

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY
G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XX

FASCICULI 1—2



1958

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V. ALKOTMÁNY UTCA 21

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Több füzet alkot egy kötetet. Évenként 2—3 kötet jelenik meg.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80, külföldre 110 Ft. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest V. Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr: 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Acta Technica

Tomus XX

- Bondy, P.* : Annähernde Berechnung des Wärmeübergangs von wärmequellenfreien metallischen Körpern an Luft bei freier Konvektion — Approximate Computation of Heat Transfer by Free Convection from Metallic Bodies without Heat Sources to Air — Calcul approché de la transmission par convection libre de la chaleur des corps métalliques, sans sources de chaleur à l'air — П. Бонди : Приближенное вычисление теплопередачи металлических тел, находящихся в среде воздуха и не имеющих теплового источника 261
- Csonka, P.* : Stiffness Characteristics of Rigid Warren Girders — Steifigkeitskennwerte von Rahmen-Fachwerkträgern — Caractéristiques de rigidité des poutres à treillis neuds rigides — П. Чонка: Параметры жесткости решетчатых ферм 103
- Csonka, P.* : Stiffness Characteristics of Vierendeel Girders with Parallel Chords — Steifigkeitskennwerte von Vierendeelträgern — Caractéristiques de rigidité de poutres Vierendeel — П. Чонка: Параметры жесткости гуртовых балок 251
- Dékány, S.* : Bemerkungen über die visuelle Leistung der Fernrohre beim Dämmerungssehen — Remarks on the Performance of Telescopes at Dusk — Remarques concernant le pouvoir optique des lunettes d'approche au crépuscule — Ш. Декань: Замечания в связи с светосилой зрительных труб при полумраке 317
- Faragó, T.* : Determination of Higher-order Partial Derivatives of the Velocity Function from Known Values along a Stream Surface — Über die Berechnung der höheren partiellen Ableitungen der Stromfunktion längs einer Stromfläche aus bekannten Werten — Sur le calcul des dérivées partielles d'ordre supérieur de la fonction de courant le long d'une surface de courant, à partir de valeurs connues — Т. Фарago : О вычислении парциального производного высшего порядка функции скорости вдоль поверхности тока на основе известных данных 217
- Gangli, L. A. B.* : Study on the Theoretical and Practical Relations of Spinning Plans — Diskussion der theoretischen und praktischen Zusammenhänge bei Spinnplänen — L'examen des relations théoriques et pratiques des plans de filature — Б. Гангли: Оценка практических и теоретических зависимостей плана прядения 49
- Gangli, B.* : General Surveying and Practical Development in the Construction and Operation of Drafting Mechanisms — Allgemeine Entwicklung unserer Anschauungen und Praxis auf dem Gebiet des Aufbaus und der Wirkungsweise der Streckwerke — Notre développement théorique général et pratique dans le domaine des bancs d'étirage de filature — Б. Гангли: Общее теоретическое и практическое развитие в области конструкции и работы вытяжных аппаратов 337
- Gedeon, T.* : Experiments on the Reduction of Dolomite for Magnesium Production — Magnesium-Reduktionsversuche — Essais der préparation du magnésium métal par réduction de la dolomie — Т. Г. Геден: Опыты по фришеванию магнезия 229
- Hangos, I. & Pozsgay, Gy.* : Influence of Binders upon Surface Brightness of Cathode Raytube Screens. II. — Einfluss des Bindemittels auf die Oberflächenhelligkeit von Kathodenstrahlröhrenschirmen. II. — L'effet du liant sur la brillance des écrans des tubes cathodiques. II. — И. Хангош—Д. Пожгаи: Влияние связующего вещества на поверхностный блеск экранов катодных трубок. II. 129

3. <i>Hegedűs—M. Stefan</i> : Производственные дефекты в сплавах альпака, вызванные присутствием фосфора в качестве примеси — <i>Hegedűs, Z. & Stefan, M.</i> : Durch Phosphorverunreinigung verursachte Fabrikationsfehler in Neusilberlegierung— Defects of Fabrication Caused by Phosphorous Impurities in German Silver Alloys — Défautes de fabrication causés par des impuretés phosphoreuses dans les maillechorts (Alpakka etc.)	297
<i>Káldor, M.</i> : Bestimmung der Schlagenergie von Federhämmern — Determination of the Impact Energy of Spring Hammers — Détermination de l'énergie de percussion des marteaux à ressort — <i>М. Кальдор</i> : Определение энергии удара пружинных молотов	119
<i>Pelikán, J.</i> : Membrane Structures with Free Edges — Membrankonstruktionen mit freiem Rand — Voiles minces en membrane avec circonférence libre — <i>И. Пеликан</i> : Мембранные конструкции со сводобным краем	275
<i>Sályi, I. jun.</i> : Die Rolle der kinematischen Ketten bei der Mechanik von Getrieben — The Role of Kinematic Chains in the Mechanics of Mechanisms — Le rôle des chaînes cinématiques dans la mécanique des mécanismes — <i>И. Шай (мл.)</i> : Роль кинематических цепей в механике механизмов	159
<i>Schleicher, A.</i> : Project of Blast Furnace and Blast Engine, Dated from 1816 — Zeichnung eines Hochofens mit Gebläse aus 1816 — Plans d'un haut fourneau et de sa soufflerie établis en 1816 — <i>А. Шлейхер</i> : Проект домны и его поддувных машин, разработанный в 1816 году	137
<i>Striker, G. O.</i> : Ultraphotometer Using Magnetically Modulated Photomultiplier — Ein Ultraphotometer mit Anwendung eines magnetisch modulierten Elektronen-Vervielfachers — Ultraphotomètre avec multiplicateur d'électrones à modulation magnétique — <i>Г. О. Штрикер</i> : Ультрафотометр с электронным множителем магнитной модуляции	83
<i>Széki, P.</i> : The Influence of Heat Treatment on the Strain-ageing of Aluminium-killed Steel — Der Einfluss der Wärmebehandlung auf die Reckalterung von mit Aluminium beruhigtem niedriggekohtem Stahl — Influence du traitement thermique sur le vieillissement à l'écroutissage de l'acier doux calmé à l'aluminium — <i>П. Секи</i> : Влияние термообработки на старение при обработке мягкой стали, успокоенной Al	145
<i>Szmodits, K.</i> : Bending Stresses in Edge Beams of Cylindrical Shells — Biegetheorie der Randträger von Kreiszyinderschalen — La théorie de la flexion des voiles minces circulaires — <i>К. Сمودич</i> : Анализ краевой балки изогнутых бочарных сводов	153
<i>Szőke, B.</i> : Selection of the Different from the Multitude of the Uniform — Die Auswahl des Andersgearteten aus der Menge der Gleichförmigen — Selectionnement du différent parmi la multitude des uniformes — <i>Б. Секе</i> : Выделение различного среди ряда одинаковых	3
<i>Tarján, G.</i> : Settling Velocity of Solid Grains in Coarser Dispersions — Sinkgeschwindigkeit von festen Körnern in grobkörnigen Dispersionen — Vitesse de chute de particule solides en dispersions à gros grains — <i>Г. Тарьян</i> : Скорость погружения твердых частиц в грубозернистых дисперсиях	197
<i>Thamm, I.</i> : Ausführungsformen und Eigenschaften von Schrumpfverbindungen zwischen umlaufenden zylindrischen Maschinenteilen — Types and Properties of Shrunk Connections between Rotating Cylindrical Machine Parts — Formes et propriétés des assemblages par emmanchement à chaud des éléments de machines cylindriques, à vitesse de rotation élevée — <i>И. Тамм</i> : Исполнительные формы и свойства анкерных соединений между вращающимися цилиндрическими элементами машин	23
<i>Uzsoky, M.</i> : On a Problem of Slowing Down Neutrons — Das Problem der Verlangsamung des Neutrons — Le problème du ralentissement du neutron — <i>М. Ужоки</i> : Проблема замедления нейтронов	271

- Verebely, L.* : L'anniversaire de 25 ans du système d'électrification des chemins de fer à 50 Hz — Das 25jährige Jubileum des Bahnelektrifizierungssystems mit 50 Hz — The 25th Anniversary of the 50 Hz Railway Electrification System—*Л. Веребей* : 25-летний юбилей электрификации железных дорог током промышленной частоты 209
- Zajta, A.* : Beitrag zu einem Teilproblem des Transportarbeitsbedarfs der gleichmässigen Flächenharbeiten — Contribution to a Partial Problem concerning the Transportation Needed for Work Allotted Uniformly to an Area — Contribution à la solution d'un problème partiel concernant le travail de transport requis pour les travaux uniformément répartis sur une certaine surface. — *A. Zajta* : К одной из частных проблем потребной транспортной работы при работах на ровной площадке ... 305
- Zambó, J.* : Location of the Shaft, Shape and Extension of its Working Area — Die Wahl des Schachtansatzpunktes, Form und Ausdehnung des Abbaufeldes — Placement du duits, forme et étendue du champ d'exploitation — *Я. Замбо* : Место закладки шахты, форма шахтного поля и его размеры 171
- Zilahi, M.* : Dynamische Analyse des Webevorganges — Dynamic Analysis of the Weaving Process — L'analyse dynamique du processus du tissage — *М. Зилахи* : Динамический анализ процесса ткачества 63



ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XX



1958

SELECTION OF THE DIFFERENT FROM THE MULTITUDE OF THE UNIFORM

B. SZÓKE

[Manuscript received 4th January 1957]

I. Practical example: selection of the most inaccurate pitch of a gear

In one of the best known geometrical problems — inscribing a hexagon into a circle — side lengths with three kinds of accuracy can be distinguished: the first side will be the most accurate, because it has been obtained by *transmitting* the radius, supposed not to have changed in the meantime. On the following four sides, the inaccuracy due to applying the lengths appears as well. The *resulting* sixth side will contain the *sum* of the *applying inaccuracies* and thus this one can be supposed to be the most inaccurate. If during the tracing the opening of the compass must be changed as well (e. g. when drawing a regular pentagon), the sources of errors which cause the inaccuracy of the last side accumulate still more, because already the first side cannot be considered to be accurate.

As a consequence of these considerations one might set the following problem, as a mathematical pastime: "By how many comparative measurements would it be possible to determine, on which part the pedestal of the statue of GAUSS has been finished?" (At the age of 18 Karl Friedrich GAUSS proved the theorem that a regular polygon with seventeen sides can be drawn with the sole use of rule and compass, and this is symbolized by the seventeen-sided pedestal of the great mathematicians statue in Braunschweig.)

But the mathematical pastime changes into science, and science sooner or later comes to be applied in practical life.

In the most generalized form, we could formulate the problem as follows: *If in a multitude consisting of a certain number of uniform elements there is only one which differs essentially, which is the minimum number of measurements by which this differing element can be separated?*

As an example we mention that with modern workshop practice, the major part of gears is produced by generating, but in important territories dividing is used too. The very large gears are machined by dividing (approx. above 30 module); in the interest of increasing production, of novel gear grinding machines, each tooth is ground separately with a profile wheel, etc. The sum of the possible errors of dividing appears on the last pitch, *and determines the accuracy and quality of the whole part*. It would therefore be a good scheme for

the inspector, to determine on these parts *first of all* the place of the most suspect pitch, by several comparative measurements according to the method described below.

II. If we know whether the error is + or -

The question will be discussed in two steps: first we suppose that we know beforehand whether the most differing (defective) element, is larger or smaller than the others and therefore it is unnecessary to check this by measurement. As a second step we will consider the solution of the case where it is unknown whether the defective element is smaller or larger than the rest!

Let us suppose that the defective element is *smaller* than the other ones; then in the case of *two* elements a single comparative measurement is possible and if $a_1 > a_2$, a_2 is scrap.

With *three* elements, 3 comparative measurements are possible; if a_3 is scrap, the measurements show that

$$a_1 = a_2$$

$$a_2 > a_3$$

$$a_3 < a_1$$

It is obvious that it is sufficient to make one measurement only, because if we do not find the defective element at the first measurement, only the third one, which did not participate in the comparison, can be scrap.

From 4 to 9 elements, 2 comparative measurements are needed: forming groups of three from the 9 elements, we may state at the first comparative measurement in which group is the smaller one, and with the second measurement we may select the scrap element from this group of three. If e. g. a_9 is defective, the result of the first measurement can be

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$$

or $a_4 + a_5 + a_6 > a_7 + a_8 + a_9$

or $a_7 + a_8 + a_9 < a_1 + a_2 + a_3$

From 10 to $3 \cdot 9 = 27$ elements, three measurements are necessary, or in general, for n comparative measurements from maximum

$$3^n = z \tag{1}$$

elements can be selected the defective one.

E. g. $z = 80$, $3^4 = 81$, thus 4 measurements are necessary. If e. g. the 80th element is scrap, and we measure by groups of $3^3 = 27$, the equality given by the first measurement,

$$a_1 + \dots + a_{27} = a_{28} + \dots + a_{54}$$

shows that the defective element can be only amongst the 26 elements $a_{55} \dots a_{80}$; dividing these latter into groups of $3^2 = 9$, the result of the second measurement

$$a_{55} + \dots + a_{63} = a_{64} + \dots + a_{72}$$

shows that the defective element can be only amongst the last 8; dividing this group into groups of $3^1 = 3$, the result of the third measurement will be

$$a_{73} + a_{74} + a_{75} = a_{76} + a_{77} + a_{78}$$

which shows that the defective can be only amongst the last two. Finally the fourth comparative measurement discovers that

$$a_{79} > a_{80}$$

or that a_{79} is equal to any one of the preceding elements. Naturally, the addition of the elements can be either *scalar* addition (length, weight) or *geometrical* addition, in the sense that under the sum of a certain number of sides of a regular polygon we understand the length of the chord drawn from the beginning of the first side to the end of the last side.

III. If we do not know whether the deviation is + or -

The second step is the solution of the case where we do not know in advance whether the different part is larger or smaller than the other elements of the multitude.

In the case of two elements, *one* comparative measurement will inform us, but with 3 elements, already 2 measurements are necessary. The first measurement will betray the defective part only if 2 equal parts are subject to the first measurement, because then we would know that only the third can be the defective one. But if at the first measurement 2 different elements appear, a second measurement will decide which one deviates from the third.

In the case of 4 elements, also 2 comparative measurements will be successful. E. g. if

$$a_1 = a_2$$

$$a_2 = a_3$$

the different one can only be a_4 .

But if, e. g., the first measurement was

$$a_4 < a_1$$

the second measurement will decide, which one amongst the two is equal to, or different from, the rest. Thus the maximum number of elements which may be investigated with 2 measurements is

$$4 = 3^1 + 1$$

From 3 to 11, inclusive, three comparative measurements are necessary. I. e. if we divide the elements into groups of 3, we can determine after the first two comparative measurements in which of the 3 groups of three is a differing element (provided it is amongst the 9) and thus we can already trace back our problem to the case which has been treated at the first step. If, on the contrary, we have found that

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 + a_6$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_7 + a_8 + a_9$$

we also can point out the defect at the third comparative measurement : if we find that

$$a_{11} < a_1$$

so a_{11} is defective, but if the third measurement gives

$$a_1 = a_{10}$$

only a_{11} can be defective just the same. Therefore the maximum number of elements which can be examined with three measurements is

$$11 = 9 + 2 = 3^2 + 3^0 + 1$$

From 12 elements to 31, inclusive, 4 comparative measurements are sufficient, because the following groups may be formed :

$$31 = 9 + 9 + 9 + 4$$

If the first 2 measurements show which group of 9 is larger or smaller than the other ones, then out of this group of 9 the defective element can be selected by 2 measurements already, according to the first step. But if the first two comparative measurements have resulted in proving the groups of 9 to be equal, the scrap can be selected from the group of 4, according to the second step. The maximum number of elements which may be investigated by 4 measurements is

$$31 = 3^3 + 3^1 + 1$$

In general, the maximum number of elements which may be examined by n measurements is

$$z_{\max} (n \text{ uneven}) = 1 + 3^0 + 3^2 + \dots + 3^{(n-3)} + 3^{(n-1)} \quad (2a)$$

and

$$z_{\max} (n \text{ even}) = 1 + 3^1 + 3^3 + \dots + 3^{(n-3)} + 3^{(n-1)} \quad (2b)$$

The series (2a) is beginning from the second member a geometric progression; its first member is $a = 1$, its ratio $q = 3^2 = 9$ and its number of members is $\frac{n+1}{2}$. Thus the sum of series (2a) is

$$z_{\max} = 1 + S_{(n \text{ uneven})} = 1 + \frac{q^{\frac{n+1}{2}} - 1}{q - 1} = 1 + \frac{9^{\frac{n+1}{2}} - 1}{8} \quad (2a_1)$$

The series (2b) can be expressed in a similar way:

$$z_{\max} = 1 + S_{(n \text{ even})} = 1 + 3 \frac{q^{\frac{n}{2}} - 1}{q - 1} = 1 + 3 \frac{9^{\frac{n}{2}} - 1}{8} \quad (2a_2)$$

Now if we want to know by how many comparative measurements may be examined z elements, we may express n from (2a₁) or (2b₁). From (2a₁)

$$n = \frac{\log(8z - 7)}{\log 3} - 1. \quad (2a_2)$$

Because n can be only a whole number, the value of the fraction must be rounded upwards.

Fig. 1 shows how the number of measurable elements increases with the number of comparative measurements. The little cube on top of Fig. 1a shows the size of one element, the volume of the bodies below it shows that number of elements which may be examined with a certain number of measurements, if the sign of the deviation is known. E. g., the cube marked 3⁶, *alone*, shows the quantity which can be investigated with 6 measurements.

Fig. 1b and 1c refer to the case where the sign of the deviation is unknown. For these bodies, the *total* volume shows the mass which can be measured; Fig. 1b refers to 7 measurements, Fig. 1c to 6 measurements. Comparing the figures we see that with 6 measurements we may examine far less elements if we do not know the sign than if we know it in advance, and that with 7 measurements we may examine a somewhat greater quantity than with 6 measurements, knowing the sign.

In general we get a quite good grouping if we divide the mass consisting of z elements by 3 and take the rest for fourth group. We get results without superfluous measurements e. g. with the following division in groups (Table I).

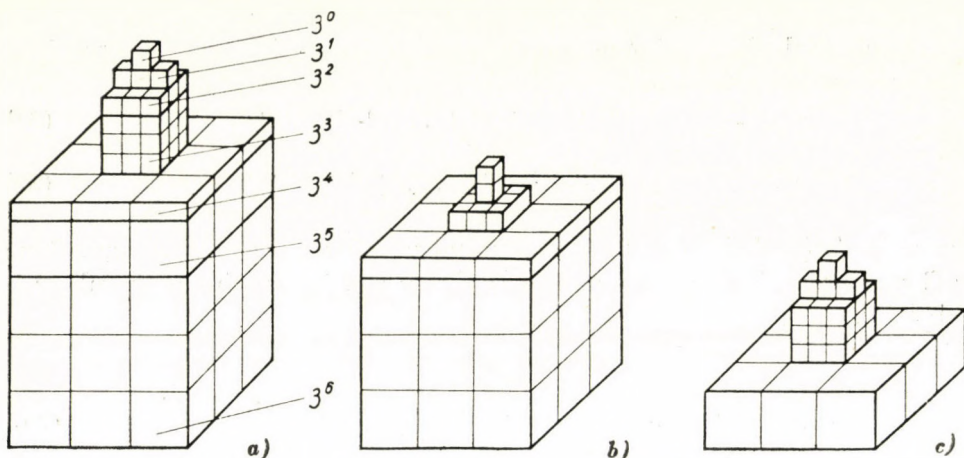


Fig. 1. Multitudes as a function of the numbers of measurements

a) Sign of deviation known. The 3^6 elements of lower cube can be measured by 6 measurements. b) and c) Sign of deviation unknown. b) The entire multitude shown on the figure can be examined by 7 measurements. c) The whole multitude shown on the figure can be examined by 6 measurements

Table I.

One possible way of forming number groups for $z = 3-20$

Number of elements z	Sign of the deviation		Measurements nr n	
	known	unknown		
	Groups of numbers			
3	1	1+1+1	2	
4	2	1+1+1+1		
5		1+1+1+1+1		
6		2+2+2		
7		2+2+2+1		
8		3+3+2	2+2+2+2	3
9	3+3+3			
10	3	5+5	3+3+3+1	4
11		5+5+1	3+3+3+2	
12		6+6	3+3+3+3	
13		6+6+1	3+3+3+4	
14		7+7	3+3+3+3+2	
15		7+7+1	3+3+3+3+3	
16		8+8	3+3+3+3+4	
17		8+8+1	3+3+3+3+3+2	
18		9+9	5+5+5+3	
19		9+9+1	5+5+5+4	
20	9+9+2	6+6+6+2		

Table II shows the maximum number of elements z_{\max} which can be examined by n measurements.

Table II.
The largest number of elements which can be examined as a function of the number of measurements

Number of measurements n	The largest number of elements, which can be examined			
	Sign of the deviation			
	known		unknown	
	According to powers of 3	z_{\max}	According to powers of 3	z_{\max}
1	3^1	3	3^0+1	2
2	3^2	9	3^1+1	4
3	3^3	27	3^2+3^0+1	11
4	3^4	81	3^3+3^1+1	31
5	3^5	243	$3^4+3^2+3^0+1$	92
6	3^6	729	$3^5+3^3+3^1+1$	274
7	3^7	2187	$3^6+3^4+3^2+3^0+1$	821
8	3^8	6561	$3^7+3^5+3^3+3^1+1$	2461
9	3^9	19683	$3^8+3^6+3^4+3^2+3^0+1$	7382
10	3^{10}	59049	$3^9+3^7+3^5+3^3+3^1+1$	22144

In practice, wheels with a larger number of teeth than 274 seldom occur, and therefore even for $z = 274$ teeth it is not necessary to measure 274 pitches, only to make 6 comparative measurements, under the condition discussed above.

According to the Table IV measurements are sufficient to find out the most inaccurate side of the regular 17-sided polygon.

IV. Some remarks about the pitch of gears

If we desire the ratio of the speeds of two parallel shafts to be inversely proportional to the number of teeth,

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

the place of the pitch point F on the centre line O_1O_2 (Fig. 2) where the pitch circles are in contact, is given from

$$\frac{a - r_1}{r_1} = i$$

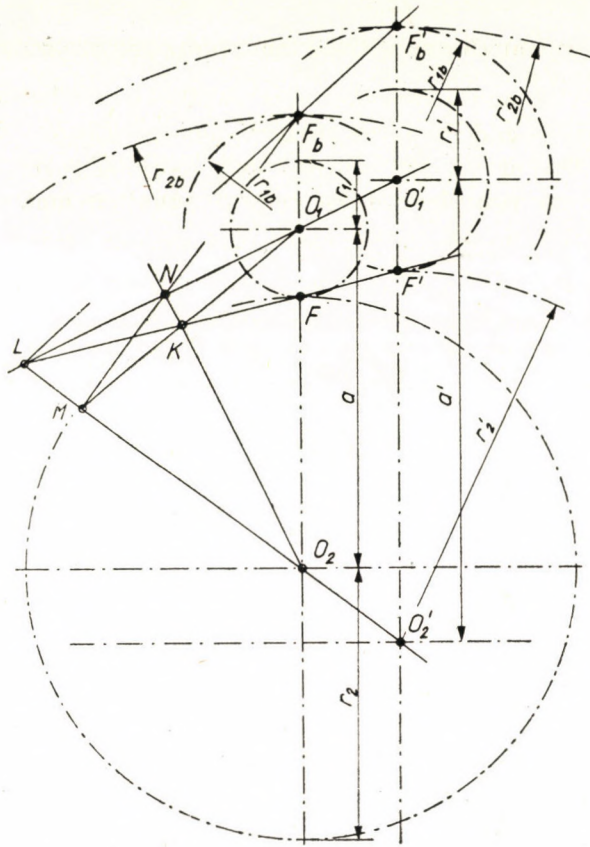


Fig. 2. Pitch points of gears

as being

$$r_1 = \frac{a}{i + 1}$$

while in the case of internal gearing the place of the pitch point F_b is from

$$\frac{a + r_{1b}}{r_{1b}} = i$$

$$r_{1b} = \frac{a}{i - 1}$$

As $\frac{O_1 F'}{O_2 F'} = -\frac{O_1 F_b}{O_2 F_b} = \frac{z_1}{z_2}$ the value of the double ratio $(O_1 O_2 F F_b)$ is -1 , i. e. the two gear centers and the two main points are harmonic points (they can be traced by an arbitrary general quadrilateral KLMN), the gear

ratio $i = \frac{z_2}{z_1}$ does not change if these four points are projected from any point of the plane, e. g. L on the straight line a' parallel to a ; but by the projection, the centre distance and the pitch circle diameters change.

In the following we will consider only external gears.

Not only the two pitch circles turn at equal circumferential speed, but at equal speed rotate also circles which (Fig. 3a) are tangent to any straight

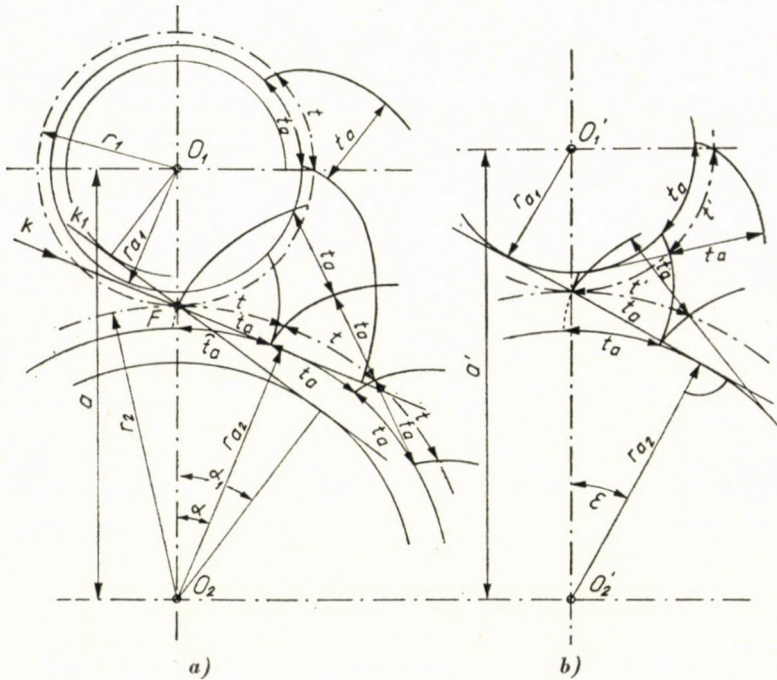


Fig. 3a and b. Base pitch and pitch circle pitch. a) The involute described by the points of pitch t_a , situated on the straight-moving line of action k , over the circles with centre O_1 and O_2 rotated by it. b) By changing the shaft centre distance, the pressure angle α changes to α' , the pitch circle pitch t changes to t' , but the base pitch t_a remains unchanged

line k passing through the pitch point F . The rotation of desired modified speed can thus be brought about also if a straight line k proceeding in its own direction drives by friction and without slip the base circles of radii $r_1 \cos \alpha = r_{a1}$ and $r_2 \cos \alpha = r_{a2}$. Equidistant points on the straight line k describe on disks rotating around the centres O_1 and O_2 involutes of circles, the pitch t_a of which, measured on the base circle, is equal to the pitch \tilde{t}_a measured on the line of action k . If we suppose the drive to be realized by the straight line inclined under the angle $\alpha_1 > \alpha$, then in the case of equal number of teeth the base pitch will also be smaller and the involutes generated in this way will not be congruent with the former, but similar to them.

If we stretch the centre distance of involute gears, generated with the pressure angle α , to $O_1'O_2' > O_1O_2$ (Fig. 3b and 3c), than the change of tooth thickness per unit module will be $\kappa_1 + \kappa_2 = \Sigma \kappa$ and the sum of tool corrections *corresponding to it* will be $\mu_1 + \mu_2 = \Sigma \mu$, which can easily be calculated from the tables of the so-called Δinv . [3]. According to Fig. 3c [5], we have

$$a \cos \alpha = a' \cos \varepsilon = r_{a1} + r_{a2}$$

$$\Sigma \kappa = (r_{a1} + r_{a2}) (\text{inv } \varepsilon - \text{inv } \alpha) = (r_{a1} + r_{a2}) \Delta \text{inv}$$

$$\Sigma \mu = \frac{(r_{a1} + r_{a2}) \Delta \text{inv}}{\sin \alpha}$$

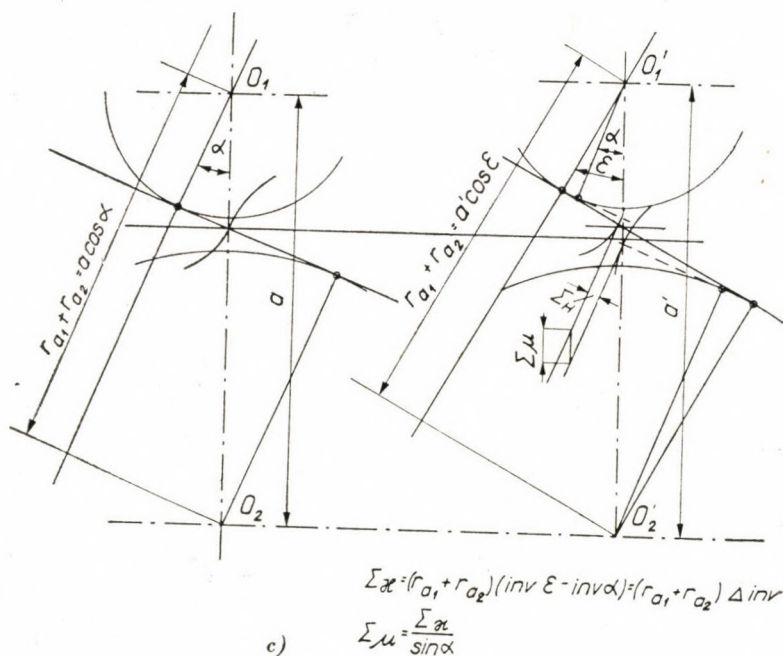


Fig. 3c. Definition of the change of tooth thickness and of correction

In this case the size of the base circles and the base pitch remains the same as before the increase of centre distance, but the pitch circles and the pitch measured on them increase. The increase of the centre distance only changes the pressure angle to $\varepsilon > \alpha$ and on the gears drawn apart, other points of the same evolvents press than in the pushed-together position.

When inspecting gears, two pitches can be inspected: one is measured on the pitch circle (or some other concentric circle), the other one is the basic pitch measured on the line of action.

V. Some methods of pitch measurement

a) On the *pitch circle*, or on some other concentric circle, the pitch can be measured on subsequent flanks facing the same way with the aid of the

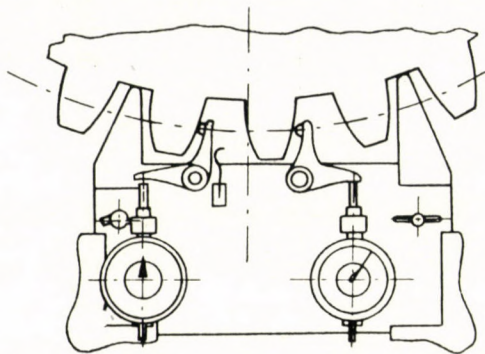


Fig. 4. Mahr type pitch measuring instrument

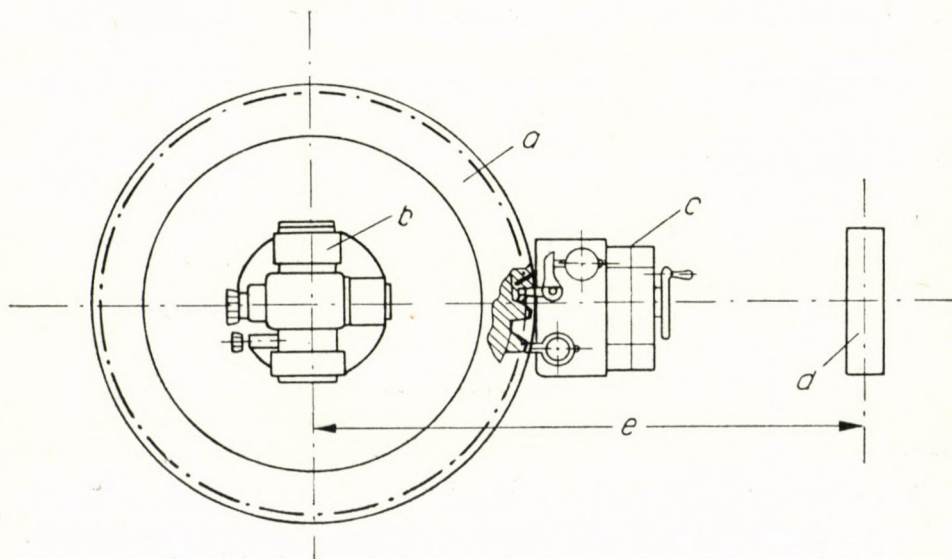


Fig. 5. Theodolite type pitch measuring instrument. *a* Workpiece, *b* Theodolite, *c* Feeler for setting, *d* Collimator, *e* Distance about 70 m

instrument shown in Fig. 4, on the principle of distance measurement. The dial gauge has a 0,001 graduation.

b) If the two feelers are mounted on a separate table multiple chordal thickness can be measured by this method [9].

c) The Zeiss theodolite type pitch measuring instrument (Fig. 5) is suitable for measuring one pitch as well as several pitches. First, the feeler touching the

gear flank is adjusted to zero. The radial adjustment of the feeler slide is shown by an other dial gauge. The gauge dials are graduated in microns. The telescope of the theodolite fixed to the centre of the inspected gear is directed on a wire melted in a glass plate (collimator) placed at a great distance (70 m). For measuring the pitch of one or more teeth, the feeler is liberated and the

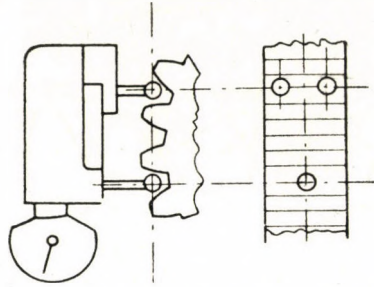


Fig. 6. Ball pitch measuring instrument with two supporting and one measuring ball

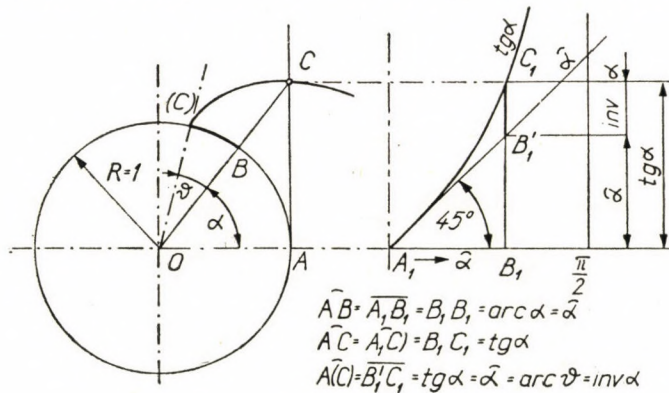


Fig. 7. Definition of $\text{inv } a$

gear is rotated, together with the theodolite; the fine feeler is replaced according to its former radial adjustment; now the gear is finely rotated until the feeler gauge shows again zero. Then the theodolite is turned back until the collimator wire is again seen against the centre of the telescope. The angle by which the theodolite has returned can be read on its graduation. Accuracy of reading is $1/10\,000$ new degree = $0,324''$, which is $\pm 0,8 \mu$ on a wheel of 1 m dia.

d) With rollers or balls, the chord belonging to several pitches can be measured (Fig. 6). To point out the essential of this method, we must remember that the computations of the geometry of involutes are facilitated by the „In v o l u t” tables, which give the values of

$$\text{arc } \varphi = (\text{tg } a - \text{arc } a) = \text{tg } a - \hat{a} = \text{inv } a$$

(Fig. 7) from second to second with 8 decimals accuracy [4].

If the radius of the measuring feeler r_q is determined so that for the module of the gear with elementary gearing

$$r_q = bm = \frac{d_q}{2}$$

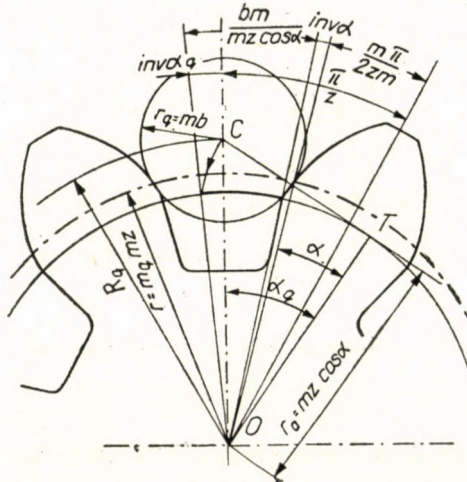


Fig. 8. Determination of the radius of the roller centre

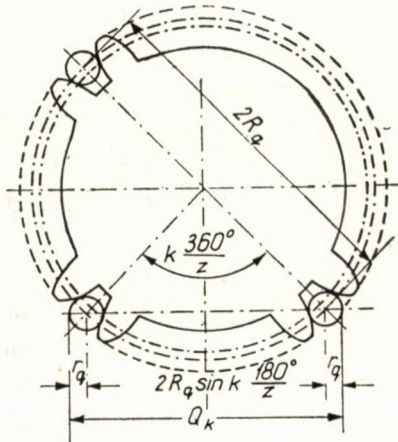


Fig. 9. Determination of roller centre distance for an arbitrary number of teeth k

so according to Fig. 8 and with its notations we may write

$$\text{inv } \alpha_q = \frac{m\pi}{2zm} + \text{inv } \alpha + \frac{bm}{mz \cos \alpha} - \frac{\pi}{z}$$

or

$$\text{inv } \alpha_q = \text{inv } \alpha + \frac{b}{z \cos \alpha} - \frac{\pi}{2z} \quad (3)$$

From this the angle α_q may be determined with the aid of the involute tables, and the radius of the centre of the roll is, from triangle OTC

$$OC = R_q = \frac{r \cos \alpha}{\cos \alpha_q}. \quad (4)$$

For gearing without backlash and gears with an even number of teeth, the roller distance is

$$Q = 2R_q + d_q.$$

The roller distance for an arbitrary number of pitches k is, according to Fig. 9

$$Q_k = 2R_q \sin k \frac{180^\circ}{z} + d_q. \quad (5)$$

e) The *Zeiss* base-pitch meter shown in Fig. 10 measures the *base circle pitch* on the pitch line. There the wheel is located by a bell-headed locking pin G and one of its tooth flanks contacts the weight-loaded measuring edge T_1 . The knife-edge T_2 secured to the longitudinally easily moving measuring rod is pressed by a spring to the neighbouring tooth flank. The dial gauge shows the difference between subsequent pitches in μ .

f) On the pitch line too we measure the multiple chordal thickness with a disc micrometer; besides several base pitches it includes also one tooth thickness measured on the base circle. The measurement is based on the fact that the normal distance between two involutes symmetrical of the same base circle are of constant length (similar to the length of a rocking board placed on a horizontal tree).

According to Fig. 11 and with its notations, the multiple chordal thickness measured over k teeth is

$$M_{(k)} = (k - 1)t_a + v_a$$

but the base pitch is

$$t_a = t \cos \alpha = m \pi \cos \alpha$$

and the tooth thickness measured on the base circle is

$$v_a = r_a \left(\frac{v}{r} + 2 \operatorname{inv} \alpha \right) = \cos \alpha (v + 2r \operatorname{inv} \alpha).$$

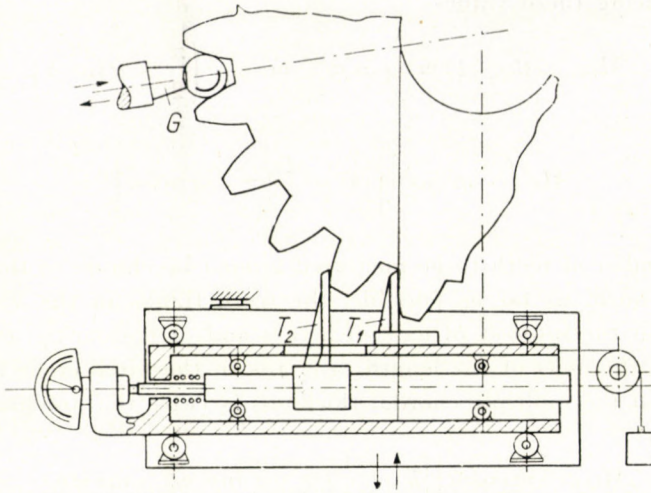


Fig. 10. Working plan of the Zeiss-base-pitch meter

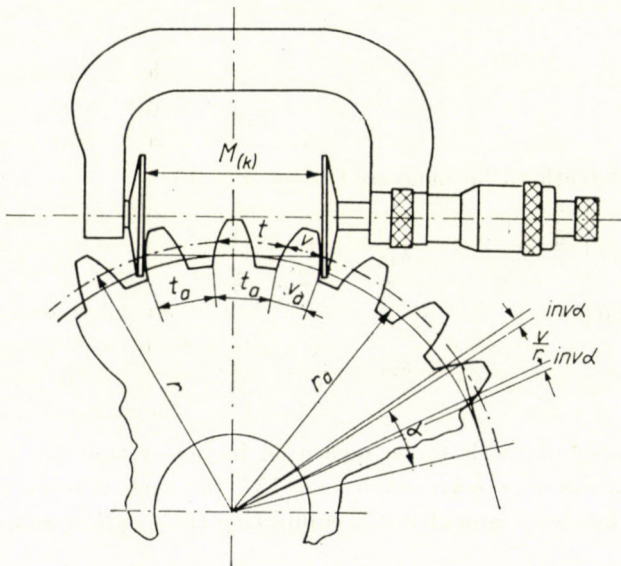


Fig. 11. Multiple chordal thickness of teeth

For an elementary gearing, expressed by the number of teeth z

$$v_a = \cos a \left(\frac{m\pi}{2} + mz \operatorname{inv} a \right) = m \cos a \left(\frac{\pi}{2} + z \operatorname{inv} a \right).$$

After introducing these values

$$M_{(k)} = (k - 1) m \pi \cos \alpha + m \cos \alpha \left(\frac{\pi}{2} + z \operatorname{inv} \alpha \right)$$

or

$$M_{(k)} = m \cos \alpha \left| \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi + z \operatorname{inv} \alpha \right|. \quad (6)$$

The number of teeth to be measured k must be chosen so that the micrometer discs touch, as far as possible, the teeth flanks in the vicinity of the pitch circle, in the interest of ease of access and of measuring accuracy. This is obtained if the ends of the length $M_{(k)}$ are on the pitch circle and then the centre angle of the multiple chordal thickness is twice the pressure angle

$$M_{(k)} = m \cos \alpha \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \pi + z \operatorname{inv} \alpha \right] = m z \sin \alpha$$

from where

$$\pi \left(k - \frac{1}{2} \right) = z (\operatorname{tg} - \operatorname{inv} \alpha) = z \hat{\alpha}$$

and from this

$$k = z \frac{\hat{\alpha}}{\pi} + \frac{1}{2} = z \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} + \frac{1}{2}. \quad (7)$$

The number of teeth to be measured is for $\alpha = 15^\circ$

$$k_{15^\circ} = \frac{z}{12} + \frac{1}{2} \quad (7a)$$

and for $\alpha = 20^\circ$

$$k_{20^\circ} = \frac{z}{9} + \frac{1}{2}. \quad (7b)$$

The number of teeth to be measured increases thus by one for each 12 teeth in the case of a pressure angle $\alpha = 15^\circ$, for each 9 teeth in the case of $\alpha = 20^\circ$. This has been considered in computing the group numbers of Table III.

VI. Forming of groups and search for the defective pitch

As we have mentioned above, the method can be used for inspecting the pitch error of wheels for which the method of production leads to an accumulation of the errors at the z^{th} pitch, because the preceding $(z - 1)$ pitches are smaller or larger as prescribed, but equal between themselves.

z = Number of gears; k = Number of teeth to be measured when measuring multiple chordal thickness for elementary gears with 20° pressure angle; n = Number of measurements

Table III
Groups of pitches for the inspection of gears

z	Groups of pitches	k	n	z	Groups of pitches	k	n	z	Groups of pitches	k	n	z	Groups of pitches	k	n	z	Groups of pitches	k	n										
16	3+3+3+3+4	2		50	15+15+15+5	6		84	27+27+27+3	10		118	39+39+39+1	14		142	(45+45+45+7)	17											
17	(3+3+3+3+3+2)			51	15+15+15+6			85	27+27+27+4			119	39+39+39+2			143	(45+45+45+8)												
18	4+4+4+4+1	3		52	15+15+15+7	7		86	27+27+27+5	5		120	39+39+39+3	15		144	48+48+48	18											
19	6+6+6			53	15+15+15+8			87	27+27+27+6			121	39+39+39+4			145	48+48+48+1												
20	6+6+6+1			54	18+18+18			88	(27+27+27+7)			122	(39+39+39+5)			146	48+48+48+2												
21	6+6+6+2	4		55	18+18+18+1	8	5	89	20+20+20+20+8	11		123	(39+39+39+6)	6		147	48+48+48+3	19											
22	6+6+6+3			56	18+18+18+2			90	30+30+30			124	(39+39+39+7)			148	(48+48+48+4)												
23	6+6+6+4			57	18+18+18+3			91	30+30+30+1			125	(39+39+39+8)			149	(48+48+48+5)												
24	10+10+3			58	18+18+18+4			92	30+30+30+2			126	42+42+42			150	(48+48+48+6)												
25	8+8+8	5		59	18+18+18+5	9		93	30+30+30+3	12		127	42+42+42+1	16		151	(48+48+48+7)	20											
26	8+8+8+1			60	18+18+18+6			94	30+30+30+4			128	42+42+42+2			152	(48+48+48+8)												
27	(8+8+8+2)			61	18+18+18+7			95	30+30+30+5			129	42+42+42+3			153	51+51+51												
28	6+6+6+6+2			62	18+18+18+8			96	30+30+30+6			130	(42+42+42+4)			154	51+51+51+1												
29	9+9+9			63	21+21+21			97	22+22+22+22+9			131	30+30+30+30+10			155	51+51+51+2												
30	9+9+9+1	6		64	21+21+21+1	10		98	22+22+22+22+10	13		132	(42+42+42+6)	17		156	(51+51+51+3)	21											
31	9+9+9+2			65	21+21+21+2			99	33+33+33			133	(42+42+42+7)			157	(51+51+51+4)												
32	9+9+9+3			66	21+21+21+3			100	33+33+33+1			134	(42+42+42+8)			158	(51+51+51+5)												
33	9+9+9+4			67	21+21+21+4			101	33+33+33+2			135	30+30+30+30+14			159	(51+51+51+6)												
34	9+9+9+5			68	21+21+21+5			102	33+33+33+3			136	45+45+45			160	(51+51+51+7)												
35	9+9+9+6			69	21+21+21+6			103	33+33+33+4			137	45+45+45+1			161	(51+51+51+8)												
36	9+9+9+7	70	21+21+21+7	104	24+24+24+24+8	138	45+45+45+2	162	54+54+54																				
37	8+8+8+8+3	7		71	(21+21+21+8)	11		105	24+24+24+24+9	14		139	(45+45+45+4)	18		163	54+54+54+1	22											
38	12+12+12			72	16+16+16+16+7			106	24+24+24+24+10			140	(45+45+45+5)			164	54+54+54+2												
39	12+12+12+1			73	24+24+24			107	24+24+24+24+11			141	(45+45+45+6)																
40	12+12+12+2			74	24+24+24+1			108	36+36+36																				
41	12+12+12+3			75	24+24+24+2			109	36+36+36+1																				
42	12+12+12+4			76	24+24+24+3			110	36+36+36+2																				
43	12+12+12+5			77	24+24+24+4			111	36+36+36+3																				
44	12+12+12+6	8		78	24+24+24+5	12		112	36+36+36+4	16		142	(45+45+45+7)	20		165	54+54+54+3	24											
45	12+12+12+7			79	24+24+24+6			113	26+26+26+26+9			143	(45+45+45+8)			166	54+54+54+4												
46	12+12+12+8			80	(24+24+24+8)			114	26+26+26+26+10			144	(45+45+45+9)			167	54+54+54+5												
47	12+12+12+9			81	18+18+18+18+8			115	26+26+26+26+11			145	(45+45+45+10)			168	54+54+54+6												
48	15+15+15+1			82	27+27+27			116	26+26+26+26+12			146	(45+45+45+11)			169	54+54+54+7												
49	15+15+15+2			83	27+27+27+1			117	39+39+39			147	(45+45+45+12)			170	54+54+54+8												
	15+15+15+3			9								13								17				21				25	
	15+15+15+4																												

Measures in brackets to be avoided with multiple chordal measurement, recommended for roller measurements

We obtain a grouping suitable for the measuring methods a), b), c) and d) if we divide the number of teeth by 3 and consider the rest as well, as has been mentioned already.

But for measuring the multiple chordal thickness discussed under f) we must first consider that when measuring the tooth k we can measure only $(k - 1)$ pitches, the measuring must therefore proceed so that the last tooth of the preceding measurement is the first tooth of the next measurement.

Secondly the number of teeth k as a function of the total number of teeth z must correspond to the relations (7a) and (7b) and to the standard relative to it [6]. The individual groups must therefore be formed so that they are divisible by $(k - 1)$. E. g. for gears with $z = 86$ teeth and $\alpha = 20^\circ$ pressure angle, $k = 10$ teeth must be measured simultaneously, which includes 9 pitches and 1 tooth. At forming the groups one must therefore pay attention to the various groups being divisible by 9, and not to get more measurements than $n = 5$, considering also the rest, because according to Tables I and II already 5 measurements must be successful. A correct forming of groups is therefore $86 = 27 + 27 + 27 + 5$.

With this grouping 5 measurements are indeed sufficient when using measuring rolls or a theodolite, but when measuring the chord of several teeth, the group of 27 can be measured only by three measurements and if we did find in this way the most different group of 9, the worst pitch can be found out by further two comparative measurements; if on the other hand, the most different is amongst the remaining 5 pitches, 2 comparative measurements are sufficient for discovering it.

In Table III we have arranged the groups of numbers of teeth so that the table can be used also for measuring the multiple chordal thickness of gears with $\alpha = 20^\circ$.

REFERENCES

1. SZENICEI LAJOS : Az általános fogazás (Generalized gearing). Egyetemi Nyomda, Budapest, 1941. 2nd edition : Nehézipari Könyvkiadó, Budapest (Hungarian).
2. BÁRÁNYI JÁNOS : Több fogméret, egyfogméret és csapméret számítása (Computation of multiple chordal thickness, chordal thickness and roller distances). Nehézipari Könyvkiadó, Budapest 1954 (with further references).
3. VIDÉKY EMIL : The Rationalisation of Gear Cutting, Table II. (Δ inv). Press of the Royal Hungarian University, 1933.
4. RADVÁNYI BÉLA : Involut táblázat (Involute Tables). Nehézipari Könyvkiadó, 1954.
5. VIDÉKY EMIL : Evolvens homlokkérék-fogazások trigonometriai és kinematikai számítása. A Magy. Tud. Akad. Műsz. Tudom. Oszt. Közleményei XVII. köt. 3—4. sz. 1955. (Trigonometric and cinematic computations of involute spur gearing. Bulletin of the Technical Sciences Class of the Hungarian Academy of Sc., Tome XVII., Nr. 3—4, 1955).
6. MSz 14 500 Hungarian Standard.
7. KLINGELNBERG : Technisches Hilfsbuch (Technical Handbook). Berlin, Springer-Verlag, 1942.
8. RUDOLF KLINGLER : Messen und Prüfen im Maschinenbau (Measuring and Inspection in

- Mechanical Engineering). Schweizer Druck- und Verlagshaus, Zürich, 1946.
9. Dr. Ing. H. STAUDINGER: Messen und Prüfen im Grossmaschinenbau (Measuring and Inspection in the Construction of Large Machinery). Werkstatttechnik und Maschinenbau, 1954, Nr. 8—10.
 10. E. WAGNER und K. H. WEBER: Messen der Verzahnung an grossen Rädern (Measuring the gearing of large wheels). VDI-Zeitschrift, 1956, Nr. 8.

SUMMARY

We have shown that if we know beforehand the sense positive or negative of the deviation, the most different element amongst $z_{\max} = 3^n$ similar elements can be chosen by n comparative measurements. In case if we do not know the sign of the deviation, the maximum number of elements which can be measured by n comparative measurements is

$$z_{\max} = 3^{n-1} + 3^{n-3} + 3^{n-5} + \dots + 1$$

and for the investigation of z elements,

$$n = \frac{\log(8z - 7)}{\log 3}$$

measurements are necessary.

As a practical example we have discussed how this method could be applied to the inspection of gears where the uniformly repeated pitch errors add up and where thus the most deviating pitch determines the usefulness and the value of the whole gear.

DIE AUSWAHL DES ANDERSGEARTETEN AUS DER MENGE DER GLEICHFÖRMIGEN

B. SZÓKE

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser leitet ab, dass durch n vergleichende Messungen das abweichende Element aus der Menge von $z_{\max} = 3^n$ ähnlichen Elementen ausgewählt werden kann, wenn der Sinn der Abweichung, positiv oder negativ, von vornherein bekannt ist; im Falle, dass der Sinn der Abweichung unbekannt ist, ist die Zahl der durch n Vergleichsmessungen prüfbar Elementen

$$z_{\max} = 3^{n-1} + 3^{n-3} + 3^{n-5} + \dots + 1$$

und zur Prüfung von z Elementen sind

$$n = \frac{\log(8z - 7)}{\log 3}$$

Messungen notwendig.

Als praktisches Beispiel wird untersucht, auf welche Weise diese Methode zur Prüfung von solchen Zahnradern angewendet werden könnte, bei welchen infolge der Summation der sich gleichförmig wiederholenden Teilungsfehler die am meisten abweichende Teilung die Brauchbarkeit und den Wert des ganzen Werkstückes bestimmt.

SÉLECTIONNEMENT DU DIFFÉRENT PARMIS LA MULTITUDE DES UNIFORMES

B. SZÓKE

RÉSUMÉ

L'auteur démontre qu'en connaissance du signe positif ou négatif de l'écart, on peut sélectionner l'élément différent parmi $z_{\max} = 3^n$, au moyen de n mesures; par contre, si l'on ne connaît pas le signe de la déviation (+ ou -), le nombre maximum des éléments pouvant être examiné par n mesures comparatives est

$$z_{\max} = 3^{n-1} + 3^{n-3} + 3^{n-5} + \dots + 1$$

et pour l'examen de z éléments, il faut effectuer

$$n = \frac{\log(8z - 7)}{\log 3}$$

mesures.

Comme exemple pratique, l'auteur traite de l'application éventuelle de la méthode, pour l'inspection des roues dentées, où par suite de la répétition uniforme des erreurs de division, le pas le plus différent détermine la possibilité d'utilisation et la valeur de toute la pièce.

ВЫДЕЛЕНИЕ РАЗЛИЧНОГО СРЕДИ РЯДА ОДИНАКОВЫХ

B. СЕКЕ

РЕЗЮМЕ

Выведено, что, наперед зная положительное и отрицательное значения отклонения, при помощи n сравнительных измерений среди аналогичных $z_{\max} = 3^n$ элементов может быть выбран отклоняющийся; в том случае же, когда не известно значение отклонения, при помощи n сравнительных элементов

$$z_{\max} = 3^{(n-1)} + 3^{(n-3)} + 3^{(n-5)} + \dots + 1$$

— наибольшее число поддающихся исследованию элементов и для исследования элемента α необходимо иметь

$$n = \frac{\log(8z - 7)}{\log 3}$$

В качестве практического примера обсуждался вопрос возможности применения для исследования таких зубчатых колес, из-за суммирования у которых одинаково повторяющихся погрешностей деления пригодность всей детали определяется наиболее отклоняющимся делением.

AUSFÜHRUNGSFORMEN UND EIGENSCHAFTEN VON SCHRUMPFVERBINDUNGEN ZWISCHEN UMLAUFENDEN ZYLINDRISCHEN MASCHINENTEILEN

I. THAMM

[Eingegangen am 9. Januar 1957]

Die zur Herstellung von Haft- und Presssitzen geeigneten Schrumpfvbindungen werden auch bei umlaufenden zylindrischen Maschinenteilen gerne verwendet. Um aber die durch diese Verbindungsmöglichkeit gebotenen Vorteile bei grösseren Drehzahlen voll ausnützen zu können ist es notwendig, deren Berechnungsgrundlagen und Eigenschaften genügend zu klären. Vorliegende Arbeit — als Ergebnis einer längeren Beschäftigung mit diesbezüglichen Aufgaben — ist in der Absicht geschrieben, die in der Fachliteratur noch vorhandenen Lücken wenigstens teilweise auszufüllen.

Nähere Zielsetzung vorliegender Arbeit ist :

1. die Eigenschaften der heute ausschliesslich angewendeten Ausführungsform der umlaufenden Schrumpfvbindung mit zwei Ringen darzulegen und zu zeigen, dass deren Verwendung — besonders im Bereich höherer Drehzahlen infolge der wenig günstigen Spannungsverteilung — Grenzen gesetzt sind.

2 Als naheliegende Weiterentwicklung werden die mehrringigen umlaufenden Schrumpfvbindungen ins Auge gefasst und deren Berechnungsgrundlagen, wenigstens in den Grundzügen, entwickelt.

3. An Beispielen wird versucht zu zeigen, dass letztere Verbindungen Vorteile aufweisen, die mit nur zwei Ringen nicht erreichbar sind. Diese Vorteile scheinen ausreichend zu sein, um die Verwendung solcher weniger einfachen und auch teureren Ausführungsformen zu rechtfertigen.

Angewendete Bezeichnungen

Es sei :

- g = die Schwerebeschleunigung
- n = die Drehzahl je Min.
- $n_k, [n_1]_{kr}, [n_2]_{kr} \dots$ = die kritischen Drehzahlen je Min.
- $p_1, p_2 \dots p_n \dots p_{q-1}$ = die durch Schrumpfen entstandenen Flächendrücke
- q = die Zahl der aufeinander aufgeschumpften Ringe
- r = die unabhängige Koordinate in Richtung des Halbmessers
- r_i = der Innenhalbmesser des Ringes Nr. i
- $r_1, r_2 \dots r_n \dots r_{q-1}$ = die Nennhalbmesser der Passflächen
- r_a = der Aussenhalbmesser des Ringes Nr. q
- r_s = der Nennhalbmesser der Passfläche bei der zweiringigen Ausführung

y	= die infolge der Schrumpfung auftretende Verschiebung in Richtung des Halbmessers
$y_1 \dots y_n \dots y_{q-1}$	= die radialen Verschiebungen an den einzelnen Ringen
A, B, A_n, B_n	= Integrationskonstanten
$D_0, D_n, [D_n]_\Delta, [D_n]_r$	= Determinanten, gebildet aus den Beiwerten des Gleichungssystems für die Flächendrücke $p_1, p_2, \dots, p_n \dots p_{q-1}$
E	= der Elastizitätsmodul des Materials der Ringe
γ	= die Wichte des Materials der Ringe
ν	= der Kehrwert der Poissonschen Konstante
$\sigma_r, [\sigma_r]_1 \dots [\sigma_r]_n$	= die durch das Schrumpfen hervorgerufenen Radialspannungen
$\sigma_t, [\sigma_t]_1 \dots [\sigma_t]_n$	= die durch das Schrumpfen hervorgerufenen Tangentialspannungen
$\Delta_1 \dots \Delta_n \dots \Delta_{q-1}$	= die zum Entstehen der Schrumpfung benötigten Differenzen der Halbmesser der Passflächen
ω	= die Winkelgeschwindigkeit
$\omega_{kr}, [\omega_1]_{kr} \dots [\omega_n]_{kr}$	= die kritischen Winkelgeschwindigkeiten.

Feststellungen über die umlaufende Schrumpfung mit zwei Ringen

In einer früheren Arbeit des Verfassers [1] wurden die Zusammenhänge entwickelt, durch welche die Formänderungen und Spannungen berechnet werden können, die in zwei aufeinandergeschumpften umlaufenden Ringen bei höheren Winkelgeschwindigkeiten entstehen.

Über die Eigenschaften solcher Verbindungen können auf Grund zahlreicher durchgerechneter Beispiele folgende Feststellungen gemacht werden. Wenn man an der Passfläche beider Ringe eine Flächenpressung $-p$ vorschreibt,

1. so bleiben die Radialspannungen (σ_r) in beiden Ringen in der Grössenordnung von $|p|$;

2. diese Radialspannungen sind bei mittleren Winkelgeschwindigkeiten Druckspannungen; nur bei hohen Winkelgeschwindigkeiten und Ringen mit grösserer Wandstärke können teilweise auch Zugspannungen auftreten u. zw. beim Innenring an Teilen nahe der Innenfläche, beim Aussenring an Teilen nahe der Aussenfläche. An den freien Grenzflächen beider Ringe wird σ_r immer 0.

3. Die Tangentialspannungen σ_t nehmen verhältnismässig hohe Werte an, diese können um eine Grössenordnung höher sein als $|p|$. Bei mittleren Winkelgeschwindigkeiten werden die Tangentialspannungen am Innenring Druckspannungen, beim Aussenring Zugspannungen. Nur bei verhältnismässig hohen Winkelgeschwindigkeiten können auch am Innenring Zugspannungen auftreten.

4. Die Höchstwerte dieser Tangentialspannungen werden im allgemeinen an beiden Ringen an der inneren Grenzfläche auftreten u. zw. beim Innenring im Ruhezustand, beim Aussenring bei der vorkommenden höchsten Winkelgeschwindigkeit. Diese Höchstwerte sind keine mathematischen Extremalwerte. Diese Regel gilt aber nicht ohne Ausnahme. Bei Innenringen mit grösserer Wandstärke und wenn die Tangentialspannungen verhältnismässig klein und Druckspannungen sind, die Kurve der σ_t also der Abszissenachse von unten nahekommt,

kann sich ein Minimum dieser Spannung in der Nähe der inneren Begrenzungsfläche zeigen.

5. Die überhaupt grösste Spannung der Verbindung entsteht bei mittleren und grossen Winkelgeschwindigkeiten als Tangentialspannung an der Innenfläche des Aussenringes. Die Betriebsdrehzahl wird durch diese Spannung nach oben begrenzt.

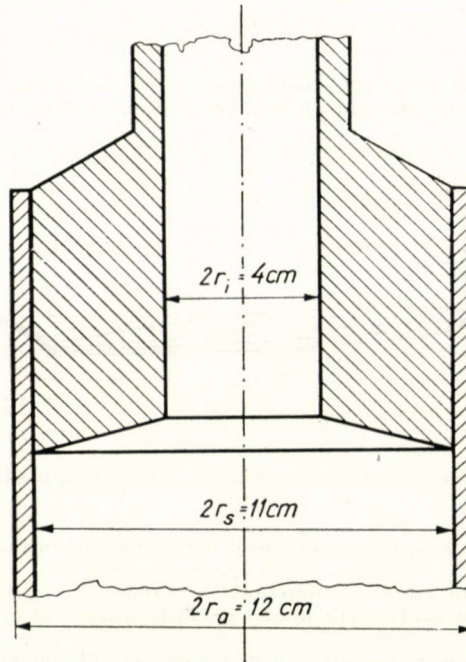


Bild 1. Schrumpfungverbindung aus zwei Ringen. Superzentrifugentrommel auf oberes Nabenstück aufgeschumpft

6. Die Formänderung besteht beim Innenring meistens in Verminderung der radialen Abmessungen, d. h. in Schrumpfung; am Aussenring kommen nur Aufweitungen vor. Nur bei hohen Winkelgeschwindigkeiten kann auch der Innenring eine Aufweitung zeigen.

Berechnungsbeispiel I

Als Beispiel seien hier die berechneten Spannungs- und Formänderungskurven einer solchen Schrumpfungverbindung mitgeteilt. Es handelt sich um den oberen Abschluss einer in grösserer Zahl ausgeführten Superzentrifugentrommel, also um die Verbindung der röhrenförmigen Zentrifugentrommel mit dem oberen Nabenstück. Das Material beider Teile ist Stahl. Die Abmessungen zeigt das beigelegte — etwas schematisierte — Bild 1.* Es sei bemerkt, dass

* In bezug auf die im Bild 1 sowie auch im Bild 3 gezeigten Schrumpfungverbindungen ist noch folgendes zu bemerken. Bei aufgeschumpften Ringen deren Breite im Verhältnis zum

die Wandstärken der aufeinandergeschrunpften Teile von einer anderen Ausführungsform übernommen, also nicht frei gewählt wurden. Die Betriebsdrehzahl dieser Zentrifuge beträgt $n = 16,000/\text{Min.}$ Um Aufschluss auch über die Verhältnisse bei niedrigeren Drehzahlen zu erhalten, wurden die Spannungs- und Verschiebungskurven noch für den Ruhezustand ($n = 0$) sowie für die Drehzahlen $4000/\text{Min.}$, $8000/\text{Min.}$ und $11310/\text{Min.}$ berechnet.

Auf Grund von Betriebserfahrungen, um der Verbindung eine möglichst grosse Sicherheit zu gewährleisten, wurde an der Passfläche, also am Halbmesser $r_s = 5.5 \text{ cm}$, der Flächendruck $p = -110 \text{ kg/cm}^2$ im Betriebszustand vorgeschrieben. Dementsprechend ergab sich die Halbmesserdifferenz Δ , mit welcher die Passflächen des Trommelrohres und der Nabe herzustellen waren, zu

$$\Delta = 5.24 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 52.4 \mu.$$

Bild 2 zeigt die Verteilung der Radialspannung σ_r in beiden Teilen. Der Höchstwert dieser Spannung, 156 kg/cm^2 entsteht an den Passflächen im Ruhezustand, ist also nur um

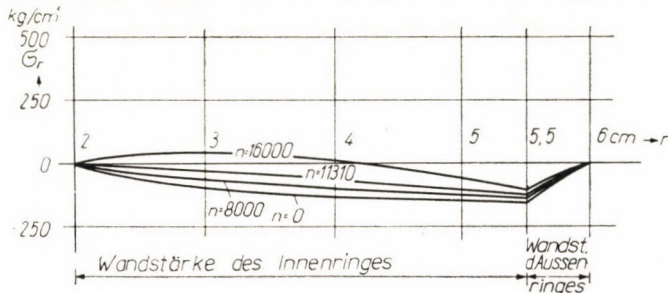


Bild 2. Die Radialspannungen σ_r in den Ringen der Schrumpfungverbindung nach Bild 1

rund 42% höher, als der vorgeschriebene Flächendruck im Betriebszustand. In der Abbildung ist die Spannungskurve für $n = 4000/\text{Min.}$ nicht eingetragen, weil diese ganz nahe der Kurve für $n = 8000/\text{Min.}$ verläuft. Die zur Betriebsdrehzahl $n = 16,000/\text{Min.}$ gehörige Kurve zeigt, dass der Innenring, also die Nabe im Betriebszustand ziemlich entlastet ist und teilweise geringe Zugspannungen aufweist.

Die Kurven der Tangentialspannungen σ_t zeigen ein völlig anderes Bild (Bild 3). Zwar bleiben diese Beanspruchungen der Nabe bei den verschiedenen Drehzahlen in den Grenzen von $\pm 360 \text{ kg/cm}^2$, der Aussenring, also das aufgeschrunpftete Trommelende weist aber ziemlich grosse Spannungen auf. Bei der Betriebsdrehzahl ergibt sich an der Passfläche der Höchstwert von $+2049 \text{ kg/cm}^2$ und auch im Ruhezustand besteht hier noch die Tangentialspannung von $+1796 \text{ kg/cm}^2$. Das ist eben eine charakteristische Eigenschaft solcher Verbindungen, dass der Aussenring hohen tangentialen Spannungen ausgesetzt ist, die ausserdem noch mit der Drehzahl ziemlich stark ansteigen. Die angegebenen Spannungswerte dürften eine Drehzahlsteigerung bei dieser Ausführung verbieten.

Die lediglich in der Verkürzung oder Verlängerung der radialen Abmessungen bestehenden Formänderungen sind im Bild 4 dargestellt. Verständlicherweise zeigen diese ein der Verteilung der Tangentialspannungen ziemlich ähnliches Bild, d. h. die Aufweitung des Aussenringes wird gross gegenüber der Schrumpfung des Innenringes. Bei anderen Verhältnissen von r_s/r_a und r_i/r_s können die Unterschiede etwas weniger gross ausfallen, die Tatsache aber bleibt, dass der Aussenring eine bedeutend grössere Formänderung aufzunehmen hat.

Halbmesser nicht klein ist, werden infolge behinderter axialer Verkürzung auch noch Normalspannungen in Achsrichtung entstehen. Der Spannungszustand wird also dreiachsrig. In den nachfolgenden Untersuchungen sind diese axialen Spannungen nicht berücksichtigt. Die weiter unten mitgeteilten Ergebnisse werden also für solche Ringe nur als Näherungen zu gelten haben.

Die Bestimmung bzw. Abschätzung der genannten axialen Spannungen muss einer weiteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Es kann aber damit gerechnet werden, dass die bei der Berechnung solcher Verbindungen als Grundlagen dienenden Spannungswerte infolge des dreiachsigen Spannungszustandes keine wesentlichen Veränderungen erfahren werden.

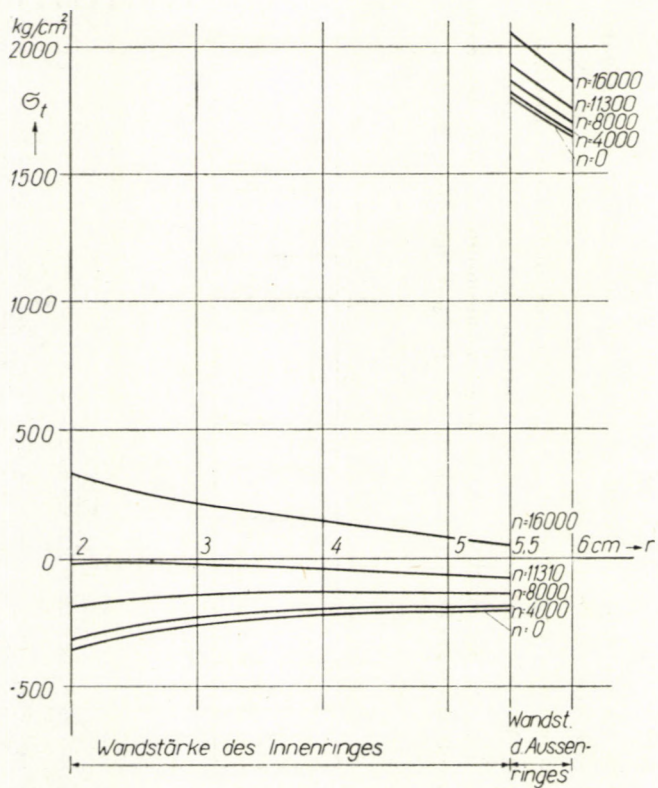


Bild 3. Die Tangentialspannungen σ_t in den Ringen der Schrumpfverbindung nach Bild 1

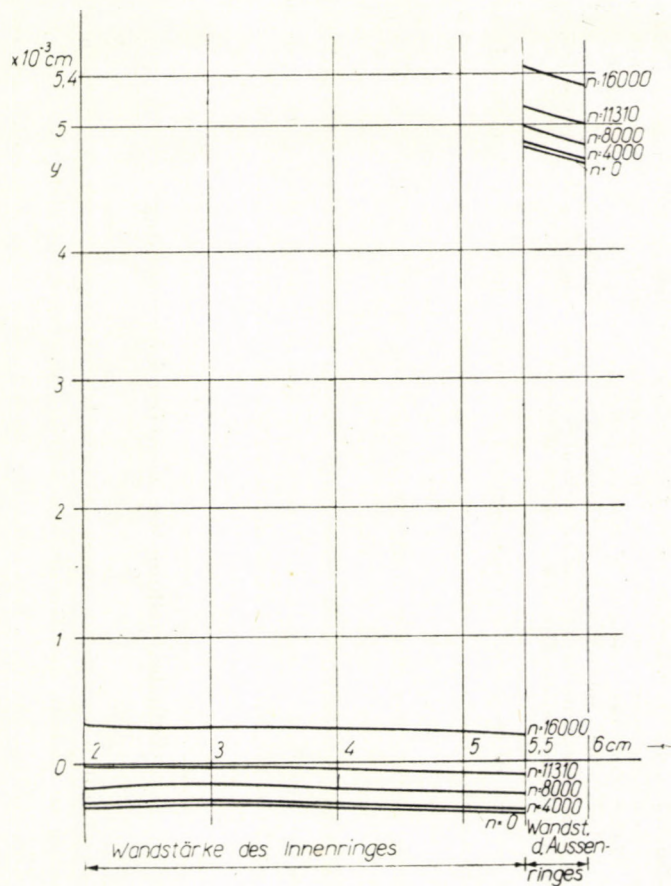


Bild 4. Die radialen Verschiebungen y in den Ringen der Schrumpfverbindung nach Bild 1

Der Vollständigkeit halber sei noch mitgeteilt, dass bei Einhaltung des angegebenen Flächendruckes an der Passfläche der im Bild 1 gezeichneten Schrumpfungverbindung die kritische Winkelgeschwindigkeit sich zu $\omega_{kr} = 3077$ 1/Sek. ergibt; dieser entspricht eine Drehzahl von $n_k = 29600$ /Min. Diese kritische Winkelgeschwindigkeit ist dadurch gekennzeichnet, dass bei ihr die Verbindung aufhört, d. h. die Ringe nicht mehr zusammengehalten werden. Wie man sieht liegt diese kritische Drehzahl beträchtlich höher — sogar etwas unnötig hoch — gegenüber der Betriebsdrehzahl von $n = 16,000$ /Min.

Zusammenfassend kann nun festgestellt werden, dass die behandelte Form der Schrumpfungverbindung umlaufender Ringe insofern ungünstig ist, als der Aussenring zu stark beansprucht wird und eine gleichmässigeren Spannungsverteilung nicht berechnet und hergestellt werden kann. Dies wirkt sich besonders dann unvorteilhaft aus, wenn die Ringe (z. B. als Bestandteile einer Zentrifugentrommel zur Trennung von angreifenden Flüssigkeiten) aus Stählen mit verhältnismässig niedriger Elastizitätsgrenze (wie z. B. austenitische nichtrostende und säurefeste Stähle) hergestellt werden sollen.

Aufgabenstellung der weiteren Untersuchung

Es scheint naheliegend nach solchen Ausführungsformen der Schrumpfungverbindung zu suchen, die den oben beschriebenen Nachteil nicht besitzen. Mit dieser Zielsetzung hat der Verfasser die mehrfachen d. h. aus mehr als zwei Ringen bestehenden Schrumpfungverbindungen untersucht. Die Ergebnisse dieser Arbeit sollen weiter unten kurz mitgeteilt werden.

Um gleich den allgemeinsten Fall zu behandeln sei angenommen, dass die Verbindung aus q -Ringern (Bild 5) untersucht werden soll. Die einzige Beschränkung bzw. Vereinfachung soll darin bestehen, dass sämtliche Ringe aus gleichem Material bestehend angenommen werden, dass also die Materialkonstanten wie die Wichte γ , der Elastizitätsmodul E und der Kehrwert der Poissonschen Querszahl ν bei sämtlichen Ringen dieselben Werte haben.

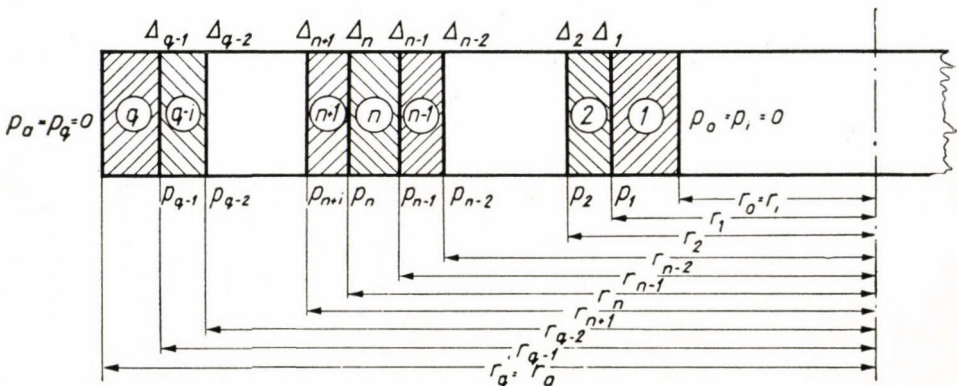


Bild 5. Schrumpfungverbindung aus q -Ringern

Zwischen den q -Ring en werden $(q-1)$ Passfl $ächen$ mit den Nennhalb-
messern

$$r_1, r_2 \dots r_n \dots r_{q-2}, r_{q-1}$$

vorhanden sein, an welchen man der Reihe nach die Fl $ächendrücke$

$$p_1, p_2 \dots p_n \dots p_{q-2}, p_{q-1}$$

vorschreibt. Diese — als Druckspannungen — müssen negative Vorzeichen haben um Verbindungen zwischen den Ringen herzustellen.

Um diese Dr $ücke$ verwirklichen zu können, müssen zwischen den Halb-
messern der Passfl $ächen$ die $(q-1)$ Halbmesserdifferenzen

$$\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_n \dots \Delta_{q-2}, \Delta_{q-1}$$

vorhanden sein. Letztere sind aus den Materialkonstanten, den Halbmessern
sowie aus den vorgeschriebenen Fl $ächendrücken$ noch zu berechnen.

Als Ausgangspunkt der Untersuchung dient dieselbe inhomogene Differen-
tialgleichung, welche der Verfasser in der früheren Arbeit [1] entwickelt hat.
Diese lautet wenn die veränderliche Koordinate in radialer Richtung mit r ,
die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung mit ω und die Formänderung
d. h. die Verschiebung in der Richtung von r mit y bezeichnet wird :

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dy}{dr} - \frac{y}{r^2} = - \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot r \cdot \omega^2. \quad (1)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung kann mit den Integrationskonstanten
A und B wie folgt geschrieben werden :

$$y = A \cdot r + \frac{B}{r} - \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot r^3. \quad (2)$$

Auch die Radialspannung σ_r und die Tangentialspannung σ_t können gleich
angegeben werden ; u. zw.

$$\sigma_r = A \cdot \frac{E}{1 - \nu} - \frac{B}{r^2} \cdot \frac{E}{1 + \nu} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot (3 + \nu) \cdot r^2 \quad (3a)$$

$$\sigma_t = A \cdot \frac{E}{1 - \nu} + \frac{B}{r^2} \cdot \frac{E}{1 + \nu} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot (1 + 3 \nu) \cdot r^2 \quad (3b)$$

Durch Addition der Gleichungen (3a) und (3b) kann sofort eine bemerkenswerte
Eigenschaft des Spannungszustandes solcher durch Schrumpfung miteinander
verbundener umlaufender Ringe festgestellt werden. Es folgt nämlich :

$$\sigma_r + \sigma_t = A \cdot \frac{2E}{1 - \nu} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot (1 + \nu) \cdot r^2 \quad (4)$$

d. h. die Summe beider Spannungen nimmt in jedem solchen Ring mit dem

Quadrat der radialen Abmessung ab.* Und da die Tangentialspannung σ_t immer bedeutend höher liegt als die Radialspannung σ_r , so kann im allgemeinen auch mit der Abnahme von σ_t in der Aussenrichtung gerechnet werden. Daraus folgt aber — was oben schon behauptet wurde — dass die Höchstspannung immer an der Innenfläche der Ringe auftritt. Eine Ausnahme von dieser Regel kann — wie schon bei der zweiringigen Ausführung erwähnt — sich nur bei Innenringen und nur dann zeigen, wenn die Kurve der Spannung σ_t der Abszissenachse von unten nahekommt, d. h. dass die Tangentialspannungen kleine Werte annehmen und Druckspannungen sind. In solchen Fällen kann bei Ringen mit grösserer Wandstärke die Spannung σ_t in der Nähe der inneren Begrenzungsfläche ein Minimum aufweisen.

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, die obigen Integrationskonstanten zu bestimmen. Verfasser wird diese Aufgabe für den Ring Nr. n mit den Begrenzungshalbmessern r_{n-1} und r_n erledigen.

Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes für einen Ring der mehrfachen Schrumpfungverbindung

Wenn man aus der im Bild 5 dargestellten mehrfachen Schrumpfungverbindung den n -ten Ring herausgenommen denkt, so hat dieser laut oben angegebener Vorschrift folgenden Grenzbedingungen zu genügen (Bild 6). An der inneren

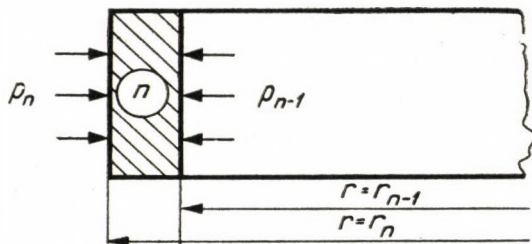


Bild 6. Die Grenzbedingungen am Ring Nr. n der Schrumpfungverbindung nach Bild 5

Grenzfläche mit dem Nennhalbmesser r_{n-1} muss der Flächendruck p_{n-1} und an der äusseren Grenzfläche mit dem Halbmesser r_n der Flächendruck p_n vorhanden sein. Also muss

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_r]_{r=r_{n-1}} &= p_{n-1} \\ [\sigma_r]_{r=r_n} &= p_n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

sein. Selbstverständlich werden sowohl p_{n-1} als auch p_n negative Zahlenwerte aufweisen.

* Die Gleichung (4) kann als Verallgemeinerung des von FÖPPL [2] für ruhende Ringe unter Einwirkung von Aussen- oder Innendruck sowie für ruhende Schrumpfungverbindungen abgeleiteten Gesetzes über die Summe der Spannungen angesehen werden.

Auf Grund der obigen Gleichung (3a) lassen sich die Integrationskonstanten A_n und B_n wie folgt berechnen :

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{r_n^2 p_n - r_{n-1}^2 \cdot p_{n-1}}{r_n^2 - r_{n-1}^2} + \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot \frac{3+\nu}{1+\nu} (r_{n-1}^2 + r_n^2) \\ B_n &= \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{r_{n-1}^2 \cdot r_n^2}{r_n^2 + r_{n-1}^2} (p_n - p_{n-1}) + \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot \frac{3+\nu}{1-\nu} \cdot r_{n-1}^2 \cdot r_n^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Mit diesen Konstanten ergeben sich die radiale Verschiebung y_n , die Radialspannung $[\sigma_r]_n$ und die Tangentialspannung $[\sigma_t]_n$ für die Werte der unabhängigen Variablen r :

$$r_{n-1} \leq r \leq r_n$$

zu

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1-\nu}{E} \cdot \frac{r_n^2 \cdot p_n - r_{n-1}^2 p_{n-1}}{r_n^2 - r_{n-1}^2} \cdot r + \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{r_{n-1}^2 \cdot r_n^2}{r_n^2 - r_{n-1}^2} \cdot \frac{p_n - p_{n-1}}{r} + \\ &+ \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (r_{n-1}^2 + r_n^2) \cdot r + \frac{3+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{r_{n-1}^2 \cdot r_n^2}{r} - r^3 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} [\sigma_r]_n &= \frac{r_n^2 p_n - r_{n-1}^2 p_{n-1}}{r_n^2 - r_{n-1}^2} - \frac{r_{n-1}^2 \cdot r_n^2}{r_n^2 - r_{n-1}^2} \cdot \frac{p_n - p_{n-1}}{r^2} + \\ &+ \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3+\nu) \left(r_{n-1}^2 + r_n^2 - r^2 - \frac{r_{n-1}^2 \cdot r_n^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [\sigma_t]_n &= \frac{r_n^2 p_n - r_{n-1}^2 \cdot p_{n-1}}{r_n^2 - r_{n-1}^2} + \frac{r_{n-1}^2 \cdot r_n^2}{r_n^2 - r_{n-1}^2} \cdot \frac{p_n - p_{n-1}}{r^2} + \\ &+ \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[(3+\nu) \left(r_{n-1}^2 + r_n^2 + \frac{r_{n-1}^2 \cdot r_n^2}{r^2} \right) - (1+3\nu) \cdot r^2 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Mit Hilfe der Formel (7) können einfach durch Einsetzen von $(n+1)$ bzw. $(n-1)$ statt n die Ausdrücke für die radialen Verschiebungen der benachbarten Ringe y_{n+1} und y_{n-1} angeschrieben werden. Mit letzteren ergeben sich weiter die an den Passflächen mit den Radien r_n bzw. r_{n-1} zu verwirklichenden Halbmesserdifferenzen Δ_n und Δ_{n-1} wie folgt :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_n &= [y_{n+1}]_{r=r_n} - [y_n]_{r=r_n} \\ \Delta_{n-1} &= [y_n]_{r=r_{n-1}} - [y_{n-1}]_{r=r_{n-1}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Diese Halbmesserdifferenzen haben für die Schrumpfungverbindung folgende Bedeutung. Angenommen, dass z. B. am Ring Nr. $(n+1)$ die innere Passfläche genau mit dem Halbmesser r_n ausgeführt wurde, dann muss um die vorgeschriebene Flächenpressung p_n zu verwirklichen, die äussere Passfläche am Ring Nr. (n)

mit dem Halbmesser $(r_n + \Delta_n)$ statt r_n hergestellt werden. Es kann aber auch umgekehrt vorgegangen werden u. zw. so, dass am Ring Nr. $(n+1)$ die innere Passfläche mit dem Halbmesser $(r_n - \Delta_n)$, am Ring Nr. (n) dagegen die äussere Passfläche genau mit dem Halbmesser r_n ausgeführt wird.

Nach entsprechenden Zwischenrechnungen ergibt sich z. B. für Δ_n :

$$\Delta_n = \frac{2 r_n}{E} \left[\frac{r_{n+1}^2 \cdot r_n^2 (p_{n+1} - p_n) - r_{n+1}^2 \cdot r_{n-1}^2 (p_{n+1} - p_{n-1}) + r_n^2 \cdot r_{n-1}^2 (p_n - p_{n-1})}{(r_{n+1}^2 - r_n^2) (r_n^2 - r_{n-1}^2)} + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2) \right]. \quad (11)$$

Mit Hilfe des letzteren Ausdruckes lässt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft der behandelten Schrumpfung feststellen. Wenn man nämlich vorschreibt, dass die in (11) vorkommenden Flächendrücke p_{n+1} , p_n und p_{n-1} einander gleich sein sollen, also wenn

$$p_{n+1} = p_n = p_{n-1}$$

ist, dann wird die benötigte Halbmesserdifferenz Δ_n

$$[\Delta_n]_{p_{n+1}=p_n=p_{n-1}} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{4} \cdot (3 + \nu) \cdot (r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2) \cdot r_n \quad (12)$$

also unabhängig von der Grösse der Flächendrücke p_{n+1} , p_n und p_{n-1} .

Der Ausdruck (11) lässt sich auch in folgender Form anschreiben:

$$\Delta_n = \frac{2 r_n}{E} \cdot \left[\frac{r_{n+1}^2 \cdot p_{n+1}}{r_{n+1}^2 - r_n^2} - \frac{r_n^2 (r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2) p_n}{(r_{n+1}^2 - r_n^2) (r_n^2 - r_{n-1}^2)} + \frac{r_{n-1}^2 \cdot p_{n-1}}{r_n^2 - r_{n-1}^2} + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2) \right] \quad (11a)$$

Daraus ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} & \frac{r_{n+1}^2}{r_{n+1}^2 - r_n^2} p_{n+1} - \frac{r_n^2 (r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2)}{(r_{n+1}^2 - r_n^2) (r_n^2 - r_{n-1}^2)} \cdot p_n + \frac{r_{n-1}^2}{r_n^2 - r_{n-1}^2} \cdot p_{n-1} = \\ & = \frac{\Delta_n \cdot E}{2 \cdot r_n} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2). \end{aligned} \quad (11b^*)$$

Wenn man hier für n der Reihe nach die Werte $1, 2, \dots, (q-2), (q-1)$ einsetzt, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem von $(q-1)$ -Gleichungen zwischen den Flächendrücken $p_1, p_2, \dots, p_{q-2}, p_{q-1}$ und den Halbmesserdifferenzen $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{q-2}, \Delta_{q-1}$, das dazu benützt werden kann, bei fester Winkelgeschwindigkeit ω die p -Werte mit den Halbmesseradifferenzen $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{q-2}$,

* Eine — nur für ruhende Verbindungen gültige — Gleichung in welcher also das Glied mit ω^2 an der rechten Seite fehlt, findet sich ohne Beweis bei [3].

Δ_{q-1} auszudrücken. Dies ist insofern von Bedeutung, als die Aufgabe in der Praxis meistens nicht in der oben formulierten Fassung gegeben ist sondern Ringe mit gegebenen Halbmesserdifferenzen $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_{q-2}, \Delta_{q-1}$ zusammengefügt werden sollen und dann nach den sich so ergebenden Flächenpressungen $p_1, p_2 \dots p_{q-2}, p_{q-1}$ gefragt werden muss.

Das sich so ergebende Gleichungssystem lautet, wenn man noch in Betracht zieht, dass

$$p_i = p_a = 0$$

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{r_1^2 (r_2^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2) (r_1^2 - r_i^2)} \cdot p_1 + \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot p_2 = \frac{\Delta_1 E}{2 \cdot r_1} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_2^2 - r_1^2) \\ & + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot p_1 - \frac{r_2^2 (r_3^2 - r_1^2)}{(r_3^2 - r_2^2) (r_2^2 - r_1^2)} \cdot p_2 + \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \cdot p_3 = \frac{\Delta_2 \cdot E}{2 \cdot r_2} - \\ & \quad - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot (3 + \nu) \cdot (r_3^2 - r_1^2) \\ & + \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \cdot p_2 - \frac{r_3^2 (r_4^2 - r_2^2)}{(r_4^2 - r_3^2) (r_3^2 - r_2^2)} \cdot p_3 + \frac{r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} \cdot p_4 = \frac{\Delta_3 \cdot E}{2 \cdot r_3} - \\ & \quad - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot (3 + \nu) (r_4^2 - r_2^2) \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{r_{n-1}^2}{r_n^2 - r_{n-1}^2} \cdot p_{n-1} - \frac{r_n^2 (r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2)}{(r_{n+1}^2 - r_n^2) (r_n^2 - r_{n-1}^2)} \cdot p_n + \frac{r_{n+1}^2}{r_{n+1}^2 - r_n^2} \cdot p_{n+1} = \\ & \quad = \frac{\Delta_n \cdot E}{2 r_n} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2) \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{r_{q-3}^2}{r_{q-2}^2 - r_{q-3}^2} \cdot p_{q-3} - \frac{r_{q-2}^2 (r_{q-1}^2 - r_{q-3}^2)}{(r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2) (r_{q-2}^2 - r_{q-3}^2)} \cdot p_{q-2} + \frac{r_{q-1}^2}{r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2} \cdot p_{q-1} = \\ & \quad = \frac{\Delta_{q-2} \cdot E}{2 r_{q-2}} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_{q-1}^2 - r_{q-3}^2) \\ & + \frac{r_{q-2}^2}{r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2} \cdot p_{q-2} - \frac{r_{q-1}^2 (r_a^2 - r_{q-2}^2)}{(r_a^2 - r_{q-1}^2) (r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2)} \cdot p_{q-1} = \frac{\Delta_{q-1} \cdot E}{2 \cdot r_{q-1}} - \\ & \quad - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_a^2 - r_{q-2}^2) \end{aligned} \right\} (12)$$

Mit den Beiwerten dieses Gleichungssystems können folgende Determinanten D_0 und D_n gebildet werden (siehe Seite 34a und b). Mit diesen lässt sich p_n sofort angeben, als

$$p_n = \frac{D_n}{D_0}. \quad (15)$$

Die übrigen p -Werte ergeben sich auf gleichem Wege, nur muss in (15) statt D_n die entsprechend veränderte Determinante eingesetzt werden.

Die Determinante D_n lässt sich noch zerlegen. Mit den Determinanten $[D_n]_A$ und $[D_n]_r$ (siehe Seite 34c und d) kann man nämlich schreiben

$$D_n = \frac{E}{2} \cdot [D_n]_A - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) [D_n]_r \quad (18)$$

und damit erhält man p_n als

$$p_n = \frac{\frac{E}{2} [D_n]_A - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) \cdot [D_n]_r}{D_0}. \quad (19)$$

Durch Nullsetzen von p_n kann die »kritische« Winkelgeschwindigkeit $[\omega_n]_{kr}$ berechnet werden, bei welcher die Flächenpressung und damit die Verbindung an der Passfläche mit dem Nennhalbmesser r_n aufhört. Diese ergibt sich zu

$$[\omega_n]_{kr} = 2 \sqrt{\frac{E}{3 + \nu} \cdot \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{[D_n]_A}{[D_n]_r}}. \quad (20)$$

Auf diese Weise erhält man für die Schrumpferbindung aus q -Ringens insgesamt $(q-1)$ kritische Winkelgeschwindigkeiten, welche alle verständlicherweise genügend hoch über der Betriebswinkelgeschwindigkeit liegen müssen.

Die Entwicklung der oben angeschriebenen Determinanten ist eine ziemlich langwierige Arbeit. Diese wird dadurch etwas erleichtert, dass die Determinante D_0 nur in der Hauptdiagonale sowie rechts und links dazu Elemente hat. Infolgedessen kann diese in eine Kontinuante übergeführt werden und mit Hilfe einer diesbezüglichen Rekursionsformel durch zwei aus denselben Elementen

$\frac{r_1^2(r_2^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)(r_1^2 - r_1^2)}$	$+$	$\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$	0	\dots	$+$	$\left[\frac{\Delta_1 \cdot E}{2 \cdot r_1} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_2^2 - r_1^2) \right] + \dots$	0				
$+$	$\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$	$+$	$\frac{r_2^2(r_3^2 - r_1^2)}{(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)}$	$+$	$\frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2}$	0	\dots	$+$	$\left[\frac{\Delta_2 \cdot E}{2 r_2} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_3^2 - r_1^2) \right] + \dots$	0	
0	$+$	$\frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}$	$+$	$\frac{r_3^2(r_4^2 - r_2^2)}{(r_4^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_2^2)}$	$+$	$\frac{r_4^2}{r_4^2 - r_3^2}$	$0 \dots$	$+$	$\left[\frac{\Delta_3 \cdot E}{2 r_3} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_4^2 - r_2^2) \right] - \dots$	0	

0	\dots	0	$+$	$\frac{r_{n-2}^2}{r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2}$	$+$	$\frac{r_{n-1}^2(r_n^2 - r_{n-2}^2)}{(r_n^2 - r_{n-1}^2)(r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2)}$	$+$	$\left[\frac{\Delta_{n-1} \cdot E}{2 \cdot r_{n-1}} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_n^2 - r_{n-2}^2) \right]$	0	0	
0	\dots	0	$+$	$\frac{r_{n-1}^2}{r_n^2 - r_{n-1}^2}$	$+$	$\left[\frac{\Delta_n \cdot E}{2 \cdot r_n} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2) \right]$	$+$	$\frac{r_{n+1}^2}{r_{n+1}^2 - r_n^2}$	$0 \dots$	0	
0	\dots	0	$+$	$\left[\frac{\Delta_{n+1} \cdot E}{2 r_{n+1}} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_{n+2}^2 - r_n^2) \right]$	$+$	$\frac{r_{n+1}^2(r_{n+2}^2 - r_n^2)}{(r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2)(r_{n+1}^2 - r_n^2)}$	$+$	$\frac{r_{n+2}^2}{r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2}$	$0 \dots$	0	

0	\dots	0	\dots	$\left[\frac{\Delta_{q-2} \cdot E}{2 \cdot r_{q-2}} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_{q-1}^2 - r_{q-3}^2) \right] -$	\dots	0	$+$	$\frac{r_{q-3}^2}{r_{q-2}^2 - r_{q-3}^2}$	$+$	$\frac{r_{q-1}^2}{r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2}$	
0	\dots	0	\dots	$\left[\frac{\Delta_{q-1} \cdot E}{2 \cdot r_{q-1}} - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_q^2 - r_{q-2}^2) \right] -$	\dots	0	0	$+$	$\frac{r_{q-2}^2}{r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2}$	$+$	$\frac{r_{q-1}^2(r_q^2 - r_{q-2}^2)}{(r_q^2 - r_{q-1}^2)(r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2)}$

= D_n ... 14.

$$\begin{array}{cccccccc}
-\frac{r_1^2(r_2^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)(r_1^2 - r_1^2)} & + \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} & 0 & \dots & \dots & + (r_2^2 - r_1^2) & \dots & 0 \\
+ \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} & - \frac{r_2^2(r_3^2 - r_1^2)}{(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)} & + \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} & 0 & \dots & + (r_3^2 - r_1^2) & \dots & 0 \\
0 & + \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} & - \frac{r_3^2(r_4^2 - r_2^2)}{(r_4^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_2^2)} & + \frac{r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} & \dots & + (r_4^2 - r_2^2) & \dots & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \dots & 0 & + \frac{r_{n-2}^2}{r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2} & - \frac{r_{n-1}^2(r_n^2 - r_{n-2}^2)}{(r_n^2 - r_{n-1}^2)(r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2)} & + (r_n^2 - r_{n-2}^2) & 0 & \dots & 0 \\
0 & & & \dots & 0 & + \frac{r_{n-1}^2}{r_n^2 - r_{n-1}^2} & + (r_n^2 - r_{n-1}^2) & + \frac{r_{n+1}^2}{r_{n+1}^2 - r_n^2} & 0 & \dots & 0 \\
0 & & & & & \dots & 0 & + (r_{n+2}^2 - r_n^2) & - \frac{r_{n+1}^2(r_{n+2}^2 - r_n^2)}{(r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2)(r_{n+1}^2 - r_n^2)} & + \frac{r_{n+2}^2}{r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2} & 0 & \dots & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & & & & & \dots & + (r_{q-1}^2 - r_{q-3}^2) & \dots & 0 & + \frac{r_{q-3}^2}{r_{q-2}^2 - r_{q-3}^2} & - \frac{r_{q-2}^2(r_{q-1}^2 - r_{q-3}^2)}{(r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2)(r_{q-2}^2 - r_{q-3}^2)} & + \frac{r_{q-1}^2}{r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2} \\
0 & & & & & \dots & + (r_a^2 - r_{q-2}^2) & \dots & & 0 & + \frac{r_{q-2}^2}{r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2} & - \frac{r_{q-1}^2(r_a^2 - r_{q-2}^2)}{(r_a^2 - r_{q-1}^2)(r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2)}
\end{array}$$

d

= [D_n]_r ... 17.

$$\begin{array}{cccccccc}
-\frac{r_1^2(r_2^2 - r_1^2)}{(r_2^2 - r_1^2)(r_1^2 - r_1^2)} & + \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} & 0 & \dots & 0 & + \frac{\Delta_1}{r_1} & 0 & \dots \\
+ \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} & - \frac{r_2^2(r_3^2 - r_1^2)}{(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)} & + \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} & \dots & 0 & + \frac{\Delta_2}{r_2} & 0 & \dots \\
0 & + \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} & - \frac{r_3^2(r_4^2 - r_2^2)}{(r_4^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_2^2)} & + \frac{r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} & & + \frac{\Delta_3}{r_3} & 0 & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \dots & 0 & \dots & + \frac{r_{n-2}^2}{r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2} & - \frac{r_{n-1}^2(r_n^2 - r_{n-2}^2)}{(r_n^2 - r_{n-1}^2)(r_{n-1}^2 - r_{n-2}^2)} & + \frac{\Delta_{n-1}}{r_{n-1}} & 0 \dots \\
0 & \dots & & & 0 & + \frac{r_{n-1}^2}{r_n^2 - r_{n-1}^2} & \frac{\Delta_n}{r_n} & + \frac{r_{n+1}^2}{r_{n+1}^2 - r_n^2} & 0 \dots \\
0 & \dots & & & & 0 & \frac{\Delta_{n+1}}{r_{n+1}} & - \frac{r_{n+1}^2(r_{n+2}^2 - r_n^2)}{(r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2)(r_{n+1}^2 - r_n^2)} & + \frac{r_{n+2}^2}{r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2} & 0 \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \dots & & & 0 & \frac{\Delta_{q-2}}{r_{q-2}} & 0 \dots & \dots & 0 & + \frac{r_{q-3}^2}{r_{q-2}^2 - r_{q-3}^2} & - \frac{r_{q-2}^2(r_{q-1}^2 - r_{q-3}^2)}{(r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2)(r_{q-2}^2 - r_{q-3}^2)} & + \frac{r_{q-1}^2}{r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2} \\
0 & \dots & & & 0 & \frac{\Delta_{q-1}}{r_{q-1}} & 0 \dots & & 0 & \dots & 0 & + \frac{r_{q-2}^2}{r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2} & - \frac{r_{q-1}^2(r_q^2 - r_{q-2}^2)}{(r_q^2 - r_{q-1}^2)(r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2)}
\end{array}$$

= [D_n]_{\Delta} \dots 16.

gebildeten Determinanten niedrigerer Ordnung ausgedrückt werden. Wenn man nämlich in D_0 die zum Element

$$-\frac{r_{q-1}^2 (r_a^2 - r_{q-2}^2)}{(r_a^2 - r_{q-1}^2) (r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2)}$$

gehörige Unterdeterminante $(q-2)$ -ter Ordnung mit $[D_0]_{(q-2)}$ und weiter in letzterer Unterdeterminante die zum Element

$$-\frac{r_{q-2}^2 (r_{q-1}^2 - r_{q-3}^2)}{(r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2) (r_{q-2}^2 - r_{q-3}^2)}$$

gehörige Unterdeterminante $(q-3)$ -ter Ordnung mit $[D_0]_{(q-3)}$ bezeichnet, so kann auf Grund des erwähnten Entwicklungssatzes geschrieben werden :

$$D_0 = -\frac{r_{q-1}^2 (r_a^2 - r_{q-2}^2)}{(r_a^2 - r_{q-1}^2) (r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2)} \cdot [D_0]_{(q-2)} - \frac{r_{q-1}^2 \cdot r_{q-2}^2}{(r_{q-1}^2 - r_{q-2}^2)^2} \cdot [D_0]_{(q-3)}. \quad (21)$$

Für die übrigen oben angegebenen Determinanten kann leider eine solche Entwicklung nicht angeschrieben werden.

Die Schrumpfung aus drei Ringen

An dieser Stelle sei noch etwas näher auf den einfachsten Fall obiger Untersuchung, auf die Schrumpfung aus drei Ringen eingegangen. Letztere scheint gegenüber der Verbindung aus 2 Ringen — deren Eigenschaften oben kurz zusammengefasst wurden — gewisse Vorteile zu bieten.

In der Verbindung (Bild 7) sei den obigen Ausführungen entsprechend im Betriebszustand zwischen Ring 1 (Innenring) und Ring 2 (Zwischenring),

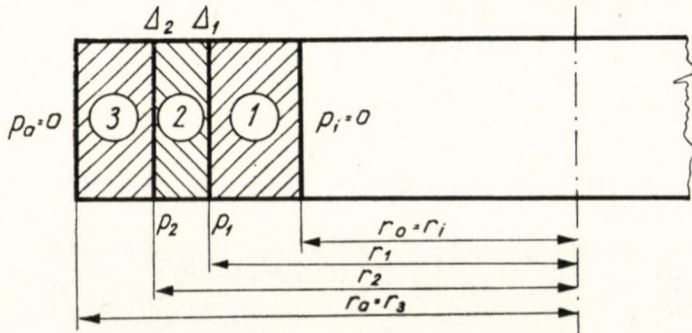


Bild 7. Schrumpfung aus drei Ringen

also an den Passflächen mit dem Nennhalbmesser r_1 der Flächendruck p_1 , zwischen Ring 2 und Ring 3 (Aussenring), an den Passflächen mit dem Nennhalbmesser r_2 der Flächendruck p_2 vorgeschrieben. Die diesen Flächendrücken entsprechenden Halbmesserdifferenzen seien Δ_1 und Δ_2 .

Die radiale Verschiebung y , die Radialspannung σ_r sowie die Tangentialspannung σ_t können aus obigen Ausdrücken (7), (8) und (9) für die drei Ringe gleich angeschrieben werden, wenn man die Vereinfachungen welche sich aus

$$p_0 = p_i = p_3 = p_a = 0$$

ergeben, entsprechend berücksichtigt.

So wird für den Innenring 1, also bei Werten

$$r_i \leq r \leq r_1$$

der unabhängigen Variablen r :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{p_1}{E} \cdot \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_i^2} \left[(1 - \nu) \cdot r + (1 + \nu) \frac{r_i^2}{r} \right] + \\ &\quad + \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (r_1^2 + r_i^2) r + \frac{3 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{r_1^2 r_i^2}{r} - r^3 \right] \\ [\sigma_r]_1 &= p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) \left(r_i^2 + r_1^2 - r^2 - \frac{r_i^2 r_1^2}{r^2} \right) \\ [\sigma_t]_1 &= p_1 \cdot \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[(3 + \nu) \left(r_i^2 + r_1^2 + \frac{r_i^2 r_1^2}{r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - (1 + 3\nu) r^2 \right] \end{aligned} \right\} (22)$$

Für den Zwischenring 2 d. h. bei Werten

$$r_1 \leq r \leq r_2$$

ergeben sich weiter:

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{E (r_2^2 - r_1^2)} \left[(1 - \nu) (r_2^2 p_2 - r_1^2 p_1) \cdot r + (1 + \nu) \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r} (p_2 - p_1) \right] + \\ &\quad + \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (r_1^2 + r_2^2) r + \frac{3 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2}{r} - r^3 \right] \\ [\sigma_r]_2 &= \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[r_2^2 p_2 - r_1^2 p_1 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} (p_2 - p_1) \right] + \end{aligned} \right\} (23^*)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) \left(r_1^2 + r_2^2 - r^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) \\
 [\sigma_t]_2 = & \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[r_2^2 p_2 - r_1^2 p_1 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} (p_2 - p_1) \right] + \\
 & + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[(3 + \nu) \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) - (1 + 3\nu) r^2 \right]
 \end{aligned} \right\} (23^*)$$

Schliesslich werden für den Aussenring 3, also bei

$$r_2 \leq r \leq r_a$$

$$\left. \begin{aligned}
 y_3 = & - \frac{p_2}{E} \cdot \frac{r_2^2}{r_a^2 - r_2^2} \left[(1 - \nu) \cdot r + (1 + \nu) \frac{r_a^2}{r} \right] + \\
 & + \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (r_2^2 + r_a^2) r + \frac{3 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{r_2^2 r_a^2}{r} - r^3 \right] \\
 [\sigma_r]_3 = & p_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_a^2 - r_2^2} \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot (3 + \nu) \left(r_2^2 + r_a^2 - r^2 - \frac{r_2^2 r_a^2}{r^2} \right) \\
 [\sigma_t]_3 = & - p_2 \frac{r_2^2}{r_a^2 - r_2^2} \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[(3 + \nu) \left(r_2^2 + r_a^2 + \frac{r_2^2 r_a^2}{r^2} \right) - (1 + 3\nu) r^2 \right]
 \end{aligned} \right\} (24)$$

Die zur Herleitung der Ausdrücke für die Flächendrücke p_1 und p_2 benötigten Halbmesserdifferenzen ergeben sich ebenfalls aus (11a) wie folgt :

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta_1 = & \frac{2 r_1 (r_2^2 - r_1^2)}{E} \left[\frac{r_2^2 p_2}{(r_2^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_1^2)} - \frac{r_1^2 p_1}{(r_2^2 - r_1^2) (r_1^2 - r_1^2)} + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot (3 + \nu) \right] \\
 \Delta_2 = & \frac{2 r_2 (r_a^2 - r_1^2)}{E} \left[- \frac{r_2^2 p_2}{(r_a^2 - r_2^2) (r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_1^2 p_1}{(r_a^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_1^2)} + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3 + \nu) \right]
 \end{aligned} \right\} (25)$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach p_1 und p_2 kann man folgende Ausdrücke erhalten :

* Die 2. und 3. Gleichung der Formelgruppe (23) ist lediglich die Summe der entsprechenden Ausdrücke in [4], welche als Tangential- bzw. Radialspannungen unter dem Titel »Dickwandiger Hohlzylinder unter Innendruck p_i und Aussendruck p_a «, sowie unter dem Titel »Umlaufende Scheibe« angegeben sind.

Dies ergibt sich daraus, dass die oben unter 1 angegebene Differentialgleichung linear ist, die für die verschiedenen Fälle gültigen partikulären Lösungen also superponiert werden können.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{(r_a^2 - r_1^2)(r_1^2 - r_i^2)}{2r_1^2(r_a^2 - r_i^2)} \left[\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{4} (3 + \nu)(r_a^2 - r_i^2) - \frac{\Delta_1 E}{r_1} - \frac{\Delta_2 \cdot E}{r_2} \cdot \frac{r_a^2 - r_2^2}{r_a^2 - r_1^2} \right] \\
 p_2 &= \frac{(r_a^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_i^2)}{2r_2^2(r_a^2 - r_i^2)} \left[\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{4} (3 + \nu)(r_a^2 - r_i^2) - \frac{\Delta_1 E}{r_1} \cdot \frac{r_1^2 - r_i^2}{r_2^2 - r_i^2} - \frac{\Delta_2 E}{r_2} \right]
 \end{aligned} \quad (26)$$

Die kritischen Winkelgeschwindigkeiten $[\omega_1]_{kr}$ und $[\omega_2]_{kr}$ ergeben sich durch Nullsetzen der Gleichungen (26) zu

$$\left. \begin{aligned}
 [\omega_1]_{kr} &= 2 \sqrt{\frac{E}{3 + \nu} \cdot \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \left(\frac{\Delta_1}{r_1} + \frac{\Delta_2}{r_2} \cdot \frac{r_a^2 - r_2^2}{r_a^2 - r_1^2} \right)} \\
 [\omega_2]_{kr} &= 2 \sqrt{\frac{E}{3 + \nu} \cdot \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \left(\frac{\Delta_1}{r_1} \cdot \frac{r_1^2 - r_i^2}{r_2^2 - r_i^2} + \frac{\Delta_2}{r_2} \right)}
 \end{aligned} \right\} (27)$$

In diesem Falle ist es noch verhältnismässig einfach, die radiale Verschiebung sowie die beiden Spannungen als Funktionen der obigen Δ -Werte anzugeben, man hat dazu nur die Ausdrücke (26) in die Formelgruppen (22), (23) und (24) einzusetzen. Praktisch sind die so zu gewinnenden Formeln insofern brauchbarer, als die aus (25) zu berechnenden meistens ziemlich kleinen Δ -Werte bei der Herstellung der Ringe selten genau eingehalten werden, man also vor die Aufgabe gestellt wdei rRinge mit gegebenen Halbmesserdifferenzen zusammenzufügen. In diesem Falle wird man nicht nur fragen müssen, wie gross die entstehenden Flächendrücke an den Passflächen ausfallen, sondern danach trachten, die Verschiebungen und Spannungen ohne Umweg aus den gegebenen Δ -Werten zu berechnen.

In der angedeuteten Weise können folgende Ausdrücke entwickelt werden :

Für den Innenring 1 ($r_i \leq r \leq r_1$)

$$\left. \begin{aligned}
 y_1 &= \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (r_a^2 + r_i^2) r + \frac{3 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r} - r^3 \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2(r_a^2 - r_i^2)} \left[\frac{\Delta_1}{r_1} (r_a^2 - r_1^2) + \frac{\Delta_2}{r_2} (r_a^2 - r_2^2) \right] \left[(1 - \nu) r + (1 + \nu) \frac{r_i^2}{r} \right] \\
 [\sigma_r]_1 &= \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot (3 + \nu) \left(r_a^2 + r_i^2 - r^2 - \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} \right) - \\
 &\quad - \frac{E}{2(r_a^2 - r_i^2)} \left[\frac{\Delta_1}{r_1} (r_a^2 - r_1^2) + \frac{\Delta_2}{r_2} (r_a^2 - r_2^2) \right] \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) \\
 [\sigma_t]_1 &= \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[(3 + \nu) \left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} \right) - (1 + 3\nu) r^2 \right] - \\
 &\quad - \frac{E}{2(r_a^2 - r_i^2)} \left[\frac{\Delta_1}{r_1} (r_a^2 - r_1^2) + \frac{\Delta_2}{r_2} (r_a^2 - r_2^2) \right] \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right)
 \end{aligned} \right\} (28)$$

Für den Zwischenring 2 ($r_1 \leq r \leq r_2$)

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (r_a^2 + r_i^2) r + \frac{3+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r} - r^3 \right] + \\
 &+ \frac{A_1}{r_1} \cdot \frac{r_1^2 - r_i^2}{2(r_a^2 - r_i^2)} \left[(1-\nu) \cdot r + (1+\nu) \frac{r_a^2}{r} \right] - \\
 &- \frac{A_2}{r_2} \frac{r_a^2 - r_2^2}{2(r_a^2 - r_i^2)} \left[(1-\nu) r + (1+\nu) \frac{r_i^2}{r} \right] \\
 [\sigma_r]_2 &= \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \cdot (3+\nu) \left(r_a^2 + r_i^2 - r^2 - \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} \right) - \\
 &- \frac{E}{2(r_a^2 - r_i^2)} \left[\frac{A_1}{r_1} (r_1^2 - r_i^2) \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{A_2}{r_2} (r_a^2 - r_2^2) \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) \right] \\
 [\sigma_t]_2 &= \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[(3+\nu) \left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} \right) - (1+3\nu) r^2 \right] + \\
 &+ \frac{E}{2(r_a^2 - r_i^2)} \left[\frac{A_1}{r_1} (r_1^2 - r_i^2) \left(\frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) - \frac{A_2}{r_2} (r_a^2 - r_2^2) \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{29}$$

Und endlich für den Aussenring 3 ($r_2 \leq r \leq r_a$)

$$\begin{aligned}
 y_3 &= \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (r_a^2 + r_i^2) r + \frac{3+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{r_a^2 r_i^2}{r} - r^3 \right] + \\
 &+ \frac{1}{2(r_a^2 - r_i^2)} \left[\frac{A_1}{r_1} (r_1^2 - r_i^2) + \frac{A_2}{r_2} (r_2^2 - r_i^2) \right] \left[(1-\nu) r + (1+\nu) \frac{r_a^2}{r} \right] \\
 [\sigma_r]_3 &= \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} (3+\nu) \left(r_a^2 + r_i^2 - r^2 - \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} \right) - \\
 &- \frac{E}{2(r_a^2 - r_i^2)} \left[\frac{A_1}{r_1} (r_1^2 - r_i^2) + \frac{A_2}{r_2} (r_2^2 - r_i^2) \right] \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) \\
 [\sigma_t]_3 &= \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{8} \left[(3+\nu) \left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{r_a^2 r_i^2}{r^2} \right) - (1+3\nu) \cdot r^2 \right] + \\
 &+ \frac{E}{2(r_a^2 - r_i^2)} \left[\frac{A_1}{r_1} (r_1^2 - r_i^2) + \frac{A_2}{r_2} (r_2^2 - r_i^2) \right] \left(\frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{30}$$

Berechnungsbeispiel II

Mit Hilfe der oben mitgeteilten Formeln wurde ein Beispiel durchgerechnet. U. zw. um einen Vergleich mit der im Bild 1 dargestellten Ausführungsform zu ermöglichen, wurden die Abmessungen des Bildes 8 entsprechend gewählt. Der Unterschied gegen die Ausführung nach Bild 1

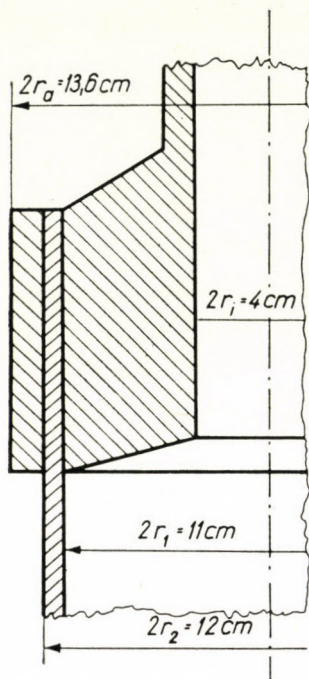


Bild 8. Eine Ausführungsform der Schrumpfverbindung aus drei Ringen. Superzentrifugentrommel auf oberes Nabenstück aufgezogen und mit Aussenring verstärkt

besteht also nur darin, dass aussen noch ein Ring mit 8 mm Wandstärke aufgeschumpft angenommen wurde. Zur weiteren Angleichung beider Fälle wurden die Flächendrücke p_1 und p_2 an den Passflächen mit den Nennhalbmessern r_1 und r_2 zu

$$p_1 = p_2 = -110 \text{ kg/cm}^2$$

angenommen.

Aus diesen Daten ergeben sich mit Hilfe der Formeln 25 und unter Annahme desselben Stahlmaterials

$$\Delta_1 = 1,64 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 16,4 \mu$$

$$\Delta_2 = 3,68 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 36,8 \mu$$

Die Summe dieser beiden Werte ist nahezu gleich der bei der zweiringigen Ausführung berechneten Halbmesserdifferenz $\Delta = 5,24 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$.

Die Kurven der radialen Verschiebung y sowie der Spannungen σ_r und σ_t zeigen die Bilder 9, 10 und 11, welche für dieselben Winkelgeschwindigkeiten durchgerechnet wurden, wie bei der zweiringigen Ausführung angegeben.

Aus den Abbildungen ergibt sich folgendes:

1. Am Innenring 1 haben sich die Verhältnisse gegenüber der Ausführung mit zwei Ringen nicht wesentlich verändert. Für den Ruhezustand und die niedrigeren Winkelgeschwindigkeiten sind die radiale Verschiebung sowie die Spannungen etwas höher geworden, bleiben aber immer noch in mässigen Grenzen.

2. Der hauptsächlichste Unterschied gegenüber der ersteren Ausführungsform besteht nun darin, dass die Höchstspannung $[\sigma_t]_2$ an der Innenseite des Zwischenringes 2 sich von $+2049 \text{ kg/cm}^2$ auf rund $\frac{1}{3}$, d. h. auf $+680 \text{ kg/cm}^2$ verringert hat. Dieser Ring war bei der

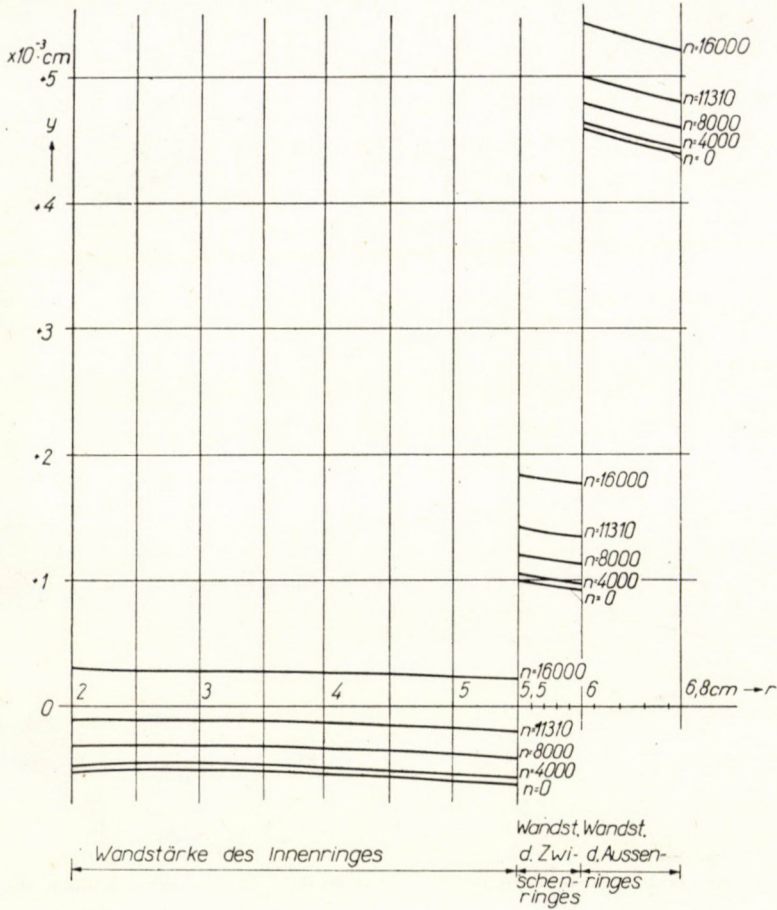


Bild 9. Die radialen Verschiebungen y in den Ringen der Verbindung nach Bild 8

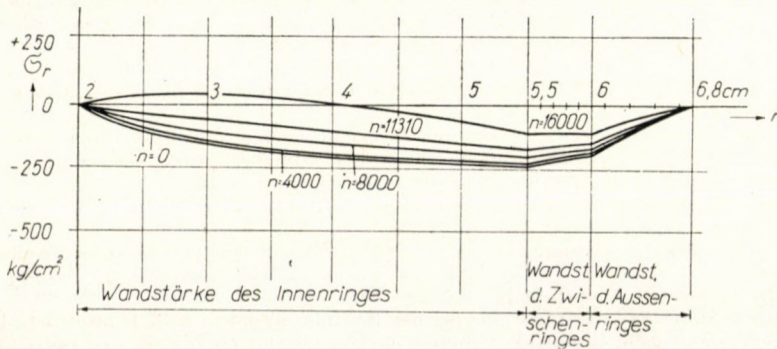


Bild 10. Die Radialspannungen σ_r in den Ringen der Verbindung nach Bild 8

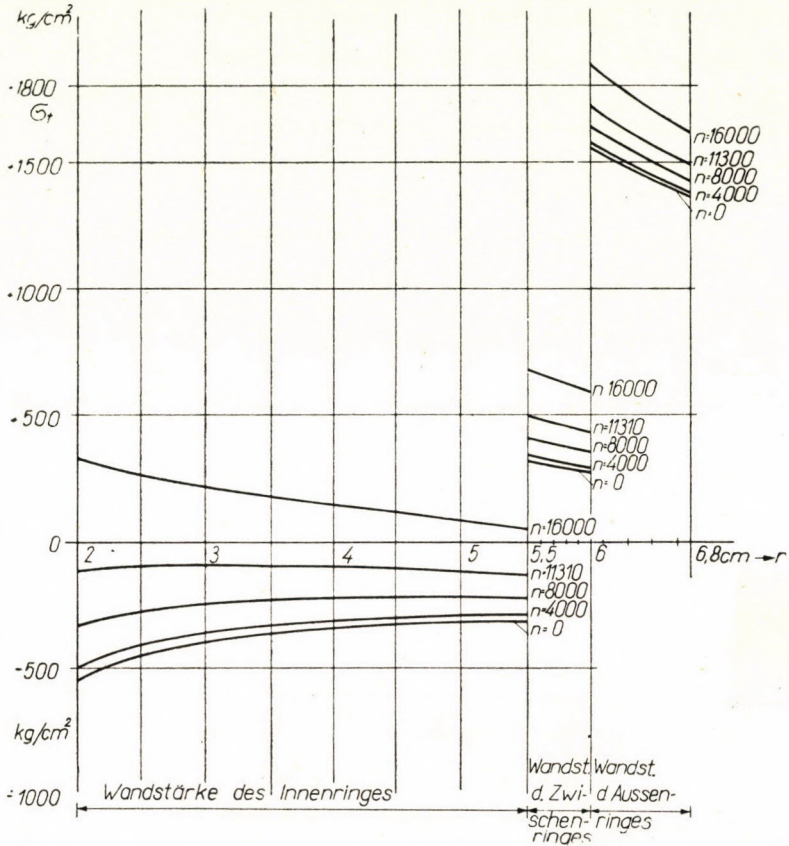


Bild 11. Die Tangentialspannungen σ_t in den Ringen der Verbindung nach Bild 8

ersten Ausführungsform Aussenring und seine hohe Beanspruchung gab die Veranlassung dazu, nach einer vorteilhafteren Ausführung zu suchen.

Dieser Spannungsverminderung entsprechend ist auch die grösste radiale Verschiebung am Ring 2 auf etwa $\frac{2}{5}$ des Wertes bei der zweiringigen Ausführung zurückgegangen. Dagegen haben sich die an sich mässigen Werte der Radialspannung $[\sigma_r]_2$ nur unwesentlich erhöht.

3. Der am stärksten beanspruchte Teil ist auch hier der Aussenring 3 aber auch bei diesem kann eine Verminderung der Höchstspannung $[\sigma_t]_3$ gegenüber der zweiringigen Ausführung festgestellt werden. Die Spannungsspitze beträgt hier gegenüber $+2049 \text{ kg/cm}^2$ nur $+1880 \text{ kg/cm}^2$.

Es liegt auf der Hand, (wie es auch noch gezeigt werden soll), dass durch andere Voraussetzungen noch vorteilhaftere Spannungsverteilungen erreicht werden können.

Es seien noch hier die Zahlenwerte der beiden kritischen Geschwindigkeiten $[\omega_1]_{kr}$ und $[\omega_2]_{kr}$ mitgeteilt. Mit Hilfe der Ausdrücke (27) — entsprechend den oben angegebenen Werten von Δ_1 und Δ_2 — ergeben sich:

$[\omega_1]_{kr} = 2280 \text{ 1/Sek.}$ und $[\omega_2]_{kr} = 2540 \text{ 1/Sek.}$; entsprechenden Drehzahlen werden also

$[n_1]_{kr} = 21800/\text{Min.}$ und $[n_2]_{kr} = 24200/\text{Min.}$

Wie ersichtlich, sind diese niedriger als bei der Ausführung nach Bild 1 unter den dort angegebenen Voraussetzungen, liegen aber immer noch genügend hoch über der Betriebsdrehzahl $n = 16000/\text{Min.}$

Zusammenlegen der kritischen Winkelgeschwindigkeiten

Bezüglich der kritischen Winkelgeschwindigkeiten kann übrigens noch folgendes festgestellt werden. Von beiden aus (27) zu berechnenden Werten wird immer der niedrigere der Brauchbarkeit einer umlaufenden Schrumpfung eine Grenze setzen. Der höhere Wert hat verständlicherweise keine praktische Bedeutung. Diesem Gedankengang entsprechend dürfte es nahe liegen die Schrumpfung so zu bemessen, dass beide kritische Winkelgeschwindigkeiten zusammenfallen. Letzterer Forderung wird dann entsprochen d. h. es wird dann

$$[\omega_1]_{kr} = [\omega_2]_{kr}$$

wenn zwischen den Halbmesserdifferenzen Δ_1 und Δ_2 folgende Beziehung besteht:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_a^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_i^2} \quad (31)$$

Die beiden zusammenfallenden kritischen Winkelgeschwindigkeiten errechnen sich in diesem Falle wie folgt:

$$[\omega_{1,2}]_{kr} = 2 \cdot \sqrt{\frac{E}{3 + \nu} \cdot \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\Delta_1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2^2 - r_i^2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{E}{3 + \nu} \cdot \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\Delta_2}{r_2} \cdot \frac{1}{r_a^2 - r_1^2}} \quad (32)$$

Berechnungsbeispiel III

Unter Anwendung letzterer Formeln lässt sich für die dreiringige Schrumpfung nach Bild 8 auch eine vorteilhaftere Spannungsverteilung als im Bild 11 gezeigt, berechnen. Wenn man statt die Flächendrücke p_1 und p_2 festzusetzen z. B. die gleichwertige Bedingung stellt, dass die beiden zusammenfallenden Winkelgeschwindigkeiten (32) nicht niedriger sein sollen als ein bestimmter, genügend hoch über der Betriebswinkelgeschwindigkeit liegender Wert, so sind die Halbmesserdifferenzen Δ_1 und Δ_2 aus (32) sofort zu berechnen.

Für den vorliegenden Fall (Bild 8) ergibt sich aus (31) das Verhältnis der Δ_1 und Δ_2 zu

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 0,545.$$

Als Grundlage der weiteren Berechnungen soll nun festgesetzt werden, dass die kritische Drehzahl n_k nicht unter dem Wert 20000/Min. bleiben soll also

$$n_k \geq 20000/\text{Min.}$$

Daraus berechnet sich

$$[\omega_{1,2}]_{kr} \geq 2094,3 \text{ 1/Sek.}$$

In letzterem Zusammenhang die Gleichheit vorausgesetzt, ergeben sich aus (32) die Werte:

$$\Delta_1 = 2,427 \cdot 10^{-3} \text{ cm und } \Delta_2 = 1,323 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

Aus (26) können damit die Flächendrücke p_1 und p_2 berechnet werden. Diese erhält man zu

$$p_1 = -72,2 \text{ kg/cm}^2 \text{ und } p_2 = -47,7 \text{ kg/cm}^2$$

Diese sind zwar niedriger, als die im Berechnungsbeispiel 2 zu Grunde gelegten Werte, dürften aber im Betriebszustand immer noch ausreichende Sicherheit gewährleisten.

Grösse und Verteilung der radialen Verschiebungen sowie der Radial- und Tangentialspannungen sind für diesen Fall aus den Bildern 12, 13, und 14 zu ersehen. Wie zu erwarten

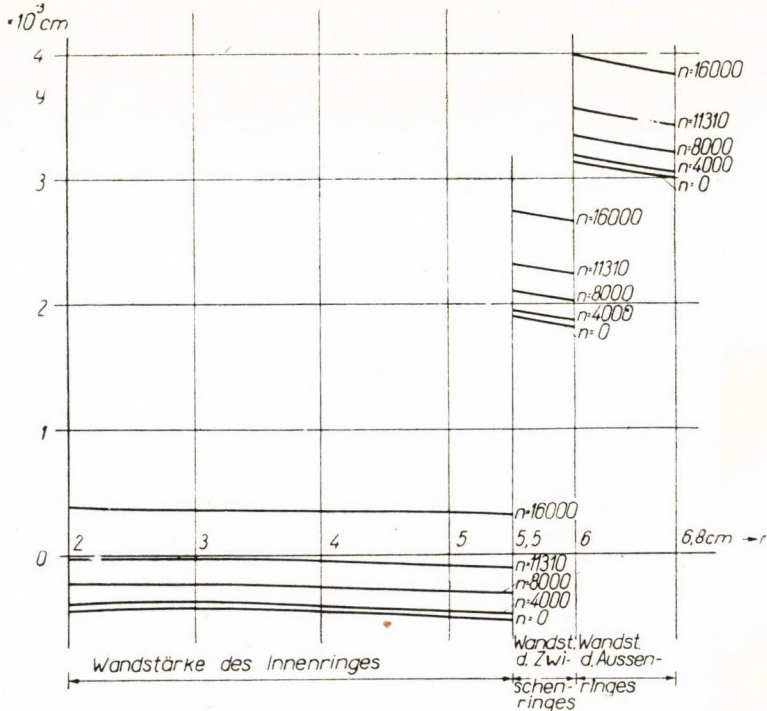


Bild 12. Die radialen Verschiebungen y in den Ringen des Berechnungsbeispiels III

war, sind die Veränderungen am Innenring 1 gegenüber der früheren Berechnungsweise nur gering. Dies gilt in bezug auf die Radialspannungen σ_r auch für die beiden anderen Ringe. Ein auffälliger Unterschied ist aber in der Verteilung der Tangentialspannungen am Zwischenring 2 und Aussenring 3 festzustellen. Bei der vorangegangenen Berechnungsweise lagen diese Spannungen an den beiden Ringen weit auseinander. Der Zwischenring 2 war nur mässig belastet und die Spannungsspitze am Aussenring 3 ziemlich hoch. Nach Bild 14 sind die Unterschiede viel geringer und die Höchstspannung am Zwischenring 2 beträgt jetzt $+1025 \text{ kg/cm}^2$, am Aussenring 3 nur $+1380 \text{ kg/cm}^2$. Beide Werte treten bei der Betriebsdrehzahl auf. Ein ähnliches Bild ergibt sich auch in der Verteilung der radialen Verschiebungen. Deren Werte sind niedriger wie nach Bild 9 und liegen beim Zwischenring 2 und Aussenring 3 ziemlich beisammen.

Es kann also festgestellt werden, dass diese letztere Berechnungsweise günstigere Verhältnisse ergibt, als das Berechnungsbeispiel 2. Die Möglichkeiten welche durch die Schrumpfung mit 3 Ringen erreichbar sind, dürften aber damit bei weitem nicht erschöpft sein. Weitere Annahmen

können ebenfalls zu brauchbaren und vorteilhaften Lösungen führen. Die durch Änderung der Wandstärke der Ringe gegebenen Variationsmöglich-

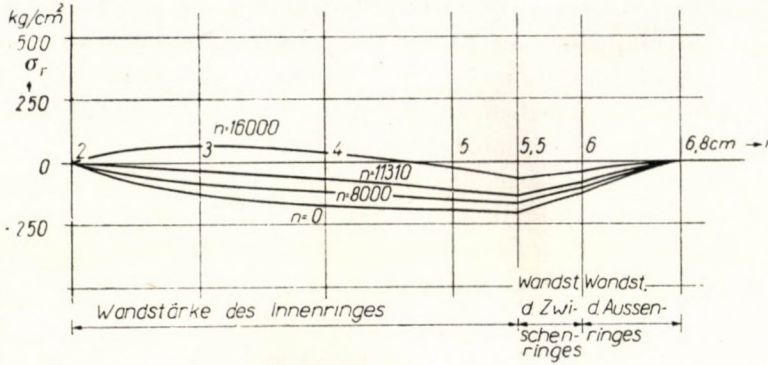


Bild 13. Die Radialspannungen σ_r in den Ringen des Berechnungsbeispielles III

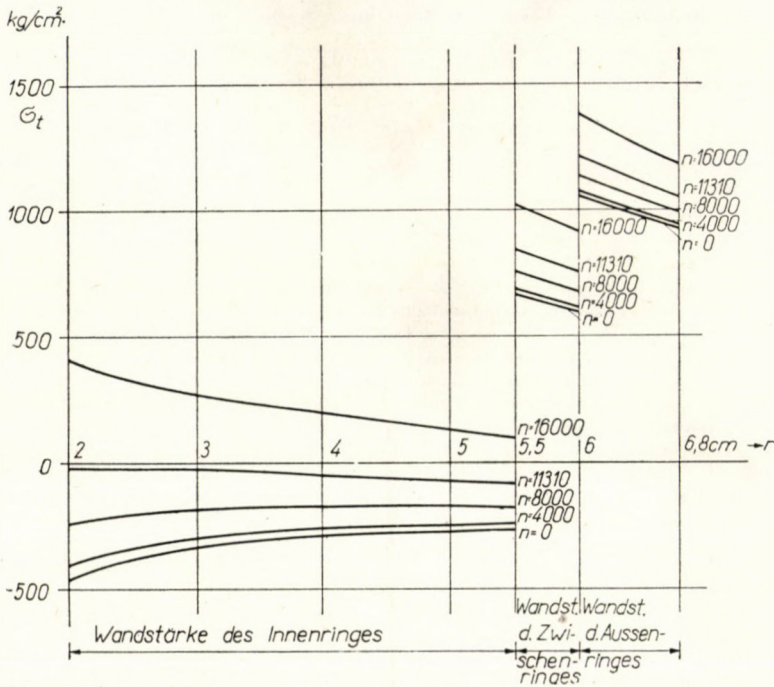


Bild 14. Die Tangentialspannungen σ_t in den Ringen des Berechnungsbeispielles III

keiten wurden hier absichtlich nicht behandelt. Es soll aber darauf hingewiesen werden, dass die dreiringige Ausführung auch in dieser Beziehung dem Konstrukteur grössere Freiheit bietet, wie die Ausführung mit nur zwei Ringen.

Obige Beispiele dürften ferner gezeigt haben, dass die heute angewendete Ausführung mit zwei Ringen infolge der starken Belastung des Aussenringes den Drehzahlbereich der Verbindung nach oben ziemlich einengt. Daran ist durch konstruktive Massnahmen nicht viel zu ändern, weil bei gegebener Winkelgeschwindigkeit und festgesetztem Flächendruck an der Passfläche die Spannungsverteilung eindeutig bestimmt ist. Bei der drei- (oder mehr-)ringigen Ausführung dagegen ist es möglich, die Spannungsverteilung zu beeinflussen und die hohen Spannungsspitzen ganz zu vermeiden.

Eine ausführlichere Gegenüberstellung der Eigenschaften der zwei- und mehrringigen Schrumpfvverbindungen kann hier leider nicht gegeben werden. Mögen die oben mitgeteilten Entwicklungen und Zusammenhänge zur Anregung weiterer diesbezüglicher Arbeiten dienen.

SCHRIFTTUM

1. THAMM, I.: Berechnung von Schrumpfvverbindungen zwischen rotierenden zylindrischen Maschinenteilen. »Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. Tomus XIII. Fasciculi 3—4. 1955. 299—326 S.
2. FÖPPL, L.: Drang und Zwang. Bd. III, S. 153. München 1947.
3. KANTOROWITSCH, Z. B.: Berechnungsgrundlagen der chem. Maschinen und Apparatur. Moskau 1952. (russisch) Seite 267.
4. Des Ingenieurs Taschenbuch »Hütte« 28. Aufl. 1955. Bd. I, S. 951 und 954.

ZUSAMMENFASSUNG

In einer früheren Arbeit des Verfassers wurden die Zusammenhänge entwickelt, durch welche die in zwei aufeinandergeschrumpften umlaufenden Ringen entstehenden Formänderungen und Spannungen berechnet werden können. Mit Hilfe der dort erhaltenen Formeln werden die Eigenschaften solcher aus zwei Ringen bestehenden Schrumpfvverbindungen erörtert. Als wichtigstes Ergebnis wird gefunden, dass die grösste Spannung der Verbindung an der Innenfläche des Aussenringes in tangentialer Richtung entsteht. Die Betriebsdrehzahl wird durch diese Spannung begrenzt.

Da die aus zwei Ringen bestehende Schrumpfvverbindung sich hinsichtlich der Spannungsverteilung ziemlich ungünstig erweist, so scheint es naheliegend, nach solchen Ausführungsformen der umlaufenden Schrumpfvverbindung zu suchen, bei welchen eine gleichmässigerer Verteilung der Beanspruchungen gewonnen werden kann. Mit dieser Zielsetzung wurden in vorliegendem Aufsatz die mehrfachen d. h. aus mehr als zwei Ringen bestehenden Schrumpfvverbindungen untersucht. Es werden die Formeln zur Berechnung des Spannungs- und Formänderungszustandes der mehrfachen Schrumpfvverbindung mitgeteilt.

Es ergibt sich, dass bei einer umlaufenden Schrumpfvverbindung aus q -Ringern ($q-1$) kritische Winkelgeschwindigkeiten vorhanden sind, bei welchen je einer der ($q-1$) Haftverbindungen aufhört, d. h. lose wird. Die höchste im Betrieb auftretende Winkelgeschwindigkeit muss unter der kleinsten dieser kritischen Winkelgeschwindigkeiten bleiben.

Als praktische Anwendung der erhaltenen Ergebnisse wird noch die Schrumpfvverbindung aus drei Ringen näher untersucht. Es wird gezeigt, dass bei dieser entschieden günstigere Spannungsverteilungen erreichbar sind, als bei der eingangs erörterten zweiringigen Ausführung. Als besonders günstig in bezug auf die Spannungsverteilung ergibt sich die Ausführungsform, bei welcher die Halbmesserdifferenzen der Passflächen so gewählt werden, dass die hier auftretenden zwei kritischen Winkelgeschwindigkeiten zusammenfallen. Bei entsprechend gewählten Abmessungen usw. sind beträchtlich höhere Betriebswinkelgeschwindigkeiten als bei der zweiringigen Ausführung erreichbar.

TYPES AND PROPERTIES OF SHRUNK CONNECTIONS BETWEEN ROTATING CYLINDRICAL MACHINE PARTS

I. THAMM

SUMMARY

The author, in a previous paper, deduced the expressions by means of which the stresses and strains in two rotating rings of which one is shrunk onto the other, can be calculated. Using the formulae there deduced, the author now evaluates the properties of shrunk connections, consisting of two rings. The most important conclusion is, that the greatest absolute stress in the connection is in a tangential direction upon the inner surface of the outer ring. This stress limits the rate of revolution.

Since shrunk connections of two rings appear, due to the stress distribution, somewhat disadvantageous, the next step was to find types of shrunk connections, that would offer a more even distribution of the load. With this aim in mind, multiple shrunk connections of more than two rings were examined. The paper contains the expressions used to find the stresses and strains in multiple shrunk connections.

The results show, that in a rotating shrunk connection of q rings, there are $(q-1)$ critical angular velocities at each of which one of the $(q-1)$ rigid fastenings ceases, i. e. becomes loose. The highest angular velocity actually used, must always be below the lowest of these critical angular velocities.

As a practical application of the results of this analysis, a shrunk connection of three rings was investigated. It is shown that decidedly more advantageous stress distributions can here be reached than with the two ring solutions discussed at the beginning. Especially desirable stress distributions can be obtained if the differences in the semi-diameters of the contact surfaces are so chosen as to make the two critical angular velocities coincide. With properly chosen dimensions etc. considerably higher angular velocities can be attained, than in the types where two rings are used.

FORMES ET PROPRIÉTÉS DES ASSEMBLAGES PAR EMMANCHEMENT À CHAUD DES ÉLÉMENTS DE MACHINES CYLINDRIQUES, À VITESSE DE ROTATION ÉLEVÉE

I. THAMM

RÉSUMÉ

Dans une étude antérieure, l'auteur a publié les relations permettant de calculer à quels efforts sont soumis, et quelles déformations subissent, deux anneaux emmanchés à chaud. À l'aide de ces expressions, l'auteur examine maintenant les propriétés de cet assemblage à deux anneaux. Le résultat le plus important est le fait que l'effort maximum est l'effort tangentiel sur la surface intérieure de l'anneau extérieur. La nombre de tours en service normal est limité par cet effort.

L'assemblage consistant de deux anneaux étant très désavantageux du point de vue de la répartition des efforts, il est naturel de chercher une forme de l'assemblage donnant une répartition plus uniforme des efforts. Dans cet ordre d'idées, l'auteur examine les assemblages de plus que deux anneaux, et détermine les expressions des efforts et des déformations de ces assemblages à anneaux multiples.

L'étude démontre aussi, que pour un assemblage consistant de q anneaux il y a $(q-1)$ valeurs de la vitesse angulaire où une surface d'ajustement de l'assemblage devient lâche. La vitesse angulaire de service doit rester au-dessous de la plus petite de ces vitesses angulaires critiques.

En tant qu'application pratique des résultats obtenus, l'étude examine de plus près l'assemblage à trois anneaux, et montre que l'on peut obtenir des répartitions des efforts beaucoup plus favorables que dans les assemblages à deux anneaux, traités auparavant. Du point de vue de la répartition des efforts est particulièrement avantageuse la solution où, par un choix convenable des différences des rayons, les deux vitesses angulaire critiques coïncident. Si les dimensions etc. sont correctement choisies, on peut alors permettre des vitesses angulaires de service plus élevées de beaucoup qu'avec un assemblage à deux anneaux.

ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ И СВОЙСТВА АНКЕРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ МЕЖДУ
ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ МАШИН

И. ТАММ

РЕЗЮМЕ

В одной из предыдущих работ автора были разработаны зависимости, с помощью которых возможно решить деформации и напряжения, возникающие во вращающихся кольцах, нанизанных друг на друга. С помощью приведенных в той работе формул исследуются свойства анкерных соединений, состоящих из двух колец. В качестве важнейшего результата приводится, что наибольшее напряжение соединения на внутренней поверхности внешнего кольца возникает в тангенциальном направлении. Рабочее число оборотов ограничивается этим напряжением.

Если анкерное соединение из двух колец в отношении распределения напряжений является слишком неподходящим, то кажется необходимым искать такие формы анкерных соединений, которые дадут равномерное распределение — соответственно требованиям. С этой целью в данной работе исследуются анкерные соединения, состоящие из более чем двух колец. Приводятся формулы для решения состояния напряжений и деформации многократных анкерных соединений.

Получается, что в случае вращающегося анкерного соединения из q — колец ($q - 1$) имеют место критические угловые скорости, при которых одно из соединений ($q - 1$) перестает работать. Угловая скорость, максимальная в рабочем режиме, должна в наименьшей степени быть ниже этой критической круговой скорости.

В качестве практического применения полученных результатов ближе исследуется анкерное соединение из трех колец. Показано, что при этом решении получается более выгодное распределение напряжений, чем в случае рассмотренных в начале двукольцевых решений. В качестве исключительно выгодного решения в отношении распределения напряжений является конструкционная форма, при которой разность радиуса сочленяемых поверхностей выбирается с таким расчетом, чтобы совпадали возникающие здесь две критические угловые скорости. При соответствующим образом выбранных измерениях можно достигнуть более высокие рабочие угловые скорости, чем в случае двукольцевых конструкций.

STUDY ON THE THEORETICAL AND PRACTICAL RELATIONS OF SPINNING PLANS

L. A. B. GANGLI

HUNGARIAN TEXTILE RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received 7th February, 1957]

In the following treatise, it is endeavoured to survey the extent and interrelation of the irregularities of successive machine stages based on the known Between-Variance-Length curve $CB(L)$, $B(L)$ of spun goods.

The analyses have been built up partly on practical and partly on theoretic considerations, and the conclusions derived are correspondingly bilateral. The basic idea was furnished by a regular incidence, namely that the irregularities of certain L length of the semi-finished products will, in the course of processing, pertain to lengths $D \cdot L$ of the processed product. Here, D denotes the extent of the draft of the succeeding machine stage. Though there may be minor deviations, they have no significance, as may seen in the diagram. As the irregularity of the product emerging from every succeeding machine stage increases in general without doubling, and as the effective cross-sectional and the Martindale's ideal irregularities increase though for statistical reasons alone, we endeavoured to enlighten particularly the additional portion of the irregularity.

Symbols used

- $CB(L)$ = coefficient of variation based on the weight of L lengths of the product
 $CB(O)$ = CB = coefficient of variation based on the weight of 0 lengths of the product
 CB_i = coefficient of variation based on the weight of 0 lengths of the product on machine stage i
 CV_{\min} = the so-called limit or ideal (Martindale) value of the cross-sectional coefficient of variation of the product
 $CV_{i \min}$ = the ideal coefficient of variation of the product on machine stage i
 GW_i' = difference between the effective cross-sectional variation (CB_i) of the products emerging from successive machine stages according to *scale* (diagram).
 GW_i'' = geometric difference between the effective cross-sectional coefficient of variation (CB_i) of the product emerging from the individual machine steps and the „irregularity” of the ideal product ($CV_{i \min}$)
 GW_{i1} = incremental irregularity as against the ideal cross-sectional irregularity of the first product
 V_{fi} = $f(D, CV_f, \delta, r)$ = the additional irregularity which depends on the irregularity of the fibre length (CV_f), the draft (D), fibre association and entanglement (δ), the adjustment of the ratch of the drafting system (r = ratch) varies with each spinning schedule. i = denotes the machine stage.

V_m	= $f(v, e, m)$ = the additional irregularity, depending on the drafting velocity (v), the untrue drafting elements (e), and mechanical — constructional — properties (m). It varies with the different types of drafting systems.
\bar{n}_i	= average cross-sectional fibre number of the product delivered by machine stage i
l	= fibre length
λ	= wave length of periodical irregularities, i. e. periodical mass irregularities of spinning room products.

Relations of the between-length irregularity curves of spun yarns

When examining the products processed by a spinning mill, the spinnery team of the Textile Research Institute was confronted with the problem, to turn out a better quality of yarn out of the same raw material, with the existing set of machinery, in the yarn quality actually processed. The result of several months of work, based on statistical findings, is illustrated in Fig. 1. It refers to the spinning process of a system of three machine passages consisting of drawing frames, a flyer frame, and a ring spinning frame. No doubling occurred after the finisher drawing sliver up to the spinning of the Nm (metric number) 50 yarn. Before modifying the spinning plan — specifically count of products, setting, twist, etc. — the so-called between-length variance curve of each product was plotted partly with the help of an electronic capacitive tester and partly by statistical tests. As the electronic tester gave the readings of the mean linear irregularity measure called the U per cent, the statistical tests were likewise set to determine the mean linear irregularities rather than the absolute standard variance. The latter shall henceforth be likewise called „variance” or „irregularity”. Drawing up the variance curves based on various products in a log-log coordinate system, the diagram is generally a straight line tending downward from the horizontal, in other words it shows a negative slope. One by one the BL (or UL) curves of the sliver, the roving and the yarn were plotted, then, to make the aspect complete, the UL curve of sliver and roving were transformed to yarn-scale in log-log coordinate system. Conversion was simply made at draft ratio between sliver and yarn, and between roving and yarn respectively according to the process of spinning. For example, irregularity observed on 0,5 m lengths of the sliver may be assumed to pertain to 100 m length of yarn, providing the drafting rate is 200-fold. Fig. 1 shows the result of such transformation. The diagram of the UL curve of the sliver is displaced to the extreme right — in proportion to the draft — that of the roving in the middle area, and that of the yarn was plotted conventionally in the coordinate system.

The above figure is in several respects arbitrary, such arbitrament is, however, not gravely consequential, against this it is apt to fairly well enlighten the events occurring during the spinning process. Such arbitrary assumption was to consider the 8 mm electrode length — meaning lengthwise the product — of the electronic capacitive tester to be about 1 cm, and to regard the variance

value measured on the basis of that length to be the cross-sectional variance. Actually, the cross-sectional variance is bound to be somewhat larger, for it could only be determined where the electrode had the ideal zero length. The procedure was similar with rovings and slivers. Thus, a negative fault was consistently committed in each of the tests, that error is, however, certain to have a low order of magnitude. We shall revert to proving this postulate later.

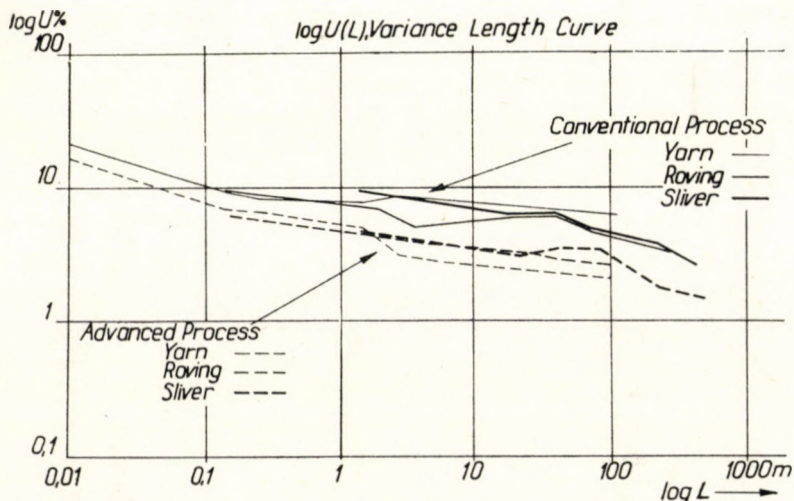


Fig. 1

On the other hand, when converting the variance diagrams of the sliver and the roving to the scale of the yarn, such variance values were considered to belong to a 1 cm length, in other words not to the cross section; the length which was converted to the scale of the yarn was chosen in such manner that the 1 cm length was multiplied by draft D , and to the resultant length, for example in the case of the sliver, the variance value was plotted. In this manner, two errors were deliberately committed, the permissibility of which may be subjected to doubt.

Theoretically, in the log-log coordinate system, at the cross-sectional variance rates, the diagram ought to turn into the horizontal line. In our tests, this was never actually observed. It must, however, be stated that in reality, the irregularities of lengths below 1 cm and between 1 and 14 cm cannot be correctly estimated. In this respect, we are compelled to have recourse to theoretical assumptions [1]. For example, the ideal linear variation curve pertaining to the yarn in Fig. 1 in the log-log coordinate scale is shown in Fig. 2.

In Fig. 1, the diagrams plotted side by side provide practical evidence of the fact that following the draft, the measure of variance pertaining to a certain

sliver length reappears in the $D. L$ length of the thinner product in proportion to the draft. In some places, the diagrams are in perfect agreement, the 2 or 3 lines of variance follow almost the same path, in other places they diverge. Such divergencies are, however, due also to technology, sampling or statistical causes. Obviously, the sliver that has once been measured (weighed) or possibly cut up into small lengths cannot be processed into a roving, nor can the tested roving be turned into yarn. In other words, random samples of cans of sliver, bobbins of roving and yarn are taken from a vast population, and are subjected

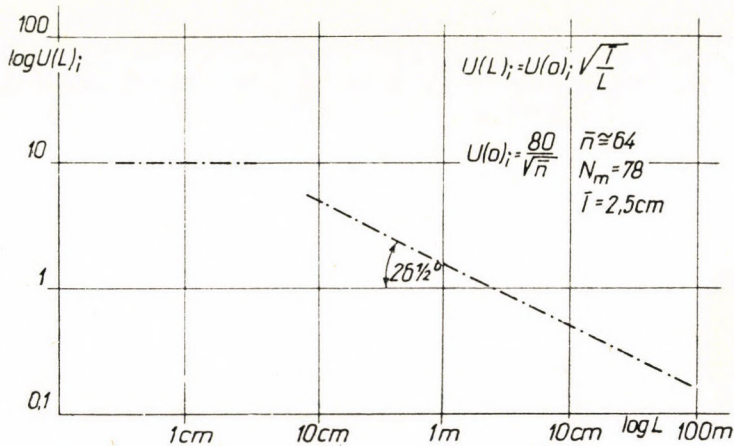


Fig. 2

to checking. Due to the difference of the irregularities of the various cans and bobbins, the variance curves do not overlap along their entire length. They substantiate, however, with good approximation the assumption that *when the yarn is processed without any doubling of the roving, the irregularities of the semi-finished product appear simply in proportion to the draft in the end product.* Fig. 1 illustrates two rows of curves and demonstrates at the same time that where we have succeeded in reducing the irregularities of the product on certain machine stages, a better end product is obtained. Fig. 1 demonstrates that the irregularity of *long yarn lengths* is most effectively influenced by the sliver irregularities. The findings of COX and INGHAM [4] substantiate this observation. In that kind of single flyer system spinning without doubling, a most even sliver must be prepared in order to yield a yarn of very even hank, with but slight numerical dispersion.

Neither the transformation (draft at the rate of the machine stages), nor the statistical laws are as simple as that where the roving is double-creeled on the ring spinning frame. In that case, doubling has a peculiar effect on the UL curve.

For example two test series performed with a given roving gave the following picture :

Testing a roving of Nm 3, the irregularities based on the following lengths were :

$U(0,009 \text{ m})$ $U(0,14)$ $U(0,26)$ $U(0,5)$ $U(1,5)$ $U(2,85)$ $U(5,5 \text{ m})$

A	6,3%	4,1%	3,8%	3,5%	3,2%	2,8%	2,6%
B	6,0%	5,3%	3,9%	3,1%	3,1%	2,9%	2,8%
measured on roving of Nm $3/2 = \text{Nm } 1,5$ (Nm 3 doubled)							
C	5,2%	3,1%	2,7%	2,4%	2,2%	2,0%	1,8%

Comparing the irregularities according to the approximate basic lengths corresponding to equal weights, the values :

$$\sqrt{x} = 1,16-1,2 \quad 1,3 \quad 1,33 \quad 1,27 \quad 1,3$$

were obtained, instead of $\sqrt{2} = 1,41$

$$\left[\text{for example : } \frac{\text{from line A } 2,8}{\text{from line C } 2,2} = 1,27 \right].$$

Supposing the values in line C belong to a double-creeled roving, i. e. to Nm $6/2$, the comparison would yield about the following values (per vertical columns) :

$$y = 1,22 \quad 1,32 \quad 1,41 \quad 1,46 \quad 1,45 \quad 1,40 \quad 1,44$$

In both instances, the effect of doubling was most favourably felt on great L yarn lengths.

Repeated tests led to the observation concerning the above sequence of numbers that whereas in short terms — say below $1/2 \text{ m}$ length — the favourable effect of doubling was often not over $1,1-1,2$ instead of the $\sqrt{2} = 1,41$ ratio. In comparatively longer pieces, the decrease of the irregularity was more marked. This led to another conclusion, namely that if we want to produce an even hank, — that is for example a low irregularity of the weight of 100 to 1000 m long pieces of yarn — doubling generally proved an efficient means.

Here, we must be content with merely referring to the irregularity decreasing effect of doubling on *short yarn lengths*. This problem has been widely discussed in full detail. The reducing effect depends on the roving structure, on the path of the roving, on the prevention from untwisting of the two rovings, the

mechanical imperfections of the drafting mechanism, and *last but not least on the drafting rate*. In this context, it should be mentioned that in a conventional drafting system, a high draft that was likely to abolish all evening effect of doubling, was possible. This may be enough to indicate the highly involved nature of the problem, which will be discussed only as and when necessary.

The cross-sectional irregularity points (that can be approximately determined) of the transformed *UL* curves were found to be in general located on

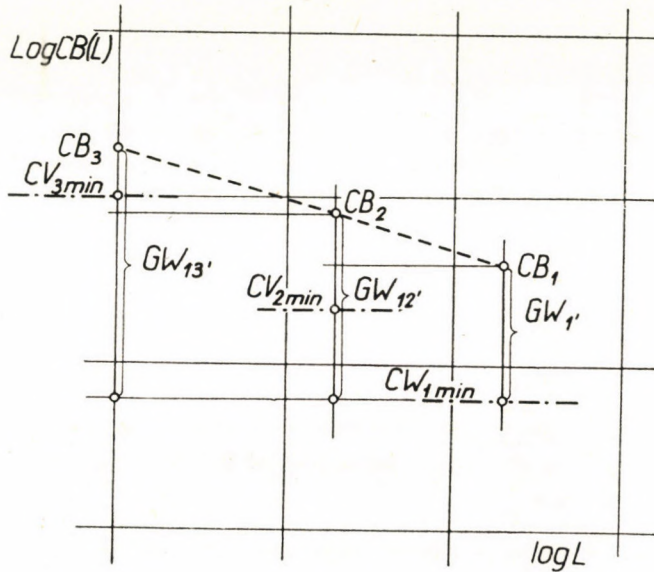


Fig. 3

a straight line. A curve traced approximately through these points would, in most cases, be concave from above (Fig. 4), but where the spinning process gave very good results (in cotton combed spinning process), it was convex. Henceforth, we shall restrict our examinations to these cross-sectional irregularity points, being the most characteristic points of the products delivered by various machine stages. Figs. 3 and 4 illustrate this, using the symbols listed in the table above, but generally symbols adopted in the literature were also employed. A curve of the levels of the ideal cross-sectional variation (quadratic) of the different products has also been plotted.

The theoretical, ideal irregularity of the drafted roving, according to MARTINDALE, is

$$CV_{1 \min} = \frac{100}{\sqrt{\bar{n}_1}}$$

actually (according to HUBERTY) $CB_i = k_i \frac{100}{\sqrt{\bar{n}_i}}$.

Where the additional irregularity resulting from the imperfection of the mechanical parts and other reasons was $GW_{1'}$ on the first machine stage, according to the law of geometrical addition

$$GW_{1'} > GW_{1'} \quad (1)$$

This is similarly valid for the other machine stages. On the other hand, it can be written for the product of the first machine stage that

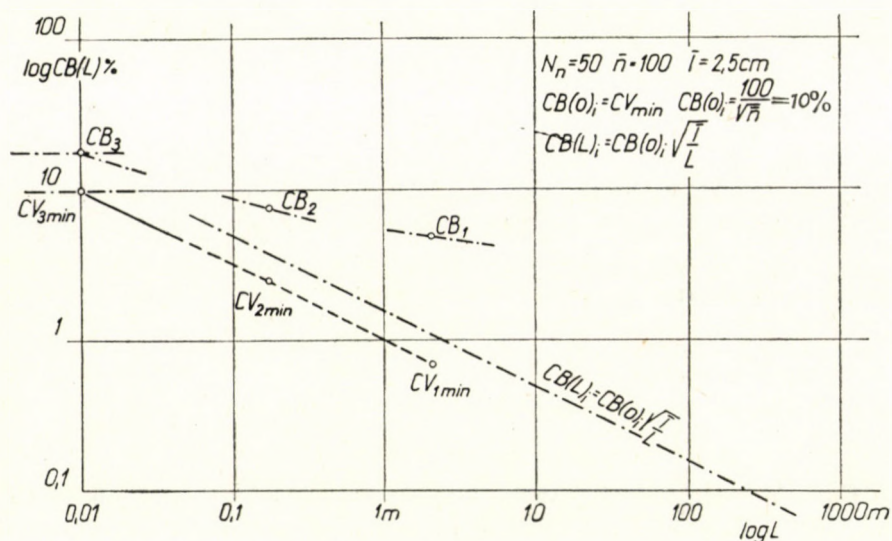


Fig. 4

$$GW_{1''} = \sqrt{V_{m1}^2 + V_{f1}^2} \quad (2)$$

where

V_f = depends on the raw material and preparation

V_m = a function of the machine quality and of the setting; for closer explanation see under „Symbols used“.

The relation between the variables and their respective margins of error is partly known and partly still under scrutiny [2, 3]. It is empirically known that the greater for instance the irregularity of the fibre length, i. e. CV_f , the greater the product's irregularity after drafting. The thinner the drafted product (high rates of D), the more its quality is impaired [2], that is the higher the rate of the additional irregularity.

Several equations can be written on the base of Fig. 3.

Table I.

For the third machine stage we can write :

$$CB_3^2 = \frac{10^4}{\bar{n}_3} + V_{f3}^2 + V_{m3}^2$$

$$CB_3^2 = \frac{10^4}{\bar{n}_3} + GW_{3'}^2$$

$$CB_3^2 = \frac{10^4}{\bar{n}_1} + \sum_{i=1}^3 V_{fi}^2 + \sum_{i=1}^3 V_{mi}^2 \quad (3)$$

in general

$$CB_i^2 = \frac{10^4}{\bar{n}_1} + \sum_{i=1}^z V_{fi}^2 + \sum_{i=1}^z V_{mi}^2 \quad (4)$$

For the second machine stage :

$$CB_2^2 = \frac{10^4}{\bar{n}_2} + V_{f2}^2 + V_{m2}^2$$

$$CB_2^2 = \frac{10^4}{\bar{n}_2} + GW_{2'}^2$$

For the first machine stage :

$$CB_1^2 = \frac{10^4}{\bar{n}_1} + V_{f1}^2 + V_{m1}^2$$

$$CB_3^2 = GW_{13}^2 + \frac{10^4}{\bar{n}_1}$$

in general

$$CB_i^2 = GW_{1i}^2 + \frac{10^4}{\bar{n}_1} \quad (5)$$

$$CB_2^2 = GW_{12}^2 + \frac{10^4}{\bar{n}_1}$$

$$CB_1^2 = \frac{10^4}{\bar{n}_1} + GW_{1'}^2$$

$$GW_{1'}^2 = V_{f1}^2 + V_{m1}^2$$

Equations (3) and (5) can be brought in connection, and where CB_i is known and measurable, a few calculations can be performed for information.

Choosing a few data :

Assuming that the material processed is cotton of Nm 5000 fineness,

$$\text{let } Nm_1 = 0,25 \quad \text{in that case } \bar{n}_1 = 20,000$$

$$Nm_2 = 3,0 \quad \text{,, } \bar{n}_2 \cong 1,660$$

$$Nm_3 = 5,0 \quad \text{,, } \bar{n}_3 = 100$$

The cross-sectional irregularity measured with an electronic instrument CB_3 was found to be 18 per cent.

According to equations (3) and (5) of Table I

$$\boxed{CB_3^2} = \frac{10^4}{\bar{n}_3} + GW_{3'}^2 = \boxed{18^2} \quad (3)$$

$$CB_3^2 = \frac{10^4}{\bar{n}_1} + GW_{13}^2 = 18^2. \quad (5)$$

Substituting the above values one by one, we obtain

$$GW_{13} \cong 18\% \quad \text{and}$$

$$GW_{3^*} \cong 14,9\%$$

wherefrom it follows that the additional irregularities arising on the third machine stage enumerated in equation (2) influence the irregularity of the finished product by an increment of V_{f3} and $V_{m3} = 14.9$ per cent.

Where the measured cross-sectional irregularity of the products emerging from the first and second machine stages is found to be

$$GB_1 = 5\%$$

it results for the first machine stage that

$$GW_{1^*} \cong 5\%$$

and where on the second stage (flyer frame)

$$GB_2 = 7,5\%$$

we obtain

$$GW_{12} \cong 7,5\%$$

$$GW_{2^*} \cong 7,1\%$$

Tabling the above values :

Table II

Machine stages	3	2	1
GW_{1i}	$\sim 18\%$	$\sim 7,5\%$	$\sim 5\%$
GW_{i^*}	$\sim 14,9\%$	$\sim 7,1\%$	$\sim 5\%$
CB_i	18%	$7,5\%$	5%
CV_{ideal}	10%	$2,45\%$	$0,7\%$

Connecting equations (4) and (5) we obtain

$$GW_{1i}^2 = \sum_{i=1}^z V_{fi}^2 + \sum_{i=1}^z V_{mi}^2. \quad (6)$$

Expressed in words, the above means that all additional irregularity is due to fibre properties and to mechanical causes. This, however, cannot hold good entirely, because the calculated figures in Table II show that only a *far smaller portion can be influenced*. The extent of that portion

$$GW_{i''}^2 = V_{fi}^2 + V_{mi}^2. \quad (7)$$

Numerically

$$GW_{1i} > GW_{i''}.$$

Table II also shows that the diminution of the irregularities can be most effectively influenced on the first machine stage. This has been generally observed in recent decades by many researchers and practical experts. The most convincing example herefore is the Rapper Autoleveller, which diminishes sliver irregularity on the first drawing frame.

But even apart from this, Fig. 3 and the equations (5) and (6) quoted above provide a logically convincing evidence. Owing to the D -fold draft — that in contemporary shortened spinning systems may be 200-fold — the sliver's cross-sectional irregularity will appear in the yarn in lengths of about 2 m. When checking the yarn tensile strength, the clamped length is 0,5 m; it is consequently obvious that a sliver having greater cross-sectional irregularity *predetermines* greater tensile strength dispersion and lower average tensile strength. As has been seen above, this may be but slightly improved by doubling.

The length of product, beyond which doubling is definitely beneficial can be appraised by the following method. Let us apply D -fold draft on one machine stage. Assuming that a drafting fault occurs in the drafting system's first field, this is bound to appear in the length of product corresponding to ratch r . Such mass deviation can increase only in the ratio of the total draft at the most.

In a treatise, HANNAH and RODDEN discussed the case where the position adopted by the fibre after drafting complies with a restricted *Poisson* law [7]. They stated that the two extreme positions which a specific fibre of l length can adopt in the drafted product can be $(D-1) \cdot (r-l)$ distance apart. In other words, the fibre position does not comply with *Poisson's* law, but its dispersion is restricted.

Adopting their theory, we must count with the occurrence of even more extreme positions. After drafting, the fibres may not follow the *Poisson* law, but may for example take up a U -shape dispersion. Thereby also the possibility of the periodic recurrence of such pattern, thus $UUUUU$ etc. must be admitted.

This would result in maximum and minimum mass loci in the drafted product, but at the same time also an average could be derived. Denoting the distance $(D-1) \cdot (r-l)$ by λ , the irregularity produced by such mass variations ($-CB(L) -$) will decrease according to the following equation [8]:

$$CB(L) = CB(0) \frac{\sin \frac{L\pi}{\lambda}}{\frac{L\pi}{\lambda}}$$

where L is the length of product, to which the pertinent value of irregularity is examined. By simply substituting the values, it is readily demonstrated that the irregularity of $L = (2-3) \cdot \lambda + \frac{\lambda}{2}$ lengths increases the irregularity values computed according to the ideal random regularity pattern only very slightly, for where „ i ” increases, according to the above equation, the irregularity of $L = i \cdot \lambda + \frac{\lambda}{2}$ lengths $-CB(L) -$ rapidly decreases.

For example, in case $r = 40$ mm and $l = 30$ mm, at draft 15, $\lambda \approx 14$ cm, and thus the additional irregularity of $L = 35 - 49$ cm lengths $\left(i \cdot \lambda + \frac{\lambda}{2}\right)$ has no significance any more. It may be seen in Fig. 1 that at shorter L lengths, no such additional irregularity was observed either between sliver and roving, or between roving and yarn.

The deteriorating effect of the drafting system is even less effective in respect of great L lengths. For example, let us weigh the ingoing material passing through the system every half hour. Hardly any difference will be observed between the weight of the material fed in and the delivered material during the periods of observation. Today, a fairly accurate picture is obtained of the irregularities of the products, of the deteriorating effect of the various machine stages by testing. Based on them, better spinning processes can be developed. This is demonstrated by the lower row of curves in Fig. 1.

By reducing the mechanical faults of the first machine step, and by a new system of sliver doubling* that has been statistically proved, we succeeded in reducing

- a) cross-sectional irregularity, and
- b) the long term irregularities.

* 6 cans of the outgoing material delivered from each preceding drafting frame (from head 1 to head 6 inclusive), processed simultaneously, are pieced up together to one head of the next drawing frame. This is repeated at the successive stages. This method may be employed where the number of the heads is equal to the number of the cans pieced up to each head.

Comparatively low values in Table II were obtained with the sliver of Nm 0.36. This involved the diminution of the irregularity of long yarn lengths. Also yarn cross-sectional irregularity diminished, as may be seen in Table I and Fig. 3. The significance of this is simply that on each spindle of the same ring spinning frame — for example about yarn count Nm 50 — less broadly dispersed hanks were spun, and consequently ends down diminished and the average tensile strength increased.

Conclusions

An attempt was made to reveal the interrelation of the *BL* and *UL* curves of the different machine stages.

It was attempted to appraise the effect of doubling.

The cross-sectional irregularity of the product issuing from the system is only influenced favourably (reduced) by doubling, if the necessarily higher draft of the doubled product does not increase the irregularity beyond the reducing effect. Where, before drafting, a markedly thinner product is doubled, the cross-sectional irregularity of which is at the very first low: the cross-sectional irregularity of the emerging product can be diminished.

Doubling was found to be beneficial for the irregularity of comparatively long pieces. This benefit is forfeited with most of the shortened spinning methods, unless the material is double-creeled on the ring spinning frame. Hence the relatively broad yarn number (hank) deviation (based on 100 or 1000 m basic lengths).

Similarly, it has been endeavoured to determine the length of the product influenced by a given draft on a given drafting mechanism, establishing the length below which the irregularities can be diminished by the technical improvement of the drafting unit.

Our findings coincided with those of designers of novel constructions and of researchers.

Although there is no need here for quoting reasons, we would mention that small irregularities of great *L* lengths of the sliver must be corrected by laps of equal weight on the previous machine stage.

In the light of the above, new, up-to-date spinning methods can be developed. Preferably, drafting systems should be used that increase the short term irregularities only as far as indispensable. That — and shorter — lengths depend on the fibre length *l*, the ratch, and the draft *D*. Irregularities pertaining to the greater *L* lengths must be reduced at the very first spinning stages. It appears that a system where doubling would be increasingly applied towards the finishing stages, would yield more favourable results.

In due consideration of the foregoing, the total draft required for a product should be distributed over the various machine stages in line with the drafting

system's perfection. For sake of the quality, the spinning process can be rationally modified according to a schedule. Plotting the results of the test outlined above provides a means for comparing and examining the distribution of the draft on the individual machine stages in relation to the additional irregularity. Based on them, at given raw materials and drafting systems, the number of machine passages can be kept within certain limits and the improvements necessary for the drafting device of the machine stages can be made.

REFERENCES

1. OLERUP, H. : The calculation of the variance length curve for an ideal sliver. The Journal of the Textile Institute 1952. P. p. 290.
2. CAVANEY and FOSTER, G. A. R. : The irregularity of materials drafted on cotton spinning machinery and its dependence on draft. The Journal of the Textile Institute 1955. Vol. 46 T. pp. 529—564.
3. FOSTER, G. A. R. and TYSON, A. : The amplitudes of periodic variations caused by eccentric top drafting rollers and their effect on yarn strength. The Journal of the Textile Institute 1956. Vol. 47 T. p. 385.
4. COX, D. R. and INGHAM, I. : The Journal of the Textile Institute 1950. Vol. 41. P. p. 397.
5. BRAY, R. I. and CARTER, E. G. : The Journal of the Textile Institute 1951. Vol. 42, P. p. 372.
6. ANDERSON, F. : Auto leveller gives more uniform top. Textile World 1955. 105, No. 9, pp. 128—129.
7. HANNAH, M. and RODDEN, S. : Variance length relations in a yarn with restricted variation in fibre position. The Journal of the Textile Institute 1956. T. p. 402.
8. LOCHER, H. : The spectrograph "Uster". A new means for analysing irregularity. (Manuscript of the Zwollweger Ltd.) Dec. 1954.

SUMMARY

In developing new spinning methods, unavoidable statistical and theoretical laws are frequently overlooked. Consequently, mill production safety is forfeited, particularly with the so-called shortened spinning processes. The characteristics of the products hardly satisfy the earlier quality characteristics, or even fall short of them.

Presenting certain theoretic correlations, those — partly theoretic and partly practical— results that serve for testing cotton or wool drafting systems, for distributing the draft over the system, and for more closely controlling the quality of the product, have been reviewed.

A picture has been given of the role of long term irregularities of the product — generally known as the dispersion of hanks — as well as of cross-sectional irregularities according to machine stages, pointing out the increased duty imposed on the remaining stages by discarding certain machine stages and doubling. It appears desirable to shift the doubling closer towards the end product.

The variance curves plotted in a cotton spinning mill before and after the improvement of the machinery have been presented.

DISKUSSION DER THEORETISCHEN UND PRAKTISCHEN ZUSAMMENHÄNGE BEI SPINNPLÄNEN

L. B. A. GANGLI

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Entwicklung der neueren Spinnverfahren wird oft so vorgegangen, dass die unausweichlichen statistischen und theoretischen Gesetzmässigkeiten ausser Betracht gelassen werden. Dies hat zur Folge, dass insbesondere bei den sogenannten abgekürzten Spinnverfahren die Betriebssicherheit verloren geht. Die Kennwerte der Erzeugnisse erreichen kaum oder überhaupt nicht die früher erreichten Qualitätskennziffern.

In der vorliegenden Arbeit werden nebst Darlegung gewisser theoretischer Beziehungen jene teils praktischen, teils theoretischen Ergebnisse zusammengefasst, bei deren Verwendung die Spinnverfahren — sowohl bei einem Maschinenpark vom Baumwoll- als auch einem solchen vom Schafwolltypus — kontrolliert, die Verzüge verteilt und die Qualität des Erzeugnisses vorteilhaft beeinflusst werden können.

Der Verfasser wünscht sowohl über die Bedeutung der Ungleichmässigkeiten der Langen Produktstücken — die mehr als Streuungen der Feinheitsnummer bekannt sind — als auch die Querschnittsungleichmässigkeiten, je Maschinenstufe, ein Bild geben; ferner wünscht er darauf hinzuweisen, welche gesteigerte Aufgaben das Auslassen von Maschinenstufen und Doublierung für die verbliebenen bedeutet. Es ist geraten, die Doublierung gegen das Endprodukt hin zu verschieben.

In der Arbeit werden auch die Varianzkurven einer Baumwollspinnerei vor und nach Einstellung der Maschinen veröffentlicht.

L'EXAMEN DES RELATIONS THÉORIQUES ET PRATIQUES DES PLANS DE FILATURE

B. GANGLI

RÉSUMÉ

Lors de l'établissement de nouveaux procédés de filage, on procède très souvent sans tenir compte de certaines lois statistiques et théoriques inéluctables. Dans les systèmes de grand étirage surtout, il en résulte une perte de sécurité, et les propriétés des produits n'atteignent guère alors celles obtenues auparavant, ou restent bien inférieures à celles-ci.

Après l'exposé de certaines relations théoriques, l'auteur résume les résultats tant pratiques que théoriques, dont l'utilisation permet de contrôler les systèmes de filature (qu'il s'agisse d'installations de filature de coton ou de laine), de répartir les étirages et de mieux maintenir fixe la qualité du produit.

L'auteur offre une idée du rôle des dispersions du numéro de finesse et des irrégularités du diamètre à chaque passage, et souligne qu'avec la suppression d'un certain nombre de passages et de doublages, un rôle bien plus grand doit revenir aux phases de travail conservées. La place des doublages devrait être décalée vers le finissage.

L'étude présente aussi les courbes de variation d'une filature de coton, établies avant le réglage, et après transformation des machines.

ОЦЕНКА ПРАКТИЧЕСКИХ И ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПЛАНА ПРЯДЕНИЯ

Б. ГАНГЛИ

РЕЗЮМЕ

При разработке новых методов прядения очень часто упускают из виду те статистические и теоретические закономерности, которые нельзя избежать. Вследствие этого в особенности в случае т. н. сокращенных систем прядения теряется надежность производства. Показатели продукции или еле-еле или же совершенно не удовлетворяют ранее достигнутых качественных показателей.

В работе наряду с показом определенных теоретических отношений дается обобщение тех частично практических, а частично теоретических достижений, с использованием которых представляется возможным контролировать системы прядения как в случае парка машин для хлопчатобумажной пряжи, так и шерстяной, далее распределять растяжку, более надежно регулировать качество продукции.

Ставилась цель дать картину о роли на отдельных переходах лонгитудальной неровноты (рассева тонины), а также поперечных неровнот, и указать на то, что упущение агрегатов и дублировки какие именно задачи возлагают на оставшиеся. Место дублировок было бы рекомендуемым сдвинуть в сторону конечного продукта.

В работе одновременно приводятся вариационные кривые до производства регулирования в хлопчатобумажном прядильном цехе, затем после выполнения соответствующей реконструкции машин.

DYNAMISCHE ANALYSE DES WEBEVORGANGES

Prof. M. ZILAHÍ

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT, LEHRSTUHL FÜR TEXTILTECHNOLOGIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 15. Februar 1957]

In der Weberei sind anormale Schwingungen des Kettbaumes, ferner angewachsene resonanzartige Schwingungen der Bremsgewichte häufig zu beobachten, die den Webevorgang, die Produktion, weiterhin die Lebensdauer des Webstuhles — wenn auch nur vorübergehend, da sie mit der Abnahme des Kettbaumes bzw. mit der Verringerung der Bremsgewichte wieder aufhören — nachteilig beeinflussen.

Anderweitige Untersuchungen des Verfassers beweisen, dass — neben allen Parametern der Einstellung — der dynamische Einfluss von Kettbaum und Bremsgewichten auch bei der Beurteilung der Kettspannung eine beachtliche Rolle spielt. So ist die dynamische Analyse der, während des Webens auftretenden Kettspannung eine solche neue Methode, mit der man vom Einfluss der Massenwirkungen ein umfassendes Bild gewinnen kann. Die dynamischen Untersuchungen werden mittels Analyse der Schwingungsvorgänge des Kettsystems durchgeführt.

F. STEIN erkannte den, auch vom Gesichtspunkte der Schwingungslehre komplizierten Vorgang des Webens und beschrieb ohne analytisch-dynamische Zergliederung den Charakter der erwähnten Schwingungen [3].

Eine angenäherte dynamische Analyse hat zuerst KELLER vorgenommen [1]. Er analysiert ein vereinfachtes Modell der Kettbaumbremse, wobei der Abschnitt des fixierten Bremsseiles sowie die Elastizität des gesamten Bremsseiles vernachlässigt wird. In seinen Untersuchungen benutzt er die, aus dem Spannungs-Dehnungsdiagramm bestimmbare statische Federkonstante des Kettsystems.

Infolge der erwähnten Vernachlässigungen hat KELLER in seiner Schwingungsanalyse des Webevorganges hinsichtlich des Spannungsverlaufes keine prinzipiellen Feststellungen gemacht, mit der Nachweisung der kritischen Tourenzahl des Webstuhles und der Möglichkeit der Resonanz hat er aber auf die Webstuhlkonstrukteure und Technologen richtunggebend eingewirkt.

1. Bewegungsgleichungen des Kettensystems

Die den Webevorgang begleitende dynamische Kettspannung entsteht, wie im folgenden bewiesen wird, aus der Überlagerung der Fachbildungs- und Blattanschlagspannung, die bei gewissen Bedingungen von einander unabhängig sind.

Die Offenfachspannungen treten infolge der dynamischen Wirkungen der, die Fachbildung begleitenden Veränderungen der Kettlänge, des elastischen

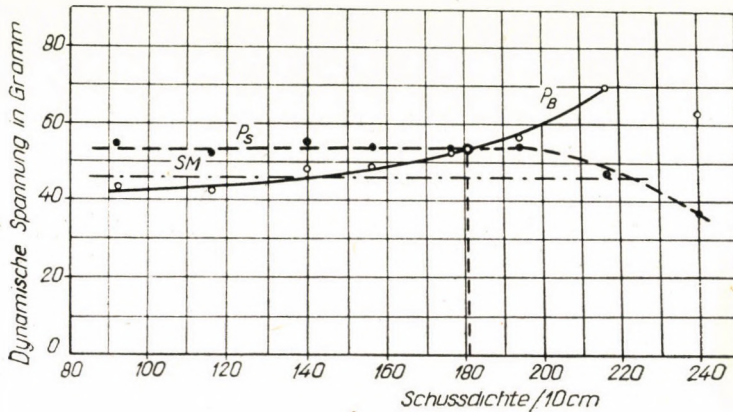


Abb. 1

Kettensystems sowie der, mit dem Kettensystem verbundenen Massen auf. Die Fachbildung als Erregerwirkung versetzt den Kettbaum und die mit ihm verbundenen Bremsgewichte in erzwungene Schwingungen.

Der Blattanschlag überlagert sich der durch die Fachbildung entstehenden Grundschwingung des Kettbaumes und erscheint in Form stark gedämpfter Schwingungen bloss über eine gewisse Dichtegrenze. Bei normalen Webebedingungen sind die Amplituden dieser Schwingungen immer kleiner als die Amplituden der durch die Fachbildung entstehenden Schwingungen.

Wie bei der grossen Anzahl von Kettspannungsmessungen festgestellt werden konnte, [2], sind die Änderungen der Anschlagspannungshöchstwerte für die angewandten Webebedingungen charakteristisch, unter einer gewissen Dichtegrenze beeinflussen die Anschlagspannungen jedoch die bei der Fachbildung auftretenden Spannungsverhältnisse nicht. Dies veranschaulicht Abb. 1, wo bei symmetrischer Fachbildung die Änderung des Anschlagmaximums (P_B) und des Offenfachmaximums (P_S) in Abhängigkeit von der Schussdichte dargestellt ist.

Aus der Abb. 1. ist zu erkennen, dass die Offenfachhöchstwerte trotz des Anwachsens der Schussdichte und des Anschlagspannungshöchstwertes bis zur sogenannten kritischen Dichte, wo die Anschlagspannung den Wert des Offenfachspannungshöchstwertes erreicht,

konstant ist. Die Verminderung des Offenfachmaximums ist der Beweis für das Auftreten anormaler Webebedingungen, denn wie aus dem Oszillogramm festzustellen war, wird die Verminderung des Offenfachmaximums vom Kettenschlag beim Anschlag verursacht.

Deshalb kann unter der angegebenen kritischen Dichte die dynamische Analyse der, während des Webens auftretenden Fachspannungen, ohne Berücksichtigung der Anschlagwirkung, durchgeführt werden. Die dynamischen Untersuchungen der Fachspannungen bei leichten Geweben und solchen mittlerer Dichte, spiegeln die wirklichen Verhältnisse wider.

Abb. 2 veranschaulicht das der analytischen Zergliederung dienende Schwingungssystem.

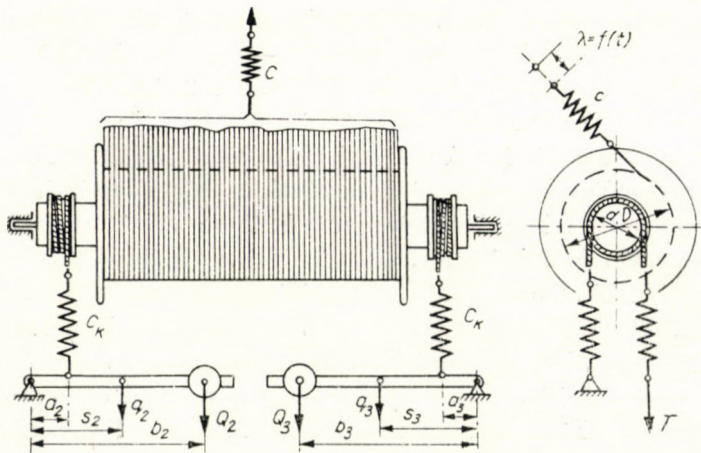


Abb. 2

Das mit der elastischen Kette verbundene Schwingungssystem, kann durch entsprechende Änderungen in ein, vom Gesichtspunkt der Schwingungslehre aus konzentrierten Massen bestehendes mehrmassiges Schwingungssystem umgestaltet werden, das dem ursprünglichen gleichwertig ist.

Im untersuchten Schwingungssystem können die vom Kettbaum ablaufenden N zählige Kettfäden als parallel geschaltete Federn mit Federkonstante c_f angesehen werden, während das Gewebe als massenlose Feder mit Konstante c_s aufgefasst werden kann, die durch ihre Resultante mittels gleichfalls massenloser Feder mit Konstante c ersetzt werden kann. Die während des Webens durch die Fachbildung periodisch auftretende und aufgehörende Schwankung der Kettlänge $\lambda = f(t)$ erregt über die Feder mit Konstante c den Kettbaum mit dem Trägheitsmoment θ_1 zu erzwungenen Drehschwingungen.

Das Bremsseil umschlingt mehrfach die Bremscheibe. Ein Ende des Bremsseiles ist mit dem Bremsarm und der Bremscheibe des Kettbaumes, das andere Ende des Bremsseiles ist mit dem Webstuhlgestell verbunden; beide freien Seilzonen können als massenlose Feder mit der Konstante c_k angesehen werden.

Das beschriebene, mehrmassige Schwingungssystem zeigt, mit den tatsächlichen Verhältnissen des Kettbaumes verglichen, Vereinfachungen. Die eingeführten vereinfachenden Bedingungen sind folgende :

1. die Vernachlässigung der Wirkung des Blattanschlages. Bei Geweben, deren Dichte unter der kritischen Dichte liegt, werden nämlich die beim Weben auftretenden Verhältnisse durch den Blatteinschlag nicht wahrnehmbar beeinflusst ;

2. der Kettnachlass, bzw. das Gleiten des Bremsseiles, welche den Ersatz der zur Gewebbildung verwendeten Kettenlänge notwendig machen, wird vernachlässigt und die zeitweise gleitende Reibungsverbindung durch eine starre Verbindung ersetzt. Das Verfahren ist grundsätzlich begründet, denn es werden — wie festgestellt werden konnte — bei den Betriebstourenzahlen des untersuchten Baumwollwebstuhls die Gesetzmässigkeiten der Kettbaumschwingungen vom Kettnachlass nicht beeinträchtigt [2] ;

3. bei den analytischen Untersuchungen werden die Reibung der Kettfäden am Streichbaum, sowie die zur Drehung des kugelgelagerten Rohr-Streichbaumes nötigen Impulse weiters die Reibung des 10 mm starken Kettbaumzapfens nicht berücksichtigt.

In dem in Abb. 2 dargestellten kombinierten mehrmassigen Schwingungssystem vollführt der Kettbaum Drehschwingungen, die Bremsarme dagegen Längsschwingungen. Das kombinierte Schwingungssystem kann durch Reduktionen von einem gleichwertigen System ersetzt werden, das entweder Drehschwingungen oder Längsschwingungen ausübt. Für die Untersuchungen wird ein Längsschwingungen vollführendes Ersatzsystem gewählt, wobei die Reduktion bei den Federn auf Grund der gleichwertigen Arbeitsleistung, bei Massen jedoch auf Grund des gleichwertigen Schwingungsprinzips durchgeführt wird.

Das gleichwertige Schwingungssystem ist in Abb. 3 dargestellt, wo auch die reduzierten Elemente des gleichen Systems bezeichnet sind.

In dem durch Reduktionen erhaltenen gleichwertigen Schwingungssystem wirkt die Erregung $\lambda=f(t)$ am freien Ende der Feder mit Konstante c , die das Kettssystem ersetzt. Ausserdem steht das ganze Schwingungssystem unter der Einwirkung des Schwerfeldes, daher wird ausser der Umdrehungsbewegung des Kettbaumes — dessen Gewicht die Reaktionskräfte des Zapfenlagers ausgleichen — auch das Eigengewicht jeder Ersatzmasse berücksichtigt.

Die auf die Masse m_2 wirkende Schwerkraft

$$T_2 = \frac{1}{a_2} (Q_2 b_2 + q_2 s_2) \frac{d}{D}$$

auf die Masse m_3 wirkende Schwerkraft

$$T_3 = \frac{1}{a_3} (Q_3 b_3 + q_3 s_3) \frac{d}{D}$$

wobei q_i = das Eigengewicht der Bremsarme,

s_i = der Abstand des Schwerpunktes der Bremsarme vom Drehpunkt ist.

Die mechanischen Verhältnisse des so aufgebauten Mehrmassen-Ersatzschwingungssystems stimmen mit denen des ursprünglichen Systems sinn-gemäss überein.

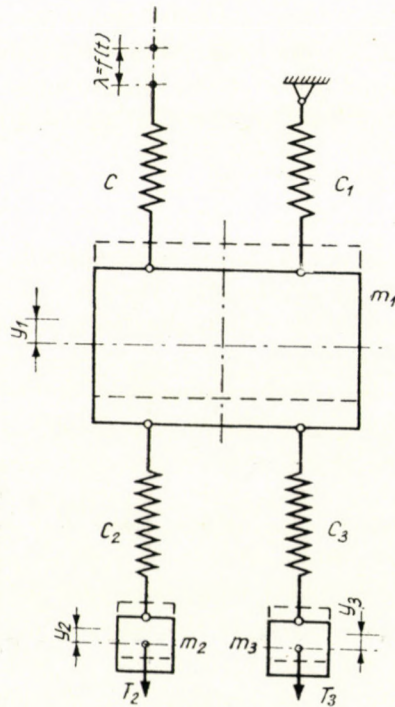


Abb. 3

Die Bewegungsgleichungen mit den Bezeichnungen der Abbildung 3 :

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \frac{f(t) - y_1}{c} - \frac{y_1}{c_1} - \frac{y_1 - y_2}{c_2} - \frac{y_1 - y_3}{c_3} \\
 m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= \frac{y_1 - y_2}{c_2} - T_2 \\
 m_3 \frac{d^2 y_3}{dt^2} &= \frac{y_1 - y_3}{c_3} - T_3
 \end{aligned} \tag{1}$$

wobei y_i = die Verschiebung des Schwerpunktes der Masse m_i ist.

2. Der analytische Ausdruck der Erregerwirkung $\lambda=f(t)$

Zur dynamischen Analyse ist der analytische Ausdruck der Erregerwirkung $\lambda=f(t)$ notwendig.

Die während des Webens auftretende Erregerwirkung ist eine Folge der Fachbildung. Bei der Fachbildung heben die Schäfte mit bestimmter Gesetzmässigkeit $h=f(\omega t)$ den Fadenabschnitt zwischen den Fadenendpunkte $A-B$ (Abb. 4), so dass die Fäden eine gebrochene Linie ACB bzw. $AC'B$ bilden. Bei festem Streichbaum ist der angenäherte Zusammenhang zwischen der augenblicklichen Fachhöhe (h) und der auftretenden Überschusslänge (λ):

$$\lambda = h^2 \frac{l_1 + l_2}{2 l_1 l_2}$$

Mit diesem Zusammenhang errechenbare Werte nähern sich bei fixierten Fachendpunkten $A-B$ gut den genauen Werten.

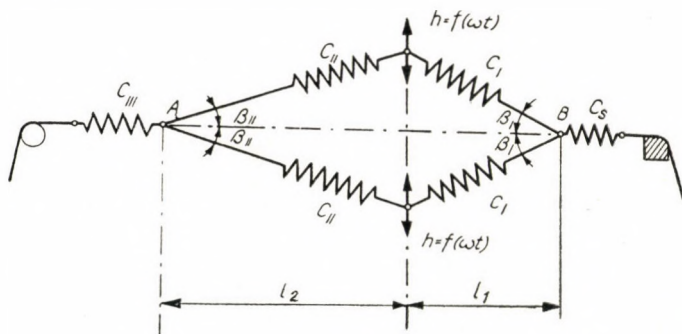


Abb. 4

Bei der dynamischen Analyse kann obiger Zusammenhang nicht angewendet werden, einesteils wegen den in Abb. 4. bezeichneten elastischen Elementen — welche die Verschiebung der Fachendpunkte ermöglichen — andernsteils wegen dem die Überschusslänge vermindernenden Einfluss des beweglichen Streichbaumes, resp. wegen des toten Spieles der Litzen und deren Durchbiegung.

Für die dynamische Analyse wurde der Zusammenhang $\lambda=f(t)$ auf experimentellem Weg festgestellt. Am Webstuhl wurde an Stelle eines ausgewählten Kettfadens ein Bronzdraht von 0,2 mm Durchmesser eingezogen, dessen Ende am Warenabziehbaum befestigt wurde. Das in Richtung zum Kettbaume liegende Ende des Drahtes wurde am Gleitkontakt eines entsprechend ausgebildeten Kreispotentiometers befestigt und der Zusammenhang $\lambda=f(t)$ bei normalem Betrieb des Webstuhls von einem Oszillographen registriert.

Durch Auswertung von 30 Perioden des Oszillogrammes, das die Schwankung der bei der Fachbildung auftretenden Kettüberschusslänge-Schwankungen angibt, konnte der Zusammenhang $\lambda=f(t)$ festgestellt werden. Letzteres geschah durch gleichzeitige Aufnahme eines Zeitimpulses und durch die Bildung des Durchschnittes der zusammengehörenden Ordinatenwerte. Aus der so gewonnenen Kurve wurde mit Hilfe harmonischer Analyse eine Fourierreihe gebildet.

Die charakteristische Eigenschaft der auf experimentellem Wege festgestellten Erregerwirkung ist, dass die Halbwellen in bezug auf Form und Amplitude übereinstimmen und zur Mittelordinate symmetrisch sind. Daraus folgt, dass die Resultantkurve $\lambda=f(t)$ durch Überlagerung der ungeraden Harmonischen entsteht, resp. bedeutet, dass die Fourierreihe nur Kosinuskomponenten enthält

$$\lambda = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos k \omega t$$

wobei :

$$k = 1, 2, 3 \dots m$$

$$\omega = \frac{n}{9,55}$$

n = die Tourenzahl des Webstuhls.

Tafel I zeigt den Vergleich der auf Grund des Oszillogrammes gewonnenen Werte des Zusammenhanges $\lambda=f(t)$ und auch die Ordinatenwerte der Resultante der aus 24 Gliedern bestehenden Fourierreihe.

Tafel I

ωt_i	15°	30°	45°	60°	75°	90°
λ errechnet in mm	0,2842	0,8742	1,5597	2,1927	2,8683	3,2854
λ gemessen in mm	0,3100	0,8800	1,5500	2,2000	2,8600	3,3000
$\Delta \lambda = \lambda$ errechnet - λ gemessen	-0,0258	-0,0058	0,0097	-0,0073	0,0083	-0,0146
ωt_i	105°	120°	135°	150°	165°	180°
λ errechnet in mm	3,5689	3,6415	3,7075	3,6883	3,6604	3,6431
λ gemessen in mm	3,5600	3,6500	3,7000	3,7000	3,7000	3,7000
$\Delta \lambda = \lambda$ errechnet - λ gemessen	0,0089	-0,0085	0,0075	-0,0117	-0,0396	-0,0569

Bei der dynamischen Analyse kann angenommen werden, dass die Erregerwirkung $\lambda=f(t)$ auf den Endpunkt des Kettsystems wirkt. In bezug auf die Wirklichkeit bedeutet das eine Vereinfachung, weil dadurch die von der augenblick-

lichen Fachhöhe abhängigen Federkonstanten der in Reihe bzw. parallel geschalteten Federelemente der Fachteile durch Elemente konstanter Federkonstanten ersetzt werden. Bei der Prüfung der Wirkung der Anwendung dieser vereinfachenden Voraussetzung ist folgendes festzustellen:

Die resultante Federkonstante des Kettensystems ergibt nach den Bezeichnungen der Abbildung 4:

$$c = c_s + c_{Ier} + c_{IIer} + c_{III}$$

wobei gemäss dem Zusammenhange für Federn mit geneigter Wirkungslinie

$$c_{Ier} = \frac{c_I}{2 \cos^2 \beta_I}$$

bzw.

$$c_{IIer} = \frac{c_{II}}{2 \cos^2 \beta_{II}}$$

Die zur dynamischen Analyse benutzten mit dynamischem System festgestellten Federkonstanten wurden im Rahmen anderweitiger Forschungen des Verfassers festgestellt [5].

Im vorliegenden Fall z. B. ist bei einer angenommenen Belastung von $P = 30$ g/Faden die sich im Vorderfache befindliche Federkonstante bei einer Länge von $l_1 = 20,5$ cm, $c_1 = 1,397 \cdot 10^{-3}$ cm/kg, im Hinterfach bei einer Länge von $l_2 = 40,5$ cm $c_{II} = 2,76 \cdot 10^{-3}$ cm/kg für 1125 Fäden. Bei maximaler Fachhöhe ist

$$\beta_I \cong 9,2^\circ \text{ und } \beta_{II} \cong 5,65^\circ.$$

Mit diesen Daten betragen die resultanten Federkonstanten

$$c_1 + c_{II} = 2,094 \cdot 10^{-3} \text{ cm/kg.}$$

Dabei ist die Federkonstante der Zonenlänge der Fachbildung ohne Berücksichtigung des Richtungsbruches:

$$\frac{c_1}{2} + \frac{c_{II}}{2} = 2,078 \cdot 10^{-3} \text{ cm/kg.}$$

Vorausgesetzt, dass die Erregerwirkung $\lambda=f(t)$ auf den Endpunkt des Kettensystems einwirkt und die Abhängigkeit der Fachteile von der augenblicklichen Fachhöhe vernachlässigt wird, so ist auch in Offenfachstellung die Federkonstante der Fachbildungszone, also dort, wo sich die grösste Abweichung zeigt, alles in allem nur ungefähr 1% kleiner als die tatsächliche Federkonstante.

In Anbetracht dessen, dass während der Fachbildung die Abweichung immer kleiner bleibt als dieser 1,01malige Wert, wird in den folgenden Berechnungen obige Vereinfachung angewendet.

3. Lösung der Differentialgleichungen des Schwingungssystems

Die im Abschnitt 1 dargestellten Differentialgleichungen des oben behandelten mehrmassigen Schwingungssystems werden unter Beachtung der in den Versuchen angewendeten symmetrischen Bremsbelastung gelöst.

Bei symmetrischer Bremsbelastung ist :

$$m_2 = m_3$$

nachdem die Federkonstanten der Bremsseile gleich sind :

$$c_2 = c_3$$

und

$$T_2 = T_3 = T_0$$

Der Freiheitsgrad des ursprünglich dreimassigen Ersatzschwingungssystems wird bei symmetrischer Bremsbelastung also um einem Grad verringert und ist auf Grund vorstehender Gleichungen

$$m_2 + m_3 = 2 m_2$$

$$T_2 + T_3 = 2 T_0$$

Diese Vereinfachungen wurden auf Grund praktischer Beobachtungen eingeführt, da die Schwingungen der Bremsgewichte immer in derselben Phase erfolgten, gegenphasige Schwingungen dagegen nicht beobachtet werden konnten.

Setzt man die Bezeichnungen

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = y_1'' \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = y_2''$$

in die Bewegungsgleichungen des Schwingungssystems ein, so erhält man

$$m_1 y_1'' = \frac{f(t) - y_1}{c} - \frac{4 y_1 - 2 y_2}{c_2} \quad (2)$$

$$m_2 y_2'' = \frac{y_1 - y_2}{c_2} - T_0 \quad (3)$$

aus der Gleichung (3)

$$y_1 = m_2 c_2 y_2'' + y_2 + c_2 T_0 \quad (4)$$

durch zweimalige Differentiation

$$y_1'' = m_2 c_2 y_2^{(4)} + y_2'' \quad (5)$$

In Gleichung (2) eingesetzt und geordnet

$$\begin{aligned} m_1 m_2 c c_2^2 y_2^{(4)} + (m_1 c c_2 + m_2 c_2^2 + 4 m_2 c c_2) y_2'' + \\ + (c_2 + 2 c) y_2 = c_2 [f(t) - c_2 T_0 - 4 c T_0] \end{aligned}$$

Es sei also :

$$\begin{aligned} m_1 m_2 c c_2^2 &= a_1 \\ m_1 c c_2 + m_2 c_2^2 + 4 m_2 c c_2 &= a_2 \\ c_2 + 2 c &= a_3 . \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung erhält also folgende Form :

$$a_1 y_2^{(4)} + a_2 y_2'' + a_3 y_2 = c_2 [f(t) - (c_2 + 4c) T_0] \quad (6)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen vierträngigen linearen Differentialgleichung (6) setzt sich bekanntlich aus der allgemeinen homogenen Lösung Y_2 und der inhomogenen partikulären Lösung η_2 zusammen :

$$y_2 = Y_2 + \eta_2$$

Angenommen, die Lösung der inhomogenen Gleichung ist :

$$Y_2 = e^{\lambda t}$$

so ist die charakteristische Gleichung :

$$a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_3 = 0$$

wobei

$$a_1, a_2, a_3 > 0$$

Mit der Substitution $\lambda^2 = z$ wird :

$$a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0 . \quad (7)$$

Deren Lösung ist :

$$z_{1,2} = \lambda^2 = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 a_1 a_3}}{2 a_1}$$

Bekanntlich bestehen die auftretenden freien Schwingungen nur dann aus reinen Sinus- und Kosinuskomponenten, wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung reine imaginäre Zahlen sind.

Nachfolgend wird gezeigt, dass im geschilderten Falle die Lösungen $z = \lambda^2$ reell u. zw. negative Zahlen sind, wodurch die Differentialgleichung bei den Ausgangsbedingungen eine ungedämpfte Schwingung beschreibt.

1. Die Lösungen $z = \lambda^2$ sind deshalb reelle negative Zahlen, weil :

$$a_2^2 > a_2^2 - 4 a_1 a_3 > 0$$

nämlich :

$$\alpha_2^2 - 4 \alpha_1 \alpha_3 = (m_1 c c_2 + m_2 c_2^2 + 4 m_2 c c_2)^2 - 4 m_1 m_2 c c_2^2 (c_2 + 2 c)$$

Nach durchgeführter Quadrierung und Ordnen wird

$$\alpha_2^2 - 4 \alpha_1 \alpha_3 = c_2^2 [(m_1 c - m_2 c)^2 + 8 m_2^2 c c_2 + 16 m_2^2 c^2] > 0$$

Nötige und genügende Voraussetzung, dass beide Wurzeln der Gleichung (7) negativ werden, ist :

$$\alpha_2 > |\sqrt{\alpha_2^2 - 4 \alpha_1 \alpha_3}|$$

deren Erfüllung nach Quadrieren und Ordnen zu ersehen ist.

Zufolge des oben gesagten ist bewiesen, dass die Lösung der Gleichung (7) für λ rein imaginäre Wurzeln ergibt. Die absoluten Werte der Wurzeln sind paarweise gleich und unterscheiden sich nur durch ihr Vorzeichen :

$$\lambda = \pm \sqrt{z_i}$$

Demzufolge ist die allgemein homogene Lösung :

$$Y_2 = C_1 \sin \sqrt{\frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - 4 \alpha_1 \alpha_3}}{2 \alpha_1}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - 4 \alpha_1 \alpha_3}}{2 \alpha_1}} t + \\ + C_3 \cos \sqrt{\frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - 4 \alpha_1 \alpha_3}}{2 \alpha_1}} t + C_4 \cos \sqrt{\frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - 4 \alpha_1 \alpha_3}}{2 \alpha_1}} t$$

oder :

$$\sqrt{\frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - 4 \alpha_1 \alpha_3}}{2 \alpha_1}} = \nu_1 \\ \sqrt{\frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - 4 \alpha_1 \alpha_3}}{2 \alpha_1}} = \nu_2$$

durch Ersatz :

$$Y_2 = C_1 \sin \nu_1 t + C_2 \sin \nu_2 t + C_3 \cos \nu_1 t + C_4 \cos \nu_2 t$$

Die in der inhomogenen Differentialgleichung vorkommende Erregerfunktion $\lambda=f(t)$ kann auch in einer Fourierreihe entwickelt und durch die m -te Teilsumme ersetzt werden. Dadurch bekommt die Differentialgleichung (6) folgende Form :

$$\alpha_1 y_2^{(4)} + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_2 = c_2 \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos k \omega t + b_k \sin k \omega t - (c_2 + 4c) T_0 \right] \quad (8)$$

wobei

a_k, b_k und ω die oben bestimmten bekannten Werte und $k = 1, 2 \dots m$ sind.

Die partikuläre Lösung (η_2) der Gleichung (8) wird durch die bekannten Versuchsvoraussetzungen in folgender Form gesucht :

$$\eta_2 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m (A_k \cos k \omega t + B_k \sin k \omega t)$$

Dies differenziert :

$$\eta_2'' = - (k \omega)^2 \sum_{k=1}^m (A_k \cos k \omega t + B_k \sin k \omega t)$$

$$\eta_2^{(4)} = (k \omega)^4 \sum_{k=1}^m (A_k \cos k \omega t + B_k \sin k \omega t)$$

Wird dies in Gleichung (8) eingesetzt, so bekommt man durch Gleichsetzung der Koeffizienten :

$$\frac{A_0}{2} = \frac{c_2}{a_3} \left[\frac{a_0}{2} - (c_2 + 4c) T_0 \right] \quad (9)$$

$$A_k = \frac{a_k c_2}{\alpha_1 k^4 \omega^4 - \alpha_2 k^2 \omega^2 + \alpha_3} \quad (10)$$

$$B_k = \frac{b_k c_2}{\alpha_1 k^4 \omega^4 - \alpha_2 k^2 \omega^2 + \alpha_3}$$

wobei :

$$k = 1, 2 \dots m \text{ ist.}$$

Wie bei der Analyse der Erregerfunktion festgestellt wurde, besteht im vorliegenden Fall das Fourierpolynom aus reinen Kosinuskomponenten deshalb $b_k = 0$ ist. In den partikulären Lösungen der inhomogenen Gleichung kommt also nur A_k vor. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (8) ist also :

$$\eta_2 = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m A_k \cos k \omega t \quad (11)$$

wobei

$$k = 1, 2 \dots m \text{ ist}$$

und die Koeffizienten $\frac{A_0}{2}$, A_k können aus den Gleichungen (9) und (10) bestimmt werden.

Die allgemeine Lösung der die Bewegungsgleichung der Seileinklemmpunkte der Bremsarme ausdrückenden inhomogenen Differentialgleichung (6) ist :

$$y_2 = Y_2 + \eta_2 = C_1 \sin \nu_1 t + C_2 \sin \nu_2 t + C_3 \cos \nu_1 t + C_4 \cos \nu_2 t + \\ + \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m A_k \cos k \omega t$$

Sollte die aus der homogenen Lösung der freien Schwingung sich ergebende Winkelgeschwindigkeit ν_i bzw. der, durch Teilung derselben durch eine ganze Zahl, entstehende Quotient mit der Winkelgeschwindigkeit der Erregung übereinstimmen, so zeigt das Schwingungssystem Resonanzerscheinungen.

Die Bedingung der Resonanz ist also :

$$\omega = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{a_2 \mp \sqrt{a_2^2 - 4 a_1 a_3}}{2 a_1}} \quad (12)$$

wobei

$$k = 1, 2 \dots m \text{ ist.}$$

Bei Bestimmung der dynamischen Kettspannung wird die freie Schwingung deshalb nicht beachtet, weil diese nach dem Einsetzen der Schwingungen infolge der tatsächlich auftretenden Dämpfungen abflaut. Die aus der Längenänderung der Feder mit der Konstante c des gleichwertigen Systems errechenbare dynamische Kettspannung wird deshalb unter Benutzung der partikularen Lösung (11) der inhomogenen Gleichung (6) bestimmt. Die für die freien Schwingungen sich ergebende Lösung y_2 der homogenen Differentialgleichung kann vernachlässigt werden. Gleichung (4) :

$$y_1 = m_2 c_2 y_2'' + y_2 + c_2 T_0$$

Da nach obigem $y_2 = \eta_2$ kann der Differentialquotient der Gleichung (11) in die letztere eingesetzt werden :

$$y_1 = \frac{c_2}{\alpha_3} \left[\frac{a_0}{2} - (c_2 + 4c - a_3) T_0 \right] + (1 - m_2 c_2 k^2 \omega^2) \sum_{k=1}^m A_k \cos k \omega t. \quad (13)$$

Die dynamische Kettspannung beträgt

$$P = \frac{f(t) - y_1}{c}$$

oder unter Berücksichtigung der Erregerfunktion und der Zusammenhänge (9), (10) und (13)

$$P = \frac{c_2}{c a_3} \left[\frac{a_0}{2} \left(\frac{a_3}{c_2} - 1 \right) + (c_2 + 4c - a_3) T_0 \right] + \frac{1}{c} \sum_{k=1}^m a_k \left[1 - \frac{c_2 - m_2 c_2^2 k^2 \omega^2}{a_1 k^4 \omega^4 - a_2 k^2 \omega^2 + a_3} \right] \cos k \omega t \quad (14)$$

Die Gleichung (14) kann in zwei Teile zerlegt werden, deren Komponenten der konstante Teil P_0 und der veränderliche Teil P_d der dynamischen Spannung sind:

$$P = P_0 + P_d$$

wobei

$$P_0 = \frac{c_2}{c a_3} \left[\frac{a_0}{2} \left(\frac{a_3}{c_2} - 1 \right) + (c_2 + 4c - a_3) T_0 \right]$$

oder unter Berücksichtigung von $a_3 = 2c + c_2$

$$P_0 = \frac{a_0 + 2c_2 T_0}{2c + c_2} \quad (15)$$

und

$$P_d = \sum_{k=1}^m a_k \frac{c_2}{c} \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1 - m_2 c_2 k^2 \omega^2}{a_1 k^4 \omega^4 - a_2 k^2 \omega^2 + a_3} \right) \cos k \omega t. \quad (16)$$

4. Experimentelle Prüfung der durch die dynamische Analyse gewonnenen Ergebnisse

Durch Analyse des Kettensystems unter den vorher ausführlich beschriebenen Bedingungen, wurden Zusammenhänge gewonnen, die zur Berechnung der dynamischen Kettenspannung während des Webens, sowie der aus der Resonanzbedingung bestimmbaren kritischen Tourenzahl geeignet ist.

Die dynamische Kettenspannung setzt sich aus dem mit der Gleichung (15) errechenbaren sogen. durchschnittlichen Spannungswert und den, durch den Zusammenhang (16) bestimmten dynamischen Komponenten zusammen.

Der durchschnittliche Spannungswert gibt den Mittelwert der, infolge der Fachbildung auftretenden dynamischen Spannungswelle an, charakterisiert also gut den Vorgang des Webens.

Die dynamische Komponente überlagert sich der durchschnittlichen Spannung und die augenblickliche Resultante dieser beiden Spannungen ergibt den Wert der messbaren dynamischen Kettenspannung.

Die durch dynamische Analyse gewonnenen Resultate wurden durch Spannungsmessung nachgeprüft. Der Kontrollversuch wurde mit symmetrischem Fache vorgenommen. Die als Grundlage der Berechnung dienende Erregerwirkung $\lambda=f(t)$ wurde vor der Spannungsmessung durch die im Abschnitt 2 dieser Abhandlung beschriebene Messmethode festgestellt. Die Spannungsmessung erfolgte unmittelbar nach dem Versuch an den Kettfäden, die an Stelle des, für die Bestimmung der Erregerwirkung benützten Bronzedrahtes eingezogen wurden.

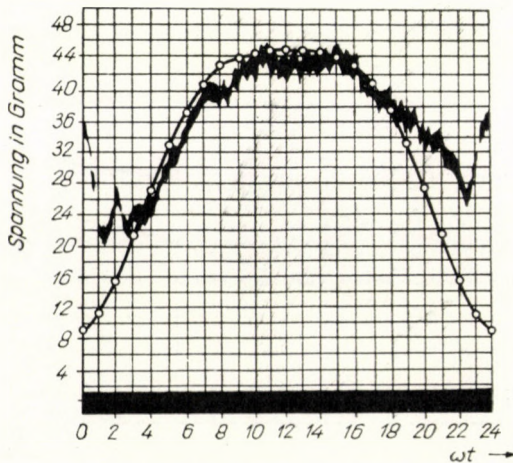


Abb. 5

Abb. 5 zeigt die errechnete dynamische Spannung, in das, durch Spannungsmessung erhaltene Oszillogramm eingezeichnet; die Bestimmung der dynamischen Federkonstanten wurde vom Verfasser in einer anderen Abhandlung beschrieben.

Aus Abb. 5 kann festgestellt werden, dass beim Weben mit symmetrischem Fach die, infolge der Fachbildung entstehende dynamische Spannung auch durch Berechnung bestimmt werden kann. Die errechneten und gemessenen Spannungswerte zeigen im Spannungswellenbereich des Fachöffnens sowie der Offenfachstellung gute Übereinstimmung. Im Abschnitt des Fachschlusses kann zwischen den errechneten und gemessenen Spannungen eine Differenz festgestellt werden. Der Grund dafür ist, dass bei der dynamischen Analyse der Vorschub des Schusses, sowie die Wirkung des Warenschaltwerkes, welche die spannungvermindernde Wirkung des Fachschlusses ausgleicht, nicht berücksichtigt wurde. Die beim Schlusseinschlag auftretende Spannungsspitze überschreitet nicht die bei der Fachbildung auftretende maximale Spannung, so dass der Blattanschlag in diesem Fall ausser dem vorübergehenden plötzlich auftretenden Spannungsanstieg keinen weiteren Einfluss auf die Spannungswelle hat.

Die Übereinstimmung der errechneten und gemessenen Spannungswerte während der Fachbildung bestätigt ebenfalls die im Vorhergehenden erfolgte Feststellung des Verfassers, dass falls $P_B < P_S$, die während des Blattanschlages entstehende Spannungsspitze die maximalen Fachspannungen nicht beeinflusst.

Die Analyse der für den Webevorgang bezeichnenden durchschnittlichen Kettspannung (Zusammenhang 15) beweist, welche wichtige Rolle die Faktoren spielen, die den dynamischen Vorgang des Webens bestimmen. Abb. 6 zeigt die Änderung der durchschnittlichen Kettspannung P_0 in Abhängigkeit vom

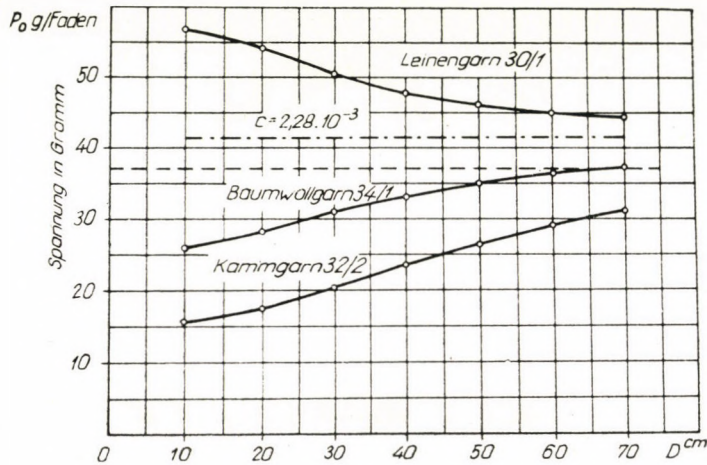


Abb. 6

Durchmesser D des Kettbaumes, bei einer Federkonstante des Seiles $c_k = 2,044 \cdot 10^{-3}$ cm/kg bei $SM = 37$ g/Faden* konst. und bei Berücksichtigung der charakteristischen Einstellungsparameter.

Aus der Abb. 6 kann festgestellt werden, dass die Federkonstante des Kettsystems und des Seiles trotz gleichem und konstantem statischem Maximum die Gestaltung der durchschnittlichen Kettspannung entscheidend beeinflusst. Abb. 6 veranschaulicht z.B., dass bei $N_m = 34/1$ geschlichteter Baumwollkette das statische Maximum erst bei einem Kettbaumdurchmesser von $D = 70$ cm mit der durchschnittlichen Kettspannung übereinstimmt.

Bei Abnahme des Kettbaumdurchmessers sinkt jedoch trotz der Beständigkeit des statischen Maximums die durchschnittliche Kettspannung und ist bei dem, als minimal geltenden $D = 10$ cm Kettbaumdurchmesser bereits um 11 g geringer als das statische Maximum. Wäre unter gleichen Umständen das

* Unter dem Ausdruck $SM =$ statisches Maximum ist die im Augenblick des Gleitens mit dem experimentell ermittelten Reibungskoeffizienten und mit Berücksichtigung der entsprechenden Übersetzungsverhältnisse nach der Formel bestimmte Bremskraft zu verstehen.

$$S_1 - S_2 = S_1 \left(1 - \frac{1}{e^{\mu\alpha}} \right).$$

Kettmaterial Kammgarn $N_m=32/2$, so würde die Federkonstante des Kettsystems auf $c = 8,047 \cdot 10^{-3}$ cm/kg anwachsen und würde die durchschnittliche Kettspannung bei einer Durchmessererringerung von 60 cm um 15,6 g absinken. Abbildung 6 zeigt jedoch, dass die durchschnittliche Spannung zwischen 10–70 cm Kettbaumdurchmesser den Wert des statischen Maximums nirgends erreicht. Bei $N_m=30/1$ Flachgarnkette jedoch ist die Federkonstante der Kette $c = 1,902 \cdot 10^{-3}$ cm/kg, und zeigt bei einer Durchmessererringerung von 60 cm die durchschnittliche Kettspannung eine Zunahme von 12 g.

Obige Ausführungen weisen darauf hin, dass die durchschnittliche Kettspannung eine Funktion der Federkonstante des Kettsystems ist. Dies ist aus dem Zusammenhang (15) zu ersehen :

$$P_0 = \frac{a_0 + 2 c_2 T_0}{2 c + c_2}$$

da auf Grund des gleichwertigen Reduktionsprinzips (Abb. 1, 2)

$$c_2 = c_k \left(\frac{D}{d} \right)^2 = k D^2$$

somit :

$$2 c P_0 + k D^2 P_0 = a_0 + 2 k D^2 T_0 .$$

Aus letzterem Ausdrucke kann festgestellt werden, dass die durchschnittliche Kettspannung dann vom Kettbaumdurchmesser D unabhängig ist, wenn

$$P_0 = 2 T_0 \text{ ist.}$$

So ist

$$c = \frac{a_0}{2 P_0} = \frac{a_0}{4 T_0}$$

Im vorliegenden Falle

$$T_0 = 46,86 \text{ kg}$$

$$a_0 = 0,2605 \text{ cm .}$$

Die Voraussetzung $P_0 = \text{konst.}$ wird also dann erfüllt, wenn die Federkonstante des Kettsystems

$$c \cong 2,28 \cdot 10^{-3} \text{ cm/kg ist.}$$

Beträgt $c_2 = 2,044 \cdot 10^{-3}$ cm/kg, so steigt die durchschnittliche Spannung P_0 mit der Abnahme des Kettbaumdurchmessers, wenn die Federkonstante des Kettsystems

$$0 < c < 2,28 \cdot 10^{-3} \text{ ist.}$$

und die durchschnittliche Spannung nimmt ab, wenn

$$\infty > c > 2,28 \cdot 10^{-3} \text{ ist.}$$

Aus letzteren Feststellungen ergibt sich, dass bei gleichen Bedingungen die durchschnittliche Spannung, welche die Anzahl der Fadenbrüche auch beeinflusst, bei Ketten mit kleineren Federkonstanten grösser ist.

Diese Zusammenhänge der durchschnittlichen Kettspannung zeigen gleichfalls, dass das errechnete statische Maximum für den Webevorgang nicht charakteristisch ist. Die Analyse der Kettbaumbremse unter statischen Bedingungen ist also unrichtig; die den Webevorgang bestimmenden Spannungsverhältnisse können nur im Wege ausführlicher dynamischer Analyse bzw. durch dynamische Spannungsmessungen untersucht werden.

5. Die kritische Tourenzahl des Webstuhls

Die Lösung der Bewegungsgleichungen des Kettensystem ergibt die summierte Bewegungsgleichung zweier überlagerter Schwingungen u. zw. der Eigenschwingung und der erzwungenen Schwingung, wie dies im Abschnitt 1. dieser Arbeit ausführlich beschrieben wurde. Die partikuläre Lösung des Differentialgleichungssystems — die eigentliche erregte Schwingung — gibt durch konstante Erregung stationäre Schwingungen. Wie im vorhergehenden analysiert, tritt dann Resonanz auf, wenn die Winkelgeschwindigkeit der erzwungenen Schwingung

$$\omega = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{a_2 \mp \sqrt{a_2^2 - 4 a_1 a_3}}{2 a_1}} \text{ ist,}$$

wobei

$$k = 1, 2 \dots m.$$

Aus diesem Zusammenhänge, der die Resonanzbedingung aufzeigt und der auch aus der charakteristischen Gleichung der mehrmassigen Schwingungssysteme mit mehreren Massen bestimmt werden kann, können vier Wurzeln berechnet werden, von welchen je zwei paarweise in absolutem Werte gleich sind und sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden. Von beiden positiv reellen Wurzeln gibt die kleinere die Grundschiwingung bzw. die erste harmonische Schwingung kleinster Schwingungszahl, die vom Gesichtspunkte der Resonanz aus am wichtigsten ist.

Resonanz bedeutet natürlich im gegebenen Fall nicht ein alle Grenzen überschreitendes Anwachsen der Schwingungsamplituden, weil Schwingungen grösserer Amplituden sich wegen der Eigendämpfung des Kettensystems, der Dämpfung des Bremsseiles sowie des zeitweisen Gleitens des Bremsseiles nicht entwickeln können. Dennoch können bei der, aus der Resonanzbedingung errechneten kritischen Tourenzahl die Amplitudensteigerung der Kettspannung und die gesteigerten Schwingungen der Bremsarme beobachtet werden. Erstere Wirkung ist vom Standpunkt der gesteigerten Beanspruchung des Kettensystems bedeutsam.

Die Schwingung der Bremsarme wirkt jedoch auf den Kettbaum und erregt über diesen die Seitenwände des Webstuhls zu Biegungsschwingungen.

Die kritische Tourenzahl des Webstuhles hängt ausser den elastischen Elementen des Kettsystems von den Massen des Kettbaumes und der Bremsbelastung ab. Die Zusammenhänge zwischen kritischer Tourenzahl und Kettbaumdurchmesser werden bei den charakteristischen Daten oben beschriebener Ver-

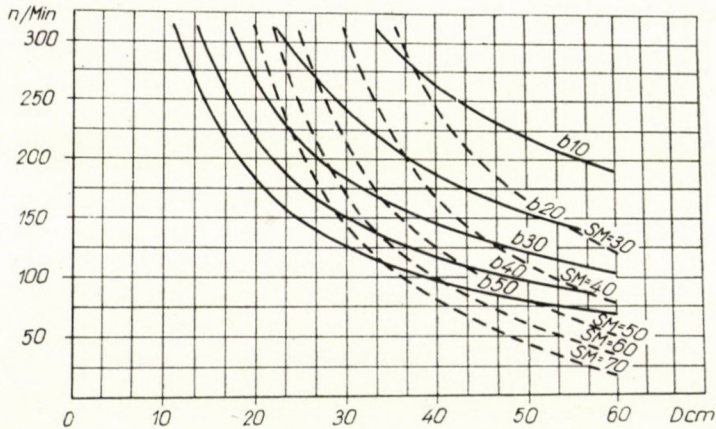


Abb. 7

suche und bei $Q = 20$ kg konstantem Bremsgewicht in Abb. 7 durch Kurvenschar $b = \text{konst.}$ angegeben.

Aus der Abbildung 7 kann festgestellt werden, dass die kritische Tourenzahl bei $b = \text{konst.}$ hyperbolischen Zusammenhang aufweist. Verbindet man diejenigen Punkte der Kurvenschar $b = \text{konst.}$, die den gleichen SM -Wert sichern, so bekommt man die hyperbelartige Kurvenschar $SM = \text{konst.}$ Die $SM = \text{konst.}$ Kurven verbinden die konstante Bremskraft begleitenden kritischen Tourenzahlen. Wird mit grossen SM -Werten gewebt, (z. B. 50—60 g/Faden) so treten bei 180—190 Umdrehungen des Webstuhls pro Minute, die als üblich angesehen werden können, Resonanzerscheinungen ungefähr bei dem halben Durchmesser des Kettbaumes, also bei 28—32 cm Kettbaumdurchmesser auf. Bei kleineren SM -Werten verschieben sich die Resonanzerscheinungen gegen den grösseren Kettbaumdurchmessern. Ferner kann aus der Abbildung festgestellt werden, was übrigens auch Beobachtungen aus der Praxis bestätigen, dass bei abnehmendem Kettbaumdurchmesser ($D = 20$ cm) Resonanzerscheinungen bei normalen Betriebstourenzahlen nicht auftreten.

SCHRIFTTUM

1. H. KELLER: Messung der Kettspannung beim Weben. Dissertation ETH Zürich 1943.

2. M. ZILÁHI: A pamutfonal lánrendszerék szövés közbeni feszültségének vizsgálata. (Untersuchung der Spannung von Baumwollkettssystemen beim Weben.) Dissertation. (Ungarisch.)

3. F. STEIN : Einbindungsvorgänge in tuchbindigen Kunstseidengeweben. Dissertation T. H. Stuttgart 1926.
4. Á. G. PATTANTYÚS : Gépészeti lengéstan. (Mechanische Schwingungslehre.) Akadémiai Kiadó 1950. (Ungarisch.)
5. M. ZILAHÍ : Új módszer a szálanyagok rugóállandójának meghatározására. (Neue Methode zur Bestimmung der Federkonstante von Gespinnstfasern). Manuskript. (Ungarisch).
6. M. ZILAHÍ : Dinamische Spannungsuntersuchungen an Baumwollketten. Periodica Polytechnica, Vol. 1. No. 1.

ZUSAMMENFASSUNG

Im Webevorgang des von der Kette, dem Kettbaum und den Bremsgewichten bewirkte Schwingungssystem bestimmt zum grössten Teil den Spannungszustand der Kettfäden. Die auftretenden Spannungen können mit der Analyse des Schwingungssystems theoretisch gut angenähert werden und zeigen die wirklichen Spannungen mit den errechneten gute Übereinstimmung. Zugleich ist das Errechnungsverfahren geeignet die kritische Tourenzahl des Webstuhls zu bestimmen.

DYNAMIC ANALYSIS OF THE WEAVING PROCESS

M. ZILAHÍ

SUMMARY

In the weaving process the vibration system produced by the warp, the beam, and the weights, for the most part determine the tension of warp threads. In the analysis of the vibration system the arising tensions can be well approached theoretically. The values of actual tension show good agreement with the calculated ones. The calculation method serves at the same time for the determination of the critical number of revolutions of the loom.

L'ANALYSE DYNAMIQUE DU PROCESSUS DU TISSAGE

M. ZILAHÍ

RÉSUMÉ

Au cours du processus du tissage, le système vibrant créé par le fil de chaîne, l'ensouple de chaîne et les poids de frein, déterminent pour une grande partie l'état de tension des fils de chaîne. L'analyse du système vibrant permet une approximation théorique des tensions ainsi produites. Les tensions réelles et celles calculées montrent une bonne concordance. La méthode de calcul peut également se prêter à la détermination du nombre de tours critique du métier à tisser au point de vue de la tension des fils.

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ТКАЧЕСТВА

М. ЗИЛАХИ

РЕЗЮМЕ

В процессе ткачества колебательная система, состоящая из нити основы, навоя и грузиков, в значительной мере определяет состояние напряжений нитей основы. Анализом колебательной системы представляется возможным теоретическим путем приближенно определить возникающие напряжения. Действительные напряжения хорошо совпадают с расчетными значениями. Расчетная методика одновременно является подходящей для определения числа оборотов, являющихся критическими с точки зрения нагрузки нити на ткацком станке.

ULTRAPHOTOMETER USING MAGNETICALLY MODULATED PHOTOMULTIPLIER

G. O. STRIKER

CAND. of ENG. SC.

INSTITUTE FOR MEASUREMENT AND INSTRUMENTATION
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received 15th February 1957]

I. Introduction and general considerations

a) *Statement of the problem*

The measurement of small light intensities is constantly gaining importance in applied physics and in physical chemistry. More and more physical and chemical properties of materials are being determined directly or indirectly by using light as a medium of measurement. The advance of pure science and its technical applications as well as the needs of industry constantly press towards more sensitive yet reliable and stable methods for measuring such a low light flux. The importance of this increases with the wide-spread use of quantitative X-ray and nuclear radiation measurements, using phosphors and scintillating crystals as energy transformers. A reliably gained order of magnitude in sensitivity may render a radioactive application safe for industrial measurement more than one application which can at present be considered only a laboratory method.

It was our aim to develop a new, highly sensitive photometer meeting these industrial requirements on the basis of our earlier investigations, by applying the principle of magnetic modulation to photomultipliers. A comparison of various principles and experimental data were to prove the performance of the new measuring device.

b) *Comparison of available sensing elements*

Ample literature on the subject [1, 2, 3, 4, 5] contains data on the available basic photoelectric converters.

We standardize our electronic amplifier for industrial use to have a minimum noise-free input signal level of 50 microvolt at an input impedance of 1 Megohm. From the data available in the literature we have calculated the light required (L_{min}) "for anormalized output signal" to operate this amplifier under the assumption of an ideal, loss-free impedance match. These data are assembled in Table I:

Table I
Comparison of design data for various photoelectric transducers

Sensing element	Efficiency	Average Imped. (Ohm)	Min. light input Lm/50 μ V/1 M Ω
<i>a</i> Thermoelement	0,1 μ V/ μ W	1	$3 \cdot 10^{-4}$
<i>b</i> Barrier-layer cell	$6 \cdot 10^2$ μ A/L	$5 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^{-6}$
<i>c</i> Vacuum phototube	40 μ A/L	10^8	$1 \cdot 10^{-6}$
<i>d</i> Photomultiplier	$20 \cdot 10^6$ μ A/L	10^6	$3 \cdot 10^{-12}$
<i>e</i> Se. photoresistor	$3 \cdot 10^6$ μ A/L	10^6	$2 \cdot 10^{-11}$
<i>f</i> Phototransistor	$3 \cdot 10^6$ μ A/L	10^4	$1 \cdot 10^{-10}$

Table I shows that the inherently linear thermoelement *a* possesses a relatively low sensitivity and is useful for standardizing purposes only at medium radiation levels. The barrier-layer cell *b* requires careful matching to obtain the quoted normalized output and loses its linearity, unless loaded by zero impedance. The phototube *c* and photomultiplier *d* can be regarded as ideal for the purpose, both for their high sensitivity, direct matching to the normalized input and excellent linearity over many orders of magnitude. The sensitivity of the semiconductor type sensing elements, viz. the photoresistor *e* and phototransistor *f* renders these elements most useful for certain applications (switching, control, communication) where linearity over a wide range is not essential or where their sensitivity in the infrared renders them indispensable. Future new techniques must no doubt help to utilize their great sensitivity for measuring purposes also, their usefulness to wide-range photometry is, however, at present very restricted.

A brief analysis of the essential characteristics of present day light-sensing devices shows, therefore, vacuum phototubes and photomultipliers to be best suited for the purpose outlined in Part Ia. Their stability over short periods of time (days or weeks) appears very satisfactory if considerable overload and resulting fatigue is avoided. Long time stability of sensitivity and spectral response has recently been found to vary substantially [6] and this necessitates a periodic recalibration. Even so, however, their linearity assures high accuracy at the measurement of light-ratios which is their most common use.

For precision measurement of the ratios of light-fluxes at very low light intensities, vacuum photocells and photomultipliers are, therefore, justly used almost exclusively.

c) The measuring range of phototubes and multipliers

For the purpose of investigating the manner and range of useful application of these two photoelectric converters, we assume the same characteristics of

the amplifier input as those chosen in Part Ib. In order to fulfil all industrial requirements — including the possibility of registration and industrial control — we require, therefore :

1. the possibility of a. c. amplification,
2. an input impedance of approx. 1 Megohm,
3. input signal level limits : $10 \mu\text{V}$ —1 Volt (5 decades).

On the basis of average sensitivity data valid for the blue region of commercially available components, we have assembled these design factors into

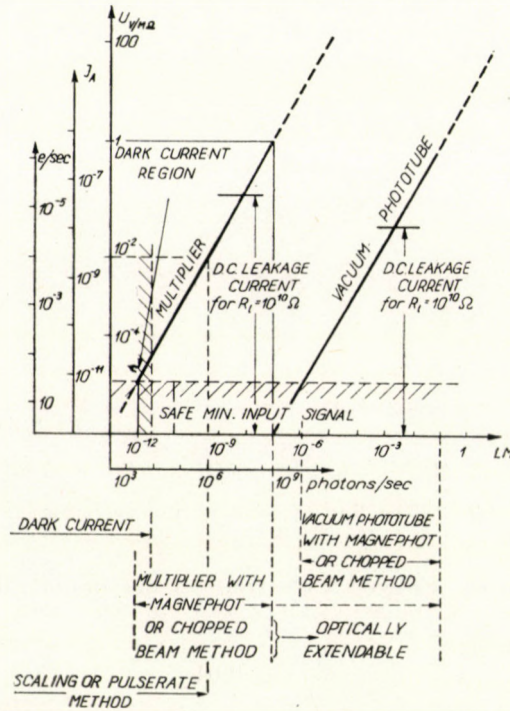


Fig. 1. Useful range of phototubes and photomultipliers

the graph on Fig. 1. It appears that over the extreme range of 12 orders of magnitude, the vacuum phototube and the photomultiplier complement each other quite well. (It should be emphasized once more that the low-limit set by us is determined by the strict requirements of *industrial use* and does not apply to specially provided laboratory conditions which, of course, permit the use of much lower input signal levels at a higher input impedance.) The graph shows the phototubes to be usable industrially down to 10^{-6} — 10^{-7} Lumen. Due to its inherent amplification factor of approx. 10^6 , the same limit for photomultipliers would lie around 10^{-12} — 10^{-13} Lumen, assuming that similar methods may be used for obtaining an a. c. output signal. It will be shown later that such may be readily attained.

In the range below 10^{-10} Lumen, however, the discontinuous nature of radiant energy must be taken into account even in the case of visible light. As we see from the lower abscissa, 10^{-10} Lumen corresponds to approx. $3 \cdot 10^5$ photons/sec. The photon/electron efficiency of modern photocathodes being approx. 0,03, this number of photons liberates approx. $9 \cdot 10^3$ electrons from the cathode, the resulting rate of impulses being similarly about 9000 imp./sec. (See the lefthand ordinate on the same graph.) This results clearly in a statistical variation in the output signal which sets another lower limit for obtaining a continuous reading.

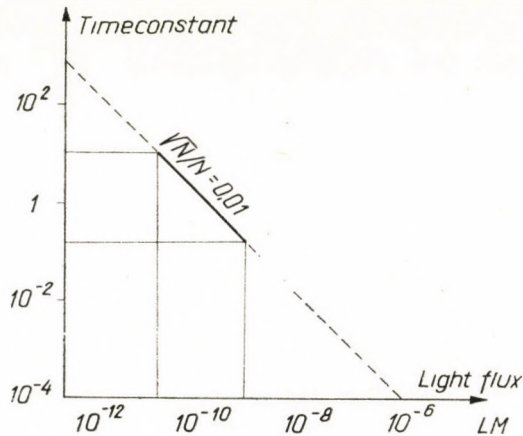


Fig. 2. The line of constant random error

Permitting, in the case of n electrons, a maximum random error of

$$\frac{\sqrt{n}}{n} \leq 0,01$$

we must choose $n > 10^4$. According to the graph presented in Fig. 2. this condition can be met between $3 \cdot 10^{-9}$ and $2 \cdot 10^{-11}$ Lumen through the choice of an appropriate time constant for the entire system, most commonly that of the indicating or recording instrument proper. If we specify the accuracy of reading in the percentage value of the *full scale reading*, then the choice of a 1 sec. time constant will assure an accuracy of 1% of *full scale* for a full scale deflection of 10^{-10} Lumen, usefully readable down to $5 \cdot 10^{-12}$ Lm.

Fig. 1. also shows two types of parasitic currents affecting the choice of measurement: the external *leakage current*, flowing across the usually employed bakelite socket of both devices [7] and the well known internal *dark current* of the photomultipliers. It is obvious from the magnitude of these currents that d. c. measuring methods cannot be employed for direct reading industrial

purposes. The signal from the usually continuous light source must, therefore, be converted into an alternating or pulsating voltage at the output circuit of the phototube or photomultiplier. One well-known method to accomplish this is the chopping of the light beam by a rotating disc or a vibrating mirror. The drawback of such continuously moving mechanical devices is quite obvious. In addition, in the case of X-ray or nuclear measurements their interposition between phosphor or scintillator and the photocathode results in a considerable decrease in the solid angle of illumination and a great loss of light.

In the region between 10^{-2} and 10^{-6} Lumen the troublesome methods of d. c. amplification or light-chopping were eliminated by the introduction, in 1948, of the magnetic photocurrent modulation, briefly the "Magnephot principle" to the field of low level photometry by H. P. KALMUS and the author. [8] This paper disclosed a new method of d.c. to a.c. conversion *within the phototube proper* which proved quite successful in its application to industrial production as well. Instruments applying the magnephot principle are being currently produced in this country and in the USA [9].

While the application of the same principle to photomultipliers was disclosed already in patents [10] issued to the same authors in 1952 on the basis of fundamental experiments, the magnephot modulation of photomultipliers has not been investigated in detail. The author, being one of the inventors, has with the help of his co-workers at the Institute for Measurement and Instrumentation of the Hungarian Academy of Sciences now completed a more exhaustive analysis, the experimental results of which are the subject of the present paper. It appears as a result of this investigation as if the gap between 10^{-6} and 10^{-11} Lumen — a range of great importance for modern industrial instrumentation — may now be covered by a relatively simple and rugged sensing device without resorting to mechanical light chopping or other cumbersome methods. For comparison's sake the useful range of various methods outlined above is indicated in the lower field of Fig. 2.

II. A brief review of the magnephot method

According to the principles disclosed in the publication cited [8], the application of an alternating magnetic field to the interelectrode space of a phototube and the resulting periodic deflection of the photoelectrons from their normal path (Figs 3. & 4.) leads to a most convenient method of modulating the space current between electrodes without the introduction of control electrodes or the like. The resulting a. c. modulation has *twice the frequency of the modulating current* which is of great advantage in suppressing capacitive stray voltages. The a. c. component is obviously strictly proportional to the photocurrent alone, since the leakage current is not being modulated.

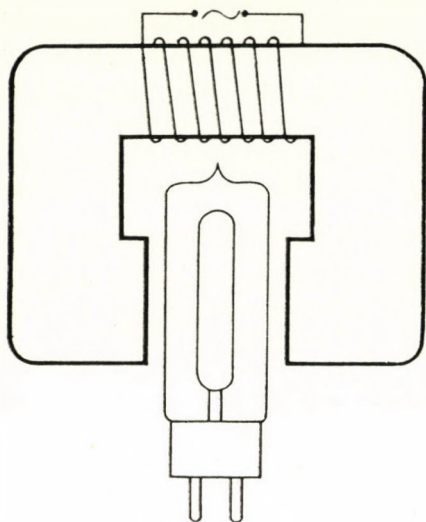


Fig. 3. Schematic drawing of magnetically modulated phototube

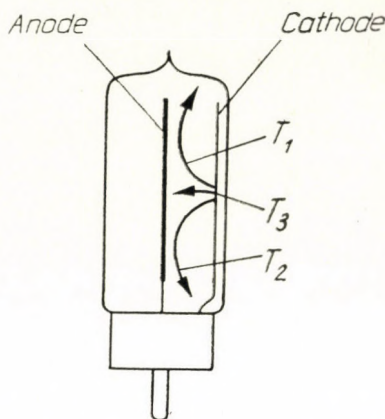


Fig. 4. Electron path inside phototube modulated according to Fig. 3. T_1, T_2 : deflection of electrons for maximum flux values T_3 : electron path when magnetic flux goes through zero

The useful sensitivity was shown [8] to be limited by the noise in the load resistor according to the formula

$$L_{\min} = 4 \cdot 10^{-7} \frac{1}{S} \left(\frac{\Delta f}{R} \right)^{1/2} \text{ Lumen.}$$

According to this formula, under ideal laboratory conditions and using an input resistor of $10^9 \Omega$, a sensitivity limit of

$$L_{\min} = 10^{-10} \text{ Lm}$$

could be obtained for the case that the signal-to-noise ratio is unity, or 10^{-8} Lm for this ratio being 100. If, however, we apply the strict requirements of industrial reliability set in Part I, we obtain in accordance with the formula

$$L_{\min} = \frac{3 E_{s,\min}}{R \cdot S}$$

for $E_{s,\min} = 10^{-5} \text{ V}$; $R = 10^6 \text{ Ohm}$; $S = 30 \mu\text{A/L}$ a practical sensitivity limit:

$$L_{\min} = 10^{-6} \text{ Lm}$$

This sensitivity is actually assured in the commercially manufactured instruments cited above. By way of a simple range switch this sensitivity may be

reduced in decade steps by 4 orders of magnitude. A continuous attenuator adds further flexibility to the instrument. Fig. 5. shows a block diagram and Fig. 6. a photographic picture of such an instrument of Hungarian manufacture

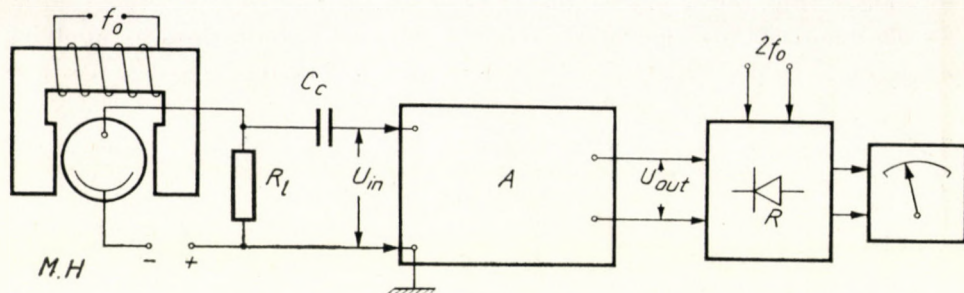


Fig. 5. Block diagram of Magnephoto instrument with vacuum phototube. *MH*: measuring head, *A*: amplifier, *R*: phase-sensitive rectifier

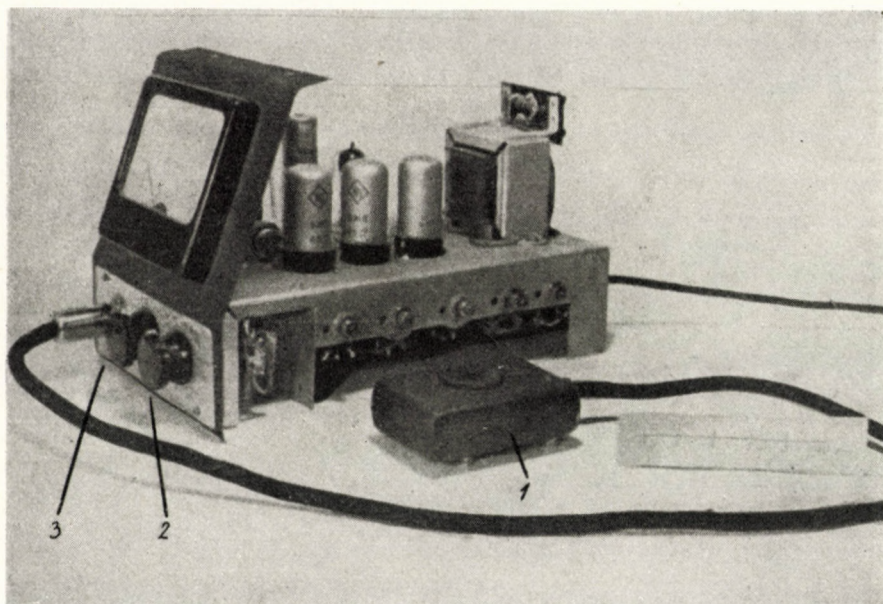


Fig. 6. Photograph of industrially available Magnephoto instrument, using vacuum phototube (cover removed). 1: measuring head, 2: decade range switch, 3: continuous gain control

in which the magnetically modulated phototube is mounted in a measuring head connected to the amplifier by a flexible cable.

The good results obtained with this device in the range of 10^{-2} — 10^{-6} Lm justified investigations towards extending its sensitivity limit by several orders of magnitude — preferably using the identical, simple and rugged amplifier — by the use of photomultipliers.

III. The magnetic modulation of photomultipliers

The geometry of commercially available photomultipliers is either of the circular (Fig. 7a) or of the linear type (Fig. 7b):

The most efficient modulation can be obtained in both cases by applying the magnetic field parallel to the generating line of their electrodes, i. e. per-

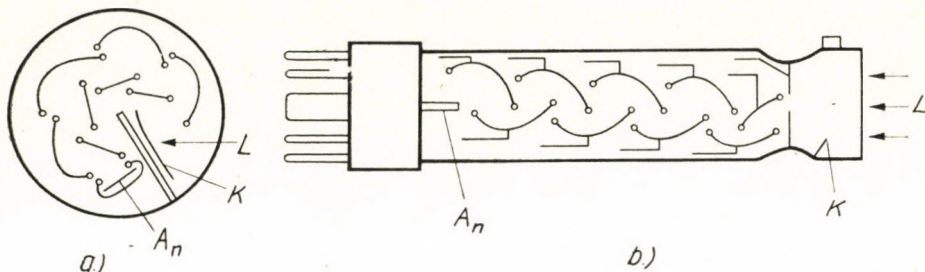


Fig. 7. Schematic cross-section
 a: of circular type photomultiplier (s. a. RCA 931/A).
 b: of linear type photomultiplier (s. a. Elektroavod FEU-25-M)

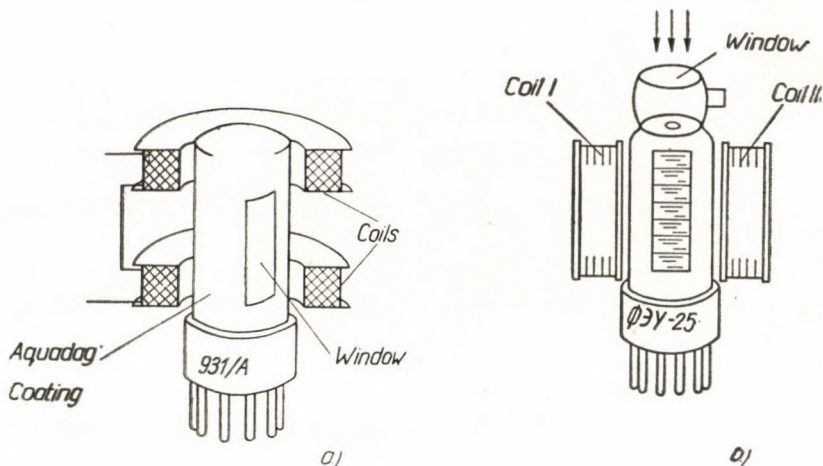


Fig. 8. Coil arrangements used to modulate circular and linear photomultipliers

pendicular to the plane of Fig. 7. This was accomplished by coil arrangements shown in Fig. 8. Observing the change of modulation with increasing magnetic flux, we obtained curves as per Fig. 9. showing a character similar to the characteristic curve shown in the same diagram for simple phototubes. During the ascending portion of the curve the modulation percentage shows a monotonous increase with the increase in driving current. At point "A" 100% modulation is reached. After this — similarly to the mutual transconductance of radio-frequency converters — the amplitude of the "fundamental" frequency (the

2nd harmonic, in our case) starts to decrease with further increase in driving current. On account of the highly selective character of the amplifier used, the final output corresponds to the amplitude of this 2nd harmonic and higher even harmonics only.

By choosing the flat top of these curves for an operating point, the influence of current-variations in the exciter-coils is reduced to a minimum. The magnetic flux density required for 100% modulation was approximately

$$\Phi_{\text{eff}} = 36 \text{ Oersted.}$$

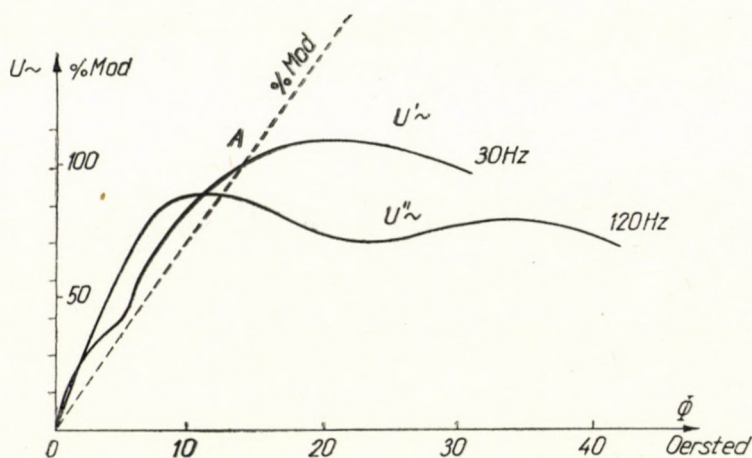


Fig. 9. Change of modulation percentage and output voltage with modulating magnetic flux

Calculations show, however, that due to the paramagnetic behaviour of the Nickel electrodes the field strength in the space between electrodes is about 19 Oersted only for full modulation. Quantitative measurements showed that the effective value of the resulting a. c. component was quite accurately equal to one third of the unmodulated d. c. current under identical illumination. This is a well-known criterium for 100% modulation.

IV. Circuitry and calibration

The photomultipliers of both types, provided with their respective modulating coils described above, were placed in light-sealed brass housings and connected in the manner shown in Fig. 10. A photograph of the complete system employing the circular multiplier may be seen in Fig. 11. A customary stabilized high voltage supply was used for feeding the voltage divider of the multiplier, while the a. c. component was coupled from the load resistor of the last dinode

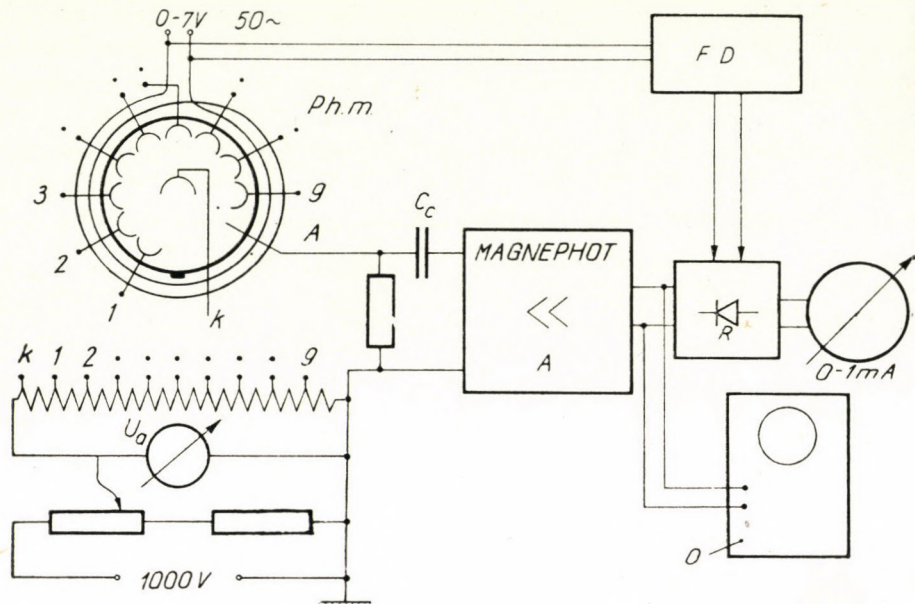


Fig. 10. Block diagram of modulated photomultiplier and associated circuits
 Ph. m.: photomultiplier, A: amplifier, R: phase-sensitive rectifier, F. d.: frequency doubler,
 O: oscilloscope C_c : coupling condenser

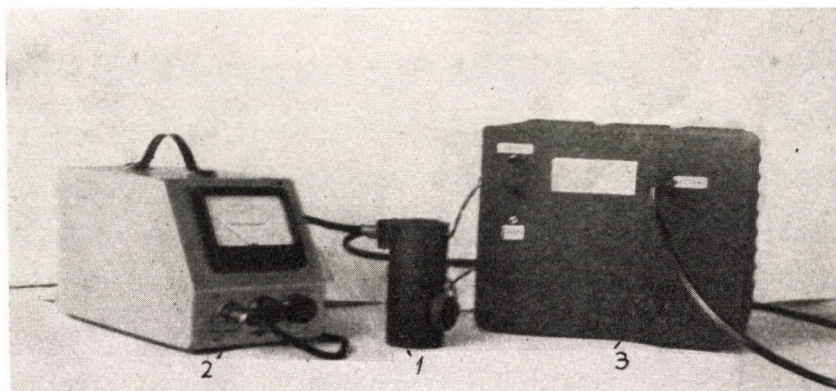


Fig. 11. Photograph of experimental ultraphotometer. 1: measuring head, 2: Magnephot amplifier, 3: high voltage and modulation supply

by way of a condenser to the input of a conventional "Magnephot" amplifier designed for ordinary modulated phototube service. An oscilloscope was used to observe waveforms under varying degrees of modulation and illumination. Phase-sensitive rectification reduced the effective bandwidth to approx. 1 c/s. in order to suppress disturbing noise and hum components.

In the calibrating procedure we based our measurements on the catalogue-value of the RCA type 931/A photomultiplier in normal d. c. service, using a high-sensitivity mirror galvanometer in the output. For further subdivision of this standardized light-quantity we used fixed neutral filters and the precision-made, continuously variable "diaphragms" of the Zeiss Pulfrich photometer in a setup shown in Fig. 12. This assured a *repetition accuracy* of $\pm 0,5\%$ for testing the linearity of response within any single decade.

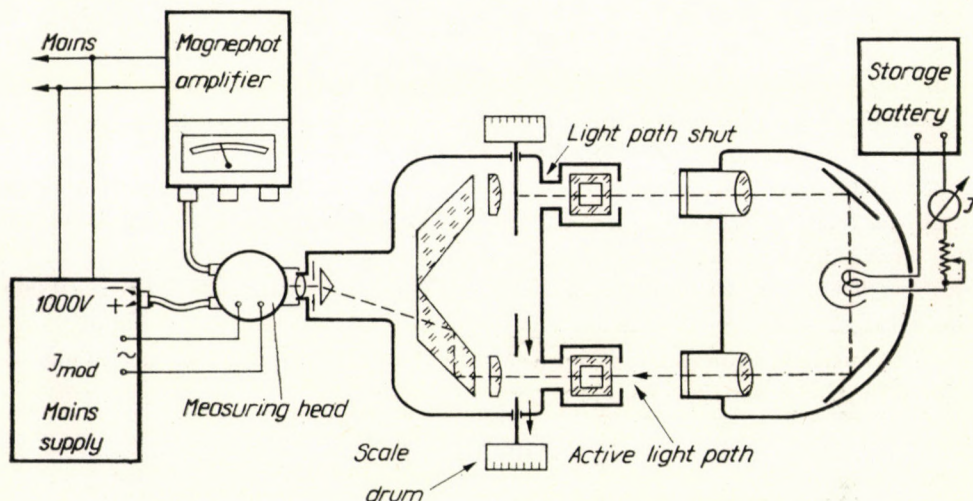


Fig. 12. Scheme of arrangement for testing the linearity of response.

V. Calculated sensitivity and signal-to-noise ratio

The a.c. signal voltage component arising on the load resistor of the last dinode of the photomultiplier can be expressed by the formula

$$E_S = \frac{1}{3} \cdot R \cdot S \cdot L$$

R being the load resistor in ohms, S the sensitivity of the multiplier in A/Lm and L the light-flux in Lumen. Setting the conservative values of $E_{S_{min}} = 10^{-5} V$; $R = 10^6$ Ohm and $S = 10$ A/Lm, we obtain

$$L_{min} = 3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-1} = 3 \cdot 10^{-12} \text{ Lm} .$$

In investigating the possible sources of error affecting this measurement, we considered four factors :

- a) the photon-character of light,
- b) thermal agitation in R_i ,
- c) the statistical variation of the leakage current,
- d) the dark current.

a) Our general analysis of statistical errors in Part I showed that with a time constant of 1 sec the light flux of $2 \cdot 10^{-12}$ Lumen can still be read with approx. 1% statistical uncertainty. If the cathode illumination results from a uniformly statistical light flux, the calculated value of L_{\min} is just above the limit of this statistical error. It will be shown later, however, that this applies only to a light flux consisting of statistically distributed single photons. *For statistically distributed intensive light pulses* (as in the case of scintillating crystals) the statistical error is *much larger* and the above considerations have to be modified.

b) *Thermal agitation* in the load resistor at room temperature and a 1 c/s bandwidth causes, in accordance with the classical formula, a random noise of approx. 10^{-7} V which is approx. 0,2% of the useful signal level. This is within the required accuracy.

c) *The conductive leakage current* — the absolute value of which is 10 000 times larger than the signal current — is apt to contribute to random noise and to cause disturbance. It is known [11] that this fluctuation may be determined by the following formula :

$$\overline{i_n^2} = 3,18 \cdot 10^{-19} I_{lk} \Delta f$$

$\overline{i_n}$ being the r. m. s. value of this noise component,
 I_{lk} the mean value of the leakage current in Ampère,
 Δf the frequency range of the system in c/s.

From here we obtain the noise voltage generated across input resistance R_i :

$$\overline{U_n} = 5,5 \cdot 10^{-10} (I_{lk} \Delta f)^{1/2} R_i .$$

Setting $I_{lk} = 10^{-7}$ A ; $R_i = 10^6$ Ohm and $\Delta f = 1$, we find

$$\overline{U_n} = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ Volt}$$

This fluctuation voltage is also only 0,2% of the a. c. signal voltage and may, therefore, be disregarded, even though the d. c. leakage current proper is quite high. If we express this in values of signal-to-noise ratios, we find for the d. c. components of light and leakage currents

$$(U_s/U_n)_{d. c.} \sim 10^{-5}/10^{-1} = 10^{-4} (!)$$

and for the a. c. components

$$(U_s/U_n)_{a. c.} \sim 10^{-5}/10^{-7} = 10^2$$

for an improvement by six orders of magnitude.

d) *The dark current and its suppression.* The dark current of photomultipliers is quoted in the scientific literature and in the RCA Catalogue already cited, for conditions identical to ours (measured with the chopped beam method at 1 c/s bandwidth) as equivalent to $7 \cdot 10^{-12}$ Lm cathode illumination at room temperature. Such a high dark current inherently restricts the limit for 1% accuracy to 100 times its own value, or to $7 \cdot 10^{-10}$ Lm. This is two orders of magnitude more than the limit set by the statistical error. It was of great importance to eliminate this very considerable loss of useful sensitivity without resorting to the well-known but cumbersome method of cooling the photomultiplier in liquid air. (The cooling, incidentally, simultaneously reduces its sensitivity by one order of magnitude.) The solution to this was found in the external electrostatic shielding of photomultipliers, investigated in detail by Zs. NÁRAY [12, 13, 14, 15] at the Central Institute of Physics of the Hungarian Academy of Sciences. Applying the results of these investigations, we provided the photomultiplier tube with an external aquadag coating shield and connected this to the cathode potential. A most significant drop in dark current was registered, to such an extent that its disturbing effect at 10^{-12} Lumen became irrelevant. This was in good agreement with the data published by NÁRAY (l. cit.) according to which suppression by a factor of 100 and more could be accomplished quite easily.

VI. Experimental results

The experimental arrangement, connected according to the block diagram already discussed (Fig. 11.), consisted of photomultipliers of the circular system (RCA 931/A with lateral window) or of the linear system (Elektrozavod-Moscow FEU-25-M with end window); there were two exciter coils of 500 turns each with an internal diameter of approx. 25 mm; an independent supply provided the exciting current of 50 c/s a. c., variable from 0 to 1 A (arranged as per Fig. 12.). The high voltage supply used a one-way rectifier and appropriate filter, variable from 700 to 1100 V d. c. A standard Magnephot 4-stage amplifier, having a sensitivity of 500 μ V full scale (a practical value realized in the amplifier), a decade-range switch and a continuous attenuator, was used as V.T.V.M. The phase-sensitive rectifier was controlled at 100 c/s. Output instrument: 0—1 mA d. c., having a time constant of approx. 0,5 sec.

Measurements were made with a 6 Volt/5 Amp. incandescent lamp, fed through rheostat from a storage battery. Attenuation was reached through neutral filters and Zeiss-Pulfrich graduated variable diaphragm. An oscilloscope for investigating waveforms was connected to the output of the last amplifier stage.

With this equipment we determined the main characteristics of the system as a function of the prime variables.

1. *Modulation characteristics.* The curves discussed in Part III. (Fig. 10.) are in good agreement with our expectations. The saturation shown when approx. 20 Oersted are reached in the interelectrode space shows the beginning of over-modulation at which a decrease of the selected second harmonic sets in. The

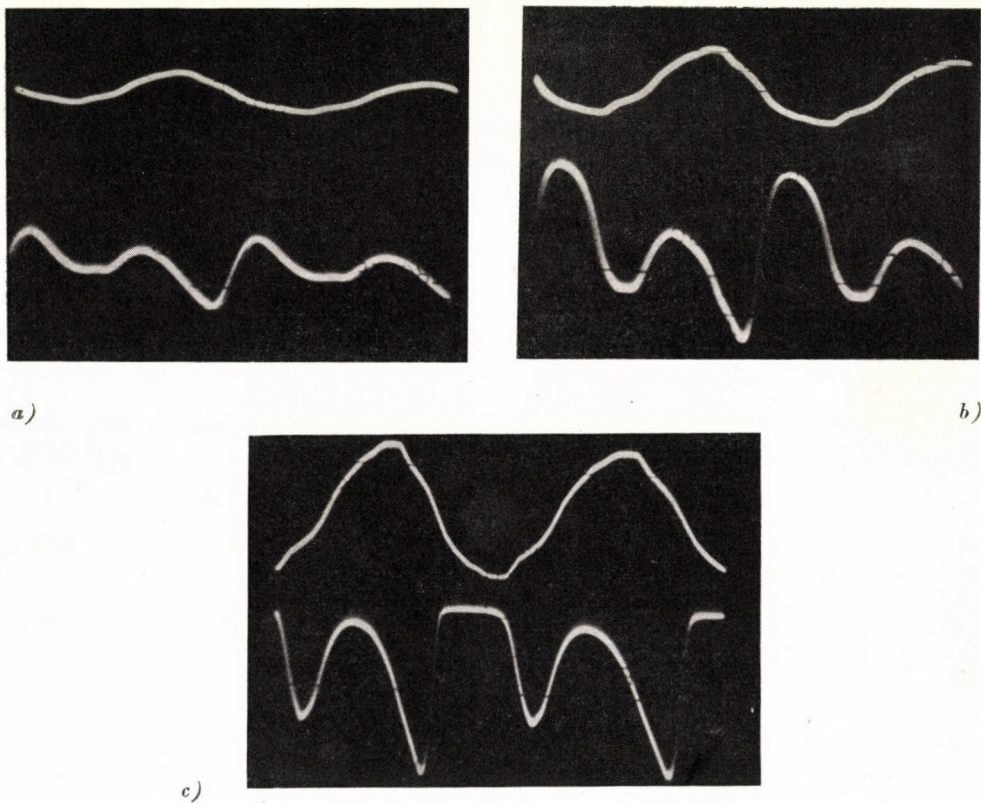


Fig. 13. Actual waveforms of exciter current and resulting photocurrent modulation
a: approx. 30% modulation; *b*: approx. 100% modulation; *c*: strongly overmodulated

curve registered at 30 c/s is quite regular in this respect. The second rise to be seen in Curve 2. (120 c/es) could not be identified. At the actually used frequency of 50 c/s no such anomaly was observed.

The waveforms of the modulating coil current and the modulated photocurrent are shown for various degrees of modulation in Fig. 13. by way of photographs from the screen of a cathode-ray tube with the help of a conventional electron-switch for simultaneous presentation. The curves demonstrate clearly that the photocurrent is suppressed twice for every cycle of the modulat-

ing frequency, resulting in a frequency-doubling effect. The oscillograms also show that the modulation is by no means symmetrical at lower field intensities and that a strong fundamental is present. This results obviously from the asymmetrical effect of the magnetic field on the electron-optical system of the photomultiplier. With a correctly oriented coil system this asymmetry decreases as 100% modulation is approached.

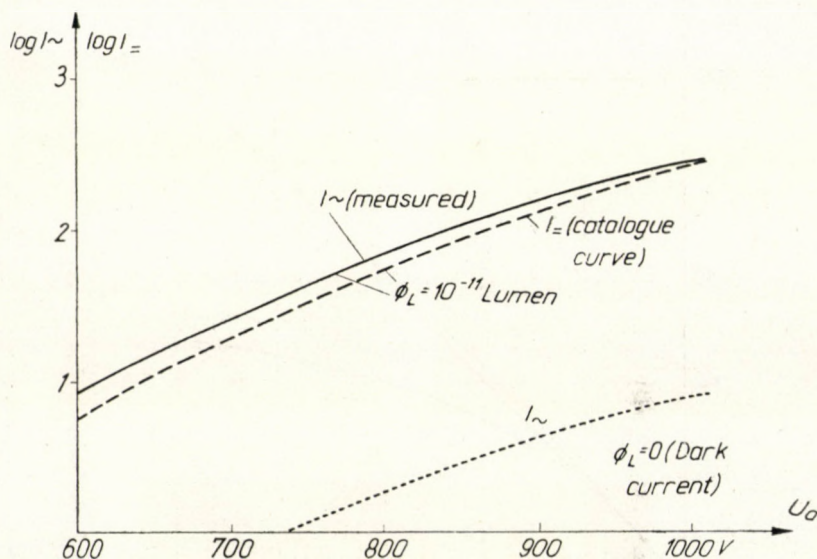


Fig. 14. Change of d. c. and modulated anode current with total anode voltage. (The ordinate scales of the measured and of the catalogue curve are arbitrarily chosen to permit comparison)

2. *Dependence on anode voltage.* Curve 1 in Fig. 14. shows the signal output as a function of total anode voltage. The customary logarithmic ordinate scale permits a direct comparison with the familiar catalogue curve 2, although the illumination and ordinate scale used are different arbitrary values. The substantially parallel character of these curves proves that the magnetic modulation does not affect the fundamental electron optics of the multiplier and that it is fully equivalent to a chopping of the incident light proper. Curve 3 shows the increase of the dark current signal with the anode voltage at zero illumination when no external shield-potential is used. The character of this curve indicates that the dark current is subject to exactly the same electron-optical laws as that due to the illumination of the cathode. The fact that this spurious signal was entirely due to space current was not only indirectly proved by its logarithmic character but also by the fact that it was completely suppressed at the approach of a powerful permanent magnet.

3. *Leakage current.* By the use of a d. c. galvanometer, the conductive leakage current was found to be 10^{-7} Ampère irrespective of polarity. This

corresponds to a leakage resistance of $10^{10}\Omega$ and agrees well with the literature cited in Part II.

4. *Sensitivity, linearity, statistical variations.* After calibrating the ligh. source attenuated by proper neutral filters in the manner mentioned above the linearity of response was tested in unmodulated and modulated operation,

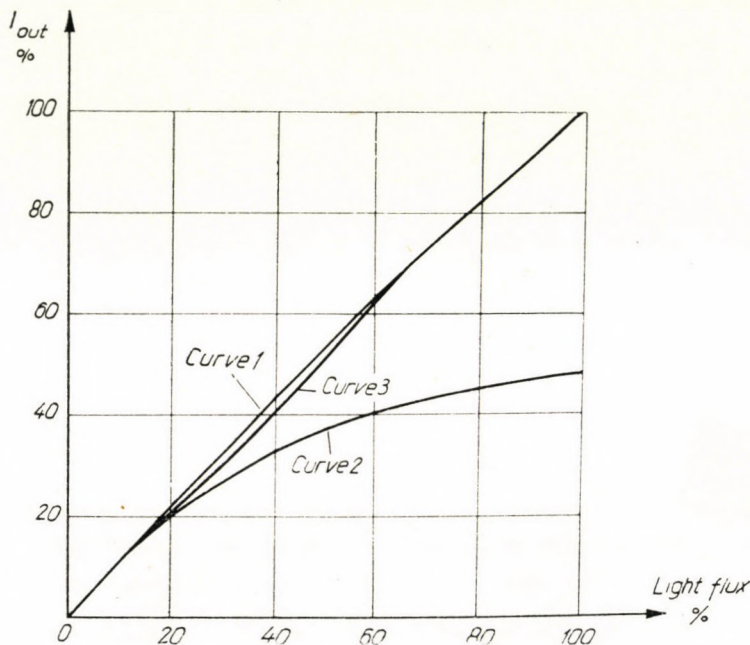


Fig. 15. Linearity of response within one decade

Hor. axis: setting of variable diaphragm

Vert. axis: electrical reading

Curve 1: response obtained with d. c. galvanometer

Curve 2: ultraphotometer before phase correction

Curve 3: same, after phase correction

Curve 1. in Fig. 15. shows the d. c. galvanometer reading with change in the setting of the linear diaphragm. The 100% value corresponds to approx. $5 \cdot 10^{-7}$ Lm. Modulated operation at one hundredth of this value resulted at first in a very marked deviation from the d. c. curve shown by Curve 2. The cause of this deviation was found after tedious investigation in the phase shift between the modulating field and the phase-controlled rectifier. This phase shift was caused by the selfinductance of the exciter coils which was quite large compared to that of the much smaller coils previously used for modulating small size phototubes. The effect was investigated in detail by L. BÁNSÁCHY [16] and its elimination by proper phase-correction resulted in a much more satisfactory Curve 3. which shows a maximum deviation from Curve 1. of not over 2%. Considering that the two curves were measured at

widely different light levels, the remaining nonlinearity was not further investigated, particularly since the magnetic modulation yielded the better approach to absolute linearity.

As to the absolute value of L_{min} our measurements were in full agreement with the theory (Part V.). At complete darkness the instrument of the Magnephot-amplifier showed a very erratic deflection corresponding to approx. $5 \cdot 10^{-12}$ Lumen. This deflection disappeared upon applying the dark current suppression of NÁRAY mentioned above. A full scale sensitivity of $5 \cdot 10^{-11}$ Lumen could be easily maintained at a good signal-to-noise ratio. Light intensities of 10^{-13} Lumen (6 photoelectrons/sec!) could be indicated with a 10% fluctuation by using a $100 \mu A$ pointer-type instrument damped to a time-constant of 10 seconds. A 1% zero stability proved that thermal agitation and other noise sources do not disturb at this level. The light sensitivity could be switched conveniently by the decade range switch of the amplifier without affecting the zero setting.

VII. On the measurement of X-ray and nuclear radiation

The method just described is well suited in conjunction with proper energy transformers (phosphors, scintillating crystals) to measure, register or control low level radiation more conveniently than by ionization-chamber or by pulse technique. This is particularly true in the range where the radiation is too strong for continuous G. M. tube- or scintillation-counting and much too weak for small volume ionization-chamber indication.

The limiting factor of useful sensitivity is again the statistical error and it is easily seen that in this case it is not the total number of photons reaching the cathode but the *total number of scintillations* emanating from the crystal or phosphor which must be considered. Thus the total light reaching the photocathode will be greater than that needed in the case of continuous light by a factor roughly equal to the photon-efficiency of the scintillator, taking into account its quantum-efficiency and self-absorption. The resulting total light flux, produced by the 10 000 scintillations necessary to assure 1% fluctuation at a time constant of 1 second, may be as high as 10^{-8} Lumen.

In the case of a very weak source of soft β radiation (P^{32}), e. g. 10 000 particles reaching the anthracene crystal will generate about 5000 scintillations per second, each of which will emit about 6000 photons. The self-absorption of the crystal and the geometry of the arrangement will cause a great loss: of the total of $30 \cdot 10^6$ photons generated about $2 \cdot 10^5$ photons will reach the cathode. This corresponds to a fairly high light flux of about 10^{-10} Lumen.

The statistical fluctuation, however, will not be $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{4,5 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^5} > 0,00225$ as for "continuous" light but rather

$$\frac{\sqrt{N}}{N} \sim \frac{70}{5000} \sim 0,014$$

n being the total number of photons per second and N the number of scintillations per second.

It is evident that for random light pulses such as scintillations, the light required for a given random fluctuation is *k-times larger* than that required for continuous light, k being the average number of photons per light pulse reaching the cathode.

Let me express my grateful appreciation to Mrs. M. FARKAS-JAHNKE, physicist, for carrying out much of the experimental work on this project and for submitting valuable suggestions. Thanks are due to Mr. F. SVÁB for the excellent help given in designing and building the necessary equipment.

REFERENCES

1. STRONG, J.: Procedures in experimental physics. Chapter 10. New York, Prentice-Hall 1939.
2. HARDY, A. C.—F. H. PERRIN: The principles of optics, Chapters 12., 13. New York, McGraw-Hill 1932.
3. ZWORYKIN, V. K.—WILSON, E. D.: Photocells and their applications. Chapter 12. New York, Wiley 1932.
4. GÖRLICH, P.: Die lichtelektrischen Zellen. Leipzig, Akademische Verlagsges. 1951.
5. GÖRLICH, P.: Die Anwendung der Photozellen. Leipzig, Akademische Verlagsges. 1954.
6. FOITZIK, L.—ZSCHAECK, H.: Zeitliche Veränderungen der absoluten und spektralen Empfindlichkeit von Photozellen und Photoelementen. *Exper. Tech. Phys.* 4. 3. 1956. p. 111—123.
7. RCA Tube Handbook HB-3 Vol. 1—2. Harrison, N. J., RCA.
8. KALMUS, H. P.—STRIKER, G. O.: A new radiation meter. *Rev. Scient. Instr.* 19. 2. 1948. p. 79—82.
9. See catalogue information on ORION-EMG (Budapest) "Magnephot" Modell 2211 or WELCH Scientific Co. (Chicago) "Densichron" Modell 3831.
10. KALMUS, H. P.—STRIKER, G. O.: US Patent 2, 605, 428. "Device for the amplification of minute space currents" and other patents.
11. SCHÖTTKY, W.: Spontaneous current fluctuations in various conductors. *Ann. d. Phys.* 57. 1918. p. 541—.
12. NÁRAY, ZSOLT: Determination of cathode sensitivity distribution of photomultipliers. *Acta Phys. Hung.* 4. 1955. p. 255.
13. NÁRAY, ZSOLT: *Magyar Fiz. F.* 3. 1955. p. 1.
14. NÁRAY, ZSOLT: On the reduction of the dark current in photomultipliers. *Acta Phys. Hung.* 5. 1955. p. 159.
15. NÁRAY, ZSOLT: On the reduction of the dark current of photomultipliers. *J. Scient. Instr.* 33. 1956. p. 476—478. and *M. Fiz. F.* 3. 1955. p. 515—528.
16. BÁNSÁGHY, LÁSZLÓ: On the linearity of phase-sensitive rectifier circuits. (To be published in Hungarian.)

SUMMARY

Theoretical considerations indicate that by applying the Magnephot principle to photomultipliers a simple and rugged industrial microphotometer may be built in the range of extremely low light intensities. The requirements for a low input impedance and a conservative input signal level can be successfully combined with a satisfactory signal-to-noise ratio without the use of mechanical light chopping. The external-shield method of dark current suppression may be usefully employed to extend the sensitivity limit to lowest light values, limited only by the discontinuous nature of the light flux.

Experimental investigation confirmed these assumptions and led to the construction of a sturdy and simple ultra-photometer of inherent electrical stability. The limit of useful sensitivity is around 10^{-12} Lumen, corresponding to the light collected by a 24" telescope from a star of the 14th order. Experiments with scintillating crystals yielded data about the use of the new instrument as a quantitative sensing device for nuclear radiation. The experimental instrument gave satisfactory performance as to zero stability, independence from leakage currents and the exclusion of dark current without cooling. The use of a. c. amplification assured convenient range-switching and the possibility to amplify the signal further for registration or control purposes. The new ultra-photometer will now be investigated in conjunction with spectrophotometry, astronomic and other low-level photometry as well as the indirect measurement of X-ray and nuclear radiation.

EIN ULTRAPHOTOMETER MIT ANWENDUNG EINES MAGNETISCH MODULIERTEN ELEKTRONEN-VERVIELFACHER

G. O. STRIKER

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund theoretischer Erwägungen schien es zweckmässig, das „Magnephot“-Prinzip d. h. die Verwendung magnetischer Modulation von Photozellen auf Photoelektronenvervielfacher anzuwenden. Es wurde zum Ziel gesetzt, ein einfaches und robustes, industriell herstellbares Mikrophotometer zu konstruieren, dessen Empfindlichkeit in das Gebiet extrem niedriger Lichtintensitäten reicht. Die Anforderungen für relativ niedrige Eingangsimpedanz und eines Eingangssignals entsprechender Grösse können in dieser Weise mit einem zufriedenstellenden Störpegel vereint werden, ohne jedoch einen mechanischen Zerhacker in den Lichtweg einschalten zu müssen. Mittels der Methode der Dunkelstromunterdrückung mit äusserlich zugeführtem Wandpotential kann die Empfindlichkeit ohne Kühlung bis zu den niedrigsten — nur durch die Quantelung des Lichtes begrenzten — Lichtwerten gesteigert werden.

Die experimentellen Untersuchungen erwiesen diese Annahme als richtig und führten zum Bau eines relativ einfachen Ultraphotometers mit guter elektrischer Stabilität. Die Grenze der nützlichen Empfindlichkeit liegt gegen 10^{-12} Lumen. Durch die Anwendung von Scintillationskristallen konnte die Nützlichkeit- und Empfindlichkeitsgrenze der Apparatur für Kernstrahlung untersucht werden. Eine hinreichende Nullstabilität, völlige Unabhängigkeit von Kriechströmen und die Unterdrückung des Dunkelstromes ohne jedwede Kühlung erhielten experimentellen Beweis. Die Anwendung von Wechselstromverstärkung ermöglichte eine bequeme Bereichumschaltung, sowie die Möglichkeit, die Messspannungen zwecks Registrierung oder Steuerung weiter zu verstärken. Das neue Ultraphotometer wird nunmehr in seiner Anwendung bei spektrophotometrischen, astronomischen und ähnlichen Lichtmessungen, sowie bei der indirekten Messung von Röntgen- und Kernstrahlungen untersucht werden.

ULTRAPHOTOMÈTRE AVEC MULTIPLICATEUR D'ÉLECTRONES À MODULATION MAGNÉTIQUE

G. O. STRIKER

RÉSUMÉ

En vue de la construction d'un micro-photomètre simple et facile à fabriquer, permettant de mesurer des intensités lumineuses minimales, l'auteur a appliqué des lampes photomultiplicateurs, utilisant le principe de la modulation magnétique depuis longtemps en usage pour les cellules photoélectriques ordinaires. Avec une impédance d'entrée relativement basse, et un signal d'entrée de grandeur moyenne, on peut atteindre de cette manière, un rapport signal-bruit satisfaisant, même sans l'utilisation d'un interrupteur de lumière mécanique. Le courant de l'obscurité peut être considérablement diminué par un potentiel négatif appliqué à l'extérieur de la paroi de verre du photo-multiplicateur, la sensibilité de l'appareil n'étant plus limitée ainsi, que par la nature quantique de la lumière.

Les recherches expérimentales de l'auteur ont confirmé ce qui précède, et ont conduit à la construction d'un ultraphotomètre relativement simple et de bonne stabilité. La limite de la sensibilité utile est d'environ 10^{-12} lumens. L'aptitude de l'appareil au mesurage de rayonnements nucléaires a été examinée au moyen de cristaux scintillants. La stabilité de la mise à zéro, l'indépendance des courants vagabonds et l'interruption du courant de l'obscurité sans refroidissement ont été vérifiées dans la pratique. Le voltage du signal d'un caractère alternatif peut être amplifié davantage en vue de l'enregistrement ou du réglage.

УЛЬТРАФОТОМЕТР С ЭЛЕКТРОННЫМ МНОЖИТЕЛЕМ МАГНИТНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Г. О. ШТРИКЕР

РЕЗЮМЕ

Для фотомножительных трубок, используемых для конструирования простых и легко изготавливаемых микрофотометров, пригодных для измерения минимальных количеств света, был применен принцип магнитной модуляции, использованный уже ранее для обычных фотоэлементов. Таким образом при относительно низком входном импедансе и средних по размерам входе без использования механического прерывателя света можно добиться удовлетворительного отношения сигнал-шум. Темновой ток с помощью отрицательного потенциала, приложенного к внешней стороне стеклянной стенки фотомножителя, можно значительно снизить и, таким образом, чувствительность прибора ограничивается теперь уже лишь природой кванта света.

Опытные исследования подтвердили вышесказанное, и была получена относительно простая конструкция ультрафотометра, имеющая высокую стабильность. Граница полезной чувствительности находится в пределах 10^{-12} . С использованием сцинтилляционных кристаллов исследовалась пригодность устройства для измерения ядерных излучений. Стабильность установки нуля, независимость от пользучих токов и отключение темнового тока без охлаждения подтвердились опытным порядком. Напряжение сигнала переменного характера можно дополнительно усилить для цели регистрации или регулирования.

STIFFNESS CHARACTERISTICS OF RIGID WARREN GIRDERS

Prof. P. CSONKA

D. ENG. SC.

UNIVERSITY FOR BUILDING SCIENCES AND COMMUNICATIONS, BUDAPEST

[Manuscript received 7th March 1957]

1. Introduction

In hall construction prefabricated reinforced-concrete Warren girders of a shape similar to that shown in Fig. 1. find more and more use in recent times. In the course of design of such girders stability problems of various

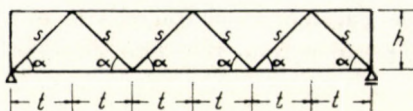


Fig. 1. Parallel-chord braced framed girder

kinds may arise whose analysis can be comparatively very simply solved by the application of the substitution method. For this, of course, the stiffness characteristics of the said girders must be known in the various basic cases of loading. The present paper aims at the determination of these stiffness values for rigid Warren girders with parallel chords. The same problem has been solved in a previous paper of the author [2] for Vierendeel girders.

2. Suppositions, notations

The girders to be treated are plane frameworks, with parallel chords. Both chords of the girder are of constant cross-section all along their lengths; bracings, with the exception of the two extreme posts, are of identical cross-sections and alternately inclined in opposite directions. Connections of the bars are rigid-jointed.

The materials of the girder are supposed to be elastic, deformations to be slight. Shear strains will be disregarded against other deformations. Investigations will be restricted to sections of the girder farther off from the ends, such as are not affected by the static behaviour of the two extreme posts.

In the course of investigations the girder is positioned with its plane vertical and its chords horizontal. Stiffness to bending — parallel to the plane of the girder — of the top chord will be denoted by symbol A_1 , to bending

perpendicular to the girder plane by symbol B_1 , and it is convened upon that the torsional stiffness of the top chord be C_1 , and its tensile-compressive stiffness be D_1 . Symbols of the same quantities referring to the bottom chord are A_2, B_2, C_2, D_2 , while in the case of the inclined bracings they are A_3, B_3, C_3, D_3 .

The *semi-inverse method* of de Saint-Venant will be applied in the course of investigation. Start will be made from such *geometrically* possible deformations as have one or more parameters indefinite for the time being. In the

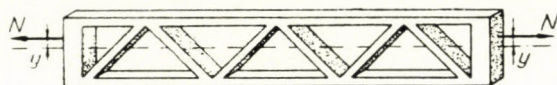


Fig. 2. Pure tension

course of treatment the internal forces corresponding to the supposed deformations will be determined, afterwards it will be investigated what values shall be attributed to the free parameters characteristic of these deformations, so that the deformation be possible from the *static* standpoint as well.

3. Pure tension

Plane deformation is supposed. It is assumed that chords remain straight after deformation too and are not shifted in axial direction against each other. Let the unit elongation of both chords be ε_0 , and the unit shortening of the structural depth of the girder be ε . The two latter quantities are the two free parameters of the geometrically possible deformation. In the case at hand the unit elongation of inclined braces is

$$\varepsilon_3 = \frac{t^2}{s^2} \varepsilon_0 - \frac{h^2}{s^2} \varepsilon, \quad (1)$$

and the angular rotation of the terminal tangents to their axis lines relative to the chord connecting their end points (Fig. 3.):

$$\Delta \varphi = \frac{ht}{s^2} (\varepsilon_0 + \varepsilon). \quad (2)$$

The following efforts have to act at the bar ends to produce the deformations (Fig. 4.):

$$\begin{aligned} N_1 &= D_1 \varepsilon_0, & N_2 &= D_2 \varepsilon_0, \\ N_3 &= D_3 \left(\frac{t^2}{s^2} \varepsilon_0 - \frac{h^2}{s^2} \varepsilon \right), \\ M_3 &= \frac{6 A_3 h t}{s^3} (\varepsilon_0 + \varepsilon), \\ T_3 &= \frac{12 A_3 h t}{s^4} (\varepsilon_0 + \varepsilon). \end{aligned} \quad (3)$$

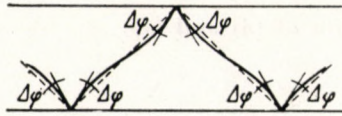


Fig. 3. Angular rotation

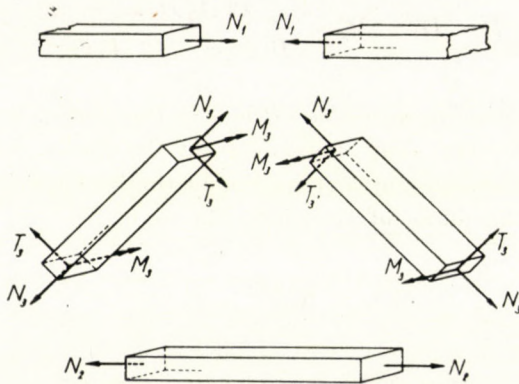


Fig. 4. Efforts acting at bar ends

With knowledge of the internal forces producing the supposed, *geometrically* possible deformations, the examination of the *static* possibility of the deformation may be embarked upon.

The condition of *equilibrium of joints* will first be investigated. Since couples acting on joints, as well as horizontal force components acting there, are beforehand in equilibrium, the only condition of equilibrium is that the sum of vertical force components be zero :

$$N_3 \sin \alpha - T_3 \cos \alpha = 0 .$$

Hence after substitution of values (3) the following relationship is obtained :

$$\varepsilon = \frac{D_3 s^2 t^2 - 12 A_3 t^2}{D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2} \varepsilon_0 . \tag{4}$$

Hereafter it has to be examined only what condition assures *the equilibrium of external and internal forces*. For the purposes of this investigation the girder is bisected by a cross-sectional plane so as to cut one inclined brace at its centre, and the equilibrium of one of the pieces of the girder cut off is examined. Since the sum of vertical components acting at the cross section is beforehand zero, only the horizontal force components are dealt with. One condition of equilibrium is that the sum of horizontal force components be zero :

$$N_1 + N_2 + N_3 \cos \alpha + T_3 \sin \alpha - N = 0 .$$

Herefrom with consideration of (3) and (4)

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{D}, \quad (5)$$

where

$$D = D_1 + D_2 + \frac{12 A_3 D_3 s t}{D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2}. \quad (6)$$

The latter is the *tensional-compressive stiffness* of the girder. A further condition of equilibrium is that the sum of moments of the forces, taken for instance about the axis laid through the centre point of the bisected inclined brace and perpendicularly to the plane of the girder, be zero :

$$(N_1 - N_2) \frac{h}{2} = N y.$$

Already known values having been substituted, it is obtained that in the case of pure bending tensional force N acting on the girder has to act at distance

$$y = \frac{D_1 - D_2}{D} \cdot \frac{h}{2} \quad (7)$$

above the horizontal middle axis of the girder. Else the static conditions of the supposed deformation cannot be assured.

4. Pure bending parallel to the plane of the girder

It is supposed, that the girder is subject to plane deformation, and that cross-sections taken through the joints remain planes after deformation too.

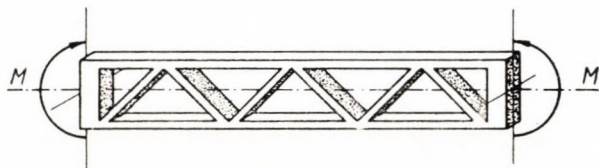


Fig. 5. Pure bending parallel to the plane of the girder

This deformation will be characterized by curvature κ of the axis line running at mid-depth of the girder, further by unit elongation ε_0 of this centre line, as well as by the unit diminution ε of the depth of the girder. Free parameters of the supposed geometrically possible deformation are thus : κ , ε_0 and ε .

In the given case the unit shortening of the top chord of the girder

$$\varepsilon_1 = \frac{h}{2} \kappa - \varepsilon_0, \quad (8)$$

the unit elongation of the bottom chord

$$\varepsilon_2 = \frac{h}{2} \kappa + \varepsilon_0, \quad (9)$$

and the curvature of the top and of the bottom chord respectively

$$\kappa_1 \cong \kappa, \quad \kappa_2 \cong \kappa. \quad (10)$$

In the course of the supposed deformation the unit elongation of bracings

$$\varepsilon_3 = \frac{t^2}{s^2} \varepsilon_0 - \frac{h^2}{s^2} \varepsilon, \quad (11)$$

and the angular rotations of their terminal tangents against the chord connecting their end points (Fig. 6.)

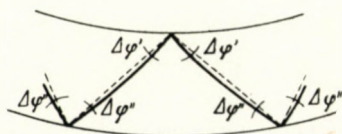


Fig. 6. Angular rotations $\Delta\varphi'$ and $\Delta\varphi''$

$$\Delta\varphi' = \frac{t}{2s^2} (s^2 \kappa + 2h\varepsilon_0 + 2h\varepsilon), \quad (12)$$

$$\Delta\varphi'' = \frac{t}{2s^2} (s^2 \kappa - 2h\varepsilon_0 - 2h\varepsilon).$$

With consideration of all these the efforts to be applied at the bar ends for producing the deformations are obtained as follows (Fig. 7.):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{D_1}{2} (h\kappa - 2\varepsilon_0), & M_1 &= A_1 \kappa, \\ N_2 &= \frac{D_2}{2} (h\kappa + 2\varepsilon_0), & M_2 &= A_2 \kappa, \end{aligned} \quad (13a)$$

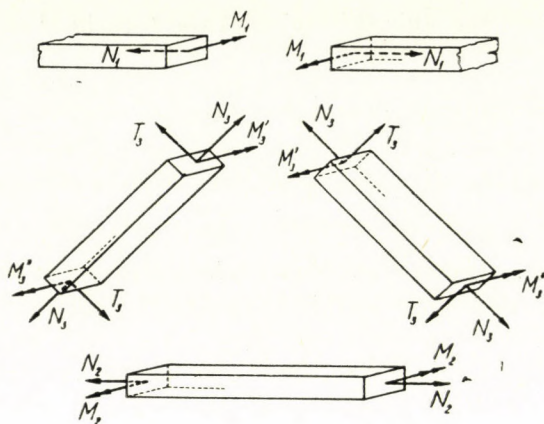


Fig. 7. Efforts acting at bar ends

$$\begin{aligned}
 N_3 &= \frac{D_3}{s^2} (t^2 \varepsilon_0 - h^2 \varepsilon), \\
 M_3' &= \frac{A_3 t}{s^3} (s^2 \varkappa + 6 h \varepsilon_0 + 6 h \varepsilon), \\
 M_3'' &= \frac{A_3 t}{s^3} (s^2 \varkappa - 6 h \varepsilon_0 - 6 h \varepsilon), \\
 T_3 &= \frac{12 A_3 h t}{s^4} (-\varepsilon_0 - \varepsilon).
 \end{aligned} \tag{13b}$$

These investigations will now pass on to the analysis of the *static* possibility of the *geometrically* possible deformation just examined.

The problem of the *equilibrium of joints* will first be examined. To assure this it is first necessary that the sum of vertical components of forces acting at the joint equal zero:

$$N_3 \sin \alpha + T_3 \cos \alpha = 0.$$

Hence after substitution of values (13) the following condition, in form similar to condition (4), is obtained:

$$\varepsilon = \frac{D_3 s^2 t^2 - 12 A_3 t^2}{D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2} \varepsilon_0. \tag{14}$$

Now only the *equilibrium of external and internal forces* have to be assured. For this the girder will be bisected across the centre point of one inclined bracing by a cross-sectional plane and the equilibrium of one of the pieces of the girder

cut off will be examined. One condition of equilibrium is that the sum of horizontal force components equal zero :

$$N_1 - N_2 - N_3 \cos \alpha + T_3 \sin \alpha = 0.$$

Hence after substitution of values (13) and (14) the following condition is obtained :

$$\varepsilon_0 = \frac{(D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2) (D_1 - D_2)}{(D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2) (D_1 + D_2) + 12 A_3 D_3 s t} \cdot \frac{h}{2} \kappa. \quad (15)$$

A further condition of equilibrium is that the sum of the moments of forces, taken for instance about the axis laid through the centre point of the bisected inclined brace, perpendicularly to the plane of the girder, equal zero :

$$M_1 + M_2 + \frac{M_3' + M_3''}{2} + N_1 \frac{h}{2} + N_2 \frac{h}{2} + M = 0.$$

Values (13), (14) and (15) having been substituted, the following result is obtained

$$\kappa = \frac{M}{A}, \quad (16)$$

where

$$A = A_1 + A_2 + \frac{A_3 t}{s} + \frac{(D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2) D_1 D_2 + 3 A_3 D_3 (D_1 + D_2) s t}{(D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2) (D_1 + D_2) + 12 A_3 D_3 s t} h^2. \quad (17)$$

The latter formula expresses the *bending stiffness* of the girder in case of bending parallel to its plane.

5. Pure bending perpendicularly to the plane of the girder

In this case the girder suffers three-dimensional deformation. It will be supposed that in the course of deformation points of the middle plane of

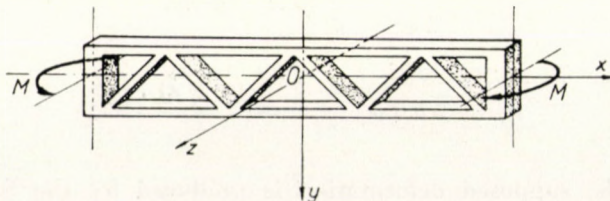


Fig. 8. Pure bending perpendicularly to the plane of the girder

the girder suffer displacement only in direction z and the magnitude of these dislocations is :

$$\zeta = \frac{\kappa}{2} x^2 - \frac{\lambda}{2} y^2.$$

Here κ and λ are constants. Accordingly in the course of the supposed geometrically possible deformation the middle plane of the girder assumes the shape of a hyperbolic paraboloid. Free parameters of the deformation are : κ and λ .

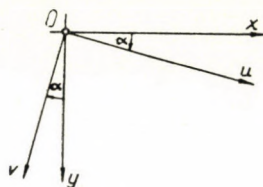


Fig. 9. Coordinate axes u and v

The supposed displacements ζ may be expressed by coordinates u and v in the plane x, y in the sense according to Fig. 9. in the following way :

$$\zeta = -\frac{\kappa}{2} (u \sin \alpha - v \cos \alpha)^2 + \frac{\lambda}{2} (u \cos \alpha + v \sin \alpha)^2.$$

With knowledge of displacement ζ as function of coordinates x, y and u, v respectively, the curvature or twist of the chords can be expressed by the formulas

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \kappa, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = 0$$

and the curvature or twist of the inclined braces of direction u by the formulas

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} = \frac{1}{s^2} (t^2 \kappa - h^2 \lambda),$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} = -\frac{h t}{s^2} (\kappa + \lambda).$$

Accordingly the supposed deformation is produced by the following efforts to be applied at bar ends (Fig. 10.)

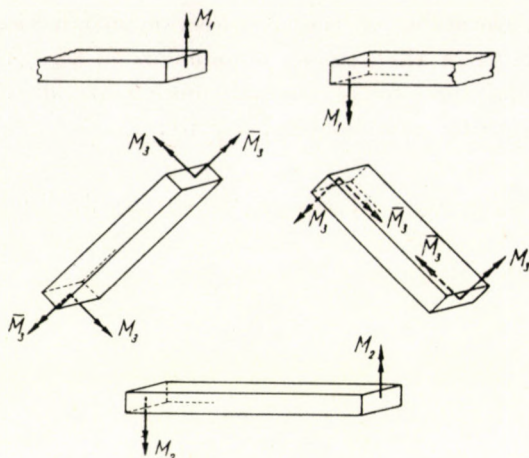


Fig. 10. Efforts acting at bar ends

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= B_1 \varkappa, & M_2 &= B_2 \varkappa. \\ M_3 &= \frac{B_3}{s^2} (t^2 \varkappa - h^2 \lambda), \\ \bar{M}_3 &= \frac{C_3 h t}{s^2} (\varkappa + \lambda). \end{aligned} \quad (18)$$

Since the efforts, which produce the discussed *geometrically* possible deformations are already known, it is possible to pass over to the examination of the *static* possibility of these deformations.

The condition of *equilibrium of joints* will first be treated to establish the condition of equilibrium of couples acting on joints. The sum of vertical components of the vectors of moments being beforehand zero, to assure equilibrium it is sufficient to set up the postulate that the sum of horizontal components of vectors of moments equal zero:

$$M_3 \sin \alpha - \bar{M}_3 \cos \alpha = 0.$$

Hence with consideration of (18)

$$\lambda = \frac{B_3 t^2 - C_3 t^2}{B_3 h^2 + C_3 t^2} \varkappa. \quad (19)$$

Finally the condition of *equilibrium of external and of internal forces* will be examined. For this investigation the girder will be bisected by a cross-sectional plane laid across the centre point of one of the inclined braces, and the condition of equilibrium of the part of the girder cut off will be examined.

Since only couples are acting on the cross section in question, and the sum of horizontal components of the vectors of moments is zero, the only condition of equilibrium is that the sum of vertical components of vectors of moments on the part of the girder examined equal zero:

$$M_1 + M_2 + M_3 \cos \alpha + \bar{M}_3 \sin \alpha - M = 0.$$

Hence by substitution of values (18) and (19)

$$\kappa = \frac{M}{B},$$

where

$$B = B_1 + B_2 + \frac{B_3 C_3 s t}{B h^2 + C_3 t^2}. \quad (20)$$

The latter expression is: the *bending stiffness* of the girder in case of bending perpendicularly to the plane of the girder.

6. Pure torsion

In this case the girder suffers three-dimensional distortion. The deformation will be supposed to be composed of two geometrically possible part deformations.

As *first* part deformation it will be supposed that the middle plane of the girder deforms to a hyperbolic paraboloid, while points lying in the middle

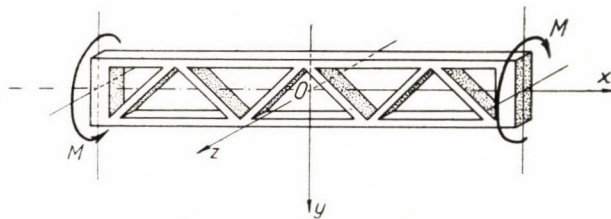


Fig. 11. Pure torsion

plane of the girder are displaced only perpendicularly to that plane. The value of these displacements of direction z will be

$$\zeta = \vartheta xy,$$

where ϑ is for the time a free parameter that may be arbitrarily chosen. In the course of the deformation the bars of the girder are twisted, the inclined braces

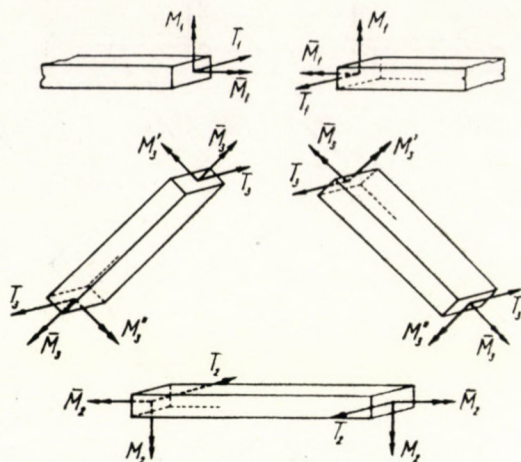


Fig. 12. Efforts acting at bar ends

are in addition to that bent as well. The internal forces arising at the terminal faces of the chord bars (12) are

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 0, & T_2 &= 0, \\
 M_1 &= 0, & M_2 &= 0, \\
 \bar{M}_1 &= C_1 \vartheta, & \bar{M}_2 &= C_2 \vartheta,
 \end{aligned}
 \tag{21a}$$

and efforts arising at the terminal faces of bracings:

$$\begin{aligned}
 T_3 &= 0, \\
 M_3' &= -\frac{2 B_3 h t}{s^2} \vartheta, \\
 M_3'' &= -\frac{2 B_3 h t}{s^2} \vartheta, \\
 \bar{M}_3 &= \frac{C_3 (t^2 - h^2)}{s^2} \vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{21b}$$

As *second* part deformation it will be supposed that the terminal faces of bars rotate, but the end points of the bars — the joints — remain in place. The supposed rotations of the terminal faces of bar ends are characterized by rotation vectors shown in Fig. 13. Of these vectors only φ_1 and φ_2 may be chosen freely, since the terminal faces of the bars have to fit together without gaps after deformation too. The condition of this is that the resultant angular rotation

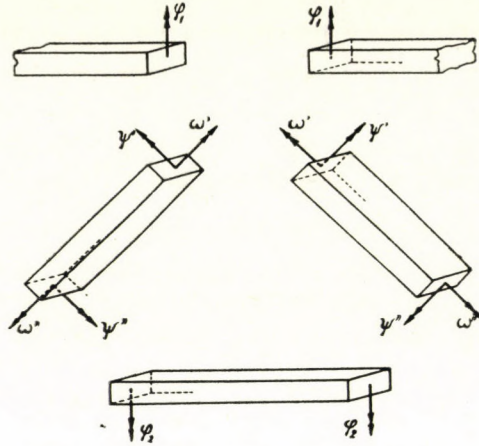


Fig. 13. Rotation vectors on terminal faces of bars in the second part deformation

on the terminal faces of the inclined braces be of the same magnitude as on the terminal faces of the chords, which evidently comes about, if

$$\begin{aligned}\psi' &= \varphi_1 \cos \alpha, & \psi'' &= \varphi_2 \cos \alpha, \\ \omega' &= \varphi_1 \sin \alpha, & \omega'' &= \varphi_2 \sin \alpha.\end{aligned}$$

Accordingly the forces to be applied at the terminal faces of chord bars

$$\begin{aligned}M_1 &= \frac{3 B_1}{t} \varphi_1, & M_2 &= \frac{3 B_2}{t} \varphi_2, \\ T_i &= \frac{3 B_1}{t^2} \varphi_1, & T_2 &= \frac{3 B_2}{t^2} \varphi_2, \\ \bar{M}_1 &= 0 & \bar{M}_2 &= 0.\end{aligned}\tag{22a}$$

On the other hand, efforts arising on terminal faces of bracings are :

$$\begin{aligned}M_3' &= \frac{2 B_3 t}{s^2} (2 \varphi_1 - \varphi_2), \\ M_3'' &= \frac{2 B_3 t}{s^2} (2 \varphi_2 - \varphi_1), \\ T_3 &= \frac{6 b_3 t}{s^3} (\varphi_1 - \varphi_2), \\ \bar{M}_3 &= \frac{C_3 h}{s^2} (\varphi_1 + \varphi_2).\end{aligned}\tag{22b}$$

As a result, composing the efforts corresponding to the two part deformations, it is found that the efforts to be applied at the terminal faces of chord bars

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{3 B_1}{t} \varphi_1, & M_2 &= \frac{3 B_2}{t} \varphi_2, \\ T_1 &= \frac{3 B_1}{t^2} \varphi_1, & T_2 &= \frac{3 B_2}{t^2} \varphi_2, \\ \bar{M}_1 &= C_1 \vartheta, & \bar{M}_2 &= C_2 \vartheta, \end{aligned} \quad (23a)$$

and on the terminal faces of bracings, on the other hand :

$$\begin{aligned} M'_3 &= \frac{2 B_3 t}{s^2} (2 \varphi_1 - \varphi_2 - h \vartheta), \\ M''_3 &= \frac{2 B_3 t}{s^2} (2 \varphi_2 - \varphi_1 - h \vartheta), \\ T_3 &= \frac{6 B_3 t}{s^3} (\varphi_1 - \varphi_2), \\ \bar{M}_3 &= \frac{C_3}{s^2} [h (\varphi_1 + \varphi_2) + (t^2 - h^2) \vartheta]. \end{aligned} \quad (23b)$$

Hereafter the investigation may come to the point, what values are to be attributed to the free parameters ϑ , φ_1 , and φ_2 characterizing the *geometrically* possible deformation in order to make the latter possible from the *static* standpoint too.

The condition of *equilibrium of joints* will be treated first. Since forces acting on joints are beforehand in equilibrium, it is sufficient to set up the postulate that the couples acting on joints form a system in equilibrium. This postulate may be expressed in the case of top and of bottom joints by the following equations :

$$\begin{aligned} M_1 + M'_3 \cos \alpha + \bar{M}_3 \sin \alpha &= 0, \\ M_2 + M''_3 \cos \alpha + \bar{M}_3 \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

These two equations may be written after substitution of expressions (23a) and (23b) in the following form :

$$\begin{aligned} \frac{3 B_1}{t} \varphi_1 + \frac{2 B_3 t^2}{s^3} (2 \varphi_1 - \varphi_2 - h \vartheta) + \\ + \frac{C_3 h}{s^3} [h(\varphi_1 + \varphi_2) + (t^2 - h^2) \vartheta] = 0, \\ \frac{3 B_2}{t} \varphi_2 + \frac{2 B_3 t^2}{s^3} (2 \varphi_2 - \varphi_1 - h \vartheta) + \\ + \frac{C_3 h}{s^3} [h(\varphi_1 + \varphi_2) + (t^2 - h^2) \vartheta] = 0. \end{aligned}$$

From these two equations

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \left(B_2 + \frac{2 B_3 t^3}{s^3} \right) \frac{a}{b} + \vartheta, \\ \varphi_2 &= \left(B_1 + \frac{2 B_3 t^3}{s^3} \right) \frac{a}{b} + \vartheta, \end{aligned} \quad (24)$$

where

$$\begin{aligned} a &= \frac{2 B_3 h t^2}{s^3} - \frac{C_3 h (t^2 - h^2)}{s^3}, \\ b &= 3 B_1 B_2 + \frac{4 B_3 t^4}{s^6} (B_3 t^2 + C_3 h^2) + \frac{(B_1 + B_2) t}{s^3} (4 B_3 t^2 + C_3 h^2). \end{aligned} \quad (25)$$

Now it remains only to assure the *equilibrium of external and of internal forces*. For this the girder will be bisected by a cross-sectional plane that cuts one inclined brace at its centre, and the equilibrium of one part of the girder will be investigated. Since the sums of force components of direction z and of moment vectors of direction y are beforehand equal to zero, for securing equilibrium it suffices to express the moment equation for the straight line of direction x halving the depth of the girder:

$$(T_1 + T_2) \frac{h}{2} + \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 \cos \alpha - \frac{M'_3 + M''_3}{2} \sin \alpha - \bar{M} = 0.$$

Hence after substitution of expressions (23a), (23b) and (24) the formula

$$\vartheta = \frac{\bar{M}}{C}$$

is obtained, where

$$C = C_1 + C_2 + \frac{C_3 t (t^2 - h^2)}{s^3} + \frac{2 B_3 h^2 t}{s^3} + \frac{h a}{t b} c. \quad (26)$$

Here

$$c = 3 B_1 B_2 + (B_1 + B_2)(2 B_3 + C_3) \frac{l^3}{s^3} + 4 B_3 (C_3 - B_3) \frac{l^6}{s^6}. \quad (27)$$

Expression (26) is the *torsional stiffness* of the girder.

REFERENCES

1. P. CSONKA : Substitution Method for the Approximate Analysis of Stability Problems of Plane Framed Trusses with Rigid Joints. *Acta Technica Acad. Sc. Hung.* (In print)
2. P. CSONKA : Stiffness Characteristics of Vierendeel Girders with Parallel Chords. *Ibidem.* (In print)
3. P. CSONKA : Pure Bending of Lattice Trusses with Parallel Chords. *Ibidem*, 19 (1957), pp. 155—168

SUMMARY

The paper aims at the determination of stiffness characteristics of rigid Warren girders for the different basic cases of strength. Knowledge of these data enables the structural engineer to analyze certain stability problems approximately by the substitution method [1], which allows substantial simplification of calculatory work in comparison to the exact method.

Chords of the girders investigated are all over of constant cross-section, bracings are alternately of opposite inclination and of equal and constant cross-section. Connections of bars are rigid-jointed. The analyzed basic cases of strength are: pure tension, pure bending, the latter parallel as well as perpendicular to the plane of the girder, finally pure torsion.

STEIFIGKEITSKENNWERTE VON RAHMEN-FACHWERKTRÄGERN

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Das Ziel des vorliegenden Aufsatzes ist die Bestimmung der Steifigkeitskennwerte von Fachwerkträgern mit parallelen Gurten für verschiedene Festigkeitsgrundfälle. Die Kenntnis dieser Werte ermöglicht es die einzelnen Stabilitätsprobleme der in Frage kommenden Träger mit Hilfe der Substitutionsmethode [1] angenähert zu lösen, was gegenüber der strengen Lösung eine wesentliche Vereinfachung bedeutet.

Die Gurte der behandelten Träger sind auf ihrer ganzen Länge von konstantem Querschnitt, ihre Füllungsstäbe sind abwechselnd von entgegengesetzter Neigung und von gleichem und konstantem Querschnitt. Die Stäbe sind biegefest verbunden. Die behandelten Festigkeitsgrundfälle sind: reiner Zug (Druck), reine Biegung, und zwar parallel bzw. lotrecht zur Trägerebene und schliesslich reine Drehung.

CARACTÉRISTIQUES DE RIGIDITÉ DES POUTRES À TREILLIS NEUDS RIGIDES

P. CSONKA

RÉSUMÉ

Le but de l'article est de déterminer les caractéristiques de rigidité de poutres à treillis à semelles parallèles, pour les différents cas fondamentaux de la résistance. La connaissance de ces caractéristiques permet de traiter approximativement les différents problèmes de stabilité des poutres en question, à l'aide de la méthode substitution [1], ce qui par rapport à l'étude exacte apporte une simplification considérable.

Les semelles des poutres examinées ont une section constante sur toute leur longueur, les diagonals sont d'une inclinaison alternativement opposée et de section identique et constante. Les neuds sont réalisées de manière à résister aux moments fléchissants. Les cas fondamentaux traités sont la traction (compression) simple, la flexion simple parallèlement resp. perpendiculairement au plan de la poutre et enfin la torsion simple.

ПАРАМЕТРЫ ЖЕСТКОСТИ РЕШЕТЧАТЫХ ФЕРМ

П. ЧОНҚА

РЕЗЮМЕ

Работой ставится цель определения данных жесткости решетчатых ферм с параллельными поясами при различных основных случаях прочности. Зная эти данные, становится возможным приближенная трактовка с помощью замещающего метода 1 некоторых задач стабильности в случае указанных выше ферм, что по сравнению с точным методом трактовки дает значительное упрощение.

Пояса исследованных ферм до конца имеют неизменное сечение, стержни обрешетки имеют попеременно противоположный наклон и все имеют идентичное и неизменное сечение. Соединение стержней является жестким при углах. Рассмотренные основные случаи прочности: чистое растяжение, а именно параллельно плоскости фермы и перпендикулярно к ней, наконец чистое кручение.

BESTIMMUNG DER SCHLAGENERGIE VON FEDERHÄMMERN

M. KÁLDOR

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR BILDSAME VERFORMUNG UND HÜTTENMASCHINENKUNDE,
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 31. März 1957]

Der Federhammer ist eine in Hüttenwerken vielgebrauchte Schmiedemaschine, die sich ihrem Wesen nach aus einer Feder, einer Masse (dem Bär) und dem aus einem Triebwerk bestehenden Schwingungssystem zusammensetzt. Das Triebwerk erregt nach einem bestimmten Gesetz durch die Bewegung des einen Endpunktes der Feder das Schwingungssystem, das andere Federende schliesst an den Bär an (Bild 1). Die Konstruktion von Federhämmern stützt sich ausschliesslich auf die Erfahrungen der Praxis, eine Methode der Berechnung der Schlagenergie des Hammers gibt es bisher nicht und es ist der Zweck dieser Arbeit, eine Berechnungsmethode zur Bestimmung der Schlagenergie eines Federhammers von einem Freiheitsgrad zu geben.

Die Bestimmung der Schlagenergie bereitet im Prinzip keine Schwierigkeit, weil man in Kenntnis der gegebenen Anfangsbedingungen die Bewegungsgleichung eines Schwingungssystems und so die Geschwindigkeit und die kinetische Energie der Masse bestimmen kann.

Von Federhämmern wird vorausgesetzt, dass der Bär bei jeder Umdrehung der Kurbelwelle einen Schlag ausübt. Diese Tatsache vereinfacht die Errechnung erheblich, weil sie die Möglichkeit bietet, die Rechnung auf das zwischen zwei Schlägen eintretende Intervall zu beschränken. Demgemäss kann als Ausgangslage des Systems jener Zustand bezeichnet werden, bei dem der Bär das Werkstück noch berührt, die Feder aber dem Gewicht des Bären entsprechend sich schon statisch gedehnt hat.

Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die kinetische Energie des Bären im Moment seiner Rückkehr zum Werkstück zu bestimmen und man muss demnach die Geschwindigkeit des Bären in dieser Lage kennen. Zu deren Bestimmung muss also die Bewegungsgleichung des Bären aufgeschrieben werden.

Bewegungsgleichung des Bären

Es sei M : die Masse des Bären,

x : die von der Ausgangslage des Schwerpunktes des Bären gemessene Koordinate,
 c : die Federkonstante, die auf die Gewichtseinheit der Feder entfallende Längenänderung,

ξ : die von der Ausgangslage des Endpunktes der mit der Kurbelwelle verbundenen Feder gemessene Entfernung,
 ω : die Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle.

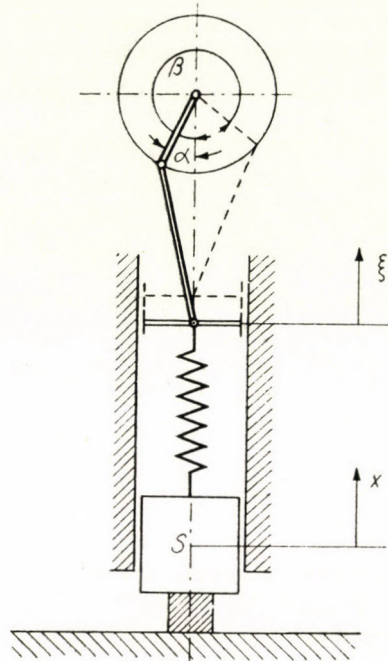


Bild 1

Ferner bezeichnet α den Winkel der Kurbelwelle in der Ausgangslage, β aber im Moment des Schlages d. h., wenn der Bär zum Werkstück zurückgelangt.

Die Differentialgleichung der Bewegung des Bären im Intervall $\alpha < \omega t < \beta$ ist also :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{\xi - x}{c} = 0 \quad (1)$$

Mit der Bezeichnung $cM = \frac{1}{k^2}$ und wenn man berücksichtigt, dass das Längenverhältnis zwischen Kurbel und Kurbelwelle im allgemeinen grösser ist als 5 d. i.

$$\xi(\omega t) = r [\cos \alpha - \cos(\alpha + \omega t)]$$

erhält die Differentialgleichung folgende Form :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = k^2 r \cos \alpha - k^2 r \cos(\alpha + \omega t) \quad (1a)$$

Die gemeingültige Lösung dieser Gleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung des homogenen Teils und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen :

$$x = A \cos kt + B \sin kt + r \cos \alpha - \frac{k^2 r}{k^2 - \omega^2} \cos (\alpha + \omega t) \quad (2)$$

Die Konstanten können aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden nach denen

$$\text{bei } t = 0 \quad x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dt} = 0 .$$

Dieses in die Gleichung (2) substituiert ergibt die Werte der Konstanten :

$$A = -r \cos \alpha + \frac{k^2 r}{k^2 - \omega^2} \cos \alpha = \frac{r \omega^2}{k^2 - \omega^2} \cos \alpha$$

und

$$B = -\frac{k r \omega}{k^2 - \omega^2} \sin \alpha .$$

Also ergibt die Bewegungsgleichung des Bären in der Funktion der Lage der Kurbel :

$$x = \frac{r \omega^2}{k^2 - \omega^2} \cos \alpha \cos kt - \frac{k r \omega}{k^2 - \omega^2} \sin \alpha \sin kt + r \cos \alpha - \frac{k^2 r}{k^2 - \omega^2} \cos (\alpha + \omega t) . \quad (3)$$

Zur Bestimmung der Schlagenergie ist die Kenntnis der Geschwindigkeit des Bären im Moment seiner Berührung mit dem Werkstück notwendig, d. h. bei der Winkellage β der Kurbelwelle.

Geschwindigkeit bzw. kinetische Bewegungsenergie des Bären im Moment des Schlages

Die Geschwindigkeit des Bären in der Lage $\alpha + \omega t$ der Kurbelwelle ist

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k r \omega^2}{k^2 - \omega^2} \cos \alpha \sin kt - \frac{k^2 r \omega}{k^2 - \omega^2} \sin \alpha \cos kt + \frac{k^2 r \omega}{k^2 - \omega^2} \sin (\alpha + \omega t) . \quad (4)$$

bzw. mit der Bezeichnung $m = \frac{k}{\omega}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{mr\omega}{m^2-1} [-\cos a \sin kt - m \sin a \cos kt + m \sin(a + \omega t)].$$

Im Moment des Schlages: $a + \omega t = \beta$, d. i.

$$t = \frac{\beta - a}{\omega}$$

also ist die Geschwindigkeit jetzt

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\beta} = \frac{mr\omega}{m^2-1} [-\cos a \sin m(\beta - a) - m \sin a \cos m(\beta - a) + m \sin \beta] \quad (5)$$

So kann die Schlagenergie

$$\frac{1}{2} M \left| \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\beta} \right|^2$$

errechnet werden.

In diesen Gleichungen ist der Winkel β noch unbekannt, aber gerade dies bestimmt, dass der Bär bei dieser Lage der Kurbelwelle in seine Anfangslage zurückkehrt, also x gleich Null wird.

Lt. Gleichung (3) ergibt sich so zur Bestimmung des Winkels β folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} x = \frac{r\omega^2}{k^2 - \omega^2} \cos a \cos \frac{k}{\omega} (\beta - a) - \frac{kr\omega}{k^2 - \omega^2} \sin a \sin \frac{k}{\omega} (\beta - a) + \\ + r \cos a - \frac{k^2 r}{k^2 - \omega^2} \cos \beta = 0. \end{aligned}$$

Nach der Vereinfachung mit r und Multiplikation mit $(m^2 - 1)$ steht zur Bestimmung des Winkels β folgende Gleichung zur Verfügung:

$$\cos a \cos m(\beta - a) - m \sin a \sin m(\beta - a) + (m^2 - 1) \cos a - m^2 \cos \beta = 0$$

Da der Wert β in geschlossener Form aus dieser Gleichung nicht berechnet werden kann, muss man zur Bestimmung von β bzw. zur Bestimmung der Schlaggeschwindigkeit die graphische Lösung anwenden.

Mit der Bezeichnung $\beta - a = y$ ist die neue Form der Gleichung:

$$\cos a \cos my - m \sin a \sin my + (m^2 - 1) \cos a - m^2 \cos(y + a) = 0.$$

bzw.

$$\cos a \cos m y - m \sin a \sin m y + (m^2 - 1) \cos a - \\ - m^2 \cos y \cos a + m^2 \sin y \sin a = 0.$$

Nach Ordnen und Dividieren durch $(m^2 - 1)$ wird

$$\frac{\cos m y - m^2 \cos y}{m^2 - 1} \cos a + \frac{m^2 \sin y - m \sin m y}{m^2 - 1} \sin a + \cos a = 0.$$

Nach Einführung der Bezeichnungen

$$\zeta = \frac{\cos m y - m^2 \cos y}{m^2 - 1} + 1 \quad \text{und} \quad \eta = \frac{-m^2 \sin y + m \sin m y}{m^2 - 1} \quad (6)$$

erhält man die Form

$$\zeta \cos a - \eta \sin a = 0$$

bzw.

$$\zeta = \eta \operatorname{tg} a$$

Diese ist aber in dem Koordinatensystem (ξ, η) die Gleichung einer solchen Geraden, die durch den Ursprung geht und mit dem positiven Zweig der Achse η den Winkel a einschliesst.

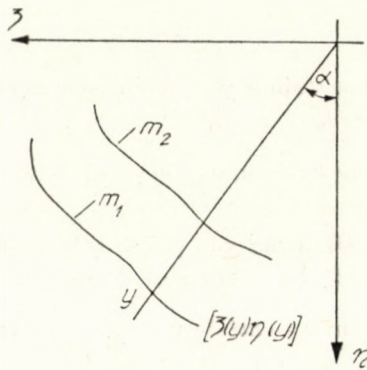


Bild 2

Werden für verschiedene Werte von m mit den durch die Funktion y berechneten Werten $\xi(y)$ und $\eta(y)$ die Kurven $[\xi(y), \eta(y)]$ gezeichnet, so geben die Schnittpunkte dieser Kurven mit der Geraden $\zeta = \eta \operatorname{tg} a$ bei gegebenem Winkel a den Wert $y = \beta - a$ an, der zu dem entsprechenden Wert von m gehört. Der Wert für β kann dann daraus berechnet werden (Bild 2). Prinzipiell kann man für β auch mehrere Lösungen finden, weil die Gerade

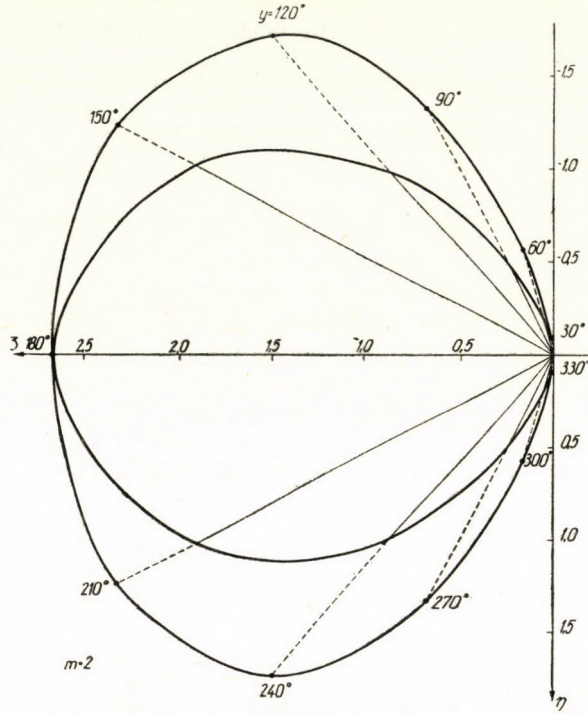


Bild 4/c

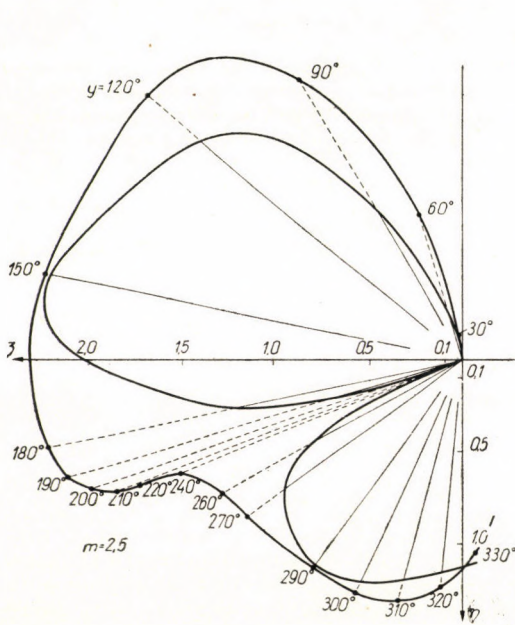


Bild 4/d

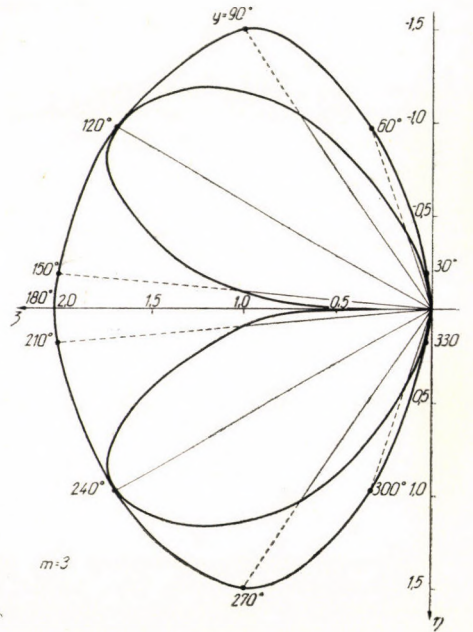


Bild 4/e

Zahlenbeispiel

Die angenommene Daten eines Hammers sind:
 Umdrehungszahl: $n = 136/\text{Min.}$ d. i. $\omega = 14,2 \text{ Sek.}^{-1}$
 Länge des Kurbelarmes: $r = 12 \text{ cm}$
 Gewicht des Bären: 100 kg , also seine Masse

$$M = 0,102 \text{ kg cm}^{-1} \text{ sec}^2$$

Federkonstante: $c = 0,0122 \text{ cm kg}^{-1}$, also

$$k = \frac{1}{\sqrt{cM}} = \frac{1}{\sqrt{0,0122 \cdot 0,102}} = 28,4 \text{ sec}^{-1}$$

und

$$m = \frac{k}{\omega} = \frac{28,4 \text{ sec}^{-1}}{14,2 \text{ sec}^{-1}} = 2.$$

Insofern die Lage des Ambosses und die Höhe des Werkstückes den Winkel der Kurbelwelle in der Anfangslage mit 41° bestimmt, ergibt sich für den Wert $\frac{1}{r\omega} \dot{x}_\beta$ nach dem Diagramm 1,3.

Demzufolge ist die Schlagenergie

$$E = \frac{1}{2} M \dot{x}_\beta^2 = \frac{1}{2} 0,102 \cdot 1,3^2 \cdot 12^2 \cdot 14,2^2 = 24,8 \text{ mkg}.$$

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die Schlagenergie des Federhammers festzustellen und es wurde die Bewegungsgleichung des Bären im Intervall zwischen zwei Schlägen bestimmt. Die Konstante der Differentialgleichung wurde auf Grund der Anfangsbedingungen bestimmt, die sich aus dem Umstand ergeben, dass der Bär nach dem vorangehenden Schlag eine kurze Zeit auf dem Werkstück ruht. Die Verringerung der Höhe des geschmiedeten Werkstückes wurde vernachlässigt. Die Schlaggeschwindigkeit des Bären kann im graphischen Verfahren bestimmt werden. Schliesslich zeigt ein Zahlenbeispiel den Verlauf der Berechnung und die Anwendungsform der Diagramme.

DETERMINATION OF THE IMPACT ENERGY OF SPRING HAMMERS

M. KÁLDOR

SUMMARY

The aim of this paper was the determination of the impact energy of the spring hammer. The motion equation of the ram was determined between two blows. The constant of the differential equation was determined from initial conditions established on the basis of the fact that the ram, though for a very short time, rests on the piece after the previous blow. The reduction of the height of the forge piece was disconsidered. The velocity of blow of the ram can be determined by a graphic method. Finally a numerical example presents the procedure of calculation and the use of diagrams.

DÉTERMINATION DE L'ÉNERGIE DE PERCUSSION DES MARTEAUX À RESSORT

M. KÁLDOR

RÉSUMÉ

L'étude se propose la détermination de l'énergie de percussion du marteau à ressort. L'auteur établit l'équation du mouvement du mouton entre deux frappes. La constante de l'équation différentielle est déterminée sur base des conditions initiales, dues au fait que le mouton repose sur la pièce après chaque frappe, pendant un temps très court. La réduction de la hauteur de la pièce forgée a été négligée. La vitesse de frappe du mouton peut être déterminée par une méthode graphique. A la fin de l'étude, un exemple numérique illustre les procédés de calcul et le mode d'utilisation des diagrammes.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ УДАРА ПРУЖИННЫХ МОЛОТОВ

М. КАЛЬДОР

РЕЗЮМЕ

Ставится целью определение энергии удара пружинного молота. Определено уравнение движения ударной штанги между двумя ударами. Константа дифференциального уравнения определена на основе начальных условий, которые происходят от того, что ударная штанга после предыдущего удара хотя и в течение очень не большого времени но все-таки же покоится на обрабатываемой детали. Усадка обрабатываемой ковкой детали упускается из виду.

С помощью графического метода представляется возможным определить скорость удара ударной штанги.

Наконец, числовым примером показан ход вычислений, далее метод использования диаграмм.

INFLUENCE OF BINDERS UPON THE SURFACE BRIGHTNESS OF CATHODE RAY-TUBE SCREENS. II.

I. HANGOS and GY. POZSGAY

RESEARCH LABORATORIES FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received 26th March 1957]

1. Introduction

In a previous paper the first named author [1] dealt with the effect of the binder on the surface brightness of cathode-ray-tube screens and found that the surface brightness of cathode-ray-tube screens produced with binder is in general inferior to that of tubes made without binder.

The aim of this paper is to find out whether in the case of Ca-, Sr- and Ba- coagulators there exists a relationship between the decrease of surface brightness and the concentration of the coagulator in the settling—liquid if waterglass is used as binder.

2. Measurement method, materials used

Measurements were carried out with a cathode-ray-tube described in the previous paper at 3,5,7 and 9 kV accelerating voltage and $2,7 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ current density. For the measurements rasters of 50 cs and 10 kcs were used. Samples were prepared on glass plates of 29 mm diameter as previously described.

It is known that the surface brightness of screens depends even in the case of phosphors of identical materials and grain size distribution on the layer thickness of the screen [2, 4]. The thickness of the layer depends on the quantity and grain size distribution of the phosphor further on the composition of the settling liquid [6], therefore measurements were made on thick screens to eliminate this source of error. Measurements were made on Tungfram willemite phosphor samples because silicate phosphors are less destroyed under the effect of electron bombardment, and for this reason no appreciable error of measurement has to be calculated with. The average grain size of the phosphor used was $5-8 \mu$, thus $10 \text{ mg}/\text{cm}^2$ screen thickness was chosen. This layer thickness already approached the layer of optically infinite thickness. The entire series of tests was executed on the same phosphor.

Measurements were performed on the excited side of the layer, by means of a Lange photocell with eye-corrected filter. The photo-current of the cell was measured by a galvanometer of $2 \cdot 10^{-8}$ A sensitivity. The exactness of measurements — including errors arising from photo-

metry, fluctuations of electrical conditions, preparation of the layers, and composition of the settling liquid — was of the order of $\pm 5\%$ [1], therefore at the same composition of the settling liquid 5 parallel samples were prepared from each one; plottings of the graphs denote average values of these.

For the composition of the settling liquid standard solutions of Ca-, Sr- and Ba-nitrates were prepared whose Ca-, Sr- and Ba-contents were determined or checked by flame photometry [5]. Water glass solutions used as binder were prepared in our laboratory by dissolving p. a.-grade SiO_2 in KOH solution. The prepared solutions were analysed for SiO_2 and KOH and used in the fresh state. For characterizing different kinds of water-glasses a parameter was introduced:

$$K_s = \frac{\text{SiO}_2 \text{ g/l}}{\text{KOH g/l}}$$

For the preparation and for diluting the solutions water purified by ion-exchange resins was used whose resistivity was above 100 kohm . cm.

3. Test results

As already mentioned in a previous paper [6], if salts of bivalent ions are used as coagulators in the preparation of the phosphor screens, the following parameters have to be reckoned with:

1. SiO_2 concentration of the settling liquid,
2. Concentration of the electrolyte (coagulator),
3. K_s of the binder (water glass),
4. Time of settling.

Parameters 1., 2., 3. give, as a matter of fact the composition of the settling liquid, that is, it may be said that the preparation of the screen is affected by the composition of the settling liquid and by the time of settling. There is, however, a relation between the two factors, because to each given composition of the settling liquid corresponds a minimum settling time necessary to fix the settled screen to the wall of the glass bulb.

As known [3, 7, 8], with bivalent ions the screen preparation depends at any given settling time on the concentration of SiO_2 of the settling liquid and on the concentration of the electrolyte in a way shown by Fig. 1.

The SiO_2 concentration of the settling liquid, is plotted on the vertical axis, its electrolyte content on the horizontal axis. The figure shows two curves: one is the coagulation curve, the other the adhesion curve. The regions beyond the coagulation curve are not suitable for screen preparation because of coagulation of the settling liquid. The adhesion curve denotes the limit of screen preparation for a given phosphor, that is, the com-

position of the settling liquid at which screens of suitable quality can be made. Therefore each point of the domain between the two curves gives the composition of a possible settling liquid. The closer one goes to the coagulation curve, the higher will be the possibility of coagulation, or, as it was shown [6], the greater the adhesion of colloidal particles contained in the settling liquid.

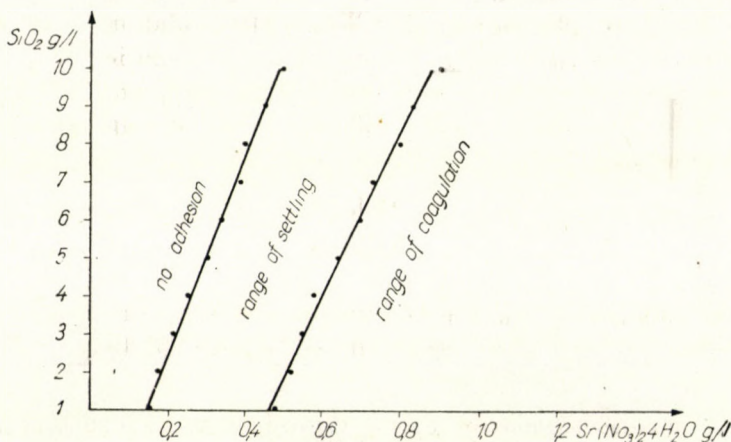


Fig. 1. Setting range

$K_s = 1,64$; Phosphor: willemite; Grain size: $5-8 \mu$; Time of settling: 1h

It was investigated how each of the above mentioned parameters influence the surface brightness of screens. For the investigation the time of settling will first be taken as constant, the previous paper has dealt with its influence [1].

If at a given K_s the electrolyte concentration of the settling liquid is kept constant, and only its SiO₂ content is varied, changes of surface brightness will be of the order of magnitudes of the experimental errors. No great error will be committed here, if it is supposed that the surface brightness of screens does not depend substantially on the SiO₂ concentration of the settling liquid.

Next the surface brightness of the screen was investigated at different accelerating voltages as a function of the coagulator concentration, if K_s constant. For Ca, Sr and Ba the same type of curves may be obtained as was shown for Sr-coagulator [1]. This is shown by fig. 2, 3 and 4. On the horizontal axis is plotted the coagulator concentration in mmol/l, on the vertical axis the measured value of surface brightness, referred to samples without binder. It is evident that as regards Ca-, Sr- and Ba-coagulators all three behave in the same way, that is, surface brightness as a function of the coagulator concentration of the settling liquid does not change up to a certain degree of concentration, afterwards it decreases with the electrolyte concentration

of the settling liquid. The phenomenon presents itself in the same way at accelerating voltages of 3, 5, 7 and 9 kV, only with the elevation of voltage the attenuating effect decreases at given electrolyte concentration.

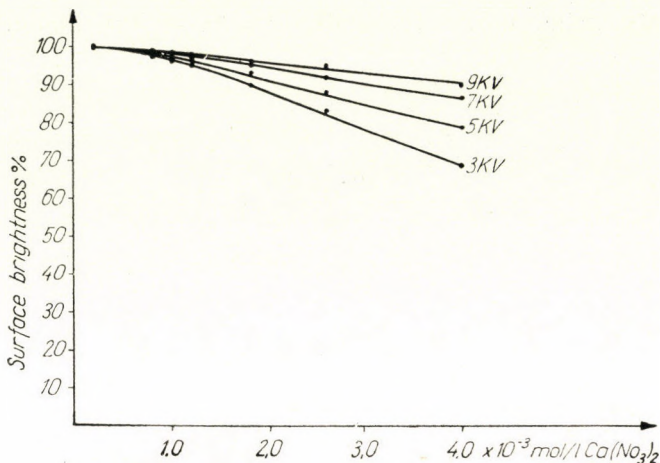


Fig. 2. Decrease of surface brightness in case of $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ -coagulator at different accelerating voltages $I = 2,7 \mu\text{A}/\text{cm}^2$; $K_s = 1,75$; Phosphor: willemite; Grain size: $5-8 \mu$; Layer thickness: $10 \text{ mg}/\text{cm}^2$; Settling time: 1 h

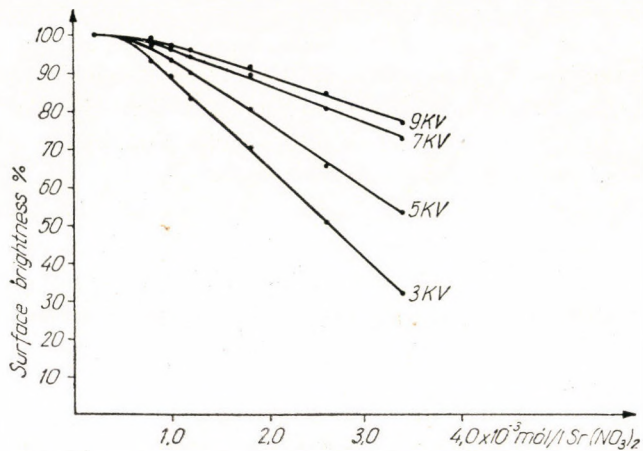


Fig. 3. Decrease of surface brightness in case of $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$ -coagulator $I = 2,7 \mu\text{A}/\text{cm}^2$; $K_s = 1,75$; Phosphor: willemite; Grain size: $5-8 \mu$; Layer thickness: $10 \text{ mg}/\text{cm}^2$; Settling time: 1 h

Since the behaviour of all three coagulators is the same as function of the accelerating voltage, in the following it is sufficient to indicate the effect of the other parameters only at a given accelerating voltage, although measurements were executed at the other accelerating voltages too.

It was investigated how parameter K_s influences the trend of curves already displayed at a given coagulator, e. g. strontium nitrate. This is shown in Fig. 5. On the horizontal axis is plotted in mmol/l units the strontium nitrate

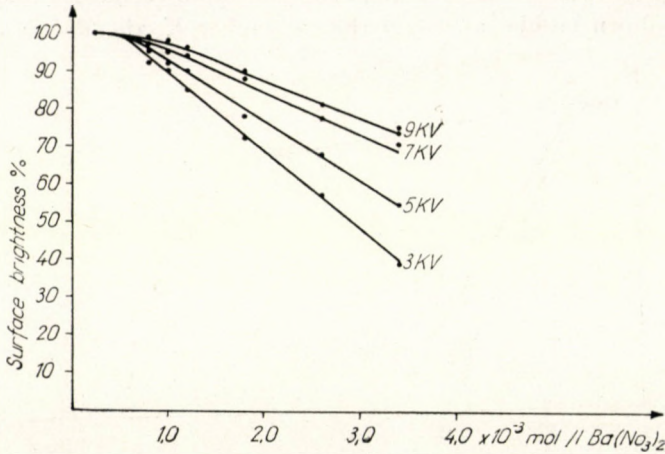


Fig. 4. Decrease of surface brightness in case of $\text{Ba(NO}_3)_2$ — coagulator
 $I = 2,7 \mu\text{A/cm}^2$; $K_s = 1,75$; Phosphor: willemite; Grain size: $5-8 \mu$; Layer thickness: 10 mg/cm^2 ; Settling time: 1h

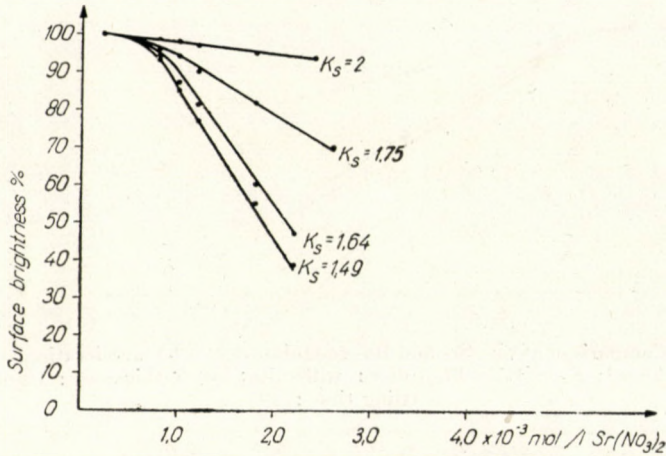


Fig. 5. Effect of K_s on surface brightness
 $U = 5 \text{ kV}$; $I = 2,7 \mu\text{A/cm}^2$; Electrolyte: $\text{Sr(NO}_3)_2$; Phosphor: willemite; Layer thickness: 10 mg/cm^2 ; Settling time: 1h

concentration, on the vertical axis the values of surface brightness related to screens without binder. In the figure values measured at 5 kV are plotted; each curve refers to different K_s values.

It is evident that K_s very substantially affects the surface brightness of screens especially in the range where the surface brightness linearly decreases with

coagulator concentration. This effect is still more accentuated if the surface brightnesses of screens prepared with Ca-, Sr- and Ba-coagulators is plotted one beside the others at three different K_s values, as shown in Fig. 6., 7. and 8. It is evident that surface brightness depends jointly on K_s and on the coagulator. It can be laid down besides as a fact that at higher K_s the decrease of surface

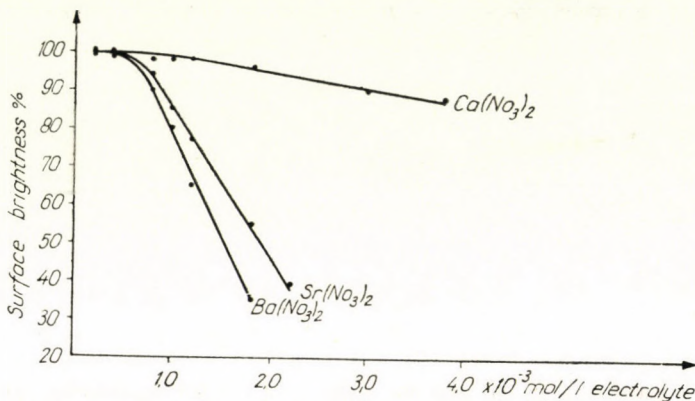


Fig. 6. Comparison of Ca-, Sr- and Ba-coagulators at 5 kV accelerating voltage $I = 2,7 \mu\text{A}/\text{cm}^2$; $K_s = 1,49$; Phosphor: willemite; Layer thickness: 10 mg/cm²; Settling time: 1^h

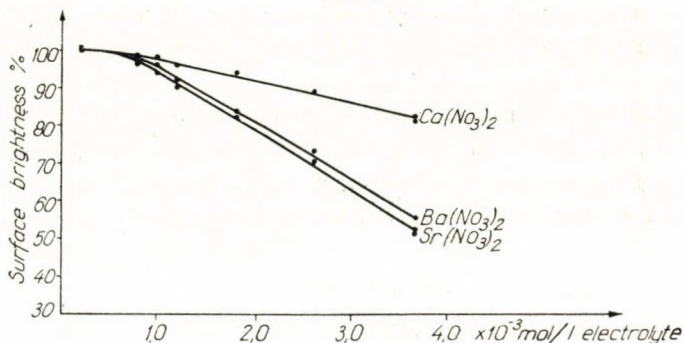


Fig. 7. Comparison of Ca-, Sr- and Ba-coagulators at 5 kV accelerating voltage $I = 2,7 \mu\text{A}/\text{cm}^2$; $K_s = 1,75$; Phosphor: willemite; Layer thickness: 10 mg/cm²; Settling time: 1^h

brightness is slight even if with the increase of electrolyte concentration the coagulation is approached. This is favourable from the viewpoint of settling, because with increase of K_s the range of the settling is also extended.

The reducing effect of settling time on surface brightness was measurable only near coagulation, where attenuating effect on colloid particles was to be reckoned with. Data hereon are contained in the previous paper [1].

Summing up it may be said that the surface brightness of cathode-ray-tube screens deposited by the settling process depends not only on individual properties of the luminescent material (phosphor) used in screen preparation and

on the thickness of the screen but also on the concentration of the settling liquid. If water glass is used as a binder and the nitrates of Ca, Sr or Ba as coagulators, then the surface brightness will depend substantially on the coagulator concentration of the settling liquid, on the quality of the coagulator, and on K_s of the binder (water glass). With the increase of the coagulator concentration of the settling liquid, the surface brightness, in general, decreases, with the

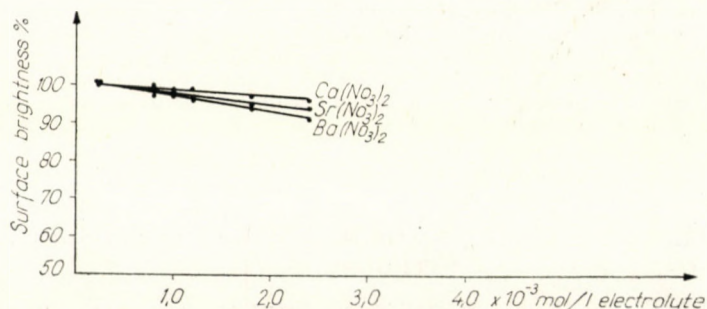


Fig. 8. Comparison of Ca-, Sr- and Ba- coagulators at 5 kV accelerating voltage $K_s = 2$; $I = 2,7 \mu\text{A}/\text{cm}^2$; Phosphor: willemite: $10 \text{ mg}/\text{cm}^2$, Settling time: 1^{h}

increase of K_s it grows. At the same coagulator concentrations and at the same K_s the attenuating effect is minimum with Ca-coagulator, while it is maximum with that of Ba.

The fact that surface brightness grows with increase of the K_s of water glass and does not decrease with it, appears peculiar. For the time grounds for it cannot be stated yet; a new series of experiments has been started to explain it. It is suggested to deal with it in a subsequent paper.

REFERENCES

1. I. HANGOS: Acta Technica 19, (1957) 67
2. R. G. HOPKINSON: Jour. I. E. E. 93. III. A. 5, 779. (1946).
3. I. HANGOS: Exp. Techn. d. Phys. (In Vorbereitung.)
4. Z. BODÓ, I. HANGOS: Acta Physica, III. 3—4, 155 (1954); V. 3. 295. (1955)
5. GY. GERGELY, F. P. VÁRADY: Acta Physica, V. 1. 51. (1955).
6. I. HANGOS: Thesis (Hungarian) Bp. 1956.
7. S. PAKSWER, P. INTISO: J. El. Chem. Soc. 99, 4, 164. (1952).
8. F. DE BOER, H. EMMENS: Phil. Techn. Rundschau, 16, 9, 272, (1955).

SUMMARY

The decrease of surface brightness of screen samples settled with the aid of Ca-, Sr-, and Ba-coagulators has been investigated as a function of the accelerating voltage, the electrolyte content of the settling liquid and the molar composition of the water glass. It has been established that Ca-, Sr- and Ba-ions as coagulators behave in a similar way. With the phosphor, its size distribution, and thickness of the screen given, the decrease of surface brightness is the greater, the lower the accelerating voltage, the smaller K_s , and the higher the coagulator concentration of the settling liquid. At the same accelerating voltage the attenuating effect increases in the order of succession: Ca, Sr and Ba, or Ca, Ba and Sr, depending on K_s .

EINFLUSS DES BINDEMITTELS AUF DIE OBERFLÄCHENHELLIGKEIT VON KATHODENSTRAHLRÖHRENSCHIRMEN II.

I. HANGOS u. GY. POZSGAY

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde die Abnahme der Oberflächenhelligkeit von mit Hilfe von Ca-, Sr- und Ba-Koagulatoren sedimentierten Leuchtschirmen in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung, des Elektrolytgehaltes der Sedimentationsflüssigkeit und der molaren Zusammensetzung des Wasserglases untersucht. Es wurde festgestellt, dass sich Ca-, Sr- und Ba-Ionen als Koagulatoren ähnlich verhalten. Die Abnahme der Oberflächenhelligkeit ist bei gegebenem Leuchtstoff, bei dessen gegebenem Korngrößenverteilung und Schirmstärke desto stärker, je niedriger die Beschleunigungsspannung, je kleiner K_S und je höher die Konzentration des Koagulators der Sedimentationsflüssigkeit ist. Bei derselben Sedimentationsflüssigkeit und Elektrolytkonzentration nimmt die Bremswirkung in der Reihenfolge von Ca, Sr und Ba, bzw. Ca, Ba und Sr in Abhängigkeit von K_S zu.

L'EFFET DU LIANT SUR LA BRILLANCE DES ÉCRANS DES TUBES CATHODIQUES II.

I. HANGOS et GY. POZSGAY

RÉSUMÉ

On a examiné la baisse de la brillance des échantillons d'écrans préparés à l'aide de coagulants à Ca, Sr et Ba, en fonction du voltage d'accélération, de la teneur en électrolyte du liquide de déposition et de la composition molaire du verre soluble. On a trouvé que les ions de Ca, Sr et Ba, comme coagulants, agissent de la même manière. Pour une matière luminescente, une répartition selon grosseur des grains et une épaisseur d'écran données, la décroissance de la brillance est d'autant plus grande, que le voltage d'accélération est plus bas, que le coefficient K_S est plus petit et que la concentration en coagulateur de liquide de déposition est plus grande. Avec un même voltage d'accélération et une même concentration en électrolyte, l'atténuation croît dans l'ordre de succession de Ca, Sr et Ba, ou bien de Ca, Ba et Sr, en fonction de K_S .

ВЛИЯНИЕ СВЯЗУЮЩЕГО ВЕЩЕСТВА НА ПОВЕРХНОСТНЫЙ БЛЕСК ЭКРАНОВ КАТОДНЫХ ТРУБОК. II

И. ХАНГОШ и Д. ПОЖГАЙ

РЕЗЮМЕ

Исследовалось снижение поверхностного блеска образцов осажденных экранов с помощью Ca, Sr и Ba коагуляторов в функции напряжения ускорения, содержания электролита в осаждающей жидкости и молярного состава жидкого стекла. Установлено, что ионы Ca, Sr и Ba — как коагуляторы — ведут себя аналогичным образом. Снижение поверхностного блеска при данных флуоресцирующем порошке, фракции крупности и толщине экрана является тем большим, чем выше напряжение ускорения, чем ниже K_S и чем выше концентрация коагулятора в осаждающей жидкости. При идентичных нарядении ускорения и концентрации электролита тормозящее действие возрастает в зависимости от K_S по порядку Ca, Sr и Ba и, соответственно, Ca, Ba и Sr.

DATA ON THE HISTORY OF METALLURGY IN HUNGARY*

VI.

PROJECT OF BLAST FURNACE AND BLAST ENGINE, DATED FROM 1816.

Prof. A. SCHLEICHER
D. ENG. SC.

[Manuscript received 29th March, 1957]

Some years ago the author described in this same periodical a blast furnace built in Hungary in 1813 and restored as monument in 1952 [1]. In that paper it was aimed at giving in picture and sketch such a technical description of the blast furnace as was possible on the basis of ruins explored by that data. The shaft of the furnace had not collapsed entirely and the fallen rubble conserved it from further decay; it was possible to make a survey for restoration, which could be supposed to express, or approach at least, the original state of the furnace. On auxiliary equipment, for instance on the blast engine, no data whatever could be found. The former paper already mentioned that further exploration of the site and research in archives were going on. In the course of the latter a plan, dated of 1816, of the furnace and of the chest blast engine was found.

A sketch made after the photographic copy of the original is presented in Fig. 1. If this sketch is compared to that published in the former paper on the restoration of the furnace, it will be found that between the first drawing, based partly on suppositions, and the sketch here presented, there are essential differences especially as regards dimensions. This is evidenced by the following comparison to which it is remarked that the dimensions of the drawing here presented are given in Vienna feet and inches,** which were converted to meters.

The differences are not surprising. Before the restoration the furnace was in ruins, the top was practically destroyed, the body had partly collapsed, the hearth for the most part. The statement of the first paper, that the dimensions given in the drawing there published correspond to the original state, has to be corrected at all events. Especially erroneous were guesses relating

*In this series the following papers of the author have thus far been published: I. History of Non-ferrous Metallurgy in the Mátra Mountains. *Acta Technica Acad. Sc. Hung.* 2 (1951) 2/42; II. Data on the Use of Brass in the Late Middle Ages and on the Beginning of Wire Drawing in Europe. *Ibidem* 7 (1953) 225/231; III. Restoration of a Blast Furnace Built in Hungary in 1813. *Ibidem* 9 (1954) 425/433; IV. First Industrial Production of Tellurium. *Ibidem* 9 (1954) 213/222 (all German); V. Manufacture of Pig Iron from High-alumina Ores in the 18th Century. *Ibidem* 18 (1957) 427/431.

** 1 Vienna ft. = 12 in. = 0,3161 m.

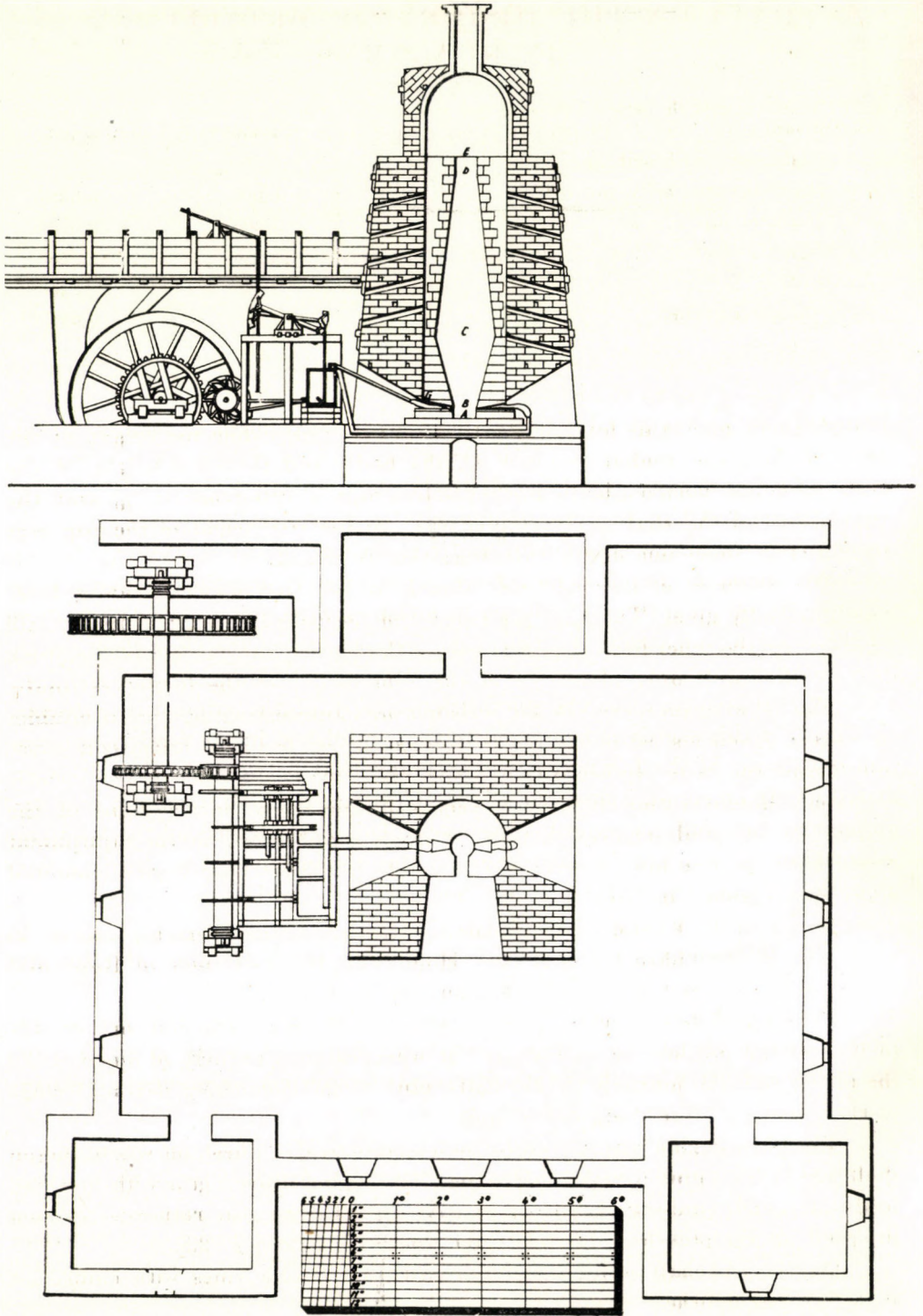


Fig. 1

	Dimensions on the sketch of Paper [1]	Dimensions of Fig. 1.
<i>A—B</i> Height of hearth between bottom slab and tuyere zone	1,350	0,527
<i>B—C</i> Height between hearth and belly.....	1,600	4,113
<i>C—D</i> Height between belly and top	6,000	6,638
<i>D—E</i> Height of top	1,400	0,948
Total height of shaft	10,350	12,226
Belly diameter	2,400	2,844
Side of square stock line	1,600	0,948
Hearth diameter	1,600	0,948

to the tuyere zone, this level was estimated too high, while the height of the belly (boshes) was underestimated. Of the body and the total height of the shaft the height between belly and top shows only a difference of $\frac{1}{10}$ and the total height of the shaft a difference of $\frac{1}{5}$, while the height of the top was estimated at about one and a half times that of Fig. 1.

The diameter of the belly was already in the first paper found to have been unusually great. The here presented and described drawing shows it still greater; on the other hand, the diameter of the hearth and the side of the stock line are in Fig. 1. only about $\frac{3}{5}$ of the dimensions of the former estimate.

The drawing presented in Fig. 1. is not only interesting, because it enables to correct erroneous estimates of the former paper, but also because it gives information on parts of the furnace above the stock line, different from those supposed. Moreover this drawing is very valuable from the viewpoint of the history of technical sciences, because it gives information on the equipment of the blast furnace built between 1810 and 1813 with a blast engine executed or at least planned in 1816.

Met. Eng. R. VANKÓ who still knew a similar engine operating about 50 years ago at Menyháza (at that time Hungarian territory, now in Rumania) is acknowledged for the following explanation to Fig. 1.:

“The principle of working of the engine is quite ingenious and corresponds to that of the uniflow air compressor. It was designed entirely of wood, only the piston rod, the journals of the shafts, pins of the connecting rods and rings of the cam gear were designed of iron.

The blast engine was driven by an overshot water wheel, on whose oaken shaft was keyed a pinion with wooden cogs. The pinion drove a gear with inserted teeth of wood, similarly keyed on an oaken shaft. The gear ratio was chosen to speed up the jackshaft by the water wheel in a ratio 1 : 2.3.

On the jackshaft were keyed four cast iron double rings with cams, set at 45° to one another.

During revolution of the jackshaft the cams pressed down each a single-arm lever, which latter imparted swinging motion to one end of a beam (balance bob) by means of a connecting rod.

The ends of the beam bore wooden segments grooved so as to engage with links of two strong chains. The lower end of one chain was fixed to the connecting rod, the upper end to the top of the segment on the driven side. The other chain was fixed with the upper end to the top of the segment on the far end of the beam, and with the lower end to the piston rod of heavy iron.

The chest, serving as cylinder, was of maplewood which by its hardness withstood the wear by the piston packing better than, for instance, pinewood would. The piston was built up of three layers of thick boards of oakwood, the middle layer being somewhat less wide than the top and bottom ones to take up, in one channel thus formed, a packing made of three hemp ropes threaded together. Only the rope packing slid on the walls of the blowing chest, a clearance having been left between the chest wall and the top and bottom boards of the piston. Beef-tallow was used for lubrication on the internal walls of the chest, and the packing was also impregnated with it.

On the bottom of the blowing chest an inwardly opening flap (valve) of leather was set. There were two flaps of leather in the piston too, opening upward. On top of the chest there was the collecting duct of the blast main, with a discharge flap opening upward.

Operation of the blast engine. The cam of the jackshaft presses the lever downward and through the intermediate of connecting rod and beam (balance bob) pulls the piston upward. Flaps on the piston close and the bottom suction- and top discharge-flaps on the chest open. The piston presses the air column above it into the collecting duct of the blast main, while it sucks air into the bottom space of the chest.

When the cam releases the lever, the heavy piston and piston rod descend in virtue of their great weight. Then suction and discharge flaps close and those in the piston open. The air in the bottom space of the chest streams into the space above the piston for compression in the next upward stroke. The operation of the blast engine is shown in Fig. 2.

The four chests worked in turn, one after another, so that each of the four pistons made two strokes during one revolution of the jackshaft. With this arrangement a fairly uniform supply of blast was assured."

Unfortunately, we possess no data as to whether the blast engine under review had got beyond the stage of design, nor have we any data apart from the drawing as regards — for instance — performance. In a detailed study [3] written by BENEDIKT, professor at the University of Vienna, concerning the Werfen Iron Works, it is mentioned that, to replace the old engine, JOSEPH GAINSCHNIGG designed a new blast engine with three boxes in 1808 at Werfen in Salzburg and that this new engine had actually been erected. Of all the

plants known from literature, it is this — unpublished until now — one which appears to be most suitable for a comparison with our four-box engine. Since the overshoot water wheel of the Werfen blast engine performed only 5 r. p. m. (a similar wheel was attached to our smelting works), its performance did not exceed 1800 to 2000 and not even with a maximum r.p. m, 2500 cubic feet.* Table VI of MARCHER's

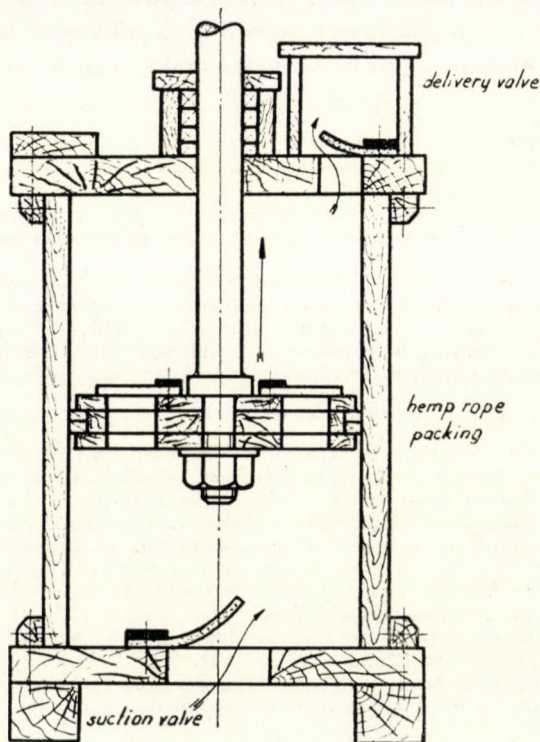


Fig. 2

book [4] mentions the existence of a number of blast engines provided with boxes: part of them had a capacity of 1200 to 1500, another part one of 2500 to 3000 cubic feet. If we bear the fact in mind that the performance of forge bellows, made of wood and leather, was not more than from 400 to 800 cub. feet/minute, and reached even in exceptional cases only 1200 to 1400 cub. feet, it must be admitted that our four-box blast engine as described above must have belonged to the most powerful units of its period.

GAINSCHNICG, in designing the blast engine of Werfen, paid due attention to contemporaneous literature, especially to MARCHER's work in 14 volumes [4]. While having made good use of those parts of this work which are connected

* 1 English cub. foot = 0,028317 m³ so that 2500 cub. feet make 85,182 m³; the old Austrian foot was approximately 0,03% longer than the English.

with our subject and therefore of interest to us, we have — unfortunately — been unable to gain access to another work of MARCHER [5] which, as is stated by BENEDIKT, contains the drawing upon which GAINSNIGG based his design. The Public Record Office at Salzburg had, on the other hand, the kindness to let us have a photocopy of GAINSNIGG's draft, the original of which [6] is in the custody of the said Office. Fig. 3 shows the draft in question: its inscriptions,* further its comparison with Fig. 1 and with the foregoing description of the operation of our blast engine make any detailed explanation of Fig. 3 superfluous.

The question might be put whether it was wise to publish data on which there were some doubts, expressed in the first paper also. This was already explained in the previous paper. In literature there were only two examples [2] of successful restoration of such ruins with observation of original dimensions, but in neither case had the ruins been so much neglected as in the Hungarian example. This explains why only approximate data could be published at that time.

As a matter of fact it was hoped that further data might come forth, but this could not be awaited because, on the one hand, the interest of Hungarian expert readers had to be satisfied, on the other hand, after unsuccessful search in Hungarian archives it was hopeless to expect that the original of the drawing here presented could be found after 3 years in a Czechoslovakian former Hungarian archive.**

REFERENCES

1. A. SCHLEICHER: Data on the History of Metallurgy in Hungary. III. Restoration of a Blast Furnace Built in Hungary in 1813. *Acta Technica Acad. Sc. Hung.* 8 (1954) p. 425—433.
2. One is the charcoal blast furnace built in the 1840-ies at Vordernberg, Styria W. SCHUSTER: Die hüttenmännischen Denkmale der Ostmark. *Stahl und Eisen* 59 (1939) p. 589—591, the other is the Luisenhütte restored at Wocklum, Westfalia. D. DICKMANN: Der letzte Holzkohlenhochofen im rheinisch-westfälischen Industriegebiet. *Stahl und Eisen* 70 (1950) 887—888.
3. H. BENEDIKT: Werfner Eisen. II. Teil Blätter für Technikgeschichte. Heft 18 (1956) S. 34/76. In Kommission Springer-Verlag, Wien.
4. F. A. v. MARCHER: Beyträge zur Eisenhüttenkunde. Klagenfurt, 1806. 1. Teil, 3. Band, 3. Stück, 2. Heft mit den Tafeln VI und VII.
5. F. A. v. MARCHER: Notizen und Bemerkungen über den Betrieb der Hochöfen und Rennwerke zur Verschmelzung der Eisenerze in verschiedenen Staaten. 5 Hefte, Klagenfurt 1808—1811.
6. Plan von der neu anzulegenden Gebläs-Maschine bei dem k. k. Eisen-Hochofen zu Werfen. 1808. Mappen aus der k. k. Bergwesens-Registratur, Salzburg XXI. Nr. 17., Landesregistrationsarchiv.

SUMMARY

In a previous paper [1] the author described the restoration of a blast furnace, built in Hungary 150 years ago, from its ruins. The state of the ruins did not permit the determination of the original dimensions entirely in conformity with the original state. Since a drawing dated of 1816 has come forth, which gives an authentic picture of the shape of the blast furnace and of a blast engine belonging to it. The present paper annexes the copy of this drawing and compares it to the sketch and data published in the first paper.

* *Fig. I.* Ground Plan of Blast Engine and Furnace. 1 The 3 wind boxes 2 Regulator box 3 Water container 4 Communication pipe 5 Main 6 Axle 9 Furnace *Fig. II.* Section of the longer side. 10 Sway beam 11 Drawbars 12 Nozzle 13 Leather sleeves *Fig. III.* Section of front side.

** The drawing was found in the mining archives of Banská-Štiavnica, former belonging to Hungary, whence by courtesy of Prof. J. GINDEL a photographic copy of it was received. To Gy. KISZELY is due acknowledgement for putting it at the author's disposal. Fig. 2. was drawn after a sketch of R. VANKÓ. Fig. 1. is a drawing made after his instructions from a photographic copy.

11. t.

Plan

von der neu angelegten gütlichen Maschine bey dem
H. H. (Bauh. Hofen) zu Hofen.

Fig. II

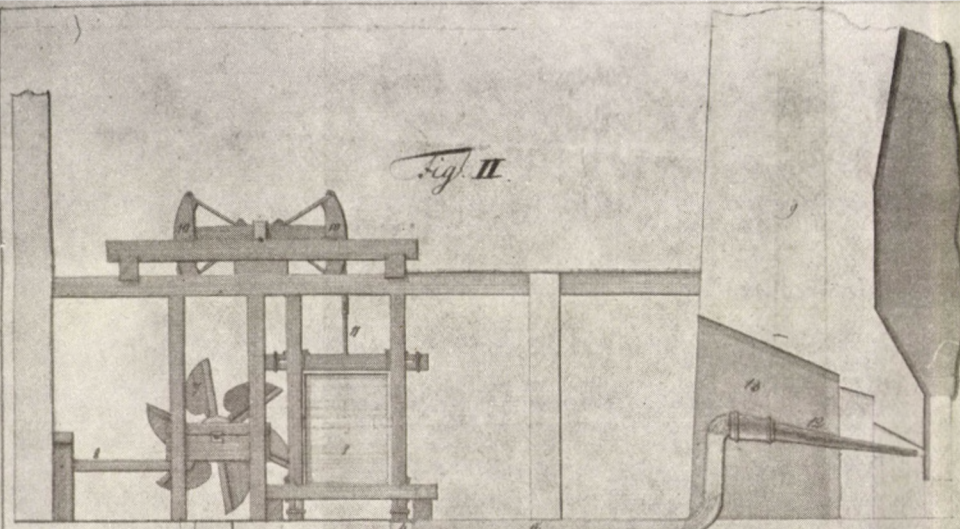


Fig. I

Grundriß von gütlichen und des Ofens. n. 1. Die Wind-
kammer. n. 2. Der Regulator. n. 3. Die Wasserbehälter
in welchen der Regulator stehen kann. n. 4. Die Communications-
löcher von welchen die Luft in das Feuer. n. 5. gütliche sind.
n. 6. Der Weibbaum mit der Wälzen. n. 7. 8. Die Zugstangen u. d. g.

Fig. II

Profil nach der längeren Seite. n. 10. Die Weibbaum, an welchen die n. 11.
Zugstangen eingewickelt sind. n. 12. Die Zylinder mit den Leibern. n. 13.

Fig. III

Profil von der kürzeren Seite. n. 14. Die Windröhren durch welche
die Luft von gütlichen in den Ofen in die Communicationslöcher n. 4. fließt.

Fig. I

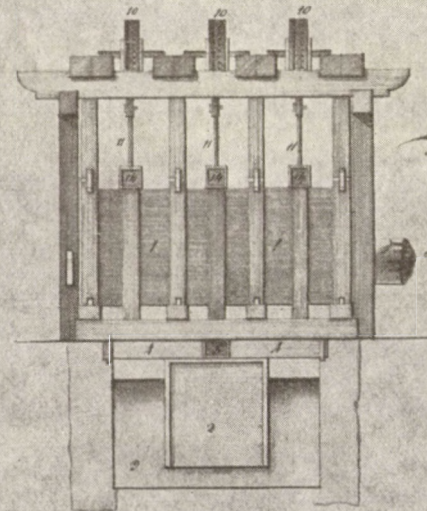
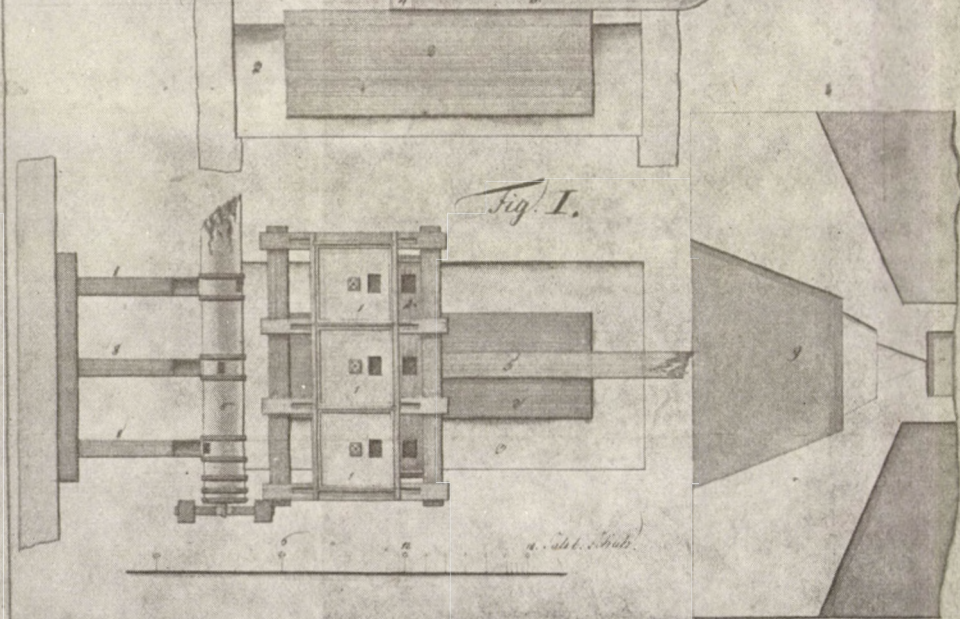


Fig. III

Entworfen von gütlichen (Hofenbau).

Gezeichnet von Georg Gruber 1808.

Fig. 3

BEITRÄGE ZUR GESCHICHTE DES HÜTTENWESENS IN UNGARN
VI.

ZEICHNUNG EINES HOCHOFENS MIT GEBLÄSE AUS 1816

A. SCHLEICHER

ZUSAMMENFASSUNG

In einem früheren Aufsatz [1] beschrieb der Verfasser die Restaurierung eines in Ungarn vor 150 Jahren errichteten Hochofens aus dessen Ruinen in 1952. Der Stand der Trümmer ermöglichte damals nicht, die Maße des Hochofens in jeder Beziehung dem Original entsprechend herzustellen. Seitdem kam eine Zeichnung aus 1816 zum Vorschein, welche über das Hochofenprofil sowie über das dazugehörige Gebläse ein verlässliches Bild gibt. Der gegenwärtige Aufsatz veröffentlicht eine Kopie dieser Zeichnung und vergleicht deren Maße und Angaben mit denen des ersten Aufsatzes.

CONTRIBUTION À L'HISTOIRE DE LA MÉTALLURGIE EN HONGRIE
VI.

PLANS D'UN HAUT FOURNEAU ET DE SA SOUFFLERIE ÉTABLIS EN 1816

A. SCHLEICHER

RÉSUMÉ

Dans un article antérieur [1], l'auteur a décrit la restauration d'un haut fourneau, bâti il y a 150 ans en Hongrie, à partir de ses ruines. L'état des ruines n'a pas permis alors de reconnaître les dimensions précises correspondant à l'état original.

Depuis ce temps, on a retrouvé un plan datant de 1816, qui donne une image authentique de profil du haut-fourneau et de sa soufflerie. L'article présent donne une copie du plan, le comparant à l'esquisse et aux données communiquées dans son premier article.

К ИСТОРИИ МЕТАЛЛУРГИИ В ВЕНГРИИ. VI.

ПРОЕКТ ДОМНЫ И ЕГО ПОДДУВНЫХ МАШИН, РАЗРАБОТАННЫЙ В 1816
ГОДУ.

А. ШЛЕЙХЕР

РЕЗЮМЕ

Автор в одной из своих прежних работ (1) сообщал о восстановлении в 1952 году построенной в Венгрии 150 лет ому назад домны. Состояние руин в то время не позволило определить размеры, которые во всех отношениях удовлетворяли бы требования оригинального состояния. С тех пор нашлся чертеж с 1816 года, который дает достоверную картину формы домны и его поддувных машин. В данной работе приведена копия этого чертежа и она сравнивается с чертежом и данными, приведенными в первом сообщении

Published Weekly, except the last two issues which are published bi-weekly

Subscription price, \$5.00 per Annum in Advance

Single Copies, 15 Cents

Entered as Second-Class Matter, June 26, 1902

Postpaid by the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill. 60610
Acceptance for mailing at special rate of postage provided for in Section 1103, Act of October 3, 1917
Authorized by Act of October 3, 1917

Copyright, 1952, by American Medical Association

Printed at the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill. 60610

Published by the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill. 60610
Subscription price, \$5.00 per Annum in Advance
Single Copies, 15 Cents

Entered as Second-Class Matter, June 26, 1902
Postpaid by the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill. 60610

Copyright, 1952, by American Medical Association
Printed at the American Medical Association, 535 North Dearborn Street, Chicago, Ill. 60610

THE INFLUENCE OF HEAT TREATMENT ON THE STRAIN-AGEING OF ALUMINIUM-KILLED STEEL

P. SZÉKI

CAND. of ENG. SC.

DESIGN INSTITUTE FOR GENERAL ENGINEERING CONSTRUCTION

[Manuscript received 29th March 1957]

The strain-ageing of mild steel is due, according to modern concepts, to such impurities of technical steel which have a much smaller solubility at room temperature than at higher temperatures. Amongst them, chiefly *N* causes strain-ageing, as is proved by the investigations of J. D. FAST published in 1950 [1, 2]. As for the question, what internal phenomena produce ageing, it is so far only a subject of hypothesis. At present, the theory of COTTRELL and LEAK is the one [3, 4] appearing to be the most probable and leading to mathematical conclusions which coincide with reality.

The theory of COTTRELL is based on the mechanism of dislocations. It assumes that the dislocations exercise attraction forces on the atoms of the dissolved impurities and that this force fixes the atoms which have wandered there. Thus atmospheres develop around the dislocations, which prevent the motion of the dislocations and these atmospheres produce strain-ageing. Very small quantities of dissolved atoms are sufficient to form an atmosphere.

Discussion of the theory leads to the conclusion that the tendency of the steel to strain-age might be lessened by reducing to a minimum the dissolved impurities, chiefly the *N* content of the steel before cold-working. Therefore every method which decreases the quantity of dissolved *N*, also decreases the tendency of the steel towards strain-ageing.

The killing of the steel with Al also belongs to these methods. The metallic Al, remaining after binding the O_2 , forms AlN with the dissolved *N* content of the steel, thus the content of dissolved *N* decreases. But only appropriate heat treatment induces the Al, remaining after binding the oxygen, to bind the *N* and induce the finely dispersed AlN to precipitate. It follows from this that the steel behaves differently, as for strain-ageing, if the heat treatment has been different. This is proved by numerous published results (e. g. [5]) and this is proved also by our experiments.

The purpose of our experiments was to study the effect of heat treatment on the transition temperature of brittleness. For initial material we choose two steels the acid-soluble Al contents of which were different.

The Al content of both steels was more than is theoretically necessary for binding the whole N in the form of AlN. The quantity of Al necessary for forming AlN is, according to stoichiometric calculations, 1,93 times the quantity of N.

Under acid-soluble Al and N we understand only those forms of occurrence of these elements, which are important from the point of view of ageing, i. e. the Al and N dissolved in the steel as well as the AlN. The more stable compounds of Al and N do not belong here, as e. g. Al_2O_3 or TiN. These are not soluble in diluted acids, but do not take part either in the evocation or prevention of ageing phenomena.

Composition of the steels used for our experiments was the following :

Marking	C	Mn	Si	P	S	Al acid- soluble	N acid- soluble
8	0,09	0,30	0,057	0,019	0,043	0,0136	0,0055
15	0,10	0,29	0,075	0,022	0,041	0,0588	0,0047

The plates of 12 mm thickness were subjected to different heat treatments, cold-stretched by 10% and after that, notched-bar impact test specimens were machined from them and the finished specimens were aged for 1 hour at 250° C. The impact specimens prepared in this way were broken at various temperatures and thus the transition temperature of brittleness of the variously treated steels was determined.

The first part of the heat treatment before cold working always consisted of heating to 920° C, by which we got the steel into austenitic state, but did not yet produce coarsening of grain. From this temperature, the specimens were cooled in three different ways: quenched in 8% NaOH solution of 20° C, in water of 20° C and cooled in air. Heating the cooled specimens again, different methods of tempering were used:

A	B	C	D	E	F	H
600°	600°	680°	680°	750°	750°	680° 2 h
5 h	10 h	1 h	3 h	1/2 h	2 h	600° 5 h

After tempering, all specimens were cooled in air.

In addition to these treatments, we carried out austempering on a group of specimens, by heating to 920° C, cooling to 815° C, keeping the specimens at this temperature for half an hour and then cooling them in air. For austempering we chose 815° C because according to LESLIE—RICKETT—DOTSON—WALTON [7], it is at this temperature that AlN precipitates most rapidly.

A
 N=From 920°C base—quenched (8%NaOH)
 V=From 920°C water—quenched
 L=From 920°C cooled in air
 Tempering for 5^h at 600°C

B
 N=From 920°C base—quenched (8%NaOH)
 V=From 920°C Water—quenched
 L=From 920°C cooled in air
 Tempering for 10^h at 600°C

C
 N=From 920°C base—quenched (8%NaOH)
 V=From 920°C water—quenched
 L=From 920°C cooled in air
 Tempering for 1^h at 680°C

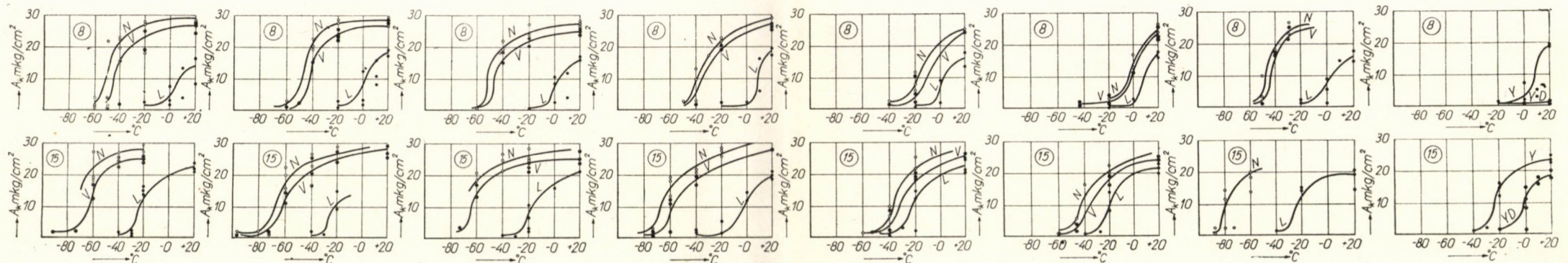
D
 N=From 920°C base—quenched (8%NaOH)
 V=From 920°C water—quenched
 L=From 920°C cooled in air
 Tempering for 3^h at 680°C

E
 N=From 920°C base—quenched (8%NaOH)
 V=From 920°C water—quenched
 L=From 920°C cooled in air
 Tempering for 1/2^h at 750°C

F
 N=From 920°C base—quenched (8%NaOH)
 V=From 920°C water—quenched
 L=From 920°C cooled in air
 Tempering for 2^h at 750°C

H
 N=From 920°C case—quenched (8%NaOH)
 V=From 920°C water—quenched
 L=From 920°C cooled in air
 Tempering for 2^h at 680°C after
 for 5^h at 680°C

Y=Austempering:
 From 920°C
 To 815°C for 1/2^h
 cooled in air
YD=After austempering:
 Tempering for 3^h at 680°C



○ measured points of curve „N“
 × measured points of curve „V“
 ● measured points of curve „L“

Fig. 1

One group of the specimens which had been subjected to austempering was tempered for 3 hours at 680 C°.

After determination of the notch toughness, the temperature-notch toughness diagrams were traced (Fig. 1).

From the diagrams, the following conclusions may be drawn :

1. The curve is shifted the more towards the lower temperatures, the greater is cooling speed from a temperature above A_3 .
2. If the tempering temperature reaches a certain temperature limit, the curve is shifted in the direction of higher temperatures.

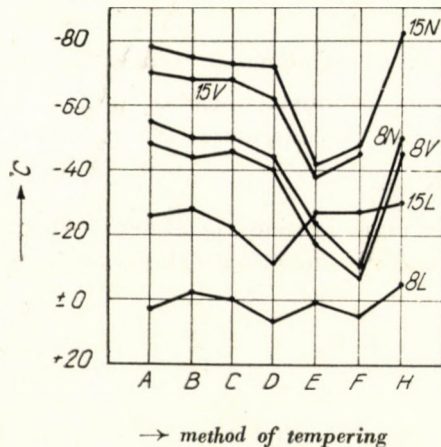


Fig. 2

3. The austempering gives a result similar to cooling in air. Supplemental heat treatment is detrimental to ductility, chiefly if the Al content is not high enough.

4. The Al content of aluminium-killed steel is, within the limits of the generally used minimum and maximum quantities and from the point of view of strain-ageing tendency, of less importance than the method of heat treatment. Steel Nr. 8 with an Al content of 0,0136 reaches the transition temperature in average at a temperature higher by 24° C than steel Nr. 15 with 0,0588% Al, both having been subjected to the same heat treatment. From this it may be calculated that with the same heat treatment, 0,01% more Al content shifts the transition by about 5—6° C towards the lower temperatures, supposing that in the interval of these Al contents the relation between the transition value and the Al content is linear. But for specimens of the same steel, part of them quenched in NaOH solution and part of them cooled in air, the difference between the transition temperatures after tempering according to A, B, C or D is about 50—55° C, as Fig. 2 shows.

In our computations and in the figures, we have assumed the transition temperature to be that temperature, at which the specific impact work drops to 5 mkg/cm².

The influence of the Al content can be explained as follows :

From the paper of DARKEN, SMITH and FILER [6], the equation for computing the temperature of solution of the whole AlN content of the steel is known. At a higher temperature, there is in the steel only dissolved Al and N, but no AlN. According to the equation

$$\log K_s = -\frac{7400}{T} + 1,95 \quad (1)$$

where T = the temperature of complete solution in °K,

K_s = the solubility product, which is equal to the product of the acid-soluble Al and N contents of the steel, i. e.

$$K_s = (\text{Al}\%) \cdot (\text{N}\%).$$

According to the investigations of LESLIE—RICKETT—DOTSON—WALTON [7], Equ. (1) ought to be modified. The modified equation is :

$$\log K_s = -\frac{6770}{T} + 1,033 \quad (2)$$

The latter equation gives that the AlN content of steel Nr. 8 entirely dissolves at 1040 °C, while the AlN content of steel Nr. 15 dissolves entirely at 1201 °C.

But the temperature used for our experiments, was much lower than this, i. e. 920°. At this temperature, only a part of the AlN dissolves. The amount of dissolved N in the steel can be calculated, for this temperature, from the equation:

$$(C_N - C_c) \cdot \left(C_{Al} - \frac{27}{14} C_c \right) = K_s \quad (3)$$

where C_N = the acid-soluble N content of the steel,

C_{Al} = the acid-soluble Al content of the steel,

C_c = the N content of the steel which is bound in the AlN,

$\frac{27}{14} C_c$ = the Al content of the steel which is bound in the AlN,

K_s = the solubility product ; at temperature of interest which can be calculated from Equ. (2). At 920°, the value is equal to $2,28 \cdot 10^{-5}$.

It can be calculated from the equation that in the steel Nr. 8, 0,002752% of the 0,0055% N content is tied to the AlN at 920° and that 0,002748%, that is 49,9% of the quantity of N is dissolved. With steel Nr. 15, the situation is different. From the 0,0047% of N, 0,00425% is still bound to the AlN and only 0,00045%, which is only 9,57% of the whole quantity of N, is dissolved at 920°.

In the steel Nr. 8 which contains less Al, there is roughly 5 times more dissolved N at 920° than in the steel Nr. 15 containing more Al. The dissolved N and Al can be the better precipitated into AlN, the less has been dissolved at the heat treatment, because the undissolved AlN particles act as nuclei [7]. It can be supposed therefore that at tempering a more perfect precipitation can be reached with that steel which contains more non-dissolved AlN. If we consider the dissolved N to be the cause of strain-ageing, we have an explanation for the Nr. 8 steel having a stronger tendency towards strain-ageing than the Nr. 15 steel.

The influence of heat treatment can be explained as follows :

The N which has been dissolved at 920° is in a disorderly state. If the rate of cooling is great, this state is stabilized and after cooling, the steel contains the N still in a disorderly state. At tempering, the dissolved atoms start a diffusion movement, according to the degree of heating. The bounding energy arising between the N and Al atoms encountering each other during the movement produces finely dispersed AlN. If the temperature of re-heating exceeds a certain limit, the diffusion movement of the still dissolved atoms becomes so vivid that AlN cannot form, because the attraction of the dislocations on the N is greater than the energy which would tie them to the Al. Therefore some of the dissolved atoms place themselves in the dislocations and form atmospheres.

It can be supposed that under the action of higher temperature tempering the already precipitated, finely dispersed AlN particles agglutinate, although this effect cannot yet be observed under the metallographic microscope. This phenomenon, too, may deteriorate the ductility of the steel.

If after heating at 920° the cooling speed is not high enough — e. g. if the steel cools in air — there is enough time during cooling for part of the dissolved atoms in strong diffusion movement to place themselves in the dislocations already at higher temperatures. Neither further cooling, nor fresh re-heating can change this.

REFERENCES

1. J. D. FAST : Ageing of Iron and Steel. The Iron and Coal Trades Review. 14. April. 1950. p. 837
2. J. D. FAST : Le vieillissement du fer et de l'acier. Revue de Métallurgie. July 1950. p. 779..
- 3.—4. A. H. COTTRELL : Theory of Dislocation
B. Chalmers : Progress of Metal Physics. 1, 1949. p. 110.
B. Chalmers : Progress of Metal Physics. 4. 1953. p. 237.
5. A. JOSEFSSON—E. NYGREN : Slagseghetsegenskaper hos mjuka stal med varierande aluminiumhalt. Jernkontorets Annaler. 1953. p. 69.
6. L. S. DARKEN—R. P. SMITH—E. W. FILER : Solubility of Gaseous Nitrogen in Gamma Iron and the Effect of Alloying Constituent — AlN precipitation. Journal of Metals. Dec. 1951. p. 1174.
7. W. C. LESLIE—R. L. RICKETT—C. L. DOTSON—C. S. WALTON : Solution and Precipitation of Aluminium Nitride in Relation to the Structure of Low-Carbon Steel. Transactions of ASM. 1954. p. 1470.

SUMMARY

The tendency for strain-ageing of aluminium-killed mild steel is slightest

a) if after binding the oxygen, there is still enough Al in the steel for tying up the N. In other terms, if the acid-soluble Al content exceeds the quantity of N by more than 1,93 times;

b) if before cold working, the steel is heat-treated so that as large a quantity as possible of the N is precipitated in the form of finely dispersed AlN. This may be obtained by quenching as quickly as possible from a temperature which only slightly exceeds A_3 and tempering afterwards at a temperature not reaching 700°.

DER EINFLUSS DER WÄRMEBEHANDLUNG AUF DIE RECKALTERUNG
VON MIT ALUMINIUM BERUHIGTEM NIEDRIGGEKOHLTEM STAHL

P. SZÉKI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Neigung zur Reckalterung der mit Al beruhigten niedriggekohten Stähle ist dann am geringsten, wenn

a) nach Bindung des Sauerstoffs noch genug Al zur Bindung des N im Stahl vorhanden ist ; mit anderen Worten, wenn der säurelösliche Al-Gehalt das 1,93-fache des N-Gehalts übersteigt ;

b) vor der Kaltverformung der Stahl einer derartigen Wärmebehandlung unterzogen wird, dass eine je grössere Menge von N in der Form von fein verteiltem AlN ausgeschieden wird. Dies kann dadurch erreicht werden, dass von einer A_3 nur wenig überschreitenden Temperatur so schnell wie möglich abgeschreckt wird, und danach auf eine 700° nicht erreichende Temperatur angelassen wird.

INFLUENCE DU TRAITEMENT THERMIQUE SUR LE VIEILLISSEMENT
APRÈS L'ÉCROUISSAGE DE L'ACIER DOUX CALMÉ À L'ALUMINIUM

P. SZÉKI

RÉSUMÉ

La tendance au vieillissement après l'écroissage des aciers doux calmés à l'Al est la moindre, si

a) après fixation de l'oxygène, il reste encore assez d'Al pour fixer le N ; en d'autres mots, si la teneur en Al soluble à l'acide dépasse la teneur en N multipliée par 1,93 ;

b) avant écrouissage à froid, l'acier subit un traitement thermique tel qu'une quantité aussi grande que possible de N soit précipitée sous forme de AlN finement dispersé. Ceci peut être obtenu en trempant aussi vite que possible à partir d'une température ne dépassant A_3 que de peu, et en employant ensuite un revenu au-dessous de 700° .

ВЛИЯНИЕ ТЕРМООБРАБОТКИ НА СТАРЕНИЕ ПРИ ОБРАБОТКЕ МЯГКОЙ СТАЛИ, УСПОКОЕННОЙ Al

П. СЕКИ

РЕЗЮМЕ

Наименьшая склонность к старению при обработке мягкой стали, успокоенной Al, имеет место тогда:

1) Когда после связания кислорода имеется еще достаточное количество Al в стали для связания N. Другими словами, если содержание Al, растворяющегося в кислоте, превышает 1,93 кратную количества N.

2) Когда перед холодной обработкой сталь подвергается термообработке так, чтобы возможно большее количество N преципитировалось бы в тонко диспергированный AlN. Этого можно добиться путем охлаждения с возможно наибольшей скоростью с температуры, только очень незначительно превышающей A_3 , а затем применяя отпуск, не достигающей 700° C.

BENDING STRESSES IN EDGE BEAMS OF CYLINDRICAL SHELLS

C. SZMODITS
CAND OF ENG. SC.
BUILDING RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received 5th April 1957]

The computation of bending stresses in edge beams of cylindrical shells is based on exact methods of the elasticity theory, whereas in general the data of the edge beam are determined by simplifying assumptions of the elementary statics. This analysis can be made if the depth of the rectangular edge beam is — in relation to the dimensions of the cross section of the shell — a small one; however in case of deep edge beams it is not acting as a beam, but as a small plate submitted to boundary forces and consequently its performance can but incompletely be described by the elementary theory of bending and torsion. On account of these approximate data the computed data of the shell are also approximate, despite the exact calculation of the shell plate. It seems therefore justified to calculate it on the basis of the same severe conditions as the cylindrical shell. A further justification of this method is the circumstance that the exact computation of the edge beam involves no more calculations than the usual approximation. If the edge beam is not rectangular but of composite cross section — and this is in general of small dimension — the usual calculation can be made by means of the method of elementary statics.

The following analysis evaluates the rectangular edge beam. The analysis of the edge beam is adapted to the dimensioning method [1], and the same symbols are used.

In the analysis of bending stresses in cylindrical shells, as it is known, the geometrical continuity between the edge beam and the cylindrical shell is developed by forces applied on the joined edges of the edge beam and the cylindrical shell.

Our present problem is concerning the determination of the deformations caused by the unit value of the edge force; these expressions being necessary to write the equations expressing the geometrical continuity between the edge beam and the shell plate and being suitable to determine the edge forces.

The edge beam is a rectangular elastic plate freely supported by the side walls, being free at its longer upward and downward edge.

On the upper edge the following forces are acting:

$$\bar{p}_1 = p_1 \cos \lambda x; \quad \bar{p}_2 = p_2 \cos \lambda x; \quad \widehat{M}_{yx} = M_{yx} \cos \lambda x; \quad \widehat{N}_{yx} = N_{yx} \sin \lambda x$$

which cause according to [1]

$$\bar{\delta}_1 = \delta_1 \cos \lambda x; \quad \bar{\delta}_2 = \delta_2 \cos \lambda x; \quad \bar{\delta}_3 = \delta_3 \sin \lambda x; \quad \bar{\delta}_4 = \delta_4 \cos \lambda x$$

the E-fold deformations of the edge, where is $\lambda = \frac{n\pi}{L}$

If the load of the shell plate is developed in Fourier series there belongs to every value of n — as it is known — a load member of which an independant

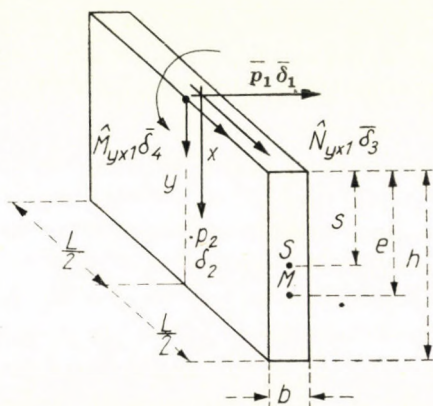


Fig. 1

solution can be computed, and the sum of these solutions gives the solution of our problem.

\bar{p}_2 and \hat{N}_{yx} act on the edge beam as on a sheet, \bar{p}_1 and \hat{M}_{yx} act on it, on the other hand, as on an elastic plate. The sheet is further on calculated by the theory of elementary elasticity, the span of the edge beam always being a multiple of its depth, and in this case the elementary analysis after the Navier theorem is justified. Therefore out of the formulae of Table I the formulae of deformations caused by forces \bar{p}_2 and \hat{N}_{yx} differ only in form from the corresponding formulae of Table (104) in [1].

The plate is investigated by formulae published in Chapt. 77, 78 and 79 of [2]. The elastic surface can be characterized according to formula (431) [2] by the bipotential expression :

$$w = \frac{1}{\lambda^2} (A ch \lambda y + \lambda y B sh \lambda y + C sh \lambda y + \lambda y D ch \lambda y) \cos \lambda x$$

of which the constants A, B, C, D are determined in a manner, that w should satisfy the boundary conditions of the support, and the deformation of the

upper edge of the plate should satisfy the following conditions: in the first case of boundary load p_1 , $w = W_1 \cos \lambda x$ and $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, in the second case of boundary load \widehat{M}_{yx} , $w = W_2 \cos \lambda x$ and

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

Substituting the constants derived in this manner in the corresponding expressions for w , respectively for δ_1 and δ_4 , the formulae of table I can be written for the deformations due to the unit loads. In these formulae the rate of the crosscontraction can be neglected as usual, that is, it can be assumed that $\mu = 0$.

Table I

	$p_1 = 1$	$p_2 = 1$	$N_{yx} = 1$	$M_{yx} = 1$
δ_1	$+\frac{2}{K\lambda^2} \frac{3sh\lambda h ch\lambda h + \lambda h}{9sh^2\lambda h - \lambda^2 h^2}$	0	0	$-\frac{1}{K\lambda^2} \frac{3sh^2\lambda h - \lambda^2 h^2}{9sh^2\lambda h - \lambda^2 h^2}$
δ_2	0	$+\frac{1}{\lambda^4 J}$	$-\frac{s}{\lambda^3 J}$	0
δ_3	0	$-\frac{s}{\lambda^3 J}$	$+\frac{se}{\lambda^2 J}$	0
δ_4	$-\frac{1}{K\lambda^2} \frac{3sh^2\lambda h - \lambda^2 h^2}{9sh^2\lambda h - \lambda^2 h^2}$	0	0	$+\frac{2}{K\lambda^2} \frac{3sh\lambda h ch\lambda h - \lambda h}{9sh^2\lambda h - \lambda^2 h^2}$

In the above formulae

$$k = \frac{Eh^3}{12}.$$

In Table I s is the gravity centre of cross section S , e is the distance of the lower core point M of the cross section from the upper edge (Fig. 1). In calculating core point and gravity centre the reinforcement of the edge beam has to be calculated on the assumption that $n = 10$.

Both formulae for the deformation δ_2 and δ_3 can easily be derived by means of the elementary statics.

Numerical example

Below the calculation of the numerical data of an edge beam of following dimensions are given: $b = 0,12$ m, $h = 0,60$ m, $L = 18,68$ m in accordance with the formulae of the above table, in the case when $n = 1$.

In row 1 and 4 of table I, below the computed values, the values derived by the elementary method [1] are also given in brackets. The values of rows 2 and 3 are with both methods the same.

	$p_1 = 1$	$p_2 = 1$	$N_{yz} = 1$	$M_{yz} = 1$
δ_1	+14477351 (+14476683)	0	0	-61443,216 (-70511,800)
δ_2	0	+578249,97	-28645,347	0
δ_3	0	-28645,347	+1963,836	0
δ_4	-61443,216 (-70511,800)	0	0	+205878,12 (+235143,01)

Evaluating the results it can be stated that — though the depth of the beam is one thirtieth of the span and therefore the analysis by means of elementary statics seems justified — there occurs a difference of about 15 p. c. between some exact and approximate values. For deeper edge beams the error is greater and so the proposed exact computation of the edge beam is justified.

REFERENCES

1. RÜDIGER—URBAN: Circular Cylindrical Shells, Teubner, Leipzig 1956.
2. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Springer Wien, 1946.

SUMMARY

The theory of bending of the edge beams of cylindrical shells is based, according to the usual computation methods, on the elementary theory of elasticity; at the same time the cylindrical shells are dimensioned according to the exact theory of elasticity. In the paper, the author eliminates this contradiction by considering the edge beams as a zone of a plate and by proposing a dimensioning method for them which is based on the theory of plates.

BIEGETHEORIE DER RANDTRÄGER VON KREISZYLINDERSCHALEN

K. SZMODITS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Randträger von Kreiszylinderschalen, welche auf Biegung untersucht werden, werden bei den üblichen Bemessungsverfahren mit Hilfe der elementaren Biegetheorie dimensioniert, während zugleich die Kreiszylinderschalen entsprechend der exakten Elastizitätstheorie dimensioniert werden. Die vorliegende Arbeit behebt diesen Widerspruch dadurch, dass der Randträger als eine Plattenzone betrachtet wird; für seine Bemessung wird ein auf der Theorie der Platten beruhendes Verfahren dargelegt.

LA THÉORIE DES POUTRES DE BORD DES VOILES MINCES CIRCULAIRES

K. SZMODITS

RÉSUMÉ

Suivant les méthodes usuelles, le dimensionnement des poutres formant le bord des voiles minces en tonneau est fait suivant la théorie élémentaire de l'élasticité. Par contre, le dimensionnement des voiles eux-mêmes, s'effectue selon la théorie exacte de l'élasticité. L'auteur fait disparaître cette contradiction en considérant les poutres de bord comme des zones de plaques, et en proposant une méthode de dimensionnement basée sur des considérations relatives à la théorie des plaques.

АНАЛИЗ КРАЕВОЙ БАЛКИ ИЗОГНУТЫХ БОЧАРНЫХ СВОДОВ

К. СМОДИЧ

РЕЗЮМЕ

Согласно обычным методам расчета краевые балки изогнутых бочарных сводов рассчитывают при помощи элементарной теории изгиба, в то же время расчет бочарных сводов выполняется на основе строгих требований теории эластичности. В данной работе устраняется это противоречие обычно применяемой методики расчета тем, что краевая балка принимается в качестве листовой полосы и для ее расчета приводится методика, основывающаяся на соображениях теории пластин.

DIE ROLLE DER KINEMATISCHEN KETTEN BEI DER MECHANIK VON GETRIEBEN

I. SÁLYI jun.

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN

BUDAPESTER TECHNISCHE UNIVERSITÄT, LEHRSTUHL FÜR TECHNISCHE MECHANIK Nr. 1.

[Eingegangen am 11. April 1957]

Einleitung

Die voneinander abweichenden Gruppen ebener Fachwerke zeigen hinsichtlich der Bestimmung der Art ihres Kräftespiels gewisse Unterschiede. Die Eigenart des Aufbaues der Fachwerke untersuchend, verwies HENNEBERG [3] auf die Ursachen dieser Unterschiede und er zeigte gleichzeitig einen immer gangbaren und den Eigenschaften der Fachwerke angepassten Weg der Ermittlung des Kräftespiels.

Auch bei der Prüfung des Bewegungszustandes und Kräftespiels der Getriebe gelangt man zu ähnlich gearteten Abweichungen. Der Zweck dieser Arbeit ist, die Ursachen der Unterschiede — die wieder auf Eigentümlichkeiten des Aufbaues zurückgeführt werden können — aufzuzeigen, eine Erörterung der zur Bestimmung des Bewegungszustandes und Kräftespiels geeigneten Verfahren unterbleibt jedoch. Verfassers Untersuchungen und die gewonnenen Resultate beschränken sich nicht auf ebene Gelenksysteme, sondern gelten gleicherweise für alle Getriebe und seine Darlegungen stützen sich vielfach auf den Begriff der kinematischen Kette, weil dieser die Ergebnisse gut übersichtlich erscheinen lässt.

Definitionen

Im Fachschrifttum über Getriebe besteht hinsichtlich der Benennung und Deutung gewisser Grundbegriffe keine vollkommene Übereinstimmung und deshalb werden für diese Abhandlung die folgenden Definitionen festgelegt.

1. Getriebe nennt der Verfasser ein bewegbares System, das aus mehreren miteinander in kinematischer Zwangsverbindung stehenden Körpern mit einem gemeinsamen fixen Gestell aufgebaut ist und die dieses bildenden Körper sind die Glieder des Getriebes.

2. Die von aussen angetriebenen Glieder des Getriebes (vorgeschriebene Bewegung) nennt der Verfasser Antriebsglieder und ihre vorgeschriebene Bewegung Antriebsbewegung. In den folgenden Betrachtungen werden so viele

Antriebsbewegungen vorausgesetzt, als nötig sind, um die Bewegung des ganzen Getriebes eindeutig zu bestimmen. Es kann vorkommen, dass nicht alle Bewegungen der Antriebsglieder vorgeschrieben werden können, ein Beispiel dafür ist das Raumgetriebe des Bildes 2 und dieser Fall wird später noch ausführlich behandelt.

3. Eine Gruppe miteinander in kinematischer Zwangsverbindung stehender Körper mit freien kinematischen Paaren bildet die sogen. kinematische Gruppe (Bild 4).

Die kinematische Gruppe ist kein selbständiges System, sondern vor allem ein mechanischer Begriff. Im Laufe der mechanischen Untersuchungen wird das Getriebe aus kinematischen Gruppen häufig so zusammengesetzt, dass man diese Gruppen in bestimmter Reihenfolge mit dem gemeinsamen Gestell und miteinander verbindet. Das Einschalten je einer Gruppe erfolgt durch die freien kinematischen Paare, diese Rolle definiert den Begriff des freien kinematischen Paares, weshalb die freien kinematischen Paare immer nur mit den in der Reihenfolge des Aufbaues vorhergehenden Gruppen verbunden werden können (mit beliebigen Punkten derselben). In einem gegebenen Getriebe kann im allgemeinen die Reihenfolge der kinematischen Gruppen nicht abgeändert werden.

4. Die kinematische Kette ist eine besondere kinematische Gruppe und jedes ihrer Glieder schliesst sich durch kinematische Paare an höchstens zwei seiner Nachbarn an. Die kinematische Kette kann offen oder geschlossen sein. Eine offene Kette erhält man z. B., wenn man aus der kinematischen Gruppe des Bildes 3 die Glieder 1, 2 und 3 abgrenzt. Die gleiche Kette könnte als geschlossen bezeichnet werden, wenn man die Gelenke *A* und *B* verbinden würde.

Die offenen kinematischen Ketten verfügen nur über je ein an den äusseren Gliedern befindliches freies kinematisches Paar. Wird mit deren Hilfe die Kette zwischen zwei Punkte irgend eines Getriebes geschaltet, so wird zwischen diesen beiden Punkten eine mechanische Verbindung hergestellt. So eine Verbindung kann eventuell auch die direkte Verbindung dieser beiden Punkte durch ein kinematisches Paar sein und diese Möglichkeit muss demnach als ein Extremfall der offenen Kette angesehen werden. Die Anzahl der die Ketten bildenden Glieder ist in diesem Fall gleich Null.

Auch mit der kinematischen Kette ist es möglich, Getriebe oder kompliziertere Gruppen aufzubauen (Bild 3). Eine kinematische Gruppe vorausgesetzt, müssen die freien kinematischen Paare als mit einem beliebigen Gestell verbunden gedacht werden.

5. Nach allgemein anerkannter Deutung nennt man die Anzahl der voneinander unabhängigen skalaren Koordinaten auf das Gestell bezogen, die die Lage des Getriebes eindeutig bestimmen, den Freiheitsgrad des Getriebes. Wird irgend eine kinematische Gruppe mit Hilfe ihrer freien kinematischen Paare an ein Getriebe angeschlossen, so kann sich der Freiheitsgrad ändern.

Diese Veränderung nennt der Verfasser Verbindungs-Freiheitsgrad, oder einfach Freiheitsgrad der kinematischen Gruppe. Dieser kann gleicherweise von den Konstruktionseigenschaften des Getriebes wie von der kinematischen Gruppe abhängen, ja auch von der Art der Verbindung. Im allgemeinen beeinflusst z. B. die bekannte ebene offene kinematische Kette mit zwei Gliedern und drei Gelenken beim Einschalten den Freiheitsgrad ebener Getriebe nicht, während sie ihn bei räumlichen Getrieben verringert. Die eingliedrige Kette mit zwei Gelenken erscheint gegenüber ebenen Getrieben gewöhnlich mit dem Freiheitsgrad -1 , in der geschilderten speziellen Anordnung ist ihr Freiheitsgrad jedoch 0 . (Bild 1, Stange $A-B$.)

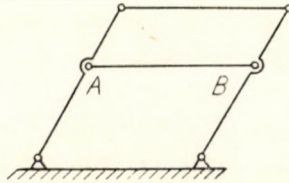


Bild. 1

Diese auf den ersten Blick kompliziert anmutenden Umstände werden erheblich vereinfacht, wenn man die Untersuchungen auf solche Getriebe beschränkt, die gemeinsame Eigenschaften besitzen, wie z. B. ebene Anordnungen, sphärische Getriebe u. s. w. (in der sowjetischen Fachliteratur [1; 16. §.] durch sogenannte gemeinsame Verbundheit definiert). Innerhalb einer solchen Familie hängt der Freiheitsgrad der kinematischen Gruppe — von Spezialfällen abgesehen — nicht von den Konstruktionseigenschaften des Mechanismus ab, sondern wird eine charakteristische Eigenschaft der kinematischen Gruppe. Bei ebenen Gelenkgetrieben z. B. kann der Freiheitsgrad des Mechanismus und auch dessen Veränderung mit der Formel von TSCHEBISCHEW

$$s = 3n - 2p$$

berechnet werden. In dieser bedeutet n die Anzahl der beweglichen Glieder, p die Anzahl der Gelenke. Die Änderung des Freiheitsgrades, d. h. also der Verbindungs-Freiheitsgrad der kinematischen Gruppe hängt somit tatsächlich nur von der Anzahl der Gelenke und Glieder der Gruppe ab, wie oben behauptet wurde, also von den Eigenschaften der Gruppe.

Die Definition des Freiheitsgrades kinematischer Gruppen lässt sich naturgemäss auch auf kinematische Ketten anwenden. Man kann also von Ketten mit dem Freiheitsgrad s sprechen, wo der Wert von s positiv, negativ oder Null sein kann.

Aufbau und Freiheitsgrad des Mechanismus

Im nachstehenden soll der folgende Satz ganz allgemein bewiesen werden :

Satz I. Jeder Mechanismus kann durch eine Reihe offener kinematischer Ketten, die mit dem Gestell, den Antriebsgliedern und miteinander verbunden sind, aufgebaut werden.

Auf einige wichtige Zusammenhänge wird vorerst hingewiesen.

σ sei der gemeinsame Freiheitsgrad aller möglicher Bewegung sämtlicher Antriebsglieder, wenn man aus dem Getriebe alle weiteren Glieder wegdenkt. In der Reihenfolge der Verbindung sei s_i der Freiheitsgrad der i -ten kinematischen Kette und S der Freiheitsgrad des ganzen Getriebes. Mit diesen Bezeichnungen ist der Freiheitsgrad des Getriebes entsprechend der Definition des Freiheitsgrades der kinematischen Kette

$$S = \sigma + s_1 + s_2 + \dots + s_n \quad (1)$$

wenn das Getriebe aus n Ketten aufgebaut werden kann. Da σ sich auf sämtliche Antriebsglieder bezieht, kann es nicht kleiner sein als S , also im allgemeinen

$$\sigma = S + s_0 \quad \text{wo} \quad s_0 \geq 0. \quad (2)$$

Mit s_0 wird der Freiheitsgrad der eventuell möglichen Bewegungen der Antriebsglieder bezeichnet, die nicht frei vorgeschrieben werden können, weil sie über die weiteren Glieder des Getriebes von den Antriebsgliedern durch die sogen. Antriebsbewegungen von der Anzahl S eindeutig bestimmt werden.

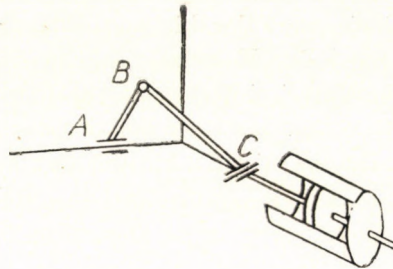


Bild. 2. A und C Gelenke mit einem Freiheitsgrad, B Kugelgelenk

Ein Beispiel dafür ist das Raumgetriebe des Bildes 2. Als Antriebsglied wird der Kolben, der im Zylinder gleichzeitig geradlinige Bewegung und Drehbewegung vollführt, gewählt. $\sigma = 2$. Der Freiheitsgrad der Kette ABC ist jedoch $s_1 = -1$, wodurch $S = \sigma + s_1 = 1$. Daraus folgt, dass nur eine Bewegung des Kolbens Antriebsbewegung sein kann, was bedeutet, dass z. B. durch Dampfzufuhr die geradlinige Bewegung, die dann die ganze Bewegung des Getriebes — auch die Drehung des Kolbens — bestimmt, geregelt werden kann. Hier ist also $s_0 = 1$.

Durch Zusammenfassung von (1) und (2)

$$s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{i=0}^n s_i = 0. \quad (3)$$

Daraus folgt also, dass keine einzige erste Teilsumme $\sum_0^k s_i$ dieser Reihe einen kleineren Wert als 0 haben kann ($k < n$). Angenommen, dass z. B. nach Einschalten der k -ten Kette die Summe kleiner würde als 0. In diesem Fall könnte der Freiheitsgrad des Getriebes nur dann den Wert S haben, wenn die folgenden Ketten mindestens ein Antriebsglied enthielten. Diese Möglichkeit steht jedoch im Gegensatz zu den Ausgangsbedingungen, lt. welchen σ sämtliche Antriebsbewegungen enthält. Deshalb muss zwangsläufig

$$\sum_0^k s_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_k^n s_i \leq 0 \quad (k < n) \quad (4)$$

sein.

Auf Grund dieser Formeln kann also keine einzige erste Teilsumme der Reihe (3) kleiner sein als 0 und keine einzige letzte Teilsumme kann grösser sein als 0 und deshalb ist der Freiheitsgrad der letzten Kette immer $s_n \leq 0$. Befindet sich jedoch unter den Zahlen s_i eine mit positivem (negativem) Wert, so muss unter den nachfolgenden (vorgehenden) notwendiger Weise mindestens eine mit negativem (positivem) Wert sein.

In seinen Darlegungen hat der Verfasser keine der besonderen Eigenschaften der kinematischen Kette ausgenutzt und deshalb muss der ganze Gedankengang mit seinen Folgerungen auch dann unverändert aufrechterhalten werden, wenn anstatt von Ketten von Gruppen gesprochen wird.

Zum Beweis des Satzes I nehme man an, dass ein Getriebe bis zur k -ten Kette einschliesslich aus Ketten aufgebaut wurde. Die restlichen Glieder bilden im allgemeinen mehrere voneinander unabhängige kinematische Gruppen und der Freiheitsgrad keiner einzigen dieser Gruppen kann grösser sein als 0. In der Einschaltungsreihenfolge könnte nämlich als letzte Gruppe die gewählt werden, deren Freiheitsgrad grösser als 0 wäre, ebendeshalb, weil die Gruppen voneinander unabhängig sind, allerdings würde man dadurch mit dem Zusammenhang (4) in Widerspruch geraten.

Eine Gruppe, deren Freiheitsgrad gleich oder kleiner ist als 0, ist mit dem Getriebe durch mindestens zwei kinematische Paare verbunden. Wäre nur ein einziges kinematisches Paar vorhanden, so bestände für die Gruppe die Möglichkeit einer von den Antriebsgliedern unabhängigen Bewegung, wodurch also deren Freiheitsgrad grösser als 0 wäre. Zwischen den beiden freien kinematischen Paaren der Gruppe kann jedoch aus ihren Gliedern mit Bestimmtheit mindestens eine ($k + 1$ -te) kinematische Kette abgegrenzt werden. Diese Kette kann zu den ersten k Ketten gezählt und das Verfahren kann an den übriggebliebenen Gruppen wiederholt werden.

Dieser Gedankengang beweist den Satz I, weil der Wert k beliebig gross sein kann.

Die Bedeutung der kinematischen Ketten wird durch diesen Satz erhellt, nach ihm können sämtliche mechanischen Eigenschaften des Getriebes auf die Eigenschaften der kinematischen Ketten zurückgeführt und mit diesen erklärt werden.

Auf den Umstand sei noch hingewiesen, dass ein- und dasselbe Getriebe sich gewöhnlich auf verschiedene Arten in kinematische Ketten zerlegen lässt. Das Aneinanderreihen dieser verschiedenen Ketten ergibt jedoch immer dasselbe Getriebe, deshalb ist bei mechanischen Untersuchungen die Art der Zerlegung theoretisch gleichgültig. Ohne ausführliche Erklärung kann man sich trotzdem vorstellen, dass die Durchführung der kinematischen Untersuchungen umso einfacher ist, in je einfachere Ketten das Getriebe zerlegt wird.

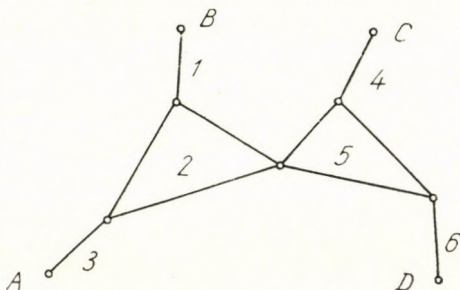


Bild 3. Auflösung I: 1, 2, 3 + 4, 5 + 6, II: 3, 2, 5, 6 + 1 + 4

Bild 3 zeigt in zwei Arten die Auflösung der bekannten ebenen kinematischen Gruppe mit Gelenken. Auf die Unterschiede der beiden Lösungen soll durch die folgenden Untersuchungen hingewiesen werden.

Der Freiheitsgrad des aus Ketten aufgebauten Getriebes kann durch die Formel (1) berechnet werden. Können aber zu den Ketten auch die Antriebsglieder hinzugezählt werden, so wird die Formel noch einfacher:

$$S = s'_1 + s'_2 + \dots + s'_n = \sum_1^n s'_i \quad (5)$$

wo s'_i den Freiheitsgrad der mit den Antriebsgliedern modifizierten Ketten bedeutet. So können die drei Glieder des Getriebes im Bild 2 als eine einzige kinematische Kette mit dem Freiheitsgrad +1 angesehen werden.

Innerhalb je einer Familie von Getrieben, deren Freiheitsgrad als Eigenschaft der Kette behandelt werden kann, bekommt man durch diese Formeln eine gut übersichtliche Methode zur Berechnung ihres Freiheitsgrades und mit diesen Formeln kann dann auch der Freiheitsgrad der kinematischen Gruppen richtig berechnet werden. Für die Gruppe ABCD im Bild 3 z. B. ergibt sich durch jede Auflösung (der Wirklichkeit entsprechend) der Freiheitsgrad 0.

Bewegungszustand der Getriebe

Satz II. Die Eigenschaften des den Bewegungszustand des Getriebes ausdrückenden Gleichungssystems und damit auch die Art der Lösung wird durch die kinematischen Ketten des Getriebes bestimmt.

Die Ketten mit dem Freiheitsgrad 0 und die durch diese aufgebauten Getriebe spielen hier eine besondere Rolle. Hier ist

$$s_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots n).$$

Die Erklärung dieses besonderen Umstandes ist folgende: Die Kette mit dem Freiheitsgrad 0 erhöht den Freiheitsgrad des Getriebes nicht, jedoch verringert sie ihn auch nicht. Der Bewegungszustand der Kette wird deshalb vom Getriebe eindeutig bestimmt, ohne dass die Kette die Bewegung des Getriebes beeinflusst.

Mit anderen Worten bedeutet das so viel, dass z. B. aus den für die Kette aufstellbaren kinematischen Gleichungen die Bewegung der Kette restlos bestimmt werden kann, ohne dass diese Gleichungen für die Bewegung des Getriebes irgend eine Gebundenheit darstellen. Diese in sich selbst lösbare geschlossene Aufgabe ist prinzipiell die einfachste Aufgabe in der Kinematik der Getriebe.

Die Klärung der Bewegungszustände von aus Ketten mit dem Freiheitsgrad 0 aufgebauten Getrieben bedeutet eine Reihenfolge in sich geschlossener Aufgaben, die von Kette zu Kette wiederkehren.

Der Fall wird komplizierter, wenn in der Reihe der Ketten, die sonst den Freiheitsgrad 0 haben $s_k = +1$ und nach den Formeln (3) und (4) notwendiger Weise $s_m = -1$ ist ($m > k$). In der Gruppe der Ketten $k, k+1, \dots m$ bedeutet der Freiheitsgrad $+1$ für die k -te Kette die Einführung einer solchen Unbekannten, die weder aus der Gleichung für die k -te Kette noch aus den folgenden Gleichungen für die $k+1$ u. s. w. Ketten mit dem Freiheitsgrad 0 bestimmt werden kann. Über den Wert derselben geben nur die Gleichungen der m -ten Kette mit dem Freiheitsgrad -1 Auskunft. Die Ketten der Gruppe ($k, \dots m$) können also nicht einzeln untersucht, es muss vielmehr das ganze Gleichungssystem zusammen behandelt werden. Durch diesen Umstand wird die Lösung der Aufgabe erschwert, gleichgültig, ob sie auf mathematischem oder graphischem Weg gesucht wird.

Noch komplizierter wird die Aufgabe, wenn irgend eine erste Teilsumme der Reihe (3) auf den Wert $\sum_0^k s_i = 2$ anwächst und dieser Zuwachs beim Einschalten weiterer Ketten verschwindet. In diesem Fall erscheinen im Gleichungssystem zwei Unbekannte, die die kettenweise Lösung verunmöglichen.

Die Aufzählung könnte mit noch komplizierteren Gebilden fortgesetzt werden, der Grundgedanke derselben ist jedoch schon aus den bisher gesagten zu erkennen.

Kräftespiel der Getriebe

Neben der Bestimmung des Bewegungszustandes von Getrieben soll auf einen anderen wichtigen Zweig der mechanischen Untersuchungen, auf die Klärung des Kräftespiels der Getriebe, hingewiesen werden. Diese Aufgabe ist prinzipiell immer mit statischen Mitteln zu lösen, wenn die Massenkkräfte unter die das Getriebe belastenden aktiven Kräfte gereiht werden.

*Satz III. Die Rolle der kinematischen Ketten bleibt auch bei der Klärung des Kräftespiels unverändert. Am einfachsten sind Getriebe, die aus Ketten mit dem Freiheitsgrad 0 aufgebaut sind; auf diese folgen solche, bei denen die Reihe der Ketten mit dem Freiheitsgrad 0 von Ketten mit dem Freiheitsgrad +1 und danach von solchen mit dem Freiheitsgrad -1 unterbrochen wird u. s. w.**

Zum Beweis von Verfassers Behauptung erwäge man, dass die statische Untersuchung am einfachsten bei der letzten Kette des Getriebes, deren Freiheitsgrad $s_n \leq 0$ ist, angefangen werden kann, weil diese Kette in Wirklichkeit nur durch die an den beiden Enden befindlichen kinematischen Paare mit dem Getriebe verbunden ist und die unbekannt Kraftwirkungen hier am wenigsten stören. So kann man in entgegengesetzter Reihenfolge des Aufbaues die einzelnen Ketten von Schritt zu Schritt untersuchen. Die kettenweise Untersuchung ist in jedem Fall durchführbar, weil einerseits das aus Ketten aufgebaute Getriebe auch wieder in Ketten zerlegt werden kann, andererseits der Freiheitsgrad des ganzen Gebildes grösser als 0, also statisch überbestimmt ist, wodurch zur Bestimmung der Unbekannten immer genügend Gleichungen zur Verfügung stehen.

Zur Bestimmung des Kräftespiels sind für die einfachsten Getriebe wieder die Gleichheiten

$$s_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

charakteristisch, wonach also jede Kette einzeln den Freiheitsgrad 0 hat, d. h. statisch bestimmt ist. In diesem Fall kann das Kräftespiel durch reihenmässige Zerlegung der Ketten von Schritt zu Schritt bestimmt werden. Jede einzelne Kette bedeutet eine in sich selbst lösbare Aufgabe.

Komplizierter wird die Lage, wenn z. B. $s_m = -1$ und dementsprechend $s_k = +1$ ($k < m$) ist. Das Kräftespiel der Kette mit dem Freiheitsgrad -1, die also einmalig statisch unbestimmt ist, kann in sich selbst nicht restlos geklärt werden. Unter den Reaktionskräften dieser Kette bleibt eine skalare Kraftkomponente so lange unbestimmt, bis eine Kette mit dem Freiheitsgrad +1,

* Der Satz III bewahrheitet sich abgesehen vom Falle der allgemeinen räumlichen Getriebe nur dann, wenn das belastende Kraftsystem gewissen Bedingungen genügt. Bei ebenen Getrieben müssen z. B. die belastenden Kräfte in der Ebene des Getriebes liegen u. s. w. Die ausführliche Untersuchung dieser Bedingungen soll hier nicht weitergeführt werden.

die also statisch überstimmt ist, durch eine zusätzliche Gleichung die Bestimmung ermöglicht.

Diese Aufzählung könnte ähnlich den im Zusammenhang mit dem Bewegungszustand gemachten Ausführungen fortgesetzt werden; das Ergebnis ist dem dort gewonnenen gleich.

Zur Bekräftigung des hier gesagten bezieht sich der Verfasser auf die Statik von ebenen Fachwerken. HENNEBERG [3; 87—91 §] führte die vollkommene Untersuchung dieser statisch bestimmten Gebilde mit dem Freiheitsgrad 0 durch. Mit seinen auf anderen Wegen gewonnenen und nur auf ebene Fachwerke bezüglichen Erkenntnissen stimmen Verfassers Resultate restlos überein.

Die in HENNEBERGS Ausführungen erscheinenden einfachen und doppelten Gelenke (Knotenpunkte) bilden mit den dazugehörigen zwei bzw. drei Stangen zusammen eine kinematische Kette mit dem Freiheitsgrad 0 bzw. eine Gruppe mit dem Freiheitsgrad -1 .

HENNEBERG unterscheidet gleichfalls solche Fachwerke, die aus lauter einfachen Gelenken aufgebaut (abgebaut) werden können. Er benennt diese nach A. FÖPPL einfache Gefüge, im Gegensatz zu den sogen. zusammengesetzten Gefügen, bei denen man im Laufe der Zerlegung früher oder später unbedingt auf mindestens ein doppeltes Gelenk stößt.

Angenommen, dass nach Zerlegung des doppelten Gelenkes das übrigbleibende bewegliche Gefüge nur in einfache Gelenke zerlegt werden kann; am Ende dieses Prozesses, nach Entfernen des letzten einfachen Gelenkes bliebe eine einzige Stange übrig, die als Antriebsglied des beweglichen Gefüges angesehen werden könnte.

HENNEBERG hebt aus dem System zuerst nur die eine Stange des doppelten Gelenkes, die in sich selbst gleichfalls eine kinematische Kette vom Freiheitsgrad -1 bildet, heraus, versetzt sie aber zwischen zwei andere Punkte des Gefüges zurück, um die Bewegung zu verhindern. (In jedem Fall kann man so vorgehen, dass die als Antriebsglied bezeichnete Stange zur kinematischen Kette mit dem Freiheitsgrad 0 vervollständigt wird.) Dies ist der *Hennebergsche Stangenwechsel*.

Im allgemeinen lässt sich der Kräfteplan der einfachen Fachwerke am leichtesten aufstellen, während die Schwierigkeiten mit der Anzahl der auszuwechselnden Stangen zunehmen. Diese bekannte Tatsache bestärkt Verfassers kinematische Betrachtungen, weil jede auszuwechselnde Stange als kinematische Kette vom Freiheitsgrad -1 zu betrachten ist. Bei komplizierteren Gefügen wächst also die Summe der negativen Freiheitsgrade mit der Anzahl der auszuwechselnden Stangen.

Das Beispiel der Fachwerke gibt auch Veranlassung zu folgender Bemerkung: die statischen Gefüge können als kinematische Gruppen angesehen werden, auf die sich obiger Gedankengang wörtlich anwenden lässt.

Über die Systematisierung der Getriebe

Das Fachschrifttum enthält verschiedene Beispiele der Systematisierung von Getrieben, ihre Grundlage bildet immer je eine charakteristische Eigenschaft des Getriebes [1, 2, 4, 5].

Obige Untersuchungen verweisen auch auf solche Eigenschaften der Getriebe, die selbst ohne besondere Einteilung oder Kategorisierung eine gewisse Gruppierung der Getriebe bedeuten.

Auf einige weitere Fragen muss deshalb noch hingewiesen werden.

1. Obgleich es durchaus nicht der Zweck dieser Arbeit war eine Gruppierung aufzustellen, so ist es doch nicht unbegründet, wenn man aus der Vielfalt

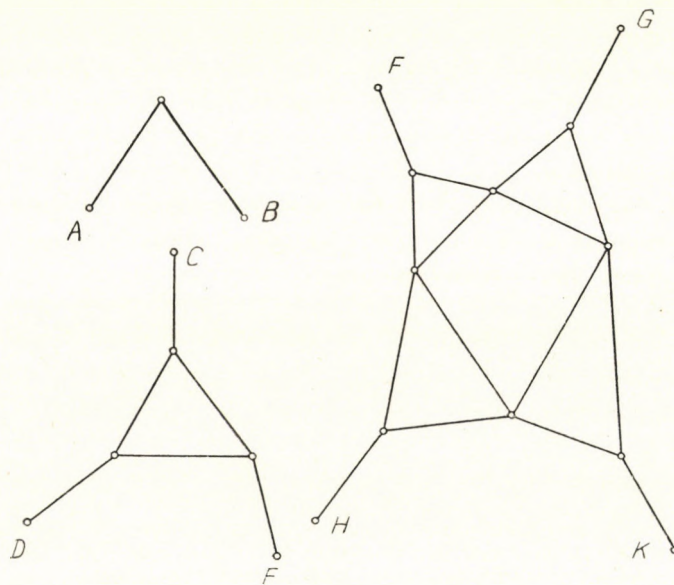


Bild 4

der Getriebe diejenigen absondert, die obigen Betrachtungen angepasste gleiche Eigenschaften aufweisen. So kann man z. B. diejenigen Getriebe, die nur aus Ketten mit dem Freiheitsgrad 0 aufgebaut werden können, mit der Klasseneinteilung I bezeichnen und in die Klasse II diejenigen einreihen, bei welchen die Reihe der Ketten mit dem Freiheitsgrad 0 vorerst eine Kette mit dem Freiheitsgrad +1, danach eine mit dem Freiheitsgrad -1 unterbricht u. s. w.

Diese Klassifizierung gleicht in keiner Weise den gebräuchlichen Einteilungsformen.

Als einfaches Beispiel sollen die drei ebenen kinematischen Gruppen mit dem Freiheitsgrad 0 im Bild 4 erwähnt werden. Wird die Geschwindigkeit der freien Gelenke mit A, B, \dots u. s. w. vorgeschrieben, so definieren diese die

Bewegung der Gruppe. Die Bestimmung des Bewegungszustandes verlangt jedoch von den drei verschieden aufgebauten kinematischen Gruppen ein immer anderes Verfahren und deshalb auch eine andere Einteilung.

Die kinematische Untersuchung von Getrieben gleicher kinematischer Eigenschaften kann prinzipiell auf gleiche Weise geschehen, auch dann, wenn diese zufällig in verschiedene Klassen eingeteilt wären.

2. Eine auf kinematische Ketten basierende Systematisierung der Getriebe gibt bei blosser Berücksichtigung des vorher gesagten natürlich keine restlose Aufklärung über alle Eigenschaften der Getriebe, ja nicht einmal aller ihrer mechanischen Eigenschaften. So bekommt man z. B. keinen Aufschluss über den wohlbekannten Umstand, dass das Verhalten der kinematischen Kette eine Funktion der Glieder und der kinematischen Paare ist, die die Kette bilden. Im vorhergehenden wurde zwischen Kette und Kette nur auf Grund des Freiheitsgrades unterschieden, obgleich der Aufbau der Ketten z. B. mit dem Freiheitsgrad 0 sehr verschieden sein kann. Man kann von räumlichen, ebenen, sphärisch betriebenen, mit Gelenken, oder sonstigen kinematischen Paaren aufgebauten Ketten u. dgl. sprechen.

Noch geringere Hinweise bekommt man über nicht ausgesprochen mechanische — z. B. betriebstechnische — Fragen. Diese Untersuchungen gehen jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

SCHRIFTTUM

1. АРТОВОЛЕФСКИЙ И. И.: Теория механизмов и машин. Москва 1953.
2. АССУР Л. В.: Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. Известия Петроградского политехн. института. т. XX., XXI., XXII., XXIII. 1914/15.
3. L. HENNEBERG: Graphische Statik der starren Systeme. Leipzig und Berlin, 1911.
4. R. KRAUS: Grundlagen des systematischen Getriebeaufbaus. Berlin, 1952.
5. F. REULEAUX: Theoretische Kinematik. Braunschweig 1875.
6. I. SÁLYI: Mechanizmusok kinematikai vizsgálata. Budapest 1955, (Kandidátusi disszertáció). (Kinematische Untersuchung von Getrieben. Budapest 1955. Kandidat-Dissertation).
7. Z. TERPLÁN: Dynamische Untersuchung von ebenen Getrieben auf Grund graphischer Darstellung. Acta Technica Academiae scientiarum Hungaricae. Tomus XVI. 1957.

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der mechanischen Untersuchung von Getrieben auf die Art der Bestimmung ihres Bewegungszustandes und des Kräftespiels zeigen die einzelnen Getriebe gewisse Unterschiede. Der Zweck dieser Arbeit ist, die Gründe dieser Unterschiede aufzuzeigen und auf Eigenschaften des Aufbaues zurückzuführen. Es wird deshalb nachgewiesen, dass jedes Getriebe durch sog. offene kinematische Ketten, die in dieser Arbeit definiert wurden, aufgebaut werden kann. Die mechanischen Eigenschaften der Getriebe werden durch die kinematischen Ketten bestimmt. Deshalb können die Getriebe vom mechanischen Standpunkt aus gesehen am einfachsten auf Grund der kinematischen Ketten in ein System gereiht werden. Auf dem Gebiet der ebenen Fachwerke stimmt diese Systematisierung mit der gebräuchlichen Hennebergschen überein.

THE RÔLE OF KINEMATIC CHAINS IN THE MECHANICS OF MECHANISMS

I. SÁLYI jun.

SUMMARY

In the course of their mechanical investigation the various mechanisms display certain differences as regards the method of determination of the state of motion and of the play of forces. The aim of this paper is to discover the causes of these divergences to be traced back to differences in buildup. It is therefore demonstrated that every mechanism can be built up of so-called open kinematic chains defined in the paper, and this mechanical properties are determined by the kinematic chains. Accordingly, mechanisms can be systematized from the viewpoint of mechanics in the simplest way on the basis of the kinematic chains. In plane frameworks this systematization is identical with the routine (Henneberg) system.

LE RÔLE DES CHAÎNES CINÉMATIQUES DANS LA MÉCANIQUE DES MÉCANISMES

I. SÁLYI Fils.

RÉSUMÉ

A l'examen mécanique, les divers mécanismes présentent certaines différences au point de vue de la détermination de l'état de mouvement et le jeu de forces. L'étude se donne pour but d'en découvrir les causes s'expliquant par des particularités de construction. L'auteur démontre, que tout mécanisme peut être construit de chaînes dites cinématiques ouvertes, définies par l'étude, et que les propriétés mécaniques du mécanisme sont déterminées par ces chaînes cinématiques. Il s'ensuit que les mécanismes peuvent être systématisés le plus simplement au point de vue mécanique, sur la base des chaînes cinématiques. Dans le domaine des constructions en treillis, cette systématisation correspond à cette couramment utilisée de Henneberg.

РОЛЬ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В МЕХАНИКЕ МЕХАНИЗМОВ

И. ШАЙ мл.

РЕЗЮМЕ

В процессе механического исследования механизмов в отношении метода определения состояния движения и работы у отдельных механизмов наблюдаются определенные отличия. Работой ставится цель вскрытия причин этих отличий, которые можно отнести к свойствам конструкций, поэтому показано, что любой механизм может быть построен из так называемых открытых кинематических цепей, определенных в работе, и механические свойства механизма определяются кинематическими цепями. Следовательно, механизмы с механической точки зрения проще всего систематизировать на основе кинематических цепей. В области решетчатых конструкций эта систематика совпадает с обычной систематикой Хеннеберга.

LOCATION OF THE SHAFT, SHAPE AND EXTENSION OF ITS WORKING AREA

Prof. J. ZAMBÓ

D. ENG. SC.

DEPARTMENT FOR MINING WORKS, TECHNICAL UNIVERSITY, SOPRON

[Manuscript received 19th April 1957]

The place of location of the shaft, the shape and extension of its working area have long been crucial problems of mine working. Notwithstanding, for a long time no numerical or analytical method has been developed for their solution. First tentatives have been made since 1920 in Soviet literature. This investigation has been going on uninterruptedly almost until these days. A series of papers and articles have been published,* but a thorough solution of the problem is still missing. The aim of this paper is to approach a comprehensive solution of general validity.

These investigations will treat flat and highly inclined measures separately. Highly inclined measures (rearers) will be regarded such as are opened up from the shaft in principle by cross-measure drifts (crosscuts).

At point P of the working area of irregular shape, of flat measures, will be located the shaft winding minerals and men. Close by is the air (fan) shaft. The layout is thus central. The exploitable mineral reserves of the working area (Q) are classified into right (Q_{rh}) and left (Q_l) tracts on the strike, and rise (Q_r) and dip (Q_d) portions on the dip

$$Q = Q_{rh} + Q_l = Q_r + Q_d. \quad (1)$$

The different tracts of the mineral reserves are divided by the dip and the strike lines passing through the shaft. (Fig. 1.) The distance between the dip and strike centroidal lines of the different tracts of the exploitable mineral reserves and the shaft is a_{rh} , a_l and b_r , b_d respectively.

Let the extension and the mineral reserves of the working area of invariable shape be for the time being given, or invariable. It will be investigated where the optimal position of the shaft lies as a function of costs. Only costs in unconditional connection with the position of the shaft will be considered, such as underground transport, time loss on underground travel, drainage, ventilation,

* L. D. SEVJAKOV : Principles of Layout of Underground Mine Workings, pp. 303—307, Publishing House for the Heavy Industry, Budapest, 1951 (Hungarian).

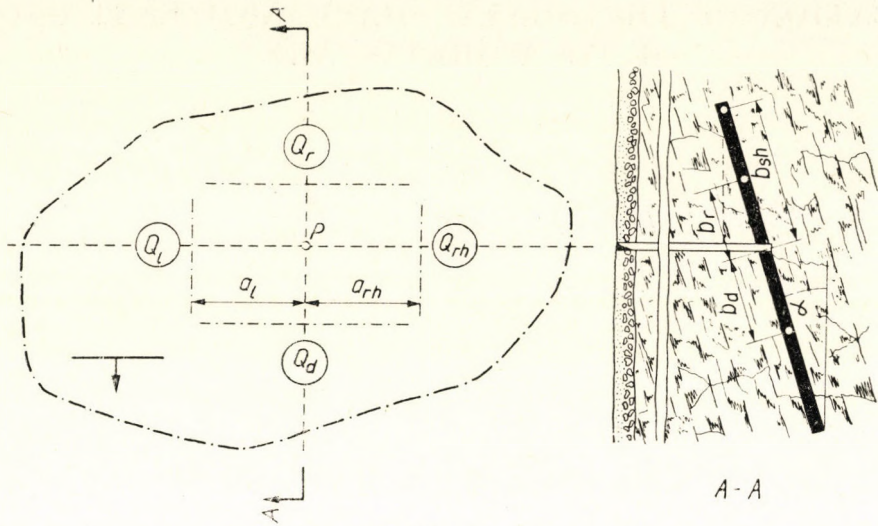


Fig. 1

upkeep of underground roads and investment. These aggregate costs, referred to the service life of the shaft can be expressed by the unitary formula :

$$K = (Q_{rh} \cdot a_{rh} + Q_l \cdot a_l) \sum c \cdot k_s + Q_r \cdot b_r \sum ck_r + Q_d b_d \sum ck_d + Q \cdot b_{sh} (\sum ck_{sh} + k_i) \sin \alpha + D. \quad (2)$$

The value of coefficient c is in underground transportation $\frac{1}{1000}$, in time loss on travel $\frac{2}{q v_s}$, in drainage, ventilation and upkeep $\frac{2}{q_0}$, is the mineral quantity extracted per manshift during the entire lifetime of the shaft, v_s the speed of underground travel on the strike* ($m/hour$), q_0 is the average daily output of the shaft in tons.

k values signify specific costs : costs of transportation : on the strike k_s , on the rise k_r , on the dip k_d , toward the shaft k_{sh} . In underground transport k is the cost of one tkm , in underground travel the pay for one hour of walk, in drainage the costs of conveying the average daily water influx of the shaft for a distance of one m , in upkeep the maintenance of one m of roadway during one day. k_i is the cost of sinking one m of a pair of shafts per one ton of exploitable mineral.

* Detailed analysis of the values of q and of v_s is found in a former paper of the author : „Location of the Manshaft and Time Loss of Underground Travel”, *Bányászati Lapok*, 1957, No. 3. (Hungarian).

α is the angle of dip of the mineral deposit. D is an investment not to be correlated with parameters of the location of the shaft. The shaft located at an arbitrary point is at distance b_d from the highest point on the diplane.

In relation to time loss on underground travel the following relationships hold :

$$k_r = k_s \frac{v_s}{v_r} \quad \text{and} \quad k_d = k_s \frac{v_s}{v_d} \quad (3)$$

where v_r is the speed of walking to the rise and the way back before and after the shift, v_d is the speed of walking to the dip and the way back. $\frac{v_s}{v_r}$ and $\frac{v_s}{v_d}$ are functions of the dip angle.

In exploiting the working area it is supposed that the right and left and the rise and dip tracts are proportionately exploited. One day's ration of fresh air is distributed at the same rate, and the daily influx of water is composed in the same proportion.

Now the minimum of aggregate costs will be expressed in terms of the location of the shaft. Relationship between b_{sh} and b_r is expressed in the following way

$$b_{sh} = \vartheta \cdot b_r.$$

The value of ϑ is univocally expressible in any given case and is measurable. Partial derivatives of K will now be formed with respect to a_{rh} , a_l and b_r , b_d :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial a_{rh}} &= Q_{rh} \sum c k_s \\ \frac{\partial K}{\partial a_l} &= - Q_l \sum c k_s \\ \frac{\partial K}{\partial b_r} &= Q_r \sum c k_r + \vartheta Q (\sum c k_{sh} + k_i) \cdot \sin \alpha \\ \frac{\partial K}{\partial b_d} &= - Q_d \sum c k_d. \end{aligned} \quad (4)$$

It may thus be written :

$$Q_{rh} \sum c k_s - Q_l \sum c k_s = 0$$

or

$$Q_r \sum c k_r + \vartheta Q \cdot \sin \alpha (\sum c k_{sh} + k_i) - Q_d \sum c k_d = 0. \quad (5)$$

The two negative signs proceed from the configuration, because a_l and b_d are on the opposite side in relation to a_{rh} and b_r .

From these as well as from equation (1) follows that the shaft is at the optimal place if the following two condition equations are satisfied provided that c and k are identical on the right and on the left side :

$$Q_{rn} = Q_l = \frac{Q}{2} \quad (6)$$

and

$$\frac{Q_r}{Q_d} = \frac{\sum ck_d - \vartheta (\sum ck_{rh} + k_i) \sin \alpha}{\sum ck_r + \vartheta (\sum ck_{sh} + k_i) \sin \alpha} \quad (7)$$

The first equation definitively bisects the working area of the shaft into two equal parts, the division by the second equation is only approximate first. k_r and k_d values of drainage and of ventilation are namely functions of Q_r and Q_d . In principle this refers to transportation, travel underground and maintenance too. But the influence of the latter may practically be neglected. Therefore for the sake of a simpler procedure in the first step the proportions of Q_r and Q_d are estimated only, and the values k_r and k_d of the first step are calculated accordingly. If the proportion calculated in the first step does not agree with that estimated, one or more further steps will be necessary. In the new step values k_r and k_d are already calculated in conformity to the computed value of the first step. Practically at most two or three values will be necessary, the variation of k values being in general unimportant. For instance, the average speed of underground travel depends to a certain degree on the length of the walk. With increase of length the average speed of walking decreases. This effect is more felt in relation to drainage and ventilation. On the basis of proportionate output in the calculation of the k value it is namely not indifferent in what proportion the entire working area is subdivided into rise and dip workings.

From the equation so far dealt with follow the following relations too :

$$Q_r = Q \frac{\sum ck_d - \vartheta (\sum ck_{sh} + k_i) \sin \alpha}{\sum ck_r + \sum ck_d} = \omega_r Q \quad (8)$$

further

$$Q_d = Q \frac{\sum ck_r + \vartheta (\sum ck_{sh} + k_i) \sin \alpha}{\sum ck_r + \sum ck_d} = \omega_d Q \quad (9)$$

Between ω_r and ω_d also the following relation subsists on the basis of the two latter equations :

$$\omega_r = 1 - \omega_d \quad (10)$$

The deduced formulae disregard member D . The part of the latter has to be considered in each given case. On one side of the balance stands the increase of costs arising from the divergence from the optimal point, on the other side the decrease of investment and maybe of costs included in D . It may happen, for instance, that at some surface point the earthwork for the heapstead is more favourable or railway sidings of the shaft are shorter than at the optimal point of location. In that case the rise of the costs of production per unit is confronted with the amortization of the investment cost saved.

Let the working area of the shaft be a rectangle and the average strike parallel to one side (A). In this case the optimal point is defined by the following two condition equations :

$$Q_{rh} = Q_l = \frac{Q}{2} = \frac{A \cdot B \cdot M \cdot \gamma \cdot \zeta}{2} = \frac{A \cdot B \cdot \delta}{2} \quad (11)$$

and

$$\frac{Q_r}{Q_d} = \frac{b_r}{b_d} = \frac{\omega_r}{\omega_d} \quad (12)$$

M is the thickness of the deposit, γ its volume weight, A the side of the working area on the strike, B the side on the dip, ζ the coefficient of recovery or the ratio between exploitable and actual mineral reserves. In the following ζ is supposed to be constant in the entire working area of the shaft.

It may be demonstrated further also that

$$b_r = \omega_r \frac{B}{2} \quad (13)$$

$$b_d = \omega_d \frac{B}{2}$$

or

$$a_{rh} = a_l = \frac{A}{4} \quad .$$

In the case of the working area of rectangular shape :

$$\omega_r = \frac{\sum ck_d - 2(\sum ck_{sh} + k_i) \cdot \sin \alpha}{\sum ck_r + \sum ck_d} \quad (14)$$

$$\omega_d = \frac{\sum ck_r + 2(\sum ck_{sh} + k_i) \cdot \sin \alpha}{\sum ck_r + \sum ck_d} \quad (15)$$

If in the working area of rectangular shape the shaft is located not at the optimal point (O) but at an arbitrary place (P) the total costs can be expressed in the following way: Fig. 2.

$$K_P = \left\{ (A_{rh}^2 + A_l^2) \frac{B}{2} \sum ck_s + A \frac{B_r^2}{2} \sum ck_r + A \frac{B_d^2}{2} \sum ck_d + \right. \\ \left. + ABB_r (\sum ck_{sh} + k_i) \sin \alpha \right\} \cdot \delta + D. \quad (16)$$

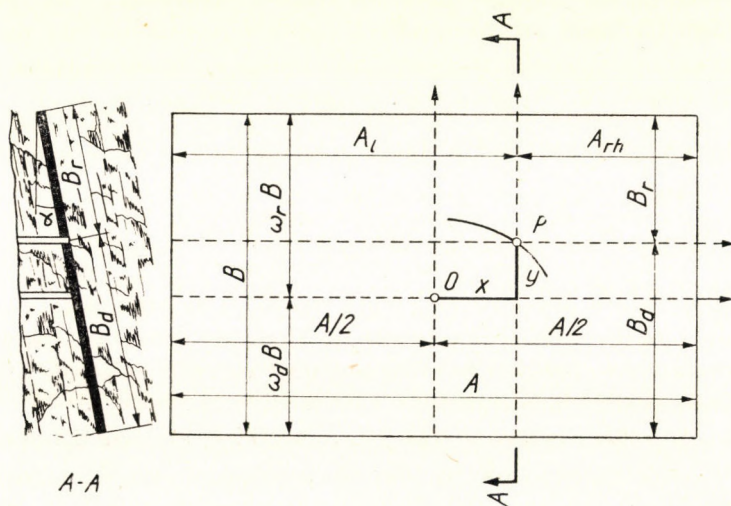


Fig. 2

And at the optimum point :

$$K_O = \left\{ \frac{A^2}{4} B \sum ck_s + \frac{A}{2} B^2 (\omega_r^2 \sum ck_r + \omega_d^2 \sum ck_d) + \right. \\ \left. + AB^2 \omega_r (\sum ck_{sh} + k_i) \sin \alpha \right\} \cdot \delta + D. \quad (17)$$

According to the figure coordinates of point P are x and y . Therefore the following relations hold :

$$A_{rh} = \frac{A}{2} - x \quad \text{and} \quad A_l = \frac{A}{2} + x \quad (18)$$

as well as

$$B_r = \omega_r B - y \quad \text{and} \quad B_d = \omega_d B + y. \quad (19)$$

Equations (18) and (19) are substituted into formula (16) and the equation thus obtained is divided by K_0 , multiplied by 100, and values ω_r and ω_d according to equations 14., 15. are substituted therein. The result is

$$\eta \% = \frac{100}{K_0} \left\{ B \sum' ck_s x^2 + \frac{A}{2} (\sum' ck_r + \sum' ck_d) y^2 + \right. \\ \left. + AB (\sum' ck_{sh} + k_i) \sin \alpha \cdot y \right\} \cdot \delta + 100. \quad (20)$$

The latter relation represents a family of ellipses according to $\eta\%$. The axes of the individual ellipses are also shifted parallel to one another on the dip line as functions on η . If the members containing y are disregarded a family of concentric ellipses is obtained whose routine form is:

$$\frac{x^2}{\frac{\eta - 100}{100 \delta} \frac{K_0}{B \sum' ck_s}} + \frac{y^2}{\frac{2(\eta - 100)}{100} \frac{K_0}{A (\sum' ck_r + \sum' ck_d)}} = 1 \quad (21)$$

The ellipse is the locus of all points representing shaft locations, where costs depending on the specific position of the shaft are the same. The percentile rise of costs relative to optimal location is the higher, the more one approaches the borders, especially the corners.

The relationship expressing the law presented, of course implies some neglect. It is namely disconsidered that the k value is also a function of the position of the shaft. This is practically manifest in mines heavily water-logged. However, the distortion of the ellipses is not considerable, and the possibility of general orientation subsists thus too. And this is the first aim of these investigations.

With knowledge of the optimal point the optimal dimensions of the working area of the shaft will be sought for given daily output capacity. A formula has to be set up which includes the costs depending on the dimensions of the working area, and these have to be confronted with costs of the total investment. On dimensions of the working area depend costs of transportation, of travel underground, of drainage, of ventilation, of upkeep referred to the working area. Costs of transportation, of underground travel, of ventilation, maybe of upkeep in a shaft located at the optimal point are in general independent on dimensions of the working area at given daily capacity. However, this cannot be said of drainage in the pit. The average unit water inflow referred to the entire service life of the shaft is namely already a function of the working area even at given daily capacity. However, this factor will be disregarded for the time, and only the general formula of total costs referred to the working area will be set up, supposing that the shaft is at the optimal point:

$$K_0 = Q \left\{ \frac{a_{rh} + a_l}{2} \sum ck_s + \omega_r b_r \sum ck_r + \omega_d b_d \sum ck_d \right\} + D_t. \quad (22)$$

And the cost per unit of the exploitable mineral reserves is :

$$k_0 = \frac{a_{rh} + a_l}{2} \sum ck_s + \omega_r b_r \sum ck_r + \omega_d b_d \sum ck_d + \frac{D_t}{Q}. \quad (23)$$

In the formula of Q , k_0 has a minimum value and the correlated value of Q is an optimum. Optimal dimensions of the working area can be given in explicit form only if the relations between Q and a_{rh} , a_l , b_r , b_d can be expressed in exact mathematical form. This can be done in the case of a working area of rectangular shape. That is to say, then

$$k_0 = \frac{A}{4} \sum ck_s + \frac{B}{2} (\omega_r^2 \sum ck_r + \omega_d^2 \sum ck_d) + \frac{D_t}{AB \cdot \delta}. \quad (24)$$

The working area has optimal dimensions in if k_0 is minimum. Therefore partial derivatives of k_0 will be formed first with respect to A , then with respect to B and equated to zero :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_0}{\partial A} &= \frac{\sum ck_s}{4} - \frac{D_t}{A^2 B \delta} = 0 \\ \frac{\partial k_0}{\partial B} &= \frac{\sum ck_r}{2} \omega_r^2 + \frac{\sum ck_d}{2} \omega_d^2 - \frac{D_t}{AB^2 \delta} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

On the basis of the last two equations the optimal dimensions of the working area may be given

$$A_0 = 2 \sqrt[3]{\frac{D_t \omega_r^2 \sum ck_r + \omega_d^2 \sum ck_d}{\delta (\sum ck_s)^2}} \quad (26)$$

$$B_0 = \sqrt[3]{\frac{D_t \sum ck_s}{\delta (\omega_r^2 \sum ck_r + \omega_d^2 \sum ck_d)^2}}. \quad (27)$$

Dimensions thus calculated constitute only the first step. If, for instance, in the calculation of the k value of drainage the previously assumed dimensions essentially differ from optimal ones, the calculation has to be repeated with consideration of the value computed in the first step. Several steps may also be

necessary. Therefore a successive approximation is applied, practically a sufficient precision is attained in the most cases already at the second step. It is expedient to execute the second or may be multiple calculation of the k value for underground transportation as well. The cost of one ton-mileage is namely also a function of the length of the course. This second or multiple calculation can be executed for ventilation, and even for upkeep and underground travel, because also these — though the last two in a lesser degree — depend on the distance of centroidal lines from the shaft. However, as a rule it is not expedient to execute correction in several steps, because the reduction of uncertainty in this sense is already of lesser degree than the uncertainty of the calculation itself.

It is worth while to note the proportions of optimum dimensions too :

$$\lambda = \frac{B_0}{A_0} = \frac{1}{2} \frac{\sum' ck_s}{\omega_r^2 \sum' ck_r + \omega_d^2 \sum' ck_d} . \quad (28)$$

The proportion is independent of investment, of depth, but it depends very much and almost exclusively on the angle of dip. In the extreme case, if $\alpha = 0^\circ$, and then $\omega_r = \omega_d = \frac{1}{2}$, $k_s = k_r = k_d$, the optimal ratio $\lambda = 1$. The steeper the dip angle, the more extended is the working area on the strike.

In mines exposed to great water danger the effect depending on the extension of the working area, presenting itself in drainage of the pit, must not be neglected. The more extended namely the working area at the same output capacity, the larger will be the amount of water drained in unit time referred to the entire service life of the shaft. Of course there is no regularity in this. Practice very often shows that major inrushes of water very often present themselves at the initial stage of working of the pit. The formerly mentioned average quantity of water drained in such cases depends in a lesser degree on the extension of the working area. In most cases inrushes of water can be cemented sealed off. On the other hand, this reduces the order of magnitude of the afore-mentioned effect of drainage. Should this effect be studied notwithstanding, it may be of theoretical importance only. Even theoretically the problem can only be tackled on the basis of a certain supposition, namely by taking account of this effect by member $\mu AB k_w$. This signifies that costs of drainage per ton of average daily output is proportional at the rate of μ , to the dimensions or the mineral reserves of the pit. This member is added to the right side of equation (24) :

$$k_0 = \frac{A}{4} \sum' ck_s + \frac{B}{2} (\omega_r^2 \sum' ck_r + \omega_d^2 \sum' ck_d) + \frac{D_t}{\delta AB} + \mu \cdot AB \cdot k_w \quad (29)$$

Following the known method of seeking extreme values the optimal dimensions (A_0 , B_0) of the working area may be calculated from the following two equations:

$$\frac{\sum' ck_s}{4} + \mu Bk_w - \frac{D_t}{A^2 B \cdot \delta} = 0 \quad (30)$$

and

$$\frac{\sum' ck_r}{2} \omega_r^2 + \frac{\sum' ck_d}{2} \omega_d^2 + \mu A \cdot k_w - \frac{D_t}{AB^2 \cdot \delta} = 0 \quad (31)$$

$\lambda = \frac{B_0}{A_0}$ is invariable in this case too, that is

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\sum' ck_s}{\omega_r^2 \sum' ck_r + \omega_d^2 \sum' ck_d} \quad (32)$$

AB will be denoted by T . Accordingly may be written:

$$\mu k_w T^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sum' ck_s \omega_r^2 \sum' ck_r + \omega_d^2 \sum' ck_d}{2}} \sqrt{T} \cdot T - \frac{D_t}{\delta} = 0. \quad (33)$$

On the basis of the latter equation may be calculated by successive approximation relatively quickly the optimal values of T or A_0 and B_0 .

To illustrate the explained relationships of the rectangular working area a numerical example will be analysed. The data are: $A = 2500$ m, $B = 1300$ m, $M = 6$ m, $\gamma = 1,4$ t/m³, $\zeta = 0,85$, $a = 8^\circ$, $q_0 = 1500$ t/day, $q = 1,4$ t/shift, $v_s = 3800$ m/hour.

c and k values are tabulated (Table I.)

Table I

	c	k				$k_{sh} \cdot \sin \alpha$
		on strike	rise	dip	to shaft	
		s	r	d	sh	
Transport	$\frac{1}{1000}$	3,60	2,50	4,70	2,20	0,31
Travel	$\frac{2}{1,4 \cdot 3800}$	12,00	14,34	17,21	2,10	0,29
Drainage	$\frac{2}{1500}$	0,18	0,09	11,60	7,40	1,03
Ventilation	$\frac{2}{1500}$	2,40	2,55	2,64	1,50	0,21
Upkeep	$\frac{2}{1500}$	1,36	1,72	1,63	0,12	0,02

In the first step of the calculation of data B_r was taken for 750 m.

In case of underground travel*

$$\frac{k_r}{k_s} = 10 a^2 + 1 = 1,195$$

further

$$k_d = 1,2 k_r .$$

Products ck are also tabulated (Table II.)

Table II

	k				Remark
	s	r	d	sh (sin α)	
Transport	0,00360	0,00250	0,00470	0,00031	$Q = 23,205$ mill t
Travel	0,00451	0,00539	0,00647	0,00011	$k_i = 0,00023$
Drainage	0,00024	0,00012	0,01547	0,00137	$k_i \sin \alpha = 0,00003$
Ventilation ...	0,00320	0,00340	0,00352	0,00028	$\delta = 7,14$
Upkeep	0,00181	0,00229	0,00217	0,00003	$D = 20$ mill Ft
Σ	0,01336	0,01370	0,03233	0,00210	$D_i = 160$ mill Ft

The optimal position of the shaft is defined by the following :

$$A_{rh} = A_l = \frac{A}{2} = 1250 \text{ m}$$

$$B_r = \omega_r B = \frac{0,03233 - 2(0,00210 + 0,00003)}{0,01370 + 0,03233} 1300 = 0,6098 \cdot 1300 = 793 \text{ m}$$

$$B_d = B - B_r = 1300 - 793 = 507 \text{ m}$$

and

$$\omega_d = 1 - \omega_r = 0,3902 .$$

Since between B_r (750 m) assumed in the first step, and B_r (798,6 m) calculated, there is no essential difference, there subsists no practical necessity of recalculating values of ck , thus the second step is practically superfluous.

Let the specific costs depending on the position of the shaft referred to the optimal point be calculated for given working area :

$$k_0 = \frac{A}{4} \Sigma' ck_s + \frac{B}{2} (\omega_r^2 \Sigma' ck_r + \omega_d^2 \Sigma' ck_d) + B \cdot \omega_r (\Sigma' ck_{sh} + k_i) \sin \alpha + \frac{D}{AB \cdot \delta} .$$

* „Location of the Manshaft and Time Loss of Underground Travel”, Bányászati Lapok, 1957. No. 3. (Hungarian).

After substitution of the corresponding values

$$k_0 = 17,42 \text{ Ft/t.}$$

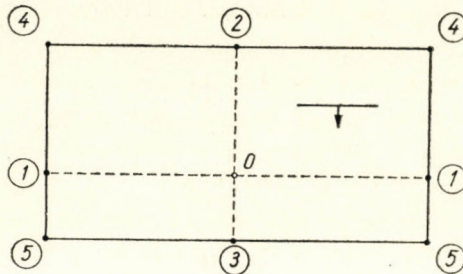


Fig. 3

Characteristic points are assumed on Fig. III. The degree of increase of costs relative to the optimal point are tabulated (Table III.)

Table III

Symbol of the point	Coordinates		$\eta\%$	Ft/t	Ft	Δ Ft
	x	y			million forints	
0	0	0	100	17,42	404	0
1	1250	0	148	25,78	598	194
2	0	+793	174	30,31	703	299
3	0	-507	120	20,90	485	81
4	1250	+793	222	38,67	897	493
5	1250	-507	168	29,27	679	275

In the case of the individual characteristic points the percentile increase of costs is calculated by equation (20). Other data of the table are derived from the sense accordingly. It is found that in extreme locations a notable increase of costs occurs.

In the example at hand the extension of the working area and the average daily output were given. In the following the average daily output will further be given, but the extension of the working area will change. The optimal dimensions will be after equations (26) and (27):

$$A_0 = 2 \sqrt[3]{\frac{160 \cdot 10^6}{7,14} \frac{0,6098^2 \cdot 0,01370 + 0,3902^2 \cdot 0,03233}{0,01336^2}} = 2160 \text{ m}$$

and

$$B_0 = \sqrt[3]{\frac{160 \cdot 10^6}{7,14} \frac{0,01336}{(0,6098^2 \cdot 0,01370 + 0,3902^2 \cdot 0,03233)^2}} = 1440 \text{ m}$$

k values calculated in the first step refer to working area dimensions $A = 2500 \text{ m}$ and $B = 1300 \text{ m}$. The optimal dimensions (A_0 and B_0), though not in a notable degree, diverge. In the second step the individual k -values should already be calculated according to dimensions A_0 and B_0 calculated

already in the first step. However, the new calculation shows, that appreciable difference manifests itself only in k -values of drainage. The relative difference is a decrease of 4–5% only. This is generally less than the mean error of estimation. Therefore in the case at hand there is no need for the application of the second step. If a rough error is committed in estimating the approximate k -values of the first step or in estimating the approximate values of the working area, further steps will be necessary. In such case, of course, the altered optimal location of the shaft has to be taken into consideration at each step.

It happens that one side of the rectangular working area is given by natural boundaries, and only the other is arbitrary. If the extension on the strike (A_0) is given, the optimal dimension on the dip can be calculated from the second relationship of the pair of equations 25. :

$$B_0 = \sqrt{\frac{2 D_t}{\delta A (\omega_r^2 \Sigma ck_r + \omega_d^2 \Sigma ck_d)}} \quad (34)$$

If the dimension on the dip is given, the optimal extension on the strike :

$$A_0 = 2 \sqrt{\frac{D_t}{\delta B \Sigma ck_s}} \quad (35)$$

If the mine is subject to great water danger and the effect of drainage in the pit cannot be neglected the latter relationships take the following form on the basis of equations (31) and (30) :

$$B_0 = \sqrt{\frac{2 D_t}{\delta A (\omega_r^2 \Sigma ck_r + \omega_d^2 \Sigma ck_d + 2 \mu A k_w)}} \quad (36)$$

and

$$A_0 = 2 \sqrt{\frac{D_t}{\delta B (\Sigma ck_s + 4 \mu B k_w)}} \quad (37)$$

Practically there exists no rectangular mining area. Yet these formulae cannot be applied practically, because the actual shape of the working area very often approaches the shape of the rectangle, that is, can be replaced by it. In other cases the approximate extension of the working area can be expediently established by it. In possession of approximate dimensions the further procedure is essentially simplified.

In Fig. 4, the north boundary of the mining tract is formed by the gob of a depleted area. In the west a major fault constitutes a natural boundary.

In the east the safety pillar of a railline forms the boundary. In the solution of the problem the formulae of the mining area of the rectangular shape will be made use of. In this case namely the mining tract of general shape can be approximately replaced by a rectangular working area.

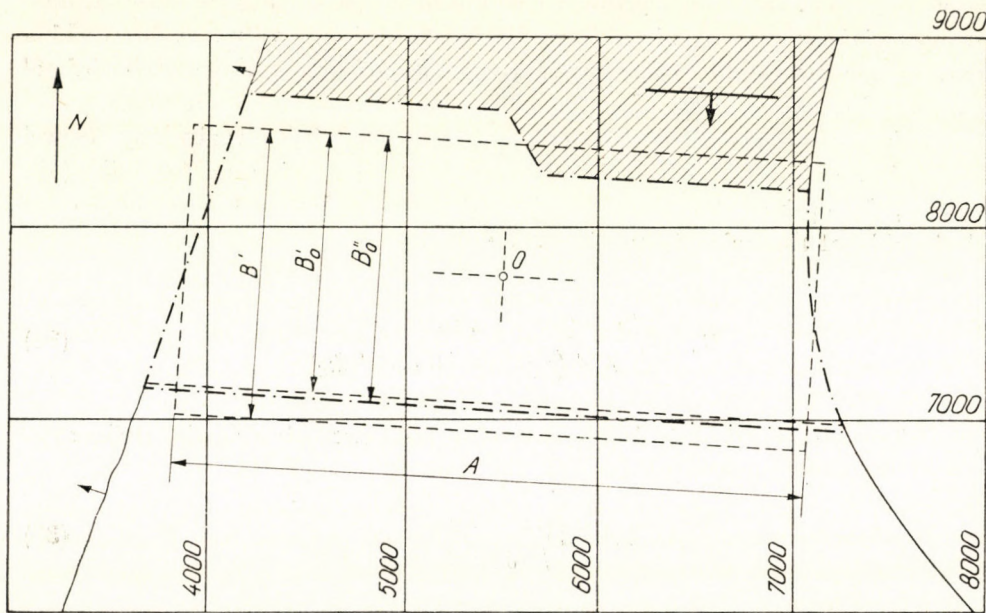


Fig. 4

The data are the following: $A = 3240$ m, $M = 5$ m, $\gamma = 1,42$ t/m³, $\zeta = 0,85$, $\alpha = 6^\circ$, $q_0 = 1500$ t/day, $q = 1,4$ t/shift, $v_s = 3800$ m/hour, $\delta = 6,035$, $D_t = 200$ million Ft.

In the first place the boundary line on the dip will be taken for $B' = 1500$ m. With such data the calculated $\Sigma' ck$ values of the first step will be the following:

$$\Sigma' ck_r = 0,0145, \quad \Sigma' ck_d = 0,0303 \quad \text{and} \quad (\Sigma' ck_{sh} + k_i) \sin \alpha = 0,0036.$$

Values of ω'_r and ω'_d are calculable:

$$\omega'_r = 0,5156 \quad \text{and} \quad \omega'_d = 0,4844.$$

According to equation 34.:

$$B'_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^8}{6,035 \cdot 3240 (0,5156^2 \cdot 0,0145 + 0,4844^2 \cdot 0,0303)}} = 1365 \text{ m}$$

In order to increase the precision the second step will also be performed. Values k are calculated now according to values A and B'_0 . A considerable change presents itself with respect to drainage only. In the second step:

$$\Sigma'' ck_r = 0,0142, \quad \Sigma'' ck_d = 0,0294 \quad \text{and} \quad (\Sigma' ck_{sh} + k_i) \sin \alpha = 0,0036$$

$$\omega''_r = 0,5092 \quad \text{and} \quad \omega''_d = 0,4908$$

$B'_0 = 1380$ m calculated from these will remain definitive, because it does not differ essentially from the value calculated in the previous step. On the other hand it is manifest that the second step has brought a very insignificant alteration only.

In the latter example the entire extension of the mineral land has been disregarded. Of course the proper procedure is followed only if the entire known mineral land is covered by mining tracts so that these are mapped out one beside another by similar procedure. If the last mining tract happens to be larger or smaller the excess or the deficit is distributed to the mining tracts, or the daily output capacity is changed in a way so that all mining tracts be of optimal dimensions.

The problem of optimal daily output capacity also turns up. This will not be dealt with here separately. Of course such investigation has only sense if geological conditions do not limit the daily output capacity.

It occurs very often that the area in question cannot even approximately be represented by a rectangular mining tract. In this case the procedure is of an essentially greater length. Since the case is that of an irregular shape, equation (22) has to be used in search of the the optimum.

According to Fig. 5. a series of mining tracts are to be mapped out. For each of them the optimal position of the shaft is located. Afterwards for each the values of a_{rh} , a_l , b_r , b_d , and Q are determined. In the same way have to be calculated the values of Σck_s , Σck_r , Σck_d and $(\Sigma ck_{sh} + k_i) \sin \alpha$ too. In possession of these on the basis of equation 22. the variation of k_0 can be drawn in terms of Q . The Q value to which the minimum of k_0 belongs, will define the optimal dimensions of the mining tract.

It happens that one of the shafts, more generally the air shaft falls at a distance from the winding shaft, or the layout is not central, but diagonal. According to Fig. 6. the airshaft has been located to the rise on the boundary. Winding shaft (Sz) is the downcast, airshaft (La) the upcast. Since the upcast is not located right at the winding shaft, equation (2) also changes and is split in two parts.

$$K = K_1 + K_2$$

K_1 includes the components that refer only to the winding shaft, K_2 such as are correlated half with the winding shaft, half with the airshaft. In this case the components of ventilation and of upkeep are correlated with both shafts.

K_1 is expressed according to equation (2) in the following way :

$$K_1 = (Q_{rh} \cdot a_{rh} + Q_l a_l) \Sigma_1 ck_s + Q_r b_r \Sigma_1 ck_r + Q_d b_d \Sigma_1 ck_d + \\ + \vartheta_1 Q b_r (\Sigma_1 ck_{sh} + k_{il}) \sin \alpha + D \quad (37)$$

It is pointed out that in values of $\Sigma_1 ck$ ventilation and upkeep are not included now. Similarly $(\Sigma_1 ck_{sh} + k_{il}) \sin \alpha$ refers only to the winding shaft.

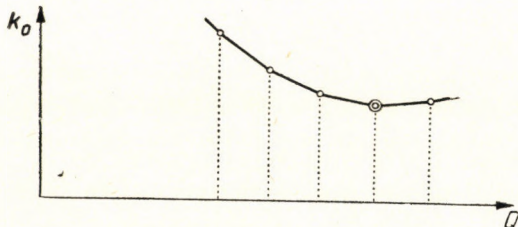
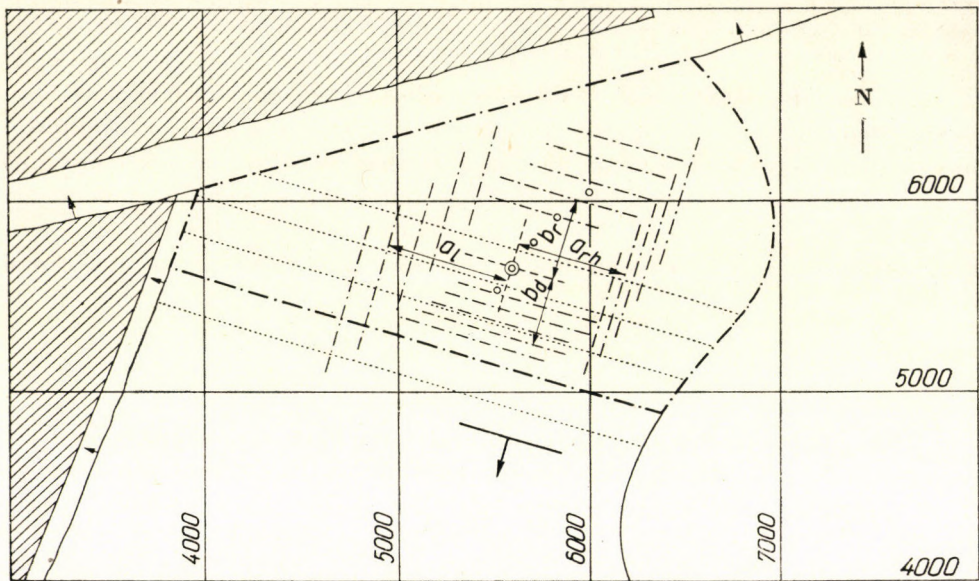


Fig. 5

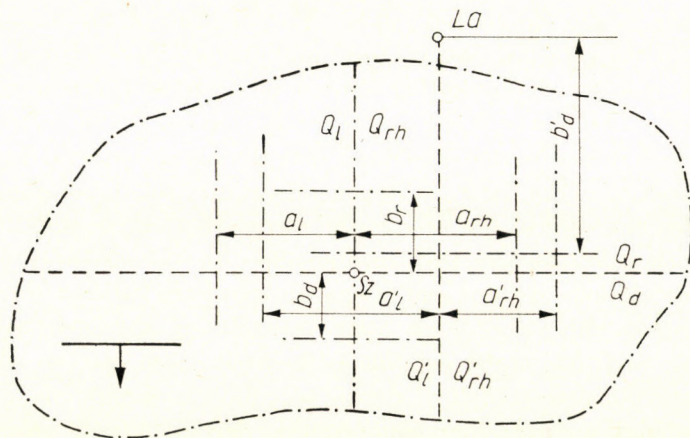


Fig. 6

K_2 can be expressed on the basis of the figure, namely :

$$K_2 = \frac{1}{2} \left\{ (Q_{rh} a_{rh} + Q_l a_l) \Sigma_2 ck_s + (Q'_{rh} a'_{rh} + Q'_l a'_l) \Sigma'_2 ck_s + \right. \\ \left. + Q_r b_r \Sigma_2 ck_r + Q_d b_d \Sigma ck_d + Q \vartheta_2 b_d \Sigma'_2 ck_d \right\} \quad (38)$$

where $\Sigma_2 ck$ includes only the components of ventilation and upkeep. Substitution of $b'_d = \vartheta_2 b_d$ is made in the equation.

The airshaft located at the given place also modifies the two condition equations of the optimal position of the winding shaft.

$$Q_{rh} \left(\Sigma_1 ck_s + \frac{1}{2} \Sigma_2 ck_s \right) + Q'_{rh} \frac{1}{2} \Sigma'_2 ck_s = Q_l \left(\Sigma_1 ck_s + \frac{1}{2} \Sigma_2 ck_s \right) + \\ + Q'_l \frac{1}{2} \Sigma'_2 ck_s \quad (39)$$

and

$$\frac{Q_r}{Q_d} = \frac{\Sigma_1 ck_d + \frac{1}{2} (\Sigma_2 ck_d + \vartheta_2 \Sigma'_2 ck_d) - \vartheta_1 (\Sigma_1 ck_{sh} + k_{1i}) \sin \alpha}{\Sigma_1 ck_r + \frac{1}{2} (\Sigma_2 ck_r - \vartheta_2 \Sigma'_2 ck_d) + \vartheta_1 (\Sigma_1 ck_{s_i} + k_{1i}) \sin \alpha} \quad (40)$$

The optimal location of the winding shaft can thus be determined in the case of diagonal layout too. On the basis of correlated relationships the optimal dimensions of the working area can also be sought by the method followed in the case of central layout. In the case of a rectangular working area the optimal dimensions can be expressed in an explicit form as well.

According to the afore-cited paper „The location of the manshaft (shaft of ingress) and the time loss on underground travel” the optimal position of the manshaft does not change either if there is a gap in the mining area, if it is composed of several tracts, if the average strike varies. By the method adopted for the manshaft it can be demonstrated that the condition equations defining the optimal position of the shaft are of general validity for the winding shaft too.

As it was supposed in the case of the manshaft that the point in question would be reached by the shortest way possible on the strike or on the dip, here again the relations of total and of specific costs are valid on this condition. If for some reason this is not even approximately so, the correlation of total and of specific costs has to be established in each given case on similar lines, and the optimal dimensions of the working area have to be determined accordingly. The procedure itself is entirely analogous to that described in the aforementioned paper.

Within the area of the mining tract there may be several artificial discontinuities. Such is the safety pillar of the shaft if it cannot be worked out for some reason. Formulae so far presented have supposed that the shaft pillar can be extracted.

If the shaft pillar cannot be extracted, the new optimal location of the shaft can be shifted in relation to the optimal point found according to the relationships thus far considered even if the shaft pillar is regarded as a discontinuity, as a gap. The mineral reserves tied up in the shaft pillar are not necessarily the slightest. If the shaft is shifted to the rise, the mineral reserves tied up in the shaft pillar will decrease. Of course this shift will be executed along the dip line passing through the optimal point.

In case of a mining tract of entirely general shape the increase of cost (ΔK_n) correlated with the location of the shaft is easily calculable in terms of the shift (y) and is simply plotted in a diagram. In the same way may be followed the reduction of the mineral reserves (ΔQ_p) tied up in the shaft pillar as a function of the shift.

The cost of investment per ton corresponding to the optimal dimensions of the shaft and to the given daily output capacity will be denoted by k_p . Start will be made further from the fact that with reduction of the shaft pillar the investment cost ($\Delta Q_p k_p$) per ton of the reduced quantity appears as saved. The shift has sense only if there exists a y value at which

$$\Delta Q_p k_p > \Delta K_n \quad (41)$$

If the curve of function

$$\Delta K = \Delta Q_p k_p - \Delta K_n \quad (42)$$

passes above the y axis on the positive or partly on the positive side, the shaft is shifted by value y_{\max} pertaining to $+\Delta k_{\max}$.

In the case of a mining area of rectangular shape the variation of ΔK_n with respect to y can be essentially more simply described on the basis of equation (20) ($x = 0$):

$$\Delta K_n = \left\{ \frac{A}{2} (\Sigma ck_r + \Sigma ck_d) y^2 + AB (\Sigma ck_{sh} + k_i) \sin \alpha y \right\} \delta \quad (43)$$

In using this formula the effect of the shaft pillar as of a discontinuity is reconsidered. This is permissible in most of the practical cases.

If the reduction of mineral reserves in the shaft pillar produced by the shift of the position of the shaft can also be expressed in terms of y , the dimension of the possible shift can also be expressed mathematically. This is only possible in the case of a shaft pillar of regular shape (circle, ellipse, quadrangle). In

practice the regular form is seldom, therefore only the graphical solution is successful.

According to the different tenor of the mineral deposit, the position of the shaft pillar makes itself differently felt. In most cases, because of the flatness of measures there is no need for shifting the original optimal point.

Let it be investigated now, how the shaft pillar affects the optimal dimensions of the working area? By applying the principle of the „spot” effect the problem can be simply solved. In the general case the total costs referred to the exploitable mineral reserves can be expressed after the analogy of equation (22) :

$$K_0 = Q \left\{ \frac{a_{rh} + a_l}{2} \Sigma ck_s + \omega_r b_r \Sigma ck_r + \omega_d b_d \Sigma ck_d \right\} - \\ - \{ (Q_{prh} a_{prh} + Q_{pl} a_{pl}) \Sigma_p ck_s + Q_{pr} b_{pr} \Sigma_p ck_r + Q_{pd} b_{pd} \Sigma_p ck_d \} + D_l \quad (44)$$

where subscript p refers to the shaft pillar.

If the formula is divided by $Q - Q_p$ unit costs are obtained. The further procedure is known. The method is similar in the case of a rectangular working area too.

If the mineral bed is not very thick and does not lie at great depth, the „spot” effect of the shaft pillar that cannot be worked out may practically be disregarded. At most it is possible to increase the calculated dimensions of the working area by the amount of mineral tied up in the shaft pillar.

Highly inclined measures will be investigated now. Let the layout of the shaft be central. Start will be made from the case where the shaft pillar can be extracted. Entry to the mineral deposit is made from two shafts near each other by principal crosscuts. The distance between levels is given. A single mineral bed is supposed for the sake of simplicity. The principal crosscut is driven to intersect the bed in which the lateral development is driven on the strike.

Transport of mineral is executed on the bottom roadway of the level, and only haulage of mineral will be dealt with in these investigations. Travel underground comes about in a way that access takes place on the upper or return airway and exit on the bottom or haulage road. Water is drained by the haulage road. Air passes to workings on the haulage road (intake) and is conducted to the upcast shaft by the return airway. Upkeep refers to both the intake and the return airway.

With symbols of Fig. 7. maintained, costs in relation to the location of the shaft are expressed :

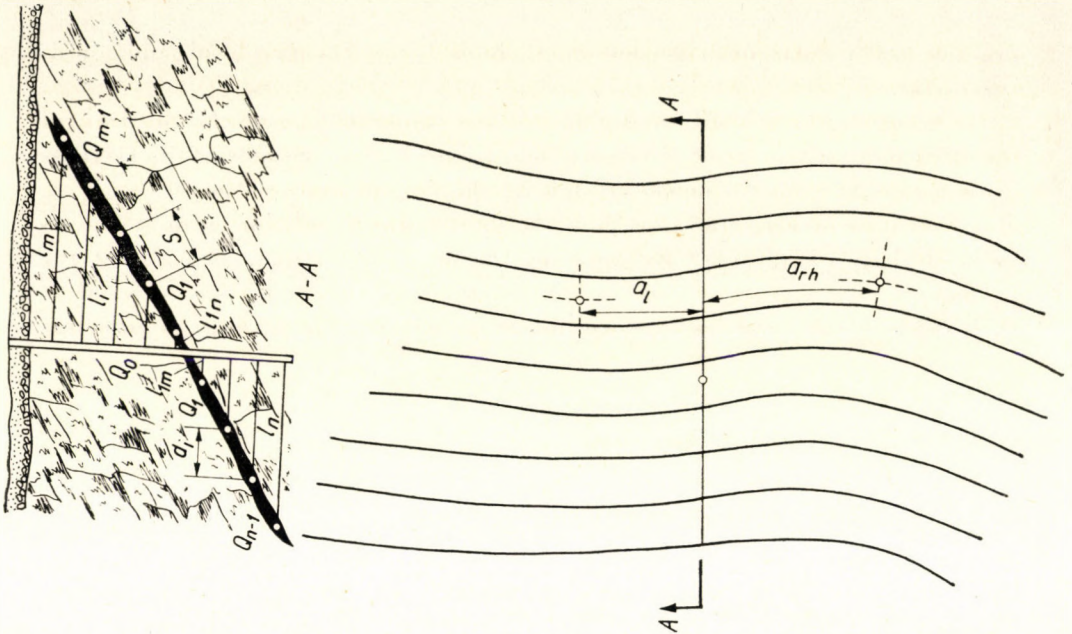


Fig. 7

$$\begin{aligned}
 K = & \sum_{i=1}^{m-1} \{ (Q_{irh} a_{irh} + Q_{il} a_{il}) \Sigma c_i k_{is} + Q_i l'_i \Sigma c_i k_{ic} \} + \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} \{ (Q_{irh} a_{irh} + Q_{il} a_{il}) \Sigma c_i k_{is} + Q_i l'_i \Sigma c_i k_{ic} \} + \\
 & + (Q_{0rh} a_{0rh} + Q_{0l} a_{0l}) \Sigma c_0 k_{os} + Q_0 l'_{in} \Sigma c_0 k_{oc} + D
 \end{aligned} \tag{45}$$

Q_i are the exploitable mineral reserves of the level, Q_{irh} is the portion falling to the right, Q_{il} that to the left of the principal crosscut, l'_i may be expressed by the length of crosscuts. a_{irh} and a_{il} are the distances of the centroidal lines of mineral reserves Q_{irh} and Q_{il} from the main crosscut. k_{is} is the cost factor presenting itself on the strike, k_{ic} is that along the crosscut. l'_i and l'_{1n} are obtained from values l_i and l_{1n} according to Table IV.

Table IV

	l'_i		l'_{1n}
	hanging wall	footwall	
Transport	l_i	l_{i+1}	l_{1n}
Travel	$\frac{l_i + l_{i+1} + d_i}{2}$	$\frac{l_i + l_{i+1} + d_i}{2}$	$\frac{l_{1n} + l_{1m} + d_0}{2}$
Drainage	l_i	l_{i+1}	l_{1n}
Ventilation	$\frac{l_i + l_{i+1} + d_i}{2}$	$\frac{l_i + l_{i+1} + d_i}{2}$	$\frac{l_{1n} + l_{1m} + d_0}{2}$
Upkeep	$\frac{l_i + l_{i+1} + d_i}{2}$	$\frac{l_i + l_{i+1} + d_i}{2}$	$\frac{l_{1n} + l_{1m} + d_0}{2}$

d_i is the horizontal projection of the distance between levels.

If the surface is nearly flat, transport and travel in the pit is independent of the location of the shaft, in highly inclined measures this effect may be disregarded.

Hereafter the two condition equations of the optimal position of the shaft may hereafter be easily set up by the afore-explained method.

The first condition equation :

$$\sum_1^{m-1} Q_{irh} \sum c_i k_{is} + \sum_1^{n-1} Q_{irh} \sum c_i k_{is} + Q_{rh0} c_0 k_{0s} = \sum_1^{m-1} Q_{il} \sum c_i k_{is} + \sum_1^{n-1} Q_{il} \sum c_i k_{is} + Q_{l0} c_0 k_{0s}. \quad (46)$$

The second condition equation :

$$\sum_1^{m-1} Q_i \sum c_i k_{ic} = \sum_1^{n-1} Q_i \sum c_i k_{ic} + Q_0 \sum' c_0 k_{0c} \quad (47)$$

where $Q_0 \sum' c_0 k_{0c}$ refers only to the conveyance of water and mineral on the first crosscut in the footwall.

If the values of c_i and k_i are the same on all levels and $Q_0 \sum' c_0 k_{0c}$ referring to the first footwall crosscut, the two condition equations are simpler :

$$\sum_1^{m-1} Q_{irh} + \sum_1^{n-1} Q_{irh} = \sum_1^{m-1} Q_{il} + \sum_1^{n-1} Q_{il} \quad (48)$$

and

$$\sum_1^{m-1} Q_i = \sum_1^{n-1} Q_i. \quad (49)$$

On the other hand, if the mineral reserves are equal on all levels (Q or Q_{rh} and Q_l), and besides this the mineral reserves are uniformly distributed on all levels and are congruent in space if shiften on the dip line, the first condition equation :

$$Q_{rh} = Q_l = \frac{Q}{2} \quad (50)$$

and the second

$$m = n. \quad (51)$$

In highly inclined measures there is a third postulate : the total length of principal crosscuts should be minimum. The aggregate length of principal crosscuts is a minimum if the number of cross measure drifts in the hanging

and the footwall is the same.* In most layouts the second and third condition equations of the optimal position of the shaft are identical. Where there is no agreement, the optimal compromise of the two condition equations has to be sought similarly to the procedure followed in connection with the effect of the shaft pillar on flat measures. Of course there subsists similarity of principle in the procedure only.

The determination of the optimal dimensions of the shaft pillar is in general simpler for highly inclined measures than for flat ones. The extent on the dip is namely given ordinarily. For coal measures the economically exploitable depth may set a limit, for metallic veins the discontinuation or weakening of the mineralization may fix the depth. At great depths technical or economic consideration may call for hoisting in two stages, but this problem will not be dealt with here.

It is evident that only transport and travel along the strike on the levels and the total investment of the shaft have a share in the determination of the optimal extension of the working area on the strike; these two have to be confronted with each other.

At given capacity of the shaft (q_0) and distance between levels (S) the unit cost depending on the extent along the strike is in the following general form :

$$k_0 = \frac{1}{\sum Q} \sum_1^N (Q_{irh} a_{irh} + Q_{il} a_{il}) \sum c_i k_{is} + \frac{D_t}{\sum Q}. \quad (52)$$

The minimum of value k_0 can be determined in case of irregular tenor of the deposit by graphical illustration of stepwise calculated values.

In regular measures the optimal extent on the strike (A_0) can be expressed directly too in the following manner : The unit cost will first be written down :

$$k_0 = \frac{A}{4} \frac{\sum_1^N \sum c_i k_{is}}{N} + \frac{D_t}{N \cdot S \cdot A \cdot \delta}. \quad (53)$$

Value k_0 is a minimum, if :

$$A_0 = 2 \sqrt{\frac{D_t}{S \delta \sum_1^N \sum c_i k_{is}}} \quad (54)$$

If values k are identical on all levels or are in practical agreement :

* General verification of the statement is found in paper "Choice of the Shaft Location", *Bányászati Lapok*, No. 2., 1957 (Hungarian).

$$A_0 = 2 \sqrt{\frac{D_t}{\delta B \sum c k_s}} \quad (55)$$

where $B = NS$. Of course, the latter equation necessarily agrees with the analogous formula of flat measures, that is, with equation (35).

As an example the optimal extent on the strike of the working area of the shaft will be determined for a metallic vein striking along several km-s.

Data are the following: $D_t = 120 \cdot 10^6$ Ft, $S = 50$ m, $\delta = 11,0$. Value $c k_s$ is for underground transport 0,0044, for travel 0,0036 (drainage on the strike does not cause expenditure), for ventilation 0,0019, for upkeep 0,0001. $\sum c k_s$ is thus 0,01. The calculated $c k_s$ values refer to the extent on the strike of 3000 m supposed in the first step. At the same time it is supposed that values $c k_s$ are practically identical on all levels, or more correctly, denote mean values. On this basis the optimal extent on the strike:

$$A_0 = 2 \sqrt{\frac{120 \cdot 10^6}{11,0 \cdot 9,50 \cdot 0,01}} = 3115 \text{ m.}$$

There is no practical need for a second step.

If the highly inclined measures are heavily water-bearing, similarly to flat measures the effect of drainage in the pit must not be neglected here either. The solution of the problem is attained entirely after the model of the relation (equation 37.) presented for flat measures.

Especially in measures with several mineral bodies main levels on the strike are often driven in the footwall or in intervening rock. Besides the main crosscuts there are thus several crosscuts on the level. In such a case in the equation of total costs in connection with the location of the shaft, traffic on the crosscuts plays no part. This circumstance does not affect the aggregate length of main crosscuts and has thus no bearing on the third condition equation either. All three condition equations are of general validity.

The system of crosscuts is in no connection with dimensions of the mining area. In such a system the extent on the strike is determined only by traffic on the strike, if extent on the dip is regarded as given, here too. On this condition the formula expressing optimal dimensions is of general validity.

If the shaft pillar or pillars cannot be extracted, the optimal point — determined univocally or by way of compromise by the three condition equations — can be shifted to the rise toward the footwall. The investigation can be executed like for flat measures. The essential difference is that in highly inclined measures the change of the aggregate length of principal crosscuts, its increase is also of importance. The inequality 41. is for highly inclined measures:

$$\Delta Q_p k_p > \Delta K_n + \Delta \Sigma l k_l \quad (56)$$

where $\Delta \Sigma l$ is that increment of the aggregate length of principal crosscuts, which is caused, by shift of the shaft location in terms of y , the dimension of the shift. k_l is the cost of driving one m of crosscut. The right side of the inequality, in terms of the dimension of the shift, increases in general by leaps and bounds at values of y_1, y_2, \dots, y_x . The aggregate length of crosscuts increases namely only, if there is a change in the number of main crosscuts driven in the hanging and the footwall. Shifts y_1, \dots, y_x are namely those at which there is such numerical change. The variation of the relation

$$\Delta = \Delta Q_p k_p - \Delta K_n - \Delta \Sigma l k_l \quad (57)$$

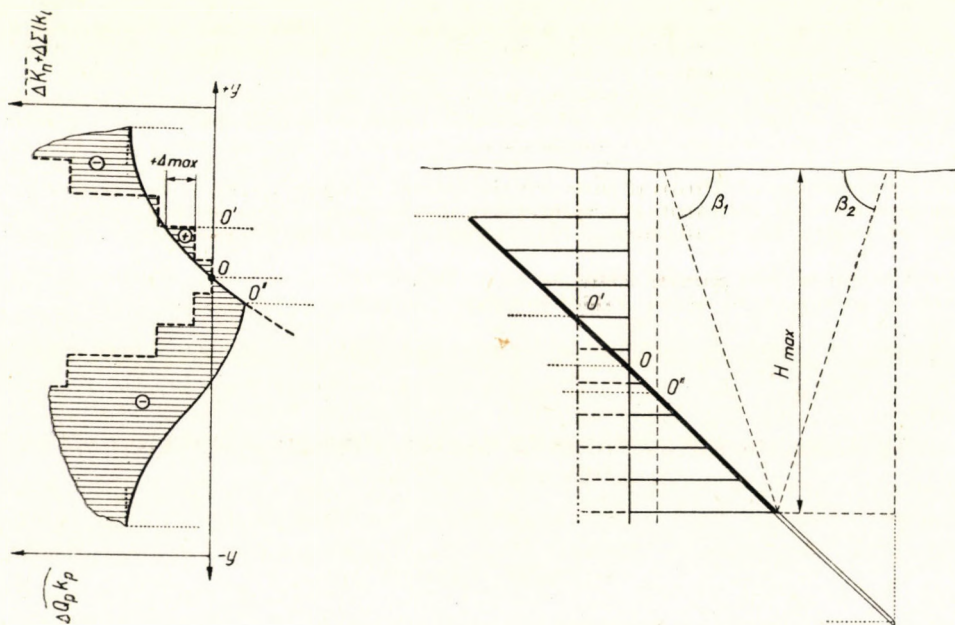


Fig. 8

in terms of y is shown in Fig. 8. The optimal point (O) found with neglect of the effect of the shaft pillar is shifted on the dip to position (O') where $+\Delta_{\max}$ presents itself. The divergence between the two curves ($\Delta Q_p k_p$ and $\Delta K_p + \Delta \Sigma l k_l$) is at the original optimal point zero, while at the new point (O') the positive difference is a maximum. In case of the shaft located at point (O') the mineral reserves in the shaft pillar are largest; pillars of shafts sunk in the footwall or far off in the hanging wall contain no mineral reserves, or not any to be considered from the point of view of working technique. H_{\max} is the depth limit of mining, β the angle of draw.

Besides the mathematical analysis of the location of the shaft, of the shape and extension of the working area the economic analysis is also of import-

ance. This paper does not deal with the latter. For the sake of completeness it will be necessary still to investigate the problem of amortization. In this paper proportional amortization has been calculated with. Its application essentially simplifies relationships. The difficulty with such a form consists in giving values of D and D_1 , that is, special care has to be taken in their calculation.

SUMMARY

The location of the shaft, shape and extension of its working area is investigated in terms of unit costs of underground transportation, time loss on underground travel, drainage, ventilation and upkeep.

In the first part relationships referring to flat measures are examined. First the two condition equations of the optimal location of a centrally positioned pair of shafts are set up for a working area of general shape, then a mining tract of the shape of a rectangle, whose sides coincide with the strike and the dip respectively, is investigated. In the case of deviation from the optimal point the percentage of increase of costs and the optimal extension of the working area of the shaft are determined. Dimensions of a working area of quite irregular form and diagonally located shafts are treated. The investigation of flat measures is closed with the examination of special cases.

The second part presents relationships for highly inclined measures. Besides the two condition equations there subsists a third postulate: the minimum of crosscuts.

DIE WAHL DES SCHACHTANSATZPUNKTES, FORM UND AUSDEHNUNG DES ABBAUFELDES

J. ZAMBÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden der Schachtansatzpunkt, die Form und Ausdehnung des Abbaufeldes in Abhängigkeit von den spezifischen Kosten der Grubenförderung, des Zeitverlustes der Fahrweguntertage, der Wasserhaltung, der Wetterführung und Erhaltung untersucht.

Im ersten Teil werden Zusammenhänge, die sich auf flach fallende Flöze beziehen, untersucht. Zuerst werden die zwei Bedingungsgleichungen des optimalen Ansatzpunktes einer zentralen Doppelschachthanlage aufgestellt, dann wird ein rechtwinkliges Schachtfeld untersucht, dessen Markscheiden im Streichen bzw. in der Einfalllinie liegen. Für den Fall einer Abweichung vom optimalen Punkt wird die Kostenerhöhung in Prozenten, so dann die optimale Ausdehnung des Schachtfeldes bestimmt. Die Ausdehnung des Schachtfeldes von ganz unregelmässiger Form und der Fall diagonal angelegter Schächte werden untersucht. Die Prüfung der flachfallenden Flöze schliesst mit der Untersuchung besonderer Fälle.

Im zweiten Teil werden die auf stark geneigte Flöze bezüglichen Zusammenhänge erörtert. Neben den zwei Bedingungsgleichungen des optimalen Punktes besteht noch eine dritte Forderung: das Mindestmass der Querschläge.

PLACEMENT DU DUIS, FORME ET ÉTENDUE DU CHAMP D'EXPLOITATION

J. ZAMBÓ

RÉSUMÉ

L'étude examine les lieux d'établissement des puits, la forme et l'étendue du champ d'exploitation en fonction des frais des transports, de la perte de temps en circulation souterraine, de l'épuisement, de l'aérage et des frais, de maintien des travaux souterrains.

Dans la première partie, l'auteur examine les relations valables pour des couches à faible pente. Les deux équations de condition du dispositif optima d'un siège central à deux puits sont d'abord établies, puis on examine un champ d'exploitation de la forme d'un rectangle, dont les cotés coïncident avec la direction ou bien la pente de la couche. Pour le cas d'un écart par rapport au point optima, il détermine le pourcentage de l'augmentation des frais, ainsi que les dimensions optima de champ d'exploitation.

L'étude des couches plates est terminée par l'examen de cas spéciaux.

La seconde partie donne les relations concernant des couches fortement inclinées. En dehors des deux équations de condition du point optima, il existe un troisième postulat: le minimum de travers-bancs.

МЕСТО ЗАКЛАДКИ ШАХТЫ, ФОРМА ШАХТНОГО ПОЛЯ И ЕГО РАЗМЕРЫ

Я. ЗАМБО

РЕЗЮМЕ

В статье исследуются место закладки шахты, формы и размеры шахтного поля в функции удельных расходов по отгрузке, от потери времени при движении обслуживающего персонала, вентиляции, откачки воды и профилактического ремонта.

В первой части исследуются зависимости, относящиеся к ровным залегающим. Два уравнения условия оптимального места закладки центрально залеженных шахтных пар дается сначала для шахтного поля общей формы, затем исследуется такое шахтное поле в виде прямоугольного четырехугольника, стороны которые лежат по простиранию и наклону. В случае отклонения от оптимального места определяется процент роста расходов, затем оптимальные размеры шахтного поля. Далее рассматриваются размеры шахтного поля, имеющего совершенно неправильную форму, затем затрагивается вопрос шахты, заложеной по диагонали. Исследованием специальных случаев заканчивается исследование пологопадающих пластов.

Во второй части даны зависимости, относящиеся к залегающим с крутым уклоном. Оптимальное место закладки кроме двух уравнений условий имеет еще одно третье требование — минимум поперечных разрезов.

SETTLING VELOCITY OF SOLID GRAINS IN COARSER DISPERSIONS

Prof. G. TARJÁN

CORRESP. MEMBER OF THE HUNGARIAN ACAD. OF SC.
DEPARTMENT FOR MINERAL DRESSING, TECHNICAL UNIVERSITY, SOPRON

[Manuscript received 31st May, 1957]

There are several suggestions for the calculation of the settling velocity V of fine solid grains valid for a suspension of many grains (hindered settling) of volume ratio σ from the settling velocity v_0 valid for a single grain, in a static medium, within the domain of validity of the Stokes formula

$$v_0 = \frac{d^2 (\delta - \gamma)}{18 \eta},$$

that is, at Reynolds numbers $\left(R = \frac{v_0 d}{\nu} = \frac{v_0 d \gamma}{\eta g} \right)$ practically less than unity. Thus KERMACK, MC KENDRICK and PONDER give the value of $(1-7,1 \sigma)$, GUTH and GOLD that of $(1-2,5 \sigma - 14,1 \sigma^2)$, EINSTEIN, further ZAGUSTIN and LIFLAND $\frac{1}{1+2,5 \sigma}$, GAUDIN $(1 - \sigma) (1 - \sigma^{2/3}) (1-2,5 \sigma)$ for the factor f to multiply v_0 in order to obtain the value of $V = f v_0$ [1].

The KERMACK, MCKENDRICK, PONDER formula gives for suspensions denser than 14,1%, the GUTH and GOLD formula for those denser than 19,2%, the GAUDIN formula for suspensions above 40% density already a negative value. Fine slimes begin at 40-50% density by volume to become plastic, mudlike, in which the settling of solid grains ceases. Coarser-grained dispersions are fluid even at higher densities. The formula of EINSTEIN or of ZAGUSTIN and LIFLAND is the yardstick of the increased viscosity of the suspension and is valid only for thin suspensions. Of the three multiplying factors of the GAUDIN formula the first considers that specific gravity γ' of the suspension is higher than that of the liquid medium γ because of the presence of solid grains, namely $\gamma' = \sigma \delta + (1 - \sigma) \gamma$, thus $\delta - \gamma' = (1 - \sigma) (\delta - \gamma)$ is substituted for $(\delta - \gamma)$ figuring in the Stokes formula. The second factor takes into account the reduction of cross-section of the liquid phase because of the solid particles, the third factor accounts for the increase of viscosity of the medium. (The last is in effect identical with the Einstein correction).

The second factor is deducible by the following consideration. If between grains of cubic shape, of edge length d , l is the interstice, $\sigma = \left(\frac{d}{d+l}\right)^3$. The grain settling at speed V pushes before it in unit time the medium of volume Vd^2 , which flows back in the interstice between grains at velocity $(v_0 - V)$, so that the difference of velocity between the medium and the solid grain remains v_0 :

$$Vd^2 = (v_0 - V) [(d + l)^2 - d^2],$$

whence

$$V = v_0 \frac{(d + l)^2 - d^2}{(d + l)^2} = v_0 \left[1 - \left(\frac{d}{d + l}\right)^2 \right] = v_0 (1 - \sigma^{2/3}).$$

By the change of σ the settling velocity of fine solid grains is comparatively well calculable with the Gaudin correction. *Experimental* values determined by KERMACK, MCKENDRICK and PONDER for different volume densities σ and numerical values of the GAUDIN correction are listed in Table 1. besides other factors to be explained later.

Table 1

$\sigma\%$	1	2	4	6	8	10	15	20	25	30
Experimental $f\%$	89	83	73	61	51	43	31	24	18	14
Gaudin $f\%$	92	83	76	68	60	54	39	27	17	10
$f' = (1 - \sigma)^2 (1 - 2,5 \sigma)$	96	92	83	75	68	61	45	32	21	12
$f'' = \frac{(1 - \sigma)^2}{1 + 2,5 \sigma}$	95	91	84	77	71	65	53	43	35	28
$f''' = \left(\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}\right)^2$	96	92	85	79	73	67	55	44	36	29

In hindered settling of *coarser-grained* solid particles the settling velocity of grains is also reduced in relation to the single grain settling in pure medium. At Reynolds numbers of 800–200 000 the settling velocity of the particle is calculable by the Newton formula

$$v_0 = C \sqrt{\frac{d(\delta - \gamma)}{\gamma}}$$

where $C = \sqrt{\frac{4g}{3c}}$ is a constant depending on the shape of the particle. E. g. for the sphere, where $c = 0,43$ can be reckoned with, the value of $C = 55$ is obtained. For the various minerals different values are obtained, e. g. for galenite with

fair cubic planes of cleavage the average value of C is about 30, for quartz about 25, for scaly or needleshaped minerals it is less than 20, if d is the diameter of the sphere whose volume is equivalent to that of the mineral particle.

RICHARDS [2] calculates instead of the formula $v_0 = C \sqrt{d(\delta - 1)}$ with formula $V = C \sqrt{d(\delta - 1,5)}$ in hindered settling, that is, substitutes the average specific gravity of $\gamma' = 1,5$ of the dispersoid for the specific gravity of $\gamma = 1$ of water. (In the dispersion of quartz grains the value of

$$\sigma = \frac{\gamma' - \gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1,5 - 1}{2,65 - 1} = 0,30$$

belongs to the value of $\gamma' = 1,5$.)

MUNROE applies to the computation of the settling velocity of dispersions by formula $V = fv_0$ the correction factor $f = \left[1 - \left(\frac{d}{d+l} \right)^{3/2} \right]$ from which by substitution of $\sigma = \left(\frac{d}{d+l} \right)^3$ the formula of $f = (1 - \sigma^{1/2})$ is obtained.

LASHCHENKO [3] established by experimentation the relation of $V = v_0(1 - \sigma)^n$ between the hindered (V) and free (v_0) settling velocities, where the exponent varies between 2,5 and 3,8. For smaller grain sizes the larger n value is valid. Table 2. — among others — presents $(1 - \sigma)^n$ values at $n = 2,5$ and 3,8, as well as the Munroe correction $(1 - \sqrt{\sigma})$. It is evident that the latter is smaller than LASHCHENKO's experimental values in thin ($\sigma < 0,1$) dispersions, and larger in thick ($\sigma > 0,25$) dispersions.

Table 2

σ	$(1-\sigma)^{2,5}$	$(1-\sigma)^{1,8}$	$1-\sqrt{\sigma}$	$1-\sigma^{2/3}$	$\frac{1-\sigma^{2/3}}{(1+\sigma)^2}$	$\frac{1-\sigma^{2/3}}{1+2,5\sigma}$	$\frac{1-\sigma}{1-\sigma^{2/3}}$	$\gamma' = 1 + \sigma(\Delta - 1)$			
								$\Delta = 7$	4	2	1,5
0,05	88	82	78	87	79	77	1,10	1,3	1,15	1,05	1,025
0,1	77	65	68	78	65	63	1,15	1,6	1,3	1,1	1,05
0,2	57	43	55	66	46	44	1,22	2,2	1,6	1,2	1,1
0,3	41	26	45	55	33	32	1,27	2,8	1,9	1,3	1,15
0,4	28	14	37	46	23	23	1,31	3,4	2,2	1,4	1,2
0,5	18	7	29	37	16	16	1,35	4,0	2,5	1,5	1,25

It was shown that in the domain of validity of the STOKES formula GAUDIN arrived at corrections well suiting the experimental data, calculating with the reduction of the free cross-sectional area of the liquid phase and with the increased specific gravity and viscosity of the suspension instead of the specific gravity and viscosity of the pure liquid. Let it be examined whether a similar procedure

does not lead in the range of the validity of the Newton formula too to a correction fitting close the experimental data.

Factor $(1 - \sigma^{2/3})$ accounting for the reduction of the free liquid surface invariably presents itself with the Newton formula too. Substitution for γ of the specific gravity $\gamma' = \sigma \Delta + (1 - \sigma) \gamma$ of the mixture of solid grains and of the liquid, where Δ is the average specific gravity of the solid grains of the dispersoid surrounding the mineral particles in question (of sp. gr. δ), leads to the formula

$$V = C \sqrt{\frac{d(\delta - \gamma')}{\gamma'}} (1 - \sigma^{2/3}),$$

that is,

$$V = v_0 (1 - \sigma^{2/3}) \sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma'}{(\delta - \gamma) \gamma'}}$$

provided that C does not change, or the Reynolds number does not decrease below 800. If it does so, $c' > c$, and the value of V has to be reduced by multiplication factor $k = C'/C = \sqrt{c/c'}$, that is in case of $\gamma = 1$,

$$V = v_0 k (1 - \sigma^{2/3}) \sqrt{\frac{\delta - \gamma'}{(\delta - 1) \gamma'}}$$

will be the result.

The Reynolds number changes in the dispersoid from the value

$$R = \frac{dv_0}{\nu} = \frac{dv_0 \gamma}{\eta g}$$

valid for pure medium to

$$R' = \frac{dV \gamma'}{\eta' g}$$

Substitution of the values of V and $\eta' = (1 + 2,5 \sigma) \eta$ or of the value of $\eta' = (1 + \sigma)^2 \eta$ approximately identical with the former up to the value of $\sigma < 0,6$, gives the following result at $\gamma = 1$

$$R' = \frac{dv_0 k (1 - \sigma^{2/3})}{\eta g (1 + 2,5 \sigma)} \sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma'}{\delta - 1}} = Rk \frac{1 - \sigma^{2/3}}{1 + 2,5 \sigma} \sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma'}{\delta - 1}}$$

or

$$R' = Rk \frac{1 - \sigma^{2/3}}{(1 + \sigma)^2} \sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma'}{\delta - 1}}.$$

The percentile values of the individual factors figuring in the formulae of V and R are listed in Table 2.

The percentile values of

$$V/v_0 k = (1 - \sigma^{2/3}) \sqrt{\frac{\delta - \gamma'}{(\delta - 1)\gamma'}}$$

and of

$$R'/Rk = \frac{1 - \sigma^{2/3}}{1 + 2,5\sigma} \sqrt{\frac{(\delta - \gamma')\gamma'}{\delta - 1}}$$

are contained for some values of δ and Δ in Table 3.

Table 3

	σ	$\delta = 7$			$\delta = 4$			$\delta = 2$			$\delta = 1,5$	
		$\Delta = 7$	4	2	7	4	2	4	2	1,5	2	1,5
$V/v_0 k$	0,1	59	67	74	55	65	74	58	71	75	67	73
	0,2	40	52	59	34	47	58	33	54	59	47	56
	0,3	28	37	47	21	33	50	13	40	47	31	43
	0,4	19	28	37	9	24	36	—	30	37	17	32
	0,5	13	20	29	0	17	28	—	21	89	0	23
R'/Rk	0,1	75	70	65	71	68	65	60	63	63	59	61
	0,2	58	53	47	51	50	47	35	43	44	37	41
	0,3	44	40	35	34	36	34	14	30	31	23	28
	0,4	33	30	26	16	26	25	—	21	22	12	19
	0,5	23	22	19	0	18	18	—	14	16	0	13

If $R' > 800$, $k = \sqrt{c/c'} \cong 1$; otherwise the factor k is to be determined with the aid of the correlated values of R and c (Table 4.), practically by using the method of approximation.

Table 4

R	c	R	c	R	c
50	1,54	150	0,93	600	0,53
60	1,40	200	0,81	700	0,50
70	1,30	250	0,75	800	0,49
80	1,21	300	0,68	1000	0,46
90	1,15	400	0,61	2000	0,41
100	1,09	500	0,56	5000	0,40

For instance let be $d = 0,4$ cm, $\delta = 4$,

$$(v_0 = 30 \sqrt{d/\delta - 1} = 33 \text{ cm/sec, } R = v_0 d / \nu = 33 \cdot 0,4 / 0,01 = 1320, c = 0,44),$$

$$\sigma = 0,4, \Delta = 4, (\gamma' = 2,2, R'/Rk = 0,26, V/v_0 k = 0,24.)$$

$$R' = 0,26 \cdot 1320 = 344; \text{ here } c' = 0,65;$$

$$k = \sqrt{0,44/0,65} = 0,82; 0,82 R' = 292, \text{ here } c' = 0,69;$$

$$k = \sqrt{0,44/0,69} = 0,80; 0,80 R' = 275, \text{ here } c' = 0,71;$$

$$k = \sqrt{0,44/0,71} = 0,79; 0,79 R' = 272, \text{ where } c' = 0,71, \text{ that is,}$$

$$k = 0,79. \text{ That } = 0,24 v_0 k = 0,24 \cdot 33 \cdot 0,79 = 6,3 \text{ cm/sec, that is}$$

$$V/v_0 = 6,3/33 = 0,24 \cdot 0,79 = 0,19.$$

In the dispersion of grains of equal specific gravity $\delta = \Delta$. Then $\delta - \gamma' = (\delta - \gamma)(1 - \sigma)$, that is, $V = v_0 k (1 - \sigma^{2/3}) \sqrt{\frac{1 - \sigma}{\gamma'}}$ and

$$R' = Rk \frac{1 - \sigma^{2/3}}{1 + 2,5\sigma} \sqrt{(1 - \sigma)\gamma'} = \frac{100 V d \gamma'}{1 + 2,5\sigma}.$$

Table 5. presents k (%) values obtained for different R values at $\delta = \Delta$.

Table 5

σ	$R = 800$				$R = 1000$			
	$\delta = 7$	4	2	1,5	7	4	2	1,5
0,1	95	94	92	92	96	94	92	92
0,2	91	87	84	83	92	89	85	85
0,3	84	79	76	75	85	82	78	76
0,4	78	72	69	68	79	75	70	69
0,5	70	66	62	60	72	70	64	61
	$R = 2000$				$R = 5000$			
0,3	92	89	86	85	96	96	95	95
0,4	87	83	87	78	94	93	91	91
0,5	81	76	81	69	92	90	86	85

From this is evident that k is the smaller, the smaller are δ and R . At invariable δ the value of R varies proportionally to $d^{3/2}$, ($R = v_0 d / \nu = 100 C d \sqrt{d(\delta - 1)}$), therefore for smaller grains the value of k is also lower, that is, V/v_0 is smaller in good accord with LASHCHENKO's experimental data.

Table 6 lists values of v_0 cm/sec and of R of grains of $d = 0,33$ and $1,0$ cm and specific gravity $\delta = 7, 4$ and 2 .

Table 6

d	$v_0=30 \sqrt{d(\delta-1)}$			$R = 100 d v_0$		
	7	4	2	7	4	2
0,33	42,5	30	17,3	1410	1000	570
1	73,6	52	30	7360	5200	3000

In Table 7. at $\Delta = \delta$ and various values of σ , the values of R'/k , k and V/v_0 of these grains are found.

Table 7

d cm	σ	R'/k			$k\%$			$V/v_0\%$		
		$\delta = 7$	4	2	7	4	2	7	4	2
0,33	0,1	1060	680	360	100	94	91	59	61	64
	0,2	820	500	245	95	88	82	38	41	44
	0,3	620	360	170	90	82	74	25	27	30
	0,4	465	260	120	85	75	67	16	18	20
	0,5	324	180	80	77	66	58	10	11	12
1,0	0,1	5500	3500	1900	100	100	100	59	65	71
	0,2	4300	2600	1300	100	100	95	40	47	51
	0,3	3200	1870	900	100	100	92	28	33	37
	0,4	2400	1350	630	100	95	87	19	23	26
	0,5	1700	940	420	100	92	79	13	16	17
0,33	0,1	1210	780	410	100	97	93	68	73	75
	0,2	1000	610	300	97	92	85	48	52	56
	0,3	790	460	215	92	87	78	33	37	40
	0,4	610	340	160	89	80	71	22	25	28
	0,5	435	240	110	83	73	64	15	17	18
1,0	0,1	6300	4000	2160	100	100	100	68	75	81
	0,2	5200	3200	1560	100	100	100	49	57	64
	0,3	4100	2400	1140	100	100	94	36	42	48
	0,4	3200	1770	840	100	100	91	25	31	35
	0,5	2280	1250	570	100	96	85	18	22	24

The comparison of values V/v_0 of Table 7. with corresponding values $(1 - \sigma)^{2,5}$ and $(1 - \sigma)^{3,8}$ of Table 2. shows very good agreement at higher σ values, but at low σ values the corresponding values of Table 7. are lower than the data of Lashchenko's experiments listed in Table 2. However, the divergence is here

not larger than the difference between the experimental data found for fine suspensions and the values calculated with GAUDIN's correction. This evidences the good applicability of the formula presented.

The correction factor $(1 - \sigma^{2/3})$ of the reduction of the cross-sectional area of the liquid phase was deduced from the assumption that the cubic solid grains are arranged in the suspension according to a hexahedric space lattice. Then the horizontal plane laid across the pulp also cuts solid particles with probability $\frac{d}{d+l} = \sqrt[3]{\sigma}$ or with probability $\frac{l}{d+l} = 1 - \sqrt[3]{\sigma}$ it cuts only the liquid. Of the plane cutting solid particles part $\left(\frac{d}{d+l}\right)^2 = \sigma^{2/3}$ falls to the solid phase, part $1 - \sigma^{2/3}$ to the liquid phase, and the relation of the latter value to the surface of the plane falling entirely into the liquid gives the correction of the reduction of the cross-section.

If the solid grains are not arranged in a regular space lattice, but disorderly, the value of $(1 - \sigma)$ is obtained for the correction of the reduction of cross-section. That is to say, then the portion laying in the solid phase of the straight line laid through the suspension also equals the volume ratio of solid grains σ , and so does the portion falling to the solid phase of the surface of the plane laid across the suspension. The part lengths of the straight line falling to the different phases are measured e. g. at the microscopic analysis when the volume ratio of the different constituents visible on the slide are determined.

Surface proportions of the individual phases presenting themselves on the sectional plane are obtained by the following deduction: Let in the cubic vessel of D edge length n particles of size d be uniformly dispersed. Then $\sigma = n a d^3/D^3$ (a is a constant depending on the shape of the grains). The plane parallel to the face of the cube cuts one definite grain with probability d/D , the number of grains cut by the plane is nd/D , their average cross-section

$$a d^2 nd/D = n a d^3/D.$$

(The average magnitude of the cross-section of one grain is namely obtained if the volume of the grain is divided by the grain size: $a d^3/d = a d^2$.) The solid phase thus occupies part $n a d^3/D^3 = \sigma$ of the total surface (D^2) of the sectional plane.

Applying the value of $(1 - \sigma)$ as correction of the reduction of the liquid cross-section, instead of value $(1 - \sigma^{2/3})$, in the suspension of *fine grains*, in the place of GAUDIN's correction the value of $f' = (1 - \sigma)^2 (1 - 2,5 \sigma)$ is obtained. Instead of multiplication factor $(1 - 2,5 \sigma)$ dividing by value $(1 + 2,5 \sigma)$ or the value approximately equal to it $(1 + \sigma)^2$ correction factor

$$f'' = \frac{(1 - \sigma)^2}{1 + 2,5 \sigma} \quad \text{or} \quad f''' = \left(\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}\right)^2$$

is obtained. Table 1. also shows these. It is evident that neither of them gives values well suiting experimental data.

Applying the value of $(1 - \sigma)$ instead of $(1 - \sigma^{2/3})$ to the dispersion of coarse grains the formulae

$$V' = v_0 k' (1 - \sigma) \sqrt{\frac{\delta - \gamma'}{(\delta - 1)\gamma'}} \quad \text{and} \quad R'' = Rk' \frac{1 - \sigma}{1 + 2,5\sigma} \sqrt{\frac{(\delta - \gamma')\gamma'}{\delta - 1}}$$

$$\text{or} \quad R'' = Rk' \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)^2} \sqrt{\frac{(\delta - \gamma')\gamma'}{\delta - 1}}$$

and to the dispersion of grains of equal specific gravity ($\delta = \Delta$), the formulae

$$V' = v_0 k' \frac{(1 - \sigma)^{3/2}}{\sqrt{\gamma'}} \quad \text{and} \quad R'' = Rk' \frac{(1 - \sigma)^{3/2} \sqrt{\gamma'}}{1 + 2,5\sigma}$$

$$\text{or} \quad R'' = Rk' \frac{(1 - \sigma)^{3/2} \sqrt{\gamma'}}{(1 + \sigma)^2} \quad \text{are obtained.}$$

These values V' and R'' are $\frac{1 - \sigma}{1 - \sigma^{2/3}}$ times higher than the former values V and R' (Table 2). Data $V/v_0 k'$ and R'/Rk' of Table 3. multiplied by $\frac{1 - \sigma}{1 - \sigma^{2/3}}$ yield the corresponding $V'/v_0 k'$ and R''/Rk' values. Table 7. also contains numerical values of R''/k' , k' and V'/v_0 for grains of 0,33 and 1 cm size and 7, 4, and 2 specific gravity. The data V'/v_0 are in general slightly larger than the values calculated by LASHCHENKO's formula. Reduction of values V' belonging to $\sigma < 0,3$ by about 10% of values pertaining to $\sigma > 0,3$ by about 20%, yields LASHCHENKO's "experimental" data.

REFERENCES

1. GAUDIN, A. M.: Principles of mineral dressing. McGraw-Hill Book Co., New York and London, 1939, p. 189-191.
2. RICHARDS, R. H.: Ore dressing, Vol. III., McGraw-Hill Book Co., New York 1909., p. 1427.
3. Ейгелес М. А., Обогащение неметаллических полезных ископаемых. Промстройиздат 1952, ст. 147.

SUMMARY

In coarse dispersion the settling velocity of grains is obtained by multiplying the Newtonian value of the settling velocity of the particle

$$v_0 = C \sqrt{\frac{d(\delta - \gamma)}{\gamma}}$$

valid for unhindered settling by multiplication factor

$$f = k(1 - \sigma^{2/3}) \sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma}{(\delta - \gamma) \gamma'}}$$

Here $\sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma}{(\delta - \gamma) \gamma'}}$ accounts for the increased specific gravity of the dispersoid in relation to pure liquid, $(1 - \sigma^{2/3})$ for the free cross-sectional area of the liquid reduced by the presence of solid grains, and $k = \sqrt{c/c'}$, for the drag coefficient of the medium increased by the diminution of the Reynolds number. Instead of value $(1 - \sigma^{2/3})$ value $(1 - \sigma)$ can also be applied as cross-section reduction factor.

SINKGESCHWINDIGKEIT VON FESTEN KÖRNERN IN GROBKÖRNIGEN DISPERSIONEN

G. TARJÁN

ZUSAMMENFASSUNG

Die Sinkgeschwindigkeit von Körnern in grobkörnigen Dispersionen wird erhalten, wenn der für das Sinken im freien Raume gültige (Newtonsche) Wert der Sinkgeschwindigkeit des Kornes

$$v_0 = C \sqrt{\frac{d(\delta - \gamma)}{\gamma}}$$

mit dem Faktor

$$f = k(1 - \sigma^{2/3}) \sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma}{(\delta - \gamma) \gamma'}}$$

multipliziert wird. $\sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma}{(\delta - \gamma) \gamma'}}$ berücksichtigt hier das gegen die reine Flüssigkeit erhöhte sp. Gewicht des Dispersoids, $(1 - \sigma^{2/3})$ den infolge der festen Körner verringerten freien Querschnitt der Flüssigkeit, und $k = \sqrt{c/c'}$ den infolge der Abnahme der Reynoldsschen Zahl erhöhten Widerstandsbeiwert der Flüssigkeit. Anstatt des Wertes $(1 - \sigma^{2/3})$ kann auch der Wert von $(1 - \sigma)$ als Querschnittsverminderungsfaktor benützt werden.

VITESSE DE CHÛTE DE PARTICULES SOLIDES EN DISPERSIONS À GROS GRAINS

G. TARJÁN

RÉSUMÉ

Dans les dispersions à gros grains, la vitesse de chute des grains est obtenue, si la valeur de la vitesse de chute (Newtonienne) de la particule en espace non serré

$$v_0 = C \sqrt{\frac{d(\delta - \gamma)}{\gamma}}$$

est multipliée par le facteur

$$f = k(1 - \sigma^{2/3}) \sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma}{(\delta - \gamma) \gamma'}}$$

Dans cette formule, $\sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma}{(\delta - \gamma) \gamma'}}$, tient compte du poids spécifique du dispersoïde augmenté par rapport au liquide pur, $(1 - \sigma^{2/3})$ de la section libre du liquide réduite par la présence des grains solides et $k = \sqrt{c/c'}$ du coefficient de résistance du fluide augmenté par suite de la diminution du nombre de Reynolds. Au lieu de la valeur de $(1 - \sigma^{2/3})$, on peut faire usage aussi de $(1 - \sigma)$ comme coefficient de rétrécissement de la section libre du liquide.

СКОРОСТЬ ПОГРУЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ГРУБОЗЕРНИСТЫХ ДИСПЕРСИЯХ

Г. ТАРЬЯН

РЕЗЮМЕ

Скорость погружения в грубозернистой дисперсии может быть получена, если величину, действительную для скорости погружения зерен в свободном пространстве (Ньютона)

$$v_0 = C \sqrt{\frac{d(\sigma - \gamma)}{\gamma}},$$

помножить на коэффициент

$$= k(1 - \sigma^{2/3}) \sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma}{(\delta - \gamma) \gamma'}},$$

где $\sqrt{\frac{(\delta - \gamma') \gamma}{(\delta - \gamma) \gamma'}}$ — удельный вес дисперсоида, возросший по отношению к чистой жидкости;

$(1 - \sigma^{2/3})$ — живое сечение жидкости, сократившееся вследствие присутствия твердых зерен;

$k = \sqrt{c/c'}$ — коэффициент сопротивления среды, возросший вследствие уменьшения числа Рейнольдса. Вместо величины $(1 - \sigma^{2/3})$ может быть использована величина $(1 - \sigma)$ в качестве коэффициента сужения сечения.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume. Manuscripts should be addressed to :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest VI., Népköztársaság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

I N D E X

- Szöke, B.*: Selection of the Different from the Multitude of the Uniform — Die Auswahl des Andersgearteten aus der Menge der Gleichförmigen — Selectionnement du différent parmi la multitude des uniformes — *Б. Секе*: Выделение различного среди ряда одинаковых 3
- Thamm, I.*: Ausführungsformen und Eigenschaften von Schrumpfverbindungen zwischen umlaufenden zylindrischen Maschinenteilen — Types and Properties of Shrunk Connections between Rotating Cylindrical Machine Parts — Formes et propriétés des assemblages par emmanchement à chaud des éléments de machines cylindriques, à vitesse de rotation élevée — *И. Тамм*: Исполнительные формы и свойства анкерных соединений между вращающимися цилиндрическими элементами машин 23
- Gangli, L. A. B.*: Study on the Theoretical and Practical Relations of Spinning Plans — Diskussion der theoretischen und praktischen Zusammenhänge bei Spinnplänen — L'examen des relations théorétiques et pratiques des plans de filature — *Б. Гангли*: Оценка практических и теоретических зависимостей плана прядения 49
- Zilahi, M.*: Dynamische Analyse des Webevorganges — Dynamic Analysis of the Weaving Process — L'analyse dynamique du processus du tissage — *М. Зилахи*: Динамический анализ процесса ткачества 63
- Striker, G. O.*: Ultraphotometer using Magnetically Modulated Photomultiplier — Ein Ultraphotometer mit Anwendung eines magnetisch modulierten Elektronen-Vervielfacher — Ultraphotomètre avec multiplicateur d'électrones à modulation magnétique — *Г. О. Штрикер*: Ультрафотометр с электронным множителем магнитной модуляции 83
- Csonka, P.*: Stiffness Characteristics of Rigid Warren Girders — Steifigkeitskennwerte von Rahmen-Fachwerkträgern — Caractéristiques de rigidité des poutres à treillis neuds rigides — *П. Чонка*: Параметры жесткости решетчатых ферм 103
- Káldor, M.*: Bestimmung der Schlagenergie von Federhämmern — Determination of the Impact Energy of Spring Hammers — Détermination de l'énergie de percussion des marteaux à ressort — *М. Кальдор*: Определение энергии удара пружинных молотов 119
- Hangos, I. & Pozsgay Gy.*: Influence of Binders upon the Surface Brightness of Cathode Ray-tube Screens II. — Einfluss des Bindemittels auf die Oberflächenhelligkeit von Kathodenstrahlröhrenschirmen II. — L'effet du liant sur la brillance des écrans des tubes cathodiques II. — *И. Хангош—Д. Позсгаи*: Влияние связующего вещества на поверхностный блеск экранов катодных трубок II. 129
- Schleicher, A.*: Project of Blast Furnace and Blast Engine, Dated from 1816 — Zeichnung eines Hochofens mit Gebläse aus 1816 — Plans d'un haut fourneau et de sa soufflerie établis en 1816 — *А. Шлейхер*: Проект домы и его поддувных машин, разработанный в 1816 году 137
- Széki, P.*: The Influence of Heat Treatment on the Strain-ageing of Aluminium-killed Steel — Der Einfluss der Wärmebehandlung auf die Reckalterung von mit Aluminium beruhigtem niedriggekohltem Stahl — Influence du traitement thermique sur le vieillissement après l'écroutissage de l'acier doux calmé à l'aluminium — *П. Секи*: Влияние термообработки на старение при обработке мягкой стали, успокоенной A_1 145
- Szmodits, K.*: Bending Stresses in Edge Beams of Cylindrical Shells — Biegetheorie der Randträger von Kreiszyllinderschalen — La théorie des poutre de bord des voiles minces circulaires — *К. Сمودич*: Анализ краевой балки изогнутых бочарных сводов 153
- Sályi, I. jun.*: Die Rolle der kinematischen Ketten bei der Mechanik von Getrieben — The Role of Kinematic Chains in the Mechanics of Mechanisms — Le rôle des chaînes cinématiques dans la mécanique des mécanismes — *И. Шай (мл.)*: Роль кинематических цепей в механике механизмов 159
- Zambó, J.*: Location of the Shaft, Shape and Extension of its Working Area — Die Wahl des Schachtansatzpunktes, Form und Ausdehnung des Abbaufeldes — Placement du duits, forme et étendue du champ d'exploitation — *Я. Замбо*: Место закладки шахты, форма шахтного поля и его размеры 171
- Tarján, G.*: Settling Velocity of Solid Grains in Coarser Dispersions — Sinkgeschwindigkeit von festen Körnern in grobkörnigen Dispersionen — Vitesse de chute de particules solides en dispersions à gros grains — *Г. Тарьян*: Скорость погружения твердых частиц в грубозернистых дисперсиях 197

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY
G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XX

FASCICULI 3—4



1958

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V. ALKOTMÁNY UTCA 21

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Több füzet alkot egy kötetet. Évenként 2—3 kötet jelenik meg.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80, külföldre 110 Ft. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest V. Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr: 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

L'ANNIVERSAIRE DE 25 ANS DU SYSTÈME D'ÉLECTRIFICATION DES CHEMINS DE FER À 50 Hz

L. VEREBÉLY

MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE HONGROISE DES SCIENCES

[Manuscrit présenté le 18 juillet, 1957]

Le plus récent système d'électrification des grandes lignes vient d'arriver à son 25^e anniversaire. Il y a un quart de siècle, le 12 septembre 1932, que les premières locomotives à convertisseur de phase de KÁLMÁN KANDÓ fonctionnant à la fréquence de 50 Hz, ont été mises en service régulier sur la section hongroise de l'une des plus grandes lignes Ouest—Est de l'Europe. Elles ont été les précurseurs d'une nouvelle tendance vivement appréciée et adoptée, depuis, par de nombreux pays. Il est donc actuel de retracer l'évolution de l'idée fondamentale du système à 50 Hz et des résultats de son progrès rapide réalisé jusqu'à nos jours.

L'idée d'utiliser du courant alternatif à fréquence industrielle pour l'électrification des grandes lignes remonte au début de notre siècle.

Si l'on fait abstraction de l'électrification du chemin de fer Baltimore et Ohio, qui a fait en 1895 un travail de pionnier en installant l'équipement d'une section en tunnel de quelques kilomètres en courant continu à 600 volts, mais qui ne démontra aucun progrès considérable comparé à l'équipement des tramways électriques, c'est le chemin de fer Burgdorf-Thun qui, en 1899, a ouvert la série des travaux d'électrification des chemins de fer utilisant le courant triphasé de 750 volts à 42 Hz, considéré alors en Europe comme courant normal à fréquence industrielle. Deux ans plus tard, en 1901, la *Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen* a installé, à titre d'essai, une ligne électrique en courant triphase de 10 kV à 48 Hz, sur le trajet Marienfelde-Zossen, qui a fonctionné jusqu'à 1903. En 1904 enfin, après l'expertise favorable de la *Schweizerische Studienkommission für elektrischen Bahnbetrieb* on commença des essais sur la ligne Seebach-Wettingen avec la première petite locomotive suisse, avec courant alternatif monophasé à 15 kV 50 Hz, qu'une moteur-dynamo synchrone transformait en courant continu de 600 volts pour l'alimentation des moteurs de traction séries.

Avec cette machine d'essai, assez éphémère, de l'usine Oerlikon, se termine cette première phase de l'électrification, utilisant du courant à fréquence industrielle pour la traction électrique. Les progrès plus rapides commençant après cette période, s'orientèrent en d'autres directions sans rapport avec des

considérations énergétiques générales, et qui paraissaient alors conduire aux mêmes résultats par des solutions plus simples et plus directes.

C'était tout d'abord le système triphasé, adopté en Italie, qui se développait et dont la ligne Valtellina, équipée en 1901 selon les projets de KANDÓ, fut la première ligne du monde à trafic public, électrifiée à haute tension 3 kV, à la fréquence de 15 Hz. Cette fréquence choisie par KANDÓ après la considération approfondie des circonstances d'alors, ne se bornait pas à son système, mais influença au cours des années suivantes le développement du système monophasé. La seconde locomotive d'essai livrée en 1905 par Oerlikon, était du type mono-



Fig. 1

phasé à 15 Hz, fréquence qui allait être adoptée désormais par tous les chemins de fer européens utilisant le système alternatif monophasé.

A 1915 apparut le troisième système d'électrification des chemins de fer. Ce système d'électrification en courant continu à la tension de 3 kV fut appliqué sur les sections à forte pente de la ligne transcontinentale Pacific de la Compagnie des Chemins de Fer Chicago, Milwaukee & St. Paul Rwy. Le succès décisif a valu à ce système son application étendue dans les travaux d'électrification entrepris dans le monde entier, après la première guerre mondiale. Ce système, y compris sa variante à 1,5 kV, est actuellement utilisé à 63% de la longueur totale des lignes électrifiées dans le monde.

Chacun de ces trois systèmes a ses avantages et inconvénients, qui, après l'examen des résultats obtenus en service, ont abouti à l'élaboration de deux nouveaux systèmes mixtes en plus, adaptés aux nécessités spéciales locales,

sans avoir toutefois trouvé une solution plus générale au problème toujours plus important de l'électrification des chemins de fer.

C'est dans ces conditions que le docteur KÁLMÁN KANDÓ fut chargé en 1917, il y a juste quarante ans, de proposer un système pour l'électrification de plusieurs grandes lignes des Chemins de Fer de l'État Hongrois. Les cinq systèmes dont on disposait à ce moment, paraissaient également satisfaire aux exigences posées par le service ferroviaire. Tous étaient cependant les produits d'une vue étroite, pour laquelle l'électrification ne signifiait qu'une nouvelle force motrice moderne à mettre au service de la traction. C'était pour cette raison même que, dans les deux premières décades de notre siècle, on se contentait de satisfaire aux conditions d'exploitation particulière de sections de lignes plus ou moins indépendantes, par l'application de l'un des systèmes d'électrification déjà adoptés, et dont la réalisation convenable pouvait être assurée, sans grands risques, par l'industrie nationale.

KANDÓ, au nom de qui s'attachait pourtant le développement d'un système d'électrification de grand succès, ne partageait pas cette attitude, en envisageant le problème qu'on lui proposait. Les difficultés énormes de l'économie de charbon, causées par la guerre mondiale, ont mûri en lui la conviction qu'on ne doit plus évaluer l'électrification des chemins de fer du seul point de vue problème de service de quelque lignes isolées, mais qu'il faut la réaliser selon la base d'une conception générale unifiée, à l'échelle nationale, pour l'économie des réserves d'énergies naturelles, et pour assurer la rentabilité et la sécurité de la traction électrique. Dans ce cas, le chemin de fer électrifié ne peut pas occuper une place particulière et isolée dans le système énergétique national, mais doit s'adapter organiquement au système général de distribution déjà existant, étant l'un des grands consommateurs. Il s'ensuit logiquement, que le système à choisir avant tout autre pour l'électrification des grandes lignes, est celui qui rend superflus la production, la transformation et le transport à distance d'un courant utilisé exclusivement par le chemin de fer. Un tel système nécessite, pour l'alimentation du réseau de chemin de fer électrifié le courant normal industriel du réseau général de distribution, par l'entremise de simples postes de transformateurs.

L'importance de ce point de vue a été soulignée d'abord en 1912, par INSULL, l'expert américain bien connu. En 1916, donc quatre ans plus tard, le dr. BOVERI se prononça dans le même sens aus cours des débats portant sur l'électrification des Chemins de Fer Fédéraux Suisses, sans pourtant que ces deux avis aient trouvé le moindre écho à cette époque. Ajoutons aussi, par souci d'objectivité, qu'une brochure du Prof. ing. BECK et de l'ingénieur BUCHLEITNER, parue en juin 1918, et un article des docteurs SACHS et COUWENHOVEN, publié l'année suivante, avaient déjà attiré l'attention sur la possibilité d'appliquer le système «split-phase» de LAMME au courant alternatif monophasé à 50 Hz. Mais à cette époque, les plans du projet de la première locomotive à

convertisseur de phase de KANDÓ étaient déjà une phase bien avancée. KANDÓ a donc non seulement reconnu le problème, mais en a aussi trouvé la première solution pratique de grand succès, sous la forme de la locomotive à convertisseur de phase à 50 périodes.

La première locomotive d'essai (Fig. 2), qualifiée à justifier l'exactitude des considérations théoriques du nouveau système, était mise en service le 31 octobre 1923, sur une ligne d'essai. Là — après plusieurs années d'études très rigoureuses, et après quelques modifications mineures, puis une reconstruction plus radicale

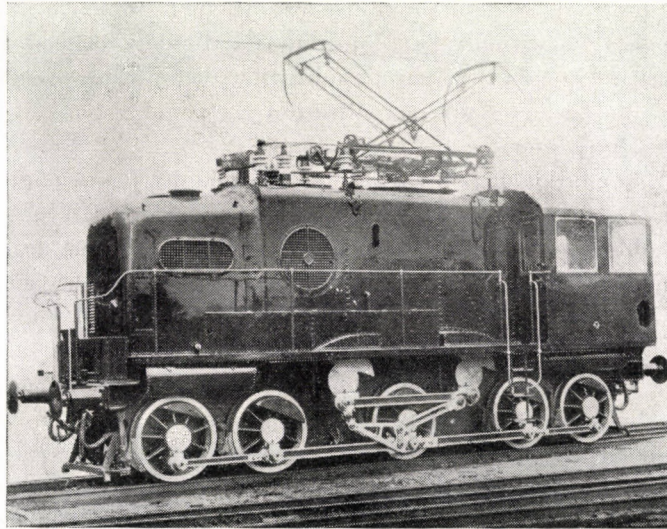


Fig. 2

— elle a prouvé que le nouveau système est viable, qu'il réalise les avantages espérés, que les solutions adoptées pour la construction sont hardies et fonctionnent avec une parfaite sécurité, et qu'il permet donc de réaliser l'électrification de réseaux étendus à partir du réseau général de distribution d'énergie. En vertu d'une décision du 30 novembre 1928, les Chemins de Fer de l'État Hongrois ont passé une première commande de 32 locomotives à convertisseur de phase, (Fig. 3) 50 périodes, mises en service régulier dès le 12 septembre 1932 sur le trajet électrifié Budapest—Komárom, celui-ci ayant été prolongé jusqu'à Hegyeshalom (190 km) le 23 octobre 1934.

Le quart de siècle qui s'est écoulé depuis, a pleinement justifié la conception de KANDÓ et de ses collaborateurs. Aujourd'hui l'esprit hongrois et l'industrie hongroise ne sont plus seuls à chercher une solution au problème de l'électrification des chemins de fer par un système à fréquence industrielle. Après notre travail de pionnier, la conception énergétique, l'intégration du rail dans l'économie générale, se trouve adoptée dans un cercle toujours plus grandis-

sant. Toute une série d'usines étrangères renommées cherchent à perfectionner le système à 50 Hz, et l'on dispose d'or et déjà de plusieurs solutions dans le domaine de la construction des locomotives. La conception de KANDÓ, selon laquelle le matériel de traction devrait être équipé de préférence de moteurs à induction, ceux-ci étant les moteurs électriques les plus simples, relativement les plus légers, et du fonctionnement le plus sûr pour la traction, se retrouve dans le système à convertisseur de fréquence préconisé par RATKOVSKY, et dont deux différentes réalisations pratiques nous sont offertes par les nouvelles locomotives hongroises, et les locomotives françaises des usines Oerlikon. Les

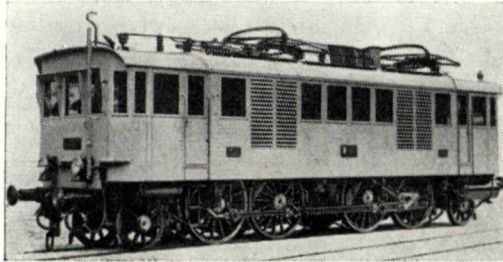


Fig. 3

partisans de l'application des moteurs séries à courant continu, peuvent choisir entre les différentes solutions à moteur-générateur, à redresseur à vapeur de mercure, ou à redresseur à ignitrons. On utilise également des locomotives à 50 périodes équipées de moteurs monophasés à collecteurs.

L'intérêt général manifesté pour le système monophasé à 50 périodes est dû, outre l'initiative hongroise, à l'adoption de ce système, en 1951, par la SNCF française, sur ses lignes à fort trafic passant au nord et au nord-ouest de Paris. Cette décision fut prise par les chemins de fer français, malgré le vaste programme d'électrification en courant continu à 1,5 kV, que la France avait réalisé, au cours de l'entre-deux-guerres, sur un réseau de lignes d'environ 4000 kilomètres de longueur. Une décision analogue fut prise par la Commission du Trafic Britannique, bien que le réseau électrifié de la Grande-Bretagne, d'une longueur d'environ 1500 kilomètres, fût également alimenté en courant continu à 1,5 kV. En l'Union Soviétique, où l'on s'intéresse depuis longtemps aux progrès de l'électrification hongroise, on a dès 1931 envisagé la possibilité de remplacer le système à courant continu 3,3 kV, appliqué déjà à cette époque sur plusieurs milliers de kilomètres de lignes, par la traction monophasée 50 Hz. Les premiers pas sont déjà faits dans ce sens par la mise en service de locomotives à redresseurs «ignitrons», et le sixième plan quinquennal prévoit l'électrification en 50 Hz de 1250 kilomètres de lignes principales. Rappelons aussi brièvement qu'en Allemagne, divers types de locomotives à 50 périodes circulent depuis

1934 sur la ligne de Höllental, que des locomotives à 50 Hz viennent d'être utilisées pour la traction lourde par les chemins de fer industriels du Rhin, et les Chemins de Fer Portugais ont adopté à leur tour le système 50 Hz, pour le programme d'électrification de leur réseau ferroviaire que des locomotives à 50 Hz sont en service dans le Congo-Belge, et qu'enfin on considère aussi dans la Tchécoslovaquie et Yougoslavie l'électrification de quelques lignes importantes avec le système à 50 périodes.

Voyant l'extension de l'application du système à 50 Hz, nous pouvons constater que le travail que les ingénieurs hongrois ont commencé sous la direction de leur maître le docteur KÁLMÁN KANDÓ il y a quatre décades, avait son utilité. La conception énergétique ayant orienté les progrès de l'électrification des chemins de fer vers l'utilisation du courant normal à 50 périodes, s'est avérée juste et fertile. Les premières locomotives à convertisseur de phase mises en service avec succès, il y a vingt-cinq ans, sur une grande ligne internationale, ont indiqué une route nouvelle du progrès de l'électrification des chemins de fer, appelée sans doute à un grand avenir.

RÉSUMÉ

Le plus jeune des systèmes d'électrification des lignes de chemin de fer, le système à 50 Hz, est arrivé au 25^{ème} anniversaire de son départ. Le 12 septembre 1932 ont été mises en service régulier sur la ligne de 190 km entre Budapest et la frontière autrichienne, section de l'une des plus importantes artères Ouest—Est de l'Europe, les locomotives à convertisseur de phase du Dr. Kálmán KANDÓ, lesquelles frayaient le chemin à une conception nouvelle. Celle-ci devait, depuis, être reconnue comme juste, et trouver aussi des successeurs à l'étranger. KANDÓ fut chargé, en 1917, d'élaborer des propositions pour l'électrification de certaines lignes principales des Chemins de Fer de l'État Hongrois. À cette époque, on utilisait déjà, à l'étranger, cinq systèmes différents, dont chacun suffisait aux exigences de l'exploitation ferroviaire proprement dit, mais exigeait un courant spécial à la caténaire. KANDÓ établit comme principe de sa solution que l'intérêt de l'utilisation économique des ressources d'énergie naturelle, aussi bien que celui de la sécurité, et de l'économie de la traction électrique, exigent de réaliser l'électrification au moyen d'un système, qui ne place pas le chemin de fer électrifié dans une position spéciale isolée, mais où il est organiquement intégré dans le système économique national d'utilisation de l'énergie électrique. KANDÓ réussit pleinement à résoudre ce problème. Pour terminer, l'article énumère les importants projets et travaux d'électrification qui montrent combien s'est répandu à l'étranger l'idée du principe énergétique et le système de 50 Hz, grâce à l'initiative hongroise.

DAS 25JÄHRIGE JUBILEUM DES BAHNELEKTRIFIZIERUNGSSYSTEMS MIT 50 Hz

L. VEREBÉLY

ZUSAMMENFASSUNG

Das jüngste der Elektrifizierungssysteme für Vollbahnen, das 50 Hz-System, ist bei der Vierteljahrhundertfeier seines Bestehens angelangt. Am 12. September 1932 wurden auf einer der wichtigsten europäischen Ost-Westlinien, der 190 km langen Strecke zwischen Budapest und der österreichischen Grenze, die Phasenumformer-Lokomotiven von Dr. Kálmán KANDÓ in fahrplanmäßigen Betrieb genommen. Diese Lokomotiven haben einer solchen neuen Richtung Bahn gebrochen, welche seither auch im Ausland Anerkennung und Nachfolge gefunden hat. KANDÓ wurde 1917 die Aufgabe zugewiesen, Vorschläge für die Elektrifizierung einzelner Haupt-

linien der ungarischen Staatsbahnen zu machen. Zu dieser Zeit waren im Ausland schon fünf verschiedene Systeme in Gebrauch, deren jedes zwar den Forderungen des Bahnbetriebs im engeren Sinne Genüge leistete, jedoch an der Fahrleitung eine besondere Stromart benötigte. KANDÓ machte zum Grundsatz seiner Lösung, daß sowohl im Interesse einer sparsamen Ausnutzung der natürlichen Energiequellen, als auch der Wirtschaftlichkeit und Sicherheit des Bahnbetriebs, die Elektrifizierung mit einem solchen System durchgeführt werden muß, bei welchem die elektrifizierte Eisenbahn nicht eine Sonderstellung einnimmt, sondern sich als Großverbraucher organisch in das allgemeine System der Energiewirtschaft des Landes einfügt. Diese Aufgabe hat er mit vollem Erfolg mit seinen mit 50 Hz Einphasenstrom gespeisten Phasenumformer-Lokomotiven gelöst. Die Projektierung der ersten Probelokomotive begann Anfang 1918 und am 31. Oktober 1923 kam sie auf die Strecke. Auf Grund der erfolgreichen Probeergebnisse bestellten die Staatsbahnen im Jahre 1928 32 Phasenumformer-Lokomotiven, welche vor 25 Jahren den ganzen schweren Verkehr der erwähnten internationalen Strecke übernahmen und bis heute in Dienst sind.

Zum Schluß zählt der Artikel jene großangelegten Elektrifizierungsarbeiten und Projekte auf, welche im Sinne der ungarischen Initiative die Verbreitung des energiewirtschaftlichen Grundgedankens und damit des 50 Hz-Systems zeigen.

THE 25th ANNIVERSARY OF THE 50 Hz RAILWAY ELECTRIFICATION SYSTEM

L. VEREBÉLY

SUMMARY

The youngest of the railway electrification systems, the 50 Hz-system, has arrived at the 25th anniversary of its beginnings. On September 12, 1932, the phase-converter locomotives of Dr. Kálmán Kandó were put into regular service on one of the most important European West—East trunk lines, the 190 km between Budapest and the Austrian frontier. These locomotives pioneered a development which since has found recognition and followers also abroad. In 1917 KANDÓ was given the task of preparing proposals for the electrification of some trunk lines of the Hungarian State Railways. At that time already five different systems were in use abroad, each of which satisfied the needs of the railway service itself, but needed a special current system on the contact line. KANDÓ based his solution on the principle that in the interest of the economic utilization of natural energy resources as well as of economy and security of the railway service, electrification must be carried out with a system in which the electric railway does not occupy a special, isolated position, but where it is organically incorporated as a large consumer in the general energetic economy of the whole country. He brought this task to a full success with its phase-converter locomotives fed by 50 Hz single-phase current. Design of the first experimental locomotive started at the beginning of 1918, and it was put on the track on October 31, 1923. After successful conclusion of the tests in 1923, the State Railways ordered 32 phase-converter locomotives, which 25 years ago took over the whole heavy traffic of the said international trunk line and which are still in service to-day.

The paper lists finally those large electrification programs and projects which, following Hungarian initiative, prove the spread of the basic energetic principle abroad, and with it, that of the 50 Hz system as well.

25-ЛЕТНИЙ ЮБИЛЕЙ ЭЛЕКТРИФИКАЦИИ ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ ТОКОМ ПРОМЫШЛЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Л. ВЕРЕБЕЙ

РЕЗЮМЕ

Сейчас можно отметить 25-летний юбилей со времени начала электрификации железнодорожных магистралей током промышленной частоты, т. е. при помощи наиболее молодой системы. 12 сентября 1932 года была начата систематическая эксплуатация по графику электрифицированного участка длиной 190 км между Будапештом и австрийской границей, т. е. одного из важнейших западно-восточных магистралей Европы, исполь-

зуя для этой цели фазопреобразовательные электровозы Кальмана Кандо, которые открыли такое новое направление в области электрификации железных дорог, которое с тех пор нашло признание и последователей также за границей. Кандо в 1917 была поручена задача внести предложение по электрификации некоторых магистралей Государственных железных дорог Венгрии. К этому времени для этой цели за границей применялось уже пять различных систем, которые, собственно говоря, удовлетворяли тесно железнодорожные эксплуатационные требования, но для питания контактной сети необходимо было иметь специальный ток. Кандо при решении поставленной перед ним задачи исходил из принципа экономного использования естественных энергоресурсов, а также экономичности железнодорожной электротяги и надежности, в интересах которых электрификацию необходимо решить, используя такую систему, при которой электрифицированная железная дорога не занимает специального изолированного положения, а, наоборот, как крупный потребитель органически входит в общую систему электроэнергетического хозяйства страны. Эта задача с полным успехом была решена при помощи фазопреобразовательного электровоза, питаемого однофазным током промышленной частоты. Конструирование первого образцового электровоза было начато в начале 1918 года и 31 октября 1923 года он был выпущен на линию. Вследствие успешности проведенных испытаний Государственными железными дорогами Венгрии в 1923 году было заказано 32 фазопреобразовательных электровоза, которые 25 лет тому назад приняли на себя большую нагрузку международной магистрали и работают до сего времени. В заключение в статье дается перечисление тех крупных работ по электрификации, а также планов, которые показывают на основе венгерского примера распространение за границей системы тяги током промышленной частоты и этого энергетического принципа.

DETERMINATION OF HIGHER-ORDER PARTIAL DERIVATIVES OF THE VELOCITY FUNCTION FROM KNOWN VALUES ALONG A STREAM SURFACE

T. FARAGÓ,

Vth MATHEMATICAL DEPARTMENT, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received May 30, 1956]

In a paper written by CHUNG-HUA WU and C. A. BROWN [1], as also in a subsequent paper written by WU alone [2], a Taylor-polynomial was used for the computation of flow, between the blades of turbomachines. However, the authors determined only the first two of the necessary partial derivatives, while both papers failed to compute derivatives of a higher order. In connection with the two-dimensional problem, the present author — in co-operation with M. BLAHÓ [3] — succeeded in determining the n -th partial derivatives for compressible media and proving the correctness of these formulae by complete induction. As regards the three-dimensional problem, WU determined the first two derivatives with the aid of cylindrical co-ordinates.

Introduction*

Let us denote the unit vectors of the spatial orthogonal co-ordinate system by \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$); the position vector $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$.

Let us further introduce the following vectors :

$$\mathbf{m}_k = \sum_{i=1}^3 m_{ki} \mathbf{e}_i \quad (k = 1, 2); \quad \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = \mathbf{m} = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{e}_i .$$

It is assumed that $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^3 p_i \mathbf{e}_i$

* Scalar product of two vectors :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \mathbf{b}) .$$

Vectorial product of two vectors :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} ,$$

Triple scalar product :

$$\mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) .$$

Let us, with the aid of the formula

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$$

use the operator

$$(\mathbf{p} \nabla) = p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + p_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Let further $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ be n -times partially derivable in the given domain with respect to all the three variables, it being likewise supposed that also the n -th derivatives are continuous. Be the vector equation of the surface in the given domain

$$\mathbf{r}(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^3 x_i(u_1, u_2) \mathbf{e}_i.$$

This function, too, is assumed to be derivable n -times with respect to the two parameters.

Let us denote the derivatives thus :

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_s^n} = (\varphi)_s^{(n)} \quad s = 1, 2, 3. \quad n = 1, 2 \dots$$

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial u_k^n} = (\varphi)_{u_k}^{(n)} \quad k = 1, 2.$$

Hence

$$(\mathbf{p} \nabla) \varphi = \sum_{i=1}^3 p_i (\varphi)'_i. \quad (1)$$

If we derive equation (1) $(n-1)$ -times with respect to the variable x_i , according to the continuity of the derivatives and if we suppose that \mathbf{p} is independent of x_i , we have :

$$((\mathbf{p} \nabla) \varphi)_i^{(n-1)} = (\mathbf{p} \nabla) (\varphi)_i^{(n-1)}. \quad (2)$$

Let us mark the values of the functions computed at any arbitrary point of the surface with a 0-index, e. g.

$$\varphi_0 = \varphi(x_1(u_1, u_2); x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)).$$

Let us further make the following substitutions :

$$(\mathbf{m}_1)_0 = \mathbf{r}'_{u_1}$$

$$(\mathbf{m}_2)_0 = \mathbf{r}'_{u_2}$$

$$[\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2]_0 = \mathbf{r}'_{u_1} \times \mathbf{r}'_{u_2} = \mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{e}_i.$$

By performing these substitutions both in equation (1) and (2) we have

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{m}_1 \nabla) \varphi]_0 &= \sum_{i=1}^3 (m_{1i})_0 [(\varphi)_i]_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_1} \\
 [(\mathbf{m}_k \nabla) \varphi]_i^{(n-1)} &= \frac{\partial}{\partial u_k} [(\varphi)_i^{(n-1)}]_0
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

so that, after the said substitutions, we obtain the derivatives of the function along the surface.

*

Take a stationary flow, either irrotational or with a constant vorticity, which satisfies the principle of continuity : $\text{div} (\varrho \mathbf{v}) = 0$ where $\varrho = \varrho(\mathbf{v})$ is assumed to be a function derivable with respect to the velocity \mathbf{v} . Be the velocity vector $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i$ where $v_i(x_1, x_2, x_3)$ satisfies the postulates specified for φ . Let the vector equation of a stream surface take the form : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2)$ which, too, satisfies the postulates set up in the introduction.

It has been assumed that $\text{rot} \mathbf{v} = 0$; writing it in a scalar form and using the above notations, we have

$$(v_1)'_2 = (v_2)'_1 ; (v_1)'_3 = (v_3)'_1 ; (v_2)'_3 = (v_3)'_2$$

hence

$$(v_k)'_i = (v_i)'_k \quad i, k = 1, 2, 3 \tag{4}$$

Let us regard, for instance, i as fixed, write the equations in the case of $k = 1, 2, 3$, multiply each of them by the corresponding unit vector, and add the three equations :

$$(\mathbf{v})'_i = \nabla v_i .$$

Let us multiply this scalarly by the vectors \mathbf{m}_1 and \mathbf{m}_2 , respectively :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m}_1 (\mathbf{v})'_i &= (\mathbf{m}_1 \nabla) v_i \\
 \mathbf{m}_2 (\mathbf{v})'_i &= (\mathbf{m}_2 \nabla) v_i .
 \end{aligned}$$

By multiplying the second equation by \mathbf{m}_1 , the first by $-\mathbf{m}_2$ and adding the two equations we obtain

$$\mathbf{m}_1 [\mathbf{m}_2 (\mathbf{v})'_i] - \mathbf{m}_2 [\mathbf{m}_1 (\mathbf{v})'_i] = -\mathbf{m}_2 (\mathbf{m}_1 \nabla) v_i + \mathbf{m}_1 (\mathbf{m}_2 \nabla) v_i .$$

Remembering the usual formula of expansion, considering that $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}$, and multiplying scalarly both sides by \mathbf{e}_k and \mathbf{e}_s , respectively, we have :

$$(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) (\mathbf{v})'_i = [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) \nabla] v_i \quad (5)$$

$$(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s) (\mathbf{v})'_i = [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s) \nabla] v_i. \quad (6)$$

If we derive equation (5) $(n-1)$ -times with respect to the variable x_i^* we obtain, according to equation (2)

$$(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) (\mathbf{v})_i^{(n)} = [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) \nabla] (v_i)^{(n-1)} \quad (7)$$

or, writing the left-hand side in another form :

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{m}_1 \mathbf{e}_k) (\mathbf{m}_2 \mathbf{e}_i) - \mathbf{m}_2 \mathbf{e}_k (\mathbf{m}_1 \mathbf{e}_i)] (v_i)_i^{(n)} + \\ & + [(\mathbf{m}_1 \mathbf{e}_k) \mathbf{m}_2 \mathbf{e}_s - (\mathbf{m}_2 \mathbf{e}_k) (\mathbf{m}_1 \mathbf{e}_s)] (v_s)_i^{(n)} = \\ & = [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) \nabla] (v_i)^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

According to assumption :

$$\begin{aligned} \nabla (\varrho \mathbf{v}) = 0, \quad \text{where} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k + \frac{\partial}{\partial x_s} \mathbf{e}_s \\ i, k, s = 1, 2, 3 \\ i \neq k \neq s \neq i \end{aligned}$$

or, expanded in a series

$$\nabla (\varrho \mathbf{v}) = (\varrho \mathbf{v})'_i \mathbf{e}_i + (\varrho \mathbf{v})'_k \mathbf{e}_k + (\varrho \mathbf{v})'_s \mathbf{e}_s = 0.$$

If this equation is multiplied by m_i it can be written :

$$\begin{aligned} - m_i (\varrho \mathbf{v})'_i \mathbf{e}_i - m_k (\varrho \mathbf{v})'_i \mathbf{e}_k - m_s (\varrho \mathbf{v})'_i \mathbf{e}_s = \\ = m_i (\varrho \mathbf{v})'_k \mathbf{e}_k + m_i (\varrho \mathbf{v})'_s \mathbf{e}_s = m_k (\varrho \mathbf{v})'_i \mathbf{e}_k - m_s (\varrho \mathbf{v})'_i \mathbf{e}_s. \end{aligned}$$

Regarding the left-hand side as one member and performing the scalar multiplication on the right-hand side we have :

$$\mathbf{m} (\varrho \mathbf{v})'_i = m_k (\varrho v_k)'_i - m_i (\varrho v_k)'_k + m_s (\varrho v_s)'_i - m_i (\varrho v_s)'_s.$$

By introducing the triple scalar product of the unit vectors we can write the equation in the following form :

$$\mathbf{m} (\varrho \mathbf{v})'_i = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s) \nabla] (\varrho v_k) - (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) \nabla] (\varrho v_s)$$

* We want to point out that it is not necessary here to assume \mathbf{m} to be independent of x_i ; namely, if \mathbf{m} depends on x_i and we erase the derivatives of \mathbf{m} on both sides after each derivation, we arrive at equation (7).

whence, by a suitable re-arrangement, we obtain

$$\mathbf{m}(\mathbf{v})'_i = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) \frac{1}{\rho} [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s) \nabla] (\rho v_k) - (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) \frac{1}{\rho} [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) \nabla] (\rho v_s) - \mathbf{m} \mathbf{v} \frac{1}{\rho} \cdot (\rho)'_i. \tag{9}$$

Associating this equation with equations (5) and (6) we find that, with the aid of the operators, these three equations determine the components of $(\mathbf{v})_i$ in an unambiguous manner if it is assumed that the determinant of the system is

$$\mathbf{m}^2 \mathbf{m} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s) \neq 0.$$

Let us, for instance, compute from these three equations $(v_s)'_i$. If, in reducing the members on the right-hand side of equation (5) and (6) we take into account that in a determinant multiplication of the constituents of a row by the co-factors of another row gives 0 as product, we arrive at the following :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^2 \mathbf{m} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s) (v_s)'_i &= \mathbf{m} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s) m_s \left\{ (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) \frac{1}{\rho} [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s) \nabla] (\rho v_k) - \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) \frac{1}{\rho} [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) \nabla] (\rho v_s) - \mathbf{m} \mathbf{v} \frac{1}{\rho} (\rho)'_i \right\} + \\ &\quad + m_i \{ [(m_{2i} m_k - m_i m_{2k}) \mathbf{m}_1 + (m_{1k} m_i - m_{1i} m_k) \mathbf{m}_2] \nabla \} v_i \end{aligned}$$

Dividing this equation by the quantity $\mathbf{m} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s) = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) m_i$ and assuming that $m_i \neq 0$, we obtain*

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^2 (v_s)'_i &= \{ [(m_2 \mathbf{m} \mathbf{e}_s) \mathbf{m}_1 - (m_1 \mathbf{m} \mathbf{e}_s) \mathbf{m}_2] \nabla \} v_i - m_3 \mathbf{m} \mathbf{v} \frac{1}{\rho} (\rho)'_i + \\ &\quad + (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) m_s \frac{1}{\rho} \{ [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s) \nabla] (\rho v_k) - [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) \nabla] (\rho v_s) \} \end{aligned} \tag{10}$$

Proposition. By deriving partially both sides of equation (10) $(n-1)$ -times with respect to the variable x_i , we obtain, according to equation (2), the following :

* If the flows has a constant vorticity, i. e. $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i$, let us use the following notations :

$$\mathbf{b}_1 = a_3 \mathbf{e}_2 - a_2 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b}_2 = a_1 \mathbf{e}_3 - a_3 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{b}_3 = a_2 \mathbf{e}_1 - a_1 \mathbf{e}_2.$$

By the introduction of these notations another member will appear on the right-hand side of equation (10) :

$$+ [(m_2 \mathbf{m} \mathbf{e}_s) \mathbf{m}_1 - (m_1 \mathbf{m} \mathbf{e}_s) \mathbf{m}_2] \mathbf{b}_2$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}^2 (v_s)_i^{(n)} &= (\mathbf{m}_2 \mathbf{m} \mathbf{e}_s) (\mathbf{m}_1 \nabla) (v_i)_i^{(n-1)} - (\mathbf{m}_1 \mathbf{m} \mathbf{e}_s) (\mathbf{m}_2 \nabla) (v_i)_i^{(n-1)} + \\
&+ \mathbf{m} \mathbf{v} m_s \varrho \left(\frac{1}{\varrho} \right)_i^{(n)} + \\
&+ (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) m_s \left\{ \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \left(\frac{1}{\varrho} \right)_i^{(n-p)} [((\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s) \nabla)] (\varrho v_k)_i^{(p-1)} - \right. \\
&\left. - ((\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) \nabla) (\varrho v_s)_i^{(n-1)} \right\}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Verification of the proposition. Equation (11) holds true if $n = 1$. It has to be proved that, by partially deriving equation (11) with respect to x_i (provided the $(n + 1)$ -th derivatives appearing here are still continuous), we obtain the following formula :

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}^2 (v_s)_i^{(n+1)} &= (\mathbf{m}_2 \mathbf{m} \mathbf{e}_s) (\mathbf{m}_1 \nabla) (v_i)_i^{(n)} - (\mathbf{m}_1 \mathbf{m} \mathbf{e}_s) (\mathbf{m}_2 \nabla) (v_i)_i^{(n)} + \\
&+ \mathbf{m} \mathbf{v} m_s \varrho \left(\frac{1}{\varrho} \right)_i^{(n-1)} + \\
&+ (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) m_s \left\{ \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n+1}{p} \left(\frac{1}{\varrho} \right)_i^{(n+1-p)} [((\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s) \nabla)] (\varrho v_k)_i^{(p-1)} - \right. \\
&\left. - ((\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) \nabla) (\varrho v_s)_i^{(p-1)} \right\}. \tag{12}
\end{aligned}$$

According to equation (2), the first two members on the right-hand side of equation (12) follow immediately from the derivation.

By deriving $\left(\frac{1}{\varrho} \right)_i^{(n)}$ in the third member on the right-hand side of equation (11) we obtain the third member on the right-hand side of equation (12). A derivation of the afore-said members will give us also the following two members :

$$(\mathbf{m} \mathbf{v})'_i m_s \varrho \left(\frac{1}{\varrho} \right)_i^{(n)} + \mathbf{m} \mathbf{v} m_s (\varrho)'_i \left(\frac{1}{\varrho} \right)_i^{(n)}.$$

By substituting equation (9) into this formula, we have :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\varrho} \right)_i^{(n)} \{ &(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) m_s [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s) \nabla] (\varrho v_k) - (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) m_s [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_k) \nabla] (\varrho v_s) - \\
&- m_s \mathbf{m} \mathbf{v} (\varrho)'_i + \mathbf{m} \mathbf{v} m_s (\varrho)'_i \}.
\end{aligned}$$

If we add to this that member with the coefficient $\binom{n}{1}$ from equation (11) which was obtained by the derivation of the factor $\left(\frac{1}{\varrho} \right)_i^{(n-1)}$ we get the member with the coefficient $\binom{n+1}{1}$ in equation (12). If we derive $\left(\frac{1}{\varrho} \right)_i^{(n-p)}$ in the member which has the coefficient $\binom{n}{p}$ in equation (11) and add to the member

so produced that one which is obtained from the member with the coefficient $\binom{n}{p-1}$ after the derivation of the factor in the square bracket, we get the member with the coefficient $\binom{n+1}{p}$ of equation (12).

$$p = 2, 3, \dots, n.$$

Finally, by deriving the square-bracketed factor in that member of equation (11) which has the coefficient $\binom{n}{n}$ we obtain that member of equation (12) which has the coefficient $\binom{n+1}{n+1}$.

If we compute equation (11) at any arbitrary point of the surface $\mathbf{r}(u_1, u_2)$ and take into account the substitutions as indicated in the introduction; if, further, we remember that the surface has been assumed to be a stream surface so that the velocity vector runs parallel to its tangent plane, i. e. $(\mathbf{m} \mathbf{v})_0 = \mathbf{n} \mathbf{v}_0 = 0$, we obtain the following formula :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^2 \left(\frac{\partial^n \mathbf{v}_s}{\partial x_i^n} \right)_0 &= (\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{n} \mathbf{e}_s) \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial^{n-1} v_i}{\partial x_i^{n-1}} \right)_0 - (\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{n} \mathbf{e}_s) \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial^{n-1} v_i}{\partial x_i^{n-1}} \right)_0 + \\ &+ (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s) \left\{ \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \left[\frac{\partial^{n-p}}{\partial x_i^{n-p}} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]_0 \left[(\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_k) \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial^{p-1} (\rho v_s)}{\partial x_i^{p-1}} \right)_0 - \right. \right. \\ &- (\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_k) \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial^{p-1} (\rho v_s)}{\partial x_i^{p-1}} \right)_0 - (\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_s) \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial^{p-1} (\rho v_k)}{\partial x_i^{p-1}} \right)_0 + \\ &\left. \left. + (\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_s) \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial^{p-1} (\rho v_k)}{\partial x_i^{p-1}} \right)_0 \right] \right\} . * \end{aligned} \tag{13}$$

For instance, according to equation (7) :

$$\begin{aligned} &[(\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_i)(\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_k) - (\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_k)(\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_i)] \left(\frac{\partial^n v_i}{\partial x_i^n} \right)_0 + [(\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_s)(\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_k) - \\ &- (\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_k)(\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_s)] \left(\frac{\partial^n v_s}{\partial x_i^n} \right)_0 = (\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_k) \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial^{n-1} v_i}{\partial x_i^{n-1}} \right)_0 - (\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_k) \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial^{n-1} v_i}{\partial x_i^{n-1}} \right)_0 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &[(\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_i)(\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_s) - (\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_s)(\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_i)] \left(\frac{\partial^n v_i}{\partial x_i^n} \right)_0 + [(\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_k)(\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_s) - \\ &(\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_s)(\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_k)] \left(\frac{\partial^n v_k}{\partial x_i^n} \right)_0 = (\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{e}_s) \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial^{n-1} v_i}{\partial x_i^{n-1}} \right)_0 - (\mathbf{r}'_{u_2} \mathbf{e}_s) \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial^{n-1} v_i}{\partial x_i^{n-1}} \right)_0 \end{aligned} \tag{15}$$

* Equation (13) will hold good even if the flows has a constant vorticity, provided $n > 1$. If $n = 1$ and the vorticity is constant, one more member will appear on the right-hand side of the formula deduced from equation (13) : $+ [\mathbf{n} \times (\mathbf{e}_s \times \mathbf{n})] \mathbf{b}_1$

If, for instance, $s = 1$; $k = 2$; $i = 3$; further $x_1 = u_1 = x$; $x_2 u_2 = y$; $x_3 = z$; and if the equation of the stream surface is $z = z(x, y)$, we have, in accordance with equation (13):

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^n v_x}{\partial z^n} \right)_0 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-1} v_x}{\partial z^{n-1}} \right)_0 - \\ & - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^{n-1} v_x}{\partial z^{n-1}} \right)_0 + \frac{\partial z}{\partial x} \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \left[\frac{\partial^{n-p}}{\partial z^{n-p}} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]_0 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-1} (\rho v_x)}{\partial z^{p-1}} \right) \right]_0 + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^{p-1} (\rho v_y)}{\partial z^{p-1}} \right)_0 \Big]. \end{aligned} \quad (16)$$

With the substitutions $y = 0$; $v_y = 0$, we arrive at the corresponding formula as given in reference (3).

Using r, φ, z cylindrical co-ordinates, denoting the velocity components by v_r, v_φ, v_z , assuming the equation of the stream surface to be $\varphi = \varphi(r, z)$ and employing the method described in reference [3], we obtain the following formulae for the n -th derivatives with respect to φ :

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(\frac{r \partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{r \partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^n v_r}{r^n \partial \varphi^n} \right)_0 = \left[1 + \left(\frac{r \partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^{n-1} (r v_\varphi)}{\partial \varphi^{n-1}} \right)_0 - \\ & - \frac{1}{r^{n-1}} \frac{r \partial \varphi}{\partial r} \frac{r \partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^{n-1} v_\varphi}{\partial \varphi^{n-1}} \right)_0 + \end{aligned} \quad (17)$$

$$+ \frac{r \partial \varphi}{\partial z} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left[\frac{\partial^{n-k}}{\partial \varphi^{n-k}} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]_0 \left[\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^{k-1} (r \rho v_r)}{\partial \varphi^{k-1}} \right) \right]_0 + \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^{k-1} (\rho v_z)}{\partial \varphi^{k-1}} \right)_0 \Big]$$

$$r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left(\frac{\partial^n v_\varphi}{r^n \partial \varphi^n} \right)_0 = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^{n-1} (r v_\varphi)}{\partial \varphi^{n-1}} \right)_0 - \left(\frac{\partial^n v_r}{r^n \partial \varphi^n} \right)_0 \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial^n v_z}{r^n \partial \varphi^n} \right)_0 = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^{n-1} v_\varphi}{\partial \varphi^{n-1}} \right)_0 - \frac{r \partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial^n v_\varphi}{r^n \partial \varphi^n} \right)_0 \quad (19)$$

In the case of an incompressible medium we arrive at the corresponding formulae from equations (13), (14), (15), (16) and (17) by regarding ρ as constant.*

* I understand that, for the rotation plane in an incompressible medium, the n -th derivatives have been determined in an orthogonal curvilinear co-ordinate system by ISTVÁN BATTÁ.

1. Note

The n -th derivatives can be successively determined even if the surface is not a stream surface. However, in this case we have, on the basis of equation (11), to write the equations for every one of the three components, compute the expression $\left(\frac{1}{\rho}\right)_i^{(n)}$ which figures on the right-hand side, and, this done, solve the simultaneous equations for the three n -th derivatives.

2. Note regarding the analytic specification of the velocity components on a given stream surface

The following formula can be written if the vector field is assumed to be irrotational and its derived tensor (denoted by) $\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}\right)$ to be symmetrical :

$$\mathbf{r}'_{u_1} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{r}'_{u_2} = \mathbf{r}'_{u_2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{r}'_{u_1}$$

or, in other form :

$$\mathbf{r}'_{u_1} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}(u_1, u_2))}{\partial u_2} = \mathbf{r}'_{u_2} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}(u_1, u_2))}{\partial u_1} . \tag{20}$$

On the other hand, the given surface $\mathbf{r}(u_1, u_2)$ has been assumed to be a stream surface, the velocity vector being consequently parallel to its tangent plane. Therefore,

$$(\mathbf{r}'_{u_1} \times \mathbf{r}'_{u_2}) \mathbf{v}(\mathbf{r}(u_1, u_2)) = \mathbf{n} v_0 = 0 \tag{21}$$

For instance, if we calculate $v_{3,0}$ and its derivatives from equation (21) and substitute them into equation (20) (it may be assumed that $n_3 \neq 0$ as, otherwise, the normal would have no component in the direction of the axis x_3) we have :

$$\begin{aligned} & [n_3(x_1)'_{u_2} - n_1(x_3)'_{u_2}] (v_{10})'_{u_1} - [n_3(x_1)'_{u_1} - n_1(x_3)'_{u_1}] (v_{10})'_{u_2} + \\ & + n_3 \left[(x_3)'_{u_1} \left(\frac{n_1}{n_3}\right)'_{u_2} - (x_3)'_{u_2} \left(\frac{n_1}{n_3}\right)'_{u_1} \right] v_{10} = [n_2(x_3)'_{u_2} - n_3(x_2)'_{u_2}] (v_{20})'_{u_1} - \\ & - [n_2(x_3)'_{u_1} - n_3(x_2)'_{u_1}] (v_{20})'_{u_2} + n_3 \left[(x_3)'_{u_2} \left(\frac{n_2}{n_3}\right)'_{u_1} - (x_3)'_{u_1} \left(\frac{n_2}{n_3}\right)'_{u_2} \right] v_{20} . \tag{22} \end{aligned}$$

If one of the components is given on the surface, and also the other component is given on a suitable surface-curve, we can solve equation (22) for the other component with the known methods. Having determined two components, the third can be computed according to the above.

If we take $u_2 = \text{constant}$ parameter lines as streamlines, the velocity can be written as :

$$\mathbf{v}_0 = \lambda(u_1, u_2) \mathbf{r}'_{u_1} \quad (23)$$

By deriving equation (23) with respect to u_1 and u_2 and substituting it into equation (20) we arrive at

$$\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{r}'_{u_2} \lambda'_{u_1} - \mathbf{r}'_{u_1}{}^2 \lambda'_{u_2} + (\mathbf{r}''_{u_1 u_1} \mathbf{r}'_{u_2} - \mathbf{r}''_{u_1 u_2} \mathbf{r}'_{u_1}) \lambda = 0 \quad (24)$$

If the two sets of parameters are orthogonal, i. e. if $\mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{r}'_{u_2} = 0$ and if its derivative with respect to u_1 is substituted into equation (24) we come to

$$\mathbf{r}'_{u_1}{}^2 \lambda'_{u_2} + (2 \mathbf{r}'_{u_1} \mathbf{r}''_{u_1 u_2}) \lambda = 0$$

Hence $\lambda(u_1, u_2) = \frac{\varphi(u_1)}{\mathbf{r}'_{u_1}{}^2}$ where $\varphi(u_1)$ is an arbitrary function of u_1 . In this case $\mathbf{v}_0 = \varphi(u_1) \frac{\mathbf{r}'_{u_1}}{\mathbf{r}'_{u_1}{}^2}$, meaning that none of the components can be specified quite arbitrarily.

REFERENCES

1. WU, CHUNG-HUA and BROWN, C. A.: Method of Analysis for Compressible Flow Past Arbitrary Turbomachine Blades on General Surface of Revolution. NACA TN 2407, July 1951.
2. WU, CHUNG-HUA: A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial, Radial and Mixed-Flow Types. November 1952. Transactions of the Asme.
3. BLAHÓ, M. and FARAGÓ, T.: Determination of Higher Order Partial Derivatives of the Velocity Function from Known Values along a Streamline. Acta Techn. Acad. Sc. Hung. Vol. XVI (1957) 363/370.

SUMMARY

The author deduces and verifies the formula of the n -th derivatives of velocity distribution on the stream surface $\mathbf{r}(u_1, u_2)$ is assumed to be known; he also gives the n -th partial derivatives in a system of cylindrical co-ordinates. In the second part of the paper, the author establishes certain principles concerning the analytical specification of velocity components on known stream surfaces.

ÜBER DIE BERECHNUNG DER HÖHEREN PARTIELLEN ABLEITUNGEN DER GESCHWINDIGKEITSFUNKTION LÄNGS EINER STROMFLÄCHE AUS BEKANNTEN WERTEN

T. FARAGÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser schreibt die Formel für die n -ten Ableitungen an und beweist ihre Richtigkeit, wenn auf der in der Form $\mathbf{r}(u_1, u_2)$ gegebenen Stromfläche die Verteilung der Geschwindigkeit als bekannt vorausgesetzt wird; ferner teilt er die Formeln für die n -ten Ableitungen auch in Zylinderkoordinaten mit. Im zweiten Teil der Arbeit macht der Verfasser einige Feststellungen über die Methode der analytischen Spezifikation der Geschwindigkeitskomponenten auf einer bekannten Stromfläche.

SUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR DE LA FONCTION DE VITESSE LE LONG D'UNE SURFACE DE COURANT, A PARTIR DE VALEURS CONNUES

T. FARAGÓ

RÉSUMÉ

L'auteur établit la formule de la n -ième dérivée et prouve son exactitude, si la répartition de la vitesse sur la surface de courant donnée sous forme de $r(u_1, u_2)$ est supposée connue; il donne aussi la n -ième dérivée en coordonnées cylindriques. Dans la deuxième partie de son travail, l'auteur énonce quelques règles concernant la méthode de la spécification analytique des composantes de la vitesse, sur une surface de courant connue.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПАРЦИАЛЬНОГО ПРОИЗВОДНОГО ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ СКОРОСТИ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ ТОКА НА ОСНОВЕ ИЗВЕСТНЫХ ДАННЫХ

T. ФАРАГО

РЕЗЮМЕ

Автор статьи выводит и доказывает формулу n -производных, если поверхность тока, указываемая в виде $r(u_1, u_2)$, принимается в качестве известного распределение скорости, далее приводятся n -производные также в цилиндрических координатах. Во второй части статьи автор делает ряд определений в отношении образа аналитического указания компонентов скорости на известной поверхности тока.

EXPERIMENTS ON THE REDUCTION OF DOLOMITE FOR MAGNESIUM PRODUCTION*

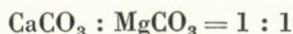
T. G. GEDEON

CAND. OF MINERAL AND GEOLOG. SC. — RESEARCH INSTITUTE OF METALS, BUDAPEST

[Manuscript received 29th January, 1957]

For two decades the creation of a magnesium industry has been a timely question of the Hungarian light metal industry. Referring to this the Hungarian Geological Institute began in 1950—51 the preparatory work, by mapping and sampling of the native dolomite occurrences, upon request of the Research Institute for the Metal Industry. The analysis of the material, of the dolomite occurrences within easy reach and of industrial significance, began already in 1951 at the Research Institute for the Metal Industry, and since 1952 reduction experiments, in laboratory vertical retort vacuum furnace as well as in a pilot plant vacuum furnace with horizontal retort of different heating systems, have been performed.

Four kinds of different Transdanubian dolomites and one of the Bükk Mountains were used for the examination. The choice fell on those occurrences where mining, in case of commercial exploitation, should be possible without substantial investment. For this reason we collected samples of bedrock in the bauxite exploitation area, with exception of the occurrences of Pilisvörösvár and Hámor, which are dolomite quarries in operation. The dolomites employed for the examinations slightly differ from the theoretic mol-rate :



The preliminary examination gave the following result :

	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	CaO	MgO
Gánt	0,72	1,08	33,58	21,60
Izszakzentgyörgy	0,07	0,86	31,22	21,80
Nyírad	0,39	0,74	30,96	21,42
Pilisvörösvár	0,06	0,81	32,12	21,16
Hámor	0,06	0,81	30,46	21,53

* Paper read before the Commission for Non-ferrous Metallurgy of the Hungarian Academy of Science, on Nov. 17., 1953.

For reduction native ferrosilicon was used. The material was partly wet- and partly dry-pulverized. Noticeable difference was not observed between the two kinds of grits during the reduction process.

In the greater part of the experiments the size of ferrosilicon particles were below 0,09 mm ground in a disc mill. Several grades of ferrosilicon were used for reduction of the following composition :

	I.	II.	III.	IV.
Si	91,91%	87,70%	82,00%	70,25%
Fe	3,72%	12,69%	—	24,30%

As well-known, fluorite is used to facilitate the reduction, more correctly, to promote the forming of dicalcium silicate. In the series of reduction experiments chemically pure calcium fluoride, crystalline quarry product : crude fluorite of Pákozd, washed fluorite, aluminium fluoride, barium fluoride and magnesium fluoride were used. The fluorites were ground below 0,09 millimetres.

The mixture for the reduction was generally composed as follows :

100 g calcined dolomite
20 g ferrosilicon
5 g fluorite

During the experiments it was of course necessary to vary the ratio of components. Reviewing the experiments, this fact will be indicated. Hungarian dolomites contain generally 21—22%, in calcined dolomite the average of MgO is 41,0%, the value with which, making the mixture, we always calculated. After thoroughly mixing the feed was pastilled from which 100 g was always put into the retort. The laboratory size furnace was designed and constructed on the basis of various experiences, in it, yearly over one hundred reduction experiments were made. In designing the furnace we took in consideration easy closure as well as the easy exchange of the thermocouple (Fig. 1).

The furnace has a steel pipe mantle with water jacket, on both ends disc-closure, one with rubber packing piece is fixed by bolts and nuts. On the other flange the thick steel disc is fixed by a central bolt and strap. This furnace was used in vertical position and heated by four silite rods (size of silite rods : 8 × 180 × 60 millimetres 4,4—4,8 ohms resistance). The vacuum pipe end is placed in the upper third of the mantle ; in the middle part is the fire-resisting steel pipe of 3 millimetre wall and 5 millimetre bottom thickness for the screwed-in thermocouple. Its place was chosen so that it should be between the two silite rods, its inner end exactly level with the inner rim of the heat insulating Termalit brick lining. Heat current was led in, by a welded pipe end, through the water jacket. The current lead-in iron rod, between double rubber insulations, was fixed to the outer flange by a disc fastened by bolts and nuts.

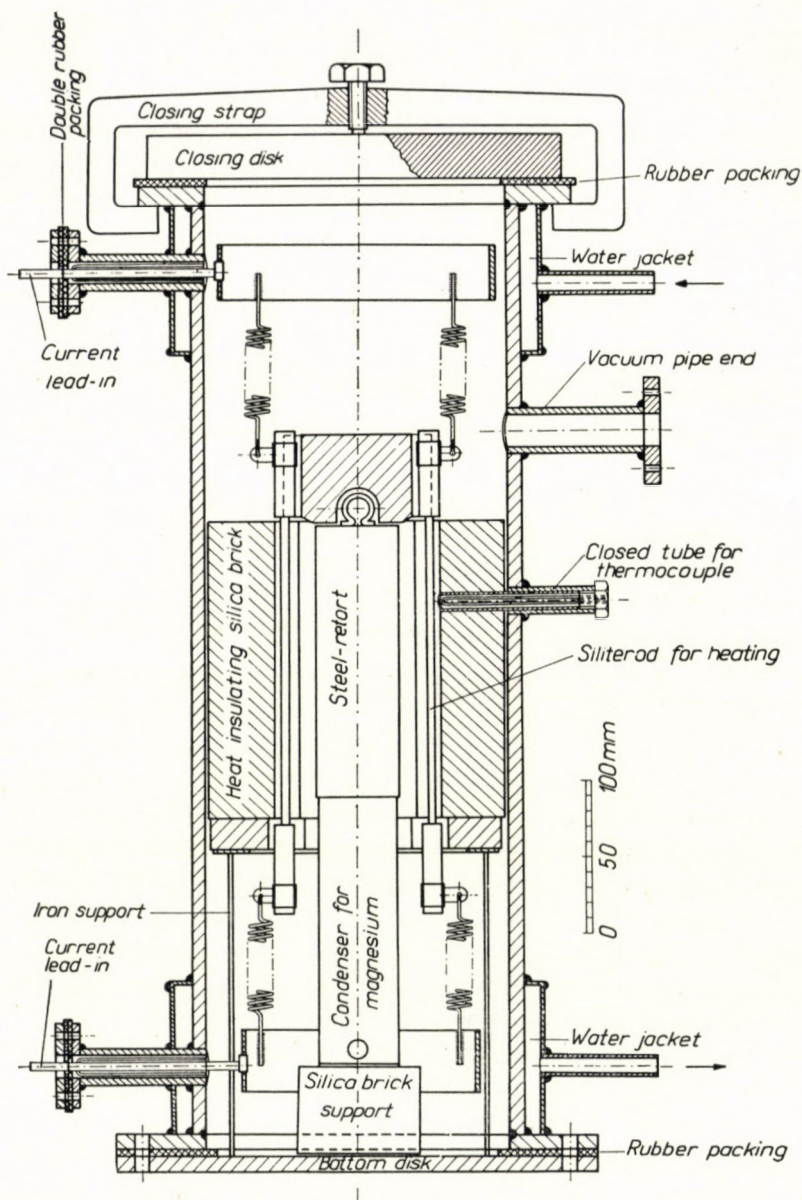


Fig. 1

To prevent inner contact the lead-in rod was furnished with china insulating beads. Inside the furnace a copper conductor-ring is joined to the lead-in rod onto which conductor wires were welded and connected to the silite rods with spring attachments. All the four silite rods were connected in parallel. The

furnace was heated by a transformer of 220/10—20—30 volts ratio and 3,5 kW rating. With continuous contact 30 volts were used which fed 40—42 amps into the furnace.

During the first experiments we plotted the typical heating curves of the furnace and established that after 25—30 min. heating the temperature reached 1100° C inside. Not even after three hours of heating did the temperature rise above 1200° C.

In the course of experiments the following measurements were carried out :

1. Time of reduction and observations in proportionate intervals as follows :
2. Terminal voltage of furnace.
3. Intensity of current supplied.
4. Inside temperature of furnace taken by Pt-PtRh thermocouple placed in pyrometer case.
5. Temperature of mantle measured in the centre line of the heated part on the side opposite to the pyrometer tube.
6. Vacuum inside of the furnace.

Over 200 reduction experiments were made in this laboratory furnace by variation of the different factors.

After the preparatory tests we learnt that two hours heating time was sufficient and longer periods would not give any significant growth in recovery. Naturally, there were also experiments of longer duration, this fact will be noted at the description of the experiments, otherwise all results refer to 2 hours of heating time. After cooling down of the furnace the locking strap was unfastened, the closing disc and the heat insulating plug taken out and the retort with condenser lifted out. The metallic magnesium collected in the condenser was chiselled or scraped off and measured. The output was always calculated on the basis of the quantity of metal weighed. The purity of the metal obtained was determined by a quartz-prism spectroscope. The quantity of constituents of the remained powdery dross was determined by wet analysis.

The inside space of the furnace was exhausted by a vertical 65 cubic metre/hour oil-vacuum pump time working of which was stopped only after cooling down of the furnace. During reduction the vacuum in the furnace was under 1 mm Hg. In case of perfect closure the vacuum was still 20—26 mm Hg after 16 hours.

After several unsuccessful efforts we accomplished fairly well vacuum tight closure when the first reduction experiment was carried out on 3rd April 1952 and a small precipitate of glittering metallic magnesium was obtained in the condenser. Under the microscope (Fig. 2) the precipitate showed laminate hexagonal crystals. The second successful reduction was made in the same furnace on the 12th of April. At this time we observed a round bulge at the narrow end of the retort which was covered by a light gray oxide film. This end of the

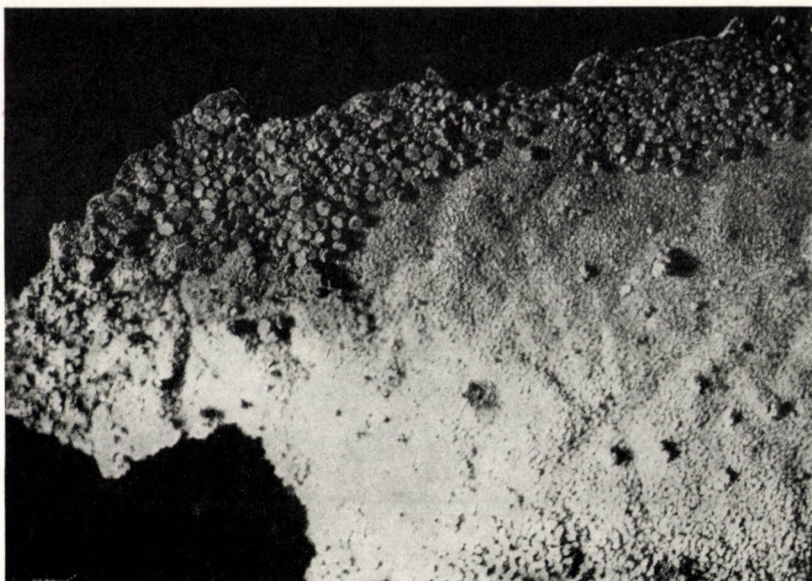


Fig. 2. First experiment, crystal coat of magnesium (enlarged)

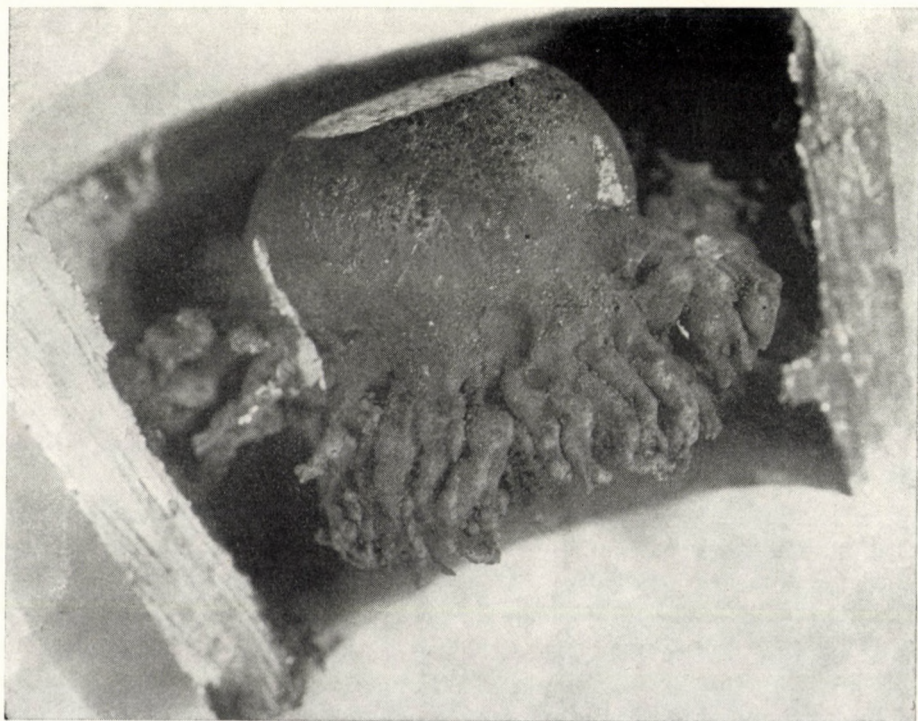


Fig. 3. Magnesium metal, reduced from calcined dolomite of Iszkaszentgyörgy (Hungary)
(second successful experiment)

retort was cut off and within were found 13 g reduced magnesium ; the yield was 68%. This magnesium was obtained from calcined dolomite of Iszkaszentgyörgy (Fig. 3). Duration of heating was 2 hours 40 min.

The first regular experiments were performed in the retort furnace. Placing the fire-resisting steel retort (Fig. 4) into the Tamman-furnace the period of reduction and the influence of temperature were investigated. Dolomites of different occurrences were also taken in consideration.

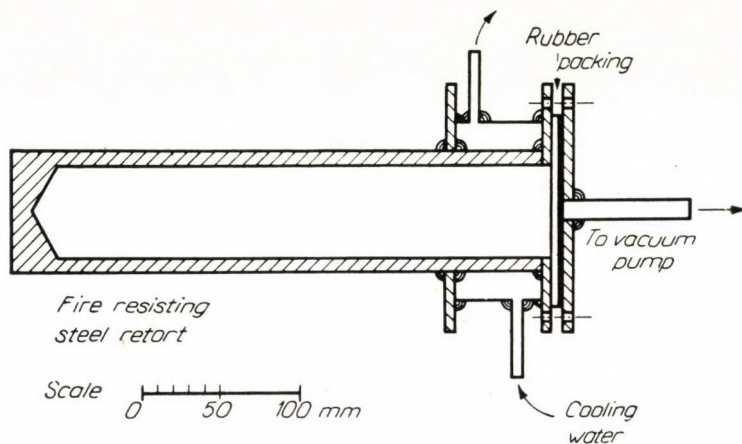


Fig. 4

Occurrence	Time	°C	Yield %
Pilisvörösvár	30 min.	1050	15,0
Gánt	65 «	1270	54,6
Nyirád	65 «	1300	57,0
Nyirád	70 «	1330	66,3
Iszkaszentgyörgy	95 «	1330	68,4
Nyirád	140 «	1330	71,4

Examining the dolomite of Nyirád it can be ascertained that at the same temperature by increasing period of reduction the percentage of yield will grow. Examination of the dolomite of Pilisvörösvár shows that in a brief time, already in 30 min., reduction started in the retort, placed in the furnace, and yielded a well-measurable output. Dolomites of Gánt and Nyirád gave at the same temperature and time (1 hour 5 min.), it may be said, identical yields.

From the results it may be established that the recovery of metal can be enhanced by the increase of temperature as well as by the prolongation of time. This statement, on the other hand, verifies the thermodynamical considerations too.

In the further sequence of experiments in the Tamman furnace and steel retort we investigated the influence of time at identical temperature (1270° C). For comparison, we are showing experiments at substantially higher temperatures and with prolonged time of reduction (2 and a half hours) to accentuate the optimum of time.

Occurrence	Time	°C	Yield %
Iszkaszentgyörgy	65 min.	1270	75,2
Gánt	73 «	1270	80,2
Pilisvörösvár	88 «	1270	91,4
Iszkaszentgyörgy	150 «	1410	95,4

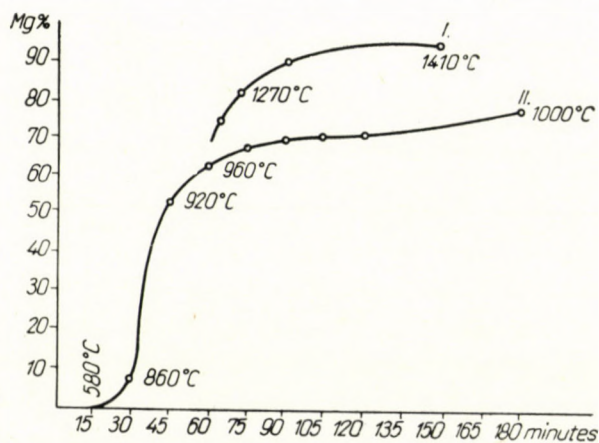


Fig. 5

The table shows the favourable reducibility of dolomite of Pilisvörösvár, and so does Fig. 5 curve I, since at the same temperature and by increase of the time of reduction by 15 min., the result was substantially better than it was expected. An evidence of this is the reduction at substantially higher (1410° C) temperature which gave only by 4% higher yield.

The investigation of the reduction process of the dolomite of Pilisvörösvár, carried out in the laboratory retort furnace, is shown as a function of time by curve II in Fig. 5. The runs of I and II curves display correlation, because by increase of the temperature of reduction above 960° C this would proceed along curve I. The yield obtained at 1270° C in 65 min. only, will take 3 hours at 1000° C.

Results of reduction experiments in carbon steel retort by swirling gas flame heating :

Occurrence	Time	°C	Yield %
Hámor	120 min.	1080	74,0
«	145 «	1120	80,9
«	105 «	1250	82,8
Nyirád	85 «	1280	84,7
Gánt	90 «	1340	90,1
Pilisvörösvár	240 «	700	1,1
«	240 «	750	3,9
Iszkaszentgyörgy	35 «	1400	26,3

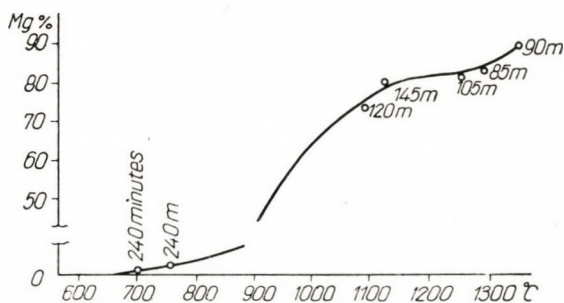


Fig. 6

At the last experiment the carbon steel retort became strongly scaley at 1400° C and leaked after 35 min. for which reason reduction was stopped. With prompt action we secured from the retort the magnesium reduced already in this short time. This experiment proves that at high temperatures the process of reduction is fast, because in a short time one quarter of the Mg content of dolomite was reduced (Fig. 6). The curve demonstrates the dependence of Mg reduction on temperature, which can not be compensated by increasing of time either.

These latter experiments were performed on 1000 g pastilles, as the size of the plain retort made possible the use of more than 100 g as had been previously treated. At the cooler part of the retort (about in the space of 600° C) settled a coronet of magnesium crystals (Fig. 7).

At parallel experiments performed on dolomite of Hámor we saw, identically with the former determination, that by the increase of the reduction temperature the time of reduction can be shortened.

Result of pilot plant experiments performed in horizontal (of Amati and Pidgeon system) retort :



Fig. 7. Crystal coronet of magnesium, obtained from dolomite of Gánt (Hungary)

Occurrence	Time	°C	Yield %
Hámor	180 min.	1300	52,4
«	260 «	1250	63,9
«	280 «	1270	75,5
«	300 «	1280	81,7

The temperature displayed at the experiment indicates the inside temperature of the reverberatory furnace. The temperature of the pastilles, through the peep hole, was found with the optical pyrometer 800—930° C only. The more than 300° C difference of temperature is to be explained by the bad heat conductivity of the pastilles and of the dicalcium silicate formed. The flow of magnesium vapour in the condenser was well-observable through the peep hole. At the beginning the magnesium vapour went off in marked bundles from the mixture while at about the end of reduction process slowly whirling vapour was observed. At this time the peep hole was nearly all over covered with crystals. For this reason the yield of approximate 80%, in the externally heated horizontal furnace is to be regarded as a very good efficiency (Fig. 8).

After stopping the heating, but keeping up the vacuum, the retort was kept in the furnace until total cooling down. Opening the retort the alkaline metals were in the water cooled portion close to the cover. Here did always start the ignition of the metal with yellow (sodium light) radiance. The brightest

glittering crystals settled in the warmer part opposite to the flame space of the condenser placed in the retort. We experienced differences between the magnesium crystals at the different reduction tests. In case the vacuum in the retort was about 1 mm Hg the crystals obtained were loose fern-shaped. Reduction at high temperatures and 0,1 mm Hg pressure gave a compact mass of hexagonal laminate crystals.

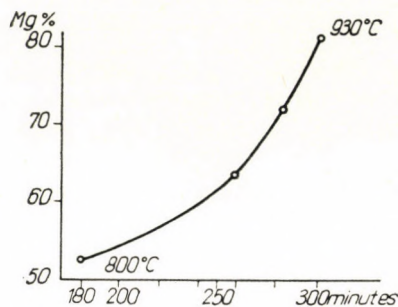


Fig. 8

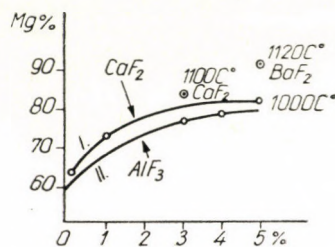


Fig. 9

The forming of dicalcium silicate promotes the reduction of magnesium. The process can be accelerated by adding fluorides. For comparative experiments chemically pure calcium fluoride was used (Fig. 9 curve I).

Occurrence	CaF ₂	Time	°C	Yield %
Gánt	5 g	120 min.	1000	80,6
«	4 «	120 «	1000	79,2
«	3 «	120 «	1100	84,7
«	1 «	120 «	1000	73,8
«	0 «	120 «	1000	62,8

The optimal quantity of fluoride is 3% calculated on dolomite basis. This corresponds with literary data. Trials were made with other fluorides too, with those of aluminium, barium and magnesium (Fig. 9 curve II).

Occurrence	Fluoride	Time	°C	Yield %
Gánt	5 g AlF ₃	150 min.	1000	79,2
«	3 « «	150 «	980	77,2
«	1 « «	200 «	980	62,8
«	5 « BaF ₂	120 «	1120	90,7
Háamor	5 « MgF ₂	120 «	980	81,5

As stated by the series of experiments the different cations have no special role in forming dicalcium silicate, only the presence of the fluoranion is important. Reduction without the latter will give lower yields.

The following experiments were made for the enrichment of the MgO content of dolomite by admixing magnesite of Kassa in different quantities to the calcined dolomite and pastilling the mixture in the usual way.

Dolomite	+MgO	Time	°C	Yield %
100 g	10 g	120 min.	980	73,5
100 «	20 «	120 «	965	67,0
100 «	30 «	120 «	970	54,1

Dosage of MgO reduced the yield. This is reasonable considering that at the reduction the calcium content of the dolomite has a share in reduction by forming dicalcium silicate. If we promote the forming of dicalcium silicate, or increase the content of calcium, the result of reduction will be more perfect. In the

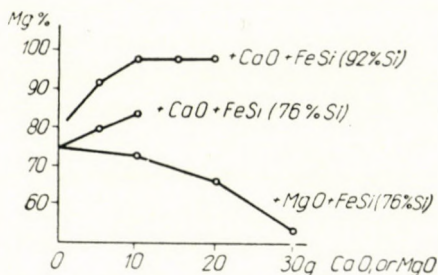


Fig. 10

afore-going experiment we increased the MgO content and by this reduced the relative CaO content of the mixture, and on this account the yield diminished too (Fig. 10).

We made the next series of experiments on mixtures enriched with caustic lime. To 100 g of calcined dolomite of Pilisvörösvár different quantities of caustic lime was admixed. The lime we used was burnt from the purest native limestone of Berva Valley (Eger—Felnémeti) of 97,63% CaCO_3 . The reduction experiment was performed with two grades of FeSi (Fig. 10).

Dolomite	CaO	FeSi	Time	°C	Yield %
100 g	5 g	91,9	120 min.	860	66,7
100 «	5 «	91,9	120 «	1020	92,1
100 «	10 «	91,9	120 «	1040	99,7
100 «	15 «	91,9	120 «	1040	99,4
100 «	20 «	91,9	150 «	1020	99,3
100 «	0 «	76,0	120 «	1020	75,7
100 «	5 «	76,0	120 «	1000	80,6
100 «	10 «	76,0	120 «	1020	84,7
100 «	10 «	76,0	120 «	1020	84,9

The table justifies the hypothesis that by special addition of lime to promote the forming of dicalcium silicate a better yield of metallic magnesium will be obtained. Variation of the grade of FeSi, or its active Si content, also influences reduction.

At the reduction of magnesium metal from native dolomites when making the mixture there is no need of special addition of caustic lime or of calcined magnesite, because the ratio CaO : MgO in native dolomites is adequate.

Nevertheless, the executed analyses show that the best output was obtained by addition of 10% of caustic lime to the calcined dolomite of Pilisvörösvár.

During the period of reductions we often controlled the current consumption of the small laboratory furnace. As calculated the consumption of producing 1 kg of metal was some what higher than of large-scale industrial works. This is explained by the small inside cubic capacity compared with the large radiating exterior surface. Results :

Dolomite	Time	Yield %	KWh/kg	Notes
Gánt	120 min.	84,7	22,7	total curr. cons.
«	120 «	90,1	19,6	« « «
Pilisvörösvár	120 «	97,7	15,1	« « «
Hámor	150 «	63,6	40,0	« « «
«	90 «	63,6	15,0	one hour of consumption subtracted from former 40 KWh/kg for preheating of furnace

In case the experiments were performed in the well-insulated small laboratory vacuum furnace, on easily reducible dolomite (as that of Pilisvörösvár) and with FeSi of high active Si content, magnesium was economically obtained with small energy input.

Accordingly, the establishment of the native magnesium industry should be based on easily reducible raw material. As regards the native industry of FeSi, which produces in general FeSi of 80% Si content only, we considered to extend the experiments and make use of silicon aluminium, resp. aluminium too. Composition of silicon aluminium used for the experiments :

Al	Si	Fe	Ti	Ca
36,79	56,95	1,30	0,05	4,85

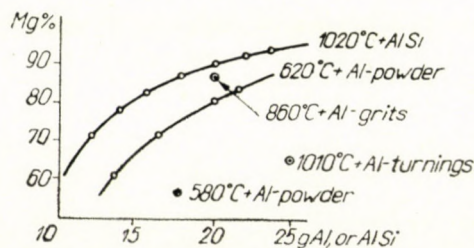


Fig. 11

The silicon aluminium was fine-milled in a disc mill. Granulometric composition of the milled material :

Below 0,06 mm	58,0%
0,06—0,1 mm	18,5%
0,1—0,2 «	23,0%
0,2—0,3 «	0,5%
0,3—0,5 «	0,2%
Above 0,5 mm	0,0%

Both components of the silicon aluminium, aluminium and silicon, take part in the reduction of dolomite. With the lime content of the dolomite partly dicalcium silicate is formed and partly tricalcium silicate. The mixture was selected on this consideration. The MgO content of calcined dolomite was taken for 41% as an average value.

For 14 parts of MgO calc. on aluminium basis 1,76 g of AlSi are required

For 27 parts of MgO calc. on silicon basis 15,45 g of AlSi are required

total 17,21 g

In the composition of the mixture for 100 g calcined dolomite, we took various quantities of silicon aluminium to establish the optimal quantity by which the most Mg metal is reduced. Generally calcium fluoride was added

to the mixture yet at some experiments aluminium fluoride was used. All experiments were performed with calcined dolomite of Pilisvörösvár (Fig. 11).

AlSi	Fluoride	Time	°C	Yield %
10 g	CaF ₂	120 min.	1100	58,6
12 «	«	120 «	1020	71,5
14 «	«	120 «	1150	79,3
16 «	«	120 «	1020	81,0
16 «	«	180 «	940	83,7
17,5 g	AlF ₃	150 «	1020	91,8
18 g	CaF ₂	120 «	1020	89,4
20 «	«	120 «	1020	92,1
22 «	«	120 «	1000	92,7
23,3 g	AlF ₃	120 «	1000	94,7

The series of experiments justify the correctness of the assumption and the best output was obtained with the calculated quantity of AlSi. Diminishing yield was observed with the use of 18 g of AlSi, however, this was attributable to shorter period of reduction.

On account of breakdown of the furnace (one of the silite rods burnt out), only 720° C was reached at the experiment. Two hours long was it kept at this temperature, after cooling down the pastilles seemed completely unchanged, without any sign of Mg precipitation in the condenser. So reduction at this temperature did not take place yet. This observation is, may be said, identical with the series of experiments with ferrosilicon when at 700° C in 4 hours only 1% yield of Mg was obtained.

Reduction of magnesium by silicon aluminium will be the method of the most economic operation in future. Silicon aluminium is obtained from kaolin in the electric arc furnace or, by reducing briqueted low-iron kaolinic clay, sand and charcoal. Producing cost of it is identical with the manufacturing cost of ferrosilicon. While the „epsilon” FeSi from ferrosilicon does not take part in the process of reduction, while both components of silicon aluminium reduce fully. Therefore to establish a silicon aluminium plant parallel with the magnesium works, under construction, would be expedient.

The series of experiments was completed by reduction experiments with metallic aluminium. This process will be profitable only in case if pure and cheap aluminium is available. From the impurities of the aluminium used copper and iron make no trouble. In case the scrap contains magnesium this will sublime too with the magnesium during reduction and will settle in the condenser in crystalline form. Silicon takes part in the reduction. Zinc is the only contaminating part which sublimates between 300—400° C.

Reduction experiments were made too with aluminium paint powder (prepared from aluminium foil) and aluminium grits (size of grain 0,6—1 mm as well as with aluminium cuttings. These experiments were performed at moderate temperature of about 600° C as the formation heat of Al_2O_3 is higher than that of MgO . The heat necessary for the process was only partly covered by external (electric heating) because the surplus was supplied by heat liberated at the formation of Al_2O_3 . The aluminium powder was added in increasing proportions to the calcined dolomite of Pílisvörösvár at the experiments (Fig. 11).

Aluminium powder	Time	°C	Yield %
14 g	240 min.	590	46,4
14 «	300 «	630	60,7
16 «	180 «	580	54,6
18 «	180 «	620	55,7
20 «	150 «	580	82,0
20 «	180 «	600	85,2
20 «	180 «	630	90,1

Characteristic is the low temperature of the process of reduction by metallic aluminium. A relatively small increase of temperature is advantageous for the yield of magnesium.

The second series of experiments was performed with aluminium grits (Fig. 11).

Aluminium grits	Time	°C	Yield %
20 g	140 min.	860	87,4
20 «	150 «	1020	90,2
20 «	160 «	1060	90,4

These experiments were made with pastilled mixture. Experiments with silicon calcium demonstrated the equivalence of this material with that of silicon aluminium.

CaSi	Time	°C	Yield %
20 g	120 min.	1140	83,8
30 «	120 «	1140	82,7

At these reductions too as generally we used 5% of calcium fluoride. Substantial increase of the silicon calcium did not give more yield either, so 20% of reducing material, added to the dolomite of Pílisvörösvár, may be taken as optimum.

The reduction experiments were completed by production of metal from magnesite. For the experiments we used magnesite of Kassa calcined at 700° C. Equation of the process :



Composition of Kassa magnesite :

Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	CaO	MgO	SO ₂
0,64	1,47	2,27	1,88	47,10	1,48

For the composition of the mixture 100 g of calcined magnesite and 42 g of aluminium grits were taken. The customary fluor salt was added in the form of aluminium fluoride (5 g). Reduction was performed with aluminium cuttings too, yet as it was expected with low yield.

Aluminium	Time	°C	Yield %
42 g grits	180 min.	1050	95,2
42 « «	180 «	880	94,5
42 « cuttings	120 «	1000	66,1

Therefore calcined magnesite is unobjectionably reducible with aluminium with complete recovery of the metal. However, to obtain the optimal yield of reduction, the proper fineness of Al powder and thorough mixing with the calcined dolomite are necessary.

We tried to reduce calcined magnesite by FeSi of 92%

FeSi (91,9%)	Time	°C	Yield %
50 g	160 min.	1060	23,6
50 «	180 «	1060	29,7

This experiment verifies that silicon is unsuitable for the reduction of MgO (at the given temperature), because at this temperature the process of formation of magnesium silicate is too slow. On account of the low yield this process is not economical commercially. However, the total recovery of the Mg content of the magnesite is not possible, because half of it is bonded to the magnesium silicate and remains behind in dross.

Our experiments were arranged in a manner that the objects of investigation, the active constituents should be present in the mixture in growing or diminishing proportions. The dross end product of the reduction was analysed in each case.

Dolomite	Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	CaO	MgO	Yield of Mg %
Gánt	—	29,1	7,7	51,5	12,2	73,8
«	—	34,2	9,6	56,4	7,6	79,2
«	—	30,1	8,6	55,8	7,8	84,7
«	—	40,1	6,2	49,5	3,3	89,6
«	—	32,3	1,3	60,5	1,2	90,1
Iszkaszentgyörgy	—	18,4	3,6	56,1	20,6	41,7
«	—	26,3	4,1	53,0	14,1	65,8
«	—	29,8	8,5	48,6	11,5	68,0
«	—	29,5	6,2	55,3	7,9	75,2
Nyirád	—	33,8	5,5	52,2	6,9	64,5
«	—	33,3	7,1	55,6	2,6	71,7
Hámor	—	36,9	1,4	55,0	8,5	63,9
«	—	21,3	10,4	56,8	8,5	74,0
«	—	38,5	1,4	50,6	3,5	75,5
«	—	32,1	6,7	58,6	3,0	78,0 (1)
«	—	36,4	5,7	56,4	6,5	82,8
«	—	43,5	7,5	49,8	0,8	95,4 (2)
Pilisvörösvár	—	30,9	5,7	58,4	1,8	91,4
«	—	37,9	3,2	55,0	2,3	97,7
«	—	39,7	1,6	58,2	2,5	97,7
«	15,2	30,4	2,1	50,7	10,8	69,8 (3)
«	13,7	25,1	1,1	58,2	4,9	91,8
«	13,4	33,7	1,4	56,4	2,5	94,9
Gánt	32,0	0,1	4,6	53,2	14,0	46,5 (4)
«	27,8	0,3	0,4	47,6	18,0	54,6
«	28,9	0,4	1,3	54,5	15,4	55,7
«	34,4	0,7	1,6	56,4	9,6	82,0
«	34,9	0,6	1,6	56,3	6,2	85,2
«	35,0	0,3	1,4	57,6	5,1	90,1
«	40,3	0,3	1,1	54,5	5,3	90,2
«	40,0	0,3	0,5	52,6	6,0	91,2

Notes :

1. In dross of Hámor we found 3,6% of metallic magnesium.
2. This reduction experiment was made in the Tamman furnace at 1410° C.
3. Hereafter we used silicon aluminium for the reduction experiments. In this dross remained 3,0% Al.
4. In this series of experiments of Gánt, to the very end, aluminium was used for reduction.

The total of dross analyses was sometimes above 100% indicating that metallic constituents also remained in the dross. For example, in case of reduction by ferrosilicon „epsilon” FeSi remains unchanged, and in the course of the analysis it is given ($\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{SiO}_2$) as oxides. At the reduction we always endeavoured that the quantity of reducing material should be in excess, so in many cases, part of the active silicon could remain back. This quantity calculated as oxide got into the total of the analysis. Similar is the case with experiments performed with silicon aluminium, resp. metallic aluminium; likewise the unused portion of reducing material remained as metal in the dross. At the analysis of dross the metallic part was seldom determined on account of the cumbersome nature of the process. In the dross of the pilot plant experiment, metallic magnesium was found and determined.

The fluorine content of the dross was in each case determined, this being between 2–3%. The total quantity of fluorine got unchanged into the dross

From the many dross analyses we show a few of typical composition with indication of the Mg yield (on 245. page).

At one of the experiments, in the reverberatory furnace, and large horizontal retort, the dross powder was sampled at three places. Sampling was made at the discharge, by measuring the deposit of dross with the rule scale, by this its exact place was determined. The reduction experiment was performed on calcined dolomite of Hámor with ferrosilicon. The recovery from the mixture was 52,4% of metallic magnesium. The analysis of dross samples were closely identical, however, in the dross samples, taken from three places of the retort the quantity of metallic magnesium was diverse.

Place of sampling	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	CaO	MgO	Met. Mg
Near the mouth of retort . . .	33,8	1,2	48,0	6,4	8,24
Centre of retort	30,1	1,2	51,4	1,4	1,28
Bottom of retort	31,6	1,5	49,1	1,8	2,74

The biggest deposit was at the mouth of retort where cooling efficiency is highest. Reduced magnesium of substantial quantity was condensed in the dross powder. By raising the temperature or by lengthening of time of reduction it would have been possible to expel this metal too from the dross powder.

In the course of the reduction experiments the sublimated crystalline metallic magnesium was always measured on removal from the retort. The unreduced Mg, which did not partake in reduction, was calculated back from

the magnesium content of the slag analysis. The difference of values was not considerable, in well-performed work, to discredit the process of reduction or the analysis.

The next table was composed on the basis of the dross analysis as well as of the quantity of the obtained metal to show the deviation displayed by this kind of balance.

Dross of dolomite of Pílisvörösvár reduced by ferrosilicon :

Output Mg g	Dross		Total Mg g	Deviation from calculated g
	MgO %	= Mg g		
6,5	25,57	11,03	17,53	- 0,37
17,5	2,56	1,09	18,59	+ 0,69
17,5	0,76	0,31	17,81	- 0,09
17,5	2,35	1,00	18,50	+ 0,60
9,5	6,29	3,19	12,69	- 0,89
9,2	7,73	3,95	13,15	- 0,43
17,5	1,94	0,83	18,33	+ 0,43

Reduction by silicon alumínium :

18,0	4,99	2,11	20,11	+ 0,52
17,0	2,48	1,07	18,07	+ 0,17
7,5	15,41	8,13	15,63	+ 1,35
9,5	10,84	5,50	15,00	+ 1,40
12,8	11,59	5,27	18,07	+ 1,17
14,5	9,60	4,39	18,89	+ 0,99
16,0	4,70	2,07	18,07	+ 0,17
16,5	5,10	2,23	18,73	+ 0,83
15,0	4,14	1,87	16,87	- 1,03
16,6	4,19	1,82	18,42	+ 0,52
16,0	1,95	0,86	16,86	- 1,44

Data of the above table show that the recovery could be calculated from the analysis of dross of reducing operations performed under different circumstances, however, at the experiments we always calculated with the measured quantity of magnesium.

The produced magnesium was very often analysed, however, the quantity of 12—16 g reduced in the laboratory furnace, was not sufficient for the analysis of the impurities by the wet method. So with the aid of the quartz prism spectrograph mainly qualitative determinations were performed. In the magnesium the following impurities were ascertained : Ca, Cu, Al, Zn, Pb, Ba, Sr and Na.

Iron and silicon were always found, but they were regarded as contaminations of the dross powder. In the dolomites (especially in dolomites of Hámor

and Pilisvörösvár) as trace elements were often found barium, sodium, zinc and lead. Not found in the magnesium were the elements: Ga, Cd, Bi, Mn, Ni, Zr, Hf, Mo, Sb and V.

Quantitatively determined impurities of metallic magnesium:

Dolomite	Ca	Cu	Fe	Zn	Pb	Si
Nyirád	—	0,130	0,140	—	—	—
Gánt	0,550	trace	0,030	0,040	0,160	—
Hámor	0,029	0,160	0,270	trace	0,009	—
«	2,210	0,050	3,400	0,130	0,015	0,920
«	1,600	0,035	0,360	0,051	0,015	1,000
«	0,190	0,020	0,090	0,110	0,020	0,020
«	0,030	0,150	0,190	0,060	0,050	1,260
«	0,210	0,050	1,400	0,130	0,015	0,920
Pilisvörösvár	0,048	0,025	0,090	0,890	0,015	0,028
«	0,190	0,028	0,090	0,110	0,019	0,007

The absorbed nitrogen content was determined sometimes too, its quantity being 0,020—0,060%. Not taken in consideration the outstanding values (No 4 analysis), we may point out that the reduced magnesium is to be regarded as extra pure metal. The outstanding iron value originates possibly from scale of the retort.

By the reduction experiments we explored the valorization of home dolomite occurrences for the native magnesium industry. We established the circumstances of thermic decomposition and the coherence between reducibility, investigated different reducing materials and verified that the yield of reducing by silicon aluminium is higher than that by ferrosilicon. By use of this material already at lower temperatures a yield can be obtained, which is attainable only at higher temperature with ferrosilicon. Accordingly, this also means saving of energy.

REFERENCES

1. I. I. BETSCHERMANN and L. M. PIDGEON: The Physical Nature of Solid, Cond. Prod. The Canadian Mining and Met. Bull. **44** (1951) 730.
2. F. BISCHOFF: Die Gewin. v. spektr. v. Magnesium. Metall **9** (1955) 205.
3. F. BISCHOFF: Therm. Dissoz. v. Dolomit. Ztschr. f. anorg. Chem. **45** (1953) 1548.
4. D. L. GRAF: Amer. Mineralogist **37** (1952) 1.
5. W. H. MACINTIRE and T. B. STANZEL: Ind. and Eng. Chem. **45** (1953) 1548.
6. R. MALDAU and R. H. A. ROBERTSON: Therm decomp. of Dolomite. Nature **172** (1953) 998.
7. W. MOSCHEL: Zur Technologie der Magnesiumherstellung. Angew. Chem. **63** (1951) 285.
8. ERVIN MOSER: Zur Kenntnis der therm. Darst. v. Magnesium. Promotionsarbeit. Eidg. Techn. Hochsch. Zürich (1942).

9. DR. W. NOLL : Über den halbgebrannten Dolomit. *Angew. Chemie* **62** (1950) 567.
10. L. M. PIDGEON : Thermal Production of Magnesium. *Transac. of the Canad. Inst. of Mining* **49** (1946) 621.
11. L. M. PIDGEON : Magnesium. ASM. Cleveland (1946).
12. X. L. STRELEC, A. JU. TAIC and B. S. GULJANICKIJ : Metallurgija Magnija. Metallurgizdat, (1950).
13. SVESNIKOVA : *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **85**, (1952) 357.
14. L. SZMOLKA : Calcination of native dolomites. *Bány. és Koh. Lapok* **83** (1950) 12 (Hungarian)
15. T. G. GEDEON : The correlation between the Crystal Structure of Dolomite and its Aptness to Magnesium Recovery. *Acta Technica Vol. XVIII* (1957) 339/348.

SUMMARY

In the course of preparing the development of magnesium metallurgy in Hungary the materials of various dolomite occurrences of this country were investigated. From five places (four in Transdanubia, one in the Bükk Mountains) samples were subjected to differential thermal analysis by several ways. The tests were further extended on the grindability of dolomit rock, on the pelletizability of calcined dolomite, on the durability of pastilles with special regard to absorption of moisture and of carbonic acid from air. Thereupon followed the reduction of dolomites in small vertical retort laboratory furnace.

The dolomite samples were reduced by ferrosilicon, silicon aluminium, aluminium and silicon calcium of various active silicon content. Pilisvörösvár and Hámor dolomites were found most easily reducible, while from samples of the other occurrences only lower yields of magnesium metal were obtained. From the different reducing agents silicon aluminium was found best, as well as aluminium powder made from scrap metal, because with these highest yields could be obtained with lowest consumption of electrical energy.

The duration of heating, current consumption were investigated by several experiments. In a horizontal gas-fired steel retort by Amati's system satisfactory tests were executed on semi-industrial scale. All products, metallic magnesium and the remnant dross were analyzed, and from results percentile yields were computed. The magnesium obtained was of high purity and hardly contained any impurities.

MAGNESIUM-REDUKTIONSVERSUCHE

T. G. GEDEON

ZUSAMMENFASSUNG

Die zwecks Verwirklichung der ungarischen Magnesiumerzeugung durchgeführten Grundversuche beschäftigen sich mit den wichtigsten Dolomitvorkommen Ungarns. Aus den durchgeführten Versuchen, durch welche der Verlauf des thermischen Zerfalls, der Mahlbarkeit, der Korngrößenverteilung, der Brikettierbarkeit, der Lagerfähigkeit der Preßlinge, sowie der Reduzierbarkeit der verschiedenen ungarischen Dolomite verglichen wurde, konnte festgestellt werden, daß jene von Hámor und von Pilisvörösvár am leichtesten bzw. am wirtschaftlichsten reduzierbar sind.

Die Versuche erstreckten sich auf die Untersuchungen der verschiedenen Reduktionsmittel. Als solche wurden benützt: Ferrosilizium mit verschiedenem Siliziumgehalt, Aluminium und Silikoaluminium, weil zur Erzeugung desselben die wenigste elektrische Energiemenge benötigt wird.

Es wurde auch die Zeitdauer der Magnesiumreduktion festgestellt. Versuche mit liegendem Retorten-System Amati im halbtechnischen Maßstab wurden auch durchgeführt. Alle bei den Reduktionsversuchen verwendeten Rohstoffe, sowie die entstandenen Schlacken und das dargestellte Magnesium wurden analytisch untersucht.

ESSAIS DE PRÉPARATION DU MAGNÉSIUM MÉTAL PAR RÉDUCTION DE LA DOLOMIE

T. G. GEDEON

RÉSUMÉ

Au cours des travaux préparatoires de la métallurgie du magnésium en Hongrie, l'auteur a étudié les matières premières de plusieurs gisements de dolomie du pays. Des échantillons prélevés dans cinq gisements (quatre en Transdanubie et un cinquième dans les monts Bükk) ont été soumis à l'analyse thermique différentielle (DTA), par des méthodes diverses; la pulvérisabilité de la dolomie, la possibilité de fabriquer des pastilles de la dolomie calcinée, la durabilité des pastilles exposées à l'humidité et à l'acide carbonique de l'atmosphère ont été étudiées. Les divers échantillons ont été réduits ensuite dans un petit four à cuve vertical de laboratoire.

On a essayé la réduction des échantillons de dolomie par plusieurs réducteurs à teneurs en silicium actif différentes: par le ferro-silicium, le silico-aluminium, l'aluminium et le silico-calcium, et on a trouvé que les dolomies de Pílisvörösvár et de Hámor sont les plus facilement réductibles, tandis que les autres échantillons ont donné des rendements moindres, dans des conditions identiques. Parmi les divers réducteurs, les meilleurs étaient le silico-aluminium et la poudre d'aluminium préparée à partir des déchets de ce métal. Ceux-ci ont donné en effet, les meilleurs rendements pour un minimum d'énergie électrique consommée.

On a étudié, par plusieurs essais, la durée du chauffage et la consommation de courant. Des essais satisfaisants ont été faits dans le four horizontal du type Amati, chauffé au gaz, sur l'échelle mi-industrielle. Tous les produits, le magnésium aussi bien que les scories obtenues, ont été analysés, et le pourcentage des rendements a été calculé à partir des résultats. Le magnésium obtenu était d'une grande pureté, presque exempt de souillures.

ОПЫТЫ ПО ФРИШЕВАНИЮ МАГНИЯ

Т. ГЕДЕОН

РЕЗЮМЕ

В процессе подготовки металлургии магния в Венгрии производился анализ материала различных доломитных месторождений Венгрии. Образцы, взятые с пяти различных месторождений доломита (четыре месторождения в Задунайском крае, одно месторождение в горах Бюкк), были подвергнуты анализу при помощи кривых термического разложения, снятых при различных температурных режимах, далее в отношении измельчивости в порошок, возможности изготовления пастил из подвергнутого обжигу доломита, а также прочности полученных пастил, обращая особое внимание поглощению, влаги воздуха и углекислоты. После чего в лабораторных печах производилось фришевание доломитов различных месторождений.

Исследованные образцы доломита восстанавливались ферросилицием с различным содержанием активного силиция, далее силико-алюминием, алюминием и силико-кальцием. В процессе проведенных опытов установлено, что доломит м-р Пилишверешвар и Хамор можно восстанавливать легче всего, в то же время из материалов остальных месторождений при идентичных условиях получился только более низкий выход магния. Среди различных восстанавливающих веществ наилучшим оказался силикоалюминий, а также алюминиевый порошок, изготовленный из алюминиевых отходов, т. к. при помощи указанных представилось возможным достигнуть наилучший выход при наиболее низком расходе электроэнергии.

Время подогрева и расход тока изучались рядом опытов в печи системы Амати, подогреваемом газом; в этой печи были выполнены удовлетворительные опыты. Все полученные продукты были подвергнуты химическому анализу (т. е. магний, а также шлак) и процент выхода определялся на основе полученных в данном случае результатов. Полученный таким образом магний является очень чистым и содержит незначительное количество примесей.

STIFFNESS CHARACTERISTICS OF VIERENDEEL GIRDERS WITH PARALLEL CHORDS

Prof. P. CSONKA

D. ENG. SC.

DEPARTMENT FOR STRUCTURAL ANALYSIS, UNIVERSITY FOR BUILDING SCIENCES AND COMMUNICATIONS,
BUDAPEST

[Manuscript received 11st February, 1957]

1. Introduction

In reinforced concrete construction using prefabricated structures, girders with ladder bracing — VIERENDEEL girders (Fig. 1) — and columns of such type are extensively used. Their extended use raises numerous stability problems to the treatment of which the strict methods of the Theory of Elas-

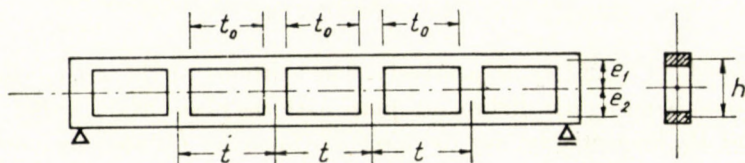


Fig. 1. Parallel chord girders with ladder bracing

ticity are applicable with difficulty because of the intricacy of these problems. For the elimination of these difficulties the author proposed in a previous paper [1] the application of the *substitution method*, the essential of which is the substitution for the girder of a solid bar of similar elastic properties.

The preliminary condition of the application of the substitution method is the determination of *stiffness characteristics* of the girder to be replaced. The present paper aims at the solution of this problem for some basic cases of simple loadings of parallel chord girders with ladder bracing. The same problem had been treated by the author in a former paper for Warren girders with rigid joints [2].

2. Suppositions. Notations

The investigations refer to plane girders with ladder bracing, whose parallel chords are all along of constant cross-section. The braces connecting the chords at equal pitch distances, at right angles to the chords, are of constant and of equal cross-section, expecting the two extreme ones whose constant

cross-section may differ from that of the intermediate braces. The connection of chords and of braces is rigid-jointed.

As a basis of analysis the conventional simplifying assumptions of the Strength of Materials are adopted; the material of the structure is supposed to be elastic and deformations slight. Deformations caused by shear are disregarded. The investigation covers a section of the girder farther away from its ends, where the influence of the terminal braces on the play of forces in the girder is no more effective.

The girder is positioned with its plane vertical, and its chords horizontal. It is convened upon that the common centroidal line of the cross-sectional areas of the two chords, parallel to the latter, will be called the *axis of strength* of the girder. The distances of this from the axes of strength of the top and the

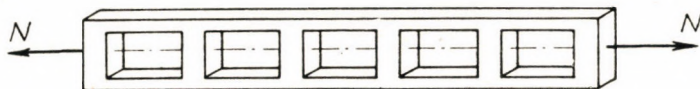


Fig. 2. Pure tension

bottom chords is e_1 and e_2 , respectively. The stiffness of the upper chord of the girder against bending parallel to, or square with the plane of the girder, is denoted by A_1 and B_1 , respectively, its torsional stiffness by C_1 , its tensional stiffness by D_1 . For the bottom chord the same quantities are A_2 , B_2 , C_2 , D_2 , for the braces they are A_3 , B_3 , C_3 , D_3 . In others, symbols of the figures are used.

In the course of analysis start will be made always from an imagined, *geometrically* possible deformation, one or more characteristic data on which will be decided upon later. To these, for the time indefinite data such values will be attributed as assure the *static* possibility of deformation. This method is an example of application of the *semi-inverse method* first used by de Saint-Venant.

The case of pure shear will be treated by the author in a later paper.

3. Pure tension (Fig. 2)

For the sake of simplification of the problem the verticals of the girder, including the sections of the chord in their continuation, are supposed to be perfectly rigid. It is supposed further that sections of length t_0 of the chords between the verticals suffer only elongation in the course of deformation, and that their unit deformation is constant:

$$\varepsilon_0 = \text{const.}$$

This latter quantity is the only free parameter of the supposed *geometrically* possible deformation.

In connection with the deformation in question, forces are generated in the chords only, and these are tensional forces. Their values (Fig. 3) :

$$N_1 = D_1 \varepsilon_0, \quad N_2 = D_2 \varepsilon_0. \quad (1)$$

Internal forces known, the *static* possibility of the supposed deformation will be examined.

Since internal forces satisfy beforehand the condition of *equilibrium of joints*, it suffices to deal with the problems of *equilibrium of external and internal forces*. To assure equilibrium, it is necessary that external force N act in the axis of strength of the bar and in addition to this (Fig. 4) the following equation be satisfied :

$$N_1 + N_2 - N = 0. \quad (2)$$

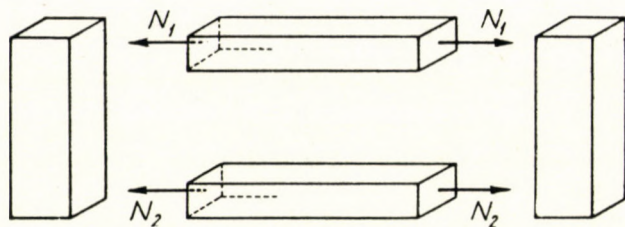


Fig. 3. Forces acting at bar ends

Herefrom by substitution of (1) the following value of unit elongation ε_0 is obtained :

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{D_1 + D_2}. \quad (3)$$

On the other hand, the average value of unit elongation of the girder

$$\varepsilon^* = \frac{t_0}{t} \varepsilon_0 = \frac{t_0}{t(D_1 + D_2)} N,$$

so that the *tensional (compressive) stiffness* of the girder

$$D = \frac{t}{t_0} (D_1 + D_2). \quad (4)$$

4. Pure bending parallel to the plane of the girder

It will be supposed that the verticals of the girder (Fig. 4), including the chord sections in the continuation of the verticals, are perfectly rigid. This assumption but insignificantly affects the static behaviour of the girder; on the other hand, it affords appreciable simplification. It will be supposed that the cross-sections of the girder remain planes after deformation too, and that the distances between points lying on the axis of strength do not change in the course of deformation. Finally, it will be supposed that the sections of the girder between the verticals, as well as the axis of strength of the girder will be bent according to concentric circular arcs, and on these sections the curvature of the axis of strength is \varkappa_0 . The latter quantity is the only indefinite parameter of the supposed *geometrically* possible deformation.

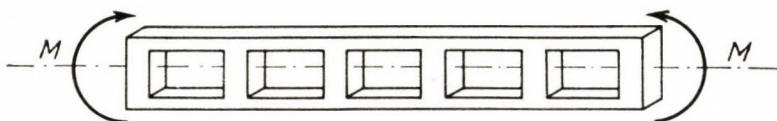


Fig. 4. Pure bending parallel to the plane of the girder

In the course of the supposed deformation the unit shortening of the top chord of the girder

$$\varepsilon_1 = e_1 \varkappa_0,$$

and its curvature

$$\varkappa_1 = \varkappa_0 (1 - e_1 \varkappa_0) \cong \varkappa_0.$$

On the other hand, the unit elongation of the bottom chord

$$\varepsilon_2 = e_2 \varkappa_0,$$

and its curvature

$$\varkappa_2 = \varkappa_0 (1 + e_2 \varkappa_0) \cong \varkappa_0.$$

Thus the efforts acting at the ends of the top chord bars joining the verticals (Fig. 5)

$$N_1 = D_1 \varepsilon_1 = D_1 e_1 \varkappa_0, \tag{5}$$

$$M_1 = A_1 \varkappa_1 \cong A_1 \varkappa_0,$$

and as regards the bottom chord bars

$$N_2 = D_2 \varepsilon_2 = D_2 e_2 \varkappa_0, \tag{6}$$

$$M_2 = A_2 \varkappa_2 \cong A_2 \varkappa_0.$$

Hereafter the analysis of the *static* possibility of the supposed deformation may be embarked upon.

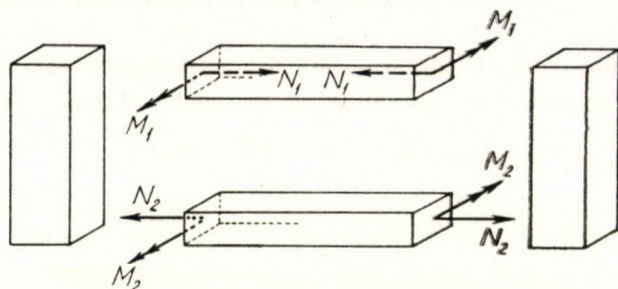


Fig. 5. Efforts acting on chord bar ends

The internal forces corresponding to the analyzed deformation satisfy the *condition of equilibrium of joints*. Now it has to be assured only that in a piece of the girder cut at an arbitrary cross-section the *equilibrium of external and of internal forces* be also secured. Since forces N_1 and N_2 form a couple, the only conditions of equilibrium is that

$$M_1 + M_2 + N_1 e_1 + N_2 e_2 - M = 0.$$

Hence with consideration of (5) and (6) the curvature of the cords on the girder sections between verticals

$$\kappa_0 = \frac{1}{A_1 + A_2 + D_1 e_1^2 + D_2 e_2^2} M. \quad (7)$$

Against the above amount of curvature the average curvature of the girder

$$\kappa^* = \frac{t_0}{t} \kappa_0 = \frac{t_0}{t} \cdot \frac{1}{A_1 + A_2 + D_1 e_1^2 + D_2 e_2^2} M,$$

and thus the *bending stiffness* of the girder in case of bending parallel to its plane

$$A = \frac{t}{t_0} (A_1 + A_2 + D_1 e_1^2 + D_2 e_2^2). \quad (8)$$

5. Pure bending at right angle to the plane of the girder (Fig. 6)

It is expedient to start again from the assumption that cross-sections of the girder will remain planes after deformation too, and the distance between points lying on the axis of strength of the girder will not change. It will be

supposed, moreover, that sections of the chords, and of the axis of strength of the girder, will be bent according to the same circular arcs whose curvature is \varkappa_0 . This value is the only indefinite parameter of the *geometrically* possible deformation.

In consequence of the deformation in question, bending moments acting in the horizontal plane arise in chords of the girder. Their values :

$$M_1 = B_1 \varkappa_0, \quad M_2 = B_2 \varkappa_0. \quad (9)$$

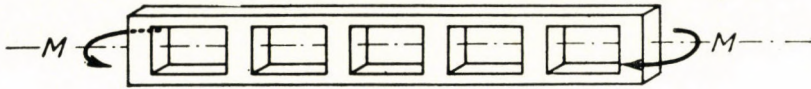


Fig. 6. Pure bending at right angle to the plane of the girder

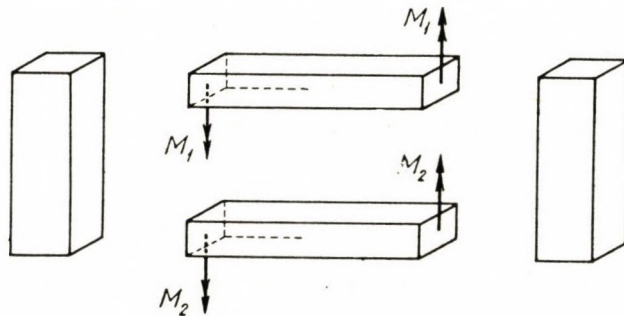


Fig. 7. Efforts arising at bar ends

The *static* possibility of this deformation can be simply assured, since the conditions of the *equilibrium of joints* are beforehand satisfied. On the other hand, the conditions of *equilibrium of external and of internal forces* is that the following equation hold :

$$M_1 + M_2 - M = 0.$$

From this relationship, with use of values (9) the following formula is obtained for the curvature of chord sections between verticals :

$$\varkappa_0 = \frac{M}{B_1 + B_2}. \quad (10)$$

Against this the mean curvature of the girder

$$\varkappa^* = \frac{t_0}{t} \varkappa_0 = \frac{t_0}{t} \cdot \frac{1}{B_1 + B_2} M,$$

so that the *bending stiffness* of the girder against bending at right angle to its plane

$$B = \frac{t}{t_0} (B_1 + B_2). \quad (11)$$

6. Pure torsion (Fig. 8)

In this case, in contrast to Chapters 3, 4, and 5, it would not be expedient, in general, to suppose the verticals of the girder to be rigid, therefore this facility of simplification will not be made general use of. In the course of analysis, the deformation of the girder will be composed by two *geometrically* possible deformations.

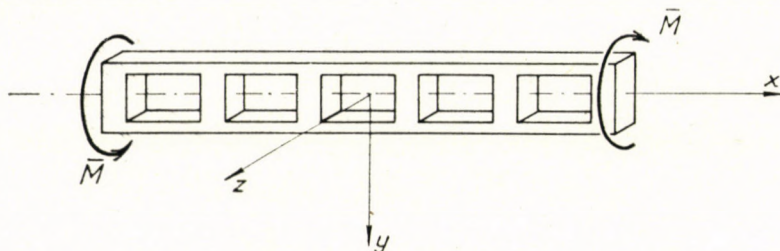


Fig. 8. Pure torsion

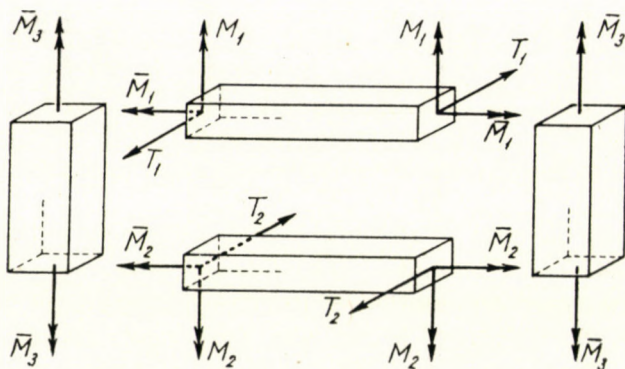


Fig. 9. Efforts generated at bar ends

For *first* "part deformation" it is supposed that the middle plane of the girder is distorted to a hyperbolic paraboloid with axis perpendicular to that plane, while points of the middle plane move only at right angles to that plane. Values of these dislocations in direction z

$$\zeta = \vartheta xy, \quad -$$

where ϑ is a constant to be chosen at will for the time. Internal forces corresponding to the part deformation in question are simply calculable (Fig. 9):

$$\begin{aligned} M_1 &= 0, & M_2 &= 0, \\ T_1 &= 0, & T_2 &= 0, \\ \bar{M} &= C_1 \vartheta, & \bar{M}_2 &= C_2 \vartheta, \\ \bar{M}_3 &= -C_3 \vartheta. \end{aligned} \tag{12}$$

As *second* "part deformation" it is supposed that the chord bars will be bent to "S"-shape in the horizontal plane, while verticals will be twisted. Rotation vectors of the supposed angular turns are shown in Fig. 10. Under the effect of the angular turns the following efforts arise at bar ends :

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{6 B_1}{t} \varphi_1, & M_2 &= \frac{6 B_2}{t} \varphi_2, \\
 T_1 &= \frac{12 B_1}{t^2} \varphi_1, & T_2 &= \frac{12 B_2}{t^2} \varphi_2, \\
 \bar{M}_1 &= 0, & \bar{M}_2 &= 0, \\
 \bar{M}_3 &= \frac{C_3}{h} (\varphi_1 + \varphi_2).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

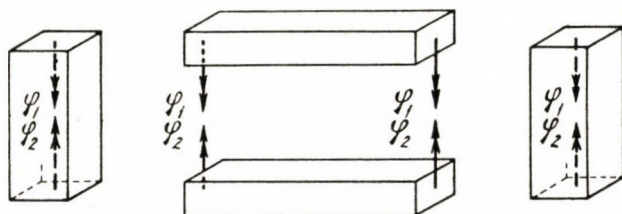


Fig. 10. Rotation vectors of bar ends in the second part deformation

As a result, the total of the two part deformations is characterized by three free parameters : ϑ , φ_1 and φ_2 . The internal forces arising by the joint effect of the two part deformations :

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{6 B_1}{t} \varphi_1, & M_2 &= \frac{6 B_2}{t} \varphi_2, \\
 T_1 &= \frac{12 B_1}{t^2} \varphi_1, & T_2 &= \frac{12 B_2}{t^2} \varphi_2, \\
 \bar{M}_1 &= C_1 \vartheta, & \bar{M}_2 &= C_2 \vartheta, \\
 \bar{M}_3 &= \frac{C_3}{h} (-h \vartheta + \varphi_1 + \varphi_2).
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Now the conditions of *statical* possibility of the deformation will be dealt with.

Conditions of *equilibrium of joints* will be examined first. Evidently, for the equilibrium of the upper and of the lower joints the following conditions have to be fulfilled :

$$\begin{aligned}
 2 M_1 + \bar{M}_3 &= 0, \\
 2 M_2 + \bar{M}_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

These two equations may be written with substitution of (14) in the form :

$$\frac{12 B_1}{t} \varphi_1 + \frac{C_3}{h} (-h \vartheta + \varphi_1 + \varphi_2) = 0,$$

$$\frac{12 B_2}{t} \varphi_2 + \frac{C_3}{h} (-h \vartheta + \varphi_1 + \varphi_2) = 0.$$

Hence

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{B_2 C_3 h t}{12 B_1 B_2 h + (B_1 + B_2) C_3 t} \vartheta, \\ \varphi_2 &= \frac{B_1 C_3 h t}{12 B_1 B_2 h + (B_1 + B_2) C_3 t} \vartheta. \end{aligned} \quad (15)$$

Hereafter only the *equilibrium of external and of internal forces* has to be assured. For this the girder has to be bisected by some cross-sectional plane, and conditions of equilibrium have to be made for one of the pieces cut off. It is expedient to assume the bisectrix plane in the middle between two verticals. In this case the efforts acting at the cross-section are : T_1 , T_2 , \bar{M}_1 and \bar{M}_2 . Of these T_1 and T_2 form a couple for which the only condition of equilibrium is

$$\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + T_1 h - \bar{M} = 0.$$

From this equation with consideration of (14) and (15)

$$\vartheta = \frac{\bar{M}}{C},$$

where

$$C = C_1 + C_2 + \frac{12 B_1 B_2 C_3}{12 B_1 B_2 h + (B_1 + B_2) C_3 t} \cdot \frac{h^2}{t}. \quad (16)$$

The latter expresses the *torsional stiffness* of the girder.

REFERENCES

1. P. CSONKA : Substitution Method for the Approximate Analysis of Stability Problems of Plane Framed Trusses with Rigid Joints. *Acta Technica Acad. Sc. Hung.* **19** (1958) pp. 405-414.
2. P. CSONKA : Stiffness Characteristics of Rigid Warren Girders. *Ibidem* **20** (1958), pp. 103-118.
3. P. CSONKA : Pure Bending of Lattice Trusses with Parallel Chords. *Ibidem.* **19** (1957) pp. 155-168.

SUMMARY

This paper deals with Vierendeel girders the chords of which are parallel and are all along of uniform cross-section. Braces connecting the chords are at right angles to the latter, their pitch distances are uniform, and their cross-sections equal and constant.

The static behaviour of the girders is analyzed in detail, and their stiffness characteristics are determined for pure tension, for pure bending parallel and perpendicular to the plane of the girder and for pure torsion. Knowledge of stiffness characteristics offers a simple possibility of solution by the substitution method [1] of some stability problems that would else require very intricate mathematical treatment.

STEIFIGKEITSKENNWERTE VON VIERENDEELTRÄGERN

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegender Aufsatz beschäftigt sich mit Vierendeelträgern, deren Gurte parallel und auf ihrer ganzen Länge von konstantem Querschnitt sind. Die Pfosten stehen in gleichen Abständen senkrecht zu den Gurten und sind vom gleichem und konstantem Querschnitt.

Der Aufsatz behandelt eingehend das Kräftespiel der erwähnten Träger und bestimmt deren Steifigkeitskennwerte für reinen Zug (Druck), für reine Biegung, usw. parallel bzw. senkrecht zur Trägerebene, sowie für reine Drehung. Die Kenntniss der Steifigkeitskennwerte bietet eine einfache angenäherte Lösungsmöglichkeit mittels Anwendung der Substitutionsmethode [1] einzelner, ansonsten nur mit komplizierten Berechnungen zu erfassenden Stabilitätsprobleme.

CARACTÉRISTIQUES DE RIGIDITÉ DE POUTRES VIERENDEEL

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'article présente une étude de poutres Vierendeel ayant des semelles parallèles et de section constante sur toute leur longueur. Les barres perpendiculaires reliant les semelles sont disposées à intervalles réguliers, leur section est égale et constante.

L'auteur expose en détail la statique des poutres mentionnées et détermine leurs caractéristiques de rigidité en cas de traction (compression) simple, de flexion simple parallèlement resp. perpendiculairement au plan de la poutre et de torsion simple. La connaissance des caractéristiques de rigidité permet d'étudier par approximation, à l'aide de la méthode de substitution [1] les problèmes de stabilité, dont la solution exacte nécessite en général des calculs fort compliqués.

ПАРАМЕТРЫ ЖЕСТКОСТИ ГУРТОВЫХ БАЛОК

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассматриваются такие балки системы Виренделя, пояса которых параллельны и по всей своей длине имеют неизменное сечение. Связывающие пояса гурты перпендикулярны к поясам, шаг их одинаков, сечение же их является одинаковым и неизменным.

В статье детально рассматривается работа вышеупомянутых балок и определяются их характеристики жесткости в случае чистого растяжения, далее чистого изгиба, параллельного к плоскости балки, а также перпендикулярного к последней, и, наконец, чистого кручения. Зная характеристики жесткости, можно произвести приближенную трактовку при помощи замещающего метода (1) некоторых задач стабильности, которые представляется возможным решать, между прочим, с помощью очень сложных вычислений.

ANNÄHERNDE BERECHNUNG DES WÄRMEÜBERGANGS ZWISCHEN WÄRMEQUELLENFREIEN METALLISCHEN KÖRPERN UND LUFT, BEI FREIER KONVEKTION

P. BONDY

ALLGEMEINES MASCHINEN-PROJEKTIERUNGSMITTEL, BUDAPEST

[Eingegangen am 5. April 1957]

Die Theorie des Wärmeübergangs von wärmequellenfreien einfachen geometrischen Körpern an das umgebende Medium ist bekannt [1], die Resultate der Theorie sind jedoch unendliche Reihen, deren Anwendung schwerfällige Rechenarbeit erfordert. Zur Erleichterung der Berechnungen wurden einerseits Diagramme [1], andererseits verschiedene Näherungsverfahren ausgearbeitet [3, 5]. Auch nachstehend wird ein derartiges Näherungsverfahren mitgeteilt, welches nicht nur einfach ist, sondern auch die Änderung der Wärmeübergangszahl während des Wärmeübergangs berücksichtigt. Daher sind innerhalb der Anwendungsgrenzen der Methode genauere Ergebnisse zu erwarten als bei Anwendung des exakten Berechnungsverfahrens, bei welchem die Wärmeübergangszahl α im Sinne des NEWTONSchen Abkühlungsgesetzes als konstant angesehen wird.

Das hier behandelte Problem kann wie folgt formuliert werden :

»Zur Zeit $t = 0$ ist die Temperatur in allen Punkten eines allseitig von Luft umgebenen, wärmequellenfreien Metallgegenstandes ϑ_0 . Wie ändert sich die Temperatur ϑ des Körpers, bei freier Strömung der Luft um den ganzen Körper, wobei die Lufttemperatur in großem Abstand vom Körper als konstant vorausgesetzt wird?«

Unter ϑ ist der Temperaturunterschied zwischen dem Körper und der Luft zu verstehen ; im Falle von Abkühlung ist $\vartheta > 0$.

Die vereinfachenden Annahmen sind die folgenden :

a) ϑ_0 ist hinreichend klein.

b) Der Körper hat eine solche Gestalt und eine solche Wärmeleitfähigkeit, und die Wärmeübergangszahl an der Oberfläche des Körpers ist so niedrig, daß während der Temperaturänderung sich im Körper kein allzu großer Wärmegradient ausbildet. Daher kann seine Wärmeleitfähigkeit als unendlich angenommen werden und der Temperaturunterschied zwischen der Oberfläche des Körpers und seinem Inneren wird vernachlässigt. Praktisch läuft dies darauf hinaus, daß wir unsere Betrachtungen auf metallische Körper in gasförmigen Medien (Luft) beschränken.

c) Die Stoffwerte des Körpers: Wärmeleitfähigkeit, spezifische Wärme, spezifisches Gewicht sind konstant.

Im Verlauf der Rechnung werden wir noch weitere vereinfachende Annahmen machen.

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

- a Temperaturleitzahl, $\frac{\lambda}{c \gamma}$ [m²/h]
- f Oberfläche des Körpers [m²]
- h relative Wärmeübergangszahl $\frac{\alpha}{\lambda}$ [m⁻¹]
- v Rauminhalt des Körpers [m³]
- c spezifische Wärme des Werkstoffes des Körpers [kcal/kg, °C]
- t Zeit [h]
- T absolute Temperatur [°K]
- g Erdbeschleunigung [m/sec²]
- Q Wärmemenge [kcal]
- Gr Grashof-Zahl
- Pr Prandtl-Zahl
- α Wärmeübergangszahl [kcal/m²h °C]
- β volumetrische Ausdehnungszahl [1/°C]
- γ spezifisches Gewicht des Werkstoffes des Körpers [kg/m³]
- ϑ Temperaturunterschied [°C]
- λ Wärmeleitzahl [kcal/m h °C]
- ν kinematische Zähigkeit [m²/sec]

Wir schreiben die Wärmebilanz des Körpers für die Zeit dt an:

$$dQ = v \gamma c d\vartheta = - \vartheta \alpha f dt \quad (1)$$

Für die Berechnung der Wärmeübergangszahl benützen wir die Formeln (2) und (3) von MICHEJEV [2] (ähnliche Formeln teilt auch GRIGULL [1] mit). Danach ist bei Röhren, Kugeln und Platten, falls $(Gr \cdot Pr) = 5 \cdot 10^2 \dots 2 \cdot 10^7$,

$$\alpha_2 = A_2 \left(\frac{\vartheta}{l} \right)^{1/4} \quad (2)$$

und falls $(Gr \cdot Pr) = 2 \cdot 10^7 \dots 1 \cdot 10^{13}$,

$$\alpha_3 = A_3 \vartheta^{1/3}. \quad (3)$$

Die Werte von A_2 und A_3 für Luft sind in Zahlentafel I angeführt; l ist die charakteristische Abmessung des Körpers in m und τ_m der Mittelwert zwischen der Temperatur der Körperoberfläche und derjenigen der Luft in großer Entfernung vom Körper (von 0° C an gerechnet). Die charakteristische Abmessung ist bei Röhren und Kugeln der Durchmesser, bei senkrechten Platten die Höhe, bei waagerechten Platten die kürzere waagerechte Seite. Bei waagerechten Platten ist die Wärmeübertragung verschieden je nachdem die wärmeübertragende Oberfläche nach oben oder nach unten gerichtet ist; wenn aber beide Flächen an der Wärmeübertragung teilnehmen — und dies setzen wir voraus

— so kann angenommen werden, daß sich die Verringerung und die Erhöhung des Wärmeübergangs kompensieren.

Zahlentafel I
Werte von A_2 und A_1 für Luft

$\tau_m, ^\circ\text{C}$	0	50	100	200
A_2	1,22	1,14	1,09	1,05
A_3	1,45	1,27	1,14	0,97

Im folgenden werden wir die MICHEJEWSCHEN Formeln auch auf andere Körper als die genannten anwenden; dies ist eine Extrapolation, deren Berechtigung noch zu beweisen wäre. Auch die charakteristische Abmessung für andere als die eben angeführten Körper wäre zu definieren.

Die Koeffizienten A_2 und A_3 ersetzen wir durch Konstanten. Die Bezugstemperatur der Luft nehmen wir zu 20°C an und setzen voraus, daß ϑ_0 mit gleicher Wahrscheinlichkeit positive und negative Werte annimmt, und zwar bis zu solchen maximalen bzw. minimalen Werten, welche zur Lufttemperatur von 20°C symmetrisch liegen. Wenn wir nun alle möglichen Fälle in Betracht ziehen, so erscheint es sinngemäß als Näherungswerte für A_2 und A_3 diejenigen für

$$\tau_m = \frac{\tau_{\text{Luft}} + (\vartheta + \tau_{\text{Luft}})}{2} = \frac{20 + (0 + 20)}{2} = 20^\circ\text{C}$$

zu verwenden. Aus Zahlentafel I interpoliert, sind diese Werte

$$A_2 = 1,19 \tag{6}$$

und $A_3 = 1,38, \tag{7}$

weitere

$$\alpha_2 = 1,19 \left(\frac{\vartheta}{l} \right)^{1/4} \tag{8}$$

$$\alpha_3 = 1,38 \vartheta^{1/3}. \tag{9}$$

Nur wegen der Einsetzung von konstanten Werten an Stelle von A_2 und A_3 ist es notwendig, ϑ_0 auf kleine Werte zu beschränken (Bedingung a)).

Wenn wir nun (8) in Gleichung (1) einsetzen, so erhalten wir

$$v \gamma c d\vartheta = - \vartheta 1,19 \left(\frac{\vartheta}{l} \right)^{1/4} f dt$$

$$\frac{d\vartheta}{1,19\vartheta^{3/4}} = -\frac{f dt}{v\gamma cl^{1/4}} \quad \bullet$$

welche Gleichung auf Grund unserer Voraussetzungen a) bis c) die Funktion $\vartheta(t)$ näherungsweise bestimmt.

Durch Integration erhalten wir

$$-\frac{4}{1,19\vartheta^{1/4}} + C = -\frac{f}{v\gamma cl^{1/4}} t.$$

Den Wert der Integrationskonstante C bestimmt die Randbedingung: zur Zeit $t = 0$ ist $\vartheta = \vartheta_0$; hiemit sowie nach Einführung des Verhältnisses der Oberfläche zum Rauminhalt $f/v = k$ und Umformung erhalten wir

$$\vartheta = \frac{1}{\left(\frac{k}{3,36\gamma cl^{1/4}} t + \frac{1}{\vartheta_0^{1/4}}\right)^4}. \quad (10)$$

Die Bedingung für die Anwendung obiger Gleichung ist $(Gr \cdot Pr) = 5 \cdot 10^2 \dots \dots 2 \cdot 10^7$. Bei größeren Werten von $(Gr \cdot Pr)$ muß mit a_3 gerechnet werden, es ergibt sich

$$\vartheta = \frac{1}{\left(\frac{k}{2,17\gamma c} t + \frac{1}{\vartheta_0^{1/3}}\right)^3}. \quad (11)$$

Man kann auch fragen, nach wie langer Zeit die Temperaturdifferenz zwischen dem Körper und der Luft einen bestimmten Bruchteil des ursprünglichen Wertes, z. B. den p -ten Teil, erreicht. Es sei die fragliche Zeit t_1 , die zugehörige Temperatur $\vartheta_1 = p\vartheta_0$, $0 < p < 1$. Dann ist im Falle von Gleichung (10)

$$p\vartheta = \frac{1}{\left(\frac{k}{3,39\gamma cl^{1/4}} t_1 + \frac{1}{\vartheta_0^{1/4}}\right)^4}$$

und daraus

$$t_1 = \frac{(p^{-1/4} - 1) 3,39 \gamma cl^{1/4}}{k \vartheta_0^{1/4}}. \quad (12)$$

In ähnlicher Weise gilt, falls Formel (11) anzuwenden ist,

$$t_1 = \frac{(p^{-1/3} - 1) 2,22 \gamma c}{k \vartheta_0^{1/3}} \quad (13)$$

Im Falle von einfachen geometrischen Körpern (Kugel, Würfel, Platte, Zylinder usw.) kann das Verhältnis k in einfacher Weise bestimmt werden. Bei komplizierteren Gegenständen, die aus mehreren einfachen geometrischen Körpern zusammengesetzt sind, kann die hier beschriebene Näherungsmethode nur angewendet werden, wenn k für jeden einzelnen Teil des Körpers den gleichen, oder zumindest annähernd gleichen Wert besitzt. Z. B. können die Formeln (10) und (11) nicht auf den Fall der Abkühlung einer mit dünnen Kühlrippen versehenen dicken Wand angewendet werden.

Was die durch Einführung einer unendlich großen Wärmeleitfähigkeit verursachten Fehler anbetrifft, so wollen wir über deren Größenordnung sowie über den Anwendungsbereich der Formeln dadurch Aufschluß gewinnen, daß wir die genannten Formeln mit den exakten Formeln für einen einfachen Körper vergleichen. Zu diesem Zweck leiten wir die Näherungsformeln auch aus den exakten Formeln ab, und zwar für den Fall der Kugel.

Für die Kugel ist die Temperaturänderung [1]

$$\vartheta = \vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} \cdot e^{-\mu_n^2 \frac{ct}{R^2}} \cdot \frac{\sin\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n \frac{r}{R}} \quad (14)$$

wo μ_n die unendlich vielen Wurzeln der Gleichung

$$1 - hR = \mu \cotg \mu \quad (15)$$

sind, R der Halbmesser der Kugel in m, r der auf den Mittelpunkt bezogene Radiusvektor eines Punktes der Kugel.

Die Rechnung beschränken wir auf kleine Werte von (hR) , für welche $0 < hR \ll 1$ gilt. Dann sind die folgenden Vereinfachungen berechtigt:

a) Nur das erste Glied der unendlichen Reihe wird berücksichtigt,

$$b) \quad \frac{\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1}{\mu_1 - \sin \mu_1 \cos \mu_1} \approx 0,5$$

$$c) \quad \frac{\sin\left(\mu_1 \frac{r}{R}\right)}{\mu_1 \frac{r}{R}} \approx 1$$

$$d) \quad \mu_1 \approx \sqrt{3hR}$$

Den Zusammenhang zwischen hR und μ_1 , sowie die zugehörigen Zahlenwerte sind in Zahlentafel II für kleine Werte von hR angeführt.

Zahlentafel II

Zahlenwerte zu den Gleichungen (14), (15) und d)

hR	μ_1	$\frac{\sin \mu_1}{\mu_1}$	$\frac{\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1}{\mu_1 - \sin \mu_1 \cos \mu_1}$	$\sqrt{3 hR}$
0	0	1	0,5	0
0,01	0,173	0,995	0,501	0,173
0,02	0,242	0,990	0,503	0,245
0,05	0,385	0,975	0,507	0,387
0,1	0,542	0,952	0,515	0,545
0,2	0,759	0,907	0,530	0,775
0,5	1,166	0,788	0,572	1,225

Die Zahlentafel zeigt, daß noch bis zu $hR = 0,1$ die Bedingungen *b*), *c*) und *d*) mit guter Annäherung erfüllt sind; die Fehler gleichen sich zum Teil aus.

Gleichung (14) nimmt nun folgende Form an :

$$\vartheta \approx \vartheta_0 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot e^{-3 hR \frac{a}{R^2} t} \cdot 1$$

und da für die Kugel $k = \frac{4 R^2 \pi}{3 R^3 \pi} = \frac{3}{R}$ und ferner $ha = \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{c\gamma} = \frac{a}{c\gamma}$,

$$\vartheta \approx \vartheta_0 e^{-k \frac{a}{c\gamma} t} \quad (16)$$

wo, im Gegensatz zu (10) und (11), $a = \text{const.}$ Diese Formel kann auch so abgeleitet werden, daß in die Wärmebilanz (1) ebenfalls $a = \text{const}$ eingesetzt wird, an Stelle der Werte aus (8) bzw. (9).

Wenn wir also die bei der Ableitung der Gleichungen (10) und (11) angewendeten Näherungen noch durch $a = \text{const}$ ergänzen, so erhalten wir dasselbe Ergebnis wie mit Hilfe der zwecks Ableitung von Gleichung (16) eingeführten Näherungen. In beiden Fällen ist der Fehler von der gleichen Größenordnung. Da nun jedoch bei der Ableitung von (10) und (11) a als veränderlich angenommen wurde, so führen die letztgenannten Gleichungen offenbar zu genaueren Ergebnissen als (16), ja sogar innerhalb gewisser Grenzen geben (10) und (11) der Wirklichkeit besser entsprechende Ergebnisse als Gleichung (14) bzw. die hierzu analogen Gleichungen für Zylinder und Platte, da ja bei deren Ableitung ebenfalls a (zu Unrecht) als konstant in Rechnung gestellt wurde.

Die Näherungsmethode wollen wir auch noch durch Nachrechnung eines Versuchsergebnisses kontrollieren. HODAM (4) untersuchte unter anderem auch die Abkühlung eines waagrecht frei aufgehängten Endmaßes von 100 mm. Der Versuch hatte informativen Charakter, außerdem blieb bloß ein Diapositiv erhalten, welches nachträglich umgezeichnet wurde. Die Rechnung geht von den folgenden Angaben aus :

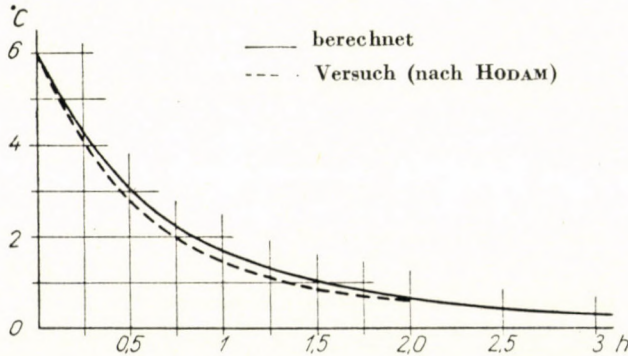


Abb. 1. Abkühlung eines Endmaßes von 100 m.

Der Abkühlung unterworfenen Körper : Parallelepiped 0,100 m \times 0,35 m \times 0,009 m

Werkstoff des Körpers : Stahl $\gamma = 7850 \text{ kg/m}^3$, $c = 0,11 \text{ kcal/kg } ^\circ\text{C}$

Charakteristische Abmessung : $l = 0,035 \text{ m}$

Verhältnis Oberfläche/Rauminhalt : $k = \frac{2}{0,100} + \frac{2}{0,035} + \frac{2}{0,009} = 299,4$

Anfängliche Übertemperatur : $\vartheta_0 = 6^\circ \text{C}$

PRANDTL-Zahl für Luft : $Pr = 0,72$ [2]

GRASHOF-Zahl : $Gr = \frac{g l^3 \beta}{\nu^2} \vartheta = \frac{9,81 \cdot 0,035^3}{(16,0 \cdot 10^{-6})^2} \cdot \frac{1}{273 + 20 + \frac{6}{2}} = 33,4 \cdot 10^3$

(Die physikalischen Daten für Luft sind für die bereits erwähnte Temperatur τ_m einzusetzen.)

$$Pr \cdot Gr = 0,72 \cdot 33,4 \cdot 10^3 = 2,4 \cdot 10^4$$

$$5 \cdot 10^2 < (Pr \cdot Gr) < 2 \cdot 10^7,$$

daher ist Formel (10) anzuwenden :

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{\left(\frac{k}{3,39 \gamma c l^{1/4}} t + \frac{1}{\vartheta_0^{1/4}} \right)^4} = \frac{1}{\left(\frac{299,4}{3,39 \cdot 7850 \cdot 0,11 \cdot 0,035^{1/4}} t + \frac{1}{6^{1/4}} \right)^4} = \\ &= \frac{1}{(0,24 t + 0,64)^4} \end{aligned}$$

Abb. 1 vergleicht die Rechnung und das Versuchsergebnis; es kann festgestellt werden, daß in Anbetracht der Umstände die Genauigkeit der Näherungsmethode als ausgesprochen gut zu bezeichnen ist. Immerhin wären zur experimentellen Bestätigung Versuche mit größeren Körpern und höheren Werten von ϑ_0 erwünscht.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die hier vorgeschlagene Methode sinngemäß auch in anderen Fällen als in dem hier behandelten angewendet werden kann. Z. B. können mit Flüssigkeit gefüllte Behälter mehr oder weniger der Bedingung entsprechen, daß die Wärmeleitfähigkeit als unendlich angesehen werden kann, und zwar wegen der freien oder erzwungenen Strömung der Flüssigkeit.

SCHRIFTTUM

1. GRÖBER—ERK—GRIGULL: Wärmeübertragung. Berlin usw. 1955.
2. M. A. MICHEJEW: Grundlagen der Wärmeübertragung. Russische Ausgabe: Moskau—Leningrad 1949; ungarische Ausgabe: Budapest, 1956.
3. H. D. BAEHR: Die Berechnung der Kühldauer bei ein- und mehrdimensionalem Wärmefluß. Kältetechnik 1953, Heft 9.
4. F. HODAM: Meßraumklima und Meßgenauigkeit. Feingerätetechnik 1952, Heft 4.
5. G. BERNDT: Grundlagen und Geräte technischer Längenmessungen. Berlin 1929.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Berechnung des freien Wärmeübergangs von geometrisch einfachen Körpern in Luft ist bekannt, jedoch kompliziert. Für nicht allzu große metallische Körper, können einfache Näherungsformeln abgeleitet werden, von denen jedoch innerhalb bestimmter Grenzen verlässlichere Ergebnisse erwartet werden können als von den exakten Formeln, da auch die Änderung der Wärmeübergangszahl in Abhängigkeit von der Temperatur in Betracht gezogen wird. Darüber hinaus kann in gewissen Fällen das Verfahren auch auf kompliziertere metallische Körper angewendet werden und schließlich ergibt sich die Möglichkeit, es auch auf anderen Gebieten anzuwenden, z. B. bei Flüssigkeitsbehältern.

APPROXIMATE COMPUTATION OF HEAT TRANSFER, BY FREE CONVECTION, FROM METALLIC BODIES WITHOUT HEAT SOURCES TO THE AIR

P. BONDY

SUMMARY

The methods for the computation of the heat transfer from bodies of simple shape to the air are known, but complicated. For not too large metallic bodies, simple formulae may be developed which, within certain limits, give better results than the exact formulae, because the variation of the heat transfer coefficient as a function of temperature has been taken into account. Moreover, in certain cases the method can be used for more complicated metallic bodies and finally it is possible to apply it also in other fields, e. g. for vessels filled with liquids.

CALCUL APPROCHÉ DE LA TRANSMISSION DE LA CHALEUR PAR CONVECTION LIBRE, ENTRE L'AIR ET LES CORPS MÉTALLIQUES SANS SOURCES DE CHALEUR

P. BONDY

RÉSUMÉ

Le calcul de la transmission libre de la chaleur entre les corps de forme simple et l'air ambiant est connu, mais compliqué. Pour les corps métalliques pas trop grands, on peut déduire des formules approchées simples, qui donnent néanmoins, dans certaines conditions, des résultats meilleurs que les formules exactes, étant donné que l'on tient compte des changements du coefficient de transmission de la chaleur, en fonction de la température. De plus, on peut aussi, dans certains cas, appliquer cette méthode à des corps métalliques plus compliqués. Il y a enfin possibilité de l'utiliser dans d'autres cas, par exemple pour des récipients remplis de liquide.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ, НАХОДЯЩИХСЯ В СРЕДЕ ВОЗДУХА И НЕ ИМЕЮЩИХ ТЕПЛООВОГО ИСТОЧНИКА

П. БОНДИ

РЕЗЮМЕ

Методика вычисления свободного охлаждения в среде воздуха простых геометрических тел, не обладающих источником тепла, известна, но является сложной. Для небольших металлических тел, например, деталей машин средних размеров представляется возможным вывести упрощенные формулы, с помощью которых несмотря на использованные приближения можно ожидать более достоверных результатов, чем с помощью точных формул, т. к. они учитывают также зависимость коэффициента теплопередачи от температуры. Кроме того, в определенных случаях методика может быть применена и для комбинированных металлических тел и, наконец, открывается возможность применения и в других областях как, например, для резервуаров жидкостей.

ON A PROBLEM OF SLOWING DOWN NEUTRONS

M. UZSOKY

DEPARTMENT FOR ATOMIC PHYSICS, CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received 24th, April 1957]

Notations:

A = atomic weight

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2 \quad \kappa = \ln \alpha^{-1}$$

$$\beta = \frac{\kappa}{1-\alpha} \quad \xi = 1 - \beta + \kappa$$

$F(z)$ = collision density

$S(z)$ = source density

$$z = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{E_{ref}}{E}$$

E = neutron energy

E_{ref} = reference energy

$$p(z) = \begin{cases} s \exp -\kappa z \\ 0 \end{cases} \quad \text{for} \quad \begin{cases} 0 < z < 1 \\ \text{in other cases} \end{cases}$$

... * ... = convolution

The slowing down of neutrons without absorption in media containing nuclei of identical mass has been treated repeatedly in literature [1, 2]. Although this mathematical model of slowing down does not apply virtually to many cases, its relatively easy treatment presents a basis for an admissible approximation in solving more complicated problems. In the following we should like to add some considerations to the discussion of above simple slowing down model.

I. The expression of the collision density given in the form of a series of functions may be obtained in a closed form by means of the "Verzögerungsfunktion" (Delay function). As it is known, the neutron energies being expressed to a logarithmic scale, the collision density satisfies the following integral equation

$$F(z) = S(z) + p(z) * F(z).$$

The solution may be obtained by Laplace transformation

$$F(z) = S(z) + I(z) * S(z)$$

where

$$\mathcal{L}[\Gamma(z)] = \frac{\mathcal{L}[P(\cdot)]}{1 - \mathcal{L}[p(z)]} = \beta \frac{1 - \exp(-s - \varkappa)}{s + \varkappa - \beta + \beta \exp(-s - \varkappa)}$$

By using the definition of the Verzögerungsfunktion applied and tabulated in control technics [3]

$$\eta(x, a) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{\{x - k\}^k}{k!}$$

where

$$\{x\} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{for } x \begin{pmatrix} > \\ \leq \end{pmatrix} 0$$

hence by simple rearrangement, taking into account the formula:

$$\mathcal{L}[\eta(x, a)] = \frac{1}{s + a \exp - s}$$

the following relation is obtained:

$$\Gamma(z) = \beta e^{(\beta - \varkappa)z} [\eta(z; \beta e^{-\beta}) - e^{-\beta} \eta(z - 1) \beta t^{-\beta}].$$

Thus instead of the usual series we have found a closed form for the expression of the collision density.

II. In order to treat the asymptotical behaviour it is useful to develop the Dirichlet series of $\Gamma(z)$, which is obtained by means of the residue law applied to the inversion formula of RIEMANN-MELLIN. Here we may depart from the following statements:

1. Singular points for the finite line are only at the zero loci of the denominator.
2. The zero loci of the denominator are single.
3. The denominator has two real roots:

$$s = 0 \quad \text{and} \quad s = -\varkappa.$$

4. The complex roots are situated on the curve:

$$(x + \varkappa - \beta)^2 + y^2 = \beta^2 \exp - 2(x + \varkappa); \quad s = x + jy$$

because of the denominator being zero,

$$|s + \varkappa - \beta| = \beta |\exp - (s + \varkappa)|.$$

The indices are chosen in order that

$$s_0 = -\varkappa$$

and for $k < l$ it should be that $jm s_k < jm s_l$

5. As for the density of roots it is given by the following inequality

$$2\pi|h| < |y a| < 2\pi \left(|h| + \frac{1}{4} \right)$$

which is the consequence of the following equality readily to be seen :

$$\arg (\beta - \kappa - s_h) \exp s_h = 2\pi k$$

6. Among above roots the only one which is not a pole is

$$s_0 = -\kappa$$

It is evident from the above considerations that each of the roots

$$s_h^{(n+1)} = -\kappa - \ln [\beta - \kappa - s_h^{(n)}]$$

is to be obtained by a fairly convergent iteration departing from the value of

$$s_h^{(0)} = -\kappa + 2\pi h j.$$

Knowing the roots, the Dirichlet series of $\Gamma(z)$ giving the function for the positive z may be written as

$$\Gamma(z) = \frac{\kappa}{\xi} + \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{s_h + \kappa}{s_h + \xi} \exp s_h z.$$

Now for the deviation of $\Gamma(z)$ from the asymptotic value, following boundary may be applied :

$$\begin{aligned} \left| \Gamma(z) - \frac{\kappa}{\xi} \right| &= \left| \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{s_h + \kappa}{s_h + \xi} \exp z s_h \right| < 2 \sum_{h=1}^{\infty} \left| \frac{s_h + \kappa}{s_h + \xi} \right| e^{z s_h} < 2 \sum_{h=1}^{\infty} e^{z s_h} < \\ &< 2 \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \xi}{2 h \pi} \right)^z = 2 \left(\frac{1 - \xi}{2 \pi} \right)^z \zeta(z) \end{aligned}$$

for $z > 1$.

The majoration to unity of the expression of the linear fraction s_h can be carried out as the semiplane $Re s < -\kappa$ is formed in the interior of the circle of a diameter of $(0,0)$; $(0,1)$, and the exponential expression is

$$\exp x_h = \frac{\beta e^{-\kappa}}{\sqrt{(x h + \kappa - s)^2 + y_h^2}} < \frac{\beta e^{-\kappa}}{|y_h|} - \frac{1 - \xi}{|y_h|} < \frac{1 - \xi}{2\pi k}$$

according statements to 4 and 5.

Finally the inequality

$$\left| \Gamma(z) - \frac{\varkappa}{\xi} \right| < 2 \left(\frac{1 - \xi}{2\pi} \right)^z \zeta(z)$$

shows the rapid convergence to the asymptote.

REFERENCES

1. R. PLACZEK: Phys. Rev. 69, 1946, 426.
2. PÁL, L.: A neutronok lassításának néhány kérdéséről. (Some problems of slowing down neutrons.) Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Academy I. 41. 1956 (Hungarian).
3. E. ALTENKIRCH: Verzögerungs-Funktion. (Verlag Technik, Berlin) (1952).

SUMMARY

The collision density of the slowing down of neutrons without absorption in homogeneous media is expressed in a closed form. The deviation from the asymptotic value for collision density is considered. For the deviation a limit is obtained which cannot be improved essentially.

ÜBER EIN PROBLEM DER VERLANGSAMUNG VON NEUTRONEN

M. UZSOKY

ZUSAMMENFASSUNG

Die Stoßdichte bei der Verlangsamung von Neutronen in homogenen Medien wird in geschlossener Form ausgedrückt. Die Abweichung vom asymptotischen Wert für die Stoßdichte wird behandelt. Für die Abweichung wird eine Schranke erhalten, welche nicht wesentlich verbessert werden kann.

UN PROBLÈME DU RALENTISSEMENT DU NEUTRONS

M. UZSOKY

RÉSUMÉ

La densité des collisions au ralentissement, sans absorption, des neutrons dans des moyens homogènes est exprimé sans utilisation de séries infinies. L'écart par rapport à la valeur asymptotique de la densité des collisions est considéré. Pour cet écart, une limite est obtenue qui ne peut pas être améliorée essentiellement.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ЗАМЕДЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ

М. УЖОКИ

РЕЗЮМЕ

Плотность столкновения при замедлении нейтронов в однородной среде без абсорбции выражена в закрытой форме. Автор рассматривает отклонение от асимптотического значения плотности столкновения. Для этого отклонения существует порог, который нельзя существенным образом снизить.

MEMBRANE STRUCTURES WITH FREE EDGES

J. PELIKÁN

C. ENG. SC.

DEPARTMENT OF FRAME WORKS, UNIVERSITY OF BUILDING SC. AND COMMUNICATIONS, BUDAPEST

[Manuscript received 24th April 1957]

1. Introduction

The author has treated the definition, analysis and mode of application of membrane structures in a previous paper [1]. To facilitate the understanding of the following it suffices to quote briefly the definition of membrane structures. Membrane structures are among shells without bending those which include in their differential equation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - G = 0 \quad (1)$$

the stress function

$$F = \frac{n}{2} (x^2 + y^2)$$

i. e. the internal forces characteristic of the stress state (second partial derivatives of the stress function) are the following :

$$n_x = n_y = n \quad \text{and} \quad n_{xy} = n_{yx} = 0. \quad (2)$$

That is, in other words, projections of stresses of membrane structures follow the same law as the original stresses of membranes submitted to overpressure. If the loading is weight load, and has a constant value Z (this is practically almost always the case) the differential equation (1) takes the following form :

$$\Delta f = \frac{Z}{n} = \text{const.} \quad (3)$$

or is identical with that of the differential equation of membranes under overpressure. From equation (3) the function f of the middle surface of the membrane structure — that is, the value of function f at any number of points — is in the simplest way obtained by relaxation. Fig. 1 shows an example of the shape of the surface.

From equations (2) and from Fig. 1 it might be concluded that for taking reactions of membrane structures vertical walls should be applied unconditionally on the boundary (for taking vertical components of reactions), moreover structures working in the horizontal plane, such as adjoining roofs (floors), edge girders, pull bars (Fig. 1) etc should be applied for taking the horizontal component of the reaction.

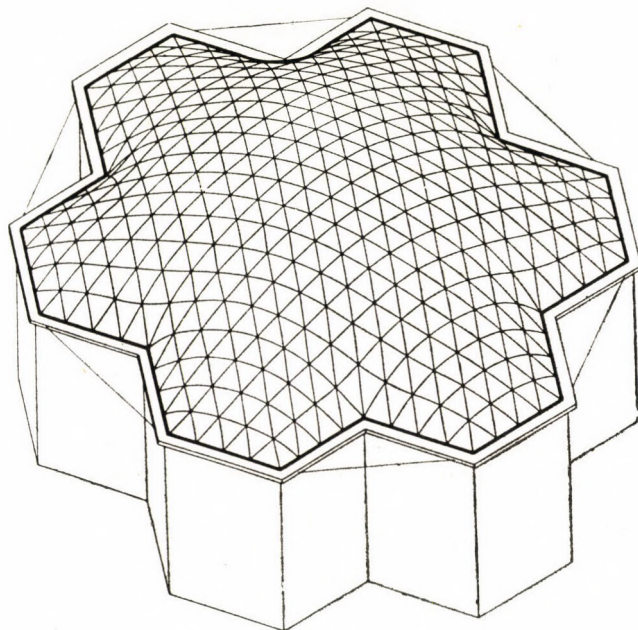


Fig. 1

However, this paper aims just at the demonstration that membrane structures can be executed with free edges too, that is, neither vertical walls nor structures bent or tensioned in the horizontal plane are required on the boundary, but boundary forces can also be taken by an edge girder not submitted to bending, shaped after a space curve. Of course not only the possibility of solution will be proved, but the method of solution and its practical execution will also be presented. On the other hand, the problem of the stability of the membrane and of the edge girder will be excluded from treatment.

2. Possibility of solution

The following statement has first to be proved :

If a space curve is the rope polygon of a system of space forces acting on it, then the projection of the curve upon an arbitrary plane is also the rope polygon

of the projection of the system of forces upon the same plane. It suffices to verify the statement for the case of a space polygon only, for the space polygon can be transformed to a space curve, if its points are approached to one another beyond all limits. At the same time the system of forces acting concentrated at the points of the polygon passes into a system of distributed forces.

For the case of the polygon the verification can be executed in the following way: Of the polygon two contiguous sides are cut out by sections taken at the middle of the polygon sides. On this element three forces are acting, at each of the section points an internal force of the direction of the polygon side and at the common point of the two sides the external concentrated force. The latter force, of course, has to fall into the plane defined by the two polygon sides. In the same plane is drawn the vector diagram of the three forces, which will be, of course, a vector triangle in the case of equilibrium. Now if this plane with the vector diagram contained therein and with the configuration loaded by three concurrent forces is projected on to an arbitrary plane, again three forces of common point of intersection will load the projection of the configuration; internal forces are again axial and the vector diagram of the loading forces is again a closed triangle. That is the projection of the polygon section is the rope polygon of the projections of forces. Since this holds for each section, and the vector diagram of the entire polygon can be composed of the individual vector triangles, the above statement is right. However, the verification, of the theorem is found elsewhere [2] on a line different from the one here demonstrated.

If the above theorem is applied to membrane' structures the edge curve of which is the rope curve of edge forces, then because of the properties of membrane forces as per (2) it follows from the theorem that *the horizontal projection of the edge curve has to be a circular arc.*

However, this is only the necessary but not yet satisfactory condition of the edge curve being a rope curve. But if also the condition is fulfilled, that *the edge forces fall at any point into the osculatory plane of the edge curve at that point,* then the edge curve is really a rope curve.

It will be shown first on two simple examples that both conditions can be met. Both examples present a membrane having a surface of rotation, therefore the basic equation written in polar coordinates

$$\Delta f(r, \varphi) = \frac{Z}{n} \quad (4)$$

will not be a partial differential equation, but, since f is now a function of r it will be the following common differential equation

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = \frac{Z}{n} \quad (5)$$

The general solution of equation (5) is

$$f = C_1 \ln r + \frac{Z}{4n} r^2 + C_2. \quad (6)$$

Example 1. The membrane is bounded by two boundaries: circle of radius r_0 outside and circle of radius r_i inside. Let the outer boundary be free. The outer boundary being a plane curve, its osculatory plane is at any point the plane of this curve and is tangent to the surface along the edge. Vertical distances are laid off from the inner circle.

From general solution (6) the solution suiting the problem is obtained if the two free constants are determined from the conditions:

$$\frac{df}{dr}(r = r_0) = 0 \quad \text{and} \quad f(r = r_i) = 0.$$

The solution is thus

$$f = \frac{Z}{4n} [r^2 - r_i^2 - 2r_0^2 (\ln r - \ln r_i)].$$

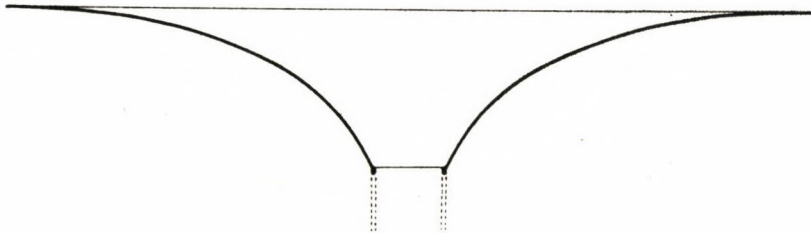


Fig. 2

If n is taken for negative (compression) the membrane of mushroom from shown in Fig. 2 is obtained.

The free edge is in tension. It is expedient to take the tensile force by prestressed cables, because in this case deformations of the edge member and of the membrane can be made to agree with each other.

On the inner boundary of course a compression member is to be applied whose dimensions are chosen in a way that deformations agree in this case too.

Example 2. Let now the inner boundary be free. The free constants of the general solution (6) are now obtained from the following two conditions:

$$\frac{df}{dr}(r = r_i) = 0 \quad \text{and} \quad f(r = r_0) = 0$$

The solution:

$$f = \frac{Z}{4n} [2r_i^2 (\ln r_0 - \ln r) + r^2 - r_0^2].$$

If n is again chosen as compression the open dome shown in Fig. 3 is obtained. Now the free boundary is in compression. Therefore a compression ring (imagined weightless for the time) will be necessary here. Here too, it will be expedient to take up the tensile force acting on the outer boundary by prestressed cables.

The above two examples are particular from several points of view. First the middle surface was described in both cases by a single-variable function. Thus only a common differential equation had to be solved. Secondly the free edge was a plane curve, and so the determination of the osculatory plane did

not cause much concern. Thirdly the edge member necessary on the free boundary was considered weightless. The latter assumption is absolutely permissible in the case of an edge member in tension and is even admissible also in a compression edge member in most cases. For the sake of general validity, however, these three features will be disregarded, and the problem will be treated on the following assumptions :

- a) The surface is a two-variable function, therefore the differential equation of the problem is a partial one.
- b) The free edge is a space curve not known beforehand.
- c) The edge member has weight.

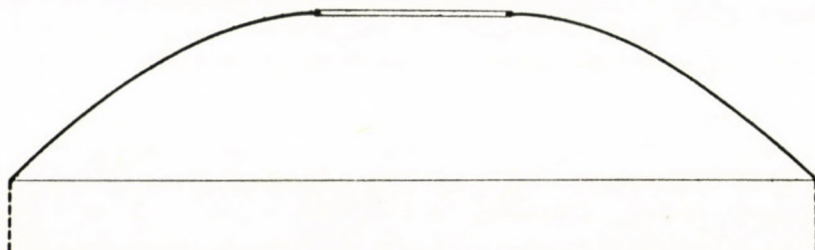


Fig. 3

Anyway condition *c)* will be mitigated by assuming the weight of the edge member referred to unit projection length to be constant. This condition can be fulfilled exactly by adjusting the overhang of the cornice, since there is usually a cornice joining the edge member.

Besides the features presented the two examples shown are particular in two other senses, namely, in both cases the membrane had two boundaries, that is the membrane surface was doubly connected. In this respect the problem in this paper will not be generalized but will rather be restricted and only membranes of simply connected surface will be dealt with. In other words, it will always be supposed that the membrane is bordered by a single boundary. Of course this single boundary cannot be free everywhere, the membrane has to be supported at least at three points. In general it is supported at more points or along one or more sections of the boundary, and the latter is free only between these points or sections. Of course, only on the free section has the boundary to be a circular arc in ground plan, elsewhere its shape is not restricted. If on the non-free parts of the boundary the value of the function is given, in the free part only the ground plan of the boundary can be prescribed, the values of the function (height dimensions) not. Surely, if the peripheral function values were given everywhere, load Z and the prescribed force n would entirely define the surface and the free edge curve could not be in general the rope curve of the forces acting on it. The case is also imaginable, that the function value

is given on the free boundary and of the non-free boundary only the ground plan is known, but this case will not be dealt with in this paper. There is a very rich choice of shapes even so. The non-free boundary can be varied in ground plan and height, the radius (or radii) of the circular arc (or arcs) of the ground plan of the free boundary can be varied. In the edge member and in the membrane itself tension or compression can be prescribed at will. Possibilities can be extended still more by the application of inner ribs.

3. The method of solution

Since the domain investigated in the problem is circle-bounded, basic equation (4) written in polar coordinates has to be operated with. Since a practical

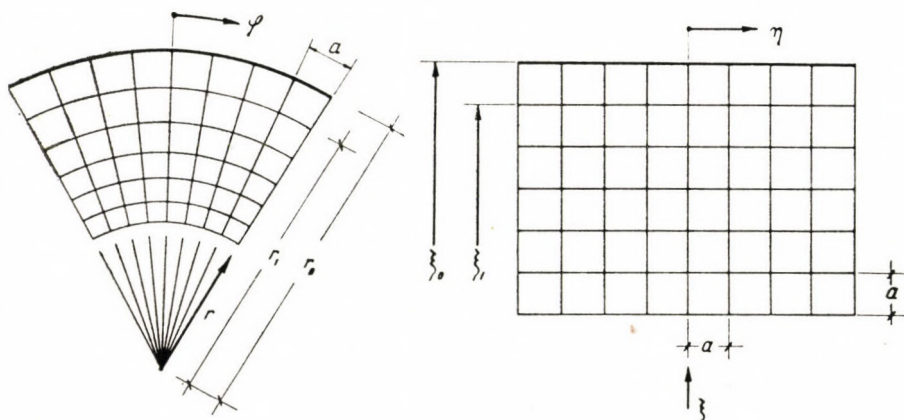


Fig. 4

solution is imaginable only by relaxation and this too only with the aid of a square net the circular domain has to be transformed to a quadratic one. For this purpose into the basic equation

$$\Delta f(r, \varphi) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \frac{Z}{n}$$

the new variables

$$\xi = \ln r \quad \text{and} \quad \eta = \varphi \quad (7)$$

are introduced. Thereby the basic equation takes the form

$$\Delta f(\xi, \eta) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{Z}{n} r^2.$$

A square net can thus be operated with, where, however, the residual equation varies by rows (with the change of r). The fact that point $r = 0$ cannot be projected does not cause any difficulty because, if this is an internal point, it can be approached at will.

One section of the original and of the transformed domain is shown in Fig. 4.

The transformed net is a quadratic one, that is

$$\xi_i - \xi_{i+1} = \eta_{i+1} - \eta_i = a.$$

From transformation formulas (7) follows that

$$\ln r_i - \ln r_{i+1} = \varphi_{i+1} - \varphi_i = a.$$

In other words, in the original net the radii of the network make equal angles a , and the ratio of radii of contiguous circles is constant. Namely since

$$\ln r_i - \ln r_{i+1} = \ln \frac{r_i}{r_{i+1}} = a$$

$$\frac{r_i}{r_{i+1}} = e^a = \text{const.}$$

This also means that the original net is in a certain sense also a "quadratic" one, since the net lines are here also square with each other, and the mean width of the „squares" is equal to their height; in other words, with reduction of a the radial dimension also tends toward the limit value $r \cdot a$. Briefly said, the projection is also conformal.

Since in practice angle a is not arbitrary but an m -th part of 2π (where m is an integer), the values most required for calculation were listed in Table I. To reduce the number of digits 10,000 times the $a \cdot r^2/r_0^2$ values were given.

The tabulated data refer to the case of projection according to Fig. 4, that is to the case where the centre of the circular arc of the edge projection falls toward the inside of the membrane. This occurs if membrane and edge are stressed in the opposite sense, that is in case of a membrane in tension and an edge in compression. Or membrane in compression and edge in tension.

If membrane and edge are stressed in the same sense, that is both in compression or both in tension, then the circular arcs of the edge projection are convex toward the inside of the membrane, that is the centre of the circular arc falls toward the outside of the membrane. In this case projection is according to Fig. 5.

With notations of Fig. 5 now

$$\frac{r_i}{r_{i+1}} = e^a = \text{const.}$$

Data necessary for calculation are now listed in Table II, though Table I could be used in this case too (namely if not the radius belonging to the edge is taken for r_0). In Table II values $a \cdot r^2/r_0^2$ themselves are listed.

What is left to do still is to formulate the condition assuring that the force p transferred from the membrane to the edge always fall into the osculatory plane of the edge curve, or, if the edge member has weight and its weight per unit length of the projection is g , it has to be postulated that the resultant of forces p and g fall into the osculatory plane of the edge curve. The condition

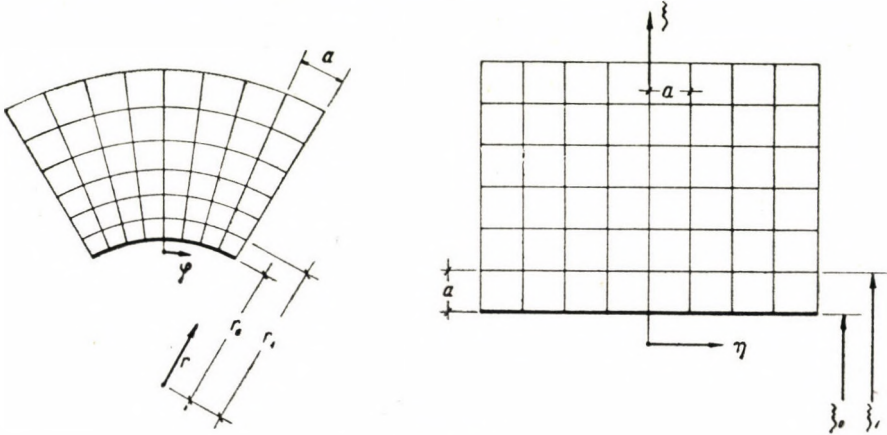


Fig. 5

will be formulated for the latter more general case. For this purpose it has to be formulated that the binormal \mathbf{b} of the edge curve and the vector \mathbf{r} of the resultant be perpendicular to each other, that is :

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} = 0.$$

The equation of the edge curve is obtained from that of the membrane surface if the peripheral value r_0 is substituted for variable r . That is the equation of the edge curve in the system of polar coordinates :

$$z = f(r = r_0) = f_1(\varphi).$$

For vector calculation it will be necessary to write the equation in vector form, angle φ chosen for parameter. Thus with notations of Fig. 6.

$$\mathbf{d} = \begin{cases} r_0 \cos \varphi \\ r_0 \sin \varphi \\ f_1(\varphi) \end{cases}$$

The binormal of edge curve

$$\mathbf{b} = \rho \mathbf{d}' \mathbf{d}''$$

where ρ denotes the radius of curvature of the edge curve and primed letters mean derivatives with respect to the arc length. Furthermore derivatives

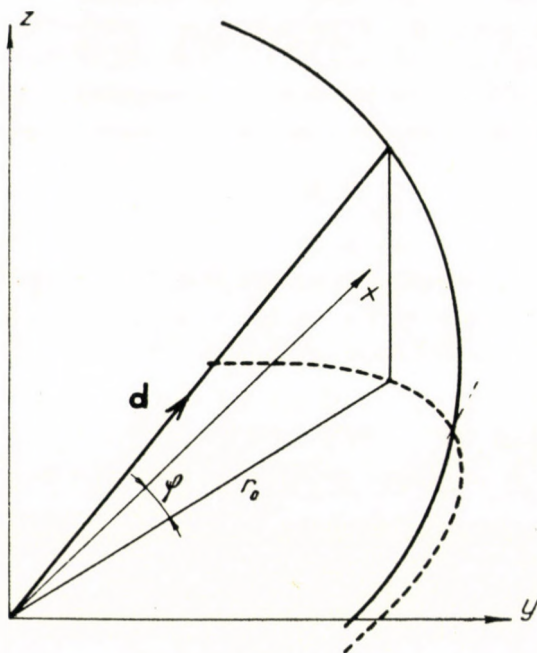


Fig. 6

with respect to arc length may be expressed in the following by derivatives with respect to φ marked by dots :

$$\mathbf{d}' = \frac{\mathbf{d}\cdot}{\sqrt{\mathbf{d}\cdot^2}} ; \quad \mathbf{d}'' = \frac{1}{\mathbf{d}\cdot^2} (\mathbf{d}\cdot\cdot - A \mathbf{d}\cdot)$$

where

$$A = \frac{\mathbf{d}\cdot \mathbf{d}\cdot\cdot}{\mathbf{d}\cdot^2} .$$

The necessary magnitudes in proper order :

$$\mathbf{d}\cdot = \begin{pmatrix} -r_0 \sin \varphi \\ r_0 \cos \varphi \\ f_1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{d}\cdot\cdot = \begin{pmatrix} -r_0 \cos \varphi \\ -r_0 \sin \varphi \\ f_1\cdot \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}\cdot^2 = r_0^2 + f_1^2$$

$$\mathbf{d}' = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + f_1^2}} \begin{pmatrix} -r_0 \sin \varphi \\ r_0 \cos \varphi \\ f_1\cdot \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}'' = \frac{1}{r_0^2 + f_1^{*2}} \begin{pmatrix} -r_0 \cos \varphi + A r_0 \sin \varphi \\ -r_0 \sin \varphi - A r_0 \cos \varphi \\ f_1^{**} - A f_1^* \end{pmatrix}.$$

Therefore the binormal is given by the following matrix :

$$\mathbf{b} = \frac{\varrho}{(r_0^2 + f_1^{*2})^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} -r_0 \sin \varphi & r_0 \cos \varphi & f_1^* \\ r_0 (A \sin \varphi - \cos \varphi) & -r_0 (A \cos \varphi + \sin \varphi) & f_1^{**} - A f_1^* \end{vmatrix}.$$

Introduction of the brief notation of

$$B = \frac{\varrho}{(r_0^2 + f_1^{*2})^{\frac{3}{2}}}$$

and calculation of components for the binormal yield the following result after factoring out r_0 figuring in each component :

$$\mathbf{b} = B r_0 \begin{pmatrix} \cos \varphi (f_1^{**} - A f_1^*) + f_1^* (A \cos \varphi + \sin \varphi) \\ \sin \varphi (f_1^{**} - A f_1^*) + f_1^* (A \sin \varphi - \cos \varphi) \\ r_0 \sin \varphi (A \cos \varphi + \sin \varphi) - r_0 \cos \varphi (A \sin \varphi - \cos \varphi) \end{pmatrix}.$$

The force loading the edge member :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mp n \cdot \cos \varphi \\ \mp n \cdot \sin \varphi \\ \mp n \frac{\partial f}{\partial r} (r = r_0) - g \end{pmatrix}.$$

From the selectable signs the first refers to the case of the convex edge (Fig. 4), the second to that of the concave edge (Fig. 5).

The following abbreviations will be introduced :

$$g = \gamma \cdot n$$

and

$$\frac{\partial f}{\partial r} (r = r_0) = f_2(\varphi).$$

With these

$$\mathbf{r} = \mp n \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ f_2 \pm \gamma \end{pmatrix}.$$

Now it may be written that \mathbf{b} is perpendicular to \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} = \mp n \cdot B \cdot r_0 [& \cos^2 \varphi (f_1^{**} - A f_1^*) + f_1^* (A \cos \varphi + \sin \varphi) \cos \varphi + \\ & + \sin^2 \varphi (f_1^{**} - A f_1^*) + f_1^* (A \sin \varphi - \cos \varphi) \sin \varphi + r_0 (f_2 \pm \\ & \pm \gamma) (A \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \sin^2 \varphi - A \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi)] = 0. \end{aligned}$$

After simplification the following condition is obtained :

$$f_1'' + r_0 (f_2 \pm \gamma) = 0 .$$

After omission of abbreviations and return to the equation of the membrane surface again the condition may be written in the following form too :

$$\boxed{\frac{d^2}{d\varphi^2} [f(r=r_0)] + \frac{r_0}{n} \left[n \frac{\partial f}{\partial r} (r=r_0) \pm g \right] = 0} , \quad (8)$$

or, since the value in the second square bracket is the value per unit length of the vertical component v of the force loading the edge member, it may also be written in the following form :

$$\frac{1}{r_0^2} \frac{d^2 f_1}{d\varphi^2} + \frac{v}{n \cdot r_0} = 0 .$$

If this condition is compared with the differential equation of the rope loaded by vertical forces v (3)

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{v}{H} = 0$$

and if it is considered that $x = r_0 \cdot \varphi$, the accord with value $H = n \cdot r_0$ is perfect. This means that the edge curve of the membrane with free edges developed on the mantle of the cylinder of projection (together with forces v) generates a plane curve which is the rope curve of vertical forces drawn at pole distance $H = n \cdot r_0$.

The determination of the membrane surface thus requires the solution of differential equation (3) with mixed boundary conditions. Boundary conditions are partly given (at least at three points) by the prescribed function value, partly (on the free part of the boundary) by differential equation (8).

This problem can be simply solved by relaxation. To present the method of solution equation (8) has also to be transformed according to (7). Considering that

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} [f(r=r_0)] = \frac{d^2}{d\eta^2} [f(\xi = \xi_0)]$$

and

$$\frac{\partial f}{\partial r} (r=r_0) = \frac{1}{r_0} \frac{\partial f}{\partial \xi} (\xi = \xi_0) ,$$

the transformed condition :

$$\boxed{\frac{d^2}{d\eta^2} [f(\xi = \xi_0)] + \frac{\partial f}{\partial \xi} (\xi = \xi_0) \pm r_0 \frac{g}{n} = 0} \quad (8a)$$

If this differential equation is approached by differences of the function values taken at the nodal points of a net with mesh-side a , the following differential equation is obtained for the i -th point of the boundary :

$$\frac{f_{0,i-1} - 2f_{0,i} + f_{0,i+1}}{a^2} \pm \frac{f_{0,i} - f_{1,i}}{a} \pm r_0 \frac{g}{n} = 0$$

where the first subscript is the numbering of the net in direction ξ ; the second that in direction η . (See Fig. 4 and 5)

After arrangement the residual equation valid for the periphery :

$$R_p = f_{0,i-1} - (2 \mp a) f_{0,i} + f_{0,i+1} \mp a f_{1,i} \pm a^2 r_0 \frac{g}{n} = 0, \quad (9)$$

or in abridged form :

$$R_p = \Sigma f_p - (2 \mp a) f \mp f_i \pm a^2 r_0 \frac{g}{n} = 0,$$

where f is the function value at the point examined, Σf_p is the sum of function values at the peripheral points contiguous to the point examined, f_i is the function value pertaining to the inner contiguous point.

In the interior of the membrane, of course, the residual equation

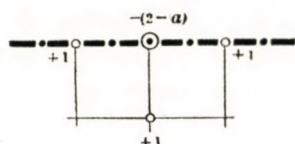
$$R = \Sigma f_c - A f - C_r \quad (10)$$

is valid, where Σf_c is the sum of the function values of contiguous points and

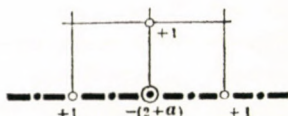
$$C_r = a^2 r^2 \frac{Z}{n}.$$

If the function values have been taken and the residuals computed on the boundary by equation (9), and in the interior by equation (10), the relaxation can be executed in the usual way, only the scheme of the first two rows differs from the usual. This scheme is on the periphery :

convex boundary



concave boundary



and along the boundary in the first row :



On the other hand, if at the solution of the problem exclusively the relaxation method is used, residual equation (9) can be produced also without lengthy deduction of condition (8). It is to be formulated only that one peripheral point and three contiguous points of it (Fig. 7) are in one plane.

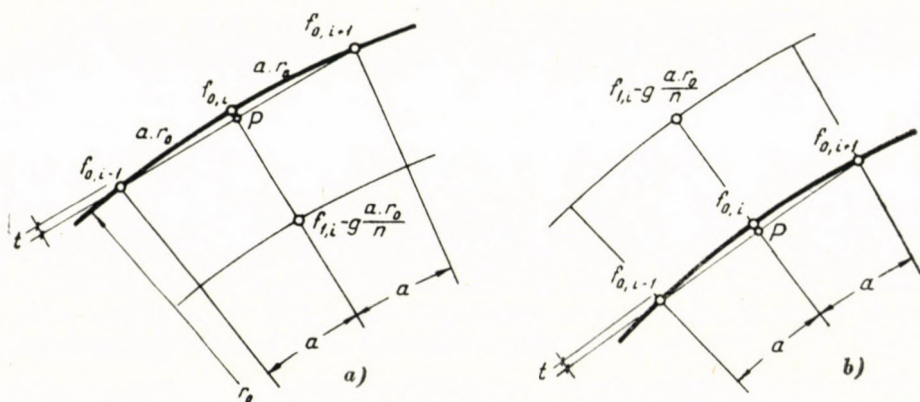


Fig. 7

That is, if the edge girder is weighty, point $f_{1,i}$ has to be imagined by value $g \cdot a \cdot r_0/n$ deeper — for resultant r is loaded by weight g deeper — and it has to be postulated thus that the four points be in one plane.

In this stipulation it is supposed that the net is sufficiently dense and so the distance between the boundary and the next circular arc is $a \cdot r_r$ just as between neighbouring points of the boundary. In this case the ordinate of point P computed from peripheral points :

$$f_p = \frac{f_{0,i-1} + f_{0,i+1}}{2}$$

and calculated from the other two points, since

$$t = r_0(1 - \cos a),$$

or since because of the supposed density of the net the angle a is small and the approximation of $\cos a = 1 - a^2/2$ is permissible

$$t = r_0 \frac{a^2}{2}$$

$$f_p = f_{0,i} \mp \frac{f_{0,i} - f_{1,i} + g a r_0/n}{a r_0} r_0 \frac{a^2}{2}.$$

From the equality of f_p values calculated by two different means is obtained

$$f_{0,i-1} - (2 \mp a)f_{0,i} + f_{0,i+1} \mp f_{1,i} \pm a^2 r_0 \frac{g}{n} = 0$$

which entirely agrees with (9). Here again out of signs that may be chosen the upper one refers to the case of the convex (Fig. 7a) and the lower one to that of the concave (Fig. 7b) boundary.

4. Practical application of the solution

What has been said will first be applied to the case of the building sketched in Fig. 8 (e. g. a hangar for sporting aircraft). The area to be roofed is bordered by two circular arcs and two radii. The inner arc is the ground plan of the free boundary. No support is therefore here present. The rest of the boundary lies in a horizontal plane and is supported in vertical as well as in horizontal direction.

The aggregate load on the structure (membrane of 6 cm thickness, heat and water insulation, snow load)

$$Z = 0,024 \text{ kg/cm}^2$$

Table I.

$m =$	96	48	32	24	16	12	8	6
$a =$	0,06545	0,1309	0,1963	0,2618	0,3927	0,5236	0,7854	1,0472
$\frac{r}{r_0}$	$10\,000\ a^2\ \frac{r^2}{r_0^2}$							
1,0000	42,8	171,3	386	685	1542	2740	6170	10970
0,9367	37,6							
0,8773	33,0	131,9						
0,8217	28,9		260					
0,7697	25,4	101,5		406				
0,7209	22,3							
0,6753	19,53	78,1	176		703			
0,6325	17,14							
0,5924	15,03	60,1		241		962		
0,5549	13,19		118,7					
0,5197	11,57	46,3						
0,4868	10,15							
0,4560	8,91	35,6	80,2	142,5	321		1283	
0,4271	7,81							
0,4000	6,86	27,4						
0,3747	6,01		54,1					
0,3510	5,28	21,1		84,3		338		1351
0,3287	4,63							
0,3079	4,06	16,25	36,6		146,2			
0,2884	3,56							
0,2701	3,13	12,50		50,0				
0,2530	2,79		24,7					
0,2370	2,41	9,62						
0,2220	2,11							
0,2079	1,852	7,41	16,67	29,6	66,7	118,5	267	
0,1948	1,625							
0,1824	1,425	5,70						
0,1709	1,251		11,25					
0,1600	1,097	4,39		17,55				
0,1499	0,963							
0,1404	0,844	3,38	7,60		30,4			
0,1315	0,741							
0,1232	0,650	2,60		10,40		41,6		166,4
0,1154	0,570		5,13					
0,1081	0,500	2,00						
0,1012	0,439							
0,0948	0,385	1,540	3,47	6,16	13,86		55,4	
0,0888	0,338							
0,0832	0,296	1,185						
0,0779	0,260		2,34					
0,0730	0,228	0,912		3,65		14,60		
0,0684	0,200							
0,0640	0,1756	0,702	1,580		6,32			
0,0600	0,1540							
0,0562	0,1351	0,541		2,16				
0,0526	0,1186							
0,0493	0,1040	0,416						
0,0462	0,0913							
0,0432	0,0801	0,320	0,721	1,281	2,88	5,12	11,53	20,5

Table II

$m =$	96	48	32	24	16	12	8	6
$a =$	0,06545	0,1309	0,1963	0,2618	0,3927	0,5236	0,7854	1,0472
$\frac{r}{r_0}$	$a^2 \frac{r^2}{r_0^2}$							
1,000	0,00428	0,01713	0,0386	0,0685	0,1542	0,274	0,617	1,097
1,067	0,00488							
1,140	0,00557	0,0223						
1,217	0,00634		0,0571					
1,299	0,00723	0,0289		0,1157				
1,387	0,00824							
1,481	0,00940	0,0376	0,0846		0,338			
1,581	0,01071							
1,688	0,01221	0,0488		0,1953		0,781		
1,802	0,01391		0,1252					
1,924	0,01586	0,0634						
2,054	0,01808							
2,193	0,02060	0,0824	0,1855	0,330	0,742		2,97	
2,341	0,0235							
2,500	0,0268	0,1071						
2,669	0,0305		0,275					
2,850	0,0348	0,1391		0,557		2,23		8,91
3,042	0,0397							
3,248	0,0452	0,1808	0,407		1,627			
3,468	0,0515							
3,702	0,0587	0,2350		0,940				
3,953	0,0669		0,602					
4,220	0,0763	0,305						
4,506	0,0870							
4,810	0,0991	0,397	0,892	1,586	3,57	6,34	14,27	
5,136	0,1130							
5,483	0,1288	0,515						
5,854	0,1468		1,321					
6,250	0,1673	0,669		2,68				
6,673	0,1907							
7,124	0,2170	0,870	1,956		7,83			
7,606	0,2480							
8,120	0,2825	1,130		4,52		18,08		72,30
8,670	0,3220		2,90					
9,256	0,3670	1,468						
9,882	0,414							
10,551	0,477	1,907	4,29	7,63	17,17		68,70	
11,264	0,544							
12,026	0,620	2,48						
12,840	0,706		6,36					
13,708	0,805	3,22		12,88		51,50		
14,635	0,918							
15,625	1,046	4,18	9,41		37,70			
16,682	1,192							
17,811	1,359	5,44		21,70				
19,015	1,549		13,94					
20,301	1,766	7,06						
21,674	2,010							
23,141	2,29	9,18	20,60	36,70	82,60	146,80	330,0	587,0

Compression is assumed in the membrane, the projection value of which

$$n = -24 \text{ kg/cm}$$

Let the weight of the edge girder be referred to its unit length

$$g = 4,8 \text{ kg/cm}$$

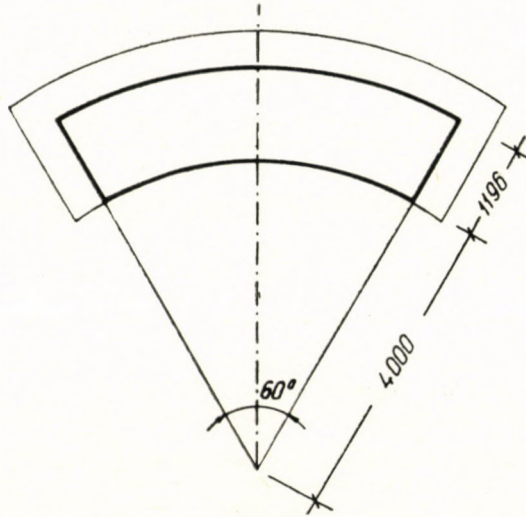
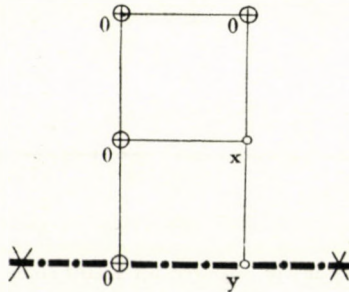


Fig. 8

The structure being symmetrical only half of this will be reckoned with. The half of the hangar will be divided in two, in the direction of the arc. In other words $m = 24$ and $a = 0,2618$ (Table II). Radii of the border arcs have been chosen in advance in a way that their difference correspond to one mesh-side. Nodal points are thus only on the boundary and only the residual equation referring to the boundary has to be set up. This is, since at the inner contiguous point the value of the function is zero,

$$R_p = \Sigma f_p - 2,2618 f + 0,2618^2 4000 \frac{4 \cdot 8}{24} = \Sigma f_p - 2,2618 f + 54,8 = 0.$$

The first net thus has the pattern



At points marked by \oplus the value of the function is known (zero), and it is unknown only at two points of the free periphery. If the residual equation is written for these points two equations are obtained :

$$y - 2,2618x + 54,8 = 0,$$

$$- 2,2618y + 2x + 54,8 = 0,$$

whence

$$x = 57 \text{ and } y = 75.$$

Of course, because of the coarse net these are only rough approximating values, but may serve as some point of start for the estimated values of the finer net.

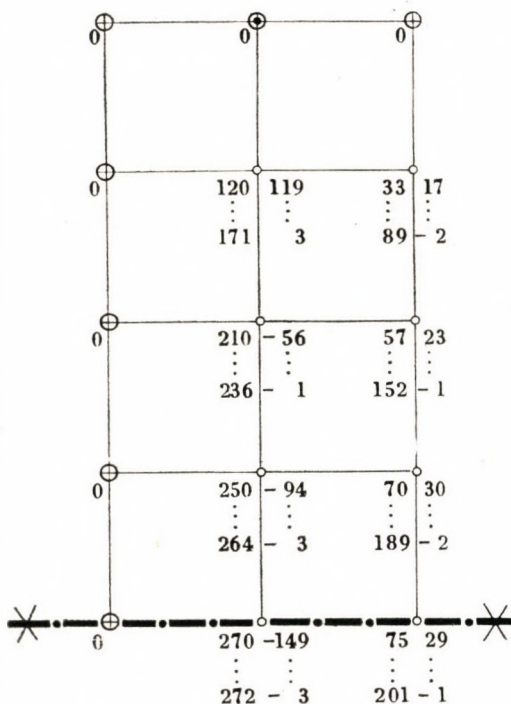
The following finer net is drawn with values $m = 48$ and $a = 0,1309$. Now not only the residual equation

$$R_p = \Sigma f_p - 2,1309f + 0,1309 + 13,7 = 0$$

will be necessary but also the residual equation referring to the inner circle of radius $r = 1,140,4000 = 4560$ cm (See Table II). This is

$$R = \Sigma f_c - 4f + (0,1309 \cdot 4560)^2 \frac{0,024}{24} = \Sigma f_c - 4f + 356,2 = 0$$

Values taken from the previous net are transcribed into the new net and the function values are estimated at intermediate points with the aid of the previous values. Afterwards at each point residuals are computed with the aid of the above residual equation and are written right of the function values. After this follows the gradual reduction of residuals with the aid of schemes of page 287. On the following net the starting function values and residuals were indicated and with omission of intermediate steps those function values and residuals with which the calculation was regarded as complete.



Finally the entire procedure is repeated on a still finer net:

$$m = 96; a = 0,06545.$$

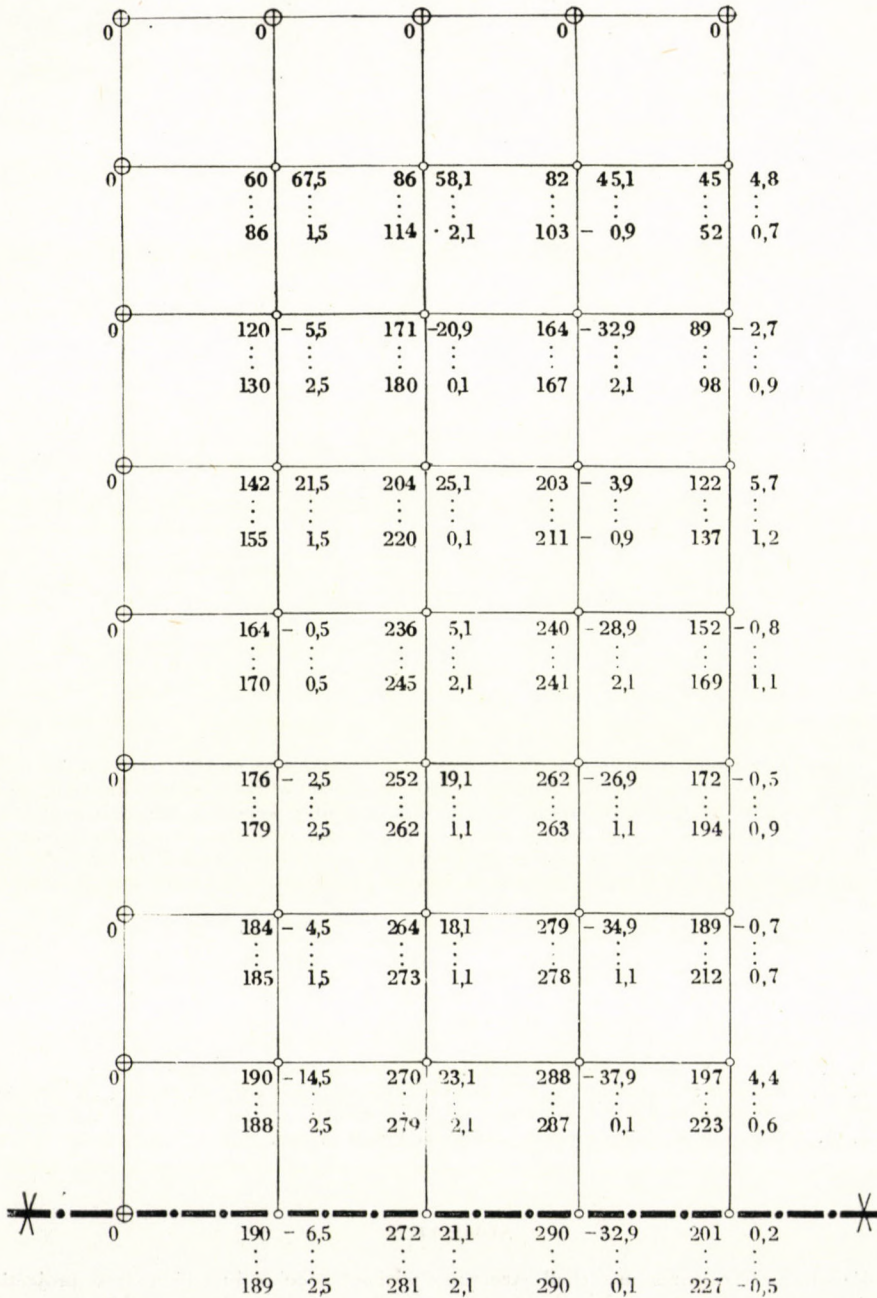
On the boundary

$$R_p = \Sigma f_p - 2,06545f + 0,06545f_i + 3,4 = 0.$$

Inside

$$R = \Sigma f_c - 4f + C_r = 0.$$

$r =$ 4868 4560 4268
 $C_r =$ 101,5 89,1 78,1



The result is shown in axonometric projection in Fig. 9.

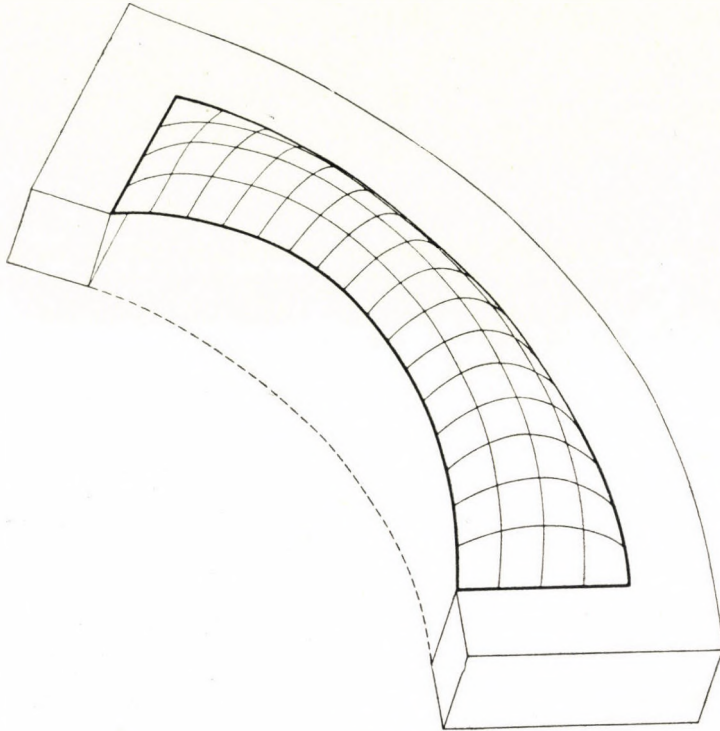


Fig. 9

If the given boundary is in one plane — as in the example at hand — the function values are in inverse relation to n . It is thus possible to alter the height of the surface without recalculation. E. g. in Fig. 9 the double values of the function computed were plotted, that is the figure corresponds to values $n = -12$ kg/cm and $g = 2,4$ kg/cm. If g has been correctly chosen, it remains correct after alteration too, because with the increase of camber the force decreases in the edge member. In the present case the horizontal projection of the force acting in the edge member :

$$H = n \cdot r_0 = -12 \cdot 4000 = -48\,000 \text{ kg.}$$

REFERENCES

1. J. PELIKÁN: Membrane Structures. (In print in Oslo.)
2. K. SZMODITS: Construction and analysis of suspended roof structures. (Hungarian.) Report of the Structural Tests Laboratory of the Institute for the Science of Construction.
3. F. STÜSSI: Vorlesungen über Baustatik. Bd. I. p. 359.

SUMMARY

Membrane structures are shell structures without bending in which stress projections follow the same law as the original stresses of membranes. The paper displays how mem-

brane structures with free edges can be designed, in other words, how peripheral forces can be taken by an edge girder shaped after a space curve and not resisting bending. Application of results are shown on a numerical example.

MEMBRANKONSTRUKTIONEN MIT FREIEM RAND

J. PELIKÁN

ZUSAMMENFASSUNG

Membrankonstruktionen sind bieigungslose Schalen, deren Schnittkraftprojektionen denselben Gesetzen folgen wie die ursprünglichen Schnittkräfte von Membranen. Der Aufsatz zeigt, wie Membrankonstruktionen mit freiem Rand auszuführen, bzw. wie Randkräfte durch bieigungsfreie, gemäß einer Raumkurve geformte Randträger aufzunehmen sind. Die Anwendung der Ergebnisse wird an einem Zahlenbeispiel gezeigt.

CONSTRUCTIONS EN MEMBRANE AVEC CIRCONFÉRENCE LIBRE

J. PELIKÁN

RÉSUMÉ

Les constructions en membrane sont des voiles minces sans flexure, dont les projections de contraintes suivent les mêmes lois que les contraintes primitives des membranes. L'étude présente le mode de construire des constructions en membrane, avec une circonférence libre, soit la possibilité de prendre les efforts circonférentiels par une poutre circonférentielle sans flexure, modelée d'après une courbe dans l'espace. L'application des résultats est illustrée par un exemple numérique.

МЕМБРАННЫЕ КОНСТРУКЦИИ СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ

Й. ПЕЛИКАН

РЕЗЮМЕ

Мембранными конструкциями среди оболочек без изгиба являются те, у которых силы разреза удовлетворяют тот же закон, что и действительные силы разреза мембран. В работе показано, что каким образом можно изготовить мембранные конструкции со свободным периметром, другими словами, каким образом можно учитывать периметрические усилия с помощью краевой балки, изготовленной по пространственной кривой. Применение достигнутых результатов демонстрируется числовым примером.



ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ДЕФЕКТЫ В СПЛАВАХ АЛЬПАКА, ВЫЗВАННЫЕ ПРИСУТСТВИЕМ ФОСФОРА В КАЧЕСТВЕ ПРИМЕСИ

З. ХЕГЕДЮШ и М. ШТЕФАН
ЦЕХ МЕТАЛЛУРГИИ МЕДИ И ЛАБОРАТОРИЯ ПО ИСПЫТАНИЮ МАТЕРИАЛОВ МЕТАЛ-
ЛУРГИЧЕСКОГО КОМБИНАТА ЧЕПЕЛЬ

[Поступило 10. мая 1957 г.]

При производстве листов из сплава альпака в отдельных случаях получался большой брак. Выполненные детальные исследования и производственные наблюдения показали, что дефект вызывается высоким содер-

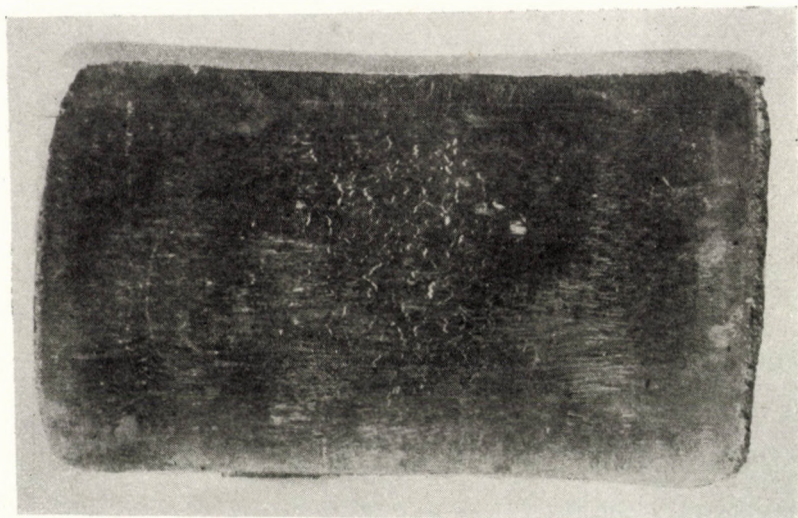


Рис. 1. Шайба альп. 58, треснувшая при первом пропуске

жанием фосфора в сплаве. В довольно бедной и не слишком детальной литературе по сплаву альпака в отношении примеси фосфора имеется только небольшое число встречающихся в различных местах данных. Поэтому были выполнены детальные исследования и опыты для определения воздействия фосфора, оказываемого на технологические свойства и структуру сплава альпака.

Большая часть гомогенизированных пластин, отрезанных от болванок, содержащих примесь фосфора, во время холодной прокатки получает по середине дефект: перпендикулярно к направлению прокатки на пло-

щади около 150×150 мм образовались трещины (см. рис. 1). Глубина образовавшихся трещин колеблется в пределах 2—4 мм, и эти трещины в большинстве случаев на обеих поверхностях пластин встречаются в идентичных местах; их форма приведена на рис. 2. Дефект наблюдался как у альп. 58, так и у альп. 62 и альп. 65.



Рис. 2. Поперечные трещины по середине листа альп. 62

Сплав альпака отливался из уже продолжительное время эксплуатируемой печи системы Аякс—Виат, в которой предварительно изготавливался сплав бронзы Бз. 5, легированный в печи фосфором. К около 350 кг садки +150 кг наполнителя добавляется 0,06 кг красного фосфора.

Правильно легированный и раскисленный металл был отлит в чугунный кокиль размером $300 \times 300 \times 450$ мм (см. рис. 3). Согласно наблю-

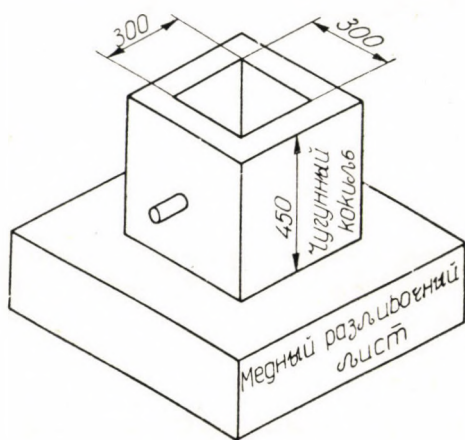


Рис. 3. Кокиль, использованный для литья сплава альпака

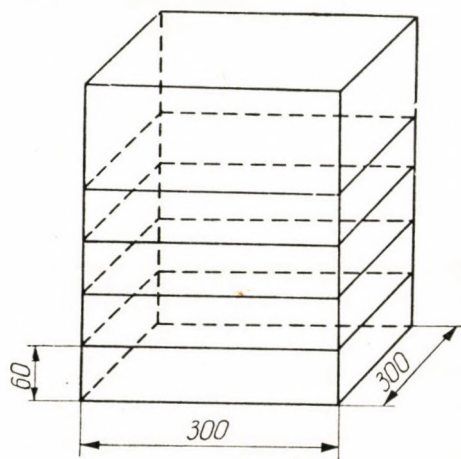


Рис. 4. Разрез болванки сплава альпака на пластины для прокатки

дениям середина отливки вследствие большого размера болванки и плохой теплопроводности после образования корки оставалась в жидком состоянии еще в течении 12 мин.

От болванки снизу вверх были отрезаны пластины размером $300 \times 300 \times 60$ мм в количестве 4 шт. (см. рис. 4). Отрезанные пластины были подвергнуты процессу гомогенизации при температуре 800°C в течении 6 часов, затем пластины подвергались холодной прокатке. Обжатие первого прохода — 8%.

Из дефектных пластин на указанном на рис. 5 месте вырезалась проба для выполнения химических и металлографических анализов. Для механического исследования образцы отбирались с мест, расположенных рядом с трещиной.

Химический состав трех различных пластин из сплава альпака, имеющих трещины, приведен в табл. № 1.

Табл. № 1

	Cu	Ni	Mn	Fe	P	Pb	Sn	Sb	Bi	Si
№ 1. альп. 58	57,5	17,4	0,24	0,26	0,06	∅	∅	∅	∅	∅
№ 2. альп. 58	56,9	17,7	0,25	0,22	0,07	0,03	∅	∅	∅	∅
№ 3. альп. 62	61,1	12,6	0,16	следы	0,09	∅	∅	∅	∅	∅

Химический состав соответствует предписаниям, лишь содержание фосфора выше обычного. Механические свойства сплава № 2, отпущенного после прокатки, сведены в таблицу № 2.

Табл. № 2

	σ_B кг/мм	δ_{10}^0 %
Сплава № 2 альп. 58	34,9	11,8
По норме	37,0	33,0

σ_B только немного ниже, а δ_{10} же значительно ниже нормы.

Для микроскопического анализа были изготовлены шлифы с мест, обозначенных на рис. 5 через цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6. На всех образцах, но в особенности на образцах № 3 и 4 во многих местах наблюдалось большое количество шаровых, пленкообразных и неправильных по форме включений. Эти включения в протравленном виде имеют светлобурый цвет, и вследствие их более высокой твердости легко опознаваемы. Эти включения при нагреве изменяют окраску на бурюю и их эвтектическая структура становится видимой (см. рис. 6).

При протравливании эти включения изменяют окраску на бурюю в случае использования для протравливания солянокислого феррихлорида и аммонийного раствора аммонийно хлористой меди. Согласно П. А. Гривсу и Х. Райтону в медных сплавах фосфидные эвтектики при нагреве изменяют

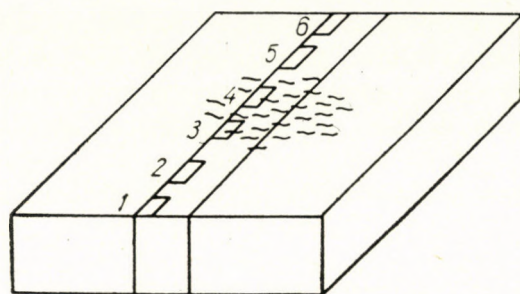


Рис. 5. Отбор образцов от имеющих трещины листов

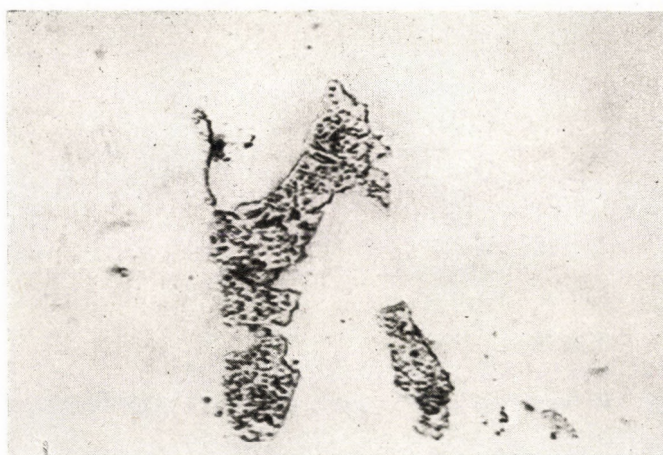


Рис. 6. Эвтектические включения неправильной формы, при нагреве. 600 x

окраску на буро-красную и, таким образом, становится возможным их опознавание.

Состав включений невозможно определить, потому что не удастся отделить включения от металла. Структура фосфидноэвтектических включений, соответственно условия их образования, далее растворимость в основном металле могут быть определены по диаграммам состояний. Диаграмма состояния 4-компонентной системы Cu-Ni-Zn-P сегодня еще неизвестна. Большая часть данных, касающихся трехкомпонентных диаграмм состояний Cu-Ni-P, Cu-Zn-P, Ni-Zn-P, а также двухкомпонентных Ni-P, Zn-P является неполной и неопределенной.

Cu_3P растворяется в меди при комнатной температуре, предположительно частично растворяется в никеле фосфид никеля. О цинке известно, что он сильно снижает растворимость фосфида в меди и, по всей вероятности,

присутствие цинка снижает растворимость никеля. На основе соображений можно заключить, что в сплаве альпака фосфид при температуре 20 — 25° С растворяется лишь при содержании фосфора в порядке тысячных долей процента. Это предположение подтверждается также микроскопическим анализом.

Был нерешенным вопрос о растворимости фосфидной эвтектики при высоких температурах, например, при температуре гомогенизации. В литературе в работах Э. Ц. Рольсона имеются ссылки и данные относительно того, что медь при содержании никеля 1,7—2,3%, содержании фосфора 0,03—0,11% может быть улучшена посредством закалки в воде при $t=800^{\circ}\text{C}$ и отпуска при 500°C , что основывается на выделении содержащегося фосфида. В отношении сплава альпака по растворимости фосфида не были найдены соответствующие данные, поэтому были проведены опыты по термообработке.

Пластина альп. 62, содержащая 0,09% фосфора, подвергалась процессу гомогенизации при температуре 800°C в течении 6 часов и охлаждалась на открытом воздухе, затем подвергалась микроскопическому анализу. При термообработке большая часть фосфидных включений перешла в раствор. При охлаждении в месте бывшего включения вновь выделился фосфид в мелкозернистой форме (см. рис. 7). Однако, более крупные включения растворяются лишь частично и дегенерированные остатки эвтектики обволакиваются тонкими точкообразными выделениями (см. рис. 8). Частичная растворимость указывает на то, что эвтектика содержит фосфидные компоненты, растворяющиеся в альфа фазе в различной степени.

Микротвердость включений, соответственно «эвтектоидо» — образных частей вторичного выделения, приведены в таблице № 3.

Табл. № 3

	$HV_{45} \text{ г}$	В среднем
Металл	219—243 кг/мм ²	220 кг/мм ²
Эвтектоидообразная часть	306—455 »	360 »
Включение	610—688 »	640 »

При микроскопическом анализе отлитых, но негомогенизированных болванок представляется возможность отличить два типа фосфидных включений: беспорядочно встречающиеся крупнозернистые неправильной формы или пленкообразные, расположенные вдоль границ кристаллов включения, и мелкие шарообразные, относительно равномерно распределенные зерна внутри кристаллов. Крупнозернистые включения, располагающиеся по границе между кристаллами, образуются при застывании остаточного расплава, обогащенного фосфором. При застывании мелкие шарообразные внутрикристаллические включения были растворены, в α -фазе и выделились лишь в процессе медленного охлаждения вследствие снижения растворимости.

Для выяснения возможных зависимостей между образованием трещин и процентным содержанием включений был выполнен с помощью микроскопа подсчет включений в указанных на рис. 5 местах. Средний размер

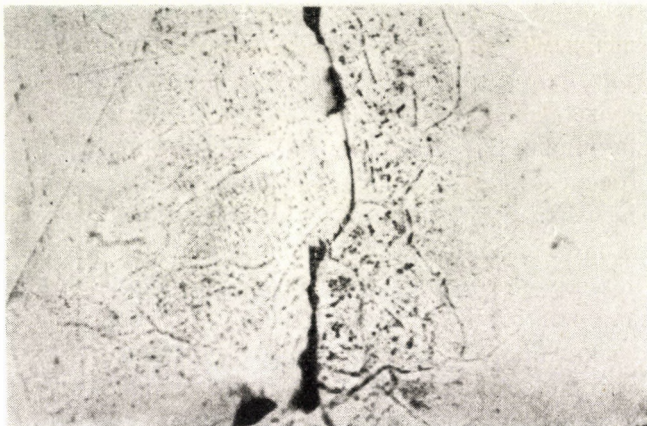


Рис. 7. Тонкие точкообразные фосфидные выделения в области включения вдоль границ между кристаллами. Травление аммонийным раствором хлористого медного аммония. 600 х

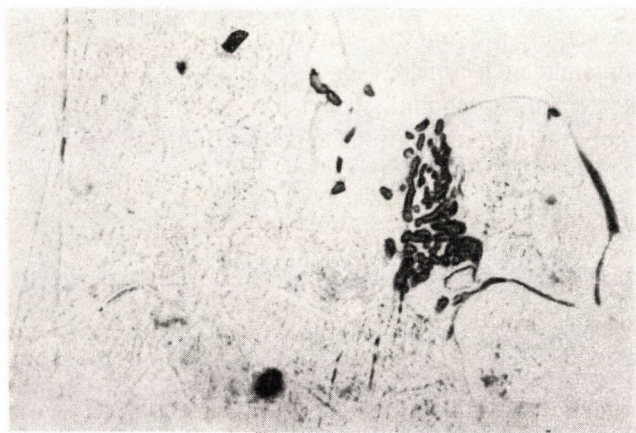


Рис. 8. Частично растворенный остаток фосфидного включения с тонким точкообразным фосфидным выделением и раковинами вдоль границ кристаллов. Травление аммонийным раствором хлористого медного аммония. 600 х

фосфидных включений равен 0,013 мм. Включения размером выше среднего были приняты в качестве двух или трех, а значительные меньшие или лишь частично имеющиеся в поле зрения были приняты равным только половине. На каждом шлифе подсчет выполнялся в 100 полях зрения. Распределение включений или содержание фосфора в получившей трещины пластине пока-

зано на рис. 9. На покрытой трещинами части как включения, так и содержание фосфора имеют максимум.

Необходимо было бы выяснить еще и происхождение примесей фосфора, так как примеси не могли образоваться за счет использованного в процессе производства примерно 0,01% фосфора. Исследование использованного печного припаса показало удивительный результат; имеется случай когда содержание P_2O_5 футеровки печи равнялась 3,7%. В футеровку фосфор попадает, по всей вероятности, в процессе производства бронзы марки Бз. 5, легированной фосфором в печи. Микроскопическое исследование футеровки указало на содержание в соприкасающейся с металлом части капель меди и Cu_2O .

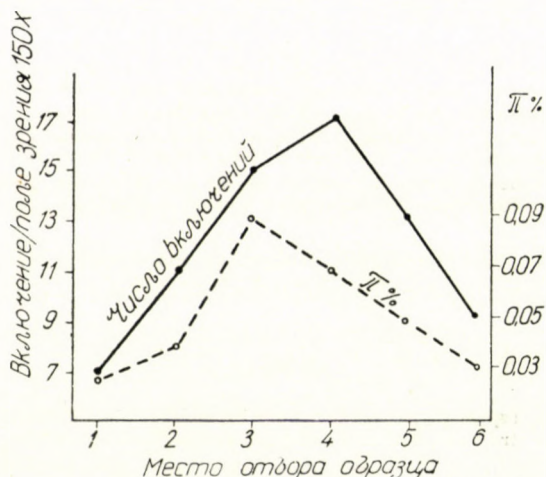


Рис. 9. Распределение включений и фосфора на покрытом трещинами листе

С поверхности до глубины 1—3 мм выявлено присутствие CuO , сопровождаемое различными селитами меди. Cu_2O , соответственно, CuO показывают, что в футеровке фосфор может присутствовать лишь в виде окиси (P_2O_5). В процессе производства сплава альпака поданный в качестве лигатуры Zn частично восстанавливает P_2O_5 и этим загрязняет металл.

ЛИТЕРАТУРА

1. DR. R. KRULLA : Neusilber, 1935.
2. R. H. GREAVES—H. WRIGHTON : Practical Microscopical Metallurgy, 1947.
3. E. C. ROLLSON : Metals and Alloys, 1935. 6. 345.
4. J. R. MARÉCHAL : Revue de Métallurgie. 1954. 7. 441.

РЕЗЮМЕ

В связи с образованием производственного брака детально исследовалось влияние примеси фосфора на технологические свойства и структуру сплавов альпака. Фосфиды при комнатной температуре практически не растворяются и аналогично прочим неравномерно распределенным непластичным включениям меди (SnO_2) сильно снижают вытяжку. При гомогенизации фосфид растворяется в α -фазе при охлаждении вновь выделяется в качестве тонкого точкообразного включения, вследствие чего вызывает местное повышение твердости. Дефект встречается лишь на местах, очень богатых фосфором, при описанной технологии литья в середине листа. Фосфор забирается сплавом из футеровки печи путем восстановления.

DURCH PHOSPHORVERUNREINIGUNG VERURSACHTE FABRIKATIONSFEHLER
IN NEUSILBERLEGIERUNG

Z. HEGEDÜS und M. STEFÁN

ZUSAMMENFASSUNG

Im Zusammenhang mit der Bildung von Produktionsausschuss haben wir die Wirkung von Phosphorverunreinigungen auf das Gefüge und die technologischen Eigenschaften von Neusilber gründlich untersucht. Die Phosphide sind bei Raumtemperatur nicht lösbar und mindern ähnlich andern, ungleichmäßig verteilten, unplastischen Einschlüssen (SnO_2) die plastische Verformbarkeit der Legierung. Bei einer Homogenisierung löst sich das Phosphid in der α -Phase, und nach Abkühlung bilden sich kleine, punkartige Phosphidkörner, die einen lokalen Härtezuwachs mit sich bringen. Der Fehler tritt nur an stark phosphorhaltigen Stellen auf, bei beschriebener Gußtechnik in der Mitte der gewalzten Platten. Den Phosphor hat die Legierung aus dem Ofenfutter mittels Reduktion aufgenommen.

DEFECTS OF FABRICATION CAUSED BY PHOSPHOROUS IMPURITIES
IN GERMAN SILVER ALLOYS

Z. HEGEDÜS and M. STEFÁN

SUMMARY

In connection with spoilage the authors have investigated in detail the effect of phosphorous contamination on the structure and technological properties of German or nickel silver alloys. Phosphides are practically insoluble at room temperature and, similarly to other unevenly distributed, non-plastic inclusions (SnO_2) strongly reduce elongation. At the homogenization phosphide is dissolved in α and on cooling down segregates again as fine inclusions of the shape of dots, whereby local increase of hardness is caused. Flaws appear only in parts strongly enriched in phosphorus, at the described technology of casting in the middle of the plate. Phosphor was reduced by the alloy from the furnace lining.

DÉFAUTES DE FABRICATION CAUSÉS PAR DES IMPURETÉS
PHOSPHOREUSES DANS LES MAILLECHORTS (ALPAKKA etc.)

Z. HEGEDÜS et M. STEFÁN

RÉSUMÉ

À propos des déchets de fabrication, les auteurs ont étudié en détail l'effet de souillures phosphoreuses sur la structure et les propriétés technologiques des maillechorts (alpukka, argental, argentan etc.). Les phosphides sont pratiquement insolubles à la température ambiante et — similairement à d'autres inclusions inégalement distribuées et nonplastiques (SnO_2) diminuent fortement l'élongation. Lors de l'homogénéisation, la phosphide se dissout dans la phase α , et au refroidissement, elle est précipitée de nouveau sous forme d'inclusions fines en points qui causent un durcissement local. Des défauts ne s'observent que dans les parties fortement, enrichies en phosphore, et notamment dans la partie médiane de la tôle, quand on utilise la technique de la coulée décrite par les auteurs. L'alliage a réduit le phosphore du revêtement du four.

BEITRAG ZU EINEM TEILPROBLEM DES TRANSPORT- ARBEITSBEDARFS DER GLEICHMÄSSIGEN FLÄCHENARBEITEN

A. ZAJTA

AGRARWISSENSCHAFTLICHE UNIVERSITÄT, FAKULTÄT FÜR LANDWIRTSCHAFTLICHES
INGENIEURWESEN, LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, BUDAPEST

[Eingegangen am 28. Mai 1957]

Einleitung

Die Transportarbeit in allgemeinerem Sinne enthält mehrere spezielle Teilarbeiten, so z. B. die Auf- und Abladung, Inspektion während des Transports, usw., aber auch die im engeren Sinne genommene Transportarbeit kann in Transporte auf vorgeschriebenem Wege (und daher von gegebener Länge) und ein gegebenes Gebiet durchsetzende Transporte aufgeteilt werden. Bei gleichmäßigen Flächenarbeiten, so z. B. beim Bau von Flugfeldern, bei den Vorarbeiten zum Bau von Wohnblöcken, Industrieanlagen, usw., bei landwirtschaftlichen Arbeiten (Erntearbeit, Dungstreuung, Bodenmelioration) und bei den übrigen Geländearbeiten treten die letztgenannten Transportarbeiten in entscheidender Weise in den Vordergrund und beeinflussen die Gesamtkosten wie auch die Produktivität. Es geht daraus klar hervor, daß von dem Standpunkte der Wirtschaftlichkeit der Kenntnis des auf die Flächeneinheit entfallenden Transportarbeitsaufwandes eine außerordentliche Bedeutung zukommt. Zur gleichen Zeit kann indessen auch festgestellt werden, daß die Berechnung dieses Arbeitsbedarfs — von einigen übertrieben spezialisierten Fällen abgesehen — bis zur Zeit nicht bekannt war; gegebenenfalls wurde sie durch Schätzung oder auf Grund von empirischen Normen bestimmt. Das Ziel vorliegender Arbeit besteht darin, die Lösung der aufgeworfenen Frage vorzuführen, d. h., eine Methode anzugeben, mit deren Hilfe einer der die Größe des Transportarbeitsaufwandes mitbestimmenden wesentlichsten Faktoren, die durchschnittliche Transportweglänge bei gleichmäßigen Flächenarbeiten berechnet werden kann. Vorerst wollen wir die als Grundlage der Berechnung dienenden Formeln durch theoretische Überlegungen ableiten, um dann auf die Anwendung der gewonnenen Formeln einzugehen. Dementsprechend wird vorliegender Artikel in zwei Paragraphen, einen theoretischen und einen praktischen Teil, aufgeteilt.

1. Theoretischer Teil

Das kleinste in Betracht kommende Element des Wegbedarfes der Transportarbeiten wird durch die »Runde« gebildet. Die Runde wird durch seine beiden Endpunkte und die diese Endpunkte verbindende Wegstrecke (gebrochene

oder gerade Linie) definiert. Der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, daß die bei Hin- und Rückkehr zurückgelegten Weglinien koinzidieren. Wir wollen die Länge der Weglinien einen Gang nennen und mit s bezeichnen. Der Durchschnitt dieser Gänge wird mit \bar{s} bezeichnet, und der durchschnittliche Wegbedarf einer Runde beträgt somit $2\bar{s}$. Wenn die gesamte, in Frage stehende Fläche durch U , und die Anzahl aller Runden durch n bezeichnet wird, so wird der auf die Flächenheit entfallende durchschnittliche Wegbedarf, der sogenannte spezifische Wegbedarf

$$S = \frac{2n\bar{s}}{U} \quad (1)$$

betragen.

Unter den zur Berechnung von S erforderlichen drei Größen ist allein die Bestimmung der durchschnittlichen Ganglänge problematisch, aber auch die Berechnung dieser Größe wird dadurch erleichtert, daß die Flächenarbeit als eine gleichmäßige vorausgesetzt wurde. In diesem Falle werden nämlich die auf das Gebiet U entfallenden Endpunkte der Runden über das Gebiet gleichmäßig verteilt, und somit kann die durchschnittliche Ganglänge mit einer guten Näherung durch den Quotienten des Flächenintegrals der Gänge und der Fläche :

$$\bar{s} \approx \frac{I}{U} = \frac{\int_U s dU}{U} \quad (2)$$

geschätzt werden.

Der Fehler der Näherungsformel (2) kann durch Vergrößerung von n vermindert werden, und ist größenordnungsmäßig $\frac{\bar{s}}{n}$ gleich. (Die Schätzung nach Gl. [2] steht nämlich in einem engen Zusammenhang mit der Theorie der Integralrechnung. Dort wird das Integral durch die Näherungssummen geschätzt, wobei das Integral als der gemeinsame Grenzwert der unteren und oberen Näherungssummen betrachtet wird, während wir im wesentlichen das Integral zur Schätzung der Näherungssumme verwenden. Offenbar werden die absoluten Fehler beider Arten von Schätzungen übereinstimmen.)

Die Berechnung des in (2) vorkommenden Integrals wird je nach der Form der Fläche und den Weglinien des Transports eine verschiedentliche Aufgabe bilden. Unter den im Prinzip möglichen verschiedenen Wegliniensystemen können die folgenden zwei einfachsten Typen unterschieden werden, worauf die in der Praxis vorkommenden komplizierteren Fälle in den meisten Fällen zurückgeführt werden können :

A) Bei dem radialen Typ wird der eine Endpunkt der Gänge einen fixen Punkt darstellen, während die anderen Endpunkte auf dem Gebiet U gleichmäßig verteilt sind. Zur Berechnung von I wird als Origo des Koordinaten-

systems zweckentsprechend das Zentrum des Strahlenbüschels gewählt. In diesem Falle erhalten wir :

$$I = \int_U r dU, \quad (3)$$

wobei r den zum Flächenelement gehörenden Radiusvektor bedeutet.

B) Bei dem zweiten Typ werden die Weglinien durch parallele gerade Strecken gebildet, die einen Endpunkte von denen in einer gemeinsamen Geraden liegen, während die anderen Endpunkte abermals gleichmäßig über die Fläche T verteilt sind. Die die Endpunkte enthaltende Gerade wird die Grundgerade des Wegliniensystems genannt; diese Gerade läuft nicht notwendigerweise senkrecht zur Richtung des Wegliniensystems. Zur Berechnung von I wird ein Koordinatensystem verwendet, dessen eine Achse durch die Grundgerade, die zweite Achse durch eine der Richtung der Gänge parallele Gerade gebildet wird. Dieses Koordinatensystem wird somit im allgemeinen Fall ein schiefwinkliges System sein. Wird als x -Achse die Grundgerade, als y -Achse die der Richtung der Gänge parallele Gerade gewählt, so wird I in der folgenden Form erhalten :

$$I = \int_U y dU. \quad (4)$$

Gl. (4) stellt das (schiefwinklige) Moment erster Ordnung der Fläche U in Bezug auf die Grundgerade dar, und dient als solches zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes. In der Tat wird die Ordinate des Schwerpunktes (auch im schiefwinkligen System) durch die Formel :

$$y_0 = \frac{\int_U y dU}{U}$$

ausgedrückt, und durch Vergleich mit Gl. (2) ergibt sich somit :

$$\bar{s} = y_0, \quad (5)$$

oder in Worten : Beim zweiten Typ des Wegliniensystems ist die durchschnittliche Ganglänge der Ordinate des Schwerpunktes der Fläche gleich.

Hierdurch wurde das Problem der Wegliniensysteme des zweiten Typs erledigt, wobei dieses Problem auf die Aufgabe der Schwerpunktbestimmung zurückgeführt wurde.

Nicht so einfach gestaltet sich jedoch der Fall des Strahlenbüscheltyps. Hier wird die Lösung meistens durch Berechnung von komplizierten Integralen erhalten, außer, daß es sich um Kreis-, Kreisring- oder Kreissektorflächen handelt, wobei der Mittelpunkt des Kreises mit dem Zentrum des Strahlenbüschels zusammenfällt. Durch Verwendung von Polarkoordinaten wird nämlich Integral (3) in der folgenden Form erhalten :

$$I = \int_U \int r^2 dr d\varphi, \quad (6)$$

wobei als Lösungen für den Fall des Kreises

$$I = \frac{2}{3} \pi r^3,$$

für den Fall des Kreissektors (mit Öffnungswinkel α°)

$$I = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot r^3,$$

schließlich für den Fall des Kreisrings (durch konzentrische Kreise mit den Radien R bzw. r gebildet)

$$I = \frac{2\pi}{3} (R^3 - r^3)$$

erhalten werden. Die durchschnittliche Ganglänge ergibt sich aus diesen Lösungen durch Division durch die entsprechende Fläche. So wird z. B. für den Fall des Kreises folgender Wert erhalten:

$$\bar{s} = \frac{\frac{2}{3} \pi r^3}{\pi r^2} = \frac{2}{3} r. \quad (7)$$

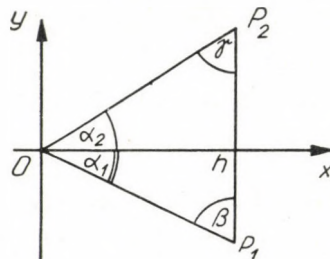


Abb. 1.

Die in der Praxis vorkommenden Flächen haben zumeist die Form eines Rechtecks, Vierecks oder Vielecks. All diese Flächen können als Summe von Dreieckflächen dargestellt werden. Es genügt somit, den Wert des Integrals (3) für ein Dreieck zu bestimmen. Das Dreieck wird in einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der Weise konstruiert, daß ein Eckpunkt des Dreiecks mit Koordinatenursprung zusammenfällt, und die gegenüberliegende Seite der

Ordinatenachse parallel läuft (siehe Abb. 1). Die zwei übrigen Seiten des Dreiecks stellen somit je eine durch den Ursprung gehende Gerade dar, deren Gleichungen folgendermaßen lauten :

$$y = -m_1 \cdot x$$

und

$$y = m_2 \cdot x.$$

Wird der Abstand der ersten Seite von der Ordinatenachse durch h bezeichnet, so gestaltet sich das Integral (3) folgendermaßen :

$$\begin{aligned} I &= \int_U r dU = \int_0^h \int_{-m_1 x}^{m_2 x} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx = \\ &= \int_0^h \left[\frac{1}{2} y \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arsh} \frac{y}{x} \right]_{y=-m_1 x}^{y=m_2 x} dx = \\ &= \int_0^h \frac{x^2}{2} [m_2 \sqrt{1+m_2^2} + m_1 \sqrt{1+m_1^2} + \operatorname{arsh} m_2 + \operatorname{arsh} m_1] dx = \\ &= \frac{1}{6} h^3 [m_2 \sqrt{1+m_2^2} + m_1 \sqrt{1+m_1^2} + \operatorname{arsh} m_2 + \operatorname{arsh} m_1]. \end{aligned} \quad (8)$$

Das hier abgeleitete Ergebnis (8) wird als Grundformel für die weiteren Berechnungen verwendet. Die Richtungstangenten m_1 und m_2 in der eckigen Klammer können aus den Winkeln des Dreiecks OP_1P_2 leicht berechnet werden, da

$$m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{cotg} \beta, \quad (9)$$

$$m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{cotg} \gamma,$$

und h die zur Seite $\overline{P_1P_2}$ gehörende Höhe darstellt. Im Falle eines rechtwinkligen Dreiecks ($m_1 = 0$, $m_2 = m$) nimmt die Formel folgende vereinfachte Form an :

$$I = \frac{1}{6} h^3 (m \sqrt{1+m^2} + \operatorname{arsh} m). \quad (10)$$

Im Falle eines stumpfwinkligen Dreiecks ($\beta < 90^\circ$) bleibt Formel (8) unverändert, nur wird das Vorzeichen von m_1 negativ. Ist die Form von U die eines Rechtecks (siehe Abb. 2), so kann sie als die Summe zweier rechteckiger Dreiecke dargestellt werden. Wenn die Seiten des Rechtecks durch a und b bezeichnet werden, so wird durch Verwendung von (10) der Wert des Integrals I in der folgenden Form erhalten :

$$I = \frac{1}{3} ab \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{6} a^3 \operatorname{arsh} \frac{b}{a} + \frac{1}{6} b^3 \operatorname{arsh} \frac{a}{b}. \quad (11)$$

Besitzt U die Form eines beliebigen Vielecks, und kommt diesem Vieleck auch eine allgemeine Lage zu, so verbinden wir das Zentrum des Strahlenbüschels mit einem jeden Scheitelpunkt des Vielecks, und auf diese Weise teilen wir die durch das Wegliniensystem durchsetzte Fläche in eine Vielheit von Dreiecken auf. Werden von diesen Dreiecken einzelne mit positivem, andere mit negativem Vorzeichen addiert, (in Abb. 3 werden z. B. die Dreiecke OAB , OBC und OCD mit Positivem, während die die Dreiecke OAE und OED mit negativem Vorzeichen addiert), so gelangen wir zum Inhalt des Vielecks. Auf diese Weise

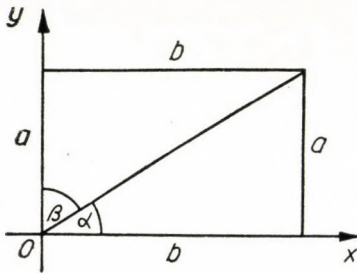


Abb. 2

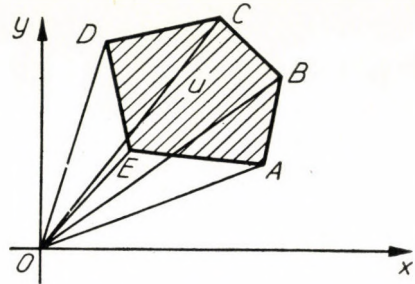


Abb. 3

kann auch das Integral über das Vieleck U als die Summe der mit den entsprechenden Vorzeichen versehenen Integralen über die einzelnen Dreiecke dargestellt werden. So ergibt sich z. B. im Falle der Abb. 3:

$$I = \int_U r dU = \int_{OAB} r dU + \int_{OBC} r dU + \int_{OCD} r dU - \int_{OAE} r dU - \int_{OED} r dU.$$

Die Frage, welche Dreiecke bei der Aufteilung in Dreiecke eines beliebigen Vielecks nach einem beliebig orientierten Zentrum (das Zentrum kann innerhalb oder außerhalb des Vielecks liegen) mit einem positiven und welche mit einem negativen Vorzeichen versehen werden müssen, kann meistens bereits auf Grund der Anschauung beantwortet werden. Um auch das Prinzip festzulegen, wollen wir jedoch auch das im allgemeinen Fall zu verfolgende Verfahren mitteilen. Sowohl am Umfange des Vielecks U , wie auch am Umfange eines jeden Dreiecks wollen wir den positiven Umlaufsinn andeuten. Jedes Dreieck hat mindestens eine Seite mit dem Vieleck gemein; insofern die Fortschreitungsrichtung an dieser Seite des Dreiecks mit der Fortschreitungsrichtung an der nämlichen Seite des Vielecks übereinstimmt, so wird das Dreieck bzw. das über das Dreieck erstreckte Integral mit positivem, im entgegengesetzten Fall mit negativem Vorzeichen versehen und bei der Summation mit in Rechnung gezogen. Hierdurch wurden auch die in der Praxis vorkommenden komplizierteren Fälle geklärt.

2. Praktischer Teil

Bei gegebener Fläche bildet die Berechnung der durchschnittlichen Ganglänge eine typisch technische (in erster Linie geodetische) Aufgabe. Zur Ausführung der Rechnung werden die genau ausgemessenen Entfernungs- und Winkeldata des in Frage stehenden Areals erfordert. Diese Data werden von dem Geodäten ermittelt bzw. stehen die bezüglichen Meßwerte zu seiner Verfügung. An dem reduzierten Riß des betreffenden Areals wird der Schwerpunkt zweckentsprechend durch Konstruktion ermittelt (ausführlicheres hierüber wird in den meisten technischen Taschenbüchern mitgeteilt). Handelt sich um ein Wegliniensystem des Strahlenbüscheltyps, so wird an dem Riß die Aufteilung in Dreiecke und die Ablesung der Höhe h und der Winkeln vorgenommen.

Nach Einsammlung der nötigen Data kann die Berechnung selbst in Angriff genommen werden. Die in (8) vorkommende Area sinus hyperbolicus Funktion (arsh), wird in den üblichen Funktionentabellen selten vorgefunden, und aus diesem Grunde wurde die entsprechende Tabelle als Anhang unserer Arbeit beigegeben. Die Tabelle enthält fünf Dezimalstellen. An intermediären Stellen — im Falle $x < 15$ — reicht eine lineare Interpolation aus. In Ermangelung einer Tabelle wird man auch mit einer gemeinen Logarithmentafel sein Auslangen finden, obschon dies bedeutend mehr Rechenarbeit erfordert. Die Funktion $\text{arsh} x$ kann nämlich in bekannter Weise auf den Logarithmus zurückgeführt werden:

$$\text{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = 2,30259 \cdot \log(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

wobei \ln den natürlichen, \log den dekadischen Logarithmus bezeichnet.

Zur Veranschaulichung der Ausführung der Rechnungen soll hier die folgende Aufgabe behandelt werden.

Wir wollen eine rechteckige Fläche von 48 Hektar (Seiten: $a = 300$ m, $b = 1600$ m) gleichmäßig mit Schlacke bestreuen. Die Streuschlacke wird mit Lastwagen an die Stelle der zu verfertigenen Schlackenbahn heranbefördert. Die Zufahrstraße der Lastwagen führt zu einem Eckpunkt des Rechtecks. Von da ab verkehren sie auf dem kürzesten Weg. Das Wegliniensystem gehört somit dem Strahlenbüscheltyp an, und die Berechnung der durchschnittlichen Ganglänge wird dementsprechend mit Hilfe der aus der Formel [11] gewonnenen folgenden Gleichung vorgenommen:

$$\bar{s} \approx \frac{I}{U} = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{b} \text{arsh} \frac{b}{a} + \frac{1}{6} \cdot \frac{b^2}{a} \text{arsh} \frac{a}{b}.$$

Mit den angenommenen Werten der Seiten erhalten wir:

$$\frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{3} \sqrt{300^2 + 1600^2} = 542,63 \text{ m,}$$

$$\text{arsh} \frac{a}{b} = \text{arsh} 0,1875 = 0,18642$$

Wertetafel der Funktion Area sinus hyperbolicus (arsh x)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,01000	0,02000	0,03000	0,03999	0,04998	0,05996	0,06994	0,07991	0,08988
0,1	0,09983	0,10978	0,11971	0,12964	0,13955	0,14944	0,15933	0,16919	0,17904	0,18888
0,2	0,19869	0,20849	0,21826	0,22802	0,23775	0,24747	0,25716	0,26682	0,27646	0,28608
0,3	0,29567	0,30524	0,31478	0,32429	0,33377	0,34322	0,35265	0,36204	0,37140	0,38073
0,4	0,39004	0,39930	0,40854	0,41774	0,42691	0,43605	0,44515	0,45422	0,46325	0,47225
0,5	0,48121	0,49014	0,49903	0,50788	0,51670	0,52548	0,53422	0,54293	0,55160	0,56023
0,6	0,56882	0,57738	0,58590	0,59438	0,60282	0,61122	0,61959	0,62792	0,63620	0,64446
0,7	0,65267	0,66084	0,66897	0,67707	0,68513	0,69315	0,70113	0,70907	0,71697	0,72484
0,8	0,73267	0,74046	0,74821	0,75592	0,76360	0,77124	0,77884	0,78640	0,79393	0,80142
0,9	0,80887	0,81628	0,82366	0,83100	0,83830	0,84557	0,85280	0,86000	0,86716	0,87428
1,0	0,88137	0,88843	0,89545	0,90243	0,90938	0,91629	0,92317	0,93002	0,93683	0,94360
1,1	0,95035	0,95706	0,96373	0,97038	0,97699	0,98357	0,99011	0,99663	1,00311	1,00956
1,2	1,01597	1,02236	1,02871	1,03504	1,04133	1,04759	1,05382	1,06003	1,06620	1,07234
1,3	1,07845	1,08453	1,09059	1,09661	1,10261	1,10857	1,11451	1,12042	1,12630	1,13216
1,4	1,13798	1,14378	1,14955	1,15530	1,16101	1,16670	1,17237	1,17801	1,18362	1,18920
1,5	1,19476	1,20030	1,20581	1,21129	1,21675	1,22218	1,22759	1,23298	1,23834	1,24367
1,6	1,24898	1,25427	1,25954	1,26478	1,26999	1,27519	1,28036	1,28551	1,29064	1,29574
1,7	1,30082	1,30588	1,31092	1,31593	1,32093	1,32590	1,33085	1,33578	1,34069	1,34557
1,8	1,35044	1,35529	1,36011	1,36492	1,36970	1,37447	1,37921	1,38394	1,38864	1,39333
1,9	1,39800	1,40265	1,40728	1,41188	1,41648	1,42105	1,42560	1,43014	1,43466	1,43915
2,0	1,44364	1,44810	1,45254	1,45697	1,46138	1,46578	1,47015	1,47451	1,47885	1,48318
2,1	1,48748	1,49177	1,49605	1,50031	1,50455	1,50877	1,51298	1,51718	1,52135	1,52551
2,2	1,52966	1,53379	1,53791	1,54200	1,54609	1,55016	1,55421	1,55825	1,56227	1,56628
2,3	1,57028	1,57426	1,57822	1,58218	1,58611	1,59003	1,59394	1,59784	1,60172	1,60558
2,4	1,60944	1,61328	1,61710	1,62092	1,62471	1,62850	1,63227	1,63603	1,63978	1,64351

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	1,44364	1,48748	1,52966	1,57028	1,60944	1,64723	1,68374	1,71905	1,75323	1,78634
3	1,81845	1,84960	1,87986	1,90927	1,93788	1,96572	1,99284	2,01926	2,04503	2,07017
4	2,09471	2,11869	2,14211	2,16502	2,18742	2,20935	2,23081	2,25184	2,27244	2,29264
5	2,31244	2,33186	2,35093	2,36964	2,38801	2,40606	2,42379	2,44122	2,45836	2,47521
6	2,49178	2,50809	2,52414	2,53994	2,55549	2,57081	2,58591	2,60078	2,61543	2,62988
7	2,64412	2,65816	2,67202	2,68568	2,69916	2,71247	2,72560	2,73856	2,75135	2,76399
8	2,77647	2,78880	2,80098	2,81301	2,82490	2,83666	2,84827	2,85976	2,87111	2,88234
9	2,89344	2,90443	2,91529	2,92604	2,93667	2,94720	2,95761	2,96792	2,97812	2,98822
10	2,99822	3,00812	3,01793	3,02764	3,03726	3,04678	3,05622	3,06557	3,07483	3,08401
11	3,09310	3,10212	3,11105	3,11990	3,12868	3,13738	3,14601	3,15456	3,16304	3,17145
12	3,17979	3,18806	3,19626	3,20439	3,21247	3,22047	3,22841	3,23630	3,24411	3,25187
13	3,25957	3,26721	3,27480	3,28232	3,28979	3,29721	3,30457	3,31187	3,31913	3,32633
14	3,33348	3,34058	3,34763	3,35463	3,36158	3,36848	3,37534	3,38215	3,38891	3,39563
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	2,99822	3,09310	3,17979	3,25957	3,33348	3,40231	3,46671	3,52722	3,58429	3,63828
20	3,68950	3,73824	3,78471	3,82911	3,87163	3,91242	3,95161	2,98933	4,02567	4,06074
30	4,09462	4,12739	4,15913	4,18988	4,21972	4,24870	4,27686	4,30425	4,33091	4,35687
40	4,38218	4,40687	4,43096	4,45448	4,47747	4,49993	4,52191	4,54341	4,56446	4,58507
50	4,60527									

$$\operatorname{arsh} \frac{b}{a} = \operatorname{arsh} 5,3333 = 2,37576,$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot \operatorname{arsh} \frac{b}{a} = 9,375 \cdot 2,37576 = 22,27 \text{ m},$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \operatorname{arsh} \frac{a}{b} = 1422,22 \cdot 0,18642 = 265,13 \text{ m}.$$

Durch Einsetzung der erhaltenen Werte in die Formel erhalten wir:

$$\bar{s} \approx 542,63 + 265,13 + 22,27 = 830,03 \text{ m}.$$

Die durchschnittliche Ganglänge beträgt somit 830 m. Insofern die Verfertigung der ganzen Schlackenbahn die Ladungen von 3000 Lastwagen erfordert, so entfällt auf die Flächeneinheit ein Wegbedarf von

$$S = \frac{2 n \bar{s}}{U} \approx \frac{2 \cdot 3000 \cdot 830 \text{ m}}{48 \text{ ha}} \approx 104 \text{ km/ha}.$$

ZUSAMMENFASSUNG

Einen der die Größe des Transportarbeitsbedarfs der gleichmäßigen Flächenarbeiten bestimmenden wesentlichsten Faktoren stellt die durchschnittliche Transportweglänge dar. In vorliegender Arbeit verfolgt Autor das Ziel, diese Größe zu berechnen. Zur Schätzung der durchschnittlichen Weglänge bietet sich die Näherungsformel von

$$\bar{s} \approx \frac{\int s dU}{U} \quad (2)$$

als die geeignetste dar. Im Falle eines parallelen Wegliniensystems kann somit die durchschnittliche Weglänge durch die Entfernung des Schwerpunkts der betreffenden Fläche geschätzt werden, während im Falle eines Wegliniensystems vom Typ eines Strahlenbüschels die Berechnung des polaren Moments (Moment erster Ordnung) der Fläche durch die Formel (2) erfordert wird. Diese Aufgabe wird auf die eines Kreises und eines Dreiecks zurückgeführt, und dadurch auch die Ermittlung des polaren Moments eines allgemeinen Vielecks ermöglicht. Zur Erleichterung der Anwendung der gewonnenen Formeln wird der Mitteilung eine Wertetafel der Funktion $\operatorname{arsh} x$ beigegeben.

CONTRIBUTION TO A PARTIAL PROBLEM CONCERNING THE TRANSPORTATION NEEDED FOR WORK ALLOTTED UNIFORMLY TO AN AREA

A. ZAJTA

SUMMARY

The author aims at calculating one of the most essential factors concerning the transportation work requirement for work allotted uniformly to an area, i. e. the mean transportation distance. For computing the mean distance, the approximate formula

$$\bar{s} \approx \frac{\int s dU}{U} \quad (2)$$

offers the best solution. For a parallel road system thus the mean route length can be estimated from the centre of gravity of the area, in case of a radial road system formula (2) requires calculation of the polar moment (of the first order) of the area under consideration. This problem is solved for a circle and for a triangle, and the author reduces to this latter the computation of the polar moment of a general polygon. In order to facilitate the application of the formulae, an $\operatorname{arsh} x$ table is joined to the paper.

LE CONTRIBUTION À LA SOLUTION D'UN PROBLÈME PARTIEL CONCERNANT
LE TRAVAIL DE TRANSPORT REQUIS POUR LES TRAVAUX UNIFORMÉMENT
RÉPARTIS SUR UNE CERTAINE SURFACE

A. ZAJTA

RÉSUMÉ

L'auteur se propose de calculer l'un des facteurs les plus importants agissant sur la quantité de transports requis pour des travaux uniformément repartis sur une certaine surface, c'est-à-dire la distance de transport moyenne. Pour estimer la longueur de route moyenne, la formule approchée

$$\bar{s} \approx \frac{\int_U s dU}{U} \quad (2)$$

s'offre comme la plus appropriée. En cas d'un système de routes parallèles, on peut estimer ainsi la longueur de route moyenne, en partant de la distance du centre de gravité de la surface. En cas d'un système de routes radiales, la formule (2) nécessite le calcul du moment polaire (de premier ordre) de la surface.

Ce problème est résolu pour le cercle et pour le triangle, et la détermination du moment polaire d'un polygone général est ramenée à ce dernier cas. Pour faciliter l'application des formules, une table des area sinus hyperboliques est jointe au travail.

К ОДНОЙ ИЗ ЧАСТНЫХ ПРОБЛЕМ ПОТРЕБНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ РАБОТЫ
ПРИ РАБОТАХ НА РОВНОЙ ПЛОЩАДКЕ

A. ЗАЙТА

РЕЗЮМЕ

В работе ставится целью вычисление среднего расстояния транспортировки, т. е. одного из важнейших факторов, воздействующих на величину потребной транспортной работы при работах на ровной площадке. Наиболее подходящей формулой для оценки среднего расстояния транспортировки кажется приближенная формула

$$\bar{s} \approx \frac{\int_U s dU}{U} \quad (2)$$

Таким образом, в случае параллельной системы дорог среднее расстояние можно оценить расстоянием центра тяжести площади, в случае же радиальной системы дорог формула (2) требует вычисления полярного момента участка площади. Эта задача решается для круга и треугольника, и к последнему сводится определение полярного момента общего многоугольника. Для облегчения применения полученной формулы приложением к работе дается таблица значений area-синуса гиперболического.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE VISUELLE LEISTUNG DER FERNROHRE BEIM DÄMMERUNGSSEHEN

S. DÉKÁNY

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 3. Juni 1957]

1. Einleitung und Übersicht

Es liegt außer Zweifel, daß die Betrachtung entfernt liegender Feldanteile, Gegenstände durch ein Fernrohr umso erfolgreicher ist, je stärker die Vergrößerung, je größer das Sehfeld und die Helligkeit und je besser das Bildauflösungs- und Abbildungsvermögen des verwendeten Fernrohres sind. Gleichzeitig erscheint jedoch als wünschenswert, daß dem Fernrohr ein je kleineres Gewicht und je geringere Dimensionen zukommen. All diese für die Leistungsfähigkeit des Fernrohres charakteristischen Forderungen stehen jedoch zum Großteil in einem gewissen Gegensatz zueinander. So wird z. B. durch die Steigerung der Vergrößerung das Sehfeld verringert, durch die Vergrößerung des Sehfeldes die Abmessung und das Gewicht des Okulars vergrößert, usw. Ein in jeder Hinsicht vollkommen entsprechendes Allzweckfernrohr gibt es demgemäß nicht, und es muß eine Kompromißlösung getroffen werden. Zum allerersten muß einmal die Bestimmung des auszuwählenden Fernrohres festgesetzt werden. In deren Kenntnis müssen dann die optischen Eigenschaften des Fernrohres bei Einhaltung der festgesetzten Bedingungen und Beschränkungen (z. B. der maximalen Abmessung oder des maximalen Gewichts) in der Weise bestimmt werden, daß das Fernrohr seiner Bestimmung so gut wie möglich entsprechen könne. Bei Berücksichtigung dieses Prinzips behandelt diese Mitteilung die bei Tageslicht und bei Dämmerung universell verwendbaren binokularen Handfernrohre, und untersucht in erster Linie deren visuelle Leistung bei Nacht.

Die gewonnenen Ergebnisse können selbstredend sinngemäß auch auf andere Fernrohrtypen bezogen werden.

Mit Rücksicht darauf, daß selbst die Bestimmung der binokularen Handfernrohre eine Vielfalt aufweisen kann, so können sie zum Sport-, Jagd- und Feldgebrauch dienen, oder aber werden sie im Theater, am Schiff oder an Luftfahrzeugen, usw. verwendet, so müssen auch bei diesen Fernrohren verschiedene Forderungen in Betracht gezogen werden. Es wird in jedem Fall das zweckdienlichste Fernrohr mit »Höchstleistung« erfordert.

Die Untersuchungen erstrecken sich in vorliegendem Fall auf die Leistung, insbesondere aber auf die visuelle Leistung bei Nacht der für Jagd- und Feld-

gebrauch allgemein verbreiteten Fernrohrtypen. Der obigen Bestimmung entsprechend können für die Außenform die üblichen Dimensionen und für das Gewicht z. B. 600 g festgesetzt werden. Was aber die Leistung anbetrifft, können konkrete Zahlenangaben nicht gemacht werden.

Als eine Forderung für diese Fernrohre kann aufgestellt werden, daß bei einem je größeren Gesichtsfeld und mit einer guten stereoskopischen Sicht — sowohl bei Tageslicht wie bei Dämmerung — wesentlich mehr Details als mit freiem Auge wahrgenommen werden können; dabei müssen fleckenartige, stehende oder sich bewegende Objekte mit Hilfe dieser Fernrohre auch bei fast voller Dunkelheit wahrgenommen werden können. All diese Forderungen beziehen sich auf die Leistung des Fernrohres.

Der Begriff der Leistung eines Fernrohres ist indessen in der Optik nicht so konkret und unbestritten wie der Begriff der Arbeitsleistung in der Mechanik festgesetzt.

Für die Fernrohrleistung wird von KÖHLER in seinem Artikel [1] folgende Definition gegeben: »Man wird also die Leistung L eines Fernrohres als das Verhältnis der mit dem Instrument beobachteten Sehschärfe S_F zu der Sehschärfe S_a des bloßen Auges im freiäugigen Sehen ansetzen.

Also:

$$L = \frac{S_F}{S_a}. \quad (1)$$

Hier bedeutet die Sehschärfe den reziproken Wert des entsprechenden Bildauflösungsvermögens, σ .

Für die Sehschärfe des Auges wird von KÖHLER folgende Formel mitgeteilt:

$$S_a = C \cdot B^m, \quad (2)$$

wobei mit B die Umfeld Leuchtdichte des Objektes bezeichnet wird. C und m stellen »Konstanten« dar, indessen sind diese Werte lediglich in einem verhältnismäßig engen Bereich der Leuchtdichte konstant, und hängen im übrigen auch von der beobachtenden Person, dem Adaptationszustand der Augen, usw. ab.

Es wird in dem zitierten Artikel von Köhler abgeleitet, daß, bei Betrachtung des beobachteten Gegenstandes mit der Leuchtdichte B , die Beleuchtungsstärken im, dem Objektbild entsprechenden Gebiet der Netzhaut, das heißt E_F bei Betrachtung mit dem Fernrohr und E bei Betrachtung mit freiem Auge, der folgenden Relation genügen:

$$\frac{E_F}{E} = \delta_F \left(\frac{p}{p_a} \right)^2. \quad (3)$$

Diese Formel stellt Formel (5) von KÖHLER dar, wobei δ_F die Lichtdurchlässigkeit des Fernrohres, p den Austrittspupillendurchmesser des Fernrohres, p_a den Augenpupillendurchmesser bedeutet, mit der Bedingung, daß $p < p_a$ ist.

Diese Formel stimmt (allerdings mit anderen Bezeichnungen) mit der von MARÉCHAL [5] für die Lichtstärke des Fernrohres angegebenen folgenden Formel genau überein :

$$\frac{L'}{L} = \tau \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 . \quad (3a)$$

Hier wird also durch den Anfangsbuchstaben L nicht das Wort »Leistung«, sondern das Wort »luminosité« bezeichnet.

KÖHLER betont auf dieser Grundlage den unmittelbaren Einfluß des Quadrates der Austrittspupille auf die Lichtstärke, und aus diesem Grunde wird der Wert $p^2 = (2r)^2$ als »geometrische Lichtstärke« bezeichnet. KÖHLER leitet sodann ab, daß die Sehschärfe durch das Fernrohr durch folgende Formel wiedergegeben wird :

$$S_F = C \cdot N \cdot \delta_F^m \cdot B^m \left(\frac{P}{p_a} \right)^{2m} , \quad (4)$$

wo durch N die Vergrößerung des Fernrohres bezeichnet wird.

Die Leistung des Fernrohres kann demnach auf Grund der Formel (1) durch den Quotienten der Formeln (4) und (2) ausgedrückt werden :

$$L = N \cdot \delta_F^m \left(\frac{P}{p_a} \right)^{2m} . \quad (5)$$

In Verbindung mit der obigen Formel weist Köhler auf die Erörterungen von NAGEL und KLUGHARDT [5], ferner auf die von KÜHL [3] hin, nach welchen Formel (5) lediglich das Ergebnis einer mathematischen Divisionsoperation darstellt. KÜHL weist darauf hin, daß infolge der Verschiedenheit der Adaptationszustände der Wert von B in Formel (4) nicht mit dem in Formel (2) identisch sein kann. Aus diesem Grunde modifiziert Köhler die obige Formel, und durch die Einführung der Konstanten C will er die Änderung der Sehschärfe des Auges bei den verschiedenen Fernrohrtypen in Betracht ziehen :

$$L = C \cdot N \cdot \delta_F^m \left(\frac{P}{p_a} \right)^{2m} . \quad (5a)$$

Fernrohrleistung bei Tageslicht : Diese Leistung kann auf Grund der obigen Formel mit der Bedingung abgeleitet werden, daß der Durchmesser der Augenpupille nicht weniger als 2 mm, und die Austrittspupille des Fernrohres mindestens 2 mm beträgt. Auf Grund dieser Bedingung kann der Wert des Quotienten p/p_a als gleich der Einheit angenommen werden, was dem Fall der »Normalvergrößerung« entspricht. Somit erhalten wir :

$$L_{\text{bei Tag}} = C \cdot N \cdot \delta_F^m . \quad (6)$$

Leistung des Fernrohres bei Dämmerung : Wenn der Durchmesser der Austrittspupille des Fernrohres größer als der der Augenpupille ist, so bewahrt nach

KÖHLER Formel (6) für die Leistung des Fernrohres ihre Gültigkeit. Eine Abweichung von den Leistungswerten bei Tageslicht wird lediglich durch die Änderung der Werte von C und δ_F^m bedingt.

Übertrifft jedoch der Durchmesser der Austrittspupille des Fernrohres den der Augenpupille, so nimmt die visuelle Leistung des Fernrohres ohne Zweifel ab. Für diesen Fall wird von Köhler die folgende Formel angegeben:

$$L_{\text{Dämm.}} = \frac{C}{p_a^{2m}} \cdot \delta_F^m \cdot N^{1-2m} \cdot D^{2m}, \quad (7)$$

wobei D den Durchmesser der Eintrittspupille des Fernrohres bedeutet.

Unbestreitbar bestimmte Daten für den Wert von m gibt es nicht. Von KÜHL [3] wurde auf rein theoretischer Grundlage der Wert $m = 1/3$ erhalten. Von LÖHLE [4] wurden indessen auf Grund der Versuche zwei Werte für m angegeben:

Für tiefe Dämmerung:

$$(3 \times 10^{-8} < B < 3 \times 10^{-5} \text{ sb}) \quad m = 3/8,$$

für leichte Dämmerung:

$$(3 \times 10^{-7} < B < 3 \times 10^{-5} \text{ sb}) \quad m = 1/4.$$

Mit obigen Werten nehmen die Leistungsgleichungen auf Grund der Gleichung (7) und mit der Bezeichnung $C/p_a^{2m} = K$ folgende Form an:

$$L_{\text{tiefe Dämm.}} = K \cdot \delta_F^{3/8} \cdot N^{1/4} \cdot D^{3/4} \quad (7a)$$

$$L_{\text{leichte Dämm.}} = K \cdot \delta_F^{1/4} \cdot \sqrt{N \cdot D}. \quad (7b)$$

Für den Fall der leichten Dämmerung ergibt sich somit eine einfache Formel, woraus KÖHLER die folgende Faustregel formuliert: »In der Dämmerung ist die Fernrohrleistung der Quadratwurzel aus Fernrohrvergrößerung mal Durchmesser der Eintrittspupille proportional, die Durchlässigkeit wirkt etwa mit der 4. Wurzel.«

Die hier mitgeteilten Erörterungen und Formeln von KÖHLER ergeben zweifellos eine recht gute Übersicht über die Fernrohrleistungen. Es kann jedoch festgestellt werden, daß teils die Unsicherheit der berücksichtigten Werte, teils die Außerbetrachtung mehrerer Faktoren auch gegenüber dem Ergebnis eine gewisse Unsicherheit mit sich bringen.

So ist z. B. der Wert des in der Formel (5a) erscheinenden Faktors C sowie der Wert des in den Formeln (7a) und (7b) erscheinenden Faktors K unsicher. Eine gewisse Unsicherheit steckt auch in den Werten des in den Leistungsformeln als Exponent fungierenden m .

Diese Unsicherheit wird noch durch den Umstand erhöht, daß wir für den optimalen Durchmesser der Augenpupille bei Dämmerungssehen noch über keine endgültigen, zuverlässigen Werte verfügen. So schreibt z. B. SONNEFELD folgendermaßen: »Es wird behauptet, daß das menschliche Auge sein maxima-

les Auflösungsvermögen etwa bei 3 bis 4 mm Pupille besitzt, und man kann die Frage stellen, ob es dann überhaupt einen Zweck hat, größere Pupillen zu berücksichtigen, selbst wenn solche bei starker Dunkelheit vom Auge eingestellt werden.«

Nach Fußnote 1 derselben Mitteilung wird von ARGENTIERI als optimaler Wert für den Durchmesser der Augenpupille wegen der sphärischen Aberration und des Lichtbeugungseffektes an den Pupillenrändern 3,1 mm angegeben.

Im Gegensatz zu den vorigen steht auf S. 22 des Werkes von NAUMANN [7] folgendes: »Bei Geräten, die mit dem Auge zusammen zu subjektivem Gebrauch dienen, wird die Austrittspupille in die Pupille des Auges abgebildet. Hierfür gelten folgende Regeln:

a) Bei Geräten, die eine künstliche Lichtquelle enthalten, welche hell genug ist... oder die vorwiegend bei Tageslicht benutzt werden, soll die Austrittspupille mindestens 3 mm groß sein.

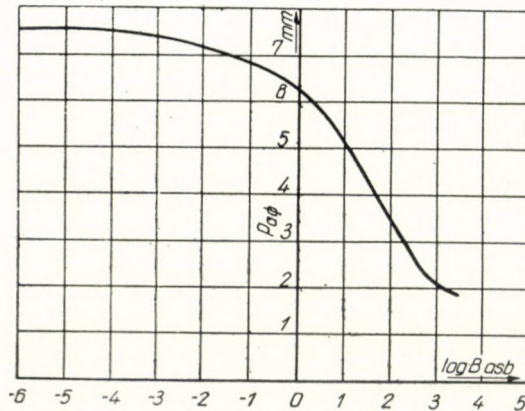


Bild 1. Augenpupillendurchmesser in Abhängigkeit von der durchschnittlichen Leuchtdichte der Umgebung

b) Geräte, die bei Nacht benutzt werden, sollen mindestens 7, besser 10 mm Austrittspupille aufweisen, damit sie die volle Pupille dunkeladaptierter jugendlicher Augen nicht beschneiden, z. B. bei Nachtgläsern... usw.«

Nach den Messungen von COBB (s. SCHÖBER [8], S. 313) wird die Sehschärfe durch eine Änderung des Pupillendurchmessers innerhalb 2 und 6 mm praktisch nicht beeinflusst. Bei einem Austrittspupillendurchmesser von unterhalb 2 mm oder oberhalb 6 mm sinkt jedoch die Sehschärfe rasch ab. So wird z. B. bei einem Austrittspupillendurchmesser von 1 oder 7 mm nur mehr eine etwa 50%ige Sehschärfe erhalten. Bei einem Austrittspupillendurchmesser von über 6 mm wird die Sehschärfe durch die Abbildungsfehler, bei Durchmessern von unter 2 mm aber durch die Lichtbeugungseffekte beeinträchtigt.

Im Bild 1 wurden die Augenpupillendurchmesser auf Grund der auf Seite 110 im Buche von NAUMANN [7] mitgeteilten Daten in Abhängigkeit von der durchschnittlichen Leuchtdichte der Umgebung zusammengestellt.

Bild 2 wurde ebenfalls auf Grund von Naumanns Daten (S. 111) konstruiert. Es stellt die Änderung der Akkommodationsbreite und des maximalen Durchmessers der Augenpupille in Abhängigkeit vom Alter dar.

Aus der Kurve des Bildes 1 ist wohl ersichtlich, daß bei einer durchschnittlichen Leuchtdichte der Umgebung von etwa 0,02 asb 7 mm als der durchschnittliche Wert für den Augenpupillendurchmesser betrachtet werden kann.

Im Bild 2 weist die Linie der maximalen Augenpupille darauf hin, daß sich

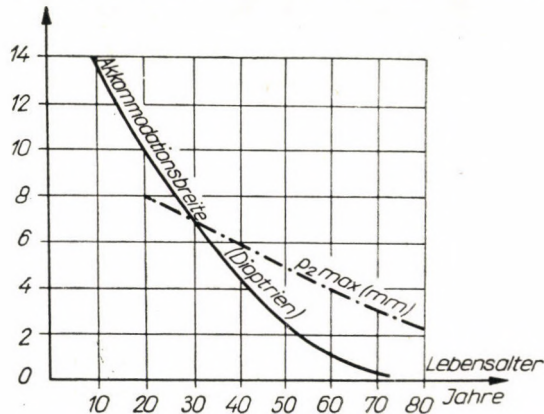


Bild 2. Akkommodationsbreite und maximaler Durchmesser der Augenpupille in Abhängigkeit vom Alter

die Augenpupille des Menschen im Alter von zwischen 20 und 30 Jahren bis zu 7—8 mm erweitern kann.

Auf Grund der obigen Feststellungen erscheint es nicht als wahrscheinlich, daß eine Oberflächenzunahme der Augenpupille über 3—4 mm hinsichtlich des Dämmerungssehens überflüssig wäre. Diese Zunahme von 4 mm auf 7 mm bedeutet einen über 100%igen Mehrwert der Eintrittsöffnung und bei gleichmäßiger Lichtverteilung einen gleichen Mehrwert an der eintretenden Lichtmenge.

Wird überdies noch der Stiles-Crawfordsche Effekt, nach welchem an den Rändern der Augenpupille das Lichtdurchlassvermögen abnimmt, ferner die geschwächte Abbildungsfähigkeit der Augenpupille an den Rändern in Rücksicht genommen, selbst dann wird dieses 100%ige Mehr an Lichtmenge, wenn auch nicht zur Steigerung der Bildschärfe, doch bei dunkler Dämmerungsbelichtung unbedingt zu einer Verbesserung der Objekterkennung beitragen. Bei der dunklen Dämmerungsbelichtung wird aber das Hauptziel — zum mindesten bei den militärischen und Jagdfernrohren — nicht so sehr durch das Scharfsehen, das heißt die Feststellung der Konturen, scharfen Grenzlinien und Einzelheiten, vielmehr durch die Erkennung der Objekte, der militärischen und Jagdziele

gebildet. Für einen großen Austrittspupillendurchmesser spricht auch die Feststellung von NAUMANN, nach welcher: »Es ist also zwecklos, an optischen Geräten, die nur von alten Personen benutzt werden, Austrittspupillen von mehr als 5 bis 6 mm Durchmesser vorzusehen, ebenso an Einrichtungen, die nur bei hellem Licht benutzt werden, z. B. an Aussichtsfernrohren.« Dies spricht nämlich — im Gegensatz zu den zitierten Feststellungen von Sonnefeld — dafür, daß bei dem Dämmerungssehen »nicht alter« Leute auch die Anwendung eines Austrittspupillendurchmessers von über 4 oder sogar 6 mm gerechtfertigt ist. Auch die im § 66 (Fernrohrleistung) in NAUMANN'S erwähntem Buche enthaltenen Aussagen [7] weisen auf den vagen Charakter des Begriffes der Fernrohrleistung hin. Zuerst weist dieser Autor darauf hin, daß die Leistung der Handfernrohre üblicherweise mit dem Ausdruck N.D bezeichnet wird, wo jedoch nach NAUMANN dieser Bezeichnung als Produkt »überhaupt kein Sinn« zukommt. Zur gleichen Zeit weist er indessen auf zahlreiche andere Faktoren hin (Lichtverluste im Fernrohr, Einfluß der Pupillenzunahme auf die Abbildung, schädliche Reflexe, Differenz zwischen den Durchmessern der Augenpupille und der Fernrohrpupille, usw.), die die Sehschärfe und damit auch die Leistung des Fernrohres beeinflussen. All diese Faktoren zählen bei Betrachtung bei Tageslicht nicht viel, da doch hier die Sehschärfe von den geringen Schwankungen in der Belichtung der Umgebung kaum abhängt, und dabei die Augenpupille klein ist. Eine große Rolle spielen jedoch die vorigen Faktoren bei Dämmerungs- und Nachtbelichtung. In dieser Hinsicht sind die Galileischen Fernrohre — wegen des geringen Licht- und Kontrastverlustes sowie der großen Austrittspupille — den Prismenfernrohren gegenüber im Vorteil. Bei Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen gilt nach NAUMANN folgende Näherungsformel:

$$L = N \frac{\log(1,3 + 0,4 \cdot B \cdot \tau \cdot P^2)}{\log(1,3 + 0,4 \cdot B \cdot p_a^2)}, \quad (8)$$

wobei B die Leuchtdichte der Umgebung in asb , und P von den Austrittspupillendurchmessern des Auges und des Fernrohres den kleineren bedeutet.

Für den Wert des Lichtdurchlaßkoeffizienten τ gibt NAUMANN die folgenden praktischen Zahlenwerte an: $\tau = 0,8$ für das Galileische Fernrohr und $\tau = 0,5$ für die Prismenfernrohre. Auch die Erörterungen von NAUMANN rechtfertigen den Standpunkt, daß zur Beurteilung und Charakterisierung eines Fernrohres für den Fall des Dämmerungs- und Nachtsehens die Sehschärfe allein keinen entscheidenden Faktor darzustellen vermag. Aus den obigen Zahlenwerten folgt nämlich, daß von den beiden Fernrohrtypen mit gleichen Eintritts- und Austrittspupillen das Galileische Fernrohr eine 1,6fache Leistung der des Prismenfernrohres ergäbe. »Demgegenüber gibt es Umstände, die für das Prismenfernrohr entscheidend zu beurteilen sind. Nämlich das größere Gesichtsfeld, und die Basisvergrößerung, welche ein besseres stereoskopisches Sehen ermöglicht.« Von besonderer Wichtigkeit ist das große Gesichtsfeld bei

den dunklen Dämmerungs- und Nachtbeobachtungen. Das große Gesichtsfeld ist einerseits wichtig, um die helleren Flecken und die Bewegungen in einem je größeren Gebiet wahrnehmen zu können, andererseits aber, weil die Netzhaut bei Dämmerungssehen die größte Empfindlichkeit bei Schwiukeln um 20° herum aufweist (Tafel von ASTERBERG [8], S. 118).

2. Der Einfluß der Zielbewegung auf die Wahrnehmung

Die Unsicherheit der »Formeln«, die die Leistung eines Fernrohres, insbesondere aber die visuelle Leistung bei Dämmerungs- und Nachtsehen zu charakterisieren berufen sind, wird noch weiter erhöht durch dem Umstand, daß die Umstände der Bewegungswahrnehmung außer acht gelassen werden. Diese Umstände sind nach derzeitigem Wissen in der Literatur bis zur Zeit unberücksichtigt geblieben. Das Problem kann aber als äußerst bedeutend bezeichnet werden, denn ob es sich nun um den Anstand bei der Jagd oder aber um eine Beobachtung bei Nacht oder militärische Aufklärung handelt, die wichtigste Aufgabe besteht immer wieder in der Erkennung der Zielobjekte und in der Verfolgung ihrer Bewegungen.

Die auf die Erkennung der Bewegungen bezüglichen Eigenschaften des menschlichen Auges wurden in der Medizin erfolgreich erkundet und in der Fachliteratur aufgearbeitet. Es erscheint daher zweckdienlich, von den hier ermittelten Gesetzmäßigkeiten auch bei der Auswertung der Fernrohrbeobachtung bei Dämmerungslicht Gebrauch zu machen und sie sinngemäß anzuwenden. Als Grundlage zu dieser Untersuchung mögen die Angaben von SCHOBER [8] dienen. Genannter Autor schreibt auf S. 373 seines Werkes Folgendes: »Bei der Beobachtung von bewegten Gegenständen durch ein ruhendes Beobachteraue ist vor allem das Verhalten des peripheren (und nicht des fovealen) Teils der Netzhaut maßgebend.« Bei der Bewertung kommt der Lokaladaptation, dem Kontraste und dem Nachbilde eine bedeutende Rolle zu. Im Bild 3 (Bild 146 im Schoberschen Werke) wird das lokale Bewegungserkennen der Netzhaut in Abhängigkeit des Schwiukels (α) dargestellt. Unter Schwiukel wird der Neigungswinkel der Geraden verstanden, die die Fovea centralis mit dem Augenlinsenzentrum bzw. mit dem beobachteten Objektpunkt verbinden. Durch den Punkt 0 der Abszissenachse wird die Richtung der Fovea centralis, durch den breiten schwarzen Streifen der blinde Fleck angegeben. Die gebrochene Linie stellt die Bewegungswahrnehmungskurve bei Tageslicht, die kontinuierliche Linie die des Dämmerungssehens dar. Zum Vergleich wird in Bild 4 das Diagramm der lokalen Sehschärfe auf der Netzhaut, gleichfalls in Abhängigkeit vom Schwiukel dargestellt (Bild 129 im Schoberschen Werke). Die Verwandtschaft zwischen den beiden Diagrammen ist leicht zu erkennen.

Aus Bild 3 ist wohl ersichtlich, daß bei der Beobachtung bei Tageslicht — und dies gilt auch für die Beobachtung beweglicher Gegenstände — die größte

Sehschärfe auf die fovea centralis, das heißt auf die Stelle des größten Auflösungsvermögens fällt. Von dem Zentrum auswärts fällt dieser Wert rasch, und bei einem Sehwinkel von ungefähr 25° bricht die Kurve in beiden Richtungen ab. Dieses Abbrechen der Kurve kann jedoch nicht das Aufhören des Bewegungs-

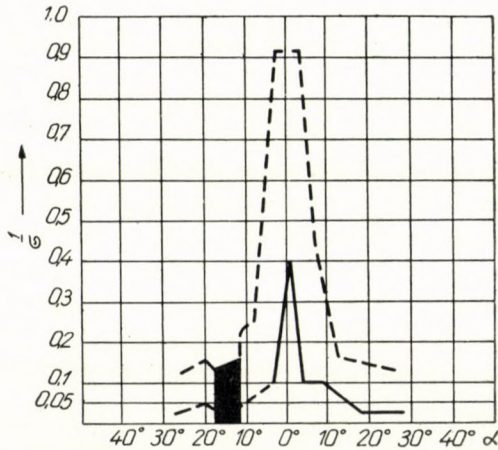


Bild 3. Die Abhängigkeit des Bewegungserkennens vom Netzhautort nach Ferree und Rand

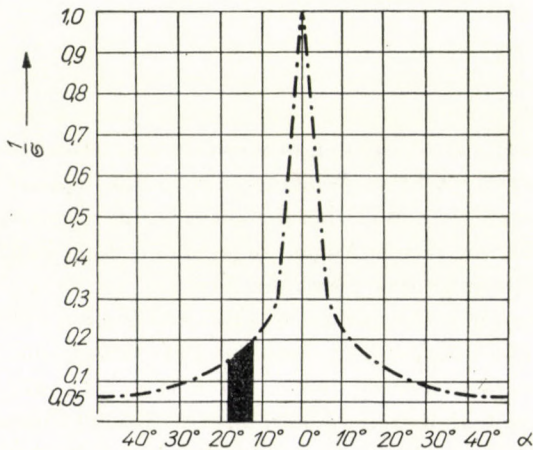


Bild 4. Die lokale Sehschärfe der Netzhaut in Abhängigkeit von dem Schwinkel

erkennens bedeuten, wird doch jedermann leicht feststellen können, daß sich diese Fähigkeit in der Wirklichkeit links und rechts bis auf etwa 90° erstreckt. Durch die kontinuierliche Linie wird die Bewegungswahrnehmungsfähigkeit des auf Dämmerungssehen adaptierten Auges dargestellt. Der Charakter dieser Kurve gleicht dem der für die Adaptation bei Tageslicht konstruierten Kurve, jedoch

mit dem Unterschied, daß die erstere durch wesentlich niedrigere Werte läuft. Es kann angenommen werden, daß der Verlauf dieser Kurve in der Umgebung des Abszissenpunkts 0 unrichtig sei, da doch auf der fovea centralis und in ihrer unmittelbaren Umgebung sich keine Stäbchen befinden, und demgemäß sollte die Sehschärfe hier bei Dämmerungssehen gleichfalls Null werden.

Um die Bewegung eines Gegenstandes auch mit unbeweglichen Augen beobachten zu können, muß die Bedingung erfüllt werden, daß die Winkelgeschwindigkeit der Objektbewegung oberhalb eines gewissen unteren Grenzwertes und unterhalb eines gewissen oberen Grenzwertes liege. Der untere Grenzwert soll nach AUBERT 1—2 Winkelminuten je Sekunde betragen (S. 374 im Schoberschen Werk). Für die obere Grenze der Winkelgeschwindigkeit kann kein konkreter Zahlenwert angegeben werden, da dieser Wert von der zur Wahrnehmung erforderlichen minimalen Einwirkungsdauer auf die Sehnerven abhängt. Diese Zeitdauer stellt eine Funktion der Stelle des Retinateils, der Leuchtdichte (Oberflächenhelligkeit) des sich bewegenden Objektes, des Kontrastes, usw. dar. Der Zahlenwert dieser Winkelgeschwindigkeit beträgt für die Beobachtung eines sich in der Nähe eines Fixpunktes bewegenden Gegenstands bei starker Belichtung etwa $1,4^\circ$ Winkeldrehung in 0,01 sec.

Es liegt außer Zweifel, daß, wie hoch auch immer dieser obere Grenzwert liege, seine Größe bei der Beobachtung mit einem Fernrohr mindestens so viele Male verringert wird, als die Vergrößerung des Fernrohrs beträgt. Der Ausdruck »mindestens« kann dadurch begründet werden, daß bei Erhöhung der Vergrößerung das Gesichtsfeld unter sonst gleichen Bedingungen geringer wird, und so wird auch der Beobachtung der Bewegung durch das Fernrohr eine kürzere Zeitdauer zur Verfügung stehen. Demgegenüber wirkt sich die Erhöhung der Vergrößerung des Fernrohrs auf den unteren Grenzwert der Bewegungswahrnehmung günstig aus. Die effektive Winkelgeschwindigkeit des Gegenstandes kann nämlich hierdurch auf einen Wert herabgesetzt werden, der so viele Male kleiner als der für die Sicht mit freien Augen angegebene Wert von 1—2'/sec ist, eine wievielfache Vergrößerung das Fernrohr besitzt.

Auch auf Grund der Anwendung des Baslerschen Satzes (siehe SCHOBER [8], S. 375, Satz 259) übt die Vergrößerung des Fernrohres eine günstige Wirkung auf die Bewegungswahrnehmung aus... Nach BASLER kann nämlich die Bewegung eines Punktes lediglich in dem Falle beobachtet werden, wenn dessen definitive Verrückung senkrecht zur Richtung des Beobachters mindestens 20 Winkelsekunden gegen einen Fixpunkt beträgt. In einem vollständig dunklen Raum oder in Ermangelung eines Fixpunktes ist indessen eine Verrückung von mindestens 80 Winkelsekunden innerhalb der angegebenen Winkelgeschwindigkeiten erforderlich. Da die Funktion der Netzhaut auch in diesem Falle unabhängig davon ist, ob der Gegenstand durch oder ohne Fernrohr an ihr abgebildet wurde, so dürfen die oben angegebenen Werte beim Fernrohrsehen im Verhältnis der Fernrohrvergrößerung, d. h. N-mal kleiner werden.

Eine wievielfache Vergrößerung des Fernrohres in einem gegebenen Fall zur Aufklärung des Zielobjekts benötigt wird, hängt mithin auch von der Bewegungsgeschwindigkeit der aufzuklärenden Zielobjekte ab.

Aus den Obengesagten kann festgestellt werden, daß die visuelle Leistung eines Fernrohres — sowohl bei Tageslicht als auch bei Dämmerung — auch durch die Gesetzmäßigkeiten der Bewegungswahrnehmung in bedeutendem Maße beeinflußt werden kann, obwohl sie in keinerlei Leistungsformel eingehen.

3. Untersuchung der Fernrohrleistungen auf Grund von konkreten Forderungen

Aus den bisherigen Erörterungen geht deutlich hervor, daß der objektive Vergleich der verschiedenen binokularen Handfernrohre nur auf Grund der Aufstellung konkreter Erfordernisse vorgenommen werden kann. Es kann somit vorkommen, daß sich von zwei Fernrohrtypen zu einer Aufgabe der eine Typ, zu einer anderen Aufgabe indessen der zweite Typ mehr eignet, das heißt, eine größere Leistung aufweist.

Wie im Kapitel I bereits erwähnt wurde, behandelt die vorliegende Mitteilung die zum Jagd- und Feldgebrauch dienenden binokularen Handfernrohre. Es können folgende Forderungen aufgestellt werden :

1. Maß : innerhalb von $50 \times 120 \times 170$ mm,
2. Gewicht : max. 600 g,
3. bei einer je stärkeren Vergrößerung und je größerem Gesichtsfeld soll das Fernrohr — sowohl bei Tageslicht als auch bei Dämmerungs- und insbesondere Nachtbelichtung — zur Beobachtung sowohl von stehenden als auch sich mit kleiner oder großer Geschwindigkeit bewogender Zielobjekte geeignet sein.

4. Sonstige Forderungen nach den üblichen internationalen Vorschriften.

Die Lichtstärke, Vergrößerung und Gesichtsfeld können nicht im voraus bestimmt werden, da doch eben diese Größen die Faktoren darstellen, durch deren Modifizierung innerhalb der angegebenen Maß- und Gewichtsgrenzen die Leistung des Fernrohres an die gestellte konkrete Aufgabe angepaßt werden kann.

Für die Fernrohrleistungen bei Tageslicht und bei Dämmerungsbelichtung werden konkrete Zahlenwerte durch die im Kapitel I mitgeteilten Formeln (6), (7a), (7b) und (8) geliefert. Von den beiden, innerhalb der vorgeschriebenen Maß- und Gewichtsgrenzen befindlichen und meist in Betracht kommenden Fernrohrtypen 6×30 und 8×30 ergeben diese Formeln für den letzteren Typ günstigere Resultate.

Von dem Gesichtspunkte der Bewegungswahrnehmung — da in diesem Fall sowohl mit der unteren wie auch mit der oberen Grenze der Winkelgeschwin-

digkeit gerechnet werden muß — dürfen beide Typen als gleichwertig betrachtet werden.

Es taucht die Frage auf, welcher von den beiden Fernrohrtypen sich mehr zur Nachtbeobachtung eignet, wenn die Beobachtung ausgesprochen im Dunklen vorgenommen wird, das heißt, wenn die Helligkeit der Umgebung sogar unterhalb des von Löhle in Betracht gezogenen Wertes von 3×10^{-8} sb liegt.

Es dürfte allgemein bekannt sein, daß eine absolut finstere Nacht nur in seltensten Fällen vorkommt. Bei einer Nacht ohne Mondschein wird durch die Sterne, aber auch bei bewölktem Himmel durch die atmosphärischen Strahlungen so viel Licht geliefert wie es für das gehörend adaptierte Menschaugen erfordert wird, um fleckenartige Gegenstände mit entsprechendem Kontrast wahrnehmen zu können. Mit Hilfe eines geeigneten Fernrohres kann dieses Nachtsehen verbessert werden.

Bezüglich der Leistung der Fernrohre unter diesen Bedingungen erscheint eine besondere Untersuchung als erforderlich. In diesem Fall ist das Menschenauge maximal in Anspruch genommen, und den bereits erörterten und den möglicherweise noch unbekanntem physiologischen Effekten, die mathematisch in zuverlässiger Weise nicht in Betracht gezogen werden können, kommt eine besondere Rolle zu. Bei dieser Untersuchung kann daher nur das Ergebnis der mit zahlreichen Personen und durch eine solche Methode ausgeführten praktischen Messungen entscheidend sein, die den erwünschten Verwendungsbedingungen des Fernrohres am besten entspricht. Um dies beurteilen zu können, muß festgestellt werden, Zielobjekte welcher Größe und aus welcher Entfernung mit Hilfe des Fernrohres bei Nacht beobachtet werden wollen. Da zur Zeit hierfür keinerlei Regel aufzufinden ist, müssen für Fernrohre, die zum Jagd-, Nachtdienst- und Feldgebrauch gebaut werden, auf Grund der bisherigen Erfahrungen diese Regeln erst aufgestellt werden. Es dürfte angenommen werden, daß für Jagdzwecke die Wahrnehmung des Großwildes aus einer Entfernung von ungefähr 100 m ausschlaggebend ist (t_{Ziel}). Auf der Nachtwarte oder im Feldgebrauch ist die Erkennung von Menschengestalten aus einer Entfernung von ebenfalls etwa 100 m ausschlaggebend. Sollte das Zielobjekt bis auf einen den angegebenen Wert wesentlich unterschreitenden Abstand in die Nähe des Beobachters rücken, ohne dabei entdeckt zu werden, so dürfte es wohl zweifelhaft sein, daß dem Beobachter Zeit genug übrigbleibe, zu handeln. Die Schulterbreite (sz_{Ziel}) eines durchschnittlichen Großwildes sowie die einer Menschengestalt kann — mit Sicherheit — auf 50 cm geschätzt werden. In diesem Fall beträgt der Sehwinkel der genannten Zielobjekte :

$$\alpha_{\text{Ziel}} = \text{arc} \cdot \text{tg} \frac{sz_{\text{Ziel}}}{t_{\text{Ziel}}} = \frac{0,5}{100}, \quad (9)$$

$$\alpha_{\text{Ziel}} \approx 17'.$$

Dem Fleck, für den die Regeln des fleckenartigen Sehens gelten sollen, muß somit in den behandelten Fällen minimum dieser Sehwinkel zugeordnet werden. Es kann festgestellt werden, daß der für a_{Ziel} hier erhaltene Wert das Bildauflösungsvermögen des menschlichen Auges größenordnungsmäßig weit überschreitet. In der Erkennung der fleckenartigen Zielobjekte — ob sie nun durch Fernrohr oder aber mit freien Augen betrachtet werden — kommt bei dieser Art der Belichtungsstärke der Netzhaut und dem Kontrast eine weit höhere Bedeutung als dem Auflösungsvermögen des Auges zu. Auf Grund der obigen Lösungen und Zahlenwerte wurde am Lehrstuhl für Fein-

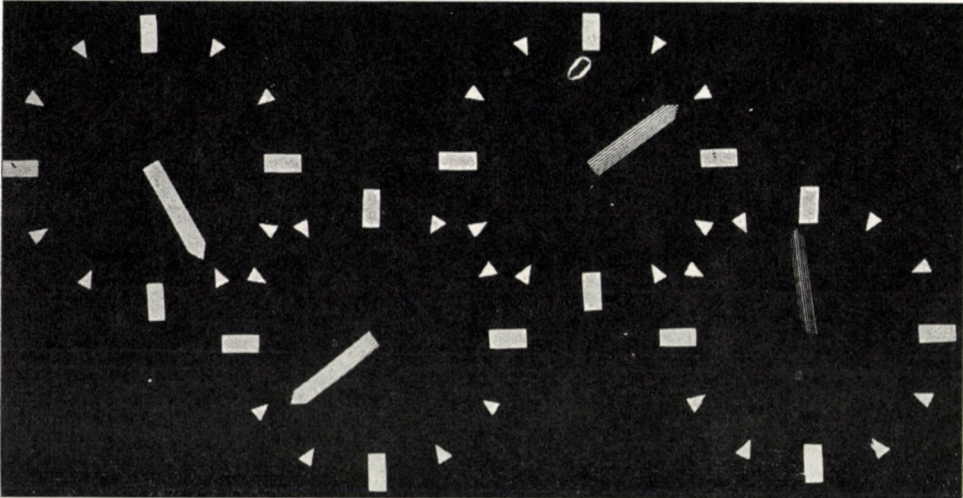


Bild 5. Prüftafel zur Messung der visuellen Leistung bei Nacht

mechanik und Optik der Technischen Universität in Budapest eine gruppenstatistische Versuchsserie durchgeführt. Die Messungen wurden durch eine subjektive Methode vorgenommen. Das Grundprinzip der Methode bildete die Vorstellung, daß bei gleichen Belichtungsverhältnissen, aus der gleichen Entfernung, dieselben Personen mit Hilfe von verschiedenen Fernrohren verschiedene, für sie unbekannte Werte ablesen, die auf einer Prüftafel eingestellt wurden. Die Prüftafel (siehe Bild 5) bestand aus vier gleichen, an einem schwarzen Hintergrund angebrachten Zeigerplatten, deren Ziffern aus weißem Karton gefertigt wurden. Auch die Zeiger wurden gleich dimensioniert, doch mit verschiedenen Schwärzungsabstufungen. Der Zeiger der ersten Uhr war weiß, der der zweiten wurde in einem Verhältnis von 25%, der der dritten in einem von 50% und der der vierten in einem Verhältnis von 75% mit Hilfe einer Tuschefarbe schwarzgestrichelt.

Die Breite der Zeiger betrug auf Grund der Formel (9) 50 mm, da die Versuche im Laboratorium aus einer Entfernung von 10 m vorgenommen wurden. Die Länge der Zeiger betrug 250 mm, und die Zeiger konnten auf einen beliebigen Minutenstand eingestellt werden.

Um die aus den verschiedenen Lichtdurchlaßverlusten der einzelnen Fernrohre resultierenden Fehler vermeiden zu können, wurden die Lichtdurch-

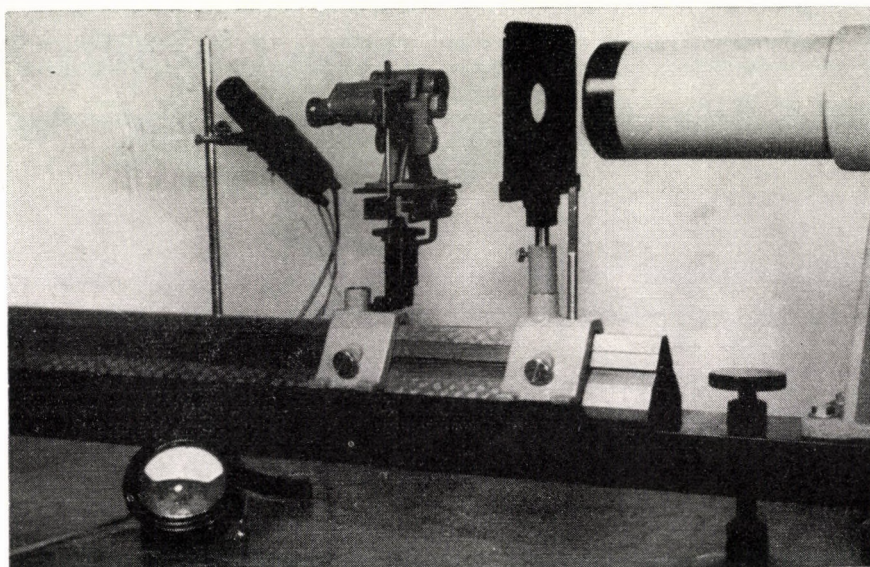


Bild 6. Messung der Lichtdurchlaßverluste von Fernrohren

laßverluste der geprüften 6×30 und 8×30 Fernrohre vor Ausführung der Messungen auf einen gemeinsamen Wert eingestellt. Die Einstellung wurde auf einer optischen Bank durch Anwendung eines Photoelektronenvervielfachers (Photomultiplier), in der aus Bild 6 ersichtlichen Anordnung vorgenommen.

Alle geprüften Fernrohre wurden auf den Wert des den höchsten Lichtdurchlaßverlust aufweisenden (doch nicht matten) Fernrohres geblendet. Die Blendung wurde in der Weise vorgenommen, daß ein Ring von entsprechender Breite vor dem Flansch des Objektivs befestigt wurde.

Gang der Prüfung :

1. Bereitstellung der zu prüfenden Fernrohre vor die Sitzplätze, die hinter einem, von der Prüftafel in einem Abstand von 10 m angebrachten Tisch aufgestellt sind. Die Halsriemen der Fernrohre sind an den Tisch befestigt. Die Dioptrieringe sind — mit normalen Augen — scharf auf die Tafel eingestellt.

2. Die Personen nehmen noch bei Licht ihre Plätze ein und besichtigen die Prüftafel.
3. Verdunkelung in einem Maße, daß der vierte Uhrzeiger durch normale Menschaugen, nach einer Adaptationszeit von 20 Minuten, erst mit Hilfe eines 7×50 -er Fernrohres aus einer Entfernung von 10 m wahrgenommen wird.
4. Mittlerweile können die Personen mit nicht normalsichtigen Augen ihre Fernrohre auf eine, in der Ebene der Prüftafel, doch davon seitwärts liegende und schwach beleuchtete ebene Figur scharf einstellen.
5. Nach Verlauf von 20 Minuten verstellt der bei der Tafel stehende Leiter der Versuche die Uhrzeiger und registriert die eingestellten Werte.
6. Die eingestellten Werte werden von den Prüfpersonen innerhalb 2—3 Minuten abgelesen, und die der Reihe nach von links nach rechts abgelesenen Zeigerstellungen werden in Minuten ausgedrückt im Dunkeln niedergeschrieben oder der hinter den Prüfpersonen sitzenden Hilfsperson leise eingesagt.
7. Sitzwechsel zum folgenden Fernrohr.
8. Die Zeiger werden in eine neue Position verstellt.
9. Es wird die nun folgende Ablesung vorgenommen, und der Prozeß solange wiederholt, bis schließlich die Ablesungen von allen Personen und durch alle Fernrohre durchgeführt worden sind.
10. Auswertung. Hierbei wird eine Abweichung von ± 2 Minuten noch nicht als Fehler gerechnet; eine Abweichung von ± 5 Minuten gilt als ein halber Fehlerpunkt; größere Abweichungen werden als wertlose Ablesungen betrachtet.

Bemerkung: Sollte es Leute geben, die an jeder Uhr und mit jedem Fernrohr richtige Ablesungen produzieren, so müssen die Messungen mit diesen Personen — bei einer stärkeren Verdunkelung — wiederholt werden.

4. Auswertung der visuellen Leistungsmessungen beim Nachtsehen

Durch den im vorigen Kapitel erwähnten Lehrstuhl für optische Geräte wurden mit Hilfe der hier beschriebenen Methode i. J. 1955 und 1956 systematische Messungen vorgenommen. Die Messungen wurden außer einigen am Lehrstuhl tätigen Lehrern von Studenten des vierten Jahrganges, das heißt von Hörern im Lebensalter von 21—22 Jahren durchgeführt. Von den an den Versuchen teilnehmenden 58 Personen wurden ein kurzsichtiger, astigmatischer Assistent und drei, im übrigen normalsichtige Hörer für das Nachtsehen als vollkommen ungeeignet befunden. So nahmen an den auswertbaren Messungen insgesamt 54 Personen teil. Die Untersuchungen wurden mit 1 Stück 7×50 -er, 6 Stück 6×30 -er (drei verschiedene Fabrikate) und 2 Stück 8×30 -er (zwei verschiedene Fabrikate) Fernrohren durchgeführt. Nicht jede Person maß mit jedem Fernrohr, doch mindestens je ein Stück von allen drei Fernrohrtypen wurde von

einem jeden benutzt. Die Ergebnisse der Auswertung wurden in Tafel I zusammengefaßt. Die erhaltenen Ergebnisse wurden im Bild 7 auch graphisch veranschaulicht.

Tafel I
Auswertung der visuellen Leistung der Fernrohre in Nachtbeleuchtung

Uhr	7×50			6×30			8×30		
	Anzahl der Ablesungen		richtige Ablesungen in %	Anzahl der Ablesungen		richtige Ablesungen in %	Anzahl der Ablesungen		richtige Ablesungen in %
	richtig	unrichtig		richtig	unrichtig		richtig	unrichtig	
I.	51	3	94,4	140	26	84,4	51	28	64,6
II.	47	7	87,0	129	37	77,7	43	36	54,4
III.	45	9	83,3	113	53	68,1	38	41	48,0
IV.	49	5	90,7	101	65	60,9	28	51	35,4

Es sei bemerkt — da es aus den zusammengefaßten Versuchsergebnissen nicht ersichtlich ist —, daß die Fernrohre gleichen Typs, d. h. die 6 × 30-er und die 8 × 30-er Fernrohre, untereinander eine äußerst geringe Abweichung aufwiesen.

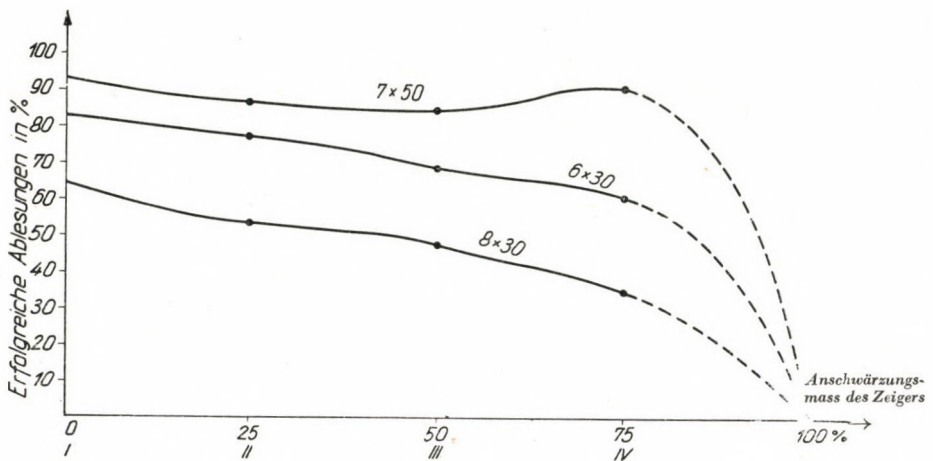


Bild 7. Auswertung der visuellen Leistung von Fernrohren beim Nachtsehen

Es wurde folgendes Ergebnis erhalten :

a) Die visuelle Leistung des 7 × 50-er Fernrohres übertraf wesentlich sowohl die des 6 × 30-er wie auch die des 8 × 30-er Fernrohres, wie es im übrigen auch erwartet werden konnte. Die Anzahl der erfolgreichen Ablesungen ist für alle Tafeln beinahe die gleiche, sogar für die auf 75% angeschwärmte

Tafel. Die wenigen erfolglosen Ablesungen, die bei Uhr I beobachtet wurden (5,6%), sind nicht auf die Fehler des Fernrohres, vielmehr auf die individuellen Fehler der Augen der Beobachter, auf das schwächere Adaptationsvermögen, usw. zurückzuführen. Die Steigung der 7×50 -er Kurve bei Uhr IV dürfte auf die Streuung der Messungen zurückgeführt werden, und kann bei massenhaft vorgenommenen Messungen nicht vorkommen. Die 7×50 -er Fernrohre sind bei ihrer vorzüglichen optischen Leistung allzu umfangreich und schwer, somit können sie die Rolle der 6×30 -er oder 8×30 -er Fernrohre nicht übernehmen.

b) Die 6×30 -er Fernrohre ergaben bei den Messungen eine deutliche und definitive Zunahme der visuellen Leistung beim Nachtsehen, die die Leistung der 8×30 -er Fernrohre um 22% übertraf. Damit taucht die Frage auf, inwieweit die im Kapitel I angeführten Leistungsformeln des Dämmerungssehens auf den Fall des Nachtsehens angewendet werden dürfen.

Es kann festgestellt werden, daß die Formeln (7a), (7b) und (8) für die 8×30 -er Fernrohre eine höhere Leistung als für die 6×30 -er Fernrohre ergeben, wo doch die durchgeführten Messungen gerade das Gegenteil hierzu bewiesen.

Demgemäß müssen beim Nachtsehen ganz andere Gesetzmäßigkeiten gelten. In den obigen Formeln kommt weder der beim Nachtsehen erwünschte große Schinkel, noch die ideale Geeignetheit eines Austrittspupillendurchmessers von etwa 7 mm vor. Zu einer zumindest teilweisen Eliminierung dieses Mangels soll der Vorschlag dienen, nach welchem eine Kennzahl für die visuelle Leistung der Handfernrohre beim Nachtsehen (d. h. beim dunkelsten Dämmerungssehen) der folgenden empirischen Formel zu entnehmen wäre :

$$J_{\text{Nacht}}^{\text{(vorgeschlagen)}} = N \cdot d^2 (d_{\text{optim.}} - d), \quad (10)$$

wobei $d_{\text{optim.}}$ und d in mm auszudrücken sind.

Durch Substitution des Wertes $d_{\text{optim.}} = 7$ erhält man :

$$J_{\text{Nacht}}^{\text{(vorgeschlagen)}} = N \cdot d^2 (14 - d). \quad (10a)$$

Diese Formel drückt einerseits aus, daß die visuelle Leistung beim Nachtsehen der Vergrößerung des Fernrohres und der Fläche der Austrittspupille direkt proportional ist, andererseits kommt auch der Umstand zum Ausdruck, daß bei einem Austrittspupillendurchmesser von 7 mm ein Maximum der visuellen Leistung vorliegt.

Wird der Wert von N in Formel (10a) eingesetzt, so erhalten wir :

$$\boxed{J_{\text{Nacht}}^{\text{(vorgeschlagen)}} = D \cdot d (14 - d),} \quad (10b)$$

wobei D die freie Objektivöffnung in mm bedeutet.

Durch die Formel als Funktion wird eine Fläche charakterisiert, deren Schnitte bei $D = \text{Konst.}$ Parabeln darstellen, die bei $d = 7 \text{ mm}$ ein Maximum aufweisen.

Bild 8 enthält die nach den Formeln (7), (7a), (8) und (10b) konstruierten Kurvenscharen. Durch die Ordinatenwerte werden die für die visuelle Leistung

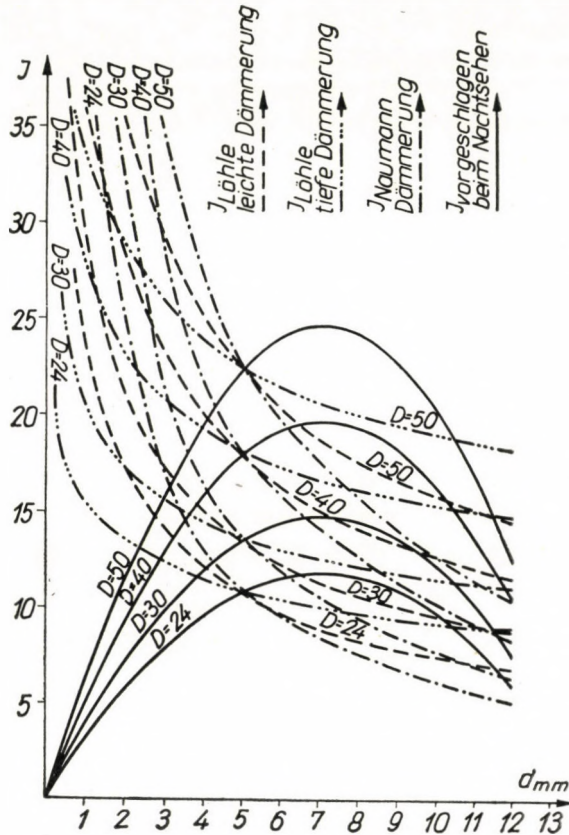


Bild 8. Kurven der für die visuellen Leistungen der Fernrohre bei Dämmerungs- und Nachtsehen charakteristischen Zahlenwerte in Abhängigkeit von D und d .

beim Dämmerungs- bzw. Nachtsehen der verschiedenen Fernrohre charakteristischen Zahlen angegeben. Auf der Abszissenachse wurden die Durchmesser der Austrittspupillen in mm aufgetragen. Zur Vereinfachung des Vergleiches wurden die Formeln mit entsprechenden Konstanten multipliziert, so daß bei $d = 5 \text{ mm}$ alle Kurventypen zusammentreffen.

Die Kurven wurden nur bis zu $d = 12 \text{ mm}$ konstruiert, da doch bereits eine Austrittspupille über $d = 10 \text{ mm}$ im allgemeinen keinen Sinn mehr hat.

Es ist auffallend, daß alle drei angegebenen Kurvenscharen einen von dem vorgeschlagenen vollständig abweichenden Charakter besitzen. Während die Löhleschen und Naumannschen Kurvenscharen von $d = 0$ ab aus $J = \infty$ ausgehen, gehen die vorgeschlagenen Kurven aus $J = 0$ aus. Da die visuelle Leistung beim Nachtsehen eines Fernrohres, dessen Austrittspupillendurchmesser recht gering, d. h. unterhalb 1 mm liegt, ebenfalls äußerst gering ist, und bei $d = 0$ sicher verschwindet, so spricht auch dieser Umstand für die Annehmbarkeit der vorgeschlagenen Formel.

*

Die hier in Vorschlag gebrachte subjektive, aber konkrete Zahlen liefernde physiologische Meßmethode ergab die mitgeteilten Data. Möglicherweise würden die unter Miteinbeziehen von mehr Fernrohren und noch mehr Personen vorzunehmenden weiteren Messungen eine gewisse Verschiebung gegen die hier erhaltenen Werte ergeben, es ist jedoch höchst unwahrscheinlich, daß den derart zu erhaltenden neuen Ergebnissen auch ein entgegengesetzter Sinn zukäme.

Die hier beschriebene Prüfmethode könnte im übrigen — so z. B. durch Verringerung des Kontrastes zwischen den Uhrzeigern und Ziffern — auch auf andere Fälle der Messung der visuellen Leistung beim Dämmerungssehen erstreckt werden. Aus diesem Grunde wäre die Durchführung von noch weiteren systematischen Messungen äußerst wünschenswert.

SCHRIFTTUM

1. DR. H. KÖHLER: Grundsätzliches zum Fernrohrsehen. Deutsche Optische Wochenschrift. 6., 7., 8. 1949.
2. A. KÜHL: Unterschiedsschwellen bei konstanter Adaptationsbereitschaft. Zeitschrift für Instrumentenkunde 47. (1927) S. 47.
3. A. KÜHL: Die visuelle Leistung von Fernrohren. Zeitschrift für Instrumentenkunde 56. (1936) S. 912.
4. F. LÖHLE: Über die Abhängigkeit der Dämmerungsschärfe von den Beleuchtungs- und Sichtverhältnissen. Optik 2. (1947) S. 20.
5. A. MARÉCHAL: Imagerie géométrique. Aberrations. Paris. 1952.
6. M. NAGEL und A. KLUGHARDT: Über die Leistung von Fernrohren bei verschiedenen Objektivhelligkeiten. Zeitschrift für Instrumentenkunde 56. (1936) S. 912.
7. DR. H. NAUMANN: Optik für Konstrukteure. Halle 1949.
8. H. SCHÖBER: Das Sehen. Leipzig. 1954. Bd. II.
9. DR. A. SONNEFELD: Über Vergrößerung und Leistung, Verzeichnung und Schärpenfeld der Prismenfeldstecher. Feinmechanik und Optik. 1954. Heft 8., 9.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird in erster Linie darauf hingewiesen, daß wir zur Berechnung der visuellen Leistung von Fernrohren verschiedener Funktion noch über keine unbestreitbaren Formeln verfügen. Zum richtigen Vergleich muß festgesetzt werden, unter welchen Bedingungen welche Aufgaben die zu prüfenden Fernrohre erfüllen sollen. In der vorliegenden Mitteilung werden die bei Tageslicht und auch im Dunkeln universell verwendbaren binokularen Handfernrohre behandelt, und es wird in erster Linie deren visuelle Leistung beim Nachtsehen untersucht. Es werden die allgemein verwendeten Leistungsformeln erörtert, und es wird darauf hingewiesen, daß dieselben beim dunkelsten Dämmerungs- bzw. Nachtsehen unsicher werden. Unter diesen Bedingungen kommt dem größeren Gesichtsfeld und dem um 7 mm liegenden optimalen Wert des Austrittspupillendurchmessers eine entscheidende Bedeutung zu. Diese Auffassung wird durch die Versuchsergebnisse unterstützt, die mit Hilfe einer subjektiven physiologischen Meß-

methode an 54 Personen vorgenommen wurden. Auf Grund der Versuchsergebnisse wird in der Mitteilung zum Vergleich der visuellen Leistungen der Fernrohre beim Nachtsehen eine einfache neue Formel (Formel 10) vorgeschlagen. Es wird des weiteren auf den Einfluß der Zielbewegung auf die Wahrnehmung durch das Fernrohr hingewiesen, und die Bedeutung dieses Effekts insbesondere beim Nachtsehen erörtert.

REMARKS ON THE PERFORMANCE OF TELESCOPES AT DUSK

S. DÉKÁNY

SUMMARY

The paper points out that there are no unquestionable formulae for the performance of telescopes for different uses. For a correct comparison one must determine under what conditions and for which purpose the telescopes under consideration are to be suited. The paper deals with universal portable binocular telescopes and chiefly investigates their night visual power. It communicates the generally used performance formulae and points out that they are already uncertain for vision at extreme dusk and at night. In these cases a larger field of vision and chiefly the optimum value of about 7 mm dia. of the exit pupil are of decisive importance. This conception is supported by subjective physiological vision tests on 54 persons. In accordance with this, the paper proposes a new, simple formula (10) for the comparison of the night performance of telescopes. The paper also mentions the influence of target movement on perception through a telescope, especially under conditions of dusk.

QUELQUES OBSERVATIONS RELATIVES AU POUVOIR OPTIQUE DES LUNETTES D'APPROCHE AU CRÉPUSCULE

S. DÉKÁNY

RÉSUMÉ

Le travail démontre qu'il n'existe pas de formules indiscutables pour le calcul du pouvoir des lunettes d'approche affectées à différents usages. Pour pouvoir établir une comparaison correcte, il faut déterminer pour quelles tâches et sous quelles conditions les lunettes doivent être utilisées. Le travail traite des lunettes binoculaires portatives universelles, utilisables aussi bien de jour que de nuit, et examine surtout leur pouvoir optique de nuit. L'auteur rappelle les formules universellement utilisées, et montre que, pour la vue au crépuscule le plus profond et pendant la nuit, ces formules sont déjà incertaines. Dans ces cas, un grand champ de vue et surtout une valeur optimum de la pupille d'émergence autour de 7 mm sont d'une importance décisive. Cette conception est appuyée par les résultats des essais de vue physiologiques subjectifs, faits sur 54 personnes. En accord avec ces résultats, l'auteur propose, pour la comparaison du pouvoir de vue nocturne des lunettes, une formule simple et nouvelle (10). L'étude montre encore l'influence du mouvement du but sur la perception par lunettes, surtout en cas d'éclairage crépusculaire.

ЗАМЕЧАНИЯ В СВЯЗИ С СВЕТОСИЛОЙ ЗРИТЕЛЬНЫХ ТРУБ ПРИ ПОЛУМРАКЕ

Ш. ДЕКАНЬ

РЕЗЮМЕ

В статье указывается, что для определения светосилы зрительных труб различного назначения не имеется надежных формул. Для правильного сравнения необходимо определить те условия, при которых они должны быть пригодны для определенных задач. Сообщение посвящено бинокулярным трубам (биноклям), которые можно универсально использовать как во мраке, так и при дневном свете, и в первую очередь исследуется их светосила в ночное время. Даются общеприменяемые формулы светосилы и указывается, что эти формулы в случае ночной и очень слабой видимости являются уже неопределенными. В таком случае большое поле зрения и в особенности оптимальный размер выходящего зрачка равный ок. 7 мм играют решающее значение. Это подтверждается субъективными физиологическими исследованиями на 54 лицах. Соответственно сказанному для сравнения светосилы зрительных труб в ночное время предлагается применять новую простую формулу (10). Кроме того указывается влияние движения трубы на наблюдение с помощью трубы, в особенности при почти полном ночном мраке.

GENERAL SURVEYING AND PRACTICAL DEVELOPMENT IN THE CONSTRUCTION AND OPERATION OF DRAFTING MECHANISMS

L. A. B. GANGLI
TEXTILE RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST, HUNGARY

[Manuscript received 24th June, 1957]

Introduction

One of the well-known machine elements for processing fibrous material is the drafting mechanism which, on account of compelling forces of lucrativeness, has become the object of concentrated attention throughout the entire development of the spinning industry. There hardly is a special periodical which does not introduce a new type drafting mechanism, classified as first rate.

The theoretical basis is becoming stronger and one can safely state that to-day essentially more is known about drafting mechanisms, drafting procedure, and the effect of individual drafting elements than 20—30 years ago. The handling of the new, up-to-date drafting mechanisms, i. e. the setting of the mechanism to ensure the most favourable drafting results, is nowadays more difficult than with the old types. The reason for this is to be found in the combination of elements, in their conformity to certain rules arising from the existence of slow, floating and fast fibres, as well as braking, friction, nipping points, etc.

The new, up-to-date drafting unit, and the drafting systems of the future can only be utilized efficiently then if the combined effects, which make their appearance in such up-to-date mechanisms, are well-known. The time for "improvisation" elapsed. With surmising methods results may be here too, arrived at but work will be more effective if a complete picture stands clearly before experts.

The aim of this study is the co-ordination of all those fundamental ideas which can be found scattered — but not in their general connection — in several studies, their supplementing by further development with such observations and test results that are connected with the dynamic phenomena which take place during drafting.

Theoretically, the process of drafting is generally examined with the neglect i. e. omitting of numerous effective factors [3]. Those who establish the various theories are supposing assumptions. The actual results — as will later be seen — are influenced by such effects which depend on the work of the carding room machinery prior to drafting process.

This work wishes to be a summary of everything that has to be observed with the quality work of a drafting unit, what are the possibilities of to-day from

a surveying point of view, and what can be expected as future development by applying the present elements.

It can be assumed that part of the theoretical-practical subject-matter now introduced is known to experts from previous literature. Tuft diagrams (WILKINSON'S tuft), curves limiting floating fibres, plotting methods of tuft curves of fast fibres are considered as known. Similarly, the relation between the number of fibres in the cross-section of a twisted spinning product, and the dispersion of the twist are also considered as known. In order to facilitate the interpretation of the designations used in the figures, a note was prepared giving more detailed explanations.

List of signals and their explanation

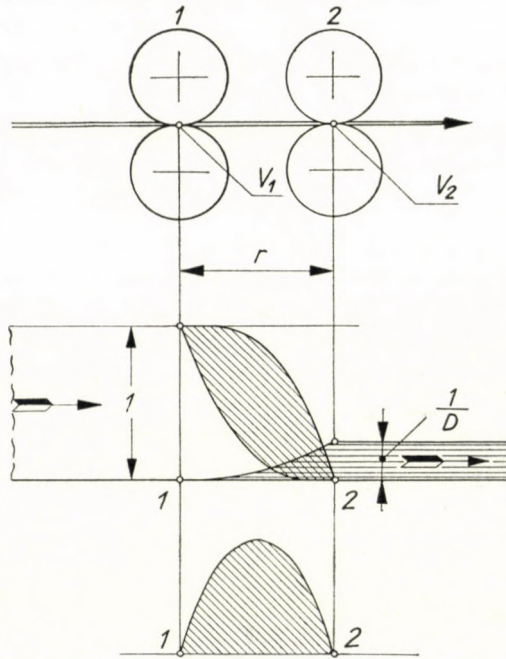
- v = circumferential speed of drafting rollers. Intake roller speed generally marked 1 delivery roller speed marked 2.
- r = ratch, setting of drafting field.
- D = adjusted draft to be realized in each field.
- p_i = pressure around tensor-point. Theoretically this can be a pressure acting on a definite point, practically always acting on the surface.
- t = tensor-distance, i. e. distance between those two points where the rear end of the fibre is still braked and the front end is already nipped by the delivery roller. On account of the elastically flattening roller, this can only be measured approximately.
- P = concentrated pressure force applied at instances onto a top roller or the tensorpoint.
- t_s = tensor-surface, i. e. a surface formed of various machine and drafting elements, which by friction brake the fibres against outside motive mechanical forces.
- \bar{p}_t = average pressure developed in time on the tensor-surface, which creates braking forces acting in the direction of the drafting proportionate to the friction coefficient.
- f_t = by drafting forces individual fibre groups can be held in a tensioned condition (generally a small portion of the breaking force of the fibres).
- \bar{p}_r = time average of compressing radial forces exerted among the fibres by the twist, which creates increased friction between them.
- \bar{p}_w = so-called whipping forces averaged in time, which try to burst the fibres.
- p_s = marking of the contracting forces created by the V shaped flute in the twiststabilizer part of the Ambler drafting mechanism.
- p_{tf} = coherent forces created by the side walls in the flume of the Ambler drafting mechanism.
- D_1 or D_2 = marking of the partial draft in the drafting-unit with multiple pairs of rollers.

Tensor-point, distance, surface

The course of drafting averaged in time, can be designed as shown on Fig. 1. On the upper part of the figure a sketched simple double-roller drafting unit can be seen, between the rollers of which some fibrous material is to be drafted. The v_1 circumferential speed of the intake rollers is smaller than the v_2 speed of the delivery rollers, thus a D -fold drafting between the two pairs of rollers takes place.

If the levelled fibres perceptible in the cross-section of a product of a fixed unit-length, respectively weight is united into a fibre tape, this again — averaged in time — can be taken as a unit [1] in case of drafting the product. The expression of "time average" will not be mentioned further but the designations should

generally be thus understood, whether fibre quantities or forces are meant. If namely the cross-sectional number of fibres were examined at a given moment within the drafting field, i. e. at any point of r , the same fibre quantities which could be read off the x place in question on the middle or bottom sketch of Fig. 1 were not obtainable. The cause of this can be looked for, not only in the fluctuation of the cross-sectional fibre numbers, but also in the non-ideal nature



$$\frac{V_2}{V_1} = D$$

Fig. 1

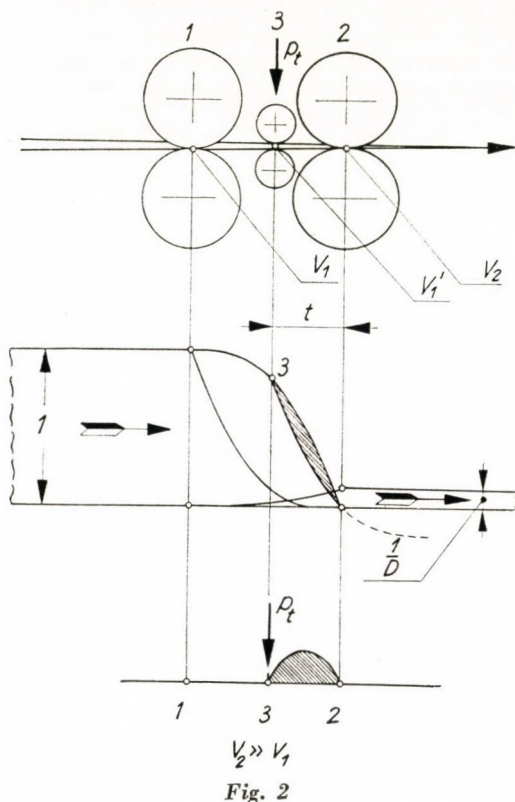
of the drafting process. Averaged in time, thus by carrying out many tests, for the same r_x point the values shown on the drawing would be obtainable in the given case of cotton of longer staple length.

On Fig. 1 is to be seen the slow tuft nipped by roller 1, the tuft curve limiting the floating fibres, the tuft of fast fibres, and on the bottom part of the figure, floated upwards from a straight line, that surface which — with the quantity of floating fibres at any point of r — is proportionate to the real quantity. After D -fold drafting the fibretape diminishes to $1/D$.

Fig. 1 shows that, compared with the quantity of moving lead fibres (slow and fast tuft) in the drafting field, the quantity of floating fibres is

very large. With common drafting mechanisms this large number of floating fibres gives poor quality drafting, especially above 4—5-fold draftings.

Fig. 2 shows — as next degree of development — a drafting unit within the r drafting field of which at t distance from delivery roller a pair of small carrier rollers is placed. The bottom roller by friction drives the top small roller, which is only loaded by its own weight. The circumferential speed v_1'



of the small rollers is somewhat greater than the speed v_1 of the intake roller. The practical value of this is a value of about $D = 1,1$. With this system a *tensor-point exercising braking effect* on the fibres is created at distance " t ". The short fibres, which move in the 3—2 space towards the pair of delivery rollers, still suffer braking at this point, but similarly also the fast fibres which are longer than the t tensor-distance. Thus, several new and important drafting elements are working in such drafting units: e. g.

1. the carrier roller, which theoretically acts on the line, practically always acts on the surface.
2. the contact point of the carrier roller as braking point, which is called *tensor-point*.

3. the distance between carrier roller and delivery roller, called tensor-distance, the size of which in addition to the afore-mentioned, decisively influences the quantity of floating fibres. On Fig. 2 point 3 is marked on the curve denoting the limit of floating fibres. According to a previous study [1], which cannot here be detailed again, one has the right to denote the quantity of floating fibres in such a way that the curve limiting the tuft nipped by the intake rollers can be drawn from this starting point. Those fibres of this tuft which are longer than the tensor-distance, became fast fibres, the tuft below the carrier roller can be qualified as slow, and thus for the quantity of floating fibres the striped area of the middle and bottom part of the drawing is characteristic. (It is in proportion to this.) The p_t tensor-point pressure here denoted is also not ideally point-like, but it disperses on certain fibre surface, respectively roller surface. It can be remarked that its ideal point-like application would not at all be advantageous.

On Fig. 3 the drafting elements of an entirely up-to-date mechanism were drawn. On this it may be seen in outline, *the place of the tensor-point*, not scaled, *the tensor-point pressure* which creates the frictional forces acting on the fibres, *the tensor-distance* on which the quantity of floating fibres is largely depending; further may be seen the *tensor-surface* created by two leather surfaces. On the bottom part of the figure are drawn in outline the approximate normal forces, which create the frictional forces. It is natural that, where pressure was created by external force at the tensor-point p_t , the forces dispersing on the surface are of relatively great forces. These normal forces can for instance be interpreted as acting on 1 mm of 1 fibre length, they can be regarded as pressure expressed in grammes acting on 1 cm² leather surface, but they can also be interpreted along the line, when they are regarded as an idealised force acting on the line and understood as g/cm. In fact, irrespective of the interpretation, one of the schemes shown on Fig. 3 develops. In the manner already explained, the area in proportion to the average quantity of floating fibres was drawn here, too, and is represented by the black spot between 3—2 at the bottom of the figure. Here also is shown the t_s distance within which the tensor-surface develops, and which will brake both the slow and fast fibres. The normal forces between the two leather aprons, acting on the fibres, will be very low in the field between 1—3. It stands to reason that under pressure roller 1 they will again take up great values.

Fig. 4, on which elements of drafting system with top single-apron can be seen, was drawn mainly with a view to showing the place of the tensor-point, its distance, and the tensor-surface on a drafting unit different from the common type. The bottom figures are actually not of the proportionate dimensions, because the circumference of the large diameter roller should have been projected on the plane as drafting field. For the sake of simplicity a vertical projection was applied.

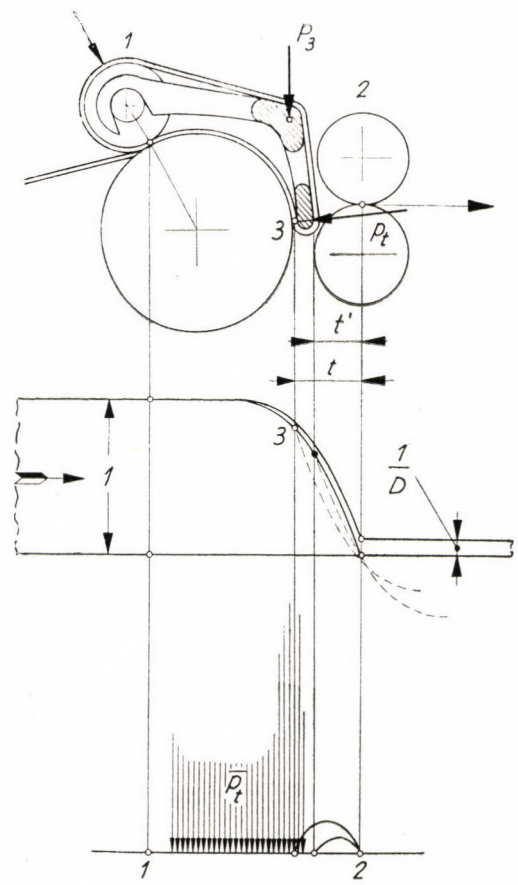


Fig 3.

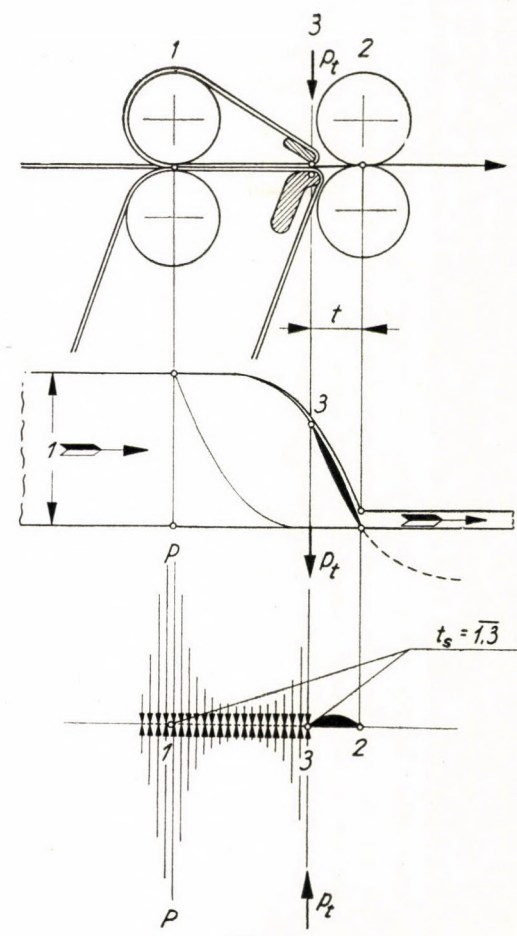


Fig. 4

The tensor-point pressure can be created by springforce at about the spot P_3 . Since the apron-guide is pivoted on the pressure roller 1, the pressure will be radial at point 3. The P_t force, which naturally is the function of P_3 , is shown here.

Two tensor-distances were also plotted. With the mechanism described, the returning surface of the apron can also perform some kind of fibre braking. Consequently, the quantity of the floating fibres cannot be determined in a simple way either. In order to make this perceivable, correspondingly two areas were drawn on the bottom figure.

On the tensor-surface — since the apron is tensioned on the roll — averaged in time, significant p_t dispersed normal forces may arise.

It is to be expected that on such surplus tensor-surface considerable braking may arise, as a consequence of which the setting of such drafting mechanism will require greater precaution. It will be necessary to regulate sensitively the pressure at the tensor-point. The pressure at the tensor-point can be increased with external force to such extent that the braking force acting on 1 mm length of a single fibre exceeds the limit at which the fast process of drafting can be performed.

Tumofev's supposition about the tensor-surface

In 1955 TUMOFEV examined the possibility [2] of reversing, in its action, the well-known Casablancas drafting mechanism. Fig. 5 renders this perceptible. With this system the delivery rollers are provided with two drafting aprons. Naturally, the two small aprons ought to have a higher speed. If based on the afore-said, the tensor-distance and the dispersed p_t normal forces of the tensor-surface are outlined, interesting conclusions may be arrived at. On basis of the known tuft sketches the quantity of floating fibres can also be plotted here. Theoretically, the floating fibre limit curve would start at point c . By taking the fast fibres into consideration, the limit curve would be approximately $b'c'a$ 21. According to this observations quantities of fibres characterizable with the irregular limit line $b'a$ occur. He does not draw any conclusions, but this can now be done. There is no tensor-point pressure with the older type of Casablancas drafting mechanism, so it does not exist in the imagination of TUMOFEV, either. The p_t normal forces evolved on the tensor-surface must be very small, because the apron-guide only ensures the approximate parallel running of the apron. The favourable position of the tensor-point is to no purpose, because if there is no pressure created by P_t external force, the theoretical $b'c'$ curve cannot be approached. The figure also shows the f_t tuft surface in proportion to the quantity of slow fibres, which will be treated as tensioned fibres by the so created tensor-surface. If the mechanism could technically be constructed, it would theoretically give a very even and very regular yarn. There would be

very little floating fibres, and the slow fibres would become fast and straightened out. It is however known by many experts how difficult it is to guide such small aprons without their being deteriorated within a short time.

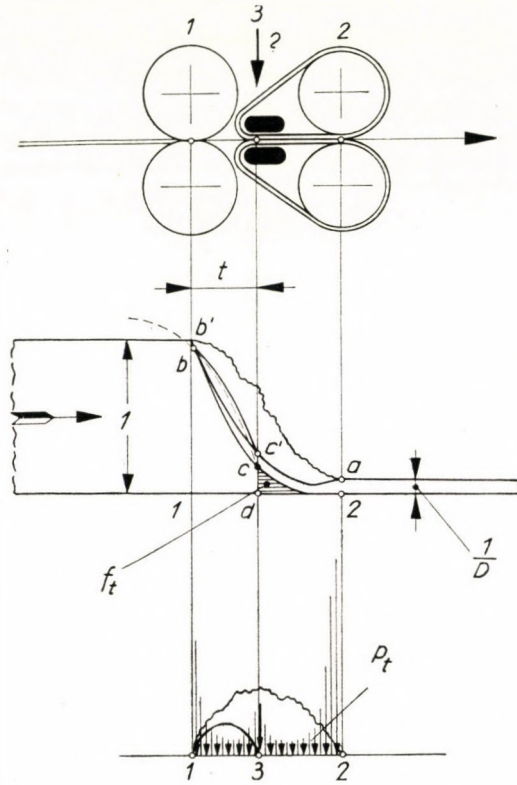


Fig. 5

Coherent and bursting radial force-effects

The meaning of the word radial must first of all be extended. In the drafting unit depressed slivers are running. Radial means in this case that the forces from the selvage of the fibre tape are directed towards the geometrical centre, or they tend outwards in the same direction.

During the drafting of twisted fibre bundles — if we examine a drafting unit with a double pair of rollers — the twist plays a certain part. The part of the twist in many studies is based, on misunderstandings, even today. The twist — if its effect is used to the full — is no doubt advantageous. With simple drafting unit, where there is neither tensor-point nor tensor-surface, the effect of the twist is very doubtful. Observations proved that twisted fibre-strand became slowly untwisted within the r drafting field on account of drafting. Whilst the

twist still exists under roller 1, in the proximity of roller 2 the fibres are untwisted and brush-like (when roving is drafted). If p_r radial normal forces created by twist existed entirely in the roving, they rapidly disappeared within the distance between 1—2. The middle part of Fig. 6 serves to demonstrate this. Such radial normal forces will again develop after drafting, when the drafted product receives significant twist in order to build up yarn.

According to observations dating back to 1952 — published by the author in a special issue [1] —, striking dynamic phenomena make their appearance

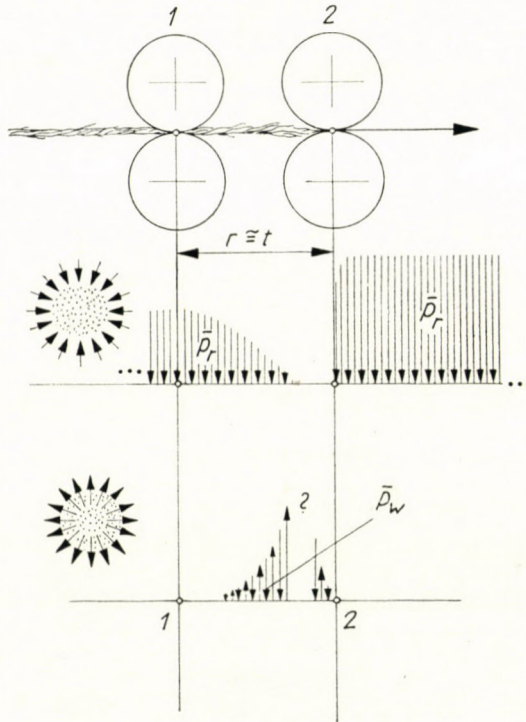


Fig. 6

during drafting. The bulk of fibres (the body of the roving) almost seems to vibrate under the effect of the fast fibres. By the effect of the dragged out fast fibres some fibres in the outer layer of the slow fibres almost blastically dart out. In his study the author contributed this phenomena to the whipping effect of the dragged out fast fibres.

Idealized, the whipping forces can be taken as radial, but they are circumferentially effective. Their magnitude is unknown, no methods and apparatuses to measure them being as yet known. It is evident, however, that a fibre the more it is released from the tapering end of the slow fibre bundle, the less damp it receives and the more independence do the whipping forces obtain. The bottom

part of Fig. 6, where whipping forces p_w are sketched, serves to demonstrate the afore-said. Neither their minimum nor maximum magnitude is known, but it is certain that in the proximity of the two pressure rollers they must decrease to zero. These forces can be observed in their effect, if one watches through a magnifying glass the space between the two rollers of a drafting unit. As a

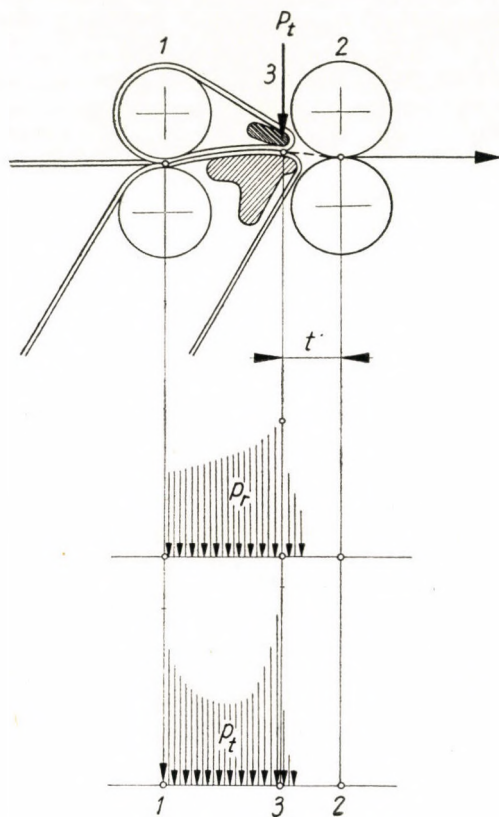


Fig. 7

consequence of the twisted roving body becoming untwisted in the distance 1—2, further, the dynamic forces bursting the tapering end of the fibre tape, the roving body swells before the second roller. Its density, however, is considerably less, thus the number of the contact points of the fibres undoubtedly decreases. The results of these are summarised in the irregular drafted product.

More perfect drafting systems show more favourable building up of the tensor-point and of the tensor-surface. On Fig. 7 one can see the sketches of the short t tensor distance created by the right form of the apron guide, the P_t tensor-point pressure applied at the necessary point, and the tensor-surface 1—3 creating favourable normal forces. Seeing that P_t brought about by external

forces prevents the loss of twist, indeed ensures the accumulation of twist to places with lower cross-sectional fibre number, the radial coherent forces obtain a significant part, and thus perform the necessary fibre braking. More detailed studies relative to this are known of previously. The normal force evolving on the tensor-surface can be made significant if the two leather surfaces are tensioned

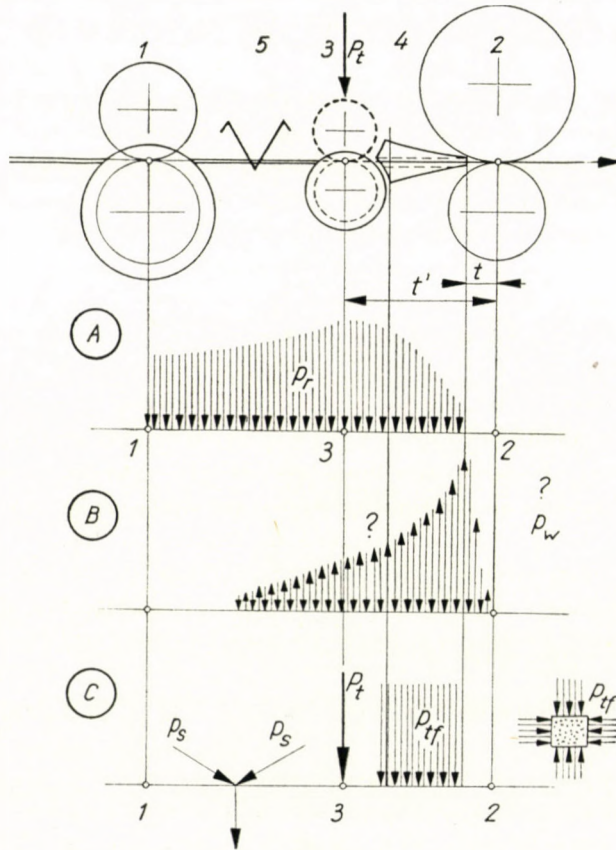


Fig. 8

on a convex metal surface against each other. This is also shown on the figure. This drafting unit is also suitable for employing compound effects.

Fig. 8 presents the greatest possibility for the scrutiny of the effects of forces. This figure is a sketch of the Ambler drafting system. The twiststabilizer is marked V , the carrier roller connected gear-wheel-like is marked 3, and the flume 4. Two tensor-distances t' and t are shown on the sketch. In his previous study the author pointed out that at this place the structure of the roving is no longer normal, the shape of the tuft on the right and left side is not equal. It is also not normal for that reason that it becomes hollow and its density

decreases. Especially the fast fibres rearrange the tapered end of the fibre-tape. In author's opinion the radial forces arising from the twist gradually decrease. Part of figure *A* demonstrates this.

At the same time the whipping effects, arising from the influence caused by the hitting effect of fibres pulled out with great velocity, appear. The fact that these effects cannot develop by the Ambler drafting mechanism, i. e. their effect is limited, appears natural on knowing the drafting unit. The so-called twiststabilizer exercises a damping effect from two sides, and not lastly the pressure of the flume sidewall prevents the fibres in the front end of the fibre-tape from being dispersed. For this reason the tensor-distance, i. e. that drafting unit area where all braking effect decreases, can be very short (especially in relation to long fibres). At the given point in the drafting unit P_t tensor-point pressure can be applied, which compared to previous drafting systems displays a surplus effect too. The pair of carrier rollers 3 has a gear-wheel-like connection and therefore keeps the fibres tensioned in the space 1—3. When estimating, in general, the drafting conditions the author will revert to the *effect of keeping the fibres tensioned*.

The dispersion of the p_w whipping forces is marked by a note of interrogation. In fact they would only be able to display their effect within the t tensor-distance. However, the structural areas are already tight here. On other places of the drafting system the whipping forces are opposed by the normal twist forces, as well as by the walls of the constructional parts. The tensioning arising in the 1—3 zone of the drafting unit pulls the twisted fibre-strand to the bottom of the *V*-shaped groove, sketch of which can be seen in the part *C* of the figure.

Utilization of effects exertable by the tensor-surfaces in up-to-date drafting systems

The utilization of the more clearly recognized effects is perceivable in the up-to-date drafting systems. The author wishes to enumerate, respectively, introduce only a few of these. One of the most characteristic drafting units is the 3 over 4 drafting system, which up till now has been utilized for the drafting of sliver and roving.

The probable dispersion of the normal forces arising on the tensor-surfaces are shown on Fig. 9. The projection here is also distorted, because the circumferences were not projected on the plane. This, however, does not interfere with the intelligibility. In the zones 2—3 and 1'—3' Euler's rope-forces are acting, and therefore forces with radial tendency arise, as an effect of which braking forces develop partly on the roller surfaces and partly on each other, among the fibres. The drafting procedure is thus interfered with by control forces which ensure favourable results. Compared to results of more obsolete type drawing frames, the cross-sectional irregularities of this type numerically

decreased to about its half by our tests. This is now generally known and makes the use of such drafting units desirable. A similar task is solved by the 4 over 5 drafting system of the Whitin Works. Here again the fibre-motion controlling effect of the tensor-surfaces is utilized.

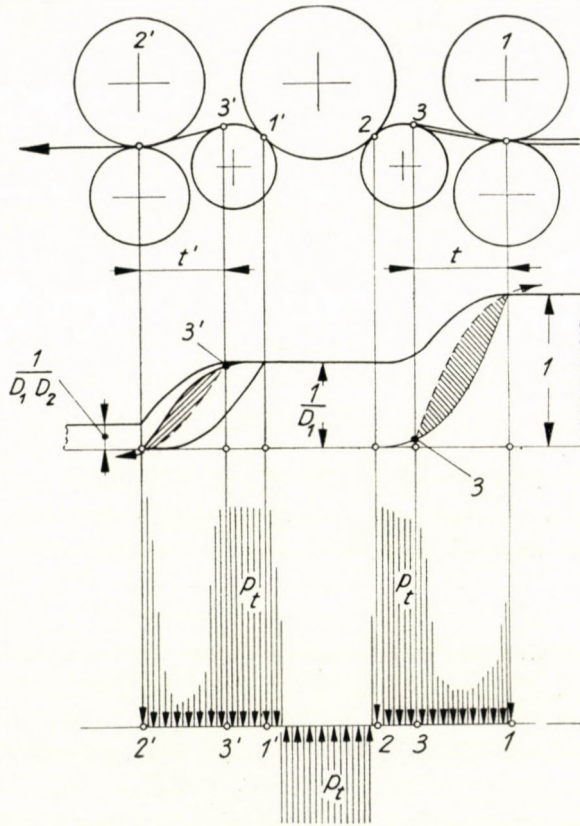


Fig. 9

The favourable effect of the tensor-surfaces is utilized by the drafting unit *N* of the Casablanca Company, sketch which can be seen on Fig. 10. Since the cross-sectional fibre number in the fibre-tape is high in the first drafting field, there is no danger here for many hooked fibre ends on a sliding surface. The bottom tensor-surface is substituted here by a smooth metal surface, onto which the top apron exercises the tensor-surface pressure. In the second drafting field, where the main-drafting is performed, 2 aprons are working, but both aprons are pressed on each other with the bottom convex guided surface. It is not known whether in this system there is a tensor-point pressure.

Fig. 11 outlines an important part of the SKF-Zinser drafting unit. The bottom apron-guide wishes to ensure the lying on and the pressing to each

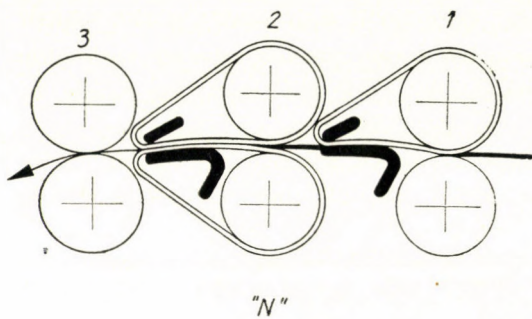


Fig. 10

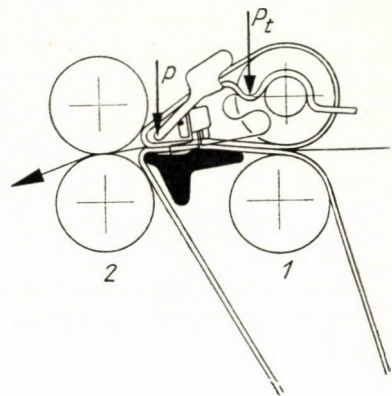


Fig. 11

other of the two aprons. The pressure of the tensor-point can be somewhat regulated by the setting of the upper apron, the apron-sledge can be moved up and down by means of a screw. Its setting requires special care and ultimately also some knowledge, because the twist, the tensor-surface of the aprons, the pressure and distance of the tensor-point eventually can also interfere with the drafting. It requires practical and also some knowledge of the afore-said, so that one can touch assence such drafting units with a safe hand.

Tests relative to the effect of pressure on the tensor-point

The study [1] published by the author contained a figure, which at that time was not explained in detail. That figure is now repeated on Fig. 12. Yarn No. 40 was produced on a drafting unit with which pressure could be exerted on the tensor-point of the two aprons. The roving was No. 2,5. The drafting was about 15-fold, the predraft in the first drafting-field being abt. 1,2-fold.

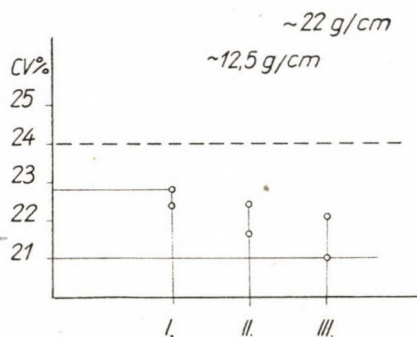


Fig. 12

The three pairs of value were marked with the constructional solution numbered Casablancas I., II., III. With form I the two aprons were lying on each other in such a manner that the top apron was pressed, only by the weight of the apron-sledge to the lower one. This pressure cannot, even approximately, be evaluated.

With the II form an abt. 80 grammes weight affected the middle of the common pressing plate of bot aprons. Thus for an apron length of 1 cm the weight was abt. 12,5 g/cm.

With the III solution similarly 150 grammes worked. Meanwhile care was taken that the aprons should remain in a tensioned state and not to become congested before the departing point of the pair of aprons. In this case a force of about 22 g/cm acted in the tensor-point.

These tensor-point loads, naturally, do not act on the line, but on the surface. We may write approximately 12,5/0,6 cm² etc., this being the approximate area of the leather on which the respective load disperses. The comparatively small pressure applied on the place of the tensor-point, favourably influences the drafting procedure because relatively the most regular yarn was obtained with the mentioned greatest load. The broken vertical line noticeable on the figure denotes the yarn level that would be obtained from the roving with the carrier roller (about 70 grammes/2 spindles).

The publishing of the latter test is to give a better proof of the earlier stated connections.

The role of fibre straightening and of spread of fibre-tape during drafting

Among the drafting problems there are one or two which, as is known, are not dealt with by anybody. Two of these are mentioned here as regards to their effect.

The tensioned state of the fibres is not natural. During drafting this arises on several occasions, indeed the individual fibres run their way from one drafting-field to the other in a considerably tensioned state. A tensioned fibre-tape — glancing at it — looks narrower than a non-tensioned one. As soon as they become relaxed of their tension, *the fibres* — according to relaxation — *endeavour to obtain an untensioned shape.*

This especially refers to the fibres running outermost in the drafting unit i. e. those at the selvedge of the fibre-tape. If the number of fibres on both roller sides are sufficiently high and of about the same magnitude, a certain tension develops during drafting between the slow and fast fibres. The position is different if on one side only a few fast fibres are drawn, whilst on the other side a large quantity of slow fibres are fed (taken in). As a consequence, the fibre ends of the

incoming fibre-tape spreading out towards the delivery rollers are no longer subject to significant tensioning and so try to resume their natural shape.

With the aid of Fig. 13 a trial is made to explain this. If the fibres — for instance without twist — form fibre-tape “A”, a picture similar to “B” can be observed in the sliver drawing frame or the drafting unit of the first flyer. The twisted fibre-structure — as roving — also shows some tensioned pictures. As soon as the twist somewhere ceases, for instance in a simple drafting-field,

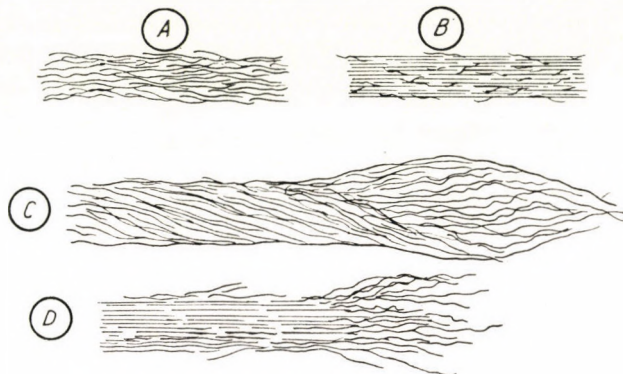


Fig. 13

the fibre ends try to take up their previous natural shape. Figure “C” represents this in an enlarged scheme. However, this phenomenon also arises before the delivery roller of the drafting unit of a first flyer. Here too the fibre ends near the delivery roller relax to their loosened tensionless form. The consequence of this is the brush-like end of the fibre-tape, or at least they show the dishevelled fibre ends of both selvages.

The position is the same in each drafting-field and the result of this is that sequential drafting-fields produce a more spread fibre tape. The consequent disadvantages can be ranged into two groups :

1. Generally, the floating fibres can effectually be braked by the slow, nipped fibres, only if they are connected tightly enough to each other. By this the number of contact points will be held high.

2. As not all groups of fibre length in proportion according to cross-section are represented, one after the other in the drafted delivered fibre tape, the twist uptake of the latter after leaving the drafting unit will not be even.

Dealing with each separately :

We tried to do away with the disadvantages of the first, by making narrower the fibre-tape by means of corresponding elements. These are called trumpets or condensers, but it would be more correct to uniformly call them fibre-tape guiders. Their main duty consists in the guiding of the fibre-tape into a pair of intake rollers as a consequence of which the latter can ensure a certain density

by furthering the retention of the floating fibres against the drag of the fast fibres. This generally applies to all such drafting units in which twistless fibrous material is produced. If we do not possess such suitable fibre-tape guiders, the contact between the individual fibres and the number of the contact points becomes scarce to such an extent that the fast fibres will irregularly drag out the floating fibres, one may say without any control.

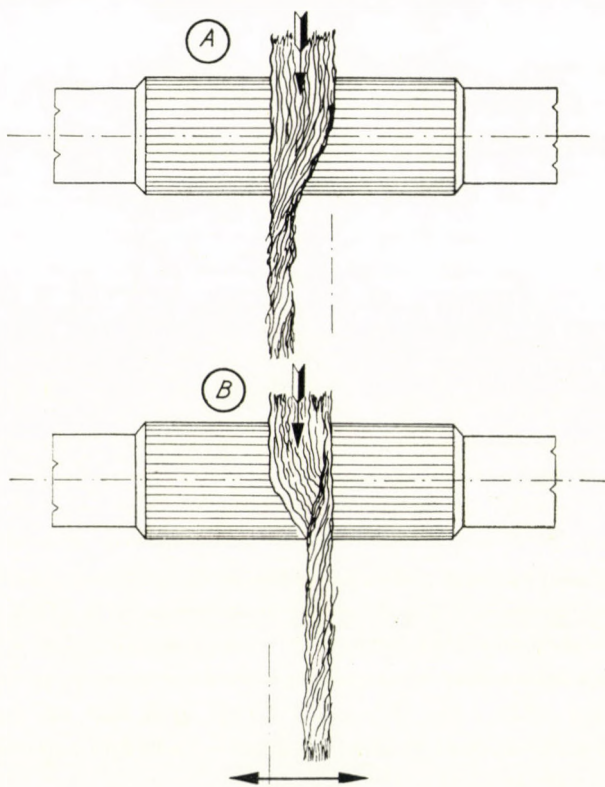


Fig. 14

The second disadvantage is the direct consequence of the first. Fig. 14 — which helps to make the position more comprehensible — shows the two extreme positions of the delivered fibre-tape, which is being twisted. In consequence of the decreasing cross-sectional fibre-numbers, both in the roving and in the yarn there are such cross-sections in which the longest fibre-groups are on the right or left side of the fibre tape, or between the two. The fibre tape will take up the twist, accordingly. With the tensioning-pulling force represented by winding, one or the other fibre-group will match. The fibre-group will enter the direction of the pulling which takes up the pulling force. On running machines it can well be observed that as a consequence of this the twisted spinning product

jumps hither and thither in the section near the delivery roller. On the ring spinning frames this phenomenon is extraordinarily fast, on the flyer frames it is slower and can be observed better.

The connection to each other of the latter phenomena is evident. They can also be simultaneously restricted. The means for their restriction are the tape-guiders. If possible, narrow fibre-tapes should be drafted. If on account of the performed draftings the fibre-tape has already immensely spreaded out, it is customary to use such a drafting-field which makes the remedy of the above phenomenon possible.

Correctly dimensioned tape guiders have a favourable effect in both directions.

The afore-said have to be brought somewhat in accord with the previous chapters.

In drafting-fields therefore not only tensor-surfaces and tensor-points display their effects, not only compressing forces of the twist and accelerating, whipping forces are working against each other, but also forces arising from the relaxing of the fibre tension expose their effect. These latter forces try even more to spread out the tapered end of the fibre-tape in the drafting-field. The greatest problem of drafting units solving drafts above 15—20-fold constitute the narrow keeping of the fibre-tapes already spread out as a consequence of the various compound effects. Nowadays such drafting units are known, which seem efficaciously to compete with this problem.

Importance of isolation of fibres in a fibre-tape

In view of the compound nature of these problems, it is also necessary to deal with the important fact that the fibres during drafting should to be independent from each other. The well-known contrast is that the fibres, especially the floating fibres for instance, have to adhere well to the slow fibres, but if their acceleration follows regularly, they should not drag other fibres with them, makes its appearance at this place. This stipulation is best performed by the tensioned, parallel fibres, if they are not in such entangled connection with many other fibres, which could cause motion of the latter. As to how many fibres are moving together if one is pulled out, can be expressed by the number of the associated fibres. A similar synonymous conception is the measure of the fibre isolation, which refers to the independence from each other. To perform good drafting, considerable fibre-isolation is required, otherwise the minimum value of the cross-sectional irregularity speedily increases enormously.

The so-called minimum irregularity can be calculated according to the following formula :

$$CV_{\min} = \frac{100}{\sqrt{n_i}}$$

\bar{n}_i = the average cross-sectional fibre number in the product. When calculating this, it is presumed that each fibre is a unit from a statistical point of view. If, however, two fibres form a unit of a population, then \bar{n}_i immediately decreases to its half, and the minimum cross-sectional irregularity speedily increases.

The results of our drafting systems — in spite of their mechanical perfectness — can unfavourably be influenced by the proportion of fibre-isolation before described. If the material is badly carded, if the fibres are not rendered parallel by previous draftings, if they are not straightened, first-rate, costly up-to-date drafting units are in vain constructed. Our experiments will fail and the results will be unfavourable.

Effect of entangled fibres

Beyond the statistical conformity to certain laws, the entangled fibres exert an extraordinarily disadvantageous influence on the drafting procedure, due to the sudden accelerating of the fast fibres.

In the foregoing, description was given on

1. the whipping effects,
2. the consequences of untensioning to relaxed state.
3. the increased effect of the first has to be especially remembered if the fast fibres from the counter part will not be pulled out alone.

A simple test — the bad and good carding of the same blend — *makes the difference evident* already on the drawing frame. The electronic capacitive measuring instruments the speedy increase of the cross-sectional irregularity in case of low fibre isolation can be measured by anybody as of to-day. Our tests in this respect are compiled in a special study [4], as a summary of which it was established that the thinner a layer is carded (i. e. slower) the more regular is the drafted sliver and the lower its cross-sectional irregularity. Finally it is proved that the more the fibre isolation is made perfect by combing, the more regular yarn can be produced.

In proof of the fact that other experts have also observed the extraordinarily spoiling effect of the entanglement, we quote from an article of the Bradford Textile Society's periodical "The Journal" published in 1950—51. Here AMBLER in one of his lectures states the following :

"I was talking to an American technologist last year who had devised an apparatus for observing and magnifying what happened when a nep came through, and he told me, the effect is like an atomic bomb. I don't think we have reduced the effect of neps ; I don't think we have made it any worse. But I am not giving any encouragement at all to combers to increase their neps."

By all these, the author wished to refer to the making of the fibres independent from each other and mainly to the fact that the drafting results are not

free from these probably not often mentioned facts. If one really wished to accomplish high-drafting, progress will also have to be made in this field. The whipping forces will have to be taken into consideration for the reason that tests proved that the fibres equally migrate through the outer and inner yarn-layers [6].

High-draft systems of nowadays peak-results

The new, large capacity drafting systems can be divided into two groups:

1. drafting units for roving,
2. units for drafting of sliver.

It is hardly possible to select the most suitable unit of the inventions brought to market, day by day. The following to be mentioned is not of a recommending character; the author merely wishes to refer to one or two peculiarities in their constructional detail.

First of all it has to be established, as a common rule, that the production of coarser yarn is generally more advantageous directly from sliver. SKF-Zinser recommend such a drafting unit with 5 pairs of rollers, two fields performing 8—12-fold predraft, and a KEPA unit performing the main drafting [7]. Nastrofil try to solve this question with 6 pairs of rollers. In the Pfenningberg's drafting system the top single-apron like a KEPA-type element connected in series performs the high drafting as product of part drafts [8]. Special mention has to be made of the Japanese spinning frames [9]. The OM—S with 5 pairs of rollers consists of a serial connection of two double-apron drafting elements Fig. 15. The most decisive elements of the unit are the tape-guiders U, T, S, R, Q. There seems to be no special pressure on the tensor-points of the double-apron units.

On Fig. 16 the same system constructed for the drafting of roving can be seen. Its type is OM—K. Here too, the acting of the tape-guiders S, R, Q is a deciding factor. No special pressure on the tensor-points is applied here either, wherefore the tensor-distances should be fairly large.

On the OM—S drafting unit yarn No. 71 with 208-fold drafting was produced from str. m. 1 3/32" staple length cotton with a breaking force of 215 grammes, $CV = 12,4\%$. Its linear cross-sectional irregularity $U = 20,3\%$, which can be looked upon as medium. The measuring number of the long-term irregularities refer to the fact that the sliver from which the yarn was produced has been creeled up on the ring frames with a cross-sectional irregularity of about $U = 5\%$.

The latter type drafting unit represents one of those, which to-day denote the highest efficiency level. The number of the yarn ends-down is not too favourable. With yarn No. 71 the number of ends-down is said to be about 100.

In appendix No. 1 an account is given of the results obtainable with the drafting systems of the spinning frames which are to-day at disposal, and what are the results achieved to be attributed to it.

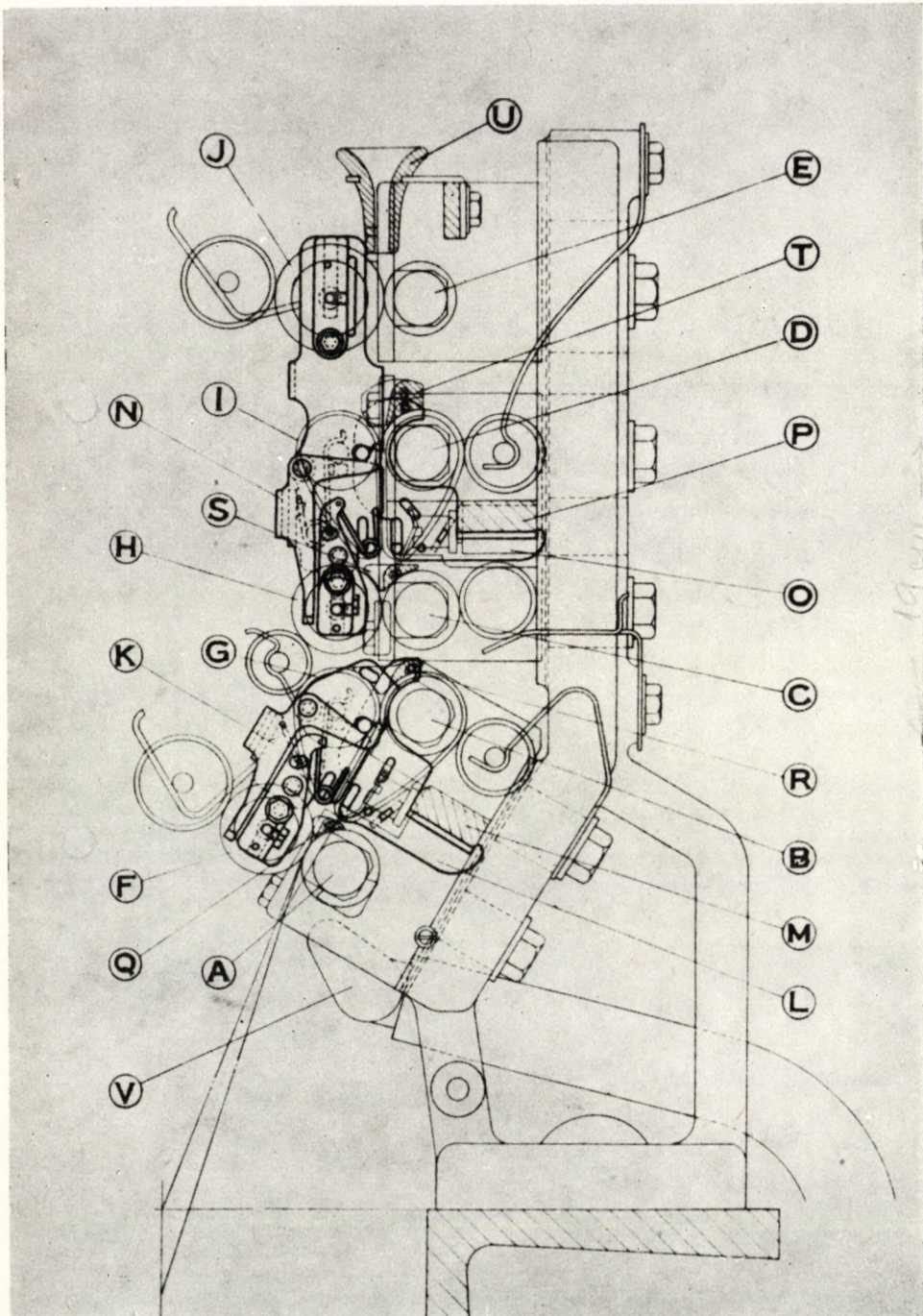


Fig. 15

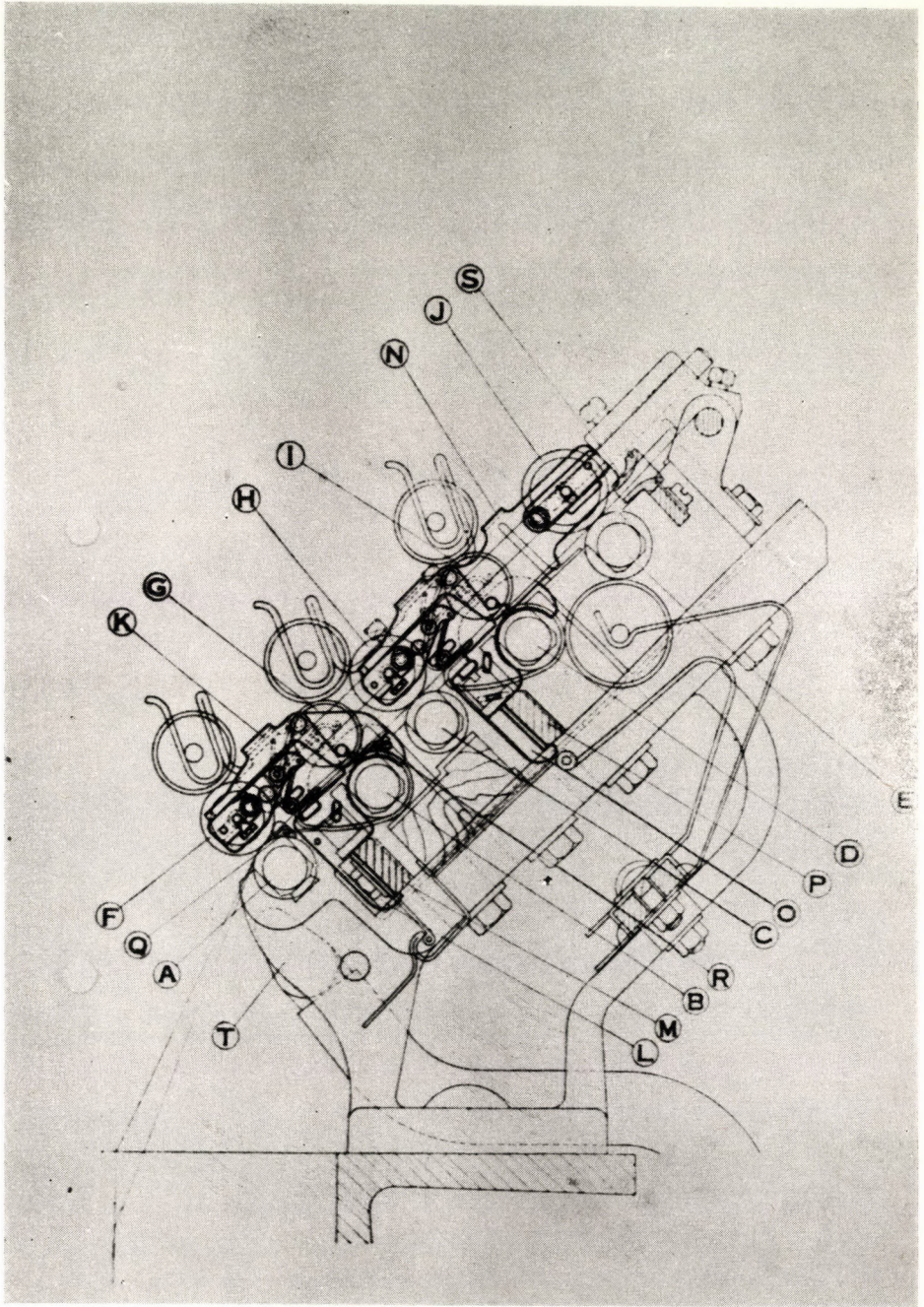


Fig. 16

In Appendix No. 2 an account is given of the results which have been reached on the discernment that the fibres have to be brought into a preliminary tensioned condition (maximum draft about 1,04—1,1), in order to reduce entanglement. This gave rise to that kind of alternation of the sliver drawing frames, whereby in the first two drafting-fields, only drafts of about 1,04 to 1,06 were applied (SÜTÖ—SPERLING solution). In a separate Appendix — No. 3 — those home results are mentioned which have been accepted by several spinning mills, and which prove that the deliberate application of the tensor-surfaces on the 3 over 4 type drafting units provide higher quality drafting.

The knowledge of the afore-said, the deliberate adaptation of constructional elements, the perfection of the mechanical parts, and the adhering to the exigencies of such tendency will ensure the maximum results.

This study is not appropriate, nor was its purpose, to denote the numerous decisive standpoints connected with the devising and construction of such units.

Conclusion

All the effects which influence the fibre-tape during drafting can not be dealt with in this paper. It is also generally known that the pressures and frictions cause the static loading of the fibres and thereby their repulsion from each other. The new idea, the dimensional plotting and the fundamental viewpoints of the use of there are summarily pointed out.

To further perfectionate the drafting systems is a serious task of machine construction. It is evident, that the close connection of the textile- and machine-constructing experts is needed. From the results of the theoreticians practical means will have to be devised.

Fibre-braking, direction changing and guiding elements, which decisively influential quality, will have to be built into the drafting units. The wipping, bursting, mechanical and electrical repulsing forces, the spreading originating from relaxation, which no doubt make their appearance in the fibre-tape, will have to be stopped. The individual fibres constituting the fibre-tape will have to be prepared for the drafting procedure. The bedding by twist, the preliminary tensioning and in case of untwisted fibre-tape the little stretching, corresponding to the pretensioning, are suitable and even necessary.

It is essential that in the course of accelerating (fast fibres) those fibres which are in mechanical contact with those accelerated, but should still be slow, further those which are badly isolated from the individual fast fibres, largely and unfavourably influence the drafting procedure. Not only the floating fibres, but also the associated entangled fibres can cause quality defects.

With the previously used drafting units the drafting procedure was influenced by only one or two factors: i. e. the relation between the rate of the drafting-

field and the fibre-length, the twist, the extent of tensioning, the quality of the covering, the load of the pressure roller.

Now, at the time of high-drafting :

- a) the tensor-distance,
- b) the magnitude of the normal pressure applied at the place of the tensor-point,
- c) the shape and the frictional factor of the surfaces performing the braking,
- d) the twist given to the product to be drafted,
- e) the size of the pre-stretching before main draft,
- f) place, shape, material and surface finish,
- g) characteristics of the mechanical elements of the drafting unit, shape of the flute, elastic characteristics of pressure roller, rate of weighting of pressure roller, diameter of rollers, etc.

Naturally, the employment and the setting of such drafting units requires far more knowledge than the old types. Their use, however, ensures economic advantages.

Finally it has to be mentioned that no one can foresee a universal drafting system. The textile fibrous materials are of different length, the frictional surfaces of different shapes, their frictional coefficient varies, the frictional coefficients of the fibres are also different, their tenacity, fineness vary according to types. In a given case one must adhere to these. It is hoped that the conceptions, figures and establishments, as well as the results of tests laid down in this study, will give some assistance in this respect.

Appendix I

During mill tests cotton roving was spun into the same yarn on different type drafting units. The yarn was partly spun on the Le Blanc Roth drafting system partly on double-apron drafting units with different tensor-distances. Previously care was taken to hold the cross-sectional irregularity of the roving low. Thus it was found that if the tensor distance decreases, the regularity of the yarn increases significantly.

	Nm	P	CV%	Breaking length km
LBR drafting unit. Tensor-distance at abt. 21 mm	52,0	244,8 g	14,7%	12,9 km
	51,5	249,6 g	14,2%	12,8 km
R.I.T.* double-apron laboratory drafting unit. Tensor-distance at abt. 13 mm	51,4	297,0 g	12,5%	15,1 km
	50,3	298,2 g	13,3%	15,0 km

* Research Institute for Textile-industry, Budapest, Hungary.

Similarly tests were made with a view to establish the cross-sectional irregularity attainable with such drafting units.

	Nm	U%
Double-apron drafting unit with out-of-date apron-guide tensor distance abt. 20 mm	52,0	18,2%
Double-apron R. I. T. laboratory drafting unit. Tensor-distance abt. 12—13 mm	50,4	16,8%
	48,6	15,1%

The above results do not originate from the data of individual tests, but are proved by several control tests.

The rovings from which the yarns were produced were transported from one drafting system (machine) to the other. The yarns were spun from the same roving bobbins with the same twist. Consequently the blend within a bobbin can, no doubt, be regarded as homogeneous.

The tests were carried out by the Spinning Section of the R. I. T. during the first quarter of 1956, partly in a provincial spinning mill, and partly in the Research Institute.

Appendix 2

The tests carried out by the British researcher FOSTER with a view to improving the quality work of the drawing frames (sliver) are known. Considering this study to be well-known, the author wishes only to state that, based on the afore-mentioned tests, the draft on the old type 4-roller drawing frame should so be divided that in the first field 2,2-fold, in the second field abt. 1,04—1,06-fold pre-tensioning in the third, the rest for a 6-fold, but main draft should be set in order to achieve a greater regularity of the sliver.

On account of an out-of-date type of drawing frame researchers in a home factory were compelled to continue their tests on same. Thus they arrived to the determination that also in the first field only pre-tensioning should be applied, the whole draft should be concentrated on the main field. This is known in Hungary as the SÜTÖ-SPERLING-solution. For instance the draft-distribution on such a drawing frame can be chosen as follows:

$$1,04 \times 1,05 \times \text{rest} = 6\text{-fold draft.}$$

During a long time this setting was not in accord with the theoretical knowledge of drafting. Without any further reference, this can now be easily understood, especially with the assistance of the statements made in the present study.

On account of twice pre-tensioning, the fibres receive by this setting a more intensive straightening. We mean by this the straightening of the entanglements. The fibres receive — so to say — a preparation prior to the high-drafting. The results appear in the decrease of the considerable irregularities of the sliver. The percentage values of U are about 4%, these, however, were measured with an 8 mm electrode breadth, so in case of comparisons, this should be taken into consideration if the measuring is to be carried out with a 16 mm electrode.

During 1956 the R. I. T. organized the technology in one of the spinning mills. The drawing frames did not show favourable results with any draft variation. Finally the draft was reduced in fields 1 and 2 according to the above conception, and the results became favourable.

Here, however, a very interesting determination was made. On the first drawing frame after the cards $1,25 \times 1,05 \times 4,85$ -fold draft had to be set. The special structure of the carded sliver made it necessary to increase the draft in the first field to above 1,05-fold. In the case of pre-drafting of such low $1,05 \times 1,05$ values the carded sliver left the fourth pair of rollers with periodic mass irregularities. The length of the periods was about twice the staple length. The sliver was not suitable for further purposes. With draft of $1,25 \times 1,25 \times 4,85$ -fold the fineness of the sliver was 0,310, $U = 4\%$ measured by a 8 mm broad electrode.

The fibres have thus to be rendered parallel and straight for the main draft. Under such conditions the drafting procedure is more favourable and better results can be obtained.

Appendix 3

The working of the drawing frames is now watched all over the world, as the long term evenness of yarn is depending from the regularity of their product. If the value of the cross-sectional irregularity $U\%$ is low, it is expected that the long term irregularity values of the yarn will also be low. Therefore the Spinning Section of the Research Institute also carried out numerous tests during the time-interval from 1950—1956. In co-operation with a spinning mill the 3 over 4 sliver drafting unit was tested. The idea was that it would be opportune to work such drafting units on which it is not necessary to frequently set the draft-field to the staple length, gave rise to the carrying out of this test.

The tests gave reassuring results in 5 mills, and today the installation of the 3 over 4 sliver drafting unit, especially in the case of renovating old types, has become a general tendency.

During the numerous tests carried out with this drafting unit, the idea developed that a 1,8-fold draft should be set in the first field, and the remainder in the main field. In the second field, where a top pressure roller lies on the two bottom fluted rollers no draft whatever is set. In spite of this fibres are stretched on the surface of the rollers, because they arrive there in a tensioned condition.

Some mills found the work performed by this drafting unit to be so excellent that they used one flyer which delivers roving direct to the ring spinning frames immediately after one stage drawing frame. Rayon fibres are processed in this way (from regenerated cellulose).

The cross-sectional irregularity of the sliver $U = 3-4,5\%$ depends on the quality of the machine. The slivers were again measured with the capacitive measuring apparatus with 8 mm electrode breadth. The fineness of the slivers ranged between Nm. 0,250—0,350. The irregularity of the thinner slivers is naturally greater.

It has to be mentioned here that only the first steps were made in this respect. If one looks into the mechanism of the Whittin-make high speed, new sliver drafting unit, it can be observed that the application of the tensor-surface is even more frequent (Der Spinner und Weber, August 1956, page 659). The drafting unit is a 4 over 5 type, but for instance in the main field the draft and at the same time the transport of the sliver is carried out together by 2 bottom and 2 top rollers. The diameters of the rollers are entirely unusual.

At the bottom in sequence of processing :

$$1 \ 3/8'' - 1 \ 3/8'' - 3/4'' - 1'' - 2''$$

at the top

$$1 \ 5/8'' - 1 \ 5/8'' - 5/8'' - 1 \ 5/8''$$

The second and the third pressure rollers work together with 2—2 bottom rollers, the surface of the bottom $3/4''$ rollers is not adapted for the direct nipping of the fibre, but builds up as a tensor-surface with determined frictional coefficient.

Its regularity values, the $U\%$ are still more favourable. Delivery speed is 70—90 m/min.

The same construction — as mentioned by them — gives the fibre in some cases a greater draft, which again proves that the viewpoints shown on the first quoted figures hold good, and show a general conformity to certain laws.

The latter also refers to the 3 over 4 flyer drafting unit, under test by the Research Institute, with which $D = 10$ -fold draft, combined with good quality can be carried out. Data referring to this will be published at a later date.

REFERENCES

1. B. GANGLI: Analysis of certain problems of Prof. Hannah's theory of high drafting in cotton spinning by examination of single and double apron systems. Budapest, Hungary. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1953/54. Tomus IX, Fasciculi 3—4.
2. M. N. TUMOFEV: Textilnaja Promüslennosztii. 1955. 3. No. Figures of page 17.
3. M. HANNAH: The theory of high drafting. The Journal of the Textile Institute T. 57. March 1950.
4. B. GANGLI: Problems of contemporary drafting of sliver and roving, theoretical viewpoints and practical tests. Research Institute for Textile Industry, Budapest 1954. Manuscript, (Hungarian).

5. G. AMBLER : Bradford Textile Society "The Journal" 1950—51. page 39.
6. W. E. MORTON : The arrangement of fibres in single yarns. Congrès International, Bruxelles, June 27. 1955. Page 18—20. Conference publication.
7. Ing. KANZLEITER : Zinser/KEPA Streckenband Ringspinnmaschine für Grobgarn-Ausspinnung. Der Spinner und Weber Nr. 24. 1956. Seite 1119.
8. O. REINHARDT : Das flyerlose Spinnen von der Spinnkanne oder vom Kreuzwickel der Baumwollstrecke. *Pfenningsberg's Highdraft drafting unit*. Melliand Textilberichte, 1956, Seite 1368.
9. O. M. Spinning Machine Manufacturing Co. Ltd. Osaka Japan. October 1955.

SUMMARY

The theories of modern drafting mechanisms in spinning and the practical observations are not entirely in accord. Attempts are made to point to the convex surfaced structural elements of drafting mechanisms and to the decisive dynamic characteristics of the fibre motion. The figures show, in a sketched form, the approximate normal forces, creating the frictional forces operating on the fibres. By employing corresponding drafting elements the whipping forces can be reduced in their effect.

The experiments carried out prove that external normal forces may be employed in the tensor-point of double-apron drafting mechanisms

- a) if these forces are small, and
- b) if they can be sensitively regulated.

The braking forces employed increase the regularity of the drafted product.

The fibre-tape condenser as well as the preliminary fibre tensioning applied in the first fields of drafting mechanisms with multiple fields make the further drafting-process perfect.

Contrary to the handling of the older type drafting-mechanisms, the new types require considerably greater special knowledge, both theoretical and practical. The theoretical and practical construction principles dealt with in this study are — even if in their entirety — reflected on some types of the most modern high-drafting systems. The taking into consideration of the viewpoints dealt with will lead to the devising and constructing of even more modern systems.

ALLGEMEINE ENTWICKLUNG DER ANSCHAUUNGEN UND PRAXIS AUF DEM GEBIET DES AUFBAUS UND DER WIRKUNGSWEISE DER STRECKWERKE

B. GANGLI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Theorie der modernen Spinnereistreckwerke steht mit den praktischen Beobachtungen nicht in vollem Einklang. Der Verfasser versucht, auf den entscheidend dynamischen Charakter der Streckwerk-Bauelemente mit konvexer Oberfläche und der Faserbewegung hinzuweisen. Die Abbildungen versanschaulichen die auf die elementaren Fasern wirkenden angenäherten Normalkräfte, welche solche Reibungskräfte hervorrufen die auf die Fasern einwirken. Die Wirkung der Schleuderkräfte kann durch die Verwendung von entsprechenden Streckelementen verringert werden.

Die Versuche haben bewiesen, daß man im Tensorpunkt der Zweiriemchen-Streckwerken äußere Normalkräfte verwenden darf, wenn diese a) klein sind, b) fein regelbar sind. Die angewandten Bremskräfte erhöhen die Gleichmäßigkeit des gestreckten Produktes.

Weitere Maßnahmen für die Vervollkommnung des Streckens sind die Faserflußverschmäler und sogar die in den ersten Feldern von Mehrfeld-Streckwerken angewendete Faser Vorspannung.

Im Gegensatz zu älteren Streckwerken verlangen die neueren Typen, deren Behandlung, wesentlich größere theoretische und praktische Fachkenntnisse. Die in diesem Studium behandelten theoretischen und praktischen Konstruktionsgrundlagen reflektieren sich — wenn auch nicht in vollem Maße — in einigen der zeitgemähesten Hochverzugsstreckwerken. Beachtung der angeführten Gesichtspunkte kann zur Konstruktion und dem Bau von noch moderneren Streckwerken führen.

NOS PROGRÈS THÉORIQUES ET PRATIQUES DANS LE DOMAINE DES BANCS D'ÉTIRAGE DE FILATURE

B. GANGLI

RÉSUMÉ

Les observations faites dans la pratique sur les bancs d'étirage des filatures modernes ne sont pas en accord complet avec la théorie. L'auteur essaie de démontrer le caractère essentiellement dynamique des éléments mécaniques des bancs d'étirage à surface convexe, et du mouvement des fibres. Les figures montrent schématiquement les forces normales approchées qui agissent sur les fibres élémentaires, et engendrent les forces de friction. On peut réduire l'action des forces de fouettage par l'utilisation d'éléments mécaniques appropriés.

Les essais prouvent qu'il est permis d'appliquer des forces normales extérieures dans le point tenseur des bancs d'étirage à deux courroies, si ces forces a) sont petites, et b) peuvent être réglées avec précision. Les forces de freinage utilisées augmentent l'égalité du produit étire.

D'autres perfectionnements peuvent être apportés au processus d'étirage par l'emploi des guide-rubans, et même de la prétension des fibres utilisée dans les premiers champs des bancs d'étirage multiples.

Par rapport aux bancs anciens, les bancs d'étirage modernes demandent des connaissances techniques beaucoup plus parfaites, aussi bien théoriques que pratiques. Certains types de bancs à grand étirage, parmi les plus modernes, reflètent, bien qu'incomplètement, les principes de construction théoriques et pratiques, esquissés par l'étude. En tenant compte des points de vue décrits, on est amené à étudier et à réaliser des mécanismes encore plus modernes.

ОБЩЕЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ПРАКТИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ В ОБЛАСТИ КОНСТРУКЦИИ И РАБОТЫ ВЫТЯЖНЫХ АППАРАТОВ

Б. ГАНГЛИ

РЕЗЮМЕ

Теоретические и практические данные наблюдения современных прядильных вытяжных аппаратов совпадают не полностью. Производится экспериментальный опыт, чтобы указать на решительным образом динамический характер движения нити и конструкции элементы вытяжного аппарата с выпуклой поверхностью. На рисунках схематически показаны действующие на элементарные волокна приблизительные нормальные усилия, которые создают усилия трения. Ударные усилия при использовании соответствующих вытяжных элементов можно уменьшить по их эффективности.

Проведенные опыты доказывают, что в тензорной точке двуремных вытяжных аппаратов можно прикладывать внешние нормальные усилия, если эти усилия а) имеют небольшую величину и б) их можно тонко регулировать. Примененные тормозные усилия повышают ровноту подвергнутого вытяжке продукта.

Дополнительно процесс вытяжки можно усовершенствовать при помощи направляющих элементов движения нити, кроме того также натяг нити, применяемый в первых полях многопольных вытяжных аппаратов.

По сравнению со старыми вытяжными аппаратами при обслуживании вытяжных аппаратов новых конструкций требуется более высокая квалификация как в теоретическом, так и в практическом отношении. На нескольких типах наиболее современных вытяжных аппаратов с высокой вытяжкой отражаются (хотя и не полностью) теоретические и практические принципы конструирования, описанные в статье. Учет описанных принципов может привести к конструированию и построению еще более современных конструкций.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be addressed to :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest VI., Népköztársaság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

- Verebely, L.*: L'anniversaire de 25 ans du système d'électrification des chemins de fer à 50 Hz — Das 25jährige Jubileum des Bahnelektrifizierungssystems mit 50 Hz — The 25th Anniversary of the 50 Hz Railway Electrification System — *Л. Веребей*: 25-летний юбилей электрификации железных дорог током промышленной частоты 209
- Faragó, T.*: Determination of Higher-order Partial Derivatives of the Velocity Function from Known Values along a Stream Surface — Über die Berechnung der höheren partiellen Ableitungen der Stromfunktion längs einer Stromfläche aus bekannten Werten — Sur le calcul des dérivées partielles d'ordre supérieur de la fonction de courant le long d'une surface de courant, à partir de valeurs connues — *Т. Фараго*: О вычислении парциального производного высшего порядка функции скорости вдоль поверхности тока на основе известных данных 217
- Gedeon, T.*: Experiments on the Reduction of Dolomite for Magnesium Production — Magnesium-Reduktionsversuche — Essais der préparation du magnésium métal par réduction de la dolomie — *Т. Г. Геден*: Опыты по фришеванию магния 229
- Csonka, P.*: Stiffness Characteristics of Vierendeel Girders with Parallel Chords — Steifigkeitskennwerte von Vierendeelträgern — Caractéristiques de rigidité de poutres Vierendeel — *П. Чонка*: Параметры жесткости гуртовых балок 251
- Bondy, P.*: Annähernde Berechnung des Wärmeübergangs von wärmequellenfreien metallischen Körpern an Luft bei freier Konvektion — Approximate Computation of Heat Transfer by Free Convection from Metallic Bodies without Heat Sources to the Air — Calcul approché de la transmission par convection libre de la chaleur des corps métalliques, sans sources de chaleur à l'air — *П. Бонди*: Приближенное вычисление теплопередачи металлических тел, находящихся в среде воздуха и не имеющих теплового источника 261
- Uzsoky, M.*: On a Problem of Slowing Down Neutrons — Das Problem der Verlangsamung des Neutrons — Le problème du ralentissement du neutron — *М. Ужоки*: Проблема замедления нейтронов 271
- Pelikán, J.*: Membrane Structures with Free Edges — Membrankonstruktionen mit freiem Rand — Voiles minces en membrane avec circonférence libre — *Й. Пеликан*: Мембранные конструкции со свободным краем 275
3. *Hegedűs—M. Stefán*: Производственные дефекты в сплавах альпака, вызванные присутствием фосфора в качестве примеси — *Hegedűs, Z.—Stefán, M.*: Durch Phosphorverunreinigung verursachte Fabrikationsfehler in Neusilberlegierung — Defects of Fabrication Caused by Phosphorous Impurities in German Silver Alloys — Défautes de fabrication causées par des impuretés phosphoreuses dans les maillechorts (Alpakka etc.) 297
- Zajta, A.*: Beitrag zu einem Teilproblem des Transportarbeitsbedarfs der Gleichmässigen Flächenarbeiten — Contribution to a Partial Problem Concerning the Transportation Needed for Work Allotted Uniformly to an Area — Contribution à la solution d'un problème partiel concernant le travail de transport requis pour les travaux uniformément répartis sur une certaine surface — *А. Зайта*: К одной из частных проблем потребной транспортной работы при работах на ровной площадке... 305
- Dékány, S.*: Bemerkungen über die visuelle Leistung der Fernrohre beim Dämmerungssehen — Remarks on the Performance of Telescopes at Dusk — Remarques concernant le pouvoir optique des lunettes d'approche au crépuscule — *Ш. Декань*: Замечания в связи с светосилой зрительных труб при полумраке 317
- Gangli, B.*: General Surveying and Practical Development in the Construction and Operation of Drafting Mechanisms — Allgemeine Entwicklung unserer Anschauungen und praxis auf dem Gebiet des Aufbaus und der Wirkungsweise der Streckwerke — Notre développement théorique général et pratique dans le domaine des bancs d'étrirage de filature — *Б. Гангли*: Общее теоретическое и практическое развитие в области конструкции и работы вытяжных аппаратов 337