исходного диаметра заготовки, для чего за основу берется частично объем зубьев, а другой частью — чистая обкатка инструмента. Площадь поверхности зубьев определяется с помощью прибора для вычерчивания формы зубьев, т. е. планиметризацией площади начерченных в крупном масштабе зубьев. Зависимость между углом сцепления инструмента и углом сцепления изготавливаемого зубчатого колеса зависит от температуры прокатки заготовки.

С помощью выведенной зависимости можно определить необходимый угол сцепления инструмента, обеспечивающий правильную кривую зуба. Создаваемая инструментом толщина зубьев, также зависит от температуры и, соответственно, теплового расширения заготовки, и может быть определена эвольвентными метрическими расчетами.

С помощью этой расчетной методики представляется возможным заранее определить толщину зубьев инструмента как для случая изготовления элементарных, так и специальных профильных зубчатых колес.

Небольшое число исследований с помощью пульсатора — прочности на изгиб оснований зубьев показало, что горячекатаные зубчатые колеса из-за более благоприятного распределения волокон материала имеют прибл. на 20% более высокий предел усталости материала чем зубчатые колеса, изготовленные обычными методами резания металлов.

THE DETERMINATION BY OXIDATION OF AUSTENITIC GRAIN SIZE IN MILD STEEL

P. SZÉKI

CAND. OF TECHN. SC.

GENERAL MACHINE DESIGN INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received May 6, 1957]

Determination of austenitic grain size in mild steel of low carbon content is not an easy task, with the methods generally used for that purpose. With most of the methods, chiefly the austenitic grain sizes of steels with a nearly eutectoid composition can be made accessible for reliable measurements.

The McQUAID—EHN case hardening method appears to be the most suitable for the determination of austenitic grain size in mild steels, among the better known methods. But the method is lengthy, the case hardening time alone amounts to 8 hours. If the diagram of the austenitic grain growing velocity of some steel is needed case hardening must be carried out at least at 6 different temperatures. Variation of temperature goes by infringing the specifications of the McQUAID—EHN method, as this method gives the case hardening temperature only as 927° C (1700° F). Another circumstance which makes the method unreliable is that the cementite network, which is often only imperfectly developed, does not clearly show the austenitic grains. Neither is reassurance provided by the fact that the addition of carbon changes the composition of mild steel, and that therefore the test is made on a steel of an essentially different composition. It is questionable whether the change of composition does not alter the kinetics of austenitic grain growth. According to J. VERŐ, the McQUAID—EHN test was not originally a method for measuring grain sizes, but served for recognizing by case hardening a steel which is abnormal.

The oxidation method published by A. KOHN [2] in 1954 promises to be more suitable than the method of McQUAID—EHN. Its principle is to heat the already polished metallographic specimen in a neutral atmosphere, N₂ or Ar, at the desired temperature, to blow in air at the end of the heating period, and finally to quench the specimen in water. After polishing and etching, the austenitic grain boundaries appear.

Based on this oxidation method, a more simple method has been elaborated, which develops the austenitic grain boundaries on the prepared metallographic specimen within 20—25 minutes.

With this method, the finished specimen is heated in a tubular furnace in a gas stream of industrial N₂, at the desired temperature. For oxidation of

the grain boundaries the O_2 is used which is always present in industrial N_2 . The excess of O_2 is previously bound and just as much is left as is needed for the oxidation of the grain boundaries.

The apparatus necessary for this method is easily assembled in a laboratory. 2 MARS-type tubular furnaces are needed, 3 washing flasks with concentrated sulphuric acid and 1 washing flask with basic pyrogallol solution.

The N_2 is lead through a washing flask with sulphuric acid to the first tubular furnace, which is filled with cast iron chips. The gas coming from the furnace is lead into basic pyrogallol and from there through the second sulphuric acid flask into the second tubular furnace, which serves to accommodate the

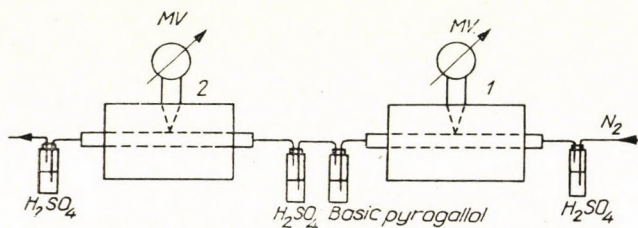


Fig. 1. General layout of the installation

metallographic specimens. After this furnace, the gas passes through the third sulphuric acid flask and then leaves the system. Fig. 1 shows a schematic drawing of the installation.

The furnace filled with iron chips must be first switched on and with a slight current of N_2 , it is heated to approx. $1000^\circ C$. Then the second furnace is switched on and heated to the desired testing temperature. With a stronger gas stream of N_2 air is purged from the apparatus during several seconds, then the specimens are introduced into the furnace from the side of the gas exit and placed exactly in the center of the furnace, with the polished sides up. After closing the tube, the velocity of the gas stream is adjusted to about 80–100 bubbles per minute (the inner dia. of the tube is 5 mm). After keeping those at full temperature for 15 minutes, the specimens are drawn from the side of the gas exit into the part of the tube which is outside the furnace, where they quickly cool to about $400^\circ C$. Then the specimens are dropped into water, rinsed with alcohol and dried. The grain boundaries of the austenite which is more inclined to react, appear on the polished surface without any etching, therefore the specimens are suitable for microscopic examination without any further operation.

Before the examination, degree of pureness of the N_2 must be adjusted by several test runs made with specimens prepared for this purpose. The O_2 content is adjusted by changing the temperature of the iron chips. After reaching a convenient O_2 content, tests can be continuously carried out.

With this method the growing speed of the austenitic grains of the following mild steel has been determined :

| | | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|--------|--------|
| C | Mn | Si | P | S | Al | N |
| 0,09 | 0,30 | 0,057 | 0,019 | 0,043 | 0,0136 | 0,0055 |

The austenitic grain size of this steel has been investigated at 970, 1050, 1070, 1120, 1150, 1170° C. Fig. 2—7. show the grain sizes obtained at these temperatures.

It can be observed on Fig. 4 and 5 that at temperatures (1070, 1120° C), where the austenitic grain starts to rapidly coarsen, a twin structure appears. The boundary lines of the austenitic crystals appear, of a size corresponding to the heating temperature, but in addition a mosaic of crystal surfaces, coloured to a varying degree, appears. The two structures are not in conformity. Fig. 5 clearly shows that within one austenitic grain enclosed by a definite line, there are placed several smaller crystal surfaces of various colour. One may suppose that at these temperatures, a small increase of which causes a large variation of grain size, the structure appears which is originated by a small temperature variation of the furnace. At higher temperature this phenomenon is less pronounced.

The following Table contains the dimensions of the austenitic grains :

| Temperature °C | Average grain dia, mm | Grain surface μ^2 | Number of grains per mm ² | ASTM No |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|---|---------|
| 970 | 0,020 | 314 | 3185 | 8—9 |
| 1050 | 0,021 | 354 | 2825 | 8—9 |
| 1070 | 0,073 | 4180 | 239 | 4—5 |
| 1120 | 0,162 | 20600 | 48 | 2—3 |
| 1150 | 0,305 | 73024 | 14 | 1—0 |
| 1170 | 0,500 | 196250 | 5 | 1—0 |

Fig. 8 has been computed on base of the Table, which shows the austenitic grain dia. as a function of temperature, i. e. the growing speed of the austenitic grains.

According to the diagram, the grains of the experimental austenitic suddenly start to coarsen at about 1050° C.

From the investigations of LESLIE, RICKETT, DOTSON and WALTON [3] the equation is known which serves to determine the temperature of solution of the total AlN being in the steel :

$$\log K_s = -\frac{6670}{T} + 1,033 .$$

Fig. 2—7. Austenitic grain boundaries at 970, 1050, 1070, 1120, 1150, 1170° C
Without etching. $\times 200$

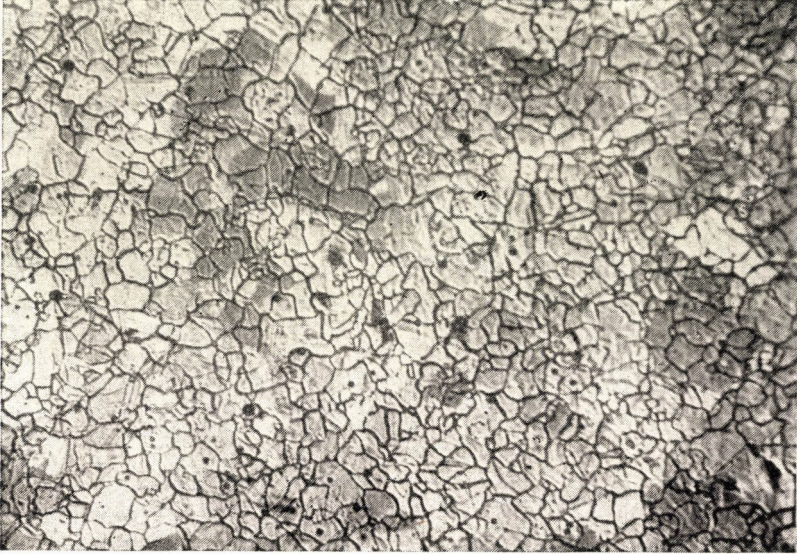


Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4

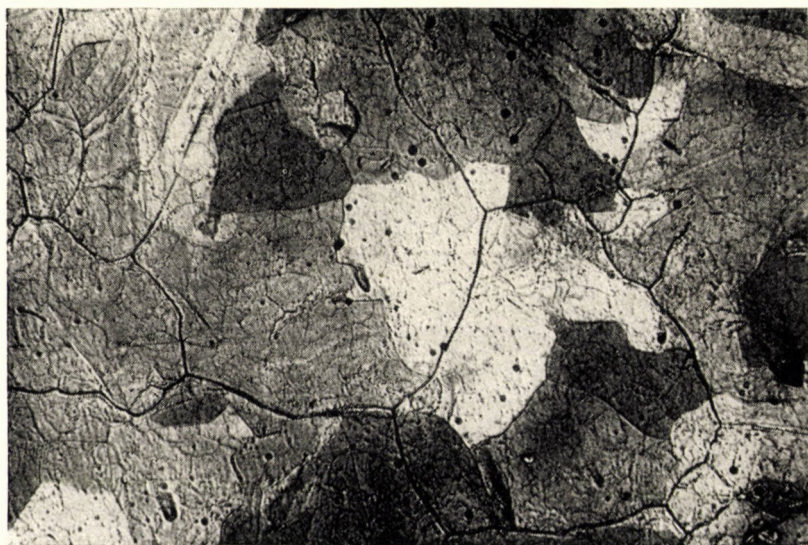
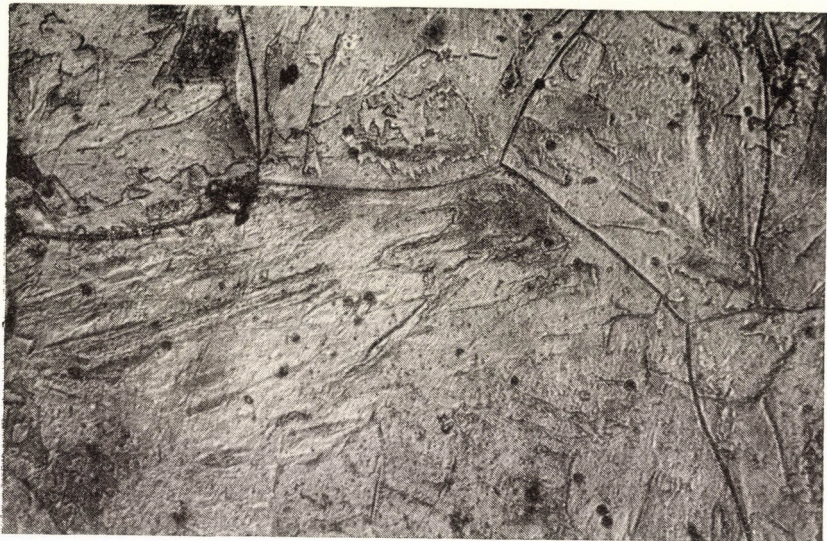
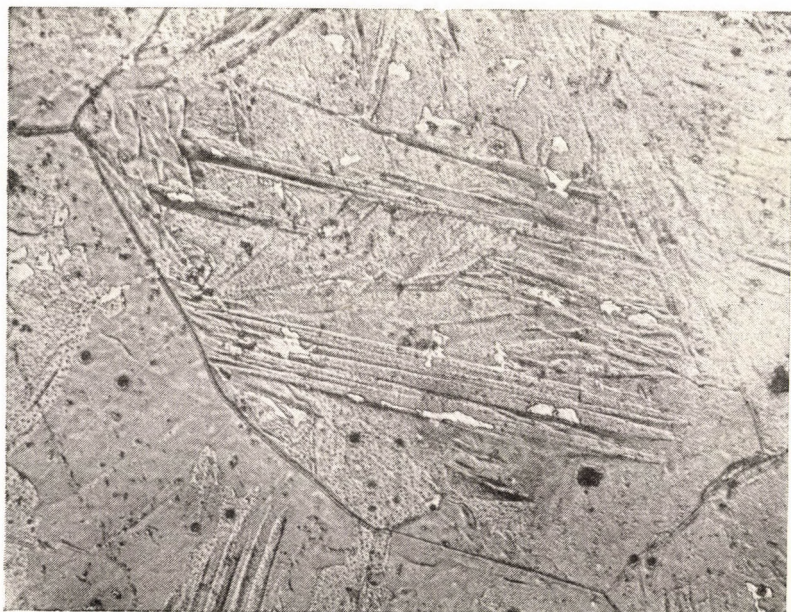


Fig. 5

*Fig. 6**Fig. 7*

From the equation it can be calculated that the temperature of solution of the AlN of the tested steel is 1040° C.

The temperature of austenitic grain coarsening and the calculated solution temperature of the AlN show in quite good accordance. This proves that the sudden coarsening of the austenitic grains of an aluminium-killed steel is princi-

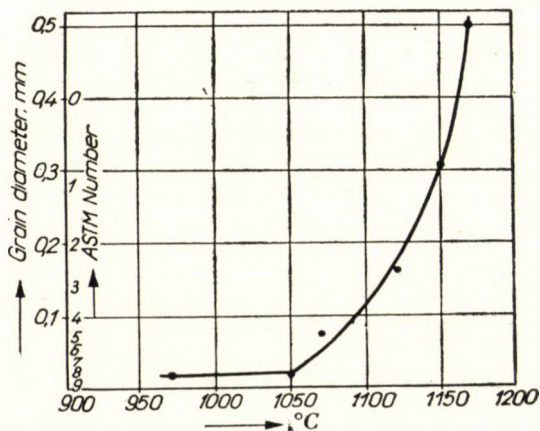


Fig. 8. The grain size of the tested austenitic as a function of temperature.

pally caused by the dissolution of the AlN. However, there is not at all as good an accordance between the coarsening and the solution temperature of the AlN if the Al content of the steel increases. In such a case the calculated AlN solution temperature increases to a much greater degree than the temperature of austenitic grain size increases. This observation needs still more research.

In the Metallography Department of the Central Materials Testing Laboratory of the Csepel Iron and Metal Works, austenitic grain size of various steels is also determined by oxidation. But there, rather H_2 is used instead of N_2 , the O_2 impurities of which have the same effect as those of the N_2 [4].

REFERENCES

1. DR. VERŐ JÓZSEF: Az ipari vasötvözetek metallográfiája (The Metallography of Industrial Iron Alloys) 1948 (Hungarian).
2. A. KOHN: Perfectionnement de la méthode par oxidation permettant la mise en évidence du grain réel d'austénite des aciers. *Revue de Métallurgie*. 1954. 2. p. 129.
3. W. C. LESLIE—R. L. RICKETT—C. L. DOTSON—C. S. WALTON: Solution and Precipitation of Aluminium Nitride in Relation to the Structure of Low Carbon Steel. *Transactions of ASM*. 1954. p. 1470.
4. BODA FERENC: Újabb, egyszerű és gyors eljárás vasötvözetek szemcse nagyságának meghatározására. (New, simple and quick method for determining the grain size of iron alloys.) *Kohászati Lapok*, June 1957, p. 246 (Hungarian).

SUMMARY

A method suitable for determining the austenitic grain size of mild steel is the heating of the specimens in purified industrial N_2 . The appropriate quantity of O_2 contained in the N_2 oxydates, and renders visible the austenite grains corresponding to the temperature of heating. The coarsening temperature of the austenite grains of an aluminium-killed mild steel, examined by this method, practically coincides with the temperature of AlN dissolution.

BESTIMMUNG DER KORNGRÖSSE VON AUSTENIT IN NIEDRIGGEKOHLTEM STAHL DURCH OXYDATION

P. SZÉKI

ZUSAMMENFASSUNG

Eine für die Bestimmung der Korngröße von Austenit in niedriggekohltem Stahl geeignete Methode ist das Glühen der Schiffe in gereinigtem industriellen N_2 . Die im N_2 enthaltene entsprechende Menge von O_2 oxydiert die der Glüh Temperatur entsprechenden Austenitkörner und macht sie sichtbar. Die Vergrößerungstemperatur eines mit dieser Methode untersuchten, mit Al beruhigten kohlenstoffarmen Stahles stimmt praktisch mit der Lösungstemperatur des AlN überein.

DÉTERMINATION PAR OXYDATION DE LA GRANDEUR DES GRAINS D'AUSTÉNITE CONTENUS DANS L'ACIER DOUX

P. SZÉKI

RÉSUMÉ

Une méthode appropriée pour la détermination de la grandeur des grains d'austénite consiste dans le chauffage des spécimens polis dans du N_2 industriel purifié. Une quantité appropriée de O_2 contenue dans le N_2 , oxyde et rend visible les grains d'austénite correspondant à la température de chauffage. La température de grossissement d'un acier doux calmé à l'Al, et examiné par cette méthode, est pratiquement égale à la température de dissolution de l'AlN.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУПНОСТИ АУСТЕНИТА НИЗКОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ ОКИСЛЕНИЕМ

П. СЕКИ

РЕЗЮМЕ

Для определения крупности аустенита низкоуглеродистых сталей подходящим методом является накат стальных шлифов в очищенном техническом газе $N_2 \cdot O_2$, имеющийся в соответствующем количестве в газе N_2 , окисляет и делает видимым зерна аустенита, соответствующие температуре нагрева. Температура укрупнения зерен аустенита низкоуглеродистой стали, обработанной Al, при исследовании указанным методом показывает, что температура укрупнения практически совпадает с температурой растворения AlN.

GRAPHICAL KINEMATIC ANALYSIS METHODS

APPLICATION OF ROTATED VECTORS

L. BUZÁS

DEPARTMENT II FOR TECHNICAL MECHANICS, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received May 15, 1957]

Introduction

One of the most important problems of the theory of mechanisms and machines is the kinematic analysis of mechanisms. Though algebraic methods seem to be perfectly adequate for this purpose, in practical engineering graphical methods have been widely used. The reason for that is that, with algebraic methods, solutions of intricate equations may become quite puzzling, especially if the number of driven links is somewhat large. As a consequence, the results are not always of great help for the practice. On the other hand, the great practical importance of the graphical methods has been proved by the extremely large number of works published in the world literature for the last 50—60 years on this subject.

The main purpose of the present study is to set side by side the graphical methods generally used for kinematic analyses, and to demonstrate that, for the practical engineering, of all these methods that of rotated vectors is the most serviceable one almost in every case.

A Comparison of the graphical analysis methods

The basic principle for determination of the velocities and accelerations of a mechanism is the vectorial summation of the characteristics of the motion. In the practice three methods have become current for this purpose.

1. The vectors for the points of the moving rigid body are summed up directly for the point under consideration, and thus the characteristics of the motion are obtained immediately for the respective point. Yet in cases when several points have to be considered, this method may become cumbersome and trying. A facility is given in this respect by the Theorem of BURMESTER, according to which the extremities of the velocity and acceleration vectors of a rigid body in motion result in polygons similar to the configuration in motion [Relations (10), (11), (24), (42)]. Yet the determination of the characteristics of the motion by this method cannot be of any serious help for practical engineering, because of the numerous errors which may occur in the measurement work necessary for the construction of similar polygons.

2. According to MOHR, velocities and accelerations of a moving rigid body may be determined also by a summation of the vectors for the whole mechanism, starting from some point chosen anywhere. With this method, the velocity and acceleration vectors resulting from the closed configuration attached to the moving rigid body will form closed polygons similar to the moving configuration, but rotated through a certain angle as compared to it [Relations (25), (43)]. This theorem was proved by MEHMKE. The closed polygons formed by velocity and acceleration vectors give the velocity and/or acceleration diagrams (images).

For kinematic analyses, the method of velocity and acceleration diagrams proved to be highly useful. The principal advantage of this method consists of having to do auxiliary constructions on the kinematic sketches only. The diagrams give an illustrative picture of the vectors characterizing the motion. Moreover, we may easily find that point of the moving system which moves with a pre-determined velocity or acceleration at the position under consideration of the system. One of the disadvantages of this method is that the vectors give the characteristics of the motion not at their actual places, and, as a consequence, over the errors inherent of the construction of similar polygons, further errors may occur while transferring the vectors.

3. The determination of the motion by the method of rotated vectors is based on the Theorem of BURMESTER, according to which all the vectors characterizing the motion of a closed configuration attached to a moving rigid body, when rotated through a certain angle, pass through one point, and the polygon marked out by the extremities of the vectors is always similar to the moving configuration [Relations (12), (13), (27) and (46)]. The analysis of the motion by this method has an important advantage over the two preceding ways: the velocity and acceleration vectors appear at their actual place. The similar polygons can be constructed readily, without any necessity of transferring angles. For determination of accelerations by graphical methods, rotated acceleration vectors may be utilized almost in every case without being transferred. Problems of kinematic geometry may also be worked out by means of rotated vectors. In the course of dynamic investigations, acceleration vectors appearing at their actual places give the directions and senses of the inertia forces. Owing to these advantages, this method has rapidly become general. As its only inconvenience it might be pointed out that there may occur errors when reproducing angles of rotated vectors, and auxiliary constructions may render kinematic sketches over-elaborated. But these difficulties are to be found at both the first and the second method, too.

In the following pages, preserving a logical sequence of ideas, in Sections I and II we shall set side by side the three methods also through illustrative examples, then, in Section III by means of analyses of two-link kinematic chains and some mechanisms constructed of such chains we shall demonstrate how to use the method of rotated vectors in practice. Throughout our investigations, we shall consider each link of a mechanism as a part of a big disc.

Notation and symbols

1. Links (discs) will be designed by Arabic numerals;
2. hinges and points under examination by capital letters;
3. distances by r ; accelerations in general by a , normal acceleration by n , tangential acceleration by t ; Coriolis acceleration by c ;
4. velocity poles by P ; acceleration poles by G ;
5. angular velocities by ω ; angular accelerations by ε ;
6. vectors by lines above the letters; the absolute value of a vector by the letter itself; rotated velocity vectors by \bar{v} ; rotated acceleration vectors by \bar{a} with the respective subscripts.
7. If longitude and velocity are represented in the drawing to an arbitrary scale of m_l and m_v , respectively, then the acceleration will be given to a scale of

$$m_a = \frac{m_v^2}{m_l}.$$

I. Velocities and accelerations of a rotating disc

1. The velocities and accelerations of a disc rotating about a fixed axis (Fig. 1) are unequivocally determined by the function $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$. The velocity of the point B on the disc is:

$$|\dot{\bar{r}}_{OB}| = v_B = \omega r_{OB} \sin \varphi, \quad (1)$$

or, as a vector product

$$\dot{\bar{r}}_{OB} = \bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_{OB} \quad (2)$$

The acceleration of the point B is

$$\bar{a}_B = \dot{\bar{v}}_B = \bar{\omega} \times \bar{v}_B + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{OB} \quad (3)$$

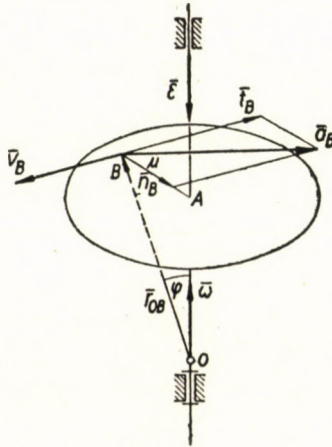


Fig. 1

The first term on the right side of the equation represents \bar{n}_B , the radial component of acceleration, pointing towards the centre of curvature of the path. The second term is \bar{t}_B , the tangential or transverse component of acceleration, directed along the tangent. With this notation :

$$\bar{a}_B = \bar{n}_B + \bar{t}_B \quad (4)$$

and

$$a_B = r_{OB} \sin \varphi \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (5)$$

The vector \bar{a}_B makes an angle μ with the radius of curvature :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (6)$$

2. Suppose the point 0 located at the point A in the plane of the disc 1. (Fig. 2) Then $\varphi = 90^\circ$,

$$\dot{\bar{r}}_{AB} = \bar{v}_B = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{AB}, \quad v_B = \omega_1 r_{AB} \quad (7)$$

i. e. on the basis of the known velocity and acceleration of the point B we may easily and promptly construct the velocity vector \bar{v}_K and the acceleration vector \bar{a}_K of any chosen point K , by the method of rotated velocities and accelerations.

If the axis of rotation is an infinite distance away, the disc has a rectilinear motion, and the equations given above will be simplified accordingly.

II. Velocities and accelerations of a disc in plane motion

The vector equations for the velocities and accelerations of the disc 2 in plane motion (Fig. 4) will be written in two forms. That is necessary because the motion of the two discs will be determined now from the one, then from the other vector equation, according to the type of connection between the discs, i. e. whether they are connected by a rotating or by a sliding kinematic pair.

Velocities (Fig. 4a).

1. Suppose that the disc 2 mounted at the point B of the disc examined in the first Section is rotating relative to disc 1 with angular velocity ω_{21} and angular acceleration ε_{21} . The position of the point C on the disc 2 may be given by the position vector $\bar{r}_{AC} = \bar{r}_{AC}(t)$:

$$\bar{r}_{AC} = \bar{r}_{AB} + \bar{r}_{BC}$$

The instantaneous velocity of the point C is

$$\dot{\bar{r}}_{AC} = \bar{v}_C = \dot{\bar{r}}_{AB} + \dot{\bar{r}}_{BC}. \tag{14}$$

The disc 2 rotates with angular velocity $\omega_1 + \omega_{21}$ therefore

$$\dot{\bar{r}}_{BC} = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}) \times \bar{r}_{BC}. \tag{15}$$

On the strength of (7) and (15), from Equ. (14) we get

$$\bar{v}_C = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{AB} + (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}) \times \bar{r}_{BC}, \tag{16}$$

or, after reduction

$$\bar{v}_C = \bar{\omega}_1 \times (\bar{r}_{AB} + \bar{r}_{BC}) + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{BC}. \tag{17}$$

The first term on the right-hand side of Equ. (17) denotes the velocity \bar{v}_{C_1} of the point C_1 on disc 1. This point lies beneath the point C on disc 2, i. e. the term represents the vehicular velocity. The second term is the

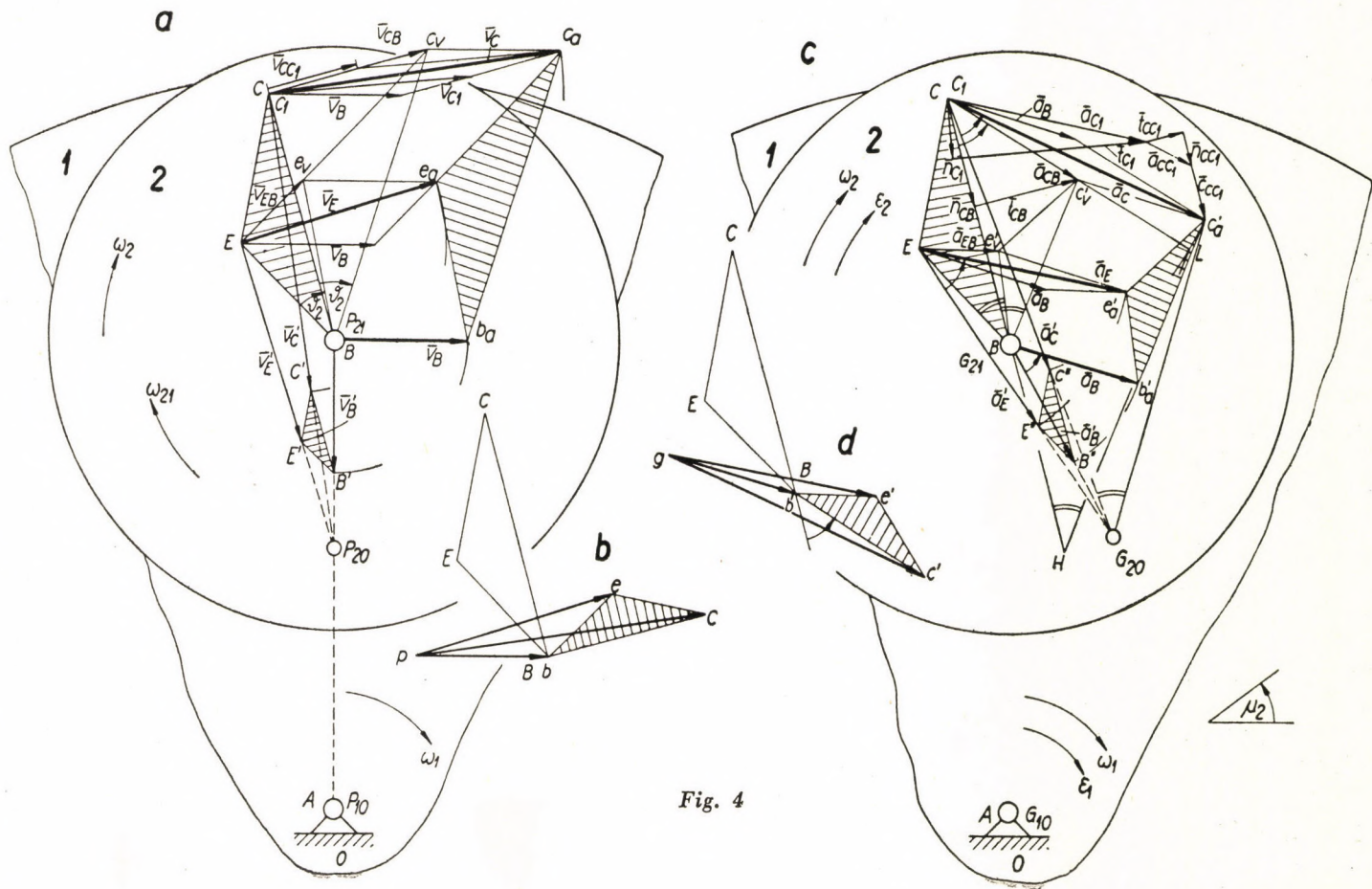


Fig. 4

velocity \bar{v}_{CC_1} of the point C relative to point C_1 directed along the tangent to the relative path. With this notation

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{C_1} + \bar{v}_{CC_1}. \tag{18}$$

The summation of the vectors is shown in Fig. 4a.

If the relative path is directed along a straight line (Fig. 5), then the disc 2 relative to the disc 1 can have a translational motion only, therefore

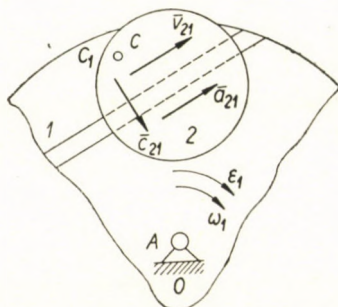


Fig. 5

the relative velocity of each point on the two discs will be the same, i. e. $\bar{v}_{CC_1} = \bar{v}_{21}$. With this notation :

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{C_1} + \bar{v}_{21}. \tag{19}$$

2. The actual angular velocity of the disc 2 is

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21}. \tag{20}$$

hence

$$\text{tg } \vartheta_2 = \omega_2$$

Hereby Equ. (16) becomes

$$\bar{v}_C = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_{BC} \tag{21}$$

The second term of the equation represents the instantaneous velocity \bar{v}_{CB} of the point C on the disc 2 relative to the point B ; \bar{v}_{CB} is perpendicular to \bar{r}_{BC} , and $v_{CB} = \omega_2 r_{BC}$.

Herewith

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}. \tag{22}$$

In accordance to Equ. (22) the velocity of any chosen point on a disc in plane motion may be determined if the velocity of one point on the disc, plus the direction of the motion of the point under consideration are known.

3. On the strength of part 2 the velocity of any chosen point on a disc in plane motion may also be obtained in the event if the velocities of two points on the disc are known.

In accordance with Equ. (22) the velocity of the point E on the disc 2 is

$$\bar{v}_E = \bar{v}_B + \bar{v}_{EB}, \quad (23)$$

where \bar{v}_{EB} is the velocity of the point E relative to point B : \bar{v}_{EB} is perpendicular to \bar{r}_{BE} , and the angle ϑ_2 being known, the velocity may be determined. Construct vectors \bar{v}_C and \bar{v}_E according to Equations (22) and (23). In accordance with Relation (10) the vectors \bar{v}_{CB} and \bar{v}_{EB} lie between the respective corners of the similar triangles $Bc_v e_v$ and BCE . The triangle formed by joining the extremities of the vectors \bar{v}_B , \bar{v}_C and \bar{v}_E is congruent with the triangle $Bc_v e_v$ and therefore

$$\Delta b_a c_a e_a \sim \Delta BCE \quad (24)$$

4. Let us sum up the velocity vectors starting from any chosen point p (Fig. 4b): $\bar{v}_B = \bar{pb}$, $\bar{v}_{CB} = \bar{bc}$, $\bar{v}_C = \bar{pc}$, $\bar{v}_{EB} = \bar{be}$, and $\bar{v}_E = \bar{pe}$. On the model of Equ. (22) $\bar{v}_E = \bar{v}_C + \bar{v}_{EC}$, where \bar{v}_{EC} is perpendicular to \bar{r}_{CE} , and $v_{EC} = \omega_2 r_{CE}$. Since the sides of the triangle bce are perpendicular to the corresponding sides of the triangle BCE ,

$$\Delta bce \sim \Delta BCE \quad (25)$$

The polygon bce formed by relative velocity vectors is the velocity diagram (or polygon) of the configuration in motion BCE , and the point p is the pole of the velocity diagram.

5. Any point in the plane of the velocity diagram has its corresponding point on the disc. Herefrom it follows that the pole p of the velocity diagram has a corresponding point P_{20} on the disc 2, which at the instant under consideration is unmoved relative to the fixed (stationary) link 0. Point P_{20} can be found from Relation (25): the triangle BCP_{20} is similar to the triangle bcp . The point P_{20} is the instantaneous centre of rotation, or velocity pole of the disc 2 in plane motion. With that, the instantaneous motion of the disc 2 was reduced to an instantaneous rotation about the pole P_{20} , and therefore

$$v_B : v_C : v_E = r_{P_{20}B} : r_{P_{20}C} : r_{P_{20}E} \quad (26)$$

The velocity vector is directed along the tangent to the curved path traced by the point, and therefore the normal to the path intersects the pole. At the instant under consideration, the disc 1 is turning relative to the fixed link 0 about the pole $P_{10} \equiv A$, while the disc 2 is turning relative to the disc 1 about the pole $P_{21} \equiv P_{12} \equiv B$. It is apparent that the relative poles of the three discs lie on one straight line (Fig. 4a). This conclusion holds good not only for discs connected to each other directly, but to any other three discs making part of a closed kinematic chain, even if they are not connected directly to each other.

6. Suppose the vectors \bar{v}_B , \bar{v}_C and \bar{v}_E rotated through 90° in any direction. Then, from Relation (26)

$$\Delta B'C'E' \sim \Delta BCE. \tag{27}$$

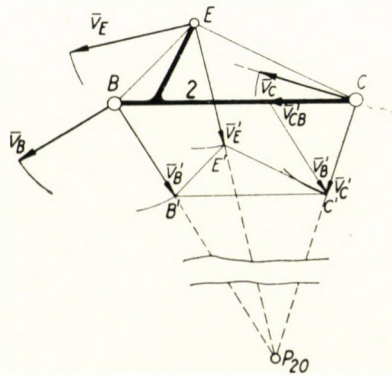


Fig. 6

Since the sides of the triangle $B'C'D'$ are parallel to the corresponding sides of the triangle BCE , out of the triangles $b_a c_a e_a$, $b c e$ and $B'C'E'$, the triangle $B'C'E'$ can be constructed most easily and with the smallest possible error. That is to say, if the velocity of any point, and the direction of motion of another point on the disc in plane motion are known, the velocity of any other chosen point may be determined most expediently in the kinematic sketch by the method of rotated velocity vectors.

This method may be applied even in a case when the velocity pole P_{20} does not lie on the paper (Fig. 6). Draw vector \bar{v}'_B starting from the point C' , then the relative velocity \bar{v}'_{CB} will be obtained on the strength of (22) from the resulting similar triangles

$$\frac{v_C}{r_{P_{20}C}} = \frac{v_{CB}}{r_{BC}} = \omega_2 \tag{28}$$

Accelerations

7. The instantaneous acceleration of the point C on disc 2 may be obtained by differentiating Equ. (17) with respect to time :

$$\dot{\bar{v}}_C = \bar{a}_C = \bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{C_1} + \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{r}_{AC_1} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_{CC_1} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \bar{r}_{BC} + 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{CC_1}. \quad (29)$$

The first and second terms of the equation represent the normal component \bar{n}_{C_1} and the tangential component \bar{t}_{C_1} , respectively, of the acceleration of point C_1 on the vehicular disc 1, i. e. of the vehicular acceleration. The third and fourth terms denote the normal component \bar{n}_{CC_1} and the tangential component \bar{t}_{CC_1} , respectively, of the acceleration of the point C on the disc 2 relative to the point C_1 on the disc 1. Finally, the last term is the Coriolis (or supplementary) acceleration \bar{c}_{CC_1} .

$$\bar{a}_{C_1} = \bar{n}_{C_1} + \bar{t}_{C_1}, \quad a_{C_1} = r_{AC_1} \sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2} \quad (30)$$

$$\bar{a}_{CC_1} = \bar{n}_{CC_1} + \bar{t}_{CC_1}, \quad a_{CC_1} = r_{BC} \sqrt{\omega_{21}^4 + \varepsilon_{21}^2} \quad (31)$$

$$\bar{c}_{CC_1} = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{CC_1}, \quad c_{CC_1} = 2\omega_1 v_{CC_1} \quad (32)$$

For the determination of the direction and sense of the Coriolis acceleration, it is easy to keep in mind that the vector \bar{c}_{CC_1} is perpendicular to the relative velocity vector, being rotated through 90° according to the direction of rotation of the vehicular disc.

As a final result, the instantaneous acceleration of the point C is

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{CC_1} + \bar{c}_{CC_1} \quad (33)$$

The summation of the vectors is shown in Fig. 4c.

If the relative path is a straight line (Fig. 5) then $\bar{n}_{CC_1} = 0$, and the tangential acceleration, as well as the Coriolis acceleration, are the same for any point on the disc, i. e. $\bar{a}_{CC_1} = \bar{t}_{CC_1} = \bar{a}_{21}$, and $\bar{c}_{CC_1} = \bar{c}_{21}$. With this notation :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{21} + \bar{c}_{21} \quad (34)$$

8. The equation of the instantaneous acceleration of the point C may be obtained also by differentiation of Equ. (21) with respect to time :

$$\bar{a}_C = \bar{\omega}_1 \times \dot{\bar{r}}_{AB} + \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega}_2 \times \dot{\bar{r}}_{BC} + \bar{\varepsilon}_2 \times \bar{r}_{BC}. \quad (35)$$

The first and second terms on the right-hand side of the equation are the normal component \bar{n}_B and tangential component \bar{t}_B , respectively, of the

acceleration \bar{a}_B of point B , whereas the third and fourth terms represent the normal component \bar{n}_{CB} and tangential component \bar{t}_{CB} , respectively, of the acceleration \bar{a}_{CB} of point C relative to point B . With this notation :

$$\bar{a}_B = \bar{n}_B + \bar{t}_B$$

and

$$\bar{a}_{CB} = \bar{t}_{CB} + \bar{n}_{CB}; \quad a_{CB} = r_{BC} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2} \quad (36)$$

i. e.

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB} \quad (37)$$

Similarly to Equ. (6) we may write

$$\operatorname{tg} \mu_2 = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2}. \quad (38)$$

In accordance with Equations (37) and (38) the acceleration of any point on a disc in plane motion may be determined only if the acceleration of any chosen point, the direction of the acceleration vector for the point under consideration, and the acceleration angle μ are given.

9. On the basis of what was said in the part 8, the acceleration of a disc in plane motion may be determined also in the event that the accelerations of two points on the disc are known. The acceleration of the point E on the disc 2, following from Equ. (37) is

$$\bar{a}_E = \bar{a}_B + \bar{a}_{EB} \quad (39)$$

where

$$\bar{a}_{EB} = \bar{n}_{EB} + \bar{t}_{EB}, \quad a_{EB} = r_{BE} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2} \quad (40)$$

From Relations (36) and (40) follows

$$\frac{a_{CB}}{r_{BC}} = \frac{a_{EB}}{r_{BE}} = \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2}. \quad (41)$$

In accordance with Relations (38) and (41) the relative acceleration vectors \bar{a}_{CB} and \bar{a}_{EB} lie between the respective corners of the triangle $Bc'_ve'_v$ similar to triangle BCE . The construction executed on the basis of Equations (37) and (39) shows that

$$\Delta b'_a c'_a e'_a \sim \Delta BCE \quad (42)$$

10. Let us sum up the acceleration vectors, starting from any chosen point g (Fig. 4d): $\bar{a}_B = \bar{g}b'$, $\bar{a}_{CB} = \bar{b}'c'$, $\bar{a}_C = \bar{g}c'$, $\bar{a}_{EB} = \bar{b}'e'$ and $\bar{a}_E = \bar{g}e'$. From Equ. (37) we have $\bar{a}_E = \bar{a}_C + \bar{a}_{EC}$, where $a_{EC} = r_{CE} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2}$, and vector $\bar{a}_{EC} = \bar{c}'e'$ inclines to vector \bar{r}_{CE} at an angle μ_2 . The sides of the triangle $b'c'e'$ form angles $180^\circ - \mu_2$ with the corresponding sides of the configuration in motion BCE , hence

$$\Delta b'c'e' \sim \Delta BCE. \quad (43)$$

The triangle $b'c'e'$ is the acceleration diagram of the polygon BCE , and the point g is the pole of the acceleration diagram.

11. Point g of the acceleration diagram has such a corresponding point G_{20} on the disc 2, whose instantaneous acceleration is zero. Point G_{20} may be found after the model of Relation (43): the triangle BCG_{20} is similar to $b'c'g$. On the strength of (37) we may write

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{G_{20}} + \bar{a}_{CG_{20}}, \quad (44)$$

i. e. the acceleration vector \bar{a}_C forms an angle μ_2 with the radius drawn from the point G_{20} . In a similar way we may write formulae for the accelerations of the points B and E . We may state:

$$a_B : a_C : a_E = r_{G_{20}B} : r_{G_{20}C} : r_{G_{20}E}. \quad (45)$$

Relation (45) shows that from the point of view of accelerations, the point G_{20} takes the same part, as the velocity pole with velocities. Point G_{20} is therefore the instantaneous acceleration pole of the disc 2.

From a combination of Equations (36) and (45) it follows that the triangle Bc'_vC is similar to the triangle $G_{20}c'_aC$, consequently the point G_{20} may be determined if the accelerations of two points on the disc are known, without first being obliged to draw the acceleration diagram. In Fig. 4c we transferred the triangle HLC upon the vector \bar{a}_C and thus we obtained the acceleration pole G_{20} .

Another well-known method for determining the acceleration pole is shown in Fig. 7. Suppose circles k_1 and k_2 produced to intersect each other. Then the triangle $G b'_aB$ is similar to triangle $G c'_aC$, and $r_{GB} : r_{GC} = a_B : a_C$, i. e. the point of intersection G of the two circles gives the acceleration pole. This statement can be proved true also for circles k_3 and k_4 .

12. Now we rotate vectors \bar{a}_B , \bar{a}_C and \bar{a}_E into radii drawn from the acceleration pole G_{20} (Fig. 4c). Then, from Relation (45)

$$\Delta B''C''E'' \sim \Delta BCE. \quad (46)$$

Since the sides of the triangle $B''C''E''$ are parallel to the corresponding sides of the triangle BCE , out of the triangles $b'_a c'_a e'_a$, $b'c'e'$ and $B''C''E''$ the triangle $B''C''E''$ can be constructed most readily and exactly. This construction may be applied even if the acceleration pole does not lie on the paper, only in such a case the acceleration angle μ_2 must be determined

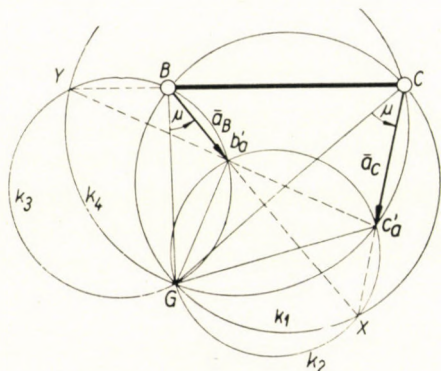


Fig. 7

first. As a consequence of the above statements, $G_{10} \equiv A$, $G_{21} \equiv G_{12} \equiv B$.

In our further examinations, for determining velocities and accelerations of hinged links we shall use Equations (22) and (37). If the relative path of the link is a straight line, Equations (19) and (34) will be applied.

III. Velocities and accelerations of mechanisms of the second class

Such plane mechanisms have become most widely used in constructional engineering, whose links, or at least some of their links are also free to rotate about an axis vertical to the plane of the motion. The systems of constrained (*driven*) members of such mechanisms are built up mostly of two-link kinematic chains. Kinematic chains of more than two links (four —, six —, etc. — link chains) are used only for solving quite special problems. ARTOBOLVSKY termed two-link kinematic chains as “groups of the second class” and mechanisms built up of such chains “mechanisms of the second class”. A two-link kinematic chain may form groups of the second class in five variations, accordingly to the kind of the connection between the links, i. e. whether they are connected to their neighbours by turning or by sliding kinematic pairs.

The sixth variation of two-link kinematic chains, where the links are connected to each other and also to the mechanism by sliding kinematic pairs only, is a mechanism in itself. Such a kinematic chain cannot be fitted in

the systems of driven links of the mechanisms treated above, because in such a case the mechanism would not be of constrained motion.

In the next parts we shall examine the velocities and accelerations of groups of the second class, and also of some mechanisms constructed of such groups, by the method of rotated vectors. The links of the kinematic chain

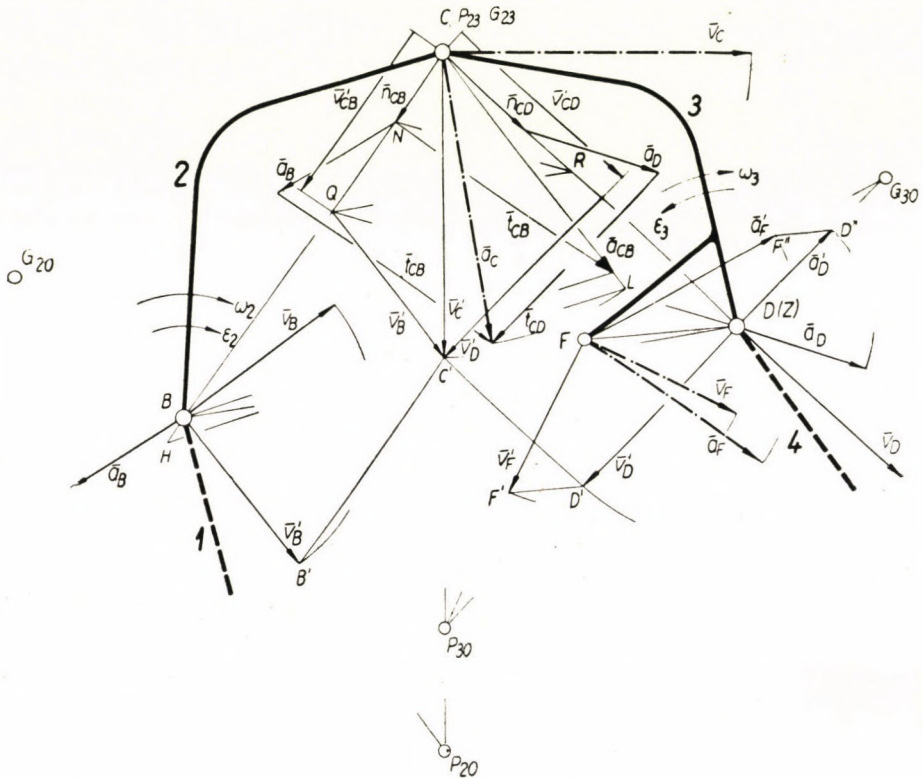


Fig. 8

forming the group will be denoted by 2 and 3, driving links with known velocities and accelerations by 1 and 4, fixed links (frames) by 0. Henceforward the discs which have served to make presentations more demonstrative will be left out of account, and each link will be represented by a straight line on the rigid body only.

1. In the simplest form of groups of the second class the links 2 and 3 are connected to each other as well as to links 1 and 4 by hinges (Fig. 8).

Given : $\bar{v}_B, \bar{v}_D, \bar{a}_B$ and \bar{a}_D .

Find : $\bar{v}_C, P_{20}, P_{30}, \bar{v}_F, \bar{a}_C, G_{20}, G_{30}$ and \bar{a}_F .

Velocities.

In accordance with Equ. (22) the velocity of the point *C* is

$$\bar{v}'_C = \bar{v}'_B + \bar{v}'_{CB} \quad \text{and} \quad \bar{v}'_C = \bar{v}'_D + \bar{v}'_{CD} \quad (47)$$

where

$$\bar{v}'_{CB} = ? \quad \parallel B - C \quad \bar{v}'_{CD} = ? \quad \parallel D - C$$

Rotate vectors \bar{v}_B and \bar{v}_D through 90° . Draw straight lines $B'C'$ parallel to BC and $D'C'$ parallel to DC through the points B' and D' , respectively. By the terms of Equ. (47) the extremity of the vector \bar{v}'_C must be along both straight lines drawn in the given directions, i. e. it must lie at the point of intersection of the two lines. We obtain the vector \bar{v}_C by rotating the vector \bar{v}'_C back in the appropriate sense. The poles P_{20} and P_{30} were constructed as described in part 5, Section II. For the construction of the velocity vector \bar{v}_F the pole P_{30} was used. The directions of ω_2 and ω_3 may be determined by setting off the vectors \bar{v}_{CB} and \bar{v}_{CD} from the point *C*.

Accelerations.

From (37) the acceleration of the point *C* is

$$\text{and} \quad \left. \begin{aligned} \bar{a}_C &= \bar{a}_B + \bar{a}_{CB} = \bar{a}_B + \bar{n}_{CB} + \bar{t}_{CB} \\ \bar{a}_C &= \bar{a}_D + \bar{a}_{CD} = \bar{a}_D + \bar{n}_{CD} + \bar{t}_{CD} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$n_{CB} = \frac{v_{CB}^2}{r_{BC}} \quad C \rightarrow B, \quad n_{CD} = \frac{v_{CD}^2}{r_{DC}} \quad C \rightarrow D,$$

$$\bar{t}_{CB} = ? \quad \perp \bar{r}_{BC}, \quad \bar{t}_{CD} = ? \quad \perp \bar{r}_{DC}.$$

Normal accelerations will be determined graphically. For the construction of \bar{n}_{CB} the point *Z* may be chosen anywhere. Join point *Z* to the points *B* and *C*, furthermore to the extremity *Q* of the vector \bar{v}'_{CB} . Draw *QR* parallel to *BZ* and *RN* parallel to *ZQ*. Then in the obtained similar triangles: $CN : v_{CB} = CR : CZ = v_{CB} : r_{BC}$, i. e. $\bar{C}\bar{N} = \bar{n}_{CB}$. By this construction the vector \bar{n}_{CB} can be determined both in direction and magnitude. If the pole P_{20} lies conveniently for drawing, then only draw $C'N$ parallel to $P_{20}Q$. The vector \bar{n}_{CD} may be determined in like manner ($Z \equiv B$).

To determine \bar{a}_C , add vector \bar{a}_B to \bar{n}_{CB} and \bar{a}_D to \bar{n}_{CD} respectively, according to Equ. (48). Draw straight lines from the extremities in the directions of \bar{t}_{CB} and \bar{t}_{CD} . On the strength of Equ. (48) both straight lines, determined in direction, must contain the extremity of the vector \bar{a}_C , i. e. it can be located only at the point of intersection of the two lines. By this the vectors

\bar{t}_{CB} and \bar{t}_{CD} also are determined in magnitude. The directions of ε_2 and ε_3 will be settled corresponding to the sense of the vectors \bar{t}_{CB} and \bar{t}_{CD} .

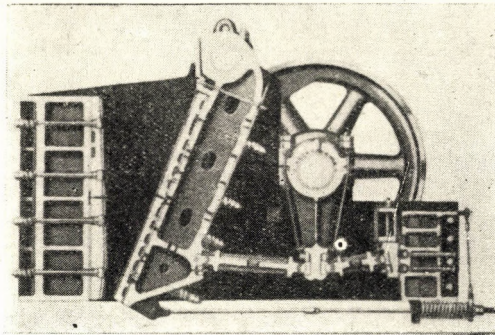


Fig. 9a

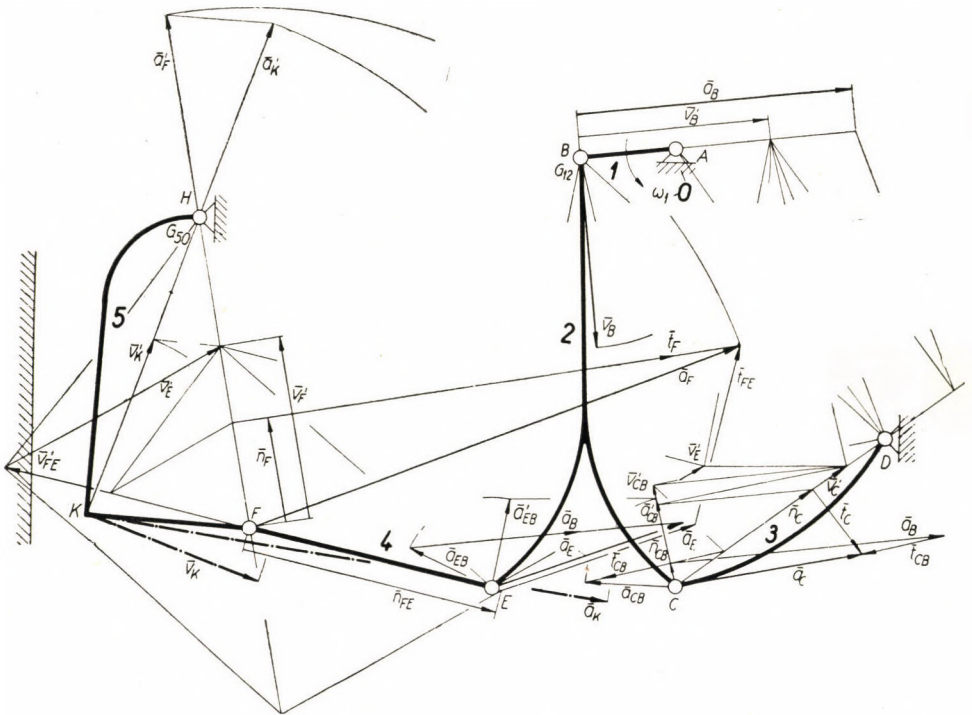


Fig. 9b

The acceleration poles G_{20} and G_{30} were located by the method described in part 11, Section II. For the determination of acceleration \bar{a}_F the point G_{30} was utilized.

By way of illustration, let us consider the kinematic analysis of the jaw crusher mechanism shown in Fig. 9a. The kinematic sketch of the crusher is given in Fig. 9b. The mechanism is composed of the fixed link, of the driving link rotating with angular velocity ω_1 , and of two groups of the second class (2, 3 and 4, 5). It is desired to find the velocity and acceleration of the point K . For that purpose, first the velocities and accelerations of the points C , E , and F must be determined. For the constructions, the following vector equations will be used :

$$\begin{aligned} \vec{v}'_C &= \vec{v}'_B + \vec{v}'_{CB} & \text{and} & & \vec{v}'_F &= \vec{v}'_E + \vec{v}'_{FE} \\ \vec{a}_C &= \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} & \text{and} & & \vec{a}_F &= \vec{a}_E + \vec{a}_{FE} \end{aligned}$$

or, with accelerations reduced to components :

$$\bar{n}_C + \bar{t}_C = \bar{a}_B + \bar{n}_{CB} + \bar{t}_{CB}$$

and

$$\bar{n}_F + \bar{t}_F = \bar{a}_E + \bar{n}_{FE} + \bar{t}_{FE}.$$

For the construction of the vectors \bar{a}_B and \bar{n}_{CB} the point Z was located at the point D , and for the construction of the vectors, \bar{n}_C and \bar{n}_{FE} the extremities of the vectors \vec{v}'_{CB} and \vec{v}'_F were utilized.

2. At the next variety of groups belonging to the second class, the link 2 is connected to the link 1 by a sliding kinematic pair (Fig. 10a). To make the kinematic analysis more illustrative, suppose the plane Σ_1 attached to the link 1 as a completion and point C_1 chosen in this plane.

$$\text{Given : } \vec{v}_{C_1}, P_{10}, \vec{v}_D, \bar{a}_{C_1}, G_{10} \text{ and } \bar{a}_D.$$

$$\text{Find : } \vec{v}_C, P_{30}, P_{20}, \vec{v}_F, \bar{a}_C, G_{30}, \bar{a}_F \text{ and } G_{20}.$$

Velocities.

From Equations (19) and (22)

$$\vec{v}'_C = \vec{v}'_{C_1} + \vec{v}'_{21} \quad \text{and} \quad \vec{v}'_C = \vec{v}'_D + \vec{v}'_{CD}, \tag{49}$$

where

$$\vec{v}'_{21} = ? \quad \perp 1 - 1 \quad \vec{v}'_{CD} = ? \quad \parallel D - C.$$

The point of intersection of the lines $C'C_1$ perpendicular to $1 - 1$ and $D'C'$ parallel to DC determine the extremity of the vector \vec{v}'_C . By this, the velocity \vec{v}'_{21} also was determined.

Accelerations

Using Equations (34) and (37)

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{21} + \bar{c}_{21} \quad \text{and} \quad \bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{CD} = \bar{a}_D + n_{CD} + \bar{t}_{CD} \quad (50)$$

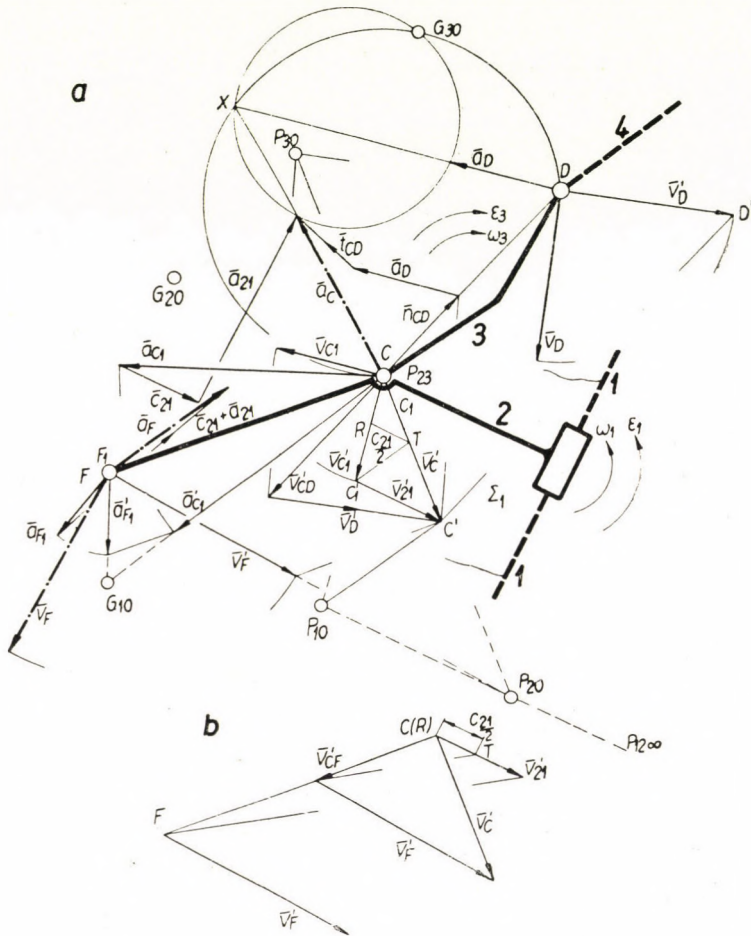


Fig. 10

where

$$\begin{aligned} \bar{a}_{21} = ? & \quad \parallel 1-1, & n_{CD} = \frac{v_{CD}}{r_{DC}} & \quad C \rightarrow D \\ \bar{c}_{21} = 2\omega_1 v_{21} & \quad \perp \bar{v}_{21} & \bar{t}_{CD} = ? & \quad \perp \bar{r}_{DC}. \end{aligned}$$

We shall determine the acceleration \bar{c}_{21} graphically. Draw $C_1 T$ parallel to $P_{10}C'$ and TR parallel to $C'C_1$. Then, from the resulted similar triangles

4. At the next variation of groups belonging to the second class, the links 2 and 3 are hinged at the point C , and relative to the links 1 and 4 they can have translational motion only (Fig. 13). For the kinematic analysis, we shall choose points C_1 and C_4 in the planes Σ_1 and Σ_4 , respectively.

Given : $\bar{v}_{C_1}, P_{10}, \bar{v}_{C_4}, P_{40}, \bar{a}_{C_1}, G_{10}, \bar{a}_{C_4}$ and G_{40} .

Find : $\bar{v}_C, P_{20}, P_{30}, \bar{v}_F, \bar{a}_C, \bar{a}_F$.

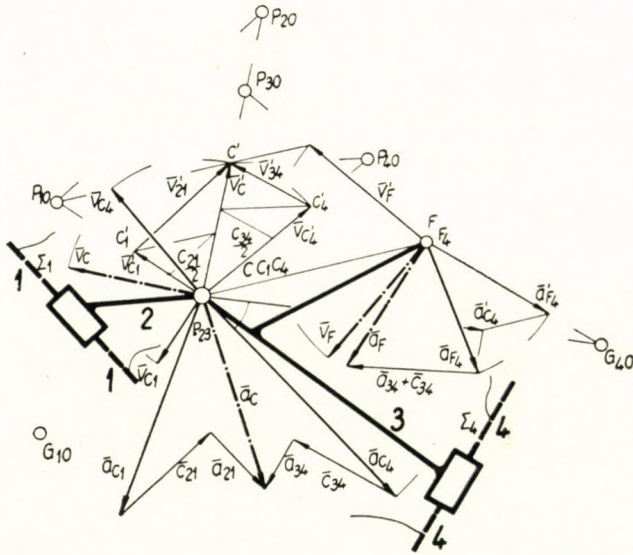


Fig. 13

For the constructions the following equations will be used :

$$\begin{aligned} \bar{v}'_C &= \bar{v}'_{C_1} + \bar{v}_{21} & \text{and} & & \bar{v}'_C &= \bar{v}'_{C_4} + \bar{v}_{34} \\ \bar{v}_{21} &= ? & \perp 1 - 1 & & \bar{v}_{34} &= ? & \perp 4 - 4 \\ \bar{a}_C &= \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{21} + \bar{c}_{21} & \text{and} & & \bar{a}_C &= \bar{a}_{C_4} + \bar{a}_{34} + \bar{c}_{34} \\ \bar{a}_{21} &= ? & \parallel 1 - 1 & & \bar{a}_{34} &= ? & \parallel 4 - 4 \\ c_{21} &= 2 \omega_1 v_{21} & \perp \bar{v}_{21} & & c_{34} &= 2 \omega_4 v_{34} & \perp \bar{v}_{34} \end{aligned}$$

The acceleration of the point F was determined from the equation

$$\bar{a}_F = \bar{a}_{F_4} + \bar{a}_{34} + \bar{c}_{34}.$$

The group of the second class just examined appears in the mechanism shown in Fig. 14. The follower rolls on the straight portion of the cam profile. This motion can be considered as if the edge of the follower, ending in the point C , glided on the theoretical cam profile. The velocity and acceleration of the point C will be determined from the equations

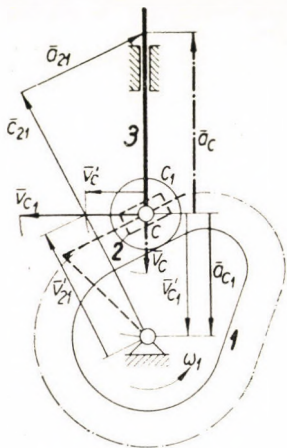


Fig. 14

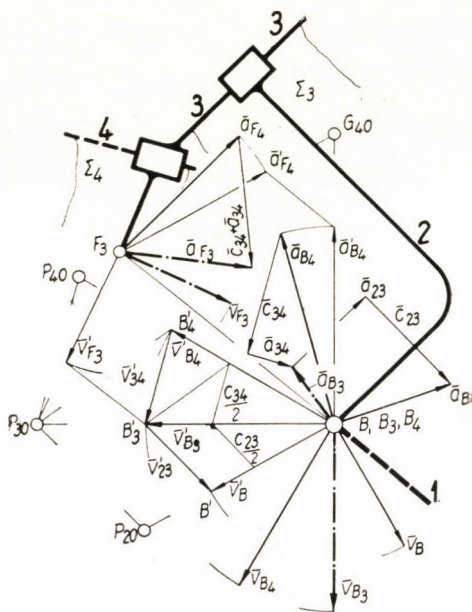


Fig. 15

and

$$\bar{v}'_C = \bar{v}'_{C_1} + \bar{v}'_{21}$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{21} + \bar{c}_{21}.$$

5. At the last of the possible variations of groups of the second class, the links 2 and 3 of the group are free to have translational motion relatively to each other, whereas the link 2 is connected to the link 1 by a hinge, and the link 3 to 4 by a sliding kinematic pair (Fig. 15). We shall choose points B_3 and B_4 in the planes Σ_3 and Σ_4 , respectively.

$$\text{Given: } \bar{v}_B, \bar{v}_{B_4}, P_{40}, \bar{a}_B, \bar{a}_{B_4}, G_{40}.$$

$$\text{Find: } \bar{v}_{B_3}, P_{30}, P_{20}, \bar{v}_{F_3}, \bar{a}_{B_3} \text{ and } \bar{a}_{F_3}.$$

Equations relating to this problem are

$$\begin{aligned} \vec{v}'_B &= \vec{v}'_{B_3} + \vec{v}'_{23} & \text{and} & \quad \vec{v}'_{B_3} = \vec{v}'_{B_4} + \vec{v}'_{34} \\ \vec{v}'_{23} &= ? & \perp 3-3 & \quad \vec{v}'_{34} = ? & \perp 4-4 \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_{B_3} + \vec{a}_{23} + \vec{c}_{23} & \text{and} & \quad \vec{a}_{B_3} = \vec{a}_{B_4} + \vec{a}_{34} + \vec{c}_{34} \\ \\ \vec{a}_{23} &= ? & \parallel 3-3 & \quad \vec{a}_{34} = ? & \parallel 4-4 \\ c_{23} &= 2\omega_3 v_{23} & \perp \vec{v}_{23} & \quad c_{34} = 2\omega_3 v_{34} & \perp \vec{v}_{34} \end{aligned}$$

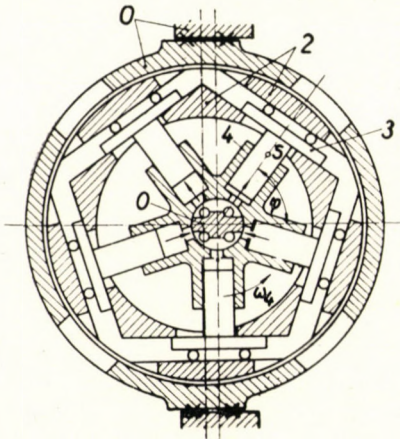


Fig. 16a

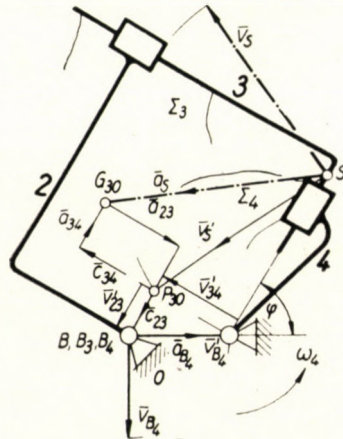


Fig. 16b

The equations for the acceleration of the point F_3 is

$$\vec{a}_{F_3} = \vec{a}_{F_4} + \vec{a}_{34} + \vec{c}_{34}.$$

The group belonging to the second class just analysed may be found for instance in the Oil-Gear type rotary plunger pump mechanism shown schematically in Fig. 16a. The kinematic sketch of the pump is given separately in Fig. 16b. The driver (rotor) 4 rotates with uniform angular velocity ω_4 . The relative velocity of the piston 3 to the rotor 4 was constructed, i. e. the instantaneous velocity \vec{v}'_{34} of the flow, (rate of flow) was determined. We see that the rate of flow, and, by that, the volume of the supplied liquid is a harmonic function of the angular displacement of the rotor. The velocity \vec{v}'_S of the centre of gravity S of the piston determines the tangent to the curved path of the centre of gravity, and the acceleration \vec{a}'_S renders the determination of the directions and senses of the inertia forces possible.

Throughout the problems worked out, the dimensions of the links are not exactly the same as the measurements of the actual mechanisms. Modifications were made to render the succession of the constructions easier to follow on the kinematic sketches.

REFERENCES

- И. И. АРТОВОЛЕВСКИЙ: Теория механмзмов и машин. Москва, 1951. (I. I. ARTOVLEVSKY: Theory of Mechanism and Machines.)
 J. S. BEGGS: Mechanism. New York 1955.
 R. BEYER: Technische Kinematik. Leipzig 1931.
 В. В. ДОБРОВОЛСКИЙ: Теория механизмов. Москва, 1953. (V. V. DOBROVOLSKY: Theory of Mechanisms.)
 V. L. DOUGHTIE—W. H. JAMES: Elements of Mechanism. New York 1955.
 W. G. GREEN: Theory of Machines. London 1955.
 G. L. GUILLET's: Kinematics of Machines. New York 1954.
 K. HAIN: Angewandte Getriebelehre. Hannover 1952.
 C. W. HAM—E. J. CRANE: Mechanics of Machinery. New York 1948.
 А. Р. HOLOWENKO: Dynamics of Machinery. New York 1955.
 С. Н. КОЖЕВНИКОВ: Теория механизмов и машин. Киев, 1954. (S. N. KOJEVNIKOV: Theory of Mechanisms and Machines.)
 O. KRAEMER: Getriebelehre. Karlsruhe 1950.
 R. KRAUS: Tehnische Mechanik. Berlin 1953.
 R. KRAUS: Getriebelehre. Berlin 1951.
 Л. В. ЛЕВЕНСОН: Теория механизмов и машин. Москва, 1954. (L. V. LEVENSON: Theory of Mechanisms and Machines.)
 N. ROSENAUER—A. WILLIS: Kinematics of Mechanisms. Sydney 1953.
 G. H. RYDER: Theory of Machines. London 1955.
 Z. TERPLÁN: Dynamische Untersuchung von ebenen Getrieben auf Grund graphischer Darstellung. Acta Technica Hung. XVI/3—4. 1957.
 F. WITTENBAUER: Graphische Dynamik. Berlin 1923.

SUMMARY

The paper compares three graphical methods of kinematic analysis, from the point of view of their practical utility. It gives a general survey of the principles on the basis of which the motion of plane mechanisms may be determined promptly and exactly by the strict graphical method of rotated vectors. Practical applications of the method are illustrated by means of two-link kinematic chains and some simple mechanisms constructed of such chains.

GRAPHISCHE METHODEN DES KINEMATISCHEN UNTERSUCHUNGSVERFAHRENS

ANWENDUNG VON GEDREHTEN VEKTOREN

L. BUZÁS

Die Abhandlung vergleicht zwecks praktischer Anwendung drei verschiedene graphische Methoden des kinematischen Untersuchungsverfahrens. Es werden die Sätze erörtert, auf deren Grund sich die Möglichkeit bietet, auf rein graphischem Wege den Bewegungszustand der ebenen Getriebe mittels der Methode von gedrehten Vektoren rasch und genau festzustellen. Die Anwendung der Methode ist an zweigliederigen kinematischen Ketten, sowie an einigen aus solchen Ketten konstruierten einfachen Getrieben dargestellt.

MÉTHODES GRAPHIQUES D'ANALYSE CINÉMATIQUE

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES VECTEURS DÉTOURNÉS

L. BUZÁS

RÉSUMÉ

L'étude compare trois méthodes graphiques d'analyse cinématique, au point de vue de leur applicabilité pratique. Elle résume les théorèmes qui permettent d'établir d'une manière rapide et exacte, par voie purement graphique, l'état de mouvement des mécanismes plans par la méthode des vecteurs détournés. L'application de la méthode est représentée sur des chaînes cinématiques à deux membres, et sur quelques mécanismes simples qui en sont construits.

МЕТОДЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ГРАФИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СДВИНУТЫХ ВЕКТОРОВ

Л. БУЗАШ

РЕЗЮМЕ

Работа сравнивает с точки зрения практической применимости три графических метода кинематического анализа. В общих чертах излагаются теоремы, на основе которых открывается возможность чисто графическим путем быстро и точно определить методом сдвинутых векторов состояния движения плоскостных механизмов. Применение метода демонстрируется на двухэлементных кинематических цепях и на нескольких простых механизмах, построенных из упомянутых кинематических цепей.

CALCULATION OF THE TEMPERATURE RISE OF MINE AIR FLOW WITH REGARD TO THE EFFECT OF ITS WATER VAPOUR CONTENT

Prof. T. BOLDIZSÁR

D. ENG. SC.

DEPARTMENT II FOR MINE MACHINERY, TECHNICAL UNIVERSITY, SOPRON

[Manuscript received June 3, 1957]

The temperature rise of air flowing on dry airways known [1], it may be important to determine the cooling or warming effect due to the variation of air moisture. In the way known from Thermodynamics the heat content (enthalpy) of $(1 + x)$ kg of moist air is obtained from the equation

$$i = c_p t + (c_{pw} t + \varrho) x \quad \text{kcal/kg} \quad (1)$$

where c_p and c_{pw} are the specific heats of air and of water respectively, t the temperature (generally referred to 0 deg. C), ϱ the heat of evaporation. In calculations of mine ventilation it is routine to refer i to one cu m of air and with consideration of the specific gravity of moist air

$$\gamma = \frac{P}{T} \frac{1 + x}{47,1 (0,622 + x)} \quad \text{kg/cu m} \quad (2)$$

to calculate with the $i\gamma$ value. In practical calculations — with regard also to the attainable precision of measurements — the value of $xc_{pw}t$ may be neglected because of its minuteness in comparison to ϱx (the maximum error is up to +40 deg. C temperature at most 2%); the specific gravity of air — varying along the airway — is taken into account instead of equation (2) with an average value, and the moisture content is disconsidered in the formula of specific gravity. The content of water vapour generally increases along mine airways, therefore in the following always the *cooling* effect connected with this will be spoken of. Since as a rule the variation of moisture content cannot be expressed as a function of the airway, it is expedient to suppose that the content in water vapour of the air increases linearly along the airway, with the restriction that the possible attainment of saturation has to be checked; the solution of the problem is thus simplified.

Let the increase of the water vapour content of air flowing on a horizontal airway be uniform: on a section of length Z the water vapour content rises

by b weight units per unit volume. The cooling down of air per unit length of the airway (e. g. in $^{\circ}\text{C}/\text{m}$)

$$\frac{b \cdot \rho}{Z \cdot c_p} = \mu.$$

The maximum of the value of b is fixed by the difference between the water vapour content of saturation corresponding to the final temperature of air and the water vapour content pertaining to its initial temperature. The line connecting the two states in the „ T — b ” diagram (Fig. 1) may fall into the fog

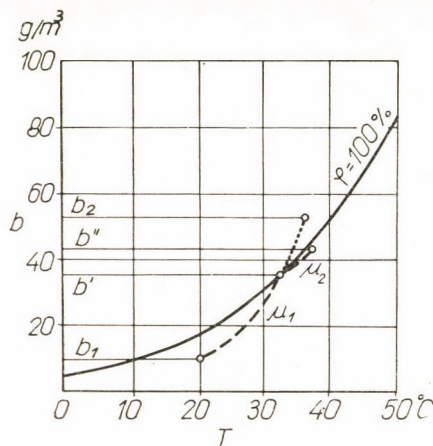


Fig. 1

zone, which disturbs the calculation. In such case it is expedient to execute the calculation on two airway sections with different b/Z values (Fig. 6).

In a previous paper the author has demonstrated [1] that if the moisture content of the mine air is unchanged (the so-called “dry” case), the temperature rise of air due to rock heat on a horizontal airway is given by the following differential equation :

$$d\tau = - \frac{q}{V \cdot c_p} dz \quad (3)$$

the solution of which is, since $q = \lambda \cdot F(\psi) \cdot \tau$, with consideration of the initial condition too,

$$\tau = \tau_0 \exp\left(- \frac{\lambda \cdot F(\psi) \cdot z}{V \cdot c_p}\right) \quad (4)$$

where τ and τ_0 , are the differences between virgin rock and air temperatures at the end and at the beginning of the investigated section ($T_r - T_0$), V is the quantity of air, c_p the specific heat of air, z the length of the airway, λ the thermal conductivity of the country rocks, $F(\psi)$ is an expression depending on $\psi = at/R^2$, a is the thermal diffusivity of the rocks, R the radius of the airway, t the time that has passed since the begin of air circulation.

$$F(\psi) = \frac{8}{\pi} \int \frac{e^{-\psi\beta^2}}{J_0^2(\beta) + Y_0^2(\beta)} \frac{d\beta}{\beta} \tag{5}$$

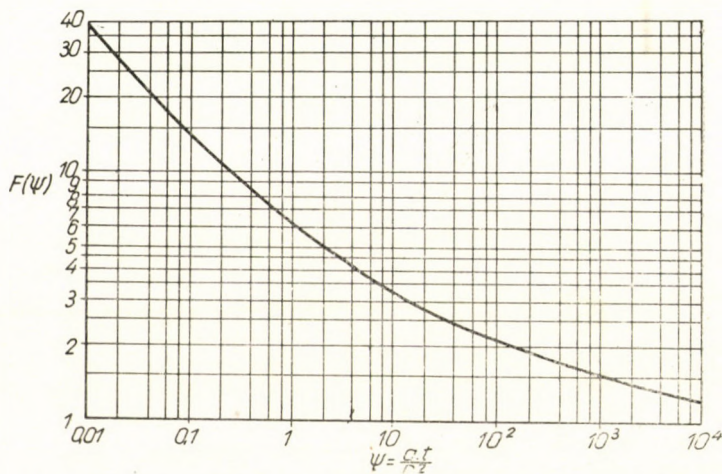


Fig. 2

where J_0 and Y_0 are Bessel functions, β is the variable of the integral ; the value of $F(\psi)$ is taken from Fig. 2.

However, the vapour content of mine air is not constant, therefore equation (4) can be made use of in very few cases only. Therefore the change of the vapour content has to be considered too (the "wet" case).

If the cooling down (or seldom warming up) due to the increase (or seldom the decrease) of the water vapour content is also considered, differential equation (3) takes the following form :

$$d\tau = - \left(\frac{q}{V \cdot c_p} - \frac{b \cdot \varrho}{Z \cdot c_p} \right) dz. \tag{6}$$

Initial condition : $z = 0, \tau = \tau_0; \frac{b \cdot \varrho}{Z \cdot c_p} = \text{const.}$

The solution (τ' indicates consideration of humidity)

$$\tau' = \frac{b \cdot \varrho \cdot V}{\lambda \cdot F(\psi) \cdot Z} + \left(\tau_0 - \frac{b \cdot \varrho \cdot V}{\lambda \cdot F(\psi) \cdot Z} \right) \exp \left(- \frac{\lambda \cdot F(\psi) \cdot z}{V \cdot c_p} \right). \tag{7}$$

If equation (4) is subtracted from equation (7), evidently the value of cooling down of air due to the increase of moisture content is obtained :

$$\tau' - \tau = \Delta T = \frac{b \cdot \varrho \cdot V}{\lambda \cdot F(\psi) \cdot Z} \left[1 - \exp \left(- \frac{\lambda \cdot F(\psi) \cdot z}{V \cdot c_p} \right) \right]. \quad (8)$$

Moreover, introducing the shorter notation $\sigma = \frac{\lambda \cdot F(\psi)}{V \cdot c_p}$

$$\Delta T = \frac{\mu}{\sigma} (1 - e^{-\sigma z}). \quad (8a)$$

In a vertical shaft, considering the adiabatic compression of air, the differential equation

$$d\tau = - \left(\frac{q}{V \cdot c_p} - \frac{A \cdot \gamma}{c_p} - \frac{b \cdot \varrho}{Y \cdot c_p} \right) dy \quad (9)$$

where A is the mechanical equivalent of heat, γ the specific gravity of air, Y the depth of the shaft. The solution, with initial condition identical with that of differential equation (6), if gg denotes the average value of the geothermic gradient

$$\tau' = \left[\tau_0 - \frac{V \cdot c_p}{\lambda \cdot F(\psi)} \left(\frac{1}{gg} - \frac{A \cdot \gamma}{c_p} - \frac{b \cdot \varrho}{Y \cdot c_p} \right) \right] \exp \left(- \frac{\lambda \cdot F(\psi) \cdot y}{V \cdot c_p} \right) + \frac{V \cdot c_p}{\lambda \cdot F(\psi)} \left(\frac{1}{gg} - \frac{A \cdot \gamma}{c_p} - \frac{b \cdot \varrho}{Y \cdot c_p} \right). \quad (10)$$

The difference, compared to the case without change of moisture content, here too, as on a horizontal airway, according to equation (8/a)

$$\Delta T = \frac{\mu}{\sigma} (1 - e^{-\sigma y}). \quad (8b)$$

Accordingly, with help of Eqs. 8a and 8b the additional cooling down of the mine air caused by vaporization can simply be established from computations according to Eq. 4 not considering the change of vapor content ("dry case"). This calculation is quite simple, since values δ and $e^{-\delta y}$ are already known from the computation of the "dry case". If the air flowing through a shaft of vertical depth y and a tunnel of length z , cooling is against the dry case

$$\Delta T = \frac{\mu}{\sigma} (1 - e^{-\sigma(y+z)}). \quad (11)$$

BATZEL is to be credited for having introduced [2] the concept of the efficiency of the heat of evaporation (Wirkungsgrad der Verdunstungskälte). In

conformity with his interpretation the efficiency is in relation to an airway of length z equal to the ratio of the actual cooling down appearing against the dry state and of the heat of evaporation of the quantity of water evaporated. Accordingly, equation (8) divided by $\frac{b \cdot \rho}{Z \cdot c_p} z$, the efficiency of the heat of evaporation

$$\eta_{ev} = \frac{1 - e^{-\sigma z}}{\sigma z} \quad (12)$$

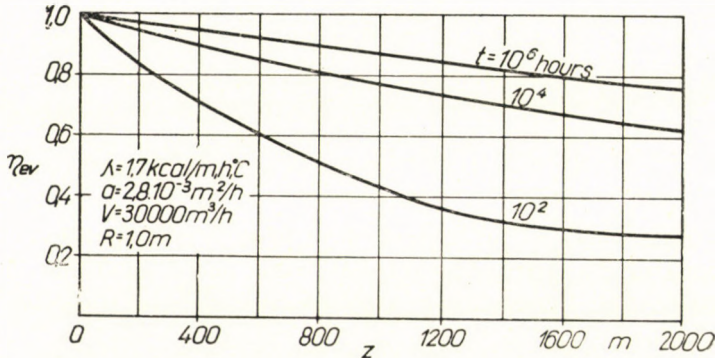


Fig. 3

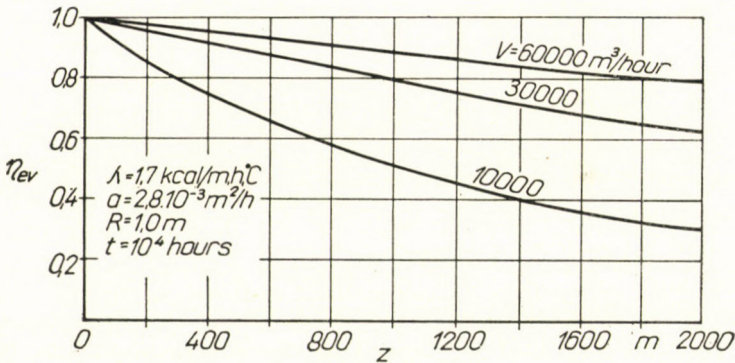


Fig. 4

The efficiency is independent of the amount of water evaporated; it depends only on factors fixing the warming up of air due to rock heat ($\lambda, \alpha, R, t, V, z$). Similarly, in the case of air flowing through a vertical shaft and a tunnel

$$\eta_{ev} = \frac{1 - e^{-\sigma(y+z)}}{\sigma(y+z)} \quad (12a)$$

Value η_{ev} is near unity, if $\sigma \cdot z < 0,1$, when $\eta_{ev} > 0,9516$. According to Figs. 3 and 4 this condition is met only on relatively short airways, in cases of larger

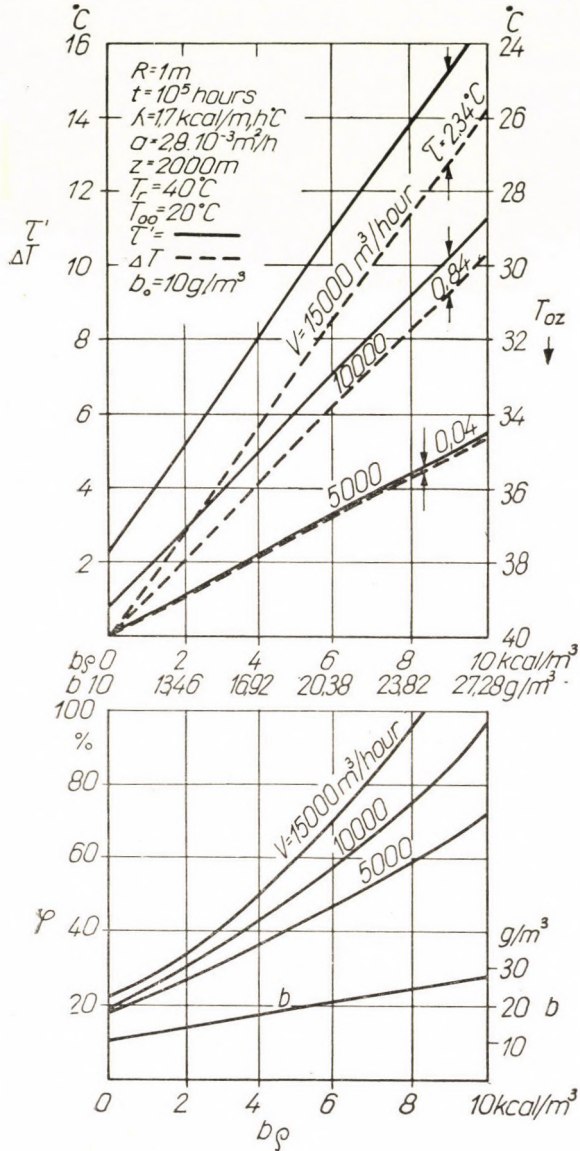


Fig. 5

quantities of air and longer periods of ventilation. Therefore the view of BATZEL based on some numerical calculations that in practical calculations the value of η_{ev} is always near unity have not been confirmed by this investigation.

Equation (12) has given in simple form the analytical expression of the efficiency of the heat of evaporation. With its aid for any quantity of water evaporated the air temperature values obtained by the "dry" process can be corrected and used for practical purposes.

Fig. 5 shows the temperature of air at the end of an airway of 2000 m length (T_{0z}), if the virgin rock temperature is 40°C , the temperature of air entering is 20°C , as a function of the heat of evaporation of the water that has evaporated ($b\varrho$). The relationship is linear. Straight line denoted by ΔT indicates the cooling down resulting from the evaporation of water, while the difference of ordinates between the two straight lines is equal to value of air temperature difference between virgin rock and air at the end of the airway $\tau = \tau' - \Delta T$, that is, to the value at constant vapour content ("dry case"). The value of τ of course does not depend on that of $b\varrho$, and the two straight lines are therefore parallel; on the other hand the value of τ depends on the quantity of air, therefore in case of larger amounts of air, τ being greater too, the two parallel straight lines will be at greater distance from each other.

Considering that the vapour content of air on the airway can nowhere exceed the saturation value pertaining to temperature, and the value of $b\varrho$ has to be checked from this viewpoint.

At the base of Fig. 5, with consideration of initial absolute vapour content $b_0 = 10\text{ g/cu. m}$, the relative vapour content along the airway has also been indicated as a function of $b\varrho$. It is evident that at $V = 15\,000\text{ cu. m/hour}$ of air at the value of $b = 8,3\text{ kcal/cu. m}$, the relative vapour content $\varphi = 100\%$, that is, the maximum possible value of water evaporating is then $8,3/\varrho = 14,3\text{ g/cu. m}$. The preliminary assumption as to the increase of the water vapour content of mine air can thus be checked.

In context with a practical example Fig. 6 shows the temperature change of air as a function of the length of the airway, if $b_0 = 10\text{ g/cu. m}$ and $b\varrho$ is 0, 5, 7 and 10 kcal/cu. m. The illustration of the relative vapour content shows that the arbitrary selection of $b\varrho$ has physical sense as far as a certain length of the airway only. E. g. at $b\varrho = 10\text{ kcal/cu. m}$, the air is saturated with water vapour at $z = 750\text{ m}$. After this the value of $b\varrho$ has to be reduced. After this point and at values of $b\varrho = 0$ and 5 kcal/cu. m, the temperature of air further increases, and the value of relative vapour content remains below 100%. The illustration of the effective temperature after the diagram of the *A. S. H. V. E.* is very characteristic; with some restrictions it shows the actual cooling effect attainable by evaporating water.

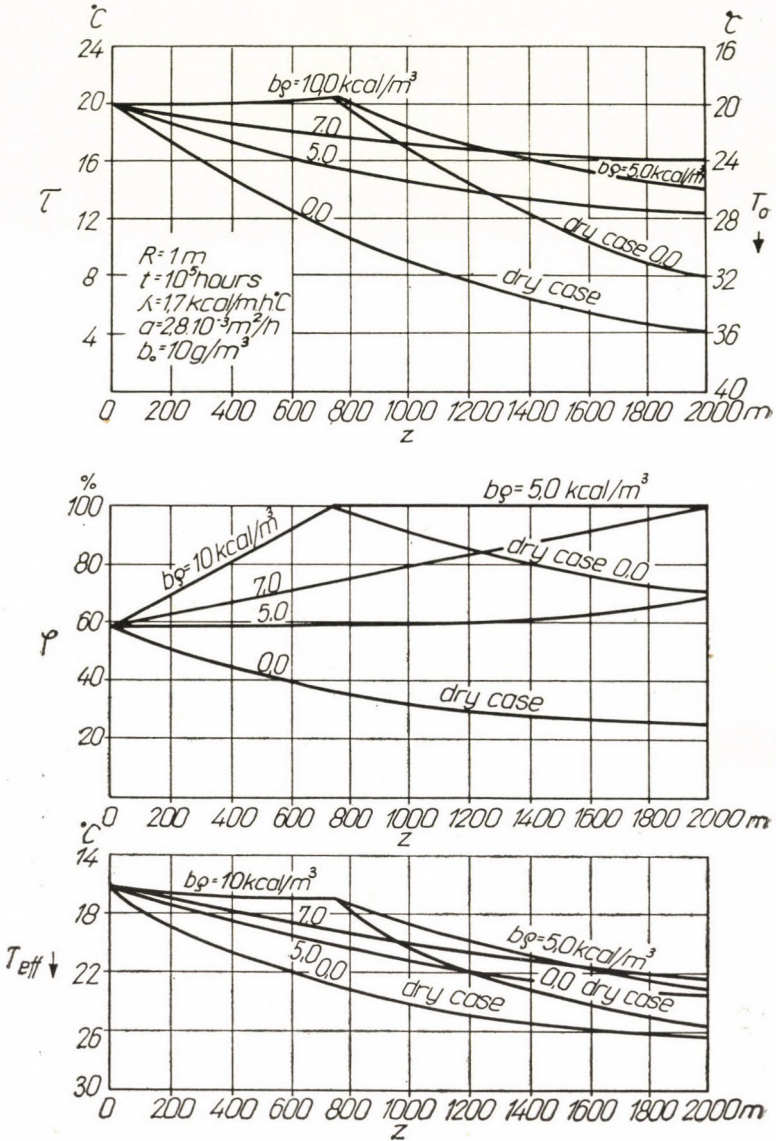


Fig. 6

REFERENCES

1. T. BOLDIZSÁR : The thermal field of the Earth's crust and its influence on the ventilation of deep and hot mines. Acta Technica Acad. Sic. Hung. Tom XVI. (1957). pp. 415—427.
2. S. BATZEL : Die Ermittlung thermischer Werte in Grubenbauen usw. Bergbauarchiv 13 (1952) Heft 3/4, p. 30.

SUMMARY

In considering the warming up of air in deep mines due to rock heat it is almost always necessary to consider cooling down caused by evaporation of water. The method presented permits the calculation of the cooling down pertaining to any amount of water evaporated (the „wet case”) after computation of the first, the so-called „dry case”. Besides theoretical investigation a numerical example demonstrates the usefulness of the method.

BERECHNUNG DER ERWÄRMUNG VON DURCH BERGWERKSSTOLLEN STRÖMEN-
DER LUFT UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER ÄNDERUNG DES WASSERDAMPF-
GEHALTES

T. BOLDIZSÁR

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Berechnung der durch die Gesteinswärme verursachten Erwärmung der Luft in tiefen Bergwerken ist es fast immer notwendig auch die Abkühlung, welche die Verdunstung des Wassers verursacht, in Betracht zu ziehen. Nach Berechnung des ersten, sogen. „trockenen Falles” kann mit der vom Verfasser mitgeteilten Methode auch die zu einer beliebigen Menge von verdampfendem Wasser gehörige Abkühlung berechnet werden (sogen. „nasser Fall”). Über die theoretische Untersuchung hinausgehend, zeigt die zahlenmäßige Behandlung einer praktischen Aufgabe die Brauchbarkeit der Methode.

CALCUL DU RÉCHAUFFEMENT DE L'AIR CIRCULANT DANS LES GALERIES DE
MINES, COMPTE TENU DES VARIATIONS DE LA TENEUR EN VAPEUR D'EAU

T. BOLDIZSÁR

RÉSUMÉ

Pour calculer le réchauffement, causé par la roche, de l'air circulant dans les mines profondes, il faut presque toujours prendre en considération le refroidissement dû à l'évaporation d'eau. Après avoir calculé le premier cas, dit «cas sec», on peut aussi calculer, par la méthode préconisée par l'auteur, le refroidissement correspondant à une quantité quelconque d'eau évaporée («cas humide»). En plus des considérations théoriques, la solution numérique d'un problème pratique montre les possibilités d'application de la méthode.

РАСЧЕТ НАГРЕВА ГОРНОГО ВОЗДУХА, ДВИЖУЩЕГОСЯ
ПО ГОРНЫМ ШТРЕКАМ, УЧИТЫВАЯ ВОЗДЕЙСТВИЕ ИЗМЕНЕНИЯ
СОДЕРЖАНИЯ ВОДЯНОГО ПАРА

Т. БОЛЬДИЖАР

РЕЗЮМЕ

В глубоких шахтах, принимая в основу расчет нагрев горного воздуха, вызванный нагревом теплом породы, необходимо учитывать также охлаждение от испарения воды. После вычисления первого т. н. «сухого случая» при помощи рассмотренного метода возможно вычислить также охлаждение, действительное для любого количества испаряющейся воды («мокрый случай»). Наряду с теоретическим анализом применимость предлагаемого метода демонстрируется также числовым решением практической задачи.

EINFLUSS VERSCHIEDENER VERUNREINIGUNGEN AUF DEN KORROSIONSWIDERSTAND DES REINSTALUMINIUMS IM WASSER BEI ERHÖHTEN DRÜCKEN UND TEMPERATUREN

A. DOMONY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DIE METALLINDUSTRIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 10. Juni 1957]

An Hand zahlreicher wissenschaftlicher Ergebnisse und praktischer Erfahrungen herrscht in der Technik die weitverbreitete Ansicht, dass Reinstaluminium (Al-Gehalt 99,99 bzw. 99,9%) erheblich korrosionsbeständiger als Hüttenaluminium ist (Al-Gehalt 99,7 bzw. 99,5%). Diese Ansicht beruht auf dem verschiedenartigen Verhalten der beiden Al-Gattungen insbesondere gegenüber den aggressiven anorganischen Stoffen, wie Schwefel-, Phosphor-, Salpeter-, Chrom-, Salzsäure, usw. [1, 2, 3].

Die sich mit der Al-Korrosion befassenden Veröffentlichungen wiesen bereits auf zahlreiche praktische Ergebnisse hin, bei welchen der chemische Widerstand des Reinstaluminiums in schwach korrodierenden Medien — wie z. B. in wässriger Lösung von SO_2 , Weinsäure, H_2O_2 — mit dem des Hüttenaluminiums gleich oder geringer ist.

Nach Kenntnis des Verfassers wurde die Untersuchung dieses Widerspruches noch nicht vorgenommen, und die Erläuterung dieser Erscheinung bisher noch nicht erreicht. Hingegen wird bei der Verwendung des Aluminiums in Atomreaktoren dieses Metall in bisher nicht üblicher Weise in Anspruch genommen. Auf die im Atomreaktor befindlichen Baustoffe wirken gleichzeitig Hochdruckdampf und Heisswasser (1—100 ata) bei Temperaturen von 100—300° C ein.* Infolge der erhöhten Korrosionsbeanspruchung der Aluminiumteile wurden die ersten Versuche mit Reinstaluminium durchgeführt. Praktische Erfahrungen und Versuchsergebnisse bewiesen jedoch, dass das Reinstaluminium und seine korrosionsbeständigen Al—Mg-Legierungen durch reines destilliertes Wasser bei 100° C überschreitender Temperatur und unter Druck binnen kurzer Zeit zerstört wird. Den gleichen Bedingungen ausgesetztes Hüttenaluminium (Al Gehalt 99,7 oder 99,5%) und seine korrosionsbeständigen Legierungen (Al—Mn, Al—Mg₃, Al—Mg—Si) weisen nicht einmal Spuren einer beginnenden Korrosion auf [4]. Die mit den Konstruktionswerkstoffen des Atomreaktors durchgeführten weiteren Versuche ergaben, dass den grössten Widerstand in Bezug auf Korrosionsbeständigkeit und Wärmefestigkeit gegen die

* Bei Temperaturen, die 300° C überschreiten, kann das Aluminium wegen seiner geringen Wärmefestigkeit nicht verwendet werden.

gemeinsame Einwirkung von hochoverhitztem und unter hohem Druck stehendem destilliertem Wasser und Dampf das mit 1% Nickelgehalt legierte Reinstaluminium aufweist.

Geringe Mengen von Silizium (etwa 0,1%) wirken auf das mit Nickel legierte Aluminium schädlich. Die Gegenwart von 0,1—0,2% Eisen erhöht die Korrosionsbeständigkeit dieser Legierung [5]. Über die Erläuterung dieser Erscheinung fanden wir in der Literatur keine Angaben, obwohl an mehreren Stellen erwähnt wird, dass die Ausscheidung metallischer Verbindungen an der Kristallgrenze den Einfluss der interkristallinen Korrosion des Hochruckdampfes bzw. des Heisswassers verringert, ja sogar verhindert.

Zur Feststellung des Einflusses der im Aluminium befindlichen einzelnen Verunreinigungen auf den Korrosionswiderstand, haben wir mit dem in Ungarn hergestellten Aluminium verschiedenen Reinheitsgrades Versuche vorgenommen, um sein Verhalten gegenüber unter hohem Druck stehenden überhitzten wässrigen Medien zu klären.

Tafel I
Zusammensetzung der Versuchslegierungen

| Bezeichnung der Probe | Zusammensetzung des Metalls in %-en | | | | | | |
|-----------------------|-------------------------------------|-------|--------|---------------------|-------|--------|-------|
| | Fe | Si | Ti | B | Cu | Mg | Zn |
| 1 | 0,10 | | | | | | |
| 2 | 0,47 | | | | | | |
| 3 | 0,29 | 0,08 | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| Grundmetall | 0,005 | 0,003 | 0,0002 | — | 0,001 | 0,0001 | 0,004 |
| 5 | | 0,018 | | | | | |
| 6 | | 0,028 | | | | | |
| 7 | | 0,15 | | | | | |
| 8 | | 0,40 | | | | | |
| 9 | | 0,93 | | | | | |
| 10 | | 0,67 | | | | | |
| 11 | | | 0,02 | | | | |
| 12 | | | 0,04 | | | | |
| 13 | | | 0,19 | | | | |
| 14 | | 0,03 | | 0,01 Grössenordnung | | | |
| 15 | | | | 0,01 Grössenordnung | | | |
| 16 | | | | 0,1 Grössenordnung | | | |

Der Gehalt an den übrigen Verunreinigungen stimmt bei den einzelnen Legierungen der Grössenordnung nach mit den Mengen der im Grundmetall gegenwärtigen Verunreinigungen überein.

Versuchsdurchführung

Es wurden aus in Ungarn hergestelltem Reinstaluminium (Al-Gehalt 99,99%) 15 verschiedene Legierungen gefertigt, deren Zusammensetzung in Zahlentafel I angeführt ist. (Die Fe-, Si- und Ti-Vorlegierungen wurden aus reinen Metallen und aus Reinstaluminium — Al-Gehalt 99,99% — hergestellt; die Borlegierungen wurden durch die Reaktion der Aluminiumschmelze mit in Kryolith gemischtem Borfluorkalium erzeugt.) Aus den Legierungen wurden Pressbolzen mit 75 mm \varnothing gegossen, aus welchen dann durch Strangpressen (bei 430° C) Stangen von 10 mm \varnothing hergestellt wurden. Die Stangen wurden ohne Zwischenglühen zu Drähten von 3 mm \varnothing gezogen. Die hartgezogenen Drähte wurden bei einer Temperatur von 320° C 3 Stunden lang gegläht und dann mit dem Ofen langsam abgekühlt. Nach Entfettung der Oberflächen wurden die etwa 200 mm langen Drähte in einen mit rostfreiem Stahleinsatz ausgestatteten Autoklav von 5 l Inhalt in der Weise eingesetzt, dass die Proben weder miteinander, noch mit den Stahlbestandteilen des Autoklavs in Berührung kommen konnten. Der Autoklav wurde mit destilliertem Wasser gefüllt. Die Versuche wurden bei einer Temperatur von 170—190° C (im Durchschnitt bei 180° C, entsprechend einem Druck von 10,2 ata) beziehungsweise bei einer Temperatur von 250—270° C (im Durchschnitt bei 260° C, entsprechend einem Druck von 46,3 ata) durchgeführt. Der Autoklav erreichte die gewünschte Temperatur in etwa 30 Minuten. Die Versuche wurden in der Weise durchgeführt, dass stets nach einer 6 bzw. achtstündigen Konstanthaltung der Temperatur eine Abkühlung von 16 Stunden folgte. Durch diese Versuchsanordnung wurde erreicht, dass auch der etwaige korrosionsfördernde Einfluss der infolge der Abkühlung kondensierenden Wassertröpfchen feststellbar war. Von den in den Autoklav gleichzeitig eingesetzten Probestücken wurde bei der ersten Versuchsreihe die erste Probe nach einer 8 Stunden lang dauernden Konstanthaltung der Temperatur und einer darauffolgenden 16 Stunden langen Abkühlung herausgehoben. Die zweite Probe wurde nach einer dreimal wiederholten 8 Stunden langen Konstanthaltung der Temperatur und nach dreimal darauffolgender Abkühlung von je 16 Stunden, die dritte Probe nach weiterer zweimal 8 Stunden langer Konstanthaltung der Temperatur und zweimaliger Abkühlung von je 16 Stunden entnommen. Bei der zweiten Versuchsreihe wurden die Probestücke nach einer sechsstündigen und schliesslich nach weiterer zweimal sechsstündiger Konstanthaltung der Temperatur dem Autoklav entnommen. Die im Autoklav behandelten Proben wurden nachher einer Zugfestigkeitsprüfung unterzogen und wurden auch Schliffräder für mikroskopische Untersuchungen angefertigt. Die Korrosionsprodukte wurden mikroskopischen und röntgenographischen Untersuchungen unterzogen. (Diese letzteren Untersuchungen sind noch im Gange.)

Versuchsergebnisse

a) Festigkeitsprüfungen

Die Ergebnisse der Zugfestigkeitsprüfungen der ersten Versuchsreihe (Behandlung bei 180° C) wurden in Bild 1 zusammengestellt. Aus den Versuchsergebnissen kann festgestellt werden, dass das Reinstaluminium (Al-Gehalt 99,99%) unter der gemeinsamen Einwirkung der 180° C hohen Temperatur und des Drucks durch das destillierte Wasser nach einer Inkubationsdauer von etwa 8—16 Stunden rasch angegriffen wird. Nach sechsmal achtstündiger Konstanthaltung der Temperatur wird das Material vollkommen spröde und es findet eine Festigkeitsverminderung von etwa 50% statt. Der ursprüngliche Durchmesser der Prüfstücke von 3 mm verringert sich bei viermal achtstündiger Konstanthaltung der Temperatur nach Entfernung der Korrosionsprodukte auf 2,65 mm, beziehungsweise bei sechsmal achtstündiger Behandlung auf 2,30 mm (Probe 4).

Unter der Einwirkung einer geringen Menge von Silizium (in der Grössenordnung von 0,01%) kann keine wesentliche Veränderung beobachtet werden

(Proben 5 und 6). Bei Erhöhung des Siliziumzusatzes auf einige Zehntelprocente nimmt die Auflösung des Metalls zu (Probe 7). Die Abnahme der Durchmesser der Prüfstücke beträgt 1,85 mm bzw. 1,55 mm ; dagegen nimmt die Länge der Proben um etwa 10—15% ihrer ursprünglichen Länge zu. Die Verminderung der Festigkeit und Dehnung bei den korrodierten Metallen ist im Vergleich zu den vorigen Proben geringer. Wird der Gehalt an Silizium auf 0,4% und darüber erhöht (Proben 8, 9 und 10), so wird keine Korrosion mehr beobachtet. Die Durchmesser und Festigkeitswerte der Prüfstücke blieben unverändert.

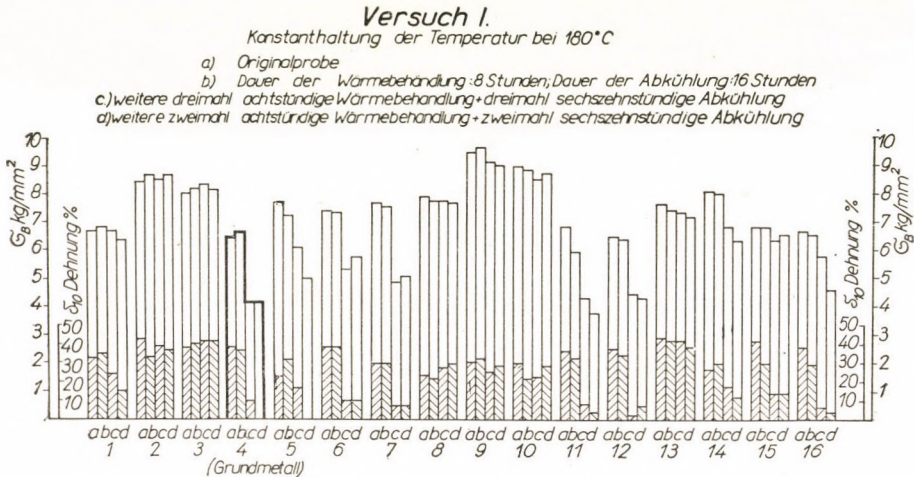


Bild 1. Änderung der Festigkeit bei Aluminium verschiedener Zusammensetzung unter der Wirkung der bei 180° C ausgeführten Korrosionsversuche

Ein Fe-Gehalt von 0,1% (Probe 1) wirkt bereits korrosionsmindernd im Vergleich zum Reinstaluminium. Ein Fe-Gehalt von 0,3% und mehr (Probe 2 und 3) unterbindet den Korrosionsvorgang des Aluminiums. Bei einem Fe-Gehalt von 0,1% nach einer viermal achtstündigen Wärmebehandlung ist die Oberfläche des Drahtes noch korrosionsfrei, während die Dehnung um etwa 10% abnimmt. Nach sechsmal achtstündiger Wärmebehandlung waren an der Oberfläche des Drahtes bereits starke Ausblühungen zu sehen, und war auch ein Rückgang der Festigkeit und Dehnung zu vermerken. Bei den Proben mit höheren Fe-Gehalten (Proben 2 und 3) bleiben die Festigkeitswerte unverändert. Ein Si-Gehalt von 0,1% verringert die vorteilhafte korrosionshemmende Wirkung des 0,3%-igen Fe-Gehaltes nicht (Probe 3).

Die Gegenwart von Titan in einer Menge von einigen Hundertstelprozenten (Proben 11 und 12) bewirkt eine starke Korrosion, wobei das Metall spröde wird. Die Auflösung des Aluminiums wird durch ganz geringe Mengen von Titan (Ti-Gehalt 0,01—0,02%) begünstigt (Probe 11). Eine Abnahme der Durchmesser der Drähte auf 2,05 bzw. 2,00 mm war festzustellen. Mit zunehmendem Ti-

Gehalt nimmt die Lösungsfähigkeit des Aluminiums ab (Probe 12). Die Durchmesser der korrodierten Drähte betragen 2,45 bzw. 2,30 mm. Durch einen Ti-Gehalt von 0,1% (Probe 13) wird das Metall korrosionsbeständiger. In diesem Falle übt das Titan die gleiche Wirkung wie das Eisen in ungefähr gleicher Menge aus.

Der Zusatz von geringen Mengen an Bor wirkt auf den Korrosionswiderstand des Aluminiums ungünstig. In der Gegenwart von Hundertstelprozenten

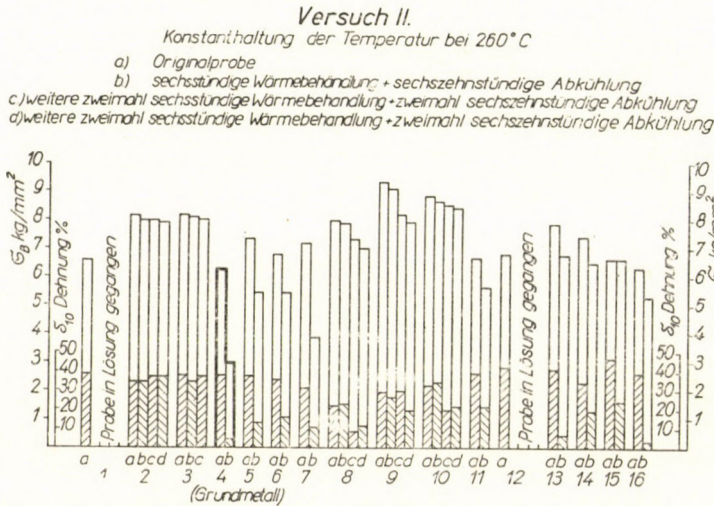


Bild 2. Änderung der Festigkeit bei verschiedenem Aluminium unter der Wirkung der bei 260° C ausgeführten Korrosionsversuche

Bor stimmt die Abnahme des Durchmessers der Probe ungefähr mit der des aus Reinaluminium hergestellten Drahtes überein (Probe 15). Grössere Mengen an Bor (etwa 0,1%) fördern die Auflösung des Metalls (Probe 16). Die Durchmesser der korrodierten Drähte nehmen auf 1,90 bzw. 1,70 mm ab. Diese Wirkung stimmt grössenordnungsgemäss mit der des 0,1%-igen Siliziumzusatzes überein (Probe 7). Durch die gemeinsame Gegenwart von geringen Mengen Silizium und Bor wird die Korrosionsbeständigkeit des Metalls nicht erhöht (Probe 14).

In den bei höheren Temperaturen ausgeführten Versuchen (bei etwa 260° C) machte sich die korrosionshemmende Wirkung einiger im Aluminium anwesender Legierungsbestandteile in noch mehr erhöhtem Masse geltend. Bei diesem Versuch begann die Zerstörung der zur Korrosion neigenden Metalle bereits früher und der Korrosionsverlauf war viel intensiver. Nach sechsstündiger bzw. zweimal sechsstündiger wie auch nach weiterer zweimal sechsstündiger Wärmebehandlung wurden mit den Proben Zugfestigkeitsprüfungen vorgenommen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Bild 2 wiedergegeben.

Aus den Ergebnissen der Zugfestigkeitsprüfungen kann festgestellt werden, dass bei dem ersten bei 180° C durchgeführten Versuch von achtstündiger Wärmebehandlung keine nennenswerten Änderungen, weder an der Oberfläche der Proben, noch in ihren Festigkeitswerten, zu beobachten waren. Bei dem bei 260° C durchgeführten Versuch wurden jedoch die geringe Mengen an Eisen und Titan enthaltenden Legierungen (Proben 1 und 12) vollkommen zerstört und die Festigkeit der mit geringen Mengen von Silizium und Bor (0,1%) legierten Proben, insbesondere aber die Dehnung, nahm bedeutend ab. Gleichzeitig

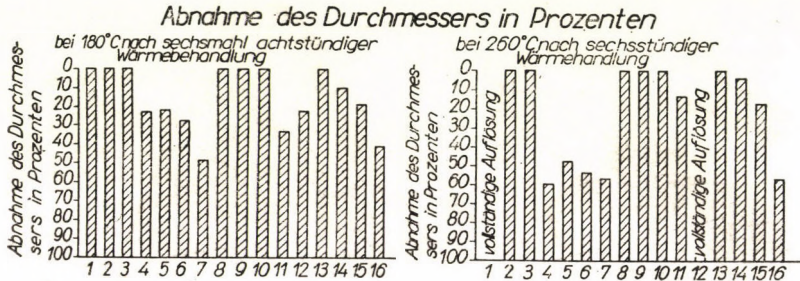


Bild 3. Änderung des Durchmessers bei Drähten von 3 mm Durchmesser unter der Wirkung der bei 180° C und 260° C ausgeführten Korrosionsversuche

ist eine Verminderung der Drahtdurchmesser von 3,0 mm auf durchschnittlich 1,4 mm infolge der Korrosion eingetreten. Die grössenordnungsgemäss mit 0,1% Bor bzw. Silizium legierten Proben wiesen auch bei diesem Versuch eine Korrosionsempfindlichkeit auf (Probe 16 und 7). Eine besondere Wirkung konnte bei einem Titangehalt von 0,2% beobachtet werden (Probe 13): an der Oberfläche der Probe war eine stellenweise auftretende, den Korrosionsbeginn anzeigende Blasenbildung zu bemerken, eine Durchmessererminderung ist nicht eingetreten, und ein erheblicher Rückgang der Festigkeit und insbesondere der Dehnung war festzustellen. Die Proben mit einem höheren Gehalt an Eisen (Proben 2 und 3) bzw. Silizium (Proben 8, 9 und 10) wurden nicht angegriffen. Bei den weiteren Versuchen blieben die Festigkeit und Durchmesser der eisenhaltigen Proben (Proben 2 und 3) unverändert. Bei den siliziumhaltigen Proben jedoch ist bereits ein Rückgang der Dehnung eingetreten, während eine Abnahme des Durchmessers erst bei der Probe 8 beobachtet werden konnte. In Bild 3 wurden die an den verschiedenen Proben bei den beiden Versuchen gemessenen Abnahmen der Durchmesser veranschaulicht.

Aus den Ergebnissen der ZerreiBversuche kann folgendes festgestellt werden:

1. Durch die Einwirkung des unter hohem Druck stehenden Heisswassers korrodiert das Reinstaluminium sowie auch das geringe Mengen von Si- bzw. Ti-Verunreinigungen in fester Lösung enthaltende Metall in Abhängigkeit

der Temperatur des wässrigen Mediums. Bei einer Temperatur von 180° C beginnt die Korrosion nach einer Inkubationsdauer von einigen Stunden, während bei einer Temperatur von 260° C die Zerstörung des Metalls äusserst rasch eingeleitet wird.

2. Die im Al-Grundstoff unlöslichen metallischen Verbindungen oder Ausscheidungen können die Korrosion des Aluminiums unterbinden. Aus diesem Grunde ist die Gegenwart des Eisenzusatzes günstig, der bei 180° C mit einem Fe-Gehalt von mehr als 0,2% bzw. bei 260° C mit einem Fe-Gehalt von mehr als 0,3% die Korrosionsempfindlichkeit des Aluminiums in hohem Masse verringert. Die korrosionshemmende Wirkung der Siliziumausscheidungen kommt erst bei einem Gehalt von über 0,4% zur Geltung. In der Gegenwart von Eisen ist eine Verunreinigung an Silizium in einer Menge von grössenordnungsgemäss 0,1% hinsichtlich der Korrosionsbeständigkeit des Metalls gleichgültig. Titan übt eine wesentlich geringere Wirkung als das Eisen aus. Bei einer Temperatur von 180° C ist das Aluminium mit einem Ti-Gehalt von 0,2% korrosionsbeständig. Bei einer Temperatur von 260° C hingegen ist sogar ein 0,2%-iger Ti-Gehalt wirkungslos, obwohl die korrosionsverzögernde Wirkung der Titanausscheidungen an der Probe erkenntlich ist.
3. Durch Borzusätze wird die Korrosion des Aluminiums nicht gehemmt, sondern wirken diese Zusätze sogar korrosionsfördernd. Die gemeinsame Gegenwart geringer Mengen von Bor und Silizium wirkt günstig (vermutlich wegen der Ausscheidung der Borsiliziden), obwohl der Korrosionswiderstand des Metalls hierdurch wesentlich nicht verbessert wird.

b) *Mikroskopische Untersuchungen*

Einen typischen Fall der mikroskopischen Untersuchung zeigt Bild 4. Während die Kristallstruktur der höher legierten, korrosionsfreien Drähte noch in der Nähe der Oberfläche unbeschädigt ist, und Auflockerungen, Risse beziehungsweise Aufquellungen an der Kristallgrenze nicht zu beobachten sind, ergaben alle korrodierten Proben — von der ursprünglichen Korngrösse unabhängig — ein Bild von gleichem Gefüge. Die Korrosion schritt an der Kristallgrenze in das Innere des Metalls vor. Durch die gemeinsame Wirkung des Dampfdruckes und der Temperatur entstanden an den ausscheidungsfreien oder ausscheidungsarmen Kristallgrenzen Aufquellungen und Risse, und wurden sodann einzelne Kristalle durch das in die Risse eindringende korrodierende Medium aus dem Grundmetall fast herausgerissen. Diese Erscheinung ist an der 0,1% Eisen enthaltenden und bei 180° C viermal acht Stunden lang wärmebehandelten Probe klar ersichtlich (Bild 5). An der mikroskopischen Aufnahme kann beobachtet werden, dass an einzelnen Stellen des unbeschädigten Drahtendes das Korrosionsmedium die Kristallgrenzen aufzusprengen beginnt. An den beschädigten

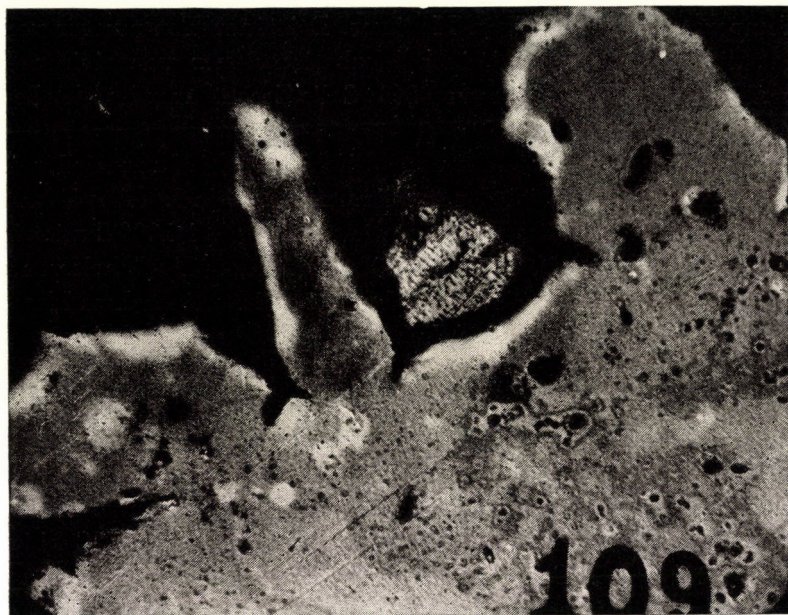


Bild 4. Schliff eines Drahtes aus Reinstaluminium nach einem Korrosionsversuch von 6×8 St. bei 180°C ($150 \times$)

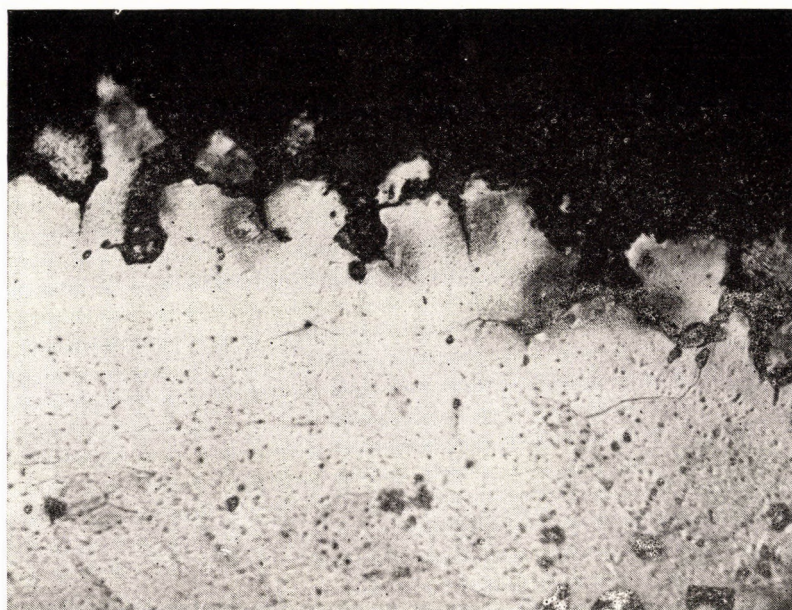


Bild 5. Schliff eines Aluminiumdrahtes mit 0,1% Eisengehalt nach einem Korrosionsversuch von 6×8 St. bei 180°C (Vergrößerung $300 \times$). Mit Dix-Kellerscher Lösung geätzt

Stellen setzt dann die interkristalline Korrosion ein. Die beginnende Korrosion kann an der Probe, die 0,2% Titan enthält und bei 260° C einer sechsständigen Wärmebehandlung unterzogen wurde, noch klarer beobachtet werden. An der Oberfläche der Probe waren mit einigen Rissen durchflochtene Blasen erkenntlich (Bild 6) und am Ende des Drahtes begann der schichtenweise Zerfall des Metalls (Bild 7). Der Querschnitt des Drahtes wies noch keine wesentliche Veränderung auf; der grösste Teil der Oberfläche wird von einer unbeschädigten Oxydhaut geschützt; die interkristalline Korrosion setzte bereits bei den durch die Blasen verursachten Beschädigungen ein; die Dehnung des Metalls nahm in hohem Masse ab.

In Verbindung mit dem Korrosionsbeginn tauchte die Verdacht auf, dass die an der Oberfläche der Probe unter Umständen verbleibenden Verunreinigungen die örtliche Korrosion des Metalls einleiten könnten. Die Untersuchung der durch die in die Oberfläche des Metalls gehämmerten feinen Eisenspäne verunreinigten Proben erwies jedoch, dass der auf diese Art verunreinigte Draht nach einer dreimal sechsständigen Behandlung mit Dampf von 260° C nicht zerstört wurde und es konnte nicht einmal den interkristallinen Korrosionsbeginn anzeigende Blasenbildung festgestellt werden. In der Nähe der Eisenspäne ging indessen das Grundmetall, wenn auch in geringem Masse, doch gleichmässig in Lösung. Diese Erscheinung stimmt mit den Beobachtungen von DRALEY und RUTHER [5] überein, nach denen ein auf die Oberfläche des Aluminiums zementierter dünner Nickelüberzug den Korrosionswiderstand des Aluminiums gegen das unter hohem Druck stehende Heisswasser bedeutend erhöht, beziehungsweise die Bildung einer interkristallinen Korrosion unterbindet.

c) Versuchsergebnisse der Oberflächenprüfung

Unter der Wirkung der ersten achtständigen Wärmebehandlung bei 180° C wurden alle Proben mit einer milchigen, im Vergleich mit der natürlichen Oxydhaut stärkeren Schicht bedeckt, ohne dass dabei Spuren einer Korrosion entdeckt werden konnten. Die Korrosion setzte bei den einzelnen Proben erst im Laufe der weiteren Versuche ein. Die Inkubationsdauer des Korrosionsanlaufes und die Beobachtung einer Zunahme der Oxydhautdicke stimmten mit den Erfahrungen von HERENGUEL [6] überein, welche er im Laufe seiner an Reinstaluminium vorgenommenen Versuche gewann. Bei dem bei 260° C durchgeführten Versuch scheint die Inkubationsperiode nur von kurzer Dauer zu sein, weil bei den korrosionsempfindlichen Metallen bereits nach 4 Stunden langer Versuchsdauer ein starker Angriff festzustellen war. Bei den bei beiden Temperaturen durchgeführten Versuchen werden die Proben im Anfang mit einem, mit der fortschreitenden Korrosion zunehmenden, gut haftenden (an die überzogenen Schweisselektroden erinnernden) dicken, weissen Korrosionsprodukt bedeckt,

welches sich bei weiterer Einwirkung vom Metall löst. Die Oberflächen der korrodierten Proben hatten einen grauen, rauhen, nichtmetallischen Charakter.

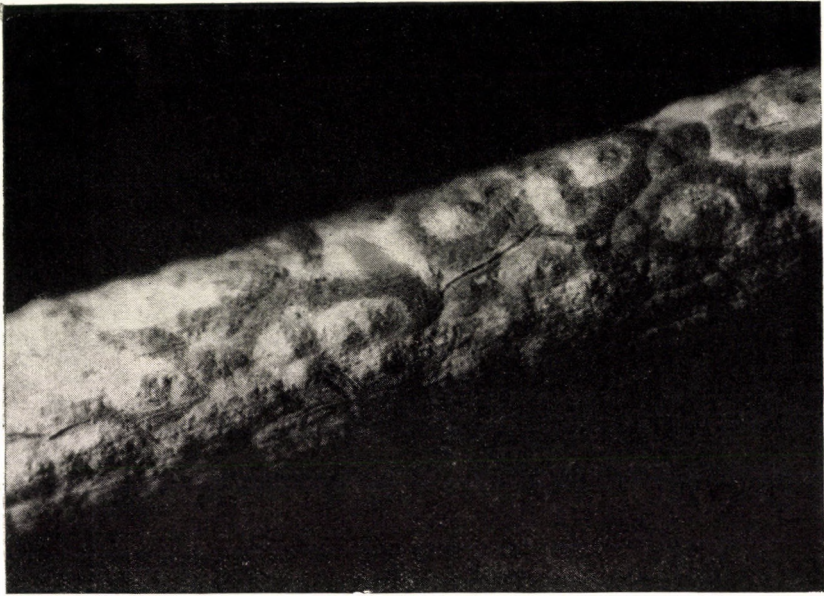


Bild 6. Oberfläche eines 0,2% Titan enthaltenden Aluminiumdrahtes nach einem Korrosionsversuch von 1×6 St. bei 260° C (40×)

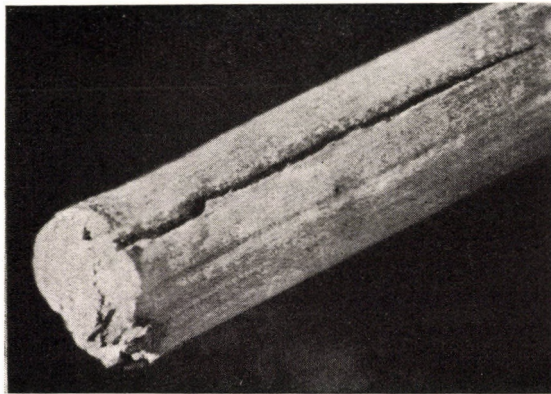


Bild 7. Das Ende eines 0,2% Titan enthaltenden Aluminiumdrahtes nach einem Korrosionsversuch von 1×6 St. bei 260° C (40×)

Demgegenüber wiesen die unbeschädigten Proben eine verstärkte Oxydhaut auf, welche milchig opalisiert, doch ihren metallischen Charakter durchwegs bewahrt. Die Länge der korrodierten Proben nimmt unter der Wirkung der Korrosion zu.

(Die Längenzunahme der Drähte variiert in Abhängigkeit von der Zusammensetzung des Metalls zwischen 2—15%.) Die Bor und 0,1% Silizium enthaltenden Proben wiesen eine besonders grosse Zunahme der Länge auf. Eine Vergrößerung des Durchmessers des von den Korrosionsprodukten befreiten Metalldrahtes war bei keinem der Proben zu beobachten.

Deutung der Versuchsergebnisse

Die einfache Anwendung der bis zur Zeit in der Korrosionsliteratur des Aluminiums verbreiteten Theorien liefert keine entsprechende Erklärung über das Korrosionsverhalten des Aluminiums von verschiedenem Reinheitsgrad gegenüber dem unter hohem Druck stehenden Heisswasser. Mit den Ergebnissen der an Aluminium verschiedener Reinheit früher durchgeführten Versuche kann ein gewisser Zusammenhang festgestellt werden.

Während der Korrosionswiderstand des Reinstaluminiums bei Zimmertemperatur in stark aggressiven Medien (5% NaOH oder 10% HCl, usw.) durchgeführten Versuchen durch jede Verunreinigung verringert wird, in schwach aggressiven Korrosionsmedien (z.B. 25% NHO_3 , 0,2% SO_2 , usw.) wird demgegenüber der Korrosionswiderstand des Metalls durch die Anwesenheit von 0,1% Eisen und Titan erhöht. Durch die Gegenwart von Bor wird hingegen der chemische Widerstand des Metalls verringert (2,7). Eine weitere Analogie kann festgestellt werden mit den früheren Versuchsergebnissen hinsichtlich der Einwirkung von unter Atmosphärendruck stehendem destilliertem Wasser bei Temperaturen von 20—100° C oder verdünnten Ammoniaklösungen auf das Aluminium verschiedenen Reinheitsgrades. In beiden Fällen ist der Korrosionswiderstand des reineren Aluminiums gegenüber dem Widerstand des verunreinigten Metalls, infolge der interkristallinen Korrosion, kleiner [8]. Nach unveröffentlichten Arbeiten von Prof. Dr. LÁNYI wurden bei der Untersuchung des Aluminiums verschiedener Reinheit bezüglich seines Verhaltens gegenüber verdünnten Sublimatlösungen ähnliche Erscheinungen beobachtet.

Die schwache chemische Widerstandsfähigkeit des Reinstaluminiums gegen die Einwirkung von einigen schwach aggressiven Medien bzw. von unter hohem Druck stehenden Heisswasser kann weder durch die klassischen elektrochemischen Korrosionstheorien, noch durch die einfache Anwendung der üblichen Theorien bezüglich der die Oberfläche des Aluminiums deckenden Schutzschicht genügend erläutert werden. Nach beiden Theorien sollte nämlich das Reinmetall einen höheren chemischen Widerstand als das verunreinigte Metall aufweisen. (Nach der elektrochemischen Theorie wegen der Abwesenheit von mikrogalvanischen Elementen, nach der Theorie der Oxydschutzschicht infolge

der sich an der Oberfläche des reinen Metalls bildenden dichten, widerstandsfähigeren Oxydschicht.)*

Für unsere Versuchsergebnisse gibt jedoch keine der beiden Theorien eine genügende Erklärung, vielmehr stehen diese Ergebnisse, bis zu einem gewissen Grade, in Gegensatz zu den erwähnten Theorien. Gegen die Einwirkung von unter hohem Druck stehendem Heisswasser ist nämlich nur das Aluminium von niedrigerem Reinheitsgrade widerstandsfähig. Dieser Widerstand des Aluminiums wird durch fremde Phasen, welche in Bezug auf das Grundmetall eine grosse Potentialdifferenz aufweisen (bei unseren Versuchen Al_3Fe oder Si-Ausscheidungen, bei den Untersuchungen von DRALEY [5] Al_3Ni -Phase) erhöht. Demgegenüber wird der Korrosionswiderstand des reinen Metalls durch Legierungselemente, welche mit dem Grundmetall feste Lösung bilden, oder durch fremde Phasen (z. B. Al—Si feste Lösung oder Al—Mg feste Lösung [4] oder Al_3Mg_5 -Ausscheidungen), welche gegen das Grundmetall geringe Potentialdifferenz aufweisen, nicht erhöht. Die Potentialdifferenzen zwischen dem Aluminium und den verschiedenen, in den Al-Legierungen vorhandenen Phasen, können aus den in Zahlentafel 2 angeführten Daten berechnet werden. Auch der Struktur der an der Oberfläche des Metalls gebildeten Oxydhaut kommt keine entscheidende Bedeutung zu. Durch die Ausscheidungen von Al_3Fe oder grafitischem Silizium wird die Bildung einer dichten, kontinuierlichen Oxydhaut verhindert, das Metall ist trotzdem korrosionsbeständig. Ebenso ist auch die Korngrösse der Struktur des Metalls gleichgültig. Ein Metall ohne entsprechende Zusätze neigt gleichermassen zur Korrosion, unbeachtet dessen, ob eine feine oder grobe Kristallstruktur vorliegt.

Die bis zur Zeit durchgeführten mikroskopischen und Strukturuntersuchungen ermöglichen die Folgerung, dass das eigenartige Korrosionsverhalten des Aluminiums durch das unter der Wirkung von hohen Temperaturen und Drücken dissoziierende Wasser verursacht wird. Durch die infolge der Dissoziation entstehenden OH-Ionen wird nämlich die Aluminiumoxydhaut peptisiert, aufgeschlossen beziehungsweise aufgelöst. In Abwesenheit von Sauerstoff kann sich die beschädigte Oxydhaut an der Oberfläche des Aluminiums nicht regenerieren. (Die infolge der thermischen Dissoziation des Wassers gegenwärtige Menge von Sauerstoffionen kann vernachlässigt werden. Die thermische Dissoziation des Wassers — $\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + \frac{1}{2} \text{O}_2$ — beträgt bei 207°C nur 0,0184% und bei 288°C 0,034%). Infolge der Beschädigung der Oxydhaut werden an der

* In Verbindung mit der Schutzwirkung der Oxydhaut wiesen einige Forscher bereits früher darauf hin, dass durch die an dem reinen Metall gebildete Schutzschicht grober Struktur in erster Linie die allgemeine Lösung des Metalls im aggressiven Medium erschwert wird. Der interkristalline Korrosionsanlauf in schwach aggressiven Medien kann jedoch durch die Oxydschutzschicht nicht gehemmt werden. Die sich an dem mehr verunreinigten Metall bildende feinkristalline Oxydhaut bietet, insbesondere in der Abwesenheit von Sauerstoff, einen der grobkristallinen Schicht überlegenen Schutz [9].

Tafel II

Potentialdifferenz der verschiedenen Metalle, festen Lösungen und Metallverbindungen gegen eine 0,1 n Kalomel-Elektrode (Elektrolyt: 53 g/l NaCl + 3 g/l H₂O₂). [10]

| | Lfd. Nr. | Legierung | Potenzialdifferenz in V |
|-----------------------|----------|---|-------------------------|
| elektro- negativer | 1 | (Al—Mg) (Mg ₅ Al ₈) | -1,07 |
| | 2 | Al + Zn + Mg (4% MgZn ₂) feste Lösung | -1,07 |
| | 3 | (Al—Zn—Mg) (MgZn ₂) | -1,04 |
| | 4 | Al—4% Zn in fester Lösung | -1,02 |
| | 5 | Al—1% Zn in fester Lösung | -0,96 |
| | 6 | Al—4% Mg in fester Lösung | -0,87 |
| | 7 | (Al—Mn/MnAl ₆) | -0,85 |
| elektro- positiver | 8 | Reinstaluminium | -0,85 |
| | 9 | Al + Mg + Si (1% Mg ₂ Si) | -0,83 |
| | 10 | Al — 1% Si in fester Lösung | -0,81 |
| | 11 | Al — 4% Cu in fester Lösung | -0,69 |
| | 12 | (Al—Fe) (FeAl ₃) | -0,56 |
| | 13 | Blei | -0,55 |
| | 14 | Al—Cu (CuAl ₂) | -0,53 |
| | 15 | Zinn | -0,49 |
| | 16 | Silizium (Ausscheidung) | -0,46 |
| | 17 | Nickel | -0,07 |

Oberfläche des Metalls Al⁺⁺⁺-Ionen frei und die infolge der Dissoziation des Wassers im System anwesenden OH⁻-Ionen können unmittelbar mit den Aluminiumionen in Berührung kommen.

Diejenigen OH⁻-Ionen hingegen, die gegen das Grundmetall elektropositivere Metallverbindungen beziehungsweise Ausscheidungen stossen, werden teilweise depolarisiert, teilweise wird aber ihre Energie durch die Zersetzung und selektive Lösung der metallischen Verbindungen verzehrt. Die Depolarisation der mit den Ausscheidungen in Berührung kommenden OH-Ionen dürfte eine Folge des Stromes sein, der durch das zwischen dem Grundmetall und den Ausscheidungen gebildete galvanische Element erzeugt wird. Die gegen das Grundmetall positiveren Ausscheidungen bilden die Kathoden des Mikroelementes und vermögen daher die Ladungen der OH-Ionen zu neutralisieren, beziehungsweise die OH-Ionen zu depolarisieren. Die verhältnismässig unbeschädigte Oberfläche der mit Eisenspänen verunreinigten Probe scheint diesen Vorgang zu bestätigen. Sind die beiden entgegengesetzten Vorgängen (der durch die Ausscheidungen bedingte galvanische Strom und die Aktivität der OH-Ionen, beziehungsweise die Depolarisationsbereitschaft der Ausscheidungen) ungefähr miteinander im Gleichgewicht, so tritt beim Grundmetall — infolge der Abwesen-

heit der das Aluminium lösenden OH-Ionen — keine Korrosion auf. Im Falle einer höheren Aktivität oder Konzentrationen der OH-Ionen (bei höherer Temperatur), wenn die Menge der im Metall vorhandenen Ausscheidungen zur Depolarisation aller OH-Ionen nicht mehr ausreicht, beginnt neben der partiellen Depolarisation auch die selektive Lösung der Ausscheidungen (Abb. 5). Unter der Wirkung des zwischen den Ausscheidungen und dem Grundmetall fließenden galvanischen Stromes konzentrieren sich die OH-Ionen um die gegen das Grund-

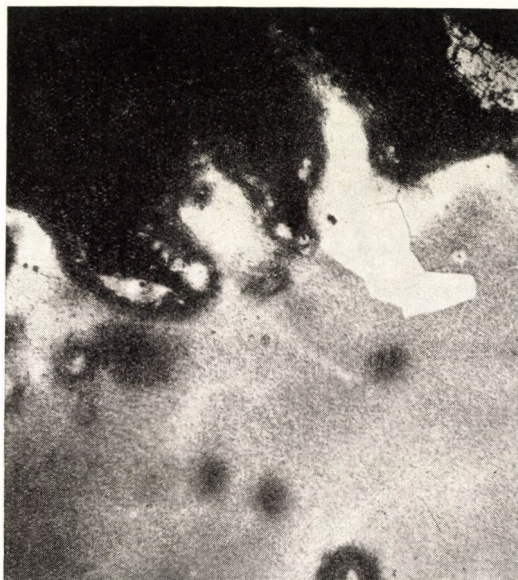


Bild 8. Beginnende Korrosion. Die Randkristalle verarmen an Ausscheidungen. Zusammensetzung des Stoffes: 0,1% Fe (300 \times). Mit Dix-Kellerscher Lösung geätzt

metall positiveren Ausscheidungen und greifen infolgedessen das reine Aluminium weniger stark an. Sobald jedoch die Ausscheidungen in Lösung gegangen sind, beginnt auch der rasche Angriff des Grundmetalls. Zwei Versuchserscheinungen scheinen unsere Hypothesen zu bestätigen:

Die erste Erscheinung ist der in Abb. 6, ersichtliche Vorgang des Korrosionsanlaufes. Bei der beginnenden Korrosion verschwinden die im Grundmetall eingebetteten Ausscheidungen, und die Auflösung des Aluminiums geht aus örtlichen Zentren aus. An den inneren unbeschädigten Oberflächen des Metalls sind hingegen die Ausscheidungen noch gut ersichtlich.

Der andere Grund besteht in den Mengen der zu den verschiedenen Temperaturen gehörenden minimalen Ausscheidungen (Bild 8). Unsere Versuche scheinen dafür zu sprechen, dass bei jeder Temperatur eine gewisse Menge der Legierungs-

elemente nötig ist, um die Korrosion zu hemmen (z. B. ein Fe-Gehalt von 0,1% bei 180° C stellt einen minimalen Grenzwert dar, ein 0,2% Ti-Gehalt ist bereits ausreichend, der gleiche Gehalt bei 260° C stellt den minimalen Grenzwert dar, ein Fe-Gehalt von 0,47% oder ein Si-Gehalt von 0,6% sichert eine verhältnismässig entsprechende Korrosionswiderstandsfähigkeit). Die von dem Charakter des Legierungsmetalls und der Temperatur des Mediums abhängige Menge der Ausscheidungen muss mit der, infolge der Dissoziation des Wassers entstandenen OH-Ionenmengen im Gleichgewicht stehen. Bei geringerer Menge des Legierungsmetalls als dies dem Gleichgewichtszustand der OH-Ionenkonzentration und der Depolarisation entspricht, gehen die Ausscheidungen in Lösung und der Zerfall des Grundmetalls beginnt. Sind hingegen die gegen das Grundmetall positiveren Ausscheidungen oder Verunreinigungen in grösserer Menge vorhanden, so wird das Grundmetall, infolge einer gewöhnlichen elektrolytischen Korrosion, langsam, aber gleichmässig aufgelöst.

Das anomale Korrosionsverhalten des Reinstaluminiums gegenüber dem Hüttenaluminium in verschiedenen schwach aggressiven organischen oder anorganischen Medien, kann auch durch die in schwach saueren oder alkalischen Medien depolarisierende Wirkung der Ausscheidungen oder der Verunreinigungen erklärt werden. Den dem Hüttenaluminium gegenüber geringeren Korrosionswiderstand des Reinstaluminiums in wässrigen Lösungen von schwefliger Säure, Weinsäure, Wasserstoffsperoxyd usw., dürfte, wenn auch in geringerem Masse, die Dissoziation des Mediums und der Mangel der Depolarisation verursachen. Die Korrosionsgeschwindigkeit bleibt indessen infolge der geringfügigen Dissoziation des aggressiven Mediums verhältnismässig klein. In vielen Fällen ergibt sich die Möglichkeit einer Neubildung der Oxydschutzschicht an der Oberfläche des Metalls; diese neugebildete Schicht bietet aber dem Metall einen gewissen Schutz gegen die Einwirkung der aggressiven Ionen. Die hohe Temperatur und Druck fördert die Korrosion, beziehungsweise das Eindringen der aggressiven, dissoziierten Ionen in das Metall und das Auflösen des Metalls, wobei aber an dem Charakter der Erscheinung nichts geändert wird.

Auf Grund obiger Erörterungen muss bei der Beurteilung des Korrosionsverhaltens der verschiedenen Metalle, über die bisherigen Theorien hinausgehend und in einem gewissen Gegensatz zu ihnen, auch die depolarisierende Wirkung der sonst schädlichen elektropositiven Verunreinigungen als ein weiterer Faktor in der Förderung der chemischen Widerstandsfähigkeit, insbesondere in schwach aggressiven Medien, in Betracht gezogen werden. Diese Erscheinung gibt eine Erklärung dafür, dass der Korrosionswiderstand des Reinstaluminiums in schwach aggressiven Medien (z. B. unter normalen Bedingungen in wässrigen SO₂-Lösungen, in Weinsäure, usw., oder im unter hohem Druck stehenden Heiswasser) durch die gegen das Aluminium elektropositiven Ausscheidungen erhöht werden kann.

SCHRIFTTUM

1. A. v. ZEERLEDER und E. ZURBRÜGG: Erzeugung des Raffinals und dessen Verwendung in der chemischen Industrie (Aluminium 1938, 365—378).
2. Frau GYENES M. HOLLÓ: A titán és bór hatása a nagy tisztaságú alumínium kémiai ellenállóképességére (Die Wirkung des Titans und Bors auf die chemische Widerstandsfähigkeit des Reinstaluminiums) (M. T. A. Műsz. Tud. Oszt. Közl. 1954. XII. Nr. 1—4, 365—375).
3. H. v. VOGEL: Vergleichende Versuche über das Korrosionsverhalten von Reinst-Aluminium, (Aluminium, 1938, 85—93).
4. E. NACHTIGALL: Über das Korrosionsverhalten von Reinst-Aluminium. (Aluminium 1957, 98—100).
5. J. E. DRALEY, W. E. RUTHER: Aqueous corrosion of Aluminium Alloys at elevated Temperature. (Vorträge der Genfer Internationalen Atomkonferenz 1955. Russische Ausgabe, 361—375).
6. J. HERENGUEL and P. LELONG: Observation sur les mecanismes d'attaque de l'Aluminium de haute purté par l'eau à haute température. (C. R. Acad. Sci. 1956 [242] No 25. 18. Juni, 2941—2944).
7. A. DOMONY und Frau LICHTENBERGER: Bisher unveröffentlichte Versuche.
8. I. M. BRYAN: Aluminium and Aluminium Alloys in the Food Industry (London 1948, p. 41).
9. H. RÖHRING und J. ROCH: Über die Einwirkung kalter, wässriger Ammoniaklösungen auf Aluminium-Blech. (Aluminium 1939, 128—130).
10. S. WERNICK and R. PINNER: Surface Treatment and Finishing of Light Metals. (Sheet Metal Ind. 1953. Dec., 1055—1061).

ZUSAMMENFASSUNG

Durch Versuchsergebnisse wird das Korrosionsverhalten des mit verschiedenen Mengen von Silizium-, Eisen-, Titan- und Borzusätzen legierten Aluminiums gegen unter hohem Druck stehendes Heisswasser geschildert. Es wurde festgestellt, dass gegen unter hohem Druck stehendes Heisswasser lediglich ein Aluminium, das gewisse Arten und Mengen von Ausscheidungen enthält, widerstandsfähig ist. Durch die Auswertung der Versuchsergebnisse gelang es, auf Grund theoretischer Überlegungen Zusammenhänge zu ermitteln, durch welche das eigentümliche, bisher unerklärt gebliebene Korrosionsverhalten des Reinstaluminiums begründet werden kann. Nach den erhaltenen Ergebnissen wird das Korrosionsverhalten des Aluminiums in schwach aggressiven Medien — und hierher gehören auch die geschilderten Versuchsbedingungen — ausser den bisher bekannten Verhältnissen (Bildung einer Oxydschutzschicht, elektrochemisches Verhalten der einzelnen Phasen gegenüber dem Grundmetall) noch durch die depolarisierende Wirkung der fremden Phasen in entscheidendem Masse beeinflusst.

THE EFFECT OF DIFFERENT IMPURITIES ON THE CORROSION-RESISTIVITY
OF SUPER-PURE ALUMINIUM IN WATER OF HIGH TEMPERATURE
AND HIGH PRESSURE

A. DOMONY

SUMMARY

The experiments showed the corrosion resistance of high-purity aluminium alloyed with different amounts of Si, Fe, Ti and B, against water of high pressure and temperature. It could be shown, that against water of high pressure and temperature only an aluminium, containing foreign phase constituents of certain kinds and in certain amounts, will be resistant. When discussing the experimental results, it could be shown that there are certain relationships, which can form the basis of the understanding of the unusual, not yet cleared behaviour of high-purity aluminium under such corrosion-circumstances. According to this, the corrosion behaviour of aluminium in mild agents — such as the case investigated herein — is strongly influenced not only by the hitherto known factors (the formation of oxyde films, the electrochemical behaviour of the different phases against the basic metal) but by the depolarising effect of the foreign phases as well.

L'EFFET DE DIFFÉRENTES IMPURETÉS SUR LA RÉSISTANCE A LA CORROSION DE L'ALUMINIUM SUPER-PUR, DANS L'EAU DE HAUTE TEMPÉRATURE ET DE HAUTE PRESSION

A. DOMONY

RÉSUMÉ

Des expériences ont été effectuées en vue d'étudier la résistance de l'aluminium de haute pureté, à teneur en Si, Fe, Ti et B variable à la corrosion de l'eau de haute pression et de haute température. L'aluminium contenant des phases étrangères de nature et de quantité déterminées, s'avérait le plus résistant à l'eau de haute pression et de haute température. L'évaluation des résultats de ces expériences a permis d'établir des relations théoriques pouvant fournir une explication du phénomène — jusqu'à présent inexplicable de la résistance de l'aluminium de haute pureté à la corrosion. Il apparaît que le comportement de l'aluminium en milieu peu agressif — comme dans le cas examiné — est influencé de façon décisive non seulement par les facteurs déjà connus (formation des pellicules d'oxyde, et comportement électrochimique des différents phases contre la base), mais aussi par l'effet dépolarisant de ces phases étrangères.

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПРИМЕСЕЙ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ КОРРОЗИИ ОЧЕНЬ ЧИСТОГО АЛЮМИНИЯ В ВОДЕ] ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

А. ДОМОНЬ

РЕЗЮМЕ

Приводятся данные опытов, проведенных для определения сопротивления коррозии алюминия, легированного различными количествами примесей Si, Fe, Ti и B, при действии воды высокого давления и высокой температуры. Установлено, в основном, что алюминий, содержащий определенные виды и количества посторонних фаз, обладает высоким сопротивлением коррозии при действии воды высокого давления и высокой температуры. При оценке опытных данных на основе теоретических соображений удалось установить определенные зависимости, которые обосновывают исключительно высокое сопротивление коррозии очень чистого алюминия, не объясненные до сих пор. Таким образом, в слабо агрессивной среде, — к которой можно причислить также условия проведенных опытов, — на коррозионное поведение алюминиевых сплавов кроме известных до сих пор обстоятельств (образование окисной пленки, электрохимическое поведение отдельных фаз по отношению к основному материалу) решающим образом влияет также депполяризационный эффект посторонних фаз.

THE INFLUENCE OF THE MATERIAL PROPERTIES OF ELECTRODES UPON THE BREAKDOWN POTENTIAL

GY. VAJDA

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES,
INSTITUTE FOR ELECTRICAL POWER RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received June 17, 1957]

Introduction

As a result of technical development in the transmission of electrical energy, in research in atomic physics and in other spheres ever greater electrical tensions are being used. At the same time it is required that high tension equipment should be more reliable, because failures of the apparatus used — besides necessitating complex and expensive repair work — as a rule result in lengthy interruptions of the supply or of experimental work, leading to losses that amount to several times the cost of the equipment.

The insulation of conductors at various potentials can usually at low tension be simply effected. With increasing tension the task becomes a more and more delicate one, and at very high tension the problem of adequate electrical insulation becomes predominant, and is the basic factor in the design and construction of the apparatus and equipment used.

The size and weight of the equipment increases with rising tension, and correspondingly, the initial and also the maintenance costs increase. The designer of course aims, by planning suitable insulation, at reducing the dimensions without prejudicing reliability.

When determining the *dimensions* of insulators one of the most important factors, is to provide sufficient safety against an electrical breakdown. It therefore follows that it is worth while to examine all those factors which increase the breakdown potential. According to some sources [44—68] the breakdown potential is, under certain circumstances, dependent upon the material of the electrodes, so that it was considered advantageous to try and see whether the breakdown potential could not be increased, or at least the safety factor improved, by a proper choice of the electrodes material.

The theoretical condition of a breakdown

Although there is a very large number of sources on both the theoretical and the experimental aspects of the physics of electrical breakdowns, the problem is so complex and manifold that the best approach has so far not been found. The design of high tension equipment takes place therefore, for the greater part, on an empirical basis [2]. Whilst the lack of an adequate theoretical approach does not — as a result of routine — embarrass designers where low and medium tensions are concerned, the necessity for a clarification of the theoretical fundamentals becomes ever more urgent in the case of very high tensions.

The *process of a breakdown* can be described in terms of the elementary processes taking place in insulating materials. Our knowledge of the processes taking place amongst elementary particles and of the structure of matter is

fairly limited, and the theoretical discussion of the relations involved is therefore difficult at present. As a result only qualitative investigations can be carried out, tendencies and orders of magnitude can be found and the determination of numerical values which satisfy practical requirements is unfortunately not possible yet in the majority of cases.

A more or less uniform approach, based on the discussion of the movement of charged particles, has developed with regard to electrical current in insulators of any physical state in the case of weak electrical fields [3]. The approach to breakdown is, however, very different and this can be partly explained only by the fact that these are not the same processes that predominate in different aggregations.

We do not know in detail yet most of the elementary processes that take place in insulators, but it is increasingly held that the essential features of these phenomena are identical, independent of the physical state [12, 23—29, 32, 33] and that at most, certain processes will have to be taken into account in the case of solid and liquid insulators, that could be neglected in gases.

The *theories* describing the breakdown of insulators in various physical states, usually attribute the main role to electrons. It is probable that ionisation of electrons by collision and the development of an electron avalanche play a fundamental part in a breakdown [6—34], and this is shown partly by experimental evidence [17, 18, 24—28, 31—33].

The density of the electrical current passing through the insulators increases with the rising electrical potential, until at a critical value this increase becomes rapid and a breakdown occurs. Experience shows that in case of a breakdown, the current increases with an increase in the electrode gap [13, 23, 31], from which it can be deduced that at least a part of the charge carriers must originate within the insulator, and that the thicker the insulating layer, the greater the number of these charge carriers. This conclusion essentially leads to an avalanche-type law. As a result of the avalanche a space charge originates, which distorts the electrical field of force. With the increasing density of the material diffusion diminishes, the avalanche stays closer together and the role of the space charges probably increases. Conditions are complicated by the development of heat as a result of the electrical phenomena, which may lead to a change in the characteristic parameters of the material, or even a change in its physical state. The current may also bring about chemical reactions which in turn might influence conductivity.

The breakdown potential and a series of other characteristic properties depend to a considerable extent on the *slow changes* (heating, ageing, fatigue, chemical desintegration) taking place within the insulator, but the velocity of these processes may be neglected in comparison to the velocity of the electrical process in the case of a breakdown. In discussing the mechanism of breakdowns it could be presumed that the material of which the breakdown should

be examined, do not change perceptibly its characteristic parameters during the first phase of the breakdown. Interior discharges can, in principle, be reduced to an investigation of insulating layers of various physical states connected in series.

It should be pointed out that the material of the electrode can, in certain cases, also effect the slow processes [36—39].

As a result of the electrical stress, heating, or other influences it may happen that the physical state of the insulator changes (it evaporates, melts, tears, becomes a first or second rate conductor, etc.) in which case the initially

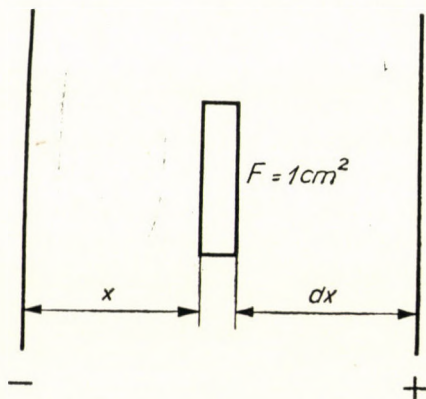


Fig. 1

homogeneous insulator must be considered as consisting of layers of various types and aggregations.

The beginning of a breakdown in an insulator involves the cessation of the stable equilibrium of the processes within it. If the rôle of the space charges and of the slow changes is neglected, conditions may be calculated by presuming that the charge-carriers create their own descendants by means of secondary processes and that the current density greatly increases upon a breakdown.

Considering a homogeneous electrical field, the increment with respect to time of the electron concentration in a stripe of unit cross-section and thickness dx at a distance x from the cathode is :

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_e dx) = - \frac{\partial}{\partial x} (n_e v_e) dx + a n_e v_e dx + \omega_i a n_p v_p dx \frac{\text{electrons}}{\text{sec.}}, \quad (1)$$

where n_e is the concentration of electrons, n_p that of positive ions and v_p and v_e are the mean velocities of electrons and positive ions, respectively. The first term on the right hand side is the divergence of the density of charge carriers,

$n_e v_e - \left(n_e v_e + \frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x} dx \right)$; the second term is the number of new electrons

arising from electron ionisation by collision over the distance dx , where a is collision ionisation coefficient of the electrons in $\frac{1}{\text{cm}}$; the third term represents the number of electrons originating from secondary space effects. The factor ω_t is the proportion of the result of the secondary space effects relating to the avalanche, i. e. the ratio of the secondary electron density to the positive ion density. Since several processes simultaneously occur in the space, ω_t is the sum of several factors

$$\omega_t = \sum_1^k \omega_{ti}. \quad (2)$$

In gases for instance

$$\omega_t = \frac{\beta}{a} + g \frac{\vartheta}{a} \cdot \frac{a}{a - \mu} + \omega_e, \quad (3)$$

where β represents the ionisation by collision of the positive ions per cm path, ϑ is the number of excited atoms that emit photons which are capable of ionisation per cm path, of which, if μ is the coefficient of the absorption of light, a fraction proportional to the space angle, g is effective from the point of view of the breakdown. The component ω_e accounts for other effects (e. g. thermal ionisation, chemical ionisation, etc.).

In case of solid an liquid insulators the physical interpretation of ω_t is yet not possible in terms such as those of expression (3), since attention must probably be paid here to interior electrostatic emission, the role of impurities (crystal dislocations, inhomogeneities, etc.) and other processes that also might occur in gases.

If the change with respect to time is slow, then for near stationary conditions expression (1) may be simplified as follows :

$$\frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x} = a n_e v_e + \omega_t n_p v_p. \quad (4)$$

Then, since the current density always consists of the stream of electrons and positive ions.

$$G = G_e + G_p = e n_e v_e + e n_p v_p \text{ A/cm}^2 \quad (5)$$

$$n_p v_p = \frac{G}{e} - n_e v_e \frac{1}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}}, \quad (6)$$

where $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ A sec. is the elementary charge of the electron and the streaming of positive ions with unit charge was presumed in expression (5). Substituting (6) in (4), we have :

$$\frac{\partial (n_e v_e)}{\partial x} = a(1 - \omega_t) n_e v_e + \omega_t a \frac{G}{e}. \quad (7)$$

In a homogeneous field, if we presume a homogeneous and isotropic insulator, a and ω_t are constants, and in this case the differential equation may be integrated by separation. We then obtain

$$n_e v_e = -\frac{\omega_t}{1 - \omega_t} \cdot \frac{G}{e} + A e^{a(1-\omega_t)x} \frac{\text{electrons}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}} \quad (8)$$

for the carrier density, and if we multiply this by the unit charge we have the component of current density due to the electrons:

$$G_e = -\frac{\omega_t}{1 - \omega_t} G + C e^{a(1-\omega_t)x} \frac{A}{\text{cm}^2}. \quad (9)$$

The constant C can be determined from one of the limiting conditions. At the cathode, where $x = 0$,

$$G_{ek} = -\frac{\omega_t}{1 - \omega_t} G + C \quad A/\text{cm}^2, \quad (10)$$

while the density of electron current leaving the cathode is physically

$$G_{ek} = G_0 + \omega_f G_{pk} \quad A/\text{cm}^2. \quad (11)$$

Expression (11) is the electron emission from the cathode. It is well-known that electrons can leave a metal, if energy equivalent at least to the work function φ is in one way or another imported to them [13, 14, 35]. A part of the electron emission, the "dark current" G_0 , is independent of the electrical processes and always leaves the cathode (as a result of heat, external radiation and other effects). The second term of the emission is due to the electrical phenomena, where ω_f is the ratio of this electron emission to the current density of the positive ions. This ω_f factor is also the sum of a number of terms

$$\omega_f = \sum_1^1 \omega_{fi} \quad (12)$$

which in gases mean

$$\omega_f = \gamma + \eta h \frac{\vartheta}{a} \cdot \frac{a}{a - \mu} + \gamma_m \frac{\vartheta'}{a} + \omega_E + \omega_m \quad (13)$$

where γ is the efficiency of the secondary emission taking place as the effect of the positive ions. The second factor accounts for the emission due to radiation

emanating from the avalanche, η is the efficiency of the photo-emission in electrons/photon, h is the effective space angle, ϑ is the number of excited particle emitting photons per 1 cm of the avalanche's path and μ is the coefficient of absorption. The factor γ_m is the efficiency of the emission taking place as an effect of excited and metastable particles, while ϑ' is the number of particles that are effective here. Finally ω_E accounts for electrostatic emission, while ω_m is an emission due to other reasons.

Theoretically, the number of electrons emitted decreases with an increase in the value of the work function, and, consequently, some of the components of ω also diminish. In the case of insulators in solid and liquid states the work function probably decreases [35, 40–43], which in all probability partly compensates for the fact that the mobility of the elementary particles is then smaller itself. As a result emission processes similar to those in gases can be presumed [1, 22, 32–34, 40–43, 56–60] and it may even be possible that in consequence of small work function, thermionic emission also plays a certain part.

Since at the cathode

$$G_{ek} + G_{pk} = G \quad A/\text{cm}^2, \quad (14)$$

expression (11) can be rewritten to say

$$G_{ek} = G_0 + \omega_f(G - G_{ek}) \quad A/\text{cm}^2 \quad (15)$$

and

$$G_{ek}(1 + \omega_f) = G_0 + \omega_f G \quad A/\text{cm}^2. \quad (16)$$

Expressions (10) and (16) permit us to determine C as follows :

$$C = \frac{G_0}{1 + \omega_f} + G \left[\frac{\omega_f}{1 + \omega_f} + \frac{\omega_t}{1 - \omega_t} \right] = \frac{(1 - \omega_t)G_0 + (\omega_f + \omega_t)G}{(1 + \omega_f) \cdot (1 - \omega_t)} \quad (17)$$

which can be substituted into [9] to give :

$$G_e = -\frac{\omega_t}{1 - \omega_t} G + \frac{(1 - \omega_t)G_0 + (\omega_f + \omega_t)G}{(1 + \omega_f)(1 - \omega_t)} e^{a(1-\omega_t)x} \quad A/\text{cm}^2. \quad (18)$$

Expression [18] is the law of the electric avalanche. Theories to a great part explain the breakdown of insulators of various states, supposing a similar type of formula for the current density of the electrons [6–34] and this is generally in agreement to the experiment [1–35]. Theories which are based on expressions of this type

$$G_e = a + b e^{cx} \quad A/\text{cm}^2 \quad (19)$$

can therefore be deduced from the above considerations.

All current theories (TOWNSEND, ROGOWSKI, LOEB, JONES) presume to have similar expressions for gases [9—22], while discussions of the breakdown of liquids, for the greater part, also arrive at similar conclusions [31—34]. The current arising in solid insulators during a breakdown has only been examined by HIPPEL and FRANZ. According to HIPPEL, the concentration of charge carriers changes according to the equation

$$n = n_0 e^{\int_0^x (a-f+r) dx}$$

where f is the number of electron captures, r the number of electrons originating per unit length of path due to other reasons [8]. According to FRANZ, the increase in respect to time at a single point [27] is

$$n = n_0 e^{At}$$

which can, if the speed of propagation is taken into account, be reduced to a form similar to HIPPEL's formula.

At present most of the hypotheses on the breakdown of solid materials take into consideration that the condition for a breakdown is that the gain in energy of the electrons must be equal to, or exceed their loss of energy [23—29]. There seems to be no reason why we should not substitute the criterion for instability comprised in expression [23], for the above condition [29]. Latterly here too, there has been an increasing tendency to get the discussion down to elementary processes [24—27].

Expression (18) can be developed on the basis of the other limiting condition, in that upon the anode, where $x = d$,

$$G = G_e \quad \text{and} \quad G_p = 0$$

since it is not probable that positive ions will leave the anode [1, 35]. Taking this into account

$$G = -\frac{\omega_t}{1 - \omega_t} G + \frac{(1 - \omega_t) G_0 + (\omega_f + \omega_t) G}{(1 + \omega_f)(1 - \omega_t)} e^{a(1-\omega)d} \quad A/\text{cm}^2, \quad (20)$$

whence

$$G = G_0 \frac{(1 - \omega_t) e^{a(1-\omega)d}}{1 + \omega_f - (\omega_f + \omega_t) e^{a(1-\omega)d}} \quad A/\text{cm}^2. \quad (21)$$

Let $\omega_f + \omega_t = \omega$, where ω is the fraction of the resultant of the space and secondary processes contributing to the avalanche, and then, since under practical conditions

$$\omega_f \ll 1 \quad \text{and} \quad \omega_t \ll 1$$

expression (21) may be simplified to give

$$G = G_0 \frac{e^{\alpha d}}{1 - \omega e^{\alpha d}} \quad A/\text{cm}^2. \quad (22)$$

According to equation (22), the condition for a sudden, large-scale increase in the current density is

$$G \rightarrow \infty : 1 - \omega e^{\alpha d} \rightarrow 0$$

or

$$\omega e^{\alpha d} \gg 1 \quad (23)$$

Expression (23) may be regarded as the criterion for a breakdown and used as a working hypothesis for a more general and monolithic discussion.

ROGOWSKI [19] who took the effect of space charges into account, deduced a condition similar to that of (23).

The factors α and ω comprise the effects of the various elementary processes. Their concrete physical content, the rôle of the various elementary phenomena, depends on the physical state and external circumstances (phase parameters, electrical stress, etc.). In inhomogeneous space, α and ω are the mean values along the integral connecting the points which are the greatest stress.

In theory in the case of a static direct voltage and if α and ω are known, breakdown potentials can be calculated from (23) [1, 22] and under similar conditions the actual breakdown potentials are really scattered round the calculated values. This distribution partly arises from the static character of the elementary process, and partly from inhomogeneities and impurities. This can, without any difficulty be extended to alternating tensions of supply frequency, because the duration of the phenomena studied (10^{-6} — 10^{-9} sec.) can be neglected in comparison to a half period of the supply (10^{-2} sec.). The only factor that must be treated with care is the corona, where the inter-electrode distance is large, and the duration of the movement of the ions is commensurable with the period of alternation. The results are also valid for impulse voltages, but if the step period of the impulse is comparable to the time required for the breakdown to develop, the spark lag and breakdown potential increases. In the case of high frequency voltages above the order of 1 Mc/sec, oscillations develop and here have investigations reached only their initial phase [13, 16].

The role of electrodes in a breakdown

One part of the secondary processes occurs in space, another part on the surface of the electrode. The latter depends on the material properties of the electrodes and it is their relative importance and rôle that decides the influence of the material properties of the electrodes on the breakdown. According to more

detailed investigations [1], the processes taking place on the anode are secondary, in comparison to those of the cathode, since electrons that might leave the anode will, in a very strong electric field, return to the anode after traversing a relatively short way, whilst the chances of positive ions leaving are very small.

The material properties of the electrodes can primarily exert their influence through the various cathode emission processes. The elementary processes taking place on the electrode surfaces are still not known sufficiently in detail, and thus all that can be done is to attempt to estimate the order of magnitude. According to available data calculations of this kind [1], show that the most effective process appears to be the electrostatic emission which can be supposed to be in all physical aggregations. In gases photoelectric emission and in rarified gases secondary emission due to positive ions, can also play their part.

As the basis for calculation at which processes ω_f approached the order of magnitude of e^{-ad} given in the literature, for a selfconsistent discharge (10^{-4} — 10^{-6} in air at 760 torr in the case of $E = 30,4$ kV (cm) [13, 12]), and to find out to which phenomena the electron emission current density ω_{fi} . G_{pk} is larger than the order of magnitude given in the literature for the "dark current" (10^{-10} — 10^{-15} A/cm²) [24, 6, 1]. It should be noted that a sufficiently large amount of reliable data for these calculations, have so far only been available for gases.

On the basis of our present-day knowledge it is not possible yet to determine with certitude what part the various elementary processes individually play in the factor ω describing the resultant of the secondary phenomena. It has, moreover, not been shown experimentally yet to what extent various factors of ω depend on the material and surface qualities of the electrodes, though it is probable that some of the terms decrease with an increase in the resultant work function.

Conditions are further complicated that the actual surfaces of the electrodes are complex in structure, uneven, and apt to change their quality with time. The quality of the surface to a large extent depends on the machining, the influence of the atmosphere, the chemical processes taking place within the insulator and possible electrical discharges. An unambiguous definition of surface quality has not yet been achieved, since the value h_q for surface smoothness does not tell us anything about the layers of oxide or other adsorbed material covering the surface, about atomic unevenness and quite a number of other problems. The investigation of actual conditions can, however, be reduced to the theoretical approach with a generalisation of the work function, if by this we mean the energy that has to be imparted to the average electron for it to leave an arbitrarily complex and composite surface [1, 35].

A change in the quality of the surface can alter and possibly modify the rôle of the material of the cathode, partly due to its emission partly to the change of the electrical stress on the surface. Surface quality has influence on more

terms of ω than the composition of the material and may even, to a small extent, influence the value of α . Thus the influence of the material cannot be sharply divided from the effect of the quality and cleanliness of the surface.

The only conclusion that may thus be drawn, is that the theory does not preclude the material of the electrodes having, under certain circumstances, an influence on the breakdown potential. The theoretical basis, however, only permits certain conclusions to be drawn on the relative probabilities of processes, without making a decision possible amidst the real conditions of how great their

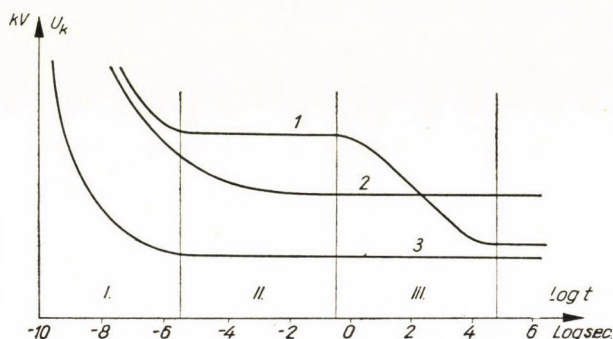


Fig. 2

influence is on the breakdown potential and in which way it can depend on the material of the electrodes.

One of the conditions of the material composition of the electrode having an influence is that during the period under stress, processes or influences that substantially decrease the electric strength of the insulator, such as heating, internal discharges, chemical reactions, changes of state, etc. (increases of α) should not be of primary importance. This can only be avoided by applying the stress for short periods.

According to experimental observation, the breakdown potential depends on the duration of the application of the stress. On the basis of the data collected in ROTH's work [5 : pp. 97, 98, 137—219, 220] insulators may be divided into two groups. One group contains materials that are generally, strongly inhomogeneous in their structure (pertonax, presspan, oil, etc.), whose characteristic curve is shown by "1" of Fig. 2. Up to 1—10 μ secs, the breakdown potential increases, then it remains constant, at 0,1—1 sec, it again decreases and after 10²—10³ secs again becomes constant (the permanent breakdown potential).

The characteristic behaviour of materials of the second group, that are more homogeneous in structure (porcelain, mica), is shown by curve "2", where the breakdown potential continuously decreases down to the permanent breakdown potential. Gases and pure liquids show similar characteristics [5, 6, 33], but the necessary voltage remains constant after stresses lasting not over 10⁻² secs,

but only μ secs. The above curves are of interest, not only in deciding the dimensions of insulators, but also because certain conclusions on the nature of the breakdown can be deduced from them.

In domain I the increase in the breakdown potential can be attributed to the fact that the shorter the required time, the less probable it would be for an elementary process favourable for a breakdown to occur. This is in the domain of purely electric breakdowns. The electric strength of gases and pure liquids can only be broken down by these methods, while in other materials if impulse voltage are used.

In domain II the probability characteristics of the elementary processes remain, but it becomes increasingly difficult to explain the change of duration on this basis, and therefore the rôle of heating becomes even more important.

A new phenomenon with materials of inhomogeneous structure belonging to type I is that of the internal discharges that may independently bring about a breakdown of the duration of applied stress. With these materials heating in domain III increases the number of internal discharges, chemical changes may occur, and the breakdown potential decreases sharply. Permanent strength in domain III and beyond it is determined by thermic and chemical stability.

The influence of elementary processes is the most effective in domain I, for the charge-carriers leaving the electrode can have its effect on the breakdown potential in just this section. Other characteristics of the electrodes (thermal conductivity, catalytic effect, etc.) may play their part in other domains too, though these properties mainly influence the duration of the insulating material and not its breakdown potential.

Since the probability of phenomena taking place in space increases with the greater thicknesses of the insulating layer, the effects of the material must be in the first place waited, where the distance is little between the electrodes.

The second condition therefore for the material exerting an influence is that the electrical stress should not be too great for secondary space effects, and to relegate surface phenomena to the background, while being great enough to cause significant emission from the cathode. Since the effect of electrostatic emission is the most probable, and this can only develop in strong fields, the influence of the material can be expected to be greatest where the electrical strength is expected to be great. Great electrical strength, such as here described, is possible on one hand, where there is great density, the free path is small and space phenomena develop with difficulty (gas under high pressure, solid and liquid states) or, on the other hand, where there is a small density, and where the free path is long, but there are few elementary particles in the space (vacuum). Since contaminations and weak spots facilitate the development of space phenomena, the influence of the material of the electrodes is expected to be less in such inhomogeneous materials.

The influence of the material composition of the electrode is therefore primarily to be sought at stresses of short duration, with a small electrode separation and materials of great electric strength.

3. Experimental data in the literature on the subject

In a great many of the examined cases the problem of the degree of influence of the material for the electrode cannot be decided with certainty even on the basis of the experimental data published in various papers.

Evaluation of the results communicated is made very difficult by the fact that the experimental procedures and circumstances are not uniform, and that circumstances that can gravely influence the phenomena examined, are frequently neglected. The majority of the investigations published have been conducted under circumstances satisfactory to the needs of the communications industry, but that do not adequately satisfy the requirements of power engineering insulation techniques.

Since 1921, when HOLST and OTSERHUIS [44] first showed that the initial tension, in the case of gases at low pressures is dependent also on the material of the cathode, very many works have dealt with the problem of how the material of the electrodes influences the breakdown potential.

For vacuum the problem can, on the basis of the investigations of ANDERSON [45], LEADER [46] and TARASOVA [47], be regarded as more or less answered, in the sense that the breakdown potential increases with an increase in the work function.

The data on *rarified gases* are fairly consistent and the results here attained are summarised in practically every detailed work on the physics of discharges in gases [e. g. 11—16] where ample data can also be found on the influence of the surface's quality. With increasing density, the conditions of the experiment become ever more difficult and is increasingly difficult to evaluate the published data.

The influence of the material for the electrode under *atmospheric conditions* has not yet been successfully shown [11—17], but a slight influence of the quality of the surface has been experienced [1, 12, 15—17, 21, 48]. According to some of the more recent investigations [49—52], the influence of the material, again comes to the forefront, with an increase in pressure and can again be experienced in *gases at high pressures*.

A fairly large number of experiments have been conducted to investigate the problem, especially in the case of *liquids* of simpler structures, such as hexane, xylol, toluol, benzine, etc. [12, 49—60] and to a small extent in oil [31, 61, 62] but the data obtained are absolutely contradictory.

Nor can the data relating to *solid insulators* [1, 63—68] be consistently marshalled.

By gases and liquids the electrodes were discharged of their voltage for 2 minutes between two measurements to let the products of the previous breakdown lose their influence. Voltage was always measured on the H. T. side, within limits of $\pm 3\%$.

Breakdowns were examined in air at atmospheric conditions, in rarified air, in nitrogen under pressure, in transformer oil and in lamina of various solid

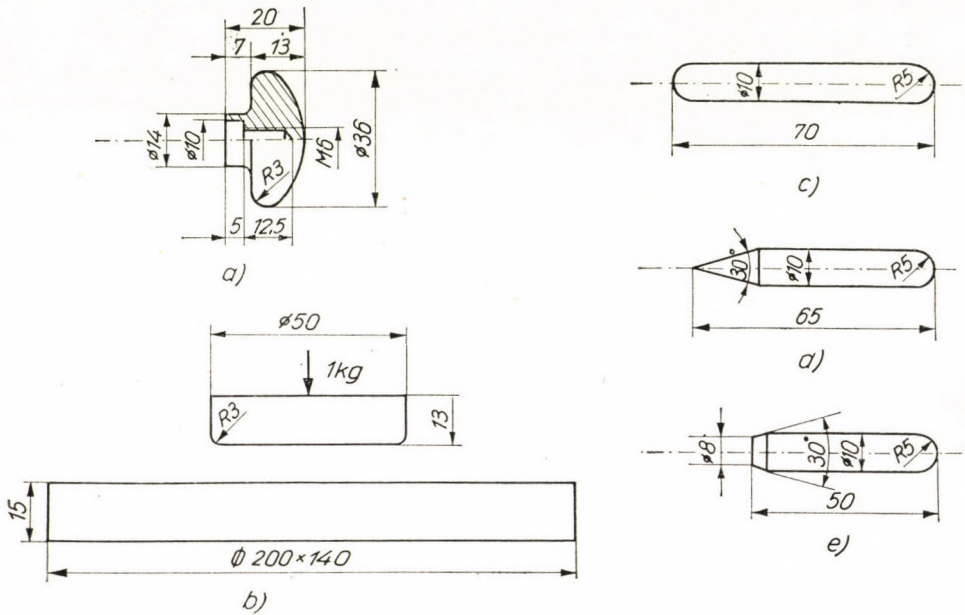


Fig. 5

insulators such as mica, presspan, pabite, polyvynile chloride, methylmetacrylate, celluloid, etc.

The measurements were carried out between electrodes of identical geometry, made of aluminium, copper brass, stainless steel and common steel. The shape of the electrodes used is shown in Fig. 4. The pair of electrodes standardized for oil investigations (Fig. 4a) was used for the investigations in oil, while the arrangement recommended by the IEC (Fig. 4b) was used for measurements on solid insulators. The pair of electrodes shown in Fig. 4c, was used in all three aggregations. The configuration shown in Fig. 4d was applied to examining the effects of points, while that of 4e served to show conditions in protective spark gaps.

To assure the reproducibility of the experimental results an effort had to be made to see that the surface smoothness of the electrodes of various materials should be as near equal. Fig. 5 shows the breakdown potential as a func-

tion of surface smoothness in air, where $d = 2,19$ mm. It seems that under $h_q = 0,8 \mu$ surface smoothness no longer influences the breakdown

The surface smoothness varies with the material even if it is identically treated. It has been found that the difference is the smallest if a superfinishing

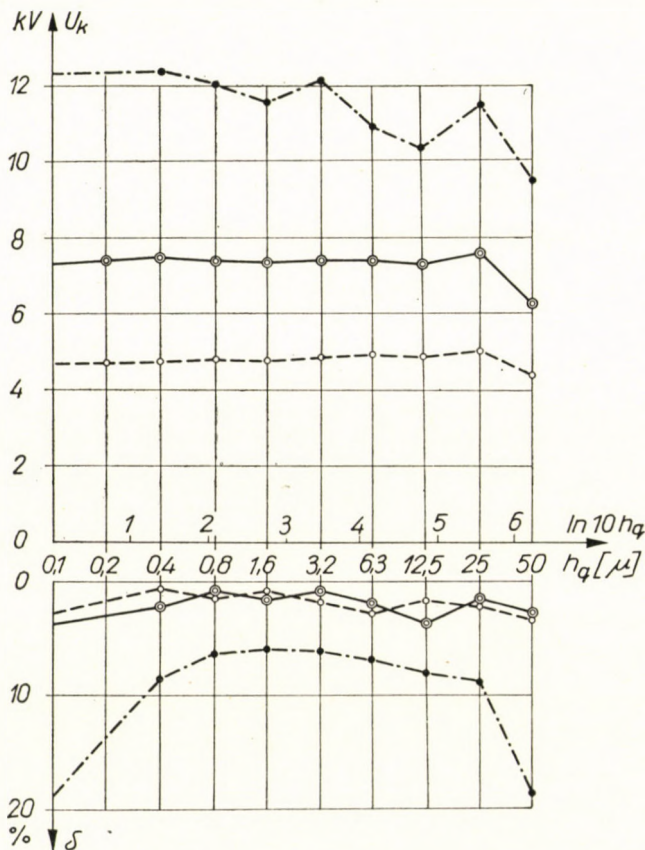


Fig. 6

is applied, and therefore this is the quality of surface generally used, with a surface smoothness of $h_q = 0,1-0,2 \mu$. The surface deteriorate as a result of breakdowns and care must be taken therefore that the order and number of breakdowns should be identical, and after 30 breakdowns the surfaces should be newly finished generally. Careful storage and handling helped to avoid fouling and damage to the electrodes.

The appliances developed for clamping the electrodes made it possible to change and measure the electrode separation and the influence of the gap length could thus also be investigated in the course of the experiments. A part of the electrode clamping appliance is shown in Figs. 6 and 7.

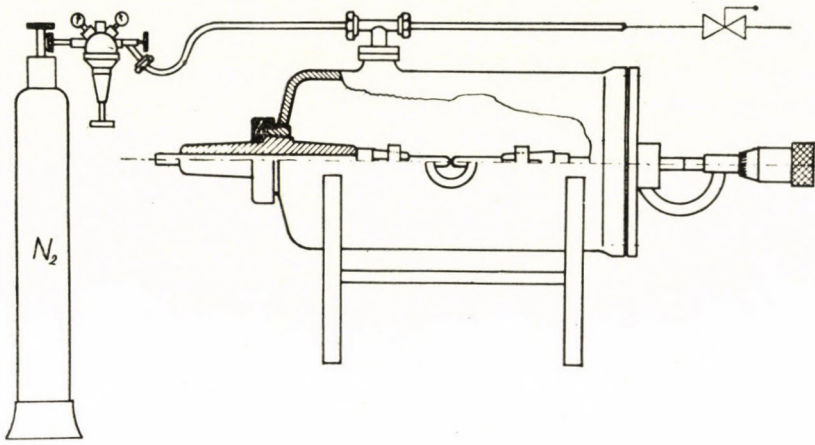


Fig. 6a

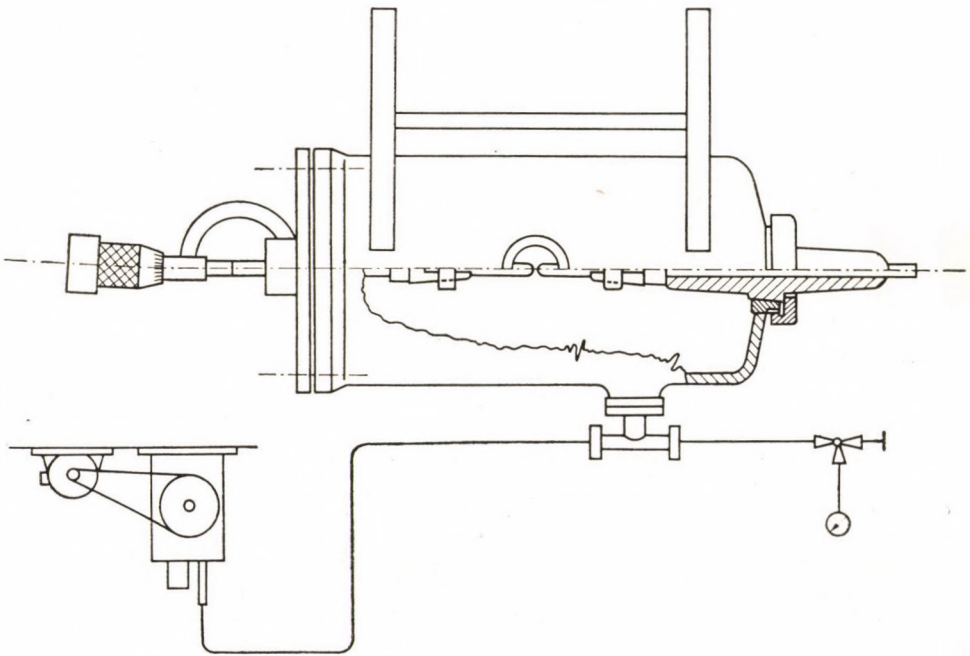


Fig. 6b

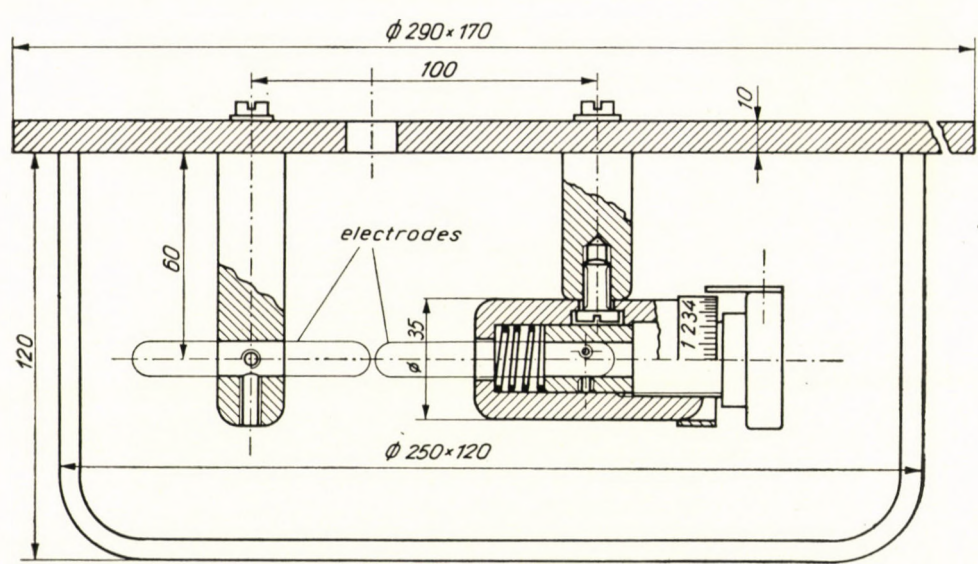


Fig. 6c

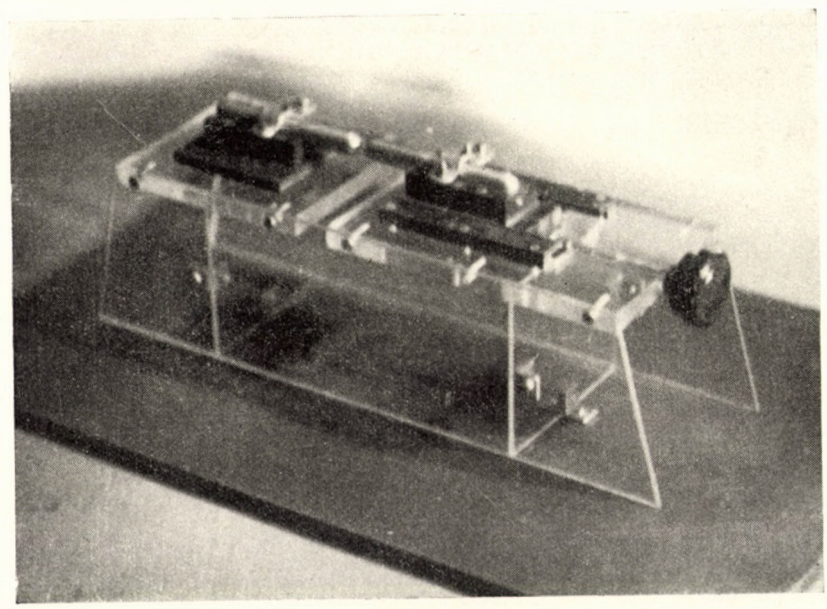


Fig. 7a

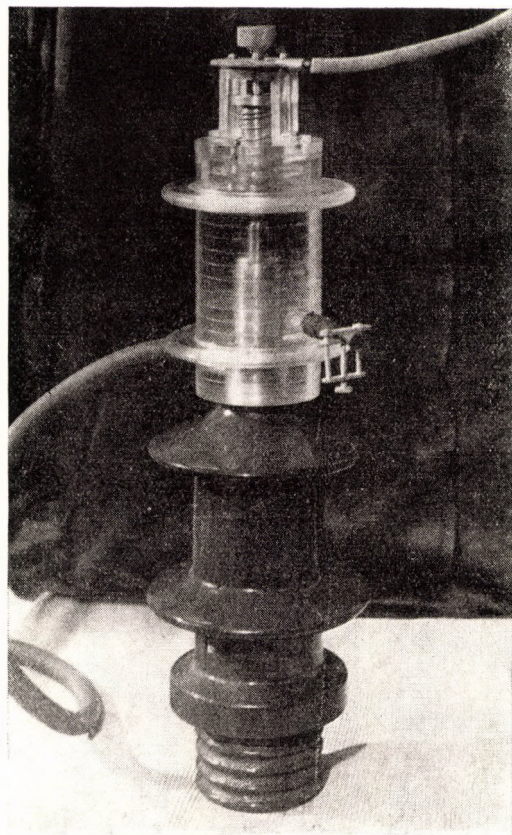


Fig. 7b

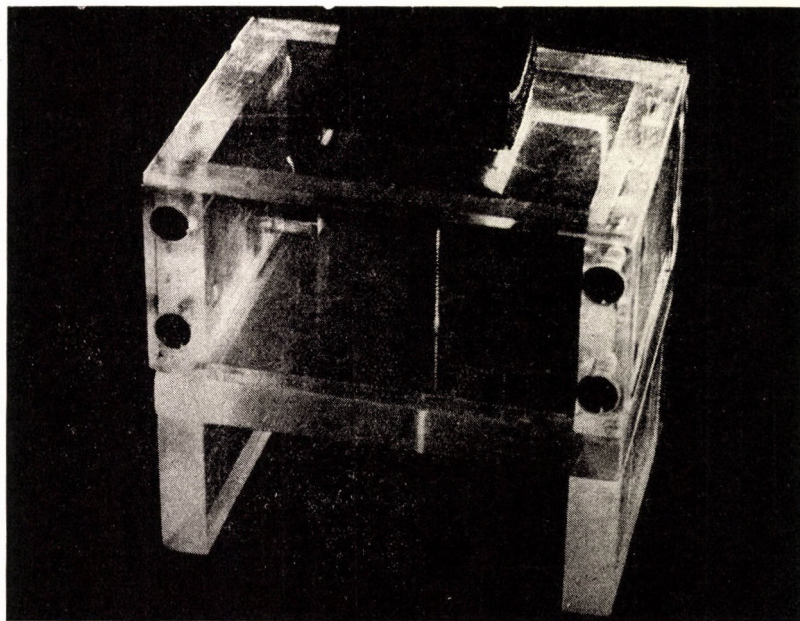


Fig. 7c

The arrangement shown in Fig. 6a was used at high pressures, that of 6b at low pressures, while 6c was applied when using oil. Fig. 7 shows the apparatus used in air and in oil.

During the course of the experiments atmospheric conditions were measured and where the necessary corrections were applied to the measured values.

Values for breakdown potentials show considerable scatter and it therefore proved helpful to evaluate the measured data according to the principles of proba-

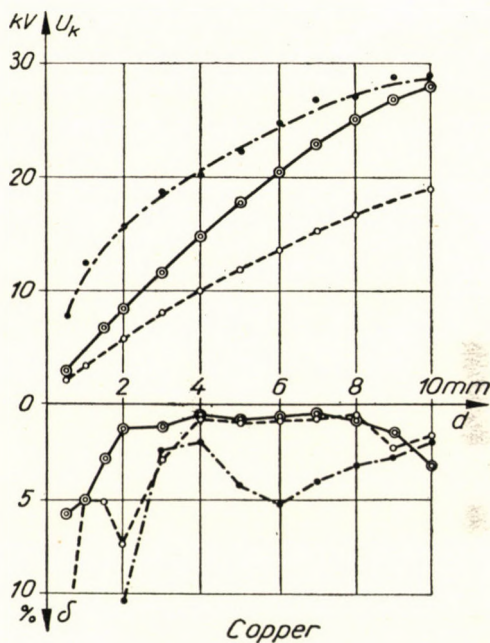


Fig. 8

bility calculus. As a result of the statistical evaluation of the preliminary experiments it appeared that for industrial purposes series of 5, for laboratory investigations of a higher standard series of 10 measurements can give sufficient information on the breakdown potential. The actual results are based on a series of 10 measurements. In the figures showing the results not only the breakdown potential U_k

but also the distribution $\delta = \frac{\sigma}{U_k} \cdot 100\%$ is shown (σ is the scatter in kV-s).

The figures show the D. C. values with dash-dash lines, the A. C. values with full lines and the pulse values in general with dot-dash lines.

Fig. 8 shows the results of measurements under atmospheric conditions as a function of gap length using hemispherical copper electrodes, while Fig. 9 shows the ratio v of values measured with other materials to those found with copper.

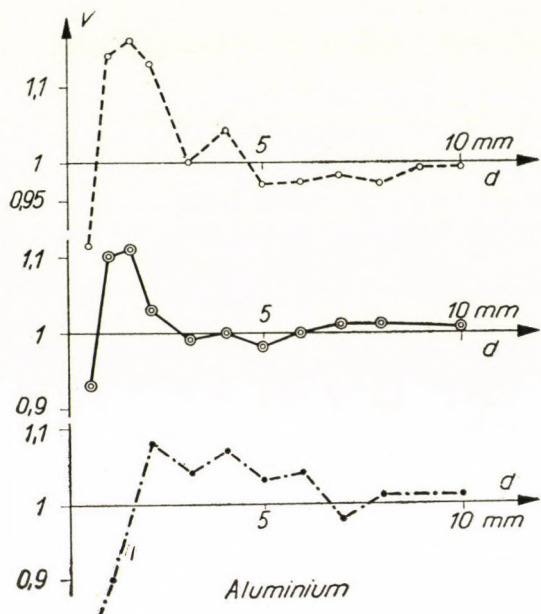


Fig. 9a

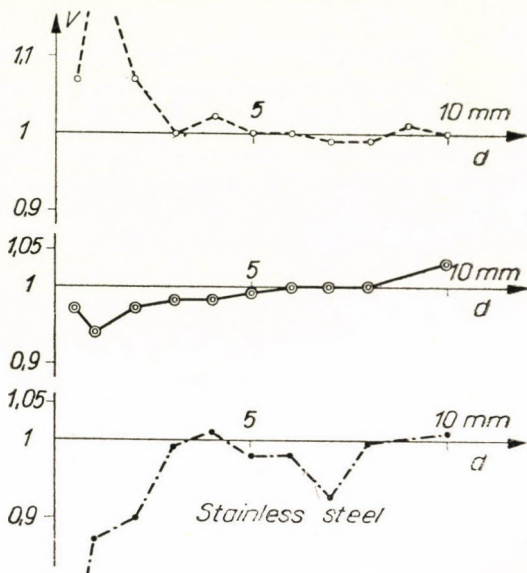


Fig. 9b

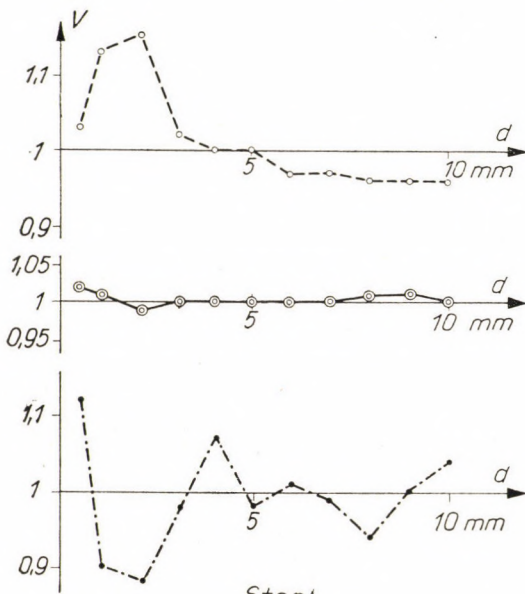


Fig. 9c

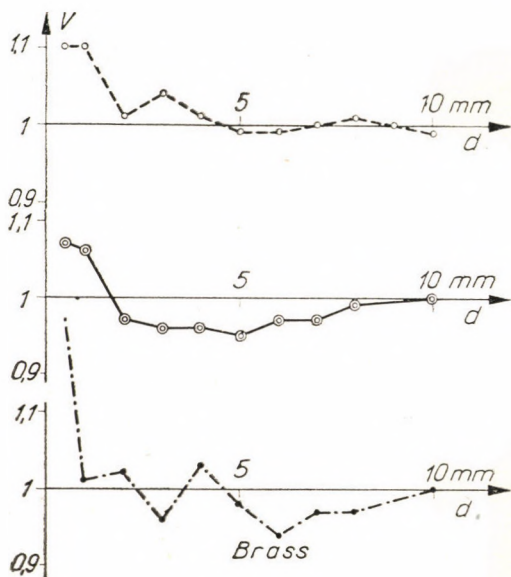


Fig. 9d

The measured values of v vary around 1 within the boundaries of scatter. The influence of the material could not be shown with different arrangements of the electrodes either.

Fig. 10 shows the values measured between hemispheres in nitrogen as a function of the pressure, with gap length of $d = 0,125$ mms, while Fig. 11 illustrates the same with $d = 0,250$ mms.

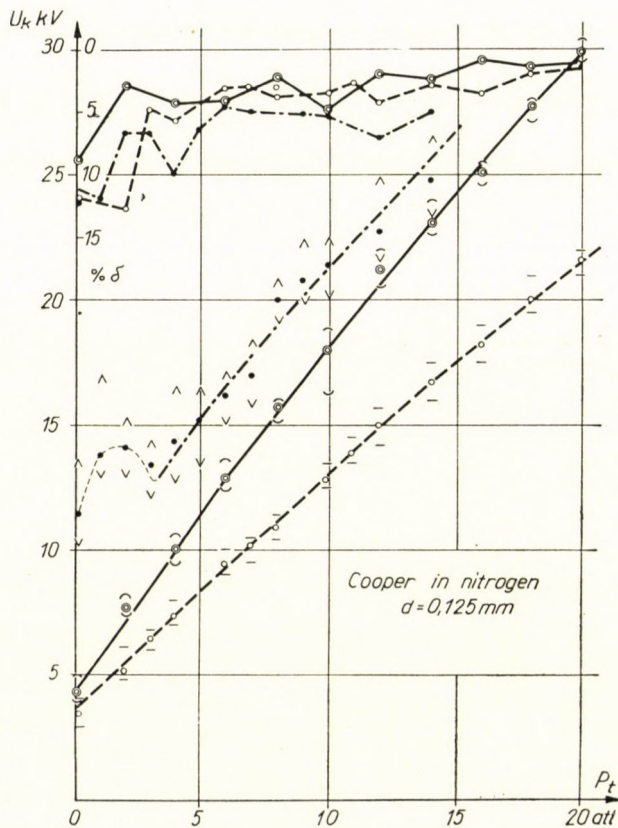


Fig. 10a

A similar degree of influence on the material is to be found in point-hemisphere arrangements (Fig. 12). According to results, the breakdown potential unequivocally increases in the order: aluminium, copper, stainless steel.

Fig. 13 is a summary of the values in pressspan between IEC electrodes. It was not possible either here, nor in the case of other solid materials, with various electrode arrangements, conclusively to show the influence of the material. In pressspan sheets less than 200μ -s thick, using IEC electrodes the breakdown occurred at a somewhat higher tension with aluminium, and with hemi-

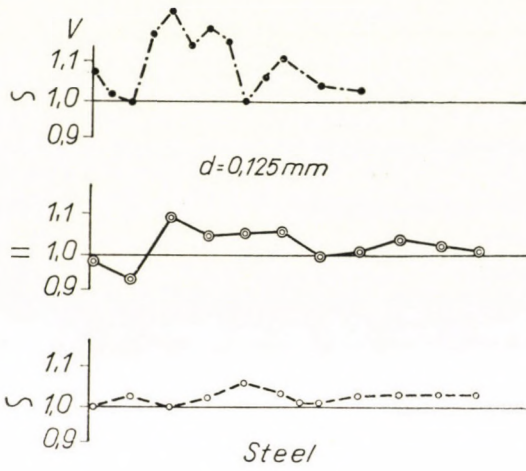


Fig. 10b

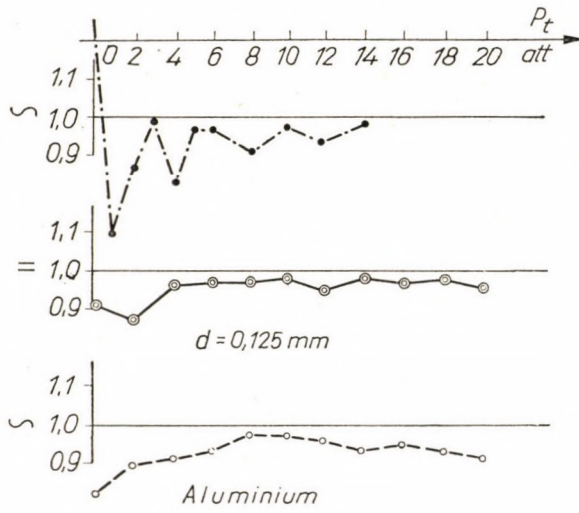


Fig. 10c

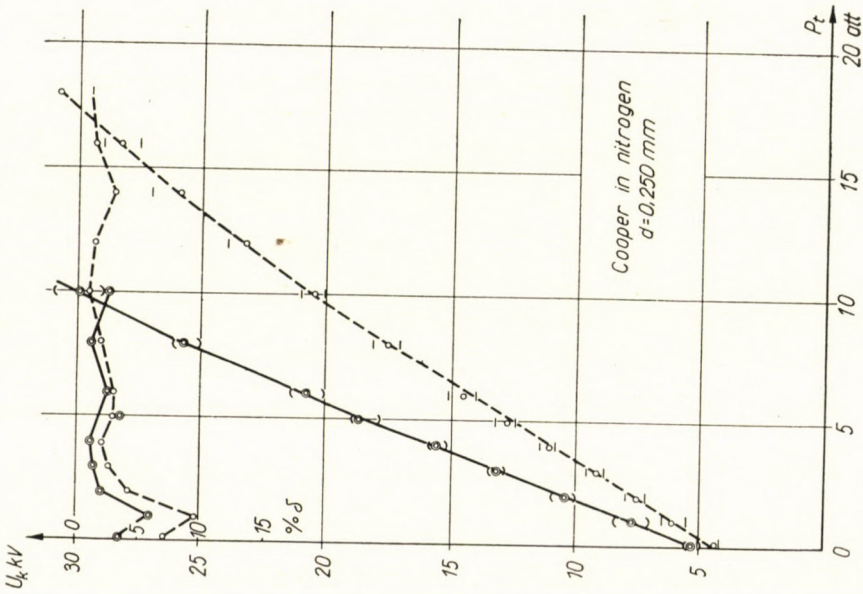


Fig. 11a

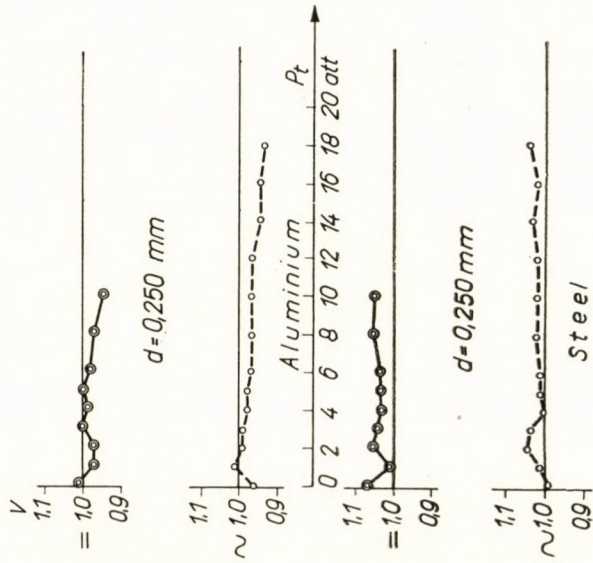


Fig. 11b

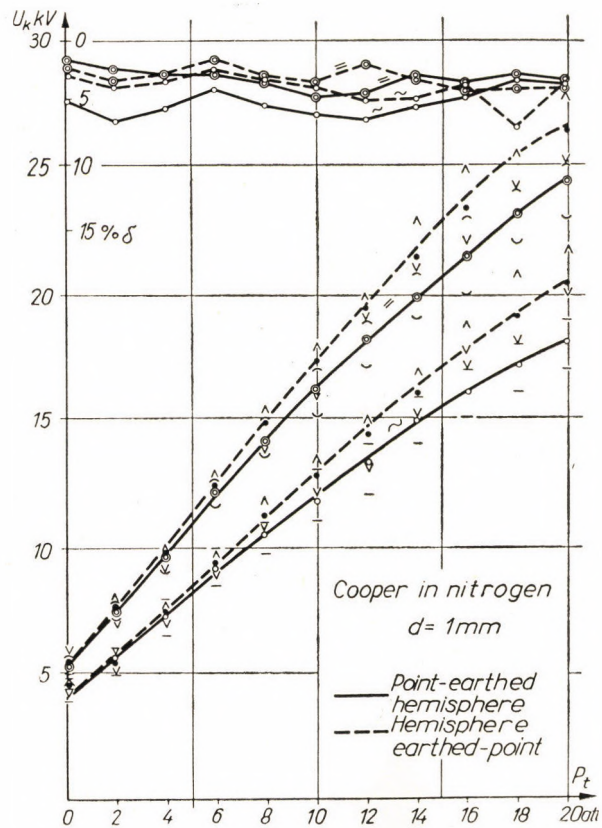


Fig. 12a

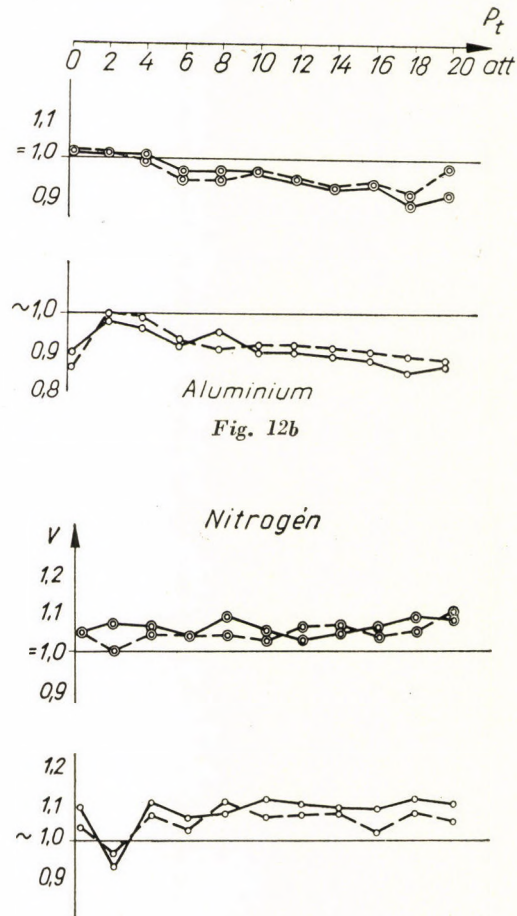


Fig. 12c

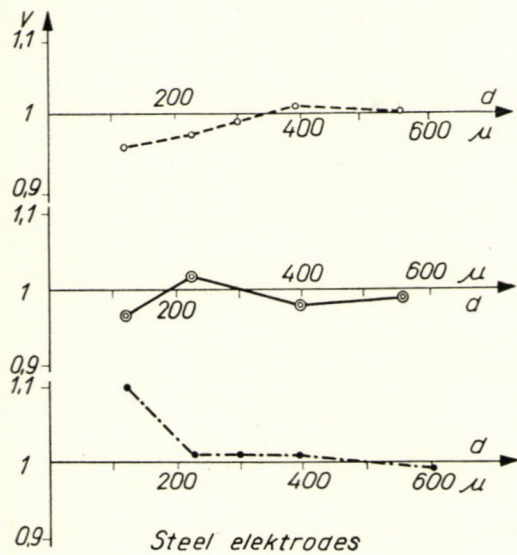


Fig. 13a

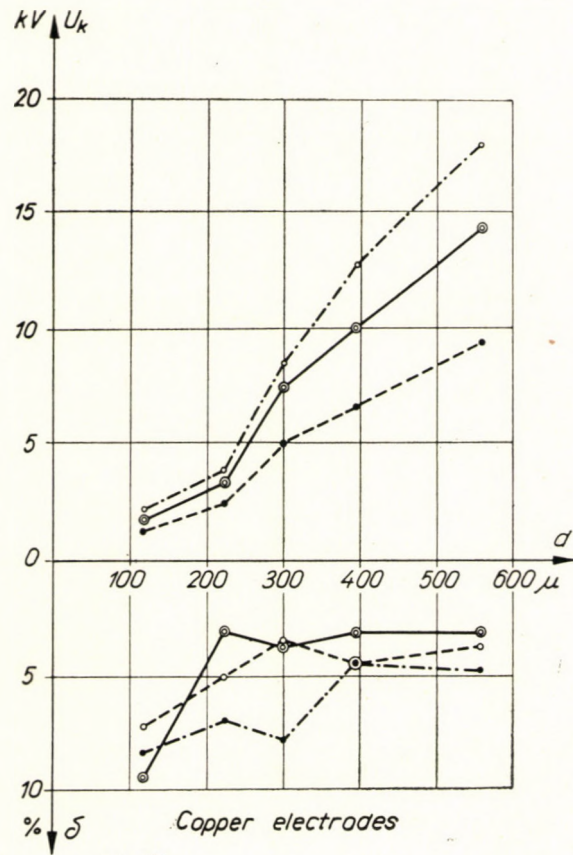


Fig. 13b

spheres, where steel was used, but the deviations remained within the scatter boundaries. If this was really due to the influence of the electrode material, it can be explained that between the IEC electrodes the electric field is near homogeneous and the surface layer of aluminium oxide acts as a supplementary insulating layer, thereby increasing the electrical strength. The field of the hemispheres is strongly inhomogeneous, their surface is small and the rôle of

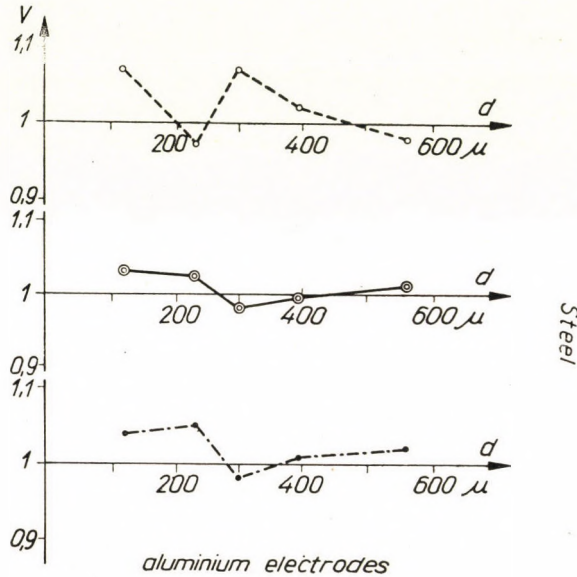


Fig. 13/c

an oxide layer cannot be great. The field is, however, probably strong enough to cause electrostatic emission and the greater strength in that case can be attributed to the higher work function of steel.

In oil a certain degree of influence by the electrode material was found, but could not be reproduced. Further investigations are necessary here.

5. Conclusions

On the basis of the experiments conducted it was found that during practical circumstances in the cases of the electrode materials ordinarily used in H. T. technology, the material properties of the electrodes exert no important influence on the breakdown potential of solid insulators. In atmospheric conditions the material exerts no influence in air (or probably in other gases either) at small electrode separations but a slight degree of influence by the quality, especially the smoothness, of the surface was found at small gap length. In these

cases it is worth while making the surface smoothness approximately $h_q = 1,6-0,8 \mu$. Smoother surfaces are not advantageous. The references unanimously declare that the material of the electrodes has an influence on the initial tension at low pressures around the minimum of the Paaschen curve (1—10 torr) and in vacuo. The experiments carried out show that the same can be found at high pressures ($p > 6-8$ att). In these cases the breakdown potential increases in the order: aluminium, copper, stainless steel. The degree of influence of the material in oil could not be unequivocally determined even so far as it does exist, it cannot be satisfactorily reproduced.

On the basis of the theoretical and experimental results the influence of the material of the electrodes on the breakdown potential can, with the help of electrostatic emission, be explained as follows:

The dependence of the breakdown potential on the material of the electrodes is determined by three conditions:

- a) the role of the secondary space phenomena must be smaller than that of those at the surface,
- b) the effect of the quality of the surface must not obscure the difference in materials,
- c) the electron-avalanche must be developed before the beginning of the breakdown.

The first condition has already been discussed in connection with the theoretical problems. This is not fulfilled, in the case of large electrode separation, independently of the aggregations, nor, it appears, is it fulfilled in solid insulators used in industry, independently of electrode separation.

The second condition arises in consequence of what has been said of the influence of the quality of the surface. It probably explains why the effect of the material cannot be experienced in atmospheric conditions in air and also why the effect is not conclusive in oil. Under such circumstances we cannot talk of clear metallic surfaces, for they are covered by adsorbed layers, oxides, etc., and these surface layers probably balance the difference in the work functions of the pure surfaces.

The third condition can be justified as follows: The condition for a breakdown to occur is the precipitation of an electron avalanche and that this phenomenon be sustained by electrostatic emission from the electrode surface ($\omega_E \gg e^{-ad}$). If, with an increase in the field, emission commences, but there is yet not sufficient rate of ionisation in the space ($a \sim 0$) then the initial potential is determined by the commencement of ionisation and U_k therefore depends primarily on a , i. e. on the insulator. The role of the electrode material now becomes secondary. If circumstances are the reverse and there is enough ionisation ($a \neq 0$), but still not sufficient emission, then the initial potential is determined by the commencement of the emission corresponding to $\omega_E \gg e^{-ad}$, and the electrode material's role can be considerable. This is the case with gases at

high and very low pressures. The results obtained with pure liquids are contradictory and the reproduceability is little, this can probably be explained that they fall into the intermediary region between the two cases and conditions are strongly influenced by the quality and purity of the surface.

In high tension equipment where the task of insulation is done by high pressure gas or a vacuum (e. g. electrostatic tank-generators, compressed gas condensers and cables, compressed air circuit breakers, special transformers, electron optical devices, etc.) it is worth while devoting some attention to the choice of material for the electrodes. The greatest degree of security is afforded by stainless steel, or if, because of its poor conductivity it cannot be applied, it is more advantageous to use copper instead of aluminium. In cases where the advantages of greater security might make up for the increased cost of production it might be conceivable for copper electrodes, by scattering or some other process, to be covered with a layer of material similar to stainless steel in its properties. This is, however, only useful where an actual breakdown occurs as a rare exception and allowance does not have to be made for the covering layer being spoilt and becoming ineffective, as a result of the breakdown.

REFERENCES

1. VAJDA, GY.: Az elektródák anyagának befolyása az átütési feszültségre. Kandidátusi disszertáció. Bp. 1956. (The influence on the material of electrodes on the breakdown potential. Dissertation for a candidate's degree.)
2. VEREBÉLY, L.: Villamos erőtávitel. I. Tank. Kiadó. Bp. 1951. (The transmission of electrical energy.)
3. SZKANAVI, G. I.: Dielektrikumok fizikája. Akad. Kiadó. Bp. 1953. (The physics of dielectrics.)
4. EISLER, J.: Szigetelőanyagok alkalmazása. Tank. Kiadó, Bp. 1957.
5. ROTH, A.: Hochspannungstechnik, Springer, Wien, 1952.
6. STRIGEL, R.: Elektrische Stossfestigkeit. Springer, Berlin, 1939.
7. GEMANT, A.: Elektrophysik der Isolierstoffe. Springer, Berlin, 1930.
8. HIPPEL, A.: Dielectrics and Waves. Wiley, New York, 1954.
9. HIPPEL, A. et al.: Dielectric Materials and Applications, New York, 1954.
10. STÄGER, H. et al.: Werkstoffkunde der elektrischen Isolierstoff. Borntager, Berlin, 1955.
11. SEELIGER, R.: Einführung in die Physik der Gasentladungen. Barth, Leipzig, 1934.
12. LOEB, L. B.: Fundamental processes of electrical discharges in gases. Wiley, New York, 1939.
13. Капцов, Н. А.: Электрические явления в газах и вакууме. Gosztehizdat. M. L. 1950.
14. Грановский, В. Л.: Электрический ток в газе. Gosztehizdat. M. L. 1952. (Electric current in gases)
15. GÄNGER, B.: Der elektrische Durchschlag von Gasen. Springer Berlin. 1953.
16. MEEK, J. M. and CRAGGS, J. D.: Electrical breakdown of gases. Clarendon. Oxford. 1953.
17. JONES, F. L.: Electrical discharges. Rep. on progress in physics. **16**. 216. (1953).
18. RAETHER, H. and KÖHRMANN, W.: Die Bedeutung des Kanalaufbaus für den Durchschlag in Luft. Naturwiss. **41**. 400 (1954).
19. ROGOWSKI, W.: Gasentladung und Durchschlag. A. El. **26**. 643 (1932).
20. LOEB, L. B. and MEEK, J. M.: The mechanism of the electric spark. Stanford. Univ. Calif. 1941.
21. LOEB, L. B.: Some aspects of breakdown streamer, Phys. Rev. **94**. 227 (1954).
22. VAJDA, GY.: Gázok villamos szilárdsága. MTA. Műsz. Oszt. Közl. **18**. 277 (1956). (The electrical strength of gases.)
23. WHITEHEAD, S.: Dielectric breakdown of solids. Clarendon. Oxford, 1951.

24. Чуенков, В. А.: Современное состояние теории электрического пробоя твердых диэлектриков. UFN. **54**. 185 (1954). (CSUENKOV, V. A.: The present situation of the theory of the electrical breakdown strength of dielectrics.)
25. ROMPE, R.: Zur Diskussion über Fragen des elektrischen Durchschlages. Arbeitstagung Festkörperphysik. II. Bath. Leipzig. 1955. p. 163.
26. BÖER, K. W. and KRÜMMEL, U.: Ein experimenteller Beitrag zum Problem des elektrischen Durchschlages. Arbeitstagung Festkörperphysik. II. Bath. Leipzig. 1955. p. 171.
27. FRANZ, W.: Theorie des rein elektrischen Durchschlages fester Isolatoren. Erg. exakt. Naturwiss. **27**. 1 (1953).
28. FRANZ, W.: Berechnung des elektrischen Durchschlages durch feste und flüssige Isolatoren. Westdeutscher Verlag, Köln, 1954.
29. VAJDA, GY.: Szilárd szigetelőanyagok átütése. Elektrotechnika. **49**. 4 (1956). (The breakdown of solid insulators.)
30. Френкел, Я. И.: Кинетическая теория жидкостей. Izd. A. N. Moszkva. 1945. (FRENKEL, JA. I.: The kinetic theory of liquids.)
31. NIKURADSE, A.: Das flüssige Dielektrikum. Springer, Berlin, 1934.
32. LEWIS, T. J.: Electrical breakdown in organic liquids. Proc. IEE. **100**. II/A. 141 (1953).
33. MACFADYEN, K. A.: Some research into the electrical conduction and breakdown of liquid dielectrics. Brit. J. Appl. Phys. **6**. 1 (1955).
34. VAJDA, GY.: Szigetelő folyadékot villamos szilárdsága. (The electrical strength of dielectric liquids.) MTA. Műsz. Oszt. Közl. **21**. 163 (1957)
35. Добрецов, Л. И. Электронная и ионная эмиссия. (DOBRECZOV, L. I.: Electron and ion emission.) Gostehizdat M.-L. 1952.
36. STÄGER, H. et al.: Werkstoffkunde der elektrischen Isolierstoffe. Borntrager, Berlin. 1955.
37. DEL MAR, W. a. et al.: Progress report on electrode materials and oil stability under electrical discharges. El. Eng. **60**. 24 (1941).
38. WYATT, K. S.: Deterioration of insulating oils through interaction with cable metals. CIGRE REP. No. 233. Paris. 1937.
39. EGERTON, S. C. and MCLEAN, D. A.: Paper capacitors containing chlorinated impregnants. Ind. Eng. Chem. **38**. 512 (1946).
40. BAKER, E. B. és BOLTZ, H. A.: Thermoionic emission into dielectric liquids. Phys. Rev. **51**. 275 (1937).
41. LE PAGE, W. R. and DU BRIDGE, L. A.: Electron emission into dielectric liquids. Phys. Rev. **58**. 61 (1940).
42. DORNTE, R. W.: The dielectric strength of heptane and benzene. J. Appl. Phys. **10**. 514 (1939)
43. BRAGG, J. K. et al.: Cathode effect in the dielectric breakdown of liquids. J. Appl. Phys. **25**. 382 (1954).
44. HOLST, G. and OSTERHUIS, E.: Physica, **1**. 84 (1921) 1.
45. ANDERSON, H. W.: Effect of total voltage on breakdown in vacuum. El. Eng. **54**. 1315 (1935).
46. LEADER, D.: Electrical breakdown in vacuum. Proc. IEE. **100**. Pt. II/A. 138 (1953).
47. Тарасова, Л. В.: Современные представления о механизме электрического пробоя в высоком вакууме, У. Ж. Н. **58**. 321 (1956). (TARASOVA, L. V.: Modern Theories on the Mechanism of Electrical Breakdowns in High Vacuum)
48. JONES, F. L. and DAVIES, D. E.: Influence of cathode surface layers on minimum sparking potential of air and hydrogen. Proc. Phys. Soc. B. **64**. 397 (1951).
49. FÉLICI, N. et MARCHAL, Y.: Nouvelles recherches sur la rigidité diélectrique de gaz comprimés. Rev. Gen. El. **57**. 155 (1948).
50. TRAMP, I. G. et al.: Influence of electrodes on D. C. breakdown in gases of high pressure. Trans. AIEE. **69**. 961 (1950).
51. BICHARE, M.: Analyse mathématique de la rigidité électrique de l'air sous pression. Rev. Gen. El. **64**. 159 (1955).
52. COHEN, E. H.: The electric strength of highly compressed gases. Proc. IEE. **103**/A. 57 (1956).
53. SORGE, I.: Über die elektrische Festigkeit einiger flüssigen Dielektrika. A. F. El. **13**. 189 (1924)
54. KIESER, W.: Über das elektrische Verhalten einiger Flüssigkeiten. A. J. El. **20**. 374 (1928).
55. GOODWIN, D. W. and MACFADYEN, K. A.: Electrical conduction and breakdown in liquid dielectrics. Proc. Phys. Soc. B. **66**. 85 (1953).
56. SALVAGE, B.: The dielectric breakdown of some simple organic liquids. Proc. IEE. **98**. 9 m. (Monogr. No. 2.) 15. (1951).
57. LEWIS, T. J.: The dependance of the dielectric strength of pure liquids on cathode material. Proc. Phys. Soc. N. **66**. 425 (1953).
58. EDWARDS, W. D.: Some results on the electrical breakdown of liquids using pulse techniques. Canad. J. Phys. **29**. 310 (1951).

59. MAKSIEJEWSKI, J. L. and TROPPER, H.: Some factors affecting the measurement of the electric strength of organic liquids. Proc. IEE. **101**. II. 183 (1954).
60. O'DWYER, J. J.: The influence of cathode material on measured breakdown strength of solid and liquid dielectrics. Austral. J. Phys. **7**. 400 (1954).
61. NIKURADSE, A.: Untersuchungen über Spitzenentladungen in Transformatorölen. A. J. El. **20**. 403 (1928).
62. WATTSON, P. K. and HIGHAM, J. B.: Electric breakdown of transformer oil. Proc. IEE. **100**. 168 (1953).
63. HIPPEL, A. and ALGER, R. S.: Breakdown in ionic crystals. Phys. Rev. **76**. 127 (1949).
64. COOPER, R. and GROSSART, D. T.: The influence of cathode material on the electric strength of potassium bromide crystals. Proc. Phys. Soc. B. **66**. 716 (1953).
65. CALDERWOOD, J. H., COOPER, R. and WALLACE, A. A.: An experimental investigation of factors influencing the electric strength of potassium chloride crystals. Proc. IEE. **100**. II/A. 105 (1953).
66. OAKES, W. G.: The intrinsic strength of polythene and its variation with temperature. J. IEE. I. **95**. 36 (1948).
67. RIDDLESTONE, H. G.: The A. C. breakdown of polythene and polystyrene. Proc. IEE. **100**. II/A. 159 (1953).
68. MASON, J. H.: The deterioration and breakdown of dielectrics resulting from internal discharges. Proc. IEE. **98**. I. 44 (1951).

SUMMARY

The electric breakdown potential depends on a number of factors. The author has investigated the extent of the influence of the material of the electrodes. The conditions for breakdown of insulators in various physical states are deduced from an equation expressing the lability of the elementary processes taking place in the insulator and the extent to which the elementary processes taking place upon the electrodes influence the breakdown. According to these investigations, electrostatic emission is the most effective, but in gases photoelectric emission and secondary emission due to positive ions can also play their part.

According to the evidence of the author's experiments, and in full harmony with the theoretical considerations, no influence by the material of the electrode can be experienced in the case of solid insulators or of gases under atmospheric conditions. In the latter case the quality of the surface has a certain effect and it is best to use surfaces of smoothness $h_g = 1,6-0,8\mu$. In liquids the influence of the material is suppressed by other effects. The effect of the material of the electrodes is well-perceptible in gases at low and high pressures, when the breakdown potential increases in the order: aluminium, copper, stainless steel.

EINFLUSS DER WERKSTOFFEIGENSCHAFTEN DER ELEKTRODEN AUF DIE DURCHSCHLAGSSPANNUNG

G. VAJDA

ZUSAMMENFASSUNG

Die elektrische Durchschlagsspannung hängt von mehreren Faktoren ab und Gegenstand der Untersuchungen des Verfassers ist, wie weit diese Spannung vom Werkstoff der Elektroden beeinflusst wird. Die Bedingungen für den Durchschlag in Isoliermaterialien von verschiedenem Aggregatzustand führt der Verfasser auf eine Gleichung zurück, welche die Labilität der in den Isolierstoffen vor sich gehenden elementaren Vorgänge ausdrückt; ferner untersucht er eingehend, in welchem Masse die an den Elektroden vor sich gehenden elementaren Vorgänge den Durchschlag beeinflussen. Nach den Untersuchungen ist die elektrostatische Emission am wirksamsten, in Gasen kann ausserdem die lichtelektrische Emission eine Rolle spielen, sowie die Sekundäremission unter der Wirkung von positiven Ionen.

Nach den Versuchen des Verfassers kann — in Übereinstimmung mit den theoretischen Überlegungen — bei festen Isolierstoffen kein Einfluss des Elektrodenwerkstoffes beobachtet werden, und ebensowenig in Gasen unter atmosphärischen Bedingungen. In letzterem Falle zeigt sich ein gewisser Einfluss der Oberflächenrauigkeit, am zweckmässigsten ist die Verwendung von Flächen mit $h_q = 1,6-0,6 \mu$. In Flüssigkeiten wird der Einfluss des Werkstoffes von anderen Einflüssen überdeckt. Von Bedeutung ist die Rolle des Elektrodenwerkstoffes in Gasen bei kleinen und grossen Drücken; in diesen Fällen wächst die Durchschlagspannung; in der Reihenfolge Aluminium—Kupfer—rostfreier Stahl.

INFLUENCE DES CARACTÉRISTIQUES DE LA MATIÈRE DES ELECTRODES SUR LA TENSION DE RUPTURE

G. VAJDA

RÉSUMÉ

La tension de rupture électrique dépend de plusieurs facteurs. L'auteur examine l'influence de la matière des électrodes. Les conditions de rupture des matières isolantes d'état physique différent sont ramenées à une équation, laquelle exprime la labilité des différents phénomènes élémentaires dans les isolants. L'auteur examine en détail, dans quel mesure les phénomènes élémentaires aux électrodes influencent la rupture. Suivant les résultats de l'auteur, l'émission électrostatique est la plus efficace, et dans les gaz, l'émission photoélectrique et l'émission secondaire, sous l'effet d'ions positifs, peuvent également jouer un rôle. En accord avec les considérations théoriques, les expériences de l'auteur ne décelent pas l'influence de la matière des électrodes pour les isolants solides, et pour les gaz, sous conditions atmosphériques. Dans ce dernier cas, la qualité des surfaces peut avoir une certaine influence, et l'emploi des surfaces par autres facteurs. Le rôle de la matière des électrodes est considérable pour les gaz à pression à $h_q = 1,6-0,8 \mu$ convient le mieux. Dans les liquides, l'influence de la matière est couverte faible et élevée, lorsque la tension de rupture croît dans l'ordre aluminium—cuivre—acier inoxydable.

ВЛИЯНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОД НА НАПРЯЖЕНИЕ ПРОБОЯ

Г. ВАЙДА

РЕЗЮМЕ

Напряжение пробоя электрическим током зависит от ряда факторов. Исследуется — какое воздействие оказывает на напряжение пробоя материал электрод. Условия пробоя изоляционных материалов различного агрегатного состояния сводятся к некоторой формуле, выражающей нестабильность элементарных процессов, происходящих в изоляционных материалах, и детально исследуется, что в какой степени воздействуют на пробой элементарные процессы, протекающие на электродах. Согласно проведенным исследованиям наиболее эффективным является электростатическая эмиссия, кроме того в случае газов соответствующую роль может играть светозлектрическая эмиссия и вторичная эмиссия под воздействием положительных ионов.

На основе проведенных автором опытов — в согласии с теоретическими предположениями — нельзя наблюдать влияния материала электрод в случае твердых изоляционных материалов, а также в газа при атмосферных условиях. В последнем случае качество поверхности играет некоторую роль; целесообразнее всего использовать поверхность гладкостью $h_q = 1,6-0,8 \mu$. В случае жидкостей влияние материала уравнивается другими воздействиями. Значительную роль играет материал электрод в случае газов при высоких и низких давлениях; при этом напряжение пробоя возрастает по следующему порядку алюминий — медь — нержавеющая сталь.

THEORETICAL INVESTIGATION INTO MICRO-SEEPAGE

GY. KOVÁCS

CAND. OF TECHN. SC.

INSTITUTE FOR HYDRAULIC PLANNING, BUDAPEST

[Manuscript received July 16, 1957]

I. Introduction

It was a hundred years ago that DARCY, on the strength of investigations into the permeability of sand filters, established his still generally used law of underground seepage. According to his formula, published in 1856,

$$v = k I$$

i. e., percolation velocities are proportionate to the motive force, the hydraulic gradient.

Many investigations, based partly on theoretical considerations and partly on conclusions arrived at experimentally, have been undertaken during the past hundred years into the validity of this relation. Many investigators, who found *Darcy's* law corroborated by their own results, attempted to establish more reliable relations between the permeability coefficient k and the geophysical characteristics of the permeable layer. However, the number of investigators who obtained — both theoretically and experimentally — results contradicting *Darcy's* law, is almost equally great.

In consideration of the formal similarity between *Darcy's* law on the one hand, the relationship established for laminar flow in tubes by Hagen and Poiseuille on the other — both expressing velocity as a linear function of head — it was early realized that *Darcy's* law applied only to cases of laminar flow in the soil. Experiments performed by varying the velocity of flow produced in a given layer have further shown the proportionality factor k to cease to be constant also in the range of very low velocities, and have thus disproved the validity of the assumed linear relationship.

Although, as revealed by these investigations, the validity and applicability of DARCY's law are obviously confined to a range limited in both directions, only percolation phenomena involving velocities in excess of the upper limit have been examined, calculated and reported upon by investigators. The present paper is therefore devoted to the theoretical investigation

of low velocity percolation phenomena — referred to hereafter as micro-seepage. All natural groundwater movements undisturbed by artificial interference may in general be classified under this head; a better understanding of the laws governing such seepages is, therefore, of considerable significance for a general study of water economy.

The significance of the problem in Hungary is indicated also by the candidate's treatise by J. JUHÁSZ discussing a similar issue and written at the time this paper was published in Hungarian. The treatise has since appeared in print as well [10].

2. Validity of Darcy's law

The investigations to be described in the following were conducted on a purely theoretical basis, so that purely empirical data published in the literature which limit the range of DARCY's law on the strength of experiments could not be considered. However, since such limits are essential to further progress, we have to fix them by theoretical calculations. A detailed discussion of investigations into the range of validity will be omitted and, instead, reference will be made to two recent publications which give a thorough review of the subject. One of these is the chapter on considerations limiting the application of DARCY's law by S. LELIAVSKY (3, Vol. 1, Chapter 1, Section 2, Para. 3, p. 20), the other a paper published by L. LOVAS in 1954 (4).

Of late, G. HEINRICH and K. DESOYER studied the limits of *Darcy's* law (2). They point out that, in connection with underground flow, it is not enough to establish a relationship between the velocity, which appears as a consequential phenomenon, and — instead of the real causative forces — that visible, measurable value, i. e. the head, which is but an expression of the compound effect of the said forces.

Therefore, they establish the formula of the equilibrium of forces under universal conditions in which solid particles may have any shape, seepage coefficient varies from point to point and flow is unsteady.

Applying assumptions identical with those used also by DARCY in deriving his theorem (homogeneous layer, steady flow), and reducing the resulting general expression, *Darcy's* wellknown equation is obtained.

Although, as mentioned above, the investigations of HEINRICH and DESOYER related to the general case, they, too, applied a few limiting assumptions in the course of their theoretical considerations. Of these the following two are of importance for the present discussion: on the one hand, capillary forces are assumed to be insignificant, and other molecular forces (e. g. electrical), occurring in the very fine granular layer, may similarly be neglected. According to the second assumption, the straining effect of the solid grid

is sufficient to give rise to a "quasi-steady" flow even at low velocities where inertia forces in the fluid are negligibly small in comparison to other forces.

With the above assumptions, friction and mass forces and, together with these, the effects referred to as "quasi-mass forces" were studied by the said authors, and it was in respect of the operation of these forces that they verified theoretically the validity of DARCY's law.

From the investigations of HEINRICH and DESOYER — although conducted with an aim other than the determination of the validity range — the conclusion may be drawn that the relationships following from Darcy's law can be accepted as being characteristic of percolation phenomena only if, compared with friction and mass forces, the effect of other active forces is negligibly small. Owing to the significant influence of capillary and molecular forces at the lower boundary of this range, characteristic values following from DARCY's law differ considerably from observed ones. The upper limit is indicated by the increased effect of inertia forces.

Identical conclusions follow from the paper published by the present author together with D. E. MOSONYI on the investigation into the model law of percolation in 1952 (6). The said paper derives various model laws concerning hydrotechnical experiments by means of dynamical principles.

Assuming an incompressible fluid, four effects are generally involved in hydraulic phenomena: gravitational force, friction (viscous forces), inertia and surface tension or, using a more general term for the latter, molecular force. Model laws expressing the dynamic similarity of geometrically similar flow-types in two systems may also be written as the ratio of the corresponding forces, in the form of condition equations. Four condition equations must be satisfied simultaneously if it is intended to simultaneously consider the effect of the four above-mentioned forces. Investigations have, however, demonstrated that it is not possible to satisfy more than two condition equations, i. e. to consider simultaneously more than two forces, unless the length scale of model and prototype equals unity, i. e. if identical instead of similar phenomena are investigated.

Combining condition equations by pairs the well-known model laws are obtained. This operation, if performed for inertia and gravity forces, yields FROUDE's law. *Reynold's* law is obtained by combining condition equations following from inertia and friction (viscous) forces. The combination of equations characterizing inertia forces and surface tension results in WEBER's law.

This series is complemented by the quoted paper which points out that the simultaneous satisfying of condition equations derived from gravity and viscous forces yields a new invariant:

$$\frac{v \nu}{l^2 g} = \frac{v' \nu}{l'^2 g} = A \quad (1)$$

where v and v' are characteristic velocities corresponding in the two systems [m/sec],

l and l' are characteristic and corresponding lengths [m],

ν is the kinematic viscosity [m²/sec], and

g is gravity acceleration.

(The above model law was first developed by R. SPRONCK in 1932 (9), although he did not apply it yet to the determination of characteristics in percolation models.) This model law states the conditions of similarity in models of percolation phenomena. Scale models of this type are in most cases distorted since geometric similarity is violated by failing to reduce the particle sizes of the permeable layer according to the length scale adopted, and by using, as a rule, a material identical with that encountered under prototype conditions. A model law including also the degree of distortion may be derived from the invariant number by substituting the effective particle size of the layer for the characteristic length, i. e.

$$\frac{v \nu}{d^2 g} = \frac{v' \nu}{d'^2 g} = A_1 \quad (2)$$

Being geometrically similar, the heads in the two systems are equal, whence, and from Eq. (2), it follows further that the permeability coefficient included in *Darcy's* law is a constant characteristic of the soil, proportional to the square of the effective particle size.

Since this statement has been verified by having assumed a type of flow influenced appreciably by viscous and gravity forces only, the assumption includes at the same time a definition of the validity range for *Darcy's* law. (This conclusion following from the model law of percolating flow was first published by the authors in a paper submitted to the IAHR Congress, Dijon, 1956 (7).

Summing up the foregoing it is claimed that experimental observations have proved the boundaries of the validity range of *Darcy's* law to be related to measurable values of particle size and head. Theoretical investigations, on the other hand, are preferably conducted by considering force properties including movement. Various investigations of a similar character point uniformly to the conclusion that *Darcy's* law is applicable to flow types influenced appreciably by viscous and gravity forces only. The validity of the law is limited on the one side by the increased effect of molecular forces, on the other side by the point where the effect of inertia forces is no longer negligible.

3. Flow of water affected by molecular forces

As revealed by such investigations into the validity range of *Darcy's* law, theoretical discussions of flow types outside this range should consider, besides viscous and gravity forces, inertia or rather molecular forces as well. As mentioned previously, a great number of experimental data are available concerning the zone of flow types which are influenced by inertia forces and may be characterized by high head values. It is, however, extremely difficult to determine the characteristics of natural groundwater movement of the so-called micro-seepage, by direct measurements. Within this zone, where movement is influenced not only by viscous and gravity forces but molecular forces as well; the values to be measured for the establishment of pertinent relationships are exceedingly small and of an order of magnitude that is in many cases beyond the accuracy of the measuring instrument. Relationships established by empirical methods would, therefore, be highly unreliable so that a theoretical approach seems justified even if the latter involves rather crude approximating assumptions.

Adopting the reasoning of HEINRICH and DESOYER according to which a proper description of percolating water movement is impossible unless equilibrium conditions of acting forces are considered, the relationship expressing the equilibrium of forces will be adopted throughout as the basis of further investigations.

Of the forces influencing micro-seepage, gravity is one of the fundamental factors in general physics, and is therefore the most completely explored phenomenon in the realm of dynamics. Viscous friction is also of fundamental significance in hydraulics. Physical characteristics therefore have been determined by a great number of experiments. On the other hand, the effect of molecular forces influencing motion, together with their changes and characteristic physical quantities, are as yet partly unknown and partly but insufficiently defined. Prior to the detailed examination of micro-seepage it is, therefore, imperative to define the degree of approximation inevitable in allowing for the effect of molecular forces.

Of the molecular forces, the capillary force acting at the contact surface of water and air will be neglected, although the tube system formed by the interspaces between soil particles are of capillary size. It is, however, assumed that the groundwater table lies above the permeable layer, and thus above the capillary system. The contacting surface of water and air is thus sufficiently large to permit the neglect of the capillary effect. In the opposite case, i. e. if the groundwater table is within the permeable layer, the capillary effect may still be separated from other forces and can be allowed for by correspondingly reducing the head used in computing the gradient (see (3) Vol. 1, p. 12, note 2). Molecular forces occurring between the fluid and the

bounding solid wall are commonly referred to by the inclusive term adhesion. A great number of experimental data has been published as to different values of the force-component vertical to the surface of contact, for different fluids and walls. On the other hand, no data are available concerning the resistance against a displacement of the fluid parallel to the bounding surface and due to the molecular effect between the fluid and the solid wall.

Adhesion was formerly considered as molecular mass attraction. If this is correct, the force acting on fluid particles varies inversely as the square of the distance from the wall.

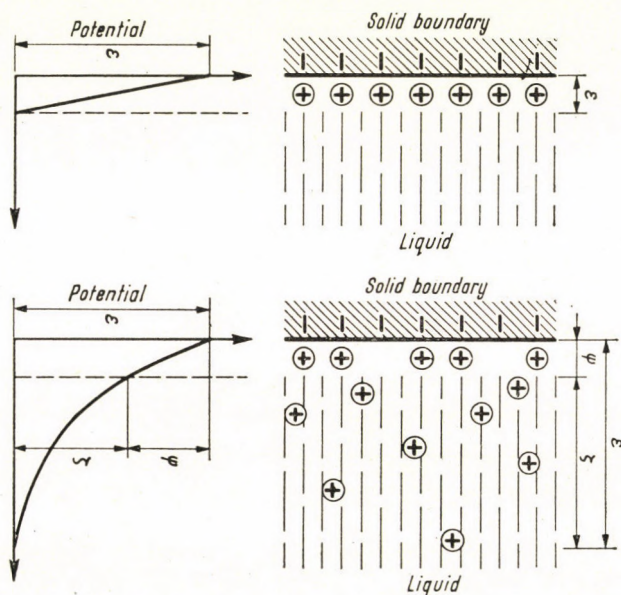


Fig. 1. Sharply defined and diffuse double layers and the variation of potential therein

The electric double layer (field) assumed in investigations into electro-osmotic and electro-phoretic phenomena, and defined first by QUINCKE in 1861, permits a new interpretation of adhesion (8). According to this theory, the positively or negatively charged parts of the adhere to the solid wall (whether the positive or the negative, will depend on the wall's charge relative to the fluid) while the side which has a charge identical with that of the wall is the wall is turned away. Molecules thus arranged form the electric double layer.

Formerly, a linear drop of the resulting potential through the very thin double layer was assumed (v. Fig. 1/a). On the other hand, recent investigations have demonstrated that, within the double layer, also particles carrying a charge identical with that of the surface of the double layer can be found

in the fluid. Consequently, the potential drop occurs over a layer, the thickness of which is several times that of the double layer. The drop within this layer is by no means linear; a steep initial drop is followed by a moderate one (see Fig. 1/b), (1). Inspecting the variation shown in the figure, the distribution of the adhesive force exerted by the wall on fluid particles appears to closely resemble that obtained by assuming mass attraction effects.

The above conclusions concerning molecular forces apply to straight walls. Investigating the potential drop in tubes with circular cross-sections it should be realized, that, proceeding towards the axis of the tube, the reduc-

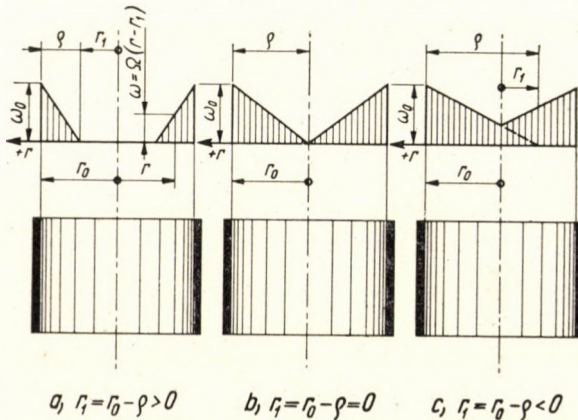


Fig. 2. Assumed distribution of shear stresses due to molecular forces

tion of the length of the annular section, defined by points at equal distances from the wall, is quadratic.

Together with the distribution shown in Fig. 1/b, this consideration leads to the conclusion that, in tubes with a circular cross-section, the variation of molecular forces in a direction perpendicular to the tubewall may be assumed to be approximately linear.

Molecular forces perpendicular to the tube wall were the concern of both the mass-attraction theory and the electric double-layer theory. For the present investigation, however, the determination of the longitudinal force or rather the shearing stress, which resists any relative displacement of fluid particles at any given distance from the wall, would be of interest. As it is no aim of the present paper to attempt a quantitative analysis of micro-seepage, and since solely a qualitative investigation into the nature of the phenomenon is intended, it may be enough to assume a linear stress distribution having maximum value ω_0 along the wall and diminishing towards the axis in the tube of circular cross-section. The point where molecular forces are no more felt lies at distances ρ and r_1 , from the tube wall and from the tube axis, respectively

(v. Fig. 2). At a distance r from the tube axis, within the range

$$r_1 < r < r_0$$

the shear due to molecular forces and resisting movement may be expressed as

$$\omega = \Omega (r - r_1), \quad (3)$$

where

$$\Omega = \frac{\omega_0}{r_0 - r_1}. \quad (4)$$

On the strength of the above considerations further investigations of percolating water movement will be based on the assumption of a specific resistance ω_0 per unit surface along the solid wall, due to molecular forces influencing movement. Proceeding towards the axis of circular tubes, this value diminishes linearly and becomes zero at a distance ϱ from the tube wall. The movement of water particles away from this layer and towards the interior of the tube is not influenced by molecular forces to any appreciable extent. Remembering the analogy existing between the capillary tube system and the interstices of a granular layer, this zone corresponds to the stress-free pore volume of the soil.

4. Flow in small-diameter tubes under the simultaneous influences of gravity, friction and molecular forces

The range of micro-seepage under consideration is bounded on one side by flow types satisfying Darcy's law. In the case of these types, flow may be assumed to be influenced appreciably by gravity and friction only, while the effect of molecular forces may be neglected. Gravity tending to accelerate the water particles is counteracted by internal friction increasing with velocity. Dynamic equilibrium of the two forces is expressed by the well-known *Hagen — Poiseuille* equation as :

$$I \gamma l \pi r^2 = - 2 \pi r l \eta \frac{dv}{dr} \quad (5)$$

where

- I = hydraulic gradient
- γ = specific weight [kg/cu · m]
- η = dynamic viscosity [kg sec/sq · m]
- $\frac{dv}{dr}$ = variation of flow velocity along the radius of the tube [1/sec] and
- r, l = radius and length, respectively, of cylinder under consideration, concentric with the tube [m].

Denoting the radius of the tube by r_0 , the distribution of velocities along the diameter may be described as

$$v_0 = \frac{\gamma I}{4\eta} (r_0^2 - r^2) \quad (6)$$

and the rate of flow conveyed in the tube (i. e. discharge) as

$$Q_0 = \frac{\gamma I}{8\eta} \pi r_0^4 \quad (7)$$

Flow stops at the other boundary of micro-seepage. Molecular forces are in equilibrium with gravity. No internal friction (viscous forces) may be considered in this case as static conditions prevail. For a cylinder of radius r equilibrium of the two forces may be written as

$$I \gamma l \pi r^2 = \omega 2 \pi r l = \Omega (r - r_1) 2 \pi r l \quad (8)$$

or, considering equilibrium conditions for the entire tube cross-section, we obtain

$$I \gamma l \pi r_0^2 = \omega_0 2 \pi r_0 l = \Omega (r_0 - r_1) 2 \pi r_0 l \quad (8a)$$

The effect of molecular forces does not extend beyond a layer of the thickness ϱ , along the wall. No equilibrium between molecular forces and gravity is therefore possible unless the effect extends as far as the tube axis, i. e. there is no stressfree volume in the tube or, according to the analogy previously mentioned, there are no stress-free pores in the granular layer. Considering tubes, this condition may be expressed in a mathematical form as

$$\varrho \geq r_0 \quad (9)$$

If this condition is satisfied, the smallest gradient inducing movement and the limit gradient below which there is no movement, may be computed as

$$I_{\text{lim}} = \frac{2 \omega_0}{\gamma r_0} \quad (10)$$

The necessary existence of a limit gradient thus defined was first shown by E. MOSONYI in 1951 (5).

Within the range defined by the two above limits gravity is counteracted by both internal friction (viscosity) and molecular forces; therefore, in order to properly describe micro-seepage, the equilibrium of the three forces is ex-

pressed as :

$$I\gamma l\pi r^2 = 2\pi r l \left(\omega - \eta \frac{dr}{dr} \right). \quad (11)$$

Considering ω as a function of r , and substituting correspondingly from Eq. (3) we obtain

$$I\gamma l\pi r^2 = 2\pi r l \left[\Omega(r - r_1) - \eta \frac{dv}{dr} \right]. \quad (12)$$

Therefore, within the layer influenced by molecular forces the radial distribution of velocities may be computed by the following differential equation :

$$-dv = \frac{1}{\eta} \left(\frac{I\gamma}{2} r - \Omega r + \Omega r_1 \right) dr \quad (13)$$

With due regard to the boundary condition according to which no flow occurs at the tube wall, i. e. velocity is zero ($v = 0$ if $r = r_0$), the distribution of velocities in the said layer is

$$v = \frac{1}{2\eta} \left[\left(\frac{I\gamma}{2} - \Omega \right) (r_0^2 - r) + 2\Omega r_1 (r_0 - r) \right] \quad (14)$$

As expressed by the condition given in Eq. (9), depending upon relative values of tube radius r_0 , and the depth of the layer influenced by molecular forces ϱ , micro-seepage can be divided into two types. The rate of flow conveyed in the tube has been determined with due regard to this distinction.

To the type characterized by the absence of a stress-free volume the following inequality applies :

$$r_1 = r_0 - \varrho < 0 \quad (15)$$

At the boundary of the two types

$$r_1 = r_0 - \varrho = 0 \quad (16)$$

For tubes with a stress-free volume :

$$r_1 = r_0 - \varrho > 0 \quad (17)$$

The rate of flow has been computed by the equation

$$Q = \int_0^{r_0} 2\pi r v dr \quad (18)$$

well known from the deduction of *Hagen — Poiseuille's* formula.

□ a) *The boundary case of types under full stress and those with stress-free volume.*

The relation expressed by Eq. (14) can be applied without further restrictions to the determination of flow velocity only in the boundary case characterized by Eq. (16). In this case, ϱ equals the radius of the tube, r_1 is zero, and, consequently, the third term at the righthand side of Eq. (14) is also zero. The velocity formula is thus,

$$v_1 = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{I\gamma}{2} - \Omega \right) (r_2^0 - r^2) \quad (19)$$

The discharge conveyed in the tube

$$Q_{11} = \frac{\pi}{\eta} \left(\frac{I\gamma}{2} - \Omega \right) \int_0^{r_0} (r_0^2 r - r^3) dr = \frac{\pi}{\eta} \frac{r_0^4}{4} \left(\frac{I\gamma}{2} - \Omega \right). \quad (20)$$

The above expression yields zero discharge if the two terms in brackets at the right-hand side of the equation are equal, i. e. if

$$\frac{I_{01}\gamma}{2} = \Omega \quad (21)$$

As will be shown subsequently, no-discharge conditions do not always ensue when ϱ becomes zero in the above equation. The value of discharge can become zero also in cases where the distribution of velocity, as given by the equation, is such that both negative and positive velocities occur in the cross-section. In cases of this kind, the back flow corresponding to the negative velocity would become equal to the positive flow, and their sum would be zero. However, considering the problem from a physical aspect, the possibility of back flow may be disregarded, since molecular forces, being of the passive type, are incapable of inducing flow contrary to gravity which produces movement, and only tend to retard existing movement. Therefore, both the velocity formula, i. e. Eq. (14), and the discharge computed therefrom, can be accepted without restriction only up to the limit within which the calculated velocity does not become negative at any point of cross-section. In computing the discharge beyond this limit, the positive portion of the velocity-distribution diagram will be considered only, while — in the negative one — velocity, as well as discharge, will be assumed to be zero.

As can be seen without further proof, in case $\varrho = r_0$, the velocity determined by Eq. (19) is obviously zero for any value of r if the condition expressed by Eq. (21) prevails, i. e. no negative velocities will occur until the gradient

remains steeper than I_{01} . Eqs. (19) and (20) are thus defined for the entire gradient range

$$J \geq \frac{2\Omega}{\gamma} = J_{01}$$

and flow will stop if conditions as expressed by Eq. (21) ensue.

Since $r_1 = 0$ if $\varrho = r_0$, Eq. (4) may be rewritten :

$$\Omega = \frac{\omega_0}{r_0}$$

Comparing the above expression with Eq. (21) it will be seen that flow actually discontinues at the limit gradient defined by Eq. (10), i. e.

$$I_{01} = I_{\text{lim } 1} \quad (22)$$

b) *Flow affected by molecular forces extending over the entire tube cross-section.*

The type under consideration is characterized by the inequality expressed by Eq. (15), i. e., the sign of r_1 is negative. Introducing the absolute value of r_1 into the third term on the right-hand side of Eq. (14), the sign of the term is reversed in this range :

$$v_2 = \frac{1}{2\eta} \left[\left(\frac{I\gamma}{2} - \Omega \right) (r_0^2 - r^2) = 2\Omega |r_1| (r_0 - r) \right] \quad (23)$$

(It should be noted here that as regards the distribution of molecular effects along the diameter two possible patterns may be assumed in this range. According to the first the stress diminishes linearly towards the tube axis and attains a value Ωr_1 there. Beyond the axis, effects of the opposite wall are felt only, the latter being nearer to the point under consideration. The pattern of distribution along the diameter is symmetrical about the tube axis. On the other hand molecular effects due to the wall may be assumed to extend to a distance r_1 beyond the tube axis. Over the central section of $2 r_1$ width, effects of the two walls are thus superimposed. A linear reduction occurs in this case over the distance $r_0 > r > (r_1)$ only and, consequently, the velocity formula — Eq. (23) — applies likewise to this distance only. The stress due to molecular forces is constant and has a value of $2\Omega r_1$, if $r < |r_1|$.)

No observation data are available as to which of the two foregoing assumptions is more correct. The development of an accurate method of computation regarding magnitude is, however, beyond the scope of the present paper, the sole aim being to explore the nature of the phenomenon. Since the general

relationships developed on the basis of either assumption show no significant discrepancy, the question may be left open for the present and should be examined in the course of future experiments. Although the superposition of effects due to the opposite walls is felt to be more likely theoretically, a linear change from tube wall to tube axis of stresses due to molecular forces will be assumed in the following in order to simplify computations. With this assumption, Eq. (23) becomes valid for the entire cross-section.

Integrating Eq. (18) with due regard to the velocity distribution indicated by Eq. (23) the discharge

$$\begin{aligned}
 Q_{21} &= \frac{\pi}{\eta} \left[\left(\frac{I\gamma}{2} - \Omega \right) \int_0^{r_0} (r_0^2 r - r^3) dr - 2\Omega |r_1| \int_0^{r_0} (r_0 r - r^2) dr \right] = \\
 &= \frac{\pi}{\eta} \left[\left(\frac{I\gamma}{2} - \Omega \right) \frac{r_0^4}{4} - \Omega \frac{|r_1| r_0^3}{3} \right]. \quad (24)
 \end{aligned}$$

As can be seen, the gradient pertaining to zero discharge is steeper than that derived from Eq. (15):

$$I_{02} = \frac{2\Omega}{\gamma r_0} \left(r_0 + \frac{4}{3} |r_1| \right) > I_{\text{lim}2} = \frac{2\Omega}{\gamma r_0} (r_0 + |r_1|) \quad (25)$$

Since no back flow can be considered Eq. (24) applies only as long as the gradient is sufficient to ensure positive velocities for any value of r substituted into Eq. (23). The full velocity diagram is composed of two parabolas of the second degree, and a point of singularity arises where the two branches meet, i. e. at the tube axis. Curves of the second degree show no inflection point; consequently, the diagram has no negative area unless the ordinate of the point of singularity is negative. The range of validity of Eq. (24) may therefore be defined by making Eq. (23) equal to zero at the point where $r = 0$. Hence

$$J_2 = \frac{2\Omega}{8r_0} (r_0 + 2|r_1|) \quad (26)$$

For any gradient steeper than the above the discharge is obtained from Eq. (24), while — for flatter gradients — only the positive area of the velocity diagram can be considered. The radius r_2 pertaining to the zero-axis of the velocity diagram

$$r_2 = r_0 \frac{J_2 - J_1}{J - \frac{2\Omega}{\gamma}} \quad (27)$$

Therefore, the condition of no-flow will really ensue if the value of r_2 becomes equal to r_0 . However, in this case the fraction on the right-hand side of Eq. (27) equals unity, wherefrom the gradient at which no flow occurs may be computed :

$$I_{\text{lim}2} = \frac{2\Omega}{\gamma r_0} (r_0 + |r_1|). \quad (28)$$

The limit gradient thus obtained is identical with that calculable from Eq. (10) with the aid of Eq. (4).

In the range $I_2 > I > I_{\text{lim}2}$, discharge can be computed by integrating Eq. (24) between the limits r_0 and r_2 :

$$Q_{22} = \frac{\pi}{\eta} \left[\left(\frac{I\gamma}{2} - \Omega \right) \left(\frac{r_0^4}{4} - \frac{r_0 r_2^2}{2} + \frac{r_2^4}{4} \right) - \Omega |r_1| \left(\frac{r_0^3}{3} - r_0 r_2^2 + \frac{2}{3} r_2^3 \right) \right]. \quad (29)$$

c) *Tubes with stress-free volume.*

A stress-free volume is encountered within the tube, whenever the range of molecular forces, ϱ , is smaller than the diameter of the tube. Eq. (14) describing the velocity distribution applies only for the layer of thickness ϱ , adjoining the wall. A condition of dynamic equilibrium prevails between gravity and viscous forces acting on water filaments moving in the tube between the axis and this layer. The distribution of velocities within this section may therefore be determined by the *Hagen—Poiseuille* equation, taking of course into consideration the boundary condition under which velocity at the point $r = r_1$ will be equal to the value derived from Equation (14) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{for } r_0 > r > r_1 = r_0 - \varrho, \\ v_3 = \frac{1}{2\eta} \left[\left(\frac{I\gamma}{2} - \Omega \right) (r_0^2 - r) + 2\Omega r_1 (r_0 - r) \right]; \\ \text{for } r_1 = r_0 - \varrho > r > 0, \\ v_3 = \frac{1}{2\eta} \left[\frac{I\gamma}{2} (r_0^2 - r^2) - \Omega (r_0^2 - r_1^2) + 2\Omega r_1 (r_0 - r_1) \right] \end{array} \right\} \quad (30)$$

Solving the integral with due regard to the velocity distributions defined by Eqs. (30) the discharge conveyed by the tube is

$$Q_{31} = \frac{\pi}{\eta} \left[\frac{I\gamma}{8} r_0^4 - \frac{\Omega}{4} (r_0^4 - r_1^4) + \frac{\Omega}{3} r_1 (r_0^3 - r_1^3) \right] \quad (31)$$

The gradient, depending on the value of Ω , which, substituted into Eq. (31)

yields the condition of no-flow, is therefrom

$$I_{63} = \frac{8\Omega}{\gamma} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{12} \frac{r_1^4}{r_0^4} \right). \quad (32)$$

A careful examination of the forces influencing motion reveals this value as obviously fictitious. Since the effect of molecular forces extends to but a part of the tube cross-section, any equilibrium between gravity and the said forces is impossible. Consequently, in this case no limit gradient can be spoken of.

Disregarding the negative area of the velocity diagram it can be stated that, with the gradient tending towards zero, the discharge value approaches that of a tube with a radius r_1 :

$$Q_{33} = \frac{\pi I \gamma}{8 \eta} r_1^4 \quad (33)$$

In a tube having a stress-free volume, molecular forces will act, therefore, like an orifice constricting the tube's cross-section. In case of no gradient the degree of constriction will become equal to the entire thickness of the layer exposed to the molecular forces, whereas — for steeper slopes — the constriction becomes correspondingly less. The stationary layer may be computed as a function of other characteristics by determining within the interval $r_0 > r > r_1$, the radius r_3 , i. e. the zero point of the velocity diagram:

$$r_2 = \frac{2 r_1}{1 - \frac{J\gamma}{2\Omega}} \quad (34)$$

The discharge may be computed according Eq. (31) only until the gradient is sufficient to prevent the occurrence of negative ordinates in the velocity diagram. This limit is characterized by the fact that radius r_3 , the abscissa of the zero point of the velocity diagram, is equal to radius r_0 of the tube. The gradient in question is therefrom obtained as

$$J_3 = \frac{2\Omega}{\varphi r_0} (r_0 - r_1) \quad (35)$$

In case of gradients steeper than the above, the discharge may be derived from Eq. (31), while in the range $I_3 > I > 0$ the discharge formula is obtained by integration not between the limits r_0 and 0 but between r_3 and 0:

$$Q_{sz} = \frac{\pi}{\eta} \left[\frac{I\gamma}{8} r_3^4 - \frac{\Omega}{4} (r_3^4 - r_1^4) + \frac{\Omega}{3} r_1 \left(\frac{2}{3} - r_1^3 \right) \right]. \quad (36)$$

5. Micro-seepage in permeable layers

In order to apply the relationship describing flow in small-diameter tubes influenced by molecular forces to the general case of percolation in permeable layers, interstices of the latter will be considered as a multitude of tubes having circular cross sections. Although, according to literary data (H. LAMB, BOUSSINESQ, SLICHTER, see [3] Vol. 1, Chapter 1, Section 2, Part 2.) percolation coefficients derived theoretically for tubes having triangular cross-sections give a fairer approximation of flow in the irregular interstices of the soil, for the present investigation a tube system of circular cross-section has been assumed. This is deemed permissible since, instead of determining definite values, only a comparison between micro-seepage and flow influenced by molecular forces is intended. It is believed that the ratio thus obtained is affected to a lesser degree by the cross-sectional shape of the conveying system than the characteristics of motion proper. It should be remembered, furthermore, that the aim of the present study is a tentative definition of the laws governing the phenomenon which are hardly influenced by these secondary effects. All conveniences offered by the assumption of a circular cross-section will therefore be used to advantage for the present investigation.

In substituting a tube system for the interstices of the permeable layer it should be considered first that, in a soil sample with a cross-sectional area F in a direction perpendicular to that of flow and a pore volume n , the cross section available for percolating flow is

$$E_p = n F \quad (37)$$

The open cross-section over unit area is taken as composed of s tubes of r_0 radius each. The number of tubes composing the substituting system may thus be computed as a function of the pore volume and the tube radius :

$$F_\beta = n F = r_0^2 \pi F s \quad (38)$$

$$s = \frac{n}{r^2 \pi}$$

According to *Darcy*, the discharge percolating through a cross-sectional area F is :

$$Q_F = F k I \quad (39)$$

This discharge may also be calculated if we multiply the discharge, conveyed by a single tube of radius r_0 , by the number of tubes over area F :

$$Q_F = F s Q \quad (40)$$

Combining Eqs. (39) and (40) we obtain the permeability coefficient :

$$k = \frac{s Q}{I} = \frac{n}{r_0^2 \pi} \frac{Q}{I}. \quad (41)$$

Deriving the discharge conveyed by a single tube from the *Hagen—Poiseuille* formula we obtain the permeability coefficient valid for the case of equilibrium between gravity and friction, while the substitution of different discharges characteristic for different ranges of micro-seepage yields different apparent permeability coefficients which enable us to compare microseepage and that following from *Darcy's law*. The following k coefficients have thus been established :

type of flow described by Darcy's law

$$k_0 = \frac{n \gamma}{8 \eta} r_0^2; \quad (42)$$

micro-seepage

the boundary case of types of flow with and without stress-free pore volumes

$$k_{11} = \frac{n \gamma}{8 \eta} r_0^2 \left(1 - \frac{2 \Omega}{I \gamma} \right); \quad (43)$$

flow type with the entire pore volume under stress

$$\begin{aligned} \text{for } I \geq I_2 = \frac{2 \Omega}{\gamma r_0} (r_0 + 2 |r_1|), \\ k_{21} = \frac{n \gamma}{8 \eta} r_0^2 \left(1 - \frac{2 \Omega}{3 \gamma} - \frac{8 \Omega}{3 I \gamma} \frac{|r_1|}{r_0} \right); \end{aligned} \quad (44)$$

$$\text{for } I_2 > I > I_{\text{lim}2} = \frac{2 \Omega}{\gamma r_0} (r_0 + |r_1|),$$

$$\begin{aligned} k_{22} = \frac{n \gamma}{8 \eta} r_0^2 \left[\left(1 - \frac{2 \Omega}{I \gamma} \right) \left(1 - 2 \frac{r_2^2}{r_0^2} + \frac{r_2^4}{r_0^4} \right) - \right. \\ \left. - \frac{8 \Omega}{3 I \gamma} \frac{|r_1|}{r_0} \left(1 - 3 \frac{r_2^2}{r_0^2} + 2 \frac{r_2^3}{r_0^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (45)$$

flow with stress-free pore volume

$$\text{for } I \geq I_3 = \frac{2 \Omega}{\gamma r_0} (r_0 + r_1),$$

$$k_{31} = \frac{n \gamma}{8 \eta} r_0^2 \left[1 - \frac{2 \Omega}{I \gamma} \left(1 - \frac{r_1^4}{r_0^4} \right) + \frac{8 \Omega}{3 I \gamma} \frac{r_1}{r_0} \left(1 - \frac{r_1^3}{r_0^3} \right) \right] \quad (46)$$

for $I_3 > I > 0$

$$k_{32} = \frac{n \gamma}{8 \eta} r_0^2 \left[\frac{r_3^4}{r_0^4} - \frac{2 \Omega}{I \gamma} \left(\frac{r_3^4}{r_0^4} - \frac{r_1^4}{r_0^4} \right) + \frac{8 \Omega}{3 I \gamma} \frac{r_1}{r_0} \left(\frac{r_3^3}{r_0^3} - \frac{r_1^3}{r_0^3} \right) \right] \quad (47)$$

for $I \rightarrow 0$

$$k_{33} \rightarrow \frac{n \gamma}{8 \eta} r_0^2 \frac{r_1^4}{r_0^4} \quad (48)$$

Micro-seepage may preferably be compared with percolation of the type described by *Darcy* by establishing the ratio of permeability coefficients:

$$\alpha_{in} = \frac{k_{in}}{k_0} \quad (49)$$

These ratios may be computed by the relationships given below. Individual ratios will be denoted by indices identical with those used in deriving percolation coefficients. The trend of variation in α is also plotted against head in Fig. 3. Values of α are as follows:

$$\alpha_0 = 1 \quad (50)$$

$$\alpha_{11} = \left(1 - \frac{2 \Omega}{I \gamma} \right) \quad (51)$$

$$\alpha_{21} = \left[1 - \frac{2 \Omega}{I \gamma} - \frac{8 \Omega}{3 I \gamma} \frac{|r_1|}{r_0} \right]; \quad (52)$$

$$\alpha_{22} = \left[\left(1 - \frac{2 \Omega}{I \gamma} \right) \left(1 - 2 \frac{r_2^2}{r_0^2} + \frac{r_2^4}{r_0^4} \right) - \frac{8 \Omega}{3 I \gamma} \frac{|r_1|}{r_0} \left(1 - 3 \frac{r_2^3}{r_0^3} + 2 \frac{r_2^3}{r_1^3} \right) \right]; \quad (53)$$

$$\alpha_{31} = \left[1 - \frac{2 \Omega}{I \gamma} \left(1 - \frac{r_1^4}{r_0^4} \right) + \frac{8 \Omega}{3 I \gamma} \frac{r_1}{r_0} \left(1 - \frac{r_1^3}{r_0^3} \right) \right]; \quad (54)$$

$$\alpha_{32} = \left[\frac{r_3^4}{r_0^4} - \frac{2 \Omega}{I \gamma} \left(\frac{r_3^4}{r_0^4} - \frac{r_1^4}{r_0^4} \right) + \frac{8 \Omega}{3 I \gamma} \frac{r_1}{r_0} \left(\frac{r_3^3}{r_0^3} - \frac{r_1^3}{r_0^3} \right) \right] \quad (55)$$

$$\alpha_{33} \rightarrow \frac{r_1^4}{r_0^4} \quad (56)$$

The trend of variation in α having been established, the relationship between velocity and head may also be determined. This method of presentation, frequently used for problems of a similar nature, clearly indicates the different characters of micro-seepage and percolation following *Darcy's law*, respectively. (Fig. 4.)

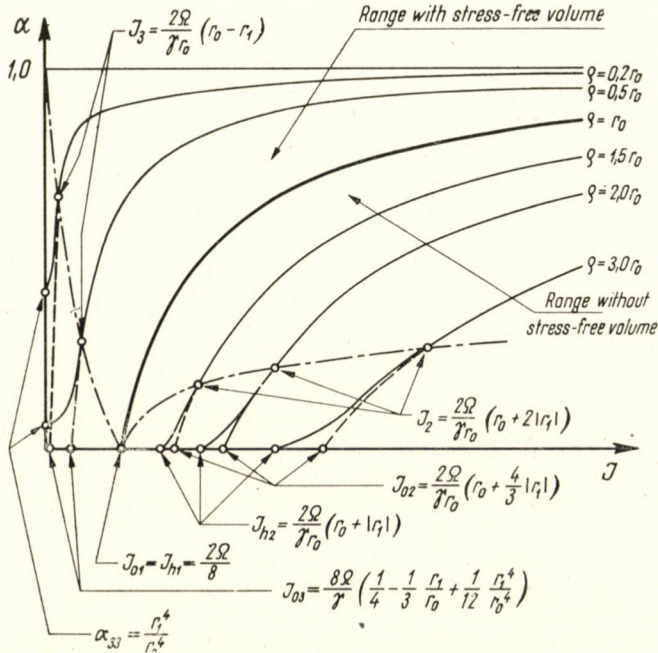


Fig. 3. Variation of $\alpha = \frac{k}{l_0}$ values with head (gradient)

Conclusions

The validity-range of *Darcy's law* is investigated in the first part of the paper. Experiments reported in the literature are reviewed showing, on the one hand, that a linear relationship between velocity and head in coarse-grained layers cannot be accepted even by way of approximation, and, demonstrating, on the other hand, that — even in respect of one and the same layer — *Darcy's law* is valid only between two well defined gradients. Relying partly on the investigations of HEINRICH and DESOYER, partly on studies conducted together with Dr. E. MOSONYI and published previously, the author attempts to explain the validity range of the linear percolation law by determining the effect of forces involved. Theoretical considerations have led to the conclusion that *Darcy's law is applicable as a fair approximation*

for describing percolation phenomena only if in comparison with gravity and friction all other forces influencing movement are negligible. At the upper limit of the velocity range inertia forces exert increased influence, while the lower limit is indicated by increased molecular effects.

Beyond the validity range of the linear percolation law investigators have attempted to determine the relationship between velocity and head by experimental methods only. Gradients in the region of movements governed

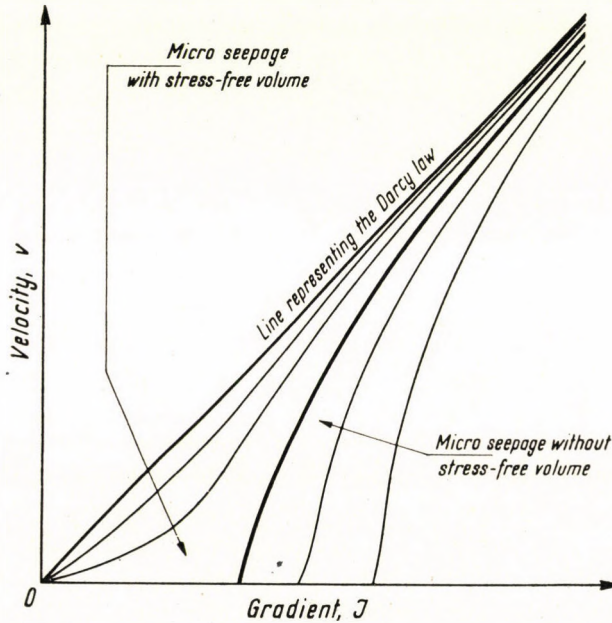


Fig. 4. Relation between velocity and head (gradient) in the range of micro-seepage

by molecular forces are so small that the head in the experimental equipment hardly exceeds, or remains within, the limits of error in surface measurements. Consequently, relationships determined experimentally apply, almost without exception, to the range of high gradients i. e., to flow-types in which the effect of inertia forces is predominant. Efforts aimed at a theoretical investigation of micro-seepage are, therefore, by no means superfluous, and a *research into the nature of laws governing these flow types is well justified* — although, owing to the lack of experimental measurements, no formulae suitable to numerical computation can as yet be given.

Of the molecular forces, *surface tension* at the contact-surface of water and air *may be neglected*. In case of a submerged layer the perimeter is so small in relation to the area of contact that capillary forces may be neglected, whereas — in case of a water surface within the layer — the effect of the

capillary force may be eliminated from further investigations by means of a reduction to be determined on the strength of previous experiments.

The *effect of the molecular force* acting at the contact of fluid and solid wall *diminishes with increasing distance from the wall*. Whether we explain this effect by mass attraction or by an *electric double layer* formed along the wall, the reduction in a tube of circular cross-section may, *with a fair approximation, be assumed to be linear*.

By establishing the formula of the equilibrium between gravity, internal friction and the molecular force so defined, we are in a position to determine the velocity distribution brought forth in tubes of circular cross-section by micro-seepage-like flows. As regards the character of movement, distinction must be made between tubes in which the effect of molecular forces extends beyond the tube axis and tubes having a stress-free volume at the centre. A considerable simplification of calculation enables us to treat the boundary case of the two conditions separately. The velocity diagram has also negative ordinates in the range of low gradients. However, *molecular forces being passive in nature, they only tend to retard movement induced by the active force, i. e. gravity, and cannot induce backflow*. Within the above mentioned ranges flow types induced by gradients higher, or lower than a definite limit must therefore be considered separately. The limit value is the gradient at which an intermediate zero value occurs in the velocity diagram. In case of gradients higher than this limit the entire velocity diagram, while in cases of lower ones only its positive section can be used in computing discharge. With due regard to validity limits, *we can determine the relation existing between the discharge in the tube on the side and the characteristic values of tube and forces on the other*.

Substituting a water-conveying system of tubes for the interstices of the permeable soil layer the relationships between the physical properties of the layer and the constants of the tube system can be computed. On basis of these relationships the *apparent permeability coefficient* can be obtained for different ranges of micro-seepage as the ratio of flow velocity and gradient. *Besides the magnitude of the molecular forces and the characteristics of the substituted tube system the said coefficient depends also upon the gradient*, and is thus in contrast with the permeability coefficient of Darcy, which is independent of the gradient. Dividing the said permeability coefficients by the Darcy coefficient computed for corresponding conditions, a *ratio depending upon the gradient is obtained which presents a clear indication of the discrepancy between micro-seepage and percolation types following a linear relationship* (Fig. 3.).

Having thus established the law governing the variation of a according to gradient, the character of the *relationship between velocity and gradient* — usually plotted in investigations of percolation phenomena — *may be determined also for the case of micro-seepage*. A deeper insight into the character

of the relation and the resulting limit values as well as the necessary further division of the range of micro-seepage facilitate experimental work indispensable for the further study of the problem. Planning of experiments, the determination of values to be measured and of the number of measurements to be made are greatly aided by the exploration of relationships involved. If the above conclusions, arrived at theoretically, are confirmed by measurements, the number of difficult observations may significantly be reduced.

Movements of groundwater in the Hungarian plains may generally be classified as falling into the group of micro-seepage. The continued study and early solution of the problem will, therefore, greatly promote investigations into the waterhousehold of the soil.

REFERENCES

1. ERDEY-GRUZ, T.—SCHAY : Elméleti fizikai kémia. (Theoretical Physical Chemistry (Tankönyvkiadó Vállalat, (Publishing House for Textbooks), Budapest, 1954.
2. HEINRICH, G.—DESoyer, K. : Hydromechanische Grundlagen für die Behandlung von stationären und instationären Grundwasserströmungen. Ingenieur Archiv, first part, 1955. 2 ; 2. rész 1956. 2.
3. LELIAVSKY, S. : Irrigation and Hydraulic Design. Vol. I : General Principles of Hydraulic Design. Chapman & Hall Ltd. London, 1955.
4. LOVAS, L. : A talaj átteresztőképességi együtthatójára vonatkozó újabb vizsgálati eredmények. (Recent Investigations into the Permeability Coefficient of Soils) Hidrológiai Közöny, 1954. Nos. 9—10.
5. MOSONYI, E. : Hozzászólás L. A. Eliava: Tisza-csatornázás legfontosabb hidrológiai problémái. (Comments upon the paper: "Main Hydrological" Problems of the Canalization of the Tisza River." by L. A. Eliava) Communications of the Technical Department of the Hungarian Academy of Sciences, Vol. II, No. 4.
6. MOSONYI, E.—KOVÁCS, GY. : Kismintatörvények a nehézségi és sűrűdőlőerő együttes figyelembevételére. (Model laws for the simultaneous consideration of gravity and viscous forces). Hidrológiai Közöny, 1952. Nos. 7—8.
7. MOSONYI, E.—KOVÁCS, GY. : Loi des modèles réduits de filtration. Manuscript, Presented at the IAHR Congress, Dijon, 1956.
8. REMENIERAS, G. : Application de l'électroosmose à l'exécution de certains travaux en terrain aquifères. La Houille Blanche, 1949. num. spec. A.
9. SPRONCK, R. : La similitude hydrodynamique et les essais sur modèles. Annales des Travaux Publiques de Belgique, 1932.
10. JUHÁSZ J. : A szivárgás vizsgálata. (An Investigation into Seepage.) Hidrológiai Közöny 1958, No. 1.

SUMMARY

In the introductory part of this paper the Darcy law is shown to be ill suited for the fair description of flow phenomena involved in the percolation process, unless all forces influencing motion except gravity and friction can be neglected. The validity range is limited at the upper side by the increased effect of inertia forces, while at the lower boundary molecular forces are no more negligible.

Studying the range influenced by molecular effects, *i. e.*, the range of micro-seepage, it may be stated, that the molecular force between the solid boundary and the liquid decreases with the distance from the wall. Regardless whether mass attraction or an electric double layer is given as the explanation of the phenomenon, the decrease may with fair approximation be assumed as linear in conduits having a circular cross-section.

Considering equilibrium conditions between molecular forces, gravity and viscous forces, the velocity distribution in circular conduits can be determined for the case of micro seepage and the relation between discharge and force characteristics can be established.

Representing interstices of the permeable layer by a conduit system, constants of the latter and soil characteristics of the layer can be interrelated. Proceeding in this basis the virtual permeability coefficient of micro seepage may be established as the ratio of gradient and velocity. The comparison of the latter and of the permeability coefficient by Darcy can well be used for the description of flow conditions within this range.

THEORETISCHE UNTERSUCHUNG DER MIKROFILTRATION

GY. KOVÁCS

ZUSAMMENFASSUNG

Einleitend stellt der Bericht fest, das Gesetz von Darcy eignet sich nur dann mit guter Annäherung zur Erfassung der Sickerungserscheinungen, wenn neben der Schwerkraft und der Reibung die übrigen auf die Strömung wirkenden Kräfte vernachlässigt werden können. An der oberen Grenze des Gültigkeitsbereichs steigt der Einfluss der Trägheit, während die untere Grenze durch die zunehmende Einwirkung der Molekularkräfte gekennzeichnet ist.

Eine Untersuchung dieses letzteren Bereichs — der Mikrofiltration — führt zu der Erkenntnis, der Einfluss der Molekularkraft zwischen Wand und Flüssigkeit nimmt mit der Entfernung von der Wand ab. Ob man nun diese Erscheinung auf die Massenanziehung oder auf die Einwirkung einer an der Wand entstehenden doppelten elektrischen Schicht zurückführt, kann diese Annahme in kreisrunden Röhren mit guter Annäherung als linear betrachtet werden.

Aus der Gleichgewichtsbedingung zwischen Molekularkräften, Schwerkraft und innerer Reibung lässt sich für den Fall der Mikrofiltration die Geschwindigkeitsverteilung in kreisrunden Röhren, sowie der Zusammenhang der Wasserführung in der Röhre mit den Kenngrößen der Röhren und der wirkenden Kräfte ermitteln.

Werden die Poren der wasserführenden Schicht durch ein Röhrennetz ersetzt, dann kann man die Beziehung zwischen den bodenphysikalischen Kennwerten der Schicht und den Konstanten des Röhrennetzes berechnen. Mit deren Hilfe lässt sich für die Mikrofiltration ein scheinbarer Sickerbeiwert ableiten, der dem Quotienten von Geschwindigkeit und Gefälle gleich ist. Vergleicht man diesen mit der Durchlässigkeitszahl nach Darcy, dann erhält man einen geeigneten Kennwert zur Charakterisierung des Strömungszustandes in diesem Bereich.

ÉTUDE THÉORIQUE DE LA MICROFILTRATION

GY. KOVÁCS

RÉSUMÉ

En introduction, l'étude établit, que la loi de Darcy n'est applicable avec une bonne approximation à la description des phénomènes de filtration, que si l'on peut négliger l'influence exercée sur l'écoulement par des forces actionnantes autres que celles de gravité et de frottement. À la limite supérieure du domaine de validité, c'est l'effet de l'inertie qui s'augmente, la limite inférieure étant marquée par l'influence de plus sensible des effets moléculaires.

En examinant dernier domaine — celui de la microfiltration — on peut constater que l'effet de la force moléculaire s'exerçant entre la paroi solide et le liquide diminue en s'éloignant de la paroi. Ce phénomène explique soit par la force attractive des masses, soit par la formation d'une double couche électrique le long de la paroi, cette diminution dans un tuyau de section circulaire peut être estimée linéaire avec une bonne approximation.

En établissant l'équilibre des forces moléculaires de gravitation et de frottement, on peut déduire, pour le cas de microfiltration, la répartition des vitesses dans des tuyaux circulaires, ainsi que la relation du débit dans un tuyau avec les valeurs caractéristiques des tuyaux et des forces actionnantes.

En remplaçant les pores de la couche aquifère par un réseau de tubes transportant l'eau, on peut calculer la relation entre les caractéristiques géophysiques de la couche et les constantes du réseau de tubes. Ainsi peut se déduire — pour le cas de microfiltration — un coefficient virtuel de filtration égal au quotient de la vitesse et de la perte de charge. Le rapport de ce dernier au coefficient de filtration de Darcy, permet de bien caractériser l'écoulement dans ce domaine.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОФИЛЬТРАЦИИ

Д. КОВАЧ

РЕЗЮМЕ

В введении статьи установлено, что для определения явлений микрофильтрации закон Дарси может быть применен с хорошим приближением только в том случае, если можно пренебречь действием всех сил, создающих движение, кроме действия сил тяжести и трения. На верхнем пороге области действительности возрастает влияние невозможности, а нижний порог характеризуется большей действенностью молекулярных эффектов.

Изучая эту последнюю область — область микрофильтрации —, можно установить, что действие молекулярных сил, возникающих между твердой стеной и жидкостью, уменьшается по мере удаления от стены. Объясняя этот эффект силой притяжения, или же двойным электрическим слоем, образующимся вдоль стены, можно предполагать, что уменьшение в трубе круглого сечения является с хорошим приближением линейным.

Выведя уравнение равновесия молекулярных сил, силы тяжести и силы внутреннего трения, можно определить распределение скорости в трубе круглого сечения для случая движения жидкости, соответствующее характеру движения при микрофильтрации, далее можно определить также зависимость между расходом в трубе и величинами характеризующими действующие в трубе силы.

Связь между физико-механическими характеристиками грунта и постоянными системы труб определяется путем замены швов водонепроницаемого слоя системой водопроводящих труб, с помощью которых можно определить мнимый коэффициент фильтрации, который равен отношению скорости и напора микрофильтрации, сопоставляя это с коэффициентом фильтрации по Дарси, можно хорошо характеризовать состояние движения в этой области.

FESTIGKEIT DER TREIBRIEMENLEDER BEI DAUERNDER BEANSPRUCHUNG*

G. TÓTH

DOKTOR DER CHEMISCHEN WISSENSCHAFTEN

und

F. WAIGAND

[Eingegangen am 22. Juni 1957.]

Die Ermüdungssymptome der Fertigleder bei langer Beanspruchung sind seit langem bekannt, bisher wurden jedoch keine entsprechenden Untersuchungsmethoden zu deren Messung entwickelt. Als derartige Ermüdungsproben sind z. B. vielfaches Biegen [1] oder Laufen [2] der Treibriemen durch mehrere Scheiben zu betrachten. In der Eisen- [3] und der Textilindustrie [4] sind die Dauerbeanspruchungsprüfungen bereits viel weiter fortgeschritten. Deswegen hielten es die Verfasser für geboten, auch bei Fertigleder derartige Untersuchungen vorzunehmen.

Dabei gingen wir von der Erfahrung aus, dass die Reissfestigkeit von der Zuggeschwindigkeit abhängt. Falls Fertigleder nahezu bis zur Reissfestigkeit belastet wird, macht sich ein leises Knistern bemerkbar, das sich stets häufiger wiederholt, bis das Leder nach einiger Zeit reißt. Die Verfasser nahmen an, dass durch die Ungleichmässigkeit der Faserbündel einige stärker belastet werden, wodurch erst die am wenigsten dehnbaren Fasern, sodann die anderen nach einander reissen, und zwar in umgekehrtem Verhältnis zu ihrer Dehnbarkeit. Voraussichtlich springen manche Fäden bereits bei einer stark unter der Reissfestigkeit stehenden Spannung, eine Erscheinung, die mit der Stoffermüdung durch Dauerbeanspruchung in Verbindung stehen dürfte. Je mehr sich die Faserbündel und Lederschichten untereinander in der Dehnbarkeit unterscheiden, bei einer umso geringeren Spannung beginnt die Stoffermüdung und der Reissprozess.

Zur Untersuchung der Festigkeit einzelner Faserbündel stehen uns noch nicht die geeigneten Mittel zur Verfügung, dagegen lässt sich die Festigkeit der verschiedenen Lederschichten durch Spalten genau verfolgen. Die Autoren haben in ihrer letzten Arbeit [5] darauf hingewiesen, dass die maximale Reisskraft, die beim gleichzeitigen Zerreißen mehrerer Lederschichten gemessen wurde, geringer als die algebraische Summe der Reisskräfte der einzelnen Schichten ist und dass diese Maximalkraft sich aus den Kraft-Dehnungsdiagrammen der einzelnen Schichten berechnen lässt.

* In der Sitzung der Wissenschaftlichen Vereinigung für Lederindustrie am 7. Juni 1957. in Budapest abgehaltener Vortrag.

Diese Experimente haben die Annahme der Verfasser bestätigt, dass je ungleichmässiger die Dehnbarkeit der Lederteile ist, bei einer umso geringeren Kraftwirkung reisst das Leder, wobei durch die ungleichmässige Dehnung der Faserbündel der Riss nicht auf einmal, sondern stufenweise erfolgt. Verteilung, Dicke, Äschern, Gerbung und Fattung der vielen hunderttausend Faserbündel sind nicht gleichmässig, und da die steiferen Fasern schneller reissen, macht sich ein Knistern bemerkbar, sobald das Leder einer der Reissfestigkeit annähernden Belastung ausgesetzt wird.

Die Verfasser dachten, als Prüfungsmethode für Dauerbeanspruchung könne mit Erfolg ein Gerät verwendet werden, welches das Leder mit konstan-

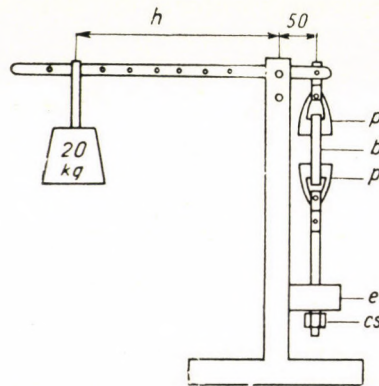


Abb. 1

ter Kraft belastet. An einem Arm des doppelarmigen Hebels des auf Abb. 1. sichtbaren Gerätes wurde das zu prüfende Ledermuster befestigt, während der andere Arm des Hebels, bei bekannter Übertragung längere Zeit hindurch dauernd mit einem bestimmten Gewicht belastet und die Zeit gemessen wurde, nach der das Leder riss. Bei den Versuchen wurden hauptsächlich Treibriemenleder geprüft und aus den Stellen, die die ungarische Normen für Probeentnahme vorschreiben, wurden [6] 33×7 cm grosse Proben herausgeschnitten und diese zu 9 kleinen (110×10 mm) Reissversuchstücken ausgestanzt. Bei den mittleren Probestücken wurde die Reissfestigkeit (σ) bestimmt und bei den anderen, mittels 6 gleichen Geräten (siehe Abb. 1.), bei bekannter Belastung (σ'), die Reissdauer festgestellt.

Die obere Einspannbacke p schliesst sich gelenkartig an den kürzeren Arm des zweiarmigen Hebels an, während die untere mit einer Schraube cs an die Geradführung e des Gestells fixiert wurde. Mittels Schraube cs wird der zweiarmige Hebel während der ganzen Prüfungszeit in horizontale Lage gebracht. Auf dem längeren Hebelarm sind die der gewünschten Spannung entsprechenden Gewichte angebracht. Bei Treibriemen wurden zur Einstellung der dauernden Belastung Gewichte von 20 kg verwendet. Die Länge des Belastungsarmes h wurde jedesmal genau berechnet. Die Berechnung beruhte darauf, dass die untere Einspannbacke 0,5 kg wiegt, während der Belastungsarm h äusser dem Gewicht der oberen Backe noch mit 3,5 kg das Gleich-

gewicht hält. Demnach sollen der jeweiligen Belastung noch 4 kg addiert werden. Da die Länge des kürzeren Armes 5,0 cm beträgt und auf dem längeren Arm das Gewicht von 20,0 kg angebracht wurde, so ist die dauernde Belastung

$$\sigma' = \frac{\frac{h}{5} \cdot 20 + 4}{a \cdot b}, \quad \text{hieraus} \quad h = \left[\frac{a \cdot b \cdot \sigma'}{4} - 1 \right] \text{cm}$$

wobei a die Breite des Probestückes in cm

b die Dicke des Probestückes in cm

und σ' den Wert der dauernden Belastung darstellt, wobei $\sigma' = x \sigma$ ist. Der Wert von x lag bei den Versuchen im allgemeinen zwischen 0,60 — 0,80.

Die Verfasser unternahmen zahlreiche Versuche mit Treibriemenledern, um den Zusammenhang zwischen Reissdauer und Belastung festzustellen. Sie fanden, dass zwischen den Logarithmen der Reissdauer und der Belastung, innerhalb gewisser Grenzen, ein linearer Zusammenhang besteht. Falls bei Bestimmung der Reissfestigkeit der Riss in einer Minute erfolgt, kommt dessen Wert auf dem Belastung-log t Diagramm auf den Nullpunkt der Abscisse zu liegen. Bei einer Reissdauer unter einer Minute besteht kein linearer Zusammenhang mehr. Deshalb wurde bei der Bestimmung der Reissfestigkeit die Zuggeschwindigkeit von der üblichen [7] 50 mm/Minute auf 2 mm/Minute reduziert. Bei dieser Geschwindigkeit erfolgt der Riss des Riemenleders effektiv nach einer Minute und nach Erfahrung der Autoren dürfte die Streuung der Bestimmungswerte geringer sein.

Auf dem Belastung-log t Diagramm wurden somit zwei Punkte des geraden Abschnittes bestimmt, und zwar die in einer Minute erfolgte Reisskraft und — mittels des Geräts nach Abb. 1. — die der bestimmten Belastung angehörende Reissdauer. Die Belastung wurde im allgemeinen so eingestellt, dass die Reissdauer zwischen 1/2 Stunde und 2 Wochen fiel. Bei den ersten Experimenten wurden die Versuchskörper mit verschiedenen Belastungen zerrissen, auf Grund der Erfahrungen hat es sich jedoch als richtiger erwiesen, wenn eine Versuchsserie mit der gleichen Belastung (im allg. mit 60—80% der Reissfestigkeit) durchgeführt wird, wobei der Mittelwert der verschiedenen Reissdauern in Betracht gezogen wird.

Abb. 2. enthält die Logarithmen der Reissdauer (t in Minuten) von zwei Treibriemen mit verschiedener Reissfestigkeit, als Funktion der Belastung. Die geringste Belastung, bei welcher das Treibriemenleder zerrissen werden konnte, betrug 32% der Reissfestigkeit, wobei der Riss nach 271 Tagen erfolgte. Es ist ersichtlich, dass die Werte der Logarithmen der verschiedenen Belastungszeiten bei ein und demselben Leder zwischen weiten Grenzen auf der selben Geraden liegen. Dies ist die *Dauerlinie*. Nachdem die Forschungen in der Eisen- [3] und in der Textilindustrie [4] ergeben haben, dass sich die Reissdauer mit der Spannung logarithmisch ändert, ist es anzunehmen, dass aus der Dauerlinie durch Extrapolation auf die Lebensdauer der Treibriemen gefolgert werden kann.

Die erste Tafel enthält die ausführlichen Daten der Dauerbelastungsproben von 33 Treibriemen und einigen anderen Lederarten. Es ist ersichtlich, dass bei Treibriemen von guter Qualität, bei 100 kg/cm² Belastung die log t Werte grösstenteils zwischen 6—7 liegen, es wurden jedoch auch hohe, herausragende Werte gefunden (Leder Nr. 18, 30, 36). Ausgesprochen schadhafte Treibriemenleder sind bei 100 kg/cm² Belastung nur von kurzer Dauer. (Leder Nr. 32, 33). In Anbetracht dessen, dass die Treibriemen an den Stellen der geringsten Festigkeit (z. B. bei der Naht) oder an den am stärksten beanspruchten Stellen reissen, die Rubrik Nr. 7 jedoch nur mittlere Werte verzeichnet, können diese Angaben nur als Indexziffern angesehen werden.

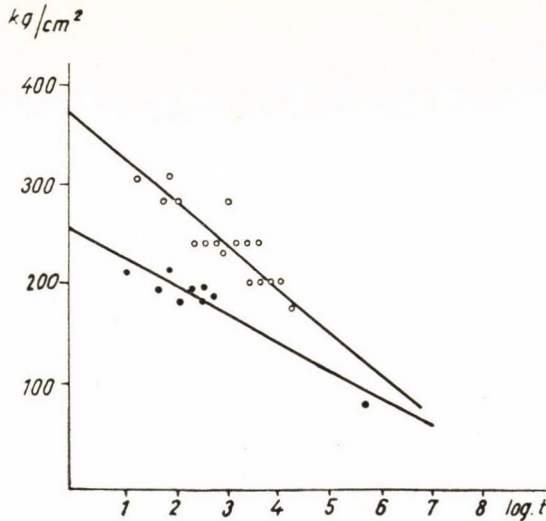


Abb. 2

Um die Versuchsdaten mit der Haltbarkeit in der Praxis zu vergleichen, wurde aus eingebraunten Halsstreifen ein Treibriemen hergestellt, mit diesem ein rotierendes Fass angetrieben, und die Dauerbelastungsproben parallel durchgeführt. Die Reissfestigkeit des Treibriemens betrug 300 kg/cm². Bei Dauerbelastung wurden folgende Werte gemessen :

- Bei einer Belastung von 240 kg/cm² betrug die Reissdauer 40 Min., log t = 1,60
- Bei einer Belastung von 215 kg/cm² betrug die Reissdauer 400 Min., log t = 2,60
- Bei einer Belastung von 190 kg/cm² betrug die Reissdauer 2400 Min., log t = 3,38.

Von diesen Werten ergibt der zweite die steilste Dauerlinie, von dieser extrapoliert auf 65 kg/cm² Belastung beträgt der Logarithmus der Reissdauer log t = 5,6, wonach der Riss nach 0,8 Jahr erfolgen würde.

Aus diesem Leder wurde ein Treibriemen hergestellt, und mit diesem ein rotierendes Fass angetrieben. Die Angaben des Motorantriebes sind folgende :

| | |
|--|---------------------|
| Nominalleistung | 9,5 PS |
| Leistung auf Grund der Stromaufnahme | 6,4 PS |
| Riemenlänge | 540 cm |
| Scheibendurchmesser | 180 mm, bez. 480 mm |
| Riemengeschwindigkeit | 918 cm/Sec. |

Nach den Treibriemenmasstabellen berechnet, wäre ein Treibriemen von 5 × 100 mm² Querschnitt erforderlich [8]. Statt dessen betrug jedoch der Querschnitt des Versuchstreibriemens 3,5 × 85 = 295 mm². Dieser wurde auf einem Abschnitt mittels 100 mm langer Ausschnitte

stufenweise auf 38 mm^2 reduziert, wobei der Riemen riss. Demnach betrug die effektive Maximalkraft $300 \times 0,38 = 114 \text{ kg}$.

Der zerrissene Treibriemen wurde wieder zusammengeklebt und ein Ausschnitt von der Grösse angebracht, die einer Belastung von 65 kg/cm^2 entsprach. Mit diesem Querschnitt ($3,5 \times 50 = 175 \text{ mm}^2$) lief der Treibriemen kontinuierlich, um nach der ständigen Beanspruchung von 0,75 Jahr zu reissen. Dieser Wert stimmt mit dem Extrapolationswert von 0,80 Jahr recht gut überein.

Durch Verengen des Treibriemens an einer Stelle wurde verhütet, dass die durch die Naht verursachte Festigkeitsverminderung die Haltbarkeitsdauer beeinflussen soll. Dabei wurde festgestellt, dass nach Behebung dieses störenden Moments die praktisch gefundene Dauerhaftigkeit mit den durch die Versuchsmethoden gefundenen Dauerwerten der Ordnungsgrösse nach übereinstimmt.

Um die Bedeutung der Richtungstangente der Dauerlinie zu beleuchten, sollen 3 Beispiele angeführt werden. Bei den Experimenten wurde die Erfahrung gemacht, dass die Richtungstangente der Dauerlinien verschiedener Leder bedeutende Differenzen aufweisen, ein Beweis dafür, dass Leder mit höherer Reissfestigkeit nicht unbedingt auch haltbarer sind. So wurde z. B. ein Treibriemen minderer Qualität geprüft (Tab. Nr. 1. Leder Nr. 32.), der versuchsweise so hergestellt worden war, dass eine ungenügend durchgegerbte Lederprobe in heissem Fett eingebrannt wurde. Die Reissfestigkeit dieses Versuchsstückes betrug allerdings 220 kg/cm^2 , es riss jedoch bei der Dauerbelastung aussergewöhnlich schnell. Nach der Extrapolation auf der Dauerlinie sollte es bei 100 kg/cm^2 Belastung in 2 Tagen reissen, während die kaltgefetteten Treibriemen guter Qualität — mit einer kaum höheren Reissfestigkeit — bei derselben Belastung mindestens $1/2$ —1 Jahr lang dauern. Während der Wert der Reissfestigkeit des vorliegenden Leders nur um 30% unter dem Durchschnitt der Versuchsserie liegt, fiel die Reissdauer — selbst bei Beachtung der niedersten Werte — auf $1/100$ -tel Teil. Es zeigt sich, dass die Bestimmung der Reissdauer ein wesentlich empfindlicherer Indexziffer, als die Reissfestigkeit ist.

Aus der statistischen Aufarbeitung der Tafel Nr. 1. geht hervor, dass die Dauerbelastungsprobe auch zur Qualifizierung des Leders beitragen kann. Im allgemeinen weisen Leder mit höherer Reissfestigkeit auch höhere Richtungstangenten der Dauerlinien auf, obwohl sich diese Tatsache als Regel nicht behauptet. Auf Grund der Durchschnittswerte der geprüften Riemenleder ergaben sich folgende Werte :

| | | | | |
|-----------------|------|------------------|----------------------------------|--------------------------|
| Bei Treibriemen | über | 400 | kg/cm^2 Reissfestigkeit | $\text{tg } \alpha = 45$ |
| „ | „ | zwischen 300—400 | „ | „ = 35 |
| „ | „ | „ 250—300 | „ | „ = 26 |
| „ | „ | „ 200—250 | „ | „ = 18 |

Vom Gesichtspunkt der Lebensdauer der Treibriemen ist die während des Gebrauchs erfolgte stärkste Beanspruchung, die bei Zerren und Antrieb der Riemen auftritt, und deren Häufigkeit ausschlaggebend. Diese stärkste

Beanspruchung kann jedoch verschieden sein. Deshalb kommt es vor, dass von zwei Treibriemen der eine bei stärkerer, der andere bei geringerer Belastung sich als dauerhafter erweist. So wiesen die Treibriemen Nr. 7. und 29. (Tab. I.) bei einer Belastung von 100 kg/cm^2 die gleiche Lebensdauer auf. Bei einer Belastung über 100 kg/cm^2 jedoch wird Leder Nr. 7., unter 100 kg/cm^2 Leder Nr. 29. sich als dauerhafter erweisen (Abb. Nr. 3.). Leder Nr. 6. wird — trotz stärkerer Reissfestigkeit — praktisch bei jeder Beanspruchung schneller reißen als Leder Nr. 29.

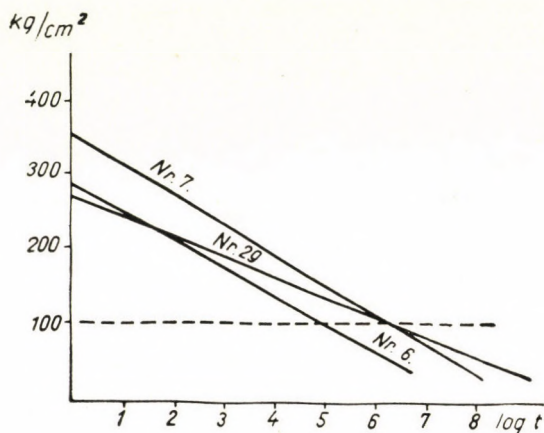


Abb. 3

Zuletzt hat TSCHERNOW [9] darauf hingewiesen, dass bei Dehnung des Leders eine Orientierung der Fasern erfolgt, die eine Erhöhung der Reissfestigkeit bedingt. Auch bei längerer Beanspruchung der Treibriemen ist eine Orientierung der Faserbündel zu erwarten, die Autoren fanden jedoch, dass die geringfügige Erhöhung der Reissfestigkeit die normalen Streuungen nicht übertrifft. Abb. 4. zeigt die Dauerlinien zweier verschiedener Treibriemenleder (Tab. I. Leder Nr. 30, 31.) ausser Gebrauch (ausgezogene Linie), und die aus diesen hergestellten Treibriemen nach zweijährigem Gebrauch (gestrichelte Linie). Aus diesen zwei verschiedenen Treibriemenledern wurde ein gemeinsamer Treibriemen hergestellt der nach zwei Jahre langem Gebrauch bei dem Kleben des Riemens — gefertigt aus dem Leder Nr. 31 — riss. Es ist bemerkenswert, dass die Dauerlinie nach dem Gebrauch in beiden Fällen steiler wurde, was eine Verminderung der Lebensdauer bedeutet. In Anbetracht dessen, dass die gebrauchten und die ungebrauchten Treibriemen gleichzeitig untersucht wurden, — indem die ungebrauchten Treibriemenleder-Proben auch zwei Jahre lang gelagert worden waren — wurde jede Wirkung einer durch Lagerung erfolgten Veränderung bei diesem Versuch vermieden.

Tafel I.

| Nr. | 1 Benennung d. Leders | 2 Reissfzgt. kg/cm ² | 3 Wert der Dauer- Belastg. kg/cm ² | 4 Reissdauer in Minuten t. | 5 log t | 6 Auf 100 kg/cm ² Belastung extrapoliert | | 7 |
|-----|--|---------------------------------------|---|--|--|---|-------------|---|
| | | | | | | log t | Reissdauer | |
| | | | | | | | | |
| 1. | Pflanzlich gegerbtes kalt gefettetes Riemenleder | 350 | 310 310 285 285 285 248 248 380 248 248 248 248 235 395 212 212 212 212 185 | 16 80 89 125 790 199 320 400 1 600 2 000 3 950 7 950 4 020 6 300 8 050 12 500 15 800 | 1,20 1,90 1,95 2,10 2,90 2,30 2,50 2,60 3,20 3,30 3,60 2,90 3,60 3,80 3,95 4,10 4,20 | | | |
| | Durchschnitt | 375 | | | | 6,50 | 6 Jahre | |
| 2. | Pflz. gegerbtes kalt gefettetes Riemenleder | 240 | 228 228 206 285 206 270 195 195 85 | 50 10 32 315 400 200 320 630 391 000 | 1,70 1,00 1,50 2,48 2,60 2,30 2,50 2,80 5,59 | | | |
| | Durchschnitt | 265 | | | | 5,70 | 1 Jahre | |
| 3. | Pflz. gegerbtes kalt gefettetes Riemenleder | 360 | 240 240 370 240 300 240 | 802 1 990 1 008 120 220 5 640 | | | | |
| | Durchschnitt | 343 | 240 | 1 630 | 3,21 | 7,55 | 67 Jahre | |
| 4. | Pflz. gegerbtes kalt gefettetes Riemenleder | 340 | 247 247 370 247 350 247 | 80 125 490 340 300 510 | | | | |
| | Durchschnitt | 353 | 247 | 307 | 2,48 | 5,85 | 1,3 Jahre | |
| 5. | Pflz. gegerbtes kalt gefettetes Riemenleder | 310 | 219 219 320 219 310 219 | 400 1 090 220 1 116 1 365 905 | | | | |
| | Durchschnitt | 313 | 219 | 849 | 2,93 | 6,70 | 9 Jahre | |
| 6. | Pflz. gegerbtes kalt gefettetes Riemenleder | 290 | 217 | 140 | 2,15 | 5,30 | 0,4 Jahre | |
| 7. | | 360 | 330 | 6 | 0,78 | 6,60 | 8 „ | |
| 8. | | 300 | 190 | 2 400 | 3,38 | 6,05 | 2 „ | |
| 9. | | 260 | 164 | 11 705 | 4,07 | 6,80 | 12 „ | |
| 10. | | 290 | 217 | 735 | 2,87 | 7,25 | 34 „ | |
| 11. | | 250 | 198 | 303 | 2,48 | 6,80 | 12 „ | |
| 12. | | 268 | 209 | 372 | 2,57 | 7,10 | 23 „ | |
| 13. | | 295 | 235 | 53 | 1,73 | 5,50 | 0,7 „ | |
| 14. | | 193 | 156 | 550 | 2,74 | 6,70 | 9 „ | |
| 15. | | 360 | 300 | 35 | 1,55 | 6,60 | 8 „ | |
| 16. | | 205 | 155 | 1 510 | 3,17 | 6,42 | 5 „ | |
| 17. | | 240 | 192 | 328 | 2,52 | 6,95 | 17 „ | |
| 18. | | 460 | 323 | 3 710 | 3,57 | 8,70 | 950 „ | |
| 19. | | 350 | 210 | 8 055 | 3,91 | 7,50 | 60 „ | |
| 20. | | 470 | 300 | 10 000 | 4,00 | 7,70 | 95 „ | |
| 21. | | 310 | 215 | 3 550 | 3,55 | 7,60 | 75 „ | |
| 22. | | 220 | 132 | 30 500 | 4,48 | 6,20 | 3 „ | |
| 23. | | 280 | 245 | 35 | 1,55 | 7,90 | 150 „ | |
| 24. | | 350 | 245 | 2 160 | 3,34 | 7,80 | 120 „ | |
| 25. | | 270 | 188 | 2 581 | 3,41 | 7,30 | 38 „ | |
| 26. | | 275 | 235 | 46 | 1,67 | 7,20 | 30 „ | |
| 27. | | 250 | 158 | 3 870 | 3,59 | 6,00 | 2 „ | |
| 28. | | 235 | 176 | 570 | 2,75 | 6,25 | 3 „ | |
| 29. | | 270 | 217 | 140 | 2,45 | 6,60 | 8 „ | |
| 30. | Pflz. gegerbt kalt- gef. Treibriem- kupon nach 2 jährig. Lagerung | 291 | 233 | 850 | 2,93 | 9,50 | 6000 Jahre | |
| | derselbe nach 2 jährig. Gebrauch | 337 | 222 | 5 980 | 3,78 | 7,75 | 105 „ | |
| 31. | Komb. geg. kalt- gef. Treibriem- krup. nach 2 jährig. Lagerung | 216 | 170 | 2 080 | 3,32 | 7,05 | 21 Jahre | |
| | derselbe nach 2 jährig. Gebrauch | 220 | 174 | 42 | 1,62 | 4,02 | 11 Tage | |
| 32. | Pflz. geg. eingebr. Treibriem. Aus- schuss | 220 | 163 | 45 | 1,65 | 3,50 | 2 Tage | |
| 33. | Pflz. geg. eingebr. Treibriem. Aus- schuss | 140 | 70 | 4 000 | 3,60 | 2,00 | 1,5 Stunden | |
| 34. | Rahmenschulter | 320 | 244 | 206 | 2,31 | 6,60 | 8 Jahre | |
| 35. | Narbenempfindl. Blankhäse | 200 | 150 | 947 | 2,98 | 5,90 | 1,5 Jahre | |
| 36. | Rindbox | 335 | 268 | 9 580 | 3,98 | 12,8 | | |

Die drei oben angeführten Beispiele erläutern klar und deutlich, dass der Wert der Reissfestigkeit, hauptsächlich bei strafferem Leder, an sich allein noch keine Gewähr für die Dauerhaftigkeit bietet, da die kleine Richtungstangente der Dauerlinie ebenfalls eine Vorbedingung für die Dauerhaftigkeit des Leders ist. Bei weichem Leder, bei welchem es leicht zur Orientierung der Fasern kommt, ist diese Erscheinung nicht so auffallend.

Die Streuung bei der Dauerbelastungsprobe von neben einander liegenden Probekörpern ist wesentlich stärker als bei den Reissproben. Dies lässt

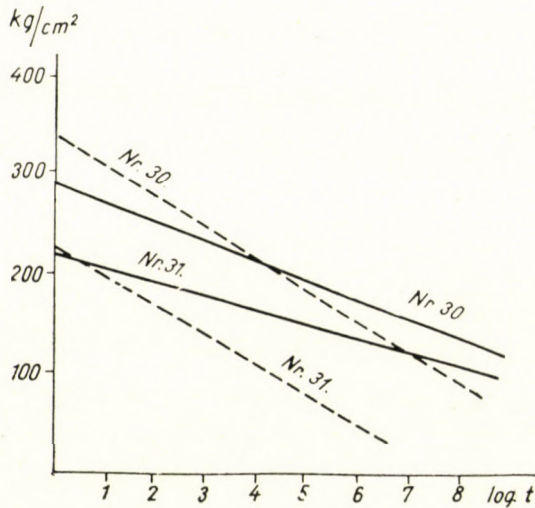


Abb. 4

sich dadurch erklären, dass die Dauerbeanspruchung in grösserem Ausmass von der Lage der Faserbündel als die Reissfestigkeitsprüfung abhängt.

Die neuesten elektronenmikroskopischen Aufnahmen erklären diese Erscheinungen. NEMETSCHKE, GRASSMANN und HOFMANN [10] fanden, dass auf Kollagenfasern, die auf das Doppelte ausgedehnt wurden, die relative Lage der Querstreifen unverändert blieb. Auf ihrer Aufnahme zeigt es sich deutlich, dass die Periode auf einem Abschnitt der Faser nahezu doppelt so gross ist, als auf den anderen Teilen derselben. Es ist klar, dass bei der Dehnung dieser Abschnitt als erster reissen wird. Dieser Umstand tritt noch leichter bei Fertgleeder ein, bei welchem die einzelnen Fasernabschnitte infolge der starken Verflechtung an der freien Bewegung behindert werden, oder wenn die einzelnen Schichten des Lederquerschnittes verschiedene Dehnungswerte haben.

Bei ungleichmässig gegerbtem oder gefettetem Leder weicht die Dehnbarkeit der äusseren Schichten zuweilen wesentlich von jener der inneren Schichten ab. Infolgedessen tragen die weniger dehnbaren Fasern der inneren Schichten bei dauernder Belastung deren Grossteil und reissen schneller.

Bei dieser Vorstellung über die Lage der Faserbündel wird der Befund einiger Autoren [11] begrifflich, wonach die Reissfestigkeit der einzelnen Faserbündel die Ordnungsgrösse von 50—60 kg/mm² aufweist, während die Reisskraft auf den Gesamtquerschnitt des Leders bezogen, kaum einen zwanzigstel Teil derselben beträgt. Es ist ferner begrifflich, dass die Reissfestigkeit nach TSCHERNOW [12], in Anbetracht der Porosität die Ordnungsgrösse von 7—15 kg/mm² aufweist. Diese Angaben lassen darauf schliessen, dass nur ein geringer Teil der Faserbündel unmittelbar der Zugkraft ausgesetzt ist, und nach deren Riss es stufenweise zum Reissen der anderen Faserbündel kommt.

Die Verfasser beabsichtigen Versuche mit anderen Lederarten fortzusetzen und ihr Gerät auch für wiederholte Beanspruchung zu modifizieren. Sie versuchen ferner, durch Erhöhung der Empfindlichkeit des Gerätes die Streuungen zu reduzieren, und sie hoffen, durch verschärfte Genauigkeit eine entsprechende Indexzahl für die Dauerbeanspruchung zu gewinnen. Es ist bekannt, dass bei praktischem Gebrauch nicht nur die mechanische Ermüdung, sondern auch Alterung und andere Veränderungen eintreten. Durch die vorliegende Prüfungsmethode kann naturgemäss nur auf Veränderungen gefolgert werden, die bei dauernder mechanischer Beanspruchung eintreten. Doch die Anwendung dieser Untersuchung gemeinsam mit den Prüfungsmethoden der chemischen Alterung, eröffnet weitere Möglichkeiten für die Vervollkommnung der Materialprüfungen.

ANHANG

Dr. ISTVÁN FEHÉR hatte die Liebenswürdigkeit, die Aufmerksamkeit der Autoren darauf zu lenken, dass aus dem linearen Zusammenhang zwischen den Logarithmen der Reissdauer und den Spannungen, die Gleichung der Spannung-Zeit Kurve sich folgendermassen berechnen lässt:

$$\sigma' = -a \log t + b,$$

wobei b den Abstand, den die Gerade von der σ' Ordinata abschneidet, bezeichnet. Dieser Abstand entspricht der Reissdauer, die bei der in einer Minute erfolgten Reissdauer gemessen wurde, und die oben mit σ bezeichnet wurde.

$$\text{Demnach ist } b = \sigma$$

$$\text{ferner } \sigma' = -a \log t + \sigma$$

$$\sigma - \sigma' = a \log t$$

$$t^a = 10^{\sigma - \sigma'}$$

Wenn wir den Wert von σ als Einheit betrachten, dessen proportioneller Teil σ' ist, wobei wir zum Logarithmus nat. übergehen, so ist

$$t^a = e^{1 - \sigma'}$$

Aus dieser Formel lässt sich der Wert von „a“ berechnen, wobei dieser die Dauerlinie des Treibriemens charakterisiert.

SCHRIFTTUM

1. H. HERFELD : Die Qualitätsbeurteilung von Leder etc. 1950. Seite 73.
2. D. WOODROFFE : Standard Handbook of Industrial Leather 1949. S. 208.
3. GILLEMOT LÁSZLÓ : Metallografia és anyagvizsgálat. Bp. 1955. Metallographic und Materialprüfung.
4. DR. A. ZART : Melliland Textilberichte 1955.
TIBOR HAJMÁSY : Mitteilungen des Forschungsinstitutes für Textilindustrie. Bp. 1953.
5. DR. G. TÓTH und F. WAIGAND : Leder- und Schuhtechnik 1957. S. 104.
6. MNOSZ 871—53 A Seite 3.
7. MNOSZ 871—53 A Seite 8.
8. ENDRE GÁL : Leder- und Schuhtechnik 1951, Seite 120 und 1952 S. 29.
9. N. W. TSCHERNOW : Die Technologie der Lederfabrikation III. Bd, 1952 S. 53.
10. TH. NEMETSCHKEK, W. GRASSMANN, U. HOFMANN : Z. Naturforsch. 10 b/61 (1955) Unter dem Referat : Das Leder 1957 Seite 27.
11. JOVANOVITS und ALGE : Collegium 1932. 215. Literatur : W. Grassmann : Handbuch d. Gerbereichemie etc. II/2. Seite 13.
A. L. ZAJDES und S. J. SOKOLOV : Die physico-mechanische Eigenschaften des Kantschuks, Kollagens und Zellulose Derivaten. Gizlegprom 1937. 141.
A. N. MIHAJLOV : Die physiko-chemischen Grundlagen der Lederfabrikation I. Seite 57.
12. N. V. TSCHERNOW : Die Technologie der Lederfabrikation III. Bd. S. 51.

ZUSAMMENFASSUNG

Beim Reißen der Treibriemenleder springen die Fasern nicht gleichzeitig, sondern stufenweise nacheinander. Bei Dehnung werden die Faserbündel — infolge ungleicher Herstellung oder durch die Lage der Fasern — nicht gleichmäßig belastet, wodurch die stärker beanspruchten oder weniger dehnbaren Faserbündel zuerst reißen. Im Apparat, laut Abb. 1. können die Treibriemen bei Dauerbelastung, auch durch einen kleinen Bruchteil der Reißfestigkeit längere Zeit hindurch zerrissen werden. So riss z. B. ein mit 32% der Reißfestigkeit belasteter Treibriemen nach 271 Tagen. Bei ein und demselben Leder liegen die Logarithmen der Reissdauer verschiedener Belastungen innerhalb weiter Grenzen auf einer Geraden.

THE STRENGTH OF BELTING LEATHER UNDER PERMANENT LOAD

G. TÓTH and F. WAIGAND

SUMMARY

At tensile strength tests, the fibres of belting leather do not break at once, but gradually one after the other. At stretching, the bundles of fibres — as a consequence of irregularities of manufacture or of the arrangement of the fibres — are not stressed uniformly, and the bundles which are stressed to a higher extent or which have a smaller elongation break sooner. In the apparatus according to Fig. 1, driving belts can be broken by a small fraction of their tensile strength acting for a prolonged time. E. g. a driving belt submitted to 32% of its usual tensile strength broke after 271 days. For the same leather, the logarithms of the breaking times belonging to the different loads are situated, within wide limits, on a straight line.

LA RÉISTANCE À LA TRACTION DES COURROIES DE TRANSMISSION EN CUIR AUX CHARGES PROLONGÉES

G. TÓTH et F. WAIGAND

RÉSUMÉ

Aux essais de traction des cuirs pour courroies de transmission, la rupture de toutes les fibres ne s'effectue pas simultanément, mais de façon progressive. Par suite des inégalités de fabrication et de l'arrangement des fibres, les différents faisceaux de fibres ne sont pas soumis à une charge uniforme, de sorte que les faisceaux plus chargés, ou ayant un allongement

moindre, se déchirent plus tôt. Au moyen de l'appareil représenté sur la fig. 1, les courroies de transmission peuvent être déchirées sous charges prolongées, même à de petites fractions de la résistance à la traction. Ainsi une courroie chargée par 32% de la résistance à la traction, fut déchirée après 271 jours. Pour le même cuir, les logarithmes des temps de rupture appartenant aux différentes charges sont situées sur une droite, pour des valeurs comprises entre de larges limites.

ПРОЧНОСТЬ КОЖ МАШИННЫХ РЕМНЕЙ В СЛУЧАЕ ДЛИТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Г. ТОТ и Ф. ВАЙГАНД

РЕЗЮМЕ

При разрыве кож машинных приводных ремней волокна разрываются не сразу, а постепенно друг за другом. При растяжении пучки волокон — вследствие неровности производства, или распределения волокон — нагружены не одинаково и пучки волокон, на которые действует большая нагрузка или обладающие меньшим растяжением, разрываются быстрее. При помощи прибора, приведенного на рис. 1, машинные приводные ремни можно разрывать при продолжительной нагрузке, прикладывая в течении продолжительного времени лишь небольшую часть нагрузки, соответствующей сопротивлению на разрыв. Так, например, при нагрузке до 32% сопротивления на разрыв приводной ремень разорвался через 271 день. Для одного и того же сорта кожи логарифмы времени разрыва при различных нагрузках в широких пределах лежат на некоторой прямой.

BEITRAG ZUR ZEITGEMÄSSEN BERECHNUNG DER KEGELRÄDER*

L. SZENICZEI

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, SOPRON, LEHRSTUHL FÜR MASCHINENBAU I

[Eingegangen am 14. November 1957.]

Einleitung

Als Ausgangsdaten zu einer zeitgemässen Berechnung eines Kegelradtriebes gelten die folgenden:

| | | |
|---------------------|--|-----------------------|
| N | = übertragene Leistung | [PS] |
| n_1 | = Drehzahl des kleinen Rades | [1/Min] |
| i | = Übersetzung des Triebes | — |
| φ | = Achsenwinkel | [o] |
| α | = Pressungswinkel | [o] |
| $x = \frac{b}{R_p}$ | = Verhältniszahl; Zahnlänge per Planrad- halbmesser | — |
| k_z | = zulässiger Wert des Flankenpressungsfaktors | [kg/cm ²] |

Eine sinngemässe Formel zur Dimensionierung soll selbstverständlich als eine Funktion in folgender Form aufgestellt werden:

$$Y = F(N, n_1, i, \varphi, \alpha, x, k_z) \quad (1)$$

Mit anderen Worten, die rechte Seite der Gleichung enthält die *sieben* unabhängigen Veränderlichen, und die linke Seite soll eine *einzig*e, den Kegelradtrieb bestimmende Dimension eindeutig darstellen.

An Stelle einer solchen Funktion ist derzeit in der Fachliteratur [4] fast allgemein eine andere Art mit fünf unabhängigen Veränderlichen üblich, u. zw. in der Form:

$$d_{m1}^2 b = \Phi(N, n_1, i, \alpha, k_z) \quad (2)$$

Hiebei ist

d_{m1} = der mittlere Durchmesser des kleinen Rades,

* Auszug einer zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften eingereichten Arbeit.

b = die Zahnlänge;

wie man sieht, sind die unabhängigen Veränderlichen x und φ scheinbar in der Gleichung (2) nicht enthalten, u. zw. deshalb, weil — offenbar in Analogie zu der entsprechenden Formel für zylindrische Zahnräder — auf der linken Seite das Produkt $d_{m1}^2 b$ steht.

Diese Analogie ist aber gar nicht begründet; im Gegenteil, sie ist geeignet den Konstrukteur irrezuführen.

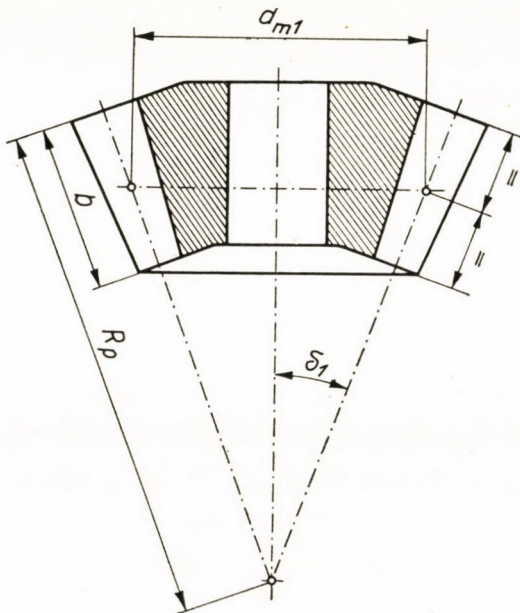


Abb. 1

Auch bei einem zylindrischen Zahnradtrieb wäre es richtiger die Funktion — an Stelle des Produktes $d_1^2 b$ — nach der einzig charakteristische Dimension, also nach dem Achsenabstand a aufzulösen; doch kann dies nicht unbedingt als ein bedeutender Fehler bezeichnet werden; es sind nämlich d und b zwischen gewissen Grenzen voneinander unabhängig; demzufolge ist der Konstrukteur in der Lage, mit der vorsätzlichen Gleichstellung $b = d_1$ der Lösung näher zu kommen, weil durch die Gleichung:

$$d_1^3 = \Phi$$

die originale Formel auf eine eindeutige Form gebracht werden kann.

Dagegen ist die Frage bei Kegelrädern von ganz anderer Natur, da hier zwischen den Werten d_{m1} und b ein ziemlich enger und eindeutiger Zusammenhang besteht.

Wenn nämlich (s. Abb. 1)

$$b = x \cdot R_p \quad (3)$$

wobei

$$0 < x < 1 \text{ ist,}$$

dann gilt

$$d_{m1} = 2 R_p \left(1 - \frac{x}{2} \right) \sin \delta_1 \quad (4)$$

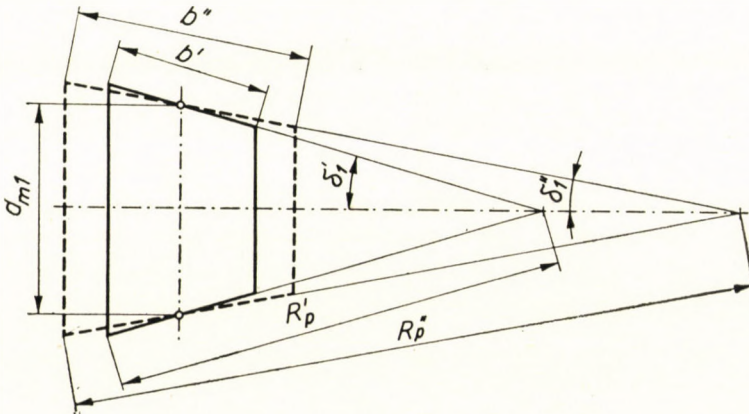


Abb. 2

und das Verhältnis der beiden Dimensionen :

$$\frac{d_{m1}}{b} = u = \frac{2-x}{x} \sin \delta_1 \quad (5)$$

ist eindeutig bestimmt. Da der Teilkegelwinkel δ_1 des kleinen Rades als eine Funktion der Übersetzung i und des Achsenwinkels φ erscheint, d. h.

$$u = f(i, x, \varphi) \quad (6)$$

so müsste man die übliche Formel (2) auf die Form

$$d_{m1}^3 = u \Phi$$

bringen und dadurch sollten alle die sieben unabhängigen Veränderlichen mit einbezogen werden.

Dies ist schon deshalb notwendig, da der Konstrukteur auch im Falle eines Achsenwinkels von $\varphi = 90^\circ$ selbst unter Annahme eines Annäherungs-

wertes von d_{m1} bei der Wahl der Dimension b im Unklaren ist ; dies erhellt aus Abb. 2 ; wie ersichtlich, können zu einem und demselben Werte von d_{m1} verschiedene Werte der Dimension b zugehören.

Obwohl verschiedene Autoren [2] [4] [5] darauf hinweisen, dass die Zahnlänge b aus technologischen Gründen zwischen den Grenzen

$$b = \frac{R_p}{3} \sim \frac{R_p}{5}$$

gewählt werden soll, doch kann der Konstrukteur mit diesen Grenzformeln nicht viel anfangen, da in dieser Phase der Berechnung der Wert des Planradhalbmessers noch unbekannt ist.

Es wäre aber auch eine Explizitform der Grundformel auf d_{m1}^3 noch immer unzuweckmässig, da der Mittelhalbmesser des kleinen Rades *keine charakteristische* Dimension des Triebes darstellt.

In der Gleichung

$$d_{m1} = m_m \cdot z_1$$

ist der Mittelwert m_m des Moduls im allgemeinen kein Normalwert ; im Sinne der Gleichung

$$d_1 = m \cdot z_1$$

soll eben der zum grössten Durchmesser des kleinen Rades gehörige Modul als Normalwert gewählt werden. Die derzeit übliche Berechnungsformel ist ausschliesslich für Triebe mit einem Achsenwinkel $\varphi = 90^\circ$ verwendbar ; in der Fachliteratur finden wir selten einen Hinweis auf Fälle, bei denen der Achsenwinkel φ nicht 90° beträgt. Es wird von den Autoren der Einfluss des Wertes φ gar nicht analysiert. Tatsächlich ist der Achsenwinkel φ in der Mehrzahl der Kegeldradtriebe gleich 90° , doch kann dieser Umstand nicht als Ursache der Vernachlässigung einer Analyse der Achsenwinkeländerung dienen.

Einer weitere Unvollkommenheit der zur Zeit üblichen Formel besteht darin, dass in ihr der Einfluss der einzelnen unabhängigen Veränderlichen nicht klar zum Ausdruck kommt.

In der üblichen Formel

$$b \cdot d_{m1}^2 = \frac{4}{\sin 2 a} \frac{M_1}{k_z} \frac{(i^2 + 1)^{1/2}}{i} \quad (7)$$

kann der Einfluss der Überetzung i selbst im Falle eines Achsenwinkels $\varphi = 90^\circ$ nicht richtig gedeutet werden, stellt doch der Mittelhalbmesser d_{m1}

auch eine Funktion der Übersetzung i dar; wenn die Formel weiter entwickelt wird, so erhalten wir als letztes Glied auf der rechten Seite den Ausdruck

$$\frac{(i^2 + 1)^{3/2}}{i} \quad (8)$$

d. h. es ergibt sich ein ganz bedeutender Unterschied.

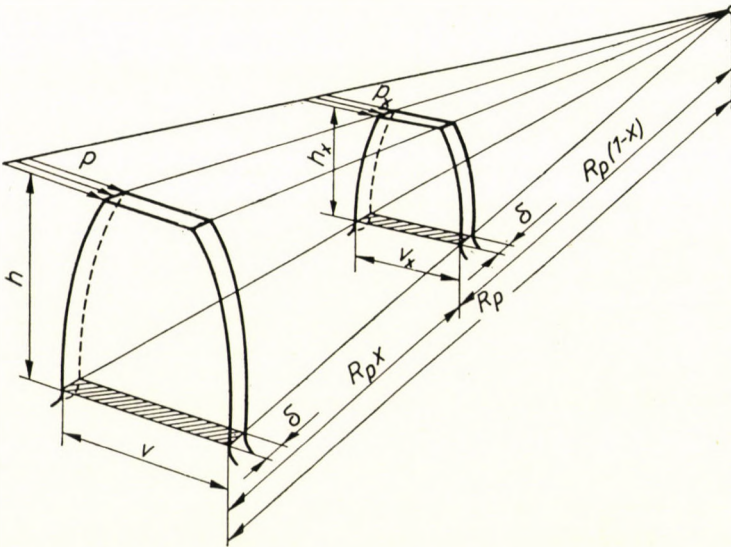


Abb. 3

Nach meiner Meinung ist nicht das Produkt bd_{m1}^2 , sondern der Planradhalbmesser R_p , als die *einzig* charakteristische Dimension, derjeniger Ausgangswert, woraus alle anderen Masse des Triebes eindeutig bestimmt werden können. In diesem Sinne soll nun im folgenden die grundlegende Funktion

$$R_p = F(N, n_1, i, \varphi, a, x, k_z) \quad (9)$$

entwickelt werden.

Die Formel (9) ist für Konstrukteure aus zwei Gründen zweckmässig. Vor allem deshalb, weil nach einer direkten Berechnung des Masses R_p die Umrisse des Triebes ohne jedwedes Probieren, oder wiederholte Annäherung einfach durch das Aufzeichnen eines Kreises mit dem Halbmesser R_p sofort bestimmt sind und zweitens weil man sofort in der Lage ist, die Ausführbarkeit des derart bestimmten Triebes zu beurteilen. Es ist nämlich für alle zeitgemässen Abwälz-Verzahnmaschinen dass Mass R_p als Kegeldistanz entscheidend charakteristisch.

Für Theoretiker ist die Formel (9) erst recht von besonderer Bedeutung. Man kann aus ihr den Einfluss all der sieben unabhängigen Veränderlichen gründlich analysieren und wie es aus dem weiteren klar hervorgeht, kann man daraus besonders wichtige Folgerungen ableiten, die bisher unbekannt waren und die auch in der Praxis verwertet werden sollen.

Die Verteilung der Belastung

Die nähere Untersuchung dieser Frage ist an gewisse Voraussetzungen gebunden, u. zw.:

1. Jedes Mass des Kegelradbetriebes gilt als nominelles — d. h. als ein absolut genaues — mit anderen Worten, die Zähne der unbelasteten Räder sollen entlang der ganzen Länge der Erzeugenden einander berühren.

2. Das Material der Räder muss als homogen betrachtet werden, d. h. der Elastizitätsmodul soll als konstant und nicht als eine Funktion des Ortes gelten.

3. Die unter der Belastung auftretende Deformation ist elastisch.

Auch unter diesen Bedingungen kann im belasteten Zustand ein ununterbrochenes Berühren entlang der ganzen Erzeugenden nur entstehen, wenn die Deformation des Zahnes dem Radius proportional ist. Das will besagen, dass die Erzeugende unter der Belastung keine Deformation erleidet, sondern nur ihre Lage ändert, indem sie sich um den Mittelpunkt etwas verdreht.

Stellen wir uns einen Zahn des Kegelrades mit je einem Schnitt am äusseren Ende und an einer beliebigen Stelle vor: d. h. den ersten in einer Entfernung von R_p , den zweiten in der Entfernung von $R_p(1-x)$ vom Mittelpunkt, beide von einer genügend kleinen Dicke δ , um den Halbmesser R_p , bzw. $R_p(1-x)$ als konstant annehmen zu können. (Abb. 3) Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich die Trägheitsmomente

$$I = \frac{v^3 \delta}{12}; \quad \text{bzw.} \quad I_x = \frac{v_x^3 \delta}{12} = I \cdot (1-x)^3$$

also sind die Trägheitsmomente der dritten Potenz des Halbmessers proportional.

Für die Durchbiegung gelten die Gleichungen:

$$f = p \frac{C \delta h^3}{E \cdot I} \quad \text{und} \quad f_x = p_x \frac{C \delta h^3 (1-x)^3}{E \cdot I \cdot (1-x)^3} = p_x \frac{C \delta h^3}{E \cdot I}$$

woraus folgt:

$$\frac{f}{f_x} = \frac{P}{P_x}$$

d. h., die Durchbiegungen und die Belastungen sind einander proportional mit anderen Worten ist durch die Funktion

$$f_x = f(1-x)$$

auch die andere Funktion

$$p_x = p(1-x)$$

bedingt.

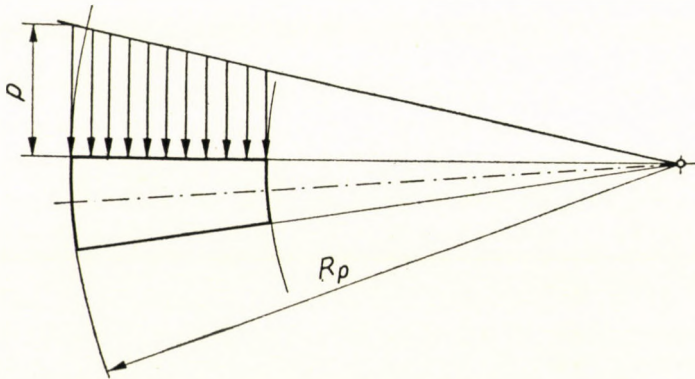


Abb. 4

Dies besagt, dass die Proportionalität zwischen Durchbiegung und Halbmesser nur besteht, wenn auch die Belastungsverteilung dem Halbmesser proportional ist (s. Abb. 4).

Der Mittelhalbmesser des Momentes

Der englische Ingenieur TREDGOLD [1] hatte im Jahre 1882 zur Festigkeitsberechnung der Kegelhäder folgendes vorgeschlagen: an Stelle der Kegelhäder werden virtuelle zylindrische Zahnräder eingesetzt, die dann als Grundlage der Berechnung dienen sollen. (Abb. 5)

Diese Art eines virtuellen Triebes ist durch folgende vier Angaben charakterisiert:

1. Die Halbmesser der zylindrischen Räder sind mit je einer Projektion r'_1 und r'_2 des mittleren Kegelhalbmessers, an dem Ergänzungskegel gemessen, identisch.

2. Der Modul des zylindrischen Triebes ist gleich dem *Mittelmodul* m_m des Kegelradtriebes;

3. Die Zahnlänge (b) bleibt unverändert;

4. Die Belastungsverteilung ist entlang der Zahnlänge (p_m) gleichmässig.

In der Fachliteratur fand der Vorschlag von Tredgold eine rasche Annahme; dieser wird nach 75 Jahren noch immer verwendet, ungeachtet dessen, dass die Belastungsverteilung am Kegelfradtrieb gar nicht gleichmässig ist,

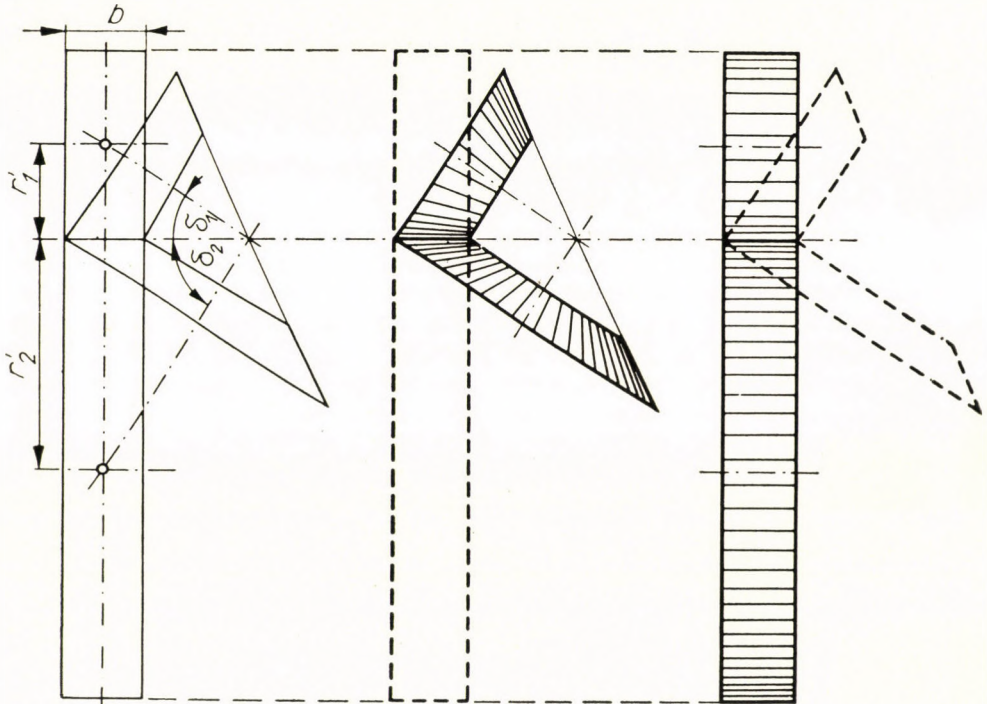


Abb. 5

und daher der Halbmesser des virtuellen Triebes nicht dem Mittelhalbmesser der Kegelfräder gleichgestellt werden darf.

Später haben Autoren [3] [5] auf diesen Unterschied bereits hingewiesen; die Berechnung gemäss der Tredgold-Transformation kann nunmehr nicht als exakt betrachtet werden, da der hier angenommene Mittelhalbmesser (s. Abb. 6)

$$r_m = \frac{1}{2} (R + r),$$

von dem tatsächlichen

$$r_e = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

abweicht, d. h.

$$r_e > r_m$$

Nun kann aber der Konstrukteur diesen Mittelhalbmesser nicht in Rechnung stellen, da hierfür bereits die Dimensionen des Triebes bekannt sein müssten.

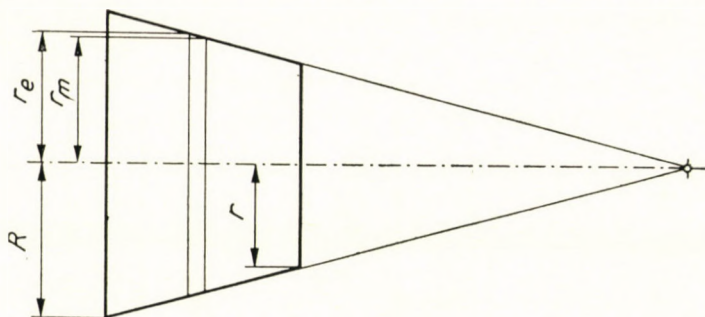


Abb. 6

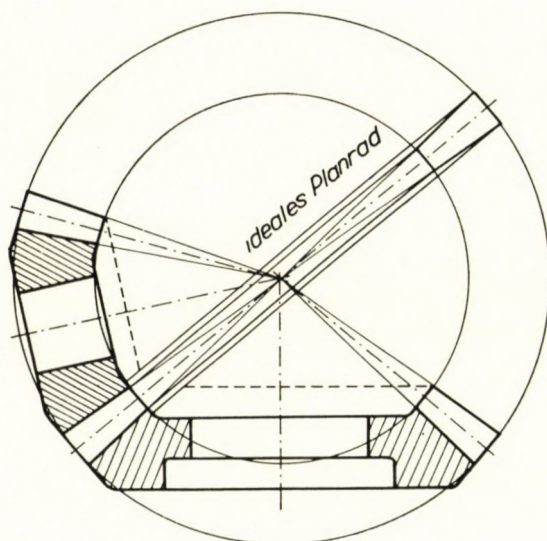


Abb. 7

Die den Kegelradtrieb belastenden Momente wollen wir nicht auf einzelne Räder, sondern — indem wir die Betrachtungsweise des Einzelrades verlassen — auf das ideale Planrad bezogen errechnen; dies umso mehr da auch die exakte Berechnungsformel hierauf bezogen wird (s. Abb. 7).

Zuerst soll gemäss der exakten Betrachtungsweise das aus einer linear proportionalen Belastung resultierende Biegemoment berechnet werden. (Abb. 8)

$$\begin{aligned}
 p_x &= p(1-x) \\
 dP &= p_x R_p dx = p R_p (1-x) dx \\
 dM_x &= R_p (1-x) dP = p R_p^2 (1-x)^2 dx \\
 M_x &= p R_p^2 \int_0^x (1-2x+x^2) dx = p R_p^2 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right).
 \end{aligned}$$

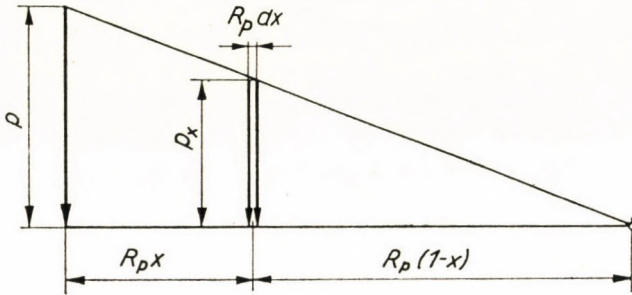


Abb. 8

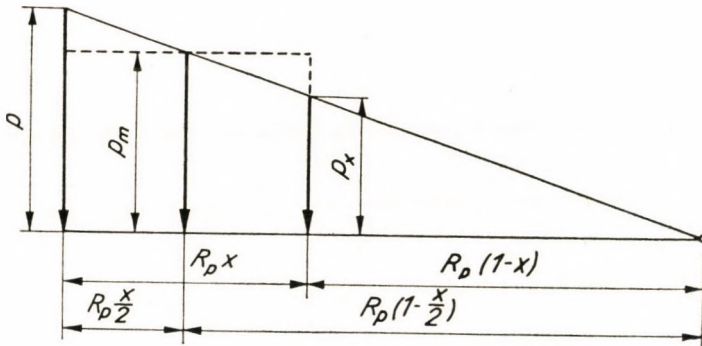


Abb. 9

Setzen wir $x = 1$, so ergibt sich :

$$M_1 = \frac{1}{3} p R_p^2$$

und

$$M_x = M_1 (3x - 3x^2 + x^3) = M_1 g(x) \quad (10)$$

Nun soll das Moment bestimmt werden, das bei dem Tredgoldschen virtuellen zylindrischen Trieb unter gleichmässiger Belastung auftritt. (Abb. 9)

$$p_m = \frac{P + P_x}{2} = P \left(1 - \frac{x}{2} \right);$$

$$\begin{aligned}
 P &= p_m R_p x = p R_p \left(1 - \frac{x}{2}\right) x; \\
 M_m &= R_p^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) P = p R_p^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 x = p R_p^2 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{4}\right) = \\
 &= \frac{1}{3} p R_p^2 \left(3x - 3x^2 + \frac{3}{4}x^3\right)
 \end{aligned}$$

und mit der oben eingeführten Bezeichnung: $M_1 = \frac{1}{3} p R_p^2$ erhalten wir

$$M_m = M_1 \left(3x - 3x^2 + \frac{3}{4}x^3\right) = M_1 g_m(x) \quad (11)$$

Die Gleichungen (10) und (11) zeigen deutlich den Unterschied zwischen den Funktionen $g(x)$ und $g_m(x)$.

Aus diesen Gleichungen geht es klar hervor, dass für ein Planrad, dessen Zahnlänge dem Halbmesser gleich d. h., wenn $x = 1$ ist, die entsprechenden Werte von M_x und M_m von einander sich unterscheiden, die genauen Werte nach (10) und (11) sind: $M_x = M_1$, und $M_m = \frac{3}{4} M_1$.

Dieser Umstand allein beweist die Unhaltbarkeit der Tredgold-Transformation. Ein weiterer Beweis ergibt sich daraus, dass die Funktion (11) infolge der Bedingung

$$\frac{dg_m(x)}{dx} = 0$$

bei $x = \frac{2}{3}$ ein Maximum aufweist; das ist aber eine technische Unmöglichkeit [5].

Aus den Gleichungen (10) und (11) lässt sich auch der Unterschied der bezüglichen Mittelhalbmesser bestimmen; bei der Tredgold-Transformation ist der Hebelarm der Kraft:

$$r_{mp} = R_p \left(1 - \frac{x}{2}\right) \quad (12)$$

wogegen die exakte Ableitung den effektiven Hebelarm definiert:

$$r_{ep} = R_p \left[1 - \frac{x}{2} \psi(x)\right] \quad (13)$$

hiebei ist

$$\psi(x) = \frac{6 - 4x}{6 - 3x};$$

d. h. für positive x Werte: ($0 < x < 1$)
erhalten wir:

$$\psi(x) < 1, \quad \text{und} \quad r_{ep} > r_{mp}.$$

Für den Fall eines bis zum Mittelpunkt bezahnten idealen Planrades wollen wir das Moment M_1 als 100% bezeichnen; in dieser Beziehung erhalten wir (laut Tab. 1. und Abb. 10) die Kurven für M_x und M_m als Funktionen von $x = \frac{b}{R_p}$. Für den in der Praxis üblichen Grenzfall $b_{\max} = \frac{1}{3} R_p$, also bei

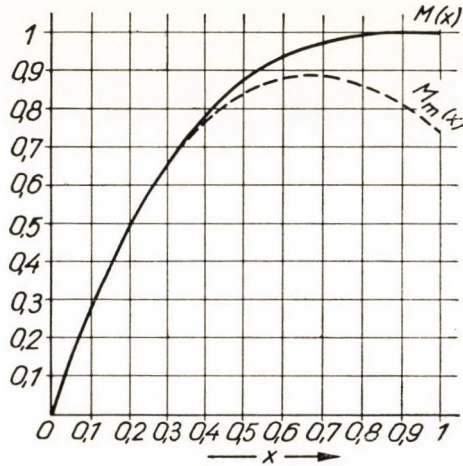


Abb. 10

$x = \frac{1}{3}$, ist der Unterschied zwischen den nach den obigen zwei Formeln berechneten Momenten zweifellos nur 1,4% folglich kann man für die Praxis die Tredgoldsche Transformation als brauchbar anerkennen; legen wir jedoch Wert auf wissenschaftliche Genauigkeit, dürfen wir bei Anwendung der exakten Methode nur mit exakten Momentwerten rechnen.

Festigkeitsberechnung von Kegeltrieben mit willkürlichem Achsenwinkel

Die richtige Berechnung erfolgt hier genau nach der Methode für zylindrische Zahnräder, unter Berücksichtigung der Hertzischen Spannungen. In der Fachliteratur [2, 4] wird die Gültigkeit der Hertzischen Grundformel allgemein auch für Kegelradtriebe anerkannt.

Die erste Hertzische Formel gilt für die halbe Breite des Berührungstreifens (Abb. 11)

$$w = 1,52 \sqrt{\frac{P_m \varrho_m}{E_m}} \quad (14)$$

Tabelle 1

| x | $M(x)$ | $M_m(x)$ | Diff. | Diff. \approx % |
|-----|---------|----------|---------|-------------------|
| 0,1 | 0,27100 | 0,27075 | 0,00025 | 0,1 |
| 0,2 | 0,48800 | 0,48600 | 0,00200 | 0,4 |
| 0,3 | 0,65700 | 0,65025 | 0,00675 | 1,0 |
| 1/3 | 0,70370 | 0,69444 | 0,00926 | 1,4 |
| 0,4 | 0,78400 | 0,76800 | 0,01600 | 2,0 |
| 0,5 | 0,87500 | 0,84375 | 0,03125 | 3,6 |
| 0,6 | 0,93600 | 0,88200 | 0,05400 | 5,8 |
| 2/3 | 0,96296 | 0,88888 | 0,07408 | 7,7 |
| 0,7 | 0,97300 | 0,88725 | 0,08575 | 8,8 |
| 0,8 | 0,99200 | 0,86400 | 0,12800 | 12,8 |
| 0,9 | 0,99900 | 0,81675 | 0,18225 | 18,3 |
| 1,0 | 1,00000 | 0,75000 | 0,25000 | 25,0 |

wobei

$$p_m = \frac{Q}{b} \text{ [kg/cm]}$$

Für den Wert der in der Mittellinie des Berührungstreifens auftretenden höchsten Druckspannung lautet die zweite Hertzsche Formel:

$$\sigma_H = \frac{2P_m}{w} = 0,418 \sqrt{\frac{P_m}{\varrho_m} E_m} \quad (15)$$

Der mittlere Krümmungshalbmesser ist

$$\frac{1}{\varrho_m} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \quad (16)$$

Da die Krümmungshalbmesser der Zahnprofile

$$\varrho_{x1} = \varrho_1 (1-x) \quad \text{und} \quad \varrho_{x2} = \varrho_2 (1-x)$$

dem Halbmesser des Planrades $R_p (1-x)$ proportional sind, so ist auch der mittlere Krümmungshalbmesser eine lineare Funktion von x :

$$\varrho_{xm} = \varrho_m (1-x).$$

Nun sahen wir bereits, dass auch die Verteilung der Belastung eine ähnliche lineare Funktion von x darstellt :

$$p_x = p(1-x);$$

daraus folgt, dass auch die halbe Breite des Berührungstreifens demselben linearen Gesetz — s. Formel (14) — folgt :

$$w_x = w(1-x),$$

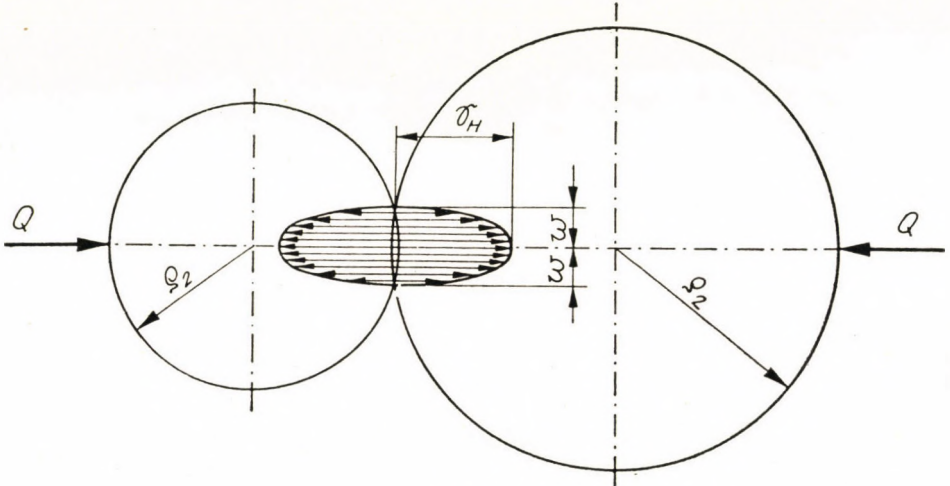


Abb. 11

hingegen ist der Quotient (der Stribeck'sche Walzenpressungsfaktor)

$$k = \frac{P_{xm}}{2 \varrho_{xm}} = \frac{P_m}{2 \varrho_m} \quad (17)$$

und damit auch die Hertz'sche Spannung an der ganzen Zahnlänge konstant.

Die Feststellung, dass *die Hertz'sche Spannung der ganzen Zahnlänge entlang konstant ist*, gilt als der wichtigste Grundsatz der Berechnung.

Als Ausgangspunkt gilt die Formel (15) :

$$\sigma_H^2 = 0,175 \frac{P_m}{\varrho_m} E_m = 0,35 \frac{P_m}{2 \varrho_m} E_m = 0,35 k_z E_m \quad (18)$$

Die zulässigen Werte des Walzenpressungsfaktors sind für die üblichen Werkstoffe aus Tabellen der Fachliteratur [6] bekannt. Daher sind sie jedem Konstrukteur leicht zugänglich. Nun ist es notwendig, einen für den Walzenpressungsfaktor k entsprechenden Ausdruck zu finden, das auf die Ausgangs-

werte (N, n_1, i, a, φ) und auf den Halbmesser des Planrades R_p aufgebaut ist : dann geht die Berechnung ohne weiteres vor sich.

Um die endgültige Formel finden zu können, müssen wir uns auf zwei trigonometrische Sätze stützen, die als Grundformeln für jedes Kegelradpaar gültig sind; u. zw. sind es laut Abb. 12 folgende Gleichungen :

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \quad (19)$$

$$\varphi = \delta_1 + \delta_2 \quad (20)$$

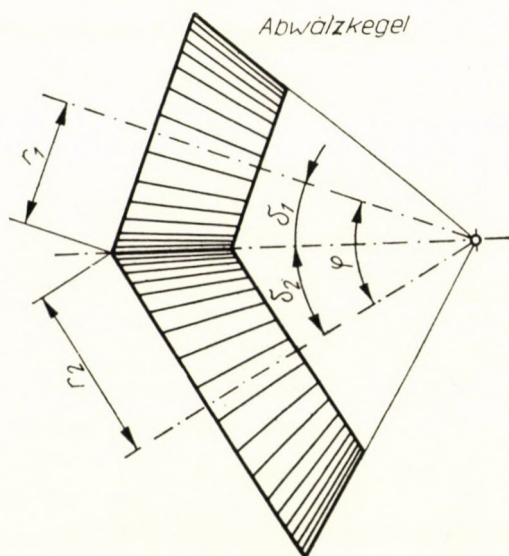


Abb. 12

Zur Beweisführung führen wir noch einige trigonometrische Formel an, die aus den beiden ersten hervorgehen :

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin \varphi}{i + \cos \varphi} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{i \cdot \sin \varphi}{1 + i \cos \varphi} \quad (21)$$

$$\sin \delta_1 = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{i^2 + 2i \cos \varphi + 1}} \quad \text{und} \quad \sin \delta_2 = \frac{i \cdot \sin \varphi}{\sqrt{i^2 + 2i \cos \varphi + 1}} \quad (22)$$

$$\frac{\operatorname{tg} \delta_1 + \operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg} \delta_1 \cdot \operatorname{tg} \delta_2} = \frac{i^2 + 2i \cos \varphi + 1}{i \cdot \sin \varphi} \quad (23)$$

Da die Kraft

$$Q = \frac{P}{\cos a}$$

die Radzähne belastet, wobei P die Tangentialkraft und α den Pressungswinkel bedeutet, ergibt sich daraus die mittlere spezifische Belastung

$$P_m = \frac{Q}{b} = \frac{P}{b \cos \alpha} = \frac{M_1}{r_{m1} \cdot b \cdot \cos \alpha}$$

Da nun

$$r_{m1} = r_{mp} \sin \delta_1 = r_{mp} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{i^2 + 2i \cos \varphi + 1}}$$

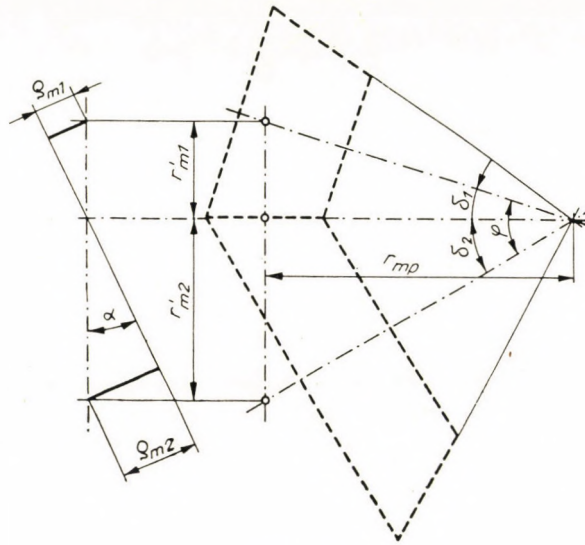


Abb. 13

und

$$M_1 = 71600 \frac{N}{n_1}$$

so kann die mittlere spezifische Belastung folgendermassen ausgedrückt werden :

$$P_m = \frac{71600}{r_{mp} \cdot b \cdot \cos \alpha} \frac{\sqrt{i^2 + 2i \cos \varphi + 1}}{\sin \varphi} \frac{N}{n_1} \quad (24)$$

Dieser Ausdruck ist der Zähler in der Formel (17) für den Flankenpressungsfaktor; der Nenner lässt sich aus den geometrischen Angaben der Räder ermitteln : (Abb. 13)

Bekannt sind folgende Beziehungen :

$$\varrho_{m1} = r'_{m1} \sin \alpha = r_{mp} \sin \alpha \operatorname{tg} \delta_1$$

$$\varrho_{m2} = r'_{m2} \sin \alpha = r_{mp} \sin \alpha \operatorname{tg} \delta_2$$

aus denen wir für den Nenner der Gleichung (17) folgenden Ausdruck erhalten :

$$\frac{1}{2 \varrho_m} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varrho_{m1}} + \frac{1}{\varrho_{m2}} \right] = \frac{1}{2 r_{mp} \sin \alpha} \frac{\operatorname{tg} \delta_1 + \operatorname{tg} \delta_2}{\operatorname{tg} \delta_1 \cdot \operatorname{tg} \delta_2}$$

Durch Einsetzen der rechten Seite der Gleichung (23) ergibt sich :

$$\frac{1}{2 \varrho_m} = \frac{1}{2 r_{mp} \sin \alpha} \frac{i^2 + 2 i \cos \varphi + 1}{i \sin \varphi} \quad (25)$$

Aus der Kombination der Gleichungen (24) und (25) erhalten wir :

$$k_z = \frac{P_m}{2 \varrho_m} = \frac{71600}{r_{mp}^2 b \cdot \sin 2 \alpha} \cdot \frac{N}{n_1} \cdot \frac{(i^2 + 2 i \cos \varphi + 1)^{3/2}}{i \cdot \sin^2 \varphi} \quad (26)$$

Nun können wir den letzten Schritt vornehmen, um die Endformel für R_p zu entwickeln; um klar zu sehen, wenden wir uns zuerst wieder an die Tredgold-Transformation; hier gelten die folgenden Beziehungen :

$$r_{mp} = R_p (1-x), \text{ und } b = R_p x,$$

und daher :

$$r_{mp}^2 \cdot b = \frac{1}{3} R_p^3 \left(3x - 3x^2 + \frac{3}{4} x^3 \right) = \frac{1}{3} R_p^3 g_m(x)$$

Bereits zu Beginn unserer Abhandlung haben wir festgestellt, dass an Stelle der Funktion $g_m(x)$ richtig $g(x)$ zu setzen ist :

$$r_{mp}^2 \cdot b = \frac{1}{3} R_p^3 g(x) = \frac{1}{3} R_p^3 (3x - 3x^2 + x^3) \quad (27)$$

Daraus erhalten wir als endgültige Formel :

$$R_p^3 = \frac{1}{\sin 2 \alpha} \frac{3}{3x - 3x^2 + x^3} \frac{(i^2 + 2 i \cos \varphi + 1)^{3/2}}{i \sin^2 \varphi} \frac{71600 N}{n_1} \frac{1}{k_z} \quad (28)$$

Bei einem Achsenwinkel $\varphi = 90^\circ$ nimmt diese allgemeine Formel (28) die folgende einfachere Gestalt an :

$$R_{p(\varphi=n/2)}^3 = \frac{1}{\sin 2\alpha} \frac{3}{3x - 3x^2 + x^3} \frac{(i^2 + 1)^{3/2}}{i} \frac{71600 N}{n_1} \cdot \frac{1}{k_z} \quad (29)$$

Wir wollen hier bemerken, dass die übliche Formel der Fachliteratur für den Fall $\varphi = \pi/2$

$$b \cdot d_{m1}^2 = \frac{4}{\sin 2\alpha} \frac{M_1}{k_z} \sqrt{\frac{i^2 + 1}{i^2}} \quad (30)$$

im Prinzip mit der Gleichung (29) identisch ist ; zum Beweise lassen sich folgende Beziehungen aufschreiben :

$$d_{m1} = 2 r_{m1} = 2 r_{mp} \cos \delta_2$$

$$d_{m1}^2 = 4 r_{mp}^2 \cos^2 \delta_2 = 4 r_{mp}^2 \frac{1}{i^2 + 1}$$

da nun

$$r_{mp} = R_p \left(1 - \frac{x}{2}\right), \quad r_{mp}^2 = R_p^2 \frac{(2-x)^2}{4},$$

und

$$b = R_p x,$$

somit ist

$$b r_{mp}^2 = R_p^3 \frac{(2-x)^2 x}{4} = R_p^3 \frac{4x - 4x^2 + x^3}{4}$$

Selbstverständlich tritt auch hier an Stelle der Funktion $g_m(x)$ die andere Funktion $g(x)$; auf diese Weise erhalten wir

$$b \cdot d_{m1}^2 = 4 R_p^3 \frac{3x - 3x^2 + x^3}{3} \frac{1}{1 + i^2} \quad (31)$$

Aus der Kombination von (30) und (31) erhalten wir das Endergebnis :

$$R_{p(\varphi=\pi/2)}^3 = \frac{1}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{3}{3x + 3x^2 + x^3} \cdot \frac{M_1}{k_z} \cdot \frac{(i^2 + 1)^{3/2}}{i} \quad (32)$$

Wie ersichtlich, sind (29) und (32) miteinander identisch.

Zurückgreifend auf die allgemein benützte frühere Formel (30), müssen wir feststellen, dass darin die unabhängigen Veränderlichen i und φ nur implizite enthalten sind ; also bietet diese Formel weder für den Konstrukteur, noch für den Theoretiker die Möglichkeit einer sinngemässen Analyse.

Analyse der Funktion R_p

Unsere Endformel (28) stellt die Funktion R_p als das Produkt von 5 Teilfunktionen dar :

$$R_p = f_1(a) \cdot f_2(x) \cdot f_3(i, \varphi) \cdot f_4(N, n_1) \cdot f_5(k_2)$$

Hievon haben wir die Teilfunktion f_4 mit zwei Unbekannten N und n_1 , die

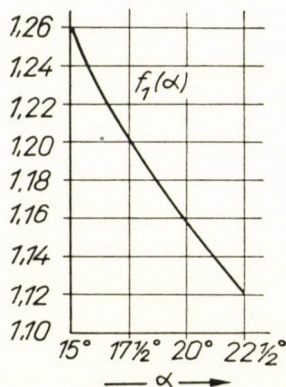


Abb. 14

wir nicht voneinander trennen brauchen, weil diese Funktion durch $f_4(M_1)$ ersetzt werden kann. f_3 enthält ebenfalls zwei Unbekannte; es ist nicht möglich diese Funktion in zwei voneinander unabhängige Funktionen aufzulösen; umso wichtiger ist es, diese Teilfunktion einer Analyse zu unterziehen; wir wollen der Reihe nach f_1 , f_2 , f_3 und f_4 analysieren; die Teilfunktion $f_5(k_2)$ gehört naturgemäss nicht in den Bereich der speziellen Analyse des Kegeldrives und es soll deshalb darauf verzichtet werden.

Analyse der Teilfunktion $f_1(\alpha)$

Die Grenzen der Funktion $f_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt[3]{\sin 2\alpha}}$ sind in der Praxis $\alpha = 15^\circ \sim 22^\circ 30'$. In diesem Bereich ist die Änderung der Funktion $f_1(\alpha)$ rund 11%; (s. Abb. 14 und Tabelle 2.).

Mit einer bestimmten Maschine und mit den üblichen Werkzeugen kann man die durch diese Grenzen gegebenen Möglichkeiten nicht ausnützen. Die grösste Abweichung zwischen dem Pressungswinkel und dem Eingriffswinkel ist höchstens 5° ; dem entspricht eine maximale 3%-ige Änderung der Funktion

$f_1(a)$. Es ist zwar wünschenswert, einen je grösseren Pressungswinkel zu wählen, doch ist damit keine beträchtliche Abnahme des Masses R_p verbunden.

Tabelle 2

| α | $f_1(a)$ |
|----------|----------|
| 15° | 1,259924 |
| 17° 30' | 1,203565 |
| 20° | 1,158717 |
| 22° 30' | 1,122462 |

Analyse der Teilfunktion $f_2(x)$

Tabelle 3

| x | $f_2(x)$ | R_p % | $1-x$ | r_{pi} % |
|------|----------|---------|-------|------------|
| 0,10 | 2,228695 | 154,63 | 0,90 | 139,17 |
| 0,15 | 1,981032 | 137,36 | 0,85 | 116,76 |
| 0,20 | 1,831895 | 127,02 | 0,80 | 101,62 |
| 0,25 | 1,731277 | 120,04 | 0,75 | 90,03 |
| 0,30 | 1,659021 | 115,03 | 0,70 | 80,52 |
| 1/3 | 1,621476 | 112,43 | 2/3 | 74,95 |
| 0,4 | 1,564114 | 108,45 | 0,6 | 65,07 |
| 0,5 | 1,507895 | 104,55 | 0,5 | 52,28 |
| 0,6 | 1,474400 | 102,23 | 0,4 | 40,89 |
| 0,7 | 1,455469 | 100,92 | 0,3 | 30,28 |
| 0,8 | 1,446116 | 100,27 | 0,2 | 20,05 |
| 0,9 | 1,442731 | 100,03 | 0,1 | 10,00 |
| 1 | 1,442250 | 100,00 | 0,0 | 0,00 |

Zur näheren Behandlung der Teilfunktion $f_2(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{3x - 3x^2 + x^3}}$ finden wir in der Tabelle 3. ausser den korrespondierenden Werten von (x) und $f_2(x)$ noch die entsprechenden prozentuellen Werte des Planradhalbmessers R_p und des inneren Planradhalbmessers r_{pi} , indem wir für R_p bei $x = 1$ den Wert als 100% einsetzen. In Abb. 15 ist die Funktion $f_2(x)$ zwischen den in der Praxis üblichen Grenzen dargestellt. In Abb. 16 sind die Kurven der Werte von R_p und r_{pi} zu sehen.

Die uns durch die Technologie auferlegten Grenzen sind $x = \frac{1}{3} \sim \frac{1}{5}$. Die Grenze $1/3$ ist streng und kann keinesfalls überschritten werden. Die

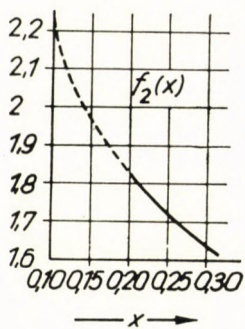


Abb. 15

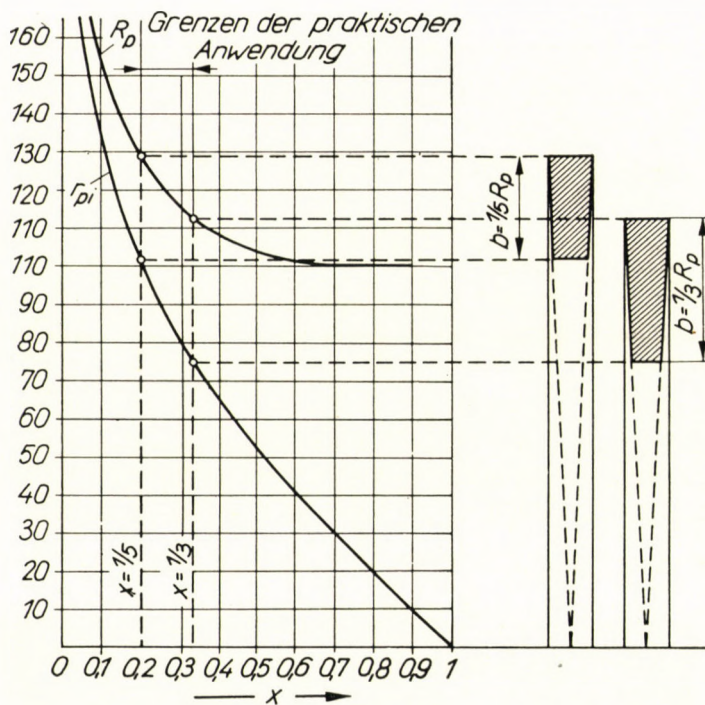


Abb. 16

Grenze $1/5$ ist weniger empfindlich; diese wurde in die Praxis eingeführt, da eine weitere Abnahme der Verhältniszahl x eine allzu steile Zunahme des Masses R_p mit sich bringen würde.

Innerhalb dieser Grenzen besteht folgende Beziehung: während die Zahnlänge um 31% abnimmt, beträgt die Zunahme des Planradhalbmessers nur 15%. Dies besagt, dass man bei der Wahl der Verhältniszahl nicht allzu skrupulös sein mag. Rutinierte Konstrukteure halten meistens an dem Wert

$$x = \frac{1}{3}, \text{ d. h. }, f_2(x) = 1,621$$

fest.

Eine Ausnahme bildet in dieser Hinsicht der praktische Fall, wenn aus gewissen Gründen ein besonders grosses Tellerrad gewünscht wird, z. B. an Textilmaschinen.

Analyse der Teilfunktion $f_3(i, \varphi)$

In der Fachliteratur wurde bis nun niemals der Einfluss untersucht, den die Änderung des Achsenwinkels auf die Grösse des Planradhalbmessers und dadurch auf die Dimensionen des Triebes ausüben könnte; umso wichtiger und interessanter scheint es, die Teilfunktion

$$f_3(i, \varphi) = \frac{(i^2 + 2i \cos \varphi + 1)^{1/2}}{(i \cdot \sin^2 \varphi)^{1/3}}$$

zu analysieren.

Bei beiden Grenzwerten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ ist der Wert der Funktion f_3 unendlich gross. Es muss also dazwischen eine Stelle φ_m (also $0 < \varphi_m < \pi$) geben, bei welcher der Wert der Teilfunktion $f_3(i, \varphi_m)$ das Minimum erreicht. Auf Grund der Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} f_3(i, \varphi) = 0$$

erhalten wir für φ_m die Formel:

$$\cos \varphi_m = -\frac{1}{i} [(i^2 + 1) - \sqrt{(i^2 - 1)^2 + i^2}] = -\frac{1}{i} \psi(i) \quad (33)$$

Der Winkel φ_m ist immer grösser als 90° . Indessen kann der Achsenwinkel nur bis zu jener Grenze φ_g erhöht werden, bei welcher δ_2 selbst den Wert von 90° erreicht, d. h. wo das grosse Rad selbst zum Planrad wird (Abb. 17) In diesem Falle gilt:

$$i \sin \delta_1 = \sin \delta_2 = \sin 90^\circ = 1, \quad \text{und} \quad \sin \delta_1 = \frac{1}{i},$$

und zugleich

$$\cos \varphi_g = \cos (90^\circ + \delta_1) = -\sin \delta_1 = -\frac{1}{i} \quad (34)$$

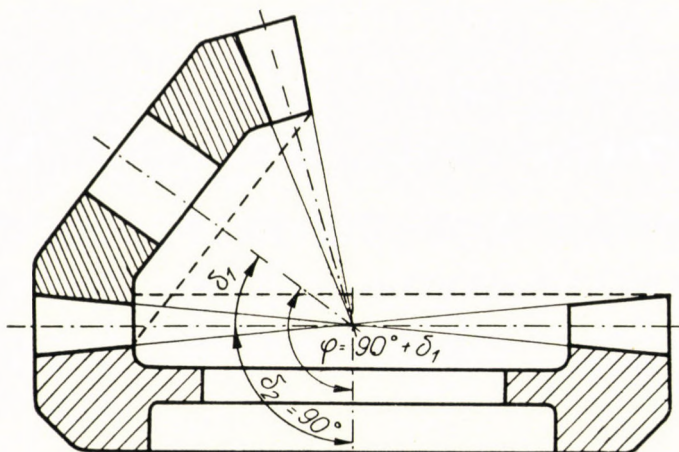


Abb. 17

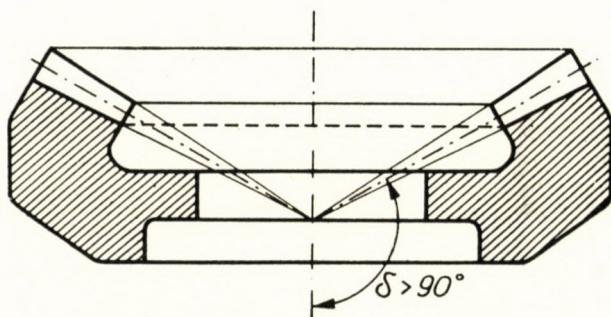


Abb. 18

Wenn $i > 1$, dann haben wir in der Gleichung (33) $\psi(i) < 1$. Diese Feststellung, kombiniert mit den Gleichungen (33) und (34), lässt darauf schliessen, dass $\cos \varphi_g > \cos \varphi_m$ und daher

$$\varphi_g < \varphi_m$$

Nun ist der Winkel φ_g grösser als 90° , doch kleiner als φ_m . Das besagt, dass man φ_m praktisch nicht verwirklichen und deshalb auch den Minimalwert von R_p nicht erreichen kann.

Hier müssen wir darauf hinweisen, dass in der Fachliteratur oft die Idee auftaucht, sogenannte »innenverzahnte Kegelräder« d. h. solche mit einem

Teilkegelwinkel $\delta_2 > 90^\circ$ zu verwenden (s. Abb. 18). Doch stösst die Erzeugung solcher Räder auf grosse Schwierigkeiten; keinesfalls können diese mittels des Abwälzverfahrens hergestellt werden; es gibt keine Abwälzmaschine, an welcher ein innenverzahntes Kegelrad gefertigt werden könnte. Mit einer Innenverzahnung ist nur die Herstellung eines rohgegossenen Kegelrades möglich. Diese Technologie entspricht aber nicht mehr den zeitgemässen Anforderungen.

Um auf die Funktion $f_3(i, \varphi)$ zurückzukommen, müssen wir darauf hinweisen, dass selbstverständlich zu jedem i Wert eine besondere Kurve aufzuzeichnen ist. Als Beispiel soll der Fall von $i = 2$ dienen; diese Funktionswerte sind in der Tabelle 4 angegeben und die zugehörige Kurve ist in Abb. 19 dargestellt.

Die untere Grenze der Funktion ist praktisch bei $\cos \varphi_g = -\frac{1}{i}$ zu finden und der dazugehörige Funktionswert ergibt sich aus der Funktionsformel $f_3(i, \varphi_g) = \sqrt{i^2(i^2 - 1)}$.

Tabelle 4
i=2

| φ | $f_3(i, \varphi)$ |
|-----------------------------|-------------------|
| 50° | 2,6084 |
| 60° | 2,3113 |
| 70° | 2,0877 |
| 80° | 1,9135 |
| 90° | 1,7748 |
| 100° | 1,6635 |
| 110° | 1,5766 |
| $\varphi_g =$ 120° | 1,5131 |
| 125° | 1,4913 |
| 127° 30' | 1,4843 |
| 130° | 1,4775 |
| $\varphi_m =$ 134° 12' 17'' | 1,4735 |
| 135° | 1,4799 |
| 140° | 1,4827 |
| 145° | 1,5093 |
| 150° | 1,5615 |

In Abb. 20. haben wir die Kurven der Funktion $f_3(i, \varphi)$ für jeden einzelnen i Wert von 1 ~ 5 eingezeichnet.

Tabelle 5

| i | φ_m | φ_g | $f_3(i, \varphi_g)$ |
|-----|---------------|---------------|---------------------|
| 1 | 180° | 180° | 0 |
| 2 | 134° 12' 17'' | 120° | 1,513086 |
| 3 | 119° 02' 03'' | 109° 28' 20'' | 2,039649 |
| 4 | 111° 39' 05'' | 104° 28' 40'' | 2,492883 |
| 5 | 107° 09' 14'' | 101° 32' 20'' | 2,904191 |
| 6 | 104° 05' 46'' | 99° 35' 40'' | 3,286461 |

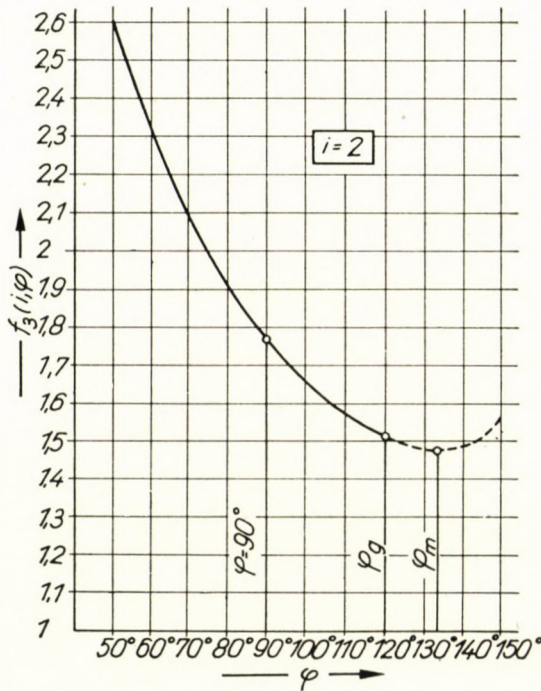


Abb. 19

In Tabelle 5. sind die numerischen Werte von φ_m , φ_g und $f_3(i, \varphi_g)$ für die Übersetzungswerte von $i = 1 \sim 6$ angegeben.

In Abb. 21 sind zwei Kurvengruppen zu sehen. Oben sehen wir die zwei Hauptwerte von φ_m und φ_g als Funktionen von i dargestellt. Im unteren Diagramm besteht die Kurvenschar aus 3 Kurven, die die Werte der Funktion $f_3(i, \varphi)$ für drei besondere Werte von φ_m , φ_g , $\pi/2$ darstellen. Für $\varphi = \pi/2$ lässt sich die Formel der Funktion $f_3(i, \pi/2)$ wie folgt anschreiben: $f_3(i, \pi/2) = \frac{(i^2 + 1)^{1/2}}{i^{1/3}}$. Aus dem Diagramm ist es ersichtlich dass die drei Kurven

nur im Bereiche $i = 1 \sim 2,5$ von einander abweichen, aber bei höheren Werten von i ist die Abweichung nicht bedeutend. Charakteristisch ist die folgende

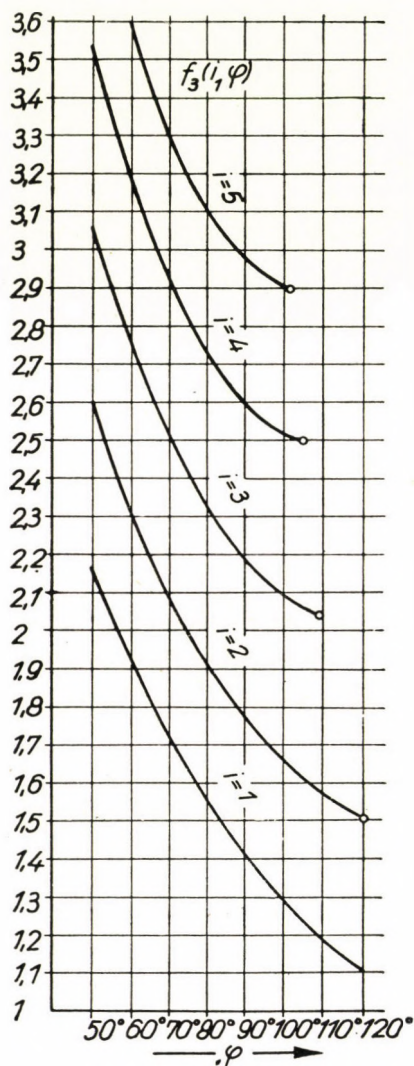


Abb. 20

Beziehung :

$$f_3(i, \pi/2) > f_3(i, \varphi_g) > f_3(i, \varphi_m)$$

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass für $i > 2,5$ die Dimensionen eines Kegelradtriebes mit dem Achsenwinkel von 90° dem optimalen ziemlich nahe stehen.

Die Teilfunktion $f_3(i, \varphi)$ für $i = 1$ hat kein Minimum ; ist doch in diesem Fall

$$\varphi_g = \varphi_m = \pi$$

Dies besagt, dass die Dimensionen des Triebes mit anwachsenden Achsenwinkelwerten stetig abnehmen. Als Beispiel diene hier die Abb. 22., wo Kegel-

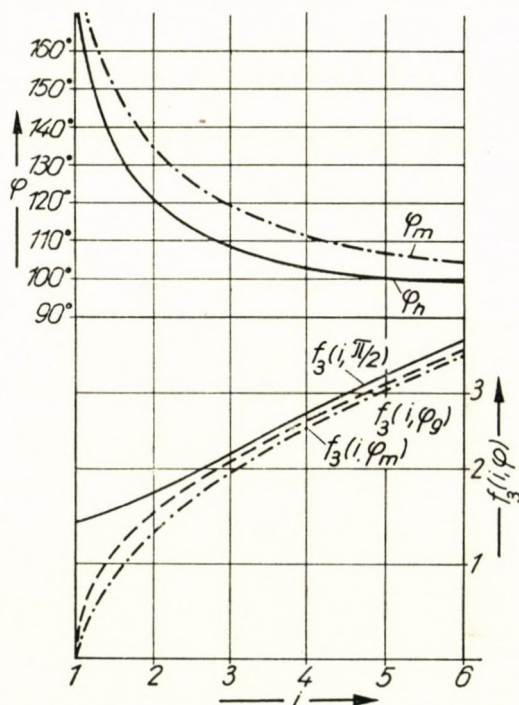


Abb. 21

radtriebe mit der Übersetzung $i = 1$ für die Fälle von $\varphi = 60^\circ$ bzw. 90° und 120° aufgezeichnet sind. Bei näherer Betrachtung nimmt hier das Volumen des Triebes mit anwachsendem Achsenwinkel bedeutend ab, doch nicht in dem Masse, wie die Dimension des Planrades. Bezeichnend wir die Masse des Triebes bei 90° mit 100% , so erhalten wir die folgende Tabelle :

Tabelle 6

| Achsenwinkel | 60° | 90° | 120° |
|----------------|------|------|------|
| Planradvolumen | 247% | 100% | 48% |
| Trieb-Volumen | 124% | 100% | 71% |

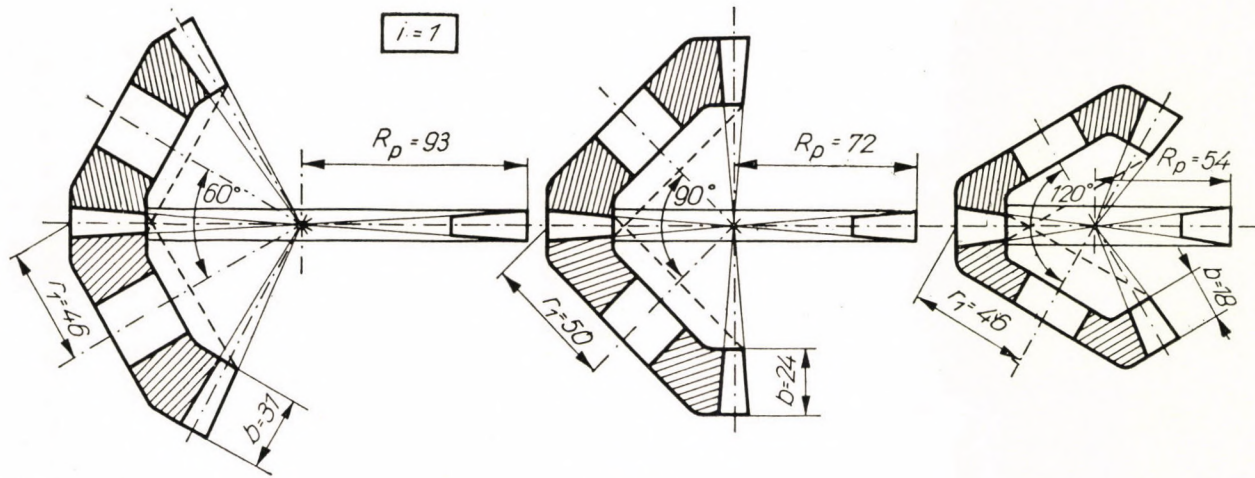


Abb. 22

Diese Verschiedenheit der Volumenänderungen erklärt sich durch die Verschiedenheit der bezüglichen Gleichungen. Für die Änderung des Planradvolumens haben wir folgende Gleichung :

$$R_p^3 = C \frac{(i^2 + 2i \cos \varphi + 1)^{3/2}}{i \sin^2 \varphi}$$

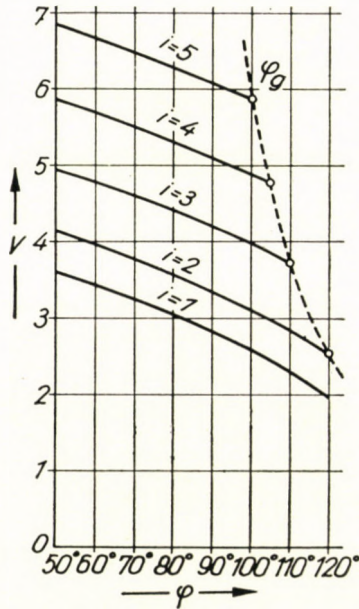


Abb. 23

Die Änderung des Triebvolumens ist durch die folgende Gleichung dargestellt :

$$V = R_p^3 (1 + i^2) \sin \delta_1 = C (i^2 + 2i \cos \varphi + 1)^{1/2} \cdot \frac{i^2 + 1}{i}$$

Setzen wir den Koeffizienten C gleich 1 dann können wir für das Volumen V ziemlich leicht die Kurvenschar für die einzelnen i Werte von $1 \sim 5$ im Bereiche von $\varphi = 50^\circ \sim 120^\circ$ aufzeichnen (Abb. 23). Aus diesem Diagramm geht es klar hervor, dass bei grösseren $\varphi =$ Werten, wobei die übrigen Ausgangsdaten unverändert bleiben, die Dimensionen des Kegelradtriebes, also auch das Volumen und der Materialbedarf stetig abnehmen. Die untere Grenze liegt naturgemäss bei φ_g .

Nun wollen wir die Analyse weiterführen, um zu erfahren, wie sich die einzelnen linearen Dimensionen verhalten, welche Änderungen im Verhältnis der Dimensionen zueinander eintreten, wenn der Winkel φ sich ändert.

Mit i und φ als unabhängigen Veränderlichen bei konstantem Wert der anderen fünf, haben wir bereits oben für den Planradhalbmesser R_p die folgende Beziehung entwickelt :

$$R_p = C \frac{(i^2 + 2i \cos \varphi + 1)^{1/2}}{(i \sin^2 \varphi)^{1/3}}$$

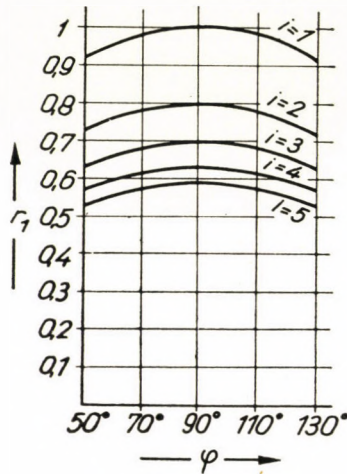


Abb. 24

Nun haben wir als Halbmesser des kleinen Rades :

$$r_1 = R_p \sin \delta_1$$

und laut Formel (22) :

$$\sin \delta_1 = \frac{\sin \varphi}{(i^2 + 2i \cos \varphi + 1)^{1/2}}$$

In der hieraus abgeleiteten Gleichung :

$$r_1 = C \frac{\sin \varphi}{(i \sin^2 \varphi)^{1/3}} = C \left(\frac{\sin \varphi}{i} \right)^{1/3}$$

erhalten wir r_1 als Funktion von i und φ .

In Abb. 24 sind für einzelne i Werte die Kurven der Funktion $r_1 = k(i, \varphi)$ aufgezeichnet. Das Maximum bei $\varphi = 90^\circ$ ist klar ersichtlich. Bei diesem Wert besteht in allen Kurven eine Symmetrie, d. h. die r_1 Werte sind für die Winkel $\varphi \pm \theta$ immer gleich. Diese Änderung ist aber bei Zunahme des Winkels θ

nicht bedeutend. Z. B. bei $\vartheta = \pm 40^\circ$ das heisst für $\varphi = 50^\circ$ und 140° , beträgt die Abnahme des Halbmessers r_1 nur 8,5%.

Mit Rücksicht auf das Verhältnis $r_2 = i \cdot r_1$, besteht für den Halbmesser des grossen Rades r_2 dieselbe Gesetzmässigkeit.

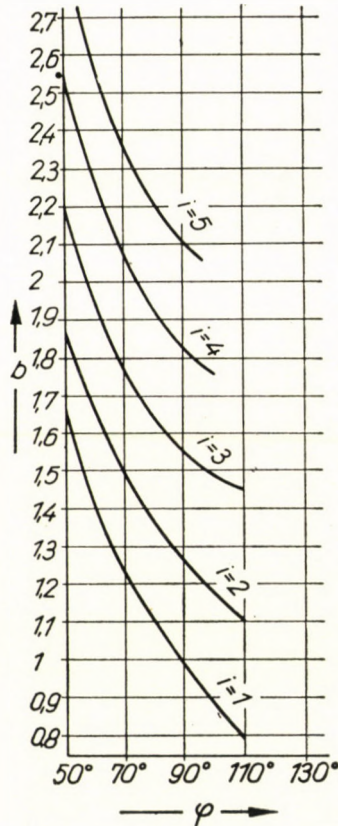


Abb. 25

In Abb. 25 sehen wir die Kurven der Veränderung der Zahnlänge b , für verschiedene i Werte von $i = 1$ bis 5, in Abhängigkeit von veränderlichen Achsenwinkelgrössen; unter Voraussetzung des Verhältnisses $\alpha = \frac{1}{3}$, d. h.

$b = \frac{R_p}{3}$, nimmt die Zahnlänge mit wachsendem φ Winkel rapid ab. Da eine grössere Zahnlänge die Herstellung erschwert, dürfen wir schon aus technologischen Gründen den Achsenwinkel nicht mit kleineren Werten wählen.

Jedenfalls wollen wir feststellen, dass ein Kegelartrieb mit einem spitzen Achsenwinkel φ keinesfalls gewählt werden soll. Die Dimensionen nehmen mit kleinerem φ Winkel rapid zu, und die Massverhältnisse gestalten sich ungünstig.

Nach alledem soll hier auch das Verhältnis des Mittelhalbmessers zur Zahnlänge am kleinen Rad behandelt werden ; die übliche Formel (7) bedingt eine Entscheidung über diese Zahl, doch hat der Konstrukteur keinen Anhaltspunkt zur richtigen Wahl. Eingangs hatten wir schon diese Unsicherheit als den empfindlichsten Punkt in der Anwendbarkeit der üblichen Berechnungsformel bezeichnet. Nun soll die Richtigkeit dieser Feststellung bewiesen werden.

Kehren wir zur Formel (5) zurück :

$$u = \frac{d_{m1}}{b} = \frac{2-x}{x} \sin \delta_1 \quad (5)$$

Durch Annahme eines Wertes von $x = 1/3$ erhalten wir :

$$u = 5 \sin \delta_1$$

und mit Hilfe des Ausdruckes laut (22) ergibt sich :

$$u = \frac{5 \sin \varphi}{\sqrt{i^2 + 2i \cos \varphi + 1}} = p(i, \varphi)$$

Diese Bezeichnung nimmt bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die einfachere Form an :

$$u_{(\varphi=\pi/2)} = \frac{5}{\sqrt{i^2 + 1}} = p(i, \pi/2)$$

Übersichtshalber haben wir die Werte der Funktion $p(i, \varphi)$ in zwei verschiedenen Kurvenscharen einmal als Funktion von i , für verschiedene φ Werte, ein anderes Mal als Funktion von φ für verschiedene i Werte aufgezeichnet (Abb. 26). Das Verhältnis u unterliegt einer *überaus schnellen* Abnahme, wenn i zunimmt ; jedenfalls aber wird $u < 1$ erst bei einer Übersetzung $i = 5$; der Einfluss des Winkels φ ist nicht so intensiv ; auch dieser ist aber nicht zu vernachlässigen, noch kann er durch irgend einen Durchschnittsfaktor ersetzt werden. Der Konstrukteur kann also die Formel für bd^2 nicht ohne weiteres gebrauchen ; erst müsste sie auf die Form von $\frac{d_{m1}^3}{u}$ gebracht werden

und dann könnte der Wert von u aus der Kurvenschar der Abb. 26 entnommen werden, den vorgeschriebenen i und φ Werten gemäss. Auch bei einem Winkel $\varphi = 90^\circ$ variiert der Wert u im Gebiet $i = 1 \sim 5$ zwischen den Grenzen $3,5355 \sim 0,9806$ und die Variation ist gar nicht linear. Eine Abschätzung ist dadurch sehr erschwert. Also kann man ohne Zweifel die Behauptung gutheissen

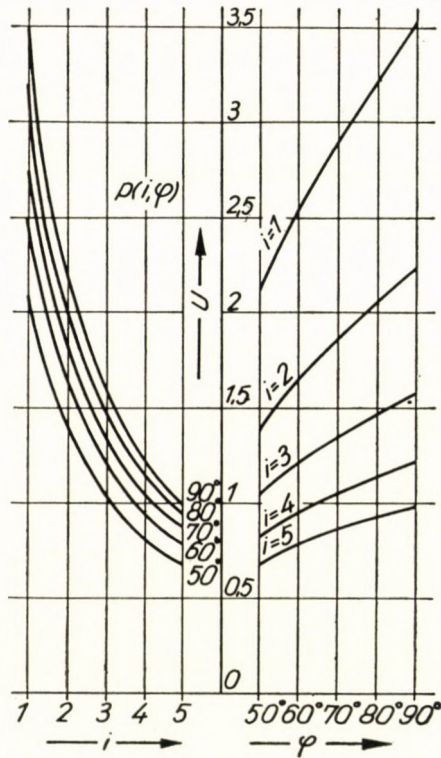


Abb. 26

dass die Berechnung durch die althergebrachte Formel nicht erleichtert wird ; mit ihrer Hilfe kann man eine beruhigende Lösung nur durch mehrfaches, wiederholtes Probieren finden.

Die vereinfachte Formel

In der alltäglichen Praxis wird die überwiegende Mehrheit der Kegeldrriebe mit einem Winkel $\varphi = 90^\circ$ entworfen und ausgeführt. Dadurch kann die Teilfunktion von $f_3(i, \varphi)$ auf die bereits entwickelte einfachere Form

$$f_3(i, \pi/2) = \frac{(i^2 + 1)^{1/2}}{i^{1/3}}$$

gebracht werden.

Berechnen wir nun die Werte dieser Funktion für die meist verwendeten i Werte von $1 \sim 6$ und zeichnen wir die Kurve auf Tabelle 7, Abb. 27. Es stellt sich heraus, dass die Abweichung dieser Funktion von einer linearen nahezu unmerklich ist; eine sehr brauchbare Annäherung ist durch die Formel:

$$f_3(i, \pi/2) = 0,4 i + 1$$

gegeben.

Für allgemeinen Gebrauch kann der Pressungswinkel als $\alpha = 20^\circ$ und das Zahnlangenverhältnis als $x = \frac{1}{3}$ angenommen werden; hiedurch kann man das Produkt der ersten zwei Teilfunktionen in folgender Weise ersetzen:

$$f_1(20^\circ) \cdot f_2\left(\frac{1}{3}\right) = 1,878832 \approx \frac{15}{8} = 1,875$$

und für die ersten drei Teilfunktionen kann die folgende lineare Annäherung eingesetzt werden:

$$F = f_1(20^\circ) \cdot f_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f_3(i, \pi/2) = \frac{3}{8} (2i + 5)$$

Laut Tabelle 8., in welcher die Werte der Funktion F sowohl nach genauer Berechnung wie auch nach der linearen Vereinfachung angeführt sind, können wir ersehen, dass der maximale Fehler 1,4% beträgt, d. h. die Genauigkeit eines Rechenschiebers als hinreichend erachtet werden kann. Der Fehler ist nicht grösser als derjenige, der bei Anwendung der Tredgoldschen Formel entstehen kann. Die Berechnungsformel nimmt aber eine sehr einfache, leicht verwendbare Form an, u. zw.:

$$R_p = \frac{3}{8} (2i + 5) \sqrt[3]{\frac{M_1}{k_z}} \quad (35)$$

Das bedeutet einen raschen und leichten Gang der Berechnung. Es geht daraus klar hervor, dass zu den Konstruktionsarbeiten, zur richtigen Wahl des Konstruktionsmaterials und also zur Bestimmung des Raumbedarfes die Formel gut brauchbar ist, auch wenn man beim endgültigen Entwerfen auf die genauere Formel zurückgreifen müsste.

Tabelle 7

| i | $f_3(i, \pi/2)$ | $0,4 i + 1$ |
|-----|-----------------|-------------|
| 1 | 1,414 212 | 1,4 |
| 2 | 1,774 769 | 1,8 |
| 3 | 2,192 601 | 2,2 |
| 4 | 2,597 393 | 2,6 |
| 5 | 2,981 924 | 3,0 |
| 6 | 3,347 472 | 3,4 |

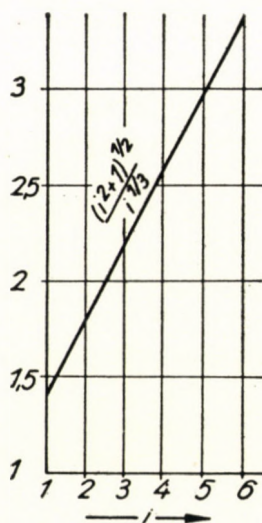


Abb. 27

Tabelle 8

| i | genauer Wert | Annäherungswert | Diff. | % |
|-----|------------------|-----------------|--------|-------|
| | der Funktion F | | | |
| 1 | 2,657 070 | 2,625 | -0,032 | -1,2 |
| 2 | 3,334 492 | 3,375 | +0,041 | +1,2 |
| 3 | 4,119 530 | 4,125 | +0,006 | +0,15 |
| 4 | 4,880 066 | 4,875 | -0,005 | -0,10 |
| 5 | 5,601 535 | 5,625 | +0,024 | +0,43 |
| 6 | 6,289 351 | 6,375 | +0,086 | +1,37 |

SCHRIFTTUM

1. TREGGOLD: A Practical Essay on the Strength of Cast Iron. London 1882.
2. H. E. MERRITT: Gears. II. Ed. London 1946. Pitman Sons Ltd.
3. M. TEN BOSCH: Maschinenelemente. III. Ed. Berlin, Julius Springer 1953.
4. VÖRÖS I.: Fogaskerekek (Zahnräder) I. Ed. Budapest, Tankönyvkiadó 1956.
5. G. KLEPPER: Beitrag zur Berechnung der Kegelräder. Konstruktion, 1954 II. 15. S. 75—76.
6. G. NIEMANN u. H. GLAUBITZ: Zahnflankenfestigkeit geradverzahnter Stirnräder aus Stahl. Z. VDI. 1951. II. 21. S. 121—126.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Autor entwickelt eine neue Formel zur Berechnung des Kegelradtriebes. Diese Grundgleichung, eine Explizitform des idealen Planradhalbmessers, ist ohne Anwendung der bekannten Tredgold-Methode des virtuellen zylindrischen Triebes abgeleitet. Die genaue Formel ist ein Produkt von Teilfunktionen. Ferner wird noch als Annäherung eine lineare Beziehung, mit einer maximalen Abweichung von 1,4% gegeben.

STUDY ON A NEW METHOD OF CALCULATION OF BEVEL GEARS

L. SZENICZEI

SUMMARY

In this paper, the author has developed a new method giving a formula for the diameter of the imaginary crown wheel without making use of the Tredgold-method of a virtual cylindrical gear. Besides the exact equation, in which the function appears as a product, another one of a more simple form is presented as an approximation being a linear function with results having a maximum deviation of 1,4%.

ESSAI D'UN CALCUL MODERNE DES ENGRENAGES CONCOURANTS

L. SZENICZEI

RÉSUMÉ

L'auteur propose une nouvelle méthode de calcul, en donnant une formule sur le diamètre de la roue plate génératrice, sans recourir à des roues virtuelles cylindriques selon Tredgold. En plus d'une fonction exacte présentée comme un produit, l'auteur a développé une expression approximative sous forme d'une simple fonction linéaire, dont la déviation maximum n'est pas plus que de 1,4%.

К СОВРЕМЕННОМУ РАСЧЕТУ КОНИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Л. СЕНИЦЕИ

РЕЗЮМЕ

Автор выводит новые формулы для расчета привода конических зубчатых колес. Это основное уравнение, — эксплицитная форма идеального радиуса плоского колеса, выведено без применения известного метода Тредгольда мнимого цилиндрического привода. Точная формула является суммой частных функций. Кроме того дается еще в качестве приближенного решения линейное соотношение с максимальным отклонением до 1,4%.

A NEW SYNCHRONIZING METHOD FOR SYSTEM DISTURBANCE CONDITIONS

(MAINLY IN THE CASE OF TURBOGENERATORS)

P. O. GESZTI

D. ENG. SC.

INSTITUTE FOR ELECTRIC POWER RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received January 9, 1958]

At synchronization two synchronous generators i. e. two synchronous generator groups (usually one group and one synchronous generator), of the same nominal frequency, but having in effect differing speeds of revolution (i. e. being galvanically unconnected), possessing an identical sense of revolution and nominal voltage, are galvanically connected at some voltage level. The connection must be made in such a way as not to damage the equipment (synchronous machines, transformers etc.) and that the continuous supply of current to the consumers should not be effected. Upon the connection being made, normal system conditions must be established, under which the two machines or machine groups that were originally rotating with frequencies effectively differing, must revolve at the identical "synchronous" speed.

In practice the so-called precise synchronization has usually been applied for synchronization purposes. One of the machine groups — generally the larger — then rotates at a constant speed. The machine (or machine group) to be synchronized is connected parallel to the first group after excitation to the same voltage is reached on both sides of the circuit breaker with which the synchronization is done, when there is the least possible difference in rate of revolution, and at a moment when the angle between the voltages of the two machine groups passes through zero. If the precise synchronization is carried out correctly, no transients either of active or reactive power, currents, voltages or mechanical stresses can be observed. Precise synchronization can be suitably automated to the desired degree.

In the case of rough synchronization the machine is connected to the power system at approximately the synchronous speed (with a few percent deviation), but without excitation. The generator then approaches the synchronous speed over a considerable period of time — of the order of magnitude of a second — to the accompaniment of a decaying overcurrent (strongly reactive) and a corresponding voltage dip. To get into synchronism then takes place either without excitation due to the saliency of the rotor, or in the absence of that, in consequence of excitation automatically applied after the connection is established.

Rough synchronization in all cases — even if the rotor speeds are identical — causes a current rush and voltage dip. (Their magnitude being determined by the characteristics of the machine, the rating and reactances of the power system, etc.)

Under normal operating conditions the speed of the machine group to which the synchronizing takes place is constant, the consumers receive a proper supply and system conditions within the synchronized power station are normal. If this is the case, then precise synchronization can be satisfactorily carried out both manually and automatically and — apart from the occurrence of really gross faults — shows advantages over rough synchronization. (The basis for evaluation can equally be the stresses on the synchronized machine and its associated equipment, or the stability of the power system.)

Under disturbance conditions the speed of the machine group to which the synchronizing takes place varies considerably, the supply to the consumers has partly failed and is partly insufficient, while operating conditions within the power stations are irregular (unsteady). The situation of the consumers and the power stations then urgently requires the rapid synchronizing of the machines, but the varying speed itself makes this impossible. Precise synchronization can in such cases possibly only be carried out with a considerable difference in phase angles which may be disadvantageous for both the machine to be synchronized and also the power system. Rough synchronization — which is accompanied by hardly any active power transient — despite the permanent drawbacks discussed previously, usually offers a more advantageous and rapid means of synchronizing under disturbance conditions, than precise synchronization.

If the power system to which the synchronization under disturbance conditions takes place is operating amidst circumstances very unfavourable to stability, and the rating of the roughly synchronized machine is significant in comparison to the total generator rating of the power system, then the rough synchronizing may act as a kind of short circuit effect, as a result of which stability might break up. Under disturbance conditions the generators of the power system are run generally without excitation reserves and a generator without excitation connected at some point of the power system appears as a shunt reactance that increases the transfer impedance of the network and might cause disturbances. Under certain circumstances therefore rough synchronization also fails to solve the problem.

With the widespread application of block units — where a current limiting reactance (mainly the reactance of the transformer) of approximately subtransient reactance size has appeared between the generator and the infinite system — the chance of faults occurring directly in the equipment have decreased considerably. The increase in unit ratings has also had the same

effect as far as the machines effected were concerned. The latter factor has, however, also led to the problems of stability becoming more dominant in synchronization.

The difficulties of stability that arise could undoubtedly be alleviated by inserting a current limiting reactance between the generator to be synchronized and the power system during the time of the synchronization. This would, however, be a very complicated and expensive solution.

When the circuit breaker with which the synchronization takes place is closed with one (in an effectively earthed system) or two poles, in the positive sequence system (which is decisive for stability) certain combinations of the negative and zero sequence systems are connected in series, which act as current limiting reactances until the asymmetry is over. The transient power transients caused by precise synchronization may thus be diminished by one or two pole synchronization. It seems possible that under certain circumstances the conditions of rough synchronization might also improve with one or two pole synchronization.

In order to show the essentials of the phenomena discussed a number of simplifying assumptions will be introduced but the results can — at much greater length — be completely generalized. Let us first examine the initial subtransient or transient period. We shall discuss turbogenerators, taking $x_d'' \approx x_q''$ and neglecting the effect of the slip s , which will only be considered in the case of rough synchronization. We assume that the machine is connected to a network of zero internal reactance and infinite inertia. The terminal voltage of the generator running at no load before synchronizing, is U , and is with an angle δ in advance of the voltage e of the power system at the point of synchronization. There is an outside reactance x_e between the two terminal voltages.

$$i_d = \frac{U}{x_d'' + x_e} [1 - \cos t] + \frac{e}{x_d'' + x_e} [\cos(t + \delta) - \cos \delta] \quad (1)$$

$$i_q = \frac{U}{x_d'' + x_e} \sin t - \frac{e}{x_d'' + x_e} [\sin(t + \delta) - \sin \delta] \quad (2)$$

1. — and 2. are the initial currents (without damping) that occur with precise three phase synchronization. If $U = 0$ we obtain the currents for rough synchronization, if $e = 0$ then we get the three phase short circuit currents of the machine running at no load. 1. and 2. also enable fluxes or torque to be calculated.

If the generator with an ungrounded neutral point is synchronized with two poles of the circuit breaker on the generator voltage side by precise synchronization then the currents are :

$$i_d = \frac{\sin [t + \theta_0]}{x_d'' + x_e} \{ [U \sin (t + \theta_0) - e \sin (t + \theta_0 - \delta)] - [U \sin \theta_0 - e \sin (\theta_0 - \delta)] \} \tag{3}$$

$$i_q = \frac{\cos (t + \theta_0)}{x_d'' + x_e} \{ [U \sin (t + \theta_0) - e \sin (t + \theta_0 - \delta)] - [U \sin \theta_0 - e \sin (\theta_0 - \delta)] \} \tag{4}$$

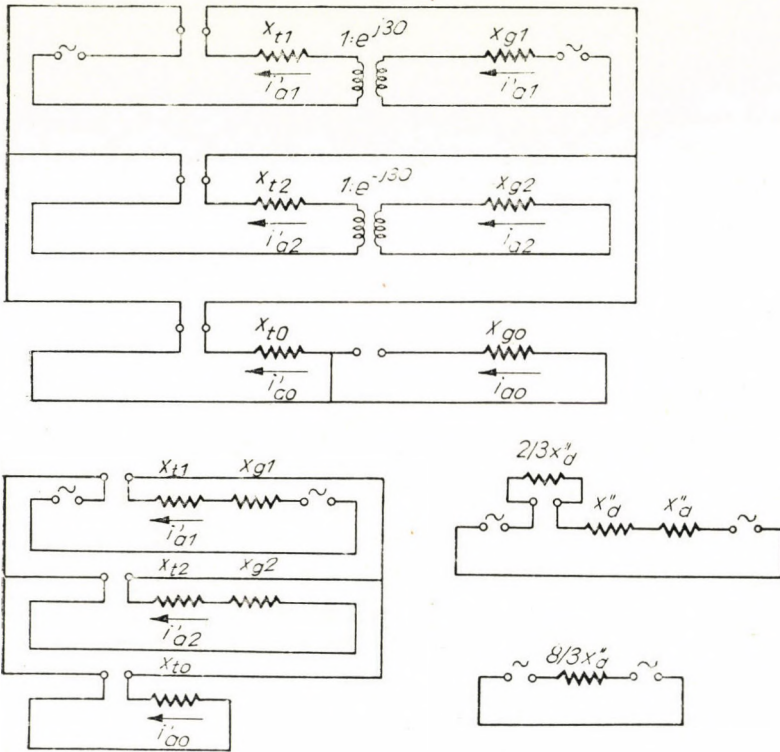


Fig. 1

where θ_0 is the angular position of the direct axis with respect to the axis of phase "a" at time $t = 0$.

The generators of large power stations are as a rule connected to the power system not directly, but through transformers. The transformers are generally of the delta/star type, where the star has an effectively grounded neutral point on the higher voltage side. Supposing that the reactance of the transformer between the infinite system and the generator is approximately of the magnitude of x_d'' , then in this case $x_e = x_d''$. If then two poles (the *b* and *c* phase) of the circuit breaker on the higher tension side are closed, then

the equivalent circuit diagram of fig. 1. and the vector diagrams of fig. 2. may be drawn for the positive, negative and zero sequence components of the *a* phase. Here *U* now equals *e* (the dashed values apply to the higher, the undashed to the generator voltage side of the transformer). The currents are then,

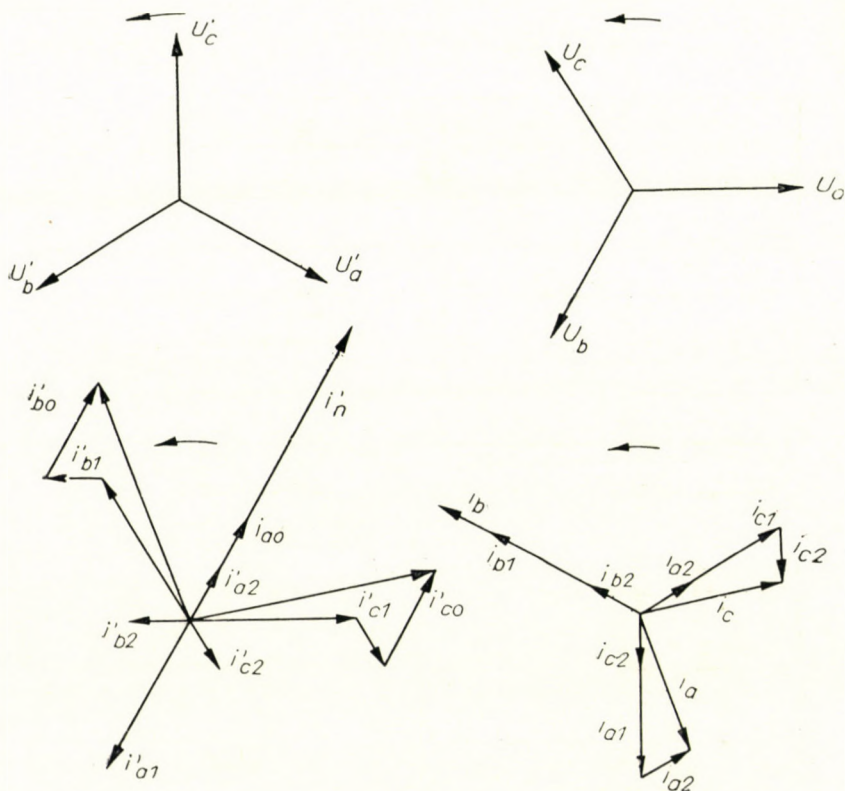


Fig. 2

$$i_d = \frac{U}{8x''_d} \left\{ 3 [1 - \cos t - \cos \delta + \cos (t + \delta)] + \right. \\ \left. + 2 \sin \frac{\delta}{2} \left[\sin \left[2(t + \theta_0) - \frac{\delta}{2} - 60 \right] - \sin \left[t + 2\theta_0 - \frac{\delta}{2} - 60 \right] \right] \right\} \quad (5)$$

$$i_q = \frac{U}{8x''_d} \left\{ 3 [\sin t - \sin [t + \delta] + \sin \delta] + \right. \\ \left. + 2 \sin \frac{\delta}{2} \left[\sin \left[2(t + \theta_0) - \frac{\delta}{2} + 30 \right] - \sin \left[t + 2\theta_0 - \frac{\delta}{2} + 30 \right] \right] \right\} \quad (6)$$

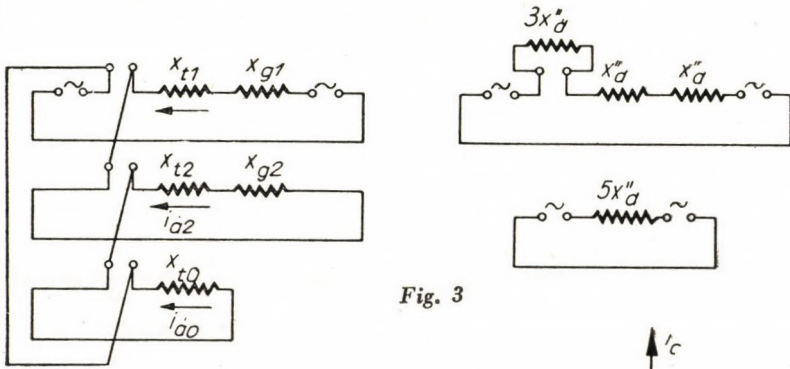
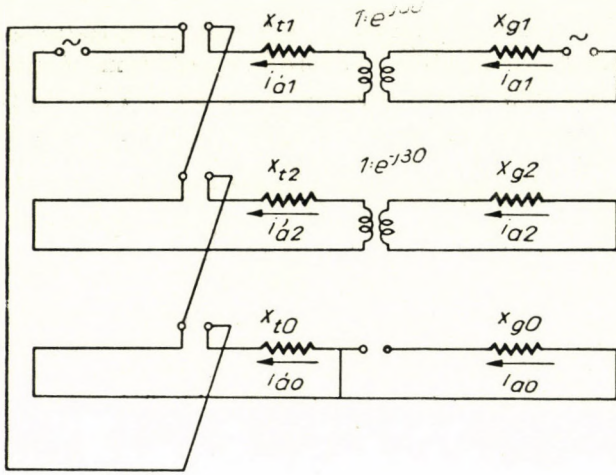


Fig. 3

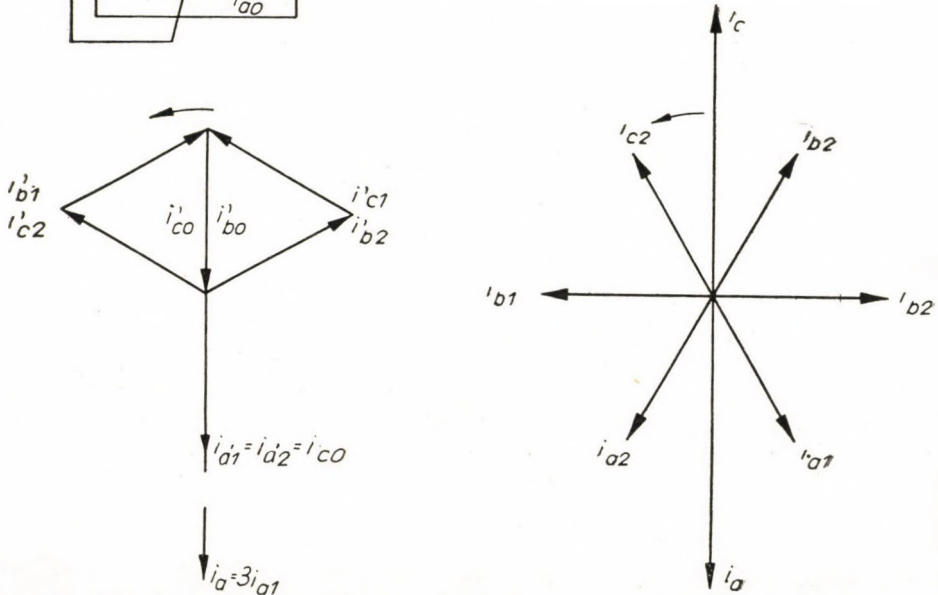


Fig. 4

If only one pole of the circuit breaker on the higher tension side is connected, then the equivalent circuit of fig. 3. and the vector diagramm of fig. 4. may be obtained. The currents are then, under similar conditions :

$$i_d = \frac{U}{5x_d''} \left\{ [1 - \cos t - \cos \delta + \cos (t + \delta)] - 2 \sin \frac{\delta}{2} \left[\sin [2(t + \theta_0) - \frac{\delta}{2} - 60] - \sin [t + 2\theta_0 - \frac{\delta}{2} - 60] \right] \right\} \quad (7)$$

$$i_q = \frac{U}{5x_d''} \left\{ [\sin t - \sin [t + \delta] + \sin \delta] - 2 \sin \frac{\delta}{2} \left[\sin [2(t + \theta_0) - \frac{\delta}{2} + 30] - \sin [t + 2\theta_0 - \frac{\delta}{2} + 30] \right] \right\} \quad (8)$$

The largest currents with the various methods of synchronizing are shown in fig. 5. as functions of δ , compared to the various short circuit currents

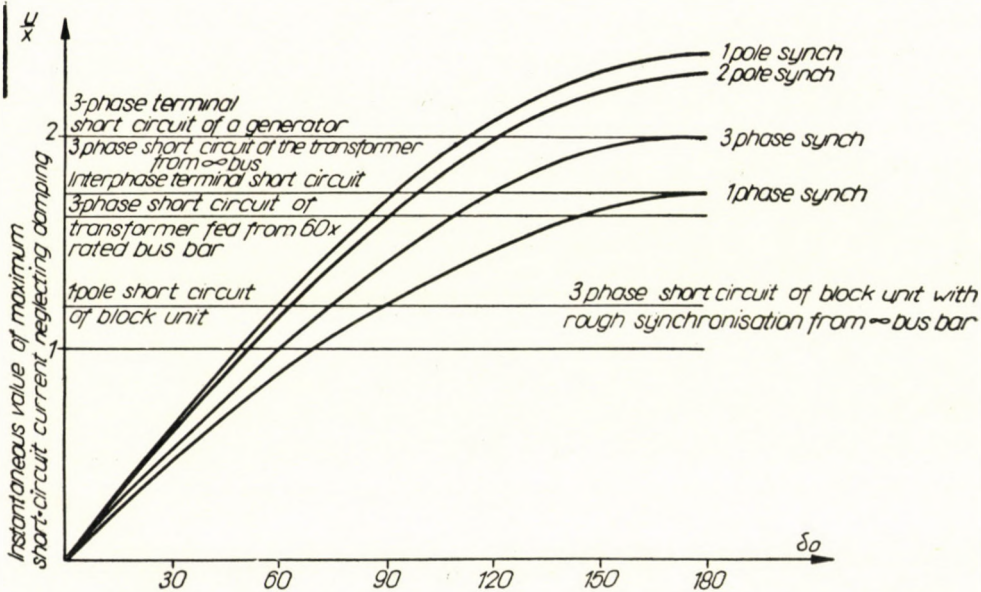


Fig. 5

(instantaneous peak values, neglecting damping and for the most unfavourable values of θ_0).

It may be shown, that in case of the three phase synchronization of a block unit only the maximum current (in opposition) will be as great as the

short circuit current arising when the bus sector between the transformer and generator is shorted. A greater current than this short circuit current may arise if the block unit is synchronized on the higher tension side with one or two poles and with large δ -s. (This current is only greater in the transformer. In the generator it is smaller than its own, otherwise largest current.) The unipolar synchronous current flowing in the transformer is overall some 20% more than the largest three phase current : its value is

$$i_{a \max} = 2,4 \frac{U}{x_d''} \sin \frac{\delta}{2} . \quad (9)$$

(In the case of two pole synchronization 2,29 should be substituted for 2,4.)

The stress on the transformer is a function of the square of the current.

If, when synchronising, we make provisions that $-30^\circ \leq \delta \leq +30^\circ$, then the magnitude of the current with unipolar synchronization is

$$(i_{a \max})_{\delta=30^\circ} = \leq 0,62 \frac{U}{x_d''} .$$

This is 62% of the three phase short circuit current of the block unit (which may be unavoidable) and the stress is less than 40% of the latter short circuit stress.

In considering the torque in the machines, we use the known expression

$$T = i_q \psi_d - i_d \psi_q . \quad (10)$$

Since we have assumed $x_d'' = x_q''$ in the initial period

$$\psi_d = U - x_d'' i_d \quad (11)$$

and

$$\psi_q = -x_q'' i_q \quad (12)$$

Thus from (10)

$$T = i_q U . \quad (13)$$

The greatest instantaneous torque value has been calculated for all cases (neglecting damping and for the most unfavourable values of θ_0 and time t). The graphs of the greatest torques are shown as functions of δ in Fig. 6. It may be seen that in the case of block units ($\Sigma x = 2x_d''$) with three phase synchronization at $\delta = 120^\circ$ and $t = 120^\circ$ a torque of

$$T_{\max} = 1,3 \frac{U^2}{x_d''} \quad (14)$$

is developed (i. e. 30% more than with a three phase short circuit). If we were not discussing a block unit the above expression would obviously contain a factor of 2,6.

With one phase connection on the smaller voltage side a torque of

$$T_{\max} = 1,455 \frac{U^2}{x_d''} \tag{15}$$

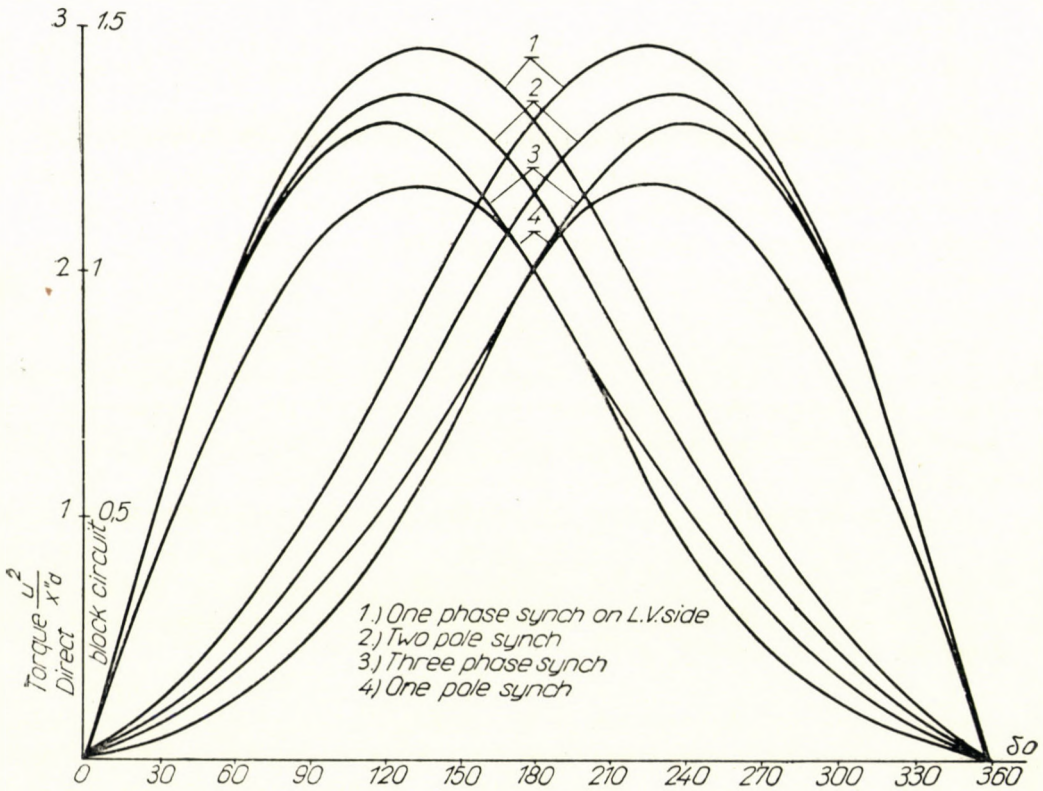


Fig. 6

is developed, which is a 12% higher value than with three phase synchronization. (If it were not a block unit, the constant in 15) would be 2,91.)

The maximum here occurs at $\delta = 135^\circ$ and $t = 135^\circ$.

If the synchronization of a block unit takes place by a two pole connection on the higher tension side

$$T_{\max} = 1,363 \frac{U^2}{x_d''} \tag{16}$$

at $\delta_0 \approx 126^\circ$ and $t \approx 126^\circ$.

Finally with one pole synchronization of a block unit on the higher tension side

$$T_{\max} = 1,164 \frac{U^2}{x_d''} \quad (17)$$

at $\delta = 135^\circ$ and $t = 135^\circ$.

Fig. 6. shows that as far as the maximum instantaneous torque is concerned the most favourable of the methods of precise synchronization is unipolar synchronizing.

With rough synchronization, as the literature shows [4, 5, 6] the values of the instantaneous torques are favourable, though within $\delta = \pm 30^\circ$ there is no substantial difference.

The decisive factor for the stability of the cooperating system is the unidirectional average torque developed in the machine. These values have been found for the subtransient and transient period (the unidirectional torque arising with three phase precise synchronization at a given angle δ has been taken as 100%).

| | Synchronization | | | |
|--------------|-----------------|------------------------------|----------------------------|----------|
| | three phase | smaller voltage one phase | higher voltage two pole | one pole |
| subtransient | 100 | 50 | 75 | 40 |
| transient | 100 | 60 | 81,6 | 50 |

The table shows that in the case of block units one pole synchronization must be mainly considered as against three phase synchronization, because the decrease for a given value of δ in the unidirectional average torque, and thus in the power transient delivered to the power system, is here very considerable.

Unipolar synchronization will, at the same angle δ only give the power system 40—50% of the power transient that three phase precise synchronization gives. The maximum torques developed in the machine are smaller than with three phase precise synchronization. The currents arising with unipolar synchronization are, however greater than those with three phase synchronization, but it has been shown that with the phase angles that actually occur in synchronization, only insignificant forces can arise in the coil parts effected. The negative sequence currents only flow for a very short time (of the order of a second) and can therefore cause no harm. (The other two poles of the circuit breaker close with a delay of about 2—3 secs.) Apart from all these characteristics, unipolar synchronization furthermore causes no voltage dip such as rough synchronization does.

Overall it appears that one pole synchronization can, with the application of certain automatic and phase-angle limits, be a usable, even if not exclusive method of synchronization under disturbance conditions.

REFERENCES

1. CH. CONCORDIA: "Synchronous Machines, Theory and Performance". John Wiley and Sons, Inc. New York, 1951.
2. K. P. KOVÁCS, I. RÁCZ: "Transient Processes in Alternating Current Machines". Bp. 1954.
3. I. A. SYROMYATNIKOV: "Conditions of Work of Synchronous Generators". Moskva, 1952.
4. I. A. SYROMYATNIKOV: "The Method of Self-Synchronization for the Connection of Synchronous Machines to Work in Parallel". Elektrichestvo, No. 8. 1954.
5. L. G. MAMIKONIANTS: "The Electromagnetic Torques in Synchronous Machines when Connected for Self-Synchronization." Elektrichestvo, No. 8. 1954.
6. L. G. MAMIKONIANTS: "Connecting Synchronous Machines in Parallel by the Self-Synchronizing Method", CIGRE, Paris, 1954.
7. V. W. RUSKIN: "Maximum Short Circuit and Faulty Synchronizing Torques on Generator Foundations". AIEE Transactions Vol. 74, 1955 pp. 618—624.
8. M. S. KIRSCHBAUM: "Transient Electrical Torques of Turbine Generators During Short Circuits and Synchronizing". AIEE Transactions Vol. 64. 1945. pp. 65—70.

SUMMARY

The method described shows that with unipolar precise synchronization smaller power transients arise. This is important in synchronizing under disturbance conditions, for both the system and the machine to be synchronized. The machine to be synchronized should be provided with an angle limiting appliance, so that in case of faulty operation — round the opposition point — currents exceeding the three phase short circuit current should not arise. The method improves the stability conditions of the disturbed system and synchronization can be more rapidly and safely carried out under disturbance conditions.

EINE NEUE METHODE FÜR DIE SYNCHRONISIERUNG BEI GESTÖRTEM NETZ

P. O. GESZTI

ZUSAMMENFASSUNG

Die vom Verfasser beschriebene Methode verursacht, bei einphasiger Synchronisierung kleinere Werkleistungsstöße. Dieser Umstand ist bei Synchronisierung unter gestörten Netzverhältnissen sowohl vom Standpunkt des Netzes, als auch vom Standpunkt der zu synchronisierenden Maschine von Wichtigkeit. Es ist richtig, die zu synchronisierende Maschine mit einer Phasenbegrenzungseinrichtung zu versehen um so zu verhindern, dass bei einer eventuellen falschen Schaltung — in der Nähe der Opposition — Ströme entstehen die den dreiphasigen Kurzschlussstrom übersteigen. Durch die Anwendung der Methode gelangt vor allem das durch eine Betriebsstörung betroffene Netz in eine vom Standpunkt der Stabilität günstige Lage und im Falle einer Betriebsstörung kann man die Synchronisierung schneller und betriebssicherer durchführen.

UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR LA SYNCHRONISATION SOUS CONDITIONS DE SERVICES ANORMALES

P. O. GESZTI

RÉSUMÉ

La méthode décrite dans l'étude montre qu'une synchronisation unipolaire cause des chocs wattés moindres. Cette circonstance est importante du point de vue du réseau aussi bien que de celui de la machine à synchroniser, quand il s'agit de synchronisation pendant un accident de service. Il est bon de munir la machine à synchroniser d'un limiteur de déphasage, pour éviter — pendant un branchement incorrect à proximité de l'opposition des phases — les courants de court-circuit dépassant le courant de court-circuit triphasé. Per l'utilisation du système, c'est surtout le réseau atteint par un accident de service qui est placé dans une situation favorable point de vue de la stabilité, et en cas d'un accident, on peut effectuer la synchronisation plus rapidement et d'une façon plus sûre.

НОВЫЙ МЕТОД СИНХРОНИЗАЦИИ ПРИ АВАРИЙНЫХ РЕЖИМАХ

П. О. ГЕСТИ

РЕЗЮМЕ

Как это следует из изложенного метода при однополюсной синхронизации образуются небольшие ваттные удары. Это обстоятельство имеет важное значение при синхронизации во время аварийного режима как с точки зрения системы, так и синхронизируемой машины. Правильно будет оснастить синхронизируемую машину устройством, ограничивающим угол, чтобы таким образом от возможных ошибочных включений — в области оппозиции — не образовалось бы токов, превышающих ток трехфазного замыкания. Применением предлагаемой системы в более выгодном положении будет система с аварийным режимом в первую очередь с точки зрения стабильности и синхронизация при аварийном режиме можно осуществить более надежно и быстрее.

I N D E X

- Craemer, H.* : An Approximative Method for the Analysis of Disks by Decomposition into strips — Annähernde Berechnung von Scheiben durch Zerlegung in Streifen — Calcul approximatif des disques, par décomposition en bandes — *Х. Крамер*: Аппроксимационный метод анализа шайб при их разложениях на полосы 3
- Szöke, B.* : Dynamics of Gears with Feather Keys — Das Kräftespiel von Zahnradern mit Federverbindung — Le jeu de forces sur engrenages avec languettes — *Б. Сзке*: Работа в случае зубчатых колес с пазом и пружиной 11
- Lipka, I.* : Investigation into the Deformation of Shafts and the Problem of Minimizing Deformation — Untersuchung der Formänderung von Wellen und das Problem der Verringerung der Formänderung — L'examen de la déformation des arbres, et le problème de la réduction des déformations — *И. Лунка*: Исследование деформации валов и проблема снижения деформации 27
- Vörös, I.* : Theoretical Investigations into the Production of Gears by hot Rolling — Theoretische Forschungen über durch Heißwalzen hergestellte Zahnräder — Recherches théoriques sur le laminage à chaud des engrenages — *И. Врэш*: Теоретические исследования в области изготовления зубчатых колес при помощи горячей прокатки 47
- Széki, P.* : The Determination by Oxydation of Austenitic Grain Size in Mild Steel — Bestimmung der Korngrösse von Austenit in niedriggekohltem Stahl durch Oxydation — Détermination par oxydation de la grandeur des grains d'austénite contenus dans l'acier doux — *П. Секи*: Определение крупности аустенита низкоуглеродистой стали окислением 79
- Buzás, L.* : Graphical Kinematic Analysis Methods. Application of Rotated Vectors — Graphische Methoden des kinematischen Untersuchungsverfahrens. Anwendung von umgekehrten Vektoren — Méthodes graphiques d'analyse cinématique — *Л. Бузаш*: Методы кинематического графического анализа. Применение метода сдвинутых векторов 87
- Boldizsár, T.* : Calculation of the Temperature Rise of Mine Air Flow with Regard to the Effect of its Water Vapour Content — Berechnung der Erwärmung von durch Bergwerksstollen strömender Luft unter Berücksichtigung der Änderung des Wasserdampfgehaltes — Calcul du réchauffement de l'air circulant dans les galeries de mines, compte tenu des variations de la teneur en vapeur d'eau — *Т. Болдижар*: Расчет нагрева горного воздуха, движущегося по горным штрекам, учитывая воздействие изменения содержания водяного пара 113
- Domony, A.* : Einfluss verschiedener Verunreinigungen auf den Korrosionswiderstand des Reinstaluminiums im Wasser bei erhöhten Drucken und Temperaturen — The Effect of Different Impurities on the Corrosion-resistivity of Super-pure Aluminium in Water of High Temperature and High Pressure — L'effet de différentes impuretés sur la résistance à la corrosion de l'aluminium super-pur, dans l'eau de haute température et de haute pression — *А. Домонб*: Влияние различных примесей на сопротивление коррозии очень чистого алюминия в воде высокой температуры и высокого давления 123
- Vajda, Gy.* : The Influence of the Material Properties of Electrodes upon the Breakdown Potential — Einfluss der Werkstoffeigenschaften der Elektroden auf die Durchschlagsspannung — Influence des caractéristiques de la matière des électrodes sur la tension de rupture — *Д. Вайда*: Влияние материальных свойств электродов на напряжение пробоя 141

- Kovács, Gy.* : Theoretical Investigation into Micro-seepage — Theoretische Untersuchung der Mikrofiltration — Étude théorique de la microfiltration — Д. Ковач : Теоретическое исследование микрофильтрации 173
- Tóth, G. und Waigand, F.* : Festigkeit der Treibriemenleder bei dauernder Beanspruchung — The Strength of Pelting Leather under Permanent Load — La résistance à la traction des courroies de transmission en cuir aux charges prolongées — Г. Тот и Ф. Вайганд : Прочность кож машинных ремней в случае длительной нагрузки 197
- Szeniczai, L.* : Beitrag zur zeitgemässen Berechnung der Kegelräder — Study on a New Method of Calculation of Bevel Gears — Essai d'un calcul moderne des engrenages concourants — Сеницеи Л. : К современному расчету конических зубчатых колес 207
- Geszi, P. O.* : A New Synchronising Method for System Disturbance Conditions — Eine neue Methode für die Synchronisierung bei gestörtem Netz — Une méthode nouvelle pour la synchronisation sous conditions de services anormales — П. О. Гесту : Новый метод синхронизации при аварийных режимах 243

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY
G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXI

FASCICULI 3—4



1958

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V. ALKOTMÁNY UTCA 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest, V. Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint, Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

THE DIMENSIONING OF SHIELDING WALLS AGAINST GAMMA RADIATION

L. TIHANYI

HIGHWAY AND RAILROAD PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received July 3, 1957]

1. Introduction

Radioactive radiations are harmful to living organisms, the body must therefore be protected from the dangerous effects of such radiations wherever they might appear. This protection may take place by increasing the distance from the source of radiation (distance protection), by decreasing the period of irradiation (time factor) and finally by putting absorbent layers, shielding walls in the path of the rays (material protection).

The dimensioning of shielding walls generally used according to international practice, is the system which here is called the "tabular method". A brief review of this method of dimensioning is followed by the description of another, the "complex method", which makes it more economically, more accurately and more quickly possible to dimension shielding walls. At the conclusion these two systems are compared, from several points of view.

2. The tabular method

The fundamentals of the tabular method were worked out by GAMMERTSFELDER [1] for the National Committee on Radiation Protection. Since its revised form, contained in Tables 1 and 2 is generally known, we shall not here deal with the methods by which it was compiled or assembled, but merely reproduce it, and limit ourselves to an explanation of how it is in practice put to use. Tables 1 and 2 are the bases of the projected Hungarian Standard MSZ 62 Rt, of the German Standard DIN 6843 and of the dimensioning of radiation protection in other foreign standards.

The method for using the tables is as follows: Table 2 shows the rounded value of the gamma ray energy of the isotope concerned in MeV (column 3) and the average number of gamma quanta per disintegration (column 4). The latter factor is then multiplied by the amount of isotopes to be used, and section *a*) of Table 1 shows the thickness of the layer of lead to be used at a distance of 1 meter for the quantity of activity and the corres-

Table 1

| Gamma energy in MeV | | | | | | | | | |
|--|-----|------|-----|------|------|------|------|------|------|
| | 0,2 | 0,35 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| Thickness in mms of lead shield necessary at a distance of 1 m | | | | | | | | | |
| a) Activity | | | | | | | | | |
| 10 mc | -1 | -3 | -4 | -3 | -1 | +4 | +9 | +12 | +15 |
| 20 mc | -1 | -1 | 0 | +4 | +8 | +16 | +23 | +27 | +30 |
| 50 mc | 0 | +2 | +6 | +13 | +20 | +32 | +41 | +46 | +50 |
| 100 mc | +1 | +4 | +10 | +20 | +29 | +44 | +55 | +60 | +65 |
| 200 mc | +2 | +6 | +14 | +26 | +37 | +56 | +69 | +75 | +79 |
| 500 mc | +2 | +9 | +19 | +35 | +49 | +72 | +87 | +94 | +99 |
| 1 c | +3 | +11 | +23 | +42 | +58 | +84 | +101 | +108 | +114 |
| 2 c | +4 | +13 | +27 | +49 | +67 | +96 | +114 | +122 | +129 |
| 5 c | +5 | +16 | +32 | +57 | +78 | +112 | +133 | +141 | +149 |
| 10 c | +5 | +18 | +36 | +64 | +87 | +124 | +146 | +156 | +163 |
| 20 c | +6 | +20 | +40 | +71 | +96 | +136 | +160 | +170 | +178 |
| 50 c | +7 | +23 | +45 | +80 | +107 | +152 | +178 | +189 | +198 |
| 100 c | +7 | +25 | +49 | +86 | +116 | +164 | +192 | +203 | +213 |
| | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| b) Distance | | | | | | | | | |
| 20 cm | +3 | +10 | +19 | +31 | +41 | +56 | +64 | +67 | +70 |
| 50 cm | +2 | +5 | +8 | +14 | +18 | +24 | +28 | +29 | +30 |
| 1 m | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 m | -1 | -4 | -8 | -13 | -17 | -24 | -27 | -28 | -29 |
| 5 m | -3 | -9 | -18 | -31 | -40 | -55 | -64 | -66 | -69 |
| 10 m | -4 | -13 | -28 | -44 | -64 | -79 | -92 | -95 | -98 |
| | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| c) Working day (hours) | | | | | | | | | |
| 1..... | -1 | -6 | -12 | -20 | -26 | -36 | -41 | -43 | -44 |
| 2..... | -1 | -4 | -8 | -13 | -17 | -24 | -27 | -28 | -29 |
| 4..... | 0 | -2 | -4 | -6 | -8 | -12 | -13 | -14 | -14 |
| 8..... | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 24..... | +1 | +4 | +7 | +11 | +14 | +19 | +22 | +23 | +24 |
| | x | x | x | x | x | x | x | x | x |
| d) Absorbent medium | | | | | | | | | |
| Pb | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 |
| Fe | 10 | 4,3 | 2,7 | 1,9 | 1,7 | 1,5 | 1,5 | 1,6 | 1,6 |
| Concrete, Al ... | 34 | 13 | 7,8 | 5,4 | 4,8 | 4,3 | 4,4 | 4,7 | 4,8 |
| Water | 79 | 30 | 18 | 12 | 11 | 10 | 10 | 11 | 12 |

ponding gamma energy thus obtained. To this thickness we then add the distance correction to be found in the same column of section *b*) and finally, if the shielding material is not lead but iron, concrete or water, then the figure is multiplied by the appropriate factor obtained from *d*). The shielding wall thickness thus established reduces the radiation dosage at the distance concerned to daily 50 mr.

Example. What is the needed thickness of the protective concrete to shield 1 curie of Co 60 at a distance of 2 meters for a 4 hours working day? For Co 60 the effective gamma energy is 1,5 MeV, the multiplication factor is 2, therefore

| | |
|---|-----------|
| a) $2 \times 1 \text{ c (1,5 MeV)}$ | +96 mm Pb |
| b) 2 meters | -24 " " |
| c) 4 hours | -12 " " |
| | 60 mm Pb |

For concrete $60 \times 4,3 = 258 \text{ mm}$

Table 2

| Radio isotope | Half period | Effective gamma energy in MeV (rounded values) | Multiplication factor |
|---------------|-------------|--|--------------------------|
| Na22 | 2,60 years | 1,5 | 2 |
| Na24 | 15,0 hours | 2,5 | 2 |
| K42 | 12,5 hours | 1,5 | 0,25 |
| Sc46 | 84 days | 1,0 | 2 |
| Mn56 | 2,58 hours | 1,5 | 1,5 |
| Fe59 | 46 days | 1,5 | 1 |
| Co60 | 5,2 years | 1,5 | 2 |
| Zn65 | 245 days | 1,0 | 1 |
| Zn69 | 13,8 hours | 0,5 | 1 |
| Ga72 | 14,3 hours | 2,0 | 1 |
| As76 | 26,1 hours | 0,75 | 0,5 |
| Br82 | 35,7 hours | 1,0 | 2 |
| Rb86 | 19,5 days | 1,0 | 0,2 |
| Ru103 | 39,8 days | 0,5 | 1 |
| Ag110 | 270 days | 1,5 | 2,5 |
| Sb124 | 60 days | 1,5 | 1 |
| Jl131 | 8 days | 0,5 | 1 |
| Cs134 | 2,3 years | 0,75 | 2 |
| Cs137 | 33 years | 0,75 | 1 |
| Ta182 | 111 days | 1,0 | 2 |
| Re186 | 92,8 hours | 0,2 | 0,2 |
| Ir192 | 74,4 days | 0,5 | 2 |
| Au198 | 2,7 days | 0,5 | 1 |
| Hg203 | 47,9 days | 0,35 | 1 |
| Ra226 | 1620 years | 2 | 1 |

3. The complex method

A radioactive isotope may emit gamma rays of differing energies for each disintegration according to its disintegration scheme. Their gamma ray abundances per disintegration may be equal to each other (cascade) or different (series), or a combination of the two. The basic principle in dimensioning shielding walls against radiation is that the sum of the dose rates caused by the simultaneous gamma radiations of different energies and abundances should at the given point not exceed the permissible value. To dimension the thickness of a shielding wall so that it should withstand the greatest radiation energy that could occur, would in the case of series radiation be a waste of material, because its abundance might well be only a small fraction of the total radiation simultaneously occurring. On the other hand, in the case of cascade radiation a second and a third gamma radiation simultaneously occurring with radiation of the greatest energy may be of only a slightly smaller energy, and might therefore cause a further increase of dose rate that could lead to a substantial rise of the total dose rate above the permissible value.

3.1. Disintegration schemes

The dose rates caused by various gamma radiations simultaneously occurring augment one another. The tabular method proposes to take into account this integrative effect of the gamma radiations by an appropriate determination of the Effective Gamma Energy and the Multiplication Factor in Table 2. The complex method examines the development of a resultant dose rate in various disintegration schemes according to the following considerations :

3.1.1. Monoenergetic disintegration

In this simple case, the isotope only emits one gamma radiation per disintegration. The value of the dose rate at a distance of A meters from a gamma ray point of I curies activity is

$$N = \frac{I \cdot D}{A^2 \cdot R} \text{ röntgens/hour .}$$

D is here the dose rate constant in röntgens/meter/hour, i. e. the dose rate N which is produced by unit activity ($I = 1$ curie) at a unit distance $A = 1$ meters without use of a shielding wall ($R = 1$) during a period of 1 hour. The value of D is in proportion to the energy of radiation : $D = aE$, where E is in MeV-s. The value of D as a function of E can be found in literature [2].

$R = e^{\mu V}$ in the above expression is the attenuation factor, which shows to what fraction of its original value the radiation has been decreased after passing through a shielding wall of thickness V cm and of linear absorption coefficient μ . The value of the linear absorption coefficient μ is different for each absorbent and is also a function of the energy of radiation and of the mode of radiation in a broad or narrow beam. The value of the attenuation factor as a function of the energy can be obtained from tables or series of graphs.

Considering the above values the dose rate for monoenergetic isotopes is

$$N = \frac{I}{A^2} \cdot \frac{a E}{e^{\mu V}} = \frac{I}{A^2} \cdot \frac{a E}{R}$$

3.1.2. Cascade disintegration

If a radioisotope emits gamma rays of energy $E_1, E_2 \dots E_n$ per disintegration, then each of the radiations, correspondingly, contribute to the development of the resultant dose rate.

$$\begin{aligned} N &= \frac{I}{A^2} \cdot \frac{a_1 E_1}{e^{\mu_1 V}} + \frac{I}{A^2} \cdot \frac{a_2 E_2}{e^{\mu_2 V}} + \dots + \frac{I}{A^2} \cdot \frac{a_n E_n}{e^{\mu_n V}} = \\ &= \frac{I}{A^2} \left(\frac{a_1 E_1}{R_1} + \frac{a_2 E_2}{R_2} + \dots + \frac{a_n E_n}{R_n} \right), \end{aligned}$$

3.1.3. Series disintegration

In the case of series disintegration gamma radiations of energies $E_1, E_2 \dots E_n$ and abundances $p_1, p_2 \dots p_n$ will occur per disintegration, so that the resultant dose rate for a shielding wall V cms thick will — in analogy to the case of cascade disintegration — be

$$\begin{aligned} N &= \frac{p_1 \cdot I}{A^2} \cdot \frac{a_1 E_1}{e^{\mu_1 V}} + \frac{p_2 I}{A^2} \cdot \frac{a_2 E_2}{e^{\mu_2 V}} + \dots + \frac{p_n I}{A^2} \cdot \frac{a_n E_n}{e^{\mu_n V}} = \\ &= \frac{I}{A^2} \left(\frac{p_1 a_1 E_1}{R_1} + \frac{p_2 a_2 E_2}{R_2} + \dots + \frac{p_n a_n E_n}{R_n} \right). \end{aligned}$$

3.2. The method of dimensioning the shielding walls

In practice the problem which generally arises is the following: There is given an isotope source of I mcuries activity in a point at a distance of A meters from the source, the dose rate during a working day of M hours

may not be more than the permitted N mr/day. How thick (V cms) should the shielding wall of a given material be? In practice therefore the product

$$\frac{A^2 \cdot N/M}{I}$$

is always calculable or given.

It follows from the foregoing that

$$\text{for monoenergetic radiation: } \frac{A^2 \cdot N/M}{I} = \frac{a \cdot E}{R} = f(E/R)$$

$$\text{for cascade disintegration: } \frac{A^2 \cdot N/M}{I} = \left(\frac{a_1 E_1}{R_1} + \dots + \frac{a_n E_n}{R_n} \right) = f(E/R)$$

$$\text{for series disintegration: } \frac{A^2 \cdot N/M}{I} = \left(\frac{p_1 a_1 E_1}{R_1} + \dots + \frac{p_n a_n E_n}{R_n} \right) = f(E/R)$$

If, therefore, the values of $f(E/R)$ are determined for various types of isotopes (p, a, E) as a function of thicknesses for the shielding wall (V cms), and plotted in graphs, then, under given circumstances, the proper value V cms of the thickness of the shielding wall may be obtained as corresponding to the given value of

$$\frac{A^2 \cdot N/M}{I},$$

however complicated the disintegration scheme of the isotope may be.

3.3. Construction of the $f(E/R)$ graphs

The $f(E/R)$ graphs may be constructed for lead screens as follows:

The dependence of the attenuation constant of lead on the energy of the gamma radiation is shown in Table 3, which is taken from the material of the Atomic Energy Conference held in Geneva in 1955 [3]. The table applies to broad beam radiation and to lead with a density of 11,34 kg/dm³. Wall thicknesses are in mms.

Using the curves obtained from Table 3, a further series of graphs showing $R = f(E)$ (Fig. 1) was plotted, that shows the attenuation factor as a function of the radiated energy, with the thicknesses V cms of the lead wall as parameters. With the help of this series of curves the attenuation factors $R = e^{\mu V}$ can be obtained for any intermediate radiation energies for thicknesses $V = 1, 2, 3, 4 \dots$ cm, etc. of the lead wall.

Table 3

| E MeV R = e ^{μV} | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 2,0 | 2,2 | 3 | 4 |
|------------------------------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|------|-----|------|-----|-----|-----|-----|
| | 1,5 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 12 | 12 | 13 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8,5 | 10 | 11 | 13 | 15 | 17 | 18 | 20 | 20 | 21 | 20 |
| 5 | 2 | 4 | 6 | 9 | 11 | 15 | 19 | 22 | 25 | 28 | 34 | 38 | 41 | 43 | 44 | 46 | 45 |
| 8 | 2 | 5 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 28 | 32 | 35 | 42 | 48 | 52 | 55 | 57 | 59 | 58 |
| 10 | 3 | 5,5 | 9 | 13 | 16 | 21 | 26 | 30 | 35 | 38 | 45 | 51 | 56 | 59 | 61 | 65 | 64 |
| 20 | 3 | 6 | 11 | 15 | 20 | 26 | 32 | 38,5 | 44 | 49 | 58 | 66 | 72 | 76 | 78 | 83 | 82 |
| 30 | 3,5 | 7 | 11,5 | 17 | 23 | 30 | 36 | 43 | 50 | 55 | 65 | 73 | 80 | 85 | 88 | 93 | 92 |
| 40 | 4 | 8 | 13 | 18 | 24 | 31 | 38 | 45 | 52 | 58 | 69 | 78 | 86 | 91 | 94 | 100 | 99 |
| 50 | 4 | 8,5 | 14 | 19 | 26 | 32 | 39 | 46 | 53 | 60 | 72 | 82 | 90 | 96 | 100 | 106 | 105 |
| 60 | 4,5 | 9 | 14,5 | 20 | 27 | 34 | 42 | 49 | 56 | 63 | 75 | 86 | 95 | 101 | 104 | 110 | 109 |
| 80 | 4,5 | 10 | 15,5 | 21 | 28 | 37 | 45 | 53 | 60 | 67 | 80 | 92 | 101 | 107 | 111 | 117 | 116 |
| 100 | 5 | 10 | 16 | 23 | 30 | 38 | 47 | 55 | 63 | 70 | 84 | 96 | 106 | 113 | 117 | 122 | 121 |
| 200 | 6 | 12,5 | 19 | 26 | 34 | 44 | 53 | 63 | 72 | 80 | 96 | 111 | 122 | 129 | 133 | 140 | 138 |
| 500 | 6,5 | 14 | 22 | 31 | 40 | 51 | 61 | 72 | 82 | 92 | 113 | 129 | 142 | 150 | 154 | 163 | 161 |
| 1000 | 7 | 15 | 24 | 33 | 44 | 57 | 69 | 81 | 92 | 102 | 123 | 141 | 155 | 165 | 170 | 180 | 178 |
| 2000 | 8,5 | 17 | 27 | 38 | 50 | 63 | 76 | 88 | 100 | 111 | 135 | 154 | 168 | 179 | 185 | 197 | 195 |
| 5000 | 9 | 19 | 30 | 42 | 55 | 70 | 85 | 99 | 112 | 124 | 149 | 170 | 186 | 198 | 205 | 219 | 217 |
| 8000 | 10 | 20 | 31,5 | 44 | 57 | 73 | 90 | 104 | 118 | 130 | 158 | 180 | 196 | 208 | 215 | 230 | 229 |
| 10000 | 10,5 | 21 | 33 | 46 | 59 | 75 | 91 | 106 | 120 | 133 | 161 | 183 | 201 | 213 | 221 | 235 | 234 |
| 20000 | 11 | 22 | 35 | 48 | 63 | 80 | 97 | 113 | 128 | 142 | 172 | 195 | 213 | 227 | 235 | 251 | 250 |
| 50000 | 11,5 | 23,5 | 37 | 52 | 69 | 87 | 105 | 123 | 140 | 156 | 188 | 214 | 233 | 247 | 255 | 273 | 272 |
| 100000 | 11,5 | 24 | 38 | 54 | 72 | 92 | 111 | 130 | 148 | 165 | 201 | 227 | 247 | 262 | 270 | 289 | 289 |

The values for the characteristic gamma radiations $p_1, E_1 \dots p_n, E_n$ of the various isotopes can be determined from the disintegration schemes to be found in the literature [4]. The disintegration schemes described by various authors are not quite identical sometimes in which case the less favourable scheme (that needing the greater wall thickness) was chosen. The values of E and p which served as the bases of the complex calculations,

Table 4

| Isotope | Energy E MeV | Abundance p | Dose rate constant a. E. | Isotope | Energy E MeV | Abundance p | Dose rate constant a. E. |
|---------|-----------------|------------------|--------------------------------|---------|-----------------|------------------|--------------------------------|
| Na 22 | 1,277 | 1,00 | 0,65 | | 2,21 | 0,40 | 1,00 |
| | 2,75 | 1,00 | 1,17 | | 1,61 | 0,25 | 0,78 |
| Na 24 | 1,38 | 1,00 | 0,69 | Sb 124 | 0,74 | 0,07 | 0,42 |
| | | | | | 0,60 | 0,74 | 0,34 |
| K 42 | 1,50 | 0,20 | 0,74 | | 0,18 | 0,39 | 0,09 |
| | | | | | 0,723 | 0,03 | 0,41 |
| Sc 46 | 1,12 | 1,00 | 0,59 | | 0,638 | 0,09 | 0,37 |
| | 0,89 | 1,00 | 0,49 | I 131 | 0,364 | 0,80 | 0,21 |
| Cr 51 | 0,32 | 0,08 | 0,19 | | 0,284 | 0,05 | 0,16 |
| | | | | | 1,35 | 0,0075 | 0,68 |
| Mn 56 | 2,06 | 0,20 | 0,95 | | 0,793 | 0,430 | 0,44 |
| | 1,77 | 0,30 | 0,84 | Cs 134 | 0,60 | 0,420 | 0,35 |
| | 0,822 | 1,00 | 0,46 | | 0,57 | 0,150 | 0,33 |
| Fe 59 | 1,30 | 0,50 | 0,66 | | | | |
| | 1,10 | 0,50 | 0,58 | Cs 137 | 0,661 | 0,92 | 0,38 |
| | | | | | 1,223 | 0,279 | 0,63 |
| Co 60 | 1,33 | 1,00 | 0,68 | | 1,188 | 0,131 | 0,62 |
| | 1,17 | 1,00 | 0,61 | Ta 182 | 1,121 | 0,294 | 0,59 |
| Cu 64 | 1,34 | 0,01 | 0,68 | | | | |
| Zn 65 | 1,12 | 0,46 | 0,59 | | 0,764 | 0,002 | 0,43 |
| Zn 69 | 0,44 | 1,00 | 0,26 | Re 186 | 0,622 | 0,002 | 0,36 |
| | | | | | 0,127 | 0,180 | 0,05 |
| Ga 72 | 2,51 | 0,60 | 1,09 | | 0,613 | 0,002 | 0,35 |
| | 2,49 | 0,40 | 1,10 | | 0,605 | 0,005 | 0,35 |
| | | | | | 0,588 | 0,005 | 0,34 |
| As 76 | 2,06 | 0,042 | 0,95 | | 0,485 | 0,005 | 0,29 |
| | 1,41 | 0,014 | 0,70 | Ir 192 | 0,468 | 0,137 | 0,28 |
| | 1,21 | 0,175 | 0,63 | | 0,316 | 0,450 | 0,19 |
| | 0,648 | 0,07 | 0,38 | | 0,308 | 0,168 | 0,18 |
| | 0,55 | 0,70 | 0,32 | | 0,296 | 0,173 | 0,18 |
| | 1,445 | 0,042 | 0,72 | | | | |
| | 1,292 | 0,090 | 0,66 | Au 198 | 0,411 | 1,00 | 0,24 |
| Br 82 | 1,020 | 0,105 | 0,55 | | | | |
| | 0,750 | 0,370 | 0,42 | Hg 203 | 0,279 | 1,00 | 0,17 |
| | 0,535 | 0,390 | 0,31 | | | | |
| | | | | | 2,219 | 0,083 | 1,01 |
| Rb 86 | 1,12 | 0,2 | 0,59 | | 1,778 | 0,245 | 0,85 |
| | | | | | 1,390 | 0,051 | 0,70 |
| Ru 103 | 0,498 | 1,00 | 0,29 | | 1,248 | 0,046 | 0,64 |
| | | | | | 1,130 | 0,139 | 0,59 |
| | 1,50 | 0,58 | 0,74 | | 0,941 | 0,038 | 0,51 |
| | 1,40 | 0,58 | 0,70 | Ra 226 | 0,773 | 0,031 | 0,43 |
| Ag 110 | 0,94 | 0,35 | 0,51 | | 0,612 | 0,242 | 0,36 |
| | 0,88 | 0,35 | 0,48 | | 0,354 | 0,081 | 0,21 |
| | 0,65 | 0,96 | 0,38 | | 0,297 | 0,034 | 0,18 |
| | | | | | 0,243 | 0,010 | 0,13 |

made in respect to the various isotopes are shown in Tab. 4. The values of the dose rate constants aE corresponding to the component radiations of various energies were taken from literature [2].

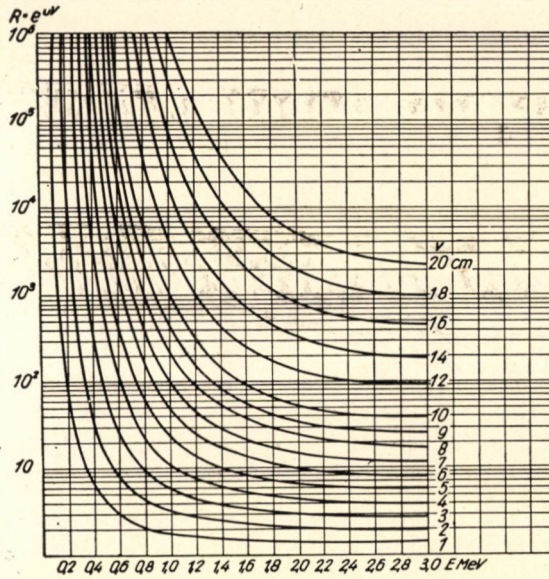


Fig. 1

The method for determining the values of $f(E/R)$ is illustrated by the following examples :

3.3.1. Monoenergetic disintegration

Zn 65 isotope

Table 5

$E = 1,12 \text{ MeV}$

$p = 0,46$

$a \cdot E = 0,59$

| V cm | R | $p \cdot a \cdot E/R$ |
|------|------|-----------------------|
| 0 | 1 | $2,75 \cdot 10^{-1}$ |
| 1 | 1,72 | $1,55 \cdot 10^{-1}$ |
| 2 | 2,85 | $9,70 \cdot 10^{-2}$ |
| 4 | 8,8 | $3,00 \cdot 10^{-2}$ |
| 7 | 61 | $4,35 \cdot 10^{-3}$ |
| 10 | 435 | $6,10 \cdot 10^{-4}$ |

3.3.2. Cascade disintegration

Table 6

Co 60 isotope

$$\begin{array}{ll}
 E_1 = 1,33 \text{ MeV} & E_2 = 1,17 \text{ MeV} \\
 p_1 = 1,00 & p_2 = 1,00 \\
 a_1 \cdot E_1 = 0,68 & a_2 \cdot E_2 = 0,61
 \end{array}$$

| V cm | R ₁ | R ₂ | a ₁ · E ₁ /R ₁ | a ₂ · E ₂ /R ₂ | a ₁ · E ₁ /R ₁ + a ₂ · E ₂ /R ₂ |
|------|----------------|----------------|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 6,80 · 10 ⁻¹ | 6,10 · 10 ⁻¹ | 1,29 |
| 2 | 2,52 | 2,76 | 2,68 · 10 ⁻¹ | 2,22 · 10 ⁻¹ | 4,90 · 10 ⁻¹ |
| 4 | 6,7 | 8,16 | 1,02 · 10 ⁻¹ | 0,75 · 10 ⁻¹ | 1,77 · 10 ⁻¹ |
| 6 | 19 | 27,5 | 3,56 · 10 ⁻² | 2,22 · 10 ⁻² | 5,78 · 10 ⁻² |
| 8 | 62 | 98 | 1,12 · 10 ⁻² | 0,62 · 10 ⁻² | 1,74 · 10 ⁻² |
| 10 | 180 | 326 | 3,76 · 10 ⁻³ | 1,88 · 10 ⁻³ | 5,64 · 10 ⁻³ |
| 12 | 540 | 1180 | 1,26 · 10 ⁻³ | 0,52 · 10 ⁻³ | 1,78 · 10 ⁻³ |
| 14 | 1750 | 4100 | 3,87 · 10 ⁻⁴ | 1,46 · 10 ⁻⁴ | 5,33 · 10 ⁻⁴ |
| 16 | 5800 | 14500 | 1,18 · 10 ⁻⁴ | 0,43 · 10 ⁻⁴ | 1,60 · 10 ⁻⁴ |
| 18 | 17200 | 50000 | 3,94 · 10 ⁻⁵ | 1,22 · 10 ⁻⁵ | 5,16 · 10 ⁻⁵ |

3.3.3. Series disintegration

Table 7

Ta 182 isotope

$$\begin{array}{llll}
 E_1 = 1,223 & E_2 = 1,188 & E_3 = 1,121 & \text{MeV} \\
 p_1 = 0,279 & p_2 = 0,131 & p_3 = 0,294 & \\
 a_1 \cdot E_1 = 0,63 & a_2 \cdot E_2 = 0,62 & a_3 \cdot E_3 = 0,59 & \\
 p_1 \cdot a_1 \cdot E_1 = 0,176 & p_2 \cdot a_2 \cdot E_2 = 0,081 & p_3 \cdot a_3 \cdot E_3 = 0,174 &
 \end{array}$$

| V cm | R ₁ | R ₂ | R ₃ | p ₁ a ₁ E ₁ /R ₁ | p ₂ a ₂ E ₂ /R ₂ | p ₃ a ₃ E ₃ /R ₃ | Σ p a E/R |
|------|----------------|----------------|----------------|--|--|--|-------------------------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0,176 | 0,081 | 0,174 | 0,43 |
| 2 | 2,66 | 2,72 | 2,86 | 0,661 · 10 ⁻¹ | 0,298 · 10 ⁻¹ | 0,610 · 10 ⁻¹ | 1,57 · 10 ⁻¹ |
| 4 | 7,6 | 8 | 8,7 | 2,31 · 10 ⁻² | 1,01 · 10 ⁻² | 2,00 · 10 ⁻² | 5,32 · 10 ⁻² |
| 6 | 24 | 26,2 | 31,6 | 0,74 · 10 ⁻² | 0,31 · 10 ⁻² | 0,55 · 10 ⁻² | 1,60 · 10 ⁻² |
| 8 | 82 | 93 | 115 | 2,14 · 10 ⁻³ | 0,87 · 10 ⁻³ | 1,51 · 10 ⁻³ | 4,52 · 10 ⁻³ |

3.4. The calculation of the thickness of shielding walls against radiation

The values of $F(V) = f(E/R)$ were similarly determined to the examples under 3.3.1., 3.3.2. and the above 3.3.3., for other gamma radiating isotopes enumerated in Table 2 and these results were then plotted in Fig. 2 as functions of the lead thickness V , with the various isotopes as parameters.

According to 3.2., the function of the lead thickness V can be expressed as

$$F(V) = f(E/R) = \frac{A^2 \cdot N/M}{I}$$

which means that for a given case, where A , N , I and M are known, a specific numerical value may be obtained for the fraction, the corresponding value of V being then directly obtainable from Fig. 2. The determination of the thickness of the shielding wall has therefore been reduced to a calculation of the numerical value of the above fraction and then to a reading of the thickness V corresponding to that value, from Fig. 2.

The following examples will illustrate the use of the graphs :

a) A lead shielding wall is to be planned against $I = 100$ mcuries of Co 60 isotope that will reduce the dose rate during an 8 hour working day at a distance of 0,5 meters to $N = 50$ mr/day. Substituting these values

$$\frac{A^2 \cdot N/M}{I} = \frac{0,5^2 \cdot 50/8}{100} = 1,57 \cdot 10^{-2}$$

The corresponding thickness of lead obtained from the Co 60 graph of Fig 2 is $V = 8,20$ cms.

b) $I = 400$ mcuries of J 131 isotope are to be transported in a lead container, so that the dose rate at the surface of the wooden box of $L = 50$ cms width, enclosing the lead container ($A = 0,25$ m) should not be greater than $N/M = 12,5$ mr/hour. With these values

$$\frac{A^2 \cdot N/M}{I} = \frac{0,25^2 \cdot 12,5}{400} = 1,95 \times 10^{-3}$$

The corresponding thickness of lead from the J 131 graph of Fig. 2 is $V = 3,30$ cms.

c) The safe has a 6 cms thick leaden wall. The dose rate at a distance of 50 cm from the inner surface of the safe ($A = 0,5$ m) may not be greater than $N/M = 6,25$ mr/hour. What quantities of various isotopes can be stored in the safe?

From the basic equation it follows :

$$I = \frac{A^2 \cdot N/M}{F(V)} = \frac{0,5^2 \cdot 6,25}{F(V)} = \frac{1,56}{F(V)}$$

The values of $F(V)$ are given in Fig. 2 by the intersections of the ordinate for $V = 6$ cms with the graphs for the various isotopes. The values for $F(V)$ and the calculated number of mcuries that can thus be stored are determined for several isotopes as below :

| Isotope | $F(V)$ | I mcurie = $\frac{1,56}{F(V)}$ |
|---------------|--------|--------------------------------|
| Na 24 | 0,176 | 8,9 |
| Co 60 | 0,058 | 26,9 |
| Fe 59 | 0,025 | 62,2 |
| Zn 65 | 0,0082 | 191,0 |

d) What should be the thickness of the lead wall of a safe to store 100 mcurie activity of a given isotope, so that the dose rate at a distance of 1 m from the interior of the safe should not be greater than 10 mr/hour :

$$F(V) = \frac{A^2 \cdot N/M}{I} = \frac{1^2 \cdot 10}{100} = 0,1$$

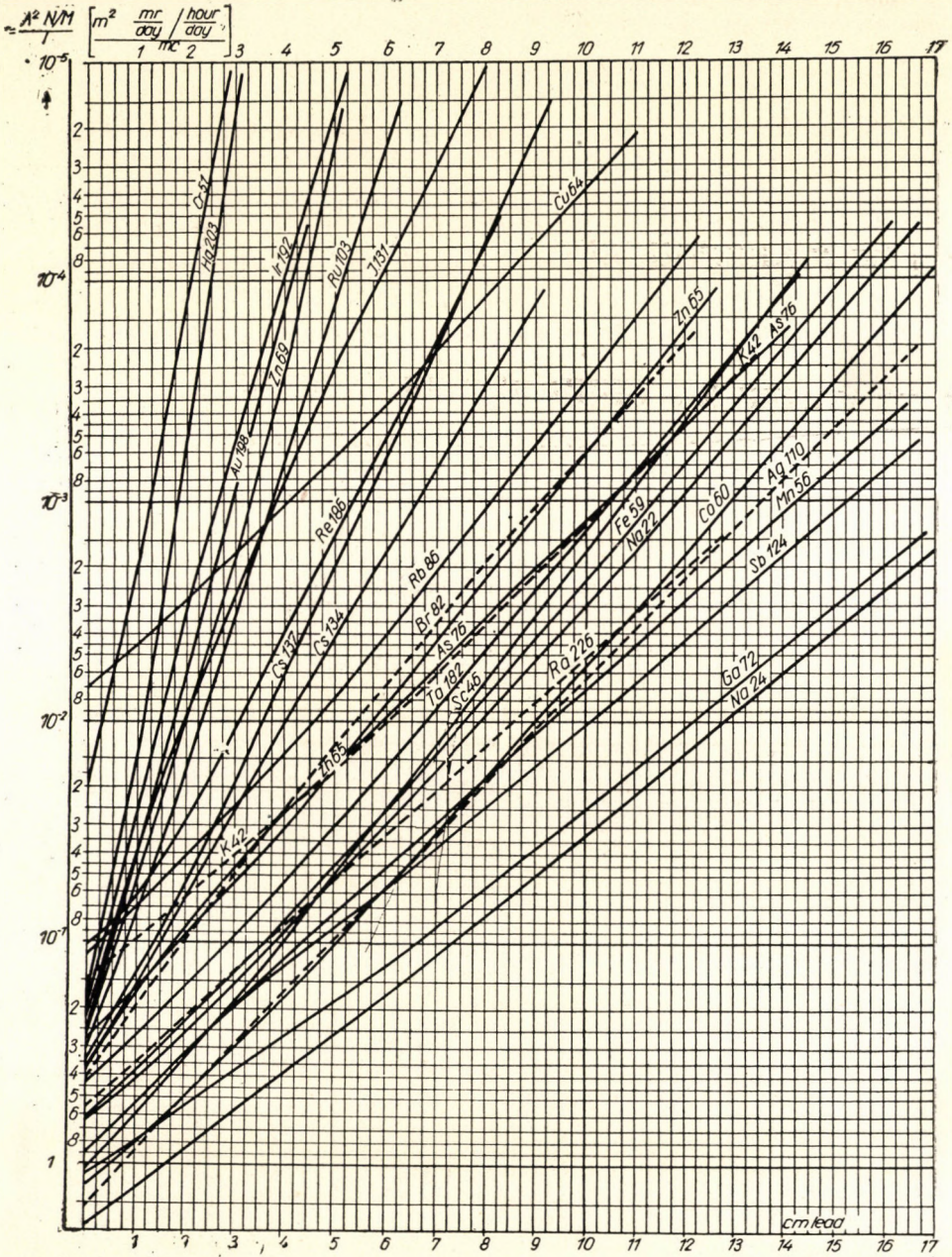


Fig. 2

A horizontal line drawn for the ordinate 0,1 in Fig. 2 will then intersect the various isotope graphs at the necessary thicknesses of lead. Thus :

| | | | |
|----------|-------------|---------|----------------|
| To store | 100 mcuries | Na 24 | $V = 7,35$ cms |
| | 100 | „ Co 60 | $V = 5,05$ cms |
| | 100 | „ Fe 59 | $V = 3,60$ cms |
| | 100 | „ Zn 65 | $V = 1,90$ cms |

of lead are needed.

3.5. Calculating the dimension of safes to store several isotopes

Let m, n, o and p isotopes of activities I_m, I_n, I_o and I_p be simultaneously stored in a safe. The thickness of the lead wall so that the total dose rate at a distance of A meters from the interior of the safe should not exceed N/M mr/hour, is to be found.

Supposing that a thickness V of lead is satisfactory to conditions, the perpendicular raised on the abscissa corresponding to this thickness on Fig. 2 will then intersect the isotope graphs m, n, o and p at values X_m, X_n, X_o and X_p . The dose rate due to a particular isotope at the point A being examined will then according to the expression deduced be

$$\frac{N}{M} = \frac{I \cdot X}{A^2}.$$

The basic initial condition in determining the thickness V of lead is that the sum of the component dose rates due to the given quantities of the various isotopes should not exceed the permissible dose rate of N/M .

$$\frac{N}{M} = \frac{N_m}{M} + \frac{N_n}{M} + \frac{N_o}{M} + \frac{N_p}{M} = \frac{I_m \cdot X_m + I_n \cdot X_n + I_o \cdot X_o + I_p \cdot X_p}{A^2}. \quad (1)$$

The determination of the lead wall thickness now takes place in two steps. First that isotope — let it here be m — is chosen, which acting alone would, on the basis of the expression

$$X_m = \frac{A^2 N/M}{I_m}$$

require the greatest thickness of lead. This is, as a rule, the isotope with the hardest gamma radiation, i. e. the lowest of the curves in the graphs, except if its activity in mcuries is not substantially lower than that of the other isotopes. Rearranging for X_m in equation (1).

$$(X_m)_{\text{corr}} = \frac{A^2 \cdot N/M}{\left(I_m + I_n \frac{X_n}{X_m} + I_o \frac{X_o}{X_m} + I_p \frac{X_p}{X_m} \right)} = \frac{A^2 \cdot N/M}{I_{\text{corr}}}, \text{ where}$$

$$I_{\text{corr}} = \left(I_m + I_n \frac{X_n}{X_m} + I_o \frac{X_o}{X_m} + I_p \frac{X_p}{X_m} \right).$$

In the corrected activity, therefore, the activities I of the various isotopes are taken into account and weighted according to their relative effectiveness compared to isotope m .

As a first approximation the values of X_m , X_n , X_o and X_p are determined on the supposition that isotope m alone is in the safe. Therefore the values of X are given by the points of intersection with the m , n , o and p isotope graphs of the perpendicular, passing through the point of intersection of the ordinate

$$X_m = \frac{A^2 N/M}{I_m}$$

and the m graph. From these values of X , the value of I_{corr} and hence the value of $(X_m)_{\text{corr}}$ may be calculated and the corresponding value of V_{corr} from the m curve will, as a rule, give the required wall thickness with a negligible error.

The procedure and the exactitude obtainable by it are illustrated in the following examples :

a) $I_m = 20$ mC of Na 24, $I_n = 20$ mC of Co 60 and $I_o = 200$ mC of Cs 137 isotopes are to be stored in a common safe, so that at a distance of $A = 1$ m from the interior of the safe the dose rate may not be greater than $N/M = 6$ mr/hour. The isotope requiring the greatest wall thickness is the 20 mC Na 24.

As a first approximation :

$$X_m = \frac{A^2 N/M}{I_m} = \frac{1 \cdot 6}{20} = 0,3$$

which corresponds from Fig. 2 to $V = 4,70$ cms. The perpendicular drawn through this point will intersect the graphs at values of $X_n = 0,123$ and $X_o = 0,0026$. Thus the corrected activity value is

$$I_{\text{corr}} = 20 + 20 \cdot \frac{0,123}{0,3} + 200 \cdot \frac{0,0026}{0,3} = 20 + 8,2 + 1,73 = 29,93 \text{ mC, from which}$$

$$(X_m)_{\text{corr}} = \frac{1 \cdot 6}{29,93} = 0,200.$$

The corresponding value from the m isotope graph is $V_{\text{corr}} = 5,70$ cms.

If this wall thickness were to be employed, the actual dose rate value can be checked from equation 1., where, however, the values $X_m = 0,199$, $X_n = 0,069$ and $X_o = 0,00084$, corresponding to the thickness $V = 5,70$ cms have to be substituted. Thus

$$N/M = 20 \cdot 0,199 + 20 \cdot 0,069 + 200 \cdot 0,00084 = 3,98 + 1,38 + 0,17 = 5,53 \text{ mr/hour} < 6 \text{ mr/hour,}$$

are therefore within the permitted limit. The calculation by correction even includes in this case a certain security margin. If even greater accuracy were needed, the correction procedure could be repeated, using the new values of X_m , X_n and X_o :

$$I_{\text{corr}} = 20 + 20 \frac{0,069}{0,199} + 200 \frac{0,00084}{0,199} = 20 + 6,94 + 0,84 = 27,78 \text{ mC,}$$

and thus

$$(X_m)_{\text{corr}} = \frac{1,6}{27,78} = 0,216$$

the corresponding corrected value being $V = 5,50$ cms on the m isotope graph. Using this value, more accurately, we may determine the error of the single correction procedure by finding the calculated excess. This is :

$$\frac{5,7 - 5,5}{5,7} \times 100 = 3,52\%,$$

which is absolutely negligible and within the rounding down order of magnitude. It is therefore generally sufficient to carry out a single correction procedure.

b) 20 mC Na 24, 100 mC Co 60, 200 mC Cs 137, $A = 1$ m, $N/M = 6$ mr/hour. The greatest wall thickness is given by the 100 mC Co 60, for which, corresponding to the value

$$X_m = \frac{1^2 \cdot 6}{100} = 0,06$$

Fig. 2 gives $V = 5,90$ cms. The corresponding values are $X_n = 0,185$, $X_o = 0,00066$. Thus the corrected activity value is

$$I_{\text{corr}} = 100 + 20 \frac{0,185}{0,06} + 200 \frac{0,00066}{0,06} = 164,0 \text{ mC and thus}$$

$$X_m = \frac{6}{164} = 0,0366$$

which gives a corrected value of 6,75 cms on the Co 60 graph. As in a) the actual dose rate can be calculated from (1) where, the values $X_n = 0,128$, $X_o = 0,00026$ corresponding to the corrected thickness are substituted :

$$N/M = 100 \cdot 0,0366 + 20 \cdot 0,128 + 200 \cdot 0,00026 = 3,66 + 2,56 + 0,05 = 6,27 \text{ mr/hour} > 6,00 \text{ mr/hour.}$$

In this case, therefore, the correction procedure leads to a slight underdimensioning. A second correction carried out as in example a) gives a value of 6,85 cms for the thickness of lead, so that the error committed by the above procedure is 1,47% and therefore, negligible. Here too, there was no need for a second correction to be carried out.

Examples a) and b) show that even a single step correction procedure will give a negligible margin of over- or underdimensioning depending on whether the corrections of the thickness due to the radiation of the other isotopes is carried out in respect to the isotope of the greatest energy, or one that is of a smaller energy than the greatest.

If the thickness of the lead wall were to be calculated alone for the isotope requiring the greatest wall thickness, then this would, in the first example, have given $(5,7 - 4,7) : 5,7 = 0,176 = 17,6\%$ underdimensioning and in the second example $(6,75 - 5,90) : 6,75 = 0,125 = 12,5\%$ underdimensioning of the lead wall. As a result of the underdimensioning of the lead thickness, the dosage would, in the first case be 9,00 mr/hour, instead of the permissible 6 mr/hour and in the second case 9,80 mr/hour, which would have meant an excess of some 50–60% respectively of the permissible dosage. Under certain circumstances, an even greater degree of underdimensioning may occur, which goes to prove the necessity of a correction procedure.

It may be here pointed out that the tabular procedure does not make it possible to correctly calculate dimensions in the case of several isotopes — at the most it becomes possible by means of arbitrary estimates of the error to carry out random corrections.

So far we have dealt with the determination of leadwall thicknesses by help of the isotope graphs of Fig. 2. The $f(E/R)$ graphs for other absorbent media such as iron, concrete and water can be similarly plotted, with the difference that instead of Fig. 1, an appropriate series of graphs giving $R = f(E)$ for the absorbent medium concerned would have to be used.

4. The comparison of the tabular and complex methods

The two methods give substantially different wall thicknesses for a number of isotopes, as the result of several reasons.

4.1. *The inexactitude of the data of Table 2 (the rounded figures for gamma energy and the gamma quanta per disintegration, i. e. the multiplication factor).*

Information on the differences in wall thickness, due to the above reasons, is given in Table 8.

Table 8

$$A = 1 \text{ m, } N/M = 6,25 \text{ mr/hour, } \frac{A^2 \cdot N/M}{I} = \frac{6,25}{I} = F(V)$$

| Isotope | 100 mcuries | | 200 mcuries | | 1000 mcuries | |
|--------------|-------------|---------|-------------|---------|--------------|---------|
| | Tabular | Complex | Tabular | Complex | Tabular | Complex |
| Na 22 | 56 | 46,5 | — | — | 96 | 87,0 |
| Na 24 | 75 | 84,5 | — | — | 122 | 139,0 |
| K 42 | — | — | 32 | 35,5 | — | — |
| Sc 46 | 37 | 47,0 | — | — | 67 | 80,0 |
| Mn 56 | 50 | 53,5 | — | — | 90 | 103,0 |
| Fe 59 | 44 | 45,5 | — | — | 84 | 83,0 |
| Co 60 | 56 | 59,0 | — | — | 96 | 98,0 |
| Zn 65 | 29 | 27,5 | — | — | 58 | 64,0 |
| Zn 69 | 10 | 8,5 | — | — | 23 | 22,0 |
| Ga 72 | 55 | 77,5 | — | — | 101 | 132,5 |
| As 76 | 13 | 25,0 | — | — | 35 | 68,0 |
| Br 82 | 37 | 26,5 | — | — | 67 | 62,0 |
| Rb 86 | 8 | 11,5 | — | — | 37 | 53,0 |
| Ag 110 | — | — | 72 | 71 | — | — |
| Sb 124 | 44 | 58,0 | — | — | 84 | 111,5 |
| J 131 | 10 | 7,2 | — | — | 23 | 23,0 |
| Cs 134 | 26 | 20,0 | — | — | 49 | 45,5 |
| Cs 137 | 20 | 18,0 | — | — | 42 | 39,5 |
| Ta 182 | 37 | 37,0 | — | — | 67 | 75,5 |
| Ir 192 | 14 | 5,5 | — | — | 27 | 16,0 |
| Au 198 | 10 | 8,0 | — | — | 23 | 21,5 |
| Hg 203 | 4 | 4,0 | — | — | 11 | 12,0 |
| Ra 226 | 55 | 46,0 | — | — | 101 | 96,0 |

The above table has, for the sake of easier comparison, been compiled according to column *a*) of Table 1, for a distance of $A = 1$ m, an 8 hours working day and a total daily dosage of 50 mr. The thicknesses of lead are in mms. The column headed "Tabular" carries data from Table 1, that headed "Complex" has values determined according to 3.4.4., and is in accordance with Table 2.

The comparison shows that there is fair agreement for a number of isotopes, but for the rest there are substantial differences in the thickness of lead calculated by the two methods: differences corresponding to several half-value-layers.

The reason for these differences is that the rounded energy values and the multiplication factors of Table 2 do not, in the case of every isotope, correctly take into account the complex nature of the disintegration. It is precisely because of the complex nature of their disintegration that the rounded energy value in MeV and the multiplication factor for some isotopes cannot be determined as valid for all activity levels. The incorrect appraisal of the complex disintegration process can give a larger or smaller thickness than is necessary. Neither is permissible, because a smaller thickness than that necessary means a greater dosage than what is permissible, while a greater thickness leads to a waste of material.

4.2. *The discrete steps of Table 1 (activity, distance, hours of work per day)*

In the tabular method the actual activity and the hours of work have to be rounded up to the nearest discrete steps in Table 1, whilst the distance is rounded down. This means that as a result of this step-by-step structure, (where the steps are generally separated from each other by twice their own value) an extreme case can give an error in the "activity" and "hours" columns of one half-value layer each, in the "distance" column of two half-value layers, leading thus to a total error, an overdimensioning of nearly 4 half-value layers beyond the errors already examined in 4.1. In some cases this error in thickness may partially compensate the error due to the reasons of 4.1., but elsewhere the differences may add and thus increase the uncertainty of design, i. e. the overdimensioning of protective screens.

Overdimensioning due to the discrete structure of the Tables can of course be prevented by graphical interpolation between the step-by-step values of Table 1. This, however, would involve a triple graphical interpolation (of the "activity", "distance" and "working day" columns) which would make the determination of the thickness very cumbersome. The differences due to the reasons of 4.1. would even then continue to exist and cannot be corrected by interpolation, since the error is inherent in the tabular system itself.

The accurate calculation of dimensions which are made possible by the complex method, means that the security factor (the permissible dose rate value) does not have to be fixed with exaggerated care.

4.3. Further factors

If the permissible dose rate per day differs from the 50 mr of Table 1, then the value obtained by the tabular method must be further modified.

Finally, the simple calculating procedure proposed in Table 1 for the various absorbent media may also lead to substantial differences as the lead equivalents of the absorbent media ought correctly to be used separately for the component radiations of various energy levels that simultaneously take place when there is a complex disintegration. It is therefore desirable to plot separate graphs such as that of Fig. 2 for the more important absorbent media in order to be able to determine quickly the thickness of shielding walls against radiation.

4.4. The resultant dose rate method

A method of calculation has also been published (Source 2., p. 758.) according to which the resultant dose rate in the case of complex disintegration is determined by the expression

$$D = p_1 a_1 E_1 + p_2 a_2 E_2 + \dots + p_n a_n E_n.$$

This method gives a correct value for the dose rate at a given distance, provided there is no shielding wall within that distance ($R = 1$). If there is a shielding wall, the procedure is to be calculated by using an average attenuation factor R_k

$$D_k = \frac{p_1 a_1 E_1 + p_2 a_2 E_2 + \dots + p_n a_n E_n}{R_k},$$

which gives a less precise result than the expression

$$D_x = \frac{p_1 a_1 E_1}{R_1} + \frac{p_2 a_2 E_2}{R_2} + \dots + \frac{p_n a_n E_n}{R_n}$$

according to the method of the present paper, where the dependence on the energy level of the attenuation factor is also taken into account.

REFERENCES

1. a. *Nucleonics* 44, 1948.
b. *Safe Handling of Radioactive Isotopes*, Handbook 42, National Bureau of Standards, Dep. Comm. Washington 1949.
2. HINE, BROMWELL: *Radiation Dosimetry*. New York, 1956. p. 757.
3. LETAVET A. A.: *Health Protection of Workers Exposed to Ionizing Radiation*. Proceedings of the International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Volume 13. p. 159—167.
4. HOLLÄNDER I. M., PERLMAN I. and SEABORG G. T.: *Table of Isotopes*. Review of Modern Physics, 1953. April 25. No. 2.

SUMMARY

In place of GAMMERTSFELDER's method of calculating the dimensions of shielding walls against radiation by means of tables — that has been adopted and applied by the Hungarian and a number of foreign Standard Bureaus — the author recommends the adoption of a graphical method, by means of which the thicknesses of the shielding lead walls against the gamma radiations of various isotopes can be more simply, rapidly, accurately and economically determined. The graphical method recommended makes it possible to determine the thickness of the lead walls even where several isotopes of differing activities are simultaneously employed.

DIE DIMENSIONIERUNG VON SCHUTZWÄNDEN GEGEN GAMMASTRAHLUNG

L. TIHANYI

ZUSAMMENFASSUNG

An Stelle des aus der GAMMERTSFELDER'schen Tabelle abgeleiteten Dimensionierungsverfahrens für strahlungssichere Schutzwände, welches die heimatliche, wie auch mehrere ausländische Normungen übernommen haben und anwenden, empfiehlt vorliegender Aufsatz die Einführung eines solchen grafischen Verfahrens, mit dessen Hilfe die Dicke der Bleischutzwände gegen die Gammastrahlungen verschiedener Isotopen einfacher, schneller, genauer und wirtschaftlicher bestimmt werden kann. Das in Vorschlag gebrachte grafische Verfahren ermöglicht die Bestimmung der Dicke der Bleischutzwände auch im Falle der gleichzeitigen Verwendung mehrerer Arten von Isotopen verschiedener Aktivität.

LE CALCUL DES MURS DE PROTECTION CONTRE LES RAYONS GAMMA

L. TIHANYI

RÉSUMÉ

Au lieu du procédé de calcul des murs de protection contre les rayons gamma, dérivé des tableaux de GAMMERTSFELDER et utilisé par la norme hongroise et plusieurs normes étrangères, l'étude propose l'introduction d'un nouveau procédé graphique. Cette méthode permet d'établir d'une manière plus simple, plus rapide, plus exacte et plus économique l'épaisseur des murs de plomb contre les rayons gamma émis par un isotope quelconque. Le procédé graphique proposé permet de déterminer l'épaisseur des murs de protection en plomb, même en cas de l'emploi simultané d'isotopes différents ayant des activités dissemblables.

РАСЧЕТ ЗАЩИТНЫХ СТЕНОК ОТ γ -ЛУЧЕЙ

Л. ТИХАНИ

РЕЗЮМЕ

Вместо методики расчета защитных стенок от радиации, выведенной по таблице Гаммерсфельдера, которая принята венгерскими и иностранными стандартами, в данной статье предлагается ввести такой графический метод, при использовании которого возможно более просто, быстрее, точнее и экономичнее определить толщину защитных свинцовых стенок от γ -лучей различных изотопов. Предлагаемый графический метод позволяет даже при одновременном использовании различных видов и различных по активности изотопов производить определение толщины защитных свинцовых стенок.

L'EXAMEN DES CAUSES DE PERTES EN Al_2O_3 APRÈS LA LESSIVE DANS LE PROCÉDÉ BAYER

E. MAGYAROSY

CANDIDAT DES SCIENCES CHIMIQUES

M. MÁRIÁSSY et Á. PERCZEL

INSTITUT DE RECHERCHES DES MÉTAUX, BUDAPEST

[Manuscrit présenté le 22 juillet 1957]

Dans le procédé BAYER pour la production d'alumine, au cours de la dilution qui suit la lessive à autoclave et au moment où la solution d'aluminate de soude et la boue rouge sont encore ensemble, des réactions chimiques peuvent se produire qui, en diminuant la teneur en Al_2O_3 de la solution, causent une perte dans la production d'alumine. Selon nos observations, en raison de ces pertes, le débit après la lessive est diminué de 2 à 14 pour cent. Du point de vue économique, l'établissement de la cause de cette perte en Al_2O_3 est essentiel, si l'on veut faire tout le nécessaire pour diminuer cette perte dans la mesure du possible.

En vue de la solution de ce problème, des recherches de laboratoire et d'usine avaient été poursuivies pendant plusieurs années. En possession des résultats, il est permis de croire que l'établissement d'une technologie d'usine est possible, dont la mise en application permettra la réduction des pertes d'hydrolyse dans des limites acceptables — entre 1,5 et 2,5 pour cent.

On sait que dans les conditions d'usine, le débit de la lessive est toujours inférieur aux résultats supposés que fournissent les calculs théoriques. L'étendue de cette divergence varie suivant les diverses espèces de la bauxite [1], et dépend des altérations minéralogiques des composants du minerai, d'une part, et de paramètres physiques encore peu connus, d'autre part (par exemple du symplectisme des altérations minéralogiques, de la granulométrie, des films éventuels déposés sur les grains élémentaires de la bauxite ou produits au cours de la lessive, ce qui empêche la pénétration de la soude pendant la lessive, [2] etc.).

Outre les pertes inévitables, survenues pendant la lessive, le phénomène connu sous le nom d'hydrolyse se manifeste aussi au cours d'autres phases de la production, pendant la dilution et même pendant la décantation de la boue rouge. Si nous adoptons ici l'expression d'hydrolyse, dans son sens généralisé, c'est que les résultats de plusieurs phénomènes indépendants, accusant des pertes en Al_2O_3 , sont caractérisés généralement, dans les rapports techniques et les communications scientifiques, par ce terme collectif. Les pertes dues à une désilication prolongée sont ainsi imputées à l'hydrolyse.

Au cours de l'examen de l'hydrolyse, il est désirable de déterminer la composition de la boue rouge au moment de l'ouverture de l'autoclave. Ceci n'est possible qu'en procédant — comme il sera relaté plus tard — à la séparation de la boue et de la liqueur située au-dessus d'elle, dans la solution de soude d'aluminate stabilisé, à l'aide d'un centrifugeur.

Nos recherches ont comporté l'examen successif des facteurs qui influencent la décomposition des liqueurs d'aluminate de soude. On a ainsi soumis à un examen approfondi l'influence de la présence de la boue, ainsi que le rôle que jouent les impuretés présentes dans les lessives. En vue d'établir une base de comparaison de nos examens, il fallait élaborer un procédé uniforme pour le lavage de la boue rouge, vu que des changements importants de la composition peuvent survenir au cours même de la préparation de l'échantillon.

La première série de nos recherches s'était donc bornée au seul examen critique des procédés de traitement préparatoire de l'échantillon.

Les conditions de la stabilité des différentes liqueurs d'aluminate de soude sont traitées d'une manière détaillée par la littérature [3, 4]. La relation d'équilibre entre la liqueur d'aluminate de soude et l'hydrate de l'alumine solide peut se caractériser par les considérations ci-dessous :

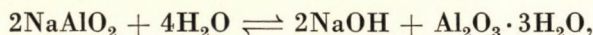
Si une solution pure d'aluminate métastable est en contact avec le trihydrate d'alumine à une température donnée pendant une durée prolongée, il s'établira une relation d'équilibre, dont le constant d'équilibre est caractérisé par la relation suivante [4] :

$$K = \frac{[\text{NaOH} + \text{NaAlO}_2]}{[\text{NaAlO}_2] \cdot a_w^n}$$

où la valeur de $n = 2,67 - 0,0133 t$ ($^\circ\text{C}$) et

a_w = l'activité de l'eau dans la solution.

A l'aide des valeurs du constant d'équilibre, les valeurs des courbes sous [3] peuvent être déterminées avec une bonne approximation. Il est à noter que de la réaction chimique :



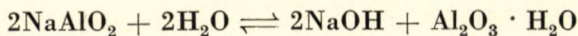
la formule ci-dessus donnée ne peut pas être directement déduite.

La valeur de n pour différentes températures a été donnée par PEARSON, en ce qui suit :

$$n_{50^\circ} = 2$$

$$n_{125^\circ} = 1$$

A la température de 50° au centigrade le trihydrate, et à 145° au centigrade environ, le monohydrate formera un composé stable, et, dans ce dernier cas, la formule chimique de la réaction sera



La vitesse de réaction est fonction des facteurs suivants :

- a) surface des particules déposées,
- b) relation molaire,
- c) concentration,
- d) température.

En prenant pour base la concentration de toute la soude (libre et combinée), la vitesse de décomposition à une température constante est fournie par l'expression suivante :

$$-\frac{dx}{dt} = k_1 \cdot A_t \frac{(X_t - X_\infty)^2}{(a_\infty + X_\infty)^2},$$

où k_1 = le facteur dépendant de la température a une valeur de 0,07 à la température de 50° au centigrade,

A_t = la surface de la partie déposée à un temps donné t ,

X_t et X_∞ = la concentration molaire du NaAlO_2 au temps t , ou bien au cas d'équilibre établi,

a_∞ = la concentration molaire du NaOH en état d'équilibre.

En première approximation, l'équation peut être réduite à l'expression suivante :

$$-\frac{dx}{dt} = k_1 \cdot A_t \left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_\infty} \right)^2,$$

où par R_t et R_∞ on entend les relations molaires employées généralement à l'usine, selon la dénomination originale de PEARSON. Ces déductions théoriques s'appuyant sur la théorie de PEARSON, s'appliquent à la décomposition, pour le cas de solutions pures d'aluminate de soude. En raison du caractère chimique analogue de la décomposition qui se fait dans les Dorres, en présence de liqueurs d'aluminate de soude à l'état pur, la théorie peut être appliquée sans aucune modification à la décomposition hydrolytique, les conditions étant toutefois à soumettre à un examen plus approfondi, en cas de présence de liqueurs d'aluminate de soude industrielles contaminées. Il est connu, en effet, qu'aux anions complexes d'aluminates, d'autres éléments peuvent prendre la place des groupes H_2O ou bien (OH) , ainsi, en tout premier lieu, des halogènes, et il en résulte, par exemple dans le cas des liqueurs de soude contenant du chlore, une stabilité plus grande [5]. A cause du

changement des conditions de solubilité, à une concentration donnée, ces effets se traduisent par le fait que les solutions à relation molaire caustique plus faible sont plus susceptibles à une décomposition dans des conditions d'usine, tandis que les solutions d'une relation molaire caustique plus élevée se révèlent plus stables. Par conséquent, la décomposition est relativement rapide déjà dans le décanteur, et elle l'est également à la mise en oeuvre dans les décomposeurs. La décomposition des solutions à relation molaire caustique plus élevée se fait, en revanche, d'une manière plus lente, ce qui conduit à une baisse du débit, si la durée du travail n'est pas augmentée.

I

Pour l'exécution précise de la partie expérimentale des recherches, il fallait avant tout élaborer une méthode d'analyse permettant de mesurer les quantités de Al_2O_3 perdues sous l'effet de la désilication, qui commence au cours de la lessive et continue pendant les opérations ultérieures. Le développement d'une méthode séparée s'impose aussi pour le dosage de l' Al_2O_3 précipité par l'hydrolyse. Pour assurer l'efficacité de l'examen, il est nécessaire — comme il était déjà signalé précédemment — à examiner la pulpe de la boue rouge dans l'autoclave, avant que la liqueur d'aluminate de soude soit séparée de la boue rouge. Cette opération se fait correctement par le procédé suivant : la pulpe de l'autoclave est versée dans une liqueur contenant 200 g/l de Na_2O et préchauffée à 100° au centigrade, et la relation molaire caustique étant ainsi augmentée à une valeur de 7 à 8, la solution est stabilisée, puis, à l'état déjà stable, soumise à un procédé de dilution suivi de centrifugeage et de lavage.

L'échantillon doit être préparé d'une manière telle, qu'aucune précipitation de la solution d'aluminate ne se produise au cours de la préparation, et aucun composant ne soit enlevé de la boue rouge par dissolution chimique. Il importe que l'échantillon qu'on se propose de soumettre à l'examen ait, au début de l'examen, une qualité identique à celle qu'il avait au moment de sa formation. Il est d'une importance capitale que les dosages puissent être faits d'une manière rapide, quelle que soit d'ailleurs la méthode employée. On a donc toujours procédé à la séparation de la liqueur d'aluminate de soude de la boue, en se servant d'un centrifugeur chauffé [3]. Le même procédé a été employé pour le lavage de la boue jusqu'à la réaction non alcaline. Après le premier centrifugeage, on a fait l'analyse de la solution pure d'aluminate de soude, déterminé le poids de la boue rouge alcaline centrifugée, mais encore non-soumise au lavage ; puis on a procédé au lavage de la boue dans le tuyau du centrifugeur. Après avoir déterminé la teneur en Al_2O_3 de l'eau employée au lavage, on a obtenu les quantités d' Al_2O_3 enlevées par

le lavage. Après le mesurage du poids de la boue rouge lavée jusqu'à l'état non-alcaline et séchée, nous renseignant sur la composition originale de l'aluminate de soude, on peut procéder ensuite au calcul des quantités adhérentes de Al_2O_3 éliminées par un lavage à l'eau trois fois répété. On a aussi combiné les lavages en se servant d'une lessive ayant une teneur de 2,5 pour cent de NaOH. La température des liquides employées pour le lavage était dans chaque cas de 90° au centigrade. Les résultats sont reproduits dans le tableau n° 1.

Tableau 1

Lavage de quatre échantillons de boue rouge à l'eau bouillante et avec une solution contenant 2,5% de NaOH

| Nombre des lavages | | La quantité de Al_2O_3 à extraire en g | La quantité de Al_2O_3 extraite | |
|--------------------|----------------|--|-----------------------------------|-------|
| à l'eau | à 2,5% de NaOH | | g | % |
| 3 | — | 1,855 | 1,833 | 98,7 |
| 3 | — | 2,658 | 2,559 | 96,3 |
| 2 | 3 | 1,687 | 1,701 | 101,2 |
| 2 | 3 | 1,700 | 1,713 | 100,8 |

Pour représenter l'efficacité du lavage, nous reproduisons ici deux diagrammes.

Au cours des expériences ultérieures, on a fait précipiter sur la boue rouge des quantités différentes et connues de $Al(OH)_3$, en décomposant la liqueur d'aluminate de soude au moyen d'un traitement à l'acide carbonique. On a examiné l'effet de lavages en liqueur contenant 2,5% de NaOH, à différentes températures, sur la quantité de l'hydrate ainsi précipité et redissout. Les résultats obtenus sont reproduits dans le tableau n° 2.

Tableau 2

La dissolution de $Al(OH)_3$ précipité de l'aluminate de soude par introduction de CO_2 , en cas de lavage avec une solution de 2,5% de NaOH

| Contenu original d' Al_2O_3 de la solution de NaOH à 2,5% | Lavage à 30° C | | | Lavage à 60° C | | |
|---|---|-------------------------|-------------------------|--|-------------------------|-------------------------|
| | Al_2O_3 précipité sur la boue rouge g/g | Al_2O_3 redissout g/g | Différence en Al_2O_3 | Al_2O_3 précipité sur la boue r. g/g | Al_2O_3 redissout g/g | Différence en Al_2O_3 |
| 0,05% | 0,53 | 0,63 | +0,1 | 1,014 | 1,142 | +0,12 |
| 0,05% | 0,52 | 0,60 | +0,08 | 1,030 | 1,170 | +0,15 |

En supposant que l'hydrate précipité à la surface de la boue rouge au cours de l'hydrolyse est d'une structure et d'une granulométrie analogues à celles observées lors du traitement à l'acide carbonique, il résulte des données du tableau no. 2, que les liqueurs de lavage contenant de la soude caustique ne peuvent pas être employées dans nos examens.

Les données du tableau n° 2 prouvent également que l' $\text{Al}(\text{OH})_3$ éventuellement précipitée par l'hydrolyse est dissoute à une température d'environ

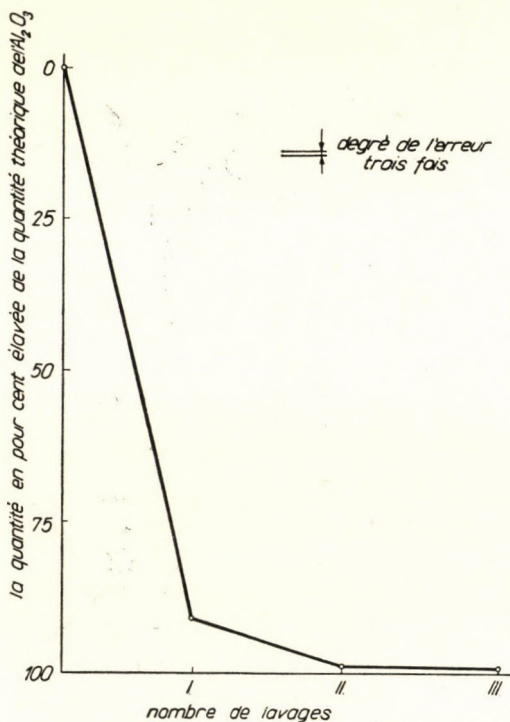


Fig. 1. Lavage de la boue rouge avec de l'eau distillée

100° au centigrade dans l'excès de la soude caustique de la liqueur d'aluminate de soude stabilisé. A cette température plus basse que celle de l'autoclave par contre, des quantités d'alumine supplémentaires ne peuvent pas être dissoutes de la bauxite, même par un excès de soude. Naturellement, ce procédé de préparation théoriquement juste n'a pu être suivi au cours des expériences, mais la boue rouge préparée par la méthode utilisée par nous, s'est montrée d'une composition analogue à celle qui résulte du procédé de préparation théorique, de sorte que l'hydrolyse survenue au cours du centrifugeage des liqueurs d'environ 200 cm³, dans un centrifugeur chauffé à 100° au centigrade, n'est pas d'une quantité démontrable.

II

On a fait des expériences avec de la bauxite d'Iszkaszentgyörgy, pour vérifier la vitesse de la précipitation de l' Al_2O_3 , de la solution en contact permanent avec la boue rouge. La composition de la bauxite d'Iszkaszentgyörgy que nous avons utilisée, était la suivante :

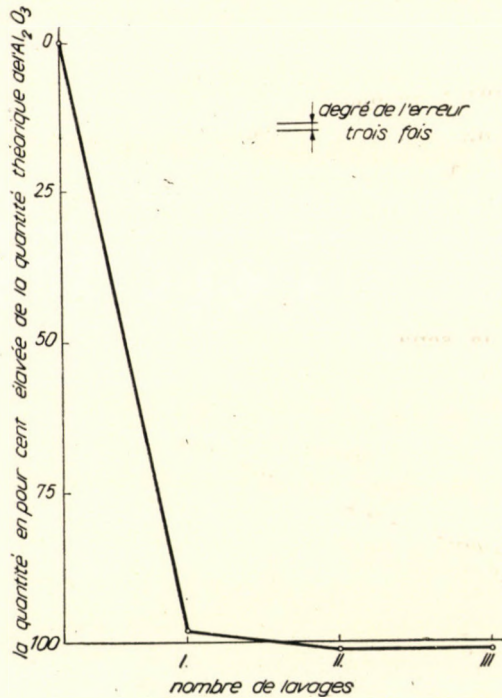


Fig. 2. Lavage de la boue rouge avec du NaOH d'une concentration de 2,5 pour cent

| A l'état naturel % | Après grillage à 350° au centigrade % |
|-------------------------------|--|
| perte de grillage 21,32 | 4 |
| SiO_2 3,47 | 4,3 |
| TiO_2 2,22 | 2,74 |
| Fe_2O_3 19,50 | 24,18 |
| Al_2O_3 51,90 | 64,28 |
| quotient 14,96 | 14,96 |

La bauxite a été broyée à une finesse passant par le tamis DIN 70, puis grillée pendant 3 heures à une température de 350° au centigrade. Le minerai grillé a été soumis dans une autoclave rotative expérimentale de 1,5 litres, à une lessive avec 800 ml de liqueur de la composition suivante :

| | |
|---------------------------------|-----------|
| Na_2O caustique | 248,5 g/l |
| Al_2O_3 | 100,7 „ |

La liqueur a été composée de NaOH chimiquement pur et de batitures d'aluminium de 99,99 pour cent. L'addition de la bauxite s'est effectuée de telle sorte que pour une lessive donnant un débit de 90 pour cent, la relation molaire caustique devienne 1,75 après la lessive. La température de la lessive a été de 210°, et sa durée de 3 heures, y compris la durée du réchauffage. Ensuite l'autoclave a été refroidie par de l'eau à une température de 95°, et son contenu dilué à un poids spécifique de 26,5° Bé, avec une solution caustique diluante, contenant 40 g/l en NaOH et 25 g/l en Al₂O₃. Pendant la dilution, on a veillé à ne pas laisser descendre la température au-dessous de 90°. La liqueur diluée a été versée dans des tuyaux de sédimentation préchauffés à 90° C, et maintenue à cette température. On a observé le changement de la composition de la boue rouge aux heures zéro, 1, 3 et 6. L'heure zéro a été le moment de l'ouverture de l'autoclave. Ce moment précède d'une demi-heure environ l'opération du versement dans les tuyaux de sédimentation en vue d'une mise au point exacte de la dilution. On a suivi les procédés déjà exposés pour la séparation et le lavage, notamment l'opération du centrifugeage à une température élevée. Six à sept lavages successifs ont été faits avec de l'eau à une température de 90° au centigrade. Lorsque, vers la fin du lavage, la boue atteint un état dispersé colloïdal, il est utile de mettre à l'eau un électrolyte indifférent au point de vue de l'analyse, par exemple 0,5 à 1 g de (NH₄)₂CO₂, ce qui rend de nouveau la boue apte à un bon centrifugeage. La matière lavée a été séchée dans les tuyaux du centrifugeur à une température de 103° au centigrade, puis préparée à l'analyse au moyen d'un tamis DIN 70.

Le changement de la composition de la boue rouge en fonction du temps, est mis en vue par le tableau n° 3.

Tableau 3

Changements de composition d'une boue rouge produite par la lessive d'une bauxite d'Iszkaszentgyörgy, caractérisant l'hydrolyse de l'aluminate de soude en contact avec la boue

| Composants : | Temps écoulé après la lessive | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|----------|----------|
| | 1 heure | 3 heures | 6 heures |
| Perte de grillage..... | 6,12% | 6,37% | 6,33% |
| SiO ₂ | 6,80% | 9,02% | 8,97% |
| TiO ₂ | 6,33% | 5,99% | 5,99% |
| Fe ₂ O ₃ | 52,00% | 49,60% | 48,20% |
| Al ₂ O ₃ | 16,27% | 15,91% | 18,61% |
| Na ₂ O | 5,85% | 6,63% | 7,33% |
| Débit de lessive | 88,15% | 88,00% | 85,50% |

Des expériences analogues ont été faites avec de la poudre de bauxite provenant de l'une des usines d'alumine, grillée à une température de 350°

au centigrade et moulue à l'usine même. Cette poudre, préparée par passage au tamis DIN 30, avait la composition suivante :

| | |
|-------------------|--------|
| perte de grillage | 15,20% |
| SiO_2 | 5,90% |
| TiO_2 | 2,04% |
| Fe_2O_3 | 21,80% |
| Al_2O_3 | 54,00% |
| quotient | 9,15% |

Le changement de composition de la boue rouge sédimentée à partir de la pulpe versée dans les tuyaux de précipitation, est donné dans le tableau n° 4.

Tableau 4

Changements de composition d'une boue rouge produite par la lessive d'une bauxite d'Iszkaszentgyörgy, caractérisant l'hydrolyse de l'aluminate de soude en contact avec la boue

| Composants : | Pulpe d'autoclave au moment de l'ouverture | Pulpe diluée | Après un repos de | |
|--|--|--------------|-------------------|----------|
| | | | 1 heure | 3 heures |
| Deux heures de lessive à une température de 210° C | | | | |
| SiO_2 | 9,8% | 11,5% | 11,2% | 9,8% |
| Al_2O_3 | 11,1% | 13,0% | 13,4% | 14,1% |
| Fe_2O_3 | 43,5% | 46,0% | 48,6% | 42,1% |
| Débit de lessive | 89,6% | 88,5% | 88,9% | 86,5% |
| Six heures de lessive à une température de 210° C | | | | |
| SiO_2 | 11,7% | 10,6% | 10,5% | 14,4% |
| Al_2O_3 | 11,8% | 10,9% | 11,3% | 14,5% |
| Fe_2O_3 | 41,8% | 38,9% | 39,6% | 49,1% |
| Débit de lessive | 90,1% | 88,7% | 88,4% | 88,1% |

On a fait figurer, en dernière ligne du tableau, les effets de l'hydrolyse sur la baisse du rendement de la lessive.

III

On a aussi examiné le volume de l'hydrolyse en tenant compte de l'état contaminé des lessives. On a fait des expériences informatives avec addition de sel précipité des liqueurs concentrées de l'une des usines d'alumine, puis avec addition de NaF et de Na_2CO_3 séparément.

La composition du sel d'usine était la suivante :

| | |
|----------|--------|
| P_2O_5 | 0,32% |
| V_2O_5 | 0,27% |
| SO_4 | 3,56% |
| CO_2 | 7,76% |
| F | 8,26% |
| Na_2O | 30,20% |

L'analyse se réfère à une matière humide. Les examens ont été exécutés suivant le mode opératoire de lessive sans addition, mais pour chaque 1000 cm³ de la solution on a dissout 48,4 g de sel humide. Ainsi, au dehors d'autres matières étrangères, on a mis 4 g/l de F dans la lessive. La même matière provenant d'Iszkaszentgyörgy a été employée, dont on a déjà fait usage au cours de la première série d'expériences. Les résultats obtenus au cours de l'examen de l'hydrolyse sont donnés par le tableau n° 5.

Tableau 5

Changements de composition d'une boue rouge produite par la lessive d'une bauxite d'Iszkaszentgyörgy, avec addition de sel d'usine d'alumine, caractérisant l'hydrolyse de la liqueur d'aluminate de soude en contact avec la boue

| Composants | Temps écoulé après la dilution | | |
|------------------------|--------------------------------|----------|----------|
| | 1 heure | 3 heures | 6 heures |
| SiO_2 | 5,55% | 10,16% | 9,23% |
| TiO_2 | 5,14% | 5,49% | 5,08% |
| Fe_2O_3 | 43,62% | 36,49% | 36,47% |
| Al_2O_3 | 28,89% | 33,82% | 33,33% |
| Na_2O | 3,62% | 5,90% | 6,20% |
| Débit de lessive | 75,10% | 65,20% | 65,80% |

Il résulte de la série d'expériences, que l'action de l'hydrolyse est grandement favorisée par la contamination de la lessive avec des sels formés dans les circonstances normales des usines.

Les recherches ultérieures ont été concentrées à l'examen séparé des effets des composants individuels de ces sels industriels. On a examiné d'abord l'effet de la contamination par du NaF, ce composant, grâce à sa solubilité élevée, pouvant s'enrichir considérablement dans la solution d'aluminate de soude, jusqu'à présenter quelquefois 8 à 10 g/l de F dans la lessive. Au cours des expériences, on a préparé une solution à 8,8 g de NaF pour un litre de lessive, ce qui correspond à une teneur de 4 g/l F. Les résultats obtenus par la méthode déjà exposée pour la bauxite d'Iszkaszentgyörgy, sont concentrés dans le tableau n° 6.

Tableau 6

Changements de composition de la boue rouge produite par la lessive d'une bauxite d'Iszkaszentgyörgy, avec addition de fluorure de soude, caractérisant l'hydrolyse de la liqueur d'aluminate de soude en contact avec la boue

| Composants | Temps écoulé après la dilution | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|----------|----------|
| | 1 heure | 3 heures | 6 heures |
| SiO ₂ | 6,96% | 8,66% | 8,56% |
| TiO ₂ | 5,34% | 5,60% | 5,20% |
| Fe ₂ O ₃ | 44,20% | 37,08% | 37,60% |
| Al ₂ O ₃ | 21,50% | 24,80% | 27,20% |
| Na ₂ O | 4,80% | 6,10% | 6,90% |
| Débit de lessive | 81,75% | 75,80% | 72,80% |

Il est manifeste que l'hydrolyse est considérablement augmentée à cause de la contamination de la lessive par du NaF, bien que l'accroissement de l'hydrolyse reste moindre qu'en cas d'addition de sel séparé de la lessive d'une usine d'alumine.

Les expériences ont été reprises avec l'utilisation d'une poudre de bauxite provenant d'Iszkaszentgyörgy et traitée dans une usine d'alumine, avec addition égale de sel et de NaF. Les résultats en sont donnés dans le tableau n° 7.

Tableau 7

Changements de composition de la boue rouge produite par la lessive d'une bauxite de Iszkaszentgyörgy, avec addition de sel d'usine d'alumine et de fluorure de soude, caractéristique pour l'hydrolyse de la liqueur d'aluminate de soude en contact avec la boue

| Composants | Pulpe d'autoclave au moment de l'ouverture | Temps écoulé après la dilution | | |
|--|--|--------------------------------|---------|----------|
| | | 0 heure | 1 heure | 3 heures |
| Addition de sel d'usine, lessive à une température de 210° C, 2 heures | | | | |
| SiO ₂ | 4,9% | 9,8% | 9,9% | 10,7% |
| Al ₂ O ₃ | 14,7% | 16,9% | 17,1% | 18,1% |
| Fe ₂ O ₃ | 55,6% | 48,6% | 42,1% | 43,5% |
| Débit de lessive | 89,4% | 86,0% | 84,1% | 83,2% |
| Addition de NaF à la lessive, à une température de 210° C, 2 heures | | | | |
| SiO ₂ | 5,6% | 8,5% | 9,8% | 9,7% |
| Al ₂ O ₃ | 14,9% | 18,1% | 16,9% | 18,2% |
| Fe ₂ O ₃ | 53,6% | 48,3% | 47,4% | 45,2% |
| Débit de lessive | 88,8% | 84,9% | 84,5% | 83,9% |

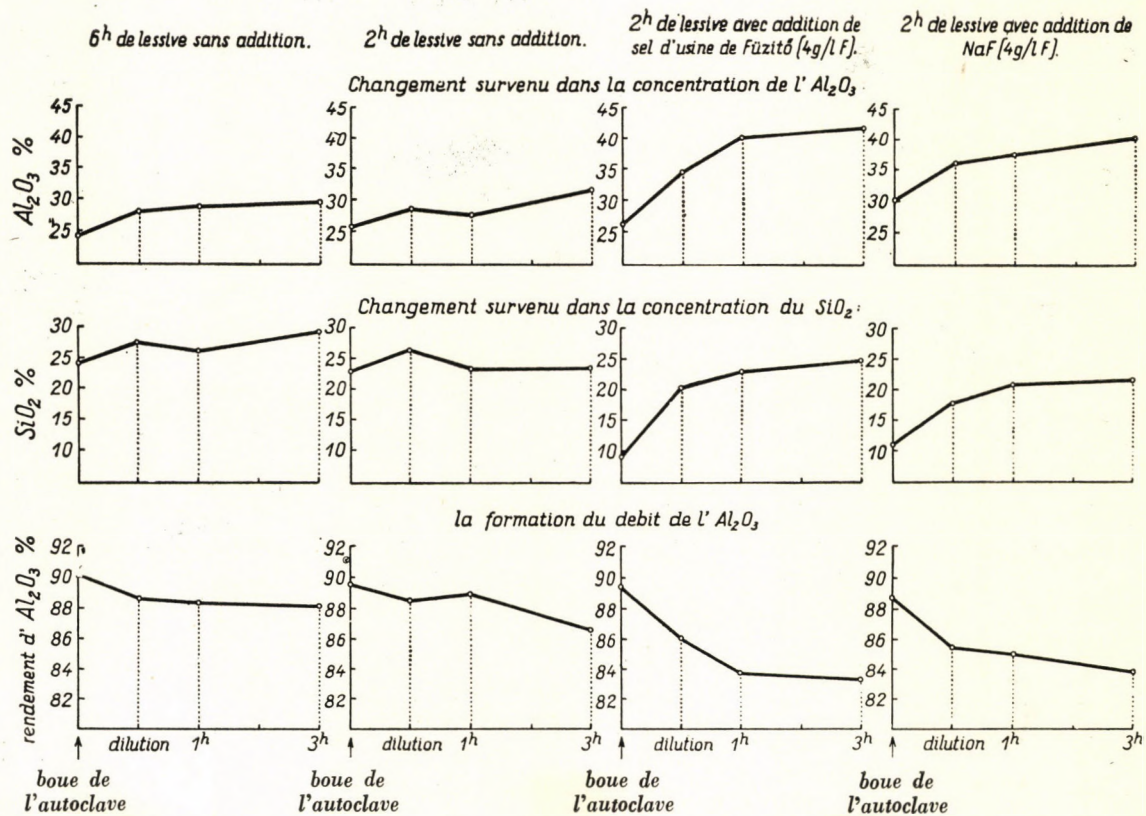


Fig. 3. L'effet de l'addition du sel d'usine d'alumine et de NaF sur la formation du contenu en Al_2O_3 et SiO_2 de la boue rouge et sur celle du débit en Al_2O_3 (Les données de poids se réfèrent à une quantité de 100 Fe_2O_3 dans la boue rouge)

Note :

Il est à noter que les données du tableau n° 7 se réfèrent à un minéral de bauxite de type identique, mais d'une composition différente de ceux, dont les données ont été publiées dans les tableaux n°s 5 et 6. Ceci fournit l'explication des différences qui se présentent entre les résultats de laboratoire et ceux d'usine.

Ces résultats sont mis en vue à l'aide de diagrammes (voir figure 3), qui représentent les variations de la teneur en alumine (Al_2O_3) et en SiO_2 , ainsi que du rendement de la lessive.

On a aussi examiné l'hydrolyse en cas de lessives d'une teneur différent en carbonate de soude. Des quantités différentes de carbonate de soude ont été mises à la liqueur d'aluminate de soude, retirée du décantateur Dorr d'une usine utilisant de la bauxite de Nyirád. Après l'écoulement de deux heures et demie on a examiné les pertes en alumine (Al_2O_3) produites par l'hydrolyse et par la désilication prolongée, dans un thermostat maintenu à la température de 90° au centigrade, sous un brassage d'une intensité égale. Les résultats de cet examen sont reproduits dans le tableau n° 8.

Tableau 8

L'effet du contenu en carbonate de soude de la liqueur d'aluminate de soude sur les pertes d'hydrolyse

| Na ₂ O composé à la carbonate de soude en pourcentage de toute la quantité de Na ₂ O | Composition de la liqueur alcaline | | Perte d' Al_2O_3 g/l en raison de l'hydrolyse |
|--|------------------------------------|-------------------------|---|
| | originale | après 2 heures et demie | |
| 8,0 | 105,0 | 104,90 | 0,1 |
| 10,2 | 104,8 | 104,70 | 0,1 |
| 15,2 | 104,7 | 103,60 | 0,11 |
| 16,0 | 104,9 | 103,60 | 0,13 |

Il ressort du tableau, que l'accroissement de la teneur en carbonate dans la lessive entraîne celui de l'hydrolyse, mais dans le cas où la teneur en soude composée au carbonate est plus élevée, le degré de l'hydrolyse ne subit dans la pratique aucune modification.

Les conclusions tirées de nos expériences sont les suivantes :

1. Dans le cas de lessives exécutées dans des conditions de laboratoire, la teneur en Al_2O_3 de la boue rouge des pulpes maintenue à une température de 90° au centigrade, s'accroît en raison de la désilication prolongée et des précipitations par l'hydrolyse. Le degré de cet accroissement correspond à une perte de 2 à 3 pour cent en alumine.

2. Sous l'effet de la contamination par du sel séparé des liqueurs d'une usine d'alumine, la perte en alumine augmente considérablement.

3. L'accroissement des pertes d'hydrolyse est également favorisé en cas de contamination par du NaF. Ainsi, l'addition de 4 g/l de F à la lessive

a diminué le rendement après 3 heures de repos, de 88,3 pour cent à 83,9 pour cent, ce qui équivaut à une perte de 2,3 pour cent du rendement total, par rapport à la diminution de l'efficacité allant de 89,6 à 85,5 pour cent, atteinte sans addition.

4. Bien qu'à un degré plus modeste qu'en présence de NaF, l'accroissement des pertes dues à l'hydrolyse est également sensible, entre certaines limites, en cas d'augmentation de la concentration de la soude.

5. On peut constater, qu'en présence de sels d'usine ou de sels contenant du NaF, la teneur en SiO_2 de la boue rouge est sensiblement plus faible, aussitôt après la lessive, que dans les boues obtenues par une lessive sans additions, ce qui indique que le procédé de combinaison de la silice se prolonge mieux dans les liqueurs moins pures.

Une aide précieuse nous a été fournie, dans nos recherches, par les ingénieurs en chef et les collectifs de techniciens des usines d'alumine d'Ajka, d'Almásfüzitő et de Magyaróvár. L'aide apportée par MM. Dénes Bartók et András Héjja, ainsi que par Mmes Alice Hegedüs et Marie Posgay, a été également très importante. C'est ici que les auteurs désirent exprimer leur gratitude pour leur précieuse contribution scientifique.

LITTÉRATURE

1. TIEMANN, T. D.: Extraction of Alumina from Haïti and Jamaica Bauxites. *J. of Metals*, 1951. May pp. 389—393.
2. SOUCHKOV, A. I.—BAYMAKOV (UAZ): Manuel pour l'analyse cristallographique des matières premières et des produits employés dans la production d'alumine (Manuscrit).
3. LÁNYI BÉLA: La mise en valeur de la boue rouge d'usines d'alumine. Publication de l'Institut pour la formation professionnelle des ingénieurs. Ko. No. 6.
4. PEARSON, T. G.: The Chemical Background of the Aluminium Industry, 1955.
5. MASELY, V. A.: Production d'alumine. Publication de la Maison d'édition des livres et revues de l'industrie lourde, Budapest 1953, p. 129.
6. FRICKE, R. et JUCAITIS, P.: *Z. anorg. Ch.* **191** (1930). p. 129.
7. WOLF, F. F.—KOUSNYETSOV, S. I.—SEREBRENYIKOVA, O. V.: L'accélération de la décomposition des solutions d'alumines à l'aide de sels d'alumines (*Zhournal Prikladnoj khimii*. 1950. no 1. pp. 60—63).

RÉSUMÉ

On a procédé à l'examen du phénomène de l'hydrolyse dans les liqueurs d'aluminate de soude des usines hongroises d'alumine utilisant le procédé Bayer. On a examiné d'une part la vitesse de cette réaction dans les solution mêlées à la boue rouge, après des lessives exécutées selon des procédés technologiques différents, et d'autre part les effets, que la contamination des liqueurs par différents sels peut avoir sur l'hydrolyse. L'étude se complète par la publication de données numériques relatives à l'étendue de l'hydrolyse dans des solutions contaminées à des degrés différents par du sel séparé des liqueurs d'une usine d'alumine, du NaF et du Na_2CO_3 .

Une méthode uniforme a été enfin élaborée pour la préparation d'échantillons nécessaires aux examens.

UNTERSUCHUNG DER URSACHEN DER Al_2O_3 -VERLUSTE NACH DER AUFSCHLIESSUNG BEI DER TONERDEGEWINNUNG NACH DEM BAYER-VERFAHREN

I. MAGYAROSY, M. MÁRIÁSSY und Á. PERCZEL

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser untersuchten die Hydrolyse in der Aluminatlauge der nach dem Bayer-Verfahren arbeitenden ungarischen Tonerdefabriken und den zeitlichen Verlauf der Hydrolyse in den Lösungen, die mit rotem Schlamm in Berührung sind; einerseits nach Aufschließungen, die mit verschiedenen Methoden durchgeführt wurden, andererseits wurde der Einfluß der Verunreinigung der Laugen auf die hydrolytische Zersetzung untersucht. Es werden Zahlenangaben betreffend das Ausmaß der Hydrolyse in mit Salzen: NaF, Na_2CO_3 in verschiedenem Grad verunreinigten Lösungen mitgeteilt. Für die fachgemässe Vorbereitung der zu den Untersuchungen nötigen Proben wurde ein einheitliches Verfahren ausgearbeitet.

INVESTIGATION OF THE CAUSES OF Al_2O_3 LOSSES AFTER DIGESTION AT ALUMINA PRODUCTION BY THE BAYER METHOD

I. MAGYAROSY, M. MÁRIÁSSY and Á. PERCZEL

SUMMARY

The authors examined the hydrolysis in the aluminate solution of the Hungarian aluminate factories using the Bayer method: the reaction times in the solutions in contact with the red mud after digestion carried out with different technologies, and, on the other hand, the effect of contamination of the solutions on the hydrolytic decomposition. The authors publish numerical values for the measure of hydrolysis in solutions contaminated by salts: NaF, Na_2CO_3 , to varying degrees. An unified method has been worked out for the correct preparation of the specimens necessary for the investigations.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЧИН ПОТЕРЬ Al_2O_3 ПОСЛЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ГЛИНОЗЕМНОГО ПРОИЗВОДСТВА ПО БАЙЕРУ

И. МАДЬЯРОШИ, М. МАРИАШИ и А. ПЕРЦЕЛЬ

РЕЗЮМЕ

Исследовалось в алюминатном щелоке отечественных глиноземных заводов, работающих по методу Байера, явление гидролиза, его течение во времени в растворах, соприкасающихся с красным шламом, с одной стороны, после разложений при помощи различных технологий, а с другой стороны, воздействие загрязненности щелоков на гидролитное разложение. Приводятся числовые данные относительно степени гидролиза, происходящего в растворах, загрязненных в различной мере щелочной солью, NaF, Na_2CO_3 . Разработана единая методика технически грамотной подготовки проб, необходимых для производства исследований.

REMARKS ON L. TIHANYI'S PAPER ON „THE DIMENSIONING OF SHIELDING WALLS AGAINST GAMMA RADIATION”*

I. EGRI
CAND. OF ENG. SC.

and

J. HERING

INSTITUTE FOR MEASUREMENT AND INSTRUMENTATION OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
BUDAPEST

[Manuscript received December 21, 1957]

L. TIHANYI's paper discusses the determination of the dimensions of protective shields and containers against gamma radiation, dealing especially with cases where there are several sources of radiation of various energies and activities.

For such cases numerous foreign standards and also the projected Hungarian Standard recommend calculation according to a numerical table. This table was worked out by GAMMERTSFELDER for the National Committee on Radiation Protection (USA) and was later supplemented by MEYER and SCHÜTZMEISTER [1]. According to the projected Hungarian Standard, the thickness of the protective shield may be approximately calculated with the help of the table. According to TIHANYI, the determination of dimensions according to the table is not correct, because his calculations show that this results in some cases in excessive, in others in too small dimensions.

The principle of the calculations performed is not new, but an application of this principle to 26 sources of radiation in such a way as not to let the finding or calculation of the dose rate constant to the designer, furthermore the practical system of co-ordinates of the graphs that show the results of the calculations, in our opinion, greatly facilitate the calculation of the required dimensions.

The extent, however, to which the shield thicknesses found from either the graphs constructed as the results of these calculations, or from GAMMERTSFELDER's tables, can serve as bases for design, could only be decided by control measurements.

The carrying out of such measurements was obviously beyond the scope of the paper, but we have compared the results of the author's calculations with the results of measurements published in the literature in the case of two complex sources of radiation: Ra 226 and Ir 192. We have taken these two sources of radiation as the basis for comparison because

* s. Acta Technica Acad. Sc. Hung., XXI (1958) p. 255—274

it was for these two among the complex sources of radiation that we found reliable data in the literature.

The bases for comparison were the graphs of measured data for the attenuation of a broad beam of rays from Ra 226 in the NBS Handbook 54, and from Ir 192 in the ASTM Special Technical Publication No. 145 [2].

For the case of a Ra 226 source of radiation the comparison gives the following results with respect to the thickness of a lead shield

| | Measurement [2] | Tihanyi | Gammertsfelder's table |
|---------|-----------------|---------|------------------------|
| 100 mC | 39,5 mm | 46 mm | 55 mm |
| 1000 mC | 90 mm | 96 mm | 101 mm |

The results of a comparison for an Ir 192 source of radiation are :

| | Measurement [2] | Tihanyi | Gammertsfelder's table |
|---------|-----------------|---------|------------------------|
| 100 mC | 5,1 mm | 5,5 mm | 14 mm |
| 1000 mC | 20,4 mm | 16 mm | 27 mm |

The comparison shows that the calculated thicknesses are in three of the four cases considered somewhat larger and in one case — that of 1000 mC Ir 192 — somewhat smaller than those found from the results of measurements. It must be noted that the measurements referred to give only the thickness of the lead wall required for various degrees of attenuation, but to find the necessary attenuation ratio : the gamma-ray dose rate constant of the source of radiation concerned must also be known, and for this we have accepted TIHANYI's calculations.

The thicknesses obtained from GAMMERTSFELDER's table are in all four cases examined greater than those derived from the results of measurements and differ more from the latter than the calculated thicknesses. Such deviation of GAMMERTSFELDER's data is, however, not characteristic, since according to TIHANYI's Table 8, it is frequently the GAMMERTSFELDER table that gives smaller thicknesses than the calculated values.

The reason why the thicknesses theoretically correctly calculated by TIHANYI differ from those indicated by measurement, could only be conclusively determined if there were more reliable *measured* data at our disposal with regard to at least the most often used complex sources of radiation.

It is worth noting that even small differences — of 1–2 half-value thicknesses — involve a considerable percentage change in weight of the containers whose dimensions are determined by the above methods. In the cases examined, taking spherical containers the following weight ratios result :

| | Measurement | Tihanyi | Gammertsfelder's table |
|----------------|-------------|---------|------------------------|
| 1000 mC Ra 226 | 0,7 | 0,86 | 1 |
| 1000 mC Ir 192 | 0,42 | 0,2 | 1 |

These weight ratios also justify the carrying out of reliable measurements to serve as the bases of design because a decrease in the weight of the containers leads not only to a saving in material but also to easier handling.

Finally, attention must be drawn to the fact that in practice calculations of protective shield thicknesses arise which cannot be carried out in one step either by the method recommended by TIHANYI, or with the help of GAMMERTSFELDER's tables. These are the cases where the permissible dose rate is given with respect to the surface of the container. In this case, the equation of p. 258 of the paper

$$N = \frac{I \cdot D}{A^2 R}$$

which can also be written

$$N = \frac{I \cdot D}{A^2 e^{\mu V}}$$

becomes

$$N = \frac{I \cdot D}{V^2 e^{\mu V}}$$

The thickness V of the wall of the container cannot be explicitly expressed from the above equation, it can only be calculated by iterative approximation. A practical case of this nature is, for example, the design of a container to be placed in a motor car, where direct contact with the surface of the container must be permissible for a given length of time, since a proper protective distance for the handling personnel cannot be assured.

REFERENCES

1. H. SCHWIEGK: Künstliche radioaktive Isotope in Physiologie, Diagnostik und Therapie. p. 128-130. Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.
2. Protection Against Radiations from Radium, Cobalt-60, and Cesium-137, Handbook 54, p. 49. National Bureau of Standards, Washington. 1954.
ASTM Special Technical Publication No. 145. 11. p. American Society for Testing Materials, Philadelphia, 1953.

SUMMARY

The remarks compare the results of TIHANYI's calculation with established experimental data published in the literature and reach the conclusion that the causes of discrepancies can be detected only by numerous and systematic measurements. It is emphasized in the remarks that even with the help of TIHANYI's method the calculation of containers with a specified maximum radiation level *on the surface* of the container cannot be carried out in a single step.

DISKUSSIONSBEITRAG ZUR ARBEIT VON L. TIHANYI:
 »BEMESSUNG VON SCHUTZWÄNDEN GEGEN GAMMASTRAHLUNG«

I. EGRI und J. HERING

ZUSAMMENFASSUNG

Der Diskussionsbeitrag vergleicht die Ergebnisse der Berechnungen des Verfassers mit den in der Literatur veröffentlichten *Messergebnissen* und weist darauf hin, daß man die Ursachen der Abweichungen nur mit Hilfe einer großen Anzahl von Messungen klären könnte. Der Beitrag betont, daß mit der vom Verfasser beschriebenen Methode die Dimensionierung von Trägern, bei welchen die Dosisleistung auf der Oberfläche des Trägers unter einem zulässigen Niveau gehalten werden muß, in *einem* Rechnungsgang nicht durchgeführt werden kann.

DISCUSSION DU TRAVAIL DE L. TIHANYI: DIMENSIONNEMENT DES MURS
 DE PROTECTION CONTRE LE RAYONNEMENT GAMMA

I. EGRI et J. HERING

RÉSUMÉ

Les auteurs comparent les résultats des *calculs* de l'auteur avec les résultats des *mesures* publiées dans la littérature, et montrent que les causes des écarts ne pourraient être élucidées que par des mesures assez nombreuses. L'article souligne que la méthode décrite par l'auteur ne permet pas non plus de résoudre *d'un seul coup* le dimensionnement des containers, à la surface desquelles la puissance de la dose doit être maintenue au-dessous d'un niveau donné.

К СТАТЬЕ Л. ТИХАНИ «РАСЧЕТ ЗАЩИТНЫХ СТЕНОК ОТ γ -ЛУЧЕЙ»

И. ЭГРИ и Й. ХЕРИНГ

РЕЗЮМЕ

Дается сравнение результатов расчета автора с результатами измерений, приведенными в литературе, и указывается, что причины отклонений можно было бы выяснить лишь при большем числе измерений. Подчеркивается, что описанным автором методом нельзя выполнить в один прием расчет таких балок, для которых мощность дозы на поверхности балки необходимо поддерживать ниже допускаемого уровня.

VERTEILUNG DER IM ALUMINIUM BEFINDLICHEN KALZIUM-VERUNREINIGUNGEN UND IHR EINFLUSS AUF DIE ELEKTRISCHE LEITFÄHIGKEIT DES METALLS

A. DOMONY

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DIE INDUSTRIE DER NICHT-EISEN-METALLE, BUDAPEST

[Eingegangen am 1. August 1957.]

Zahlreiche Autoren sind der Ansicht, dass der ausserordentlich veränderliche, im gasförmigen Zustande nachweisbare Wasserstoffgehalt des Aluminiums mit der Anwesenheit der im Metall vorhandenen Verunreinigungen (hauptsächlich Na und Ca) zusammenhängt [1, 2, 3, 4, 5, 6], ohne jedoch einen einheitlichen Standpunkt in Bezug auf den Mechanismus der durch die Verunreinigungen verursachten Gasaufnahme und auf die Reinigung des gashaltigen Metalls vertreten zu können. Die Bekanntmachungen analytischer Bestimmungsmethoden zum Nachweis der im Aluminium befindlichen Ca- und Na-Spuren sind auch recht mangelhaft. Aus diesem Grunde sind die Versuchsergebnisse einiger Forscher und ihre Schlussfolgerungen miteinander oftmals nicht vergleichbar. Die Untersuchung dieser Frage wird noch dadurch erschwert, dass die Bindungsverhältnisse der im Aluminium fallweise nachweisbaren Ca- und Na-Verunreinigungen bisher noch nicht geklärt worden sind. Nach früheren Ansichten wurde angenommen, dass bei der Herstellung des Aluminiums oder bei der bei höheren Temperaturen durchgeführten Verarbeitung des Ca- oder Na-haltigen Metalls (z. B. beim Schweißen) Al-Ca- oder Al-Na-Legierungen entstehen. Gleichfalls wurde angenommen, dass die mit Ca und Na legierten Metalle einen grösseren Gasgehalt aufweisen, beziehungsweise zur Gasaufnahme neigen [2, 3].

Bereits im Jahre 1954—55 bei unseren früheren Versuchen wiesen wir darauf hin, dass das Hüttenaluminium, von seinen Herstellungsumständen abhängig, die Möglichkeit hat, sich »mit irgendeiner fremden Phase, in hochdispertem Zustande, in sehr feiner Verteilung zu verunreinigen«. »Diese Verunreinigung kann aus dem Metall nachträglich entweder überhaupt nicht oder nur sehr schwierig entfernt werden.« [7]. Solch ein Metall enthält »fein verteilte nichtmetallische Verunreinigungen, welche den Charakter einer festen Lösung haben«. [8]. Durch die Anwesenheit feinverteilter, nichtmetallischer Verunreinigungen nimmt die elektrische Leitfähigkeit ab. (Der elektrische Widerstand wird um etwa 0,5—0,8 Ohm. mm²/km erhöht.) [7]. Unsere Feststellungen werden durch neuere Veröffentlichungen mehrerer ausländischer Forscher bestätigt; fernerhin wird die Neigung zur Gasauf-

nahme, beziehungsweise die schwierige Entgasung mancher Metalle geradewegs durch die Anwesenheit der im Metall schwebenden, festen Verunreinigungen erklärt [9, 10].

Im Laufe unserer in Bezug auf die Neigung des Aluminiums zur Gasaufnahme durchgeführten Versuche, haben auch wir mehrmals die seitens mehrerer Forscher bereits früher veröffentlichte Erfahrung bestätigt gefunden, dass das Natrium, aber hauptsächlich Kalzium enthaltende Metall mehr zur Gasaufnahme neigt, beziehungsweise beim Abstehenlassen des Metalls die Abgabe seines Gasgehaltes nur schwierig oder überhaupt nicht erfolgt, wobei seine elektrische Leitfähigkeit nicht entsprechend ist. Die Versuche ergaben indessen ausserordentlich grosse Streuwerte, welche öfters auch widersprechend waren.

Um den Einfluss der Ca-Verunreinigungen auf das Hüttenaluminium eingehender zu klären, haben wir den Kalziumgehalt des in Ungarn hergestellten Hüttenaluminiums untersucht.

Ergebnisse der Vorversuche

Bei den mit mehreren Hundert Hüttenaluminiumproben durchgeführten Spektralanalysen, schwankte der Ca-Gehalt des in Ungarn hergestellten Hüttenaluminiums, je nach seinen Herstellungsverhältnissen, zwischen 0,001—0,006%. (Der CaF_2 -Gehalt des Elektrolyts betrug 2,4—3,5%.) In einigen besonderen Fällen überschritt der Ca-Gehalt des Metalls 0,01%. Diese letzteren Proben stammten aus mit warmem Ofengang arbeitenden Zellen, deren Elektrolyt einen CaF_2 -Gehalt von 5—8% aufwies. Der Ca-Gehalt der aus mit warmem Ofengang und mit verschlammtem Elektrolyt arbeitenden Zellen stammenden Metalle war durchschnittlich höher als der der in unter normalen Verhältnissen mit »ausgeglichenem«* Ofengang arbeitenden Wannen hergestellten Metalle. Alle Öfen arbeiteten mit saueren Elektrolyten mit einem durchschnittlichen Molverhältnis von 2,6 $\text{NaF}-\text{AlF}_3$. Die Spektralanalyse erfolgte nach der Doppelelektroden-Methode.

Die Messwerte des Ca-Gehaltes stimmten grössenordnungsgemäss mit den Ergebnissen von FISCHER [11] überein. In Aluminium, welches in 3—7% CaF_2 -haltigem sauerem Elektrolyt hergestellt wurde, hat auch FISCHER Ca-Verunreinigungen von 0,005% gemessen.

Ogleich die Ca-Gehalte der aus den Wannen stammenden Proben untereinander grössenordnungsgemäss im allgemeinen übereinstimmten, haben wir bei einigen parallel durchgeführten Messungen trotzdem recht erhebliche

* Bemerkung: In unseren früheren Arbeiten [7,8] haben wir als »ausgeglichenem« Ofengang die Betriebsverhältnisse der schlammfreien, mit kaltem Ofengang und mit normaler Metallbadhöhe arbeitenden, nur wenig Schlacke bildenden Wanne bezeichnet.

Streuwerte (0,002—0,005%) erhalten. Diese Streuung haben wir durch das zur Ausscheidung neigende Verhalten des im Aluminium befindlichen Kalziums erklärt. Diese Streuung der Messwerte haben wir indessen bei den mit metallischem Kalzium legierten Proben nicht feststellen können. Die Ergebnisse stimmten sogar bei einem 0,1%-igen Ca-Gehalt mit einer Abweichung von 0,001% überein.

Der Ca-Gehalt des Rohmetalls ist gegenüber dem aus dem Abstehofen stammenden Metall im allgemeinen grösser, obwohl durch die Streuung der Messwerte die Auswertung erschwert wurde. Den niedrigeren Ca-Gehalt des aus dem Abstehofen stammenden Metalls haben wir im Anfang dem Ausbrennen des Kalziums während des Abstehens des Aluminiums zugeschrieben. Ferner verglichen wir den Gasgehalt der verschiedenen, Ca-haltige Verunreinigungen aufweisenden Proben, beziehungsweise die während ihres Abstehens erfolgende Entgasung. Obgleich die Ergebnisse ausserordentlich gestreut und widersprechend waren, konnten wir trotzdem feststellen, dass der Gasgehalt der kalziumreichen Proben grösser war und die Gasabgabe nur schwierig vonstatten ging. Die Untersuchungen haben wir mit dem abgeänderten Gasuntersuchungsapparat nach DARDEL durchgeführt [5]. Die Messgenauigkeit des Apparates beträgt bei einer richtigen Probeentnahme $\pm 0,01 \text{ cm}^3 \text{ H}_2/100 \text{ g Al}$. Die gleichen Streuwerte haben wir auch dann erhalten, wenn wir das Metall vorhergehend mit CaH_2 , CaC_2 oder CaF_2 und mit kryolith-, bzw. mit chiolith-haltigen Decksalzen behandelt haben. Der Gasgehalt des Aluminiums ist indessen bei den mit 0,001—0,01% metallischem Kalzium legierten Proben kleiner; die Übereinstimmung der Gasbestimmungsproben war befriedigend. (S. Zahlentafel I.)

Parallel mit den Vergasungsproben haben wir auch die elektrische Leitfähigkeit des verschiedenartig verunreinigten (mit metallischem Kalzium legierten, beziehungsweise mit Ca-haltigen Salzen in Berührung gekommenen) Aluminiums gemessen. Bei einigen Proben haben wir sehr ungünstige elektrische Leitfähigkeitswerte erhalten. Um den Einfluss der Ca-Verunreinigungen auf die elektrische Leitfähigkeit des Metalls feststellen zu können, haben wir Reinstaluminium (Al-Gehalt 99,99%) mit verschiedenen Mengen von metallischem Kalzium legiert. Die Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit des mit geringen Mengen von Kalzium legierten Aluminiums ist im Bild 1 veranschaulicht. Die Messungen haben wir teils an gegossenen Proben mit dem durch Wirbelstromwirkung funktionierenden elektrischen Widerstandsmessgerät »Sigmatest«, teils an den aus dem Metall gezogenen Drähten mit der klassischen elektrischen Widerstandsmessmethode durchgeführt. Die einzelnen Messungen stimmten mit einer Genauigkeit von $\pm 0,1 \text{ Ohm.mm}^2/\text{km}$ miteinander überein. An Hand der Widerstandsmessungen kann festgestellt werden, dass geringe Mengen von Ca-Verunreinigungen die elektrische Leitfähigkeit des Aluminiums in hohem Grade (etwa in gleicher Ordnungsgrösse

Zahlentafel I

Gasgehalt der verschiedenartig behandelten Metalle, im Vakuum-Gasbestimmungsapparat gemessen
Zusammensetzung des gemessenen Hüttenaluminiums : Si = 0,11%, Fe = 0,20%, Ti = 0,005%

| | Durchschnittswerte des scheinbaren Ca-Gehaltes | Gasgehalt $\text{cm}^3 \text{H}_2/100 \text{g Al}$ | elektrische Leitfähigkeit Siemens |
|---|--|--|-----------------------------------|
| Normales Hüttenaluminium vor dem Abstehen | 0,003 | 18—22 | 34,2 |
| normales Hüttenaluminium nach 4 stündigem Abstehen | 0,003 | 10—12 | 35,0 |
| normales Hüttenaluminium + Zusatz von CaH_2 und künstliches Vergasen | 0,006 | 25—30 | 33,6 |
| nach 4 stündigem Abstehen | 0,006 | 22—27 | 33,9 |
| nach 8 stündigem Abstehen | 0,005 | 20—27 | 34,0 |
| aus »nichtausgeglichenem« Ofengang stammendes Metall | 0,008 | 23—28 | 33,4 |
| nach 4 stündigem Abstehen | 0,005 | 23—26 | 33,6 |
| nach 8 stündigem Abstehen | 0,005 | 18—24 | 33,7 |
| mit metallischem Kalzium legiertes Hüttenaluminium | 0,01 | 22—24 | 34,0 |
| nach 4 stündigem Abstehen | 0,008 | 12—14 | 34,5 |
| nach 8 stündigem Abstehen | 0,008 | 12—14 | 34,4 |

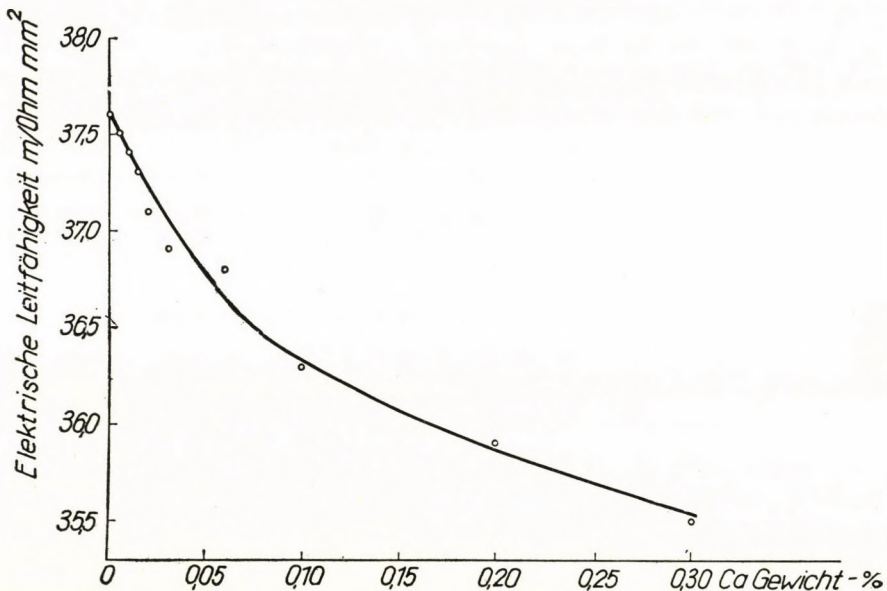


Abb. 1

mit den Ti- und V-Verunreinigungen) verschlechtern; durch Ca-Verunreinigungen von mehr als 0,02% wird indessen der auf die elektrische Leitfähigkeit des Aluminiums wirkende ungünstige Einfluss verhältnismässig vermindert (Bild 2). Diese Beobachtung stimmt mit den durch das Al-Ca Gleichgewichtsdiagramm angezeigten Löslichkeitsverhältnissen des Kalziums überein.

Für die elektrische Leitfähigkeit des CaF_2 -, CaH_2 -, CaC_2 -haltigen, mit Kryolith- oder Chiolysalzen behandelten Metalls erhielten wir — Gegen-

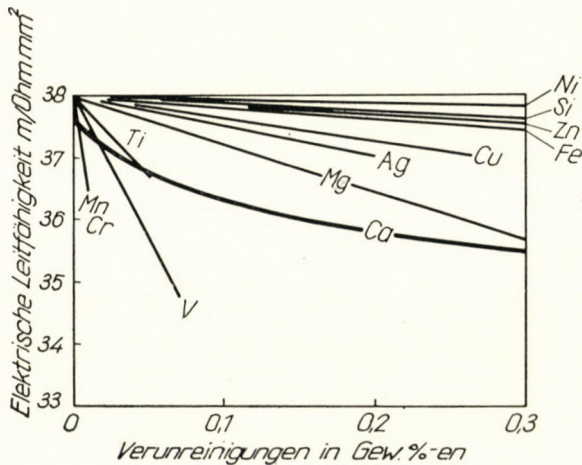


Abb. 2

satz zu den mit metallischem Kalzium legierten Proben — mit dem Ca-Gehalt nicht zusammenhängende, unauswertbare Streuwerte. Die Ergebnisse der sowohl mit Reinstaluminium (Al-Gehalt 99,99%), als auch mit Hüttenaluminium bekannter Leitfähigkeit durchgeführten Versuche waren widersprechend. Im allgemeinen haben wir bei den meisten Proben unbegründeterweise eine erhebliche Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit beobachtet.

Versuchsbeschreibung und Auswertung der Versuchsergebnisse

In diesem Abschnitt unserer Versuchsarbeit waren wir bemüht, die Ursache der Eigenschaftsänderungen des mit metallischem Kalzium legierten, beziehungsweise mit Ca-haltigen Salzen behandelten Aluminiums zu klären. Wir wollten zu diesem Zwecke feststellen, ob flüssiges Aluminium bei verschiedenen Temperaturen aus Kalzium enthaltenden Verbindungen, in Anwesenheit von Kryolith ($3 \text{ NaF} \cdot \text{AlF}_3$) oder Chiolith ($5 \text{ NaF} \cdot 3 \text{ AlF}_3$), mit Kalzium eine Legierung bildet, und welche Menge an Kalzium hierbei aufnehmen kann.

Bei den Versuchen haben wir CaF_2 -, CaH_2 - und CaC_2 -Verbindungen aus dem Grunde verwendet, weil einerseits bei der Aluminium—Elektrolyse mit dem Entstehen dieser Salze gerechnet werden kann und andererseits weil bei unseren Versuchstemperaturen das Kalziumhydrid (CaH_2) und Kalziumkarbid (CaC_2) viel weniger stabile Verbindungen als das Kalziumfluorid (CaF_2) sind. Gleichzeitig ist auch die Zersetzung dieser Verbindungen (CaC_2 und CaH_2) zu erwarten.

Die Versuche haben wir im Silitstabofen mit Widerstandsheizung durchgeführt. Die Reinstaluminiumeinsätze von je 2 kg haben wir im Graphittiegel geschmolzen, und dem geschmolzenen Metall haben wir fallweise 100—100 g Salzgemisch zugesetzt. Um eine innigere Berührung des Salzgemisches mit dem Metall herbeizuführen, haben wir nach Erreichen der Versuchstemperatur, das Salzgemisch mit dem Metall während 10 Minuten dreiminütlich verrührt, sodann nach Ausschaltung der Heizung das Metall unter Salzdecke auf 750°C abgekühlt; hierauf erfolgte eine Entschlackung; danach wurden zur Gasbestimmung Ausgiessproben und zur Spektralanalyse Spektralproben gegossen. Die Versuche wurden bei 950°C (Temperatur der Aluminium—Elektrolyse), bzw. bei 1150°C durchgeführt.

Zahlentafel II

| Salzzusammensetzung | Salzmenge g | Reaktions- temperatur $^\circ\text{C}$ | Giess- tempe- ratur $^\circ\text{C}$ | Zusammensetzung des Metalls nach dem Versuch* | | | |
|---------------------------|----------------|--|---|---|-------|---|--|
| | | | | Fe | Si | Ca | |
| | | | | | | durch das Doppel- elektroden-Ver- fahren gemessen | durch das Gegen- elektroden-Ver- fahren gemessen |
| CaF_2 | 100 | 950—1000 | 700 | 0,016 | 0,011 | 0,001—0,005 | 0,001—0,003 |
| Kryolith + CaF_2 | 90 + 10 | 950—1000 | 750 | 0,017 | 0,020 | 0,001—<0,005 | 0,001—0,003 |
| Kryolith + CaH_2 | 95 + 5 | 975 | 750 | 0,016 | 0,019 | 0,005—0,020 | 0,001—0,003 |
| Kryolith + CaC_2 | 95 + 5 | 950 | 750 | 0,018 | 0,020 | 0,005—0,015 | 0,001—0,003 |
| Chiolith + CaF_2 | 90 + 10 | 950 | 760 | 0,018 | 0,016 | 0,002—0,005 | 0,001—0,003 |
| Chiolith + CaH_2 | 95 + 5 | 950 | 760 | 0,018 | 0,020 | 0,005—0,015 | 0,001—0,003 |
| Chiolith + CaC_2 | 95 + 5 | 940 | 750 | 0,017 | 0,020 | 0,003—0,020 | 0,001—0,003 |

Zahlentafel II gibt die Zusammensetzung der bei den bei 950°C durchgeführten Versuchen verwendeten Salzgemische, und die Analysenwerte der

* *Bemerkung:* Zusammensetzung des Ausgangsmetalls:

| | |
|----|---------|
| Fe | 0,005% |
| Si | 0,003% |
| Cu | 0,001% |
| Mg | <0,01% |
| Zn | <0,01% |
| Ti | 0,0002% |
| Ca | <0,001% |

mit Salz behandelten Metalle wieder. Die bei 1150 °C erzielten Versuchsergebnisse stimmen mit den in Zahlentafel II wiedergegebenen Werten überein. Die gleichen Ergebnisse erhielten wir bei der Wiederholung dieser Versuche mit 0,2% Si legiertem Reinst- und Hüttenaluminium (Al-Gehalt 99,5%) bei 950 und 1150 °C. Die Kalziumbestimmungen erfolgten im Laboratorium für Spektralanalyse der Materialprüfungsabteilung der Csepeler Eisen- und Metallwerke, wobei zwei verschiedene Methoden angewandt wurden. Diese beiden Methoden** sind:

Die für die beiden Analysen notwendigen Eichproben wurden mit aus Reinstaluminium (Al-Gehalt 99,99%) mit metallischem Kalzium hergestellten Vorlegierungen angefertigt. Die aus diesen Eichproben hergestellten Lösungen wurden einer Spektralanalyse unterzogen.

Die mit Ca-haltigen Salzen in Berührung gekommenen Proben wiesen häufig sogar bei den mit derselben Elektrode wiederholten Versuchen — bei der Anwendung der Doppelelektroden-Methode — völlig unregelmässige Streuwerte auf. Die mit metallischem Kalzium legierten Vergleichsproben lieferten indessen auch bei der Anwendung der Doppelelektroden-Methode vorzüglich übereinstimmende Parallelwerte. Wir untersuchten wiederholt mit dem Gegenelektroden-Verfahren sowohl alle aus den bei beiden Temperaturen durchgeführten Versuchen stammenden Proben, als auch die mit dem metallischem Kalzium legierten Muster, ferner die vorher nur mit dem Doppelelektroden-Verfahren untersuchten Hüttenaluminiumproben. Die durch diese Kontrolluntersuchungen erhaltenen Werte stimmten diesmal sowohl miteinander, als auch mit den Versuchswerten der mit metallischem Kalzium legierten Proben gut überein. Die für Kalzium erhaltenen Streuwerte überschritten nicht $\pm 0,001\%$. Die bei verhältnismässig niedrigeren Temperaturen mit der Gegenelektrodenmethode durchgeführte Spektralanalyse weist näm-

** Die Bestimmungsmethoden wurden durch Dr. Tibor Török und Dr. Barna WESZPRÉMY ausgearbeitet. Die ausführliche Beschreibung dieser Methoden erscheint demnächst.

a) *Doppelelektroden-Methode*: die bei der Bearbeitung der 6 mm \varnothing starken und mit einem Nippel von 3,5 mm \varnothing versehenen Elektroden an den Stirnflächen entstehenden Grate sind nicht entfernt worden; diese Art der Bearbeitung ist aus dem Grunde nötig, damit die äusseren Verunreinigungen vermieden und die Empfindlichkeit der Bestimmung erhöht werden soll; infolge der durch die an den Graten brennenden Funken hervorgerufenen Überhitzung, reichern sich die Spurelemente durch die fraktionierte Destillation in dem leuchtenden Dampfraum an, womit eine Erhöhung der Bestimmungsempfindlichkeit bewirkt wird. Trotz der durch die auf eine verhältnismässig kleine Fläche beschränkte Funkenbildung bedingten grossen Empfindlichkeit, ergibt dieses Verfahren bedeutende Streuwerte.

b) *Gegenelektroden-Methode*: Gegenüber der an der Stirnfläche in ihrem vollen Querschnitt eben abgedrehten Elektrode wird eine mit einem Nippel von 1,5 mm \varnothing versehene, aus spektralreinem Kupfer erzeugte Gegenelektrode gestellt. Die Empfindlichkeit dieses Verfahrens ist zwar um etwa eine Ordnungsgrösse kleiner als die Empfindlichkeit der unter a) beschriebenen Methode, aber ihre Reproduzierbarkeit ist in jeder Hinsicht befriedigend.

Bei dem obenbeschriebenen Verfahren wurden die Funken durch Niederspannungserregung erzeugt (500 V, 2,5 μ F, 1 mH). Der verwendete Spektrograph war Typ Zeiss Qu 24 (Spaltbreite 10 μ). Linienpaar: Ca 3933,7/Al 3050,1.

lich nur die Anwesenheit des Kalziums nach. Durch die Anwesenheit der bei viel höheren Temperaturen verdampfenden Kalziumsalze wird die Bestimmung nicht beeinflusst.

Für die bei den Doppelektrodenanalysen erhaltenen Streuwerte des Kalziumgehaltes der nicht mit metallischem Kalzium legierten Proben, kann eine Deutung mit Hilfe des Gegenelektroden-Verfahrens gefunden werden. Während nämlich das Gegenelektroden-Verfahren nur die Menge des im Aluminium anwesenden metallischen Kalziums anzeigt, wurde durch das Doppelektroden-Verfahren, infolge der durch die Funkenbildung bewirkten Überhitzung der Probe, auch die im Metall dispergierte Kalziumsalzmenge (hauptsächlich CaF_2) nachgewiesen. Die durch die Parallelversuche erhaltenen Streuwerte konnten aber eine Erklärung dadurch finden, dass die Kalziumfluorideinschlüsse sogar in feiner Dispersion ungleich verteilt sind.

An Hand der Versuchs- und Analysenergebnisse können folgende Feststellungen gemacht werden :

1. Ohne Elektrolyse kann das Aluminium bei Temperaturen von 950 bis 1150 °C aus CaF_2 -, CaC_2 - und CaH_2 -haltigen basischen oder saueren (Kryolith oder Chiolith) Salzen kein Kalzium reduzieren beziehungsweise bildet das Aluminium mit Kalzium keine Legierung. (Unsere Feststellungen werden auch durch thermodynamische Erwägungen unterstützt ; demnach besitzt nämlich von allen in der Reaktion teilnehmenden Komponenten das Kalziumfluorid (CaF_2) das grösste thermodynamische Potential und deshalb entsteht in Anwesenheit von kalziumhaltigen Substanzen und Fluorionen stets eine stabile CaF_2 -Verbindung.)

2. Die mit den kalziumhaltigen Salzgemischen in inniger Berührung befindliche Aluminiumschmelze kann, ohne oder durch die Einwirkung des Stromes, bei 950—1150° C mehr oder weniger mit nichtmetallischen Salzeinschlüssen in feiner Verteilung verunreinigt werden. (Siehe die Kalziumwerte der mit Versuchsmetall- und aus den Aluminiumöfen entnommenen Proben durchgeführten Spektralanalysen.) Der Ca-Gehalt dieser Einschlüsse hängt von der ursprünglichen Zusammensetzung des Salzes und Elektrolyts ab. Der durch das Doppelektroden-Verfahren nachweisbare Kalziumgehalt zeigt in jenem Falle die Anwesenheit der im Metall befindlichen Salzeinschlüsse an, wenn das Aluminium mit kalziumhaltigen Salzen in Berührung war. Nach den in Zahlentafel II wiedergegebenen Analysenergebnissen des Doppelektroden-Verfahrens scheint das Kalziumkarbid (CaC_2) bzw. das Kalziumhydrid (CaH_2) die im Metall stattfindende feine Dispersion der Salzeinschlüsse zu begünstigen.

3. Das Legieren mit geringen Mengen von metallischem Kalzium beeinflusst die Neigung des Aluminiums zur Gasaufnahme nicht. Die Gasaufnahme-fähigkeit wird vor allem durch die im Metall fein dispergierten Verunreinigungen befördert, beziehungsweise kann durch die Anwesenheit dieser

feinverteilten Verunreinigungen auch das während des Abstehens erfolgende langsame Entgasen einiger Aluminiumeinsätze erklärt werden. Diese Erscheinung kann durch die zwischen dem Salzeinschluss und Gas stattfindende Wechselwirkung gedeutet werden.

Die aus unseren Versuchen und aus den Ergebnissen der geschilderten Analysenmethoden gezogenen Schlussfolgerungen stimmen mit den neueren Feststellungen des Schrifttums überein. Nach SCHMITT und WITTNER [10] »gelangt das Kalzium wahrscheinlich mit dem Aluminiumoxyd auf mechanischem Wege in das Aluminium«. Ferner stellen die genannten Forscher fest, dass der Ca-Gehalt des Aluminiums die Gasaufnahme nicht fördert, und beim Abstehen die einige tausendstelprozentige Ca-Verunreinigung einigermaßen verringert, aber nicht entfernt wird. (Der Ca-Gehalt des Metalls wird vor dem Abstehen mit 0,0037%, nach dem Abstehen mit 0,003% angegeben.)*** Die Neigung einiger Metalle zur Gasaufnahme wird auch von den zitierten Forschern, in Übereinstimmung mit anderen Autoren, durch die Anwesenheit feindispersierter, salzartiger, fallweise Ca-haltiger Verunreinigungen im Aluminium gedeutet. Die beiden Forscher bemerken noch, dass die Menge der im Metall befindlichen, feindispersierten, salzartigen Verunreinigungen ausser der Salzzusammensetzung in hohem Grade von der Temperatur des Metalls abhängt.

Der Gedankengang von SCHMITT und WITTNER stimmt mit unserer früheren Argumentation [7, 8] überein. Dieser Überlegungen zufolge kann das ausserordentliche Verhalten des Metalls durch die Anwesenheit der im Metall vorhandenen feindispersierten, nichtmetallischen Verunreinigungen erklärt werden. Mit der Erhöhung der Temperatur (im Falle »nichtausgeglichenen« Ofengangs oder bei der Überhitzung des Metalls) nimmt auch die Menge der im Metall feindispersierten, salzartigen Einschlüsse zu. Die Anwesenheit der salzartigen Verunreinigungen bewirkt infolge der zwischen den Einschlüssen und dem Wasserstoff bestehenden chemischen oder mechanischen Wechselwirkung (Adsorption) eine gesteigerte Neigung des Metalls zur Gasaufnahme.

Laut unserer früheren Feststellungen verschlechtern die im Metall dispersierten, fast in fester Lösung befindlichen, nichtmetallischen Verunreinigungen in hohem Grade die elektrische Leitfähigkeit des Metalls. An Hand unserer gegenwärtigen Versuchsergebnisse kann festgestellt werden, dass diese Verunreinigungen auch die Gasaufnahme des Metalls in hohem Masse beeinflussen. Die im Metall fallweise beobachteten als Kalzium nachweisbaren Verunreinigungen, obgleich sie in sich selbst keine gesteigerte Gasaufnahme verursachen, zeigen in dem mit Ca-haltigen Salzen in Berührung

*** Die Frage, in welcher Form das Kalzium im Aluminium vorhanden ist, lassen SCHMITT und WITTNER in ihrer Arbeit offen.

gekommenen Aluminium die Anwesenheit der von dem Standpunkte der technologischen Eigenschaften aus ungünstigen, feindispersierten Salzeinschlüsse an. Einige Ca-haltige Salze neigen sehr zur Bildung feiner Dispersionen. Die Reinigung der auf diese Weise verunreinigten Metalle, das Entgasen und Entfernen der Einschlüsse — was sowohl für die elektrische Leitfähigkeit, als auch für die Herstellung der blasenfreien Halbzeuge erforderlich ist — stellt bei den weniger feinverteilten, nichtmetallischen Einschlüssen enthaltenden Metallen eine recht schwierige Aufgabe dar.

Nach unseren mit den Ergebnissen anderer Forscher übereinstimmenden Erfahrungen können die mit Wasserstoff und geringen Mengen an Mg, Na oder Ca verunreinigten Hüttenmetalle am erfolgreichsten mit saueren AlF_3 -NaF (Molverhältnis 1,6—2), bzw. mit dem aus dem Dreistoffsystem AlF_3 -NaF-NaCl bestehenden Salzgemisch gereinigt werden. Die ausländischen Forscher erklären diese Erscheinung durch die zwischen dem Salzgemisch und Metall stattfindende chemische Wirkung. Nach diesen hängt der Erfolg dieses Raffinationsprozesses — die Bindung der im Metall vorhandenen H_2 -, Mg-, Na-, bzw. Ca-Verunreinigungen — zuallererst von dem Verhältnis der im Salzgemisch befindlichen Aluminium- und Natriumionen ab. Das Reinigungsgemisch ist um so wirkungsvoller, je näher das Verhältnis der Aluminiumionen und sämtlicher Natriumionen (die Menge der zu dem Chlorid gebundenen Natriumionen miteinbegriffen) des Salzgemisches zu der Zusammensetzung des Schmelzflusses liegt. Wenn das Verhältnis der Aluminium- und Natriumionen dem Kryolith nahekommt, nimmt die Geschwindigkeit der Reinigungsreaktion ab. Die Fähigkeit zur Bindung beziehungsweise zum Entfernen des im Metall vorhandenen Wasserstoffes, und der bei der Spektralanalyse als Mg-, Na- und Ca-haltig erscheinenden Verunreinigungen verringert sich. Der Reinigungsmechanismus wird durch die Wirkung des in saueren Medien freiwerdenden Aluminiumfluorids (AlF_3) und durch die zwischen dem AlF_3 und den Verunreinigungen stattfindende chemische Reaktion erklärt. In alkalischen Medien (im Falle eines grösseren Molverhältnisses von NaF- AlF_3) wird an Stelle von AlF_3 Na frei. Die im Metall befindlichen Verunreinigungen werden durch das freiwerdende Natrium nicht gebunden.

Unserer Meinung nach ist die Reinigung des Metalls in Gegenwart salzartiger Einschlüsse (z. B. Ca-Verunreinigungen) nicht nur die Folge einer chemischen Reaktion, sondern sie ist in erster Reihe wegen der im Reinigungssalz stattfindenden Auflösung, beziehungsweise wegen der durch das Reinigungssalz bewirkten Auswaschung der salzartigen Einschlüsse ein physikalischer Vorgang. Die Lösungsfähigkeit des Reinigungssalzes — bei verhältnismässig niedrigen Reinigungstemperaturen (720—800 °C) — gegenüber Salzeinschlüssen (hauptsächlich CaF_2) hängt von dem Schmelzpunkt bzw. der Viskosität des Salzgemisches ab.

In Zahlentafel III sind die Vergleichswerte der Schmelzpunkte einiger zu dem AlF_3 -NaF-NaCl-Dreistoffsystem gehörenden Salze angeführt.

Zahlentafel III

| Salzgemisch | Schmelzpunkt | Salzgemisch | Schmelzpunkt |
|--------------------|--------------|--------------------|--------------|
| Kryolith | 1011 °C | Chiolyth | 737 °C |
| Kryolith+65%NaCl | 975 „ | Chiolyth+9%NaCl | 715 „ |
| Kryolith+14%NaCl | 952 „ | Chiolyth+15%NaCl | 702 „ |

Aus der Zahlentafel ist zu ersehen, dass bei der Reinigungstemperatur des Aluminiums nur saure, chiolythaltige Salzgemische in geschmolzenen Zustände vorhanden sind. Zur Auflösung und Auswaschung der im Metall befindlichen salzartigen Einschlüsse (Ca-Salze, usw.) ist jedoch notwendig, dass das Reinigungsmittel sich in geschmolzenem und womöglichst in dünnflüssigem Zustande befinden soll. Wir messen auch die Rolle des zum Chiolyth zugesetzten NaCl-s hauptsächlich dem Umstande bei, dass es den Schmelzpunkt des Reinigungssalzes erniedrigt, beziehungsweise, falls sich das Salzgemisch infolge der Sublimation des AlF_3 -s nach einem grösseren Molverhältnis von NaF- AlF_3 (d. h. nach einer alkalischeren Zusammensetzung) hin verschiebt, so wird durch das NaCl der geschmolzene Zustand des Reinigungssalzes noch immer gesichert. Demgemäss eignet sich das aus NaF- AlF_3 -NaCl bestehende, niedrigen Schmelzpunkt besitzende Salzgemisch ebenfalls zur Reinigung der mit dem an den festen Einschlüssen haftenden Wasserstoff verunreinigten Metalle. Infolgedessen entfernen die niedrige Schmelzpunkte besitzenden, zu AlF_3 -NaF-NaCl Dreistoffsystem gehörenden Salzgemische aus dem geschmolzenen Aluminium gleicherweise die metallischen und nicht-metallischen Verunreinigungen und so vermindern sie gleichzeitig sowohl den scheinbaren Gehalt an Ca, als auch den schädlichen Wasserstoffgehalt.

Durch die Durchwaschung des feindispersierten, nichtmetallische Verunreinigungen enthaltenden Metalls mit Salzgemischen, von niedrigen Schmelzpunkten, kann die elektrische Leitfähigkeit und die Neigung zur Gasaufnahme verbessert werden.

SCHRIFTTUM

1. J. KOSTRON: Aluminium und Gas. Z. für Metallkunde 1952. Aug. 271 und Nov. 386.
2. J. PENDLETON: Gas Welds in Aluminium-Magnesium Alloy Sheet. Welding Research 1949. Aug. 74—84.
3. HULL & HOULDECROFT: Welding Research 1953. Jun. 59—64.
4. E. RANSLEY & J. TALBOT: Wasserstoff-Porosität in Metallen. Zeitschrift für Metallkunde 1955. Mai 328—337.

5. T. LAAR—I. BALOGH: A hólyagos lemezelejt keletkezési okainak vizsgálata I. és II. (Untersuchung der Entstehungsgründe des blasigen Blechschusses I. und II.) Kohászati Lapok 1956. VI. 258—263, Kohászati Lapok 1957. IV.
6. O. PICH: Magánközlései (Privatmitteilungen). 1956.
7. A. DOMONY, K. VASSEL, R. VÁRHELYI: Az alumínium villamos vezetőképességében mutatkozó rendellenességek megszüntetésére irányuló kísérletek. (Versuche zur Behebung der in der elektrischen Leitfähigkeit des Aluminiums erscheinenden Unregelmässigkeiten.) MTA Műszaki Osztály Közleményei 1955. XV. kötet 1—4. szám 513.
8. A. DOMONY: Kismennyiségű ötvözők, illetve szennyezők hatása az alumínium egyes technológiai tulajdonságaira. (Einfluss kleiner Mengen von Legierungskomponenten bezw. Verunreinigungen auf einzelne technologische Eigenschaften des Aluminiums.) Kohászati Lapok 1955. XII. 572.
9. M. V. MALYCEV: Verbesserungsmöglichkeiten der Metallreinheit und Verminderung der Schmelzverluste. Zentralinformationsinstitut des Ministeriums für Hüttenwesen der Nichteisenmetalle in UdSSR. 1956. 17. Nr. 10—17.
10. H. SCHMITT, H. WITTNER: Herkunft der nichtmetallischen Verunreinigungen im Aluminium und ihr Einfluss auf dessen Weiterverarbeitung. Zeitschrift für Erzbergbau und Metallhüttenwesen 1956. IX. 417—421.
11. W. FISCHER: Über das Verhalten einiger Fremdoxyde in der technischen Aluminium Elektrolyse. Diss. T. H. Aachen 1946.
12. K. VASSEL: Die bei der heimischen Einführung einer neuen zerstörungsfreien Untersuchungsmethode gewonnenen Erfahrungen. Kohászati Lapok 1956. X. 472—475.

ZUSAMMENFASSUNG

Im Laufe unserer Versuchsarbeit gelang es uns zu klären, dass das in Aluminium durch Spektroskop nachweisbare Kalzium nicht in metallischer Form, sondern in Form von salzartigen Einschlüssen vorhanden ist. Infolgedessen kann die Anwesenheit von Kalzium die durch salzartige Einschlüsse bedingte Verunreinigung anzeigen. Die ausserordentliche Verschlechterung der an einigen Proben beobachteten elektrischen Leitfähigkeit und die schwere Entgasungsmöglichkeit wird durch die Anwesenheit der Salzeinschlüsse verursacht. Die Salzeinschlüsse können aus dem Aluminium mit aus Chiolith und Natriumchlorid bestehenden Reinigungsmitteln ausgewaschen werden. Der Reinigungsvorgang wird dadurch erklärt, dass dieser nicht nur auf chemischen Reaktionen, sondern vor allem auf physikalischen Erscheinungen beruht.

DISTRIBUTION OF CALCIUM-IMPURITIES IN THE ALUMINIUM AND THEIR INFLUENCE ON THE ELECTRIC CONDUCTIVITY OF THE METAL

A. DOMONY

SUMMARY

We succeeded to prove in course of our experimental work, that the calcium, that can be found in some sorts of aluminium by spectroscopical examination, is not present in metallic, but in salt-like inclusions. The presence of calcium may indicate therefore the contamination of the aluminium with salt-like inclusions. The extraordinary deterioration of the electric conductivity, that was observable on certain samples, and the difficult degasifying of the metal is caused by the attendance of inclusions of salt. These can be washed out by the aide of cleaning agents, which are composed from chiolite and sodium chloride. The cleaning process is explained by the fact, that it is based primarily on physical effects and not on chemical reactions only.

LA RÉPARTITION DES IMPURETÉS DE CALCIUM DANS L'ALUMINIUM ET SON
INFLUENCE SUR LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE DES MÉTAUX

A. DOMONY

RÉSUMÉ

Il a été possible de démontrer, au cours de nos recherches que le calcium décelé dans l'aluminium à l'aide du spectroscope ne s'y trouve pas dans son état métallique, mais sous forme de sels. La présence du calcium pourrait donc indiquer que l'aluminium contient des inclusions de sels. L'extrême diminution de la conductibilité électrique et la difficulté de dégazer, constatées sur les échantillons, sont causées par la présence des inclusions de sels. Ces impuretés peuvent être éloignées de l'aluminium à l'aide d'épuratoires composés de chiolite et de chlorure de sodium. Le processus d'épuration s'explique par le fait qu'à côté des réactions chimiques, les phénomènes physiques y jouent un rôle décisif.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИМЕСИ КАЛЬЦИЯ В АЛЮМИНИИ
И ВЛИЯНИЕ ЭТОЙ ПРИМЕСИ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТЬ МЕТАЛЛА

А. ДОМОНЬ

РЕЗЮМЕ

В процессе проводившейся экспериментальной работы удалось показать, что кальций, определяемый с помощью спектрографа в некоторых алюминиевых сплавах, присутствует в алюминии не в металлической форме, а в форме солеобразных включений. Следовательно, присутствие кальция может вызывать загрязнение металлического алюминия солеобразными включениями. Исключительно сильное ухудшение электрической проводимости, установленное в случае отдельных образцов, и трудность очищения от примесей газов может вызываться присутствием солеобразных включений. Солеобразные примеси алюминия могут быть удалены из алюминия при помощи рафинирующих веществ, состоящих из хиолита и хлористого натрия. Объяснение процесса рафинации заключается в том, что процесс основывается не только на химических реакциях, но, в первую очередь, на физических явлениях.

CARDANO-GELENKWELLENKUPPLUNGEN

J. HERING

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST, LEHRSTUHL II. FÜR TECHN. MECHANIK

[Eingegangen am 8. August 1957]

Einleitung

Dieser Aufsatz untersucht die Umdrehungs-Ungleichmässigkeiten der mit Cardano-Gelenken gekuppelten Wellen und forscht nach Verfahren zur Beseitigung derselben. In diesem Rahmen wird behandelt :

1. Die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen von Cardano-Gelenkwellenkupplungen.
2. die Änderung der auf die Cardano-Gelenke wirkenden Momente.
3. wird untersucht, auf welche Weise mit beliebig gewählten Wellengelenken parallele, einander schneidende oder ausweichende Wellen derart gekuppelt werden können, dass die Drehübertragung gleichmässig sei.
4. auf welche Weise mit Hilfe von Cardano-Gelenken die gleichmässige Drehübertragung gesichert werden kann.

Im Rahmen dieser Probleme wird die Genauigkeit der allgemein verwendeten Annäherungsformeln untersucht und auf die Grenzen der Verwendbarkeit derselben wird hingewiesen.

1. Die Drehungsunregelmässigkeiten der mit Cardano-Gelenken gekuppelten Wellen

Von Cardano-Gelenken sind zwei Varianten bekannt : das Kreuzgelenk und das sogenannte gleitende Cardano-Gelenk. Bei letzterer Lösung sind die beiden Wellen unmittelbar miteinander verbunden, jedoch sind die Bewegungsgesetze die gleichen, wie bei den Cardano-Wellenkreuzgelenken.

Zwischen der Winkelverdrehung φ_1 der Antriebswelle 1, der Winkelverdrehung φ_2 der Abtriebswelle 2, sowie zwischen dem Neigungswinkel α der Welle kann auf Grund Bild 1a folgender Zusammenhang aufgeschrieben werden :

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \alpha \quad (1.1)$$

Die Winkelabweichung $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$ kann aus (1.1) errechnet werden :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 (\cos \alpha - 1)}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1 \cos \alpha} \quad (1.2)$$

Die Winkelabweichung ist bei jenem Winkel $\varphi_1 = \varphi_1^x$ maximal, bei dem der erste Differentialquotient laut φ_1 in der Gleichung (1.2) Null beträgt :

$$\operatorname{tg} \varphi_1^x = \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}} \quad (1.3)$$

Den Wert (1.3) in (1.2) eingestellt, beträgt die maximale Winkelabweichung :

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = \frac{\cos \alpha - 1}{2 \sqrt{\cos \alpha}} \quad (1.4)$$

Der Ungleichförmigkeitsgrad der Winkelgeschwindigkeitsschwankung ist :

$$\delta = \frac{\omega_{2 \max} - \omega_{2 \min}}{\omega_1} = \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \quad (1.5)$$

Nach der Reihenentwicklung TAYLOR des Ausdruckes (1.5), wenn α genug klein ist, erhält man den Annäherungswert :

$$\delta' \cong 2(1 - \cos \alpha) \quad (1.6)$$

Die Gleichung (1.2) kann in folgende Form gebracht werden :

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{1 - \cos \alpha}{2} \frac{\sin 2 \varphi_1}{1 - \sin^2 \varphi_1 (1 - \cos \alpha)} \quad (1.7)$$

Hieraus ergibt sich nach Reihenentwicklung und Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung sowie nach Substituierung der $\operatorname{tg} \varphi \cong \varphi$ und des Wertes (1.6), dass

$$\varphi \cong - \frac{\delta'}{4} \left(1 + \frac{\delta'}{4} \right) \sin 2 \varphi_1 + 0,5 \left(\frac{\delta'}{4} \right)^2 \sin 4 \varphi_1 \quad (1.8)$$

Über die Genauigkeit des Ausdruckes (1.8) geben die relativen Fehler Aufschluss. Der Relativfehler des Ungleichförmigkeitsgradnäherungswertes ist :

$$R_1 = \frac{\delta - \delta'}{\delta} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (1.9)$$

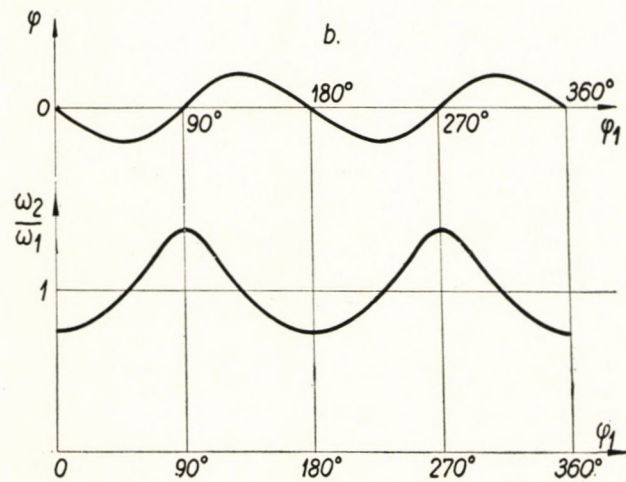
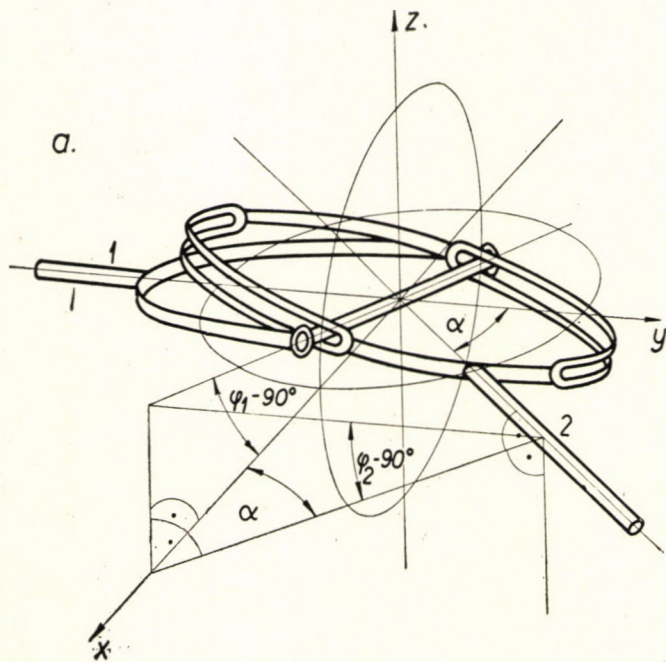


Abb. 1

Der Substitutionsfehler von $\operatorname{tg} \varphi \cong \varphi$:

$$R_2 \leq \frac{\operatorname{tg} \varphi_{\max} - \varphi_{\max}}{\operatorname{tg} \varphi_{\max}} \quad (1.10)$$

Schliesslich der durch die vernachlässigten Glieder verursachte Relativfehler bei der Reihenentwicklung des Ausdrucks (1.7) :

$$R_3 \leq (1 - \cos \alpha)^2 \quad (1.11)$$

D. h. sämtliche begangene Fehler (1.8) :

$$R \leq 1 - \frac{\varphi_{\max}}{\operatorname{tg} \varphi_{\max}} + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} + (1 - \cos \alpha)^2 \quad (1.12)$$

was

| | | | |
|------------------------------------|-------------|-----|-------------|
| im Falle von $\alpha = 20^\circ$; | 25° | und | 30° |
| bei $\varphi_{\max} = 1,9^\circ$; | $2,8^\circ$ | und | $4,2^\circ$ |
| $R \leq 3,5\%$ | $5,9\%$ | und | $9,1\%$ |

Relativfehler bedeutet.

Demzufolge ergibt der Näherungsausdruck (1.8) nur im Falle

$$\alpha < 30^\circ \quad (1.13)$$

ein befriedigend genaues Ergebnis, wenn ein 9% iger Fehler noch erlaubt ist.

Im Schrifttum finden sich häufig Beispiele dafür, dass Näherungsausdrücke auch in solchen Fällen kritiklos angewendet werden, wenn die Näherungsfehler den obigen Massstab bereits überschreiten.

Der Differentialquotient des Ausdrucks (1.8) gibt die relative Winkelgeschwindigkeitsschwankung :

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_1} \cong -\frac{\delta'}{2} \left(1 + \frac{\delta'}{4} \right) \cos 2 \varphi_1 + 0,5 \left(\frac{\delta'}{2} \right)^2 \cdot \cos 4 \varphi_1 \quad (1.14)$$

und die Winkelbeschleunigung der getriebenen Welle ist :

$$\varepsilon_2 \cong \omega_1^2 \left[\delta' \left(1 + \frac{\delta'}{4} \right) \sin 2 \varphi_1 - 0,5 \delta'^2 \sin 4 \varphi_1 \right] \quad (1.15)$$

Bild 1b zeigt die Änderung der Winkelabweichung und Winkelgeschwindigkeit.

2. Bestimmung der auf das Cardano-Gelenk wirkenden Momente

Die Antriebswelle 1 und die getriebene Welle 2 wird in ein Koordinatensystem x, y, z eingestellt. Die Ebene x, y sei die gemeinsame Ebene der beiden Wellen. Die Welle 1 — zu welcher sich die Welle 2 in einem Winkel α neigt —

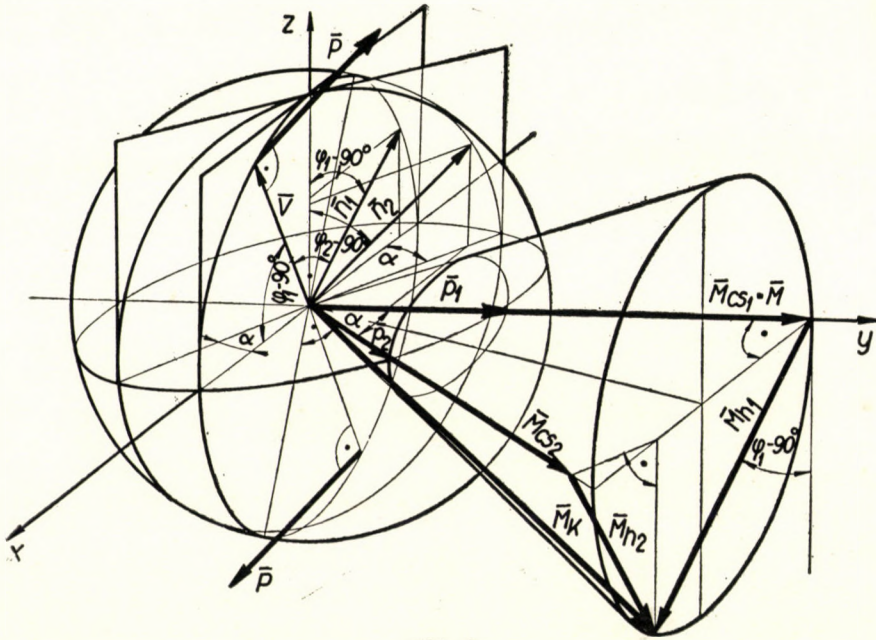


Abb. 2

zeige in der Richtung der Koordinatenachse y , d. h. der in die Richtung der Welle 1 bzw. Welle 2 zeigende Einheitsvektor (Bild 2):

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= \bar{j} \\ \bar{p}_2 &= \sin \alpha \bar{i} + \cos \alpha \bar{j}\end{aligned}$$

Zwecks Bestimmung der im Gelenk erweckten

$$\bar{M}_K = \bar{M}_{cs1} + \bar{M}_{h1} = \bar{M}_{cs2} + \bar{M}_{h2} \quad (2.1)$$

Momentenvektoren muss die augenblickliche Lage der Gabelebenen untersucht werden. Wenn die Ebene der an die Welle 1 fixierten Gabel sich im Verhältnis zur Ebene y, z in einem Winkel φ_1 verdreht, so ist der Normalvektor der Ebene:

$$\bar{n}_1 = \cos \varphi_1 \bar{i} + \sin \varphi_1 \bar{k} \quad (2.2)$$

und jener der in einem Winkel φ_2 verdrehten Ebene der an die Welle 2 gekoppelten Gabel :

$$\bar{n}_2 = \cos \varphi_2 \cos a \bar{i} - \cos \varphi_2 \sin a \bar{j} + \sin \varphi_2 \bar{k} \quad (2.3)$$

Das Wellengelenk überträgt das Moment \bar{M}_K in der Form des aus den in das Bild 2 eingezeichneten Kräften $\bar{P} \parallel \bar{n}_2$ bestehenden Kräftepaares. Wenn also

$$\bar{v} = \sin \varphi_1 \bar{i} - \cos \varphi_1 \bar{k} \quad (2.4)$$

ist, so weist :

$$\bar{m}_k = \bar{n}_2 \times \bar{v} \quad (2.5)$$

in die Richtung des Vektors \bar{M}_K .

Die Grösse des Vektors \bar{M}_K wird durch die Voraussetzung bestimmt, dass seine auf die Achse y fallende Projektion eben $M_{cs_1} = M$, das bekannte Drehmoment ist. Demnach ist :

$$\bar{M}_K = \frac{M}{(\bar{m}_k \cdot \bar{j})} \bar{m}_k. \quad (2.6)$$

Nach Beendigung der bezeichneten Berechnungen und nach Substituierung von (1.1) ergibt sich, dass :

$$\bar{M}_K = M [\operatorname{tg} a \cos^2 \varphi_1 \bar{i} + \bar{j} + \operatorname{tg} a \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \bar{k}] \quad (2.7)$$

Das auf Welle 1 wirkende Biegemoment :

$$\bar{M}_{h_1} = M \operatorname{tg} a \cos \varphi_1 [\cos \varphi_1 \bar{i} + \sin \varphi_1 \bar{k}] \quad (2.8)$$

und der absolute Wert :

$$|\bar{M}_{h_1}| = M \operatorname{tg} a \cos \varphi_1 \quad (2.9)$$

Unter den auf Welle 1 wirkenden Momenten ändert sich das Biegemoment im Falle eines beständigen Drehmomentes nach der Cosinusfunktion.

Das auf die Welle 2 wirkende Drehmoment ist die auf \bar{p}_2 fallende Projektion des \bar{M}_K Vektors :

$$\bar{M}_{cs_2} = (\bar{M}_K \bar{p}_2) \bar{p}_2 = M [\operatorname{tg} a \sin a \cos^2 \varphi_1 + \cos a] \cdot [\sin a \bar{i} + \cos a \bar{j}] \quad (2.10)$$

und der absolute Wert :

$$|\bar{M}_{cs_2}| = M \cos \alpha [1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \varphi_1] \quad (2.11)$$

Das auf Welle 2 wirkende Biegemoment :

$$\begin{aligned} \bar{M}_{h_2} = \bar{M}_K - \bar{M}_{cs_2} = M [& -\sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \varphi_1 \bar{i} + \\ & + \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1 \bar{j} + \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \bar{k}] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Der absolute Wert des Biegemomentes :

$$|\bar{M}_{h_2}| = M \sin \alpha \sin \varphi_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \varphi_1} \quad (2.13)$$

Zur anschaulichen Darstellung der Änderung des Momentes gelangt man, wenn man untersucht, welche Kegelfläche durch den Momentenvektor \bar{M}_K

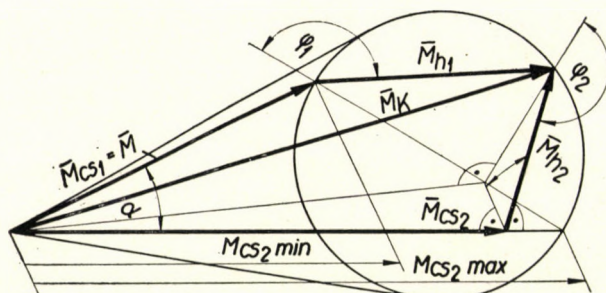


Abb. 3

während der Bewegung niedergeschrieben wird. Die durch den Origo durchgehende Gerade in Richtung \bar{M}_K schneidet aus der Ebene $y = M$ den

$$\left(x - \frac{M \operatorname{tg} \alpha}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{M \operatorname{tg} \alpha}{2}\right)^2 \quad (2.14)$$

Kreis aus, welcher die Basiskurve der untersuchten Kegelfläche ist (siehe Bild 2).

Die Momentenvektoren werden im Bild 3 veranschaulicht.

Die Grösse der einzelnen Momentenvektoren können graphisch nach Bild 4a bestimmt werden, wo die Ebene des Kreises in die Ebene xy verdreht und die Konstruktion für den im Falle von Wellen mit $\alpha = 30^\circ$ Winkelstellung angegebenen Schwenkwinkel φ_1 dargestellt wurde. Aus der Konstruktion ergibt sich auch die Winkelschwenkung φ_2 der Welle 2 Bild 4b stellt die Diagramme der einzelnen Momentänderungen in der Funktion des Winkels φ_1 dar.

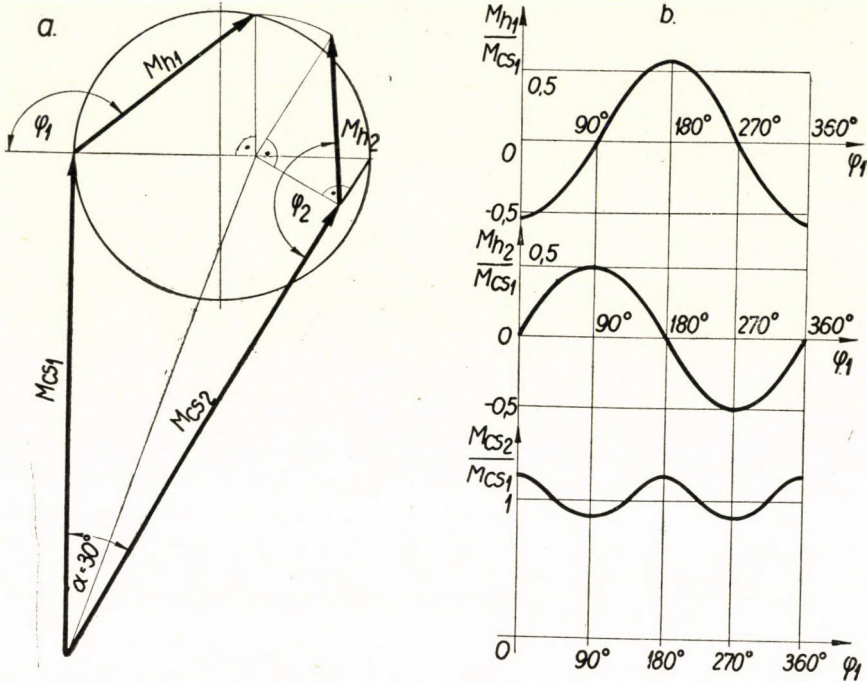


Abb. 4

3. Eine gleichmässige Drehübersetzung gewährleistende Koppelung von Welle in verschiedener Stellung mit beliebig gewählten Wellengelenken

Die allgemeine Art einer gleichmässigen Drehübertragung gewährleistenden Wellenkupplung kann folgenderweise erzielt werden: Wie immer auch das Liegeverhältnis zweier Wellen zueinander sei, so lege man sie im Gedanken parallel nebeneinander. Zur Welle 1 ist eine dritte (3') Welle — beliebiger Ausführung jedoch zumindest zwei Freiheitsgrade garantierend — mit einem Wellengelenk $K_{13'}$, derart zu koppeln, dass der Biegewinkel der beiden Wellen α sei. Auch an die Welle 2 koppelt man eine Welle 3'' mit einem Wellengelenk $K_{23''}$ in einer solchen Anordnung, dass das System 1—3' und 2—3'' eines des anderen Spiegelbild sei (Bild 5).

Wird die Welle 3' mit einem Winkel $\varphi_{3'}$ und die Welle 3'' mit einem solchen $\varphi_{3''} = -\varphi_{3'}$ verdreht, so ist der Spiegelsymmetrie wegen

$$\varphi_1 = -\varphi_2 \tag{3.1}$$

a) Es sei das räumliche Koordinatensystem laut Bild 5 angenommen. Man verdrehe das aus den Wellen 2—3'' bestehende System um die Achse

y mit 180° (Bild 6) und verschiebe es parallel mit sich selbst soweit, bis die Wellenmittellinie $3''$ mit jener der Welle $3'$ zusammenfällt. Wenn nun die Wellen $3'$ und $3''$ starr verbunden im Winkel φ um die Wellenachse verdreht werden, dann ist :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \cdot \tag{3.2}$$

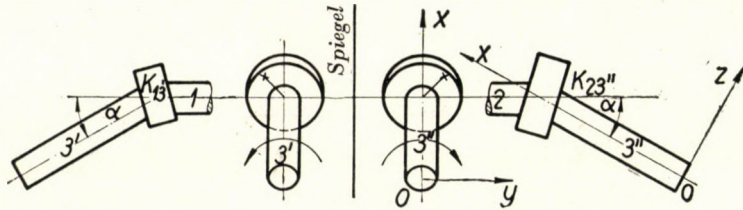


Abb. 5

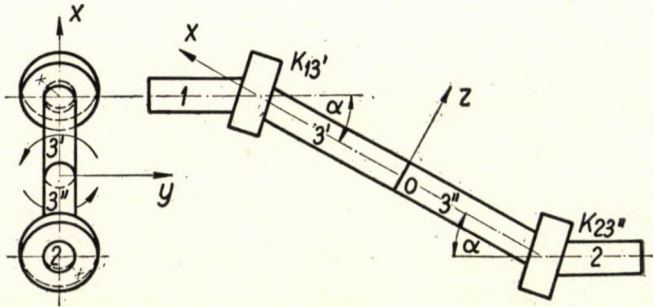


Abb. 6

Hieraus folgt, dass bei Koppelung paralleler Wellen die gleichförmige Drehübertragung gewährleistet ist, wenn das System bezüglich eines Punktes (0) zentral symmetrisch ist.

b) Wenn das Wellensystem 2—3'' im Bild 5 um die Achse z um 180° verdreht wird (Bild 7) gewinnt man die gleichförmige Drehübertragung gewährleistende Koppelung einander schneidender Wellenachsen. Das derart erzielte System ist hinsichtlich einer Ebene (yz) symmetrisch, das heisst spiegelsymmetrisch.

c) Schliesslich verdrehe man das System 2—3'' des Bildes 5 um 180° um einen in der Ebene yz befindlichen beliebigen

$$\bar{v} = y\bar{j} + z\bar{k}$$

Vektor (Bild 8a).

Auf diese Weise gewinnt man die gleichförmige Drehübertragung gewährleistende Koppelung der ausweichenden Wellen. Im Bild 8b wurde

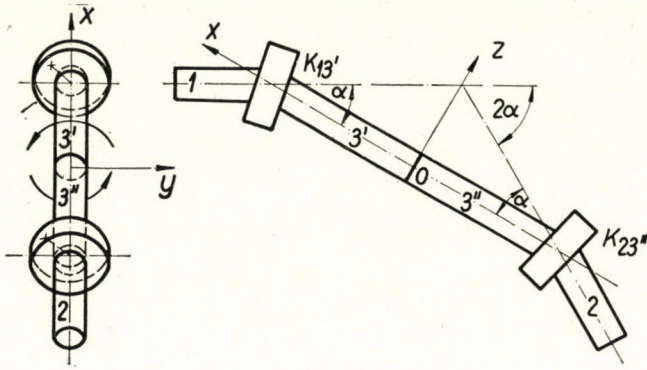


Abb. 7

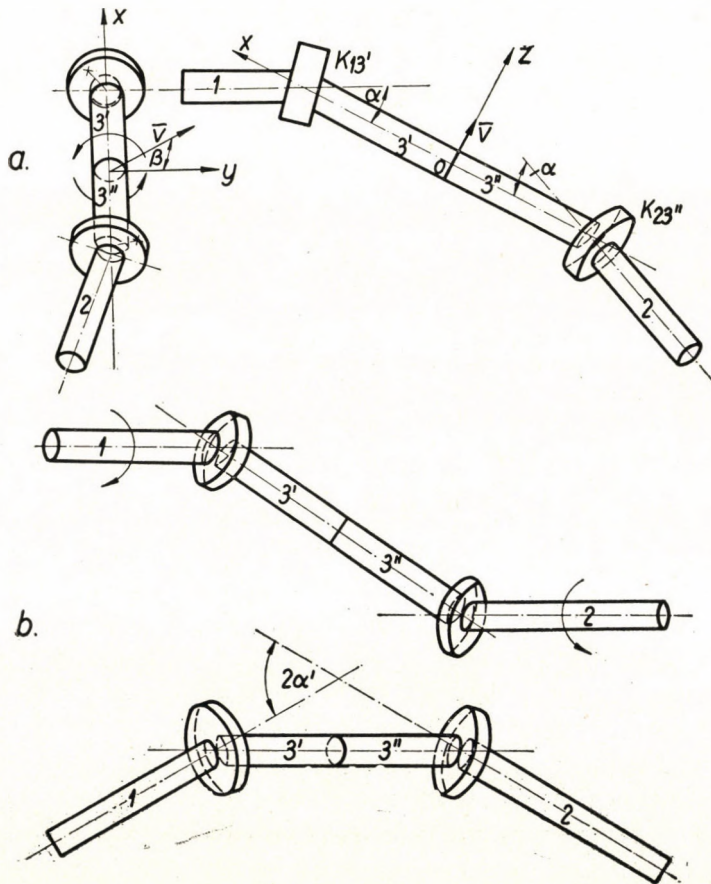


Abb. 8

das auf diese Weise erhaltene System vertikal auf die Richtung des Vektors \bar{v} und in einer mit den Wellen 1-2 parallelen Ebene fallenden Projektion veranschaulicht.

Ausweichende Wellen erhält man auch dann, wenn das Wellensystem 2-3'' im Bild 7 vor der starren Koppelung mit dem System 1-3' in einem Winkel γ um die Achse x verdreht wird. Nachstehend wird untersucht, welcher Zusammenhang zwischen den Winkeln α , $2\alpha'$ und γ besteht (Bild 9).

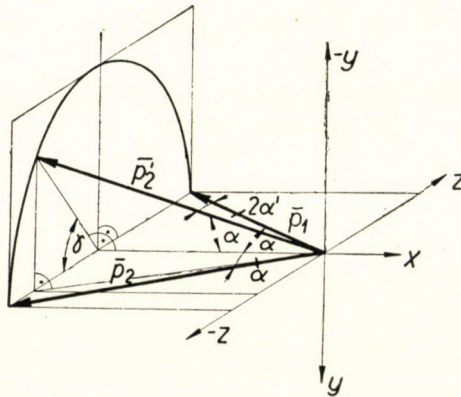


Abb. 9

Bild 9 zeigt die Richtung der Wellenachsen vor der Verdrehung mit dem Winkel γ , wie folgt :

$$\bar{p}_1 = -\cos \alpha \bar{i} + \sin \alpha \bar{k} \quad (3.3)$$

$$\bar{p}_2 = -\cos \alpha \bar{i} - \sin \alpha \bar{k} \quad (3.4)$$

$$\bar{p}_3 = -\bar{i} \quad (3.5)$$

Wenn der Vektor \bar{p}_2 mit dem Winkel γ um die Achse x verdreht wird, so ist die neue Richtung \bar{p}'_2 der Welle 2 :

$$\bar{p}'_2 = -\cos \alpha \bar{i} - \sin \alpha \sin \gamma \bar{j} - \sin \alpha \cos \gamma \bar{k} \quad (3.6)$$

Der Biegewinkel $2\alpha'$ der Wellen 1 und 2 ist also :

$$\cos 2\alpha' = \bar{p}_1 \bar{p}'_2 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \gamma$$

woraus

$$\cos \gamma = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha'}{\sin^2 \alpha} \quad (3.7)$$

Bei der gleichförmige Drehübertragung gewährleistenden Koppelung ausweichender Wellen muss demnach so vorgegangen werden, dass in Kenntnis der Biegungswinkel $2\alpha'$ der Wellen vorerst der Winkel α gewählt und dann vermittels der Formel (3.7) der Winkel γ errechnet werden muss. Der Winkel

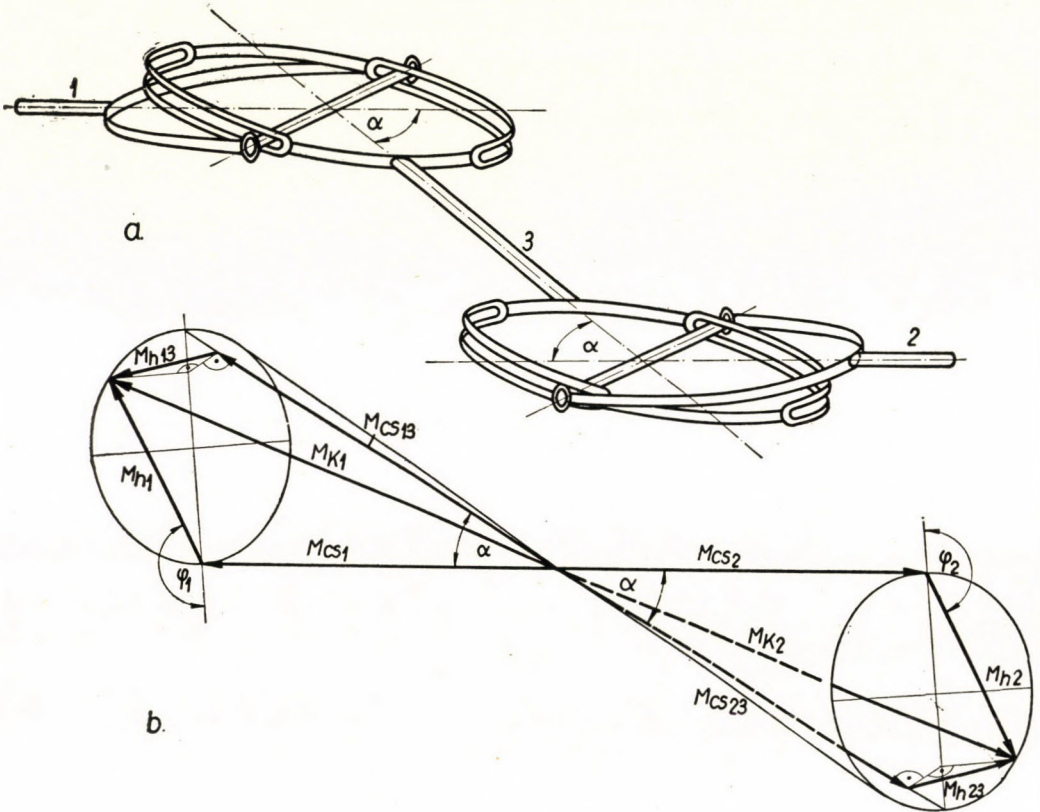


Abb. 10

α bestimmt auch die Länge der Welle 3. Wenn $\alpha = \alpha'$ ist, so beträgt die Länge der Welle: $l_3 = \infty$; wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, so kommt l_3 der transversalen Länge der Normalen gleich, jedoch ist das Wellengelenk selbstsperrend. Daraus folgt:

$$90^\circ > \alpha > \alpha'$$

Die Wellengelenkhälften müssen daher der spiegelsymmetrischen Anordnung gemäss mit einem Winkel γ verdreht an den beiden Enden der Welle 3 angebracht werden.

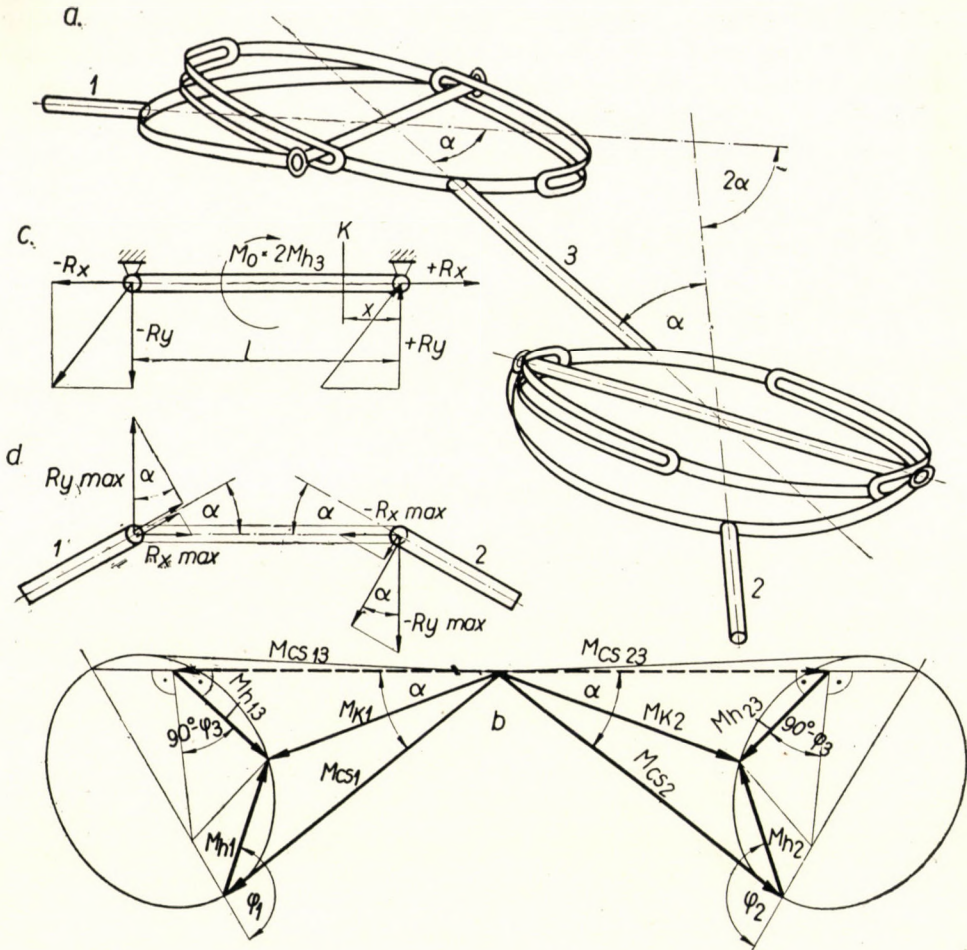


Abb. 11

4. Eine gleichförmige Drehübertragung gewährleistende Koppelung von Wellen in verschiedener Stellung mit Cardano-Gelenken

a) Wenn zwei parallele Wellen in einer auf Bild 10a sichtbaren Weise gekoppelt werden, so sind die Bewegungsgesetze der Wellen 1 und 2 die gleichen, weil die Koppelhälften an beiden Enden der Welle 3 zentralsymmetrisch angeordnet sind.

Im Bild 10b sind die auf die einzelnen Wellen wirkenden Momente abgebildet mit Vernachlässigung der Masse bzw. der Beschleunigungsmomente der Welle 3. Demnach ist die Resultante der auf die Welle 3 wirkenden Momente Null.

b) Bild 11a zeigt die Koppelung von einander schneidenden Wellen mittels Cardano-Gelenken. Zufolge der spiegelsymmetrischen Anordnung ist die Winkelgeschwindigkeitsgleichheit der Wellen 1 und 2 gewährleistet.

Aus Bild 11b ist zu ersehen, dass die auf Welle 3 wirkenden Biegemomente nicht im Gleichgewicht sind und Welle 3 durch ein

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_{h_{23}} + \bar{M}_{h_{13}} = 2 \bar{M}_{h_3} \quad (4.1)$$

Moment belastet ist, welches durch die Lager der Wellen 1 und 2 übernommen werden muss.

Die infolge Einwirkung des Momentes \bar{M}_0 in den Wellenlagern auftretenden Reaktionskräfte können folgenderweise bestimmt werden: Die Welle 3 kann als ein an beiden Enden mittels Kugelgelenken an ein Gestell gebundener Stab gedacht werden, welchen das Moment \bar{M}_0 belastet (Bild 11c).

Die Reaktionskräfte werden mit dem Castigliano'schen Satz bestimmt.

Die Deformationsarbeit der l -langen Welle 3 setzt sich aus Biegung und Zug zusammen:

$$L = \frac{1}{2JE} \int_0^l M^2 dx + \frac{1}{2} \frac{R_x^2 l}{FE}. \quad (4.2)$$

Da in der Wirkungslinie R_y die Durchbiegung Null ist, so ergibt sich

$$\frac{\partial L}{\partial R_y} = 0 \quad (4.3)$$

(4.2) und (4.3) substituiert, ergibt sich als Lösung die Differentialgleichung

$$\frac{F}{6J} M_0 = R_x \frac{dR_x}{dM_0} \quad (4.4)$$

aus welcher

$$R_x = M_0 \sqrt{\frac{F}{6J}} = M_{h_3} \sqrt{\frac{2F}{3J}} \quad (4.5)$$

und so

$$R_y = \frac{1}{l} M_0 = \frac{2}{l} M_{h_3} \quad (4.6)$$

sich ergibt.

Die auf Welle 1 bzw. 2 wirkende grösste axiale und grösste Biegekraft laut Bild 11d (auch unter Berücksichtigung von 2.13)

$$R_{ax,max} = M \sin \alpha \left[\sqrt{\frac{2F}{3J} \cos \alpha + \frac{2}{l} \sin \alpha} \right] \quad (4.7)$$

$$R_{b,max} = M \sin \alpha \left[\sqrt{\frac{2F}{3J} \sin \alpha + \frac{2}{l} \cos \alpha} \right] \quad (4.8)$$

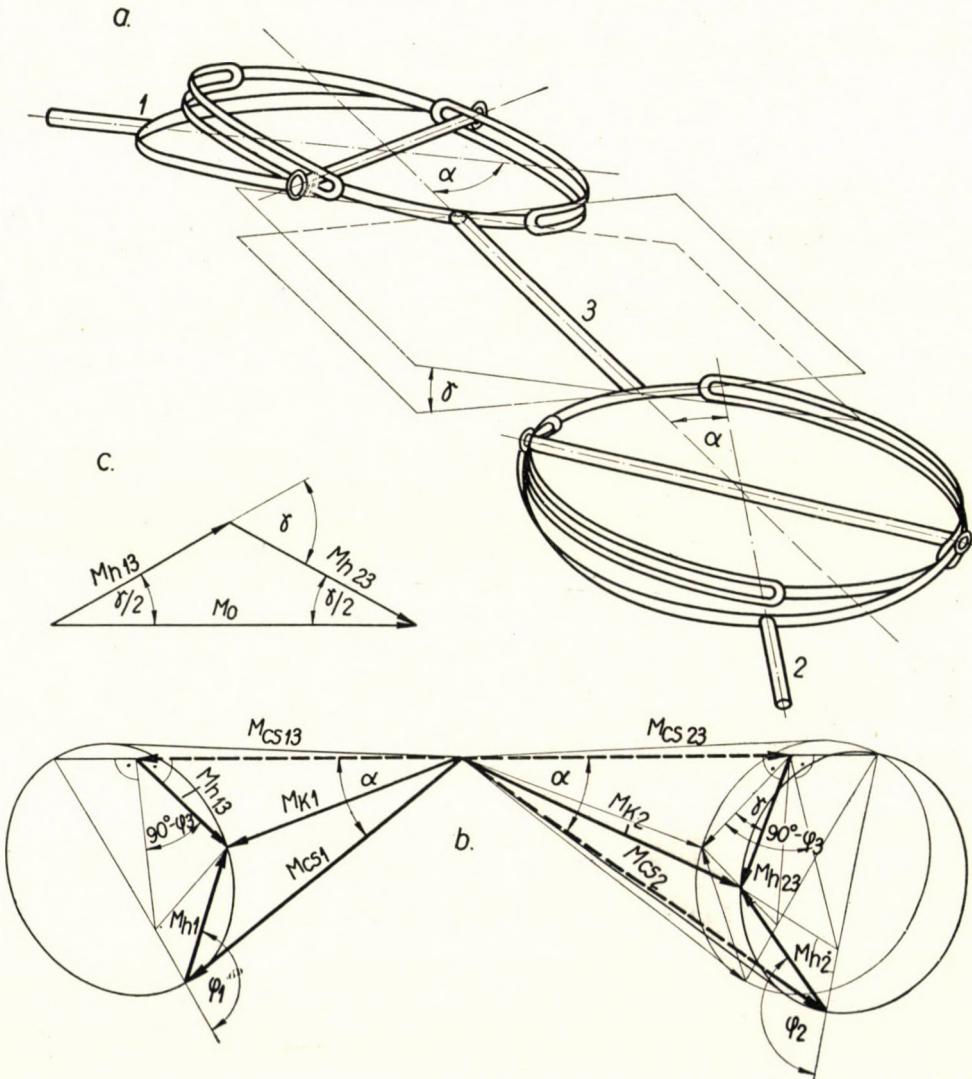


Abb. 12

Die Kräfte können durch Steigerung der Länge l vermindert, jedoch nicht völlig aufgehoben werden.

c) Wenn das Cardano-Gelenk zur Koppelung ausweichender Wellen verwendet wird (Bild 12a), so wird die Welle 3 durch das

$$M_0 = 2 M_{h_3} \cos \frac{\gamma}{2} \quad (4.9)$$

Moment (Bild 12b und c) und die Wellen 1 und 2 durch die

$$R_{a_{\max}} = M \sin \alpha \cos \frac{\gamma}{2} \left[\sqrt{\frac{2F}{3J}} \cos \alpha + \frac{2}{l} \sin \alpha \right] \quad (4.10)$$

$$R_{h_{\max}} = M \sin \alpha \cos \frac{\gamma}{2} \left[\sqrt{\frac{2F}{3J}} \sin \alpha + \frac{2}{l} \cos \alpha \right] \quad (4.11)$$

Kräfte belastet.

Aus obigen Beispielen ist zu ersehen, dass Cardanogelenken Wellen beliebiger Stellung in einer die gleichförmige Bewegungsübertragung gewährleistenden Weise gekoppelt werden können. Ein Nachteil dieser Lösungen ist jedoch, dass die Steigkeit der Winkelgeschwindigkeit der Welle 3 nicht sichergestellt ist und demzufolge die durch den ungleichmässigen Gang auftretenden Bewegungsenergieänderungen in der Bewegung des ganzen Systems Ungleichförmigkeiten verursachen können. Dieser Nachteil wird durch die Synchrongelenke eliminiert.

SCHRIFTTUM

1. K. KUTZBACH: Quer- und winkelbewegliche Wellenkupplungen. Kraftfahrtechnische Forschungsarbeiten. V. D. I. Verlag, Berlin, 1937, 6, S. 1–25.
2. H. DIETZ: Die Übertragung von Momenten in Kreuzgelenken. Z. V. D. J. **82** (1938) S. 825–28.
3. K. H. GROSSMANN: Die Momente im Kreuzgelenk. Schweizerische Bauzeitung. **113** (1939) S. 27.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz befasst sich mit der kinematischen Untersuchung von Wellenkupplungen mittelst Cardano-Gelenken. Hierauf behandelt er bis ins einzelne gehend die Bestimmungsmethode der im Gelenk entstehenden Momente und Kräfte. Es werden allgemeine Grundsätze der Wellenkoppelung in beliebiger Stellung mit beliebig gewählten Wellengelenken auf eine gleichförmige Bewegungsübertragung gewährleistende Weise erläutert. Endlich veranschaulicht der Aufsatz die unter Zugrundelegung obiger Grundsätze erfolgte Benützung von Cardano-Gelenken.

(CARDANO'S) UNIVERSAL SHAFT COUPLINGS

J. HERING

SUMMARY

The paper deals with the kinematic examination of (Cardano's) universal shaft coupling. After this it discusses in detail the determination of the moments and forces arising in the turning joint. It acquaints with general principles on the linking up of shafts of optional positions with joints according to choice — that secures a uniform propulsion — and it introduces finally the use of Cardano's turning joint, according to the above mentioned principles.

ACCOUPEMENTS CARDAN

J. HERING

RÉSUMÉ

L'étude s'occupe de l'examen cinématique de l'accouplement Cardan, et traite en détail du mode de définition des couplemoments et forces engendrés dans l'articulation. L'auteur expose ensuite les principes généraux de l'accouplement d'arbres en position quelconque, à l'aide d'une articulation arbitraire assurant une transmission de mouvement uniforme. Pour finir, l'étude indique l'application de l'articulation Cardan suivant les principes ci-dessus énoncés.

КАРДАНЫЕ СЦЕПЛЕНИЯ

И. ХЕРИНГ

РЕЗЮМЕ

Работа рассматривает кинематику карданного сцепления. После чего детально изучаются моменты, возникающие в карданном соединении, и трактуется метод определения возникающих сил.

Излагаются общие принципы соединения валов любого положения с помощью шарнира вала, выбранного произвольно, и при этом обеспечивается равномерная передача движения. Наконец, демонстрируется использование карданных шарниров согласно вышеизложенным принципам.

EINE ULTRASCHALL-DURCHSTRAHLUNGSMETHODE ZUR IMMERSIONSPRÜFUNG VON METALLBLECHEN UND DER VERGLEICH DERSELBEN MIT DER FREQUENZMODULATIONSMETHODE

I. EGRI

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN*

INSTITUT FÜR MESSTECHNIK UND INSTRUMENTENWESEN, UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST

[Eingegangen am 30. August 1957]

In unserem Institut wurde eine Ultraschall-Durchstrahlungsmethode zur Immersionsprüfung von Metallblechen mit rauher Oberfläche entwickelt [1]. Nach Beschreibung dieses Verfahrens wird ein Vergleich zwischen dem mit Frequenzmodulation arbeitenden und dem neuentwickelten Verfahren vorgenommen. Es muss bemerkt werden, dass es in beiden Fällen mit einfacher, elektrischer, also leicht registrierbarer Indikation gearbeitet wurde.

1. Beschreibung der neuen Methode

Abb. 1 zeigt den schematischen Aufbau des Apparates. Die Impulse des Senders werden durch den Senderkristall in Schallschwingungen verwandelt, die durch zwei Wasserschichten und durch das Blech gehen und dann von dem zum Senderkristall koaxial untergebrachten Empfängerkristall wieder in elektrische Signale verwandelt werden. Diese Signale werden nach entsprechender Verstärkung mit einem Röhrenvoltmeter gemessen. Die Schallwellen schreiten senkrecht zum geprüften Blech fort; die Bleche sind zwischen den Kristallpaaren in der in der Abbildung bezeichneten Richtung bewegbar.

Die Breite des Schallstrahles (senkrecht zur Bewegungsrichtung), multipliziert mit der Vorschubgeschwindigkeit des Bleches, ergibt die Prüfungsgeschwindigkeit in cm^2/sec . Bei mehreren Kristallpaaren ist dieses Ergebnis selbstverständlich noch mit der Anzahl der Kristallpaare zu multiplizieren.

Ein, am Empfänger angeschalteter Kathodenstrahlzilloskop zeigt ein Empfängersignal ähnlich wie in Abb. 2. Obwohl der Sender während der Impulsperiode nur einen einzigen Impuls abgibt, erreicht eine Impulsserie den Empfängerkristall, weil sowohl im Blech, als auch im Wasser wiederholte Reflexionen entstehen. Von den durch diese wiederholten Reflexionen ent-

* Bei der Ausführung der zahlreichen Messungen hat Physiker Frl. M. SZEMES, bei der Projektierung und Anfertigung der Versuchsapparate Ing. J. HERING und Ing. F. SVÁB wertvolle Hilfe geleistet.

standenen Signale können zwei oder mehrere zur gleichen Zeit den Empfängerkristall erreichen und einander — je nach den Phasenverhältnissen — verstärken oder abschwächen. In Abb. 2 gelangte Signal *a* ohne Reflexion

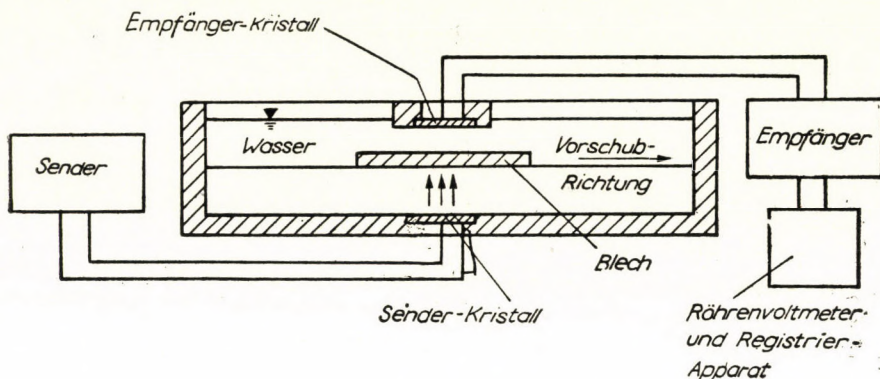


Abb. 1

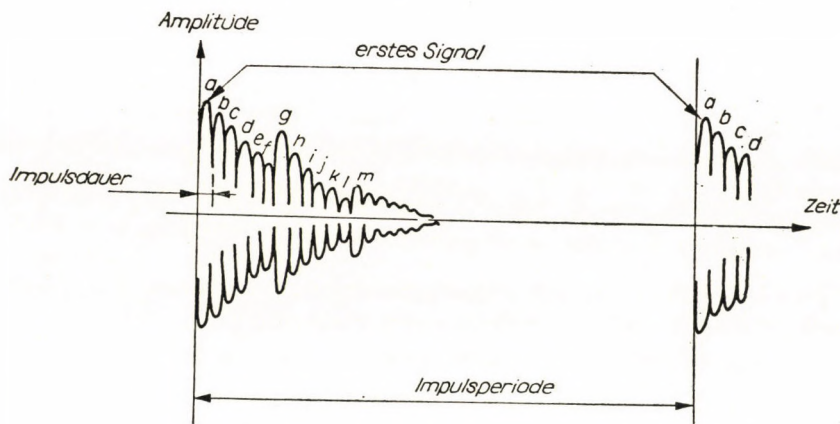


Abb. 2

zum Empfängerkristall, die unmittelbar darauf folgenden Signale (*b, c, d, ...*) nach einmaliger, bzw. mehrmaliger Reflexion im Blech. Die Impulsperiode wurde so gewählt, dass die reflektierten Signale bereits abgeklungen sein sollen, bevor der Sender den nächsten Impuls abgibt.

Es ist aus obigen zu ersehen, dass *a*, das zuerst ankommende Signal, immer interferenzfrei ist. Die Grösse dieses Signals ist also unabhängig von der Blechdicke (die Absorption kann unbeachtet bleiben) und wird nur davon abhängen, ob im Blech eine reflektierende Fehlerfläche vorhanden war oder nicht. Wenn wir also das „erste Signal“ als Indikation auswählen können, so haben wir eine wesentliche Ursache der Messunsicherheit beseitigt. Die Indi-

kation dieses Signals kann auf zweierlei Weise geschehen: entweder ist der Empfänger nur für die Zeitspanne des ersten Signals empfindlich, oder aber sorgen wir dafür, dass dieses Signal immer das grösste unter allen sei, weil dann die Indikation bei Anwendung eines Spitzenspannungsmessers immer dem ersten Signal proportional sein wird. In unserer Vorrichtung wurde der letztere, einfachere Weg gewählt.

Das zweite, dem ersten ähnlich grosse Signal (*b* auf Abb. 2) erreicht den Empfängerkristall um die Zeit $2 \frac{d}{C_m}$ später als das erste Signal (wobei *d*

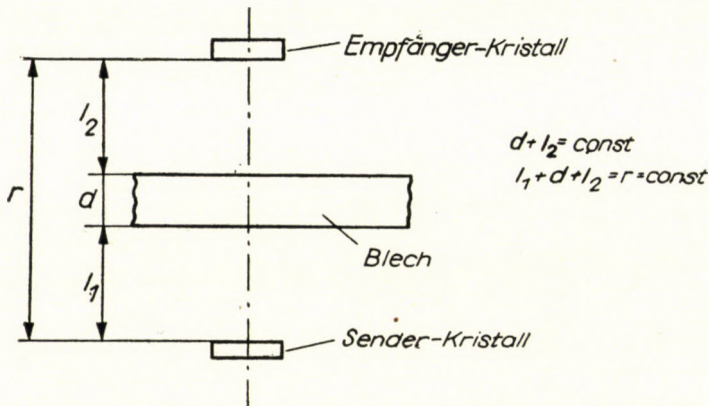


Abb. 3

die Blechdicke, C_m die Schallgeschwindigkeit im Blech bedeutet). Sollte bei dem Ankommen des zweiten Signals am Empfängerkristall das erste Signal noch nicht genügend abgeklungen sein, so kann es bei übereinstimmenden Phasen vorkommen, dass ihre Summe (*b* + Rest von *a*) ein grösseres Signal, als das erste ergibt. Diese Bedingung bestimmt die längste Impulsdauer bei gegebener Dicke des Bleches und bringt mit sich, dass die Methode für dünne Bleche mit rauher Oberfläche nicht anwendbar ist: ungefähr 8 mm ist jene minimale Dicke, über welcher sie gut brauchbar ist. Die untere Dickengrenze kann wohl durch Kürzung der Impulsdauer (mit Erhöhung der Frequenz) herabgesetzt werden, doch nur bei Blechen mit bearbeiteter Oberfläche, weil die Rauheit der Oberfläche — wie man später (im Kap. 3) sehen wird — die Höchstgrenze der anwendbaren Frequenz bestimmt. Um zu vermeiden, dass Signale die nach einmaliger Reflexion in den Wasserschichten zum Empfängerkristall ankommen (z. B. Signal *g* auf Abb. 2), günstigen Phasenverhältnissen zufolge eine grössere Amplitude als die erste (*a*) geben, müssen die Wasserwege l_1 und l_2 (Abb. 3) voneinander verschieden und folgender Bedingung entsprechend gross gewählt werden: die in dem Blech wiederholt reflektierten

Signale während der Zeitdauer $2 l_1/C_w$ bzw. $2 l_2/C_w$ sollen so weit abklingen, dass sie praktisch vernachlässigt werden können (C_w : Schallgeschwindigkeit im Wasser). Diese Bedingung ist leicht zu erfüllen, besonders weil $C_w \sim 1/4 C_m$ (C_m : Schallgeschwindigkeit im Blech) beträgt.

2. Der kleinste, mit Durchstrahlungsmethoden nachweisbare Fehler und die Frage der Prüfgeschwindigkeit

Nach dieser kurzen Beschreibung der entwickelten Erstsinal-Methode soll diese mit der, mit F. M. arbeitenden Methode von den Gesichtspunkten des kleinsten, noch nachweisbaren Fehlers und der Prüfgeschwindigkeit aus verglichen werden.

Die Besprechung beschränkt sich auf jene Fälle, wo sich die Schallwellen praktisch senkrecht zum Blech verbreiten, weil der Aufbau der Prüfvorrichtungen so der zweckmässigste und daher fast immer so üblich ist.

In diesem Falle ist die Abnahme der Indikation (mit guter Näherung) der Oberfläche des Fehlers proportional: d. h. ein Fehler, dessen Oberfläche p Prozent des Schallstrahles beträgt, verursacht eine p prozentige Abnahme des elektrischen Signals, falls der Querschnitt des Schallstrahles

$$F_{Strahl} \gtrsim F_{Empf}$$

ist, wo F_{Empf} die Oberfläche des Empfängerkristalls bedeutet.

Das Auflösungsvermögen beider Methoden wird theoretisch durch die Wellenlänge des Schalles begrenzt, praktisch kann man aber nur *dann* so weit gehen, wenn die Messunsicherheiten einen wesentlich kleineren Rückgang der Indikation ergeben, als die durch die minimale — durch die Wellenlänge bestimmte — Fehleroberfläche verursachte Abnahme der Indikation. In der Praxis bestimmt im allgemeinen nicht die Wellenlänge, sondern die Messunsicherheit die Grösse des kleinsten nachweisbaren Fehlers. Es ergibt sich [2]

$$F_{min} = F_{Strahl} \cdot b, \quad (1)$$

wo F_{min} : den Querschnitt des kleinsten nachweisbaren Fehlers in mm^2 ,
 F_{Strahl} : den Querschnitt des Schallstrahles in mm^2 ,
 b : den Messunsicherheitskoeffizienten (die relative Indikationsabnahme zufolge der Messunsicherheiten) bedeutet.

Diese Gleichung ist nur gültig, falls der Durchlässigkeitskoeffizient des Fehlers Null ist und die Oberflächen-Abmessungen des Fehlers grösser als die angewandte Wellenlänge sind. In der Praxis sind beide Bedingungen zwar nicht immer, aber in der Mehrzahl der Fälle erfüllt.

Um die Methoden richtig vergleichen zu können, müssen die Messunsicherheiten der einzelnen Verfahren geklärt werden. Ausserdem muss festgesetzt werden, ob es eine solche Messunsicherheit gibt, welche mit der Verminderung der Wellenlänge wächst, weil dann dadurch die Herabsetzung der Wellenlänge und somit — wie bekannt — auch die kleinste nachweisbare Fehlerdicke begrenzt wird.

3. Die Messunsicherheiten der Durchstrahlungsmethoden

Die Ursachen der Messunsicherheiten der beiden zu behandelnden Verfahren sind die folgenden :

- 3.1. Streuung der Blechdicke (entsprechender Unsicherheitskoeffizient : b_1)
- 3.2. Änderungen der Rauigkeit der Blechoberflächen (b_2)
- 3.3. Infolge der unvermeidlichen Krümmungen der Bleche wird der Winkel zwischen Schallwellen und Blechnormale geändert, dies gibt einen Unsicherheitskoeffizienten (b_3)
- 3.4. Änderungen in der akustischen Kopplung zwischen Wasser und Metallblech (b_4)
- 3.5. Andere Ursachen, wie z. B. verändernde Verstärkung der elektronischen Einrichtung ; Streuung des Elastizitätsmodul-Wertes des geprüften Materials (b_5).

Um die Methoden vergleichend bewerten zu können, ist es notwendig, die Grösse der einzelnen Unsicherheiten bei Anwendung der verschiedenen Prüfverfahren zu untersuchen.

3.1. Streuung der Dicke der Bleche

3.11. Die Methode, in welcher das Spitzenwert des ersten Signales zur Indikation verwendet wird, ist vollkommen unempfindlich gegen die Streuung der Blechdicke, wenn die gewählte Impulsdauer kleiner als $2 \frac{d}{C_m}$ ist, wobei d die Blechdicke und C_m die Schallgeschwindigkeit im Blech bedeutet (s. Kap. 1.). Bei diesem Verfahren ist also $b_1 = 0$, die Dickendifferenzen verursachen also keine Messunsicherheit.

3.12. Bei der Prüfung mit f. m. Ultraschall wird die Schallfrequenz bei entsprechend gewähltem Frequenzhub während eines Frequenzhubes einer, oder mehreren solchen Frequenzen gleich, bei welcher die Durchlässigkeit des Bleches *maximal* ist. Ist die Bandbreite des Empfängers gross genug, so ist die Prüfmethode mit f. m. Ultraschall bei unmittelbarer Kopplung gegen

Dickenänderungen unempfindlich. Diese Eigenschaft ändert sich aber bei Wasserkopplung, weil dann der Schall vom Sender bis zum Empfänger durch drei Schichten geht, deren maximale Durchlässigkeiten im allgemeinen bei drei verschiedenen Frequenzen liegen. Die drei Schichten sind (Abb. 3): l_1 , Wasserweg vom Sender zum Blech, d , das Blech und l_2 , Wasserweg vom Blech zum Empfänger.

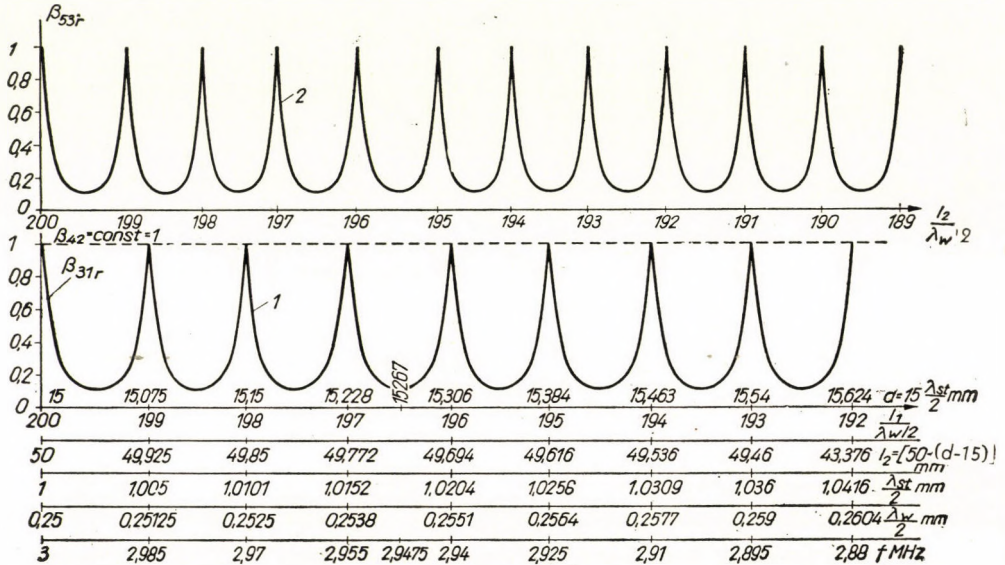


Abb. 4

Es sei bemerkt, dass die Durchlassfrequenzgebiete äusserst schmal sind: die Kurven in Abb. 4, auf Grund von konkreten Zahlenbeispielen gezeichnet, veranschaulichen dies gut.

Die Kurven der relativen Durchlasskoeffizienten (β_r) wurden laut folgender Gleichung gezeichnet:

$$\beta_{31r} = \frac{\beta_{31}}{\beta_{31 \max}} = \frac{V_3}{V_{3 \max}} = \frac{\left[(m_{13} + 1)^2 - (m_{12}^2 - 1)(m_{12}^2 - 1) \sin^2 2\pi \frac{d_2}{\lambda_2} \right]^{1/2}}{(m_{13} + 1)} \quad (2)$$

Diese Gleichung kann leicht aus der folgenden Gleichung, welche die Geschwindigkeits-Amplitude des durch drei Medien — und zwar senkrecht zu deren Grenzflächen — sich fortpflanzenden Schalles angibt, abgeleitet

werden [3]:

$$V_3 = V_1 \frac{2}{\left[(m_{13} + 1)^2 - (m_{12}^2 - 1)(m_{23}^2 - 1) \sin^2 2\pi \frac{d_2}{\lambda_2} \right]^{1/2}} \quad (2a)$$

In obigen Gleichungen wurden folgende Zeichen verwendet:

$\beta_{31} = \frac{V_3}{V_1}$ Durchlasskoeffizient des 2. Mediums, das durch die 1. und 3. Medien begrenzt ist. (Fortpflanzungsrichtung des Schalles: vom Medium 1 durch Medium 2 nach Medium 3.)

V_1 Geschwindigkeitsamplitude der einfallenden Welle im 1. Medium.

V_3 Geschwindigkeitsamplitude im 3. Medium.

d_2 Dicke des 2. Mediums.

λ_2 Schallwellenlänge im 2. Medium.

$$\left. \begin{aligned} m_{13} &\equiv \frac{\rho_3 C_3}{\rho_1 C_1} \\ m_{12} &\equiv \frac{\rho_2 C_2}{\rho_2 C_2} \\ m_{23} &\equiv \frac{\rho_3 C_3}{\rho_2 C_2} \end{aligned} \right\} \text{In diesen Gleichungen bedeuten } \rho \text{ und } C \text{ die Dichte und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im indizierten Medium.}$$

In Abb. 4 bedeutet β_{31r} den relativen Durchlasskoeffizienten der Wasserschicht l_1 (Abb. 3), β_{53r} denselben der Wasserschicht l_2 und β_{42} den absoluten Durchlasskoeffizienten des Bleches. (Die Indizes neben β bezeichnen hier die verschiedenen Medien wie folgt: 1. Senderkristall, 2. Wasserweg l_1 , 3. Blech, 4. Wasserweg l_2 , 5. Empfängerkristall.) Auf die Abszisse in Abb. 4 sind die Frequenzänderungen von 3 MHz bis 2,88 MHz aufgetragen. Der Mittelwert der Blechdicke (d) wurde mit 15 mm, die Wasserwege (l_1 und l_2) bei mittlerer Blechdicke mit je 50 mm angenommen. Wird die Schallgeschwindigkeit — zwecks einfacherer Berechnung — zu 6000 m/sec im Stahl und 1500 m/sec im Wasser angenommen, so beträgt die Wellenlänge bei einer Frequenz von 3 MHz: 2 mm im Stahl und 0,5 mm im Wasser. Mit diesen Daten und bei $d = 15$ mm ergibt sich für das Blech

$$2d/\lambda_{St} = 15$$

und für die Wasserwege

$$2l_1/\lambda_W = 2l_2/\lambda_W = 200.$$

Es folgt hieraus, dass bei 3 MHz ein Blech von 15 mm die maximale Schalldurchlassung sowohl im Blech als auch im Wasser ergibt. Bei Änderung

der Frequenz wird die Gleichung $2d/\lambda_{St} = 15$ auf jeweils andere Blechdicken gültig sein, man kann also jeweils — der Frequenz-Skale entsprechend — jene Dickenwerte (über 15 mm) aufschreiben, bei welchen Werten die Bleche vollkommen durchlassen ($\beta_{42} = 1$); z. B. lässt ein Blech von der Dicke 15,267 mm bei einer Frequenz von 2,9475 MHz vollkommen durch (Abb. 4). Die Länge des Wasserweges l_1 ist konstant, seine relative Durchlässigkeit (β_{31r}) wird in Funktion der Frequenz periodisch veränderliche Werte annehmen (Kurve 1). Die relative Durchlässigkeit β_{53r} des Wasserweges l_2 ändert sich ebenfalls in Funktion der Frequenz, da sich aber auch l_2 ändert, wiederholen sich die Durchlässigkeitswerte $\beta_{53r} = 1$ (wie aus Kurve 2 ersichtlich) in noch kleineren Frequenzabständen als bei Wasserweg l_1 .

Die resultierende Durchlässigkeit wird dem Produkt aus 3 Durchlasskoeffizienten proportional sein, dabei schwankt ihr Wert stark mit der Frequenz und der Blechdicke. Serien von Messungen ergaben, dass bei nominalen Blechdicken, z. B. zwischen 10—20 mm und bei einer Streuung der Dicke von ± 1 mm, sogar 40%ige Indikationsabnahmen vorkommen, bei einer Messfrequenz $f = 3$ MHz, Frequenzhub $\Delta f = \pm 135$ kHz und Modulationsfrequenz $f_m = 300$ Hz. Der Messunsicherheitskoeffizient infolge der Dickenänderung des Bleches (b_1) kann also bei dieser Methode auf Grund von experimentellen Daten als 0,4 angenommen werden.

3.2. Änderungen der Rauigkeit der Blechoberfläche

Der Einfluss der Unebenheiten der Blechoberfläche kann am einfachsten so behandelt werden, dass man in ein Blech von vollständig glatter Oberfläche eine Verjüngung einhobelt, und deren Einfluss auf die Indikationsänderung bei den verschiedenen Methoden beobachtet (Abb. 5). Wenn die Flanke dieser Treppe sich in der Mittellinie des Schallstrahles befindet, dann

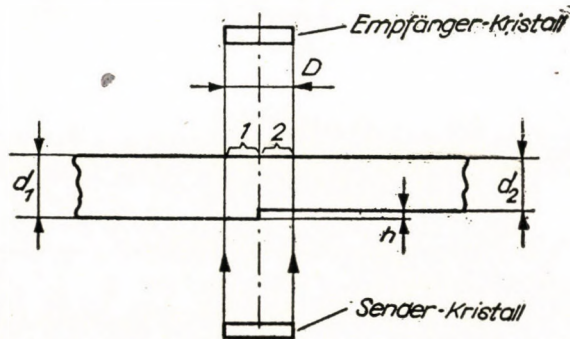


Abb. 5

gelangen die zwei Hälften (1 und 2) des Schallstrahles mit *Phasendifferenz* zur Oberfläche des Empfängerkrystals. Es kann angenommen werden, dass eine Verjüngung von der Höhe h , welche der maximalen Oberflächenrauigkeit entspricht, die gleiche maximale Indikationsverminderung wie das raue Blech selbst ergibt. (Tatsächlich wird in der Praxis die Indikationsabnahme gewöhnlich kleiner sein als der so errechnete Wert, da die raue Blechoberfläche aus verschiedenen Unebenheiten besteht, deren Abmessungen auch kleiner als h sein können.)

3.21. Bei der neuen Methode gelangt jener Teil des Schallstrahles, der durch Feld 2 geht (Abb. 5), etwas später zur Oberfläche des Empfänger-

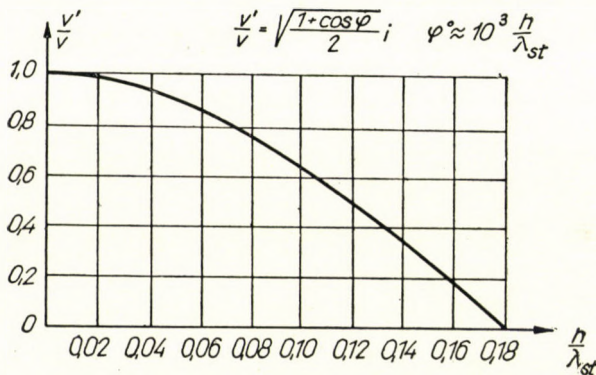


Abb. 6

krystalles als der durch Feld 1 gehende. Zuzufolge dieser Verspätung sind die zu den beiden Seiten des Empfängerkrystals ankommenden zwei Signale von gleicher Amplitude und Frequenz, jedoch in der Phase verschoben. Das resultierende Signal ist immer kleiner, als wenn beide Signale gleichphasig ankämen, weil (s. Anhang 1)

$$\frac{V'}{V} = \frac{\sqrt{1 + \cos \varphi}}{2} = \cos^{1/2} \varphi \quad (3)$$

und

$$b_2 = \frac{V - V'}{V} = 1 - \cos^{1/2} \varphi; \quad (3a)$$

da bedeuten :

V die Geschwindigkeitsamplitude des ankommenden Schalles, ohne Phasenverzögerung, also bei einem Blech von glatter Oberfläche

V' die Resultierende der Geschwindigkeitsamplituden der aus den Feldern 1 und 2 ankommenden Schallstrahlen, bei einer Phasenwinkelverzögerung von φ .

Die Grösse des Phasenwinkels kann folgenderweise berechnet werden. Der durch Feld 2 gehende Teil des Schallstrahles gelangt um die Zeit Δt später zur Oberfläche des Empfängerkristalls als der durch Feld 1 gehende :

$$\Delta t = \frac{h}{C_m} - \frac{h}{C_w} .$$

Hier bedeuten :

C_m die Schallgeschwindigkeit im Material des Bleches

C_w die Schallgeschwindigkeit im Wasser.

Die Grösse des der Zeitdifferenz entsprechenden Phasenwinkels hängt von der Frequenz ab :

$$\varphi = 360 \frac{\Delta t}{T} = \frac{360 (C_m - C_w)}{C_m C_w} \cdot h \cdot f \text{ Grad} , \quad (4)$$

wo T die Schwingungszeit und f die Schwingungsfrequenz bedeuten.

Es ergibt sich für Stahlblech aus Gl. 4.

$$\varphi \sim 10^3 \frac{h}{\lambda_{St}} \text{ Grad} , \quad (4a)$$

wo λ_{St} die Wellenlänge des Schalles im Stahl ist.

Von Abb. 6 kann abgelesen werden, dass im Falle von z. B. $h = 0,1$ mm und $\lambda_{St} = 2$ mm, ($f = 3$ MHz), $\frac{V'}{V} = 0,91$, d. h. bei einer solchen Unebenheit der Oberfläche, die ungefähr dem unbearbeiteten Blech entspricht, eine Indikationsabnahme von etwa 10% entstehen kann. Aus diesem Beispiel ist (wie es auch die Messungen beweisen) zu ersehen, dass die ausgearbeitete Impulsmethode bei geeigneter Wahl der Frequenz — selbst bei verhältnismässig hohen Werten von h — einen Messunsicherheitskoeffizienten von unterhalb 10% durch den Einfluss der Oberflächenunebenheit zeigen wird, dass also $b_2 = 0,1$ ist.

3.22. Bei der Methode mit F. M. erreicht der durch Feld 1 und 2 gehende Schall (Abb. 5) bei verschiedenen Frequenzen also in verschiedenen Zeitpunkten die maximale Geschwindigkeitsamplitude; die Wasserwege lassen sogar diese gleichen Geschwindigkeitsamplituden verschieden durch (s. Punkt 3.12). Sieht man nun bei der Behandlung von dem Frequenz- und Amplituden-Unterschied ab, so ist das resultierende Signal nach Gleichung (3) zu berechnen.

Den Phasenunterschied kann man folgenderweise berechnen. Die den Blechdicken d_1 und d_2 entsprechenden Durchlass-Frequenzen sind f_1 und f_2 .

Es besteht — falls die Durchlässigkeit des Bleches maximal ist — zwischen Blechdicken und Wellenlängen die folgende Beziehung :

$$\frac{2 d_1}{\lambda_1} = \frac{2 d_2}{\lambda_2} = \frac{2 (d_1 - h)}{\lambda_2}. \quad (5)$$

Aus dieser Gleichung :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{d_1}{d_2},$$

$$f_2 - f_1 = f_1 \frac{h}{d_2}.$$

Wenn der Frequenzhub $\pm \Delta f$ und die Modulationsfrequenz f_m ist, so beträgt die Zeit (t_1), welche zu einer Frequenzänderung $f_2 - f_1$ notwendig ist :

$$t_1 = \frac{1}{4 f_m \cdot \Delta f} (f_2 - f_1) = \frac{1}{4 f_m \cdot \Delta f} f_1 \frac{h}{d_2} \text{ sec.} \quad (6)$$

und der dieser Zeit entsprechende Phasenunterschied :

$$\varphi_1 = \frac{t_1}{T_1} 360 = \frac{f_1^2 360}{4 f_m \cdot \Delta f} \cdot \frac{h}{d_2} = k_1 \frac{h}{d_2} \text{ Grad.} \quad (6a)$$

Bei den praktisch vorhandenen, von dem Apparat abhängigen k_1 und von der Blechoberfläche abhängigen h/d_2 Werten ist der Phasenunterschied grösser als 180 Grad, infolgedessen kann also auch b_2 (s. Gl. 3a.) jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen :

Da wir noch keine ausführlichen Messungen vorgenommen haben, aus welchen ein Durchschnittswert für b_2 experimentell festgestellt werden könnte, haben wir b_2 mit einem Wert von 0,5 berücksichtigt. Es sei bemerkt, dass sogar dieser hohe Wert von b_2 nur bei der Prüfung von Blechen mit verhältnismässig wenig rauher Oberfläche erreichbar ist. Die Bedingung $b_2 \leq 0,5$ ist nämlich (s. Gl. 3a) bei einer kleineren Phasenverschiebung als $\varphi_1 = 2 \text{ arc cos } (1 - b_2) = 2 \text{ arc cos } (1 - 0,5) = 120 \text{ Grad}$ erfüllt. Was die Apparatenkonstante k_1 betrifft, ist es praktisch schwer einen niedrigeren Wert als $k_1 = 10^5$ zu verwirklichen (s. Anhang 2). Selbst mit diesem niedrigen Wert von k_1 geht aus Gl. 6a. hervor, dass bei der obigen Voraussetzung : $\varphi_1 \leq 120 \text{ Grad}$,

$$\frac{h}{d_2} \leq \frac{\varphi_1}{k_1} \leq \frac{120}{10^5} \leq 1,2 \cdot 10^{-3}$$

sein muss (also z. B. bei einer Blechdicke von 15 mm h kleiner als 18 μ bleiben sollte).

3.3. Änderungen des Winkels zwischen der Richtung des Schallstrahles und der Flächennormale infolge der Krümmung des Bleches

Die Oberfläche der unbearbeiteten Bleche ist gewöhnlich keine vollkommene Ebene. Es muss also untersucht werden, wie sich der durchgelassene Schalldruck in jenem Fälle ändert, wenn das Blech planparallel ist, jedoch mit der zum Schallstrahl senkrechten Richtung einen gewissen Winkel bildet. Die transversalen Schwingungen im Blech bei einem von 90° abweichendem Einfallswinkel des Schallstrahles werden vernachlässigt, in der Praxis beträgt nämlich die Abweichung von der Senkrechten nur einige Grade, wobei die Amplituden der transversalen Schwingungen in Vergleich mit den longitudinalen vernachlässigbar klein sind.

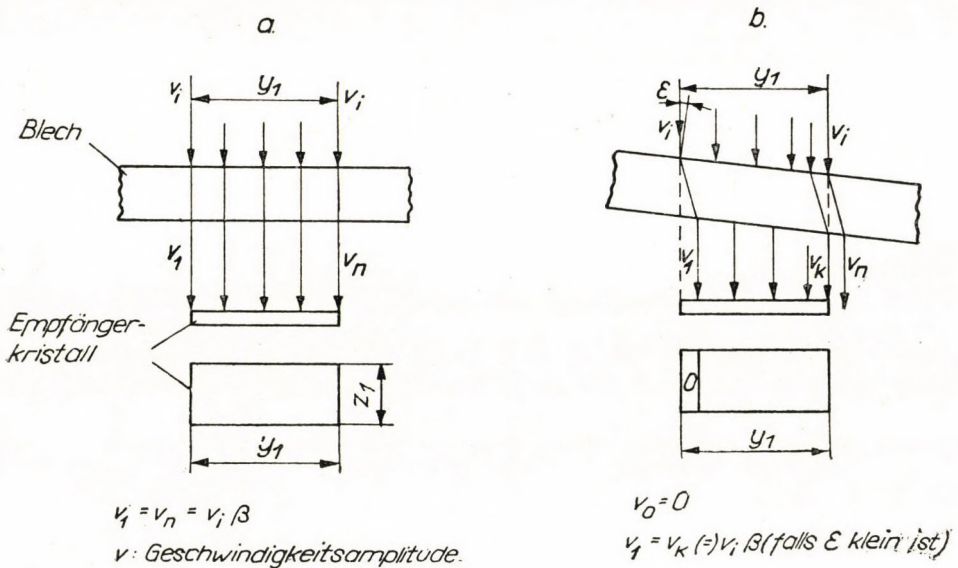


Abb. 7

3.31. Bei der Erstsinal-Methode zeigt das von dem Empfänger abgegebene Signal den Höchstwert des ersten, reflexionsfrei zum Empfängerkristall angekommenen Wellenzuges. Der Einfluss der schiefen Lage des Bleches offenbart sich nur insofern, dass sich der Schallstrahl parallel zu sich verschiebt und — wenn die Oberfläche des Empfängerkristalles dem Querschnitt des Schallstrahles gleich ist — ein Teil des Empfängerkristalles keine Schwingungen erhält. (Abb. 7b)

3.32. Bei der mit F. M. arbeitenden Methode erhält, wenn die Flächennormale und die Richtung des Schallstrahles parallel sind, ein jeder Punkt des Empfängerkristalles die Summe einer unendlichen Reihe von

reflektierten Schallstrahlen. (Abb. 8a) Im Falle günstiger Phasenverhältnisse addieren sich die Amplituden der wiederholt reflektierten Wellen.

Wenn jedoch die Flächennormale des Bleches einen Winkel mit dem Schallstrahl bildet, so kommen auf die verschiedenen Oberflächenpunkte des Empfängerkristalls Wellen ungleicher Geschwindigkeitsamplituden an. Aus der Abb. 8b ist ersichtlich, daß zum Feld 0 überhaupt kein Strahl gelangt. Zu Feld I (Abb. 8b) kommt der Strahl mit einer Geschwindigkeitsamplitude, wie im Falle der Impulsmodulation (s. Abb. 7a). In dem Felde II addieren sich schon zwei Wellenzüge u. s. w. In Abb. 8 bedeutet γ den Reflektions-

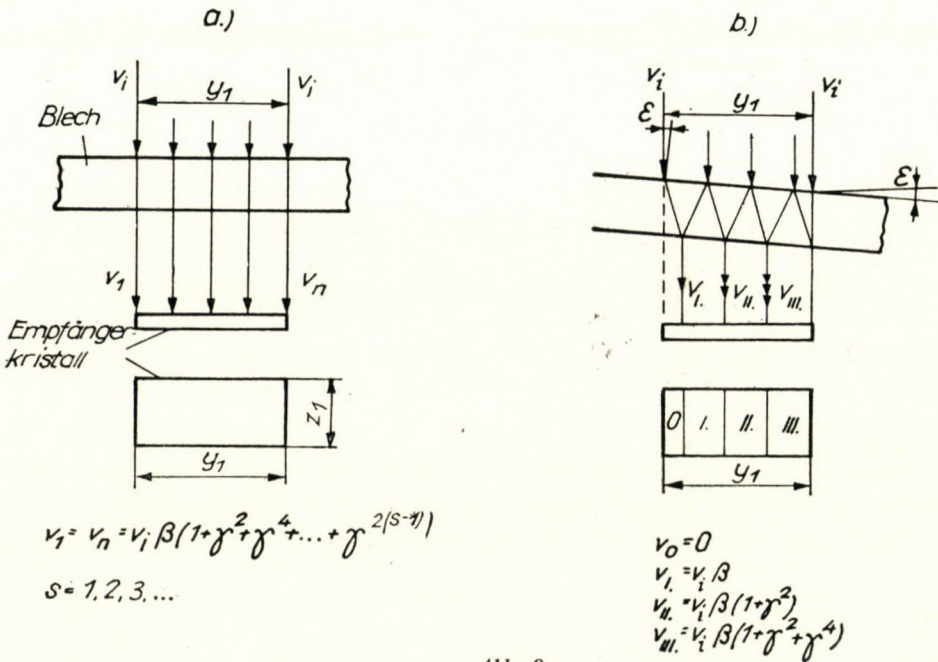


Abb. 8

koeffizienten für die Grenzfläche Blech-Wasser und β den Durchlaßkoeffizienten des Bleches im Wasser, wie in Abb. 7; beide sind auf Geschwindigkeitsamplitude bezogen. Ganz offenbar ist die Indikationsabnahme bei Frequenzmodulation viel größer als bei Impulsmodulation und »erstes Signal« Indikation.

3.33. Zusammenfassend: die Meßunsicherheit wird von den Änderungen des von der Flächennormalen und der Richtung des Schallstrahles eingeschlossenen Winkels bei der Erstsinal-Methode viel weniger beeinflusst, als bei der f. m. Methode. Die in konkreten Fällen aus der Praxis berechneten und gemessenen Werte ergaben, daß z. B. bei $\epsilon = 1,5^\circ$ mit Erstsinalmethode $b_3 \sim 0,1$, wogegen mit Frequenzmodulation $b_3 \sim 0,6$ betrug. Diese

Werte wurden unter folgenden Umständen gemessen : Blechdicke : 15,5 mm, Meßfrequenz : 3 MHz, Durchmesser des Schallstrahles und des Empfängerkristalles ungefähr gleich (17 mm \varnothing).

3.4. *Änderung der akustischen Kopplung zwischen Wasser und Bleche*

Beide besprochenen Methoden werden durch die Unsicherheit, welche durch die Schwankung der akustischen Kopplung verursacht wird, gleich beeinflußt. Nach unseren Erfahrungen kann diese Meßunsicherheit unter der Grenze von $b_4 = 0,1$ gehalten werden.

3.5. *Andere Ursachen der Messunsicherheiten*

In diese Gruppe gehören z.B.: Schwankungen der Netzspannung, Änderungen in der Verstärkung der elektronischen Vorrichtung, Streuung des Elastizitätsmoduls des geprüften Materials. Diese Ursachen beeinflussen gleichfalls die Meßunsicherheiten beider besprochenen Methoden. Die so verursachten Unsicherheiten sind gewöhnlich klein ; auf Grund der Erfahrungen kann man einen Wert von $b_5 = 0,05$ annehmen.

3.6. *Zusammenfassung der Feststellungen bezüglich der Messunsicherheit*

Die Messunsicherheitskoeffizienten wurden in den obigen als relative Indikationsabnahmen berechnet. Eigentlich entsprechen alle diese Koeffizienten einem Schwächungsfaktor : a . Dieser Schwächungsfaktor ist :

$$a_i = 1 - b_i . \quad (7)$$

Mit der Annahme, dass die Wirkungen der einzelnen Meßunsicherheitskoeffizienten voneinander unabhängig sind, ist der resultierende Schwächungsfaktor :

$$a = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 . \quad (8)$$

Der resultierende Messunsicherheitskoeffizient (b) kann aus Gl. 7 berechnet werden :

$$b = 1 - a . \quad (8a)$$

Stellen wir die Messunsicherheitskoeffizienten auf Grund der in den vorigen Abschnitten angeführten Zahlenwerte zusammen und berechnen wir den resultierenden Koeffizienten b , so bekommen wir die folgenden Ergebnisse :

Wie aus der Tabelle ersichtlich, ist der Messunsicherheitskoeffizient bei der ausgearbeiteten Methode — die mit Indikation des ersten Signales arbeitet — unter den geschilderten Messverhältnissen rund dreimal kleiner als bei dem frequenzmodulierten Verfahren.

Tabelle 1

| Erstsignal-Methode | | | | | Methode mit F. M. | | | |
|--------------------|----------------|----------------|-----|-----|-------------------|----------------|-----|-----|
| i | b ₁ | a ₁ | a | b | b ₁ | a ₁ | a | b |
| 1 | 0 | 1 | | | 0,4 | 0,6 | | |
| 2 | 0,1 | 0,9 | | | 0,5 | 0,5 | | |
| 3 | 0,1 | 0,9 | | | 0,6 | 0,4 | | |
| 4 | 0,1 | 0,9 | | | 0,1 | 0,9 | | |
| 5 | 0,05 | 0,95 | | | 0,05 | 0,95 | | |
| | | | 0,7 | 0,3 | | | 0,1 | 0,9 |

4. Schlussfolgerungen

Bei der Prüfung von Blechen mit Ultraschall-Durchstrahlung wird die Grösse des noch nachweisbaren kleinsten Fehlers durch den Querschnitt des Schallstrahles und durch die Messunsicherheit bestimmt (wenn es angenommen werden kann, dass der Fehler keine Schallschwingungen durchlässt). Vermindert man den Querschnitt des Schallstrahles, so vermindert sich auch die Prüfgeschwindigkeit: es wird also angestrebt, einen je grösseren Querschnitt zu wählen. Vergleicht man die Durchstrahlungsmethoden bezüglich der Messunsicherheit, so ergibt sich, dass die ausgearbeitete Erstsignal-Methode den Vorteil hat, eine wesentlich kleinere Messunsicherheit als die Methode mit F. M. aufzuweisen; mit der Erstsignal-Methode kann man also entweder kleinere Fehler entdecken, oder eine grössere Prüfgeschwindigkeit erreichen, als mit Frequenzmodulation. Nachteil der ausgearbeiteten Methode ist ihre begrenzte Anwendungsmöglichkeit, da sie zur Prüfung von Blechen, deren Dicke unter etwa 8 mm beträgt, nur dann geeignet ist, wenn jene nicht grobflächig sind.

Obwohl in der Praxis nicht die Wellenlänge die Grösse des kleinsten nachweisbaren Blechfehlers bestimmt, soll man die Wellenlänge doch möglichst klein wählen, damit die minimale *Dickenabmessung* des nachweisbaren Fehlers vermindert werde. Eine untere Grenze der Wellenlänge wird durch die Oberflächenrauheit der Bleche bestimmt. Die Rauheit der Blechoberfläche beeinflusst die Messunsicherheit bei der Methode des »ersten Signals« weniger als bei der Anwendung der Frequenzmodulation, infolgedessen kann bei dem Erstsignal-Verfahren eine kleinere Wellenlänge gewählt werden.

Anhang I.

Wie bekannt beträgt die Summe (A') von zwei gleichperiodischen Sinusfunktionen, deren Amplituden (A) gleich sind:

$$A' = \sqrt{(A + A \cos \varphi)^2 + A^2 \sin^2 \varphi} = 2A \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$$

und der Quotient der Amplituden :

$$\frac{A'}{A} = 2 \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}},$$

wo φ die Phasendifferenz zwischen den zwei Sinusfunktionen bedeutet.

Im Falle eines piezoelektrischen Umformers ist das elektrische Signal dem Produkt : Druck \times Oberfläche des Umformers proportional. Der Druck ist aber mit der Geschwindigkeitsamplitude in Proportion, es kann also angeschrieben werden, dass die elektrische Indikation dem Produkt : Geschwindigkeitsamplitude \times Oberfläche des Kristalls proportional ist. Im Falle eines vollkommen ebenen Bleches ist also das elektrische Signal dem Produkt $V \cdot F$ proportional, wo V die Geschwindigkeitsamplitude und F die Oberfläche des Kristalls bedeutet. (In Abb. 7. u. 8. ist $F = y_1 \cdot z_1$.)

Im Falle eines Bleches mit einer Verjüngung (Abb. 5) erregen beide Hälften des Kristalls ein elektrisches Signal, proportional dem Produkt : $V \cdot \frac{1}{2} F$, aber mit einer Phasenverschiebung von φ Grad. Die Summe dieser Komponenten beträgt $V' \cdot F$ und laut obigem ist der Quotient der Amplituden :

$$\frac{V' F}{\frac{1}{2} V F} = \frac{2 V'}{V} = 2 \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$$

oder vereinfacht :

$$\frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}.$$

Anhang 2.

Die Apparatekonstante k_1 ist gleich :

$$k_1 = \frac{f_1^2 \cdot 360}{4 f_m \cdot \Delta f} \text{ Grad.}$$

Der im Abschnitt 3.2 angenommene Wert von $k_1 = 10^5$ ist z. B. mit folgenden Daten zu verwirklichen :

$$f_1 = 10^6 \text{ Hz}$$

$$f_m = 10^4 \text{ Hz}$$

$$\Delta f = 10^5 \text{ Hz.}$$

Mit diesen Daten ist :

$$k_1 = \frac{(10^6)^2 \cdot 360}{4 \cdot 10^4 \cdot 10^5} \sim 10^5 \text{ Grad.}$$

Bei den üblichen Apparaten ist k_1 viel grösser. Oft verwendete Werte sind z. B. :

$$f_1 = 3 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$f_m = 330 \text{ Hz}$$

$$\Delta f = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Hz.}$$

Mit diesen Daten beträgt

$$k_1 = \frac{(3 \cdot 10^6)^2 \cdot 360}{4 \cdot 330 \cdot 1,3 \cdot 10^5} \sim 2 \cdot 10^7 \text{ Grad.}$$

SCHRIFTTUM

1. »Ultraschall-Verfahren und Vorrichtung zur Immersionsprüfung von Materialien«, Ung. Pat. No. 1247.
2. M. KUREK und J. TABIN: Metallprüfung mit Ultraschall-Durchstrahlungsverfahren. Materialy z konferencji techniki Ultradzwickowej. 1955. Warszawa. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1955. S. 164.
W. LEHFELDT: Ultraschall-Prüfung von Blechen und Bändern. Elektronische Rundschau Nr. 4. 1955.
3. KINSLER and FREY: Fundamentals of acoustics. New York. Wiley, 1950. S. 152.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine im Institut für Messtechnik und Instrumentenwesen der Ungarischen Akademie der Wissenschaften entwickelte, sogenannte Erstsinal-Methode zur Immersionsprüfung von grobflächigen Metallblechen mit Hilfe der Ultraschall-Durchstrahlungsmethode beschrieben, und dieselbe mit der Frequenzmodulationsmethode verglichen. Die Ergebnisse des Vergleiches können wie folgt zusammengefasst werden:

Bei der Prüfung von Blechen mit Hilfe der Ultraschall-Durchstrahlungsmethode wird die Grösse des noch nachweisbaren kleinsten Fehlers durch den Querschnitt des Schallstrahles und die Messunsicherheit bestimmt, wenn es vorausgesetzt werden darf, dass der Fehler keine Schallschwingungen durchlässt. Die Prüfgeschwindigkeit ist dem Querschnitt des Schallstrahles proportional, es wird daher ein möglichst grosser Querschnitt des Strahles angestrebt. Werden die beiden Durchstrahlungsmethoden in Bezug auf die Messunsicherheit miteinander verglichen, so ergibt sich, dass die mit Impulsmodulation und Erstsinalindikation arbeitende Methode vor der Frequenzmodulationsmethode eine weitaus geringere Messunsicherheit voraus hat; demgemäss kann mit Hilfe der ersten Methode ein geringerer Fehler nachgewiesen, oder aber eine höhere Prüfgeschwindigkeit als durch die Frequenzmodulationsmethode erreicht werden. Ein Nachteil der entwickelten Methode besteht in ihrer beschränkten Anwendungsmöglichkeit, da sie zur Prüfung von Blechen, deren Dicke unter etwa 8 mm beträgt, nur dann geeignet ist, wenn jene nicht grobflächig sind.

Obwohl der Nachweis des durch die Wellenlänge theoretisch bedingten minimalen Fehlers wegen der Messunsicherheiten nicht möglich ist, soll die Wellenlänge trotzdem möglichst klein gewählt werden, um die minimale Dickenabmessung des noch nachweisbaren Fehlers auf diese Weise zu verringern. Der Verringerung der Wellenlänge wird durch die Oberflächenrauigkeit der Bleche eine Schranke gesetzt. Der Einfluss der Oberflächenrauigkeit auf die Messunsicherheit ist bei der entwickelten Erstsinalmethode geringer als bei der Frequenzmodulationsmethode, die Wellenlänge kann somit im ersteren Fall geringer gewählt werden.

MÉTHODE POUR LE CONTRÔLE DE L'IMMERSION DES TÔLES PAR TRANSMISSION ULTRASONIQUE, ET COMPARAISON AVEC LA MÉTHODE À MODULATION DE FRÉQUENCE

I. ECRI

RÉSUMÉ

L'auteur étudie la méthode de l'immersion pour le contrôle des tôles à rugosité superficielle par transmission ultrasonique, méthode appelée du premier signal, et élaborée à l'Institut des Mesures et Instruments de l'Académie Hongroise des Sciences. Il la compare ensuite avec la méthode à modulation de fréquence. Les résultats de la comparaison sont les suivants:

Au contrôle des tôles par transmission ultrasonique, la grandeur du plus petit défaut décelable est déterminée par la section du rayon ultrasonique et par l'incertitude de la mesure.

à condition que les défauts ne transmettent pas les ondes ultrasonores. D'autre part, la vitesse du contrôle étant proportionnelle à la section du rayon ultrasonique, il est donc préférable de choisir — autant que possible — un rayon à grand section. D'une comparaison des deux méthodes au point de vue de l'incertitude de la mesure, il ressort que la nouvelle méthode à modulation d'impulsions, et à l'indication du premier signal, possède l'avantage de présenter une incertitude de mesure bien plus réduite que la méthode à modulation de fréquence. Il est donc possible ou bien de déceler de plus petits défauts ou bien d'augmenter la vitesse du contrôle par rapport à la méthode à modulation de fréquence. Le désavantage de la nouvelle méthode est que son domaine d'application est limité. Elle n'est pas apte au contrôle des tôles minces ($d < 8$ mm) à rugosité superficielle.

En général, il n'est pas possible, par suite de l'incertitude de mesure, de déceler les défauts minima déterminés théoriquement par la longueur d'onde. Malgré cela, il est préférable de diminuer autant que possible la longueur d'onde pour réduire l'épaisseur minimum du défaut décelable. La diminution de la longueur d'onde est limitée par la rugosité superficielle. L'influence exercée par celle-ci sur l'incertitude de mesure étant plus réduite dans la méthode dite du premier signal, que dans celle à modulation de fréquence, ainsi au cas de la première méthode on peut utiliser des ondes plus courtes.

A NEWLY DEVELOPED METHOD FOR THE IMMERSSED ULTRASONIC TRANSMISSION TESTING OF METAL PLATES AND ITS COMPARISON WITH THE FREQUENCY MODULATION METHOD

I. EGRI

SUMMARY

The author presents the so-called first-signal method for the immersed ultrasonic transmission testing of rough-surface metal plates, which has been developed in the Institute for Measurement and Instrumentation of the Hungarian Academy of Science, and compares it with the frequency modulation method. The results can be summarized as follows:

At ultrasonic transmission testing of plates, the minimum flaw size which can be detected is determined by the cross-section of the ultrasonic beam and by the possible errors in the measurement, if we suppose that no sound is transmitted through the flaw. Speed of testing is proportional to the cross-section of the sound beam, therefore we strive to choose as large a beam cross-section as possible. Comparing the two transmission methods from the point of view of the possible errors in the measurement, the advantage of the new method using pulse modulation and first-signal indication consists in its possible errors being much smaller than that of the frequency-modulation method; therefore it permits either detection of smaller flaws or a greater inspection speed than the frequency modulation method. A disadvantage of the new method is its limited field of application, because it is suitable for the inspection of thin ($d < 8$ mm) plates only if their surface is not rough.

Although detection of the smallest flaw as given theoretically by the wave-length is generally not possible because of errors in the measurement, one must choose nevertheless as small a wave-length as possible in order to reduce the minimum thickness of the smallest flaw which can be detected. Reduction of wave-length is limited by the surface roughness of the plates. Influence of the plate surface roughness on the errors in the measurement is smaller with the newly developed first-signal method than when using the frequency modulation method, and therefore in the first case a shorter wave-length can be chosen.

МЕТОД, РАЗРАБОТАННЫЙ ДЛЯ ИММЕРСИОННОГО КОНТРОЛЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛИСТОВ С ПОМОЩЬЮ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ПРОСВЕЧИВАНИЯ, И СРАВНЕНИЕ ЭТОГО МЕТОДА С МЕТОДОМ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИИ

И. ЭГРИ

РЕЗЮМЕ

В статье дается описание т. н. метода первичного сигнала, служащего для иммерсионного контроля металлических листов без обработки поверхности с помощью ультразвукового просвечивания, разработанного в Институте измерительной техники и приборостроения Академии наук Венгрии, затем дается сравнение этого метода с методом частотной модуляции. Результаты сравнения двух вышеупомянутых методов можно свести к нижеследующим.

При контроле металлических листов с помощью ультразвукового просвечивания размер обнаруживаемого наименьшего дефекта определяется поперечным сечению ультразвуковых лучей и величиной неопределенности измерения, если о дефектах возможно предполагать, что они не пропускают ультразвуковые колебания. Скорость контроля пропорциональна поперечному сечению ультразвуковых лучей, следовательно, существует стремление выбирать поперечное сечение ультразвуковых лучей возможно большим. Сравнивая точку зрения неопределенности измерения, в отношении метода просвечивания можно сказать, что преимуществом разработанного метода, использующего импульсную модуляцию и индикацию первосигнала, заключается в том, что неопределенность измерения значительно ниже, чем это имеет место в случае метода с частотной модуляцией; поэтому при помощи предлагаемого метода можно добиться по сравнению с методом частотной модуляции или обнаружения меньшего по размерам дефекта или же большей скорости контроля. Недостатком разработанного метода является ограниченность области применения, так как предлагаемый метод не пригоден для контроля тонких листов ($d < 8$ мм) только в том случае, если поверхность листов была обработана.

Несмотря на то, что обнаружение наименьшего по размерам дефекта, определяемого теоретически длиной волны, из-за неопределенностей измерения является в общем невозможным, все-таки длину волны, по мере возможности, необходимо выбрать небольшой в целях возможности снижения размера минимальной толщины обнаруживаемого дефекта. Уменьшение длины волны ограничивается качеством поверхности листов. Влияние качества поверхности листов на неопределенность измерения в случае разработанного метода первосигнала ниже, чем в случае применения частотной модуляции, следовательно в предыдущем случае длина волны может быть выбрана меньшей.

THE APPLICATION OF NETWORK THEORY TO THE THEORY OF VACUUM TUBE FEEDBACK OSCILLATORS

K. TARNAY

INSTITUTE OF WIRELESS COMMUNICATION, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received October 1, 1957]

Symbols

- a Quotient of geometrical progression
- \mathfrak{A} Voltage gain
- a Voltage ratio of fourterminal network from input to output
- b R_a/R_0
- \mathfrak{B} transfer impedance, measured at primary terminals of fourterminal network, with short-circuited secondary terminals
- β feedback factor
- \mathfrak{C} transfer admittance, measured at primary terminals of fourterminal network, with open-circuited secondary terminals
- C_n capacitance in phase shifting network ($n = 0, 1, 2, 3$)
- \mathfrak{D} current ratio of fourterminal network from input to output
- ϵ base of natural logarithm
- g_m transconductance
- i_a a. c. plate current
- i_g a. c. grid current
- j $\sqrt{-1}$
- L general network matrix
- Ω relative frequency (ωRC)
- p complex frequency ($\sigma + j\omega$)
- R_a load resistance
- R_n resistance in phase shifting network ($n = 0, 1, 2, 3$)
- u_a a. c. plate voltage
- u_g a. c. grid voltage
- Z_a plate-side impedance in a π network ($r_a + jX_a$)
- Z_c coupling impedance in a π network ($r_c + jX_c$)
- Z_g grid-side impedance in a π network ($r_g + jX_g$)
- Z_i input impedance of a fourterminal network
- Z_0 impedance of a vacuum tube
- Z_p impedance of a parallel RC circuit
- Z_s impedance of a series RC circuit
- X_n reactance in phase shifting network ($n = 0, 1, 2, 3$)
- Y_i input admittance of a fourterminal network
- Y_0 admittance of a vacuum tube

I. The conditions for sustained oscillation of a feedback vacuum tube oscillator

In the case of oscillators working on the feedback principle the voltage on the plate circuit of the oscillator tube is fed back to the grid through a fourterminal network, thus controlling the plate current. The ratio of the

plate voltage to the plate current of the tube — the impedance of the tube being driven — depends on the parameters of the tube and on the fourterminal network. We now suppose that the tube can be driven without grid current and that the input impedance of the grid circuit is represented on the secondary side of the fourterminal feedback network. In the general oscillator circuit shown in Fig. 1, the fourterminal network can be described by its general network characteristic.

$$\begin{bmatrix} u_a \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_g \\ i_g \end{bmatrix}$$

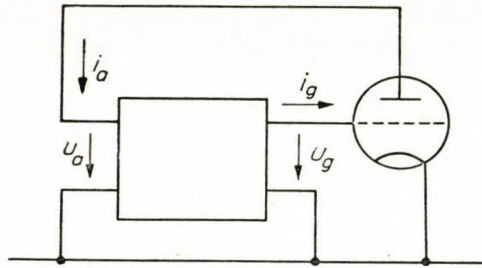


Fig. 1. General oscillator circuit

Without grid current ($i_g = 0$)

$$\begin{aligned} u_a &= \mathfrak{A} u_g \\ i_a &= \mathfrak{C} u_g \end{aligned}$$

Thus the impedance that can be measured on the anode-side of the fourterminal network is

$$Z_i = \frac{u_g}{i_a} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}.$$

Supposing we have a pentode, the alternating plate current of the tube can be calculated from the average transconductance and the alternating voltage on the grid:

$$i_a = g_m u_g.$$

Thus the impedance of the tube is

$$Z_0 = \frac{u_a}{i_a} = \frac{\mathfrak{A}}{g_m}.$$

The plate circuit of the oscillator tube can be substituted by an impedance Z_0 , and the primary side of the fourterminal network by Z_i (Fig. 2).

Connecting the two impedances in parallel, the resulting admittance of the circuit between points A and B is :

$$Y_{AB}(p) = Y_0 + Y_i.$$

This expression is a function of the complex frequency

$$p = \sigma + j\omega.$$

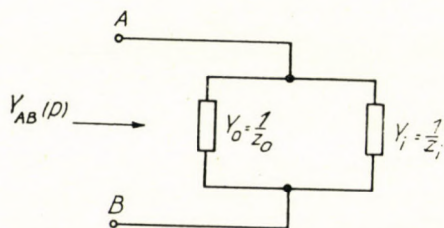


Fig. 2. Equivalent circuit

The natural frequencies of the system will be given by the roots of equation [2, 3, 4, 5]

$$Y_{AB} = \frac{g_m}{\Re(p)} + \frac{\Im(p)}{\Re(p)} = 0.$$

Since the waveform of the oscillation is described by an expression like

$$u = u_0 e^{pt}$$

the system will perform undamped oscillations if the equation determining the frequency has only imaginary roots.

After transforming the expression we may see that

$$\frac{\Re}{g_m} = -\frac{\Re}{\Im}$$

or that [6]

$$Z_0 = -Z_i.$$

As the fourterminal network consists of lossy reactances, Z_i will always contain a positive resistive component. If the impedance of the tube contains negative resistive part, this can compensate the losses of the fourterminal network. Thus the circuit becomes suitable to generate undamped oscillations.

It has been pointed out that \Re/\mathcal{C} , the plate-side input impedance of the fourterminal network has a positive real part, and the average transconductance of the tube — when the operating frequency is not too high — is also a positive real quantity, therefore the above equation holds only if \mathfrak{A} of the fourterminal network is negative. The voltage applied to the input side of the feedback circuit then yields a voltage of the opposite phase on the secondary (grid) side of the network.

Dividing by \mathfrak{A} we obtain from the preceding equation that the condition for oscillation is

$$g_m = -\mathcal{C}.$$

This equation shows that the grid of the tube must have a voltage of such amplitude that the resulting a. c. plate current from this controlling effect — which is also the primary current of the fourterminal network — produces at the secondary end of the network the right amplitude.

The transconductance of the tube being positive and real, whilst the transfer admittance of the fourterminal feedback network is generally complex, the above equation can be separated to real and imaginary part

$$\operatorname{Re} \mathcal{C} = -g_m$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{C} = 0.$$

As the average transconductance depends on amplitude [7], the equation for the real part can be used for the determination of amplitude, and the imaginary part for frequency.

II. LC oscillators

Negative \mathfrak{A} can be most simply realized by a transformer, where the secondary voltage will be opposite in phase to the primary if the windings are properly connected. Depending on where the tuning capacitance, that determines the frequency, is connected, we obtain a tuned plate (Fig. 3), or a tuned grid (Fig. 4) oscillator [8, 9, 10].

We may obtain further oscillator circuits [11] if the fourterminal feedback network is assembled of reactances in arrangement π (Fig. 5), in this case, supposing low loss reactances, the transfer admittance is :

$$\mathcal{C} = \frac{r_a + r_c + r_g + j(X_a + X_c + X_g)}{(r_a + jX_a) \cdot (r_g + jX_g)} \simeq \frac{r_a + r_c + r_g + j(X_a + X_c + X_g)}{-X_a X_g}.$$

The transfer admittance is pure real if

$$X_a + X_g + X_c = 0$$

and is negative if

$$X_a X_g > 0$$

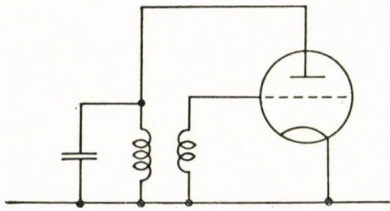


Fig. 3. Tuned plate oscillator

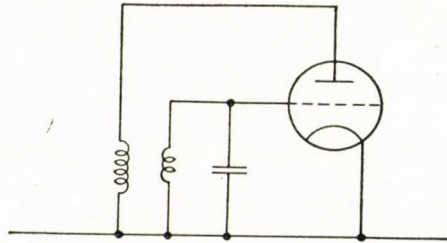


Fig. 4. Tuned grid oscillator

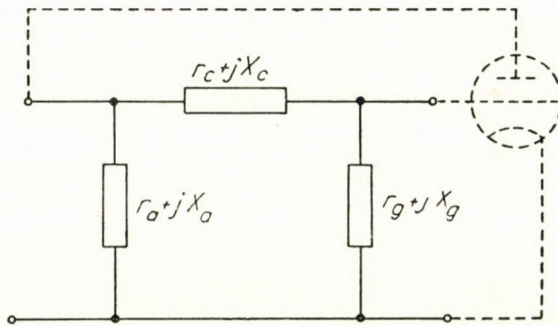


Fig. 5. Fourterminal feedback network

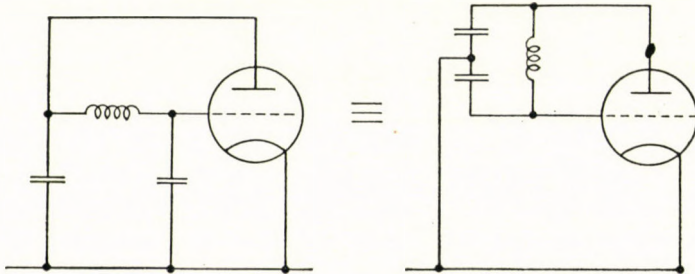


Fig. 6. Colpitts oscillator

i.e. if X_a and X_g are reactances with the same sign and character, that is, if both are inductances, or both are capacitances. The imaginary part of the transfer admittance becomes zero if X_c is of an opposite character to the preceding terms, but of the same absolute value.

On the basis discussed above we obtain further oscillator circuits :
 a) X_c is an inductance, in consequence X_a and X_g are capacitances.
 This is the Colpitts oscillator shown in Fig. 6 [12, 13].

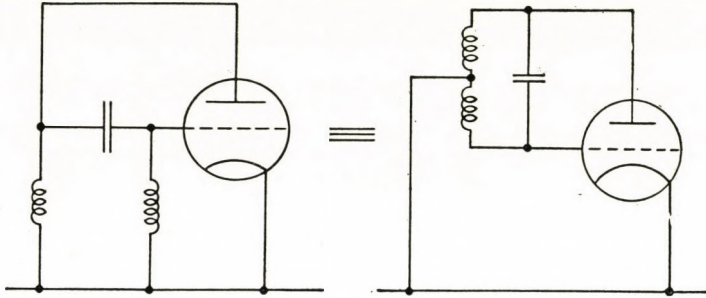


Fig. 7 Hartley oscillator

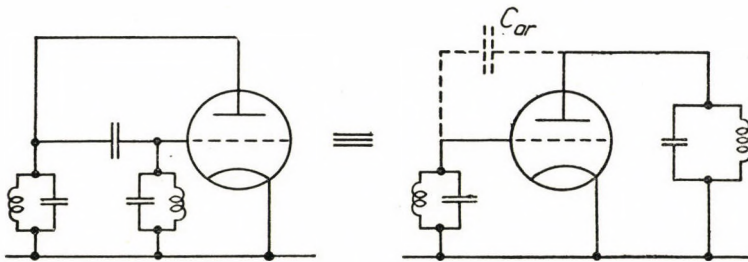


Fig. 8 TP—TG oscillator

b) X_c is a capacitance, in consequence X_a and X_g are inductances.
 This is the Hartley oscillator (Fig. 7) [14, 15]. If X_a and X_g are parallel tuned circuits tuned to be of inductive character, the circuit is called a Huth—Kühn, or TP—TG oscillator (Fig. 8). In this circuit coupling takes place between the grid and plate circuits usually through the grid-plate capacitance of the tube [16, 17].

III. RC oscillators

Oscillators in the audio-frequency range have feedback networks consisting of RC elements, of these there are two basic types generally used :

The phase-shift oscillator working at only one frequency [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24], the WIEN circuit which can be tuned by using relatively few variable components [25].

The phase-shift oscillators are treated with the practically always justified supposition that the time constants of the various phase shifters are identical, i. e. using the symbols of Fig. 9 that

$$R_n C_n = \text{const.}$$

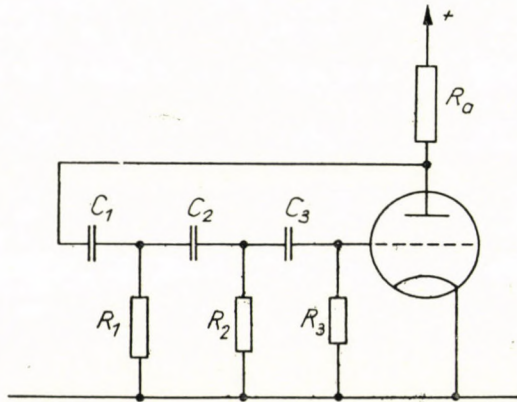


Fig. 9. Phase shift oscillator

The second condition for this analysis, that holds in practice too, is that the ratio of the impedances of the subsequent elements are constant

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 & X_1 &= X_0 \\ R_2 &= \frac{1}{a} R_0 & X_2 &= \frac{1}{a} X_0 \\ R_3 &= \frac{1}{a^2} R_0 & X_3 &= \frac{1}{a^2} X_0 \end{aligned}$$

or in general form

$$R_n = \frac{1}{a^{n-1}} R_0 \quad X_n = \frac{1}{a^{n-1}} X_0.$$

In accordance with the above conditions the matrix of the n -th phase shifters is

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 + j \frac{X_n}{R_n} & j X_n \\ \frac{1}{R_n} & 1 \end{bmatrix}$$

while the matrix of the load resistance is

$$\mathbf{L}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_a} & 1 \end{bmatrix}.$$

After determining the resultant matrix

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_a \times \mathbf{L}_1 \times \mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_3,$$

which is given by the product of the four matrices, the transfer admittance of the 3 phase shifters connected to the load resistance (marking $R_a/R_b = b$, then multiplying the expression with R_a and with the introduction of the relative frequency) is

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}R_a = & 1 + b(1 + a + a^2) + j\frac{1}{\Omega} [3 + 2b(1 + a + a^2 + a^3)] - \\ & - \frac{1}{\Omega^2} [3 + b(1 + a + a^2 + a^3)] - j\frac{1}{\Omega^3}. \end{aligned}$$

Oscillation occurs at the frequency where the imaginary part of \mathfrak{C} is zero, i. e. where

$$\frac{1}{\Omega} 3 + 2b(1 + a + a^2 + a^3) - \frac{1}{\Omega^3} = 0$$

whence the frequency of oscillation is

$$\Omega = \sqrt[3]{\frac{1}{3 + 2b(1 + a + a^2 + a^3)}}.$$

If the feedback network does not load the plate circuit, i. e. where

$$b = 0$$

then the relative frequency is

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{3R_0C_0}}. \end{aligned}$$

The difference between the frequency of oscillation and the nominal frequency of the feedback network is shown as a function of the circuit characterising parameters in Fig. 10.

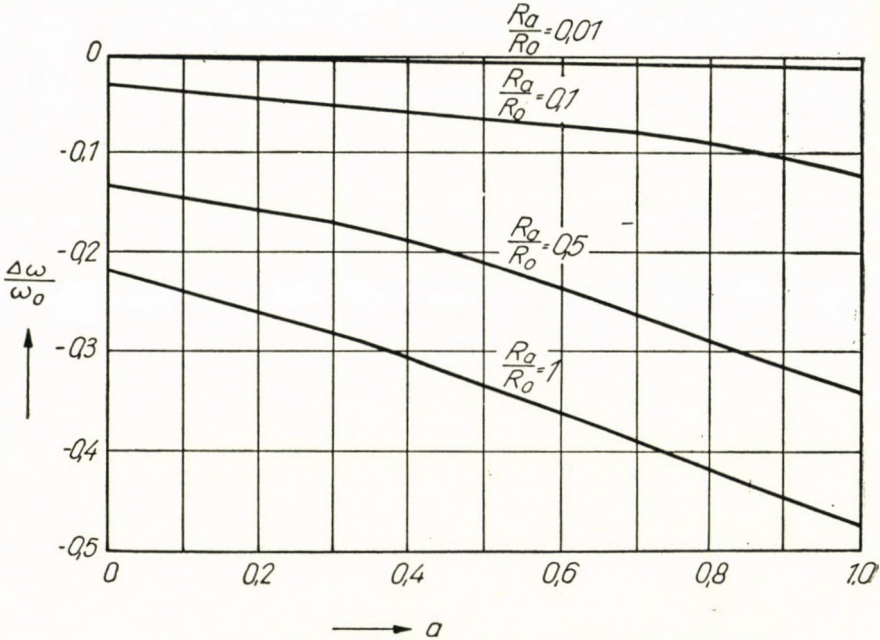


Fig. 10. The difference between the nominal frequency of the feedback circuit and that of the oscillation

The product of the real part of c and the load resistance, is using the equation obtained for the frequency

$$\mathcal{C}R_a = - [8 + 2b(4 + 4a + 4a^2 + 3a^3) + 2b^2(1 + 3a + 6a^2 + 16a^3 + 7a^4 + 4a^5 + 6a^6)]$$

The quantity $\mathcal{C}R_a$ is the gain given by the amplifier stage.

The relationship between \mathcal{C} and the circuit parameters can be seen on Fig. 11.

The theoretical circuit of a Wien-bridge oscillator is shown in Fig. 12.

The feedback network consists of three fourterminal circuits of different construction connected in cascade (Fig. 13). These are : the load resistance, a frequency-dependent voltage divider and an amplifier stage.

The matrix of the load resistance, considered as a fourterminal network is

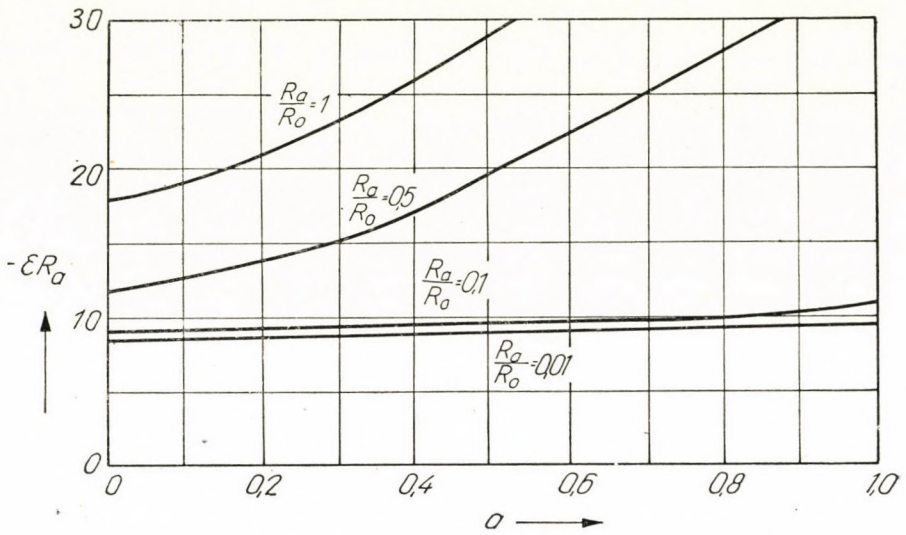


Fig. 11. Condition of oscillation

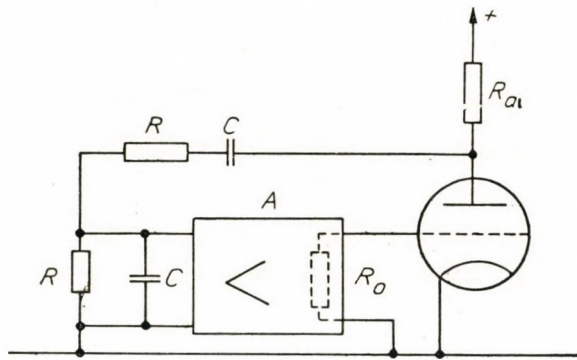


Fig. 12. Theoretical circuit of a Wien-bridge oscillator

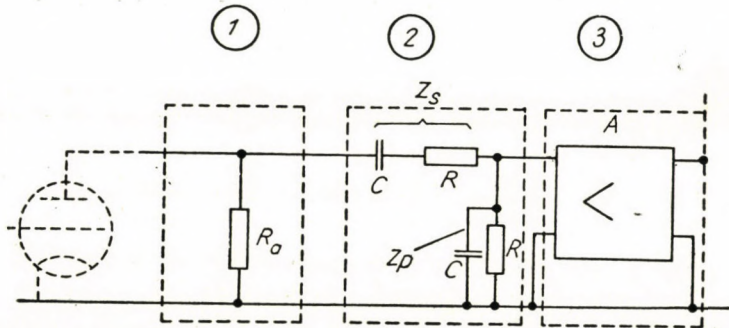


Fig. 13. The feedback network of a Wien-bridge oscillator

$$\mathbf{L}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_a} & 1 \end{bmatrix}$$

using the symbols of Fig. 13 the matrix of the frequency-dependent voltage-divider is

$$\mathbf{L}_w = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_s}{Z_p} & Z_s \\ \frac{1}{Z_p} & 1 \end{bmatrix}.$$

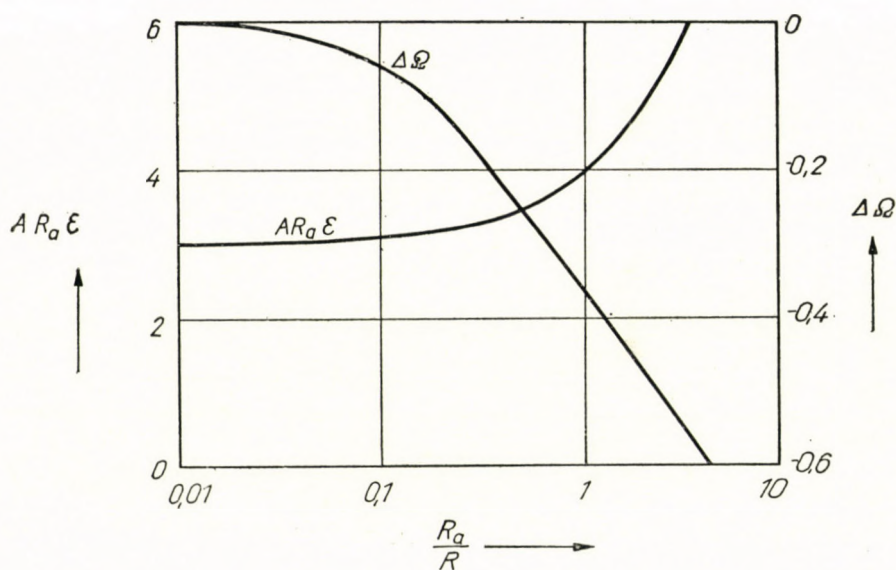


Fig. 14

The matrix of the amplifier with a gain A , supposing infinite input impedance and R_0 output impedance is

$$\mathbf{L}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & R_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Having determined the resulting \mathfrak{G} of the three fourterminal networks, we get the following equation

$$A R_a \mathfrak{G} = 1 + \frac{Z_s}{Z_p} + \frac{R_a}{Z_p}.$$

As the impedance of the series and parallel RC circuits is, marking $\Omega = \omega RC$

$$Z_s = R \left(1 - j \frac{1}{\Omega} \right)$$

and

$$Z_p = \frac{R}{1 + j\Omega}$$

then

$$A R_a \mathfrak{G} = 3 + \frac{R_a}{R} + j \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} + \Omega \frac{R_a}{R} \right).$$

On the basis of the equation

$$\text{Im } \mathfrak{G} = 0$$

the equation for the frequency is then

$$\Omega^2 \left(\frac{R_a}{R} + 1 \right) - 1 = 0$$

whence

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_a}{R} + 1}} - 1$$

If $R_a = 0$ is the relative frequency $\Omega_0 = 1$, the deviation from this is seen as the function of the ratio $\frac{R_a}{R}$ on in Fig. 14. The value for

$$A R_a \mathfrak{G} = 3 + \frac{R_a}{R}$$

is shown in the same figure. This value is the gain yielded from the two amplifier stages.

REFERENCES

1. EDSON, W. : Vacuum Tube Oscillators. Wiley and Sons, London, 1953. p. 66, 71.
2. LLEWELYN, F. B. : Constant Frequency Oscillators. Proc. IRE. (19) 1931. dec. p. 2063.
3. BODE : Network Analysis and Feedback Amplifier Design. D. Van Nostrand, New York, 1949. p. 165.
4. CHU : Notes on the Stability of Linear Networks. Proc. IRE. (32) 1944. p. 630—637.
5. VÁZSONYI : A Generalization of Nyquist's Stability Criteria. Journal Appl. Phys. (20) 1949. p. 863—867.
6. ROTHE—KLEEN : Elektronenröhren als Schwingungserzeuger und Gleichrichter. Akad. Verlag. Leipzig 1948. p. 9.
7. ROTHE—KLEEN, loc. cit. p. 76.
8. THOMAS : Theory and Design of Valve Oscillators. Chapman and Hall. London 1951. p. 32.
9. ROTHE—KLEEN, loc. cit. p. 40.
10. EDSON, loc. cit. p. 158, 169.
11. ROTHE—KLEEN, loc. cit. p. 49.
12. THOMAS, loc. cit. p. 38.
13. EDSON, loc. cit. p. 165.
14. THOMAS, loc. cit. p. 35.
15. EDSON, loc. cit. p. 167.
16. THOMAS, loc. cit. p. 37.
17. EDSON, loc. cit. p. 173.
18. THOMAS, loc. cit. p. 214.
19. ROTHE—KLEEN, loc. cit. p. 65.
20. EDSON, loc. cit. p. 183.
21. JOHNSON, R. W. : Extending the Frequency Range of the Phase-Shift Oscillator. Proc. IRE. (33) 1945. p. 597—602.
22. HINTON, W. R. : The Design of RC oscillator Phase Shifting Networks. Electronic Eng. (22) 1950. p. 13—17.
23. SULZER, P. G. : The Tapered Phase-Shift Oscillator. Proc. IRE. (36) 1948. p. 1302—1305.
24. VAUGHAM, W. C. : Phase-Shift Oscillator. Wireless Eng. (26) 1949. p. 391—399.
25. ROTHE—KLEEN, loc. cit. p. 68.

SUMMARY

The oscillator analysis, based on general network theory discussed here, shows that in the case of feedback oscillators, the oscillating condition, where the tube characteristic is quasilinear, is uniquely defined by the average transconductance of the tube and by a single parameter of the fourterminal feedback network, the transfer admittance.

The second part of the paper contains derivations of *LC* oscillator circuits on the basis of the results obtained for the fourterminal feedback network, and expressions for the conditions for sustained oscillation and the frequency of oscillation of two generally used *RC*-type oscillators.

The oscillations of feedback oscillators are treated in the literature [1] on the basis of the condition

$$A\beta = 1$$

The gain *A* in this condition for oscillation depends on the characteristics of the electron tube used and the circuit whilst the feedback factor β on that of the circuit. Single vacuum tube containing circuits — but often with multi-tube oscillators too — more precise results can be obtained, if we put the condition for oscillation in such a form that one of the two parameters depends only of the tube while the other on the circuit only. In our synthesis the tube is represented by its transconductance, while the circuit by its transfer admittance.

ANWENDUNG DER VIERPOLTHEORIE IN DER THEORIE DER RÜCKGEKOPPELTEN RÖHRENGENERATOREN

K. TARNAY

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorhergehend veröffentlichte, auf Grund der Vierpoltheorie durchgeführte Oszillatorenanalyse zeigt, dass bei rückgekoppelten Oszillatoren der Schwingungszustand im Falle einer quasilinearen Anodenstrom-Anodenspannungskennlinie durch die mittlere Steilheit der Röhre und durch einen einzigen Parameter des rückkoppelnden Vierpols — die Kettenadmittanz — eindeutig bestimmt ist.

Der zweite Teil der Abhandlung enthält die Ableitung von LC-Oszillatorenaltungen auf Grund der für den rückkoppelnden Vierpol erhaltenen Bindungen, ferner die sich auf die zwei am meisten verbreiteten RC-Oszillatortypen beziehenden Zusammenhänge zwischen der Anfachungsbedingung und der Schwingungsfrequenz.

Die Schwingungsverhältnisse rückgekoppelter Oszillatoren werden in der Literatur auf Grund der Bedingung

$$A\beta = 1$$

untersucht. Die in der Schwingungsbedingung vorkommende Verstärkung A ist von der in der Schaltung enthaltenen Elektronenröhre und dem Stromkreis, der Rückkopplungsfaktor β von der Charakteristik des Stromkreises abhängig. Bei einer Einröhrenschaltung — oft auch bei Mehrröhrenoszillatoren — erhält man genauere Ergebnisse wenn man die Einschwingungsbedingung unter Benützung der Steilheit der Röhre und des einzigen Parameters des rückkoppelnden Vierpols, nämlich der Kettenadmittanz (c) ableitet.

L'EMPLOI DE LA THÉORIE DES RÉSEAUX DANS LA THÉORIE DES OSCILLATEURS À TUBES

K. TARNAY

RÉSUMÉ

L'analyse présentée, exécutée sur un oscillateur à base de la théorie des réseaux démontre que, pour un oscillateur à réaction où le caractéristique du tube est quasi-linéaire, la condition d'oscillation est définie sans équivoque par la transconductance moyenne du tube et par l'unique paramètre du réseau quadripolaire, qui est l'admittance de transfert.

La seconde partie de l'étude contient la dérivation des circuits des oscillateurs LC à base des résultats obtenus pour les réseaux quadripolaires. Elle contient en outre les expressions concernant les conditions d'oscillation et la fréquence de l'oscillation de deux types d'oscillateurs RC, d'un emploi courant.

Les conditions d'oscillation des oscillateurs à réaction sont traitées dans la littérature à base de la condition

$$A\beta = 1.$$

L'amplification « A » de la formule dépend des caractéristiques du tube et du circuit, tandis que le facteur de réaction β dépend des caractéristiques du circuit. Des résultats plus précis peuvent être obtenus pour les circuits contenant un seul tube — et souvent aussi pour les oscillateurs à plusieurs tubes — en transformant la condition d'oscillation dans une telle forme où l'un des deux paramètres, la transconductance, ne dépend que du tube et l'autre, l'admittance de transfert, uniquement du circuit.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ В ТЕОРИИ ЛАМПОВЫХ
ГЕНЕРАТОРОВ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

К. ТАРНАИ

РЕЗЮМЕ

Анализ работы ламповых генераторов на основе теории сетей показывает, что в случае ламповых генераторов с обратной связью режим колебаний при квазилинейной характеристике определяется средней крутизной электронной лампы и единственным параметром четырехполюсника обратной связи — цепной проводимостью.

Во второй части приведены для четырехполюсника с обратной связью схемы LC-генераторов, затем даны условия самовозбуждения и зависимости частоты двух наиболее распространенных RC-генераторов от введенных параметров.

Режим колебаний генератора с обратной связью исследуется в литературе, исходя из условия

$$A\beta = 1.$$

В этом уравнении, выражающем условие самовозбуждения, усиление A зависит от параметров электронной лампы и схемы генератора, а коэффициент обратной связи β — только от параметров цепи. В случае схемы генератора с одной единственной лампой (но часто и в случае с несколькими электронными лампами) получаются более точные результаты, если условия самовозбуждения рассчитывать, используя параметр крутизны характеристики электронной лампы и единственный параметр четырехполюсника обратной связи, т. е. цепную проводимость.

A NEW METHOD OF APPLYING HYPERMATRICES IN THE THEORY OF MULTIPHASE SYSTEMS

P. BAJCSAY

5th DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

and

V. LOVASS-NAGY

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BUILDING SCIENCES AND COMMUNICATIONS, BUDAPEST

[Manuscript received October 9, 1957]

I. Introduction

It is known that the four-terminal theory enables us to set up important relations for the computation of single-phase uniform transmission lines [1]. D. W. C. SHEN obtained certain results for the description of the stationary phenomena of monophasic, uniform transmission lines, and — by utilizing the hypermatrix calculus — it is easy to generalize these results and apply them also to multiphase uniform transmission lines [2]. Therefore, it is with the aid of hypermatrices that the authors of this paper propose to establish mathematical relationships for the description of the transient and stationary phenomena of a system composed of cyclically symmetrical, identical, cascade-connected $2(m + 1)$ poles with given voltages at the points of supply and given intensities of current at the points of consumption. The relations to be obtained will serve at the same time as approximate formulae for the computation of multiphase, cyclically symmetrical, uniform transmission systems with given voltages at the points of supply and given current-intensities at those of consumption.

II. Notations

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{quadratic matrix composed of the scalar elements } a_{ij};$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{quadratic hypermatrix composed of the blocks } \mathbf{A}_{ij};$$

A^{-1} inverse of A ;
 A^* the conjugate transpose of A ;

$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ column matrix ;

$b^* = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ row matrix ;

$A \cdot B = [A b_{ij}] ; B = [b_{ij}]$
 $A \times B = [a_{ij} B] ; A = [a_{ij}]$ } direct products ;

$\langle d_i \rangle = \langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ diagonal matrix ;

$E_n = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$ unit matrix of the n -th order ;

$C(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ cyclic matrix of the n -th order ;

$w_v^* = [1, \omega_v, \dots, \omega_v^{n-1}]$ v -th eigenvector of cyclic matrix of the n -th order ;

$\omega_v = e^{\frac{2v\pi}{n} j}$ n -th root of unity with the index v ;
 $j =$ imaginary unit ;

$$D = D_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Let us further denote the electric constants, voltages and current intensities of a system of n cascade-connected $2(m+1)$ -poles as follows :

- R_k ohmic resistance of a phase of the k -th $2(m+1)$ -pole ;
- L_{k0} self inductance of a phase of the k -th $2(m+1)$ -pole ;
- L_{kv} mutual inductance between the l -th and $(l \pm v)$ -th phases of the k -th $2(m+1)$ -pole ;
- C_{k0} capacitance between a phase of the k -th $2(m+1)$ -pole and the zero phase ;
- C_{kv} capacitance between the l -th and $(l \pm v)$ -th phases of the k -th $2(m+1)$ -pole ;
- G_{k0} leakage between a phase of the k -th $2(m \pm 1)$ -pole and the zero phase ;
- G_{kv} leakage between the l -th and $(l \pm v)$ -th phases of the k -th $2(m+1)$ -pole ;
- u_{kl} voltage difference between the l -th phase and the zero phase on the terminal connecting the k -th and $(k+1)$ -th $2(m+1)$ -poles ;
- i_{kl} intensity of current flowing from the l -th phase of the k -th $2(m+1)$ -pole to the l -th phase of the $(k+1)$ -th $2(m+1)$ -pole.

These constants, voltages and current-intensities can be compounded in the following quadratic and column matrices :

$$R_k = \langle R_k, R_k, \dots, R_k \rangle = R_k E_m ;$$

$$L_k = C(L_{k0}, L_{k1}, \dots, L_{k,m-1}) ;$$

$$K_k = C\left(\sum_{v=0}^{m-1} C_{kv}, -C_{k1}, \dots, -C_{k,m-1}\right) ;$$

$$G_k = C \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} G_{k\nu}, -G_{k1}, \dots, -G_{km-1} \right);$$

$$u_k = \begin{bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ \vdots \\ u_{km} \end{bmatrix}; \quad i_k = \begin{bmatrix} i_{k1} \\ i_{k2} \\ \vdots \\ i_{km} \end{bmatrix}.$$

Further :

- $\lambda_{k\nu}$... ν -th eigenvalue of the L_k matrix ;
- $\kappa_{k\nu}$... ν -th eigenvalue of the K_k matrix ;
- $\gamma_{k\nu}$... ν -th eigenvalue of the G_k matrix ;

III. Some matrix relations used for the solution of the electrotechnical problems raised

a) *Spectral decomposition of the matrix $D_n D_n^*$*
 The characteristic equation of the matrix

$$D_n D_n^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

is given by the formula

$$|D_n D_n^* - \delta E_n| = 0. \tag{3.1}$$

Using the new parameter φ introduced by the relation $\delta = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ we can write formula (3.1) in the following form :

$$\begin{bmatrix} 2 \cos \varphi & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 \cos \varphi & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \cos \varphi & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos \varphi & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \cos \varphi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (2 \cos \varphi - 1) \frac{\sin n \varphi}{\sin \varphi} - \frac{\sin (n-1) \varphi}{\sin \varphi} = 0.$$

Since

$$\sin \varphi \neq 0,$$

$$\cos \frac{2n+1}{2} \varphi = 0,$$

hence
$$\varphi_k = \frac{2k-1}{2n+1} \pi; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

The roots of the characteristic equation (3.1) are, therefore, these:

$$\delta_k = 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi_k}{2} \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \right); \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

The eigenvectors of $\mathbf{D}_n \mathbf{D}_n^*$ are determined by means of Lagrange's matrix polynomials (v. [3] pp. 446-447).

In the present case the element in the r -th row and s -th column of the " k -th Lagrange matrix-polynomial" $L_k(\mathbf{D}_n \mathbf{D}_n^*) = \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^*$; ($k = 1, 2, \dots, n$) is

$$\frac{4}{2n+1} \left\{ \cos \left[(2k-1) \frac{2r-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \right] \cdot \cos \left[(2k-1) \frac{2s-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \right] \right\}; \quad r, s = 1, 2, \dots, n.$$

Hence, obviously,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k^* &= \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \left[\cos \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}, \cos 3 \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}, \dots, \cos (2n-1) \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \right] = \\ &= [v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{nk}]; \quad k = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (3.3)$$

where the short notation v_{ik} means evidently

$$v_{ik} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \cos (2i-1) \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}.$$

It can be proved that

$$\mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_l = \begin{cases} 1, & \text{if } k = l, \\ 0, & \text{if } k \neq l, \end{cases}$$

so that the eigenvectors of the matrix $\mathbf{D}_n \mathbf{D}_n^*$ constitute an orthogonal and normal system.

In consideration of the foregoing arguments it is clear that, if we introduce the notations $\mathbf{V}_n = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ and $\mathbf{A}_n = \langle \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \rangle$, the matrix $\mathbf{D}_n \mathbf{D}_n^*$ can be set up as (cf. [3] p. 448):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_n \mathbf{D}_n^* &= \mathbf{V}_n \mathbf{A}_n \mathbf{V}_n^*. & (3.4) \\ (\mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^* &= \mathbf{E}_n, \mathbf{V}_n^{-1} = \mathbf{V}_n^*.) \end{aligned}$$

b) *Canonical representation of the analytic function of symmetrical quadratic matrices of the second order*

It is evidently possible to express the roots of the characteristic equation of the matrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

— composed of the arbitrarily chosen scalar elements a, b, c — through the formulae

$$\mu_1 = s - \sqrt{d} \quad \text{and} \quad \mu_2 = s + \sqrt{d},$$

where

$$s = \frac{a + c}{2}, \quad d = \left(\frac{a - c}{2} \right)^2 + b^2.$$

If, on the strength of the identity $\left(\frac{c - a}{2\sqrt{d}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{d}} \right)^2 \equiv 1$, the notations

$$\frac{c - a}{2\sqrt{d}} = \cos 2\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{d}} = \sin 2\varphi$$

are introduced, the canonical representation of the matrix \mathbf{M} can surely be written in the following form:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (s + \sqrt{d}) \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} [\sin \varphi, \cos \varphi] + \\ &+ (s - \sqrt{d}) \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} [\cos \varphi, -\sin \varphi] = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - \sqrt{d} & 0 \\ 0 & s + \sqrt{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

So the eigenvectors of the matrix \mathbf{M} will assume the forms

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad \text{respectively.}$$

If the symbol $f(z)$ stands for an arbitrary analytic function of the variable z , the canonical representation of the matrix-function $f(\mathbf{M})$ can be written as

$$f(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(s - \sqrt{d}) & 0 \\ 0 & f(s + \sqrt{d}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi \cdot f(s - \sqrt{d}) + \sin^2 \varphi \cdot f(s + \sqrt{d}) & -\cos \varphi \sin \varphi \cdot \{f(s - \sqrt{d}) - f(s + \sqrt{d})\} \\ -\cos \varphi \sin \varphi \cdot \{f(s - \sqrt{d}) - f(s + \sqrt{d})\} & \sin^2 \varphi \cdot f(s - \sqrt{d}) + \cos^2 \varphi \cdot f(s + \sqrt{d}) \end{bmatrix}.$$

Making use of well-known trigonometric identities we can derive from this the following formula:

$$f(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \left\{ (f(s - \sqrt{d}) + f(s + \sqrt{d})) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f(s - \sqrt{d}) - f(s + \sqrt{d})}{2\sqrt{d}} \begin{bmatrix} c - a & -2b \\ -2b & a - c \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.5)$$

c) *Semicanonical representation of the analytic function of hypermatrices composed of cyclic blocks, by means of direct products*

Supposing all blocks of the hypermatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}$$

of the $2m$ -th order, composed exclusively of quadratic blocks of the m -th order, to be cyclic (v., for instance, [3] p. 452), any

$$\mathbf{Q}_{kl} = \mathbf{C}(q_{0,kl}, q_{1,kl}, \dots, q_{m-1,kl})$$

block can be expressed in the canonical form

$$\mathbf{Q}_{kl} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \varrho_{\nu,kl} \mathbf{w}_{\nu} \mathbf{w}_{\nu}^*,$$

where

$$\varrho_{\nu,kl} = q_{0,kl} + q_{1,kl} \omega_{\nu} + \dots + q_{m-1,kl} \omega_{\nu}^{m-1}; \quad \omega_{\nu} = e^{\frac{2\nu\pi}{m}j}.$$

It is evident that, by utilizing the above canonical representation of the cyclic blocks, the hypermatrix \mathbf{Q} can be written as the sum of direct

products in the following form :

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \begin{bmatrix} \varrho_{\nu,11} & \varrho_{\nu,12} \\ \varrho_{\nu,21} & \varrho_{\nu,22} \end{bmatrix} \times \mathbf{w}_{\nu} \mathbf{w}_{\nu}^* \tag{3.6}$$

Moreover, since the multiplication of two direct products can be performed in the following form : $(\mathbf{U}_1 \times \mathbf{V}_1) (\mathbf{U}_2 \times \mathbf{V}_2) = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \times \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2$ provided that $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ and $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ are conformable in the given order and

$$\mathbf{w}_k^* \mathbf{w}_l = \begin{cases} 1, & \text{if } k = l \\ 0, & \text{if } k \neq l \end{cases}$$

any $f(\mathbf{Q})$ analytic function of the hypermatrix \mathbf{Q} can be expressed as the sum of direct products in the following manner :

$$f(\mathbf{Q}) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} f \left\{ \begin{bmatrix} \varrho_{\nu,11} & \varrho_{\nu,12} \\ \varrho_{\nu,21} & \varrho_{\nu,22} \end{bmatrix} \right\} \times \mathbf{w}_{\nu} \mathbf{w}_{\nu}^* \tag{3.7}$$

It must be clear from the above that any arbitrary analytical function $f(\mathbf{F})$ of a hypermatrix of the $2mn$ -th order

$$\mathbf{F} = \langle \mathbf{Q}_k \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{k,11} & \mathbf{Q}_{k,12} \\ \mathbf{Q}_{k,21} & \mathbf{Q}_{k,22} \end{bmatrix} \right\rangle$$

composed of the cyclic blocks $\mathbf{Q}_{k,11}, \mathbf{Q}_{k,12}, \mathbf{Q}_{k,21}, \mathbf{Q}_{k,22}$ of the m -th order can be set up in the "semicanonical" form :

$$f(\mathbf{F}) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \left\langle f \left\{ \begin{bmatrix} \varrho_{\nu,k,11} & \varrho_{\nu,k,12} \\ \varrho_{\nu,k,21} & \varrho_{\nu,k,22} \end{bmatrix} \right\} \right\rangle \times \mathbf{w}_{\nu} \mathbf{w}_{\nu}^* \tag{3.8}$$

where, evidently, $\varrho_{\nu,k,11}$, etc. symbolizes the ν -th eigenvalue of the block $\mathbf{Q}_{k,11}$, etc.

IV. Matrix form of a system of differential equations serving for the mathematical description of a system of cascade-connected 2 (m + 1)-poles with given voltages at the points of supply and given current-intensities at the points of consumption

Let us take $n + 1$ pieces of cyclically symmetrical 2 (m + 1)-poles, each built up from ohmic resistances, induction coils and condensers as shown in Fig. 1. Let us connect them in cascade as per Fig. 2 and regard the voltages

at the terminals with the index 0 (in the following : "feeding point") and the current intensities required at the terminals with the index $n + 1$ (in the following : "consumption point") as given functions of time. Let us further

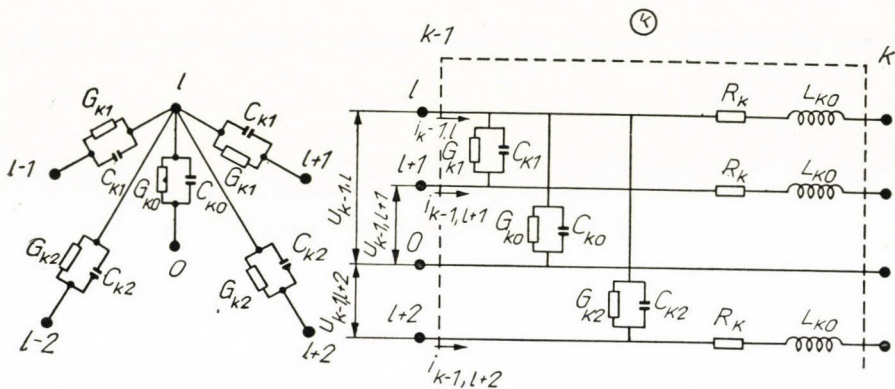


Fig. 1

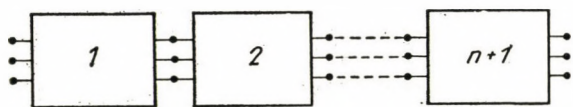


Fig. 2

suppose that all $2(m + 1)$ -poles are inductively and capacitively isolated from one another. It follows from Kirchhoff's so-called "second law" [4] that the stationary and transient processes of such a system can be represented by the following linear inhomogeneous simultaneous differential equations of constant coefficient :

$$u_{kl} - u_{k-1,l} = R_k i_{kl} + \sum_{v=0}^{m-1} L_{kv} \frac{d}{dt} i_{k,v+l}; \tag{4.1a}$$

$$i_{kl} - i_{k-1,l} = - \sum_{v=0}^{l-1} G_{kv} u_{k-1,v+1} + \sum_{v=0}^{m-1} G_{kv} u_{k-1,l} - \sum_{v=l+1}^{m-1} G_{kv} u_{k-1,v+1} - \sum_{v=0}^{l-1} C_{kv} \frac{d}{dt} u_{k-1,v+1} + \sum_{v=0}^{m-1} C_{kv} \frac{d}{dt} u_{k-1,l} - \sum_{v=l+1}^{m-1} C_{kv} \frac{d}{dt} u_{k-1,v+1} \tag{4.1b}$$

($k = 1, 2, \dots, n + 1$; $l = 1, 2, \dots, m$).

The feeding-point voltages, as prescribed above, are these :

$$u_{0l} = u_{0l}(t); \quad (l = 1, 2, \dots, m) \tag{4.2a}$$

and the prescribed current-intensities at the consumption points :

$$i_{n+1,l} = i_{n+1,l}(t); \quad (l = 1, 2, \dots, m). \quad (4.2b)$$

The system of simultaneous equations under (4.1a) and (4.1b) and the equations (4.2a) and (4.2b) can be written in a simpler form by compounding the resistances, inductances, capacitances and leakances which belong to the same $2(m+1)$ -pole, further the currents flowing through those terminals of the same $2(m+1)$ -pole which bear the same serial number, and, finally, the voltages in the terminals of the same serial number, into a quadratic matrix of the m -th order and into column matrices composed of m elements.

After a suitable arrangement of the matrix equations thus obtained, we have :

$$\frac{d}{dt} i_k = -L_k^{-1} R_k i_k + L_k^{-1} (u_k - u_{k-1}); \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.3a\alpha)$$

$$u_{n+1} = u_n + R_{n+1} i_{n+1} + L_{n+1} \frac{d}{dt} i_{n+1}, \quad (4.3a\beta)$$

and

$$\frac{d}{dt} u_k = -K_{k+1}^{-1} G_{k+1} u_k + K_{k+1}^{-1} (i_{k+1} - i_k); \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.3b\alpha)$$

$$i_0 = i_1 - G_1 u_0 - K_1 \frac{d}{dt} u_0, \quad (4.3b\beta)$$

respectively.

Furthermore,

$$u_0 = u_0(t) \quad (4.4a)$$

and

$$i_{n+1} = i_{n+1}(t). \quad (4.4b)$$

Our obvious task is to solve the simultaneous differential equations (4.3a α) and (4.3b α), for — by doing so and in consideration of equations (4.4a) and (4.4b) — we can also determine u_{n+1} and i_0 as the solutions of equations (4.3a β) and (4.3b β).

Let us now introduce the following notations :

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_{n-1} \\ i_n \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}; \quad \tilde{i} = \begin{bmatrix} L_1^{-1} u_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{n+1}^{-1} i_{n+1} \end{bmatrix};$$

and further

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= -\langle \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{R}_1, \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{L}_n^{-1} \mathbf{R}_n \rangle; \\ \mathbf{A}_{22} &= -\langle \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{G}_2, \mathbf{K}_3^{-1} \mathbf{G}_3, \dots, \mathbf{K}_{n+1}^{-1} \mathbf{G}_{n+1} \rangle; \\ \mathbf{A}_{12} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{L}_1^{-1} & \mathbf{L}_2^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{L}_2^{-1} & \mathbf{L}_3^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathbf{L}_{n-2}^{-1} & \mathbf{L}_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mathbf{L}_{n-1}^{-1} & \mathbf{L}_n^{-1} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{A}_{21} &= -\begin{bmatrix} \mathbf{K}_2^{-1} & -\mathbf{K}_3^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_3^{-1} & -\mathbf{K}_4^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_4^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{K}_n^{-1} & -\mathbf{K}_{n+1}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{K}_{n+1}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

These notations enable us to compound the simultaneous differential equations (4.3aa) and (4.3ba) into the system

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i} = \mathbf{A}_{11} \mathbf{i} + \mathbf{A}_{12} \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{i}}, \quad (4.5a)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{A}_{21} \mathbf{i} + \mathbf{A}_{22} \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{u}}, \quad (4.5b)$$

which can be represented in the following manner also :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{i}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

If, for simplicity's sake, we use the notations :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{i}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

we obtain from (4.6) the following matrix-differential equation :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{y}}. \quad (4.7)$$

V. Stationary solution of the matrix-differential equation of a system composed of different 2 (m + 1)-poles

Let us assume that \mathbf{u}_0 and \mathbf{i}_{n+1} , figuring in the equations (4.4a) and (4.4b), are pure harmonic functions of the time t with the same period, i. e.

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{0,a} \cdot e^{j\omega t} \text{ and} \tag{5.1a}$$

$$\mathbf{i}_{n+1} = \mathbf{i}_{n+1,a} \cdot e^{j\omega t}, \tag{5.1b}$$

where $\mathbf{u}_{0,a}$ and $\mathbf{i}_{n+1,a}$ represent column matrices composed of constant (generally complex) elements, and “ j ” is the imaginary unit. According to whether it is to the real or imaginary component of the complex functions figuring in \mathbf{u}_0 and \mathbf{i}_{n+1} that we ascribe physical reality will the real or the imaginary component of the sought solution have physical sense.

After this, the differential equation (4.7) will take the following form :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{y}}_a \cdot e^{j\omega t} \tag{5.2}$$

where

$$\tilde{\mathbf{y}}_a = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{i}}_a \\ \tilde{\mathbf{u}}_a \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{i}}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{u}_{0,a} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{u}}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{K}_{n+1}^{-1} \mathbf{i}_{n+1,a} \end{bmatrix}$$

The stationary solution of equation (5.2) will have the form

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_a \cdot e^{j\omega t},$$

and, if we substitute it into (5.2), we have

$$(j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{y}_a = \tilde{\mathbf{y}}_a \tag{5.3}$$

hence

$$\mathbf{y}_a = (j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_a. \tag{5.4}$$

Therefore, to be able to reach a stationary solution, one has to compute the inverse of the matrix $(j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})$.

From the foregoing it follows that

$$j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \left\langle \left\langle \frac{1}{\lambda_{k\nu}} \right\rangle, \left\langle \frac{1}{\kappa_{k\nu}} \right\rangle \right\rangle \begin{bmatrix} \langle R_k + j\omega \lambda_{k\nu} \rangle & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D}^* & \langle \gamma_{k+1,\nu} + j\omega \kappa_{k+1,\nu} \rangle \end{bmatrix} \times^* \mathbf{w}_\nu \mathbf{w}_\nu. \tag{5.5}$$

Adopting the following short notations :

$$\mathbf{M}_\nu = \langle R_k + j\omega \lambda_{k\nu} \rangle = \langle m_{k\nu} \rangle$$

$$\mathbf{N}_\nu = \langle \gamma_{k+1,\nu} + j\omega \varkappa_{k+1,\nu} \rangle = \langle n_{k\nu} \rangle$$

we have (according to paragraph III c.)

$$(j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_\nu & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D}^* & \mathbf{N}_\nu \end{bmatrix}^{-1} \langle \langle \lambda_{k\nu} \rangle \rangle, \langle \langle \varkappa_{k\nu} \rangle \rangle \times \mathbf{w}_\nu \mathbf{w}_\nu^* \quad (5.6)$$

It is obvious (v. [5] p. 139) that

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_\nu & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D}^* & \mathbf{N}_\nu \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{M}_\nu + \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} \mathbf{D}^*)^{-1} & (-\mathbf{D}^* - \mathbf{N}_\nu \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_\nu)^{-1} \\ (\mathbf{D} + \mathbf{M}_\nu (\mathbf{D}^*)^{-1} \mathbf{N}_\nu)^{-1} & (\mathbf{N}_\nu + \mathbf{D}^* \mathbf{M}_\nu^{-1} \mathbf{D})^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

By introducing the notation

$$\mathbf{P}_\nu = (\mathbf{M}_\nu + \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} \mathbf{D}^*)^{-1} \quad (5.8)$$

it is easy to prove that*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_\nu & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D}^* & \mathbf{N}_\nu \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\nu & -\mathbf{P}_\nu \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} \\ \mathbf{N}_\nu^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}_\nu & \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_\nu \mathbf{P}_\nu \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Therefore, after having determined the block \mathbf{P}_ν by the inversion of a single quadratic matrix of the n -th order, we can gain the three other blocks of the hypermatrix $(j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ without computing further reciprocal matrices; we only need to multiply the matrix \mathbf{P}_ν by known matrices.

$$\begin{aligned} * \quad & (-\mathbf{D}^* - \mathbf{N}_\nu \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_\nu)^{-1} = -(\mathbf{D}^* + \mathbf{N}_\nu \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_\nu)^{-1} (\mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} = \\ & = -(\mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} \mathbf{D}^* + \mathbf{M}_\nu)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} = -\mathbf{P}_\nu \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1}; \\ & \mathbf{D} + \mathbf{M}_\nu (\mathbf{D}^*)^{-1} \mathbf{N}_\nu)^{-1} = \mathbf{N}_\nu^{-1} \mathbf{D}^* (\mathbf{N}_\nu^{-1} \mathbf{D}^*)^{-1} (\mathbf{D} + \mathbf{M}_\nu (\mathbf{D}^*)^{-1} \mathbf{N}_\nu)^{-1} = \\ & = \mathbf{N}_\nu^{-1} \mathbf{D}^* (\mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} \mathbf{D}^* + \mathbf{M}_\nu)^{-1} = \mathbf{N}_\nu^{-1} \mathbf{D}^* \mathbf{P}_\nu; \\ & (\mathbf{N}_\nu + \mathbf{D}^* \mathbf{M}_\nu^{-1} \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_\nu (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_\nu)^{-1} (\mathbf{N}_\nu + \mathbf{D}^* \mathbf{M}_\nu^{-1} \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} = \\ & = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_\nu (\mathbf{M}_\nu + \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} \mathbf{D}^*)^{-1} \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_\nu \mathbf{P}_\nu \mathbf{D} \mathbf{N}_\nu^{-1} \end{aligned}$$

It is quite obvious that the inverse of \mathbf{D} is

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

of the n -th order.

Too, it is clear in consideration of (5.6) that

$$\mathbf{M}_v + \mathbf{D} \mathbf{N}_v^{-1} \mathbf{D}^* =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(m_{1v} + \frac{1}{n_{1v}}\right) & -\frac{1}{n_{1v}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{n_{1v}} & \left(m_{2v} + \frac{1}{n_{1v}} + \frac{1}{n_{2v}}\right) & -\frac{1}{n_{2v}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(m_{nv} + \frac{1}{n_{n-1,v}} + \frac{1}{n_{nv}}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (m_{1v} n_{1v} + 1) & -\frac{n_{2v}}{n_{1v}} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \left(m_{2v} n_{2v} + \frac{n_{2v}}{n_{1v}} + 1\right) & -\frac{n_{3v}}{n_{2v}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(m_{nv} n_{nv} + \frac{n_{nv}}{n_{n-1,v}} + 1\right) \end{bmatrix} \left\langle \frac{1}{n_{kv}} \right\rangle =$$

$$= \mathbf{S}_v \left\langle \frac{1}{n_{kv}} \right\rangle. \tag{5.11}$$

It follows that

$$(\mathbf{M}_v + \mathbf{D} \mathbf{N}_v^{-1} \mathbf{D}^*)^{-1} = \langle n_{kv} \rangle \mathbf{S}_v^{-1} \tag{5.12}$$

where, evidently,

$$S_v = \begin{bmatrix} s_{0v} & z_{1v} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & s_{1v} & z_{2v} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1,v} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

represents a continuant matrix composed of the elements :

$$\begin{aligned} s_{0v} &= m_{1v} n_{1v} + 1 & (5.14) \\ s_{kv} &= m_{k+1,v} n_{k+1,v} + \frac{n_{k+1,v}}{n_{kv}} + 1; \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1); \\ z_{kv} &= -\frac{n_{k+1,v}}{n_{kv}}; \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1). \end{aligned}$$

If

$$e_k^* = [0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1] \tag{5.15}$$

is a row matrix of "k" elements, the computation of S_v^{-1} can be effected by means of the following process of recursion (see, for instance, [5] p. 139) :

$$\begin{aligned} S_{kv}^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_{k-1,v} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{matrix} & s_{k-1,v} \end{array} \right]^{-1} = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \left(S_{k-1,v} + \frac{z_{k-1,v}}{s_{k-1,v}} e_{k-1} e_{k-1}^* \right)^{-1} & - \left(S_{k-1,v} + \frac{z_{k-1,v}}{s_{k-1,v}} e_{k-1} e_{k-1}^* \right)^{-1} \frac{z_{k-1,v}}{s_{k-1,v}} e_{k-1} \\ \hline \left(s_{k-1,v} + \frac{z_{k-1,v}}{s_{k-1,v}} e_{k-1}^* S_{k-1,v}^{-1} e_{k-1} \right)^{-1} e_{k-1}^* S_{k-1,v}^{-1} & \left(s_{k-1,v} + z_{k-1,v} e_{k-1}^* S_{k-1,v}^{-1} e_{k-1} \right)^{-1} \end{array} \right]; \\ & \quad (k = 3, 4, \dots, n). \end{aligned}$$

$$S_{1v}^{-1} = \frac{1}{s_{0v}}, \quad S_{2v}^{-1} = \begin{bmatrix} s_{0v} & z_{1v} \\ -1 & s_{1v} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s_{0v} s_{1v} + z_{1v}} \begin{bmatrix} s_{1v} & 1 \\ -z_{1v} & s_{0v} \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

VI. Stationary and transient solution of the matrix-differential equation of a system composed of identical 2 (m + 1)-poles

If all the (n + 1) pieces of cascade-connected 2 (m + 1)-poles are identical, the following equalities will exist between the coefficient matrices figuring in the equations (4.3.aα), (4.3.aβ), (4.3.bα) and (4.3.bβ) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}_2 = \dots = \mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}, \\
 \mathbf{L}_1 &= \mathbf{L}_2 = \dots = \mathbf{L}_{n+1} = \mathbf{L}, \\
 \mathbf{K}_1 &= \mathbf{K}_2 = \dots = \mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{K}, \\
 \mathbf{G}_1 &= \mathbf{G}_2 = \dots = \mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{G}.
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

We can write the coefficient matrix of the matrix-differential equation (4.7) in the following form :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_n & \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{D}_n \\ -\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{D}_n & -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{E}_n \end{bmatrix}
 \tag{6.2}$$

The column matrices figuring in “y” are :

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_{n+1} \end{bmatrix}.
 \tag{6.3}$$

Finally, equations (4.3.aα) and (4.3.bβ) from which \mathbf{u}_{n+1} and \mathbf{i}_0 have to be derived assume the following form :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{R} \mathbf{i}_{n+1} + \mathbf{L} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{n+1},
 \tag{6.4a}$$

$$\mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_1 - \mathbf{G} \mathbf{u}_0 - \mathbf{K} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0.
 \tag{6.4b}$$

With a view to eliminating matrices \mathbf{D}_n and \mathbf{D}_n^* which cannot be brought to a diagonal form we have to introduce the transformation matrix

$$\mathbf{T} = \langle \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_n, \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{D}_n \rangle; \quad \mathbf{T}^{-1} = \langle \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_n, \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \rangle$$

with the aid of which we can give equation (4.7) the following form :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T} \mathbf{y} = (\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}) \mathbf{T} \mathbf{y} + \mathbf{T} \tilde{\mathbf{y}} \tag{6.5}$$

or, applying the short notations

$$\mathbf{z} = \mathbf{T} \mathbf{y}, \quad \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{y}},$$

represent it as

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{z}}, \tag{6.6}$$

where — evidently —

$$\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \cdot \times \mathbf{E}_n & \mathbf{L}^{-1} \cdot \times \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{K}^{-1} \cdot \times (\mathbf{D}_n \mathbf{D}_n^*) - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} \cdot \times \mathbf{E}_n \end{bmatrix}. \tag{6.7}$$

As, according to (3.4),

$$\mathbf{D}_n \mathbf{D}_n^* = \mathbf{V}_n \mathbf{\Delta}_n \mathbf{V}_n^*$$

it follows that

$$\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \{(\mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{V}_n) \cdot \times \mathbf{E}_2\} \begin{bmatrix} -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \cdot \times \mathbf{E}_n & \mathbf{L}^{-1} \cdot \times \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{K}^{-1} \cdot \times \mathbf{\Delta}_n & -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} \cdot \times \mathbf{E}_n \end{bmatrix} \{(\mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{V}_n^*) \cdot \times \mathbf{E}_2\}. \tag{6.8}$$

Introducing the permutation matrix of the 2 n-th order

$$\mathbf{P}_{2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{11} & \mathbf{P}^{12} & \dots & \mathbf{P}^{1n} \\ \mathbf{P}^{21} & \mathbf{P}^{22} & \dots & \mathbf{P}^{2n} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

we can write

$$\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \Theta_{2mn} \left\langle \begin{bmatrix} -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} & \mathbf{L}^{-1} \\ -\delta_1 \mathbf{K}^{-1} & -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} & \mathbf{L}^{-1} \\ -\delta_n \mathbf{K}^{-1} & -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} \end{bmatrix} \right\rangle \Theta_{2mn}^*, \tag{6.9}$$

where

$$\Theta_{2mn} = \{ (\mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{V}_n) \cdot \times \mathbf{E}_2 \} \{ \mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{P}_{2n} \},$$

$$\Theta_{2mn}^* = \{ \mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{P}_{2n}^* \} \{ \mathbf{E}_m \cdot \times \mathbf{V}_n^* \} \cdot \times \mathbf{E}_2 \}$$

and

$$\Theta_{2mn}^* \Theta_{2mn} = \mathbf{E}_{2mn}.$$

It is clear that

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{bmatrix} -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} & \mathbf{L}^{-1} \\ -\delta_k \mathbf{K}^{-1} & -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} \end{bmatrix} \right\rangle = \\ = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_k} \mathbf{L}^{-1} & 0 \\ \delta_k & -\mathbf{K}^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{bmatrix} -\delta_k \mathbf{R} & \delta_k \mathbf{E}_m \\ \delta_k \mathbf{E}_m & \mathbf{G} \end{bmatrix} \right\rangle; \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Let us, for the sake of simplicity, adopt the following notations :

$$\mathbf{B}_d = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_k} \mathbf{L}^{-1} & 0 \\ \delta_k & -\mathbf{K}^{-1} \end{bmatrix} \right\rangle; \quad k = 1, 2, \dots, n; \tag{6.11}$$

$$\mathbf{B}_s = \left\langle \begin{bmatrix} -\delta_k \mathbf{R} & \delta_k \mathbf{E}_m \\ \delta_k \mathbf{E}_m & \mathbf{G} \end{bmatrix} \right\rangle; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

If we multiply equation (6.6) from the left by Θ_{2mn}^* and utilize the relation $\Theta_{2mn} \Theta_{2mn}^* = \mathbf{E}_{2mn}$, we have

$$\frac{d}{dt} \Theta_{2mn}^* \mathbf{z} = \mathbf{B}_d \mathbf{B}_s \Theta_{2mn}^* \mathbf{z} + \Theta_{2mn}^* \tilde{\mathbf{z}}. \tag{6.12}$$

If we multiply equation (6.12) from the left by $\mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}}$, it can be represented as

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \Theta_{2mn}^* \mathbf{z}) = (\mathbf{B}_d^{\frac{1}{2}} \mathbf{B}_s \mathbf{B}_d^{\frac{1}{2}}) (\mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \Theta_{2mn}^* \mathbf{z}) + (\mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \Theta_{2mn}^* \tilde{\mathbf{z}}), \tag{6.13}$$

or — with the notations

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \Theta_{2mn}^* \mathbf{z}; \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \Theta_{2mn}^* \tilde{\mathbf{z}}; \tag{6.14a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{B}_d^{\frac{1}{2}} \mathbf{B}_s \mathbf{B}_d^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} & j \delta_k^{\frac{1}{2}} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \\ j \delta_k^{\frac{1}{2}} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} & -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} \end{bmatrix} \right\rangle; \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{6.14b}$$

set up as

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}. \quad (6.15)$$

Equation (6.15) seems to be the form most suitable for the solution of the matrix-differential equation of a system consisting of identical $2(m+1)$ cascade-connected poles.

It is known (v. [3] pp. 449–450) that the solution $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_z)$ of the differential equation (6.15), which will satisfy the arbitrarily prescribable initial condition

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_z = \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \mathbf{O}_{2mn}^* \mathbf{T} \mathbf{y}_z = \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \mathbf{O}_{2mn}^* \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_z \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} = \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \mathbf{O}_{2mn}^* \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{i}(0) \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

is this:

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_z) = e^{\mathbf{F}t} \mathbf{x}_z + \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)} \tilde{\mathbf{x}}(\tau) d\tau. \quad (6.17)$$

If \mathbf{u}_0 and \mathbf{i}_{n+1} represent the pure harmonic functions (with the same period) of time “ t ”, we can write

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_{0,a} e^{j\omega t} \quad \text{and} \quad \mathbf{i}_{n+1} = \mathbf{i}_{n+1,a} e^{j\omega t}$$

where $\mathbf{u}_{0,a}$ and $\mathbf{i}_{n+1,a}$ are column matrices composed of constant (generally complex) elements. According to whether it is to the real or the imaginary component of the complex functions figuring in \mathbf{u}_0 and \mathbf{i}_{n+1} that we ascribe physical reality will the real or the imaginary component of the solution yielded by equation (6.17) have a physical sense.

$\tilde{\mathbf{x}}$, contained in equation (6.17), is, therefore,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_a e^{j\omega t} = \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \mathbf{O}_{2mn}^* \mathbf{T} \tilde{\mathbf{y}}_a e^{j\omega t} = \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \mathbf{O}_{2mn}^* \mathbf{T} \begin{bmatrix} -\mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}_{0,a} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_{n+1,a} \end{bmatrix} e^{j\omega t}. \quad (6.18)$$

($\tilde{\mathbf{y}}_a$ is partitioned into $2n$ column matrices composed of “ m ” elements; of these, only the first and the $2n$ -th matrices contain elements different from zero.)

After performing integration, equation (6.17) will, in consideration of (6.18), assume the following shape:

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_z) = e^{\mathbf{F}t} \mathbf{x}_z + (j\omega \mathbf{E}_{2mn} - \mathbf{F})^{-1} (e^{j\omega t} \mathbf{E}_{2mn} - e^{\mathbf{F}t}) \tilde{\mathbf{x}}_a. \quad (6.19)$$

On the strength of relation (3.8) the arbitrary analytic function $f(\mathbf{F})$ of matrix \mathbf{F} is

$$f(\mathbf{F}) = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} \left\langle f \left[\begin{array}{cc} -\lambda_v^{-1} R & j \delta_k^{\frac{1}{2}} \lambda_v^{-\frac{1}{2}} \kappa_v^{-\frac{1}{2}} \\ j \delta_k^{\frac{1}{2}} \lambda_v^{-\frac{1}{2}} \kappa_v^{-\frac{1}{2}} & -\kappa_v^{-1} \gamma_v \end{array} \right] \right\rangle \times \cdot \mathbf{w}_v \mathbf{w}_v^*. \quad (6.20)$$

If also relation (3.5) is taken into consideration we can set up function (6.20) in the following form :

$$f(\mathbf{F}) = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} \left\langle \frac{1}{2} \left\{ f(s_v - \sqrt{d_{vk}}) + f(s_v + \sqrt{d_{vk}}) \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f(s_v - \sqrt{d_{vk}}) - f(s_v + \sqrt{d_{vk}})}{2\sqrt{d_{vk}}} \begin{bmatrix} \lambda_v^{-1} R - \kappa_v^{-1} \gamma_v & -2j \delta_k^{\frac{1}{2}} \lambda_v^{-\frac{1}{2}} \kappa_v^{-\frac{1}{2}} \\ -2j \delta_k^{\frac{1}{2}} \lambda_v^{-\frac{1}{2}} \kappa_v^{-\frac{1}{2}} & \kappa_v^{\frac{1}{2}} \gamma_v \lambda_v^{-1} R \end{bmatrix} \right\rangle \times \cdot \mathbf{w}_v \mathbf{w}_v^* ;$$

$$k = 1, 2, \dots, n ; \quad (6.21)$$

where

$$s_v = \frac{-\lambda_v^{-1} R - \kappa_v^{-1} \gamma_v}{2} ; \quad d_{vk} = \left(\frac{\lambda_v^{-1} R - \kappa_v^{-1} \gamma_v}{2} \right)^2 - \delta_k \lambda_v^{-1} \kappa_v^{-1} .$$

Relying on (6.14a) we obtain from (6.19) that

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_z) = \mathbf{T}^{-1} \Theta_{2mn} \mathbf{B}_d^{\frac{1}{2}} e^{\mathbf{F}t} \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \Theta_{2mn}^* \mathbf{T} \mathbf{y}_z + \mathbf{T}^{-1} \Theta_{2mn} \mathbf{B}_d^{\frac{1}{2}} (j\omega \mathbf{E}_{2mn} - \mathbf{F})^{-1} (e^{j\omega t} \mathbf{E}_{2mn} - e^{\mathbf{F}t}) \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \Theta_{2mn}^* \mathbf{T} \tilde{\mathbf{y}}_a . \quad (6.22)$$

According to the definition of matrices \mathbf{T} , Θ_{2mn} and \mathbf{B}_d given earlier in this paper

$$\mathbf{T}^{-1} \Theta_{2mn} \mathbf{B}_d^{\frac{1}{2}} = \left[\begin{array}{cccccc} \delta_1^{-\frac{1}{2}} v_{11} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} & 0 & \delta_2^{-\frac{1}{2}} v_{12} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} & 0 & \dots & \delta_n^{-\frac{1}{2}} v_{1n} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ \delta_1^{-\frac{1}{2}} v_{21} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} & 0 & \delta_2^{-\frac{1}{2}} v_{22} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} & 0 & \dots & \delta_n^{-\frac{1}{2}} v_{2n} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \delta_1^{-\frac{1}{2}} v_{n1} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} & 0 & \delta_2^{-\frac{1}{2}} v_{n2} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} & 0 & \dots & \delta_n^{-\frac{1}{2}} v_{nn} \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & j \sum_{k=1}^1 v_{k1} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} & 0 & j \sum_{k=1}^1 v_{k2} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \dots & 0 & j \sum_{k=1}^1 v_{kn} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & j \sum_{k=1}^2 v_{k1} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} & 0 & j \sum_{k=1}^2 v_{k2} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \dots & 0 & j \sum_{k=1}^2 v_{kn} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & j \sum_{k=1}^n v_{k1} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} & 0 & j \sum_{k=1}^n v_{k2} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \dots & 0 & j \sum_{k=1}^n v_{kn} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right] ; \quad (6.23)$$

$$\mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_{2mn}^* \mathbf{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} \delta_1^{\frac{1}{2}} v_{11} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} \delta_1^{\frac{1}{2}} v_{21} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} \dots \delta_1^{\frac{1}{2}} v_{n1} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -j(v_{11}-v_{21})\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} & -j(v_{21}-v_{31})\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} & \dots & -jv_{n1}\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \\ \delta_2^{\frac{1}{2}} v_{12} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} \delta_2^{\frac{1}{2}} v_{22} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} \dots \delta_2^{\frac{1}{2}} v_{n2} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -j(v_{12}-v_{22})\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} & -j(v_{22}-v_{32})\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} & \dots & -jv_{n2}\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_n^{\frac{1}{2}} v_{1n} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} \delta_n^{\frac{1}{2}} v_{2n} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} \dots \delta_n^{\frac{1}{2}} v_{nn} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -j(v_{1n}-v_{2n})\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} & -j(v_{2n}-v_{3n})\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} & \dots & -jv_{nn}\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

It is evident that $\mathbf{y}_z = 0$ if, at the moment when $t = 0$ (i. e. when the cascade-connected $2(m+1)$ -poles and the system constituted by the consumers are switched on the feeding point), only the voltages of the feeding point have values different from zero, while the value of all other voltages and all current-intensities equals zero, and that the equation (6.22) will in this case take the following form:

$$\mathbf{y}(t; 0) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q}_{2mn} \mathbf{B}_d^{\frac{1}{2}} (j\omega \mathbf{E}_{2mn} - \mathbf{F})^{-1} (e^{j\omega t} \mathbf{E}_{2mn} - e^{\mathbf{F}t}) \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_{2mn}^* \mathbf{T} \tilde{\mathbf{y}}_a. \quad (6.25)$$

Since, as is evident from formula (6.21), any analytic function $f(\mathbf{F})$ of matrix \mathbf{F} defined in formula (6.14b) can be represented also as

$$f(\mathbf{F}) = \left\langle \begin{bmatrix} \Phi_k & \Psi_k \\ \Psi_k & \bar{\Xi}_k \end{bmatrix} \right\rangle \quad (6.26)$$

it is clear that

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q}_{2mn} \mathbf{B}_d^{\frac{1}{2}} \cdot f(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{B}_d^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_{2mn}^* \mathbf{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n v_{1k}^2 \Phi_k & \dots & -j \sum_{k=1}^n \delta_k^{\frac{1}{2}} v_{1k} v_{nk} \Psi_k \mathbf{L}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_l^{\frac{1}{2}} v_{1l} v_{kl} \Psi_k \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{L}^{\frac{1}{2}} & \dots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n v_{nl} v_{kl} \bar{\Xi}_k \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

In order to be able to determine the functions \mathbf{u}_{n+1} and \mathbf{i}_0 we must first determine the functions \mathbf{u}_n and \mathbf{i}_1 with due regard to the relations (6.4a) and (6.4b). Seeing that \mathbf{u}_n is the lowermost and \mathbf{i}_1 the uppermost block of the column hypermatrix $\mathbf{y}(t; 0)$ figuring on the left side of equation (6.25), seeing further that only the uppermost and lowermost blocks of the column

hypermatrix y_a have a value different from zero, it is clear that what we need are just those four corner blocks of hypermatrix (6.27) which are explicitly written in (6.27), where — in accordance with formula (6.21) — the matrices Φ_k, Ψ_k, Ξ_k are these :

$$\Phi_k = \frac{1}{2m} \sum_{v=0}^{m-1} \left\{ f(s_v - \sqrt{d_{vk}}) + f(s_v + \sqrt{d_{vk}}) + \frac{f(s_v - \sqrt{d_{vk}}) - f(s_v + \sqrt{d_{vk}})}{\sqrt{d_{vk}}} (\lambda_v^{-1} R - \kappa_v^{-1} \gamma_v) \right\} \mathbf{w}_v \mathbf{w}_v^*; \tag{6.28}$$

$$\Psi_k = -\frac{1}{2} \frac{j}{m} \delta_k^{\frac{1}{2}} \sum_{v=0}^{m-1} \frac{f(s_v - \sqrt{d_{vk}}) - f(s_v + \sqrt{d_{vk}})}{\sqrt{d_{vk}}} \lambda_v^{-\frac{1}{2}} \kappa_v^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w}_v \mathbf{w}_v^*;$$

$$\Xi_k = \frac{1}{2m} \sum_{v=0}^{m-1} \left\{ f(s_v - \sqrt{d_{vk}}) + f(s_v + \sqrt{d_{vk}}) - \frac{f(s_v - \sqrt{d_{vk}}) - f(s_v + \sqrt{d_{vk}})}{\sqrt{d_{vk}}} (\lambda_v^{-1} R - \kappa_v^{-1} \gamma_v) \right\} \mathbf{w}_v \mathbf{w}_v^*.$$

Relying on equations (6.26), (6.27) and (6.28) we obtain in respect of the functions \mathbf{i}_1 and \mathbf{u}_n , to be derived from (6.25), the following results :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 = & \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \sum_{v=0}^{m-1} \left\{ -\frac{v_{1k}^2 \lambda_v^{-1}}{2} \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v - \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v + \sqrt{d_{vk}}} + \frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v + \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v - \sqrt{d_{vk}}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v - \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v + \sqrt{d_{vk}}} - \frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v + \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v - \sqrt{d_{vk}}} \right) \frac{\lambda_v^{-1} R - \kappa_v^{-1} \gamma_v}{\sqrt{d_{vk}}} \right] \mathbf{w}_v^* \mathbf{u}_{0,a} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \delta_k v_{1k} v_{nk} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v - \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v + \sqrt{d_{vk}}} - \frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v + \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v - \sqrt{d_{vk}}} \right) \frac{\lambda_v^{-1} \kappa_v^{-1}}{\sqrt{d_{vk}}} \mathbf{w}_v^* \mathbf{i}_{n+1,a} \right\} \mathbf{w}_v \end{aligned} \tag{6.29a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n = & \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{v=0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{2} \delta_k v_{1k} v_{lk} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v - \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v + \sqrt{d_{vk}}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v + \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v - \sqrt{d_{vk}}} \right) \frac{\lambda_v^{-1} \kappa_v^{-1}}{\sqrt{d_{vk}}} \mathbf{w}_v^* \mathbf{u}_{0,a} + \right. \\ & \left. + \frac{v_{nk} v_{lk} \kappa_v^{-1}}{2} \left[\frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v - \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v + \sqrt{d_{vk}}} + \frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v + \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v - \sqrt{d_{vk}}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v - \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v + \sqrt{d_{vk}}} - \frac{e^{j\omega t} - e^{(s_v + \sqrt{d_{vk}})t}}{j\omega - s_v - \sqrt{d_{vk}}} \right) \frac{\lambda_v^{-1} R - \kappa_v^{-1} \gamma_v}{\sqrt{d_{vk}}} \right] \mathbf{w}_v^* \mathbf{i}_{n+1,a} \right\} \mathbf{w}_v. \end{aligned} \tag{6.29b}$$

If — finally — we substitute the results as under (6.29a) and (6.29b) into the equations (6.4a) and (6.4b) we obtain the unknown current-intensities and voltages at the feeding points and the consumption points, respectively, as the functions of the current-intensities and voltages at the consumption points and feeding points, respectively :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{e^{j\omega t}}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \{ (R + j\omega \lambda_\nu) \mathbf{w}_\nu^* \mathbf{i}_{n+1,a} \} \mathbf{w}_\nu ; \quad (6.30a)$$

$$\mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_1 - \frac{e^{j\omega t}}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \{ (\gamma_\nu + j\omega \kappa_\nu) \mathbf{w}_\nu^* \mathbf{u}_{0,a} \} \mathbf{w}_\nu . \quad (6.30b)$$

It should be noted that \mathbf{u}_{n+1} and \mathbf{i}_0 are given in the form of “symmetric components” by the above formulae [6, 7].

REFERENCES

1. SHEN, D. W. C. : Synthesis of uniform transmission line. *Electronic Engineering*, London (1953, pp. 287—289).
2. BAJCSAY, P.—LOVASS-NAGY, V. : The generalization of some relations of the four-terminal theory by means of hypermatrices. *Acta Technica*, Vol. XIX, No. 3—4, Budapest (1958), pp. 293—309.
3. EGERVÁRY, J. : Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról (Canonical representation of matrix-functions and some applications of it). Publications (in Hungarian) of the IIIrd Department of the Hungarian Academy of Sciences, Vol. III, No. 4, Budapest (1953), pp. 417—458.
4. SOMMERFELD, A. : Vorlesungen über theoretische Physik. III. Elektrodynamik. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1949), p. 140.
5. AITKEN, A. C. : Determinants and Matrices. Oliver and Boyd, Edinburgh and London (1951).
6. WAGNER, C. F.—EVANS, R. D. : Symmetrical components. McGraw-Hill Book Comp., New York—London (1933).
7. WANGER, W. : Symmetrische Komponenten für Mehrphasensysteme. *Archiv für Elektrotechnik*. XXIX (1935), pp. 683—688.

SUMMARY

It is known that — with the aid of the matrix calculus — it is possible to derive from the four-terminal theory clear relations for the determination of the *stationary* voltages and current-intensities of monophasic systems composed of quadripoles. It was by means of such relations that D. W. C. SHEN established matrix-formulae which describe the stationary phenomena of single-phase uniform transmission lines [1]. In an earlier publication [2], the present authors worked out a general application of D. W. C. SHEN's results to multiphase uniform transmission lines. Using the method of hypermatrices, the present paper studies the *stationary* voltages and current-intensities of multiphase systems composed of cyclically symmetrical, cascade-connected *different* $2(m+1)$ -poles with given voltages at the points of supply and given current-intensities at the points of consumption; too, the paper analyses the *stationary and transient* voltages and current-intensities of multiphase systems composed of cyclically symmetrical, cascade-connected, *equally-built* $2(m+1)$ -poles, likewise with given voltages at the points of supply and given current-intensities at those of consumption. The relations thus obtained may — at the same time — be regarded as proximate formulae for the determination of cyclically symmetrical multiphase uniform transmission systems with given voltages at the points of supply and given current-intensities at those of consumption.

ÜBER EINE NEUE ANWENDUNG DER HYPERMATRIZEN IN DER THEORIE DER MEHRPHASENSYSTEME

P. BAJCSAY und V. LOVASS-NAGY

ZUSAMMENFASSUNG

Es ist bekannt, dass die Vierpoltheorie mit Hilfe der Matrizenrechnung für die Berechnung der *stationären* Spannungen und Stromstärken aus Vierpolen aufgebauter Einphasensysteme gut übersichtliche Zusammenhänge liefert. Mit Hilfe dieser Resultate hat D. W. C. SHEN seine, die stationären Erscheinungen der Einphasenübertragsleitung beschreibenden Matrixformeln abgeleitet [1]. Die Verfasser des vorliegenden Aufsatzes haben in einer ihrer früheren Arbeiten [2] die Ergebnisse D. W. C. SHEN's für gleichmässige Mehrphasenübertragungsleitungen verallgemeinert. Der vorliegende Aufsatz untersucht unter Anwendung von Hypermatrizen einerseits die *stationären* Spannungen und Stromstärken von zyklisch symmetrischen, aus verschiedenen $2(m+1)$ Polen mit Kettenschaltung aufgebauten Mehrphasensystemen, bei gegebenen Spannungen am Beschickungspunkt (Einspeisepunkt) und Stromstärken am Verbraucher, andererseits liefert derselbe die Berechnung — ebenfalls bei gegebenen Spannungen am Beschickungspunkt und Stromstärken am Verbraucher — der *stationären und transienten* Spannungen und Stromstärken zyklisch symmetrischer, identisch aufgebauter verkettet geschalteter, aus $2(m+1)$ Polen bestehender Mehrphasensysteme. Die so gewonnenen Zusammenhänge können gleichzeitig als Annäherungsformeln für die Berechnung zyklisch symmetrischer gleichmässiger Mehrphasenleitungssysteme, bei gegebenen Spannungen am Beschickungspunkt und Stromstärken am Verbraucher, angesehen werden.

UNE NOUVELLE APPLICATION DES HYPERMATRICES À LA THÉORIE DES SYSTÈMES MULTIPHASÉS

P. BAJCSAY et V. LOVASS-NAGY

RÉSUMÉ

Il est connu que la théorie des quadripôles donne, à l'aide de la théorie des matrices, des relations claires pour le calcul des tensions et intensités *stationnaires* de systèmes monophasés composés de quadripôles. En utilisant ces résultats, D. W. C. Shen a établi ses formules matricielles décrivant les phénomènes *stationnaires* d'une ligne de transmission monophasée à constantes uniformément réparties [1]. Dans un ouvrage plus ancien [2], les auteurs du présent article ont généralisé les résultats de D. W. C. Shen à la ligne de transmission multiphasée à constantes uniformément réparties. En utilisant des hypermatrices le travail présent examine, d'une part, les tensions et intensités *stationnaires* d'un système multiphasé à symétrie cyclique composé d'une chaîne de $2(m+1)$ -pôles *différents* à tensions d'alimentation et intensités de consommation données, d'autre part — à tensions au point d'alimentation et intensités au point de réception données également — les tensions et intensités *stationnaires et transitoires* d'un système multiphasé à symétrie cyclique composé d'une chaîne de $2(m+1)$ -pôles *égaux*. Les formules ainsi établies peuvent être considérées, en même temps comme formules approchées pour le calcul de systèmes de lignes à constantes uniformément réparties à symétrie cyclique, et à tension d'alimentation et intensité de réception données.

О НОВОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ГИПЕРМАТРИЦ В ТЕОРИИ МНОГО-
ФАЗНЫХ СИСТЕМ

П. БАЙЧАИ и В. ЛОВАШ-НАДЬ

РЕЗЮМЕ

Известно, что теория четырехполюсника с помощью матричного исчисления дает хорошо обозримые зависимости также для определения стационарных напряжений и сил тока однофазных систем, состоящих из четырехполюсников. Используя эти достижения, Д. В. Г. Шен вывел матричные формулы, описывающие стационарные явления однофазной равномерной передаточной линии [1]. Авторы данной работы в опубликованной ими ранее работе [2] результаты Д. В. Г. Шена обобщили для многофазной равномерной передаточной системы. В данной работе с использованием гиперматриц исследуются, с одной стороны, стационарные напряжения и силы тока многофазной системы, составленной цепным соединением из различных полюсов $2(m + 1)$ и имеющей циклическую симметрию, а с другой стороны, рассчитываются стационарные и переходные напряжения и силы тока многофазной системы, состоящей из полюсов $2(m + 1)$ цепного соединения и идентичной схемы и имеющей циклическую симметрию при также данных напряжениях точек питания и сил токов точек потребления. Полученные таким образом зависимости можно считать одновременно также приближенными формулами для расчета равномерных многофазных систем линий передач с циклической симметрией при данных напряжениях точек питания и сил токов точек потребления.

ON THE HEAVY SUSPENSION DEVELOPING IN THE HYDROCYCLONE

Prof. G. TARJÁN

CORRESPONDING MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MINERAL DRESSING, TECHNICAL UNIVERSITY, SOPRON

[Manuscript received November 16, 1957]

As it is known from an earlier paper [1] the grain size of a particle revolving in equilibrium on the radius r in the hydrocyclone is given by the formula

$$d = \sqrt{\frac{18 \eta g}{\delta - \gamma}} \cdot \frac{\sqrt{r v_r}}{v_t}$$

where d is the grain size, η the viscosity of the medium, γ the specific gravity of the medium, δ the specific gravity of the particle, g the gravitational acceleration, r the distance of the particle revolving in equilibrium from the cyclon axis, v_r and v_t the radial, respectively the tangential velocity components of the medium flow.

Substituting the values

$$v_t = v_{t1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n, n = 0,8, \quad v_r = \frac{Q}{2 \pi r (h_1 + h)}, \quad Q = \frac{e^2 \pi}{4!} v_{t1}, \quad h = (r_1 - r) \cotg \alpha,$$

into the above formula, in the cylindrical section of the cyclone it is the formula obtained

$$d = \frac{80 e^2}{\sqrt{(\delta - \gamma) Q}} \cdot \left(\frac{r_1}{r} \right)^{0,8} \sqrt{\frac{\eta}{h_1 + (r_1 - r) \cotg \alpha}}.$$

In this formula the respective symbols and their units have to be understood as follows: d in microns, η in cp (centipoise), Q in cu. m/hour; e , r , r_1 , h_1 in cm, δ , γ in gram/cu. cm, $\alpha = \arctg \frac{r_1 - r_a}{H}$ = the half apex-angle of the cyclone (r_a in cm is the radius of the orifice of the apex, H in cm is the height of the conical section). (See Fig. 1.) In the cylindric section of the cyclone lines $d = \text{const}$ are straight lines parallel to the axis. The state of equilibrium corresponding to grain size $d = \infty$ is out of the cyclone's shell

at distance $h_1 \operatorname{tg} \alpha$ from it ; this is proceeding towards the conical section of the cyclone including with its axis the angle $\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r_1}{H}$. The lines $d = \text{const}$ of the cylindrical section fit close to the lines $d = \infty$ in the conical section of the cyclone. The axial component of the medium's flow v_a roughly approaches zero in the conical section of the cyclone on that conical surface whose generating line divides the distance between the axis and the conical

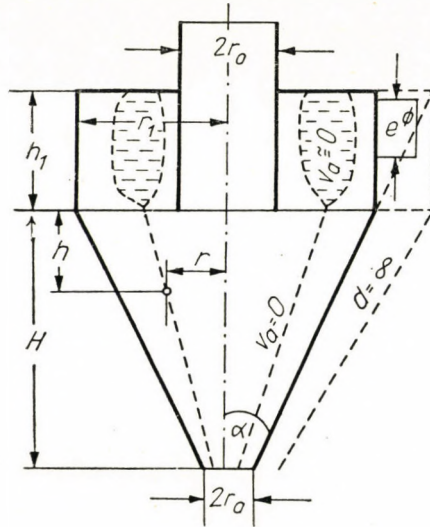


Fig. 1

shell of the cyclone in the proportion $\frac{r_0}{r_a + r_0}$ (r_0 is the radius of the upper overflow opening). In the conical section of the cyclone between the line $v_a = 0$ and the axis the medium flows upward to the upper overflow, between the line $v_a = 0$ and the shell downward to the underflow. The particles revolving on the line $v_0 = 0$ give the limit grain size of the classification taking place in the hydrocyclone. In slender cyclones where α and h_1 are small and therefore the line $d = \infty$ falls close to the wall, the lines $d = \text{const}$ adhere relatively well to both, the wall of the cyclone and the line $v_a = 0$, so that there will be no great deviation in the grain size of particles revolving in equilibrium on the line $v_a = 0$. Such cyclones are suitable for classification. Stubby cyclones on the other hand, where α and h_1 are large, are more suited for heavy media concentration. In the conical section of stubby cyclones there are, along the line $v_a = 0$ toward the apex particles in equilibrium, which represent a relatively wide grain-size space, since the lines $d = \text{const}$ — fitting close to the line $d = \infty$ which is far from the cyclone's wall — intersect the line $v_a = 0$ (and the wall of the cyclone) at a comparatively great angle.

In the cylindrical part of the cyclone the area $v_a \cong 0$ becomes wider. It is therefore advantageous to use stubby cyclones with long cylindrical section for heavy media concentration. It is, namely, the particles revolving in equilibrium at the locus $v_a \cong 0$, which generate the "stagnant" heavy suspension developing in the cyclone. The particles becoming placed farther are comparatively rapidly removed from the cyclone by the axial component v_a of the medium flow, so that they play but a minor part in the development of the heavy suspension. The specific gravity of the heavy suspension decreases gradually from the shell of the cyclone toward its axis, i. e. from the specific gravity of the medium flowing out at the apex γ_a to the specific gravity of the upper outflow γ_0 . At the shell of the cyclone, the specific gravity may be even greater than γ_a , as γ_a is the average value of the specific gravities between the shell and the line $v_a = 0$. The specific gravity of the heavy media separation will be equal to the specific gravity of the heavy suspension stagnating at the locus $v_a \cong 0$. By the relative decrease of r_a the line $v_a = 0$ will shift toward the wall of the cyclone (i. e. the greater specific gravities); the relative increase of r_a , on the other hand, results in its being shifted toward the axis (i. e. the smaller specific gravities).

The specific gravity γ and the viscosity η of the "medium" in a diluted suspension agree more or less with those of pure water. The particles generating the suspension behave, however, in dense suspensions as if they were not in pure water, but in a fluid of a specific gravity and viscosity proper to heavy suspensions [2]. The specific gravity of the suspension can be obtained by the formula:

$$\gamma' = \sigma\Delta + (1 - \sigma)\gamma,$$

where σ is the volume-quota of the solid grains, Δ their average specific gravity, γ the specific gravity of water. The terminal velocity of the solid grains of the suspension in the gravitational field can be computed by the formula

$$v'_0 = \frac{d^2 (\delta - \gamma') (1 - \sigma)}{18 \eta'}$$

and not by the formula valid for pure water:

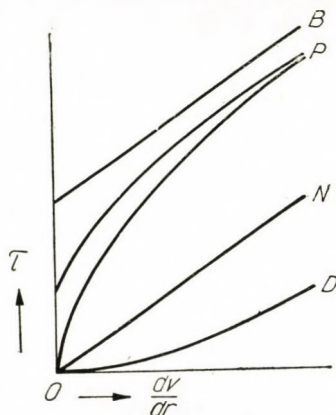
$$v_0 = \frac{d^2 (\delta - \gamma)}{18 \eta}.$$

The volume-quota of the liquid phase $(1 - \sigma)$ gives at the same time the correction factor for the decrease of the cross-section of the liquid phase. In case of $\delta = \Delta$ we have $\delta - \gamma' = (\delta - \gamma) (1 - \sigma)$, and the above formula

for v'_0 can be expressed also in the form

$$v'_0 = v_0 \frac{\eta}{\eta'} (1 - \sigma)^2.$$

The grain size d of a particle revolving in equilibrium in the suspension is obtained by substituting the specific gravity γ' and the viscosity η' of the suspension for the values $\gamma = 1 \text{ g/cm}^3$ and $\eta = 1 \text{ cp}$ valid for pure water.



In other words the value d , valid for pure water, has to be multiplied with the expression $\sqrt{\frac{\eta'(\delta - \gamma)}{\eta(\delta - \gamma')}}.$

Heavy suspensions are not Newtonian fluids, their viscosity varies according to the shearing-stress and velocity gradient. Fig. 2 shows the relation between the shearing-stress (τ) and the velocity gradient $\frac{dv}{dr}$ for different possible fluids (N = Newtonian, B = Bingham's, P = plastic or pseudoplastic, D = dilatant).

The viscosity of Newtonian fluids (which is independent of shearing-stress or velocity gradient) is given by the direction tangent of the straight; while — in case of given shearing-stress or velocity gradient — the apparent viscosity of other fluids is determined by the direction tangent of the straight connecting the corresponding point of the curve with the starting point. The apparent viscosity of the fluids "B" and "P" decreases, while that of the fluids "D" increases with increasing shearing-stress or velocity gradient. The values τ (g/cm^2) and $\frac{dv}{dr}$ (sec^{-1}) of heavy suspensions which belong together, and the apparent viscosity as their quotient can be determined by means

of suitable viscosimeters (e. g. Fann's, Stormer's or other rotary-cylindrical viscosimeter).

The tangential velocity component of the medium's flow in the hydrocyclone varies according to the function $v_t = v_{t1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n$. Its corresponding velocity gradient is

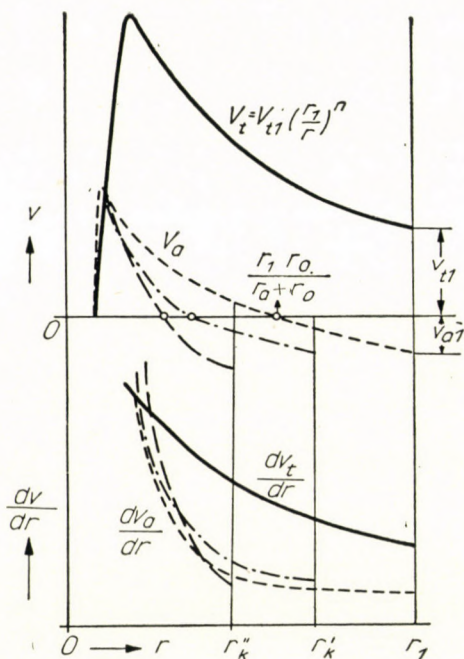


Fig. 3

$$\frac{dv_t}{dr} = \frac{-nv_t r_1^n}{r^{(1+n)}} = \frac{-nv_t}{r}, \text{ where } v_t = \frac{4Q}{e^2\pi} \text{ and } n \cong 0,8.$$

The axial velocity component which is $v_{a1} \cong v_{r1} \cotg a$ at the wall of the cyclone decreases from this value to $v_a = 0$ more or less linearly in the upper two thirds and parabolically in the lower third of the cyclone's conical section. (Fig. 3.) Therefore, the velocity gradient which arises from the altering of the axial velocity component between the line $v_a = 0$ and the wall of the

cyclone in the upper part of the cone will be about $\frac{dv_a}{dr} \cong \frac{-v_{a1}}{r_k \left(1 - \frac{r_0}{r_a + r_0} \right)}$

where $v_{a1} \cong v_{r1} \cotg a$ and r_k is the distance of the conical cyclone shell from the axis. As $v_{r1} = \frac{Q}{2\pi r_1 h_1}$, consequently $\frac{v_{a1}}{v_{r1}} = \frac{e^2 \cotg a}{8 r_1 h_1}$. For instance,

in case of $e = 3,33$ cm, $r_1 = 10$ cm, $h_1 = 10$ cm and $\alpha = 10^\circ$, or rather 30° , we have $\frac{v_{a1}}{v_{t1}} = 0,08$, or rather $0,024$. The quotient of the two velocity gra-

dients is: $i = \frac{\frac{dv_a}{dr}}{\frac{dv_t}{dr}} = \frac{e^2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^{1,8} \cotg \alpha}{8 h_1 n r_k \left(1 - \frac{r_0}{r_a + r_0}\right)}$. Taking, for instance, the

numerical values of the above example at the locus $r = r_1 (= r_k)$ if $\frac{r_0}{r_a + r_0} = \frac{2}{3}$ the quotient of the axial and tangential velocity gradients comes out to $i = 0,052 \cotg \alpha$, that is at $\alpha = 10^\circ$, and 30° respectively, its value will be $0,30$, and $0,09$, respectively. The ratio of the velocity gradients (i) will be smaller than these values between the radii r_k and $\frac{r_k r_0}{r_a + r_0}$, that is between the line $v_a = 0$ and the cyclone's wall in the upper two thirds of its cone, where the value of r_k is comparatively great. Advancing towards the axis (in cases of small radii r) where the value v_a increases rapidly (and not linearly) the velocity gradient $\frac{dv_a}{dr}$ will have a much higher value than what would result from our formula. In the vicinity of r_0 $\frac{dv_a}{dr} > \frac{dv_t}{dr}$ (v. Fig. 3 also). In the area between the wall of the cyclone and the line $v_a = 0$, where the value of i comes to $0,3-0,1$, we shall, however, commit no serious error by regarding the total velocity gradient developing in the cyclone as being practically equal to $\frac{dv_t}{dr}$. (For instance, even if $i = 0,3$, the resulting vector of the two velocity gradients would exceed the value of $\frac{dv_t}{dr}$ by $4,5$ percent only, since $\sqrt{1^2 + 0,3^2} = 1,045$).

Table 1

$\frac{dv_t}{dr}$ ($r_1 = 10$ cm)

| $r/r_1 =$ | 1 | 0,75 | 0,67 | 0,50 | 0,25 |
|-----------------------------|----|------|------|------|------|
| $v_{t1} = 600$ cm/sec | 48 | 80 | 99 | 167 | 582 |
| 800 ,, | 64 | 108 | 132 | 222 | 778 |
| 1000 ,, | 80 | 134 | 166 | 278 | 972 |

Table 1 shows values of velocity gradients $\frac{dv_t}{dr}$ (in $\frac{1}{\text{sec}}$) corresponding to different values $\frac{r}{r_1}$, and velocity of entry v_{t1} , when $r_1 = 10$ cm. (In case of

$r_1 = 5$ cm the data given in the Table for $\frac{dv_l}{dr}$ will redouble, in case of $r_1 = 20$ cm the same data will fall to one half.) Supposing that $r_a = r_0$, v_a will become zero at the ratio $\frac{r}{r_k} = 0,5$; in case of $r_a = \frac{r_0}{2}$ the same will take place at the ratio $\frac{r}{r_k} = 0,67$. (For instance, in the section $r_k = 0,5 r_1$, v_a becomes zero with the radius $r = 0,5 r_k = 0,25 r_1$, and $r = 0,67 r_k = 0,33 r_1$, respectively.) In case of longer radii the real values of the velocity gradients exceed the data for $\frac{dv_l}{dr}$ as shown in Table 1 by a few per cents only. On the other hand, since in case of smaller radii the values $\frac{dv_a}{dr}$ are no more negligible in comparison to the values $\frac{dv_l}{dr}$, the real velocity gradients will be greater than the data given in the last columns of the table. On the locus $\frac{dv_a}{dr} = \frac{dv_l}{dr}$ the resulting velocity gradient is $\sqrt{2}$ -times greater than the numerical value shown in the Table.

GOVIER, SCHOOK and LILGE [3] published data of measurements relating to the apparent viscosity (η' cp) pertaining to different velocity gradients $\frac{dv}{dr}$ of magnetite (M), ferrosilicon (FeSi) and galena (G) suspensions with different specific gravities γ' (or rather different volume ratios σ). Relying on this publication, Table 2 shows the apparent viscosities η' pertaining to the values of $\frac{dv_l}{dr}$ developing in a cyclone of radius $r_1 = 10$ cm in case of velocity of entry $v_{t1} = 8$ m/sec. It also shows the values $\sqrt{\frac{\eta'(\delta - \gamma)}{\eta(\delta - \gamma')}}$ with which the grain size d computed for pure water has to be multiplied in order to obtain the grain sizes revolving in equilibrium in the cyclone. (The approximate granular composition of magnetite and galena was 97%—50 μ , 66%—26 μ , 47%—18 μ , 15%—6 μ and that of ferrosilicon 90%—50 μ , 37%—26 μ , 15%—18 μ , 2%—6 μ .)

Table 3 shows values of d computed in this way corresponding to a quantity of slurry $Q = 25$ cu. m/hour for the following cyclones: $a = 10^\circ$, respectively 30° , $r_1 = 10$ cm, $r_0 = 2,5$ cm, $r_a = 1,25$ cm, $h_1 = 10$ cm, $e = 3,33$ cm.

It is visible from these Tables that, for instance, in case of a radius $r = 6,7$ cm, where the line $v_a = 0$ is coming in at the junction of the cylindrical and the conical section, the velocity gradient amounts to 132 sec^{-1} , the viscosity of suspensions with a specific gravity of $\gamma' = 2,6$ and $2,8$, is in the case of magnetite (M) suspensions 340 and 1000 cp, in that of ferrosilicon (FeSi) 28 and 45 cp, in that of galena (G) 12 and 15 cp. Here revolve now in equilibrium (in suspensions of a specific gravity $\gamma' = 2,6$ and $2,8$ respectively)

Table 2

| r cm = | | 10 | 7,5 | 6,7 | 5,0 | 2,5 | |
|-------------|------------|-----------|--|------|------|------|-----|
| dv_i/dr = | | 64 | 108 | 132 | 222 | 778 | |
| | $\sigma\%$ | γ' | η' cp | | | | |
| M : | 30 | 2,2 | 100 | 80 | 70 | 50 | 30 |
| | 40 | 2,6 | 400 | 360 | 340 | 300 | 180 |
| | 45 | 2,8 | 1400 | 1100 | 1000 | 900 | 800 |
| FeSi : | 28 | 2,6 | 40 | 32 | 28 | 24 | 32 |
| | 31 | 2,8 | 50 | 47 | 45 | 40 | 55 |
| G : | 25 | 2,6 | 15 | 13 | 12 | 10 | 13 |
| | 28 | 2,8 | 20 | 18 | 15 | 14 | 16 |
| | 34 | 3,2 | 60 | 47 | 44 | 40 | 48 |
| | 40 | 3,6 | 300 | 220 | 200 | 200 | 400 |
| | | | $\sqrt{\frac{\eta'(\delta-\gamma)}{\eta(\delta-\gamma')}}$ | | | | |
| M : | 2,2 | 12,0 | 10,7 | 10,0 | 8,5 | 6,6 | |
| | 2,6 | 25,8 | 24,5 | 23,9 | 22,3 | 17,3 | |
| | 2,8 | 50,5 | 44,9 | 42,7 | 40,5 | 38,2 | |
| FeSi : | 2,6 | 7,4 | 6,7 | 6,2 | 5,8 | 6,7 | |
| | 2,8 | 8,5 | 8,2 | 7,9 | 7,6 | 8,9 | |
| G : | 2,6 | 4,5 | 4,1 | 3,9 | 3,7 | 4,1 | |
| | 2,8 | 5,3 | 4,9 | 4,6 | 4,3 | 4,7 | |
| | 3,2 | 9,5 | 8,4 | 8,1 | 7,8 | 8,5 | |
| | 3,6 | 22,3 | 19,1 | 18,2 | 18,2 | 25,8 | |

in a cyclone of which half apex angle is 10° , M-grains of $284-509 \mu$, FeSi-grains of $61-78 \mu$ and G-grains of $37-43 \mu$; in a cyclone of which half apex angle is 30° , M-grains of $386-689 \mu$, FeSi-grains of $83-104 \mu$ and G-grains of $49-58 \mu$. As we proceed along the line $v_a = 0$ toward the apex of the cyclone the granules in equilibrium become finer and finer and the grain-size space is wider (the lower grain-size limit is smaller) in a cyclone with a more obtuse apex angle. (The state of equilibrium corresponding to a grain-size $d = \infty$ is in the cylindrical section of a 10° -cyclone at a distance of $1,8$ cm beyond its wall, while in the case of a 30° -cyclone this distance is $5,8$ cm; it continues in the conical section of the cyclone with a direction tangent $\beta = \arctg \frac{r_1}{H}$, with the lines $d = \text{const}$ of the finer grains fitting close to it.)

Table 3

 $d \mu$ $(Q = 25 \text{ m}^3/\text{hour})$

| α | = | 10° | | | | | 30° | | | | |
|----------|---------------|------|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|
| | | 10 | 7,5 | 6,7 | 5,0 | 2,5 | 10 | 7,5 | 6,7 | 5,0 | 2,5 |
| M : | $\gamma' = 1$ | 28 | 14 | 12 | 8 | 4 | 28 | 18 | 16 | 12 | 6 |
| | 2,2 | 336 | 152 | 119 | 69 | 26 | 336 | 197 | 161 | 98 | 40 |
| | 2,6 | 721 | 348 | 284 | 181 | 69 | 721 | 541 | 386 | 259 | 105 |
| | 2,8 | 1412 | 638 | 509 | 328 | 153 | 1412 | 827 | 689 | 470 | 233 |
| FeSi : | 1 | 23 | 12 | 10 | 7 | 3 | 23 | 15 | 13 | 10 | 5 |
| | 2,6 | 172 | 79 | 61 | 39 | 22 | 172 | 102 | 83 | 58 | 34 |
| | 2,8 | 197 | 97 | 78 | 51 | 29 | 197 | 125 | 104 | 75 | 45 |
| G : | 1 | 22 | 11 | 9 | 6 | 3 | 22 | 14 | 13 | 9 | 5 |
| | 2,6 | 99 | 45 | 37 | 23 | 13 | 99 | 59 | 49 | 35 | 20 |
| | 2,8 | 116 | 54 | 43 | 27 | 15 | 116 | 71 | 58 | 40 | 23 |
| | 3,2 | 208 | 93 | 76 | 49 | 26 | 208 | 121 | 102 | 73 | 41 |
| | 3,6 | 489 | 212 | 171 | 115 | 80 | 489 | 275 | 230 | 171 | 124 |

In the cylindrical section of the cyclone, the region $v_a \cong 0$ falls more or less into the area between the radii $r \cong 0,5 r_1 - 0,8 r_1$. For instance, in a heavy suspension of the specific gravity $\gamma' = 2,8$ we find in a 10°-cyclone M-grains of 350—800 μ , FeSi-grains of 50—110 μ , or G-grains of 25—60 μ , to revolve in equilibrium. Grains falling between these grain-size limits are the principal factors in producing the heavy suspension in the hydrocyclone. (In its cylindrical section.) In the lower part of the conical section, a part of still finer grains remains in the cyclone for a longer time, that is they too take part in producing the heavy suspension in this place. The mass of the fine grains percolates, however, through the particles of the "stagnant" heavy suspension toward the cyclone's axis being then discharged at the upper outflow with the slurry of low specific gravity. The coarser grains on the other hand are discharged at the apex with the slurry of high specific gravity. If the introduced suspension is devoid of grain sizes that revolve in equilibrium in the region $v_a \cong 0$ (for instance, because the solid phase of the suspension is ground too fine) there is no possibility for a "stagnant" heavy suspension to develop in the hydrocyclone. When in a suspension of relatively great viscosity there are only finer grains (for instance, in case of a specific gravity $\gamma' = 2,8$ magnetite grains $< 300 \mu$), a suspension of the same specific gravity ($\gamma' = 2,8$) has to be introduced into the hydrocyclone as that, at which we want to carry out the separation, because under such circumstances no concentration at the locus $v_a \cong 0$ of the cylindrical section occurs, and the specific gravity of the suspensions discharged both at the upper outflow and the apex is equally near to

$\gamma' = 2,8$. As the viscosity of magnetite suspensions of a specific gravity $\gamma' = 2,8$ is very high (1400—800 cp, v. Table 2), the fine grains remain practically motionless in this medium of great viscosity during their short stay in the cyclone. If in the suspension there are grain-sizes revolving in equilibrium at the locus $v_a = 0$, a "stagnant" heavy suspension will be formed, of which the specific gravity will exceed that of the suspension conducted into the cyclone. If viscosity is high, quite fine grains remain also in the suspension discharged with the product of high specific gravity through the apex, their volume ratio being approximately identical with that, which is observable in the suspension introduced.

Larger grains than those of size d_1 revolving in equilibrium on radius $r_1 (= 10 \text{ cm})$ are pressed to the wall of the cyclone already in its cylindrical section, while in its conical section also finer and finer granules than those of the size d_1 are pressed against the cyclone's wall, so that proceeding toward the apex, the quantity of material grating against the wall increases gradually. (The speedy wear of the apex is due partly to this, and partly to the fact that the tangential velocity component v_t increases vigorously with the decrease of the radius.)

The possible maximum of density σ of the heavy suspension developing in the hydrocyclone — if the grains have been polished round — corresponds approximately to the loose agglomeration (hexagonal arrangement) of nearly uniform spheres, that is $\sigma_{\max} \cong \frac{\pi}{6} = 0,52$. The grains revolving in equilibrium in the contiguous layers of the cyclone are, namely, of approximately uniform size and the developing great shearing-force, and the velocity gradient prevent the grains from arranging themselves more densely than the loose agglomeration of spheres. (The maximum density of freshly ground suspension material is smaller, for the protruding corners and edges of the grains prevent even the development of a density corresponding to the loose agglomeration of spheres.) Maximum specific gravities γ' corresponding to density $\sigma = 0,52$ are: M—3,01, FeSi—3,96, G—4,3. The density and specific gravity of the suspension discharging at the apex might be even greater. The grains pressed to the wall are, namely, of different sizes, and in the interstices between coarser grains there is room for finer ones; on the other hand, these particles — by not revolving on radii corresponding to their state of equilibrium — are squeezed to the wall and to each other by a force which is the greater the farther they are situated from their state of equilibrium. (Therefore, an underflow of greater specific gravity may be expected in stubby cyclones.) As a rule no such force is acting upon particles revolving in equilibrium at locus $v_a = 0$ on their own line $d = \text{const}$. The shearing force (velocity gradient) between the adjacent layers is smaller along the wall than inside the cyclone. But while a great shearing-force hinders, a small one promotes thickening by changing the rela-

tive position of particles in contact with one another. Therefore, the density of the suspension escaping at the apex may even be greater than the value $\sigma = 0,74$ which corresponds to the most congested (tetrahedral) arrangement of uniform spheres. To the value $\sigma = 0,74$ belong the following suspension specific gravities: $M = 3,96$, $FeSi = 5,3$, $G = 5,8$ and the following moisture contents: $M = 6,6\%$, $FeSi = 4,9\%$, $G = 4,5\%$ (!!). An underflow of such a great density may particularly occur if the air core, observable in the axis of the cyclone in normal operation, vanishes. In such cases the underflow is discharged in a straight jet and not in form of a spreading cone from the cyclone, and it may even happen that instead of a fluid, compact sausages are pressed through the apex. However, this mode of operation is not used in practice because it frequently causes clogging.

Knowing the loose volume of slurry of great specific gravity to be discharged at the apex, knowing further the loose volume of the suspension medium which increases gradually toward the apex and knowing finally the change of v_a , the thickness of the annular layer of dense pulp sliding down the conic wall can be computed at every point of the cone as well as in the outflow opening. (See [1].) The density of the discharged suspension can in dependence on the distance of the line $d = \infty$, be interpolated between the values $\sigma = 0,52 - 0,74$, if the line $d = \infty$ is far away a higher value has to be chosen. The approximate weight of the suspension material discharging at the apex can be computed if the quantity and the granulometry of the suspension fed-in are known. The axial velocity component of the medium at the junction of the cylindrical and of the conical section comes to $v_{a1} \cong v_{r1} \cotg \alpha$, and this value increases along the conic wall toward the apex but slightly. The axial velocity component v_a decreases from its maximum value on the conic wall to zero velocity on the line $v_a = 0$ in the upper and middle part of the cone more or less linearly, in its bottom part more or less parabolically. (See also Fig. 3.) The cyclone is operating "normally" if the thickness of the annular layer of pulp discharging through the orifice of outflow at the apex is smaller than the distance of the line $v_a = 0$ from the cyclone wall. If this thickness becomes greater than the distance of the line $v_a = 0$ from the cyclone wall, the inner part of the annular layer will not move downward, but upward in the hydrocyclone. At its higher point these grains will move once more toward their state of equilibrium beyond the cyclone shell, *i.e.* toward the wall, revolving thus in the conical section of the cyclone and percolating from inside to outside through the "stagnant" heavy suspension developed in the conical section. The rapid axial flow along the axis transports, of course, a part of the grains to the upper outflow; so that the quantity of faulty grains that are larger than the "limit" grain size increases in the suspension material which is discharged here. (Another reason for the appearance of "faulty" grains to be found in the upper discharge is that in the upper

part of the cylindrical section of the cyclone the axial velocity component, which is directed upward along the cyclone wall, and downward along the inner side of the vortex finder, transports a part of the coarser grains to the overflow.) If the thickness of the annular layer of pulp surpasses the value of r_a in the orifice of the apex, the air core beside the axis vanishes and the phenomenon described above, *i.e.* the revolving of a part of coarser grains at the bottom of the cyclone and their getting into the upper discharge, occurs to a larger extent. The impact of coarser grains percolating through the "stagnant" heavy suspension away from the axis, and that of the finer grains percolating through it toward the axis, upon the grains which — revolving in equilibrium at the locus $v_a \cong 0$ — constitute the suspension itself, exerts a bilateral pressure on the suspension, which may give rise to a denser suspension than the "loose" agglomeration of spheres. To stop the abnormal working of the cyclone caused by an excessive thickness of the annular pulp layer, and to restore "normal" operation we have either to enlarge the orifice of the apex, or to reduce the density, or the quantity of the suspension fed-in, or else to use a suspension made up from finer grains.

The specific gravity of the suspension γ' in the hydrocyclone is the highest on the perimeter and decreases gradually toward the axis, that is it changes monotonously with the radius. Any change of γ' causes to change the viscosity η' in the same direction, *i.e.* a higher value of γ' means a higher value of η' . Since any diminution of the radius entails an increase of $\frac{dv}{dr} \eta'$ will change in the fashion shown in Table 2, even if γ' remains unchanged: the viscosity of magnetite suspensions decreases monotonously with the radius, that of FeSi- and G-suspensions reaches a minimum at a value of $\frac{dv}{dr} \cong 300$ (*i.e.* at a radius $r = 4-5$ cm). But the parallel change of η' and γ' is much greater than that due to the change of $\frac{dv}{dr}$, so that η' will decrease monotonously with the radius also in FeSi- and G-suspensions. The decrease of both γ' and η' following a diminution of the radius shortens the relative distance between the equilibrium positions of particles of different grain-sizes. In other words: the equilibrium position of particles falling between given grain-size limits is confined to a narrower strip than in the case of unchanged γ' and η' , as is evident from the analysis of the formula valid for $d:d$ is proportional to $\sqrt{\frac{\eta'}{(\delta - \gamma')}}$, consequently d is growing with increased η' or γ' ; coarser grains revolve in equilibrium where, with unchanged (smaller) γ' and η' grains of smaller size were in equilibrium. A broad grain-size space restricted to a narrow strip has the advantage that a greater part of the suspension medium will take an active part in the production of the stagnant heavy suspension. Due

to the great specific gravity and viscosity developing along the cyclone wall, the orbit of equilibrium of comparatively coarser grains which lies outside the cyclone shell will be brought nearer to it, and may even be brought into the cyclone, whereby wear of the cyclone shell will be slower.

REFERENCES

1. G. TARJÁN: Contribution to the Kinematics of the Hydrocyclone. Acta Technica Ac. Sc. Hung., Tom. XVIII. Fasc. 3—4., 1957.
2. G. TARJÁN: Settling Velocity of Solid Grains in Coarser Dispersions. Acta Technica Ac. Sc. Hung., Tom. XX. Fasc. 1—2., p. 197/207. 1958.
3. G. W. GOVIER, C. A. SHOOK, E. O. LILGE: The Rheological Properties of Water Suspensions of Finely Subgraded Magnetite, Galena and Ferrosilicon. Canadian Min. and Met. Bull., May 1957 (Vol. 50, No. 541), p. 261—268.

SUMMARY

The grain size d of a particle revolving in equilibrium in the cylindrical section of a heavy-media hydrocyclone is obtained by the formula:

$$d \equiv \frac{80 e^2}{\sqrt{(\delta - \gamma') Q}} \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^{0,8} \cdot \sqrt{\frac{\eta'}{h_1 + (r_1 - r) \cotg \alpha}}$$

where d = microns; e = cm, the diameter of the orifice of entry; r_1 = cm, the radius of the cyclone; h_1 = cm the length of the cylindrical section; α = the half apex angle; Q = cu. m/hour, the quantity of slurry fed-in; δ = gram/cu. cm, the specific gravity of the solid grain; γ' = gram/cu. cm, the specific gravity of the suspension; η' = cp (centipoise), the viscosity of the suspension. The size of a particle revolving in equilibrium in a suspension of the specific gravity γ' and the viscosity η' can be obtained from the value valid for a particle revolving in equilibrium on the radius r in pure water or in a diluted suspension ($\gamma = 1$ gram/cu. cm, $\eta = 1$ cp) by multiplying this value with the factor $\sqrt{\frac{\eta'(\delta - \gamma)}{\eta(\delta - \gamma')}}$.

The axial velocity component (v_a) of the medium flow is approximately zero in the cylindrical section of the cyclone between radii $0,5r_1$ and $0,8r_1$; it is zero in the conical section at a distance of about $\frac{r_k r_0}{r_a + r_0}$ from the axis; from this locus toward the cyclone shell the flow of the slurry is directed downward, while toward the axis upward with increasing velocity. (r_k is the distance of the conical cyclone shell from the axis, r_0 is the radius of the upper outflow orifice, r_a is the radius of the outflow orifice at the apex.) Around the locus $v_a = 0$ a "stagnant" heavy suspension develops owing to the accumulation of grains that remain longer in the cyclone. The specific gravity of this "stagnant" suspension is that of the separation occurring in the heavy media hydrocyclone. The specific gravity and viscosity of the suspension decrease from the shell toward the axis, occasioning a simultaneous decrease of the relative distance between the equilibrium positions of differently sized grains. The specific gravity of the suspension is given by the formula $\gamma' = \sigma\delta + (1 - \sigma)$, where σ is the volume ratio of solid parts. In the vicinity of the locus $v_a = 0$, the maximum value of σ comes to about $\frac{\pi}{6} = 0,52$, while along the cyclone wall it may even reach a higher value.

The viscosity of the suspension is a function of the velocity gradient arising in the cyclone. Its value in the stagnant suspension, and outward from it, may be expressed by the formula

$$\frac{dv_l}{dr} = \frac{0,8 v_{l1} r_1^{0,8}}{r^{1,8}}$$

ÜBER DIE IM HYDROZYKLON ZUR ENTWICKLUNG GELANGENDE SCHWERSUSPENSION

G. TARJÁN

ZUSAMMENFASSUNG

Die Korngrösse d eines im zylindrischen Teil des Waschzyklons am Halbmesser r im Gleichgewicht kreisenden Teilchens kann an Hand der Formel

$$d = \frac{80 e^2}{\sqrt{(\delta - \gamma') Q}} \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^{0,8} \cdot \sqrt{\frac{\eta'}{h_1 + (r_1 - r) \cotg \alpha}}$$

ermittelt werden, wo d in μ ausgedrückt ist, e in cm den Durchmesser der Eintrittsöffnung r_1 in cm den Halbmesser des Zyklons, h_1 in cm die Höhe des zylindrischen Teiles, α den halben Kegelwinkel, Q in m^3/St die Menge der aufgegebenen Trübe, δ in g/cm^3 das spezifische Gewicht der Körner des Feststoffes, γ' in g/cm^3 das spezifische Gewicht der Suspension, η' in cP deren Viskosität bedeuten. Die Korngrösse eines Teilchens, welches in einer Suspension vom spezifischen Gewicht γ' und der Viskosität η' am Halbmesser r im Gleichgewicht kreist ist das

$\sqrt{\frac{\eta'(\delta - \gamma')}{\eta(\delta - \gamma')}}$ -fache eines in reinem Wasser, oder in einer dünnflüssigen Suspension ($\gamma = 1$ g/cm^3 , $\eta = 1$ cP) kreisenden Teilchens.

Die axiale Geschwindigkeitskomponente der Mediumströmung ist im zylindrischen Teile des Zyklons beiläufig zwischen den Halbmessern $(0,5 - 0,8)r_1$ annähernd 0, im konischen Teile ist dieselbe in einer beläufigen Entfernung $\frac{rk r_0}{r_a + r_0}$ von der Achse gleich 0; von dieser Stelle gegen die Zyklonenwand fortschreitend strömt das Medium mit sich vermehrender Geschwindigkeit abwärts, gegen die Achse zu fortschreitend aufwärts. (rk ist die Entfernung der konischen Zyklonenwand von der Achse, r_0 ist der Halbmesser der oberen, r_a derjenige der unteren Austrittsöffnung.) Im Umkreise der Stelle $v_a \cong 0$ entwickelt sich infolge der längere Zeit im Zyklon verbleibenden Teilchen eine »stagnierende« Schwersuspension. Das spezifische Gewicht dieser »stagnierenden« Suspension entspricht dem spezifischen Gewicht der im Waschzyklon vor sich gehenden Separation. Das spezifische Gewicht und die Viskosität der Suspension verringern sich übrigens im Zyklon in der Richtung von der Wand gegen die Achse zu, hiedurch verringert sich auch die relative Entfernung der Gleichgewichtslage von Teilchen verschiedener Korngrösse. Das spezifische Gewicht der Suspension γ' ergibt sich aus der Formel $\gamma' = \sigma\delta + (1 - \sigma)$, wo σ den Rauminhaltsanteil der festen Teilchen bedeutet. Im Umkreise der Stelle $v_a = 0$ kann der Maximalwert von σ beiläufig $\frac{\pi}{6} = 0,52$ ausmachen, längs der Zyklonenwand kann derselbe noch grösser werden. Die Viskosität der Suspension ist eine Funktion des im Zyklon auftretenden Geschwindigkeitgefälles, dessen Grösse in der stagnierenden Suspension und von derselben auswärts gerichtet mit $\frac{dv_t}{dr} = \frac{0,8 v_{t1} r_1^{0,8}}{r^{1,8}}$ bewertet werden kann.

DE LA SUSPENSION LOURDE SE FORMANT DANS L'HYDROCYCLONE

G. TARJÁN

RÉSUMÉ

La grosseur d'un grain en rotation équilibrée sur le rayon r dans la partie cylindrique de l'hydrocyclone à suspension lourde peut être calculée à l'aide de la formule

$$d = \frac{80 e^2}{\sqrt{(\delta - \gamma') Q}} \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^{0,8} \cdot \sqrt{\frac{\eta'}{h_1 + (r_1 - r) \cotg \alpha}}$$

où d est micron, e cm le diamètre de l'orifice d'entrée, r_1 cm le rayon du cyclone, h_1 cm la longueur de la partie cylindrique, a le demi-angle du cône, Q m³/h la quantité de boue introduite, δ g/cm³ le poids spécifique du grain solide, γ' g/cm³ le poids spécifique de la suspension, et η' cp la viscosité de la suspension. La grosseur d'un grain en giration équilibrée dans une suspension de poids spécifique γ' et de viscosité η' est $\sqrt{\frac{\eta'(\delta - \gamma')}{\eta(\delta - \gamma')}}$ fois supérieure à celle du grain en giration équilibrée sur le rayon r en eau pure ou en suspension diluée ($\gamma = 1$ g/cm³, $\eta = 1$ cp).

Le composant axial (v_a) de la vitesse d'un fluide est à peu près zéro dans la partie cylindrique du cyclone entre les rayons $(0,5-0,8)r_1$. Dans la partie conique, à une distance de l'axe $\frac{rk r_0}{r_a + r_0}$, le composant est zéro en partant de ce point vers la partie basse de la paroi en s'approchant de l'axe le fluide afflue en haut avec une vitesse croissante (rk est la distance de la paroi du cyclone conique à l'axe, r_0 est le rayon de l'orifice supérieur d'écoulement et r_a celui de l'orifice inférieur). Aux environs du point $v_a \approx 0$ il se forme une suspension «stagnante», à cause de l'accumulation des grains restés dans le cyclone pendant un temps assez long. Le poids spécifique de cette suspension stagnante est celui de la séparation survenant dans l'hydrocyclone à suspension lourde. D'ailleurs, le poids spécifique et la viscosité de la suspension décroît dans le cyclone en allant de la paroi vers l'axe et, par conséquent, la distance relative de la position d'équilibre des grains de différentes dimensions décroît à son tour. Le poids spécifique γ' de la suspension est donné par la formule $\gamma' = \sigma\delta + (1-\sigma)$, où σ est le rapport volumétrique des parties solides. Aux environs du point $v_a = 0$, la valeur maximum de σ est à peu près $\pi/6 = 0,52$ et près de la paroi du cyclone elle peut s'accroître encore. La viscosité de la suspension est fonction de la perte de vitesse dans le cyclone. On peut déterminer la valeur de cette dernière dans la suspension stagnante, et à partir de celle-ci par la formule $\frac{dv_t}{dr} \approx \frac{0,8 v_{t1} r_1^{0,8}}{r^{1,8}}$.

О ОБРАЗУЮЩИХСЯ В ГИДРОЦИКЛОНЕ ТЯЖЕЛЫХ СУСПЕНЗИЯХ

Г. ТАРЬЯН

РЕЗЮМЕ

Крупность d зерен, вращающихся в равновесии на радиусе r цилиндрической части гидроциклона для тяжелых суспензий, может быть вычислена при помощи формулы

$$d = \frac{80 e^2}{\sqrt{(\delta - \gamma') Q}} \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^{0,8} \cdot \sqrt{\frac{\eta'}{h_1 + (r_1 - r) \cotg a}}$$

где d — микрон, e — см, диаметр входного отверстия, r_1 — радиус циклона, см; h_1 — длина цилиндрической части, см; a — половина конусного угла; Q — количество поданной пульпы, м³/ч; δ — удельный вес твердых зерен, г/см³; γ' — удельный вес суспензии, г/см³; η' — вязкость суспензии, ср. Крупность зерен, вращающихся в равновесии в суспензии удельным весом γ' и вязкостью η' , равна $\sqrt{\frac{\eta'(\delta - \gamma')}{\eta(\delta - \gamma')}}$ — кратному зерен, вращающихся в равновесии в воде или разбавленной суспензии ($\gamma = 1$ г/см³, $\eta = 1$ ср) на радиусе r .

Осевая составляющая (v_a) скорости движения потока среды в цилиндрической части циклона равна нулю прибл. нулю между радиусами приблизительно $(0,5-0,8)r_1$; в конусной части равна нулю на расстоянии приблизительно $\frac{rk r_0}{r_a + r_0}$, в сторону стенки циклона от этого места среда движется с постепенно возрастающей скоростью вниз, а в сторону оси — вверх (rk — расстояние между осью и конусной циклонной стенкой; r_0 и r_a — радиус верхнего и, соответственно, нижнего выходных отверстий). В области точки $v_a \approx 0$ образуется «застаивающаяся» тяжелая суспензия из-за скопления задерживающихся в циклоне в течение продолжительного времени зерен. Удельный вес этой застаивающейся суспензии соответствует удельному весу сепарации в гидроциклоне

для тяжелых суспензий. Удельный вес и вязкость суспензии, между прочим, уменьшаются в циклоне, считая от стенки циклона в сторону оси; вследствие этого уменьшается также относительное расстояние положения равновесия зерен различной крупности. Удельный вес γ' суспензии получается по формуле $\gamma' = \sigma\delta + (1 - \delta)$, где σ — частное объема твердых частиц. Максимальное значение величины σ в области точки $v_2 = 0$ может быть равно прил. $\pi/6 = 0,52$, а рядом со стенкой циклона может возрасти еще сильнее. Вязкость суспензии является функцией возникающего в циклоне падений скорости. Эта величина может быть принята в застаивающейся суспензии и в направлении к стенкам равной

$$\frac{dv_t}{dr} \equiv \frac{0,8 v_{t1} r_1^{0,8}}{r^{1,8}} .$$

THEORETISCHE GRUNDLAGEN DER MODELLGESETZE UND UMRECHNUNG DER MESSERGEBNISSE AN ÜBERDRUCKTURBINEN

CS. FÁY

LEHRSTUHL FÜR WASSERKRAFTMASCHINEN DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 14. November 1957]

Die Ausführung von Messungen an den fertigen Maschinen ist auf dem Gebiete der Strömungsmaschinen von äusserster Wichtigkeit, da die Berechnung der Maschinen lediglich durch ein Näherungsverfahren vorgenommen wird. Während die genaue und schnelle Durchführung der Messungen im Falle der Pumpen keine besonders schwierige Aufgabe bedeutet, drängt infolge der grossen Dimensionen unserer im Bau befindlichen Turbinenanlagen immer mehr das im Ausland bereits übliche Verfahren in den Vordergrund, nämlich die Abnahmeversuche der Maschinen an deren geometrisch ähnlichen Kleinmodellen vorzunehmen.

Die Wirkungsgradwerte der an dem Modell vorgenommenen Messungen liegen im allgemeinen niedriger als der effektive Wirkungsgrad der Maschinen. Zur Berechnung der Besserung des Wirkungsgrades verbreiteten sich im Schrifttum zahlreiche Verfahren, deren Zuverlässigkeit jedoch zweifelhaft und bestreitbar ist.

Der grösste Teil der Umrechnungsverfahren bezieht sich im allgemeinen auf einen einzigen (den besten Wirkungsgrad aufweisenden) Betriebspunkt der Turbinenanlage. Bei unseren, an den Flüssen des Landes im Bau begriffenen — mit Kaplan turbinen für kleine Fallhöhen zu versehenen — Kraftanlagen müssen jedoch die Turbinen über eine weite Zone des Wirkungsgradfeldes arbeiten, somit das Umrechnungsverfahren an jedem beliebigen Betriebspunkt der Turbine anwendbar sein muss.

1. Grundlagen des Umrechnungsverfahrens

Die Betriebskennwerte der Wasserturbinen bezieht man im allgemeinen auf eine Fallhöhe von 1 m bei einem Raddurchmesser von 1 m. Dieses Verfahren ermöglicht, die Betriebsdaten eines gewissen Turbinenmodells auf eine gross ausgeführte Turbine umzurechnen, vorausgesetzt, dass der Wirkungsgrad unverändert bleibt.

Durch die Änderung des Wirkungsgrades werden auch die Betriebskennwerte beeinflusst. Bei der Umrechnung der Betriebsdaten ist somit die wichtigste Forderung, dass der Wirkungsgrad mit zuverlässiger Genauigkeit auf jeden beliebigen Betriebspunkt umgerechnet werden könne.

Der Wirkungsgrad η der Wasserturbinen kann durch die Nutzleistung N_h , zugeführte Leistung N_b bzw. durch den Verlust V und Verlustfaktor $\delta_\delta = V/N_b$ ausgedrückt werden :

$$\eta = \frac{N_h}{N_b} = \frac{N_b - V}{N_b} = 1 - \delta_\delta. \quad (1)$$

Die Umrechnung des Wirkungsgrades wird im allgemeinen in der Weise vorgenommen, dass die an dem Modell *gemessenen* Verluste mit den an der Grossausführung *berechneten* Verlusten verglichen werden, woraus auch auf die Korrektur des Wirkungsgrades gefolgert wird. Wir müssen daher die Verluste der Turbinen von diesem Gesichtspunkte aus einer näheren Untersuchung unterziehen.

2. Gruppierung der Verluste

- a) Stopfbüchsen- und Lagerreibungsverluste,
- b) Radscheibenreibungsverluste,
- c) Spaltverluste,
- d) hydraulische Verluste.

Im Laufe der Modellmessungen müssen die einzelnen Verluste getrennt festgestellt werden, und es muss untersucht werden, welche Möglichkeiten für die Umrechnung der einzelnen Verlustarten bestehen.

Im Laufe unserer Untersuchung wollen wir voraussetzen, dass auch die Modellmessungen mit Wasser vorgenommen wurden. Obwohl sich im Ausland auch ein Prüfverfahren mit Hilfe von Luft verbreitete, wird jedoch dieses Verfahren — nach unserer Kenntnis — bei Abnahmeprüfungen nicht angewendet, so wollen wir diese Möglichkeit auch an dieser Stelle unbeachtet lassen.

a) Stopfbüchsen- und Lagerreibungsverluste

Es werden im Schrifttum zahlreiche Verfahren bekannt gegeben, die zur Prüfung der Lager des Modells bzw. der Grossausführung und zur Messung der Verluste dienen. Im allgemeinen pflegt man in der Praxis in der Weise zu verfahren, dass das Modell mit einer Doppelagerung ausgeführt wird, wobei die Lagerreibungskräfte als innere Kräfte wirken. Hierdurch werden durch die Daten der Modellmessungen lediglich die übrigen Verluste erhalten, und die Lagerverluste der Grossausführung müssen auf Grund literarischer Angaben berechnet werden, wobei der Wert des umgerechneten Wirkungsgrades dementsprechend korrigiert werden muss.

Die Lager- und Stopfbüchsenverluste, verglichen mit den übrigen Verlusten, sind in den meisten Fällen des Betriebsgebietes verhältnismässig gering. Mit Rücksicht darauf, dass

der Wert dieser Verluste durch die konstruktive Lösung der Ausführung bedingt ist, — weil in der Mehrzahl der Fälle zwischen Modell und Grossausführung eine Abweichung besteht, — kann eine allgemeine Umrechnungsregel nicht aufgestellt werden. Die Stopfbüchsen- und Lagerverluste müssen daher von den übrigen Verlusten schon im vorhinein getrennt werden, damit die Umrechnungsgleichungen angewendet werden können.

b) Radscheibenreibungsverluste

Durch Einsetzen des Föttingerschen Ausdrucks [29]* :

$$V_t \cong \frac{1,925}{10^5} K_s n^3 \left(\frac{D}{2}\right)^5 \quad (2)$$

kann der Verlustfaktor δ_t der Scheibenreibung in folgender Form ausgedrückt werden :

$$\delta_t = \frac{V_t}{N_b} \cong \frac{4,52}{105} \frac{K_s}{g} \frac{n_{11}^3}{Q_{11}} \quad (3)$$

wobei der Faktor K_s von der relativen Spaltgrösse s/D (s = Spaltweite, D = Raddurchmesser) und der »Reynolds'schen Zahl der Scheibenreibung« $\left(Re_t = n \left(\frac{D}{2}\right)^2 / \nu\right)$ abhängig ist.

In der Gleichung (3) bedeutet g die Schwerebeschleunigung, n_{11} die Umdrehungszahl, bezogen auf 1 m Fallhöhe und 1 m Raddurchmesser, Q_{11} das Wasserschlucken, welches ebenfalls auf eine Fallhöhe von 1 m und einen Raddurchmesser von 1 m bezogen wird. Die Umrechnung eines Betriebspunktes mit gleichem Q_{11} und n_{11} hängt somit allein von der Änderung des Faktors K_s ab.

Der Scheibenreibungsfaktor K_s kann im Falle einer glatten Scheibe aus folgender empirischen Formel ermittelt werden :

$$K_s = \frac{0,9}{(s/D)^2 (Re_t)^{1,2}} + \frac{0,51 + s/D}{(3,0 + s/D) 5 Re_t^{0,182}} \quad (4)$$

Wird an dem Modell und der Grossausführung die relative Spaltgrösse s/D beibehalten (was aus der geometrischen Ähnlichkeit folgt), so wird die Grösse des Verlustes allein durch die Änderung von Re_t beeinflusst. Es kann nachgewiesen werden, dass bei gleichem Betriebspunkt die Reynoldssche Zahl dem Produkt D/\sqrt{H} proportional ist (wobei H die Fallhöhe bedeutet). Bei Turbinen (es handelt sich hier in erster Linie um Francisturbinen, ist doch bei Propeller- und Kaplan turbinen kein solcher Spalt vorhanden, wo Scheibenreibungsverluste auftreten könnten) ist der Quotient s/D klein. Wird in der Gleichung (4) an Stelle von $Re_t^{0,182} \cong Re_t^{0,2}$ eingesetzt (eine Annäherung, die sich jedoch für praktische Zwecke besser eignet), so erhalten wir den folgenden Ausdruck :

$$K_s = \frac{1}{\sqrt[5]{Re_t}} \left(\frac{0,9}{(Re_t (s/D))^2} + \frac{0,51 + s/D}{15 + 5 s/D} \right) \quad (5)$$

Aus der Formel ist deutlich zu sehen, dass in dem üblichen Bereich der Reynolds'schen Zahl von 10^6 — 10^8 , der Ausdruck $0,9/Re_t(s/D)^2$ bei geringen Werten von s/D gegen den Ausdruck $(0,51 + s/D)/(15 + 5s/D)$ vernachlässigt werden kann, woraus ersichtlich, dass der Verlustfaktor, bei festgesetztem Wert von s/D , dem Ausdruck $1/\sqrt[5]{Re_t}$ proportional sein wird :

$$K_s \cong \frac{A}{\sqrt[5]{Re_t}} \quad (6)$$

wobei A mit guter Annäherung konstant ist. Durch Vergleich der Gleichungen (6) und (3) erhalten wir folgenden Ausdruck :

$$\delta_t = \frac{B}{\sqrt[5]{Re_t}} = \frac{C}{\sqrt[5]{D} \sqrt[10]{H}} \quad (7)$$

* Siehe Literaturverzeichnis.

Dieser Zusammenhang stellt bereits eine zur Umrechnung geeignete Form dar. Auf diese Art des Verlustes wollen wir später — bei der Besprechung der hydraulischen Verluste — noch zurückkommen. Hier sei nur darauf hingewiesen, dass die Trennung des Scheibenreibungsverlustes — da sich ein Teil der hydraulischen Verluste nach der gleichen Gesetzmässigkeit ändert — nicht unbedingt erforderlich ist.

c) Spaltverluste

Zweckmässigerweise sollte der Spaltverlust von den übrigen Verlustarten getrennt werden, doch ist dies im allgemeinen durch Messungen nicht zu verwirklichen. Es bildete sich daher in der Praxis ein Verfahren aus, wonach die Spaltverluste des Modells und der Grossausführung als identisch betrachtet werden können, insofern die Identität der relativen Spaltgrösse (d. h. die Gleichheit des Quotienten aus Spaltweite s und Raddurchmesser D) gesichert worden ist. Obschon diese Voraussetzung nur genau dann gilt, wenn der Charakter der Strömung durch die Spalte erhalten bleibt (laminare oder turbulente Strömung), was in einigen extremen Fällen nicht der Fall ist, doch kann diese Bedingung im allgemeinen eingehalten werden. In dieser Fassung kann somit der Spaltverlust als von der Abmessung der Turbine praktisch unabhängig betrachtet werden.

Die Grössenordnung des Spaltverlustes kann nach E. TRENKA bei Propellerturbinen auf Grund folgender Überlegung geschätzt werden [30]:

Es sei angenommen, dass zwischen dem Schaufelende und dem Gehäuse eine turbulente Strömung stattfindet, das heisst, dass die sich im Spalt ausbildende Geschwindigkeit dem zwischen dem Ein- und Austrittsquerschnitt der Maschine gemessenem Gefälle (genauer der Schaufelbelastung) proportional sein wird. Das durchfliessende Spaltwasser Q_r kann somit durch die Gleichung

$$Q_r = C_1 \sqrt{H} D \pi s, \quad (8)$$

während der Verlustfaktor δ_r durch die Gleichung:

$$\delta_r = Q_r/Q = \frac{C_2}{Q_{11}} \frac{s}{D} \quad (9)$$

ausgedrückt werden. Bei gleichem Wert von Q_{11} und bei gleichem s/D bleibt somit der Spaltverlust wahrlich unverändert. Bei Propellerturbinen kann der Wert von C_2 durchschnittlich mit 12,5 gleichgesetzt werden, womit der Wert des Verlustfaktors, bei den üblichen Verhältnissen von s/D , 1—2% beträgt.

d) Hydraulische Verluste

Die Mehrzahl der bekannten Umrechnungsverfahren bezieht sich allein auf die hydraulischen Verluste. Die beinahe unübersichtliche Anzahl der Umrechnungsformeln wird im Anhang mitgeteilt. In ausführlicher Weise werden nur die bedeutendsten Umrechnungsprinzipien behandelt.

Die hydraulischen Verluste der Turbine können je nach ihren Charakteren in zwei Haupttypen eingereiht werden: Reibungsverluste und Ablösungsverluste (die Wirbelungsverluste und Umlenkungsverluste mit inbegriffen).

Je nach dem Ort der Entstehung der Verluste werden folgende Verlustarten unterschieden: Einlaufspiralen- und Leitschaufelverluste, ferner Lauf- und Saugrohrverluste.

Bezüglich des Reibungsanteils der Verluste wollen wir annehmen, dass derselbe sich gemäss der Theorie ändert — welche aus den Versuchen über Rohr- bzw. Plattenwiderstand ausgebildet wurde —, und so einerseits von der REYNOLDS'schen Zahl, andererseits von der relativen Rauigkeit abhängig ist.

Bezüglich der Ablösungsverluste wollen wir annehmen, dass diese — im Falle der geometrischen Ähnlichkeit — im modellähnlicher Strömung unverändert bleiben.

Das genaue Umrechnungsverfahren sollte daher darauf beruhen, dass die Einlaufspiralenverluste (Leitschaufelverluste), Saugrohr- und Laufradverluste bzw. innerhalb dieser Verluste die Reibungs- und Ablösungsverluste durch die Messungen getrennt bestimmt werden. Man lässt den Ablösungsanteil der Verluste unverändert und berechnet die Veränderung des Reibungsanteils.

In diesem Sinne behandeln die neuesten Theorien die Frage. Ein Mangel dieser Theorien besteht darin, dass die Messmethode der Reibungs- bzw. Ablösungsverluste noch nicht voll entwickelt wurde, und es wird daher versucht, die Wirklichkeit durch theoretische Annahmen anzunähern.

Die Reibungsverluste werden durch die Reynolds'sche Zahl und die relative Rauigkeit beeinflusst. Bei Turbinen wird die Reynolds'sche Zahl in der Form von $D\sqrt{H}$ angewendet, und die Ergebnisse der Rohrreibungs- und Plattenwiderstandsversuche gelten somit lediglich bezüglich ihres Charakters, während ein zahlenmässiger Vergleich allein auf Grund der — bereits teilweise durchgeführten — Turbinenmessungen vorgenommen werden kann.

Die Berechnung der Reibungsverluste wird bei Turbinen auf Grund folgender Überlegung vorgenommen :

Die Strömung in der *Einlaufspirale* und bei den *Leitschaufeln* hat einen beschleunigenden Charakter, der überwiegende Teil der hydraulischen Verluste ergibt sich somit aus den Reibungsverlusten. Wegen der röhrenförmigen Ausbildung wird für die Berechnung des Rohrwiderstandes im allgemeinen der von BLASIUS verwendete Ausdruck angewendet, in welchem der Verlust der $-1/4$ -ten Potenz der Reynolds'schen Zahl proportional ist. Der Einlaufspiralenverlust bildet nur einen geringen Anteil des Leitschaufelverlustes. Wegen dichter Anordnung der Leitschaufeln befindet sich die Strömung wegen der geringeren Kanaldimension oft im Bereich, wo die Kanalwände als »rauh« betrachtet werden und wo der Verlust durch die Reynolds'sche Zahl nicht mehr beeinflusst wird. Bei Kaplan-turbinen pflegt diese Art des Verlustes vernachlässigt zu werden, obwohl sie im Punkte des höchsten Wirkungsgrades noch etwa 5—8% der Gesamtverluste beträgt.

Der Charakter der *Laufradreibungsverluste* ist in erster Linie eine Funktion der spezifischen Drehzahl n_s . Wie bekannt, nimmt die Schaufelzahl mit wachsender spezifischer Drehzahl ab, bzw. nimmt die relative Schaufelteilung zu (t/l , wo t den Abstand zweier Schaufeln und l die Länge des Schaufelprofils in Richtung der Strömung bedeutet). Zwischen den dicht angeordneten Schaufeln der Francisturbinen mit niedrigerer spezifischer Drehzahl ist der Charakter der Strömung dem bei der Leitschaufelung beobachteten ähnlich : der Reibungsverlust ist der $-1/4$ -ten Potenz der Reynolds'schen Zahl proportio-

nal. Eine Steigerung der Oberflächengüte der Schaufeln wird jedoch durch die Herstellungstechnologie der Francisträder im allgemeinen nicht ermöglicht, und so arbeiten in der Mehrzahl der Fälle die Turbinen im »rauen« Gebiet. Dies ist ein Grund dafür, dass die allgemein angewendeten Umrechnungsgleichungen nicht gleicherweise auf die Francis- und Kaplan-turbinen angewendet werden können, und die neuesten Richtungen benützen stark gesonderte Umrechnungsmethoden für die zweierlei Typen.

Die Laufradreibungsverluste der Kaplan-turbinen mit höherer spezifischer Drehzahl pflegt man durch die Schlichtingsche Formel annähern, die ursprünglich für ebene Platten aufgestellt wurde und in welcher der Verlustfaktor (welcher dem Widerstandkoeffizienten des Flügelprofils direkt proportional ist) der $-1/5$ -ten Potenz der Reynolds'schen Zahl der Schaufeln proportional ist. Bei den Kaplan-turbinen kann die Herstellungstechnologie der Schaufeln derart beschaffen sein, dass der »raue« Bereich nicht mehr in Frage kommt.

Über den Reibungsverlustanteil des Saugrohres wird angenommen, dass derselbe der $-1/4$ -ten Potenz der Reynolds'schen Zahl proportional ist — nach dem Ausdruck von BLASIUS — und dass die »raue« Zone wegen der grösseren Dimension des Saugrohres nicht in Betracht kommen kann. Die Bedeutung der Saugrohrverluste nimmt mit wachsender spezifischer Drehzahl zu, weil bei den Francisturbinen mit kleinen spezifischen Drehzahlen die durch das Saugrohr rückzugewinnende Energie und damit auch die Saugrohrverluste verglichen mit dem Energieumsatz bzw. den Verlusten des Laufrades derart gering sind, dass sie oft vernachlässigt werden können.

Dies ist ein zweiter Grund, weshalb die Umrechnungsrelationen der Kaplan- und Francisturbinen auseinandergehalten werden müssen. Wegen des Dralles, womit an den meisten Betriebspunkten die Strömung in das Saugrohr eintritt, bedeutet nämlich die grösste Unsicherheit immer das Saugrohr, dessen Bedeutung bei Francisturbinen — mit Verringerung der spezifischen Drehzahl — verschwindet. Es sei bemerkt, dass unter den Saugrohrverlusten auch der Austrittsverlust mit in Betracht gezogen wird, der mit den Abmessungen selbstverständlich unverändert bleibt, und der infolgedessen im Laufe des Umrechnungsverfahrens von einigen Autoren separat behandelt zu werden pflegt. Bei unserer hier mitgeteilten Methode wird eine vollständig separate Behandlung nicht erfordert, kann doch diese Art des Verlustes dem mit den Abmessungen mutmasslich unverändert bleibenden Ablösungsverlustanteil ruhig hinzugeführt werden.

Es sei der Reibungsverlustanteil mit dem Index S , der Ablösungsverlustanteil mit L , der Radverlust mit K , der Saugrohrverlust mit D bezeichnet. Der hydraulische Gesamtverlust kann mit diesen Bezeichnungen in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\delta = \delta_{KL} + \delta_{DL} + \delta_{KS} Re^p + \delta_{DS} Re^r \quad (10)$$

wo die Exponenten p und r von dem Turbinentyp und von der etwaigen Rauigkeit abhängen.

Wird in dem Radverlust δ_K der Reibungsanteil durch s ($s = \delta_{KS}/\delta_K$) und der Reibungsanteil im Saugrohrverlust durch d bezeichnet ($d = \delta_{DS}/\delta_D$), so nimmt Gleichung (10) die folgende Form an :

$$\delta = \delta_K (1 - s) + \delta_D (1 - d) + \delta_K s R^p + \delta_D R^r. \quad (11)$$

Die Werte von δ_K , δ_D , s und d hängen von dem Betriebszustand der Turbine ab. Die Werte von δ_K und δ_D können durch Modellmessungen genau bestimmt werden ; die Werte für s und d werden in der Regel auf Grund theoretischer Überlegungen angenommen.

Die Umdrehungszahl der ausgeführten Maschinen (n) ist konstant. Die spezifische Drehzahl n_{11} hängt somit auf Grund der Gleichung $n_{11} = n D/\sqrt{H}$ allein von der Fallhöhe H ab. Bei Anlagen mit grossem Gefälle (Francisturbinen) ist die Schwankung in der Fallhöhe gering, der Wert von n_{11} kann somit als konstant betrachtet werden. Die Änderung von δ müssen wir in Abhängigkeit von dem für das Wasserschlucken der Turbine charakteristischen Ausdruck ($Q_{11} = Q/\sqrt{H D^2}$), dem spezifischen Wasserschlucken, kennen. Bei Propeller- und Kaplansturbinenanlagen mit kleinem Gefälle müssen wir den Verlust und dessen Komponenten in Abhängigkeit von beiden Veränderlichen (n_{11} und Q_{11}) kennen. Bei den Kaplansturbinen werden die Kennzahlen nach einem verbreiteten Gebrauch allein auf den Kaplanoberflächen bestimmt.

3. Die praktischen Beziehungen der Umrechnung bei den einzelnen Turbinentypen

a) Francisturbinen

Im allgemeinen müssen folgende Verluste berücksichtigt werden : Scheibenreibungsverlust, Spaltverlust und die hydraulischen Verluste. Der grösste Teil der hydraulischen Verluste besteht aus Reibungsverlusten. Es treten auch Ablösungsverluste auf, die sich aus der Umlenkung beim Übertritt zwischen den Leitschaufeln und Laufradschaufeln ergeben. Es sei angenommen, dass diese Verluste in der untersuchten Umgebung des Optimums vernachlässigt werden können.

Die Gesamtverluste an dem Modell :

$$\delta_{\bar{\delta}} = \delta_t + \delta_r + \delta_K (1 - s) + \delta_D (1 - D) + \delta_K s + \delta_D d \quad (12)$$

wobei die Werte für s und d beispielsweise als $s = 1,0$ und $d = 0,3$ angenommen werden, so erhalten wir :

$$\delta_{\bar{\delta}} = \delta_t + \delta_r + 0,7 \delta_D + \delta_K + 0,3 \delta_D. \quad (13)$$

An der geometrisch ähnlichen Grossausführung :

$$\delta'_{\bar{\delta}} = \delta'_t + \delta'_r + 0,7 \delta'_D + \delta'_K + 0,3 \delta'_D. \quad (14)$$

Werden die Gleichungen (7) und (9) in unser Beispiel eingesetzt, wird weiter der Einfachheit halber angenommen, dass p und r gleich $-1/5$ sind (eine Annahme, die für den »rauh« Fall nicht mehr gilt), und werden schliesslich alle Konstanten zusammengezogen, so erhalten wir:

$$\delta'_\delta = \delta_t \left(\frac{Re'}{Re} \right)^{-1/5} + \delta_r + 0,7 \delta_D + (\delta_K + 0,3 \delta_D) \left(\frac{Re'}{Re} \right)^{-1/5}. \quad (15)$$

Für das Verhältnis der Verluste erhalten wir:

$$\frac{\delta'_\delta}{\delta_\delta} = \frac{\delta_r + 0,7 \delta_D + (\delta_t + \delta_K + \delta_D) \left(\frac{Re'}{Re} \right)^{-1/5}}{\delta_r + 0,7 \delta_D + \delta_t + \delta_K + 0,3 \delta_D}$$

$$\frac{\delta'_\delta}{\delta_\delta} = \frac{\delta_r + 0,7 \delta_D}{\delta_\delta} + \left(1 - \frac{\delta_r + 0,7 \delta_D}{\delta_\delta} \right) \left(\frac{Re'}{Re} \right)^{-1/5}. \quad (16)$$

Im Ausdruck (16) müssen wir nur die Änderung des Ausdrucks $(\delta_r + 0,7 \delta_D / \delta_\delta)$ in Abhängigkeit von Q_{11} kennen, und die Umrechnung kann vorgenommen werden. Zum Zwecke der qualitativen Untersuchung kann festgestellt werden, dass der Scheibenverlust und der Spaltverlust laut der Gleichungen (3) und (9) Q_{11} umgekehrt proportional sind, während die hydraulischen Verluste Q_{11}^2 direkt proportional sind.

$$\frac{\delta_r + 0,7 \delta_D}{\delta_\delta} = \frac{A \left(\frac{Q_{11}^*}{Q_{11}} \right) + B \left(\frac{Q_{11}}{Q_{11}^*} \right)^2}{C \left(\frac{Q_{11}^*}{Q_{11}} \right)^2 + D \left(\frac{Q_{11}}{Q_{11}^*} \right)^2}. \quad (17)$$

wo durch * der zum besten Wirkungsgrad gehörende Wert bezeichnet wird.

Vorausgesetzt, dass der Spaltverlust δ_r verglichen mit den Ablösungsverlusten des Saugrohres vernachlässigt werden kann, geht Gleichung (17) in folgende Form über:

$$\frac{\delta_r + 0,7 \delta_D}{\delta_\delta} \cong \frac{1}{\frac{D}{B} + \frac{C}{B} \left(\frac{Q_{11}}{Q_{11}^*} \right)^3}. \quad (18)$$

Durch Differenzieren des Ausdrucks $\delta_\delta = C \left(\frac{Q_{11}^*}{Q_{11}} \right) + D \left(\frac{Q_{11}}{Q_{11}^*} \right)^2$ erhalten wir, dass bei dem Minimum von δ_δ — wo also $(Q_{11}/Q_{11}^*) = 1$ ist — die Werte der Konstanten sind: $C = 2/3 \delta_\delta^*$ und $D = 1/3 \delta_\delta^*$.

Es sei angenommen, dass im Punkt des besten Wirkungsgrades der Turbinenwirkungsgrad 92% betrage:

$$1 - \eta = \delta_\delta^* = 0,08; \quad \delta_D = \nu (1 - \eta_D) \cong 0,1 \cdot 0,2 \cong 0,02;$$

$$\beta = 0,7 \delta_D = 0,014.$$

Mit diesen Werten erhalten wir: $C = 0,08 \cdot 0,66 = 0,053$ und $D = 0,08 \cdot 0,33 = 0,027$. In der Gleichung (18) ist somit $D/B = 0,027/0,014 = 1,9$; $C/B = 0,053/0,014 = 3,8$. Durch Einsetzen dieser Werte nimmt Gleichung (18) die folgende Form an:

$$\frac{\delta_r + 0,7 \delta_D}{\delta_\delta} = \frac{1}{1,9 + 3,8 \left(\frac{Q_{11}}{Q_{11}^*} \right)^3} = \frac{0,525}{1 + 2 \left(\frac{Q_{11}}{Q_{11}^*} \right)^3} \quad (19)$$

während die Umrechnungsgleichung (16) in folgender Form aufgeschrieben werden kann:

$$\frac{\delta'_\delta}{\delta_\delta} = \frac{0,525}{1 + 2 \left(\frac{Q_{11}}{Q_{11}^*} \right)^3} + \left(1 - \frac{0,525}{1 + 2 \left(\frac{Q_{11}}{Q_{11}^*} \right)^3} \right) \left(\frac{Re'}{Re} \right)^{-1/5}. \quad (20)$$

In dem Punkte des besten Wirkungsgrades ($Q_{11}^*/Q_{11} = 1$) erhalten wir aus Beziehung (20) den folgenden Ausdruck :

$$\frac{\delta \hat{\delta}}{\delta \delta} = 0,175 + 0,825 \left(\frac{Re'}{Re} \right)^{-1/5} \quad (21)$$

Wie ersichtlich, ist dem kleineren n_s entsprechend auch der Ablösungsanteil geringer. Durch Verwendung von anderen üblichen Daten gelangen wir zu ähnlichen Ausdrücken.

b) Propellerturbinen

Bei Propellerturbinen können wir den gleichen Gedankenweg einschlagen wie wir es bei den Francisturbinen machten. Eine Abweichung ergibt sich nur darin, dass mit den Scheibenreibungsverlusten nicht gerechnet wird, und dass der Ablösungsanteil des Saugrohrverlustes wegen der höheren spezifischen Drehzahl n_s höher angenommen werden kann. Bei der Untersuchung der Propellerturbinen ergibt sich insofern eine Schwierigkeit, dass einerseits der Umlenkungsverlust — der bei kleinem Wasserschlucken wegen des vergrößerten Schaufelanstellwinkels im Abbruch des Auftriebsbeiwerts erkenntlich wird — nicht vernachlässigt werden kann, andererseits der Verlust durch die Energieverluste des aus dem Laufrad heraustretenden Wirbels bedeutend beeinflusst wird, kann doch dessen Energie bis zu 50% (beim grossen Wasserschlucken sogar bis zu 70%) des Gesamtgefälles anwachsen.

Bezüglich des Anwendungsgebietes der Propellerturbinen kann indessen festgestellt werden, dass diese in der Regel bei solchen Kraftwerken mit veränderlichem Gefälle eingebaut werden, wo die zusammengehörenden Werte des Gefälles und des Wasserschluckens mit guter Näherung auf den Grat der Wirkungsgradfläche fallen (dieser Grat kann in den Messdiagrammen gut verfolgt werden).

Die Untersuchung kann somit mit der Bedingung durchgeführt werden, dass sie sich auf die »Scheitellinie« der gegebenen Turbine bezieht.

Die Verhältnisse entlang der Scheitellinie können nahe identisch mit den Vorgängen betrachtet werden, die an der Einhüllenden der Kennkurven der Kaplan turbine beobachtet werden können. Eine gesonderte Untersuchung der Propellerturbinen erübrigt sich somit, und die Beziehungen der Kaplan turbinen können — mit der obigen Einschränkung — auch auf die Propellerturbinen bezogen werden.

c) Kaplan turbinen

Die Verluste der Kaplan turbinen werden auf Grund der Messungen von KWIATKOWSKIJ [28] unter Heranziehung der Theorie von HUTTON [25] analysiert.

Die Verluste des von KWIATKOWSKIJ untersuchten Turbinenmodells werden in folgende Teile zerlegt: Saugrohraustrittsverluste, hydraulische Verluste des Saugrohres, Laufrad- und Leitradverluste [28].

Die einzelnen Verlustarten können durch die folgenden Gleichungen angenähert werden:

Austrittsverlust:

$$\delta_{KI} \cong 0,016 \left(\frac{Q_{11}}{Q_{11}^*} \right)^2. \quad (22)$$

Hydraulischer Verlust des Saugrohres:

$$\delta_D \cong \left(\frac{Q_{11}}{Q_{11}^*} \right)^2 \left[0,03 + \frac{0,0075 + 0,12 \left(\frac{n_{11}}{n_{11}^*} - 1 \right)^2}{(Q_{11}/Q_{11}^*)^3} \right]. \quad (23)$$

Laufradverlust:

$$\delta_K \cong \frac{6 (n_{11}/n_{11}^* - 1)^2 + 1}{(Q_{11}/Q_{11}^*)^2} 0,05. \quad (24)$$

Leitradverlust:

$$\delta_V = 0,01 (Q_{11}/Q_{11}^*)^2. \quad (25)$$

Obwohl sich der Wert der Verluste allein im Falle der untersuchten Turbine nach den Gleichungen (22–25) gestaltet, können diese Gleichungen mit guter Näherung verallgemeinert werden.

Von grösstem Interesse ist die Änderung des hydraulischen Verlustes des Saugrohres, umsomehr, da aus der untersuchten Turbine das Wasser auf dem grössten Teil des Betriebsgebietes mit einem Drall herausstrat.

Es wird von einigen Autoren vorausgesetzt, dass die Energieumwandlung des Saugrohres in der Hauptsache im geraden Teil des Saugrohres vor sich geht. Wie es durch Messungen nachgewiesen wurde, entspricht dies leider nicht den Tatsachen; beim Eintritt mit Drall spielt auch das Kniestück und auch der Saugansatz mit viereckigem Querschnitt eine bedeutende Rolle.

Die Gestaltung des Laufradverlustes kann mit der Gleitzahländerung der Profile in Einklang gebracht werden.

Bezüglich des Anteils der von den Dimensionen abhängenden Verluste kann angenommen werden, dass der Austrittsverlust von den Abmessungen völlig unabhängig ist.

Eine Zerlegung der hydraulischen Verluste des Saugrohres ist schon viel umständlicher. Im allgemeinen wird man davon ausgehen, dass beim Eintritt mit einem Drall im Vorderteil des Saugrohres keine Ablösung stattfindet, wogegen die Wandreibung in erhöhtem Mass zur Wirkung kommt. Nach dem Kniestück kommt hingegen der Verlust infolge der Wandreibung zur Bedeutung, weil in dem durch die Ablösung verengten Querschnitt die

Geschwindigkeit der Strömung erhöht wird. Es liegt auf der Hand, dass der Ausdruck $0,03 (Q_{11}/Q_{11}^*)^2$ in der Gleichung (23) als der Reibungsanteil, während der Rest als der durch die Ablösungen bedingte Wirbelverlust (Verlust wegen der inneren Reibung der Flüssigkeit) betrachtet werden kann, welcher letzterer von den Abmessungen unabhängig ist.

Von einigen Autoren wird 90% des Radverlustes der Reibung zugeschrieben. Mit Rücksicht darauf, dass im Flügelgitter, wo die Strömung beschleunigt wird, in den Punkten mit den besten Wirkungsgraden kaum von einer Ablösung die Rede sein kann, wollen wir annehmen, dass der gesamte Radverlust mit Zunahme der Reynolds'schen Zahl abnimmt.

Dasselbe gilt auch für die Leitradverluste.

Durch Summierung der Verluste erhalten wir :

$$\delta_{\bar{\delta}} = \delta_{KI} + \delta_D + \delta_K + \delta_V = (\delta_{KI} + \delta_{DL}) + (\delta_{DS} + \delta_K + \delta_V). \quad (26)$$

Wird das Verlustverhältnis aufgestellt, wobei die Grossausführung mit einem Strich bezeichnet wird, so erhalten wir :

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{\bar{\delta}'}}{\delta_{\bar{\delta}}} &= \frac{\delta_{KI} + \delta_{DL}}{\delta_{\bar{\delta}}} + \left(1 - \frac{\delta_{KI} + \delta_{DL}}{\delta_{\bar{\delta}}}\right) \left(\frac{Re'}{Re}\right)^{-1/5} = \\ &= A + (1 - A) \left(\frac{Re'}{Re}\right)^{-1/5}. \end{aligned} \quad (27)$$

Der von den Abmessungen unabhängige Verlustprozent beträgt somit :
(Bei Einführung folgender Bezeichnung $Q_{11}/Q_{11}^* = x$ und $n_{11}/n_{11}^* = y$)

$$\begin{aligned} A &= \frac{\delta_{KI} + \delta_{DL}}{\delta_{\bar{\delta}}} = \\ &= \frac{0,016 x^2 + \frac{0,0075 + 0,12 (y-1)^2}{x}}{0,016 x^2 + \frac{0,0075 + 0,12 (y-1)^2}{x} + 0,03 x^2 + 0,05 \frac{6(y-1)^2 + 1}{x^3} + 0,01 x^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Durch Einführung der folgenden Bezeichnung :

$$B = 0,05 \frac{16(y-1)^2 + 1}{x^5}$$

kann Gleichung (28) auf die folgende Form gebracht werden :

$$A = \frac{\delta_{KI} + \delta_{DL}}{\delta_{\bar{\delta}}} = \frac{1}{1 + \frac{B + 0,04 - 1,5 \frac{(y-1)^2}{x^5}}{1,5 x^2 B + 0,016}}. \quad (29)$$

In dem Punkt besten Wirkungsgrades, wo $x = 1$ und $y = 1$, erhalten wir :

$$A = \frac{\delta_{KI} + \delta_{DL}}{\delta_{\bar{\delta}}} = \frac{1}{1 + \frac{0,09}{0,091}} = 0,505 \approx 0,5,$$

in guter Übereinstimmung mit der ursprünglichen Annahme von ACKERET [14].

Die Werte von A in Abhängigkeit von y und x wurden in Tabelle I zusammengestellt :

Tabelle I

| Werte von A | | x | | | | |
|---------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 0,5 | 0,75 | 1,0 | 1,25 | 1,5 |
| y | 0,75 | 0,35 | 0,528 | 0,605 | 0,598 | 0,55 |
| | 1,0 | 0,284 | 0,435 | 0,505 | 0,495 | 0,452 |
| | 1,25 | 0,35 | 0,528 | 0,605 | 0,598 | 0,55 |

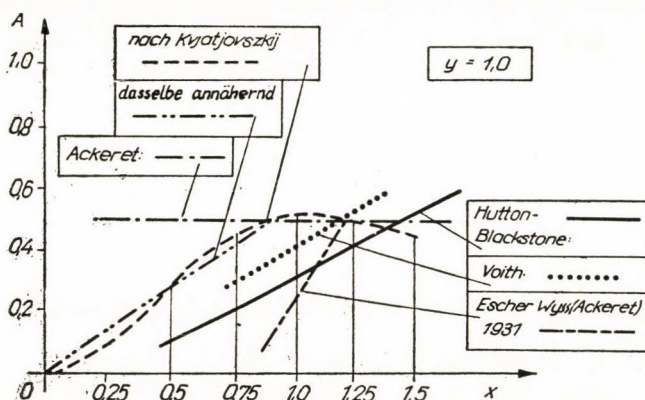


Abb. 1

Wie aus Tabelle I ersichtlich, nehmen die von den Abmessungen unabhängigen Verlustanteile in den Punkten, die von dem Punkt des besten Wirkungsgrades abweichen, verschiedene Werte an.

Die Werte, die zum Wert $y = 1$ gehören, weisen darauf hin, dass der Ablösungsverlustanteil in Abhängigkeit von dem Wasserschlucken zunimmt, um in der Umgebung des besten Wirkungsgrades ein Maximum zu erreichen und dann in geringem Masse abzunehmen (siehe Abb. 1).

Wie aus Fig. 1 ersichtlich ist, wird die Kurve über dem Wert von $x = 0,9$ durch den von Ackeret vorgeschlagenen Wert von 0,5 bei beliebigem Wasserschlucken gut angenähert, während für $x < 0,9$ der Ausdruck $A = 0,555 x$ gut verwendet werden kann.

Es ist lehrreich die Änderung von A in Abhängigkeit von y zu verfolgen (siehe Abb. 2).

Bei der Umdrehungszahl, die dem besten Wirkungsgrad entspricht, liegt ein Minimum vor, während bei anderen Werten von y A zunimmt. Die Formel (29) ist äusserst kompliziert.

Da es sich lediglich um eine Annäherung handelt, können wir das Ergebnis auch durch einen einfacheren Ausdruck erhalten. Auf Grund der früheren graphischen Überlegungen können wir die folgenden Gleichungen stellen :

$$\begin{aligned} A &\cong 0,555 x [1 + 3,2 (y - 1)^2] && \text{wenn } x < 0,9 \text{ und} \\ A &\cong 0,5 [1 + 3,2 (y - 1)^2] && \text{wenn } x > 0,9 . \end{aligned} \quad (30)$$

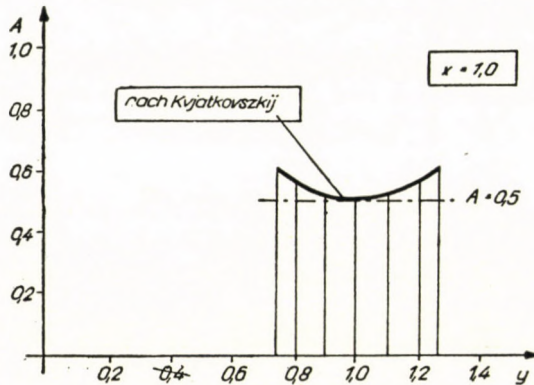


Abb. 2

Die zur Umrechnung geeignete Gleichung (27) nimmt unter Verwendung dieser Ausdrücke die folgende Form an (wenn $x > 0,9$) :

$$\frac{\delta_{\delta'}}{\delta_{\delta}} = 0,5 + 1,6 (y - 1)^2 + [0,5 - 1,6 (y - 1)^2] \left(\frac{Re'}{Re} \right)^{-1/5} \quad (31a)$$

beziehungsweise wenn $x < 0,9$:

$$\frac{\delta_{\delta'}}{\delta_{\delta}} = 0,555 x [1 + 3,2 (y - 1)^2] + \{1 - 0,555 x [1 + 3,2 (y - 1)^2]\} \left(\frac{Re'}{Re} \right)^{-1/5} \quad (31b)$$

$$\text{wo } x = Q_{11}/Q_{11}^* \text{ und } y = n_{11}/n_{11}^* .$$

Durch Formel (30, 31) wird praktisch ausgedrückt, dass die Besserung des Wirkungsgrades in dem besten Betriebspunkt durch die Ackeretsche Formel gut approximiert werden kann ; bei Änderung des Gefälles ($y =$ Veränderliche) ist die Besserung des Wirkungsgrades geringer, bei Änderung des Wasserschluckens (in Richtung gegen kleines Wasserschlucken) ist die Besse-

rung verhältnismässig grösser. Diese letztere Aussage stimmt mit den diesbezüglichen Daten der Literatur überein.

Nach den Angaben der Literatur ist die Besserung des Wirkungsgrades im Punkte besten Wirkungsgrades etwas grösser als sie sich aus der Formel von ACKERET ergibt. Obwohl durch die $\pm 2\%$ -igen Fehlermöglichkeiten der Abnahmemessungen die Realität einer solchen Feststellung umgestossen wird, können wir doch annehmen, dass viele Messungen in der Tat diese Erfahrung zeitigten. Nach der Hutton—Blackstoneschen Formel gilt, wenn $y = 1$ ist :

$$\frac{\delta_{\delta'}}{\delta_{\delta}} = (0,4 x - 0,1) + (1,1 - 0,4 x) \left(\frac{Re'}{Re} \right)^{-1/5}. \quad (32)$$

Der für diese Kurve charakteristische A -Faktor wurde in die Abb. 1 ebenfalls eingezeichnet.

Es ist aus der Figur ersichtlich, dass nur bei ganz grossem Wasserschlucken eine gleiche Besserung des Wirkungsgrades erhalten wird ($x = 1,4$), während bei kleinerem Wasserschlucken immer grössere Wirkungsgrade vorliegen.

Nach einigen Autoren liegt der effektive Wirkungsgrad zwischen der Kurve von ACKERET ($A = 0,5$) und der von MOODY 1942 ($A = 0$). Dies kann auch für die Kurven, die aus den Messungen von KWIATKOWSKIJ bzw. denen von HUTTON—BLACKSTONE abgeleitet wurden, behauptet werden. Beide Kurven sind gleich wahrscheinlich, solange der genaue Wert von A in Abhängigkeit von den spezifischen Werten Q_{11} und n_{11} der Turbinen mit der spezifischen Drehzahl n_s durch Messungen, die die Reibungs- und Ablösungsverluste auseinanderhalten, nicht festgelegt wird. Inzwischen erscheint indessen die Verwendung der Beziehungen als begründet, die auf Grund der Messungen von KWIATKOWSKIJ und der Theorie von ACKERET abgeleitet wurden, wird doch hierdurch ein vorsichtiger Wert für den Wirkungsgrad erhalten.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass wir auf Grund der Messungen von KWIATKOWSKIJ und der Annahme, dass die Saugrohrverluste in vollem Masse Reibungsverluste sind, bereits früher zu der folgenden Näherungsformel gelangten (30) :

$$\frac{\delta_{\delta'}}{\delta_{\delta}} = 0,5 x + (1 - 0,5 x) \left(\frac{Re'}{Re} \right)^{-1/5}, \quad (33)$$

welche Formel jedoch für $x > 1,0$ eine zu geringe Besserung des Wirkungsgrades — verglichen mit der Erfahrung — ergibt. Auf Grund der früheren Analyse wurde das Ergebnis erhalten, dass zwischen den Werten $0,75 < y < 1,25$ die Wirkung von y vernachlässigt werden kann. Unsere vorliegende Analyse wurde auf Grund der Huttonschen Prinzipien umgearbeitet.

4. Der prinzipielle Fehler der Umrechnung der Verluste von Kaplan-turbinen

Die Kaplan-turbine arbeitet auf der Einhüllenden der Wirkungsgradkurven einiger Propellerturbinen. Das Verhältnis der Verluste, die von den Abmessungen abhängig bzw. unabhängig sind, ändert sich auch entlang der Kurven der Propellerturbine von Punkt zu Punkt. Nach der Umrechnung der Verluste blieb der Ablösungsverlust der gleiche, während der Reibungsverlust abnahm. Die Kurve der Summe der beiden Verluste ist verzerrt, und die Kaplansche Fläche wird bei anderen Werten von n_{11} bzw. Q_{11} durch die Kurve berührt. Hieraus folgt, dass die alte Kaplansche Fläche mit der neuen Kaplanschen Fläche nur entlang einer einzigen Kurve zusammenfallen wird. Alle ausserhalb der Kurve liegenden Punkte der neuen Kaplanschen Fläche lagen an der Propellerturbinenkurve unterhalb der alten Kaplanschen Fläche. Hieraus lässt sich die praktisch wichtige Folgerung ziehen, dass die Koordinations-Fläche der Regler der doppeltgeregelten Kaplan-turbinen auf Grund der Umrechnungsdaten nur angenähert konstruiert werden kann. Die höchste Energieausbeute kann nur erreicht werden, wenn die Steuerfläche auf Grund der an Ort und Stelle vorgenommenen Messungen korrigiert wird.

ANHANG

Übersicht der literarischen Angaben

1. Gleichungen, die sich auf die Rohr- und Plattenverluste beziehen, und die in den einzelnen Turbinenumrechnungstheorien angewendet werden

Der Druckverlust h' der Rohrleitung wurde von BIEL [1] i.J. 1907 in folgender Form angegeben :

$$h' = \frac{l \cdot c^2}{r'} \left(a + \frac{f}{\sqrt{r'}} + \frac{b}{c \sqrt{r'}} \nu \right). \quad (1)$$

In diesem Ausdruck bedeutet l die Länge der Rohrleitung, r' den hydraulischen Radius, c die Strömungsgeschwindigkeit, a eine Versuchskonstante, f einen die Rauigkeit des Rohres charakterisierenden Faktor, ν die kinematische Viskosität der Flüssigkeit, und b einen von der Zähigkeit abhängigen Faktor, der durch die Rauigkeit beeinflusst wird. Durch den Faktor $b\nu/c \cdot \sqrt{r'}$ wird von BIEL die Temperaturänderung berücksichtigt. Da diese Änderung beim Wasser gering ist, wurde die Formel von BIEL auch in der folgenden Form angewendet :

$$h' = \frac{l c^2}{r'} \left(a + \frac{f}{\sqrt{r'}} \right) \quad (2)$$

($a = 0,12$, $f = 0,036$ für glatten Beton oder neues Gusseisen ; $f = 0,054$ für Beton ; $f = 0,072$ für gebrauchtes Gusseisen).

Im Laufe der Entwicklung wurde an Hand von POISEUILLE und HAGEN von JAKOB und ERK [2, 3] für die Strömung in einem geraden, glattwandigen Rohr die folgende Beziehung abgeleitet :

$$h' = \lambda \frac{l}{d} \frac{c^2}{2g} \quad (3)$$

wo λ den Rohrwiderstandskoeffizienten :

$$\lambda = \lambda_R + \lambda_B \quad (4)$$

bedeutet.

In der Gleichung (4) ist λ aus dem Wandreibungsanteil λ_R und dem Beschleunigungsanteil der Flüssigkeit λ_B zusammengesetzt. Der erstere hängt von Re , der Reynolds'schen Zahl ab, während letzterer nur in Verbindung mit Gasen gedeutet werden kann, wo die Abnahme des Druckes eine Zunahme des Volumens bzw. der Geschwindigkeit zu Folge hat.

Für den Wert von λ_R wird von LEES [4] für den Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit die Gleichung :

$$\lambda_R = 0,0072 + 0,6104 \left(\frac{cd}{\nu} \right)^{-0,35} \quad (5)$$

während von JAKOB und ERK die Gleichung :

$$\lambda_R = 0,00714 + 0,6104 \left(\frac{cd}{\nu} \right)^{-0,35} \quad (6)$$

angegeben. Ihre Untersuchungen wurden bis zum Werte von $Re = cd/\nu = 3 \cdot 10^5$ durchgeführt.

Als eine allgemeine Gleichung wird von ihnen der folgende Ausdruck vorgeschlagen :

$$\lambda_R = C_1 \left(\frac{1}{Re} \right)^{C_2} \quad (7)$$

Für den Rohrreibungskoeffizienten λ wird von BLASIUS [5] — auf Grund der Messungen von SAPH und SCHRÖDER — die folgende Gleichung vorgeschlagen :

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (8)$$

Von HOPF und FROMM [6] wird für einen rauhen Kanal die folgende Gleichung angegeben :

$$\lambda = c \left(\frac{k}{r'} \right)^{0,314} \quad (9)$$

wo k den Rauigkeitsfaktor, r' den hydraulischen Radius bedeuten.

Ein Teil der Turbinenumrechnungen verwendet diese Gleichungen. Der Wert des Schaufelverlustes wird von vielen Autoren mit dem für den Plattenverlust charakteristischen Widerstandfaktor C_e in Zusammenhang gebracht und die Umrechnung wird auf Grund der Schlichtingschen Formel vorgenommen. In der für die Schaufel charakteristischen Reynolds'schen Zahl $Re = wl/\nu$ bedeutet w die relative Anströmungsgeschwindigkeit und l die Länge der Schaufel.

Die in einem weiten Bereich der Reynolds'schen Zahl gültige Formel von SCHLICHTING lautet :

$$C_e = \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} \quad (10)$$

während diese Formel bis zu einem Werte von $Re = 2 \cdot 10^6$ durch den folgenden Ausdruck gut angenähert werden kann :

$$C_e = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} \quad (11)$$

Der Schaufelverlust kann mit Hilfe der Gleichung

$$h' = C_e F \frac{w^2}{2g} \quad (12)$$

berechnet werden, wo F die Fläche der Schaufel bedeutet.

2. Angaben zur Umrechnung.

| Entwickelt im Jahre | Name | Formel | Bemerkung | Literatur Bezugsnummer |
|---------------------|-------------------|--|---|------------------------|
| (13) 1909 | <i>Camerer</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \frac{\left(0,12 + \frac{f}{\sqrt{r'}} + \frac{2,5}{(100f+2)c\sqrt{r'}}\right)}{\left(0,12 + \frac{f}{\sqrt{r'}}(100f+2)c\sqrt{r'}\right)}$ | Auf Grund der <i>Biel</i> -schen Gleichung (1) | 6 8 9 |
| (14) 1924 | <i>Camerer</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \frac{\left(0,12 + \frac{f}{\sqrt{r'}}\right)'}{\left(0,12 + \frac{f}{\sqrt{r'}}\right)}$ | Auf Grund der <i>Biel</i> -schen Gleichung (2) | 7 |
| (15) 1925 | <i>Stauffer</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \left(\frac{D}{D'}\right)^{C_2} \left(\frac{H}{H'}\right)^{\frac{C_2}{2}} \left(\frac{K}{K'}\right)^{1-\frac{C_2}{2}} \sqrt[4]{\frac{D}{D'} \sqrt{\frac{H}{H'}}$ | C_2 auf Grund der Gleichung (7); auf Grund der Gleichung (8), durch Einsetzung von $Re = D\sqrt{H}$ | 10 |
| (16) 1925 | <i>Moody</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \sqrt[4]{\frac{D}{D'}}$ | Diese Gleichung wird durch die <i>Moody</i> sche Formel (1) gut angenähert | 11 |
| (17) 1925 | <i>Moody</i> (1) | $\frac{1-\eta'}{1-\eta} = \sqrt[2]{\frac{D}{D'}} \approx \frac{\delta'_o}{\delta_o}$ | | 11 |
| (18) 1927 | <i>Haeger</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \frac{1,4 + \frac{1}{\sqrt{D'}}}{1,4 + \frac{1}{\sqrt{D}}}$ | Eine Vereinfachung der <i>Camerer</i> schen Formel; D in m eingesetzt | 12 |
| (19) 1927 | <i>Haeger</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \left(\frac{k'D}{kD'}\right)^{0,314} \left[\frac{\nu'}{\nu} \left(\frac{H}{H'}\right)^{1/8}\right]^q$ wo $q \approx 0,314$ | Für den Fall der Rauigkeit auf Grund der Formel von <i>Hopf</i> und <i>Fromm</i> (9) | 12 |
| (20) 1928 | <i>Oesterlen</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \left(\frac{D}{D'}\right)^{0,314}$ | Eine Vereinfachung der <i>Haeger</i> schen Formel für den Fall der Rauigkeit | 13 |
| (21) cca 1930 | <i>Ackeret</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{Re}{Re'}\right)^{1/5}\right)$ | Publiziert erst in 1948 von <i>Mühlemann</i> | 14 |
| (22) 1933 | <i>Gregorig</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \sqrt[4]{\frac{Re}{Re'}} + \frac{K_{a3} \left(1 - \sqrt[4]{\frac{Re}{Re'}}\right)}{\delta_o}$ | Mit dem zweiten Glied wird der Austrittsverlust unabhängig von den Abmessungen berücksichtigt. K_{a3} Austrittsgeschwindigkeitsfaktor | 15 |
| (23) 1935 | <i>Moody</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \frac{(\log CD)^2}{(\log CD')^2}$ wo $C = 800$ und D ist in <i>foot</i> | | 16 |
| (24) 1939 | <i>Moody</i> (2) | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \sqrt[4]{\frac{D}{D'}} \sqrt{\frac{H}{H'}}$ | | 17 |
| (25) 1942 | <i>Moody</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \sqrt[5]{\frac{D}{D'}}$ | | 17 |
| (26) 1943 | <i>Medici</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \left(\frac{D}{D'}\right)^{1/4} \left(\frac{H}{H'}\right)^{1/10}$ | Von <i>Moody</i> mitgeteilt | 18 |
| (27) 1945 | <i>Canaan</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt[4]{\frac{Re}{Re'}}\right)$ | | 19 |
| (28) 1947 | <i>Pfleiderer</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \left(\frac{Re}{Re'}\right)^{0,1}$ | Die Formel von <i>Ackeret</i> wird durch eine einfachere Gleichung angenähert | 20 |
| (29) 1948 | <i>Medici</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \left(\frac{D}{D'}\right)^{1/5} \left(\frac{H}{H'}\right)^{1/10}$ | | 18 |
| (30) 1949 | <i>Morozov</i> | $\eta' = 1 - (1 - \eta) \sqrt[4]{\frac{D}{D'}} - \Delta \eta$ | Von den Werten von <i>Moody</i> (1) wird $\Delta \eta$ in Abzug gebracht; die Werte von $\Delta \eta$ werden in Abhängigkeit von D' tabellarisch mitgeteilt | 21 |
| (31) 1949 | <i>Nechleba</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \frac{1 + 52 \sqrt{\frac{\varepsilon'}{D'}}}{1 + 52 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}}$ | Für den Fall der Rauigkeit abgeleitet; $\varepsilon/D =$ relative Rauigkeit am Modell, $\varepsilon'/D' =$ relative Rauigkeit an der Grossausführung | 22 |
| (32) 1950 | <i>Mc.Donald</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \frac{1 + \frac{C}{(\log Re')^{2,58}}}{1 + \frac{C}{(\log Re)^{2,58}}} \text{ glatt}$ | Auf Grund der <i>Schlichting</i> schen Formel (10) | 23 |
| (33) | | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} \frac{1 + \frac{C}{\log b'(D'/\varepsilon')}}{1 + \frac{C}{\log b(D/\varepsilon)}} \text{ rauh}$ | | |
| (34) 1953 | <i>D. Pavel</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = \left(\frac{Q_{11}}{Q'_{11}}\right)^2 \left(\frac{D}{D'}\right) \left(\frac{1+D'}{1+D}\right) = \left(\frac{D}{D'}\right) \frac{1+D'}{1+D}$ | D wird in m eingesetzt | 24 |
| (35) 1954 | <i>Hutton</i> | $\frac{\delta'_o}{\delta_o} = 0,3 + 0,7 \sqrt[5]{\frac{Re}{Re'}}$ | | 25 |

3. Angaben zur Umrechnung des Wirkungsgrades in beliebigen Betriebspunkten der Turbine

Aus der Theorie der Maschinen wurden von MIYAGI [27] i. J. 1937 die für die Teilbelastung der Francis-, Propeller- und Kaplan-turbinen verwendbaren Formeln abgeleitet. Es wird in seiner Ableitung vorausgesetzt, dass der Verlust in dem Punkt des besten Wirkungsgrades lediglich aus Reibung besteht, und dass sich diese nach dem BLASIUS'schen Ausdruck ändert.

Hiernach gilt die folgende Gleichung:

$$\frac{\delta'_\delta}{\delta_\delta} = 1 + \frac{\delta^*}{\delta_\delta} \left(\frac{Q}{Q^*} \right)^m \left[1 - \left(\frac{Re}{Re'} \right)^{1/4} \right] \quad (36)$$

wobei δ^* den Verlust im Punkte des besten Wirkungsgrades darstellt. Der Wert von m beträgt bei Francisturbinen 1,75, bei Propellerturbinen 0,75 und bei Kaplan-turbinen $-1/8$.

Obwohl der Autor seine Theorie durch Messungen unterstützt, kann sie dennoch nicht als vollständig betrachtet werden, einerseits wegen der Beschränkungen, die sich auf den Punkt besten Wirkungsgrades (und auf den konstanten Wert von n_{11}) beziehen, andererseits wegen der Voraussetzung eines konstanten Verhältnisses des Saugrohrverlustes zum Laufradverlust.

I. J. 1954 teilte HUTTON seine Überlegungen bezüglich der Kaplan-turbinen (für konstantes n_{11} und veränderliches Q_{11}) mit. Die von ihm entwickelten Prinzipien wurden in der vorliegenden Abhandlung zum grössten Teil erörtert. Die als Ergebnis seiner Untersuchung erhaltene Kurve wurde von BLACKSTONE durch die folgende Kurve angenähert:

$$\frac{\delta'_\delta}{\delta_\delta} = (0,4x - 0,1) + (1,1 - 0,4x) \left(\frac{Re}{Re'} \right)^{1/5} \quad (37)$$

In der am Schluss der Abhandlung von HUTTON mitgeteilten Diskussion wird die allgemeine Gültigkeit dieser Formel von mehreren angezweifelt und lediglich nur als qualitatives Ergebnis entgegengenommen. Von anderen namhaften Fachleuten wird wiederum die Kurve für Vorausberechnung als geeignet gefunden, doch wird die experimentelle Unterstützung der Kurve urged.

SCHRIFTTUM

1. BIEL: Über den Druckhöhenverlust bei der Fortleitung tropfbarer und gasförmiger Flüssigkeiten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Heft. 44 Berlin, 1907.
2. JACOB-ERK: Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Heft 267. Berlin, 1924.
3. JACOB-ERK: Der Druckabfall in glatten Rohren und die Durchflussziffer von Normaldüsen. Z. V. D. I. 1924. S. 581.
4. LEES: Proc. Roy. Soc. London, 1915. S. 46.
5. BLASIUS: Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Heft. 131. Berlin, 1913.
6. CAMERER: Vorlesungen über Wasserkraftmaschinen. I. Aufl. S. 290.
7. CAMERER-ESTERER: Vorlesungen über Wasserkraftmaschinen. II. Aufl. S. 255.
8. CAMERER: Die Änderung der Schnellläufigkeit »ähnlicher« Wasserturbinen mit der Turbinengrösse. Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, 1909. S. 501.
9. CAMERER: Die Abhängigkeit des Wirkungsgrades der Wasserturbinen von Gefälle, Wasserwärme, Turbinengrösse und Rauheit der Kanäle. Z. V. D. I. 1909. S. 1541.
10. STAUFFER: Einflüsse auf den Wirkungsgrad von Wasserturbinen. Z. V. D. I. S. 415.
11. MOODY: The propeller type turbine. Proc. of the ASCE 1925; S. 1009.
12. HAECER: Die Änderung des Wirkungsgrades von Wasserturbinen mit der Grösse, dem Gefälle und der Temperatur. Wasserkraft u. Wasserwirtschaft 1927/28. S. 254.
13. OESTERLEN: Fortschritte im Bau von Wasserturbinen. Z. V. D. I. 1928. S. 1831.
14. MÜHELMANN: Zur Aufwertung des Wirkungsgrades von Überdruck-Wasserturbinen. Schweizerische Bauzeitung, 1948. No. 24.
15. GREGORIC: Der Wirkungsgrad einer Wasserturbine bei veränderlichem Gefälle, usw. Schweizerische Bauzeitung, 1933. S. 181.

16. MOODY : Discussion on Turbines for Wheeler Dam. Mech. Engng. 1935. p. 730.
17. DAVIS : Handbook of Applied Hydraulics. II. kiadás. 1950. London. McGraw Hill Book Co. Aufl. S. 601.
18. MEDICI : La progettazione delle Macchine Idrauliche. Padova, 1948. Cedam. S. 155. 297.
19. ESCHLER : Turbinen Abnahmeversuche am Innkraftwerk Simback Braunau. Schweizerische Bauzeitung. 1955. S. 471.
20. PFLEIDERER : Strömungsmaschinen. Springer, 1952. Berlin, S. 203.
21. MOROSOW : Turbinoe oberudowanie gidroelektrostancij. 1949. Moskau G. Z. I. S. 16.
22. NECHLEBA : On the Influence of the Surface Roughness of the Flow Passages on the Efficiency of Hydraulic Machines. 1949. Trans. Techn. High School of dr. Ed. Benes, Brno.
23. MC. DONALD : Turbine Efficiency Formulae 1950. Water-Power.
24. PAVEL : Generalizarea Metodei de Calcul a randamentului turbinelor cu reactiune. Hidrotehnica 1953. Jan. S. 13.
25. HUTTON : Component losses in Kaplan turbine and the prediction of efficiency from model tests. Proc. of the Inst. of Mech. Engns. 1954. vol. 168, No. 28.
26. PANTELL : Aufwertungsformeln für Turbomaschinen. Z. V. D. I. 1953. S. 97.
27. MIYAGI : Estimation of the Efficiency of the Francis, Propeller and Kaplan Turbines by Means of their Model Experiments. Technology Reports of the Tohoku Imp. Univ. Sendai, Japan. Vol. XII. 1936—38. p. 475.
28. KWIATKOWSKIJ : Rabotschij prozess osewoj gidroturbinü. Masgis 1951.
29. PANTELL : Versuche über Scheibenreibung. Forschung 1949/50. S. 97.
30. FÁY—TRENKA : Szemelvények a vízgépkutatás módszerei és eszközei tárgykörbő. MTI. 3315. Bp. 1955.

ZUSAMMENFASSUNG

In der Mitteilung gibt Verfasser eine Übersicht der einschlägigen Literatur und als Ergänzung wird eine Methode mitgeteilt, die er auf Grund der ausführlichen Messungen von KWIATKOWSKIJ entwickelt hat. In der neuen Methode werden die Prinzipien der von HUTTON entwickelten Methode zur theoretischen Zerlegung der Verluste mit der von KWIATKOWSKIJ entwickelten Modellmessmethode zur Bestimmung der hydraulischen Verluste kombiniert. Es werden aus den KWIATKOWSKIJ'schen Diagrammen empirische Näherungsgleichungen entwickelt, und die verschiedenen Verluste je nach ihren Charakteren für die Grossausführung umgerechnet. Der derart erhaltene Zusammenhang ist für den untersuchten Laufrad-Saugrohr-Komplex charakteristisch. Die auf diese Weise gewonnenen Ergebnisse werden mit den verschiedenen üblichen Formeln verglichen. Durch die vorgeschlagene Methode werden Gleichungen gewonnen, die an Stelle jener Umrechnungsmethoden, die allein in Punkte des besten Wirkungsgrades des Wirkungsgradfeldes der Turbine angewendet werden konnten, für einen breiteren Streifen des Wirkungsgradfeldes auch Geltung haben. Die praktische Bedeutung dieser Frage wird durch den Umstand erhöht, dass die Abnahme der Turbinen immer mehr auf Grund der Modellmessungen vorgenommen wird. Die Methode ist unentbehrlich, soll die Zwangssteuerfläche der Kaplan turbinen mit stark veränderlichem Gefälle bei Flusskraftwerken im voraus mit einer guten Annäherung konstruiert werden.

THEORETICAL BASES OF THE MODEL-LAWS AND THE CONVERSION METHODS OF MEASURING RESULTS FOR REACTION WATER TURBINES

CS. FÁY

SUMMARY

The paper gives a summary of the literature dealing with the subject, and completes it with a new method, that has been elaborated on the base of KWIATKOWSKIJ's detailed measurements. The new method combines the principles of the theoretical method for distribution of losses developed by HUTTON, with the method determining the sorts of hydraulic losses by measurements on models, developed by KWIATKOWSKIJ. Author composes

approaching (empirical) formulae from KVJATKOVSKIJ's graphs, and then he converts the different losses in accordance with their character into the full scale unit. This formula is characteristic for the wheel-draft tube complexum. He compares this result to the different used conversion formulae. By the application of the suggested method we can obtain such formulae which are valid for a wider strip of the characteristic diagram, while the methods of conversion hitherto used have been applicable only for the point of best efficiency of the turbine. The practical importance of the question is increased by the fact, that the delivery and acceptance of turbines on the base of model-measurements comes into use. The proposed method becomes indispensable when designing Kaplan-turbine regulator surfaces.

BASES THÉORIQUES DES LOIS DES MODELES ET CALCUL DES RÉSULTATS DE MESURE SUR TURBINES HYDRAULIQUES À RÉACTION

CS. FÁY

RÉSUMÉ

L'étude résume la littérature consacrée à ce sujet, et la complète par une méthode nouvelle élaborée à base des mesures faites par Kviatkovski. Cette méthode combine les principes du procédé de distribution des pertes hydrauliques formulé par Hutton, avec la méthode des mesures sur modèles, élaborée par Kviatkovsky, pour déterminer les différentes pertes hydrauliques. L'auteur présente des corrélations approximatives (empiriques) à partir des diagrammes de Kviatkovsky, et convertit ensuite les différentes valeurs de pertes, selon leurs caractères, en vue de réalisations sur grande échelle. Le rapport ainsi obtenu est caractéristique pour l'ensemble du roue-tuyau d'aspiration examiné par l'auteur qui compare le résultat ainsi obtenu avec les différentes formules employées. Grâce à la méthode proposée, on peut obtenir des rapports valables pour une large bande de la courbe en colline, au lieu des méthodes de calcul applicables au seul point de meilleur rendement de la courbe en colline de la turbine. Ce qui rehausse l'importance pratique de la question, c'est que la réception des turbines à base de mesures sur modèles, s'étend de plus en plus. Le procédé est indispensable, quand on a l'intention de construire à l'avance la surface directrice de turbines Kaplan fluviales travaillant avec une hauteur très variable.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЗАКОНОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПЕРЕСЧЕТ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ТУРБИН С ЩЕЛЕВЫМ ИЗБЫТОЧНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Ч. ФАЙ

РЕЗЮМЕ

В работе подводятся итог литературы, посвященной данной теме, и она дополняется таким новым методом, который разработан автором на основе детальных измерений Квятковского. Новый метод комбинирует принципы метода Хуттона теоретического распределения потерь с методом Квятковского по измерению данных при моделировании, разработанного для определения различных видов гидравлических потерь. На основе диаграммы Квятковского автор выводит приближенные (эмпирические) зависимости, затем различные потери пересчитываются соответственно их характера для постройки турбины в натуральную величину. Полученная таким образом зависимость характерна для исследованного комплекса рабочее колесо и всасывающей трубы. Полученный таким образом результат сравнивается с различными используемыми на практике формулами. При помощи предлагаемого метода вместо методов пересчета, применимых до сих пор только для точек максимальной эффективности универсальной характеристики с изолиниями, можно получить зависимости, действительные для более широкой полосы универсальной характеристики с изолиниями. Практическое значение вопроса повышается тем, что все сильнее распространяется приемка и сдача турбин на основе данных измерений при моделировании. Предлагаемый метод незаменим, если предполагается заранее построить с удовлетворительным приближением управляющую принудительную поверхность речных турбин системы Каплана, работающих при режиме сильно меняющегося напора.

LES ÉQUATIONS DE CLAPEYRON ONT 100 ANS

Prof. P. CSONKA
DOCTEUR DES SC. TECHN.

[Manuscrit présenté le 15 novembre 1957]

Il y a justement 100 ans, que le célèbre ouvrage de BENOÎT-PIERRE-ÉMILE CLAPEYRON, «*Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés*», a vu la lumière dans les «*Comptes rendus*» publiés par l'Académie Française. A l'occasion du centenaire, il faut faire revivre le souvenir de cet éminent savant ingénieur, et juger selon son mérite l'importance des équations établies par lui, qui portent son nom.

Les ponts continus à plusieurs appuis, construits au milieu du siècle dernier, étaient bâtis simplement d'après l'intuition pratique, faute de connaissances théoriques. On comprend ainsi, que l'éclaircissement du calcul de ces ponts ait sérieusement occupé les ingénieurs.

L. NAVIER fut le premier à s'en occuper sincèrement, c'est lui qui donna la première solution du problème de la poutre à trois appuis, dans le *Bulletin de la Société Philomatique* en 1825. Ses contemporains MELLANGER, MOLINOS et PRONIER ont développé la méthode Navier, et ils ont établi des équations pour la détermination des réactions des poutres à plusieurs appuis. Mais ces équations n'étaient pas très appropriées au calcul pratique, parce que chacune des réactions inconnues était présente dans chaque équation. Une autre difficulté résidait dans le fait, que les équations isolées n'étaient pas assez différentes l'une de l'autre, si bien que la détermination des inconnues exigeait des calculs très exacts.

En résolvant le problème, CLAPEYRON a, contrairement à ses devanciers, pris pour inconnues les moments aux appuis au lieu des réactions. Ceci a d'une part simplifié le système d'équations, et d'autre part l'a rendue plus facile à résoudre dans la pratique.

C'est en 1848, que CLAPEYRON a employé cette méthode de calcul pour la première fois, et cela en liaison avec les projets du pont d'Asnières, près de Paris. Ensuite, on a employé sa méthode à l'occasion des projets d'autres ponts. D'autres l'ont adoptée après lui pour les projets de ponts de chemins de fer sur la Garonne, le Lot et le Tarn, si bien que les équations de Clapeyron se sont rapidement répandues, sans que leur auteur les ait jamais publiées. Il est intéressant de noter que, dans sa fameuse étude parue il y a cent ans,

CLAPEYRON ne justifie pas les équations établies par lui, il donne seulement une méthode bien spirituelle pour leur solution ressemblant aux méthodes des différences finies. Tout ceci n'enlève rien au mérite original de CLAPEYRON, et le monde scientifique considère la date de parution de l'ouvrage de CLAPEYRON, comme le centenaire des équations mentionnées ci-dessus.

La découverte des équations de Clapeyron a ouvert de grandes possibilités de développement sur le terrain de la théorie statique des constructions. L'éclaircissement du calcul des portiques, et en général des constructions hyperstatiques, a suivi la mise au point de la théorie des poutres continues à plusieurs appuis, ce qui a permis l'épanouissement de la science des constructions.

Pendant les cents ans écoulés depuis la parution du célèbre ouvrage de CLAPEYRON, la méthode Clapeyron a été employée pour de milliers de constructions. Ces constructions magnifiques annoncent glorieusement le mérite immortel de leur créateur: le souvenir de l'ingénieur savant BENOÎT-PIERRE-ÉMILE CLAPEYRON.

BIBLIOGRAPHIE

1. CLAPEYRON, B. P. E. : Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Paris* 45 (1857), pp. 1076—1080.
2. POGGENDORF, I. C. : Bibliographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Vol. I, pp. 448—449, Vol. III. p. 275.
3. TODHUNTER, I.—PEARSON, K. : A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time. Vol. II., Part I. (1893), pp. 414—420.
4. TIMOSHENKO, S. P. : History of Strength of Materials. McGraw-Hill Publishing Company LTD, New York, London, Toronto, pp. 114—118, 144—146.
5. MOIGNO, L. : Les Mondes. Revue hebdomadaire des sciences et de leur applications aux arts et à l'industrie 2 (1864) Janvier—Avril. Tome 4., pp. 212—215.
6. *Der Grosse Brockhaus*. 4 (1929), p. 144, 2 (1953) p. 684.
7. *Enciclopedia Italiana* 10 (1931), p. 524—5.

DIE CLAPEYRON'SCHEN GLEICHUNGEN WERDEN SEIT 100 JAHREN ANGEWENDET

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Es sind nun 100 Jahre her, seit BENOÎT-PIERRE-ÉMILE CLAPEYRON die von ihm zur Berechnung der durchlaufenden Träger abgeleiteten und nach ihm benannten Gleichungen auf den Blättern des »Bulletin de la Société Philomatique« veröffentlichte. Diese Abhandlung wurde zum Ausgangspunkt der Entwicklung eines neuen Wissenschaftszweiges, der Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen. In den vergangenen 100 Jahren werden die Clapeyron'schen Gleichungen zur Berechnung von tausend und abertausend Ingenieurbauten angewendet und diese Bauwerke verkünden auch heute — auch in einer Perspektive von 100 Jahren — laut das Andenken des hervorragenden Ingenieurs und Gelehrten.

CLAPEYRON'S EQUATIONS ARE IN USE SINCE 100 YEARS

P. CSONKA

SUMMARY

BENOÎT-PIERRE-ÉMILE CLAPEYRON published the equations — which he developed for the calculation of continuous beams, and which were named after him — 100 years ago on the sheets of the *Bulletin de la Société Philomatique*. This has been the originator of the development of a new branch of science, namely the theory of statically redundant constructions. These equations have been used for thousands of engineering constructions during the passed 100 years, and these structures sound — also today, in a perspective of 100 years too — the memory of this outstanding engineer and scientist.

СТОЛЕТИЕ УРАВНЕНИЙ КЛАПЕЙРОНА

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Сто лет тому назад Э. Клапейрон разработал для расчета неразрезных балок названные его именем уравнения и опубликовал их на страницах *Bulletin de la Société Philomatique*. Эту работу можно считать в качестве открывшей первую страницу новой области науки, т. е. теории статически неопределенных конструкций. Уравнения Клапейрона за прошедшие сто лет были применены для расчета многих тысяч инженерных сооружений, и эти сооружения еще и сейчас (даже в перспективе прошедших ста лет) говорят о выдающемся инженере — ученом.

SURGE PHENOMENA IN ELECTROMAGNETIC COILS ANALYSED BY HYPERMATRIX METHODS

V. LOVASS-NAGY

DEPARTMENT FOR MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BUILDINGS SCIENCES AND COMMUNICATIONS

and

K. SZENDY

D. ENG. SC.

POWER STATION DESIGNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received November 16, 1957]

The relations derived in the present study may be applied to the description of transient phenomena produced by surge waves in both normal reactors and individual coils of transformers and electric machines. As is known [1] to [3] an electromagnetic winding may be considered as being built up of coils representing elementary inductances and of capacitors representing ele-

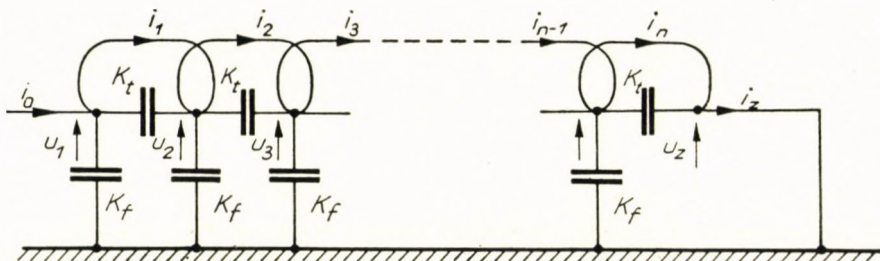


Abb. 1

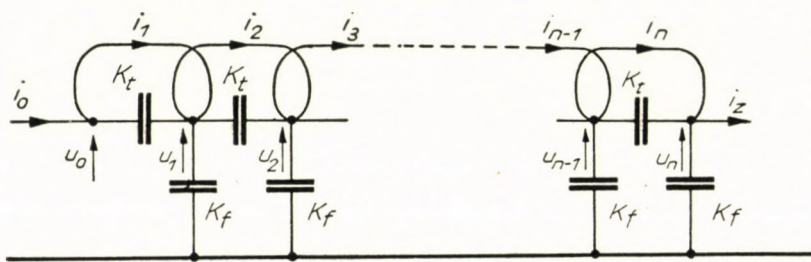


Abb. 2

mentary capacitances,* as shown in Fig. 1. and Fig. 2. An inductive coupling exists between "elementary coils" representing elementary inductances, therefore, in addition to the self-inductance of elementary coils, the mutual

* The "elementary condensers" represent capacitances between individual turns of coils and capacitances of each turn towards earth.

and

$$u_z = 0 \quad (1.3)$$

$$i_z = i_n - K_t \frac{d}{dt} u_n \quad (1.4)$$

Let i_0 indicate the surge wave entering the left side terminal, i_0 being a given function of time, $i_0(t)$. The values $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n; u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$ and i_z are unknown functions of time, to be determined by solving the differential equations.

Let us write the unknown elementary coil currents of number n and the unknown voltages of number n into n -element column-matrices

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n-1} \\ i_n \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

and let us introduce the notation

$$\mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} i_0(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Further, let us introduce the following square-matrices of order n :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & q & q^2 & \dots & q^{n-2} & q^{n-1} \\ q & 1 & q & \dots & q^{n-3} & q^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ q^{n-2} & q^{n-3} & q^{n-4} & \dots & 1 & q \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \dots & q & 1 \end{bmatrix}$$

It is obvious, that

$$\mathbf{DD}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{D}^*\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

By means of the above column-matrices and square-matrices the systems of equations (1.1) and (1.2) can be compounded into the following matrix equations :

$$\mathbf{D}\mathbf{i} = (\mathbf{K}_f \mathbf{E} + \mathbf{K}_t \mathbf{D}\mathbf{D}^*) \frac{d}{dt} \mathbf{u} + \mathbf{i}_0 \quad (2.1)$$

$$-\mathbf{D}^* \mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{Q} \frac{d}{dt} \mathbf{i} \quad (2.2)$$

It is apparent, that Eq. (2.1) can also be written in the form of

$$\mathbf{D}\mathbf{i} = (\mathbf{K}_f \mathbf{D}^{*-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{D}) \frac{d}{dt} \mathbf{D}^* \mathbf{u} + \mathbf{i}_0$$

taking this equation now into consideration, and using notation \mathbf{u}_t for the column matrix $\mathbf{D}^* \mathbf{u}$ (actually representing a *transformed* column matrix), the following equations can be obtained from equations (2.1) and (2.2), then equation (2.1) is multiplied from the left :

$$\mathbf{i} = [\mathbf{K}_f (\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1} + \mathbf{K}_t \mathbf{E}] \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{i}_0 \quad (3.1)$$

$$-\mathbf{u}_t = \mathbf{L}\mathbf{Q} \frac{d}{dt} \mathbf{i} \quad (3.2)$$

Now introducing the notation $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{i}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{i}_{0t}$ and solving

Eqs. (3.1) and (3.2) for their derivatives, we obtain the following relations :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_t = [\mathbf{K}_t \mathbf{E} + \mathbf{K}_f (\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1}] \mathbf{i} - [\mathbf{K}_t \mathbf{E} + \mathbf{K}_f (\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1}]^{-1} \mathbf{i}_{0t} \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i} = -\frac{1}{L} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{u}_t \quad (4.2)$$

In the following, for the sake of brevity, for column matrix $-[K_t \mathbf{E} + K_f(\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1}]^{-1} \mathbf{i}_{0t}$ contained in Eq. (4.1) will be noted by \mathbf{i}_{0tt} .

From an earlier study of J. Egerváry [4], it is known, that

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{1 - q^2} \begin{bmatrix} 1 & -q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -q & 1 - q^2 & -q & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -q & 1 - q^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - q^2 - q & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -q & 1 \end{bmatrix}$$

It can easily be understood that \mathbf{Q}^{-1} can also be expressed in the following form, when using $\mathbf{D}^* \mathbf{D}$:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{1 - q^2} \{ [q \mathbf{D}^* \mathbf{D} + (1 - 2q - q^2) \mathbf{E}] + \langle q^2, 0, 0, \dots, 0, 0, q + q^2 \rangle \}$$

From the above it follows that Eqs. (4.1) and (4.2) may be written in the following way :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}_t = [K_t \mathbf{E} + K_f(\mathbf{D}^* \mathbf{D})^{-1}]^{-1} \mathbf{i} + \mathbf{i}_{0tt} \tag{5.1}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i} = -\frac{1}{L} \frac{1}{1 - q^2} \{ [q \mathbf{D}^* \mathbf{D} + (1 - 2q - q^2) \mathbf{E}] \mathbf{u}_t + \langle q^2, 0, \dots, 0, q + q^2 \rangle \mathbf{u}_t \} \tag{5.2}$$

It is apparent that

$$\frac{1}{1 - q^2} \langle q^2, 0, \dots, 0, q + q^2 \rangle \mathbf{u}_t = \frac{q}{1 + q} \begin{bmatrix} \frac{q}{1 - q} u_{t1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{tn} \end{bmatrix}$$

As it is to be observed all elements of the above column matrix are identically zero, with the exception of its first and last element. The first and last element which are not identical to zero, are constant-multiples of the first and last elements of the transformed voltage function u_t , these are thus unknown functions.

Let us now introduce the notations

$$\left. \begin{aligned}
 f(\mathbf{D}^*\mathbf{D}) &= [K_l \mathbf{E} + K_f (\mathbf{D}^*\mathbf{D})^{-1}]^{-1} \\
 g(\mathbf{D}^*\mathbf{D}) &= -\frac{1}{L} \frac{1}{1-q^2} [q \mathbf{D}^*\mathbf{D} + (1-2q-q^2) \mathbf{E}] \\
 \mathbf{u}_z &= -\frac{1}{L} \frac{q}{1+q} \begin{bmatrix} \frac{q}{1-q} u_{t1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{tn} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

then Eqs. (5.1) and (5.2) may be compounded into the following equation :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(\mathbf{D}^*\mathbf{D}) \\ g(\mathbf{D}^*\mathbf{D}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{0t} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

Obviously, when knowing the eigenvalues $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ and eigenvectors* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ of symmetric matrix $\mathbf{D}^*\mathbf{D}$ the latter may be written in the form of

$$\mathbf{D}^*\mathbf{D} = \mathbf{V} \langle \delta_K \rangle \mathbf{V}^*$$

where

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \text{ and } \mathbf{V}^*\mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^* = \mathbf{E}$$

When multiplying Eq. (7) by $\langle \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^* \rangle$ from the left and making use of relation $\langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \langle \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^* \rangle = \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle$ the following matrix equations will be obtained from Eq. (7) :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^* \rangle \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{V}^* f(\mathbf{D}^*\mathbf{D}) \mathbf{V} \\ \mathbf{V}^* g(\mathbf{D}^*\mathbf{D}) \mathbf{V} & 0 \end{bmatrix} \langle \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^* \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} + \\
 &+ \langle \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^* \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{0t} \\ 0 \end{bmatrix} + \langle \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^* \rangle \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (8)$$

As, however, the elements of column matrix \mathbf{i}_{0t} are functions not identical to zero, still the elements of column matrix \mathbf{u}_z are identically zero with the exception of the first and last elements, it follows that the order of magnitude

* The formula for the computation of eigenvalues and eigenvectors of matrix $\mathbf{D}^*\mathbf{D}$ are given in the Appendix.

of elements in $\mathbf{V}^* \mathbf{u}_z$ is $\frac{1}{n}$ as compared to the elements of $\mathbf{V}^* \mathbf{i}_{0tt}$. Assuming that the examined coil is of sufficiently large amount of turns* the column matrix

$$\langle \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^* \rangle \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix}$$

may be neglected; if we use this neglect, and introducing the notation :

$$\langle \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^* \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \mathbf{y} \quad \text{and} \quad \langle \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^* \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{0tt} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{y}_0$$

the following relation will be obtained from Eq. (8),**

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & \langle f(\delta_k) \rangle \\ \langle g(\delta_k) \rangle & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \mathbf{y}_0 \tag{9}$$

being $\mathbf{V}^* f(\mathbf{D}^* \mathbf{D}) \mathbf{V} = \langle f(\delta_k) \rangle$ and $\mathbf{V}^* g(\mathbf{D}^* \mathbf{D}) \mathbf{V} = \langle g(\delta_k) \rangle$

(Eq. see p. 6 of [5]).

Let us now introduce the "permutation matrix" of the square type and of order 2nd :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \dots & \mathbf{P}_{1n} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \dots & \mathbf{P}_{2n} \end{bmatrix}$$

in which

$$\mathbf{P}_{1k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots 1\text{st row} \\ \dots 2\text{nd row} \\ \\ \dots k\text{th row} \\ \\ \dots n\text{th row} \end{matrix} \quad \mathbf{P}_{2k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots 1\text{st row} \\ \dots 2\text{nd row} \\ \\ \dots k\text{th row} \\ \\ \dots n\text{th row} \end{matrix}$$

* On the basis of Fig. 3 on p. 952 referring to study [1] it may easily be understood that, when treating the problem by using partial differential equations (see Eqs. (4) and (5) of Reference[1]), this neglect happens automatically, while constructing the differential equation describing the problem.

** For the solution of differential equation

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & \langle f(\delta_k) \rangle \\ \langle g(\delta_k) \rangle & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \mathbf{y}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{V}^* \mathbf{u}_z \end{bmatrix}$$

obtained from Eq. (8) *without neglect*, an iteration method can be given and will be presented in the Appendix.

(i. e. all elements of matrices \mathbf{P}_{1k} and \mathbf{P}_{2k} are zero, with the exception of the first element of the former, and the second element of the latter in the k th row, which are equal to 1). For more detailed explanations of the term "permutation matrix" reference is made to it in p. 216 of [6].

When multiplying Eq. (9) by the permutation matrix \mathbf{P}^* , from the left introduced above, and utilizing relation $\mathbf{P}\mathbf{P}^* = \mathbf{E}$, the following expression will be obtained :

$$\mathbf{P}^* \frac{d}{dt} \mathbf{y} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & f(\delta_k) \\ g(\delta_k) & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathbf{P}^* \mathbf{y} + \mathbf{P}^* \mathbf{y}_0 \quad (10)$$

Let us introduce the notations $\mathbf{y}_t = \mathbf{P}^* \mathbf{y}$ and $\mathbf{y}_{0t} = \mathbf{P}^* \mathbf{y}_0$. Furthermore, it follows from Eqs. (6) that $f(\delta_k)$ and $g(\delta_k)$ can be written in the form of $f(\delta_k) = \varphi_k$ and $g(\delta_k) = -\gamma_k$, where $\varphi_k > 0$ and $\gamma_k > 0$. Thus, Eq. (10) may be rewritten as follows :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}_t = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & \varphi_k \\ -\gamma_k & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathbf{y}_t + \mathbf{y}_{0t} \quad (11)$$

If we introduce as the notation of eigenvectors of matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & \varphi_k \\ -\gamma_k & 0 \end{bmatrix}$$

the following column matrices

$$\mathbf{w}_{k1} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_k \gamma_k + \gamma_k^2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{\varphi_k \gamma_k} j \\ \gamma_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w}_{k2} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_k \gamma_k + \gamma_k^2}} \begin{bmatrix} \sqrt{\varphi_k \gamma_k} j \\ \gamma_k \end{bmatrix}$$

then it can be proved by a simple computation that

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k1}^* \\ \mathbf{w}_{k2}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\varphi_k \gamma_k} j & 0 \\ 0 & -\sqrt{\varphi_k \gamma_k} j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{k1} & \mathbf{w}_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_k \\ -\gamma_k & 0 \end{bmatrix}$$

Thus employing the notation $\mathbf{W} = \langle\langle \mathbf{w}_{k1}, \mathbf{w}_{k2} \rangle\rangle$, it is obvious that

$$\mathbf{W}^* \frac{d}{dt} \mathbf{y}_t = \langle\langle \sqrt{\varphi_k \gamma_k} j, -\sqrt{\varphi_k \gamma_k} j \rangle\rangle \mathbf{W}^* \mathbf{y}_t + \mathbf{W}^* \mathbf{y}_{0t} \quad (12)$$

Finally, introducing the notations $\mathbf{W}^* \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{tt}$ and $\mathbf{W}^* \mathbf{y}_{0t} = \mathbf{y}_{0tt}$, the solution of matrix equation (12), in satisfying the initial condition $\mathbf{y}_{tt}(0) = \mathbf{y}_{ttA}$, will take the form of

$$\mathbf{y}_{tt} = \langle\langle e^{\varphi_k \gamma_k j t}, e^{-\varphi_k \gamma_k j t} \rangle\rangle \mathbf{y}_{ttA} + \int_0^t \langle\langle e^{\varphi_k \gamma_k j (t-\tau)}, -e^{-\varphi_k \gamma_k j (t-\tau)} \rangle\rangle \mathbf{y}_{0tt}(\tau) d\tau \tag{13}$$

(see Appendix and pp. 156 to 211 of [7] and pp. 366 to 368 of [8]).

If we write column matrix \mathbf{y}_{0tt} in the form of

$$\mathbf{y}_{0tt} = \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \\ \eta_{21} \\ \eta_{22} \\ \vdots \\ \eta_{k1} \\ \eta_{k2} \\ \vdots \\ \eta_{n1} \\ \eta_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \eta_{k2} \end{bmatrix}$$

then the required integrations in Eq. (13) can be performed within the scalar elements of the diagonal matrix; hence,

$$\mathbf{y}_{tt} = \langle\langle e^{\sqrt{\varphi_k \gamma_k} j t}, e^{-\sqrt{\varphi_k \gamma_k} j t} \rangle\rangle \mathbf{y}_{ttA} + \int_0^t e^{\sqrt{\varphi_k \gamma_k} j (t-\tau)} \eta_{k1}(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\sqrt{\varphi_k \gamma_k} j (t-\tau)} \eta_{k2}(\tau) d\tau$$

Taking the transformations employed into consideration, the required column matrices $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{i}(t)$ can be obtained from \mathbf{y}_{tt} in the following way

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{i}(t) \end{bmatrix} = \langle \mathbf{D}^{*-1}, \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \mathbf{P} \mathbf{W} \mathbf{y}_{tt}(t) \tag{15}$$

(Reference to the inverse of matrix \mathbf{D}^* may be found in the Appendix.)

The investigation of the 2nd case (where the right hand terminal is isolated from earth) may be performed conveniently on the basis of Fig. 2. Thus, for the currents and voltage the following systems of equations would be obtained :

$$\left. \begin{aligned}
 i_2 - i_1 &= K_f \frac{d}{dt} u_1 + K_t \frac{d}{dt} (2 u_1 - u_2) - K_t \frac{d}{dt} u_0 \\
 i_3 - i_2 &= K_f \frac{d}{dt} u_2 + K_t \frac{d}{dt} (-u_1 + 2 u_2 - u_3) \\
 &\dots \dots \dots \\
 i_n - i_{n-1} &= K_f \frac{d}{dt} u_{n-1} + K_t \frac{d}{dt} (-u_{n-2} + 2 u_{n-1} - u_n) \\
 -i_n &= K_f \frac{d}{dt} u_n + K_t \frac{d}{dt} (-u_{n-1} + u_n)
 \end{aligned} \right\} (16.1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= L \frac{d}{dt} (i_1 + q i_2 + q^2 i_3 + \dots + q^{n-2} i_{n-1} + q^{n-1} i_n) + u_0 \\
 u_2 - u_1 &= L \frac{d}{dt} (q i_1 + i_2 + q i_3 + \dots + q^{n-3} i_{n-1} + q^{n-2} i_n) \\
 &\dots \dots \dots \\
 u_{n-1} - u_{n-2} &= L \frac{d}{dt} (q^{n-2} i_1 + q^{n-3} i_2 + q^{n-4} i_3 + \dots + i_{n-1} + q i_n) \\
 u_n - u_{n-1} &= L \frac{d}{dt} (q^{n-1} i_1 + q^{n-2} i_2 + q^{n-3} i_3 + \dots + q i_{n-1} + i_n)
 \end{aligned} \right\} (16.2)$$

and

$$i_z = 0 \tag{16.3}$$

$$i_1 - i_0 = K_t \frac{d}{dt} (u_0 - u_1) \tag{16.4}$$

In this case the surge wave entering the left-side terminal is represented by u_0 , this being a given function of time $u_0(t)$. The values $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n$ and $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$ as well as i_0 , contained in the above equations, are the unknown functions of time, determinable by solving the differential equations.

Let us write the elementary coil currents of number n and also the unknown voltages of number n into n element column-matrices

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n-1} \\ i_n \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

and let us introduce the notation

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_0(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Using the matrices \mathbf{D} and \mathbf{Q} square-matrices of order n introduced further above, the systems of equations 16.1 and 16.2 may be compounded in the following matrix equations

$$-\mathbf{D}^* \mathbf{i} = (\mathbf{K}_f \mathbf{E} + \mathbf{K}_l \mathbf{D}^* \mathbf{D}) \frac{d}{dt} \mathbf{u} - \mathbf{K}_l \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0 \tag{17.1}$$

$$\mathbf{D} \mathbf{u} = L \mathbf{Q} \frac{d}{dt} \mathbf{i} + \mathbf{u}_0 \tag{17.2}$$

Obviously, — analogously to the transformation of Eqs. (2.1) and (2.2) — from (17.1) and (17.2) the following equations can be obtained :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{u}}_l &= - [\mathbf{K}_f (\mathbf{D} \mathbf{D}^*)^{-1} + \mathbf{K}_l \mathbf{E}]^{-1} \mathbf{i} + \\ &+ [\mathbf{K}_f (\mathbf{D} \mathbf{D}^*)^{-1} + \mathbf{K}_l \mathbf{E}]^{-1} \mathbf{K}_l \mathbf{D}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0 \end{aligned} \tag{18.1}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i} = \frac{1}{L} \mathbf{Q}^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_l + \frac{1}{L} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{u}_0 \tag{18.2}$$

however, in this case, the transformation of the voltage column matrix will be transformed by means of multiplication by \mathbf{D} instead of \mathbf{D}^* , therefore the notation $\mathbf{D} \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}_l$ was introduced (in order to distinguish from $\mathbf{u}_l = \mathbf{D}^* \mathbf{u}$).

It is, further, apparent that \mathbf{Q}^{-1} introduced above may be expressed, using the term $\mathbf{D} \mathbf{D}^*$, in the following way :

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{1 - q^2} \{ [q \mathbf{D}\mathbf{D}^* + (1 - 2q - q^2) \mathbf{E}] + \langle q + q^2, 0, 0, \dots, 0, 0, q^2 \rangle \}$$

Let us now introduce the below notations :

$$\mathbf{u}_{0t} = \begin{bmatrix} [K_f (\mathbf{D}\mathbf{D}^*)^{-1} + K_t \mathbf{E}]^{-1} K_t \mathbf{D}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_0 \\ \frac{1}{L} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{u}_0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_z = \frac{1}{L} \frac{q}{1 + q} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{t1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{q}{1 - q} \tilde{u}_{tn} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$f(\mathbf{D}\mathbf{D}^*) = [K_t \mathbf{E} + K_f (\mathbf{D}\mathbf{D}^*)^{-1}]^{-1}$$

$$g(\mathbf{D}\mathbf{D}^*) = -\frac{1}{L} \frac{1}{1 - q^2} q \mathbf{D}\mathbf{D}^* + (1 - 2q - q^2) \mathbf{E}$$

By means of the above notations Eqs. (18.1) and (18.2) will take the following form, analogously to Eq. (7) :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_t \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & f(\mathbf{D}\mathbf{D}^*) \\ g(\mathbf{D}\mathbf{D}^*) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_t \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} + \mathbf{u}_{0t} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} \quad (20)$$

As the eigenvalues of symmetrical matrix $\mathbf{D}\mathbf{D}^*$ are identical with the known eigenvalues $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ of matrix $\mathbf{D}^*\mathbf{D}$ used previously, and its eigenvectors are $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_n$ (see Appendix), we obtain

$$\mathbf{D}\mathbf{D}^* = \tilde{\mathbf{V}} \langle \delta_k \rangle \tilde{\mathbf{V}}^*$$

where

$$\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_n] \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{V}}^* \tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^* = \mathbf{E}.$$

If we premultiply Eq. (20) by $\langle \tilde{\mathbf{V}}^*, \tilde{\mathbf{V}}^* \rangle$ from the left and make use of relation $\langle \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{V}} \rangle \langle \tilde{\mathbf{V}}^*, \tilde{\mathbf{V}}^* \rangle = \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle$, furthermore neglect column matrix

$\tilde{\mathbf{V}}^* \mathbf{u}_z$ on the basis of the considerations above explained and introduce the notations

$$\langle \tilde{\mathbf{V}}^*, \tilde{\mathbf{V}}^* \rangle \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_t \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{y}} \quad \text{and} \quad \langle \tilde{\mathbf{V}}^*, \tilde{\mathbf{V}}^* \rangle \mathbf{u}_{0t} = \tilde{\mathbf{y}}_0$$

we obtain

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{y}} = - \begin{bmatrix} 0 & f(\delta_k) \\ g(\delta_k) & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{y}}_0. \quad (21)$$

As Eq. (21) is identical to Eq. (9) apart from the sign of the square matrix, it is obvious that in case of the right-side terminal being isolated from earth, the following formula will be obtained for the voltage column matrix and current column matrix :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{i}(t) \end{bmatrix} = \langle \mathbf{D}^{-1}, \mathbf{E} \rangle \langle \tilde{\mathbf{V}}, \mathbf{V} \rangle \mathbf{P} \mathbf{W} \tilde{\mathbf{y}}_{tt}(t) \quad (22)$$

where

$$\tilde{\mathbf{y}}_{tt} = \langle \langle e^{-V \varphi_{k1/k} j t}, e^{V \varphi_{k2/k} j t} \rangle \rangle \tilde{\mathbf{y}}_{tt}(0) + \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-V \varphi_{k1/k} j (t-\tau)} \tilde{\eta}_{k1}(\tau) d\tau \\ \int_0^t e^{V \varphi_{k2/k} j (t-\tau)} \tilde{\eta}_{k2}(\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

In this case

$$\tilde{\mathbf{y}}_{tt}(0) = \mathbf{W}^* \mathbf{P}^* \tilde{\mathbf{y}}(0)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{0tt} = \mathbf{W}^* \mathbf{P}^* \tilde{\mathbf{y}}_0 \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{y}}_{0tt} = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{k1} \\ \tilde{\eta}_{k2} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Naturally, the deduced results may also be written without using matrix notations, i.e. in scalar form. As for instance, from matrix relation (15) the following scalar relations are to be obtained :

$$\mathbf{i}_0 = i_0(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_{0t} = i_0(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_{0tt} = -f(\mathbf{D}^* \mathbf{D}) i_0(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

thus

$$y_0 = \begin{bmatrix} -V^* f(D^*D) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} i_0(t) \end{bmatrix} = -i_0(t) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

where

$$x_k = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\xi=1}^n y_k^* f(\lambda_\xi) \begin{bmatrix} v_{\xi 1} v_{\xi \mu} \\ v_{\xi 2} v_{\xi \mu} \\ \vdots \\ v_{\xi n} v_{\xi \mu} \end{bmatrix} = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{\xi=1}^n f(\lambda_\xi) v_{k\nu} v_{\xi\nu} v_{\xi\mu}.$$

Further, with the introduction of below notations

$$w_{k1,1} = -\frac{\sqrt{\varphi_k \gamma_k} j}{\sqrt{\varphi_k \gamma_k + \gamma_k^2}}; \quad w_{k2,1} = -w_{k1,1}$$

$$w_{k1,2} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\varphi_k \gamma_k + \gamma_k^2}}; \quad w_{k2,2} = w_{k1,2}$$

$$\eta_{k1} = -i_0(t) w_{k1,1} x_k; \quad \eta_{k2} = -i_0(t) w_{k1,2} x_k$$

we may write:

$$y_{0t} = P^* y_0 = -i_0(t) \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{bmatrix}; \quad y_{0tt} = W y_{0t} = \begin{bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \\ \eta_{21} \\ \eta_{22} \\ \vdots \\ \eta_{n1} \\ \eta_{n2} \end{bmatrix}$$

If $y_{ttA} = 0$, then simultaneously applying Eq. (14) and (15), we obtain

$$u_k(t) = -\sum_{\sigma=k}^n \sum_{\kappa=1}^n v_{\sigma\kappa} w_{\kappa 1,1} (w_{\kappa 1,1} J_{\kappa 1} - w_{\kappa 1,2} J_{\kappa 2}) x_\kappa$$

$$i_k(t) = -\sum_{\kappa=0}^n v_{k\kappa} w_{\kappa 1,2} (w_{\kappa 1,1} J_{\kappa 1} + w_{\kappa 1,2} J_{\kappa 2}) x_\kappa$$

where

$$J_{x1} = - \int_0^t e^{j\sqrt{\varphi_{xy}/\kappa}(t-\tau)} i_0(\tau) d\tau$$

$$J_{x2} = - \int_0^t e^{-j\sqrt{\varphi_{xy}/\kappa}(t-\tau)} i_0(\tau) d\tau$$

The transformation of matrix equation (22) into scalar form can be transformed in a similar way.*

Appendix

1. Canonical form of matrix $\mathbf{D}^* \mathbf{D}$.

Obviously, the characteristic equation $|\mathbf{D}^* \mathbf{D} - \delta \mathbf{E}| = 0$ of the following matrix of the order n

$$\mathbf{D}^* \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

may be rewritten into the form given below, when using the parameter φ introduced by substitution $\delta = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 2 \cos \varphi & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 \cos \varphi & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \cos \varphi & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos \varphi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \cos \varphi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \cos \varphi - 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (2 \cos \varphi - 1) \frac{\sin n \varphi}{\sin \varphi} - \frac{\sin (n-1) \varphi}{\sin \varphi} = 0.$$

* For dealing with the case of the right-hand terminal connected to earth through a conductor of a given resistance and inductance, or also having a given capacitance, further matrix-theoretical considerations are involved. Therefore, the authors will present the discussion in a separate treatise which will also contain some generalizations of the results obtained in the present study (e. g. the effect of voltage waves entering the left side terminal with the right side terminal directly connected to earth).

Being $\sin \varphi \neq 0$, in this case, we obtain that

$$\cos \frac{2n+1}{2} \varphi = 0, \text{ hence}$$

$$\varphi_k = \frac{2k-1}{2n+1} \pi; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Thus, the eigenvalues of matrix $\mathbf{D}^* \mathbf{D}$ will become

$$\delta_k = 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi_k}{2} \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \right); \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

The eigenvalues of $\mathbf{D}^* \mathbf{D}$ can be determined by using the *Lagrange* matrix polynomials. (E. g. see p. 4 of [5]). Thus we obtain

$$\mathbf{v}_k^* = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \left[\cos 2(n-1) \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}, \cos (2n-3) \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}, \dots, \cos \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \right]$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

From the above it follows, that by introducing the notation $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ the canonical form of matrix $\mathbf{D}^* \mathbf{D}$ can be written as follows:

$$\mathbf{D}^* \mathbf{D} = \mathbf{V} \langle \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \rangle \mathbf{V}^*$$

2. Canonical form of matrix $\mathbf{D} \mathbf{D}^*$.

It is apparent from the preceding that the eigenvalues of matrix of order n

$$\mathbf{D} \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

are equal to the eigenvalues $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ which were calculated further above for matrix $\mathbf{D}^* \mathbf{D}$ and its eigenvectors are

$$\tilde{\mathbf{v}}_k^* = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \left[\cos \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}, \cos 3 \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2}, \dots, \cos (2n-1) \frac{2k-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \right];$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Thus, for the canonical form of matrix $\mathbf{D} \mathbf{D}^*$ we obtain

$$\mathbf{D} \mathbf{D}^* = \tilde{\mathbf{V}} \langle \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \rangle \tilde{\mathbf{V}}^*$$

where

$$\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_n].$$

3. Inverse of matrix \mathbf{D} .

It may be proved by multiplication that

$$(\mathbf{D}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Inverse of matrix \mathbf{D} .

It is obvious that

$$\mathbf{D}^{-1} = [(\mathbf{D}^*)^{-1}]^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Solution of matrix differential equation (8) by iteration method.

As

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & 0 \\ 0 & \mathbf{V} \end{bmatrix} \mathbf{u}_t \quad \text{and} \quad \mathbf{u}_z = -\frac{1}{L} \frac{q}{1+q} \left\langle \frac{q}{1-q}, 0, \dots, 0, 1 \right\rangle \mathbf{u}_t = \mathbf{N} \mathbf{u}_t$$

Eq. (8) can also be written in the following form:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & f(\delta_k) \\ g(\delta_k) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{V}^* \mathbf{N} \mathbf{V}^{*-1} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \mathbf{y}_0(t).$$

If in matrix differential equation of the form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$$

the canonical form is known, of matrix \mathbf{A} containing constant elements, the canonical form is however unknown of matrix \mathbf{B} , which also contain elements, for the solution of the matrix differential equation the following iteration method may be employed.

On introducing the notation $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \mathbf{x}$ and forming the solutions

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n$ of differential equations given below

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}\mathbf{x}_1$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_3 + \mathbf{B}\mathbf{x}_2$$

$$\dots$$

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{x}_{n-1}$$

it can be proved that the series $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n$ are convergent to the exact solution of matrix differential equation $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}$. From this, apparently, also the solution of inhomogeneous equation $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ can be gained.

REFERENCES

1. B. HELLER, J. HLAVKA and A. VEVERKA, Prag : Die Eigenfrequenzen der einlagigen Zylinder-spule bei Spannungsschößen. Bull. schweiz. elektrotechn. Ver., Bd. 40 1949, Nr. 24. Seite 951—957.
2. L. V. BEWLEY : Travelling Waves on Transmission Systems. John Wiley and Sons, New York ; Chapman and Hall, London. 1951.
3. B. HELLER : Die freien Schwingungen zweier elektrisch und magnetisch gekoppelter Spulen. Acta Technica Praha 1956 No. 1. p. 11—87.
4. E. EGÉRVÁRY : Verschärfung eines Harnackschen Satzes und anderer Abschätzungen für nichtnegative harmonische Polynome. Mathematische Zeitschrift, Band 34 (1932) 5. Schluss Heft, Seite 741—757.
5. E. EGÉRVÁRY : On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, Tomus XV. Fasc. 1. (1953) p. 1—6.
6. E. EGÉRVÁRY : On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, Tomus XV. Fasc. 3—4. (1954) p. 211—222.
7. R. A. FRAZER, W. J. DUNCAN and A. R. COLLAR : Elementary Matrices and some Applications to Dynamics and Differential Equations. Cambridge University Press, Reprint 1952. First Edition : 1938.
8. R. ZURMÜHL : Matrizen. Springer Verlag. Berlin (Göttingen) Heidelberg. 1950.

SUMMARY

Taking the mutual inductance between the winds of an electromagnetic coil into account, the coil can be separated to n elementary parts. The alternative current equations, given for the singular coil elements, can be summarized in a system of two differential matrix equations. With a permissible neglect of the electrotechnical point of view, the two differential matrix equations can be compounded into a single differential hypermatrix equation, the matrix-coefficient of which is composed of interchangeable blocks. With the transformation of the matrix-coefficient with interchangeable blocks to the diagonal form, the authors establish the scalar equations discussing the transient phenomena occurring in the singular coil-elements. These equations have a better basis from a theoretical point of view, than the equations obtainable with the infinitesimal method of calculation, because they are deduced from the examination of the coil-model, which, stands — closer to reality — of infinite number of parts. The equations deduced are especially adaptable for calculating on high efficiency calculating machines.

UNTERSUCHUNG DER DURCH STOSSWELLEN VERURSACHTEN TRANSIENTEN ERSCHEINUNGEN IN EINER ELEKTROMAGNETISCHEN SPULE MIT HILFE VON HYPERMATRIZEN

V. LOVASS-NAGY und K. SZENDY

ZUSAMMENFASSUNG

Unter Berücksichtigung der gegenseitigen Induktion zwischen den Windungen einer elektromagnetischen Spule kann man die Spule in n elementare Teile aufspalten. Die für die einzelnen Spulenelemente angeschriebenen Wechselstromgleichungen können in ein System von zwei Matrix-Differentialgleichungen zusammengefasst werden. Mit Hilfe von Vernachlässigungen, die vom elektrotechnischen Standpunkt aus gestattet sind, können diese zwei Matrix-Differentialgleichungen in eine einzige Hypermatrix-Differentialgleichung zusammengefasst werden, deren Koeffizientenmatrix aus vertauschbaren Blöcken besteht. Nach Diagonalisation der Koeffizientenmatrix stellen die Verfasser die skalaren Gleichungen her, welche die transienten Vorgänge in den einzelnen Spulenelementen beschreiben. Vom theoretischen Standpunkt aus sind diese Gleichungen besser begründet als diejenigen, welche durch eine infinitesimale Behandlung gewonnen werden können, da sie eine Untersuchung der aus einer endlichen Zahl von Elementen bestehenden Spule auf Grund eines — der Wirklichkeit entsprechenden — diskreten Modells zur Grundlage haben. Die abgeleiteten Beziehungen eignen sich hervorragend zur Berechnung mit Hilfe von Hochleistungs-Rechenmaschinen.

EXAMEN DES PHÉNOMÈNES TRANSITOIRES CAUSÉS PAR UN ONDE DE CHOC DANS UNE BOBINE ÉLECTROMAGNÉTIQUE, A L'AIDE D'HYPERMATRICES

V. LOVASS-NAGY et K. SZENDY

RÉSUMÉ

En tenant compte de l'induction mutuelle entre les spires d'une bobine électromagnétique, on peut décomposer la bobine en n éléments. Les équations établies pour les éléments individuels, en courant alternatif, peuvent être rassemblées en deux systèmes d'équations différentielles matricielles. Avec des approximations permises du point de vue électrotechnique, ces deux équations différentielles matricielles peuvent être réunies en une seule équation différentielle hypermatricielle, dont la matrice des coefficients composée de blocs interchangeables. Après diagonalisation de la matrice des coefficients, les auteurs établissent les relations scalaires décrivant les phénomènes transitoires dans les éléments de la bobine. Ces relations sont mieux fondées, du point de vue théorique, que celles pouvant être établies par un traitement infinitésimal, parce qu'elles sont déduites de l'examen d'un modèle discret — correspondant à la réalité — de la bobine composée d'éléments de nombre fini. Les relations déduites se prêtent bien au calcul par machines à calculer de grand rendement.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ЯВЛЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ОБМОТКАХ, ПРИ ПОМОЩИ ГИПЕРМАТРИЦ

В. ЛОВАШ-НАДЬ и К. СЕНДИ

РЕЗЮМЕ

Учитывая взаимоиндукцию между витками некоторой электромагнитной обмотки обмотку можно разбить на n элементарных частей. Зависимости переменного тока, выведенные для отдельных элементов обмотки, можно ввести в систему, состоящую из двух матричных дифференциальных уравнений. При пренебрежениях, допустимых с электро-технической точки зрения, упомянутые матричные дифференциальные уравнения можно

свести в одно единственное гиперматричное дифференциальное уравнение, матричный коэффициент которого состоит из замещаемых блоков. Трансформацией в диагональный вид матричного коэффициента, состоящего из замещаемых блоков, авторы выводят скалярные зависимости, описывающие протекающие в отдельных элементах обмотки переходные явления. Эти зависимости с теоретической точки зрения обоснованы более основательно, чем зависимости, получаемые при инфинитезимальном методе трактовки, т. к. они происходят от исследования на основе дискретной — соответствующей действительности — модели обмотки, состоящей из конечного числа элементов. Выведенные зависимости отлично подходят для производства вычислений на высокопроизводительной счетной машине.

INDEX

- Tihanyi, L.*: The Dimensioning of Shielding Walls against Gamma Radiation — Die Dimensionierung von Schutzwänden gegen Gammastrahlung — Le calcul des murs de protection contre les rayons gamma — *Л. Тихани*: Расчет защитных стенок от γ -лучей 255
- Magyarosy, E., Máriássy, M. et Perczel, Á.*: L'examen des causes de pertes en Al_2O_3 après la lessive dans le procédé Bayer — Untersuchung der Ursachen der Al_2O_3 -Verluste nach der Aufschliessung bei der Tonerdegewinnung nach dem Bayer-Verfahren — Investigation of the Causes of Al_2O_3 Losses after Digestion at Alumina Production by the Bayer Method — *И. Мадьяроши, М. Мариашу и А. Перцель*: Исследование причин потерь Al_2O_3 после разложения в случае глиноземного производства по Байеру 275
- Egri, I. and Hering, J.*: Remarks on L. Tihanyi's Paper on «The Dimensioning of Shielding Walls against Gamma Radiation» — Diskussionsbeitrag zur Arbeit von L. Tihanyi: «Dimensionierung von Schutzwänden gegen Gammastrahlung» — Discussion du travail de L. Tihanyi: «Dimensionnement des murs de protection contre le rayonnement Gamma» — *И. Эгри и Й. Херинг*: К статье Л. Тихани «Расчет защитных стенок от γ -лучей» 291
- Domony, A.*: Verteilung der im Aluminium befindlichen Kalzium-Verunreinigungen und ihr Einfluss auf die elektrische Leitfähigkeit des Metalls — Distribution of Calcium Impurities in the Aluminium and their Influence on the Electric Conductivity of the Metal — La répartition des impuretés de calcium dans l'aluminium et son influence sur la conductibilité électrique des métaux — *А. Домонь*: Распределение примеси кальция в алюминии и влияние этой примеси на электропроводимость металла 295
- Hering, J.*: Cardano-Gelenkwellenkupplungen — (Cardano's) Universal Shaft Couplings — Accouplements Cardan — *Й. Херинг*: Карданные сцепления 309
- Egri, I.*: Eine Ultraschall-Durchstrahlungsmethode zur Immersionsprüfung von Metallblechen und der Vergleich derselben mit der Frequenzmodulationsmethode — A Newly Developed Method for the Immersed Ultrasonic Transmission Testing of Metal Plates and its Comparison with the Frequency Modulation Method — Méthode pour le contrôle de l'immersion des tôles par transmission ultrasonique, et comparaison avec la méthode à modulation de fréquence — *И. Эгри*: Метод, разработанный для иммерсионного контроля металлических листов с помощью ультразвукового просвечивания, и сравнение этого метода с методом частотной модуляции 327
- Tarnay, K.*: The Application of Network Theory to the Theory of Vacuum Tube Feedback Oscillators — Anwendung der Vierpoltheorien in der Theorie der rückgekoppelten Röhrengeneratoren — L'emploi de la théorie des réseaux dans la théorie des oscillateurs à tubes — *К. Тарнай*: Применение теории линейных цепей в теории ламповых генераторов с обратной связью 347
- Bajcsay, P. and Lovass-Nagy, V.*: A New Method of Applying Hypermatrices in the Theory of Multiphase Systems — Über eine neue Anwendung der Hypermatrizen in der Theorie der Mehrphasensysteme — Une nouvelle application des hypermatrices à la théorie des systèmes multiphasés — *П. Байчаи и В. Ловаш-Надь*: О новой возможности применения гиперматриц в теории многофазных систем 363

- Tarján, G.*: On the Heavy Suspension Developing in the Hydrocyclone — Über die im Hydrozyklon zur Entwicklung gelangende Schwertsuspension — De la suspension lourde se formant dans l'hydrocyclone — Г. Тарьян: О образующихся в гидроциклоне тяжелых суспензиях 387
- Fáy, Cs.*: Theoretische Grundlagen der Modellgesetze und Umrechnung der Messergebnisse an Überdruckturbinen — Theoretical Bases of the Model-laws and the Conversion Methods of Measuring Results for Reaction Water Turbines — Bases théoriques des lois des modèles et calcul des résultats de mesure sur turbines hydrauliques à réaction — Ч. Фай: Теоретические основы законов моделирования и пересчет данных измерений для турбин с щелевым избыточным давлением 403
- Csonka, P.*: Les équations de Clapeyron ont 100 ans — Die Clapeyronschen Gleichungen werden seit 100 Jahren angewendet — Clapeyron's Equations are in Use since 100 Years — П. Чонка: Столетие уравнений Клапейрона 423
- Lovass-Nagy, V., and Szendy, K.*: Surge Phenomena in Electromagnetic Coils Analysed by Hypermatrix Methods — Untersuchung der durch Stosswellen verursachten transienten Erscheinungen in einer elektromagnetischen Spule mit Hilfe von Hypermatrizen — Examen des phénomènes transitoires causés par une onde de choc dans une bobine électromagnétique, à l'aide d'hypermatrices — В. Ловаши-Надь и К. Сенди: Исследование переходных явлений, вызванных ударной волной в электромагнитных обмотках, при помощи гиперматриц 427

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

