ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
S. GELEJI, L. GILLEMOT, I. RÁZSÓ

REDIGIT
GY. HEVESI

TOMUS II. FASCICULUS 1.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1951

ACTA TECHNICA HUNGARICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, VI., SZTÁLIN-ÚT 31.

Az Acta Technica Hungarica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica Hungarica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Több füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg 20—30 ív terjedelemben.

A közlésre szánt kéziratok, lehetőleg géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica, Budapest 62, *Postafiók* 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az »Akadémiai Kiadó«-nál (Budapest, VI., Sztálin-út 31. Bankszámla 936 550) és az Akadémiai könyvesboltban (Váci-utca 22.) külföld számára pedig a »Kultúra« Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankszámla: 929 040 sz.), vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

»Acta Technica Hungarica« издает трактаты из области медицинской науки на русском, французском, английском и немецком языках.

»Acta Technica Hungarica« выходит в брошюрах переменного объема (20—30 печатных листов); несколько выпусков объединяются в одном томе.

Ежегодно предвидено издание одного тома.

Предназначенные для публикации авторские рукописи следует направлять, по возможности машинописью, по следующему адресу:

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направляется всякая корреспонденция для редакции и администрации.

Подписная цена »Acta Technica« — 110·— Ft. форинтов за том. Заказы принимает *Akadémiai Kiadó (Budapest, VI., Sztálin-út 31.* Счет Банка № 936 550), а в заграницу Предприятие по внешней торговле книг и газет »»*Kultúra« (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5.* Счет Банка № 929040) или его заграничные представительства и уполномоченные.

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
S. GELEJI, L. GILLEMOT, I. RÁZSÓ

REDIGIT
GY. HEVESI

TOMUS II.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1951

Akadémiai Kiadó Budapest, VI., Sztálin-út 31.) Felelős: Mestyán János

Budapest nyomda, V., Gerlóczy-u. 2. — 12221/51 — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

BEITRÄGE ZUR GESCHICHTE DES HÜTTENWESENS IN UNGARN

I. DIE GESCHICHTE DES METALLHÜTTENWESENS AUF DEM GEBIETE DES MÁTRA-GEBIRGES

Prof. Dr. A. SCHLEICHER

Eingegangen am 28. Dez. 1950.

In den verschiedenen Jahrgängen des »Handbuch für das Berg-, Münz- und Forstwesen im Kaiserthum Österreich« [1] wird bei der Beschreibung des am südwestlichen Abhang des Mátragebirges oberhalb Gyöngyös-Oroszi durch die Paul-Josef-Gewerkschaft betriebenen Bergbaues, Poch- und Schlämmwerkes auch eine *Rohschmelzhütte* »Emmerich« erwähnt, welche damals dort existiert haben soll. Es ist demnach anzunehmen, dass die in Frage stehende Schmelzhütte in Gyöngyös-Oroszi zwischen den Jahren 1855 und 1864 bestanden hat. Im gesamten Schrifttum findet sich hierüber nirgends eine ähnliche Angabe : da aber die technisch-geschichtliche Forschung ebenso zur moralischen Pflicht des Ingenieurs gehört, wie diejenige von technischen Gegenwarts- und Zukunftsfragen, wurde in dieser Arbeit zum Ziel gesetzt, diese vollkommen in Vergessenheit geratene Frage nebst anderen, sich auf das oben bezeichnete Gebiet beziehenden Fragen zu bereinigen. Über die Ergebnisse der diesbezüglichen Forschungen soll nun im nachstehenden berichtet werden.

Da die Klärung dieser Fragen nicht auf Grund von gedruckten Quellen erfolgen konnte, weil in diesen, wie erwähnt, diesbezügliche Angaben völlig fehlen, blieb nichts anderes übrig, als Forschungen im Ungarischen Landesarchiv in Budapest vorzunehmen, wo die diesbezüglichen Akten aufbewahrt werden [2].

Sonstige archivalische Forschungen erschienen als überflüssig, da in Ungarn die Aufsicht über das Berg- und Hüttenwesen seit dem Inkrafttreten des Gesetzartikels XIV. vom Jahre 1741, bzw. seit der im Jahre 1788 erfolgten Errichtung der vier königlichen Distriktualberggerichte, darunter auch eines in Szomolnok, weitgehend den Berggerichten — und nur in Fällen geringerer Bedeutung den Behörden der allgemeinen Verwaltung — oblag [3]. Nichtsdestoweniger wurden auch die Archive des Komitates Heves in Eger und der

Stadt Gyöngyös berücksichtigt, ohne jedoch dass in diesen beiden Archiven auf das in diesem Komitat betriebene Hüttenwesen bezügliche Angaben vorzufinden gewesen wären [4].

In der vorliegenden Abhandlung wird nur ein begrenzter Zeitabschnitt berücksichtigt, da die das Komitat Heves betreffenden Akten des Berggerichts zu Szomolnok im Landesarchiv in Budapest nur vom Jahre 1797 an vorhanden sind. Demnach fehlen die Akten aus den Jahren seit 1788, also seit der Errichtung des Berggerichts zu Szomolnok, bis zum Jahre 1796; in Anbetracht dessen, dass das diesbezügliche »Rescript« Kaiser Josephs II. erst am 6. Oktober 1788 veröffentlicht wurde, darf jedoch angenommen werden, dass die Errichtung des Berggerichts zu Szomolnok nicht sofort, sondern erst in einem späteren Zeitpunkt erfolgte und dass daher nur die Akten von 6 oder 7 Jahren unzugänglich waren. Es fragt sich nun, ob nicht auch die Zeit vor der Errichtung der Berggerichte, also vor 1788, hätte berücksichtigt werden sollen. Nach *Alliquander* — vgl. die Fussnote [3] — gehörte die Amtsführung der ungarischen Bergverwaltung bis zur Mitte des XVIII. Jahrhunderts zum Wirkungskreis der Munizipalbehörden. Es konnte nun festgestellt werden, dass im Komitatsarchiv von Eger keine Schriftstücke vorhanden sind, welche auf das Bestehen eines Bergbaues und noch weniger eines Hüttenwesens im XVIII. Jh. auf dem Gebiete des Komitats Heves hindeuten. Sehr oft und ausführlich ist in den Akten z. B. über die in dieser Zeit in diesem Komitat betriebene Pottascheerzeugung die Rede, über den Bergbau wird hingegen keine Erwähnung gemacht, woraus wohl mit Recht geschlossen werden darf, dass auch keiner betrieben wurde.

Ausser der zeitlichen Einschränkung musste auch der Umfang des Gegenstandes dieser Arbeit begrenzt werden, und zwar aus dem Grunde, weil über den Bergbau im Mátragebirge seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts recht ausführliche Beschreibungen im Schrifttum bekannt sind [5]. Demgegenüber werden jegliche diesbezügliche Angaben aus der ersten Hälfte des XIX. Jahrhunderts vermisst und daher scheint es angebracht zu sein, hier zunächst die äusserst spärlichen archivalischen Daten über den Bergbau zu veröffentlichen, um dann auf den eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit, nämlich auf *die Vergangenheit des Hüttenwesens in der Mátra* überzugehen.

Die Akten aus den Jahren 1797 bis 1808 [6] behandeln nur zum Teil das Heveser Komitat, meistens jedoch das benachbarte Borsoder Komitat im Zusammenhang mit Eisensteinvorkommen. Die erste Spur aus dem vorigen Jahrhundert über sonstige Erzvorkommen in der Mátra findet man im Jahre 1802 (Prot. No. 261), als Carolus *Hecht*, Schlossermeister und Bürger in Gyöngyös seine Absicht anmeldete, auf Solymoser Terrain — heute Gyöngyös-Solymos — etwa 3 km nördlich von Gyöngyös — in zwei verfallenen Stollen, genannt Hl. Dreifaltigkeit und St. Johann Nep., schürfen zu wollen. Im selben Jahre wurde ihm »ein Haupt und eine ordinäre Schürfe« verliehen. Ob jedoch zu diesem Zeitpunkt dort irgendein Abbau begonnen wurde, konnte nicht ermittelt werden; ebensowenig konnte über die Entwicklung einer weiteren Anmeldung aus dem Jahre 1822 (Prot. No. 358), gleichfalls das Solymoser Tal betreffend, in Erfahrung gebracht werden, als Wentzl *Richnowsky*, erzbischöflicher Revierjäger, dort auf einen am Hange Asztagkő »aufgeschürften glastopfartigen Toneisenstein-Gang auf Gold, Silber und Eisen« um das Schur-

frecht nachgesucht hatte, was er im Jahre 1825 wiederholte (Prot .No. 692), wobei er diesmal auf dem Csonkabérc neben dem Esőhegy schürfen wollte [7].

Nach recht langer Pause erscheinen die nächsten Angaben erst im Jahre 1844 [8], als Carol *Polony*, bürgerlicher Lederermeister in Schemnitz seine Mutung auf eine »Bley-, Silber- und Goldhältige im Huttaer Terrain im Mátraer Gebirg, namentlich im Thale Hasznos vorgefundene Kluft« einreichte und um die Verleihung des Schurfrechts bat. Über die weitere Entwicklung dieses Projekts war ebenfalls nichts in Erfahrung zu bringen, es ist jedoch bekannt, dass im oberen Teil des Tals von Hasznos, also auf der westlichen Seite des Gebirges, [9] Vererzungen vorkommen, welche denjenigen nördlich von Gyöngyös-Oroszi am südlichen Fusse des Kisbükk ähnlich sind [10].

Südlich der Gemeinde Hasznos gibt es übrigens eine Ólombérc (deutsch: Bleigipfel) genannte Bergkuppe. Wie am Ende dieser Arbeit noch erwähnt werden wird, fand man auf der westlichen und nordwestlichen Seite des Gebirges auch Spuren, welche die Existenz von wahrscheinlich in urgeschichtlicher Zeit dort bestandenen Kupferschmelzhütten vermuten lassen.

Im selben Jahre, also 1844, trifft man die ersten Anhaltspunkte, die auf eine nicht viel später erfolgte Gründung einer Bergbauunternehmung hinweisen, und zwar im Oroszer Tal, als nämlich der oben bereits genannte Carl *Polony* um die »Anwältigungslizenz« einer dort vorgefundenen, verfallenen alten Grube bat. Die Bewilligung zur »Gewältigung« wurde ihm erteilt [11]. Im darauffolgenden Jahre 1845 scheint es so weit gekommen zu sein, dass der Bergbaubetrieb auf Oroszer Terrain aufgenommen werden konnte [12]. Auf die ausführliche Wiedergabe des Inhalts der diesbezüglichen Akten kann umso eher verzichtet werden, als in ihnen vielfach Angelegenheiten privatrechtlicher Natur behandelt werden und auch das in solchen Fällen fast übliche Auftreten von Rivalen durch das Berggericht sorgsam geprüft wurde. Das Ergebnis der verschiedenen Begebenheiten war schliesslich, dass Mitte 1845 Carl *Polony* als Sieger hervorging, indem ihm und seinen Gewerken im Oroszer Tal zwei oberungarische Feldmasse verliehen wurden. Es scheint, dass in diesem Zeitpunkt auch eine Gewerkschaft mit dem Schutznamen »Paul und Joseph«, hauptsächlich unter der Mitwirkung der in der Umgebung ansässigen, vermutlich sehr wenig vermögenden Grundbesitzer konstituiert wurde.

Über den Beginn des Betriebes liegen keine Daten vor, es darf jedoch angenommen werden, *dass Mitte 1845 bereits gearbeitet wurde*, da z. B. im Herbst dieses Jahres vom Berggericht zu Szomolnok die Strafbefugnis gegenüber den Bergarbeitern in Fällen geringerer Ausschreitungen und unter genauer Umschreibung der Durchführung an die Gewerkschaft übertragen wurde, mit der Begründung, dass es angesichts der grossen Entfernung für das Gericht nicht gut möglich sei in allen solchen Fällen nach Gyöngyös-Oroszi zu reisen. Es ist kennzeichnend für die damalige Zeit, dass das Ausmass der von der Werksleitung verhängten Strafe 24 Stunden Kerker und 6 Prügel nicht überschreiten durfte. Dass derartige Strafmethoden in der Mitte des XIX. Jahrhunderts noch vorkommen konnten, ist umso erstaunlicher, als die die berggerichtlichen Verhältnisse regulierende »Maximilianische Berg-Ordnung« bezüglich des Arbeiterschutzes ihrer Zeit weit vorausgeeilt war.

Ebenfalls Mitte 1845 erhielt *Polony* die Konzession zur Erbauung eines Poch- und Schlämmwerkes »Franzens«, und zwar im »Karczalivölgy« genannten Tal mit Benützung der Csereslåper, Aranybányabércz und Karczalvölgyer Gebirgswässer, wobei dieses Werk an der Stelle eines daselbst früher bestandenen Pochwerkes errichtet werden sollte. Da aus den Akten klar hervorgeht, dass die mit dem Namen Csereslåp (im Akt Prot. No. 916 aus dem Jahre 1846 auch Gesztenyésoldal genannt) und Aranybányabércz bezeichneten Hotter sich auf Oroszer Terrain befanden, unterliegt es keinem Zweifel, dass es sich hierbei um ein zum Oroszer Bergbau gehörendes Pochwerk handelt. Es ist nur auffallend, dass über ein »daselbst früher bestandenes Pochwerk« die Rede ist, weil in den Akten rückgehend bis 1797 keinerlei Erwähnung über einen Bergbau auf diesem Gebiet gemacht wurde. Demnach kann diese vermutlich auf mündlichen Überlieferungen beruhende Angabe nur so gedeutet werden, dass es dort entweder vor 1797 Bergbau und Aufbereitung, oder aber — was weniger wahrscheinlich ist — zwischen 1797 und 1845 solche ohne bergbehördliche Genehmigung und Aufsicht gegeben hatte; auch wenn Bergbau und Aufbereitung betrieben wurden, so könnte dies heute kaum als einigermassen bedeutende Unternehmung angesehen werden [13].

Aus den Jahren 1846 bis 1849 konnten keine bemerkenswerten Aufzeichnungen vorgefunden werden, erst vom Anfang 1850 fand sich das erste, zum Themenkreis der vorliegenden Arbeit gehörige, interessante Schriftstück [14]. In diesem bat *Polony*, der sich hier als »Berg Director« angibt [15], um »die Concession *zur Erbauung einer Schmelzhütte* auf dem Gyöngyös-Oroszer

Paul- und Josephs Gruben«. Diese »rohe Schmelzhütte« hätte den Zweck, »solche Producten soviel möglich reiner in die königliche Schmelzhütte zu liefern«. Bezüglich dieses Projekts liefert ein anderer Akt (Prot. No. 442 v. 1850) erwähnenswerte Einzelheiten, welcher über einen durch den Berggerichtsassessor *Stöckl* [16] vorgenommenen Lokalaugenschein im Juli 1850 berichtet.

Bei dieser Gelegenheit wurde festgestellt, dass die Gyöngyös-Oroszer Peter-Paul-Josephs-Gewerkschaft »um die bedeutenden Fuhrkösten ihrer nach Neusohl (ungarisch: Besztercebánya, slowakisch: Baňská Bystrica) zur Einlösung zu verschmelzenden Geschcke zu verringern, auf Gyöngyös-Oroszer Terrain im Thale Aranybércz auf einem daselbst von der Grundbesitzerin zu diesem Behufe überkommenen Wiesengrunde einen Schmelzofen zum Lechschmelzen ihrer Geschicke zu erbauen, und zu diesem Behufe bei Errichtung eines Teiches ein auf dem aus dem Aranybérczer und Cseresláper Thälern fliessenden Grundwässern und den aus dem Karlsgrubenstollen zufliessenden Grubenwasser ein zu genügenden Gefäll ... gefunden wurde, ... wurde hiermit die berggesetzliche Belehnung *zur Erbauung einer Lechschmelzhütte* unter dem Schutznamen »Emmerich« auf dem daselbst überkommenen Umfanggrunde die berggesetzliche Concession erteilt« [17]. Diesem Protokoll liegen drei ungarisch abgefasste Erklärungen bei; in der ersten wird durch die Grundbesitzerin erklärt, dass sie 1000 Quadratklafter auf Grund einer Vermessung auf dem Gelände, das sich im sogenannten Nagyvölgy befindet und als Bányarét (deutsch: Grubenwiese) bezeichnet wird, an die Gyöngyös-Oroszer St. Paul und St. Joseph Gruben-Gewerkschaft zum Bau einer Schmelzhütte überlässt. In der zweiten wird durch den Beauftragten der Gewerkschaft, Imre *Brezovay* [18], eine verbindliche Erklärung betreffs der Bezahlung abgegeben. Schliesslich wird durch einen benachbarten anderen Grundbesitzer, Joseph v. *Bajza* [19], erklärt, dass er bereit ist, alles Holz seiner Waldungen in Gyöngyös-Oroszi der Gewerkschaft zu überlassen, insofern sie sich untereinander bezüglich des Preises einigen werden.

Da in der hier erwähnten ersten Erklärung auch der für die Schmelzhütte ausersehene Ort beschrieben ist, war es naheliegend, an diesem Orte Forschungen anzustellen, ob nicht vielleicht dort Reste einer Schlackenhalde vorzufinden wären. Da gegenwärtig in Gyöngyös-Oroszi vom Staat gelenkte, bedeutsame Arbeiten zur Wiedereröffnung der Gruben im Gange sind, liess die dortige Betriebsleitung freundlicherweise die ganze in Frage kommende Umgebung durchschürfen, doch verliefen die vorgenommenen Forschungen völlig ergebnislos, da nicht einmal Spuren von Schlacke auf dem in Betracht kommenden Gebiete anzutreffen waren.

Das oben Gesagte ist ungefähr alles, was über eine auf Gyöngyös-Oroszer Gebiet projektierte Schmelzhütte in Erfahrung gebracht werden konnte. Die sorgfältig durchgesehenen Schriftstücke der Bergbehörden kamen nach 1850 kein einzigesmal mehr auf diesen Gegenstand zurück, obwohl in den auf 1850 folgenden nächsten Jahren sich mehrere Akten mit dem Bergbau in Gyöngyös-Oroszi beschäftigen [20]. In jenen Jahren, also von 1851 bis einschliesslich 1854

beschäftigte die Gyöngyös-Oroszer Gewerkschaft wiederholt das Berggericht zu Szomolnok mit ihren Angelegenheiten [21], doch befinden sich darunter keine, welche die Schmelzhütte erwähnen.

Aus den Jahren 1855 bis einschliesslich 1857 finden sich in den Akten überhaupt keine Hinweise auf Gyöngyös-Oroszi. Da das im Mai 1854 durch kaiserliches Patent in Kraft getretene österreichische allgemeine Berggesetz auch in Ungarn wirksam wurde, erfolgte auf Grund dessen eine Umorganisation der ungarischen Bergbehörden, indem die Berggerichte in Berghauptmannschaften umgewandelt wurden und 1855 das Territorium des hier behandelten Komitates Heves in den Amtsbereich der Berghauptmannschaft zu Selmec (deutsch: Schemnitz) und später, im Jahre 1858, in denjenigen der Berghauptmannschaft zu Buda überwiesen wurde. Es hängt wohl mit dieser Tatsache und mit den hiemit verbundenen Umgestaltungen zusammen, dass aus diesen Jahren fast keine Angaben über Bergbau-und Hüttenwesen auf dem Gebiete des Komitates Heves vorgefunden werden konnten.

Da also aus den schriftlichen Quellen dieser Jahre nichts zu entnehmen war, blieb nichts anderes übrig, als zum gedruckten Schrifttum zu greifen. Einem im Jahre 1857 veröffentlichten und weiter unten in Fussnote [40] genannten Aufsatze sei bezüglich der Gyöngyös-Oroszer Gewerkschaft auszugsweise folgendes entnommen:

»Dieselbe ist mit 4 Grubenfeldmassen belehnt, welche durch zwei Stollen abgebaut werden. Der eine Klafter mächtige Gang führt in einer quarzigen Ausfüllungsmasse göldisch-silberhältige Bleierze, wovon bei der Neusohler k. k. Silberhütte 5 Lieferungen erfolgten und mit 1—2 Lot Silber 16 bis 27 Dänar Gold und 20 bis 55 Pfund Blei per Centner [22], vergütet worden. An übertägigen Baulichkeiten besitzt diese Gesellschaft..... ein Poch- und Waschwerk..... einen begonnenen Teichbau..... Die jetzige Wasserkraft könnte erhöht werden, der Holzbedarf kann gedeckt werden und eine gute Braunkohle in beliebiger Menge würde loco Werk auf 24 kr. pr. Centner zu stehen kommen.«

Wie hieraus ersichtlich ist, war 1857 keine Rede von einer Schmelzhütte auf Gyöngyös-Oroszer Gebiet, was das jemalige Bestehen einer Hütte noch mehr zweifelhaft erscheinen lässt. Hätte eine solche Hütte bestanden, so hätte der Verfasser des zitierten und stark auf Werbung von Interessenten abgestellten Aufsatzes es kaum versäumt, auf diese Tatsache hinzuweisen. Wenn übrigens die Gewerkschaft in Gyöngyös-Oroszi eine Schmelzhütte besessen hätte, so wäre sie nicht genötigt gewesen, ihre Erze zur Einlösung nach Neusohl zu schicken.

Aus dem Jahre 1859 kam ein einziger Akt zum Vorschein [23]. Dieses Schriftstück ist aus dem Grunde erwähnenswert, weil dadurch bestätigt wird, dass das in der vorliegenden Arbeit eingangs zitierte »Montanhandbuch« von *Kraus* auf Staatskosten durch das k. k. Finanzministerium herausgegeben wurde und dass seine Angaben von den Bergbehörden geliefert wurden. In der Tat stimmt der im hier besprochenen Akt befindliche Text der Berghauptmannschaft zu Buda über Gyöngyös-Oroszi buchstäblich mit demjenigen überein, der im Handbuch für 1861 veröffentlicht wurde, womit bewiesen ist, dass die gedruckten Angaben auf amtlichen Unterlagen beruhen. Unwillkürlich taucht hier die Frage auf, wie in amtlichen Mitteilungen eine Angabe vorkommen konnte, deren Richtigkeit mit Recht angezweifelt werden darf. Es ist jedoch Tatsache, dass sich die falsche Angabe über das Bestehen eines Pochwerkes und einer Schmelzhütte in Gyöngyös-Oroszi auf eine heute unerklärbare Weise einschlich und fortan weitergeschleppt wurde. Bedenkt man, dass diese Angabe noch in einem im Jahre 1923 getätigten Kaufvertrag — sowie in allen amtlichen Büchern vielleicht bis heute — unverändert figuriert (die diesbezüglichen amtlichen Bücher sind gegenwärtig wegen der Auflösung der Berghauptmannschaft in Budapest nicht vorzufinden), so kann dieses Vorkommnis wohl allein der Unsterblichkeit der Bürokratie zugeschrieben werden.

* * *

Mit den bisherigen Darstellungen kann der erste Teil dieser Arbeit, obgleich er nur wenig konkrete Angaben zu dem Thema dieser Abhandlung lieferte, abgeschlossen werden. Nichtsdestoweniger erschien es wünschenswert, die obigen Daten zu veröffentlichen, und zwar im Hinblick auf die in der Gegenwart erfolgte Neubelebung des Bergbaus dieser Gegend, wobei die verschiedenen unbekannten archivalischen Daten vielleicht gute Dienste leisten können. Nachdem es sich jedoch bei der Durchsicht der schriftlichen Quellen heraus-

gestellt hatte, dass nebst dem in der Literatur ausgiebig behandelten Bergbau zwischen Parád und Recsk [24] dort auch Hüttenwesen betrieben wurde, erschien es eine anziehende Aufgabe, die Geschichte dieses Hüttenwesens aufzuarbeiten. Obwohl dieses im Vergleich mit neuzeitlichen metallurgischen Anlagen nur höchst bescheiden anmutet, so wies es doch in seiner Entwicklung nicht uninteressante Einzelheiten auf, worüber nun im nachstehenden berichtet werden soll.

Da jedoch auf den Bergbau in der Gegend von Parád und Recsk in erhöhtem Masse zutrifft, was bereits oben diesbezüglich gesagt wurde, dass nämlich aus der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts reichliche, aus der ersten Hälfte hingegen fast keine gedruckten Angaben vorliegen, soll zunächst die einzige vorgefundene schriftliche Angabe [25] aus dem Beginn des XIX. Jahrhunderts über diesen Bergbau hier kurz wiedergegeben werden. Nach dieser Quelle hat im Jahre 1806 Anton *Totovits*, Besitzer des Paráder Alaunwerkes angezeigt, dass er im Paráder »Johann Baptist« Alaunberg Silbererze entdeckt habe. Die berggerichtliche Entscheidung lautete : »Nachdem in dem ganzen Fejrkoer Gebirge kein anderen Gruben existieret..... so wird die Belehnung ohne Anstand gegeben«. Zwei Monate später berichtet derselbe *Totovits*, dass er »durch fortgesetzten Bau in Fehérkőer Gebirge weiter entblössten Gang« aufgeschlossen hat und bittet, ihn nach Vorschrift der Berggesetze als Lehensträger auf Silber, Kupfer und andere, allenfalls einbrechende Metalle mit einem Quadrat-Mass zu belehnen. Über den Beschluss des Berggerichts und über die weitere Entwicklung dieser Anmeldung war nichts aufzufinden, daraus ist wohl zu schliessen, dass diese Angelegenheit eingeschlafen ist.

Zu jener Zeit wurde übrigens die Aufsicht über das bei Parád bestandene Alaunbergwerk ebenfalls durch das Berggericht ausgeübt, worüber aus den beiden ersten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts mehrere Akten vorliegen.

Inwiefern nun in Kenntnis obiger Angaben die Behauptung zulässig ist, wonach im Mátragebirge in der Umgebung von Recsk schon vor Jahrhunderten Bergbau betrieben wurde, mag dahingestellt bleiben [26].

Das erste das Problem einer neu *zu errichtenden Hütte* behandelnde Schriftstück rührt aus dem Jahre 1853 her: [27] Es enthält das Protokoll des am 17. Juni 1853 in Bad Parád abgehaltenen Gewerketags der Pesth-Mátraer Gewerkschaft. An diesem nahmen angesehene Kaufleute und Financiers der damaligen Pester und Wiener Finanzwelt teil, wie z. B. Friedrich *Kochmeister*, Grosshändler in Pest, Joseph *Malvieux*, Bankier in Pest, Gustav *Drasche*, usw.

In diesem Zusammenhang sei hier darauf hingewiesen, dass im fraglichen Zeitpunkt in Ungarn die Industrie infolge der kolonialen Abhängigkeit Ungarns und des sich daraus ergebenden industriellen Übergewichts der österreichischen Hälfte der ehemaligen Donaumonarchie in ihrer Entwicklung noch zurückgeblieben war und daher die Gründung von neuen Unternehmungen dem Zeitgeist und der damaligen Wirtschaftsstruktur entsprechend allein den kapitalkräftigen Kreisen überlassen werden musste. Im Bergbau und Hüttenwesen war der Staat nur in beschränktem Umfange beteiligt, obwohl diese Gewerbezweige stets mit Vorliebe als »ärarisch« bezeichnet wurden ; die bestehenden Gewerkschaften waren daher auf das private Kapital angewiesen. Die beispielsweise angeführten Namen deuten darauf hin, dass die Vertreter dieses Kapitals bis dahin mit dem Bergbau keine Verbindungen hatten und dass ihre Beteiligung lediglich als eine Erscheinung des frühen Kapitalismus zu bewerten ist.

Bei dieser Gelegenheit tauchte das erstemal der Vorschlag »zur Erbauung einer Schmölzhütte« auf, welche als Eigentum der Pest-Mátraer-Gewerkschaft geplant wurde, die jedoch nach dem Verschmelzen ihrer eigenen Erze »eine Schmölztariff auch für die anderen Gewerkschaften auszuarbeiten hat«. Die Anwesenden gingen auf das Projekt ein, doch wurde gleich festgestellt, dass die Ausführung nur mit Aufnahme eines Darlehens möglich sein würde. Auf alle Fälle wurde der gewerkschaftliche Direktor, Adolf *Hrobony* [28], beauftragt, »eine Concession für den Hüttenbau auszuwirken, für die Hütte selbst eine Localität, bei welcher auch Wasserkraft disponibel wäre, auszusuchen und den Bau nach Empfang der ersten Rate in Angriff zu nehmen«. Zur Abschliessung des Darlehenskontrakts wurde eine Kommission bevollmächtigt.

Es sei schon hier vorweg bemerkt, dass die im Laufe der Zeit in der Mátra tätig gewesenen Bergbauunternehmungen fast ständig mit Kapitalmangel zu kämpfen hatten. Daran war in erster Linie die Tatsache schuld, dass in jener Gegend im allgemeinen nur arme Erze vorkommen. Wohl fand man von Zeit zu Zeit — insbesondere in den Gruben von Parád-Recsk — reiche Erze, hie und da auch in Gestalt von Butzen, die dann eine vorübergehende Erleichterung mit sich brachten. Für den defizitären Geschäftsgang waren auch in hohem Masse die ungeeigneten Aufbereitungsmethoden verantwortlich, bei welchen der leicht spaltbare und spröde Enargit durch die mechanische Aufbereitung zertrümmert wurde, wobei die kleinen Enargitschuppen auf der Oberfläche des Wassers wegschwammen und auf diese Weise in die Wildflut gelangten. Erst rund 70 Jahre später gelang es durch die Anwendung der für diese Erze einzig geeigneten Methode der Flotation, hier eine Abhilfe zu schaffen [29]. Hierbei bestätigte sich auch die alte Erfahrung, dass ein ohnehin mit Schwierigkeiten kämpfendes Bergwerk fast unvermeidlich eine Verlustwirtschaft werden muss, falls es gezwungen ist, seine Produkte an eine fremde Hütte zu verkaufen.

Hingegen bedarf es wohl keiner weiteren Erklärung, dass unter solchen schwierigen Verhältnissen, die einerseits durch die Natur des Erzes und andererseits durch den Mangel an geeigneten technischen Methoden bedingt waren, die Gewerkschaft nur schwer in die Lage kommen konnte, wirtschaftlich zu erstarken. Dies ist auch der Grund für den sozusagen chronischen, und ausserdem noch durch die koloniale Abhängigkeit des Landes gesteigerten Kapitalmangel, was wieder dazu führte, dass die Gewerkschaft in ihrer schwierigen Lage gezwungen war, zur Weiterführung ihrer Betriebe Anleihen aufzunehmen.

Die Gewerkschaft hatte nun am 7. Juli 1853 beim Berggericht zu Szomolnok ihr einschlägiges Gesuch unter Bezugnahme auf den Beschluss des Gewerketags eingereicht [30] und dasselbe hauptsächlich mit den hohen Verfrachtungskosten begründet, »indem nämlich bei den geringen Gehalte der Erze — 2-3 Lot Silber, 5-6 Pfd. Kupfer — nach einer durchschnittlichen Berech-

nung unserer Lieferungen an die k. k. Einlösungshütten zu Altwasser und Altgebirg [31], 100 Pfd. trockenen Gewichtes Erz oder Schlich bloss vier floren an freier Gebühr abwarfen, während die Gewerkschaft am Fuhrlohn allein für den nassen Zentner Erz 2 fl und 2 fl 12 Kr. nebst einer bedeutenden Begleitungsregie zahlen musste ; es ist ersichtlich, dass dieselbe unter diesen Verhältnissen, trotz ihren namhaften Opfern, und trotz der begründeten Hoffnung auf ergiebige Erzmitteln, sich unmöglich erhalten könnte und nur ein Hüttenetablissement im Stande sei, sowohl den bestehenden Gewerkschaften aufzuhelfen, als auch ein mächtiger Hebel zu werden, für die weitere Erforschung des längst der Mátra ausgedehnten Dioritgebirges . . . wolle der Gewerkschaft eine Concession zur Erbauung einer Schmölzhütte auf concentrierte Leche und auf Weichblei der Bleiglanz führenden Geschick gnädigst zu erteilen«. (Es sei in diesem Zusammenhang bemerkt, dass in Ungarn ab 1629, laut einem damals verlautbarten königlichen Erlasse, alle Grubenbesitzer, die keine eigene Hütte betrieben, ihre Bergbauprodukte in den ärarischen Hütten einlösen mussten.) [32]

Nach einer Ende Oktober 1853 abgehaltenen Augenscheinseinnahme wurde das Projekt durch den Beisitzer des Berggerichts A. *Stöckl* in seinem Referat befürwortet, mit der Stellungnahme, die angesuchte Konzession »hohen Orts erwirken zu wollen« und tatsächlich hat er das Gesuch ohne Verzug an das k. k. Finanzministerium nach Wien weitergeleitet [33].

Nachträglich wurden im Oktober 1853 von *Hrobony* zwei Zeichnungen, und zwar ein Situationsplan und ein Bauplan über die zu erbauende Schmelzhütte, beim Berggericht eingereicht. Der erstere ist wenig interessant, es genügt zu bemerken, dass »von der Hütte gegen Ost am Tarna-Bache circa 3/8 Meilen das Dorf Recsk liegt«. Nachfolgend werden in der Eingabe — wie weiter unten ersichtlich ist — recht unüberlegt die in der Nähe eben aufgeschlossenen Kohlenvorkommen erwähnt : »Unser Schmölzhüttenunternehmen ist auf den Verbrauch der Mineralkohle basiert und hat den Zweck, sowohl dem Braunkohlenbergbau unserer Gegend aufzuhelfen, als auch durch die Wohlfeilheit und vorzügliche Güte dieses Brennstoffes, die Schmelzkösten unserer armen Erze möglichst zu verringern. Das Heveser und das uns nahe angrenzende Borsoder und Neograder Comitat ist reich an Kohlenflötzen der mittleren und oberen Tertiärformation. Die bisher eröffneten und im Abbau stehenden Gruben zu Várkony, Ózd, Nádaska sind an 8 Stunden, Zagyva 6 Stunden, Novák und Tiribes 4 Stunden, Bakta 3 Stunden von der Hüttenlocalität entfernt«.

Die den Bauplan betreffende Zeichnung, welche das projektierte Gebäude im Grundriss und im Querschnitt darstellt, ist hier nach dem Original in *Abb. 1.* zu sehen. Leider sind gerade die heute interessanten technischen Einzelheiten über die metallurgischen Einrichtungen auf ihr recht dürftig ausgefallen, so dass man auf Vergleiche angewiesen ist. Aus der Zeichnung kann jedenfalls entnommen werden, dass ein Flammofen mit Planrostfeuerung und halbovalem Herdraum, wie solche im damaligen Schrifttum vielfach, z. B. von *Kerl*, beschrie-

ben und abgebildet sind [34], und ein Röstofen projektiert wurde, wobei dieser mit dem Flammofen derart zusammengebaut werden sollte, dass er mit den in die Esse abziehenden Rauchgasen hätte beheizt werden können.

Das Wiener Finanzministerium hat nun in seinem Beschlusse [35] u. a. folgendes eröffnet: ..... »unter dem Vorbehalte, dass eine gegen auch von Seite etwa bestehender, benachbarten Hüttengewerken, eine begründete Ein-

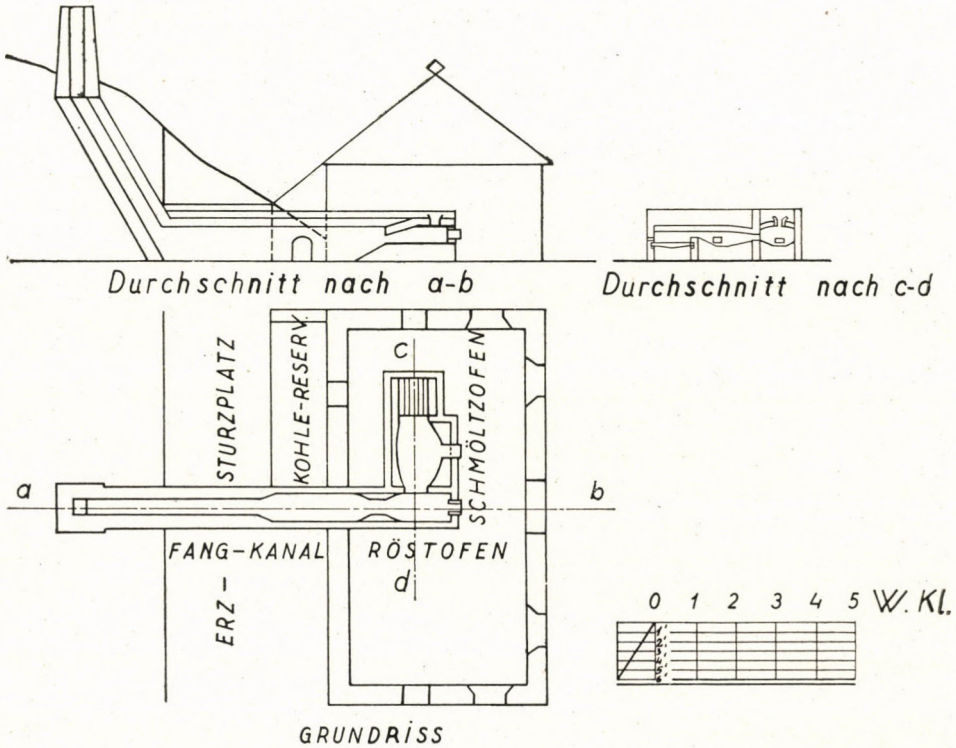


Abb. 1.

wendung nicht vorkomme, worüber das k. k. Distr.-Berggericht hätte berichten sollen, die erbetene Concession für die Pestmátraer Gewerkschaft, zur Erbauung und zum Betriebe eines Schmelzwerkes mit zwei Flammöfen, zur Verschmelzung silberhältiger Kupfer- und Blei-Erze, jedoch nur mittelst Benützung der Mineral-Brennstoffen (Stein- oder Braunkohle) auf Paráder Terrain, zu ertheilen und das k. k. Distr.-Berggericht unter Rückschluss der Berichtsbeilagen, anzuweisen, dass dieselbe bei dem Betriebe der konzedierten Flammöfen sich ausschliesslich und bei Verlust der Concession nur des mineralischen Brennstoffes zur Feuerung bedienen wolle und diesen Revers bei dem zuständigen k. k. Berggerichte auf diese in das Bergbuch aufzunehmende Concession gehörig vormerken zu lassen.«

Diese in vorzüglichem Amtsstil zum Ausdruck gebrachte Stellungnahme dürfte nicht allein auf die Absicht zurückzuführen sein, den damals in Ungarn sich erst entwickelnden Kohlenbergbau zu unterstützen, sondern wohl auch auf den allgemeinen und vielfach bewiesenen Gesichtspunkt der Wiener Regierung, die Industrialisierung Ungarns nach Möglichkeit hintanzuhalten [36]. Wie dem auch sei, hatte die Gewerkschaft mit ihrem Einfall bezüglich der Kohlenfeuerung Geister heraufbeschworen, die sie dann nur mit Mühe los werden sollte. Sie bat zunächst [37] um die Abänderung der Bedingungen der Konzession mit der Begründung, dass ». . . diese Schmelzmethode viel zu neu und wenigstens ist es nicht bekannt, dass ein dem unseren ähnliches Erzvorkommen, ein feinkörniges, mechanisch unscheidbares Gemenge von Fahlerz, Bleiglanz, Kupferkies, Blende und Erdarten irgendwo in Flammöfen, mit glücklichem Erfolge geschmolzen worden wäre, vielmehr scheint das Misslingen des Flammofen-Schmelzens der bei weitem reineren Kupferkiese, bei der oberungarischen Waldbürgerschaft von einem ähnlichen Unternehmen abzuschrecken, andererseits ist das Gelingen einer wohlfeilen Concentration der Metalle, und die hiermit in Verbindung stehende Erze . . . ein wesentliches Bedingnis, ja beinahe eine Condition sine qua non, nicht nur allein für die Pesth-Mátraer Gewerkschaft, welche bis jetzt an die 40 000 fl dem Bergbau geopfert hat, sondern überhaupt für jeden Bergbau in der Mátragebirgstätte. Da die Maximilianische Bergordnung [38] (nahmentlich das Art. 41.) nicht die Qualität des Brennstoffes vorschreibt, weil ferner die Paráder Umgegend reich an üppigen und wegen Mangel an Holzabnehmern grössten Theils überständigen Waldungen von allfälligen Holz- und Holzkohlenbedarf für lange Zeit zu decken, im Stande sein wird.«

In dieser Eingabe ersuchte noch die Gewerkschaft, die zu erteilende Konzession auf die Erzeugung von Reichblei, Kupferlech und Schwarzkupfer auszudehnen, worauf seitens des Finanzministeriums bedeutet wurde, dass es »ohnehin im Sinne des früheren Erlasses liege, die Schmelzmanipulation auf diese drei Produkte auszudehnen. Was jedoch die Bewilligung des Feuerungs-Materials betrifft, hat das k. k. Berggericht vorerst nachzuweisen, welche andere berechtigte Montan-Hüttenwerke sich im Bereiche der für die Pest-Mátraer Gewerkschaft in Anspruch genommenen Waldreviere befinden und im Falle des Bestehens solcher Werke, deren Äusserungen über dieses Gesuch einzuholen und beizubringen, im Weiteren aber zu erheben, welche Rechtsverhältnisse in Beziehung auf obenerwähnte Waldungen bestehen, und in welcher Weise sich die bittstellende Gewerkschaft den Holzbezug daraus entweder rechtlich bereits gesichert habe oder zu sichern beabsichtige, worüber gutächtlicher Bericht zu erstatten ist.«

Es hat sich nachher herausgestellt, dass »die nächsten mit Holz arbeitenden Eisenwerke zu Szilvás und Tapolcsán an 5 Meilen von dort entfernt, auf die sehr ausgedehnten Waldungen des Borsoder Comitats angewiesen liegen«. Auch

die politische Behörde erster Instanz, nämlich der k. k. Bezirks-Stuhlrichter in Pétervásár hat schriftlich bestätigt, dass sich keinerlei Erzschmelzhütte, weder im Bau noch im Betriebe, ausgenommen die der Pesth-Mátraer Gewerkschaft, in dem ihm unterstehenden Amtsbezirke befindet. Es wurde ferner festgestellt, dass die Gewerkschaft mit den im Eigentum der Familie des Grafen Georg Károlyi und des Erlauer Erzbistums befindlichen Waldungen einen Abschluss getätigt hatte. Und zum Schluss meldete *Hrobony*, dass »nicht nur die Hütte fertig harret, sondern auch Braunkohlen-Vorräten bei ihr einlangten«.

Aus obigen Darstellungen geht klar hervor, dass das Wiener Finanzministerium mit seiner kleinlichen Krittelei keinen anderen Zweck verfolgte, als die Erledigung in die Länge zu ziehen, doch hat es sich schliesslich dennoch zur Erteilung der Konzession entschlossen [39]. Laut Genehmigung des Berggerichts »hat dieses Schmelzinstitut den Schutznamen, »*Hoffnungshütte*« zu führen«.

Nun beginnt eine Zeitperiode über deren Ereignisse man nur mangelhaft unterrichtet ist. Vielleicht hängt diese Lücke, bzw. das Fehlen von Schriftstücken ebenfalls mit der Umwandlung und Umorganisation der für das Komitat Heves zuständigen Bergbehörden zusammen, worauf bereits oben hingewiesen wurde. Infolgedessen ist man bezüglich dieses Zeitraumes fast gänzlich auf gedruckte Quellen angewiesen, von welchen jedoch nur eine Veröffentlichung aus dem Jahre 1857 geeignet erscheint, in den nachstehenden Betrachtungen berücksichtigt zu werden [40].

Vor der Behandlung dieses Aufsatzes *Vass*' sei vorweggenommen, dass viele von den in Frage kommenden gedruckten Berichten nicht gänzlich unanfechtbar erscheinen. Es wurde bereits oben darauf hingewiesen, dass die Bergbauunternehmungen in der Mátra sehr oft mit geldlichen Schwierigkeiten zu kämpfen hatten und man kann sich auch bei der Durchsicht des hier in Betracht gezogenen Berichtes *Vass*' nicht des Eindruckes erwehren, als ob es sich hier mehr um einen Hilferuf als um eine sachliche Beschreibung handelt. Es darf auch nicht unberücksichtigt bleiben, dass der Verfasser dieses Berichtes im Mátraer Bergbau materiell stark interessiert war und dass infolgedessen von ihm Unvoreingenommenheit kaum erwartet werden konnte. Trotzdem sollen einige seiner Angaben berücksichtigt und so der Versuch gemacht werden, die durch das Fehlen von diesbezüglichen Akten vorhandene Lücke wenigstens in hüttenmännischer Hinsicht auszufüllen, vor allem mit technischen Angaben, welche wohl kaum eine Beschönigung enthalten.

Aus den Schilderungen von *Vass* geht hervor, dass die Lechschmelzung mit Benützung von Braunkohle erst im Jahre 1855, und zwar mit ungünstigem Erfolg, aufgenommen wurde ; er beschwert sich über die Schwierigkeiten, die sich aus der »Strengflüssigkeit« der Fahlerze ergaben, was durchaus verständlich ist, wenn man den hohen Kieselsäuregehalt der Erze berücksichtigt. In diesem Aufsatz *Vass*', finden sich auch einige Angaben über die Metallgehalte, so z. B. aus einer Gruppe der Gruben 1-3 Lot Silber, 2-4 Pfund Kupfer, aus einer anderen Gruppe 2-5 Lot Silber mit 4-11 Pfd. Kupfer und schliesslich aus einer dritten Gruppe 15-27 Lot Silber und bis 35 Pfd. Kupfer pr. Centner. Obwohl die Bestimmungen in den k. k. Kammerprobiergaden zu Selmec und Szomolnok erfolgten, kann ihre Richtigkeit dennoch bezweifelt werden, da es nicht klargestellt ist, wie die Probenahmen erfolgten. Dem An-

schein nach hat man die Erzmuster — zumindest bei den zwei letzten Gruppen — aus reichen Erzen gezogen. (Im Gegensatz zur diesbezüglichen Meinung des Verfassers vorliegender Abhandlung sei hier angeführt, dass in einer 1868 gedruckten Veröffentlichung [41] auf Grund der Angaben des erzbischöflichen Berginspektors Joseph *Uxa* in Eger behauptet wurde, dass man fremde Erze zur Untersuchung einsandte und dass auch Manipulationen in betrügerischer Absicht vorkamen.) Nachdem berichtet wird, dass sich 1857 alle Anlagen in berghauptmannschaftlicher Fristung befanden und die Gewerkschaft ihre Einnahmen der Einlösung der auf Lager befindlichen derben Erze und der auf der Hoffnungshütte erliegenden Schliche in den k. k. Schmelzhütten zu Altwasser und Altgebirg verdankte, geht der Aufsatz auf sein wohl eigentliches Ziel über, wobei es heisst: »Entsprechende Geldkräfte ... könnte die Pesth-Mátraer Gewerkschaft bei ihrem grossen leider noch zu wenig untersuchten und während der letzten drei Jahre sogar unrichtig behandelten Bergkomplexe zu einer der gedeihlichsten Unternehmungen emporheben, um so leichter, als gute Braunkohle ebenso wie billiges Holz in der Nähe und in hinreichender Menge selbst für einen grossartigen Hüttenmanipulationsbetrieb auf lange Zeit zu Gebote stehen ...«

Wie weiter unten ersichtlich ist, ergaben sich auch in späteren Zeiten Situationen, in welchen um Geld geworben werden musste und in solchen Fällen wurde es niemals verabsäumt, rosige Aussichten auszumalen, die dann in der Regel auch ihr Ziel erreichten.

*

Nach dieser recht mangelhaften Auskunft über die Begebenheiten der in Frage stehenden Jahre soll auf die Ereignisse der auf 1860 folgenden Jahre übergegangen werden. Auch diese brachten keine Besserung mit sich, sondern ganz im Gegenteil steigerten sich in ihnen die Schwierigkeiten des Erzbergbaues und Hüttenwesens in der Mátra öfters zu ernsten Krisen.

Aus dem Jahre 1860 fand sich ein einziges Schriftstück [42], eigentlich von uninteressantem Inhalt, das mit dem vielsagenden Mangel sonstiger Akten es als wahrscheinlich erscheinen lässt, dass der Grubenbetrieb in diesem Jahre vollkommen fruchtlos blieb.

Die bis dahin voneinander unabhängigen, zum Teil miteinander auch im Wettbewerb stehenden Mátraer Gewerkschaften gelangten in jener trostlosen Lage allmählich zur Auffassung, dass durch ihre Vereinigung die Schwierigkeiten wesentlich verringert werden könnten. Der Zusammenschluss der in der Umgebung von Parád und Recsk tätigen kleinen Gewerkschaften wurde bereits auf einem am 17. Juni 1853 abgehaltenen, oben bereits erwähnten Gewerketag beschlossen, doch gibt die diesbezügliche, in Fussnote [27] angeführte Quelle keine Auskunft, welche Gewerkschaften bei der damaligen Fusion beteiligt

waren. Diesmal handelte es sich um den Zusammenschluss der folgenden drei Gewerkschaften: I. Gyöngyös-Oroszer Gewerkschaft, II. Gömör-Lahoczaer Gewerkschaft und III. Parád-Mátraer Gewerkschaft, welche den gesamten Erzbergbau in der Mátra umfassten. (Wie bisher ersichtlich, figurierte bis daher meistens die Pesth-Mátraer Gewerschaft, die wohl mit der hier genannten Parád-Mátraer Gewerkschaft identisch gewesen sein dürfte; vielleicht handelt es sich hier nur um einen Schreibfehler.) Wie einem Schriftstück [43] entnommen werden konnte, geht die Vorgeschichte der Bildung einer einzigen Gewerkschaft auf den 15. November 1858 zurück, doch entstand damals unter den Parteien ein Streit privatrechtlicher Natur, welcher dann anscheinend auf einem am 20. September 1860 in Gyöngyös abgehaltenen Gewerketag beigelegt wurde, da auf Grund einer nochmaligen Prüfung der Rechtslage die Berghauptmannschaft zu Buda der königl. ung. Statthalterei als obersten Bergbehörde vorschlug, nach Beseitigung gewisser formeller Mängel die Vereingung der drei Gewerkschaften unter der Firma »*Mátraer-Bergwerks-Union*"-gutzuheissen und zu genehmigen. Die Genehmigung erfolgte durch eine in Nr. 199 vom 30. August 1861 in der »Pest-Ofner Zeitung« veröffentlichte Kundmachung, in welcher sämtliche im Bergbuch eingetragenen Anteile als gelöscht erklärt wurden [44].

Aus dem Protokoll des am 20. September 1860 in Gyöngyös abgehaltenen Gewerketags der drei Gewerkschaften geht hervor, dass vor Erlangung bedeutender Geldmittel ein »schwunghafter Betrieb der Gruben nicht eingeführt werden kann« und daher zum nächsten Gewerketag in den Gruben nur die zu deren Aufrechterhaltung erforderlichen Arbeiten zu verrichten sind. Mit der einstweiligen Direktion der gesamten Vereins-Bergwerke wurde Wilhelm v. *Dobay* betraut [45]. In dem dem Protokoll beigelegten Programm vom 21. Oktober 1860, verfasst vom Gewerken Ludwig *Royko*, Advokaten in Aszód, wird erstmalig erwähnt, dass zur Verwertung der Geschicke ohne Verzug »*Extractions-Versuche*« eingeleitet werden sollen und dass eine Verhüttung nur für den Fall ihres Misslingens beabsichtigt ist. Hieraus kann gefolgert werden, dass die Beibehaltung der Schmelzmethoden zu diesem Zeitpunkt aufgegeben worden war; wie jedoch weiter unten ersichtlich, tauchten nicht viel später wieder solche Pläne auf, es wird sogar nochmals eine Schmelzhütte errichtet, um bald darauf gänzlich den verschiedenen nassmetallurgischen Verfahren zu weichen, welche sich dann bis zum Ende des Jahrhunderts behaupteten.

Laut einer Angabe des genannten Programms *Roykos* wurden seitens der Union Verhandlungen mit dem k. k. Hüttengegenhändler v. *Kiss* in Nagybánya, zwecks Anwendung seines Extraktionsverfahrens geführt. Dieser Hinweis ist heute nicht gut zu verstehen, da das *Kiss*sche Verfahren [46] allein nicht zur Laugerei der Paráder Erze in Betracht kommen konnte, da es nur den Niederschlag des Silbers aus den Laugen bezweckt.

Das in Rede stehende Programm *Roykos* weist auch auf die Relationen *v. Schmidts* hin [47], welche die Zukunft des Paráder Bergbaus recht optimistisch beurteilen, so z. B. ». . . wo ein Personal von 2—300 Mann angelangt und eine sehr bedeutende Metallerzeugung stattfinden könnte, arbeiten zur Zeit nur 12 Mann«. Freilich kommt auch *Schmidt* zur Schlussfolgerung, dass ein Kapital von 200 000 fl erforderlich wäre, »diesen Bergbau in sehr kurzer Zeit zu einer der gedeihlichsten Unternehmungen emporsteigen zu bringen«. *Schmidt* war in seinem Gutachten ein Befürworter des Zusammenschlusses der Gewerkschaften, vielleicht wurde sogar seitens der Wiener Regierung ein Druck in dieser Richtung auf die Gewerkschaften ausgeübt.

Aus einem dem oben behandelten Akt Zl. 893 aus 1861 beiliegendem gewerkschaftlichen Vertrage konnte noch entnommen werden, dass um diese Zeit, also um 1860/61, der Bergbau in Gyöngyös-Oroszi gänzlich brachgelegen sein dürfte, da »die verbrennbare Teile des Pochwerks, eines Beamten-Quartiers und zweier grossen Arbeiter-Wohnungen durch einen Feuerbrunst infolge Brandstiftung eingeäschert wurden« [48].

Die Betriebe der kaum ins Leben gerufenen »Mátraer-Bergwerks-Union« zu Parád und Recsk befanden sich damals in einer, wohl durch den noch immer bestehenden Kapitalmangel bedingten Fristung. Die nächsten Jahre brachten keine wesentliche Erleichterung, ganz im Gegenteil scheint das Leben der Gewerkschaft aus einem unaufhörlichen Stolpern bestanden zu haben. Aus dieser Zeit fehlen wieder fast gänzlich aktenmässige Unterlagen; erst vom Jahre 1862 an begannen die Berghauptmannschaften jährlich an das Handelsministerium nach Wien statistische Zusammenstellungen über die ihnen untergeordneten Bergwerke vorzulegen. Im nachstehenden sollen nun diese herangezogen werden, weil sie in Ermangelung sonstiger Anhalte die alleinigen Quellen sind und dabei recht interessante Auskünfte liefern [49].

Aus einem dieser Berichte war ersichtlich, dass »der Abgang jeder Erzeugung von Silber und Kupfer im Jahre 1861 dem Umstande zuzuschreiben ist, dass die Bergbaue im Mátra-Gebirge ausser Betrieb waren«.

Für das Verwaltungsjahr 1862 wurde an Kupfererzen eine Erzeugung von nur 156 Ztr. nachgewiesen, diese Menge bestand aus reichen Erzen, welche zu einem Versuchsschmelzen nach Szomolnok gesendet wurden, nachdem der Preis von 12 f je Ztr. Erz die hohen Verfrachtungskosten verschmerzen liess. Im selben Bericht war zu lesen, dass »diese Gewerkschaft zu den schönsten Hoffnungen berechtigt, da die Verwerthung der Kuxantheile mit erwünschtem Erfolge gelungen ist«. Wie man bald erfährt, hat sich dieser von amtlicher Seite zum Ausdruck gebrachte Optimismus ebenfalls als betrügerisch erwiesen.

Aus dem über das Jahr 1863 dem Ministerium vorgelegten Bericht geht hervor, dass die unter der Firma Mátraer Bergwerks-Union konstituierte Gewerkschaft »mit dem Bau der Hütte noch nicht fertig ist und die Zugu-

tebringung der Geschicke noch nicht begonnen hat«. Dieser Erklärung steht man im ersten Augenblick wieder einmal verständnislos gegenüber, da es unbegreiflich erscheint, aus welchem Grunde mit dem Bau einer Hütte angefangen werden musste, wo die erst vor etwa 9 Jahren errichtete »*Hoffnungshütte*« eigentlich doch noch bestehen musste. Die Erklärung hiefür ist, dass es sich nur um die Wiederherstellung der Baulichkeiten der früher errichteten Hütte handelte, die teilweise schon verfallen und restaurationsbedürftig waren. Diese Tatsache geht aus dem weiter unten in Fussnote [53] angeführten Akt und den beigefügten Erläuterungen hervor.

Nach der hier zitierten amtlichen Quelle betrug im Jahre 1863 die Produktion bereits 65451 Ztr. Erz gegenüber der Erzeugung von nur 156 Ztr. im Vorjahre, wobei es sich offenbar mehrheitlich um arme Erze gehandelt hat. Aus demselben Bericht der Berghauptmannschaft rühren einige weitere Einzelheiten her, die hier auszugsweise wiedergegeben werden sollen: »Die Erze auf der Nordseite der Mátra werden durch die eigenthümliche Neigung zur Efloreszenz [50] und Alaunbildung charakterisiert, durch welche die Concentration auf nassem Wege sehr erschwert wird, wogegen die Zugutebringung der Erze und die Ausbringung der Metalle am nassen Wege mehr angebracht erscheint. Die Mehrleistung hat deshalb eine Concentration der Pochgänge am trokkenen Wege durch Wind, und die Metall-Extraction mittels nasser Auflösung in Aussicht genommen [51] und die bisher gemachten Versuche berechtigen zu den besten Hoffnungen.« Wie man sieht, kehrt in dieser Meinung der Berghauptmannschaft das ewige Problem der Aufbereitung der Erze in Recsk wieder welches seit damals nie aufgehört hat, ein Sorgenkind des Betriebes zu bleiben

Im Bericht über das Jahr 1863 wird schliesslich noch angeführt, dass »die Veräusserung von 4000 Kuxantheile à 50 f nahezu vollendet und dadurch ein disponibler Fond von nahezu 200 000 f erlangt wurde, mit Hilfe dessen die Herstellung der nötigen Werksgebäude und Betriebseinrichtungen thatkräftig gefördert wird. Da es überdies gelungen ist, für die Werksleitung eine ausgezeichnete Persönlichkeit zu gewinnen [52], so berechtigt die Gewerkschaft zu den schönsten bergmännischen Hoffnungen«.

Als Werksdirektor hat *Péch* an einer Generalversammlung der Union [53] in einer für ihn wohl unliebsamen Rolle debütiert, da er sich wegen der Überschreitung der vorangeschlagenen Kosten verteidigen musste. Aus den diesbezüglichen Daten geht hervor, dass er zum Umbau der alten Hütte im Jahre 1864 den Betrag von 389 f, für die Instandsetzung der alten Laugerei und Mahlvorrichtungen 13198 f und für die Röstanlage 6972 f verausgabte. Nach der Erklärung, dass die Ausführung der Rekonstruktionsarbeiten auch durch den Geldmangel aufgehalten wurde, hat er gleich angezeigt, dass zur Ausrüstung der Laugerei und Mahlvorrichtung noch weitere 5000 f erforderlich sein werden. Hier wurden nur diejenigen Posten aufgezählt, welche mit der Verarbeitung

der Erze zusammenhängen, nicht jedoch die für den Bergbau und vor allem für die Aufbereitung verwendeten Beträge, welche zusammen anscheinend den obenerwähnten Fond von nahezu 200 000 f verschlungen hatten. Sonst hätte *Péch* nicht von einem Geldmangel reden können, der aber wohl tatsächlich bestehen musste, weil dieselbe Generalversammlung die Aufnahme einer Anleihe in Höhe von 50 000 f beschloss.

Über das Jahr 1864 wird in den statistischen Ausweisen [54] an das Handelsministerium nach Wien gemeldet, »die auffallende Verminderung in der Erzeugung der Kupfererze findet ihre Aufklärung darin, dass die Gewerkschaft, welche nun schon den ganzen verliehenen Massenkomplex im Mátraer Gebirge an sich gebracht hat, ihre ganze Kraft auf die Herstellung der Aufbereitungswerkstätten verwendet, und einstweilen den Abbau der Erze sistiert hatte. Da im nächsten Monate voraussichtlich die Aufbereitungswerkstätten in Betrieb gesetzt werden, so steht in jener Gegend der Beginn einer berginduströiellen Tätigkeit bevor, welche auf die Hebung des dortigen Wohlstandes und auf die Vermehrung des Nationalvermögens nicht unbedeutend einwirken dürfte.«

Aus den angeführten Zitaten der Berghauptmannschaft zu Buda geht auch hervor, dass sie seinerzeit die Zukunft des Erzbergbaues in der Mátra unverändert optimistisch beurteilte, was jedoch durch die weitere Entwicklung nicht einmal annähernd gerechtfertigt wurde.

Da aus dem Jahre 1866 kein einziger Akt und somit auch kein Ausweis über die Produktion des Jahres 1865 vorgefunden werden konnte und in den Berichten über die Jahre 1866 und 1867 [55] die statistischen Zusammenstellungen wohl erwähnt, aber nicht beigelegt waren und da ferner aus den Jahren 1869—1871 die Akten im Landesarchiv zu Budapest gänzlich fehlen, blieb nichts anderes übrig, als über die in Frage stehenden Jahre, also von ungefähr 1865 bis 1872, wieder einmal auf die gedruckten Quellen zurückzugreifen. Am ausgiebigsten werden die Ereignisse durch ein von Karl *Stoll* verfasstes und vermutlich als Handschrift gedrucktes und veröffentlichtes kleines Heft [56] behandelt.

Stoll weist in seinen Ausführungen zunächst auf ein Programm der Mátraer-Bergwerks-Union vom 24. November 1861 hin, welches mit dem Programm von L. *Royko*, das dem in Fussnote [45] erwähnten Akt beilag, identisch sein dürfte, obwohl das letztere um 13 Monate früher datiert ist. Das von *Stoll* erwähnte Programm bezieht sich nämlich ebenfalls auf die Gutachten *v. Schmidts* — vgl. Fussnote [47] — und darüber hinaus auf ein Gutachten von Joh. *Ferencsik*, Hüttendirektor der oberungarischen Waldbürgerschaft, der die Meinung vertrat, dass »die reicheren Geschicke ohne Schwierigkeiten an Ort und Stelle verschmolzen und die ärmeren durch Extraction zu Gute gebracht werden können«. Im Sinne dieser beiden Gutachten besprach das

Programm die Notwendigkeit des Pochwerkbaues und des Hüttenwerkes; es kann heute nicht mehr festgestellt werden, ob sich *Péch* bei dem von ihm empfohlenen Ausbau der Aufbereitungsanlagen auf seine eigene Ansicht stützte, oder ob und inwieweit er die Empfehlungen der hier in Betracht gezogenen Gutachten berücksichtigte, da die letzteren nicht vorlagen; aller Wahrscheinlichkeit nach sind diese überhaupt nicht mehr vorhanden. *Péch* scheint seine Stelle bei der Gewerkschaft nach seiner, laut einer lexikalischen Angabe 1863 erfolgten Heimkehr aus Dortmund, wo er im Kohlenbergbau etliche Jahre lang tätig war, angetreten und sich sofort dem Ausbau der Aufbereitungsanlagen gewidmet zu haben.

Wie lange *Péch* in Parád wirkte, kann heute nicht mit Bestimmtheit gesagt werden; laut einem Protokoll des Direktoriums vom 26. März 1865 war er in diesem Zeitpunkte noch bestimmt dort. Er dürfte etwa in der zweiten Hälfte 1865 durch Camillo *Kaufmann* [57] abgelöst worden sein. Die erste Feststellung *Kaufmanns* war, dass bis Ende August 1865 allein auf Baulichkeiten 237 000 fl verausgabt worden waren; die erstellten Einrichtungen wurden jedoch von ihm als unbrauchbar erklärt.

Am 29. September 1865 wurde das Mátraer Etablissement vom k. k. Ministerialrat *Rittinger* besichtigt, der auch Reform-Anordnungen traf, über welche aber nichts in Erfahrung gebracht werden konnte [58]; man hat beinahe den Eindruck, dass wegen der vielleicht einseitigen Begünstigung der Aufbereitung seitens der Gewerkschaft gegen *Péch* Stellung bezogen wurde. *Stoll* hat an der Tätigkeit *Péchs* — ohne ihn genannt zu haben — recht scharfe Kritik geübt, indem er z. B. schrieb: »Leider ist aber dem Aufschliessen ohne Beispiel gar keine und die ganze Aufmerksamkeit dem Pochwerksbau zugewendet worden, der Pochwerksbau ist die Quelle allen Übels; die Ruine des ganzen Werkes war die natürliche Folge.« Noch im Jahre 1880 wiederholen sich diese Vorwürfe, indem behauptet wird, dass für die Errichtung des Pochwerks »märchenhafte Beträge aufgeopfert wurden«. (Vgl. den in Fussnote [78] angeführten Akt Zl. 343/1880).

Man kann es nicht feststellen, ob beim Verhalten *Stolls* nicht vielleicht auch persönliche Gesichtspunkte mitgewirkt haben; sicher ist, dass *Péch* auch für die Erneuerung der Hüttenanlagen Sorge trug, wie man oben sehen konnte. Zu seiner Rechtfertigung diene noch, dass er «eine auf Salzsäure gegründete Extractions-Anstalt im kleinen Maasstabe eingerichtet» hat, also sich auch um die weitere Verarbeitung seiner Bergwerksprodukte kümmerte. Es ist kein Wunder, dass die Zeitgenossen seiner Tätigkeit in Parád kein Verständnis entgegenbrachten, heute muss man aber auf Grund der seither erfolgten riesigen Fortschritte der Aufbereitungskunde gerechterweise feststellen, dass die Wichtigkeit der Aufbereitung von ihm richtig empfunden wurde und dass das Übel hier anfing. Es war wirklich nicht seine Schuld, dass man damals über das

Verhalten der Mátraer Erze bei der damaligen Aufbereitung nicht richtig im Bilde war und — wie es oben bereits angeführt wurde — erst um 70 Jahre später mit der Einführung der Flotation der allein richtige Weg betreten werden konnte. Im übrigen scheint auch *Stoll* in seinem ablehnenden Verhalten nicht allzu sicher gewesen zu sein, da er an einer anderen Stelle seiner Veröffent-

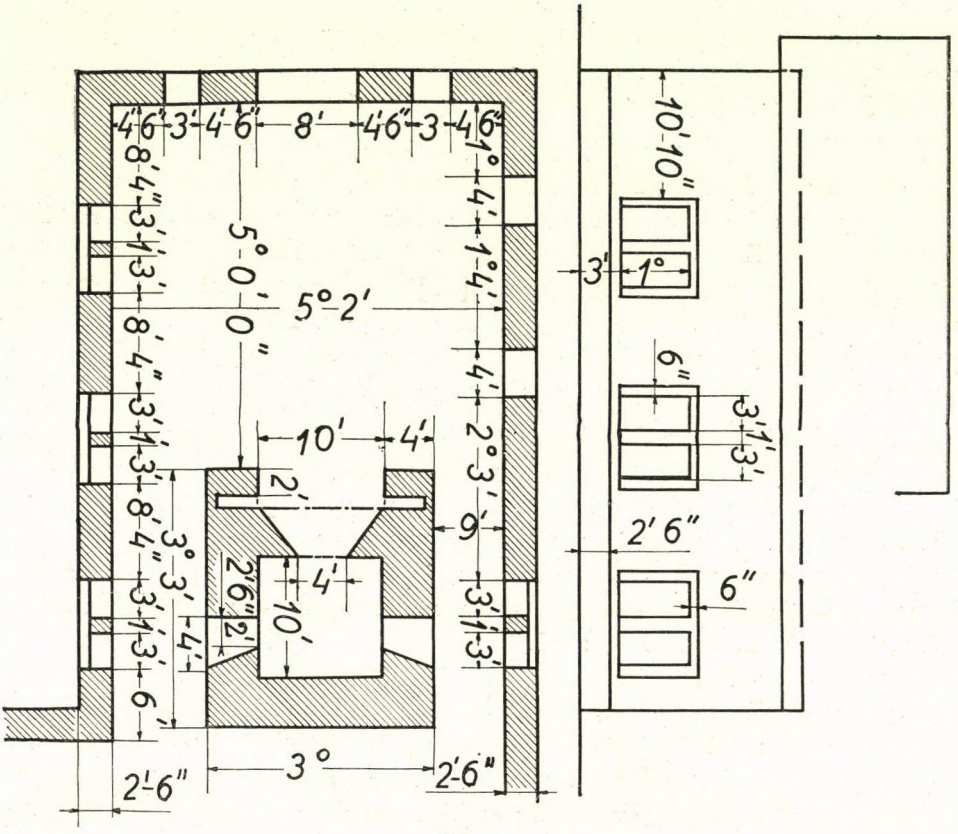


Abb. 2a.

lichungen (S. 24) bemerkte, dass «die Concentration der Kupferkiesen, Kupferschwärze, Fahlerzen und ihrer Zersetzungsproducte auf nassem Wege mit Vortheil nicht, ja nur mit den grössten Nachtheilen möglich ist».

An Berufungen von Experten durch die Gewerkschaft hat es auch weiterhin nicht gefehlt. So erfährt man von *Stoll*, dass Baron Anton *Leithner* auch einen «General-Bericht» abgab und in einem Berichte *Kaufmanns* aus dem Jahre 1866 ist «vom Extractions-Systeme des gleich nach dem Dienstantritt gestorbenen Hüttenmann *Janikovits*» die Rede [59], der hiernach sogar in Parád angestellt gewesen sein dürfte.

In seinen sonstigen Berichten aus 1866 gab *Kaufmann* darüber Rechen-

schaft, dass die Kupferverluste bei den Extrationsversuchen vermindert wurden, doch brachte sowohl der Pochwerksbetrieb, wie die Extraction mittels Salzsäure [60] in vier Monaten einen Verlust von 5700 fl und deshalb wurde der Bau einer Schmelzhütte beschlossen. Es lag eine Zeichnung mit der Unterschrift *Kaufmanns* über einen Schmelzofen im Grundriss und vermutlich in

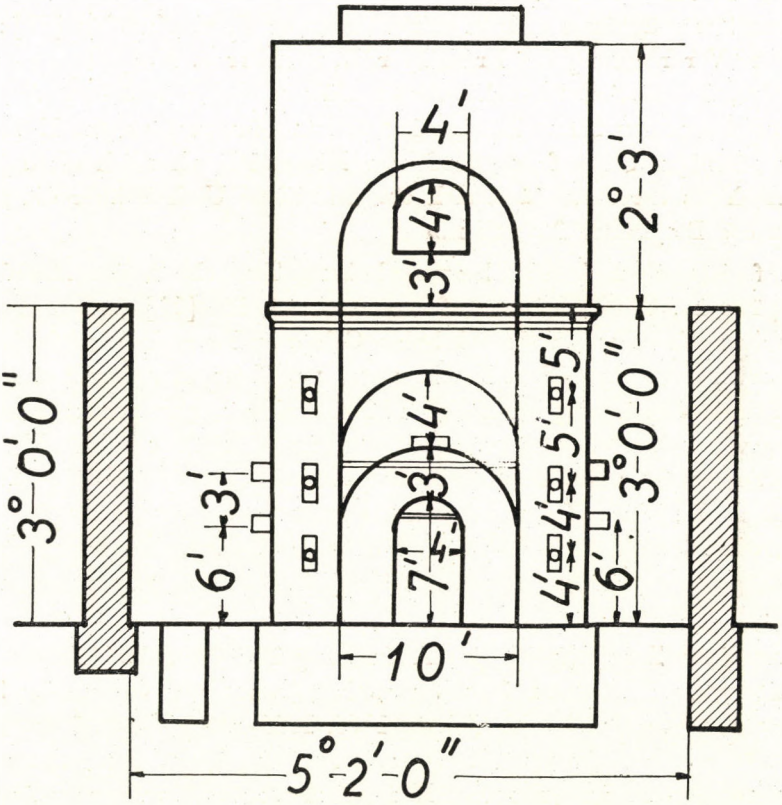


Abb. 2b.

Seitenansicht des Schmelzraumes nebst Vorderansicht des Ofens vor, welche hier in *Abb. 2a* und *2b* wiedergegeben wird [61]. Es ist anzunehmen, dass es sich hier um ein Projekt handelt, welches auf Grund des soeben erwähnten Beschlusses auch zur Ausführung gelangte. Die Zeichnung trägt leider keine Beschriftungen und bei ihrer Beurteilung ist man daher wieder nur auf Vergleiche angewiesen. So findet man aus jener Zeit, z. B. in *Kerls* Handbuch [62], Schachtöfen mit Gebläse beschrieben und abgebildet, die dem Paráder Ofen ähnlich sind. Die Errichtung der Hütte in Recsk «mit den Schmelzöfen» (?) und Gebläse hat 9417 fl gekostet.

Hieraus ist ersichtlich, dass diese Hütte eigentlich schon die dritte war, die in Parád—Recsk innerhalb von 12 Jahren errichtet wurde. Die erste wurde im Jahre 1854 gebaut, — vgl. Abb. 1 — die zweite war der Neubau der alten Hütte im Jahre 1863 und nun wurde 1866 diese dritte erbaut.

Nach *Stoll* «ging aber die Schmelzung nur in so lange anstandslos vor sich, so lange hinreichende Kiesschliche zur Verfügung waren und so war man genötigt, die Extraction der dürren Zeuge mit Kochsalz zu versuchen». In ähnlichem Sinne äusserte sich in seinem Aufsatz F. v. *Andrian* [63]: «Wass die weitere Verarbeitung des Erzes betrifft, ist Herr v. *Kaufmann* eben damit beschäftigt, Extractionsversuche durchzuführen, da der Schmelzbetrieb im Hochofen wegen der Strengflüssigkeit der Erze, ihrem geringen Kupfergehalt und der niedrigen Schwefelungsstufe der Kiese nicht thunlich erscheint. Erst nach Abschluss derselben lässt sich ein definitives Urtheil über die mögliche Zukunft des Bergbaues feststellen.»

Auf diese oben bereits hervorgehobene Tatsache weist *Andrian* zwei Jahre später in einem zweiten Aufsatze nochmals hin [64], indem er schrieb: «Dazu tritt noch ein ungewöhnlich hoher Gehalt an Einfach-Schwefeleisen [65], welcher nach den gründlichen Erfahrungen von Herrn *Kaufmann* eine Schwierigkeit für die Verhüttung der Erze im Hochofen bietet, und einen bedeutenden Zuschlag von Schwefelkies erforderlich macht.» Nach Ansicht des Herrn Prof. *Széki* in Sopron ist es indessen nicht ausgeschlossen, dass sich diese Auslegung vielleicht doch nicht auf den Schmelz-, sondern vielmehr auf den Röstbetrieb bezieht, weil nämlich die Magnetkiese früher im allgemeinen nur mittels Brennmaterials geröstet werden konnten, während dies bei den pyritischen Erzen nicht der Fall war.

Aus dieser Zeit lag noch eine Aufstellung über die Schmelzkosten bei der Verarbeitung der Erze und bei der Verarbeitung von armer und reicher Zementschliche vor, und zwar aus den Jahren 1865, 1866 und 1867. Auf ihre ausführliche Wiedergabe soll hier verzichtet werden, um eine Überladung zu vermeiden, es sollen nur die in ihr genannten Manipulationen erwähnt werden, nämlich: das Rohschmelzen der Erze und des Garkupfers, das Kupferschmelzen und das Garmachen.

Es soll nun wieder zu den Ausführungen *Stolls* zurückgekehrt werden: es geht aus ihnen im weiteren hervor, dass die Einrichtung der Extraktion statt im Februar erst im August 1866 zustande kam, «sonach ist die Union fast das ganze Jahr hindurch ihrer Einnahms-Quelle beraubt gewesen und ist in eine grenzenlose Zerfahrenheit eingetreten, die nicht mehr auszugleichen war. Die Schuldenlast hat die Höhe von rund 48 000 fl erreicht; *Kaufmann* glaubte nun die Aufgabe gelöst zu haben und kündigte den Dienst».

Dieser Schritt erfolgte 1868, da in der chronologischen Reihe *Stolls* in diesem Jahre schon Andr. *Palmer* als Betriebsleiter figuriert [66]. Er bezeich-

nete das rekonstruierte Pochwerk für nicht betriebsfähig, «da die in den Geschicken sehr fein eingesprengt oder in chemische Auflösung vorkommenden Metalle auf nassem Wege nur mit grossen Verlusten concentrieren lassen». Zu dieser Zeit war der Abgang von Kupfer 25,9%, also enorm hoch, was auch auf die unvollständige Röstung zurückgeführt wurde. Im November 1869 gab ein Aktionär [67] namens Dr. Paul *Erdey* eine Beschreibung der Werke der Gewerkschaft heraus, von der jedoch leider keine Spur aufzufinden war.

In dieser Periode — wie vielfach auch früher — wurden die reicheren Erze bei den ärarischen Hütten eingelöst, die ärmeren extrahiert. *Die Extractionshütte* wurde 1870 abgeändert und eine Erzquetsche eingerichtet; jährlich konnten 80—90 000 Ztr. arme Erze verarbeitet werden, »indem dieselben in Schachtöfen [68] vorgeröstet, dadurch mürber gemacht und im Quanto auf die Hälfte reduziert, der Kupfergehalt aber auf das Doppelte erhöht« wurden. Die vorgerösteten Erze wurden gequetscht und der chlorierenden Röstung unterzogen, wodurch das Aufschliessen der Antimon-Metalle erfolgte. Hiezu sei bemerkt, dass hierunter in erster Linie wohl Arsen gemeint war, da Antimon in diesen Erzen kaum nachgewiesen werden kann.

In *Stolls* Ausführungen folgen dann in die Einzelheiten gehende Schätzungen über das Erzvermögen, über die Realitäten nach dem Stande 1868/69, von welchen hier nur die hüttenmännischen Einrichtungen von Interesse sind; von diesen waren vorhanden: das Extraktionsgebäude mit Zylindergebläse, eine 20 PS-Dampfmaschine, eine Rösthütte mit 2 Röstöfen, eine Schmelzhütte mit Hoch- und Krumofen [69] und Spleissherd (Kupfer-Raffinierofen).

Stolls düstere Voraussagen sollten sich rasch bewahrheiten: Als nämlich nach seiner Schilderung im April 1872 die Liquidation der Gewerkschaft ausgesprochen und eine Liquidierungs-Kommission unter dem Vorsitze *Stolls* mit Berghauptmann W. *Bruimann* und Prof. Dr. *Nendtwich* die Grube besichtigte, »waren von den re- und rereconstruiertem Pochwerke und Kesselhause nur Spuren vorhanden, wo solche gestanden, vom Copulo-Ofen (lies: Kuppelofen) und Treibherd aber waren nicht einmal Spuren da«. Die Erklärung hiefür konnte in einem Schriftstück aus dem Jahre 1880, Zl. 343, gefunden werden, in welchen über den im Jahre 1871 erfolgten Verkauf der Bestandteile des Pochwerks und des Gebläses Erwähnung getan wurde.

Die durch die vorerwähnte Kommission getroffenen Verfügungen zur Wiederaufnahme der Extraktion führten zum Ergebnis, dass diese in der Tat im Sommer 1872 in Betrieb gesetzt werden konnte, im Winter aber mangels Geldes zum Einkauf von Kohle wieder eingestellt wurde. Man hat auch Versuche durchgeführt, die armen Erze in offenen Räumen vorzurösten und eine grössere Menge aufzubringen, als in dem einen Schachtofen [vgl. oben] möglich war. Da das Resultat befriedigte, wurden zwei halboffene, am unteren Teil mit Kanälen für die Luftzirkulation versehene Röstkammern (sog. Röst-Stadel)

gebaut, in welchen auf einmal 12 000 Ztr. arme Erze mit Holz gut vorgeröstet werden konnten. Im weiteren Verlaufe des Betriebes ergab sich das Resultat, dass in den zwei Röstkammern in 60 Tagen 25 000 Ztr. durchgebrannt werden konnten.Bei dieser Arbeitsmethode wurde viel Holz erspart, was umso wünschenswerter war, als die Holzpreise inzwischen um 100% gestiegen waren. Das Herausbringen von 1 Pfd. Kupfer erforderte 2 Pfd. Kochsalz und 2 Pfd. Eisen ; 1 Pfd. Salz kostete loco Werk 2 kr. und es gelang, seinen Verbrauch bedeutend zu vermindern ; auch der Eisenverbrauch bedeutete eine sehr drückende Last, deren Verminderung aber von der Verbesserung der Extraktionsanstalt abhängig war.

1872 trifft man wieder auf den Namen eines neuen Werksdirektors, und zwar auf den Albert *Ruttners*, über den man jedoch nichts Weiteres weiss. Dieser hat ebenfalls eine umfangreiche Schätzung des Erzvermögens durchgeführt und eine Rentabilitätsrechnung aufgestellt, die — wie es in den Geschehnissen des Mátraer Bergbaues beinahe schon Regel war — offenbar wieder zu optimistisch ausfiel. Diese Annahme wird auch durch den Umstand unterstützt, dass in ihr derartige Vorteile berücksichtigt wurden, welche erst mit einer »ganz nach den Errungenschaften der Gegenwart einzurichtenden Extraction« hätten erzielt werden können.

Es wurde bei den Darstellungen *Stolls* etwas länger verweilt, was aus dem Grunde geschah, weil in Ermangelung von Schriftstücken aus den betreffenden Jahren die Berücksichtigung dieser seiner Mitteilungen unerlässlich erschien ; jedenfalls wurde versucht, seine Betrachtungen — wie auch alle in dieser Abhandlung verarbeiteten Angaben — einer sachlichen Kritik zu unterziehen. In diesem Zusammenhang sei noch angeführt, dass die Schlussworte *Stolls* ebenfalls in einen Hilferuf um Beistellung des erforderlichen Kapitals ausklingen, »um die grossartigen und äusserst interessanten Vorkommen mit gutem Erfolge in riesigen Dimensionen betreiben zu können«.

Aus dem Jahre 1872 gibt es noch eine Quelle, und zwar einen Aufsatz von Franz *Márkus* [70], kön. ung. Hüttenverwalter, der die Anlagen zu Recsk im Auftrage der Regierung besichtigte und beschrieb.

Er weist zunächst auf die oben wiederholt hervorgehobene Tatsache hin, dass die hüttenmännische Verarbeitung dieser Erze wegen ihres Kieselsäuregehalts in der Höhe von 40—76% nicht leicht ist, da wohlfeiler Kalkstein in der Nähe nicht erhältlich ist. Die reicheren Erze wurden daher eingelöst, was durch den Ausbau der Eisenbahn Kisterenye—Zólyom wesentlich erleichtert wurde. Die hier folgenden Angaben *Márkus*, widersprechen in einem Punkte anscheinend einer, oben an zwei Stellen angeführten Angabe *Stolls*, nach welcher die armen Erze in Schachtöfen vorgeröstet wurden. Dieser scheinbare Widerspruch lässt sich jedoch einfach erklären : *Márkus* berichtet nämlich, dass die Vorröstung in Kilns erfolgte, welche sich bekanntlich in ihren Abmessungen

hauptsächlich durch ihre Höhe auszeichnen und daher irrtümlicherweise von *Stoll* als Schachtöfen bezeichnet wurden. Infolge der Röstung wurde der Kupfergehalt der Erze von 1,5% auf 3% angereichert, wobei 47% des tauben Quarzes nebst 3% Röstverlust ausgeschieden wurden. Das Aufbringen betrug in 24 Stunden normalerweise 50 Ztr., daher konnten im Jahre in einem solchen »Schacht ofen« mit sehr wenig Kosten 18 000 Ztr. Erz vorgeröstet werden. Im Jahre 1871 stand ein Kiln mit einer Leistung von 7600 Ztr. in Betrieb.

Zur chlorierenden Röstung diente ein nach den Plänen *Palmers* 1870 erbauter und 1871 etwas umgestalteter Doppel-Röstofen für kontinuierlichen Betrieb von 28 Fuss Länge und 8 Fuss Breite, d. s. 8,85×2,53 m, mit je 4 Arbeitsöffnungen an beiden Seiten; in allen diesen wurden normalerweise je 6 Ztr. Erze aufgegeben, was bei vollem Betrieb der 8 Abteilungen zur gleichen Zeit 48 Ztr., in 24 St. 288 Ztr. und in 300 Arbeitstagen 86 400 Ztr. Erz ausgemacht hätte. Der ursprünglich für Holzfeuerung gebaute Ofen wurde später für Braunkohlenfeuerung mit Treppenrost umgebaut [71]. Das vorgeröstete, gequetschte und gesiebte Erz wurde seinem Kupfergehalt entsprechend mit Kochsalz vermengt und in Partien von 6 Ztr. durch Trichter in die untere Abteilung des Ofens herabgelassen, stündlich weitergeschaufelt und gelangte auf diese Weise in 4 St. in die sich neben der Feuerbrücke befindliche obere Abteilung. Vorher wurde ohne Kochsalz gearbeitet, was sich jedoch als sehr nachteilig erwies, da die Rückstände recht reich an Kupfer waren und tatsächlich hat man mit Hilfe des chlorierenden Röstung aus den alten Rückständen noch 60% des Kupfers gewonnen [72]. Im beschriebenen Ofen wurden 1872 rund 16 000 Ztr. Erze teils ohne, teils mit Zugabe von Kochsalz geröstet, was freilich nur einen Bruchteil der Leistungsfähigkeit ausmachte. Aus dem Vergleich der beiden Beschreibungen geht klar hervor, dass es sich bei den von *Stoll* erwähnten Röstkammern und den von *Márkus* beschriebenen Kilns um zwei verschiedene Dinge handelte.

Die Extraktionsapparatur bestand aus hölzernen, wasserundurchlässigen Kästen, ein jeder der in zwei Reihen angeordneten Kästen besass ein Fassungsvermögen von 16 Ztr. Erz. Unter den Kästen waren 12 Gefässe zur Ausfällung des Kupfers untergebracht, welche mit 3 Butten für die Fällung des Kupfers in Verbindung standen. Aus diesen wurde die Lauge in zwei Behälter geführt und aus diesen durch zwei seitlich angeordnete Pumpen wiederum auf ihren früheren Platz zurückgebracht. Auf der einen Seite wurde die Aufstellung der zur Fällung des Silbers dienenden Gefässe geplant [73]. Die Auslaugung des Kupferchlorids wurde mit kaltem Wasser durchgeführt, welches man zwecks Lösung des Kupferoxyds mit Salzsäure ansäuerte. Zum vollständigen Verbrauch der Säure wird diese zurückgepumpt und aufs neue verwendet [74]. Das mit Eisen gefällte Zementkupfer enthält im allgemeinen über 70% Cu, das Pfund Kupfer wurde mit 45 kr. bezahlt. *Márkus* schliesst seine Erörterungen

mit der Feststellung, dass sich auch in diesem Falle die alte Erfahrung bestätigte, wonach die richtige hüttenmännische Gewinnung der Metalle aus den Erzen von entscheidendem Einfluss auf das Schicksal eines Bergbaubetriebes ist.

Da von 1872 an wieder einige Akten vorgefunden wurden, kann eine andere unklare Angabe *Stolls* richtiggestellt werden [75]. So erfolgte die Liquidation der Gesellschaft im April 1872 — wie oben nach *Stoll* angegeben — nicht, da die Berghauptmannschaft nicht ihre Zustimmung hierzu erteilte. Diese Angelegenheit hat sich dann noch länger hingezogen, nicht allein die Berghauptmannschaft, sondern auch das Ministerium griff ein. Inzwischen empörten sich die Arbeiter wegen Nichtbezahlung ihrer Löhne, die Beamten wurden entlassen usw., bis endlich am 23. März 1873 eine ausserordentliche Generalversammlung zustande gebracht werden konnte, wo *Stoll* als Vizepräsident des Direktoriums figurierte ; er verlas seinen Bericht — es ist wohl hierunter seine auch im Druck erschienene und oben besprochene Veröffentlichung gemeint — und referierte über seine seit dem 14. April 1872 getroffenen Verfügungen, als er nämlich die höchste technische Leitung der Werke übernahm ; diese, zumindest die auf die hüttenmännische Verarbeitung bezüglichen Angaben, wurden bereits oben kurz wiedergegeben. *Stoll* schlug bei dieser Gelegenheit keine Liquidation, sondern einen Verkauf aus freier Hand, eventuell eine Verpachtung vor, was auch durch die Versammlung gutgeheissen wurde. Diese Pläne liessen sich jedoch nicht verwirklichen, im November 1873 hungerten bereits die Arbeiter, und daher fasste man den Beschluss, den Betrieb weiter zu führen. Sollte sich ein geplantes Konsortium nicht bis zum 28. Dezember 1873 konstituieren lassen, so sollten die Aktien mit einem Zuschlag bemessen werden.

Über die weiteren Vorgänge ist man nicht unterrichtet, da über die Jahre 1874 und 1875 keine auf die Mátra bezüglichen Schriftstücke vorhanden sind. Aus 1876 und 1877 liegen wohl einige solche vor [76], doch enthalten sie keine hüttenmännischen Unterlagen.

In den darauffolgenden Jahren, also von 1877 bis 1886, enthalten die statistischen Zusammenstellungen keine Angaben über die Produktion in der Mátra, nur über die Anzahl der im Kupferbergbau beschäftigten Arbeiter, welche Zahlen in Fussnote [77] angegeben sind. Über diese Jahre liegen indessen Produktionszahlen aus den »Bányászati és Kohászati Lapok« vor, jedoch nur teilweise, die, mit den sonstigen aus amtlichen Schriften herrührenden Zahlen ergänzt, nachstehend in den Tabellen I. und II. zusammengefasst sind.

In den angeführten Zahlen sind die Jahre zwischen 1845 und 1866 nicht berücksichtigt ; wie oben angegeben, erfolgte die Verwertung der Erze in diesem Zeitraum vorwiegend durch Einlösung in den verschiedenen ärarischen Hütten, die heute auf slowakischem Gebiete liegen, weswegen die diesbezüglichen Daten nicht zugänglich waren. Übrigens erscheinen heute diese Produktionsziffern als Zeichen eines armseligen Betriebes, bei welchem a s immer

TABELLE I.

Erzeugung des Mátraer Erzbergbaues an Gold, Silber und Kupfer in den Jahren von 1875 bis 1899

Jahr	Gold	Silber	Kupfer	Zementschlich	Kupfererz	
	kg		q	q		
1875	—	—	—	113,13	1774,3	
1876	3.113	13.298	145,31	—	—	
1877	2.317	9.97	114,34	—	—	1
1878	1.680	7.204	78,93	—	884,9	
1879	0.676	2.219	—	—	311,6	
1880	—	—	—	—	—	
1881	—	—	—	—	—	
1882	—	—	—	—	—	2
1883	—	—	—	—	—	
1884	—	—	—	—	—	
1885	—	—	—	—	—	
1886	18.725[3]	54.926[3]	488,7	—	—	
1887	6.203	47.703	486,7	—	—	
1888	—	—	—	—	—	2
1889	—	—	—	—	—	
1890	18.720[3]	51.476[3]	509,8	—	—	
1891	20.561[3]	55.555[3]	510,6	—	—	
1892	5.719	47.825	465,0	—	—	
1893	6.785	50.126	413,8	—	—	
1894	4.972	43.959	368,7	—	—	
1895	5.680	49.475	416,1	—	—	
1896	6.634	54.961	417,5	—	—	
1897	5.585	47.408	418,5	—	—	
1898	5.523	51.712	392,0	—	—	
1899	4.942	38.089	385,0	—	—	

[1] Bányászati és Kohászati Lapok.

[2] Angaben fehlen, obwohl in diesen Jahren gearbeitet wurde. Vgl. die Fussnote [77].

[3] Zusammen mit Waschgold, welches aus der Donau, Mur und Drau herrührte. Die in den »Bányászati és Kohászati Lapok« veröffentlichten Zahlen von 1892 an stimmen mit den obigen nicht überein, da die hier angegebenen auch das Waschgold enthalten, weshalb sie hö er sind.

TABELLE II

Erzeugung von 1867 bis Ende 1893.

Kupfer	6.240 q	= 397,569 f
Gold	66.718 kg	= 94,785 «
Silber	510.582 «	= 45,844 «

Nach den amtlichen Angaben (Akten Nr. 2303/1894). Zum Vergleich über die Produktion im laufenden Jahrhundert von 1922 bis 1938 diene die in Fussnote [26] genannte Arbeit, S. 356, die in ihrer vierten Spalte die Erzeugung von Recsk angibt.

mehr auf das nahende Ende hindeutete, das in der Tat bald darauf eintreten sollte ; doch darf nicht ausser Acht gelassen werden, dass erstens damals alle Kupferhütten, zumindest in Ungarn, ungefähr eine ähnliche Kapazität aufwiesen und dass zweitens in Anbetracht des damaligen Kupferverbrauches die hier in Frage stehenden Mengen am Kupfermarkte der ehemaligen österrichisch-ungarischen Monarchie gerne aufgenommen wurden, was auch durch die Tatsache bewiesen wird, dass die Erzeugung von Recsk an Grosshändler in Wien (J. Neurath, A. Odendall, usw.) stets flott abgesetzt werden konnte. Es ist andrerseits mit ziemlicher Sicherheit anzunehmen, dass in den obigen Zusammenstellungen bei weitem nicht alles erfasst wird ; zunächst fehlen die an fremde Hütten verkauften Produkte gänzlich, dann fehlen z.B. Angaben zwischen 1880 und 1885, also über 6 Jahre, in welchen zweifellos gearbeitet und sicherlich auch produziert wurde. Wenn hier trotzdem diese recht dürftigen Zahlen veröffentlicht wurden, so geschah dies in der Absicht, damit ein, wenn auch lückenhaftes, so doch ungefähres Bild der Produktion zu geben.

Die Verhältnisse der Gewerkschaft besserten sich auch weiterhin nicht [78], infolgedessen wurde der oben angeführte Beschluss vom 23. März 1873 bezüglich Verkaufs der Werke durch die Generalversammlung im November 1877 erneuert. Im März 1880 war die Gewerkschaft bereits in einer derart schlimmen Lage, dass sie nicht einmal die Gebühren für die verliehenen Grubenmasse an die Berghauptmannschaft bezahlen konnte, worauf das Ministerium sie auf die Hälfte reduzierte.

Aus dieser Zeit, und zwar genau vom März 1882, wurde ein ausführliches Inventar gefunden, aus dem hier nur die Angaben über die metallurgischen Einrichtungen wiedergegeben werden sollen. In diesem Zeitpunkt waren folgende brauchbare Objekte vorhanden : 1 Dampfmaschine, 1 Kupferspleissofen, 1 Silbertreibofen, je 1 Röstofen zur Vor- und chlorierenden Röstung. Die ausser diesen noch inventarisch aufgenommenen 1 Hochofen, 3 Röstöfen zur Vorröstung bestanden zu dieser Zeit nur mehr als Ruinen. Die Laugerei besass 32 Kästen, 32 Fallkästen, Kanäle, Pumpen usw., alle in brauchbarem Zustande.

Eine Wendung in der Geschichte der Gewerkschaft trat im selben Jahre, also 1882, ein [79], es wurden dabei kolossale Hoffnungen erregt, die sich aber wieder rasch verflüchtigten. Es wurde nämlich nunmehr seitens der Berghauptmannschaft die Zustimmung zum Verkauf erteilt ; die Käuferin war »*The Hungarian Copper Co. Ltd.*« in London, welche durch Advokat Anton *Reményi* in Budapest vertreten wurde, während der technische Hauptberater *Stoll* war. Über die Tätigkeit der genannten Londoner Firma in Ungarn, bzw. in der Mátra, ist aus den Akten fast nichts ersichtlich, es konnte nur soviel in Erfahrung gebracht werden, dass das Grundkapital £ 60 000 betrug, das jedoch bald auf £ 40 000 herabgesetzt wurde. Selbst hiervon wurden für den Kauf und zur Weiterführung des Betriebes nur £ 13 370 verauslagt. Es konnte

in einige vom Herrn Oberbergrat *Pollner* vorgelegte Geschäftsbriefe Einsicht genommen werden, aus welchen hervorging, dass das Jahr 1882/83 mit der Bekämpfung der sich auftürmenden Schwierigkeiten ausgefüllt war. Diese Briefe befassen sich übrigens zum grössten Teil mit bedeutungslosen Fragen; bemerkenswert ist nur, dass die Gesellschaft eine Braunkohlengrube in Mátraszele — etwa 18 km von Recsk entfernt — erwarb. Zu welchem Zweck, war nicht in Erfahrung zu bringen, vielleicht schwebten ihr auch grössere Projekte vor, die sich jedoch nicht mehr verwirklichen liessen, da die Engländer bald den Rückzug aus dieser Unternehmung antraten und bereits im Juli 1883 ihr ganzes Mátraer Vermögen an ein Konsortium, bestehend aus Gustav *Jármay*, Apotheker, Karl *Stoll*, Bergrat, Dr. Ed. *Eissen*, Privatier, Sig. *Brill* und Ludw. *Brill*, Kaufleute, alle in Budapest, veräusserten.

Zu dieser Zeit war Josef *Varga* Werksdirektor in Recsk. Näheres über ihn weiss man nicht, allem Anschein nach hat er als erster für die örtliche Bezeichnung der Werksanlagen den Namen Mátrabánya eingeführt, der jedoch wahrscheinlich nicht die Sanktion der Verwaltungsbehörden erhielt, obzwar er lange Zeit hindurch in den Schriftstücken figurierte.

Mit den Geschehnissen dieser Zeit befassen sich verschiedene Akten [80], die jedoch in hüttenmännischer Hinsicht nichts Nennenswertes bieten und von denen die meisten den Beginn eines sich noch lange hinziehenden Streites der Mitglieder des Konsortiums behandeln, welches später unter dem Namen »Mátrabányaer Kompossessorat« figurierte. Dieser Streit machte vielfach Eingriffe der Bergbehörde notwendig.

Im übrigen sei hier der Sachlichkeit halber noch angeführt, dass zu dieser Zeit nicht allein der Mátraer, sondern der ganze oberungarische Kupfererzbergbau eine rückläufige Entwicklung aufwies, was von einem gründlichen Kenner der Verhältnisse, dem oben bereits genannten *A. Leithner* [81], allein mit der Rückständigkeit der Betriebe der betreffenden Kupferhütten erklärt werden konnte. Nachdem schon 3 von den damals in der Zips betriebenen 4 Kupferhütten eingestellt waren, schlug er eine radikale und weitgehende Umgestaltung der metallurgischen Arbeitsmethoden vor, da seiner Meinung nach der Schwerpunkt auf eine gründliche Reform des ganzen Systems der Verhüttung hätte gelegt werden müssen, wobei er u. a. die Errichtung einer Schwefelsäurefabrik für richtig hielt.

Es folgen wieder einmal ereignislose bzw. solche Jahre, aus welchen keine nennenswerten Unterlagen vorhanden sind. Die zur Einsicht ebenfalls herangezogenen Bände des »*Ungarischen Montan-Handbuchs*« lieferten fast keinerlei Angaben, welche nicht schon aus anderen Quellen oben berücksichtigt und verarbeitet gewesen wären. Da jedoch diese Bücher auch einige wenige Angaben enthalten, die oben unbeachtet geblieben sind, da sie vom Gesichtspunkt der

vorliegenden Arbeit belanglos waren, sollen diese der Vollständigkeit halber, wenigstens nach ihren bibliographischen Kennzeichen, hier angeführt werden [82].

Aus dem Jahre 1894 lagen zwei Akten vor [83], in welchen der Anfang des Parád-Recsker Erzbergbaues irrtümlich auf das Jahr 1830 gesetzt und behauptet wird, dass in jener Gegend zwischen 1830 und 1860 Bergbau betrieben wurde. Aus obigen Ausführungen geht jedoch hervor, dass die Angabe über das Jahr 1830 auf einem Irrtum beruht und aus mündlichen Überlieferungen herrühren dürfte. Diese Zahlen waren für eine Monographie bestimmt, welche die auf dem Gebiete der Budapester Berghauptmannschaft tätigen Bergbauunternehmungen hätte beschreiben sollen, die jedoch nach den angestellten Erhebungen niemals erschienen ist.

In einer Quelle [84] findet man einige, die sozialen Verhältnisse der Jahrhundertwende kennzeichnende Angaben, welche für die anlässlich der Weltausstellung in Paris im Jahre 1900 herauszugebenden — und tatsächlich auch erschienenen — den Bergbau und das Hüttenwesen Ungarns behandelnden Publikationen amtlich gesammelt wurden. Hienach bewegte sich die Gesamtzahl der Arbeiter in Recsk von 1883 bis 1898 zwischen 88 und 110, von diesen waren 58—65 Männer im Alter von 16—55 Jahren und 40—46 Frauen im Alter von 16—30 Jahren. Die Arbeitszeit dauerte von 6 Uhr früh bis 6 Uhr abends, mit einer Pause für das Frühstück und das Mittagessen von ½ bzw. 1 Stunde. Die Löhne betrugen in Akkordarbeit täglich 80—90 kr. freien Verdienst, bei der Beförderung 80 kr. bis 1 f, der Taglohn machte 50—70 kr. aus. Es sei hiezu bemerkt, dass die Löhne auch anderswo im ungarischen Bergbau ähnlich bemessen waren, ausgenommen im Kohlenbergbau, wo diese im Durchschnitt um 50% und bei den Häuern sogar noch höher lagen. Freilich gab es auch hievon Ausnahmen. Vergleicht man die Verdienste der Arbeiter in Recsk beispielsweise mit denjenigen im Kohlenrevier von Pécs aus dem Jahre 1893, die in einer kürzlich veröffentlichten Studie von *Végh* [85] bekanntgegeben wurden, so erfährt man, dass die in Pécs im Kohlenbergbau der damaligen k. k. Donau-Dampschiffahrtsgesellschaft bezahlten Löhne diejenigen im Erzbergbau zu Recsk gar nicht überstiegen, vielmehr waren sie sogar noch niedriger. Wenn man noch die von *Végh* geschilderten sonstigen Verhältnisse berücksichtigt, so erscheint auch diesbezüglich ein Hinweis auf die ausgelieferte Lage der dortigen Arbeiterschaft gegenüber der genannten, damals eine monopolistische Stellung geniessenden Besitzerin der Pécser Gruben angebracht. Die angegebenen Zahlen dürfen gerechterweise freilich nur so beurteilt werden, wenn man sie auf den damaligen Lebenshaltungsindex bezieht, der jedoch heute in Ermangelung von verlässlichen statistischen Angaben nur mit grossen Schwierigkeiten zusammengestellt werden könnte. Traurig war auf alle Fälle, dass das kleine Bergwerk in Recsk damals noch keine Schule, keine Arbeiter-Fortbildungsanstalt, kein Krankenhaus, kein Bad, keinen Gesang- oder Musikverein usw. besass.

Zur Vervollständigung des Bildes über das Hüttenwesen in der Mátra sei hier noch zuletzt ein Bericht des Delegierten der Berghauptmannschaft zu Budapest, des Bergkommissärs Dipl. Ing. *Fr. Albert* aus dem Jahre 1898 wiedergegeben, der die Laugerei in Recsk dienstlich besichtigte und sie nach ihrem damaligen Stand beschrieb [86]. Hiernach wurden die auf primitive Art durch Sieben nass aufbereiteten Erze in einfachen Röst-Stadeln, von welchen 3 mit einem Fassungsvermögen von je 1000 q vorhanden waren, einer oxydierenden Röstung unterzogen, die jeweils 4—6 Wochen dauerte, wobei sich 70—80% des Schwefels und Arsens verflüchtigten. Das Röstgut wurde nach Sieben und Klauben mit Hilfe eines Walzenpaars in Griesform übergeführt und dann in Kästen mit schwach schwefelsaurem Wasser ausgelaugt, wobei ein Teil des Kupfers als Kupfersulfat in die Lösung ging und aus der Lösung mit Eisen als Zementkupfer gefällt wurde. Die fein pulverigen Schliche wurden in Röstöfen geröstet und ähnlich weiter behandelt. Das Röstgut enthielt durchschnittlich 4—7% Kupfer, in 100 kg Erz konnten nur 8—14 g Göldisch-Silber und in 1000 Teilen Göldisch-Silber 80—140 Teile Gold machgewiesen werden.

Das einmal bereits ausgelaugte Erz wurde nochmals, und zwar chlorierend, geröstet, ein Teil der entstandenen Chloride des Kupfers und Silbers wurde zunächst mit Wasser ausgelaugt. Aus dieser Lösung wurde zuerst das Silber mit Natriumjodid und nachher das Kupfer wieder mit Eisen gefällt. Das Silberjodid wurde in Kalziumthiosulfat-Lauge gelöst und aus dieser Lösung das Silber mit Kalziumpentasulfid gefällt, wobei auch das Natriumjodid zurückgewonnen wurde. Zur Lösung der im Wasser unlöslichen Verbindungen des Kupfers wurde der zu laugende Stoff mit einer chlorhaltigen Lösung (Salzsäure ?) übergossen und das Kupfer aus dieser Lösung gefällt. Das pulverförmige Zementkupfer und das breiartige Silbersulfid wurde getrocknet und das letztere im Treibofen mittels Verbleiung in reiner Form gewonnen. Das Zementkupfer wurde ebenfalls im Treibherd durch Oxydation raffiniert, wobei nicht nur die Verunreinigungen, sondern auch ein Teil des Kupfers oxydiert wurde. Das Frischkupfer kam in Scheiben gegossen auf den Markt, das Silber mit dem darin enthaltenen Gold zur Einlösung. Die vom Raffinieren des Kupfers herrührende Schlacke wurde wieder verarbeitet.

Dieses Verfahren wurde auch von *Faller* im Jahre 1898 mit der irrigen Angabe beschrieben [87], dass es um ein Jahrzehnt früher, also 1888, in Mátrabánya angewendet wurde, doch sei es auch zur Zeit des Erscheinens seines Buches dort noch in Anwendung gewesen. *Albert* bemerkte zu seinen Ausführungen, dass die von ihm beschriebene Arbeitsweise, obzwar umständlich und teuer, nur aus dem Grunde beibehalten wurde, weil die früher versuchte Aufbereitung des Erzes mit Wasser im Pochwerk zu unbefriedigenden Ergebnissen geführt habe, da infolge der Spaltbarkeit des Fahlerzes und infolge des Totstampfens das Wasser einen grossen Teil des Erzes weggespült habe. Es ist also wieder das alte Lied, welches schon oben mehrfach wiederholt wurde,

nur merkte *Albert* den Widerspruch nicht, dass bekanntlich die hüttenmännischen Methoden allein, so tauglich sie auch immer sein mögen, den durch die unrichtige Aufbereitung begangenen Fehler nicht mehr gutmachen können.

* * *

Soweit über das wechselvolle Schicksal des Recsk-Paráder Bergbaues und Hüttenwesens bis zur Jahrhundertwende. Sicherlich wären auch auf das laufende Jahrhundert bezügliche, weitere archivalische Angaben zu finden, doch können in dieser Hinsicht keine besonderen Aussichten erblickt werden, da festgestellt wurde, dass gegen Ende des vorigen Jahrhunderts die Zahl der berghauptmannschaftlichen Akten im allgemeinen immer grösser, diejenige der auf den Mátraer Bergbau bezüglichen aber immer geringer wurde.

Es ist übrigens anzunehmen, dass in den ersten Jahren dieses Jahrhunderts die Unternehmung ihr Dasein nur mehr in einem ewigen Kampf mit den sich auftürmenden Schwierigkeiten weiterfristen konnte. Nach Angaben des Herrn Oberbergrats *Pollner* rühren die letzten Spuren einer bergbaulichen Tätigkeit aus den Jahren 1904—06 her, doch dürfte diese nur aus dem Suchen nach reichen Erzen, möglichst nach hoch edelmetallhältigen Butzen bestanden haben. Die jährlichen Betriebsauslagen machten 110—120 Kronen aus, womit wahrhaftig nur sehr wenig geleistet werden konnte. In diesen Jahren wurde die Wartung der noch bestehenden Objekte vom verstorbenen Direktor *Varga* durch Benjamin *Kingl* übernommen, der dort Rechnungsführer war. Nach dieser Zeit wurden die Einrichtungen und z. T. auch die Baulichkeiten in alle Windrichtungen auseinandergetragen.

Laut Angaben der beim zuständigen Bezirksgericht in Pétervására aufbewahrten Grundbücher haben sich die Eigentümer der sich im Besitze des Mátrabányaer Kompossessorats befindlichen Kuxanteile infolge Vererbung vielfach verändert. Diese wurden dann Ende 1916 durch L. *Weisz* [88] von 19 Erben erworben. Laut einer mündlichen Mitteilung wurde während des ersten Weltkrieges — wahrscheinlich schon zu Zeiten *Weisz'* — in Recsk Abbau betrieben, wobei die Erze zur Verhüttung nach Dobsina geführt wurden [89]. Nach seinem im Jahre 1921 erfolgten Tode war seine Witwe die einzige Erbin, die am 20. Juni 1923 das ganze Objekt an die Gebrüder *Schmidt* verkaufte. Von diesem Zeitpunkt an ist die Entwicklung durch *Vitális* in den in Fussnote [5] angeführten Arbeiten ausführlich geschildert worden.

Bezüglich der Erzvorkommen in Gyöngyös-Oroszi kann hier mitgeteilt werden, dass dort durch die Urikány-Zsilvölgyer Ungarische Steinkohlenbergbau A. G. in Budapest vor etwa 20 Jahren recht ausgedehnte geologische und bergmännische Aufschlüsse vorgenommen wurden, welche Hoffnungen auf einen ergiebigen Bergbau rechtfertigten. Im Laufe des zweiten Weltkrieges wurden die dortigen bergrechtlichen Besitzungen durch den ungarischen Staat

erworben und, wie oben bereits erwähnt, werden gegenwärtig vom Staat vielversprechende Arbeiten zur Wiederinbetriebsetzung der Gruben durchgeführt.

Es soll noch der anfangs bereits kurz erwähnte Gegenstand behandelt werden, wonach angenommen werden darf, dass auch auf der nordwestlichen Seite des Mátragebirges einstmals *Kupferhütten* bestanden haben sollen. Leider fehlen hierüber jegliche dokumentarische Beweise, doch ist eine Veröffentlichung bekannt [90], welche besagt, dass das Gebiet der Gemeinde Kisterenye an der Nordseite der Mátra seit den Dreissiger Jahren des vorigen Jahrhunderts als reicher Fundort für urzeitliche Gegenstände bekannt ist, wo u. a. »nicht verarbeiteten legierten Klumpen, Gussformen, Ascheschichten und Feuerbänke« vorgefunden werden konnten, die beweisen sollen, dass »dort in der Zeit der einstigen reichen Kupfergewinnung in der Mátra die dort ansässigen Urvölker zugleich auch *Giess- und Hüttenanlagen* besassen«. Die in diesem Aufsatz angeführte Originalquelle [91] erwähnt diese Einzelheiten nicht; die beiden vorangegangenen Veröffentlichungen über diesen Fund [92] waren nicht zugänglich, doch wurde vom namhaften ungarischen Archäologen Franz *Pulszky* angegeben [93], dass aus den Sammlungen des Ungarischen Nationalmuseums in zehn Gegenständen durch die chemische Analyse kein Zinn nachgewiesen werden konnte, vielmehr »erwiesen sich einzelne davon als rein kupferne, als solche in der Mátra auch heute noch im gediegenen Zustande gefunden werden können«.

Nach *Rómer* [94] wurde in Kis-Terenye auch »eine ganze Giesshütte mit Gussformen« ausgegraben und ferner »im Komitat Heves in der Mátra auch legierten Pogatscherl entdeckt«. Es sei ferner die durch die Freundlichkeit des Herrn Ludw. *Verebélyi*, Maurermeister in Mátraverebély, zugekommene Angabe erwähnt, wonach er 1928 in der Nähe der mittelalterlichen Kirche zu Mátraverebély — unweit von Kisterenye — in Holzkohle eingebettete Kupferstücke ausgegraben hat, welche er seinerzeit zwecks näherer Untersuchung im Bergwerk in Recsk hinterliess; dieser letztere Fund verschwand leider spurlos in den Stürmen des zweiten Weltkriegs ohne jemals näher geprüft worden zu sein. Herr Oberbergrat Dipl. Ing. Jul. *Szilass*, der längere Zeit beim Mátraer Erzbergbau in Recsk tätig war, behauptete, dass der in Frage stehende mit Holzkohle und Quarzkörnern verbackene Fund den unzweifelhaften Eindruck gemacht habe, aus einer Schmelzung hervorgegangen zu sein. Aus dem Vergleich dieser verschiedenen Angaben könnte man nun sowohl auf das Bestehen einer Schmelzhütte für Erze als auch einer Giesshütte zur Verarbeitung des in der Mátra gediegen vorkommenden Kupfers für Gebrauchsgegenstände schliessen, doch soll hier in Ermangelung eines Musters auf weitere Spekulationen verzichtet werden.

Unabhängig von dieser Begebenheit wurde der Verfasser der vorliegenden Abhandlung vor etwa 20—22 Jahren durch seinen seitdem verstorbenen Freund, dem Minist. Rat Dipl. Ing. E. *Tassonyi* darauf aufmerksam gemacht, dass

er in der Umgebung von Mátraverebély und Nagybátony — südwestlich unweit von Kisterenye — eine Kupfer führende Schlackenhalde entdeckte. Die vom Verfasser seinerzeit unternommenen Schritte, diese zu besichtigen und davon ein Muster für weitere Untersuchungen zu ziehen, scheiterten am Misstrauen der damaligen Grundbesitzerin, so dass auch hierüber heute nichts Weiteres gesagt werden kann. Die angeführten Tatsachen dürften auf alle Fälle darauf hindeuten, dass es sich hiebei nicht um grundloses Gerede, sondern vielmehr um heute leider nicht mehr handgreifliche Beweise dafür handelt, dass dereinst, wahrscheinlich in sehr weit zurückliegender Zeit, auch in jener Gegend der Mátra Hüttenwesen betrieben wurde.

Im Zusammenhang mit dem Gegenstand vorliegender Arbeit tauchte noch die Frage auf, woher die Namen einiger Ansiedlungen in der Mátra herrühren, die südöstlich von Nagybátony in einer beiläufigen Höhe von 7—800 m ü. d. M. von einander zerstreut liegen und in ihren Namen früher den Zusatz »Hütte« mitführten (Fiskálitáshuta, Ötházhuta, Szuhahuta usw.). Archivalische Forschungen bestätigten, dass diese Namen keineswegs auf metallurgische, sondern auf ehemalige Glashütten hindeuten. So steht es fest, dass die erste dieser Glashütten in der Gemarkung der Gemeinde Hasznos durch den damaligen Administrator des Zisterzienserklosters in Pásztó im Jahre 1741 errichtet wurde, der später mehrere, gerade die oben aufgezählten, folgten. Für die Erzeugung der zur Glasfabrikation erforderlichen Pottasche gab es im Mátragebirge ebenfalls zahlreiche Anlagen, die nach den damaligen Begriffen keineswegs als unbedeutend betrachtet werden dürfen. Die damals sehr ausgedehnten Waldungen der Mátra erlaubten nämlich gegen Mitte des XVIII. Jahrhunderts die Entwicklung der Holzascheverarbeitung zu einem ansehnlichen Erwerbszweig, der nicht allein den Bedarf der dort bestandenen Glashütten, sondern auch den Pottascheverkauf nach auswärts zu decken ermöglichte. Da jedoch die Behandlung dieser interessanten Frage nicht zu dem hier behandelten Gegenstand gehört, soll bei ihr nicht länger verweilt werden [95].

Auf dem Gebiete des Komitats Heves konnten auf Grund der Forschungen des Verfassers anderswo nirgends die Spuren eines Erzbergbaus gefunden werden. In einer Quelle [96] wird zwar angegeben, dass auf den Zügen des grünen Trachyts sich die schon im XIII. Jahrhundert blühenden Eisensteingruben in Domoszló befanden ; auch ist eine Angabe bekannt [97], dass die Familie Kompolthy im Jahre 1296 eine Konzession für Eisenstein-Bergbau in Domoszló vom König Andreas III. erhielt. In diesem Zusammenhang seien noch zwei Quellen erwähnt [98], welche übereinstimmend behaupten, dass in jener Gegend am südöstlichen Fusse der Mátra im XV. Jahrhundert Eisensteingruben waren, doch dürfte sich diese Frage nur schwer bereinigen lassen. Die mittelalterliche Vergangenheit des Bergbaues und Hüttenwesens im Komitat Heves wird in den gedruckten Quellen stiefmütterlich behandelt, ja sogar gänzlich vernachlässigt und die Archive dürften hierüber ebensowenig Aufschluss geben können.

Selbst das grosse, in der Fussnote [26] zitierte vierbändige Werk von *Szederkényi* macht über diesen Gegenstand keine Erwähnung, was ebensogut auf die Einseitigkeit dieses Werkes als auch auf den Umstand hindeuten kann, dass auf dem Gebiete des Komitats Heves — abgesehen von der Urzeit — früher weder Bergbau noch Hüttenwesen betrieben wurde.

Auf das noch auf Heveser Gebiet befindliche, aber schon zum Bükkgebirge gehörende Wehrlit-Vorkommen [99] soll hier nicht eingegangen werden, da es seit etwa 10 Jahren und auch gegenwärtig den Gegenstand eingehender Untersuchungen zwecks Gewinnung von Titanoxyd bildet [100].

Dasselbe gilt auch für die Manganerzvorkommen im Komitat Heves bei der Gemeinde Demjén und in der Umgebung der Stadt Eger, welche noch der bereits im Gange befindlichen weiteren geologischen und bergmännischen Aufschlüsse bedürfen.

Recht viele Angaben wurden über den auf dem Gebiete des benachbarten Komitats Borsod betriebenen Eisenerzbergbau und über das dortige Eisenhüttenwesen gefunden. Vielleicht werden es die Umstände gestatten, dass auch sie seinerzeit vom Verfasser vorliegender Arbeit verarbeitet und veröffentlicht werden.

Am Ende dieser Abhandlung angelangt sollen hier noch einige Sätze eines jüngst veröffentlichten Aufsatzes [101] technisch geschichtlichen Inhalts, welche treffend auch auf den Gegenstand vorliegender Arbeit passen, etwas umgestaltet angeführt werden. Auf vorliegenden Abhandlung bezogen besagen sie, dass das Schicksal des Erzbergbaues und des Hüttenwesens in der Mátra reich an dramatischen und wechselvollem Geschehen ist, dass es eindringlich vom kämpferischen Einsatz, von Niederlagen und Erfolg, vom Kampf zwischen Mensch und Materie erzählt, so dass ihre Geschichte zu einem Spiegelbild all der Kräfte wird, die einst an ihrer Gestaltung mitgearbeitet haben.

ZUSAMMENFASSUNG

Es ist geplant, zur Geschichte des Hüttenwesens in Ungarn in einzelnen Beiträgen über bisher meistens unveröffenlichte Tatsachen und Angaben zu berichten. In der vorliegenden Arbeit wurde die Geschichte des Metallhüttenwesens auf dem Gebiete des 80—90 km nordöstlich von Budapest gelegenen Mátragebirges auf Grund archivalischen Forschungen bearbeitet. Dabei wurde hauptsächlich nur die zweite Hälfte des XIX. Jahrhunderts berücksichtigt, da der Erzbergbau auf diesem Gebiet seinen Anfang erst gegen Ende der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts genommen hatte, ohne zu dieser Zeit schon mit Hüttenwesen verbunden gewesen zu sein. Wohl darf mit ziemlicher Sicherheit angenommen werden, dass im Mátragebirge bereits in der Urzeit Hüttenwesen betrieben oder zumindest mit der Verarbeitung des dort gediegen vorkommenden Kupfers fortgefahren wurde. Ob es zwischen der Urzeit und unserem Zeitalter ausser dem aus dem XIII. Jahrhundert bekannten Eisensteinbergbau am südöstlichen Abhange des Gebirges noch irgendwelchen anderen Bergbau oder gar irgendwelches Hüttenwesen gab, vermag in Ermangelung archivalischer oder sonstiger Angaben heute leider nicht beantwortet zu werden. Sicher ist nur, dass die erhaltenen Archive seit der Mitte des XVII. Jahrhunderts auf keine Weise auf das Vorhandensein eines Bergbaues und Hüttenwesens hindeuten. Wenn trotz dieser grossen zeitlichen Lücken das vorhandene archivalische Material hier in grossen Zügen veröffentlicht wurde, so geschah dies auch aus dem Grunde, weil gegenwärtig in einem Teile des Mátragebirges vielversprechende bergmännische Arbeiten zur Wiederauferweckung des Erz-

bergbaues durchgeführt werden, welche dann möglicherweise auch zur Etablierung eines Hüttenwesens werden führen können, wobei es zur moralischen Pflicht gehört, auch auf die Vergangenheit hinzuweisen.

*

ANMERKUNGEN UND QUELLENNACHWEISE

1. Handbuch f. d. Berg-, Münz- u. Forstwesen im Kaiserthum Österreich für 1855, S. 184 ; dasselbe f. 1856, S. 126 ; Montan-Handb. des österr. Kaiserthumes für 1857, T. II., S. 234 ; dasselbe f. 1861, T. II., S. 221 ; dasselbe f. 1864, T. II., S. 213, die letzteren gedruckt bei Anton Schweiger, Wien. Andere Jahrgänge waren nicht erreichbahr, auch die angeführten Angaben wurden entgegenkommenderweise durch die Bibliothek der Geologischen Bundesanstalt in Wien zur Verfügung gestellt, wofür auch an dieser Stelle der verbindlichste Dank ausgesprochen wird.

2. Hiezu sei bemerkt, dass das Komitat Heves, auf dessen Areal die in diesem Aufsatz behandelten Betriebe lagen, bergbehördlich bis zum Jahre 1856 in die Kompetenz des — bald als k. k., bald als kön. ung. bezeichneten — »Oberungarischen Districtual-Berggerichts« zu Szomolnok (deutsch : Schmöllnitz, slowakisch : Smolnik), dann bis 1859 zur k. k. Bergbehörde in Selmec (deutsch : Schemnitz, slowakisch : Štiavnica) und schliesslich von diesem Jahre an zur k. k. — vom Jahre 1867 an »kön. ung.« — Berghauptmannschaft in Buda (deutsch : Ofen, d. i. der rechtsufrige Stadtteil des heutigen Budapest) gehörte.

3. Vgl. hierüber Edm. *Alliquander :* Organisation der Bergbehörde und bergrechtliche Verhältnisse in Ungarn. Mitteilungen der berg- u. hüttenmänn. Abt. d. kgl. ungar. Palatin-Joseph-Universität. Sopron, Bd. X/3. 1938., S. 412/424.

4. Es sei gestattet, dem Herrn Oberarchivar Dr. Imre *Soós* in Eger und dem gegenwärtigen Leiter des Stadtarchivs in Gyöngyös, Herrn Gymnasial-Prof. Imre *Bán* für ihre Bemühungen und Auskünfte verbindlich zu danken.

5. Ein Teil der diesbezüglichen Literatur ist angeführt im Aufsatze von Dr. St. *Vitális :* Der Gold-, Silber- und Kupferbergbau zu Recsk, in Ungarn. Mitteil. d. berg- u. hüttenmänn. Abt., Sopron, Bd. V., 1933, S. 213/248 und ebenda, Bd. IX., 1937, S. 125/132. Vgl. ferner : M. *Vendl :* Die technisch wichtigen Mineralschätze Ungarns mit Ausnahme der Kohlen und Erdöle vor und nach dem Zusammenbruch. Ebenda, Bd. X/3., 1938, S. 271/276.

6. Berghauptmannschaftl. Akten des Landesarchives in Budapest. Fasc. No. 278/13.

7. Szomolnoker Akten 1809—1829. Fasc. No. 307/14.

8. Szomolnoker Akten 1830—1844. Fasc. 15. Prot. No. 929.

9. Da der vorliegenden Abhandlung keine Karte beiliegt, sei hier erwähnt, dass das Mátragebirge in einer Entfernung von etwa 80—90 km nordöstlich von Budapest am 20° östl. Länge und dicht am 48. Breitengrad gelegen ist, wobei es eine Fläche von rund 670 km² bedeckt.

10. Vgl. u. a. M. *Löw :* Erzlagerstätten in der Mátra. Földt. Közl. Bd. LV, Jg. 1925, S. 319.

11. Szomolnoker Akten, 1830—1844. Fasc. No. 15. P. No. 1087, 1088, 1093, 1094, 1095, 1169, 1225 und 1226 aus 1844. In diesen Akten werden auch auf Solymoser Terrain (Monostori völgy) befindliche Spuren von alten Stollen und Halden erwähnt, die jedoch ausserhalb des Gebietes dieser Arbeit liegen und daher übersprungen werden können.

12. Szomolnoker Akten, aus 1845 : P. No. 28, 30/33, 34, 35, 356, 382, 518, 791, 793, 794, 1118, 1134 und 1401. Bezüglich Gyöngyös-Solymos und Hasznos gilt auch hier das in Anmerkung [11] Gesagte.

13. Hiezu sei übrigens noch bemerkt, das im Schriftstück P. No. 1134 aus 1845 die in der Gemarkung von Gyöngyös-Oroszi bestehenden Gruben als »neu erstandene« bezeichnet werden, was auf keine lange Vergangenheit dieser Gruben schliessen lässt.

14. Szomolnoker Akten, Jahr 1850, P. No. 149. — Auf Gyöngyös-Solymos und insbesondere auf einen im Tale »Békatóvölgy« auf Hasznoser Gebiet befindlichen »uralt verbrochenen Stollen« weisen aus diesem Jahre die Akten P. No. 287, 305 und 433 hin.

15. Karl *Polony*, ein Gerbermeister aus Schemnitz, erscheint im Lichte der berggerichtlichen Akten als ein ehrgeiziger und unternehmungslustiger Mensch, der seinen Willen meistens mit Erfolg durchzusetzen verstand, wobei er in der Anwendung seiner Mittel nicht sehr wählerisch gewesen sein dürfte.

16. Dem Namen Anton *Stöckl* begegnet man in den Akten zwischen 1815 und 1855, er ist sogar während dieser 40 Jahre fast der alleinige Bearbeiter aller uns interessierenden Angelegenheiten. Nach Angaben des »*Gedenkbuches zum 100jährigen Bestehen der kön. ung. Berg- und Forstakademie zu Schemnitz 1770—1870*«, (deren Gründungsjahr irrtümlich angegeben ist, da sie im Jahre 1763 als Bergakademie und schon 1735 als Lehranstalt zur Bildung von Expectanten zu Bergbeamten gegründet wurde) wurde der in Ungarn beheimatete *Stöckl* auf der Bergakademie im Jahre 1805 immatrikuliert und war 1870 nicht mehr am Leben.

17. Die Schriftstücke des Berggerichts zu Szomolnok sind alle in deutscher Sprache abgefasst, ausgenommen einiger lateinischer aus den ersten Jahrzehnten, und einiger anderer in ungarischer Sprache aus der 40er Jahren des vorigen Jahrhunderts. Wo in der vorliegenden Abhandlung Zitate unter Anführungszeichen vorkommen, handelt es sich stets um den getreuen Originaltext in der Orthographie der damaligen Zeit.

18. Der Vorname Imre heisst auf deutsch Emmerich, offenbahr rührt dieser Schutzname für die Schmelzhütte von ihm her ; er war übrigens ein Grundbesitzer aus der Umgebung und an der Bergbau-Gewerkschaft beteiligt.

19. Ein in der ungarischen Literaturgeschichte geschätzter Schriftsteller, Dichter und Kritiker.

20. Aus dem Jahre 1850 sei in dieser Beziehung noch die Schrift P. No. 566 erwähnt, die über einen »im Thale Szalajkavölgy zu Tag ausgehenden Gang« berichtet, der vermutlich »die Fortsetzung des gewerkschaftlichen mächtigen Josephs-Ganges in Oroszi sein dürfte.«

21. Szomolnoker Akten aus 1851 : P. No. 434, 665 und 666 ; aus 1852 : No. 448 und 714 ; aus 1853 ; No. 538, 721, 762, 797, 815, 816, 817, 882 und 913, und schliesslich aus 1854 : No. 271. Aus den Akten des Jahres 1853 No. 721 und 762 geht hervor, dass auf Gyöngyös-Oroszer Terrain in der Gegend »Disznó Kocsma Szállás« ein 4½ Klafter mächtiger, Kupferkiese und Silberspuren enthaltender, ferner einer in der Gegend Aranybányabércz Bleierze führender Gang entdeckt wurde.

22. Zur Umrechnung der alten Gewichte sei hier angeführt : 1 Wiener Centner = 100 Wiener Pfund = 56,128 kg ; 1 Wiener Pfund = 32 Lot, 1 Lot = 17,54 g, 1 Dänar = 1,096 g. Wenn also z. B. oben ein Gehalt im Mittelwert mit 22 Dänar angegeben wird, so bezieht sich das auf 1 W. Pfd. Göldisch-Silber, demnach sind 22 Dänar = rd. 24 g Gold, d. h. ca. 43 g Gold in 1 kg Göldisch-Silber.

Hier sei noch bemerkt, dass die heute in Ungarn geltende Währung, deren Einheit Forint heisst, nicht identisch ist mit derjenigen gewesenen österreichischen Währung, deren Einheit auch forint = floren = Gulden geheissen hat und die in dieser Abhandlung öfters vorkommt, meist abgekürzt (1 fl oder f = 100 Kreuzer oder Kr).

23. P. No. 1181 vom 18. November 1859.

24. Vgl. hierüber die in Anmerkung [5] angeführten Quellen.

25. Szomolnoker Akten. Fasc. 278/13, Prot. No. 402 aus 1806 und P. No. 100 aus 1807 ; ferner Fasc. 307/14, No. 280 aus 1816.

26. P. *Esztó :* Der Erzbergbau in Ungarn. Mitteil. d. berg- u. hüttenmann. Abt., Sopron, 1938, Bd. X/3., S. 356. — In diesem Zusammenhang sei noch bemerkt, dass heute noch in der Umgebung von Parád und Recsk mündliche Überlieferungen lebendig sein sollen, wonach der Bergbau dort tatsächlich jahrhunderte alt sein soll und insbesondere zur Zeit der Rákóczischen Freiheitskämpfe dort Bergbau betrieben worden sein soll, was jedoch nicht bewiesen werden kann. Erstens verbrannte ein Teil des Heveser Komitatsarchivs anlässlich eines Feuers Ende des XVII. Jahrhunderts (vgl. hierüber *Szederkényi* Nándor : Heves vármegye története, Eger, 1891, Bd. III. S. 315), doch sind die Protokolle der Komitatssitzungen seit der Mitte des XVII. Jahrhunderts heute noch vorhanden ; in diesen sind jedoch keine Andeutungen über den Bergbau zu finden, folglich ist auch nicht anzunehmen, dass Bergbau betrieben wurde. Es ist fast ausgeschlossen, dass während der Besetzung des Komitats durch die Türken, die mit der Einnahme von Hatvan im Jahre 1544 begann (1. c. Bd. II., S. 68) und bis 1687 dauerte, auf diesem Gebiet Bergbau betrieben worden wäre. (Vgl. A. *Péch :* Alsómagyarország bányaművelésének története, Budapest, 1887, Bd. II., S. 502 und 519., wonach z. B. die Bergstadt Bakabánya, die niemals von den Türken besetzt war, trotzdem ihren Bergbau wegen der gefährlichen Nähe der Türken einstellte). Es ist nicht gut anzunehmen, dass gerade zur Zeit Rákóczis dort Bergbau betrieben worden wäre, da nach *Szederkényi* (Bd. IV., S. 76/150.) sich das Komitat zu jener Zeit in sehr schweren Verhältnissen befand. Das Gerede über diese Zeit dürfte vielmehr mit einer im Volke lebendigen romantischen Vorstellung von der Persönlichkeit Rákóczis und in sachlicher Hinsicht mit dem schon in der Urzeit bekannten Vorkommen von gediegenem Kupfer in Recsk in Zusammenhang stehen. (Vgl. diesbezüglich die in Anmerkung [5] angeführten

Arbeiten *Vitális'* und das Mátraer Kupfer in der Urzeit betreffend z. B. das in Anmerkung [48] genannte Buch von *Borovszky*, S. 441.) Dieser Glaube dürfte noch dadurch bestärkt worden sein, dass Fürst Franz Rákóczi II. in Parád und Umgebung Grundherr war und als solcher in den Jahren seiner Freiheitskämpfe auf seinem Grundbesitz in Parád eine Glashütte errichten liess. Diese Tatsache wird aus einer unter dem Stichwort Parád im Landesarchiv in Budapest (Urbaria et Conscriptiones, Fasc. 91/19.) befindlichen Angabe, wie folgt, erhellt : »Princeps Rákóczius his disturbiis curavit erigi fodinam pro conficiendis vitris.« (Diese letztere Auskunft verdankt der Verfasser dem Herrn Oberarchivar Dr. Imre *Soós* in Eger).

27. Szomolnoker Akten, P. No. 620 vom 5. August 1853.

28. Über *Hrobonys* Persönlichkeit konnte nur ermittelt werden, dass er am Ende des Jahres 1844 ein Beamter der Eisenwerksverwaltung in Diósgyőr war (Szomolnoker Akten, No. 18 aus 1845). Diesen Familiennamen trifft man in dem in Anmerkung [16] angeführten Gedenkbuch mehrmals, es dürfte sich um eine Bergmannsfamilie handeln.

29. Vgl. hierüber die ausführlichen Darlegungen in der in Anmerkung [5] angeführten Abhandlung von St. *Vitális*, S. 219/220.

Es sei gestattet in diesem Zusammenhang eine irrige Auslegung einer Stelle dieser Arbeit *Vitális'* richtigzustellen. Auf Seite 220 wird behauptet, dass die Aufmerksamkeit der damaligen Eigentümer auf die Flotation durch den Verfasser der vorliegenden Abhandlung gelenkt worden sei und zwar auf Grund der *Gross*-schen Versuche. Diese Angabe stimmt nur insofern, als *Gross* einen halbbetrieblichen Apparat für Flotationsversuche konstruierte, die Empfehlung einer Einführung der Flotation als solcher erfolgte hievon unabhängig.

30. Vgl. Szomolnoker Akten. No. 536 und 819 aus 1853 und No. 3. aus 1854.

31. Gemeint sind Óvíz in der unteren Zips, in einem Seitental der Hnilec bei Svedlar, und Óhegy nördlich von Besztercebánya (slowakisch : Bańská Bystrica).

32. Vgl. J. *Széki :* Kurze Entwicklungsgeschichte des Metallhüttenwesens in Ungarn. Mitteil. d. berg- u. hüttenmänn. Abt., Sopron, 1938, Bd. X/3., S. 452. u 467.

33. Es fällt hiebei auf, warum sich das Berggericht in diesem Falle veranlasst sah, das Gesuch der Gewerkschaft zur Entscheidung dem Ministerium vorzulegen, obwohl dasselbe Berggericht 3½ Jahre vorher die Konzession zur Erbauung einer Schmelzhütte an die Gewerkschaft in Gyöngyös-Oroszi in seinem eigenen Wirkungskreis erteilte. Es ist möglich, dass sich in der Zwischenzeit die höhere Behörde im Geiste des damaligen absolutistischen und zentralistischen Regimes derartige Entscheidungen vorbehalten hatte.

34. Bruno *Kerl :* Handbuch der metallurgischen Hüttenkunde. 2. Aufl. Freiberg, 1861., Bd. I., Taf. XI. — Sehr ähnlich ist der in der Zeichnung (Abb. 1) dargestellte Schmelzofen auch dem sogenannten englischen Flammofen von Wales, der ebenfalls zur Behandlung von sulfidischen Erzen diente. Dieser ist u. a. beschrieben und abgebildet : *Faller*, A fémkohászattan kézikönyve. Selmecbánya, 1896, Bd. I., S. 284.

35. Vom 24. Dezember 1853, Zl. 15707/990. V.

36. Bei der Beurteilung des Verhaltens der Wiener Regierung darf ausserdem die Einstellung ihres dem Kapitalismus freundlichen Flügels nicht unberücksichtigt bleiben, der mit dem berüchtigten Innenminister Alexander Bach an der Spitze stets bereit war, die in Entwicklung begriffenen Kohlenbergbauunternehmungen des österreichischen Grossbürgertums, auch wenn jene in Ungarn lagen, in den verschiedensten Formen zu unterstützen.

37. Szomolnoker Akten, Zl. 200, 295, 342, 462 und 637 aus dem Jahre 1854.

38. Zu diesem Zeitpunkte war noch diese in Geltung, die Veröffentlichung des neuen österr. allg. Berggesetzes erfolgte einen Monat später.

39. Szomolnoker Akten, Minist. Erl. Zl. 6783/1545. V. vom 15. August 1854.

40. Alexius *Vass :* Die im Mátraer Gebirge bestehenden Silber- und Kupferbergbaue und die daselbst seit dem Jahre 1850 gebildeten Grubengewerkschaften. Österr. Zeitschr. f. Berg- und Hüttenwesen. Jg. 1857, S. 166, 175 und 182.

41. Es handelt sich um die in Anmerkung [90] genannte Publikation, S. 425.

42. Budaer berghauptmannschaftliche Akten, Jahr 1860, Prot. No. 102.

43. Budaer berghauptmannschaftliche Akten, P. No. 475 aus dem Jahre 1861.

In dem am Anfang dieser Arbeit zitierten »Montanhandbuch für 1861« kommt die Angabe vor, dass der Hauptgewerke der Gyöngyös-Oroszer Gewerkschaft, Eduard *Bach*, in Sachsen beheimatet war. Wie kam der Genannte wohl mit dem Mátraer Bergbau in Berührung? Die erste Spur war in dem hier angeführten Akt No. 475/1861 zu finden, wonach er Kaufmann zu Buchholz in Sachsen war. Vom Stadtrat Annaberg-Buchholz war zu erfahren, dass Ed. Jul.

Bach dort Kaufmann, Handelsherr und Seniorchef der Fa. G. F. Bach war. Sein jüngerer Bruder, Theod. Will. *Bach*, der an den Kuxen der Gewerkschaft ebenfalls beteiligt war, lebte als Verwalter der Güter des Freiherrn von *Beust* in Szántó in Ungarn, wo er auch starb. Diese Gemeinde, die heute Zagyvaszántó heisst, liegt am westlichen Fusse der Mátra, wo ein Freiherr Edmund von *Beust* Grundbesitzer und Vorstand des Wirtschaftsvereins des Komitats Heves in Gyöngyös war. (Vgl. Dr. *Horner* István : Gyöngyös városának történeti, statisztikai és geográfiai leírása. Pest, 1863, S. 87). In Kenntnis dieser Zusammenhänge ist die Annahme wohl nicht von der Hand zu weisen, dass der in Szántó ansässige *Bach* über den unweit betriebenen Bergbau in Gyöngyös-Oroszi unterrichtet gewesen sein konnte und sich an diesem nicht allein beteiligte, sondern auch seinen Bruder dazu bewog. Die Rolle der genannten beiden sächsischen Familien *Bach* und *Beust* in diesem Zusammenhange könnte vielleicht heute auch als einfaches Streben nach Gewinn erklärt werden. Doch darf auch nicht die seinerzeitige politische Lage, nämlich das aus Wien dirigierte absolutistische Regime, ausser Acht gelassen werden, durch welche auch die frühere scheinbare Unabhängigkeit Ungarns zusammen mit den Zollgrenzen aufgehoben wurde, was auf das ausländische Kapital eine nicht zu unterschätzende Anziehungskraft zur Beteiligung an industriellen Unternehmungen ausübte.

44. Budaer Akten, P. No. 783 aus 1861.

45. Budaer Akten, Zl. 893/1861.

46. Vgl. *Faller :* A fémkohászattan kézikönyve, Bd. III, 1902, S. 157.

47. Aloys Richard v. *Schmidt*, k. k. Minist.-Secretär für Berg-, Hütten- und Salinenwesen, hat auf Grundlage der an Ort und Stelle getätigten Erhebungen eine Relation am 26. September 1857 und eine zweite am 23. November 1859 über den Paráder Bergbau, nach einer Angabe *Stolls* (s. weiter unten) im Auftrage der Wiener Regierung angefertigt.

48. Mit dieser Angabe stimmt die in einer über das Komitat Heves erschienenen Monographie bezüglich der Gemeinde Gyöngyös-Oroszi mitgeteilte andere Angabe annähernd überein : »In der Gemarkung der Gemeinde bestand ein Gold-, Silber- und Bleibergwerk, dessen sämtliche Einrichtungen gegen die Mitte des XIX. Jahrhunderts in Folge einer Feuersbrunst vernichtet wurden und seitdem ist die Grube nicht im Betrieb.« (Dr. *Borovszky* Samu : Magyarország vármegyéi és városai. Heves vármegye. Budapest, 1909, S. 41.)

49. Budaer Akten No. 232 aus 1862 ; No. 188 aus 1863 ; No. 241 aus 1864 und No. 328 aus 1865. Zwei weitere Akten u. zw. No. 182. und No. 373 aus 1863 befassen sich ebenfalls mit der Gewerkschaft, doch sind sie vom Gesichtspunkt der vorliegenden Abhandlung belanglos.

50. Nach »Der Sprach-Brockhaus«, 4. Aufl., 1940, S. 135., gleich »Ausblühung« z. B. bei Kristallen ; bei Erzen wohl am besten mit »Verwittern« zu bezeichnen.

51. Diese beiden Sätze des Originaltextes können nur so gedeutet werden, dass in ihrer ersten Hälfte auf die Erzaufbereitung, während in ihrer zweiten Hälfte auf die Verarbeitung durch Laugerei Bezug genommen wird.

52. Gemeint ist Anton v. *Péch* (1822—1895), ein in seiner ungarischen Heimat angesehener Bergmann, der später eine glänzende Karriere machte und diese als Ministerialrat, Direktor des niederungarischen Bergwerks-Distrikts, Reichstagsabgeordneter, Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften usw. beendete, wobei er eine umfassende literarische Tätigkeit in seinem Fache entfaltete. Im Jahre 1868 gründete er die heute noch erscheinenden. »Bányászati és Kohászati Lapok«, das in ungarischer Sprache herausgegebene Fachorgan des Ungar. Landesvereins für Berg- und Hüttenwesen.

53. Budaer Akten, No. 686 aus 1864. Derselben liegt das Protokoll der in Frage stehenden und in Pest am 21. November 1864 abgehaltenen ausserordentlichen Generalversammlung bei

54. Budaer Akten, P. No. 328 aus 1865.

55. Budaer Akten, Zl. 526 aus 1867 und Zl. 480 aus 1868. Diese beiden Berichte waren schon an das zuständige von Wien unabhängige Ministerium nach Budapest gerichtet.

56. Karl *Stoll :* Auf Thatsachen und Acten gestützte Aufklärung zu den Schätzungen der zu dem Vermögen der Pest-Mátraer Bergwerks Union gehörenden Bergbaue, Einrichtungen und Apparate, Wohngebäude, Grundbesitz, mit Zurechnung der vorräthigen Gefälls- und Betriebsmaterialien und Inventarial-Gegenstände laut Stand und Befund mit Beginn der Jahre 1869 und 1873. Pest, 1873. 16°. Buchdruckerei von F. Buschmann. (Dieses Heft scheint recht selten zu sein und ist daher nicht leicht zugänglich ; das bei dieser Arbeit benützte Exemplar ist in der Bibliothek der Geologischen Landesanstalt in Budapest vorhanden.)

Karl *Stoll* war kön. ung. Bergrat, Mitglied des ungar. Reichstags, Ehrenbürger mehrerer Bergstädte. Er war am Unternehmen der Gewerkschaft beteiligt.

57. Über die Persönlichkeit *Kaufmanns* weiss man sehr wenig, auch nicht, wie lange er in Parád tätig war. Später trat er in den Staatsdienst und war um 1890 Berghauptmann und Chef der Berghauptmannschaft in Budapest.

58. Diese Tatsache ist sehr zu bedauern, da es sich bei dieser Berufung zweifellos nur um Peter Ritter v. *Rittinger* handeln kann, der vielfach als der eigentliche Begründer der Aufbereitungslehre berühmt ist. Das von ihm entwickelte Zerkleinerungsgesetz und das Gleichfälligkeitsgesetz bilden heute noch bewährte Grundlagen der Aufbereitungslehre (Vgl. hierüber z. B. die Festschrift »Die Montanistische Hochschule Leoben 1849—1949«, Wien, Springer-Verlag, 1949, S. 105).

59. Es dürfte sich hierbei um Benjamin v. *Janikovits* in Abrudbánya, den Verfasser eines in der »Österr. Zeitschr. für Bergs und Hüttenwesen«, Jg. 1860, No. 30., S. 245. veröffentlichten Aufsatzes »Beiträge zur neuen Entgoldungsmethode« handeln, der Bemerkungen über das Verhalten von Gold beim chlorierenden Rösten enthält.

60. In jener Zeit vielerorts verwendet, vgl. Bruno Kerl, 1. c. Bd. II., S. 590.

61. Diese Zeichnung wurde für diese Arbeit vom Herrn Oberbergrat Dipl. Ing. E. *Pollner*, der lange Jahre hindurch nach der 1923 erfolgten Inbetriebsetzung des Bergwerks und der Aufbereitungsanlage in Recsk dort tätig war und später Betriebsleiter wurde, überlassen, wofür ihm auch hier der verbindlichste Dank ausgesprochen werden soll. Die Zeichnung wurde vom Genannten nebst einigen Schriftstücken in den Nachlässen der früheren Gewerkschaften aufgefunden.

62. Vgl. Anmerkung [34], Bd. I., Taf. IX.

63. Die Erzlagerstätten der Mátra. Österr. Zeitschr. f. Berg- und Hüttenwesen, Bd. XIV., Jg. 1866, S. 411.

64. Die geologischen Verhältnisse der Mátra. Jahrbuch der k. k. geolog. Reichsanstalt. 1868, S. 517.

65. *FeS*, in der Natur als Magnetkies = Pyrrhotin vorkommend.

66. A. *Palmer* stand im Staatsdienste in Oláhláposbánya (Siebenbürgen) und war von 1868 bis 1870 beurlaubt, um während dieser Zeit in Parád tätig sein zu können.

67. Richtiger Gewerke genannt, da jedoch zu dieser Zeit die Kuxanteile der Gewerkschaft an der Pester Börse notiert und gehandelt wurden, wurde hier mit *Stoll* diese allgemeinere Bezeichnung gewählt. Die 128 Kuxen waren auf je 100 Stück aufgeteilt, es waren mithin 12 800 Aktien im Umlauf.

68. Diese Bezeichnung ist, wie man gleich sehen wird, unzutreffend.

69. Mit diesem Namen wurden vertikale Schmelzöfen mit nur 2 m hohem Schacht bezeichnet.

70. A mátrai bányaegylet kivonási kohója. Bányász. és Kohászati Lapok, Bd. V., Jg. 1872, S. 13/15.

71. Ähnliche Röstöfen, nur mit dem Unterschied, dass sie für Gasfeuerung eingerichtet sind, beschrieb z. B. K. *Faller :* A fémkohászattan kézikönyve, Bd. II., 1898, S. 362/363.

72. Hiezu sei bemerkt, dass es nach den Ergebnissen der gegenwärtig im Metallhüttenmännischen Institut in Sopron unter der Leitung von Prof. *Széki* durchgeführten Versuche möglich ist, aus den Erzen von Recsk sogar 90% des Kupfers mittels sulfatisierender Röstung herauszubringen, die Voraussetzung hiefür ist eine vorsichtige Führung des Vorgangs.

73. Man glaubt kaum fehlzugehen, wenn man auf Grund dieser lückenhaften Beschreibung die damals in Recsk bestandene Anlage mit der Kochsalzlaugerei-Anstalt in Tajova (ungarisch : Tajó) vergleicht, ja sogar annimmt, dass zwischen den beiden kaum wesentliche Unterschiede vorhanden waren. Die Laugerei-Anstalt in Tajova wurde von *Kerl*, 1. c., Bd. IV., Taf. III., Fig. 66—69 beschrieben.

74. Nach *Márkus* war es geplant, an Stelle von Salzsäure Schwefelsäure zu verwenden.

75. Budapester Akten, Zl. 396, 407, 477, 571 und 613 aus 1872 ; Zl. 198, 288, 587 und 1158 aus 1873. Im Jahre 1873 erfolgte die Vereinigung von Buda und Pest zu Budapest.

76. Budapester Akten, Zl. 381, 452, 640 und 781 aus 1876 ; Zl. 250, 251, 406, 407, 791 und 792 aus 1877.

77. Budapester Akten, Zl. 393/1878 = 43 Arbeiter ; Zl. 426/1879 = 4 Arbeiter; Zl. 338/1880 = 35 Arb. ; Zl. 577/1881 = 8 + 3 Arb. ; Zl. 354/1882 = 64 + 3 Arb. ; Zl. 536/1883 = = 74 + 3 Arb. ; Zl. 579/1884 = 88 + 3 Arb. ; Zl. 1326/1885 = 84 + 4 Arb. ; Zl. 1737/1886 = = keine Angabe. (In den letzten angeführten 5 Jahren geben die Zahlen vor dem Additionszeichen die Bergarbeiter, die Zahlen nach dem Additionszeichen die Hüttenarbeiter an).

78. Budapester Akten, Zl. 95 und 258 aus 1879 ; Zl. 222, 343, und 616 aus 1880 ; Zl. 11 aus 1882.

79. Budapester Akten, Zl. 48/1882, Zl. 707/1883 und 803/1883.

80. Budapester Akten, Zl. 853, 966, 993, 1003, 1006 und 1107 aus 1884 ; Zl. 12, 13, 261 und 511 aus 1885 und Zl. 748 aus 1886.

81. *Leithner* Antal báró : A felsőmagyarországi rézbányászat jelenje és jövője. Bányász. és Kohász. Lapok, Bd. XX., Jg. 1887, S. 53/55. In deutscher Sprache: Rückgang des ungarischen Kupferbergbaues. Pester Lloyd, 1884, Nr. 339 und 1885, Nr. 61. Eine über diesen Gegenstand in der »Österreichisch-Ungarischen Revue« vermutlich zu jener Zeit erschienene Veröffentlichung war nicht aufzufinden, doch dürften inhaltlich wenig Unterschiede zwischen den drei Publikationen bestehen.

82. Ungarisches Montan-Handbuch. Herausgeg. v. Oscar Guttmann Bd. I., Jg. 1881., S. 17. Verlag Moritz Perles, Wien ; Bd. II., Jg. 1888., S. 30. (Herausgeber von nun an Karl Déry) ; Bd. III., Jg. 1892., S. 35. ; Bd. IV., Jg. 1896., S. 45. ; Bd. V., Jg. 1900., S. 49.

83. Budapester Akten, Zl. 2219 und 2303 aus 1894.

84. Budapester Akten, Zl. 5204/1898.

85. *Végh* Joachim : Az 1893. évi pécskörnyéki bányászmozgalom. Századok 83 (1949) S. 292/310. (Joachim *Végh :* Die Bergarbeiterbewegung in der Umgebung von Pécs im Jahre 1893).

86. Budapester Akten, Zl. 5336/1898.

87. l. c., Bd. II., S. 371.

88. Ludwig *Weisz*, Ingenieur, damals wohnhaft in Berlin, war angeblich auch an sonstigen Unternehmungen in Ungarn beteiligt.

89. Diese Angabe rührt vom verstorbenen Direktor Dipl. Ing. Eugen *Gellért* her, der die Arbeiten in Dobsina leitete.

90. Fr. v. *Albert :* Heves és Külső Szolnok törv. egyes. vármegyéknek leírása. A magyar orvosok és természetvizsgálóknak Egerben 1868. évben tartott XIII. nagygyűlése alkalmából. Eger, 1868, S. 445.

91. Fr. *Kubinyi* sen. : Magyarországban talált kő- és bronzkori régiségek. (Archäologische Funde in Ungarn aus der Stein- und Bronzezeit.) Archeológiai Közlemények, Bd. II., 1859, S. 81.

92. M. *Jankovich :* Nógrád vármegye nevezetes Hársas hegyéről s annak hajdani esméretlen és aranymíves lakosairól. (Bronze- und Goldfunde am Hárshegy im Komitat Nógrád.) Tudom. Gyüjtem., Bd. I., Jg. 1828, S. 20/31 und Fr. *Kubinyi :* Nógrád vármegyében fekvő Kis Terenye helység határában Hársas nevű hegyen található régiségekről. (Die Alterthümer von Kis Terenye). Sas, Bd. XIV., Jg. 1833, S. 105/108.

93. Fr. *Pulszky :* A rézkor Magyarországon. (Die Kupferzeit in Ungarn.) Budapest, 1883, S. 17/18.

94. Flóris *Römer :* Műrégészeti Kalauz. (Archäologischer Führer.) Herausgeg. v. d. Ungar. Akad. d. Wissensch., Pest, 1866, S. 29.

95. Dieses Thema, also die Geschichte der Glashütten und der Pottascheerzeugung in der Mátra, würde es verdienen, auf Grund der im Komitatsarchiv in Eger vorhandenen zahlreichen, vielfach auch technische Einzelheiten enthaltenden Angaben gesondert bearbeitet zu werden. Herr Oberarchivar Dr. I. *Soós* in Eger — der auch diese Informationen zur Verfügung stellte — beabsichtigt sich diesem Gegenstande zu widmen.

Im Zusammenhang mit dem Thema vorliegender Arbeit sei hier nur bemerkt, dass eine einzige Quellenangabe hierbei einigermassen verwirrend wirkt (Ludovicus *Nagy :* Notitiae politico-geographico-statisticae inclyti regni Hungariae. Budae, Anna Landerer. 1828., p. 161/162), welche nämlich behauptet, dass in jener Zeit in Parád eine »*ustrina*« und unweit von Parád in Bodony eine »*fodina et officina*« bestand. Nach dem Wörterbuch von A. *Bartal* (A magyarországi latinság szótára, Budapest, Franklin, 1901.) in dem *ustrina* = *officina aeraria* = Röst und Schmelzhütte und *fodina* = Fundgrube heisst, wäre zu schliessen, dass zu jener Zeit zumindest in Parád eine metallurgische Hütte bestand, was jedoch entschieden verneint werden muss, nachdem oben nachgewiesen worden war, dass in der ersten Hälfte des XIX. Jahrhunderts in der Umgebung von Parád kein Bergbau und noch weniger Hüttenwesen betrieben wurde. Auf Grund archivalischer Feststellungen kann mit Bestimmtheit behauptet werden, dass zu der fraglichen Zeit in Parád lediglich ein Alaunwerk und eine Glashütte bestanden. Im Falle Bodony handelt es sich bestimmt um eine Glashütte, wie es bei der Deutung des Wortes *fodina*

bereits in Anmerkung [26] zu ersehen war. Ferner dürfte sich *Nagy* auch insoferne geirrt haben, dass er die Glashütte in Szuha vor Augen hatte, welche Ansiedlung zur Bodonyer Pfarre gehörte.

96. *Sebők* László : Gyöngyös és vidéke története. Gyöngyös, Herzog Ernő Ármin. 1880., S. 5.

97. Dr. *Ladányi* István : Hevesvármegyei ismertető és adattár. Budapest, 1936., S. 152.

98. *Pallas* Nagy Lexikona. 1893., Bd. V., S. 440. und *Révai* Nagy Lexikona. 1912., Bd. V., S. 678. Die beiden Angaben dürften sich aufeinander stützen.

99. Benannt nach Dr. Alois *Wehrle*, der von 1820 bis 1835 an der Bergakademie in Schemnitz als Professor tätig war.

100. Vgl. L. *Visnyovszky :* A szarvaskői wehrlit dúsítása TiO_2-re. Bányász. és Kohász. Lapok., Bd. *83* (1950), S. 58/67.

101. Max *Paschke :* Hundert Jahre Kokshochofen im Ruhrgebiet. Stahl und Eisen, *70* (1950), S. 741.

*

ДАННЫЕ ИЗ ИСТОРИИ ВЕНГЕРСКОЙ МЕТАЛЛУРГИИ ИСТОРИЯ МЕТАЛЛУРГИИ В РАЙОНАХ ГОРНОЙ ЦЕПИ МАТРА

Др. А. Шлейхер

Р е з ю м е

Нами намечено опубликование некоторых еще до настоящего времени неопубликованных данных об истории венгерской металлургии. В настоящее время на основании архивной документации разработан материал по металлургии районов Матра, находящихся на расстоянии 80—90 км. на северо-восток от Будапешта. При этом в первую очередь имеется в виду вторая половина XIX века, так как добыча руды в этих районах берет свое начало с первой половины прошлого столетия. В то время добыча руды не была связана с металлургией. Однако, можно с достоверностью установить, что в древний период в районах горной цепи Матра занимались металлургией или, по крайней мере переработкой добываемой там чистой меди. На вопрос о том, производилась ли добыча какой либо руды и занимались ли, даже, металлургией, начиная с древних времен и по настоящее время, за исключением известной добычи железной руды в южной части горной цепи начиная с XIII столетия, из-за недостатка архивной документации, ответа мы дать не можем. Известно только то, что архивная документация, начиная с середины XVII столетия, не содержит никаких данных по горнорудной и металлургической промышленности. Несмотря на имеющиеся в документации пробелы, из имеющихся у нас архивных данных мы все таки в общих чертах сообщаем сведения потому, что в одной части горной цепи производятся подающие надежды работы по восстановлению добычи руды, которые вероятно смогут дать основание для оборудования металлургического завода. В связи с этим считаем своей моральной обязанностью указать на историческое прошлое.

NEUE ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN DES AKTIVIERTEN ALUMINIUMS

Prof. Dr. A. ROMWALTER und Dipl. Ing. A. HAUER

Eingegangen am 16. Febr. 1951.

Nachdem Friedrich *Wöhler* 1827 elementares Aluminium ausgebracht hatte, beschäftigten sich zahlreiche Forscher mit diesem Metall. Alsbald wurde mehrfach beobachtet, dass es sich trotz seiner Luftbeständigkeit rasch oxydiert, wenn die amalgamierte Oberfläche der Luft ausgesetzt wird. Etwa 70 Jahre später sammelte H. *Wislicenus* alle diesbezüglichen Mitteilungen [1] und bis heute ist die Veröffentlichung *Wislicenus'* die ausführlichste Schrifttumsquelle über die Aktivierung des Aluminiums geblieben. Obwohl seither viele Arbeiten über aktives Aluminium erschienen sind, findet sich bezüglich der Aktivierung keine neue Angabe. Auch *R. Fricke* und *K. Jockers* bedienten sich der altbekannten Aktivierungsmethode, welche schon *Wislicenus* angewendet hatte. [2] Den Gegenstand der vorliegenden Mitteilung berühren jedoch weder *Wislicenus*, noch die späteren Arbeiten über aktiviertes Aluminium, deren Aufzählung sich also erübrigt. Der eine der beiden Verfasser vorliegender Abhandlung hatte bereits darauf hingewiesen [3], dass im Gleichgewichte der Vorgänge

1. $2Al + 3H_2O$ (Dampf) $\rightarrow Al_2O_3 + 3H_2 + 204450$ cal, bzw.

2. $2Al + 1{,}5\ O_2 \rightarrow Al_2O_3 + 378\,000$ cal,

bei Zimmertemperatur so geringe Wasserdampf-, bzw. Sauerstoff-Partialdrücke zu gewärtigen sind, dass aktiviertes Aluminium laut 1. zum Trocknen, laut 2. zur Bindung des O_2-Gehaltes von Gasgemischen hervorragend geeignet sein könnte. Diese Anwendungsmöglichkeiten schienen verheissungsvoll zu sein und darum wurde die Messung der Geschwindigkeit und der zur Einstellung des Gleichgewichtes erforderlichen Zeit versucht.

Es wäre denkbar, dass bei gleichzeitiger Gegenwart von Wasserdampf und Sauerstoff beide Vorgänge zusammen stattfinden, z. B. wenn feuchte Luft auf aktiviertes Aluminium wirkt. Unter solchen Umständen müsste bei gleichbleibenden Zustandsvariablen der Vorgang 1. ohne Volumänderung ver-

laufen, Vorgang 2. hingegen Volumabnahme herbeiführen. Zu berücksichtigen ist ferner, dass die denkbaren Vorgänge

$$3.\ \mathrm{Al\,(aktiv)} + 2\mathrm{H_2O\,(Dampf)} \rightarrow \mathrm{Al}\begin{matrix}\diagup\!\!\diagdown \mathrm{O} \\ \diagdown\!\!\diagup \mathrm{O{-}H}\end{matrix} + \frac{3}{2}\,\mathrm{H_2}\ \text{und}$$

$$4.\ \mathrm{Al\,(aktiv)} + 3\mathrm{H_2O} \rightarrow \mathrm{Al(OH)_3} + \frac{3}{2}\,\mathrm{H_2}$$

durch Volumabnahme den Vorgang 2. vortäuschen können. So verlockend es ist, diese Möglichkeiten auf gasanalytischem Wege klarzustellen, legten Fehlerrechnungen nahe, vorerst den volumetrischen Weg zu wählen. Entscheidend war hierbei auch die Erkenntnis, dass der gasanalytische Weg, trotz mancher Mängel erst dann angewendet werden muss, wenn Volumänderungen eintreten.

Zum ersten Versuch diente Aluminium, welches nach *Wislicenus* in wässeriger $HgCl_2$-Lösung aktiviert, hernach erst mit Wasser, dann mit Alkohol und schliesslich mit Äther gewaschen und im Luftstrom rasch getrocknet wurde. Danach wurde es mit dem Luftinhalt des auf *Abb.* 1. ersichtlichen und dort auch kurz beschriebenen Mikrovolumeters in Berührung gebracht [4].

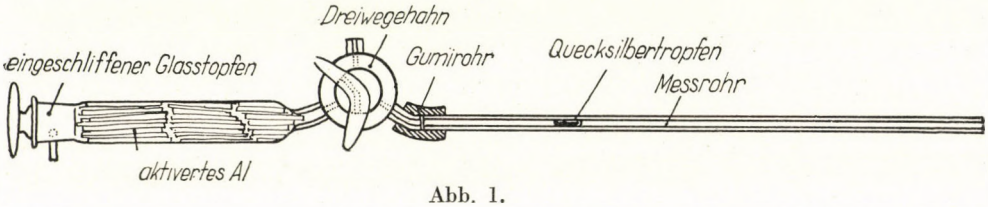


Abb. 1.

Der Quecksilbertropfen zeigt das jeweilige Volum des gesamten dahinterliegenden Gases an. Etwaige Volumänderungen sind am Millimeter-Massstab ablesbar nur sind sie gemäss der gleichzeitigen Werte beider Zustandsvariablen umzurechnen. Bei Dauerversuchen empfiehlt es sich, das Messrohr dem viel weiteren Glasbehälter anzuschmelzen, weil die sonst bequeme Gummirohrverbindung beider Vorrichtungsteile z. B. für H_2 durchlässig ist. Gleichlaufend wurden Makroversuche in der bekannten Rüdorffschen Flasche ausgeführt, deren nähere Beschreibung überflüssig sein dürfte, weil sowohl die Mikro-, wie auch die Makroversuche übereinstimmend bewiesen, dass keine Volumveränderung eintritt, wenn aktives Aluminium mit feuchter Luft in Berührung steht. Offensichtlich war hingegen die Reaktion, denn das aktive Aluminium zeigte alsbald den reifartigen Oberflächen-Anflug von Al_2O_3, der allerdings auch im Dauerversuche nicht weiter zunahm, während das nach Abschluss der Versuche aus den Apparaten entnommene Aluminium an der freien Luft rasch weiteroxydiert, je endlich ganz korrodiert wurde.

Somit wurde erwiesen, dass der Vorgang 2. weder zugleich mit 1. noch im darauffolgenden Dauerversuche merklich wird, also im Vergleich zu 1. so

langsam verläuft, dass aktiviertes Aluminium als O_2-Absorbent praktisch nicht anwendbar ist. Dagegen scheint aktives Aluminium als Entwässerungsmittel tauglich zu sein. Das Ausbleiben der Volumabnahme beweist ferner, dass bei feuchter Luft eigentlich nur der Vorgang 1. stattfindet und dass 3. und 4. höchstens zwischendurch möglich sind ; dann ist es aber selbstverständlich, dass aktives Aluminium auch völlig oder teilweise bewässertes Al_2O_3 entwässert, also wirksamer trocknet, als oberflächenaktives Al_2O_3.

Es lag ausserhalb des Arbeitsplans, zu prüfen, ob auch bewässertes Silikagel durch aktiviertes Aluminium entwässert wird, doch soll darauf hingewiesen werden, dass dies eine Möglichkeit bedeuten würde, um mit Wasser gesättigtes Silikagel ohne Temperaturerhöhung für neuerliche Wasseraufnahme tauglich zu machen, ohne hierbei das Altern des Silikagels durch die gebräuchliche Erwärmung im Luftstrom vorwärtszutreiben. Im allgemeinen dürfte aktives Aluminium zur Bestimmung des Feuchtigkeitsgehaltes verschiedener Systeme ebenso brauchbar sein, wie CaC_2. Unter anderem wurde z. B. beobachtet, dass aktives Aluminium in Öle, Alkohol, oder Äther getaucht, aus dem Wassergehalte derselben sogleich H_2 entwickelt. Allerdings ist zu beachten, dass gegebenen Falls durch naszierenden Wasserstoff Hydrierungen eintreten können, wodurch die Feuchtigkeitsbestimmung aus dem sich ergebenden Wasserstoffvolum unter Umständen zu niedrig ausfallen müsste.

Untersuchung des Vorganges $2\ Al + 3H_2O = Al_2O_3 + 3H_2 + 204450\ cal.$

Obwohl die besprochenen Vorversuche bewiesen, dass aktives Aluminium bei feuchter Luft ausschliesslich durch diesen Vorgang oxydiert wird, scheint dennoch die durch flüssiges Wasser herbeigeführte Reaktion zur Messung seiner Geschwindigkeit und Leistung am geeignetsten zu sein, weil unter solchen Umständen die Konzentration des Wassers konstant und das Wasser auch praktisch frei von gelösten Stoffen bleibt. Somit gewährleistet diese Versuchsanordnung auch den einwandfreien Vergleich der Wirksamkeit verschiedener Aktivierungsweisen.

Mit verschieden gebauten Glasgeräten durchgeführte Geschwindigkeitsmessungen ergaben, dass die Korrosion aktivierten Aluminiums in flüssigem Wasser unregelmässig periodisch verläuft. Auch der Grund dieses schwankenden Verlaufes zeigte sich, indem sich die Metalloberfläche mit einer Oxydrinde bedeckt, welche zeitweilig als stückiger Schorf abgestossen wird. Wahrscheinlich verhindert die Amalgamphase die feste Bindung der Oxydschicht am Metallkörper, während die Quellung durch Wasserbindung am stark oberflächenaktiven, frischgebildeten Al_2O_3 die zur Loslösung der Oxydrinde erforderliche Spannung derselben herbeiführt. Die abblätternde Rinde ist immer grau gefärbt, weil sie wohl stets kolloiddisperses Metall, vornehmlich Hg, mitführt und darum auch stetige Aktivitätsveränderung verursacht. Diese Beobachtung erklärt zugleich den ausnahmslos eintretenden Aktivitätsverlust

in flüssigem Wasser, bevor das Aluminium gänzlich in Oxyd umgesetzt wird. Auf diese Beobachtungen gestützt wurde versucht, die bestgeeignete Messungsvorrichtung zu schaffen. Von der Beschreibung der mangelhaft befundenen Vorrichtungen sei abgesehen und es sei nur jene Ausführung besprochen, mit welcher die mitzuteilenden Ergebnisse gewonnen wurden.

Diese Vorrichtung soll durch stetige Drehbewegung die Ablösung der hemmenden Rinde fortdauernd erleichtern. Zur Vermeidung der Kautschuk-

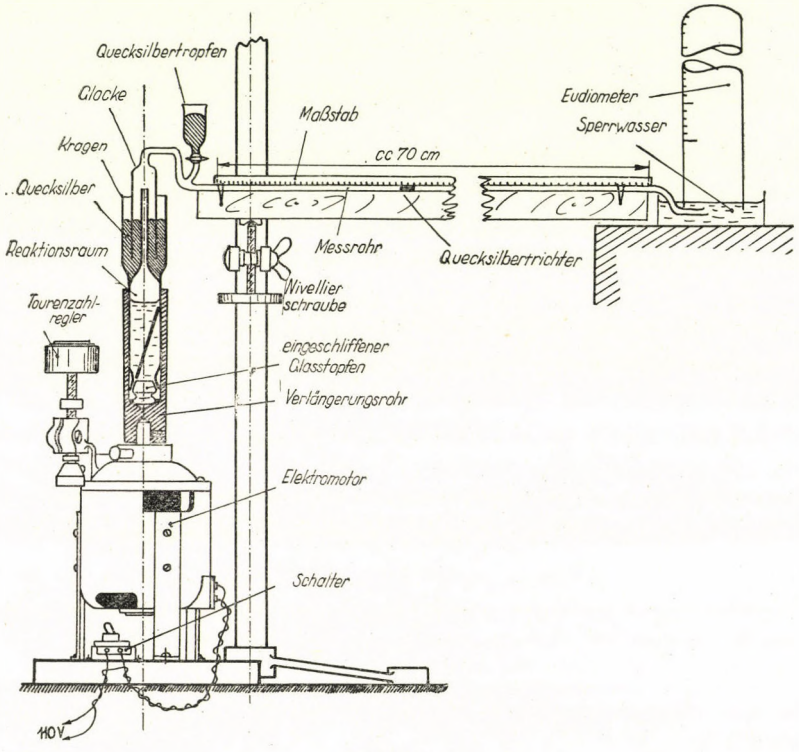


Abb. 2.

verbindung diente der Quecksilberverschluss und zwecks seiner Anwendbarkeit erfolgte die Drehung um eine lotrechte Achse. Da nur sehr geringe Leistungen zum Betriebe erforderlich waren, so genügte als Antriebsmaschine ein Grammaphon-Motor. Seine lotrechte Achse trug das Verlängerungsrohr, welches das rohrförmige Reaktionsgefäss aufnahm und mitführte. *Abb.* 2 und die darauf ersichtliche kurze Beschreibung veranschaulicht die Anordnung dieses Gerätes, welches von *A. Hauer* selbst angefertigt wurde.

Das Reaktionsgefäss dreht sich zusammen mit dem angeschmolzenen Kragen und dem in letzterem befindlichen Quecksilber, während die in das Quecksilber getauchte Glocke und das angeschmolzene Messrohr unbewegt,

ble ben. Die Stabform des aktivierten Aluminiums erleichtert die Messung seiner Oberfläche, die zwei bis vier gleichen Stäbe und das Wasser fördern durch fortdauernde, gegenseitige Bewegung die Abscheuerung der sich bildenden Rinde. Wesentlich ist die entsprechende Umlaufszahl, weil bei zu rascher Umdrehung die Stäbe im Felde der Zentrifugalkraft sogleich in feste Stellung gelangen. Wenn der Motor zu laufen beginnt, hebt die Zentrifugalkraft die äussere Schicht des Quecksilbers ausserhalb der Tauchglocke, zugleich sinkt die innere Schicht innerhalb der Tauchglocke und auch der Druck. Beim Abstellen des Motors werden diese geringen Spiegelveränderungen nebst ihren Weiterungen rückläufig. Der laufende Motor erwärmt sich selbstverständlich in geringem Masse, auch der Korrosionsvorgang liefert etwas Wärme, und im Dauerversuche stellt sich bald eine sehr geringfügige, gleichbleibende Temperaturerhöhung des Reaktionsgemisches ein. Kleine Abweichungen des Mittelpunktsabstandes der umlaufenden Teile sind unvermeidlich, doch erwachsen hieraus dank der mässigen Umdrehungszahl keinerlei Schwierigkeiten, sondern nur der Vorteil fortdauerden Bebens im Reaktionsgefäss, was die Entrindung fördert. Für die Geschwindigkeitsmessung wurde das Messrohr durch Verschiebung eines gewogenen Quecksilbertropfens sorgfältig kalibriert. Sein Querschnitt blieb innerhalb der Messlänge von 700 mm praktisch gleich, das Rohrvolumen betrug 0,112 cm^3/cm. Läuft der Quecksilbertropfen zuletzt aus dem Rohr, so kann aus dem Quecksilbertrichter ein neuer Tropfen eingelassen werden. Diese Einrichtung ermöglicht zwischendurch immer sehr genaue Geschwindigkeitsmessungen ohne Gasverluste, weil alle Gasanteile in das Eudiometer gelangen. Selbstverständlich drängt der entbundene Wasserstoff anfangs die Luft aus dem Reaktionsgefäss und dem Messrohr, was aber die Messung weder im Rohr, noch im Eudiometer stört, weil doch nur das Volum, nicht aber die Beschaffenheit des Gases in Frage kommt.

Zum Einzelversuche wurden gleich lange Stücke eines dickeren Aluminiumdrahtes von einer anfänglichen Gesamtoberfläche von 2 cm^2 verwendet. Der Aktivierung ging eine kurze Anätzung in starker Lauge, dann eine Spülung mit fliessenden Wasser voraus. Die Aktivierung selbst erfolgte durch Untertauchen der vorbereiteten Stücke in einer gemessenen Menge wässeriger $HgCl_2$-Lösung von 1 Gewichtsprozent Gehalt während 1 bis 100 Sekunden, weil es sich zeigte, dass die Tauchzeit die Leistung des aktivierten Aluminiums stark beeinflusst.

A. *Hauer* beobachtete, dass die Aktivierung in 1 gewichtsprozentiger ätherischer $HgCl_2$-Lösung viel wirksamer ist. Das soeben geschilderte Verfahren bleibt ansonsten unverändert. Auch die Anwendung alkohol-ätherischer $HgCl_2$-Lösung wurde von A. *Hauer* versucht, doch erwies sich die rein ätherische Lösung als verlässlicher. Nachfolgend werden charakteristische Beispiele der durchgeführten Messungen in Zahlentafeln und der Übersichtlichkeit halber auch in Schaubildern gezeigt.

Zum Vergleich diene vorerst *Abb.* 3 welche die aus überschüssigen reinem Wasser entwickelte gesamte H_2-Gasmenge in Abhängigkeit von der Tauchzeit, sowohl für die wässerige, wie auch für die ätherische, 1 gewichtsprozentige $HgCl_2$-Lösung veranschaulicht. Beide Kurven geben die H_2-Gasmenge in cm^3 auf der Ordinate, die Tauchzeit beim Aktivieren in Sekunden auf der Abszisse an, wobei die besagte H_2-Gasmenge immer die gesamte Gasmenge bedeutet, welche die betreffenden aktivierten Aluminiumstücke gleicher Oberfläche zu

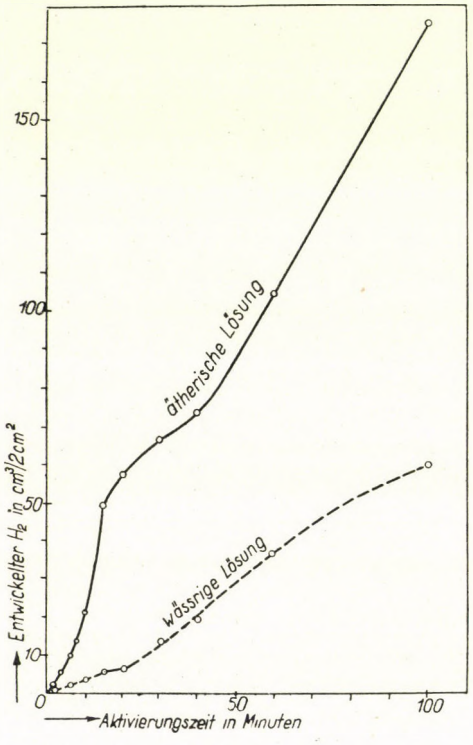


Abb. 3.

entbinden vermochten. *Abb.* 3. zeigt deutlich, dass die Aktivierung in ätherischer $HgCl_2$-Lösung rund 3-mal wirkungsvoller ist, als in wässeriger $HgCl_2$-Lösung. Darum kam bei allen folgenden Messungen stets die Aktivierung in aetherischer Lösung zur Anwendung. Die Geschwindigkeitsmessungen erfolgten in reinem Wasser, immer bei Anwendung von 2 cm^2 aktivierter Aluminiumoberfläche. Die Zahlentafeln enthalten in der oberen Zeile die Zeitangaben in Minuten, in der unteren Zeile die entsprechenden Verschiebungen des Quecksilbertropfens in Zentimetern.

1. Versuch 18° C

5	10	15	20	25	30	36	40	45
1,5	6,0	10,5	15,2	20,7	24,8	28,6	32,4	34,2
50	56	60	Minuten					
35,9	36,4	36,6	cm					

2. Versuch 18° C

5	10	15	20	26	41	75	Minuten
6,3	13,3	20,7	24,9	26,5	32,2	35,9	cm

Abb. 4. enthält die Schaubilder des 1. und 2. Versuches. Aus *Abb.* 4. ist ersichtlich, dass sich die Geschwindigkeit unregelmässig periodisch veränderte. Multipliziert man die cm Angaben mit dem Messrohrquerschnitt (0,112 cm^2), so erhält man das betreffende H_2-Volumen, also die Volum-Zeitkurve, somit das jeweils entbundene Volumen des H_2-Gases. Es tauchte die Frage auf, ob die Ablösung der Rinde, also die Ursache der Geschwindigkeitsänderungen durch mechanische Spannungszustände der Drahtoberfläche beeinflussst wird. Darum

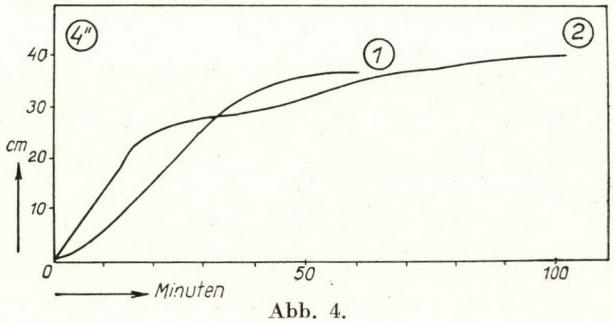


Abb. 4.

verdrehte *A. Hauer* den zu gebrauchenden Draht um die Längsachse bis zum Bruch, etwa 15mal um 360°. Hernach wurden wieder aktivierte Drahtstücke von insgesamt 2 cm^2 Oberfläche zur Messung verwendet. Anbei die Ergebnisse.

7. Versuch 16° C

0	3	12	22	27	30	33	36	39
0,3	0,1	2,0	5,2	8,7	10,1	13,5	15,9	18,3
42	45	48	51	54	57	60	63	66
20,7	23,0	25,2	27,2	29,0	30,8	38,7	35,5	39,5
69	71	74	77	81	86	87	92	Minuten
43,5	46	49,9	51,2	53,4	55,3	56,5	56,5	cm

8. Versuch 16° C

3	6	9	12	15	18	21	25	27
0,4	1,0	1,4	4,1	6,5	8,4	11,0	14,4	16,1
30	33	36	39	42	45	48	51	54
18,8	21,5	24,0	26,6	29,4	33,1	38,1	44,8	51,5

57	60	63	66	69	72	75	78	81
55,5	27,7	58,9	60,2	61,7	62,3	62,6	62,9	63,0

84	87	90	Minuten
63,1	63,5	64,1	cm

9. Versuch 16° C

0	6	9	12	15	18	21	24	27	30
0	0,8	1,9	3,4	4,7	6,2	9,0	11,6	14,4	17,1

33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
20,1	23,1	26,1	29,0	31,8	34,4	37,0	40,0	44,0	49,8

63	66	Minuten	
55,8	63,2	cm	

Abb. 5. enthält die Schaubilder der Versuche 7—9. Abermals, jedoch noch deutlicher, zeigt sich hier die unregelmässige Schwankung der Geschwindigkeit,

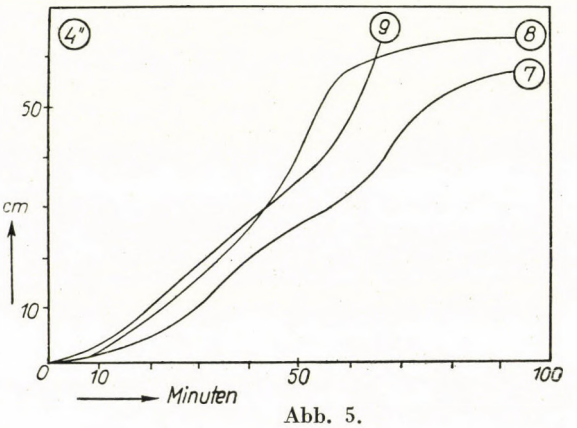


Abb. 5.

und die Streuung der auf gleichen Abszissen liegenden Punkte ist stärker. In Anbetracht der diesmal zweifellos bestehenden Spannungen wurden nunmehr Versuche mit ungedrehtem, hingegen 3 Stunden lang bei 500° C ausgeglühtem Draht durchgeführt, um alle Spannungen tunlichst zu beseitigen.

10. Versuch 15° C

0	3	6	9	30	33	36	39	42	48
0	0,1	0,2	0,2	7,2	7,8	10,4	12,2	12,2	17,1

54	57	60	69	78	93	102	114	141	Minuten
20,7	22,3	23,7	28,5	33,1	41,9	46,6	52,6	64,5	cm

11. Versuch 15° C

0	3	6	9	12	15	8	21	24	27
0	0,3	1,15	2,4	4,2	7,4	11,0	15,2	19,4	23,4

30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
27,0	30,0	32,8	35,2	37,3	39,5	41,5	43,5	45,7	48,3

60	63	66	69	Minuten
51,0	57,6	58,6	62,5	cm

12. Versuch 15° C

0	9	12	15	18	21	30	33	39	
0	0,9	1,9	2,8	4,0	5,4	10,7	12,8	17,5	
42	45	48	51	54	57	60	63	66	
19,9	22,3	24,7	27,1	29,4	31,8	34,2	36,5	39,0	
69	72	75	78	81	84	87	90	93	Minuten
41,2	43,4	45,7	48,0	50,3	52,1	54,1	56,4	58,4	cm

13. Versuch 15° C

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
0	0	0,05	0,5	0,9	1,5	2,6	3,4	4,6	6,3
30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
8,5	11,3	14,7	18,6	23,0	27,9	37,9	37,9	42,6	47,0

60	63	66	69	72	Minuten
51,0	54,7	58,0	60,9	63,2	cm

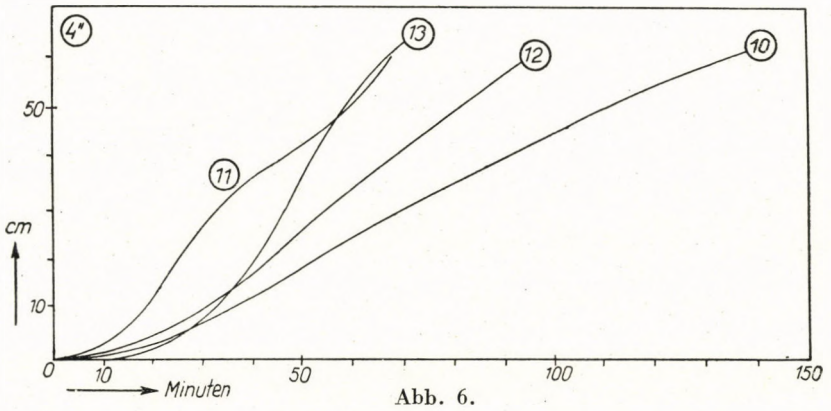


Abb. 6.

Laut *Abb.* 6 erweist sich die Reaktionsgeschwindigkeit des in ausgeglühtem Zustand aktivierten Aluminiumdrahtes weniger veränderlich, jedoch die Streuung der gleichen Abszissen zugehörigen Punkte scheint grösser zu sein. Es ist aber wahrscheinlich, dass die besagte Streuung auch mit der Anätzung der verwendeten Drahtstücke in Beziehung steht, insbesondere mit der Temperatur beim Ätzungsvorgang. Die Erfahrung zeigte nämlich, dass es vorteilhaft ist, wenn die Lauge warm genug zur Anwendung kommt, um die sofortige Wasserstoffentbindung zu gewährleisten. Gerade die Ätzung des Aluminiums zum 13. Versuche kam in etwas kühlerer Lauge nur träge in Gang und darum dürfte auch die nachfolgende Aktivierung weniger gelungen sein. Die gemachten Erfahrungen weisen darauf hin, dass die besagte Streuung überhaupt mit dem Verlauf der Ätzung zusammenhängt, denn die Reaktion aktivierten Aluminiums

kommt niemals gleichartig in Gang, sondern teils verzögert, teils sofort, aber jedenfalls vorerst mit deutlicher Beschleunigung. Berücksichtigt man diesen Umstand durch gleichlaufende Verschiebung der Kurven entlang der Abszissenachse, so vermindert sich die Streuung ganz bedeutend — vom 13. Versuch abgesehen — auch im Falle der Versuche 10, 11 und 12.

Weitere Geschwindigkeitsmessungen kamen unter gleichen Umständen zur Ausführung, jedoch mit längerer Tauchzeit (10 bzw. 20 Sekunden) beim Aktivieren statt der bisherigen Tauchzeit von 4 Sekunden. Unverändert wurde ätherische $HgCl_2$-Lösung von 1 Gewichtsprozent $HgCl_2$-Gehalt, sowie 2 cm^2 Aluminiumoberfläche angewendet. Untenstehend die Messungsergebnisse der Versuche 14, 15, 16, 17 und 18.

14. Versuch 15° C 10" Tauchzeit beim Aktivieren

0	3	6	9	12	15	18	21	24
0	0	0,3	1,0	2,0	3,0	4,3	6,2	8,9
27	30	33	36	39	42	45	48	49
12,0	15,6	18,8	21,5	23,7	25,3	26,8	27,9	29,1
54	57	60	63	66,5	69	72	75	78
30,2	31,4	32,4	33,6	35,0	36,4	38,0	40,0	42,3
81	84	87,5	90	93	96	99	102	105
45,2	49,0	55,5	61,6	7	19,9	35,2	59,6	7,2
			0,0				0,0	
108	111	114	123	135	152	182	Minuten	
13,7	17,2	20,5	26,6	32,2	37,5	39,8	cm	

15. Versuch 15° C 10" Tauchzeit beim Aktivieren

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
0	0,7	3,5	7,0	11,1	15,3	19,6	23,7	27,7	31,0
30	33	36	39	42	45	48	51	54	69
34,3	37,9	42,3	49,9	57,7	8,3	13,3	15,0	16,5	28,4
72	75	78	81	84	87	Minuten			
24,4	25,0	25,8	26,3	27	27,6	cm			

16. Versuch 15° C

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
0	0,1	0,7	1,3	2,4	2,7	3,8	5,5	7,9	11,0
30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
15,0	19,1	23,0	25,9	28,4	31,0	35,0	40,5	48,0	6,7
								0,0	
60	63	66	69	72	75	78	Minuten		
12,8	18,6	24,4	30,3	35,4	39,1	42,1	cm		

17. Versuch 15° C 10" Tauchzeit beim Aktivieren

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
0,0	0,0	0,4	1,0	1,6	2,1	2,9	4,1	5,9	8,3
30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
11,5	15,5	19,8	24,4	28,9	33,2	37,3	41,4	45,1	48,6

60	63	66	69	72	75	78	81	84	87
51,9	55,1	58,3	61,7	6,1	9,3	12,6	16,0	19,0	23,5
90	93	96	99	102	105	108	111	114	117
28,0	32,8	37,8	43,1	48,8	54,8	61,2	8,0	15,8	24,0
						1,9			
120	123	126	129	132	135	138	141	144	147
32,3	40,5	48,9	57,0	8,9	14,2	18,6	22,7	25,4	27,4
			1,7						
150	153	156	159	168	221	240	Minuten		
29,9	30,7	32,0	33,3	36,3	43,5	43,9	cm		

18. Versuch 15° C 20" Tauchzeit beim Aktivieren

0	3	6	9	12	15	18	21	25	27
0	0	1,0	1,9	2,5	3,6	4,4	5,8	8,5	10,2
30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
13,4	17,3	22,1	27,4	33,2	39,5	46,0	52,5	54,0	6,1
								0,4	
60	63	66	69	72	75	78,5	81	84	87
12,3	19,0	23,4	27,9	31,8	35,1	38,4	40,5	43	45,1
90	93,5	96	99	102,5	105	103	111	113	117
47,4	50,0	52,0	54,2	56,8	58,4	61,1	2,2	5,6	8,7
						0,0			
120	123	126	129	132	135	138	141	144	147
12,8	18,0	24,3	32,0	41,4	56,0	12,5	26,5	39,8	52,0
					0,8				0,0
150	153	156	159	162	165	168	171	174	177
10,6	21,4	27,6	31,2	34,2	37,1	39,5	41,8	43,8	45,8
180	183	186	189	192	234	246	276	Minuten	
47,5	49,7	51	52,9	52,9	60,0	62,2	63,1	cm	

Die Schaubilder der Versuche 14 bis 18 sind auf *Abb.* 7 vereinigt.

Alle fünf Kurven sind deutlich gestaffelt, somit äussern sich die periodische Geschwindigkeitsänderungen abermals, aber nicht minder prägt sich jedesmal auch die doppelt gekrümmte Gestalt der Mittellinie aller fünf welligen Kurven aus, denn immer steigen sie erst sanft, dann steil an, um endlich wieder in sanften Anstieg zu enden. Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass die sich ablösende Rinde offenbar dispergiertes Hg mitführt. Anfangs scheint der Hg-Verlust die Aktivität zu steigern, diesem Abschnitt des Vorganges entspräche der erste sanfte Anstieg, welcher nach einer gewissen Frist die grösste Aktivität zeigt. Der nun einsetzende steile Abschnitt jedoch geht mit weiteren Hg-Verlusten der Oberfläche einher, so dass nach einer weiteren Frist wieder Aktivitätseinbusse merklich wird und damit der letzte, wieder sanft ansteigende Abschnitt beginnt. Die im Laufe des Vorganges unverkennbaren Aktivitäts-, bzw. Geschwindigkeitsschwankungen sind also nicht allein durch die Rindenbildung und Ablösung, sondern auch durch die stetige Ände-

rung der Amalgamzusammensetzung bedingt. Eine bestimmte Amalgamzusammensetzung entspricht der grössten Aktivität, also dem steilen und meistens nahezu gradlienigen Mittelabschnitt der Kurve, genauer seinem Kernstück. Auch die in Laugen hochaktive Al — Cu — Zn — Legierung hat eine ganz bestimmte, von *Devarda* gefundene Zusammensetzung. Im Lichte dieser Erfahrungen ist sowohl der Einfluss der Tauchzeit, wie auch jener des Verlaufes der Ätzung auf den Aktivierungserfolg verständlich. Wahrscheinlich könnte man auch eine Aluminiumamalgam-Zusammensetzung finden, bei welcher

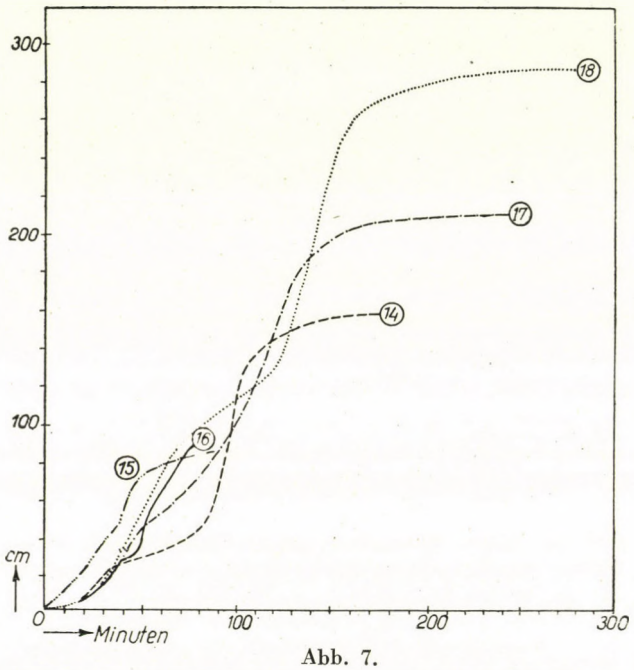


Abb. 7.

diese Legierung in neutraler Lösung bis zur völligen Oxydation ihres Al-Gehaltes unverändert hochaktiv bleibt, und keine mehr oder minder haftende Oxydrinde bildet, sondern stetig zu Al_2O_3 — Hg-Dispersion zerfällt. Eigentlich wäre also diese Legierung die Verkörperung jener Eigenschaften, welche man »aktives Aluminium« nennt.

Keinesfalls ist die Zementation von Hg auf Al die geeignete Darstellungsweise des so gekennzeichneten aktiven Aluminiums und es hat höchstens praktische Bedeutung, wenn man die Leistung und Reaktionsgeschwindigkeit des durch Hg-Zementation aktivierten Aluminiums misst. Die mitgeteilten Versuche ergeben als Mittelwert der Leistung dieses Zementationserzeugnisses je cm^2 Oberfla he 90 cm^3 H_2-Gas, wobei die Aktivität innerhalb 200 Minuten erlischt. Die durchschnittliche Reaktionsgeschwindigkeit des Zementationser-

zeugnisses mit reinem Wasser beträgt bei 15° C Temperatur je Minute und cm^2 Oberfläche 0,12 cm^3 H_2-Gas.

Nun sollte der Einfluss der Wasserkonzentration auf die Reaktionsgeschwindigkeit des aktivierten Aluminiums klargestellt werden. In Anbetracht der beträchtlichen Dauer der Geschwindigkeitsmessungen und der beschränkten verfüglichen Zeit, schienen Versuche mit wässerigen Alkohol tauglich. Zur Anwendung kam käuflicher konzentrierter Äthylalkohol von etwa 96 Volum prozent bzw. 94 Gewichtsprozent Alkoholgehalt, ferner aus solchem mit Wasser hergestellter, verdünnter Alkohol von 25 Gewichtsprozent Gehalt. Das Aluminium von 2 cm^2 Oberfläche wurde beim Aktivieren 20 Sekunden lang in eine ätherische $HgCl_2$-Lösung von 1 Gewichtsprozent getaucht.

Versuch 21. Konzentrierter Äthylalkohol 15° C

0	0,5	1,0	1,5	2	2,5	2,6	3,5	4
0	1,5	6,1	10,7	16,6	22,7	35,7	36,6	43,3
4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
50,0	57,8	7,2	14,3	20,5	26,1	32,1	37,1	42,4
	0,0							
9	9,5	10,0	10,5	11,0	11,5	$12^1/_6$	$15^1/_6$	24,5
46,2	48,0	50,8	53,6	57,1	62,4	6,8	45,1	66
					0,0		0,0	0,0
25	25,5	26	26,5	27	27,5	28	28,5	29
3	11,5	24,4	39	53,4	15,9	32,6	41,1	64,1
				0,0				0,0
29,5	30	30,5	31	31,5	32	32,5	33	33,5
10,5	21,7	31,4	45,9	63,5	13,2	23,5	37,1	52,5
				0,0				0,0
34	34,5	35	$35^8/_{60}$	37,5	38	38,5	39	39,5
14,8	30,5	46,7	51,0	28,0	33,4	43,3	54,0	12,0
			0,5				0,0	
40	40,5	41	41,5	42	42,5	43	43,5	Stunden
25,0	38,2	51,3	64,1	14,2	24,4	34,2	34,2	cm
			0 0					

Zuerst wurde der Versuch mit konzentriertem Äthylalkohol ausgeführt. Dieser zeigte bei 15,5° C Temperatur am Areometer 0,808 g/cm^3, mit der Mohr-Westphalschen Waage gemessen 0,810 g/cm^3 Dichte, sollte also bei 15,5° C Temperatur 94,5 Gewichtsprozent Äthylalkohol enthalten. 26,455 g dieses Alkohols mit destilliertem Wasser bis 100 g ergänzt ergeben eine Verdünnung von 25 Gewichtsprozent Äthylalkoholgehalt. Nachstehend die Ergebnisse.

Versuch 22. 25 Gewichts % Äthylalkohol in Wasser 15° C

0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	$3^{27}/_{60}$
0,0	4,6	11,0	19,5	39,1	58,6	34,7	61,8
							0,0
4,0	4,5	5	5,5	$5^3/_4$	6	$6^1/_4$	6,5
22,6	42,1	64,5	37,5	66	20,5	47,0	25
		0,0		0,0		0,0	

$6^3/_4$	Stunden
39,7	cm

Auf *Abb.* 8 sind die Schaubilder des Versuches 18, 21. und 22. vereinigt, wobei die Wirkung der Wasserkonzentration deutlich hervortritt. Auch hier zeigen sich die Geschwindigkeitsschwankungen, aber die mittlere Geschwindigkeit wächst deutlich mit der Wasserkonzentration. Es ist bemerkenswert, dass sich im Verlaufe des Versuches 20 die Wasserkonzertration bis 0 vermindert, beim Versuche 22 kaum, beim Versuche 18 jedoch überhaupt nicht ändert.

Endlich wurde versucht, den Wassergehalt des käuflich erworbenen, konzertrierten Alkohols mit aktiviertem Aluminium durch den entbundenen Wasserstoff zu bestimmen. In das umlaufende Reaktionsgefäss wurden 2,1038 g

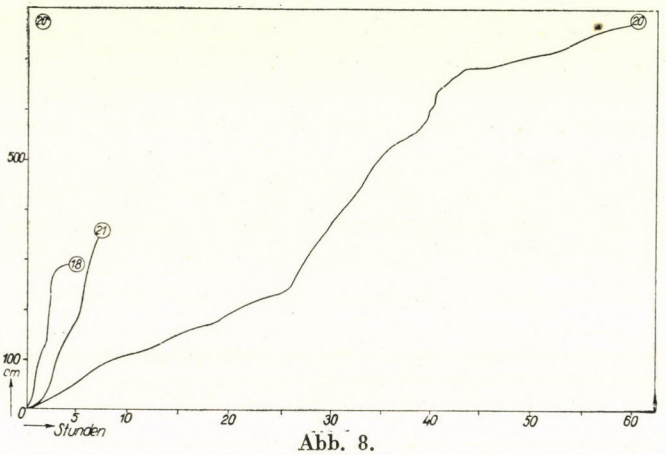


Abb. 8.

des konzertrierten Äthylalkohols eingewogen, aktiviertes Aluminium von $4 \times 2 = 8$ cm^2 Oberfläche darin untergetaucht und das Eudiometer sofort angeschlossen. Die Wasserstoffentwicklung wurde bis zum Abschluss beobachtet, im Eudiometer sammelten sich insgesamt 101 cm^3 Gas. Die betreffenden Zustandsvariablen waren 737 mm Hg Luftdruck, 12,5° C Lufttemperatur, Temperatur des Sperrwassers 11,6° C, die entsprechende Dampfspannung des Wassers 10,3 mm Hg, die Standhöhe des Sperrwassers im Eudiometer 35,5 cm Wasser = 2,7 mm Hg, die Korrektion der Quecksilbersäule des Fortinschen Barometers $\frac{12,5}{8} =$ = 1,5 mm Hg. Somit betrug die Gesamtkorrektion 2,7 + 1,5 + 10,3 = 14,5 mm Hg, daher der Teildruck des Gases im Eudiometer 737 — 14,5 = 722,5 mm Hg. Also $vp = v_0 p_0 (1 + \alpha t)$, daraus $v_0 = \frac{vp}{p_0(1+\alpha t)} = \frac{101 \cdot 722,5 \cdot 273}{760 \cdot 285,5} = 92$ norm. cm^3. Aus 18 mg Wasser würden 22,41 norm. cm^3 H_2 frei, 1 norm. cm^3 H_2 entspricht 18/22,4 mg Wasser, demnach würde sich im Alkohol $92 \cdot 18 : 22,41 =$ = 73,8 mg Wasser befinden. Wenn in der Alkoholeinwaage von 2103,8 mg

73,8 mg Wasser enthalten sind, dann weist der Alkohol 96,5 Gewichtsprozente auf, während die bisherige Dichtemessung 94,5 Gewichtsprozente anzeigte. Der bestehende Unterschied ist auf Wasser bezogen so bedeutend. dass vor allem die Überprüfung der Dichtemessung geboten war, welche piknometrisch stattfinden konnte. Bei 15,5° C Temperatur ergab sich

Piknometer + konzentrierter Alkohol 18,8287 g, Piknometer + Wasser 20,7440 g

Piknometer (trocken u. leer) ..... 10,7497 «

Konzentrierter Alkohol ..... 8,0790 g Wasser ..... 9,9943 g

Bezügliche Dichte $\frac{\text{Alkohol}}{\text{Wasser}} = \frac{8,0790}{9,9943} = 0,8083$. Die Areometerangabe erwies sich als richtig und dieser entsprechen 97 Volumprozente bzw. 95,5 Gewichtsprozente Alkohol, also stehen dem mittelbar bestimmten Wassergehalt von 4,5% 3,5 Gewichtsprozente gegenüber. Doch wurde beobachtet, dass der im Uhrglas verdunstende Alkohol einen vergänglichen, in Interferenzfarben schillernden Rest hinterliess und es kann wohl sein, dass dieser etwas schwerer flüchtige Rest auch eine grössere Dichte hat und die Dichte des Alkohols um ein Geringes erhöht. Somit kann der unmittelbar bestimmte Wassergehalt von 3,5 Gewichtsprozent richtig sein. Das bedeutet, dass die Wasserbestimmung mit aktiviertem Aluminium gut wervendbar ist, wenn keine Hydrierungs- oder Reduktionsvorgänge dabei vorsichgehen. In solchen Fällen zeigt sich auch der Vorteil dieser Wasserbestimmung, weil die Spindelung oder sonstige Bestimmungen über das spezifische Gewicht leicht trügen können. Es war nur Zeitmangels halber nicht mehr möglich, die analytische Seite der Frage endgültig klarzulegen.

SCHRIFTTUM

[1] Journal für praktische Chemie *54* (1896) 18—65. »Über aktivierte Metalle (Metallpaare) und die Verwendung aktivierten Aluminiums zur Reduction in neutralen Lösung.«

[2] *Fricke, R.* und *Jockers, K.* Z. anorg. Chem. [262] (1950) 3—13.

[3] *Romwalter, A.* Alumínium kézikönyv (Aluminium-Handbuch), Budapest, 1949, Seite 239.

[4] *Romwalter, A.* »Eine mikrovolumetrische Methodik.« Mitteilungen der berg- und hüttenmänischen Abteilung zu Sopron, IV. (1932) 67.

ZUSAMMENFASSUNG

»Aktives Aluminium« ist Aluminiumamalgam und im Gegensatz zu Aluminium nicht luft bzw. wasserbeständig sondern oxydiert sich an feuchter Luft, bzw. eigentlich nur durch ihren Wasserdampfgehalt, wobei H_2-Entbindung auftritt. Die Reaktionsgeschwindigkeit in flüssigem Wasser schwankt unregelmässig, weil die anfänglich haftende Oxydrinde stossweise in Bruchstücken abspringt. Die Hg-Verluste durch Abschorfung führen erst eine Steigerung, dann ein Verminderung der Aktivät herbei und zuletzt bleibt wasserbeständiges Al übrig. Durch Hg-Zementation aktiviertes Al entbindet in überschüssigem, reinem Wasser bei 15° C Temperatur durchschnittlich und p. Min. 0,12 cm^3 H_2 Gas je cm^2 Oberfläche, bis zum Verlust der Aktivität aber insgesamt 90 cm^3 H_2 Gas je cm^2. Diese Geschwindigkeit und Leistung ist noch abhängig von der Behandlung des Aluminiums bei der Aktivierung und von Spannungen innerhalb der ursprünglichen Oberfläche.

Als Trocknungsmittel ist aktives Aluminium gut verwendbar für Gase und vielerlei organische Flüssigkeiten, insbesondere auch für die schonende Entwässerung von adsorbierenden Gelen (z. B. SiO_2 und Al_2O_3 Gel).

Institut für allgemeine chemie, Sopron

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АКТИВНОГО АЛЮМИНИЯ

А. Ромвальтер и А. Хауер

Р е з ю м е

Под активным алюминием понимается амальгама алюминия, которая, в отличие от металлического алюминия, не постоянна на влажном воздухе и в воде окисляется, но всегда только под действием воды и при образовании газа H_2. Несмотря на большое выделение им тепла при комнатной температуре, непосредственное окисление газом O_2, протекает неизмеримо медленно, тогда как посредственное окисление в воде, согласно уравнению $2\,Al+3\,H_2O \rightarrow Al_2O_3+3\,H_2$ нетрудно проследить путем измерения выделенного объема H_2. Этим доказывается, что процесс: Al (активный) $+\,2H_2O \rightarrow Al\begin{matrix} O \\ O-H \end{matrix} + \frac{3}{2} H_2$ и Al (активный) $+\,3H_2O \rightarrow Al\,(OH)_3 + \frac{3}{2} H_2$ возможен, по крайней мере, в качестве промежуточной стадии, так как в конечном результате возникает Al_2O_3. Из этого следует, что активный алюминий выделяет из соединений $AlO\,(OH)$ и $Al(OH)_3$ разным образом газ H_2. В воде скорость реакции активного алюминия колеблется неравномерно, потому что спекавшаяся в начале на его поверхности корка Al_2O_3 периодически отпадает в виде кусков. Эти куски коры окрашиваются коллоидно-дисперсным металлом, в первую очередь Hg, в серый цвет, т. е. амальгированная поверхность постоянно теряет Hg. Следовательно нетрудно понимать, почему амальгированная цементацией поверхность алюминия вначала очень богата содержанием ртутью. Поэтому вызванная действием воды потеря в Hg, вначале повышает, а затем снижает активность и наконец остается постоянным в воде Al. Вероятно существует сплав $AlHg$ определенного состава, который в излишней чистой воде вполне дореагируется, как и алюминиевый сплав Деварда в щелоке. Амальгамированный цементацией Al в излишней чистой воде, при температуре 15° С, развивает в среднем ежеминутно на каждый см² его поверхности 0,12 см³ газообразного H_2 и до прекращения своей активности освобождает в общем 90 см³ газа H_2. Эта скорость реакции и выход зависят от деталей методов, примененных при активировании, а также и от напряжений в первоначальном алюминии.

Употребление активного Al, как средства сушки, весьма удобно в случае бережного обезвлаживания газов и различных органических жидкостей, как и абсорбирующих гелей.

ENTFERNUNG VON ASCHEBILDNERN AUS MINERALKOHLEN MITTELS SALPETERSÄURE

Prof. Dr. A. ROMWALTER und L. FEKETE

Eingegangen am 16. Februar 1951.

Wir berichteten bereits über Entaschungsversuche mit Salzsäure [1] und wiesen dort auf Vorteile hin, welche die Anwendung von Salpetersäure bieten dürfte :

1. Aus Aluminium hergestellte Einrichtungen werden durch Salpetersäure passiviert;

2. Asche bildende Kationen werden durch die Salpetersäure ebenso gelöst, wie durch Salzsäure;

3. aus der Nitratlösung können mit Kalziumkarbonat Fe und Al abgeschieden und der äquivalente Nitratrest als Ca $(NO_3)_2$ ausgebracht, zur Kunstdüngung verwertet werden;

4. soferne die Salpetersäure die behandelte Mineralkohle oxydiert, ist aus dem anfallenden nitrosen Gas der zur Oxydation aufgewendete Salpetersäure - Anteil wiedergewinnbar;

5. nur die zur etwaigen Nitrierung oder Esterifizierung verbrauchte Salpetersäure ist nicht wiedergewinnbar, aber auch diese kann in der Form von Nitrierungs-, bezw. Esterifizierungsprodukten verwertet werden.

Nachfolgend soll über die Durchführung unserer diesbezüglichen Versuche berichtet und eingangs auch das diesbezügliche Schrifttum angeführt werden.

Einer der beiden Verfasser *(Romwalter)* beschäftigte sich im Laufe des Weltkrieges 1914—18 auf Grund eines Auftrages der »Fabbrica Prodotti Tannici«, Fiume, mit der Nitrierung von Mineralkohlen, zwecks Darstellung von Gerbstoff-Ersatzmitteln. Bezüglich des Schrifttums sei gleich bemerkt, dass seit Beginn dieses Jahrhunderts durch das Chemische Zentralblatt keine einschlägige Arbeit erwähnt wird. Dem genannten Unternehmen schwebte es gerade auf Grundlage des damaligen Schrifttums vor das bis dahin aus Südamerika bezogene Quebracho-Holz zu ersetzen. Die wenigen Literaturangaben werden im Folgenden kurz zusammengefasst.

S. Hilpert, K. Keller und Lepsius ; »Neue Versuche über die Einwirkung chemischer Agenzien auf die Steinkohle«[2]. Zur Untersuchung diente eine Fettkohle. Mit Essigsäureanhydryd und $ZnCl_2$ entsteht im Druckrohr ein kohlenartiges Produkt, das beim Erhitzen nicht verkokt und Essigsäure abgibt. Mit H_2SO_4 als wasserentziehendem Mittel wurden keine Resultate erzielt. Beim Erhitzen mit Essigsäure, Essigsäureanhydrid u. $ZnCl_2$ auf dem Wasserbade (2 Tage) fand keine Einwirkung statt. Beim Nitrieren mit gleichen Teilen H_2SO_4 (1,84) und HNO_3 (1,4) steigt der N-Gehalt der äusserlich nicht veränderten Kohle auf 8% ; da der Sauerstoffgehalt der angewandten Kohle 5—6% beträgt, kann man annehmen, dass letzterer grösstenteils noch als Hydroxyd vorliegt. Die »Nitrokohle« ist leicht löslich in Azeton und Essigester, unlöslich in Benzol und anderen Kohlenwasserstoffen. Die gelöste Substanz ist dem Rückstand sehr ähnlich, verpufft beim Erhitzen, ist löslich in wässerigen Alkalien unter teilweiser Verseifung und wird durch Säuren wieder abgeschieden. Beim Sulfurieren der Steinkohle mit rauchender H_2SO_4 bis 120° werden keine Sulfosäuren beobachtet. Die leichte Verseifbarkeit der Nitrokörper und das Fehlen von Sulfosäuren spricht gegen die Anwesenheit aromatischer Kohlenwasserstoffe.

B. Juettner, R. C. Smith u. H. C. Howard »Die Einwirkung von Salpetersäure auf bituminöse Kohle«[3]. Normale Salpetersäure oxydiert bituminöse Kohle fast völlig zu löslichen Substanzen. Die Ausbeute an Huminsäuren erreicht nach einigen Tagen ein Maximum. Die Menge der löslichen Säuren nimmt mit der Zeit langsam zu. In Gegenwart von Luft wird nur $^1/_4$ der sonst notwendigen HNO_3 verbraucht. Der Rückstand der Benzoldruckextraktion lässt sich viel rascher oxydieren als die ursprüngliche Kohle. Wird die Kohle im Vakuum verkokt, so zeigt der bis 440° erhaltene Koksrückstand keine unterschiedliche Oxydierbarkeit gegenüber der Kohle. Kokse höherer Verkokungstemperatur sind hingegen sehr widerstandsfähig. Die durch die Oxydation erhaltenen Huminsäuren enthalten weniger Hydroxylgruppen als gewöhnliche Huminsäuren. Die löslichen Säuren sind fast frei von Hydroxylgruppen. In den löslichen Säuren wurden Benzolpentakarbon und Mellitsäure nachgewiesen. Etwa $^1/_{10}$ der löslichen Säuren lässt sich durch Decarboxylierung in aromatische Kohlenwasserstoffe überführen.

Bernard S. Brigg berichtet in seiner Arbeit : »Die chemische Natur von Extrakten aus einer bituminösen Kohle» [4], dass die bei Pittsburgh vorkommende Kohle mit Benzol bis 260° C extrahiert und der Extrakt unter anderem auch mit Salpetersäure oxydiert wurde, wobei Nitrokörper anfielen, in welchen durch Kristallisation ihrer alkoholischen Lösung Pikrate nachweisbar waren, indem die letzteren als rote Nadeln kristallisierten. Diese Kristalle lieferten durch Dehydrierung ausschliesslich aromatische mono-, bi- und polycyklische Ringsysteme. Der Extrakt kann durch milde Oxydation mit etwa 60% Ausbeute in Humussäuren verwandelt werden.

Jean Vauthrin's : »Über die Einwirkung von HNO_3 auf Eisencarbid«[5] betitelte Arbeit berührt unseren Gegenstand nur mittelbar, ist aber theoretisch sehr aufschlussreich. Eine früher referierte Arbeit[6] wird ausführlich besprochen. Zusätzlich wird die durch Einwirkung von HNO_3 auf Fe_3C und andere Metallcarbide erhaltene braune organische Substanz röntgenographisch untersucht. Sie zeigt die gleichen Diagramme, wie die meisten, aus amorpher Kohle durch HNO_3 - Behandlung erhaltenen Produkte, ist ferner identisch mit dem durch Oxydation erhaltenen Graphitoxyd. Aus allen Diagrammen geht weiter hervor, dass die durch Oxydation aus »amorphen« Kohlen erhaltenen Substanzen an Zusammensetzung ähnlich und nach ihren Eigenschaften analog denen sind, die bei der Oxydation der Steinkohlen entstehen, oder welche sich aus dem Humus des Bodens, aus Torf oder Ligniten bilden und extrahiert werden können. Sie unterscheiden sich wesentlich nur im H - Gehalt.

Dieser Schrifftumsnachweis ist keinesfalls vollständig, aber es geht daraus hervor, dass nicht viel über die uns hier beschäftigende Frage vorliegt.

Versuche.

Grösstenteils verarbeiteten wir Doroger Kohlen, Durchschnittsmuster der Durchsatzkohle der Doroger Schwelanlage. Diese Wahl wurde getroffen, um die praktischen Möglichkeiten der Säurebehandlung an einem Durchschnitt der Zechenkohle zu erproben. Demgemäss verfolgten wir einen rein praktischen Zweck, nicht aber eine kohlenchemische Frage, zu deren Lösung eine kohlenpetrographisch genau gekennzeichnete Probe geboten wäre. Zum Vergleich dehnten wir die Versuche auch auf Backkohle des Pécser Reviers und auf Brennberger Braunkohle aus.

Das Doroger Durchschnittmuster hinterliess 8,6% Asche. Aus der im Mörser zerkleinerten Kohle wurde die Korngrösse von 2—3 mm ausgesiebt, weil das Filtrieren dieser Korngrösse nach erfolgter Säurebehandlung viel leichter gelang, als diejenige des viel Staub führenden polydispersen Materials. Andererseits bewiesen Versuche, dass diese Korngrösse praktisch ebensoviel Asche hinterliess wie die ungesiebte Kohle.

1. *Versuchsreihe*

10 g der besagten Korngrösse wurden mit 20 cm^3 konzentrierter Salpetersäure übergossen. Sofort begann ein stark exothermer Vorgang, brausend entwich NO_2-Gas, bis nach etwa einer halben Stunde sichtlich Verlangsamung eintrat und nach einer weiteren halben Stunde keine Gasentwicklung mehr zu beobachten war. Zu einer gleichlaufenden Probe fügten wir nach der ersten Behandlung nochmals 20 cm^3 konzentrierte Salpetersäure hinzu, worauf sich aber keine weitere Wirkung zeigte.

Eine gleichlaufende Probe blieb 24 Stunden lang stehen, stand nach Verdünnung mit Wasser noch eine Woche lang, schliesslich wurde die verdünnte Säure in einen kalibrierten ½ l Kolben filtriert, bis zur Marke mit Waschwässern des am Filter liegenden Rückstandes aufgefüllt. Der gründlich gemischte Kolbeninhalt war eine klare, gelb gefärbte Lösung. 100 cm^3 der letzteren hinterliessen am Wasserbad verdampft 0,2715 g eines am Rande gelben, nur in der Mitte roten festen Rückstandes, welcher in Wasser bis auf einen geringen, weiss gefärbten Überrest löslich war. Der letztere löste sich in Salzsäure langsam, aber beinahe vollständig. Die salzsauere Lösung enthielt $Ca^{\cdot\cdot}$ Kationen und $SO_4^{\cdot\cdot}$-Anionen, somit erwies sich der weisse Überrest als $CaSO_4$. Die im Halbliterkolben verbliebenen 400 cm^3 der gelben Lösung blieben nach Salzsäurezusatz und H_2S- Sättigung unverändert, zeigten nach $(H_4N)_2$ S-Zusatz bereits Farbänderung, wurden nach Alkalisierung mit Ammoniak dunkelgrün, worauf sich langsam ein schwarzer Niederschlag setzte, während die darüber stehende Lösung die ursprüngliche gelbe Farbe beibehielt. Nach längerer Zeit bedeckte sich der schwarze Niederschlag immer mehr mit einer lichtbraunen, flockigen Schicht und der schwarze Niederschlag verschwand dabei allmählich. Sichtlich setzte sich der schwarze Niederschlag in den lichtbraunen, beständigen um. Der lichtbraune Niederschlag war leicht abfiltrierbar und auswaschbar. Nach Veraschung blieb Fe_2O_3 zurück. Also schied das $(H_4N)_2S$ FeS ab, welches durch den Luftsauerstoff zu Fe $(OH)_3$ oxydiert wurde. Die unverändert gelbe Farbe der über dem Eisenniederschlag stehenden Lösung beweist, das der färbende Stoff nicht mit dem Niederschlage abgeschieden wurde. Die abfiltrierte gelbe Lösung zeigte einzelne, aber nicht alle bekannten Reaktionen der Pikrinsäure, und dürfte ein Gemisch von Nitrophenolen sein.

Der Kohlenrückstand schien nach der Säurebehandlung unverändert und war getrocknet kaum nennenswert schwerer als die Kohleneinwaage, bei der Veraschung blieben 5,65% des ursprünglichen Gewichtes zurück. Nach der Säurebehandlung fanden wir also 10 g Kohlenrückstand und 1,3575 g Substanz in der abfiltrierten gelben Lösung. Die 13,57%-ige Gewichtszunahme kann nur aus der Salpetersäure, Luft und aus dem Wasser stammen. Solange nämlich NO_2 entwich, ist die Bindung von Luftsauerstoff und auch nachher, in saurer Lösung nicht wahrscheinlich. Demgemäss musste die 13,57%-ige Gewichtszunahme aus der Salpetersäure und aus dem Wasser stammen. Leicht messbar war der Salpetersäureverbrauch bei Phenolphtaleinindikation durch Titrierung. 20 cm^3 der auf 500 cm^3 Gesamtvolumen verdünnten gelben Lösung verbrauchten 6,30 cm^3 Normal-Lauge, während 20 cm^3 unserer konzentrierten Salpetersäure, gleichfalls bis 500 cm^3 verdünnt, auf 20 cm^3 11,86 cm^3 Normal-Lauge beanspruchten. Also wurden zur Kohlenbehandlung 46,9 Gewichts% der angewendeten Salpetersäure verbraucht, von 18,679 g HNO_3 8,757 g.

Vom Standpunkte unserer Frage (also der Ascheminderung) ist die Salpetersäure insofern wirkungsvoller, als bei einmaliger Behandlung etwa das

gleiche Ergebnis erreicht wird, wie bei vielfacher Salzsäurebehandlung, also durch Anwendung des Extraktionsverfahrens.

Obwohl die mit Salpetersäure behandelte Kohle äusserlich gleichfalls unverändert aussieht, beginnt sie schon zwischen 120 und 160° C Temperatur unter Wärmeentbindung zu verkracken, wobei sich stürmisch gelblich weisser Dampf mit Teergeruch entwickelt und ein bedeutender Gewichtsanteil der Kohle flüchtig wird, denn das »Halbkoks«-Ausbringen beläuft sich auf nur 65—70% der eingewogenen »Nitrokohle«. Der so erhaltene Halbkoks ist sehr porös und hinterlässt 7,36% Asche weisser, stellenweise rotbraun gefleckter Farbe. Offenbar verursachte die Behandlung mit Salpetersäure tiefgreifende Veränderungen der Kohle. Vor allem verschwand der »Permutit«-Charakter, die Fähigkeit des Kationtausches, welcher bei der Behandlung mit Salzsäure bestehen blieb. Bezeichnend ist ferner die Gewichtgleichheit der rohen und behandelten Kohle, welche nur möglich ist, wenn das fehlende Gewicht der gelösten Bestandteile durch den Einbau von — NO_2—NO_3 und — OH Gruppen, bezw. durch H_2O ersetzt wird. Gerade dieser Stoffwechsel erklärt die oben betonte starke Wärmeentbindung des bei so auffallend niedriger Temperatur einsetzenden Krackporzesses, denn dieses Verhalten entspricht der Regel von *Strache* und *Grau*, laut welcher die Aufspaltungswärme von verkohlbaren Substanzen umso positiver ist, je grösser ihr Sauerstoffgehalt war. Zur Auswertung der festgestellten 13,56%-gen Gewichtszuhnahme war der ermittelte Verbrauch von Salpetersäure sehr nützlich. Da bei der Behandlung der Kohle NO_2-Gas entwich, dürfte die Gleichung $2HNO_3 \rightarrow H_2O + 2NO_2 + O$ die oxydierende Wirkung der Salpetersäure darstellen, somit entsprechen einem HNO_3-Verbrauch von 7,857 g die Sauerstoffabgabe von $8{,}757 \cdot 16 : 126 = 1{,}11$ g. Ausser dieser Oxydation muss also auch die Bildung von Nitrit-Nitrat Estern, Nitrokörpern, oder auch Hydroxylierung bezw. Hydratisierung stattgefunden haben, sonst könnte das Gesamtgewicht der Produkte nicht um 1,356 mehr als das Rohkohlegewicht erreichen.

2. *Versuchsreihe*

Es wurde eine Abänderung der Behandlung versucht, indem wir die Mischung von 10 g des Kohlendurchschnittmusters mit 20 cm³ konzentrierter Salpetersäure erst eine Woche stehen liessen, dann verdünnten, filtrierten und mit den Waschwässern des am Filter liegenden Rückstandes das Filtrat im Halbliter-Masskolben auf 500 cm³ Gesamtvolumen verdünnten. Ansonsten blieb die Behandlung des gelben Filtrates dieselbe, wie bei der Versuchsreihe 1. Nur zwei Unterschiede zeigten sich: der gelöste Anteil erreichte 19,3% der Kohleneinwaage, während von der verwendeten HNO_3 47,8% verbraucht wurden. Also erhöhte die längere Einwirkungsdauer der HNO_3 das gelöste Ausbringen um 42,3%, während hierbei der Säureverbrauch nur um 1,9% stieg.

3. *Versuchsreihe*

Nunmehr behandelten wir 10 g des Durchschnittsmusters mit einem Gemisch von 20 cm^3 konzentrierter Salpetersäure und 20 cm^3 konzentrierter Schwefelsäure. Nach Ablauf der Einwirkung wurde verdünnt, filtriert und der am Filter liegende Rückstand gründlich ausgewaschen, zuletzt getrocknet, endlich eine Einwaage des so erhaltenen Produktes vorsichtig erwärmt. Wieder setzte bereits bei sehr niederer Temperatur (etwa zwischen 120 und 160° C) der wärmeentbindende Krackvorgang ein, wobei 37,5% der Einwaage flüchtig abgingen. Der Halbkoks hinterliess 9,34% Asche, es erwies sich also, dass auch mit Salpetersäure keine grössere Aschenverminderung erreichbar ist als mit Salzsäure. Nur insoferne ist Salpetersäure leistungsfähiger, als dieses Ergebnis durch einmalige Behandlung erreicht wird, während dazu eine mehrfache Behandlung mit Salzsäure erforderlich wäre. Jedenfalls beruht die grössere Leistungsfähigkeit der Salpetersäure auf der Vernichtung des Kationentauschvermögens der Kohle. Insgesamt sank durch die Behandlung mit Salpetersäure der Aschenanfall von 8,6% auf etwa 5,7% d. h. rund um ein Drittel.

Die Analyse der Asche von Rohkohle ergab 35% SiO_2, 17,4% Fe_2O_3, 33,7% Al_2O_3, 11% CaO, MgO-Spuren, die noch fehlenden 2,9% sind SO_3, P_2O_5, MgO, und Alkalimetalloxyde (Na_2O, K_2O). Unverkennbar ist, dass die Säurewirkung an sich Lösung von Fe_2O_3, CaO und eines Teiles des Al_2O_3, des MgO, der Alkalimetalloxyde und der Si-freien Anionen herbeiführt, während SiO_2 als Aschebildner mit einem Teile des Al_2O_3 zurückbleiben.

Es ist klar, dass die Aschenverminderung durch Behandlung mit Säuren umso erfolgreicher sein wird, je ärmer die Rohkohle an unlöslichen Silikaten, bzw. an SiO_2 ist. Nicht als Säurewirkung ist anzusprechen, soferne die Aschenverminderung durch Behandlung mit HF, oder HNO_3 erfolgreicher ist, als bei Anwendung von HCl, denn HF schliesst die Silikate auf, HNO_3 aber verändert die organischen Bestandteilen der Kohle. Anderseits ist es möglich, dass HNO_3 die organischen Bestandteile der Kohle durch Oxydation weitgehend in Säuren verwandelt also in Laugen löslich macht, worauf die Aschebildner von der alkalischen Lösung abfiltrierbar werden. *Kreulens* Erfahrungen bewiesen, dass sogar an »Restkohle« reiche Mineralkohlen bei etwas unter der Initialtemperatur liegender Temperatur auch durch gasförmigen Sauerstoff allmählich zu Huminsäuren oxydierbar sind, wenn man die gebildeten Huminsäuern mit Lauge löst, den unlöslichen Rest aber immer wieder in der soeben besprochenen Weise weiteroxydiert. Diese Erfahrung ist ermutigend, denn das Kreulensche Verfahren abwechselnder trockener Oxydation und Laugung kann allenfalls durch die Behandlung mit Salpetersäure zur weitgehenden Auflösung der Kohle in einem Arbeitsgange führen. Dieses Ergebnis aber wäre nicht allein vom Standpunkt der weitgehenden Entaschung der Kohle wertvoll, sondern vom grossen Huminsäureanfall ausgehend zugleich ein Weg zur Erzeugung wert-

voller Fertigprodukte. Darum untersuchten wir vor allem das mit Salpetersäure erzielbare grösste Huminsäure-Ausbringen.

4. *Versuchsreihe*

Zum Vergleiche des erreichten Huminsäure-Ausbringens war vorerst eine nachhaltige Extraktion der verwendeten Rohkohle mittels Lauge erforderlich. Hierzu sei bemerkt, dass die vorausgehende Bitumenextraktion unterblieb, weil auch bei der Behandlung mit Salpetersaure keine Bitumenextraktion vorangehen sollte.

6 g Rohkohle wurden in einem mit Rückflusskühler versehenen Kolben mit 3 g NaOH und 250 cm^3 Wasser mehrere Stunden lang gekocht, der heisse Extrakt vom Rückstand abfiltriert und der letztere vom Filter in den Kolben zurückgespült, mit 250 cm^3 Wasser gründlich ausgekocht, die Nacht hindurch zum Absetzen stehen gelassen, endlich das Waschwasser vorsichtig abgegossen und mit dem Filtrat des Vortages vereinigt, diese Lösung endlich auf 600 cm^3 Gesamtvolumen mit Wasser ergänzt.

Der im Kolben abgesetzte Rückstand bildete einen sulzigen Kuchen, welcher in Wasser aufgeschlämmt mit Salzsäure angesäuert, gekocht, dann zum Absetzen stehen gelassen wurde. Die darüber stehende klare Flüssigkeit wurde vorsichtig abgesaugt, dann der Bodensatz im Kolben mit Wasser wieder aufgeschlämmt, nochmals stehen gelassen, schliesslich abfiltriert und getrocknet. 0,715 g der Substanz hinterliessen 0,0408 g, also 5,7% lila gefärbte Asche.

Anderseits wurden 100 cm^3 des alkalischen Huminatextraktes (entsprechend 1 g Rohkohle) angesäuert und die Huminsäuren mit einer recht zeitraubenden Manipulation abfiltriert. Das Filtrat war farblos und am Filter blieben getrocknet 0,0976 g (also auf Rohkohle bezogen rund 10%) Huminsäuren.

5. *Versuchsreihe*

6 g Rohkohle mit 20 cm^3 konzentrierter Salpetersäure übergossen blieb bis zur Beendung der NO_2 Entwicklung stehen, wurde dann mit Wasser verdünnt. Am nächsten Tage wurde das Gemisch mit NaOH-Lösung alkalisiert, vorauf sich das Produkt löste und die Lösung schwarz färbte. Die Filtrierung war so langsam, dass bis zum Gesamtvolum von 600 cm^3 verdünnt werden musste. Sobald genügend Filtrat zur Verfügung stand, wurden 100 cm^3 desselben (entsprechend 1 g Rohkohle) mit H_2SO_4 angesäuert um die Huminsäuren niederzuschlagen. Die letzteren wurden wie bei der 4. Versuchsreihe abfiltriert, gewaschen und getrocknet und zeigten dann glänzend schwarze Oberfläche, wie Vitrit. Das Ausbringen war 0,6298 g also rund 60% der Rohkohle, somit das Sechsfache der aus Rohkohle ohne Behandlung mit HNO_3, allein mit NaHO

Lauge erhaltenen Menge. 0,4955 g der trockenen Huminsäuren hinterliessen 0,2615 Koks und verbrannt 0,0046 g Asche, also auf 100 Rohkohlengewicht bezogen 62,98% Huminsäuren, 33% Koks, 0,584% Asche. Demgemäss hinterliessen die trockenen Huminsäuren 0,93%, der Koks nach letzteren 1,76% Asche. Also ist dieses Ergebniss vom Gesichtspunkte des Huminsäureausbringens ebenso ermutigend wie hinsichtlich der Ascheminderung. Im Hinblick auf die praktische Anwendung dieser Erfahrungen ist es jedenfalls wesentlich, die überschüssige Salpetersäure durch Filtration oder Destillation vor der Alkalisierung abzutrennen, um weniger Säure und Lauge aufzuwenden und zugleich weniger Fremdsalze in der Huminatlösung zu haben. Wesentlich ist auch die Vermeidung des Filtrierens der Huminatlösung. Zweckdienlich erschien es auch, statt Natronlauge Ammoniumhydroxydlösung anzuwenden. Die weiteren Versuche sollten die aufgetauchten Fragen bereinigen.

6. *Vesuchsreihe*

5 g Rohkohle wurden mit 10 cm^3 konzentrierter Salpetersäure übergossen, dann nach beendeter NO_2-Entwicklung mässig mit Wasser verdünnt, am Wasserbad getrocknet (anstatt die Säure abzufiltrieren oder abzudestillieren). Der trockene Rückstand wurde in einem mit Rückflusskühler versehenen Kolben mit konzentrierter Ammoniaklauge erwärmt, hernach über Nacht stehen gelassen, die erhaltene schwarze Huminatlösung in einem Messkolben mit Wasser auf 500 cm^3 ergänzt. Von dieser Lösung wurden 100 cm^3 (entsprechend 1 g Rohkohle) statt der Ammoniakdestillation am Wasserbad eingetrocknet. Es verblieben nach 1 g Kohle 1,5694 g Trockensubstanz, nach letzterer 0,4600 g Koks, beziehungsweise 0,0426 g Asche. Demgemäss hinterliess das Huminat 2,7% Asche, was auf dessen Koks bezogen 9,6% Asche bedeutet.

7. *Versuchsreihe*

Durchführung wie bei der vorigen Versuchsreihe, jedoch mit dem Unterschiede, dass der gewogene Rückstand der am Wasserbad trocken gedampften ammoniakalischen Huminatlösung, mit konzentrierter Salzsäure übergossen, eine Nacht stehen bleib. Die abgeschiedene Huminsäure wurde nach dekantierender Auswaschung abfiltriert, getrocknet gewogen, dann eine Einwaage derselben im Tiegel verkokt, der Koksrückstand gewogen und verascht. Aus 1 g Rohkohle fielen 1,6927 g Huminat, bezw. 0,6200 g Huminsäure, bezw. 0,092 g Asche an. Somit hinterliess das Huminat 0,54% Asche, und dies beweist, dass die Salzsäure viel Aschebildner löste, weil aus dem Huminat der 6. Versuchsreihe 2,7% Asche zurückblieben.

8. *Versuchsreihe*

Zur Entscheidung der Frage, wie die angewendete Menge der Salpetersäure das Huminsäureausbringen beinflusst, wurden immer 2 g Rohkohlen jeweils mit 1, 2, 3, bzw. 4 cm^3 konzentrierter Salpetersäure behandelt. Ferner wurden gleichlaufend Versuche angesetzt, wobei 1 g Rohkohle mit 1 cm^3 konz Salpetersäure und 1 cm^3 Wasser, dann gleichlaufend mit 3 cm^3 Wasser verdünnt. zur Anwendung kam. Alle diese Gemische wurden nach Beendigung der Reaktion am Wasserbad trocken gedampft, und der trockene Überrest gewogen, hernach mit konzentrireter Ammoniaklauge bis 50 cm^3 Gesamtvolum aufgefüllt, einen Tag stehen gelassen. Die erhaltene ammoniakalische Lösung einzelner übereinstimmender Versuche wurde zum Absetzen stehen gelassen, bezw. zentrifugiert und aus den so geklärten Lösungen je 15 cm^3 mit dem Stechheber entnommen, im gewogenen Tiegel am Wasserbad trocken gedampft, gewogen, dann verascht, zuletzt auch die Asche gewogen. Die Ergebnisse dieser Versuche sind in der beigefügten Tafel zusammengefasst.

Tafel zur Versuchsreihe 8.

Zeichen	Kohle g	HNO_3 konz. cm^3	Wasser cm^3	Gewichtszuwachs durch HNO_3-Behandlung	Huminatansbringen %		Asche im Huminat %	
					Zentrifugiert	Abgesetzt	Zentrifugiert	Abgesetzt
a	2	1	3	5,8	15,4	—	3,24	—
b	2	1	1	6,0	12,2	14,8	,50	4,72
c	2	2	—	10,61	82,4	86,9	,52	4,16
d	2	3	—	14,77	87,0	115,0	2	4,20
e*	2	4	—	15,50	103,0	—	2,92	—

* In diesem Falle ist das auf Rohkohle bezogene Koksausbringen 48,2 Gewicht %, auf das Huminat bezogen 46,5.

Es ist ersichtlich, dass mindestens 1 cm^3 konzentrierte HNO_3 je Rohkohle erforderlich ist, um ein gutes Huminatausbringen zu erreichen, ferner, dass das Zentrifugieren der ammoniakalischen Huminatlösung wohl den auf Huminat bezogenen Aschenrest, aber auch den auf Rohkohle bezogenen Huminatanfall vermindert.

9. *Versuchsreihe*

Die Behandlung von 3 g Rohkohle mit 6 cm^3 konzentrierter Salpetersäure erfolgte wie bei Versuchsreihe 8, jedoch mit dem Unterschiede, dass der

trockne Rückstand nach der Behandlung mit HNO_3 gewogen, pulverisiert, dann mit Ammoniaklauge versehen auf 150 cm^3 Gesamtvolumen aufgefüllt, gelöst und 2 Tage zwecks Absetzung stehen gelassen wurde. Aus dem Klaren dieser Lösung konnten mit dem Stechheber bodensatzfreie Anteile entnommen werden.

Einer derselben wurde unmittelbar, der andere aber nach Zentrifugieren, am Wasserbade trocken gedampft. Der letztere Anteil hinterliess *auf die Kohle bezogen* 76,5% Huminat bezw. 0,9% Asche, der unmittelbar trocken gedampfte Anteil aber 76,8% Huminat, bezw. 1,54% Asche. Also verminderte das zweitägige Absetzen das Huminatausbringen wesentlich, so dass die nachfolgende Zentrifugierung nur geringe weitere Verminderung herbeiführte, dagegen war die Asche des zentrifugierten Anteiles bedeutend geringer.

Um die Möglichkeit weiterer Ascheverminderung zu prüfen, wurde nach der Behandlung der Kohle die Salpetersäure nicht verdampft, sondern durch Filtrieren vom Kohlenrest getrennt.

10. *Versuchsreihe*

2 g Rohkohle mit 4 cm^3 konzentrierter Salpetersäure übergossen, blieben eine Nacht stehen, um am folgenden Tage mit Wasser verdünnt und filtriert zu werden. Die Filtrierung war zeitraubend, denn manche Körner der Kohle zerfielen durch die HNO_3 Einwirkung zu feinem Pulver und verstopften das Filter. Das Filtrat zeigte die gewohnte gelbe Farbe. Die am Filter gebliebene Kohle war, nach gründlichem Auswaschen, in einem Gemische von 2 cm^3 konzentrierter Ammoniaklauge und 98 cm^3 Wasser gut löslich. Nach dem Absetzen und nachfolgenden Zentrifugieren hinterliess ein mittels Stechheber entnommener, gemessener Anteil derselben am Wasserbad trocken gedampft, auf Rohkohle bezogen 63,87% Huminat und das letztere 0,675% Asche, welche durch Fe_2O_3 rot gefärbt war. Also blieb beim Zentrifugieren $Fe(HO)_3$ an das Huminat gebunden in Lösung.

Aufschlussreich ist der Vergleich der Ergebnisse unserer Versuchsreihe 10 und 8, insbesondere 8 e, denn auch dort erfolgte die Behandlung von 2 g Rohkohle mit 4 cm^3 konzentrierter Salpetersäure, jedoch mit dem Unterschiede dass *im Falle von 8 e*, nach der Behandlung der Kohle mit Salpetersäure die letztere verdampft, der trockene Rückstand in einer beträchlichen Menge konzentrierter Ammoniaklauge gelöst, im Falle der Versuchsreihe 10 aber die behandelte Kohle nach Verdünnung der Säure abfiltriert, gründlich gewaschen und in verdünnter Ammoniaklauge gelöst wurde. Der Vergleich der Ergebnisse zeigt, dass im Falle 8 e das auf Rohkohle bezogene Huminatausbringen bedeutend grösser war als im Falle 10 und zwar

Huminat (8 e) : Huminat (10) = 100 : 62, zugleich

Huminatasche (8 e) : Huminatasche (10) = 100 : 23.

Es ist somit erwiesen, dass die Ascheverminderung durch Salpetersäurebehandlung dann am wirkungsvollsten ist, wenn die Kohle nach Einwirkung der HNO_3 abfiltriert, gründlich gewaschen, in verdünnter Ammoniaklauge gelöst, die erhaltene Lösung zentrifugiert und vom Absatz getrennt verdampft wird. Das so erhaltene Huminat ist aschearm.

11. *Versuchsreihe*

Im Hinblick darauf, dass bei der Versuchsreihe 9. bedeutend mehr Huminat anfiel als bei der Versuchsreihe 10, wiederholten wir die erstere mit der Abweichung, dass die Salpetersäure zwar verflüchtigt, jedoch der trockene Rückstand nicht pulverisiert, sondern mit Wasser gekocht und abfiltriert wurde. Die Filtration war leicht und rasch. Den am Filter gebliebene Rückstand kochten wir nun mit verdünnter Ammoniaklauge bis zum Verschwinden des Ammoniakgeruches. Wie schon öfters, machte sich nach dem Verschwinden des NH_3-Geruches am entweichenden Dampf ein sehr angenehmer Geruch bemerkbar, welcher deutlich an das mikroskopische Immersionsöl (Oleum Juniperi Virginianae) erinnerte. Die abgekühlte Lösung wurde nun zentrifugiert und ein gemessener Anteil am Wasserbad trocken gedampft. Auf Rohkohle bezogen fielen 69% Huminat an, dessen Aschenrest (also auf das Huminat selbst bezogen) 0,94% war. Daraus ist ersichtlich, dass anlässlich der Versuchsreihe 9. die Pulverisierung des Trockenrückstandes nach der Salpetersäurebehandlung das Huminatausbringen steigerte.

12. *Versuchsreihe*

Nunmehr war es erforderlich, aus unserer Doroger Kohlenprobe mittels Salpetersäure eine grössere Huminat bezw. Huminsäuermenge herzustellen, um die Eigenschaften des Erzeugnisses eingehender kennen zu lernen. Darum oxydierten wir auf Grund der besprochenen Erfahrungen der Versuchsreihen 9., 10. und 11. n g Rohkohlenklein mit 2 n cm^3 konzentrierter Salpetersäure, dampften nach Abschluss der NO_2 Entbindung das Gemisch trocken, wuschen es mit Wasser gründlich aus, filtrierten ab, lösten die Huminsäuren mit Ammoniaklauge heraus, liessen die Lösung zum Absitzen der schwebenden Teilchen stehen, zentrifugierten sie nachfolgend und engten den absatzfreien Teil am Wasserbade ein. Beim Abkühlen verdickte sich die eingeengte Lösung zu einer braunen, elastischen Gallerte. Im Laufe zweiwöchentlichen Stehens trocknete die Gallerte nebst starker Schrumpfung vollständig. Der trockene Rückstand war glänzend schwarz, spröde, vitritähnlich und sein Gewicht 14% des Gallertengewichtes. Also war die wässerige, warme Flüsigkeit ein Hydrosol von 14 Gewicht-% Gehalt an kolloid verteiltem Ammoniumhuminat, und bildete beim Abkühlen ein Hydrogel gleichen Gewichtes, aus welchem durch Trocknung das Ammoniumhuminat amorph zurückblieb.

Dieser vitritänliche Huminatrückstand hinterliess eine flockige gelbe, in strömender Luft leicht aufwirbelnde, sehr schwebefähige Asche mit folgenden Hauptbestandteilen:

SiO_2 45,0%, Fe_2O_3 4,1%, Al_2O_3 36,8%, CaO 8,1% Σ 94,0.

Demgegenüber waren die Hauptbestandteile der Rohkohlenasche:

SiO_2 35,0%, Fe_2O_3 17,9%, Al_2O_3 33,7%, CaO 11,0% Σ 97,1.

Die Gegenüberstellung zeigt, das die Aschebildnei unserer Rohkohle hauptsächtlich Ton, Limonit und Kalk sind. Starke Säuren lösen Limonit und Kalk, aber nicht vollständig. Somit bestätigt auch diese Erfahrung, dass die Ascheminderung solcher Kohlen durch Säurebehandlung besonders aussichtsreich ist, welche als hauptsähtliche Aschebildner Limonit und Kalk enthalten.

Die Anwendung von Salpetersäure zur Ascheminderung weist neue Wege, denn nach dieser Behandlung ist der überwiegende Anteil der heimischen »reinen« Braunkohlen als Huminat in Hydrosol überführbar. Aus dem Huminatsol kann durch Säuren Huminsäuregel niedergeschlagen werden, wobei ein Teil der gelösten Aschebildner in der sauren Lösung verbleibt, also das Huminsäuregel weitgehend entascht anfällt. Allerdings nimmt das niedergeschlagene Huminsäuregel einen Anteil der gelösten Aschebildner adsorptiv und auch als Tauschkationen mit sich, dafür aber bleiben die silikatischen Aschebildner bei der Laugebehandlung der »Nitrokohle« ungelöst, besonders dann, wenn zur Huminattrennung Ammoniaklauge verwendet wird, was besonders vorteihaft wäre, weil NH_3 leicht und rein wiedergewinnbar ist, ebenso wie auch die aufgewendete HNO_3, ganz einerlei ob die oxydierende Wirkung der letzteren auf der Gleichung $2\ HNO_3 \rightarrow H_2O + 2NO_2 + O$, oder $2HNO_3 \rightarrow$ $\rightarrow H_2O + 2NO + 3\ O$ beruht. HNO_3 und NH_3 sind heimische Hilfstoffe unserer chemischen Schwerindustrie, denn auch wir verfügen über Luft und Wasser, haben aber kein Salz, als Rohstoff für Salzsäure und Natronlauge. Ferner fällt wesentlich ins Gewicht, dass Ammoniumhuminate und Huminsäuren, einen heute noch schwer schätzbaren Weit vorstellen, wenn man berücksichtigt, dass beide Erzeugnisse vielversprechend in der Bodenkultur und nicht minder verheissend als Rohstoffe für Phenol- und Kohlenwasserstofferzeugung sind. Man bedenke, dass der Weg über die Schwelung an Phenolen höchstens 4% vom Gewicht unserer Braunkohlen ausbringen kann, der Weg über die »Nitrokohle« aber das Zehnfache. Endlich wären die erforderlichen Einrichtungen aus unserem Hauptmetall, aus Aluminium herstellbar, weil es sowohl HNO_3, wie auch H_3N und H_4NOH gegenüber widerstandsfähig ist.

13. *Versuchsreihe*

Zum Vergleich versuchten wir die besprochenen Behandlungsweisen auf Pécser Steinkohle und Brennberger Braunkohle anzuwenden.

Es erwies sich, dass die Pécser Steinkohle mit konzentrierter Salpetersäure behandelt in Ammonlauge unlöslich blieb. Die Brennberger Braunkohle hingegen reagiert mit Salpetersäure noch lebhafter als die Doroger und wird leicht löslich in Ammoniaklauge. Den Einfluss der Laugekonzentration nebst dem Huminatausbringen veranschaulicht die beigefügte Tafel.

Brennberger Kohle

Konzentrierte NH_3—Lauge cm^3	Wasserzusatz cm^3	Huminatausbringen auf Rohkohle bezogen %	Äsche aus Huminat auf letzteres bezogen %
2	98	48,14	1,39
4	96	64,75	1,27
10	90	70,90	1,26

Mit zunehmender Konzentration der Ammoniaklauge steigt das Huminatausbringen stark, während der Ascherest des letzteren nur wenig sinkt.

Die besprochenen Versuche zeigen, dass bei Behandlung der Kohlen mit Salpetersäure und nachfolgend mit Ammoniaklauge das Huminat-Ausbringen umso kleiner wird, je weiter die Inkohlung der Rohkohle forgeschritten war. Darum soll auch diese Behandlungsweise an Ligniten und überhaupt an Torfen geprüft werden. Die Erzeugung von Huminaten und Huminsäuren könnte sowohl unserer Rohstoffversorgung, wie auch unserer Bodenkultur eine wertvolle Stütze bieten und gegebenfalls das Ausbringen des Kohlenschwefels ermöglichen.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser führten Versuche zwecks Minderung von Kohlenasche erst mit Salzsäure durch, worüber sie bereits früher berichtet haben[1]. In der vorliegenden Mitteilung folgt der Bericht über solche Versuche mit Salpetersäure.

Abermals diente ein Durchschnittsmuster von Doroger Kohle als Ausgangsmaterial, doch wurde zum Vergleiche auch Pécser Steinkohle und Brennberger Braunkohle bearbeitet. Es zeigte sich, dass der Erfolg der Ascheminderung durch Salzsäure bei Anwendung des Extraktionsverfahrens so weit getrieben werden kann, wie er sich durch einmalige Salpetersäure Behandlung einstellt, weil die letztere infolge ihrer gleichzeitigen Säure- und Oxydationswirkung die Permutiteigenschaft der Kohle aufhebt. Die oxydierte Kohle löst sich in Laugen leicht und weitgehend, insbesondere auch in Ammoniaklauge. Während durch die ausschliessliche Säuerwirkung von HCl nur die Ascheminderung solcher Kohlen aussichtsvoll ist, in welchen als wesentliche Aschebildner $Fe(OH)_3$ bezw. Limonit und $CaCO_3$ vorkommen, gelingt mit HNO_3 auch die Minderung silikatischer Aschebildner. In Ungarn können HNO_3 und NH_3 als vorhandene Hilfstoffe gelten, weil ihre Darstellung aus Luft und Wasser möglich ist, zugleich sind die erforderlichen Einrichtungen zur Ascheminderung aus unserem Hauptmetall: aus Aluminium herstellbar, weil dieses sich gegenüber diesen beiden Hilfestoffen widerstandsfähig verhält. Die Ascheminderung beruht im Falle des Salpetersäure-Ammoniaklauge-Verfahrens einerseits auf selektiver Lösung von $Fe^{\cdot\cdot}$ und $Ca^{\cdot\cdot}$, andererseits auf Überführung der reinen Braunkohlensubstanz in Hydrosol. Zu dieser Behandlung eignet sich die Kohle umso mehr, je weniger vorgeschritten ihr Inkohlungsgrad ist. Die Anwendung von HNO_3 und NH_3 zu diesem Zwecke bedeutet keineswegs einen Grossverbrauch dieser Hilfsstoffe, sondern nur ihren Umlauf

nebst Wiedergewinnung. Dieses Verfahren kann übringens icht nur zur Ascheminderung sondern auch zur Gewinnung von Huminaten, bezw. Huminsäuren dienen, welch letztere gleich bedeutungsvoll für die Bodenkultur und als Rohstoffquelle unserer Phenol- und Kohlenwasserstoff-Versorgung in Frage kommen, denn das Phenolausbringen ist auf diesem Wege zehnmal grösser als durch Schwelung. Möglicherweise erleichtert die oxydierende Wirkung von HNO_3 auch das Ausbringen des Kohlenschwefels in Gestalt von H_2SO_4 bezw. Sulfat.

SCHRIFTTUM

[1] Bányászati és Kohászati Lapok. (Ungarisch.) Beilage »Aluminium«. JG. 1949., Heft. 1.

[2] Chem. Zentralblatt. Jg. 1913., II. 2182; vgl. *Pictet*, Ber. I. Deutsch. Chem. Ges. 46, 3342.

[3] Chem. Zentralblatt. Jg. 1936., I. 4234; Journ. American Chem. Soc. 57 (1935) 2322/26.

[4] Chem. Zentralblatt. Jg. 1936., I. 4378 und 1936., II. 2057; Journ. Amer. Chem. Soc. 58 (1936).

[5] Chem. Zentralblatt. Jg. 1939., II. 3681; Bull. Soc. Chim. France, Mem. (5)6, (1939) 1420.

[6] Chem. Zentralblatt. Jg. 1939, II. 815.

Institut für allgemeine Chemie, Sopron

УДАЛЕНИЕ ЗОЛООБРАЗОВАТЕЛЕЙ ИЗ МИНЕРАЛЬНЫХ УГЛЕЙ ПРИ ПОМОЩИ АЗОТНОЙ КИСЛОТЫ

А. Ромвальтер и Л. Фекете

Р е з ю м е.

Авторами были проведены опыты по вопросу уменьшения содержания угольной золы с помощью соляной, а затем и азотной кислоты. Опыты, произведенные главным образом со среднего качества дорогским углем, показали, что действие соляной и азотной кислот расходится в том, что при экстракции соляной кислотой уже одна ее доза обеспечивает результат, так как из-за одновременного кислотного и окисляющего действия азотной кислоты окисление исключает способность обмена катионов в обугленной системе. С другой стороны окисленный уголь легко растворяется в щелочах, главным образом в аммиачной щелочи. На основании кислотного влияния считается удовлетворительным уменьшение такой угольной золы, золообразователи которой являются, главным образом, лимонит и известняк ($CaCO_3$), в то время как при помощи азотной кислоты можно в значительной степени уменьшить содержание золы даже и в том случае, если количество силикатных золообразователей значительно. Следует заметить, что HO_3 и H_3 являются отечественными вспомогательными материалами и могут быть изготовлены из воздуха и воды, а нужное для процесса оборудование изготовляется из нашего главного металла — алюминия, так как алюминий является устойчивым как азотной кислоте, так и аммонию. При процессе уменьшения золы с помощью азотной кислоты аммонийно-щелочным путем, с одной стороны происходит частичное растворение золообразователей, а с другой стороны, переход материалов „чистого угля" в гидрозоль. Для применения этого процесса уголь является тем более подходящим, чем меньше он обугливается. Использование азотной кислоты и аммония не означает их употребления в больших количествах, а их более быструю борачиваемость. Однако, этот способ имеет целью не только уменьшение золы, но и изготовление гумината и гуминовой кислоты, которые могут быть использованы как ценные материалы для удобрения почвы, а также для снабжения фенолом и углеводородом и, даже, для получения входящий в состав угля серы.

EIN HALBMIKROVERFAHREN ZUR BESTIMMUNG DES CHROMS IN VANADIUM- UND WOLFRAM-FREIEN STÄHLEN

FR. MACHER

Eingegangen am 16. Febr. 1951.

Für die vorliegende Arbeit diente als allgemeine Grundlage das zur Bestimmung des Chroms allgemein bekannte Ammoniumpersulfat-Silbernitrat-Verfahren nach *M. Philips*[1] mit einigen Abänderungen des Verfassers. Da das für die Makro-Massanalyse ausgearbeitete Verfahren allgemein bekannt ist, erscheint eine Erläuterung als überflüssig ; es soll darum hier nur auf die Abänderungen näher eingegangen werden.

Vor allem wurde von der indirekten Titration Abstand genommen und ein Weg zur direkten Titration gesucht. Schon *J. Knop*,[2] sodann *I. M. Kolthoff*[3] behandelten eingehend die Möglichkeit einer direkten Titration des Chroms durch $FeSO_4$ mit Diphenylamin als Indikator und stellten unter gewissen Bedingungen eine befriedigende Arbeitsweise fest. Da es sich um die Ausarbeitung eines Halbmikroverfahrens handelt, galt es nun nachzuprüfen, mit welcher Genauigkeit sich die einzelnen Resultate bei gegebenen Umständen reproduzieren lassen. Um dies festzustellen, wurde zuerst eine genau 0,02 n $K_2Cr_2O_7$ — Lösung (0,9801 g $K_2Cr_2O_4$ Merck p. a. /1000 ml) und eine annähernd 0,02 n $FeSO_4$-Lösung (5,7 g $FeSO_4$ + 7 H_2O Merck p. a. + 100 ml 5 n H_2SO_4/1000 ml) hergestellt. Die als Indikator dienende Diphenylaminlösung enthielt 0,1 g Diphenylamin (Merck p. a.) pro 10 ml cc. H_2SO_4. Bei den ersten Versuchen wurden 20 ml 0,02 n $K_2Cr_2O_7$-Lösung mit 4 ml 4 n H_2SO_4 und 5 ml 25 % H_3PO_4 versehen und mit der annähernd 0,02 n $FeSO_4$-Masslösung in solcher Weise titriert, dass 2 Tropfen Indikator erst nach deutlicher Grünfärbung der Lösung, also nach einem Verbrauch von etwa 10 ml $FeSO_4$, zugegeben wurden. Der Gesamtverbrauch an $FeSO_4$-Massflüssigkeit war bei 5 parallelen Proben 19,30 19,30 19,20 19,15 19,15 ml, d. i. 19,20 +0,04 ml.

Die Ergebnisse werden ungenauer bzw. es ergibt sich eine grössere Streuung, wenn man den Indikator schon am Anfang der Titration zugibt. Fünf je 20 ml 0,02 n $K_2Cr_2O_7$ enthaltende Proben verbrauchten nämlich unter solchen Umständen 18,80 19,20 18,75 19,35 19,50 ml Massflüssigkeit. Der Mittelwert beträgt somit 19,20 +0,10 ml.

R. Lang und *F. Kurtz*[4] teilen mit, dass man bei der direkten Titration des Chromates mit $FeSO_4$ sehr gute Ergebnisse erhält, wenn man als Indikator eine Lösung verwendet, welche aus 1 - 2 ml 0,02 n $K_2Cr_2O_7$-Lösung und 1 ml sirupösem H_3PO_4 nebst 3 Tropfen Diphenylamin gemischt wurde, und diese Mischung mit einer 0,02 n $FeSO_4$ Lösung scharf austitriert. Die hier beschriebenen Versuche bestätigen diese Behauptungen. Der Verbrauch an $FeSO_4$-Massflüssigkeit war diesmal nämlich 19,50 19,50 19,50 19,50 19,50 ml, d. i. $19{,}50 \pm 0{,}00$ ml. Der Indikator wurde schon am anfang vor der Titrierung zur Lösung gegeben. Der Farbwechsel vom Blau in Grün ist scharf und vollzieht sich bei hinreichendem Rühren rasch. Doch wird die tiefblaue Farbe des Indikators erst nach der Zugabe von einigen ml $FeSO_4$-Massflüssigkeit erreicht, bishin ergibt sich ein schmutzig blauer Farbton.

Der Indikator ist haltbar, nach längerem Stehen empfiehlt es sich jedoch, ihn vor der Zugabe zu schütteln.

Diese Art der Titration erschien also wenigstens vom Standpunkt der Reproduzierbarkeit als sehr braucbar. Man musste aber noch untersuchen, ob der Farbumschlag den wirklichen Äquivalenzpunkt der Titration anzeigt. Um dies zu entscheiden, wurde daher die Titration bei den weiteren Versuchen auch potentiometrisch verfolgt, und der Äquivalenzpunkt auch mit Hilfe der Wendepunktmethode bestimmt. Ein in eine Glasröhre eingeschmolzener Pt-Draht diente dabei als Indikatorelektrode und eine gesättigte Kalomelelektrode wurde als Vergleichselektrode verwendet. Die letztere reichte nicht unmittelbar in die Titrierflüssigkeit, sondern wurde mit Hilfe eines gesättigtem K_2SO_4 Stromschlüssels bzw. mit einem mit gesättigtem K_2SO_4 gefülltem Becherglas mit dieser verbunden. Als Kompensation diente eine fünfdekadische Kompensationsbrücke und ein Lichtzeigergalvanometer mit einer Empfindlichkeit von 10^{-8} A. Die Lösung selbst wurde durch einen kleinen Elektromotor gründlich umgerührt.

Die Titrationsergebnisse von 20,0 ml 0,02 n $K_2Cr_2O_7$ sind im Diagramm *(Abb. 1.)* ersichtlich. Die Titrationen wurden so mit einem Zusatz von 3 ml Indikatorgemisch (vollausgezogene Linie), wie ohne dieses (gestrichelte Linie) durchgeführt. Es ist auffallend, dass die Anwesenheit des Indikators den Potentialsprung in der Nähe des Äquivalenzpunktes um ein Vielfaches vergrössert und zugleich das Umschlagspotential vermindert wird. Es besitzt ohne Zusatz des Indikatorgemisches ein Umschlagspotential von 660 mV, bei Zusatz desselben aber 580 mV gegen über einem gesättigten Kalomelelement. Der Farbumschlag fällt genau mit dem maximalen Potentialsprung zusammen.

Bei Stahlproben wurde die Bestimmung sowohl auf potentiometrischem, wie auch auf direktem Titrationswege vorgenommen. Zu diesem Zwecke wurde 0,1 g Stahl in 6 ml Mischsäure gelöst. [160 ml H_2SO_4 (D 1,84) + 80 ml H_3PO_4 (D 1,7) + 760 ml H_2O] Nach vollständigem Lösen wird mit 1 ml 1:1 HNO_3 oxydiert, sodann bis zum Erscheinen der Schwefelsäuredämpfe eingedampft,

auf 30 ml verdünnt und als Katalysator 1 ml 0,5 % $AgNO_3$ zugegeben. Die warme Lösung wird sodann mit 2 ml 15 % $(NH_4)_2 S_2O_8$ versehen und solange gekocht, bis die rote Farbe des Permanganations erscheint. Nachher wird das überschüssige Persulfat mit 1 ml 2,5 % NaCl zersetzt, noch 10 Minuten lang gekocht, sofort abgekühlt und mit $FeSO_4$-Masslösung aus einer Nachfüllbürette mit einer Einteilung von 0,01 ml direkt titriert. [Die Masslösung enthält 3,475 g $FeSO_4 + 7\ H_2O$ (Merck p. a.) + 50 ml cc. H_2SO_4/1000 ml.]

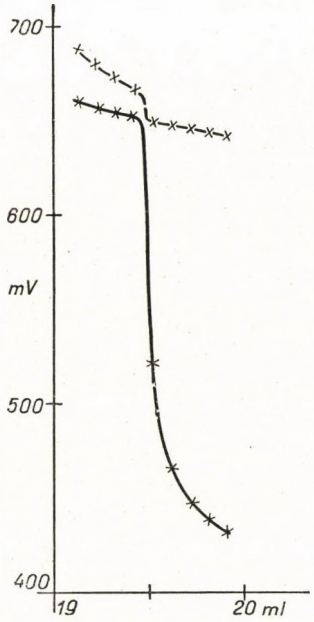


Abb. 1.

Als Probe diente jetzt ein Stahl mit 1,35 % Chrom, bzw. mit 0,32 %. Die Ergebnisse sind in den Tabelle 1 und 2 mitgeteilt.
Bei einer unmittelbaren Titration von 0,1214 g Stahl wurde 7,94 ml $FeSO_4$-Masslösung verbraucht.

Die $FeSO_4$-Masslösung wurde auf eine genau 0,02 n $K_2Cr_2O_7$-Lösung eingestellt, wobei 1 ml $FeSO_4$ = 0,2126 mg Chrom entsprach. Die mit diesem Titer errechneten Ergebnisse sind:

bei der potentiometrischen Titration	1 Probe	1,36 %	Chrom
	2 «	1,35 %	«
	3 «	1,33 %	«
bei der Titration mit Farbindikator	4 «	1,36 %	«

TABELLE I.

Die potentiometrische Titrierung einer Stahlprobe mit 1,35% Chrom.

Einwaage											
0,1461 g				0,1293 g				0,1023 g			
ml	Ω	Δ	Farbe	ml	Ω	Δ	Farbe	ml	Ω	Δ	Farbe
9,00	4760			7,80	4730			6,00	4840		
		10				70				20	
9,10	4750			7,90	4660			6,10	4820		
		10	blau			40	blau			40	blau
9,20	4740			8,00	4620			6,20	4780		
		90				160				100	
9,30	4650			8,10	4460			6,30	4680		
		400				255				290	
9,40	4250			8,20	4205			6,40	4390		
		230				305				200	
9,50	4020		grün	8,30	3900		grün	6,50	4190		grün
		190				80				200	
9,60	3830			8,40	3820			6,60	3990		

Normalelement : 7614 Ω

TABELLE II.

Die potentiometrische Titrierung einer Stahlprobe mit 0,32% Chrom

Einwaage			
0,103 g			
ml	Ω	Δ	Farbe
1,50	4600		
		90	blau
1,52	4510		
		210	
1,54	4300		
		100	grün
1,56	4200		
		50	
1,58	4150		

Normalelement : 7614 Ω

Die unmittelbare Titration von 3 Stahlproben mit je einer Einwaage von auch 0,103 g Stahl ergab als Verbrauch 1,56, 1,54 1,56 ml $FeSO_4$-Masslösung.

Die Titerstellung ergab diesmal: 1 ml $FeSO_4$ = 0,2147 mg Chrom. Die Ergebnisse sind:

bei der potentiometrischen Titration
1 Probe 0,32 % Chrom,
bei der Titration mit Farbindikator
2 Probe 0,32 % Chrom
3 « 0,32 % «
4 « 0,32 % «

Die Ergebnisse stimmen also ganz genau mit den auf makro-chemischem Wege gefundenen überein.

Bemerkt sei noch, dass bei Anwesenheit von Vanadium[4] dieses mitbestimmt wird, bei Gegenwart von Wolfram aber der Indikator versagt.

Um die Dauer der Analyse zu verkürzen, wurde das langwierige Eindampfen dadurch beschleunigt, dass es auf einer Al-Platte von cc. 180 × 180 mm Grösse und einer Dicke von 15 mm vorgenommen wurde. Auf einer solchen Platte hat man für vier 250 ml Griffin-Bechergläser Platz. Die Mitte der Platte ist verdickt und trägt eine Bohrung für ein Thermometer, um die Temperatur des Eindampfens jederzeit kontrollieren zu können. 230—250°C erwies sich in

diesem Falle als am günstigsten. Um den Vorgang weiter zu beschleunigen, werden die Dämpfe mittels in die Bechergläser hineinhängenden Trichtern abgesaugt. (Abb. 2.)* Zum Absaugen wurde eine Wasserstrahlpumpe benützt. Die Dämpfe werden vorher noch in einer mit Wasser gefüllten Waschflasche aufgefangen. Es kann somit einfach am Laboratoriumstisch gearbeitet werden, ohne dass schädliche Dämpfe in die Luft gelangen, was das Arbeiten in einer Abzugskapelle überflüssig macht. Die Zeit des Eindampfens beträgt auf diese Weise etwa 5 Minuten: eine ganze Bestimmung dauert etwa $^3/_4$ Stunde.

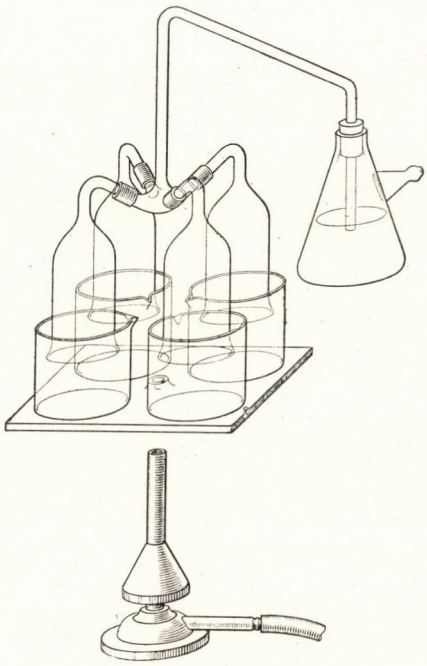


Abb. 2.

Es sei noch bemerkt, dass es nicht zweckmässig ist, bei verschiedenen Chromgehalten immer mit derselben $FeSO_4$-Masslösung zu arbeiten. Etwa folgende Abstufung erwies sich als am günstigten, da somit immer ungefähr der gleiche Verbrauch an Masslösung auftritt.

0 — 1 % Cr ..... 1,35 g $FeSO_4 + 7\ H_2O$/1000 ml
1 — 5 % Cr ..... 3,475 g $FeSO_4 + 7\ H_2O$/1000 ml
5 — % Cr ..... 17,375 g $FeSO_4 + 7\ H_2O$/1000 ml

Einige Belegsanalysen sollen noch die Brauchbarkeit des neuen Verfahrens bekräftrigen.

*Es hat sich inzwischen als noch besser erwiesen, dass Abzugsrohr nicht oben anzubringen, wie es ursprünglich in Abb. 2 dargestellt ist, sondern unten.

Betriebsanalyse %	Nach der neuen Methode				Genauigkeit %	Genauigkeit nach R. Weihrich[5] %
	1	2	3	4		
	%					
0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	± 0,00	± 0,02
0,60	0,65	0,64	0,65	0,64	± 0,01	± 0,02
11,00	10,88	10,87	10,87	10,87	± 0,01	± 0,12
17,14	17,15	17,25	17,17	17,27	± 0,06	± 0,12
21,00	21,23	21,20	20,75	21,01	± 0,27	± 0,15

Zusammenfassung : Es wird ein Halbmikroverfahren zur direkten Titration des Chromes in V- und W-freisen Stählen beschrieben. Als Grundlage dient das Ammoniumpersulfat-Silbernitrat-Verfahren, mit einigen Abänderungen, auf welche näher eingegangen wird. Es gewährt dabei dieselbe Genaugkeit, doch ist es viel sparsamer und schneller, da es nur 1/10 der beim üblichen Makroverfahren notwendigen Reagenzien benötigt.

Lehrstuhl für analytische Chemie. Sopron. 1950

LITERATUR

[1] *Handbuch für das Eisenhüttenlaboratorium.* Bd. II., Verlag Stahleisen m. b. H., Düsseldorf, 1941, S. 88.

[2] *Knop, J.* Journ. of the Americ. Chem. Soc. (46) 1924. S. 263.

[3] *Kolthoff, I. M.* Die Massanalyse. J. Springer Berlin 1928., S. 462.

[4] *Lang, R.* und *Kurtz, F.* Zeitschrift f. anal. Chemie (*86—87*) 1931—32. S. 288.

[5] *Weihrich, R.* Die chemische Analyse in der Stahlindustrie. Ferdinand Enke, Stuttgart 1939 . S. 50.

ПОЛУМИКРОПРОЦЕСС ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ХРОМА В СТАЛИ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЙ ВАНАДИЯ И ВОЛЬФРАМА

Ф. Махер

Резюме

В статье описывается экономный полумикропроцесс определения хрома в несодержащих ванадия и вольфрама сталях при помощи ферросульфата. Процесс основан на серебряно-нитратно-аммониепersульфатном способе с некоторыми изменениями, подробно изложенными в статье. Этот процесс — как и основной макро-процесс — является точным, но гораздо более быстрым и экономным, так как требует для своего осуществления только одной десятой части силикатов. Кроме того, описано устройство для ускорения выпаривания.

ИССЛЕДОВАНИЕ СФЕРОИДАЛЬНОГО (ГЛОБУЛЯРНОГО) ГРАФИТА*

Проф. Др. Л. Жильмо

Поступило 24 февраля 1951 г.

ч а с т ь. 1

За время развития металлографии чугуна, вплоть до 1925 г., были известны два вида графита : пластинчатый графит и углерод отжига для ковкого чугуна. При тогдашнем состоянии познаний предполагали, что пластинчатый графит кристаллизуется первично из ванны жидкого металла, а углерод отжига образуется вследствие термической обработки, при распаде цементита Около 1925 г. Пивоварский положил основу, начав свои опыты с переохлаждением ванны жидкого металла. С этого времени стало известным понятие переохлажденного графита, а также действие перегревания на распределение графита. Однако, при этом остался невыясненным целый ряд вопросов, как например : различное поведение чугунов с однородным химическим составом, разные качества чугунов, полученных древесноугольным и коксовым путем, а также и то, что один и тот же чугун ведет себя иначе в электрической печи, чем в вагранке, и т. д. Эти явления обратили внимание исследователей на исследование в первую очередь влияния небольших примесей поглощенных газов и центров кристаллизации. В течение начавшихся в 1929 г. в этих трех направлениях исследований Норбери[1]) указал на то, что тонкопластинчатый графит образуется вследствие переохлаждения. Норбери и Морганом[2]) в 1936 г. было установлению, что водород делает распределение графита более крупным, а азот более тонким. В связи с этим выяснилась и причина неодинакового поведения чугуна в вагранке и в электрической печи, так как в вагранке всегда освобождается из футеровки количество паров, достаточное для того, чтобы не было возможности образования переохлажденного графита. При исследовании, Моррог[3]) в 1941 г. доказал, что в белосердечном чугуне графит сферолитовый, тогда как в черносердечном чугуне он образуется группированием нескольких мелких пластинок. Далее, он установил, что сферолит белосердечного чугуна кристаллизуется вокруг ядра из сернистого железа. Исследование центров кристаллизации было началом общирной научной работы, в результате которой, — вследствие работ Моррога и его сотрудников, — стали известны те новые структуры, при которых графит появляется не в виде углерода отжига, а в глобулярной форме, несовпадающей с последним по структуре. Это новое образование графита в английской технической литературе получило название нодулярного графита.

*Доклад по случаю присвоения звания академика, состоявшийся 24. VI. 1950 г

После чрезвычайно обширной научной работы, Моррог опубликовал первую в мировой литературе статью о получении чугуна с сфероидальным графитом, после чего над этим вопросом работал целый ряд исследователей, что весьма понятно, так как речь шла не только об изучении нового вида чугуна, с до сих пор почти неизвестной кристаллической структурой, но и показатели прочности этой новой отливки превзошли все до сих пор известные величины.

Как достопримечательность надо упомянуть, что венгерский исследователь Калман Керпель уже в 1928 г. описал чугун »... имеющий чрезвычайно мелкое распределение графита. Графит имеет ферритово-перлитовую структуру в виде углерода отжига. Достигнутый предел прочности при растяжении больше, чем 40 кг/мм², а предел прочности при изгибе больше, чем 70 кг/мм².«

В своих основных трудах Моррог и Вильямс[5] указывают на то, что производство высокопрочного чугуна достигнуто при помощи церия. Они добавляли церий в виде »смешанного металла« к сплаву и нашли, что, при соблюдении определенных условий, образуется нодулярный графит, причем чугун приобретает весьма высокую прочность. Моррог и Грант считают что при этом процессе необходимы следующие условия:

1. сплав должен кристаллизоваться без добавления церия в сером виде;

2. сплав должен быть заэвтектическим, т. е. в отношении угля (*C*) должно существовать следующее неравенство:

$$C > 4 \cdot 3 - \frac{1}{3}(Si + P)$$

3. присутствие кремня (*Si*) не оказывает влияния, но полезное содержание его между 2,3 и 7%;

4. содержание серы (*S*) должно быть возможно наиболее низким, а после добавления церия не более 0,02%;

5. содержание фосфора (*P*) не должно превышать 0,6%, но лучше, если его содержание будет меньше 0,1%;

6. *Mn*, *Cu*, *Ni*, *Cr* и *Mo* могут присутствовать в любом количестве, подразумевая, что условия первого пункта могут быть выполнены.

Хотя, согласно полученным ими данным глобулярный графит можно производить при простом соблюдении вышеприведенных условий, однако, получаются значительно более благоприятные результаты, если после добавления церия производится модифицирование ферросилицием или цирконievo-кремниевым сплавом. Под процессом модифицирования надо понимать присадку порошкообразного легирующего элемента в количестве 0,4 и 0,6%, действие которого выражается в образовании центров кристаллизации для графита. По наблюдениям авторов, добавление определенного количества церия является необходимым условием для образования глобулярного графита, однако, добавление излишнего количества церия делает сплав хрупким.

Через некоторое время после сообщения этих результатов Донохо опубликовал, что такие же структуры могут быть получены, употребляя вместо церия магний (*Mg*) причем первую часть обработки представляет собой добавление магния (*Mg*) к жидкому железу, а вторую часть — моди-

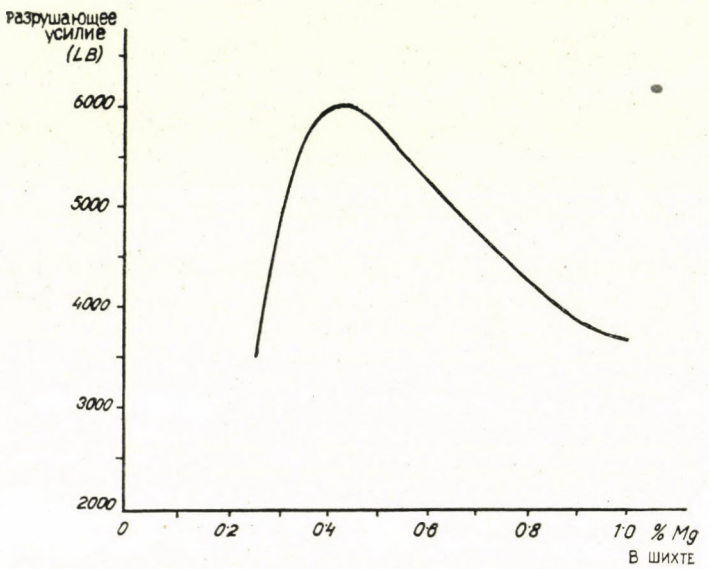
фицирование ферросилицием или сплавом *Si—Mn—Zr*. Так как магний (*Mg*) значительно дешевле и более доступен чем церий (*Ce*), исследования в первую очередь продолжались в этом направлении и способ обработки церием временно был отброшен, как более сложный и труднопримени мый в промышленности. Самое большое затруднение при обработке магнием представляло то обстоятельство, что при температуре плавления чугуна магний имеет очень большое давление паров. Вследствие того, что при добавлении в металлическую ванну металлического магния моментально выделяются пары магния с давлением в несколько атмосфер, вызывая этим взрыв, в практике отказались от непосредственного добавления металлического магния и перешли к способу введения магния в лигатуре.

При приготовлении вспомогательных сплавов, создалась практика введения в жидкое железо магния в сплаве с таким металлом, давление паров которого при температуре плавления железа настолько низко, что им можно пренебречь, и который при введении его в сплав не изменит сам по себе структуру чугуна. При выборе состава лигатуры необходимо следить за тем, чтобы другие легирующие компоненты, введенные в лигатуру, не обогатились в значительной мере из-за постоянного возвращения материала. Для приготовления лигатур вначале пользовались медью, позднее никелем, а затем железом и кремнием, или различными комбинациями этих элементов. В начале произведения опытов большинство работало со сплавами меди и магния, но, с одной стороны, медь была довольно дорогой, а с другой стороны, повышение количества меди в чугуне выше известного предела не является желательным, поэтому этот способ был вытеснен приготовлением лигатур никеля и магния, которые употребляются в производстве и в настоящее время. Вследствие дороговизны никеля, особенно в тех странах, где его трудно доставать, в первую очередь пользовались лигатурами кремния. Так как кремний оказывает сильное влияние на структуру чугуна, употребление чистых сплавов *Si—Mg*, из-за выгорания чугуна сильно влияет на образующуюся структуру. Именно поэтому оказалось более целесообразным употребление лигатуры *Fe—Si—Mg*, в которой в настоящее время стремятся снизить содержание кремня до возможно наименьшего количества.

Кроме легирования с металлами, исследовалось введение магния различными другими способами, так например, введение порошкообразного магния, затем, введение магния в смеси с жидким стеклом, или с каким либо другим связывающим веществом, но не оказывающим действия на железо, как например: цемент, глина и т. п.[8]) Все эти способы добавки имеют целью уменьшить или ограничить действие взрыва, возникающего вследствие высокого давления паров магния. Вместе с развитием способов легирования магния, многие исследователи обратили внимание на то, что количество магния влияет на прочность сплава и на образование структуры, и что максимальная прочность отливки зависит от добавки магния (рис. 1).

Многие исследователи наблюдали, что при низких количествах магния сфероидальная структура и желаемая высокая прочность не могут быть достигнуты, а при чрезмерно больших количествах магния отливка становится хрупкой. Минимальное количество магния определено различными исследователями примерно в 0,3%, однако данные, имеющиеся в литературе по этому вопросу, по понятным причинам, показывают некоторое колебание.

Помимо использования в качестве легирующих элементов церия и магния, нами произведены опыты со многими другими легирующими элементами, например, с кальцием, литием, или с силикокальцием. В практике, главным образом, получили распространение сплавы *Ni—Mg*, с помощью которых, как это было уже упомянуто, осуществляется регулярное производство. При таком состоянии опытов многочисленные явления остались невыясненными, а, кроме того, отсутствуют данные, с помощью которых можно было бы повторить опыты в определенных производственных условиях.

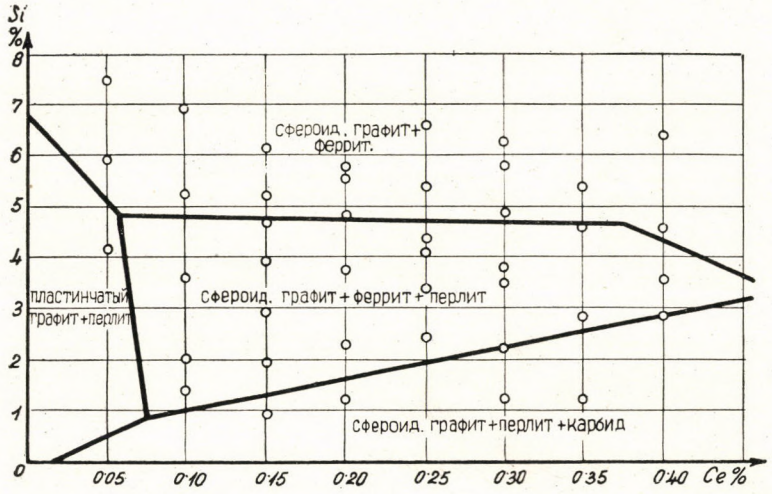


1. Влияние магния на предел прочности при растяжении.

2. Объект исследования

После опубликования первых научных работ по этому вопросу, нами были в 1947—48 гг. произведены опыты для их воспроизведения и было установлено, что в результате опытов получение глобулярного графита в определенных случаях было возможно, однако, некоторые опыты кончились отрицательным результатом, что совпадает с наблюдениями многих заграничных авторов. Вследствие этого мы должны были предположить, что на получение сфероидального графита влияют многочисленные факторы, которые мы стремились распределить в такой систематической серии опытов, которая могла бы одновременно служить решающим доказательством способа образования глобулярного графита. Целью нашего исследования было установление, — независимо от вспомогательных материалов, используемых для легирования, — всех условий образования глобулярного графита и влияющих на последнее факторов, а также, выяснение на основании имеющихся в нашем распоряжении литературных данных и собственных опытов принципов образования сфероидального графита.

Опыты в этом направлении производились при помощи легирования церием и магнием, не принимая во внимание остальных легирующих элементов. Центром тяжести наших опытов были чугуны с глобулярным графитом, производившиеся с помощью церия, так как обращение при точных опытах с магнием гораздо труднее, чем с церием. Вследствие того, что церий в виде так называемого »мишметалла« (смешанного металла) растворяется в железе быстро и легко, количественные данные могли соблюдаться точнее и легче контролироваться, чем при обработке магнием. В течение опытов мы стремились точно исследовать влияние отдельных легирующих элементов, температуры, толщины отливки, количества модификаторов, время модифицирования и температуру отливки. Опыты производились таким образом, что вначале, оставляя без изменения все остальные факторы, исследовали влияние отдельных легирующих металлов *C*, *Si*, *Ce* а затем, при

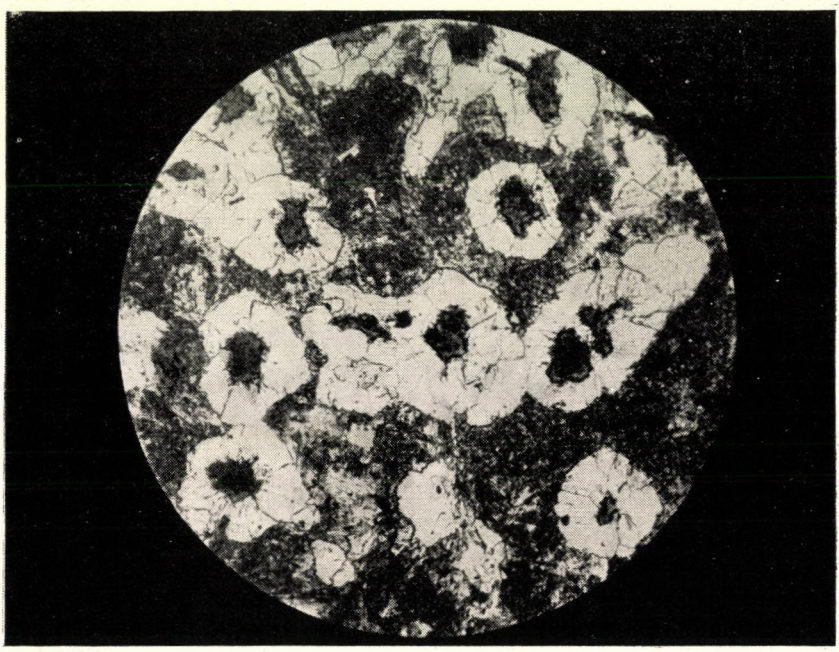


2. Микроструктура при составе C = 4,47%, при толщине стенки в 30 мм.

постоянном составе испытывали влияние температуры, время модифицирования и т. д. Под временем модифицирования мы в данном случае понимаем время от присадки ферросилицием до отливки.

Для исследования отдельных легирующих элементов мы произвели отливки при постоянной температуре в 1480° С из высокочастотной индукционной печи, емкостью в 10 кг, при различных содержаниях *C*, *Si* и *Ce*, таким образом, что из каждой отливки было получено четыре образца, диаметром в 30 мм, и четыре образца, диаметром в 10 мм. Через 3—5 минут после легирования церием производилось модифицирование чугуна при помощи 80%-го ферросилиция, в количестве 0,4%. После модифицирования отливка производилась непосредственно в опоки. Из каждой плавки получалось два образца упомянутой толщины, т. е. 10 и 30 мм в диаметре для микроскопического исследования, а, кроме того, стандартные чугунные образцы для испытания на разрыв из стержня 30 мм диаметра. Образцы для испытания на разрыв имели винтовые зажимы. Химический состав имевшегося в нашем распоряжении бокситного железа: *C* = 4,47%,

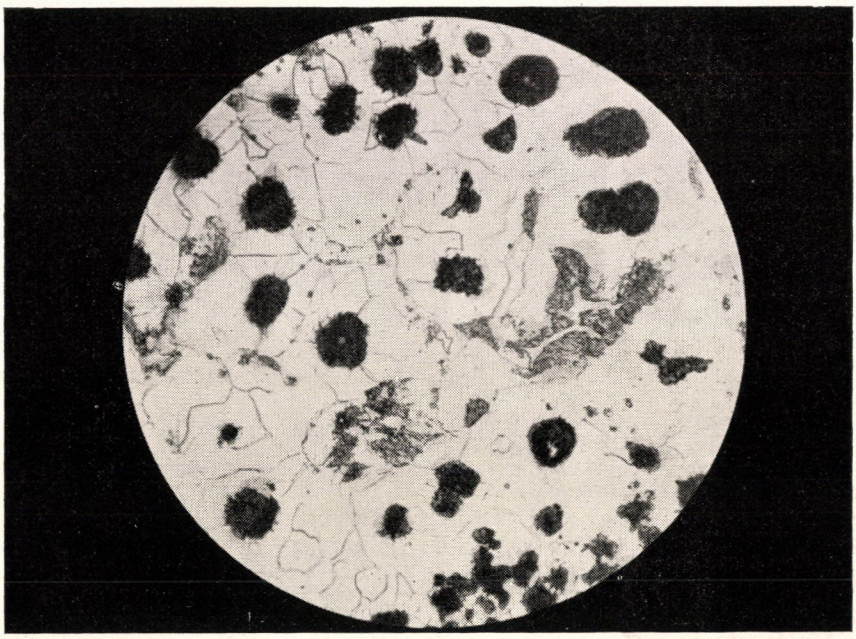
Si = 1,04%, *Mn* 0,79%, *S* = 0,016%, *P* = 0,11% и *Ti* = 0,21%. Содержание титана было очень высоким, потому что чугун производился из бокиста. Для исследования влияния содержания *C*, во второй серии опытов к чугуну добавлялось столько стального лома, чтобы снизить содержание *C* до 3,6%. Опыты с этими двумя исходными материалами с различным содержанием *C* производились таким образом, что при меняющемся содержании кремния и церия с помощью микроскопа был установлен предел образования сфероидального графита. Чрезвычайно интересным является то обстоятельство, что иностранная специальная литература уделяла много внимания появлению видов сфероидального графита, но вообще не обра-



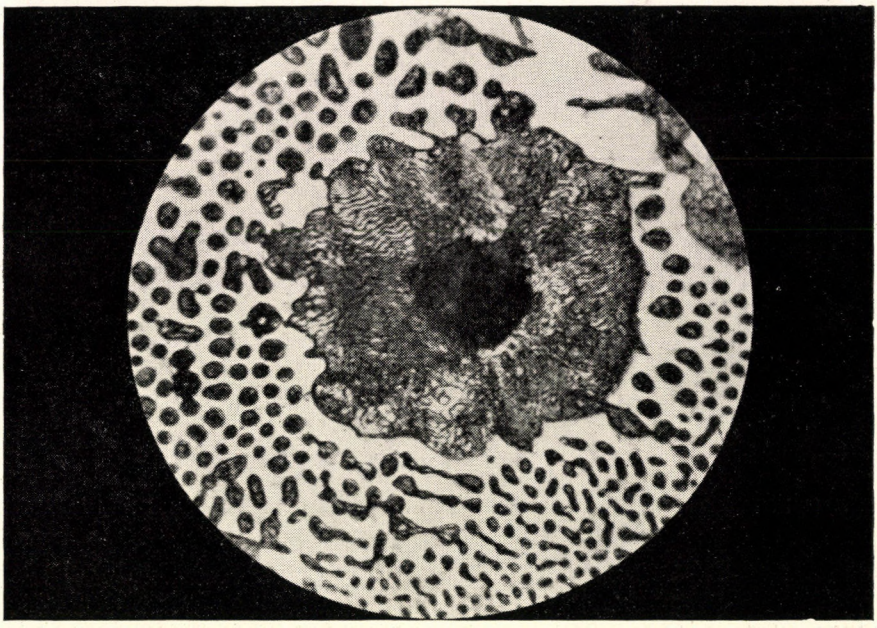
3. Сфероидальный графит в ферритово-перлитовой структуре. x 100. (*C* = 4,47%, *Si* = 3,34%, *Ce* = 0,4%).

щала внимания на то, какая основная структура возникает наряду с глобулярными графитами.

Результаты опытов резюмированы нами на рисунке 2, в порядке, похожем на диаграмму Маурера, с той разницей, что при постоянном содержании *C* на рисунке изображена микроструктура, возникающая в функциональной зависимости от *Si* и *Ce*. На ординат нанесено установленное анализом содержание *Si* в процентах, а на абсцисс — количество введенного *Ce*. Результаты показывают, что сфероидальный графит, возникающий в ферритово-перлитовой основной структуре, образуется только внутри замкнутого пространства, которое на основании опытов могло быть резко ограничено. При низком содержании *Ce* в основном материале перлита образуется пластинчатый графит, а при более высоком содержании *Si* появля-



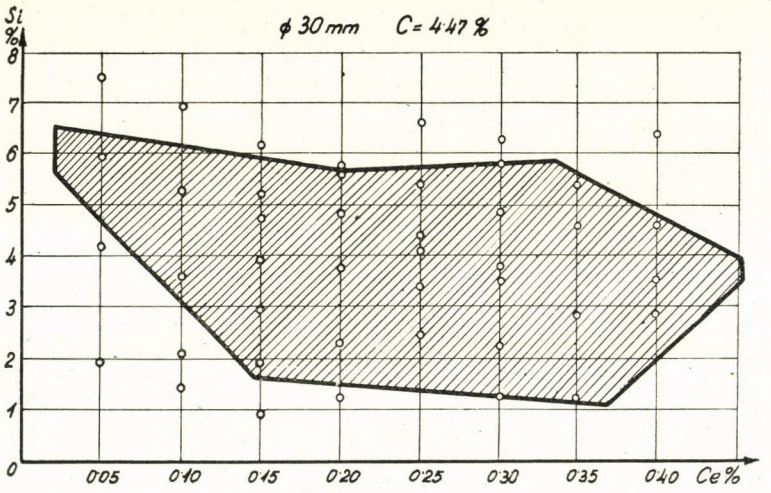
4. Сфероидальный графит в феррите. x 100. (C = 4,47%, Si = 4,24%, Ce = 0,25%).



5. Сфероидальный графит в ледебуритовой структуре. x 250. (C = 4,47%, Si = 1,14%, Ce = 0,6%).

ется сфероидальный графит на фоне чистого феррита. Однако, в последнем случае, вследствие высокого содержания *Si*, феррит становится чрезвычайно хрупким. При низком содержании *Si*, как это и можно было ожидать, сфероидальный графит появляется в перлитово-карбидной основной структуре. Рисунки 3, 4 и 5 показывают характерные картины структур, взятых из отделных полей рисунка 2. На рисунке 3 изображена уже известная в литературе глобулярная графитная структура, основной материал которой имеет ферритово-перлитовую структуру. На рисунке 4 изображен сфероидальный графит в феррите; но самый большой интерес представляет собой рисунок 5, на котором изображен сфероидальный графит в ледебуритной структуре. Около сфероидального графита внутри ледебуритной структуры можно обнаружить перлитовую структуру.

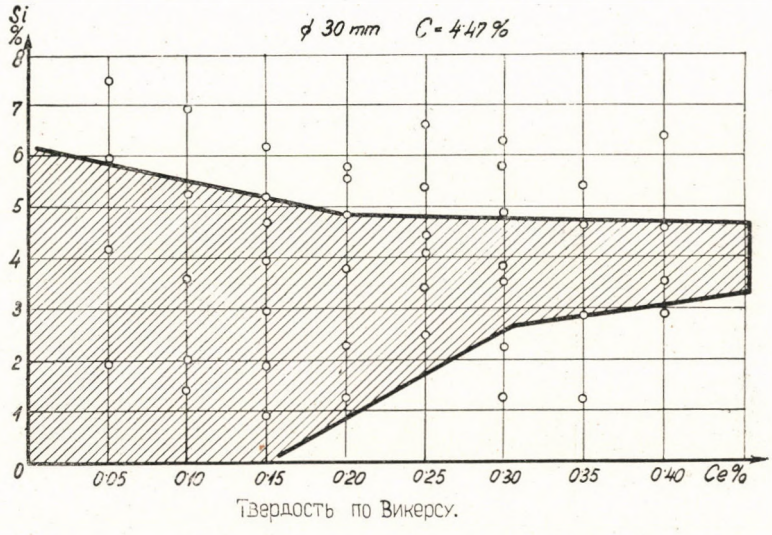
В связи с нижеследующими соображениями необходимо подчеркнуть, что в чистой карбидной структуре, согласно с вышеизложенным, можно



6. Изменение предела прочности при растяжении, как функция состава. Внутри ограниченного поля предел прочности при растяжении более 45 кг/мм². Толщина стенки 30 мм.

также вызвать выделение графита, а именно в сфероидальном виде. Результаты микроскопических наблюдений вполне соответствуют графику прочности, составленному таким же способом. На рисунке 6 изображена площадь, где предел прочности при растяжении, как функция *Ce* и *Si*, больше 45 кг/мм². На рисунке выделена величина предела прочности при растяжении в 45 кг/мм², так как эта величина представляет собой резкую границу. Образцы, взятые вне этой площади, показывают в общем и целом скачкообразные снижения величины прочности. Образцы, взятые вне очерченной площади показали величины предела прочности при растяжении не превышающие 35 кг/мм². Величина предела прочности при растяжении образцов, взятых с очерченной площади, находилась между 45 и 55 кг/мм² и только отдельные исключительные величины предела прочности при растяжении доходили до 58—60 кг/мм². Так как линия разграничения довольно четкая, то ее можно точно определить. В обоих графиках необходимо принять во внимание то обстоятельство, что желаемый эффект, т. е. глобулярная

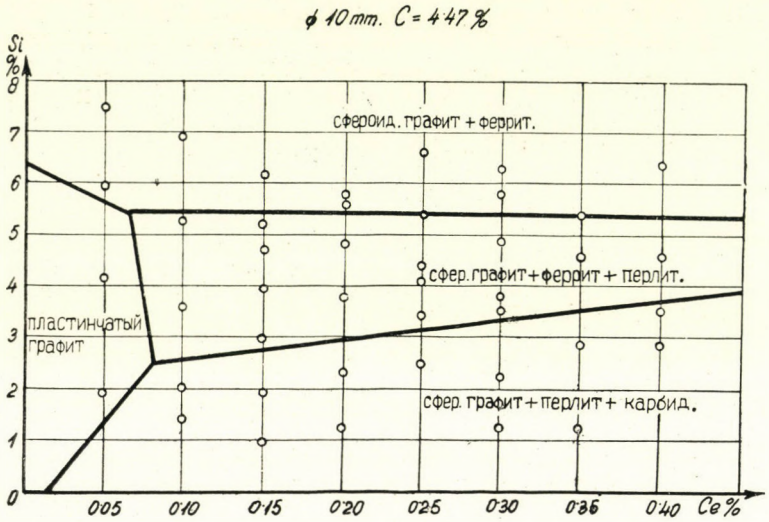
структура и больший предел прочности при растяжении, сопровождающий эту структуру, может быть обеспечен уже при 0,05% *Ce*, однако, в этом случае содержание кремния должно быть строго ограничено. Вследствие того, что сфероидальный графит, согласно графику рисунка 2, может иметь три различных основных структуры, из которых как карбидная структура, так и ферритная структура с высоким содержанием кремния, очень хрупкие, эта область также подверглась исследованию в отношении твердости и результаты исследований показаны на рисунке 7. На этом рисунке выделена поверхность, где твердость по Бринелю ниже 300 и которая с небольшим отклонением совпадает с ферритово-перлитовым полем на графике микроструктуры, захватывая естественно только часть поля с пластинчатым графи-



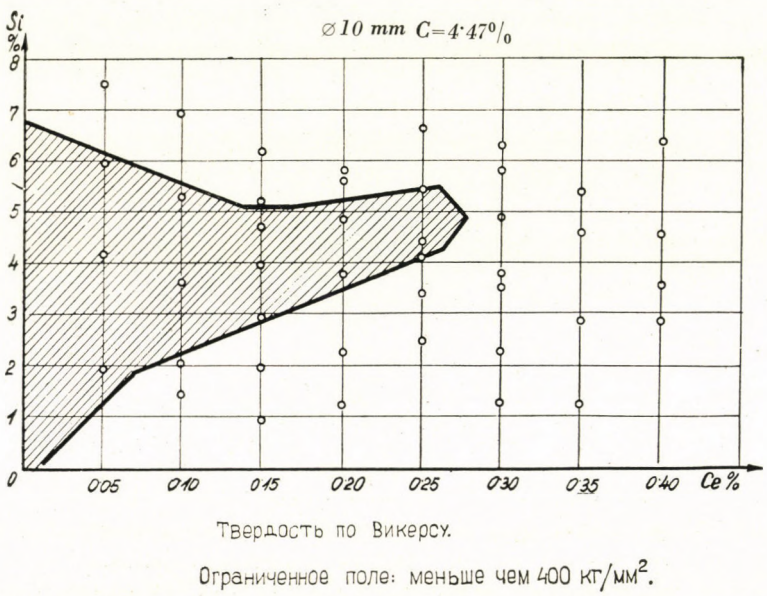
7. Распределение твердости, как функция состава. Толщина стенки 30 мм.

том, а также ту часть карбидного участка, где, вследствие низкого содержания *Ce*, структура содержит сравнительно мало карбида. Из этих трех графиков очевидно, что, хотя образование сфероидального графита, начиная с определенных границ *Si* и *Ce*, возможно при любом содержании *Si* и *Ce*, большем чем минимальное, практическую возможность использования дает все-таки только ферритово-перлитовая сфероидальная структура графита, отчасти благодаря низкой твердости, отчасти вследствие высокой прочности. Значит, условия заводского производства требуют, чтобы при определенном содержании *C* содержание *Ce* и *Si* в отливке находилось в определенных пределах. Для исследования влияния толщины стенки построена диаграмма микроструктуры на основании образцов 10 мм диаметра (рисунок 8.) Структурное построение рисунка схоже с рисунком 2, но, как это уже можно было теоретически, предполагать карбидное поле расширяется за счет ферритово-перлитового поля. В то время, как при образцах 30 мм диаметра была одна отливка, которую удалось произвести

при нижних пределах легирования с 0,1% *Ce* и 1,2% *Si*, при образцах 10 мм диаметра эти пределы значительно повысились, благодаря чему область практического использования сузилась. Вследствие влияния толщины сте-

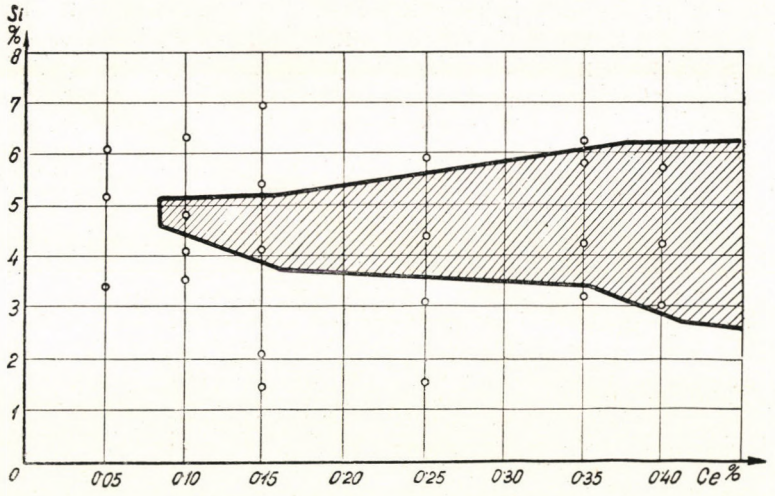


8. Микроструктура при $C = 4{,}47\%$ и при толщине стенки 10 мм.

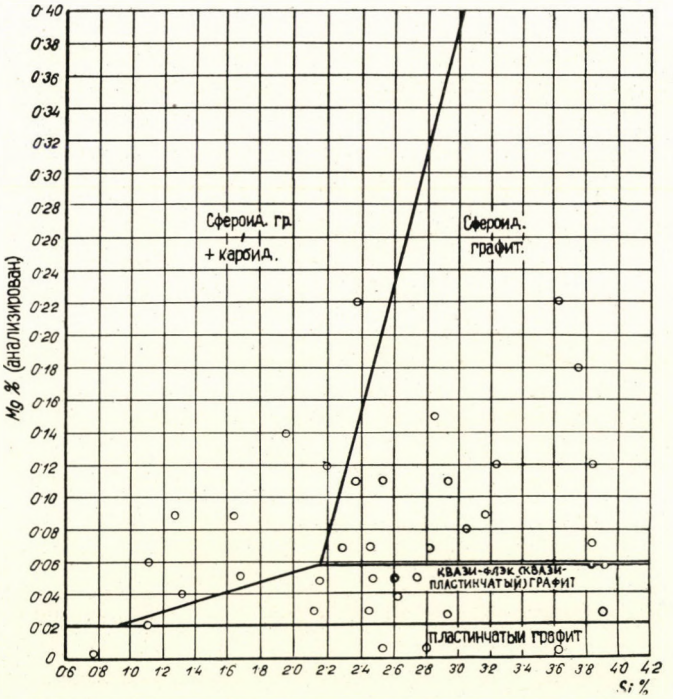


9. Распределение твердости, как функция состава. $C = 4{,}47\%$, толщина стенки 10 мм.

нок, самым целесообразным при средней толщине отливок является содержание 0,1 и 0,2 *Ce* при содержании *Si* приблизительно в 3—3,5%. Изме-



10. Распределение предела прочности при растяжении. $C = 3{,}6\%$, толщине стенки 30 мм.



11. Микроструктура чугуна, модифицированного с *Mg*.

рение твердости образцов 10 мм диаметра для выяснения влияния *C* показало, — как этого и следовало ожидать исходя из рисунка микроструктуры, — что для достижения твердости по Бринелю ниже 300 необходимые пределы легирования сужаются и это сужение происходит в такой мере, что на рисунке 9, для получения ясных граничащих линий, необходимо было принять 400 единиц как, предельную твердость (по Бринелю). Весьма характерным для показа влияния содержания *C* является график прочности, начерченный на основании содержания *C*, равняющегося 3,6% (рисунок 10), где можно ясно увидеть, что границы состава отливок с величинами прочности больше чем 45 кг/мм² настолько сузились, что на рисунке, с целью получения резко граничащих линий, возможно было привести только испытание на прочность в 35 кг/мм².

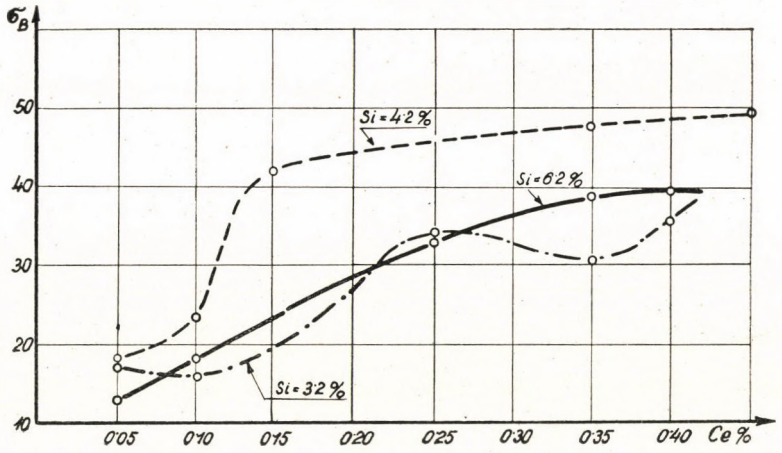
Для сравнения необходимо еще упомянуть, что Мысковский и Данфи (11) сняли график магния такого характера, как изображенный на рисунке 11. Это показывает, что образование сфероидального графита не зависит от содержания *C*, что находится в резком противоречии с данными наших многочисленных опытов, исходя из того, что при наших опытах возможность образования сфероидального графита в значительной степени зависит от содержания *C*, и, в общем, пределы легирования, относящиеся к содержанию *Si* и *Ce*, и внутри которых может образовываться глобулярный графит, возрастают с увеличением содержания *C**. Из вышеизложенного очевидно, что применение чушек чугуна с большим количеством *C* имеет большое преимущество.

Согласно этому можно установить, что основным условием для образования сфероидального графита является выбор правильных отношений *C*, *Si* и *Ce*, и что прочность и твердость отливки зависят также от пропорциональных отношений этих трех составляющих элементов. Относящиеся к этому вопросу данные для практического применения приведены в предыдущих графиках. В связи с этим, заключение, что возможность образования сфероидального графита не зависит от содержания *C*, является неправильным. Неправильным является и то, что кривая показывает максимум прочности, как функцию легирующего материала ; это видно из рисунка 1. Мы вывели величину предела прочности при растяжении, как функцию *Ce*, в отношении материалов, содержание *C* в которых равнялось 4,47% и 3,6%, и эта величина при различном содержании *Si*, асимптотически показывает кривую, приближающуюся к данной предельной величине, как например, в случае содержания $C = 3{,}6\%$, при $Si = 4{,}2\%$ и при $Si = 6{,}2\%$ (Рисунок 12). Кривые показывают двойной максимум, при $C = 3{,}6$ и $Si = 3{,}2$, а также при $C = 4{,}47$, $Si = 2$ и $Si = 3{,}7$. Еще более интересно то, что при $C = 4{,}47$ и $Si = 5{,}2$, кривая, как функция *Ce*, показывает не возрастающую, а в значительной степени снижающую тенденцию. (Рисунок 13).

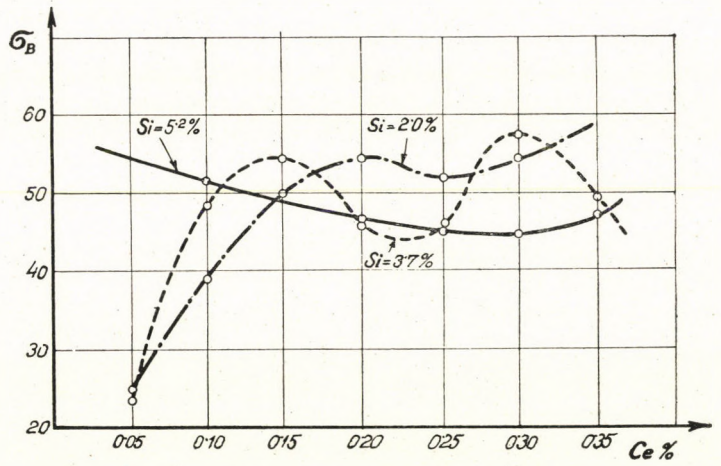
Резюмируя все вышеизложенное, приходим к заключению, что максимальная достижимая величина прочности не является исключительной функцией легирующего элемента *Ce* или *Mg*, и что оптимальная прочность обуславливается также основной структурой и, вместе с тем, распределением графита, как это уже известно в отношении чугунов с пластинчатым графитом. Полученный рисунок микроструктуры по строению похож на график Маурера, с той разницей, что ферритово-графитные отливки с большим

* **Примечание : Вследствие резких противоречий необходимо исследовать оказывают ли магний и церий одинаковое действие на ход кристаллизации.**

содержанием кремния были неизбежно твердыми и хрупкими, вследствие чего, область, являющаяся функцией *Si* и характеризующая применяемые в практике составы, при определенном содержании *Si*, сужается. Литье с чистым глобулярным графитом, в общем, слегка удлиняется. При образ-



12. Изменение предела прочности при растяжении, при $C = 3{,}6\%$.



13. Изменение предела прочности при растяжении, при $C = 4{,}47\%$.

цах, относящихся к полю графита на рисунке 2, удлинение, в общем, достигает 2—3%, значит, практически сфероидальный графит не дает больших, или по крайней мере очень больших удлинений, чем это бывает при серой отливке. Это, вероятно, объясняется тем, что, согласно рисунку, чисто сфероидальную структуру можно получить при содержании *Si* от 1,3% до 3,2%. А при таких высоких показателях, в случае чисто ферритной структуры, основной материал будет уже хрупким. Достаточно принять

во внимание то обятоятельство, что железо с содержанием 2—3% *Si*, является, как известно, хрупкой динамной сталью, что при любом распределении графита не может дать значительного удлинения. Ясно, что образцы с большим удлинением можно получить только при низком процентном содержании *Si*, однако они находятся вне области сфероидального графита и их основной структурой является цементит и сфероидальный графит. Еще раньше мы указывали на то, что сфероидальный графит можно производить также в чистом ледебурите или цементите. Это указывает, что сфероидальный графит не является первичным, т. е. не выделяется из жидкой фазы, а возникает при распаде цементита. В связи с этим были произведены дальнейшие исследования для выяснения возникновения структуры глобулярного графита. Кроме рисунков микроструктуры, нами была произведена серия опытов по переплавке, а, затем, по термической обработке.

4. Опыты по переплавке

Для исследования действия *Ce*, отливку состава $C = 4{,}47\%$ и $Si = 3\%$, прочность которой при первом литье была 45 кг/мм², и которая показала чисто сфероидальную графитную структуру, последовательно переплавляли три раза без всякой специальной обработки, только после каждой переплавки к сплаву присаживали ферросилиций. После первых двух переплавок, уменьшение прочности сказалось в очень незначительной степени, после третьего литья прочность сильно снизилась, а структура отливки стала чисто пластинчато-рафитной. Эти опыты показывают, что если однажды отливка была обессерирована и ее состав находится в границах, приведенных на рисунке 2, то после модификации она безусловно приобретает глобулярную структуру. Таким образом, отливки из содержащего *Ce* сплава можно переплавлять несколько раз без потери прочности последних до тех пор, пока, вследствие выгорания *Ce* или *Si*, состав сплава не выходит за обозначенные пределы сплава. Для контроля является ли *Ce* чисто карбидообразовательным веществом были произведены дальнейшие опыты с той отливкой, которая после переплавки уже не показывала сфероидальной графитной структуры. В этой отливке было ясно, что при соответствующем количестве *Ce*, она даст сфероидальную графитную структуру. Если бы *Ce*, кроме его известного обессеривающего действия, имело бы только карбидообразовательное действие, то было бы очевидным, что его действие можно было бы заменить каким-либо другим карбидообразователем. Поэтому, при добавлении к чугуну *Mn* в трех различных количествах, для того, чтобы установить может ли *Mn* заменить *Ce*, глобулярная структура не возникла, хотя мы изменили содержание *Mn* от 0,6 до 2,5%. Благодаря этому можно установить, что *Ce* должен иметь другое специальное действие и участвует в образовании сфероидального графита не только как обессериватель и карбидообразователь. Для исследования других возможных действий *Ce* (и *Mg*) таким же образом несколько раз переплавленный и обессеренный при помощи *Ce* чугун пробовали дегазировать, погружая под поверхность ванны металл, уже сильно испаряющийся при температуре чугуна, выбирая такой металл, который не образовывает сплава с железом, т. е. чтобы не происходило изменения составов. При опытах с применением *Cd* были получены совершенно отрицательные результаты. Затем, при повторении опытов,

через тигель в течение продолжительного времени пропускались пузырьк *N*, однако, кроме утончения структуры графита, других результатов не было обнаружено. Эти опыты показывают, что обезгаживание отливки может быть хотя и необходимым но все-таки недостаточным условием для образования сфероидального графита, т. е. ни карбидообразовательное, ни дегазирующее действие *Ce*, само по себе, решающей роли не играет.

5. Опыты по термической обработке

То, что при чисто карбидной структуре, как это видно из рисунков 2 и 3, может быть также получен глобулярный графит, указывает на тот факт, что глобулярный графит возникает, вероятно, при распаде карбида. Именно поэтому мы произвели опыты с такими образцами, состав которых отвечал карбидо-сфероидальному полю. Опыты по термической обработке показали, что время термообработки постоянно сокращалось по мере того, как состав приближался к границам образования сфероидального графита. Отливку, состав которой совсем приближается к граничащей линии структур карбидо-сфероидального графита, или же ферритово-перлитового сфероидального графита, можно разложить в течение весьма короткого времени таким образом, что из карбида образуется углерод отжига и феррит, в следствии чего мы получаем только структуры сфероидального графита и углерода отжига. При определенном составе, разложение карбида может быть достигнуто после пятиминутного нагрева в том случае, если короткое время нагрева может быть достигнуто при помощи термической обработки с высокой частотой, и, именно поэтому, температура опыта не могла быть точно определена. Весьма короткое время термической обработки указывает на то, что стабильность карбида, как функция *Ce* и *Si*, постоянно уменьшается до распада, который, как это показали опыты, происходит в течение нескольких секунд. Согласно этому, глобулярная структура может быть получена в известных пределах состава без термической обработки, но ее можно также получить путем очень короткой термической обработки структур цементита и сфероидального графита. Следовательно, можно считать весьма вероятным, что сфероидальный графит образуется при распаде цементита в соответствующих пределах состава, а не выделяется первично из жидкой фазы. Путем термической обработки образцов могут быть достигнуты более значительные удлинения, чем при сфероидальных структурах, полученных без термической обработки. Дополнительная термическая обработка образцов чисто глобулярного графита, в общем, не повышает в значительной степени показателей удлинения, как это показано на прилагаемой таблице.

В общем оказывается правильным тот вывод, что отливки с большим удлинением могут быть получены только при небольшом содержании *Si*, значит, удлинения непосредственно произведенного глобулярного графитного материала никогда не достигнут удлинения ковкого чугуна. Отливки с большим удлинением, похожие в качественном отношении на ковкий чугун, могут и в дальнейшем производиться только при помощи отжига на ковкий чугун, но продолжительность отжига на ковкий чугун, по отношению к до сих пор установленому времени, уменьшается в значительной степени. В течение опытов мы стремились к получению качества, схожего с черносердечным чугуном, так как всегда исходили из ледебуритово-графитной структуры. Однако, теоретически могут быть установлены такие

Таблица

Состав		Микроструктура до термической обработки	H_B	$\sigma_в$	H_B	$\sigma_в$	ϑ_5
C%	Si%		до термической обработки		после термической обработки		
4,47	2,67	пластинчатый и сфероидальный графит	283	38,6	181	34,7	3,0
4,47	5,63	сфероидальный графит	311	55,0	252	30,5	2,0
4,47	1,2	карбид + сфероидальный графит	510	—	250	45,0	12,0
3,6	1,4	Карбид + сфероидальный графит	480	—	260	42,0	13,0

составы, при которых из цементита или ледебурита еще не выделяется сфероидальный графит, но цементит уже настолько устойчив, что из него можно получить белосердечный чугун в течение значительно более короткого времени, чем это было до сих пор. В этом отношении, для точного определения соотношения между скоростью распада цементита и обезуглероживанием, необходимо произвести еще многочисленные опыты. До сих пор является несомненным, что черносердечные чугуны с высокой прочностью и большим удлинением могут легко производиться и проверяться таким способом, что время термической обработки, исходя из отливок, отвечающих ледебуритово-графитным составам на диаграмме микроструктуры, уменьшается в большой степени без снижения качества, по отношению к до сих пор установленному времени.

Согласно приведенным в литературе данным, на дальнейшее удлинение отливок с большим удлинением оказывают влияние также *Mn* и *P*. В отношении их влияния имеется еще сравнительно мало данных, но несомненно, что низкое содержание *Mn* и *P* имеет преимущества и с точки зрения удлинения.

6. Резюме опытов с церием

На основании опытов может быть установлено, что сфероидальный графит может образовываться только при определенных составах, и что в отношении *Ce* или *Si*, легирующие пределы тем шире, чем больше содержание углерода. При низком содержании углерода возможность успешного легирования значительно меньше. При более внимательном исследовании пределов составов кажется правильным основное заключение Моррога, что без модифицирования отливка должна затвердевать белой. С другой стороны, опыты термической обработки доказывают, что состав и последующее модифицирование влияют на устойчивость цементита, что ясно подтверждается распрадом вещества с основной цементитной структурой, состав которой близок к отливкам сфероидального графита, уже после нескольких минут термической обработки. Все это указывает, что возникновение сфероидального графита может быть отнесено к распаду цементита, а именно к распаду переохлажденного цементита. Опыты, производившиеся с помощью *Mn*, т. е. при помощи карбидо-образователя, и приведшие

к отрицательным результатам, т. е. в результате которых не было достигнуто образования сфероидального графита, указывают, что *Ce* или *Mn* играют не только роль карбидообразователей, хотя, согласно приведенным рисункам микроструктур, их карбидообразующее действие и само по себе является важным. Итак, опыты показывают, что ни дегазация, ни карбидообразующее действие легирующего элемента, взятые самы по себе, недостаточны для образования сфероидального графита, а необходимы в совместном применении. Очень короткое время, необходимое для термической обработки отливок и перехода в глобулярную структуру, полученную при отливке, ясно подтверждают, что возникновение глобулярного графита может быть отнесено к распаду переохлажденного карбида, где дегазация или состав внутри определенных границ создают основные условия возможностей переохлаждения. Поскольку возникновение сфероидального графита должно быть отнесено к распаду переохлажденного графита, становится ясным, что из посторонних веществ могут присутствовать только такие вещества, которые, в лучшем случае, вызывают в карбиде образование сфероидального графита. Согласно электронно-микроскопическим исследованиям, ядром сфероидального графита служит окись какого-то постороннего металла.

Согласно вышесказанному, можно считать с большой вероятностью доказанным следующее:

1. образование сфероидального графита может быть отнесено к распаду переохлажденного карбида;

2. основными условиями переохлаждения являются: соответствующий химический состав, как функция содержания *C*, *Si* и *Ce*, и обессеривание отливки, имеющее целью устранение нежелательных посторонних ядер;

3. дегазирующее действие легирующих элементов играет роль очевидно только с точки зрения возможности переохлаждения.

РЕЗЮМЕ

По вопросу кристаллизации сфероидального графита в литературе встречаются многочисленные противоречивые заключения. До сих пор точно не выяснено в каких составных границах образуется сфероидальный (глобулярный) графит, а, в конечном результате, какую роль играет легирующий элемент, необходимый для получения сфероидального графита с точки зрения кристаллизации.

Основной целью произведенных опытов, где C = 4,17% и 3,6%, являлось выяснение когда именно возникает сфероидальный (глобулярный) графит, как функция церия и кремня. В результате опытов можно было определить, что сфероидальный графит возникает только внутри определенных составных границ, вне которых микроструктура содержит цементитный или пластинчатый графит, соответствующий простой серой отливке.

Отливки в составных границах, отвечающих карбидно-графитной структуре, могут быть разложены при весьма короткой термической обработке и, таким образом в значительной степени сокращается время термической обработки для различных ковких чугунов.

В течение опытов были обнаружены и такие составы, которые разлагались уже после нескольких минут нагрева. Короткое время разложения карбидной структуры, а также и то, что отливка с сфероидальным графитом образуется только внутри определенных составных границ, указывает на тот факт, что сфероидальный графит образуется из весьма быстро разлагающихся карбидов во время охлаждения. Результаты прочности, полученные во время опытов, рассматриваются нами в графиках, из которых видно, что прочность не зависит непосредственно от состава, а от микроструктуры, определяющейся составом. Именно поэтому, в функции легирующих элементов кривые прочности могут иметь не только максимум, но и минимум.

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Norbury, A. L.:* Journal of the Iron and Steel Institute **119** (1929). 443. p.
2. *Norbury & Morgan:* Journal of the Iron and Steel Institute (1936) 134. p.
3. *Morrogh:* Journal of the Iron and Steel Institute **143** (1941) 195. p.
4. *Kerpely:* Die metallurgischen und metallographischen Grundlagen des Gusseisens. W. Knapp. 1928.
5. *Morrogh & Williams:* Institute of British Foundrymen. (1946—47.)
6. *Morrogh & Gray:* Foundry Trade Journal. 1948. 34. c.
7. *Donoho:* American Foundryman 1948. Foundry Trade Journal 1949. 519. c.
8. Б. И. Гостев и А. Д. Ушаков: Литейное производство, № 1, 1950 г. Машгиз.
9. *Piwowarsky:* Die neue Giesserei. (1949) 1.
10. К. П. Бунин и Н. М. Данильченко: Литейное производство, № 1, 1950 г. Машгиз.
11. *Myskowsky & Dunphy:* Iron Age (1949).
12. И. Е. Конторович: Термическая обработка чугуна и стали, Металлургиздат, 1950 г.

UNTERSUCHUNG ÜBER DIE BILDUNG DES KUGELFÖRMIGEN (NODULAREN) GRAPHITS

Prof. Dr. L. GILLEMOT

ZUSAMMENFASSUNG

Aus dem Fachschrifttum sind abweichende Ansichten über die Kristallisation des kugelförmigen (nodularen) Graphits — auch als kugeliger, oder einfach Kugelgraphit bezeichnet — bekannt. Es ist auch ungeklärt, zwischen welchen genauen Zusammensetzungsgrenzen sich der kugelförmige Graphit bildet, sowie auch, was für Rolle das zur Herstellung von kugelförmigem Graphit benötigte Legierungselement vom Gesichtspunkt der Kristallisation spielt.

Der Verfasser führte Versuche mit Zerium durch, wobei C = 4,47 und 3,6% betrug, und untersuchte, wo sich kugelförmiger Graphit als Funktion von Silizium und Zerium bildete. Es konnte festgestellt werden, dass sich kugelförmiger Graphit nur zwischen gegebenen Zusammensetzungsgrenzen bildete, ansonsten ist die Mikrostruktur entweder ledeburitisch, oder entspricht der Struktur eines gewöhnlichen Graugusses, d. h. enthält lamellaren Graphit.

Es gibt gewisse Zusammensetzungen, bei denen die Grundstruktur Zementit ist, in dem sich kugelförmiger Graphit befindet. Bei diesen können die Güsse durch sehr rasche Wärmebehandlung weicher gemacht werden und infolgedessen kann auch die Ausglühzeit der Tempergüsse stark reduziert werden.

Im Laufe der Versuche wurden auch Zusammensetzungen gefunden, in denen der Zementit bereits nach kurzem, nur wenige Minuten dauernden Glühen zersetzt werden konnte. Die kurze Zersetzungszeit der karbidhältigen Strukturen, sowie die Tatsache, dass kugelförmigen Graphit enthaltender Guss sich nur zwischen bestimmten Zusammensetzungsgrenzen bildet, weisen darauf hin, dass sich der kugelförmige Graphit im Verlaufe der Abkühlung des Gusses aus sich schnell zersetzenden Karbiden bildet. Die erhaltenen Festigkeitswerte wurden in Diagrammen zusammengefasst, wobei ersichtlich ist, dass die Festigkeit nicht unmittelbar von der Zusammensetzung, sondern von den durch die Zusammensetzung bestimmten Strukturelementen abhängt. Eben deshalb können die Festigkeitskurven als Funktion der Legierungselemente nicht nur ein Maximum, sondern auch ein Minimum aufweisen.

DILATOMETRIC DETERMINATION OF THE SOLIDUS TEMPERATURE

Prof. Dr. J. A. VERŐ

Manuscript received 24 February 1951.

Usually change in heat content serves to fix the temperature of solidification processes. A simple cooling curve with its arrests, or the heating curve applying the long known theoretical and instrumental facilities created by *Kurnakow*, *Roberts-Austen* and others, show temperatures at which the heat content is abruptly changed, as a consequence of any solidification, or fusion process. As a static method to determine the temperature of incipient melting, the microscopic identification of molten and re-frozen droplets in the structure of samples quenched from temperatures around the solidus, is also applicable. Lately an attempt was made to utilise the change in electrical resistance to determine the solidus curve in a low-melting alloy system [1].

While in the examination of processes occurring in the solid state other physical properties, such as thermal expansion, magnetic characteristics, space lattice, etc. have long been in use as an indication, it has not been tried to use such method in the determination of solidification temperatures. Especially the methods of determining the solidus temperature could be usefully enriched by such new methods, since it has always been a rather tedious work to fix the solidus curve of an alloy system. In most systems, even in binary ones, the solidus is only uncertainly known.

Modern heat treating practice, on the other hand, often requires a precise knowledge of the solidus temperature of complex alloys also, chiefly in the case of aluminium alloys. An eventual reliable and simple method to determine the solidus of such alloys has therefore also an immediate practical value.

In this paper experiments are described which were intended to examine to what extent the dilatometric analysis is suitable for solidus determinations. The author had the idea of making the dilatometric measurement fully automatic, so that the experiments do not need continuous inspection and skilled labour, as a differential heating curve does.

Experimental.

In the experiments, a *Bollenrath*-dilatometer, of E. Leitz was used throughout (for description see [2]). The sample was generally a cast rod, 50 mm long and 3 mm dia. To prevent adhering to the silica tubing which holds the sample in the horizontal tubular furnace, two rings of 0,2 mm dia. aluminium wire were wound around the samples. To cast the samples, a small permanent mould was used. The dilatation of the sample is magnified by the apparatus 200 times and is recorded photographically.

The temperature of the furnace, nominally identical with that of the sample, is indicated by the dilatation of a similar rod of pure aluminium, or of chronin, according to the highest temperature necessary in the experiment. The temperature scales corresponding to these materials were both calculated from their coefficients of dilatation and from the measured magnification of the apparatus, and controlled in separate experiments by direct temperature measurements also. In these experiments, the hot junction of a Pt-Pt-Rh thermocouple was placed into a hole drilled into the temperature indicating rod. The electromotive force of the couple was measured by a potentiometer, checking being done for the melting points of superpurity aluminium, electrolytic zinc and 99,99% lead. A very good agreement of calculated and measured temperature scales was found.

When the aluminium rod was used, 1 mm on the abscissa corresponded to about 3 Centigrades, but when chronin, to about 7 degrees, due to the smaller coefficient of dilatation of the latter. In most experiments the aluminium rod was used to secure a higher accuracy of temperature readings.

To control the heating rate of the furnace, a program regulator (Borel, Swiss) was used. This regulator completes its cycle in 12 or 24 hours. The cast samples were homogenised at a convenient temperature, prior to being heated up to the solidus ; homogenisation was accomplished in the dilatometer furnace simply by stopping the motor of the regulator, when the homogenising temperature was attained. Thus the temperature was kept constant as long as the motor stood still. Hereby it was possible to continue heating the sample after homogenisation without cooling or quenching it to room temperature.

The materials, of which the experimental alloys were prepared, generally were of high purity ; the chief materials were super-purity aluminium (99,995%), electrolytic copper, zinc and chromium, pure tin (99,85%). Eventual segregation in the thin cast rods was not taken into account.

All dilatometric curves were photographically recorded ; a number of the curves shown later is a photographic reproduction of the originals. Photographic material, however, was not available in uniform quality and some curves were recorded too feebly for reproduction ; from these a true copy was drawn on oil paper for reproduction.

Appearance of expansion accompanying incipient melting.

Most metals show expansion on melting and from all technically important metals aluminium expands to the greatest extent : by 6,5 volume per cents. This is very inconvenient on casting aluminium, but is a distinct advantage for the dilatometric analysis.

The dilatometric curve of a pure metal, or of an alloy in which melting begins with the liquefaction of an eutectic at constant temperature, will show

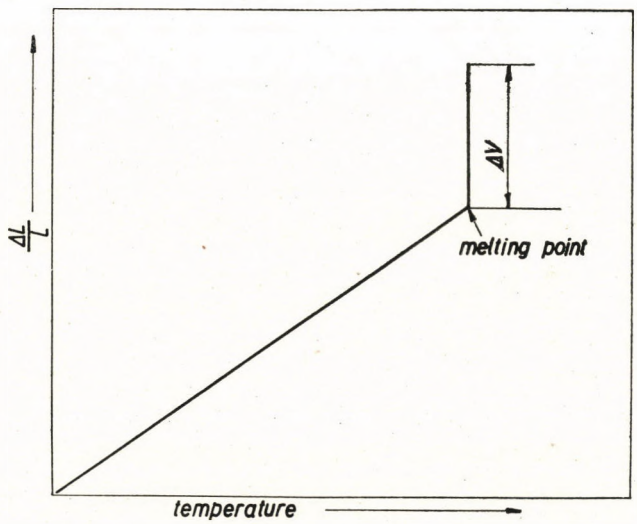


Fig. 1. Dilatometer curve of pure metal, including expansion due to fusion.

an isothermal expansion on the temperature-specific volume curve, according to Fig. 1. The whole length of the vertical section— ΔV — of the curve is given by

$$\Delta V = p\lambda LN$$

where p is the liquefied portion of the sample, λ the specific length increase, L the length of the sample and N the magnifying power of the apparatus. The specific length increase λ is obtained from volume expansion v according to

$$(1 + \lambda)^3 = 1 + v$$

As λ is a small value, herefrom

$$1 + 3\lambda = 1 + v$$

and

$$\frac{v}{3} = \lambda$$

For aluminium, $v = 0{,}065$, or 6,5%, thus $\lambda = 0{,}0217$ or 2,17%. On the dilato-

meter curve of aluminium, melting would produce a vertical line of length

$$\Delta V = 50 \cdot 0{,}0217 \cdot 200 = 217 \text{ mm},$$

if the length of the sample was $L = 50$ mm, the enlargement factor $N = 200$ and $p = 1$, since pure aluminium melts completely at its melting point. Of course, the sample would be compressed before melting ends and so the whole vertical part of the curve cannot appear.

In the *Bollenrath* dilatometer the dilatation of the sample is recorded as a function of the temperature of another rod, which does not melt. When melting begins in the sample, due to a heat input amounting to $Q = pMs$, where M is the mass of the sample and s the latent heat of fusion, the same

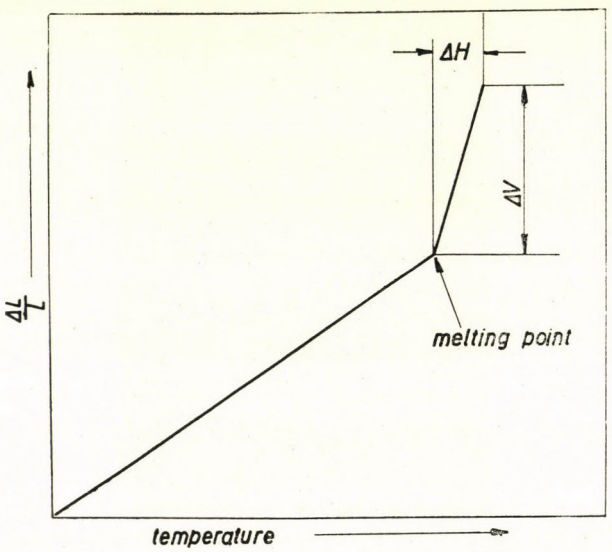


Fig. 2. Expansion due to fusion, as it appears on the Bollenrath dilatometer curve of pure metal.

heat quantity — Q — is absorbed by the other rod also. In consequence the temperature of this second rod is raised by

$$\Delta t = \frac{Q}{M_t \cdot c}$$

M_t is the mass of the temperature indicating rod and c the specific heat of its material. Its length is also increased by the corresponding dilatation and the dilatometer magnifies this dilatation N times. Hereby the light spot is shifted horizontally by

$$\Delta H = L \cdot \Delta t \cdot \beta \cdot N$$

(see Fig. 2.) simultaneously with the vertical movement by ΔV. In the formula

of ΔH, L is the length of the temperature indicating rod, β the coefficient of its thermal dilatation. The resultant of both movements is an inclined line ; as melting point, of course, its intersection with the line relating to the solid state is to be taken. If, for example, melting begins with the liquefaction of

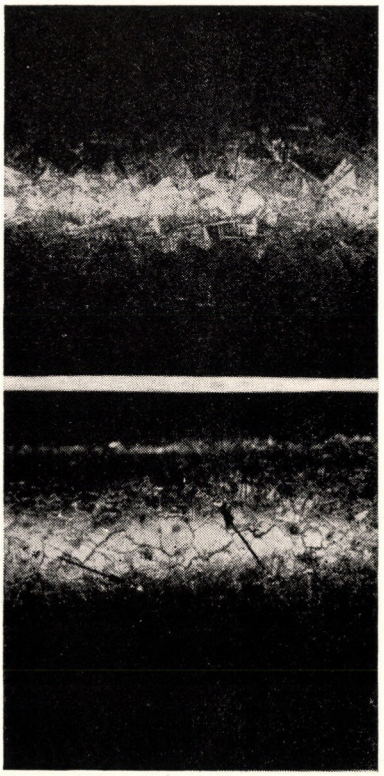


Fig. 3. Appearance of sample containing 5% tin before and after heated to about 350°.

10% eutectic ($p = 0{,}1$), $\lambda = 0{,}0217$, $L = 50$ mm, $\Delta V = 21{,}7$ mm ; $s = 100$ cal/g, $M = \frac{3^2 \pi}{4} \cdot 50 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-3} = 1$ g, $c = 0{,}22$, $\Delta t = \frac{1 \cdot 0{,}1 \cdot 100}{0{,}22} = 45°$; $\beta = 25 \cdot 10^{-6}$, $\Delta H = 50 \cdot 45 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 11{,}3$ mm ; all substituted values refer to aluminium and to the *Bollenrath*-dilatometer.

The whole expansion due to fusion, however, does not cause increase in length. The first melting portion of an alloy is encased in solid material ; the volume increase stresses the yet solid portion, but at the same time the liquid is also subject to compression and a slight reduction of volume. If the freshly formed liquid finds an outlet to the surface of the sample, then a part of it is squeezed out ; this liquid, of course, does not increase the length of the sample.

In consequence ΔV becomes smaller than the calculated value. On cooling after partial melting, the liquid sweated out is not sucked in again and the surface of the sample is furrowed along the grain boundaries. In the Fig. 3. a sample is shown before and after the experiment ; the arrow hints at a droplet squeezed out, the furrows are clearly visible.

Sensitiveness of the method.

Especially with regard to the last mentioned phenomenon, it was necessary to examine the sensitiveness of the dilatometric solidus determination, to see, for example, what quantity of eutectic deliveres a distinct mark on the curve of dilatation. For this purpose alloys of the aluminium-tin system were chosen ; in these alloys not only the quantity of eutectic, but also the volume ncrease accompanying its liquefaction is well known. The eutectic is practically pure tin [3] ; it melts under an expansion of 2,9 volume per cents. Three alloys, containing 5,1 and 0,2% of tin were cast to samples. The length increases, respectively the vertical parts on the dilatometer curves can be calculated as :

$$V_5 = 0{,}05 \cdot \frac{0{,}029}{3} \cdot 50 \cdot 200 = 4{,}6 \text{ mm}$$

$$V_1 = 0{,}01 \cdot \frac{0{,}029}{3} \cdot 50 \cdot 200 = 0{,}92 \text{ mm}$$

$$V_{02} = 0{,}002 \cdot \frac{0{,}029}{3} \cdot 50 \cdot 200 = 0{,}18 \text{ mm}$$

On the dilatometer curve of the first alloy, there is a very distinct break, its vertical height, however, does not measure more, than 1,5 mm instead of 4,6 mm (Fig. 4.) ; on the curve of the second alloy, the break was yet clearly discernible, but very small, not higher than 0,2 mm. The third curve proved perfectly smooth around the melting point of tin ; no trace of any break could be found on it.

On the melting point of tin, the length of the sample containing 1% of tin increases by $0{,}01 \cdot \frac{0{,}029}{3} \cdot 50 = 0{,}0046$ mm, that is by $100 \cdot 0{,}0046 : 50 = 0{,}009$, or round by 0,01%. It can be assumed that on the dilatometer curve of aluminium alloys the melting point of any constituent that causes a similar increase in length will be discernible.

If tin is substituted by other constituents, the still discernible quantity of eutectic will be much smaller than 1%. First the eutectics common in aluminium alloys have a smaller specific gravity, than tin ; aluminium itself is two and half times lighter than tin ; 1 per cent. by weight of tin makes only 0,4 per cent. by volume. Besides, the expansion of tin at the melting point is

less, than half the expansion of aluminium ; thus, it can be expected that melting of 0,2 per cents of an eutectic causes a discernible break on the dilatometer curve of aluminium alloys.

To show the correctness of the above explanations, in Fig. 5. a photo-reproduction of the dilation curve of an aluminium alloy containing 5,85% of copper is presented. In the neighbourhood of the solidus, this alloy contains $\frac{5{,}85—5{,}65}{33—5{,}65} \cdot 100 = 0{,}75\%$ of the $Al—CuAl_2$ eutectic. The breaking point at

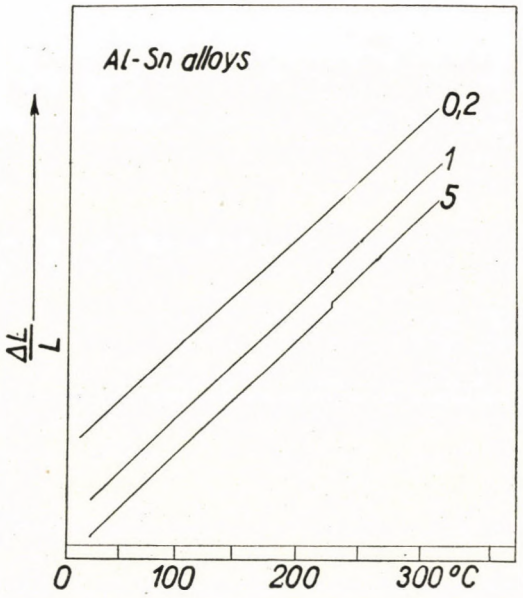


Fig. 4. Dilatometer curves of aluminium alloys containing tin.

548° is high enough to see that a considerably smaller quantity of eutectic would cause a well discernible break.

The accuracy of reading the temperatures is first a matter of an accurate temperature scale ; besides the temperature of the furnace and o the sample at the start of the experiment must be precisely known. When auminium is used to indicate the temperature, about 0,3 mm correspond to one Centigrade on the abscissa ; measuring the length of the abscissa with an accuracy of — 0,1 mm, the temperature will be correct to about 0,5 degree. With chronin as temperature indicator an accuracy of 1 degree results. This is generally satisfactory. To know the starting temperature, the furnace was cooled to room temperature — possibly over night — and at least 30 minutes were allowed

for complete temperature equalisation after the sample was inserted into the dilatometer ; the room temperature could thus be taken for starting temperature.

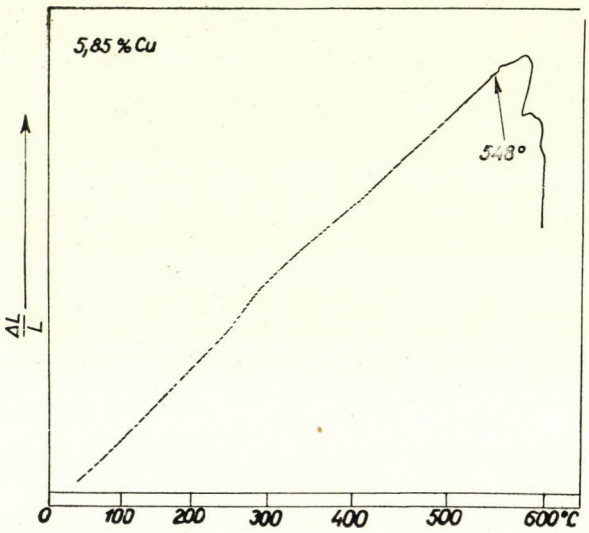


Fig. 5. Dilatometer curve of aluminium alloy with 5,85% Cu.

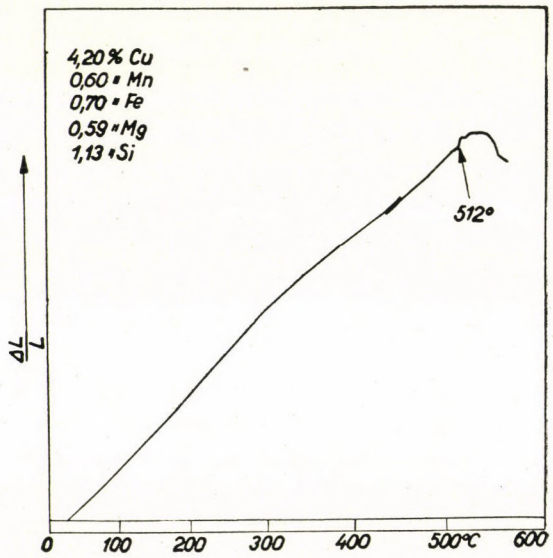


Fig. 6. Dilatometer curve of a complex aluminium alloy.

In order to control the accuracy of temperatures read off dilatometer curves, a number of *Al—Cu—Mg—Si* alloys was examined, in addition to the

above mentioned *Al—Sn—* and *Al—Cu* alloys. The solidus temperatures of many such alloys are precisely known from *J. Crowther*'s excellent work [4]. The own alloys were melted from super-purity aluminium and master alloys prepared of electrolytic copper, commercial magnesium, $FeCl_3$ and $MnCl_2$ "Pro Analysi". The results, compared with the data found in literature, are listed in the following Table.

TABLE

Alloy (alloying elements)	Solidus temperature, deg. C	
	in literature	author's value
5% *Sn*	228,3	229
5,85% *Cu*	548	548
4,2% *Cu*, 0,6% *Mn*, 0,7% *Fe*, 0,36% *Mg*, 1,2% *Si*....	513	513
4,2% *Cu*, 0,6% *Mn*, 0,7% *Fe*, 0,38% *Mg*, 1,3% *Si*....	508	508,5
4,2% *Cu*, 0,6% *Mn*, 0,7% *Fe*, 0,59% *Mg*, 1,13% *Si*...	512	512
4,2% *Cu*, 0,6% *Mn*, 0,7% *Fe*, 0,97% *Mg*, 1,0% *Si*....	514	516

The dilatometer curve of one from these alloys is reproduced in the Fig. 6.

Experiments with other types of alloys.

In the previously mentioned alloys melting begins with the liquefaction of an eutectic ; it was to be examined whether alloys of other types, for example those consisting of a homogeneous solid solution, of alloys undergoing a peritectic reaction, cause any recognisable break of the dilatometer curve. Further, the experiments were to be extended to commercial alloys in cast, wrought and heat treated state also.

Technical casting alloys of aluminium all contain considerable amounts of eutectics, it was therefore expected that their solidus can be well determined by dilatometric analysis. The experiments carried out with different cast alloys, on samples cast in the otherwise used small mould, or machined from big castings proved this to be correct. These curves are not reproduced because they show nothing new.

With wrought and then heat treated samples from commercial rods of the Duralumin and Aldrey type, no decisive result was obtained. Sometimes there was a break at the correct temperature, but there were also curves without any discernible critical point. It was observed that very slow heating, slower, than 30 degs. per hour, delivers a critical point, while more rapid heating fails to do so with the same alloy. This is a remarkable observation, since these alloys are essentially of the same type, as the previously examined *Al—Cu*- and complex alloys. The cause of their different behaviour probably is that in wrought and heat treated alloys there is no perfect eutectic, but only undissolved fragments of different compounds. On heating, in such alloys eutectic

must first form along the surface of these crystal fragments. This process surely needs some time and on rapid heating the eutectical liquid is produced only at higher temperature and progressively. Thus no break can appear on the curve. This is surprising to some extent, since in the structure incipient melting is recognisable even after rapid heating, and after short holding (half a minute) at a temperature, slightly over the solidus.

If such alloys are to be examined, therefore, it is to be preferred to remelt a small quantity and cast the sample. It is, however, to be pointed out, that heat treatment alone does not alter the possibility of dilatometric solidus determination.

As homogeneous alloys, aluminium-copper and aluminium-zinc alloys were examined.

The latest determination of the solidus curve in the homogeneous range of *Al-Cu*-system is 25 years old [5]; it was done chiefly with aluminium of 99,917% purity, by means of the microscopic method. An approximately straight line was found, as shown in Fig. 9. Herein the quenching temperatures of the essential samples also are indicated by the points; it may be seen that they were about 10 degs. distant from one another.

Five alloys, containing 1,87, 2,22, 3,49, 5,04 and 5,28 % of copper, all prepared from super-purity aluminium, were dilatometrically examined. The cast sample was always heated first to 520 degs. C in the dilatometer furnace, held at this temperature for 18—25 hours and then heated up to 25—30 degs. above the solidus found by *Dix* and *Richardson*.

These alloys behaved differently; with alloys containing at least 3% of copper, curves were obtained which progressively became steeper, when melting began, but without abrupt change in direction. A curve of this type is shown in Fig. 7. This form of curve is an evident consequence of the mode of melting of these alloys and is obtained, if the sample adheres to the silica tubing, which holds the sample in the dilatometer furnace. By adhering, the sample is saved from collapse at an early stage of fusion. From this sort of curve the solidus temperature cannot be precisely read. In alloy samples giving such a curve, the exact solidus temperature was determined by differential heating curves. The temperature at which the dilatometer curve parted from the approximately straight line relating to the solid state, differed by about 10 degs. from the correct value found by the heating curve.

With alloys low in copper, mostly a curve was obtained which ran practically as a straight line and turned then more or less abruptly into a vertical line ending at the abscissa axis. This form of curve was obtained with alloys of other systems also, when melting took place with in a narrow temperature range. The vertical line obviously indicates collapse of the sample under the pressure acting on it in the apparatus. The temperature of collapse likely ob-

viously does not coincide with the solidus, since an alloy cannot by compressed by a pressure of a few grammes, when it begins to melt.

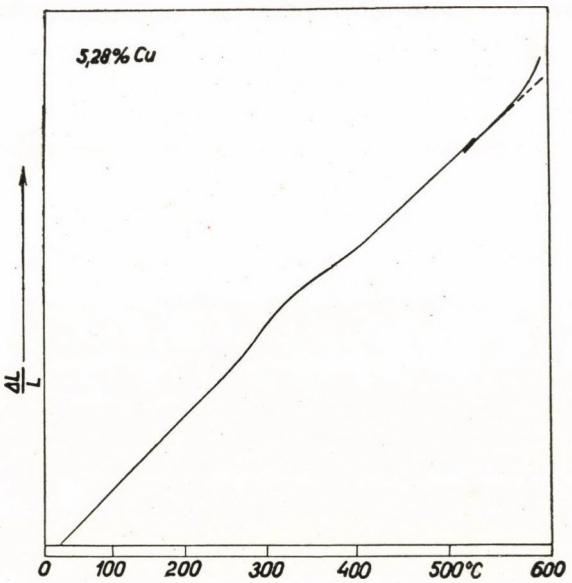


Fig. 7. Dilatometer curve of homogenised aluminium alloy containing 5,28% copper, showing steady dilatation on incipient melting.

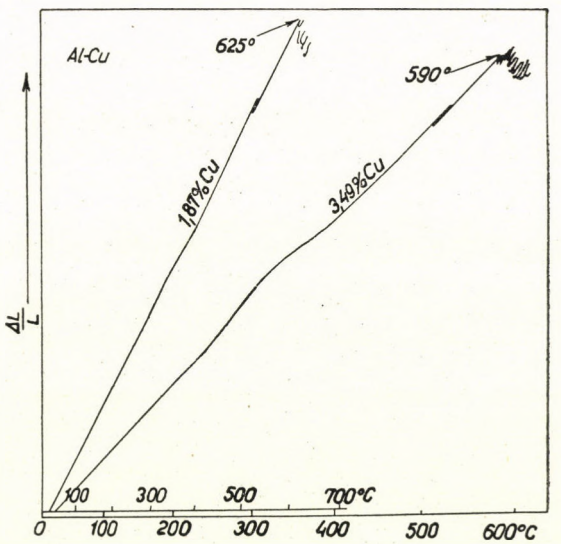


Fig. 8. Dilatometer curves of homogeneous Al-Cu-alloys, showing loops.

Normally in the experiments the program regulator was in action only during heating the furnace to the homogenising temperature. Then the regulator was stopped and used in the final heating period only to limit the temperature upwards. Thus the essential part of the curve was smooth, free from the marks of the action of the regulator. In an experiment, with the 3,49% *Cu* alloy, however, the regulator incidentally remained in action ; the result was the curve shown in the Fig. 8. Herein at the solidus temperature loops appear. The temperature at which the first loop is formed, accurately coincides with the temperature found by a differential heating curve (590°).

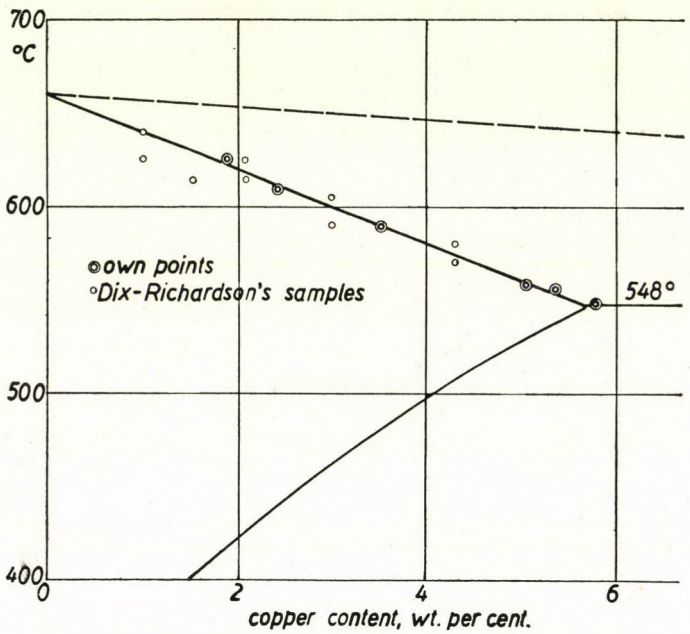


Fig. 9. The solidus curve of the Al-Cu-system according to Dix and Richardson together with own results.

The formation of the loops may have taken place in the following way. The solidus temperature evidently is first reached during a heating period, when the regulator has switched on the current. Melting now begins and some liquid is pressed out to the surface, as it was shown with aluminium-tin alloys. As the regulator then cuts off the current and cooling begins, the liquid that was squeezed out, is not wholly sucked in and the sample can reduce its length a little.

By means of these loops it was possible to determine the solidus curve through the whole region of the aluminium rich solid solution. A good agreement with *Dix* and *Richardson*'s straight line was found (Fig. 9.).

It should be mentioned that similar difficulties arise at solidus determinations of heavier alloyed solid solutions, when other physical properties are made use of. There is, for example, hardly a break on the resistance curve of lead containing 15% of tin. [1]

As a further sort, a peritectical alloy was examined ; different samples, containing about 1,1% of chromium were prepared for this purpose. In this alloy melting begins at 661 degs. [6] with the liquefaction of almost the whole

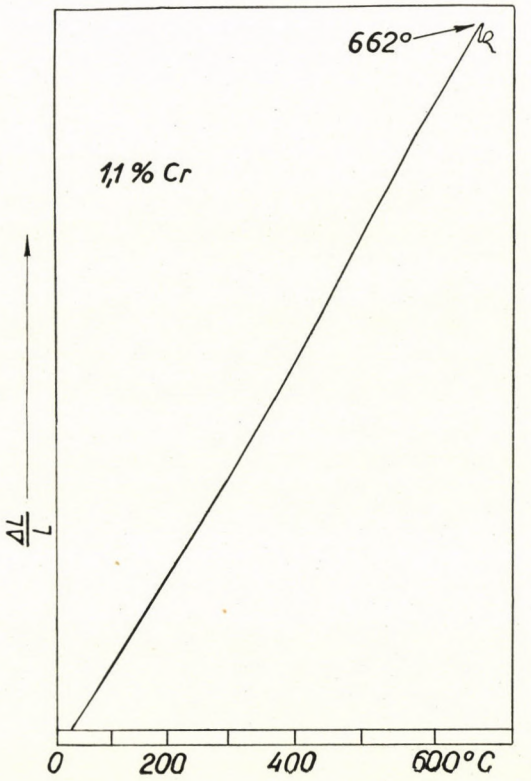


Fig. 10. Dilatometer curve of peritectic Al-Cr-alloy.

alloy. Accordingly, the dilatometer curve runs nearly straight up to this temperature and turns then abruptly into a vertical line (Fig. 10.). Three determinations delivered twice 662 degs. and once 661 degs. as the temperature of collapse.

Examination of the solidus curve in the Al—Zn-system of 60 to 80% Zn content

This system apparently offers great difficulties in the determination of the solidus, especially in the given range. Not considering the older results

listed in various handbooks also, investigations were lately made by *Gayler* and *Sutherland* [7], by *Pelzel* [8] and by *Gebhardt* [9]. Most workers used the microscopic method. The chief results are presented in Fig. 11. The usually sketched solidus line has an interesting upward bulged form in the range from 83 to 60% zinc.

A few *Zn-Al*-alloy samples were included in the experiments before the looped form relating to solid solutions was found. It was the intention to examine

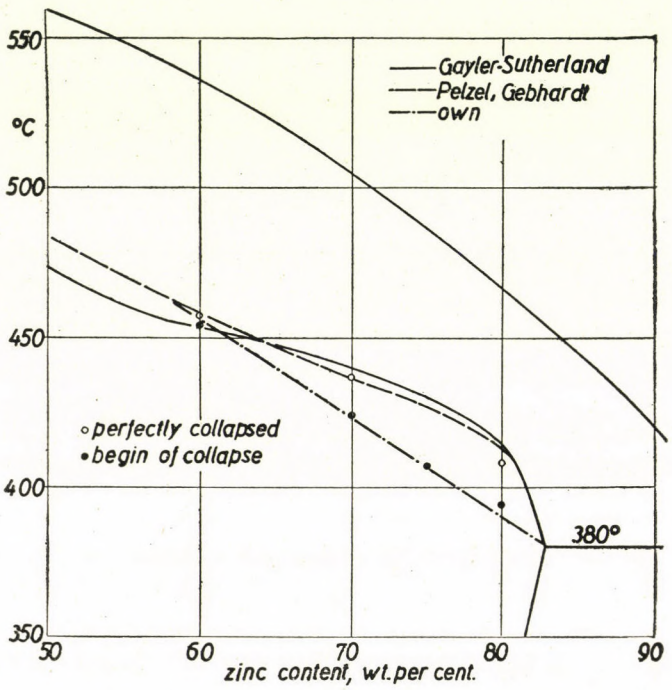


Fig. 11. Phase diagram of the Al-Zn-system from 50 to 90% zinc.

solid solutions which melt in a narrow temperature range whether these show a clearer change in direction of the dilatometer curve. The same forms of curve were obtained with these alloys, as with *Al-Cu*-alloys. Most interesting were, however, the curves obtained with stopped regulator. As the reproductions of Fig. 12. show, the alloy consisting of 80% electrolytic zinc and 20% superpurity aluminium, perfectly collapsed at 409 degs., at a temperature which is considerably lower, than the solidus determined by previous authors. The same was found with alloys containing 25 and 30% aluminium, while the fourth alloy collapsed practically at the temperature corresponding to earlier solidus determinations.

Perfect collapse of an alloy melting steadily over a temperature range cannot take place at the solidus temperature. From the curves therefore the temperatures of incipient compression also were read and inserted in Fig. 11. The points constitute a practically straight line going out from the end of the 383° eutectical line and reaching *Gayler*', *Pelzel*', and *Gebhardt*'s solidus curve at about 58% zinc. From here, the old solidus is a continuation of the author's solidus line.

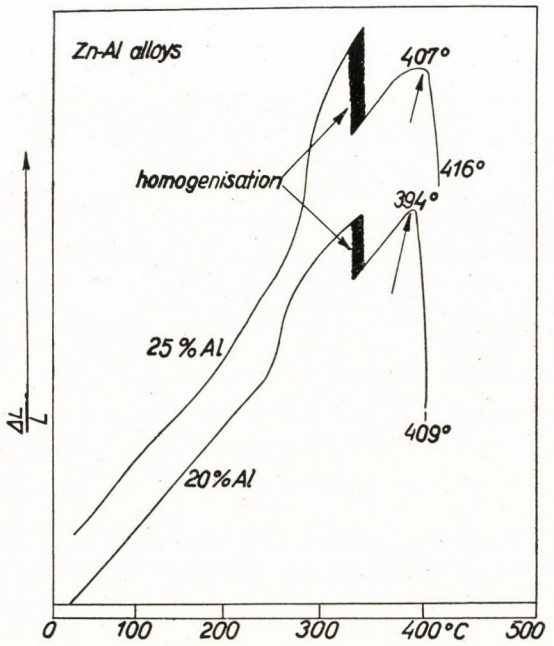


Fig. 12. Dilatometer curves of aluminium-zinc alloys.

To control these results of dilatometric analysis, differential heating curves were used again. As samples, the 15 mm dia. heads of the dilatometer rods were used ; a nickel-constantan thermocouple, in connection with a potentiometer, served to indicate the temperature with an accuracy of $\pm$0,5 degs. C. The 275° reaction strongly disturbed these experiments and no acceptable result could be obtained, until the sample was homogenised at 360—380 degs. for a couple of hours and heated further without intermediate cooling. The curves, composed of single readings, are shown in Fig. 13. For alloys containing 40, 30 and 25% zinc — the same temperature was found, as by the dilatometric analysis, but for the 20% *Zn* alloy a temperature resulted which does not coincide with any of the previously determined values.

Two different ways of determination thus delivered a straight solidus line from 50 to 80% of zinc. The cause of the divergence from earlier investigations was not examined.

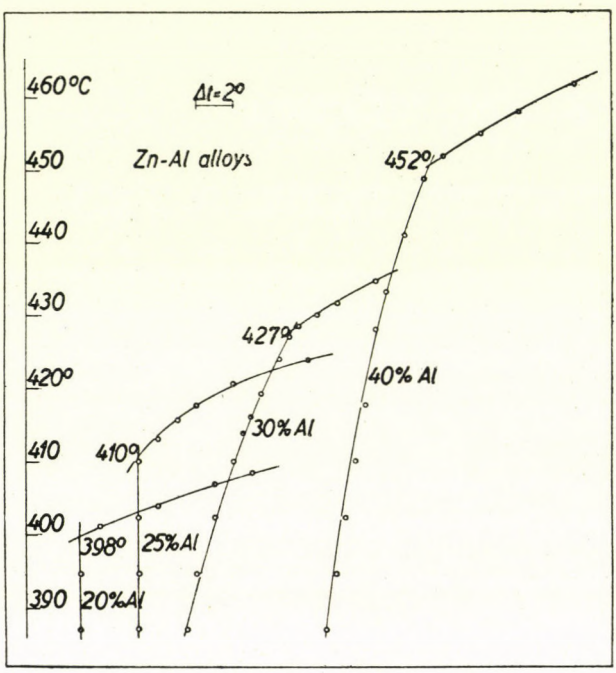


Fig. 13. Differential heating curves of aluminium-zinc alloys used in the dilatometric solidus determinations.

SUMMARY

The expansion due to melting can be utilised to determine the solidus temperature of alloys by means of a dilatometer. Experiments were carried out with different types of aluminium alloys.

1. Melting of a small quantity of eutectic in cast alloys gives a distinct break on the dilatometer curve. Peritectic alloys in which the main portion of the alloy becomes liquefied at the solidus temperature, collapse, so that the dilatometer curve ends at this temperature. There are difficulties with alloys in the wrought state; these must be heated very slowly or re-cast to a sample. Alloys consisting of a homogeneous solid solution deliver a dilatometer curve which becomes steadly steeper, when liquefaction begins; the solidus temperature cannot exactly be read from such a curve. If, however, heating the furnace is governed by a regulator, loops are formed at the solidus temperature; correct values can be read from such a curve.

2. Experiments carried out with aluminium-copper alloys of high purity proved the correctness of the straight solidus line given by *Dix* and *Richardson* for the range of the aluminium rich solid solution. With aluminium-zinc alloys containing 60 to 80% of zinc a lower solidus temperature was found than in earlier determinations. A straight line can be drawn along the newly determined points in the said range, instead of the generally assumed upward bulged curve.

REFERENCES

[1] *Hultgren, R.* and *Lever, S. A.:* Use of Electrical Resistance Measurements to Determine the Solidus of the Lead-tin System. Journal of Metals, 1 (1949), p. 67.

[2] *Bollenrath, F.:* Ein neues optisches Dilatometer. Z. Metallkunde, 25 (1933) p. 163 and 26 (1934), p. 62.

[3] *Sully, A. H.* and *Hardy, H. K., Heal, T. J.:* The Aluminium-tin Phase Diagram, J. Inst. Met., 76 (1949—3), No. 1219.

[4] *Crowther, J.:* Overheating Phenomena in Aluminium-copper-magnesium-silicon Alloys of the Duralumin Type. J. Inst. Met., 76 (1949—3), No. 1216.

[5] *Dix, E. H.* and *Richardson, H. A.:* Trans. Am. Inst. Min. Met. Eng., Febr. 1926. Preprint. See also Z. Metallkunde, 18 (1926), p. 196.

[6] *Mondolfo, L. F.:* Metallography of Aluminium Alloys. Wiley, New York, 1943, p. 13.

[7] *Gayler, M. L. V.* and *Sutherland, E. G.:* The Constitution of Aluminium-zinc Alloys of High Purity. J. Inst. Met. 63 (1938), No. 813.

[8] *Pelzel, E.:* Der Verlauf der Liquidus- und Soliduskurve im System Aluminium Zink zwischen 30 und 70% Aluminium. Z. Metallkunde, 40 (1949), p. 134.

[9] *Gebhardt, E.:* Gleichgewichtsuntersuchungen in den Systemen Zink-Aluminium und Zink-Aluminium-Kupfer. Z. Metallkunde 40 (1949), p. 136.

Institute for Metallography, Technical University, Sopron, Hungary.

ДИЛАТОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ.

И. А. Вэрэ

Р е з ю м е

Возникающее при плавлении увеличение объема, можно использовать для установления температуры затвердевания сплавов. В виду того, что знание начальной температуры плавления всегда является необходимым, автором были проведены опыты с этими сплавами и достигнуты следующие результаты:

1. На дилатометрической кривой таких сплавов в отливках, расплавление которых начинвется с переходом небольшого количества эвтектики в жидкое состояние, показывается при температуре затвердевания резкая точка перелома. На кривой формированных подвергнутых термической обработке облагораживаемых сплавов, можно получить точку перелома лишь при очень медленном нагреве; правильное было бы переплавить такие сплавы и употреблять отлитые образцы. В перетектических сплавах кривая расширения в точке затвердевания, — вследствие сжимания образцов —, внезапно обрывается. В твердых растворах кривая расширения вначале плавки становится постепенно крутой; по таким кривым еще нельзя надежно определить температуру затвердевания. При нагревании же печки можно по термостату наблюдать на кривой расширения образование петли; начало последнего точно совпадает с начальной температурой плавки.

2. Наши опыты на образцах очень чистых алюминиево-медных сплавов подтвердили правильность прежних установлений точек затвердевания в области твердых растворов с некоторым содержанием меди. С другой стороны, были получены более низкие температуры затвердевания от весьма чистых алюминиево-цинковых сплавов, чем достигнутые прежними исследователями; через точки, показывающие полученные автором величины, можно провести по существу прямую линию, вместо общепринятой восходящей кривой.

EIN MASSANALYTISCHES HALBMIKROVERFAHREN ZUR BESTIMMUNG DES MAGNESIUMS IN GUSSEISEN

J. MIKA und S. KOMJÁTHY

Eingegangen am 1. März 1951

Die Versuche zur Untersuchung der Eigenschaften des Gusseisens mit sphärolitischem Grafit machten es wünschenswert, neben den bekannten spektroskopischen Methoden [1] auch ein chemisches Halbmikro-Verfahren auszuarbeiten, welches die serienweise Bestimmung von kleinen Magnesiummengen in Gusseisen ermöglicht. Es war dabei erforderlich, Magnesiumgehalte von 0,05—0,2% zu bestimmen. Die in der Literatur beschriebenen gravimetrischen Verfahren waren zu dieser Aufgabe ungeeignet, weil sie eine allzugrosse Einwaage und dabei eine lange Dauer der Analyse erforderten [2].

Die Vorversuche führten zum Ergebnis, dass es am zweckmässigsten ist, die Analysen mit einer Probemenge von 1,0 g durchzuführen. Es ist hiemit eine Magnesiummenge von 0,5—2,0 mg zu bestimmen. Dies lässt sich am einfachsten durchführen, wenn man das Magnesium als Oxichinolat fällt, und die Menge des letzteren durch bromometrische Rücktitration bestimmt [3].

Da die Fällung des Magnesiums durch die Kationen der Schwermetalle gestört wird, war es notwendig, diese aus der Lösung zuerst zu entfernen. Die weiteren Vorversuche zeigten, dass man dies am einfachsten durch Elektrolyse mit Hilfe einer Quecksilberkathode erreichen kann. Das Eisen wird dabei aus der schwach schwefelsäurigen Lösung unter Amalgambildung an der Kathode, das Mangan als Superoxyd an der Platinanode abgeschieden, und das Magnesium bleibt weiter in Lösung. Die Phosphorsäure stört dabei die Fällung des Magnesiumoxinats nicht.

Um die Dauer der Bestimmung möglichst zu verkürzen, wurden die Ergebnisse der Elektrolyse bei Anwendung rotierender Platinanode [4] mit solchen verglichen, bei welchen ein kräftiger Luftstrom sowohl die Flüssigkeit, wie die Oberfläche der Quecksilberkathode rührte, und bei welcher eine durchlöcherte, waagerecht befestigte Platinplatte als Kathode diente. (Abb. 1.) Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 und 2 zusammengefasst.

Wie es aus der Tabelle 1 hervorgeht, beansprucht die vollständige Entfernung des Eisens bei einer Einwaage von 1 g vier Stunden, wenn man eine rotierende Anode verwendet. Man muss dabei das verdunstete Wasser oft ergänzen, damit der Strom nicht unterbrochen wird.

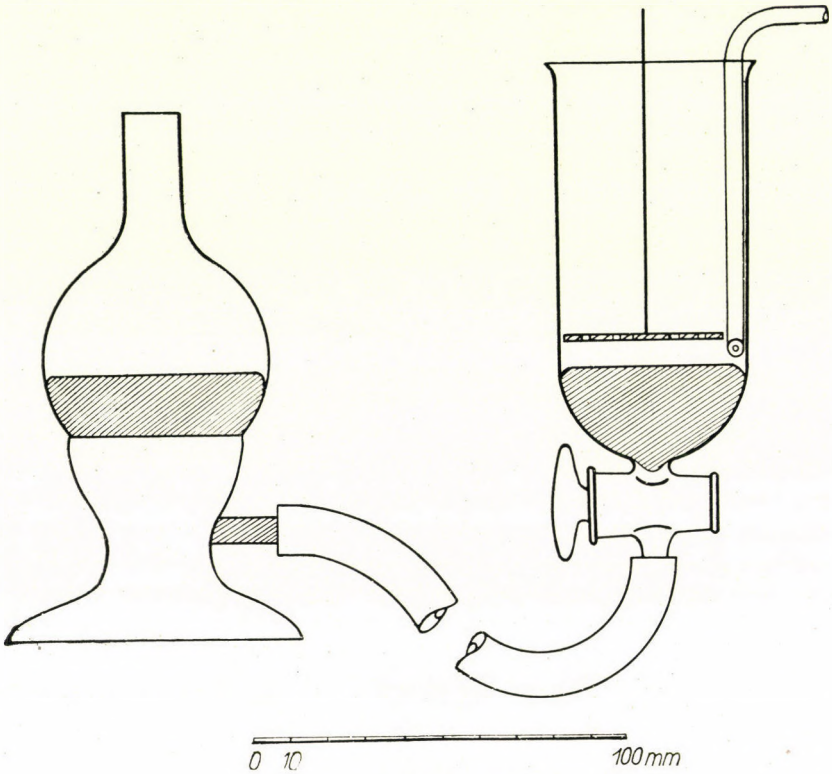


Abb. 1.

TABELLE I.

Elektrolyse mit rotierender Anode

Dauer der Elektrolyse Min.	Spannung		Stromstärke		Das in Lösung gebliebene Eisen mg
	zu Beginn der Elektrolyse	während der Elektrolyse	zu Beginn der Elektrolyse	während der Elektrolyse	
	V	V	A	A	
30	15	6,0	6,1	5,8	6,00
60	16	5,0	5,3	5,3	0,20
90	16	6,0	5,5	5,8	0,16
240	—	—	5,3	5,3	0,02

TABELLE II.

Elektrolyse bei Rühren mit Luftstrom

Dauer der Elektrolyse Min.	Spannung		Stromstärke		Das in Lösung gebliebene Eisen mg
	zu Beginn der Elektrolyse	während der Elektrolyse	zu Beginn der Elektrolyse	während der Elektrolyse	
	V	V	A	A	
30	9,0	5,0	6,0	6,2	5,6
60	9,0	4,6	5,8	5,6	0,16
90	9,0	4,8	5,8	5,6	0,16
240	8,7	4,5	5,3	5,3	0,18

Bei den obigen Versuchen wurde 1 g Gusseisen mit 3,75% C, 0,99% Si, 0,52% Mn, 0,143% P- und 0,096% S-Gehalt in 10 ml 1 : 9 verdünnter Schwefelsäure gelöst, die Lösung filtriert und elektrolysiert. Der elektrolysierten Lösung wurde darnach in einem hohen Becherglas 5 ml konzentrierte Salzsäure und 10 ml 50%-ige Kaliumrodanid-Lösung zugegeben und dieselbe auf etwa 100 ml aufgefüllt. Es wurden weiter in einen Becherglas von gleicher Form die gleichen Mengen der genannten Reagenzien ebenfalls auf 100 cm^3 aufgefüllt und hierauf mit einer Eisen(3)-sulfat-Lösung so lange titriert, bis die Farbtöne der beiden Lösungen von oben gesehen übereinstimmten.

Um die Analysendauer zu verkürzen, wurde nur ein, bzw. der grössere Teil des Eisens bei den folgenden Versuchen durch Elektrolyse entfernt, und die restliche Menge wurde mit Ammoniumhydroxid gefällt. Da das Rühren mit Luftstrom eine einfachere Versuchsanordnung benötigt, wurde letztere bei der Elektrolyse, die eine Stunde lang dauerte, verwendet.

Mit Berücksichtigung der obigen ergab sich die folgende Arbeitsvorschrift :

Man wägt 1,000 g Probe ein und löst dieselbe bei Erwärmung in einem Becherglas von 100 ml Grösse mit 10 ml 1 : 9 verdünnter Schwefelsäure. Die Probe wird dann mit Hilfe eines Weissband-Filters von 7 cm ⌀ filtriert. Man wäscht das letztere mit heissem Wasser viermal aus. Nun überträgt man die Lösung in den Elektrolysenbecher und elektrolysiert sie mit einer Stromintensität von etwa 6 Amp. Die Entfernung der durchlöcherten Platinanode von der Oberfläche des Quecksilbers soll dabei 1 cm sein. Ein schräg bis zur Quecksilberoberfläche reichendes Glasrohr dient zur Einleitung des Luftstromes, mit welchem die Lösung und die Oberfläche des Quecksilbers gerührt wird. Man kann mit einem Wasserstrahlluftgebläse sogar mehrere Elektrolysengeräte gleichzeitig betätigen. Um die Elektrolyse zu beenden, lässt man zuerst das Quecksilber bis zu der Bohrung des Glashahnes ab, und verschliesst den letzteren. Hiernach wird die Platinkathode abgewaschen, und die Probe durch Kippen des Elektrolysiergefässes in ein Becherglas von 200 ml Grösse hinüber gewaschen.

Die Lösung wird hiernach auf etwa 20 ml eingedampft und mit Ammoniumhydroxid schwach basisch gemacht. Das entstandene Eisen(III)-hydroxid wird

dann mit Hilfe eines Weissband-Filters 7 cm ∅ abfiltriert, und mit heissem, schwach ammoniakalischer Waschflüssigkeit fünfmal ausgewaschen. Das Filtrat wird darnach auch etwa 10 ml eingedampft.

Man kann das Eindampfen wesentlich beschleunigen, wenn man statt der üblichen Methode eine Anordnung verwendet, bei welcher die Bechergläser auf eine mit Gasbrenner geheizte Platte gestellt und die Dämpfe durch Glasglocken mit Hilfe einer Wasserstrahlluftpumpe abgesaugt werden [5].

Es wurden darnach aus der eingedampften Lösung das Magnesium nach dem entsprechend abgeänderten, verbesserten Verfahren von *Fr. Hahn* [6] mit Oxin gefällt. Die Probe wurde dabei zuerst mit konzentriertem Ammoniumhydroxid gegen Phenolphtalein neutralisiert, und dann mit 1 ml Überschuss des genannten Reagens, ferner mit 5 ml Azeton versehen. Man erwärmt die mit Uhrgläsern bedeckten Bechergläser bis die darin befindliche Lösungen fast sieden. Man lässt dann 1 ml Oxichinolin-Lösung aus einer Bürette *tropfenweise* zufliessen. Die Probe wird dabei umgerührt und wenn nötig, neuerdings erwärmt. Endlich bleiben die mit Uhrgläsern zugedeckten Proben am Rand eines mit Kupferblech völlig bedeckten Wasserbades eine halbe Stunde lang stehen. Die Mischung darf dabei nicht sieden.

Man saugt dann mit Hilfe einer in Abb. 2. veranschaulichten Anordnung durch Wattefilter ab und wäscht das Becherglas und das Filter viermal mit je 5 ml 5%-iger Ammoniumhydroxid-Waschflüssigkeit aus.

Man giesst hernach in das Becherglas etwa 10 ml 2 n Salzsäure, und lässt diese, ohne die Wasserstrahlluftpumpe zu betätigen, solange einwirken, bis die gelbe Fällung des Magnesiumoxichinolates sowohl vom Filter, wie im Becherglas vollständig gelöst wird. Nun saugt man die Lösung durch das Wattefilter in einem 50 ml fassenden Erlenmeyerkolben hinüber, und wäscht das Becherglas, wie auch das Filter mit möglichst wenig Wasser viermal aus.

Man färbt dann die Probe mit *einem* Tropfen 0,2%-igen alkoholischer Methylrotlösung an und titriert sie mittels einer Bürette mit 0,02 ml-Teilung mit 0,1n Bromatbromid-Massflüssigkeit so lange, bis die Lösung gelb wird. Die Bromatbromid-Lösung soll dabei *langsam* und unter leichtem Schwenken des Titrierkolbens zugegeben werden. Man setzt noch einen Überschuss von 1—2 ml zu und liest die gesamte verbrauchte Menge der 0,1 n Bromatlösung ab. Scheidet sich gegen Ende der Titration ein krystalliner gelbfärbiger Niederschlag aus, dann ist in der Regel die Salzsäurekonzentration nicht hoch genug gewesen. Eine solche Titration gibt keinen richtigen Wert.

Es ist am besten, wenn man das überschüssige Bromat *gleich* zurücktitriert. Man setzt 1 g Kaliumjodid der Probe zu. Es bildet sich meistens sofort ein schokoladebrauner Niederschlag. Man gibt hiernach unter lebhaftem Umschwenken der Probe aus einer mit einer 0,02 ml Teilung versehenen Bürette *sofort* 0,1 n Natriumthiosulfat-Lösung hinzu. Der entstandene Niederschlag

geht während der Titration bald wieder in Lösung. Man setzt die Zugabe der Massflüssigkeit zuerst solange fort, bis die Lösung vollkommen klar, aber noch bräunlich ist. Jetzt gibt man 1 ml 0,5%-ige wasserlösliche Stärke-Lösung hinzu und beendet die Titration, wenn die verschwundene Blaufärbung der Probe auch nach Ablauf von 10 Minuten nicht zurückkehrt. Beträgt die Menge der zugesetzten 0,1 n Bromidbromat-Lösung a ml, und werden dabei zur Rücktitration des Überschusses b ml 0,1 n Thiosulfat verbraucht, so ergibt sich die in mg ausgedrückte Menge des Magnesiums mit Hilfe der Formel

$$0{,}304\,(a - f \cdot b)$$

wobei f den Faktor der 0,1 n Thiosulfatlösung bedeutet.

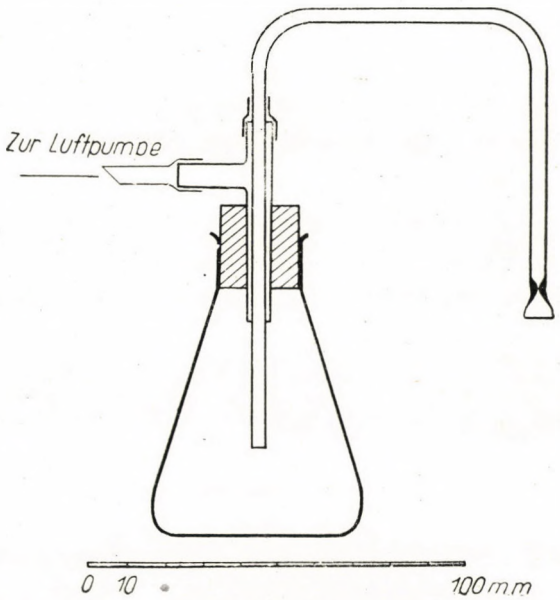


Abb. 2.

Um den Wert des Faktors f zu bestimmen, werden 10,00 ml Bromatbromidlösung mit derselben Bürette abgemessen, welche für die Bestimmungen verwendet wird. Man setzt 10 ml 10%-ige Salzsäure und etwa 1 g Kaliumjodid zu, und titriert nach 2 Minuten die Lösung mit der 0,1 n Thiosulfatlösung bis zu schwach gelber Farbe. Man gibt dann 1 ml Stärkelösung und beendet die Titration bei Farblosigkeit der Probe.

Die benutzte Oxinlösung wird durch Lösen von 38 g Oxin in 125—150 ml etwa 2 n Salzsäure und durch Verdünnung der Lösung mit Wasser auf 1,0 l bereitet. 1 ml der Reagenz fällt etwa 3 mg Magnesium. Die Lösung ist haltbar.

Um die 0,1 n Bromatbromidlösung herzustellen, löst man 2,784 g reinstes, sorgfältig getrocknetes Kaliumbromat und 5 g Kaliumbromid in destilliertem Wasser auf und verdünnt die Lösung in einem Messkolben auf 1000 ml. Das Bromid muss dabei bromatfrei sein, es darf folglich beim Ansäuern nicht auf Jodstärkelösung einwirken.

Die 0,1 n Natriumthiosulfatlösung wird einfach durch Lösen von 25 g $Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O$ in 1,0 l ausgekochtem und wieder abgekühltem Wasser bereitet.

Um die Brauchbarkeit des vorher beschriebenen Verfahrens zu untersuchen, wurden zuerst künstliche Proben analysiert. Diese Proben wurden in solcher Weise bereitet, das 1 g magnesiumfreies Gusseisen in 10 ml 1 : 9 verdünnter Schwefelsäure gelöst und die Lösung noch vor der ersten Filtration mit bekannter Menge Magnesiumsulfat versehen wurde. Die in solcher Weise gewonnenen Analysenergebnisse sind in Tabelle 3. zusammengefasst.

TABELLE III.

Analysenergebnisse der künstlichen Proben

Mg zugesetzt		Mg gefunden		Analysen-Fehler		Mittelwert der Bestimmung		Fehler des Mittelwertes	
mg	%	mg	%	mg	%	mg	%	mg	%
0,50	0,05	0,47	0,05	— 0,03	0,00				
		0,49	0,05	— 0,01	0,00				
		0,49	0,05	— 0,01	0,00				
		0,48	0,05	— 0,02	0,00	0,48	0,05	— 0,02	0,00
1,00	0,10	0,98	0,10	— 0,02	0,00				
		0,99	0,10	+ 0,01	0,00				
		1,01	0,10	+ 0,01	0,00				
		1,00	0,10	0,00	0,00	0,99	0,10	— 0,01	0,00
2,00	0,20	1,98	0 20	— 0,02	0,00				
		1,98	0,20	— 0,02	0,00				
		1,92	0,19	— 0,03	— 0,01				
		1,96	0,20	— 0,04	0,00	1,96	0,20	— 0,04	0,00

Es wurden nachher vom Auslande bezogene Standardproben untersucht.*) Die Analysenresultate sind in Tabelle 4. ersichtlich. Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass die parallelen Proben verhältnissmässig gute Übereinstimmung aufweisen. Die Mittelwerte dieser Bestimmungen sind aber durchschnittlich 0,01% niedriger als die angegebenen.

Schliesslich wurden noch in einem einheimischen Werk spektrographisch untersuchte Proben analysiert. Die Ergebnisse dieser Bestimmungen sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Es ist ersichtlich, dass die parallelen Proben trotz der verschiedenen Einwaagen entsprechend übereinstimmende Analysenresultate ergaben. Auffallend aber ist, dass bei der letzten Probe eine verhältnissmässig grosse Abweichung zwischen dem spektroskopisch, bzw. den analytisch be-

* Die zur Analyse dieser Proben verwendete Methode wurde uns nicht bekanntgegeben.

TABELLE IV.

Analysenergebnisse der Standardproben

Angegebener Mg-Gehalt	Gefundener Mg-Gehalt		Abweichung
	Einzelstimmung	Mittelwert	
	%	%	%
0,084	0,075		
	0,072	0,074	
	0,074	± 0,0007	
	0,075		— 0,01
0,12	0,129		
	0,117	0,123	
	0,123	± 0,0025	
	0,125		0,00
0,15	0,142		
	0,141	0,140	
	0,141	± 0,0011	
	0,137		— 0,01

TABELLE V.

Analysenergebnisse der spektrografisch untersuchten Proben

Angegebener Mg-Gehalt %	Einwage g	Gefundener Mg-Gehalt der Einzelbestimmungen		Mittelwert %	Abweichung %
		mg	%		
0,018	1,0028	0,024	0,023		
	1,0000	0,023	0,023	0,024	
	1,0012	0,025	0,025		
	1,0016	0,025	0,024	± 0,005	+ 0,01
0,048	1,0023	0,486	0,048		
	1,0037	0,498	0,049		
	1,0016	0,501	0,050	0,049	
	1,0050	0,501	0,049	± 0,004	+ 0,01
0,185	1,0017	1,58	0,157		
	1,0005	1,59	0,158	0,156	
	1,0014	1,55	0,155		
	1,0017	1,56	0,156	± 0,007	— 0,03

stimmten Ergebnissen besteht. Die vorgehenden einwandfreien Resultate des hier beschriebenen analytischen Verfahrens lassen die Folgerung zu, dass die Bestimmung des Magnesiumgehalts der untersuchten Probe spektralanalytisch ungenau erfolgte.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein massanalytisches Halbmikroverfahren zur Bestimmung von 0,05—0,2% Magnesium in Gusseisen beschrieben. Dabei werden zuerst Eisen und Mangan durch Elektrolyse mit Hilfe einer Quecksilberkathode grösstenteils entfernt. Die restliche Menge des ersteren wird dann als Eisenhydroxyd abgeschieden, die Probelösung hiernach eingeengt, und das Magnesium mit Oxin gefällt. Die Menge des Magnesiumoxinates wurde bromometrisch durch Rücktitration bestimmt.

SCHRIFTTUMNACHWEISE

1. *Bryan, F. R., Nahstoll, G. A., Veldlnis, H. D. :* ASTM Bulletin, No. 162 (1949) pp. 69—72, *Kennedy W. R. :* The Foundry 77, (1949) 80.; *Rozsa J. T. :* Iron Age *164*, (1949) 73.

2. *Gadeau, R. :* Rev. Métallurgie *32*, (1935), 398—400 ; *Hayne J. L., Schultz J. I.* The Foundry October, 1950. 92—94.

3. *Fresenius, R.* und *Jander, G. :* Handbuch der Analytischen Chemie. III. Teil. (Berlin. 1940), S. 174.

4. *Klinger, P. :* Archiv. Eisenhüttenwesen *13* (1939/40), 21.

5. *Macher, Fr. :* Ein Halbmikroverfahren zur Bestimmung des Chroms in vanadium- u. wolframfreien Stählen. Dieses Heft, S 73.

6. *Hahn, F. :* Zeitschrift f. anal. Chem. *86* (1931), 153.

Lehrstuhl für Analytische Chemie, Sopron

ОБЪЕМНЫЙ ПОЛУМИКРОПРОЦЕСС ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИЯ В ЧУГУНЕ

И. Мика—Ш. Комяти

Резюме

Приведенный способ дает возможность объемного микроопределения 0,05—0,2% магния в чугуне. Образец в 1 гр. растворяется в 10 мл. разбавленной в пропорции 1 : 9 серной кислоте, после чего раствор фильтруется. Затем мы отделяем марганец анодным способом при помощи ртутно-катодного электролиза в течение одного часа при силе тока в 5—6 ампер, а большую часть железа отделяем на ртутном катоде. Оставшаяся часть железа осаждается при помощи гидроокиси аммония. После фильтрации раствор сгущается до 10 мл., нейтрализуется гидроокисью аммония в присутствии фенолфталеина, при этом следует добавить 5 мл. ацетона. Из полученного таким образом раствора магний осаждается при помощи оксина. Оксинат магнезии фильтруется при помощи микрофильтра, промывается 5% аммониевой водой и затем растворяется в 10 мл. 2-нормальной соляной кислоты. Раствор титруется бромато-бромидным измерительным раствором с 0,2%-ным спиртовым метилокрасным индикатором, затем измерительный раствор добавляется в излишке 1-1 мл. Находящийся в излишке бромато-бромидный раствор, после добавления к нему в качестве индикатора крахмала, титруется обратно при помощи 0,1-нормального измерительного раствора тиосульфата натрия.

Относительная аналитическая погрешность : 1,2%.

DIE BERECHNUNG DER IM WALZSPALT WIRKENDEN KRÄFTE

Prof. Dr. A. GELEJI

Eingegangen am 3. März 1951.

Diese Arbeit führt eine Methode zur Berechnung der im Walzspalt wirkenden Kräfte vor. Sie ist die Weiterentwicklung meines Artikels: »Die Berechnung des Formänderungswiderstandes und des Kraftbedarfs beim Walzen«,[1]) in welchem bereits die Kinematik des elementaren Walzens beleuchtet und einfache Formeln zur Berechnung des mittleren Verformungswiderstandes, des Walzdrucks, des Walzdrehmoments und des Kraftbedarfes beim Walzen mitgeteilt wurden. An dieses Rechnungsverfahren schliesst sich eine Methode an, mit der das Walzdrehmoment und der Kraftbedarf des Walzens mit praktischer Genauigkeit bestimmt werden können, unter der Voraussetzung, dass der Verformungswiderstand im Walzspalt veränderlich ist.

Man spricht von elementarem Walzen, wenn der Querschnitt des gewalzten Stückes die Form eines einfachen rechteckigen Vierecks hat, die Erzeugenden der Walzen mit zwei zu einander parallelen Seiten dieses Vierecks zusammenfallen, das Stück seitlich durch keine Rippen berührt wird, aus einem vollkommen homogenen Werkstoff besteht und mit gleichmässiger Geschwindigkeit zwischen den Walzen hindurchläuft.

Diejenige Kraft, durch die ein Stab von ursprünglich quadratischem Querschnitt mit Breite b_1 und Höhe h_1 zwischen den Walzen durchgezogen wird, ist die längs der Walzenflächen auftretende Reibung. Das Walzen selbst kann so aufgefasst werden, als befände sich das Stück in Ruhe, während die Walze längs der Geraden O_1x abrollt. Dabei beschreibt ein jeder Punkt des rollenden Kreises eine Zykloide. Während sich also die Walze um den Punkt O mit dem Winkel $d\varphi$ verdreht, wird sich das Flächenelement df um den Mittelpunkt O_1, auf einem Kreise vom Halbmesser O_1A, mit dem Winkel $\frac{d\varphi}{2}$ verdrehen. Die auf das Flächenelement df wirkende Normalkraft ist (Abb. 1):

$$dN = k \cdot df = k \cdot b \cdot r \cdot d\varphi \tag{1}$$

[1] Acta Technica, Budapest, Bd. I. 1950. No. 1. S. 78—109.

In dieser Gleichung ist k der Verformungswiderstand, b die Breite des Stückes, r der Halbmesser der Walzen.

Bei der Bewegung von df in der Richtung dV, *d. h.* in Richtung der Tangente des Kreises O_1A, ist die auf das Flächenelement df wirkende Kraft:

$$dV = k \cdot df \cdot \cos\frac{\varphi}{2} = k \cdot b \cdot r \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi \tag{2}$$

Die längs df auftretende Reibungskraft beträgt, wenn die Reibungszahl μ ist:

$$dR = \mu \cdot dN = \mu \cdot k \cdot b \cdot r \cdot d\varphi \tag{3}$$

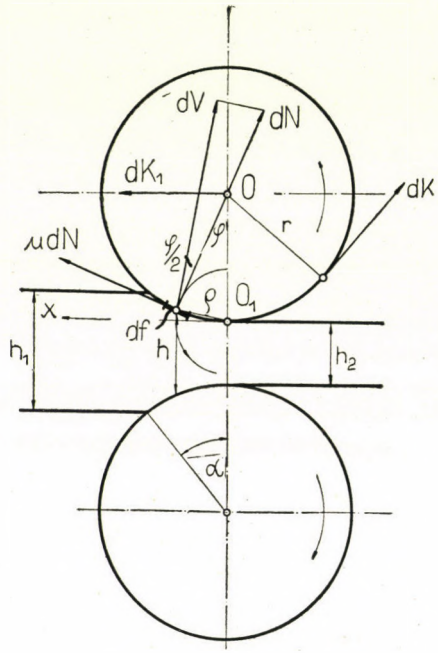


Abb. 1.

In diesen Formeln bedeutet, wie bereits erwähnt, k den mittleren Verformungswiderstand, der aus Gleichung 1 folgenderweise definiert werden kann:

$$k = \frac{dN}{df} \tag{4}$$

Im folgenden werden wir in erster Annäherung den Verformungswiderstand k der Hauptspannung σ_1 gleichsetzen, wobei angenommen wird, dass k auf das gewalzte Stück senkrecht wirkt; die dritte Hauptspannung wirkt in der Walzrichtung und ist das Resultat der zwischen den Walzen und dem gewalzten Stücke auftretenden Reibung (Abb. 2). Wie der oben erwähnte Artikel darlegt: ist bei der Walzung weder Voreilung noch Breitung vorhanden, dann gleitet ein jedes Flächenelement der Walzen auf dem mit ihm in Berührung

stehenden Flächenelement des gewalzten Stückes.[1]) Wenn das Stück ohne Breitung und ohne Voreilung durch den Walzspalt läuft, dann ist die relative Gleitgeschwindigkeit der Walzenflächenelemente:

$$v_r = v_k \left(1 - \frac{h_2}{h} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}\right) \tag{5}$$

In dieser Gleichung ist v_r die relative Gleitgeschwindigkeit des Walzenflächenelements df_w auf dem mit ihm in Berührung stehenden Stückflächenelement df_s. Die beiden Flächenelemente gehören zu dem Winkel φ des Walzenquer-

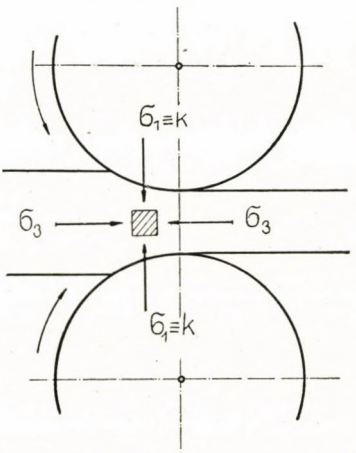


Abb. 2.

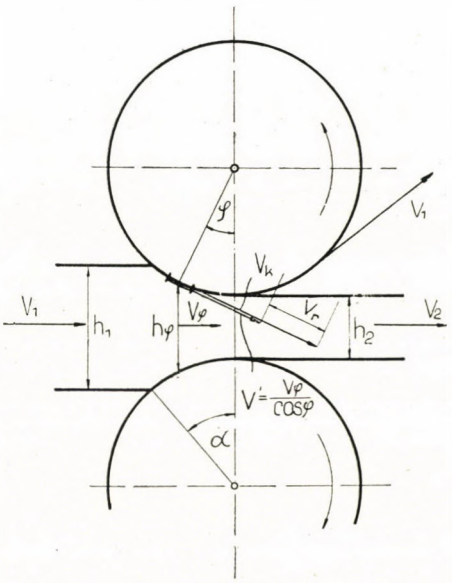


Abb. 3.

schnitts bzw. zu dem Stückquerschnitt mit Höhe h_φ (Abb. 3).

Tritt keine Breitung auf, entsteht aber eine Voreilung, dann ist v_2 grösser als v_k ($v_2 < v_k$). Es kann geschrieben werden:

$$v_2 = \delta \cdot v_k \tag{6}$$

wo δ der Voreilungskoeffizient ist. In diesem Fall ist die relative Gleitgeschwindigkeit zwischen den einzelnen Walzenflächenelementen und den mit ihnen in Berührung stehenden Flächenelementen des Stückes:

$$v_r = v_k \cdot \left(1 - \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{\delta}{\cos \varphi}\right) \tag{7}$$

Tritt Voreilung auf, dann wird die Relativgeschwindigkeit (Gl. 7) längs der Druckflächen ihr Vorzeichen wechseln, u. zw. von einer Stelle an, deren Relativgeschwindigkeit $v_r = 0$ ist, wo

[1]) l. c.

$$1 - \frac{h_2}{h_0} \cdot \frac{\delta}{\cos \varphi_0} = 0 \tag{8}$$

beträgt.

φ_0 ist der Winkel, zu dem die beiden nicht aufeinander gleitenden Flächenelemente der Walzen bzw. des Stückes gehören. Aus der Gleichung 8 ist:

$$\frac{h_2}{h_0} \cdot \frac{\delta}{\cos \varphi_0} = 1 \tag{9}$$

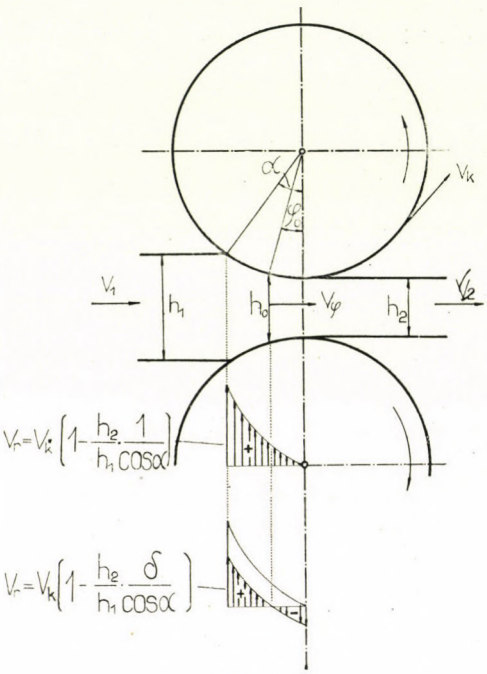


Abb. 4.

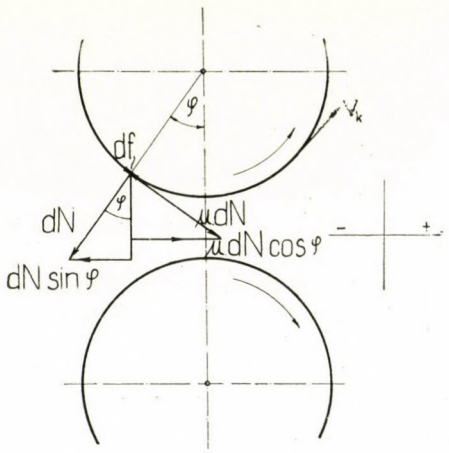


Abb. 5.

Da

$$h_0 = 2r + h_2 - 2r \cdot \cos \varphi_0 \tag{10}$$

ist aus Gleichung 9:

$$\cos \varphi_0 \cdot (2r + h_2 - 2r \cdot \cos \varphi_0) = h_2 \cdot \delta \tag{11}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\cos \varphi_0 = \frac{(2r + h_2) \pm \sqrt{(2r + h_2)^2 - 8 \cdot r \cdot h_2 \cdot \delta}}{2r} \tag{12}$$

und so ist *(Abb. 4)*:

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,cos} \frac{(2r + h_2) \pm \sqrt{(2r + h_2)^2 - 8r \cdot h_2 \cdot \delta}}{2r} \tag{13}$$

Das Vorwärtsgleiten bzw. das Zurückbleiben der Walzenflächen auf den gedrückten Flächen des Stückes erzeugen in dem gewalzten Stücke Kräfte, die in der Walzrichtung wirken. Diese Kräfte rufen in dem gedrückten Teil des gewalz-

ten Stückes die dritte Hauptspannung (σ_3) hervor, und sie sind diejenigen Kräfte, die das gewalzte Stück durch den Walzspalt mit einer grösseren Geschwindigkeit (v_2) als die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen (v_k) durchzuzwingen trachten. Die in der Walzrichtung wirkenden Kräfte können laut Abb. 5 ermittelt werden. Die in der Walzrichtung auftretenden horizontalen Kräfte sind :

$$dH = 2\,(\mu \cdot dN \cdot \cos\varphi \mp dN \cdot \sin\varphi) \tag{14}$$

Wenn keine Voreilung auftritt, dann entstehen in der Walzrichtung nur die Kräfte :

$$dH_1 = 2dN \cdot (\mu \cdot \cos\varphi - \sin\varphi) \tag{15}$$

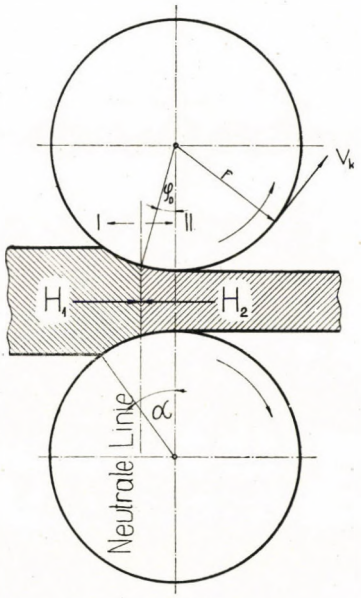


Abb. 6.

da die Relativgeschwindigkeit v_r laut Gleichung 5 den ganzen Einspannbogen entlang dasselbe Vorzeichen hat wie die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen (v_k). Infolgedessen trachten die Kräfte dH_1, die in der Walzrichtung wirken, das Stück mit einer Geschwindigkeit durch den Walzspalt zu zwingen, die grösser ist als die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen. Wenn aber das Stück mit einer grösseren Geschwindigkeit als die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen aus dem Walzspalt heraustritt, dann erscheint die Voreilung, und in diesem Falle werden auch die Kräfte :

$$dH_2 = 2 \cdot dN\,(\mu \cdot \cos\varphi + \sin\varphi) \tag{16}$$

auftreten. Die Grösse der Voreilung wird durch das Gleichgewicht der Kräfte

dH_1 und dH_2 bestimmt (Abb. 6). Die Kräfte H_1 und H_2 halten sich in jenem Querschnitt (in der neutralen Linie) des gewalzten Stückes das Gleichgewicht, der zu dem Winkel φ_0 gehört (Gl. 13), also in demjenigen Querschnitt, bei welchem die Walzenflächenelemente und Stückflächenelemente aufeinander nicht gleiten, sondern bei welchem sie aneinander haften ($v_r = O$). An dieser Stelle ändert sich das Vorzeichen der Relativgeschwindigkeit v_r. Die in der Walzrichtung wirkende Kraft H_1 ist :

$$H_1 = \int_{\alpha}^{\varphi} dH_1 = 2\int_{\alpha}^{\varphi} (\mu \cdot dN \cdot \cos\varphi - dN \sin\varphi) \tag{17}$$

und die Kraft H_2 ist :

$$H_2 = \int_{0}^{\varphi} dH_2 = 2\int_{0}^{\varphi} (\mu \cdot dN \cdot \cos\varphi + dN \cdot \sin\varphi) \tag{18}$$

Da bei φ_0 die Kraft $H_1 = H_2$ ist, kann geschrieben werden :

$$\int_{\alpha}^{\varphi_0} dN \cdot (\mu \cdot \cos\varphi - \sin\varphi) - \int_{0}^{\varphi_0} dN \cdot (\mu \cdot \cos\varphi + \sin\varphi) = 0 \tag{19}$$

Diese Gleichung bestimmt die Grösse des Winkels φ_0 bzw. die Grösse der Voreilung.

Für praktische Zwecke kann die Voreilung mit guter Annäherung berechnet werden, wenn vorausgesetzt wird, dass der Verformungswiderstand k längs der gedrückten Flächen konstant ist. Unter dieser Voraussetzung kann geschrieben werden :

$$\int_{\alpha}^{\varphi_0} k \cdot b \cdot r \cdot d\varphi\,(\mu \cdot \cos\varphi - \sin\varphi) - \int_{0}^{\varphi_0} k \cdot b \cdot r \cdot d\varphi\,(\mu \cdot \cos\varphi + \sin\varphi) = 0$$

$$\int_{\alpha}^{\varphi_0} k \cdot (\mu \cdot \cos\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi - \int_{0}^{\varphi_0} k \cdot (\mu \cdot \cos\varphi + \sin\varphi) \cdot d\varphi = 0$$

da k = konstant, so ist :

$$\int_{\varphi_0}^{\alpha} (\mu \cdot \cos\varphi - \sin\varphi) \cdot d\varphi - \int_{0}^{\varphi_0} (\mu \cdot \cos\varphi + \sin\varphi) = 0 \tag{20}$$

Da

$$\int_{\varphi_0}^{\alpha} \cos\varphi \cdot d\varphi = [\sin\varphi]_{\varphi_0}^{\alpha} = \sin\alpha - \sin\varphi_0$$

und

$$\int_0^{\alpha} \sin\varphi \cdot d\varphi = [-\cos\varphi]_0^{\alpha} = (1 - \cos\alpha)$$

und

$$\int_{\varphi_0}^{\alpha} \mu \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi - \int_0^{\varphi_0} \mu \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = (\sin\alpha - 2 \cdot \sin\varphi_0) \cdot \mu$$

ist also

$$\mu\,(\sin\alpha - 2\sin\varphi_0) - (1 - \cos\alpha) = 0$$

Daraus

$$\sin\varphi_0 = \frac{\mu \cdot \sin\alpha - (1 - \cos\alpha)}{2\mu} \tag{21}$$

bzw.

$$\varphi_0 = \text{arc sin}\ \frac{\mu \cdot \sin\alpha - (1 - \cos\alpha)}{2\mu} \tag{22}$$

Bei der Berechnung des Winkels φ_0 ist darauf zu achten, dass der Reibungskoeffizient μ dem Reibungskoeffizienten nicht gleich ist, der zwischen zwei sich nicht im Zustand der bildsamen Verformung befindlichen Körpern ensteht. Hier muss mit einem C-mal grösseren Reibungskoeffizienten gerechnet werden, u. zw. wurde aus zahlreichen Versuchsdaten ermittelt, dass für C der Wert von 5,5 einzusetzen ist. Der Winkel φ_0 kann also mit der folgenden Gleichung errechnet werden:

$$\varphi_0 = \text{rc sin}\ \frac{C \cdot \mu \cdot \sin\alpha - (1 - \cos\alpha)}{2C \cdot \mu} \tag{23}$$

Die Reibungszahl μ kann beim Warmwalzen von Stahl oberhalb 700° C durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$\mu = 1{,}05 - 0{,}0005\ t \tag{24}$$

wo t die Walztemperatur ist.

Beim Warmwalzen von Aluminium und Aluminiumlegierungen kann die Reibungszahl zu

$$\mu = 0{,}25 - 0{,}35$$

im Mittel zu $\mu = 0{,}3$ angenommen werden, wenn mit trockenen Walzen gewalzt wird. Erfolgt das Warmwalzen in Emulsion, so kann die Reibungszahl zu $\mu = 0{,}1$—$0{,}15$ angenommen werden.

Beim Kaltwalzen, wenn das Walzen mit trockenen Walzen vor sich geht und das gewalzte Stück frei von Öl ist, beträgt die Reibungszahl $\mu = 0{,}07$—$0{,}15$ in Abhängigkeit von der Oberflächenbeschaffenheit der Walzen und von anderen Faktoren, und kann im Mittel zu 0,1 angenommen werden.

Ist der Winkel φ_0 bekannt, so kann der Voreilungskoeffizient aus den Gleichungen 8 und 10 berechnet werden:

$$\delta = \frac{(2r + h_2) \cdot \cos\varphi_0 - 2r \cdot \cos^2\varphi_0}{h_2} \tag{25}$$

Es ist aus den Abbildungen 5 und 6 ersichtlich, welche und wie grosse Kräfte (H_1 und H_2) in der Walzrichtung entstehen, und dass durch diese Kräfte die Voreilung hervorgerufen wird.

Im folgenden soll derjenige Teil des gewalzten Stückes, der sich vor der neutralen Linie (links) befindet, mit *I* und derjenige Teil, der sich nach der neutralen Linie (rechts) befindet, mit *II* bezeichnet werden (Abb. 6). Im Walzspalt wirken vor der neutralen Linie (Stückteil I) die Kräfte (Abb. 7) :

$$dH_1 = 2 \cdot dN\,(\mu \cdot cos\varphi - sin\varphi) \tag{15}$$

und hinter der neutralen Linie (Stückteil II) die Kräfte (Abb. 8):

$$dH_2 = 2 \cdot dN\,(\mu \cdot \cos\varphi + \sin\varphi) \tag{16}$$

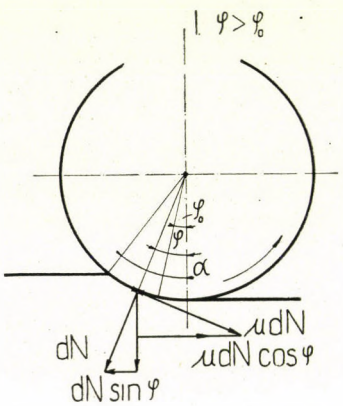


Abb. 7.

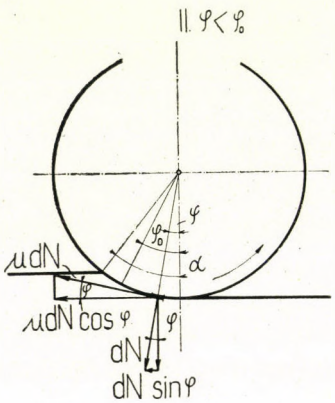


Abb. 8.

Der Verformungswiderstand kann in jedem Querschnitt des im Walzspalt sich befindenden Stückteils, laut *O. Mohr*, mit folgender Gleichung ausgedrückt werden (Abb. 9) :

$$\sigma_1 \equiv k_x = k_{fx} + \sigma_3 \tag{26}$$

In dieser Gleichung ist k_x der Verformungswiderstand im Abstand x vom Eintrittsquerschnitt (oder vom Austrittsquerschnitt), k_{fx} die Formänderungsfestigkeit (Fliessgrenze) des gewalzten Stückes im Abstand x vom Eintrittsquerschnitt (oder vom Austrittsquerschnitt) : $\sigma_3 = \dfrac{H_1}{h \cdot b}$ oder $\sigma_3 = \dfrac{H_2}{b \cdot h}$, je nachdem, ob der Verformungswiderstand im Stückteil I oder im Stückteil II ermittelt werden soll. In einem zu einem Winkel φ gehörenden Querschnitt beträgt die dritte Hauptspannung im Stückteil I :

$$\sigma_{3I.} = \frac{2r}{h} \int_{\varphi}^{\alpha} k \cdot (\mu \cdot \cos\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi \tag{27}$$

im Stückteil II:

$$\sigma_{3II.} = \frac{2r}{h} \cdot \int_0^{\varphi} k \cdot (\mu \cdot \cos \varphi + \sin \varphi) \cdot d\varphi \tag{28}$$

In den Gleichungen 27 und 28 ist k der mittlere Verformungswiderstand längs des Einspannbogens, der durch die Integrierungsgrenzen bestimmt ist. Nehmen wir an, dass der mittlere Verformungswiderstand im Stückteil I

$$k_I = \frac{k_{f1} + k_{xI}}{2} \tag{29}$$

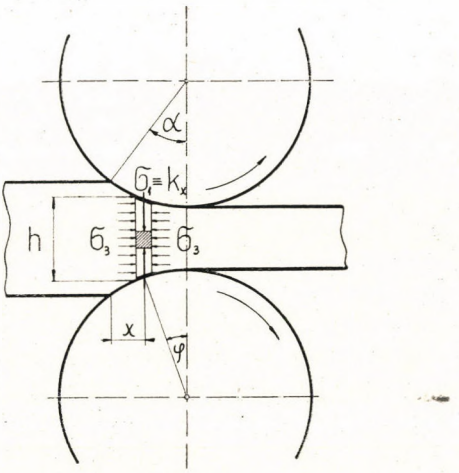


Abb. 9.

im Stückteil II

$$k_{II} = \frac{k_{f2} + k_{xII.}}{2} \tag{30}$$

ist. Diese vereinfachende Voraussetzung bedeutet praktisch nur eine kleine Abweichung. In diesen Gleichungen (29, 30) ist k_{f_1} die Formänderungsfestigkeit des gewalzten Stückes vor dem Stich und k_{f_2} die Formänderungsfestigkeit des gewalzten Stückes nach dem Stich. k_{xI} und k_{xII} bedeuten den Verformungswiderstand in der Entfernung x vom Eintritts-bzw. Austrittsquerschnitt (Abb. 10 und 11).

k_I ist ein konstanter Wert, der herausgehoben und vor das Integralzeichen gesetzt werden kann. So ist:

$$\sigma_{3I} = (k_{f1} + k_{xI.}) \cdot \frac{r}{h} \int_{\varphi}^{a} (\mu \cdot \cos \varphi - \sin \varphi) \cdot d\varphi \tag{31}$$

und

$$\sigma_{3II} = (k_{f2} + k_{xII.}) \cdot \frac{r}{h} \int_0^{\varphi} (\mu \cdot \cos \varphi + \sin \varphi)\, d\varphi \tag{32}$$

Der Verformungswiderstand ist also in der Entfernung x vom Eintrittsquerschnitt, im Stückteil I:

$$k_{xI} = k_{fxI} + \sigma_3 = k_{fxI} + (k_{fI} + k_{xI}) \frac{r}{h} \int_{\varphi}^{\alpha} (\mu \cos \varphi - \sin \varphi) \cdot d\varphi \qquad (33)$$

Der Verformungswiderstand in der Entfernung x vom Austrittsquerschnitt, also im Stückteil II, ist

$$k_{xII} = k_{fxI} + (k_{f_2} + k_{xII}) \cdot \frac{r}{h} \cdot \int_{0}^{\varphi} (\mu \cos \varphi + \sin \varphi) \cdot d\varphi \qquad (34)$$

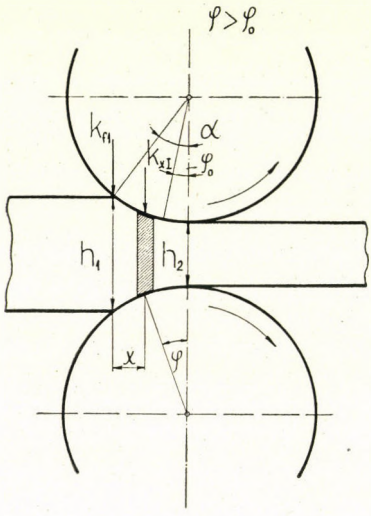


Abb. 10.

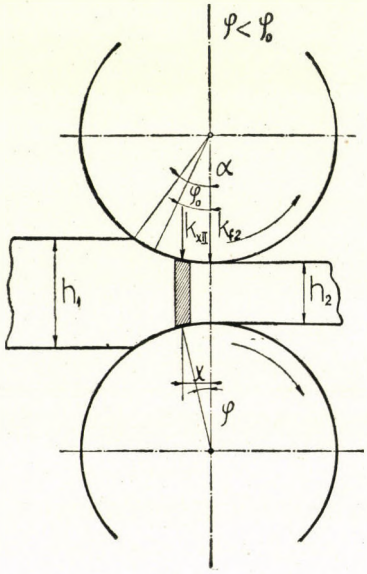


Abb. 11.

In den Gleichungen 33 und 34 bedeuten k_{fxI} und k_{fxII} die Formänderungsfestigkeit des gewalzten Stückes in der Entfernung x vom Eintritts- bzw. Austrittsquerschnitt im Stückteil I bzw. II.

Nach Vollendung der verschiedenen Operationen erhält man:

$$k_{xI} = \frac{k_{fxI} + k_{f_1} \cdot \frac{r}{h} \cdot [\mu \cdot (\sin \alpha - \sin \varphi) - (\cos \varphi - \cos \alpha)]}{1 - \frac{r}{h} \cdot [\mu \cdot (\sin \alpha - \sin \varphi) - (\cos \varphi - \cos \alpha)]} \qquad (35)$$

und

$$k_{xII} = \frac{k_{fxII} + k_{f_2} \cdot \frac{r}{h} [\mu \cdot \sin \varphi + (1 - \cos \varphi)]}{1 - \frac{r}{h} \cdot [\mu \cdot \sin \varphi + (1 - \cos \varphi)]} \qquad (36)$$

Laut Abbildung 12 ist

$$x = r\,(\sin\alpha - \sin\varphi) \tag{37}$$

und

$$x \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = r \cdot (\cos\varphi - \cos\alpha) \tag{38}$$

wo

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \varphi}{2} \tag{39}$$

und

$$h = 2r + h_1 - 2r\cos\varphi \tag{40}$$

Mit Hilfe der Gleichungen 38 und 39 kann die Gleichung 35 auch folgenderweise geschrieben werden:

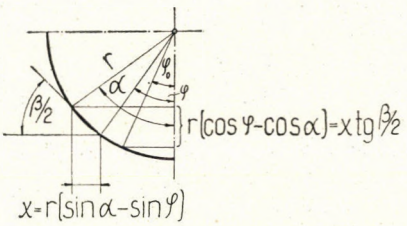


Abb. 12.

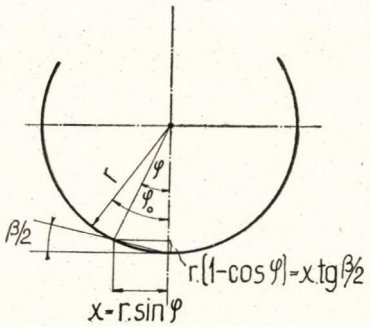


Abb. 13.

$$k_{xI} = \frac{k_{fxI} + k_{f_1} \cdot \dfrac{x}{h}\left(\mu - \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\right)}{1 - \dfrac{x}{h}\left(\mu - \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\right)} \tag{41}$$

Laut Abb. 13 ist

$$x = r \cdot \sin\varphi \tag{42}$$

und

$$x \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = r \cdot (1 - \cos\varphi) \tag{43}$$

ferner

$$\frac{\beta 1}{2} = \frac{\varphi}{2} \tag{44}$$

und

$$h = 2r + h_1 - 2r \cdot \cos\varphi \tag{45}$$

So kann die Gleichung 36 mit Hilfe der Gleichungen 43 und 44 folgenderweise geschrieben werden:

$$k_{xII} = \frac{k_{fxII} + k_{f_2} \cdot \frac{x}{h} \cdot \left(\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)}{1 - \frac{x}{h} \cdot \left(\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)} \tag{46}$$

Die Gleichungen 41 und 46 können bei praktischen Berechnungen verwendet werden, nur muss man im Zusammenhang mit dem Reibungskoeffizienten eine Konstante C einführen. (Siehe Gl. 23.) Für praktische Berechnungen werden also die Gleichungen 41 und 46 die folgende Form annehmen :

$$k_{xI} = \frac{k_{fxI} + k_{f_1} \cdot \frac{x}{h} \cdot \left(C \cdot \mu - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)}{1 - \frac{x}{h} \cdot \left(C \cdot \mu - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)} \tag{47}$$

und

$$k_{xII} = \frac{k_{fxII} + k_{f_2} \cdot \frac{x}{h} \cdot \left(C \cdot \mu + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)}{1 - \frac{x}{h} \cdot \left(C \cdot \mu + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)} \tag{48}$$

Die Konstante C kann in diesen Gleichungen ebenfalls zu 5,5 angenommen werden.

Die Verteilung des Verformungswiderstandes den Einspannbogen entlang, berechnet mit den Gleichungen 47 und 48, ist aus Abbildung 14 ersichtlich.

In meinen früheren Arbeiten habe ich bereits bewiesen[2]), dass für die Berechnung des mittleren Verformungswiderstandes beim Walzen die folgende Gleichung geeignet ist :

$$k_m = k_f \cdot \left(1 + C \cdot \mu \cdot \frac{l_d}{h} \sqrt[n]{v}\right) \tag{49}$$

In dieser Gleichung bedeuten :

k_m = den mittleren Verformungswiderstand,
C = 5,5 eine Konstante,
k_f = die mittlere Formänderungsfestigkeit,
μ = die Reibungszahl (Gl. 24),
l_d = $\sqrt{r \cdot \Delta h}$ der Einspannbogen,
h = die Grösse des Walzspaltes (h_z),
n = 4,
v = die Walzgeschwindigkeit.

[2]) Siehe u. a. »Berechnung der beim Walzen auftretenden Kräfte und der Walzarbeit im Lichte der Versuchsergebnisse«. Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. *13* (1947), S. 336/44.

Die Gleichung 49 kann also auch folgenderweise geschrieben werden :

$$k_m = k_f \left(1 + 5{,}5 \cdot \mu \cdot \frac{l_d}{h} \cdot \sqrt[4]{v}\right) \tag{50}$$

Wenn nun der mittlere Verformungswiderstand berechnet (Gl. 50), der Winkel φ_0 ermittelt (Gl. 23) und durch diesen Winkel der Ort der neutralen Linie bestimmt werden kann, dann kann auch die Verteilung des Verformungswiderstandes im Walzspalt graphisch annähernd bestimmt werden (Abb. 15).

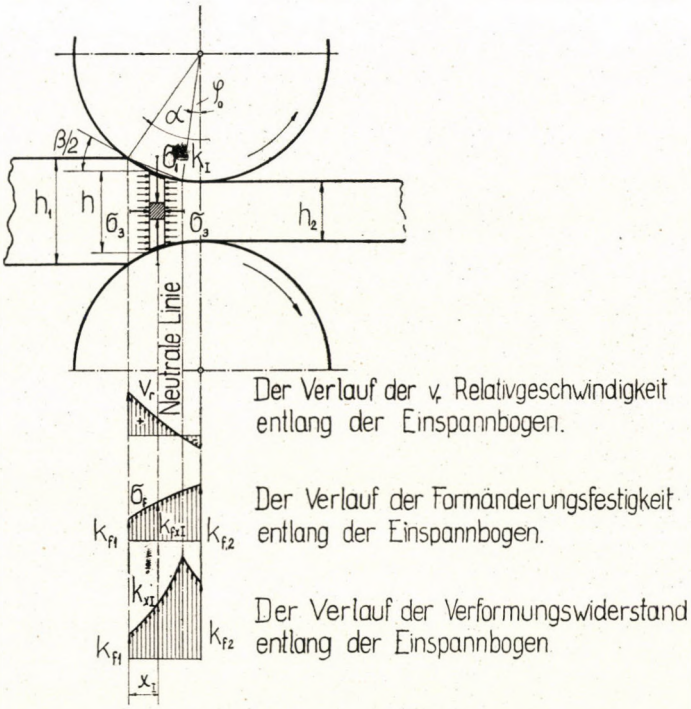


Abb. 14.

$AB = r \cdot \sin \alpha$ ist die Projektion des Einspannbogens (l_d) in der Walzrichtung. Parallel zu AB wird in der Höhe k_m eine Gerade gezogen. Diese Gerade schneidet die neutrale Linie im Punkt F ; letztere ist eine Gerade senkrecht zu AB und ihre Stelle ist durch den Winkel φ_o. bestimmt. Die Punkte D und C werden mit dem Punkt F mit je einer Geraden verbunden. D bzw. C sind durch die Grösse der Formänderungsfestigkeit des gewalzten Stückes vor dem Stich und nach dem Stich bestimmt. Es werden aus den Punkten G und E zu den Geraden DF und CF parallele Geraden gezogen und diese Geraden schneiden die neutrale Linie in den Punkten J und H. Die Punkte G und E sind die Schnittpunkte der Geraden AD bzw. BC mit der Geraden des mittleren Ver-

formungswiderstandes. Im Punkt J wird zu AB eine parallele Gerade gezogen und auf diese Gerade werden die Entfernungen $OB = KJ$ und $AO = LK$ aufgetragen ; auf diese Weise erhält man die Punkte K und L. Punkt L und Punkt H werden durch eine Gerade verbunden, und zu der Geraden LH wird vom Punkt K eine Parallele gezogen. Diese parallele Gerade schneidet die neutrale Linie im Punkt M. Der Abstand OM gibt annäherungsweise den im Walzspalt auftretenden grössten Verformungswiderstand an. Die annähernde Verteilung des Verformungswiderstandes im Walzspalt ist durch das Fünfeck $ADMCBA$ gege-

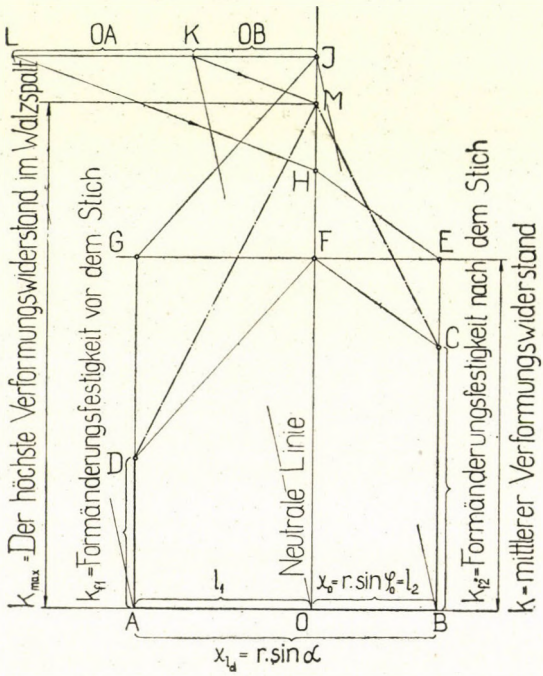


Abb. 15.

ben. Den geometrischen Beweis für die Richtigkeit der in Abb. 15 vorgeführten Konstruktion bildet folgende Ableitung :

$$GJ \parallel DF$$
$$HE \parallel FC$$

die Flächen :

$$ABEG = AOMD + OBCM$$

weil

$$JM : MH = OB : OA$$

$$t_1 = \frac{JM \cdot OA}{2} \qquad t_2 = \frac{MH \cdot OB}{2}$$

aber

$$JM \cdot OA = MH \cdot OB$$

also ist

$$t_1 = t_2 \cdot$$

Laut dieses graphischen Verfahrens ist die Fläche $ABEG$ $(l_d \times k_m)$ gleich der Fläche des Fünfecks $ABCMDA$.

Bei der Berechnung des Walzdrehmoments und des Kraftbedarfs des Walzens sind wir bisher davon ausgegangen, dass der Verformungswiderstand längs der Druckflächen konstant ist. Der Kraftbedarf und das Drehmoment

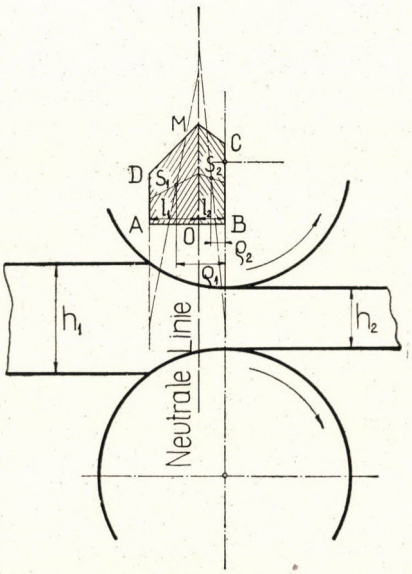


Abb. 16.

wurde also mit Hilfe des mittleren Verformungswiderstandes berechnet. Für praktische Berechnungen ist dieses Verfahren das einfachste. Wenn aber der Wirklichkeit entsprechend vorausgesetzt wird, dass der Formänderungswiderstand längs der Druckflächen veränderlich ist, so kann der Berechnung des Walzdrehmoments mit guter Annäherung die Abbildung 16 zugrunde gelegt werden Das Walzdrehmoment beträgt laut Abb. 16:

$$M = 2 \left(\frac{k_{f1} + k_{max}}{2} \cdot b \cdot l_1 \cdot \varrho_1 + \frac{k_{f2} + k_{max}}{2} \cdot b \cdot l_2 \cdot \varrho \right) \quad (51)$$

In dieser Gleichung ist k_{f1} die Formänderungsfestigkeit des gewalzten Stückes vor dem Stich; k_{max} ist der grösste Verformungswiderstand längs der Druckflächen, b die Breite des gewalzten Stückes, l_1 die Projektion des Einspann-

bogens in der Walzrichtung zwischen dem Eintrittsquerschnitt und der neutralen Linie, l_2 die Projektion des Einspannbogens in der Walzrichtung zwischen der neutralen Linie und dem Austritsquerschnitt. ϱ_1 ist die Entfernung des Schwerpunkts des Trapezes *AOMD* und ϱ_2 die Entfernung des Schwerpunkts

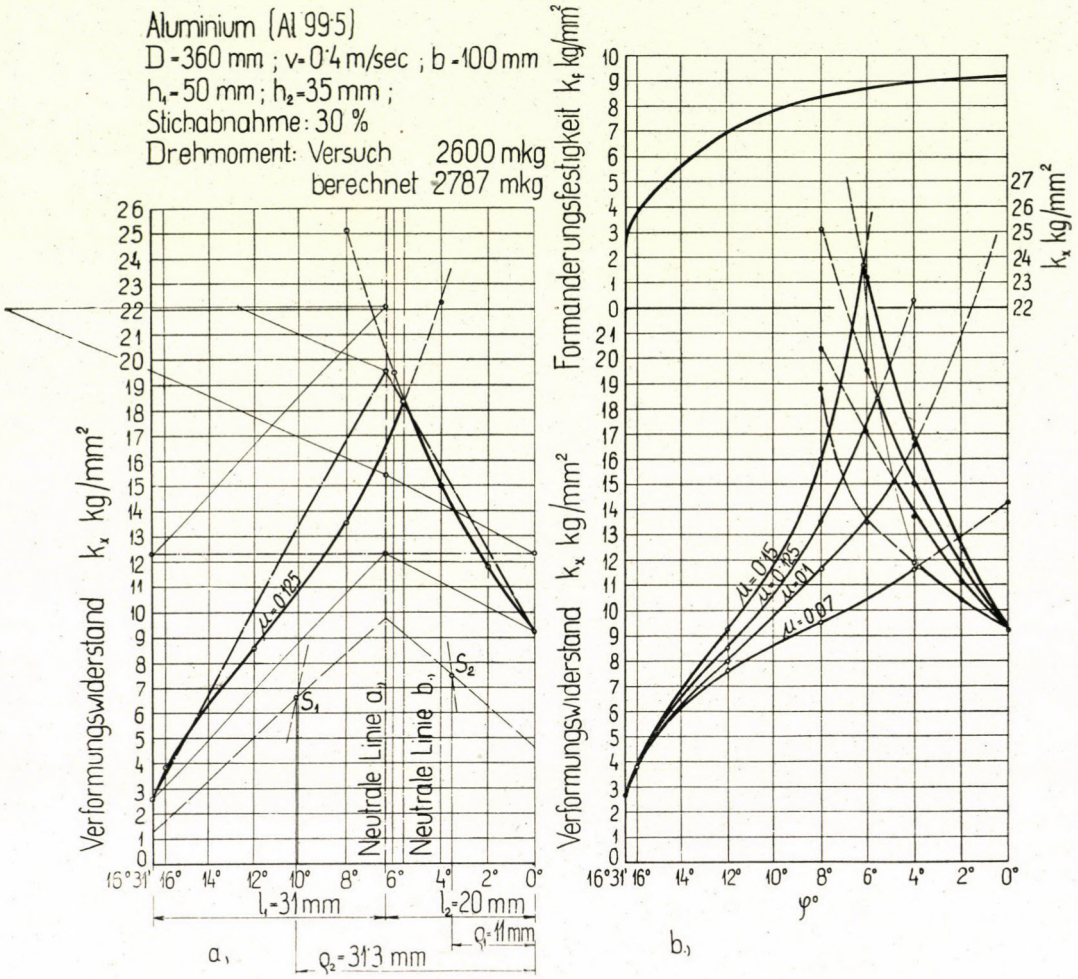


Abb. 17.

des Trapezes *OBCM* von der durch die Walzenachsen bestimmten Ebene. ϱ_1 und ϱ_2 sind also die Arme der Schwerpunkte der beiden Trapeze.

In meinem oben angeführten Artikel wurde dargelegt, wie der mittlere Verformungswiderstand und mit dessen Hilfe der Walzdruck und der Kraftbedarf des Walzens berechnet werden können. Es wurde auch gezeigt, wie sich

die berechneten Werte und die Versuchsergebnisse aneinander schmiegen. Die vorliegende Abhandlung zeigt nun mit Hilfe der Abb. 17, 18, 19 und 20, wie sich der Verformungswiderstand bei verschiedenen Reibungskoeffizienten den Einspannbogen entlang verteilt, vorausgesetzt, dass der bei der Rechnung

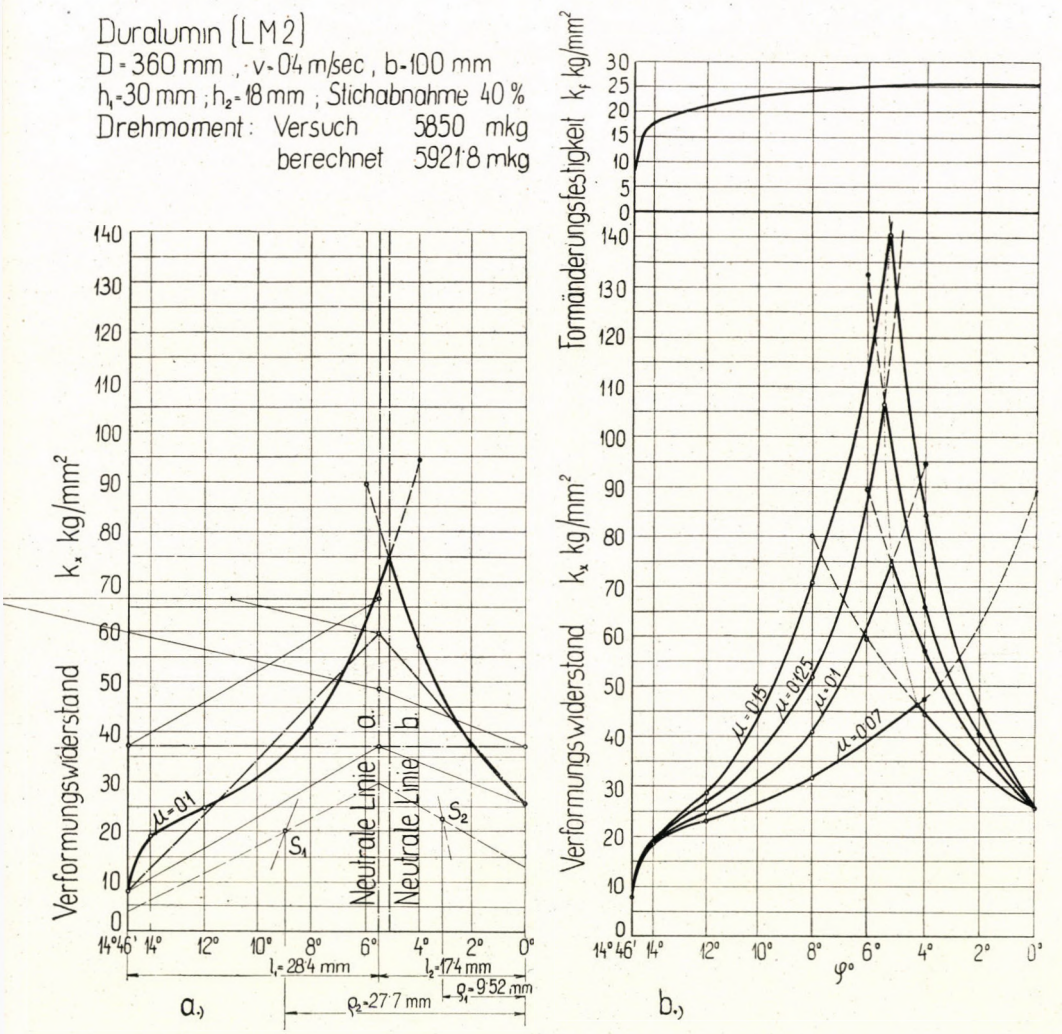


Abb. 18.

jeweilig verwendete Reibungskoeffizient den Einspannbogen entlang konstant bleibt. Die Berechnungen wurden bei Kaltwalzen von Aluminium (*Al* 99,5), Duralumin (*LM*2) und Nickelstahl (*St* 1), sowie bei Warmwalzen von Stahl durchgeführt. Jede Abbildung besteht aus zwei Teilen (*a* und *b*). Abbildung

a stellt die Verteilung des mit Hilfe der Gleichungen 47 und 48 berechneten Verformungswiderstandes dar; Abbildung *b* zeigt die annähernde Spannungsverteilung bzw. den maximalen Verformungswiderstand, ermittelt mit Hilfe

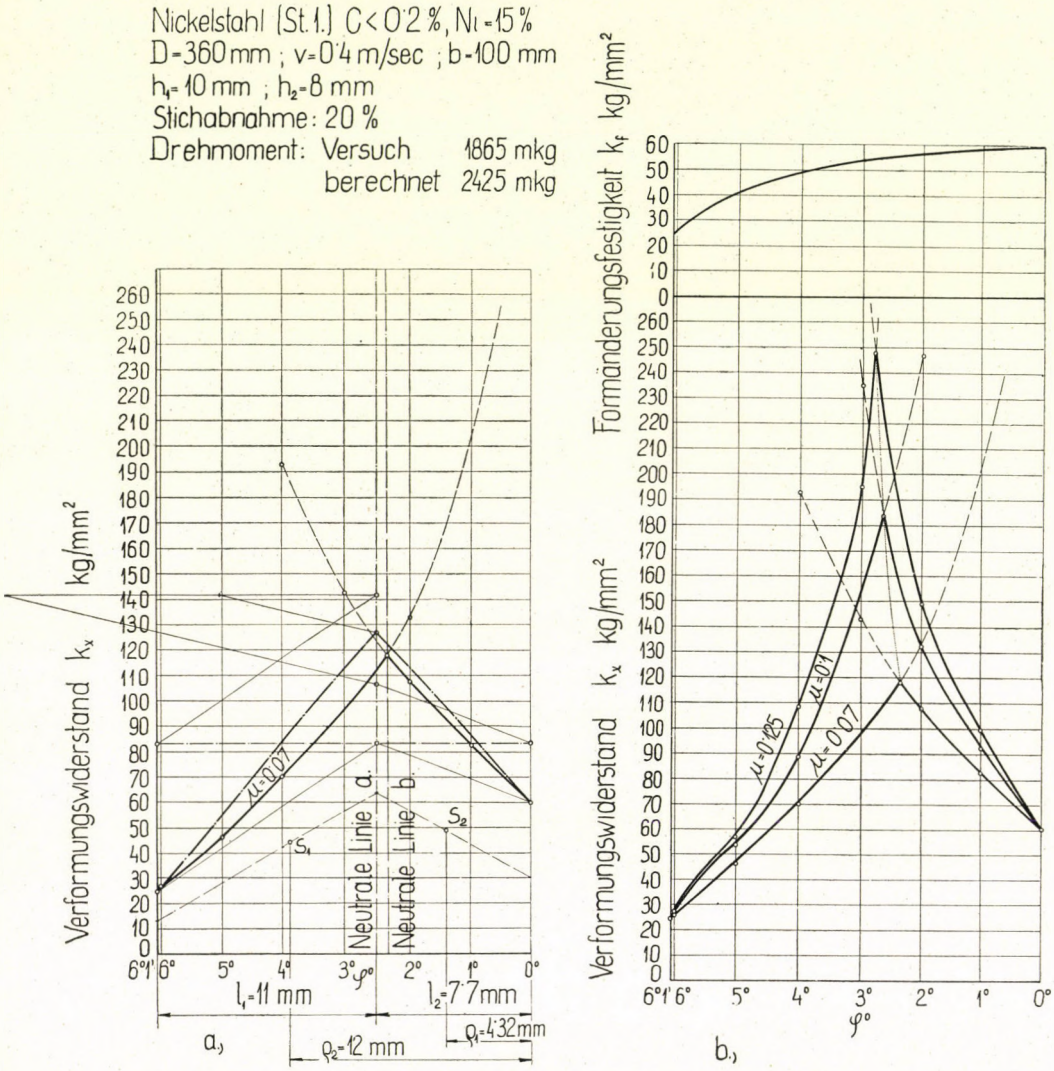


Abb. 19.

der Gleichungen 23 und 50 und des auf Abb. 15 vorgeführten Konstruktionsverfahrens. Mit Hilfe der Abbildungen 17, 18, 19 und 20 wurde, wie schon erwähnt, die Spannungsverteilung unter der Voraussetzung ermittelt, dass der Reibungskoeffizient die Druckflächen (den Einspannbogen) entlang konstant ist.

In Wirklickeit ist aber der Reibungskoeffizient längs der Druckflächen veränderlich. Beim Kaltwalzen wird der Reibungskoeffizient mit steigender Härte des gewalzten Materials immer kleiner. Der Reibungskoeffizient wird sich längs des Einspannbogens vom Eintrittsquerschnitt bis zum Austrittsquerschnitt

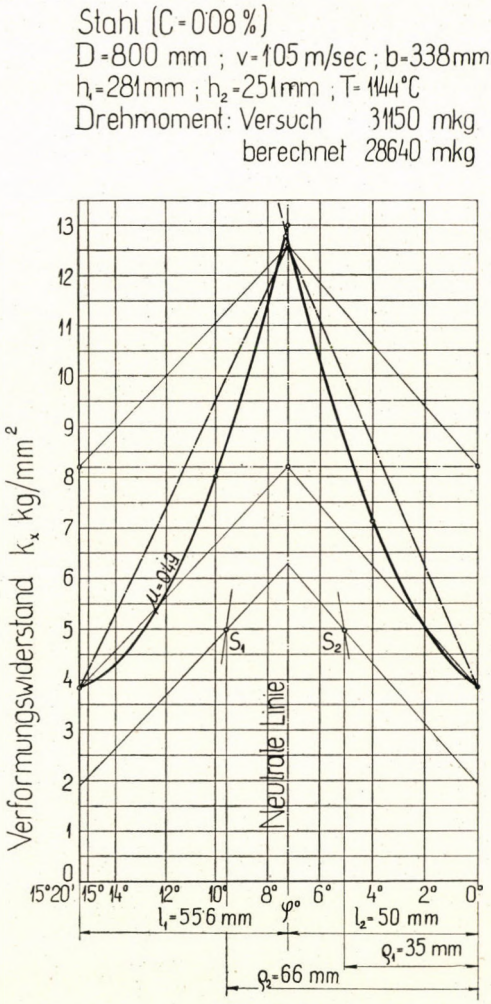


Abb. 20.

verkleinern. Wenn dieser Umstand bei der Berechnung der Verteilung des Verformungswiderstandes in Rechnung gezogen wird, dann wird sich das Maximum des Verformungswiderstandes und damit die neutrale Linie gegen den Eintrittsquerschnitt verschieben.

Die Abbildungen 17, 18, 19 und 20 zeigen gleichzeitig die Versuchswerte und die mit Gleichung 51 berechneten Werte des Walzdrehmoments.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Artikel ist die Weiterentwicklung der früher veröffentlichten Arbeit des Verfassers: »Die Berechnung des Formänderungswiderstandes und des Kraftbedarfs beim Walzen.« In dieser Arbeit wurde eine Methode dargelegt, mit der der mittlere Verformungswiderstand und mit dessen Hilfe der Walzdruck und der Kraftbedarf des Walzens berechnet werden können.

In vorliegendem Artikel wird ein rechnerisches Verfahren mitgeteilt, mit dem man die Lage der neutralen Linie und die Verteilung des Verformungswiderstandes im Walzspalt zu bestimmen vermag. Es wird ferner ein einfaches Konstruktionsverfahren vorgeführt, durch das der maximale Verformungswiderstand und die annähernde Verteilung des Verformungswiderstandes im Walzspalt aus dem mittleren Verformungswiderstand ohne Schwierigkeit ermittelt werden können. Es wird schliesslich gezeigt, wie man das Walzdrehmoment aus dem Verformungswiderstand-Verteilungsschaubild berechnet. Die berechneten und die auf Grund von Versuchen erhaltenen Werte werden einander gegenübergestellt.

LEHRSTUHL FÜR HÜTTENMASCHINENKUNDE, SOPRON

РАСЧЕТ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ПРОСВЕТЕ МЕЖДУ ВАЛЬКАМИ

Ш. Гелеи

Резюме

Статья эта является продолжением опубликованной в 1950 г. в № 1 журнала »**Acta Technica**« статьи того же автора (»Расчет сопротивления на изменение формы и потребность сил при прокатке«). В настоящей статье публикуется способ расчета, при помощи которого можно установить нейтральную линию и распределение сопротивления на деформацию в просвете между вальками. Далее показан простой конструкционный способ, при помощи которого можно без больших затруднений установить из среднего формующего сопротивления максимальное приближенное сопротивление в зазоре вальков. Наконец, указывается, как можно расчитать крутящий момент кручения вальков из диаграммы формующего сопротивления. Полученные путем расчетов данные сопоставляются с данными, полученными путем опытов.

EIN NEUES VERFAHREN ZUR RAFFINATION VON ALUMINIUMABFÄLLEN

Dr. A. DOMONY und R. VÁRHELYI

Eingegangen am 28. März 1951.

Die Wiedergewinnung von Leichtmetallen aus den bei ihrer Verarbeitung entstandenen Abfällen ist eine Frage von hoher Bedeutung nicht nur für die betreffenden Industrien, sondern wegen des Ausmasses dieser Abfälle auch

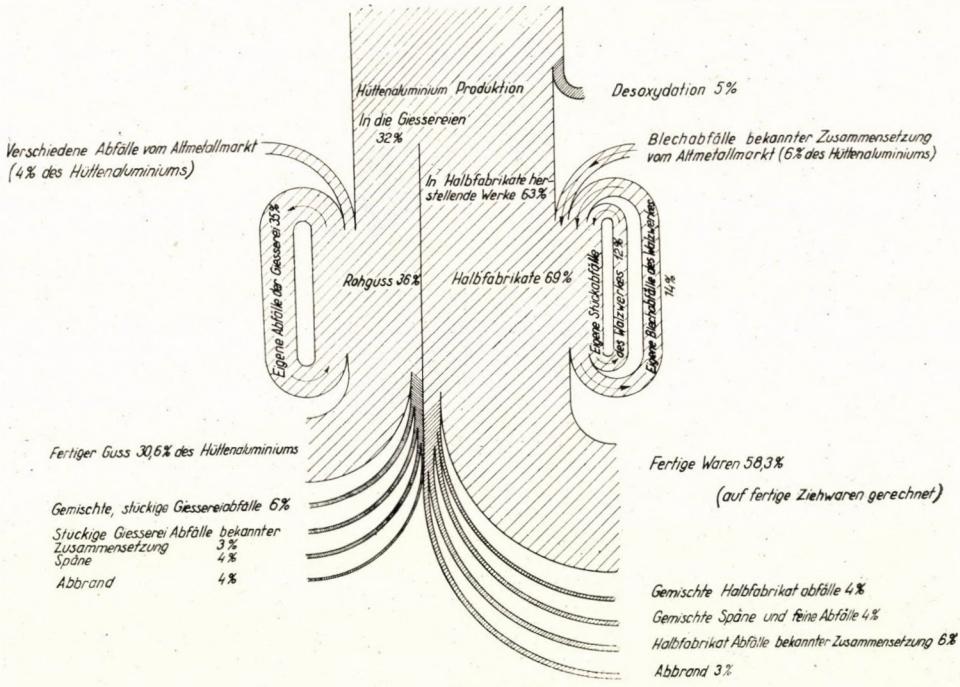


Abb. 1.

für die ganze Volkswirtschaft der solche Industrien besitzenden Länder. Die Menge dieser Abfälle, die auf Abb. 1 veranschaulicht wird, hat zahlreiche Forscher bewogen, sich dem Problem einer entsprechenden Raffination dieser Abfälle zu widmen, um das so wiedergewonnene Leichtmetall wieder in den Kreislauf der Wirtschaft zurückzuführen und so von neuem nutzbar zu machen.

Vor einer kurzen Besprechung der verschiedenen, bisher zu diesem Zweck angewendeten Raffinationsverfahren soll zunächst eine Einteilung der Verunreinigungen der Leichtmetallabfälle gegeben werden. Es können hierbei 3 Hauptgruppen unterschieden werden :

1. *Metallische Verunreinigungen*, die sich im Aluminium lösen oder mit ihm Legierungen bilden und nur durch Filtrierung, Destillation, Sublimation oder Dreischichtenelektrolyse entfernt werden können.

2. *Nichtmetallische Verunreinigungen* (gelöste und okkludierte Gase). Diese gelangen während der Verarbeitung der Aluminiumabfälle in das Metall, und zwar teils aus der die Oberfläche der Abfälle bedeckenden dünnen Aluminiumoxydschicht und teils infolge der grossen Affinität des Aluminiums zum Sauerstoff. Auf diese Weise kommt es dann leicht zu einer Oxydation und Verschlackung des geschmolzenen Metalls. Die Verunreinigungen und die eventuell am Abfallmaterial haftende Luftfeuchte wird im Metallbad zersetzt. Das Metall bildet mit dem bei der Zersetzung enstandenen Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenstoff usw. — besonders bei höheren Temperaturen — oxyd-, nitrid-, carbid- usw.-hältige Schlacke, während es zugleich die entstandenen Gase, besonders den Wasserstoff, gierig absorbiert [1]. Bei der Umschmelzung von Aluminiumabfällen wirken sich diese nichtmetallischen Verunreinigungen weit störender aus als die metallischen und machen eine besonders sorgfältige Vorbehandlung des Abfallmaterials notwendig.

3. *Zur Verschlackung neigende metallische Verunreinigungen.* Von diesen sind zwei, und zwar das Magnesium und das Zink hervorzuheben.

Während des Schmelzens wird das in Aluminiumlegierungen enthaltene Magnesium verschlackt und das entstandene Magnesiumoxyd beeinflusst äusserst nachteilig die Qualität der aus dem Abfallmaterial hergestellten Produkte. Deshalb muss vor der Aufarbeitung von magnesiumhältigen Aluminiumabfällen zu hochqualifizierten Produkten das Magnesium aus dem Metallbad womöglich vollkommen entfernt werden.

Ausser dem Magnesium ist auch das Zink zu dieser Gruppe zu zählen — ausgenommen wenn Al-Cu-Zn-Legierungen hergestellt werden so len — weil sich das Zink beim Schmelzpunkt des Aluminiums leicht verflüchtigt. Die entweichenden Zinkdämpfe oxydieren leicht und trotzdem das flüssige Aluminium das Zinkoxyd zum Teil reduziert, kann es vorkommen, dass im Metallbad Zinkoxydverunreinigungen in feiner Verteilung zurückbleiben.

Es soll hier nicht auf die Entfernung der metallischen Verunreinigungen von Aluminiumabfällen eingegangen werden, sondern es sollen nur in Kürze die bekannten Verfahren behandelt werden, die die Entfernung der in Gruppe 2. und 3. aufgezählten Verunreinigungen bezwecken, sowie eine Methode beschrieben werden, welche die Weiterentwicklung dieser Verfahren bildet.

Das älteste Entgasungs- und Entschlackungsverfahren ist das Erhalten des flüssigen Metalls eine längere Zeit hindurch über dem Schmelzpunkt, das sogennnte *Abstehenlassen.* Bei diesem Vorgang gelangen die vom Metalle absorbierten Gase und die im Metallbad schwimmenden Oxyd- und Schlackenverunreinigungen, deren spezifisches Gewicht geringer ist als das des flüssigen Metalls, an die Oberfläche der Schmelze : die Gase entweichen und die Schlacke kann einfach abgeschöpft werden. Der Nachteil dieses Verfahrens besteht darin, dass die in der Schmelze suspendierten Schlackenteilchen sich nur sehr schwer und unvollkommen vom Metall trennen, da ihr spezifisches Gewicht dem des geschmolzenen Metalls sehr nahekommt. Die Entgasung ist ebenfalls nur unvollkommen, weil die entweichenden Gase nicht nur die Viskosität und den hydrostatischen Druck des Metalls überwinden müssen, sondern vor ihrem Entweichen auch den Widerstand der sich an der Oberfläche des Metallbades gebildeten Oxydschicht. Zur Entfernung des Magnesiums ist das Abstehenlassen unwirksam ; beim Giessen der Schmelze ist mit allen schädlichen Wirkungen der Bildung von Magnesiumoxyd zu rechnen.

Die reinigende Wirkung des Abstehenlassens wurde verbessert, indem der Schmelze ein Gemisch von Salzen beigegeben wurde, deren spezifisches Gewicht wesentlich kleiner war als das des geschmolzenen Metalls. Nach ihrer Beimischung zum geschmolzenen Metall lösten sich die suspendierten Oxyd- und Schlackenteilchen und konnten aus dem Metallbade leicht entfernt werden. Diese Salzgemische sind in der Praxis unter dem Namen »Aluminiumdecksalze« verbreitet. Obzwar die Verwendung von Decksalzen eine erfolgreiche Verarbeitung des Aluminiumabfallmaterials weitgehend erleichterte, so bedeutete sie an und für sich trotzdem keine vollkommene Lösung des Problmes, weil es auch so nicht möglich war, den schädlichen Gasgehalt des geschmolzenen Metalls auf das gewünschte Mass zu senken.

Ein bedeutender Teil des im Metall enthaltenen Magnesiums wird zwar durch das Salzgemisch verschlackt, zur völligen Entfernung des Magnesiums sind aber diese Verfahren trotzdem nicht geeignet, weil die Magnesiumoxyd lösende Wirkung der Salze bei einem Gehalt von 5% $MgCl_2$ ungenügend ist, bzw. weil sie wegen der hohen Temperatur einen sehr beträchtlichen Verlust an Aluminiummetall verursacht.

Erst nachdem festgestellt worden war, dass die trockenen Halogene, insbesondere Cl_2, die im flüssigen Metalle suspendierten Oxydverunreinigungen — wahrscheinlich bei Bildung von gasförmigem AlOCl oder $AlCl_3$ — lösten, gelang es das Reinigen der Leichtmetallschmelze auf dieser Basis auch in industrieller Beziehung einer befriedigenden Lösung zuzuführen. Das so freiwerdende O_2 entweicht zum Teil aus dem Metallbad, beziehungsweise bildet zum Teil Al_2O_3, das von den Decksalzen gelöst von der Oberfläche der Schmelze leicht entfernt werden kann. Infolge des Durchblasens der Schmelze verdrängt das Cl_2 — das sich im flüssigen Aluminium nicht löst — auch das im Metall gelöste H_2, wodurch die Schmelze gleichzeitig mit der Entschlackung auch entgast wird. Die Chlorbehandlung ist auch vom Gesichtspunkt der Entfernung des Magnesiums vorteilhaft, weil die Affinität des Chlors gegenüber dem Magnesium weit grösser ist als gegenüber dem Aluminium. Während nämlich die Freie-Energie der Reaktion

$$Mg + Cl_2 = Mg\ Cl_2.$$

bei 700° C — 116,888 cal/g Mol Cl_2 beträgt [2], so macht die Freie-Energie der Reaktion

$$2/3\ Al + Cl_2 = 2/3\ Al\ Cl_3$$

bei 700° C —92,163 cal/g Mol Cl_2 aus [3]. Daraus geht also hervor, dass wenn in einem System bei einer Temperatur von gegen 700° C Chlorgas mit durch Magnesium verunreinigtem, geschmolzenem Aluminium in Berührung kommt, in erster Linie Magnesiumchlorid gebildet wird, da die Freie-Energie der $MgCl_2$-Bildung um ungefähr 20% grösser ist als die der $AlCl_3$-Bildung. Des weiteren ist es beim Ablauf der Reaktion von Vorteil, dass das bei der Chlorgasbehandlung sich eventuell bildende Aluminiumsubchlorid, bzw. Aluminiumchlorid flüchtig ist und sich deshalb aus dem System entfernt. Will man die bei der Chlorgasbehandlung von durch Magnesium verunreinigtem Aluminiumabfallmaterial sich abspielenden Vorgänge veranschaulichen, so kann dies durch folgende Formeln ausgedrückt werden.

$$3\ Mg + 3\ Al + 9\ Cl = 3\ MgCl_2 + 3\ AlCl$$
$$3\ Mg + 3\ AlCl_3 = 3\ MgCl_2 + 3\ AlCl$$
$$3\ AlCl = AlCl_3 + 2\ Al.$$

Schliesslich bilden sich also festes $MgCl_2$ und gasförmiges $AlCl_3$.

Angesichts der Tatsache, dass die rechte Seite dieser Gleichungen — mit Ausnahme des $MgCl_2$ und des metallischen Aluminiums — aus flüchtigen Stoffen besteht, kann in Gegenwart von metallischem Magnesium ein Gleichgewichtszustand nicht eintreten. Dazu kommt noch, dass die Bildungswärme des $MgCl_2$ höher ist als die aller anderen Reaktionsprodukte, weshalb eine Chlorierung des Aluminiums nur in geringem Ausmass stattfindet, solange im System freies Mg vorhanden ist. Das wird auch durch die Chlorierungsergebnisse der Praxis bestätigt.

Zur Entfernung des Magnesiums durch Chlorgasbehandlung werden 20—30% mehr Chlorgas benötigt, als der auf Grund des Magnesiumgehaltes theoretisch berechnete Chlorgasbedarf beträgt. Im Metallbad verschlackt sich also das Magnesium rascher als das Aluminium. Bei grossbetrieblichen Versuchen senkte die Chlorbehandlung den Mg-Gehalt des Metalls, zugleich mit einer Entfernung der Oxyde und der Gase, auf 0,1—0,2% Mg (s. Tab. I, die auch die auf Zink bezüglichen Angaben enthält)[4].

TABELLE I.

Mg- und Zn-Abbrand bei Raffination durch Chlorgas

Mg — Gehalt		Zn — Gehalt	
vor	nach	vor	nach
Chlorierung		Chlorierung	
%	%	%	%
0,51	0,02	0,09	0,07
2,01	0,12	0,86	0,75
1,23	0,29	4,20	2,80
0,60	0,09	0,10	0,09

Die Reinigung des Abfallmaterials durch Chlorierung wird heute meistens so durchgeführt, dass das flüssige Metallbad mit *trockenem* Chlorgas durchgespült wird. Die Wirkung dieses Verfahrens kann noch gesteigert werden, wenn die Schmelze nach dem Durchblasen des Chlorgases mit einem trockenen, neutralen Gas, z. B. mit Stickstoff, durchgespült wird. Da die Vereinigung des Cl_2 mit dem Magnesium ein exothermer Vorgang ist:

$$Mg + Cl_2 = MgCl_2 + 156 \text{ kcal},$$

ist es bei der grossbetrieblichen Entfernung des Magnesiums angezeigt, auch die freiwerdende Wärme zu verwerten. In dieser Beziehung konnten die besten Ergebnisse mit dem Trommelkonverter, System Röntgen-Haas, erzielt werden[4].

Obwohl mit der Chlorgasbehandlung und besonders mit der Durchblasung von Chlorgas und Stickstoff in Bezug auf die Entfernung des Magnesiums und die Reinigung der Schmelze sehr gute Resultate erreicht wurden, konnte sich dieses Verfahren wegen der erforderlichen Spezialeinrichtungen nur dort durchsetzen, wo ständig grosse Mengen von Aluminiumabfällen aufgearbeitet werden. Das aus dem Konverter gewonnene Metall ist entsprechend rein, um gegossen oder legiert werden zu können, doch ist die Entfernung des Magnesiums nicht vollkommen. Ein weiterer gewisser Nachteil dieses Verfahrens ist auch, dass die zur Verwendung gelangenden Gase *vollkommen* trocken sein müssen. Das Vorhandensein von Feuchtigkeit auch nur in Spuren genügt, um infolge der Zersetzung des Wasserdampfes eine Bildung von Oxyd- und Schlackenteilchen im Metalle in hohem Grade zu fördern. Nichtsdestoweniger kann behauptet werden, dass bei der Verarbeitung von Leichtmetallen und bei der Entfernung des Magnesiums sich die Chlorierungsverfahren im allgemeinen bewährt haben.

Es ist ausserdem noch ein anderes Verfahren bekannt, das zur Entfernung des Magnesiums geeignet ist und das auf der Affinität des Mg gegenüber dem Schwefel beruht. Diese Affinität ist wesentlich grösser als diejenige gegenüber dem Chlor. An dieses Verfahren wurde die Hoffnung geknüpft, dass es ausser einer wirkungsvollen Entfernung des Magnesiums auch eine Verschlackung des Mn- und Zn-Gehaltes durch den Schwefel herbeiführen werde[5]. Bei einem Vergleich der Bildungswärme der Metallsulfide fällt es auf, dass die Bildungswärme des MnS und des ZnS höher ist als die des Aluminiumsulfids (Tabelle II).

Die grundlegende Arbeit *Röntgens* [5] sowie die neueren Forschungen [7] haben den Beweis erbracht, dass der dem flüssigen Metall zugesetzte feste Schwefel, beziehungsweise die zugesetzten Schwefelverbindungen nur dann eine wirkungsvolle Entfernung des Magnesiums herbeiführen, d. h. in der Praxis nur dann mit Erfolg angewendet werden können, wenn das Dreifache der theoretisch notwendigen Menge Schwefel beigegeben wird. Ausserdem wurde in ihnen festgestellt, dass Schwefelungsversuche bei niedrigen Temperaturen (680—720° C) erfolglos blieben. Versuche bei überhitztem Metall hingegen (800—1000° C), abgesehen von wenigen Ausnahmen, nur eine geringe reinigende Wirkung und grosse Schwefelverluste bei grossem Aluminiumabbrand ergaben (Tabelle III).

TABELLE II.

Bildungswärme der Metallsulfide (6)

Metallsulfid	Bildungswärme	Metallsulfid	Bildungswärme
CaS	114,3 ± 0,5	CdS	34,7 ± 0,5
BaS	(111,0)	PbS	23,1 ± 0,2
Na_2S	88,5	FeS	22,8 ± 0,1
MgS	84,2 ± 0,3	CoS	(22,3)
ZnS	45,0	NiS	(20,4)
MnS	(44,4)	Cu_2S	19,0 ± 0,5
1/3 Al_2S_3	40,4 ± 0,1	1/3 Sb_2S_3	12,8 ± 0,1
		1/2 SiS_2	10,4

TABELLE III.

Entfernung des Magnesiums mit Schwefel und Sulfiden

Reagens	Mg — Gehalt vor Behandlung %	Mg — Gehalt nach Behandlung %	Temperatur °C	Schwefelmenge in % des theoretischen Bedarfes
S.....	1,64	0,89	755	269
S.....	3,44	2,06	895	151
S.....	5,47	0,32	1100	200
Na_2S	4,80	3,90	730	124
BaS	4,36	3,69	760	126
BaS	4,11	3,41	900	102
Kaliumpoly-sulfid	3,99	0,95	800	137
Kaliumpoly-sulfid	3,20	0,20	900	118

Der Grund für die Erfolglosigkeit der Versuche bestand nach der miteinander übereinstimmenden Meinung der Forscher [7] darin, dass es nicht gelang, bei einer unmittelbar über dem Schmelzpunkt des Aluminiums befindlichen Temperatur eine genügend innige Berührung zwischen dem Metall und dem Schwefel herbeizuführen. Die Angaben des Schrifttums weisen darauf hin, dass im Falle der Verwendung von fein verteiltem Schwefel oder irgend eines Sulfids die Entfernung des Magnesiums vollkommen durchgeführt werden kann, doch konnte dies bisher in der Praxis nicht verwirklicht werden.

In Kenntnis der bisher angewendeten Raffinierungsverfahren für Aluminium hatten es sich die Verfasser zum Ziel gesetzt, eine Methode auszuarbeiten, bei der sämtliche Vorteile der Chlor- und Schwefelbehandlung beibehalten, die bisher aufgetretenen Nachteile jedoch ausgeschaltet werden.

Um dies zu erreichen, musste vor allem Sorge getragen werden, dass die dem flüssigen Metall beizugebende Schwefelverbindung in je feinerer Verteilung mit dem geschmolzenen Aluminium in Berührung komme. Der in statu nascenti zersetzte Schwefel verschlackt nämlich gierig das im Metall enthaltene Mg und dadurch geht die Entfernung des Magnesiums unmittelbar oberhalb des Schmelzpunktes des Aluminiums vor sich. Dabei ist auch der Aluminiumabbrand sehr gering, denn das flüssige Aluminium, das bei 700—800° C mit dem Schwefel in Berührung kommt, überzieht sich laut den jüngst veröffentlichten Angaben des Schrifttums [8] mit einer dünnen Aluminiumsulfidschicht, die das darunter befindliche Metall vor weiterer Verschlackung schützt. Die Bildung einer bedeutenderen Menge Aluminiumsulfid erfolgte erst bei einer Temperatur über 750° C.

Gleichzeitig mit der Schwefelung musste das geschmolzene Metall im Interesse der Entgasung und Entschlackung der Schmelze auch mit Chlor behandelt werden. Das doppelte Ziel wurde durch die Zugabe von flüssigem S_2Cl_2 zum geschmolzenen Metall erreicht. Das Schwefelchlorür zersetzt sich nämlich bei der Temperatur des geschmolzenen Aluminiums in elementaren Schwefel und Chlor.

Der Ablauf der Versuche war folgender :

In jedem einzelnen Fall wurde von einer Aluminiumlegierung von 4—6% Mg-Gehalt ausgegangen. Das Einschmelzen erfolgte in elektrischen Tiegelöfen mit einem Anschlusswert von 5,5 kW. Zu je einem Versuch wurden 500 g Metall verwendet, die Höhe des Metallbades betrug 150 mm. Nach dem Einschmelzen wurde die Temperatur des Metallbades auf 730—740° C erhöht. Darauf wurde aus dem Bade ein Muster für die Spektralanalyse entnommen und die weitere Beheizung des Ofens eingestellt. Als die Temperatur auf 700° C gesunken war, wurde mit der Zugabe des S_2Cl_2 begonnen. Bei einigen Versuchen wurde die Zugabe bei 800° C durchgeführt. Die Einführung des Schwefelchlorürs geschah mit Hilfe eines von oben in den Tiegel hineinreichenden Graphit- bzw. Quarzrohres. Zur Regulierung der während der Zeiteinheit einzuführenden S_2Cl_2-Menge wurde zwischen den das Schwefelchlorür enthaltenden Glas- bzw. Eisenbehälter und dem Tropfrohr ein Regulationshahn eingebaut. Nachdem die gesamte zur Beigabe bestimmte S_2Cl_2-Menge in das Bad getröpfelt worden war, wurde die Temperatur gemessen und ein neues Muster für die Spektralanalyse entnommen. Im Laufe der Versuche wurde bei jeder einzelnen Gelegenheit die Einschmelzzeit des Metalls, der Zeitpunkt des Musterziehens und die Dauer der Eintröpfelung des S_2Cl_2 gemessen.

Bei der Behandlung mit Schwefelchlorür kann mit der Entstehung von Reaktionsprodukten gemäss folgender Gleichung gerechnet werden :

$$3\,Mg + S_2Cl_2 = 2\,MgS + MgCl_2$$

Demnach ist also zur Entfernung von 1 g Mg 1,86 g S_2Cl_2 erforderlich.

Um die optimale Menge des beizugebenden Schwefelchlorürs festzustellen, wurde die eingetröpfelte Menge S_2Cl_2 auf 1 g Mg berechnet zwischen 1,0—4,4 g variiert. Die Ergebnisse der Versuche sind in Tabelle IV und im Diagramm der Abb. 2 zusammengefasst.

Der Verbrauch des S_2Cl_2 verminderte sich — wie zu erwarten war — mit dem Anwachsen der beigegebenen S_2Cl_2-Menge; der günstigste Verbrauch wurde bei einer Dosierung von rund 3 g S_2Cl_2/1 g Mg erreicht, weil das Mg von da an fast gänzlich entfernt werden konnte (Abb. 2.). Diese optimale S_2Cl_2-Menge kann in grossbetrieblicher Anwendung bei entsprechender Ofenkonstruktion noch weiter vermindert werden.

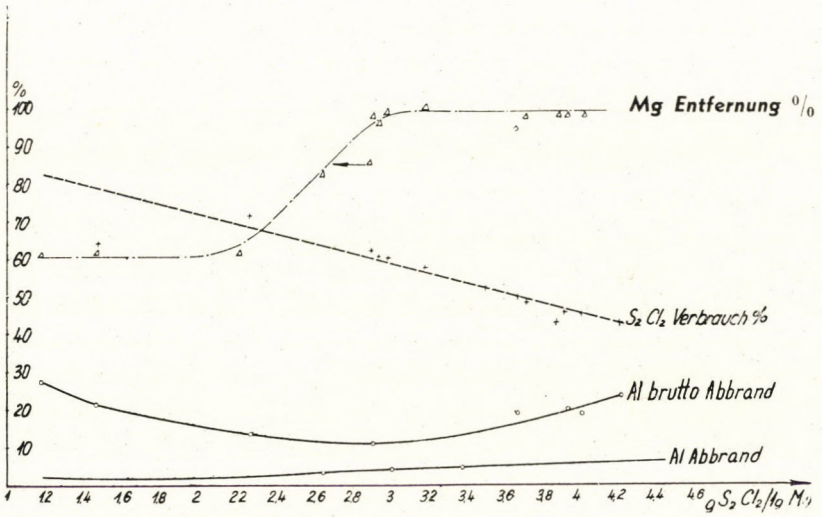


Abb. 2.

Der Prozentsatz des Aluminiumabbrandes als Funktion von S_2Cl_2/1 g Mg ergab eine Kurve mit einem Minimum. Dieses Minimum tritt im grossen und ganzen bei dem optimalen S_2Cl_2-Verbrauch auf. In nackten Zahlen gesehen war der Prozentsatz des Abbrandes sehr gross, 20—25%, im günstigsten Falle 10%. Die Erklärung hiefür ist, dass bei Laboratoriumsmessungen die Menge des in der Schlacke gebliebenen, sowie am Tropfrohr bzw. Rührstäbchen haftenden Aluminiums im Vergleich zur Gesamtmenge des eingeschmolzenen Metalls gross ist. Zur Kontrolle wurden Messungen mit der optimalen S_2Cl_2-Menge vorgenommen, bei denen sorgfältigst auf die Ausschaltung der hier erwähnten Fehlerquellen geachtet wurde. Es wurden hierbei sogar die 0,5—2 mm ∅ Aluminiumkörnchen sorgsam aus der Schlacke ausgesiebt, ausgewählt und zurückgegeben. Die so festgestellten Abbrandwerte sind auf Tabelle IV mit einem Stern bezeichnet.

TABELLE IV.

	g S_2Cl_2/1 g Mg	Mg %		S_2Cl_2-Verbrauch %	Al-Abbrand	Mg-Entfernung %	Eintröpfelungsdauer Min.	Temperatur des Metallbades		Temperaturzunahme °C
		vor	nach					vor	nach	
		Raffination						der Raffination		
1	1,18	3,5	2,55	74,4	26,9	50,8	3	703	739	36
2	1,48	3,1	1,95	63,4	20,6	50,7	4	702	744	42
3	1,63	4,4	3,38	29,4	2,18*	25,8	6,6	701	748	47
4	2,24	4,6	3,19	41,7	26,3	50,1	4,6	700	788	88
5	2,28	4,85	0,69	71,9	13,3	86,0	10	698	819	121
6	2,66	5,5	1,02	57,7	1.07*	82,6	25	697	870	173
7	2,88	5,67	0,937	55,7	14,2	86,5	6,2	702	950	248
8	2,93	4,8	0,048	62,7	10,8	99,0	25	800	1032	232
9	2,97	4,7	0,18	60,5	19,1	96,7	24	701	958	257
10	3,07	4,42	0,046	60,0	3,74*	99,0	12	699	961	262
11	3,21	5,35	0,000	58,0	5,6*	100,0	12,5	696	970	274
12	3,7	3,95	0,27	50,2	18,9	94,7	25	650	1000	350
13	3,74	3,7	0,01	49,6	24,7	99,1	39	690	940	250
14	3,91	3,55	0,42	43,3	25,6	91,0	12	800	1180	380
15	3,95	3,45	0,04	46,7	20,05	99,1	10	800	1110	310
16	4,04	3,45	0,04	45,7	8,3*	99,2	12	640	1000	360
17	4,23	3,3	0,02	43,7	22,6	99,5	23	700	1010	310
18	4,24	3,22	0,03	43,8	22,9	99,3	10	800	1120	320

Das Durchschnittsergebnis der unter den günstigsten Umständen durchgeführten Messungen ist folgendes:

In einer Aluminiumlegierung mit einem Mg-Gehalt von 4,5—5,5% sank durch Einführung von 3 g S_2Cl_2/1 g Mg der Mg-Gehalt unter 0,05%. Dabei betrug der S_2Cl_2-Verbrauch 60%, während der Aluminiumabbrand zwischen 3,7—8,3% schwankte.

Die erzielten Ergebnisse beweisen, dass eine in der Praxis völlig genügende Entfernung des Mg aus einer rund 5% Mg-hältigen Aluminiumlegierung durch eine verhältnismässig kürzere Behandlung mit S_2Cl_2 ein besseres Verfahren darstellt als die bisher bekannten. Ausserdem ist auch das so vom Magnesium gereinigte Metall schlacken- und gasfrei, die infolge der Mg-Entfernung entstandene Schlacke kann vom Metall vollkommen abgesondert werden und der Abbrand des Aluminiums ist gering.

Die beim Reffinationsprozess des Aluminiums infolge der Entfernung des Mg entstandene Wärme kann annähernd mit Hilfe der untenstehenden Gleichungen bestimmt werden:

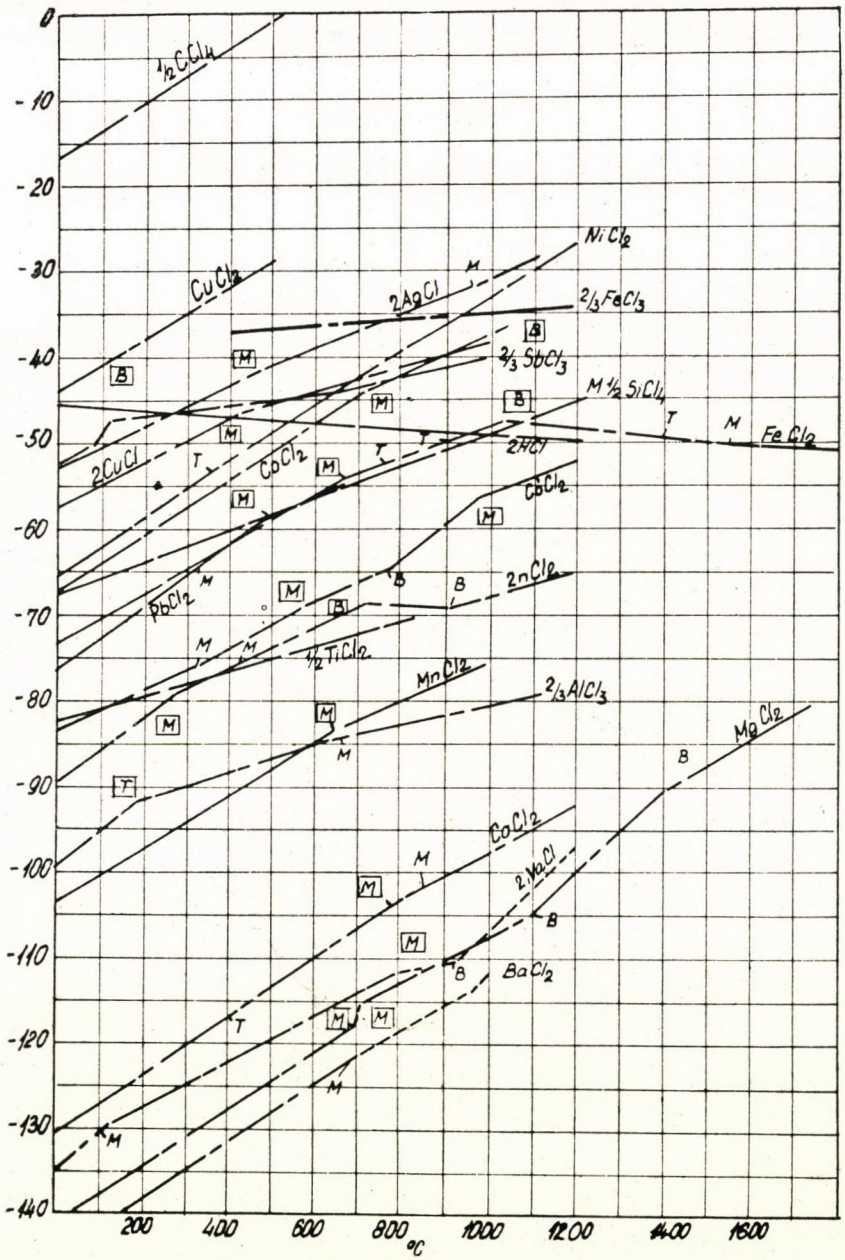

Freie Energie △G° Kcal/g Mol.
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
-110
-120
-130
-140
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
°C
½ CCl4
CuCl2
2AgCl
NiCl2
2/3 FeCl3
2/3 SbCl3
M ½ SiCl4
FeCl2
2HCl
2CuCl
CoCl2
CdCl2
PbCl2
ZnCl2
½ TiCl2
MnCl2
2/3 AlCl3
MgCl2
CaCl2
2 KCl
BaCl2

Abb. 3.

$$3\,Mg + S_2Cl_2 = 2\,MgS + MgCl_2 + 230{,}4\ kcal,$$
$$S_2Cl_2 = 2\,S + 2\,Cl + 14{,}3\ kcal.$$

Daraus ergibt sich für die bei 1 g Mg entstehende Wärmemenge ein Wert von ungefähr 3 kcal. Zur Aufstellung der Wärmebilanz wurde zuallererst die Abkühlungskurve des Ofens, in welchem sich das Schmelzmaterial befand, bestimmt. Nach Bestimmung dieses Wertes wurde bei jeder einzelnen Messung die im

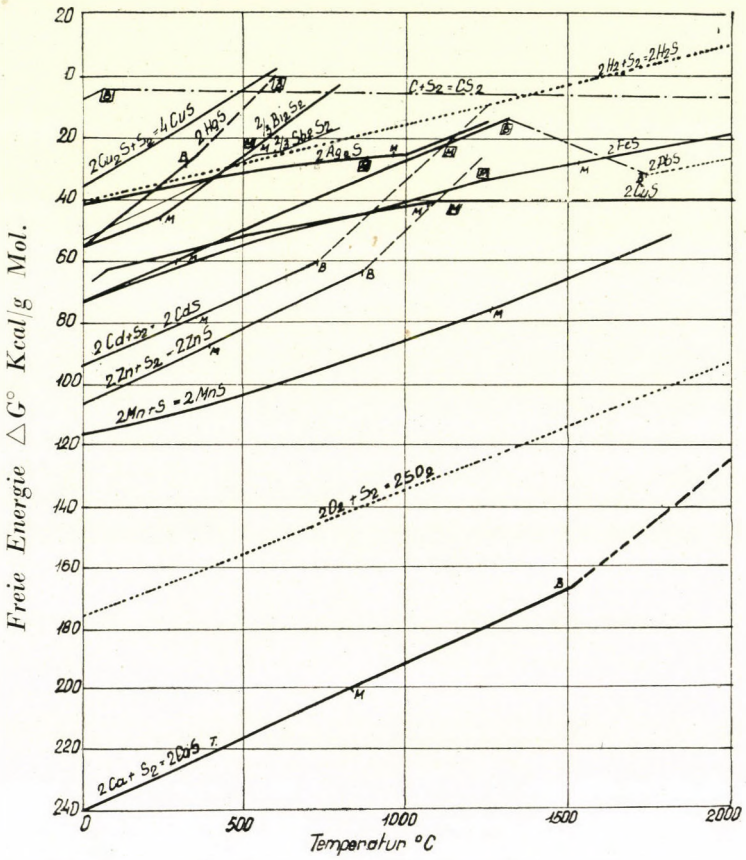


Abb. 4.

Laufe der Reaktion entstandene Wärmemenge berechnet. Dabei wurden Werte, die zwischen 1,1—1,4 kcal schwankten, erhalten. Wenn man in Betracht zieht, dass zur Zersetzung von S_2Cl_2 0,106 kcal/1 g S_2Cl_2 notwendig sind, weiters, dass nur der eine Teil des beigegebenen S_2Cl_2 zur Entfernung des im Metallbade befindlichen Mg verbraucht wird, so bestätigen die Messungen im grossen und ganzen den oben berechneten Wert von 3 kcal.

Wegen der nur mangelhaft zur Verfügung stehenden Angaben konnten nicht sämtliche, sich beim Raffinationsprozess mit Schwefelchlorür abspielenden,

häufig komplizierten Reaktionen auf thermodynamischer Basis bestimmt werden.

Die auf die Freie-Energie der zwei wichtigsten Sulfide — des MgS und des Al_2S_3 — bezüglichen Daten sind bisher noch nicht festgestellt worden [9]. Da nur die auf Zimmertamperatur berechneten Bildungswärmen zur Verfügung standen, wurden die im Schrifttum veröffentlichten Angaben über die Freie-Energie bei der Bildung von Metallchloriden, Metallsulfiden und Metalloxyden miteinander verglichen (Abbildungen 3, 4 und 5.).

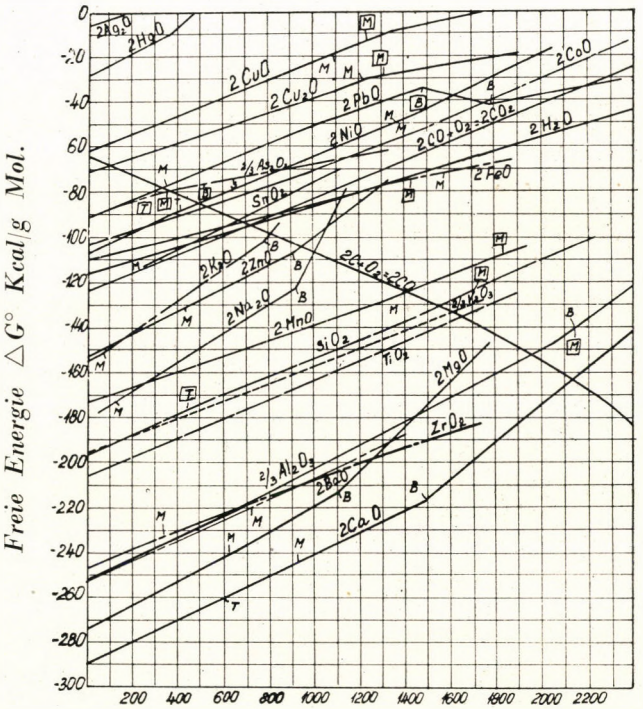


Abb. 5.

Um die fehlende Freie-Energie der MgS- und Al_2S_3-Reaktionen annähernd erfassen und sie mit der Freien-Energie der übriger Reaktionen vergleichen zu können, wurde auf Grund der Angaben aus dem Schrifttum angenommen, dass die Veränderungscharakteristik der als Funktion der Temperatur auftretenden Freien-Energie bei der Entstehung bei Metallsulfiden im grossen und ganzen den Veränderungskurven der Freien-Energie die bei der Entstehung der Metalloxyde auftritt, ähnlich ist. Auf Grund dieser Annahme wurde auf Abb. 6 die Freie-Energie der Entstehung aller jener Sulfide und Chloride eingetragen, die vom Gesichtspunkt der Raffination von Aluminiumabfallmaterial in Frage kommen können. Weiters wurde im Diagramm auch

die Veränderung der Freien-Energie der MgS- und Al_2S_3-Verbindungen mit der entsprechenden Charakteristik der Oxydreihe in der Weise aufgenommen, dass als Ausgangspunkt die im Schrifttum angegebene jeweilige Bildungswärme eingesetzt wurde (2 Mg $+ S_2 = 2$ MgS $+ 158{,}8$ kcal; $^2/_3Al_2 + S_3 = {}^2/_3Al_2S_3 + 82{,}6$ kcal). Die weitere, ungewisse Veränderung der Freien-Energie wurde im Diagramm mit einem gestricheltem Gebiet bezeichnet.

Wenn nun die so im Diagramm figurierende Freie-Energie der Entstehung der Chloride mit dem der Sulfide bei 700° C verglichen wird, so kann festgestellt werden, dass die grösste Freie-Energie bei der Entstehung von MgS auftritt.

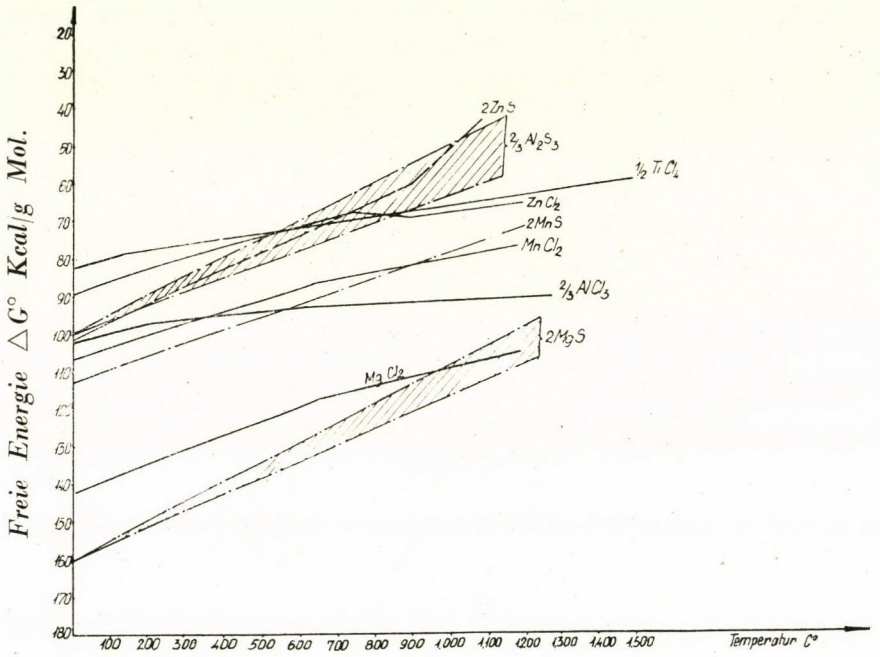


Abb. 6.

TABELLE V.

Bei der Entstehung von Chloriden und Sulfiden auftretende Freie-Energie bei einer Temperatur um 700° C

Chloridreihe kcal/Mol Cl_2		Sulfidreihe kcal/Mol S_2		
$MgCl_2$	116	2 MgS	129—124	extrapolierte Werte
2/3 $AlCl_3$	92	2/3 Al_2S_3	76—64	
$MnCl_2$	85	2 MnS	88	
$ZnCl_2$	69	2 ZnS	69	
1/2 $TiCl_4$	71	1/2 TiS_2	?	

Die Freie-Energie der MgS-Entstehung ist ungefähr um 10—20% grösser als das der $MgCl_2$-Entstehung. Das ist auch die Erklärung dafür, dass die Entfernung des Mg durch Schwefel wesentlich wirkungsvoller ist als die Raffination durch Chlor; auf Grund der durchgeführten Versuche konnte festgestellt werden, dass Abfallmaterial mit einem Mg-Gehalt von 5% durch eine 5—10 Minuten dauernde Behandlung praktisch vollkommen (auf einen Mg-Gehalt von 0,1—0,05%) gereinigt werden konnte.

Das Diagramm der Abb. 6 gibt auch Auskunft, warum ausser der Entfernung des Mg die Verschlackung der übrigen Verunreinigungen des Aluminiums nicht von Erfolg gekrönt war. Nach der Entstehung von MgS und $MgCl_2$ tritt die grösste Freie-Energie bei der $AlCl_3$-Entstehung auf. Deshalb ist das Mangan nicht in Gestalt von Sulfiden verschlackbar, trotz des Umstandes, dass die Bildungswärme der Mangansulfidentstehung grösser ist als die der Al_2S_3-Entstehung. Diese Feststellung wurde auch durch die durchgeführten Versuche bestätigt (Tabelle VI).

TABELLE VI.

Versuchsergebnisse der Mn-Entfernung

Manganprozentsatz		S_2Cl_2-Menge/g Mn
vor Behandlung	nach Behandlung	
1,10	1,10	2,49
1,09	1,22	2,66
2,17	2,08	3,00
2,05	2,11	3,00

Der Vergleich der Freien-Energien der Sulfide lässt jedoch auch den Schluss zu, dass — obwohl bei einer auf Zimmertemperatur berechneten Bildungswärme das Mangan theoretisch aus dem Aluminium verschlackt werden kann — bei 700° C die Freie-Energie der MnS- und Al_2S_3-Reaktionen zu nahe beieinander liegen, um eine wirkungsvolle Mn-Entfernung bewirken zu können. Diese Annahme kann als eine Erklärung für den Umstand dienen, warum die mit Schwefel durchgeführten Raffinationsversuche *Röntgens* in Bezug auf Mn-Entfernung ein negatives Ergebnis zeitigten (Abb. 7) und warum die Manganverunreinigungen von Aluminiumabfall nicht mit Hilfe von Schwefel verschlackt werden können.

Es wurden auch noch Versuche angestellt, den Zinkgehalt des Aluminiumabfallmaterials durch S_2Cl_2-Behandlung zu vermindern. Wie aus Tabelle VII ersichtlich, gelang es weder den Zinkgehalt von nur mit Zink verunreinigtem, noch den von magnesium- und zinkhältigen Abfallmaterial in beträchtlicher Weise zu senken. Die Erklärung für diese Tatsache liegt darin, dass die Freie-

Energie der Zinkchlorid- und Zinksulfidentstehung kleiner ist als die der Aluminiumsalze. Die Entfernung des Magnesiums ist bei Zugabe von genügend S_2Cl_2 auch in Gegenwart von Zink — wenige Ausnahmsfälle ausgenommen — im allgemeinen befriedigend.

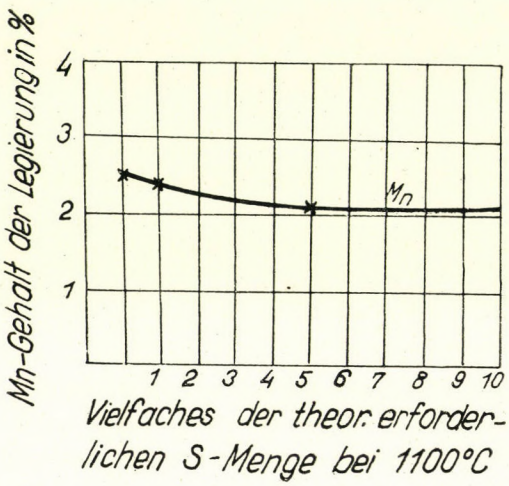


Abb. 7.

TABELLE VII.
Versuchsergebnisse mit zinkhältigen Abfällen

Zinkgehalt %		Magnesiumgehalt %	
vor	nach	vor	nach
der Behandlung		der Behandlung	
4,25	4,11	7,65	5,91
5,00	3,60	8,05	2,53
6,38	3,13	7,06	0,36
4,89	3,13	6,02	0,23
1,77	1,73	—	—
0,56	0,54	—	—

Da der Siedepunkt des Zinkes bei 907° C liegt, der des Zinkchlorids jedoch bei 730° C, sublimiert das Zn beim Durchblasen des geschmolzenen Metalls mit S_2Cl_2 in beträchtlichem Ausmass, besonders wenn bei Gegenwart von Mg infolge der Bildung von MgS eine exotherme Erwärmung eintritt. Auf diese Weise gelang es, den einen Teil des Zinkgehaltes des Abfallmaterials aus dem Metall zu entfernen, ohne dass die Gefahr einer Verunreinigung durch Zinkoxyd auftritt.

Bei der Raffination von Legierungen, die sowohl mit Zink als auch mit Magnesium verunreinigt sind, muss die zur Verwendung kommende S_2Cl_2-Menge in entsprechendem Ausmass erhöht werden. Das Magnesium bindet nämlich den grössten Teil des Schwefelchlorürs und eine Zinkchloridbildung von grösserem Ausmass kann nur dann eintreten, wenn der Magnesiumgehalt unter 0,5% sinkt.

Versuche zur Entfernung der Ti- und V-Verunreinigungen des Reinaluminiums mit S_2Cl_2 ergaben negative Ergebnisse; die Behandlung mit S_2Cl_2 verminderte nämlich weder den Ti- noch den V-Gehalt.

Fasst man die Ergebnisse obiger Versuche zusammen, so kann festgestellt werden, dass mit dem Schwefelchlorür-Reinigungsverfahren magnesiumhältige Abfallmetalle bei geringem Aluminiumabbrand auf einfache Weise fast vollkommen von Gasen, Schlacke und Magnesium gereinigt werden können. Da sich das Schwefelchlorür auf die Einwirkung von Feuchtigkeit hin zersetzt, wird dieses Reinigungsmittel stets nur in trockenem Zustande verwendet und ist deswegen auch nur in trockenem Zustande im Handel erhältlich. Infolge der Entfernung des Magnesiums kann auch die Verunreinigung der Metalle durch Magnesiumoxyd vermieden werden. Bei industrieller Anwendung wird die Wirtschaftlichkeit des Verfahrens ausserdem auch durch die Verwendbarkeit der bei der S_2Cl_2-Behandlung entstandenen Wärme günstig beeinflusst (z. B. im Konverter-System).

ZUSAMMENFASSUNG

Nach einer Darstellung der Entstehungsverhältnisse der verschiedenen Verunreinigungen der Aluminiumabfälle behandeln die Verfasser kurz die Vor- und Nachteile der bekannteren Raffinationsverfahren für Aluminiumabfallmaterial. Sie befassen sich ausführlich mit den Vorgängen, die sich bei der Entfernung des Magnesiums durch Schwefel abspielen und berichten über die Ergebnisse, die sie mit dem von ihnen ausgearbeiteten Verfahren der Anwendung von S_2Cl_2 bei der Raffination von Abfallmaterial erzielt haben.

ANMERKUNGEN UND SCHRIFTTUM

[1] Laut einer neuesten diesbezüglichen Angabe (*Y. Dardel*. Met. Techn., 1948, T. P. 2484) lösen 100 g geschmolzenen Aluminiums bei 660°C 0,214 cm^3 H_2.

[2] *Kapustinski, A. F.* und *Korschunow*: Journ. Phys. Chem. (UdSSR). 1938, 2, 220.
Makolkin, I. A.: Journ. Phys. Chem. (UdSSR), 1942, 16, 18.
Ellingham, H. I. T.: Journ. of the Soc. of Chem. Industry, 1944, May, 127.
Osborn, C. J.: Journ. of Metals, 1930, March, p. 600.
Kellogg, H. R.: Journ. of Metals, 1950, June, p. 862.

[3] Die Formel der Freien-Energie der Reaktion (ΔG°) beträgt in normalem Zustande bei einer Temperatur T:

$$\Delta G^\circ = a + b\ T + c\ T^2 + d\ T\ ln\ T + \frac{e}{T}$$

wobei a, b, c, d, e die die Reaktion charakterisierenden Konstanten der Freien-Energie und T die Wärme in Kelvingraden darstellen.

[4] *Dautzenberg, W.*: Die Chlorstickstoffraffination von NE-, insbesondere von Leichtmetallen. Metall, 4 (1950) S. 125/129.

[5] *Röntgen, P.*: Aluminium 1941. S. 124.

[6] An Stelle der älteren Werte zum guten Teil auf Grund der Angaben von *Smithells C. J.*, Metals Reference Book, 1949, p. 432—433.

[7] *Schneider, K.* und *Berblinger E.:* Zeitschrift für Metallkunde, 1949. XI. S. 411.
[8] *Kohlmeyer, E. I.* und *Retzlaff H.:* Zeitschrift für anorganische Chemie, 1950. S. 248.
[9] *Ellingham, H. I. T.:* Inst. of the Soc. of Chem. Industry, 1944, May, p. 133.

Institut für industrielle Metallforschung, Budapest

ОЧИСТКА АЛЮМИНИЕВЫХ ОТХОДОВ НОВЫМ СПОСОБОМ

А. Домонь и Р. Вархеи

Резюме

Научная работа вкратце излагает вопрос о свойствах алюминиевых отходов и наиболее часто встречающиеся случаи загрязнения. Излагаются известные и применяемые до настоящего времени способы очистки. Из применяемых способов дается подробное описание способа хлорирования, перечисляются положительные и отрицательные особенности этого способа.

Авторы подробно описывают способ очистки при помощи серно-хлористого процесса, разработанный ими же. В статье изложены очистительные свойства серы и хлора, как химические, так и термодинамические основы этой очистки. Авторы ознакамливают нас о опытным оборудованием и с результатами опытов по удалению магния. На основании полученных результатов ими производятся расчеты по внедрению нового процесса в масштабах крупного производства.

Результаты опытов показывают, что очистка серо-хлористым способом дает более положительные результаты, чем это наблюдалось до настоящего времени в практике очистки.

ВЛИЯНИЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НАГРЕВА НА ЗЕРНИСТОСТЬ АУСТЕНИТА СТАЛИ

Н. ХАЙТО

Поступило 31. III. 1951

Как известно, во время нагрева как нелегированная, так и малолегированная сталь превращается в аустенит. Это превращение начинается при температуре A_1 и кончается при температуре A_3, когда весь материал становится гомогенным и состоит из мелких кристаллов, состав которых соответствует составу стали.

Влияние температуры зависит от склонности зернистости стали к покрупнению (1). С этой точки зрения можно различать сорта стали, зернистость которых склонна к покрупнению от сортов, зернистость которых не склонна к такому превращению, причем поведение стали этих двух сортов более или менее одинаково. Зернистость аустенита сталей, принадлежащих к первой группе, увеличивается довольно равномерно с повышением температуры, в противоположность зернистости сталей второй группы, которая в довольно широких температурных интервалах почти не увеличивается. Эти температурные интервалы ограничиваются внизу температурой превращения стали в аустенит, а наверху температурой покрупнения зерен, при достижении которой зернистость аустенита стали, зерна которой склонны к покрупнению, внезапно начинают крупнеть и склонны к покрупнению уже при довольно узком температурном интервале, т. е. получают еще более крупную структуру, чем аустенит стали, зернистость которой с самого начала крупнеет равномерно. Внутри этих двух групп в поведении стали наблюдаются некоторые отклонения.

Значительно менее известно действие времени нагрева на среднюю зернистость аустенита стали. Единственное имеющееся в литературе сообщение по этому вопросу делает Ганеманн (2), на основании опытов, проведенных Бенником: »Es wird praktisch bei jeder Temperatur nach einiger Zeit ein Zustand erreicht, dessen Korngrösse nur noch langsam weiterwächst. Mit steigender Temperatur wächst die Geschwindigkeit des Kornwachstums.«

Это установление, вопрочем, полностью совпадает с наблюдениями Карпентера и Елама (3), согласно которым, при продолжительном нагреве выше определенного предела в структуре рекристаллизованного материала еще долгое время не наблюдаются какие либо изменения. Ими установлено, что постоянство зернистости не изменяется и в том случае, если величина отдельных кристаллов весьма различна; в таких случаях мелкие кристаллы, стесненные между большими, оказались одинаково с ними постоянными.

В связи с этим подобные же наблюдения сообщает и Тамман (4), но об его определениях более подробно речь будет идти в дальнейшем.

Следовательно, поведение рекристаллизованных металлов совершенно совпадает с поведением кристаллов аустенита.

Наконец, из схематических диаграмм Беннека можно достаточно увидеть, что зернистость достигает почти наибольшей величины, довольно независимо от температуры, уже приблизительно в течение первых 30 минут нагрева, а затем крупнеет только незначительно.

Нижеописанными исследованиями мы сделали попытку дополнить приведенные данные новыми и осветить дальнейшими наблюдениями проблему влияния продолжительности нагрева на зернистость аустенита.

В течение наших исследований мы наблюдали поведение трех гипоэвтектоидных сталей во время нагрева. Состав этих сталей следующий:

Марки сталей	C	Mn	Si	S	P	Состав
A	0,34	0,56	0,19	0,027	0,020	накатанная
B	0,31	0,68	0,10	0,028	0,020	»
C	0,37	0,53	0,24	0,023	0,041	накованная

В первой части исследований образцы были подвергнуты нагреву в 800, 900, 1000 и 1100 градусов и при этих температурах нагревались в течение 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 часов.

Действительный момент достижения необходимой температуры можно было бы точно установить только непосредственным измерением температуры образца. Но при массовом нагреве нескольких сот образцов это не было возможно. Поэтому была измерена объемная температура печи и необходимая температура считалась достигнутой тогда, когда цвет образца становился одинаковым с цветом стены печи, заранее нагретой до необходимой температуры. Получаемое таким образом возможное отклонение равняется 1—2 минутам по отношению к следовавшему после этого, по крайней мере, получасовому нагреву, и его действие можно было не принимать во внимание. Исследование действия менее получасового нагрева можно было не производить, как мы это увидим из последующего, так как нагрев, менее чем получасовой длительности, как это можно доказать из результатов произведенных наблюдений, не дал новых данных в отношении закономерностей общего значения.

Во второй части исследований были произведены опыты со сталью марки *A* и правильность полученных при этом результатов проверялась некоторыми произвольно взятыми данными нагревов, произведенных со сталями марки *C*. (Поведение стали марки *C* во всех отношениях одинаково с поведением сталей марки *A* и, поэтому, описываются только результаты, полученные со сталью марки *A*.). При этом целью являлось исследование действия нагрева при температурах в 800 или 900 градусов.

Нам известно, что зернистость аустенита при повышении температуры увеличивается безвозвратно. Это означает, что при уменьшении температуры

в области γ нельзя достичь мелкозернистости. Только путем рекристаллизации крупнозернистый аустенит может быть вновь превращен в мелкозернистый. Исходя из этого, образцы нагревались в течение получаса до различных температур и полученные таким образом при 800 или 900° образцы нагревались дальше таким образом, чтобы их температура в промежутках времени не упала бы ниже температуры преобразования. Исходная зернистость восстанавливалась при нагреве в 900, 1000 и 1100° и дальнейшее нагревание при температуре в 800 или 900° производилось в течение 30, 90, 150, 210, 270, 330 и 390 минут.

Таким образом, образцы, считая с момента достижения самой высшей необходимой температуры до происхождения эвтектоидного преобразования,

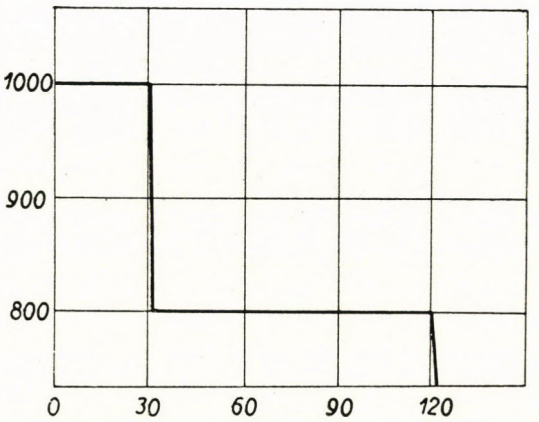


Рис. 1.

находились, вследствие охлаждения, в течение 2, 3, 4, 5, 6 и 7 часов в состоянии аустенита.

На рисунке 1 изображен процесс термической обработки одного образца, который был подвергнут нагреву в 1000°, затем полчаса охлаждался при температуре 800° и при этой же температуре нагревался дальше еще в течение 90 минут. Таким образом, образец, считая с момента достижения температуры в 1000°, находился всего в течение двух часов в состоянии аустенита. Зернистость этого образца обозначена на рисунке 8 также буквой »a«.

В третьей части опытов образцы с исходной зернистостью нагревались в течение 90 или 180 минут при температурах в 900, 1000 и 1100° и дальнейшее нагревание при температурах 800 или 900° производилось до тех пор, пока образцы не нагревались при этих двух различных температурах всего в течение 2, 3, 4, 5, 6 и 7 часов, или 3, 5, 4, 5, 6 и 7 часов.

Процесс термической обработки двух произвольно взятых образцов показан на рисунке 2. Образец, помеченный буквой »b«, после предварительного нагрева в течение 180 минут при температуре в 1100°, подвергся еще в течение 120 минут дальнейшему нагреву при температуре в 900° ; образец по-

меченный буквой »с«, после предварительного нагрева, при температуре в 900° в течение 90 минут, выдерживался еще 330 минут при температуре

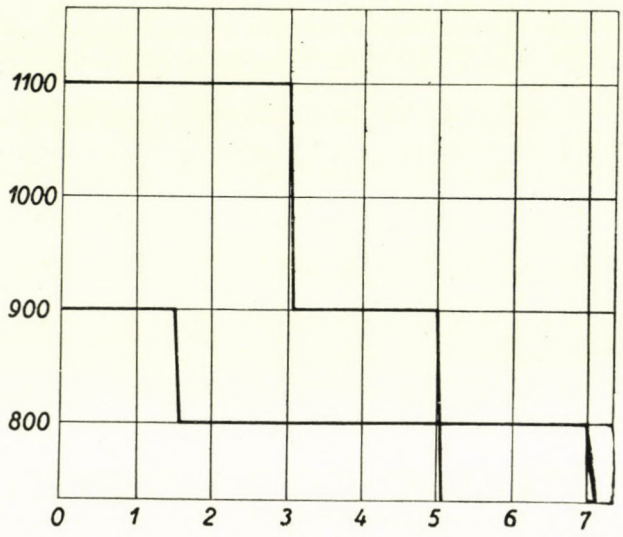


Рис. 2.

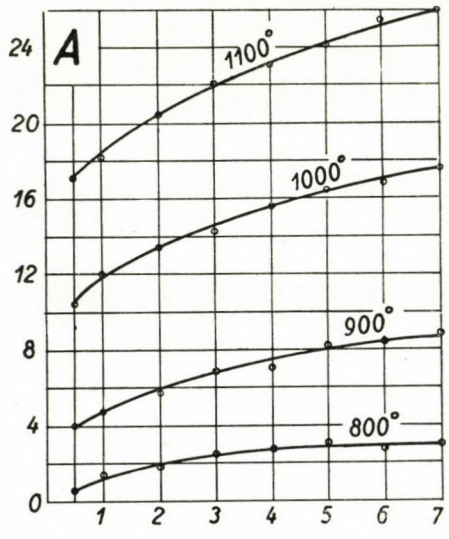


Рис. 3.

в 800°. Эти два образца обозначены на кривой покрупения зерен (рис. 11 и 12) теми же самыми буквами.

На всех образцах зернистость аустенита стала видимой при помощи сетки феррита (5). Для этой цели сталь марки *A* охлаждалась воздушным течением, марки *B* — в свинцовой ванне, а марки *C* на спокойном воздухе.

Среднее число сделанной таким образом видимой зернистости устанавливалось путем подсчета, учитывая при этом среднюю величину зерен на трех различных местах различной шлифовки.

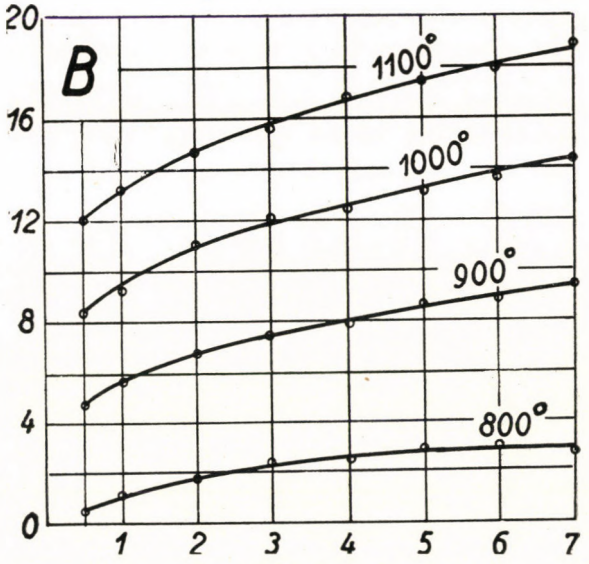


Рис. 4.

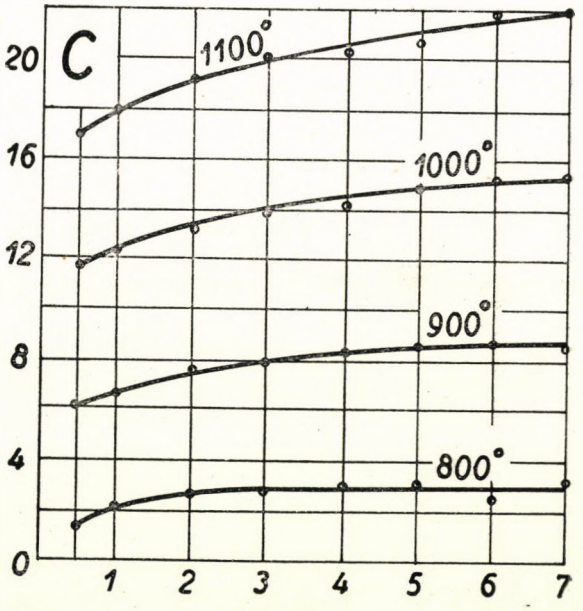


Рис. 5.

На рисунках 3—5 показана средняя зернистость аустенита трех сортов стали, достигнутая при различных температурах в течение нагревов различной продолжительности.

Каждый сорт стали при любой температуре показывает, что средняя зернистость аустенита (также и сверх первого получасового нагрева) возрастает сначала скорее, а потом все медленнее, т. е. что аустенит имеет при каждой температуре максимальную зернистость, которую он и стремится достичь. Кривые, поднимающиеся сперва круто, но потом постепенно спадающие, становясь в конце концов горизонтальной линией, обозначающей самую большую достижимую зернистость, образующуюся в стадии отдель-

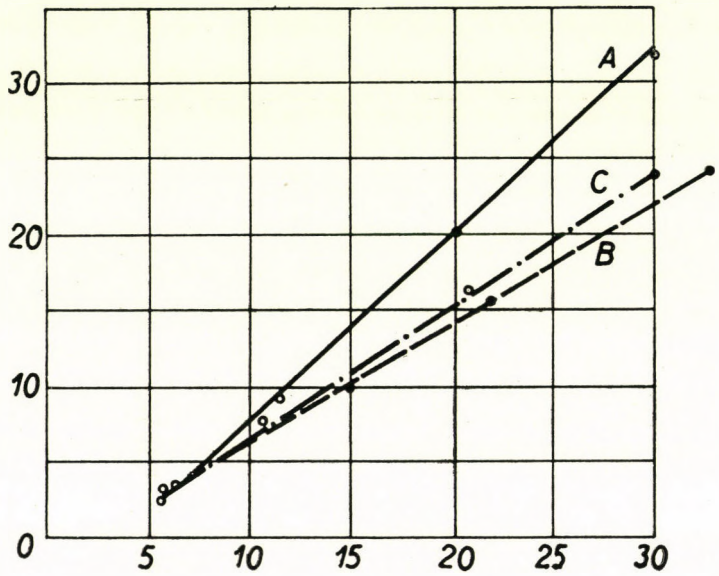


Рис. 6.

ных температур и необходимое для этой величины время нагрева, которое можно кратко назвать временем покрупнения, в отношении каждой стали, конечно различны. Величины, относящиеся к стали марки *A*, показаны на нижеследующей таблице:

Температура C°	Максимальная зернистость μ^2	Время покрупнения
800	3.000	6 часов
900	9.000	12 »
1000	20.000	20 »
1100	32.000	30 »

Время покрупнения для каждой марки стали различно, но с другой стороны, для всех сталей в одинаковой степени является действительным, что чем выше температура, тем крупнее максимальная зернистость, но тем длительнее время покрупнения. Связь между этими двумя величинами приблизительно линеарная (рисунок 6). Касательная угла наклона прямой показывает общую среднюю скорость увеличения зерна в течение всего времени покрупнения в μ^2/час, что является величиной, характерной для стали, увеличивающейся в зависимости от склонности стали к покрупнению. Покрупнение стали марки *A* происходит при средней скорости в 1230, стали марки *B* в 810 и стали марки *C* в 890 μ^2час, в течение времени покрупнения до максимальной зернистости.

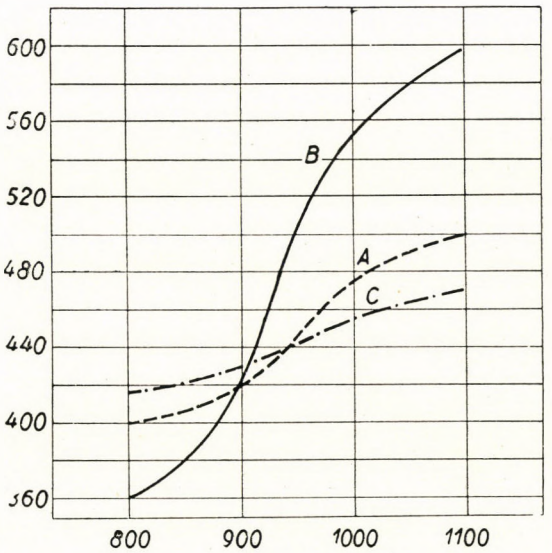


Рис. 7.

Однако, этим величинам нельзя придавать практического значения, так как они только показывают, что если, например, сталь марки *C* при температуре в 15.10^3 μ^2 покрупнеет до максимальной зернистости, то она достигнет этой зернистости приблизительно через 16 часов (при исчислении скорости покрупнения следует обращать внимание на то, чтобы прямые не пересекали абсцисс в нулевой точке).

Однако, скорость покрупнения, как это видно по рисункам 3—5, сильно меняется в зависимости от того, до какой температуры нагревается сталь, но скорость покрупнения меняется и при нагреве при постоянной температуре.

При увеличении времени нагрева скорость покрупнения уменьшается. В начале нагрева покрупнение самое большое, а при достижении установленной температуры, при которой достигается максимальная зернистость, т. е. в конце времени покрупнения, скорость покрупнения снижается до нуля.

При повышении температуры нагрева возрастает и средняя скорость покрупнения. По рисунку 7 видно, в какой степени изменяется средняя величина кристаллов аустенита подопытных сталей, как функция температуры нагрева. На приведенном на рисунке ординате изображена средняя скорость роста зерен при постоянной температуре ($N\mu^2$/час), что означает отношение достижимой в течение времени покрупнения средней зеринстости (N') и разницы достигнутой в течение получасового нагрева средней зернистости (N'') ко времени покрупнения (t):

$$N = \frac{N' - N''}{t}$$

Вместе N'' можно, конечно, взять и зернистость в начале нагрева, этим форма кривой не меняется.

Возрастающие сперва медленно кривые, с повышением температуры, становятся все более крутыми и около 1000° опять выпрямляются. Значит, скорость роста зерна во время покрупнения тем больше, чем выше температура. В противоположность этому, возрастание скорости покрупнения больше всего при температуре около 900° и меньше всего вблизи от температурных пределов области аустенита. Небезинтересно отметить, что кривые покрупнения всех исследованных сталей около температуры в 900° практически имеют одну и ту же совпадающую точку изгиба.

Наблюдение, по которому, при повышении температуры нагрева, средняя скорость покрупнения возрастает, полностью подтверждается установлениями Карпентера и Елана (3), а также и Фейткнехта (6), по отношению к рекристаллизации, согласно которым скорость смешения предельных размеров зерен повышается с увеличением температуры нагрева.

Результаты второй части наших исследований резюмированы на рисунке 8, по которому видно действие времени нагрева при 800 и 999°.

Начальная зернистость, с целью дальнейшего нагрева при 800°, восстанавливалась в обоих случаях при нагреве в 1100, 1000, 900 или 800°. Ввиду того, что во всех случаях продолжительность времени при восстанавливании начальной зернистости была постоянной, а именно 30 минут, то и разница с начальной зернистостью является исключительным следствием изменения температуры.

Изображенные на рисунке кривые до некоторой степени выравнены, но по расположению точек, показывающих результаты действительных измерений, можно заключить, что отклонения никогда не превышают 5%. Разницу между действительно измеренными и выравненными величинами можно объяснить отчасти отклонением действительной температуры образца от измеренной температуры печи, отчасти неизбежной погрешностью при измерении зернистости посредством вычисления, а также и действием многих других менее значительных факторов.

По рисунку видно, что кривые, относящиеся к одной и той же температуре нагрева, параллельны одна к другой. Это означает, что смещение предельных границ кристаллов, т. е. размер покрупнения, а, соответственно с этим, и объем кристаллов, при одинаковой температуре постоянны. Установление Фейткнехта (6) в связи с рекристализацией алюминия, согласно которому средняя скорость смещения предельных границ кристаллов становится в общем меньше с покрупнением кристаллов, должно быть изменено,

по крайней мере, по отношению к аустениту, так как, хотя скорость покрупнения при росте кристаллов при постоянной температуре и уменьшается, это происходит не потому, что растут кристаллы, а потому, что продолжительность нагрева повышается. Рост зернистости, точно также как и скорость покрупнения, является только функцией продолжительности нагрева. Скорость покрупнения растет именно одновременно с ростом зернистости, как следствие повышения температуры.

На рисунке 9 наглядно поясняется покрупнение образцов с одинаковой начальной зернистостью, при различных температурах, в функции времени нагрева. Действие температуры нагрева на покрупнение зерни-

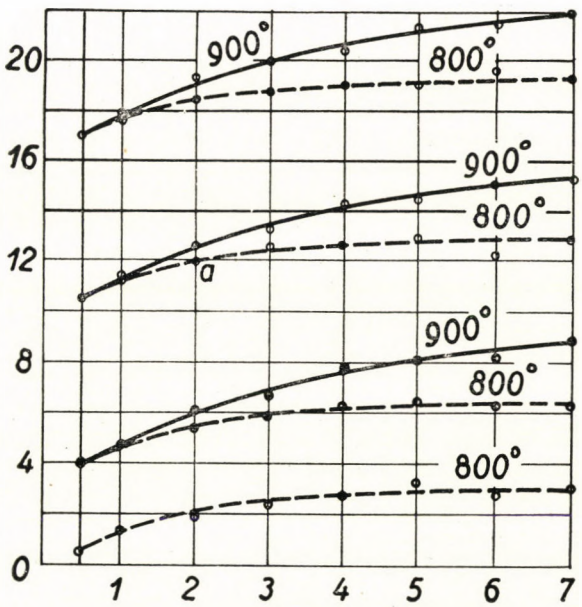


Рис. 8.

стости поясняется группой кривых, исходящих из одной точки, затем все более расходящихся, а в конце времени покрупнения, естественно, опять склоняющихся до горизонтального положения, т. е. становящихся параллельными. Нагрев всегда увеличивает зернистость аустенита внутри области аустенита, а именно, чем выше температура, тем больше растет скорость и увеличиваются размеры покрупнения.

Общее изменение скорости покрупнения в функции температуры и длительности нагрева, по отношению к стали марки *A*, показаны на рисунке 10. (Такую же диаграмму с подобными же результатами можно конечно начертить и для сталей других марок, при помощи уже приведенных данных). Весьма интересно отметить в какой степени это отображение похоже на диаграмму Таманна и Кроне (7), составленную ими в связи с рекристаллизацией свинца. Как мы видим, действие продолжительности нагрева имеет весьма большое значение, в начале скорость покрупнения является

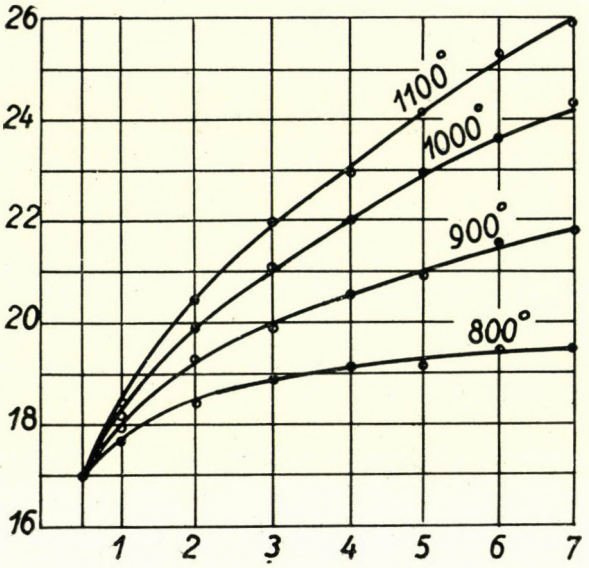

26
24
22
20
18
16
1
2
3
4
5
6
7
1100°
1000°
900°
800°

Рис. 9.

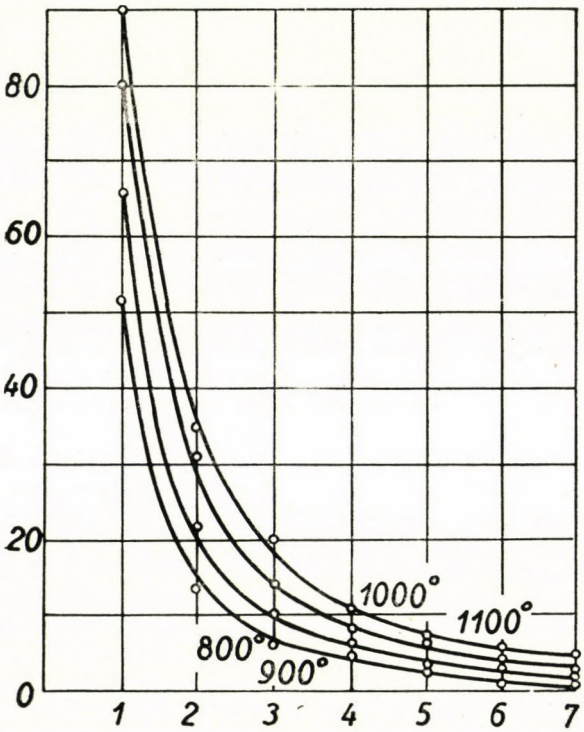

80
60
40
20
0
1
2
3
4
5
6
7
1000°
1100°
800°
900°

Рис. 10.

очень большой, затем она быстро падает. Это уменьшение происходит внезапно, через некоторое время после начала нагрева, и медленно доходит под конец времени покрупнения до нуля.

Действие температуры нагрева на скорость покрупнения гораздо меньше и при увеличении времени нагрева оно еще больше уменьшается, т. е. действие температуры нагрева, повышающее скорость покрупнения, гораздо больше в начале нагрева, чем под конец покрупнения. Это вполне

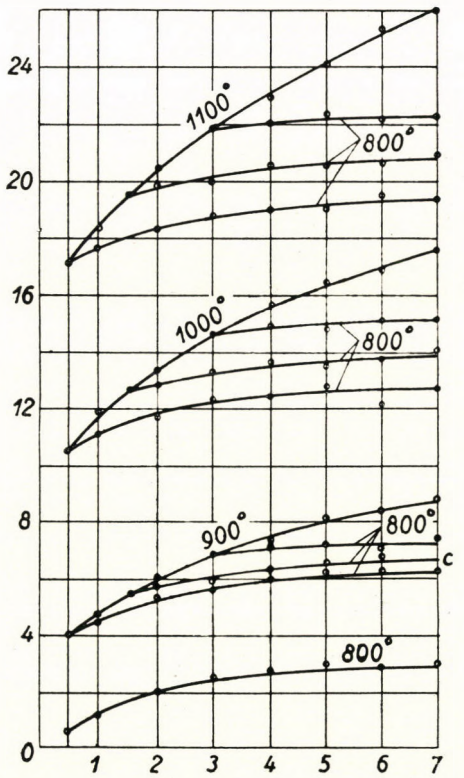


Рис. 11.

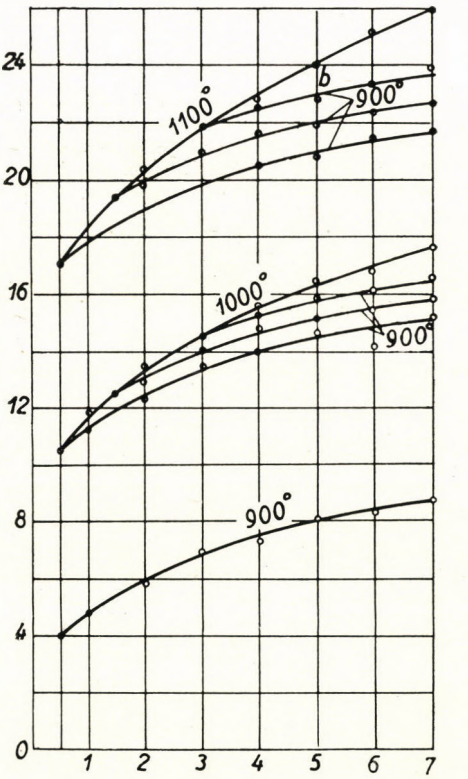


Рис. 12.

естественно, так как, собственно говоря, температура оказывает действие только в начале покрупнения, под конец же скорость покрупнения падает всегда до нуля.

Результаты третьей части наших исследований наглядно показаны на рисунках 11 и 12. В данном случае начальная зернистость аустенита получалась не только путем нагрева при различных температурах (900, 1000 и 1100 градусов), но и нагревом на различное время (0,5 1,5 и 3 часа), а затем образцы нагревались дальше при температуре в 800 или 900°. Наблюдавшийся уже на рисунке 8 параллелизм кривых покрупнения, относящийся к температурам нагрева, тут еще выразительнее, так как он указывает, что действие нагрева, при одинаковой температуре, не зависит от начальной зер-

нистости, но зависит от времени, в течение которого аустенит достиг этой начальной зернистости. Другими словами, при постоянной температуре не только максимальная зернистость, но и время покрупнения аустенита стали являются постоянными. И в этом отношении является совершенно второстепенным при какой температуре производилась промежуточная стадия нагрева. Например, начальная зернистость, полученная в течение трех часов при нагреве в 1000° крупнеет дальше при 800°, но только в соответствии с 800 градусной частью кривой, начинающейся после трехчасового нагрева. С другой стороны, из этого следует, что 800 градусный нагрев имеет последующее влияние на покрупнение только такой зернистости, которая приобретена аустенитом при высших температурах в более короткое время, чем время покрупнения при 800°, так как кривая покрупнения становится после этого горизонтальной, что указывает на дальнейшее некрупнение аустенита при этой температуре.

Наконец, необходимо еще отметить результат проведенного пробного нагрева с несклонной к покрупнению и освобожденной от кислорода сталью, резюмируемый в нижеследующей таблице:

Градус нагрева C°	Зернистость в μ^2 после	
	0,5	6
	часового нагрева	
900	720	770
1000	920	990
1100	35.000	44.000

Из этого поведения можно заключить, что несклонная к покрупнению сталь и при нагревании ниже критической температуры, является также довольно нечувствительной к продолжительности нагрева.

Подробно резюмируя вышеприведенные наблюдения, можно установить:

1. Зернистость аустенита крупнеет при нагреве при постоянной температуре.

2. Скорость покрупнения наибольшая в начале нагрева и затем постепенно снижается до нуля, т. е. тогда, когда зернистость достигла наибольшей величины. Необходимое для этого процесса время называется временем покрупнения.

3. Максимальная зернистость тем больше, чем выше температура нагрева.

4. Скрость покрупнения растет с повышением температуры нагрева.

5. Температура действует сильнее на повышение максимальной зернистости, чем на скорость покрупнения, вследствие этого при повышении температуры растет и время покрупнения.

6. Скорость покрупнения не зависит от начальной зернистости, а зависит исключительно от температуры и от продолжительности нагрева.

7. Несклонная к покрупнению сталь при критической температуре нечувствительна также и к продолжительности нагрева.

8. Цементация, т. е. абсорбция *C*, не влияет на образование зернистости.

Исследователи уже неоднократно пытались найти теоретическое объяснение возникающих в связи с рекристаллизацией явлений (7). Однако, большинство теорий стремится выяснить только обстоятельства, возникающие в начале рекристаллизации и не дают объяснений относительно покрупнения рекристаллизуемого зерна.

Теория Тамманна (4) распространяется и на такие области рекристаллизации, которые могут быть связаны и с поведением кристаллов аустенита. Применяя высказанные им предположения и, одновременно, развивая их, вышеописанные наблюдения могут быть объяснены следующим образом.

Наименьшая термодинамическая энергия металлов, в данном случае аустенита стали, существует в монокристаллическом состоянии. Это состояние может рассматриваться как устойчивое и аустенит стремится его достигнуть.

Склонность кристаллов к покрупнению может быть объяснена с точки зрения атомной структуры следующим образом. Если два кристалла соприкасаются между собой таким образом, что поверхности соприкосновения, с точки зрения покрупнения кристаллов, не являются равноценными, то возникает поле энергии, отклоняющееся от господствующих внутри кристаллов полей энергии, т. е. создается напряжение, стремящееся уравняться. Но это происходит только тогда, когда подвижность находящихся в решетке атомов, вследствие повышения температуры, достаточно велика. При этом атомы перегруппировываются с предельной плоскости решетки одного кристалла на соответствующее положение плоскости решетки другого кристалла. После многократного повторения этого процесса, он становится видимым в смещении предельных границ кристаллов. Из двух, расположенных рядом кристаллов, будет несомненно расти в ущерб другому тот, который находится в лучшем положении, с точки зрения образовавшегося между этими соприкасающимися плоскостями поля энергии. В этом отношении является совершенно второстепенным имеет ли кристалл, находящийся в лучшем положении, больший или меньший размер. Следовательно, два кристалла, соприкасающиеся друг с другом на одной случайно образовавшейся плоскости, не находятся в равновесии, но как только представляется возможность, они стремяться достичь этого равновесия вышеописанным образом.

С теоретической точки зрения весьма возможно, что аустенит в состоянии достигнуть устойчивого равновесия и при той минимальной температуре, которая еще обеспечивает подвижность атомной решетки, т. е. возможность перераспределения. В данном случае это являлось бы только вопросом времени, т. е. до тех пор, пока на граничащих плоскостях соприкасающихся друг с другом кристаллов, нарстающих все время вследствие перегруппировки атомов, не исчезнут последние напряжения граничащих плоскостей, т. е. пока не прекратится перегруппировка атомов и весь кусок не превратится в один единственный кристалл.

Однако, произведенные нами наблюдения противоречат этому. Повидимому должна существовать какая-то причина, препятствующая такой

перегруппировке и сказывющейся в том, что при постоянной температуре кристаллы вначале быстро растут, затем их покрупнение уменьшается и под конец совсем прекращается, но процесс этот повторяется каждый раз, при повышении температуры аустенита.

Согласно теориям Тамманна по вопросам рекристаллизации, это препятствие состоит в том, что из кристаллов аустенита выделяются неметаллические загрязнения, образующие на предельных поверхностях кристаллов связывающую пленку, препятствующую соприкосновению кристаллов между собой. Для того, чтобы эта пленка могла препятствовать покрупнению кристалла, она должна обладать известной толщиной. Можно допустить, что толщина пленки, ввиду того, что через нее возможна диффузия, при более высокой температуре увеличивается. Покрупнение кристаллов можно представить себе таким образом, что и пленка растворяет железо, значит диффундирование происходит и через пленку. Движущей силой является различная устойчивость граничащих поверхностей кристаллов. Атом растворенного в пленке железа находится на устойчивой поверхности кристалла в более выгодном для него положении, значит, стремится попасть из пленки в такое положение, а удалившееся железо возмещается из менее устойчивого кристалла. Эта диффузия тем больше, чем выше температура. С продлением пути диффузии, т. е. с утолщением слоя пленки, растет необходимое для процесса время, т. е. диффундирование, а в связи с ним и скорость покрупнения, приближается к нулю.

Если кристаллы растут, например, при постоянной температуре, то сумма их поверхностей уменьшается. Значит, слой предельной пленки утолщается и тогда, когда температура остается без изменения, т. е. растворимость пленки образующего вещества, или его растворенное количество, остается неизменным. Соответственно утолщению слоя пленки, увеличивается не только путь диффузии, но и покрупнение прекращается.

Неметаллические загрязнения растворяются в аустените легче при более высокой, чем при более низкой температуре. Следовательно, при низкой температуре в одной и той же стали находится больше нерастворимого, образующего пленку вещества, т. е. при более мелкой зернистости толщина пленки, которая может препятствовать покрупнению кристаллов, достигается скорее. Но и скорость диффузии также меньше и, поэтому, время покрупнения становится короче.

При более высокой температуре слоеобразующее вещество находится в растворимом состоянии в большем количестве, т. е. его активная часть меньше. Следовательно кристаллы должны крупнеть больше, пока пленка не достигнет необходимой толщины, препятствующей дальнейшему покрупнению. Поэтому время покрупнения будет продолжительнее при более высокой температуре, несмотря на то, что благодаря большой скорости диффузии скорость покрупнения также увеличивается. Очевидно и то, что скорость покрупнения совершенно независима от исходной зеринстости, так как скорость распределения атомов, вызывающих смещение границ растущего кристалла, зависит исключительно от их подвижности, т. е. от скорости диффузии и от толщины препятствующих неметаллических загрязнений, т. е. от температуры в течение продолжительности нагрева.

Рекристаллизованный и выросший при более высокой температуре кристалл может, согласно установлению Тамманна, крупнеть дальше только тогда, если температура превышает предыдущую. При уменьшении темпе-

ратуры, дальнейшее смещение границ кристалла, т. е. его дальнейшее покрупнение, исключается.

Однако, в течение наших исследований было установлено, как это явствует из приведенных выше данных, что зернистость аустенита крупнеет также и в случае уменьшения температуры нагрева, если продолжительность нагрева при высокой температуре еще не достигла соответствующего времени покрупнения при более низкой температуре.

Это наблюдение не находится в противоречии с нашими прежними теоретическими предположениями. В соответствии с вышеизложенным, именно увеличение температуры повышает скорость диффузии и способность кристаллов аустенита растворять загрязнения. В сравнении с этим, уменьшение температуры имеет противоположное действие.

Если покрупнение аустенита происходит сперва при более высокой температуре, например при 1000°, то образующее пленку вещество находится на граничащих поверхностях частично, еще не в достаточно толстом слое, чтобы препятствовать покрупнению, а частично, и именно тем больше, чем выше температура, находится в растворенном состоянии в кристаллах. Если мы теперь охлаждаем этот раствор до 800°, то большая часть растворенных загрязняющих веществ осаждается внутри кристаллов и не препятствует дальнейшему покрупнению. Следовательно, если при температуре в 1000° между кристаллами образовался слой только такой толщины, которая и при температуре в 800° не в состоянии препятствовать дальнейшему покрупнению, то кристаллы аустенита растут дальше при 800° с меньшей скоростью до тех пор, пока пленка не достигнет необходимой толщины. Однако, при температуре в 800° скорость диффузии железных атомов гораздо менее значительная, чем при температуре в 1000°, следовательно, практически преодолимый путь диффузии сокращается. Чем выше была температура предварительного нагрева, тем больше стали кристаллы, благодаря чему они имеют меньшую поверхность растворения, но тем больше и осадившееся неэффективное вещество внутри кристаллов. Следовательно, при дальнейшем нагреве, например на 800° достигается соответственно более крупная конечная зернистость. Скорость роста равняется всегда уже существующей толщине пленки, зависящаяся, по существу, от продолжительности нагрева.

Для пополнения вышеописанных наблюдений, необходимо еще в заключение упомянуть поведение аустенитов стали, несклонных к покрупнению. Как известно, освобожденный в достаточной степени от кислорода аустенит, успокоенный алюминием стали, является нечувствительным к температуре, т. е. он совсем не крупнеет. Если же он переходит в так называемую температуру покрупнения, то кристаллы аустенита начинают расти в такой степени, что размер их покрупнения в короткий срок не только достигает зернистости склонных к покрупнению сталей, но и превышает ее. Однако, необходимо заметить, что в течение исследований (5) одной стали, полученной из кислой мартеновской печи и основательно освобожденной от кислорода, нами наблюдалось одинаковое поведение, несмотря на то, что эта сталь не была успокоена алюминием. К этому я еще могу присовокупить, как это было уже раньше упомянуто, что результат предварительного нагрева этой стали позволяет сделать заключение, согласно которому несклонная к покрупнению сталь, при температуре ниже критической, также нечувствительна и к длительности нагрева.

Можно предположить, что между кристаллами аустенита, несклонной к покрупнению стали, находится такая неметаллическая пленка, которая при температуре, более низкой чем температура покрупнения, не растворяет железа, вследствие чего атомы железа не в состоянии через нее диффундировать. Однако, еще более вероятным является то, что аустенит, при температуре ниже температуры покрупнения, не может растворять находящуюся между кристаллами пленку. Следовательно, толщина пленки загрязнений, препятствующая диффузии, не уменьшается до достижения этой температуры. В противоположность этому, при температуре покрупнения, часть пленки растворяется, толщина ее активной части уменьшается и диффузия становится возможной со значительной скоростью, соответствующей высокой температуре. Покрупнение, таким образом, появляется внезапно и в весьма значительной степени.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Hajtó:* Bányászati és Kohászati lapok, 1947, p. 369.
2. *Hanemann—Schrader:* Atlas Metallographicus, Berlin, 1947, p. 28.
3. *Carpenter—Elam:* Journal Institute Metals, 1920, p. 83.
4. *Tammann:* Zeitschrift für Metallkunde, 1930, p. 224.
5. *Hajtó:* Acta Technica 1951. Вып. № 3.
6. *J. Inst. Metals*, 1926, p. 131.
7. Zeitschrift anorg. allgem. Chem., 1930, p. 289.

DIE WIRKUNG DER DAUER DES GLÜHENS AUF DIE AUSTENIT-KORNGRÖSSE VON STÄHLEN

Von N. HAJTÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Die bisherigen Kenntnisse über die Wirkung des Glühens auf die Austenit-Korngrösse werden in vorliegender Abhandlung durch einige neue, auf Grund von Versuchen gemachte Beobachtungen ergänzt. Es wird festgestellt, dass die Austenit-Korngrösse sich auch während des Glühens bei gleichbleibender Temperatur vergröbert; die Geschwindigkeit der Vergröberung ist bei Beginn des Glühens am grössten und sinkt allmählich auf Null, wo dann die Korngrösse den Maximalwert aufweist; die maximale Korngrösse ist desto grösser, je höher die Glühtemperatur ist; die Vergröberungsgeschwindigkeit wächst mit der Erhöhung der Glühtemperatur; mit der Erhöhung der Temperatur wächst die Zeitdauer der Vergröberung; die Geschwindigkeit der Vergröberung ist unabhängig von der anfänglichen Korngrösse, sie hängt nur von der Temperatur und von der Dauer des Glühens ab; nicht zur Vergröberung neigender Stahl ist unterhalb der kritischen Temperatur gegenüber der Dauer des Glühens nicht empfindlich.

Schliesslich versucht der Verfasser, auf Grund obiger Feststellungen, eine theoretische Erklärung für die Phänomene der Rekristallisation, bzw. der Vergröberung des rekristallisierten Gefüges zu geben.

ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКАЯ ПОЛИРОВКА УГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЕЙ

П. Секи и Т. Немет

Поступило 8. IV. 1951 г.

Известно, что гальванический слой точно повторяет неравномерности основного металла. Если изделие имеет грубые царапины, то они появляются в увеличенном виде на поверхности покрывающего металла. Самым важным требованием является возможно высокая степень гладкости гальванизируемой поверхности. Поверхность при подготовке проходит через разные стадии. Обдирочная шлифовка дает конечную форму изделия. Затем поверхность шлифуется более мелкозернистым шлифовальным порошком. Дальнейшей задачей является удаление царапин, произведенных при шлифовке, что и является целью полировки.

Механическая шлифовка — вредный и дорогостоящий процесс. Шлифовочный цех наполняется тонкой пылью и этим воздухом должны дышать сотни рабочих. Шлифовальщиков специалистов очень мало, что является узким местом и затрудняет непрерывность производства. Все вышеуказанные трудности можно устранить применением электролитической полировки.

Электролитическая полировка является обратным процессом выделения металла гальваническим путем. При гальванизации обрабатываемое изделие, вследствие залегания металла, увеличивается, а при электролитической полировке растворением анода изделие уменьшается. Следовательно, процесс весьма простой. Подвергаемый шлифованию предмет погружается в соответствующий электролит, включая его в качестве анода. Вследствие анодного растворения находящиеся на поверхности неравномерности исчезают и через некоторое время предмет вынимается из ванны с зеркальным блеском. В практическом применении встречаются большие трудности и это является причиной того, что этот интересный прием в практике вообще до сих пор не получил распространения.

С точки зрения электролитической полируемости металлы и сплавы могут быть разделены на две группы. В первую группу входят металлы и сплавы, состоящие из однородных кристаллов. Это цветные металлы и твердые растворы. Примером цветного металла может быть нелегированный алюминий, а примером твердого раствора — нержавеющая сталь аустенитовой текстуры. Такие материалы шлифуются легче, чем сплавы неоднородной текстуры. Разновидные элементы текстуры сплавов, состоящих из неоднородных кристаллов, имеют разные электрические потенциалы, что вызывает неравномерность растворения. Это объясняет почему чисто аустенитовые стали шлифуются легче, а феррит-перлитная сталь труднее.

При изучении богатой литературы относительно электролитической полировки, находим много указаний о полировке меди, алюминия или нержавеющей аустенитовой стали. Но электролитической полировкой углеродистой стали авторы занимаются совсем мало, или же совсем не занимаются. Ссылаются на большое значение процесса, но говорят о нем как о методе будущего. И. Сигер в 1944 г. сказал следующее: »Еще далеко то время, когда электролитическая ванна заменит полировочный диск«.[1]

Новейшие работы советских ученых дают точное и исчерпывающее описание электролитической полировки разных металлов и сплавов, в частности электролитической полировки нержавеющей аустенитовой стали, но только короткие указания относительно углеродистой стали. Советская литература[2] также обращает внимание на трудности, возникающие при полировке углеродистой стали, объясняющиеся тем, что вследствие гетерогенного устройства текстуры действие кислот неравномерно и материал легко корродируется. Но указываются и преимущества электролитической полировки перед гальванизацией и делается сопоставление с механической шлифовкой. На основании этого главной причиной пористости гальванических покрытий является неудовлетворительная подготовка поверхности. Кроме того, механическая полировка не обеспечивает достаточно прочной связи между основным металлом и гальваническим слоем, так как на поверхности, подготовленной таким образом, кристаллы металла деформируются ввиду того, что при таких условиях поверхность может окклудировать газы, что также обуславливает недостаточную связь, в особенности при подогреве или при температурных колебаниях.

Теория электролитической полировки

Механизм электролитической полировки полностью еще не выяснен. Наиболее вероятным является то объяснение, что явление вызывается частичным пассивизированием анода. Те точки анода, в которых имеются выступы, являются сравнительно более активными, а впадины имеют пассивные свойства. Результатом местного анодного пассивирования является то, что растворение в активных участках будет более интенсивным, чем в пассивных. Продукты анодного растворения вблизи анода имеют большую концентрацию, благодаря чему на поверхности анода образуется тонкий вязкий слой. Толщина этого слоя на поверхности анода неравномерна, в углублениях он сравнительно тоньше, чем на выступах. Электрическое сопротивление этого слоя больше, чем сопротивление электролита, и поэтому ток проходит легче в тех точках, где слой тоньше или вообще отсутствует (рис. 1). На основе теории, через те части анода, где пленка тонка или вообще отсутствует, т. е. на тонких выступах анода, проходит в тысячу раз больше тока, чем во впадинах, покрытых сравнительно толстым слоем. Растворение пропорционально количеству проходящего тока. Вследствие этого с поверхности исчезают выступы и она становится равномерно блестящей и гладкой.

[1] *J. Siger:* Elektrolitisches Polieren. Metallwaren-Industrie und Galvanotechnik. 1944 April No 4. S. 104.

[2] В. И. Лайнер: Электролитическая полировка и травление металлов. 1947 г.

Следовательно, задачей является создание пассивного состояния во впадинах. Для образования такого состояния необходимым условием является создание упомянутого слоя раствора с большой концентрацией. Этот слой представляет собой не строго ограниченную упругую твердую пленку, а электролитный слой, содержащий продукты анодного растворения, т. е. соли анодного металла в большой концентрации. Из этого слоя растворенные соли медленно диффундируют в электролит, но концентрация солей все-таки в слое не изменяется, потому что диффундированные соли замещаются продуктами постоянного анодного растворения. Ясно, что необходимо обеспечить условия для получения равномерной скорости

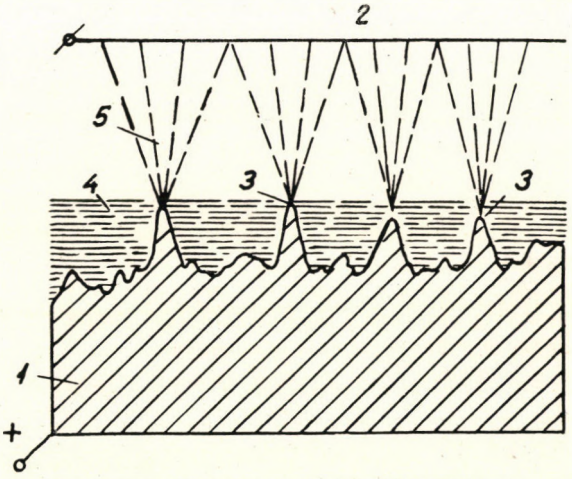


Рис. 1. Схема электролитической полировки (по Жилину): 1 — анод, 2 — катод, 3 — тонкие выступы поверхности анода, 4 — электролитический слой большой концентрации на поверхности анода, 5 — направление тока.

диффузии анодных продуктов и анодного растворения. Все те факторы, которые ускоряют проток анодных продуктов в электролит, препятствуют электролитической полировке.

Успешность электролитической полировки, следовательно, зависит от правильного образования слоя. Образование удовлетворительного слоя может произойти только в плотном, концентрированном, вязком растворе. В жидком растворе, особенно при применении низкого напряжения, образование слоя не является благоприятным и вызывает рельефные выступы (рис. 2).

Для превращения металлических атомов растворяющегося анода в ионы требуется энергия. По Эвансу[3] это количество энергии слагается из двух частей. Одна часть энергии употребляется для изолирования атома, перешедшего в состояние иона, от смежных атомов. Можно легко представить, что на вершинах, где кристаллическая решетка закрепляет атом только с одной стороны, требуется лишь минимальное количество этой энергии. Второй частью энергии сорванный и превращенный в ион атом проталкивается через покрывающую поверхность пленку. Ввиду того, что пленка

[3] *U. R. Evans:* Trans. Elektroch. Soc. LXIX. 1936. p. 652.

наиболее тонка на выпуклых участках, в таких местах атом проталкивается с наименьшим количеством энергии. По Эвансу, при исчезновении превратившегося в ион атома из кристаллической решетки, создаются более благоприятные условия для срыва и смежного атома, так как ушедший атом оставляет после себя пустое место и, кроме того, нарушена пленка и покрывающая поверхность

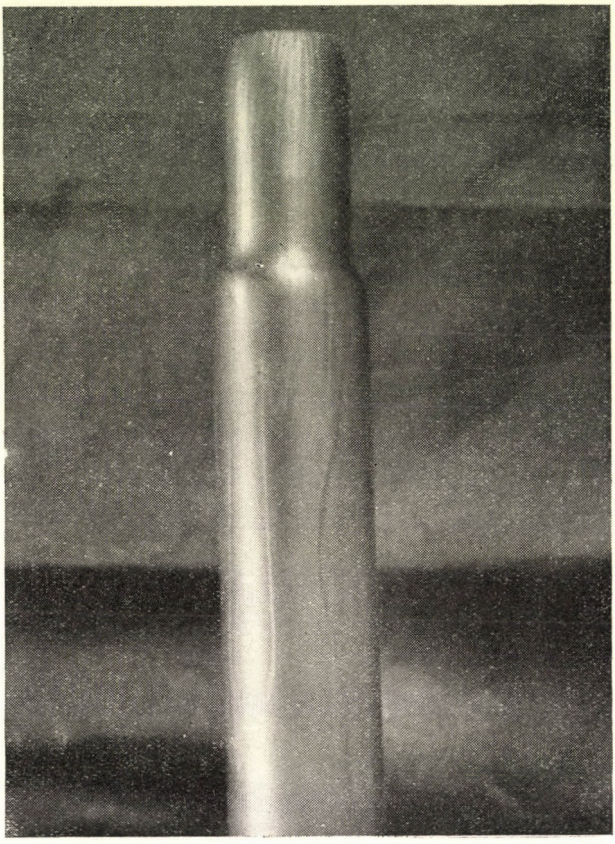


Рис. 2. Рельефоподобная поверхность на седельной трубке велосипеда, полученная из раствора небольшой концентрации применением низкого напряжения.

Но предположение Эванса требует поправки. Если пленка, покрывающая поверхность, не считается массивной упругой пленкой, а только тонким более концентрированным электролитным слоем, то для проталкивания новообразовавшегося иона через этот слой не требуется особого количества энергии. Ион попадает на внутреннюю поверхность слоя, увеличивает его концентрацию и пополняет количество ионов, постоянно диффундирующих с наружной поверхности слоя в электролит. Раньше было сказано, что скорость диффузии ионов не может быть больше, чем мера анодного растворения.

Электролит

Очень важным вопросом является выбор электролита. Выбор должен производиться на основе следующих требований:

1. Электролит должен обеспечить образование слоя с большим электрическим сопротивлением на поверхности анода и чтобы этот слой хорошо прилипал во впадинах.

2. Чтобы состав, по возможности, не изменялся во время использования.

3. Чтобы в перерывах тока состав не оказывал действия на соприкасающиеся с ним металлы.

4. Электролит должен обеспечить большую разницу в плотности тока, дающую на выступах максимум и во впадинах минимум.

5. Чтобы плотность тока, требуемая для полировки, и напряжение не были слишком высокими.

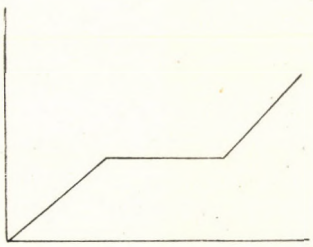
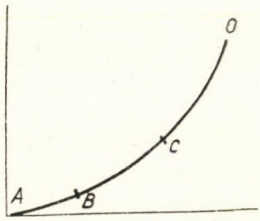


Рис. 3. Связь между напряжением включения и плотностью тока по старой теории



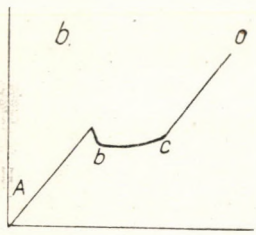


Рис. 4. Типичные случаи кривой напряжения, и плотности тока по Мерчанту

Универсального электролита, одинаково хорошо применяемого для полировки всех металлов и сплавов, нет. Электролиты могут быть вообще разделены на две группы:

1. С большим сопротивлением, которые можно применять в холодном состоянии между 50 и 220 V.

2. С малым сопротивлением, полирующие уже при напряжении 4—25 V.

В первую группу входят разные растворы перхлорной кислоты. Их применение дает хорошие результаты, но, вследствие опасности взрыва перхлорной кислоты, их можно использовать только в лаборатории и они не могут быть учтены с точки зрения промышленного применения.

При выборе электролита надо учитывать и материал анода. Нельзя применять электролит, в котором анодные продукты не растворяются, так как нерастворенные частицы затрудняют прохождение тока. Но и растворимость должна быть, по возможности, ограниченной, чтобы накопившиеся анодные продукты могли бы устраняться, например, с изменением температуры. Большое накопление анодных продуктов препятствует использованию электролита, в этом случае электролит считается устаревшим. В лабораторном приборе его нужно заменять, но в заводской установке, для экономии, его лучше регенерировать.

В практике крупного производства лучше всего применять для электролитической полировки углеродистых сталей смесь серной и фосфорной кислот. Содержание серной кислоты повышает блеск, но при этом повышается также и опасность коррозии. Фосфорная кислота защищает слой от коррозии и выглаживает поверхность. Применением отдельных кислот цели достичь невозможно. Хорошо влияет введение в ванну небольшого количества хромовой кислоты. В начале использования новой ванны хромовая кислота окисляет находящиеся в растворе примеси и обеспечивает равномерную работу. Вследствие восстанавливающего действия желтая окраска раствора медленно становится зеленой. Этот электролит применяется наиболее успешно и полностью устраняет большие царапины, полученные при обдирочной шлифовке.

Электролит проверяется каждый день и надо следить за тем, чтобы его состав не изменялся. При работе содержание в нем кислоты понижается, что вызывает вышеуказанную ошибку. Ванна, работающая в горячем состоянии теряет вследствие испарения и воду. Если содержание кислоты в электролите больше требуемого, то получается коррозия. Использованная кислота и испарившаяся вода пополняются, чтобы состав электролита был практически постоянным.

Кислотная смесь, удовлетворительно полирующая углеродистые стали, характеризуется тем, что ее нельзя изготовить в достаточно плотном состоянии, чтобы она могла с успехом применяться при полировке других металлов. Для полировки углеродистых сталей требуется большая плотность тока, поэтому, для обеспечения большой проводимости раствора, к нему примешивают относительно больше воды.

Регенерирование электролита

В действующем долгое время электролите накапливается столько солей анодного металла, что раствор не работает удовлетворительно. Такую ванну надо регенерировать, чтобы удалить из нее вредно влияющие излишние железные соли.

Ослаблнная ванна кипятится в течение 3—4 часов. Из довольно концентрированной ванны, во время медленного охлаждения кристаллизуется излишний сульфат железа, осаживающийся на дно ванны. После выдержки, чистая часть раствора отделяется, густая шламовая часть удаляется, ванну чистят и в нее вливают снова чистый раствор. После тщательной проверки отсутствующие составные части раствора пополняются. По нашим опытам, действие регенерированной ванны лучше, чем вновь изготовленной.

Из удаленного кристаллического шлама производят сульфат железа.

Источник и условия тока

Для электролитической полировки требуется постоянный ток. Источником тока может быть гальвано-динамо или выпрямительная установка.

Плотность тока, требуемая для полировки, сравнительно большая, 80—100 А/дм², самые лучшие результаты получаются при напряжении 12 V.

Старые литературные данные по электролитической полировке подтверждают, что в электролитической камере плотность тока не увеличивается пропорционально напряжению включения полюсов. На диаграмме, показывающей связи, имеется горизонтальная линия, на которой при увеличении напряжения плотность тока остается неизменной (рис. 3). Только при условиях тока, соответствующих горизонтальной линии, электролитическая полировка считается безупречной. Мерчант[4] не обобщает этого соображения. По его мнению металлы делятся на две группы. Кривая напряжения и плотности тока могут иметь две формы (рис. 4), в зависимости от качества служащего анодом металла. К типу *а*) принадлежат: *Al*, *Sn*, *Fe*, *Pb*, *Ni*, к типу в) принадлежат: *Cu*, *Co*, *Mg*, *Zn*.

Следовательно, мягкая сталь принадлежит к типу а), в котором горизонтальной линии на кривой не видно. Это доказывается Шафмейстером и Фольком[5] и это также подтвердили наши исследования. На снятой нами

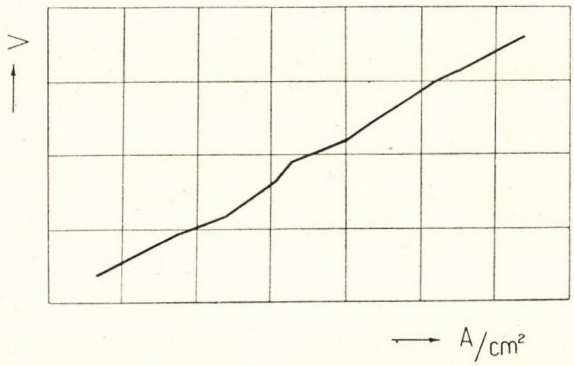


Рис. 5. Кривая напряжения и плотности тока в сернокисло-фосфорнокислом электролите.

кривой плотность тока меняется более или менее пропорционально к напряжению. (рис. 5). Однако, следует принять положение, что полировать можно лишь на средней части кривой, независимо от ее горизонтального или восходящего характера. При слишком маленьком напряжении не может сложиться сплошного электролитного слоя большого сопротивления, необходимого для электролитической полировки. Если такой электролитический слой совсем не образуется, то поверхность изделия не станет гладкой и остается грубой, а если такой слой образуется частично и не является сплошным, то поверхность изделия покрывается рельефами, напоминающими географическую карту (рис. 2). Указанный порок имеет место особенно в том случае, если не только низко напряжение, но и электролит более жидкий чем это требуется. В такой же мере является вредным и слишком высокое напряжение, так как оно ведет к бурному выделению газов, вследствие чего портится образующийся на поверхности анода слой.

[4] *H. J. Merchant*: The application of elektrolytic polishing to ferrous metallography. I. Iron Steel Inst. 1947. p 179.

[5] *P. Schafmeister* und *K. E. Volk*: Das elektrolitische Polieren von Metallen. Archiv für das Eisenhüttenwesen. 1941 Nov. S. 243.

Электролитическая полировка часто сопровождается периодическими явлениями. Это можно заметить, с одной стороны, отклонением включенных в цепь вольтометра и амперометра, с другой стороны, в таких случаях выделение газов начинается и прекращается на аноде порывисто, пульсируя. При таких условиях анод периодически входит в пассивное и активное состояние. Возникновение подобного состояния в большой мере зависит от применяемой плотности тока и от температуры электролита. На основании произведенных Геджесом[6] исследований известно, что в серной кислоте плотностью в 40%, при плотности тока меньше чем 160 мА/см², анод бывает всегда активным, но применяя плотность тока более 250 мА/см² изготовленный из железа анод бывает всегда пассивным. Между двумя плотностями тока в периоде в 50 секунд можно наблюдать колебание разницы потенциала. Зависимость периодичности от температуры электролита по нашим исследованиям может быть проверена на рис. 6. Кроме плотности тока и температуры, возникновению этого явления способствует и концентрация ванны.

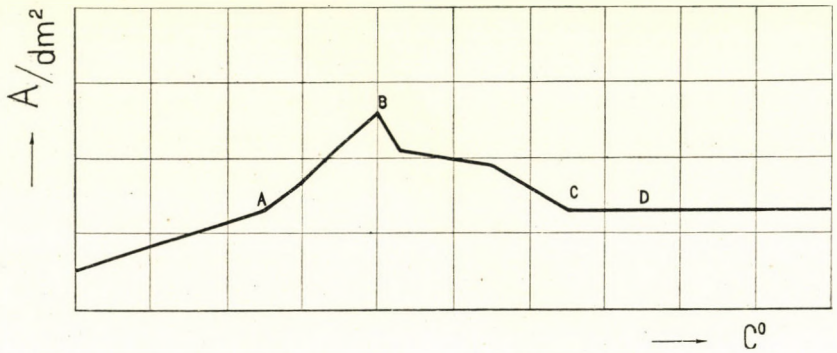


Рис. 6. Взаимоотношение плотности тока и температуры электролита. На участке *A—B* — сильная периодичность, на участке *B—C* — ослабляющая периодичность, на участке *C—D* полировка происходит успешно.

Во время пассивных периодов поверхность анода блестящая, а во время активных мутная, покрытая темно серой пленкой. В активном состоянии не бывает выделения газа, а в пассивном состоянии на аноде выделяется O_2.

Температура электролита

Оптимальная температура работы сернокислотного-фосфорнокислотного электролита определяется в 40—50° С. С увеличением температуры увеличивается электрическая проводимость ванны, равно как и химическая активность (рис. 7). В холодном электролите полировка совершенно не наблюдается. Следовательно, качество полировки в решающей степени зависит от температуры электролита. Ввиду этого полировочная кадка должна быть сконструирована таким образом, чтобы можно было контролировать и точно регулировать температуру.

В первой стадии процесса работы требуется предварительное нагревание. После достижения температуры 40° С действие нагревание прекращается и включается охлаждение, так как в процессе работы электролит

[6] *E. S. Hedges*: J. C. S. 1533. 1926.

сильно нагревается. В дальнейшем процессе работы должно сложиться состояние равновесия. Образование и отвлечение теплоты должны компенсироваться. Следовательно температура ванны должна быть установлена в 45 $\pm$ 5° С и тщательно поддерживаться на том же уровне.

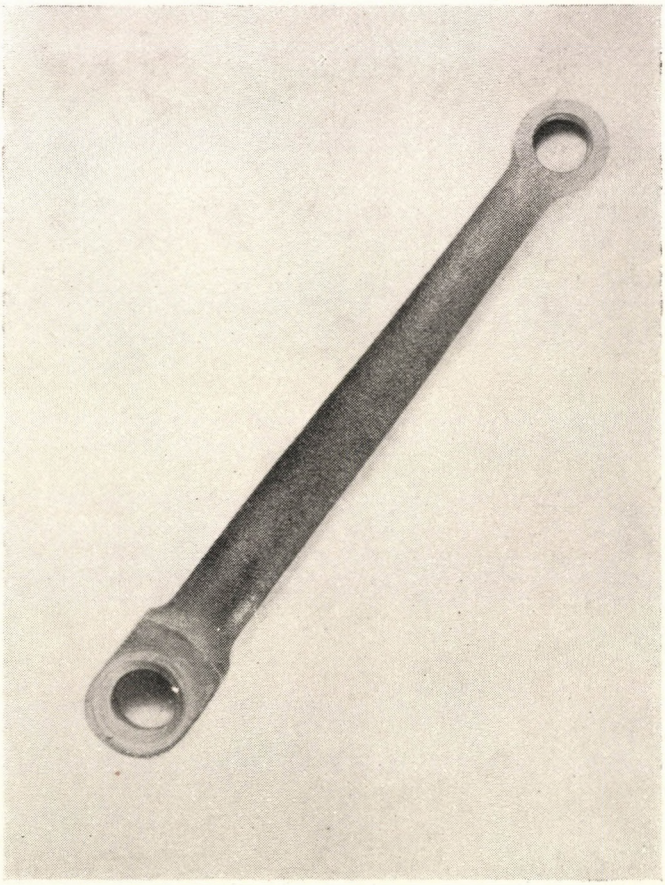


Рис. 7. Поверхностная коррозия вследствие перенагревания электролита

Выделение газов

Электролитическая полировка сопровождается сильным выделением газов. На катоде выделяется H_2, на аноде O_2. Подлежащий полировке предмет должен быть погружен в электролит до такой глубины, чтобы оказаться под поверхностной пеной ванны. На сильно пенистой поверхности может произойти сильное местное выедание.

Выделение пузырьков иногда вызывает интересное явление, являющееся помехой. В случае, если электролит при пользовании им становится сильно вискозным, эти пузырьки O_2 осаждаются на торчащей части анода и действуют экраном. В таком случае предмет будет иметь не гладкую,

а полосатую поверхность. Эти явления наблюдаются всегда на нижней части предмета, где легко пристают пузырьки (рис. 8 и 9). То же самое явление можно заметить на поверхности инструмента, служащего для подвески предмета и находящегося против дна кадки (рис. 10). Свободное удаление пузырьков может быть обеспечено установлением концентрации жидкости правильным опущением в нее предмета и регулированием условий

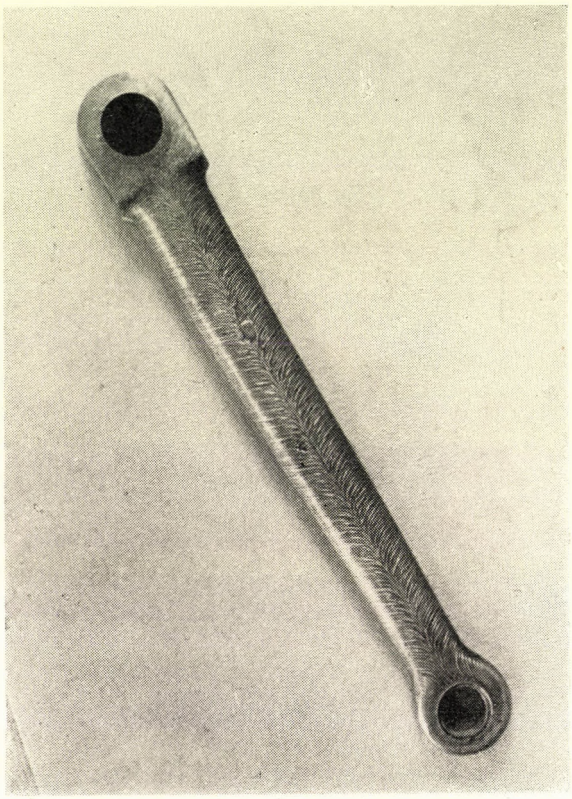


Рис. 8. Полосчатая поверхность (порок) на стержне звездочки велосипеда вследствие прилипания пузырей.

тока. С увеличением плотности тока величина пузырьков уменьшается и, таким образом, они легко удаляются с поверхности. Очень живое выделение газа может испортить приставший к поверхности анода слой, созданный электролитической полировкой.

Установка

Заводская полировочная установка не очень дорога. Требуется двухстенная кадка со свинцевой или стеклянной набивкой и нагревательные и охладительные устройства. Следует заботиться о высасывании выделяющихся вредных для здоровья паров кислот.

Погруженные в электролит катоды могут быть изготовлены из любого металла, но они должны соответствовать одному условию: противостоять электролиту. Поэтому, при содержащем серную кислоту электролите, целесообрасно применять свинец. При использовании на катоде появляются осаждения, которые должны очищаться проволочной щеткой. Мы можем облегчить прохождение тока через электролит, применяя сранительно большую поверхность катодов. Правильно, чтобы поверхность катода была бы в несколько раз больше поверхности анода, но соотношение между ними должно быть по крайней мере 5 : 3. Форма катода не должна в точности соответствовать форме анода. Катоды, имеющие специальную форму, целесообразно применять лишь при сильно профилированных предметах.

Рис. 9. Полосчатая поверхность (порок) на алюминиевой чайной сетки вследствие прилипания пузырей. Порок появляется таким же образом, как на рис. 7. (Образец Завода алюминиевых изделий.)

Подвешивание предметов

Особое внимание следует уделять подвешиванию предметов. Очень важно, чтобы материал подвешивательных инструментов хорошо проводил ток и чтобы его диаметр соответствовал беспрепятственному прохождению тока. В противном случае, инструмент сильно нагревается, часть энергии тока теряется, а полировка будет недостаточной. При полировке предметов большого размера желательно употреблять несколько подвешивательных инструментов, так как они могут лучше обеспечить равномерное распределение тока. Кроме того, требуется, чтобы инструментами можно было хорошо управлять и чтобы их можно было хорошо закрепить в кадке. Часть тех инструментов, которая опускается в электролит, желательно экранировать при помощи кислотоустойчивого лака или обвернуть лентой из пластмассы.

Обработка предметов до и после полировки

Электролитическая полировка производится хорошо и быстро, если неровности поверхности предмета не очень велики, если впадины на них не превышают 30—50 микронов. Глубокие царапины замедляют выглаживание поверхности.

Желательно, чтобы поверхность не была грязной, хотя это и не оказывает такого вредногоя влияния, как при гальванизации. Самым правильным процессом считается электролитическая обработка предмета, производя-

Рис. 10. Металлическое приспособление для погружения деталей в ванну, после более длительного употребления. Поверхность снизу становится полосчатой.

щаяся до его полировки, в щелочной обезжиривающей ванне. Места сварки должны охраняться лаком или другими изоляторами. После выполаскивания водой можно производить полировку. После полировки предмет помещается в кадку для полоскания с проточной водой.

Имеют место случаи, когда после полировки предметы остаются покрытыми серой сетью, которая может быть легко удалена простой проволочной щеткой. Однако, если мы имеем ввиду продолжительную гальванизацию предмета, то лучше не удалять их из инструмента, а обрабатывать снова

электролитическим путем в щелочной обезжиривающей жидкости. Серая сеть может быть удалена и таким путем и мокрые предметы, вынутые из ванны, могут быть никелированы общеизвестными процессами или снабжены другими гальвано-покрытиями.

Из вышесказанного ясно, что электролитическая полировка происходит быстро (в течение 10—15 минут) и что процесс этот является дешевым. Указанный способ поверхностной обработки экономит рабочую силу.

Обобщение

Статья рассматривает способ электролитической полировки в условиях крупного производства в период до гальванизации запасных частей, изготовленных из углеродистой стали. После изложения процесса, авторы сообщают результаты опытов, произведенных в полузаводских условиях, указывают самый состав электролита и его регенерирование, действие температуры электролита и необходимые условия тока. Авторы уделяют внимание важности вопроса, чтобы температура электролита не колебалась больше чем на $\pm 5°$ C. Далее авторы указывают на имеющие в практике место ошибки, а также и на причины возникновения пороков. Экономические и технологические стороны излагаемого процесса дают основание для его применения на практике.

ELEKTROLYTISCHES POLIEREN VON KOHLENSTOFFSTÄHLEN

Von P. SZÉKI und T. NÉMETH

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Abhandlung berichtet über die Ergebnisse, die mit dem elektrolytischen Polieren von Kohlenstoffstählen bei Betriebsversuchen erzielt wurden. Nach einer theoretischen Beleuchtung dieses Verfahrens befassen sich die Verfasser mit den notwendigen Arbeitsbedingungen und weisen auf die eventuellen Fehler, sowie auf deren Ursachen hin.Das elektrolytische Polieren ist besonders in der Galvanisationstechnik von grosser Bedeutung, da es die ungesunde und kostspielige Arbeit des mechanischen Polierens zu ersetzen vermag.

[1] С. П. Жилин: Электролитическая полировка металлов, 1949.

ÜBER DIE GENAUIGKEIT DER LICHTELEKTRISCHEN EXTINKTIONSBESTIMMUNG MITTELS DER AUSSCHLAGMETHODEN

J. MIKA

Eingegangen am 13. April 1951.

Die photometrischen Konzentrationsbestimmungen gewannen bekanntlich in der letzteren Zeit bei den praktischen Aufgaben der analytischen Chemie eine stets zunehmende Bedeutung, und so stieg das Interesse für den eine rasche und bequeme Arbeit gewährenden lichtelektrischen Photometer. Man hat demgemäss eine Anzahl von verschieden konstruierten Geräten in den Handel gebracht, deren bedeutender Teil vom Prinzip der »Ausschlagmethoden« Gebrauch macht, wobei also die jeweilige Zeigerablesung des Galvanometers die Grösse der gemessenen Extinktion angibt. Die Meinungen über die Leistungen dieser Geräte sind recht verschieden. Es erscheint daher zweckdienlich, eingehend die Fehlerquellen zu erörtern, durch welche die Genauigkeit der Extinktionsbestimmung bei der Ausschlagmethode bedingt werden.

Man unterscheidet bekanntlich bei den lichtelektrischen Photometern Ein- und Zweizellengeräte. Bei der Einzellen-Ausschlagmethode ist die Versuchsanordnung die denkbar einfachste: die Strahlen einer Lichtquelle fallen durch eine Küvette auf ein Photoelement und der entstandene Photostrom wird mit einem Galvanometer gemessen. Um die Extinktion einer Lösung mit Hilfe einer solchen Apparatur zu bestimmen, füllt man zuerst die Küvette mit dem reinen Lösungsmittel, darnach mit der Probe und beobachtet in beiden Fällen den Zeigerausschlag. Der Logarithmus des Verhältnisses der Galvanometerablesungen entspricht dem Wert der Extinktion, wenn die Intensität des Photostromes sich mit dem Wert des Lichtstromes linear verändert. Man pflegt dabei die Empfindlichkeit des Stromanzeigers, bzw. die Beleuchtung des Photoelementes derart zu regeln, dass der Galvanometerausschlag 100 Teilstriche beträgt, wenn eine mit dem reinen Lösungsmittel gefüllte Küvette durchstrahlt wird. Das durch die Probe geschwächte Licht verursacht dann einen Zeigerausschlag, welcher der prozentualen *Durchlässigkeit* der untersuchten Lösung entspricht, und man kann dann auf einer entsprechenden logarithmischen Teilung des Galvanometers die Extinktion unmittelbar ablesen.

Beim Zweizellengerät beleuchtet die Lichtquelle zwei gegeneinandergeschaltete Photoelemente und das Galvanometer wird so nur durch den Stromunterschied betätigt. Sind die beiden Lichtstrahlen richtig ausgeglichen, so entsteht kein Zeigerausschlag, wenn sich in den beiden Lichtwegen mit Lösungsmittel gefüllte gleiche Küvetten befinden. Verdunkelt man aber das eine Photoelement und stellt dabei die Empfindlichkeit des Galvanometers mit Hilfe eines Nebenwiderstandes so ein, dass der Zeigerausschlag genau 100 Teilstriche beträgt und ersetzt man hernach in einer Küvette das Lösungsmittel mit der Probe, so entsteht bei der neuerlichen Beleuchtung der beiden Photoelemente ein Zeigerausschlag, welcher der prozentualen *Absorption* der Lösung entspricht, sofern der Zusammenhang zwischen Lichstrom und Photostrom geradlinig verläuft. Dies ist das bekannte Messprinzip der Zweizellen-Ausschlagmethode.

Es geht aus den obigen Darlegungen hervor, dass sowohl bei der Ein-, wie bei der Zweizellen-Ausschlagmethode die Bestimmung der Extinktion aus

zwei zeitlich getrennten Handlungen besteht: man muss zuerst die richtige Empfindlichkeit des Instrumentes einstellen, und nur darnach lässt sich die eigentliche Messung durchführen. Es ist klar, dass auf diese Weise ein Fehler entsteht, wenn die Intensität der Lichtquelle sich während dieser Manipulation verändert. Um die Grösse des so entstehenden Fehlers zu berechnen, sei angenommen, dass der Lichtstrom des Lichtstrahles, der nur von der mit dem reinen Lösungsmittel gefüllten Küvette geschwächt wird, I_0 ist und die Empfindlichkeit des Photoelementes c, bzw. die des Galvanometers k beträgt. Ist die letztere richtig eingestellt, so hat bei der Einzellenmethode die volle Beleuchtung des Photoelementes, bzw. beim Zweizellenverfahren die Verdunkelung des einen Elementes einen Galvanometerausschlag von

$$k\ c\ I_0 = 100 \tag{1}$$

zur Folge. Ersetzt man in der Küvette das Lösungsmittel mit einer Lösung, deren Extinktion E ist, dann beträgt die Grösse des geschwächten Lichtstromes $I = \frac{I_0}{10^E}$ und die Galvanometer-Ablesung ist folglich beim Einzellenverfahren

$$D = kc\,\frac{I_0}{10^E}$$

bei der Zweizellenmethode:

$$A = kcI_0 - kc\,\frac{I_0}{10^E}$$

bzw. bei Berücksichtigung der Gleichung (1)

$$D = \frac{100}{10^E} \tag{2a}$$

$$A = 100\,\frac{10^E - 1}{10^E} \tag{2b}$$

Hat sich aber die Intensität der Lichtquelle während der Messung mit einem Betrag von $a\%$ verändert, so wird der Zeigerausschlag

$$D' = kc\left(I_0 + \frac{a\,I_0}{100}\right) - \frac{1}{10^E}, \text{ bzw.} \qquad A' = kc\left(I_0 + \frac{a\,I_0}{100}\right) \cdot \frac{10^E - 1}{10^E}$$

also mit Berücksichtigung der Gleichung (1)

$$D' = \frac{100 + a}{10^E} \quad \text{und} \quad A' = (100 + a)\,\frac{10^E - i}{10^E}$$

betragen.

Der Unterschied ist folglich:

$$D' - D = \frac{a}{10^E} \quad \text{bezw.} \quad A' - A = a\frac{10^E - 1}{10^E}$$

Lässt man die Intensitätsänderung der Lichtquelle unberücksichtigt, so entspricht den Galvanometerablesungen von D', bzw. A' anscheinend eine Extinktion van $(E + \triangle)$. Man kann daher auf Grund der Gleichungen 2*a* bzw. 2*b* schreiben, dass

$$D' - D = \frac{100}{10^{E+\Delta}} - \frac{100}{10^E} \text{und } A' - A = 100\,\frac{10^{E+\Delta} - 1}{10^{E+\Delta}} - 100\,\frac{10^E - 1}{10^E}$$

sind und folglich

$$\frac{a}{10^E} = \frac{100}{10^E}\left(\frac{1}{10^{\Delta}} - 1\right) \quad \text{b. w.} \quad \frac{10^E - 1}{10^E} = \frac{100}{10^E}\left(1 - \frac{1}{10^E}\right)$$

sind. Es lässt sich hieraus berechnen, dass

$$\Delta_1 = \log\frac{100}{a + 100} \quad \text{bzw.} \quad \Delta_2 = \log\frac{100}{100 + a\,(1 - 10^E)}$$

sind und dass somit die Änderung der Lichtintensität von $a\%$ bei den Ein- bzw. Zweizellen-Ausschlagmethoden die prozentualen Fehler von

$$F_1 = \frac{100}{E}\log\frac{100}{100 + a}, \text{ bzw. } F_2 = \frac{100}{E}\log\frac{100}{100 - a\,(10^E - 1)}$$

verursacht.

Die in Abb. 1 *a* und 1 *b* mit voller Linie gekennzeichneten Kurvenscharen zeigen die Änderungen der mit obigen Gleichungen berechneten Fehlerwerte in Abhängigkeit der gemessenen Extinktion bei einer Intensitätsänderung der Lichtquelle von 0,2, 1,0 und 5% bzw. 0,1, 0,2 und 1,0%. (Die mit einer Intensitätsänderung von 5% berechnete Kurve fällt ausserhalb des Bereiches des Diagrammes in Abb. 1 *b*.) Vergleicht man die entsprechenden Kurven der beiden Diagramme, so gelangt man zur überraschenden Feststellung, dass trotz der anscheinend ausgleichenden Wirkung der zwei gegeneinandergeschalteten Photoelemente *die Zweizellenausschlagmethode gegenüber den Schwankungen der Lichtintensität empfindlicher ist als das Einzellenverfahren. Es ist folglich verfehlt, Instrumente mit zwei Photoelementen zu gebrauchen, die zur lichtelektrischen Bestimmung der Extinktion die Ausschlagmethode anwenden.*

Bei den Ausschlagmethoden entsteht ein weiterer Fehler infolge der Ungenauigkeit, mit welcher das Galvanometer die jeweilige Stromstärke anzeigt. Die in Abbildung 1 *a* mit unterbrochenen Linien gekennzeichneten Kurven zeigen den Einfluss dieses »Ablesefehlers« auf die Genauigkeit der Extinktionsbestimmung bei der Einzellen-Ausschlagmethode.[1]

[1] Die Kurven sind mit Hilfe der durch *Th. W. Schmidt* (Z. f. Instrumentenkunde *55* [1935]. S. 357.) abgeleiteten Gleichung berechnet.

Um die Grösse des Ablesefehlers bei dem Zweizellen-Ausschlagverfahren richtig zu bestimmen muss man ebenfalls berücksichtigen, dass die Messung der Extinktion eigentlich durch zwei von einander unabhängigen Galvanometerablesungen erfolgt : man stellt zuerst die Empfindlichkeit des Instrumentes so ein, dass der Zeigerausschlag 100 Teilstriche beträgt und darnach beobachtet man die durch die Extinktion der Probe bedingte Zeigerstellung. Jede dieser Messungen ist je nach der Güte des angewandten Galvanometers mit einem mittleren Fehler m belastet und man erhält so den durch den Galvanometerablesefehler bedingten mittleren Fehler der Extinktionsbestimmung nur mit Hilfe des Gaussschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes. Es ist also

$$f = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial A_{100}}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial A}\right)^2 m^2}$$

wenn man mit A_{100} die beim Einstellen der Empfindlichkeit beobachtete Galvanometerablesung bezeichnet ; berücksichtigt man noch, dass $A_{100} = 100$ ist, so kann man auf Grund der Gleichung 2 *b* schreiben, dass

$$A = A_{100} \frac{10^E - 1}{10^E}$$

und folglich

$$E = \log A_{100} - \log (A_{100} - A)$$

sind. Man kann hieraus berechnen, dass

$$\frac{\partial E}{\partial A_{100}} = - \frac{MA}{A_{100}(A_{100} - A)}$$

und

$$\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{M}{A_{100} - A} ,$$

also

$$f = \frac{Mm}{A_{100} - A} \cdot \sqrt{\left(\frac{A}{A_{100}}\right)^2 + 1}$$

sind, bzw. die Gleichung 2 *b* nochmals berücksichtigend, ist

$$f = \frac{Mm}{100} \sqrt{2 \cdot 10^E (10^E - 1) + 1} ,$$

wobei $M = 0{,}43..$ der Modul ist. Es ergibt sich hieraus, dass der mittlere prozentuale Ablesefehler der Extinktionsbestimmung bei den Zweizellen-Ausschlagmethoden

$$f = \frac{0{,}43\ m}{E} \sqrt{2 \cdot 10^E (10^E - 1) + 1}$$

ist. Die in Abb. 1 *b*. durch unterbrochene Linien gekennzeichneten Kurven zeigen den Wert des mit obiger Gleichung berechneten Fehlers in Abhängigkeit

der zu bestimmenden Extinktion in jenen Fällen, wo $m = 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}5$ bzw. 1% ist, wenn man also zum Messen des Photostromes ein ausgezeichnetes, bzw. ein normales Präzisionsinstrument, ein gutes Messgerät, bzw. ein technisches Drehspulgalvanometer mit etwas geringer Genauigkeit verwendet. Wie es ersichtlich ist, beeinflusst die Güte des angewandten Messinstrumentes die Genauigkeit der Ein- und Zweizellen-Ausschlagmethoden praktisch in gleicher Weise.

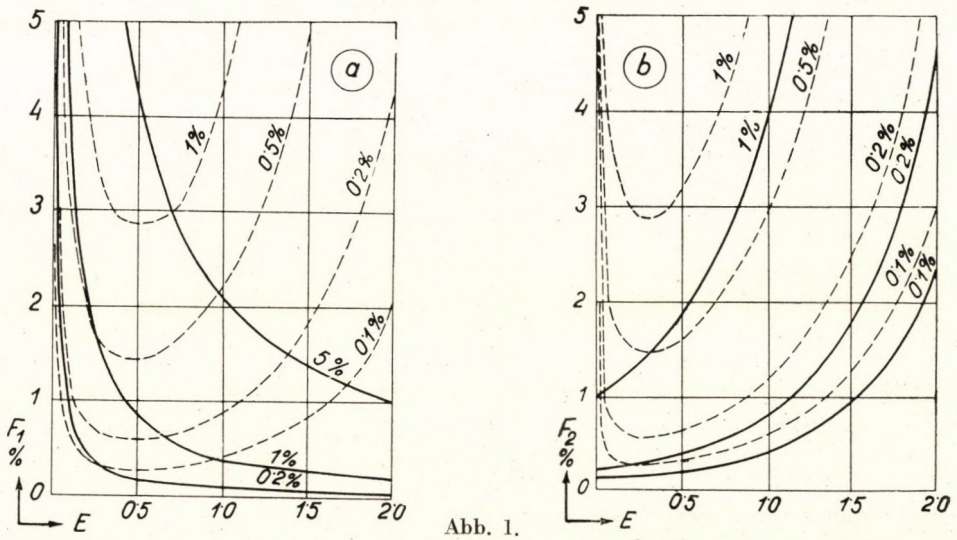


Abb. 1.

Die Fehler der Extinktionsbestimmungen der lichtelektrischen Ausschlagmethoden: *a)* bei den Photometern mit einem Photoelement, *b)* bei den Zweizellengeräten. (Die mit ausgezogenen Linie gezeichneten Kurven zeigen den Einfluss der Änderungen der Lichtintensität. die unterbrochenen den des Galvanometer-Ablesefehlers.)

Es wird so bei dem Ein- wie bei dem Zweizellenverfahren bei dem Berechnen der Extinktion aus dem Galvanometerausschlag vorausgesetzt, dass die durch die Beleuchtung der Photoelemente entstehende Stromstärke mit der Grösse des Lichtstromes sich linear verändert. Dies ist aber bekanntlich bei der heutzutage allgemein gebräuchlichen Anwendung der Selenphotoelemente streng genommen nie der Fall, und somit ist der einfach berechnete Wert der Extinktion stets mehr oder minder fehlerhaft. Die Abweichung vom Sollwert ist dabei nicht nur von der individuellen Eigenart des benutzten Selenelementes, sondern auch von den jeweiligen Versuchsverhältnissen (Intensität der Lichtquelle, äusserer Widerstand des elektrischen Stromkreises) abhängig. Es wäre folglich schwierig, den Einfluss dieser Fehlerquelle zahlenmässig im allgemeinen richtig zu berücksichtigen. Man kann aber leicht einsehen, dass dies gewissermassen auch überflüssig ist. Es ist nämlich vom Gesichtspunkt der Konzentrationsbestimmung völlig gleichgültig, ob man bei der Bestimmung der Extinktion deren tatsächliche Grösse, oder einen zwar fehlerhaften, aber gut reproduzier-

baren Wert erhält, sofern die Auswertung der Messergebnisse nicht rechnerisch, sondern mit Hilfe einer mit derselben Apparatur bestimmten Eichkurve erfolgt. Man kann folglich diese Fehlerquelle experimentell einfach völlig ausschalten. Sie gehört also nicht zu den eigentlichen methodischen Fehlern der Ausschlagverfahren.

Das gleiche gilt auch von den Fehlern, die bei einer ungenügenden Berücksichtigung der übrigen unerwünschten Eigenschaften der Photoelemente, also durch deren Trägheit und Ermüdung entstehen. Man kann bekanntlich auch die Wirkung dieser mit einfachen Massnahmen unwirksam machen.

Es entsteht bekanntlich bei Anwendung einer Glühlampe als Lichtquelle infolge der Spannungschwankungen des Netzstroms gleichfalls ein Fehler, wodurch die spektrale Zusammensetzung des ausgestrahlten Lichtes verändert wird. Dieser Fehler ist in keinem Zusammenhang mit dem oben berechneten, infolge der ebenfalls durch Spannungschwankungen bedingten Intensitätsänderungen entstandenen Fehler. Seine Grösse ist weitgehend von den Versuchsverhältnissen, also von vielen Faktoren (von der Durchlässigkeitsbreite des Spektralfilters, von der Farbe des durchgelassenen Lichtes, von der Extinktionskurve der Probe, usw.) abhängig, und man kann sie demgemäss theoretisch nicht mit allgemeiner Gültigkeit bestimmen. Diese Fehlerquelle beeinflusst aber nicht nur die Genauigkeit der Ausschlagmethoden, sondern auch die Resultate aller übrigen, sowohl der visuellen, wie der lichtelektrischen Extinktionsbestimmungen. Sie gehört daher nicht zu dem charakteristischen Fehler der hier untersuchten Arbeitsmethode, sondern zu jenem der Anwendung von Glühlampen, und sie gibt also über die Leistungen der ersteren keinen Aufschluss.

Auf Grund obiger Darlegungen geht hervor, dass es zur Beurteilung der Genauigkeit der Ausschlagmethoden genügt, nur den Einfluss der Intensitätsschwankungen der Lichtquelle und den des Galvanometerablesefehlers in Betracht zu ziehen. Man gewinnt folglich mit Hilfe der in Abb. 1 *a*. und 1 *b*. dargestellten Diagramme ein klares Bild, mit welchem Fehler man bei den Extinktionsbestimmungen mittels der lichtelektrischen Ein-, bzw. Zweizellen-Ausschlagmethoden zu rechnen hat, und welche apparativen Forderungen man stellen muss, um eine gewisse Fehlergrenze bestimmt nicht zu überschreiten. Es sei aber bemerkt, dass die angegebene Genauigkeit nur in jenem Falle gesichert ist, wenn bei den Messungen ein gutes, von konstruktiven Fehlern freies Photometer zur Anwendung gelangt. Die im Handel befindlichen Instrumente entsprechen leider z. B. infolge der ungenügend definierten Strahlenführung usw. nicht in jedem Falle dieser Anforderung.

Man sieht, dass die lichtelektrischen Ausschlagmethoden nicht nur keine besseren Messergebnisse gewährleisten als die visuellen Bestimmungen, sondern dass man sogar die Genauigkeit der letzteren nur unter günstigsten Versuchsverhältnissen erreicht. Um nämlich einen geringeren Fehler als von etwa 0,5%

zu sichern, ist es erforderlich, dass man die Intensität der Lichtquelle mindestens bis auf 0,2% konstant hält, und dass der Ablesefehler des Galvanometers höchstens einen Wert von 0,1% besitzt. Dies bedeutet, dass man bei Anwendung von Glühlampen als Lichtquelle unbedingt eine Akkumulatorbatterie mit entsprechend grosser Kapazität zu benutzen hat, oder dass man beim Gebrauch von Metalldampflampen die Schwankungen der Netzspannung mit einem ausgezeichneten Spannungsgleichhalter unschädlich machen muss. Es ist andererseits zum Messen der Stromstärke ein erstklassiges Präzisionsinstrument erforderlich. Es ist weiters noch notwendig, dass bei Geräten mit einem Photoelement die Extinktion der Probe einen Wert von etwa 0,1—1,1, beim Zweizellen-Photometer sogar nur etwa 0,05—0,7 besitzt. Es ist in beiden Fällen am vorteilhaftesten, wenn die zu bestimmende Extinktion ungefähr 0,4 beträgt. Die Auswertung der Messergebnisse darf dabei natürlich nur mit Hilfe von entsprechenden Eichkurven erfolgen, um die Abweichung von der Proportionalität zwischen Beleuchtungsstärke und Photostrom auszugleichen.

Begnügt man sich mit einer *Genauigkeit von etwa* 2%, welche bekanntlich den Ansprüchen der technischen Analysen entspricht, so sind bei Einzellengeräten Lichtschwankungen von 1% gestattet, wenn man dabei ein Präzisionsgalvanometer mit einem Messfehler von 0,2% verwendet. Man sieht aus dem Diagramm 1 *b*, dass man die Glühlampe mit Netzstrom speisen kann. Dies ist aber bei der Zweizellen-Ausschlagmethode nicht zulässig. Man muss nämlich die Lichtintensität binnen etwa 0,2% konstant halten, um die angegebene Fehlergrenze von 2% auch bei der Bestimmung von grösseren Extinktionen zu sichern. Die heutzutage im Handel befindlichen Spannungsgleichhalter gleichen aber die vorkommenden Schwankungen der Netzspannung nur im besten Fall bis auf etwa 0,2% aus, und man muss also mindestens mit einer Intensitätsänderung von 1% der Glühlampen rechnen. Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass man unter solchen Umständen nur kleine Extinktionen (etwa bis 0,5) mit der erwünschten Genauigkeit sicher messen kann. Um die Anwendungsmöglichkeiten der Zweizellen-Ausschlagmethode zu erweitern, darf daher das Photometer nur dann auf den durch einen Spannungsgleichhalter geglätteten Netzstrom geschaltet werden, wenn die Lichtquelle eine Metalldampflampe ist. Es ist übrigens auch bei technischen Analysen allgemein gültig, dass beim Gebrauch von Glühlampen eine Akkumulatorbatterie verwendet wird. Aus dem Diagramm geht noch hervor, das man als Strommessgerät unbedingt ein Präzisioninstrument mit einem Ablesefehler von höchstens 0,2% zu benutzen hat. Die günstigste Grösse der zu bestimmenden Extinktion ist unter den oben mitgeteilten Umständen beim Einzellenverfahren etwa 0,7. Man kann aber auch Proben mit einer Extinktion von etwa 0,2—1,6 mit einer Genauigkeit von 2% messen. Bei der Zweizellen-Ausschlagmethode erreicht man dagegen unter den vorher angegebenen Versuchsverhältnissen die besten Resultate, wenn die Extinktion der Probe etwa 0,3 ist. Man kann aber auch Proben mit

einer Extinktion von etwa 0,05—1,3 mit einer Genauigkeit von 2% messen. Das Diagramm zeigt ferner, dass es bei dem Zweizellenverfahren im allgemeinen vorteilhafter ist, hell gefärbte Proben zu untersuchen, als dunkle.

Die im Handel erhältlichen, auf Grund der Ausschlagmethode konstruierten lichtelektrischen Photometer besitzen meistens ein einfaches, technisches Galvanometer, dessen Ablesefehler mindestens etwa 1% ist. Sie sind dabei im allgemeinen mit einer Glühlampe ausgerüstet, die fast immer unmittelbar, also ohne Anwendung eines Spannungsgleichhalters, auf den Netzstrom geschaltet wird. Man kann folglich mit einer Schwankung der Lichtstärke von mindestens 5% rechnen. Das Diagramm 1 *a*. zeigt, dass man bei den Einzellenphotometern unter solchen Verhältnissen nur bei Extinktionsbestimmungen von etwa 0,4—1,1 einen Messfehler erwarten kann, welcher bestimmt unter 5% liegt. Es ist aber dabei nur bei der Bestimmung einer Extinktion von etwa 0,7 eine Bestimmungsgenauigkeit von 3% gesichert. Dagegen ist für Zweizellengeräte nicht einmal eine Messgenauigkeit von 5% gesichert, wenn man gezwungen ist, bei den oben angegebenen Versuchsverhältnissen zu arbeiten. Man erhält also Messergebnisse, deren Genauigkeit jener der kolorimetrischen gleich ist.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird auf Grund der Fehler, die infolge der Änderungen der Lichtintensität, bzw. durch die Ungenauigkeit des benutzten Galvanometers entstehen, die Genauigkeit der Extinktionsbestimmungen der Ausschlagmethoden berechnet. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in zwei Diagrammen mitgeteilt. Es wird in dieser Weise bewiesen, dass es verfehlt ist, Instrumente mit zwei Photoelementen zu versehen, die die Bestimmung der Extinktion mit Hilfe der Ausschlagmethode ermöglichen. Es wird weiters festgestellt, dass man mit Hilfe der genannten Methoden die Genauigkeit der visuellen Photometer nicht erreichen kann. Die im Handel befindlichen Zweizellengeräte sichern bei der Ausschlagmethode meistens nur die Genauigkeit der kolorimetrischen Messung.

Lehrstuhl für Analytische Chemie, Technische Universität, Sopron.

О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОСВЕТОВОЙ ЭКСТИНКЦИИ, ОСНОВЫВАЮЩЕЙСЯ НА МЕТОДЕ ИЗМЕРЕНИЯ ОТКЛОНЕНИЯ

Й. Мика

Р е з ю м е

Точность определения электросветовой экстинкции, основанная на методе измерения отклонения, имеет два характерных источника недостатков, а именно: изменение интенсивности свечения и погрешность, вызванная неточностью гальванометра. При расчете этих недостатков мы получаем диаграммы, с помощью которых мы имеем полную картину точности приборов, снабженных как одним, так и двумя световыми элементами. Из этого следует, что, при методе измерения отклонением, приборы, снабженные двумя фотоэлементами более чувствительны по отношению к изменению силы света, чем одноэлементные приборы. Стал быть что, при таком методе измерения необходимо пользоваться двумя фото-элементами. Далее, можно установить, что фотометры, работающие на принципе фото-элементов могут достичь с отклонением стрелки опытной погрешности, получаемой при помощи визуальных фотометров (0,5%) только при таких обстоятельствах проведения опытов, которые на практике вообще неосуществимы. Если мы применяем для измерений гальванометр с погрешностью отсчета в 0,5% и выравниваем сетеовое напряжение при помощи соответствующего регулятора напряжения таким образом, чтобы изменение

интенсивности света составляло не более 1%, то и тогда только при узких пределах экстинкции (у приборов с одним элементом в пределах от 0,2 до 0,9, а у приборов с двумя элементами только в пределах 0,1 и 0,5) обеспечивается 2%-ная точность определения. Находящиеся в продаже гальванометры фотометров, основанные на методе отклонения стрелки (с фото-элементами), бывают в некоторых случаях такими, что точность производимых измерений определяется 1%-ной погрешностью. Кроме того, эти фотометры могут быть непосредственно включены в электрическую сеть. В таких условиях точность измерения фотометрами не превосходит точности колориметров.

Les Acta Technica Hungarica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des mémoires du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiées sous forme de cahiers qui seront réunis en volumes de 300 à 500 pages. Il paraît, en général, un volume par an.

Les manuscrits, autant que possible écrits à la machine, doivent être envoyés à l'adresse suivante:

Acta Technica. Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est 110·— (6·50$) forints par volume.

On peut s'abonner à l'entreprise de commerce extérieur des livres et journaux »Kultúra« (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Compte courant No. 929 040) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Technica Hungarica publish papers of the technical sciences, in Russian French, English and German.

The Acta Technica appear in parts of various extent, making up volumes of 300—500 pages. On the average, one volume is published yearly.

Manuscript should, if possible, be typed and addressed to:

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondance with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica, is 110·— forint (6·50$) a volume. Orders may be placed with »Kultúra« Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Account No. 929 040) or with representatives abroad.

Die Acta Technica Hungarica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band von 20—30 Bogen. Im allgemeinen erscheint jährlich ein Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, möglichst mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu senden.

Abonnementspreis pro Band 110·— Forint (6·50$). Zu bestellen bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankkonto: Nr. 929 040) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

50 Ft

INDEX

A. Schleicher : Beiträge zur Geschichte des Hüttenwesens in Ungarn — А. Шлейхер : Взносы кистории цветной металлургии в Венгрии 3

A. Romwalter und *A. Hauer :* Neue Anwendungsmöglichkeiten des aktivierten Aluminiums — А. Ромвальтер—Л. Хауер: Новые возможности применения активного алюминия 43

A. Romwalter und *L. Fekete :* Entfernung von Aschebildnern aus Mineralkohlen mittels Salpetersaure — А. Ромвальтер—Л. Фекете : Удаление золообразователей из минеральных углей при помощи азотной кислоты 59

F. Macher : Ein Halbmikroverfahren zur Bestimmung des Chroms in vanadium- und Wolframfreien Stählen — Ф. Махер : Подумикропроцесс определения содержания хрома в стали, не содержащей ванадия и вольфрама 73

Л. Жильмо : Исследование фероидального (глобулярного) графита — *L. Gillemot :* Untersuchung über die Bildung des kugelförmigen (nodularen) Graphits 79

J. Verő : Dilatometric Determination of the Solidus Temperature — Й. Вэре : Дилатометрическое определение температуры затвердевания 97

J. Mika und *S. Komjáthy :* Ein massanalytisches Halbmikroverfahren zur Bestimmung des Magnesiums in Gusseisen — Й. Мика — Ш. Комяти : Объемный полумикропроцесс определения магния в чугуне 115

A. Geleji : Die Berechnung der im Walzspalt wirkenden Kräfte — А. Гелеи : Расчет сил, действующих в просвете между вальками 123

A. Domony und *R. Várhelyi :* Ein neues Verfahren zur Raffination von Aluminiumabfällen— А. Домонь—Р. Вархеи : Очистка алюминиевых отходов новым способом 143

Н. Хайто : Влияние длительности нагрева на зернистость аустенита стали — *N. Hajtó :* Die Wirkung der Dauer des Glühens auf die Austenit-Korngrösse von Stählen 159

П. Секи—Т. Немет : Электролитическая полировка углеродистых сталей — *P. Széki* und *T. Németh :* Elektrolytisches Polieren von Kohlenstoffstählen 175

J. Mika : Über die Genauigkeit der lichtelektrischen Extinktionsbestimmung — Й. Мика : О точности определения электросветовой экстинкции, основывающейся на методе измерени отклонения 189

Akadémiai Kiadó (Budapest, VI., Sztálin-út 31.) Felelős: Mestyán János.

Budapest nyomda, V., Gerlóczy-utca 2. — 12221/51 — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
S. GELEJI, L. GILLEMOT, I. RÁZSÓ

REDIGIT
GY. HEVESI

TOMUS II. FASCICULI 2—4.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1952

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY-UTCA 21

Az Acta Technica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. Évenként két kötet jelenik meg mintegy 75 ív terjedelemben.

A közlésre szánt kéziratok, lehetőleg géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az »Akadémiai Kiadó«-nál (Budapest, V., Alkotmány-utca 21. Bankszámla 04-878-111-48), külföld számára pedig a »Kultúra« Könyv- és Hirlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Banksz.; 45-790-057-50-032 sz.), vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

»Acta Technica« публикует трактаты из области технических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

»Acta Technica« выходит отдельными выпусками разного объёма. Несколько выпусков составляют один том. *Ежегодно выходит два тома, всего объёмом в 75 печатных листов.*

Предназначенные для публикации рукописи (по возможности в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу:

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.
(Венгрия, Будапешт 62, п/я 440.)

По этому же адресу направлять всякую корреспонденция для редакцин и администрации.

Подписная цена »Acta Technica« — 110 форинтов за том. Заказы в стране принимает Akadémiai Kiadó (V., Alkotmány-utca 21. Текущий счёт № 04-878-111-48). Предприятие по внешней торговле книг и газет »Kultúra« (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Текущий счёт № 45-790-057-50-032) или его заграничные представительства и уполномоченные.

DIE BERECHNUNG RÄUMLICHER RAHMEN-KONSTRUKTIONEN MIT DEM MOMENTENAUSGLEICHS-VERFAHREN

Dr. techn. L. PALOTÁS

Eingegangen am 1. Dezember 1950.

A) ALLGEMEINE BESCHREIBUNG DES BERECHNUNGSVERFAHRENS

1. Allgemeines

Die statische Berechnung unserer Bauwerke wird, obwohl es sich im Grunde genommen immer um räumliche Konstruktionen handelt, so durchgeführt, dass man sie in Tragwerke, die in einer Ebene liegen, zergliedert, wonach die Berechnungen zur Bestimmung ihrer inneren Kräfte an diesen ebenen Tragwerken vorgenommen werden.

Dieses Verfahren ermöglicht in der Praxis in den meisten Fällen hinreichend genaue Lösungen und darf deshalb als zulässig angesehen werden, zumal unsere Bauwerke meistens aus senkrecht aufeinander liegenden Trägerelementen zusammengesetzt sind. In diesen Fällen kann bei Berücksichtigung der gelegentlich auftretenden Verdrehungen die Frage der Räumlichkeit praktisch befriedigend gelöst werden. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn sich in der Konstruktion — im räumlichen Sinn genommen — auch schiefe Tragkonstruktionen, beziehungsweise schiefe Konstruktionselemente befinden. Bei diesen Konstruktionen (Türme, Gerüste, Pfahlroste, Turmfundamente) ist es notwendig, die Räumlichkeit genauer zu berücksichtigen.

Während bei ebenen Konstruktionen die inneren Kräfte, wie die Biegemomente, Quer- (Schub-) und Längs- (Stab-) kräfte alle in der Ebene der Konstruktion wirken, so treten im Falle von räumlichen Konstruktionen neben den Biegemomenten, Quer- und Längskräften auch Verdrehungsmomente (Torsionsmomente) auf.

Bei den Raumtragwerken können zwei Gruppen unterschieden werden: der *einen Gruppe* sind jene Konstruktionen zuzuzählen, bei denen die im Raum aufgestellten Stützen zwei (oder eventuell mehrere) starre Körper verbinden *(Abb. 1)*; in diesem Falle wird es im allgemeinen genügen, die Stützenkräfte als Längskräfte (Normalkräfte) bei Vernachlässigung der absoluten Verformung (Längsverformung) annähernd zu bestimmen und die durch die exzentrische

Belastung infolge der ecksteifen Verbindung auftretenden Einspannmomente zu schätzen.

Der *anderen Gruppe* gehören diejenigen räumlichen Konstruktionen an, die aus biege- und verdrehungsfesten Stäben zusammengesetzt sind, und zwar so, dass die Verbindungspunkte der Stäbe ecksteif ausgebildet sind. Dies sind

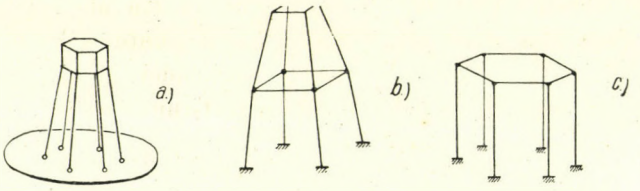


Abb. 1

die eigentlichen *räumlichen Rahmenkonstruktionen (Abb. 1b und 1c)*. Bei diesen Konstruktionen ist es wichtig, bei der Bestimmung der inneren Kräfte die räumliche Wirkung in vollem Ausmass zu berücksichtigen.

Die räumlichen Rahmenkonstruktionen sind sowohl statisch als auch kinetisch vielfach unbestimmt.

So wie das Gleichgewicht eines auf einen starren Körper wirkenden räumlichen Kräftesystems durch *sechs* unabhängige Gleichungen charakterisiert werden kann, weist auch die freie Bewegung eines starren Körpers im Raume *sechs* Freiheitsgrade auf, seine Bewegung im Raume kann also durch sechs Angaben beschrieben werden. Diese Angaben sind: drei Drehkomponenten zur Bestimmung der Drehung des Körpers und drei Verschiebungskomponenten zur Charakterisierung der Verschiebung des Körpers. Demnach macht die völlige Durchschneidung eines Stabes einer statisch unbestimmten Konstruktion sechs Bewegungsmöglichkeiten frei, bzw. führt zur Verminderung der Anzahl der statisch unbestimmten Grössen um sechs.

Wenn man beispielsweise den in *Abb. 1 c* dargestellten Rahmen betrachtet, so kann festgestellt werden, dass dieser nach sechs völligen Durchschneidungen als statisch bestimmt anzusehen ist, das heisst, der Grad der statischen Unbestimmtheit beträgt $6 \times 6 = 36$. Um die Konstruktion kinetisch bestimmen zu können, ist die vollkommen starre Einspannung der sechs ecksteifen Knotenpunkte, sowie ihre Stützung durch sechs gedachte Stützstäbe erforderlich. Dies bedeutet, dass an den sechs vollkommen starr eingespannten Knotenpunkten $6 \times 3 = 18$ Winkeldrehungskomponenten, in den sechs gedachten Stützungsstäben 6 Verschiebungskomponenten in der Richtung der Stäbe, zusammen also 24 kinetische Grössen unbekannt sein werden.

Die genaue Berechnung von Raumtragwerken mittels Verfahren, welche wie die sogenannte *Kraftgrössenmethode* statische Grössen als unbekannt ansehen oder welche wie die sogenannte *Deformationsmethode* kinetische Grössen als unbekannt ansehen, ist für den Ingenieur in der Praxis nicht entsprechend,

denn die Lösung der aufgestellten Elastizitätsgleichungen verursacht in Anbetracht ihrer sehr grossen Zahl eine bedeutende Rechenarbeit und ist daher mühsam und äusserst langwierig. Eben deshalb scheint die Anwendung einer Methode weit eher am Platze, bei der es nicht eine grosse Anzahl von Gleichungen direkt zu lösen gibt, sondern bei der diese in Teile zergliedert werden, wobei nur ein einziger Stab der Rahmenkonstruktion als belastet betrachtet wird. Dieser Stab wird dann als teilweise eingespannter Stab berechnet (Verfahren von *Suter)* oder aber eine Methode angewendet, welche — bei beliebiger Belastung — den starr eingespannten Stab als Grundelement betrachtet (Verfahren von *Cross)*.

2. Das Grundprinzip der Berechnung

Im nachfolgenden wird vom Grundgedanken des Momentenausgleichsverfahrens ausgegangen und danach das Verfahren auch für räumliche Rahmenkonstruktionen weiterentwickelt. Im wesentlichen stimmt das allgemeine Grundprinzip dieser Lösung mit den bekannten Grundprinzipien für ebene Querschnitte überein.

Die Berechnung der allgemeinen Rahmenkonstruktionen, der Rahmenkonstruktionen mit verschiebbarem Knotenpunkt, wird in zwei Teilen durchgeführt. Im ersten Teil der Berechnung werden die Konstruktionen mit verschiebbarem Knotenpunkt mit der erforderlichen Zahl (m = 1,2, . . . p) von gedachten Stützen (Stützstäben) gestützt, also als unbewegliche Knotenpunkte betrachtet, so dass in keinem einzigen Knotenpunkt eine Verschiebung eintreten kann ; es werden zuerst die entsprechenden *Einspannmomente* (M_I), sowie die in den gedachten Stützen (m) auftretenden *Festhaltungskräfte* (R_m) berechnet, bzw. die *Verschiebungskräfte* ($P_m = -R_m$).

Im zweiten Teil werden die infolge der *Verschiebungskräfte* P_m entstehenden Zusatzmomente M_{II} bestimmt. Die Summe der Resultate der beiden Berechnungen ergibt die endgültigen Einspannmomente (M), das heisst

$$M = M_I + M_{II}$$

Der verschiebbare oder unverschiebbare Zustand der Konstruktion, beziehungsweise die Zahl der notwendigen gedachten Stützstäbe wird — abgesehen von aussergewöhnlichen Fällen — zweckmässig mit Hilfe der Knotenfigur bestimmt. Die *Knotenfigur* wird aus einem beliebigen Rahmentragwerk in der Weise gewonnen, dass jeder ecksteife Knotenpunkt und jede starr eingespannte Stütze desselben durch ein Gelenk ersetzt wird, wobei die ursprünglich durch Gelenke oder durch bewegliche Stützstäbe aufrechterhaltenen Stützen unverändert belassen werden.

Die Knotenfigur ist statisch bestimmt und starr — d. h., das Rahmentragwerk weist eine unverschiebbare Knotenfigur auf — wenn die Anzahl

(3 c) der aufgestellten statischen Gleichungen für die Zahl »c« betragenden Knotenpunkte gleich ist der Anzahl der statischen Unbekannten, das heisst

$$3\ c = r + e$$

wo r die Zahl der Stabkräfte und e die Zahl der Reaktionskomponenten bedeutet.

Der Rahmen wird auch dann eine unverschiebbare Knotenfigur aufweisen, wenn seine Knotenfigur übersteif ist, d. h.

$$3\ c < (r + e)$$

Der Rahmen besitzt einen verschiebbaren Knotenpunkt, wenn seine Knotenfigur labil ist, das heisst

$$3\ c > (r + e)$$

In diesem Fall beträgt die Zahl der erforderlichen Stützstäbe (t)

$$t = 3\,c - (r + e)$$

So z. B. ist der auf *Abb. 1c* dargestellte Rahmen labil, weil $c = 12$, $r = 12$, $e = 6 \times 3 = 18$ und deshalb 3×12 $(12 + 18)$, beziehungsweise die Zahl der erforderlichen Stützstäbe beträgt

$$t = 36 - (30) = 6$$

Es sollen hier vor allem *Rahmentragwerke mit festen Knotenpunkten* behandelt werden.

Das grundlegende Problem bei ihrer Berechnung bildet die Frage des Momentenausgleichs des räumlichen Knotenpunktes ; in vorliegender Abhandlung soll im allgemeinen nur von Rahmen die Rede sein, die aus geradachsigen Stäben bestehen. Bei der Berechnung der Verformungen sollen nur diejenigen in Betracht gezogen werden, die auf das Biege- oder auf das Verdrehungsmoment zurückzuführen sind, während die durch die Quer- und Längskräfte verursachten vernachlässigt, beziehungsweise nur wo es sich als nötig erweist, nachträglich herangezogen werden sollen.

3. *Momentenausgleich bei räumlichen Knotenpunkten*

Räumliche Knotenpunkte werden von Stäben, die an einen eksteifen Knotenpunkt angeschlossen sind und die sich in beliebiger Richtung im Raume befinden, gebildet. Das andere Ende dieser Stäbe ist im allgemeinen starr eingespannt oder wird durch ein Gelenk festgehalten. Wenn im weiteren von starrer Einspannung die Rede ist, so ist darunter immer eine *vollkommen starre Einspannung* zu verstehen, d. h. eine derartige Einspannung, bei der eine Drehung des eingespannten Querschnittes vollkommen verhindert wird, also bei der alle drei Projektionen der Drehung gleich Null sind, im Gegensatz zu einfachen oder zweifachen Einspannungen, wo die Drehung des Querschnittes

nur nach einer oder nach zwei Richtungen verhindert wird. Von den Stützgelenken soll angenommen werden, dass sie immer aus drei sich in einem gemeinsamen Punkt treffenden Stäben zusammengesetzt sind, es sich also um Kugelgelenke handelt. An dieser Stelle soll auch erwähnt werden, dass die im nachstehenden beschriebene Lösung vom Verfasser zum erstenmal in einem im Frühjahr 1944 im »Ingenieur-Fortbildungsinstitut« der Budapester Technischen Universität gehaltenen Vortrag bekanntgegeben und im Herbst desselben Jahres im Anzeiger des Vereins Ungarischer Ingenieure und Architekten abgedruckt wurde.

Abb. 2 zeigt einen aus drei Stäben bestehenden räumlichen Knotenpunkt. Zu allererst soll diesem mit »*a*« bezeichneten Knotenpunkt ein der

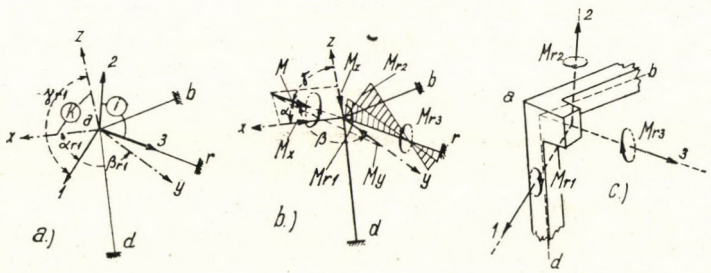


Abb. 2

Einfachheit halber rechtwinkeliges Koordinatensystem zugeordnet werden, das im weiteren mit »*k*« bezeichnet wird und dessen Achsen *x*, *y* und *z* sind. Von den positiven Halbstrahlen des Koordinatensystems soll angenommen werden, dass von ihnen »*x*« in einer waagerechten, bzw. nahezu waagerechten Richtung vom Knotenpunkt ausgeht, während der Halbstrahl »*z*« nach aufwärts strebt. Der positive Halbstrahl »*y*« ist um 90° in die positive Achse »*x*« gedreht, und zwar im Sinne des Uhrzeigers, wenn man ihn aus der positiven Richtung von »*z*« betrachtet.

Ein rechtwinkeliges Koordinatensystem gehört gleichfalls zu jedwedem Querschnitt jedes räumlichen Stabes, so auch zu dem im Knotenpunkt angeschlossenen Querschnitt. Zwei Achsen dieses Koordinatensystems, das mit »*i*« bezeichnet werden soll, werden von den Trägheitshauptrichtungen des Querschnitts gebildet, die dritte Achse wird von der auf die Ebene des Querschnitts senkrechten Richtung bestimmt, d. h. von der Richtung, die mit der Achse des Stabes identisch ist. Diejenige der Trägheitshauptrichtungen, die waagerecht oder nahezu waagerecht verläuft, soll mit »*1*«, die andere mit »2« und die senkrecht zum Querschnitt verlaufende mit »3« bezeichnet werden. Bei der Bestimmung der angenommenen positiven Halbstrahlen wird folgenderweise vorgegangen: der positive Halbstrahl »*1*« zeigt immer nach aussen, der positive Halbstrahl »3« fällt mit der positiven Normalkraft des Stabes,

das heisst mit der Richtung der Zugkraft, zusammen (der sich vom Knotenpunkt entfernende Pfeil), immer unter der Annahme, dass es sich um auf den Knotenpunkt wirkende Kräfte handelt. Der positive Halbstrahl »2« kann nach Belieben angenommen werden, doch immer nur in der Weise, dass die an den zwei Knotenpunktsenden des Stabes angenommenen positiven Richtungen gleich sind, d. h. an derselben Seite des Stabes zu liegen kommen (z. B. bei waagerechten Stäben nach oben).

Um leichter mit den Momenten, beziehungsweise mit den Winkeldrehungen arbeiten zu können, sollen diese durch Momenten- bzw. Winkeldrehungsvektoren ersetzt werden.

Bekanntlich werden alle Momente durch drei Angaben gekennzeichnet: durch die Lage ihrer Ebene, ihren Drehsinn und ihre Grösse. Diese drei Angaben können dann in einem Vektor vereint werden, wenn seine Richtung durch die Normale der Momentenebene bestimmt wird, wenn sein Drehsinn von einem Betrachter, der dem Pfeile entsprechend steht (dessen Sohlen also auf der Momentenebene ruhen und dessen Kopf sich beim Pfeile befindet) im absoluten Sinn als positiv, d. h. gleich dem Sinne des Uhrzeigers angesehen wird, und dessen Länge in irgendeinem gewählten Massstab mit der Grösse des Momentes gleich ist. Da im allgemeinen ausschliesslich von Momentenvektoren die Rede sein wird, soll im nachfolgenden von der für Momentenvektoren üblichen Bezeichnung »$\overline{M}$« abgesehen werden und es sollen somit auch diese nur mit der einfachen Bezeichnung »M«, ohne den sich darüber befindlichen Strich, bezeichnet werden.

Was jetzt über Momentenvektoren, beziehungsweise Momente gesagt wurde, ist zur Gänze auch für Winkeldrehungsvektoren, beziehungsweise Winkeldrehungen gültig, doch mit dem Unterschied, dass der positive Sinn der Winkeldrehungen umgekehrt angenommen werden soll, als bei der Annahme des positiven Sinns der Momente angegeben wurde, und zwar soll *jene Winkeldrehung als positiv gelten, deren Drehsinn von rechts nach links, also in der entgegengesetzten Richtung des Uhrzeigers gerichtet ist.*

Auf *Abb. 2a und 2c* wurde das Koordinatensystem »i« der leichteren Übersichtlichkeit halber nur am Ende »a« des Stabes »ar« gezeigt.

Die zu lösende Aufgabe kann nun folgendermassen angegeben werden: gegeben ist *der auf den räumlichen Knotenpunk »a« wirkende, unausgeglichene Momentenvektor M, während die am Knotenpunktsende der Verbindungsstäbe auftretenden Gleichgewichtsmomente zu bestimmen sind.* So ist z. B. beim Stabe »ar« das Moment M_{ri} zu bestimmen, wenn »r« das Zeichen des Verbindungsstabes darstellt (einfachheitshalber wird hier das Zeichen des Knotenpunktsendes des Stabes weggelassen), das heisst $r = b, c, \ldots$ und i das Zeichen des zum betreffenden Ende des Stabes zugeordneten Koordinatensystems bedeutet, und zwar $i = 1, 2, 3$.

Die Aufgabe soll jetzt nicht als völlig allgemeine Aufgabe gelöst werden, denn dies wäre nicht zweckdienlich, sondern es sollen zuerst die Projektionen M_x, M_y, M_z der unausgeglichenen Momentenvektoren gemäss ihren betreffenden Achsen x, y, z bestimmt werden, das heisst, im allgemeinen M_k-Werte, wo $k = x, y, z$. Bei rechtwinkeliger Projektion gelangt man also *(Abb. 2 b)* zu

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M \cos \alpha \\ M_y &= M \cos \beta \\ M_z &= M \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und im allgemeinen zu

$$M_k = M \cos \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

wo $k = x, y, z$ und der Winkel δ den zwischen dem Momentenvektor und der positiven Achse »k« befindlichen, nicht mehr als 180° betragenden Winkel bedeutet, des weiteren, wo $\delta = \alpha, \beta, \gamma$.

Da die Projektionen M_k nunmehr bekannt sind, kann die Aufgabe insofern vereinfacht werden, als die Momentenvektoren, welche den Momentenvektor $M_k = 1$ ausgleichen, festgestellt werden. Wenn diese Werte nun am Knotenpunktsende jeglichen Stabes »r« von Richtung »i« mit n_{kri} bezeichnet werden, so beträgt

$$M_{kri} = n_{kri} M_k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo $r = b, c, \ldots$ und $k = x, y, z$.

Der Momentenvektor M_{ri} selbst, der den beliebigen Momentenvektor M ausgleicht, beträgt

$$M_{ri} = \sum_{k=x}^{z} n_{kri} M_k \quad (3)$$

Bevor noch zur Bestimmung der sogenannten *Momentenausgleichs-* oder *Momentenanteilsvektorenwerte* n_{kri} geschritten wird, sollen einige Hilfssätze in Erinnerung gerufen, beziehungsweise neue Hilfssätze eingeführt werden.

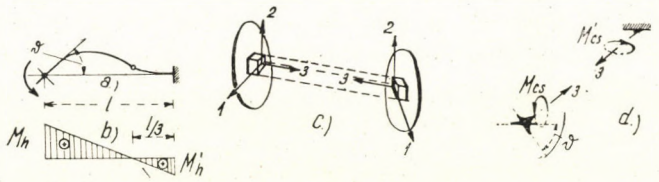


Abb. 3

Man betrachte nunmehr den auf *Abb. 3a* dargestellten Stab, dessen linkes Ende sich an einen Knotenpunkt anschliesst, dessen rechtes Ende starr eingespannt und dessen Trägheitsmoment sonst konstant ist. Auf das linke Ende dieses Stabes (bzw. genauer gesagt, auf den Knotenpunkt) soll eine positive, also sich von rechts nach links drehende Winkeldrehung ϑ in der abgebildeten Ebene des Stabes wirken. Die infolge dieser Winkeldrehung entstehende Form-

änderung *(Abb. 3a)* bestimmt die auf *Abb. 3b* gezeigte Momentenfigur. Das am gedrehten Knotenpunktsende entstehende Biegungsmoment M_h, sowie das am starr eingespannten Ende auftretende Biegungsmoment M'_h kann durch die untenstehenden bekannten Formeln ausgedrückt werden :

$$M_h = 4 E s_h \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$M'_h = \frac{1}{2} M_h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

wo der Wert von s_h, des sogenannten *Steifigkeitsfaktors* oder der sogenannten *Biegesteifigkeit*, im dargestellten Falle, also beim eingespannten Stab

$$s_h = \frac{J_h}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und beim Stab mit Gelenk

$$s_h = \frac{3}{4} \frac{J_h}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6a)$$

beträgt. Hier steht E für den Elastizitätsmodul und J_h für das auf die zur Winkeldrehungsebene lotrechte Achse bezogene Trägheitsmoment.

Laut dem im obigen angenommenen Koordinatensystem können die Biegemomente entweder in der Ebene 1—3 oder 2—3 wirken oder, falls mit Momentenvektoren gearbeitet wird, so fallen die Biegemomentenvektoren entweder mit der Achse 2 oder mit der Achse 1 zusammen.

Wenn das Moment in der Ebene 1—2 wirkt, das heisst, der Vektor mit Achse 3 zusammenfällt, so ist von einem Verdrehungsmoment die Rede. Während jedoch im Sinne des angenommenen Koordinatensystems die positiven Halbstrahlen der Achsen 1 und 2 auf derselben Seite des in Frage stehenden Stabes liegen, also den gleichen Sinn aufweisen, so haben die positiven Halbstrahlen der Achse 3 den entgegengesetzten Sinn, insofern vom Koordinatensystem »*i*« der zwei zum Knotenpunkt gehörenden Endquerschnitte irgendeines Stabes, bzw. von den Momentenvektoren gemäss den Achsen von »*i*« die Rede ist *(Abb. 3c)*.

Bei dieser Annahme ist natürlich der Drehungssinn der Biegemomente an dem besprochenen unbelasteten Stab an beiden Enden des Stabes gleich ; z. B. sind in dem auf *Abb. 3a* skizzierten Fall, wo am linken Ende des Stabes eine positive (aber von rechts nach links wirkende) Winkeldrehung wirkte, die aus diesem Grunde auftretenden Einspannbiegemomente M_h und M'_h gleichfalls positiv (aber von links nach rechts wirkend, d. h. entgegengesetzt zum positiven Sinn der Winkeldrehung!).

Auf *Abb. 3d* wird jener Fall gezeigt, wo auf einen Stab mit konstantem Trägheitsmoment im an das linke Stabende anschliessenden Knotenpunkt

eine positive, im Sinne der Achse 3 des Knotenpunktsendes gerichtete Winkeldrehung ϑ senkrecht zur Achse des Stabes, also in der Ebene 1—2 wirkt (also entgegengesetzt zum positiven Sinn des Moments). Das infolge der Winkeldrehung ϑ auftretende Moment ist das *Verdrehungsmoment*, das am linken Ende des Stabes mit M_c, am rechten mit M'_c bezeichnet wird, in der ganzen Länge des Stabes von konstanter Grösse ist und gemäss der angenommenen Vorzeichenregel dasselbe Vorzeichen aufweist, im vorliegenden Falle z. B. positiv ist, d. i.

$$M_c = M'_c \cdot \tag{7}$$

beziehungsweise laut der bekannten Formel

$$M_c = G J \varepsilon$$

Diese Formel kann mit einer kleinen Veränderung genau auf die Formel (4) gebracht werden. In dieser Formel bedeutet G den Schubmodul, J den für die Drehung charakteristischen Trägheitsmomentenwert und ε die Winkeldrehung eines Abschnittes von Einheitslänge in senkrechter Ebene zur Stabachse.

Bei Umwandlung dieser Formel ergibt sich:

$$M_c = 4 E \frac{GJ}{4 El} \varepsilon l = 4 E s_c \vartheta \tag{8}$$

wo

$$s_c = \frac{G}{4 E} \frac{J}{l} = \frac{J_c}{l} \tag{9}$$

und

$$J_c = \frac{GJ}{4 E} \tag{10}$$

Der Wert J_c kann *Verdrehungsträgheitsmoment*, der Wert s_c *Verdrehungssteifigkeit* genannt werden. So kann z. B. im Falle eines Kreisquerschnittes J als polares Trägheitsmoment ausgedrückt werden, das heisst

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

und

$$J_c = \frac{G}{E} \frac{\pi}{128} d^4 = \frac{G}{E} 0{,}0246 \; d^4 \tag{11}$$

Im Falle eines Quadrates ist

$$J = \frac{a^4}{7{,}2}$$

$$J_c = \frac{G}{E} 0{,}0347 \; a^4 \tag{11a}$$

Zwischen dem Schub- und Elastizitätsmodul besteht folgender bekannter Zusammenhang :

$$G = E \frac{m}{2(1+m)} \tag{12}$$

wo m die Poissonsche Zahl bedeutet, deren Wert bei Eisen mit 3—5, beim Beton von Eisenbetonkonstruktionen mit 5—7 und bei Beton im allgemeinen mit 2—7 angenommen werden kann, d. h.

$$G = 0{,}3\ E \sim 0{,}5\ E$$

Im nachfolgenden sollen die Werte für J_c für in der Praxis vorkommende Fälle angegeben werden.

Im Falle von *beliebigen Querschnitten* — mit Ausnahme von dünnwandigen, röhrenförmigen Querschnitten, für welche die Formel keine Geltung hat — lautet die Formel des Verdrehungsträgheitsmomentes nach *Saint-Venant*, insofern die Gestalt des Querschnittes im grossen ganzen einem Kreise gleicht und der Querschnitt massiv ist,

$$J_c = \frac{G}{4E} \frac{F^4}{40 J_p} = \frac{G}{E} \frac{F^4}{160 J_p} \tag{11b}$$

wo J_p das polare Trägheitsmoment des Querschnittes und F die Fläche des Querschnittes bezeichnet.

Im Falle eines rechtwinkeligen *Vierecks* von Breite »*a*« und Höhe »*b*« ist

$$J_c = \frac{G}{4 \cdot 3{,}6\, E} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} = \frac{G}{E} 0{,}0694 \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \tag{11c}$$

Im Falle eines *Kreisringes* von einem inneren Durchmesser »*d*« und einem äusseren Durchmesser »*D*« beträgt

$$J_c = \frac{G}{E} \frac{\pi}{128} (D^4 - d^4) = \frac{G}{E} 0{,}0246\ (D^4 - d^4) \tag{11d}$$

Im Falle eines *dünnwandigen Rohres* von Wanddicke »*c*« und einem äusseren Durchmesser »*D*« erhält man

$$J_c = \frac{G}{E} \frac{\pi}{16} cD^3 = \frac{G}{E} 0{,}196\ cD^3 \tag{11}$$

Im Falle eines *dünnwandigen, nicht kreisförmigen Rohrquerschnittes* ist

$$J_c = \frac{G}{E} \frac{F^2 c}{K} \tag{11f}$$

wo c den Mittelwert der Wanddicke, K den in der Mittellinie der Wand gemessenen Umfang und F die durch die Mittellinie K begrenzte Fläche darstellt.

Im Falle eines *aus viereckigen Elementen* von Breite (die kleinere Abmessung) »*a*« und Länge »*b*« *zusammengesetzten Profils* ist

$$J_c = \frac{G}{E} \frac{\eta}{12} \Sigma (a^3 b) \tag{11g}$$

wo der Wert von η von der Gestalt des Querschnittes abhängt, und zwar

im	Fall	eines	I	Profils	1,31
«	«	«	U	«	1,30—1,00 (im Durchschnitt 1,12)
«	«	«	IP	«	1,29
«	«	«	+	«	1,17
«	«	«	Winkeleisens		0,99

Wenn »*a*« im Vergleich zu »*b*« klein ist, so kann für η 1,00 angenommen werden und dann beträgt

$$J_c = \frac{G}{E} \frac{1}{12} \Sigma (a^3 b) = \frac{G}{E} \, 0{,}0833 \, \Sigma (a^3 b) \tag{11h}$$

Da es bei der Durchführung des Momentenausgleichs, wenn es sich um die Bestimmung des Momentenanteils handelt, vollkommen gleichgültig ist, ob mit den wirklichen Steifigkeitswerten für die Momente oder Verdrehungen, beziehungsweise mit deren $4E$-fachen Werten gerechnet wird, d. h. nur mit den »*s*« Werten, so sollen im nachstehenden immer die mit 4E multiplizierten Werte zugrunde genommen werden.

Zu den Verdrehungsmomenten soll noch bemerkt werden, dass die Grösse des zum Endquerschnitt der beiden Knotenpunkte jedweden Stabes gehörenden Verdrehungsmomentes an beiden Stellen gleich, dass sein Vorzeichen identisch, aber sein Drehsinn entgegengesetzt ist.

Nach diesen Ausführungen soll jetzt nur der eine Winkeldrehungsvektor, z. B. φ_x in der Achse x wirken, während $\varphi_y = \varphi_z = 0$. Dieser Winkeldrehungsvektor φ_x bewirkt nun im betreffenden Knotenpunkt an den dort angeschlossenen Stabenden eine Winkeldrehung in jeder Richtung »*i*«. (In denjenigen Enden des Stabes, die nicht an den Knotenpunkt angeschlossen sind, tritt keine Winkeldrehung auf, weil von der Annahme ausgegangen wurde, dass sie starr eingespannt sind).

Wenn der am Knotenpunktsende irgendeines mit r bezeichneten Stabes (genauer mit ar bezeichnet, wenn das Zeichen des untersuchten Knotenpunktes a ist) in der Richtung »*i*« entstehende Winkeldrehungsvektor infolge φ_x mit ϑ_{xri} bezeichnet wird, sowie der von der positiven Richtung x und der positiven Richtung »*i*« miteinander eingeschlossene, nicht mehr als 180° betragende Winkel mit α_{ri}, dann erhält man auf Grund einer rechtwinkeligen Projektion

$$\vartheta_{xri} = \cos \alpha_{ri} \, \varphi_x \tag{12}$$

Der durch diesen Winkeldrehungsvektor ϑ_{xri} hervorgerufene Momentenvektor beträgt laut den Formeln (4) und (8) bei Weglassen des Koeffizienten 4E im allgemeinen

$$M_{xri} = s_{ri} \cos \alpha_{ri} \varphi_x \tag{13}$$

und wenn $\varphi_x = 1$ ausmacht, dann ist

$$m_{xri} = s_{ri} \cos \alpha_{ri} \tag{14}$$

das heisst, *der einzige Winkeldrehungsvektor* $\varphi_x = 1$ *bringt im allgemeinen am Ende jedes Stabes r in jeder Richtung i einen Momentenvektor zustande.*

Bei der Bestimmung der *infolge* $\varphi_x = 1$ auftretenden, den Achsen x, y, z entsprechenden Momentenvektorprojektionen erhält man wiederum bei rechtwinkeliger Projektion

$$\left.\begin{aligned} M_{xx} &= \Sigma\, m_{xri} \cos \alpha_{ri} = \Sigma\, s_{ri} \cos^2 \alpha_{ri} \\ M_{xy} &= \Sigma\, m_{xri} \cos \beta_{ri} = \Sigma\, s_{ri} \cos \alpha_{ri} \cos \beta_{ri} \\ M_{xz} &= \Sigma\, m_{xri} \cos \gamma_{ri} = \Sigma\, s_{ri} \cos \alpha_{ri} \cos \gamma_{ri} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo β_{ri} und γ_r die durch die positiven Richtungen i sowie durch die positiven Richtungen y und z eingeschlossenen, nicht mehr als 180° betragenden Winkel bilden.

Ganz ähnlich ist es im Falle, wenn $\varphi_y = 1$ und $\varphi_x = \varphi_z = 0$ beträgt:

$$\left.\begin{aligned} M_{yx} &= \Sigma\, m_{yri} \cos \alpha_{ri} = \Sigma\, s_{ri} \cos \alpha_{ri} \cos \beta_{ri} \\ M_{yy} &= \Sigma\, m_{yri} \cos \beta_{ri} = \Sigma\, s_{ri} \cos^2 \beta_{ri} \\ M_{yz} &= \Sigma\, m_{yri} \cos \gamma_{ri} = \Sigma\, s_{ri} \cos \alpha_{ri} \cos \gamma_{ri} \end{aligned}\right\} \tag{15a}$$

und genau gleich, wenn $\varphi_z = 1$ und $\varphi_x = \varphi_y = 0$ ist:

$$\left.\begin{aligned} M_{zx} &= \Sigma\, m_{zri} \cos \alpha_{ri} = \Sigma\, s_{ri} \cos \alpha_{ri} \cos \gamma_{ri} \\ M_{zy} &= \Sigma\, m_{zri} \cos \beta_{ri} = \Sigma\, s_{ri} \cos \beta_{ri} \cos \gamma_{ri} \\ M_{zz} &= \Sigma\, m_{zri} \cos \gamma_{ri} = \Sigma\, s_{ri} \cos^2 \gamma_{ri} \end{aligned}\right\} \tag{15b}$$

Ganz allgemein kann festgestellt werden, dass zum jeglicher Achse des Koordinatensystems »*k*« gemässen Winkeldrehungsvektor ein einziger, völlig allgemein gerichteter Momentenvektor gehört, der von den in den Gleichungen (15) angegebenen Momentenvektorprojektionen gekennzeichnet wird.

Das letzte Ziel ist endlich die Bestimmung von Momentenvektoren, die einen irgendeiner Achse k gemässen Momentenvektor vom Wert $M_k = 1$ ausgleichen, d. h. die Bestimmung der Werte des Momentenausgleichsfaktors oder Momentenanteils n_{kri}, also z. B., *was diese Werte im Falle von* $M_x = 1$ *und* $M_y = M_z = 0$ *betragen?*

Bei Berücksichtigung des Grundgedankens der kinetischen Methoden müssen derartige, vorläufig unbekannte Winkeldrehungsvektoren φ_{xx}, φ_{xy}, φ_{xz},

die im allgemeinen von Null verschieden sind, bestimmt werden, bei denen

$$M_x = 1$$
$$M_y = 0$$
$$M_z = 0$$

und dann kann der Momentenausgleichsvektor n_{xri} auf Grund folgenden Zusammenhanges gewonnen werden:

$$n_{xri} = m_{xri}\,\varphi_{xx} + m_{yri}\,\varphi_{xy} + m_{zri}\,\varphi_{xz} = \Sigma\, m_{kri}\,\varphi_{xk} \tag{16}$$

wo $k : x, y, z$ und $i : 1, 2, 3$ weiters $r : b, c, \ldots$

Die Gleichungen, die zur Bestimmung der unbekannten Winkeldrehungsvektoren φ_{xk} aufgestellt werden können, sind folgende:

$$\left.\begin{aligned} M_{xx}\,\varphi_{xx} + M_{yx}\,\varphi_{xy} + M_{zx}\,\varphi_{xz} + 1 &= 0 \\ M_{xy}\,\varphi_{xx} + M_{yy}\,\varphi_{xy} + M_{zy}\,\varphi_{xz} + 0 &= 0 \\ M_{xz}\,\varphi_{xx} + M_{yz}\,\varphi_{xy} + M_{zz}\,\varphi_{xz} + 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ganz ähnlicherweise sind die *im Falle von* $M_y = 1$ *und* $M_x = M_z = 0$ bestimmbaren Momentenausgleichsvektoren auf Grund der Gleichung

$$n_{yri} = m_{xri}\,\varphi_{yx} + m_{yri}\,\varphi_{yy} + m_{zri}\,\varphi_{yz} = \Sigma\, m_{kri}\,\varphi_{yk} \tag{16a}$$

auszurechnen, wobei für φ_{yk} die obigen Gleichungen aufgestellt werden können, mit dem Unterschied jedoch, dass das absolute Glied der ersten und dritten Gleichung gleich Null ist und das der zweiten gleich eins.

Dasselbe gilt *für den Fall von* $M_z = 1$, $M_x = M_y = 0$

$$n_{zri} = m_{xri}\,\varphi_{zx} + m_{yri}\,\varphi_{zy} + m_{zri}\,\varphi_{zz} = \Sigma\, m_{kri}\,\varphi_{zk} \tag{16b}$$

wobei in den Gleichungen das absolute Glied der ersten und zweiten Gleichung Null beträgt, während das der dritten gleich eins ist. Also ist im allgemeinen

$$n_{kri} = \Sigma\, m_{kri}\,\varphi_{kk} \tag{16c}$$

Wenn ein Koordinatensystem »k« gefunden werden könnte, bei dem

im Fall $\varphi_x = 1$, $\varphi_y = \varphi_z = 0$: $M_{xx} \neq 0$, aber $M_{xy} = M_{xz} = 0$

im Fall $\varphi_y = 1$, $\varphi_x = \varphi_z = 0$: $M_{yy} \neq 0$, aber $M_{yx} = M_{yz} = 0$

im Fall $\varphi_z = 1$, $\varphi_x = \varphi_y = 0$: $M_{zz} \neq 0$, aber $M_{zx} = M_{zy} = 0$

ausmacht, so ergibt sich beispielsweise für den Fall von

$\varphi_x = 1$, $\varphi_y = \varphi_z = 0$ auf Grund der ersten Gleichung der Formeln (17)

$$\varphi_{xx} = -\frac{1}{M_{xx}} = -\frac{1}{\Sigma\, m_{xri}\cos\alpha_{ri}} = \frac{1}{\Sigma\, s_{ri}\cos^2\alpha_{ri}}$$

und

$$n_{xri} = -\frac{m_{xri}}{\Sigma\, m_{xri}\cos\alpha_{ri}} = -\frac{s_{ri}\cos\alpha_{ri}}{\Sigma\, s_{ri}\cos^2\alpha_{ri}} \tag{18}$$

und im allgemeinen

$$n_{kri} = -\frac{s_{ri}\cos\delta_{ri}}{\Sigma\, s_{ri}\cos^2\delta_{ri}} \tag{18a}$$

Wenn von ebenen Knotenpunkten die Rede ist, so geht die Formel (18), da $\cos \delta_r = 1$ beträgt, natürlich in die gut bekannte Formel

$$n_r = - \frac{s_r}{\Sigma s_r} \tag{19}$$

über, vorausgesetzt, dass n_r nicht den Momentenanteil von absolutem Wert, sondern das mit Vorzeichen versehene ausgleichende Moment bedeutet.

Die Vorbedingung dessen, dass die Gleichungen (18) der Wirklichkeit entsprechen, ist auf Grund des Obigen, dass

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, s_{ri} \cos \alpha_{ri} \cos \beta_{ri} &= 0 \\ \Sigma\, s_{ri} \cos \alpha_{ri} \cos \gamma_{ri} &= 0 \\ \Sigma\, s_{ri} \cos \beta_{ri} \cos \gamma_{ri} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

ausmacht.

Diese Bedingung ist in den meisten Fällen leicht zu erfüllen. So zum Beispiel in jenem Fall, wo jeder Stab des Knotenpunkts zueinander senkrecht ist und das Koordinatensystem »k« so angenommen wird, dass die Koordinatenachsen mit den Stabachsen zusammenfallen und dass die Gleichungen (20) in sich selbst Null ergeben, da jedes ihrer Glieder einzeln gleich Null ist. (Wenn

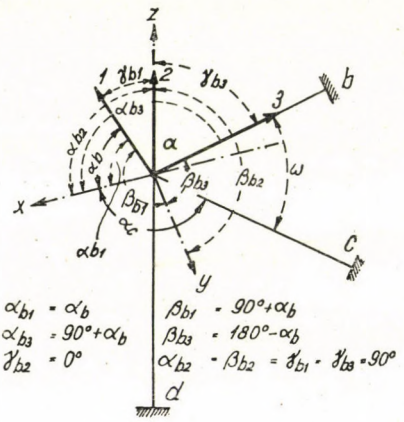


Abb. 4

nämlich der Winkel α 0 oder 180° ausmacht, so beträgt der dazugehörige Winkel β oder γ 90°. Genau dasselbe ist bei den Winkeln β und γ der Fall. Das Produkt des Kosinus dieser Winkel ist immer gleich Null.)

Ein anderer Fall aus der Praxis ist derjenige, wo die in der waagerechten Ebene liegenden Ringe von senkrechten oder eventuell nahezu senkrechten Stäben verbunden werden. Diese nahezu senkrechten Stäbe können in den vorliegenden Berechnungen in einer guten Annäherung als senkrecht behandelt werden. So können die Achsen x und y in der Ebene des Riegels, d. h. in waage-

rechter Ebene angenommen werden und die Achse z als senkrecht. In diesem Fall ist jedes Glied der zweiten und dritten Gleichung der Formel (20) in sich selbst Null, während in der ersten Gleichung nur die der Richtung 1 und 3 gemässen Glieder der an den Riegel angeschlossenen Balken vorkommen und die übrigen Glieder in sich selbst gleich Null sind. *(Abb. 4)*. Mit den auf *Abb. 4* vorkommenden Bezeichnungen kann die erste Gleichung bei Berücksichtigung der untenstehenden Zusammenhänge, wie folgt, gewonnen werden:

Für den Stab a—b:

$$\cos \alpha_{b1} \cos \beta_{b1} = -\sin \alpha_b \cos \alpha_b = -\frac{1}{2} \sin 2 \alpha_b$$
$$\cos \alpha_{b2} \cos \beta_{b2} = 0$$
$$\cos \alpha_{b3} \cos \beta_{b3} = \sin \alpha_b \cos \alpha_b = \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_b$$

die übrigen Glieder sind alle gleich Null.

Für den Stab a—c:

$$\cos \alpha_{c1} \cos \beta_{c1} = \sin \alpha_c \cos \alpha_c = \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_c$$
$$\cos \alpha_{c2} \cos \beta_{c2} = 0$$
$$\cos \alpha_{c3} \cos \beta_{c3} = \sin \alpha_c \cos \alpha_c = \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_c$$

die übrigen Glieder sind alle gleich Null.

Für den Stab a—d sind alle Glieder gleich Null.

Nunmehr hat die erste Gleichung nach Weglassen des Koeffizienten $\frac{1}{2}$ und nach Ordnung folgendes Aussehen:

$$-s_{b1} \sin 2 \alpha_b + s_{b3} \sin 2 \alpha_b = -s_{c1} \sin 2 \alpha_c + s_{c3} \sin 2 \alpha_c$$

beziehungsweise

$$\sin 2 \alpha_b (s_{b3} - s_{b1}) = \sin 2 \alpha_c (s_{c3} - s_{c1})$$

aber da

$$\alpha_c = 180^\circ - (\omega + \alpha_b)$$

so ist

$$\sin 2 \alpha_b (s_{b3} - s_{b1}) = \sin 2 (\omega + \alpha_b) \cdot (s_{c1} - s_{c3})$$

Aus dieser Gleichung kann die einzige Unbekannte α_b bestimmt werden. Wenn Symmetrie herrscht, d. h. wenn

$$s_{b1} = s_{c1} \quad \text{und} \quad s_{b3} = s_{c3}$$

so ist

$$\alpha_b = \alpha_c \quad \text{und} \quad \alpha_b = 90^\circ - \frac{\omega}{2}$$

wo ω den durch die zwei Riegelbalken eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

Demgemäss ist also die Achse x in der Ebene des Riegels, in der Winkelhalbierungslinie des Knotenpunktes anzunehmen. Die Momentenausgleichsfaktoren können auf Grund der einfachen Formeln (18) bestimmt werden.

B) BERECHNUNG VON RAHMEN MIT UNBEWEGLICHEN KNOTENPUNKTEN

1. Der Verlauf der Berechnung

Nach Vorausschickung der obigen Erörterungen soll nun der Verlauf der Berechnung eines Rahmens mit festen Knotenpunkten, wie folgt, angegeben werden.

Zuallererst werden die infolge der äusseren Belastung (eventuell infolge von »äusserer Einwirkung« im allgemeinen, wie z. B. Knotenpunktsverschiebung, Temperaturänderung usw.) an den Knotenpunktsenden der einzelnen Stäbe auftretenden Einspannmomente berechnet, beziehungsweise deren Momentenvektoren gemäss den Richtungen »*i*«. (Im Falle von räumlichen Konstruktionen sind unter Einspannmomenten natürlich sowohl Biegemomente als auch Verdrehungsmomente zu verstehen.) Diese sollen bei irgendeinem Stabe r in der Richtung i mit M_{Ri} angenommen werden. (Der Einfachheit halber wird das Zeichen des Knotenpunktsendes des Stabes weggelassen.)

Indem man die Momentenvektoren M_{Ri} auf die Achsen x, y, z des Koordinatensystems »*k*« projiziert, werden die Projektionen M_x, M_y, M_z, kurz M_k des auf den Knotenpunkt wirkenden, im allgemeinen unausgeglichenen Momentenvektors M gemäss den bekannten Transformationsformeln bestimmt :

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \Sigma\, M_{Ri} \cos \alpha_{ri} \\ M_y &= \Sigma\, M_{Ri} \cos \beta_{ri} \\ M_z &= \Sigma\, M_{Ri} \cos \gamma_{ri} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

wo α, β und γ die nicht mehr als 180° betragenden Winkel zwischen den Richtungen i und k bedeuten. Die Addition bezieht sich auf alle Stäbe, die im Knotenpunkt zusammentreffen und auf jede Richtung i dieser Stäbe.

Der nächste Schritt besteht im einzeln und nacheinander erfolgenden Ausgleich dieser Momentenvektoren M_k im fraglichen Knotenpunkt, dann die Übertragung der ausgleichenden Momentenvektoren in der beim Momentenausgleichsverfahren üblichen Weise. Dabei ist in Betracht zu ziehen, dass bei räumlichen Rahmen auch ein Verdrehungsmomentenvektor vorkommt, dessen Übertragungsmomentenvektor laut der Formel (7) genau der Verdrehungsmomentenvektor selbst ist.

Wenn die Konstruktion aus mehreren Knotenpunkten besteht, so verändern die übertragenen Momentenvektoren im noch unausgeglichenen Knotenpunkt die Werte der bereits früher bestimmten Momentenvektoren M_k, und so müssen die übertragenen Momentenvektoren gemäss diesen berichtigt werden. Der Ausgleich der Momentenvektoren M_k hat natürlich mit diesen berichtigten Werten durchgeführt zu werden. Der weitere Verlauf der Berechnung ist sodann derselbe wie weiter oben geschildert.

Das hier Gesagte hat, wie bereits in der Einleitung der vorliegenden Abhandlung erwähnt wurde, ausschliesslich für diejenigen Konstruktionen Geltung, die unbewegliche Knotenpunkte aufweisen, bzw. durch gedachte Stützstäbe festgehalten werden.

2. *Beispiele*

Zur Beleuchtung der Frage des »Momentenausgleichs am räumlichen Knotenpunkt« sollen einige einfache Beispiele vorgeführt werden.

Als *erstes Beispiel* betrachte man den auf *Abb. 5* gezeigten räumlichen Knotenpunkt, dessen drei Stäbe zueinander senkrecht sind. Auf den Stab *a—b* wirkt in der Mitte des Stabes, exzentrisch, 0,5 m von der Stabachse entfernt, eine senkrechte Belastung von 1,6 t. Die Stäbe *a—b* und *a—c* liegen in waagerechter Ebene, ihr Querschnitt ist ein stehendes Viereck von 70 × 50 cm Ausmass. Der Stab *a—d* ist senkrecht und hat ein Mass von 50 × 50 cm.

Die Achsen des Koordinatensystems »*k*« decken sich mit den Achsen der drei Stäbe, seine positiven Halbstrahlen wurden in der aus *Abb. 5* ersichtlichen Weise angenommen. Die Art der Annahme des Koordinatensystems »*i*« wurde auf *Abb. 5b* veranschaulicht.

Berechnung der Rahmenkonstanten :

Stab a—b und a—c :

$$J_1 = \frac{7^3 \cdot 5}{12} = 143 \text{ dm}^4 \qquad J_2 = \frac{5^3 \cdot 7}{12} = 73 \text{ dm}^4$$

$$J_3 = \frac{0{,}385 \cdot E}{E}\, 0{,}0694\, \frac{5^3 \cdot 7^3}{5^2 + 7^2} = 15{,}5 \text{ dm}^4$$

$$s_1 = \frac{143}{5} = 28{,}6 \qquad s_2 = \frac{73}{5} = 14{,}6 \qquad s_3 = \frac{15{,}5}{5} = 3{,}1$$

laut den Formeln (6) und (9).

Stab a—d :

$$J_1 = J_2 = \frac{5^4}{12} = 52{,}1 \text{ dm}^4 \qquad J_3 = 0{,}385 \cdot 0{,}0347 \cdot 5^4 = 8{,}4 \text{ dm}^4$$

$$s_1 = s_2 = \frac{52{,}1}{5} = 10{,}4 \qquad s_3 = \frac{8{,}4}{5} = 1{,}7$$

Momentenanteile :

a) *Im Falle von* $M_x = 1$: Am Stabe *a—b* und *a—d* kann nur ein ausgleichender Momentenvektor gemäss Richtung »1« auftreten, am Stabe *a—c* nur gemäss Richtung »3«.

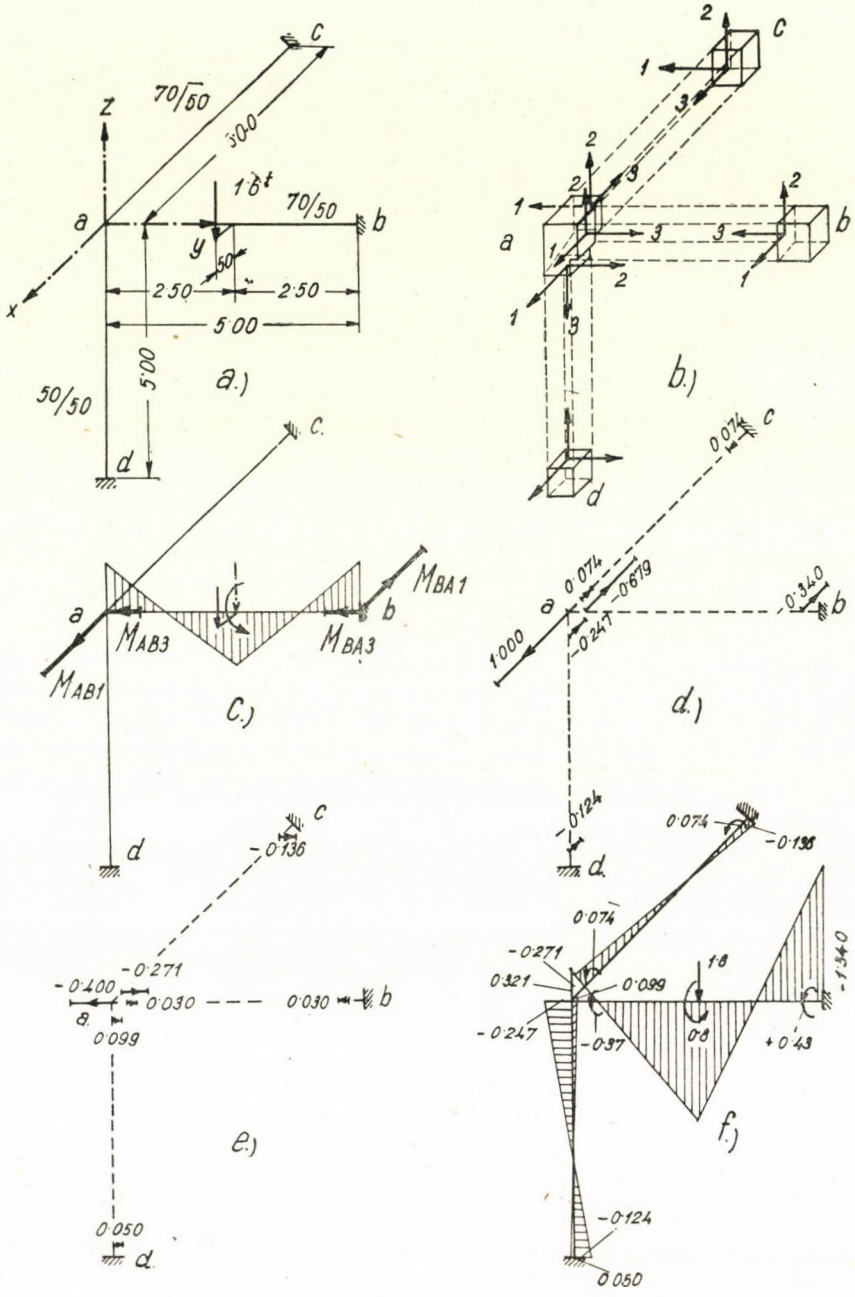

a.)
b.)
c.)
d.)
e.)
f.)
70/50
50/50
2·50
5·00
1·6t
MAB1
MAB3
MBA1
MBA3
0·074
-0·679
-0·247
1·000
-0·340
-0·124
-0·136
-0·271
-0·400
0·030
0·099
0·050
0·321
-0·37
0·8
+0·43
-1·340

Abb. 5

	s	δ	$\cos\delta$	$\cos^2\delta$	$s\cos\delta$	$s\cos^2\delta$	n'	n
Stab a—b, Richtung 1	28,6	0	1,0	1,0	28,6	28,6	0,679	— 0,679
Stab a—c, Richtung 3	3,1	180	— 1,0	1,0	— 3,1	3,1	0,074	0,074
Stab a—d, Richtung 1	10,4	0	1,0	1,0	10,4	10,4	0,247	— 0,247
						Σ 42,1	1,000	

Bei der Bestimmung von Momentenanteilen ist es zweckmässig, nicht nur die Werte von »n« zu berechnen, sondern auch die Werte des sogenannten »n'«, die man auf Grund der Multiplikation $n' = -n \cdot \cos\delta$ erhält. Die Werte von n' ergeben die Projektionen der Momentenanteilsvektoren und daher *ist die Summe der Werte von n' immer gleich eins*, was eine gute Kontrolle ermöglicht, d. h.

$$\Sigma\, n'_{kri} = 1$$

Die Berechnung von n' erfolgt auf Grund nachstehender Formel:

$$n'_{kri} = \frac{s_{ri}\cos^2\delta_{ri}}{\Sigma\, s_{ri}\cos^2\delta_{ri}} \tag{18b}$$

während der Wert von n auf Grund der Formel (18) bestimmt werden kann, z. B.

$$n'_{xc,3} = \frac{3{,}1}{42{,}1} = 0{,}074$$

$$n_{xc,3} = -\frac{-3{,}1}{42{,}1} = 0{,}074$$

b) *Im Falle von $M_y = 1$:* Infolge des unausgeglichenen Momenteneinheitsvektors treten am Stabe a—c lediglich in der Richtung 1, am Stabe a—b in der Richtung 3 und am Stabe a—d in der Richtung 2 Ausgleichsmomentenvektoren auf. Ihre Grösse beträgt auf Grund der obigen Angaben

$$n_{yb,3} = -0{,}074$$

$$n_{yc,1} = \quad 0{,}679$$

$$n_{yd,2} = -0{,}247$$

c) *Im Falle von $M_z = 1$:*

	s	δ	$\cos\delta$	$\cos^2\delta$	$s\cos\delta$	$s\cos^2\delta$	n'	n
Stab a—b, Richtung 2	14,6	0	1,0	1,0	14,6	14,6	0,4725	— 0,4725
Stab a—c, Richtung 2	14,6	0	1,0	1,0	14,6	14,6	0,4725	— 0,4725
Stab a—d, Richtung 3	1,7	180	— 1,0	1,0	— 1,7	1,7	0,0550	0,0550
					Σ	30,9	1,0000	

Anfangseinspannmomente

Die exzentrisch angreifende Belastung von 1,6 t bewirkt an den zwei starr eingespannten Enden des Stabes a—b — wenn man die exzentrische Belastung in ein in der Mitte (in der senkrechten Ebene des Stabes) angreifendes

und in ein in der Mitte, aber in einer zur Achse des Trägers senkrechten Ebene wirkendes Verdrehungsmoment von $1{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}8$ *tm* zerlegt — das Auftreten von Biegemomenten in der Ebene 2,3 und von Verdrehungsmomenten in der Ebene 1,2. Diese sind folgende (siehe *Abb. 5c)* :

$$M_{B,1} = \frac{1{,}6 \cdot 5}{8} = 1{,}0 \ tm$$

$$M'_{B,1} = -\frac{1{,}6 \cdot 5}{8} = -1{,}0 \ tm$$

$$M_{B,3} = -0{,}8 \cdot 0{,}5 = -0{,}4 \ tm$$

$$M'_{B,3} = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4 \ tm$$

Die mit grossen Buchstaben bezeichneten Kennziffern der Anfangseinspannmomente (A, B, ...) dienen zur Unterscheidung von den endgültigen Momenten.

Unausgeglichene Momentenvektoren : Von einem Momentenausgleich ist lediglich im Knotenpunkt »a« die Rede, deshalb ist

$$M_x = 1{,}0 \ tm$$
$$M_y = -0{,}4 \ tm$$

Ausgleichsmomente bzw. Momentenvektoren laut Formel (2)

Infolge M_x:

$$M_{xb,1} = -0{,}679 \cdot 1{,}0 = -0{,}679 \ tm$$

$$M_{xc,3} = 0{,}074 \cdot 1{,}0 = 0{,}074 \ tm$$

$$M_{xd,1} = -0{,}247 \cdot 1{,}0 = -0{,}247 \ tm$$

Infolge M_y:

$$M_{yb,3} = -0{,}074 \cdot (-0{,}4) = 0{,}030 \ tm$$

$$M_{yc,1} = 0{,}679 \cdot (-0{,}4) = -0{,}271 \ tm$$

$$M_{yd,2} = -0{,}247 \cdot (-0{,}4) = 0{,}099 \ tm$$

(siehe *Abb. 5 d)*

Übertragungsmomente laut Formeln (5) und (7)

$$M'_{xb,1} = -0{,}5 \cdot 0{,}679 = -0{,}340 \ tm$$

$$M'_{xc,3} = 0{,}074 \ tm$$

$$M'_{xd,1} = -0{,}5 \cdot 0{,}247 = -0{,}124 \ tm$$

$$M'_{yb,3} = 0{,}030 \ tm$$

$$M'_{yc,1} = -0{,}5 \cdot 0{,}271 = -0{,}136 \ tm$$

$$M'_{yd,2} = 0{,}5 \cdot 0{,}099 = 0{,}050 \ tm$$

siehe *Abb. 5 e)*

Endgültige Momentenvektoren :

$$M_{b,1} = 1{,}000 - 0{,}679 = 0{,}321 \; tm$$
$$M_{b,2} = 0$$
$$M_{b,3} = -0{,}400 + 0{,}030 = -0{,}370 \; tm$$
$$M_{c,1} = -0{,}271 \; tm$$
$$M_{c,2} = 0$$
$$M_{c,3} = 0{,}074 \; tm$$
$$M_{d,1} = -0{,}247 \; tm$$
$$M_{d,2} = 0{,}099 \; tm$$
$$M_{d,3} = 0$$
$$M_{b,1} = -1{,}000 - 0{,}340 = -1{,}340 \; tm$$
$$M_{b,3} = 0{,}400 + 0{,}030 = 0{,}430 \; tm$$

Die übrigen Werte der Momentenvektoren sind mit den obigen Werten der übertragenen Momentenvektoren identisch. Die Abbildung der Momente ist in gewohnter Weise auf *Abb. 5f* dargestellt, das heisst so, dass das fragliche Biegemoment in seiner eigenen Ebene auf derjenigen Seite des Stabes aufgetragen wird, an welcher es den Zug ausübt, und dass die Verdrehungsmomente mit einem Pfeil im Sinne der durch das Moment verursachten Drehung bezeichnet werden.

Als *zweites Beispiel* soll die aus *Abb. 6* ersichtliche Konstruktion dienen. Diese unterscheidet sich von der auf *Abb. 5* dargestellten Konstruktion lediglich darin, dass die übrigens auch hier in waagerechter Ebene liegenden Träger *a—b* und *a—c* miteinander einen Winkel von 120° einschliessen. (Der abgebildete Knotenpunkt ist eigentlich ein Knotenpunkt eines Kühlturmfundamentes von sechseckigem Grundriss.) Die Rahmenkonstanten der Stäbe sind dieselben wie im vorigen Beispiel, die Ausgleichsmomentenvektoren für $M_x = 1$ und für $M_y = 1$ sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

Für den Fall von $M_x = 1$:

	s	δ	$\cos\delta$	$\cos^2\delta$	$s\cos\delta$	$s\cos^2\delta$	n'	n
ab,1	28,6	30	0,866	0,750	24,77	21,45	0,391	— 0,452
ab,3	3,1	120	— 0,500	0,250	— 1,55	0,78	0,014	0,028
ac,1	28,6	30	0,866	0,750	24,77	21,45	0,391	— 0,452
ac,3	3,1	120	— 0,500	0,250	— 1,55	0,78	0,014	0,028
ad,1	10,4	0	1,000	1,000	10,40	10,40	0,190	— 0,190
					Σ	54,86	1,000	

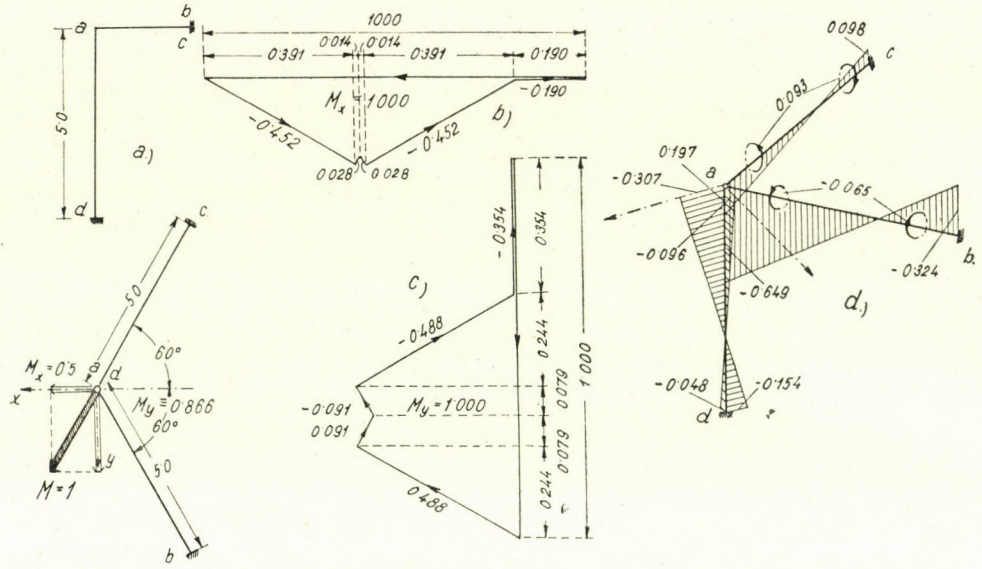


Abb. 6

Für den Fall von $M_y = 1$:

	s	δ	$\cos\delta$	$\cos^2\delta$	$s\cos\delta$	$s\cos^2\delta$	n'	n
ab,1	28,6	60	0,500	0,250	14,30	7,15	0,244	— 0,488
ab,3	3,1	30	0,866	0,750	2,68	2,33	0,079	— 0,091
ac,1	28,6	120	— 0,500	0,250	— 14,30	7,15	0,244	0,488
ac,3	3,1	150	— 0,866	0,750	— 2,68	2,33	0,079	0,091
ad,2	10,4	0	1,000	1,000	10,40	10,40	0,354	— 0,354
					Σ	29,36	1,000	

Die Koordinatensysteme wurden genau so angenommen wie im ersten Beispiel *(Abb. 5a* und *5b)*.

Als unausgeglichenes Moment soll der auf *Abb. 6* mit einem Pfeil bezeichnete Momentenvektor angenommen werden, der in der Verlängerung des Stabes a—c den Wert einer Einheit aufweist. Seine Projektionen in den Richtungen x und y sind also

$$M_x = 0{,}500 \cdot 1 = 0{,}500 \qquad M_y = 0{,}866 \cdot 1 = 0{,}866$$

Die Ausgleichsmomentenvektoren, sowie die *übertragenen Momentenvektoren* sind infolge beider Projektionen auf einmal:

$$M_{b,1} = -0{,}452 \cdot 0{,}500 - 0{,}488 \cdot 0{,}866 = -0{,}649\ tm\ ; \quad M'_{b,1} = -0{,}324\ tm$$

$$M_{b,3} = \ \ 0{,}028 \cdot 0{,}500 - 0{,}091 \cdot 0{,}866 = -0{,}065\ tm\ ; \quad M'_{b,3} = -0{,}065\ tm$$

$$M_{c,1} = -0{,}452 \cdot 0{,}500 + 0{,}488 \cdot 0{,}866 = \ \ 0{,}197\ tm\ ; \quad M'_{c,1} = \ \ 0{,}098\ tm$$

$$M_{c,3} = -0{,}028 \cdot 0{,}500 + 0{,}091 \cdot 0{,}866 = 0{,}093\ tm\ ;\quad M'_{c,3} = 0{,}093\ tm$$

$$M_{d,1} = -0{,}190 \cdot 0{,}500 \qquad 0 \qquad = -0{,}095\ tm\ ;\quad M'_{d,1} = -0{,}048\ tm$$

$$M_{d,2} = \qquad 0 \qquad -0{,}354 \cdot 0{,}866 = -0{,}307\ tm\ ;\quad M'_{d,2} = -0{,}154\ tm$$

Die Darstellung der Momente erfolgte auf *Abb. 6d* und — zwecks besserer Anschaulichkeit — die der im vorliegenden Fall ebenen Vektorenfiguren der ausgeglichenen Momentenanteilvektoren, sowie die der ausgeglichenen Momentenvektoren auf den *Abbildungen 6b* und *6c*.

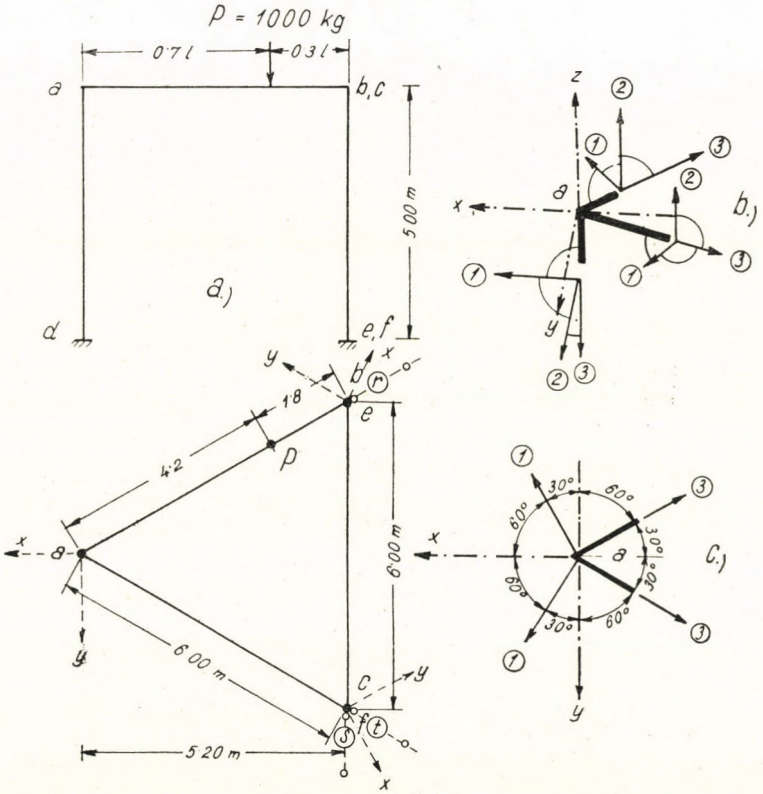


Abb. 7

Als *drittes Beispiel* soll die auf *Abb. 7* dargestellte Aufgabe gelöst werden. Der abgebildete Eisenbetonrahmen besteht aus 3 senkrechten — unten vollkommen eingespannten — Stielen und aus drei waagerechten Balken. Auf dem Balken *a—b* lastet auf der dargestellten Weise eine senkrechte Kraft von 1000 kg. Der Rahmen ist dreifach verschiebbar. Waagerechte, gedachte Stützstäbe (*r*, *s*, *t*) wurden in den Knotenpunkten *a*, *b* und *c* in den Richtungen *a—b*, *b—c* und *a—c* angenommen *(Abb. 7a)*.

Die Koordinatensysteme k und i sind auf *Abb. 7b* axonometrisch, auf *Abb. 7c* im Grundriss dargestellt. Der Querschnitt der Riegel und Stiele ist ein rechtwinkeliges Viereck (im Ausmass von etwa 80 × 50 cm, bzw. von 80 × 80 cm).

Die *Rahmenkonstanten* und die *Momentenanteile* sind folgende:

Riegel : 80/50

$$J_1 \quad 219{,}9\,; \qquad J_2 \quad 83{,}3\,;$$

$$J_3 \quad 0{,}385 \cdot 0{,}0694 \frac{5^3 \cdot 8^3}{5^2 + 8^2} = 19{,}1$$

$$s_1 = \frac{219{,}9}{6} = 36{,}65\,; \quad s_2 = \frac{83{,}3}{6} = 13{,}88\,; \quad s_3 = \frac{19{,}1}{6} = 3{,}18$$

Stiel : 80/80

$$J_1 = J_2 = \frac{8^4}{12} = 341{,}3\,; \quad J_3 = 0{,}385 \cdot 0{,}0347 \cdot 8^4 = 54{,}7$$

$$s_1 = s_2 = \frac{341{,}3}{5} = 68{,}26\,; \quad s_3 = \frac{54{,}7}{5} = 10{,}94$$

$$z_1 = z_2 = \frac{68{,}26}{5} = 13{,}65$$

TABELLE I

Berechnung der Momentenanteile

Zeichen und Richtung des Stabes $M_x = 1{,}00$	s	δ	$\cos\delta$	$\cos^2\delta$	$s\cos\delta$	$s\cos^2\delta$	n'	n
ab,1	36,65	60	0,500	0,250	18,32	9,16	0,100	— 0,200
ab,3	3,18	150	— 0,866	0,750	— 2,75	2,39	0,026	0,030
ac,1	36,65	60	0,500	0,250	18,32	9,16	0,100	— 0,200
ac,3	3,18	150	— 0,866	0,750	— 2,75	2,39	0,026	0,030
ad,1	68,26	0	1,000	1,000	68,26	68,26	0,746	— 0,746
$M_y = 1{,}00$					Σ	91,36		
ab,1	36,65	150	— 0,866	0,750	— 31,74	27,49	0,220	0,254
ab,3	3,18	120	— 0,500	0,250	— 1,59	0,80	0,006	0,013
ac,1	36,65	30	0,866	0,750	31,74	27,49	0,220	— 0,254
ac,3	3,18	60	0,500	0,250	1,59	0,80	0,006	— 0,013
ad,2	68,26	0	1,000	1,000	68,26	68,26	0,548	— 0,548
$M_z = 1{,}00$					Σ	124,84		
ab,2	13,88	0	1,000	1,000	13,88	13,88	0,359	— 0,359
ac,2	13,88	0	1,000	1,000	13,88	13,88	0,359	— 0,359
ad,3	10,94	180	— 1,000	1,000	— 10,94	10,94	0,282	0,282
					Σ	38,70		

Der Rahmen soll im ersten Schritte wie ein Rahmen mit festen Knotenpunkten berechnet werden und es sollen die Festhaltungskräfte bestimmt werden.

TABELLE II.

Der Momentenausgleich

1	2,2,2.				*a*						1,1,1.				*b*						3,3				*c*					
2	*x*					*y*					*x*					*y*					*x*					*y*					*k*
3	ab1	ab3	ac1	ac3	ad1	ab1	ab3	ac1	ac3	ad2	ba1	ba3	bc1	bc3	be1	ba1	ba3	bc1	bc3	be2	ca1	ca3	cb1	cb3	cf1	ca1	ca3	cb1	cb3	cf2	*ri*
4	,500	—,866	,500	—,866	1,000	—,866	—,500	,866	,500	1,000	,500	—,866	,500	—,866	1,000	,866	,500	—,866	—,500	1,000	,500	—,866	,500	—,866	1,000	—,866	—,500	,866	,500	1,000	cos δ
5	—,200	,030	—,200	,030	—,746	,254	,013	—,254	—,013	—,548	—,200	,030	—,200	,030	—,746	—,254	—,013	,254	,013	—,548	—,200	,030	—,200	,030	—,746	,254	,013	—,254	—,013	—,548	*n*
6	—378										882																				M_{Ri}
7	—189					327					441					764															M_k
8											(—88	13	—88	13	—329	—194	—10	194	10	—420)											M_{rik}
9	—141	3									—282	3	106	23	—329					—420	—31	—14	53	23							M_{ri}
10	(—70	—2	0	0	0	122	—2	0	0	0)											(—16	12	26	—20	0	27	7	46	12	0)	
11	— 72 — 189 = — 261					120 + 327 = 447															2					92					
12	(52	—8	52	—8	195	114	6	—114	—6	—246)											(—	—	—	—	—2	23	1	—23	—1	—50)	
13	166	—2	—62	—14	195					—246	83	—2	—12	—1							23	1	—23	—1	—2					—50	
14	14	0	12	1							(42	2	—6	1	0	72	—1	10	0	0)	—3	0	6	2							
15	(—7	0	6	—1	0	12	0	10	0	0)	39					81					(—2	0	3	—2	0	2	0	5	1	0)	
16	—2					22					(—8	1	—8	1	—29	—21	—1	21	1	—44)	1					8					
17	(—	—	—	—	2	6	—	—6	—	—12)	—29	0	13	2	—29					—44	(—	—	—	—	—1	2	—	—2	—	—4)	
18	6	0	—6	0	2					—12	3	0	—1	0	0						2	0	—2	0	—1					—4	
19			1	0							(1	0	—1	0	0	2	—	1	—	—)											
20	(—	—	—	—	—1	—	—	—	—	—)	0					3															
21			—1								(—	—	—	—	—	—1	—	1	—	—2)											
22					1						—1	0	1	0	0					—2											
23	—361	1	—55	—13	198					—258	657	1	107	24	—358					—466	—9	—13	34	24	—3					—54	
24	$M_{da_1} = \frac{1}{2}$ 198 =				99	$M_{da_2} = -\frac{1}{2}$ 258 =				—129	$M_{eb_1} = -\frac{1}{2}$ 358 =				—179	$M_{eb_2} = -\frac{1}{2}$ 466 =				—233	$M_{fc_1} = -\frac{1}{2}$ 3 =				—2	$M_{fc_2} = -\frac{1}{2}$ 54 =				—27	M_{ri}
25	(—180	—1	—28	11	198	313	0	—48	—7	—258	328	—1	53	—21	—358	569	0	—93	—10	—466	—4	11	17	—21	—3	8	7	27	12	—54	
26	0					0					1					0					0						0					

Anfangseinspannmomente :

$$M_{B,1} = \quad 0{,}1470 \cdot 6 \cdot 1000 = \quad 882 \text{ kgm}$$

$$M_{A,1} = -\,0{,}0630 \cdot 6 \cdot 1000 = -\,378 \text{ kgm}$$

Momente M_k *:*

$$M_{bx} = \quad 0{,}500 \cdot 882 = \quad 441 \text{ kgm}$$
$$M_{by} = \quad 0{,}866 \cdot 882 = \quad 764 \text{ kgm}$$
$$M_{ax} = -\,0{,}500 \cdot 378 = -\,189 \text{ kgm}$$
$$M_{ay} = \quad 0{,}866 \cdot 378 = \quad 327 \text{ kgm}$$

Die Operation des Momentenausgleichs ist in Tabelle II. zusammengestellt. Der Momentenausgleich wurde im Knotenpunkt b begonnen, wo die auszugleichenden Momente $M_{bx} = 441$ kgm und $M_{by} = 764$ kgm betragen. Diese wurden in der Richtung x und y ausgeglichen und mit den Werten des entsprechenden Momentenanteils multipliziert, z. B.

$M_{ba,x} = -\,0{,}200 \cdot 441 = -\,88$, $M_{ba,y} = -\,0{,}254 \cdot 764 = -\,194$ usw.

Diese Werte sind die in den Klammern angegebenen Zahlen. In der nächsten Zeile sind die Momentenprojektionen addiert, z. B.

$$M_{ba,1} = -\,88 - 194 = -\,282, \quad M_{ba,3} = 13 - 10 = 3, \ldots$$

Danach wurde die Übertragung der Momente an die anderen Enden der Stäbe durchgeführt und die Ausgleichsmomente wurden unterstrichen. Beispielsweise

$M'_{ba,1} = M_{ab,1} = -\frac{1}{2}\,282 = -\,141$, $M'_{ba,3} = M_{ab,3} = 3$ (9. Zeile in der Kolonne a,x), $M'_{bc,1} = M_{cb,1} = \frac{1}{2}\,106 = 53$, $M'_{bc,3} = M_{cb,3} = 23$ (9. Zeile in der Kolonne c,x) . . . usw.

Nun kam der Knotenpunkt a an die Reihe : die übertragenen Momente wurden auf die Achsen x, y projiziert (die in Klammern stehenden Werte der 10. Zeile der Kolonne a, x, y) und diese mit den Anfangseinspannmomenten addiert, z. B.

$$M_{ax} = -\,70 - 2 - 189 = -\,261$$
$$M_{ay} = \quad 122 - 2 + 327 = \quad 447$$

und so die auszugleichenden Momente erhalten. Nachdem der Momentenausgleich, die Übertragung usw. hier durchgeführt waren, kamen die Knotenpunkte c, dann b usw. an die Reihe. Die Summe der anfänglichen, ausgleichenden und übertragenen Momente ergibt die endgültigen Momente (23. und 24. Zeile). Wenn diese zur Kontrolle gemäss den Achsen x und y projiziert werden, muss die Projektionssumme Null betragen.

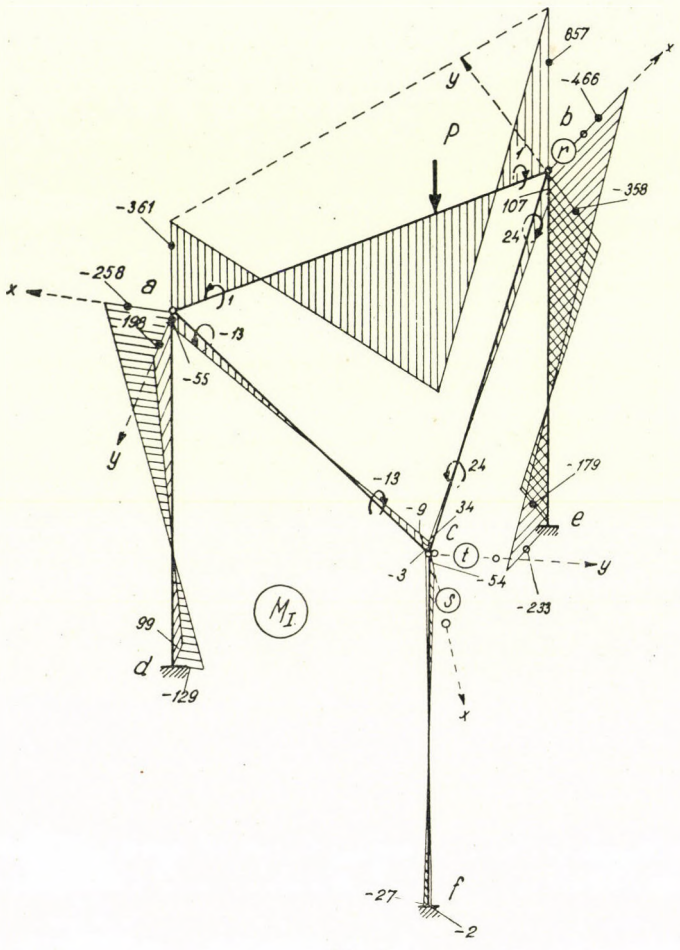


Abb. 8

Es sei noch erwähnt, dass die Operation des Momentenausgleichs zweckmässigerweise so vorgenommen wird, dass an allen Knotenpunkten der Momentenausgleich und dann die Momentenübertragung gleichzeitig durchgeführt werden. In diesem Falle gelangen nämlich die entsprechenden Werte in eine Reihe, die Möglichkeit eines Irrtums ist geringer, obgleich die Konvergenz — natürlich — langsamer wird.

Die Momentenlinie des Rahmens, der nun zu einem mit festen Knotenpunkten umgestaltet wurde, ist auf *Abb. 8* dargestellt. Auf Grund dieser Momente und der äusseren Belastung wurden — aus dem Ausgleich der Knotenpunkte — in den gedachten Stützstäben r, s und t die Stützkräfte bestimmt *(Abb. 9)*. Demgemäss beträgt

$$R_r = 84{,}1 \text{ kg}; \quad R_s = 36{,}7 \text{ kg}; \quad R = 23{,}0 \text{ kg}.$$

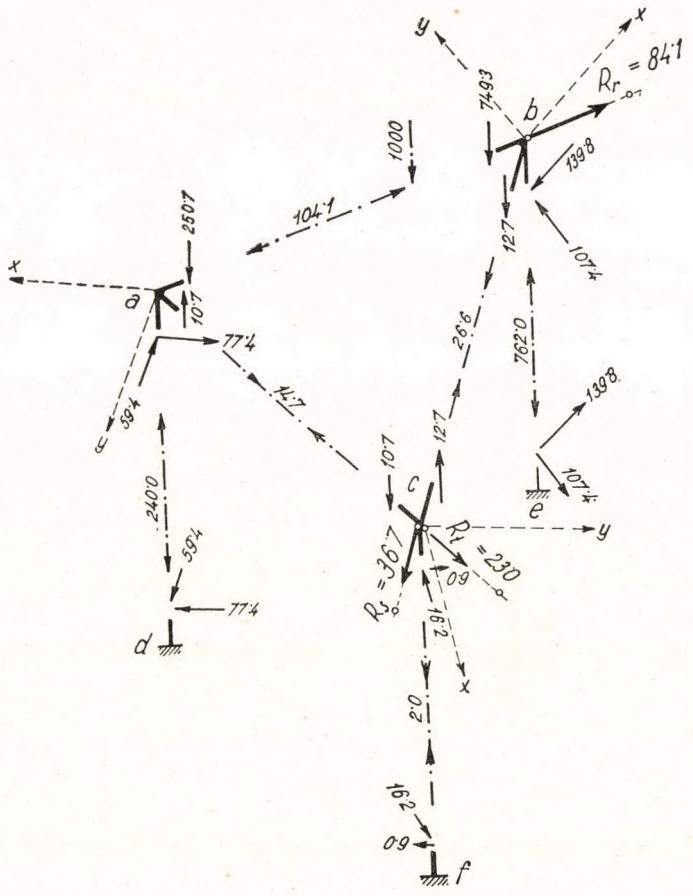


Abb. 9

Die Festhaltungs- bzw. Verschiebungskraft ist als positiv angenommen, wenn sie auf den gestützten Knotenpunkt einen Zug ausübt. In vorliegendem Falle entsprechen also die positiven Richtungen den Richtungen *a*—*b*, *b*—*c* und *a*—*c*.

C) GENAUE BERECHNUNG VON RAHMEN MIT BEWEGLICHEN KNOTENPUNKTEN

1. Allgemeines

Das Grundprinzip der Berechnung wurde im Abschnitt *A)* geschildert. Der allgemeine Berechnungsfall entspricht dem von *Suter* angewendeten Grundprinzip.

Es soll angenommen werden, dass die Momente (M_I) der mit gedachten Lagern gestützten Konstruktion bekannt sind. Des weiteren sollen auch die Festhaltungskräfte, R_a, R_b, ... R_n in den gedachten Stützen a, b, ... n als bekannt angenommen werden. Das Ziel ist nun die Berechnung der infolge der Verschiebungskräfte P_a, P_b, ... P_n auftretenden Momente (M_{II}), d. h.

$$M_{II} = M_a + M_b + \ldots + M_n = \Sigma M_m = \Sigma P_m M'_m \tag{22}$$

wo M'_m das durch die Verschiebungskraft $P_m = 1$ entstehende Moment und M_m das durch P_m entstehende Moment bedeutet.

In der Praxis werden für gewöhnlich Hilfsmomente eingeführt und dann kann das Zusatzmoment durch die Formel

$$M_{II} = \Sigma x_m M''_m \tag{23}$$

gefunden werden, wo M''_m das infolge der im Knotenpunkt »m«, bzw. im Stützstab »m« wirkenden, beliebig angenommenen Verschiebung $\triangle'_m$ auftretende Moment bedeutet, während x_m den sogenannten Reduktionsfaktor (die wirkliche Verschiebung des Knotenpunkts) bezeichnet. Für diesen können folgende bekannten statischen Gleichungen stehen:

$$\Sigma x_m R_{mn} + R_n = 0 \tag{24}$$

woraus x_m eindeutig bestimmt werden kann.

In der Gleichung (24), die in Bezug auf die Stütze »n« aufgestellt wurde, bedeutet R_n die an der Stütze »n« infolge der äusseren Wirkung auftretende Festhaltungskraft und R_{mn} die auf Grund der an der Stütze »m« durchgeführten beliebigen Verschiebung $\triangle_m$ entstehende Festhaltungskraft, wenn $n : a, b, \ldots$

2. *Hilfssätze*

Wie bekannt, kann man im Falle von Stäben, die *ausschliesslich* eine Stabachsendrehung erleiden, wenn die senkrecht zur Achse erfolgende relative Verschiebung $\triangle$ beträgt, das in den Einspannungsquerschnitten auftretende Anfangseinspannmoment *(M)* auf nachstehende Weise berechnen, falls das Trägheitsmoment als konstant und die Einspannung als starr angenommen wird:

$$M = 6\, Ez\, \Delta \tag{25}$$

wo z der charakteristische Wert des Widerstandes des betreffenden Stabes gegenüber einer Verschiebung, die *Stabsteifigkeit*, bedeutet. Bei einem Stab, dessen beide Enden eingespannt sind, ist

$$z = \frac{J}{l^2} \tag{26}$$

bei einem Stab mit Gelenken ist

$$z = \frac{J}{2\, l^2} \tag{26a}$$

Der auf *Abb. 10a* dargestellte, vollkommen eingespannte, räumliche Stab *a*—*b* erfährt, wenn sein Querschnitt »*a*« bei Aufrechterhaltung der ursprünglichen starren Einspannung in die Lage *a'* kommt, eine zur Stabachse senkrechte, relative Verschiebung $aa' = \triangle$. Im Falle der angenommenen Koordi-

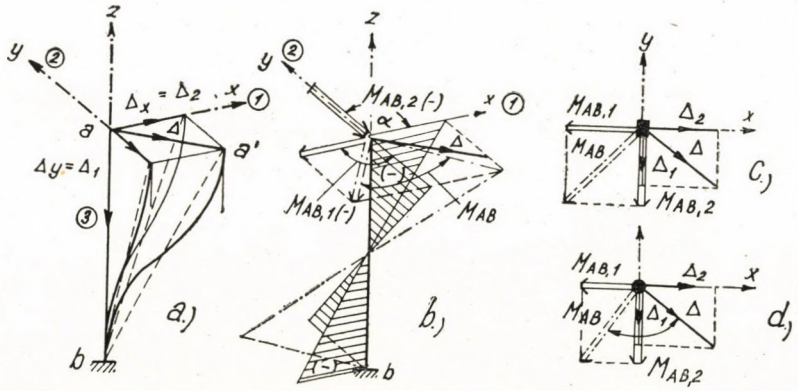


Abb. 10

natensysteme *k* und *i*, mit den Bezeichnungen der Abbildung und nach Durchführung der gemäss den Achsen *x* und *y* erfolgten Projektion von $\triangle$ erhält man

$$\Delta_x = \Delta_2 \qquad \Delta_y = \Delta_1$$

und die Anfangseinspannmomente im Einspannungsquerschnitt des Stabes *a*—*b* (*Abb. 10b* und *10c*)

$$M_{AB,1} = 6\ Ez_1\ \Delta_1\ (—) = M_{BA,1}$$

$$M_{AB,2} = 6\ Ez_2\ \Delta_2\ (—) = M_{BA,2}$$

Wenn jedoch der Querschnitt des Stieles ein Vieleck ist oder aber ein Quadrat mit den Symmetrieachsen *x*, *y* und infolgedessen durch einen Kreisquerschnitt von mittlerem Durchmesser ersetzt werden kann, d. h. dass die Stabsteifigkeit in jeder Richtung, oder zumindest in der Richtung *x*, *y*, gleich ist (*Abb. 10d*), so ergibt sich

$$M_{AB,1} = 6\ Ez\ \Delta_1\ (—) = M_{BA,1}$$

$$M_{AB,2} = 6\ Ez\ \Delta_2\ (—) = M_{BA,2}$$

Im ersteren Falle fällt die Ebene des — der Verschiebung $\triangle$ entsprechenden — entstehenden Momentes nicht mit der durch die Verschiebung und durch die Stabachse hindurch gelegten Ebene zusammen, d. h. sein Vektor ist nicht senkrecht zu $\triangle$, im letzteren Falle hingegen tritt dies jedoch ein.

3. *Die Bestimmung der Momente* M'_m

Nach Einführung dieses Hilfsbegriffes soll untersucht werden, wie die Hilfsmomente M''_m bzw. M'_m bestimmt werden können. Der Einfachheit halber soll der auf *Abb. 11a* axonometrisch dargestellte vierstielige Stockwerksrahmen untersucht werden, bei dem die Ebene der Balken rechtwinkelig

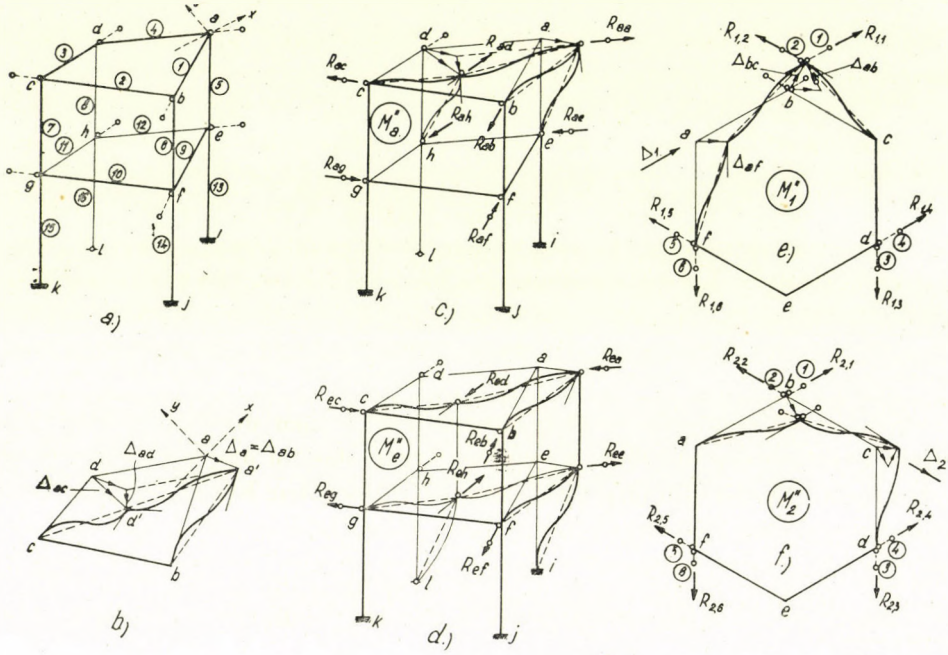


Abb. 11

zu den Stielen ist. Im vorliegenden Fall sind die Stiele lotrecht und die Riegel waagerecht. Der Rahmen ist achtfach verschiebbar.

Von der Annahme ausgehend, dass jeder Knotenpunkt der Konstruktion starr eingespannt ist, wird in einem Knotenpunkt der Konstruktion, z. B. im Knotenpunkte »*a*«, in der waagerechten Ebene eine beliebige Verschiebung $\triangle_a$ — zweckmässig in der Grösse der Einheit (1, 100, 1000, . . .) — z. B. senkrecht zum Stabe 1 durchgeführt. Die in der Ebene *abcd* auftretende Formänderung ist auf *Abb. 11b*, die auf dem Rahmen auftretende Formänderung auf *Abb. 11c* dargestellt. Nachdem aus den senkrecht zur Stabrichtung erfolgten relativen Verschiebungen die Anfangseinspannmomente bestimmt wurden, beispielsweise $M_{AB,2}$, $M_{BA,2}$ bei Stab 1, $M_{AE,1}$ und $M_{AE,2}$, sowie $M_{EA,1}$ und $M_{EA,2}$ bei Stab 5 usw. wird die Operation des Momentenausgleichs ausgeführt, wobei man die Momente M''_a erhält, sodann auf Grund dieser die Festhaltungskräfte R_{aa}, R_{ab}, R_{ac}, . . . R_{ah}.

Darauf wird an einem nächsten Knotenpunkt, z. B. der Reihe nach an den Knotenpunkten *b*, *c*, *d*, dann *e*, *f*, *g*, *h* eine zur Stabrichtung senkrechte Verschiebung, zweckmässigerweise von der Grösse der Einheit, vorgenommen und es werden sodann die Anfangseinspannmomente bestimmt. Nach der Operation des Momentenausgleichs folgt dann die Bestimmung der Momente M_b'', M_c'', ... und die der Festhaltungskräfte R_{ca}, R_{cb}, R_{cc}, ...

Das Formänderungsbild infolge der Verschiebung des Knotenpunktes »e« ist auf *Abb. 11d* dargestellt.

Die Verschiebung der Knotenpunkte *hat auf die Weise zu geschehen*, dass jeder Stab *zumindest einmal* eine Verschiebung erfährt, im übrigen sind die einzelnen Stützen — wie gewöhnlich — parallel zu sich selber beliebig verschiebbar. So ist z. B. auf *Abb. 11e*, bzw. *11f* die verformte Gestalt des Versteifungsringes eines sechseckigen, symmetrisch aufgebauten Rahmens dargestellt, die durch eine Verschiebung $\triangle_1$ bzw. $\triangle_2$ in der Richtung des Stützstabes »1« bzw. »2« zustande gekommen ist. Da $\triangle$ beliebig gewählt werden kann, ist es zweckmässig eine Wahl zu treffen, wo die Multiplikation von $6E\triangle$ eins ergibt.

Zur Bestimmung der Reduktionsfaktoren können die Gleichungen (24) angenommen werden, die zum Ausdruck bringen, dass in den gedachten Stützstäben keine Festhaltungskraft auftreten kann. Bei den Knotenpunkten bzw. Stützstäben *a*, *b*, ... *h* erhält man z. B.:

$$\left.\begin{aligned} x_a R_{aa} + x_b R_{ba} + \ldots + x_h R_{ha} + R_a &= 0 \\ x_a R_{ab} + x_b R_{bb} + \ldots + x_h R_{hb} + R_b &= 0 \\ \vdots \\ x_a R_{ah} + x_b R_{bh} + \ldots + x_h R_{hh} + R_h &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24a)$$

Wenn x_a, x_b, ... x_h bekannt ist, so lautet das Zusatzmoment M_{II} nach der Formel (23):

$$M_{II} = x_a M_a'' + x_b M_b'' + \ldots + x_h M_h'' \qquad (23a)$$

Bei der Bestimmung des Momentes M_m' beträgt in den Gleichungen gemäss Formel (24) das absolute Glied der m.-ten Gleichung $R_m = 1$, während in den übrigen Gleichungen das absolute Glied (Belastungsglied) gleich Null ist.

4. Beispiele

Als Beispiel soll die auf *Abb. 7* dargestellte und im voranstehenden ausführlich beschriebene Aufgabe gelöst werden, bei welcher in der Ebene der waagerechten Träger eine Kraft von 1000 kg in der Richtung des Stabes *a*—*b* wirkt.

Bestimmung des Momentes M''. Der Rahmen ist dreifach verschiebbar; gemäss *Abb. 12* soll er als in den Knotenpunkten a, b und c durch die Stützstäbe r, s und t als festgehalten angenommen werden. Zur Bestimmung der Momente M'' wird im Knotenpunkt b senkrecht zur Richtung des Stabes b—c eine Ver-

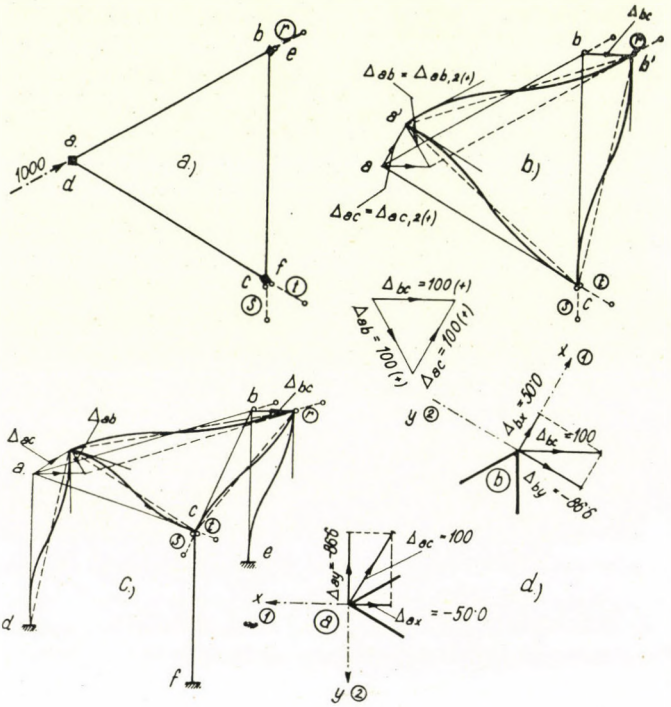


Abb. 12

schiebung von $\Delta_{bc} = 100$ vorgenommen. Die Formänderung der waagerechten Balken, bzw. des ganzen Rahmens ist aus *Abb. 12b* bzw. *12c* ersichtlich.

Die Anfangseinspannmomente betragen nach den auf *Abb. 12d* dargestellten Projektionen bei Weglassung des Multiplikanten 6E:

$$M_{AB,2} = M_{BA,2} = 2{,}31 \cdot 100 = 231$$

$$M_{AC,2} = M_{CA,2} = 2{,}31 \cdot 100 = 231$$

$$M_{BC,2} = M_{CB,2} = 2{,}31 \cdot 100 = 231$$

und da $\Delta_{ad,1} = \Delta_{ay} = -86{,}6$ und $\Delta_{ad,2} = -\Delta_{ax} = 50{,}0$

weiters $\Delta_{bc,1} = \Delta_{by} = -86{,}6$ und $\Delta_{be,2} = -\Delta_{ax} = -50{,}0$

$$M_{AD,1} = M_{DA,1} = -13{,}65 \cdot 86{,}6 = -1182 = M_{BE,1} = M_{EB,1}$$

$$M_{AD,2} = M_{DA,2} = 13{,}65 \cdot 50{,}0 = 682 = -M_{BE,2} = -M_{EB,2}$$

Auszugleichende Momente in den Knotenpunkten »*a*«, »*b*«, und »*c*« :

$$M_{ax} = -1182\,; \quad M_{ay} = 682\,; \quad M_{az} = 2 \cdot 231 = 462$$
$$M_{bx} = -1182\,; \quad M_{by} = -682\,; \quad M_{bz} = 2 \cdot 231 = 462$$
$$M_{cx} = 0\,; \quad M_{cy} = 0\,; \quad M_{cz} = 2 \cdot 231 = 462$$

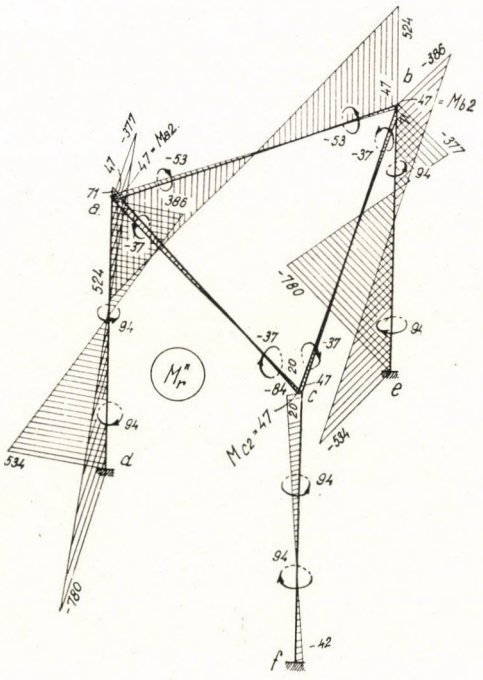


Abb. 13

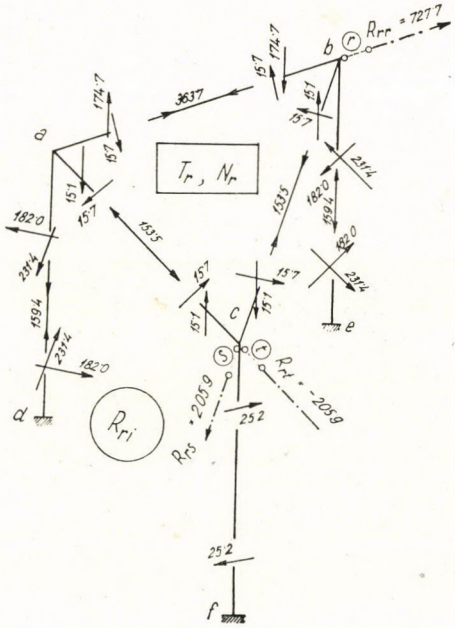


Abb. 14

Nach Beendigung des Momentenausgleichs erhält man die auf *Abb. 13* dargestellten Momente (M_r'') und auch die auf den aus *Abb. 14* ersichtlichen Knotenpunkt wirkenden Querkräfte, sodann auch die unbekannten Stab- und Festhaltungskräfte (Strichpunktlinie).

Bei Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse — wenn die Kennziffern entsprechend vertauscht werden (z. B. im Falle von M_r'' ist die Reihenfolge *a*, *b*, *c*, im Falle von M_s'' bzw. von M_t'' ist sie *c*, *a*, *b*, bzw. *b*, *c*, *a*) — können aus den Momenten M_r'' und den Festhaltungskräften R_{ri} die Momente M_s'' und M_t'' und die Festhaltungskräfte R_{si} und R_{ti} berechnet werden.

$$R_{rr} = 727{,}7 \quad R_{sr} = 205{,}9 \quad R_{tr} = 205{,}9$$
$$R_{rs} = 205{,}9 \quad R_{ss} = 727{,}7 \quad R_{ts} = 205{,}9$$
$$R_{rt} = -205{,}9 \quad R_{st} = -205{,}9 \quad R_{tt} = -727{,}7$$

So ergibt sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 727{,}7\ x_r + 205{,}9\ x_s + 205{,}9\ x_t - 1000 &= 0 \\ 205{,}9\ x_r + 727{,}7\ x_s + 205{,}9\ x_t + 0 &= 0 \\ -\ 205{,}9\ x_r - 205{,}9\ x_s - 727{,}7\ x_t + 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_r = +\ 1{,}570 \qquad x_s = x_t = -\ 0{,}346$$

und

$$M_r'' = 1{,}570\ M_r'' - 0{,}346\ M_s'' - 0{,}346\ M_t''$$

Diese endgültigen Momente sind auf *Abb. 15* dargestellt.

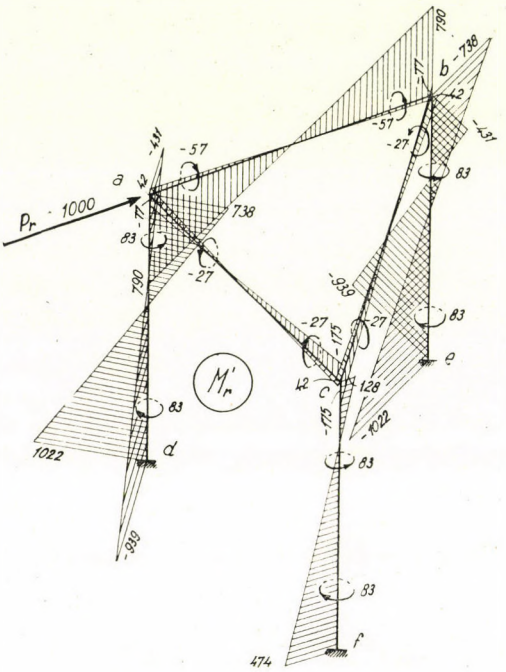


Abb. 15.

Bei Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse können aus diesen Momenten die in der Richtung der Stützstäbe s und t angenommenen, durch die Verschiebungskräfte $P_s = 1000$ kg, sowie $P_t = 1000$ kg verursachten Momente einfach bestimmt werden.

Wenn die durch diese Verschiebungskräfte verursachten Momente (M_r', M_s', M_t') bekannt sind, so könnnen die zur Beendigung des 3. Beispiels des Abschnittes *B*) notwendigen Zusatzmomente (M_{II}) bei Berücksichtigung der dort erhaltenen Festhaltungskräfte berechnet werden. Es betragen nämlich

$$P_r = -\ 84{,}1\ \text{kg} \qquad P_s = -\ 36{,}7\ \text{kg} \qquad P_t = -\ 23{,}0\ \text{kg}$$

und so können die endgültigen Momente mittels der Formel

$$M = M_I + M_{II} = M_I - 0{,}0841\ M_r' - 0{,}0367\ M_s' - 0{,}023\ M_t'$$

berechnet werden, da ja die Momente M_r, M_s und M_t einer Verschiebungskraft von 1000 kg entsprechen. Zum Beispiel:

$$M_{ab,1} = -361 - 0{,}0841 \cdot 790 - 0{,}0367\ (-175) - 0{,}0230 \cdot 77 =$$
$$= -361 - 62 = -423 \text{ kgm}$$
$$M_{ad,2} = -258 - 0{,}0841 \cdot 738 - 0{,}0367\ (0) - 0{,}0230 \cdot 738 =$$
$$= -258 - 79 = -337 \text{ kgm}$$
$$M_{be,1} = -358 - 0{,}0841\ (-431) - 0{,}0367\ (-431) - 0{,}0230 \cdot (-128) =$$
$$= -358 + 55 = -303 \text{ kgm}$$

D) SPEZIALLÖSUNGEN FÜR BEWEGLICHE RAHMEN

(Zentralsymmetrische Rahmen)

Das im vorigen Abschnitt behandelte Verfahren kann in völlig allgemeinen Fällen angewendet werden. In jenem besonderen Fall — der jedoch meistens der in der Praxis vorkommende Fall sein wird — wo die Stiele die gleichen Masse aufweisen und eventuell senkrecht sind, während die Träger von gleichen Abmessungen in einer waagerechten Ebene liegen, weiters, wo die Achsen der Träger ein regelmässiges, in einen Kreis zeichenbares Vieleck bilden, in jenem Fall also, wo der räumliche Rahmen selbst eine senkrechte Symmetrieachse hat und wo in der von den waagerechten Trägern gebildeten Versteifungsebene sich zweimal so viel Symmetrieachsen befinden, als das Vieleck, das aus ihnen gebildet werden kann, Seiten besitzt, kurz gesagt, wenn von einem *zentralsymmetrischen* Rahmen die Rede ist, so können zweckmässig die im nachstehenden skizzierten Berechnungen angewendet werden.

1. Symmetrie — Antimetrie

Es sollen zuerst diejenigen Vereinfachungen bei zentralsymmetrischen beweglichen Rahmen behandelt werden, die im Zusammenhang mit dem im vorigen Punkt beschriebenen genauen Verfahren eingeführt werden können und die sich aus den Symmetrieverhältnissen ergeben. Diese Vereinfachungen ermöglichen eine wesentliche Verminderung der Rechenarbeit.

Abb. 16 zeigt einen Grundriss von waagerechten Balken eines 6füssigen einfachen Rahmens. *Abb. 16a* stellt bei Annahme von festen Knotenpunkten das Verschiebungsbild dar, welches durch die in der Richtung des Stützstabes 1 erfolgte Verschiebung »△« von Grösse eins entstanden ist. Es muss erwähnt werden, dass infolge der Antimetrie der Verschiebung die Operation des Momentenausgleichs nur in Bezug auf 3 Knotenpunkte durchgeführt werden muss,

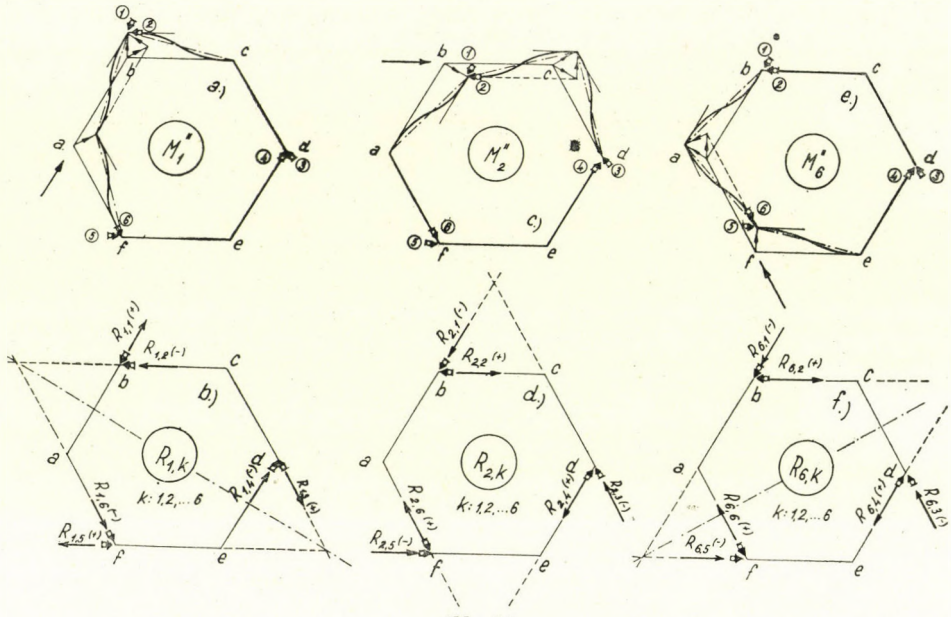


Abb. 16

und zwar beispielsweise in Bezug auf die Knotenpunkte a, f und e. Die *Abb. 16c* und *16 d*, bzw. *Abb. 16e* und *16 f* beziehen sich auf die Verschiebung »△« von Grösse 1 in der Richtung des Stützstabes 2 bzw. 6. Infolge der Symmetrie des Rahmens und der Antimetrie der Verschiebung ergeben sich folgende rechnerischen Vereinfachungen:

1. *Einzelne Festhaltungskräfte* (Koeffizienten) sind gleich gross und zwar

$$R_{1,1} = R_{2,2} = \ldots = R_{6,6}$$

$$R_{1,2} = R_{1,6} = R_{2,1} = R_{2,3} = R_{3,2} = R_{3,4} = R_{4,3} = R_{4,5} = R_{5,4} = R_{5,6} =$$

$$= R_{6,1} = R_{6,5}$$

$$R_{1,3} = R_{1,5} = R_{2,4} = R_{2,6} = R_{3,1} = R_{3,5} = R_{4,2} = R_{4,6} = R_{5,1} = R_{5,3} =$$

$$= R_{6,2} = R_{6,4}$$

$$R_{1,4} = R_{2,5} = R_{3,6} = R_{4,1} = R_{5,2} = R_{6,3}$$

So genügt es denn die Werte M'' und R_{mn} nur für eine einzige Verschiebung (z. B. für die in der Stabrichtung »1«) zu berechnen, die übrigen Werte sind — miteinander entsprechend vertauscht — einander gleich. Die durch die

antimetrische Verschiebung (bzw. Belastung) eines solchen durch symmetrische gedachte Stäbe gestützten Rahmens von symmetrischen Aufbau verursachten Festhaltungskräfte sind sogar in den die Antimetrieachse schneidenden symmetrischen Stützen paarweise gleich gross und haben — im Falle der angenommenen Stützungsweise — dasselbe Vorzeichen (aber einen entgegengesetzten Sinn). Z. B. ist im Falle der Verschiebung in der Stabrichtung »1« die Antimetrieachse jene Gerade, welche die Halbierungspunkte der Seiten *a—b* und *e—d* verbindet, die sich auf dieser schneidenden Stützstab-Paare sind 1—6 und 3—5, im Fall der Verschiebung des Stabes »2« jene Gerade, welche die Halbierungspunkte der Seiten *b—c* und *f—c* verbindet, die sich auf dieser schneidenden Stützstab-Paare sind 1—3 und 4—6 usw.

2. Unter den Unbekannten der für die *Reduktionsfaktoren* aufgestellten (x_1, x_2, x_3, ... x_6) Gleichungen gibt es solche von gleicher Grösse, was vom Belastungsglied abhängt. Zum Beispiel:

a) Wenn die durch die Verschiebungskraft P_1 von Grösse eins verursachten Momente M'_1 bestimmt werden sollen, dann gilt für die Reduktionsfaktoren — wegen des Gleichungssystems von gleichen Koeffizienten und von spiegelsymmetrischem Aufbau — dass

$$x_2 = x_6 \quad \text{und} \quad x_3 = x_5$$

so dass also nur vier Gleichungen vorhanden sind an Stelle von sechs.

b) Wenn hingegen die Verschiebungskraft von allem Anfang an symmetrisch ist, wenn z. B. von der Kraft P von Grösse eins die Rede ist, die auf der Achse *a—d* im Punkte »*a*« wirkt, so sind die infolge dessen auftretenden Kräfte $P_1 = -P_6$, und so ist

$$x_1 = -x_6\,, \quad x_2 = -x_5\,, \quad x_3 = -x_4$$

so dass also nur drei Gleichungen vorhanden sind.

c) Für eine antimetrische Belastung, wenn z. B. $P_1 = P_6$, so ist

$$x_1 = x_6\,, \quad x_2 = x_5\,, \quad x_3 = x_4$$

so dass wiederum nur drei Gleichungen da sind. Natürlich sind die Werte von *a)* auch aus denen von *b)* und *c)* — aus der symmetrisch-antimetrischen Belastung — errechenbar *(Abb. 17a* und *17b)*.

d) Im Falle der zweifachen spiegelsymmetrischen Belastung gemäss *Abb. 18a* ergibt sich, da die Verschiebungskräfte

$$P_1 = P, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = -P, \quad P_4 = P, \quad P_5 = 0, \quad P_6 = -P$$

betragen,

$$x_1 = -x_3 = x_4 = -x_6 \quad \text{und} \quad x_2 = -x_5 = 0$$

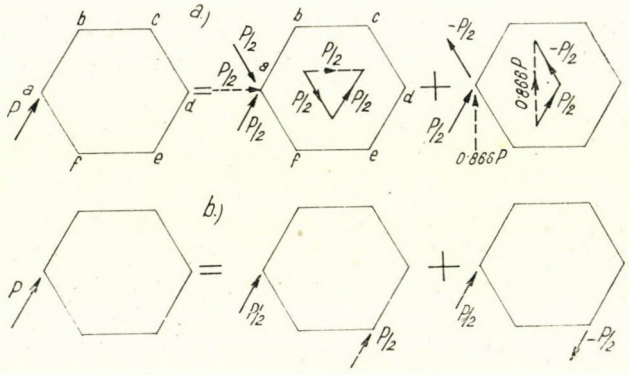


Abb. 17

Das bedeutet, dass nur eine einzige Gleichung mit einer einzigen Unbekannten gelöst werden muss und daraus bekommt man

$$x_1 = \frac{P}{R_{1,1} + R_{1,4} - (R_{1,3} + R_{1,6})}$$

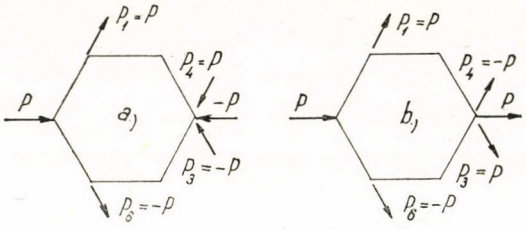


Abb. 18

e) Im Falle der zweifachen symmetrischen Belastung laut *Abb. 18b*, da die Verschiebungskräfte

$$P_1 = P, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = P, \quad P_4 = -P, \quad P_5 = 0, \quad P_6 = -P$$

betragen, so ergibt sich deshalb

$$x_1 = x_3 = -x_4 = -x_6 \quad \text{und} \quad x_2 = -x_5 = 0$$

das heisst, dass auch hier nur eine einzige Gleichung mit einer einzigen Unbekannten vorhanden ist, woraus

$$x = \frac{P}{R_{1,1} + R_{1,3} - (R_{1,4} - R_{1,6})}$$

und so

$$M_p = x_1 M_1'' + x_1 M_3'' - x_1 M_4'' - x_1 M_5''$$

f) Aus den Belastungsfällen *d)* und *e)* kann der Belastungsfall *b)* ganz einfach ausgerechnet werden *(Abb. 19)*.

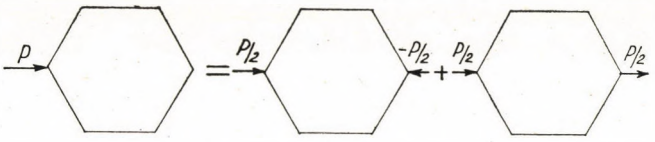


Abb. 19

Auf *Abb. 20* ist eine Skizze der waagerechten Balken eines achtfüssigen Rahmens dargestellt. Die infolge der in der Richtung des Stützstabes 1 bzw. 2 erfolgten Verschiebung eingetretene Anfangsverformung ist auf *Abb. 20a*

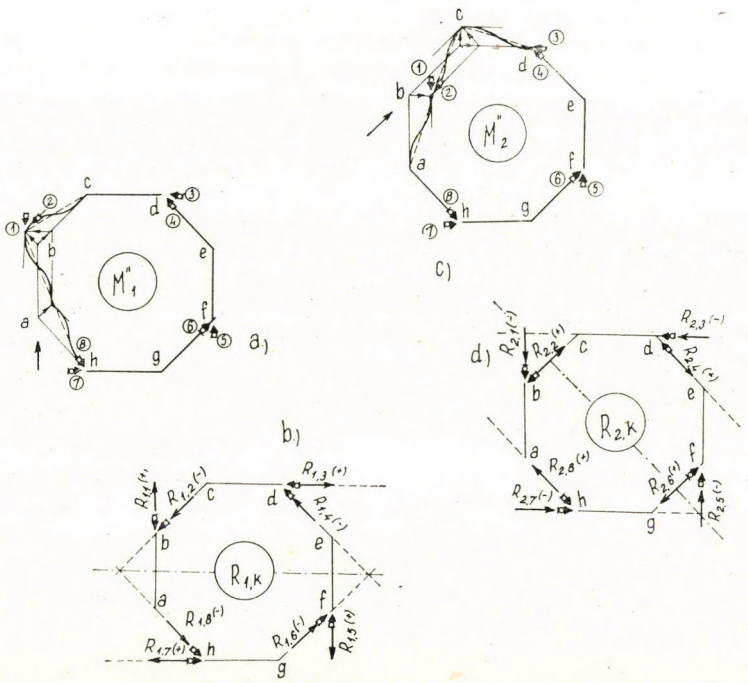


Abb. 20

bzw. *20c* eingezeichnet, die nach dem Momentenausgleich erhaltenen Festhaltungskräfte auf *Abb. 20b* bzw. *20d*.

Rechnerische Vereinfachungen :

1. *Bei den Koeffizienten der Bedingungsgleichungen :*

$$R_{1,1} = R_{2,2} = \ldots = R_{6,6}$$

$$R_{1,2} = R_{1,8} = R_{2,1} = R_{2,3} = R_{3,2} = R_{3,4} = R_{4,3} = R_{4,5} = R_{5,4} = R_{5,6} =$$
$$= R_{6,5} = R_{6,7} = R_{7,6} = R_{7,8} = R_{8,7} = R_{8,1}$$

$$R_{1,3} = R_{1,7} = R_{2,4} = R_{2,8} = R_{3,1} = R_{3,5} = R_{4,2} = R_{4,6} = R_{5,3} = R_{5,7} =$$
$$= R_{6,4} = R_{6,8} = R_{7,1} = R_{7,5} = R_{8,2} = R_{8,6}$$

$$R_{1,4} = R_{1,6} = R_{2,5} = R_{2,7} = R_{3,6} = R_{3,8} = R_{4,1} = R_{4,7} = R_{5,2} = R_{5,8} =$$
$$= R_{6,1} = R_{6,3} = R_{7,2} = R_{7,4} = R_{8,3} = R_{8,5}$$

Auch hier genügt es also die Momente M'' und die Festhaltungskräfte R_{mn} nur für eine einzige Verschiebung in irgendeiner Stabrichtung (z. B. in der mit 1 bezeichneten) zu berechnen, die übrigen Momente und Festhaltungskräfte können durch entsprechendes Vertauschen der Werte gewonnen werden. Bei einem achteckigen Rahmen sind je drei identische Festhaltungskräftepaare vorhanden, und zwar sind es auch hier jene, die sich auf der Antimetrieachse schneiden. Z. B. ist im Falle einer Verschiebung in die Richtung 1 die Antimetrieachse diejenige Gerade, welche die Halbierungspunkte der Seiten *a—b* und *f—e* verbindet. Die sich auf ihr bzw. im Unendlichen (d. h. mit der Antimetrieachse parallel, also im Unendlichen) schneidenden Stützstäbe sind die Stäbe 2—8, 4—6 bzw. 3—7.

2. *Bei den Reduktionsfaktoren :*

a) Bei Berechnung des durch die Verschiebungskraft $P = P_1 = 1$ verursachten Momentes M'_1 ist

$$x_2 = x_8 \ , \quad x_3 = x_7 \ , \quad x_4 = x_6$$

die Zahl der Unbekannten beträgt also fünf (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).

b) Im Falle einer Verschiebungskraft, die durch ein symmetrisches $P_a = 1$ von Richtung *a—e* hervorgerufen wurde, ist $P_1 = -P_8$ *(Abb. 21a)* und so ist

$$x_1 = -x_8 \ , \ x_2 = -x_7 \ , \ x_3 = -x_6 \ , \ x_4 = -x_5$$

was bedeutet, dass lediglich vier Unbekannte vorhanden sind.

c) Für eine antimetrische Belastung, wenn z. B. $P_1 = P_8$, so ist

$$x_1 = x_8 \ , \ x_2 = x_7 \ , \ x_3 = x_6 \ , \ x_4 = x_5$$

man braucht also wiederum nur mit vier Gleichungen zu arbeiten *(Abb. 21b)*.

d) Im Falle der zweifachen spiegelsymmetrischen Belastung laut *Abb. 21c*, da

$P_1 = -P_8 = -P_4 = P_5$ und $P_2 = P_3 = P_6 = P_7 = 0$ ist deshalb

$x_1 = -x_8 = -x_4 = x_5$ und $x_2 = x_3 = -x_6 = -x_7 = 0$

das heisst, es ist eigentlich nur eine einzige Unbekannte vorhanden und diese ist

$$x_1 = \frac{P_1}{R_{1,1} + R_{1,5} - (R_{1,4} + R_{1,8})}$$

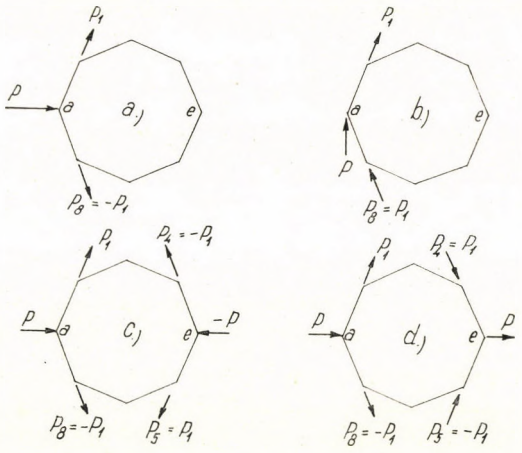


Abb. 21

e) Im Falle der zweifachen symmetrischen Belastung laut *Abb. 21d*:

$P_1 = -P_8 = P_4 = -P_5$ und $P_2 = P_3 = P_6 = P_7 = 0$ und so ist

$$x_1 = x_4 = -x_5 = -x_8 \text{ und } x_2 = x_3 = -x_6 = -x_7 = 0$$

und dann ist wiederum nur eine einzige Unbekannte zu errechnen und diese lautet

$$x_1 = \frac{P_1}{R_{1,1} + R_{1,4} - (R_{1,5} + R_{1,8})}$$

und so ist

$$M_P = x_1 M_1'' + x_1 M_4'' - x_1 M_5'' - x_1 M_8''$$

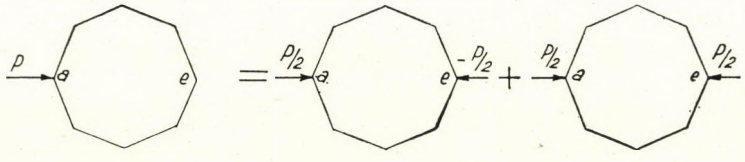


Abb. 22

f) Der Belastungsfall *b)* kann aus den Belastungsfällen *d)* und *e)* ausgerechnet werden *(Abb. 22)*.

g) Auf *Abb. 17a* und *17b* sind zwei alternative Lösungen für eine Kraft in der Richtung des Seitenbalkens ($P = P_1$) bei einem Rahmen von sechsecki-

gem Grundriss dargestellt, auf *Abb. 23a* und *23b* wird nun eine ähnliche Lösung für einen Rahmen mit achteckigem Grundriss gezeigt.

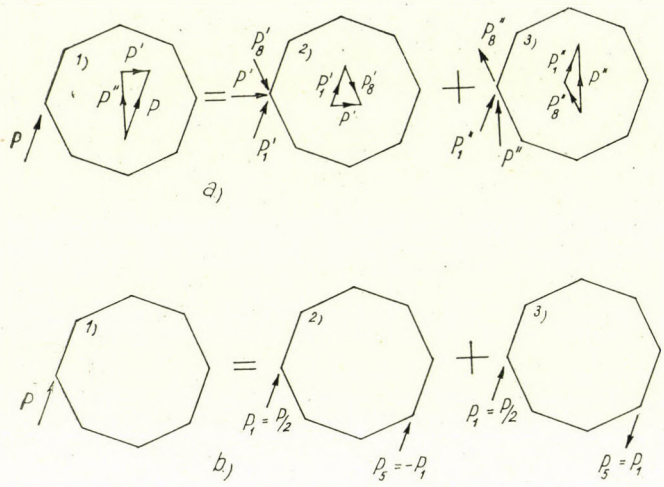


Abb. 23

Im Falle eines Sechseckes ist für eine symmetrische Belastung laut der *zweiten Abbildung von 17b*, da

$$P_1 = -P_4 \quad \text{und} \quad P_2 = P_3 = P_5 = P_6 = 0$$
$$x_1 = -x_4 \quad \text{und} \quad x_2 = -x_3 = -x_5 = x_6$$

weiters für eine antimetrische Belastung *(dritte Abbildung von 17b)*, da

$$P_1 = P_4 \quad \text{und} \quad P_2 = P_3 = P_5 = P_6 = 0$$
$$x_1 = x_4 \quad \text{und} \quad x_2 = x_3 = x_5 = x_6$$

Bei einem Rahmen von achteckigem Grundriss ist im Falle der Alternative laut *Abb. 23a* die Lösung für die Kraft P' bzw. P'' im wesentlichen dieselbe wie im Falle der *Abb. 21a* bzw. *21 b*. Im Falle der Alternative laut *Abb.* 23 *b* ist für eine symmetrische Belastung *(zweite Abbildung auf 23b)*, da

$$P_1 = -P_5 \quad \text{und} \quad P_2 = P_3 = P_4 = P_6 = P_7 = P_8 = 0$$
$$x_1 = -x_5 \quad \text{und} \quad x_2 = -x_4 = -x_6 = x_8\,, \quad x_3 = x_7 = 0$$

und für eine antimetrische Belastung *(dritte Abbildung auf* 23 *b)*, da

$$P_1 = P_5 \quad \text{und} \quad P_2 = P_3 = P_4 = P_6 = P_7 = P_8 = 0$$
$$x_1 = x_5 \quad \text{und} \quad x_2 = x_4 = x_6 = x_8 \quad \text{und} \quad x_3 = x_7$$

Jedenfalls ist es zweckmässig, als Grundfall für die Belastung die durch die auf den *Abb. 17 und 23* dargestellte Verschiebungskraft $P_i = P_1 = 1$ bewirkten Momente $M_i' = M'_1$ zu bestimmen, weil daraus jedweder andere Belastungsfall berechnet werden kann und so im Falle eines durch eine beliebige

äussere Belastung P_i verursachten Verschiebungskräftesystems die Zusatzmomente mittels der Formel

$$M_{II} = \Sigma P_i M'_i$$

ausgerechnet werden können.

Bei zentralsymmetrischen Stockwerkrahmen wird die Rechenarbeit relativ stark vereinfacht. Es sollen z. B. bei einem 12fach verschiebbarem Stockwerkrahmen von sechseckigem Grundriss *(Abb. 24a)* die durch die positive

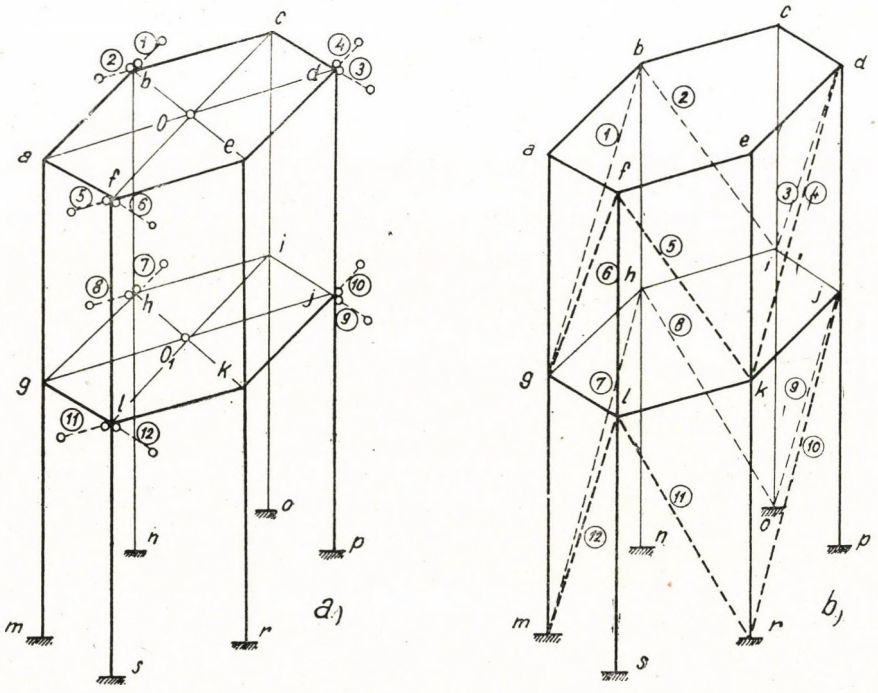


Abb. 24

Verschiebung des Stützstabes »1« verursachten Festhaltungskräfte in den Stützpunkten des mit »0« bezeichneten oberen waagerechten Ringes

$$R_{1,1}, R_{1,2}, \ldots . R_{1,6}$$

betragen und bei den Stützpunkten des mit »0_1« bezeichneten dazwischenliegenden (unteren) Ringes der Reihe nach

$$R_{1,7}, R_{1,8}, \ldots . R_{1,12}$$

Infolge der Symmetrieverhältnisse und der symmetrisch angeordneten Stützstäbe wird das Verhältnis der einander entsprechenden Festhaltungskräfte

durch genau dieselbe Zahl »α« ausgedrückt (α ist eine Zahl von negativem Vorzeichen, deren absoluter Wert gewöhnlich grösser als Null ist):

$$R_{1,7} = \alpha R_{1,1} \quad , \quad R_{1,8} = \alpha R_{1,2}, \ \ldots \ R_{1,12} = \alpha R_{1,6}$$

Im Falle der positiven Verschiebung des mit »7« bezeichneten Stabes mögen die Festhaltungskräfte der Reihe nach sein:

$$R_{7,1}, \ R_{7,2}, \ \ldots . R_{7,7}, \ R_{7,8}, \ \ldots . R_{7,12}$$

Infolge der Symmetrieverhältnisse ist

$$R_{7,1} = \beta R_{7,7} \ , \quad R_{7,8} = \beta R_{7,2} \ , \ \ldots \ R_{7,12} = \beta R_{7,6}$$

wo β eine Zahl von negativem Vorzeichen ist, deren absoluter Wert gewöhnlich kleiner ist als eins. Natürlich ist die genaue Lösung bei räumlichen Stockwerkrahmen auch so noch umständlich. Hier soll erwähnt werden, dass bei einer derartigen Anordnung der gedachten Stützstäbe, bei welcher diese die Diagonalen der Seitenflächen des Rahmens bilden (z. B. laut *Abb. 24b)*, wobei aber in den Berechnungen nur die waagerechten Komponenten der schiefen Stabkräfte berücksichtigt werden,

$$R_{ik} = R_{ki}$$

beträgt, da hier der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderungen Geltung hat. Das heisst z. B.

$$R_{1,7} = R_{7,1} = \alpha R_{1,1} = \beta R_{7,7} = \gamma R_{1,1}$$

$$\text{wenn} \quad R_{7,7} = \gamma R_{1,1} \qquad \text{und} \qquad \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \ \text{ist.}$$

In diesem Falle wird die Auflösung des symmetrisch aufgebauten Gleichungssystems einfacher werden.

2. Zentralsymmetrie

Die rechnerischen Vereinfachungen werden noch bedeutender, wenn die Belastung der zentralsymmetrischen Rahmen gleichfalls zentralsymmetrisch ist, wie dies die auf *Abb. 25* skizzierten Belastungen des einfachen Rahmens von rechteckigem Grundriss sind.

Im Falle gemäss *Abb. 25a* treten — wenn man die absolute Verformung ausser Acht lässt — im Rahmen keine Biegemomente auf.

Im Falle der Belastung laut *Abb. 25b* und *25c* sind die in den gedachten Stützen auftretenden Festhaltungskräfte bzw. deren Gegensätze, die Verschiebungskräfte, gleich gross und so bedeuten die Verschiebungskräfte eine

paarweise dreifache antimetrische Belastung. Da

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_6$$

so ist

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$$

und

$$x_1 = \frac{P_1}{\sum_{n=1}^{6} R_{1,n}}$$

wo im Falle der Belastung gemäss *Abb. 25b* $P_1 = P'$ und P'', die andere Komponente von P, ebenso wie im Belastungsfall gemäss *Abb. 25a*, kein Moment verursacht und wo schliesslich im Belastungsfall laut *Abb. 25c* $P_1 = P$ beträgt.

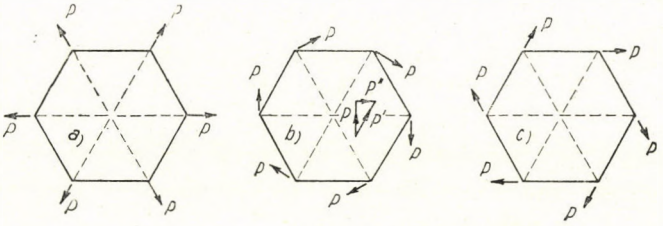


Abb. 25

Im Falle von Rahmen mit achteckigem Grundriss erstreckt sich die Addition auf alle acht Stäbe.

Es soll hier noch einerseits erwähnt werden, dass in einem Falle von zentralsymmetrischer Belastung (z. B. in der Praxis der Fall eines Wirbelwindes (Zyklons), der Fall eines Verdrehungsmoments) in den Knotenpunktsquerschnitten der Stiele in der Richtung »2« kein Einspannmoment auftritt, da die relative — zur Stabachse senkrechte — Verschiebung bei jedem Stiel in der Richtung »2« verläuft. Andererseits ist zu erwähnen, dass diese Aufgabe auch durch Einführung einer durch eine zentralsymmetrische Belastung verursachten besonderen Verschiebung ganz einfach gelöst werden kann. Das soll im folgenden Abschnitt in Verbindung mit einem vollkommen allgemeinen Fall behandelt werden.

3. *Beispiele*

Es soll jetzt von dem auf *Abb. 26* gezeigten einfachen räumlichen Eisenbetonrahmen von sechseckigem Grundriss die Rede sein. Der Querschnitt der Stäbe beträgt 50 × 50 cm. Die Höhe des Rahmens und die Länge der Balken ist 5 m. Der Rahmen weist einen zentralsymmetrischen Aufbau auf und ist sechsfach verschiebbar. Die gedachten Stützstäbe wurden in der auf *Abb. 27a* dargestellten Weise in der waagerechten Ebene angenommen, das Koordinatensystem »*k*« des Knotenpunkts ist aus *Abb. 26* zu ersehen.

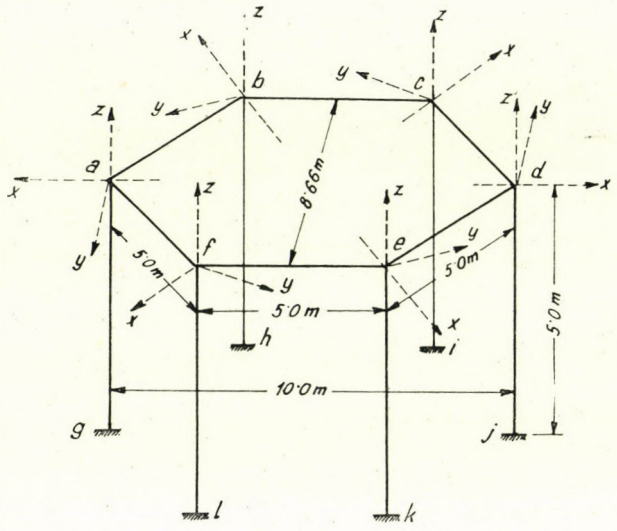


Abb. 26

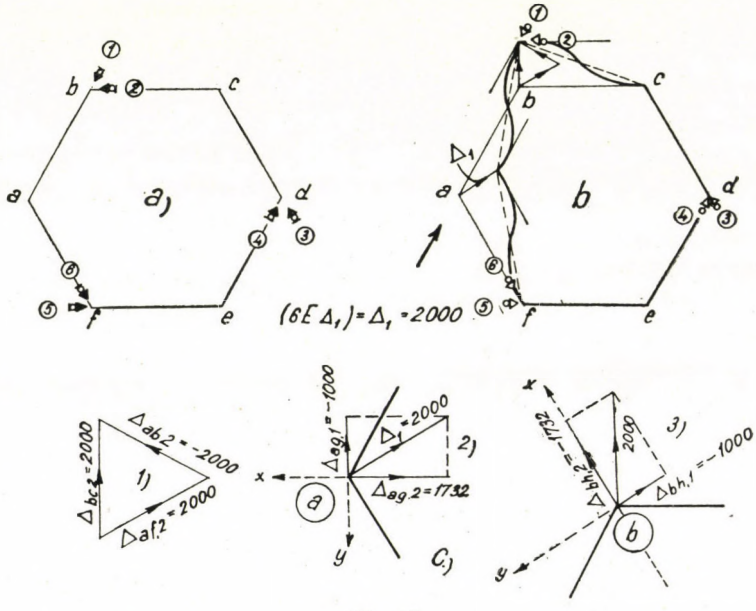


Abb. 27

Rahmenkonstanten. Bei jedem Stabe:

$$J_1 = J_2 = \frac{5^4}{12} = 52{,}08 \text{ dm}^4$$

$$J_3 = 0{,}385 \cdot 0{,}0347 \cdot 5^4 = 8{,}34 \text{ dm}^4$$

$$s_1 = s_2 = \frac{52{,}08}{5} = 10{,}42$$

$$s_3 = \frac{8{,}34}{5} = 1{,}67$$

$$z_1 = z_2 = 2{,}083$$

Momentenanteile auf den Knotenpunkt »*a*« bezogen :

(Zentralsymmetrische Rahmen)

Richtung	$\cos\alpha$	n_x	$\cos\beta$	n_y	$\cos\gamma$	n_z
ab,1	0,866	— 0,3356	— 0,500	0,2873	—	—
ab,2	—	—	—	—	1,000	— 0,4628
ab,3	— 0,500	0,0311	— 0,866	0,0798	—	—
af,1	0,866	— 0,3356	0,500	— 0,2873	—	—
af,2	—	—	—	—	1,000	— 0,4628
af,3	— 0,500	0,0311	0,866	— 0,0798	—	—
ag,1	1,000	— 0,3875	—	—	—	—
ag,2	—	—	1,000	— 0,5746	—	—
ag,3	—	—	—	—	— 1,000	0,0742

Bestimmung der Momente M_m'' (M''_1). Die infolge der Verschiebung entstandenen Momente werden auf die Weise bestimmt, dass eine positive Verschiebung in der Richtung des mit »1« bezeichneten gedachten Stützstabes vorgenommen wird. (Positiv ist jene Verschiebung, bei welcher im betreffenden Stützstab eine positive Festhaltungskraft — Zugkraft — entsteht.) Das Bild der auftretenden Verformung ist aus *Abb. 27b*, die senkrecht zur Stabrichtung erfolgten relativen Verschiebungen $(\triangle_1)$ sind aus *Abb. 27c* zu ersehen. Der Wert von $\triangle_1$ — bzw. dessen vergrösserter ($6E\triangle_1$ betragender) Wert — wurde als 2000 angenommen. Demgemäss betragen die Anfangseinspannmomente im Ring bzw. in den Stielen

$$M_{AF,2} = M_{FA,2} = 2{,}083 \cdot 2000 = 4166 = M_{BC,2} = M_{CB,2}$$

$$M_{AB,2} = M_{BA,2} = -2{,}083 \cdot 2000 = -4166$$

$$M_{AG,1} = M_{GA,1} = -2{,}083 \cdot 2000 \cdot 0{,}500 = -2{,}083 = M_{BH,1} = M_{HB,1}$$

$$M_{AG2} = M_{GA,2} = 2{,}083 \cdot 2000 \cdot 0{,}866 = 3610 = -M_{BH,2} = -M_{HB,2}.$$

Wenn die Operation des Momentenausgleichs mit diesen Anfangseinspannmomenten durchgeführt wird, so erhält man die auf *Abb. 28a* dargestellten Momente M_1'' und die auf *Abb. 28b* aufgezeichneten Quer-, Normal- und Festhaltungskräfte (R_{1n}). Es soll erwähnt werden, dass wegen der antimetrischen Verschiebung und des symmetrischen Rahmenaufbaus der Momentenausgleich nur für die Knotenpunkte *a*, *f* und *e* durchgeführt wurde, da sich die Momente der Knotenpunkte *b*, *c* und *d* bei Berücksichtigung der Antimetrie-Symmetrieverhältnisse aus dem Obenstehenden ergeben. Ob die Rech-

nungen für den Momentenausgleich richtig durchgeführt wurden, kann durch das Knotenpunktsgleichgewicht der endgültigen Momente ($\Sigma M_{rik} = 0$) kontrol-

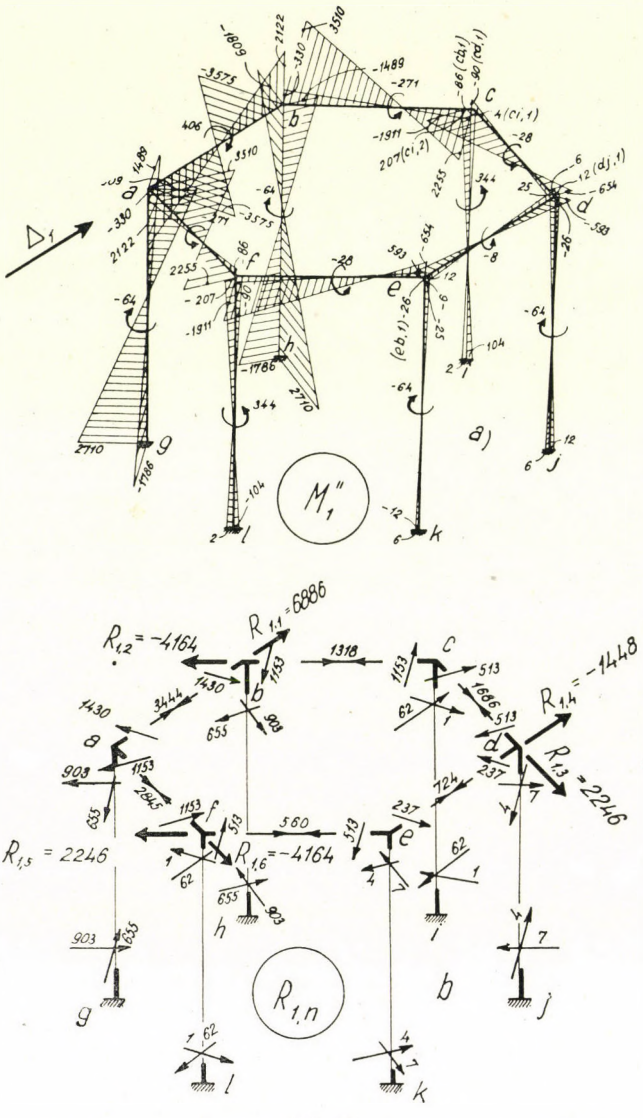


Abb. 28

liert werden. Eine Kontrolle bei der Berechnung der Festhaltungskräfte ergibt sich einerseits daraus, dass

$$R_{1,2} = R_{1,6} = -4164$$

$$R_{1,3} = R_{1,5} = 2246$$

und andererseits daraus, dass das Moment der Festhaltungskräfte auf die senkrechte Symmetrieachse gleich gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen ist wie die Summe der Momente von Querkräften, welche auf die sich an den Ring anschliessenden Querschnitte der Stiele wirken, und die der Verdrehungsmomente zusammen, d. h.

$$M_{CR} = (6886 - 4164 + 2246 - 1448 + 2246 - 4164)\,4{,}33 = 6937$$

beziehungsweise

$$M_{CT} = -(655 + 655 - 10) \cdot 5{,}0 + 2 \cdot (64 + 64 - 344) = -6932$$

Da laut Punkt 1. des Abschnittes D) 1. einzelne Festhaltungskräfte bei Verschiebungen in der Richtung von verschiedenen Stützstäben gleich gross sind und die Momente durch den entsprechenden Tausch der Kennziffern erhalten werden können, so ist mit der Durchführung dieser einzigen Operation des Momentenausgleichs die Aufgabe — vom Gesichtspunkt der Berechnung der sich aus der Verschiebung ergebenden Momente (M_{II}) — als gelöst zu betrachten. So sind z. B. die Festhaltungskräfte ($R_{2,1}$, $R_{2,2}$, ...) bei einer Verschiebung in die Richtung des Stabes »2« — wenn die Grösse der vergrösserten Verschiebung gleich ist wie im vorigen Fall — der Reihe nach

$$-4164,\ 6886,\ -4164,\ 2246,\ -1448,\ 2246.$$

Auch bei den übrigen Stäben erhält man die gesuchten Werte (M_3'', M''_4, ...; $R_{3,1}$, $R_{3,2}$, ...) durch entsprechenden Tausch der Kennziffern.

Momente M'_1 für eine Belastung von $P_1 = 1000$ kg. Die allgemeine Gestalt der Bedingungsgleichungen ist

$$\begin{aligned}
6886x_1 - 4164x_2 + 2246x_3 - 1448x_4 + 2246x_5 - 4164x_6 &= 1000\\
-4164x_1 + 6886x_2 - 4164x_3 + 2246x_4 - 1448x_5 + 2246x_6 &= 0\\
2246x_1 - 4164x_2 + 6886x_3 - 4164x_4 + 2246x_5 - 1448x_6 &= 0\\
-1448x_1 + 2246x_2 - 4164x_3 + 6886x_4 - 4164x_5 + 2246x_6 &= 0\\
2246x_1 - 1448x_2 + 2246x_3 - 4164x_4 + 6886x_5 - 4164x_6 &= 0\\
-4164x_1 + 2246x_2 - 1448x_3 + 2246x_4 - 4164x_5 + 6886x_6 &= 0
\end{aligned}$$

Da $x_2 = x_6$ und $x_3 = x_5$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
6886x_1 - 8328x_2 + 4492x_3 - 1448x_4 &= 1000\\
-4164x_1 + 9132x_2 - 5612x_3 + 2246x_4 &= 0\\
2246x_1 - 5612x_2 + 9132x_3 - 4164x_4 &= 0\\
-1448x_1 + 4492x_2 - 8328x_3 + 6886x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Daraus $x_1 = 0{,}32915$ $x_2 = x_6 = 0{,}15867$

$x_3 = x_5 = 0{,}00187$ $x_4 = -0{,}03201$

und so $M'_1 = 0{,}32915M''_1 + 0{,}15867(M''_2 + M''_6) + 0{,}00187\,(M''_3 + M''_5) - 0{,}03201\,M''_4$

Zum Beispiel:

$M_{ab,1} = 0{,}32915 \cdot 2122 + 0{,}15867\,(-86 - 330) + 0{,}00187\,(-26 - 90) - 0{,}03201\,(-6) = 633$ kgm

$M_{af,2} = 0{,}32915 \cdot 3510 + 0{,}15867\,(-1911 - 3575) + 0{,}00187\,(593 + 2255) - 0{,}03201\,(-654) = 311$ kgm

$M_{ag,1} = 0{,}32915\,(-1489) + 0{,}15867\,(4 - 1489) + 0{,}00187\,(12 + 4) - 0{,}03201 \cdot 12 = -726$ kgm

$M_{ag,3} = 0{,}32915\,(-64) + 0{,}15867\,(344 - 64) + 0{,}00187\,(-64 + 344) - 0{,}03201)\,(-64) = 26$ kgm

$M_{fe,1} = 0{,}32915\,(-90) + 0{,}15867\,(-6 - 330) + 0{,}00187\,(-26 + 2122) - 0{,}03201\,(-86) = -76$ kgm

$M_{ed,2} = 0{,}32915 \cdot 593 + 0{,}15867\,(-654 - 1911) + 0{,}00187\,(2255 + 3510) - 0{,}03201\,(-3575) = -87$ kgm

$M_{ef,3} = 0{,}32915\,(-28) + 0{,}15867\,(-8 - 271) + 0{,}00187)\,(-28 + 406) - 0{,}03201\,(-271) = -44$ kgm

$M_{ek,3} = 0{,}32915\,(-64) + 0{,}15867\,(-64 + 344) + 0{,}00187\,(344 - 64) - 0{,}03201\,(-64) = 26$ kgm

Infolge der Symmetrie besteht zwischen den Knotenpunktsmomenten von a, f, e und den Momenten von b, c, d nur ein Unterschied in Bezug auf das Vorzeichen, bzw. auf den Sinn.

Die Momente sind auf *Abb. 29a* dargestellt.

Infolge Windbelastung entstandene Momente können auf Grund der auf *Abb. 30a* gezeigten Belastungsskizze ausgerechnet werden. In Bezug auf die Windbelastung wurde angenommen, dass der Wert des auf die Seiten a—b und a—f senkrecht wirkenden Druckes gleich gross ist wie der Wert der auf die Seiten d—c und d—e senkrecht wirkenden Saugung und dass die Windbelastung (Q) auf die auf *Abb. 30a* dargestellte Weise in den Knotenpunkten konzentriert wirkt. Die auf Grund der konzentrierten Belastungen Q bestimmten Verschiebungskräfte sind auf *Abb. 30b* in der Richtung der gedachten Stützstäbe eingezeichnet. Demzufolge ist

$$P_1 = P_3 = -P_4 = -P_6 \quad \text{und} \quad P_2 = -P_5$$

d. h., die in Rede stehende Belastung ist dreifach symmetrisch. Da $P_2 = 2P_1$, so folgt aus den Symmetrieverhältnissen, dass

$$x_1 = x_3 = -x_4 = -x_6\ ; \quad x_2 = 2x_1 = -x_5\ ; \quad x_5 = -2x_1$$

und dass deshalb

$$x_1 = \frac{P_1}{R_{1,1} + R_{1,2} - (R_{1,3} + R_{1,4})}$$

Es sei $1{,}1547\ Q = P_1 = 1000$ und dann

$$x_1 = \frac{1000}{6886 - 4164 - 2246 + 1448} = \frac{1000}{1924} = 0{,}51975$$

(Derselbe Wert auf Grund der oben ausgerechneten Werte für x

$$x_1 = 0{,}32915 + 0{,}15867 - (0{,}00187 - 0{,}03201) = 0{,}51796)$$

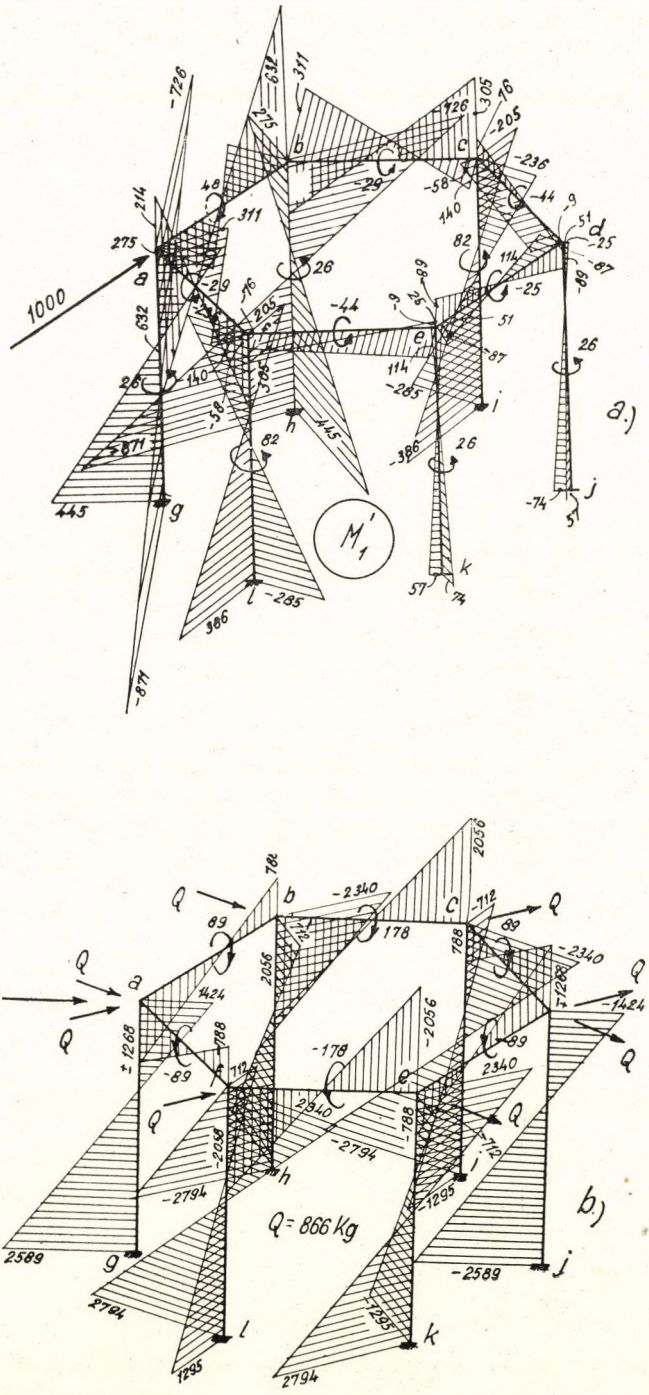


Abb. 29

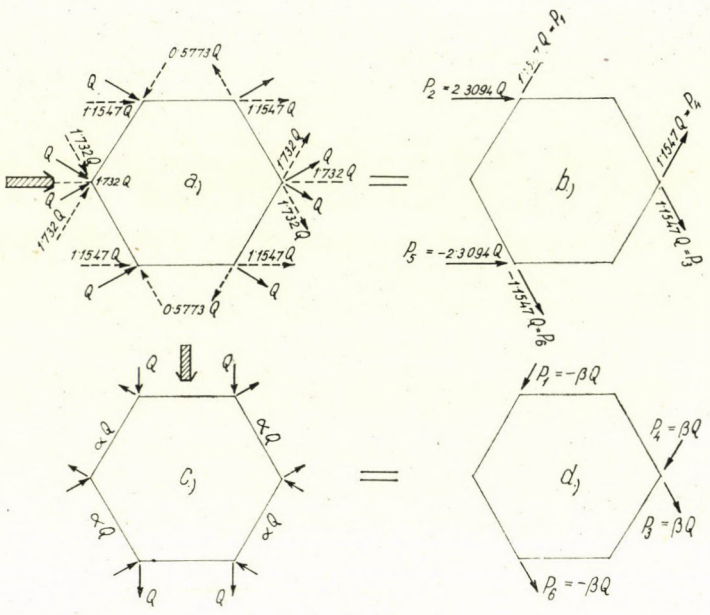


Abb. 30

Die Einspannmomente können daher auf Grund der Formel

$$M = 0{,}51975\,(M_1'' + 2M_2'' + M_3'' - M_4'' - 2M_5'' - M_6'')$$

ausgerechnet werden. Zum Beispiel:

$M_{ab,1} = 0{,}51975(2122 - 2 \cdot 86 - 26 + 6 + 2 \cdot 90 + 330) = 1268$ kgm

$M_{ab,2} = 0{,}51975(-3575 + 2 \cdot 2255 - 654 - 593 + 2 \cdot 1911 - 3510) = 0$

$M_{ab,3} = 0{,}51975(406 - 2 \cdot 271 - 28 + 8 + 2 \cdot 28 + 271) =$
$= 89$ kgm $= M_{ba,3}$

$M_{ag,1} = 0{,}51975(-1489 + 2 \cdot 4 + 12 - 12 - 2 \cdot 4 + 1489) = 0$

$M_{ag,2} = 0{,}51975(1809 - 2 \cdot 207 - 25 - 25 - 2 \cdot 207 + 1809) = 1424$ kgm

$M_{ag,3} = 0{,}51975(-64 + 2 \cdot 344 - 64 + 64 - 2 \cdot 344 + 64) = 0$

$M_{ga,2} = 0{,}51975(2710 - 2 \cdot 104 - 12 - 12 - 2 \cdot 104 + 2710) = 2589$ kgm

$M_{ba,1} = 0{,}51975(2122 - 2 \cdot 330 - 90 + 6 + 2 \cdot 26 + 86) = 788$ kgm

$M_{ba,2} = M_{bc,2} = M_{bh,3} = 0$

$M_{bc,1} = 0{,}51975(-330 + 2 \cdot 2122 - 86 + 26 + 2 \cdot 6 + 90) = 2056$ kgm

$M_{bc,3} = 0{,}51975(-271 + 2 \cdot 406 - 271 + 28 + 2 \cdot 8 + 28) = 178$ kgm

$M_{bh,1} = 0{,}51975(-1489 - 2 \cdot 1489 + 4 - 12 - 2 \cdot 12 - 4) = -2340$ kgm

$$M_{bh,2} = 0{,}51975(-1809 + 2 \cdot 1809 - 207 + 25 - 2 \cdot 25 - 207) = 712 \text{ kgm}$$

$$M_{hb,1} = 0{,}51975(-1786 - 2 \cdot 1786 + 2 - 6 - 2 \cdot 6 - 2) = -2794 \text{ kgm}$$

$$M_{hb,2} = 0{,}51975(-2710 + 2 \cdot 2710 - 104 + 12 - 2 \cdot 12 - 104) = 1295 \text{ kgm}$$

In Anbetracht der Symmetrie der Belastung und des Rahmens sind die Momente in den übrigen Knotenpunkten bzw. Stäben gleich gross wie die oben berechneten, doch fallweise von entgegengesetztem Vorzeichen und von entgegengesetztem Sinn. Eine vollständige Darstellung der Momente gibt *Abb. 29b*.

Es soll noch besonders erwähnt werden, dass im Fall einer derartig angenommenen Belastung in den Stäben des Ringes kein Moment in der Richtung »2«, in den Stielen »*a*« und »*d*« kein Moment in der Richtung »1« und in keinem Stiel ein Moment in der Richtung »3« auftritt, dass also *die Vektoren aller in den Knotenpunkten des Ringes auftretenden Momente in der Ebene des Ringes liegen.*

Wenn die Verteilung der Windbelastung auf die einzelnen Stäbe bzw. Knotenpunkte in der behandelten Weise angenommen wird, also symmetrisch zur senkrecht zur Windrichtung verlaufenden Halbierungsgeraden des Rahmengrundrisses als Symmetrieachse, d. h. wenn an den entsprechenden Seiten ein gleich grosser Winddruck bzw. eine gleich grosse Windsaugung wirkt, so ist die Lösung für jedweden zentralsymmetrischen Rahmen äusserst einfach und besteht im Prinzip lediglich im Bestimmen einer einzigen Unbekannten. Z. B. beträgt im Falle eines Winddruckes gemäss *Abb. 30c* und *30d*, da

$$P_1 = P_6 = -P_3 = -P_4$$

$$x_1 = x_6 = -x_3 = -x_4 \quad \text{und} \quad x_2 = x_5 = 0$$

das heisst, so wie weiter oben

$$x_1 = \frac{P_1}{R_{1,1} + R_{1,2} - (R_{1,3} + R_{1,4})}$$

(Da P_1 im vorliegenden Fall negativ ist, wird auch x_1 negativ sein.)

Das Gesagte hat natürlich auch für acht-, zwölfeckige usw. zentralsymmetrische Rahmen Geltung. Es wurde damit für den Fall von Windbelastung — unter den erwähnten vereinfachenden Bedingungen — eigentlich eine sehr einfache Berechnungsmethode vorgeführt. Im folgenden Abschnitt soll eine — von einem anderen Grundgedanken ausgehende — Lösung beschrieben werden, die noch weniger Rechenarbeit erfordert als die jetzt gezeigte Methode. Diese Lösung kann für eine beliebige Belastung als Näherungsverfahren und für solche Windbelastungen, wie das jetzt behandelte, als genaues Verfahren, auch in Bezug auf Stockwerkrahmen, angewendet werden.

E) NÄHERUNGSVERFAHREN ZUR BERECHNUNG VON ZENTRALSYMMETRISCHEN RÄUMLICHEN RAHMEN

I. Erstes Verfahren

1. *Allgemeines*

Wie ersichtlich, verursacht das in den vorhergehenden Abschnitten beschriebene Verfahren — obwohl es anderen Verfahren gegenüber eine wesentliche Vereinfachung darstellt, besonders im Fall von zentralsymmetrischen Rahmen — noch immer eine bedeutende Rechenarbeit. Bei seiner Anwendung in der Praxis lassen gerade die praktischen Verhältnisse gewissen Annahmen zu, welche die Durchführung der Rechnungen wesentlich erleichtern, wobei jedoch die erhaltenen Ergebnisse noch immer den Anforderungen der Praxis genügen. Bei Fundamenten von Kühltürmen bestimmen nämlich der darauf gebaute Oberbau, bei Wasserturmgerippen der eingebaute und an das äussere Rahmengerippe starr angeschlossene Treppenaufgang sowie der Wasserbehälter selbst die gleich grossen Verschiebungen der Stielenden, die durch in waagerechter Ebene liegende Riegel zusammengehalten sind. In praktischen Fällen — im Fall von Windbelastung — wird die untenstehende vereinfachende Annahme auch durch den Umstand unterstützt, dass sich die Windbelastung aus Druck und Saugung zusammensetzt, deren Werte als nahezu gleich gross und als zweifach symmetrisch angesehen werden können.

Bei der Ableitung des unterstehenden Näherungsverfahrens soll auf Grund des Obenerwähnten angenommen werden, dass die aus waagerechten Balken gebildeten Versteifungsebenen — in Bezug auf die Verschiebung, Bewegung — als massive Scheiben wirken, dass also die Verschiebung der Knotenpunkte infolge von symmetrischer Belastung oder von Verdrehungsmoment (von zentralsymmetrischer Belastung) genau dieselbe ist; das bedeutet, dass bei jedweder Belastung in der waagerechten Ebene die Lage der Knotenpunkte zueinander, der durch die Stäbe des waagerechten Knotenpunktsnetzes eingeschlossene Winkel, nicht verändert wird, mit anderen Worten, dass das Netz sich parallel zu sich selbst verschiebt und dreht. Diese Annahme erfüllt sich bei dreieckigen Rahmen bei jeder Belastung und bei viereckigen Rahmen bei Belastungen, welche auf die Seitenhalbierungsgeraden symmetrisch wirken, oder bei einem Verdrehungsmoment (bei zentralsymmetrischer Belastung) von selbst; die Berechnung wird also auch bei einer derartigen Annahme genaue Resultate ergeben. Bei anderen Rahmentypen und anderen Belastungen werden die Ergebnisse des vorgeführten Verfahrens annähernd genau sein.

Es soll nun der auf *Abb. 31* dargestellte Rahmentyp untersucht werden. Die senkrechte Symmetrieachse ζ des Rahmens durchschneidet die waagerechte Ebene der Riegel in den Punkten »0« bzw. »0_1«. In diesen Punkten soll ein

Koordinatensystem angenommen werden und zwar so, dass die in der waagerechten Ebene liegende Koordinatenachsen ξ und η die Symmetrieachsen von gleichem Charakter des durch die Riegel gebildeten Vielecks sein sollen. Diese

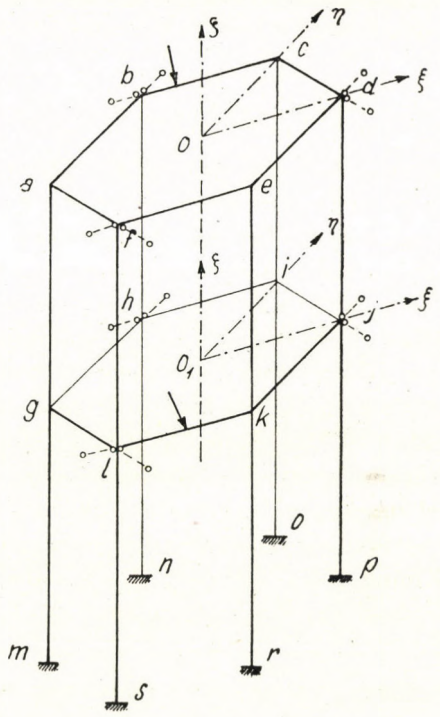


Abb. 31

Symmetrieachsen schliessen gewöhnlich einen schiefen Winkel ein. Die dritte Achse soll mit der senkrechten Symmetrieachse ζ zusammenfallen.

Der besprochene Rahmen ist vorläufig auf die aus *Abb. 31* ersichtliche Weise als gestützt zu denken, also durch symmetrisch angeordnete Stützstäbe. Auf den Rahmen soll eine beliebige äussere Belastung wirken. Die durch die äussere Belastung verursachten Momente M_I, die auf die Knotenpunkte wirkenden Querkräfte (T_n), Normalkräfte (N_n) und die in den gedachten Stützen wirkenden Festhaltungskräfte sollen als bestimmt angenommen werden. In jedem Knotenpunkt »*n*« *(Abb. 32)* sind die auf die Knotenpunktsquerschnitte der Stäbe wirkenden bekannten Kräfte T_n, sowie die Normalkräfte N_n und die Festhaltungskraft R_n im Gleichgewicht, d. h. bei Berücksichtigung der vektorialen Addition

$$(\Sigma\, T_n,\ \Sigma\, N_n,\ R_n) = 0$$

In diesen Gleichwertigkeiten können die senkrechten Kräfte T_n und N_n im weiteren Verlauf ausser Acht gelassen werden, weil sie in dem gedachten Stütz-

stab keine Kräfte hervorrufen, für sie erfüllt sich die Gleichgewichtsbedingung gesondert und unabhängig. Solche Gleichungen können in jedem Knotenpunkt

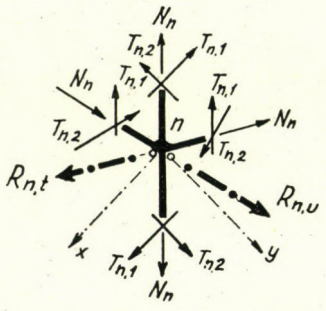


Abb. 32

und daher auch für ein Kräftesystem in der Ebene des waagerechten Ringes aufgestellt werden, d. h.

$$(\Sigma(\Sigma\, T_n),\ \Sigma(\Sigma\, N_n),\ \Sigma\, R_n) \doteq 0$$

Da $(\Sigma(\Sigma\, N_n)) \doteq 0$ und $\Sigma\, R_n \doteq -\Sigma\, P_n = R = -P$

schliesslich $(\Sigma(\Sigma\, T_n)) \doteq -\Sigma\, R_n \doteq -R = P$

bzw. $$(\Sigma(\Sigma\, T_n),\ \Sigma\, R_n) \doteq 0 \qquad (27)$$

Wird das Kräftesystem auf die in den Ebenen 0, 0_1 liegenden Anfangspunkte der Koordinatenachsen 0, 1, reduziert, so erhält man in jedem waagerechten Balkenfeld

$$\begin{aligned} \Sigma(\Sigma\, T_{n\xi}) &= P_\xi \\ \Sigma(\Sigma\, T_{n\eta}) &= P_\eta \\ \Sigma(\Sigma\, T_n p) &= M_\zeta \\ \overline{P}_\zeta &= \overline{P} + \overline{P}_\eta \end{aligned} \qquad (28)$$

das heisst, dass in jeder waagerechten Balkenebene der Gegensatz des Festhaltungskräftesystems, das Verschiebungskräftesystem, durch das Kräftesystem P_ξ, P_η, M_ζ *ersetzt wurde*, wo P_ξ, P_η die Projektionen in der Richtung ξ und η der auf den Knotenpunkt wirkenden Querkräfte bzw. deren Resultierenden bezeichnen. M_ζ bedeutet das für die senkrechte Symmetrieachse ζ bzw. auf deren Durchschneidungspunkte 0, 0_1 .... angenommene Moment der auf die Knotenpunkte wirkenden Querkräfte, also das Verdrehungsmoment, das durch einen mit der Achse ζ zusammenfallenden Vektor gekennzeichnet werden kann. Die Verschiebungskräfte P_ξ, P_η, M_ζ gelten in den positiven Richtungen ξ, η, ξ als positiv.

Die Aufgabe hat sich nunmehr dahin vereinfacht, dass die durch die Verschiebung entstandenen Zusatzmomente (M_{II}) für das in den Ebenen 0, 1, ... zu ersetzende Kräftsystem $P_{\xi 0}$, $P_{\eta 0}$, $M_{\zeta 0}$, $P_{\xi 1}$, $P_{\eta 1}$, $M_{\zeta 1}$ . . . . zu bestimmen sind.

Die weiteren Überlegungen beruhen nun im wesentlichen darauf, dass die Verschiebung der als massiv gedachten waagerechten Versteifungsebenen, als Ebenebewegung durch drei Angaben gekennzeichnet werden kann: durch die zwei Projektionen der Verschiebung und durch die Drehung des gedachten Achsenkreuzes der ebenen Fläche. Wenn das gelingt, so werden anstatt von 12 Zusatzmomenten, welche den im gegenwärtigen Falle dargestellten $2 \cdot n = 12$ Stützstäben entsprechen, nur $2 \cdot 3 = 6$ vorkommen. Doch auch diese Zahl wird sich noch vermindern. Die durch P_ξ und P_η von der Grösse der Einheit verursachten Momente sind nämlich im wesentlichen dieselben. Die Kennziffern sind zyklisch zu vertauschen und es handelt sich daher nur um die Bestimmung von 4 Zusatzmomentenlinien.

Nach diesen Erörterungen soll nun die Art der Bestimmung der durch $P_\xi = 1$ und $M_\zeta = 1$ verursachten Zusatzmomente M'_ξ und M'_ζ betrachtet werden.

2. *Die Bestimmung der Momente* M'_ξ (M'_η)

Die Überlegungen sollen nun auf Grund des auf *Abb. 31* dargestellten Stockwerkrahmens fortgesetzt werden. Es soll zuerst angenommen werden, dass an jedem Knotenpunkt des Rahmens eine starre Einspannung herrscht und dass nur der oberste waagerechte Riegel nicht gestützt ist. Wenn in der Symmetrieachse ξ des mit »0« bezeichneten Rahmenfeldes eine Verschiebungskraft von beliebiger Grösse wirkt, so erleidet jeder Knotenpunkt des waagerechten Rahmenfeldes eine gleich grosse Verschiebung ($\triangle_0$). Das bedeutet, dass der obere Teil der in jeder Richtung gleich stabsteifen Stiele, die in das darunter befindliche, waagerechte und mit »1« bezeichnete Rahmenfeld eingespannt sind, eine gleich grosse, zur Stabrichtung senkrechte und mit der Achse ξ parallele Verschiebung erleiden wird. Infolgedessen werden oben und unten in den Stielen gleich grosse Einspannmomente (M) auftreten, deren Vektoren senkrecht zur Richtung der Achse ξ sein werden (*Abb. 33a*). Wenn der Momentenausgleich an der jetzt gestützt gedachten Konstruktion vorgenommen wird, so ergibt sich aus den Symmetrieverhältnissen des Rahmens und aus der Symmetrie der Belastung, dass das Kräftespiel der symmetrisch angeordneten Stäbe dasselbe sein wird und dass die Resultierende der Festhaltungs- bzw. Verschiebungskräfte mit der Achse ξ zusammenfällt. Die Resultierende weist also weder eine Komponente von Richtung η, noch ein Verdrehungsmoment um die Achse ζ herum auf. (In einem derartigen Falle genügt es, den Momentenausgleich nur in Bezug auf je zwei nebeneinander befindliche, nicht symmetrisch liegende Knotenpunkte durchzuführen, z. B. für die Knotenpunkte *a*—*f* und *g*—*l*.)

Wenn also auf Grund der erhaltenen Momente $M''_{\xi 0}$ die waagerechten — auf den Knotenpunkt wirkenden — Querkräfte an den Knotenpunktsenden der an die mit 0 und 1 . . . bezeichneten Ebenen angeschlossenen Stäbe bestimmt

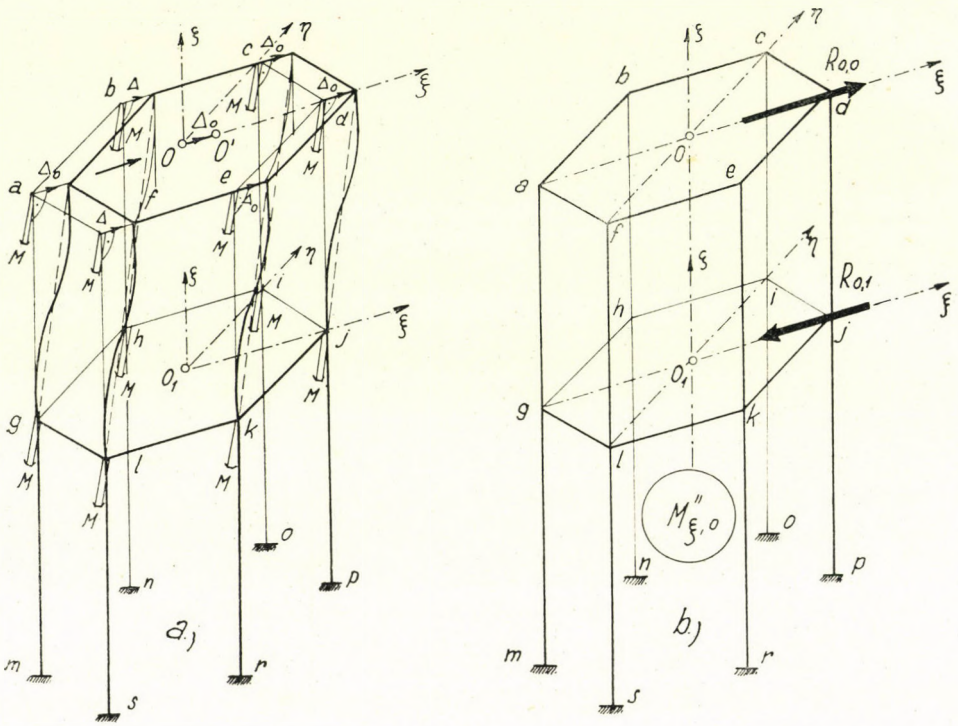


Abb. 33

wurden, so können aus den Querkräften — bei einer Projektion derselben gemäss Achse ξ — in den gestützten waagerechten Ebenen die Resultierenden der Festhaltungskräfte direkt berechnet werden *(Abb. 33b)*.

Wenn die Querkräfte, die auf die Knotenpunkte der an die Ebene 0 angeschlossenen Stabenden wirken, mit $T_{0,0}$, diejenigen, welche auf die Knotenpunkte der an die Ebene 1 angeschlossenen Stabenden wirken, mit $T_{0,1}$, ihre Projektionen gemäss ξ mit $T_{\xi 0,0}$ und $T_{\xi 0,1}$, die Resultierende der zur Ebene 0 bzw. 1 gehörenden Festhaltungskräfte — die, wie ersichtlich, mit der Achse ξ zusammenfällt — mit $R_{0,0}$ bzw. $R_{0,1}$ bezeichnet werden, so erhält man in Bezug auf letztere

$$R_{0,0} = -\Sigma T_{\xi 0,0}$$
$$R_{0,1} = -\Sigma T_{\xi 0,1} \qquad (29)$$

Auf Grund ähnlicher Überlegungen erhält man die durch eine Verschiebung entstandenen Momente $(M''_{\xi 1})$, wobei diese Verschiebung auf Grund

einer in der Achse ξ der Ebene 1, ... als wirkend gedachten, beliebigen, waagerechten Kraft hervorgerufen wird, weiters die Querkräfte ($T_{1,0}$, $T_{1,1}$) und die mit der Achse ξ zusammenfallenden Resultierenden der Festhaltungskräfte ($R_{1,0}$ $R_{1,1}$). Dabei wird, wie weiter oben, von der Annahme ausgegangen, dass in jedem Knotenpunkt eine vollkommen starre Einspannung herrscht und dass

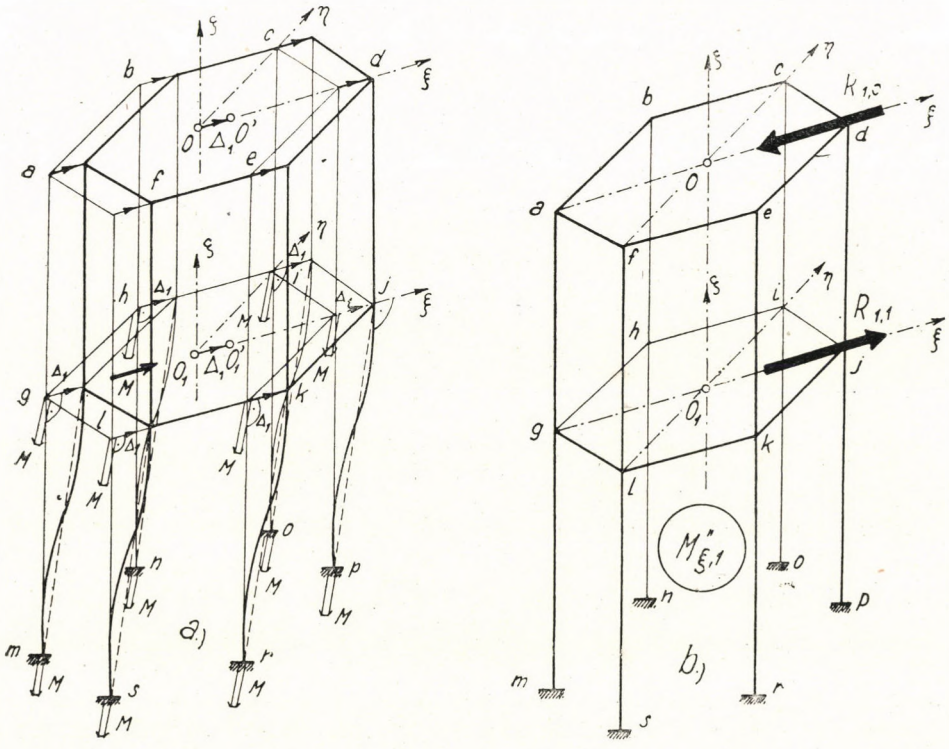


Abb. 34

die gedachte Stütze in der mit 1, . . . bezeichneten Ebene entfernt worden ist, usw. *(Abb. 34a* und *34b)*.

In diesem Falle beträgt

$$R_{1,0} = -\Sigma T_{\xi\,1,0} \qquad (29a)$$

$$R_{1,1} = -\Sigma T_{\xi\,1,1}$$

Jetzt können die durch die in der Symmetrieachse ξ der Ebene 0 bzw. 1 wirkenden Kräfte von der Grösse der Einheit $P_{\xi 0} = 1$ bzw. $P_{\xi 1} = 1$ hervorgerufenen Momente $M'_{\xi 0}$ bzw. $M'_{\xi 1}$ durch die Gleichungen

$$M'_{\xi 0} = \xi_{0,0} M''_{\xi 0} + \xi_{0,1} M''_{\xi 1}$$

bzw.
$$M'_{\xi 1} = \xi_{1,0} M''_{\xi 0} + \xi_{1,1} M''_{\xi 1} \tag{30}$$

erhalten werden, wo für die Werte von ξ ähnliche Gleichungen wie die unter (24) aufgestellt werden können, d. h.

$$\xi_{0,0} R_{0,0} + \xi_{0,1} R_{1,0} = 1$$

bzw.
$$\xi_{0,0} R_{0,1} + \xi_{0,1} R_{1,1} = 0 \tag{31}$$

$$\xi_{1,0} R_{0,1} + \xi_{1,1} R_{1,0} = 0$$

$$\xi_{1,0} R_{0,1} + \xi_{1,1} R_{1,1} = 1$$

Im Falle eines einfachen Rahmens unterscheidet sich bloss $\xi_{0,0}$ von Null, und zwar

$$\xi_{0,0} = \frac{1}{R_{0,0}} \tag{31a}$$

$$M'_{\xi 0} = \frac{1}{R_{0,0}} M''_{\xi 0} \tag{30a}$$

Besonders gut anwendbar und schnell ist die oben beschriebene Methode im Fall von einfachen Rahmen ohne Stockwerk (bei Kühlturmfundamenten). In diesem Fall wird nämlich zuerst an allen Stielenden, unten und oben, gemäss der angenommenen Windrichtung, senkrecht ein gleich grosser Momentenvektor vorausgesetzt. Sodann wird der Momentenausgleich durchgeführt ($M''_{\xi 0}$), die auf den Knotenpunkt $T_{0,0}$ wirkenden Querkräfte werden lediglich in Bezug auf die Stiele bestimmt — die Projektionssumme der Querkräfte der in der waagerechten Ebene liegenden Riegel auf die Symmetrieachse ξ ist natürlich in sich selber Null — dann werden deren Projektionen in der Richtung von ξ, die Werte $T_{\xi 0,0}$ und weiters die Resultierende der Festhaltungskraft

$$R_{0,0} = - \Sigma T_{\xi 0,0}$$

bestimmt. Nach diesen Berechnungen können die endgültigen Momente aus der Formel

$$M_{\xi} = P_{\xi} M'_{\xi 0} = \frac{P_{\xi}}{R_{0,0}} M''_{\xi 0} = - \frac{P_{\xi}}{\Sigma T_{\xi 0,0}} M''_{\xi 0} \tag{32}$$

gewonnen werden, wo P_{ξ} die Resultierende des in der Ebene »0« wirkenden Winddruckes ist.

Wenn der Rahmen mehrere Stockwerke hat, so werden — indem ähnliche Überlegungen wie oben angestellt werden — die Momente $M'_{\xi 0}$, $M'_{\xi 1}$, $M'_{\xi 2}$, . . .

auf Grund der Gleichungen (30) und (31) ausgerechnet, sodann die endgültigen Momente für die in den Ebenen 0, 1, 2, ... wirkenden Windbelastungen P_{ξ_0}, P_{ξ_1}, P_{ξ_2} .... oder im allgemeinen für die Verschiebungskräfte auf Grund der Gleichung

$$M_{\xi} = P_{\xi_0} M'_{\xi_0} + P_{\xi_1} M'_{\xi_1} + P_{\xi_2} M'_{\xi_2} + \ldots \qquad (32b)$$

Danach können, nachdem die wahrscheinliche Verteilung der Windkräfte an den einzelnen Knotenpunkten angenommen wurde, für den ganzen Rahmen die Quer- und Normalkräfte bestimmt werden. Natürlich ist wegen der eigenmächtigen Annahmen das Gleichgewicht der Knotenpunkte im allgemeinen nicht befriedigt. Für die Annahme bzw. Ableitung der infolge der Unausgeglichenheit eventuell entstehenden Festhaltungskraftkomponente muss besonders gesorgt werden.

Insoferne auch durch P_η verursachte Momente notwendig sind, so können diese aus den durch P_ξ verursachten Momenten M'_ξ berechnet werden, indem man die Kennziffern entsprechend vertauscht.

3. Die Berechnung der Momente M'_ζ

Es soll wieder angenommen werden, dass die Knotenpunkte des auf *Abb. 31* dargestellten Rahmens starr eingespannt sind und dass der Rahmen — im Anfang, für den Augenblick — in der Ebene »0« nicht gestützt ist. Es soll gemäss der positiven Achse ζ in der Ebene 0 ein beliebig grosses, positives Verdrehungsmoment wirken, wie ein äusseres Verschiebungsmoment (zentralsymmetrische Belastung), welches an den obersten Punkten der Stiele Verschiebungskräfte von gleicher Grösse und Richtung (äussere Belastung), die auf die vom Schnittpunkt »0« gezogene Gerade senkrecht wirken, ersetzt. Die Verformung des oberen Stockwerks des Rahmens wird gemäss *Abb. 35* erfolgen, das heisst sie wird so beschaffen sein, dass die obersten Punkte der oberen Stiele entsprechend der Wirkung der positiven Verdrehung eine gleich grosse, relative Verschiebung erleiden, senkrecht zur Stabrichtung und senkrecht zur Geraden, die den Knotenpunkt mit dem Drehungsmittelpunkt 0 verbindet. Zusammen mit ihnen verformen sich auf die gleiche Weise auch alle Riegel, die in der Ebene »0« liegen. Infolge der senkrecht zur Stabrichtung erfolgenden Verschiebungen werden an allen Enden der Stiele und Riegel Einspannmomentenvektoren auftreten, und zwar bei den Stielen in *einer* Richtung und bei den Riegeln in *zwei* Richtungen. Diese Anfangseinspannmomente sind proportional zur Stabsteifigkeit der Stäbe und zu den senkrecht zur Stabrichtung erfolgten relativen Verschiebungen. (Es ist zweckmässig die zu den Stielen gehörende Verschiebung $\triangle_0$ als eins anzunehmen, worauf die zu den Balken gehörige $\triangle_0$ daraus einfach festgestellt werden kann.) Mit diesen Anfangseinspannmomenten — die obere, waagerechte Balkenebene muss man sich jetzt wieder als gestützt vor-

stellen — wird die Operation des Momentenausgleichs durchgeführt und nun erhält man in Bezug auf den ganzen Rahmen die Momente $M''_{\varsigma 0}$, sodann auf

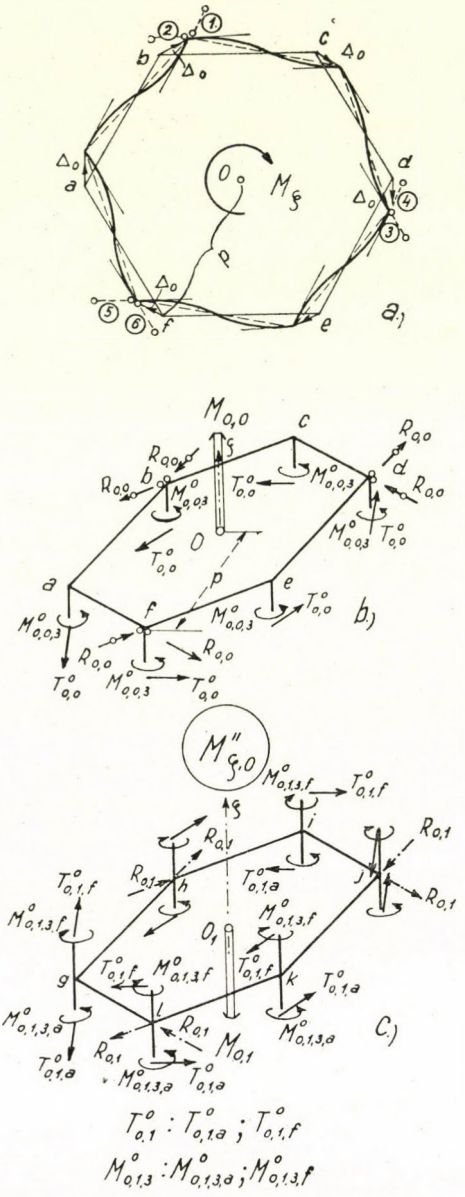


Abb. 35

Grund dieser die auf die Knotenpunkte, welche an die Ebenen 0 und 1, ... angeschlossen sind, wirkenden Querkräfte, die Werte $T_{0,0}$, $T_{0,1}$. Aus der Zentral-

symmetrie der äusseren Belastung und der Stützstäbe folgt *(Abb. 35/b* und *35/c)*, dass die Resultierende der Festhaltungskräfte die Grösse Null aufweist, also weder eine Projektion gemäss ξ noch gemäss η besitzt, sondern dass die Resultierende ein mit der Achse ζ zusammenfallender Momentvektor, sowohl in der Ebene 0, als auch in den Ebenen 1, 2, . . . ist ($M_{0,0}$ bzw. $M_{0,1}$); der Zwang der gedachten Stützungen kann also in den Ebenen 0 und 1 durch die resultierenden Festhaltungsmomente $M_{0,0}$ und $M_{0,1}$ ersetzt werden. Diese können direkt aus der auf den Punkt 0 bzw. 0_1 festgestellten Momentensumme der Querkräfte ($\Sigma T^0 p$) berechnet werden, die gemäss den Momentenvektoren der Stiele bestimmt wurden, die mit der Achse 1 zusammenfallen, also auf einen Knotenpunkt in der Richtung der Achse 2 wirken; des weiteren dient zu ihrer Berechnung die Summe der Momentenvektoren ($\Sigma M^{\bullet}_{3}$) — gemäss Achse 3 — der Knotenpunktsquerschnitte der Stiele, also

$$\begin{aligned} M_{0,0} &= -\Sigma M_{\zeta 0,0} = -\Sigma T_{0,0} p = -\Sigma T^{\circ}_{0,0} p - \Sigma M^{\circ}_{0,0,3} \\ M_{0,1} &= -\Sigma M_{\zeta 0,1} = -\Sigma T_{0,1} p = -\Sigma T^{\circ}_{0,1} p - \Sigma M^{\circ}_{0,1,3} \end{aligned} \tag{33}$$

Das zweite Glied der rechten Seite der Gleichung ist nämlich nichts anderes als die Summe des auf den Punkt 0 bzw. 0_1 bezogenen Verdrehungsmomentes, welches aus den der Richtung der Achse 1 gemässen Querkräften (T^g) berechnet wurde. Die Querkräfte entsprechen hierbei den mit der Achse 2 zusammenfallenden Momentenvektoren ($M''_{\zeta 0g}$) der waagerechten Balken, die für alle Balken gleich gross sind. Es ist nämlich beispielsweise

$$2 \cdot \frac{1}{2} T^g_{0,0} \cdot l = M^g_{0,0,2} = M^{\circ}_{0,0,3}$$

Wenn nun in Punkt 1 der Ebene 0_1 ein beliebiger Momentenvektor von Richtung ζ wirkt, — angenommen, dass die Knotenpunkte starr eingespannt sind und dass in der Ebene 1 die gedachten Stützstäbe momentan entfernt sind — *(Abb. 36a* und *36b)* so erhält man auf Grund eines ähnlichen Gedankenganges — nach Durchführung des Momentenausgleichs — die Momente M''_1, die Querkräfte $T_{1,0}$, $T_{1,1}$ und die den Zwang der gedachten Stützen ersetzenden Festhaltungsverdrehungsmomente $M_{1,0}$, $M_{1,1}$ . . . :

$$\begin{aligned} M_{1,0} &= -\Sigma M_{\zeta 1,0} = -\Sigma T^{\circ}_{1,0} p - \Sigma M^{\circ}_{1,0,3} \\ M_{1,1} &= -\Sigma M_{\zeta 1,1} = -\Sigma T^{\circ}_{1,1} p - \Sigma M^{\circ}_{1,1,3} \end{aligned} \tag{33a}$$

Die Momente $M'_{\zeta 0}$ bzw. $M'_{\zeta 1}$, welche durch das in der Achse ζ der Ebenen 0 und 1 gedachte $M_{\zeta 0} = 1$ bzw. $M_1 = 1$ verursacht wurden, ergeben sich aus den Gleichungen

$$M'_{\zeta 0} = \zeta_{0,0} M''_{\zeta 0} + \zeta_{0,1} M''_{\zeta 1}$$

bzw.

$$M'_{\zeta 1} = \zeta_{1,0} M''_{\zeta 0} + \zeta_{1,1} M''_{\zeta 1} \tag{34}$$

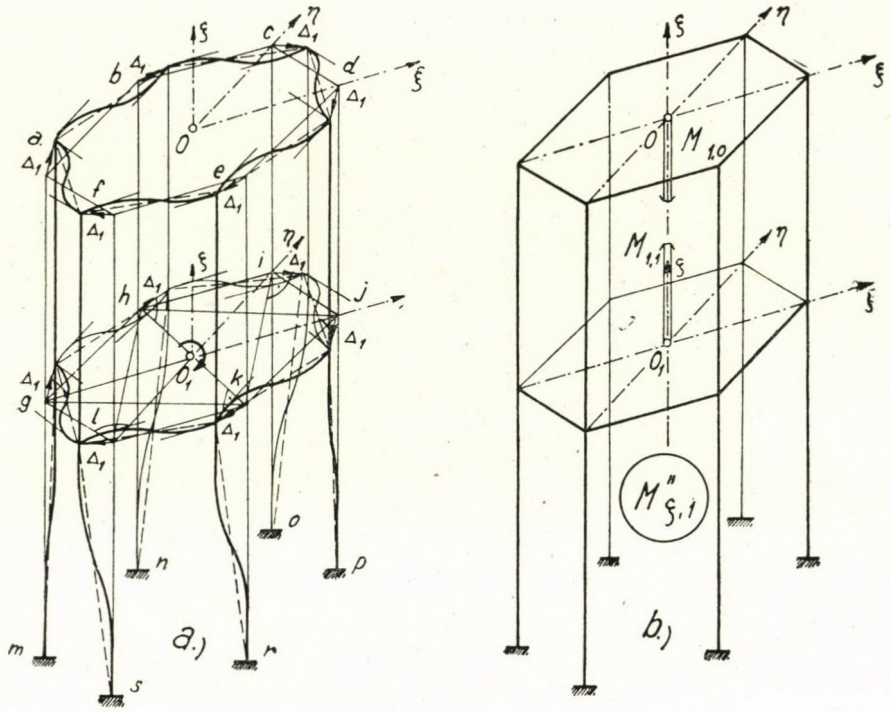


Abb. 36

wo für die Werte von ζ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \zeta_{0,0} M_{0,0} + \zeta_{0,1} M_{1,0} &= 1 \\ \zeta_{0,0} M_{0,1} + \zeta_{0,1} M_{1,1} &= 0 \\ \zeta_{1,0} M_{0,0} + \zeta_{1,1} M_{1,0} &= 0 \\ \zeta_{1,0} M_{0,1} + \zeta_{1,1} M_{1,1} &= 1 \end{aligned} \tag{35}$$

aufgestellt werden können.

Im Falle eines einfachen Rahmens beträgt

$$\zeta_{0,0} = \frac{1}{M_{0,0}} \tag{35a}$$

und

$$M'_{\zeta_0} = \frac{1}{M_{0,0}} M''_{\zeta_0} \tag{34a}$$

Danach kann im Falle eines Rahmens mit mehreren Stockwerken das endgültige Moment, welches durch die im ersten Schritt der Gleichungen (M_I)

bestimmten Verschiebungsmomente $M_{\zeta 0}$, $M_{\zeta 1}$, $M_{\zeta 2}$, ... verursacht wurde, auf Grund der Gleichung

$$M_{\zeta} = M_{\zeta 0}\, M'_{\zeta 0} + M_{\zeta 1}\, M'_{\zeta 1} + M_{\zeta 2}\, M'_{\zeta 2} + \dots \tag{36}$$

festgestellt werden.

Es soll hier unterstrichen werden, das die beschriebene Methode im Falle von zentralsymmetrischen Rahmen und im Falle des Verdrehungsmomentes *ein genaues Verfahren* abgibt.

4. *Die endgültigen Momente von Rahmen mit beweglichen Knotenpunkten*

Im ersten Teil der Berechnungen wurden die Momente (M_I) des als gestützt gedachten Rahmens und die Komponenten der Verschiebungsresultierenden $P_{\xi 0}$, $P_{\eta 0}$, $M_{\zeta 0}$; $P_{\xi 1}$, $P_{\eta 1}$, $M_{\zeta 1}$, ..., welche das Verschiebungskräftesystem in den Ebenen 0, 1, 2, ... ersetzen, berechnet. Die infolge der Verschiebung entstandenen Zusatzmomente (M_{II}) können demnach laut dem in den Punkten 2. und 3. Gesagten auf Grund der untenstehenden allgemeinen Formel bestimmt werden:

$$M_{II} = M_{\xi} + M_{\eta} + M_{\zeta} \tag{37}$$

wo

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= \Sigma\, P_{\xi n}\, M'_{\xi n} \\ M_{\eta} &= \Sigma\, P_{\eta n}\, M'_{\eta n} \\ M_{\zeta} &= \Sigma\, P_{\zeta n}\, M'_{\zeta n} \end{aligned} \tag{38}$$

wenn in beiden Gliedern auf einmal $n = 0, 1, 2 \dots$ beträgt.

Aus dem Obenstehenden ergibt sich, dass bei räumlichen Stockwerkrahmen mit beliebigem Grundriss die Zahl der Hilfsmomente so vielmal drei ist, als waagerechte Versteifungssysteme vorhanden sind. Das vermindert in den praktischen Fällen (Kühltürme mit dem Grundriss eines Sechs- oder Achtecks) die Rechenarbeit ganz wesentlich. Es muss aber erwähnt werden, dass das Kräftegleichgewicht der Knotenpunkte im allgemeinen nicht erfüllt ist.

5. *Beispiele*

Als erstes Beispiel soll wieder die auf *Abb. 7* dargestellte Aufgabe herangezogen werden.

In erster Linie sollen die *Momente* M'_{ξ} bestimmt werden. Bei Berücksichtigung der Symmetrie der Stiele gemäss den Achsen x, y und bei Anwendung des Achsenkreuzes ξ, η, ζ gemäss *Abb. 37a*, wurden die Anfangseinspannmomente

(M), die infolge einer beliebigen, gleichen, positiven Verschiebung von Richtung ξ am Ende der Stiele auftreten, in einer Ebene parallel zur Ebene $\xi\eta$, bzw. die Momentenvektoren von einer beliebig gewählten (z. B. 360 kgm) Grösse senkrecht dazu gemäss *Abb. 37b* angenommen. Die in der Richtung »*i*« befindlichen

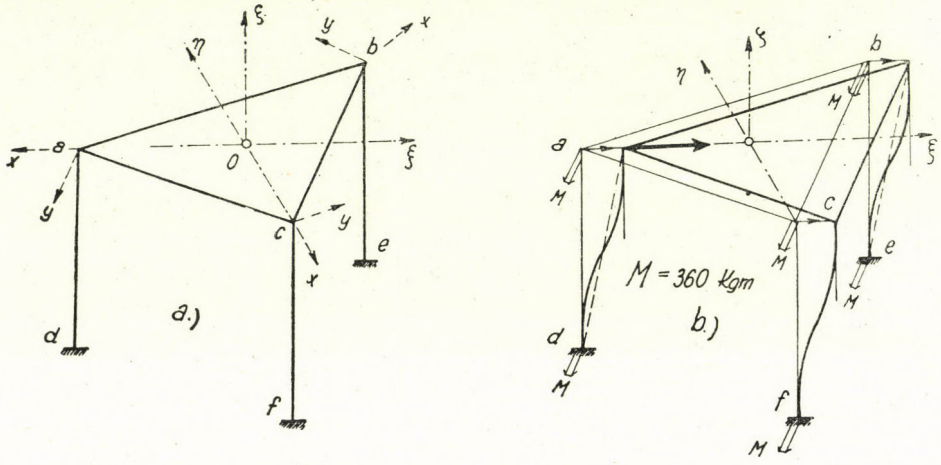


Abb. 37

Anfangseinspannmomente (M_{ri}), sowie die in der Richtung »*i*« befindlichen auszugleichenden Momente (M_k) sind folgende:

$$M_{AD,2} = 360 \text{ kgm} = M_{DA,2}$$

$$M_{BE,1} = -0{,}866 \cdot 360 = -312 \text{ kgm} = M_{EB,1} = M_x$$

$$M_{BE,2} = -0{,}500 \cdot 360 = -180 \text{ kgm} = M_{EB,2} = M_y$$

$$M_{CF,1} = +0{,}866 \cdot 360 = 312 \text{ kgm} = M_{FC,1} = M_x$$

$$M_{CF,2} = -0{,}500 \cdot 360 = -180 \text{ kgm} = M_{FC,2} = M_y$$

Mit diesen Momenten wird der Momentenausgleich durchgeführt. In diesem Falle wurde der Momentenausgleich und die Momentenübertragung beispielsweise auf einmal vorgenommen (siehe Tabelle III.). Im vorliegenden Falle genügt es, aus Symmetriegründen den Momentenausgleich nur in zwei Knotenpunkten durchzuführen, z. B. in den Knotenpunkten »*a*« und »*b*«. Die Momente des Knotenpunktes »*c*« haben den entgegengesetzten Sinn.

In der 6. Zeile der Tabelle sind die obigen Einspannmomente (M_{ri}) zu finden, in der 7. Zeile deren Projektionen in den Richtungen x, y (M_{rik}), in der 8. Zeile die Projektionen des unausgeglichenen Momentenvektors in den Richtungen x und y (M_k), in der 9. Zeile deren Augleichsmomente (M_{rik}), wobei die

TABELLE III.

Die Berechnung der Momente $M''_{\xi,0}$

1	*a*										*b*										
2	$x\,(\Sigma M_{rik} = M_{ri})$					y					$x\,(\Sigma M_{rik} = M_{ri})$					y					*k*
3	ab1	ab3	ac1	ac3	ad1	ab1	ab3	ac1	ac3	ad2	ba1	ba3	bc1	bc3	be1	ba1	ba3	bc1	bc3	be2	*ri*
4	,500	—,866	,500	—,866	1,000	—,866	—,500	,866	,500	1,000	,500	—,866	,500	—,866	1,000	—,866	,500	—,866	—,500	1,000	$\cos\delta$
5	—,200	,030	—,200	,030	—,746	,254	,013	—,254	—,013	—,548	—,200	,030	—,200	,030	—,746	—,254	—,013	,254	,013	—,548	*n*
6										360					—312					—180	M_{Ri}
7										360					—312					—180	M_{Rik}
8	0					360					—312					—180					M_k
9	(—	—	—	—	—	91	5	—91	—5	—197	62	—9	62	—9	233	46	2	—46	—2	99)	M_{rik}
10	91	5	—91	—5	—					—197	108	—7	16	—11	233					99	M_{ri}
11	54	—7	—54	7	—						46	5	—8	11	—						M'_r
12	(27	6	—27	—6	—	—47	4	—47	4	—	23	—4	—4	—10	—	40	2	7	—6	—)	M_{Rik}
13	0					—86					5					43					M_k
14	(—	—	—	—	—	—22	—1	22	1	47	—1	—	—1	—	—4	—11	—1	11	1	—24	M_{rik}
15	—22	—1	22	1	—					47	—12	—1	10	1	—4					—24	M_{ri}
16	—6	—1	6	1	—						—11	—1	—5	—1	—						M'_{ri}
17	(—3	1	3	—1	—	5	—	5	—	—	—6	1	—2	1	—	—10	—	4	—	—)	
18	0					10					—6					—6					
19	(—	—	—	—	—	3	—	—3	—	—5	1	—	1	—	4	2	—	—2	—	3)	
20	3	—	—3	—	—					—5	3	—	—1	—	4					3	
21	1	—	—1	—	—						1	—	—	—	—						
22	(—	—	—	—	—	—1	—	—1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—)	
23	0					—2					1					—1					
24	121	—4	—121	4	—	360 — 205 = 155				205	135	—4	13	0	—79	— 180 + 102 = — 78				—102	M_{ri}
25	$M_{da1} =$				—	$M_{da2} = 360 - \frac{1}{2}\ 155 = 282$					$M_{eb1} = -312 + \frac{1}{2}\ 233 = -196$					$M_{eb2} = -180 + \frac{1}{2}\ 78 = -141$					
26	(60	3	—60	—3	—	—105	2	—105	2	205	68	3	6	—	—79	117	—2	—11	—	—102)	M_{rik}
27	0					—1					—2					2					M_k

Durchführung des Ausgleichs an jedem Knotenpunkt und in jeder Richtung auf einmal vorgenommen wird. In der 10. Zeile der Kolonnen x sind die einzelnen Momente von gleicher Richtung addiert (M_{ri}), wie z. B.

$$M_{ba,1} = 62 + 46 = 108$$

$$M_{ba,3} = -9 + 2 = -7$$

In der 11. Zeile ist die Momentenübertragung (M'_{ri}) durchgeführt, in der 12. Zeile wurden die auf die Knotenpunkte wirkenden Momente gemäss den Richtungen 1., 2., 3. auf die Achsen x, y projiziert (M_{rik}), sodann wurden in der 13. Zeile durch Addition der letzteren die unausgeglichenen Momente (M_k) gemäss den Achsen x und y gewonnen. Danach wiederholen sich die Schritte. Die algebraische Summe der nicht in Klammern stehenden Momente (Ausgleichs-

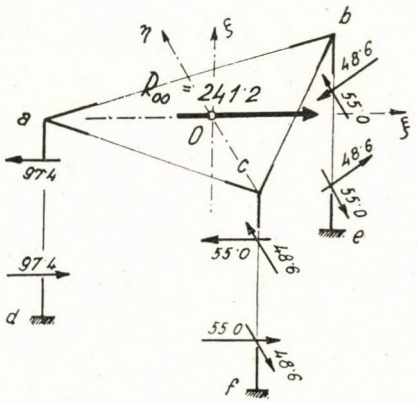


Abb. 38

und Übertragungsmomente, sowie Anfangseinspannmomente) ergibt die endgültigen Momente.

Die Momente des Knotenpunktes »*c*« haben den entgegengesetzten Sinn wie die des Knotenpunktes »*b*«, das heisst

$$M_{ca,1} = -135 \quad , \quad M_{ca,3} = 4 \quad , \quad M_{cb,1} = -13$$

$$M_{cf,1} = 79 \quad , \quad M_{cf,2} = -1{,}02$$

In der 26. und 27. Zeile wurde die Kontrolle der Rechnungen, der Ausgleich der Knotenpunkte — in Bezug auf die endgültigen Momente — durchgeführt.

Auf *Abb. 38* sind die Knotenpunktsquerkräfte dargestellt, die mit Hilfe der aus der 24. und 25. Zeile der Tabelle III. gewonnenen Momente berechnet wurden.

Die Resultierende der Querkräfte des Knotenpunktsstieles ($T_{0,0}$) hat — wie aus *Abb. 38* ersichtlich — nur in der Richtung ξ eine Projektion.

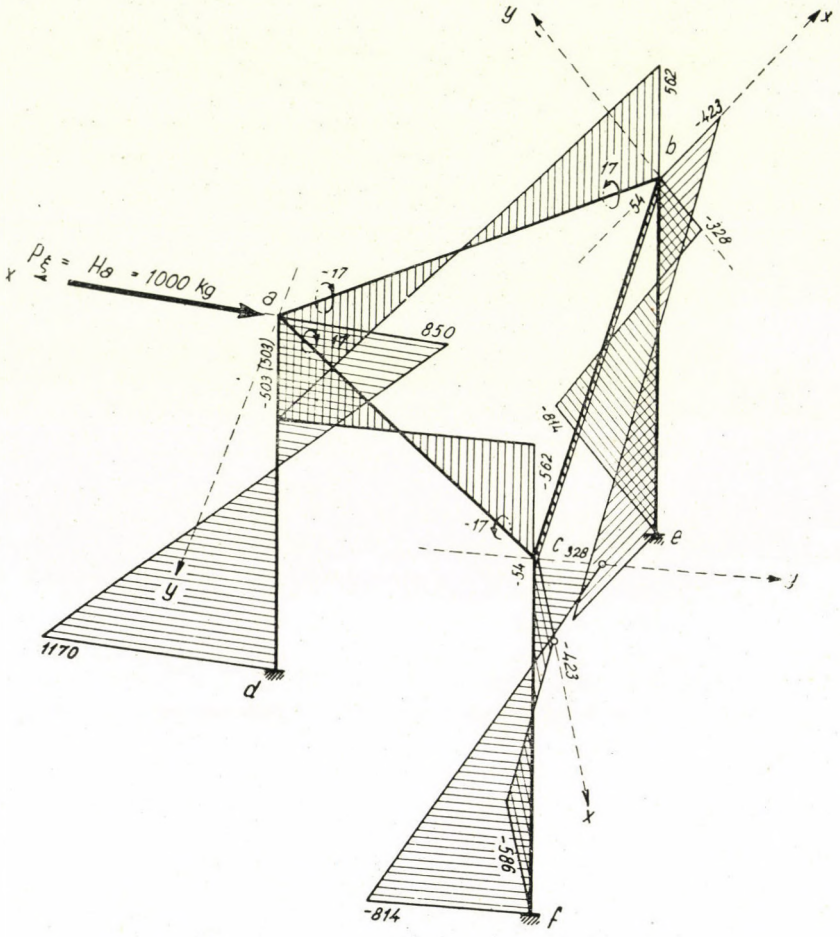


Abb. 39.

Laut Formel (29):

$$R_{0,0} = -\Sigma T_{0,0} = -[-97{,}4 - 2(0{,}866 \cdot 55{,}0 + 0{,}500 \cdot 48{,}6)] = 241{,}2 \text{ kg}.$$

Es soll nun die Momentenlinie für die Kraft $H_a = P_\xi = 1000$ kg festgestellt werden. In diesem Falle ist

$$\xi_{0,0} = \frac{1000}{241{,}2} = 4{,}14$$

$$M'_\xi = 4{,}14 \; M''_\xi$$

Die auf die Kraft $H_a = P_\xi = 1000$ kg umgerechnete Momentenlinie wurde auf *Abb. 39* dargestellt.

Danach soll die Momentenlinie M'_ζ für das Verdrehungsmoment $M_\zeta =$ $= 1000$ kgm berechnet werden. Wenn gemäss *Abb. 40a* infolge eines beliebigen positiven Verdrehungsmomentes am oberen Ende der Stiele eine negative, in der

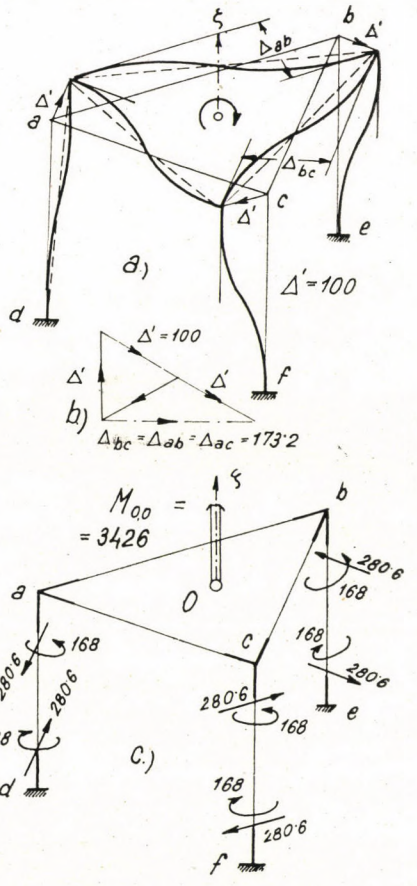


Abb. 40

Richtung 2, beziehungsweise y, eine Verschiebung (von einem vergrösserten Wert von $\Delta' = 6E\triangle = 100$) angenommen wird, so werden die Anfangseinspannmomente auf Grund der nach *Abb. 40b* erhaltenen relativen Verschiebungen, entsprechend der Formel $M = (6E\triangle)z$, lauten:

$$M_{AB,2} = M_{BA,2} = M_{AC,2} = M_{CA,2} = M_{BC,2} = M_{CB,2} = 173{,}2 \cdot 2{,}31 = 400$$

$$M_{AD,1} = M_{BE,1} = M_{CF,1} = M_{DA,1} = M_{EB,1} = M_{FC,1} = -100 \cdot 13{,}65 = -1365$$

Infolge der Symmetrieverhältnisse genügt es, den Momentenausgleich nur an einem Knotenpunkt, beispielsweise am Punkt »*a*« in den Richtungen x und z durchzuführen (Werte von Richtung y sind keine vorhanden).

TABELLE IV.

Die Berechnung der Momente $M''_{\zeta,o}$

1	α							
2	x					z		
3	ab1	ab3	ac1	ac3	ad1	ab2	ac2	ad3
4	,500	—,866	,500	—,866	1,000	1,000	1,000	—1,000
5	—,200	,030	—,200	,030	—,746	—,359	—,359	,282
6					—1365	400	400	—
7	(				—1365	400	400	)
8	—1365					800		
9	(273	—41	273	—41	1022	—287	—287	226)
10	273	—41	273	—41	1022	—287	—287	226
11	136	—41	136	—41	—	—144	—144	—
12	(68	36	68	36	—	—144	—144	—)
13	208					—288		
14	—42	6	—42	6	—155	104	104	—80
15	—21	6	—21	6	—	52	52	—
16	(—10	—5	—10	—5	—	52	52	—)
17	—30					104		
18	6	—1	6	—1	22	—37	—37	30
19	3	—1	3	—1	—	—18	—18	—
20	(2	1	1	1	—	—18	—18	—)
21	5					—36		
22	—1	—	—1	—	—4	13	13	—10
23	—	—	—	—	—	6	6	—
24	0					12		
25						—4	—4	4
26						—2	—2	—
27						—4		
28						1	1	—2
29	354	—72	354	—72	—480	84	84	168
30	$M_{da_1} =$ —923							
31	177	63	177	63	—480	84	84	—168
32	0					0		

Das auf die Achse ζ — (die Projektion in den Richtungen ξ und η ist Null!) — bezogene Moment der Resultierenden der Stielquerkräfte, die auf

Grund der nach erfolgtem Momentenausgleich erhaltenen Momente M'' in Tabelle IV. berechnet wurden, lauten gemäss Formel (33):

$$M_{0,0} = -3(-280{,}6 \cdot 3{,}467 - 168) = 3426$$

$$\zeta_{0,0} = \frac{1000}{3426} = 0{,}292$$

$$M'_{\zeta} = 0{,}292\ M''_{\zeta}$$

Die Momente M'_{ζ} sind auf *Abb. 41* aufgetragen.

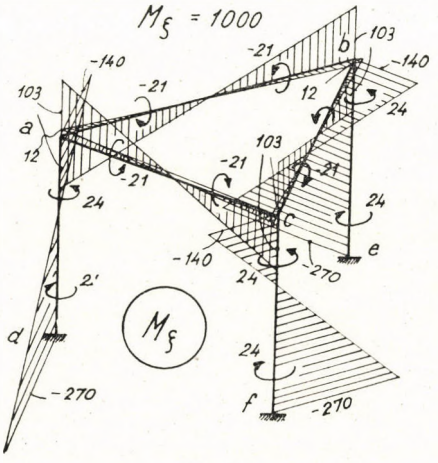


Abb. 41.

Danach kann das Moment M_{II}, das infolge der auf *Abb. 7* dargestellten asymmetrischen Belastung entsteht, bestimmt werden. Es sollen zuallererst die den Richtungen ξ, η, ζ gemässen Komponenten der Stielquerkräfte auf Grund der Formeln (28) berechnet werden, und zwar gemäss dem in *Abb. 9* dargestellten Koordinatensystem, bzw. zuerst — der Einfachheit halber — gemäss dem rechtwinkeligen Koordinatensystem ξ', η', ζ', wo die Achsen ξ' und ζ' mit den Achsen ξ und ζ zusammenfallen.

$$P'_{\xi} = 0{,}000 \cdot 59{,}4 + 1{,}000 \cdot 77{,}4 - 0{,}866 \cdot 107{,}4 - 0{,}500 \cdot 139{,}8 - \\ - 0{,}500 \cdot 16{,}2 + 0{,}866 \cdot 0{,}9 = -92{,}8\ \text{kg}$$

$$P'_{\eta} = 1{,}000 \cdot 59{,}4 + 0{,}000 \cdot 77{,}4 + 0{,}500 \cdot 107{,}4 - 0{,}866 \cdot 139{,}8 + \\ + 0{,}866 \cdot 16{,}2 + 0{,}500 \cdot 0{,}9 = 6{,}4\ \text{kg}$$

$$M_{\zeta} = (-107{,}4 - 0{,}9 + 59{,}4)\,3{,}467 = -170\ \text{kgm}$$

Daraus

$$P_{\xi} = -92{,}8 + 6{,}4\ \frac{0{,}500}{0{,}866} = -89{,}1\ \text{kg}$$

$$P_{\eta} = \frac{6{,}4}{0{,}866} = 7{,}4 \text{ kg}$$
$$M_{\zeta} = -170 \text{ kgm}$$

Natürlich können diese Werte auch aus den Festhaltungskräften berechnet werden. Auf Grund dessen ist

$$M_{II} = 0{,}891\ M'_{\xi} + 0{,}0074\ M'_{\eta} - 170\ M'_{\zeta}$$

Zum Beispiel

$$M_{ab,1} = -361 - 0{,}0891 \cdot 503 + 0{,}0074 \cdot 54 - 0{,}170 \cdot 103 = -423 \text{ kgm}$$
$$M_{ad,2} = -258 - 0{,}0891 \cdot 850 - 0{,}0074 \cdot 4{,}23 = 0{,}170 \cdot 0{,}000 = -337 \text{ kgm}$$
$$M_{be,1} = -358 - 0{,}0891(-328) + 0{,}0074 \cdot 328 - 0{,}170 \cdot (-140) = -303 \text{ kgm}$$

Wie bereits erwähnt, zeitigt die Rechnung in diesem besonderen Falle genaue Ergebnisse und so ist auch der Kräfteausgleich der Knotenpunkte hergestellt.

Als zweites Beispiel soll der auf *Abb. 26* dargestellte einfache Rahmen von sechseckigem Grundriss berechnet werden. Auf diesen Rahmen wirkt die auf *Abb. 30a* angegebene Belastung Q. Die Belastungen Q sind eigentlich die Kräfte, welche eine in der Richtung der positiven Achse ξ wirkende Windbelastung auf die Knotenpunkte übertragen, unter der Voraussetzung, dass der von der Windseite her senkrecht auf die Seitenflächen wirkende Druck und die von der Windschattenseite senkrecht auf die Seitenflächen wirkende Saugung gleich gross sind. Infolge der Spiegelsymmetrie der durch die gewöhnlichen — nicht wirbelwindartigen — Windbelastungen übertragenen Knotenpunktsbelastungen besitzen die durch die Windbelastungen entstandenen Knotenpunktskräfte nur eine Komponente in der Windrichtung, in vorliegendem Fall von Richtung ξ im Punkte »0« und auch die Grösse der Verdrehung ist gleich Null.

Die Werte der durch die äussere Belastung Q entstandenen Komponenten P_{ξ}, P_{η}, M_{ζ} betragen also, da $Q = 866$ kg

$$P_{\xi} = 8 \cdot 0{,}866 \cdot Q = 8 \cdot 0{,}866 \cdot 866 = 6000 \text{ kg}$$
$$P_{\eta} = 0$$
$$M_{\zeta} = 0$$

Zur Bestimmung der durch P_{ξ} verursachten Momente M_{ξ} soll in der positiven Richtung ξ eine beliebige Verschiebung eingeführt werden. Da die Steifigkeit der Stiele in der Richtung x—y gleich gross ist, so kann entsprechend der beliebigen Verschiebung ein Moment von beliebiger Grösse angenommen werden, das in einer senkrechten Ebene auf den unteren Einspannungsquerschnitt der Stiele bzw. auf den zum oberen Ring der Stiele gehörigen Querschnitt wirkt. Mit anderen Worten: man erhält den in einer waagerechten Ebene wirkenden und senkrecht zur Richtung ξ gerichteten Momentenvektor M *(Abb. 42)*.

TABELLE V.

Die Berechnung der Momente M_ξ^r

a										*f*									
x					*y*					*x*					*y*				
ab1	ab3	af1	af3	ag1	ab1	ab3	af1	af3	ag2	fa1	fa3	fe1	fe3	fl1	fa1	fa3	fe1	fe3	fl2
,866	—,500	,866	—,500	1,000	—,500	—,866	,500	,866	1,000	,866	—,500	,866	—,500	1,000	—,500	—,866	,500	,866	1,000
—,3356	,0311	—,3356	,0311	—,3875	,2873	,0798	—,2873	—,0798	—,5746	—,3356	,0311	—,3356	,0311	—,3875	,2873	,0798	—,2873	—,0798	—,5746
									10000					8660					5000
(									10000					8660					5000)
0					10000					8660					5000				
(					2873	798	—2873	—798	—5746	—2915	269	—2915	269	—3356	1436	399	—1436	—399	—2873)
2873	798	—2873	—798	—					—5746	—1479	668	—4351	—130	—3356					—2873
740	—668	—740	668	—					—	—1436	—798	—2176	—130	—					—
(641	334	—641	—334	—	—370	578	—370	578	—	—1244	399	—1884	65		718	691	—1088	—133	—)
0					416					—2664					208				
(					120	33	—120	—33	—239	894	—83	894	—83	1032	60	17	—60	—17	—120)
120	33	—120	—33	—					—239	954	—66	834	—100	1032					—120
—477	66	477	—66	—					—	—60	—33	417	—100	—					—
(—413	—33	413	33	—	238	—57	238	—57	—	—52	16	361	50		30	29	208	—87	)
0					362					375					180				
(					104	29	—104	—29	—208	—126	12	—126	12	—145	52	14	—52	—14	—103)
104	29	—104	—29	—					—208	—74	26	—178	—2	—145					—103
37	—26	—37	26	—					—	—52	—29	—89	—2	—					—
(32	13	—32	—13	—	—18	23	—19	22		—45	14	—77	1		26	25	—44	—2	—
0					8					—107					5				
(					2	1	—2	—1	—5	36	—3	36	—3	41	1		—1		—3)
2	1	—2	—1	—					—5	37	—3	35	—3	41					—3
—18	3	18	—3	—					—	—1	—1	18	—3	—					—
(—16	—2	16	2	—	9	—2	9	—2	—	—1		16	2	—		1	9	—2	—)
0					14					17					8				
(					4	1	—4	—1	—8	—6	1	—6	1	—7	2	1	—2	—1	—5)
4	1	—4	—1	—					—8	—4	2	—8	0	—7					—5
2	—2	—2	2	—					—	—2	—1	—4	—	—					—
(2	1	—2	—1	—	—1	2	—1	2	—	—2	1	—3	—		1	1	—2	—	—)
0					2					—4					0				
(					1		—1		—1	1		1		2					)
1	—	—1	—	—					—1	1	—	1	—	2					
3388	235	—3388	—235	—					3793	—2116	—235	—5501	—470	6227					1896
									6896					7444					3448
(2934	118	—2934	—118		—1694	—203	—1694	—203	3793	—1832	118	—4764	235	6227	1058	203	—2750	—407	1896)
0					—1					—16					0				

Der Wert dieses Momentenvektors soll 10 000 betragen. Die aus diesen Angaben berechneten Anfangseinspannmomente der Stiele in den Richtungen 1 und 2 sind ebenfalls auf *Abb. 42* dargestellt. Angesichts der Symmetrieverhältnisse

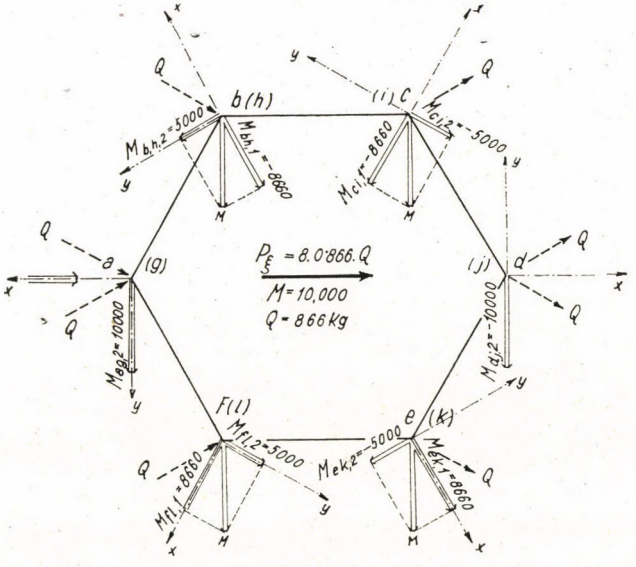


Abb. 42.

genügt es im gegenwärtigen Fall, den Momentenausgleich nur in zwei Knotenpunkten durchzuführen, beispielsweise in den Knotenpunkten »*a*« und »*f*« (siehe Tabelle V.). *Abb. 43a* und *43b* zeigen eine vektoriale Darstellung der

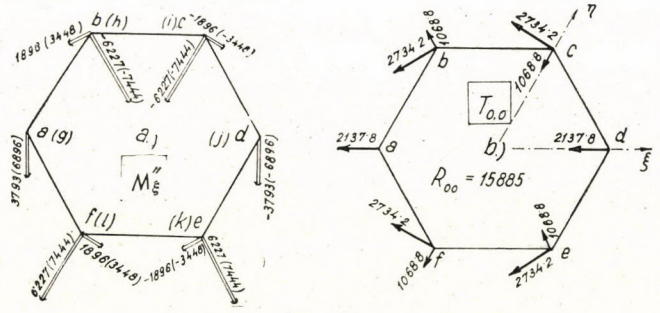


Abb. 43

endgültigen Stieleinspannmomente und eine solche im Grundriss der durch die endgültigen Momente (M''_ξ) erhaltenen Stielquerkräfte. Die in Klammern stehenden Momentenvektorenwerte auf *Abb. 43a* bezeichnen die in den unteren Stielquerschnitten auftretenden Einspannmomente. Da die so erhaltenen endgültigen Momente und die Querkräfte spiegelsymmetrisch sind, haben die

Querkräfte keine Komponente in der Richtung η bzw. ζ und so ist laut der Formel (29)

$$R_{0,0} = -\Sigma T_{\xi\,0,0} = -[-4(1068{,}8 \cdot 0{,}500 + 2734{,}2 \cdot 0{,}866) - \\ - 2 \cdot 2137{,}8] = 15885$$

$$\xi_0 = \frac{6000}{15885} = 0{,}3777$$

und die durch $P_\xi = 6000$ verursachten Einspannmomente

$$M_\xi = 0{,}3777\ M''_\xi$$

Im vorliegenden Fall erhält man ein genaues Ergebnis, da die wirkende Belastung dreifach symmetrisch ist und der Kräfteausgleich der Knotenpunkte hergestellt ist. Werden die Ergebnisse der im vorigen Abschnitt für denselben Belastungsfall auf eine andere Weise durchgeführten Berechnungen mit den hier erhaltenen Ergebnissen verglichen, so kann festgestellt werden, dass diese Ergebnisse — innerhalb der Genauigkeitsgrenzen bei Berechnungen — völlig miteinander übereinstimmen. Z. B.

$$M_{ab,1} = 0{,}3777 \cdot 3388 = 1280 \text{ kgm } (1268)$$
$$M_{ab,3} = 0{,}3777 \cdot 235 = 89 \text{ kgm } (89)$$
$$M_{ag,2} = 0{,}3777 \cdot 3793 = 1433 \text{ kgm } (1424)$$
$$M_{fa,1} = -0{,}3777 \cdot 2116 = -799 \text{ kgm } (-788)$$
$$M_{f1,2} = 0{,}3777 \cdot 6227 = 2352 \text{ kgm } (2340)$$

Die in Klammern stehenden Werte bedeuten die Ergebnisse des vorigen Abschnitts.

Aus diesen Ausführungen ist es ersichtlich, dass *das im vorliegenden Abschnitt behandelte Rechenverfahren bei zahlreichen Belastungsfällen, bei waagerechter Windbelastung oder bei Wirbelwindbelastung als genaue Rechenmethode verwendet werden kann und dass dabei die Rechenarbeit — im Vergleich zu anderen Rechenverfahren — sehr einfach und schnell ist.*

II. ZWEITES RECHENVERFAHREN

1. Das Grundprinzip des Verfahrens

Wenn man vom Grundgedanken des oben beschriebenen Verfahrens ausgeht, kann ein noch einfacheres Näherungsverfahren ausgearbeitet werden. Es soll also vor allem angenommen werden, dass die Ebene des aus waagerechten Balken gebildeten Ringes in Bezug auf Verschiebung und Drehung als praktisch starr betrachtet werden kann. Das bedeutet, dass die sich an den Ring anschliessenden Querschnitte der Stiele bei symmetrischen und zentralsymmetrischen Belastungen eine gleich grosse Verschiebung und dass die Knotenpunktsquerschnitte der Riegel bei zentralsymmetrischen Belastungen eine gleich grosse

Achsendrehung, bzw. relative Verschiebung erleiden werden. Weiters bedeutet es, dass in den unten eingespannten und oben teilweise eingespannten Stielen der Momentennullpunkt etwa in der Mitte, entsprechend der Steifigkeit des Ringes von der Mitte gegen den Ring zu verschoben, entstehen wird. Wenn die Verbindung der Stiele zum Ring durch Gelenke bewerkstelligt wird oder wenn die untere Stütze selbst ein Gelenk ist, so wird der Nullpunkt im Gelenk zu liegen kommen.

Wenn ein unten und oben teilweise eingespannter Stiel eine relative, zur Stabachse senkrechte Verschiebung $\triangle$ erleidet, so kann bekanntlich die Stielverschiebungskraft P, von der angenommen wird, dass sie diese Verschiebung zustande bringt, oder genauer gesagt, die aus den Einspannmomenten berechenbare Querkraft, durch die Formel

$$P = 12\ Ek\ \Delta \tag{39}$$

ausgedrückt werden, wo »k«, ein dem Widerstan dgegenüber der Verschiebung des Stieles entsprechender Wert, *Stielsteifigkeit* genannt wird.

Die Stielsteifigkeit kann bei einem Stiel von Höhe »m« und vom Trägheitsmoment J mittels der Formel

$$k = k' \frac{J}{m^3} \tag{39a}$$

ausgerechnet werden, wo die Grösse des Wertes k' von den Einspannungsverhältnissen abhängt. Im Falle eines vollkommen eingespannten Stieles ist

$$k' = 1$$

Wenn das eine Ende durch ein Gelenk festgehalten wird, während das andere vollkommen eingespannt ist, beträgt

$$k' = \frac{1}{4}$$

Im Falle einer teilweisen Einspannung wird der Wert von k' zwischen 1 und $\frac{1}{4}$ schwanken, während sich der Momentennullpunkt zwischen $\frac{1}{2}$ und 0 bewegt.

Im Falle von gleichen Einspannverhältnissen und von gleich hohen Stielen ist die *Stielsteifigkeit* direkt proportional zum Trägheitsmoment. Es kann also angenommen werden, dass eine Resultierungskraft (P_ξ), welche auf den in den Stielnullpunkten von einzelnen Stockwerken eines Rahmens gedachten Schnitt wirkt — wobei der Rahmen durch waagerechte Kräfte von beispielsweise Richtung ξ belastet ist — proportional zu den Stielsteifigkeiten auf die Stiele verteilt werden kann. Das heisst, für die Stielverschiebungskraft (P_k) jedweden Stieles »k«, sowie für die Summe der Stielverschiebungskräfte hat der Zusammenhang

$$P = \sum_1^n P_k \tag{40}$$

Geltung und so ist

$$P_k = p_k P_\xi$$

Die Formel für den *Kräfteanteil*, für p_k, lautet :

$$p_k = \frac{k_k}{\sum_1^n k_i} \tag{42}$$

und die Einspannmomente jeglichen Stieles von Endpunkten a—b und mit der Bezeichnung »k«, die infolge der gleichen Verschiebung Δ auftreten, können durch die Formel

$$\begin{aligned} M_a &= e_a P_k \\ M_b &= e_b P_k \end{aligned} \tag{43}$$

ausgedrückt werden, wo e_a und e_b die Entfernung des Momentennullpunkts von der Stielenden »a« und »b« und P_k den auf den Stiel a—b wirkenden Teil der Stielverschiebungskraft bedeutet. Diese Stieleinspannungsmomente M_a und M_b liegen im Fall von Belastungen von Richtung ξ in senkrechten Ebenen, d. h. die Momentenvektoren M_a und M_b in waagerechten Ebenen.

Das Verfahren besteht also aus folgenden Schritten : 1. Zuerst werden in den einzelnen Stockwerken die Momentennullpunkte der einzelnen Stiele festgestellt (geschätzt). 2. Nach Berechnung der auf die einzelnen Stockwerke wirkenden Resultierenden P_ξ werden die Stielverschiebungskräfte (P_k) bestimmt. 3. Es folgt die Berechnung der Stieleinspannmomente (M_a, M_b). 4. Es wird das resultierende Moment (algebraische Summe) jener Stieleinspannmomente bestimmt, welche auf die an den Ring angeschlossenen Querschnitte wirken (M). 5. Indem diese Stieleinspannungsmomente als unausgeglichene Momente betrachtet werden, wird an den fraglichen Knotenpunkten *einmal* der Momentenausgleich durchgeführt (aber keine Momentenübertragung!). 6. Nach dieser Operation erhält man an jedem Knotenpunkt, in jeglicher Stabrichtung und an jedem Stabe den Näherungswert der Einspannmomente.

Beim annähernden Berechnen von senkrechten Belastungen ist es für Fälle in der Praxis meistens genügend, nur die nächste Umgebung der belasteten Stäbe zu berücksichtigen. Wenn die Belastungen in hohem Grade asymmetrisch sind, so können die durch die Verschiebungskräfte verursachten Zusatzmomente auf Grund des zuerst geschilderten Näherungsverfahrens bestimmt werden.

2. *Beispiele*

a) Es soll der Näherungswert der Einspannmomente für eine Kraft von $P_\xi = 1000$ kg im Falle des im vorigen Abschnitts behandelten dreifüssigen Rahmens bestimmt werden. Da die Stiele von gleicher Höhe sind und das Trägheitsmoment der drei Stiele gleich gross ist, beträgt die Stielverschiebungskraft

$$P_k = \frac{1000}{3} = 333{,}3 \text{ kg}$$

Der Mittelwert des Momentennullpunkts der Stiele soll $0{,}45 \cdot m = 0{,}45 \cdot 5 = 2{,}25$ Meter betragen und so ist der Wert der senkrecht zur Achse ξ liegenden Vektoren der Stieleinspannmomente

$$\text{oben}: \quad 2{,}25 \cdot 333{,}3 = 750 \text{ kgm}$$
$$\text{unten}: \quad 2{,}75 \cdot 333{,}3 = 917 \text{ kgm}$$

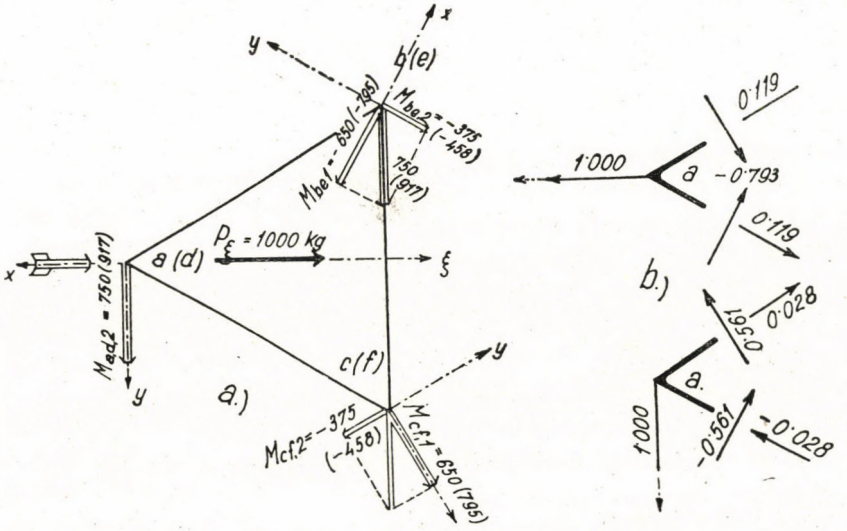


Abb. 44

Daraus ergeben sich die Stieleinspannmomente in den Richtungen 1 und 2 *(Abb. 44a)*

$$M_{ad,1} = 0 = M_{da,1}$$
$$M_{ad,2} = 750 \text{ kgm}$$
$$M_{da,2} = 917 \text{ kgm}$$
$$M_{be,1} = -0{,}866 \cdot 750 = -650 \text{ kgm} = -M_{cf,1}$$
$$M_{be,2} = -0{,}500 \cdot 750 = -375 \text{ kgm} = M_{cf,2}$$
$$M_{eb,2} = -0{,}866 \cdot 917 = -795 \text{ kgm} = -M_{fc,1}$$
$$M_{eb,2} = -0{,}500 \cdot 917 = -458 \text{ kgm} = M_{fc,2}$$

Momentenausgleich am Knotenpunkt »a«. Das unausgeglichene Moment $M_y = 1000$ verteilt sich zwischen den »*a*«-Punktsenden der Stäbe *a*—*b* und *a*—*c*. Der Stiel *a*—*d* kommt also bei der Berechnung der Momentenanteilwerte nicht vor. Infolgedessen sind die bisher ausgerechneten Momentenanteilwerte für die

Stäbe a—b und a—c — im Falle eines unausgeglichenen Momentes von Richtung »y« — im Verhältnis von $\frac{1}{1-0{,}548} = 2{,}21$ zu erhöhen *(Abb. 44b)*. Die Einspannmomente lauten :

$$M_{ab,1} = 0{,}561 \cdot 1000 = 561 \text{ kgm} = -M_{ac,1}$$

$$M_{ab,3} = 0{,}028 \cdot 1000 = 28 \text{ kgm} = -M_{ac,3}$$

Momentenausgleich am Knotenpunkt »b«. Unausgeglichene Momente : $M_x = -650$ kgm und $M_y = -375$ kgm. Die Einspannmomente sind auf Grund der auf *Abb. 44b* dargestellten Momentenanteile (im Falle eines Ausgleichs von Richtung »x« beträgt der Vergrösserungsfaktor $\frac{1}{1-0{,}746} = 3{,}94$) :

$$M_{ba,1} = -0{,}793 \cdot (-650) - 0{,}561 \cdot (-375) = 725 \text{ kgm}$$

$$M_{ba,3} = 0{,}119 \cdot (-650) - 0{,}028 \cdot (-375) = -68 \text{ kgm}$$

$$M_{bc,1} = -0{,}793 \cdot (-650) + 0{,}561 \cdot (-375) = 305 \text{ kgm}$$

$$M_{bc,3} = 0{,}119 \cdot (-650) + 0{,}028 \cdot (-375) = -87 \text{ kgm}$$

Da im Falle der vorliegenden symmetrischen Belastung die Grösse von $M_{bc,3}$ Null betragen muss, sind die erhaltenen Momente im Verhältnis von

$$750 : (750 - 87) = 750 : 663 = 1{,}13$$

zu erhöhen, worauf die angenäherten Momentenwerte lauten :

$$M_{ba,1} = 820 \text{ kgm} ; \quad M_{ba,3} = -77 \text{ kgm} ; \quad M_{bc,1} = 344 \text{ kgm}$$

Sodann werden bei Berücksichtigung der wirklichen Windbelastung die Kräfte T und N bestimmt.

b) Es sollen die angenäherten Momente des auf *Abb. 26* dargestellten Rahmens von sechseckigem Grundriss für die auf *Abb. 30a* angegebenen — in den Knotenpunkten sich konzentriert übergebenden — Windbelastungen Q bestimmt werden. In diesem Falle beträgt, wie erwähnt, die Verschiebungskraft P 6000 kg, als Summe der in der Richtung ξ liegenden Komponenten der Lasten Q, die 866 kg ausmachen. Wenn eine gleichmässige Verteilung der Verschiebungskraft vorausgesetzt wird, so würde die Stielverschiebungskraft für jeden Stiel

$$P_k = \frac{6000}{6} = 1000 \text{ kg}$$

betragen. Wenn die Entfernung des Momentennullpunkts vom oberen Ende mit $0{,}35 \cdot \text{m} = 1{,}75$ Meter angenommen wird, so beträgt die Grösse der in den einzelnen Knotenpunkten bzw. in den unteren Einspannungen auftretenden

Stieleinspannungsmomentenvektoren, die senkrecht zur Achse ξ gerichtet sind,

oben : $1{,}75 \cdot 1000 = 1750$ kgm
unten : $3{,}25 \cdot 1000 = 3250$ kgm

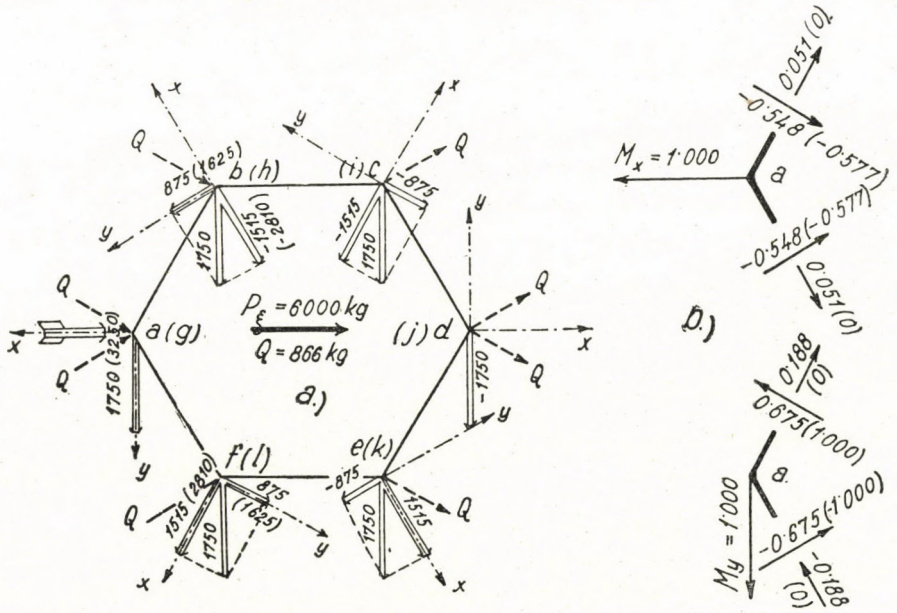


Abb. 45

Die Stieleinspannungsmomente in den Richtungen 1 und 2 betragen *(Abb. 45a)* :

$$M_{ag,1} = M_{ga,1} = 0 = M_{dj,1} = M_{jd,1}$$
$$M_{ag,2} = 1750 \text{ kgm} = -M_{dj,2}$$
$$M_{ga,2} = 3250 \text{ kgm} = -M_{jd,2}$$

$$M_{bh,1} = -0{,}866 \cdot 1750 = -1515 \text{ kgm} = -M_{fl,1} = M_{ci,1} = -M_{ek,1}$$
$$M_{bh,2} = 0{,}500 \cdot 1750 = 875 \text{ kgm} = M_{fl,2} = -M_{ci,2} = -M_{ek,2}$$
$$M_{hb,1} = -0{,}866 \cdot 3250 = -2810 \text{ kgm} = -M_{lf,1} = M_{ic,1} = -M_{ke,1}$$
$$M_{hb,2} = 0{,}500 \cdot 3250 = 1625 \text{ kgm} = M_{lf,2} = M_{ic,2} = -M_{ke,2}$$

Die Werte der *Momentenanteile* in Bezug auf den Knotenpunkt »*a*«, im Falle eines von den Stielen übertragenen unausgeglichenen Momentenvektors sind auf *Abb. 45b* aufgetragen. Der Vergrösserungsfaktor in der Richtung x bzw. beyträgt

$$\frac{1}{1-0{,}3875} = 1{,}635 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{1-0{,}5746} = 2{,}354$$

Einspannmomente am Knotenpunkt »a«.

$M_{\bar{x}} = 0, \quad M_{\bar{y}} = 1750$ kgm

$$M_{ab,1} = 0{,}675 \cdot 1750 = 1180 \text{ kgm} = -M_{af,1}$$

$$M_{ab,3} = 0{,}188 \cdot 1750 = 329 \text{ kgm} = -M_{af,3}$$

Einspannmomente am Knotenpunkt »b«.

$M_x = -1520$ kgm, $M_y = 875$ kgm

$$M_{ba,1} = -0{,}548 \cdot (-1515) - 0{,}675 \cdot 875 = 240 \text{ kgm}$$

$$M_{ba,3} = 0{,}051 \cdot (-1515) - 0{,}188 \cdot 875 = -242 \text{ kgm}$$

$$M_{bc,1} = -0{,}548 \cdot (-1515) + 0{,}675 \cdot 875 = 1420 \text{ kgm}$$

$$M_{bc,3} = 0{,}051 \cdot (-1515) + 0{,}188 \cdot 875 = 87 \text{ kgm}$$

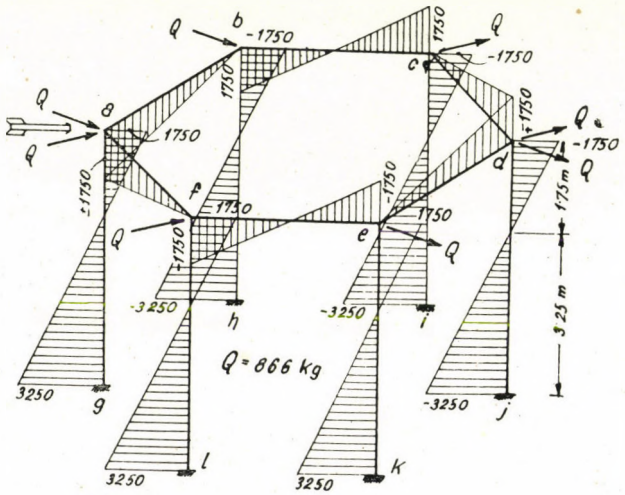


Abb. 46

Die ohne Berücksichtigung der Verdrehungsmomente, auf Grund der in Klammern stehenden Momentenanteilwerte der *Abb. 45b* erhaltenen Einspannmomente lauten:

$$M_{ab,1} = 1{,}000 \cdot 1750 = 1750 \text{ kgm}$$

$$M_{ba,1} = 0{,}5774 \cdot 1515 - 1{,}000 \cdot 875 = 0$$

$$M_{bc,1} = 875 + 875 = 1750 \text{ kgm}$$

Die Momentenlinie ist — zur besseren Anschaulichkeit und zum Vergleich — auf *Abb. 46* dargestellt, wobei jedoch erwähnt werden muss, dass dort direkt die Resultierende der Stieleinspannmomente aufgetragen ist.

c) Auf die im vorstehenden behandelte Rahmenkonstruktion von sechseckigem Grundriss soll die Windbelastung senkrecht auf die Seitenfläche *b*—*c* in der auf *Abb. 47a* dargestellten Verteilung wirken. Die Richtung ξ wird jetzt

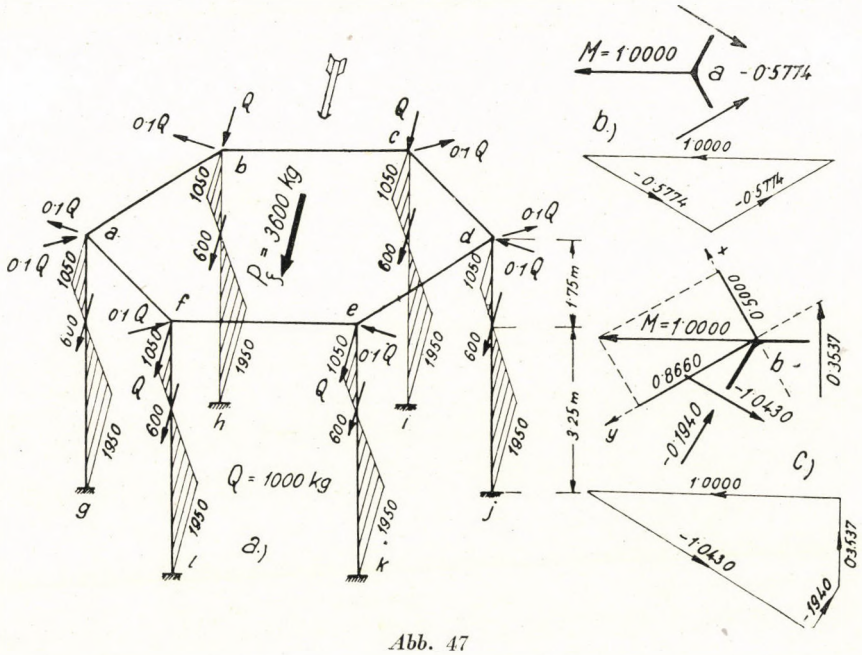


Abb. 47

entsprechend der Windrichtung gewählt und so beträgt die Summe der in der Richtung ξ liegenden Komponenten der Belastungen $Q = 1000$:

$$P_\xi = 4 \cdot Q - 0{,}40 \cdot Q = 3{,}60 \cdot Q = 3{,}60 \cdot 1000 = 3600 \text{ kg}$$

Stielverschiebungskraft in gleichmässiger Verteilung:

$$P_k = \frac{3600}{6} = 600 \text{ kg}$$

Nullpunkt, wie zuvor: $0{,}35 \cdot 5 = 1{,}75$ m, bzw. $0{,}65 \cdot 5 = 3{,}25$ m.

Stieleinspannmomente, oben: $600 \cdot 1{,}75 = 1050$ kgm

unten: $600 \cdot 3{,}25 = 1950$ kgm

Angesichts des Umstandes, dass beim Ausgleich des Momentenvektors von Richtung *x* das Verdrehungsmoment einen kleinen Wert ergibt und dass andererseits infolge der symmetrischen Belastung in denStäben *b*—*c* bzw. *f*—*e* kein Verdrehungsmoment auftreten kann, können diese Werte bei der Bestimmung des Momentenanteils vernachlässigt werden. Die so erhaltenen Momentenanteilswerte sind auf *Abb. 47b* und *47c* dargestellt, und zwar direkt entsprechend dem

Momentenvektor von Richtung ξ und Grösse eins. Demnach betragen die Einspannungsmomente

$$M_{ab,1} = -0{,}5774 \cdot 1050 = -606 \text{ kgm}$$

$$M_{ba,1} = -1{,}043 \cdot 1050 = -1094 \text{ kgm}$$

$$M_{ba,3} = -0{,}194 \cdot 1050 = -204 \text{ kgm}$$

$$M_{bc,1} = 0{,}354 \cdot 1050 = 371 \text{ kgm}$$

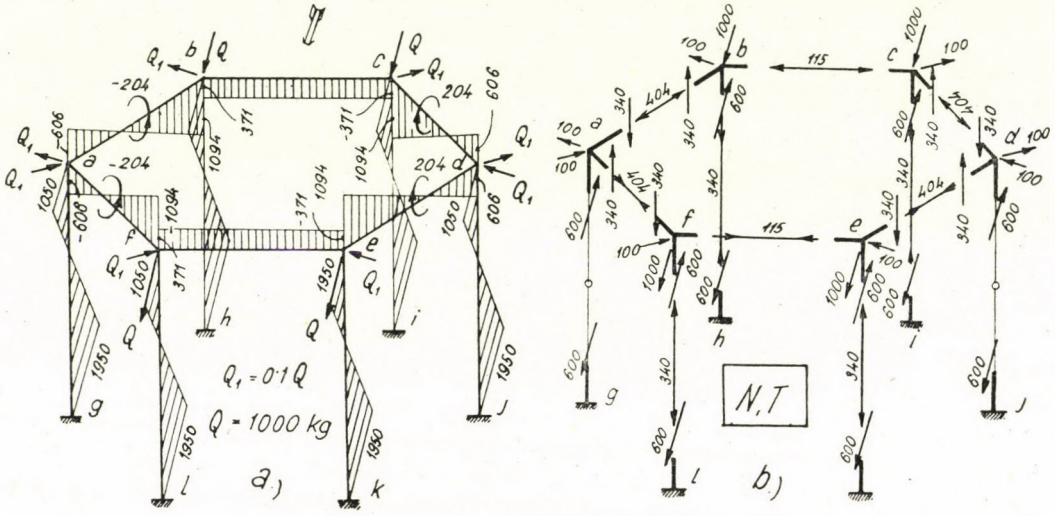


Abb. 48

Die Linie der Momente ist auf *Abb. 48a*, diejenige von N und T auf *Abb. 48b* zu sehen.

Da in der Baupraxis die räumliche Rahmenkonstruktion gewöhnlich als Kühlturmfundament oder als Wasserturm vorkommt, so sind für den Rahmen in den waagerechten Versteifungsebenen nicht nur diejenigen Kräfte zu berechnen, die von den reduzierten waagerechten Belastungen übertragen werden, sondern es ist auch die gemeinsame Wirkung der senkrechten und waagerechten Kräfte zu berücksichtigen. Es soll jetzt die waagerechte, also Windbelastung untersucht werden, die auf den aus *Abb. 49* ersichtlichen Kühlturm wirkt, sowie das Gewicht »*G*« dieses Kühlturmes. Die Komponente von Richtung ξ der Windbelastung soll $H = 6000$ kg betragen und soll in einer Entfernung $h = 3{,}5$ m von der waagerechten Versteifungsebene des Rahmens entfernt wirken. Das Gewicht »*G*« soll mit 36 000 kg angenommen werden. Bei Vernachlässigung der absoluten Verformung der Stiele wird die Last G in gleichmässiger Verteilung in der waagerechten Ebene des Rahmens auf die Stiele 1—6 übertragen. Im allgemeinen ist

$$N_{Gi} = \frac{G}{n}$$

wo n die Zahl der Stiele bedeutet.

Die durch das Moment

$$M = H \cdot h = 6000 \cdot 3{,}5 = 21\,000 \text{ kgm}$$

welches infolge der Belastung H entsteht, verursachte senkrechte Überbelastung in den Stielen (N_{Hi}) beträgt, vorausgesetzt dass die in den Stielen auftretenden

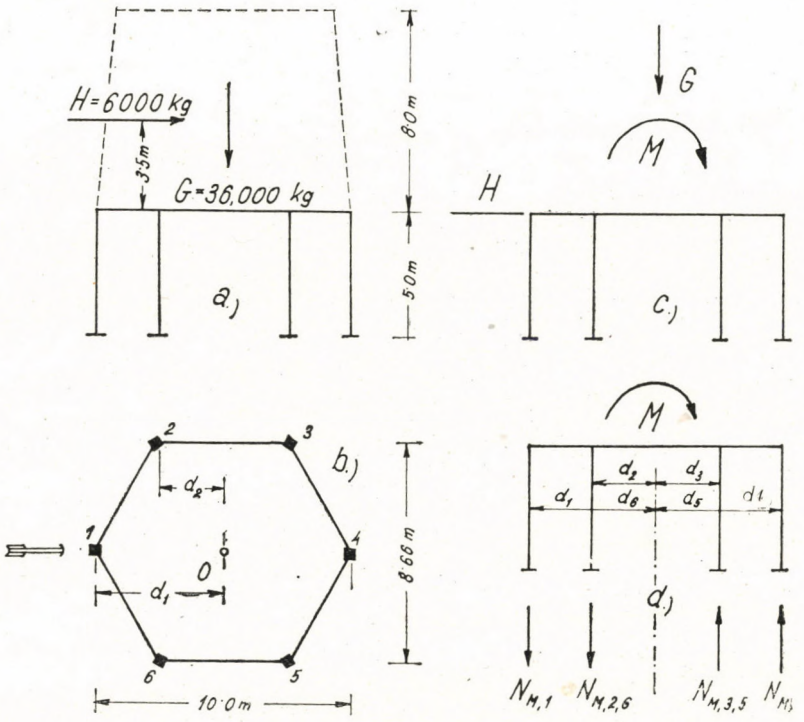


Abb. 49

Kräfte (N_M) mit den Entfernungen d_i von der Schwerpunktsachse, die durch den Mittelpunkt der waagerechten Versteifungsebene senkrecht zur Windrichtung gezogen ist, direkt proportional sind,

$$N_{Mi} = M \frac{d_i}{\Sigma d_1^2}$$

das heisst, dass die gesamte senkrechte Belastung in der Ebene der oberen Ringbalken des Rahmens

$$N_i = \frac{G}{n} \pm \frac{M d_i}{\sum_1^n d_k^2} \tag{44}$$

Im vorliegenden Falle, da $n = 6$, $d_1 = d_4 = 5{,}0$ m, und $d_2 = d_3 = d_5 = d_6 = 2{,}5$ m beträgt, ist

$$\sum_1^n d_k^2 = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 2{,}5^2 = 75 \text{ m}^2$$

$$N_{1,4} = \frac{36000}{6} \mp \frac{21000 \cdot 5}{75} = 6000 \mp 1400 = \begin{matrix} 4600 \text{ kg} \\ 7400 \text{ kg} \end{matrix}$$

$$N_{2,3-5,6} = 6000 \mp \frac{21000 \cdot 2{,}5}{75} = 6000 \mp 700 = \begin{matrix} 5300 \text{ kg} \\ 6700 \text{ kg} \end{matrix}$$

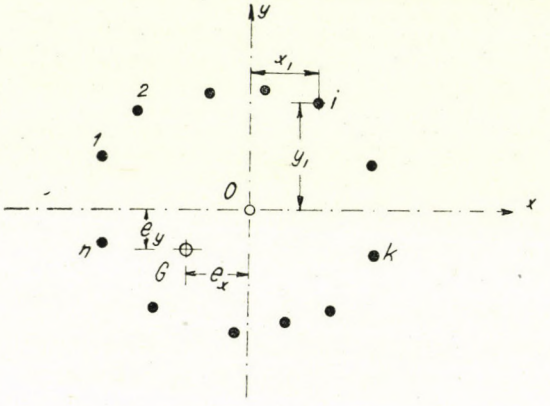


Abb. 50.

Wenn die senkrechte Belastung »e« als exzentrisch angegeben ist, d. h. $M = G \cdot e$, so gelangt man in Bezug auf N_i zu der bekannten Formel

$$N_i = G\left(\frac{1}{n} \pm \frac{e \cdot d_i}{\sum_1^n d_k^2}\right) \tag{45}$$

In einem völlig allgemeinen Fall *(Abb. 50)*, wenn e_x, e_y das Ausmass der Exzentrizität in Bezug auf das im Schwerpunkt der Schnittpunkte des Stieles angenommene Koordinatensystem x, y bezeichnet und die Koordinaten des »i«-ten Stieles x_i, y_i lauten, so beträgt die Grösse der auf dem Stiel »i« wirkenden Belastung

$$N_i = G\left(\frac{1}{n} + \frac{e_x \cdot x_i}{\sum_1^n x_k^2} + \frac{e_y \cdot y_i}{\sum_1^n y_k^2}\right) \tag{46}$$

in welcher Formel e_x, e_y, x_i, y_i mit Vorzeichen versehene Grössen darstellen.

In diesem Teil des letzten Abschnittes wurde eine in der Baupraxis gut verwendbare und rasche Näherungsmethode zur Berechnung von räumlichen Konstruktionen vorgeführt. Diese Methode erfordert bedeutend weniger Rechenarbeit als die bisher bekannten Näherungsverfahren und zeitigt dabei Ergebnisse, die den Ansprüchen der Praxis in den meisten Fällen genügen.

ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegende Abhandlung schildert auf Grund der Weiterentwicklung des Momentenausgleichsverfahrens genaue Methoden und Näherungsverfahren zur Berechnung von räumlichen Rahmen. Die Abschnitte A. B. und C. behandeln die allgemeinen Grundsätze der genauen Berechnung, die Grundaufgabe des Momentenausgleichs von räumlichen Knotenpunkten und schliesslich gewisse Einzelheiten der Lösung. Diese Abhandlung war — unseres Wissens — im Zeitpunkt ihrer ersten Veröffentlichung die erste, in welcher eine genaue Bestimmung der räumlichen Rahmenkonstruktionen auf Grund des Momentenausgleichsverfahrens ausgearbeitet worden war und welche damit den Konstrukteuren in der Industrie auf eine verhältnismässig einfache Weise ein Verfahren in die Hand gab, das bedeutend weniger Rechenarbeit erforderte als die bisher bekannten Rechenmethoden. Der Abschnitt D. befasst sich mit — sich aus dem Wesen des Verfahrens ergebenden — Vereinfachungen für die Baupraxis in Bezug auf zentralsymmetrische Rahmentragwerke. Dank den vorgeführten Vereinfachungen kann auch das genaue Verfahren mit beträchtlicher Ersparnis an Rechenaufwand angewendet werden. Der Abschnitt E. behandelt, gleichfalls für räumliche Rahmenkonstruktionen von zentralsymmetrischem Aufbau, zwei Näherungsverfahren, wobei das erstere eigentlich als genaue Methode für Belastungsfälle in der Praxis (für Windbelastungen) aufgefasst werden kann und nur in allgemeinen Belastungsfällen den Charakter einer Näherungsmethode aufweist. Mit dieser Berechnungsweise ergeben sich bei verhältnismässig minimaler Rechenarbeit genaue Ergebnisse für Windbelastungen, was vom Gesichtspunkt solcher Konstruktionen der Bauindustrie als von erheblicher Bedeutung anzusprechen ist. Ähnlicherweise können mittels der zweiten Näherungsmethode bei äusserst geringer Mühe Ergebnisse erzielt werden, welche den Ansprüchen der Praxis in den meisten Fällen genügen.

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КАРКАСНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ

Л. Палоташ

Резюме

Труд занимается точным и приближенным методами расчета пространственных каркасов путем дальнейшего развития метода распределения моментов. Разделы A, B и C знакомят читателя с общими основными правилами точного решения, с основной задачей уравновешения пространственного узла, и, наконец, с отдельными деталями решения. По имеющимся у нас сведениям в этом труде (при первой публикации) впервые было разработано точное решение пространственных каркасных конструкций на основе распределения моментов, и этот относительно простой способ дает для конструкторов промышленности метод, требующий гораздо меньших затрат времени на расчеты, чем при известных до сих пор методах. В разделе *D* нами рассмотренны упрощения, вытекающие из сущности метода, и относящиеся к случаям строительной практики — центрально-симметричным каркасным конструкциям. С помощью приведенных упрощений даже точный метод расчета дает экономию времени в производстве расчетов. В разделе *E* также приводятся приближенные решения центральносимметричных пространственных каркасных конструкций, среди которых первый способ можно считать точным методом на случаи практических нагрузок (ветровая нагрузка), и только в случаях общих нагрузок становится приближенным. С помощью этого метода, с относительно минимальной затратой времени на расчеты, получаем точные данные о ветровой нагрузке, так что это можно считать серьезным достижением для такого рода проектировочных работ в строительной промышленности. Подобным же образом — с помощью второго приближенного метода расчетов — при незначительных затратах времени на расчеты, можем достигнуть результаты, в большинстве случаев удовлетворяющие, предъявляемые практикой требования.

ACOUSTICAL RESEARCHES IN THE MUNICIPAL THEATRE OF BUDAPEST

By
Th. H. TARNÓCZY

Manuscript received 27th February 1951.

1. Historical

The Municipal Theatre of Budapest was built in the years of 1909—10 according to the plans of the architects Géza Márkus and Dezső Jakab. The volume of its auditorium was 17 000 m^3, that of its stage 6000 m^3, its capacity was 3000—3100 persons. The theatre was built for performances of opera, of prose and of popular drama.

The enormous theatre, built with a construction of reinforced concrete and a suspended ceiling was considered at that time as an initiative, since there were very few experiences about the inside acoustics of theatres of comparable size and construction. Also the process of acoustical calculations was not mature enough for practical purposes, as the experimental researches of W. C. Sabine and the theoretical investigations of A. Jaeger on the calculation of the time of reverberation were just in progress. The acoustical failure of the theatre was mostly due to these circumstances. During the 40 years' run of the theatre the complaints of bad hearing conditions were constantly under discussion. The problem of the improvement of its acoustical design was proposed already immediately after its opening and it is actual even to-day, after repeated rebuilding of the theatre.

The first and, at the same time thoroughest rebuilding occured in 1917. The reason for this rebuilding was not only the bad acoustical design of the theatre, but in the first line the fact, that the stage was very small. To enlarge the volume of the stage, its platform was lengthened by 4 meters towards the auditorium. Naturally in this way the opening of the stage also came forward and by this a forestage was formed, that could be used for playing, but could not be furnished with scenes, because the iron-curtain remained at its old place. This transformation involved the removal of the proscenium-boxes and that of a part of the side-dress circle, further the building of new proscenium-boxes. A new part of the orchestra was built at the same time on the place of the first rows of the auditorium.

With the enlargement of the stage the capacity of the auditorium decreased to 2600 persons.

In spite of the reconstructions the bad acoustics of the theatre did not improve. In 1926, in order to decrease the noise of the auditorium, the stalls were provided with a new concrete basis which was covered by a cork flooring. Thus the situation improved, however it was far from being perfect.

The Town Authorities, in order to avoid the imminent deficit, leased the theatre for the year 1930. The lease-holder wanted to use the theatre for variety shows. With a great investment he had the whole auditorium repainted and the stage covered with boards. In a short time the enterprise was bankrupt and the sole positive result of the reconstruction was, that the sound-absorption of the cork-covering of the ceiling decreased by its painting.

In 1941 new reconstructions were carried out. The orchestra was enlarged and five back-boxes of the stalls were walled up. Here was the projection room fitted up, as at this time the theatre was used for cinema performances too. In the case of orchestral performances a concave sounding board was used on the stage, which improved the sound energy supply of the auditorium to a small extent. At present, in this state, the capacity is 2440 persons.

Recently the attention was drawn again on the improvement of the acoustical design. At the same time scenic techniques and fireproofing also made the remodelling of the stage up to date again. At first, attempts were made with electronic amplifiers, the result of which was, that the sound-energy increased or even became too strong, but very poor sound-quality was obtained.

It was under these circumstances that at the first occasion the exact acoustical data of the theatre were determined.

2. The method of the experiments

Before carrying out measurements it seemed necessary to get preliminary informations on the acoustical data of the theatre. *V. O. Knudsen*, who was in Budapest in 1931 and visited the Municipal Theatre too, by subjective observations experienced the various echo-phenomena of the theatre. He considered the various kinds of echos as the most essential defect and judged the acoustical improvement of the theatre as a hard and almost hopeless task.

Our own observations thoroughly agreed with the experiences of Kundsen, besides these, however, informations were obtained on the distribution of sound energy and the time of reverberation too. According to these the sound-energy decreases rapidly towards the sides of the auditorium and the sound quality is deteriorated especially by the lack of the high overtons. Considering the viewpoints of sound energy supply and speech-articulation, the situation is better in the empty auditorium than in the full house, from which it can be concluded, that there is too much sound absorption in the auditorium and therefore the reverberation time is short.

In the course of the preliminary investigations it was an essential observation, that the noise level is considerable, caused partly by the clattering of the old bad wooden-seats, partly by the insufficient sound isolation of the curtains employed instead of doors on the ground floor. At the two sides of the ground floor there are corridors at 4 meters from the outermost seats, separated, along their whole lengths, only by curtains from the auditorium.

Further it was found that in the second and third rows of all the boxes on the ground floor the tone of the performance was unenjoyably dull. This was the case in the side-boxes of the dress-circle too.

Based upon the previous experiences three kinds of series of measurements were determined. The measurements were carried out in 4 days, from August 29th till September 1st. During this time there were no performances at the theatre and the technical staff was at our disposal. The program of each series of measurements was as follows :

a) Determination of the paths of the echoes

For this purpose — as it is usual — the sound pressure caused by a short clapping sound impulse (pistol shot) were recorded at several places of the stage

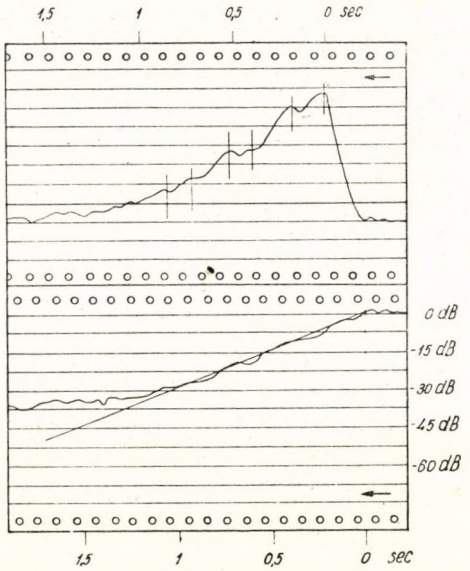


Figure 1/a (top picture). Echo oscillogram. On the picture the arrival of the direct sound and that of the first three echos are presented. The path of the echos can be calculated from the intervals

Figure 1/b (lower picture). Reverberation oscillogram for 200 c/s frequency. The reverberation time is given by the interval corresponding to a sound intensity level of 60 *dBs.*

and auditorium. Condenser microphon, RC amplifier and the Hypsographe type PS 45 level-meter, of the Swiss firm »Autophon« were employed for

recording. Fig. 1/a shows an echo-oscillogram. The whole length of the sound path was calculated from the transit time of the impulses and comparing the results obtained at various spots the real path of the sound, the number of reflections and the places, where the echoes originated, were derived.

b) Determination of the reverberation time

The reverberation time was measured at 4 places of the auditorium, at warble-tones of 125 $\pm$ 2, 250 $\pm$ 5, 500 $\pm$ 10, 1000 $\pm$ 20, 2000 $\pm$ 40, 4000 $\pm$ 80 and 8000 $\pm$ 160 c/s frequencies. For these measurements the loudspeakers of the cinema were used as sound-sources, the audio frequency generator being connected directly to the amplifier. In order to produce a warble-tone, a rotary capacitor driven by a motor was connected in parallel with the condenser of the generator. The decay of sound was recorded by the apparatus mentioned above. An oscillogram of reverberation is shown on Fig. 1/b.

c) Measurement of distribution of sound energy

This measurement was realised at 150 points of the auditorium, with sound of 250, 1000 and 4000 c/s frequencies. As a matter of fact a number of measurements were carried out around each point. In order to determine the variations of the sound intensity due to the interferences. In the same way measurements were carried out to determine the noise-level of the auditorium too. The results of all of the sound intensity measurements are given in dB-(decibel) values. 0 dB means the sound level recorded by the microphon placed in the middle of the fore-part of the stage and directed towards the sound source. For these measurements too cinema loudspeakers were used. The sound board with a dimension of 3 $\times$ 3 meters, equipped with 5 loudspeakers, reproduced the real circumstances better, than some other small dimensioned sound-source, and also its power was sufficient for supplying enough sound into the whole auditorium.

3. Results of measurements

a) Determination of the paths of the echoes

According to the data of Table I. distinctly separable five echoes can be observed in the empty theatre. The arriving sound pulses followed one another with a time lag of the order of magnitude of 0,1 second, consequently these echos can be heard separately. Controls have shown that three or four echoes could be really heard.

The paths given in Table I. were calculated in the same manner from the time-lags of echos recorder at various places : the paths always represent the distance from the sound-source before the little iron curtain of the back-stage and back. (Fig. 2.) The path of the first echo is probably returned by the

TABLE I.

The paths of echos in meter

Measure	Paths of echos				
	1-st	2-nd	3-rd	4-th	5-th
1	45	77			156
2		61		145	170,5
3		56		136	170
4	43			132	160
5		57			166
6	43			132	158
7	40			142	
8	41	56,5	107	146	166
9	42,5		124		153
10	42,5		102		
11	45	63			
12			117		171
13	41				
14	44		110	144	
15	47		125		
16	41		96		
17	49				
18	45		124		
19	39	78	124	150	174
Average	43	63	114	141	164

ceiling of the stage, as this echo fades, if the barrel-loft of the stage is furnished with scenes. The paths of the second and third echoes can be identified with certainty, with those illustrated in Fig. 2. In the production of the fourth echo the side walls, the back wall and the ceiling play some part, but the path of the sound cannot be followed precisely. The path of the last echo leads from the back wall to the ceiling and from there in all probability to the wall-part above

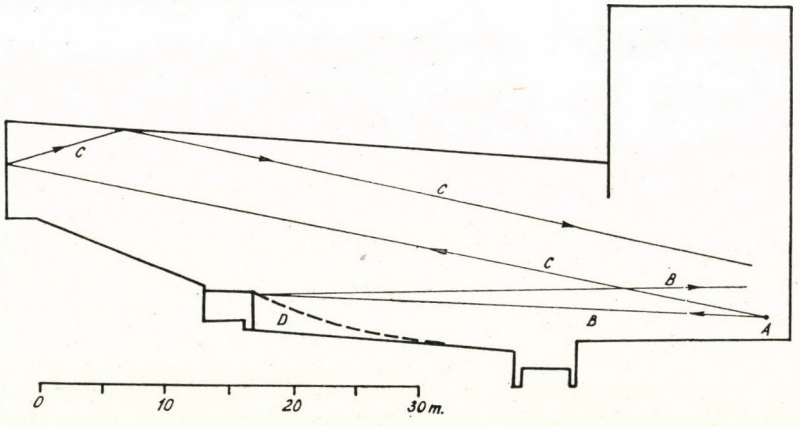


Figure 2. Schema of the longitudinal section of the theatre. The place of the recording microphone (*A*), the path of the second (*B*) and third (*C*) echos, and the correct slope of the seats are shown in the figure.

the opening of the stage, then it is reflected by the back wall of the ground floor to the stage again, like the second echo.

In producing echoes, as generally, the back wall of the ground floor and the dress circle play the most important role. The elimination of the echoes can be achieved in the first line by a suitable acoustical rebuilding of these wall-parts.

According to our measurements, the pillar-line of the side-boxes results in a flutter-echo besides the above mentioned other echoes. Its frequency is about 3 c/s.

b) Determination of the reverberation time

The results of the measurements of the reverberation time are presented in Table II., the places of the measurements are marked in Fig. 3. The results

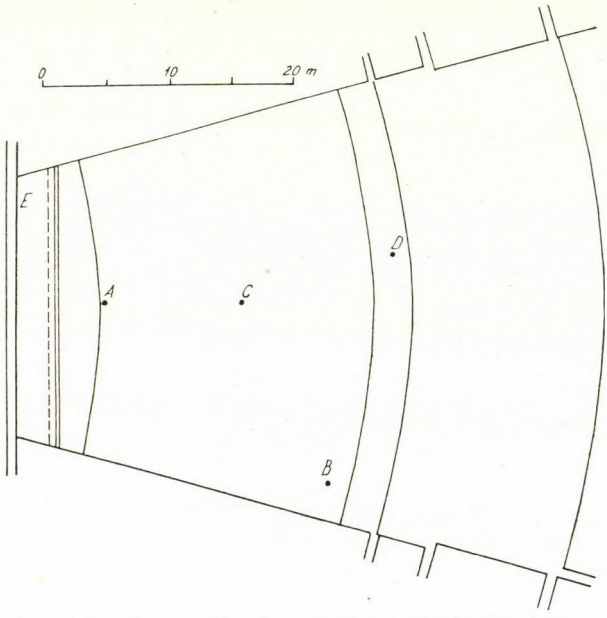


Figure 3. Ground plan of the theatre after the rebuilding of 1917. The old stage-opening was at the place of the iron curtain (*E*). *A*, *B*, *C* and *D* are the places of the reverberation measurements.

of the measurements show a spread of about 10%, which is due, in the first line, to the unequal distribution of sound-energy and to the disturbing effect of interferencies.

The frequency-characteristics of the reverberation time can be studied in Fig. 4. In the same figure the frequency-characteristics of reverberation time computed for full house, and for a full house corresponding to optimal acoustical conditions, are also plotted.

TABLE II.

The values of reverberation time in sec

Place of microphone	Frequency of measurements						
	125 c/s	250 c/s	500 c/s	1000 c/s	2000 c/s	4000 c/s	8000 c/s
A		3,1			1,96		
B	3,75	2,88	2,72	2,48	2,32	1,92	2,08
C	3,54	2,88	2,57	2,2	2,05	1,7	1,68
D	3,30	2,9	2,52		2,04	2,0	
D	3,54	2,88	2,57	2,2	2,05	1,7	1,68
Average	3,5	3,0	2.5	2,3	2,1	1,8	1,8

For the calculations Eyring's formula was used. To control the calculations, the total absorption of the auditorium was determined at 1000 c/s frequency and using Eyring's formula the reverberation time of the empty hall (Table III.) that has been determined by measurements, was calculated again.

According to Eyring's formula

$$T = 0{,}161 \frac{V}{\Sigma F_i Q_i}$$

where

T = reverberation time in secs,

V = volume of the hall in m^3,

F_i = the size of each absorptive surfaces in m^2,

α_i = The absorption-coefficients in decimal fractions.

$Q_i = 1n\ (1 - \alpha_i)$

The necessary data can be substituted into the formula from the corresponding columns of Table III. The total absorption-number for the empty hall is :

$$\Sigma\ F_i\ Q_i = 1415$$

The total volume of the auditorium must include the relatively small stage-space. This would result $V = 17\,000 + 6000 = 23\,000$ m^3. The opening of 145 m^2 between the auditorium and the stage really enlarges the auditorium by the two-thirds of the stage-space. Consequently this part can be dealt with as an extension of the auditorium and not as a coupled system. The barrel-loft is the only part, that was not considered sofar. Its role is to decrease the reverberation time, which was taken in consideration by subtracting 2000 m^3 for its volume and by using higher absorption-coefficient. Thus the reverberation time calculated for a frequency of 1000 c/s is :

$$T = 0{,}161 \frac{21000}{1415} = 2{,}38 \text{ secs},$$

which agrees very well with the measured value $2{,}3 \pm 0{,}18$ secs.

TABLE III.

Values of absorption at 1000 c/s frequency

Material	F_i	α_i	Q_i'	$\Sigma F_i Q_i$
Curtain on two sides of the pit	68 m²	0,35	0,43	31
Curtain of the back of the pit, on the sides and the back of the dress circle	22 m²	0,35	0,43	10
Textile on the stone wall	70 m²	0,12	0,12	10
Back openings on the third floor (curtain included)	100 m²	0,35	0,43	44
Box-openings at the back of the pit	35 m³	0,6	0,9	31
Openings of the boxes of the dress circle between the first and the second floor	60 m²	0,55	0,8	48
Opening of the proscenium box of the pit and of the first floor	25 m²	0,6	0,9	22
Opening above the proscenium box	10 m²	0,12	0,12	1
Openings of the ceiling	25 m²	0,6	0,9	22
Curtain hanged up in the proscenium box	8 m²	0,25	0,28	2
Curtain on the wooden floor	250 m²	0,22	0,25	62
Textile on the wooden boards	80 m²	0,15	0,15	12
Velvet parapet	60 m²	0,35	0,43	25
Velvet back of the chairs	155 m²	0,35	0,43	67
Stane-floor	500 m²	0,05	0,05	25
Cork covering on the floor	232 m²	0,2	0,22	51
Floor of the dress circle	330 m²	0,13	0,13	43
Platform of the stage	260 m²	0,13	0,13	34
Scenery of the fore-part of the stage	100 m²	0,3	0,36	36
Walls of the stage	360 m²	0,09	0,09	32
Barrel-loft	180 m²	0,6	0,9	162
Curtains (aside)	10 m²	0,35	0,43	4
Orchestra (empty)	60 m²	0,35	0,43	25
Flags from the dress circle	50 m²	0,2	0,22	11
Wooden doors	76 m²	0,13	0,13	10
Ceiling	1400 m²	0,18	0,2	277
Walls	1000 m²	0,09	0,09	90
Stairs on the floors	200 m²	0,1	0,1	20
Wooden chairs	2060 pieces	0,04	0,04	82
Velvet chairs	345 «	0,3	0,36	124
Wooden benches	20 m²	0,08	0,08	2
Total				1415
Public (minus the absorption of the seats)	2440 pers.	0,32	0,4	976
Plus of the orchestra	60 «	0,32	0,4	24
Scenery	200 m²	0,2	0,22	44
Total				2459

The same calculation can be carried out for full house too. In this case

$$\Sigma F_i Q_i = 2459$$

and the volume occupied by the public (300 m³) must be subtracted. Accordingly we obtain

$$T = 0{,}161 \frac{20700}{2459} = 1{,}35 \text{ sec}$$

The optimum reverberation time at 1000 c/s frequency, for the volume considered, is about 1,8 secs, so at present the reverberation time is strikingly short, which is to be increased by all means.

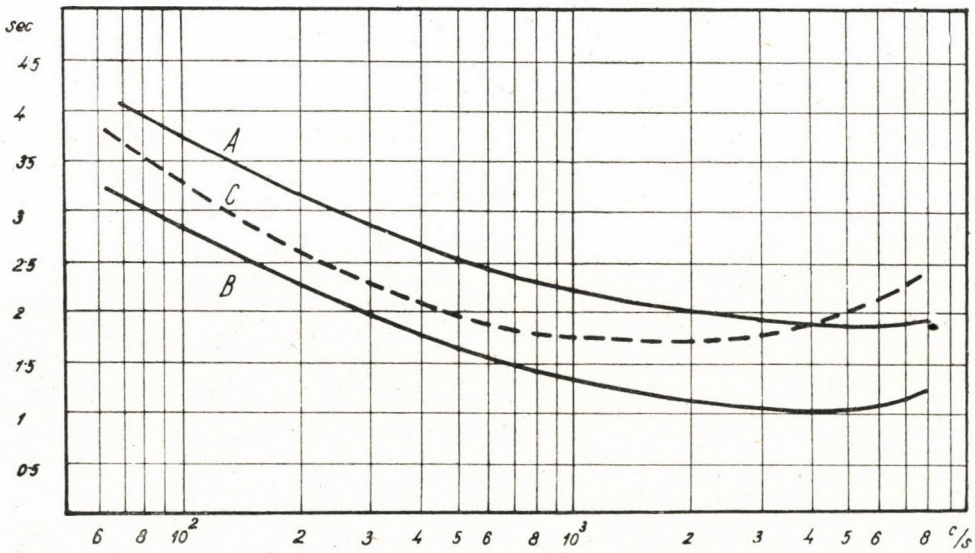


Figure 4. Frequency characteristics of the reverberation time, measured in empty hall (*A*), calculated for full hall (*B*) and for an optimal case in a full hall of the same size.

The calculation with Eyring's formula for higher frequencies is not satisfactory, because the molecular absorption of the air must be taken into consideration too. In halls of large volume the sound-waves travel very long paths in the air without reflection, while the decrease of sound energy occurs only through molecular absorption of the air. This molecular absorption increases with increasing frequency and above 4000 c/s it has a very considerable value. According to the decay formula modified by Knudsen

$$T = 0{,}161 \frac{V}{\Sigma F_i Q_i + 4\beta V}$$

where β is the molecular absorption-coefficient of air. Using this formula the total absorption of the theatre at 4000 c/s frequency is about 1,5-times the absorption calculated at 500 c/s. Under ideal conditions these two values ought to aggree. The absorption of the air is the reason why the decay-characteristics determined by measurement and shown in Fig. 4. has a tendency of sloping down at higher sounds, as compared to the optimal characteristics. In behalf of an improvement of acoustical conditions, lengthening of the reverberation of higher tones is also desirable.

c) Measurement of the distribution of sound energy

The most important series of measurements, to ascertain hearing conditions prevailing in the theatre were the determination of sound-pressure values in the auditorium. The results for 250 c/s and for 4000 c/s are plotted in Fig. 5. It can be seen from the figures, that the sound energy of the ground-floor is much worse, than that of the dress circle. The reason for this is very simple. On the sides of the ground floor there are no reflective surfaces, but curtains of high absorption and in this way only the direct sounds and those, reflected by the ceiling and the back wall, are effective. However, on account of the improperly dimensioned, too slowly ascending rows of seats (Figs. 1. and 2.) also the direct sound is only effective at a low degree. The slope of the dress circle is acoustically correct, the ceiling is nearer to it, and it is surrounded by reflecting surfaces and thereby the distribution of sound energy is more adequate. In Fig. 5. it can also be seen that as high sounds have strong directional characteristics, the sound-source, placed in the middle axis, directs the high sounds mainly to the centre. From the point of view of sound quality the situation on the two sides is even worse, than that of sound energy. This statement refers both to the ground floor and the dress circle. The data measured at 1000 c/s frequency are not shown on the figure, as they do not give new results.

In course of the measurements the presence of disturbing interferencies was determined. Standing waves and wandering of the nodes produced by changing of the frequency were demonstrated clearly. The troubles caused by interferencies have less importance in case of a full house, but at some places, e. g. in the side boxes of the second floor and in the back corners of the dress circle they can be observed very well.

Hearing conditions of the side boxes of the dress circle, where the sound-pressure level reaches even the value of — 24 *dB*, must be treated separately. In the specially deep and far extended boxes, however, some sounds of certain frequencies are heard unexpectedly loud, which can be explained by resonance.

The noise-level prevailing in the theatre is considerably high on account of the constant clattering of the old, bad wooden seats and the unsatisfactory isolation against external noises. In a full house, when the public keeps silence, the noise level, related to the level-value of 0 *dB* used by us, varies between — 25 *dB* and — 30 *dB*. The average noise level produced by the electric horns of the motorcars passing in the street, measured in the perfectly curtained auditorium, is — 30 *dB*. This value, measured by a calibrated sound-pressure meter, is at 1000 c/s frequency about 2×10^{-2} μ bar. So the noise level of the auditorium is much higher, than the conceeded value of 5×10^{-3} μ bar, and in the side rows of the ground floor not only disturbs, but often masks the performance.

As the possibility of improving the sound energy supply by loudspeakers was proposed before these investigations, some experiments were made to

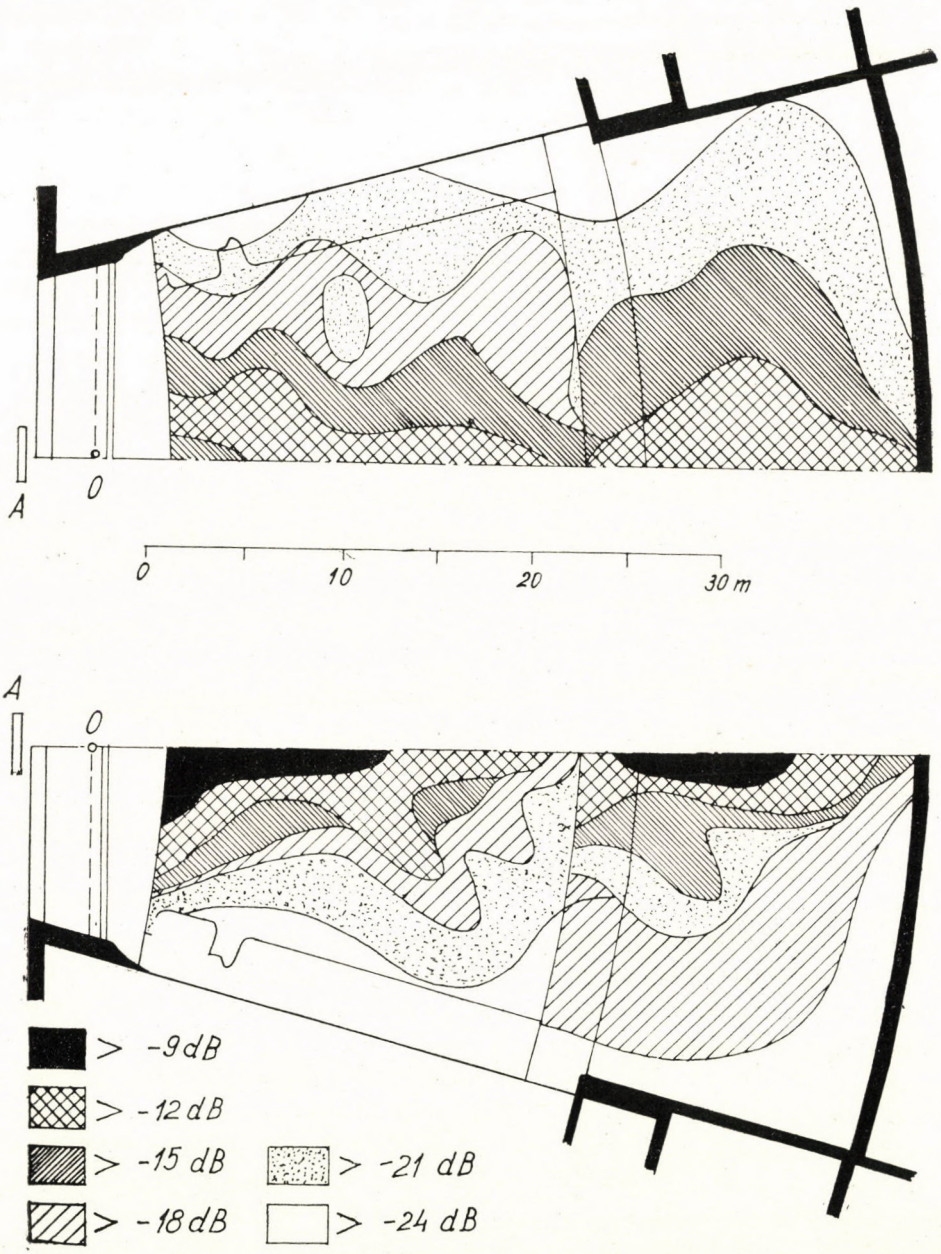


Figure 5/a and b. Distribution of the sound energy in the auditorium for 250 c/s (upper part) and for 4000 c/s (lower part). On account of symmetry it is enough to show the half of the auditorium in both cases. The sound source is in *A*, the zeroplace of the sound intensity level is in *O*.

find, in what degree the sound energy could be increased by loudspeakers, in a manner that the public should not perceive, that it is not only the natural sound, what they hear. In an empty hall, at the frequency of 250 c/s, we succeeded to achieve an energy increase of 5—10 *dBs* and the audience could not determine the location of the loudspeakers. The frequency-characteristics of the loudspeakers used in the course of the experiments were not suitable, as the improvement of sound energy of 5—10 *dBs* obtained at 250 c/s, while it was only 3—6 *dBs* at 1000 c/s and 2—4 *dBs* at 4000 c/s. In the course of these experiments 4 loudspeakers were placed in the ventilation aperture of the ceiling.* It is reasonable to increase the sound energy artificially only at the places of the auditorium, that are in lack of energy and an improvement of 5—8 *dBs* is sufficient, because experiments show that at places within the — 15 *dB* curve in Fig. 5. hearing conditions are satisfactory.

4. The plan of acoustical improvements

After recognizing the acoustical circumstances of the theatre, a rebuilding was to be planned by which an improvement seems to be possible. By the phrase »acoustical improvement« three separate tasks are meant :

a) Elimination of echoes and interferencies, and more uniform distribution of the sound energy.

b) Lengthening of the reverberation time and modification of the decay-characteristics (reverberation time *vs* frequency) at high frequencies.

c) Increasing the sound energy supply and at the same time decreasing the noise level of the auditorium.

All the problems, of course, could only be solved by a number of modifications carried out simultaneously but each modification has an effect on the various problems. Therefore some architectural modifications, or electroacoustical procedures are to be mentioned on several occasions.

a) *The elimination of echoes and interferencies* can be obtained in two ways. The first is by increasing the absorption of the back walls, the second is making the reflected sound diffuse. Though the first way is more easy to go, the second was to be chosen by us. In the theatre one must make an effort to increase the sound energy and to lengthen the reverberation time, therefore the application of further absorptive materials is to be avoided by all means. Diffusely reflecting surfaces arranged unsystematically make the sound field not only more diffuse, i. e. they not only eliminate echoes and fade interferencies, but they make a more favourable situation from the view-point of distribution of sound energy too. Besides, as the impact of the sound waves to the

*) Mr. Ervin Kereszthy who designed and constructed the electroacoustical device o the theatre, proposed to place the loudspeakers on the ceiling.

border-surfaces becomes more frequent by scattering, the air plays a smaller role in the mechanism of sound absorption and so the high degree of absorption of the high sounds decreases too. In this way, through this sole modification several acoustical data of the theatre are improved.

The diffusing surfaces would not be restricted only to the back wall of the dress circle and the ground floor, and to the inside arcs of the side-boxes, but they should be employed on the side-walls too, thus the flutter-echoes were also eliminated and the interior of the theatre would obtain a uniform architecture.*

According to the modification the arcs of the back wall of the dress circle will be removed, thus an important improvement in sound energy can be obtained. On the ground floor the breastwork of the back boxes and the front wall of the engine-house will be advanced by 0,60 m and the last will be designed like the back wall. At the same time at least 1,20 m will be walled up from the back part of the boxes, which will result in an improvement of the local sound energy. The diffusing surfaces to be built into the arcs of the side boxes of the dress circle will be advanced also by a distance of 0,60 m.

The sound diffusing walls will be made with vertical partitions of the size 0,20—1,20 meters. The surface-elements are convex and saw-tooth shaped

Figure 6. Schema of one part of the diffusing surfaces.

plane wall-zones, employed one after another as unsystematically as possible. In the design parallel planes are to be avoided, therefore various radii of curvature were selected. The profile of one part of the diffusing surfaces is shown in Fig. 6. The diffusing surfaces would be covered with plaster of small absorption and the vertical partition would be broken up by horizontal sound diffusing elements too.

In consequence of the size of vertical partition only the deep and middle sounds are diffused. The diffusing of the high sounds will be accomplished by horizontal tranches 2 cms apart made combelike on the wall. These horizontal indentations will not be employed on the whole diffusing surface, but at spots only.

b) In order to *lengthen the reverberation time*, the absorption is to be reduced. The materials of high absortion-coefficient in the auditorium are to be changed.

*) The plans of architectural modifications were made by the architect, Mr. Oscar Kaufmann, wellknown designer of the Kroll-Opera, and the Volksbühne of Berlin, the Reinhardt theatres and other famous theatres.

Care was taken in selecting new materials, in order that the high sounds should be raised. If the floor of the auditorium would get a linoleum cover of 800 m^2, the curtains on the ground floor would be changed to wooden doors and wainscot, the velvet parapets would be changed to polished wood, the carpets of the boxes would be substituted by a rubber floor, on 1000 c/s frequency the total absorption of the theatre could be decreased with 112 absorption units. At this frequency the reverberation time of the full house hardly increases with 0,05 sec, but at 8000 c/s the increase reaches even 0,15 sec. By changing the absorbing materials, it is the quality of the sound which improves in the first line.

For lengthening the reverberation time we are to follow another method. The electroacoustical procedure*, which proved to be very successful in the State Opera, Berlin, was found to be the most suitable, because thus the reverberation can be lengthened at will without changing in the least, the quality and intensity of the sound. The natural sound is picked up by a microphone and lead to a loudspeaker in a separate and highly reverberating room. This secondary sound is adjusted to the desirable reverberation time and is retransmitted through loudspeakers into the auditorium.

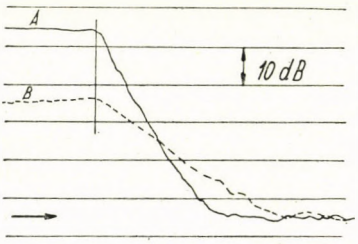


Figure 7. Decay characteristics of the natural sound (*A*) and that of the loudspeakers' sound improving the reverberation (*B*).

The advantage of the system is, that quite a small sound energy can be used, so that the presence of loudspeakers do not affect the direct sound at all. The sound given through the loudspeakers begins to prevail only, when the primary sound fades by decaying. In Fig. 7. the decay curve »*A*« corresponds to natural sound, curve »*B*« to the sound of the loudspeaker. The presence of sound »*B*« will be unperceivable until its sound energy remains 4—5 *dBs* below the intensity of the natural sound. After fading of the original sound, on account of the various times of reverberation, the two decay curves cross one another. At this time the sound of the loudspeaker increases the natural sound by 3 *dBs*. In the further course of the decay only the sound of the loudspeaker is to be heard, but at such a low intensity and for such a short time, that it can not be

*) The solution of the problem came from *O. Vierling*, Akust. Z. *6.* (1941), 86.

observed. Naturally for improving the reverberation time several loudspeakers, placed on the ceiling, are used.

c) *An increase of the sound intensity and more uniform distribution of the energy* can be obtained only by applying several modifications simultaneously; elimination of the noises of the auditorium is a very important part of the problem. The linoleum covering and rubber floor mentioned in paragraph *b)* is partly serving this purpose too. If the seats will be fixed and made noiseless and the substitution of curtains by doors is taken into consideration, a decrease of 6—8 *dBs* of the noise level can be expected.

In behalf of the improvement of sound energy, one of the most important modifications to be made is the substitution of exit-curtains of the ground floor by wooden doors. The wainscoting employed in a length of 20—20 m on both sides of the ground floor serves not only for noiseproofing, but it is important also from the view-point of energy distribution, of improvement of reverberation and of disturbing the interferencies as well. Owing to the replacement of curtains by wooden doors an improvement of sound isolation 3—4 *dBs* can be expected. The difference between the absorption-coefficients of the material of the curtain and that of wood involves an increase of reverberation time. Besides, as the sound absorption of the wooden panelling reaches its maximum at 300—500 c/s frequency and decreases towards the high harmonies, the appearance of the formerly lacking high harmonics can be expected at the side seats. The velocity of sound in wood is 10—15 times greater, than in air, so the whole wooden panelling radiates the sound on the whole ground floor almost simultaneously.

In this way the rise of interferencies is disturbed and the reverberation time is increased. Since the molecular sound absorption for high sounds in wood is not so high, as in air, the sound, arriving through the wood is of better quality, than that arriving through the air.

According to the plans, the wainscot will be extended through the stage-boxes of the ground floor up to the stage, in order to establish a solid connection with the platform of the stage. The side-doors will be promoved by half a meter rom the present curtain-line, the doors employed instead of the curtains of the back exits will be brought nearer by 3 meters. By this and by decreasing the depth of the stage-boxes of the ground-floor, the volume of the sound absorbing cavities will be decreased.

Raising up the stage or the modification of the slope of the auditorium seems to be a successful method for the improvement of sound energy. The latter would mean a very expensive change, therefore lifting up the platform by 30 cms seems to be more practical. Thus only the first two rows become useless from visual point of view, these rows, however, are partly to be removed in behalf of the enlargement of the orchestra, partly they can be raised by 10—15

cms. According to the calculations the increase of sound energy attainable in this way is 3—5 *dBs*.

The modifications described in this paragraph will result in a considerable improvement of the energy distribution of the two-thirds of the ground floor and nearly the whole dress-circle. To the remaining back parts and the side-boxes sound energy can be supplied only by loudspeakers.

For increasing the sound energy loudspeakers should be applied with extreme precautions. Artifical sound may be used only for the supply of seats where energy is lacking and its intensity must not be higher than that of the natural sound. By such an arrangement a further increase of sound energy of 3 *dBs* is obtained, which is sufficient for a fairly good hearing even at the acoustically worst places. The loudspeakers should be placed on the ceiling in such a manner, that the sound should arrive to the irradiated places as if it were a reflection of the natural sound from the ceiling. In this way a more natural impression is obtained.

A very important requirement in sound amplification is, that it should not change the original intentions of the conductor by dynamic compression. For this purpose a constant amplification is necessary. By using loudspeakers of suitable direction-characteristics and by microphones applied at proper places, this problem can be solved easily nowadays.

The frequency-characteristics of the electroacoustical apparatus must be carefully chosen. This system must have a linearity up to 10 000—12 000 c/s, lest the imperfect sound-quality should be further deteriorated.

5. Rebuilding of 1949.

After the measurements the theatre underwent further modifications. The iron curtain was carried forward by 4 meters and thereby there is no forestage. The place of the orchestra was enlarged and partly elevated. Finally the wooden doors of the ground floor proposed on the basis of the measurements, were also made. The modifications did not result in appreciable acoustical improvement; they were not even intended for this purpose. The modification of the place of the orchestra strengthened the sound of the orchestra to a high degree at the expense of the voice of the singers. The rebuilding of the stage area, however, made the conditions of sound propagation even worse, than better. Only the wooden doors of the ground floor did produce the expected result. The noise-level of the auditorium decreased by some 3 *dBs* and the energy distribution of the side seats increased with 2—5 *dBs*. It is a pity, that the sound amplifier is operated in the old manner and consequently complaints against its rather strong sound are received. The actual reconstruction of the theatre has been started in the course of the year 1951, according to the proposed essential acoustical improvements.

Acknowledgements

The instruments and technical apparatus used for the acoustical measurements were placed at our disposal by the Hungarian Radio. For this we are indebted to Ing. Béla Tomcsányi, manager of the Amplifying Department. Thanks must be said also to Ing. N. Kollányi and Ing. C. Zsdánszky for their cooperation in the course of the measurements.

It is a pleasure to acknowledge the help given by Architect O. Kaufman who designed the architectural modifications of the theatre. The measurement were ordered by the Art Department of the Municipality and it was effectively supported by both this Department and the management of the theatre.

SUMMARY

With a view to establish the acoustical characteristics of the Municipal Theatre of Budapest the followi g conditions have been investigated : the paths of the echoes, the values and frequency dependence of reverberation durations and the variations of sound intensity depending on locality. In possession of the acoustical data calculations have been made and plans worked out with a view to eliminate echoes and interferences, to lengthen the period of reverberation by 0,6 seconds, to intensify high tones and to raise the sound energy supply of the auditorium. A plan of rebuilding the theatre is now under consideration and in case the adaptations suggested should be carried through we shall not fail in reporting the improvements obtained as to acoustics.

АКУСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В БУДАПЕШТСКОМ ГОРОДСКОМ ТЕАТРЕ

Т. Тарноци

Р е з ю м е

Для ознакомления с акустическими данными будапештского Городского Театра мною были определены пути распространения эхо, величина времени послезвучания, зависимость времени послезвучания от частоты, и зависимость силы звучания от места. На основе полученных акустических данных были произведены расчеты и разработан план для исключения эхо и интерференций, для увеличения времени послезвучания до 0,6 сек, для поднятия уровня высоких тонов и увеличения силы звучания зрительного зала. Сейчас пересматривается план реконструкции театра, и если предложенные реконструкции будут осуществлены, то об улучшении акустических данных будет сообщено дополнительно.

VERSUCHE ZUR BESTIMMUNG DER KRÄFTE, WELCHE AN DER MANTELFLÄCHE VON EINBETONIERTEN EISEN- ODER STAHLEINLAGEN ÜBERTRAGEN WERDEN*

Dr. A. SCHWERTNER

Eingegangen am 29. April 1951.

Bei Eisenbetonkonstruktionen ist in der Regel entweder der Beton oder die Eiseneinlage unmittelbar belastet, während der andere Werkstoff nur auf Grund von Kräften, die entlang des Mantels der Eiseneinlagen übertragen werden, in Spannung gelangt. Bei Stützen wird der Beton meistens unmittelbar belastet, wobei dann die Eiseneinlagen einer mittelbaren Belastung ausgesetzt sind. Auch bei dem auf Biegung beanspruchten rissfreien Balken wird das Eisen durch die Beanspruchung des Betons in Spannung gesetzt; nach dem Eintreten eines Risses ist jedoch der durch die Belastung ausgelöste Eisenzug im Rissquerschnitt die primäre Wirkung, während in diesem Falle die Beanspruchung des Betons die sekundäre Wirkung darstellt. In vorgespannten unbelasteten Eisenbetonträgern mit einbetonierten Stahleinlagen bildet der Zug des Stahles die primäre Beanspruchung, während sowohl das Eigengewicht als auch die Nutzlast lediglich über den Beton auf die Stahleinlage wirken. In solchen Fällen ändert sich am Mantel der Stahleinlagen manchenorts auch die Richtung der Kraftübertragung.

Eine vollkommene Kenntnis der Verteilung der zwischen Eisen und Beton bzw. Stahl und Beton entlang des Mantels der Einlagen übertragenen Kräfte dürfte der Eisenbetontheorie gute Dienste leisten. In dieser Hinsicht tappt allerdings auch die Wissenschaft noch im Dunkeln und der Ingenieur rechnet auf Grund von einfachen, doch gewiss nicht zutreffenden Annahmen. Diese Unzulänglichkeit lässt sich auf zwei Ursachen zurückführen. Einerseits stösst die Messung der entlang des Mantels der Eiseneinlagen übertragenen Kräfte auf Schwierigkeiten, weil die Stelle der Kraftübertragung für Instrumente schwer zugänglich ist, und andererseits fehlt vorläufig noch eine Theorie, mit deren Hilfe die Messungsergebnisse richtig ausgewertet werden könnten.

Diesem Mangel einer entsprechenden Theorie wollte eine Versuchsreihe, die im Laboratorium für Beton- und Eisenbetonbau der Budapester Technischen

* Da bezüglich einzelner Schlussfolgerungen dieses Aufsatzes in ungarischen Fachkreisen Meinungsverschiedenheiten entstanden sind, würde die Schriftleitung einer Diskussion gerne entgegensehen und ersucht um eventuelle schriftliche Beiträge.

Universität mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften im Jahre 1950 durchgeführt wurde, Abhilfe schaffen. Die Grundlage für diese Versuchsreihe bildete eine Theorie der Haftung zwischen Eisen und Beton, deren Verwendbarkeit diese Versuchsreihe entweder zu bekräftigen berufen war, oder die auf Grund dieser Versuche entsprechend abgeändert oder als unrichtige Annahme verworfen werden sollte.

Theorien bestehen nur solange zu Recht, als sich mit ihrer Hilfe Erscheinungen erklären lassen und die aus ihnen gezogenen Folgerungen sich im Rahmen der in der Ingenieurspraxis erforderlichen Genauigkeit als zutreffend erweisen. Die Voraussetzung jedoch, dass die zwischen dem Eisen und dem Beton bestehende Spannung einfach gleichmässig verteilt ist, kann selbst dann noch keine Theorie genannt werden, wenn sich auf diese Weise für die Ingenieurspraxis gewisse Berechnungsmöglichkeiten ergeben und sich im allgemeinen auch bewähren. Die erwähnte Spannungsverteilung wird nämlich durch die Messungen nicht, oder wenigstens nicht in jedem Falle bestätigt. Die Ergebnisse der Messungen allein bilden jedoch solange keine Theorie, solange sie nicht derartig in Gleichungen zusammengefasst werden können, dass die aus diesen Gleichungen gezogenen Schlüsse durch Versuche auch tatsächlich bekräftigt werden.

Allgemein wird die Verteilung der Haftkräfte längs des Mantels der Eiseneinlage wie in *Abb. 1b* dargestellt betrachtet. Dementsprechend hat die Haftungskurve am Ort des Austretens des Eisens aus dem Beton (bei Punkt *A* der *Abb. 1b)* den Wert Null, steigt dann steil zu ihrem Höchstwert an und sinkt schliesslich durch den Punkt *B* hindurchgehend allmählich in einer regelmässigen Kurve bis zu ihrem Endwert im Punkte *C*. Die Gestalt des Kurvenabschnittes *B*—*C* darf als durch Versuche bereits vollkommen erwiesen gelten, dies trifft aber nicht auch auf den Abschnitt *A*—*B* zu. Im allgemeinen ist es nämlich die Summe der entlang der Mantelfläche des Eisens übertragenen Kräfte, der Haftkräfte, — d. h. die Änderung der Beanspruchung des Eisens — die durch Messung bestimmt werden kann. Diese Zugkraftveränderung ist auf *Abb. 1c* dargestellt und der erste Differentialquotient dieser Kurve T_x führt dann zur gesuchten Kurve t_x. Es lässt sich durch Messungen nur schwer feststellen, ob die Kurve T_x im Punkte *A* eine waagerechte Tangente besitzt oder nicht. Es ist daher durchaus möglich, dass letztere eher auf einer Annahme als auf einem Messergebnis beruht und dass sich die Kurve T_x tatsächlich inflexionslos, der voll ausgezogenen Kurve entsprechend ändert. In diesem Falle verläuft auch die Linie t_x regelmässiger; sie nimmt die Gestalt laut *Abb. 1b A'C* an und weist keinen maximalen Zwischenwert mehr auf.

Es ist strittig, welche der beiden Möglichkeiten in bezug auf die Verteilung der Zugkraft und der Haftspannungen in ihren Endabschnitten als die richtige zu betrachten ist. Es steht jedoch ausser Zweifel, dass an der Eintritts-

stelle des Eisens in den Beton, wie bei singulären Punkten im allgemeinen, die allgemeine Gesetzmässigkeit aufhört und unsicher wird. Gerade deshalb haben an dieser Stelle verschiedene Annahmen gleicherweise eine Existenz-

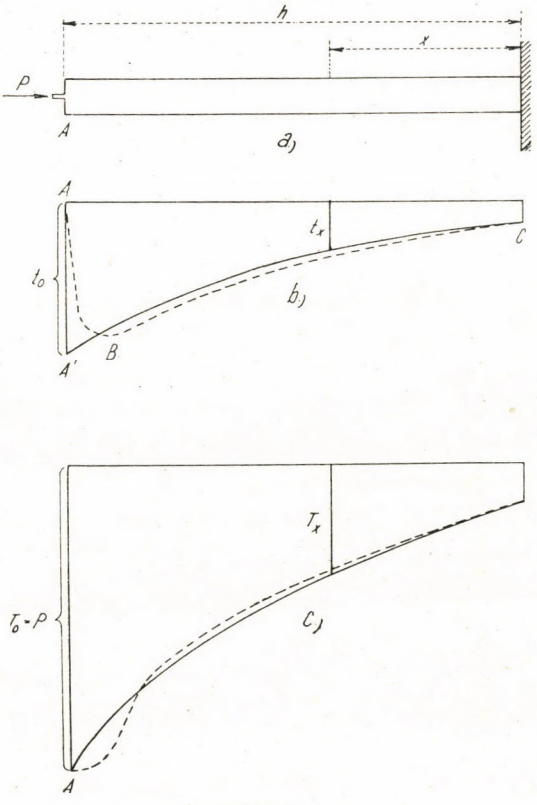


Abb. 1.

berechtigung. Demgemäss sollte die in der Folge behandelte Theorie nicht von vornherein verworfen werden, nur weil sie für t_x nicht die heute noch allgemein anerkannte Linie ABC, sondern die Linie $A'C$ als das durch Versuche bestätigte formrichtige Ergebnis anerkennt.

1. Die Theorie

Jede Beanspruchung und Spannung eines Körpers ist mit Formänderungen verknüpft und die Spannung steht in einer gewissen Funktionsbeziehung zur Formänderung. Diese Funktion hat in der Regel einen verwickelten Aufbau, doch wird eine erste Annäherung die Ingenieurspraxis in fast allen Fällen befriedigen, nämlich die Annahme, dass sich die Spannung zur Formänderung proportional verhält. Deshalb soll dies auch für die nachstehende Theorie als

Ausgangspunkt dienen. Die Summe aller Kräfte, die auf den Querschnitt *I—I* des auf *Abb. 2a* dargestellten Versuchskörpers wirken, ist selbstverständlich der Last *P* gleich, d. h. in allen Querschnitten ist

$$T_{ex} + T_{bx} = p$$

wenn T_{ex} die auf die Eiseneinlage und T_{bx} die auf den Beton wirkende Druckkraft ist. Diese Druckkräfte unterliegen solange einer ständigen Veränderung, als die Kraft entlang des Mantels vom Eisen auf den Beton übertragen wird.

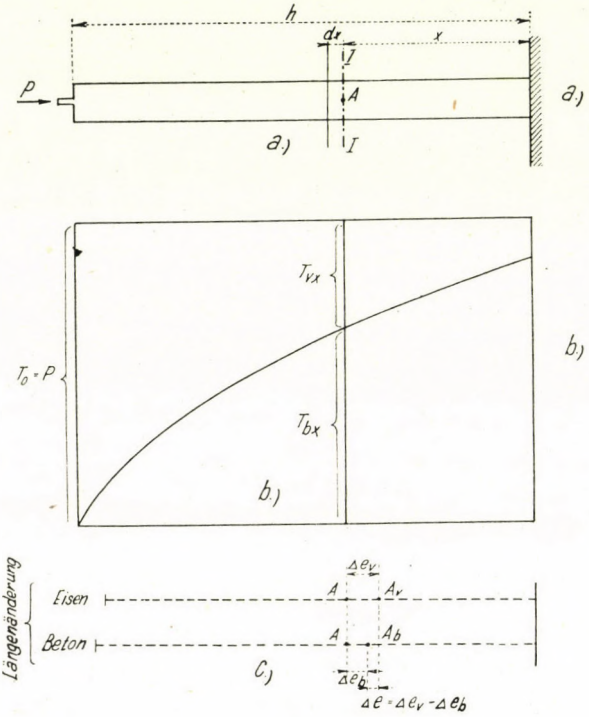


Abb. 2.

Wenn am linken Ende nur das Eisen gedrückt wird, dann erleidet das Eisen im Querschnitt *I—I* eine andere Verkürzung als der Beton, vorausgesetzt, dass die Druckspannung des Betons auf den ganzen Querschnitt gleichmässig verteilt ist. Wird mit einer Kräfteverteilung nach *Abb. 2b* gerechnet, so beträgt die Verkürzung des Eisens auf der Länge x

$$\Delta e_e = \frac{1}{E_e\ F_e} \cdot \int T_{ex} \cdot dx$$

während die des Betons

$$\Delta e_b = \frac{1}{E_b\ F_b} \cdot \int T_{bx} \cdot dx$$

ausmacht.

In den Formeln bedeutet E_e und F_e, sowie E_b und F_b die als unveränderlich vorausgesetzten Elastizitätsmodule bzw. Querschnittsflächen des Eisendrahtes resp. des Betonprismas.

Ist sowohl im Eisen- als auch im Betonquerschnitt die Spannungsverteilung gleichmässig, dann wird unter der Wirkung der Kraft P der mit A bezeichnete Teil der Mantelfläche des Eisens *(Abb. 2a)* eine andere Lage anzunehmen bestrebt sein als der ihn in der ursprünglichen Lage umhüllende Beton. Die hier behandelte Theorie setzt voraus, dass der im Punkte A spezifische, d. h. der auf die Längseinheit bezogene Teil der Kraft, welcher zwischen dem Eisen und dem Beton übertragen wird (im nachfolgenden kurz die Haftung, proportional zur Verkürzungsdifferenz $\Delta e = \Delta e_e - \Delta e_b$ ist *(Abb. 2c)*, d. h., dass

$$t_x = c \cdot \Delta e = c \cdot (\Delta e_e - \Delta e_b)$$

ist, wobei c eine unbestimmte Konstante darstellt.

Diese Formel führt mit den bereits bestimmten Werten von Δe_e und Δe_b zu

$$t_x = c \cdot \left[\frac{1}{E_e F_e} \cdot \int T_{ex}\, dx - \frac{1}{E_b F_b} \cdot \int (P - T_{ex})\, dx\right] = k^2 \int T_{ex}\, dx - k_1 P_x \qquad (1)$$

wobei

$$k^2 = c \cdot \left[\frac{1}{E_e F_e} + \frac{1}{E_b F_b}\right] \quad \text{und} \quad k_1 = \frac{c}{E_b F_b}$$

Aus Formel (1) folgt durch Differentiierung:

$$\frac{dt_x}{dx} = k^2\, T_{ex} - k_1 P$$

und da

$$\frac{dT_{ex}}{dx} = t_x$$

ist, so ergibt sich durch weitere Differentiierung:

$$\frac{d^2 t_x}{dx^2} = k^2 \cdot t_x \qquad (2)$$

Zur weiteren Klärung der Frage diene *Abb. 3*. Wäre der Versuchskörper ein Betonprisma mit rechteckigem Querschnitt und die Eiseneinlage ein den Betonquerschnitt in zwei Teile trennendes Bandeisen, dann wäre auch die Spannungsverteilung entsprechend *Abb. 3b* richtig, wenn die Betonspannungen gleichmässig verteilt sind. Aus den Spannungen berechnet, welche auf den halben Querschnitt wirken, ist auch in diesem Falle das Moment in der Schwerlinie des Querschnittes gleich wie bei einem auf Biegung beanspruchten Träger

$$M_x = \frac{F \cdot h}{8} \cdot \sigma = \frac{F \cdot h}{8} \cdot \frac{1}{F} \cdot T_x = \frac{h}{8} \cdot T_x$$

In dieser Formel ist h die Höhe und F die Fläche des rechteckigen Querschnittes. Bei zentrisch belasteten Körpern können sich jedoch die Formänderungen nicht

den Gesetzen der Biegung gemäss auswirken, sondern die Formänderungen der Biegung werden durch Formänderungen infolge von Schub aufgehoben. Die auf den Halbquerschnitt wirkende Schubkraft ist

$$R = \frac{d\,M_x}{dx} = \frac{h}{8} \cdot \frac{d\,T_x}{dx} = \frac{h}{8} \cdot t_x$$

und falls die Schubspannungen gleichmässig verteilt sind, so ist

$$\tau = \frac{h}{8} \cdot \frac{2\,t_x}{F} = \frac{h}{4\,F} \cdot t_x$$

Der Schub bewirkt die Verzerrung des ursprünglich ebenen Querschnittes *acb* zur Gestalt $a'c'b'$.

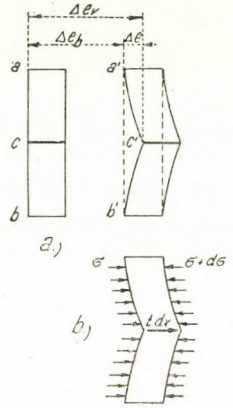


Abb. 3.

Nicht ganz so einfach gestaltet sich die Spannungsverteilung im Falle des Versuchskörpers nach *Abb. 2*. Die Haftkräfte wirken in diesem Falle nicht längs einer Fläche, sondern längs einer Linie. Die Schubspannungen werden daher sowohl ihre Grösse als auch ihre Richtung ändern ; das Wesen der Frage bleibt jedoch in beiden Fällen dasselbe.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) ist

$$t_x = c_1 \cdot \cos\, h\,(kx) + c_2 \cdot \sin\, h\,(kx) \tag{3}$$

wobei c_1 und c_2 von den Anfangsbedingungen abhängige Konstanten sind. Aus dieser Gleichung folgt durch Integration

$$T_x = \int t_x \cdot dx = \frac{c_1}{k} \sin\, h\,(kx) + \frac{c_2}{k} \cos\, h\,(kx) \tag{4}$$

Es wurde vorausgesetzt, dass zwischen Eisen und Beton eine vollkommene Haftung besteht, d. h. dass sich das Eisen vom Beton selbst an der Stelle des Höchstwertes der Haftspannung nicht löst. Doch abgesehen davon ist es auch wahrscheinlich, dass die Ergebnisse der Gleichungen (3) und (4) selbst für

den Fall gültig sind, wenn das Eisen im Beton gleitet, der Beton jedoch das Eisen noch fest umschliesst. Ein Element dx des Eisens *(Abb. 2/a)* kann sich nämlich nicht einfach wie ein starrer Körper von der Länge dx um den Wert Δe_v verschieben, da bei einer solchen Annahme die materielle Kontinuität des Eisens eine Unterbrechung erleiden müsste. Aus diesem Grunde reibt sich das Element dx des Eisens nicht längs der Strecke dx, sondern längs der Strecke Δe_v am Beton, so dass es wahrscheinlich ist, dass auch in diesem Falle die Reibung zur Dehnung bzw. Dehnungsdifferenz proportional ist, d. h.

$$t_x = c \cdot \Delta e_v$$

Die Konstanten besitzen in diesem Falle sicherlich ganz andere Werte, als wenn eine vollkommene Oberflächenbindung zwischen dem Eisen und dem Beton bestünde, da jedoch in beiden Fällen von der gleichen Formel ausgegangen wird, müssen auch gleiche Resultate zustande kommen.

2. Versuch mit einer hohen Säule

Die Säule, an welcher die ersten Messungen vorgenommen wurden, ist in *Abb. 4* waagerecht dargestellt. Diese Säule wurde derart konstruiert, dass die Last P nur den Beton gleichförmig belastete, während die Eiseneinlagen lediglich durch Kräfte in Spannung gesetzt wurden, welche an der Mantelfläche der Eiseneinlagen vom Beton an sie gelangen konnten. Zur Sicherung dieses Zustandes wurden an den Enden der Säule eiserne Platten befestigt, in denen für die aus dem Beton herausragenden Eiseneinlagen entsprechende Öffnungen angebracht waren. Die Lücken wurden mit plastischem Werkstoff ausgegossen, um ein Eindringen des Zementbreis zu verhindern.

Der Beton wurde mit 400 kg Zement pro Kubikmeter und einem Wasser-Zement-Faktor von 0,35 zubereitet, wobei als Zuschlagstoff Flusskies Verwendung fand. Der Beton wurde mit Hilfe eines an die Blechschablone gepressten Vibrators verdichtet. Das Raumgewicht des frischen Betons betrug 2,429 kg/m³; die Festigkeit der Betonwürfel zum Zeitpunkt der Messungen ergab im Mittel 430 kg/cm². Die Säule war nicht mit Bügeln bewehrt. Die Eiseneinlagen wurden durch Blechplatten, welche entsprechend dem Fortschreiten der Betonierung immer höher gezogen wurden, in der vorgeschriebenen Lage gehalten.

Aus der Symmetrie des Versuchskörpers folgt, dass im mittleren Querschnitt Haftspannungen zwischen dem Eisen und dem Beton unmöglich sind. Dieser mittlere Querschnitt befindet sich in einer solchen Lage, als ob dort die Halbsäule durch eine starre Platte unterstützt wäre, auf der sowohl die Eisenquerschnitte als auch der Betonquerschnitt voll aufliegen. In diesem Querschnitt soll das Eisen die Kraft P_{v0} tragen, in welchem Falle der auf den Beton entfallende Kraftanteil $P_{b0} = P - P_{v0}$ ist.

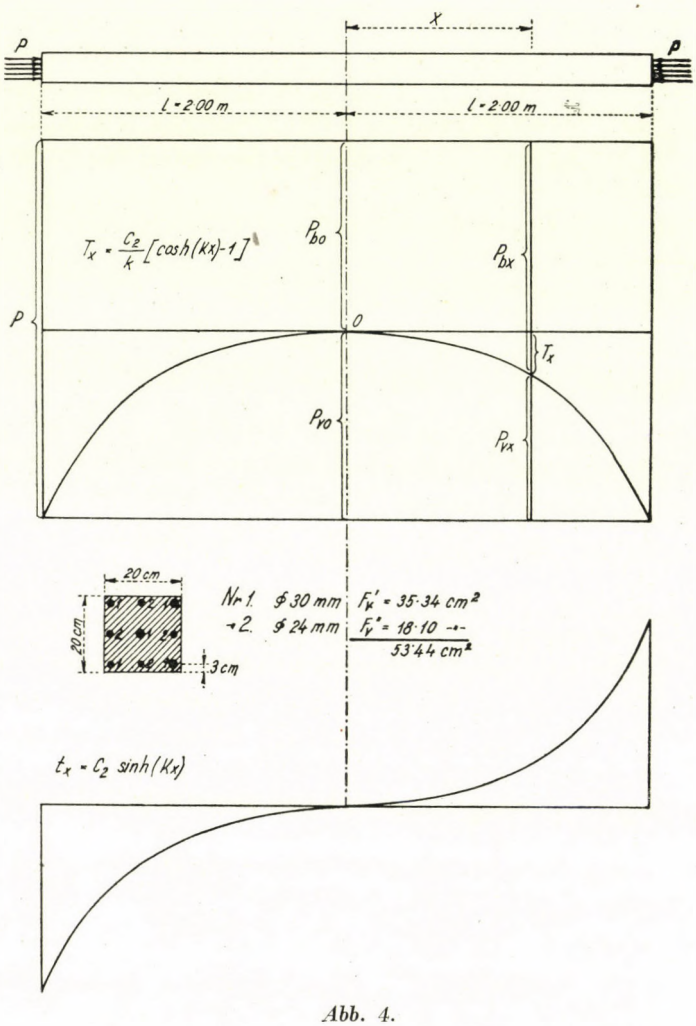


Abb. 4.

Da bei $x = 0$ die Spannung $t_0 = 0$ ist, so folgt aus der Formel (3), dass der Faktor c_1 in diesem Falle Null wird und dass folgende Gleichungen Gültigkeit besitzen

$$t_x = c_2 \cdot \sin\ h\,(kx)$$

$$T_x = \frac{c_2}{k} \cdot \cos\ h\,(kx) + c_3 \tag{5}$$

Im Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt 0 ist ferner bei $x = 0$ notwendigerweise $T_0 = 0$, deshalb wird

$$c_3 = -\frac{c_2}{k}$$

d. h.

$$T_x = \frac{c_2}{k} \cdot [\cos\ h\,(k\,x) - 1] \tag{6}$$

Diese Gleichungen enthalten jetzt nur noch die zwei unbekannten Konstanten c_2 und k. Einen Anhaltspunkt für die Schätzung des Wertes dieser Konstanten bietet die Annahme, dass in der Mitte der Säule die Spannung des Eisens und des Betons zueinander wahrscheinlich in demselben Verhältnis stehen wie die bezüglichen Elastizitätsmodule. Der Elastizitätsmodul des Betons wurde mit Hilfe eines Prismas von 20×20 cm Querschnitt und 1 m Höhe ermittelt, wobei sich ein Wert von $E_b = 327\ 000$ kg/cm² ergab. Der Annahme gemäss ist daher

$$\frac{\sigma_{e0}}{\sigma_{b0}} = \frac{E_e}{E_b} = \frac{2\ 100\ 000}{327\ 000} = 6{,}422$$

und da andererseits

$$P_{e0} = \sigma_{e0} \cdot F_{e0} = P - \sigma_{b0} \cdot F_b$$

ist, wird mit den Werten $F_{eo} = 53{,}44$ cm² und $F_b = 400 - 53{,}44 = 346{,}56$ cm²

$$\sigma_{e0} = \frac{6{,}422}{6{,}422 \cdot 53{,}44 + 346{,}56} \cdot P = 0{,}931059 \cdot 10^{-2}\ P$$

und

$$P_{e0} = \sigma_{e0} \cdot F_e = 0{,}4976\ P$$

Wird mangels einer wahrscheinlicheren Zahl — der Versuch soll ja eben zur richtigen führen — der Höchstwert der Haftspannung auf das Vierfache seines Mittelwertes geschätzt, so muss im Falle von $x = l$ ($l = 200$ *cm*)

$$t_e = 4 \cdot \frac{P_{e0}}{l} = 0{,}9952 \cdot 10^{-2} \cdot P$$

betragen. Auf diese Weise stehen zur Bestimmung der Konstanten c_2 und k die Formeln

$$0{,}9952 \cdot 10^{-2} \cdot P = c_2 \sin h\,(200\,k)$$

$$0{,}4976 \cdot P = \frac{c_2}{k}\ [\cos h\,(200\,k) - 1\,]$$

zur Verfügung.

Aus diesen Formeln ergibt sich $k = 1{,}915.10^{-2}$ und $c_2 = 4{,}3231.10^{-4}$ P; mit Hilfe dieser Konstanten wurden die in *Abb. 4* dargestellten Kurven von t_x und T_x berechnet.

Zweck des Versuches bildete die Bestimmung der richtigen Werte der vorerst nur geschätzten Konstanten. Dieser Versuch führte jedoch nicht zum Ziel. Bereits die ersten Dehnungsmessungen, in deren Verlauf die spezifische Längenänderung des Betons in der Mitte der Säule und in Abständen von *60*, *120* und *190* cm unterhalb und oberhalb der genannten Mitte gemessen wurde, haben mit Ausnahme einer einzigen Messung im allgemeinen unveränderte Ergebnisse geliefert. Im Verlaufe der langwierigen, etwa 800 Instrumentenablesungen benötigenden Messungsreihe, die unter einer Belastung von $P = 28{,}2$ t

durchgeführt wurde, variierten die gemessenen Dehnungen bei unregelmässiger Streuung zwischen den Werten $\varepsilon_{min} = 102{,}376.10^{-6}$ und $\varepsilon_{max} = 114{,}676.10^{-6}$. Der Mittelwert betrug $\varepsilon_a = 106{,}259\ 10^{-6}$ Demgegenüber schwankte an der Messstelle $x = 190$ cm der Wert der mittleren Längenänderungen um $\varepsilon_1 = 138.122\ 10^{-6}$.

Wenn man mit der mittleren Dehnung und dem Werte $E_b = 327.000$ kg/cm² rechnet, beträgt die Betonspannung $\sigma_{ba} = 34{,}45$ kg/cm². Würde der Beton die ganze Last allein tragen, so wäre die Betonspannung

$$\sigma = \frac{28\,200}{346{,}56} = 81{,}37 \text{ kg/cm}^2$$

Es steht also ausser Zweifel, dass ein beträchtlicher Teil der Last durch die Haftung auf die Eiseneinlagen übertragen wurde. Der Kraftanteil des Eisens ist nach dieser Messung

$$P_e = \frac{(81{,}37 - 34{,}75) \cdot 346{,}56}{28\,200} \cdot P = 0{,}5705 \cdot P$$

und dieser Wert stellt sich höher als der im Verlaufe der theoretischen Erwägungen geschätzte Wert von $P_{e0} = 0{,}4976 \cdot P$.

Die Messungen wurden überprüft und es wurde in einer jeden Zweifel ausschliessenden Weise festgestellt, dass die Eiseneinlagen unmittelbar von der Presse keinem Druck ausgesetzt waren.

Nach diesen sonderbar erscheinenden Messungsergebnissen wurde die Versuchssäule umgestaltet. Von den Enden der Säule wurden die eisernen Platten abmontiert und an die aus dem Beton herausragenden Eisenenden wurden entsprechend starke neue eiserne Platten angeschweisst. Der zwischen diesen Platten ausgeübte Druck belastete daher unmittelbar nur die Eiseneinlagen. An dem so vorbereiteten Körper wurden Längenänderungsmessungen in der Mitte und in einer Entfernung von *20* cm vom Säulenende ausgeführt. Während jedoch an der ursprünglichen Säule bei den Dehnungsmessungen die Tensometer in jedem Falle auf die Mittellinie der Mantelflächen der Säule montiert waren, wurden im Verlaufe dieser Messungsserie die Tensometer auch entlang der Linien befestigt, welche zwischen den Eiseneinlagen 1 und 2 der *Abb. 4* verlaufen.

Auch die an der umgestalteten Säule durchgeführten Messungen endeten mit dem Ergebnis, dass an der Aussenfläche des Betons die Dehnungen an allen Stellen einander gleich sind. Die Formänderungen des Betons wurden auch bei diesem Versuch unter der Last $P = 28{,}2$ t gemessen und die Betonverkürzungen schwankten zwischen den Grenzwerten $E_{min} = 90{,}995.10^{-6}$ und $\varepsilon_{max} = 107{,}143.10^{-6}$. Der Mittelwert, welcher von dem an der ursprüng-

lichen Säule festgestellten Wert von $\varepsilon_a = 106{,}259.10^{-6}$ nur um *3,8%* abweicht, betrug $\varepsilon_a = 102{,}270.10^{-6}$; die Abweichung übersteigt also nicht die Fehlergrenze der Messungen.

Die mit der hohen Säule durchgeführten Versuche erwecken daher den Eindruck, als ob sich auch bei Säulen mit Eiseneinlagen von grossem Durchmesser und bei einer den Wert von *600* kg/cm² nicht übersteigenden Eisenspannung die Last bereits auf einer ganz kurzen Strecke auf den Beton und das Eisen verteilte und als ob die Verteilung unabhängig davon wäre, ob der Beton oder das Eisen das unmittelbar belastete Element ist. Der Versuch bestätigt die aufgestellte Theorie scheinbar nicht. Es sei jedoch bemerkt, dass dieses scheinbare Ergebnis auch mit auf anderen Wegen gewonnenen Messergebnissen im Widerspruch steht; es kann daher mit Bestimmtheit angenommen werden, dass derartig grosse, wie die im Verlaufe der Versuche angewendeten Kräfte auf einer Mantelfläche von *10—20* cm Länge weder vom Eisen auf den Beton, noch vom Beton auf das Eisen übertragen werden können. In gewisser Hinsicht bestätigt die Theorie auch den Versuch. Die Theorie setzt nämlich voraus, dass die Schubbeanspruchungen den ursprünglich ebenen Betonquerschnitt (in *Abb. 3* den Querschnitt *acb)* verzerren und beim Eisen selbst die Kontinuität der Fläche unterbrochen ist. (Die Linie $a'c'b'$ in *Abb. 3)*. Nach einer solchen Verzerrung der Betonquerschnitte erscheint es fast selbstverständlich, dass sich die Formänderungen an den freien Flächen auf den Mittelwert ausgleichen.

Der Ausgleich von Formänderungen an freien Oberflächen lässt sich auch in anderen Fällen beobachten. Es mag die Folge einer derartigen Wirkung sein, dass sich auf der Oberfläche eines auf Druck oder Zug beanspruchten homogenen Körpers die senkrecht zur Richtung der Last gemessene Formänderung (die Kontraktion) zu einem Durchschnittswert ausgleicht. Auf diesen Umstand ist es auch zurückzuführen, dass die Kontraktion nicht mittels Spannungen ausgedrückt werden kann und dass man auch in Fällen, wo das Ergebnis der Kontraktionsspannungen ein Bruch ist (z. B. beim Beton), von dem Bruch kein klares, durch die Spannungen begründetes Bild erhält.

Die Frage, wie sich die Kräfte entlang der Mantelfläche des einbetonierten Eisens verteilen, wurde also durch die Versuche mit der hohen Säule nicht geklärt.

3. Versuch mit einer niedrigen Säule

Nach den eigenartigen Ergebnissen, mit denen die Messungen an der hohen Säule endeten, wurde für die weiteren Versuche eine Säule von nur 1 m Höhe hergestellt.

Abmessungen und Querschnitt der Säule sind aus *Abb. 5* ersichtlich. Der Versuchskörper war, wie die hohe Säule, auch in diesem Fall ohne Bügel

und nur mit Längseisen bewehrt. Die vier Längseisen waren nicht in den Ecken der Säule, sondern in der Mitte der gleich grossen Seitenflächen ohne Betondeckung angeordnet. An der unteren Fläche der Säule endeten die Eisen an der Betongrenzfläche, während sie oben einige cm aus dem Beton herausragten.

Während der Belastung befindet sich die untere Grenzfläche des Prismas im wesentlichen in der gleichen Lage und in demselben Spannungszustand, in welchem sich der mittlere Querschnitt der hohen Säule befunden hatte; der Probekörper entspricht — mit der vorhergehend besprochenen hohen Säule verglichen — einer symmetrischen Säule von 2 m Höhe.

Der Beton der Säule wurde mit *400* kg Portlandzement pro fertigem Kubikmeter hergestellt. Mit dem eisenbewehrten Prisma wurde gleichzeitig auch ein unbewehrtes Prisma von gleichen Abmessungen angefertigt. Die Würfelfestigkeit des Betons betrug zur Zeit der Versuche ungefähr *430* kg/cm^2. Nach dem Betonieren waren die Eiseneinlagen des bewehrten Prismas mit einer dünnen, stellenweise jedoch auch 2 mm starken Zementschicht entlang jener Linie bedeckt, wo sich Eisen und Schalung berührten. Durch vorsichtiges Abmeisseln der Zementschicht wurden die Eiseneinlagen entlang einer Linie freigelegt und an diesen Stellen die Tensometer unmittelbar an die Eiseneinlagen befestigt. Die Freilegung der Eiseneinlagen gelang vorzüglich, so dass die Eisen auch nach dieser Arbeit fest im Beton lagen.

Im Verlaufe der an der eisenbewehrten Säule vorgenommenen Messungen wurden am oberen Ende des Versuchskörpers nur die aus dem Körper herausragenden Eiseneinlagen unmittelbar belastet. Die Last wurde gleichförmig auf die vier Eiseneinlagen verteilt. Dies geschah durch die Zwischenschaltung von Trägern, die auf je zwei Stützen gelagert waren. Leider lagen jedoch trotz grösster Sorgfalt die lastverteilenden Eisenelemente nicht überall vollkommen auf den Eisenquerschnitten auf. Aus diesem Grund wurden an den Endquerschnitten der Eisen Lager ausgehöhlt, in welche je eine Kugel eines Kugellagers kam, und so wurde am oberen Ende der Eiseneinlagen die zentrische Kraftübertragung gesichert. An dem unteren Ende der Eiseneinlagen fehlte eine derartige Zentrierung der Last, und es ist daher trotz aller Vorsichtsmassregeln leicht möglich, dass die Eiseneinlagen an dieser Stelle schon von vornherein etwas exzentrisch belastet wurden.

Die Formänderungen wurden an Querschnitten gemessen, die von den Endflächen des Prismas in Abständen von *10*, *30*, *50*, *70* und *90* cm lagen. Das Messergebnis stellt den Mittelwert von vier Messungen dar, welche gleichzeitig an den vier Seiten der Querschnitte vorgenommen wurden. Dehnungsmessungen wurden sowohl am Beton als an den Eiseneinlagen vorgenommen. Mittels Presse wurde eine Kraft von *13* t ausgeübt; die Messungen der Formänderung bezogen sich auf die Belastungsstufe von *1* t bis *13* t. Im Verlaufe der Messung änderte sich die Kraft einer Eiseneinlage um *3* t; die grösste berechnete Spannung des Eisens war 3000/7,07 = 424 kg/cm^2.

Die Verkürzung des Betons wurde an zwei Stellen gemessen. Die eine Stelle befand sich in einer Entfernung von 1,5 cm von der Achse der Eiseneinlage. (In *Abb. 5* die mit *I.* bezeichnete Messstellen.) Die andere Messstelle war 5 cm von der Kante der Säule entfernt (in *Abb. 5b* die mit *II.* bezeichneten Messstellen).

Das Resultat dieser Messungen ergab, dass sich die Betonlängenänderungen, in Übereinstimmung mit dem an der hohen Säule gefundenen Messergebnis, an den Aussenseiten des Prismas irgendwie ausgleichen. Die in den verschiedenen Querschnitten des Prismas gemessenen Werte weisen nämlich eine unregelmässige Streuung auf.

Auf Grund der Ergebnisse der Messungen, die am unbewehrten Prisma vorgenommen wurden, beträgt der Elastizitätsmodul des Betons

$$E_b = \frac{12\,000}{400 \cdot 7{,}272} \cdot 10^{-5} = 412\,541 \text{ kg/cm}^2$$

Wird mit diesem Wert, sowie mit der am bewehrten Prisma gemessenen mittleren Verkürzung von $\varepsilon_b = 5{,}199.10^{-5}$ gerechnet, so war der Beton dieses Prismas anscheinend in allen seinen Querschnitten mit der Spannung von

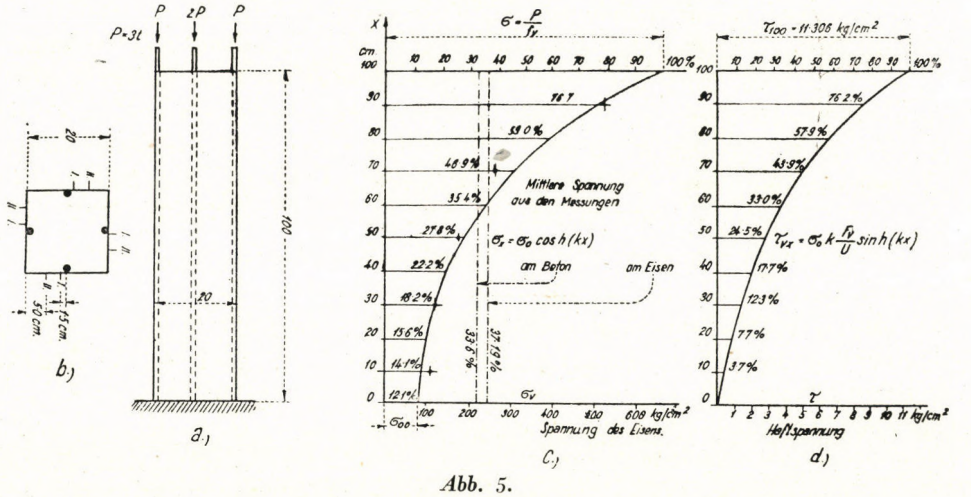


Abb. 5.

$\sigma_b = 4{,}12541 \cdot 5{,}199 = 21{,}45$ kg/cm² belastet. Auf den Betonquerschnitt $F_b = 20 \cdot 20 - 4 \cdot 7{,}07 = 372$ cm² entfiel von der Kraft von *12* t der Anteil $P_b = 7979$ kg. Die mittlere Spannung der Eiseneinlagen betrug demnach $(12000 - 7979) : 28{,}28 = 142$ kg/cm².

Die Dehnungsmessungen an den freigelegten Oberflächen der Eiseneinlagen haben — wie dies zu erwarten war — eine ständige Änderung der Eisenspannung bestätigt. Die Messungen an den Eiseneinlagen wurden dreimal

durchgeführt. Vor der letzten Messung wurden die Kugelgelenke der Presse auseinandergenommen, gereinigt und geölt, da die an den vier Eisen gemessenen Werte stellenweise stark voneinander abwichen und der Fehler möglicherweise darauf zurückzuführen war, dass die Kugelgelenke der Presse bei der geringen Belastung nicht ganz einwandfrei funktionierten.

Aus den Messresultaten wurden mit dem Elastizitätsmodul $E_e = 2\,100\,000$ kg/cm² Spannungen berechnet, welche in *Abb. 5c* mit Kreuzen und Punkten bezeichnet sind. Es ist auffällig, dass in der Nähe des Endes, wo die Last nur die Eiseneinlagen traf, die gemessene Spannung den aus der Belastung berechneten Wert von *424* kg/cm² übersteigt. Dieser Widerspruch lässt sich zum Teil aus dem Umstand erklären, dass am unteren Ende der Eiseneinlagen die gleichförmige Kraftübertragung nicht vollkommen gesichert war und dass daher die Eiseneinlagen schon von vornherein mit einer gewissen Exzentrizität belastet waren. Die Endquerschnitte der Eiseneinlagen waren nämlich

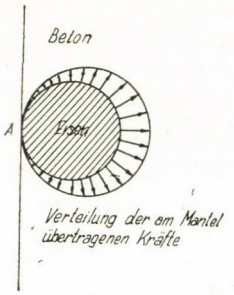


Abb. 6

in der Tat nicht vollkommen eben, es stand aber zu erwarten, dass der Zementbrei die Lücken ausfüllen und eine gleichförmige Kraftübertragung sichern würde. Eine derartige Fehlermöglichkeit scheint daher unwahrscheinlich oder zumindest von untergeordneter Bedeutung zu sein.

Wahrscheinlicher ist jedoch, dass der zwischen der gemessenen und der aus dem zentrischen Druck berechneten Eisenspannung bestehende Unterschied von der exzentrischen Kraftübertragung herrührt, deren Ursache in der ungleichförmigen Verteilung der Haftkräfte auf der Eisenoberfläche zu suchen ist. An der freigelegten Eisenoberfläche (im Punkte *A* der *Abb. 6)* wird zweifellos keine Kraft vom Eisen auf den Beton übertragen und schon aus diesem Grunde allein ist es wahrscheinlich, dass die entlang der Eisenoberfläche übertragenen Kräfte sich längs des Eisenquerschnittes auf die in *Abb. 6* dargestellte Weise verteilen. Trifft dies zu, dann ist die Exzentrizität der Belastungskraft konstant und die Spannung an der Stelle der Messung beträgt

$$\sigma_{e1} = T_x \cdot \left[\frac{1}{F_e} + \frac{d}{K}\right] = \alpha \cdot \frac{T_x}{F_e} = \alpha \cdot \sigma_e$$

In dieser Formel bedeuten T_x die am Querschnitt angreifende Druckkraft, d ihre Exzentrizität, F_e und K die Fläche und den Widerstandsmodul des Eisenquerschnittes. Sind alle Werte innerhalb der Klammern konstant, d. h. von der Stelle des Querschnittes unabhängig, dann ist auch das Verhältnis der gemessenen Eisenspannungen σ_{e_1} und der theoretisch angenommenen Eisenspannungen σ_e konstant. Die Werte der Theorie können daher durch die gemessenen Werte kontrolliert werden.

Die theoretische Formel der Spannungsänderung kann aus den Formeln (5) und (6) abgeleitet werden. Mit Rücksicht auf die Formel $\sigma_x = T_x/F_e$ und auf den an der Stelle $x = 0$ noch unbekannten Grenzwert σ_0 ist

$$\sigma_x = \sigma_o \cdot \cos\ h\,(k\,x) \tag{7}$$

Die zwei unbekannten Konstanten dieser Gleichung können aus den Messergebnissen durch folgende Berechnung bestimmt werden. Stimmt Gleichung (7), dann ist der Fehler des gemessenen Wertes σ_x

$$h = \sigma_o \cdot \cos\ h\,(k\,x) - \sigma_x$$

und die Abweichungen zwischen den gemessenen und mit Hilfe der Formel berechneten Werten stellen sich für jenen Fall am niedrigsten, wo die Konstanten σ_0 und k so gewählt werden, dass der Wert der Funktion

$$\omega = \Sigma h^2 = \Sigma[\sigma_o \cdot \cos\ h\,(k\,x) - \sigma_x]^2$$

— die Summe der Fehlerquadrate — ihren Kleinstwert aufweist. Für die gesuchten Konstanten soll also die Funktion ω einen Grenzwert besitzen und dies trifft zu, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\delta\,\omega}{\delta\,\sigma_o} = 2\ \Sigma\ [\sigma_o \cdot \cos\ h\,(k\,x) - \sigma_x] \cdot \cos\ h\,(k\,x) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\delta\,\omega}{\delta\,k} = 2\,\Sigma\,[\sigma_o\ \cos\ h\,(k\,x) - \sigma_x] \cdot \sigma_o \cdot \sin\ h\,(k\,x) = 0. \tag{9}$$

An die Stelle des ausserhalb der Klammern stehenden Wertes $\cos\ h\,(kx)$ der Gleichung (8) kann der Wert σ_x/σ_o der Gleichung (7) eingesetzt werden, so dass die zu befriedigende Bedingung

$$\Sigma\ \sigma_x \cdot \cos\ h\,(k\,x) - \frac{1}{\sigma_o} \cdot \Sigma\ \sigma_x^2 = 0$$

$$\sigma_o = \frac{\Sigma\ \sigma_x^2}{\Sigma\ \sigma_x \cdot \cos\ h\,(k\,x)} \tag{10}$$

ist. Andererseits ergibt sich aus Gleichung (9)

$$2\ \sigma_o \cdot [\sigma_o\,\Sigma\,x \cdot \cos\ h\,(k\,x) \cdot \sin\ h\,(k\,x) - \Sigma\,x \cdot \sigma_x \cdot \sin\ h\,(k\,x)\,] = 0$$

$$\sigma_o = \frac{\Sigma\ x\,\sigma_x\ \sin\ h\,(k\,x)}{\Sigma\ x\ \cos\ h\,(k\,x) \cdot \sin\ h\,(k\,x)} \tag{11}$$

Aus der Gegenüberstellung der Gleichungen (10) und (11) folgt die Gleichung zur Bestimmung des Wertes k:

$$\equiv \Sigma \sigma^2_x \cdot \Sigma\, x \cdot \cos h\,(k_x) \cdot \sin h\,(k \cdot x) - \Sigma\, \sigma_x \cdot \cos h(k_x) \cdot \Sigma\, x\, \sigma_x \cdot \sin h(k_x) = 0$$

Diese Gleichung lässt sich nur durch Probieren lösen. Angenommen, dass $\sigma_0 = 100$ kg/cm² beträgt, und vorausgesetzt, dass der bei $x = 90$ cm gemessene Wert $\sigma = 532$ kg/cm² fehlerfrei ist, dann folgt aus Gleichung (7)

$$\cos h\,(90\,k) = \frac{523}{100} = 5{,}23$$

$$90\,k = 2{,}338 \qquad k = 0{,}02598$$

Die Funktion F hat bei $k = 0{,}026$ den Wert $F_1 = -\,6{,}691.271$; ist jedoch $k = 0{,}028$ dann ist $F_2 = +\,9{,}260.674$ und dementsprechend der recht genau geschätzte Wert von k:

$$k = 0{,}026 + 0{,}02\,\frac{6{,}691 \cdot 271}{15 \cdot 951} = 0{,}026840$$

Tabelle I.

x	σ_x	σ^2_x	$k \cdot x$	$ch\,(k \cdot x)$	$\sigma_x \cdot ch\,(kx)$	$\frac{\sigma'_x}{\sigma_0\, ch(kx)}$	Fehler	%
0			0	1		89·4		12.1
10	109	11 881	0,2684	1,036127	112.938	92,7	+16,3 14,5%	14,1
20			0,5368	1,147683		102,6		15,6
30	123	15 129	0,8052	1,341892	165,053	120,0	+ 3,0 2,5%	18,2
40			1,0736	1,633060		146,0		22,2
50	170	28 900	1,3420	2,044006	347,481	182,8	—12,8 7,1%	27,8
60			1,6104	2,601349		232,6		35,4
70	274	75 076	1,8788	3,449849	945,258	308,5	—34,5 11,2%	46,9
80			2,1472	4,337988		387,9		59,0
90	523	273 529	2,4156	5,645122	2952,399	504,8	+18,2 3,6%	76,7
100			2,6840	7,355920		657,8		100
Σ		404 515			4523,129			

Zähler und Nenner der Gleichung (10) sind in der Tabelle I. berechnet und mit diesen Werten ergibt sich

$$\sigma_o = \frac{404 \cdot 515}{4523{,}129} = 89{,}43 \text{ kg/cm}^2$$

In der Tabelle sind sodann einerseits die theoretischen Eisenspannungen und andererseits, in der vorletzten Spalte, die Fehler, d. h. in anderen Worten,

die Abweichungen der gemessenen von den theoretischen Werten zusammengestellt. Die Übereinstimmung ist zufriedenstellend; der grösste prozentmässige Fehler beträgt 14,5 % und der Mittelwert der Fehler nur 7,78 %. Die laut dem Ergebnis der theoretischen Berechnung gezogene Linie ist auch in *Abb. 5c* dargestellt.

In der letzten Spalte der Tabelle I. ist die Änderung der Eisenspannungen in Prozenten ausgedrückt, wenn vorausgesetzt wird, dass die aus der unmittelbaren Belastung des Eisens berechnete Spannung 100% beträgt. Demgemäss wird 87,9 % des durch die Haftkräfte auf die Eiseneinlagen längs ihrer Oberfläche ausgeübten Druckes auf den Beton übertragen und nur 12,1 % der ausgeübten Kraft belasten die Eisen in ihren Endquerschnitten. Diese Zahlen weichen stark von den in der Ingenieurspraxis in Anwendung stehenden ab. Den Zahlen der Ingenieurspraxis entsprechend müssten nämlich, wenn $n = E_e/E_b = 2\,100\,000/412\,541 = 5{,}09$ ist, *69* % der ausgeübten Kraft vom Beton und *31* % vom Eisen getragen werden. Aus dieser Abweichung darf man jedoch vorläufig weder für die Ingenieurspraxis noch für den hier beschriebenen Versuch Folgerungen ableiten, da Fragen, wie das Ausmass der Exzentrizität der Haftkraft, welche längs des Eisenmantels wirkt, sowie die eventuelle Änderung dieser Exzentrizität und ferner etwaige mit dem Schub zusammenhängende Formänderungen der Eiseneinlagen bisher noch ungeklärt sind.

Weiters wurden auch die an den Mantelflächen der Eiseneinlagen übertragenen Haftspannungen (Schubspannungen) berechnet. Die Berechnung beruht auf der Annahme, dass die Spannungen entlang der Mantelfläche eines Eisenquerschnittes gleichförmig verteilt sind. Diese Annahme besteht jedoch — wie bereits in Verbindung mit *Abb. 6* bemerkt — nicht zu Recht. Die Schubspannungen wurden aus den Spannungen σ_x, wie folgt, berechnet.

Die Eisenbeanspruchung ist im Querschnitt x der Eiseneinlage

$$T_e = \sigma_x \cdot F_x = \sigma_0 \cdot F_e \cdot \cos\, h\,(k\,x)$$

Der auf die Längeneinheit entfallende Wert der Haftkraft beträgt

$$t_{ex} = \frac{dT_{ex}}{dx} = \sigma_0\, F_e \cdot k \cdot \sin\, h\,(k\,x)$$

und wenn U der Umfang der Eiseneinlagen ist, wird

$$\tau_{ex} = \frac{t_{ex}}{U} = \sigma_0\, k\, \frac{F_e}{U} \cdot \sin\, h\,(k\,x)\,.$$

Bei Eiseneinlagen von *30* mm Durchmesser ist $F_e = 7{,}07$ cm² und $U = 6{,}28$ cm; wird weiters mit dem Werte von $k = 0{,}02684$ cm^{-1} und mit der Kraft

$\sigma_0 F_e = 0{,}121 \cdot 3000 = 363$ kg gerechnet, welche aus der tatsächlich ausgeübten Kraft abgeleitet wurde, dann ist

$$\sigma_0 \cdot k \cdot \frac{F_e}{U} = \frac{363 \cdot 0{,}02\,684}{6{,}28} = 1{,}5514.$$

Die Änderung der Schubspannungen ist in *Abb. 5c* dargestellt.

Die Beurteilung der Messungsergebnisse wird auch durch folgende Berechnung präzisiert. Wird die Fläche der *Abb. 5c* in ein gleich grosses Rechteck mit einer Basis von 100 cm umgestaltet, dann ist die Höhe dieses Rechteckes ein Massstab für den Durchschnittswert der Haftkraft, welche entlang der einbetonierten Eisenoberflächen wirkt. Aus den Messungen an bewehrten und unbewehrten Prismen ergab sich eine mittlere Eisenspannung von 142 kg/cm² (siehe Seite 315) und, mit der 424 kg/cm² hohen Belastung verglichen, ist dies 33,6 % des letzteres Wertes. Wird die mittlere Eisenspannung aus der Abbildung durch Planimetrieren, d. h. aus den gemessenen Spannungen berechnet, so erhält man einen Wert von 37,19 %.

Zusammenfassend kann aus den Versuchen mit der niedrigen Säule gefolgert werden, dass vorläufig folgende Feststellungen als wahrscheinlich zu betrachten sind:

1. Aus den an der Betonoberfläche von bewehrten und unbewehrten Säulen vorgenommenen Längenänderungsmessungen kann nur dann auf die mittlere Beanspruchung der Eiseneinlagen der bewehrten Säule gefolgert werden, wenn die Messungen in verschiedenen Querschnitten und an verschiedenen Stellen der Querschnitte durchgeführt werden.

2. Die Spannung in den Querschnitten der Eiseneinlage ist nur dann gleichförmig verteilt, wenn die Eiseneinlage in der Achse des Betonprismas liegt.

3. In Säulen unter Druck kann die Beanspruchung der Eiseneinlagen nach der vorgeschlagenen Theorie berechnet werden, solange die Eiseneinlagen fest im Beton sitzen.

4. Ausziehversuche

Für weitere Untersuchungen über die Änderung der Haftung zwischen Beton und Eisen wurden Betonprobekörper von *15×15* cm Querschnitt und *10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60* und *70* cm Länge angefertigt, in deren Längsachse ein Stahldraht von hoher Festigkeit (patentierter Stahl) eingebettet war. Die Skizze des Versuchskörpers ist aus *Abb. 9* ersichtlich.

Der verwendete Beton wurde in einer Festigkeit hergestellt, die der bei der Vorspannung auftretenden Beanspruchung entsprach. Der aus Donaukies bestehende Zuschlagstoff wies folgende Korngrössenverteilung auf:

Körner	von	0,0— 1,5	mm	Korngrösse	....	3,9	Gewichtsprozent
«	«	0,5— 1,0	«	«	....	3,2	«
«	«	1 — 3	«	«	....	12,9	«
«	«	3 — 5	«	«	....	13,0	«
«	«	5 —10	«	«	....	35,0	«
«	«	0,0—15	«	«	....	32,0	«
						100,0	Gewichtsprozent

Pro Kubikmeter fertigen Betons gelangten 450 kg hochwertiger Portlandzement der Tatabányaer Fabrik zur Verwendung. Der mit Vibration verdichtete Beton war mit einem Wasser-Zement-Faktor von *0,35* zubereitet. Das Raumgewicht des Betons belief sich im Durchschnitt bloss auf *2,393* kg/m³ seine an 14 Würfeln festgestellte Festigkeit betrug zum Zeitpunkt der Versuche *534* kg/cm². Die Würfelfestigkeit schwankte übrigens zwischen *508* kg/cm² und *570* kg/cm².

Die Versuche verfolgten zwei Ziele. Erstens sollte durch Versuche festgestellt werden, auf welche Länge Stahldrähte mit verschiedenen Durchmessern oder auf verschiedene Art und Weise aufgerauhte bzw. gewellte Drähte einbetoniert werden müssen, damit der Draht nicht aus dem Beton herausgezogen werden kann, sondern ohne zu gleiten reisst. Die andere Frage war, ob die vorgeschlagene Theorie zur Berechnung von Kräften geeignet ist, welche von vorgespannten Drähten auf den Beton übertragen werden.

Die Bewegungen des Drahtes wurden im Laufe der Ausziehversuche an beiden Enden des Prismas gemessen. Der relative Festpunkt der Bewegungen war das von der Last entfernt liegende freie Ende des Betonprismas, das keinen Formänderungen unterworfen war. An dieses Ende wurde ein eiserner Rahmen befestigt *(Abb. 7)* und auf diesem zwei Messgeräte angebracht, mit deren Hilfe die relativen Bewegungen der Eisenquerschnitte *a* und *b (Abb. 9)* gemessen wurden. Die Teilstriche der Messgeräte waren zur Registrierung von Bewegungen von 1/100 mm geeicht. Der bewegliche Stift des einen Messgerätes stützte sich bei *b* unmittelbar auf die ebene Fläche des Drahtquerschnittes. Die Bewegung des Querschnittes *a* wurde durch das starre Gestänge *a—a—a′—a′ (Abb. 8)* auf den Punkt *c* übertragen, wo es mit dem beweglichen Stift des Messgeräts in Berührung kam. Das starre Gestänge wurde durch die Feder *r* an den Punkt *B* des Drahtes gepresst, dessen Bewegung gemessen wurde.

Zu den Vorversuchen dienten Körper mit gewellten Stahldrähten von *2,5* mm Durchmesser. Vor ihrer Verwendung wurden die Drähte nicht gespannt und auch während der Einbetonierung nur in einem solchen Ausmass, als nötig war, um ihnen im Beton eine gerade Lage zu sichern. Der Draht konnte aus dem Körper von *10* cm Länge mit einer Kraft von *789* kg herausgezogen werden. Bei den übrigen Probekörpern riss der Stahl, bevor es gelang, ihn ganz herauszuzichen. Die Zerreisskraft schwankte zwischen *765* kg und

828 kg. An den mit *b* bezeichneten Enden der Probekörper von *15*, *20*, *25* und *30* cm Länge trat noch ein Gleiten des Stahles ein. Das Gleiten über die ganze Länge des Drahtes machte sich bei dem Körper von *10* cm Länge bereits bei

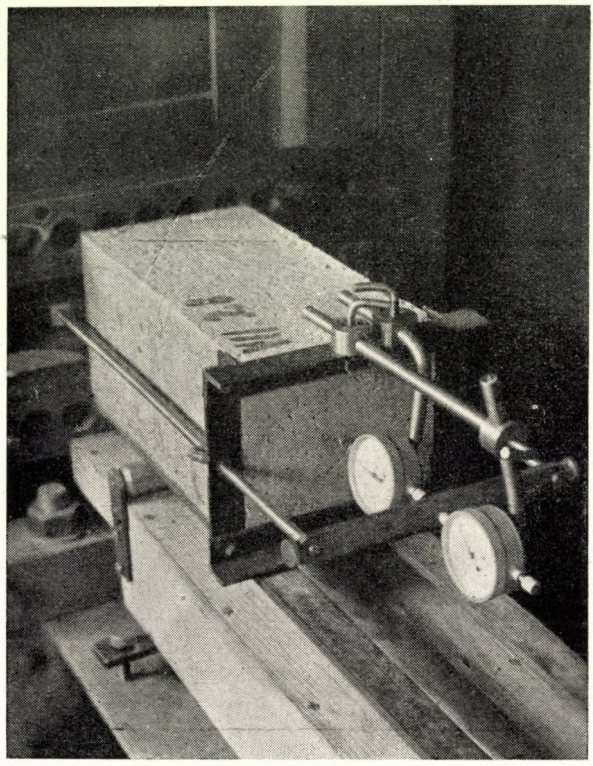


Abb. 7.

einer Zugkraft von *179* kg bemerkbar und beim Körper von *30* cm Länge begann der Draht in seiner ganzen Länge bei 543 kg zu gleiten. Bei den Probe-

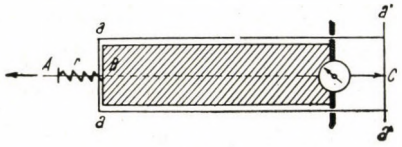


Abb. 8.

körpern über *40* cm Länge wurde das Gleiten des Drahtes bei *b* nicht mehr beobachtet.

Andere an diesen Probekörpern ausgeführte Messungen dienten zur Kontrolle der Apparate und zur Sammlung von Erfahrungen in der Mess-

technik; sie waren unsystematisch und sind für Auswertungen ungeeignet.

Dagegen wurden an Probekörpern mit glatten und gewellten Stahleinlagen von 5 mm Durchmesser systematische Messungen vorgenommen.

a) Die Drähte

Sowohl die glatten als auch die gewellten Drähte von 5 mm Durchmesser wurden in ihrem natürlichen, nicht vorgespannten Zustande, weiters nach einer 24stündigen Spannung von 100 kg/mm² Zugversuchen unterworfen.

Bei den vorgespannten gewellten Drähten und bei den glatten Drähten trat in beiden Fällen die Proportionalitätsgrenze bei einer Belastung von *40* kg/mm² in Erscheinung. Die Grenze der bleibenden Dehnung von $2^0/_{00}$ (die Fliessgrenze) ergab sich bei dem glatten und in ihrem natürlichen Zustand geprüften Draht bei *107,5* kg/mm², und dieser Wert erhöhte sich unter der Wirkung der Vorspannung auf *115,0* kg/mm². Bei gewelltem Draht mit einer Vorspannung von *100* kg/mm² war die Grenze der $2^0/_{00}$igen bleibenden Dehnung *112* kg/mm². Die Zerreissfestigkeit der Drähte schwankte zwischen *140,3* kg/mm² und *147,5* kg/mm². Der Elastizitätsmodul der glatten Drähte betrug *1 810 000* kg/cm², während der des gewellten und vorgespannten Drahtes einen etwas kleineren Wert zeigte *(1 796 000* kg/cm²). Der vorgespannte gewellte Draht erwies sich hinsichtlich seiner Festigkeitseigenschaften dem glatten Draht gleichwertig.

Es muss jedoch bemerkt werden, dass im Laufe der Versuche die Messlänge nur *16* cm betrug und dass auf diese Länge höchstens *2* Wellen Platz fanden. Aus diesem Grunde wurde mit dem gewellten Draht auf einer Messlänge von *8* m eine weitere Messung auf dem Spanntisch ausgeführt. Dieser Versuch zeigte, dass der mit *2,00* t (101,86 kg/mm²) ständig belastete Draht stark kriecht. Der Draht verlor nämlich bei kaum messbaren Längenänderungen einen Teil seiner Spannung und war im Laufe der Nachspannung grösseren Längenänderungen unterworfen. Im Verlaufe von *24* Stunden näherte sich die Summe der aus der Nachspannung herrührenden Längenänderungen *1* % der Messlänge.

Die Summe der im Laufe der Nachspannungen wirkenden Kräfte betrug *190* kg; der gewellte Draht, welcher ursprünglich mit *10,186* kg/cm² gespannt war, verlor also im Verlauf von *24* Stunden ungefähr *190/0,196 = 1,000* kg/cm² seiner Spannung. Nahezu *50%* dieses Spannungsverlustes traten bereits im Verlaufe der ersten Stunde ein.

b) Grobe Auswertung der Ausziehversuche

A) Bei den Probekörpern mit glattem Stahldraht liess sich die Last nur solange steigern, bis die Stahleinlage an ihrem Ende *b (Abb. 9)* zu gleiten begann. Diese Last soll mit P_1 bezeichnet werden. Sie meldete sich in allen Fällen scharf sowohl durch das plötzliche Sinken der ausgeübten Kraft, als auch durch das Ansprechen des auf dem Stahlende aufliegenden Messgeräts

bei *b*. Bei weiterer Kraftentfaltung konnte der Draht aus den Betonprismen vollkommen herausgezogen werden. Im Laufe des Gleitens fiel die Kraft langsam auf den Wert P_2 zurück, der ausreichte, um den Draht zu Bewegungen von mehreren cm zu zwingen.

Tabelle II.

h cm	P_1 kg	τ_1 kg/cm²	P_2 kg	τ_3 kg/cm²
10	88	5,60	—	—
15	104	4,42	83	3,53
20	171	5,45	76	2,42
25	318	8,10	141	3,00
30	322	6,85	143	3,04
35	304	5,53	145	2,64
40	336	5,35	143	2,27
45	360	5,10	168	2,48
50	312	3,98	136	1,74
55	432	5,01	204	2,36
60	414	4,40	184	1,95
70	465	4,24	210	1,92

Die Messergebnisse sind in der Tabelle II. zusammengefasst. In der Tabelle bezeichnet $\tau = P/U \cdot h$ die mittlere Gleitspannung, wo $U = 1{,}57$ cm den Umfang des Stahls und h seine einbetonierte Länge bedeutet.

Nach den Ergebnissen dieses Versuches zu urteilen scheint es, dass sich ein glatter und gerade verlaufender Draht von 5 mm Durchmesser aus einem Betonkörper von grosser Länge herausziehen lässt, wenn die Würfelfestigkeit des Betons *530* kg/cm² nicht übersteigt. Ein Gleiten scheint nämlich schon bei einer mittleren Gleitspannung von 4 kg/cm² im Bereich der Möglichkeit zu liegen, und mit diesem Wert gerechnet ist ein Betonkörper von der Länge

$$h = 140 \cdot 19{,}63/4 \cdot 1{,}57 = 437 \text{ cm}$$

erforderlich, damit ein Draht von *140* kg/mm² Festigkeit im Beton nicht gleitet, sondern reisst. Eine mittlere Gleitspannung von *4* kg/cm² ist wahrscheinlich übertrieben hoch ; diese mittlere Spannung wird wahrscheinlich mit der einbetonierten Länge des Stahles sinken. Mangels einer genaueren Theorie der Verteilung der Gleitspannungen ist jedoch eine zutreffendere Folgerung unmöglich.

B) Mit gewelltem Stahldraht wurden zwei Gruppen von Probekörpern hergestellt. Der gewellte Draht der einen Gruppe wurde vor dem Einbetonieren einmal mit einer Spannung von *10 000* kg/cm² belastet und dann während des Einbetonierens selber nur in einem Ausmass, als erforderlich war, damit der Draht in gerader Linie in der Achse des Betonprismas verlaufe. Der gewellte Draht der anderen Gruppe wurde mit der Vorspannung von *10 000* kg/cm² einbetoniert und die Spannung des Drahtes gelöst, als der

Beton 7 Tage alt war. Die Probekörper der zweiten Gruppe gelangten also in vorgespanntem Zustand zur Ausziehuntersuchung.

Der Augenblick, in dem der Draht in seiner ganzen Länge zu gleiten begann, meldete sich bei den Probekörpern beider Gruppen deutlich durch einen geringen Rückfall der Belastung und durch das Ansprechen des Messgeräts am Ende *b* des Stahles. Die Last konnte jedoch in jedem Falle noch erheblich gesteigert werden, nachdem das Gleiten des Stahles in seiner ganzen Länge beobachtet wurde. Das Gleiten der Drähte nahm keinen gleichförmigen Verlauf; nach einer gewissen Steigerung der Spannung begannen die Drähte nämlich plötzlich ein kurzes Stück in ihrer ganzen Länge zu gleiten, wonach sie wieder eine Zeitlang weiterbelastet werden konnten, ohne dass sich ihre mit *b* bezeichneten Enden bewegten. Bei höheren Spannungen war das periodische Gleiten des Drahtes auch von einem Laut begleitet.

Tabelle III.

h cm	Nicht vorgespannter Draht			Vorgespannter Draht		
	P_1	P_2	Erscheinungen am Draht	P_1	P_2	Erscheinungen am Draht
10	412	1419	Gleiten	526	1105	Gleiten
15	637	1700	«	659	1520	«
20	747	1978	«	611	1306	«
25	731	2333	«	929	1322	«
30	775	2384	«	850	2220	«
35	982	2474	«	797	2494	«
40	1115	2752	«	1024	2503	«
45	1115	2836	«	1316	2628	Reissen
50	1117	2776	«	1026	2544	«
55	1598	2906	Reissen	977	2553	Gleiten
60	1661	2910	«	1131	2596	Reissen
70	1789	2910	«	956	2446	Gleiten

Die Messergebnisse sind in Tabelle III. zusammengestellt. In dieser Tabelle ist P_1 die Last, bei der auch das mit *b* bezeichnete Ende des Drahtes ins Gleiten kam, während P_2 die Last bedeutet, über welche hinaus die Last nicht mehr gesteigert werden konnte, weil dann entweder der Draht vollkommen aus dem Beton herausgezogen wurde oder aber ein Reissen des Drahtes eintrat.

Die Versuche ergaben nicht, welche Längen die gewellten und vorgespannten Stahldrähte haben müssen, um eine vollkommene Kraftübertragung vom Stahl auf den Beton d. h. ohne ein Gleiten des Stahls, zu gewährleisten. Aus den Versuchen mit Probekörpern, deren Drähte in ungespanntem Zustande einbetoniert worden waren, kann gefolgert werden, dass der Draht eine einbetonierte Länge von etwa *130—150* cm haben muss, um im Laufe des Ausziehversuches zu zerreissen, noch bevor er bei *b* ins Gleiten kommt.

Bei den mit Vorspannung durchgeführten Versuchen deutete nichts darauf hin, dass selbst bei den Probekörpern von *10* cm Länge die Vorspannung

ungenügend gewesen wäre. Es wurden nämlich, nachdem die Vorspannkraft des Drahtes zu wirken aufgehört hatte, keine Erscheinungen beobachtet, aus denen man hätte folgern können, dass die Drahtenden in den Beton hineingeglitten seien. Bei den mit vorgespannten, einbetonierten Drähten versehenen Probekörpern war sowohl die Kraft P_1 als auch die Kraft P_2 im allgemeinen etwas kleiner als bei den unvorgespannten Probekörpern. Hieraus darf man jedoch nicht folgern, dass die vorgespannten Drähte schon vor dem Versuch ins Gleiten gekommen waren ; diese Abweichungen lassen sich wahrscheinlich aus dem Umstande erklären, dass sich bei den Drähten, die lange Zeit hindurch gespannt waren, die Wellung stärker geschwunden ist und die Drähte gerader geworden sind, als bei Drähten, die nur einmal gespannt waren.

c) Die Versuche im Spiegel der Theorie

Die Bewegungen der mit *a* und *b* bezeichneten Querschnitte des einbetonierten Drahtes wurden im Laufe der Versuche gemessen, wobei der mit *b*

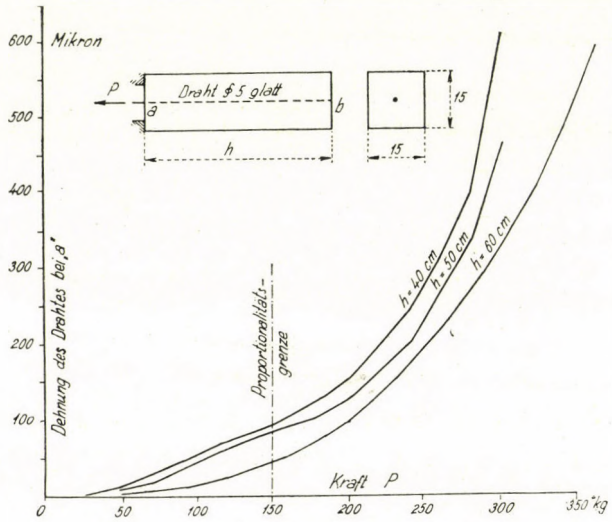


Abb. 9.

bezeichnete Querschnitt des Betons als relativ unbeweglich angenommen wurde *(Abb. 9)*. Der Querschnitt *b* des Stahles wird nur durch das Gleiten, der Querschnitt *a* hingegen durch das Gleiten und die mit dem Stahlzug verbundenen Formänderungen in Bewegung gesetzt. Wird vorausgesetzt, dass jeder Querschnitt des Drahtes die gleiche Strecke gleitet, dann wird die Differenz $e_0 = e_a - e_b$ der in den Querschnitten *a* und *b* gemessenen Bewegungen e_a und e_b gerade mit der Formänderung infolge Stahlzuges übereinstimmen.

Die Werte e_0, welche an Körpern von $h = 40$, 50 und 60 cm Länge mit glattem Draht festgestellt wurden, sind in *Abb. 9* dargestellt. Die Körper mit

anderen Längen führten zu ähnlichen Kurven. Es ist ein gemeinsames Kennzeichen der Kurven, dass, solange die Belastung den Wert $P = 150$ kg nicht übersteigt, die Proportionalität zwischen der Kraft und der Formänderung mit guter Annäherung gilt. Der Wert der Konstante a gemäss Formel

$$P = a \cdot e_0$$

änderte sich jedoch mit der Länge des Probekörpers. Der Durchschnittswert beträgt $a_0 = 1{,}2663$ kg pro Mikron. Es ist wahrscheinlich, dass nach Überschreitung einer Belastung von $P = 150$ kg der Stahl entlang einer kürzeren Strecke des Betons bereits gleitet und dass es die Folge dieses Gleitens ist, dass die Linien der Diagramme nicht Gerade, sondern Kurven sind *(Abb. 9)*.

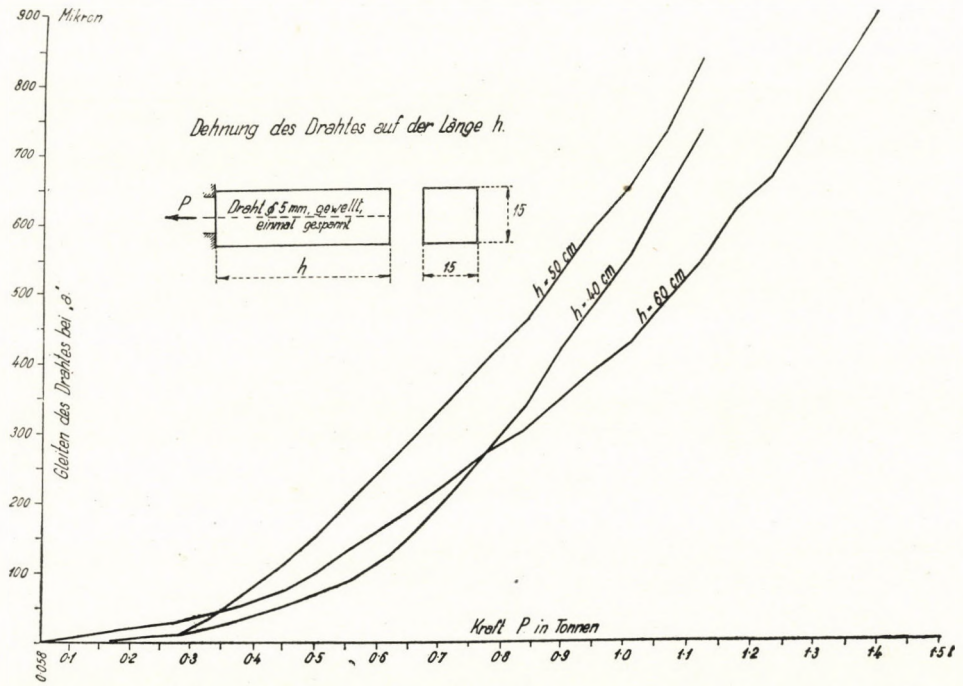


Abb. 10.

Die Bewegungen des Punktes a, welche an den Körpern von $h = 40$, 50 und 60 cm Länge gemessen wurden, in die gewellte Drähte in ungespanntem Zustand einbetoniert waren, sind in *Abb. 10* eingezeichnet. Dargestellt sind nur die vor dem Gleiten des Drahtendes b gemessenen Werte. Nach dem völligen Gleiten des Stahles erfolgten nämlich die Instrumentenablesungen bei den Versuchskörpern verschiedener Länge unter verschiedenen Kräften, weshalb diese Werte schwer zu einem System zu vereinigen sind. Verschiedene Werte,

die an Versuchskörpern mit vorgespannten Drähten ermittelt wurden, sind aus *Abb. 11* ersichtlich.

Ein gemeinsames Kennzeichen der Diagramme ist, dass sie in guter Annäherung aus geraden Linien zusammengesetzt werden können, so dass die

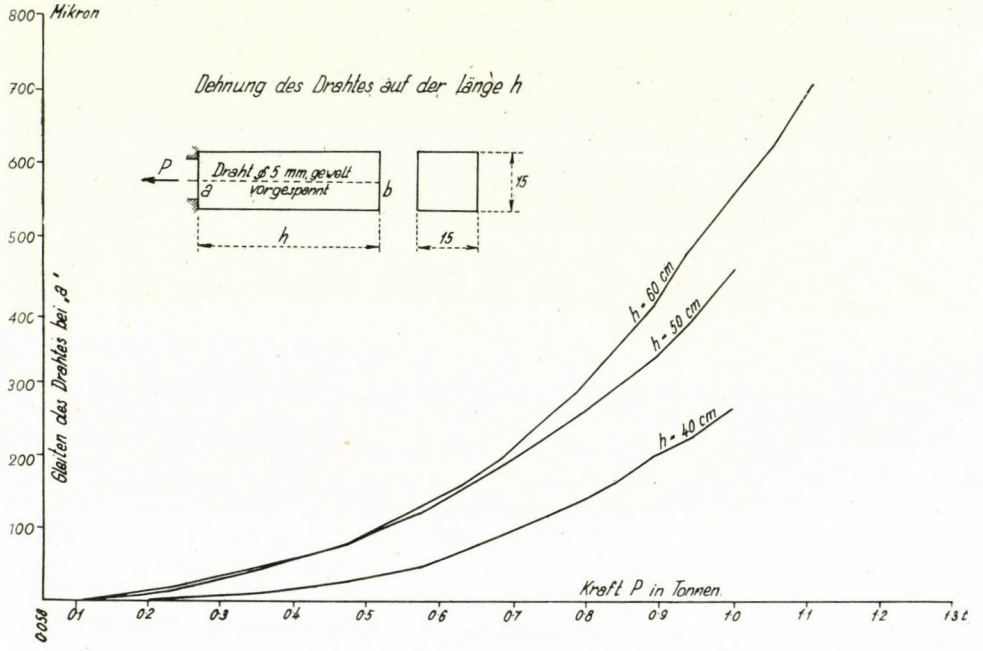


Abb. 11.

Diagramme eher gebrochene Linien als Kurven bilden. Die einzelnen Linien folgen jedoch unregelmässig aufeinander und auch ihre Biegung — der Faktor a der Formel $P = a \cdot e_0$ — schwankt zwischen weiten Grenzen.

Die weiteren Ausführungen beziehen sich nur auf den Fall, dass zwischen der Last und der Längenänderung e_0 eine Proportionalität gemäss der Formel

$$P = a \cdot e_0$$

besteht. Bei den Körpern mit glattem Draht ist dies solange der Fall, als der Zug *150* kg nicht übersteigt ; wenn aber der Draht schon auf einer gewissen Strecke gleitet, dann hört die Proportionalität auf und die nachstehenden Ableitungen haben dann auch für diesen Fall keine Geltung mehr. Dagegen besitzen die Ableitungen bei den Körpern mit gewellten Drähten auch nach vollkommenem Gleiten Gültigkeit. Die Zugkraft ändert sich nämlich auch in diesem Falle mit der Dehnung des Stahls e_0, wenn auch nur abschnittsweise, so doch proportional. Wenn aber das Diagramm die Gestalt der gebrochenen Linie der *Abb. 12* hat, dann gilt die Theorie im Abschnitt

$O' - O''$ des Diagrammes selbstverständlich nicht im ursprünglichen Koordinatensystem P, e_0, sondern im Koordinatensystem P', e'_0 mit dem Anfangspunkt O'.

Die Basis der theoretischen Ausführungen ist Formel (4)

$$T_x = \frac{c_1}{k} \cdot \sin h(k x) + \frac{c_2}{k} \cos h(k x) + c_3 .$$

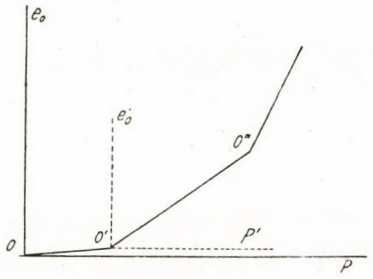


Abb. 12.

In dem gewählten Koordinatensystem *(Abb. 13)* muss bei $x = 0$, $T_x = 0$ sein, d. h.

$$0 = \frac{c_2}{k} + c_3 \quad \text{und} \quad c_3 = -\frac{c_2}{k}$$

und daher ist

$$T_x = \frac{c_1}{k} \cdot \sin h(k x) + \frac{c_2}{k} [\cos h(k x) - 1] \tag{12}$$

Ferner ist bei $x = h$ die Kraft T_x gleich der ausgeübten Kraft P; zur Bestimmung der Konstanten steht also die Gleichung

$$P = \frac{c_1}{k} \sin h(k h) + \frac{c_2}{k} [\cos h(k h) - 1] \tag{13}$$

zur Verfügung. Diese Gleichung enthält jedoch drei unbekannte Konstanten. Zwischen der gemessenen Längenänderung e_0 und der als gültig vorausgesetzten Gleichung (12) besteht folgender Zusammenhang:

$$e_0 = \int_0^4 \frac{T_x\, dx}{E_e\, F_e} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{E_e\, F_e} \left[\frac{c_1}{k} \cos h(k x) + \frac{c_2}{k} \{\sin h(k x) - k x\}\right]_0^4$$

$$e_0 = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{E_e\, F_e} \cdot [c_1 \{\cos h(kh) - 1\} + c_2 \{\sin h(kh) - kh\}]$$

Besteht aber die Proportionalität $P = a \cdot e_0$, dann folgt aus dieser Formel, dass

$$P = \frac{d}{k^2\, E_e\, F_e} \cdot [c_1 \{\cos h(kh) - 1\} + c_2 \{\sin h(kh) - kh\}] \tag{14}$$

Die zwei Werte der Kraft P der Gleichungen (13) und (14) sind identisch, wenn

$$\frac{a \cdot c_1}{k^2 E_e F_e} = \frac{c_2}{k} \tag{15}$$

$$\frac{c_1}{k} \cdot \sin h(kh) = \frac{a \cdot c_2}{k^2 E_e F_e} \cdot \{\sin h(kh) - kh\} \tag{16}$$

Aus der Gleichung (15) ergibt sich

$$c_2 = \frac{a}{k \cdot E_e F_e} \cdot c_1 \tag{17}$$

und damit fallen aus der Gleichung (16) die mit c bezeichneten Konstanten aus und für die Bestimmung der Konstante k steht die Gleichung

$$\sin h(kh) = \frac{A^2}{k^2} \{\sin h(kh) - kh\} \tag{18}$$

zur Verfügung. Hier ist

$$A = \frac{a}{E_e F_e}$$

Die Gleichung (18) kann auch auf die Form

$$\sin h(kh) = \frac{A^2}{A^2 - k^2} \cdot kh \tag{18a}$$

gebracht werden. Diese hat aber nur dann einen Sinn, wenn

$$A > k$$

Die Auswertung der mit glatten Draht durchgeführten Ausziehversuche zeigte, dass der Wert a zwischen weiten Grenzen und in unregelmässiger Streuung variierte. Wird mit dem Mittelwert $a_0 = 1{,}2663$ kg/μ = 12 663 kg/cm der im Laufe der Versuche beobachteten Werte gerechnet, dann ist mit $E_e = 2\,100\,000$ kg/cm² und $F_e = 0{,}196$ cm² :

$$k < A = \frac{12\,663}{411\,600} = 3{,}077 \cdot 10^{-2} \cdot \text{cm}^{-1}$$

Da der grösste Wert von h 70 cm war, gilt für die rechnerische Auswertung des Versuches

$$kh < 3{,}077 \cdot 70 \cdot 10^{-2} = 2{,}1539.$$

Die Lösung der Gleichung (18a) kann durch Probieren derart erfolgen, dass man für die verschiedenen Werte von $z = kh$ den Wert von k aus der Formel

$$k = A \sqrt{\frac{\sin h(kh) - kh}{\sin h(kh)}}$$

berechnet und sodann aus der Formel $h = z/k$ zu den verschiedenen Werten von k Werte von h berechnet. Eine solche Rechnung führte zu folgenden Werten :

$z = 0{,}1 \quad k = 0{,}001\,256 \text{ cm}^{-1} \qquad h = 79{,}62 \text{ cm}$
$z = 0{,}01 \quad k = 0{,}000\,126 \text{ cm}^{-1} \qquad h = 79{,}36 \text{ cm}$
$z = 0{,}001 \; k = 0{,}013\,761 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1} \qquad h = 72{,}67$

Offenbar ist der Wert von $z = k\,h$ sehr klein und mit Rücksicht darauf, sowie auf die zahlreichen Unsicherheiten dürfte es genügen, mit den Näherungsformeln der Hyperbelfunktionen

$$\sin h\,(k\,x) = k\,x$$
$$\cos h\,(k\,x) = 1 + \frac{k^2\,x^2}{2}$$

zu rechnen.

Aus der Gleichung (13) folgt nun

$$P = c_1 h + c_2 \cdot k \cdot \frac{h^2}{2}$$

und selbsverständlich besteht auch weiterhin der Zusammenhang (17)

$$c_2 = \frac{A}{k} \cdot c_1 \qquad\qquad A = \frac{a}{E_v\,F_v}$$

Mit diesem Wert der Konstante c_2 ergibt sich aus der vorhergehenden Gleichung

$$c_1 = \frac{2}{2 + A\,h} \cdot \frac{P}{h} = \alpha\,P.$$

Mit den so berechneten Konstanten folgt aus Gleichung (12)

$$\left.\begin{aligned} T_x &= \alpha\left[x + \frac{A}{2} \cdot x^2\right] \\ t_x &= \frac{d\,T_x}{d\,x} = \alpha\,[1 + A \cdot x] \cdot P \\ \alpha &= \frac{2}{2 + A\,h} \cdot \frac{1}{h} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Die zu den verschiedenen Werten von h gehörenden Konstanten a, die auf Grund des früher gefundenen Wertes $A = 3{,}077 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}^{-1}$ berechnet wurden, sind in der Tabelle IV. angeführt. Die Funktionen T_x und t_x sind in *Abb. 13* dargestellt.

Tabelle IV.

h cm	$\frac{1}{h}$ cm^{-1}	$A \cdot h$	$\frac{2}{2 + A \cdot h}$	α cm^{-1}
15	0,066667	0,46155	0,812628	$54{,}175.10^{-3}$
20	0,050000	0,61540	0,764701	$38{,}235.10^{-3}$
25	0,040000	0,76925	0,722217	$28{,}889.10^{-3}$
30	0,033333	0,92310	0,684205	$22{,}807.10^{-3}$
35	0,028571	1,07695	0,649994	$18{,}571.10^{-3}$
40	0,025000	1,23080	0,619042	$15{,}476.10^{-3}$
45	0,022222	1,38465	0,590903	$13{,}131.10^{-3}$
50	0,020000	1,53850	0,565211	$11{,}304.10^{-3}$
55	0,018182	1,69235	0,541660	$9{,}848.10^{-3}$
60	0,016667	1,84620	0,519994	$8{,}667.10^{-3}$
70	0,014286	2,15390	0,481475	$6{,}878.10^{-3}$

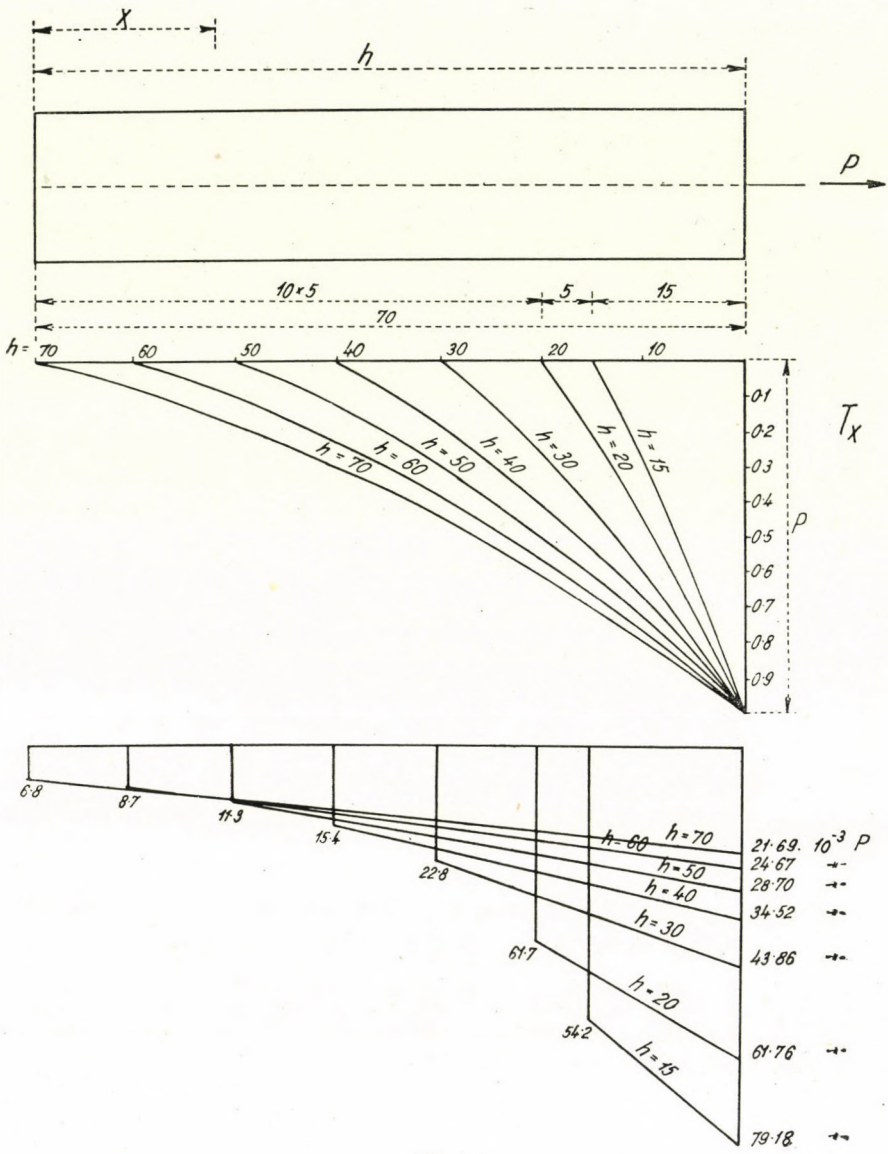


Abb. 13.

Die in der Abbildung dargestellten grössten Gleitspannungen haben, wenn man mit der zum Gleiten führenden Kraft P rechnet, folgende Werte:

$$h = 15 \text{ cm} \quad t_{max} = 79{,}18 \cdot 104 \cdot 10^{-3} = 8{,}23 \text{ kg/cm}$$

$$h = 20 \text{ cm} \quad t_{max} = 61{,}76 \cdot 171 \cdot 10^{-3} = 10{,}56 \text{ kg/cm}$$

$$h = 30 \text{ cm} \quad t_{max} = 43{,}86 \cdot 320 \cdot 10^{-3} = 14{,}04 \text{ kg/cm}$$

$$h = 40 \text{ cm} \quad t_{max} = 34{,}52 \cdot 336 \cdot 10^{-3} = 11{,}60 \text{ kg/cm}$$

$$h = 50 \text{ cm} \quad t_{max} = 28{,}70 \cdot 312 \cdot 10^{-3} = 8{,}95 \text{ kg/cm}$$

$$h = 60 \text{ cm} \quad t_{max} = 24{,}67 \cdot 414 \cdot 10^{-3} = 10{,}21 \text{ kg/cm}$$

$$h = 70 \text{ cm} \quad t_{max} = 21{,}69 \cdot 465 \cdot 10^{-3} = 10{,}09 \text{ kg/cm}$$

Diese Werte schwanken nur in Grenzen, welche durch die nicht vollkommen gleichförmige Beschaffenheit des Betons und durch andere Unsicherheiten bedingt sind. Dies ist allerdings noch kein Grund, um aus diesem Ergebnis weitgehende Folgerungen zu ziehen.

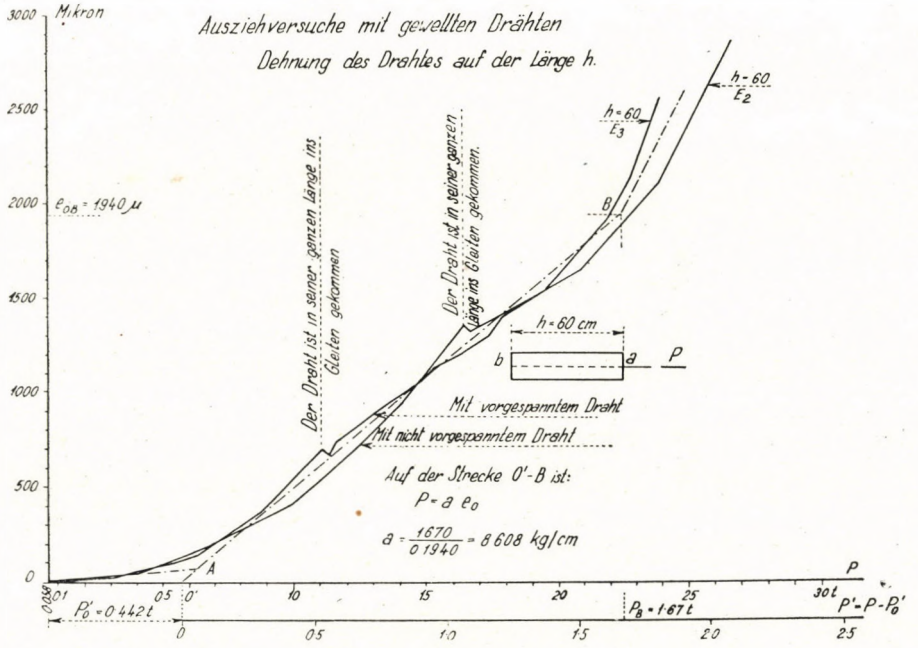


Abb. 14.

In *Abb. 14* sind die Resultate der Ausziehversuche mit Körpern von $h = 60$ cm Länge, in die gewellter Draht einbetoniert war, dargestellt. Die Abbildung veranschaulicht vortrefflich, dass auch das Auftreten von Gleiterscheinungen am Ende b des Stahles, d. h., nachdem der Draht in seiner ganzen Länge zu gleiten begonnen hatte, an der Gesetzmässigkeit $P = a \cdot e_0$ sozusagen fast überhaupt nichts ändert. Das Ergebnis der Messung lässt sich durch die gebrochene Linie $0—A—B$ sehr wohl ersetzen.

Der Abschnitt $0—A$ kann in den weiteren Ausführungen als uninteressant unberücksichtigt bleiben; die Ergebnisse der Messung können also auch durch die gebrochene Linie $0—0'—B$ ersetzt werden. Unter der Wirkung der kleinen

Kräfte spannt sich der gewellte Draht nämlich noch in den Beton ein und erst dann kommt das allgemeine Gesetz zur Geltung. Es wird daher vorausgesetzt, dass der Versuchskörper erst nach der Belastung $P_0' = 0{,}422$ t in Spannung gelangt. Die abgeleiteten Formeln gelten also nur für Kräfte $P' > P_0'$ und aus diesen Formeln folgt dann, dass die Stahlbeanspruchung und Haftspannung nicht aus der tatsächlichen Kraft P, sondern aus der Kraft $P_1' = P - P_0'$ zu berechnen sind.

Tabelle V.

Der auf Grund von Versuchen bestimmte Wert des Faktors a in der Gleichung $P' = a \cdot e_0$ wenn die Länge der Probekörpers die untenstehenden cm-Werte hat:

15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70
Der Draht wurde unvorgespannt einbetoniert:										
20300	20300	17500	12800	11600	11600	9360	9360	10300	10300	—
Der Draht wurde vorgespannt einbetoniert:										
	26800	24200	19000	16600	15000	13600	10200	12500	9250	7000

Die Konstante a des Gesetzes $P' = a \cdot e_0$ schwankt zwischen weiten Grenzen. Die aus den Messergebnissen festgestellten Werte sind in der Tabelle V. zusammengefasst. Die grossen Schwankungen von a sind jedoch als selbstverständlich anzusehen. Die Gerade, welche die Messergebnisse der Probekörper von $h = 60$ cm Länge in *Abb. 14* darstellt, hat einen Neigungswinkel mit der Tangente von *8,608* kg/cm, doch kann ein hiervon abweichender kleinerer oder grösserer Wert gleichermassen Berechtigung besitzen, da man die Gerade ohne wahrnehmbaren Fehler mit stark variierenden Neigungswinkeln zeichnen kann.

Der Umstand, dass man die Messergebnisse durch gerade Linien ersetzen kann, erhärtet die Theorie sozusagen vollständig. Wird die Richtigkeit der Theorie bezweifelt, d. h. in anderen Worten, die Gleichung (12) in Frage gestellt, dann kann man annehmen, dass die Änderung der Zugkraft des Stahles innerhalb der Versuchslänge h durch die Funktion

$$T_x = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \ldots = \Sigma f_n'(x)$$

ausgedrückt wird, worin $f_n'(x)$ aus der noch unbekannten Funktion $f_n(x)$ abgeleitet ist. Gilt diese Gleichung für die Änderung des Eisenzuges, dann muss die Dehnung des Eisens im Querschnitt x

$$e_x = \int_0^x \frac{T_x\, dx}{E_e\, F_e} \equiv c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + \ldots = (\Sigma\, c_n f_n\, x)$$

sein. Das durch Messungen an den Endquerschnitten der Eisen abgeleitete

Gesetz $P = a \cdot e_0$ muss aber selbsverständlich auch für alle anderen Querschnitte gelten, d. h. es ist

$$T_x = a \cdot e_x$$

und daher besteht zwischen den zwei vorhergehenden Gleichungen ein Zusammenhang, u. zw.

$$\frac{1}{a} \cdot \Sigma f_n'(x) = \Sigma c_n f_n(x)$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn im allgemeinen

$$f_n'(x) = a \cdot c_n \cdot f_n(x)$$

ist. Diejenige Funktion, welche sich von ihren Ableitungen nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet lautet

$$f(x) = e^{c_n x}.$$

Da sich die Funktion T_x aus den Summen und Differenzen solcher Funktionen zusammensetzen lässt, ist es offensichtlich, dass mit den Versuchsergebnissen auch die Funktionen cos $h(k\,x)$ und sin $h\,(k\,x)$ in Einklang gebracht werden können, was jedoch für andere Funktionen im allgemeinen nicht mehr zutrifft. Die Grundlage der Theorie wird also durch den Versuch bestens bekräftigt, da sich die Dehnung des Stahles auf der Länge h infolge der Kraft P so verändert, dass die Änderung durch eine oder mehrere Geraden dargestellt werden kann.

Die aus der Tabelle V. ersichtlichen Werte von a_0 liegen im allgemeinen nahe am Mittelwert $a_0 = 12\,663$ kg/cm, der aus den Versuchen mit glatten Drähten abgeleitet wurde. Es wurde nachgewiesen, dass bei diesem Mittelwert ein Rechnen mit den obenstehenden Näherungsformeln (19) begründet ist. Diese Feststellung gilt daher auch für die Ergebnisse der Probekörper mit einer Länge von $h = 60$ cm. Es ist noch zu untersuchen, inwieweit der bei der Bestimmung des Wertes von a gemachte Fehler die Ergebnisse beeinflusst und ob man für die Ingenieurspraxis einen mittleren Wert a empfehlen und angeben kann.

Um dies feststellen zu können, wurden für Probekörper von $h = 60$ cm Länge, die die Beanspruchung des Drahtes darstellende Kurve T_x und die die Verteilung der Haftspannungen darstellende Gerade einerseits mit dem Werte $a = 8\,600$ kg/cm der *Abb. 14* und andererseits mit dem zweifachen Wert von a berechnet. Diese Ergebnisse sind in *Abb. 15* dargestellt. Aus dieser Berechnung geht klar hervor, dass die genaue Kenntnis des Faktors a unwichtig ist ; selbst ein hundertprozentiger Fehler in seiner Wertbestimmung beeinflusst kaum merklich den Wert der Drahtbeanspruchung und würde auch im Höchstwert der Haftspannung nur eine Änderung von etwa 8% verursachen.

Aus den in der Tabelle V. zusammengestellten Angaben ist ersichtlich, dass sich der Wert des in Frage stehenden Faktors a im umgekehrten Verhältnis zur Länge des Probekörpers verändert ; sein Wert verringert sich, wenn die Länge des Probekörpers wächst. Je grösser andererseits der Faktor a ist, desto grösser

wird die berechnete grösste Haftspannung sein. Diese Spannung dürfte im allgemeinen für die Dimensionierung massgebend sein, und es ist daher vorläufig zweckmässiger, eher mit einem zu hoch als mit einem zu nieder geschätz-

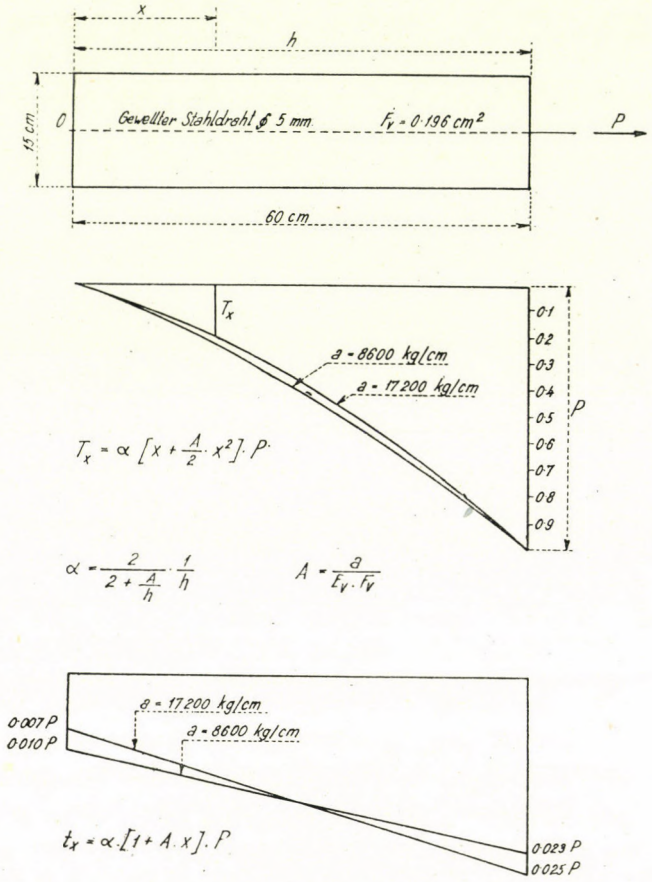


Abb. 15.

ten Wert des Faktors a zu rechnen. Mangels eines Besseren ist der Wert $a = 15\,000$ kg/cm zu empfehlen.

Aus den Ausziehversuchen lässt sich zusammenfassend folgendes feststellen:

1. Die angeschnittene Theorie wurde durch die Ausziehversuche bestätigt. Sie scheint anwendbar zu sein, solange das Eisen oder der Stahldraht im Beton nicht gleiten, bzw. wenn im Falle eines Gleitens die Kraftübertragung zwischen Stahl und Beton durch Wellung oder mittels einer entsprechender Oberflächenaufrauhung des Stahles gesichert ist.

2. Anstatt mit genauen Formeln kann man im allgemeinen mit den obenstehenden Näherungsformeln (19) rechnen. Der Wert des in den Formeln vorkommenden Faktors a kann mangels eines Besseren mit $a = 15\,000$ kg/cm angenommen werden. Aus den Resultaten der Näherungsformeln dürfen keine weitgehenden Folgerungen gezogen werden. Werden dennoch Folgerungen gezogen, dann ist zu untersuchen, ob sie nicht im Widerspruch zu den genauen Formeln stehen. So ergibt sich z. B. aus den Näherungsformeln der Wert

$$\frac{d\,t_x}{d\,x} = \alpha \cdot A \cdot P$$

Der richtige Wert folgt aus der Gleichung (12) durch zweifache Differentiierung und in dieser kann die Hyperbelfunktion durch ihren Näherungswert ersetzt werden. Der so gewonnene Wert lautet

$$\frac{dt_x}{dx} = \alpha \cdot k \cdot P \cdot \left[k\,x + \frac{A}{k}\left(1 + \frac{k^2\,x^2}{2}\right)\right]$$

und hieraus folgt bei $k = 0$ der oben angegebene Wert, doch ist $k = 0$ nicht unbedingt gerechtfertigt.

3. Glatter Stahldraht von 5 mm Durchmesser kann in Beton von zumindest 500 kg/cm² Würfelfestigkeit ohne Haken verwendet werden, wenn die nach der Theorie berechnete grösste Haftspannung den Wert von 8 kg/cm² nicht übersteigt. Gewellter Draht kann hingegen bis zum Zerreissen belastet werden, wenn seine einbetonierte Länge grösser als 60 cm ist und der Beton die genannte Festigkeit besitzt.

5. *Vorgespannte Träger*

Die hier abgeleitete und durch Versuche erhärtete Theorie kann auch zur Berechnung von vorgespannten Trägern herangezogen werden, vorausgesetzt, dass sie mit einbetonierten Drähten versehen sind. Die Vorbedingung der Theorie, dass der Draht nicht gleiten darf, muss nämlich unbedingt erfüllt sein, wenn der Träger mit vorgespanntem einbetoniertem Draht in Spannung gesetzt ist. Alle Fragen, die in Verbindung mit dem vorgespannten Träger noch der Lösung harren, können an dieser Stelle natürlich nicht erörtert werden. Es muss jedoch auf den Unterschied hingewiesen werden, welcher zwischen der heute allgemein üblichen und der vorgeschlagenen Berechnungsmethode für den vorgespannten Träger besteht, die auf der im vorstehenden geschilderten Theorie beruht.

Im folgenden wird die vollkommene Elastizität des Stahles und des Betons vorausgesetzt. Die plastische Formänderung der Werkstoffe, das Schwinden des Betons, sowie die langsamen Formänderungen (Kriechen) von Beton und Stahl bleiben ausser Acht. Die Wirkung dieser Umstände auf das Kräftespiel des vorgespannten Trägers darf natürlich nicht vernachlässigt werden, doch ist die Frage der Vorspannung zuerst ohne sie vollkommen zu lösen.

Die heute allgemein anerkannte Theorie des vorgespannten Eisenbetonträgers beruht auf der Vorstellung *(Abb. 16)*, dass in jedem Querschnitt des zentrisch vorgespannten Trägers Stahl und Beton den gleichen Längenänderungen unterworfen sind. Aus der Symmetrie des Balkens folgt, dass sich die Formänderungen nach dem Aufhören der Stahlvorspannung gleichfalls symmetrisch gestalten müssen. Der mittlere Querschnitt des Trägers verbleibt daher an seiner Stelle und die Endquerschnitte bewegen sich um den Wert $\triangle l$ nach der Mitte zu *(Abb. 16 b)*. Die elastische Formänderung des Halbbalkens ist

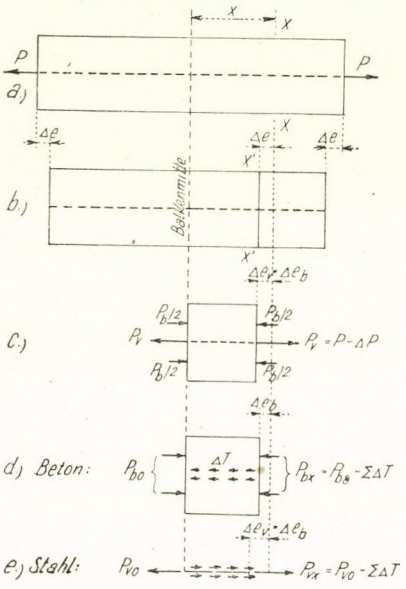


Abb. 16.

daher der eines prismatischen Körpers gleich, welcher in der Balkenmitte starr unterstützt ist und unter der Wirkung eines gleichförmig verteilten zentrischen Druckes steht *(Abb. 16 c)*.

Auf der Strecke x erleiden Beton und Stahl die gleiche Längenänderung $\triangle e_e = \triangle e_b$. Die Längenänderung $\triangle e_e$ hat die Verminderung der Beanspruchung des Stahles zur Folge, und der Wert der letzteren wird

$$\Delta P = E_e \cdot F_e \frac{\Delta e_e}{x}$$

betragen. Die Vorspannkraft des Stahles war P, nach ihrer Verminderung ist die Beanspruchung des Stahles

$$P_e = P - \Delta P$$

Die Längenänderung $\triangle e_b$ wird nach dieser Auffassung der zentrisch wirkenden Kraft

$$P_b = E_b \cdot F_b \frac{\Delta e_b}{x}$$

zugeschrieben. Da der Träger von äusseren Lasten frei ist, müssen die Kräfte in jedem Querschnitt im Gleichgewicht sein, es ist *(Abb. 16 c)*

$$P_b - P_e = 0$$

und mit dem obigen Wert von P_e ergibt sich

$$P_b + \Delta P = P$$

Im Falle der vollkommenen Elastizität des Stahles und des Betons wirkt sich die Tatsache der Vorspannung dieser Auffassung gemäss so aus, als ob die Kraft P, welche den Stahl vor dem Einbetonieren spannte, den Träger zentrisch oder exzentrisch belastet. Diese Theorie berechnet die Querschnitte nach den üblichen Regeln der Eisenbetontheorie ; durch Einführung von $n \cdot F_e$ wird der homogene Querschnitt hergestellt. Der Anteil des Drucks auf den Stahl ist gleich der aus der elastischen Formänderung stammenden Beanspruchungsverringerung.

Eine auffallende Unzulänglichkeit dieser Theorie bildet der Umstand, dass sie wohl die Kraftübertragung vom Stahl auf den Beton voraussetzt, aber nicht mit Haftspannungen rechnet. Diese Frage tut die Theorie mit der Bemerkung ab, dass sich der Stahl an den Balkenenden — und nur dort — durch Haftung im Beton verankert. Diese Auffassung stützt sich auf den Versuch, laut welchem die Formänderungen an der Betonoberfläche in der Nähe der Balkenenden mit den in der Balkenmitte gemessenen identisch sind. Aus diesem Messergebnis darf man jedoch nicht auf die Verteilung der Haftspannungen folgern, was ja auch durch die Versuche mit der hohen und niedrigen Säule bekräftigt wurde. Die Grundlage der Theorie ist daher unrichtig.

Zwischen Stahl und Beton müssen Haftspannungen längs der ganzen einbetonierten Stahllänge wirken. Der eine Werkstoff ist auf Zug, der andere auf Druck beansprucht. Aus der Symmetrie folgt, dass jeder Querschnitt des Stahles bestrebt ist, sich gegen die Balkenmitte hin zu verschieben, während der gleiche Betonquerschnitt das Bestreben hat, sich von der Balkenmitte zu entfernen. Die Stahl- und Betonquerschnitte, die ursprünglich in einer Ebene lagen, sind, abgesehen von dem Querschnitt in der Balkenmitte, bestrebt, sich voneinander zu trennen, und diese Formänderungsneigung löst die Haftspannungen aus. Dies erfolgt übrigens im Sinne der besprochenen Theorie ; die Haftspannungen sind den Dehnungsunterschieden proportional. Bei dem symmetrisch und zentrisch vorgespannten Prisma ist die Haftspannung in der Balkenmitte Null und ändert dort ihr Vorzeichen. Wenn man nun die Haftkräfte als äussere Kräfte $\triangle T$ betrachtet, dann lässt sich der Beton vom Stahl loslösen *(Abbildungen 16 d* und *16 e)*.

Der vorgespannte mittlere Querschnitt des Prismas wird mit der Druckkraft P_{e0} belastet. An derselben Stelle wird der Stahl von der Kraft $P_{e0} = -P_{b0} = P_0$ auf Zug beansprucht *(Abb. 17)*. Die Indentität der Grösse der zwei Kräfte folgt aus der Gleichgewichtsbedingung der Trägerhälften. Die Kraft P_0 ist geringer als die Kraft P, mit der der Stahl ursprünglich zwecks Vorspannung belastet wurde; ihre Grösse lässt sich aber nicht ohne weiteres

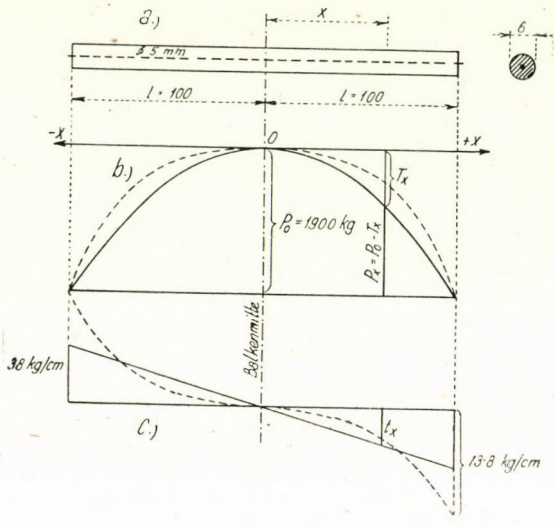


Abb. 17.

feststellen. Auf der Strecke x verringert sich sowohl die Beanspruchung des Betons als auch die des Stahles. Die Verringerung *(Abb. 17)* beträgt

$$T_x = \int_0^x t_x \cdot dx$$

wobei t_x und daher auch T_x gemäss der besprochenen Theorie den Gleichungen (3) und (4) folgen; es ist also

$$t_x = c_1 \cdot \cos\, h\,(k\,x) + c_2 \sin\, h\,(k\,x)$$

$$T_x = \frac{c_1}{k} \sin\, h\,(k\,x) + \frac{c_2}{k} \cdot \cos\, h\,(k\,x) + c_3$$

In der Balkenmitte, d. h. an der Stelle $x = 0$ haben t_0 und T_0 gleicherweise den Wert Null und daher ist $c_1 = 0$, ferner

$$c_3 = -\frac{c_2}{k}$$

und schliesslich

$$T_x = \frac{c_2}{k}\,[\cos\, h\,(k\,x) - 1] \qquad (20)$$

Da ferner im Falle von $x = l$, $T_1 = P_0$ ist, so ist

$$\frac{c_2}{k} = \frac{P_0}{\cos\, h\,(k\,l) - 1}$$

und endlich

$$T_x = \frac{\cos\, h\,(k\,x) - 1}{\cos\, h\,(k\,l) - 1} \cdot P_0 \tag{21}$$

$$t_x = \frac{\sin\, h\,(k\,x)}{\cos\, h\,(k\,l) - 1} \cdot k\,P_0 \tag{22}$$

In diesen Gleichungen sind die Werte von k und P_0 noch unbekannt. Der eine dieser Faktoren fällt aus, wenn die Berechnung mit dem Näherungswert

$$\sin\, h\,(k\,x) = kx$$

$$\cos\, h\,(k\,x) = 1 + \frac{k^2\,x^2}{2}$$

der Hyperbelfunktionen erfolgt. In diesem Falle ist

$$T_x = \left(\frac{x}{l}\right)^2 \cdot P_0 \tag{23}$$

$$t_x = 2\,\frac{x}{l^2} \cdot P_0 \tag{24}$$

Es steht noch die Frage offen, wie gross die zur Spannung des Stahles angewendete Kraft P sein muss, um die durch die Kraft P_0 gekennzeichnete Vorspannung hervorrufen zu können. Die Frage ist gelöst, wenn es gelingt, eine die Stahlenden belastende Zugkraft zu bestimmen, unter deren Wirkung der vorgespannte Beton spannungsfrei wird und infolge welcher die Längenänderungen des Betons und des Stahles auf jeder Strecke x einander gleich sein werden.

Man kann zu einer Lösung der Frage gelangen, indem man sich im vorgespannten Zustande des Prismas die Kanten der Betonendquerschnitte gestützt vorstellt, so dass nur das Innere des Betons eine Formänderung erleiden kann, und auch dies nur solange, als die Querschnitte ihren in *Abb. 3 d* gezeigten konkaven Zustand ändern, d. h. bis sie gerade werden. Auf die Stahlenden möge die Kraft P_0 wirken. Unter der Wirkung dieser Kraft müssen sich die Spannungen im Beton überall — und nicht nur an den Grenzflächen — ausgleichen und sämtliche Haftkräfte verschwinden, da sie durch eine scheinbare Kraft P_0 — bzw. durch die Beseitigung einer Zugkraft dieser Grösse — hervorgerufen wurden. Damit verschwinden alle Dehnungsunterschiede zwischen Stahl und Beton und jeder Querschnitt des Betons wird durch die zentrische Kraft P_0 gleichförmig auf Druck beansprucht.

Wird nun auch die gedachte Stützung der Endquerschnitte beseitigt und haftet der Beton nicht an den Stahl, dann verlängert sich die Länge l des Betonprismas um den Wert Δl_b. Im Falle einer Haftung des Betons an das Eisen kann diese Formänderung natürlich nicht frei vor sich gehen ; in diesem Falle würde sich der Beton nicht vollkommen von Spannungen befreien. Zur Wiederherstellung des Zustandes vor der Vorspannung, in welchem der Beton spannungsfrei und der der Stahl mit der Kraft P gespannt war, ist es noch

erforderlich, den Stahl zusätzlich mit der Kraft ΔP zu spannen, so dass sich unter ihrer Wirkung auch die Dehnung des Stahles auf der Strecke l um den Betrag Δe_{b0} erhöht. Die Bedingung, welcher Genüge geleistet werden muss, ist daher

$$\frac{\Delta P \cdot l}{E_e F_e} = \frac{P_0 l}{E_b F_b}$$

Die gesuchte Kraft ΔP, welche die Kraft P_0, also die Kraft, die den Beton in Vorspannung setzt, auf die zur Vorspannung des Stahles nötige Kraft $P = P_0 + \Delta P$ ergänzt, hat daher den Wert von

$$\Delta P = \frac{E_e F_e}{E_b F_b} \cdot P_0 \tag{25}$$

Dieser Kraftverlustwert ist nicht gross und im allgemeinen fast ebenso gross wie der Wert, welcher sich aus der Formel

$$\Delta P' = \frac{E_e F_e}{E_e F_e + E_b F_b} \cdot P$$

nach der Eisenbetontheorie errechnen lässt. Für die Kräfte und Spannungen, welche den mittleren Querschnitt des vorgespannten Eisenbetonträgers belasten, erhält man daher bei Berechnung nach der heute üblichen Methode wie auch nach der vorstehend besprochenen Theorie annähernd gleiche Werte.

Beispielsweise möge der in *Abb. 17* dargestellte Versuchsbetonkörper eine Länge von $2\,l = 200$ cm besitzen, sein Querschnitt möge ein Kreis mit dem Durchmesser von $D = 6$ cm sein und zu seiner Vorspannung möge ein Stahldraht mit dem Durchmesser von $d = 5$ mm dienen.

Ist ferner

$E_b = 2\,000\,000$ kg/cm² und $F_b = 400\,000$ kg/cm², dann folgt aus den gegebenen Abmessungen, dass

$$F_e = 0{,}196 \text{ cm}^2 \qquad F_b = 28{,}27 \text{ cm}^2$$

ist.

Im mittleren Querschnitt des Probekörpers sei das Mass der Vorspannung auf $P_0 = 1900$ kg, die Spannung des Betons auf $1900/28{,}27 = 67$ kg/cm² veranschlagt.

Auf Grund von Gleichung (25) beträgt die nicht nutzbare Spannung des Stahles

$$P = \frac{2\,000\,000 \cdot 0{,}196}{400\,000 \cdot 28{,}27} \cdot 1900 = 66 \text{ kg}$$

Vor dem Einbetonieren muss daher der Stahldraht mit der Kraft $P = P_0 + \Delta P = 1966$ kg, d. h. mit einer Spannung von $1966/0{,}196 = 10\,000$ kg/cm² belastet werden. Die Veränderung der Zugkraft im Stahldraht beträgt laut Gleichung (23)

$$T_x = \frac{1900}{100^2} \cdot x^2 = 0{,}19 \cdot x^2$$

während die Veränderung der Haftspannung gemäss Gleichung (24)

$$t_x = \frac{3800}{100^2} \cdot x = 0{,}38\ x$$

ausmacht.

Der Höchstwert der Haftspannung ist $t = 38$ kg/cm, und da der Umfang des Drahtes U = 1,5708 cm ist, wird die Spannung für die Flächeneinheit mit

$$\tau = \frac{38}{1{,}5708} = 24{,}19 \text{ kg/cm}^2$$

berechnet.

Für den glatten Draht ist nur eine Haftspannung von 8 kg/cm² oder von 8 · 1,5708 = 12,57 kg/cm zulässig. Mit einem solchen Draht könnte ohne die Gefahr eines Gleitens ein Probekörper von der Länge

$$2\ l = \frac{4 \cdot 1900}{12{,}57} = 605 \text{ cm}$$

vorgespannt werden.

Es ist jedoch zu bemerken, dass die im Beispiel angeführte Lösung der Vorspannung nicht die einzige ist, welche der Theorie Genüge leistet. Die Gleichung (20) enthält nämlich zwei unbekannte Konstanten und es war nur durch die Anwendung eines technischen Kunstgriffes möglich, das Problem mit einer Grenzbedingung zu lösen. Es ist jedoch wahrscheinlich, dass sich sowohl der Wert der Konstante c_2 als auch der der Konstante k mit den Querschnittsabmessungen des vorgespannten Betonkörpers und mit der Lage des Stahldrahtes im Querschnitt ändern wird. Eine einzige Bedingung, möge sie sich nun aus theoretischen Erwägungen oder aus Versuchen ergeben, kann noch befriedigt werden.

Es ist also möglich, dass auf Grund von theoretischen Überlegungen oder als Ergebnis von Versuchen die Konstante c_2/k der Gleichung (20) den Wert von

$$\frac{c_2}{k} = 100 \text{ kg}$$

besitzt. In diesem Falle lässt sich aus der Grenzbedingung von $x = l = 100$ cm und $T_b = P_0$, also aus der Gleichung

$$1900 = 100\ [\cos h\,(100\ k) - 1\,]$$

ableiten, dass

$$\cos h\,(100\ k) = \frac{1900}{100} + 1 = 20$$

$$100\ k = 3{,}69 \quad \text{und} \quad k = 0{,}0369 \text{ cm}^{-1}$$

ist. Aus den angegebenen bzw. abgeleiteten Werten der Konstanten ergibt sich

$$T_x = 100 \cdot [\cos h\,(0{,}0369 \cdot x) - 1\ ]$$

$$t_x = 3{,}69 \cdot \sin h \cdot (0{,}0369 \cdot x)$$

Diese Werte sind in *Abb. 17* gestrichelt eingezeichnet.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird über eine Theorie berichtet, die zur Bestimmung der Verteilung der zwischen Eisen und Beton bzw. Stahl und Beton entlang des Mantels der Einlagen übertragenen Kräfte dient, sowie über die experimentelle Nachprüfung der Brauchbarkeit dieser Theorie. Die besprochene Theorie beruht auf der im Text angeführten Differentialgleichung (2), deren Lösung durch die Gleichung (3) gegeben ist.

Die Nachprüfung der Brauchbarkeit der Theorie geschah durch verschiedene Messungen, die an einer hohen und an einer niedrigen Säule vorgenommen wurden, sowie durch die Auswertung der Ergebnisse von Ausziehversuchen.

Auf Grund von eigenartigen, die Theorie nicht unmittelbar bestätigenden Ergebnissen der an der hohen Säule vorgenommenen Messungen kam der Verfasser zur Feststellung, dass es nicht möglich ist, aus am Betonmantel vorgenommenen Längenänderungsmessungen auf die Verteilung der Oberflächenbindung zwischen dem Eisen und dem Beton Schlüsse zu ziehen. Diese Feststellung wird auch begründet, und zwar mit der durch die Theorie gelieferten Spannungsverteilung und der hiermit verbundenen Formänderung des Betons.

Als Ergebnis der an der niedrigen Säule vorgenommenen Versuche sieht der Verfasser die Begründung der Ergebnisse der an der hohen Säule vorgenommenen Messungen als bewiesen an. Er stellt fest, dass die Spannungsverteilung in den Eiseneinlagen auch bei einer zentral belasteten Säule nur dann gleichmässig ist, wenn die Eiseneinlage in der Achse des Prismas liegt Die angeführte Theorie sieht der Verfasser so lange als bestätigt an, als sich das Eisen im Beton nicht gelockert hat. Auch die Auswertung der Ausziehversuche führte zur gleichen Folgerung.

Schliesslich zeigt der Verfasser, auf welche Art und Weise sich die eingangs dargelegte Theorie auf die Berechnung gespannter Eisenbetonträger anwenden lässt, die mittels der Einbetonierung vorgespannter Drähte hergestellt worden waren.

ОПЫТЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ВДОЛЬ ОБОЛОЧКИ ЗАБЕТОНИ РОВНОГО АРМАТУРНОГО ЖЕЛЕЗА ИЛИ СТАЛИ

А. Швертнер

Резюме

Статья знакомит нас с теорией распределения сил, действующих вдоль оболочки арматурного железа или стали, между железом (или сталью) и бетоном. Применимость этой теории была проверена опытами. Основой этой теории служит дифференциальное уравнение, приведенное в п. 2, решение уравнения дано в п. 3.

Контроль возможности применения упомянутой теории был произведен путем различных измерений, произведенных с одним высоким и с одним низким столбом, также и путем оценки результатов опытов на вытягивание.

Особые результаты измерений, произведенных с высокими столбами, и непосредственно не подтверждающих теорию, привели автора к тому заключению, что из произведенных измерений изменения длины оболочки бетона нельзя сделать вывод о распределении связи между железом и бетоном. Это доказывается автором распределением напряжений (согласно его теории) и связансй с распределением напряжений деформацией бетона.

Результаты опытов с низкими столбами подтверждают, что результаты измерений высоких столбов являются доказанными (по мнению автора). Автор определяет, что распределение напряжений в арматурном железе лишь в том случае равномерно (даже в столбах, имеющих центральную нагрузку), если арматура размещена в оси данного столба. Вышеприведенную теорию считает доказанной при условии крепкой связи между бетоном и арматурой. К этому же выводу пришел также и при оценке результатов испытаний на вытягивание.

Наконец, автор указывает каким образом можно использовать приведенную выше теорию для расчета таких напряженных железобетонных балок, которые изготовляются путем забетонирования предварительно напряженных стержней.

ESSAIS EFFECTUÉS POUR EXAMINER L'ÉTAT DE FRACTURE DE POUTRES EN BETON ARMÉ

Par M. T. GYENGŐ*)

Article reçu le 10 mai 1951.

But de l'expérience

Jusqu'aux derniers temps, le dimensionnage des constructions en béton armé a été effectué en Hongrie moyennant des méthodes de calcul basées exclusivement sur l'élasticité. C'est au cours de l'année 1950 qu'un mouvement a été initié pour placer le dimensionnage sur des nouvelles bases, notamment sur l'état de fracture. C'est au cours de l'année indiquée que parut le premier règlement pour l'établissement des dimensions, déclarant que le dimensionnage des constructions en béton armé doit être exécuté selon la méthode de calcul nommée »méthode« sans »*n*« basée sur la théorie des fractures.

La théorie du béton armé était toujours basée sur les expériences recueillies par voie expérimentale. Dans le cas où l'on désire placer la théorie du béton armé sur la base de l'état de fracture, ce fait ne souffre aucun changement. Les conditions initiales de la théorie des fractures sont constituées par les phénomènes de fracture des poutres en béton armé et par les déformations plastiques du béton et de l'acier. Bien que depuis plusieurs dizaines d'années de nombreux savants ont accompli des travaux de recherche de haute valeur dans ce domaine, et ont en effet, éclairci la plupart des problèmes, l'introduction du calcul sans n a tout de même rendu nécessaire l'accomplissement de beaucoup d'expériments d'investigation et de vérification, particulièrement en vue des matériaux de notre pays et de certaines conditions locales.

Dans le cadre de ce travail de recherche expérimentale l'Institut de la Science de Construction Edile a effectué des essais pour examiner les questions suivantes :

1. Dans quel degré l'effort de fracture probable, calculé selon les prescriptions du nouveau règlement du béton armé, est-il conforme, dans le cas de poutres cintrées, à l'effort de fracture réel.

2. En quel degré les prescriptions du règlement se rapportant à la position — limite de l'axe »*x*« — axe neutre — sont- elles correctes?

* La vérification des résultats expérimentaux est due à la collaboration de Pál *Gábory*

3. Comment peut-on déterminer l'effort de fracture de poutres armées avec des armatures construites en acier ne possédant aucun écoulement défini?

4. Quelle est la limite de l'emploi économique d'aciers à résistance spécialement élevée dans des conditions de béton armé ordinaire, c. à. d. non précontraint?

Prescriptions du règlement

Le point de départ de la théorie des fractures est que dans les poutres cintrées en béton armé qu'on rencontre dans la pratique, c'est la déformation de fracture qui se produit au moment de la fracture dans la fibre extrême du béton soumis à un effort de compression, et la raison à cause de laquelle la poutr s'abîme est que le béton est sollicité jusqu'à sa résistance de fracture, et, par conséquent, s'écroule. Selon le témoignage d'expériences effectuées, la

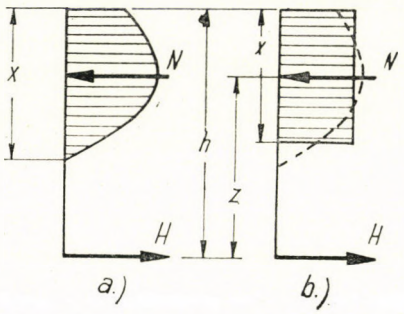


fig. 1. Répartition des forces intérieures des poutres cintrées dans l'état de fracture

répartition de la tension de la zone comprimée de béton dans les poutres cintrées en béton armé est telle que la montre la *fig. 1.a.* Les méthodes de calcul basées sur la théorie des fractures, prenant leur départ de cette condition fondamentale, emploient, pour simplifier la méthode de calcul, une certaine idéalisation du diagramme représenté sur la *fig.1.a.* de la répartition probable des tensions se présentant dans le béton. Quant à la manière dans laquelle on devra idéaliser le diagramme de tension, des différences d'opinion existent entre les investigateurs. Quelques uns remplacent le diagramme des tensions par une parabole du second degré, d' autres par un trapèze, et d'autres encore supposent une répartition uniforme des tensions, c. à. d. remplacent le diagramme par un rectangle *(fig.* 1.*b.)*.

Le dernier règlement concernant le béton armé établi dans l'U.R.S.S. choisit cette dernière solution, la plus simple de toutes, et c'est sur cette solution que le nouveau règlement hongrois est également basé.

Conformément, les prescriptions hongroises concernant le béton armé emploient, en connexion avec la méthode de l'établissement des dimensions basée sur la théorie des fractures, en cas de cintrage, les conditions suivantes :

a) La répartition des tensions de la zone comprimée du béton est uniforme, la grandeur de la tension est la tension-limite.

b) Dans la fibre extrême de la zone comprimée il se présente la déformation de fracture du béton.

c) Le béton n'absorbe point d'efforts de traction.

d) La section transversale qui a été plane originalement reste plane aussi dans la condition limite de fracture.

Au lieu de l'idée de la tension de fracture, le règlement introduit l'idée de la tension limite, comprenant par cette expression la condition-limite du béton et de l'acier, définie par le fait, que si cette condition se présente, la poutre se trouve justement dans la position-limite dans laquelle elle devient inutilisable pour les buts pratiques. Étant donné qu'une poutre cintrée en béton armé devient inutilisable pour les buts pratiques déjà au moment où sa flexion ou bien son état fissuré dépassent la limite permise, — bien que la poutre est encore à même d'absorber des charges ultérieures — la tension limite est moins élevée que la tension de fracture.

Tenant compte de ce principe, le règlement considère comme point de départ la résistance de cube à l'établissement des tensions-limites du béton. Quant à la résistance prismatique du béton, le règlement la considère en général comme montant à 5/6 de la résistance de cube, chiffre qui, dans le cas de bétons de haute résistance, se réduit à 2/3. Selon l'expérience recueillie de nombreux expériments comparatifs, la résistance prismatique (σ_p) peut être obtenue de la résistance de cube moyennant la formule empirique suivante, qui correspond aussi aux prescriptions du règlement :

$$\sigma_p = \frac{700 \cdot \sigma_K}{600 + \sigma_K} \tag{1}$$

d'où σ_K est la résistance de cube de béton, établie sur un cube d'une longueur d'arête de 20 cm.

Selon l'expérience recueillie par voie expérimentale, la résistance de compression de cintrage du béton est en général égale à sa résistance prismatique. C'est la résistance prismatique que le règlement considère comme résistance de fracture du béton. En outre, le règlement, en établissant les valeurs de la tension-limite, prend en considération aussi le fait que, entre la résistance de cube nominale (expérimentale) et la résistance de cube réelle du béton incorporé dans une construction, il peut exister une différence dans le sens défavorable à cette dernière.

La base de la tension-limite des armatures en acier est constituée par la limite d'écoulement dudit acier. Le règlement fixe la tension-limite de telle manière qu'il diminue la limite d'écoulement prescrite par les normes d'une tolérance de 10% et d'une inexactitude de calcul de 8%. Dans le cas des aciers à résistance particulièrement élevée, le règlement fixe une réduction pourcentuelle plus élevée que celle indiquée, vu que la qualité de ces aciers est moins sûre que celle des autres à résistance moins élevée. En outre, le règlement rend la tension-limite des armatures en acier dépendant aussi de la qualité du béton, puisque, — et ceci s'applique particulièrement aux aciers de haute résistance — dans un béton de qualité inférieure l'adhésion est faible, et on court le danger d'un glissement de l'armature en acier.

En conformité des principes et prescriptions réglementaires indiqués en ce qui précède, les tension-limites pourront être établies à l'aide des formules suivantes :

tension-limite du béton :

$$\sigma_{bh} = \frac{370 \cdot \sigma_K}{600 + \sigma_K} \tag{2}$$

tension-limite de l'acier :

$$\sigma_{vh} = 8600 \frac{100 + \sigma_K}{600 + \sigma_K} \leq 0{,}82\ \sigma_{vf} \tag{3}$$

(σ_{vf} est la limite d'écoulement de l'armature en acier.)

Le tableau I montre les valeurs des tensions-limites prescrites par le règlement pour les diverses qualités de béton et d'acier.

TABLEAU I.

Tensions-limites selon le règlement du béton et de l'acier

Béton		Acier	
σ_K	σ_{bh}	σ_{vf}	σ_{vh}
kg/cm²		kg/cm²	
140	70	2400	2000
220	100	3000	2500
300	125	3500	2800
400	150	5500	4400*)
			3800**)

Vu que, pour qu'une poutre cintrée soit économique, il est de rigueur que les armatures en acier soient utilisées jusqu'à la tension-limite, le règlement

*) Dans le cas de béton ayant une résistance de 400 kg/cm².

**) Dans le cas de béton ayant une résistance de 300 kg/cm².

prescrit la position limite de l'axe »x«, qui ne pourra pas être dépassée. Notamment, la tension qui se présente dans les armatures en acier tendus, ne peut atteindre la tension-limite que si la déformation de'armature en acier dépasse la déformation appartenant à la limite d'ecoulement inférieure. Et cela dépend, dans le cas d'un béton à déformation de fracture donnée, de la position de l'axe »x«, puisque la supposition Bernoulli est valable pratiquement jusqu'à la fracture et les déformations des fibres de la section transversale augmentent linéairement avec leurs distances de l'axe neutre. Conformément à ce qui a été dit, il résulte, comme la *fig. 2* l'illustre, dans le cas des aciers idéalement plastiques — pratiquement dans le cas des aciers possédant une limite d'écoulement — une

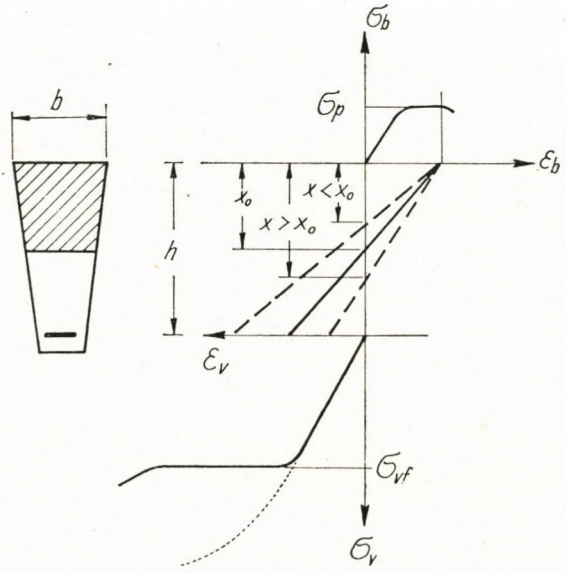


fig. 2. Relation entre la tension d'acier et la position de l'axe »x«

telle position-limite de l'axe »x«, que dans tous les cas où »x« est moins élevé, ($x < x_0$), l'acier sera toujours sollicité dans un degré égal jusqu'à la tension-limite, tandis que dans les cas ou ($x < x_0$), la tension se présentant dans l'acier sera toujours moins élevé, eque celui que nous venons de mentionner.

Dans le cas de matières ne possédant point d'écoulement, (voir la courbe de déformation tracée en pointillé sur la *fig. 2.*) la tension-limite se présentant dans l'acier sera, en cas de $x < x_0$ également, fonction de la relation x/h. Pour des raisons de sécurité, ces aciers de haute résistance, ne présentant point de phénomènes d'écoulement, sont également traités de la même manière, que les aciers possédant la propriété d'écoulement.

Une autre condition de tout ce que nous venons d'exposer est, que dans la fibre extrême du béton comprimé se présente toujours une déformation de fracture.

Cette supposition est, en effet, correcte, pourvu qu'on se passe des poutres armées d'une manière tout à fait faible, dans lesquelles, lors de la fracture, la tension des fibres d'acier survient dans la période d'affermissement, et, au cas échéant, il peut arriver que les fibres se déchirent. Et, en effet, on peut bien se passer des poutres de ce genre, puisque des poutres armées avec un pourcentage si faible ($< 0{,}15\%$) et qui présentent une fracture tellement raide, ne devront être produites en nul cas.

Les chiffres-limites de »x« — au-dessus desquelles il n'est plus économique de les fixer — sont indiqués par le règlement en fonction de la qualité du béton et de l'acier employés comme fonction de la hauteur utile : $x = \xi_0 h$

Les chiffres de ξ_0 sont indiqués dans le tableau II.

TABLEAU II.

Valeurs de $\xi_0 = \frac{x_0}{h}$

Limite d'écoulement de l'acier kg/cm²	Résistance de cube du béton kg/cm²			
	140	220	300	400
2400	0,50	0,50	0,50	non applicable
3500	0,50	0,50	0,50	0,45
5500	non applicable		0,45	0,40

Éprouvettes

L'examen de l'expérience des quatre buts de l'expérience indiqués dans l'introduction a été effectuée sur des poutres en béton armé à deux supports, lesquelles, en conformité des buts visés, ont présenté une variation d'une assez large étendue. Une partie (A—H) des éprouvettes a été préparée dans le laboratoire, une autre partie (I—R) a été préparée selon un programme déterminé d'avance dans une fabrique d'éléments de construction, tandis qu'une partie ultérieure (S—V) a été obtenue de parmi les produits de l'usine effectuant la préfabrication des poutres en béton armé. Les poutres préparées dans le laboratoire étaient de section transversale de forme rectangulaire et de forme »T«, tandis que les poutres mises à notre disposition par l'usine de préfabrication étaient partiellement de profil rectangulaire et partiellement de profil en forme de coupe. Les sections transversales de béton des poutres ainsi que leur écartement et l'esquisse de la charge sont indiquées sur les *figures 3. et 4.*

La résistance du béton des diverses poutres variait entre des limites écartées, la qualité et la quantité des armatures en acier variait également. Les données des poutres préparées dans le laboratoire sont comprises dans le tableau III, tandis que celles des poutres mises à notre disposition par l'usine de préfabrication sont comprises dans le tableau IV.

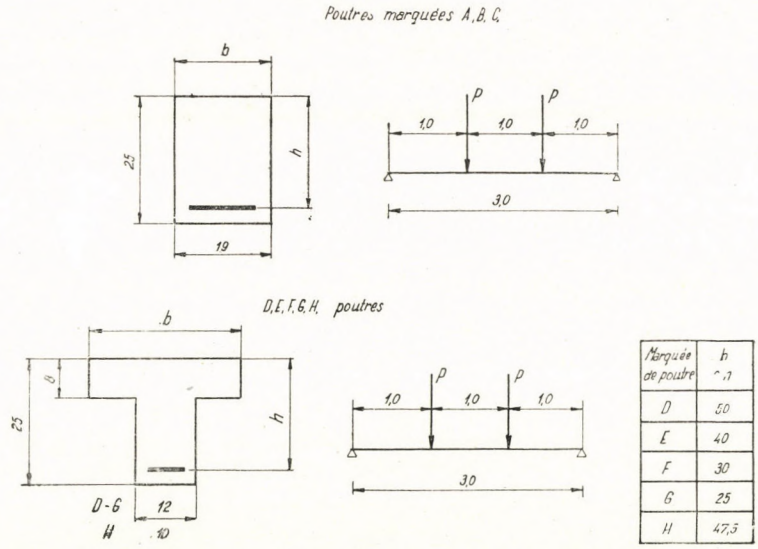


fig. 3. Poutres expérimentales préparées dans le laboratoire

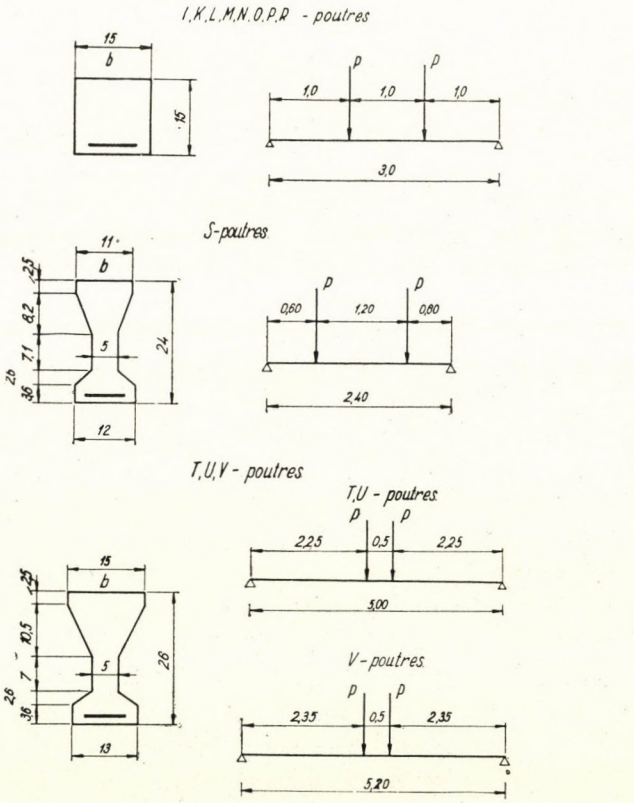


fig. 4. Poutres expérimentales préparées dans l'usine de préfabrication

TABLEAU III.

Données des poutres expérimentales préparées dans le laboratoire

Marque de la poutre	Φ mm	Aire (F_v) cm²	μ %	σ_{vf} kg/cm²	σ_s kg/cm²	σ_b kg/cm²	b cm	h cm
	de l'armature en acier							
A_1			0,244			154		22
A_2			0,239			174		22,5
A_3	5,1	1,02	0,244	8520	15 600	154	19	22
A_4			0,244			174		22
B_1			0,395			358		21,7
B_2	5,1	1,63	0,382	8520	15 600	315	19	22,5
B_3			0,374			358		23
B_4			0,395			315		21,7
C_1			0,508			333		22,5
C_2	8,3	2,17	0,485	6030	10 000	333	19	23,5
C_3			0,508			329		22,5
C_4			0,508			329		22,5
D_1	8,3	2,71	0,428	6030	10 000	171	50	21,5
D_2			0,428			171		21,5
E_1	8,3	2,71	0,501	6030	10 000	364	40	21,9
E_2			0,501			364		21,9
F_1	8,3	2,71	0,596	6030	10 000	304	30	23,6
F_2			0,590			304		23
G_1	8,3	2,71	0,656	6030	10 000	391	25	22,5
G_2			0,650			391		22
H_1	5,1	1,02	0,172	8520	15 600	170	47,5	23,1
H_2			0,172			170		22,9

La résistance à la compression des bétons a été établie au moment de l'essais sur des cubes ayant une longueur d'arête de 20 cm. Pour augmenter le degré de précision, les aires de section transversale des armatures en acier ont été calculées en mesurant les diamètres d'une manière exacte, vu que leurs diamètres n'étaient pas conformes aux chiffres nominaux, et variaient entre des limites étroites, même de fibre à fibre.

La qualité des armatures en acier a été déterminée sur des barres d'épreuve découpées des fils d'acier employés pour les armatures. Les courbes de tension-déformation des aciers employés sont indiquées sur la *fig. 5*. On voit de cette figure que trois sortes d'acier ont été employées au cours des essais : un acier (*a*) ayant une résistance de traction de 6,30 t/cm² et possédant un écoulement bien défini à une tension de 4,24 t/cm², un acier (*b*) d'une résistance de traction de 10,00 t/cm² qui ne possédait point d'écoulement bien défini, mais qui, à la tension correspondant à une déformation totale de 0,4%, présentait une rupture marquée dans la courbe ; et enfin un acier (*c*) tiré à froid, ayant un diamètre de 5,1 mm et une résistance de traction de 15,60 t/cm², dans lequel aucun phénomène d'écoulement ne s'est présenté. Les caractéristiques des aciers employés sont compris dans le *tableau V*. Dans le cas de ces denières deux

TABLEAU IV.

Données des poutres expérimentales de l'usine de préfabrication

Marque de la poutre	Φ mm	Aire (F_v) cm²	μ %	σ_{vf} kg/cm²	σ_3 kg/cm²	σ_b kg/cm²	b cm	h cm
	de l'armature en acier							
I_1		1,11	0,625			176	14,6	12,2
I_2		1,12	0,617			184	15	12,1
I_3		1,14	0,650			178	14,8	11,9
I_4	8,3	1,14	0,585	6030	10 000	159	15,3	12,7
I_5		1,21	0,600			161	15,2	13,3
I_6		1,13	0,616			203	15,3	12,0
K_1		1,65	0,856			151	14,8	13
K_2		1,67	0,900			152	15,1	12,3
K_3		1,67	0,885			182	14,5	13
K_4	8,3	1,78	0,953	6030	10 000	165	15,8	11,8
K_5		1,75	0,948			214	15,8	11,7
K_6		1,79	0,855			191	16	13,1
L_1		2,23	1,170			134	15,2	12,5
L_2		2,14	1,100			119	15,3	12,7
L_3		2,20	1,070			124	15,4	13,3
L_4		2,29	1,150			209	15,4	12,9
L_5	8,3	2,24	1,140	6030	10 000	272	15,7	12,5
L_6		2,27	1,180			132	15,3	12,6
L_7		2,27	1,200			146	14,9	12,7
L_8		2,23	1,110			137	15,2	13,2
M_1		2,94	1,350			82	15,4	14,1
M_2	8,3	2,94	1,465	6030	10 000	198	16,3	12,3
M_3		2,87	1,435			120	15,6	12,8
N_1		3,38	1,565			260	17	12,7
N_2	8,3	3,30	1,500	6030	10 000	290	16,3	13,5
N_3		3,40	1,610			298	15,8	13,4
O_1		1,61	0,717			286	16,9	13,3
O_2	8,3	1,62	0,804	6030	10 000	334	15,4	13,1
O_3		1,66	0,808			348	15,7	13,1
P_1		2,18	1,020			367	16,2	13,2
P_2	8,3	2,22	1,020	6030	10 000	367	16	13,5
P_3		2,18	0,972			328	16,5	13,6
R_1		3,33	1,550			372	16	13,4
R_2	8,3	3,43	1,660	6030	10 000	365	15,8	13,1
R_3		3,45	1,540			240	16,9	13,1
S_1								
S_2	8,3	3,38	1,395	4240	6300	400	11	22
S_3								
T_1								
T_2	1 pièce 12							
T_3	3 p. 8,3	2,76	0,770	6030	10 000	400	15	24
T_4								
U_1	2 p. 12							
U_2	3 p. 8,3	3,89	1,080	6030	10 000	400	15	24
U_3								
V_1	3 p. 12							
V_2	1 pièce 8,3	3,93	1,090	6030	10 000	400	15	24
V_3								

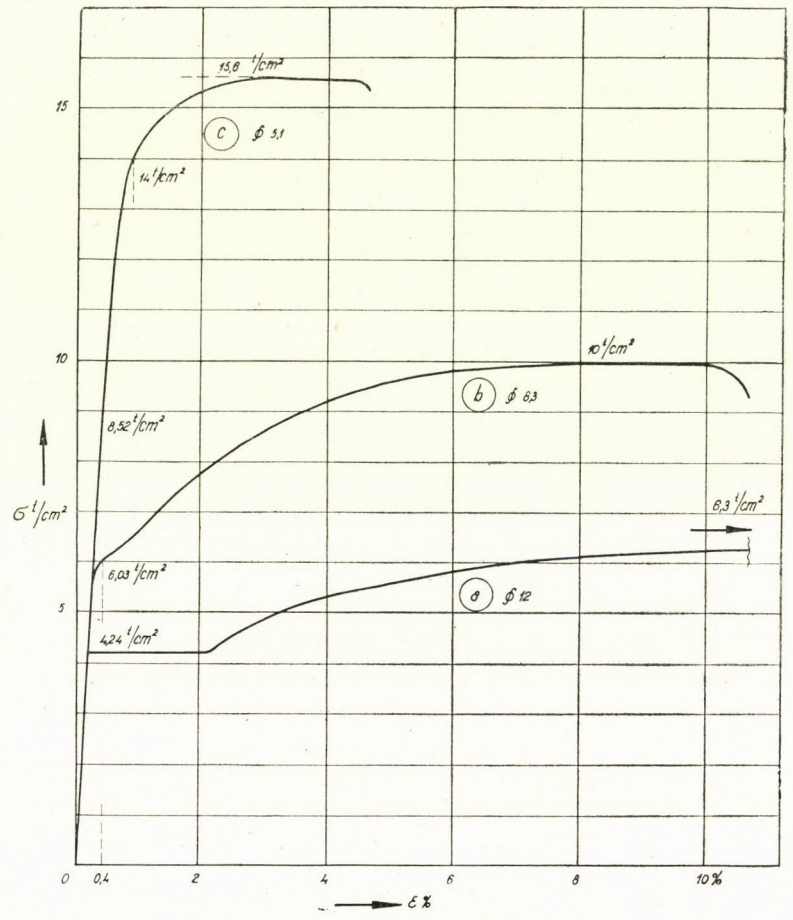


fig. 5. Courbes tension-déformation des aciers employés pour les expériments

sortes d'acier qui ne présentent aucun écoulement bien défini, c'est la tension appartenant à la déformation totale de 0,4% qui est indiquée dans le tableau comme limite d'écoulement.

TABLEAU V.

Caractéristiques de qualité des aciers

	Marque de l'acier		
	a	b	c
Limite d'écoulement (limite de déformation de 0,4%), t/cm²	4,24	6,03	8,52
Résistance à la traction t/cm²	6,30	10,00	15,60
Déformation de rupture, %	20,4	10,6	4,6
Contraction, %	49,4	20,0	41,7
Module d'élasticité, 10^6 kg/cm²	2,17	2,04	1,84

L'agrégat des bétons se composait des cailloux sableux d'une granulation mixte préparée en conformité de la résistance demandée au béton, en combinant plusieurs fractions de granulation selon une courbe de granulation définie.

Le pourcentage d'acier (μ) des poutres est exprimé dans les *tableaux III et IV*, en pourcents de l'aire de section transversale totale du béton. Pour augmenter la précision du calcul, le calcul de la section transversale du béton n'a pas été effectué avec les chiffres nominaux, mais avec les dimensions de section transversale établies par la mesure effectuée après l'essais dans la vicinité de la section transversale fracturée. Comme hauteur de la section transversale du béton on n'a pas pris la hauteur totale, mais la hauteur active, c. à-d. la distance entre le point de gravité des armatures en acier tendu de l'extrémité soumise à la compression. Les chiffres établis moyennant mesures directes de la largeur de la section transversale et de la hauteur active sont indiquées dans les deux dernières colonnes des *tableaux III et IV*.

Résultat des essais

Mise en oeuvre des essais. Dans les essais on a effectué l'observation exacte de la manière de destruction et la détermination de la charge de rupture. Les poutres préparées dans le laboratoire ont en outre été soumises à des chargements répétées, et les symptômes de la formation et du développement des fissures ont été observés soigneusement.

Le but des chargements répétés était d'observer dans quel degré la fréquence de la charge influence le développement des fissures, et si telle répétition ne cause pas le déserrage des armatures en acier et leur glissement dans le béton. Vu que l'installation expérimentale n'a pas rendu possible une répétition trop fréquente du chargement, la grosseur de la charge devait être choisie de telle manière qu'on puisse produire dans l'acier une tension dépassant considérablement la tension produite en général par le poids constant et la charge utile.

Ces poutres ont, en conformité de ce qui a été dit, été soumises à une charge répétée 25 fois entre 0 et P_k, aux chiffres de charge (P_k) auxquelles la tension dans les armatures en acier calculée sur la base d'élasticité (n-15) s'élevait à 4500 kg/cm^2.

Toutes les poutres expérimentales furent chargées par deux forces. La disposition des forces de charge et des écartements des poutres sont indiquées sur les *figures 3. et 4.*

Les moments de fracture des poutres et la cause de la fracture, ainsi que les phénomènes de fracture sont indiqués dans le *tableau VI*. Dans le cas des poutres où le tableau indique, comme cause de la fracture, le glissement des armatures en acier, la fracture s'est produite de telle manière qu'en conséquence du glissement des armatures en acier une fissure s'est soudainement ouverte aux environs du centre de l'ouverture de la poutre et le béton s'est écroulé.

TABLEAU VI.

Moment de fracture des poutres et cause de la fracture

Marque de la poutre	M_t kgm	Cause de la fracture	Marque de la poutre	M_t kgm	Cause de la fracture
A_1	2189	Cisaillage	L_1	933	Glissement de l'armature en acier
A_2	2730	Glissement de l'armature en acier, cisaillage	L_2	831	« «
A_3	2790		L_3	958	« «
A_4	3030	Cisaillage	L_4	1273	« «
B_1	3630	Glissement de l'armature en acier, cisaillage	L_5	1563	Cintrage
B_2	3830	Cisaillage	L_6	728	Glissement de l'armature en acier
B_3	4800	Cisaillage	L_7	803	« «
B_4	4900	Glissement de l'armature en acier, cisaillage	L_8	813	« «
			M_1	756	Glissement de l'armature en acier
C_1	3040	Cintrage	M_2	1523	« «
C_2	3130	«	M_3	945	« «
C_3	3330	«			
C_4	3130	«	N_1	1878	Cintrage
			N_2	2211	«
D_1	3221	Cintrage	N_3	2211	«
D_2	3421	«			
			O_1	1338	Cintrage
E_1	3595	Cintrage	O_2	1408	«
E_2	3595	«	O_3	1493	«
F_1	3783	Cisaillement	P_1	1753	Cintrage
F_2	3583	«	P_2	1808	«
			P_3	1683	«
G_1	3571	Cintrage			
G_2	3571	«	R_1	2093	Cintrage
			R_2	1953	«
H_1	2901	L'acier s'est compu*)	R_3	1348	Glissement de l'armature en acier
H_2	3451	Cintrage			
I_1	716	Glissement de l'armature en acier	S_1	3390	Cintrage
			S_2	3510	«
I_2	745	Cintrage	S_3	3420	«
I_3	703	«			
I_4	761	Glissement de l'armature en acier	T_1	3490	Cisaillement
I_5	588	Glissement de l'armature en acier	T_2	3490	Cintrage
I_6	703	Glissement de l'armature en acier	T_3	3040	Cisaillement
			U_1	4910	Cisaillement
K_1	823	Glissement de l'armature en acier	U_2	5060	Cintrage
K_2	773	Glissement de l'armature en acier	U_3	5060	«
K_3	1038	Glissement de l'armature en acier			
K_4	888	Glissement de l'armature en acier	V_1	3880	Cintrage
K_5	1223	Cintrage	V_2	4350	Cintrage et glissement de l'armature en acier
K_6	1286	Cintrage	V_3	5300	« «

*) La répétition effectuée 25 fois de la charge n'a pas eu lieu à une tension d'acier de 4500 kg/cm², mais à une tension d'acier de 10 680 kg/cm². L'armature d'acier a présenté un fort glissement ; lors de la fracture les armatures en acier se sont compues. La cause du chiffre peu élevé du moment de fracture consiste probablement dans le fait que la fatigue a été effectuée à une charge élevée.

La *fig. 6.* représente une poutre expérimentale (C_4) détruite par cintrage, tandis que la *fig. 7.* représente une poutre expérimentale (B_1) détruite par cisaillement. Les *fig. 8. et 9.* montrent, pour ces mêmes deux poutres, les environs des sections transversales de fracture.

Moment de fracture calculé des poutres. Dans le cas des poutres expérimentales détruites par cintrage, on peut calculer sur la base de la théorie de plasticité leur moment de fracture probable. En comparant les valeurs ainsi calculées avec les moments de fracture réels, ont peut se former une idée de l'exactitude des conditions de départ de la théorie des fractures.

Dans la détermination des moments de fracture, on peut partir de la supposition de l'équilibre des forces intérieures. La condition d'équilibre

$$N = H$$

(N — force de compression, H — force tractive), dans le cas des poutres de section transversale ayant la forme d'un rectangle, ainsi que dans le cas des poutres à profil »T«, qui également peuvent être considérées comme ayant un profil de forme rectangulaire, peut être exprimée de la manière suivante, puisque lors de la fracture l'axe »x«, coïncide avec la plaque de tête :

$$b \cdot x \cdot \sigma_p = F_v \, \sigma_{vf} \tag{4}$$

si l'on suppose que lors de la fracture il se produit dans le béton sa résistance prismatique (σ_p) et dans l'acier la limite d'écoulement (σ_{vf}) de ce dernier. Fv est l'aire de section transversale des armatures en acier. De l'équation 4 ont peut calculer la position de l'axe »x« :

$$x = \frac{F_v \cdot \sigma_{vf}}{b \cdot \sigma_p} \tag{5}$$

et si l'on connait ce chiffre, le moment de fracture probable est le suivant :

$$M_o = F_v \cdot \sigma_{vf} \left(h - \frac{x}{2}\right) \tag{6}$$

Quant aux poutres $S - V$ de profil à forme de coupe, on ne pouvait les considérer comme ayant une forme rectangulaire puisque dans ces poutres la zone comprimée à la forme d'un trapèze ou accède celle d'un trapèze. Dans le calcul de ces poutres il faut calculer l'aire du béton comprimé d'une autre manière. Pour simplifier le calcul, on a, en connexion du profil de ces poutres, fait la supposition approximative représentée sur la *fig. 10.* selon laquelle les deux côtés du profil se rencontrent dans la ligne de poids des armatures en acier soumises à des efforts tractifs, c'est-à-dire que la hauteur du triangle ainsi formé est justement égale à la hauteur active du profil. Cette tentative d'approche montre une très bonne conformité avec la situation réelle. Dans ce cas la force compressive est la suivante :

$$N = b \cdot x \left(1 - \frac{x}{2h}\right) \sigma_p \tag{7}$$

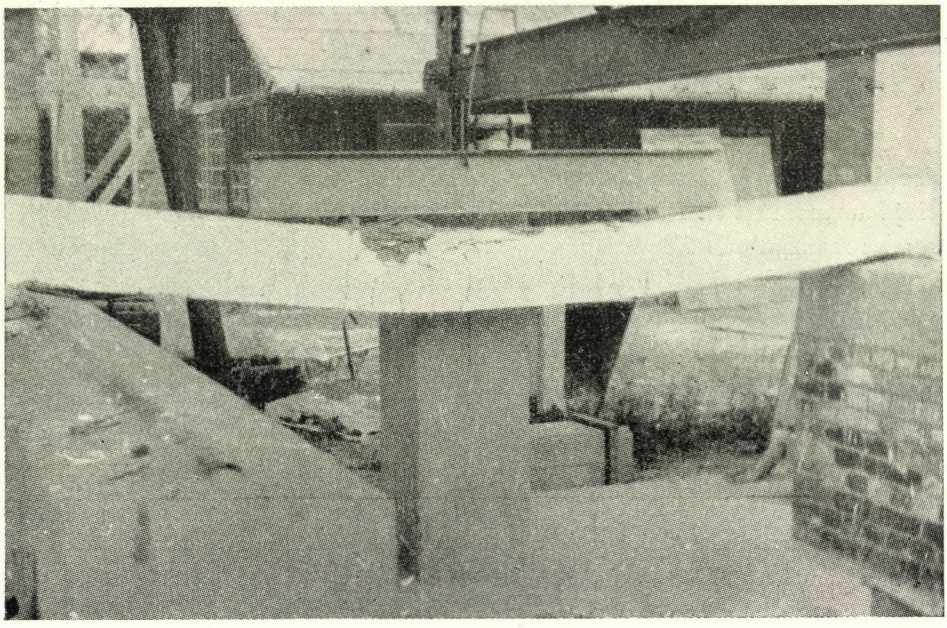


fig. 6. La poutre marque C_4 après l'essai

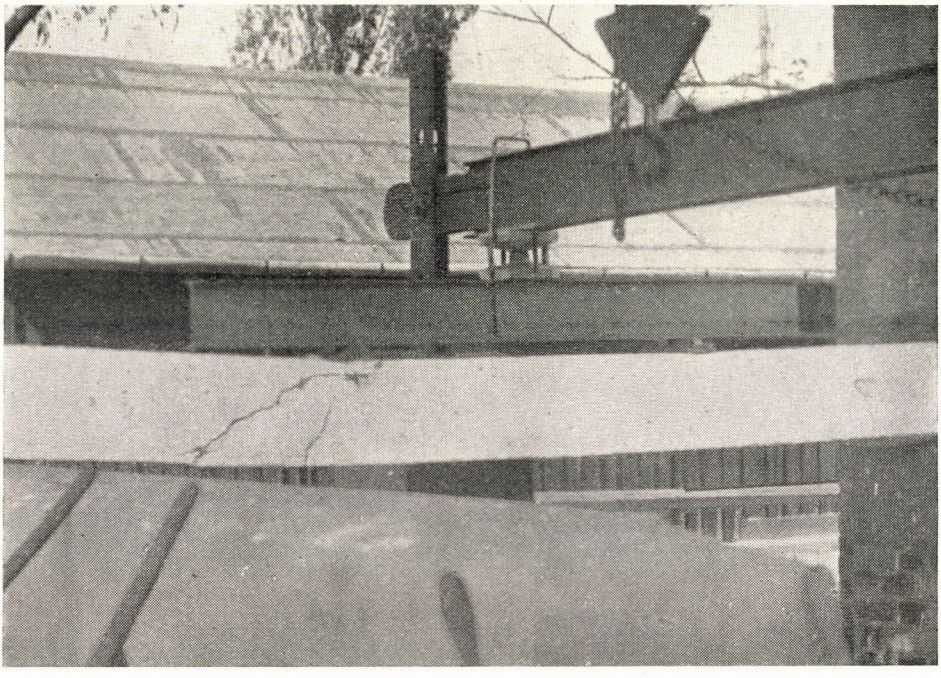


fig. 7. La poutre marque B_1 après l'essai

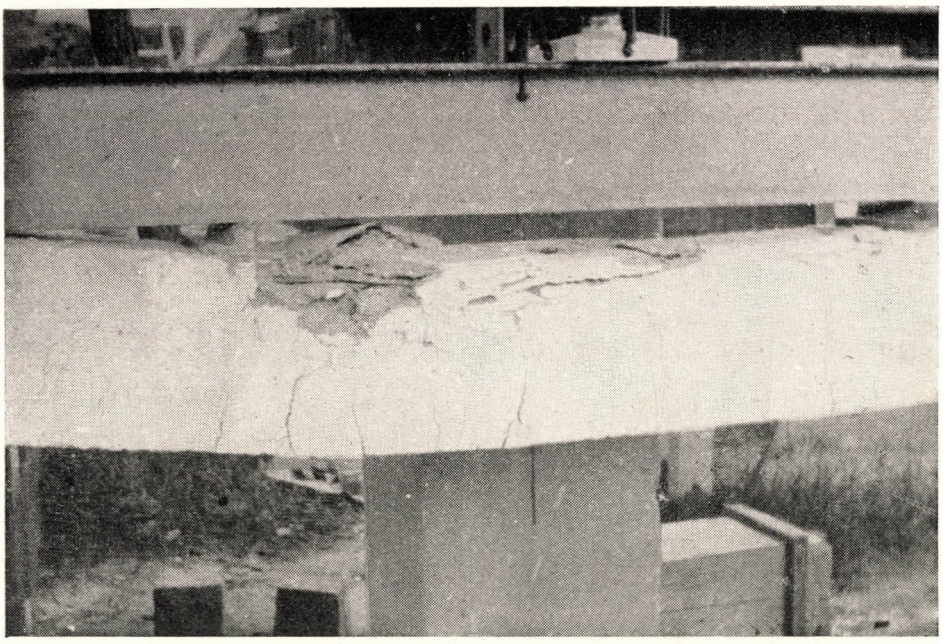


fig. 8. Détail cassé de la poutre marque C_4

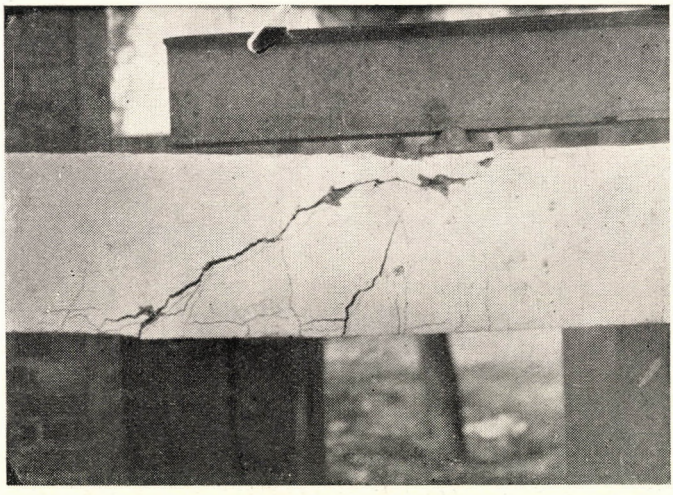


fig. 9. Détail cassé de la poutre marque B_1

tandis que le bras du levier des forces intérieures est

$$Z = h \left(1 - \frac{3h - 2x}{6h - 3x}\right) \tag{8}$$

D'ailleurs, le cours du calcul est entièrement identique au précédent.

La supposition selon laquelle le calcul est basé sur la résistance prismatique du béton et sur la limite d'écoulement de l'acier, est bien fondée. Notamment, lors de la fracture le béton s'écroule même au cas où c'est l'écoulement de l'acier qui représente la cause directe de la fracture ; donc le béton est sollicité

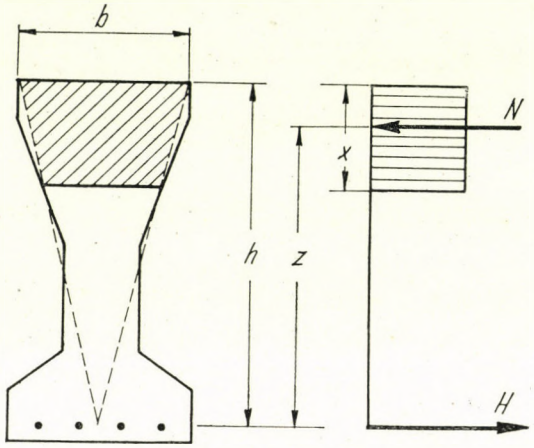


fig. 10. Calcul du bras de levier des forces intérieures des poutres à profil en forme de coupe

jusqu'à sa résistance de fracture. Dans le cas des poutres expérimentales c'étaient toujours de grandes déformations de l'acier qui ont mis en marche la fracture, donc il est correct de prendre en considération la tension d'écoulement en connexion de la tension de l'acier.

La résistance prismatique du béton a été calculée sur la base de sa résistance de cube, moyennant la formule 1, tandis que les tensions-limite du béton et de l'acier ont été prises en considération dans les calculs avec les chiffres calculés moyennant les formules 2 et 3. Calculant avec ces chiffres, on a déterminé les moments de fracture (M_o) probables des poutres expérimentales, et en outre on a calculé les tensions-limites selon ce règlement, c. à-d. les moments-limites (M_h) qui représentent véritablement des moments de fracture calculés avec un certain coefficient de sécurité. Le calcul du moment-limite s'effectue d'une manière identique au calcul du moment de fracture, avec la seule différence qu'au lieu des tensions de fracture du béton et de l'acier il faut placer leur résistance-limite.

Les valeurs calculeés de cette manière sont indiqués dans le *tableau VII*. Sont également indiqués dans ce tableau les moments de fracture réels (M_t), et en outre les chiffres de proportion M_t/M_o et M_t/M_h qui permettent de se former une idée sur l'exactitude du point de vue de principe, des calculs, sur le fait qu'il est correct de faire usage des tensions du béton et de l'acier actuellement pris en calcul, et enfin, sur la précision du calcul entier.

TABLEAU VII.

Moment de fracture et moment de limite calculés des poutres expérimentales

Marque de la poutre	σ_p kg/cm²	σ_{vf} kg/cm²	$\frac{x}{h}$	M_t kgm	M_o kgm	M_h kgm	$\frac{M_t}{M_o}$	$\frac{M_t}{M_h}$
C_1	250		0,139	3040	2740	1600	1,11	1,90
C_2	250	6030	0,133	3130	2800	1700	1,12	1,84
C_3	248		0,154	3330	2720	1790	1,22	1,86
C_4	248		0,154	3130	2720	1790	1,15	1,75
D_1	155	6030	0,093	3221	3400	1670	0,945	1,93
D_2	155		0,093	3421	3400	1670	1,007	2,05
E_1	264	6030	0,092	3595	3400	2360	1,055	1,52
E_2	264		0,092	3595	3400	2360	1,055	1,52
G_1	276		0,141	3571	3500	2420	1,02	1,48
G_2	276	6030	0,144	3571	3400	2350	1,05	1,52
H_1	154		0,346	2901	1940	640	1,50	4,55
		8520			(3180)		(0,915)	
		(14 000)			1940	640	1,77	5,40
H_2	154		0,346	3451	(3180)		(1,085)	
I_2	165	6030	0,218	745	715	373	1,045	1,92
I_3	165		0,232	703	720	366	0,98	2,00
K_5	208		0,306	1223	1070	615	1,14	1,99
K_6	186	6030	0,288	1286	1240	670	1,035	1,92
L_5	219	6030	0,360	1563	1420	845	1,10	1,85
N_1	212		0,500	1878	1940	1150	0,97	1,645
N_2	228	6030	0,466	2211	2150	1280	1,03	1,725
N_3	232		0,497	2211	2170	1300	1,02	1,700
O_1	226		0,224	1338	1160	710	1,15	1,88
O_2	251	6030	0,240	1408	1150	750	1,22	1,87
O_3	257		0,242	1493	1180	775	1,26	1,92
P_1	266		0,295	1753	1520	1010	1,155	1,74
P_2	266	6030	0,295	1808	1570	1050	1,15	1,72
P_3	247		0,294	1683	1560	1000	1,08	1,68
R_1	268		0,456	2093	2180	1450	0,955	1,44
R_2	265	6030	0,488	1953	2190	1410	0,895	1,38
S_1	280		0,416	3390			1,24	1,61
S_2	280	4240	0,416	3510	2740	2110	1,285	1,67
S_3	280		0,416	3420			1,25	1,62
T_2	280	6030	0,199	3490	3620	2580	0,965	1,35
U_2	280	6030	0,395	5060	4890	3350	1,035	1,51
U_3	280		0,395	5060	4890	3350	1,035	1,51
V_1				3880			0,923	1,155
V_2	280	6030	0,400	4350	4200	3360	1,036	1,295
V_3				5300			1,26	1,58

Selon les chiffres du tableau, le moment de fracture calculé (M_o) variait entre 0,895 et 1,285 fois le moment de fracture réel (M_t). Prenant la moyenne de la totalité des poutres détruites par cintrage (37 poutres) le moment de fracture réel dépassait le moment de fracture calculé de 7,85%. Ce résultat témoigne de la correctitude du calcul. Le fait que c'est le moment de fracture réel qui se montrait un peu plus élevé que le moment calculé, est bien motivé, vu que dans les calculs c'était la limite d'écoulement inférieure des armatures en acier qui figurait comme tension de fracture des armatures en acier, limite à laquelle les grandes déformations plastiques commencent.

Les moments de fracture réels, fluctuant entre des limites assez larges, se sont présentées comme se montant à 1,15—2,05 fois les moments-limites calculés selon le règlement ; en moyenne de la totalité des poutres ce chiffre de proportion résultait à 1,69.

Dans le cas des poutres marquées H_1 et H_2 le chiffre de M_o fut calculé aussi bien avec l'effort d'écoulement (8520 kg/cm^2) équivalent appartenant à la déformation de 0,4%, qu'avec le chiffre de tension de 14 000 kg/cm^2. De ces deux chiffres calculés ce sout les moments calculés avec une tension de l'acier de 14 000 kg/cm^2 qu'il fallait accepter comme corrects, puisque dans le cas d'un acier ne présentant point de phénomène d'ècoulement du tout, la limite de la déformation totale de 0,4% n'est pas un point caractéristique de la courbe déformation-tension. Dans le cas présent c'est le point appartenant à la tension de 14 000 kg/cm^2 qui peut être considéré comme le point caractéristique où dans le diagramme les déformations constantes de grandeur considérable commencent. On peut aussi voir du tableau que tandis que les moments de fracture calculés avec la tension d'écoulement équivalente dévient entièrement de la valeur réelle et se placent fortement en dehors des proportions obtenues dans les autres poutres, les moments calculés avec une tension de 14 000 kg/cm^2 montrent une bonne conformité comparés au résultat des autres poutres.

Dans le cas des poutres marquées H_1 et H_2, armées avec des aciers d'une résistance de traction de 15 600 kg/cm^2, les moments-limites calculés se montraient beaucoup plus faibles comparés aux moments de fracture réels, que dans le cas des autres poutres armées avec des aciers d'une résistance moins élevée. La cause de ce phénomène est que le règlement ne permet pas le sollicitation de ces aciers de résistance particulièrement élevée dans un tel degré comme les aciers de résistance moins élevée, et fixe leur résistance-limite à un chiffre relativement plus bas. Notamment, les tensions d'acier excessivement élevées sont accompagnées par des déformations relativement grandes et avec un haut degré de formation de fissures sur la poutre, et du point de vue pratique ce n'est pas la sécurité de fracture, mais la sécurité du degré de formation de fissures qui est décisive dans ces cas.

Les résultats des essais mentionnés ci-dessus démontrent que les conditions de départ de la méthode de calcul du moment de fracture sont correctes.

Il faut aussi considérer comme correctes les tensions-limites prescrites par le règlement, malgré la déviation dans la proportion de 1,69 qui, à première vue pourrait paraître grande, notamment si l'on tient compte des grandes dispersions se présentant dans la résistance des bétons, qui trouvent leur expression dans la grande fluctuation des déviations.

Tension se présentant dans les armatures en acier lors de la fracture. Il est aussi intéressant d'examiner la mesure, de la tension dans les armatures en acier lors de la fracture des poutres. Pour cette raison, on a dans le cas des poutres détruites par cintrage, calculé la tension d'acier réelle avec la répartition des tensions selon la *fig.* 1/*b*, prenant comme point de départ le moment de fracture réel des poutres. Vu la condition de fracture des poutres, le béton est sollicitè jusqu'à sa résistance de fracture. C'est pourquoi il est correct de partir, pour ces calculs, de la supposition que dans cette condition la tension est égale à la résistance prismatique (σ_p). Sur la base de ces conditions de départ on pourra, dans le cas des poutres à section transversale à profil rectangulaire ou »*T*«, prendre comme point de départ la relation du moment de fracture selon l'équation 6, avec la seule déviation qu' au lieu de M_0 c'est le moment de fracture réel qui figure dans cette équation, c'est-à-dire

$$M_t = b \cdot x \left(h - \frac{x}{2}\right) \sigma_p \tag{9}$$

ou respectivement, dans le cas des poutres marque $S - V$:

$$M_t = b \cdot h \cdot x \left(1 - \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{3h - 2x}{6h - 3x}\right) \sigma_p \tag{10}$$

Déterminant de ces équations le chiffre x et ensuite le bras de levier z des forces intérieures :
dans le cas des profiles rectangulaires et »*T*«

$$z = h - \frac{x}{2} \tag{11}$$

dans le cas de profiles à forme de coupe

$$z = h \left(1 - \frac{3h - 2x}{6h - 3x}\right) \tag{12}$$

le chiffre réel de la tension de l'acier peut se calculer de la manière suivante :

$$\sigma_v = \frac{M_t}{F_v Z} \tag{13}$$

Les tensions d'acier calculées de cette manière donnent une idée concernant la question combien les tensions d'acier auxquelles la fracture réelle s'est accomplie étaient plus élevées que la limite d'écoulement inférieure de l'acier. En ce qui concerne d'autre part les aciers à haute résistance ne présentant point de

phénomène d'écoulement on obtient une idée concernant la question quelle est la tension d'acier qui cause la fracture de la poutre.

Il va sans dire que la séquence des idées exposées plus haut n'est valable que si la poutre est détruite par cintrage. Dans le cas des poutres détruites par suite d'un glissement de l'acier, en conséquence de cisaillement ou de quelqu'autre insuffisance locale, la condition de départ selon laquelle c'était une tension correspondante à la résistance de fracture qui se présentait dans le béton lors de la fracture, n'est pas satisfaite, et par conséquent la valeur de cette tension ne peut pas être déterminé même approximativement. C'est pourquoi ce n'est que dans le cas des poutres détruites par cintrage que le calcul des tensions de l'acier peut être basé sur le moment de fracture d'une manière certaine.

Les tensions d'acier se présentant au moment de la fracture, calculées selon ce qui a été dit plus haut dans le cas des poutres détruites par cintrage, sont indiquées dans le *tableau VIII*.

La dernière colonne du tableau montre la relation σ_v/σ_{vf}. De cette colonne on voit qu'à part d'un petit nombre d'exceptions la tension d'acier réelle résultait un peu plus élevée que la tension d'écoulement. Dans le cas des poutres dans lesquelles ces chiffres de proportions restent au-dessous de 1,0, la déviation est dans la plupart des cas tellement faible — ce qui se présente aussi dans la limite d'écoulement des aciers — que ce chiffre peut être pratiquement pris comme 1.0. Dans les cas dans lesquels ce chiffre de proportion diffère de l'unité en montant ou en descendant dans un degré plus élevé, c'est la dispersion inévitable à laquelle il faut attribuer la divergence. Dans le cas où la tension d'acier réelle est considérablement plus faible que la tension d'écoulement on peut aussi supposer que c'est en effet le glissement de l'acier qui devra avoir causé la fracture, et que c'est seulement au cours de l'expérience que le phénomène d'un tel glissement ne pouvait être observé d'une manière indéniable.

Dans le cas des deux poutres H_1 et H_2 armées avec de l'acier d'une résistance de 15 600 kg/cm^2, la tension d'acier moyenne calculée s'élève à 14 130 kg/cm^2, ce qui prouve la correctitude du chiffre limite de 1400 kg/cm^2 pris en considération dans le calcul du moment de fracture.

Degré dans lequel les poutres présentent des fissures. Le degré dans lequel les constructions de ciment armé peuvent être soumises à des efforts peut être déterminé non seulement par leur capacité de charge, mais aussi par leurs changements inconciliables avec le but pour lequel ces constructions sont employées (flexions excessives, haut degré de formation de fissures). Le degré dans lequel une poutre cintrée présente des fissures dépend des déformations des armatures en acier, supposé que l'adhésion entre le béton et l'armature en acier est bonne et que ce n'est pas le glissement de l'armature en acier qui cause les grandes fissures.

Les déformations des armatures en acier pendant les efforts précédant l'écoulement sont plus ou moins proportionnelles à la tension. Le module d'élasticité

TABLEAU VIII.

Tension d'acier calculée au moment de la fracture

Marque de la poutre	σ_p kg/cm²	σ_{vf} kg/cm²	σ_v kg/cm²	$\frac{\sigma_v}{\sigma_{vf}}$	$\frac{x}{h}$
C_1	250		6680	1,108	0,136
C_2	250	6030	6580	1,09	0,127
C_3	248		7380	1,215	0,152
C_4	248		6900	1,142	0,142
D_1	155	6030	5820	0,965	0,095
D_2	155		6190	1,025	0,100
E_1	264	6030	5800	0,963	0,07
E_2	264		6280	1,043	0,073
G_1	276	6030	6180	1,023	0,110
G_2	276		6370	1,055	0,115
H_1	154	8520	12 800		0,078
H_2	154	(14 000)	15 460		0,095
I_2	169	6030	6250	1,035	0,225
I_3	165		6020	1,000	0,230
K_5	208	6030	7430	1,23	0,314
K_6	186		6250	1,035	0,286
L_5	219	6030	7150	1,185	0,344
N_1	212		5350	0,89	0,390
N_2	228	6030	6200	1,03	0,397
N_3	232		6100	1,01	0,410
O_1	226		7020	1,165	0,215
O_2	251	6030	7520	1,245	0,234
O_3	257		7800	1,292	0,238
P_1	266		7000	1,160	0,262
P_2	266	6030	7000	1,160	0,262
P_3	247		6480	1,075	0,248
R_1	268		5550	0,923	0,312
R_2	265	6030	5170	0,860	0,314
S_1			5260	1,24	0,268
S_2	280	4240	5550	1,31	0,278
S_3			5320	1,255	0,267
T_2	280	6030	5720	0,95	0,155
U_2	280	6030	6150	1,02	0,235
U_3			6150	1,02	0,235
V_1			4520	0,75	0,178
V_2	280	6030	5120	0,85	0,200
V_3			6430	1,065	0,250

des aciers employés pour les constructions en béton armé peut être considéré à peu près constant. Conformément, le degré dans lequel le béton présente des fissures se trouve en proportion directe avec la tension des armatures en acier.

Lors de la fracture des poutres marquées *A–H* préparées dans le laboratoire, la formation de fissures, a fait également l'objet d'observations soigneuses. Selon ces résultats d'expérience la liaison superficielle entre le béton et l'armature d'acier pouvait, jusqu'à une tension d'acier calculée sur la base d'élasticité de 4500 kg/cm², être considérée satisfaisante ce qui a été prouvé par la distribution uniforme et la petite distance des fissures. Dans le cas de ces poutres les fissures se sont présentées dans des intervalles de 8—10 cm, et leur largeur moyenne pouvait être estimée à 0,15 mm, à la tension de 4500 kg/cm². Sous l'action des charges répétées 25 fois à ce niveau de chargement, les fissures n'ont pas présenté un développement appréciable.

Si l'on suppose que sur une certaine longueur la largeur totale des fissures doit être égale à la déformation causée par la tension de l'armature en acier de longueur égale à ladite longueur, insérée dans celle-ci, on pourra approximativement calculer la largeur moyenne des fissures.

Grâce à l'arrangement expérimental, le moment de cintrage sur la section d'un mètre de longueur entre les deux forces attaquantes, et par conséquent la tension tractive produite dans les armatures en acier sont constantes, si on néglige le moment de cintrage peu élevé, causé par le poids mort. Et ce dernier peut en effet être négligé en vue de la charge élevée. Prenons le module d'élasticité des armatures en acier au chiffre rond de 2 000 000 kg/cm², la déformation totale des armatures en acier sur la section d'un mètre de longueur, soumises à un effort constant peut être calculée, supposant une tension de 4500 kg/cm² dans l'acier, de la relation suivante :

$$1000\ \varepsilon = 1000\ \frac{\sigma}{E} = 1000\ \frac{4500}{2\,000\,000} = 2{,}25\ \text{mm}.$$

La largeur totale des 10—12 fissures qui se sont formées sur la section d'un mètre de longueur s'élève à 1,5—1,9 mm, c'est-à-dire à un peu moins que la déformation causée par la tension de l'acier. Ceci s'explique cependant par le fait, que dans un degré peu élevé le béton lui-même se déforme également, ainsi que par le fait confirmé par les nombreuses expériences, que dans les armatures en acier la tension réelle reste toujours un peu au-dessous de la tension calculée sur la base de l'élasticité.

Des fissures d'une largeur de 0,15—0,2 mm ne sont plus tolérables du point de vue de l'utilisabilité des constructions en béton armé. Cet état de formation de fissures sur les poutres peut être considéré comme position limite du point de vue de l'utilisabilité, c'est-à-dire l'effort produisant cette condition peut être considéré comme constituant l'effort limite.

Puisque le règlement concernant le béton armé établit les dimensions sur la base de cet effort-limite, la tension qui se produit dans les armatures en acier ne devra pas dépasser ce chiffre, sans regard au fait que les limites d'écoulement de l'acier pourraient au cas échéant être considérablement plus élevées.

Tout ce qui a été dit prouve donc que dans des constructions en béton armé qui ne sont pas précontraintes, il est préférable d'employer des armatures en acier dont la résistance est telle que leur limite d'écoulement ne dépasse pas le chiffre dont la tension limite conforme calculée selon la formule 3 est tout au plus de 4500 kg/cm^2. Des aciers dont la résistance est plus élevée ne peuvent pas être utilisés dans leur valeur totale, vu la forte formation de fissures se présentant sur les poutres en béton en cas de la forte déformation de l'acier.

Position de l'axe »x«. Dans les tableaux VII et VIII sont aussi indiqués les chiffres x/h calculés pour la situation calculée sur la base du moment de fracture réel (M_t), ainsi que pour la position limite calculée sur la base de la résistance de fracture supposée du béton et de l'acier. Des chiffres de ce tableau, on peut constater que le chiffre de $\xi = x/h$ n'a nul part atteint les chiffres ξ_0 du tableau II et ne s'est rapproché de ces chiffres que dans le cas des poutres expérimentales armées avec le plus haut pourcentage d'armature.

Sur la base de ce fait, la position-limite de l'axe »x« prescrite par le règlement peut être considérée comme la limite de l'établissement économique des dimensions.

CONCLUSIONS

Des résultas de l'essai ont peut tirer les conclusions suivantes :

1. Dans le cas des poutres en béton armé cintrées, la résistance à la fracture du béton est avec une bonne approximation égale à la résistance prismatique du béton.

2. Dans le cas d'armatures en acier présentant un écoulement, on peut — avec l'exception des poutres armées avec un pourcentage d'armature extrêmement faible qui ne se rencontre pas en pratique — considérer la limite d'écoulement inférieure comme la tension d'acier produisant la fracture de la poutre. Dans le cas d'acier ne présentant point d'écoulement, le point du diagramme tension-déformation qu'il faut considérer comme tension produisant la fracture, est celui auquel il se présente dans le diagramme un changement de direction plus marqué, c'est-à-dire où les grandes déformations plastiques commencent.

3. Dans le cas de poutres cintrées, la supposition selon laquelle au moment de la fracture les tensions de compression du bétor sont réparties uniformément, est pratiquement correcte. Les moments de fracture calculés en tenant comte de ce fait et des tensions de fracture mentionnés dans les alinéas 1 et 2, se trouvent en bonne conformité avec le moment de fracture réel.

4. C'est en général la moitié de la hauteur active (h) qui peut être considérée la position limite de l'axe »x« c'est-à-dire de l'axe neutre ; dans le cas des bétons à haute résistance et des aciers à hauta résistance, il est désirable de diminuer ce chiffre à 0,4 h. Si le chiffre de »x« dépasse les chiffres indiqués, le projet n'est pas économique.

5. L'emploi d'aciers d'une résistance à la traction dépassant 5,000 kg/cm^2 dans des constructions en béton armé construit de béton dont la résistance de cube reste au-dessous de 200 kg/cm^2, n'est pas économique. Les bétons dont la résistance est inférieure à ce chiffre n'assure pas l'adhésion nécessaire des armatures en acier dans le béton ; il peut se produire un glissement prématuré des armatures en acier. Par conséquent, des aciers de haute résistance ne peuvent pas être sollicités jusqu'à leur valeur totale dans le béton de résistance peu élevée.

6. Dans des constructions à béton armé ordinaires — non précontraintes — il n'est pas avantageux d'employer des aciers dont la limite d'écoulement dépasse 6,00 kg/cm^2, puisque — même si l'on suppose une bonne liaison superficielle — le degré de formation de fissures sur le béton en concéquence des déformations des aciers atteint déjà à une tension de l'acier de 4,500 kg/cm^2, un degré qui n'est plus tolérable dans les constructions en béton armé. Du point de vue du degré de la formation de fissures c'est une tension de 4,500 kg/cm^2 qui devra être considérée comme tension limite des aciers, à laquelle la poutre devra être considérée détruite du point de vue pratique.

7. Le moment-limite calculé sur la base des tensions-limites du règlement hongrois concernant le béton armé, offre en pratique un degré de sécurité suffisant au moment de fracture réel.

SOMMAIRE.

C'est au cours de l'année 1950 que la méthode de dimensionnage des constructions en béton armé, nommée »méthode sans n«, a été introduite en Hongrie. En rapport avec cette mesure, des recherches expérimentales ont été effectuées par l'Institut de la Science de Construction Édile pour examiner l'état de fracture des poutres en béton armé. Le but de ces recherches était d'établir avant tout, dans quel degré l'effort de fracture probable, calculé selon les prescriptions du nouveau règlement, est conforme à l'effort de fracture réel ; si les prescriptions du règlement se rapportant à la position-limite de l'axe »x« sont correctes et comment il est possible de déterminer l'effort de fracture de poutres armées avec des armatures construites en acier ne possédant aucun écoulement défini. La disposition des poutres soumises à des expériences est démontrée par les figures 3. et 4. Les résultats des écoulements témoignaient de la justesse des prescriptions du nouveau règlement, vu que le moment de fracture réel ne dépassait le moment calculé que de 7,85% en moyenne.

Dans le cas des bétons de qualité inférieure, une position-limite de l'axe »x«, qui surpasse la moitié de la hauteur active, n'est pas économique. Quant aux bétons de haute résistance, il est désirable de diminuer cette valeur à 40%. Dans le cas des aciers ne présentant point d'écoulement le point du diagramme tension-déformation qu'il faut considérer comme tension produisant la fracture, est celui auquel se présente dans le diagramme un changement de direction plus marqué (commencement de courbure plus accentuée).

ОПЫТЫ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ СОСТОЯНИЯ РАЗРУШЕНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК

Т. Дьенгэ

Резюме

В течении 1950 г. в Венгрии введен метод расчета без н-ных железобетонных конструкций. В связи с этим Институт Строительных Наук провел серию опытов для исследования состояния разрушения железобетонных балок. Цель исследований в первую очередь заключалась в том, чтобы определить в какой степени соответствует ожидаемое усилие разрушения, расчитанное согласно новых Н. и Т. У. расчетов, действительному усилию разрушения, т. е. правильны ли условия, относящиеся к случаю критического состояния на оси x и каким образом можно определить усилие разрушения армированных стальной арматурой балок, если арматурная сталь не имеет текучести. Размещение балок, исследованных вышеупомянутыми опытами, приведено на рис. 3 и 4. Результаты опытов доказали правильность условий новых Н. и Т. У., т. к. действительное усилие разрушения в среднем лишь на 7,85 % была выше чем расчетная величина усилия разрушения. Критическую точку оси x не экономично брать большим половины высоты балок (если используется низкосортный бетон) а если применяются бетоны с высокими показателями прочности, то брать выше 40 %-ов указанной величины не рекомендуется. Когда пользуются сталью не обладающей текучестью, то напряжением, вызывающим разрушение, можно считать ту точку диаграммы растяжения, где начинается более крутой изгиб кривой диаграммы.

EINIGE PROBLEME DER SPANNUNGSVERTEILUNG IM BODEN

Á. KÉZDI

Eingegangen am 24. Mai 1951.

Auf dem Gebiete der Bodenmechanik ist es allgemein üblich, die im Baugrunde auftretenden Spannungen auf Grund der *Elastizitätslehre* zu berechnen, u. zw. mit Hilfe der Theorien die sich auf den Halbraum beziehen. Wir wissen es genau, dass die Formeln der Elastizitätslehre streng genommen nur für Stoffe gültig sind, wo die Spannungen und Deformationen *verhältnisgleich* sind. Wenn wir die Formeln für die Berechnung der Bodenpressungen anwenden, dann werden *Fehler* begangen, u. zw. solche, deren Grössenordnung *unbekannt* ist. Wird aber angenommen, dass wir hinsichtlich des plastischen Grenzzustandes über eine Sicherheit von mindestens $n = 3—4$ verfügen, kann das Verhältnis der Spannung und der Deformation mit Recht als konstant betrachtet werden, d. h. wir können von den Ergebnissen der auf dem Grunde des *Hooke'schen Gesetzes* ruhenden Elastizitätslehre Gebrauch machen. Sollte dieses Fordernis, mit Hinsicht der ganzen Bodenmasse, oder nur für einen Teil derselben nicht erfüllt sein, sind wir auf die Formeln der *Plastizitätslehre* angewiesen und wir müssen uns anstatt der Spannung-Deformationsuntersuchung mit einem sogenannten *Stabilitäts-Verfahren* begnügen. Auf dieses Gebiet fällt die Mehrzahl der Erddruck- und Böschungsstabilitätsprobleme.

Im Falle eines ein- oder mehraxialen Druckes, erleiden die Böden eine Deformation, veranschaulicht in *Fig. 1*. Es kommt auch trotz sorgfältigster Laboratoriumsversuche oft vor, dass die Spannungen und die Deformationen bis zu einer gewissen Spannungsgrösse (Strecke *OA) verhältnisgleich* sind. Der Grund dafür beruht darin, dass unsere Untersuchungsgeräte und Methoden *unvollkommen* sind. Das Deformationsgesetz der Böden als disperser Systeme *entscheidet sich* von dem Hooke'schen Gesetz. Nach *Gersevanoff* lässt sich der genannte Zusammenhang am besten als Potenzgesetz bezw. als eine lineare Kombination derselben ausdrücken.

Innerhalb der vorher erwähnten Grenzen ist aber die lineare Annäherung zulässig, wenn in der ganzen untersuchten Erdmasse nur solche Spannungen auftreten. Das ist der Fall z. B. wenn bei Setzungsberechnungen von Fundamenten die Grösse der auf *tiefliegende Tonschichten* wirkenden Spannungen gesucht wird.

Die Deformationskurve der *Fig. 1.* wurde nach den verschiedenen Deformationsgesetzen *in drei Strecken* geteilt. In der ersten Strecke (die Gerade *OA*) wird auf Grund obiger Erwägungen die Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes angenommen ; es steht uns hier das ganze Arsenal der mathematischen Elastizitätslehre zur Verfügung und die auf die verschiedenen Belastungsfälle ausführlich bearbeiteten Spannungsverteilungsgesetze. Zur Anwendung derselben genügt schon allein das Kenntnis der *Poisson-Konstante* und des *Elastizitäts-*

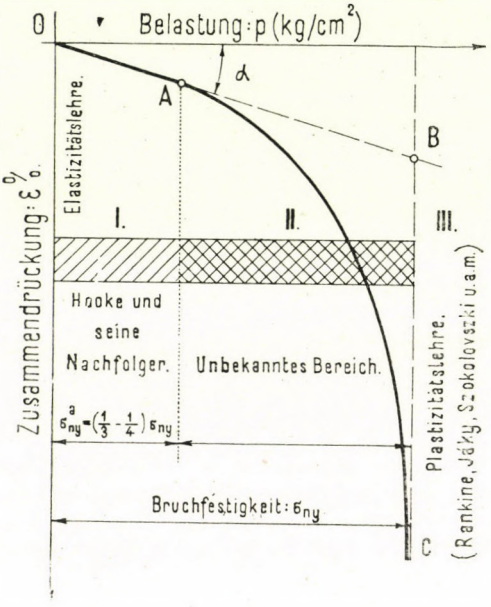


Fig. 1. Druck-Setzungsdiagramm beim Druckversuch mit unbehinderter Seitendehnung

modul des Bodens. Die elastische Strecke überschreitend (Punkt *A*) geraten wir in ein Bereich, wo das Deformationsgesetz der Böden völlig unbekannt ist ; in diesem Bereiche verfügen wir bei unseren praktischen Problemen nicht einmal über Näherungslösungen. Diese Tatsache wäre an und für sich belanglos, wenn wir die obere Grenze dieses Bereiches genau feststellen könnten, diesbezüglich ist aber nur die obige ungewisse Feststellung vorhanden *(n = 3—4)*.

Die Grösse der Spannung weiter erhöhend, wird die Grenze erreicht, wo auch bei gleichbleibender Spannung stetige Deformation eintritt ; unsere Bodenprobe erfüllt also die Grundannahme der *Plastizitätslehre*, d. h. sie gerät in einen plastischen Zustand. Dieser Grenzfall — obwohl gegenüber des II. Bereiches derselbe nicht mehr als terra incognita betrachtet werden kann — ist theoretisch gleichfalls ziemlich wenig bearbeitet. Wir verfügen über einwandfreie theoretische Lösungen nur bezüglich vollkommen plastischer Erdmassen

(Dr. Jáky, Sokolovski) und bezüglich Halbräume mit unbelasteter Oberfläche und mit nur innerer Reibung als Gleitungswiderstand.

Nach *Fröhlich* und *Jáky* ist die Annäherung üblich, dass die Deformationskurve anstatt der Wirklichkeit gut entsprechenden drei Strecken nur aus zwei Strecken zusammengesetzt wird, so die Kurve *OAC* mit der aus den Geraden *OB* und *BC* bestehenden gebrochenen Linie ersetzt wird. Wir bestimmen also die Spannungen des Erdreiches auf Grund der Elastizitätslehre und wir suchen die stetigen Linien bezw. zusammenhängende Bereiche längst welcher die Spannungen die Bedingungen des plastischen Zustandes, die *Bruchbedingung* erfüllen. Die Grenzbelastung des Baugrundes lässt sich dann mit dem Ansatze berechnen, dass bei der Grenzbelastung diese Fliesslinien gewisser Bedingung genügen — schrumpfen z. B. in einen Punkt zusammen *(Fröhlich, Jáky)* oder aber bleiben ausserhalb der zwei an den Randen des Fundamentkörpers gelegten Vertikalebenen *(Karafiáth)*. Auf Grund dieser vereinfachten Deformationslinie hat Jáky auch zwischen den Koeffizienten der Elastizitäts- und Plastizitätslehre Zusammenhänge festzustellen versucht.

Ausführliche, für zahlreiche verschiedene Randbedingungen ausgearbeitete Lösungen stehen nur — mit Ausnahme einiger speziellen Fälle — in der Elastizitätslehre zur Verfügung. Diese Tatsache hatte bis zu gewissem Grade auch einen Einfluss auf die Bodenmechanik ausgeübt: die Theorien, bearbeitet durch die Forscher des vergangenen Jahrhundertes, wurden in den Fällen belanglos angewendet, wo die *Randbedingungen* wesensverschieden waren von denen, die bei der Ableitung der betreffenden Theorie angesetzt wurden. Es dient dazu als auffallendes Beispiel, als man die Spannungen infolge der Mantelreibung eines Pfahles mit Hilfe der Boussinesq'schen Theorie — Halbraum mit einer Punktlast auf der Oberfläche — zu bestimmen versuchte. Die im vorangehenden Absatz erwähnte Auffassung wirkte gleichfalls zur Anwendung der Elastizitätslehre fördernd, es hat weiters wesentlich dazu beigetragen, dass in der genannten Boussinesq'schen Theorie, die die physikalischen Eigenschaften des Bodens enthaltende Poisson-Konstante in der Formel der vertikalen Spannung nicht einmal vorkommt. Genau dasselbe gilt für sämtliche Spannungen der Michell'schen Theorie — unendlicher Halbraum belastet auf der Oberfläche mit einer Linien- oder Streifenlast. Die schwierige und ungenaue Bestimmung dieser Konstante war also in diesen einfachen Fällen nicht nötig.

Es is noch hervorzuheben, dass die Bodenmechanik die Formeln der Elastizitätslehre nur für die Bestimmung der Spannungen verwendet und die Deformationen — Setzungen — nach eigenen Methoden berechnet, obwohl die Theorien bezüglich der Deformationen fertige Formeln zur Verfügung stellen. In der Tat, abgesehen von vereinzelten Fällen — Steinbrenner, Kögler — finden wir in der Literatur kaum einige Beispiele, dass die Autoren die Setzungen eines Grundkörpers, die Elastizitätskonstanten zu Hilfe nehmend, mit den Formeln der Elastizitätslehre behandeln.

Noch ein Gesichtspunkt soll erwähnt werden. Da die mathematische Elastizitätslehre über die allgemeine Ingenieurbildung hinausgeht, werden die fraglichen Theorien von vielen Bodenmechanikern, ohne der Kenntnisse der Vorbedingungen, der Ableitung der Formeln angewendet und die Verwicklung der Formeln macht aus psychologischen Gründen den Eindruck, als ob mittels dieser *genaue* Ergebnisse zu gewinnen wären. Berechtigung der Anwendung einer Formel wird aber nicht durch ihre Verwicklung oder durch die grosse Anzahl der Koeffizienten bedingt, sondern dadurch, wie im betreffenden Falle die Vorbedingungen erfüllt sind, auf Grund welcher die Formel entwickelt wurde.

Wir müssen in den aufgezählten Umständen den Grund suchen, dass in unseren bodenmechanischen Berechnungen fast ausschliesslich nur die einfachsten Lösungen der Elastizitätstheorie vorkommen. Wird aber die Berechtigung der Anwendung der Elastizitätslehre mit gewissen Beschränkungen prinzipiell angenommen, dann müssen wir innerhalb dieses Kreises *folgerichtig* vorgehen und Theorien anwenden, die mit den Randbedingungen eines konkreten Falles Rechnung tragen. Leider ist es so, dass wenn nur einige der wirklichen Randbedingungen erfüllt werden, so bekommen wir *verwickelte* und *schwer zu behandelnde* Formeln, die in der Praxis die Gesichtspunkte der oekonomischen Arbeit nicht vor Augen halten. Es ist aber so aus dem Standpunkte der Wissenschaft wie der Praxis unerlässlich, dass wir mit Hilfe der verwickelten Formeln die Wirkung gewisser Umstände auf die Spannungsverteilung überprüfen, ob die Vereinfachungen der Praxis nicht solche Fehler hervorrufen, die z. B. die Ergebnisse unserer Setzungsberechnungen wesentlich beeinflussen. Hat einmal so eine Überprüfung stattgefunden, besteht unsere nächste Aufgabe darin, solche einfache Berechnungsmethoden auszuarbeiten, die die genannten Umstaende z. B. mit Hilfe gewisser *Koeffizienten* in Betracht ziehen. Die verwickelten Formeln werden so — durch das Vernachlässigen an Genauigkeit eingebüsst — für die Praxis vereinfacht. Wir können in der Genauigkeit der mathematisch exakten Lösung umsomehr nachgeben, denn genau wie in der Theorie des Eisenbetons, sich keine einzige Theorie auf *reelle* Stoffe beziehen kann, keine einzige Theorie kann die von Punkt zu Punkt veränderlichen und nicht einmal in der Zeit konstanten physikalischen Eigenschaften der reellen Böden in Betracht ziehen.

Das Bodenmechanische Laboratorium der Technischen Universität von Budapest setzte sich auf Grund obiger Erwägungen zum Ziele, die aus der Literatur bekannten Formeln der Elastizitätslehre, welche bei Gründungsfragen vorkommen, für die Praxis zu vereinfachen, und die entsprechenden Zusammenhänge für einige noch fehlende Belastungsfälle abzuleiten. In folgendem werden einige Abschnitte dieser Arbeit von grösserem Umfange vorgelegt, namentlich wird die Wirkung auf die Spannungsverteilung der Gründungstiefe beschrieben, weiters die Formeln zur Berechnung der Bodenspannungen infolge der *Schubspannungen* in der Gründungssohle.

Spannungen des im Inneren belasteten Halbraumes

Die in *Fig. 2.* dargestellte Aufgabe der Elastizitätslehre wurde in der Literatur der angewandten Mechanik schon wiederholt behandelt. Hinsichtlich der ebenen Aufgabe hat Melan Formeln gegeben. (Z. A. M. M., Bd. — 12 [1932.] S. 343.) Die Formeln leiden allerdings daran, dass seiner Spannungsfunktion

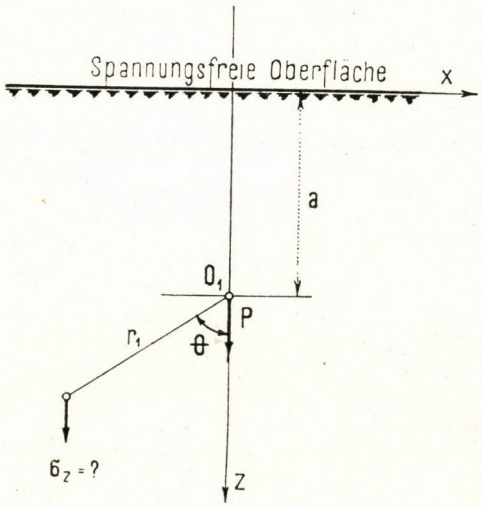


Fig. 2. Spannungen des im Inneren belasteten Halbraumes

zufolge auf der Oberfläche nur die vertikalen und die Scherspannungen verschwinden, die waagerechten Spannungen den Wert

$$(\sigma_x)_{z=0} = \frac{P}{\pi}\left[-\frac{2}{m}\frac{a}{r^2} + 2\frac{m+1}{m}\frac{a^3}{r^4}\right]$$

besitzen. Die Randbedingungen werden also nicht *restlos* erfüllt. Die räumliche Aufgabe wurde von *Mindlin* gelöst. (Physics, Vol. 7. pp. 195—202.)

Da der originelle Aufsatz mir unzugänglich war, habe ich versucht, die betreffenden Formeln unabhängig von ihm abzuleiten und gebe die kurze Zusammenfassung der Ableitung untenstehend an.

Der zu untersuchende Fall ist in *Fig. 3.* dargestellt. In einer Gründungstiefe a wirkt eine Kraft P. Zylinderkoordinaten zu Hilfe nehmend, das Gleichgewicht eines Elementarkörpers, ausgeschnitten aus einem Umdrehungskörper, dessen Deformation auf die Umdrehungsachse symmetrisch ist, lässt sich durch folgende Gleichungen ausdrücken. *(Fig. 4.)*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0\\ \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

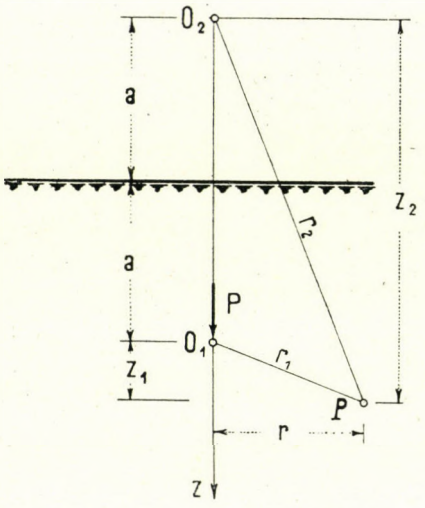


Fig. 3. Die zur Lösung gebrauchten Polen

In einem drehsymmetrischen Falle sind die Spannungen von Θ unabhangig, so verschwinden die Differentialquotienten nach Θ genau wie die Scherspannungen $\tau_{r\Theta}$ und $\tau_{\Theta z}$. Durch Ersetzen ist es beweisbar, dass die Gl. (1) nach Ein-

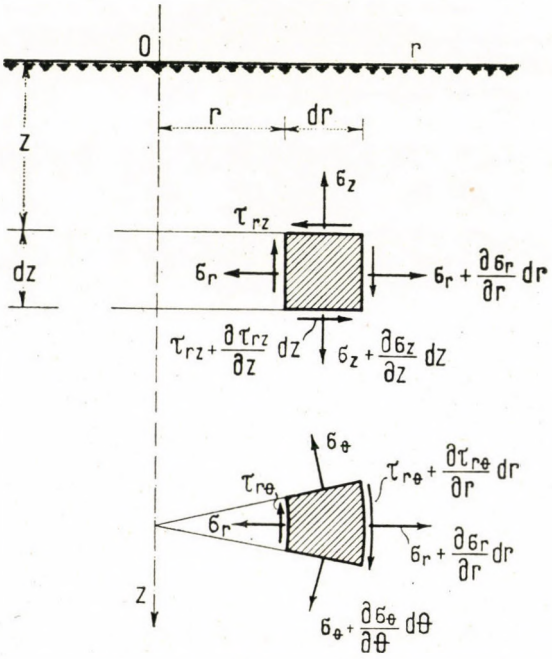


Fig. 4. Spannungen am Element des Umdrehungskörpers

führung einer Φ Spannungsfunktion durch folgende Spannungsgleichungen erfüllt wird.

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\,\Delta^2\,\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right)\\
\sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\,\Delta^2\,\Phi - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{(2-\nu)\,\Delta^2\,\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right\}\\
\tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left\{(1-\nu)\,\Delta^2\,\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Das $\triangle^2$ Zeichen bedeutet folgende Operation:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (3)$$

Die Verträglichkeitsgleichungen des allgemeinen räumlichen Spanungszustandes berücksichtigend, ist es beweisbar, dass sie erfüllt werden, wenn die Spannungsfunktion folgender Gleichung genügt: (da die ausführliche Ableitung der Formeln zu weit führen würde, wird der Leser auf das bezügliche Schrifttum — z. B. *Timoshenko*: *Theory of Elasticity*, oder *A. E. H. Love*: *Treatise of Elasticity* — hingewiesen)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) = \Delta^2\,\Delta^2\,\Phi = 0 \qquad (4)$$

Aus den Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung müssen wir die Spannungsfunktion aufbauen, die die in *Fig. 3.* dargestellte Aufgabe zu einer Lösung führt, und einen solchen Spannungszustand resultiert, wo in der Ebene $z = a$ und im Unendlichen alle Spannungen *verschwinden*, weiters die Spannungen auf der Oberfläche einer um den Punkt O_1 herausgeschnittenen unendlich kleinen Kugel eine mit der Kraft P Gleichgewicht haltende Resultierende geben. Von den Lösungen der biharmonischen Differentialgleichung sind folgende am einfachsten:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1 &= C_1\,\ln\left(z + \sqrt{r^2+z^2}\right)\\
\Phi_2 &= C_2\,\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\\
\Phi_3 &= C_3\,\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\\
\Phi_4 &= C_4\,\sqrt{r^2+z^2}\\
\Phi_5 &= C_5\,z\,ln\left(z + \sqrt{r^2+z^2}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Das Ersetzen in Gleichung (4) führt zur Überzeugung, dass die Funktionen biharmonisch sind.

Von den Funktionen (5) gibt Φ_4 die Spannungsfunktion des durch die Kraft P beanspruchten unendlichen Raumes (nach Lord Kelvin, 1848.). Der Wert der Konstante ist auf Grund der Randbedingungen:

$$\Phi = \frac{1}{1-\nu}\,\frac{P}{8\pi}\,\sqrt{r^2+z_1^2} \tag{6a}$$

Auf der Ebene $z = -a$ sind die Spannungen nach Gleichung (2)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{1}{1-\nu}\,\frac{Pa}{8\pi}\left(1-2\nu+\frac{3a^2}{r_2^2}\right)\frac{1}{r_2^3}\\ \tau_{rz} &= \frac{1}{1-\nu}\,\frac{P}{8\pi}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1-2\nu}{r_2}+\frac{a^2}{r_2^3}\right)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Schreiben wir die Funktionen Φ_4 und Φ_5 mit dem Pol O_2 auf, dann sind die Spannungen auf der Ebene $z_2 = a$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= [(2\nu-1)\,C_4 + 2\nu C_5]\,\frac{a}{r_2^3} - (C_4+C_5)\,\frac{3a^3}{r_2^5}\\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left\{[(1-2\nu)\,C_4 - 2\nu C_5]\,\frac{1}{r_2} + (C_4+C_5)\,\frac{a^2}{r_2^3}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Schreiben wir die Funktionen Φ_1, Φ_2 und Φ_3 in folgender Form auf:

$$\Phi = C\ln(r_2+z) + D\,\frac{z-a}{r_2}$$

dann sind die entsprechenden Spannungen auf der Ebene $z = a$:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= [D(1-2\nu) - C]\left(-\frac{1}{r_2^3}+\frac{3a^2}{r_2^5}\right)\\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[(C+2\nu D)\,\frac{a}{r_2^3}\right]\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Summe der Spannungen unter (6), (7) und (8) hat zu verschwinden, was die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten ermöglicht.

$$\left.\begin{aligned}C_4 &= \left[2\nu - \frac{1}{4(1-\nu)}\right]\frac{P}{2\pi}\\ C &= \frac{Pa}{2\pi}\left[2\nu - 1 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right]\\ C_5 &= (1-2\nu)\,\frac{P}{2\pi}\\ D &= -\frac{Pa}{2\pi}\,\frac{\nu}{1-\nu}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Nach Ersetzen der Konstanten nimmt die gesuchte Spannungsfunktion folgende Form auf:

$$\Phi = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{1}{1-\nu}\,\frac{r_1 - r_2}{4} + 2\,\nu\, r_2 - \frac{1}{1-\nu}\,\frac{a\,(z-a)}{2\,r_2} + \right.$$
$$\left. + (1-2\,\nu)\,\left(z - \frac{1}{1-\nu}\,a\right)\,\ln\,(r_2 + z)\right] \tag{10}$$

Aus dieser Spannungsfunktion lassen sich die gesuchten Spannungen durch Differenzieren nach Gl. (2) bestimmen.

Für uns ist die vertikale Spannung in erster Linie von Interesse:

$$\sigma_z = -\frac{1}{1-\nu}\,\frac{3\,P}{4\pi}\left\{\frac{1-2\,\nu}{6}\,z_1\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) + \frac{z_1^3}{2 r_1^5} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{3-4\,\nu}{2}\,z_2 - (1-2\,\nu)\,a\right]\frac{z_2^2}{r_2^5} - a z\,(z-a)\,\frac{3\,r^2 - 2\,z_2^2}{r_2^7}\right\}.$$

Das erste Glied des geklammerten Ausdruckes gibt die Spannungen im unendlichen Raume an, wenn zwei gleich grosse Kräfte in den Punkten O_1 und O_2 angreifen. Da die Grösse r_2, die hier auf der dritten Potenz vorkommt, in den übrigen Gliedern auf der fünften, bezw. siebenten Potenz im Nenner steht, lässt sich der Einfluss dieser Glieder nach unseren Untersuchungen in jedem solchen Falle vernachlässigen, wenn $z_1 > a$. Die in einer tieferliegenden Tonschicht auftretenden Spannungen erhalten wir also mit dem Ansatze, dass der unendliche Raum in den Punkten O_1 und O_2 mit Kräften von gleicher Richtung und gleicher Grösse angegriffen wird.

Um die Resultate der obigen Ableitung bei der Behandlung von Grundkörpern und Pfählen anwenden zu können, wurde die Formel der vertikalen Spannung zweimal integriert und dadurch die Formel für die gleichmässig belastete Kreisfläche erhalten. Es ergeben sich dadurch die Spannungen unter dem Mittelpunkt der Kreisscheibe.

Die Bezeichnungen sind in der *Fig. 5.* dargestellt.

Der Wert der Spannung, entstehend durch die elementare Kraft in einem Punkte der Drehachse:

$$d\sigma_z = -\frac{1}{1-\nu}\left[\frac{3\,dP}{4\pi}\left[\frac{1-2\,\nu}{6}\,z_1\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) + \frac{z_1^3}{2\,R_1^5} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{3-4\,\nu}{2}\,z_2 - (1-2\,\nu)\,a\right)\frac{z_2^2}{R_2^5} - a\,z\,(z-a)\,\frac{3\,r^2 - 2\,z_2^2}{R_2^7}\right]\right. \tag{11}$$

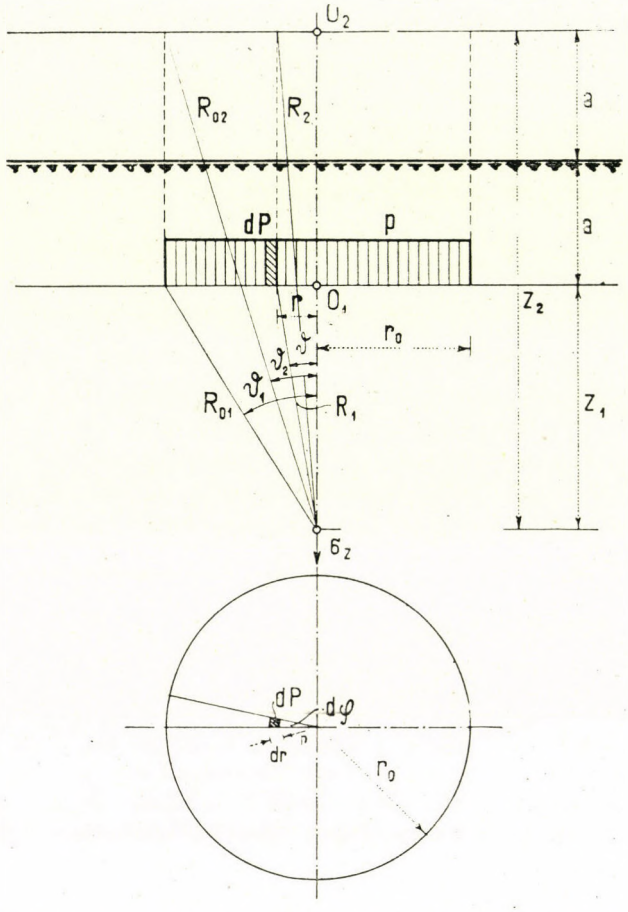


Fig. 5. Die tiefgegründete, gleichmässig belastete Kreisscheibe

Die Spannung σ_z wird durch zweimaliges Integrieren der Gl. (11) erhalten:

$$\sigma_z = \int_{r=0}^{r_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\sigma_z \tag{12}$$

Nach vollzogenem Integrieren und Verkürzung:

$$\sigma_z = -\frac{1}{1-\nu}\,\frac{3p}{2}\left\{\frac{1-2\nu}{6}\,z_1\left(\frac{1}{R_{02}}-\frac{1}{R_{01}}-\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_1}\right)+\frac{1}{6}-\frac{z_1^3}{6R_{0_1}^3}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{3-4\nu}{2}\,z_2-a(1-2\nu)\right]\left(\frac{1}{3z_2}-\frac{z_2^2}{3R_{0_2}^3}-az(z-a)\left[\frac{z_2^2}{R_{0_2}^5}-\frac{1}{R_{0_2}^3}\right]\right)\right\} \tag{13}$$

Greift die Belastung auf der Oberfläche des unendlichen Halbraumes an, ergeben sich folgende Vereinfachungen :

$$a = 0, \qquad z_1 = z_2 = z, \qquad R_{01} = R_{02} = R_0, \qquad \vartheta_2 = \vartheta_1 = \vartheta$$

Die Spannung ist in diesem Falle :

$$\sigma_z = -p\left(1 - \frac{z^3}{R_0^3}\right) = -p\,(1 - \cos^3 \vartheta) \tag{14}$$

im Einklang mit der bisher bekannten und gebrauchten Formel.

Auf Grund der Gleichung (13) wurden die Spannungen unter einer gleichmässig belasteten Kreisscheibe für die Gründungstiefen a = 1, 2, 5, auch zahlen-

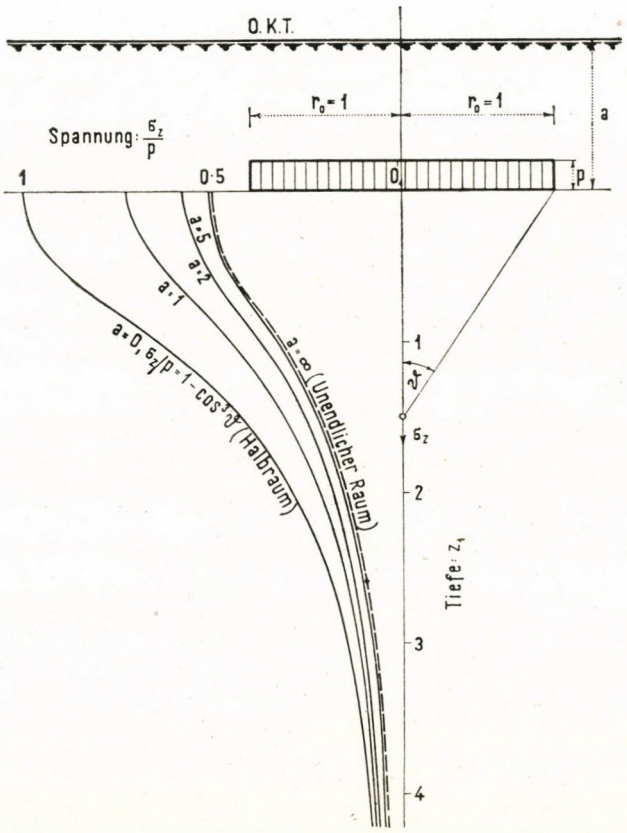


Fig. 6. Die Verteilung der vertikalen Spannungen bei der tiefgegründeten Kreisscheibe

mässig bestimmt. Der Wert der Poisson's-Konstante des Bodens wurde mit m = 2 angesetzt. Die Ergebnisse der Berechnungen sind in *Fig. 6.* vorgelegt. In derselben Figur haben wir die im Halbraum infolge Belastungen entstehende Spannungen auf der Oberfläche und die Spannungen im unendlichen Raume

dargestellt. Es ist festzustellen, dass die vertikalen Spannungen schon bei kleiner Gründungstiefe bedeutend *verringert* werden. Ist die Gründungstiefe das *2,5*-fache des Durchmessers, so ergibt sich eine Abweichung von *2%* mit Bezugnahme auf die Spannungen im unendlichen Raume. Dies ist nach unseren Berechnungen auch für andere ν Werte gültig ; wir können also daraus schliessen, dass in jedem Falle, als die Gründungstiefe das *2—2,5*-fache des Durchmessers der belasteten Fläche überschreitet, die vertikalen Spannungen mit Hilfe der auf den unendlichen Raum gültigen Formel zuverlässig berechnet werden können. Das kommt schon im Falle von Flachgründungen vor, sicherlich ist aber diese Bedingung bei jeder Tiefgründung — Brunnen- und Pfahlgründung usw. — erfüllt. Und die Tatsache, dass die Spannungen schon durch eine verhältnismässig kleine Gründungstiefe stark verringert werden, begründet teilweise die Erfahrung, dass die zu erwartenden Setzungen — berechnet mit Hilfe der Boussinesq'schen Spannungsformel — in den meisten Fällen wesentlich grösser sind, als die gemessenen Setzungen der erbauten Konstruktion. Im Falle einer Gründung auf Tonboden, ist diese Tatsache bei der Berechnung der Setzungen in Betracht zu ziehen.

Einfluss der Schubspannungen in der Gründungssohle auf die Spannungsverteilung

In der Sohle eines rauhen Gründungskörpers treten zwischen dem Boden und der Sohle immer *Schubspannungen* auf, die bis zu einer gewissen Grenze das seitliche Ausweichen des Bodens verhindern. Diese Schubspannungen haben zur Folge, dass die Spannungen sich im Boden — bei zentrischer Belastung — um der Achse konzentrieren, es treten also in der Achse grössere Spannungen auf, als infolge der gleichmässig verteilten Oberflächenbelastung. Diese Erscheinung der Spannungsanhäufung wurde bei den verschiedenen Spannungsmessungen wiederholt festgestellt und veranlasste *Fröhlich*, die Boussinesq'schen Formeln zu modifizieren, um damit der Wirklichkeit besser angepasste Spannungswerte zu bekommen. Diese Schubspannungen richten sich im Falle einer zentrischen Belastung der Achse zu, hinsichtlich der Verteilung derselben können wir mit Wahrscheinlichkeit annehmen, dass sie vom Nullwert in der Achse dem Rande zu linear wachsen, da die Neigung zum seitlichen ausweichen des Bodens, sich zum Rande des Grundkörpers nähernd stets betonter wird. Im Falle einer *waagerechten Linienlast* auf der Oberfläche lassen sich die vertikalen Spannungen im unendlichen Halbraume durch folgende, von *Cerutti* herrührende Formel berechnen *(Fig. 7.)* :

$$\sigma_z = \frac{2\,S}{\pi\,z} \sin\,\varphi\,\cos^3\varphi \tag{15}$$

Der oben beschriebene Belastungsfall ist in *Fig. 8.* dargestellt. Die entsprechende vertikale Spannung ist mittels Gl. (15) durch Integrierung zu erhalten.

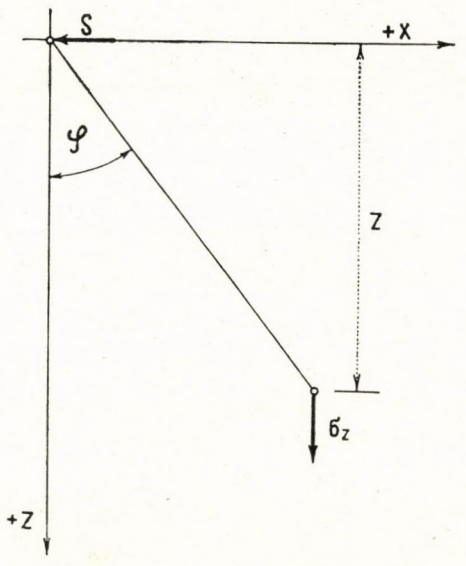


Fig. 7. Cerutti's Problem

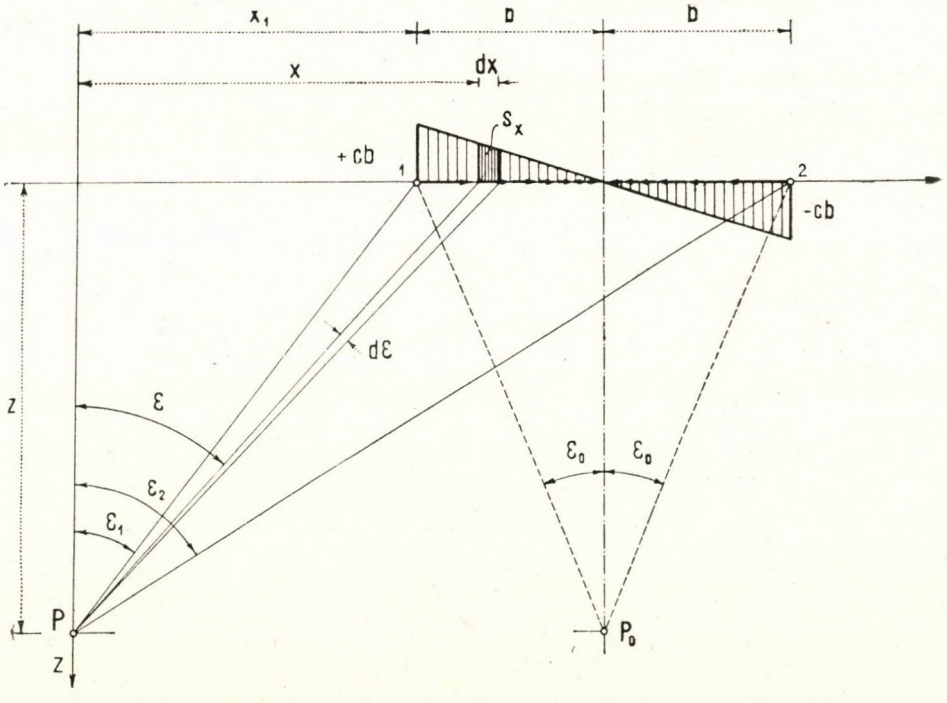


Fig. 8. Schubspannungen in der rauhen Gründungssohle, bei zentrischer Belastung

Die Schubspannung in der Oberfläche im Abstand x:

$$s_x = c\,(x_1 + b - x) \qquad [x_1 \leqq x \leqq x_1 + 2b\,]$$

die elementare Spannung:

$$d\,\sigma_z = \frac{2\,dS_x}{\pi\,z}\,\sin\,\varepsilon\,\cos^3\,\varepsilon$$

$$d\,S_x = s_x\,dx$$

$$d\,x = \frac{z}{\cos^2\,\varepsilon}\,d\,\varepsilon$$

d. h.

$$\sigma_z = \frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} c\,(x_1 + b - x)\,\sin\,\varepsilon\,\cos\,\varepsilon\;d\,\varepsilon =$$

$$= -\frac{c}{\pi}\,[(x_1 + b)\,\sin\,(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\,\sin\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + z\,(\sin\,\varepsilon_2\cos\,\varepsilon_2 - \sin\,\varepsilon_1\,\cos\,\varepsilon_1) - z\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,] \qquad (16)$$

Die Verteilung der Spannungen berechnet mittels Formel (16) wird in *Fig. 9.* veranschaulicht. Eine gleichmässig verteilte vertikale Belastung

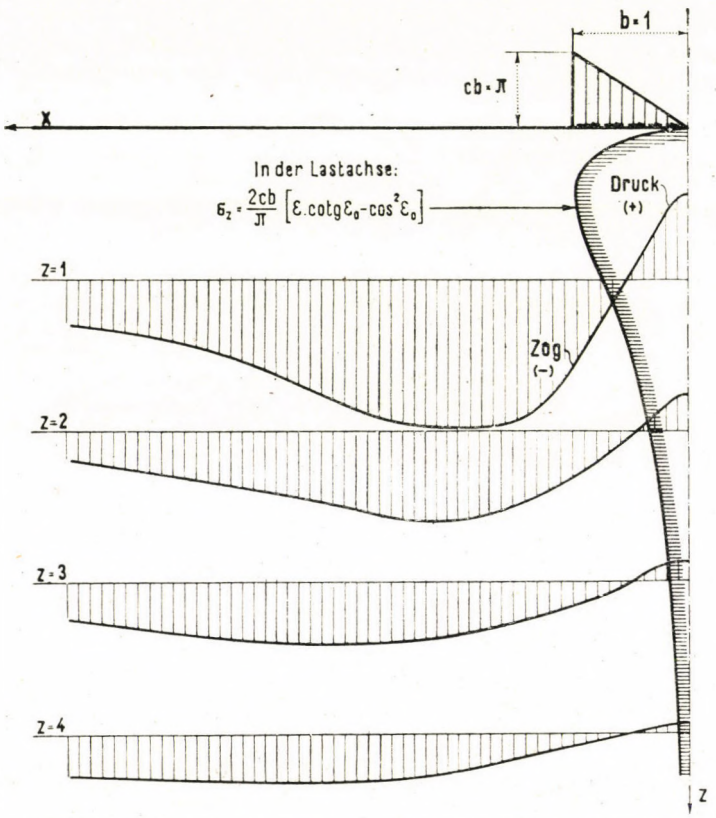


Fig. 9. Vertikale Spannungen im gemäss *Fig. 8.* belasteten Halbraume

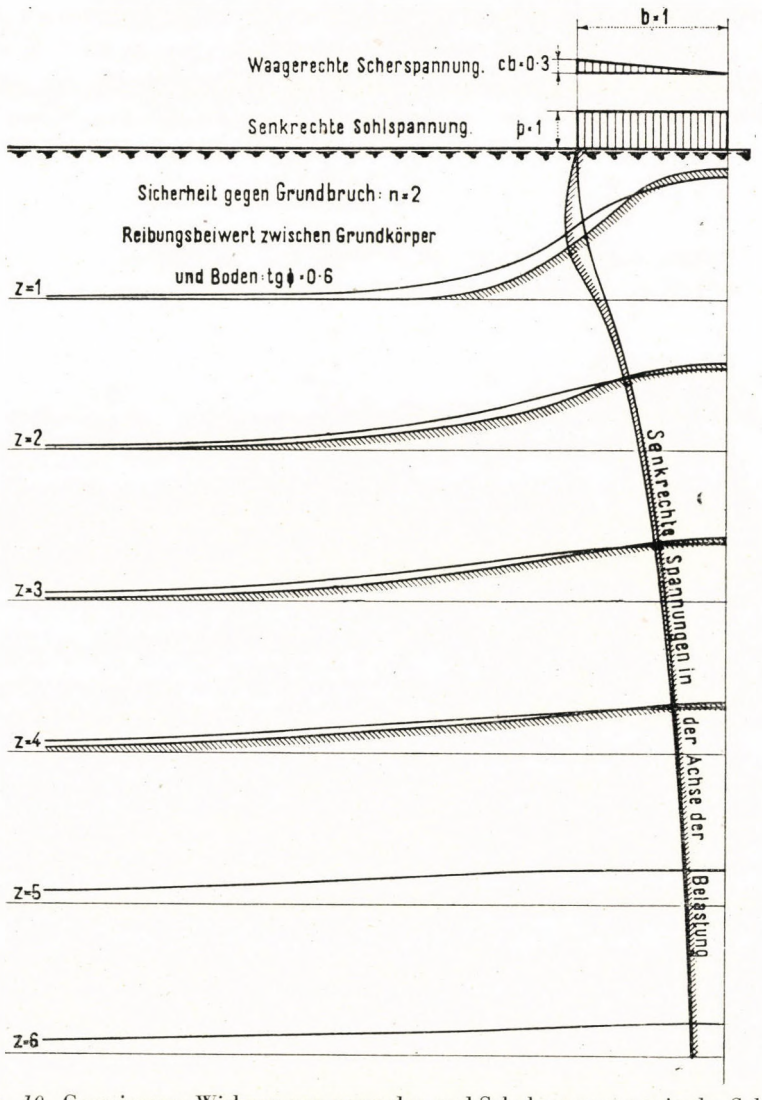


Fig. 10. Gemeinsame Wirkung von normalen und Schubspannungen in der Sohle

p superponierend, sind die, sich um der Achse konzentrierende Spannungen in *Fig. 10.* sichtbar. Die Figur dient zugleich zur Vergleichung mit der Berechnungsmethode, die diese Schubspannungen ausser acht lässt. Die vertikalen Spannungen in der Achse des Grundkörpers, sind :

$$\sigma_z = \frac{2\,c\,b}{\pi}\,(\varepsilon_0 \operatorname{ctg}\ \varepsilon_0 - \cos^2 \varepsilon_0)$$

Es bleibt noch die Frage offen, welchen grössten Wert diese Schubspannungen am Rande des Grundkörpers erreichen können. Wenn wir die vertikale

Belastung p vergrössern, und die Grenze der plastischen Deformation erreichen, nimmt s_{max} den Wert $ptg\Phi_1$ auf. Sind wir aber vom Zustande der plastischen Deformation noch weit entfernt — was ja die Bedingung der Anwendung der Elastizitätslehre ist — so ist diese unbedingt kleiner, als der erwähnte Wert und über ihre Grösse können wir keine sichere Aussage machen. Gewiss werden wir aber der Wahrheit näherkommen, wenn wir den Wert von s_{max} mit der selben Sicherheit hinsichtlich $ptg\Phi_1$ in Betracht ziehen, über welche wir im Werte der vertikalen Belastung p gegen Grundbruch verfügen. Auf Grund obiger Erwägungen stellen wir die auf den Boden wirkenden Spannungen in *Fig. 11.* dar.

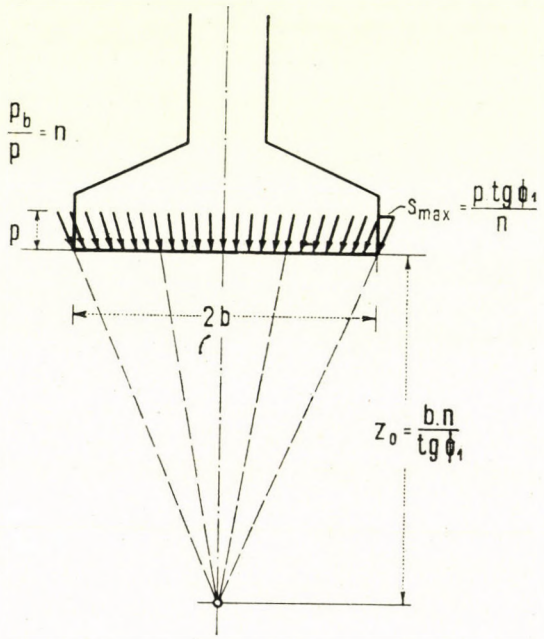


Fig. 11. Die resultierenden Spannungen in der Gründungssohle

Die Berücksichtigung der Schubspannungen beeinflusst die Resultate jener Theorien, die die zulässige Bodenpressung in der Einleitung angedeuteten Weise mit Hilfe der Grösse von Fliessbereichen bestimmen wollen. Die Behandlung dieser Frage wird das Thema eines zukünftigen Aufsatzes bilden.

Die Rolle der Schubspannung wird in der Frage der Spannungsverteilung noch wesentlich betonter, wenn der Grundkörper eine exzentrische oder ausserdem noch eventuell *waagerechte Kräfte* dem Baugrunde übermittelt. In diesem Falle kann die Verteilung der Schubspannungen auf der Gründungssohle in der in *Fig. 12.* dargestellten Form angenommen werden, d. h. *a)* die Verteilung ist *gleichmässig ;* oder auf Grund der üblichen Berechnung der vertikalen Sohlspannungen, können wir *b)* eine *linear* zunehmende Schubspannungs-

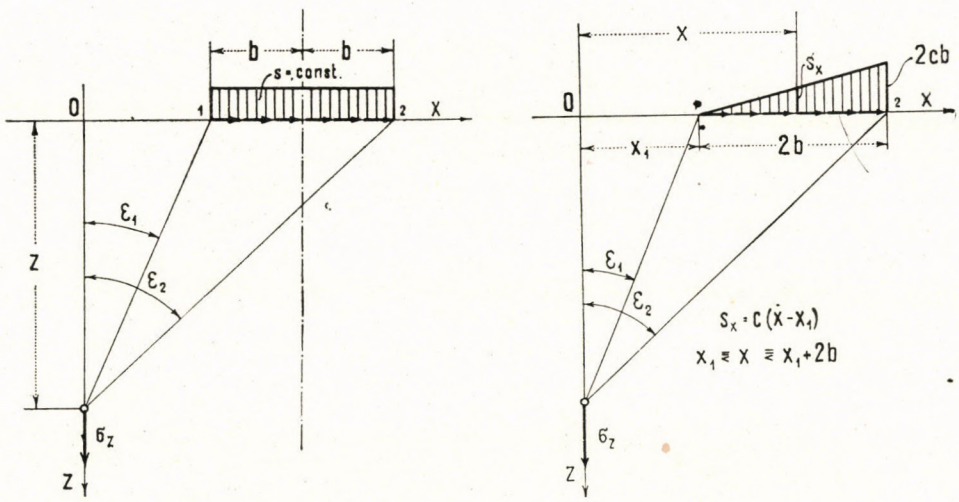


Fig. 12. Schubspannung bei ausmittiger Belastung

verteilung voraussetzen. Die entsprechende Spannungsformeln, erhalten durch Integrieren, wie im vorangehendem Falle gehandelt, sind die folgenden:

Gleichmässig verteilte Schubspannung (Fall *a)*):

$$\sigma_z = \frac{2s}{\pi} (\cos \varepsilon_2 - \cos \varepsilon_1). \tag{18}$$

In der Achse der Belastung ist die Spannung offensichtlich Null, die Verteilung ist in *Fig. 13.* veranschaulicht.

Die hier behandelten Fälle der Spannungsverteilung bieten zahlreiche Möglichkeiten zur praktischen Anwendung. So z. B. der Spannungszustand infolge einer konzentrierten Kraft im Inneren des Halbraumes, lässt sich zur Bestimmung von Spannungen infolge der Mantelreibung von Pfählen verallgemeinern. Aus dem Spannungszustand der gleichmässig belasteten Kreisscheibe, können wir auf die Verteilung der Spannungen schliessen, die dem Boden durch die Spitzen der Pfähle und durch die Sohle der Brunnen übermittelt werden. Die behandelten Fälle werden in der Auswertung von Probebelastungen in Bohrlöchern eine wichtige Rolle spielen, und werden die Berechnung der zulässigen Belastung von Grundkörpern und Pfählen wesentlich beeinflussen, bedingt durch die Schubspannungen in der Grundsohle. Den gleichen Fall begegnen wir bei der Spannungsverteilung unter Sandschüttungen.

Von diesen Problemen, sowohl als auch von den Fortschritten der in der Einleitung erwähnten theoretischen- und Rechenarbeit beabsichtigen wir in einem späteren Aufsatz zu berichten.

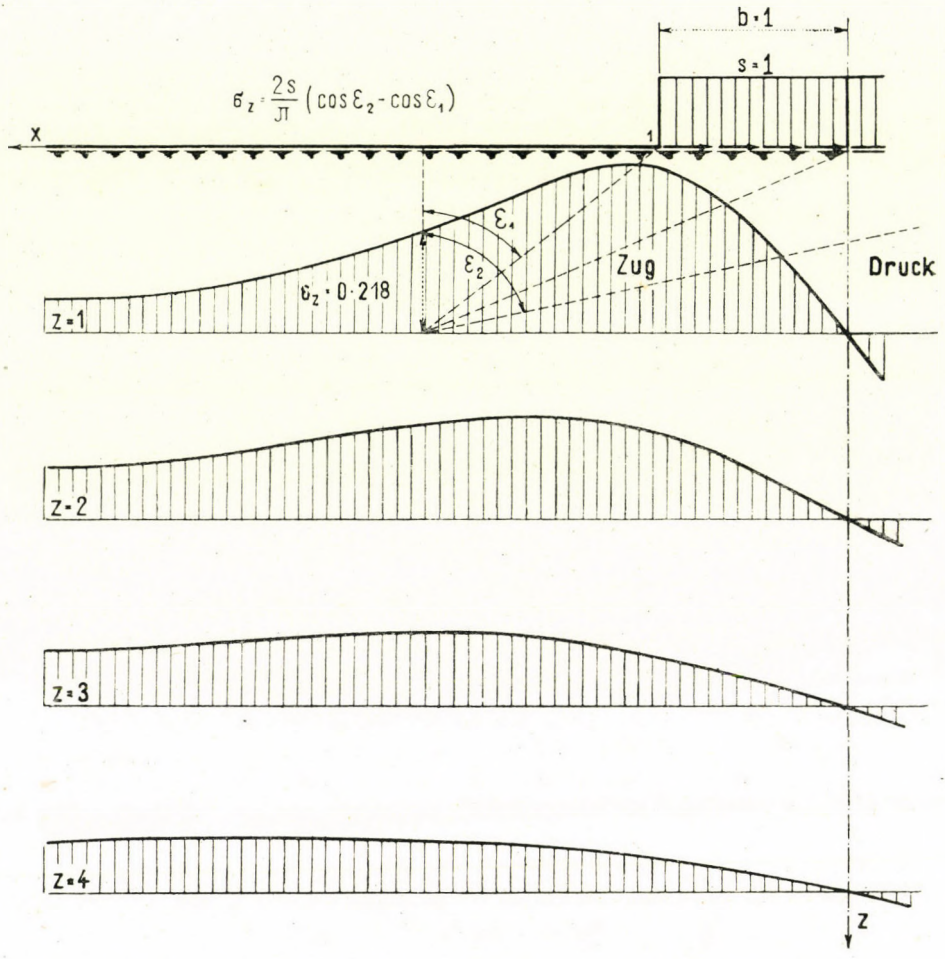


Fig. 13. Vertikale Spannungen im gemäss *Fig. 12/a* belasteten Halbraume

Zum Schlusse möchte ich den Assistenten *Á. Balla* und *I. Lazányi*, die mit der Ausführung der nötigen Berechnungen und mit dem Zeichnen der Figuren wertvolle Hilfe geleistet haben, meinen aufrichtigsten Dank aussprechen.

ZUSAMMENFASSUNG

Im ersten Teil der Abhandlung wird die *Möglichkeit* und *Berechtigung* der Anwendung der mathematischen Elastizitätslehre auf das Gebiet der Bodenmechanik untersucht und die Grenzen festgelegt, innerhalb welcher diese Anwendung zulässig ist. Insbesondere wird betont, dass man bei der Anwendung der Elastizitätslehre *folgerichtig* vorgehen und Lösungen anwenden muss, die den *Randbedingungen* des konkreten Falles Rechnung tragen.

Im zweiten Teil werden die Formeln für die Spannungen des *im Innern belasteten unendlichen Halbraumes* abgeleitet und für den Fall der gleichmässig belasteten, tiefgestellten *Kreisscheibe* (Pfahlspitze, Brunnensohle) integriert. Es wird weiters die Wirkung der infolge der Reibung auftretenden *Schubspannungen* in der Gründungssohle auf die Spannungsverteilung behandelt.

Lehrstuhl für Eisenbahnbau und Bodenmechanik, Technische Universität, Budapest.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПОЧВЕННОЙ МЕХАНИКИ ОТНОСИТЕЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

А. Кезди

Резюме

В первой части реферата автор исследует возможность и законность применения в почвенной механике положений теории сопротивления материалов, и определяет границы, в чертах которого это возможно. Однако, подчеркивает, что при применении теории сопротивления материалов необходимо поступать последовательно и пользоваться такими решениями, которые учитывают применение условий данной проблемы. Во второй части реферата выводит формулы напряжений, возникающих под действием сил внутри бесконечного полупространства, и интегрирует их на случай круга (свая, колодез). Далее занимается действием напряжений среза, возникающих вследствии трения на поверхности опоры основания, на распределение напряжений.

РАСЧЕТ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫХ И УПРУГО ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПРЯМООСЕВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК, УЧИТЫВАЯ ПРОГИБЫ*

П. Габори

Поступило 29. V. 1951.

Научностроительный Институт выработал изменения основных нормативов для железобетона в надземном строительстве. Эти содержат расчеты на основании коэффициента запаса прочности без „*n*"-ного метода вычисления. Для правильного обсуждения изгибов необходимо произвести точные исследования упругости защемленных балок с точки зрения критических (изгибающих) нагрузок.

В последующей части мы рассмотрим проект Н. и Т. У. (норм и технических условий), его теоретическое обоснование и практическое применение.

I. Длина волны прогиба центрально сжатого и упруго защемленного стержня в отношении к двухшарнирной стойке.

a) Стержень, упруго защемленный на одном и свободный на другом конце

Как известно, в случае маленьких сдвигов вторая производная упругой оси равна отношению отрицательной величины момента и жесткости, а именно потому, что в точной формуле кривизны знаменатель : $[1+(y')^2]^{3/2}$ приближенно) может быть принят за единицу (1. рисунок).

$$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{Py}{EI} - \frac{M}{EI} - \frac{Py}{EI} \tag{1}$$

Подставляя это $\omega = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, общее решение дифференциального уравнения

$$y = A \sin \omega x + B \cos \omega x \tag{2/a}$$

$$y' = A\,\omega \cos \omega x - B\,\omega \sin \omega x \tag{2/b}$$

Граничные условия :

$$x = 0 \qquad y = 0 \tag{3/a}$$

$$x = l \qquad y' = \operatorname{tg} \varepsilon \tag{3/b}$$

* Опубликовано на венгерском языке в журнале „Építéstudományi Közlemények" (Сообщения строительной науки) за 1951. г., № 1.

Величину возникающего при защемлении углового смещения можно установить жесткостью примыкающих стержней (2. рисунок).

Угловое смещение концевой плоскости двухшарнирного стержня при нагрузке моментом на одном конце (2/a рисунок).

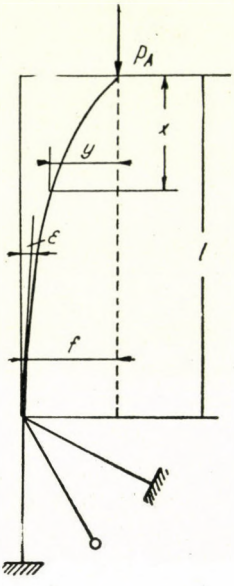


Рис. 1.

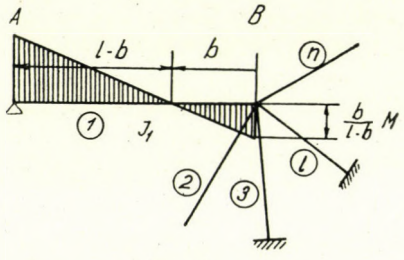


Рис. 2.

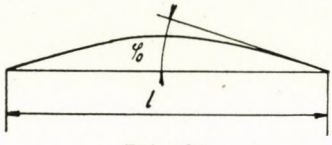


Рис. 2/a

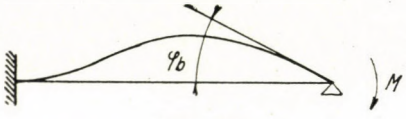


Рис. 2/b

$$\varphi_0 = \frac{M\,l}{3\,E\,I} = \frac{M}{3\,E\,I/l} = \frac{M}{k_0} \tag{4}$$

Угловое смещение концевой плоскости стержня при нагрузке моментом на одном конце и защемленного на другом конце (2/в рисунок).

$$\varphi b = \frac{M\,l}{4\,E\,I} = \frac{M}{4\,E\,I/l} = \frac{M}{k_b} \tag{5}$$

Коэффициенты жесткости знаменателей (k_0, k_b) находятся в зависимости от размера балок (I = момент инерции, l = расстояние между опорами) и их материала (E = модуль упругости), а также и от расчетов опоры, защемления (умножитель 3→4). При частично защемленных примыкающих стержней можно применять умножителя между 3 и 4.

Доля момента, происходящая из действующего на один узел момента M и приходящая на другой примыкающий стержень, вычисляется также как и по методу Гросса формулой

$$M_1 = \frac{k_1\,M}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$$

ввиду аналогичного смещения угла. Из этого получаем угловое смещение узла по формуле

$$\varphi \sim \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{k_1 M}{k_1 (k_1 + k_2 + \ldots . k_n)} = \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \tag{6}$$

В вышеприведенной формуле фигурирует конечно только жесткость примыкающих защемляющих стержней, а именно из-за того, что принятый во внимание момент защемления, который возникает на нижнем конце свободно кончавшегося стержня, длины „l“, следует рассматривать как крайнюю нагрузку, действующую на узел.

В данном случае этот наружный момент образуется тогда, если f является самым большим изгибом:

$$M = Pf \tag{7}$$

Значит, из условий (3/а) формулы (2) $B = 0$ получаем

$$f = A \sin \omega l \qquad \text{и} \qquad M = P A \sin \omega l \tag{8}$$

Принимая во внимание (2/в) и учитывая формулу (8),

$$\frac{M}{\Sigma k} = A \omega \cos \omega l = \frac{P A \sin \omega l}{\Sigma k}$$

где фактор A отпадает и мы таким образом получаем трансцедентное условное уравнение изгиба. Это уравнение мы приводим в такую форму, что сила P участвует только в величине ω. (Мы умножаем и делим на EI_1)

$$\frac{P E I l}{E I l} \frac{\sin \omega l}{\Sigma k} = \omega \cos \omega l \tag{9}$$

В этом уравнении $\frac{P}{E I} = \omega^2$ и $\frac{E I}{l}$ представляют размер жесткости изогнутого стержня.

Подставим следующие обозначения

$$\mu = \frac{\Sigma k}{E I/l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{I_i}{l_i}}{I/l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_{i1} m_{i1}}{m} \tag{10}$$

где c_{i1} — в зависимости от размера защемления — у примыкающих балок является числом между 3 и 4, в то время как в качестве знаменателя фигурирует I/l.

При конструкции из одинакового материала можно — как в числителе, так и в знаменателе — не принимать во внимание модуля упругости E. Но его конечно надо учитывать если, например, системе балок присоединяется железная стойка.

В случае связной рамы, фигурирующий в формуле (10) фактор c_{i1} можно определить методом постоянных точек. На 2. рисунке показана такая связь стержней, при которой угловое смещение в точке A зависит от:

$$\varphi_A = \frac{M}{k_1}; \quad k_1 = c_1 \frac{I_1}{l_1} = c_1 m_1$$

в точке B равнодействующее угловое смещение является, если

$$\frac{I_1}{l_1} = m_1$$

$$\varepsilon_B = \frac{2\,m_1}{\sum_{i=2}^{n} c_i\, m_i} = \frac{2\,m_1}{\Sigma\, k_i},$$

что по формуле (10) равно: $\dfrac{2}{\mu_B}$

Расстоянием постоянных точек, является формула ***(b):***

$$b = \frac{l_1}{3\,(1+\varepsilon_B)} = \frac{l_1}{3\left(1+\dfrac{2\,m_1}{\sum_{i=2}^{n} C_i\, m_i}\right)} = \frac{l}{3\left(1+\dfrac{2}{\mu_B}\right)}$$

Угол смещения в точке A

$$\varphi_A = \frac{M}{c_1\, m_1} = \frac{M\,l_1}{3\,E_1\,I_1} - \frac{M\,l}{6\,E_1\,I_1}\,\frac{b}{(l-b)}$$

исходя из этой формулы фактор c_1 можно вычислять следующим образом

$$c_1 = \frac{3\,(l - b/l_1)}{1 - 1\cdot 5\; b/l_1}$$

подставляя b в формулу

$$k_1 = c_1\,\frac{I_1}{l_1} = c_1\, m_1 \qquad (10/)\mathbf{b}$$

$$c_1 = 4\left(1 - \frac{1}{\dfrac{\sum_{i=2}^{n} c_{i1}\, m_{i1}}{m_1} + 4}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{\mu_B + 4}\right)$$

В предельных случаях, например, при полном защемлении в точке B

$$\sum_{i=2}^{n} k_i = \infty$$

значит $\mu = \infty$ и тогда $k_1 = 4\,m_1 = 4I_1/l_1$, если же в противоположность этому $\Sigma k_i = 0$, т. е. если имеется одна шарнирная опора в точке B, тогда получаем

$$k_1 = 4\,m_1\left(l - \frac{l}{4}\right) = 3\,m_1 = 3\,\frac{I_1}{l_1}$$

Эти конечные результаты и до сих пор были известны.

Таким образом формула (9) примет следующий вид:

$$\frac{\omega^2 l \sin \omega l}{\mu} = \cos \omega l$$

или еще проще

$$\mu = \omega l \operatorname{tg} \omega l \tag{11}$$

Значит, этим определяется уравнение критического усилия, в котором P встречается только в факторе ω. В данном случае величину P можно определить также итерацией, или же последовательным апроксимированием, хотя в практике этот метод следует считать невыгодным.

Мы подойдём к значительно более пригодным результатам, если мы каждый случай прогиба относим к шарнирному стержню на двух концах, критическая нагрузка которого по Эйлеру

$$P_K = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2} \tag{12}$$

Эту формулу мы желаем таким образом применять, чтобы она удовлетворила бы уравнение, т. е. следует искать ту дополнительную длину (до 180°) стержня, которая дает для каждого двухшарнирного стержня одинаковое с уравнением (11) критическое усилие.

Мы вводим обозначение

$$\alpha = \frac{l_0}{l} \tag{13}$$

т. е. подстановку длины стержня $l_0 = \alpha l$. Тогда

$$P_K = \frac{\pi^2 E I}{(\alpha l)^2} \text{ т. е. } \frac{P_K}{E I} l^2 = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 \text{ значит } (\omega l)^2 = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2$$

наконец

$$\omega l = \frac{\pi}{\alpha} \tag{14}$$

Этим уравнение (11) получит следующую форму

$$\mu = \frac{\pi}{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\alpha} \tag{11/a}$$

Это уравнение включает также α и нам необходима форма $\alpha = f(\mu)$. Путем косвенного решения мы можем притти к практически полезным результатам. Из уравнения (11/a) можно, наряду с α величинами, определить μ, и затем восстановить приближенную интерполированную формулу $\alpha = f(\mu)$.

Асимптотические величины формулы (11/a):

если $\alpha = 2$ тогда $\mu = \infty$

если $\alpha = \infty$ тогда $\mu = 0$

Это означает, что при каждом полностью защемленном стрежне необходимо учитывать двойную длину стержня, что и до сих пор было известно, и что шарнирный стержень без защемления дает неустойчивое равновесие.

Если мы внутри вышеобозначенной области вычисляем некоторые величины и вводим хорошо приближенную гиперболу, то следует применять следующую формулу (I. таблица):

$$\alpha = 2 + \frac{1{,}7}{\mu + 0{,}08} \tag{15}$$

Эта формула дает при $\mu = 0$ величину $\alpha = \infty$, но в практике она правильна лишь с отклонением не больше чем на 2 %.

I. ТАБЛИЦА

α	$\frac{\pi}{\alpha}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{\alpha}$	μ
2,00	1,57	∞	∞
2,24	1,40	5,7979	8,100
2,62	1,20	2,5722	3,080
3,14	1,00	1,5574	1,557
3,93	0,80	1,0296	0,823
5,23	0,60	0,6841	0,412
7,85	0,40	0,4228	0,169
15,70	0,20	0,2027	0,041
∞	0,00	0	0

b) На двух концах неравномерно упруго защемленный стержень.

Из приведенных на 3. рисунке назначений, дифференциальное уравнение (I) дает следующий вывод:

$$y'' = -\frac{P y}{E I} + \frac{M_1}{E I} + \frac{M_2 - M_1}{E J}\,\frac{x}{l} \tag{16}$$

Решение с обозначением $\omega^2 = P/EJ$, как в случае *a)*

$$y = A \sin \omega x + B \cos \omega x + \frac{M_1}{P} + \frac{M_2 - M_1}{P}\,\frac{x}{l} \tag{17/a}$$

$$y' = A\,\omega \cos \omega x - B\,\omega \sin \omega x + \frac{M_2 - M_1}{P l} \tag{17/b}$$

Граничные условия:

$$x = 0\,;\ y = 0\,;\ y' = \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{M_1}{\sum_1 K} \tag{18/a}$$

$$x = l\,;\ y = 0\,;\ y' = -\operatorname{tg} \varepsilon_2 = -\frac{M_2}{\sum_2 K} \tag{18/b}$$

если ΣK означает сумму жесткости стержней, примыкающих к узлу 1, тогда
$\underset{2}{\Sigma} K$ означает сумму жесткости стержней, примыкающих к узлу 2 ($\operatorname{tg}\varepsilon_2$ является отрицательным, так как в случае одностороннего изгиба $\operatorname{tg}\varepsilon_1$ имеет противоположный знак).

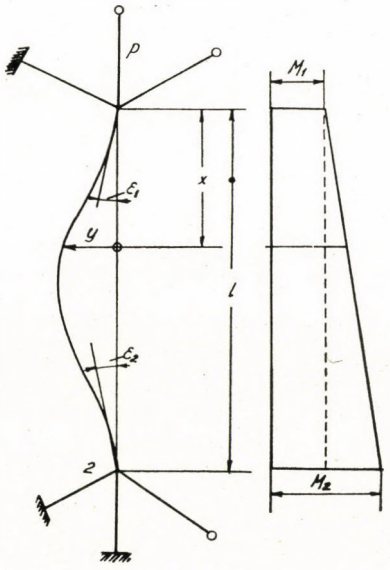


Рис. 3.

В задаче четыре неизвестных: A, B, M_1, M_2 и поэтому с этими четырьмя граничными условиями можно вывести четыре уравнения:

$$0 = B + \frac{M_1}{P} \tag{19/a}$$

$$0 = A \sin \omega l + B \cos \omega l + \frac{M_2}{P} \tag{19/b}$$

$$\frac{M_1}{\underset{1}{\Sigma} k} = A\,\omega + \frac{M_2 - M_1}{P l} \tag{19/c}$$

$$-\frac{M_2}{\underset{2}{\Sigma} k} = A\,\omega \cos \omega l - B\,\omega \sin \omega l + \frac{M_2 - M_1}{P l} \tag{19/d}$$

из (19/a) $M_1 = -BP$
из (19/b) $M_2 = -PA \sin \omega l - PB \cos \omega l$
Если мы эти величины введим в (19/c) и (19/d) и произведим упрощение формулы, то получим следующие уравнения

$$A\left(\omega - \frac{\sin \omega l}{l}\right) = B\left(\frac{\cos \omega l}{l} - \frac{1}{l} - \frac{P}{\underset{1}{\Sigma} k}\right)$$

$$A\left(\omega\cos\omega l-\frac{\sin\omega l}{l}-\frac{P\sin\omega l}{\sum\limits_{2}k}\right)=$$

$$=B\left(\omega\sin\omega l+\frac{\cos\omega l}{l}-\frac{1}{l}+\frac{P\cos\omega l}{\sum\limits_{2}k}\right)$$

после деления этих уравнений одно с другим. A и B выпадают и таким образом получаем приближенное уравнение критической силы.

Из решения этой математической формулировки, выводим следующее сложное уравнение:

$$-2\ \frac{\omega}{l}+\sin\omega l\ \left(\omega^2-\frac{P}{l\sum\limits_{2}k}-\frac{P}{l\sum\limits_{1}k}-\frac{P^2}{\sum\limits_{1}k\sum\limits_{2}k}\right)+$$

$$+\cos\omega l\left(2\ \frac{\omega}{l}+\frac{\omega P}{\sum\limits_{2}k}+\frac{\omega P}{\sum\limits_{1}k}\right)=0 \tag{20}$$

Вводя следующие обозначения

$$\mu=\frac{\sum\limits_{1}k}{EI/l};\ \mu_2=\frac{\sum\limits_{2}k}{EI/l} \tag{21}$$

получаем следующие замещающие значения

$$\frac{P}{l\sum\limits_{2}k}=\frac{PEI}{lEI\sum\limits_{2}k}=\frac{\omega^2}{\mu_2};\ \frac{P}{l\sum\limits_{1}k}=\frac{\omega^2}{\mu_1};\ \frac{P^2}{\sum\limits_{1}k\sum\limits_{2}k}=$$

$$=\frac{l^2P^2(EI)^2}{l^2(EI)^2\sum\limits_{1}k\sum\limits_{2}k}=\frac{l^2\omega^4}{\mu_1\mu_2}$$

подставляя эти значения в уравнение (20) и деля все на ω^2, тогда

$$-\frac{2}{\omega l}+\sin\omega l\ \left(1-\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1}-\frac{(\omega l)^2}{\mu_1\mu_2}\right)+$$

$$+\cos\omega l\left(\frac{2}{\omega l}+\frac{\omega l}{\mu_1}+\frac{\omega l}{\mu_2}\right)=0 \tag{22}$$

Принимая во внимание соотношение (14) $\omega l=\frac{\pi}{\alpha}$ и произведя замещение в уровнении (22), получим следующее уровнение:

$$-\frac{2\alpha}{\pi}+\sin\frac{\pi}{\alpha}\ \left(1-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}-\frac{\pi}{\alpha^2\mu_1\mu_2}\right)+$$

$$+\cos\frac{\pi}{\alpha}\ \left(\frac{2\alpha}{\pi}+\frac{\pi}{\alpha\mu_1}+\frac{\pi}{\alpha a_2}\right)=0 \tag{23}$$

По введению соотношения $\mu_1/\mu_2 = \nu$ вычисляем фактор μ_1. Преобразуя уравнение (23)

$$\frac{2\alpha\mu_1}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{\alpha}-1\right)+\sin\frac{\pi}{\alpha}\left(\frac{\mu_1^2-\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\nu}{\mu_1}\right)=$$

$$=\sin\frac{\pi}{\alpha}(\nu+1)-\frac{\pi}{\alpha}\cos\frac{\pi}{\alpha}(\nu+1)$$

и учитывая, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\alpha}=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{\alpha}-1\right)}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}$$

получаем следующее уравнение:

$$-\frac{2\alpha\mu_1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\mu_1^2-\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\nu}{\mu_1}=$$

$$=(\nu+1)\left(1-\frac{\pi}{\alpha}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\alpha}\right)$$

Из этого получаем конечное уравнение второй степени:

$$\mu_1^2-\mu_1\frac{(\nu+1)\left(1-\frac{\pi}{\alpha}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\alpha}\right)}{1-\frac{2\alpha}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\alpha}}-$$

$$-\frac{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\nu}{1-\frac{2\alpha}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\alpha}}=0 \qquad (24)$$

Введением определенных значений и интерполированием приближенной гиперболы, устанавливаем из этого уравнения, также как и в случае *а)*, решение: $\alpha = F(\mu_1, \mu_2)$

Необходимы еще формулы предельных случаев, т. е. для $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 = \mu_2$, значит для решения на одном конце шарнирно и на обоих концах равномерно защемленных стержней.

В/1) Стержень, шарнирно защемленный на одном и упруго на другом конце

Учитывая что $\mu_1 = 0$, уравнение (23) сведём к нулевому равенству, таким образом, чтобы не возникли ∞ значения.

$$-\frac{2\alpha\mu_1}{\pi}+\sin\frac{\pi}{\alpha}\left(\mu_1-\frac{\mu_1}{\mu_2}-1-\frac{\pi^2}{\alpha^2\mu_2}\right)+$$

$$+\cos\frac{\pi}{\alpha}\left(\frac{2\alpha\mu_1}{\pi}+\frac{\pi}{\alpha}\frac{\mu_1}{\mu_2}+\frac{\pi}{\alpha}\right)=0 \qquad (23/a)$$

Отсюда $\mu_1 = 0$

$$-\sin\frac{\pi}{\alpha}\,\frac{\pi^2}{\alpha^2\,\mu_2}-\sin\frac{\pi}{\alpha}+\frac{\pi}{\alpha}\cos\frac{\pi}{\alpha}=0$$

из чего наконец

$$\boxed{\mu_2=\frac{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{\alpha}}{\frac{\pi}{\alpha}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{\alpha}}} \tag{25}$$

B/2) Стержень равномерно упруго защемленный на обоих концах

Исходя из уравнения (22), также как и в случае в/1 на основании

$$-\frac{\mu}{\omega\,l}+\sin\omega\,l\left(\frac{\mu}{2}-1-\frac{(\omega\,l)^2}{2\,\mu}\right)+\cos\omega\,l\left(\frac{\mu}{\omega\,l}+\omega\,l\right)=0$$

На основании этого уравнения утверждаем, что одна часть его членов = *O*.

$$-\sin\omega\,l-(1-\cos\omega\,l)\,\frac{\mu}{\omega\,l}=0 \tag{26}$$

Отсюда

$$\mu=-\frac{\omega\,l\sin\omega\,l}{1-\cos\omega\,l}=\boxed{-\frac{\omega\,l}{\operatorname{tg}\frac{\omega\,l}{2}}} \tag{27}$$

Эту формулу можно решить также непосредственно причислением $M_1 = M_2$ из (16) уравнения в конечных разностях.

После этого остается только доказать, что и оставшиеся члены также равны нулю.

$$\sin\omega\,l\left(\mu-\frac{(\omega\,l)^2}{\mu}\right)+2\,\omega\,l\,\cos\,\omega\,l=0$$

Подставляя μ значения из (27)

$$\sin\omega\,l\left[-\frac{\omega\,l\sin\omega\,l}{1-\cos\omega\,l}+\frac{(\omega\,l)^2\,(1-\cos\omega\,l)}{\omega\,l\,\sin\omega\,l}\right]+2\,\omega\,l\,\cos\,\omega\,l=0$$

прибавляя

$$\frac{-\sin^2\omega\,l+1-2\cos\omega\,l}{1-\cos\omega\,l}+\frac{\cos^2\omega\,l+2\cos\omega\,l-2\cos^2\omega\,l}{1-\cos\omega\,l}=0$$

Числитель действительно *O*, значит, правильность формулы (27) доказана. Если учтём, что $\omega l = \frac{\pi}{\alpha}$, то формулу (27) можно привести к следующему виду

$$\boxed{\mu_1=\mu_2=-\frac{\pi}{\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{\alpha}}} \tag{27/a}$$

Уравнениями (24), (26), (27/a) можно решить любой случай упруго защемленной фермы. При помощи этих уравнений можно, наряду с определенным введением величин α, определить μ_1, μ_2

II. ТАБЛИЦА

α	$\frac{\pi}{2\alpha}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\alpha}$	$1-\frac{\operatorname{tg}\pi/2\alpha}{\pi/2\alpha}$	$\frac{\pi}{\alpha}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{\alpha}$	$-1+\frac{\pi}{\alpha}\Big/\operatorname{tg}\frac{\pi}{\alpha}$	$\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\alpha}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{\alpha}$
1	1,57	∞	∞	3,14	0	∞	0	3,140
0,983	1,60	— 34,233	+ 22,400	3,20	+ 0,058	+ 54,200	+ 0,594	3,140
873	1,80	— 4,286	+ 3,380	3,60	+ 0,493	+ 6,310	+ 6,390	3,107
786	2,00	— 2,185	+ 2,090	4,00	+ 1,157	+ 2,460	+ 18,500	2,843
713	2,20	— 1,374	+ 1,625	4,40	+ 3,096	+ 0,420	+ 59,900	1,304
655	2,40	— 0,916	+ 1,381	4,80	— 11,385	— 1,421	при $\alpha = 0{,}7$	
605	2,60	— 0,602	+ 1,231	5,20	— 1,886	— 3,755		
561	2,80	— 0,356	+ 1,127	5,60	— 0,814	— 7,880	значение ∞	
524	3,00	— 0,143	+ 1,048	6,00	— 0,291	— 21,600		
500	3,14	0	+ 1,000	6,28	0	∞		

III. ТАБЛИЦА

α	$\nu = 0, \mu_1 = 0$	$\nu = 0{,}25$		$\nu = 0{,}50$		$\nu = 0{,}75$		$\nu = 1$
	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	μ_1	μ_2	$\mu_1 = \mu_2$
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0,983	0,189	0,040	0,160	0,060	0,120	0,080	0,106	0,0935
873	2,055	0,360	1,440	0,560	1,120	0,715	0,952	0,840
786	6,510	0,474	1,896	1,261	2,520	1,580	2,100	1,830
713	45,900	1,568	6,272	2,256	4,520	2,774	3,690	3,200
655	—	2,783	11,132	3,752	7,500	4,540	6,050	5,240
605		4,940	19,760	6,310	12,600	7,550	10,050	8,640
561		9,470	37,880	11,670	23,340	13,740	18,300	15,800
524		26,100	104,40	31,500	63,000	36,900	49,100	42,000
500								
	из уравнения (25)	значения, вычисленные из уравнения (24)						из уравнения (27/a)

В отношении необходимых вспомогательных величин составлена таблица II. из которой можно вычислять величины μ_1, μ_2 для любого случая упруго защемленной фермы. Соответствующие приближенные формулы мы составили таким образом, чтобы они представляли уравнения гипербол и удовлетворяли бы следующие условия: см. III. таблицу:

$$\alpha = 1 \quad \text{при} \quad \mu = 0$$
$$\alpha = 0{,}713 \quad \text{при} \quad \mu = \mu_0$$
$$\alpha = 0{,}5 \quad \text{при} \quad \mu = \infty$$

Соответствующее уравнение см. IV. таблицу:

$$\alpha = \frac{0{,}5\,\mu + 0{,}742\,\mu_0}{\mu + 0{,}742\,\mu_0} \tag{28}$$

форма уравнения (28)

$$\alpha = 0{,}5 + \frac{0{,}5\,c}{\mu + c}$$

в которой, после определения фактора „c" в функции μ_2/μ_1, получаем совершенно плоскую линию. Если мы эту линию заменим прямой, тогда получаем приближенные величины введенные в последней графе IV. таблицы.

$c = 1{,}6 + 0{,}8\,\frac{\mu_2}{\mu_1}$ является уравнением прямой.

Основываясь на этом и подставляя условный предел $1 < \mu_2/\mu_1 < 5$, получаем следующий вывод

$$\boxed{\alpha = 0{,}5 + \frac{0{,}4\left(2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right)}{\mu_2 + 0{,}8\left(2 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}} \tag{29}$$

Если $\mu_2/\mu_1 = \infty$ т. е. при $\mu_1/\mu_2 = 0$ получаем из IV. таблицы формулу шарнирной на одном конце фермы.

$$\boxed{\alpha = 0{,}7 + \frac{0{,}8}{\mu_2 + 2{,}7}} \tag{30}$$

IV. ТАБЛИЦА

$\nu = 0$	$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \infty$	$\alpha = \frac{0{,}7\,\mu_2 + 2{,}76}{\mu_2 + 2{,}76} = 0{,}7 + \frac{0{,}83}{\mu_2 + 2{,}76}$	$\sim 0{,}7 + \frac{0{,}8}{\mu_2 + 2{,}7}$
$\nu = 0{,}25$	$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 4$	$\alpha = \frac{0{,}5\,\mu_2 + 4{,}65}{\mu_2 + 4{,}65} = 0{,}5 + \frac{2{,}33}{\mu_2 + 4{,}65}$	$\sim 0{,}5 + \frac{2{,}4}{\mu_2 + 4{,}8}$
$\nu = 0{,}50$	$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 2$	$\alpha = \frac{0{,}5\,\mu_2 + 3{,}35}{\mu_2 + 3{,}35} = 0{,}5 + \frac{1{,}68}{\mu_2 + 3{,}35}$	$\sim 0{,}5 + \frac{1{,}6}{\mu_2 + 3{,}2}$
$\nu = 0{,}75$	$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1{,}33$	$\alpha = \frac{0{,}5\,\mu_2 + 2{,}74}{\mu_2 + 2{,}74} = 0{,}5 + \frac{1{,}37}{\mu_2 + 2{,}74}$	$\sim 0{,}5 + \frac{1{,}33}{\mu_2 + 2{,}66}$
$\nu = 1{,}00$	$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$	$\alpha = \frac{0{,}5\,\mu_2 + 2{,}37}{\mu_2 + 2{,}37} = 0{,}5 + \frac{1{,}19}{\mu_2 + 2{,}37}$	$\sim 0{,}5 + \frac{1{,}2}{\mu_2 + 2{,}4}$

Формула (29) не отвечает случаю $\mu_2/\mu_1 = \infty$ так как асимптота гиперболы находится на другом месте, чем в формуле (30).

Приближение не стоит распространять на случай $\mu_2/\mu_1 > 5$, потому что в практике можно применять для данного случая $\mu_2/\mu_1 = \infty$.

c) Изгибающийся стержень, различном образом защеленный на обоих концах

Из рисунка (4) видно, что этот случай может быть составлен из *a*) стержней, а именно потому что точка перегиба разделяет решение задачи на два стержня со свободными концами.

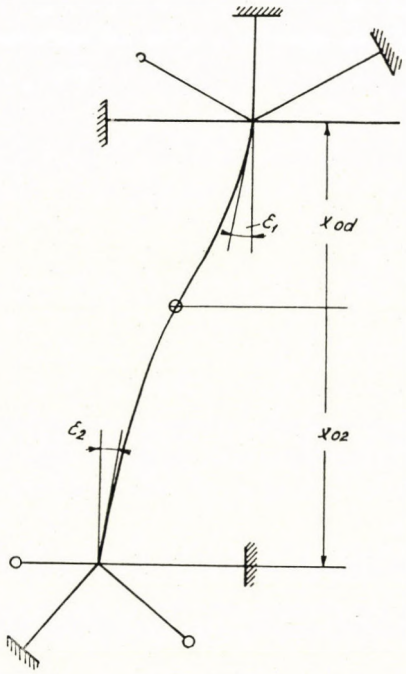


Рис. 4.

Для верхнего и нижнего защемления α определяется по формуле (15), однако, следует учитывать, что из-за раздела на два стержня основные длины x и l-x_1 в этом случае значение величины α определяется по следующей формулы:

$$\frac{l_0}{x_1} = 2 + \frac{1{,}7}{\sum_1 k \left| \frac{I}{x_1} \right.}$$

в которой пренебрегается в знаменателе число 0,08, из-за чего формула в отношении к формуле (15), преобразуется при значении $\mu = 0$ в значение $\alpha = \infty$. Следует, однако, заметить, что это пренебрежение не имеет влияния на место x_1.

После подстановки сокращения $x_1/l = \xi_1$ и умножения числителя и знаменателя на l, получаем формулу

$$\frac{l_0}{l\,\xi_1} = 2 + \frac{1{,}7}{\xi_1 \mu_1}$$

в которой $\dfrac{l_0}{l} = \alpha$

значит

$$\alpha = 2\,\xi_1 + \frac{1{,}7}{\mu_1} \tag{31}$$

Аналогично этому на участке $x_2 = l - x_1$ или $\xi_2 = 1 - \xi_1$, можно написать то же самое т. к. целый стержень может иметь только одну единственную замещающую длину изгиба. Напишем формулу:

$$\alpha = 2\,(1 - \xi_1) + \frac{1{,}7}{\mu_2} \tag{31/a}$$

Сложением (31) и (31/a) получаем формулу

$$2\,\xi_1 + \frac{1.7}{\mu_1} = 2\,(1 - \xi_1) + \frac{1.7}{\mu_2}$$

отсюда

$$\boxed{\xi_1 = 0{,}5 + 0{,}425\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)} \tag{32}$$

Это уже необходимо подставить в формулу (15) и мы получаем

$$\boxed{\alpha = \xi_1\left(2 + \frac{1{,}7}{\xi_1 \mu_1 + 0{,}08}\right).} \tag{33}$$

c) Изгибающийся стержень, одинаково защемленный на двух концах

Из формул (32) и (33), если $\mu_1 = \mu_2 = \mu$; $\xi_1 = 0{,}5$, т. е. точка перегиба в середине и

$$\boxed{\alpha = 1 + \frac{1{,}7}{\mu + 0{,}16}} \tag{34}$$

c/2) Изгибающийся стержень, шарнирный на одном и упруго защемленный на другом конце

Этот случай представляет последовательный случай с *a)* и применять следует формулу (15). Необходимо обратить внимание на то, что для этого случая нельзя применять формулу (32), т. к. например при $\mu_2 = 0$ получаем $\xi_1 = \infty$, однако, это совершенно естественно, т. к. принадлежащее к шарнирной точке $\alpha = \infty$. Поэтому эта формула не относится к этому случаю

Теперь $\xi_1 = 1$

$$\boxed{\alpha = 2 + \frac{1{,}7}{\mu + 0{,}08}} \tag{35}$$

д) Расчет этажной фермы

Как из 5. рисунка видно, в защемляющемся факторе μ в знаменателе числятся только те стержни, которые не имеют нагрузку от осевой силы, или же ее имеют только в незначительной мере, а именно по той причине,

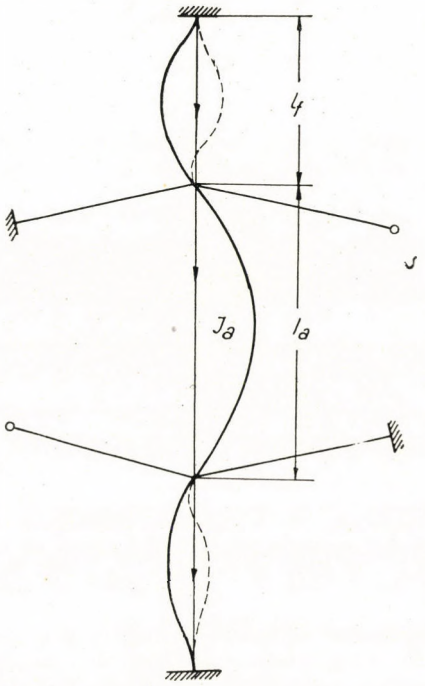


Рис. 5.

что для этого, учитывая защемляющееся действие нагруженных стержней, должно происходить изгибание, обозначенное пунктирными линиями. Однако, это ничем не обеспечено и поэтому нельзя принимать во внимание примыкающих нагруженных стоек.

Дальнейшим вопросом является, в какой степени обнаруживается защемляющееся действие учитываемых примыкающих стоек на нижние и верхние стойки. Согласно формулы (10)

$$\mu = \sum_{i-1}^{n} c_i \frac{I_i}{l_i} \Big| \frac{J}{l}$$

где $c_i = 3 \rightarrow 4$, согласно степени защемления примыкающих стержней, и $\frac{Z}{l}$ характеристика жесткости изгибающейся стойки.

Подставляя обозначения $c_i \frac{I_i}{l_i} = k_i$ и $\frac{I_f}{l_f} = m_f$; $\frac{I_a}{l_a} = m_a$

(см. 5. рисунок) мы можем вписать относящиеся к нижней и верхней стойке характерные для размера защемления величины

$$\mu_f = \frac{x \Sigma k_i}{m_f} \tag{35/a}$$

$$\mu_a = \frac{(1 - x) \Sigma k_i}{m_a} \tag{35/b}$$

В этих уравнениях x обозначает размер распределения.

Σk_i следует так распределить, чтобы более жесткий стержень получил бы меньшее защемление, в то время как более гибкий стержень лучше защемлялся бы примыкающими балками.

Из этого следует, что распределение следует производить в зависимости от гибкости.

Размер гибкости $\frac{l}{I} = \frac{1}{m}$

$$x = \frac{\frac{1}{m_f}}{\frac{1}{m_f} + \frac{1}{m_a}} = \frac{m_a}{m_a + m_f} \tag{36a}$$

$$1 - x = \frac{1/m_a}{1/m_f + 1/m_a} = \frac{m_f}{m_a + m_f} \tag{36/b}$$

На основании этого размеры защемления следующие:

$$\mu_f = \frac{m_a \Sigma k_i}{(m_a + m_f) m_f} \tag{37/a}$$

$$\mu_a = \frac{m_f \Sigma k_i}{(m_a + m_f) m_a} \tag{37/b}$$

Если $m_a = m_f = m$, тогда

$$\mu_f = \mu_a = \frac{\Sigma k_i}{2m} \tag{38}$$

Если к узлу примыкают больше чем 2 стойки, тогда распределение необходимо выразить формулами (36/a) и (37/a) следующим образом: (например защемление r-той стойки)

$$\mu_r = \frac{\frac{l}{m_r} \sum_{i=1}^{n} k_i}{\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{m_i} m_r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{m_r^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{m_i}} \tag{39}$$

Эта формула применима в том случае, если к узлу примыкает известное количество „n" балок и известное количество „p" стоек. Под стойками мы понимаем изгибающиеся стержни, нагруженные осевой силой.

В V. таблице приведены все случаи изгиба.

Дополнение к нормативу составлялось на основании данных из таблицы V., но для практических вычислений мы применяли еще дальнейшие упрощения.

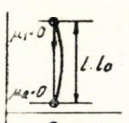
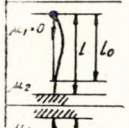
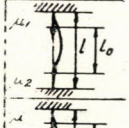
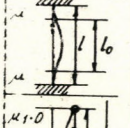
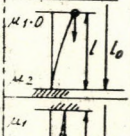
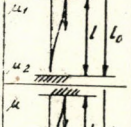
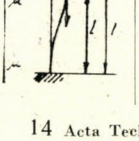
Значение μ мы отчасти относим к защемленной стойке и вследствие этого

$$\mu = \frac{\Sigma\, k_g}{k_0}$$

где k_g означает примыкающие стойки, k_0 характерную величину жесткости исследуемых стоек.

$$k_g = c\,\frac{I_g}{l}$$

V. ТАБЛИЦА

Схема	Примечание	Упругое защемление	Полное снятие напряжения
	Основной случай	$l_0 = l$	$l = l$
	$\mu = \sum_{i=1}^{n} ci\frac{I_i}{l_i} = \frac{\Sigma\, ki}{m}$ $c_i = 3 \longrightarrow 4$	$l_0 = \left(0{,}7 + \frac{0{,}8}{\mu_2 + 2{,}7}\right) l$	$l_0 = 0{,}7\, l$
	$1 < \mu_2/\mu_1 < 5$ (μ как 2. случай) $c = 0{,}4\,(2 + \mu_2/\mu_1)$	$l_0 = \left(0{,}5 + \frac{c}{\mu_2 + 2c}\right) l$	$l_0 = 0{,}5\, l$
	(μ как 2. случай)	$l_0 = \left(0{,}5 + \frac{1{,}2}{\mu_2 + 2{,}4}\right) l$	$l_0 = 0{,}5\, l$
	(μ как 2. случай)	$l_0 = \left(2 + \frac{1{,}7}{\mu_2 + 0{,}08}\right) l$	$l_0 = 2\, l$
	(μ как 2. случай) $\xi = \frac{x}{l} = \left[0{,}5 + 0{,}425\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)\right]$	$l_0 = \left(2 + \frac{1{,}7}{\xi\,\mu_1 + 0{,}08}\right) \xi\, l$	$l_0 = l$
	(μ $x = 0{,}5\, l$	$l_0 = \left(1 + \frac{1{,}7}{\mu + 0{,}16}\right) l$	$l_0 = l$

В этой формуле коэффициент „c“ находится в зависимости от размера защемления не примыкающейся к стойке конечной точки балки, а именно

при балках с шарнирным концом	$c = 0{,}87$
при отчасти защемленных балках	$c = 1{,}00$
полностью защемленные балки	$c = 1{,}15$

$$\text{и } k_0 = \frac{I_0}{l_{\text{стойка}}}$$

При этажных рамах жесткость верхней стойки, примыкающей к верхнему узлу исследуемой стойки b_0^f, жесткость исследуемой стойки κ_0^a, и отсюда, на основании формулы (37/a),

$$\mu_f = \frac{k_0^a \sum k_g}{(k_0^a + k_0^f)\, k_0^f} \tag{37/c}$$

На основании формулы (37/в), если жесткость нижней стойки, примыкающей к нижнему узлу исследуемой стойки является κ_0^a, и жесткость верхней (исследуемой) стойки κ_0^f

$$\text{то } \mu_a = \frac{k_0^f \sum k_g}{[k_0^f + k_0^a]\, k_0^a} \tag{37/d}$$

В этих формулах $\sum \kappa_g$ означает жесткость всех балок, примыкающих к верхнему узлу последующих стоек.

Для проведенных в V. таблице случаев, последовало установление множителя l_0 длины ν дополнительных стержней без промежуточных вычислений, точно также, как и при случаях 3 и 6.

Формулы норматива приведены в таблице V/a.

Написанные в таблице V/a значения μ_f и μ_a соответствуют значениям μ_1 и μ_2 V. таблицы. Предел влияния формул этой таблицы $\mu \geq 0{,}3$.

Приведенные в таблице V/a. данные приближенных формул применимы в практике, т. к. в наших конструкциях стержни не представляют теоретически обусловленных, частично защемленных балок. Следовало бы при каждой раме установить критическую нагрузку всей конфигурации, а это в общем является очень сложной и трудно разрешимой задачей. Упрощенный метод вычисления для стержней следует поэтому рассматривать как приближенное решение и вместо точных математических исчислений можно соглашаться на упрощенные формулы.

2. Основное уравнение внецентренно сжатого двухшарнирного стержня

Нагрузка стоек железобетонной конструкции в редких случаях центральна. Даже центрально исчисленные стойки в действительности изогнуты. Наряду с внецентренным сжатием, необходимо при железобетонных стойках одновременно учитывать прогибы, так как последние увеличивают эксцентриситет который в практике бывает довольно значительным.

V/a ТАБЛИЦА

Схема	Замещающая длина изгиба
1.	$l_0 = l$
2.	$l_0 = \left(0{,}7 + \frac{0{,}25}{\mu + 0{,}8}\right) l$
3.	$l_0 = \left(0{,}5 + \frac{0{,}17}{\mu_a + 0{,}7} + \frac{0{,}17}{\mu_f + 0{,}7}\right) l$
4.	$l_0 = \left(0{,}5 + \frac{0{,}34}{\mu + 0{,}7}\right) l$
5.	$l_0 = \left(2{,}0 + \frac{0{,}5}{\mu}\right) l$
6.	$l_0 = \left(1{,}0 + \frac{0{,}27}{\mu_a + 0{,}27} + \frac{0{,}27}{\mu_f + 0{,}27}\right) l$
7.	$l_0 = \left(1{,}0 + \frac{0{,}54}{\mu + 0{,}57}\right) l$

После решения самого простого основного случая, задачу следует считать решенной, так как все схемы, приведенные на 1. рисунке могут быть сведены к этой основе.

Дифференциальное уравнение стержня на основании обозначений на 6. рисунке:

$$y'' = -\frac{P(e+y)}{EJ} \tag{40}$$

применяя $\omega^2 = \frac{P}{EJ}$, решение как в 1. пункте.

$$y = A \sin \omega x + B \cos \omega x - \frac{Pe}{P}$$

$$y' = A\,\omega \cos \omega x - B\,\omega \sin \omega x$$

Основные условия:

$$x = 0\,;\ \text{при}\ x = l\, y = 0 \tag{41/a}$$

$$\text{при}\ x = \frac{l}{2}\ y' = 0 \tag{41/b}$$

из (41/а) $B = e$

из (41/в)

$$0 = A\,\omega \cos\frac{\omega l}{2} - e\,\omega\,\frac{\sin\omega l}{2};\quad A = e\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega l}{2}$$

$$y = e\left(\mathrm{tg}\,\frac{\omega l}{2}\sin\omega x + \cos\omega x - 1\right) \tag{42}$$

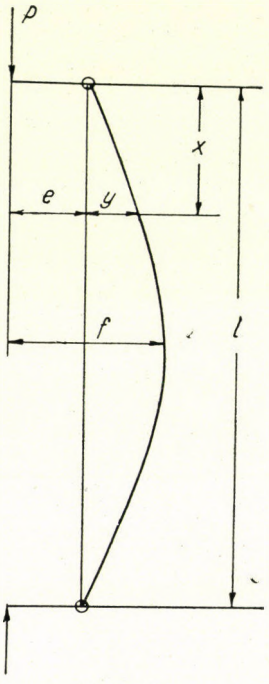


Рис. 6.

Самый большой изгиб:

$$e + y_{max} = f \text{ при } x = \frac{l}{2}$$

$$f = e\left(\mathrm{tg}\,\frac{\omega l}{2}\sin\frac{\omega l}{2} + \cos\frac{\omega l}{2} - 1\right) + e = \frac{e}{\cos\dfrac{\omega l}{2}} \tag{43}$$

Это трансцендентное уравнение критической силы. В противоположность к рассмотренным в 1. пункте случаев центральной нагрузки, при которых критическую силу действительно можно сократить до нуля, были получены только зависимые от ωl значения; теперь можно только установить, какую наибольшую величину внецентренность силы достигла вследствие продольного изгиба. Критическую силу получаем только в том случае, если $e = o$, когда $f\cos\dfrac{\omega l}{2} = 0$, где вследствие изгиба $f \neq O$, поэтому

$$\cos\frac{\omega l}{2} = 0$$

т. е.

$$\frac{\omega l}{2} = \frac{\pi}{2}; \quad \sqrt{\frac{P}{EI}}\, l = \pi$$

а из этого получаем

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

т. е. известную формулу Эйлера.

В каждом другом случае мы только получаем, для изменения данной внецентренности, уравнение как функцию любой силы P. Вопросом является, что мы принимаем за критическую силу. При стальных конструкциях принято считать ту силу критической, при которой напряжение в крайнем волокне, происходящее из внецентренного сжатия, достигает предел текучести. Это предположение правильно, потому что до достижения пластичного состояния, нагрузка стержня еще возможна, но тогда этот случай не относится к рассмотрению этого вопроса, который распространяется исключительно на прогибы. На практике мы довольствуемся разъяснениями, касающих упругости изгибов и для критического напряжения в крайнем волокне при железобетонных конструкциях считаем руководящим фактором предел прочности призматического образца бетона.

При железобетонных конструкциях это условие действительно является критическим, так как при достижении предельной прочности призматического образца бетона появляется лом. В общем примерное наибольшее напряжение (с формулой 43)

$$\sigma_P = \frac{P}{F} + \frac{Pe}{K \cos \frac{\omega l}{2}} \tag{44}$$

3. Пластичный изгиб железобетонных стоек

Основное уравнение пластичного изгиба определяется формулой (44). Предпосылкой является то, чтобы материал использовался бы внутри пре-

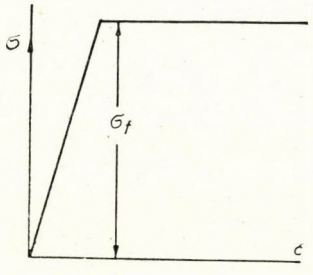


Рис. 7.

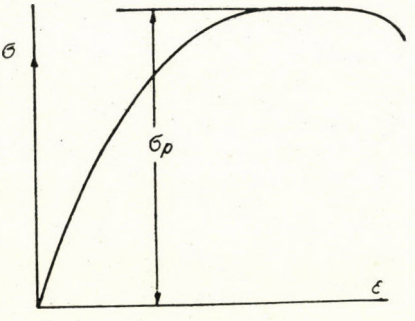


Рис. 8.

дела упругости и достигал бы предела текучести без всякого перехода. (7. рисунок). Бетонный материал относится существенно иначе, так как у бетона не может быть речи о пропорциональном участке и изменение формы скорее характеризируется кривой линией. Значит, поведение бетона остается до конца пластичным (8. рисунок).

Пластичный изгиб стальных материалов можно также хорошо приблизить обобщением формулой Эйлера, причем модуль упругости E принимается с переменным значением. В пластичном участке это изменение является весьма сомнительным, но мы получаем полезные результаты, если мы сверх пропорционального предела принимаем изменение E в функции σ

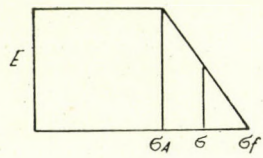


Рис. 9.

линейным. (9. рисунок). У бетона не имеется пропорционального участка и поэтому необходимо всегда применять непостоянный модуль упругости.

а) Приближенное решение основного уравнения. Постоянный и непостоянный эксцентриситет

Уравнение (44) в данной форме для практических расчетов не годится, так как оно может быть использовано только для опытов т. е. для итерации.

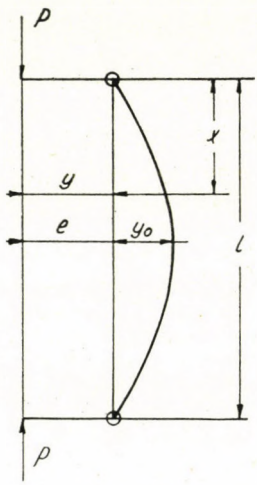


Рис. 10.

Если мы применяем линию изгиба как синусоидальную линию (10. рисунок), тогда

$$y = y_0 \sin \frac{\pi}{l} x + e \tag{45}$$

$$y'' = -y_0 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x = -\frac{PY}{EI},$$

или

$$\frac{EI\pi^2}{l^2}(y - e) = Py \quad \text{но} \quad \frac{EI\pi^2}{l^2} = P_k$$

критическая сила центрально нагруженной стойки. Подставляя это, а также и $f = y_{max}$ и обозначая повышающим коэффициентом ψ, получаем

$$f = y_{max} = e \frac{P_k}{P_k - P} = e\,\psi \tag{46}$$

Формула (46) довольно простая для применения на практике, но необходимо проверить, какие она имеет ошибки по сравнении с точной формулой (43). Если мы в формуле (43) рядами анализируем знаменателя $\cos \frac{\omega l}{2}$ и оставляем только первые два члена, то, учитывая что $8 \sim 0{,}8\pi^2$, получаем

$$f = \frac{e}{1 - \frac{\omega^2 l^2}{4 \cdot 2!}} = \frac{e}{1 - \frac{P l^2}{8 E I}} = \frac{e}{1 - \frac{P}{0{,}8 P_k}} = \frac{0{,}8\, e\, P_k}{0{,}8 P_k - P} = e\,\psi \tag{47}$$

Для сравнения вводим в формулы (43), (46) и (47) общего коэффициента

$$\varphi = \frac{P l^2}{\pi^2 E I} = \frac{P}{P_k}$$

Вследствие этого формулы принимают следующий вид:

$$\frac{f}{e} = 1/\cos \frac{\omega l}{2} = 1/\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\varphi} = \psi_1 \tag{43/a}$$

$$\frac{f}{e} = 1 \Big/ \left(1 - \frac{P}{P_k}\right) = 1/(1 - \varphi) = \psi_2 \tag{46/a}$$

$$\frac{f}{e} = 1 \Big/ \left(1 - \frac{P}{0{,}8\, P_k}\right) = 1/(1 - 1{,}25\,\varphi) = \psi_3 \tag{47/a}$$

VI. ТАБЛИЦА

φ	ψ_1	ψ_2	ψ_3
0	1,1	1	1
0,2	1,30584	1,250	1,373
0,4	1,85030	1,666	2,000
0,6	2,87800	2,500	2,859
0,8	5,88994	5,000	∞
1,0	∞	∞	∞

Согласно VI. таблицы расхождения между формулами (43/a) и (46/a) простираются от 0 до 20%, в то время как формулу (44/a) при $\varphi = 0{,}8$ уже нельзя применять. В случае применения формулы (46) ее можно улучшить умножением на 1,1.

Подбор размеров проводится внецентренностью, повышенной упрощенной и улучшенной формулой (46), или же, что этому вполне отвечает, повышенным моментом, а также и центральной силой. Вместо P_k и P можно

также подставить значения σ_k и σ_a, и если пределом напряжении текучести или же напряжением в крайнем волокне будет σ_h, а также и сравнительная внецентренность $\frac{e}{k} = m$ по отношению к основной массе, тогда

$$\sigma_h = \sigma_a \left(1 + \frac{m\,\sigma_k}{\sigma_k - \sigma_a}\right) = \sigma_a (1 + m\,\psi) \tag{48}$$

Все до сих пор проведенные вычисления относятся к случаю, показанному на 6. рисунке, при котором внецентренность была постоянная. Возникает вопрос, как следует поступать, если внецентренность непостоянна. В качестве примера служит тот случай, при котором на стержень действует постоянная боковая нагрузка, у которой внецентренность силы параболически изменяется, соответственно с площадью моментов распределяющей нагрузки.

Подробная производная дает формулу для наибольшего напряжения

$$\sigma_{max} = \sigma_a + \frac{8\,M_{max}}{K\,(\omega\,l)^2} \left(\frac{1}{\cos\frac{\omega\,l}{2}} - 1\right)$$

причем на двойне подпертом держателе с шарнирным концом $M_{max} = \frac{p\,l^2}{8}$. Согласно вышеприведенному формула для равномерной, постоянной внецентренности :

$$\sigma_{max} = \sigma_a + \frac{M}{K \cos\frac{\omega\,l}{2}}$$

В этих двух формулах необходимо исследовать величину значения множителя M/K, или же вопрос, с каким фактором следует умножить коэффициента постоянной внецентренности, чтобы получить коэффициента переменной внецентренности.

$$\frac{C}{\cos\frac{\omega\,l}{2}} = \frac{8}{(\omega\,l)^2} \left(\frac{1}{\cos\frac{\omega\,l}{2}} - 1\right)$$

откуда мы из разложения ряда $\cos\frac{\omega\,l}{2}$ и удерживая двух членов, аналогично формуле (47), получаем

$$C = \frac{2}{\left(\frac{\omega\,l}{2}\right)^2} \left(1 - \cos\frac{\omega\,l}{2}\right) \sim \frac{2}{\left(\frac{\omega\,l}{2}\right)^2} \left[1 - 1 + \frac{\left(\frac{\omega\,l}{2}\right)^2}{2}\right] = 1$$

Следовательно в данном случае возможно, в рамках точности разложение в ряды, (см. в VI. таблице значения формулы (47/a), но полностью не принимается во внимание действия изменении внецентренности. Это значит, что при практических случаях можно применять производную множителя для постоянной внецентренности.

в) Модуль упругости, как функция нагрузки

Безразлично для какой точки диаграммы ε, σ, которая видна на 8. рисунке, модуль упругости всегда $E = d_\sigma / d_\varepsilon$. В литературе встречаются различные уравнения, составленные на основании опытов, из которых самые известные кривые Бах—Шюле, Риттер—Мэрш и ε, σ (Швейцарская государственная лаборатория по испытанию материалов).
Формула Бах—Шюле $\varepsilon = \alpha \sigma^m$

$$E = \frac{1}{\alpha m} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{\frac{1-m}{m}}$$

экспоненциальная функция.
Формула Риттер—Мэрш

$$E = \frac{E_0}{\alpha \sigma_p} (\alpha \sigma_p - \sigma) = E \left(1 - \frac{\sigma}{\alpha \sigma_p}\right)$$

линейная функция, которая уже учитывает предел прочности призматических образцов σ_p и начальный E_0 модуль, который является направляющей касательной, относящейся к точке ε, σ кривой $\sigma = 0$ касательной.
Согласно этой формулы

$$\frac{E_0}{\alpha \sigma_p} \varepsilon = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\alpha \sigma_p - \sigma} = ln \frac{\alpha \sigma_p}{\alpha \sigma_p - \sigma}$$

$$\text{и } \varepsilon = \frac{\alpha \sigma_p}{E_0} ln \frac{\alpha \sigma_p}{\alpha \sigma_p - \sigma}$$

EMPA — параболическая кривая

$$E = \frac{\sigma_p}{(2\alpha - 1)\varepsilon_p^2} (2\alpha \varepsilon_p - 2\varepsilon) = E_0 \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\sigma_p}}$$

$$\sigma = \frac{E_0 \varepsilon}{2\alpha \varepsilon_p} (2\alpha \varepsilon_p - \varepsilon) = E_0 \varepsilon - \frac{E_0 \varepsilon^2}{2\alpha \varepsilon_p}$$

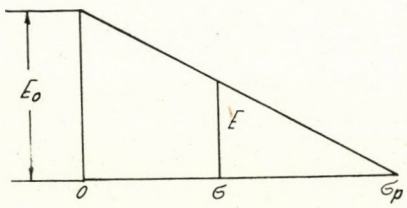


Рис. 11.

Согласно изображенной на 11. рисунке прямой σ, ε дифференциальное уравнение

$$E = \frac{d\sigma}{d_\varepsilon} = E_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_p}\right) \tag{49}$$

$$\sigma = \bar{l}^{\frac{E_0}{\sigma_p}\varepsilon}\left(-\sigma_p + \int E_0 \, l^{\frac{E_0}{\sigma_p}\varepsilon} \, d\varepsilon\right) = \sigma_p\left(1 - \bar{l}^{\frac{E_0}{\sigma_p}\varepsilon}\right) \tag{50}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_p}{E_0} \ln \frac{\sigma_p}{\sigma_p - \sigma} \tag{51}$$

форма кривой σ, ε видна на 12. рисунке, там же и показана эпюра ЕМРА-кривой.

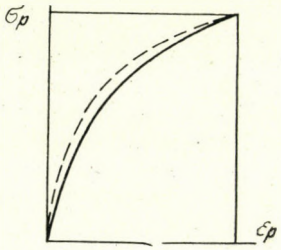


Рис. 12.

c) Критическое среднее напряжение при внецентренном и центральном сжатии

Если мы подставляем непостоянный модуль E из формулы (49), тогда критическое напряжение изгиба

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E I}{l F} = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E_0 \left(1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_p}\right) \tag{52}$$

Под σ_a мы понимаем среднее центральное напряжение, соответствующее действительной нагрузке внецентренно нагруженных стержней. При центрально нагруженной стойки $\sigma_a = \sigma_k$ и в этом случае критическое напряжение вычисляется из формулы (52)

$$\sigma_k = \frac{\sigma_p}{1 + \frac{\sigma_p \lambda^2}{\pi^2 E_0}} \qquad \text{(при центрально нагруженной стойке)} \tag{53}$$

$$\sigma_k = \frac{\sigma_p - \sigma_a}{\sigma_p \lambda^2 / \pi^2 E_0} \qquad \text{(при внецентренно нагруженной стойке)} \tag{54}$$

Применяя для этого случая формулу (48) и подставляя формулу (52) получаем

$$\sigma_p = \sigma_a \left(1 + \frac{m \sigma k}{\sigma_k - \sigma_a}\right) = \sigma_a \left(1 + \frac{m}{1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_k}}\right) =$$

$$= \sigma_a \left[1 + \frac{m}{1 - \frac{\sigma_a \lambda^2}{\pi^2 E_0 \left(1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_p}\right)}}\right]$$

Упрощая формулу

$$\sigma_p = \sigma_a \left(1 + m + \frac{\sigma_p \lambda^2}{\pi^2 E_0}\right) \text{ или}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_p}{1 + m + \frac{\sigma_p \lambda^2}{\pi^2 E_0}} \tag{55}$$

д) Формулы для подбора размеров

Рассматривая формулу (53) центрально нагруженной стойки, или же формулу (55) внецентренно сжатой стойки, мы видим зависящийся от λ элемент, качества которого необходимо исследовать. Формулы (53) и (55) также совершенно одинаковой конструкции, только с той разницей, что в формуле (55) участвует и размер эксцентриситета

В зависящемся от λ элемента необходимо исследовать значение $\frac{\sigma_p}{E}$

Для σ_p можно подставить хорошо согласованную с литературными данными и с опытами формулу в функции кубиковой прочности „K".

$$\sigma_p = \frac{720\ K}{600 + K} \tag{56}$$

Для E_0 используем формулу норм и технических условий (НиТУ) для железобетона :

$$E_0 = \frac{550\,000\,K}{K + 200} \tag{57}$$

В виду того, что нагрузка железобетонной стойки в большинстве случаев имеет постоянный характер, необходимо учитывать также в модуле упругости действие медленной деформации.

В проекте Н и ТУ таким образом установлен коэффициент медленной деформации, введенного при расчетах предварительно напряженных стоек, чтобы при В 100 $\kappa = 4{,}5$, при В 600 $\kappa = 2$
Уравнение интерполированной прямой

$$k = 4 - \frac{K}{200} \tag{58}$$

Согласно проекта нового Н и ТУ для строительства мостов
В при 140 $\kappa = 3{,}5$, В при 100 $\kappa = 3{,}8$
Уравнение следующее

$$k = 4{,}8 - \frac{K}{108} \tag{58/a}$$

Необходимо производить вычисление с $E_{\text{целое}} = \frac{E_0}{\kappa}$ и $\frac{\sigma_p}{E_{\text{целое}}}$, тогда получаем с формулами (56), (57) и (58)

$$\frac{\sigma_p}{E_{\text{целое}}} = \frac{720\ K\,(K + 200)\left(5 - \frac{K}{200}\right)}{(600 + K)\ 550\,000\ K} = \frac{(K + 200)\left(5 - \frac{K}{200}\right)}{(K + 600)\ 765} \tag{59}$$

или

$$\frac{\sigma_p}{E_{\text{целое}}} = \frac{(K + 200)\left(4{,}8 - \frac{K}{108}\right)}{(K + 600)\,765} \qquad (59/a)$$

Если мы разберем величину формул (59), (59/a), тогда видно из VII. таблицы, что при обычных качествах бетона $\sigma_p/E_{\text{целое}}$ можно даже принимать как постоянную величину, что является значительным упрощением формулы.

VII. ТАБЛИЦА.

K	$\frac{\sigma_p}{E\,\text{целое}}$ (59)	$\frac{\sigma_p}{E\,\text{целое}}$ (59/a)
100	1/396	1/530
200	1/383	1/540
300	1/392	1/550

Учитывая пределы, согласно VII. таблицы

$$\frac{\sigma_p \lambda^2}{\pi^2 E_0} = \left(\frac{\lambda}{\pi\sqrt{398}}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{62}\right)^2$$

или же

$$\left(\lambda/\pi\sqrt{550}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{74}\right)^2$$

т. е. в среднем круглыми числами $\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2$

и в пропорции $\frac{l}{a}$: $\left(\frac{l}{20\,a}\right)^2$

Это соответствует величине, приведенной в новом нормативе строительства мостов и правильность которой этим вычислением теоретически доказана. При помощи теперь полученной величины можно установить нарастающего коэффициента ψ.

Применяя полученные в формуле (54) вычисление для σ_K получаем

$$\psi = \frac{\sigma_k}{\sigma_k - \sigma_a} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_k}} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_p - \sigma_a}\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2} \qquad (60)$$

если мы подставляем $\gamma = \frac{\sigma_a}{\sigma_P}$

Следовательно необходимо при железобетонных стойках при данном моменте P и M производить выччисление с ψ M вместо момента M, или же, что равноценно с этим, следует вместо учитанного эксцентриситета на

все поперечное сечение бетона $e = M/P$ *принимать во внимание* ψe. Необходимо отметить, что при поперечных сечениях железобетона только этот метод вычисления является правильным, потому что при вычислении по формуле (48) нарастание коэффициента $m = e/\kappa$ является неопределенным, а именно из-за неизвестного значения размера ядра K, в виду того, что последний зависит от положения граничной прямой, отделяющей напряжение и растяжение. Далее следует отметить, что мы под σ_a с уверенностью понимаем среднее сжимающее напряжение полного поперечного сечения бетона а именно при напряжении P.

После вышеуказанного еще возникает вопрос, когда больше не имеется возможность нагружать поперечное сечение бетона кроме осевой силы, также и моментом. Это очевидно получается тогда, если $\psi = \infty$, что осуществляется при значении 1 второго члена знаменателя.

$$1 = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2$$

откуда

$$\gamma = \frac{1}{1+(\lambda/70)^2}$$

значит, мы получаем условие формулы (53) для центрально нагруженной стойки, если возникает $\gamma = \sigma_k/\sigma_p\,\gamma$ в данном случае соответствует коэффициенту α в новом проекте Н и ТУ для строительства мостов.

$$\sigma_k = \frac{\sigma_p}{1+\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2} = \alpha\,\sigma_p \tag{61}$$

В дополнении к нормативу не приведено значение, данное в формуле (60), но зато

$$\psi = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma}}\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2} \tag{60/a}$$

Эта формула возникает тогда, если мы для диаграммы бетона (σ,ε) не исходим из уравнения Риттер—Мэрша, а применяем параболу EMPA. Значит ψ в функции γ,λ приведены на VIII и на VIII/a таблицах.

$$E = E_0\sqrt{1-\frac{\sigma_a}{\sigma_p}}$$

эта формула общего модуля упругости с которой

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2}{\lambda^2}E_0\sqrt{1-\frac{\sigma_a}{\sigma_p}}$$

на основании чего (60)

$$\psi = \frac{\sigma^k}{\sigma_k-\sigma_a} = \frac{1}{1-\frac{\sigma_a\lambda^2\sigma_p}{\sigma_p\pi^2 E_0\sqrt{1-\frac{\sigma_a}{\sigma_p}}}} = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma}}\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2}$$

Если мы принимаем во внимание, что

$$\frac{\sigma_p \lambda^2}{\pi^2 E_0} = \left(\frac{\lambda}{70}\right)^2$$

тогда мы наконец получаем формулу, приведенную в Н и ТУ. (60/а).

Необходимо отметить, что в общей кривой ЕМРА приведена только часть параболы таким образом, что на месте $(a\varepsilon_p)$ находится вершина параболы, значит полная парабола получается, если $a = 1$. Общее уравнение (σ,ε)

$$\sigma = E_0 \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{2 a \varepsilon_p}\right)$$

откуда при $\varepsilon = 0$; $\sigma_p = E_0 \varepsilon_p \frac{2a - 1}{2a}$

значит

$$\sigma = \frac{2 \sigma_p a}{2a - 1} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2 a \varepsilon_p}\right)$$

далее

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{a \varepsilon_p}\right)$$

высчитывая из σ уравнения $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)$, получаем

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} = a - \sqrt{a^2 - \frac{\sigma}{\sigma_p}(2a - 1)}$$

отсюда наконец получаем

$$E = E_0 \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\sigma_p} \frac{2a - 1}{a^2}}$$

Если $a = 1$, тогда получаем примененную в предыдущем уравнении

$$E = E_0 \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\sigma_p}}$$

уравнение.

Данные решения дают совершенно полную картину о действии железобетонных конструкций с внецентренным и центральным сжатием.

При старом „n"-ом методе необходимо вместо σ_p применять допускаемый для напряжения предельный изгиб, в то время как при свободном от „n" методе учитывается предельное напряжение изгиба σ_p.

4. Проведение расчетов

Каждую внецентренно сжатую стойку необходимо исследовать в двух напрявлениях. Если показатель устойчивости опасен в направлении сжатия, тогда достаточно определить размер среднего сечения ψM, на P, но если в направлении сжатия вертикальный показатель устойчивости больше, тогда следует провести два исследования.

а) Центральное сжатие (Определение размеров на силу P/a).

б) Внецентренное сжатие, если изгиб (прогиб) проявляется в направлении момента. Определение (ψM, P) *размеров напряжения.*

с) Внецентренное сжатие, если изгиб (прогиб) действует вертикально к моменту.

Точка пересечения сдвигается вертикально к моменту из-за прогиба в этом направлении и возникает сжатие с косым направлением (13. рисунок).

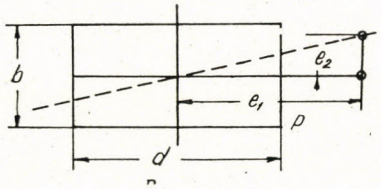


Рис. 13.

Вертикальный сдвиг в направлении сжатия e_2 получается на основании следующего соображения:

Среднее напряжение центрально нагруженной стойки (если λ_2 является взятым на M вертикальным показателем устойчивости) и если центральное сжатие происходит в этом же направлении;

$$\sigma_a = \frac{\sigma_p}{1+\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2}$$

откуда

$$\sigma_p = \sigma_a\left[1+\left(\frac{\lambda_2}{70}\right)^2\right] \tag{62}$$

$$\sigma_p = \sigma_a\left(1+\frac{e_2}{k_2}\right)$$

откуда подставлением формулы (62)

$$\frac{e_2}{k_2} = \frac{\sigma_p}{\sigma_a} - 1 = \frac{\sigma_a}{\sigma_a}\left[1+\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2\right] - 1 = \left(\frac{\lambda_2}{70}\right)^2 \tag{63}$$

Принимая во внимание что $k_2 \sim \frac{b}{6}$

$$e_2 = \left(\frac{\lambda_2}{70}\right)^2 \frac{b}{6} = \left(\frac{l}{20\,b}\right)^2 \frac{b}{6} \cong \left(\frac{l}{50}\right)^2 \frac{l}{6} \tag{64}$$

Расчет среднего сечения на изгиб и осевое сжатие производится затем с внецентренностями

$$e_1 = \frac{M}{P} \quad \text{и} \quad e_2 = \left(\frac{l}{50}\right)^2 \frac{l}{b}$$

В качестве приближенного решения можно условно согласшаться и на такой расчет, при котором сила P повышается с α формулы (61) и расчет

производится с напряжением $\frac{P}{a}$ M, причем вычисление следует провести с

$$\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{70}\right)^2}$$

5. Практические примеры

а) Рама с двухшарнирными стойками

Коэффициент жесткости рамы в приведенных на 14. рисунке размерах (ввиду постоянной ширины I пропорционально $h.dm^3$)

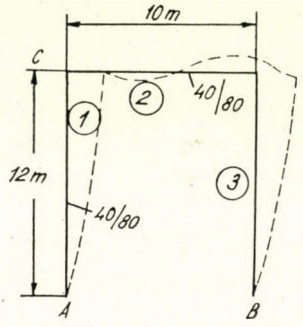


Рис. 14.

$$m_{1,3} = \frac{8^3}{12} = 42{,}6 \qquad \text{(пропорционально 1)}$$

$$m_2 = \frac{8^3}{10} = 51{,}2 \qquad \text{(пропорционально 1—2)}$$

Вычисление длины изгиба стойки (1) следует произвести с 5. случаем V. таблицы, если мы представим себе чертеж обернутым на 180°, так как здесь шарнир находится внизу и частичное защемление наверху.

Вычисление жесткости балки (2) можно провести с формулой (10/в), причем необходимо значение K, примыкающего стержня в точке Д, замещать

$$c_2 = 4\left(1 - \frac{1}{\frac{k_3}{m_2} + 4}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{\frac{3{,}1}{1{,}2} + 4}\right) = 4 \cdot 0{,}833 = 3{,}33$$

$$k_2 = c_2\, m_2 = 3{,}33 \cdot 1{,}2 = 4$$

т. е. она более жесткая, чем балка с шарниром в точке Д.

Следовательно размер защемления μ стойки (1) согласно формулы (10)

$$\mu = \frac{k_2}{m_1} = \frac{4}{1} = 4$$

и длина изгиба с (15) формулой

$$l_0 = \left(2 + \frac{1{,}7}{4 + 0{,}08}\right) l = 2{,}42\ l$$

При помощи l_0 вычисляется показатель устойчивости

$$\lambda = \frac{2{,}42 \cdot 12{,}00}{0{,}289 \cdot 0{,}80} = 125$$

причем вычисление проводилось с $i = 0{,}289\ h$.

Применяя формулы H и TУ, то

$$C \text{ балка} = 1$$

$$C \text{ стойка} = 0{,}87$$

$$k_g = 1{,}0 \cdot \frac{8^3}{10{,}0} = 51{,}2$$

$$k_0 = 0{,}87 \cdot \frac{8^3}{12{,}0} = 37{,}1$$

значит

$$\mu = \frac{51{,}2}{37{,}1} = 1{,}38$$

и исходная длина изгиба

$$l_0 = \left(2 + \frac{0{,}5}{1{,}39}\right) l = 2{,}362\ l$$

$$l_0 = 2{,}362 \cdot 12{,}00 = 28{,}40$$

По этим вычислениям видно, что расхождение составляет приблизительно 2% по сравнению с 2,42 l, т. е. упрощенное решение H и TУ дает в практике точный результат.

Выше приведенный показатель устойчивости $\lambda = 125$ соответствует $l/a = 36$, что является чрезвычайно большой величиной. При до сих пор обычно примененных методах вычисления учитывалось в крайнем случае $l/a = 12{,}0/0{,}8 = 15$ следовательно расчет был неправильным. При новом методе вычисления необходимо, в согласии с основным правилом безопасности, производить расчет с критической действительной длины изгиба, то же самое следовало бы принимать во внимание и при старом „F“ методе. Новый проект норматива строительства мостов приводит для вычисления такого случая длину волны $l_0 = 2\ l$, значит в этот норматив уже внесены поправки. Точно также норматив гражданского строительства дает еще более точный метод вычисления.

Затем производится расчет балки на силу сжатия N и момента ψM. При $\lambda = 125$, $\gamma = \sigma_a/\sigma_p = 0{,}25$ расчет можно производить только центрально, т. к. $\psi = 12{,}0$ значит, нагрузка возможна только совсем незначительным моментом.

В IX. таблице приведены вычисления напряжения стойки, с учетом и без учета изгиба при различных значениях γ. Взятые в основу качества материалов: B 140 бетон, A 50 сталь и в $b = 40$ см широком и $h = 80$ см высоком поперечном сечении находится в симетрическом расположении

2% количество железа. Расчет проводится со свободным от „n“ методом ($\sigma_v/\sigma_b = \beta = 2800/70$).
Формулы вычисления (15. рисунок)

$$F_v = F_v' = 30 \cdot 74 \cdot 0{,}01 = 22{,}2 \text{ cm}^2$$

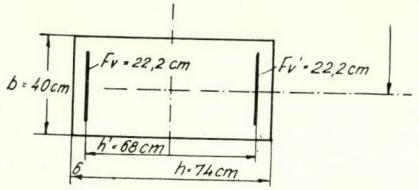


Рис. 15.

Предпосылки равновесия при внецентренном сжатии:

$$N_H = b\,x\,\sigma_b + (F_v' - F_v)\,\sigma_v$$

если $F_v' = F_v$, тогда $x = \dfrac{N}{b\sigma_b}$

Написанный на растянутом железе момент

$$M = b\,x\left(h - \frac{x}{2}\right)\sigma_b + F_v'\,h'\,\sigma_v$$

отсюда момент центра тяжести

$$\psi\,M_H = M_k - N\,\frac{h'}{2} = N\left(h - \frac{N}{2\,b\sigma_b}\right) + F_v'\,h'\,\sigma_v - N\,\frac{h'}{2}$$

и с коэффициентами нашего примера

$$\psi\,M_H = N_H\left(0{,}74 - \frac{N_H}{2.0{,}4.70.10}\right) + 22{,}2 \cdot 0{,}68 \cdot 2{,}8\ t/\text{cm}^2 - N \cdot 0{,}34 =$$

$$= N_H\left(0{,}4 - \frac{N_H}{560}\right) + 42{,}3$$

IX. ТАБЛИЦА

$\gamma = \sigma_a/\sigma_b$	ψ	σ_a	N_H	M	M_H
0,25	12,5	17,5	56,0	59,1	4,72
0,20	3,46	14,0	44,8	56,6	16,40
0,15	2,04	10,5	33,6	53,7	26,30
0,10	1,50	7,0	12,4	50,35	33,50
0,05	1,19	3,0	11,2	36,55	39,20

Из сравнения видно, что если не учитывается разгиб, поскольку тогда больше действие момента M, чем действительно принимаемый для вычисления предельный момент M_H.

в) Рама с защемленными стойками

Вычисление данной в примере *а)* рамы производится в том случая, при котором защемлен нижний конец стоек.

В данном случае $C_{\text{балка}} = 1$, $c_{\text{стойка}} = 1{,}15$ (защемление)

$$\mu = \frac{51{,}2}{\frac{1{,}15}{0{,}87} \cdot 3{,}71} = 1{,}04$$

Соответствующую длину изгиба следует взять из 6. случая V. или же V/a. таблиц. Согласно V/a. таблицы, если

$$\mu_f = 1{,}04\ ;\ \mu_a = \infty$$

$$l_0 = \left(1 + \frac{0{,}27}{1{,}04 + 0{,}27}\right) l = 1{,}206\, l = 1{,}206 \cdot 12{,}00 = 14{,}5\ \text{m}$$

следовательно, это приблизительно соответствует длине волны случая *а)*. Показатель устойчивости

$$\lambda = \frac{14{,}5}{0{,}289 \cdot 0{,}8} = 62{,}7$$

или

$$\frac{l}{a} = \frac{14{,}5}{0{,}8} = 18{,}1$$

Подобным образом, как в примере *а)*, исследуется предельный момент при переменном значении N поперечного сечения, показанным на 15. рисунке. Предельный момент центра тяжести ψM_H вычисляется с одинаковой формулой, как в примере *а)*.

IX/a. ТАБЛИЦА

$\gamma = \sigma_a/\sigma_b$	ψ	N_H	M	M_H
0,65		146,0	62,6	0
0,60	4,65	134,0	63,7	15,7
0,50	2,28	112,0	64,7	28,4
0,40	1,69	89,5	63,8	37,8
0,30	1,40	67,0	61,0	43,6
0,20	1,22	44,8	56,6	46,4
0,10	1,09	22,4	50,3	46,1
0,00	1,00	0	42,3	42,3

Наибольшая величина предельного момента не появляется при $N_H = 0$, а при $N_H = 44{,}8$ *t*.

Из этого примера также видно, в какой сильной степени изгиб влияет на предельный момент, особенно тогда, если N_H приближает напряжение у предела пропорциональности к центральной стойке.

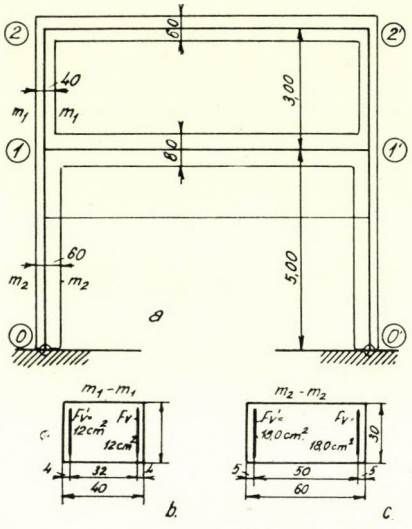


Рис. 16.

c) Двухшарнирная этажная рама. (16. рисунок). Постоянные величины рамы

$K_{01} = 6^3.0{,}86/50 = 37{,}2$ пропорционально 1,7
$K_{12}, = 4^3/3{,}0 = 21{,}4$ пропорционально 1,0
$K_{11}, = 8^3/8{,}0 = 64$ пропорционально 3,0
$K_{22} = 6^3/8{,}0 = 27{,}0$ пропорционально 1,3

Представленный в формулах μ множитель c вычисляется также с помощью формул H и ТУ, применяя формулу (10/a), и учитывая, что вместо жесткости $3{,}5\,\frac{J}{l}$ частичного защемления, в H и ТУ вводится $\frac{J}{l}$, значит согласно формулы (10/a):

$$c = \frac{4}{3{,}5}\left(1 - \frac{1}{3{,}5\,\mu + 4}\right) = 1{,}15 - \frac{0{,}33}{\mu + 1{,}15} \qquad (10/c)$$

Коэффициенты защемления

$$\mu_{21} = \frac{1{,}3}{1{,}0} = 1{,}30\,(1{,}27)$$

$$\mu_{12} = \frac{3{,}0 \cdot 1{,}7}{1{,}0\,(1{,}7 + 1{,}0)} = 1{,}89\,(1{,}87)$$

$$\mu_{10} = \frac{2{,}0 \cdot 1{,}0}{1{,}7\,(1{,}7 + 1{,}0)} = 0{,}653\ (0{,}645)$$

точнее

$$c'_{22} = 1{,}15 - \frac{0{,}33}{\frac{1}{1{,}3} + 1{,}15} = 0{,}98$$

$$c_{11} = 1{,}15 - \frac{0{,}33}{\frac{1 + 1{,}7}{3{,}0} + 1{,}15} = 0{,}99$$

Из этого вывода видно, что не стоит тратить труда на более точное вычисление величины „c", так как отклонения весьма незначительны (см. величины в скобках).

Расчет стойки (1, 2) опять можно производить согласно 6-му случаю таблиц V. и V/a., если

$$\mu_f = \mu_{21} = 1{,}27\,; \quad \mu_a = \mu_{12} = 1{,}87$$

$$l_0 = \left(1{,}0 + \frac{0{,}27}{1{,}27 + 0{,}27} + \frac{0{,}27}{1{,}87 + 0{,}27}\right) l = 1{,}31 \cdot 3{,}00 = 3{,}90\ \text{m}$$

Расчет стойки (0,1) производится с 5-ым случаем упомянутых выше таблиц, если $\mu = 0{,}645$.

$$l_0 = \left(2{,}0 + \frac{0{,}5}{0{,}645}\right) l = 2{,}775 \cdot 5{,}00 = 13{,}9\ \text{m}$$

Показатели устойчивости

(12) у стойки $l_0/a = 3{,}90/0{,}40 \sim 10$

(01) у стойки $l_0/a = 13{,}9/0{,}6 = 23$

Если мы допускаем, что нижняя стойка имеет нагрузку, больше в три раза, чем верхняя, то средняя пропорция σ 1/0,4 : 3/0,6 = 1 : 2 (размер поперечных сечений 30 см.)

Значит, нагрузка верхней стойки например:

$$\gamma = 0{,}2 = \frac{N_f}{0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 700}$$

т. е. $$N_f = 16{,}8^t$$

Нагрузка нижней стойки

$$\gamma = 0{,}4\ \frac{N_a}{0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 700}$$

т. е. $$N_a = 50{,}4^t$$

Наряду с этой нагрузкой необходимо найти предельный момент для обоих поперечных сечений, если армирование $1^0/_0$ и $F_v = F_v$

На верхней стойке, согласно примера *a)*, используя данные в H и TУ таблицы V:

$$\xi = \frac{16{,}8^{t}}{0{,}3 \cdot 0{,}36 \cdot 70 \cdot 10} = 0{,}222\ ;\ r = 0{,}268$$

мы получаем таким образом момент для вычисления растянутого железа

$$M_h = \frac{0{,}3 + 0{,}36^3}{0{,}268^2} + 12 \times 2{,}8\ \mathrm{t/cm^2} \times 0{,}32 = 5{,}4 + 10{,}8 = 16{,}2\ \mathrm{tm}$$

$$\psi\ M_H = 16{,}2 - 16{,}8 \times \frac{0{,}32}{2} = 13{,}5\ \mathrm{tm}$$

и при $\gamma = 0{,}2 \quad l/a = 10$

$\psi = 1{,}06$ значит $M_H = 13{,}5/1{,}06 = 12{,}7$ tm

На нижней стойке $\gamma = 0{,}4,\ l/a = 23 \quad \psi = 3{,}01$

$$\xi = \frac{50{,}4}{0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 70 \cdot 10} = 0{,}48\ ;\ r = 0{,}199$$

$$M_H = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}55^2}{0{,}199^2} + 18 \cdot 2{,}8 \cdot 0{,}50 = 23{,}0 + 25{,}2 = 48{,}2\ \mathrm{tm}$$

$$\psi\ M_H = 48{,}2 - 50{,}4\ \frac{0{,}5}{2} = 35{,}6\ \mathrm{tm}\ ;$$

$$M_H = 35{,}6/3{,}01 = 11{,}8\ \mathrm{tm}$$

РАСЧЕТ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫХ И УПРОГО ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПРЯМООСЕВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК, УЧИТЫВАЯ ПРОГИБЫ

П. Габори

Р е з ю м е

Научностроительный институт выработал изменения основных нормативов для подземного строительства, которые содержат расчеты на основании коэффициента запаса прочности без «*n*»-ного вычисления.

В нормативе приведены точные данные относительно внецентренно сжатых балок, подвергнутых опасности прогиба.

Автор дает в статье теоретическое обоснование соответствующих частей проекта норматива и приводит данные для их практического применения.

1. Д л и н а в о л н ы п р о г и б а ц е н т р а л ь н о с ж а т о г о и у п р у г о з а щ е м л е н н о г о с т е р ж н я в о т н о ш е н и и к д в у х ш а р н и р н о й с т о й к е

После вывода уравнений граничных условий для практической нагрузки стержней, подвергнутых различным защемляющим и опорным ограничениям, автор приводит в таблицах V. и V/a для практических расчетов простые приближенные формулы. При помощи этих формул дается возможность определить длину двухшарнирных стержней, критическая нагрузка которых соответствует критической нагрузке, приведенной на рисунках 1—6. Автор сообщает также метод расчета этажных ферм.

2. В н е ц е н т р е н н о с ж а т ы е д в у х ш а р н и р н ы е с т е р ж н и

После вывода основного уравнения, автор приводит общее решение, которое можно применять для любого материала. Приближенные решения проблемы сравниваются с точным методом вычисления.

3. Пластичный изгиб железобетонных стоек

Автор распространяет общие решения, приведенные в параграфах 1 и 2 также на железобетонные конструкции. На основании кривой деформации бетона, вычисляется изменение модуля упругости и при помощи этого решения определяется формула критической нагрузки центрально сжатого двухшарнирного стержня.

4. Проведение расчетов

В случае центрального сжатия критическое напряжение получается умножением предельного напряжения с фактором a причем

$$\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{70}\right)^2}$$

и λ является показателем устойчивости двухшарнирной стойки, заменяющей стойку.

В случае внецентренного сжатия, внецентренная сила, или же, что является равноценным, изгибающий момент умножается с фактором ψ, т. е. при прогибе учитывается повышение внецентренности, а не повышение центрального сжатия. Значит, до сих применненные методы были неправильны.

Автор выводит фактора ψ на основании двух типов линий упругости бетона, согласно кривых Риттера—Мэрх и EMPA. В нормативе последние находят применение, т. к. они больше отвечают действительности:

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma}}\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2}$$

где γ является соотношением между средним и предельным напрянежием (σ_a/σ_f).

Автор описывает приближенный метод для того случая, когда существует опасность прогиба на плоскости момента в вертикальном направлении.

5. Практические примеры

В заключение автор приводит некоторые примеры для расчета рам с двухшарнирными стойками, с защемленными стойками и двухшарнирной этажной рамы. Он приходит к тому выводу, что пренебрежение прогиба при расчете может иметь последствем ошибки. Более точный расчет стоек является особенно важным тогда, когда применением коэффициентов безопасности и свободного от »n« метода, вводится способ расчета, который основывается на принципе ровной безопасности всех конструкций.

DIMENSIONIERUNG EXZENTRISCH GEDRÜCKTER, ELASTISCH EINGESPANNTER EISENBETONTRÄGER MIT GERADLINIGER ACHSE, UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER KNICKUNG

Von
PAUL GÁBORY

Zusammenfassung

Das Institut für Bauwissenschaft hat eine Abänderung der Vorschriften für Eisenbetonkonstruktionen fertiggestellt, die die Dimensionierung auf Grund der Sicherheitsfaktoren und der »n«-freien Berechnungsmethode vorschreibt.

Die Richtlinien enthalten ausführliche Angaben in bezug auf exzentrisch gedrückte Träger, bei welchen auch die Gefahr der Ausknickung besteht.

Der Verfasser gibt in der Abhandlung die theoretische Begründung der bezüglichen Teile des Reglementsentwurfes an und berichtet über die praktische Anwendung.

1. *Knickungswellenlänge eines zentrisch gedrückten und elastisch eingespannten Stabes im Verhältnis zur zweigelenkigen Säuele.*

Nach Ableitung der Grenzbedingungsgleichungen, welche für die kritische Belastung der den verschiedenen Einspannungs- und Auflagerungsbeschränkungen unterworfenen Stäbe gelten, gibt der Verfasser in den Tabellen V. und V/a für die Zwecke praktischer Berechnungen einfache Näherungsformeln an. Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich die Länge von zweigelenkigen Stäben bestimmen, deren kritische Belastung gleich der in den Figuren 1—6 angegebenen ist. Verfasser teilt auch ein Verfahren zur Berechnung mehrstöckiger Rahmen mit.

2. *Exzentrisch gedrückte zweigelenkige Stäbe.*

Nach Ableitung der Grundgleichung gibt der Verfasser die allgemeine Lösung der Berechnung an, die für jedes beliebige Material gilt. Die näherungsweisen Lösungen des Problems werden mit dem genauen Verfahren verglichen.

3. *Plastische Knickung von Eisenbetonsäulen.*

Verfasser wendet die in den Paragraphen 1. und 2. behandelten allgemeinen Lösungen auf Eisenbetonkonstruktionen an. Auf Grund der Deformationskurve des Betons wird die Veränderung des Elastizitätsmoduls und mit Hilfe dieser die Formel für die kritische Belastung eines zentrisch gedrückten zweigelenkigen Stabes bestimmt.

4. *Ausführung der Berechnung.*

Im Falle *zentrischen Druckes* erhält man die kritische Spannung durch Multiplikation der Grenzspannung mit dem Faktor α, wobei

$$\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{70}\right)^2}$$

und λ der Schlankheitsgrad einer die Säule vertretenden zweigelenkigen Säule.

Im Falle exzentrischen Druckes ist die Exzentrizität der Kraft oder, was damit gleichwertig ist: das Biegungsmoment mit einem Faktor ψ zu multiplizieren, d. h. dass der Knickung durch Erhöhung der Exzentrizität und nicht durch Erhöhung der zentrischen Kraft Rechnung zu tragen ist. Die bisher angewandten Verfahren waren somit unrichtig.

Verfasser leitet den Faktor ψ auf Grund zweier Typen der Elastizitätslinie des Betons ab, gemäss den Ritter—Mörsch'schen und den EMPA-Kurven. Im Reglement finden die letzteren Verwendung, weil diese der Wirklichkeit besser entsprechen:

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma}}\left(\frac{\lambda}{70}\right)^2}$$

wo γ das Verhältnis der mittleren Spannung zu der Grenzspannung bedeutet ($\sigma a/\sigma_f$).

Verfasser beschreibt ein Näherungsverfahren für den Fall, dass Knickungsgefahr in der auf die Momentebene vertikalen Richtung besteht.

5. *Praktische Berechnungsbeispiele.*

Schliesslich gibt der Verfasser Beispiele an für die Berechnung der Säulen von zweisäuligen Rahmen mit einem und mehreren Stockwerken. Er kommt zu der Schlussfolgerung, dass die Ausserachtlassung der Knickung zu wesentlichen Berechnungsfehlern führt. Eine genauere Dimensionierung der Balken erscheint besonders wichtig, wenn man unter Anwendung der Sicherheitsfaktoren und der »n«-freien Methode eine Berechnungsweise einführt, die auf dem Prinzip der gleichmässigen Sicherheit aller Konstruktionen beruht.

DIE BEMESSUNG VON GEDRÜCKTEN STÄBEN AUF GRUND EINER VORGESCHRIEBENEN ANFANGSEXZENTRIZITÄT*

I. MENYHÁRD

Eingegangen am 1. Juli 1951.

EINLEITUNG.

Die Bestimmung der kritischen Kraft der gedrückten Stäbe erfolgt auf Grund der mit der Euler'schen Knickungstheorie und der von Tetmajer inizierten Versuche erreichten Ergebnisse. Laut der Knickungstheorie, die auch durch Versuche bestätigt wird, entspricht die kritische Kraft des Stabes, solange die Durchschnittspannung ($\sigma_D = P/F$) unter der Proportionalitätsgrenze bleibt, praktisch der ersten Euler'schen kritischen Kraft. Jenseits der Proportionalitätsgrenze könnte man ebenfalls die Euler'sche Theorie verwenden, wenn uns die Spannungsdehnungslinie unserer Stahlwerkstoffe beziehungsweise die Änderung des Elastizitätsmoduls zwischen der Proportionalitätsgrenze und der Streckgrenze genau bekannt wären. Da es aber sehr schwer ist die Änderung des Elastizitätsmoduls auf diesem Bereich auf theoretischen Wege festzustellen, wurden zur Feststellung der praktischen Zusammenhänge Versuche unternommen. Diese Versuche hat Tetmajer begonnen. Später trachteten Engesser, Kármán, das Berliner Forschungsinstitut und andere, das Verhalten der gedrückten Stäbe im plastischen Bereich klarzulegen und aus diesen Untersuchungen stellte sich heraus, dass auf dem plastischen Bereich die kritische Kraft durch den Umstand beeinflusst wird, ob der Stab zu Beginn genau zentrisch war oder nicht. Bei der plastischen Knickung des ursprünglich zentrischen Stabes deformiert sich nämlich die auf Druck beanspruchte (überlastete) Seite des Stabes dem anfänglichen Durchschnittspannung entsprechenden Elastizitätsmodul gemäss, während die Deformation der entlasteten, bzw. jener Seite, wo die Spannung, infolge der Ausknickung, abnimmt, dem der Proportionalitätsgrenze entsprechenden Elastizitätsmodul gemäss vor sich geht.

Diese Erscheinung wurde zuerst von Bauschinger konstatiert und wird seither Bauschinger-Effekt genannt.

*In ungarischer Sprache veröffentlicht in »Építéstudományi Közlemények« (Mitteilungen für Bauwissenschaften), Jg. 1950, S. 1/18.

Es folgt hieraus, dass man im plastischen Bereich, wenn keine anfängliche Exzentrizität vorhanden ist, in der Euler'schen Formel nicht den der Durchsnittspannung entsprechenden Elastizitätsmodul, sonder einen grösseren Wert als diesen, benützen muss. Dieser, einen, den der Durchschnittspannung entsprechenden übersteigenden Wert besitzende Elastizitätsmodul wird, nach den genannten Forschern Kármán-Engesser'scher Modul genannt. Dieser Modul

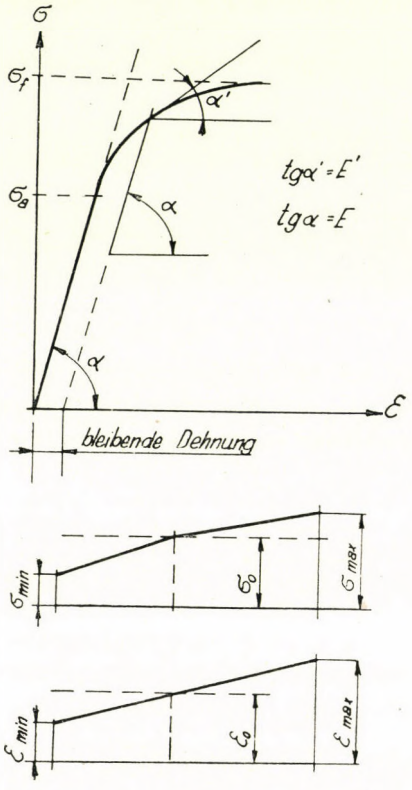


Abb. 1.

hängt auch von der Gestalt ab, aber sein eine gute Annäherung bietende Mittelwert (für Rechteck-Querschnitt genau) ist :

$$T \approx \frac{4\,E\,E'}{(\sqrt{E'} + \sqrt{E})^2}$$

worin E' der zur Durchschnittspannung, E der zur Proportionalitätsgrenze gehörende Elastizitätsmodul ist. (*Abb. 1.*)

War aber der Stab anfänglich nicht genau zentrisch, so wächst die Ausbiegung mit der Zunahme der Kraft ständig, eine Abnahme der Spannung tritt auch auf der weniger in Anspruch genommenen Seite des Querschnittes nicht auf

und die kritische Knickkraft gestaltet sich dem, der Durschnitt-Spannung entsprechenden Elastizitätsmodul gemäss.

Dem Vorgetragenen gemäss ist auf dem plastischen Bereich das Verhalten des gedrückten Stabes kompliziert und unsicher, es hängt von der Anfangsexzentrizität ab. Dagegen verursacht die Anfangsexzentrizität im elastischen Bereich, nur eine Zunahme der Deformation, hat aber keinen Einfluss auf die kritische Kraft.

Wenn man das Verhalten der gedrückten Stäbe mit demjenigen der auf Zug beanspruchten Stäbe vergleicht, lassen sich bei den Druckstäben im plastischen Bereich Ungewissheiten, im elastischen Bereich hingegen die Erscheinung des plötzlichen Bruches wahrnehmen, was begründet erscheinen lässt, die auf Druck beanspruchten Stäbe mit grösserer Sicherheit zu dimensionieren, als die gezogenen Stäbe. Die älteren Vorschriften und Bestimmungen haben das Mass dieser grösseren Sicherheit ziemlich willkürlich festgesetzt, und zwar so, dass man bei einem Schlankheitsgrad $\lambda = 0$, wie bei den auf Zug beanspruchten, Stäben aus einer cca 1,7-fachen Sicherheit ausging, die bis zum Euler'schen Bereich, (d. h. bis zur Proportionalitätsgrenze) auf 2,5—3,5 erhöht wurde und im Euler'schen Bereich (d. h. innerhalb der Proportionalitätsgrenze) eine ständige Sicherheit vorgeschrieben wurde. Im plastischen Bereich hat sich die zulässige Spannung, den Vorschriften gemäss im allgemeinen einer schiefen Gerade (Tetmajer'sche Gerade) entsprechend geändert, die sich mit einer Ecke an die Euler'schen Hyperbel anschliesst. Wie gross der Wert der Sicherheit im plastischen Bereich ist, lässt sich natürlich schwer feststellen. Der Anfangswert (1,7) und der Endwert (2,5—3,5) der Sicherheit ist uns bekannt, während der zwischenliegende nominelle Sicherheitswert davon abhängt, nach welcher Gesetzmässigkeit die kritische Kraft im plastischen Bereich berechnet wird.

Die Mängel dieses Verfahrens wurden von den Forschern schon seit lange bemerkt und es wurde von ihnen eine vernünftigere, logisch richtiger aufgebautete — wenn auch nicht von allen Mängeln freie — neuere Vorstellung eingeführt, die auf den Folgenden beruht :

Ein vollkommen zentrischer Stab lässt sich in der Praxis nicht verwirklichen. Bei der Bemessung der Druckstäbe nimmt man also eine Anfangsexzentrizität an, die von den Abmessungen und von dem Werkstoff des Stabes abhängt und setzt die Grenzkraft oder zulässige Kraft so fest, dass mit Berücksichtigung dieser anfänglichen Exzentrizität die grösste Spannung im Stabe nicht grösser sei, als die Grenz- oder zulässige Spannung des Stabes. Dies ist die Grundlage der Bemessungsverfahren gemäss der Elastizitätstheorie. (Perry, Dutheil, u. s. w). Ježek zieht auch die plastische Deformation in Betracht und nimmt den Stab erst dann als unbrauchbar geworden an, wenn im verbogenen Stab auch die kleinere Randspannung die Streckgrenze erreicht. In diesem Zustande ist auf der überlasteten (gedrückten) Seite der Werkstoff schon in erheblichem Teile im Fliessen.

Die Methode Ježek's ist für eine Normvorschrift weniger geeignet, da bei ihm die Grenz-bzw. zulässige Spannung, ausser der Schlankheit, auch von der Form des Querschnittes abhängt. Aber auch aus anderen Gründen lohnt es nicht die Mühe sich mit dieser komplizierten Vorschrift zu beschäftigen, weil — wie wir sehen werden — die elastische und die plastische Methode ein fast gleiches Resultat ergibt, wenn man die anfängliche Exzentrizität bei dem elastischen Bemessungsverfahren kleiner, bei der plastischen Dimensionierungsmethode hingegen grösser wählt.

Theoretische Grundlagen

Die Randspannung des exzentrisch gedrückten Stabes im elastischen Bereich wird durch die Formel

$$\sigma_{max} = \sigma \left(1 + \frac{e}{k}\right) \tag{1}$$

angegeben, worin e die Exzentrizität der Kraft, $k = \frac{K}{F}$ den Kernweite und $\sigma = \frac{P}{F}$ die mittlere Spannung (Durchschnittsspannung) bedeutet.

Ist der Stab schlank, so steigt die Spannung der Randfaser infolge der Ausknickung an, ferner wenn die Exzentrizität e entlang der Knicklänge sich nach eine Sinuslinie ändert, so lässt sich der Wert der grössten Spannung aus den Formeln

$$\sigma_{max} = \sigma \left(1 + \frac{e}{k} \cdot \frac{P_k}{P_k - P}\right) \tag{1/a}$$

beziehungsweise

$$\sigma_{max} = \sigma \left(1 + \frac{e}{k} \frac{\sigma_k}{\sigma_k - \sigma}\right)$$

berechnen, worin P_k bzw. $\sigma_k = \frac{P_k}{F}$ die aus dem zur Durchschnittspannung (σ) gehörigen Elastizitätsmodul E berechenbare (wirkliche oder imaginäre) Euler'sche kritische Kraft, bzw. Durchschnittspannung ist, vorausgesetzt, dass die Exzentrizität genug gross ist, damit der Bauschinger'sche Effekt nicht zur Geltung kommen möge.

Unter der praktischen Bruchsspannung des Stabes versieht man jene *Durschnittsspannung* (σ_0), bei der infolge der Wirkung einer zunehmenden Kraft P mit einer gegebenen anfänglichen Exzentrizität e, in der Randfaser die Streckgrenze entsteht.

Es sei $\frac{e}{k} = m$, so ist aus (1/b):

$$\sigma_f = \sigma_0 \left(1 + m \frac{\sigma_k}{\sigma_k - \sigma_0}\right) \tag{2}$$

und hieraus :

$$\frac{\sigma_f - \sigma_0}{m\,\sigma_0} = \frac{\sigma_k}{\sigma_k - \sigma_0};$$

und wenn man die Bezeichnungen $\frac{\sigma_0}{\sigma_f} = \beta$ und $\frac{\sigma_k}{\sigma_f} = \mu$ einführt, so gelangt man zu der Formel

$$\frac{1-\beta}{m\,\beta} = \frac{\mu}{\mu - \beta}$$

d. h.

$$(1-\beta)(\mu - \beta) = m\,\mu\,\beta \tag{3}$$

Das ist die sogenannte Perry'sche Formel.

Diese Formel ist aber, unter Zugrundelegung eines konstanten Elastizitätsmoduls nur solange gültig, bis σ_k unterhalb der Proportionalitätsgrenze bleibt. Wenn σ_k über die Proportionalitätsgrenze (σ_a) kommt, so ändert sich E und muss zur Berechnung von σ_k ein veränderlicher Elastizitätsmodul eingeführt werden. Jenseits der Grenze

$$\sigma_a = \beta_a\,\sigma_f$$

sinkt E. Die Veränderung ist nicht bekannt, wenn man aber mit Rücksicht auf die anfängliche Exzentrizität von dem Bauschinger'schen Effekt absieht, so bietet die Annahme

$$E' = E\left(1 - \frac{\sigma_0 - \sigma_a}{\sigma_f - \sigma_a}\right)$$

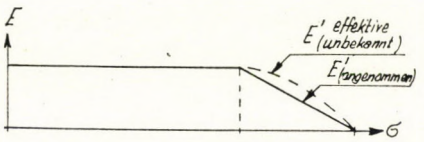


Abb. 2.

eine grosse Sicherheit und befriedigt auch die Bedingung $\sigma_0 \to \sigma_f$, $E \to 0$ (*Abb. 2.*). Hieraus folgt, dass im Bereich $\beta > \beta_a$

$$E' = \frac{1-\beta}{1-\beta_a}\,E \tag{4}$$

und so muss in die Formel (3) an Stelle von μ der Ausdruck $\mu\,\frac{1-\beta}{1-\beta_a}$ eingesetzt werden, da die kritische Spannung dem Elastizitätsmodul E' proportional ist.

Im Bereich — $\beta > \beta_a$ — ergibt sich daher nach der Substitution die Grundformel

$$\mu\,(1-\beta) - \beta\,(1-\beta_a) = m\,\mu\,\beta \tag{4/a}$$

(d. i. die modifizierte Perry'sche Formel).

Unsere Endresultate lassen sich daher — wenn $\beta < \beta_a$ aus (3) — in der Form

$$\beta^2 - [1 + \mu (m + 1)]\,\beta + \mu = 0 \qquad (5)$$

das heisst

$$\beta = \frac{1}{2}\left[1 + \mu (m + 1) - \sqrt{[1 + \mu (m + 1)]^2 - 4\,\mu}\right] \qquad (5/a)$$

aufschreiben (das negative Vorzeichen vor dem Quadratwurzel zeigt, dass der Wert von β nicht grösser als 1 sein kann) oder, wenn $\beta > \beta_a$ so ist aus $(4/a)$

$$\beta = \frac{\mu}{(1 - \beta_a) + \mu (1 + m)} \qquad (5/b)$$

Es müsste aber klargestellt werden, wie gross die zur Grundlage der Berechnung dienende Anfangsexzentrizität sein soll.

Es ist zweifellos, dass wenn man einen einfachen Zusammenhang sucht, die sinuswellenförmige Anfangsexzentrizität nur von der Schlankheit λ abhängen lässt. So wäre im allgemeinen eine Potenzreihe

$$m = \frac{e}{k} = c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \ldots\ldots$$

anzunehmen.

Untersuchen wir die Glieder dieser Reihe.

1. Die Annahme $m = c_0$ bedeutet die konstante Exzentrizität $e = c_0 k$ in der Mitte des Stabes, somit auch bei einem Stabe von der Schlankheit 0, gelangen wir jedoch in einen logischen Wiederspruch mit dieser Annahme, denn in diesem Falle müsste man auch die Zugstäbe unter Voraussetzung einer Anfangsexzentrizität bemessen, da um eine Schlankheit von $\lambda = 0$ die Sicherheit des Zug- und des Druckstabes gleich ist.

Doch würden wir bei dieser Annahme auch deshalb in einen logischen Widerspruch gelangen, da wir in unseren neuen Vorschriften die Grenzspannungen der Fachwerke und der Druckstäbe gerade wegen der Nebenspannungen der aussermittigen Anschlüsse geringer, als die der vollwandigen Stäbe, bestimmt haben, d. h. die Nebenspannungen haben wir schon einmal in Rechnung gezogen und es wäre verfehlt sie noch einmal in Rechnung zu ziehen.

2. Aus der Annahme $m = \frac{e}{k} = c_1 \lambda$ (Grundlage der englischen Vorschriften) ist $e = c_1 k \frac{l}{i}$; $k = \frac{i^2}{h}$, worin h die Entfernung der Randfaser bedeutet, $e = c_1\, i\, l/h$. Diese Annahme bedeutet praktisch, dass die Exzentrizität nur von der Länge des Stabes abhängt, da der Quotient i/h bei den üblichen Stahlstäben beiläufig konstant ist. Diese Annahme ist auch nicht richtig, da zweifellos ist, dass ausser der Länge auch die Schlankheit des Stabes die anfängliche Krümmung des Stabes in grossem Masse beeinflusst.

3. Aus der Annahme $m = c_2 \lambda^2$ (DIN-Vorschrift) gelangen wir zu dem Ergebnis

$$e = \frac{c_2 l^2}{h} = c_2 l \frac{l}{h}$$

und dies kann man als richtig betrachten, weil das Produkt der Länge des Stabes und des mit der Schlankheit praktisch proportionellen Verhältnisses l/h tatsächlich für den Höchstwert der anfänglichen Exzentrizität bezeichnend sein kann.

Wenn man daher dem Vorhergesagten entsprechend die anfängliche Exzentrizität der Form $m = c\,\lambda^2$ gemäss aufschreibt, so gestaltet sich nach der Substituierung unsere Formel (5) $\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ folgendermassen:

$$\beta^2 - \left[1 + \frac{\pi^2 E}{\sigma_f}\left(c + \frac{1}{\lambda^2}\right)\right]\beta + \frac{\pi^2 E}{\sigma_f \lambda^2} = 0 \tag{6}$$

Über die Proportialitätsgrenze wird unsere sicherheitsmässige Formel (5/*b*) mit der Voraussetzung von $\beta_a \sigma_f = \sigma_a$ folgendermassen aussehen:

$$\beta = \frac{1}{1 + \left[\frac{(1-\beta_a)\sigma_f}{\pi^2 E} + c\right]\lambda^2} \tag{7}$$

worin $\left[\frac{(1-\beta_a)\sigma_f}{\pi^2 E} + c\right]$ konstant ist.

Im Anschluss an diese Formeln wird es interessant sein die Perry'sche Formel und die modifizierte Perry'sche Formel mit den Ergebnissen Ježek's zu vergleichen.

Zur Grundlage nehmen wir unseren normalen Flussstahl MNOSZ A 36 · 24 · 12, dessen nominelle Festigkeitsangaben die folgenden sind:

$$\sigma_f = 2{,}40 \text{ t/cm}^2; \quad \beta_a = 0{,}75; \quad \sigma_a = 1{,}80 \text{ t/cm}^2$$
$$E = 2\,100 \text{ t/cm}^2$$

Als anfängliche Exzentrizität benützen wir für unsere Formeln den Wert $m = c\,\lambda^2 = 0{,}6\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2$. Diesen Wert in unsere Formeln (6) und (7) einsetzend, gelangt man nach erfolgter Ordnung zu den Formeln

$$\sigma_0^2 - \left(3{,}64 + \frac{2{,}07}{(\lambda/100)^2}\right)\sigma_0 + \frac{4{,}97}{(\lambda/100)^2} = 0 \tag{6/a}$$

$$\sigma_0 = \frac{2{,}4}{1 + 0{,}889\,(\lambda/100)^2} \tag{7/a}$$

Die Formeln (6/*a*) und (7/*a*) gelten demgemäss, ob $\sigma_0 < 1{,}8$ t/cm² (unter der Proportionalitätsgrenze) (6/*a*), oder $\sigma_0 > 1{,}8$ t/cm² oberhalb der Proportionalitätsgrenze) (7/*a*).

Aus diesen Formeln haben wir die entsprechende Zahlenwerte von σ_0 und λ bestimmt und in der Tabelle I. und auf der *Abb. 3.* dargestellt. In der Tabelle, so wie in der Abbildung, finden sich auch die aus der Ježek'schen Formel berechnete Werte nach Entwurf DIN 4114. Die Angaben Ježek's beziehen sich auf einen idealplastischen Baustoff von rechteckigem

Tabelle I.

λ	Perry σ kg/cm²	Mod. Perry σ kg/cm²	Jezek kg/cm²
20	2340	2317	2363
30	2256	2222	2303
40	2153	2101	2202
50	2003	1963	2055
60	1824	1818	1864
70	1625	1672	1650
80	1424		1434
90	1226		1237
100	1070		1064
110	928		919
130	706		695
150	550		540

Querschnitt, d. h. auf einen solchen Stahl imaginärer Beschaffenheit, dessen Proportionalitätsgrenze und Fliessgrenze zusammenfallen und somit mit den Werten unserer Formel (6/*a*) zu vergleichen sind. Die Grundlage der Zahlenwerte ist der Stahl St 37 von gleicher Festigkeitseigenschaften, aber mit einer unsere Aufnahme $m=0{,}60\ [\lambda/100]^2$ übersteigende Exzentrizität $m=0{,}75\ [\lambda/100]^2$, da die Berücksichtigung der plastischen Zone bei gleicher anfänglicher Exzentrizität eine höhere mittlere Spannung ergibt. Bei dem von uns angenommenen Werte der Exzentrizität stimmen um $\lambda = 90$ die aus der Ježek'schen Formel berechneten Spannungen σ_0 mit den Ergebnissen der Perry-Formel überein. Bei einem kleinerem Werte von λ, als diese, ergibt die Perry'sche Formel einen etwas kleineren, bei einem grösseren Werte von λ hingegen einen grösseren Wert.

Das Ergebnis der Vergleichung rechtfertigt das eingangs Gesagte. Es lohnt sich anstatt der Ježek'schen von der Gestalt abhängigen, komplizierten Formel einen im Vorstehenden geschilderten einfachen und eindeutigen, nur die elastischen Formänderungen in Betracht ziehenden Formel für die Zwecke von Normvorschriften zu verwenden.

Aus demselben Vergleich ist es auch ersichtlich, dass die Änderung des Elastizitätsmoduls in der Durchschnittspannung (σ_0) auch bei dem von uns verwendeten Sicherheits-Formel (4) nur eine Unterschied 2% bedeutet (siehe Tabelle I.). Da man aber, bei sehr kleinem Anfangsexzentrizität bis zu einem gewissen Grade mit dem Bauschinger'schen Effekt rechnen kann, das die kritische Durchschnittsspannung erhöht, kann man von der Änderung

des Elastizitätsmoduls absehen, also von idealplastischem Baustoff ausgehen. Unsere auf den veränderlichen Elastizitätsmodul bezügliche Formel ist aber ein geeigneter Ausgangspunkt für die Bemessung von Stahlbetonstützen und

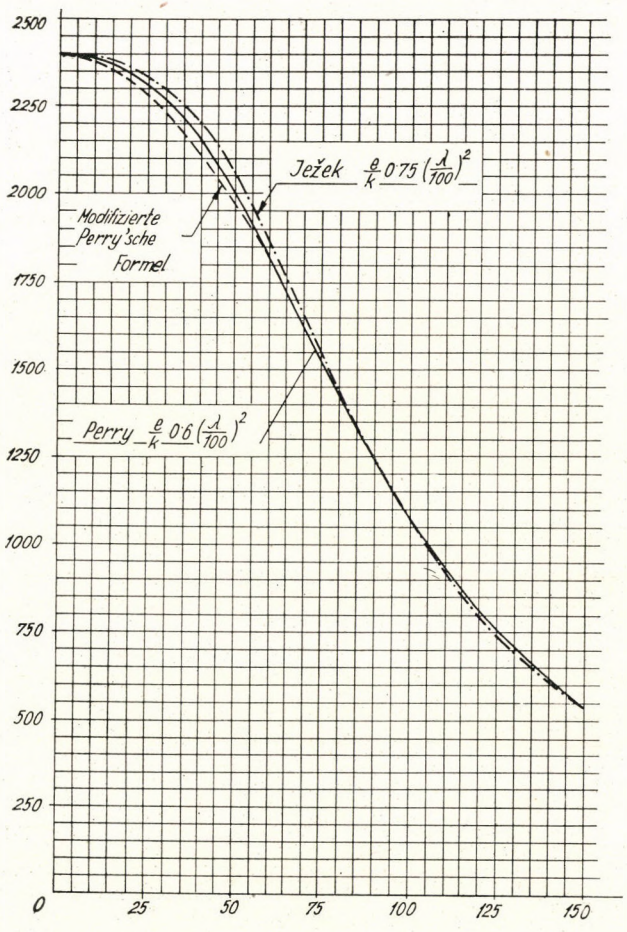


Abb. 3.

von auf Druck beanspruchten Stäben aus Leichtmetallegierungen, da diese Baustoffe entweder überhaupt keine Proportionalitätsgrenze, oder nur eine von sehr niedrigem Werte besitzen.

Die Bestimmung der Grenzspannungen und zulässigen Spannungen

Nach den prinzipiellen Fragen können wir auf die Art und Weise der Bestimmung der Grenzspannungen übergehen. Will man logisch vorgehen, so muss man auf die Art und Weise der Bestimmung der Zugsgrenzspannung zurükgreifen.

Die nominellen Festigkeitskennzeichen unserer Stahlwerkstoffe und die Zug-Grenzspannungen (im Brückenbau), welche zugleich die zur Schlankheit $\lambda = 0$ gehörige Druckgrenzspannung ist, sind in der untenstehenden Tabelle II. vorzufinden :

Tabelle II.
Kennzeichen der Stahlwerkstoffe

1	2	3	4	5	6	7	8
Qualität	σ_f	σ_h	σ_h/σ_f	E	E_r	E_r/E	c
A 36 . 24 . 12	2,40	1,85	77,2				0,55
A 49 . 29 . 12	2,90	2,25	77,6	2100	1620	0,772	0,60
A 50 . 35 . 12	3,50	2,70	77,2				0,65
	t/cm²		%	t/cm²			10^{-4}

Es ist ersichtlich, dass die Grenzspannung um 22,4—22,9% niedriger ist als die Streckgrenze. Diese Differenz, genauer gesagt die Verhältniszahl der Grenzspannung und der Streckgrenze, kann als Produkt von drei Faktoren dargestellt werden :

$$\sigma_h = \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \sigma_f \sim 0{,}774\ \sigma_f$$

Der erste dieser Faktoren (ϱ_1) drückt den wahrscheinlich zu erwartenden unteren Wert der Streckgrenze (Streuung) aus. Der zweite (ϱ_2) enthält die Flächentoleranz der Abmessungen und die statische Ungenauigkeit. Der dritte Faktor (ϱ_3) enthält die Kerbwirkung und die Wirkung der Nebenspannungen.

Der Wert des Elastizitätsmoduls ist gleichfalls einer Streuung unterworfen. Sein voraussichtlicher niedrigster Wert ist $E_h = \varrho_4 E$, worin E der nominelle Elastizitätsmodul und ϱ_4 der verringernde Faktor ist.

Unsere Ausgangsformel (2)

$$\sigma_f = \sigma_0 \left(1 + m \frac{\sigma_k}{\sigma_k - \sigma_0}\right)$$

muss, zur Feststellung der Druckgrenzspannung (σ_h), mit obigen Faktoren modifiziert werden. Die modifizierte Formel ist die folgende :

$$\varrho_1 \varrho_3 \sigma_f = \frac{\sigma_0}{\varrho_2} \left(1 + m \frac{\varrho_4 \sigma_k}{\varrho_4 \sigma_k - \sigma_0/\varrho_2}\right) \tag{8}$$

da die Streckgrenze um die Streuung so wie um den, die Kerbwirkung und die Nebenspannungen ausdrückenden Faktor ϱ_1, bzw. ϱ_3 herabgemindert werden, die Druckgrenzspannung σ_0 durch Dividierung mit dem Faktor ϱ_2 erhöht werden muss, weil derselbe eine Dimensions- und Berechnungstoleranz ausdrückt und endlich muss σ_k, bzw. E um den Faktor ϱ_4 verringert werden. Demzufolge kann unsere Formel (8) folgendermassen umgestaltet werden :

$$\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \sigma_f = \sigma_0 \left(1 + m \frac{\varrho_2 \varrho_4 \sigma_k}{\varrho_2 \varrho_4 \sigma_k - \sigma_0}\right) \tag{8/a}$$

Es ist ersichtlich, dass man Druckgrenzspannungen so erhält, wenn man in unsere Formeln (6) oder (7) an Stelle der Fliessgrenze die Zugsgrenzspannung des Stahles und an Stelle des Elastizitätsmoduls E dessen um $\varrho_2\,\varrho_4$ verminderten Wert einsetzt.

Schliesslich muss noch der in der Formel der anfänglichen Exzentrizität

$$\frac{e}{k} = c\,\lambda^2$$

stehende Faktor c angenommen werden. Hiezu gibt es keine theoretische Angabe, c müsste eigentlich nach den Erfahrungen festgestellt werden. Mangels entsprechender statistischen Angaben könnte man aus der Überlegung ausgehen, dass die auf die anfängliche Exzentrizität gegründete Bemessungsverfahren, an der Grenze des Euler'schen und des Tetmajer'schen Bereiches, d. h. in der Umgebung von $\lambda = 90$—110, gegenüber der alten Berechnungsmethode keine wesentlichere Abweichung ergeben möge und das Bruchteil, $-\frac{\sigma_k}{\sigma_k - \sigma_0}-$ das die Zunahme der Exzentrizität infolge der Ausbiegung andeutet auch im extremen Falle der Verwendungen einen gewissen vernünftigen Wert, z. B 2—2,5 nicht übersteigen möge.

Will man logisch vorgehen, so muss der Wert c bei den Stahlbaustoffen von der Streckgrenze prinzipiell unabhängig angenommen werden, weil die zu erwartende anfängliche Exzentrizität bei den gleichen Elastizitätsmodul besitzenden und mit dem gleichen Verfahren hergestellten Druckstäben von der Streckgrenze des Baustoffes unabhängig ist.

Normvorschriften

Die Angaben des Faktors c und des reduzierten Elastizitätsmoduls $E_r = \varrho_2 \cdot \varrho_4 E$ in den Bestimmungen für stählerne Strassen- und Eisenbahnbrücken sind in den Spalten 8. und 6. der Tabelle II. zu finden.

Aus diesen geht hervor, dass unsere Vorschriften, hinsichtlich des Faktors c in Abhängigkeit von der Fliessgrenze unter den Stahlsorten eine Unterscheidung machen, was schwer zu begründen ist. Den reduzierten Elastizitätsmodul E_r nehmen die Vorschriften mit einem Werte von 1620 t/cm² auf, woraus folgt, dass der Wert 0,772 des Produktes $\varrho_2\,\varrho_4$ mit dem Verhältnis der Grenzspannung-Streckgrenze identisch ist. Dieser Wert kann nicht motiviert werden, da die Streuung (ϱ_4) des Elastizitätsmoduls kleiner, als jene der Fliessgrenze ist und unter seinen reduzierenden Faktoren ϱ_3 überhaupt nicht vorkommt. Wenn man für die Streuung der Streckgrenze 10% rechnet, kann für den Elastizitätsmodul vernünftigerweise 5% voranschlagt werden. In dieser Frage möge niemanden der in den Literaturquellen vorfindbare mögliche niedrige Wert, z. B. 1600—1800 t/cm² irre machen, da dieser Wert sich

auf Kabelstoffe von sehr hoher Festigkeit bezieht und dafür auch das Kriechen und teilweise die nachträgliche Dehnung des Kabelbundels enthält. An unseren üblichen Stahlsorten ausgeführte Messungen ergeben für die Proportionalitätsgrenze im allgemeinen einen Wert von 2050—2200 t/cm² und so scheint eine Toleranz von 5%, gegenüber 2100 t/cm², in diesem Gebiete als eine genügende Sicherheit bietend. Der Faktor ϱ_2 enthält die Dimensionstoleranz des Baustoffes und die Ungenauigkeiten der statischen Berechnung, worauf wir 6—8% rechnen können. Demnach liegt der richtige Wert von E_r zwischen 1830—1870 t/cm². Die Vorschrift unserer Normen ($E_r = 1620$ t/cm²) ist für die Praxis trotzdem brauchbar, weil der reduzierte Elastizitätsfaktor bei diesem viel zu niedrigem Werte eine verhältnismässig kleine anfängliche Exzentrizität erfordert.

Es wäre aber dennoch zweckmässiger, aus den logisch richtigen Kennzeichen auszugehen, weil dann unsere Vorschriften auch auf die Lösung anderer Stabilitätsprobleme oder auf die Untersuchungen der Knickung von Stäben aus anderen Baustoffen anwendbar wären.

Zurückkommend auf die Frage unserer Normen, wird nach Einsetzung in unsere Formel (6) von $\pi^2 E_r = 16000$ t/cm² und σ_h an die Stelle von σ_f und mit Berücksichtigung der Gleichung $\beta = \sigma_h/\sigma_f$, die Formel sich nach Ordnen folgendermassen gestaltet:

$$\sigma_0^2 - \left(\sigma_h + 16\,000\, c + \frac{16\,000}{\lambda^2}\right)\sigma_0 + \frac{16\,000}{\lambda^2}\cdot\sigma_h = 0 \,. \qquad (9)$$

und wenn wir in diese Formel die Grenzspannungen und Faktoren c der Tabelle II. substituieren, erhalten wir folgende Formeln:

Bei dem Stahle A 36.24.12:

$$\sigma_0^2 - \left(2{,}73 + \frac{1{,}60}{(\lambda/100)^2}\right)\sigma_0 + \frac{2{,}96}{(\lambda/100)^2} = 0 \qquad (10/a)$$

Bei dem Stahle A 49.29.12:

$$\sigma_0 - \left(3{,}21 + \frac{1{,}60}{(\lambda/100)^2}\right)\sigma_0 + \frac{3{,}60}{(\lambda/100)^2} = 0 \qquad (10/b)$$

Bei dem Stahle A 50.35.12:

$$\sigma_0 - \left(3{,}74 + \frac{1{,}60}{(\lambda/100)^2}\right)\sigma_0 + \frac{4{,}32}{(\lambda/100)^2} = 0 \qquad (10/c)$$

Unsere Formel würde unter Zugrundelegung des der vorhergehenden Erörterung gemäss richtigen Wertes $E_r = 1845$ t/cm² und eines von der Beschaffenheit des Stahles unabhängigen Faktors $c = 0{,}65 \cdot 10^{-4}$ die Gestalt

$$\sigma_0^2 - \left[\sigma_h + 1{,}183 + \frac{1{,}820}{(\lambda/100)^2}\right]\sigma_0 + \frac{1{,}820}{(\lambda/100)^2}\,\sigma_h = 0$$

annehmen.

Aus diesen Formeln kann σ_0 in t/cm² von λ abhängig berechnet werden. Unsere Tabelle III. und die Abbildung 4. enthalten den Zusammenhang der Druck-Grenzspannung σ_0 und des Schlankheitsgrades λ je nach Stahlsorten.

Tabelle III.
Die Grenzspannung von Druckstäben

$\lambda = \frac{l}{i}$	Grenzspannung kg/cm^2		
	A 36 . 24 . 12	A 49 . 29 . 12	A 50 . 35 . 12
0	1850	2250	2700
10	1840	2237	2682
20	1808	2194	2627
30	1754	2120	2528
40	1673	2008	2376
50	1566	1857	2167
60	1432	1671	1913
70	1281	1466	1644
80	1127	1265	1392
90	981	1082	1174
100	850	926	994
110	738	795	847
120	642	687	727
130	562	598	630
140	495	523	550
150	438	462	484
160	390	410	428
170	349	366	382
180	314	328	343
190	283	297	309
200	257	268	280
210	235	245	254
220	215	224	232
230	197	205	213
240	182	189	196
250	168	174	181

Bemessungs-Formeln

Ein Schönheitsfehler dieser Berechnungsmethode besteht darin, dass die unter (10) angegebenen Zusammenhänge $\sigma = f(\lambda)$ zu einem Wurzelausdruck komplizierter Form führen, gegenüber unseren linearen und entsprechenden hyperbolischen Zusammenhängen zweiten Grades alter Vorschriften (Tetmajer'sche und Euler'sche Formeln), die man sich merken konnte oder die wenigstens die Benützung von Tabellen überflüssig machten. Einfache Formeln lassen sich auch nach den neuen Vorschriften ableiten, nur wird in ihnen ein anderer Parameter einleiten, als die bisher allgemein benützte Schlankheit λ. Zwecks Ableitung neuer Formeln kehren wir auf unsere Formel (2):

$$\sigma_f = \sigma_0 \left(1 + m \frac{\sigma_k}{\sigma_k - \sigma_0}\right)$$

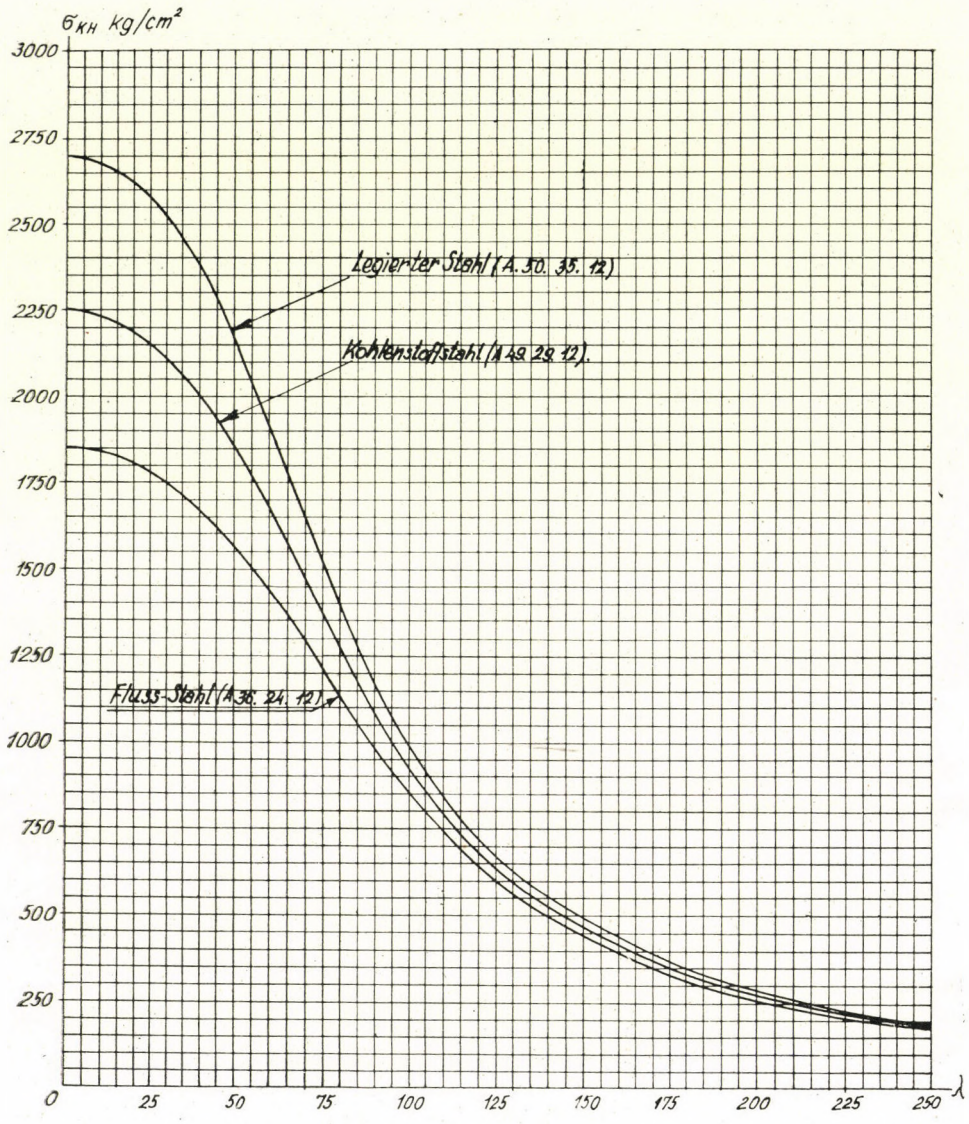


Abb. 4.

zurück. Wenn wir in dieser Formel die Substitution $m = c\,\lambda^2$ und $\sigma_k = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ durchführen, kann sie auf die Form

$$\sigma_f = \sigma_0 + \frac{c\,\pi^2 E\,\sigma_0}{\pi^2 E/\lambda^2 - \sigma_0}$$

gebracht werden. Man multipliziert den Zähler und den Nenner des Bruches mit

$F l^2$ (F ist die Fläche des Querschnittes) und ordnet man den Ausdruck, so erhält man die Form

$$\sigma_f = \sigma_0 + \frac{c}{\varkappa - 1/\pi^2 E} \tag{11}$$

worin der Parameter $\varkappa = \frac{J}{P l^2}$ lauter bekannte Grössen enthält. Auf Grenzspannungen kann man nach dem im Vorgehenden dargelegten so übergehen, dass man an Stelle von σ_f—σ_h und an Stelle von E — E_r einsetzt (die Werte von σ_h, E_r und c können aus der Tabelle II. entnommen werden). Demnach ergeben sich, wenn man P in Tonnen, l in Meter, E in t/cm^2 und I in cm^4 ausdrückt, die folgende Endergebnisse :

Die Formeln der grössten Spannungen sind bei der Benützung der Bezeichnung $\sigma_0 = \frac{P}{F}$, die folgenden :

im Falle von Flusstahl der Sorte A 36 · 24 · 12 :

$$\sigma_{max} = \sigma_0 + \frac{0{,}55}{\varkappa - 0{,}625} \tag{12/a}$$

im Falle von Karbonstahl der Sorte A · 49 · 29 · 12 ;

$$\sigma_{max} = \sigma_0 + \frac{0{,}60}{\varkappa - 0{,}625} \tag{12/b}$$

im Falle von legierten Stahl der Sorte A · 50 · 35 · 12 :

$$\sigma_{max} = \sigma_0 + \frac{0{,}65}{\varkappa - 0{,}625} \; ^* \tag{12/c}$$

Aus jeder vorhin erwähnten Formel können natürlich die Formel der Druckgrenzspannungen aufgeschrieben werden, wenn unsere Gleichungen für σ_0 gelöst werden und statt σ_{max} die bezügliche Grenzspannung eingesetzt wird.

So z. B. ist im Falle von Fluss-Stahl :

$$\sigma_0 = 1{,}85 - \frac{0{,}55}{\varkappa - 0{,}625} \tag{13}$$

(Diese Formel erinnert an die Tetmajer'sche Formel, nur findet sich in ihr nicht der Parameter λ, sondern der Parameter π)

Eine für die Zwecke der Bemessung vielleicht noch geeignetere Formel erhalten wir, wenn wir unsere Gleichung (11) für das Trägheitsmoment I lösen.

*) Mit der Zugrundelegung des der vorstehender Ausführungen gemäss richtigeren Wertes $E = 1845$ t/cm^2 und des, von der Qualität des Stahlwerkstoffes unabhängigen Faktors $c = 0{,}65.10^{-4}$ ist unsere, auf alle drei Stahlqualitäten gleiche gemeinsame Formel die folgende

$$\sigma_{max} = \sigma_0 + \frac{0{,}65}{x - 0{,}550}$$

Bei Einführung der Bezeichnung $\sigma_f - \sigma_0 = \Delta\sigma$ und $\frac{c}{\Delta\sigma} = \frac{J}{Pl^2} - \frac{1}{\pi^2 E}$ und hieraus ist

$$J = Pl^2 (c/\Delta\sigma + 1/\pi^2 E) \tag{14}$$

Letztere Formel gestaltet sich in den vorherigen Einheiten im Falle unserer verschiedenen Stahlsorten folgendermassen :

Im Falle von Fluss-Stahl der Sorte A 36 · 24 · 12 :

$$J = Pl^2 \left(\frac{0{,}55}{\Delta\sigma} + 0{,}625\right); \quad \Delta\sigma = 1{,}85 - \sigma_0 \tag{15/a}$$

Im Falle von Karbonstahl der Sorte A 49 · 29 · 12 :

$$J = Pl^2 \left(\frac{0{,}60}{\Delta\sigma} + 0{,}625\right); \quad \Delta\sigma = 2{,}25 - \sigma_0 \tag{15/b}$$

Im Falle von Stahl der Sorte A 50 · 35 · 12 :

$$J = Pl^2 \left(\frac{0{,}65}{\Delta\sigma} + 0{,}625\right); \quad \Delta\sigma = 2{,}70 - \sigma_0 \tag{15/c}$$

Beispiel :

Die Bememessung des auf Druck beanspruchten Stabes nach den vorhergehenden Formeln zeigen wir an einem Beispiel :

Es sei die massgebende Kraft des, aus dem Profil *2 U* zusammengesetzten Druckstabes (*Abb.* 5) $P = 120$ t, die Länge des Stabes

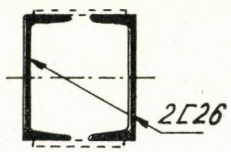


Abb. 5.

7,00 Meter, der Werkstoff desselben Fluss-Stahl der Sorte A 36 · 24 · 12 und die Knickungsrichtung senkrecht auf die materielle Achse des Stabes. Der Stab kann nach unseren Tabellen in gewohnter Weise dimensioniert werden. Benützen wir aber unsere obige Formel für die Berechnung des Trägheitsmomentes *J*, die im Falle der angegebenen Stahlsorte den Vorschriften der Brückennormen gemäss die folgende ist : (15/*a*)

$$J = Pl^2 \left(\frac{0{,}55}{\Delta\sigma} + 0{,}625\right)$$

In unserem Falle $Pl^2 = 120{,}0 \cdot 49{,}0 = 5880$ tm². Die Aufgabe wird durch wiederholtes Probieren gelöst.

a) Angenommen 2 Stück 26 *U* Träger, $F = 96{,}6$ cm²:

$$\sigma_0 = \frac{120{,}0}{96{,}6} = 1{,}242 \text{ t/cm}^2; \quad \Delta\sigma = 1{,}850 - 1{,}242 = 0{,}608 \text{ t/cm}^2$$

und somit

$$J_{sz} = 5.880 \left(\frac{0{,}55}{0{,}608} + 0{,}625\right) = 8\,970 \text{ cm}^4$$

Demgegenüber beträgt das tatsächliche Trägheitsmoment des Profils $J_{eff} = 2 \cdot 4820 = 9640$ cm⁴, daher ist der Stabquerschnitt richtig aufgenommen.

Zur Spannungsnachweis rechnen wir die grösste Spannung aus, von der wir verlangen, dass sie kleiner als die Grenzspannung (1,85 t/cm²) sein möge. Gemäss unserer Formel (12/*a*) ist:

$$\sigma_{max} = \sigma_0 + \frac{0{,}55}{J/P\,l^2 - 0{,}625} = \frac{120{,}0}{96{,}6} + \frac{0{,}55}{1{,}639 - 0{,}625} = 1{,}784 < 1{,}85 \text{ t/cm}^2$$

daher entspricht das Profil den Erfordernissen.

Reduziertes Trägheitsmoment der Stäbe von zusammengesetzten Profil

Nach den Bestimmungen der neuen Vorschriften muss, bei der Bemessung der (einen konstanten Querschnitt besitzenden) Stäbe von aus zwei Teilen zusammengesetztem Profil der Schlankheitsgrad des Stabes aus der

$$\lambda_r^2 = \lambda_1^2 + \lambda_0^2$$

Formel berechnet werden, worin λ_r die Schlankheit des zur Bestimmung der Grenz-bzw. zulässigen Spannungen dienenden Profils, λ_1 der Schlankheitsgrad des als einteilig vorgestellten Profils ist, auf Grund der ganzen Knicklänge des Stabes berechnet, während λ_0 der Schlankheitsgrad des Einzelstabes.

Mit der Kritik und der Erörterung der theoretischen Gründe dieser Vorschrift befassen wir uns hier nicht, werden wir bloss untersuchen, welcher Stab vollwandigen Querschnittes von unveränderter Fläche, aber reduzierten Trägheitsmoment dieser Schlankheitsvorschrift entspricht. Dies benötigen wir um unsere Formeln, auch im Falle von zusammengesetzten Profils deuten zu können.

Wenn $\lambda_r^2 = \lambda_1^2 + \lambda_0^2$ dann ist

$$\frac{l^2 F}{J_r} = \frac{l^2 F}{J_1} + \frac{l^2 F}{2 n^2 J_0}$$

worin J_r, J_1 und J_0 das Trägheitsmoment des reduzierten, des vollen und des Halbprofils, F die ganze Fläche des Profils und n die Teilungszahl des Stabes bedeuten.

Hieraus kommt

$$\frac{1}{J_r} = \frac{1}{J_1} + \frac{1}{2\,n^2\,J_0}$$

das heisst:

$$J_r = J_1\,\frac{2\,n^2\,J_0}{J_1 + 2\,n^2\,J_0}$$

Dieser Formel gemäss kann das reduzierte Trägheitsmoment bestimmt und mit dessen Hilfe der Stab im weiteren wie ein einteiliger Stab behandelt werden.

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Ausarbeitung der neuen Bemessungsvorschriften wurde zu dem Prinzip der Berechnung der Abmessungen auf Grund des Grenzzustandes übergegangen. Gleichzeitig wurde für die Bemessung gedrückter Stäbe die Dimensionierungsmethode auf Grund der Anfangsexzentrizität eingeführt. In der Abhandlung wird die Anwendung der genannten Methode auf den Grenzsustand dargelegt und die theoretischen Grundlagen der die Bemessung gedrückter Stäbe betreffenden neuen ungarischen Vorschriften auseinandergesetzt. Schliesslich werden Formeln angegeben, mit deren Hilfe die Bemessung gedrückter Stäbe auch ohne Tabellen ausgeführt werden kann.

РАСЧЕТ РАЗМЕРОВ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА ОСНОВЕ ЗАДАННОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЭКСЦЕНТРИЧНОСТИ СОГЛАСНО УСЛОВИЙ НОВЫХ Н. И Т. У. НА СТАЛЬ

И. Меньгард

Резюме

При составлении новых Н. и. Т. У. за основу был взят принцип расчета размеров на основании критического состояния. В это же время при установлении размеров сжатых стержней ввели также и метод расчета размеров на основе начальной эксцентричности. В статье говорится о том, что каким образом может быть использовано последнее в случае критического состояния. Далее статья трактует теоритические основы введенных в Венгрии новых Н. и. Т. У. сжатых стержней. Наконец даются формулы, с помощью которых расчет размеров сжатых стержней может быть произведен и без помощи таблиц.

УПРОЩЕННЫЙ РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СВОДА-ОБОЛОЧКИ*

Др. К. Смодич

Поступило I. VI. 1951

Цилиндрический свод-оболочка по своей форме является одним из лучших конструктивных форм оболочек и поэтому также и из точки зрения статики заслуживает особое внимание. Это видно уже из того, что и литература по конструкциям оболочек глубоко изучает этот тип конструкции и что выдающиеся теоретики, исходя из различных точек зрения, разрабатывают все новые и новые решения (см. Finsterwalder, Dischinger, Jaakobsen и др.). Характерной особенностью всех упомянутых решений является то, что задача решается не с упрощениями, принятыми при исследовании стройконструкций (т. е. обычно условия упругости удовлетворяются приближенно), а исходят из жестких условий теории сопротивления и задачу решают путем сложных и длительных расчетов. Упомянутое жесткое требование может быть обосновано лишь на том, что практика еще не накопила такого опыта, чтобы на основании этого опыта было бы возможно упростить эти длительные расчеты, однако и эти исследования нельзя считать решениямы (хотя и со всей основательностью учитывают малейшие подробности этого вопроса), которые бы в совершенстве отобразили физическую действительность, ввиду того, что употребляющиеся в расчетах коэффициенты упругости имеют неопределенные значения. Большее или меньшее отклонение действительности от теории при расчетах по сопротивлениям материалов всегда возможно из-за того, что действительные упругие свойства материалов не тождественны упругим свойствам идеализированного материала (для возможности математической трактовки). Поэтому требования точности расчетов по сопротивлениям материалов реальны только постольку, поскольку они не увеличивают неизбежную неточность, вытекающую из неопределенности коэффициентов упругости, т. е. ту неточность за которой точность не может быть повышена, как ни расчетами, учитывающими еще большие подробности, так и ни применением более сложного математического аппарата. Мы считаем, что вышеупомянутые методы уже перешли границу реальной точности и таким образом с излишней подробностью решают эту задачу.

Исследование свода-оболочки с хорошим приближением к действительности (кроме неопределенных значений коэффициентов упругости) особенно затрудняется тем обстоятельством, что материалом для конструкции является железобетон, в котором, вследствие упругого взаимодействия железа и бетона (как это известно из теории железобетона) при расчете внутренних напряжений, конструкция не может рассматриваться состоя-

* Опубликовано на венгерском язике в журнале »Építéstudományi Közlemények« (Сообщения строительной науки) за 1949 г., № 4.

щей из изотропного материала, т. е. материала, имеющего одинаковое сопротивление по всем направлениям, как на растяжение, так и на сжатие. Упомянутые точные методы расчетов предполагают материал конструкции идеальным по упругости, а также изотропным. Такому взгляду противоречит то обстоятельство, что если систему, состоящую из цилиндрического свода-оболочки и бортовой опоры, рассматриваем как двухопорную ферму посаженную на арочную фронтонную стену, то в случае железобетонной конструкции (на основании накопленного опыта) на участке растяжения получит трещину и таким образом изотропный характер конструкции утратится. Без предположения того, что натянутый участок имеет трещины и что силы натяжения поглощаются исключительно арматурным железом, нельзя считать неоспоримо правильным взглядом теории железобетона равновесие внешней силы и сил сечения треснувшего поперечного сечения. Невозможно также определить усилие натянутого арматурного железа или же площадь натянутого арматурного железа. Этому способствует и то, что модуль упругости бетона конструкции может быть предварительно определен только в широких пределах. Таким образом число n_x, выражающее упругую связь бетона и железа, становится также неопределенным. Это обстоятельство из-за значительных размеров поперечного сечения влияет на расчёты здесь в гораздо большей степени, чем в случае обычной железобетонной балки.

Целью этого труда является то, чтобы разработать такой метод расчета, который учитывает анизотропный характер свода-оболочки, и таким образом дает возможность определить площадь нижнего, натянутого арматурного железа. Хотя расчет с учетом анизотропного характера конструкции в противоположность расчета, исходящего из изотропного характера материала конструкции, и означает введение более сложных условий, но несмотря на это расчет значительно упрощается, т. к. исследование анизотропной конструкции возможно лишь при упрощении расчетов. Однако эти упрощения менее неточны, чем те, которые вытекают из неучитывания анизотропного характера конструкции. Поэтому мы считаем, что результаты, полученные при применении нашего метода расчета, стоят ближе к истине, чем вышеупомянутые методы расчетов.

Вообще, упрощение приемов статических расчетов возможно тремя способами: а) из условий, учитывающихся при точных методах расчетов, не считаемся с теми, которые по сравнению с величинами учтенных условий незначительны; б) когда влияние отдельных условий или групп условий замещаем величинами, полученными эмпирическим путем или гипотезами вероятности; в) и когда в целях упрощения техники расчетов вводятся такие приближенные соотношения, которые делают возможным упрощенное математическое вычисление.

Приближение, фигурирующее первым (а) в элементарной теории сопротивления материалов, используем тогда, когда при расчете прогиба не считаемся с деформацией, вызванной напряжениями среза; второе приближение (б) тогда, когда изгиб балки исследуем на основании гипотезы Наивера и наконец третье (в) когда внешнюю нагрузку исследуем приближено: тригонометрическими рядами.

В нашем методе расчетов мы используем все три типа возможных упрощений, исходя из следующих (аналогичных гипотезе изгиба обычной железобетонной балки) гипотез:

1. Большинство задач занимается с цилиндрическими сводами-оболочками такого типа, где длина превосходит ширину. Так как указанные по Финстервальдеру и Флюге внутреннее кручение и изгиб по образующей могут быть опущены, мы принимаем во внимание лишь обозначенные на рисунке 1. положительные силы натяжения.

2. Цилиндрический свод-оболочка с бортовой опорой в продольном направлении работает аналогично как и балка на двух опорах. Если мы представим себе балку, разрезанной в каком-либо сечении, то с моментом

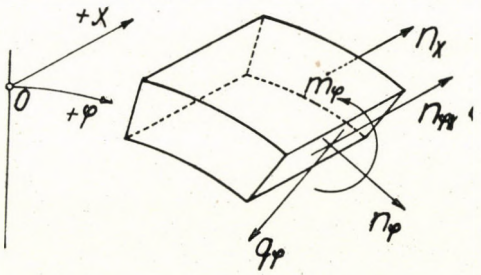


Рис. 1.

внешних сил, относящихся к месту сечения, может быть в равновесии лишь внутренний момент сил натяжения n_x. Предположим, в оболочке эти силы натяжения распределяются линейно (гипотеза Навиера и закон Хооке или гипотеза Бернулли), а бетон бортовой балки — так, как и гофры гофрированного листа — непоглощают натяжения вдоль по образующей и таким образом они поглощаются исключительно только нижним арматурным железом. Пренебрежение натяжениями бетона является основной гипотезой теории железобетона и таким образом введение ее в теорию по сводам-оболочкам обосновано последовательностью применения теории. Распределение напряжений согласно строгой теории изгибов из-за деформаций, вызванных срезом, во всех поперечных сечениях балок происходит по различному. Этим обстоятельством, согласно элементарной теории изгиба, пренебрегаем. Это можем сделать и тем более, т. к. максимальное значение сил натяжения n_x, расчитанное из изгиба, имеется в среднем поперечном сечении свободном от среза, у которого силы натяжения остальных поперечных сечений незначительны. Таким образом их точное распределение с точки зрения оценки грузоподъемности неинтересно.

3. Нейтральная ось линейно распределяющихся сил натяжения n_x, согласно теории железобетона, проходит через точку тяжести n-кратной площади арматурного железа и площади сжатого бетона. Принимая во внимание неопределенное значение числа n и то, что место расположения нейтральной оси зависит также и от прочих данных конструкции, для определения этого мы не даем общих правил, а среди возможных случаев, интервал которых сужается условиями опоры, с точки зрения максимальных усилий выбираем наиболее неблагоприятные условия. Преимущество этого способа заключается в том, что этот способ независим от неопределенных значений коэффициентов упругости. К линейной диаграмме n_x, построенной в соответствие вышеприведенных точек зрения, относится величина n, которой с оставлением нейтральной оси можем дать и другую величину. В этом случае диаграмма преломится на нейтральной оси и таким образом

может быть использована также и для приближения кривонапряженной диаграммы.

4. В конструкции из числа возможных случаев напряжений (по условиям равновесий) возникнет тот, при котором работа деформации минимальна. Наибольшая часть деформаций падает на деформации, вызванные моментами m_φ. Таким образом из-за незначительного сопротивления сгибанию свода-оболочки из числа всех деформаций его значение наибольшее, а потому и предположим, что из возможных сгибаний свода-оболочки или же среди возможных эпюр моментов наиболее вероятен тот, у которого сумма квадратов этих моментов является минимальной, т. к. тогда связанная с этим сумма деформаций будет также минимальной.

В дальнейшем внутренние силы натяжения мы разделяем на две группы : — на группы основных и второстепенных сил натяжения. Основными силами натяжения являются n_x и $n_{\varphi x}$, а второстепенными m_φ, q_φ и n_φ. К основным силам натяжения двухопорной фермы относятся напряжения его моментов и среза. Они составляют значительную часть напряжений — как по величине, так и по статическому значению. Они происходят от изгиба свода-оболочки по образующей вдоль плоскости большего расстояния между опорами. В то время, второстепенные силы натяжения возникают в плоскости меньшего расстояния между опорами. Они независимы от x и их величины значительно меньше величин основных сил и таким образом могут рассматриваться как побочные второстепенные влияния. Такие второстепенные силы натяжения могут возникать также у мембранных сводов-оболочек, но там условия равновесий и деформаций, даже в случае пренебрежения второстепенных сил натяжения, могут быть однозначно удовлетворены, в то время, как у цилиндрических сводов-оболочек условия равновесий и деформаций опирания по периметру могут быть удовлетворены только суммой основных и второстепенных сил натяжения. Поэтому второстепенные силы натяжения не могут быть опущенны. Принимая во внимание величину сопротивления изгибу свода-оболочки, моменты m_φ могут иметь только небольшую величину. Несмотря на то, что в уравновешении внешней нагрузки они не играют существенную роль, при определении размеров наиболее слабого элемента конструкции, т. е. свода-оболочки, имеют решающее значение.

Связь между основными силами натяжений и второстепенными силами натяжений (как это выяснилось из теоретических исследований и многочисленных расчетов сводов-оболочек) очень слабая. Другими словами, *отклонение между системами второстепенных сил, относящихся к различного рода возможным распределениям основных сил натяжения, незначительно.* Это обстоятельство является причиной того, что хотя точные теории при распределении n_x не принимают во внимание анизотропное поведение конструкции, всетаки дают хорошее приближение к второстепенным силам натяжения и таким образом в наиболее чувствительной части расчетов дают хорошие результаты. Это обстоятельство нейтрализирует влияние неопределенной величины числа n (влияющего на величину n_x) на второстепенные силы натяжения. Следовательно слабая связь основных и второстепенных сил натяжения является исключительно благоприятной, т. к. этим трудно характеризовать конструкцию свода-оболочки и точный учет упругих свойств становится излишним. Таким образом «наиболее неблагоприятное поглощение», рассмотренное в 3. пункте, диаграммы n_x также стано-

вится неинтересным, т. к. различные поглощения очень мало влияют на второстепенные силы натяжения, и эти поглощения только в незначительной степени влияют на максимальную величину n_x.

Далее, мы занимаемся исключительно с цилиндрическим сводом круглого сечения, который практически является важнейшей конструкцией. Сначала рассмотрим систему, из одного свода-оболочки и двух бортовых опор.

Запишем условия равновесия элемента свода-оболочки, нагруженного собственным весом, с учетом пренебрежений, описаных в 1-ом пункте. Вывод этих дифференциальных уравнений подробно рассматривается литературой по сводам-оболочкам (напр. Гиркманн: Flächentragwerke).

$$a\,\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} + a\,\frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial x} - q_\varphi + a\,p\,\sin\,\varphi = 0$$

$$\frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + n_\varphi + a\,p\,\cos\,\varphi = 0 \qquad a\,q_\varphi = -\frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi}$$

Где a — радиус круглого свода,

p — вес единицы площади круглого свода,

а уравнения относятся к цилиндрической системе координат, изображенной на рис. 2.

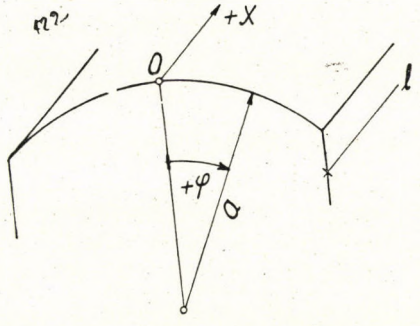


Рис. 2.

Предполагаемое во 2-ом пункте распределение сил натяжения n_x может быть записано в следующей форме, это выражение в функции x выражает параболу, соответствующую эпюре момента двухопорного цилиндрического свода-оболочки, нагруженного равномерно распределяющейся нагрузкой, а в функции φ линейное распределение напряжения n_x в вертикальном направлении:

$$n_x = -\frac{\alpha\,\delta}{2}\left(x - \frac{x^2}{l}\right)(\alpha\,\cos\,\varphi - \eta)$$

где δ — толщина свода-оболочки,
l — длина цилиндрического свода вдоль x,
η — расстояние от центра цилиндрической арки до нейтральной оси ξ,
α — коэффициент пропорциальности.

(рис. 3.) На месте $x = \frac{1}{2}$ и $\varphi = 0$ по формуле между n_x и α имеется следующая связь:

$$\alpha = -\frac{8}{\delta\, l\, \xi}\, n_x$$

Для определения коэффициента α мы должны рассматривать сжатый пояс, как поперечное сечение, эксцентрично сжатое с силой $D = \frac{M}{z}$,

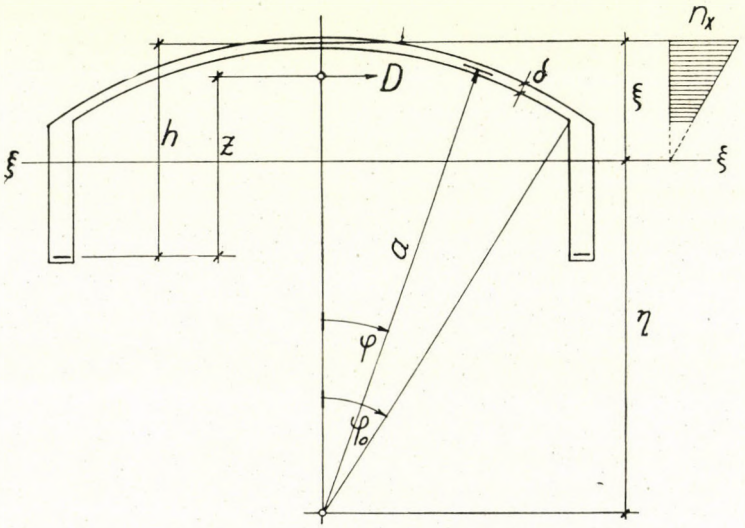


Рис. 3.

где M — максимальный изгибающий момент двухопорного цилиндрического свода-оболочки,
z — плечо внутренних сил .

Если дано ξ, то z может быть определено из следующего известного соотношения:

$$z = \frac{I_\xi}{S_\xi} + (h - \xi)$$

где I_ξ — момент инерции площади сжатой части,
S_ξ — статический момент площади сжатой части на нейтральную ось.

Максимальная сила натяжения, исходящая из эксцентричного давления

$$n_x = -\frac{D_\xi \, \delta}{S_\xi}$$

в формулу для α подставляя вместо n_x — α получаем:

$$\alpha = \frac{8\,D}{l\,S_\xi}$$

S_ξ и I_ξ могут быть определены из следующих, выведеных интегрированием, простых соотношений:

$$S_\xi = 2\,\delta\,a\,(a\,\sin\,\varphi_0 - \eta\,\varphi_0)$$

$$I_\xi = 2\,\delta\,a\left[a^2\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin\,2\,\varphi_0}{4}\right) - 2\,a\,\eta\,\sin\,\varphi_0 + \eta^2\,\varphi_0\right]$$

где числовое значение φ_0 подставляем в размерах арки. Соотношение было выведено с тем приближением, что цилиндрическую дугу считали не как плоскую фигуру, а как дугу весом δ (т. е. как единицу длины).

И так мы определили все данные формулы n_x и его, как известную силу натяжения, подставляем в уравнения равновесий. Можно доказать, что уравнения равновесий в случае известного n_x могут быть однозначно решены для остальных сил натяжения, следовательно гипотезы 1, 2, 3 и условия равновесия достаточны для определения сил натяжения.

Этот метод схож с элементарной теорией изгиба, где при определении внутренних напряжений мы, строго говоря, удовлетворяем только условия равновесия, условия упругости заменяем гипотезой Навиера, введение которого делает возможным однозначное определение внутренних сил.

Далее мы различаем два типа задач: решение, приведенное в 1-ом пункте, относится к тому случаю, когда нейтральная ось не пересекает цилиндрическую дугу (в случае цилиндрического свода-оболочки с бортовой опорой), а решение, употребляющееся во 2-ом пункте, занимается с тем случаем, когда нейтральная ось пересекает дугу и расчленяет её на две части (этот случай имеет место у цилиндрического свода без бортовой опоры).

1. Подробный математический разбор решений уравнений мы опускаем и приводим лишь конечные результаты, которые могут быть легко получены простым интегрированием, а именно:

$$n_x = -\frac{\alpha\,\delta}{2}\left[x - \frac{x^2}{l}\right](\alpha\,\cos\,\varphi - \eta)$$

$$n_{\varphi x} = \frac{\alpha\,\delta\,a}{2}\left[1 - \frac{2\,x}{l}\right](a\,\sin\,\varphi - \eta\,\varphi)$$

$$n_\varphi = \frac{g_1}{2}(\cos\,\varphi - \varphi\,\sin\,\varphi) - (C_2 + a\,p)\,\cos\,\varphi - g_2$$

$$q_\varphi = -\frac{g_1}{2}\,\varphi\,\cos\,\varphi + C_2\,\sin\,\varphi + g_2\,\varphi$$

$$m_\varphi = -\frac{a g_1}{2}(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) - a C_2 \cos \varphi + g_2 l \frac{a}{2} \varphi^2 + C_3$$

где

$$g_1 = 2 ap - \frac{\alpha \delta a^3}{l} \quad \text{и} \quad g_2 = \frac{\alpha \delta \eta a^2}{l}$$

Задача решена по условиям периметра, проходящего вдоль торцевых дуг. Это условие общепринято в литературе по цилиндрическим сводам-оболочкам. В этом случае на месте $x = 0$ и $x = l$, $n_x = 0$. Кроме этого приняты во внимание на месте $\varphi = 0$ условия симметрии $m_{\varphi x}$ и $q_\varphi = 0$. На свободном конце цилиндрической дуги условием равновесия по периметру является отсутствие бокового давления, которое предписывает, что сумма горизонтальных составляющих сил натяжения, действующих на крайней плоскости цилиндрической дуги, должна быть равна нулю.

Периметриальные условия отсутствия бокового давления удовлетворяем коэффициентом интегрирования C_2, фигурирующем в формуле сил натяжения. Согласно рис. 1. можем записать:

$$n_{\varphi_0} \cos \varphi_0 = q_{\varphi_0} \sin \varphi_0$$

если вместо выражения сил натяжения подставляем C_2, то получаем:

$$C_2 = \left(\frac{g_1}{2} - a p\right) \cos^2 \varphi_0 - g_2 (\cos \varphi_0 + \varphi_0 \sin \varphi_0)$$

Коэффициент интегрирования C_3 используем для удовлетворения гипотезы 4-го пункта так, что эпюру моментов m_φ определяем с помощью такого коэффициента C_3, чтобы сумма квадратов моментов получившейся таким образом эпюры моментов была-бы минимальной. Нет надобности выполнить эту операцию с большой точностью. Достаточно приближенно определить возможную величину C_3, т. к. неправильное определение C_3 вообще у действительных моментов дает большие максимальные величины моментов. Это значит, что расчет произведен с большим запасом прочности, а далее, что коэффициент C_3 влияет только на величину моментов m_φ. Таким образом его возможное неправильное использование не влечет за собой влияния на другие величины.

2. Во втором случае нейтральная ось разделяет цилиндрический свод-оболочку на две части. Участок $0 - \varphi_1$ сжатая часть, расположенная над нейтральной осью, статическое исследование которого совершенно аналогично со случаем, исследованным в 1-ом пункте. На участке $\varphi_1 - \varphi_0$ под нейтральной осью бетон цилиндрического свода, и мы, на основании вышесказанного, считаем, что бетон не испытывает усилия растяжения, и так здесь $n_x = 0$. На основании этого условия равенства равновесий сил натяжения здесь также могут быть решены однозначно и, опуская и в данном случае математическую трактовку этого решения, получаем следующие результаты. Надо отметить, что в целях различения от случая 1. буквенные обозначения сил натяжения помечаем над буквой черточкой.

$$\overline{n}_x = 0$$

$$\overline{n}_{\varphi x} = \frac{\overline{g}_2 l}{2a}\left(1 - \frac{2x}{l}\right)$$

$$\overline{n}_{\varphi} = \frac{\overline{g_1}}{2}(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi) - (\overline{C}_2 + ap)\cos\varphi + \overline{C}_1\sin\varphi$$

$$\overline{q}_{\varphi} = -\frac{\overline{g_1}}{2}\varphi\cos\varphi + \overline{C}_1\cos\varphi + \overline{C}_2\sin\varphi - \overline{g}_2$$

$$\overline{m}_{\varphi} = -\frac{\overline{a\,g_1}}{2}(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi) - a\overline{C}_2\cos\varphi + a\overline{C}_1\sin\varphi - a\overline{g}_2\varphi + \overline{C}_3$$

где

$$\overline{g}_1 = 2ap \quad \text{и} \quad \overline{g}_2 = \frac{\alpha\delta a^2}{l}(a\sin\varphi_1 - \eta\varphi_1)$$

Постоянные $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ и C_4 на месте соприкосновения φ_1 участка $0 - \varphi_1$ и участка $\varphi_1 - \varphi_0$ определяем из условия непрерывности состояния напряженности.

Условия соприкосновения:

на месте $\varphi = \varphi_1$: $\quad n_{\varphi} = \overline{n}_{\varphi}, q_{\varphi} = \overline{q}_{\varphi}$

Кроме этого условие отсутствия бокового давления:

на месте $\varphi = \varphi_0$: $\quad n_{\varphi 0}\cos\varphi_0 = q_{\varphi 0}\sin\varphi_0$

Путем подстановки величин сил натяжения из первого условия:

$$C_2 = A\sin\varphi_1 + B\cos\varphi_1 \quad \overline{C}_1 = \frac{B - C_2\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}$$

А из второго условия следует:

$$\overline{C}_2 = \overline{g}_2\sin\varphi_2,$$

где

$$A = \frac{\varphi_1}{2}\cos\varphi_1(g_1 - \overline{g_1}) - g_2\varphi_1 - \overline{g}_2 + \overline{C}_2\sin\varphi_1$$

$$B = \frac{1}{2}(\cos\varphi_1 - \varphi_1\sin\varphi_1)(g_1 - \overline{g_1}) + \overline{C}_2\cos\varphi_1 - g_2$$

Постоянная $\overline{C}_3$ также как и в первом случае служит для определения эпюры момента.

Этим мы определили все постоянные, на основе которых в любом исследуемом пункте свода-оболочки можем определить числовое значение сил натяжения — как у цилиндрического свода-оболочки с боковой опорой, так и без таковой.

Ниже мы подробнее займемся с η, в случае свода-оболочки свободного от бокового давления.

С помощью нашего метода можно определить, что к нейтральным осям, соответствующим различным значениям η, относятся моменты m_{φ},

изображенные на рис. 4. Из рисунков видно, что если на краях η велико, то момент защемления получается положительным, а если значение η невелико, то момент защемления будет отрицательным.

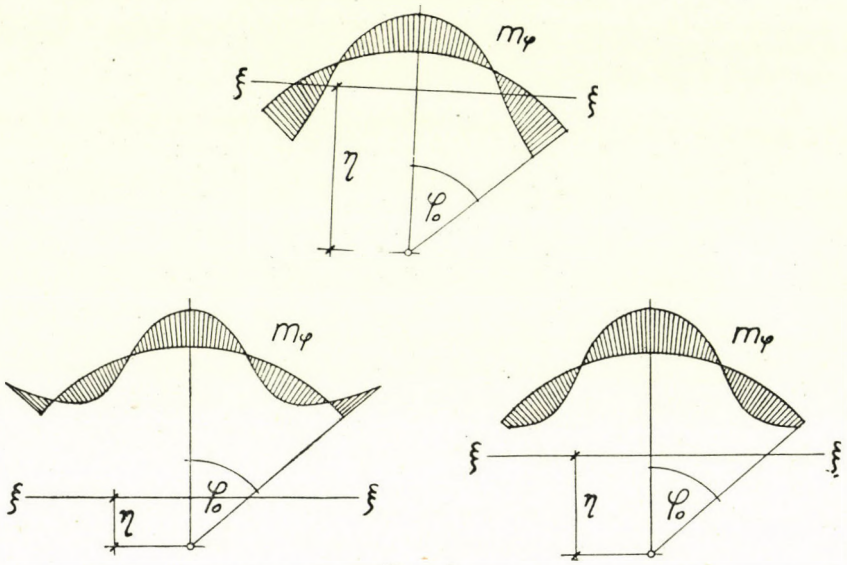


Рис. 4.

В случае свода-оболочки с боковой опорой, свободного от бокового давления, крайний момент в обязательном порядке является отрицательным, т. к. свод-оболочка, кроме совместного прогиба с бортовыми опорами, и сам прогибается вследствие деформации, вызванной влиянием моментов m_φ и вследствии этого какая-либо точка поперечного сечения цилиндрического свода-оболочки, лежащая возле бортовой опоры, даст больший прогиб, чем опирающаяся на бортовую опору крайняя точка. Таким образом свод-оболочка в области бортовой опоры вследствии деформаций будет выгибаться вверх и следовательно в нем образуется отрицательный момент. Это обстоятельство сужает границы использования C_3.

Если система, состоящая из цилиндрических сводов без бортовых опор имеет взаимосвязь, то отдельные элементы цилиндрикеского свода расчитываем как отдельные элементы, свободные от бокового давления. В этом случае вертикальная образующая сил натяжения крайних сечений близка к нулю и таким образом на месте сопряжения цилиндрических дуг не возникают неуравновешенные силы. На свободных концах крайних цилиндрических сводов моменты понимаем как имеющие крученные края.

Если имеется решетчатая система цилиндрического свода-оболочки с бортовой опорой, то независимо друг от друга силы натяжения пролета свода со свободным воспринятием C_2 (с боковым давлением) и с соответствующим подбором C_2 (без бокового давления). Первое решение относится к внутренним цилиндрическим сводам решетчатой системы и к внутренней части крайних решеток, а второе решение к внешней части крайних решеток решетчатой системы. В центре окон крайних решеток на месте сопряжения двух различных по периметру половин цилиндрических сводов правые и

левые силы натяжения n_φ и m_φ не находятся в равновесии, однако, считая то, что два решения относятся к аналогичным по размерам и нагрузкам сводам, у которых между силами натяжения, расчитанными при различных периметриальных условиях, нет значительного отклонения и таким образом с целью приближения, скачок (имеющийся в их диаграмме) анулируем какой-либо уравновешивающей кривой.

Против нашего метода можно привести то возражение, что постоянные η и C_3, а также и постоянную C_2 (системы с бортовой опорой), определяем самопроизвольно при соблюдении определенных условий, итак наше решение не однозначно, т. к. какая-то данная задача может быть решена разнообразно. Случай многих возможных решений имеется налицо во всех случаях исследования упругости, из-за того, что неопределенной величины постоянные упругости воспринимаются самопроизвольно в определенных диапазонах, но это обстоятельство в большинстве случаев остается неосвещенным, т. к. постоянные упругости являются закономерно определенными величинами, итак мы склонны принимать их как естественный закон и посему результаты этих исследований кажутся однозначными. В нашем методе расчетов мы не воспольэовались постоянными упругости и отвлеченные условия упругости заменили вероятными взаимоотношениями, использование этих взаимоотношений, ввиду приспособления их к условиям отдельных задач, в некоторой степени является произвольной, но вытекающее из этого рассеивание — как мы это подробно показали — сравнительно слабо влияет на величину силы натяжения, но однако имеет то преимущество, что расчет делает исключительно простым.

При нашем методе расчета мы ставили себе целью, использовать в статическом исследовании анизотропные свойства цилиндрического свода-оболочки, т. к. считаем, что этим мы ближе подошли к физической действительности. То обстоятельство, что наш метод расчета гораздо проще точных методов расчета, только тогда может считаться преимущественным, когда точность расчета укладывается в требующиеся нормы точности. На основании сказанного мы считаем, что нами не переступлена граница норм реально достижимой точности расчета.

Применимость вышеописанного метода расчета подтверждена путем сравнительного контроля со многими проектами, расчитанными другими методами, а также и измерениями деформаций уже возведенных конструкций.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ СВОД-ОБОЛОЧКА

Др. К. Смедич

Резюме

Строгая теория изгиба цилиндрического свода-оболочки предполагает, что материал конструкции свода-оболочки изотропный. Применение этой теории на случаи железобетонных сводов-оболочек находится в противоречии с той гипотезой железобетона, что при изогнутых конструкциях бетон пояса растяжения не может подвергаться действию усилия растяжения. Автор, с учетом вышеупомянутого условия, разработал в своем труде новую теорию. Новая теория — ввиду того, что точность расчета является ограниченой из-за того, что модуль упругости бетона может быть определена только со значительными погрешностями, и не может быть повышена даже с помощью введения строгих условий деформаций — принимает во внимание лишь элементарные условия теории деформаций. Из обсуждаемого труда становится ясным, что расчитанные по различным теориям и имеющие решающее значение при определении допускаемой нагрузки сводов-

оболочек кольцевые моменты только незначительно отличаются друг от друга и что только в незначительной степени зависят от неопределенного значения модуля упругости бетона. Этот факт подтверждает применимость различных теорий, среди которых требования практики лучше всего удовлетворяет наипростейшая теория. Приведенный метод соответствует требованиям, т. к. силы натяжения могут быть легко расчитаны из формулы после того, как определены постоянные интегрирования, зависящие от перимет ральных условий.

VEREINFACHTE BIEGETHEORIE DER KREISYLINDERSCHALEN

Dr. K. SZMODITS

Zusammenfassung

Die strenge Biegetheorie der Kreisylinderschalen geht von der Annahme aus, dass der Werkstoff der Schale von isotroper Beschaffenheit ist, und steht somit die Anwendung der Theorie auf Eisenbetonschalen in Widerspruch zu der Voraussetzung der Eisenbetontheorie, wonach der Beton der Zugzone gebogener Konstruktionen nicht auf Zug beansprucht werden darf. In der vorliegenden Abhandlung entwickelt der Verfasser eine neue Theorie unter Beachtung der obigen Voraussetzung. Nachdem die Genauigkeit der Rechnung infolge der nur innerhalb weiter Grenzen möglichen Bestimmbarkeit des Elastizitätsmoduls des Betons eine beschränkte ist und auch durch die Einführung der strengeren Formänderungsbedingungen nicht erhöht werden kann, berücksichtigt die neue Theorie lediglich die Formänderungsbedingungen der elementaren Biegetheorie. In der Abhandlung wird gezeigt, dass die für die Beurteilung der Beanspruchbarkeit der Zylinderschalen ausschlaggebende Wichtigkeit besitzenden Ringmomente gemäss den verschiedenen Theorien berechnet, fast übereinstimmende Werte ergeben und kaum von dem unsicheren Wert des Elastizitätsmoduls des Betons abhängen. Dieser Sachverhalt bestätigt die Brauchbarkeit der verschiedenen Theorien, von denen für praktische Zwecke die einfachste als am meisten geeignet erscheint. Das angegebene Verfahren entspricht dieser Forderung, zumal die Spannkräfte nach Bestimmung der von den Randbedingungen abhängenden Integrationskonstanten aus geschlossenen Formeln leicht errechenbar sind. Das Verfahren wurde vom Verfasser bei der Planung zahlreicher ausgeführter Schalenkonstruktionen angewandt.

UNTERSUCHUNG UNGARISCHER ZEMENTE, IN BEZUG AUF SCHWINDUNG, WIRKUNG DER DAMPFBEHANDLUNG, SOWIE IN BEZUG AUF DIE OBERFLÄCHEN — VERBINDUNG ZWISCHEN DEM BETON UND DEN IN DENSELBEN EINGEBETTETEN STAHLDRÄHTEN

Prof. Dr. V. MIHAILICH

Eingegangen am 6. Juli 1951

I. Schwindversuche

Es mangelte uns bisher eine Untersuchung der Schwindung der ungarischen Zemente. Die Hauptursache hierfür war, dass uns ein sogenannter Klimaraum, in dem eine lange Zeit hindurch eine konstante Temperatur und ein konstanter Feuchtigkeitsgehalt der Luft gesichert werden kann, nicht zur Verfügung stand.

Nun ist es endlich gelungen, dass uns am Ende des Jahres 1948 ein Klimaraum von 4 m^2 Grundfläche zur Verfügung stand. Zur Messung der aus der Schwindung sich ergebenden Längenänderungen diente uns ein Leitz-scher Betonkomparator, der aus zwei Mikroskopen besteht (*Abb. 1.*). In dem einen ist ein unbewegliches Fadenkreutz angebracht, während das zweite ein Messmikroskop von Mikrongenauigkeit ist. Die Messlänge ist die Entfernung zwischen den feinen Ritzen, die an den auf die obere Oberfläche des Probekörpers geklebten, beziehungsweise in dem noch weichen Mörtel oder Beton angebrachten Glasplatten. Der Probekörper kann auf einen Schlitten gelegt so verschoben werden, dass der eine Glasritz genau unter das unbewegliche Fadenkreutz gelangen möge. Sodann kann man das Messmikroskop in eine solche Lage bringen, dass sich dasselbe über dem anderen Glasritz befinden möge. Die gegenseitige Entfernung der beiden Mikroskope kann man mit Hilfe einer genau eingeteilten Glaslatte mit Mikrongenauigkeit bestimmen. Der Vorteil dieses Instrumentes besteht darin, dass man mit demselben Messungen auf Probekörpern von verschiedenen Abmessungen ausführen kann.

Die in Rede stehenden Schwindungsmessungen erstreckten sich auf acht Arten von Zement. Diese sind: MÁK-Portland-Zement (*M*) und Bauxitzement (*Ba*), Lábatlaner Portland-Zement (*L*), der Zement Marke S 54 und der Sigmazement (*Sz*), Bélapátfalvaer Portland-Zement (*B*), und weisser Zement (F), so wie Selyper Trass-Portland-Zement (*T*. 20/80). Den Zement haben wir unmittelbar aus der Fabrik bezogen.

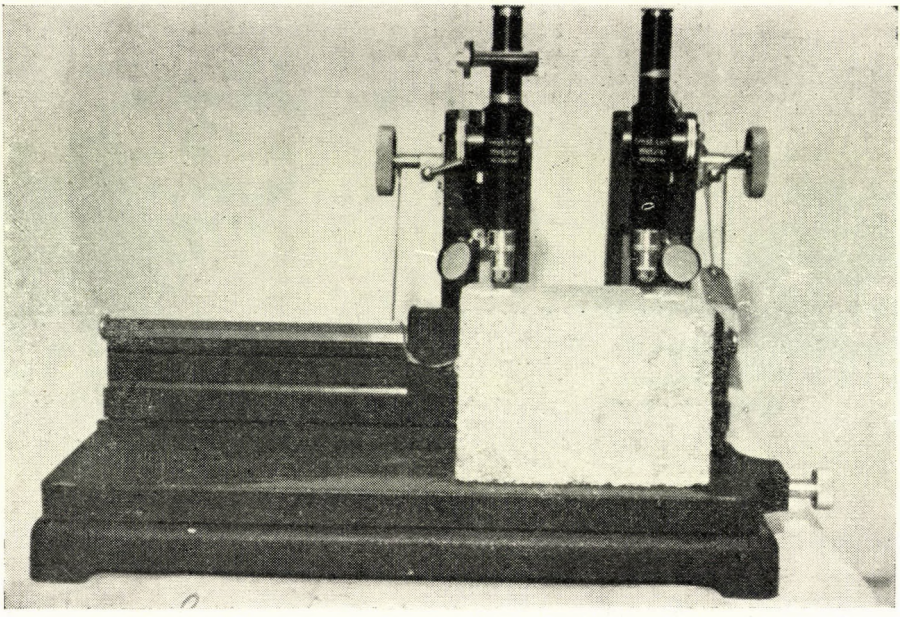


Abb. 1.

Der Zement Marke S 54 entspricht seinem Typus nach dem Ferrari-Zement, der Sigma-Zement enthielt 30% Kalksteinstaub, während der Trass-Portland-Zement 20% Trassmehl enthielt. Die übrigen Zemente waren gewöhnliche Portland-Zemente von hoher Festigkeit. Probekörper wurden aus Zementbrei, Mörtel und Beton hergestellt.

Der Wasser-Zement-Faktor des Zementbreies betrug 0,28, im Falle des Trass-Zementes 0,30. Die Mörtelkörper wurden in einem Mischungsverhältnis von 1 : 3 dem Gewichte nach mit Normalsand verfertigt. Die Wassermenge betrug 12,5% des Gewichtes des trockenen Gemisches.

Die Probekörper sind Prismen mit den Abmessungen 4/4/16 cm. Messlänge 120 mm. Die Anbringung der Glasritze und die erste Ablesung ist im 24 stündigem Alter der Probekörper vorgenommen worden. Die Messungen wurden anfangs täglich, später alle zwei Tage, dann zweimal wöchentlich und endlich wöchentlich einmal vorgenommen.

Aus jeder Art Zement wurden je 2 Brei- und Mörtelprobekörper angefertigt.

Beton-Probekörper wurden aus sandigem Donaukies hergestellt, dessen Zusammensetzung die folgende war :

C— 1 mm 20%,
1— 3 « 20%,
3— 5 « 10%,

5—10 « 15%,

10—20 « ..... 35%.

Jeder Kubikmeter (m^3) fertigem Betons enthielt eine Zementmenge von 300 kg, Wasser-Zement-Faktor 0,6.

Mit vier Sorten von Zementen (MÁK, Bauxit, Lábatlaner und Trass-Portland-Zement) wurden Probekörper mit den Abmessungen 10/10/50 cm verfertigt.

Aus jeder Zementsorte wurde je 1 Probekörper verfertigt. Die Lufttemperatur war 20—22 C°, die relative Luftfeuchtigkeit 65—67%.

Bisher wurden folgende Versuch vorgenommen :

I. Untersuchung des Schwindens der Zementbreikörper ;

II. Untersuchung der Schwellung der Zemente ;

III. Untersuchung des Schwindens der Mörtelkörper ;

IV. Untersuchung des Zusammenhanges zwischen dem Schwinden des Mörtelkörpers und dem Wasser-Zement-Faktor ;

V. Einfluss des zunehmenden Sandgehaltes auf das Schwinden der Mörtelkörper ;

VI. Messung des Schwindens von Betonkörpern.

Die Ergebnisse aller dieser Versuche sind die folgenden :

Die erste Versuchsreihe diente zur Bestimmung des Schwindens der Zementbreikörper. Die Anzahl der Messungen betrug 776. Das Schwinden der Zementbrei-Probekörper war während der ersten zwei Wochen sehr rapid, nach einem Monate war die Zunahme bereits geringer, und es zeigte sich z. B. bei dem Bélapátfalvaer Zement gar keine Zunahme. Das Schwinden des Lábatlaner Zements, sowie des Trasszements hat im Alter von 9 Monaten, verglichen mit dem 28-tätigen bloss eine Zunahme von 10% aufgewiesen. (*Abb. 2*). Der Unterschied zwischen dem Schwinden der verschiedenen Zemente ist beträchtlich. Das kleinste Schwinden zeigte der Bélapátfalvaer Portland-Zement, das grösste der Trass-Zement.

Im Alter von 28 Tagen hat das Schwinden des Bélapátfalvaer Zements 1,07 mm pro Meter, im Alter von 9 Monaten 1,09 mm ; die des Trass-Zements dagegen im Alter von einem Monat pro Meter 1,65 mm, im Alter von 9 Monaten hingegen 1,82 mm betragen. Das Schwinden des Trass-Zements ist daher um 54—69% grösser, als das jenige des Bélapátfalvaers. Die Ausmasse des Schwindens der übrigen fünf Zemente, des Lábatlaners, des S 54, des MÁK., des Sigma- und des Bauxit-Zements, unterscheidet sich voneinander nur in geringem Masse.

Im Alter von 9 Monaten ist das Schwinden des Lábatlaner Portland-Zements um 15%, die des Sigma-Zements um 27% grösser, als jene des Bélapátfalvaer Zements.

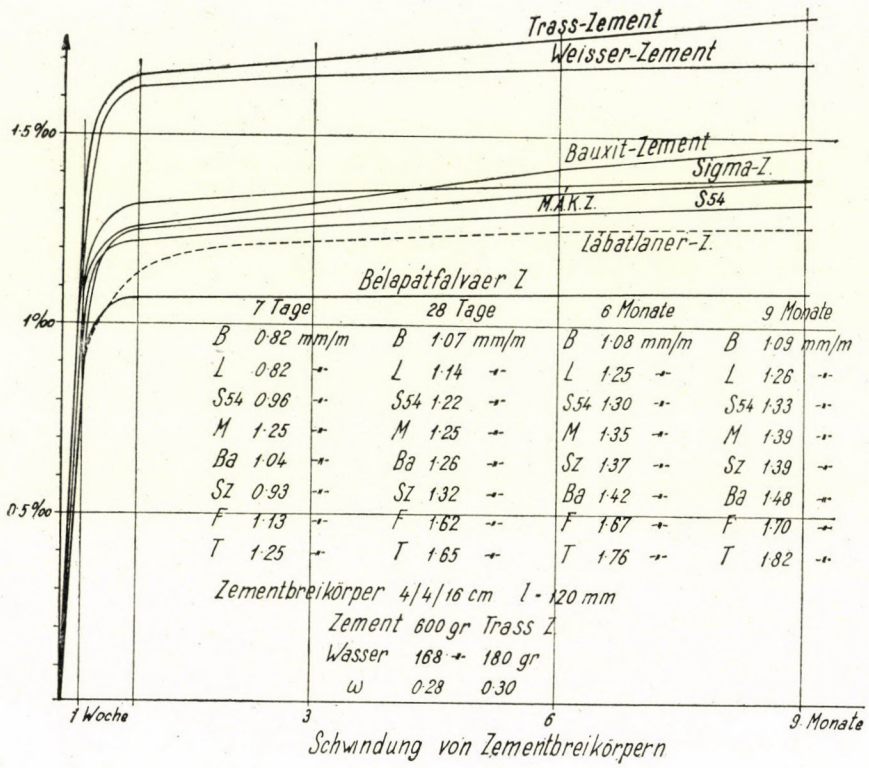


Abb. 2.

Die zweite Versuchsreihe bezweckte die Untersuchung der Schwellung der Zemente. An zahl der Messungen 836. Zur Untersuchung kamen Probekörper aus Zementbrei von der gleichen Zusammensetzung wie in der ersten Versuchsreihe, und sie wurden in Wasser von 20 C° gelagert. Die Körper schrumpften nicht, sondern wiesen eine Schwellung auf, mit Ausnahme der Bauxit-Zement-Körper, die im ersten Monat noch schrumpften. Der Bauxit-Zement unterscheidet sich übrigens auch darin von den übrigen Zementen, das seine Schwellung rapid zunimmt, so dass er im Alter von 2½ Monaten die Schwellung des am meisten schwellenden Bélapátfalvaer Portland-Zements erreicht (*Abb. 3*).

Das Mass der Schwellung der einzelnen Zemente ist sehr verschieden. Die geringste Schwellung haben der Sigma-Zement, der Lábatlaner Portland-Zement und der Zement S 54 aufgewiesen. Die grösste Schwellung wies der Bélapátfalvaer Portland-Zement auf. Dagegen erlitt der Bélapátfalvaer und der Trass-Zement nach Ablauf von 7 Tagen eine bedeutend grössere Schwellung, als der Sigma-Zement. Im Alter von 7 Tagen betrug die Schwellung des Sigma-Zements pro Meter 0,12 mm, die jenige des Bélapátfalvaers 0,33, die des Trass-

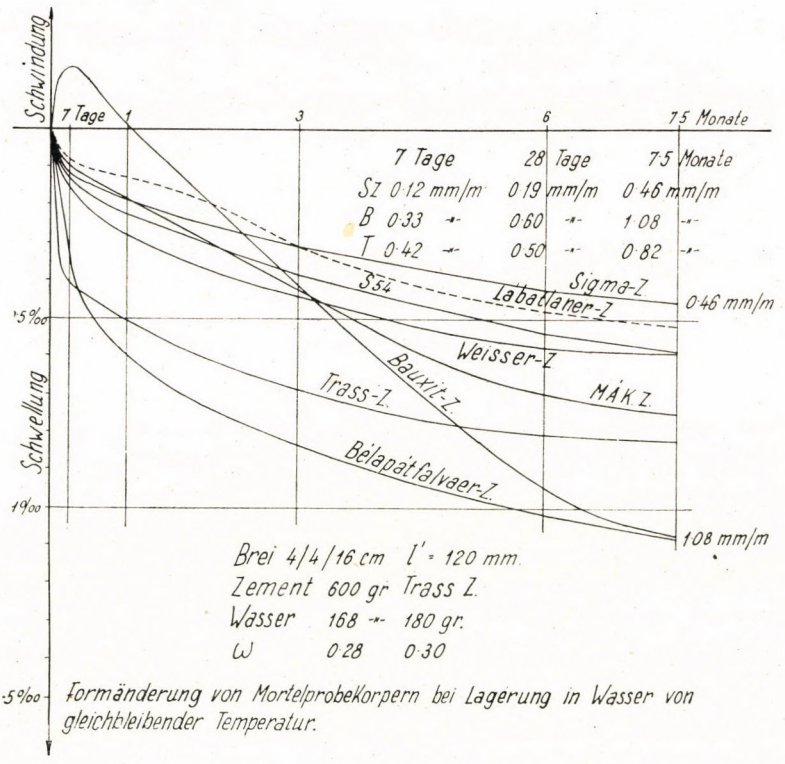


Abb. 3.

Zements 0,42 mm. Im Alter von 7½ Monaten betrug die Schwellung des Sigma-Zements pro Meter 0,46 mm, die des Bauxit-Zements 1,07 mm.

Diese Versuche zeigen unmittelbar, wie wichtig zur Vermeidung von Schwindrissen die Wasserlagerung und die Feuchthaltung der Betonbauwerke ist, und dass der Bélapátfalvaer Portland-Zement und der Trass-Zement in dieser Hinsicht günstige Eigenschaften aufweist.

Es kann als vorteilhaft bezeichnet werden, dass der Bélapátfalvaer und der Trass-Zement schon in der ersten Wolche in bedeutendem Masse schwillt und so in dem aus ihnen angefertigten Körper Druckspannungen erweckt, was aus dem Gesichtspunkte der Vermeidung von Schwindrissen in Betracht gezogen werden kann.

Die dritte Versuchsgruppe bildet die Untersuchung des Schwindens der Mörtelkörper. Zahl der Messungen 782.

In den Mörtelkörpern ist die Menge des Zements und des Wassers, im Verhältnis zum Gesamtgewicht des Probekörpers, verhältnismässig bedeutend kleiner als in den Zementbreikörpern, und so ist auch das Mass des Schwindens bedeutend geringer.

Das Schwinden der mit Trass-Portland-Zement hergestellten Probestücke springt stark aus der Reihe, es ist viel grösser, als dasjenige der anderen (*Abb. 4*).

Das Schwinden der übrigen sieben Zemente ist beinahe das gleiche. Das grösste Schwinden zeigte der Sigma-Zement, das geringste der MÁK-Zement. Der Unterschied zwischen den beiden beträgt etwa 16%. Dagegen ist das Schwinden der mit Trass-Zement hergestellten Probestücke um 40—50%

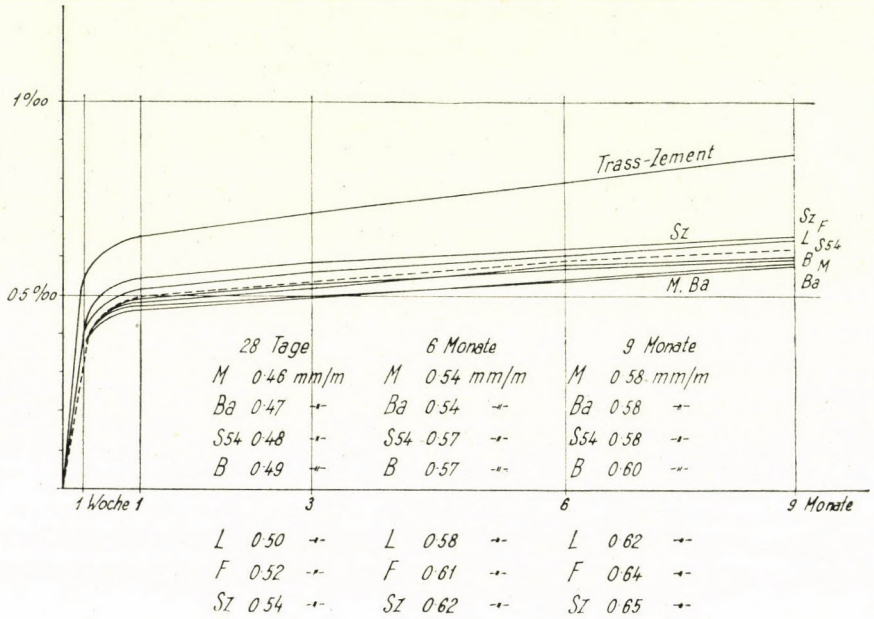


Abb. 4.

grösser als jenes der mit MÁK-Zement oder mit Bélapátfalvaer Zement erzeugten. In der ersten Woche nahm das Schwinden sehr rapid zu. Die Linie der sich auf 9 Monate erstreckenden Beobachtungen ist aufsteigend, undzwar die der Trass-Zement-Probestücke in stärkerem Masse. Das Schwinden der 9 Monate alten Trass-Zement-Probestücke war um 34%, und dasjenige der übrigen Zemente um 26% grösser, als jenes der 28-tägigen Probestücke. Hieraus ergibt sich, dass die Zunahme des Schwindens der Mörtelkörper grösser ist, als jene der Breikörper.

In der *vierten Versuchsreihe* war die Zahl der Messungen 762. Mit MÁK-Zement und mit Normalsand sind im Gewichtsverhältnis 1 : 3 Mörtelprobekörper angefertigt worden, deren Wasser-Zement-Faktor 0,3, 0,35, 0,4, 0,45, 0,5, 0,6, 0,7, und 0,8 betrug.

Die Schwindung der mit einem Wasser-Zement-Faktor von 0,7 und 0,8 verfertigten 3—9 Monate alten Probekörper war um etwa 50% grösser, als im Falle des Wasser-Zement-Faktors 0,3 (*Abb. 5*).

Die fünfte Versuchsreide diente zur Untersuchung des. Schwindens der Mörtel mit verschiedenem Sandgehalte. Die Probestücke sind mit MÁK-Portland-Zement und mit Normalsand hergestellt worden. Der Wasser-Zement-Faktor

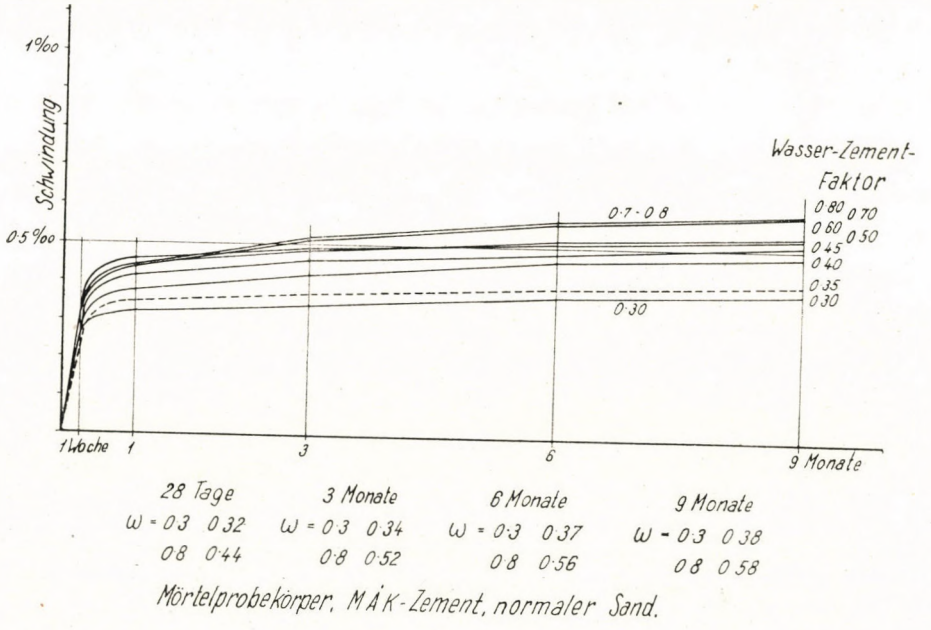


Abb. 5.

betrug 0,35. Das Gewichtsverhältnis von Zement und Sand betrug nach Gewicht 1 : 1,05, 1 : 1, 1 : 1,5, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4, 1 : 5 und 1 : 6.

Anzahl der Messungen : 782.

Mit der Zunahme des Sandgehaltes nimmt das Schwinden ab. (*Abb. 6*). Zwischen dem Schwinden der im Verhältnisse 1 : 1 und 1 : 6 hergestellte Mörtel besteht kein grosser Unterschied, was wahrscheinlich mit dem verhältnismässig grossen Porengehalt des Normalsandes zusammenhängt, infolgedessen der verhältnismässig geringe Zementbrei sich durch die Poren herunterzieht und daher an der Oberfläche — wo die Messung stattfand — sich hinsichtlich des Schwindens nur kleinere Unterschiede zeigten.

Das Schwinden der im Mischungsverhältnis von 1 : 4 erzeugten und noch mägereren Mörtelkörper war nach 28 Tagen beendet und war bei allen gleich (*Abb. 7*), was wahrscheinlich ebenfals auf den vorhin erwähnten Grund zurückzuführen ist.

Die sechste Versuchsreihe wurde der Untersuchung des Schwindens von Betonkörpern gewidmet.

Zur Messung des Schwindens wurde das Amslersche-Gerät verwendet.

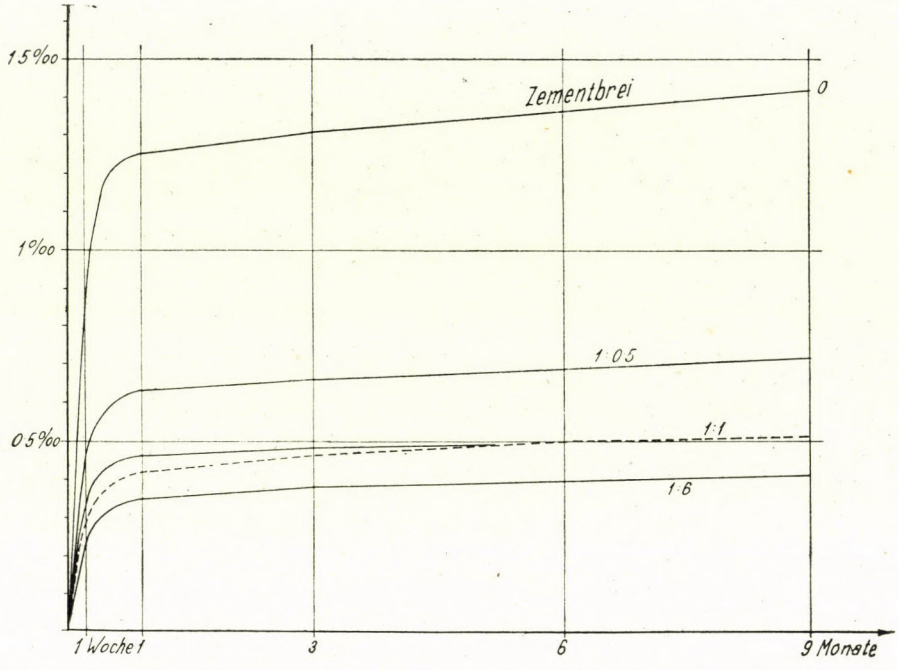

1·5‰
1‰
0·5‰
Zementbrei
0
1:0·5
1:1
1:6
1 Woche
3
6
9 Monate

Abb. 6.

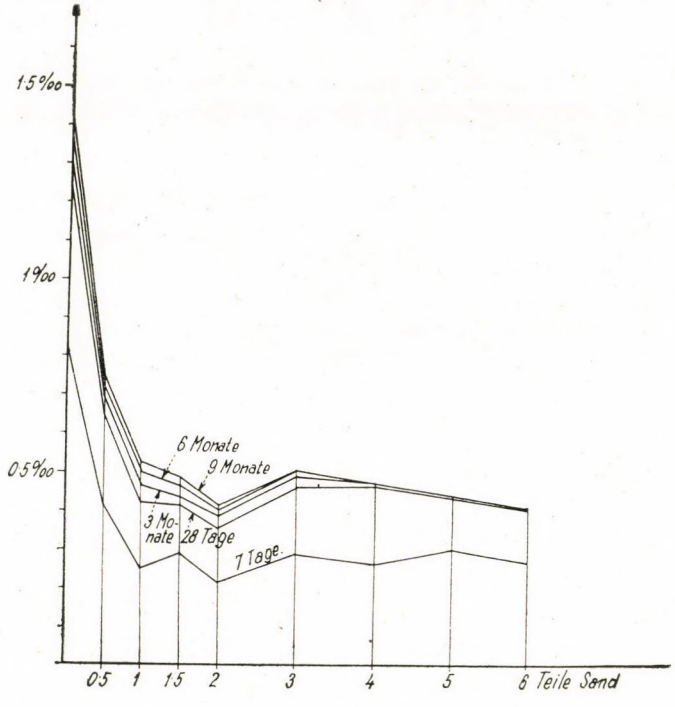
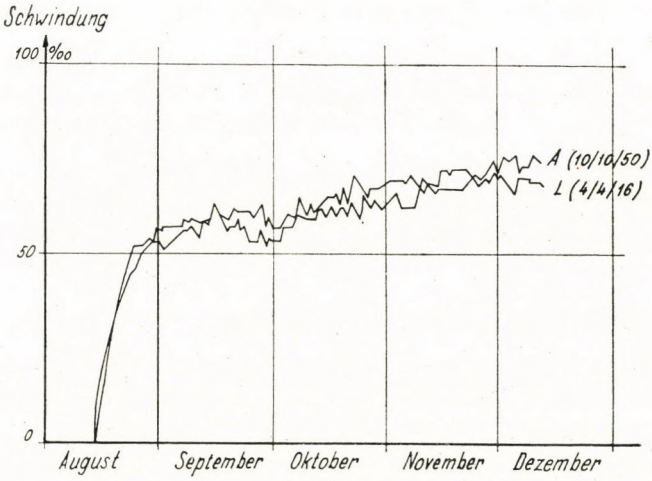

1·5‰
1‰
0·5‰
6 Monate
9 Monate
3 Monate
28 Tage
7 Tage
0·5
1
1·5
2
3
4
5
6 Teile Sand

Abb. 7.

Es ist zu bemerken, dass vorher mit dem Leitzschen-Komparator und mit dem Amslerschen Apparat Vergleichsversuche mit aus Bélapátfalvaer Zement hergestellten Breikörpern ausgeführt wurden. Die Abmessungen der Probekörper betrugen 4/4/16 cm (Leitz) und 10/10/50 cm (Amsler). Ausserdem wurden mit einem, in der Werkstatt des Laboratoriums hergestellten kleineren Apparat Amslerschen Systems auch an Probekörpern mit den Abmessungen 4/4/16 cm vergleichende Messungen ausgeführt. Die Anzahl der Messungen betrug 203 + 471 = 674. Zwischen den mit den zweierlei Apparaten gemessenen Schwindungen zeigten sich nur unwesentliche Unterschiede, obwohl die Messung



Messvergleiche mit den Messinstrumenten der Systeme Leitz und Amsler
(Zementbreikörper Bélapátfalvaer Port.-Z. 28 % Wasser.)

Abb. 8.

mit dem Leitzschen Komparator an der Oberfläche des Probekörpers, diejenigen mit dem Amslerschen Apparat hingegen in der Achse des Probekörpers vorgenommen wurden (*Abb. 8*).

Das Schwinden der Betonkörper ist natürlich noch geringer, als jenes der Mörtelkörper. In diesem Falle sprigt sogar das Schwinden der mit Trass-Zement hergestellten Körper bereits nicht so sehr aus der Reihe (*Abb. 9*). Im Alter von 2 Monaten betrug das Schwinden der mit Bauxit-Zement erzeugten Probekörper pro Meter 0,2 mm, während das jenige der mit Trass-Zement hergestellten 0,264 mm betrug, das heisst um 32% grösser war. Nach Ablauf von 3 Monaten steigerte sich das Schwinden der Betonkörper nur in unwesentlichem Masse. Ein stärkeres Schwinden ist im Falle der sogenannten Leichtbetone zu erwarten. Im Zusammenhang mit der Messung des Schwindens der Mörtel-

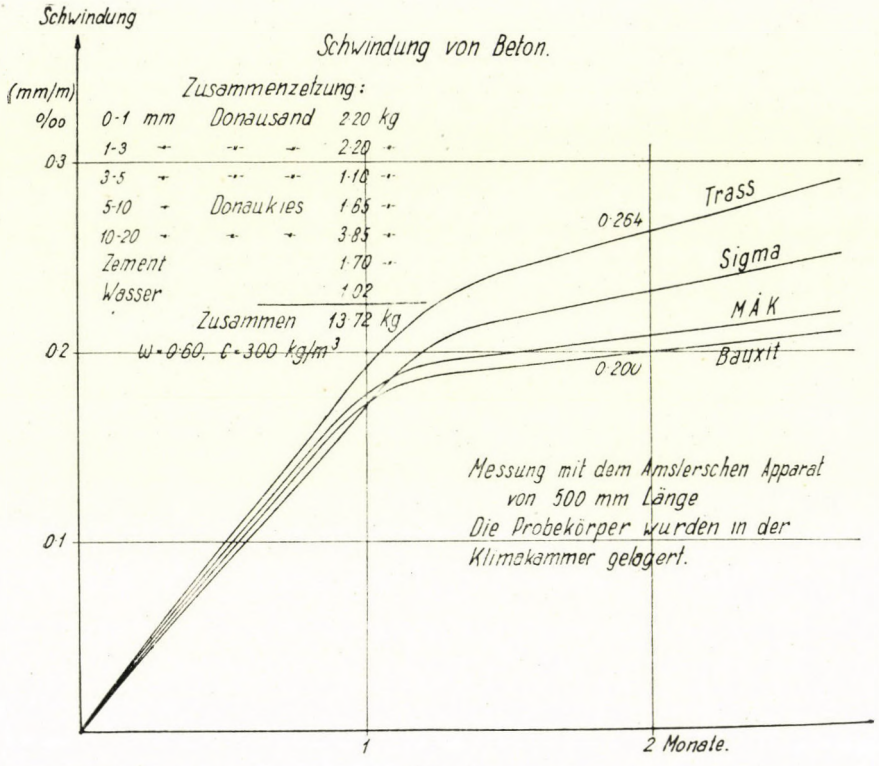


Abb. 9.

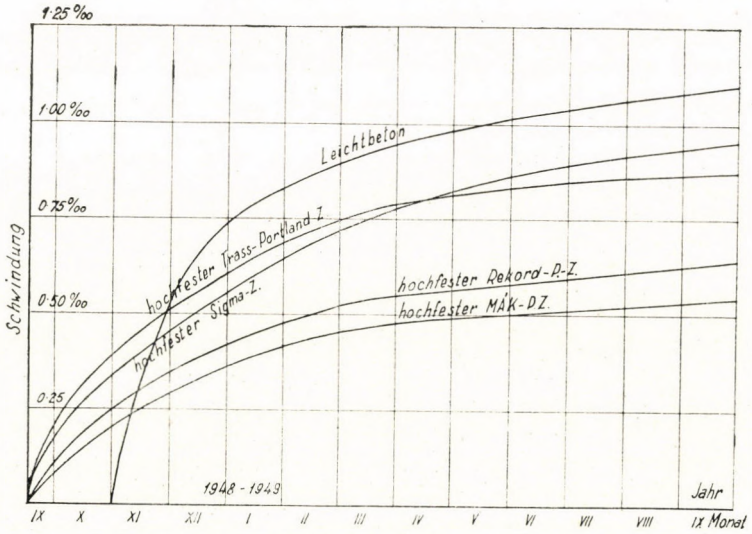
körper wurde auch an einem Leichtbeton das Schwinden festgestellt, welches sich als selbst das Schwinden, der mit Trass-Zement hergestellten Mörtelkörper übersteigend erwies und im Alter von 1 Jahr 1,1 mm pro Meter betrug (*Abb. 10*).

Die Ergebnisse dieser — in Ungarn erstmaligen systematischen, in einer Klimakammer ausgeführten — Schwindversuche zusammenfassend, zeigten die mit Breikörpern ausgeführten Versuche, dass das Schwinden unserer Zemente von verschiedenem Masse ist. Nach den Resultaten der in Rede stehenden Untersuchungen zeigte das geringste Schwinden der Bélapátfalvaer Zement, das stärkste der Trass-Zement. Zwischen der Schwindung der übrigen fünf Zemente (Lábatlaner, S 54, MÁK, Bauxit und Sigma) zeigte sich kein wesentlicher Unterschied. Der Hauptteil des Schwindens des Bélapátfalvaer Zement ging in kurzer Zeit vorsich, so dass sein Schwinden sich mit der Zeit kaum steigerte.

Unter den, in Wasser von konstanter Temperatur von 20 C° gelagerten Breikörpern sind die mit Bélapátfalvaer Zement angefertigten Zementbreikörper am meisten geschwollen. Und es muss noch besonders hervorgehoben werden, dass in der ersten Woche, im Verhältnis zu den anderen, ihre Schwel-

lung relativ sehr gross war. Dieser Umstand bedeutet eine Vorspannung in einem gewissen Grade des Betons, da dasselbe das Auftreten von Druckspannungen zeigte, und somit aus dem Gesichtspunkte der Riss-Sicherheit auch praktisch nutzbar gemacht werden kann.

Die mit Mörtelkörpern unternommenen Versuche zeigten, dass — mit Ausnahme des Trass-Zements — alle übrigen Zemente ungefähr das gleiche



Schwindung von Mörtelkörpern (im Gewichtsverhältnis von 1:3 und mit einem Wasser-Zement-Faktor von 0·5 hergestellt)

Abb. 10.

Schwinden verursachen, was damit zusammenhängt, dass im Mörtel das Gewicht des Wassers und des Zements, im Verhältnis zum Gewicht des ganzen Probekörpers, bereits so gering ist, dass die sich in den Breien zeigende verschieden grosse Wirkung der Zemente nicht zur Geltung kommt.

Gemäss den mit Mörtelkörpern von verschiedenem Wasser-Zement-Faktor vorgenommenen Versuchen war, im Falle eines Wasser-Zement-Faktors von 0,7—0,8 das Schwinden um 50% grösser, als bei einem Wasser-Zement-Faktor von 0,3. Das voraussehbare Ergebnis der mit Betonkörpern unternommenen Versuche war, dass die Schwindungen noch kleiner waren, als jene der Mörtelkörper. Im Alter von 2 Monaten betrug das Schwinden der mit Bauxit-Zement und MÁK-Portland-Zement hergestellten Körper pro Meter 0,21 mm, was ein ziemlich niedringer Wert ist.

Die Werte des in Rede stehenden Untersuchungsresultates sind nur unter jenen Voraussetzungen giltig, unter denen die Probekörper angefertigt wurden. Wie die Qulität und Quantität des Zements, der Wasserinhalt, das

Korngefüge des Zuschlagstoffes, die Art der Verarbeitung sich ändert, ändert sich auch das Mass des Schwindens. Die Ergebnisse der in Rede stehenden Versuche sind Richtwerte die an und für sich nicht verallgemeinert werden können. Aber aus diesen Versuchen können gewisse Feststellungen doch gemacht werden. So hat es sich herausgestellt, dass das Schwinden des Trass-Zements bedeutend grösser ist, als das der übrigen Zemente. Seine Verwendung ist daher dort, wo die Riss-Sicherheit wichtig ist, nicht empfehlenswert. Der Zement S 54 hat — trotzdem dass er ein Zement von Ferrarischem Type ist — kein besonders geringes, sondern ein normales Schwinden gezeigt. Dagegen hat sich der MÁK-Portland-Zement als normal schwindend erwiesen, trotzdem, dass man ihn in der Praxis oft als einen stark schwindenden bezeichnet hatte.

Gemäss der einen Untersuchung war das Schwinden des sogenannten Leichtbetons sehr gross, im Alter von einem Jahre erreichte dasselbe pro Meter 1,1 mm.

Jedenfalls ist es erfreulich, dass wir jetzt schon im Stande sind, entsprechende Schwindungsuntesuchungen hierzulande vorzunehmen, wir besitzen dazu die notwendige Einrichtung und es stehen uns entsprechende arbeitende Kaders zur Verfügung. Die kräftige Entwicklung der Vorfabrikation und der Vorspannung, die Anfertigung von Leichtbeton, die Einführung neuer Zemente wird die Durchführung der Schwindungsuntersuchungen notwendig machen.

II. Untersuchungen hinsichtlich der Dampfbehandlung

Die Erzeugung von vorausfabriziertem sowie von vorgespannten Beton- und Eisenbetonkonstruktionen halten die Frage des Betons von hoher Anfangsfestigkeit ständig auf der Tagesordnung. Nach dem ursprünglichen Verfahren von *Freyssinet* sind die Hauptfaktoren zur Sicherung einer grossen Anfangsfestigkeit: optimales Korngefüge des Zuschlagstoffes, entsprechende Vibration, die Entfernung des überflüssigen Wassers mittels hohen Druckes und die Behandlung mit Wasserdampf von 100 C°.

Neuerdings hat man, besonders in Zusammenhang mit den Winterbauten, auch bei uns in der Baupraxis mit Dampfbehandlung Versuche anzustellen begonnen und so ist die Notwendigkeit der systematischen Dampfbehandlungsversuche aufgetaucht.

Die Aufgabe war zu untersuchen, wie hoch im Falle der verschiedenen Zemente die zweckmässige Dampfbehandlungs-Temperatur ist, ferner wie gross die zweckmässige Zeitdauer des Anheizens und die der Dampfbehandlung ist. Eine wichtige Frage war auch zu untersuchen, ob bei der mit der Dampfbehandlung im Alter von 1—2 Tagen erreichbaren grösseren anfänglichen Druckfestigkeit das Tempo der Verfestigung sich später nicht stark verlangsammen wird, so dass die Druckfestigkeit des gedampften Körpers kleiner wird, als jene des ungedampften.

Versuche wurden mit den folgenden Zementen angestellt: MÁK-Portland-Zement, MÁK-Schlacken-Zement (30% und 70% Hüttenschlacke), Zement S 54, Bélapátfalvaer Portland-Zement und Weiss-Zement, Selyper Trass-Portland-Zement und Beremender Portland-Zement.

Die chemische Zusammensetzung zeigt die nachstehende Tabelle.

Zement-Sorte	SiO_2 %	Al_2O_3 %	Fe_2O_3 %	CaO %	MgO %	SO_3 %	Glühverlust %	Bemerkung
MÁK-Tatabányaer hochwertiger Pz ..	20,56	7,07	2,66	63,41	3,64	1,47	1,02	Unlösl. 0,67% Hm: 2,05, Sm: 2,11 Kalksättig.: 92,28%
Bélapátfalvaer hovhw. Pz.	21,80	5,34	2,20	65,00	2,20	1,80	1,80	
Beremender hochw. Pz.	22,32	6,61	2,71	63,72	1,20	1,78	2,10	Hm: 1,98 Sm: 2,39
Selyper Pz.*)	21,16	4,70	2,60	67,80	0,58	0,09	0,25	Hm: 2,17
Klinker Tuffstein ..	60,28	15,40	7,60	2,50	1,10	2,74	10,00	Sm: 2,11 Sm: 2,63
Lábatlaner Sigma-Z.	18,3	3,8	2,7	52,7	0,7	0,1	10,9	(CO_2) 10,2% der Z. enthielt 18,2% $CaCO_3$
Lábatlaner S 54 Z. .	20,0	4,0	7,6	64,9	0,7	0,7	1,3	
Bélapátfalvaer Weiss-Zement	23,02	5,21	0,64	64,62	2,12	2,42	2,32	
70% Tatabányaer MÁK-hochw. Pz. mit 30% Schlacke	24,00	10,83*	1,13	53,89	4,91	2,96	2,98	*) Mangan + Al_2O_3 Hm: 1,44 Sm: 2,00, Kalksättig.: 59,35%
30% Tatabányaer MÁK-hochw. Pz. mit 70% Schlacke	31,15	11,00*	1,89	43,59	5,64	3,81	3,23	*) Mangan + Al_2O_3 Hm: 0,92 Sm: 2,41, Kalksättig.: 40,35%
Lábatlaner hochw. Pz.	21,84	4,23	3,09	65,92	0,85	1,44	1,41	Hydr. mod. 2,22 Sil. mod. 2,98 Eisen mod. 1,36

*) Im Verhältnis von 80/20 zusammengemahlt, + 4% Gyps, der Tuffstein enthält 16,04% hygr. Wasser.

Es wurden Würfel von 7,07 cm Kantenlänge verfertigt (2400 Stück). Zement pro m^3 530—550 kg. Zuschlagstoff wurde aus sandigem Donauschotter mit einem der Bolomey-schen Kurve entsprechenden Korngefüge hergestellt. Die grösste Korngrösse war 10 mm. Der Wasser-Zement-Faktor betrug 0,31—0,33. Die Verarbeitung erfolgte auf maschinellem Wege mit 100 Schlägen.

Die Dampfbehandlung begann nach 5—6,5 Stunden von dem Momente des Wasserzusatzes zum Zement an gerechnet. Die Temperatur der Dampfbehandlung war 60 C°, im Falle der Zemente der (*Abb. 11*) hingegen 65 C°.

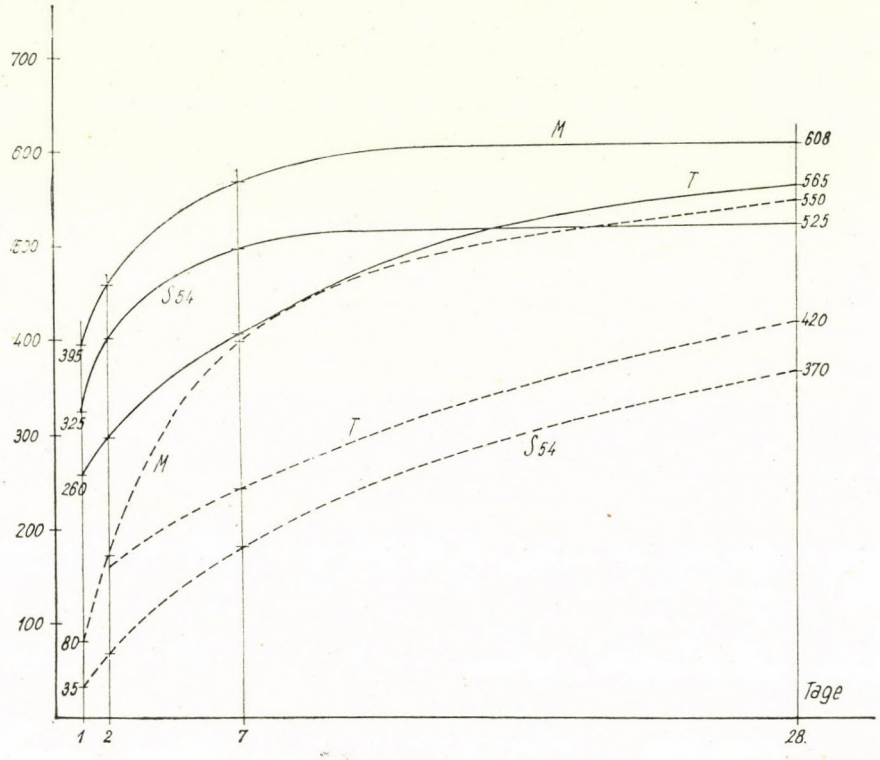


Abb. 11.

Zum Zwecke der Vergleichung sind paralell gedampfte und ungedampfte Probekörper angefertigt worden, welch' letztere eine Woche nass gehalten, und nachher in Zimmerluft gelagert wurden. Infolge der Dampfbehandlung war die Druckfestigkeit der gedampfter Körper bereits im Alter von 15—20 Stunden bedeutend grösser, als jene der ungedampften Körper.

In mehreren Fällen war im Alter von einem Tage schon eine sehr bedeutende Zunahme der Festigkeit festzustellen.

So hat der MÁK-Zement und der Zements S 54 besonders grosse Anfangsdruckfestigkeit gesichert. Die Festigkeit der gedampften Körper war im Alter

von 1 Tag 395 und 325 kg/cm² gegen eine Druckfestigkeit von 80 und 35 kg/cm² der ungedampften Körper. Diese, mit eintägiger Dampfung erreichten hohen Festigkeiten betragen 72 und 88% der in 28 Tagen erreichten Druckfestigkeit der ungedampften Körper. Der durch die Dampfung iniziierte intensive chemische Prozess ergab — ähnlich wie im Falle des Bauxitzements — eine sehr grosse Zunahme der Druckfestigkeit.

Leider erwies sich aber die mittels der Dampfung erreichte Festigkeitssteigerung nicht als beständig, sondern erstreckte sich nur auf einen gewissen

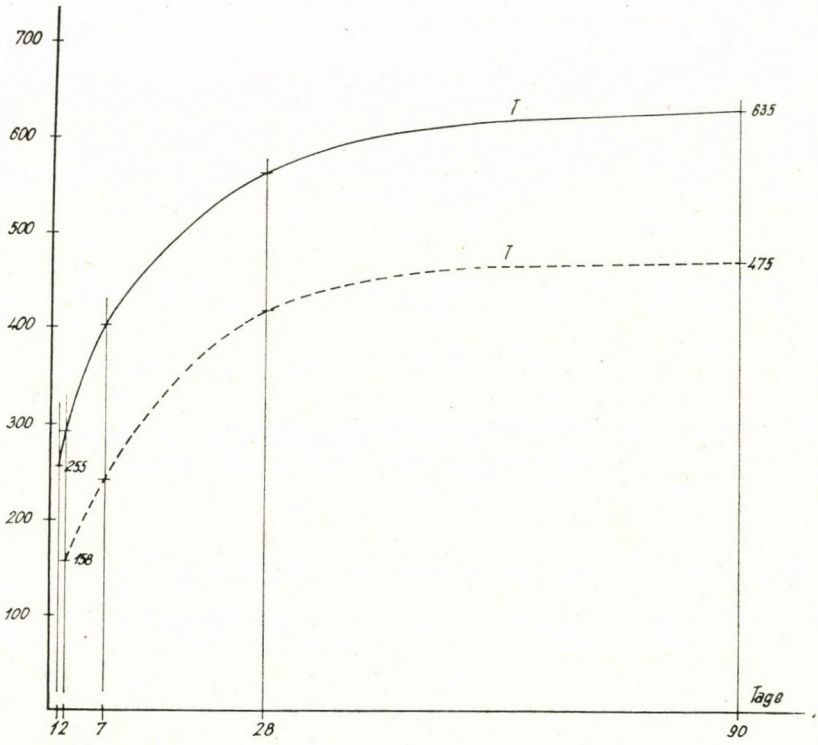


Abb. 12.

Zeitraum. Wie aus der (*Abb. 11*) ersichtlich ist, konvergieren die Kurven des MÁK-Zements und des Zements S 54 stark, ferner ist im Falle von MÁK-Zement zwischen den 28-tägigen Festigkeiten von dampfbehandelten und unbehandelten Probekörpern, nur mehr ein geringer Unterschied (608 und 550 kg/cm²).

Der Trasszement verhält sich in dieser Hinsicht viel vorteilhafter. Seine im Alter von 1—2 Tagen infolge der Dampfung erreichte Festigkeitssteigerung ist zwar nicht so rapid, wie im Falle des MÁK-Zements und des Zements S 54, aber seine Festigkeitskurven laufen auch noch im Alter von 90 Tagen fast

parallel (*Abb. 12*). Es scheint, dass in diesem Falle, durch die Dampfung eine Festigkeitssteigerung von ständigem Charakter entsteht.

Im Falle der übrigen untersuchten Zemente war das Ergebnis der Dampfung nicht zufriedenstellend. So hat ein MÁK- und ein Bélapátfalvaer Zement im Alter von 1—2 Tagen zwar eine grosse Druckfestigkeit gesichert, aber die Druckfestigkeit der dedampften Körper war im Alter von 28 Tagen kaum gösser oder sogar kleiner, als jene der ungedampften Körper, und die Druck-

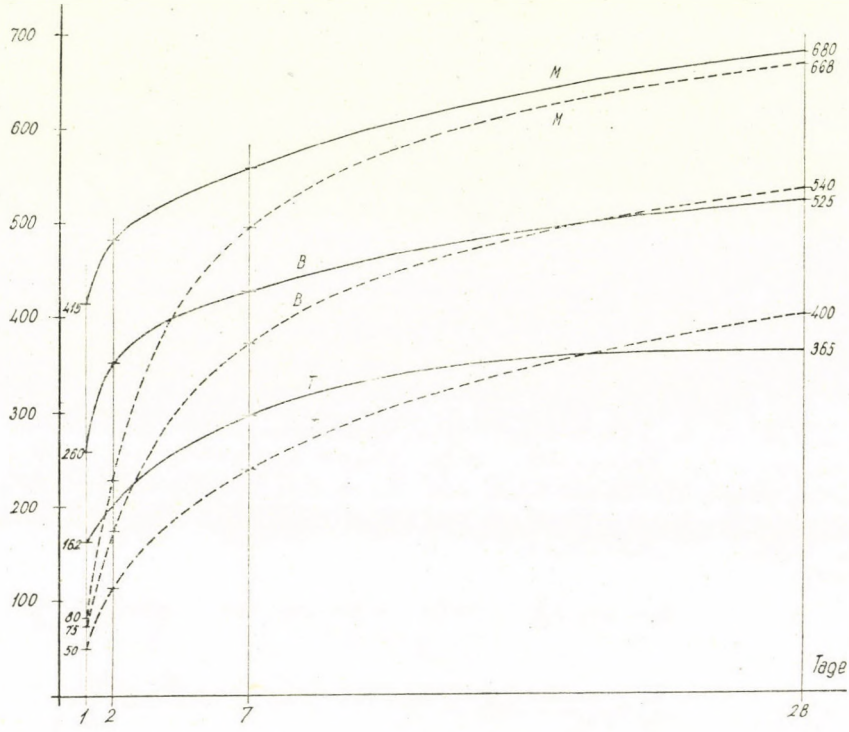


Abb. 13.

festigkeitskurven konvergieren stark (*Abb. 13*). In diesem Falle ist daher die Dampfung nachteilig, weil sie zur Verminderung der Festigkeit führt. Dies war auch im Falle eines Trass-Portland-Zements zu beobachten. Ähnliche ungünstige Ergebnisse haben auch die, in der (*Abb. 14*). dargestellten Zemente gezeigt. Die Festigkeit der gedampften Körper ist im Alter von 1—2 Tagen nicht viel grösser, als jene der ungedampften. Die mit Beremender Zement hergestellten Körper haben, vom 7-tägigem Alter angefangen gedampft, kleinere Druckfestigkeit gezeigt, als die ungedampften.

Auf die Schlacken-Zemente hat die Dampfung sozusagen keine Wirkung gehabt (*Abb. 15*).

Somit haben sich unsere Zemente, aus dem Gesichtspunkte der Dampfung sehr verschieden verhalten.

Mehrere Zemente, wie z. B. der MÁK., der S 54, der Trass-Portland-Zement, haben in einigen Fällen auf die Dampfung gut reagiert und es zeigte sich im Alter von 1—2 Tagen, grosse Anfangsfestigkeit gegenüber den ungedampften Körpern. Dieser Umstand ist aus dem Gesichtspunkte der Bautechnik sehr wichtig, weil derselbe es ermöglicht, die Verschalung und die

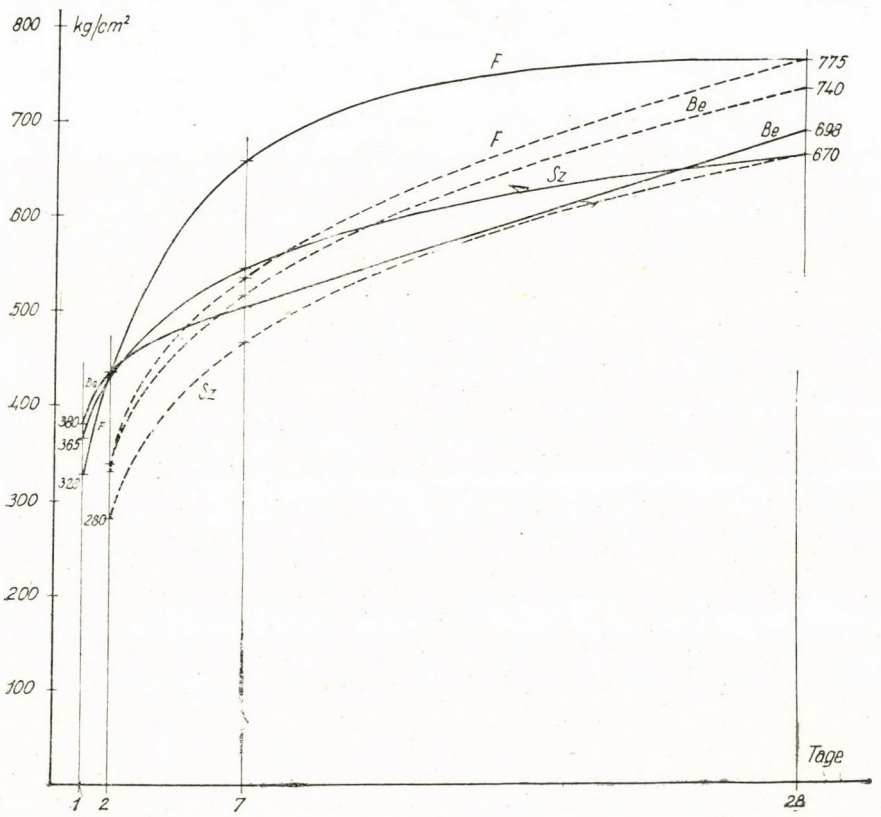


Abb. 14.

Gerüste des Betonbauwerkes bereits nach 1—2 Tagen zu entfernen, und weil derselbe ferner einen grossen Vorteil auch vom Standpunkte der Vorfabrikation, der Vorspannung und auch der Winterbetonierung bietet.

Man darf aber auch nicht jene schädliche Wirkung der Dampfung ausser Acht lassen, welche sich nach 28 Tagen oder zu einem noch späteren Zeitpunkte eventuell in der Abnahme der Festigkeit des Betons kundgibt. Deshalb ist es notwendig, noch weitere Versuche mit Betonkörpern auszuführen, um in dieser Frage klar sehen zu können.

Den in Rede stehenden Versuchen gemäss, hat die zweckmässige Temperatur der Dampfung im Falle der verschiedenen Zemente zwischen 60—90 C° variiert. Die zweckmässige Zeitdauer der Anheizung beträgt 2—2,5 Stunden, jene der Dampfung 8—10 Stunden und die der Abkühlung 2 Stunden. Die Ergebnisse all' dieser Versuche können natürlich nicht verallgemeinert werden und die gewonnenen Werte sind nur als Richtwerte anzusehen.

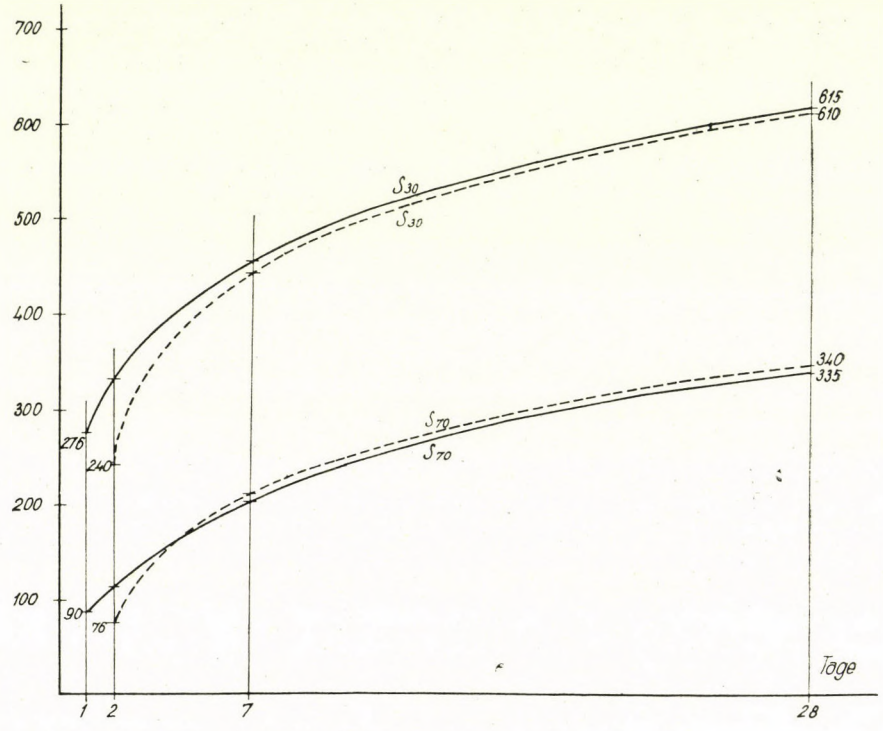


Abb. 15.

III. Ausziehversuche zur Untersuchung der Haftung zwischen dem Beton und dem dünnen Stahldraht

Zur Ausführung der mit vorgespannter Eiseneinlage versehenen Eisenbetonkonstruktionen sind Stahldrähte sehr grosser Festigkeit, von 1—5—6 mm Durchmesser, erforderlich. Die Herstellung derselben kann im Wege des sogenannten Patentierverfahrens bewerkstelligt werden, dem gemäss der Stahl von 0,35—1% Kohlengehalt einer Wärmebehandlung bei der Temperatur von 900—1000 C° unterworfen und nachher in einem Blei- oder Salzbad von 450—550 C° Temperatur abgekühlt wird. Aus dem so behandelten Werkstoff erzeugt man mittels Kaltziehens die dünnen Stahldrähte, deren Oberfläche ausserordentlich fest und sehr glatt ist. Daher besteht, im Falle von auf Biegung beanspruch-

ten Eisenbetonträgern, die Gefahr des Gleitens der Stahldrähte. Nach den grossangelegten Untersuchungen der Züricher Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt ist der glatte Stahldraht bis 2 mm Durchmesser noch entsprechend, dagegen gleitet der Stahldraht von grösserem Durchmesser bereits in grossem Masse. Aus diesem Grunde muss man die glatte Oberfläche der Eiseneinlagen von grösserem Durchmesser als 2 mm durch Knoten, Kerben oder Vertiefungen aufrauhen. Eine besondere Art der Sicherung gegen Gleiten ist die Verwendung von gewelltem Stahldraht, welche in Ungarn bei der Erzeugung von vorgespannten Eisenbetonschwellen, wie auch bei der Fertigung von Strassen-Brücken-Hauptträgern mit vorgespannten Eisenanlagen verwendet wurden.

Über das Verhalten solcher gewellten Stahldrähte sind auch in der zur Verfügung stehenden ausländischen Literatur keine Daten zu finden, weshalb die Untersuchung der Gleitverhältnisse solcher gewellten Stahldrähte notwendig wurden. Die Untersuchungen wurden mit Stahldrähten von 5 mm Durchmesser in drei Gruppen ausgeführt. In der Gruppe *A)*, wurde glatter Stahldraht, in der Gruppe *B)* gewellter Stahldraht and in der Gruppe *C)* vorgespannter gewellter Stahldraht verwendet.

Die Ausziehungsversuche wurden auf Betonprismen mit 15/15 cm Querschnitt unternommen, wobei die Länge der Betonkörper zwischen 10—70 cm variierte. Jede Serie enthielt 12 Probekörper. Jeder m^3 fertiger Beton enthielt 450 kg Tataer Portlandzement. Die Kornzusammensetzung des Zuschlagstoffes war die folgende:

0 — 0,5 mm	.....	3,9	Gewichts %
0,5— 1 «	.....	3,2	«
1 — 3 «	.....	12,9	«
3 — 5 «	.....	13,0	«
5 —10 «	.....	35,0	«
10 —15 «	.....	32,0	«

Der Wasser—Zement-Faktor betrug 0,35. Das nasse Gemisch wurde mittels Viebrierung verarbeitet. Raumeinheitsgewicht 2393 kg pro m^3. Die Würfelfestigkeit des Betons betrug im Alter von 58—70 Tagen im Durchschnitt 534 kg/cm^2. Die Probekörper wurden im August hergestellt. Die Zugfestigkeit des Stahldrahtes von 5 mm, betrug im Mittel 14.400 kg/cm^2, der Elastizitätsmodul 1 800 000 kg/cm^2. Dis Länge der Wellen des gewellten Stahldrahtes betrug 7,7 cm, die Höhe der Wellen 3—3,5 mm.

Der Stahldraht war in der Mitte des Probekörpers untergebracht (*Abb. 16.* und *17.)*

Der Ausziehversuch wurde auf der, zur Vorspannung der Eiseneinlagen dienenden Spannbank ausgeführt. Der Probekörper hat sich auf einer Seite an den fixen Rahmen der Spannbank angelehnt. Im Laufe des Herausziehens wurde

die Verschiebung des Einmündungsquerschnittes *a* des Stahldrahtes, sowie seines Endquerschnittes mittels Messuhren beobachtet, die an dem, am Ende *b* des Prismas angebrachten, Eisenrahmen befestigt wurden. (Abb. 16. »v«.) Die

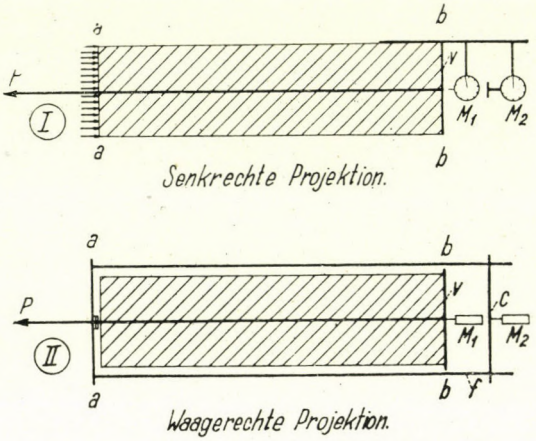


Abb. 16.

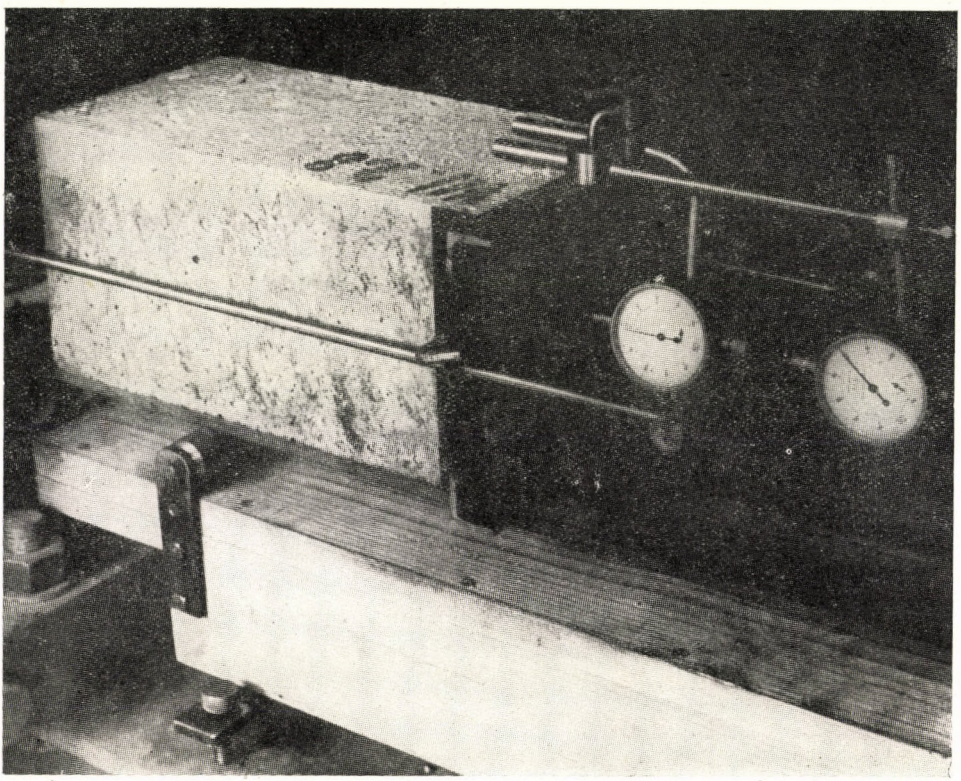


Abb. 17.

Verschiebung des Querschnittes *b* des Stahldrahtes konnte auf der einen Messuhr (M_1) unmittelbar gemessen werden, da der bewegliche Stift der Messuhr mit dem glattgeschliffenen Endquerschnitt des Stahldrahtes in Kontakt war. Die Bewegung des Querschnittes *a* des Stahldrahtes hingegen konnte mittels eines Metallrahmens (*f*) gemessen werden (Abb. 16. II.), der mittels eines Stiftes und einer Schraube an den Querschnitt *a* des Stahldrahtes befestigt wurde. An dem anderen Ende befand sich die Zunge der Messuhr (M_2) mit dem mittleren Punkt *c* des Messingrahmens in Kontakt. Im Laufe des Herausziehens war eine Verschiebung zuerts im Einmündungsquerschnitt *a* beobachtbar (*Abb. 18*), die

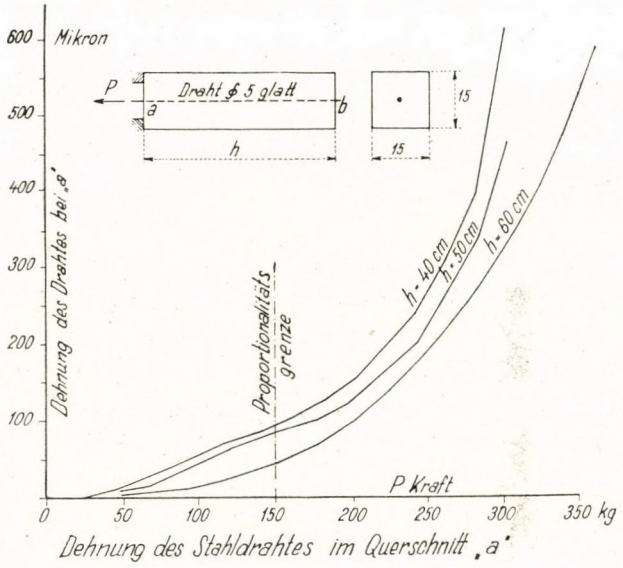


Abb. 18.

mit der Steigerung der Zugkraft stufenweise zunahm, und nach dem Endquerschnitt *b* zu fortschritt, so dass bei einer bestimmten Kraft P_1 eine Verschiebung auch bereits im Querschnitt *b* beobachtbar ist, die durch den Ingangkommen der Messuhr, genau angezeigt wird.

Der glatte Stahldraht konnte bei einer Kraft P_2, die kleiner war als P_1, bereits gänzlich herausgezogen werden (*Abb. 19.* A. P_1 und *A*. P_2), dagegen konnte die Kraft P_1 im Falle des gewellten Stahldrahtes, weiter gesteigert werden, da die Welle gegen das Herausziehen einen erheblichen Widerstand bietet. Die gewellten Stahldrähte lassen sich auch bei kürzerer Länge der Einbetonierung mit einer gewissen Kraft P_2 herausziehen, die aber bedeutend grösser ist als P_1 (*Abb. 19)*. In der Gruppe *B)* hingegen war bei einer Einbetonierungslänge von 55,60 und 70 cm, die Haftung an der Oberfläche zwischen dem Beton und den Stahldrähten bereits so gross, dass der Stahldraht riss. (*Abb. 20.* e.)

Die drei Versuchsgruppen nach der Reihe genommen, hat die glatte Eiseneinlage (Gruppe *A)* einen ausserordentlich kleinen Wiederstand gegen das Herausziehen gezeigt.

Die Kraft P_1 variierte zwischen 88 und 465 kg, die Kraft P_2 zwischen 83 und 210 kg (*Abb. 19*). AP_1 und AP_2) Der Wert der, als gleichmässig verteilt angenommen Haftung betrug im Mittel 5,3 kg/cm² (*Abb. 21*, *A*. τ_1), was auf die ausserordentliche Glätte der Oberfläche des Patentierten Stahldrahtes, und infolgedessen auf den sehr geringen Widerstand desselben gegenüber dem Ausziehen weist.

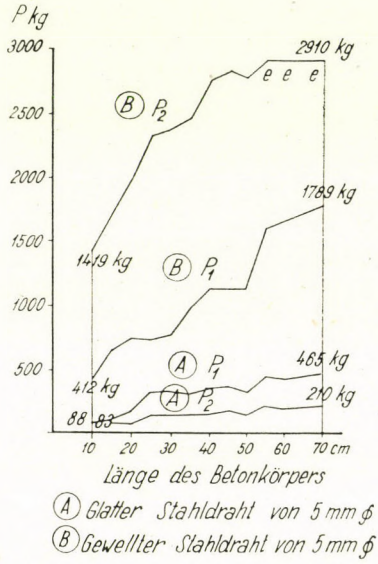


Abb. 19.

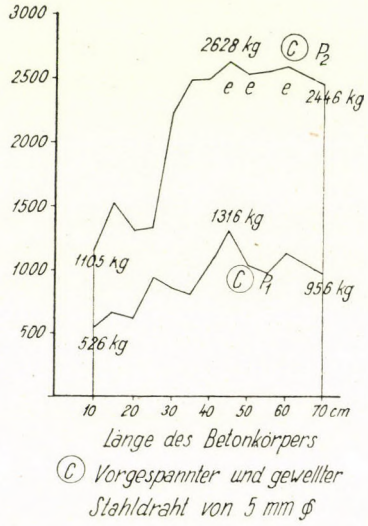


Abb. 20.

Dem gegenüber ergab sich z. B. gemäss dem, mit im Wege normalen Walzens hergestellten glatten Chromstahl einlagen von hoher Festigkeit ausgeführten Ausziehversuch die Haftung zwischen einer Eiseneinlage von 16 mm Durchmesser, und zirka 330 kg/cm² Betonwürfelfestigkeit, sowie bei einer Einbetonierungslänge von 40 cm die Haftung zwischen der Eiseneinlage und dem Beton zu 31,4 kg/cm².

Eine andere charakteristische Erscheinung bestand darin, dass als bei einer Zugkraft von P_1 der Stahldraht auch am Ende *b* — also schon in seiner ganzen Länge — glitt, der Stahldraht auch mit einer kleineren Kraft als P_1 herausgezogen werden konnte.

Die zweite Versuchsgruppe (*B*) wurde gleichfalls mit von 5 mm Durchmesser, jedoch gewellter Beschaffenheit ausgeführt. Vor dem Ausziehversuch wurden die Stahldrähte einmal mit einer, eine Zugspannung von 10 000 kg/cm² verursachenden Kraft gespannt. Ins Auge fallend ist jener ausserordentlich

grosser Unterschied hinsichtlich der Herausziehkraft gegenüber dem Falle des glatten Stahldrahtes, der eine direkte Folge der Wellung ist.

Eine wichtige Erscheinung war auch, dass sobald die Herausziehkraft den Wert von P_1 erreichte — bei der auch schon das Gleiten des Querschnittes *b* beobachtet werden konnte — es gelang die Zugkraft auch noch weiter erheblich bis zum Werte P_2 zu steigern, worauf sodann der Stahldraht sich herauszog oder riss. Die Kraft P_1 variierte zwischen 412 und 1789 kg, die Kraft P_2 aber zwischen 1419 und 2910 kg. Bei einer Einbetonierungslänge von 55,60 und 70 cm hingegen riss der Stahldraht (Abbildung 19, *B.* P_1 und *B.* P_2). Demnach war

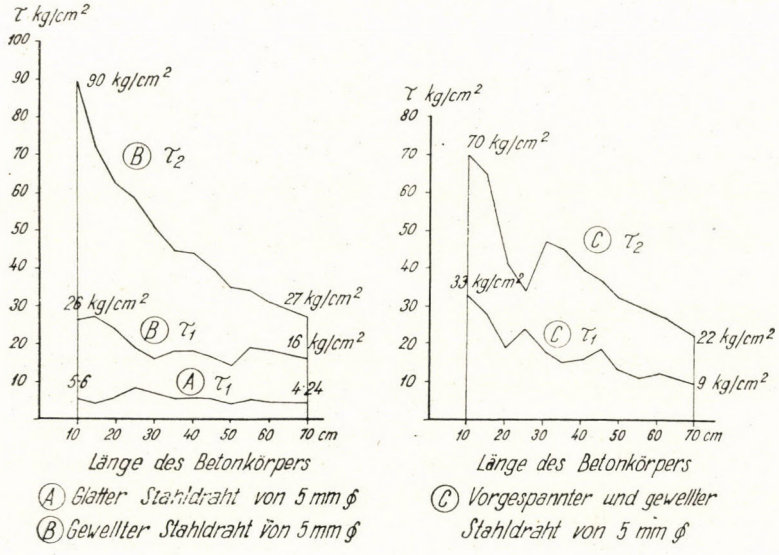


Abb. 27. *Abb. 22.*

der Gleitwiderstand bei 55—70 cm Einbetonierungslänge bereits derart gross, dass die Zugkraft bis zum Reissen des Stahldrahtes gesteigert werden konnte.

Die Bewegung des Stahldrahtes war nicht eine kontinuierliche, sondern nach einer gewissen Kraftsteigerung glitt derselbe noch ein wenig und es konnte die Zugkraft ohne Gleiten des Querschnittes *b*, weiter gesteigert werden. Als sich bei grösserer Zugkraft ein solches periodisches Gleiten wieder einstellte, war dasselbe auch von einem Klang begleitet.

Der Unterschied zwischen den Kräften P_2 und P_1 zeigt den durch die Reibung und durch die Wellung des Stahldrahtes gesicherten grossen Widerstand gegenüber dem Herausziehen.

Den Kräften P_1 entsprechend, bewegte sich der Gleitwiderstand zwischen 26—16 kg/cm², und den Kräften P_2 entsprechend, zwischen 90 und 27 kg/cm² (*Abb. 21., B.* τ_1 und *B.* τ_2).

In der dritten Versuchsgruppe wurde der Stahldraht von 5 mm Durchmesser bis zu einer Spannung von 10000 kg pro cm² vorgespannt. Nach der Vorspannung wurde der Beton hergestellt, und im Alter von 7 Tagen wurde die Vorspannung aufgehoben, wodurch das Betonprisma, infolge des Bestrebens des Stahldrahtes, seine ursprüngliche Länge wieder zu gewinnen, künstlich einen Druck erlitt. Die Ergebnisse der Ausziehversuche waren dem Wesen nach, jenen der zweiten Gruppe ähnlich. Die Kräfte P_1 variierten zwischen 526 und 1316, die Kräfte P_2 zwischen 1105 und 2628 kg, und im Falle einer Einbetonierungslänge von 45, 50 so wie 60 cm riss der Stahldraht (*Abb. 20.*, $C P_1$ und $C P_2$). Der Wert des entsprechenden Gleitwiderstandes war 33 und 9, beziehungsweise 70 und 22 kg/cm² (*Abb. 22.*, τ_1, τ_2).

Der Unterschied zwischen den Kräften P_2 und P_1 ist auch in diesem Falle bedeutend. Dagegen ist es auffallend, dass die Zugkräfte P_1 und P_2 kleiner sind, als die ähnlichen Kräfte der zweiten Gruppe, obwohl infolge der Vorspannung kleinere Verschiebungen und grössere Ausziehkräfte zu erwarten waren. Der eine Grund dieser Erscheinung kann darin gesucht werden, dass die Betonprismen der zweiten Gruppe beim Herausziehungsversuch 58—70 Tage alt, während jene der dritten Gruppe nur 7 Tage alt waren. Die beim Erhärten des Betons entstehende, zusammenpressende Wirkung auf den Stahldraht dürfte — im Falle der dritten Gruppe — bedeutend kleiner gewesen sein. Aussserdem ist es möglich, dass durch die dauernde — 7 Tage währende — Vorspannung, die Wellen der Stahldrähte sich in kleinerem Masse ausgerichtet haben. Es ist zu bemerken, dass weder an den Betonkörpern der zweiten, noch an jenen der dritten Gruppe, irgendwelche Risse beobachtet werden konnten.

Die Ausziehversuche von Betonkörpern verschiedener Länge zeigten, dass glatte, patentierte Stahldrähte aus dem Gesichtspunkt des Gleitens nicht entsprechen.

Ein wichtiges praktisches Resultat dieser Versuche ist, dass die Wellung den Widerstand der Stahldrähte von 5 mm Durchmesser, gegen das Herausziehen entsprechend vergrössert. Dieses Ergebnis hat die Strassenbrücken-Instandhaltungs-Anstalt bei der Anfertigung der vorgespannten Strassenbrücken-Hauptträger auch bereits verwendet.

Die Versuche müssen jedenfalls noch mit grösseren Einbetonierungslängen als 70 cm fortgesetzt werden, um jene Länge festzustellen, bei der der Stahldraht reisst, bevor am Ende »*b*« eine Verschiebung beobachtbar wäre. Bei der Aufhebung der Vorspannung konnte ein Hereinschlüpfen des Stahldrahtes in den Beton nicht beobachtet werden, was ebenfalls noch studiert werden müsste. Ausserdem wären auch noch Ermüdungsversuche notwendig.

Die geschilderten Versuche wurden mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften durchgeführt, wofür wir unserer grössten Dankbarkeit Ausdruck geben müssen.

Die Durchführung dieser vielen Untersuchungen hat eine selbstaufopfernde Arbeit erfordert. Es sei mir daher gestattet, hiefür dem Universitätsdozenten Dr. Anton *Schwertner*, dem Adjunkten Árpád *Földeák*, dem Institutsdozent Anton *Richter* und den Assistenten Johann *Lipták*, Georg *Telekes* und *Koloman Mohay*, wie auch den Laboranten, meinen wärmsten Dank für die geleistete grosse Arbeit auszusprechen.

ZUSAMMENFASSUNG

In einer Klimakammer vorgenommene Schwindungsversuche haben ergeben, dass unsere heimischen Zemente in verschiedenem Masse schwinden. Der Zement von Bélapátfalva zeigte die geringste, der Trasszement die grösste Schwindung. Die übrigen fünf Zementarten zeigten in Bezug auf das Schwinden keine grösseren Unterschiede. Das Schwinden des Zements von Bélapátfalva ging zum grössten Teil im Laufe eines Monats vonstatten, undzwar so, dass die Schwindung späterhin kaum mehr zunahm.

Nach Verlauf von zwei Monaten betrug die Schwindung von mittels Portlandzement der Marke MÁK (Ungar. Allg. Kohlengruben) hergestellten Beton-Körpern nur 0,21 mm je Meter, was einen recht geringer Wert darstellt.

Die Schwindung des Trasszementes übertrifft die der übrigen Zemente ganz bedeutend, woraus folgt, dass die Verwendung dieses Materials überall dort nicht ratsam ist, wo Rissfreiheit wichtig ist. Der mit S. 54 bezeichnete Zement, obwohl derselbe ein Zement vom Ferrari-Typ ist, zeigte keine aussergewöhnlich geringe Schwindung, sondern lediglich eine normale.

Die Schwindung eines sogenannten leichten Betons erwies sich als sehr gross, sie erreichte nach Verlauf eines Jahres 1,1 mm je Meter.

In Bezug auf das Dampfen verhalten sich unsere heimischen Zemente recht verschieden.

Verschiedene Zemente zeigen gegenüber dem Dampfen ein günstiges Verhalten: ein bis zwei Tage nach Beginn des Dampfens zeigt sich im Vergleich zu ungedämpftem Material eine bedeutende Anfangsfestigkeit. Dieser Umstand ist vom baulichen Gesichtspunkt von grosser Bedeutung, zumal es sich auch vom Standpunkt der Vorfabrikation, der Vorspannung und der Winterbetonierungen um einen wesentlichen Vorteil handelt.

Man darf jedoch auch die nachteilige Wirkung des Dampfen nicht ausser acht lassen, die sich nach Verlauf von 28 Tagen oder noch später in der eventuellen Minderung der Festigkeit des Betons äussert.

Ausziehversuche, welche an im Betonkörper von verschiedener Länge eingebetteten Stahldrähten von 5 mm Durchmesser vorgenommen worden waren, haben gezeigt, dass die glatten Patentstahldrähte vom Gesichtspunkt des Gleitens als ungeeignet erscheinen.

Ein wichtiges praktisches Ergebnis dieser Versuche bildete die Feststellung, wonach eine Wellung der Stahldrähte (Länge der Wellen: 6—7 cm, Höhe: 3—3,5 mm) den Widerstand der 5 mm-Stahldrähte gegenüber dem Ausziehen entsprechend erhöht. Dieses Ergebnis wurde auch nutzbar gemacht, undzwar bei der Anfertigung von Strassenbrückenträgern mit vorgespannten Eiseneinlagen.

Lehrstuhl II. für Brückenbau, Technische Universität, Budapest.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСАДКИ И ПРОПАРКИ ЦЕМЕНТОВ, ИЗГОТОВЛЯЕМЫХ В ВЕНГРИИ, И ПОВЕРХНОСТНОГО СХВАТЫВАНИЯ МЕЖДУ БЕТОНОМ И АРМАТУРНЫМИ СТАЛЬНЫМИ СТЕРЖНЯМИ

Д. Михайлич

Резюме

Исследования на усадку, произведенные в камере искуственного климата, показали, что усадка производимых в Венгрии цементов различна. Наименьшую усадку дал цемент «бэльапатфалва», наибольшую — трассцемент. Между усадкой остальных пяти сортов цемента не наблюдалось больших отклонений. Наибольшая усадка цемента сорта «бэльапатфалва» происходит в течении одного месяца, так что со временем его дальнейшая усадка увеличивается незначительно.

После двух месяцев образцы, изготовленные из портландцемента МАК, дали усадку в 0,21 мм на погонный метр, что является довольно незначительной величиной.

Усадка трассцемента намного превышает усадку остальных цементов, следовательно трассцемент на рекомендуется использовывать там, где отсутствие образования трещин является важным фактором. Цемент S 54 (несмотря на то, что является цементом типа феррари) не показал наименьшей усадки, его усадка соответствует лишь нормальной величине.

Итак, усадка т. н. легкого бетона очень велика : через год достигла 1,1 мм на погонный метр.

Цементы, производимые в Венгрии, с точки зрения пропарки ведут себя чрезвычайно различно.

Многие цементы хорошо реагируют на пропарку и в 1—2 дневном возрасте возникает большая начальная прочность (по сравнению с цементом не сбработанным паром). Это обстоятельство имеет исключительно большое значение с точки зрения строительной техники, т. к. означает также большое преимущество и с точки зрения предварительного изготовления отдельных частей конструкции заводским порядком, создания предварительного напряжения, и наконец для производства зимних бетонных работ.

Однако, нельзя оставить без внимания то вредное влияние пропарки, которое может появиться в понижении прочности бетона через 28 дней или позже.

Испытание на вытягивание 5 мм стальных стержней, забетонированных в блоки различной длины, показывает, что гладкие, патентированные стальные стержни с точки зрения скольжения являются не подходящими.

Важным практическим результатом вышеупомянутых исследований является то, что придание волнистости 5 мм стальным стержням (длина волны 6—7 см, высота волны 3—3,5 мм) соответственно повышает их сопротивление вытягиванию. Это достижение было использовано при устройстве преднапряженных, армированных сталью прогонов дорожных мостов.

EIN LÖSUNGSSYSTEM DER GRUNDGLEICHUNGEN DER ELASTIZITÄTSTHEORIE

Prof. Dr. P. CSONKA

Eingegangen am 22. Sept. 1951.

Die Verschiebungsfunktionen ξ, η, ζ der elastischen Formänderungen müssen bekanntlich ausser gewissen Randbedingungen auch den Grundgleichungen der Elastizitätslehre genügen. Bedeutet m die Poisson-sche Zahl, so kann die erste dieser Gleichungen mit der Abkürzung

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

in der Form

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial}{\partial x} e = 0 \tag{1}$$

geschrieben werden, woraus die beiden anderen schon durch zyklische Vertauschung der Veränderlichen x, y bzw. z hergestellt werden können.

Im folgenden geben wir eine interessante Gleichungsgruppe für ξ, η, ζ an, welche die Grundgleichungen restlos befriedigt und bei gewissen Problemen z. B. der Plattentheorie, mit Nutzen angewendet werden kann. Die erste dieser Gleichungsgruppe lautet

$$\begin{aligned}\xi = {} & \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \cdot [j m a^I + b^I - 2 m a^I + 2 a^I) F^I_{2j}(y, z) \cdot H^I_{2j-1}(x) + \\ & + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \cdot [j m a^{II} + b^{II}] \frac{\partial F^{II}_{2j}(z, x)}{\partial x} H^{II}_{2j}(y) + \\ & + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \cdot [j m a^{III} + b^{III}] \frac{\partial F^{III}_{2j}(x, y)}{\partial x} H^{III}_{2j}(z) + \\ & + c^I + \omega^{II} z - \omega^{III} y ,\end{aligned} \tag{2}$$

und ähnliche Gleichungen gelten auch für η bzw. ζ, welche von der obigen durch gleichzeitige zyklische Vertauschung der Veränderlichen x, y, z und der Indices I, II, III hervorgehen. In dieser Gleichungsgruppe bedeuten

(2a) $\quad a^I,\ a^{II},\ a^{III};\ b^I,\ b^{II},\ b^{III};\ c^I,\ c^{II},\ c^{III};\ \omega^I,\ \omega^{II},\ \omega^{III}$

willkürliche Konstanten,

(2b) $\quad F^I,\ F^{II},\ F^{III};\ H^I,\ H^{II},\ H^{III}$

hingegen Funktionen, welche miteinander durch die Beziehungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 F^I_{2j}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F^I_{2j}}{\partial z^2}=F^I_{2j+2}, \qquad \frac{dH^I_{j+1}}{dx}=H^I_j\ ,\\ &\frac{\partial^2 F^{II}_{2j}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F^{II}_{2j}}{\partial x^2}=F^{II}_{2j+2}, \qquad \frac{dH^{II}_{j+1}}{dy}=H^{II}_j\ ,\\ &\frac{\partial^2 F^{III}_{2j}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F^{III}_{2j}}{\partial y^2}=F^{III}_{2j+2}, \qquad \frac{dH^{III}_{j+1}}{dz}=H^{III}_j \end{aligned}$$

verknüpft sind, im übrigen aber willkürlich gewählt werden können. Das Lösungssystem hat aber natürlich nur dann einen Sinn, wenn die betreffenden Ableitungen existieren, durch gliedweises Differenzieren herstellbar sind und die unendlichen Reihen konvergieren.

Zur Bestätigung der Richtigkeit der oben angegebenen Lösung genügt es den Beweis zu erbringen, dass die Verschiebungen

$$\xi=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j(j\,m\,a+b)\,\frac{\partial F_{2j}(x,y)}{\partial x}\,H_{2j}(z)\ ,$$

$$\eta=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j(j\,m\,a+b)\,\frac{\partial F_{2j}(x,y)}{\partial y}\,H_{2j}(z)\ ,$$

$$\zeta=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j(j\,m\,a+b-2\,m\,a+2\,a)\,F_{2j}(x,y)\,H_{2j-1}(z)$$

die Grundgleichungen befriedigen, da die Gleichung (2) und die entsprechenden Gleichungen für η und ζ abgesen von Gliedern, die bloss einer Translation und einer Rotation entsprechen, aus drei Teilen zusammengestellt werden können, deren jeder aus (4) durch zyklische Vertauschung der Veränderlichen hervorgeht.

Zuerst werden wir uns mit dem Ausdruck

$$\nabla^2\xi=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$$

beschäftigen. Nach Substitution der Werte (4) ist

$$\nabla^2\xi=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j(j\,m\,a+b)\left[\frac{\partial^3 F_{2j}}{\partial x^3}H_{2j}+\frac{\partial^3 F_{2j}}{\partial x\,\partial y^2}H_{2j}+\frac{\partial F_{2j}}{\partial x}\,\frac{d^2H_{2j}}{dz^2}\right],$$

woraus bei Zuhilfenahme der Beziehungen (3)

$$\nabla^2\xi=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j(j\,m\,a+b)\,\frac{\partial F_{2j+2}}{\partial x}\,H_{2j}+$$

$$+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(-1)^j(j\,m\,a+b)\,\frac{\partial F_{2j}}{\partial x}\,H_{2j-2}$$

folgt. Da aber die Summation sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, so kann unter dem zweiten Summationszeichen statt j auch $j+1$ geschrieben werden, wodurch sich folgende Gleichung ergibt:

$$\nabla^2 \xi = -m a \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j \frac{\partial F_{2j+2}}{\partial x} H_{2j}. \tag{5}$$

Wir gehen nunmehr zur Untersuchung des Ausdruckes

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

über. Dieser Ausdruck erhält nach Substitution der Werte (4) die folgende Form

$$e = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j (j m a + b) \left(\frac{\partial^2 F_{2j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{2j}}{\partial y^2} \right) H_{2j} +$$

$$+ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j (j m a + b - 2 m a + 2 a) F_{2j} \frac{d H_{2j-1}}{d z},$$

woraus mit Rücksicht auf (4)

$$e = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j (j m a + b) F_{2j+2} H_{2j} +$$

$$+ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j (j m a + b - 2 m a + 2 a) F_{2j} H_{2j-2}$$

folgt. Es kann unter dem zweiten Summationszeichen statt j wieder $j+1$ gesetzt werden, wodurch sich die Gleichung

$$e = a (m-2) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j F_{2j+2} H_{2j} \tag{6}$$

ergibt.

Setzt man die Werte (5) und (6) in die Gleichung ein, so kann man sich sofort davon überzeugen, dass kein Widerspruch vorhanden ist. Damit ist also bestätigt, dass die Verschiebung (2) und die entsprechenden Verschiebungen η und ζ die Grundgleichungen befriedigen, was eben zu beweisen war.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie sind durch die Gleichungen (1) dargestellt. Ein Lösungssystem dieser Differentialgleichungen wird unter (2) angegeben. In diesen Gleichungen bedeuten die Werte (2a) willkürliche Konstanten, die Werte (2b) hingegen Funktionen, welche der Forderung (3) genügen, sonst aber ganz willkürlich gewählt werden können, sofern die aus ihnen gebildeten Reihen (2) konvergieren. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass alle ersten und zweiten Differentialquotienten der Reihen (2) durch gliedweises Differenzieren hergestellt werden können.

Es genügt, die Behauptung, wonach (2) ein Lösungssystem von (1) ist, für das partikulare Lösungssystem (4) allein zu beweisen, da sich (2) aus (4), abgesehen von Gliedern, die bloss einer

Translation und einer Rotation entsprechen, durch zyklische Vertauschung der Variabeln ergibt. Der Beweis wird durch einfache Verifikation erbracht, indem man (4) in (1) einsetzt und die Gleichungen (3) betrachtet. So wird z. B. statt

$$\frac{\partial^2 F_{2j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{2j}}{\partial y^2}$$

stets $F_2 j + 2$ geschrieben. Es ist noch zu bemerken, dass man statt j auch $j + 1$ schreiben kann, zumal sich die Summation von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt. In dieser Weise entstehen die Beziehungen (5) und (6), durch welche der Beweis zu Ende geführt wird.

Lehrstuhl für Festigkeitslehre, Technische Universität, Budapest.

ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

П. Чонка

Р е з ю м е

Статья занимается с интересным способом решения основных уравнений (1) теории сопротивления материалов. В уравнениях (2), выражения (2/a) обозначают произвольные постоянные, а количества (2/b) обозначают произвольно выбираемые функции, соответствующие функциям (3), предполагая, что образованные из них ряды (2) сходятся. Кроме этого статья предполагает, что первая и вторая парциальные производные функции сдвига ξ, η, ς могут быть выведены из рядов (2), путем дифференцирования каждого члена в отдельности.

То обстоятельство, что функции (2) являются действительно системой решения уравнений (1), может быть доказано простой проверкой. Проверку достаточно произвести лишь над партикулярной системой решения (4), ведь система сдвига (2) может быть выведена из системы (4) — путем цикличного обмена : как сумма трех систем сдвига и одного сдвига типа неподвижного тела. Это можно доказать просто тем, что уравнения (4) с учетом соотношений (3) подставляем в уравнения (1). В этом случае вместо

$$\frac{\partial^2 F_{2j}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{2j}}{\partial y^2}$$

может быть записано

$$F_{2j+2}$$

а вместо j можно писать $j+1$, ведь соотношение находится между $-\infty$ и $+\infty$. Таким образом получаются соотношения (5) и (6), с помощью которых можно легко доказать вышеупомянутое утверждение.

CALCULATION OF THE VIBRATION FREQUENCY OF TOWERS*

By J. BARTA

Manuscript received 6th October 1951.

The vibration of towers is usually periodic. Some towers (radio towers) may also be set into vibration under the action of the windload. For this reason it is necessary that the frequency of the free vibration of such towers should also be computed already when designing them.

In what follows, I shall show how the ω of the *slowest* free vibration of any tower can be determined already at the time of design, that is to say, before actual construction.

Notation

T ..... time of a total cycle (there and back)

$n = 1/T$ ..... number of cycles per second, i. e. frequency

$\omega = 2\,\pi\,n = 2\,\pi/T$. circular frequency.

Order of sequence of the calculation

The tower is considered a pillar (bar) of varying cross section built-in at the bottom and unrestrained at the top *(Fig. 1.)*. Let $E = E\,(x)$ denote the

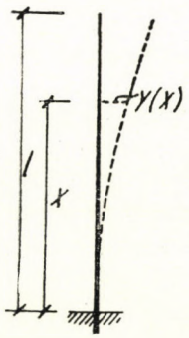


Fig. 1.

* In Hungarian issued »Építéstudományi Közlemények« (Communications of Building Sciences), 1951., p. 27.

modulus of elasticity, $J = J(x)$ the moment of inertia of the bar cross section, $\mu = \mu(x)$ the mass of the bar, per unit length of the bar, $v = v(x)$ the amplitude of the vibration.

The problem is solved by means of the funicular polygons shown in *Fig. 2.* and by those of the formulae (a), (b). The order of progress of the solution is the following. *First step :* The line $v = v_0(x)$ i. e. the approximate shape of the tower deflection is drawn *(Fig. 2A)* and an entirely arbitrary constant ω_0 is assumed. For the distributed quantity $\omega_0^2 \mu(x) v_0(x)$ the funicular polygon $u = u_1(x)$ is drawn with a pole distance $H = 1$ *(Fig. 2B)*. For the distributed quantity $\frac{u_1(x)}{E(x) J(x)}$ the funicular polygon $v = v_1(x)$ is drawn with a pole distance $H' = 1$ *(Fig. 2C)*. *Second step :* An entirely arbitrary constant ω_1 is assumed. For the distributed

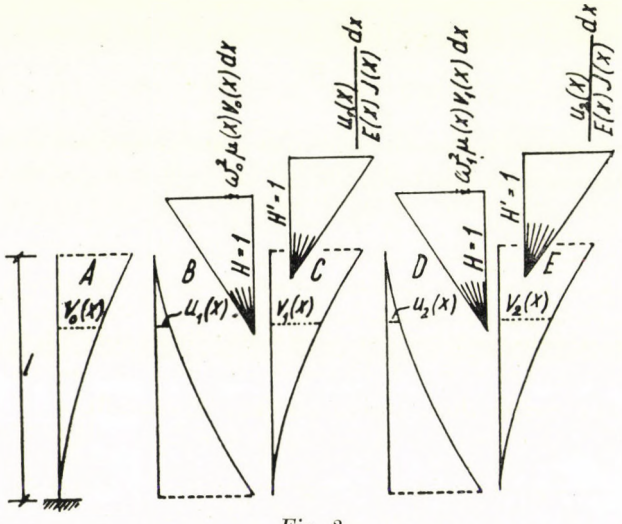


Fig. 2.

quantity $\omega_1^2 \mu(x) v_1(x)$ the funicular polygon $u = u_2(x)$ is drawn with a pole distance of $H = 1$ *(Fig. 2D)*. For the distributed quantity $\frac{u_1(x)}{E(x) J(x)}$ the funicular polygon $v = v_2(x)$ is drawn with a pole distance $H' = 1$ *(Fig. 2E). Third step :* An entirely arbitrary constant ω_2 is assumed. For the distributed quantity $\omega_2^2 \mu(x) v_2(x)$ the funicular polygon $u = u_3(x)$ is drawn with a pole distance $H = 1$. For the distributed quantity $\frac{u_3(x)}{E(x) J(x)}$ the funicular polygon $u = u_3(x)$ is drawn with a pole distance $H' = 1$. *The fourth step and the following ones* are similar to those just mentioned. This whole procedure represents, accordingly, a successive approximation.

As soon as one or two steps have been completed, it usually becomes evident that the shape of the line $v = v_{n+1}\,(x)$ is practically, i. e. within the limits of accuracy of design, similar to the shape of the line $v = v_n(x)$ or, in other words, the value of the quotient $\dfrac{v_n\,(x)}{v_{n+1}\,(x)}$ is practically constant. The final result can now be obtained with the aid of the following formulae :

$$\omega^2 = \frac{v_n\,(x)}{v_{n+1}\,(x)}\ \omega_n^2\,, \tag{a}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}\,. \tag{b}$$

Theoretical explanation of the calculation

The differential equation of the free vibration of a bar of varying cross section [1] is

$$(E\,J\,v'')'' = \omega^2\,\mu\,v\,. \tag{c}$$

This differential equation of the fourth order may be replaced by the differential equations of the second order

$$u'' = \omega^2\,\mu\,v\,, \tag{d}$$

$$v'' = \frac{u}{E\,J} \tag{e}$$

because if u is developped from (e) and substituted into (d), it is exactly the differential equation (d) that will be obtained. Therefore instead of (c) we shall solve (d) and (e), being the solution effected graphically.

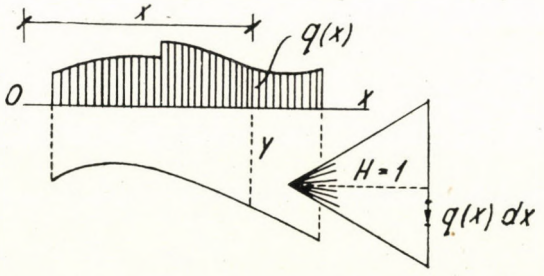


Fig. 3.

It is known from graphical statics, that the funicular polygon (in the limit the funicular curve) can be designed with a pole distance of $H = 1$ for the quantity of intensity q distributed along the straight line ox *(Fig. 3.)*, and the function $y = y\,(x)$ will satisfy the differential equation

$$y'' = q\,.$$

If now the right-hand sides of the equations (d) and (e) are both considered to represent, a distributed quantity, all that has to be done is to design for each of these a funicular polygon with a pole distance of $H = 1$ and $H' = 1$, respectively, that is to say, one of the funicular polygons has to be designed for the distributed quantity $\omega^2 \mu v$, while the other funicular polygon has to be designed for the distributed quantity $\frac{u}{E J}$. It is in the design of two such funicular polygons that make up one step.

The constant ω and the function $v = v(x)$ are, however, unknown at the outset. Therefore, the first step is begun by assuming the initial value $\omega = \omega_0$, and, at the same time, the line $v = v_0(x)$ is also assumed, i. e. drawn (*Fig. 2A*). In these assumptions the magnitudes of ω_0 and $v_0(x)$ are entirely arbitrary, whilst the shape of the line $v = v_0(x)$ should be approximately similar to the shape of the bar axis moving-out. When, after the assumption, the first step is performed (*Fig. 2B* and *C*) it will yield the line $v = v_1(x)$

By making use of $v = v_1(x)$, and assuming an arbitrary ω_1, it is possible to begin the second step (*Fig. 2D* and *E*), which will yield the line $v = v_2(x)$. Again, by making use of this line, and assuming an arbitrary ω_2, it is possible to begin the third step, which will yield the line $v = v_3(x)$. And so on.

Each of the functions $v_0(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ . . . has to satisfy the boundary conditions

$$v\ (o) = 0 \tag{f}$$

$$v'\ (o) = 0 \tag{g}$$

$$v''\ (l) = 0 \tag{h}$$

$$v'''(l) = 0 \tag{i}$$

which express the fact that at the boundaries of the interval $0 \leq x \leq l$ the bar is built-in and unrestrained respectively. Graphically this means that at each step the first funicular polygon satisfies, at the unrestrained end of the bar, the boundary conditions

$$u\ (l) = 0 \tag{j}$$

$$u'(l) = 0 \tag{k}$$

whilst the second funicular polygon, at the built-in end, satisfies the boundary conditions (f), (g) (*Fig. 2.*). This follows, on the one hand, from the fact that (j) expresses the same thing as (h), whilst on the other hand, if (e) is differentiated,

$$v''' = \frac{u' E J - (E J)' u}{(E J)^2}$$

is obtained, wherefrom it is evident that from (i) and (j), (k) follows, and obversely, from the boundary conditions (j), (k), (f), (g) the boundary conditions (*h*) (*i*) follow.

For the exact value of ω a lower and upper limit is supplied by the theorem of the mean values[2, 3, 4, 5], which, in the present case, says, that for each of the functions $v = v_0(x)$, $v = v_1(x)$, $v = v_2(x)$ .... the inequality

$$\left(\frac{(E\,J\,v'')''}{\mu\,v}\right)_{\min} \leqq \omega^2 \leqq \left(\frac{(E\,J\,v'')''}{\mu\,v}\right)_{\max} \tag{1}$$

holds. If it is the function $v = v_{n+1}(x)$ that is concerned, and if consideration is paid to the equation

$$(E\,J\,v''_{n+1})'' = \omega_n^2\,\mu\,v_n,$$

(*l*) will yield the inequality

$$\left(\frac{v_n(x)}{v_{n+1}(x)}\right)_{\min} \omega_n^2 \leqq \omega^2 \leqq \left(\frac{v_n(x)}{v_{n+1}(x)}\right)_{\max} \omega_n^2 \ . \tag{m}$$

As soon as a few steps have been performed, the shape of the line $v = v_{n+1}(x)$ will already be practically similar to the shape of the line $v = v_n(x)$, or, in other words, the quotient $\dfrac{v_n(x)}{v_{n+1}(x)}$ may be considered constant. When this is the case, the inequality (m) will pass into the equality (a).

It should be added that for small values of v, i. e. in the bottom part of the tower, the quotient $\dfrac{v_n(x)}{v_{n+1}(x)}$ will pass into the form $\dfrac{0}{0}$, i. e. will become indefinite. This, however, can be easily remedied, because at low values of v it is possible, in consequence of the rule of L'Hospital, to employ, instead of $\dfrac{v_n}{v_{n-1}}$, the quotient $\dfrac{v''_n}{v''_{n+1}}$ that is to say $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

Use of scales

Three kinds of scales should be employed in the design (*Fig. 2.*). With one of these scales (lbs) the vectors of the magnitude $\omega_2^n\,\mu(x)\,v_n(x)\,dx$ and the pole distance H belonging to them are drawn. With the other scale (absolute value) the vectors of the magnitude $\dfrac{u(x)}{E(x)J(x)}\,d\,x$ and the pole distance H' belonging to them are drawn. The third scale is the longitudinal scale of the drawing (inches), with this scale the length l of the bar is drawn, and with the same the numerical value of $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... and of $v_0(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$, ... can be measured.

A difficulty of design may, however, be caused by the fact that owing to the assumption $H = 1$, very flat or very steep funicular polygons may result.

In such a case, of course, every engineer will know that instead of $H = 1$, $H = 2$, $H = 1000$, $H = \frac{1}{3}$, or any other pole distance may also be assumed, but in this case the 2-fold, 1000-fold, etc. value of $u(x)$ has to be taken into account. A similar remark applies also to the assumption of H'.

Generalisations

The method submitted by me for the practical determination of the frequency of the slowest free vibration will hold not only in the case when the bar of varying cross-section is built-in at one end and unrestrained at the other end, but also if a built-in or unrestrained termination or a hinged support exists at one or the other end, or both ends of the bar. The method submitted may also be extended to the practical solution of other problems involving the calculation of the smallest eigen-value, e. g. in case of a bar of varying cross section for the determination of the critical value of the compressive force [6]. In the stress analysis of up-to-date thin structures many other kinds of stability problems also arise, and these can possibly also include some to which the method submitted by me may be extended. My researches regarding these problems have been interrupted in 1939, when Hungarian researchers where excluded from the international scientific life (at the fifth and sixth International Congress for Applied Mechanics it was no longer possible for Hungarian specialists to participate). The solution of the theoretical problems of stability (eigen-value problems) is of great importance from the point of view of the stress analysis of thin structures. In most cases, however, such a solution is only possible by making use of higher mathematical means. Information regarding these mathematical means, with special regard to the applications in engineering, is being supplied by the recently published work of Collatz [7].

REFERENCES.

1. Handbuch der Physik, Bd. 6, p. 368 (Berlin, Springer, 1928).

2. *Schwarz, H. A.:* Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, Berlin, Springer, 1890, p. 252.

3. *Barta J.:* Sur la vibration fondamentale d'une membrane (Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences, tome 204, Paris, 1937, p. 472).

4. *Barta J.:* Über die elastische Grundschwingung eingespannter Stäbe (Ingenieur-archiv, Bd. 8, Berlin, Springer, 1937, p. 36).

5. *Barta J.:* Differenciálegyenletek sajátértékeiről; a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője, LVII. kötet, 1938, p. 434. (On the eigen-values of differential equations; Journal of Mathematics and Natural Sciences of the Hungarian Academy of Sciences, Vol. LVII, 1938, p. 434).

6. *Barta J.:* Változó keresztmetszetű nyomott rúd rugalmas kihajlásáról; a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője, LV. kötet, 1937, p. 804. (On the buckeling of a compressed bar of varying cross section; Journal of Mathematics and Natural Sciences of the Hungarian Academy of Sciences, Vol. LV. 1937, p. 804.)

7. *Collatz L.:* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (Leipzig, Geest u. Portig, 1949).

SUMMARY.

In this article I have presented a procedure for the calculation of the frequency of vibration of towers. From the point of view of mathematics, the determination of the frequency of vibration is only a calculation of the eigen-value of the linear and homogeneous differential equation, which characterizes the vibration in question. I resolved the problem, by applying the method of the succcessive approximation. In order to permit, vibration an easy application of my procedure in practice, instead of the reiterated integrations, necessary to the solution of the differential equation, I have introduced the composition of funicular polygons, a procedure well known from grapho statics. Finally, I presented the mathematical verification of the method, and gave the necessary informations for the employment of the scales and presented the related bibliography.

РАСЧЕТ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ БАШЕН

Доктор техн. наук. Йожеф Барта

Резюме

Автор в статье демонстрирует метод для расчета частоты колебаний башен. С точки зрения математики, определение частоты колебаний не инсе, как вычисление собственного значения гомогенного линейнсго уровнения, характеризирующего данное колебание. Для разрешения этой задачи, автор применяет метод последовательного приближения. Чтобы этот метод легко применять на практике, автор употребляет, взамен повторных интегрирований, необходимых для разрешения дифференциальных уравнений, известную из графостатики конструкцию верёвочного полигона. Наконец приводит математическое подтверждение правильности метода и инструкции для употребления мер, а также сообщает к этому относящуюся литературу.

Les Acta Technica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des mémoires du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiées sous forme de cahiers qui seront réunis en volumes de 300 à 500 pages. Il paraît, en général, deux volumes par an.

Les manuscrits, autant que possible écrits à la machine, doivent être envoyés à l'adresse suivante :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est 110 forints par volume.

On peut s'abonner dedans du pays à l'éditeur »Akadémiai Kiadó« (Budapest, V., Alkotmány-utca 21. Compte courant 04-878-111-48.) à l'étranger à l'entreprise de commerce extérieur des livres et journaux »Kultúra« (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Compte courant No.: 45-790-057-50-032.) ou chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in Russian, English, French and German.

They appear in varying size, making up volumes of 400—500 pages. On the average, two volumes are published yearly.

Manuscripts should, if possible, be typed and addressed to :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica, is 110 forint a volume. Orders may be placed at home with »Akadémiai Kiadó« (Budapest, V., Alkotmány-utca 21. Account No. 04-878-111-48.), abroad with »Kultúra« Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Account No. 45-790-057-50-032) or with representatives abroad.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Gebiete der technischer Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band von etwa 30 Bogen. Im allgemeinen erscheinen jährlich zwei Bände (75 Bogen).

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, möglichst mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu senden.

Abonnementspreis pro Band 110 Forint. Zu bestellen für das Inland bei dem Verleger »Akadémiai Kiadó« (Budapest, V., Alkotmány-utca 21. Bankkonto Nr. 04-878-111-48), für das Ausland bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankkonto Nr. 45-790-057-50-032) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

76 Ft

INDEX

Palotás, L.: Die Berechnung räumlicher Rahmenkonstruktionen mit dem Momentenausgleichsverfahren — Л. Палоташ: Расчет пространственных каркасных конструкций методом распределения моментов 199

Tarnóczy, T.: Acoustical Researches in the Municipal Theatre of Budapest — Т. Тарноци: Акустические исследования в будапештском Городском Театре 285

Schwertner, A.: Versuche zur Bestimmung der Verteilung der am Mantel der einbetonierten Eisen- oder Stahleinlagen vermittelten Kräfte — А. Швертнер: Опыты по определению распределения сил, действующих вдоль оболочки забетонированного арматурного железа или стали 303

Gyengő, T.: Expériences effectuées pour examiner l'état de fracture de poutres en béton armé — Т. Дьенгэ: Опыты по исследованию состояния разрушения железобетонных балок 345

Kézdi, Á.: Einige Probleme der Spannungsverteilung im Boden — А. Кезди: Некоторые вопросы почвенной механики относительно распределения напряжений 371

П. Габори: Расчёт внецентренно сжатых и упруго зашемленных прямоосевых железобетонных балок, учитывая прогибы — *Gábori, P.:* Dimensionierung exzentrisch gedrückter, elastisch eingespannter Eisenbetonträger mit geradliniger Achse, unter Berücksichtigung der Knickung 391

Menyhárd, I.: Die Dimensionierung von gedrückten Stäben auf Grund einer vorgeschriebenen Anfangsexzentrizität — И. Меньхард: Расчет размеров сжатых стержней на основе заданной начальной эксцентричности согласно условий ногых ниту на сталь 431

К. Смодич: Упрощенный расчет цилиндрического свода-оболочки — *Szmodits, K.:* Beschreibung einer Schalenkonstruktion 449

Mihailich, V.: Untersuchung der Schwindung der ungarischen Zemente, der Dampfbehandlung, sowie der Haftung zwischen dem Beton und dem in denselben eingebetteten Stahldraht — Дь. Михайлич: Исследование усадки и пропарки цементов, изготовляемых в Венгрии и поверхностного схватывания между бетоном и арматурными стальными стержнями 461

Csonka, P.: Ein Lösungssystem der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie — П. Чонка: Об основных уравнениях теории сопротивления материалов 487

Barta, J.: Calculation of the Vibration Frequency of Towers — Й. Барта: Расчет частоты колебаний башень 491

Akadémiai Kiadó (Budapest, V., Alkotmány-utca 21.) Felelős: Mestyán János.

Akadémiai nyomda, V., Gerlóczy-utca 2. — 14681/52 — Felelős vezető: ifj. Puskás Ferenc