

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY
G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XIX

FASCICULI 1—2



1957

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V. ALKOTMÁNY UTCA 21

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Több füzet alkot egy kötetet. Évenként 2—3 kötet jelenik meg.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80, külföldre 110 Ft. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest V. Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr: 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

Tomus XIX

INDEX

- Bajcsay, P. & Lovass-Nagy, V.* : The Generalization of some Relations of the Four-terminal Theory by means of Hypermatrices — Verallgemeinerung einiger Beziehungen der Vierpoltheorie mittels Hypermatrizenrechnung — Généralisation de quelques rapports de la théorie de quadripôles par calcul hypermatriciel — П. Байчаи и В. Ловаш-Надь: Обобщение с гиперматрицами некоторых зависимостей четырехполюсной теории 293
- Balogh, A.* : Ermittlung der Eigenschwingungszahlen bei Torsionschwingung mit äusserer Dämpfung — Determination of the Number of Self-oscillations of Torsional Oscillation with External Damping — Détermination du nombre d'oscillations propres en oscillation torsionnelle, en cas d'amortissement extérieur — А. Балог: Определение числа собственных колебаний торсионных колебаний с помощью внешнего демпфирования 105
- Balogh, A.* : New Method for the Calculation of the Natural Frequencies of Torsional Vibration — Beitrag zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Torsionschwingungen — Contribution à la détermination de la fréquence propre des oscillations de torsion — А. Балог: К определению числа собственных колебаний крутильных колебаний 311
- Benedikt, O.* : Eine neue Berechnungsmethode für komplizierte, stark gesättigte magnetische Kreise — A Novel Method for the Computation of Complicated and Highly Saturated Magnetic Circuits — Méthode de calcul nouvelle des circuits magnétiques compliqués, à saturation élevée — О. Бенедикт: Новые методики расчета сложных и сильно насыщенных магнитных цепей 169
- Boldizsár, T.* : Temperature Drop of Incompressible Fluids Rising in Boreholes — Temperaturerniedrigung der in Bohrlöchern aufsteigenden Flüssigkeiten — La diminution de température des liquides montant du trou de forage — Т. Больдизсар: Снижение температуры жидкостей, поднимающихся в буровых скважинах 371
- Csonka, P.* : Pure Bending of Lattice Trusses with Parallel Chords — Reine Biegung engmaschiger Fachwerkträger mit parallelen Gurten — Flexion simple de poutres parallèles à treillis multiples — П. Чонка: Чистый изгиб многократно-решетчатых балок с параллельными поясами 155
- Csonka, P.* : Substitution Method for the Approximate Analysis of Stability Problems of Plane-framed Trusses with Rigid Joints — Substitutionsverfahren zur angenäherten Lösung von Stabilitätsproblemen ebener Rahmenträger — Procédé de substitution pour la solution approximative des problèmes de stabilité des portiques multiples treillis — П. Чонка: Замещающий метод для приближенной трактовки задач стабильности, касающихся плоскостных ферм 405
- Geleji, A.* : Eine neue Walztheorie — New Theory of Rolling — Une nouvelle théorie du laminage — А. Гелейи: Новая теория прокатки 199
- Gutenberg, B.* : In Memoriam Joseph Geszti — Pro Memoriam Joseph Geszti — En mémoire de Joseph Geszti — Б. Гутенберг: Воспоминания о Йозефе Гести 459
- Hangos, I.* : Influence of Binders upon Surface Brightness of Cathode-ray Tube Screens — Einfluss des Binders mittels auf die Oberflächenhelligkeit von Kathodenstrahlröhrenschirmen — Effet du liant sur l'éclat de surface des écrans de tubes à rayons cathodiques — И. Хангош: Влияние связующего вещества на поверхностную яркость экранов катодных трубок 67

- Hegedüs, Z.* : Durch Zunderbildung verursachte Gefügeveränderungen und technologische Fehler in der warmgewalzten Bronze Bz 5 — Changes of Structure and Manufacturing Faults Caused by Scaling, in Hot-rolled Bz5 Bronze — Altérations structurales et défauts de fabrication provoqués par l'oxydation du bronze Bz5 laminé à chaud — З. Хегедюш: Изменения структуры и производственные дефекты, вызванные вследствие образования окалины в случае горячекатанной бронзы Bz 5 363
- Huszár, I.* : Das Spannungsfeld im Streifen eines zugbeanspruchten T-förmigen Flachstabes — Stress Field due to Tensile Load in the Leg of a T-shaped Flat Bar — Le champ de tension apparaissant dans la tige d'une barre plate en T, provoqué par une charge de traction — И. Хусар: Поле напряжений, возникающее в продолговатой части T-образного плоского стержня под воздействием растягивающей нагрузки 333
- Ignácz, P.* : The Load Capacity of Transformers in Asymmetrical Operation — Die Belastbarkeit von Transformatoren in asymmetrischem Betrieb — La capacité de charge des transformateurs en opération asymétrique — П. Иенац: Нагружаемость трансформаторов при асимметричном режиме 3
- Marschalkó, B. & Barna, J.* : Über das Viskositäts-Temperatur-Verhalten von Flüssigkeiten und dessen Funktionen — The Viscosity-temperature Ratio of Liquids and its Application for the Characterization and Identification of Liquids — Le rapport viscosité-température des liquides, et son application à la caractérisation et l'identification des mélanges de liquides — Б. Маршалко и Я. Барна: Зависимость между вязкостью и температурой жидкостей и применение этой зависимости для характеристики и идентификации смесей жидкостей 85
- Millner, T. & Sass, L.* : Einfluss geringer Mengen von Verunreinigungen auf die Warmhärte des Wolframmetalls — Influence of Small Quantities of Impurities on the Warm Hardness of Tungsten — L'influence de petites quantités d'impuretés sur la dureté à chaud du tungstène métallique — Т. Мильнер и Л. Шаш: Влияние небольших количеств примесей (присадок) на твердость металлического вольфрама 115
- Schleicher, A.* : In Memory of Anthony Kerpely Sen. (1837—1907) — Zum Gedächtnis von Anton Kerpely d. Ä. (1837—1907) — En mémoire de A. Kerpely aîné (1837—1907) — А. Шлейхер: Воспоминания Антала Керпели (Ст.) (1837—1907) 245
- Simonyi, K.* : Eine Beschleunigungsanlage mit einem Kaskadengenerator von 800 kV. — An Accelerating Plant with a 800 kV Cascade Generator — Une installation d'accélération avec un générateur en cascade de 800 kV — К. Шимони: Ускорительное устройство с 800 кВ каскадным генератором 353
- Szendy, Ch.* : Transformation of a Three-phase Alternating-current System with the Aid of Matrix Calculus — Transformation von Dreiphasen-Wechselstromsystemen mit Hilfe der Matrizenrechnung — Transformation d'un système alternatif triphasé à l'aide du calcul — Ч. Сенди: Трансформация трехфазной системы переменного тока с помощью матричного исчисления 379
- Szidarovszky, J.* : A Practical Solution for Stiffened Suspension Bridges of Variable Inertia Moment and its Application to Influence-line Analysis — Praktische Lösung der Berechnung einer Hängebrücke mit Versteifungsbalken von veränderlichen Inertiemoment und ihre Anwendung bei der Berechnung mittels Einflusslinien — Solution pratique pour le calcul d'un pont suspendu à poutre de raidissement et moment d'inertie variable et son application au calcul par lignes d'influence — Я. Сидаровски: Практическое решение висячего моста с переменным моментом инерции и применение для расчетов линий влияния 249
- Tarczy-Hornoch, A.* : Über die Winkelprismen der Geodäsie — On Angle Prisms Used in Surveying — Équerres prismatiques utilisées en géodésie — А. Тарци Горнох: О геодезических угломерных призмах 127
- И. Вереш*: Исследования поведения содержащегося в кольском фосфате титана в процессе магнитной сепарации — *Veres, I.* : Untersuchungen über das Verhalten

des Ti-Gehaltes von Kola-Phosphat bei der magnetischen Scheidung — Investigations on the Behaviour of the Ti-content of Kola Phosphate Rock at Magnetite Separation — Recherches sur le comportement de la teneur en titane du phosphate de Kola, lors de la séparation magnétique.....	61
<i>Verő, J. A.</i> : Contribution to the Estimation of M_s from the Composition of Steels — Beitrag zur Berechnung des M_s aus der Zusammensetzung des Stahles — Contribution au calcul de M_s à partir de la teneur en carbone de l'acier — <i>Й. Веце</i> : К вычислению M_s на основе состава стали	193
<i>Zajta, A.</i> : Untersuchungen über die Verallgemeinerungen der Newton-Raphsonschen Wurzelapproximation (II) — Investigation on the Generalization of the Newton-Raphson Root Approximation Method (II) — Recherches sur la généralisation de la méthode de Newton et Raphson pour l'approximation des racines (II) — <i>А. Зайта</i> : Исследования в области обобщения Ньютон—Рафсоновского метода приближенного определения корней. II	25
<i>Zambó, J.</i> : Location of the Man Shaft and Time Lost in Underground Travel — Der Ansetzpunkt des Einfahrschachtes und der Zeitverlust der Fahrung untertage — La position du puits d'accès et la perte de temps due à la circulation souterraine — <i>Я. Замбо</i> : Расположение опускной шахты и потери времени персонального движения	415

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY,
G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XIX



1957

ACTA TECHN. HUNG.

THE LOAD CAPACITY OF TRANSFORMERS IN ASYMMETRICAL OPERATION

P. IGNÁ CZ
C. OF ENG. SC.

INSTITUTE FOR ELECTRIC POWER RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received August 13, 1954]

1. Comprehensive view

Asymmetrical operation of three-phase transformers is relatively frequent. Asymmetrical loading may be produced by a single-phase railway system or by supply to an important single phase utilizer [9]. In Hungary recently especially the so-called "two-phase operation" has put the problem. By this is understood that in a net with grounded neutral one phase is interrupted for some duration, and only connection with the other two phases and through the earth is being kept up. That this is possible for a longer time, indication was found in the Soviet literature [1], on which basis Dr. M. VAJTA elaborated a treatise [2]. Later the Institute for Electric Power Research also tested the procedure [3, 4] and found it practicable under home conditions on certain parts of the net.

The importance of "two-phase" operation lies in the fact that through it it is possible to keep up three-phase connection, even in one-circuit high voltage transmission systems with one conductor switched off, or in two-circuit systems transmission by both circuits can be assured if one of the six conductors is interrupted. This may be necessary in the case of failure on conductors, or if repair of such lines is carried out phasewise, with two or five conductors, as the case may be, kept in service. Thereby the installation of two-circuit systems on certain important transmission lines may be saved, on the other hand, in the case of two-circuit systems, safety of operation may be enhanced.

Tests by the Institute for Electric Power Research have shown that in two-phase operation the asymmetry of voltages is not high; it is tolerable for consumers, the asymmetry of currents, however, may be important. This is important from the viewpoint of substations. One principal aim of the present investigation is to find out whether operation of the system on full load can be kept up and to furnish to station service staff and to the Load Dispatcher Centre a yardstick for finding out in any given situation in what degree the asymmetrical load on transformers on the line may be admitted without danger. It has been desired to exempt service staff and that of the Load Dispatcher Center from

cumbersome graphical or numerical calculation of the symmetrical components, even if full data were therefore available. There exist connections and apparatus, with which symmetrical components are directly measurable, but such has not been supposed to be available at many places. Therefore the method has in the first place been based on the condition that the basic data are furnished by some (3—4) ammeter readings.

It has been laid down as a condition that not even the temperature of the hot-test phase shall exceed the temperature permissible in nominal symmetrical operation.

By this way relationships will be deduced which will give what limits are placed on operating conditions if the symmetrical phase currents are I_a , I_b , I_c , or their relative values referred to nominal current I , are α , β , γ . This is expressed by inequalities (16.1)–(17.1). The procedure may be facilitated by Fig. 1, plotted on the assumption of the average value of a characteristical parameter of transformer design.

Since the life expectancy of transformer coils is not reduced substantially by an occasional — not too frequent — overload of 1–2 days duration, by relation (23.1) it is indicated what limitations impose themselves, if various ($A \vartheta = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$) excess overheatings are permitted. This too, has been plotted in Fig. 1. Besides this the circumstance may be taken into consideration according to 2.2 that the ambient temperature is in general lower than the temperature of 35° viewed by the Standards. This too permits a certain overloading.

With the above limitation of overheating a factor $k = \frac{I_1}{I}$ will be computed, which is a measure of how far the positive sequence component of currents decrease in relation to the nominal current at different relative magnitudes $i_2 = \frac{I_2}{I_1}$ and $i_0 = \frac{I_0}{I_1}$ of the components causing asymmetry.

k approximately gives the variation of useful output.

The formula for k is (27.1), or in case of permissible overloading (27.2), it can further be read from diagram of Fig. 2. If there is no equipment available for the direct measurement of symmetrical components, k may be determined from the three ammeter readings I_a, I_b, I_c exactly if there is no zero-sequence component, and with an approximation which is conservative if there exists such component.

Summing up it can be laid down as a fact that especially considering the possible lower ambient temperature and of the possibility of overloading, a high degree of asymmetry of currents is permissible in the operation of the transformer, and the unequal loading, if it does not occur too often, will not impose either a significant limitation on power output.

2. Heating conditions in the case of asymmetrical current load

2.1 If the permissible coil temperature is not higher than the rated service temperature

Let the question be put in general : how does the three-phase transformer behave from the viewpoint of temperature rise in the case of asymmetrical loading?

Let first be supposed that only three simple data of measurement are available : three ammeter readings of currents flowing in the phase windings. These currents are supposed to be of different magnitude. The question is put thus : against the nominal (symmetrical) current how great may now be the maximum currents without exceeding the normally permissible heating of either of the phases.

Start will be made from the condition that currents are measured in a way that the amperes in windings of the three legs are read off, that is measurement is made on the star or zig-zag side of the connection. Thus any combination of connections (star/star, delta/star, star/zig-zag etc.) can be treated together except one : the star/star connection with tertiary delta winding in which the balancing ampere-turns present themselves altogether not in two but in three windings, and therefore the measurement of the current of a single winding does not determine unequivocally the loading of all three windings.

The following symbols will be used for the present :

R	Joint resistance of primary and of secondary windings converted to one side ;
I	(without index) the nominal current ;
I_a, I_b, I_c	the three phase currents ;
$\alpha = \frac{I_a}{I}, \beta = \frac{I_b}{I}, \gamma = \frac{I_c}{I}$	relative magnitudes of phase currents ;
$W_{cu a}$	Copper loss of phase a ;
W_{cu}	Total copper loss ;
W_{fe}	Core loss.

In general values relating to the nominal (symmetrical) loading are top-indexed [1], those arising in asymmetrical operation are top-indexed [2].

*

The currents flowing in the three phase windings are of different magnitudes, and the heating of the three windings will be different. Overheating of oil-cooled transformers against the ambient temperature (taken for 35° C) is calculable from two parts,*

a) Temperature rise of the oil above ambient temperature (ϑ_{10}).

* See later 4.1 of "Annex".

The magnitude of this is determined on the one side by the *total* loss heat (W_{fe} and W_{cu}) arising in the transformer tank, on the other by the heat transfer capacity of the cooling equipment.

b) Mean temperature rise of the winding above the oil (ϑ_{ot}).

The magnitude of this is determined by the loss arising in the phase in question and the heat transfer capacity of the winding.

The maximum permissible total of these two temperature gradients is according to Standards 70°C , so that at an ambient temperature of 35°C the temperature of the winding rises to 105°C . *Mean* temperature gradients are reckoned with, since only such can be dependently checked by the alone practicable resistance-rise measurements.

The selection of the proportion of the above two overheatings depends on the transformer designer. Part (a) is in case of normal (symmetrical) loading

$$\vartheta_{t_0} = 47^\circ \dots 37^\circ$$

and (b) is generally

$$\vartheta_{ot} = 23^\circ \dots 33^\circ \text{ under the same conditions so that}$$

$$\vartheta_{t_0} + \vartheta_{ot} = 70^\circ$$

In modern, larger transformers, especially with forced air circulation, or in water-cooled transformers ϑ_{ot} is nearer the upper limit.

Under asymmetrical conditions of operation these values will, of course, change, if the temperature rises corresponding to normal loading, and the altered overloadings are indexed (1) and (2) respectively :

$\vartheta_{t_0}^{(2)}$ will be the same for all three phases (according to the afore-said it is determined by the *total* loss in the transformer and small local influences may be disregarded).

$\vartheta_{ot}^{(2)}$ in the other hand, has to be examined in the hottest, that is, in the heaviest-loaded phase.

The statement that overheating of the oil is uniform everywhere, of course, does not hold exactly. Windings of all three legs produce heat in a different degree, around conductors of the heaviest-loaded phase the temperature of the cooling medium will be higher than the average. However, the difference is not great. It will be the less, the better the circulation ; therefore, especially in the case of forced cooling, it may be neglected. With natural cooling it is not of importance to warrant special consideration.

The copper loss at nominal loading, that is, in asymmetrical operation

$$W_{cu\ a}^{(1)} = R I^2 \quad (1)$$

$$W_{cu\ a}^{(2)} = R I_a^2 \quad (2)$$

$$\frac{W_{cu\ a}^{(2)}}{W_{cu\ a}^{(1)}} = \left(\frac{I_a}{I} \right)^2 = \alpha^2 \quad (3)$$

The concerted copper loss of both phases in the two kinds of operations

$$W_{cu}^{(1)} = 3RI^2 \quad (4)$$

$$W_{cu}^{(2)} = R(I_a^2 + I_b^2 + I_c^2) \quad (5)$$

$$\frac{W_{cu}^{(2)}}{W_{cu}^{(1)}} = \frac{1}{3} \frac{I_a^2 + I_b^2 + I_c^2}{I^2} = \frac{1}{3} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad (6)$$

According to the start made the overheating of the heaviest-loaded phase *a* is at most as high as in the case of the nominal loading, that is

$$\vartheta_{lo}^{(2)} + \vartheta_{ot}^{(2)} \leq \vartheta_{lo}^{(1)} + \vartheta_{ot}^{(1)} = 70^\circ \quad (7.1)$$

In converting of overheatings from one state to another the empirical relationship may be made use of that :

1. Overheating of the tank or of the oil in relation to the temperature of ambient air is proportional to the loss watts to the 0,8 power.

2. The temperature rise of the coil above the cooling oil (copper gradient) is also proportional to the watts loss in the coil to the 0,8 power.

The explanation that overheating does not increase linearly with the loss watts is that at higher temperatures the circulation of the cooling media increases on the one hand, on the other, that radiation is also raised. The given relationships hold within rather wide ($\pm 20 \dots 25^\circ$) temperature limits with fair precision. (On the other hand — as will be shown later — the magnitude of the exponent has an influence only on the examination of overloads.)

Accordingly,

$$\vartheta_{lo}^{(2)} = \vartheta_{lo}^{(1)} \left[\frac{W_{fe}^{(2)} + W_{cu}^{(2)}}{W_{fe}^{(1)} + W_{cu}^{(1)}} \right]^{0.8} \quad (8.1)$$

and

$$\vartheta_{ot}^{(2)} = \vartheta_{ot}^{(1)} \left[\frac{W_{cu}^{(2)} a}{W_{cu}^{(1)} a} \right]^{0.8} \quad (9.1)$$

Let the proportion of iron loss and of copper loss of the transformer be \varkappa , that is

$$W_{fe}^{(1)} = \varkappa W_{cu}^{(1)} \quad (10)$$

\varkappa is in modern transformers a value around 0,25 ; at the most a slight error will be committed, if this is taken for a basis. Moreover, the calculation will not be seriously affected if, for the sake of simplicity, a single value for \varkappa is written

$$\varkappa = \varkappa^{(1)} = \frac{W_{fe}^{(1)}}{W_{cu}^{(1)}} \approx \varkappa^{(2)} = \frac{W_{fe}^{(2)}}{W_{cu}^{(2)}}$$

In asymmetrical operation not only the loading, but also the excitation of the legs of the transformer will be non-uniform. Iron cores, however, are for the most part not utilized from the standpoint of heating to a degree harmful to them. The situation is still mitigated by the circumstance that heat equalization between the different legs is good. On the other hand, the iron loss is not of great influence on the heating of coils, because according to the afore-said, it enters with a smaller fraction into the formula. (On the other hand, the asymmetry of voltages may be considered with relationships analogous to the formulae to be deduced hereafter for losses in windings.)

Therefore, for the time being a *single* (relating to normal operation) value of \varkappa will be reckoned with.

On the basis of the former formulae (8.1) and (6) or (9.1) and (3)

$$\vartheta_{l'o}^{(2)} = \vartheta_{l'o}^{(1)} \left[\frac{\varkappa + \frac{W_{cu}^{(2)}}{W_{cu}^{(1)}}}{\varkappa + 1} \right]^{0,8} = \vartheta_{l'o}^{(1)} \left[\frac{\varkappa + \frac{1}{3}(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{\varkappa + 1} \right]^{0,8} \quad (8.2)$$

and

$$\vartheta_{o'l}^{(2)} = \vartheta_{o'l}^{(1)} \left[\frac{W_{cu}^{(2)} a}{W_{cu}^{(1)} a} \right]^{0,8} = \vartheta_{o'l}^{(1)} [a^2]^{0,8} \quad (9.2)$$

Let now the two new numerical values of ξ and η be defined in the following way

$$\frac{1}{3}(a^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 1 - \xi \quad (11)$$

$$a^2 = 1 + \eta \quad (12)$$

Let further

$$\frac{\vartheta_{o'l}^{(1)}}{\vartheta_{l'o}^{(1)}} = \Theta \quad (13)$$

As was shown in the afore-said, Θ used to be

$$\Theta = \frac{23^\circ}{47^\circ} \dots \frac{33^\circ}{37^\circ} = 0,49 \dots 0,89$$

(Its magnitude will not greatly influence the calculation.)

Formulae (8.2) and (9.2) substituted into relation (7.1), and the former notations made use of, leads to

$$\vartheta_{l'o}^{(1)} + \vartheta_{o'l}^{(1)} \geq \vartheta_{l'o}^{(1)} \left[\frac{\varkappa + 1 - \xi}{\varkappa + 1} \right]^{0,8} + \vartheta_{o'l}^{(1)} [1 + \eta]^{0,8} \quad (7.2)$$

that is

$$1 + \Theta \geq \left[1 - \frac{\xi}{\kappa + 1} \right]^{0,8} + \Theta [1 + \eta]^{0,8} \quad (7.3)$$

Within limits occurring in practical calculation the value of ξ as well as of η is low relative to l , so that raising to a power is simplified

$$1 + \Theta \geq 1 - 0,8 \frac{\xi}{\kappa + 1} + \Theta + 0,8 \Theta \eta \quad (7.4)$$

$$\xi \geq (1 + \kappa) \Theta \eta = A \cdot \eta \quad (14)$$

With definitions (11) and (12)

$$\xi = 1 - \frac{1}{3} (a^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geq A \cdot \eta = A (a^2 - 1) \quad (15)$$

whence is obtained what relationships have to subsist among relative values furnished by three ammeter readings, if it is stipulated that the temperature of the hottest winding shall not exceed the value permissible in normal operation

$$a^2 + \frac{1}{1 + 3A} (\beta^2 + \gamma^2) \leq \frac{3(1 + A)}{1 + 3A} \quad (16.1)$$

Or in a form more suitable for calculation

$$(1 - a^2) + \frac{(1 - \beta^2) + (1 - \gamma^2)}{1 + 3A} \geq 0 \quad (16.2)$$

Or with the values directly read off

$$(I^2 - I_a^2) + \frac{2I^2 - (I_b^2 + I_c^2)}{1 + 3A} \geq 0 \quad (17.1)$$

Herein

$$A = (1 + \kappa) \Theta = \left(1 + \frac{W_{fe}^{(1)}}{W_{cu}^{(1)}} \mid \frac{\vartheta_{ot}^{(1)}}{\vartheta_{to}^{(1)}} \right) \quad (18)$$

A is easily determinable for any given transformer on the basis of the designer's data. It has been pointed out in the foregoing that the results obtained are not affected too much even by the variation of Θ and of κ within very wide limits; the same refers, of course, to A as well. Even in an extreme case in terms of amperes an error limit of 5% will not be exceeded if medium values

of $\Theta = 0,64$ and $\varkappa \approx 0,25$ are reckoned with, from which results that $A \approx 0,8$, further (by rounding off)

$$a^2 + 0,3(\beta^2 + \gamma^2) \leq 1,6 \quad (16.3)$$

that is

$$I_a^2 + 0,3(I_b^2 + I_c^2) \leq 1,6 I^2 \quad (17.2)$$

The practicable procedure will be that the utilizer, or the staff of the Load Dispatcher Center, will substitute the amperes found by three ammeter readings into the above formula to find whether the limit is observed.

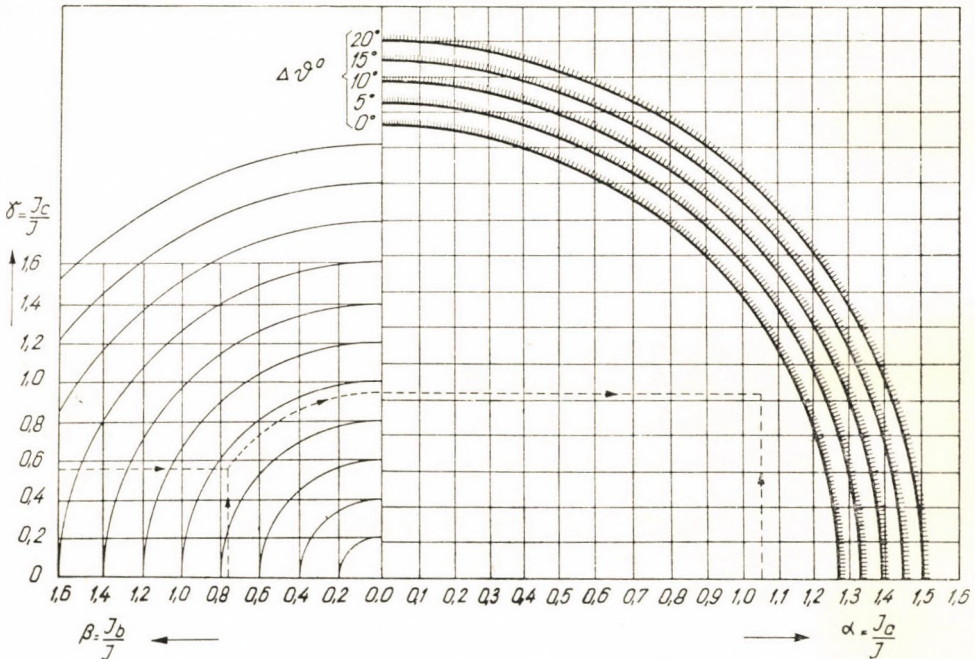


Fig. 1

The problem may be put also thus; in the case of the magnitudes of the two lower values I_b and I_c (or of β and γ) taken for given, how high at most may be the maximum value of I_a (or of a).

The manipulation may be facilitated by the diagram in Fig. 1 drawn after relationship (16.3). This is plotted by laying off on the two axes of the coordinate system the magnitudes of $\sqrt{0,3} \beta$ and $\sqrt{0,3} \gamma$, but writing the corresponding values of β and γ to the points thus obtained. The scale of a is normal. By the projection system shown in the Figure it is checked whether in case of given values of β , γ and a the point obtained lies within the circle of $\sqrt{1,6}$ radius (marked $\Delta \vartheta = 0^\circ$).

2.2. If overheating is also permitted

In the foregoing start has been made from the condition that, in the case of asymmetrical loading the overheating of the heaviest-loaded phase shall not be above the normally permitted value of 70° C. This is expressed by formulae (7.1)—(7.4).

If, however, such an asymmetrical loading occurs only seldom for a comparatively short period — for instance in the case of “two-phase operation” for one-two days within long periods of time —, a higher degree of overheating of the transformer coils may be thought permissible, because the life expectancy of the transformer will not be too much reduced by it. The rule is known that if a cellulose-base material (cotton, paper) is used for transformer insulation, the life expectancy of the transformer is halved for the duration of each rise of the temperature of the winding by 8° C. If, for instance, instead of 70°, 78° or 86° overheating is permitted for one day, the life expectancy of the overloaded transformer will be reduced by two days, or by 4 days respectively, which is not too harmful, if it takes place under extraordinary circumstances, that is, seldom only.

It has to be considered, moreover, that the ambient temperature against which the said rise by 70° has been fixed, is to be taken for 35° according to the Standards, but is in the by far major part of the year in reality much lower. It may be demonstrated [5] that at lower temperature, between 35° and 15°, the transformer may be overloaded against the rating by 1% for each degree of that difference, between 15° and 0° by 1/2% for each degree, without that the winding exceeds the total specified mean temperature of 105° C.

Return is to be made to the afore-raised question. Suppose with regard to the short duration it is permitted that the heaviest-loaded winding be overheated by the value of 70° + Δθ. Then equation (17.1) is modified in the following way :

$$\vartheta_{t_0}^{(2)} + \vartheta_{ot}^{(2)} \leq \vartheta_{t_0}^{(1)} + \vartheta_{ot}^{(1)} + \Delta \vartheta \quad (19)$$

Accordingly, on the left side of (7.3) and (7.4), instead of $1 + \Theta$, $1 + \Theta + \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta_{t_0}^{(1)}}$ will stand, and instead of equation (14) a relation between the new values of ξ_t and η_t

$$\xi_t \geq (1 + \varkappa) \left(\Theta \cdot \eta_t - \frac{1}{0,8} \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta_{t_0}^{(1)}} \right) = A \eta_t - B \quad (20)$$

will subsist where

$$B = 1,25 (1 + \varkappa) \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta_{t_0}^{(1)}} \quad (21)$$

On the other hand, instead of relationship (15) among the relative current magnitudes $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ corresponding to the permissible overloading the following may be written

$$\xi_t = 1 - \frac{1}{3}(\alpha_t^2 + \beta_t^2 + \gamma_t^2) \geq A \eta_t - B = A(\alpha_t^2 - 1) - B \quad (22)$$

whence (for instance, instead of the former (16.1))

$$\alpha_t^2 + \frac{1}{1 + 3A}(\beta_t^2 + \gamma_t^2) \leq \frac{3(1 + A + B)}{1 + 3A} \quad (23.1)$$

If again $A \approx 0,8$, $\kappa \approx 0,25$, $\vartheta_{10}^{(1)} \approx 42,5^\circ$ mean values are taken, then in case of the allowed excess temperature rises of

$$\Delta \vartheta = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$$

$$B = 0,18, 0,37, 0,55, 0,74$$

are obtained and with these the right side of (23.1) will be

$$1,75, 1,92, 2,08, 2,24$$

These figures are at the value of 1,6 corresponding to $\Delta \vartheta = 0^\circ$ higher by

10, 20, 30, 40% in round figures, that is by $(2 \Delta \vartheta^\circ)\%$ and can be easily memorized.

In Fig. 1 have been drawn also the circles whose radii are equal to the square roots of these figures. In case of the permitted excess temperature $\Delta \vartheta$, the points obtained by the given construction method, starting from values $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ have to be located within these circles.

Besides the limitation of the temperature of the winding, however, another limit has to be considered: the temperature of the hottest layer of oil according to the Standards must not be higher than 95°C . At 35° ambient temperature this corresponds to a permissible temperature rise of 60°C . In asymmetrical operation, when the temperature of the winding does not exceed the specified value, there is no danger. From the deduced formula is namely evident that copper rise $\vartheta_{ot}^{(2)}$ grows in a way that simultaneously the oil rise $\vartheta_{10}^{(2)}$ decreases, because the sum of both is constant. If, however, instead of α, β, γ load factors $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ are permitted, the temperature rise $\Delta \vartheta$ will be divided between the two. In that case the oil temperature may be permitted to rise temporarily above the specified limit, but for the prevention of a higher degree of sludging (formation of tarry compounds) it is not advisable to let it exceed 105° for long.

The following approximate calculation shows that at a temperature rise of $\Delta \vartheta = 20^\circ$ the maximum temperature of the oil still remains within this

limit. The minimum value of ϑ_{ot} is normally 23° . In case of overloading it is proportional to the 1,6 power of σ_t . In case of $\Delta\vartheta = 20^\circ$, α_t is minimally 1,2. According to the afore-supposed, namely, α_t is greater than β and γ , if in the extreme case all three are taken for equal, then on the basis of (23.1),

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{2,24}{(1 + 0,3 \cdot 2)}} \approx 1,2. \text{ Thus the minimal increase of } \vartheta_{ct} \text{ is } 1,2^{1,6} = 1,34\text{-fold,}$$

that is, instead of $23^\circ, 31^\circ$. Since ϑ_{lo} and ϑ_{ot} increase together by 20° , ϑ_{lo} may be at most $47^\circ + 12^\circ = 59^\circ$. This is the mean temperature rise of oil. According to measurements, the mean value is about 85% of the maximum oil rise, that is, 70° in the calculation at hand. Together with 35° ambient temperature the oil temperature in the top layer will result in 105° in that most unfavourable case.

It requires reflection whether in calculations within relatively wide limits the simplified method of raising to a power applied is still permissible, which gives fair approximation only for figures not far from 1. The results may be accepted, because higher precision than that of 1–2 degrees is not aimed at. It has been expounded that from the standpoint of service life of the transformer an overheating by a few degrees of short duration cannot be of importance.

On the basis of the same consideration it has been disregarded in the calculations that with the temperature of coils their resistance and loss also vary in a slight degree. This slight inaccuracy does not affect appreciably the results attained, because it is compensated in the three phases. According to estimate as regards currents, it can cause a change of 2–3% only, which falls into the order of magnitude of the precision of the measurement.

3. Power available for the consumer with consideration of the limitation of temperature rise

3.1 General

Thus far it has been aimed at to elaborate a simple, handy yardstick for checking the heating of three-phase transformers in asymmetrical operation. It has been supposed that as data of measurement only three ammeter readings are at hand. This goal has been reached, and for sake of completeness light will be thrown on the problem from another side. The afore-said have only presented loading conditions of the transformer in service, but have not given a full picture of what would be the output available for consumers, mostly power loads, tied up to the system. To approach this the results thus far deduced will be transcribed in the form of the method of *symmetric components*. Since the basic train of thoughts on temperature rise is the same, deductions will not be repeated in detail, but after writing down the principles of start, reference will be made to the former calculation method and the results will be expounded.

In the estimate of available output the leading consideration is that asymmetry presents itself in general, only in currents, the voltage vector diagram is in general distorted to such a slight extent that it may be taken as of positive sequence.* This way, since only products of voltage and of current components of identical sequence contribute to output, the decrease of power output in relation to normal operation will be of the same degree as the positive sequence current decreases in asymmetrical operation. Losses of the two other components, the braking effect presenting itself in torque and the variation of power factor will be disregarded for the sake of simplicity.

Besides those already made use of, the following symbols will be applied :

I_1, I_2, I_0	Positive, negative and zero-sequence current components ;
$i_2 = \frac{I_2}{I_1}, i_0 = \frac{I_0}{I_1}$	Relative magnitude of the latter against the positive-sequence current ; (if $i_0 = 0$, i_2 is the so-called coefficient of asymmetry) ;
$k = \frac{I_1}{I}$	Reduction factor showing how many times the positive-sequence component is smaller than the nominal current ;
δ_2, δ_0	Phase shift of the positive-sequence current against that of negative- or of zero-sequence in phase a ;
$a = e^{j120^\circ}$	$a^2 = e^{j240^\circ}, a^3 = 1$; in general $a^n = a^{n-3}$ and on the basis of the afore-said $1 + a + a^2 = 0$.

*

The total copper loss is in asymmetrical operation

$$W_{cu}^{(2)} = R [I_a^2 + I_b^2 + I_c^2] \quad (24.1)$$

This is according to the relationship found in literature [10]

$$W_{cu}^{(2)} = 3 R (I_1^2 + I_2^2 + I_0^2) \quad (24.2)$$

which is a very simple and interesting relationship. It signifies that from the standpoint of heating the individual symmetrical components act *independently of one another* on the *entire* winding, because only squares of their effective values are summed up. Of course, windings of the individual phases considered separately, this is not the case, as will be discussed more in detail in the following, for phase a for example.

Since

$$\frac{I_2}{I} = \frac{I_1}{I} \cdot \frac{I_2}{I_1} = k \cdot i_2 \quad (25.1)$$

* For this see also 4.3 of Annex.

and

$$\frac{I_0}{I} = \frac{I_1}{I} \cdot \frac{I_0}{I_1} = k \cdot i_0 \quad (25.2)$$

$$\frac{W_{cu}^{(2)}}{W_{cu}^{(1)}} = \frac{I_1^2 + I_2^2 + I_0^2}{I^2} = k^2 (1 + i_2^2 + i_0^2) \quad (24.3)$$

The copper loss of the supposedly heaviest-loaded *a* phase

$$W_{cua}^{(2)} = R I_a^2 = R (I_1 + I_2 + I_0)^2 \quad (26.1)$$

If the phase-positions of positive-, negative- and zero-sequence components in relation to one another were considered, a very complicated and not clear expression would be obtained. Since the hottest phase is examined, no great error is committed; on the other hand, the problem will be much simplified, if the most unfavourable case is taken, when in this phase the three symmetrical components are added together not geometrically but algebraically, that is, fall into a straight line and are of the same sense. Of three phases *one* will always be near that state. As supposed, this is phase *a* ($\delta_2 = \delta_0 = 0$).

Then

$$W_{cua}^{(2)} = R (I_1 + I_2 + I_0)^2 \quad (26.2)$$

and using (25.1) and (25.2)

$$\frac{W_{cua}^{(2)}}{W_{cua}^{(1)}} = \left(\frac{I_1 + I_2 + I_0}{I} \right)^2 = k^2 (1 + i_2 + i_0)^2 \quad (26.3)$$

If expressions (24.3) and (26.3) are substituted into (8.1) and (9.1), following the afore-expounded order of ideas, is obtained:

$$k \leq \sqrt{\frac{1 + A}{(1 + i_2^2 + i_0^2) + A(1 + i_2 + i_0)^2}} \quad (27.1)$$

According to former definitions, *k* is the reduction factor indicating how many times the positive-sequence component has to be inferior to the nominal current so that the hottest phase shall not exceed the normally permissible temperature.

According to formula (27.1), the magnitude of factor *k* can be taken with value $A \approx 0,8$ from Fig. 2, as function of i_2 and i_0 .

(Curves pertaining to parameters $k = \text{const}$ are ellipses, their common centre is point $i_2 = i_0 = -\frac{A}{2A+1}$; their minor axis makes an angle of 45° with axis i_0 .)

If there exists no component of zero order ($i_0 = 0$), factor k is given by Fig. 3. As manifest, at values of i_2 between 0 and 1, k can be replaced with practically fair approximation by straight line

$$k \approx 1 - \frac{A}{A+1} i_2 \approx 1 - 0,44 i_2 .$$

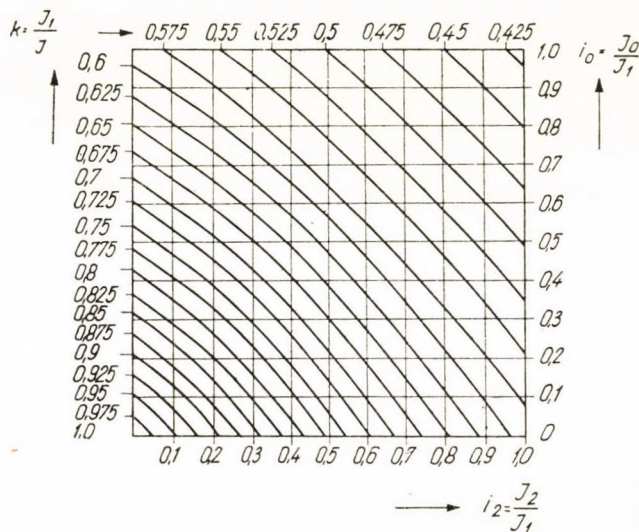


Fig. 2

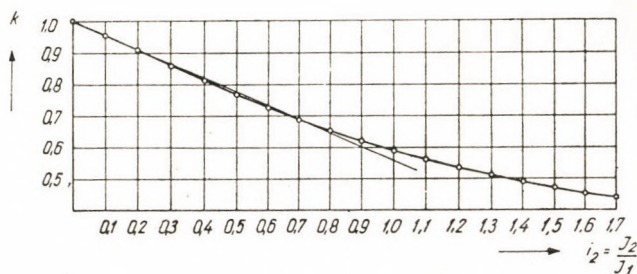


Fig. 3

If according to 2.2 the overheating of the hottest phase by $\Delta \vartheta^\circ \text{C}$ is also permitted, this factor (which may now be possibly greater than 1)

$$k_t \leq \sqrt{\frac{1 + A + B}{(1 + i_2^2 + i_0^2) + A(1 + i_2 + i_0)^2}} \quad (27.2)$$

Similarly to what has been expounded in chapter 2.2, in case of

$$\Delta \vartheta = 5^{\circ}, 10^{\circ}, 15^{\circ}, 20^{\circ}$$

k_i^2 may be greater than k^2 by $(2 \Delta \vartheta^{\circ})\%$, that is, by 10, 20, 30, 40%.

The difference of ambient temperature against 35°C as specified, may be considered as under 2.2.

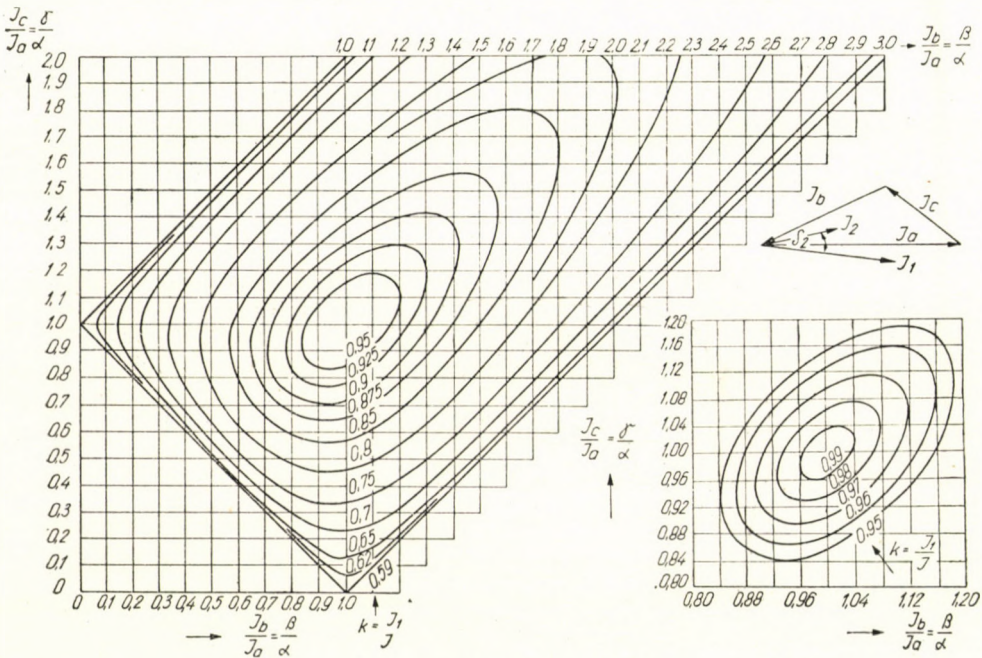


Fig. 4

3.2. If there are only positive- and negative-sequence components

This is the case of three-wire systems or of three phase systems with isolated neutral. In other systems it may be supposed too, but this is to be established by a special measurement.

In the above symmetrical components have been supposed as determined. There are different known devices for their measurement. In general such are not supposed to be available at the transformer examined.

In case there exists no zero-sequence component, but there are only positive- and negative-sequence components, that is, the vectors of the three phase currents form a closed triangle, on the basis of diagrams found in literature [6] from ratio numbers computed from the three phase currents $\frac{I_b}{I_a}$ and $\frac{I_c}{I_a}$, the coefficient of asymmetry i_2 can be computed (See Fig. 6).

The diagram in Fig. 4 drawn by the author gives coefficient k directly as function of these ratio numbers. (The permissible value of k_t is $\sqrt{1,1}$, $\sqrt{1,2}$, $\sqrt{1,3}$, $\sqrt{1,4}$ -times that, if copper temperatures by $\Delta \vartheta = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ higher are tolerated.)

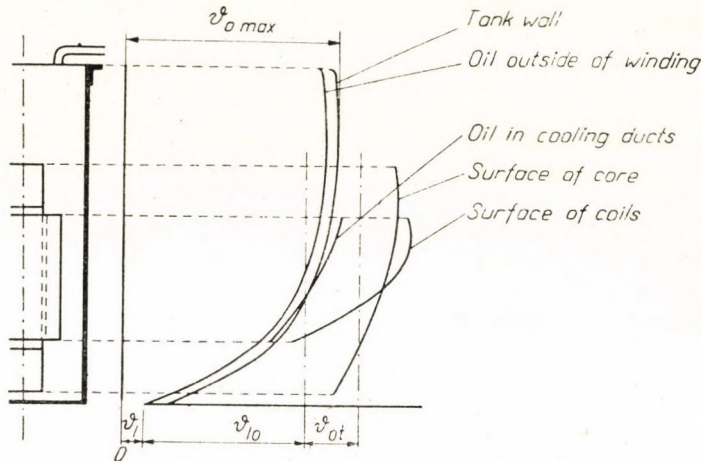


Fig. 5

3.3. If there is a zero-sequence component too

In this case ampere readings of the three phase currents are not sufficient to establish these conditions, not even if complemented by a zero-sequence component measurement.

If the special measuring equipment has to be dispensed with, the following substantially simpler method can be applied starting by seeking the most unfavourable conditions.

Formula (27.1) can be written with omission of symbol $<$ in the following way

$$k^2 \{ (1 + i_2^2 + i_0^2) + A (1 + i_2 + i_0)^2 \} = 1 + A = \text{const.} \quad (29)$$

(On the left side stands the sum of members proportional to the heat quantities produced by the "mean" phase current and I_a the maximum phase current.)

If the cases are compared in which the degree of asymmetry is the same in relation to the positive-sequence component, that is if sum $i = (i_2 + i_0)$ is invariable, then the first of the two members in the braces is the largest if either $i_0 = 0$ and $i_2 = i$, or $i_2 = 0$ and $i_0 = i$.

Therefore of different ratios $1 : i_2 : i_0$ this is the case in which the sum in braces is the largest so that the greatest reduction is necessary, because thereby k becomes minimum.

This limit value of k can be determined easily, if it is supposed that the case is the most unfavourable one, that there exists only a single component causing asymmetry (either only i_2 or only i_0).

Since i_2 and i_0 figure symmetrically in the formulae, it may be supposed that $i_0 = 0$, whereby the solution of the problem has been traced back to the method treated in the previous chapter: 3.2.

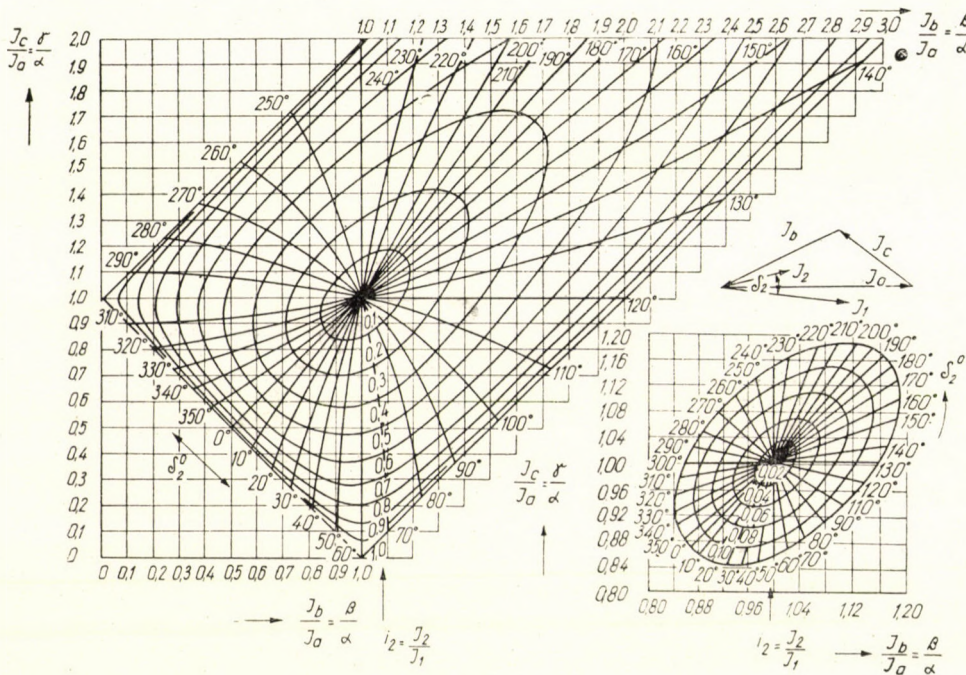


Fig. 6

Independently of whether there exists a zero-sequence component or not, from three ammeter readings ratios $\frac{I_b}{I_a}, \frac{I_c}{I_a}$ are computed, and coefficient k is taken from Fig. 4.

If $i_0 \neq 0$, the value of k determined in the above way is lower than that obtained by exact calculation, the deviation is therefore conservative.

(In case of admission of excess overheating the procedure described under 3.1 may be applied to coefficient k_t instead of k .)

4. Annex

4.1. Remarks on the calculation of temperature rise

Temperature distribution in a transformer is sketched in Fig. 5 [7].

It shows that oil temperatures outside of the windings and in oil ducts in the windings hardly differ from each other. (A condition of this is that the ducts be of sufficient width, more

than 4—5 mm wide.) It can be ascertained, moreover, that the difference between the oil temperatures mentioned and of the temperature of the tank wall is also very slight. All three temperatures have been taken for equal.

In practical calculation not the temperatures varying all up the height of the tank, but *mean* temperatures are reckoned with; these are shown in the sketch, and these values are used in deduction. According to experience, in normal operation, temperature rises in transformers are satisfactorily predictable by the method applied.

4.2. Y—Y connection with delta (tertiary) winding

In these deductions two-winding transformers have thus far been treated. In the connection to be dealt with next the back ampere turns of the primary star winding are jointly supplied by the secondary star and delta windings, in a way that in the former positive- and negative-sequence, in the latter only the zero-sequence components are circulating.

Data on the primary, secondary and tertiary windings will be subscripted by I, II, and III, respectively, all converted to the primary side. Resistance will be R_I , R_{II} , currents I_{aI} , I_{aII} , I_{aIII} , I_{bI} etc. and the values of the latter divided by the (primary) nominal current a_I , a_{II} , a_{III} , β_I etc. Then the formerly deduced values may be used in a way that, for instance, the limitations contained in formulae (16.1) — (16.3) are referred instead of $\alpha^2 t \delta$

$$\left\{ \frac{R_I}{R_I + R_{II}} \alpha_I^2 + \frac{R_{II}}{R_I + R_{II}} \alpha_{II}^2 + \frac{R_{III}}{R_I + R_{II}} \alpha_{III}^2 \right\}$$

Similar expressions hold for β^2 and γ^2 .

Measurement of currents I_I and I_{II} can be executed simply by instruments tied up into the line of windings, the zero-sequence component $I_{III} \equiv I_0$ is measured by equipment connected into the primary neutral, or tied into the delta.

From relation (24.2) it was evident that the symmetrical components are entirely independent of one another as regards heating, that is, it does not matter over what number of windings they are distributed. Therefore it is easy to transform formulae relative to coefficient k to this case as well. The deduction remains correct if (for instance in formula [27.1])

instead of R resistance ($R_I + R_{II}$)

is written, and besides this in equations, or curves plotted, not the actual values I_0^2 (or i_0^2) but their corrected values multiplied by

$$\left\{ \frac{R_I + R_{III}}{R_I + R_{II}} \right\} \text{ are used.}$$

However, the simplified method described under (3.2) cannot be applied. Evaluation is, on the other hand, facilitated by the circumstance that in the case of the connection dealt with, symmetrical components can be simply determined: the zero-sequence component has already been treated, and i_2 can be determined with the aid of Fig. 6 [6] from secondary currents, which contain already only positive- and negative-sequence components.

4.3 Explanation that high current-asymmetry is possible even in the case of slight voltage asymmetry

In Chapter 3 in the calculation of available power it has been supposed that the voltage asymmetry is so slight that the voltage vectors may be taken practically as of positive sequence. Experience shows, however, that the asymmetry of currents may be very high.

A very extended network will be supposed, fed by more than one generating stations and each feeder supplies a certain consuming district. The generating stations supply only positive-sequence voltage, and the positive-sequence current is distributed according to the magnitudes of consumer impedances in the various branches of the network. In tie-lines between two such consumer districts as are supplied roughly by two of the different generating stations, only smaller positive-sequence currents will be flowing, and these also only because the consuming districts are not sharply separated, and to supply one customer or another the farther-situated generating station may also contribute to some extent.

This will not be the case with negative- (and may be with zero-) sequence components causing asymmetry. As known, the *source of current* of these is the "place of the fault", for instance the interruption of one conductor in two phase operation, or the point where a single phase consumer is tied up to the system. Voltage asymmetry caused by these may be very slight.

Since, however, impedances of all consumers of the entire network against negative- and zero-sequence currents are balanced, and numerous impedances are tied up in parallel to this same source of current, the resultant asymmetrical component may be very great at the spot of the fault or near the supply to the single phase consumer, and with growing distance from it decreases at the same rate as consumers taking asymmetrical currents are supplied by the various distribution lines. To the increase of the asymmetrical components contributes still the circumstance that the value of negative sequence reactances is small in relation to those of positive sequence.

This way the network will have parts where — in spite of the small voltage asymmetry — the positive sequence current component is small, but the negative- (and may be zero-)sequence component is large, and thus the current asymmetry is considerable.

REFERENCES

1. L. E. NIEBART and V. N. YASNIKOV: Operation of 115 kV transmission lines fitted with circuit breakers opening phasewise and with automatic single phase reclosing. *Electri-cheskie Stantsii*, 1949., No. 6. pp. 20—28. (Russian)
2. DR. M. VAJTA: New mode of operation of high voltage transmission lines in the Soviet Union. *Elektrotechnika* October 1950 (Hungarian).
3. Electric Power Research Institute (formerly VKB) Paper No. 15., 1952: "Phasewise Repair of Transmission Lines" Part I. (Hungarian).
4. Idem No. 26., August, 1953, Part II.
5. P. IGNÁČZ: Selected Chapters on Specific Transformer Problems. Lecture Notes, Technical University, Budapest, 1951—52. (Hungarian).
6. WAGNER and EVANS: *Symmetrical Components*. Mc Graw Hill 1933, p. 269.
7. KÜCHLER: Vorausbestimmung der stationären Erwärmung bei Transformatoren. *ETZ*. 1923. P. 54.
8. R. TUSCHÁK: Load capacity of asynchronous motors connected to asymmetrical 3-phase voltage, *Elektrotechnika*, January 1953 (Hungarian).
9. M. VAJTA: Network problems of the 50-cycle single-phase main line railway system. *Transactions of the Hungarian Academy of Sc.*, 1953, Vol. VIII., No. 2.
10. O. G. C. DAHL: *Electric Circuits Theory and Application* Vol. I. Mc Graw Hill 1928.

SUMMARY

The paper yields a method of determination of phase currents I_a, I_b, I_c on the basis of ammeter readings without the necessity of inserting a more intricate measuring equipment, or of making lengthy calculations.

The condition is that the temperature of the hottest phase shall not exceed the temperature permissible in nominal symmetrical operation. This is satisfied if

$$1,6 \geq \left(\frac{I_a}{I}\right)^2 + 0,3 \left[\left(\frac{I_b}{I}\right)^2 + \left(\frac{I_c}{I}\right)^2 \right], \quad (1)$$

where I is the nominal current.

If I_1, I_2, I_0 are symmetrical components, so the necessary degree of reduction of the power output is

$$k^2 = \left(\frac{I_1}{I}\right)^2 = \frac{1,8}{\left[1 + \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 + \left(\frac{I_0}{I_1}\right)^2\right] + 0,8 \left(1 + \frac{I_2}{I_1} + \frac{I_0}{I_1}\right)^2} \quad (2)$$

If, on the other hand, in asymmetrical operation (for a short time) an excess overheating of 5°, 10°, 15°, 20° C is permitted, the value of the right side of both equations (1) and (2) may be increased by 10%, 20%, 30%, 40%. A further increase is possible if the ambient temperature is below 35° C, that is, between temperatures of 35° ... 15° for each degree: 2%, and between temperatures of 15° ... 0° for each degree: 1%.

The use of formula (1) is facilitated by Fig. 1. To relation (2) belongs Fig. 4 from which k can be determined.

The generally obtained result is that a relatively high asymmetry is permissible, and the asymmetrical loading does not place an appreciable limitation on the supply of the full available power by the transformer.

DIE BELASTBARKEIT VON TRANSFORMATOREN BEI SCHIEFLAST

P. IGNÁ CZ

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz liefert eine Methode zur Bestimmung der Belastbarkeit auf Grund der Ableitung der Phasenströme I_a, I_b, I_c am Strommesser, ohne dass der Einbau von verwickelten Messeinrichtungen oder weitschweifiges Rechnen notwendig wäre.

Die Bedingung ist, dass nicht einmal die Temperatur der Wicklung der heissesten Phase höher sein darf als die im nominellen symmetrischen Betrieb zugelassene Temperatur. Diese wird erfüllt wenn

$$1,6 \geq \left(\frac{I_a}{I}\right)^2 + 0,3 \left[\left(\frac{I_b}{I}\right)^2 + \left(\frac{I_c}{I}\right)^2 \right] \quad (1)$$

wo I der Nennstrom ist.

Wenn I_1, I_2, I_0 die symmetrischen Stromkomponenten sind, so ist das Mass der erwünschten Abnahme der Nutzleistung

$$k^2 = \left(\frac{I_1}{I}\right)^2 = \frac{1,8}{\left[1 + \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 + \left(\frac{I_0}{I_1}\right)^2 \right] + 0,8 \left(\frac{I_2}{I_1} + \frac{I_0}{I_1} \right)^2} \quad (2)$$

Wenn hingegen in asymmetrischem Betrieb (auf kurze Zeit) zusätzliche Erwärmungen von $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ zugelassen werden, so ist der Wert der rechten Seite sowohl von [1] wie von [2] um 10%, 20%, 30%, 40% erhöhbar. Eine weitere Erhöhung ist möglich, wenn die Aussentemperatur niedriger als 35°C ist, namentlich zwischen Temperaturen von $35^\circ \dots 15^\circ$ um 2% je Grad und bei Temperaturen von $25^\circ \dots 0^\circ$ um 1% je Grad.

Der Gebrauch von Formel (1) wird durch Abb. 1 erleichtert. Zur Beziehung (2) gehört Fig. 4, womit k bestimmbar wird. Es ergibt sich in allgemeinem, dass es zulässig ist, dass die Asymmetrie verhältnismässig gross sei und dass die schiefe Belastung aus dem Standpunkte der Abgabe der vollen Nutz-Nennleistung keine nennenswerte Begrenzung bedeutet.

LA CAPACITÉ DE CHARGE DES TRANSFORMATEURS EN OPÉRATION ASYMÉTRIQUE

P. IGNÁ CZ

RÉSUMÉ

L'étude donne une méthode pour la détermination de la capacité de charge, à la base de la lecture des intensités des courants des trois phases I_a, I_b, I_c , sur l'ampèremètre, sans nécessiter l'installation d'un appareillage de mesure compliqué ou des calculs fastidieux.

La condition est que même la température du bobinage de la phase la plus chaude ne dépasse pas celle permise en opération nominale symétrique. Cette condition est satisfaite si

$$1,6 \geq \left(\frac{I_a}{I}\right)^2 + 0,3 \left[\left(\frac{I_b}{I}\right)^2 + \left(\frac{I_c}{I}\right)^2 \right] \quad (1)$$

où I est le courant nominal.

Si I_1, I_2, I_0 sont les composants symétriques des courants, alors la mesure de la réduction voulue de la puissance utile est :

$$k^2 = \left(\frac{I_1}{I}\right)^2 = \frac{1,8}{\left[1 + \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 + \left(\frac{I_0}{I_1}\right)^2\right] + 0,8 \left(1 + \frac{I_2}{I_1} + \frac{I_0}{I_1}\right)^2} \quad (2)$$

Si d'autre part on permet dans l'opération asymétrique (pour un temps court) un excès d'élévation de température de 5°, 10°, 15°, 20°, alors la valeur du côté gauche de l'équation (1) aussi bien que de l'équation (2) peut être augmentée de 10%, 20%, 30%, 40%. Une autre augmentation est possible si la température extérieure est inférieure à 35° C, notamment de 2% par degré entre les températures de 35° et 15°, et de 1% par degré entre les températures de 15°, et 0°.

L'emploi de la formule (1) est facilité par la fig. 1. Le rapport (2) correspond à la fig. 4, d'où k peut être déterminé.

En général, on trouvera qu'il est permis que l'asymétrie soit relativement grande et que la charge non uniforme ne constitue pas une limite notable pour la puissance utile totale à fournir.

НАГРУЖАЕМОСТЬ ТРАНСФОРМАТОРОВ ПРИ АСИММЕТРИЧНОМ РЕЖИМЕ

П. ИГНАЦ

РЕЗЮМЕ

Предлагается метод для определения нагружаемости на основе данных отсчета с амперметров фазовых токов I_a, I_b, I_c , не прибегая к установке более сложных измерительных приборов или к производству требующих много времени расчетов.

Условием ставится то, чтобы температура обмотки наиболее горячей фазы не превышала температуры, допускаемой при номинальном симметричном режиме. Это условие удовлетворено в том случае, если

$$1,6 \geq \left(\frac{I_a}{I}\right)^2 + 0,3 \left[\left(\frac{I_b}{I}\right)^2 + \left(\frac{I_c}{I}\right)^2 \right], \quad (1)$$

где I — номинальный ток.

Если I_1, I_2, I_0 — симметричные слагающие токов, тогда степень желательного снижения полезной мощности будет :

$$k^2 = \left(\frac{I_1}{I}\right)^2 = \frac{1,8}{\left[1 + \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 + \left(\frac{I_0}{I_1}\right)^2\right] + 0,8 \left(1 + \frac{I_2}{I_1} + \frac{I_0}{I_1}\right)^2} \quad (2)$$

Если же при асимметричном режиме (в течение короткого времени) допустить дополнительный нагрев в 5°, 10°, 15°, 20°, тогда значение правой стороны как формулы (1), так и формулы (2) можно увеличить на 10%, 20%, 30%, 40%. Дополнительное увеличение возможно, если внешняя температура ниже 35° C, а именно в интервале температур между 35° и 15° C на каждый градус по 2% и в интервале температур между 15° и 0° C на каждый градус по 1%.

Пользование формулой (1) облегчается применением рис. 1. Для формулы (2) действителен рис. 4, с помощью которого можно определить значение k .

Вообще на основе вышесказанных допустимо, чтобы асимметрия была относительно большой и неравномерная нагрузка в отношении отдачи полной полезной мощности не означает значительного ограничения.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE VERALLGEMEINERUNGEN DER NEWTON—RAPHSONSCHEN WURZEL- APPROXIMATION

II. MITTEILUNG*

A. ZAJTA

AGRARWISSENSCHAFTLICHE UNIVERSITÄT, FAKULTÄT FÜR LANDWIRTSCHAFTLICHES
INGENIEURWESEN, LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, BUDAPEST

[Eingegangen am 19. Oktober 1955]

Einleitung

Auch diese zweite Mitteilung verfolgt dasselbe Ziel wie die erste: Kenntnisse über die formalen Eigenschaften der verschiedensten Verallgemeinerungen der NR-Formel zu einer allgemeinen und umfassenden Theorie zu entwickeln. In dieser Hinsicht mag dem ersten Kapitel ein besonderes Interesse zukommen, da in diesem Kapitel einige, bezüglich der formalen Verhältnisse grundlegend wichtige Sätze bewiesen werden, während in den übrigen Kapiteln die einzelnen speziellen Formelfolgen und die darin vorkommenden Polynome behandelt werden.

Entsprechend einem in der ersten Mitteilung gemachten Versprechen wird die Methode von GORNSTEIN [5] gleich in dem zweiten Kapitel behandelt. Nach einer kurzen Beschreibung der Gornsteinschen Methode werden die Gornsteinschen Formeln von einer anderen Seite ausgehend abgeleitet, und es wird sodann auf Grund des übereinstimmenden strukturellen Aufbaus der Formeln identifiziert. Das wesentlichste Ergebnis des zweiten Kapitels besteht in der Feststellung, dass man mit Hilfe der Gornsteinschen Methode eben zur Kisschen Verallgemeinerung [2] gelangt.

Ausser der von GORNSTEIN und KISS angegebenen Verallgemeinerung der NR-Formel war bis zur Zeit allein die Eulersche Formelfolge bekannt. Es stellte sich jedoch bei der Untersuchung der schon seit lange her bekannten Bernoullischen und Gräffeschen Näherungsmethoden heraus, dass durch entsprechende Umformung der Formeln auch diese für die Zwecke der Iterationsrechnung verwendet werden können. All dies wird im vierten Kapitel erörtert. Auch die Konvergenzgrade dieser beiden neuen Verallgemeinerungen werden in diesem Kapitel bestimmt.

Mit den Definitionen der Polynome und mit ihren Eigenschaften befasst sich das Kapitel 3, während die berechneten expliziten Formen der Polynome im Kapitel 5 erörtert werden. Die hier vorkommenden Polynome können, den

* Die I. Mitteilung wurde in dieser Zeitschrift XV. (1956) 233/260. veröffentlicht.

Gornsteinschen Determinanten gleich, auch in Determinantenform dargestellt werden. Wiewohl auch mit Hilfe der Determinanten die Formeln in einer einfacheren und eleganteren Form angeschrieben werden können und in ihrer Anwendung auch viele theoretische Möglichkeiten verborgen sind, wurde hier aus Zweckmässigkeitsgründen von ihrer Anwendung Abstand genommen, da die numerische Ausrechnung dieser Determinanten — insbesondere der Determinanten höherer Ordnung — immer grössere Schwierigkeiten bereitet. Diese Berechnungsschwierigkeiten werden im Kapitel 5 eliminiert.

In den Kapiteln 6 und 7 werden die für den Fall der mehrfachen Wurzeln durch BODEWIG angegriffenen Untersuchungen [8] fortgesetzt, wobei sie auf alle vier erwähnten Formelfolgen ausgedehnt werden. Es wird im Laufe dieser Untersuchungen die Umformung der Formel bestimmt, deren es bei der Annäherung eine p -fachen Wurzel zur Erhaltung des Konvergenzgrades bedarf.

Hinsichtlich der Bezeichnungen hielten wir uns an unsere erste Mitteilung, es muss daher stets berücksichtigt werden, dass die ohne Argument angeschriebenen Funktionen (sofern sie nicht innerhalb des Textes vorkommen) mit ihren Werten an der Stelle $x = a$ aufgefasst werden müssen, und dass sogar durch a gelegentlich die Rolle einer unabhängigen Veränderlichen erfüllt wird.

1. Allgemeine Sätze über die iterativen Näherungsformeln

Es möge durch $\Phi(x)$ die iterierende Funktion eines iterativen Näherungsverfahrens bezeichnet werden :

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad (1)$$

und es sei bei der Wahl des Anfangswertes $x_1 = a$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \xi. \quad (2)$$

Definition : Alle diejenigen a -Werte, die bei ihrer Wahl als Anfangswerte der durch (1) bestimmten iterativen Progression denselben Grenzwert ξ ergeben, bilden eine Menge : die auf den (von $\Phi(x)$ abhängigen) Grenzwert ξ bezügliche Konvergenzmenge der Funktion $\Phi(x)$.

Die Abhängigkeit des Grenzwertes ξ von der Funktion $\Phi(x)$ offenbart sich darin, dass ξ infolge der Gleichungen (1) und (2) notwendigerweise eine Wurzel der Gleichung

$$F(x) \equiv x - \Phi(x) = 0 \quad (3)$$

darstellt. Durch alle Wurzeln dieser Gl. (3) wird eindeutig je eine Konvergenzmenge bestimmt, obschon es möglich ist, dass einige dieser Mengen ausschliesslich

aus den sie definierenden ξ -Werten bestehen. Eine gegebene Funktion $\Phi(x)$ ergibt somit so viele Konvergenzmengen als die Gl. (3) Wurzeln besitzt.

In dieser unseren Arbeit verfolgen wir nicht das Ziel, das Verhältnis dieser Konvergenzmengen zu studieren, hinsichtlich der weiteren Ausführungen wird es jedoch als wesentlich erachtet, zu bemerken, dass jegliche Behauptung über die Konvergenzeigenschaften einer gegebenen Funktion $\Phi(x)$ in dem engsten Zusammenhange mit dem Grenzwert ξ steht, der als Grundlage der Erkenntnis der betreffenden Behauptung diene, und dass es einer weiteren Untersuchung bedarf, um entscheiden zu können, ob die Behauptung auch in den Konvergenzmengen der übrigen Wurzeln ihre Gültigkeit bewahrt.

Die charakteristischste Konvergenzeigenschaft stellt zweifelsohne der Begriff des Konvergenzgrades dar. Die allgemeine Definition dieses Begriffes verdanken wir BODEWIG [8]. Die Anwendung dieses Begriffes auf die durch Gl. (1) definierte iterative Progression ergibt, dass die iterative Funktion $\Phi(x)$ in dem Falle als konvergent in dem k -ten Grade (bezüglich auf ξ) betrachtet werden kann, wenn ξ eine k -fache Nullstelle der Funktion $(\Phi(x) - \xi)$ darstellt:

$$\Phi(x) - \xi = (x - \xi)^k \cdot \chi(x), \quad (4)$$

wobei ein Grenzwert, c_0 , existiert, der nicht verschwindet:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \chi(x) = c_0 \neq 0.$$

Die Formulierung (4) des Konvergenzgrades wird von BODEWIG nicht angegeben, obgleich er die Vorschrift mitteilt, wie man zu der Formel (4) gelangt. Die Funktion $(\Phi(x) - \xi)$ muss nach den Potenzen von $(x - \xi)$ in eine Reihe entwickelt werden. Beginnt die Reihenentwicklung mit einem den k -ten Exponenten enthaltenden Glied, das heisst, wenn

$$\Phi(x) - \xi = c_0 \cdot (x - \xi)^k + c_1 \cdot (x - \xi)^{k+1} + \dots, \quad (5)$$

o beträgt der Konvergenzgrad von $\Phi(x)$ (bezüglich auf die Annäherung von ξ) k .

Es seien im weiteren zwei iterative Funktionen, $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$, gegeben, die bei geeigneter Wahl der Anfangswerte denselben Grenzwert ξ ergeben. Es sei der Konvergenzgrad der ersten Funktion gleich k_1 , der der zweiten k_2 . Unter diesen Bedingungen gilt der folgende

Satz I.: Der Konvergenzgrad der durch Iteration gewonnenen Funktion $\Phi_1[\Phi_2(x)]$ gleicht $k_1 \cdot k_2$, die Konvergenzgrade multiplizieren sich somit bei der Iteration der zwei Funktionen.

Beweis.

Nach unserer Annahme ist

$$\Phi_1(x) - \xi = (x - \xi)^{k_1} \cdot \chi_1(x), \quad (6)$$

und

$$\Phi_2(x) - \xi = (x - \xi)^{k_2} \cdot \chi_2(x), \quad (7)$$

wobei

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \chi_1(x) = c_{01} \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow \xi} \chi_2(x) = c_{02} \neq 0. \quad (8)$$

Durch die Substitution $x \rightarrow \Phi_2(x)$ in Gl. (6) ergibt sich

$$\Phi_1 \Phi_2(x) - \xi = (\Phi_2(x) - \xi)^{k_1} \cdot \chi_1 \Phi_2(x),$$

und durch Verwendung von (7)

$$\Phi_1 \Phi_2(x) - \xi = (x - \xi)^{k_1 k_2} \cdot \chi_2(x)^{k_1} \cdot \chi_1 \Phi_2(x) = (x - \xi)^{k_1 k_2} \cdot \chi_3(x).$$

Da die Funktion

$$\chi_3(x) = \chi_2(x)^{k_1} \cdot \chi_1 \Phi_2(x)$$

einen für den Grenzübergang $x \rightarrow \xi$ nicht verschwindenden Grenzwert besitzt (vgl. (8)):

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \chi_3(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} \chi_2(x)^{k_1} \cdot \lim_{x \rightarrow \xi} \chi_1 \Phi_2(x) = c_{02}^{k_1} \cdot c_{01} \neq 0,$$

so gilt unser Satz als bewiesen.

Die auf ξ bezügliche Konvergenzmenge der durch Iteration gewonnenen $\Phi_1 \Phi_2(x)$ -Funktion besteht nicht einfach aus dem gemeinsamen Teil (aus dem Durchschnitt) der entsprechenden Mengen von $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$; allerdings enthält sie jedoch diejenigen a -Elemente dieses gemeinsamen Teiles, mit denen zusammen auch das mit ihnen gebildete $\Phi_2(a)$ ein Glied dieses gemeinsamen Teiles darstellt. Es versteht sich von selbst, dass insofern die auf ξ bezüglichen Konvergenzmengen von $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$ identisch sind, so sind sie auch mit der entsprechenden Menge von $\Phi_1 \Phi_2(x)$ identisch.

Satz I kann leicht auf beliebig viele Näherungsfunktionen $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ verallgemeinert werden, vorausgesetzt, dass im Falle eines geeigneten Anfangswertes die durch sie gewonnenen Zahlenfolgen gegen denselben ξ konvergieren. Beträgt der Konvergenzgrad von $\Phi_i(x)$ k_i , so ist der Konvergenzgrad der auf iterativem Wege gewonnenen Funktion $\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n(x)$ gleich $\prod_i k_i$. Sind alle Funktionen Φ_i einander gleich, so ist $k_i = k$, und der Konvergenzgrad der n -ten Iterierten (${}^n\Phi(x)$) der Funktion $\Phi_i = \Phi$ beträgt offenbar k^n . Dieser Satz wurde schon in der Arbeit von LUDWIG [4] erwähnt, doch wurde der Satz nur für einige niedrigere Werte von k und n bewiesen.

Infolge der Gl. (3) erweist sich die folgende Zerlegung von $\Phi(x)$ als zweckmässig:

$$\Phi(x) = x - F(x),$$

wo wir über $F(x)$ einstweilen nur soviel wissen, dass ξ eine Nullstelle dieser Funktion darstellt, d. h.

$$F(x) = (x - \xi)^p \cdot G(x) \quad (p > 0)$$

Ist der Konvergenzgrad von $\Phi(x)$ grösser als 1, so folgt unter Berücksichtigung von (4), dass $p = 1$. In der Folge werden nur solche Fälle behandelt, wo diese Bedingung ($p = 1$) erfüllt wird, wo daher

$$F(x) = (x - \xi) \cdot G(x). \quad (9)$$

Die iterativen Näherungsmethoden verfolgen immer das praktische Ziel der Lösung irgendeiner Gleichung :

$$f(x) = 0. \quad (10)$$

Die Methode, durch welche wir aus der Gl. (10) zu der Aufstellung einer zu iterativen Zwecken geeigneten Näherungsformel

$$\Phi(x) = x - F(x)$$

gelangen, kann sehr verschiedenartig sein, wir wollen jedoch unsere Untersuchungen allein auf diejenigen Näherungsformeln erstrecken, bei denen die Funktion $F(x)$ die Veränderliche x nur implizite enthält, und zwar über die Funktion $f(x)$ und über ihre Ableitungen. All diese Formeln wollen wir zusammenfassend als Näherungsformeln vom Newtonschen Typ bezeichnen. In der vorliegenden Arbeit werden lediglich Näherungsformeln von diesem Typ behandelt.

Wenn die anzunähernde Wurzel der Gleichung (10) eine mehrfache Wurzel darstellt, so wird durch die Näherungsformeln, die für den Fall einer einfachen Wurzel eine Konvergenz k -ten Grades sichern, lediglich eine einfache Konvergenz geboten. Um die Konvergenz k -ten Grades zu bewahren, bedarf es einer gewissen Modifizierung der Formeln. Diese Modifizierung besteht darin, dass — insofern die anzunähernde Wurzel eine p -fache Wurzel darstellt —, d. h.

$$f(x) = (x - \xi)^p \cdot g(x), \quad (p > 1) \quad (11)$$

an die Stelle von f in den Formeln überall $\sqrt[p]{f}$ substituiert wird (vgl. Kap. 6). Da diese Modifizierung gegebenenfalls immer durchgeführt werden kann, so wird in der Folge immer vorausgesetzt, dass die anzunähernde Wurzel eine einfache Wurzel darstellt, in der (11) ist mithin $p = 1$.

Im Falle einer einfachen Wurzel wird ξ gewiss keine Nullstelle der ersten Ableitung und im allgemeinen auch keine Nullstelle der übrigen Ableitungen darstellen. Obschon spezielle Funktionen konstruiert werden können, deren höhere Ableitungen den Wurzelfaktor $(x - \xi)$ als Teiler enthalten, ohne das

Funktionszeichen aufzulösen, ist eine Vereinfachung zwischen der Funktion und ihren Ableitungen jedoch auch bei diesen Funktionen unmöglich. Bei der Untersuchung der Näherungsformeln vom Newtonschen Typ werden diese speziellen Fälle ausser acht gelassen, und es wird stets vorausgesetzt, dass der Wurzelfaktor $(x - \xi)$ in der Funktion $f(x)$ einfach, in den Ableitungen $f^{(k)}(x)$ hingegen nicht enthalten ist. Aus alledem entsteht das folgende Prinzip: Stellt $\Omega(f)$ einen Ausdruck von $f(x)$ und ihren Ableitungen dar, der ξ , $g(x)$ und deren Ableitungen explizite nicht enthält, und kann er auf folgende Weise dargestellt werden:

$$\Omega(f) = (x - \xi)^k \cdot \omega(x), \quad (12)$$

wo $\lim_{x \rightarrow \xi} \omega(x)$ existiert und nicht verschwindet, oder — im alltäglichen Wortgebrauch — wenn die höchstens k -te Potenz von $(x - \xi)$ in $\Omega(f)$ ohne Rest aufgeht, so ist $\Omega(f)$ auch durch $f(x)^k$ ohne Rest teilbar, das heisst $\Omega(f)$ kann auch in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\Omega(f) = f(x)^k \cdot O(x), \quad (13)$$

wo $\lim_{x \rightarrow \xi} O(x)$ ebenfalls existiert und nicht verschwindet, und $O(x)$ nur durch f und seine Ableitungen eine Funktion von x ist — und auch aus (13) (12) folgt.

Die folgenden Sätze sind Anwendungen dieses Prinzipes. Auch hier, wie im Kapitel 8 der Mitteilung I, wurde es als zweckdienlich gefunden, die der Zahlentheorie entlehnte Kongruenz-Schreibweise zu verwenden, da hierdurch die Ableitungen nicht nur übersichtlicher und einfacher werden, vielmehr können auch die jeweils verschiedentlichen und völlig überflüssigen Hilfsfunktionen vermieden werden (wie sie auch durch $\omega(x)$ und $O(x)$ dargestellt werden).

Satz II.

$$F(x) \equiv 0 \pmod{f(x)}. \quad (14)$$

Dieser Satz folgt aus (9) unmittelbar.

Satz III. Ist der Konvergenzgrad von Φ_1 k_1 und der von Φ_2 $k_2 \geq k_1$, so folgt:

$$\Phi_1 \equiv \Phi_2 \pmod{f^{k_1}}, \quad (15)$$

Beweis: Nach den Voraussetzungen (an Stelle von x wird mit a operiert):

$$\Phi_1 - \xi \equiv 0 \pmod{(a - \xi)^{k_1}},$$

und

$$\Phi_2 - \xi \equiv 0 \pmod{(a - \xi)^{k_2}},$$

oder durch Kombination:

$$\Phi_1 \equiv \Phi_2 \pmod{(a - \xi)^{k_1}},$$

woraus (15) folgt.

Satz IV. Ist der Konvergenzgrad von Φ_1 k_1 , und gilt ferner, dass

$$\Phi_1 \equiv \Phi_2 \pmod{f^k},$$

so ist der Konvergenzgrad von Φ_2

$$\left. \begin{aligned} k_2 &= k_1, \text{ wenn } k_1 < k, \\ k_2 &= k, \text{ wenn } k_1 > k, \\ k_2 &\geq k, \text{ wenn } k_1 = k. \end{aligned} \right\} (16)$$

und schliesslich

Dieser Satz ist die Umkehrung des Satzes III, und auch sein Beweis wird in ähnlicher Weise vorgenommen. Es gilt nach den Voraussetzungen :

$$\begin{array}{l} \Phi_1 - \xi \equiv 0 \pmod{(a - \xi)^{k_1}}, \\ \Phi_1 \equiv \Phi_2 \pmod{(a - \xi)^k}, \\ \hline \Phi_2 - \xi \equiv 0 \pmod{(a - \xi)^{k_2}}, \end{array}$$

wo k_2 offenbar die unter (16) angegebenen Werte annimmt.

Die einfachste Näherungsformel, die all den hier erwähnten Voraussetzungen genügt, ist offenbar nach Satz II :

$$\Phi(x) = x - f(x), \tag{17}$$

da in diesem Fall $F(x) = f(x)$ ist. Der Konvergenzgrad beträgt in diesem Fall 1. Wird sie mithin mit einer zweiten Näherungsformel von Konvergenzgrad k iteriert, so wird auf Grund des Satzes I der Konvergenzgrad der gewonnenen Näherungsformel wiederum k betragen. Bezeichnen wir die Funktion vom Konvergenzgrad k durch $\Phi(x)$, so wird ihre Iterierte mit $[x - f(x)]$:

$$\Phi - f\Phi,$$

der Konvergenzgrad wird also wiederum gleich k sein, und so ergibt sich nach Satz III :

$$\Phi - f\Phi \equiv \Phi \pmod{f^k},$$

das heisst,

$$f\Phi \equiv 0 \pmod{f^k}, \tag{18}$$

womit bewiesen wurde

Satz V. : Wenn der Konvergenzgrad von Φ gleich k ist, so ist die Funktion $f\Phi$ durch die k -te Potenz von f restlos teilbar.

Auch die Umkehrung dieses Satzes behält ihre Gültigkeit : Soll (18) gelten, so ist bei der Annäherung der ausgewählten einfachen Wurzel (ξ) der

Konvergenzgrad von Φ gleich k , wie es leicht einzusehen ist, geht man den zum Beweis des Satzes V führenden Weg zurück. (18) ist mithin — im Falle einer einfachen Wurzel — die notwendige und hinreichende Bedingung der Konvergenz k -ten Grades. Beispiel: Es sei für Φ die Newton-Raphsonsche Formel gewählt:

$$\Phi = a - \frac{f}{f'}$$

In diesem Falle ist

$$f\Phi = f\left(a - \frac{f}{f'}\right) = f - f' \cdot \frac{f}{f'} + \frac{f''}{2!} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^2 - \dots$$

Hieraus ersieht man, dass

$$f\Phi \equiv 0 \pmod{f^2},$$

und somit ist die Näherung von zweiten Grade, wie es bekannt ist.

Bei den Anwendungen dieser Sätze kann das Bestehen der bezüglichen Konvergenzen in der Weise entschieden werden, dass die fraglichen Funktionen nach den Potenzen von f Reihe entwickelt werden. In dieser Hinsicht erfordern diejenigen Fälle eine Überlegung für sich, in denen die Näherungsformel eine mehrwertige Funktion von f und seinen Derivierten darstellt (so z. B. bei den Bernoullischen Näherungsformeln oder beim Laguerreschen Verfahren). Als eine allgemeine und zu befolgende Regel kann indessen festgestellt werden, dass die obigen Sätze ihre Gültigkeit auch für diese Fälle bewahren, wenn die Reihenentwicklung nach den Potenzen von f bei derselben Vorzeichenwahl vorgenommen wird, wie sie bei der Reihenentwicklung (5), auf deren Grund wir den Konvergenzgrad bestimmten, getroffen wurde.

Bei den Anwendungen kann Satz IV eine besondere Bedeutung zukommen, da es auf Grund dieses Satzes möglich ist, aus einer einzigen Formel k -ten Konvergenzgrades ausgehend unzählige solche Formeln zu konstruieren. Diese sind doch nach Satz IV alle Glieder derselben Funktionenklasse $\pmod{f^k}$. Damit wurde jedoch bei weitem nicht behauptet, dass ein beliebiges Glied dieser Funktionenklasse zugleich eine zu praktischen Zwecken verwendbare Näherungsformel darstellt. Da müssen noch weitere Bedingungen erfüllt werden. Eine dieser Bedingungen wird z. B. offenbar darin bestehen, dass die Näherungsformel keine zu extremen oder unbegründeten numerischen Konstanten enthalten soll. Ausserdem können wir beobachten, dass die in der vorliegenden Arbeit sowie auch den im Literaturverzeichnis verzeichneten Arbeiten behandelten Näherungsformeln — von einigen Ausnahmen abgesehen (so z. B. (17)) — alle homogene Ausdrücke von f und seinen Derivierten sind, und zwar sowohl bezüglich

des Grades wie auch der Ordnung der Differentiation, das heisst, sie sind homogen nullten Grades und die Ordnung der Derivation beträgt -1 . Der Grund hierfür liegt im Falle der gegebenen Formeln auf der Hand, es ist indessen unbekannt, ob dies im allgemeinen notwendig ist und in welcher Weise dadurch eine etwaige raschere Konvergenz ermöglicht wird.

Es sei Φ_1 eine Näherungsformel k -ten Konvergenzgrades. Wie kann mit ihrer Hilfe eine mod f^k kongruente Näherungsformel Φ_2 gewonnen werden? Das einfachste Mittel hierfür besteht offenbar in der Zufügung eines Gliedes $f^k \cdot \Psi$ zu Φ_1 , wobei Ψ wiederum einen Ausdruck von f und seinen Derivierten darstellt, für welchen gilt :

$$\frac{1}{\Psi} \equiv 0 \pmod{f}.$$

Es lässt sich indessen auch ein anderer Weg wählen. Es sei z. B. Q eine Funktion, die in ihren Eigenschaften mit Ψ übereinstimmt, und es sei das Produkt $\Phi_1 \cdot Q$ gebildet. Hieraus können wir nach Belieben alle Glieder fortlassen, die f mindestens an der k -ten Potenz enthalten, das heisst, wir bilden irgendeinen Ausdruck

$$P \equiv \Phi_1 \cdot Q \pmod{f^k}.$$

Nach alledem dürfte es evident sein, dass in dem Quotienten $\frac{P}{Q}$ ebenfalls eine Formel k -ten Konvergenzgrades gefunden wird, da

$$\frac{P}{Q} \equiv \Phi_1 \pmod{f^k}$$

ist.

Auf Grund des Satzes IV können in äusserst einfacher Weise bewiesen werden Sätze, deren Beweis anders eine langwierige Vorbereitung erforderte. So z. B. die Relation (29) im Teil I :

$$\frac{K_{n-1}}{K_n} - \frac{K_{n-2}}{K_{n-1}} \equiv 0 \pmod{f^{n-1}}$$

ist im Lichte des Satzes IV eine einfache Trivialität. Ähnliche Relationen können reichlich gefunden werden, werden die später zu behandelnden Formelfolgen miteinander verglichen und werden hierbei ihre Konvergenzgrade in Betracht gezogen.

Als eine Anwendung der angeführten Sätze möge auch das vereinfachte Newtonsche Verfahren untersucht werden, welches — ein wenig abweichend von der Bodewigschen Auffassung [8]— hier in einem neuen Licht vorgeführt wird. Es besteht der Satz :

Wenn der Konvergenzgrad von Φ k beträgt, dann ist der Konvergenzgrad von

$$\Phi - \frac{f\Phi}{f'} \quad (19)$$

gleich $k + 1$. Zum Beweise betrachten wir die Näherungsformel:

$$\Phi - \frac{f\Phi}{f'\Phi}$$

die aus der Iteration der NR-Formel (Konvergenzgrad: 2) und von Φ entsteht und so einen Konvergenzgrad von $2k$ besitzt. Da jedoch

$$f'\Phi = f'(a - F) = f' - f'' \cdot F + \frac{f'''}{2!} \cdot F^2 - \dots$$

ist und andererseits nach (14)

$$F \equiv 0 \pmod{f}, \quad (14)$$

so ist offenbar

$$f'\Phi \equiv f' \pmod{f},$$

oder

$$\frac{1}{f'\Phi} \equiv \frac{1}{f'} \pmod{f}.$$

Es ist ferner

$$f\Phi \equiv 0 \pmod{f^k},$$

und so ist

$$\frac{f\Phi}{f'\Phi} \equiv \frac{f\Phi}{f'} \pmod{f^{k+1}},$$

woraus auf Grund von Satz IV unsere obige Behauptung unmittelbar folgt.

Durch die Kombination des vereinfachten Newtonschen Verfahrens mit einer beliebigen Näherungsformel wird somit der Konvergenzgrad um eine Einheit erhöht. Wird als Φ die NR-Formel genommen, und wird diese Formel nacheinander $(k - 1)$ -mal mit dem vereinfachten Newtonschen Verfahren kombiniert, so ergibt sich als Ergebnis unserer Berechnung eine Näherung, die der einmaligen Anwendung einer Formel $(k + 1)$ -ten Konvergenzgrades äquivalent ist. Die richtige Bewertung des vereinfachten Newtonschen Verfahrens besteht nach unserer Meinung eben in diesem Umstande. Obschon BODEWIGS Behauptung über den Konvergenzgrad des vereinfachten Newtonschen Verfahrens [8] an und für sich richtig ist, aber durch den Vergleich mit dem Ludwigschen Iterationssatz [4] wird die falsche Illusion erweckt, dass wir am selben Fleck umhertrappeln, als wir uns des vereinfachten Newtonschen Verfahrens bedienen.

Wir können an dem vereinfachten Newtonschen Verfahren — vorausgesetzt, dass der Konvergenzgrad von $\Phi : k \geq 2$ — eine Verbesserung anbringen, wenn wir an Stelle von (19) mit der Formel :

$$\Phi - \frac{f\Phi}{f' - \frac{ff''}{f'}}$$

rechnen. Der Konvergenzgrad dieser Formel beträgt nämlich $(k + 2)$. Da nach unserer Voraussetzung $k \geq 2$, so ist

$$\Phi \equiv a - \frac{f}{f'} \pmod{f^2},$$

somit

$$f' \Phi \equiv f' \left(a - \frac{f}{f'} \right) \equiv f' - f'' \cdot \frac{f}{f'} \pmod{f^2},$$

oder

$$\frac{1}{f' \Phi} \equiv \frac{1}{f' - \frac{ff''}{f'}} \pmod{f^2},$$

woraus sich durch Anwendung von (18) schliesslich ergibt :

$$\frac{f\Phi}{f' \Phi} \equiv \frac{f\Phi}{f' - \frac{ff''}{f'}} \pmod{f^{k+2}}$$

woraus sich unsere Behauptung unmittelbar ergibt.

Beispiel : Es sei

$$\Phi = a - \frac{f}{f'}, \quad (k = 2)$$

in welchem Falle

$$\begin{aligned} \Phi - \frac{f\Phi}{f' - \frac{ff''}{f'}} &\equiv \\ &\equiv a - \frac{f}{f'} - \frac{\frac{1}{2}f'' \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^2 - \frac{1}{6} \cdot f''' \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^3}{f' - \frac{ff''}{f'}} \pmod{f^4}. \end{aligned}$$

Der Konvergenzgrad der so gewonnenen Ausdrucks :

$$a - \frac{f}{f'} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3f'f'' - ff'''}{f'^2 - ff''} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^2$$

ist somit gleich 4.

Zum Schluss sei noch eine schöne Anwendung der Formel (19) vorgeführt. Es sei als Φ die Eulersche Näherung (Teil I. (37)) gewählt :

$$s_k = a - \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{A_{\nu-1}}{\nu!} \cdot \varphi^\nu, \quad \left(\varphi = \frac{f}{f'}\right).$$

Da der Konvergenzgrad dieser Näherung k ist, so erhalten wir durch Substitution in (19) eine Funktion :

$$s_k - \frac{f(s_k)}{f'},$$

deren Konvergenzgrad gleich $(k+1)$ ist. Denselben Konvergenzgrad besitzt aber auch s_{k+1} und so erhalten wir durch Anwendung des Satzes IV :

$$s_k - \frac{f(s_k)}{f'} \equiv s_{k+1} \pmod{f^{k+1}}.$$

Da jedoch (vgl. mit (37) Teil I)

$$s_{k+1} - s_k = -\frac{A_{k-1}}{k!} \varphi^k,$$

so wird schliesslich

$$f(s_k) \equiv \frac{A_{k-1}}{k!} \cdot \frac{f^k}{f'^{k-1}} \pmod{f^{k+1}}. \quad (20)$$

Durch (20) wird eine neue Möglichkeit geboten, die nun folgenden Glieder zu berechnen, obschon diesem Verfahren nur mehr ein theoretisches Interesse zukommt, da doch die explizite Form der Polynome A_n bereits im Teil I angegeben wurde (35).

2. Die Gornsteinsche Approximationsmethode

Von M.S. GORNSTEIN wurde in einer im Jahre 1951 erschienenen Arbeit [5] eine Methode zur näherungsweise Lösung der Gleichungen angegeben, die an Stelle der in (1) angegebenen Funktion mit einer Veränderlichen, $\Phi(x)$, mit einer in vorgeschriebener Weise konstruierten iterativen Funktion :

$$\varphi_\nu(x; a),$$

die auch eine Hilfsveränderliche enthält, operiert.* Die Hilfsvariable a ist in dem nämlichen Intervall wie x definiert, das heisst in einer genügend kleinen Umgebung irgendeiner reellen Wurzel (ξ) der Gleichung $f(x) = 0$.

Die Funktion $\varphi_\nu(x; a)$ ist in ihrer Struktur $\Phi(x)$ ähnlich, indem sie ebenfalls in zwei Teile zerlegt werden kann :

$$\varphi_\nu(x; a) \equiv x - F_\nu(x; a), \quad (21)$$

wo

$$F_\nu(x; a) = f(x) \cdot \sum_{k=0}^{\nu} h_k(a) \cdot x^k, \quad (22)$$

und die lediglich von a abhängigen Koeffizienten h_k in der Weise bestimmt werden müssen, dass die Gleichungen :

$$\varphi_\nu^{(k)}(a; a) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \nu + 1) \quad (23)$$

erfüllt werden (die Differentiation erfolgt nach x .) Es folgt aus dem Bestehen des Gleichungssystems (23), wenn die Funktion φ_ν in eine Reihe nach den Potenzen von $(x - a)$ entwickelt wird, dass

$$\varphi_\nu(x; a) = \varphi_\nu(a; a) + r_\nu(x; a), \quad (24)$$

wo

$$r_\nu(x; a) = \frac{1}{(\nu + 2)!} \cdot \varphi_\nu^{(\nu+2)}(a + \vartheta \cdot (x - a); a) \cdot (x - a)^{\nu+2} \quad (0 \leq \vartheta \leq 1) \quad (25)$$

Die Reihenentwicklung (24) und das Restglied in seiner Form nach (25) dienen für die Zwecke der Fehlerabschätzung.

Das Gleichungssystem (23) liefert für die Koeffizienten $h_k(a)$ ein lineares Gleichungssystem. Durch die Lösung dieses Gleichungssystems werden die Koeffizienten $h_k(a)$ als Gornsteinsche Determinanten (Γ) erhalten :

$$h_k(a) = \frac{\Gamma_{\nu, k}(a)}{\Gamma_\nu(a)}. \quad (26)$$

Die Γ -Determinanten hängen auch über die Funktion f und ihre Ableitungen von a ab. In den folgenden wurde das Ziel gesteckt, einerseits die explizite Form dieser Determinanten zu entwickeln, andererseits nachzuweisen, dass die Anwendung der durch die Gornsteinsche Methode gewonnenen iterativen

* Die hier verwendeten Bezeichnungen weichen in einem gewissen Masse von Gornsteins originalen Bezeichnungen ab.

Funktion $\varphi_v(x; a)$, wird als erste Näherung der Wert $x_1 = a$ gewählt, mit der Kisschen Verallgemeinerung völlig identisch ist.

Wir wollen dabei aus der Reihenentwicklung (7a) des I. Teils ausgehen :

$$\frac{f(a)}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} K_k \cdot \alpha^k,$$

woraus

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \right) \cdot \frac{f(a)}{f(x)} &= \sum_{k=0}^{\infty} K_k \cdot \left(a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \right) \cdot \alpha^k = \\ &= -\frac{1}{K_n} \cdot \left[K_{n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (K_{n-1} K_k - K_n K_{k-1}) \alpha^k \right]. \end{aligned}$$

Aus (29) des Teils I geht klar hervor, dass im Falle $n > k$:

$$\frac{K_{n-1}}{K_n} - \frac{K_{k-1}}{K_k} \equiv 0 \pmod{f^k},$$

weshalb wir die folgende Abkürzung verwenden können :

$$\left. \begin{aligned} G_{nk} &= \frac{1}{f^k} (K_{n-1} K_k - K_n K_{k-1}), & (k > 0) \\ G_{n0} &= K_{n-1} & (n > 0) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Mit dieser Bezeichnung wird :

$$\left(a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \right) \cdot \frac{f(a)}{f(x)} = -\frac{1}{K_n} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk} \cdot (a-x)^k. \quad (28)$$

Aus (27) folgt

$$\left. \begin{aligned} G_{nn} &\equiv 0 \\ \text{und} \\ G_{nk} &= -f^{n-k} \cdot G_{kn} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

das heisst, im Falle von $k > n$ G_{nk} ist mehr keine ganze, vielmehr eine gebrochene Funktion, mit der $(k-n)$ -ten Potenz von f im Nenner.

Wegen (29) fehlt in der Reihenentwicklung (28) das $(a-x)^n$ enthaltende Glied. Es empfiehlt sich hier, die Reihe in zwei Teile zu zerlegen, und die durch

die Addition der ersten n Glieder gewonnene Reihe mit einem besonderen Zeichen (Q_n) zu bezeichnen :

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} G_{nk} \cdot (a - x)^k . \tag{30}$$

Mit dieser neuen Bezeichnung wird

$$\left(a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \right) \cdot \frac{f(a)}{f(x)} = - \frac{Q_n}{K_n} - \frac{1}{K_n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} G_{nk} \cdot (a - x)^k ,$$

oder nach entsprechender Umordnung $\left(a = \frac{a - x}{f(a)} \right)$:

$$x - \frac{Q_n}{K_n} \cdot f(x) = a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \cdot f(a) + \frac{f(x)}{K_n} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} G_{nk} \cdot (a - x)^k . \tag{31}$$

Wird nun das letzterhaltene Ergebnis mit den Relationen (21), (22), (24) und (25) verglichen, so ergeben sich die folgenden Identifikationen :

$$v = n - 1$$

$$\varphi_v(x; a) \longleftrightarrow x - \frac{Q_n}{K_n} \cdot f(x) , \tag{32}$$

$$\varphi_v(a; a) \longleftrightarrow a - \frac{K_{n-1}}{K_n} \cdot f(a) , \tag{33}$$

$$\sum_{k=0}^v h_k(a) \cdot x^k \longleftrightarrow \frac{Q_{v+1}}{K_{v+1}} .$$

Aus der letzten und aus (26) folgt weiter :

$$\Gamma_v(a) = \lambda_v \cdot K_{v+1} [f(a)] , \tag{34}$$

und

$$\sum_{k=0}^v \Gamma_{v,k}(a) \cdot x^k = \lambda_v \cdot Q_{v+1} , \tag{35}$$

und hieraus mit Rücksicht auf (30) :

$$\Gamma_{v,k}(a) = (-1)^k \cdot \lambda_v \cdot \sum_{h=0}^{v-k} \binom{h+k}{k} \cdot G_{(v+1)(h+k)} \cdot a^h . \tag{36}$$

Hier bedeutet λ_n einen numerischen Faktor, ohne weiteres Interesse. Mit Hilfe der Relationen (34) und (36) konnten somit die Γ -Determinanten auf auch in expliziter Form bekannte Polynome (Teil I, Gl. (11)), auf die K_n -Polynome zurückgeführt werden. Aus (32) und (33) geht weiter klar hervor, dass bei der Wahl von $x_1 = a$ die Gornsteinsche Methode mit der Kissischen Methode identisch wird.

Zur leichteren Ausrechnung der G_{nk} -Polynome sei schliesslich noch ihre Rekursionsformel mitgeteilt:

$$G_{nk} = \frac{1}{f} \cdot \sum_{h=1}^k (-1)^{h-1} \cdot \frac{f^{(h)}}{h!} \cdot G_{n(k-h)}, \quad (k > 1) \quad (37)$$

wozu noch als Ausgangsformel die aus (27) gewonnene Relation hinzugefügt werden muss:

$$G_{n1} = \frac{1}{f} (f' K_{n-1} - K_n).$$

(37) folgt unmittelbar aus (27), wird die für das Polynom K_n gültige Rekursionsformel in Betracht gezogen (Teil I, (9)).

3. Die K_{nm} -bzw. C_{nm} -Polynome

Eine Verallgemeinerung der Kissischen K_n -Polynome ist durch die G_{nk} -Polynome gegeben, während eine andere Verallgemeinerung bereits im Teil I vorgelegt wurde, und auf diese Weise gelangten wir zu den K_{nm} -Polynomen (vgl. mit Kapitel 7 Teil I). An Stelle der K_{nm} -Polynome empfiehlt es sich jedoch, oft mit den C_{nm} -Polynomen zu rechnen, in gewissen Fällen (wenn m eine negative ganze Zahl ist) können wir sogar ausschliesslich mit diesen Polynomen rechnen. Hier folgen die Definitionen der C_{nm} -Polynome:

$$C_{nm} = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{1}{f^m} \right)^{(n)} \cdot f^{n+m}, \quad (38)$$

$$C_{nm} = \binom{m+n-1}{n} \cdot K_{nm} \quad (39)$$

$$\left(\frac{f(a)}{f(x)} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_{nm} \cdot \alpha^n \quad (40)$$

Diese Definitionen sind einander äquivalent und sind im Einklang mit den Definitionen der K_{nm} -Polynome (siehe (22) und (23) im Teil I).

Es sei hier bemerkt, dass bei den K_{nm} - bzw. C_{nm} -Polynomen allein der erste Index einen wahren Index darstellt, während der zweite Index — da er einen beliebigen Wert annehmen kann — nichts anderes als ein stetig veränderlicher Parameter ist.

Die explizite Form der K_{nm} - und C_{nm} -Polynome wird im Kapitel 5 behandelt werden; für einige spezielle Indexe nehmen sie folgende Werte an:

$$\begin{aligned} K_{0m} &= C_{0m} = 1 \\ K_{1m} &= f', \quad C_{1m} = m \cdot f', \\ K_{n1} &= C_{n1} = K_n, \\ C_{n(-1)} &= \frac{(-1)^n}{n!} \cdot f^{(n)} \cdot f^{n-1}. \end{aligned}$$

Durch die C_{nm} -Polynome wird der Rekursionsformel

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (n - k + k \cdot m) \cdot C_{(n-k)m} \cdot \frac{1}{k!} f^{k-1} = 0 \quad (41)$$

genügend, die als die Verallgemeinerung von (9), Teil I betrachtet werden kann. Zur Ableitung von (41) möge aus der offenbar bestehenden Identität ausgegangen werden:

$$\left(\frac{1}{f^m}\right)' \cdot f + m \cdot \frac{1}{f^m} \cdot f' = 0.$$

Wir wollen beide Glieder nach der Leibnizschen Regel $(n-1)$ -mal weiter differenzieren:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot \left(\frac{1}{f^m}\right)^{(n-k)} \cdot f^{(k)} + m \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \cdot \left(\frac{1}{f^m}\right)^{(n-k)} \cdot f^{(k)} = 0.$$

Es wird durch $(n-1)!$ dividiert und zusammengezogen:

$$\sum_{k=0}^n (n - k + km) \cdot \frac{1}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{f^m}\right)^{(n-k)} \cdot \frac{f^{(k)}}{k!} = 0,$$

wir verwenden schliesslich die Definition (38) und wir haben (41) vor uns.

Die C_{nm} -Polynome — ebenso wie die K_n -Polynome — (vgl. Kap. 5, Teil I) — können nach den Potenzen von d ebenfalls in eine Reihe entwickelt werden. Die Reihenentwicklung wollen wir in zwei Fällen untersuchen.

1. ξ stellt eine einfache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ dar:

$$f(x) = g(x) \cdot (x - \xi),$$

das heisst,

$$f = g \cdot d.$$

Hieraus

$$\frac{1}{f^m} = \frac{1}{g^m} \cdot \frac{1}{d^m}.$$

Es wird nach der Leibnizschen Regel n -mal differenziert:

$$\left(\frac{1}{f^m}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{g^m}\right)^{(k)} \cdot \left(\frac{1}{d^m}\right)^{(n-k)},$$

sodann wird durch $n!$ dividiert und nach (38) substituiert:

$$\frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{1}{f^m}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{1}{f^{m+n}} \cdot C_{nm}(f), \quad (42)$$

$$\frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{g^m}\right)^{(k)} = (-1)^k \cdot \frac{1}{g^{m+k}} \cdot C_{km}(g),$$

und

$$\frac{1}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{d^m}\right)^{(n-k)} = (-1)^{n-k} \cdot \binom{m+n-k-1}{n-k} \cdot \frac{1}{d^{m+n-k}}$$

Mit Rücksicht hierauf sowie auf $f = g \cdot d$, erhalten wir nach den Vereinfachungen

$$C_{nm}(f) = \sum_{k=0}^n \binom{m+n-k-1}{n-k} \cdot C_{km}(g) \cdot g^{n-k} \cdot d^k. \quad (43)$$

2. ξ stellt eine p -fache Wurzel der Gleichung (10) dar und

$$m = \frac{1}{p}.$$

Es wird in diesem Fall

$$f(x) = g(x) \cdot (x - \xi)^p,$$

das heisst,

$$f^m = g^m \cdot d,$$

oder

$$\frac{1}{f^m} = \frac{1}{g^m} \cdot \frac{1}{d}.$$

Es wird wiederum die Leibnizsche Regel verwendet und nach (42) substituiert, in diesem Falle jedoch die Relation

$$\frac{1}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{d}\right)^{(n-k)} = (-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{d^{n+1-k}}$$

herangezogen, so dass wir schliesslich erhalten :

$$C_{nm}(f) = \sum_{k=0}^n C_{km}(g) \cdot g^{n-k} \cdot d^{n(p-1)+k}. \tag{44}$$

Von den hier abgeleiteten Relationen werden wir im Kap. 6 Gebrauch machen. Es sei schliesslich die interessante und wichtige Substitutionsregel der $C_{nm}(f)$ -Polynome abgeleitet :

$$C_{nm}(f^\nu) = f^{(v-1)n} \cdot C_{n(m\nu)}(f). \tag{45}$$

Es wird aus der Definition (40) ausgegangen :

$$\left(\frac{f(a)}{f(x)}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_{nm}(f) \cdot a^n,$$

an Stelle von m ($m\nu$) substituiert, und ebenso in (40) an Stelle von ff^ν eingesetzt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(a)}{f(x)}\right)^{m\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{\nu(m\nu)}(f) \cdot \left(\frac{a-x}{f}\right)^n, \\ \left(\frac{f(a)}{f(x)}\right)^{m\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{nm}(f^\nu) \cdot \left(\frac{a-x}{f^\nu}\right)^n. \end{aligned}$$

Durch den Vergleich der Gliedern n -ten Grades der rechten Seiten wird Relation (45) erhalten.

Einen wichtigen Spezialfall dieser Relation bildet der folgende Zusammenhang :

$$K_n(f^m) = f^{(m-1)n} \cdot C_{nm}(f), \tag{46}$$

den wir aus (45) in der Weise erhalten, dass für m 1 und für ν m substituiert wird. Gl. (46) kann auch als eine vierte Definitionsgleichung der C_{nm} -Polynome aufgefasst werden.

4. Die Newtonschen Polynome ; Approximationsmethoden von Bernoulli und Gräffe

Einen speziellen Fall der verallgemeinerten Kisschen K_{nm} -Polynome stellen die Newtonschen Polynome dar, deren Definitionen im untenstehenden gegeben werden :

$$N_n = K_{n0} = n \lim_{m \rightarrow 0} \frac{C_{nm}}{m}, \quad (47)$$

$$N_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{f^n}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{f'}{f} \right)^{(n-1)}, \quad (48)$$

$$\ln \frac{f(a)}{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} N_n(f) \cdot a^n. \quad (49)$$

Die mitgeteilten Definitionen folgen aus einander und sind demgemäss miteinander äquivalent.

Die Newtonschen Formeln, die die zwischen den Koeffizienten eines ganzen rationalen Polynoms ($f(x)$) und zwischen den k -ten Potenzsummen dessen Wurzeln bestehenden Zusammenhänge angeben, sind seit lange her bekannt (die Potenzsummen werden meistens durch s_k bezeichnet). Da die in diesem Kapitel zu behandelnden K_{n0} -Polynome mit diesen noch von Newton herrührenden Formeln in vollem Masse identifiziert werden können, so ist es begründet, diese Formeln als Newtonsche Formeln zu bezeichnen. Die N_n -Polynome erfüllen die folgenden Rekursionsformeln :

$$N_n(f) = f' \cdot N_{n-1}(f) - \frac{f}{n-1} \cdot N'_{n-1}(f), \quad (n > 0) \quad (50)$$

und

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot N_{(n-k)} \cdot \frac{f^{(k)}}{k!} f^{k-1} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{f^{(n)}}{(n-1)!} \cdot f^{n-1}. \quad (n > 0) \quad (51)$$

Die erste Formel folgt aus der (24), Teil I, durch die Substitution $m=0$, während die zweite Formel aus der (41) durch Division durch m und darauffolgenden Grenzübergang $m \rightarrow 0$ gewonnen werden kann. Mit Hilfe dieser Rekursionsformeln und der Anfangswerte von

$$N_0 = 1, \quad N_1 = f'$$

gelangt man durch einfache Rechnung zu den weiteren Gliedern :

$$N_2 = f'^2 - ff'',$$

$$N_3 = f'^3 - \frac{3}{2} \cdot ff' f'' + \frac{1}{2} f^2 f''',$$

$$N_4 = f'^4 - 2 ff'^2 f'' + \frac{2}{3} \cdot f^2 f' f''' + \frac{1}{2} f^2 f''^2 - \frac{1}{6} \cdot f^3 f''''.$$

Die explizite Form des allgemeinen Gliedes N_n wird im Kapitel 5 angegeben.

Die Reihenentwicklung der N_n -Polynome nach den Potenzen von d nimmt eine sehr einfache Form an. Im Falle einer einfachen Wurzel wird

$$f = g \cdot d$$

logarithmisch differenziert, und die so gewonnene Relation

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} + \frac{1}{d}$$

$(n - 1)$ -mal weiter differenziert und sodann (48) angewendet. Wir gelangen so zu dem folgenden Ergebnis :

$$\frac{1}{f^n} \cdot N_n(f) = \frac{1}{g^n} \cdot N_n(g) + \frac{1}{d^n}$$

bzw. mit Rücksicht auf $f = g \cdot d$:

$$N_n(f) = N_n(g) \cdot d^n + g^n. \quad (n > 0) \quad (52)$$

Wenn hingegen ξ eine p -fache Wurzel darstellt, das heisst,

$$f = g \cdot d^p,$$

so werden durch Anwendung der früheren Methode die folgenden Relationen erhalten :

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} + \frac{p}{d},$$

$$\frac{1}{f^n} \cdot N_n(f) = \frac{1}{g^n} \cdot N_n(g) + \frac{p}{d^n},$$

$$N_n(f) = [N_n(g) \cdot d^n + p \cdot g^n] \cdot d^{n(p-1)}. \quad (n > 0) \quad (53)$$

Als die vierte Definition der Newtonschen Polynome kann die folgende Substitutionsrelation betrachtet werden :

$$N_n(f) = (f')^n \cdot K_{n-1} \left(\frac{f}{f'} \right) \quad (n > 0) \quad (54)$$

Dies ist eine einfache Folge der unter (48) angegebenen Definition der N_n -Polynome und der unter I. (8) angegebenen Definition der K_n -Polynome, welche letztere Definition mit dem Index $(n - 1)$ und an Stelle von f mit $\frac{f}{f'}$ angeschrieben wird :

$$\left(\frac{f'}{f} \right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \left(\frac{f'}{f} \right)^n \cdot K_{n-1} \left(\frac{f}{f'} \right) .$$

Es gilt andererseits :

$$\left(\frac{f'}{f} \right)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \left(\frac{1}{f} \right)^n \cdot N_n(f) . \quad (48)$$

Durch Vergleich der rechten Seiten und nach Vereinfachung ergibt sich (54).

Wenn $f(x)$ eine ganze rationale Funktion ν -ten Grades darstellt, wenn also

$$f(x) = c \cdot \prod_{k=1}^{\nu} (x - \xi_k) ,$$

so folgt daraus durch logarithmische Differentiation :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{x - \xi_k} .$$

Hieraus wird durch weitere $(n - 1)$ -fache Differentiation und Verwendung von (48) gewonnen :

$$N_n(f) = f^n \cdot \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{(a - \xi_k)^n} . \quad (55)$$

In den folgenden wird je eine Modifizierung der Wurzelnäherungsverfahren von BERNOULLI und GRÄFFE angegeben. Wenn nämlich die in der Bernoullischen bzw. Gräffeschen Methode vorkommenden Wurzelpotenzsummen

$$\sum_{k=1}^{\nu} \xi_k^n$$

an Stelle der Funktion $f(x)$ für die Nullstellen der Funktion

$$f\left(-\frac{1}{x} + a\right) \tag{56}$$

erklärt werden, so werden diese wegen (55) eben den Ausdrücken

$$\frac{N_n(f)}{f^n}$$

gleich werden.

Werden nun die Näherungsformeln von BERNOULLI und GRÄFFE für die Verhältnisse der Gl. (56) umgeschrieben, so werden die folgenden Formeln erhalten :

$$\beta_n = a - \frac{N_{n-1}(f)}{N_n(f)} \cdot f, \tag{57}$$

$$\{\gamma_{n+1} = a - \frac{f}{\sqrt[n]{N_n(f)}}. \tag{58}$$

Diese modifizierten Bernoullischen und Gräffeschen Näherungsformeln haben gegen die ursprünglichen Formeln den Vorteil, dass sie nicht nur für algebraische, vielmehr auch für transzendente Gleichungen eine Lösung liefern, enthalten sie doch an Stelle der Koeffizienten die Werte der Funktion und ihrer Derivierten für die nämliche Stelle $x = a$.

Die modifizierten Formeln von BERNOULLI und von GRÄFFE stellen ebenfalls Verallgemeinerungen der NR-Formel dar, da doch

$$\beta_1 = \gamma_2 = a - \frac{f}{f'}$$

Wir wollen noch vor der Ableitung ihrer Fehlerformeln auf zwei interessante Umstände hinweisen.

1. Die Bernoullische Formel (β_n) kann aus der Gräffeschen Formel dadurch abgeleitet werden, dass das Newtonsche Verfahren auf die in γ_n vorkommende Funktion :

$$F_{n-1} = \frac{f}{\sqrt[n-1]{N_{n-1}(f)}}$$

angewendet wird :

$$F'_{n-1} = \frac{1}{N_{n-1}(f)^{\frac{n}{n-1}}} \cdot \left(f' \cdot N_{n-1} - \frac{1}{n-1} \cdot N'_{n-1} \right),$$

oder (vgl. mit (50))

$$F'_{n-1} = \frac{1}{N_{n-1}(f)^{\frac{n}{n-1}}} \cdot N_n(f),$$

und so

$$a - \frac{F_{n-1}}{F'_{n-1}} = a - \frac{N_{n-1}(f)}{N_n(f)} \cdot f = \beta_n.$$

Auch ist es gleichzeitig klar, dass die F_n -Funktionen die Rekursionsformel:

$$F_n = \frac{F_{n-1}}{\sqrt[n]{F'_{n-1}}}$$

erfüllen.

2. Die Bernoullische Näherung kann auch aus der Kisschen Näherung (I. (2)) abgeleitet werden, wenn an Stelle von $f \frac{f}{f'}$ substituiert wird. Durch Verwendung von (54) ergibt sich nämlich:

$$\begin{aligned} \kappa_{n-1} \left(\frac{f}{f'} \right) &= a - \frac{K_{n-1} \left(\frac{f}{f'} \right)}{K_n \left(\frac{f}{f'} \right)} \cdot \frac{f}{f'} = \\ &= a - \frac{N_n(f)}{N_{n-1}(f)} \cdot f = \beta_{n+1} \quad (n > 1) \end{aligned} \quad (59)$$

Zur Ableitung der Fehlerformeln wird die Zerlegung (52) verwendet. Die Berechnung gestaltet sich bezüglich der Bernoullischen Näherung wie folgt:

$$\begin{aligned} \beta_n - \xi - a - \xi - \frac{N_{n-1}(f)}{N_n(f)} \cdot f &= \frac{d}{N_n(f)} \cdot [N_n(f) - g \cdot N_{n-1}(f)] = \\ &= \frac{d}{N_n(f)} \cdot [N_n(g) \cdot d^n - g \cdot N_{n-1}(g) \cdot d^{n-1}], \end{aligned}$$

das heisst,

$$\beta_n - \xi = \frac{N_n(g) \cdot d - g \cdot N_{n-1}(g)}{N_n(f)} \cdot d^n \quad (n > 1) \quad (60)$$

Der Fehler der Gräffeschen Näherung beträgt:

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \xi &= a - \xi - \frac{f}{\sqrt[n]{N_n(f)}} = d g d \cdot [g^n + d^n \cdot N_n(g)]^{-\frac{1}{n}} = \\ &= d - g d \left(g^{-1} - \frac{1}{n} \cdot \frac{N_n(g) \cdot d^n}{g^{n+1}} + \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{N_n^2(g) \cdot d^{2n}}{g^{2n+1}} + \dots \right), \end{aligned}$$

somit

$$\gamma_{n+1} - \xi = \frac{1}{n} \cdot \frac{N_n(g) \cdot d^{n+1}}{g^n} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{N_n^2(g) \cdot d^{2n+1}}{g^{2n}} - \dots \quad (61)$$

Aus den Fehlerformeln kann es abgelesen werden, dass die Näherungsformeln β_n und γ_{n+1} (Gl. (57) und (58)) eine Näherung von sovielter Ordnung liefern, wie sie durch den Index bezeichnet wird (eine Ausnahme bildet nur β_1 , da die obige Ableitung nur im Falle $n > 1$ zu einem richtigen Ergebnis führt).

5. Die explizite Form der K_{nm} - und C_{nm} -Polynome

Die Reihenentwicklung I. (6a) :

$$\frac{f(x)}{f(a)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot f^{k-1} \cdot \alpha^k$$

werde nach dem polynomialen Satz zur m -ten Potenz erhoben :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^m = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)_{1}^{\sum k i_k} \cdot \frac{m!}{(m - \sum_{k=1}^n i_k)! \prod_{k=1}^n (i_k!)} \cdot f^{\sum (k-1) i_k} \cdot \prod_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\right)^{i_k} \right] \cdot \alpha^n. \end{aligned}$$

Die Summation innerhalb der eckigen Klammer muss für alle möglichen Fälle ausgeführt werden, für welche die Beschränkung gilt :

$$\sum_{k=1}^n k i_k = n. \quad (62)$$

Wenn wir die Abkürzung

$$i_0 = \sum_{k=2}^n (k-1) i_k \quad (63)$$

verwenden, so folgt hieraus mit (62), dass

$$\sum_{k=0}^n i_k = n \quad (64)$$

Mit Rücksicht auf (62) und (63) gestaltet sich unsere Berechnung wie folgt :

$$\left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Sigma (-1)^n \cdot \frac{m!}{(m-n+i_0)! \prod_{k=1}^n (i_k)! \cdot \prod_{k=0}^n (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=0}^n (f^{(k)})^{i_k} \right] \cdot a^n$$

Wird nun an Stelle von m ($-m$) substituiert und wird die derart gewonnene Reihenentwicklung mit (40) identifiziert, so erhalten wir :

$$C_{nm}(f) = \sum (-1)^n \cdot \frac{(-m)!}{(-m-n+i_0)! \prod_{k=1}^n (i_k)! \cdot \prod_{i=1}^n (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=0}^n (f^{(k)})^{i_k}, \quad (65)$$

wo die Summation, mit Rücksicht auf die Beschränkungen (62) und (64), auf alle möglichen Fälle erstreckt werden muss. Die Exponenten i_k stellen natürlich nichtnegative ganze Zahlen dar.

Der in der Formel (65) vorkommende Koeffizient

$$\frac{(-m)!}{(-m-n+i_0)!} \quad (66)$$

verschwindet, wenn m eine ganze Zahl ist, und wenn

$$-m-n+i_0 < 0,$$

jedoch

$$-m > 0.$$

Stellt jedoch auch ($-m$) eine negative ganze Zahl dar, so nimmt der obige Koeffizient die unbestimmte Form von

$$\frac{\infty}{\infty}$$

an, da die faktoriale Funktion an den negativ ganzzahligen Stellen einen Pol erster Ordnung besitzt. In diesen Fällen ist die Bezeichnung durch Faktoriellen nicht angezeigt, da doch (66) ist nichts anderes als eine kurze Schreibweise des Produktes

$$\prod_{k=0}^{n-i_0-1} (-m-k).$$

Dieses Produkt lässt sich indessen auch in einer anderen Weise mit Hilfe von Fakultäten ausdrücken :

$$\prod_{k=0}^{n-i_0-1} (-m-k) = (-1)^{n-i_0} \cdot \prod_{k=0}^{n-i_0-1} (m+k) = (-1)^{n-i_0} \cdot \frac{(m+n-i_0-1)!}{(m-1)!},$$

das heisst,

$$\frac{(-m)!}{(-m-n+i_0)!} = (-1)^{n-i_0} \cdot \frac{(n+m-i_0-1)!}{(m-1)!}. \quad (67)$$

Demgemäss gestaltet sich die zweite explizite Form der C_{nm} -Polynome folgendermassen :

$$C_{nm}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \sum (-1)^{i_0} \cdot \frac{(n+m-i_0-1)!}{\prod_{k=1}^n (i_k!) \prod_{k=1}^n (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=0}^n (f^{(k)})^{i_k} \quad (68)$$

Hieraus wird die explizite Form der K_{nm} -Polynome mit Rücksicht auf (39) erhalten :

$$K_{nm}(f) = \frac{n!}{(n+m-1)!} \cdot \sum (-1)^{i_0} \cdot \frac{(n+m-i_0-1)!}{\prod_{k=1}^n (i_k!) \cdot \prod_{k=1}^n (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=0}^n (f^{(k)})^{i_k}. \quad (69)$$

Aus der abgeleiteten Formel ergibt sich für den Fall $m = 1$ sofort die unter I. (11) mitgeteilte explizite Form der Polynome $K_n (= K_{n1} = C_{n1})$. Die Newtonschen Polynome werden durch die Substitution $m \rightarrow 0$ erhalten :

$$N_n(f) = n \cdot \sum (-1)^{i_0} \cdot \frac{(n-i_0-1)!}{\prod_{k=1}^n (i_k!) \cdot \prod_{k=1}^n (k!)^{i_k}} \cdot \prod_{k=0}^n (f^{(k)})^{-k}. \quad (70)$$

Schliesslich wollen wir noch die explizite Form der C_{nm} -Polynome für einige niedrigere Indizes mitteilen :

$$C_{0m} = 1,$$

$$C_{1m} = m \cdot f',$$

$$C_{2m} = \frac{1}{2} m(m+1)f'^2 - \frac{1}{2} mff'',$$

$$C_{3m} = \frac{1}{6} m(m+1)(m+2)f'^3 - \frac{1}{2} m(m+1)ff'f'' + \frac{1}{6} mf^2f''', \quad (71)$$

$$C_{4m} = \frac{1}{24} m(m+1)(m+2)(m+3)f'^4 - \frac{1}{4} m(m+1)(m+2)ff'^2f'' + \\ + \frac{1}{6} m(m+1)f^2f'f''' + \frac{1}{8} m(m+1)f^2f''^2 - \frac{1}{24} mf^3f''''.$$

6. Der Fall der mehrfachen Wurzeln

Es wurde zum erstenmal von BODEWIG darauf aufmerksam gemacht [8], dass die bisher bekannt gewordenen Näherungsformeln lediglich in dem Falle die Konvergenz von dem festgestellten Grade liefern, wenn die gesuchte Wurzel eine einfache Wurzel darstellt. Es wurde von BODEWIG bezüglich zahlreicher in der Praxis angewendeter Näherungsformeln untersucht, welcher Modifizierung die Formel in dem Falle bedarf, wenn mit ihrer Hilfe eine n -fache Wurzel angenähert werden soll. Wir wollen in diesem Kapitel diese Untersuchung auf die KISSsche, Bernoullische und Gräffesche Formelfolgen und im Kapitel 7 auch auf die Eulersche Verallgemeinerung erstrecken.

Vor allem wollen wir ein wichtiges Prinzip festsetzen. Stellt ξ eine p -fache Nullstelle der Funktion $f(x)$ dar, das heisst, wenn

$$f(x) \equiv (x - \xi)^p \cdot g(x), \quad (72)$$

wo $g(x)$ durch $(x - \xi)$ nicht mehr teilbar ist, so wird einfach durch die p -te Wurzel der Funktion $f(x)$ eine Funktion gewonnen, bei welcher ξ nur mehr eine einfache Wurzel darstellt. Wir haben somit an Stelle von $f(x)$ die Näherungsformel mit der Funktion $\sqrt[p]{f(x)}$ zu bilden, und die nämlichen Formeln, die vorher bei der Approximation der einfachen Wurzeln eine Konvergenz n -ten Grades ergaben, liefern jetzt nach der Substitution von $\sqrt[p]{f(x)}$ für die p -fachen Wurzeln eine Konvergenz von ebenfalls n -tem Grade. Wir wollen nun die zur Zeit bekannten Verallgemeinerungen der Reihe nach vornehmen.

1. Die KISSsche Verallgemeinerung (Teil I, (2)),

$$x_{n+1} = a - \frac{K_{n-1}(f)}{K_n(f)} \cdot f,$$

wird mit Hilfe der Formel (46) modifiziert. Es folgt mit der Wahl von $m = \frac{1}{p}$, dass

$$x_{n+1,p} = a - \frac{K_{n-1}(f^m)}{K_n(f^m)} \cdot f^m = a - \frac{C_{(n-1)m}(f)}{C_{nm}(f)} \cdot f. \quad (73)$$

Spezialfälle von (73) für einige niedrigere Indizes (vgl. mit (71)) sind wie folgt :

$$x_{2,p} = a - p \cdot \frac{f}{f'},$$

$$x_{3,p} = a - \frac{2 p f f'}{(p+1) f'^2 - p f f''},$$

$$x_{4,p} = a - \frac{3 p (p+1) f'^2 - 2 p^2 f f''}{(2p+1)(p+1) f'^3 - 3 p (p+1) f f' f'' + p^2 f^2 f'''} \cdot f.$$

Der Fehler der Formel (73) wird durch die aus (44) folgende Zerlegung

$$C_{nm}(f) = C_{nm}(g) \cdot d^{np} + C_{(n-1)m}(f) \cdot g \cdot d^{p-1}$$

berechnet :

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1,p} - \xi &= a - \xi - \frac{C_{(n-1)m}(f)}{C_{nm}(f)} \cdot f = \frac{d}{C_{nm}(f)} \cdot [C_{nm}(f) - C_{(n-1)m}(f) g d^{p-1}] \\ \alpha_{n+1,p} - \xi &= \frac{C_{nm}(g)}{C_{nm}(f)} d^{np+1} = \frac{C_{nm}(g)}{\sum_{k=0}^n C_{km}(g) \cdot g^{n-k} \cdot d^k} \cdot d^{n+1}. \end{aligned} \quad (74)$$

Es wurde bei der Ableitung berücksichtigt, dass

$$f = g \cdot d^p,$$

was übrigens aus (72) durch die Substitution von $x = a$ folgt.

2. Die Bernoullische Verallgemeinerung (57) kann zur Annäherung einer einfachen und zugleich einer mehrfachen Wurzel verwendet werden, da sie wegen (59) in der Weise erhalten wurde, dass in der Kisschen Verallgemeinerung für $f \frac{f}{f'}$ eingesetzt wurde, und durch $\frac{f}{f'}$ wird eben die Funktion dargestellt, die alle Wurzelfaktoren von $f(x)$ an der ersten Potenz enthält. Die Bernoullische Verallgemeinerung hat ausserdem noch die interessante Eigenschaft inne, dass sie gegen die Substitution

$$f \rightarrow f^m$$

invariant ist. Wir wollen, um dies zu beweisen, aus der etwas umgeformten Gl. (45) ausgehen :

$$\frac{C_{nm}(f^v)}{m} = v \cdot f^{(v-1)n} \cdot \frac{C_{n(mv)}(f)}{mv}.$$

Hieraus erhalten wir durch die Grenzübergänge $m \rightarrow 0$ und $m v \rightarrow 0$ unter Verwendung von (47) :

$$N_n(f^v) = v \cdot f^{(v-1)n} \cdot N_n(f),$$

oder indem anstelle von v wieder m geschrieben wird,

$$N_n(f^m) = m \cdot f^{(m-1)n} N_n(f). \quad (75)$$

Mit Hilfe des eben abgeleiteten Hilfssatzes (75) erhalten wir :

$$\beta_n(f^m) = a - \frac{N_{n-1}(f^m)}{N_n(f^m)} \cdot f^m = a - \frac{N_{n-1}(f)}{N_n(f)} \cdot f = \beta_n(f). \quad (76)$$

Die Fehlerformel verändert sich ein wenig im Falle einer p -fachen Wurzel. Durch Anwendung von (53) erhalten wir :

$$\begin{aligned} \beta_n - \xi &= a - \xi - \frac{N_{n-1}(f)}{N_n(f)} \cdot f = \frac{d}{N_n(f)} [N_n(f) - g \cdot d^{p-1} \cdot N_{n-1}(f)] = \\ &= \frac{d \cdot d^{(p-1)n}}{N_n(f)} \cdot [N_n(g) \cdot d^n - g \cdot d^{n-1} \cdot N_{n-1}(g)], \end{aligned}$$

das heisst,

$$\beta_n - \xi = \frac{N_n(g) \cdot d - g \cdot N_{n-1}(g)}{N_n(g) \cdot d^n + p \cdot g^n} d^n. \quad (77)$$

3. Zur Modifizierung der Gräffeschen Verallgemeinerung wird ebenfalls der Hilfssatz (75) verwendet :

$$\gamma_{n+1,p} = a - \frac{f^m}{\sqrt[n]{N_n(f^m)}} = a - \frac{f}{\sqrt[m \cdot N_n(f)]},$$

bzw. $\left(p = \frac{1}{m}\right)$

$$\gamma_{n+1,p} = a - \frac{\sqrt[n]{p} \cdot f}{\sqrt[n]{N_n(f)}}. \quad (78)$$

Die Fehlerformel gestaltet sich in diesem Falle folgendermassen (vgl. mit (53)) :

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1,p} - \xi &= a - \xi - \frac{\sqrt[n]{p} \cdot f}{\sqrt[n]{N_n(f)}} = d - \sqrt[n]{p} \cdot gd \cdot [pg^n + N_n(g) \cdot d^n]^{-\frac{1}{n}} = \\ &= \gamma_{n+1,p} - \xi = \frac{1}{n} \cdot \frac{N_n(g) \cdot d^{n+1}}{p \cdot g^n} - \left(\frac{-\frac{1}{n}}{2}\right) \cdot \frac{N_n^2(g) \cdot d^{2n+1}}{p^2 \cdot g^{2n}} \dots \quad (79) \end{aligned}$$

Die untersuchten Fälle zusammenfassend können wir feststellen, dass allein die Bernoullische Näherung gegen die Mehrfachheit der Wurzel invariant

ist, während die Kissische und Gräffsche Näherungen je nach der Mehrfachheit der Wurzel modifiziert werden müssen. Während durch die originalen bzw. modifizierten Verfahren die durch die Indizes ausgedrückten Konvergenzgrade in Bezug auf eine einfache bzw. p -fache Wurzel geliefert werden, verfügen die originalen Verfahren — und dies kann in der schon bekannten Weise ebenfalls leicht verifiziert werden — im Falle einer p -fachen Wurzel und die modifizierten Verfahren im Falle einer r ($\neq p$)-fachen Wurzel lediglich über einen einfachen Konvergenzgrad. Eine Ausnahme bildet hiervon die Bernoullische Formelreihe, allerdings mit dem Nachteil, dass sie durch ebensoviel Rechnung einen nur um 1 niedrigeren Konvergenzgrad liefert.

7. Die Modifizierung der Eulerschen Näherung im Falle einer mehrfachen Wurzel

Wir wollen die durch I.(37) definierte Eulersche Näherungsformel anführen:

$$s_n = a - \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k, \quad (80)$$

wo

$$\mu_k = \frac{A_{k-1} \cdot \varphi^k}{k!}. \quad \left(\varphi = \frac{f}{f'} \right)$$

Durch die μ_k -Polynome wird der Rekursionsformel:

$$(k+1)\mu_{k+1} - k\mu_k = -\frac{f}{f'} \cdot \mu'_k \quad (81)$$

genügt (vgl. mit I, (40)).

Wir wollen untersuchen wie sich die Polynome $\mu_k = \mu_k(f)$ umformen, wenn in ihnen für f die Funktion

$$f^m \equiv \sqrt[p]{f}$$

eingesetzt wird. Mit der Bezeichnung

$$\mu_k(f^m) = M_k(f) = M_k \quad (82)$$

folgt aus (81), dass durch die M_k -Polynome der Rekursionsformel

$$(k+1) \cdot M_{k+1} - k \cdot M_k = -p \cdot \frac{f}{f'} \cdot M'_k \quad (83)$$

genügt wird.

Die M_k -Polynome werden in der folgenden Form angesetzt :

$$M_k = \sum_{\nu=1}^k a_{k\nu} \cdot \mu_\nu, \quad (84)$$

wo die Koeffizienten $a_{k\nu}$ von f unabhängig und Funktionen von p sind. Durch Substitution in (83) erhalten wir :

$$(k+1) \cdot \sum_{\nu=1}^{k+1} a_{(k+1)\nu} \cdot \mu_\nu - k \cdot \sum_{\nu=1}^k a_{k\nu} \cdot \mu_\nu = -p \cdot \frac{f}{f'} \cdot \sum_{\nu=1}^k a_{k\nu} \cdot \mu'_\nu.$$

(μ'_ν) wird mit Hilfe von (81) eliminiert. Nach Umordnung erhalten wir :

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} [(k+1) \cdot a_{(k+1)\nu} + (p\nu - k) a_{k\nu} - p\nu \cdot a_{k(\nu-1)}] \cdot \mu_\nu = 0. \quad (85)$$

Zur selben Zeit müssen wir indessen die sich im Laufe der Summation mechanisch ergebenden Koeffizienten a_{k0} und $a_{k(k+1)}$ als gleich Null betrachten.

Da die μ_ν -Polynome linear unabhängig sind, so folgt aus (85) für die Koeffizienten $a_{k\nu}$ die folgende Rekursionsformel :

$$(k+1) a_{(k+1)\nu} + (p\nu - k) a_{k\nu} - p\nu \cdot a_{k(\nu-1)} = 0 \quad (86)$$

Hieraus und aus den Ausgangswerten $a_{k0} = 0$, $a_{k(k+1)} = 0$ und $a_{11} = p$ können alle weiteren Koeffizienten bestimmt werden, und zwar zuerst a_{k1} , sodann in deren Kenntnis a_{k2} , sodann aus diesen a_{k3} , usw.

Die Werte einiger Koeffizienten mit niedrigeren Indizes mögen hier folgen :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= p, \\ \alpha_{21} &= -\binom{p}{2}, \quad \alpha_{22} = p^2, \\ \alpha_{31} &= \binom{p}{3}, \quad \alpha_{32} = -p^2 \cdot (p-1), \quad \alpha_{33} = p^3, \\ \alpha_{41} &= -\binom{p}{4}, \quad \alpha_{42} = \frac{1}{12} \cdot p^2 (p-1) (7p-11), \quad \alpha_{43} = -\frac{3}{2} \cdot p^3 (p-1), \quad \alpha_{44} = p^4. \end{aligned}$$

Auch die allgemeine explizite Form der Koeffizienten $a_{n\nu}$ wird durch die folgende Formel gegeben :

$$a_{n\nu} = (-1)^{n-\nu} \cdot (\nu!) \cdot \sum_{k=1}^{n-\nu+1} \prod_{i=k}^{n-\nu+1} \frac{1}{(i_k!)} \cdot \binom{p}{k}^{i_k}, \quad (87)$$

und damit wird die sukzessive Berechnung aus der Rekursionsformel (86) überflüssig. (87) muss noch mit der Anweisung ergänzt werden, dass bei der Summa-

tion alle möglichen Fälle in Betracht gezogen werden müssen, die die Bedingungen

und
$$\left. \begin{aligned} \sum i_k &= v \\ \sum ki_k &= n \end{aligned} \right\} \quad (88)$$
 erfüllen.

Zum Beweis von (87) wollen wir die folgenden Reihenentwicklungen betrachten :

$$1 - (1 - x)^p = \alpha_{11} \cdot x + \alpha_{21} \cdot x^2 + \alpha_{31} \cdot x^3 + \dots$$

bzw.

$$[1 - (1 - x)^p]^n = \alpha_{nn} \cdot x^n + \alpha_{(n+1)n} \cdot x^{n+1} + \alpha_{(n+2)n} \cdot x^{n+2} + \dots$$

Aus (87) und (88) folgt nämlich, dass

$$[1 - (1 - x)^p]^v = \sum_{k=v}^{\infty} \alpha_{kv} \cdot x^k. \quad (89)$$

Wenn auf Grund dieser Gleichung die Rekursionsformel (86) verifiziert werden kann, so kann (87) als bewiesen gelten. Wir wollen die beiden Seiten nach x differenzieren :

$$v p \cdot [1 - (1 - x)^p]^{v-1} \cdot (1 - x)^{p-1} = \sum_{k=v}^{\infty} k \alpha_{kv} \cdot x^{k-1},$$

woraus nach Multiplikation mit $(1 - x)$ wird :

$$v p [1 - (1 - x)^p]^{v-1} \cdot (1 - x)^p = \sum_{k=v-1}^{\infty} (k + 1) \alpha_{(k+1)v} - k \alpha_{kv} \cdot x^k. \quad (90)$$

Man schreibt nun (89) für $(v - 1)$ an und multipliziert mit $(v p)$:

$$v p [1 - (1 - x)^p]^{v-1} = \sum_{k=v-1}^{\infty} v p \cdot \alpha_{k(v-1)} \cdot x^k, \quad (91)$$

und multipliziert auch (89) mit $v p$:

$$v p [1 - (1 - x)^p]^v = \sum_{k=v}^{\infty} v p \cdot \alpha_{kv} \cdot x^k.$$

Wird nun die linke Seite von (90) von der linken Seite von (91) subtrahiert, so wird eben die linke Seite der letzten Gleichung erhalten. Dasselbe gilt somit

auch für die rechten Seiten. Wird nun umgeordnet und x^k vor die Klammer gesetzt, so erhalten wir :

$$\sum_{k=v-1}^{\infty} [(k+1) a_{(k+1)v} + (vp - k) a_{kv} - vp \cdot a_{k(v-1)}] \cdot x^k = 0,$$

woraus unmittelbar die Rekursionsformel (86) abgelesen werden kann.

Aus dem Umstand, dass die Koeffizienten a_{kv} auch als Glieder der Reihenentwicklung (89) vorkommen, wird noch ein weiterer Nutzen gewonnen. Für $x = 1$ folgen nämlich daraus die folgenden drei Sätze :

1. $\sum_{k=v}^{\infty} a_{kv} = 1$, wenn $p > 0$, (92)
2. $\sum_{k=v}^n a_{kv} = 1$, wenn $n \geqslant vp$ und p eine positive ganze Zahl ist ;

schliesslich durch Kombination der beiden voranstehenden Sätze :

3. $a_{nv} = 0$, wenn $n \geqslant vp$ und p eine positive ganze Zahl ist.

Durch einfache Umformung folgt aus (92) der bezüglich der Eulerschen Reihe wichtige Satz : Es sei durch die für den Fall einer p -fachen Wurzel erforderliche Modifizierung der Eulerschen Reihe, das heisst, die Doppelreihe :

$$s_{n,p} = a - \sum_{k=1}^{n-1} M_k = a - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{v=1}^k a_{kv} \mu_v \right) \quad (93)$$

für den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in Bezug auf alle Glieder eine absolut konvergente Reihe. In diesem Falle lässt sich die Reihe $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,p}$ in die ursprüngliche

Eulersche Reihe umordnen, oder was dasselbe ist : die Taylorsche Reihe der inversen Funktion ist von der Multiplizität der durch die Summe der Reihe für den Fall der Konvergenz bestimmte Nullstelle unabhängig — obwohl im Falle einer mehrfachen Wurzel die Konvergenz im allgemeinen langsamer ist.

Zum Beweise wollen wir (93) umformen :

$$s_{n,p} = a - \sum_{v=1}^{n-1} \left(\sum_{k=v}^{n-1} a_{kv} \right) \cdot \mu_v,$$

und wir erhalten unter Verwendung von (92) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,p} = a - \sum_{v=1}^{\infty} \left(\sum_{k=v}^{\infty} a_{kv} \right) \mu_v = a - \sum_{v=1}^{\infty} \mu_v = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

was zu beweisen war.

SCHRIFTTUM

1. H. WUNDT, Eine neue Methode der Periodogrammanalyse und ihre Anwendung auf die Reihe der Sonnenfleckenrelativzahlen. Basel 1950 (Dissertation).
2. I. KISS, Die theoretischen Grundlagen der Radizierung mit der Rechenmaschine. Acta Technica Hung. **8** (1954) S. 221.
3. I. KISS, Über eine Verallgemeinerung des Newtonschen Näherungsverfahrens. ZAMM **34** (1954). S. 68.
4. R. LUDWIG, Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssysteme. ZAMM **34** (1954). S. 210 und 404.
5. М. С. Горнштейн, Численное решение уравнений. Доклады Академии наук СССР. Том. LXXVIII, № 2. стр. 193—196.
6. E. PFLANZ, Über eine Verallgemeinerung des Verfahrens der Kombination von Newtonscher Methode und Regula falsi zur Auflösung einer Gleichung $f(x) = 0$. ZAMM **28** (1948). S. 114.
7. E. PFLANZ, Zur Bestimmung reeller Nullstellen von reellen Funktionen einer Variablen. ZAMM **29** (1949). S. 85.
8. E. BODEWIG, Konvergenztypen und das Verhalten von Approximationen in der Nähe einer mehrfachen Wurzel einer Gleichung. ZAMM **29** (1949). S. 45.

ZUSAMMENFASSUNG

Diese zweite Mitteilung bildet eine organische Fortsetzung und Ergänzung der ersten Mitteilung (Acta Technica Hung. Tom. XV. fasc. 3—4). Im ersten Kapitel werden an Hand der Bodewigschen Definition des Konvergenzgrades [8] einige grundlegende Sätze bezüglich der iterativen Näherungsformeln bewiesen. Im zweiten Kapitel wird im Laufe der Diskussion der Gornsteinschen Methode [5] als wichtigstes Ergebnis nachgewiesen, dass die Anwendung der nach der Gornsteinschen Vorschrift gebildeten Funktion, $\varphi_\nu(x; a)$, nach der Formel

$$x_{n+1} = \varphi_\nu(x_n; x_n)$$

mit der Verwendung der Kissschen Formeln [2] identisch ist.

Im vierten Kapitel werden den Eulerschen und den Kiss—Gornsteinschen Formelfolgen zwei weitere Formelfolgen zugefügt, die der iterativen Umschreibung der bekannten Bernoullischen bzw. Gräffeschen Näherungsmethoden entstammen. Die Definitionen und Eigenschaften der in den Formeln vorkommenden Polynomen werden im dritten Kapitel, während ihre expliziten Formen im fünften Kapitel behandelt. Schliesslich enthalten die Kapitel 6 und 7 die von BODEWIG für den Fall der mehrfachen Wurzeln begonnenen Untersuchungen [8], die auf alle vier Formelfolgen erstreckt werden. Hierbei wurde das Ziel verfolgt, festzustellen, welcher Umformung der Formeln es bedarf, um bei der Annäherung einer mehrfachen Wurzel den Konvergenzgrad zu bewahren.

INVESTIGATION ON THE GENERALIZATION
OF THE NEWTON—RAPHSON ROOT APPROXIMATION METHOD (II)

A. ZAJTA

SUMMARY

This second paper is the organic continuation and completion of the previous first one (Acta Technica Hung. Tom. XV. Fasc. 3—4). In the first chapter the verification of some basic statements is found in relation to intermediate approximate formulae in pursuance of Bodewig's [8] definition of the degree of convergence. In the second chapter in the course of discussion of Gornstein's method as a principal result it is demonstrated that the application of the function $\varphi_\nu(x; a)$, set up after Gornstein's prescription, according to the formula:

$$x_{n+1} = \varphi_\nu(x_n; x_n)$$

is identical with the use of the Kiss formulae [2].

In addition to the series of the Euler and of the Kiss—Gornstein formulae two further series of formulae are given in Chapter 4, which originate from the iterative transcription

of the known Bernoulli and Gräffe methods of approximation. Chapter 3 deals with the definition and properties of the polynomials included in the formulae, Chapter 5 with their explicit form. Further, Chapters 6 and 7 contain the investigation begun by BODEWIG [8] for the case of multiple-roots, extended on all four series of roots. The aim was to establish what transformation of the formulae is required for the preservation of the degree of convergence in the case of multiple-roots.

RECHERCHES SUR LA GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE NEWTON ET RAPHSON POUR L'APPROXIMATION DES RACINES (II)

A. ZAJTA

RÉSUMÉ

Cette communication fait suite à une étude déjà parue (*Acta Technica Hung.* Tom. XV. Fasc. 3—4), qu'elle complète. Dans le premier chapitre, la définition du degré de convergence par BODEWIG [8] sert point de départ à la démonstration de quelques théorèmes fondamentaux, relatifs aux formules d'approximation itératives. Dans le deuxième chapitre il est démontré, comme résultat principal, au cours de la discussion de la méthode de Gornstein, que l'application de la fonction $\varphi_\nu(x; a)$ construite suivant la prescription de Gornstein, conformément à la formule

$$x_{n+1} = \varphi_\nu(x_n; x_n)$$

est identique à l'application des formules de Kiss [2].

Aux séries de formules d'Euler et de Kiss—Gornstein, on ajoute deux séries de formules au chapitre 4, lesquelles proviennent de la transcription itérative des méthodes d'approche connues de Bernoulli et de Gräffe. Le chapitre 3 est consacré à la définition et aux propriétés des polynômes contenus dans les formules le chapitre 5, traitant de leur forme explicite. Les chapitres 6 et 7 relatent enfin les recherches commencées par BODEWIG [8] pour le cas de racines multiples, étendues sur les quatre séries de formules. Le but a été ici d'établir. La mesure de la transformation des formules, nécessaire pour le maintien de la convergence en cas de l'approche de racines multiples.

ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ОБОБЩЕНИЯ НЬЮТОН—РАФСОНОВСКОГО МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ. II

A. ЗАЙТА

РЕЗЮМЕ

Данное второе сообщение является органическим продолжением и дополнением опубликованного ранее первого сообщения (*Acta Technica Hungarica*, том. XVI, № 3—4). В первой главе, примыкая к дефиниции Бодвига [8] степени сходимости, можно найти доказательство нескольких основных положений для итерационных приближенных формул. Во второй главе при обсуждении метода Горнштейна (5) — в качестве главного результата — показано, что применение функции $\varphi_\nu(x; a)$, построенной по предписаниям Горнштейна, по формуле

$$x_{n+1} = \varphi_\nu(x_n; x_n)$$

является идентичным применению формул Киша (2).

Серии формул Эйлера, далее Киша — Горнштейна в четвертой главе дополняются еще двумя сериями формул, которые происходят от итеративного переписания приближенных методов Бернулли и, соответственно, Греффе. Дефиницией и свойствами встречающихся в формулах полиномов занимается глава 3, а их эксплицитной формой — глава 5. Наконец главы 6 и 7 содержат исследования [8], начатые Бодвигом для случая многократных корней, распространив на все четыре серии формул. Здесь ставилось целью определить, что в случае приближения многократного корня какое именно преобразование формул необходимо выполнить для определения степени сходимости.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СОДЕРЖАЩЕГОСЯ В КОЛЬСКОМ ФОСФАТЕ ТИТАНА В ПРОЦЕССЕ МАГНИТНОЙ СЕПАРАЦИИ

И. ВЕРЕШ

Канд. техн. наук

КАФЕДРА ЭЛЕКТРОХИМИИ БУДАПЕШТСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Поступило 18-го августа 1956 года

В Исследовательском институте тяжелой химической промышленности азотнокислым разложением кольского фосфата разработана технология производства искусственного удобрения и этот факт поднял вопрос утилизации побочных продуктов. (1 и 2) Ниже трактуются исследования, проведенные в области магнитной сепарации, касающейся оригинального флотированного кольского фосфата.

На Кольском полуострове добывается апатит, основными компонентами которого являются $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ и CaF_2 . Наряду с этими компонентами в небольших количествах в апатите имеются титан, железо, алюминий, силиций, кальций, магний, стронций, церий и пр. На Кольском полуострове в Хибинской тундре находятся богатейшие в мире залежи апатитов, где они дифференцировались из магмы сильно основных пород (уртит), связанной с магмой элиолита. (3) По середине полуострова возвышается Хибинский горный кряж, который содержит апатиты слоем, мощностью до 180 м, и на основе геологических данных там имеется до двух миллиардов тонн апатитов (4).

В Советском Союзе добываемый на Кольском полуострове апатит подвергается процессу флотации на обогатительной фабрике в Кировске с целью извлечения содержащихся в апатите титана и нефелина, следовательно мы можем рассчитывать лишь на остающийся в продукте после флотации титан. Несмотря на это данный вопрос заслуживал проведения соответствующих исследований, так как ежегодно импортируется очень большое количество апатитов для производства искусственных удобрений.

По гранулометрическому составу преобладающее количество использованных проб находилось в пределах 0,01—0,1 мм.

Ситовой анализ из трех проб показал следующие результаты:

Тонкость зерен		Ситовой остаток
16,900	0,050	60 —70
9,800	0,065	46 —51
4,900	0,09	40,3—44,4

Ситовые остатки в каждом случае относятся к количествам, оставшимся на отдельных ситах и выраженных в процентах, и не представляют собою непрерывные ситовые анализы.

Влажность проб, отнесенная к сушке при 110°C , составляла 1,38%, 1,47% и 1,69%. Для устранения технического затруднения, вызванного влажностью слипания, магнитная сепарация производилась с материалом, высушенным при температуре 110°C . После чего материал слегка растирался в фарфоровой ступке, чтобы разделить слипшийся при высушивании материал.

В подвергнутых анализу пробах имелось 0,9—1,1% TiO_2 . Это означает, что в каждых 100 000 *t* подвергнутого флотации кольского фосфата имеется до одной тысячи тонн TiO_2 , к сожалению при довольно неблагоприятном распределении концентрации. Следует отметить, что найденное содержание TiO_2 является довольно высоким; по имеющимся у нас данным для кольского апатита — сырца, не подвергнутого еще флотации, содержание TiO_2 в отдельных случаях составляет, например, даже 0,79%.

В процессе проведенных мною исследований установлено, что кольский фосфат при магнитном воздействии дает отклонения, и в нем имеются частицы, которые можно подвергнуть сепарации.

Магнитная фракция, %	Фракция породы, %	Недостающий материал, %	TiO_2 в магнитной фракции, %	TiO_2 в породе, %
0,5—4,5	90,0—98,5	1,0—5,5	10,2—13,8	0,38—0,62

(Средние данные трех опытов)

В магнитных фракциях — между прочими компонентами — было еще найдено 39—48% Fe, 2,9—3,6% SiO_2 , 9,8—12,1% CaO и 14,5—17,1% MgO.

При сепарации в лабораторных условиях с помощью ручных магнитов получаются очень большие отклонения в выходе TiO_2 (между 6—54%), что, естественно, указывает на неоднородность материала. Отдельные пробы (по 100 г) были получены из количеств в 50 кг путем отбора средней пробы.

Материал обладает невысокой магнитностью. Это показали также измерения магнитной восприимчивости, результаты которых выражены величинами (K_m), отнесенными к единице массы. Согласно этих измерений величина K_m получается порядка 10^{-5} . (Точнее: $K_m = 33 \cdot 10^{-6}$.) Для информации позволено будет указать, что величина магнитной восприимчивости шведского магнетита, который можно сепарировать практически до 100% и

магнитная восприимчивость которого была измерена для сравнения, составляет приблизительно 1000 кратную указанной выше величины ($K_m = 32\,800 \cdot 10^{-6}$). Отдельные пробы были отобраны обычными методами отбора, соответственно усреднением из количеств в 25—50 кг.

Опыты были повторены и с материалом, подвергнутым помолу на шаровой мельнице. Для трех проб на 30—40% снизился выход по весу магнитной фракции — вследствие помола.

Часть содержания титана следует железу при сепарации во флотированном фосфате. Часть же титана может быть в не поддающейся сепарации породе, или же в силикатных минералах. Видимые в микроскоп коренастые амфиболообразные кристаллы схожи с амфиболами титана, встречающимися также в верлите м-р Сарвашке. (В магнитной фракции имеется только очень небольшое количество обломков амфибол.) В кольском апатите TiO_2 в основной своей массе находится в форме сфен. ($CaO TiO_2 SiO_2$) Это обстоятельство, далее то, что по опыту обогатительной фабрики в Кировске также нефелин — концентрат содержит небольшое количество TiO_2 , подтверждают, что в магнитной породе TiO_2 , между прочим, может содержаться в силикатных минералах.

Что же касается магнитной фракции, то следует указать, что кольский апатит — сырец наряду с Fe_2O_3 содержит также FeO . Сопоставляя это обстоятельство с магнитной сепарируемостью можно думать о присутствии магнетита. То, что в магнетите часть железа часто замещается титаном, является уже известным фактом (титановый магнетит). Естественно, что присутствующее феррожелезо позволяет предполагать также ильменит. Под микроскопом наблюдались как магнетит, так и ильменитные иглы. В магнитной фракции под микроскопом наблюдалось большое количество магнетита, а ильменитных же игл было видно мало. Из этого следует, что в магнитную фракцию переходит титан, связанный с магнетитом.

В Институте тяжелой химической промышленности (город Веспрем) А. Гедеон под руководством Б. Балла при рентгеновском анализе флотированного кольского фосфата кроме фтористого апатита не мог показать ничего другого (6). Пока еще не выполнен рентгеновский анализ магнитной фракции.

Возвращаясь к вопросу технической исполнимости магнитной сепарации, мною установлено, что при сепарации в крупных производственных масштабах значительно ухудшается получаемый результат. Учитывая, что материал является довольно тонким, использовался магнитный сепаратор, сконструированный Л. Вишневым. В указанном аппарате сепарация осуществляется вращающимся магнитным полем. На сепараторном столе, имеющим некоторый уклон, зерна материала вынуждены совершать вращательное движение и весь сепаратор, кроме этого, совершает также колебательное движение. Вследствие вышесказанных магнитные частицы

из-за значительного истирательного эффекта могут освободиться от прилипших к ним частиц породы.

С помощью указанного выше аппарата проведено несколько опытов по сепарации кольского фосфата, каждый раз в количестве 25 кг. В процессе опытов я убедился, что материал сильно неоднороден; содержание титана различных партий различно. Выход TiO_2 в расчете на 100 000 *t* кольского фосфата в лучшем случае получался равным 80 *t* (т. е. 8%), а в худшем — всего лишь одной десятой части этого. Следовательно, выход при работе с сепаратором получается ниже выхода с ручными магнитами.

Магнитная сепарация означала бы в промышленном отношении принудительное решение и с экономической точки зрения кажется нежелательной. Без сепарации же несомненно пропадает содержащийся в переработанном H_2SO_4 — процессом кольском фосфате титан.

Естественно, в случае производства комбинированных искусственных удобрений азотнокислым процессом дело упрощается значительно, т. к. здесь в небольшом остатке от растворения (2 вес. %) итак уже обогащается встречающийся там титан и поэтому предварительная сепарация во всех случаях является излишней.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. BALLA и F. MAJDIK: Magyar Kémikusok Lapja. (Журнал венгерских химиков) VII, 49 (1952)
2. Ш. И. Вольфович и А. И. Логинова: Magyar Kémikusok Lapja. V, 294 (1950)
3. MAURITZ—VENDL: Ásványtan (Геология). Будапешт, 1942.
4. T. HEGEDÜS: Magyar Kémikusok Lapja. IV, 113 (1951)
5. E. SZÁDECZKY-KARDOSS: Geokémia. (Геохимия) Будапешт, 1955
6. A. SEDEON: Veszprémi Vegyipari Egyetem diplomamunka-gyűjteménye. (Сборник дипломных работ Химического Университета г. Веспрем) Веспрем, 1955

РЕЗЮМЕ

Рассматривается вопрос возможности извлечения содержащегося во флотированном кольском фосфате титана в процессе производства искусственных удобрений, или же перед процессом производства. Установлено, что часть содержащегося титана связана с железом и может быть сепарирована вместе с железом. Магнитная восприимчивость сырья довольно низка и составляет приблизительно одну тысячную долю магнитной восприимчивости среднесортных шведских магнетитов. Сообщается об опытах в лабораторных условиях при помощи ручных магнитов и о предварительных лабораторных опытах с помощью электромагнитного сепаратора. Установлено, что промышленное осуществление является экономически невыгодным.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DAS VERHALTEN DES TI-GEHALTES
VON KOLA-PHOSPHAT BEI DER MAGNETISCHEN SCHEIDUNG

I. VERES

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde über die Gewinnungsmöglichkeit des Ti-Gehaltes von Schwimmaufbereitungsprodukten des Kola-Phosphats im Laufe der Kunstdüngererzeugung, oder vor diesem Verfahren berichtet. Es wurde festgestellt, dass ein Teil des Titan an Eisen gebunden und damit zusammen magnetisch scheidbar ist. Die magnetische Suszeptibilität des Rohmaterials ist gering, ungefähr ein v. Tausend deren des durchschnittlichen schwedischen Magnetits. Es wurde über Laboratoriumsversuche mittels eines Handmagnets und über Vorversuche auf einem elektromagnetischen Scheider berichtet und festgestellt, dass sich eine gewerbliche Gewinnung nicht lohnt.

INVESTIGATIONS ON THE BEHAVIOUR OF THE TI-CONTENT OF KOLA PHOSPHATE
ROCK AT MAGNETITS SEPARATION

I. VERES

SUMMARY

The possibility of recovery of the titanium content of flotation concentrates of Kola phosphate rock in the course of fertilizer manufacture, or previous to it, was treated. It was found that part of the Ti-content was tied to iron and was magnetically separable along with it. The magnetic susceptibility of the raw material is low, about one thousandth of that of the average Swedish magnetite ore. Laboratory separation experiments executed with a hand-magnet and preliminary experiments on electromagnetic separators were accounted for. It was found that commercial exploitation was not promising.

RECHERCHES SUR LE COMPORTEMENT DE LA TENEUR EN TITANE
DU PHOSPHATE DE KOLA, LORS DE LA SÉPARATION MAGNÉTIQUE

I. VERES

RÉSUMÉ

L'auteur étudie la possibilité d'exploitation de la teneur en titane des concentrés de flottaison des phosphates de Kola, pendant ou avant la fabrication, d'engrais. Il constate qu'une partie de la teneur en Titane se trouve liée à du fer, et est ainsi séparable par voie magnétique avec ce métal. La susceptibilité magnétique de la matière première est assez basse, elle n'atteint qu'un millième environ de celle de la magnétite suédoise moyenne. Suit un exposé des essais de laboratoire exécutés avec un aimant manuel, et d'essais préalables avec séparateur électromagnétique. L'auteur constate que l'exploitation industrielle est peu rentable.

INFLUENCE OF BINDERS UPON SURFACE BRIGHTNESS OF CATHODE-RAY TUBE SCREENS

I. HANGOS

RESEARCH INSTITUTE OF TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received July 11, 1956]

I. Introduction

The manufacture of cathode-ray tubes is gaining importance with technical development in our days. Wide application of cathode-ray tubes, especially for television and radar demands more and more in relation to cathode-ray tubes.

The most important parts of the cathode-ray tube are : the electron gun, the glass bulb and the luminescent screen.

The preparation of the screen can be executed in many ways, comprehensive works and textbooks treat it in detail. Nowadays the so-called settling process has gained great importance, because in the quantity production of television picture tubes this method is applied.

The essence of the settling process is that the required amount of phosphor (luminescent material) is mixed with some liquid, and the suspension thus produced is dispersed in the settling liquid contained in the bulb of the cathode-ray tube. Particles of the luminescent material then deposit on the bottom of the bulb under the influence of gravity and form there a layer.

If care is taken that the particles of the luminescent material stick fast to one another and to the wall of the bulb after settling, after some time (the so-called settling time) the liquid may be drained off from the bulb, when a thin, adhering, luminescent layer remains on the bottom. The material promoting (securing) adhesion is the binder ; after completion of the tube fabrication process the luminescent layer forms the screen of the cathode-ray tube.

In the manufacture of cathode-ray tubes care has to be taken that the efficiency of the screen (the number of lumens emitted per one watt excitation power, lm/W) or surface brightness of the screen depends on three circumstances :

1. Efficiency of the luminescent material,
2. Thickness of the luminescent layer and
3. Method of processing of the screen.

Numerous extensive works deal with the luminescence efficiency of the various luminescent materials. So much the fewer publications treat the effect of the other two factors, though their influence, as will be shown, may be quite important.

The effect of the thickness of the luminescent layer in the settling process is most expediently examined on samples of screens deposited without binder. Such tests were executed by HOPKINSON and NICOLL [1, 18]. During the last years the author and his co-workers have also dealt with the matter in previous papers [2, 3, 4]. Results may be summed up as follows :

In the case of a phosphor of similar material quality and under similar conditions of excitation, the surface brightness depends very much in the particle size of the phosphor, and on its particle size distribution. If the screen is looked from the excited side, the surface brightness first increases as a function of the layer thickness, then it becomes relatively constant. However, if it is looked from the side opposite to excitation, as is done with conventional cathode-ray tubes, the surface brightness first increases as a function of layer thickness ; on reaching a maximum, it decreases. The locus of the maximum, or in the first case, of saturation is a function of the particle size distribution.

This law is qualitatively easily interpreted. That is to say, the light measured on the excitation side increases as long as the particles do not entirely cover the entire glass surface available. Afterwards, since out of the particles only such emit light as can be excited by the electron beam, the light does not change with additional layers (the curve tends toward saturation). The light measured on the opposite side also grows only as long as the phosphor particles

do not entirely cover the glass surface. The surface brightness then attains its maximum, afterwards it decreases, because along with the formation of further layers the intermediate layers absorb the light of the particles excited on the surface. Quantitative evaluation, however, is very difficult, and results so far attained [1, 3, 4] can by far not be regarded as conclusive.

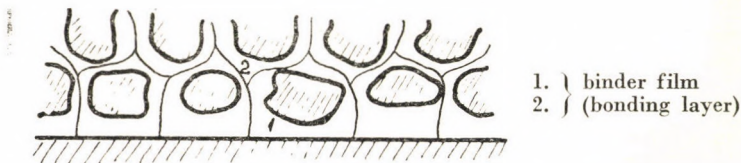
The aim of this paper is to clear up what effects influencing surface brightness arise at the preparation of the screen by settling, depending on the mode of application of the screen. From the foregoing follows that for the investigation of these effects screen samples of the same material quality, of the same distribution of particle size and of the same layer thickness, have to be examined. Layer thickness is expressed in units of mg/cm^2 , that is, weight in mg of the phosphor present on 1 cm^2 of screen surface. That is to say, in the case of equal material quality and grain size distribution, this unit is proportional to the layer thickness.

II. Effect of the application of the screen

As afore-mentioned, samples of screens prepared by the settling process will be dealt with. It is expedient, therefore, to give a short theoretical information before presenting test results.

In the settling process for the fixation of the screen (promoting adhesion) binders are used. The different settling processes differ from one another in the quantity and quality of the binder, as well as in those of the auxiliary materials that may be used. The chemical processes taking place in the settling process are dealt with in several papers [2, 5, 6, 7, 8, 9, 10], on the basis of which a short outline is given.

When the phosphor particles are dispersed in the settling liquid and deposit under the effect of gravity, after the time of settling (and of set) has passed, the structure of the layer can be illustrated thus :



That is, the so-called binder is located in the interstices between phosphor particles and "bonds" them together.

In the settling liquid not only the material, called binder in literature, is dissolved, but also the so-called coagulator. The role of the latter is to "preserve" the bonding power of the binder. The adhesive substance which sticks the particles to one another and to the glass wall is composed of colloidal particles of complex structure, containing certain materials from the binder and from the coagulator, as well.

In the following this simplified image will be used. In conformity with the literature the material responsible for bonding, but possessing no bonding power alone, will be called binder. The "bonding material" between the particles,

which is produced by the mutual action of binder and of coagulator, will be called distinctively bonding layer.

Let be investigated theoretically what differences may exist between the screens deposited without binder and the so-called conventional (fabricated) screens prepared with the aid of binders.

As has been said, there is a bonding layer deposited in the interstices of the phosphor particles. This bonding layer in one respect affects the layer thickness, that is, the optimum layer thickness will be different in the presence of binder. The phosphor layer is besides this a thin layer composed of minute crystals, optically diffuse. If the interstices of the particles are filled with a binder, this may cause different optical effects. Compared to the layer without binder the absorption and diffuse reflection in the layer of the light emitted by the phosphor particles may change, that is, the surface brightness of conventional screens may increase or decrease, as the resultant of these effects, in relation to screens without binder.

The exciting electrons have to pass through the bonding layer on the phosphor particles to be able to excite these particles. During this, of course, their energy decreases, the bonding layer exerts an attenuating effect. The attenuating effect depends on the thickness of the bonding layer and on its material properties, in case of an identical bonding layer, it is a constant value. The smaller the energy of the exciting electrons, so much the greater proportion of this energy will be lost by attenuation. It is to be expected thus that the attenuation effect will strongly influence the surface brightness especially at lower exciting voltages.

The attenuating effect depends on the material quality of the phosphor and on its particle size distribution, because the same binder is differently adsorbed on phosphor particles of different size distribution and different material qualities.

Materials present in the bonding layer may change the secondary emission ratio of the screen. This effect arises especially at very low and very high accelerating voltages.

Summing up, it may be said that the mode of application of the screen in the settling process may effect its surface brightness, and in comparison to screens without binder the following factors have to be reckoned with :

1. The attenuating effect of the binder. This reduces surface brightness.
2. The change of ratios of secondary emission. This may increase or reduce surface brightness.
3. Optical effects. These may effect surface brightness in positive or negative sense.

As a result hereof the surface brightness of conventional phosphor screens is higher or lower than that of screens without binder. In the author's opinion the attenuating effect of the binder is the most important one, that is, the surface brightness is lower in most of the cases. The experimental part of this

paper will deal with the problem of the order of magnitude of these effects as well as of how far they have to be considered.

No ampler literary data have so far been found on the effect of the settling process on samples of screens prepared by settling. HOPKINSON [1] who treated somewhat similar problems made such measurements on screens prepared by dry and wet pulverization as well as by the so-called spreading process. In the case of water-glass binder — to be treated next — he drew the following principal conclusions: the diminution of surface brightness is the greater, the larger the amount of binder, the finer the particle size of the phosphor and the lower the service screen voltage (accelerating voltage). On settled screens the diminution of surface brightness is greater at lower-voltage excitation; sulphide-type phosphors are less sensitive than silicate-type phosphors. In the presence of a binder the optimum layer thickness changes.

A great part of the phenomena observed by HOPKINSON — as will be seen — also refers to settled screens, with the complement that conditions are very much affected by the composition of the settling liquid and by the duration of settling.

III. Measuring method, materials used

To attain the goal set it is necessary to examine the different test screen samples, or their surface brightness under the influence of cathode-ray excitation.

The first and also most crucial problem is how to secure the reproducibility of measurements, their precision, at the same time making possible a large number of not very expensive measurements. Under routine laboratory conditions each phosphor sample would require a separate cathode-ray tube (for reproducibility even 2–3 cathode-ray tubes). A single cathode-ray tube, even the simplest one, is very expensive, its production demands much work, and the technological processes of its fabrication would cause strong spreading of measurement results. Therefore an experimental cathode-ray tube had to be designed in which several experimental phosphor samples can be measured without the necessity of preparing a separate cathode-ray tube for each individual sample. This test cathode-ray tube is called in literature demountable cathode-ray tube or one having an exchangeable screen.

There are such solutions known in literature [1, 2, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17], but the descriptions are not sufficiently detailed as regards the main problems. The principal problems arising are the following:

1. vacuum tightness,
2. displacement of the individual phosphor samples in the vacuum space from the outside,
3. cathode resisting repeated aeration,

4. facilities of rapid exchange of phosphor samples.

The author built up the cathode-ray tube for phosphor examination designed by him after constructions described by HARDY, STRANGE, HENDERSON and MOSKVIN, with different modifications.

The test equipment itself consists of three parts :

1. the vacuum system,
2. the power supply unit and
3. the phosphor-testing cathode-ray tube.

For the production of the necessary high vacuum a mercury diffusion pump and a high-speed rotating pump were used with thick copper tubes. Vacuum was

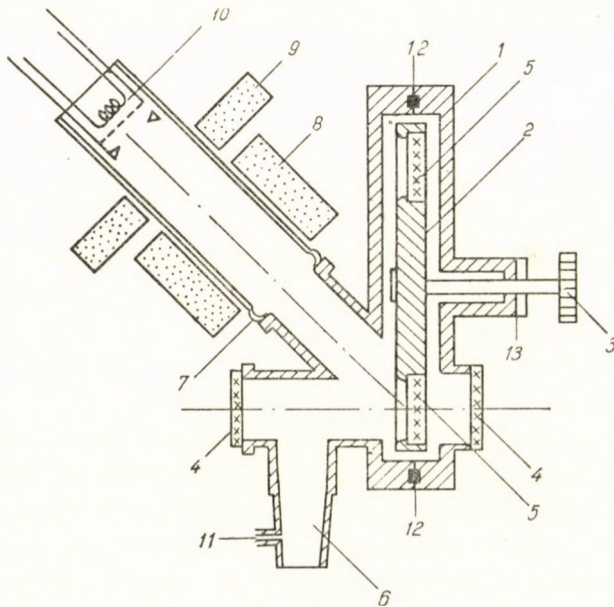


Fig. 1. 1 — Cathode-ray tube housing ; 2 — Rotatable disc ; 3 — Turning handle ; 4 — Glass covers ; 5 — Test covers ; 6 — Exhausting pipe ; 7 — Neck of cathode-ray tube ; 8 — Deflection yoke ; 9 — Focusing coil ; 10 — Electron gun ; 11 — Vacuum-gauge attachment ; 12 — Rubber ring ; 13 — Rotatable packing

controlled by a PIRANI type platinum-wire vacuum gauge and with one ionization type vacuum gauge attached directly to the exhausting pipe of the phosphor-testing set. During operation vacuum was of the order of 10^{-5} Torr.

The power supply unit was built up after the model of the electric measuring equipment used for conventional cathode-ray tubes. The high-voltage positive side was grounded, thus the cathode, the grid and anode no. 1 were connected to high voltage, which could be continuously regulated up to 15 kV.

The most important part of the test equipment is the phosphor-test cathode-ray tube itself pictured in Fig. 1. The vacuum system 1 is of thick brass and

is composed of two parts assembled with rubber packing at 12. In this housing a vertical brass disc 2 is rotatable, containing the samples to be examined 5. The individual samples can be brought into the path of the electron beam by rotation of the disc. A vacuum-tight packing 13 led out serving for rotation is kept tight by two metal plates fit together by polishing. These rotate in silicon-grease.

There is a glass tube 7 at 45 deg to the plane of the disc in which a triode electron gun 10 is placed. The outer wall of the tube is coated with colloidal graphite and tied to the potential of the metal housing. The glass tube is glued to the housing with picein.

The light emitted by the excited phosphor samples can be examined from two directions through glass windows 4 by means of an adequate measuring equipment. The electron beam was focused and deflected by magnet coils 8, 9. The entire system was during the test constantly pumped through the exhausting pipe 6, and the pressure reigning in the system was controlled at 11.

The greatest problem was that of a cathode resisting atmospheric pressure. This was solved by two ways, both differing from methods so far employed. As known, oxide-cathodes used in the fabrication of cathode-ray tubes can sustain several times atmospheric pressure under adequate conditions. According to experience, at 6—8 cases a day they will serve for 8 hours of service. The other way of solution is to use, instead of oxide-cathodes sintered nickel-cathodes. With the latter the equipment will serve for 6 weeks.

For exchanging the samples the back glass window, glued with picein to the housing, was taken off, and the brass disc was filled with new samples. Then it was re-attached with picein. The beam current exciting the phosphor samples (screen current) was measured between the metal housing and the grounded high-voltage positive pole. A raster of 50 cps and of 10 kcps was used for the tests. By adjusting the raster dimensions, with knowledge of the screen current, the current density per surface area can be controlled.

If 6 identical screen samples were put into the device after very careful preparation, the measured brightness values agreed within $\pm 5\%$. The error is composed of two factors: errors of photometry and of screen preparation.

The error of photometry — including those due to fluctuation of electrical conditions — is less than $\pm 2\%$. The biggest source of error is in the preparation of the screen.

Causes of error committed in the preparation of the screen: errors of measurement (mg/cm^2), of the composition of the settling liquid, and errors due to improper (non-uniform) treatment of the samples. In fabrication are added to these: technological faults of tube production, whose main cause lies in the differential heat treatment in the fabrication of the tube. This error was eliminated in the test equipment used, because the screens did not have to go through the technological procedures of tube fabrication.

Measurements were executed at $2,7 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ current density. In one series of experiments the measurements were executed on the excited side with thick layer. As luminescent material willemite-phosphor produced by Tungfram was used, whose average grain size was from 4 to 5 μ . The layer thickness was chosen at $10 \text{ mg}/\text{cm}^2$ which already well approached the layer of optically infinite thickness. In the other test series Tungfram-produced TV phosphor mixture was used as luminescent material, for which the optimum layer thickness was adjusted. Measurement was then executed on the side opposite to excitation.

Surface brightness was measured with a Lange-produced photocell with "eye"-corrected filter. The photoelectric current was measured with spotlight instrument of 10^{-8} A sensitivity.

Potassium silicate used for settling were prepared from SiO_2 and KOH of a. r. grade from which standard solutions were prepared by measurement.

Settling of the test samples was executed in the following way: the glass plates applicable into the rotatable disc were placed on the bottom of cylindrical glasses that contained the settling liquid. Afterwards the phosphor was strewn in, and after the time of settling had passed, the surplus liquid was sucked off. The height of the surface of the liquid is chosen to make the phosphor particles settle out practically during the settling time. After removal of the excess liquid the samples are cautiously taken out with tweezers and dried under infrared lamp.

For comparative tests samples without binder had also to be prepared. Since with these adhesion was very poor, these were prepared in the following way: after the phosphor had settled in distilled water and the excess water had been very cautiously sucked off almost entirely, an infrared lamp was placed above the wet vessel, that is, above the samples and the liquid remaining there was evaporated. After complete drying the samples were lifted with tweezers from the dry vessel and were handled very cautiously, for adhesion was very poor even that way.

Something has to be said on the measurement of adhesion. As mentioned in a previous paper [2], methods so far described in literature cannot be applied to the measurement of adhesion. That is to say, part of these methods are suitable only for the measurement of such weak adhesions as are unfit for the preparation of screens (for instance, the measurement of the angle of rupture), others demand perfect drying of the screen, when the chemical processes taking place (for instance, dehydration, etc.) would change adhesion values observed during preparation of the screen. Since for the case on hand no dependable method had so far been elaborated, the screens were examined on the basis of the so-called technological test, for this is most important from the point of view of preparation. If the settling liquid from above the luminescent layer can be removed after settling time has passed, by turning the screen by 180 deg., without damage to the latter, adhesion is said to be good, in any

other case it is unsatisfactory. Of course this is no criterion to state which of two screens sticking fast has the better adhesion. It is hoped to elaborate a more exact method for a next paper.

IV. Experimental results

Measurements were executed on screens where the binder was potassium silicate. The effect on surface brightness of three different types of coagulators was investigated under given conditions. Of bivalent ions strontium nitrate, of monovalent ions sodium sulphate and of organic coagulators the effect of alcohol coagulator was examined.

As found in a previous paper [2] of the author, the following parameters have to be reckoned with at the settling of screens :

1. molar composition and amount of water glass,
2. quality and amount of coagulator,
3. time of settling.

For the molar composition of water glass the ratio between SiO_2 and KOH values obtained by analysis is given. This will be called acidity constant and will be denoted K_s . Thus

$$K_s = \frac{\text{SiO}_2 \text{ g/l}}{\text{KOH g/l}} .$$

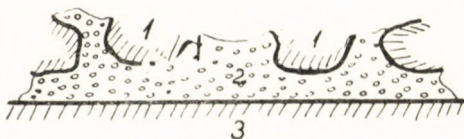
In the present work on a given coagulator tests were carried out at a single K_s . The effect of K_s was separately examined, and results will be published in a subsequent paper.

If the phosphor particles are deposited in a settling liquid of given composition, after expiration of the settling time three possibilities have to be reckoned with :

1. after removal of the settling liquid the phosphor layer does not adhere yet to the screen surface,
2. after removal of the settling liquid the phosphor layer adheres undamaged to the bottom of the bulb,
3. the settling liquid coagulates before expiration of the settling time.

Problems here arising were treated more in detail in a previous paper [2], the results of which are summed up in the following :

After settling of the phosphor particles, before removal of the settling liquid, the structure of a small portion of the luminescent layer may be schematically illustrated thus :



where 1 denotes phosphor particles, 2 the binder adsorbed on them, 3 the glass surface.

For good adhesion the binder has to stick fast to the surface of the phosphor particles and to the glass. However, since the bonding layer is adsorbed to the glass surface when the settling liquid is poured in and coats the surface of the particles already during settling, a well-adhering screen can be produced even under the above conditions only if the bonding layers coating the surface of the particles and those adsorbed on the glass surface "grow together", that is, strong forces of adhesion arise between them.

That is, if the binder is sufficiently strongly adsorbed on the phosphor particles and on the surface of the glass, the adhesion of the screen depends on whether the proper forces of adhesion develop between the above-mentioned adsorption layers.

The particles of binder adsorbed on the surface of the phosphor particles and of the glass are colloidal particles, which can be produced in the settling liquid without the presence of phosphor particles too. If the forces of attraction (adhesion) between them are too great, the settling liquid coagulates, if they are too small, the adhesion of the screen is insufficient according to the above-exposed.

Accordingly, it is to be aimed at by the variation of the concentration of settling liquid that the forces of attraction (adhesion) between the colloidal particles in the settling liquid be greater than a given value, but do not exceed a certain amount.

The effect of parameters was first examined in the case of a strontium nitrate coagulator. If on the horizontal axis of a coordinate system the concentration of the coagulator of the settling liquid is plotted, and on the vertical axis its SiO_2 concentration, the range within which the cathode-ray tube screens can be produced lies between the two curves drawn in Fig. 2. This is the so-called settling range.

Each point of the area enclosed by the two curves gives the composition of a practicable settling liquid. If according to the corresponding loci settled screen samples are prepared and their surface brightness is investigated according to the afore-said, it will be found that the surface brightness of screens prepared at the same coagulator concentration is independent of what was the SiO_2 concentration of the settling liquid, that is, the amount of water glass. In this case, therefore, the coagulator is in the first place responsible for the decrease of surface brightness. Measurement results are graphically represented

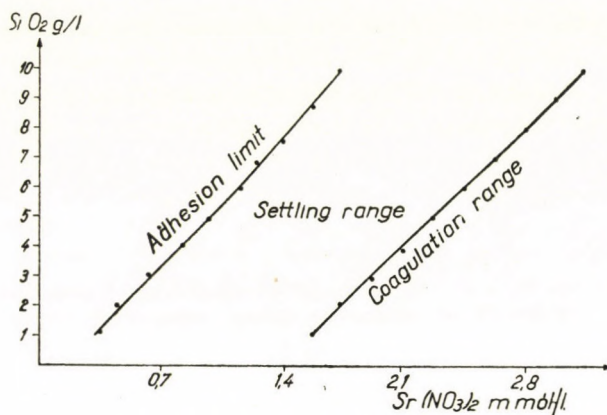


Fig. 2. Settling range for $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$ coagulator $K_s = 1,64$; $T = 1$ hour

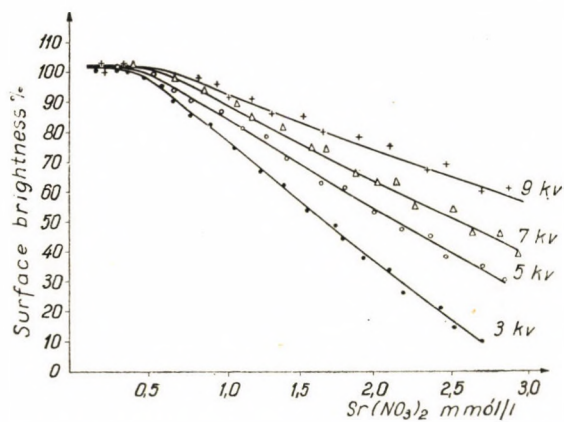


Fig. 3. Decrease of surface brightness in case of $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$ coagulator. Phosphor: willemite; $T = 1$ hour

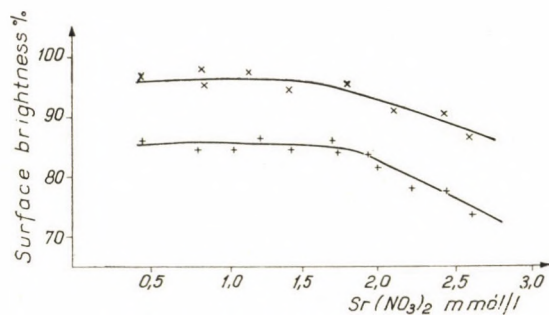


Fig. 4. Decrease of surface brightness in case of $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$ coagulator. Phosphor: TV; $T = 1$ hour
+ = 5 kV x = 10 kV

in Fig. 3 and 4. Fig. 3 refers to willemite-phosphor, Fig. 4 to TV-phosphor. On the horizontal axis is plotted the concentration of the coagulator in the settling liquid in mmol/l, on the vertical axis the surface brightness of the test screen samples in per cent referred to the screen samples prepared without binder. All data are averages of 5 samples each. Measurement results refer to $K_s = 1,64$ and $t =$ one hour settling time.

For strontium nitrate coagulator the effect of settling time was also investigated. Results are listed in Table 1.

Table 1
Effect of settling time on surface brightness

Number	Coagulator mmol/l	SiO ₂ g/l	Surface brightness at			
			3 kV	5 kV	7 kV	9 kV
			accelerating voltage per cent			
1	0,98	2	90	100	95	103
2	0,98	2	78	94	88	96+
3	0,77	2	96	100	96	105
4	0,77	2	64	84	86	92+

In the second column the coagulator concentration of the settling liquid in mmol/l units, in the third column the SiO₂ concentration of the settling solution in g/l, in columns 4, 5, 6 and 7 the measured surface brightness values in per cent referred to the samples without binder are found. In cases marked with +, in the table the settling liquid was removed 24 hours after the beginning of settling, in the other two cases after one hour. According to data of the table, the increase of settling time is associated with the decrease of surface brightness.

Conditions were examined in the case of sodium sulphate coagulator, too. The range of screen preparation can be illustrated here in the same way as in the case of strontium nitrate. This is shown in Fig. 5.

Between the two curves plotted in the figure falls the range of settling, if $K_s = 2,1$ and settling time is chosen for 40 minutes [2]. Each point of the area between the two curves therefore gives the composition of a practicable settling liquid. If test screen samples are prepared with the compositions corresponding to the individual points, and their surface brightness is examined by the method described above, values listed in Table 2 and 3 are obtained.

In the first column the number of the sample, in the second the coagulator concentration of the settling liquid in mol/l units, in the third column the SiO₂ concentration in g/l were plotted. In the following columns the value of the

measured surface brightness in per cent relative to the sample without binder are found. Data of the table are averages of 5 samples each.

It would be very difficult to illustrate graphically the results in a clearcut manner, because the decrease of the surface brightness isn't, as shown, independent of the SiO_2 content of the settling liquid, as manifested in the previous case. However, three basic relationships can be read off from the two tables :

1. the rate of decrease of surface brightness diminishes with increase of the acceleration voltage,

2. the decrease of surface brightness is a function of the SiO_2 concentration and of the electrolyte concentration of the settling liquid separately, at higher SiO_2 concentrations it depends decisively on the former,

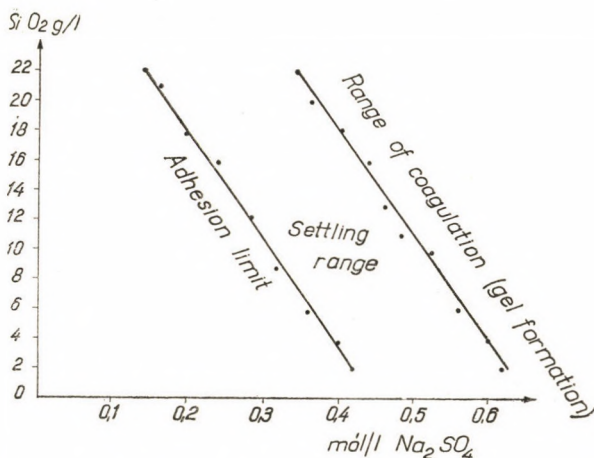


Fig. 5. Settling range in case of Na_2SO_4 coagulator. $T = 40$ min

3. for screens usable under service conditions it is expedient to choose the SiO_2 concentration at a value below 2 g/l.

The third coagulator, already of somewhat complicated type, from among organic coagulators, is ethyl alcohol. Here the number of parameters is extended by one, because the capability of settling is affected by the mode of composition of the settling liquid.

As exposed minutely in a previous paper of the author [2], the colloid system used as settling liquid cannot be unequivocally characterized here by the concentration of components, because the changes taking place are very violent and not reversible. At the same composition the behaviour of the settling liquid is different depending on the sequence of mixing the different components. Therefore, for the univocal characterization of the processes it is necessary to give the precise composition of the settling liquid in chronological order.

Table 2
Decrease of surface brightness in case of sodium sulphate coagulator
 (Willemite-phosphor 10 mg/cm²)

Number	Na ₂ SO ₄ mol/l	SiO ₂ g/l	Surface brightness at			
			3 kV	5 kV	7 kV	9 kV
			acceleration voltage per cent			
1	0,45	2	62	66	67	68
2	0,50	2	50	68	68	66
3	0,55	2	58	75	76	72
4	0,60	2	57	74	75	70
5	0,40	6	39	56	53	53
6	0,45	6	33	41	50	53
7	0,50	6	29	40	48	51
8	0,575	5	22	30	34	49
9	0,375	10	36	45	52	63
10	0,425	10	31	41	51	63
11	0,475	10	24	27	28	29
12	0,515	10	10	14	17	16
13	0,325	14	26	33	39	38
14	0,375	14	22	27	34	32
15	0,425	14	16	21	26	24
16	0,475	14	12	17	17	19
17	0,275	18	19	27	33	40
18	0,325	18	19	29	37	42
19	0,350	18	19	32	41	49
20	0,400	18	14	20	26	31
21	0,275	22	8	15	18	23
22	0,315	22	13	18	23	25
23	0,350	22	5	9	10	14

The settling liquid was composed in the following manner: to 1000 ml of alcohol-water mixture (coagulator solution) 50 ml of water glass were added, the K_s of which was 1,77 and its SiO₂ content 30 g/l. Within the series of tests the alcohol concentration of the coagulator solution varied, which is shown in column 2 of Table 4. Well-adhering screens were obtained from 60 per cent alcohol content onward, up to 90 volums per cent of alcohol, where beginning coagulation was already observable. Measurement results are shown in Table 4 for willemite-phosphor.

As shown, surface brightness as function of the coagulator concentration does not change practically considerably until beginning coagulation. At 50

Table 3

*Decrease of surface brightness in case of sodium sulphate coagulator
(TV-phosphor mixture, optimum layer thickness)*

Number	Na ₂ SO ₄ mol/l	SiO ₂ g/l	Surface brightness at	
			5 kV	10 kV
			acceleration voltage per cent	
1	0,45	2	57	73
2	0,50	2	55	72
3	0,55	2	45	68
4	0,375	10	32	55
5	0,425	10	15	25
6	0,325	18	15	26
7	0,350	18	17	31
8	0,235	22	15	23
9	0,275	22	13	19
10	0,325	22	12	19

Table 4

*Decrease of screen surface brightness in alcoholic settling
(Willemite-phosphor 10 mg/cmt)*

Number	Alcohol volume per cent	Surface brightness at			
		3 kV	5 kV	7 kV	9 kV
		accelerating voltage per cent			
1	45	95	95	97	93
2	50	74	79	86	89
3	60	98	95	97	96
4	70	85	93	97	98
5	80	82	91	96	97
6	90	64	73	74	86

volume per cent alcohol a transient minimum is observed, the cause of which is for the time being unknown.

V. Evaluation of results

On the basis of test results it may be stated that the surface brightness of cathode-ray tube screens produced with conventional (fabrication) binders is in by far the most cases lower than the surface brightness of screens fabricated without binder. The decrease of surface brightness depends on the specific pro-

perties (material quality, particle size distribution) of the phosphor, on the applied accelerating voltage, the composition of the settling liquid and the time of settling.

The decrease of surface brightness is the greater, the lower the accelerating voltage. With TV screens made of sulphide-type phosphors the decrease of surface brightness is less than with thick screens made of willemite-phosphor. With prolongation of the settling time the surface brightness decreases.

The effect of the composition of settling liquid is in the case of water glass binder different with the various types of coagulators, but in general the surface brightness decreases with the increase of coagulator-concentration. The decrease of surface brightness also depends on the molar composition of the water glass used, this effect, however, has not been dealt with at this time.

In the case of water glass binder three types of coagulators were presented. Of bivalent ions strontium nitrate, of monovalent ions sodium sulphate, and of organic coagulators ethyl alcohol. On the basis of results it has been found that as regards the surface brightness reducing effect, the three types of coagulators exhibit quite different characteristics.

With bivalent ions the decrease of surface brightness is proportional to the coagulator concentration and independent of the SiO_2 concentration of the settling liquid. This indicates that the coagulator also builds in into the bonding layer in a greater or smaller amount, depending on the coagulator content of the settling liquid. This statement is supported by the fact finding of BOER and EMMENS [10] that the coagulator content found in the bonding layer is proportional to the coagulator concentration of the settling liquid.

With monovalent ions the decrease of surface brightness equally depends on the SiO_2 concentration of the settling liquid and on the coagulator concentration; the influence of the coagulator concentration is less sharply manifest than with bivalent coagulators. From this may be concluded that the coagulator only helps in the formation of the bonding layer, but does not build in to a greater extent into it. This statement is supported by data in literature [5, 7, 8] according to which the coagulator plays here mainly the part of "screening" the charge.

In the case of organic coagulator (ethyl alcohol) surface brightness does not change at all with the increase of the concentration of the coagulator until the beginning of coagulation, which shows that the coagulator does not build in at all into the bonding layer.

Colloid particles originating from the interaction of coagulator and binder may in the course of time deposit on the top of the layer. Just therefore, with the increase of settling time, the surface brightness decreases. The same may be said if beginning coagulation of the particles is observed in the settling liquid.

One part of these conclusions is in harmony with results obtained by HOPKINSON, divergences therefrom may arise from the fact that HOPKINSON disconsidered effects arising from the composition of the settling liquid.

REFERENCES

1. R. G. HOPKINSON : Jour. I. E. E. **93** IIIA, 5, 779 (1946).
2. I. HANGOS : Candidate Thesis (Hungarian), Budapest, 1956.
3. Z. BODÓ and I. HANGOS : Acta Physica III. 3—4, 155 (1954).
4. Z. BODÓ and I. HANGOS : Acta Physica V. 3, 295 (1955).
5. W. M. STERICKER and J. F. HAZEL : J. Phys. Coll. Chem. **54** 1045, (1952).
6. J. PAKSWER and P. INTISO : J. El. Chem. Soc. **99** 4, 164 (1952).
7. J. F. HAZEL and G. L. SCHNABLE : J. El. Chem. Soc. **100** 2. 66 (1953).
8. R. EDELBERG and J. F. HAZEL : J. El. Chem. Soc. **96** 1, 13 (1949).
9. I. THURLEY : Nachrichtentechnik, **5** 3, 103 (1955).
10. F. DE BOER and H. EMMENS : Phil. Techn. Rundschau **16** 8, 272 (1955).
11. A. V. MOSKVIN : Katodoljuminescencija, Moskva—Leningrad (1949).
12. J. V. STRANGE and S. T. HENDERSON : Proc. Phys. Soc. **58**. 369 (1948).
13. A. HARDY : Trans. El. Chem. Soc. **91** 221, (1947).
14. T. M. SCHRÖDER : R. C. A. Review **15** 86 (1954).
15. A. BRILL, H. A. KLASSENS : Phil. Res. Report **7** 401 (1952) and Phil. Res. Report **10** 305 (1955).
16. W. B. NOTTINGHAM : J. Appl. Phys. **10** 73 (1939).
17. A. BRILL : Physica **15** 361, (1945).
18. F. H. NICOLL : Preparation and Characteristics of Solid Luminescent Materials. Cornell symposium. Chapman and Hall, London, 1948. p. 418.

SUMMARY

The decrease of surface brightness of cathode-ray tubes was examined as a function of the composition of the settling solution. An experimental set-up with exchangeable screen was described, which was fit for investigating the surface brightness of a large number of screen samples under the effect of cathode-ray excitation. It was found that the surface brightness of manufactured screens, produced with binder, is in general inferior to that of screens produced without binder. The decrease of surface brightness depends on the applied acceleration voltage, on the specific properties of the phosphor (material quality, distribution of particle size), the thickness of the screen layer, the settling time and the specific properties of the settling liquid.

EINFLUSS DES BINDEMITTELS AUF DIE OBERFLÄCHENHELLIGKEIT
VON KATHODENSTRAHLRÖHRENSCHIRMEN

I. HANGOS

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde die Abnahme der Oberflächenhelligkeit von nach dem Absetzverfahren hergestellten Kathodenstrahlröhrenschirmen in Abhängigkeit von der Zusammensetzung der Absetzlösung untersucht. Es wird eine Versuchseinrichtung mit austauschbarem Schirm beschrieben, die geeignet ist, um die Oberflächenhelligkeit einer großen Zahl von Schirmenmustern bei Kathodenstrahlerregung zu untersuchen. Es wird festgestellt, daß die Oberflächenhelligkeit von fabrikmäßigen, mit Bindemitteln hergestellten Schirmen im allgemeinen derjenigen von ohne Bindemittel hergestellten Schirmen unterlegen ist. Die Abnahme der Oberflächenhelligkeit hängt von der angewendeten Beschleunigungsspannung, von den besonderen Eigenschaften (Materialbeschaffenheit, Korngrößenverteilung) des Leuchtstoffes, von der Leuchtstoffschichtstärke des Schirmes, von der Dauer der Abklärung und von den besonderen Eigenschaften der Absatzflüssigkeit ab.

EFFET DU LIANT SUR L'ÉCLAT DE SURFACE DES ÉCRANS DE TUBES À RAYONS CATHODIQUES

I. HANGOS

RESUMÉ

La décroissance de l'éclat de surface des écrans de tubes à rayons cathodiques, préparés par la méthode de la formation des dépôts, a été étudiée en fonction de la composition de la solution de déposition. Un appareillage expérimental est décrit, qui se prête à l'examen de l'éclat de surface d'un grand nombre d'éprouvettes d'écrans sous l'influence d'excitation par rayons cathodiques. On a constaté que l'éclat de surface des écrans fabriqués, préparés avec du liant est en général inférieur à celui des écrans préparés sans liant. La décroissance de l'éclat de surface dépend du voltage d'accélération, des qualités spécifiques de la matière luminescente (qualités matérielles distribution de la grosseur des particules) de l'épaisseur de l'écran, du temps de la formation des dépôts et des qualités spécifiques du liquide de déposition.

ВЛИЯНИЕ СВЯЗУЮЩЕГО ВЕЩЕСТВА НА ПОВЕРХНОСТНУЮ ЯРКОСТЬ ЭКРАНОВ КАТОДНЫХ ТРУБОК

И. ХАНГОШ

РЕЗЮМЕ

Исследовалось снижение поверхностной яркости экранов катодных трубок, изготовленных методом осаждения, в функции состава осаждающего раствора. Рассматривается опытная установка со сменным экраном, которая позволяет проводить исследование поверхностной яркости большого числа образцовых экранов при непосредственном воздействии возбуждения катодной трубки. Установлено, что поверхностная яркость экранов, изготовленных связующим веществом, используемым в производстве, вообще ниже поверхностной яркости экранов, изготовленных без связующего вещества. Падение поверхностной яркости зависит от прикладываемого напряжения ускорения, от индивидуальных свойств люминесцентного порошка (качество материала, распределение крупности зерен), далее от толщины слоя экрана, времени осаждения и индивидуальных свойств осаждающей жидкости.

ÜBER DAS VISKOSITÄTSTEMPERATUR-VERHALTEN VON FLÜSSIGKEITEN UND DESSEN FUNKTIONEN

B. MARSCHALKÓ und J. BARNA

[Eingegangen am 12. Juli 1956]

Vor einigen Jahrzehnten forschten wir nach einfach zu ermittelnden Kennzahlen, die zur eindeutigen Definition der wahren Schmiereignung von Mineralschmierölen brauchbar wären. Wir waren bestrebt, den Nutzwert des zu bewertenden Öles auf reelle und vom Messverfahren unabhängige Kennwerte bzw. Wertungskonstanten zurückzuführen, die vomöglich auch physikochemische Bedeutung haben und demzufolge eindeutig definiert und bestimmt werden können.

Schon unsere damaligen Untersuchungen führten zu der Feststellung, dass zur Beurteilung der Eignung eines Schmieröles das Viskositätstemperatur-Verhalten die Ableitung der wichtigsten Kennwerte ermöglicht und — besonders wenn es sich um Vollschnierung handelt, — dass der zur Schmiertemperatur gehörende erste Differentialquotient der V. T. Funktion auch als Kennzahl des Schmierwertes verwendet werden kann. Immer vorausgesetzt, dass andere Einflüsse (Druck usw.) keine grosse Rolle spielen. All dies haben wir im Jahre 1927 veröffentlicht [1].

Da jedoch auf den verschiedenen technischen Verwendungsgebieten der Mineralöle bei der Bewertung oft nicht nur die Schmierfähigkeit, sondern auch ganz andere chemische, physikalische und evtl. auch mechanische Eigenschaften eine bedeutende Rolle spielen (z. B. bei Teilschnierung, Stabilität und Alterung von Transformatorenölen, usw.), deren eindeutige Bestimmung und Bewertung oft ebenfalls äusserst umständliche Untersuchungen erfordert, so tauchte auch die weitere Frage auf, wie auch diese Eigenschaften mit Hilfe einiger »Materialkonstanten« eindeutig erfasst werden könnten.

Diese vielfältige Aufgabe wurde dann auf die folgende einfachere Frage reduziert: auf welche Weise wäre es möglich — mit verhältnismässig einfachen Mitteln — die Identität oder aber die Verschiedenheit zweier Kohlenwasserstoffgemische wenigstens annähernd zu festsetzen.

Besteht nämlich eine solche Möglichkeit, so könnten die für das eine Gemisch bereits einmal ermittelten übrigen Kennzahlen ohne jede weitere Untersuchung, einfach auf das andere, damit als praktisch identisch erkannte Gemisch übertragen werden, und für die Praxis ist selbst dies schon ein bedeutender Vorteil.

In einer im Jahre 1929 hierüber veröffentlichten Abhandlung [2] wurde dann ausführlich auseinandergesetzt, dass nach unseren Erachten auch zur Erreichung dieses Ziels das Viskositätstemperatur-Verhalten der Kohlenwasserstoffgemische die verhältnismässig besten Möglichkeiten bietet und dass es unter gewissen Umständen und Beschränkungen hier ebenfalls mit Vorteil herangezogen werden kann.

Seither begegnet man in der Fachliteratur — vor allem in jüngster Zeit — immer häufiger Überlegungen, die unseren damaligen Ausführungen sehr nahe stehen. Vor allem gibt GÖTTNER in seiner Abhandlung vom Jahre 1949 eine auf theoretische Betrachtungen gegründete Aussage über die Beziehungen zwischen Reibungskoeffizient und V. T. Funktion [3] und gleichzeitig, in möglichst vollständiger Behandlung, eine kritische Sichtung aller derzeit bekannten Kennzahlen.

Die Betrachtungen über die Bewertung der Schmiereignung stimmen im wesentlichen mit unserer Veröffentlichung vom Jahre 1927 überein. Die Frage

einer bestmöglichen Darstellung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität der Kohlenwasserstofföle wird jedoch hier nicht näher behandelt.

Es stellte sich nun die Frage: ist es möglich, die bei den verschiedenen Flüssigkeiten gefundenen Messkurven durch eine möglichst einfach gebaute mathematische Funktion von derselben Form auszudrücken, die so wenig Konstanten wie möglich enthält, aber die Viskositätstemperatur-Kurven der Flüssigkeiten doch mit einer — für die Praxis ausreichenden — Genauigkeit in einem breiten Temperaturintervalle darzustellen vermag, und deren Konstanten auch noch möglichst »Materialkonstanten« sind, die also auch einen physikochemischen Sinn haben.

Eine solche zu finden wäre nämlich ein weiterer Schritt, für die obigen Überlegungen eine — der Praxis entsprechende — Möglichkeit zu schaffen.

Dies ist umsomehr erforderlich, da sich neuerdings immer zahlreichere Gebiete der Viskositätstemperatur-Funktion zuwenden und zwar nicht nur in Verbindung mit Kohlenwasserstoffen, sondern auch anderen hauptsächlich hoch polymeren Stoffgemischen, bei denen der Gedanke oft auch naheliegt, unsere Überlegungen über die vergleichende qualitative Kennzeichnung unter gewissen Bedingungen (Berücksichtigung der rheologischen Verhältnisse) vielleicht auch auf einige Kunststoffe anwenden zu können.

Dementsprechend haben wir unsere Untersuchungen nun ausser den Kohlenwasserstoffen auch auf andere, praktisch wichtige Flüssigkeiten erstreckt. Die nachstehenden Ausführungen beschränken sich daher nicht nur auf Kohlenwasserstoffe, sondern können auf alle anderen, unsererseits bisher untersuchten Flüssigkeiten verallgemeinert werden.

Viskositätstemperatur-Funktionen

In einer unserer — schon erwähnten — Veröffentlichung vom Jahre 1927 [1] haben wir auch ein Messgerät beschrieben, das es uns ermöglichte, die absolute Viskosität verschiedener Flüssigkeiten in einem breiteren Temperaturintervalle als allgemein üblich (etwa 220° C) mit der erwünschten Genauigkeit zu bestimmen. Zugleich ergänzten wir diese mit mehreren in der einschlägigen Literatur gefundenen und als zuverlässig beurteilten Messergebnissen.

Im Besitze der so gesammelten wahren (gemessenen) Werte gelangten wir in die Lage, uns ein zuverlässiges Bild vom tatsächlichen Verlauf der Viskositätstemperatur-Funktion verschiedener Flüssigkeiten in einem breiten Temperaturbereich zu schaffen.

Sodann suchten wir nach Funktionen, die den oben gestellten Ansprüchen entsprechen. In der Fachliteratur sind zahlreiche derartige Vorschläge zu finden, eine umfassende Übersicht und ein zielbewusster, auch für die Praxis brauchbarer Vergleich der einzelnen Beziehungen untereinander, in Bezug auf deren Leistungsfähigkeit, Einfachheit, Genauigkeit, Breite des Temperaturbereiches

der Verwendbarkeit, ist hingegen kaum zu finden. Nun mussten wir das selbst vollziehen.

Von den schon vor unserer ersten Veröffentlichung bekannt gewordenen Vorschlägen dieser Art untersuchten wir nun die am besten begründeten, bei denen eine Lösung unserer Aufgabe als wahrscheinlich erschien.

Die mit Hilfe dieser Funktionen berechneten Viskositätswerte der einzelnen Flüssigkeiten wurden dann mit den uns zur Verfügung stehenden Messwerten verglichen.

Bis zum Jahre 1927 haben wir die von ÖHLSCHLÄGER [6], BATSCHINSKI II [7], SCHWEDHOLM [8], GÜMBEL [11] und VOGEL [9] gestellten Vorschläge auf diese Weise geprüft und ihre Ergebnisse veröffentlicht [1, 10]. So unterlassen wir es, darauf näher einzugehen. Hier möchten wir nur betonen, dass der Vorteil der Vogelschen Formel gegenüber den Übrigen bereits damals beobachtet und festgestellt wurde.

In den unserer Mitteilung folgenden Zeiten wurden in der Fachliteratur noch mehrere Vorschläge bezüglich der Viskositätstemperatur-Funktion publiziert, von denen wir allein die von BATSCHINSKI [4], DRUCKER und GUZMÁN [5], WALTHER [12], EYRING [14], ANDRADE [15], LEDERER [16] und VOGEL [9] einer weiteren vergleichenden Untersuchung unterzogen. Die Behandlung der Übrigen wurde nämlich von uns schon im voraus als erfolglos erachtet.

BATSCHINSKI empfiehlt seine nachfolgende Formel nur für Quecksilber :

$$\eta = \frac{a}{T} + b + cT \quad (1)$$

wo T die jeweilige Temperatur bedeutet, während a , b , und c Konstanten ohne angegebener Bedeutung darstellen.

Wir konnten feststellen, dass falls mit letzterer Formel aber statt η mit $\log \eta$ gerechnet wird, — die so berechneten Werte nicht nur wie empfohlen — beim Quecksilber, aber auch bei anderen niedrigviskosen und nicht assoziierten Flüssigkeiten in einem verhältnismässig sehr breiten Temperaturbereiche (zwischen 0—350° C) ausgezeichnete Schmiegun an die wirklichen (gemessenen) Werte zeigten, bei assoziierten Flüssigkeiten und solchen grösserer Viskosität nahm jedoch die Breite des Temperaturintervalles der für die Praxis noch brauchbaren Werte schnell ab.

Nach DRUCKER und GUZMÁN [5] ändert sich der Logarithmus des Viskositätswertes einer Flüssigkeit umgekehrt proportional der abs. Temperatur folgenderweise :

$$\log \eta = A + \frac{B}{T} \quad (2)$$

Diese Formel gibt aber nur bei Flüssigkeiten geringer Viskosität, und auch bei diesen nur innerhalb eines schmalen Temperaturintervalles brauchbare Werte.

Auf die von EYRING und ANDRADE abgeleiteten Gleichungen soll hier nicht näher eingegangen werden, da auf das mittlerweile erschienene Studium

von ROST [17], das auch eine kritische Behandlung und Vergleichung dieser Formeln enthält, verwiesen werden kann.

Die Gleichungen nach WALTHER, LEDERER und VOGEL wurden entsprechend der Originalpublikationen in den folgenden Formen untersucht :

WALTHER :

$$\log \log (V_k + C) = K - m \log T, \quad (3)$$

wo $V_k = 100 \cdot \nu$ und $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ die kin. Viskosität in Centistokes,

C ist eine Konstante, deren Wert bei Schmierölen = 0,8 beträgt.

LEDERER :

$$\log \eta = \frac{q_0}{RT} - 2,75 \log T + ET + C \quad (4)$$

Bezüglich der Bedeutung der drei Konstanten können wir hier nur auf die zitierte Originalveröffentlichung hinweisen.

VOGEL :

$$\log \eta = \frac{T - T_1}{T - T_\infty} \cdot \log \eta_\infty \quad (5)$$

oder nach entsprechender Transformation :

$$\log \eta = C + \frac{A}{T - T_\infty} \quad (6)$$

Bezüglich der Bedeutung der einzelnen Konstanten soll auf die oben zitierte Abhandlung von ROST [17] verwiesen werden.

Im Einklang mit den Angaben von GÖTTNER und anderen konnten wir auch feststellen, dass die Walthersche Formel in ihrer Originalform lediglich im Falle der Kohlenwasserstoffe, und selbst auch bei diesen nur bei einer verhältnismässig engen Fraktion in dem den Schmierölen entsprechenden Viskositätsintervall und in einem der Praxis entsprechenden Temperaturbereich (etwa zwischen 20–100° C) gut verwendet werden kann.

In einem breiteren Temperaturintervall erzielt noch brauchbare Rechnungswerte die von T. GELLÉRT [13] etwas verallgemeinerte Form der Waltherschen Gleichung.

Die Grössenordnung der Streuungen der mit dieser Formel berechneten Werte nähert sich der der Ledererschen Formel, die Berechnung ihrer Konstanten ist aber umständlicher, da die Wahl der als Rechnungsgrundlage dienenden

Tabelle I

Wasser

No.	T	Messwert* $\eta_m \cdot P$	Berechnet nach								
			Vogel (5)		Lederer (4)*		Gleichung (8)		Waterman (10)		ν cSt
			$\eta_b \cdot P$	Diff. %**	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	
1	263,8	0,02491	0,02400	-3,65	0,02397	-3,90	0,02513	+0,89	0,024207	-2,82	2,4219
2	264,6	0,02407	0,02370	-1,54	0,02337	-3,00	0,02434	+1,11			
3	265,9	0,02298	0,02261	-1,63	0,02269	-1,30	0,02312	+0,62	0,022455	-2,28	2,2464
4	266,9	0,02224	0,02181	-1,91	0,02168	-2,60	0,02225	+0,04			
5	268,4	0,02102	0,02070	-1,53	0,02065	-1,70	0,02103	+0,05	0,02060	-1,99	2,0608
6	271,0	0,01917	0,01895	-1,13	0,01902	-0,80	0,01915	-0,11			
7	273,1	0,017887	0,017697	-1,06	0,017827	-0,30	0,017822	-0,36	0,017664	-1,25	1,7667
8	278,1	0,015155	<i>0,015155</i>	0,00	0,015440	+1,40	<i>0,015155</i>	0,00	0,015155	0,00	<i>1,5156</i>
9	283,1	0,013061	0,013120	+0,45	0,013040	-0,20	0,013068	+0,05	0,013132	+0,54	1,3136
10	288,1	0,011406	0,011469	+0,55	0,011678	+2,40	0,011401	-0,04			
11	293,1	0,010046	0,010115	+0,69	0,010287	+2,40	<i>0,010046</i>	0,00	0,010108	+0,61	1,0126
12	298,1	0,008941	0,008991	+0,56	0,009126	+2,10	0,008935	-0,06			
13	303,1	0,008019	0,008051	+0,39	0,008149	+1,60	0,008008	-0,14	0,008053	+0,42	0,8088
14	308,1	0,007205	0,007256	+0,71	0,007317	+1,55	0,007226	+0,29			
15	313,1	0,006533	0,006579	+0,70	0,006608	+1,15	0,006561	+0,44	0,006574	+0,63	0,6626
16	317,8								0,006023	0,00	<i>0,6083</i>
17	318,1	0,005958	0,005998	+0,67	0,005999	+0,70	0,005991	+0,55			
18	323,1	0,005497	<i>0,005497</i>	0,00	0,005480	-0,30	<i>0,005497</i>	0,00	0,005488	-0,16	0,5554
19	328,1	0,005072	0,005060	-0,24	0,005027	-0,90	0,005066	-0,12			
20	333,1	0,004701	0,004678	-0,49	0,004634	-1,45	0,004688	-0,27	0,004670	-0,66	0,4750
21	338,1	0,004359	0,004342	-0,39	0,004289	-1,60	0,004354	-0,11			
22	343,1	0,004062	0,004045	-0,42	0,003993	-1,70	0,004057	-0,12	0,004039	-0,56	0,4131
23	348,1	0,003794	0,003781	-0,34	0,003729	-1,70	0,003793	-0,04			
24	353,1	0,003556	0,003546	-0,28	0,003499	-1,60	0,003555	-0,03	0,003544	-0,34	0,3647
25	358,1	0,003341	0,003335	-0,18	0,003294	-1,40	0,003340	-0,03			
26	363,1	0,003146	<i>0,003146</i>	0,00	0,003115	-1,00	<i>0,003146</i>	0,00	0,003146	0,00	<i>0,3259</i>
27	368,1	0,002981	0,002974	-0,23	0,002954	-0,90	0,002970	-0,38			
28	373,1	0,002821	0,002819	-0,08	0,002812	-0,30	0,002808	-0,45	0,002827	+0,20	0,2950

Die zur Berechnung der Gleichungskonstanten herangezogene Messwerte sind kursiv gesetzt.

* E. L. LEDERER: Kolloid-Beihefte Bd XXXIV H. 5—9. S. 300.

** Nach $\frac{\eta_b - \eta_m}{\eta_m} \cdot 100$ berechnet.

Messwerte durch gewisse Einschränkungen erschwert wird. Dieser Nachteil wird bei der — im übrigen ganz ähnlichen, — Formel von UMSTÄTTER [23] behoben.

Einige Ergebnisse der mit Hilfe der als besten erachteten Gleichungen an Flüssigkeiten sehr verschiedener Viskosität vorgenommenen Berechnungen wurden in den — auch zum Vergleich mit den Messwerten geeigneten — Tabellen No. I—X zusammengefasst.

Als Zusammenfassung unserer diesbezüglichen Ergebnisse soll noch als eine interessante Tatsache hervorgehoben werden, dass die Vogelsche Formel — dank ihrer Einfachheit — und des Umstandes, dass die mit ihrer Hilfe erhaltenen Werte mit den wahren Messwerten bei den verschiedensten Flüssigkeiten in einem verhältnismässig breiten Temperaturintervall übereinstimmen — ihre Überlegenheit sogar im Vergleich mit den obigen Gleichungen (mit Ausnahme der Batschinskischen bei nicht assoziierten niedrigviskosen Flüssigkeiten) beibehält. Mit Rücksicht auf die heute allgemein erforderten praktischen Streuungs-limitationen erstreckt sich dieses Temperaturintervall von etwa 20° bis ungefähr 150° C.

In unserer ersten Veröffentlichung wurde diese Formel als eine in diesem Temperaturintervalle gut bewährte, durch Interpolation gefundene, aber theoretisch nicht unterstützte Gleichung empfohlen. So legten wir auch ihren Kon-

Tabelle II

n. Oktan

No.	T	Messwert* $\eta_m \cdot P$	Berechnet nach						T
			Vogel (5)		Lederer (4)*		Gleichung (8)		
			$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	
1	273,1	0,007060	0,007060	0,00	0,007092	+ 0,45	0,007060	0,00	273,1
2	283,1	0,006159	0,006185	+ 0,43	0,006199	+ 0,60	0,006147	- 0,19	283,1
3	293,1	0,005419	0,005462	+ 0,80	0,005464	+ 1,00	0,005418	- 0,02	293,1
4	303,1	0,004828	0,004859	+ 0,64	0,004855	+ 0,60	0,004823	- 0,10	303,1
5	313,1	0,004328	0,004351	+ 0,53	0,004343	+ 0,35	0,004328	0,00	313,1
6	323,1	0,003907	0,003920	+ 0,32	0,003911	+ 0,10	0,003910	+ 0,07	323,1
7	333,1	0,003551	0,003551	0,00	0,003543	- 0,25	0,003552	+ 0,03	333,1
8	343,1	0,003241	0,003234	- 0,23	0,003227	- 0,40	0,003242	+ 0,03	343,1
9	353,1	0,002971	0,002958	- 0,42	0,002954	- 0,60	0,002971	0,00	353,1
10	363,1	0,002730	0,002719	- 0,41	0,002718	- 0,45	0,002732	+ 0,08	363,1
11	373,1	0,002520	0,002509	- 0,45	0,002511	- 0,30	0,002519	- 0,04	373,1
12	383,1	0,002335	0,002324	- 0,49	0,002330	- 0,20	0,002330	- 0,20	383,1
13	393,1	0,002160	0,002160	0,00	0,002170	+ 0,50	0,002160	0,00	393,1

* E. L. LEDERER: Kolloid-Beihefte Bd. XXXIV. H. 5—9. S. 285

stanten keinerlei physikalischen Sinn bei und demgemäss betrachteten wir sie nicht als »Stoffkonstanten«.

Vor kurzem gab jedoch ROST [17] eine umfangreiche Übersicht des Viskositätstemperatur-Verhaltens von Flüssigkeiten und der von ANDRADE, EYRING, usw. abgeleiteten statistischen Viskositätstheorien und hat auch gezeigt, dass sie zu Formeln führen, aus denen sich die Vogelsche Formel — nach gewissen als zulässig erscheinenden Vernachlässigungen — als Näherung ableiten lässt. Dementsprechend kann also die Vogelsche Formel zur Zeit als auch schon theoretisch begründet betrachtet werden.

Im Besitze unserer — schon erwähnten — zahlreichen Messergebnissen, konnten wir unsere Untersuchungen nun auch auf noch breitere (von 0° bis 240° C sich erstreckende) Temperaturintervalle erweitern. Als Veranlassung diente hierzu die Erfahrung, dass die Praxis, deren Messmöglichkeiten zur unmittelbaren Bestimmung der Viskosität — auch bei polymeren Kunststoffgemischen oder Lösungen — sich nur auf ein verhältnismässig enges Temperaturintervall erstrecken, zur Bestimmung der Viskositätswerte innerhalb eines breiteren Temperaturbereiches — zur Extrapolation — Zuflucht nehmen muss, ohne jedoch oft die Gültigkeitsgrenzen der verwendeten Gleichungen zu kennen oder in Betracht zu ziehen.

In einem breiteren Temperaturintervall ist aber diesen Anforderungen auch die Vogelsche Formel nicht immer gewachsen, da sie für nicht assoziierte, niedrigviskose Flüssigkeiten bei niedrigen Temperaturen meist niedrigere, bei höheren Temperaturen hingegen höhere als die wahren Werte liefert. Bei Flüssigkeiten höherer Viskosität tritt dann eine allmähliche Wendung ein, d. h. es werden bei niedrigen Temperaturen höhere und bei höheren Temperaturen niedrigere Werte erhalten.

Besser denn irgendeine der bisher behandelten Gleichungen erfasst den Verlauf des wahren Viskositätstemperatur-Verhaltens bei einigen von uns untersuchten Flüssigkeiten in einem breiten Temperaturintervalle die von UMSTÄTTER [20] aus grundsätzlich anderen und ganz allgemeinen Überlegungen abgeleitete »Transportgleichung«, wonach :

$$\ln \frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \frac{\Delta y^2}{a \cdot \tau} \ln \frac{(T_0 - T_{\infty})}{(T - T_{\infty})} \quad (7)$$

Bezüglich der Bedeutung der Konstanten kann hier nur auf die oben zitierte Originalveröffentlichung hingewiesen werden.

Das Rechnen mit dieser Gleichung ist jedoch in der Praxis und besonders im Sinne von ROST [17] und GÖTTNER[3] selbst dann ziemlich umständlich, wenn zu deren Lösung Tabellen, bzw. Nomogramme zur Verfügung stehen. Sie führt uns aber zu unserer sich immer verstärkenden Überzeugung näher, dass eine treue Wiedergabe des wahren Viskositätstemperatur-Verhaltens der verschi-

Tabelle III
1.2. *Deicalyloktan* C₁₈H₃₄

No.	T	Messwert** $\eta_m \cdot P$	Berechnet nach								
			Vogel (5)		Lederer (4)		Gleichung (8)		Waterman (10)		
			$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	ν St
1	273,1	0,31414	<i>0,31414</i>	0,00	<i>0,31414</i>	0,00	<i>0,31414</i>	0,00	0,31414	0,00	<i>0,3550</i>
2	293,1	0,11560	0,12764	+ 10,41	0,14108	+ 22,04	0,11818	+ 2,23	0,13209	+ 14,26	0,1515
3	310,88	0,06374	0,06902	+ 8,29	0,07726	+ 21,21	0,06374	0,00	0,07150	+ 12,18	0,0831
4	333,1	0,03577*	0,03773	+ 5,48			0,03577	0,00	0,03868	+ 8,13	0,0457
5	353,1	0,02396*	0,02449	+ 2,21	0,02697	+ 12,56	0,02396		0,02481	+ 3,55	0,0298
6	371,99	0,01747	<i>0,01747</i>	0,00	<i>0,01747</i>	0,00	<i>0,01747</i>	0,00	0,01747		0,0213
7	374,3	0,01687	0,01683	- 0,24	0,01670	- 1,01	0,01687	0,00	0,01687	0,00	<i>0,0206</i>
8	433,1	0,00827	0,00795	- 3,85	0,00734	- 11,19	0,00826	- 0,10	0,00788	- 4,76	0,0101
9	473,1	0,00576*	0,00557	- 3,30	0,00531	- 7,81	0,00578	+ 0,34	0,00553	- 3,99	0,0373
10	513,1	0,00422	<i>0,00422</i>	0,00	<i>0,00422</i>	0,00	<i>0,00422</i>	0,00	0,00422	0,00	<i>0,0058</i>

* Graphisch bestimmte Werte.

** B. B. ELSNER: Journal of the Institute of Petroleum Vol. 40, June 1954. No. 366. S. 161.

edensten assoziierten und nicht assoziierten Flüssigkeiten in einem derart erweiterten Temperaturbereiche mit einer Beziehung von ein und derselben Form — jedoch mit nur drei Konstanten — auch dann nicht mehr möglich ist, wenn auch bei den einzelnen Beziehungen die durch Vernachlässigungen verursachten Fehler — bei glücklicher Wahl der zusammengezogenen Konstanten — sich teilweise gegenseitig ausgleichen.

Die bei der Ableitung der verschiedenen Gleichungen als noch möglich betrachteten Vernachlässigungen sind also bei so hohen Ansprüchen nicht mehr zulässig.

Einer von uns (MARSCHALKÓ) empfiehlt nun bei solchen Ansprüchen die Einführung einer vierten Konstante in eine Gleichung wie folgt :

$$\eta = e^{C + BT + \frac{A}{T - T_\infty}} \quad \text{oder} \quad \ln \eta = C + BT + \frac{A}{T - T_\infty} \quad (8)$$

Die Gleichung kann durch eine leicht durchführbare Transformation auf eine der ursprünglichen Vogelschen Formel ähnliche Form gebracht werden in welchem Falle

$$\ln \eta = \frac{T - T_1}{T - T_\infty} \cdot (BT - A_1) \quad (9)$$

In dieser Form wird die »Dimensionskonstante« C der Gleichung (8) durch den zum Viskositätseinheitswert gehörenden Wert der Temperatur — ' T_1 ' ersetzt, die Werte von ' B ' und ' T_∞ ' sind in beiden Ausdrücken identisch, während ' A_1 ' von ' A ' der Gleichung (8) in folgender Weise abweicht :

$$A_1 = \frac{A}{T_1 - T_\infty} + BT_\infty$$

Die Gleichung kann daher als eine Ergänzung der Vogelschen gelten, kann aber, mit gewissen Vernachlässigungen und Zusammenziehung einiger Werte, auch aus UMSTÄTTER'S Gleichung als Näherung abgeleitet werden. Die Bedeutung ihrer Konstanten ist also — bei einigen in zusammengezogener Form — denen der Umstätterschen bzw. denen der Vogelschen Formel gleich.

Es wird aber durch diese unsere Mitteilung eine ausführlichere Erörterung unserer Formel noch nicht angestrebt, unser Ziel ist hier einstweilen nur den durch Messungen und Rechnungswerten festgestellten Tatbestand zu fixieren.

Es wurden nun mit Hilfe dieser Formel bei einer Anzahl von Flüssigkeiten verschiedener Zusammensetzung und von Viskositäten verschiedener Grössenordnung die Viskositätswerte berechnet und in jedem Fall festgestellt, dass die so gewonnenen Werte sich noch besser als die der Vogelschen Formel an die Messwerte anschmiegen.

Tabelle IV

6. 7. Di-n-hexil 1 : 2 : 3 : 4 tetrahydronaphthalin

No.	T	Messwert*** $\eta_m \cdot P$	Berechnet nach						T
			Vogel (5)		Lederer (4)		Gleichung (8)		
			$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	
1	273,6	0,60079	0,60079	0,00	0,60079	0,00	0,60079	0,00	273,6
2	293,1	0,18919	0,20239	+ 0,98	0,23510	+ 24,27	0,18768	-0,80	293,1
3	310,88	0,08987	0,09655	+ 7,43	0,11438	+ 27,28	0,08987	0,00	310,88
4	371,99	0,019909	0,019909	0,00	0,019909	0,00	0,019909	0,00	371,99
5	433,1	0,008814	0,008410	-4,58	0,007502	-14,89	0,008688	-1,43	433,1
6	513,1	0,004295	0,004295	0,00	0,004295	0,00	0,004295	0,00	513,1

Tabelle V

4 : 2 Naphyldecan C₂₀H₂₈

1	273,6	1,3586	1,3586	0,00	1,3586	0,00	1,3586	0,00	273,6
2	293,1	0,3485	0,3504	+ 0,55	0,4378	+ 25,63	0,3381	-2,98	293,1
3	310,87	0,13867	0,1440	+ 3,84	0,18448	+ 33,04	0,13867	0,00	310,87
4	371,98	0,02339	0,02339	0,00	0,02379	0,00	0,02339	0,00	371,98
5	433,1	0,009724	0,009076	-6,66	0,00773	-20,45	0,009221	-5,17	433,1
6	513,1	0,004425	0,004425	0,00	0,004425	0,00	0,004425	0,00	513,1

Tabelle VI

Benzol

1	273,1	0,009162	0,008954	-2,20	0,008940	-1,24	0,009054	-1,20	273,1
2	283,1	0,007580	0,007580	0,00	0,007580	0,00	0,007580	0,00	283,1
3	293,1	0,006479	0,006505	+ 0,41	0,006512	+ 0,48	0,006485	+ 0,09	293,1
4	303,1	0,005640	0,005656	+ 0,29	0,005662	+ 0,23	0,005640	0,00	303,1
5	323,1	0,004420	0,004420	0,00	0,004420	0,00	0,004420	0,00	323,1
6	343,1	0,003580	0,003580	0,00	0,003580	0,00	0,003580	0,00	343,1

Tabelle VII

Anilin

1	267,1	0,138	0,1431	+ 3,57	0,135	-2,5	0,1403	+ 1,70	267,1
2	273,1	0,102	0,1020	0,00	0,102	0,0	0,1020	0,00	273,1
3	278,1	0,0806	0,0797	-1,10	0,0822	+ 1,9	0,0804	-0,27	278,1
4	283,1	0,0650	0,06367	-2,05	0,0669	+ 3,0	0,06457	-0,66	283,1
5	288,1	0,0531	0,05193	-2,20	0,0550	+ 3,5	0,05281	-0,54	288,1
6	293,1	0,0440	0,04312	-2,00	0,0460	+ 4,6	0,04395	-0,11	293,1
7	298,1	0,0371	0,03638	-1,94	0,0388	+ 4,5	0,03701	-0,24	298,1
8	303,1	0,0316	0,03112	-1,52	0,0330	+ 4,5	0,03160	0,00	303,1
9	308,1	0,0271	0,02694	-0,59	0,0284	+ 4,7	0,02730	+ 0,73	308,1
10	313,1	0,0237	0,02358	-0,51	0,0246	+ 3,8	0,02383	+ 0,57	313,1
11	323,1	0,0185	0,01858	+ 0,43	0,0190	+ 2,5	0,01867	+ 0,91	323,1
12	333,1	0,0151	0,01510	0,00	0,0151	0,0	0,01510	0,00	333,1
13	343,1	0,0127	0,01259	-0,87	0,0124	-2,5	0,01254	-1,26	343,1
14	353,1	0,0109	0,01072	-1,65	0,0104	-4,7	0,01065	-2,29	353,1
15	363,1	0,00935	0,00929	-0,67	0,00899	-4,0	0,00922	-1,40	363,1
16	373,1	0,00825	0,00817	-0,99	0,00792	-4,1	0,00812	-1,63	373,1
17	383,1	0,00729	0,00727	-0,21	0,00714	-2,2	0,00725	-0,62	383,1
18	393,1	0,00655	0,00655	0,00	0,00655	0,00	0,00655	0,00	393,1

* E. L. LEDERER: Kolloid-Beihefte Bd. XXXIV. H. 5—9. S. 276.

** Eigene Messwerte.

*** B. B. ELSNER: Journal of the Institute of Petroleum Vol. 40. June 1954. No 366. S. 165.

Der Sachlichkeit halber soll jedoch bereits hier festgestellt werden, dass unsere Gleichung gegenüber der ihr am meisten nahestehenden Vogelschen Formel auch einen Nachteil aufweist. Sie stellt nämlich eine Funktion von vier Konstanten dar, so dass die Rechnung mit ihr einen wesentlichen Aufwand an Arbeit bedeutet und auch eine bedeutend höhere Empfindlichkeit gegenüber den Fehlerstreuungen der als Rechnungsgrundlage dienenden Messpunkte aufweist. Zur Verminderung dieses Nachteils ist es in gesteigertem Masse erwünscht, die Fehlerstreuung der zur Berechnung der Konstanten dienenden Messpunkte — mit Hilfe der zur Verfügung stehenden messtechnischen und mathematischen Mittel (Methode der kleinsten Quadrate) auf das Minimum zu beschränken.

Dem gegenüber aber fallen ihre beachtenswerten Vorteile überall dort ins Gewicht, wo die genaue Kenntniss der wahren Viskositätstemperatur-Funktion in einem breiten Temperaturintervalle erforderlich ist.

Wie weit die Temperaturgrenzwerte unserer Gleichung bezüglich der die Messwerte deckenden Genauigkeit bei den verschiedensten Flüssigkeiten noch über die von uns mitgeteilten Grenzen hinausgehen, konnte mit Hilfe unserer vorläufigen Messmöglichkeiten einstweilen noch nicht festgestellt werden. In welchem Masse jedoch die uns zur Verfügung stehenden Messwerte in dem bisher untersuchten Temperaturbereich angenähert werden und in welchem Verhältnis die Streuungen unserer Funktion zu denen der bisher als besten erachteten Formeln stehen, mögen durch die Daten der Tabellen illustriert werden.

Die Messwerte in den einzelnen Spalten der Tabellen stammen zum Teil — wie schon erwähnt — aus eigenen Messungen, zum Teil aus Literaturangaben. In einigen Fällen weichen die angeführten Werte mehr oder weniger von den Durchschnittswerten unserer eigenen, oder den aus der Fachliteratur allgemein bekannten Messwerten etwas ab.

So haben wir zwecks weitgehender Sachlichkeit z. B. die mit der Ledererschen Formel berechneten Werte und — soweit es möglich war, auch die Messwerte — aus seiner Originalveröffentlichung entnommen und sie zum Vergleiche auch bei den anderen Beziehungen benutzt. Dies war gestattet, da wir bei der Auswahl der einzelnen Messwerte das Gewicht nicht so sehr auf die Absolutwerte, als vielmehr darauf legten, die mit den einzelnen Gleichungen ermittelten Werte möglichst sachlich miteinander zu vergleichen.

Dementsprechend haben wir — wo es nur möglich war — die Konstanten der zum Vergleich herangezogenen Gleichungen immer aus denselben Messwerten berechnet. Bei der Auswahl dieser Messwerte waren dann vor allem ein je breiteres Temperaturintervall, innerhalb dessen eine möglichst gleichmässige Verteilung, und die jeweils kleinste wahrscheinliche Fehlerstreuung der einzelnen als Rechnungsgrundlage dienenden Werte jene Gesichtspunkte, die wir immer vor Augen hielten.

Die jeweils zur Berechnung benutzten Messwerte sind in den einzelnen Spalten gekennzeichnet.

Wir sind dessen wohl bewusst, dass die mitgeteilten sowie die ausserdem noch in unserem Besitz befindlichen weiteren Ergebnisse auch insgesamt noch nicht genügen, den Wert unserer Beziehung einwandfrei zu entscheiden. Dies ist ja auch nicht unsere Aufgabe.

Ein weiteres Ziel unserer Arbeit war vielmehr, den oft beobachteten Mängeln entgegenzukommen, derentwegen die Praxis im Allgemeinen nicht in der Lage ist, von den in der Literatur beschriebenen zahlreichen Formeln diejenige zu bestimmen, die gegebenenfalls ihren Anforderungen am besten entspricht.

Mit unserer Übersicht und den beigelegten Tabellen wollen wir auch diesbezüglich einige Anhaltspunkte geben.

Dies wird umso wichtiger, da in der Literatur seit je eine solche Funktion angestrebt wird, bei der die Anzahl der Konstanten, auf Kosten einer je geringeren Aufopferung der Genauigkeit, wie irgendsmöglich verringert werden soll.

Tabelle VIII
Motorenschmieröl

No.	T	Messwert** $\eta_m \cdot P$	Berechnet nach											T
			Vogel (5)		Lederer (4)		Gleichung (8)		Guzmán—Drucker (2)		Waterman (10)			
			$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	ν St	
1	273,1	966,7	1198,1	+ 23,94	160,6	— 83,40	956,18	— 1,1	55,851	— 94,22	400,283	— 58,55	426,12	273,1
2	276,1	511,7	608,2	+ 18,85	115,81	— 77,37	507,94	— 0,74	45,254	— 91,16				
3	278,1	352,6	400,5	+ 13,58	93,65	— 73,44	343,20	— 2,67	39,433	— 88,82	187,92	— 46,70	200,53	278,1
4	283,1	141,4	156,4	+ 10,59	56,10	— 60,32	140,95	— 0,31	28,186	— 80,06	93,82	— 33,65	100,48	283,1
5	288,1	64,72	69,12	+ 6,79	34,47	— 46,73	64,62	— 0,16	20,383	— 68,51				
6	293,1	32,47	33,80	+ 4,11	21,70	— 33,16	32,44	— 0,09	14,904	— 54,10	27,61	— 14,97	29,79	293,1
7	298,1	17,58	17,97	+ 2,21	14,31	— 18,61	17,57	— 0,06	11,013	— 27,37				
8	303,1	10,05	10,24	+ 1,91	9,21	— 8,39	10,15	— 0,95	8,219	— 18,24	9,797	— 2,52	10,649	303,1
9	308,1	6,193	6,193	0,00	6,193	0,00	6,193	0,00	6,193	0,00	6,193	0,00	6,756	308,1
10	313,1	4,010	3,935	— 2,32	4,249	+ 5,95	3,959	— 1,28	4,708	+ 17,42	4,053	+ 1,07	4,4384	313,1
11	323,1	1,798	1,797	— 0,06	2,114	+ 17,60	1,819	+ 1,18	2,792	+ 55,27	1,901	+ 5,73	2,0975	323,1
12	332,2	1,000	0,987	— 1,33	1,190	+ 19,01	1,000	0,00	1,708	+ 70,82				
13	343,1	0,5377	0,5370	— 0,13	0,6406	+ 19,13	0,5436	+ 1,10	1,0755	+ 100,01	0,5640	+ 4,90	0,63187	343,1
14	353,1	0,3370	0,3339	— 0,92	0,3856	+ 14,41	0,3371	+ 0,03	0,6952	+ 106,28				
15	363,1	0,2226	0,2211	— 0,67	0,2447	+ 9,95	0,2226	0,00	0,4603	+ 106,76	0,2253	+ 1,19	0,25628	363,1
16	373,1	0,1547	0,1542	— 0,34	0,1631	+ 5,32	0,1583	+ 2,19	0,3115	+ 101,11	0,15027	0,00	0,17241	373,96
17	383,1	0,1107	0,1121	+ 1,26	0,1138	+ 2,78	0,1122	+ 1,35	0,2152	+ 94,39	0,11135	+ 0,59	0,12868	383,1
18	387,0	0,1000	0,1000	0,00	0,1000	0,00	0,1000	0,00	0,1873	— 87,26				
19	393,1	0,08548	0,08446	— 1,19	0,08273	— 3,22	0,08437	— 1,32	0,1515	+ 77,22				
20	403,1	0,06548	0,06554	+ 0,09	0,06259	— 4,51	0,06538	— 0,15	0,1085	+ 65,71	0,06425	— 1,88	0,07545	403,1
21	413,1	0,05206	0,05216	+ 0,19	0,04898	— 5,92	0,05199	— 0,13	0,7899	+ 51,72				
22	423,1	0,04315	0,04243	— 1,67	0,03968	— 8,03	0,04228	— 2,06	0,05837	+ 35,27	0,04159	— 3,62	0,049633	423,1
23	433,1	0,03521	0,03516	— 0,14	0,03316	— 5,82	0,03505	— 0,46	0,04374	+ 24,22				
24	443,1	0,02956	0,02961	+ 0,17	0,02853	— 3,48	0,02956	0,00	0,03321	+ 12,34	0,02935	— 0,71	0,035607	443,1
25	453,9	0,02500	0,02500	0,00	0,02500	0,00	0,02500	0,00	0,02500	0,00	0,02500	0,00	0,030604	453,9
26	463,1	0,02184	0,02189	+ 0,23	0,02235	+ 2,34	0,02194	+ 0,46	0,01984	— 9,16	0,022102	+ 1,20	0,027267	463,1
27	473,1	0,01910	0,01915	+ 0,26	0,02124	+ 11,21	0,01925	+ 0,78	0,01558	— 18,43				
28	483,1	0,01706	0,01692	— 0,82	0,02017	+ 18,24	0,01706	0,00	0,01236	— 27,55	0,017509	+ 2,63	0,021972	483,1
29	493,1	0,01537	0,01508	— 1,89	0,01956	+ 27,29	0,01526	— 0,72	0,00990	— 35,59				

** Eigene Messwerte.

In auffälliger Weise macht sich dieses Bestreben in der bereits erwähnten Veröffentlichung von GÖTTNER geltend und neuerdings auch in den Mitteilungen von ROST [17, 19] und WATERMAN [22] sowie in der durch CAMERON [18] vorgeschlagenen Vereinfachung des Vogelschen Zusammenhanges.

Das Ziel ist überall dasselbe: gute Übersicht, leichtes Rechnen, einfache Ausdrucksweise. Nun kann man dies ja ohne weiteres tun, nur muss man immer im klaren sein, in welchem Masse die Genauigkeit der Formel dadurch eingeschränkt wird.

Bei den obengenannten Verfassern wird dies in Betracht gezogen und darauf einwandfrei hingewiesen.

Nun sind auch an unserer Gleichung gewisse Vereinfachungen teils mathematischer, teils messtechnischer Art möglich.

Tabelle IX
Isobuttersäure

No.	T	Messwert* $\eta_m \cdot P$	Berechnet nach						T
			Vogel (5)		Lederer (4)		Gleichung (8)		
			$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	$\eta_b \cdot P$	Diff. %	
1	273,—	0,018868	0,018844	— 0,13	0,018599	— 1,8	0,019113	+ 1,28	273,—
2	283,—	0,015681	0,015681	0,00	0,015631	— 0,3	0,015681	0,00	283,—
3	293,—	0,013175	0,013237	+ 0,47	0,013323	+ 1,1	0,013170	— 0,04	293,—
4	303,—	0,011289	0,011318	+ 0,26	0,011471	+ 1,6	0,011275	— 0,12	303,—
5	311,48	0,010000	0,010000	0,00			0,010000	0,00	311,48
6	313,—	0,009804	0,009788	+ 0,16	0,009964	+ 1,6	0,009790	— 0,14	313,—
7	323,—	0,008618	0,008552	— 0,77	0,008727	+ 1,3	0,008611	— 0,08	323,—
8	333,—	0,007642	0,007540	— 1,34	0,007692	+ 0,8	0,007639	— 0,04	333,—
9	343,—	0,006827	0,006703	— 1,82	0,006844	+ 0,2	0,006828	+ 0,01	343,—
10	353,—	0,006141	0,006003	— 2,24	0,006122	— 0,3	0,006141	0,00	353,—
11	363,—	0,005535	0,005413	— 2,19	0,005509	— 0,4	0,005552	+ 0,30	363,—
12	373,—	0,005011	0,004912	— 1,98	0,004984	— 0,6	0,005041	+ 0,59	373,—
13	383,—	0,004556	0,004482	— 1,63	0,004534	— 0,5	0,004594	+ 0,83	383,—
14	393,—	0,004172	0,004111	— 1,47	0,004144	— 0,6	0,004200	+ 0,67	393,—
15	403,—	0,003832	0,003788	— 1,15	0,003805	— 0,7	0,003850	+ 0,48	403,—
16	413,—	0,003533	0,003506	— 0,76	0,003509	— 0,5	0,003538	+ 0,14	413,—
17	423,—	0,003258	0,003258	0,00	0,003248	— 0,3	0,003258	0,00	423,—

* Eigene Messwerte, auch E. L. LEDERER: Kolloid-Beihefte Bd. XXXIV. H. 5—9. S.290.

Die Erörterung unserer diesbezüglichen Vorstellungen, sowie auch der Bedeutung der einzelnen Konstanten soll aber einer später zu erfolgenden Mitteilung vorbehalten werden.

Tabelle X
Gleichungs-Konstantenwerte

Tabelle No.	Gl. Vogel (5)			Gl. Lederer (4)			Gleichung (8)				Gl. Waterman (10)		
	A	C	T_{∞}	q_0	E	C	A	B	C	T_{∞}	A	B	X
I	247,664	-3,61222	139,955	5826,—	0,008222	- 1,9628	120,6287	- 0,0016237	- 2,560777	176,977	11774808,—	- 3,071726	2,85298
II	583,620	- 4,01077	- 40,746	1117,—	0,001618	3,2133	63,4249	- 0,0021848	- 2,066838	149,297			
III	360,175	- 3,35829	146,962	7254,6	0,006665	- 1,4347	171,1052	- 0,0014740	- 2,147014	189,500	3987404,—	- 2,678240	2,56645
IV	342,640	- 3,34863	164,036	9280,6	0,008639	- 3,3035	205,1788	- 0,0011834	- 2,397974	191,549			
V	334,100	- 3,35017	177,684	11758,—	0,011074	- 5,5966	273,2732	- 0,0005544	- 2,910402	188,074			
VI	320,171	- 3,61176	68,426	2970,—	0,005190	0,8599	52,5625	- 0,0023566	- 1,957756	178,928			
VII	197,129	- 2,10903	179,951	9697,—	0,013464	- 5,7387	318,3035	- 0,0015419	- 4,132957	156,097			
VIII	379,445	- 3,17329	212,406	22241,—	0,021548	- 14,796	425,8306	0,0005444	- 3,571030	206,594	13917523000	- 2,183454	3,88338
IX	460,653	- 3,68270	37,717	1656,—	0,001582	3,2083	54,7652	- 0,0025889	- 1,620309	183,115			

No. VIII, Gleichung (2) nach DRUCKER u. GUZMÁN: $A = 2296,208$ $B = - 6,6609$

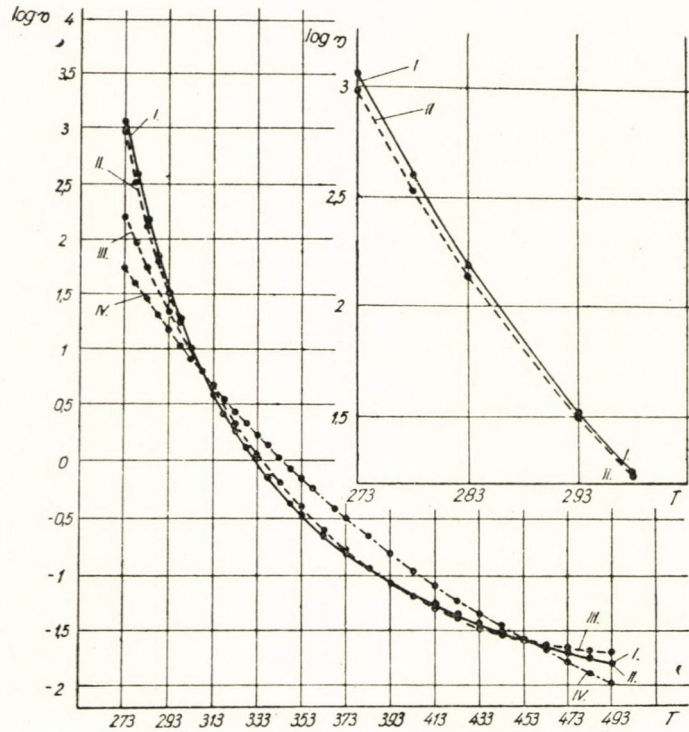


Abb. 1. V. T. Kurven der einzelnen Funktionen eines Mineralschmieröles nach Tabelle VIII

I. Messwerte und Rechnungswerte nach Formel 8. II. Rechnungswerte nach Gleichung 5. III. Rechnungswerte nach Gleichung 4. IV. Rechnungswerte nach DRUCKER und GUZMÁN (2)

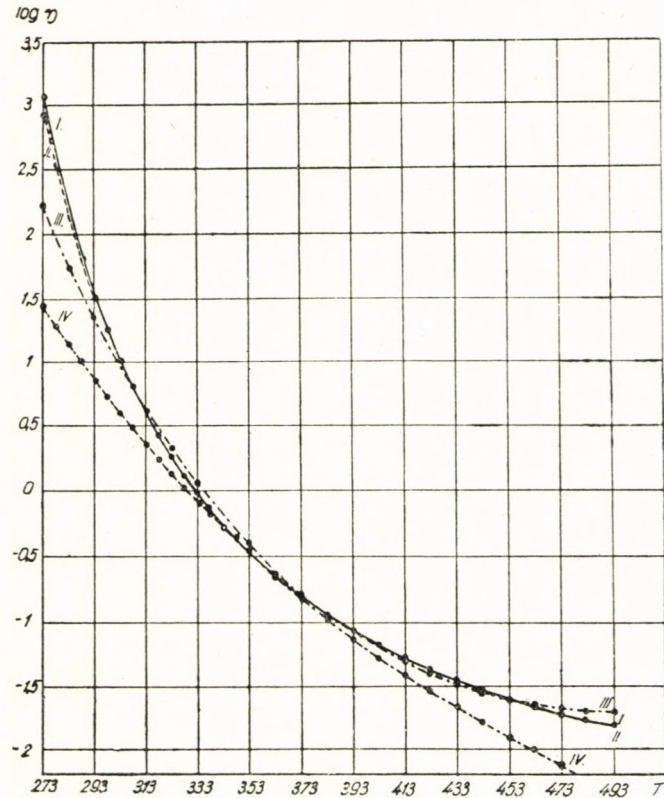


Abb. 2. V. T. Kurven wie in Abb. 1, jedoch bei 100° C aufeinander geschoben zur Illustration und besseren Übersicht des Temperaturintervalls der Gültigkeit der einzelnen Funktionen

Nach Abschluss unserer Arbeit ist eine Abhandlung von WATERMAN [22] erschienen, in der zur Beschreibung der Viskositätstemperatur-Funktion folgende Gleichung empfohlen wird:

$$\log \nu = \frac{A}{T^x} + B \quad (10)$$

in welcher ν die kinematische Viskosität der Flüssigkeit bedeutet, während x , A und B Funktionskonstanten ohne näher begründete Bedeutung sind.

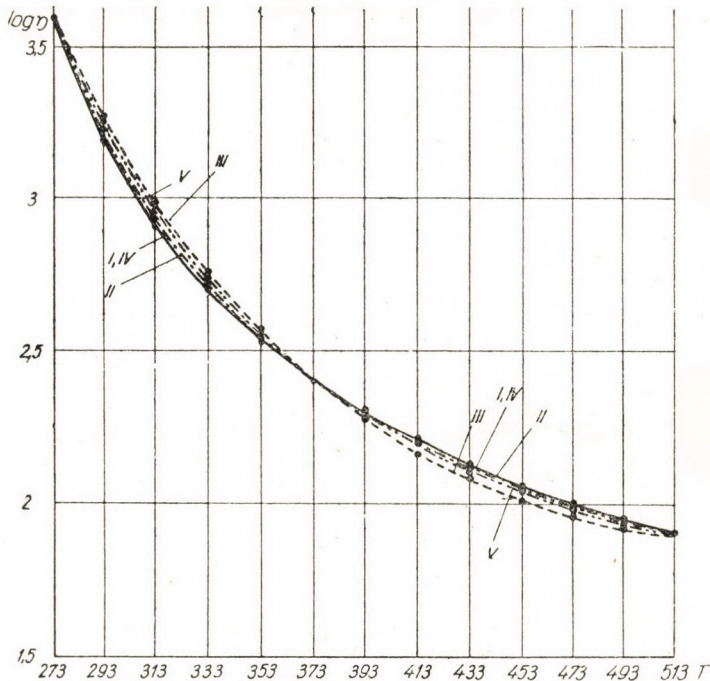


Abb. 3. Allgemeine vergleichende Übersicht des Verlaufes der V. T. Kurven der einzelnen Funktionen bei einem Kohlenwasserstoffgemische.

I., IV. Messwerte und Rechnungswerte der Gl. 8. II. Rechnungswerte nach Gl. 5. III. Rechnungswerte nach Gl. 4. V. Rechnungswerte nach Gl. 10

Diese Formel ist sehr ähnlich der von ÖHLSCHLÄGER [6] empfohlenen und von uns schon im Jahre 1926 überprüften und später besprochenen (1) Formel.

Es war uns nicht mehr möglich, auch diese Formel bei den verschiedensten Flüssigkeiten zum Vergleich mit den anderen heranzuziehen, doch wollten wir es nicht unterlassen, auch diese Formel — wie nur möglich — in den Vergleich mit einzubeziehen.

Bei drei verschiedenen Flüssigkeiten wurden also die Konstanten auch dieser Gleichung aus den bei den übrigen Formeln gebrauchten Messwerten berechnet.

Die einzelnen Rechnungswerte der Viskositäten dieser Flüssigkeiten sind in Tabelle I, III und VIII zusammengestellt.

Beim Vergleich dieser Werte kann man feststellen, dass sie sich in einem etwas grösseren Temperaturbereich als die der Ledererschen den wahren Werten der Viskositätstemperatur-Funktion anschmiegen, den Temperaturbereich der Vogelschen und unserer Gleichung erreichen sie aber nicht. Dieser Befund kann jedoch natürlich noch nicht als Grundlage zu einer allgemeinen Kritik dienen.

SCHRIFTTUM

1. B. MARSCHALKÓ — J. BARNA : Hőmérséklet hatása kenőolajokra. (Die Wirkung der Temperatur auf Schmieröle.) Magyar Mérnök és Építész Egylet Közlönye, LXI 1927. H. 5—6. S. 26.
2. B. MARSCHALKÓ — J. BARNA : Ásványi kenőolajok értékelése és azonosítása. (Die Wertung und Identifizierung von mineralischen Schmierölen.) Magyar Mérnök és Építész Egylet Közlönye, LXIII 1929. H. 5—6. S. 29.
3. G. H. GÖTTNER, Dr.: Über Kennzahlen für das Viskosität-Temperatur-Verhalten von Schmierstoffen. 1949. S. Hirzel Verlag. Leipzig.
4. BATSCHINSKI, Abh. d. phys. Kt; Moskauer Ges. d. Freunde d. Naturwissenschaften, 10/8. 1900., Wied. Ann. 25. 105. 1908.
5. I. DE GUZMÁN: Ann. Soc. espan. Fisica Quim. 11. 353 (1913).
C. DRUCKER, Z. physik. Chem. Abt. A 92. 287 (1917).
6. ÖHLSCHLÄGER: Ztschr. d. V. D. I. 62. 422 (1918).
7. BATSCHINSKI: Ztschr. physik. Chem. 34. 643 (1913).
8. SCHWEDHELM: Chem. Ztg. 5. 41. f. f. (1921).
9. H. VOGEL: Phys. Ztschr. S. 645—646 (1921). Ztschr. f. Ang. Chemie (1922).
10. B. MARSCHALKÓ — J. BARNA: Neue Methoden zur Beurteilung und Bewertung von Ölen. Congrès International pour l'Essai des Matériaux. Amsterdam. 1927. 415.
11. K. GÜMBEL: Forschungsarbeiten des V. D. I. 224.
K. GÜMBEL u. E. EVERLING: Reibung und Schmierung im Maschinenbau. Berlin 1925.
12. C. WALTHER: Erdöl u. Teer 7. (1931) 382.
13. T. GELLÉRT: »Petroleum« XXXIII. Nr. 44. S. 24. 1937.
14. H. I. EYRING: Chem. Physik. 4, 283—291 (1936).
15. E. N. DA C. ANDRADE: Nature (London) 29, 582 (1933).
16. E. L. LEDERER: Kolloid-Beihefte, Bd. XXXIV. H. 5—9. S. 270—338. (1930).
17. U. ROST: Kolloid Ztschr. Bd. 142. H. 2/3. S. 132 (1955).
18. A. CAMERON: J. Inst. Petroleum 31, 401 (1945).
19. U. ROST: Erdöl und Kohle. 8. Jahrg. (Juli 1955) No. 7. S. 468—478.
20. H. UMSTÄTTER: Strukturmechanik. Th. Steinkopff, Dresden und Leipzig 1948. S. 83.
H. UMSTÄTTER: Erdöl und Kohle 9. Jahrg. (Mai 1956) No. 5.
21. B. B. ELSNER: Journal of the Institute of Petroleum, Vol. 40. Jun. 1954. No. 366. S. 161.
22. H. I. WATERMAN: Erdöl und Kohle, 9. Jahrg. Nr. 3. 1956. S. 166—171.
23. H. UMSTÄTTER: Arch. techn. Mess. Lfg. 178 (1950). V. 9122—6.

ZUSAMMENFASSUNG

In unseren früheren Veröffentlichungen haben wir darauf hingewiesen, dass das Viskositäts-Temperatur-Verhalten nicht nur eine der wichtigsten Wertungsmöglichkeiten für die Eignung von Schmierölen ist, sondern auch als zuverlässiger Kennwert zur Kennzeichnung von Flüssigkeiten und gewisser Flüssigkeitsgemische (vor allem Kohlenwasserstoffe und Kunststoffe) dienen kann.

Dementsprechend suchten wir nach Möglichkeiten, die bei verschiedenen Flüssigkeiten bestimmten Viskositäts-Temperatur Messkurven durch eine mathematische Funktion von derselben Form auszudrücken, die möglichst wenig Konstanten enthält — denen aber auch

physikalische Bedeutung zukommt — und die V. T. Kurven doch mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit darzustellen vermag.

Nun untersuchten wir die in der Literatur empfohlenen, für die oben gestellte Anforderungen aussichtsvolle Beziehungen und verglichen bei verschiedenen Flüssigkeiten die mit Hilfe dieser Gleichungen in einem breiten Temperaturintervalle berechneten Werte mit den — uns zur Verfügung stehenden — Viskositäts-Temperatur Messkurven. Auf dieser Grundlage wurden einerseits die Temperaturgültigkeitsgrenzen, andererseits auf Grund der beobachteten Streuungen die relativen Nutzwerte der einzelnen Funktionen festgestellt.

Es wurde dann von uns eine — schon seit langem erprobte — folgende Beziehung vorgeschlagen :

$$\ln \eta = C + BT + \frac{A}{T - T_{\infty}}$$

Auch diese wurde dann Gegenstand der vergleichenden Untersuchungen.

Es konnte bei den von uns bisher untersuchten Flüssigkeiten und Flüssigkeitgemischen festgestellt werden, dass sich die mit Hilfe dieser Relation berechneten Werte besser, und verglichen mit allen übrigen untersuchten Relationen in einem weitaus bereiteren Temperaturbereich, an die effektiven Messwerte schmiegen.

In der Folge wurden dann die Vor- und Nachteile der vorgeschlagenen Funktion ausführlich erörtert. Zur Veranschaulichung unserer Erörterungen wurden die Ergebnisse unserer Messungen und Berechnungen in den beigefügten Tabellen zusammengefasst.

THE VISCOSITY TEMPERATURE RATIO OF LIQUIDS AND ITS APPLICATION FOR THE CHARACTERIZATION AND IDENTIFICATION OF LIQUIDS

B. MARSCHALKÓ and J. BARNA

SUMMARY

In their previous papers the authors were seeking a yardstick suitable for the univocal expression of the real lubrication value of mineral lubeoils, independent of the measuring apparatus. In the course of these investigations has turned up the problem of dependable qualitative identification of certain mixtures of liquids, in the first place of hydrocarbons.

For this purpose the viscosity temperature function and for its characterization the first derivative of its logarithm was thought suitable. For the completion of relationships already examined and published those recently suggested in literature for various liquids were investigated. For this purpose the series of viscosity measurements executed by the authors on various liquids within wide temperature ranges, as well as viscosity values factually measured, taken from literature were confronted with data computed by the different formulae. On this basis the values of each temperature range of validity and on the basis of the dispersions experienced their relative values of applicability were established.

Thereupon the following formula suggested by one of the co-authors and proved for a long time was presented, and data furnished by it were submitted to further comparative examination :

$$\ln \eta = C + BT + \frac{A}{T - T_{\infty}}$$

It became possible to establish for the liquids and mixtures so far examined by the authors, that the calculated values showed better accord with actually measured values — even in wider temperature ranges — than was that the case with any other formula here investigated.

Further analysis extended on the demonstration of advantages and of disadvantages of the suggested relationships.

LE RAPPORT VISCOSITÉ-TEMPÉRATURE DES LIQUIDES, ET SON APPLICATION À LA CARACTÉRISATION ET L'IDENTIFICATION DES MÉLANGES DE LIQUIDES

B. MARSCHALKÓ et J. BARNA

RÉSUMÉ

Dans leurs travaux antérieurs, les auteurs ont cherché les modes d'établissement d'une mesure offrant l'expression non équivoque de la valeur lubrifiante réelle des huiles de graissage, indépendamment de l'appareil d'essais.

Pour ce but, la fonction viscosité-température et, pour la caractérisation de celle-ci, la deuxième dérivée de son logarithme ont paru les plus convenables. Pour compléter les rapports vérifiés et publiés, les auteurs ont aussi examiné ceux récemment proposés dans la littérature, pour des liquides différents. Dans ce but, ils ont comparé aux données calculées d'après les rapports établis, les séries de mesures de viscosité effectuées par eux-mêmes sur des liquides différents, à des intervalles de température étendus, d'une part, et d'autre part les valeurs de viscosité, obtenues par des mesures effectives communiquées par la littérature. Sur cette base, les auteurs ont établi les valeurs de chaque limite de validité de température, et à la base des dispersions constatées, ils ont calculé leurs valeurs d'application relatives.

Par la suite, les auteurs présentent suivante proposée par l'un d'eux et vérifiée depuis longtemps, et dont les résultats obtenus ont déjà donné lieu à des examens comparatifs :

$$\ln \eta = C + BT + \frac{A}{T - T_{\infty}}$$

Pour les liquides et mélanges examinés par les auteurs, ceux-ci ont pu établir que les valeurs calculées par cette formule se rapprochent davantage des valeurs effectivement mesurées, dans un domaine de température plus étendu, que tous les autres rapports qu'ils ont examinés.

Un exposé détaillé des avantages et inconvénients du rapport proposé termine l'étude.

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ВЯЗКОСТЬЮ И ТЕМПЕРАТУРОЙ ЖИДКОСТЕЙ И ПРИМЕНЕНИЕ ЭТОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИДЕНТИФИКАЦИИ СМЕСЕЙ ЖИДКОСТЕЙ

Б. МАРШАЛКО и Я. БАРНА

РЕЗЮМЕ

В опубликованных нами ранее работах мы занимались вопросом определения показателя, пригодного для однозначного и независимого от измерительного прибора выражения действительных смазочных свойств минеральных смазочных масел. В процессе этих работ возник вопрос надежной идентификации определенных смесей жидкостей (в первую очередь углеводородов).

Для такой цели мы считали пригодным использовать производную функции вязкость — температура и для ее характеристики первую производную ее логарифма. В дополнение уже исследованных и сообщенных зависимостей нами было выполнено исследование также с тем пор вновь предложенных в литературе для различных жидкостей зависимостей. Проведенные нами для этой цели серии измерений вязкости в широком диапазоне температур, далее значения вязкости, действительно измеренные и взятые из литературных сообщений, были сравнены с расчетными данными, полученными при помощи отдельных зависимостей. На такой основе нами были определены значения для каждого отдельного действительного температурного предела и на основе наблюдавшихся отклонений — их применимость по отношению друг к другу.

В дальнейшем сообщалось предложенное одним из нас нижеприведенное выражение, которое подвергалось проверке в течение продолжительного времени, полученные

же при помощи этого выражения данные представили собою предмет для производства дальнейших сравнительных исследований.

$$\ln \eta = C + BT + \frac{A}{T - T_{\infty}}$$

В случае исследованных нами до сих пор жидкостей и смесей можно было установить, что расчетные значения по сравнению со всеми исследованными нами зависимостями даже в более широком диапазоне температур лучше совпадают с действительно измеренными данными.

В дальнейшем детально описываются отрицательные и положительные стороны предложенной нами зависимости.

ERMITTLUNG DER EIGENSCHWINGUNGSZAHLEN BEI TORSIONSSCHWINGUNG MIT ÄUSSERER DÄMPFUNG

A. BALOGH

[Eingegangen am 21. August 1956]

Die nach einem neuen Verfahren erfolgende Ermittlung der Eigenschwingungszahlen bei Torsionsschwingungen ohne Dämpfung wurde vom Verfasser in der VDI. Z. 1955 Nr. 6 veröffentlicht. Dieses Verfahren soll nachstehend für den Fall vorhandener äusserer Dämpfung erweitert werden.

Das Dämpfungsmoment als Widerstand sei mit der Schwingungsgeschwindigkeit proportional und ihr entgegengesetzt. Das periodische Moment ist:

$$-k \frac{df}{dt} \tag{1}$$

wo k der Dämpfungsbeiwert in kgcmsek und f der Verdrehungswinkel ist.

Bei den Massen n sind die für diesen Fall gültigen simultanen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} I_1 f_1'' + k_1 f_1' + c_1 (f_1 - f_2) &= 0 \\ I_2 f_2'' + k_2 f_2' + c_1 (f_2 - f_1) + c_2 (f_2 - f_3) &= 0 \\ \dots & \dots \dots \\ I_n f_n'' + k_n f_n' + c_{n-1} (f_n - f_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

wo c die Drehfederzahl in kgcm , I das Trägheitsmoment in kgcmsek^2 ist. Die partikuläre Lösung dieser Gleichungen ist:

$$f_1 = p_1 e^{wt}, f_2 = p_2 e^{wt}, \dots \tag{3}$$

Eingesetzt in (2) erhält man:

$$\begin{aligned} (I_1 w^2 + k_1 w + c_1) p_1 - c_1 p_2 &= 0 \\ (I_2 w^2 + k_2 w + c_1 + c_2) p_2 - c_1 p_1 - c_2 p_3 &= 0 \\ \dots & \dots \dots \\ -c_{n-1} p_{n-1} + (I_n w^2 + k_n w + c_{n-1}) p_n &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Um die angedeutete Methode auch hier anwenden zu können, soll die folgende Bezeichnung eingeführt werden :

$$I_k w^2 + k_k w = \Theta_k w^2, \quad k = 1, 2 \dots n \quad (5)$$

Somit geht (4) in :

$$\begin{aligned} (\Theta_1 w^2 + c_1) p_1 - c_1 p_2 &= 0 \\ (\Theta_2 w^2 + c_1 + c_2) p_2 - c_1 p_1 - c_2 p_3 &= 0 \\ \dots & \dots \\ -c_{n-1} p_{n-1} + (\Theta_n w^2 + c_{n-1}) p_n &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

über. Aus (6) sollen die p -Werte ermittelt werden :

$$p_2 = p_1 \left(1 + \frac{w^2}{c_1} \Theta_1 \right) \quad (7)$$

$$p_3 = -\frac{c_1}{c_2} p_2 + \frac{\Theta_2 w^2}{c_2} p_2 + \frac{c_1}{c_2} p_2 + p_2 \quad (8)$$

Setzt man in (8) in das vorletzte Glied p_2 aus (7) ein :

$$p_3 = p_2 + \frac{w^2}{c_2} (\Theta_1 p_1 + \Theta_2 p_2) \quad (9)$$

Ähnlich erhält man :

$$\begin{aligned} p_4 &= p_3 + \frac{w^2}{c_3} (\Theta_1 p_1 + \Theta_2 p_2 + \Theta_3 p_3) \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Addiert man noch die Gleichungen (6), so erhält man :

$$\Theta_1 p_1 + \Theta_2 p_2 + \Theta_3 p_3 + \Theta_4 p_4 + \dots \quad \dots + \Theta_n p_n = 0 \quad (11)$$

woraus :

$$\Theta_1 p_1 + \Theta_2 p_2 = -(\Theta_3 p_3 + \Theta_4 p_4 + \Theta_5 p_5 + \dots \quad \dots + \Theta_n p_n) \quad (12)$$

Bezeichnet man noch :

$$\Theta = \Theta_4 \frac{p_4}{p_3} + \Theta_5 \frac{p_5}{p_3} + \dots \quad \dots + \Theta_n \frac{p_n}{p_3} \quad (13)$$

und setzt (12) und (13) in (9) ein :

$$\frac{p_2}{p_3} = 1 + \frac{w^2}{c^2} (\Theta_3 + \Theta) \quad (14)$$

(11) soll in folgender Gestalt geschrieben werden :

$$\Theta_1 + \frac{p_2}{p_1} \left(\Theta_2 + \frac{p_3}{p_2} (\Theta_3 + \Theta) \right) = 0 \quad (15)$$

Setzt man hier die Werte von p aus (7) und (14) ein :

$$\Theta_1 + \left(1 + \frac{w^2}{c_1} \Theta_1 \right) \left[\Theta_2 + \frac{\Theta_3 + \Theta}{\Theta \frac{c_2}{c_2} + \frac{\Theta_2}{c_2} w^2 (\Theta_3 + \Theta)} \right] = 0 \quad (16)$$

Geordnet erhält man :

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} \frac{1}{1 + \frac{w^2}{c_1} \Theta_1} + 1 + \frac{1 + \frac{\Theta}{\Theta_3}}{\frac{\Theta_2}{\Theta_3} \frac{c_2}{c_2} + \frac{\Theta_2}{c_2} w^2 \left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_3} \right)} = 0 \quad (17)$$

Führt man die folgenden Bezeichnungen ein :

$$\frac{c_i}{\Theta_j} = v_{ij} \quad (18)$$

und

$$1 + \frac{\Theta}{\Theta_3} = C_n \quad (19)$$

so erhält man aus (17) :

$$\frac{v_{12}}{w^2 + v_{11}} + \frac{v_{22} C_n}{w^2 C_n + v_{23}} + 1 = 0 \quad (20)$$

In dieser Formel ändert sich nur der Wert C nach der Massenzahl. So ist z. B. für 3 Massen mit Dämpfung $C = 1$, denn $\Theta = 0$ und somit ist:

$$\frac{v_{12}}{w^2 + v_{11}} + \frac{v_{22}}{w^2 + v_{23}} + 1 = 0 \quad (21)$$

Es soll für 5 Massen der Wert C_5 ermittelt werden; zu diesem Zweck werden unter Benutzung der bisherigen Ausführungen die folgenden Ergebnisse aufgeschrieben:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{w^2}{c_1} \Theta_1 \quad (22)$$

$$\frac{P_2}{P_3} = 1 + \frac{w^2}{c_2} \left(\Theta_3 + \frac{P_4}{P_3} \left(\Theta_4 + \frac{P_5}{P_4} \Theta_5 \right) \right) \quad (23)$$

$$\frac{P_3}{P_4} = 1 + \frac{w^2}{c_3} \left(\Theta_4 + \Theta_5 \frac{P_5}{P_4} \right) \quad (24)$$

$$\frac{P_4}{P_5} = 1 + \frac{w^2}{c_4} \Theta_5 \quad (25)$$

Es soll der Ausdruck (25) in (24) eingesetzt werden:

$$\frac{P_3}{P_4} = 1 + \frac{w^2}{c_3} \Theta_4 \left(1 + \frac{1}{\frac{\Theta_4}{\Theta_5} \frac{c_4}{c_4} + \frac{w^2}{c_4} \Theta_4} \right) \quad (26)$$

Mit Benutzung von (18) erhält man schliesslich:

$$\frac{P_3}{P_4} = 1 + \frac{w^2}{c_3} \Theta_4 \left(1 + \frac{v_{44}}{w^2 + v_{45}} \right) \quad (27)$$

Bezeichnet man

$$\frac{v_{44}}{w^2 + v_{45}} = V_{445} \quad (28)$$

so geht (27) in

$$\frac{P_3}{P_4} = 1 + \frac{w^2}{c_3} \Theta_4 (1 + V_{445}) \quad (29)$$

über. Ähnlich geht man vor bei (23) und man erhält so:

$$\frac{P_2}{P_3} = 1 + \frac{w^2}{c_2} \Theta_3 \left(1 + \frac{1 + V_{445}}{\frac{c_3 \Theta_3}{c_3 \Theta_4} + \frac{w^2}{c_3} \Theta_3 (1 + V_{445})} \right) \quad (30)$$

Bezeichnet man:

$$1 + \frac{v_{33} (1 + V_{445})}{w^2 (1 + V_{445}) + v_{34}} = V_{3345} \quad (31)$$

und eingesetzt in (30) nach einer Umformung :

$$\frac{P_2}{P_3} = 1 + \frac{w^2}{c_2} \Theta_3 V_{3345} \quad (32)$$

Es werden somit für die Verhältnisse von p die folgenden Ausdrücke berechnet :

$$\begin{aligned} \frac{P_2}{P_1} &= 1 + \frac{w^2}{c_1} \Theta_1 \\ \frac{P_2}{P_3} &= 1 + \frac{w^2}{c_3} \Theta_3 V_{3345} \\ \frac{P_3}{P_4} &= 1 + \frac{w^2}{c_3} \Theta_4 (1 + V_{445}) \\ \frac{P_4}{P_5} &= 1 + \frac{w^2}{c_4} \Theta_5 \end{aligned} \quad (33)$$

Diese Werte von p sollen in (11) eingesetzt werden, die in folgender Weise geordnet :

$$\Theta_1 + \frac{P_2}{P_1} \left[\Theta_2 + \frac{P_3}{P_2} \Theta_3 + \frac{P_4}{P_3} \left(\Theta_4 + \frac{P_5}{P_4} \Theta_5 \right) \right] = 0 \quad (34)$$

Durch eine sukzessive Einsetzung erhält man :

$$\Theta_1 + \frac{P_2}{P_1} \left[\Theta_2 + \frac{P_3}{P_2} \left(\Theta_3 + \frac{P_4}{P_3} \Theta_4 (1 + V_{445}) \right) \right] = 0$$

Sodann folgt :

$$\Theta_1 + \frac{P_2}{P_1} \left[\Theta_2 + \frac{P_3}{P_2} \Theta_3 \left(1 + \frac{1 + V_{445}}{\frac{c_3 \Theta_3}{c_3 \Theta_4} + \frac{w^2}{c_3} \Theta_3 (1 + V_{445})} \right) \right] = 0$$

und mit (31) ist :

$$\Theta_1 + \frac{P_2}{P_1} \Theta_2 \left(1 + \frac{v_{22} V_{3345}}{w^2 V_{3345} + v_{23}} \right) = 0 \quad (35)$$

Setzt man hier noch den Wert von $\frac{P_2}{P_1}$ ein, so ist das Endergebnis :

$$\frac{v_{12}}{w^2 + v_{11}} + \frac{v_{22} V_{3345}}{w^2 V_{3345} + v_{23}} + 1 = 0 \quad (36)$$

wo $C_5 = V_{3345}$. Um diesen Wert zu erhalten, berechnet man die Werte $v_{11} \dots v_{45}$ nach (18) und noch V_{445} .

Der Rechnungsvorgang ist daher: Man wählt einen Wert von w und berechnet die v -Werte, sodann die V -Werte, z. B. bei 5 Massen mit Dämpfung:

$$V_{45}, V_{445}, V_{3345}$$

und eingesetzt in (36) ist diese Gleichung gleich 0, so wurde w richtig gewählt.

Bei mehr als 5 Massen mit äusserer Dämpfung ist der Rechnungsvorgang gleich dem schon angeführten.

Anwendungen. Die abgeleiteten Gleichungen sollen in einigen Fällen mit den aus dem Schrifttum [1] bekannten Ergebnissen verglichen werden.

3 Massen mit Dämpfung. Gleichung (21) soll nach w geordnet aufgeschrieben werden:

$$w^4 + w^2(v_{11} + v_{12} + v_{22} + v_{23}) + v_{11}(v_{22} + v_{23}) + v_{12}v_{23} = 0 \quad (37)$$

Setzt man die Werte von v ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} w^4 + w^2 \left(c_1 \left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2} \right) + c_2 \left(\frac{1}{\Theta_2} + \frac{1}{\Theta_3} \right) + \right. \\ \left. + c_1 c_2 \left(\frac{1}{\Theta_1 \Theta_2} + \frac{1}{\Theta_1 \Theta_3} + \frac{1}{\Theta_2 \Theta_3} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Es sollen die Werte Θ_1, Θ_2 und Θ_3 hier eingesetzt werden, wozu noch die folgenden Ausdrücke zu berechnen sind:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 &= I_1 I_2 I_3 + w^{-1} (I_2 I_3 k_1 + I_1 I_3 k_2 + I_1 I_2 k_3) + \\ &\quad + w^{-2} (I_3 k_1 k_2 + I_2 k_1 k_3 + I_1 k_2 k_3) + w^{-2} k_1 k_2 k_3 \\ \Theta_1 \Theta_2 &= I_1 I_2 + w^{-1} (I_2 k_1 + I_1 k_2) + w^{-2} k_1 k_2 \\ \Theta_1 \Theta_3 &= I_1 I_3 + w^{-1} (I_3 k_1 + I_1 k_3) + w^{-2} k_1 k_3 \\ \Theta_2 \Theta_3 &= I_2 I_3 + w^{-1} (I_3 k_2 + I_2 k_3) + w^{-2} k_2 k_3 \end{aligned} \quad (39)$$

Bemerkung: Wären die Werte $p_1 \dots p_n$ unbekannt, so würde man für die Ermittlung dieser Werte eine Determinante erhalten [1, Seite 114], die zu einer Gleichung ungeraden Grades $2n-1$ führt aber mit reellen Beiwerten. Solche algebraische Gleichungen haben eine reelle Wurzel und je zwei konjugierte komplexe Wurzeln. Die komplexen Wurzeln sind:

$$w = -s \pm i\omega$$

Daher nach dem Eulerschen Satz:

$$e^{wt} = e^{-st} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

wo A und B unveränderliche Werte sind. So wird aus ω die Eigenschwingungszahl bei Dämpfung berechnet, deren Ermittlung sich der Verfasser zur Aufgabe gestellt hat. Daraus folgt, dass für die Ermittlung der Eigenschwingungszahlen bei Torsionsschwingungen mit äusserer Dämpfung mit komplexen Zahlen, die ja zwei Koordinaten haben, gerechnet werden muss. Das ist keine einfache Aufgabe, nichtsdestoweniger sind die hier verwendeten Gleichungen bei z. B. 5 Massen mit Dämpfung viel einfacher als jene, die bei HOLZER zu finden sind ([1], S. 113, 114).

Nach dem Einsetzen aller dieser Werte erhält man :

$$\begin{aligned}
 & w^5 + w^4 \left(\frac{k_1}{I_1} + \frac{k_2}{I_2} + \frac{k_3}{I_3} \right) + \\
 & + w^3 \left[c_1 \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) + c_2 \left(\frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} \right) + \frac{k_1 k_2}{I_1 I_2} + \frac{k_1 k_3}{I_1 I_3} + \frac{k_2 k_3}{I_2 I_3} \right] + \\
 & + w^2 \left[\frac{k_1 k_2 k_3}{I_1 I_2 I_3} + c_1 \left\{ \frac{k_1 + k_2}{I_1 I_2} + \frac{k_3}{I_3} \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \right\} + \right. \\
 & \left. + c_2 \left\{ \frac{k_2 + k_3}{I_2 I_3} + \frac{k_1}{I_1} \left(\frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} \right) \right\} \right] + \\
 & + w \left[\frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} c_1 c_2 + c_1 \frac{k_3}{I_3} \frac{k_1 + k_2}{I_1 I_2} + c_2 \frac{k_1}{I_1} \frac{k_2 + k_3}{I_2 I_3} \right] + \\
 & + c_1 c_2 \frac{k_1 + k_2 + k_3}{I_1 I_2 I_3} = 0 .
 \end{aligned} \tag{40}$$

Die charakteristische Gleichung (40) entspricht genau der Gleichung, die HOLZER benützt ([1], S. 122). Vergleicht man aber diese Gleichung mit (21), so springt die Einfachheit sofort ins Auge, was besonders darum wichtig ist, weil in beiden Fällen mit komplexen Zahlen gerechnet werden muss. Gleichung (21) ist einfacher, übersichtlicher und die Möglichkeit der Fehlerquellen ist vermindert.

Sind alle Dämpfungen gleich 0 und berücksichtigt man die Vorzeichen der zweiten Differentialquotienten beider Lösungen der Differentialgleichungen (einmal negativ und einmal positiv), so erhält man die bekannte charakteristische Gleichung für 3 Massen ohne Dämpfung :

$$w^4 - w^2 \left[c_1 \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) + c_2 \left(\frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} \right) \right] + c_1 c_2 \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} = 0 \tag{41}$$

Mit Benutzung von (39) soll ergänzend hier der Fall mit *zwei Massen* und äusserer Dämpfung untersucht werden.

In diesem Falle übergeht (36) in :

$$\frac{v_{12}}{w^2 + v_{11}} + 1 = 0 \tag{42}$$

Setzt man die Werte v_{11} und v_{12} ein, so erhält man :

$$w^2 + \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1 \Theta_2} \cdot c = 0 .$$

Setzt man die Werte von Θ_1 und Θ_2 ein und mit Hilfe von (39) erhält man:

$$w^2(I_1 I_2 + w^{-1}(I_2 k_1 + I_1 k_2) + w^{-2} k_1 k_2) + \\ + c \left(\frac{I_1 w^2 + k_1 w + I_2 w^2 + k_2 w}{w^2} \right) = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durchwegs durch $I_1 I_2$ und multipliziert zugleich mit w , so erhält man:

$$w^3 + w^2 \left[\frac{k_1 + k_2}{I_1 I_2} \right] + w \left[c \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) + \frac{k_1 k_2}{I_1 I_2} \right] + c \frac{k_1 + k_2}{I_1 I_2} = 0 \quad (43)$$

Diese stimmt mit der von HOLZER benützten Gleichung [1, Seite 118] überein.

Fünf Massen. Die Ausdrücke (28), (31) und (36) können für einige praktische Fälle vereinfacht werden. Es werden zwei Fälle vorgeführt.

Fall 1. Es sei:

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k, \quad I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I \\ c_1 = c_2 = c_3 = c$$

Dieser Fall entspricht einem vierzylindrigen Motor mit einem Schwungrad. Für diesen Fall sind:

$$v_{11} = v_{12} = v_{22} = v_{23} = v_{33} = v_{34} = v,$$

weiterhin:

$$v_{44} = \frac{c_4}{I + \frac{k}{w}}, \quad v_{45} = \frac{c_4}{I_5 + \frac{k_5}{w}},$$

$$V_{445} = \frac{v_{44}}{w^2 + v_{45}}, \quad V_{3345} = 1 + \frac{v(1 + V_{445})}{w^2(1 + V_{445}) + v} = C_5$$

und schliesslich:

$$\frac{v}{w^2 + v} + \frac{v C_5}{w^2 C_5 + v} + 1 = 0$$

Fall 2. Es sei $k = 0$, d. h. vernachlässigbar klein zu k_5 . Für diesen Fall ist:

$$v = v_{11} = v_{12} = v_{22} = v_{23} = v_{33} = v_{34} = \frac{c}{I} = u.$$

Weiterhin ist

$$v_{44} = \frac{c_4}{I}.$$

Ansonsten bleiben die für den Fall 1 entwickelten Gleichungen bestehen.

SCHRIFTTUM

1. H. HOLZER: Die Berechnung der Drehschwingungen. Berlin, 1921, Julius Springer.
2. A. BALOGH: Ein neues Verfahren zum Ermitteln der Eigenschwingungszahlen von Torsionsschwingungen. VDI. Z. 1955, Seite 178.

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Ermittlung der kritischen Schwingungszahlen bei Torsionsschwingungen müssen vor allem die Eigenschwingungszahlen ermittelt werden. Für diese Berechnung wurde ein neues Verfahren veröffentlicht [2] und nun wird dieses Verfahren auf Torsions-Eigenschwingungen mit äusserer Dämpfung erweitert; gleichzeitig werden die Vorteile dieses Verfahrens gegen die bisher bekannten besprochen.

DÉTERMINATION DU NOMBRE D'OSCILLATIONS PROPRES EN OSCILLATION TORSIONNELLE, EN CAS D'AMORTISSEMENT EXTÉRIEUR

A. BALOGH

RÉSUMÉ

Pour la détermination du nombre critique d'oscillations, le nombre des oscillations propres est à établir. Dans le vol. XVIII. des Communications de la Section Technique de l'Académie Hongroise des Sc., l'auteur a publié ces calculs sans tenir compte de l'amortissement, dont l'importance se manifeste justement en cas de résonance, c'est-à-dire pour les nombres critiques d'oscillations, vu qu'il réduit l'amplitude selon le degré de l'amortissement. L'exposé du mode de détermination du nombre d'oscillations propres est donc aussi étendu pour les cas, où il faut compter avec l'amortissement extérieur.

DETERMINATION OF THE NUMBER OF SELF-OSCILLATIONS OF TORSIONAL OSCILLATION WITH EXTERNAL DAMPING

A. BALOGH

SUMMARY

For the determination of critical numbers of oscillation the number of self oscillations has to be found. In vol. XVIII. of the Publications of the Eng. Sc. Section of the Hungarian Academy of Sc. these calculations were presented by the author without consideration of damping, which is of importance just in the case of resonance, that is, at the critical number of oscillations because it reduces the amplitude according to the degree of damping. Therefore the determination of the number of self-oscillations is treated for the case too, when external damping is present.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОРСИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНЕГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

А. БАЛОГ

РЕЗЮМЕ

Для определения критического числа колебаний необходимо определять число собственных колебаний. В журнале Доклады Отделения технических наук Академии наук Венгрии в томе № XVIII сообщалась о производстве этих расчетов без учета демпфирования, что именно в случае резонанса, т. е. в случае критического числа колебаний, играет важную роль, так как величина амплитуды колебаний снижается по степени демпфирования. Поэтому определение числа собственных колебаний рассматривается также для случая, когда имеет место внешнее демпфирование.

EINFLUSS GERINGER MENGEN VON VERUNREINIGUNGEN AUF DIE WARMHÄRTE DES WOLFRAMMETALLS

T. MILLNER

KORRESP. MITGLIED D. UNGAR. AKAD. D. WISSENSCHAFTEN

und

L. SASS

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DIE NACHRICHTENTECHNISCHE INDUSTRIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 12. Oktober 1956]

Die Glühlampen- und Radoröhrenindustrie, sowie fast alle Zweige der vakuumtechnischen Industrie, benötigen ein Wolframmetall, dessen Gefüge in rekristallisiertem Zustand aus grossen Kristallen besteht, und dabei der aus ihm verfertigte Draht bei gewöhnlichen Temperaturen auch in rekristallisiertem Zustand mehr oder weniger verformbar ist.

Es ist bekannt, [1] dass diese Eigenschaften in der Wolframerzeugung dadurch gesichert werden, dass man der zur Herstellung des Wolframmetallpulvers dienenden gereinigten Wolframsäure zweckmässig gewählte Zusatzstoffe (z. B. K, Na, Al, Si usw. enthaltende Verbindungen) in einem Gesamtverhältnis von rund 1% beimengt und daraus ein diese Zusätze enthaltendes Wolframmetallpulver herstellt. Bei einer entsprechenden Erhitzung der aus diesem Wolframmetallpulver gepressten porösen Wolframstäbe verdampfen die Zusatzstoffe, so dass in den festen gesinterten Stäben Fremdatome nur noch in einer num. Konzentration von etwa 10^{-5} zurückbleiben. Die technologischen Eigenschaften und Kristallgrösse der rekristallisierten und gebrauchsfertigen Wolframprodukte werden durch die Art dieser Fremdatome bestimmt.

Bekanntlich wird ein Grosskristallgefüge im Wolframmetall durch die gemeinsame Anwesenheit von K, Si- und Al-Spuren gesichert. Noch unbekannt sind uns aber diejenigen physikalisch-chemischen Vorgänge, welche dieses Gefüge zustandebringen und wir kennen auch die speziellen Rollen der einzelnen Atomarten hierin nicht. Unsere Wolframforschung strebt unter anderem die Lösung dieser Frage an. Für diesen Zweck stellen wir verschiedene Wolframmetalle mit planmässig veränderten Zusatzstoffspuren her und beobachten, welche Eigenschaften und in welcher Weise sich nach der Art der Fremdstoffspuren richten.

So haben wir kürzlich [2] durch Beobachtung der Rekristallisation der einerseits K, Si und Al-Spuren enthaltenden grosskristallinen, andererseits nur K und Si-Spuren enthaltenden kleinkristallinen Wolframdrähte festgestellt, dass Al-Spuren die Kristallabmessungen nicht durch eine Erhöhung der Kristallwachstumsgeschwindigkeit, sondern durch die Verminderung der Keimbildungsgeschwindigkeit vergrössern.

Unsere Vorversuche führten zu der Erkenntnis, dass auch die Warmhärte der Wolframmetallsorten sich nach der Art der Fremdstoffspuren richtet. In dieser Abhandlung teilen wir die bisher geklärten Einzelheiten dieses Zusammenhanges mit.

Einen starken Anlass zu dieser Untersuchung gab die Betriebsbeobachtung, dass die nach dem gewohnten Verfahren hergestellten, aber nur K und Al-Fremdstoffspuren enthaltenden Wolframdrähte bei der üblichen Bearbeitungstempe-

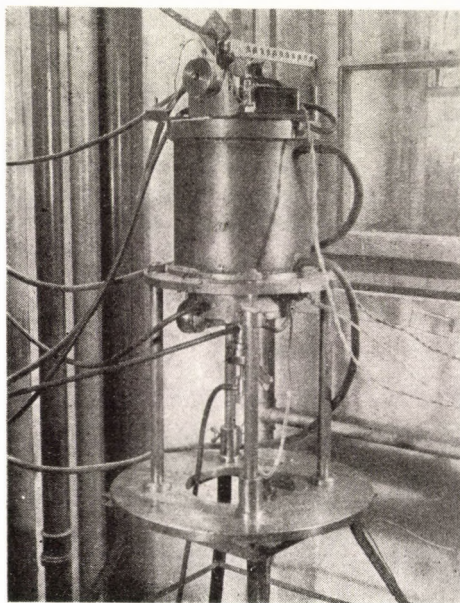


Bild 1. Halbmikro Warmhärte-Messgerät zum Messen von H_V -Werten bis 1000°C unter Schutzgasatmosphäre

ratur von $800\text{--}850^\circ\text{C}$ auffällig »leichter« ziehbar als die nebst K und Al-Spuren auch noch Si-Fremdstoffspuren enthaltenden Drähte sind, sowie unsere Feststellung, dass dieser Unterschied in keiner der üblichen technologischen Messzahlen zum Ausdruck gelangt.

Im allgemeinen besteht in normalisiertem oder völlig entfestigtem Zustand der Metalle ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Zerreissfestigkeit und Härte. Nach unseren Versuchen weisen verschiedene Wolframdrahtsorten bei erhöhten Temperaturen trotz übereinstimmender Festigkeitswerte voneinander abweichende Härtewerte auf. Das kann davon stammen, dass sie in hartgezogenem Zustande, also weder normalisiert, noch weichgeglüht, geprüft wurden, bei höheren Temperaturen im Zerreissversuch nach etwa 2—3 Min., im Härteprüfapparat aber erst nach etwa 30—40 Min. zur Messung gelangten und die Entfestigung in den verschiedenen Drähten daher im Zerreissversuch einen viel

geringeren und weniger unterschiedlichen Grad als bei der Härteprüfung erreichte.

Wir haben für unsere Untersuchungen eine Apparatur gebaut (Bild 1), mit der wir an metallographischen Schliffstücken Halbmikro-Warmhärtemessungen in Schutzgas bis zu einer Temperatur von 800°C auszuführen imstande sind. Die Konstruktionsskizze dieser Apparatur ist aus Bild 2 ersichtlich.

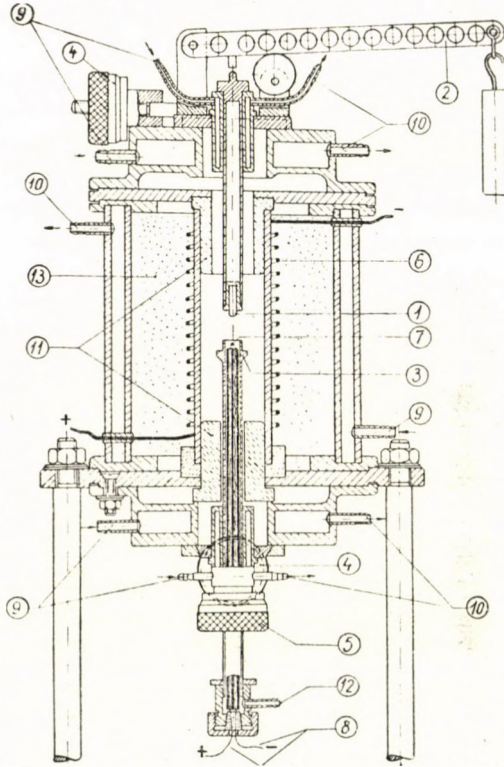


Bild 2. Konstruktionsskizze des Halbmikro Warmhärte-Messgerätes

Das Gerät besteht aus drei Hauptteilen. Der erste Hauptteil ist der Ofen, der mittels vier Säulen unmittelbar an den Sockel befestigt ist. Der zweite Teil ist der obere Abschlusskörper (dieser schliesst sich von oben an den Ofen an). Hieran schliesst sich die Vickers-Pyramide mit dem Waagebalken und der Transportvorrichtung an. Der dritte Teil ist der untere Abschlusskörper (dieser schliesst sich von unten an den Ofen an). Hieran ist der das Versuchsobjekt tragende Ständer samt Thermoelement und die den Haltestab bewegende Vorrichtung befestigt.

Der Ofenkörper besteht aus einem doppelwandigen wassergekühlten Eisenzylinder, in dessen Längsachse sich eine mit Kanthal-D Draht (6) bewickelte Quarzröhre von ca. 60 mm Durchmesser befindet. Der Raum zwischen der

Quarzröhre und dem Eisenzylinder wurde mit Schamottmehl (13) ausgefüllt. Die beiden Enden der Quarzröhre wurden mit je einem durchgebohrten Schamottstöpsel versperrt. Durch die obere Stöpselbohrung ragt in das Ofeninnere der die Vickers-Pyramide haltende Stab, durch die untere Bohrung der objekttragende Ständer ein. Der Ofen konnte an eine Wechselspannung von 220 V angeschlossen werden. Die Heizspirale hatte eine Leistung von ungefähr 700 Watt.

Der doppelwandige wassergekühlte (9, 10) und in der Mitte rund ausgeschnittene obere Abschlusskörper ist mit Schrauben unter Zwischenschaltung einer Gummidichtung an den Ofen befestigt. Der runde Ausschnitt ist mit einer, zwischen zwei Prismen gleitenden, sorgfältig gepassten und gut dichtenden Platte verdeckt. An diese Platte schliesst sich eine waagerechte Schraubenspindel mit einer Ganghöhe von 1 mm an, die mittels eines spielfrei angepassten und mit einem Teilkreis (Teilzahl = 50) versehenen Handrades (4) vom Mittelpunkt bis zu einem Abstände von ± 10 mm verschoben werden kann. Auf der Gleitplatte befindet sich eine wassergekühlte Messingbüchse zwecks Führung der Pressstange. Die Vickers-Pyramide (1) ist auf die untere Endfläche der aus hitzebeständigem Stahl gefertigten Pressstange angepasst. Die Zuführung des Schutzgases geschieht ebenfalls durch die Gleitplatte. An der Gleitplatte ist noch der die Pressstange belastende Waagebalken (2) befestigt, der mit Hilfe eines exzentrisch angeordneten Rades von der Pressstange abgehoben werden kann. An dem oberen Ende der Pressstange ist ein elektrischer Kontakt angebracht, der bei der kleinsten Aufwärtsbewegung der Pressstange den Stromkreis einer Signallampe schliesst und dadurch das Zustandekommen der gegenseitigen Berührung des Versuchsobjektes mit der Vickers-Pyramide anzeigt.

Der untere Abschlusskörper hat eine dem oberen ähnliche Ausführung und ist mittels einer Klinkevorrichtung unter Zwischenschaltung einer Gummidichtung leicht lösbar an die untere Ofenfläche befestigt. Auch an diesem befindet sich eine Gleitplatte mit einer die Platte bewegendem Vorrichtung. Diese Gleitplatte kann ebenfalls von Mittelpunkt bis zu einem Abstände von ± 10 mm verschoben werden, ihre Bewegungsrichtung liegt aber senkrecht zu der Bewegungsrichtung der oberen Gleitplatte. Infolge der senkrechten Bewegung der beiden Gleitplatten kann die Vickers-Pyramide an jeglichen Punkt einer Versuchsfläche von 20×20 mm eingestellt werden. Durch die an die untere Gleitplatte befestigte Messingbüchse ragt in das Ofeninnere die hohle, aus hitzebeständigem Stahl gefertigte Objektträgerstange ein. Auf dem oberen Ende derselben befindet sich eine mit einem Dorn versehene Scheibe (3), welche die Objektfassung gegen eine Relativbewegung sichert. Auf dem unteren Ende des Stabes befindet sich ein Feingewinde. Mittels eines, auf dieses Gewinde passenden Handrades (5) mit Teilkreis (Teilzahl = 50) kann der Stab über eine Strecke von ca. 25 mm auf- und abwärts bewegt werden. Die Drehung des Stabes wird durch einen Keil verhindert. Das Thermoelement ist durch den Hohlraum des

Stabes geführt. Der Lötspunkt (7) desselben befindet sich vom oberen Ende der Stange und somit auch vom Versuchsobjekt in einem Abstände von 1—2 mm. Durch die Ausflussöffnung des an das untere Ende des Stabes passenden Kopfes kann das Spülgas abgeführt werden. Die Drähte des Thermoelements werden ebenfalls durch diese Ausflussöffnung geführt. Beim Auswechseln der Versuchsobjekte kann der ganze untere Abschlusskörper so weit gesenkt werden, dass der Objektisch bequem zugänglich wird.

Wir haben mit diesem Gerät (die übliche Auswertungsmethode benutzend) die Vickers-Härte (H_V) einiger solcher Wolframmetallsorten in dem Temperaturintervall von 20—800° C festgestellt, die sich voneinander darin unterscheiden, dass wir dem Grundstoffe, der möglichst gründlich gereinigten Wolframsäure, die in der Tab. 1 angeführten verschiedenen Zusatzstoffe beigegeben haben und die demzufolge recht verschiedene Kristallgefüge und mechanisch-technologische Eigenschaften besaßen.

In der Tafel sind diejenigen Fremdstoffspuren (Fremdatome) angeführt, die in den nach dem bei uns üblichen Verfahren hergestellten gesinterten Stäben und gezogenen Drähten zurückbleiben. Mit unseren Härteprüfungen beabsichtigen wir teilweise gerade den Einfluss dieser Zusatzspuren auf die Warmhärte klarzulegen.

Tafel 1

Bezeichnung der Metalle	Beschaffenheit und Menge der Zusatzstoffe der Wolframsäure					In den gesinterten Stäben und gezogenen Drähten zurückgebliebene Zusatzstoffspuren					Rekr. Temp. °C	Durchschnittliche Kristalllänge der rekristallisierten Drähte von 0,1 mm \varnothing cm	Verformbarkeit des rekristallisierten Drahtes von 0,1 mm \varnothing bei 20 °C
	%					in 10 ⁻⁶ Einheiten							
	KCl	NaCl	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	K	Na	Si	Fe	Al			
GK	0,3	0,2	0,4	0,03	0,05	9	+	4	2	<1	2300	5—10	biegbar
UC	0,3	0,2	0,4	—	—	<1	+	3	2	<1	2000	0,3—1,0	kaum biegsam
KAl	0,3	—	—	—	0,05	5	+	2	17	2	2000	~ 0,01	brüchig
W	—	—	—	—	—	<1	+	10	6	1	1600	~ 0,01	spröde

Wir haben bis jetzt die Härte folgender, gemäss dem üblichen Wolframverfahren hergestellten Zwischenprodukte im Temperaturintervall von 20° C bis 800° C bestimmt :

1. Gesinterte Stäbe. Aus einem Metallpulver der Korngrösse von 1—2 μ , unter einem Druck von 0,7 t/cm² gepresste, stufenweise bis ca. 3000° C erhitzte und dabei bis zu einem sp. Gewicht von 18,0—18,5 gesinterte Stäbe.

2. Gehämmerte Stäbe mit einem Durchmesser von 4,3 mm. Der Querschnitt der auf die Temperatur von 1500° C erhitzten Stäbe nach 1 wurde an einer rotierenden Hämmermaschine in mehreren Stufen bis zu einem Durchmesser von 4,3 mm verjüngt.

3. Entfestigte (weichgeglühte) Stäbe mit einem Durchmesser von 4,3 mm. Die Stäbe nach 2 wurden zwecks Entfestigung bei einer Temperatur von 2600° C 3 min. lang (im Falle von UC Metall bei 2900° C 3 min. lang) erhitzt.

4. Gehämmerte dünnere Stäbe mit einem Durchmesser von 1,5 mm. Die nach 3 weichgeglühten Stäbe wurden bei von 1300° C bis 1000° C abnehmenden Temperaturen in mehreren Stufen an rotierenden Hämmermaschinen weitergehämmert.

5. Gezogene Wolframdrähte mit einem Durchmesser von 0,6 mm. Die nach 4 gehämmerten dünnen Stäbe wurden durch Hartmetallziehsteine bei von 850° C bis 700° C abnehmenden Temperaturen unter Verwendung von Graphitschmierung stufenweise bis zu einem Durchmesser von 0,6 mm gezogen.



Bild 3. Schliff-Einfassungen für Warmhärte-Messungen

Zwecks Vergleichung haben wir noch die Vickers-Härte der nach dem analogen Verfahren aus Molybdänmetallpulver hergestellten Zwischenprodukte in dem Temperaturintervall von 20° C bis 800° C bestimmt.

1. Gesinterte Stäbe. Gepresst aus Metallpulver der Korngröße von 2—3 μ , gesintert bis zu einem sp. Gewicht von ungefähr 11. Das Metallpulver wurde aus ungefähr 0,3% K und 0,2% W enthaltendem Ammoniummolybdat hergestellt.

2. Gehämmerte Stäbe mit einem Durchmesser von 4,3 mm.

3. Entfestigte Stäbe mit einem Durchmesser von 4,3 mm. Die nach 2 verfestigten Stäbe bei 1800° C 3 min. lang ausgeglüht.

4. Gehämmerte dünne Stäbe mit einem Durchmesser von 1,5 mm. Die nach 3 hergestellten weichgeglühten Stäbe, bei von 1000° C bis 700° C abnehmenden Temperaturen an rotierenden Hämmermaschinen verjüngt.

5. Gezogene Molybdändrähte mit einem Durchmesser von 0,6 mm. Die nach 4 hergestellten dünnen Stäbe wurden bei von 700° C bis 600° C abnehmenden Temperaturen durch Hartmetallziehsteine unter Verwendung von Graphitschmierung stufenweise bis zum Durchmesser von 0,6 mm gezogen.

Aus all diesen Zwischenprodukten wurden entsprechend eingefasste (Bild 3), polierte metallographische Schriffe angefertigt und ihre Vickers-Härten zuerst bei Zimmertemperatur bestimmt. Danach wurden sie einzeln in das Warmhärteprüfgerät gelegt und auf ihrer Oberfläche nacheinander, bei 800° C, 600° C,

400° C und 200° C, unweit voneinander je ungefähr zehn Eindrücke mit der Vickers-Pyramide vorgenommen. Nach der Abkühlung wurden die Auswertungen aller Eindrücke zugleich durchgeführt.

Die bisherigen Ergebnisse unserer Versuche sind in den Bildern 4—8 dargestellt. Hieraus können folgende Folgerungen gezogen werden :

a) Die Härte der gesinterten Stäbe ist von den Zusatzstoffspuren praktisch unabhängig und nimmt im Intervall von 20° C bis 800° C von 3—400 H_V auf 100 H_V ab (Bild 4).

b) Die Härte der gehämmerten Stäbe mit dem Durchmesser von 4,3 mm ist der Bearbeitung zufolge in dem ganzen untersuchten Temperaturintervall

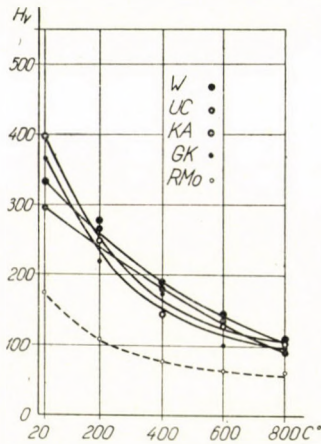


Bild 4. Zwischen 20° C und 800° C gemessene Warmhärte-Werte von a mit K, Si und Al, b mit K und Si, c mit K und Al präparierten gesinterten Wolframstäben und d von einem Molybdänstab (unterbrochene Linie)

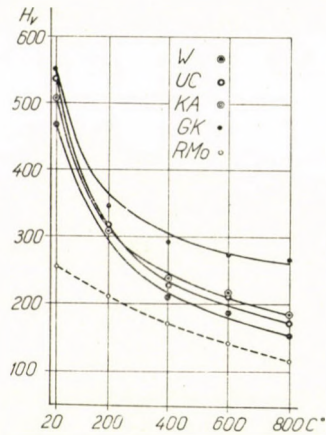


Bild 5. Zwischen 20° C und 800° C gemessene Warmhärte-Werte von 4,3 mm dicken gehämmerten Stäben, welche aus den Stäben des 4. Bildes hergestellt wurden

bedeutend höher, als die der gesinterten Stäbe. Die Härte der UC, KA und W Stäbe fällt im Temperaturintervall von 20° C bis 800° C von den Zusatzstoffspuren unabhängig von 500 H_V auf 180 H_V ab. Die Härte der GK Stäbe nimmt von 500 H_V nur auf 260 H_V ab (Bild 5).

c) Es lässt sich in der bei Zimmertemperatur gemessenen Härte der 4,3 mm Stäbe eine Wirkung der Weichglühung nicht erkennen. Die Härte sämtlicher entfestigten Stäbe ist von den Zusatzstoffspuren praktisch unabhängig und nimmt zwischen 20° C und 800° C von 500 H_V auf 100 H_V ab. Sie erreicht also bei 800° C die günstig niedrige Härte der gesinterten Stäbe. Eine Wirkung der Entfestigung zeigt sich bei unseren Abmessungen hauptsächlich oberhalb 400° C (Bild 6).

d) Während des Hämmerns von dünneren Stäben erscheint bei allen Wolframsorten, und zwar praktisch in gleichem Masse, abermals die verfesti-

gende Wirkung der Bearbeitung. Die Härte sämtlicher Drahtsorten fällt vom Zimmertemperaturwert von 500—600 H_V bis zur Temperatur von 800° C auf ungefähr 220 H_V ab. Der Abfall ist bis 400° C steiler als oberhalb dieser Tempe-

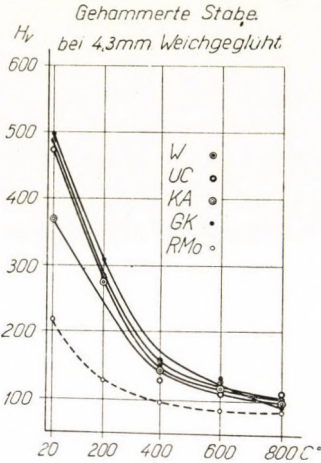


Bild 6. Zwischen 20° C und 800° C gemessene Warmhärte-Werte derselben Stäbe wie in Bild 4, nach einer Weichglühung (Nachsinterung)

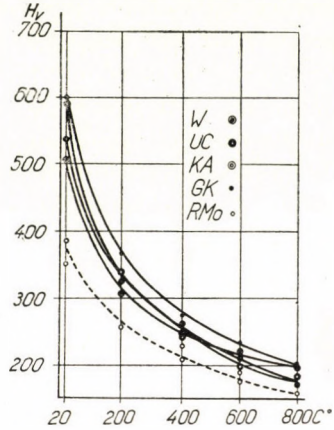


Bild 7. Zwischen 20° C und 800° C gemessene Warmhärte-Werte von denselben Stäben wie in Bild 6, nach dem Hämmern bis zum Durchmesser von 1,5 mm

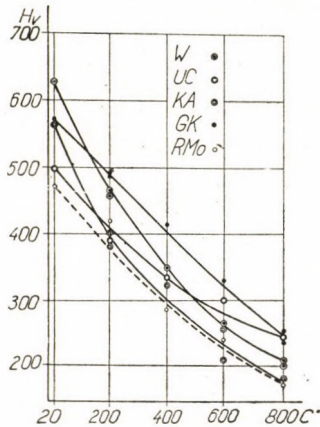


Bild 8. Zwischen 20° C und 800° C gemessene Warmhärte-Werte von denselben Stäben wie in Bild 7, nach dem Ziehen bis zum Durchmesser von 0,6 mm. Ziehstein- und Drahttemperatur beim Ziehen etwa 800° C

ratur. In dieser Bearbeitungsstufe scheint die Härte der einzelnen Wolframmetallsorten von den Zusatzstoffspuren unabhängig zu sein (Bild 7).

e) Die Härte der gezogenen 0,6 mm Drähte beträgt bei Zimmertemperatur 600 H_V (die des UC Drahtes nur 500 H_V , wahrscheinlich deshalb, weil

die Weichglühung der UC Drähte bei höheren Temperaturen vollzogen wurde). Die Härtewerte bei 800° C lassen sich in zwei Gruppen teilen. Die Härte der nebst anderen auch Si-Zusatzstoffspuren enthaltenden GK und UC Drähte beträgt hier ungefähr 250 H_V, dagegen weisen die Si Zusatzstoffspuren nicht enthaltenden (mit Si nicht präparierten) KAl und reine W Metalle den bedeutend niedrigeren Wert von ungefähr 180 H_V auf (Bild 8).

Aus den Bildern ist noch ersichtlich, dass die Härte des parallel mit den verschiedenen Wolframmetallsorten untersuchten Molybdänmetalles (Sorte RMo) bei grösseren Abmessungen im ganzen Temperaturintervall, besonders aber bei Zimmertemperatur, bedeutend niedriger als die der Wolframmetalle ist. Ausserdem ist es ersichtlich, dass bei einer Erhöhung der Temperatur der Härteabfall des Molybdänmetalles kleiner als der der Wolframmetalle ist. Die Härte des gehämmerten 1,5 mm Molybdänstabes nähert sich oberhalb 400° C den Werten der Wolframmetalle an. Die Härte des gezogenen 0,6 mm RMo Molybdändrahtes stimmt oberhalb 400° C mit der Härte der Si-Zusatzspuren nicht enthaltenden KAl und W-Drähte überein.

Es geht aus diesem Tatbestand klar hervor, wie sehr sich die Warmhärteeigenschaften der KAl und W-Drähte von denen der auch noch Si-Zusatzstoffspuren in einer num. Konzentration von 10⁻⁵ enthaltenden GK und UC-Drähte unterscheiden.

All das gibt eine ausreichende Erklärung für die erwähnte Betriebsbeobachtung, nach welcher sich die KAl und W-Drähte (bei der Temperatur von ca. 800° C) viel »leichter« als die UC oder GK-Drähte ziehen lassen.

Noch etwas kann unseren Beobachtungen entnommen werden.

Die Si-Atome können in den, mit K, Si, Al und mit K, Si hergestellten Wolframsorten in einer num. Konzentration von etwa 10⁻⁵ den Entfestigungsvorgang, infolge dessen die bei 800° C gemässenen Vickers-Härten der reinen (W) und nur K, Al enthaltenden Wolframdrähte von 0,6 mm Durchmesser auf etwa 180 H_V herabsinken, so weitgehend hindern, dass sich die Warmhärte bei den mit Si-Zusatz hergestellten GK und UC Wolframdrähten unter denselben Bedingungen nur auf den Wert von 250 H_V vermindert.

Die Ursache dieser Erscheinung darf man vielleicht darin suchen, dass die Si-Atome — gemäss der Ausführungen von T. MILLNER [1] — die unbesetzten Gitterstellen und die dislozierten Gitterpartien aufsuchen, sich dort mit *gerichteten* Valenzkräften festhalten und dadurch die für den Entfestigungsvorgang notwendige Beweglichkeit der Fehlstellen [3] vermindern oder aufheben.

Wir setzen unsere Untersuchungen in dieser Richtung fort.

Herrn Prof. L. GILLEMOT danken wir für wertvolle Hinweise bezüglich des Zusammenhanges zwischen den Festigkeits- und Härtewerten der gewöhnlichen Metalle.

SCHRIFTTUM

1. T. MILLNER: Über die naturwissenschaftlichen Grundlagen der Erzeugung von metallischem Wolfram für die Vakuumtechnik und die Beeinflussung seiner Eigenschaften. — Antrittsvorlesung, gehalten in der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 5. III. 1956. — Acta Technica Acad. Sci. Hungaricae, XVII, (1957) 67.
2. T. MILLNER, J. PROHÁSZKA, A. HORVÁTH: Der Einfluss von Fremdstanzspuren auf die sekundäre Rekristallisation von Wolframdrähten. — Acta Technica Acad. Sci. Hungaricae, XVII, (1957) 289.
3. A. H. COTTRELL: Dislocations and plastic flow in crystals. Oxford, Clarendon Press, 1953.

ZUSAMMENFASSUNG

Die nützlichen Eigenschaften der in der Glühlampen- und Radoröhrenindustrie verwendeten Wolframdrähte werden dadurch gesichert, dass der Wolframsäure Zusatzstoffe (z. B. Verbindungen von K, Na, Al, Si usw.) in einer Menge von etwa 1% beigemischt und daraus Metallpulver und gepresste Stäbe hergestellt werden. Beim Sintern dieser Stäbe verdampfen die Zusätze so weitgehend, dass in den Stäben und in den daraus hergestellten Drähten Fremdatome schliesslich nur in einer num. Konzentration von etwa 10^{-5} zurückbleiben. Unseren Versuchen nach werden insbesondere die Warmhärte-Werte solcher Wolframmetallkörper durch die Art dieser Fremdstanzspuren bestimmt. Um dabei die speziellen Rollen der einzelnen Atomarten aufklären zu können, bauten wir einen, im Text näher beschriebenen Apparat zur Bestimmung von halbmikro Warmhärtewerten verschiedener Wolframsorten im Temperaturintervall von 20°C — 800°C . Die mit Si-haltigen Zusatzstoffen hergestellten Wolframdrähte wiesen bei 800°C einen durchschnittlichen Härtewert $H_V = 250$, diejenigen, welche ohne Si-haltige Zusatzstoffe hergestellt wurden, den entsprechenden Wert von $H_V = 180$ auf. Durch Si-Spuren wird die Entfestigung bei 800°C der untersuchten Wolframdrähte erheblich gehindert.

INFLUENCE OF SMALL QUANTITIES OF IMPURITIES
ON THE WARM HARDNESS OF TUNGSTEN

T. MILLNER and L. SASS

SUMMARY

The useful properties of the tungsten wires used in the incandescent lamp and radio tubes industry are ensured by adding about 1% of various ingredients (e. g. K, Na, Al, Si compounds) to the tungstic acid and producing metal powder and compressed rods. During the sintering of these rods, the additions are evaporated to such an extent that finally the concentration of foreign atoms remains only 10^{-5} . According to the investigations of the authors, chiefly the warm hardness values of these tungsten pieces is determined by the traces of dopingmaterial. In order to investigate the influence of the various kinds of atoms, an apparatus was built (described in the paper) for the determination of half-micro warm hardnesses of various kinds of tungsten metals in the temperature interval 20°C — 800°C . The tungsten wires made with additions containing Si had an average hardness $H_V = 250$ at 800°C , while the wires without such additions had corresponding values of $H_V = 180$. Traces of Si considerably prevent the hardness loss at 800°C of the tungsten wires which have been investigated.

L'INFLUENCE DE PETITES QUANTITÉS D'IMPURETÉS SUR LA DURETÉ À CHAUD DU TUNGSTÈNE MÉTALLIQUE

T. MILLNER et L. SASS

RÉSUMÉ

Les propriétés utiles des fils de tungstène utilisés dans la fabrication des lampes à incandescence et des tubes électroniques sont assurées par l'addition d'environ 1% de différentes matières (par exemple composés de K, Na, Al, Si etc.) à l'acide tungstique et en produisant de la poudre métallique et des tiges comprimées. À la concrétion de ces tiges les additifs s'évaporent dans une telle mesure que finalement il ne reste qu'une concentration numérique de 10^{-5} des atomes étrangers dans les fils de tungstène. Suivant les essais des auteurs, c'est surtout la dureté à chaud des corps en tungstène qui est déterminée par la composition de ces traces de matières étrangères. Pour pouvoir éclaircir le rôle des différentes sortes d'atomes, les auteurs ont construit un appareil (décrit dans l'article) pour la détermination de la semi-microdureté à chaud des différentes sortes de tungstène dans l'intervalle des températures de 20° C à 800° C. Les fils de tungstène produits avec des additions contenant du Si avaient une dureté moyenne $H_v = 250$ à 800° C, les fils fabriqués sans additifs au Si avaient une valeur correspondante de $H_v = 180$. Des traces de Si empêchent largement la perte de dureté à chaud, à 800° C, des fils de tungstène essayés.

ВЛИЯНИЕ НЕБОЛЬШИХ КОЛИЧЕСТВ ПРИМЕСЕЙ (ПРИСАДОК) НА ТВЕРДОСТЬ ПРИ НАГРЕВЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ВОЛЬФРАМА

Т. МИЛЬНЕР и Л. ШАШ

РЕЗЮМЕ

Положительные свойства вольфрамовой проволоки, используемой для ламп накаливания и радиоламп, обеспечиваются тем, что к вольфрамовой кислоте (триокиси вольфрама) добавляются примеси в количестве около 1% (например, соединения K, Ca, Al, Si и т. п.), и уже из полученного материала изготавливается металлический порошок, а затем прессованные штабики. При спекании этих штабиков присадки испаряются настолько, что в конечном итоге концентрация инородных атомов в штабиках и в изготовляемой из них проволоке составляет лишь величину порядка 10^{-5} . Наши опыты показали, что в особенности значения твердости при нагреве таких тел из металлического вольфрама определяются видом этих следов присадок. Чтобы определить специальную роль отдельных видов атомов, нами была построена специальная аппаратура (более подробно описанная в статье) для измерения полумикротвердости различных сортов вольфрама в температурном интервале от 20 до 800°С. Вольфрамовые проволоки, изготовленные с присадкой Si, имели при 800°С среднюю твердость $H_v = 250$, значение твердости проволоки, изготовленной без присадки Si было соответственно $H_v = 180$. Следы Si значительно тормозят распрочнение при 800°С исследованных вольфрамовых проволок.

ÜBER DIE WINKELPRISMEN DER GEODÄSIE*

Prof. Dr. h. c. A. TÁRCZY-HORNOCH
ORD. MITGLIED D. UNGAR. AKAD. D. WISSENSCHAFTEN

GEODÄTISCHES FORSCHUNGLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
SOPRON

[Eingegangen am 16. Oktober 1956]

Die Verwendung von Glasprismen im Vermessungswesen kann auf eine lange Vergangenheit zurückblicken. Prismen mit dem Querschnitt eines gleichschenkeligen rechtwinkligen Dreiecks wurden in Prismenokularen, Mikroskopen, Zeichengeräten seit langem verwendet, allerdings nur mit einfacher Reflexion an Stelle von Spiegeln bzw. als Spiegel. Es sind auch mehr als hundert Jahre her, dass BAUERNFEIND 1851 von den aus den erwähnten Prismen nach zweifacher Reflexion austretenden Strahlen feststellte, dass die eintretenden und austretenden Lichtstrahlen miteinander einen Winkel von 90° einschliessen und dass daher so ein Prisma sich zur Absteckung von rechten Winkeln bzw. zum Aufsuchen von Fusspunkten auf Geraden eignet [1]. Damit beginnt die allmähliche Zurückdrängung der von ADAMS im XVIII. Jahrhundert erfundenen Winkelspiegel (optical square), so dass letztere in unseren Zeiten eigentlich nur noch ein historisches Interesse haben. BAUERNFEIND selbst hat in [1] sowie in seinen weiteren unter [2, 3, 4, 5, 6, 7] angeführten Studien die verschiedenen Eigenschaften weiterer (vier- u. fünfeckiger) Prismen auch mit mehr als zwei Reflexionen untersucht, so dass er nicht nur als Erfinder des einfachen Winkelprismas, sondern auch der übrigen einfach verwendeten Winkelprismen anzusehen ist. Füglich hat BAUERNFEIND 1851 auch das WOLLASTONSche Winkelprisma zuerst zur Absteckung von rechten Winkeln verwendet, wie er selbst darüber 1868 auf [5; S. 491] berichtet. WOLLASTON selbst benützte sein 1812 angegebene Prisma ursprünglich an seinem Camera lucida genannten Zeichengerät. Wenn aber dies genügt um die zur Absteckung von rechten Winkeln im Vermessungswesen verwendeten Prismen dieser Art als WOLLASTONSche Prismen zu benennen, so dürfte man folgerichtig auch das Prisma mit dem Querschnitt eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks nicht als das BAUERNFEINDSche nennen, weil dieses Prisma, genau so wie das WOLLASTONSche, schon lange vor BAUERN-

* Ein Teil dieser Untersuchungen erschien ungarisch unter dem Titel: A geodéziai szögprizmákról in der Zeitschrift »Geodézia és Kartográfia«, Jahrg. 1955. S. 137—151. Diese Arbeit ist im Vergleich dazu teilweise wesentlich erweitert, teilweise wesentlich abgekürzt. Auch die in den »Freiberger Forschungsheften« erscheinende Arbeit: Einheitliche Herleitung der geodätischen Winkelprismen unterscheidet sich von dieser wesentlich.

FEIND — allerdings nicht zur Winkelabsteckung — gebraucht wurde. Das grosse Verdienst von BAUERNFEIND besteht eben darin, dass er eine ganz neue Verwendungsmöglichkeit der bereits früher bekannten Prismen erkannt und ausgenutzt hat. Wir sollten daher *alle* zur Absteckung von rechten Winkeln und zur Aufsuchung von Fusspunkten dienenden einfachen Prismen als die BAUERNFEINDSchen Prismen bezeichnen.

Im folgenden wollen wir einen Beitrag zu der an sich ziemlich reichen Literatur über Winkelprismen liefern, wobei aber nur die doppelt reflektierten gespiegelten Lichtstrahlen untersucht werden, weil die einfache Reflexion veränderliche Winkel, die mehr als zweifach reflektierten Lichtstrahlen aber zu lichtschwache Bilder liefern.

1. Die einfachen Winkelprismen

Der doppelt reflektierte Lichtstrahl schliesst bekanntlich mit dem ursprünglichen Lichtstrahl den zweifachen Betrag des zwischen den spiegelnden Ebenen sich befindlichen Winkels τ ein. Bezeichnet man den ersteren Winkel mit φ , so wird $\varphi = 2\tau$. Zur Absteckung eines Winkels von der Grösse φ ist mithin ein Winkelprisma erforderlich, dessen einer Flächenwinkel $\frac{\varphi}{2}$ ist. Wir nennen diesen Winkel mit SAMEL, der die Absteckung verschieden grosser Winkel untersuchte [29], den spiegelnden Winkel. (Der Lichtstrahl wird gespiegelt, d. h. reflektiert, die Oberfläche spiegelt, bzw. reflektiert.)

Es ist bekannt, dass der einfallende sowie nach zweimaliger Spiegelung austretende gebrochene Lichtstrahl an die bezügliche Ebene, bzw. aus der Ebene unter gleichem Winkel einfallen bzw. austreten muss, damit der austretende Lichtstrahl keine Farbenstreuung aufweise. Dies bedeutet, dass die den Lichtstrahl einlassenden und die ihn auslassenden Ebenen miteinander einen Winkel von $\varphi = 2\tau$ einschliessen müssen. Weil der Lichtstrahl an beiden Ebenen gebrochen wird, wollen wir diesen Winkel gleichfalls mit SAMEL den brechenden Winkel nennen. (Auch BODOLA verwendet diese Bezeichnung, allerdings in einem anderen Sinne [8; S. 146].)

Es muss noch bemerkt werden, dass der Lichtstrahl bekanntlich aus einem Prisma nur dann austreten kann, wenn er unter einem kleineren Winkel als der Grenzwinkel der totalen Reflexion, auf die Ebene fällt. Der Austritt kann aber auch in diesem Falle durch Versilberung usw. der fraglichen Ebene oder des betreffenden Teiles der Ebene verhindert werden, falls dies zur Erreichung der zweifachen Spiegelung erforderlich ist. Zur Spiegelung ist die totale Reflexion günstiger, weil sie keinen Lichtverlust verursacht und sie keine Versilberung braucht, die mit der Zeit fahl werden kann. Der Grenzwinkel der totalen Reflexion beträgt bei Kronglas im Durchschnitt $40^{\circ}50'$, bei Flintglas $37^{\circ}30'$. Es

gibt aber auch Glassorten, bei denen die Brechungszahl gleich 2 und so der Grenzwinkel 30° beträgt.

Die in der Bilderzeugung nicht teilnehmenden Prismenteile können selbstredend weggelassen bzw. abgeschnitten werden.

Der Einfluss der Fehler in den spiegelnden und brechenden Winkeln soll hier nicht untersucht werden, weil die Fachliteratur diese Fragen bereits ziemlich ausführlich behandelt hat, neuerdings z. B. in [33].

a) *Einzelprismen zur Absteckung von 90°*

Zur Absteckung von 90° sind nach dem Vorangehenden solche Prismen erforderlich, die je einen Winkel von 45° und 90° besitzen. In Bild 1 sei deshalb A der Scheitelpunkt eines 45° und B jener eines 90° Winkels. Wenn man die

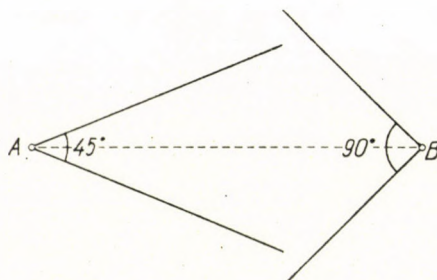


Abb. 1

beiden Winkel um die Punkte A und B so dreht, dass die entsprechenden Schenkel dieser Winkel sich schneiden, so erhält man eine ganze Gruppe der zur Absteckung von 90° dienenden Winkelprismen. Winkel über 180° haben in diesem Sinne innerhalb der Winkelprismen keine Bedeutung, obwohl diese grundsätzlich ebenso gut möglich sind. Vom Standpunkt der Bilderbildung sind beim brechenden Winkel dieser und dessen Supplementäre gleichwertig.

Im Falle, dass die Winkelhalbierenden gegenseitig durch den anderen Punkt gehen, wie in Bild 1, entsteht durch Abschneiden des überflüssigen Teiles das bekannte Pentagonalprisma, das GOULIER 1865 zur optischen Entfernungsmessung und PRANDTL [9] 1890 zur Absteckung von rechten Winkeln in Vorschlag brachte. Schon PRANDTL bemerkte, dass die anderen beiden Winkel im einzelnen verschieden gross sein können, wenn nur ihre Summe 225° ist [9; S. 463]. Wir können dies dadurch ergänzen, dass durch entsprechende Verdrehung der beiden Winkel auch eine Form erreicht werden kann, bei welcher der Lichtstrahl an dem einen Schenkel totale Reflexion erleidet und daher an diesem einen Schenkel eine Versilberung nicht erforderlich ist.

Das rechtwinklig-gleichschenklige Prisma, das auch als einfaches Prisma bezeichnet wird, ergibt sich aus dem Obigen als jener Grenzfall, bei welchem der

eine Winkelschenkel der beiden Winkel durch den anderen Punkt geht, d. h. die beiden oberen oder unteren Winkelschenkel des Bildes 1 zusammenfallen (Bild 2). Dieses Winkelprisma kann also in dieser Beziehung als ein solches vier-eckiges Prisma aufgefasst werden, bei welchem neben den erforderlichen Winkeln von 45° und 90° der eine Winkel (an einer der beiden Katheten) 180° und so der andere Winkel 45° ist. Aus bereits erwähnten Gründen braucht man nur die Hypothenuse mit Spiegelbelag zu versehen.

Ein anderer interessanter Sonderfall ergibt sich, wenn neben den erforderlichen 45 und 90 gradigen Winkeln der eine von den beiden anderen Winkeln 90° und der andere 135° wird. Das so entstehende Prisma liefert die Hälfte des HENSOLDT—STÜTZERSchen Doppelprismas (vgl. [10; u. 11; S. 35]), jedoch

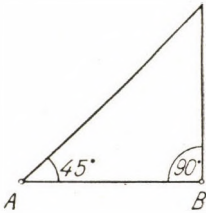


Abb. 2

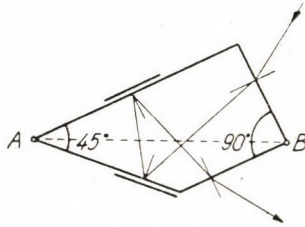


Abb. 3

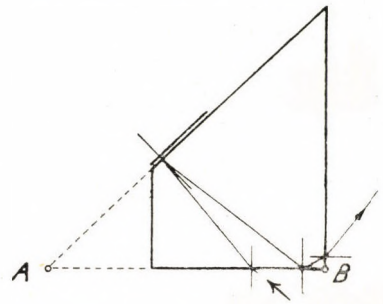


Abb. 4

mit dem Unterschied, dass zur Absteckung des rechten Winkels nicht das doppelte von 135° sondern von 45° dient und deshalb hierher gehört (Bild 3). Auch diese Verwendung konnte bereits BAUERNFEIND (vgl. [12; S. 197, Abb. 160]). Wir können deshalb mit jener SCHELLENSSchen Herleitung dieses Prismas, die diese aus dem rechtwinklig-gleichschenkligen Prisma nach Bild 2 durch Abschneiden des oberen 45 gradigen Teiles durch eine zu AB parallele Gerade entstehen lässt, nicht einverstanden sein [13; S. 231, III.]. Die abschneidende Ebene darf nämlich in der Bilderzeugung keinen Anteil nehmen, weshalb nur das Prisma nach Bild 4 aus dem einfachen Prisma abgeleitet werden kann. Nimmt die abschneidende Ebene an der Bilderzeugung dennoch teil, dann kann das so entstehende Prisma nicht mehr als vereinfachte Form des ursprünglichen Prismas angesehen werden. Die hier angegebene Entstehungsweise der Winkelprismen zeigt übrigens, dass im Viereck die spiegelnden und brechenden Winkel niemals benachbarte Winkel sein können. Dies gilt auch für das aus einem Viereck deformierte Dreieck, bei dem zwischen den Winkeln von 45° und 90° an der entsprechenden Kathete sich auch ein Winkel von 180° befindet. Dagegen kann das Prisma in der Verwendung nach Bild 4 aus dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck hergeleitet werden, weil die abschneidende Ebene an der Bilderzeugung nicht teilnimmt.

Nachdem in einem Viereck nur die Grösse von zwei Winkeln festgelegt erscheint, die beiden anderen Winkel dagegen nur durch die Winkelsummenbedingung des Viereckes begrenzt sind, kann auch zwischen den beiden letzteren Winkeln das Verhältnis 1 : 2 eingehalten werden, in welchem Falle das Prisma auch zur Absteckung eines anderen Winkels verwendet werden kann, allerdings in der Regel nur so, dass die Haltung des Prismas geändert werden muss, d. h. man wird zur Absteckung der beiden Winkel an verschiedenen Stellen in das Prisma schauen. In unseren Falle, bei den Winkeln von 45° und 90° ist dann 225° in drei Teile zu teilen und die beiden anderen Winkel werden folglich 75° und 150°

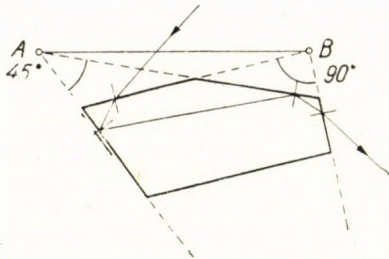


Abb. 5

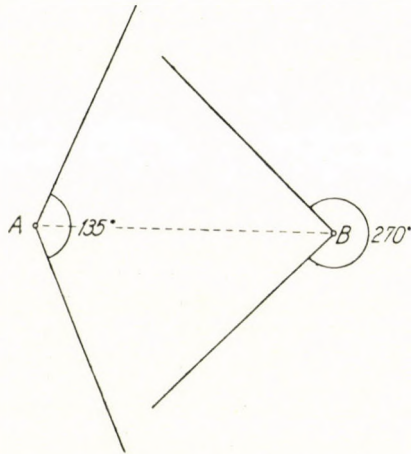


Abb. 6

gross. Ja es können die spiegelnden und brechenden Winkel auch durch die zwei gegenüberliegenden Ebenen gebildet werden, in welchem Falle zwischen diesen Winkeln das Verhältnis 1 : 2 einzuhalten ist. Ein solches neuartiges Prisma zum Abstecken von rechten Winkeln zeigt Bild 5. Kennzeichnend dafür ist, dass nur die Winkel zwischen je zwei *nicht benachbarten* Ebenen unverändert sein müssen und mit dieser Einschränkung sonst alle Winkel des Prismas in Bild 5 veränderliche Werte annehmen können.

Das Einhalten des Verhältnisses 1 : 2 an allen Stellen ist in der Regel unmöglich, doch ergeben sich auch so viele Kombinationsmöglichkeiten. Es würde aber zu weit führen, wenn wir alle diese Möglichkeiten eingehender untersuchen wollten und wir begnügen uns hier mit diesem Hinweis.

Bekanntlich führt die Absteckung von 270° praktisch gleichfalls zur Absteckung des rechten Winkels, weshalb dazu auch jene Prismen verwendet werden können, deren spiegelnde Winkel in *A* von Bild 6 jetzt 135° , der brechende Winkel dagegen in *B* 270° beträgt. Wenn jetzt die Winkelhalbierenden gegenseitig durch den anderen Punkt gehen, wie in Bild 6, so entsteht das nach WOLLASTON benannte aber zur Absteckung von rechten Winkeln gleichfalls zuerst

von BAUERNFEIND 1851 vorgeschlagene Prisma (vgl. [5], S. 491). Der grosse Vorteil dieses Prismas besteht darin, dass die Lichtstrahlen durch totale Reflexion gespiegelt werden, weshalb die Lichtstärke grösser ist als im Falle der Versilberung, abgesehen davon, dass hier die reflektierende Fläche nicht fahl wird. Auch hier kann der Scheitel des 270gradigen Winkels abgeschnitten werden. Durch Drehung der beiden Winkel um die Punkte *A* und *B* entsteht auch hier eine ganze Gruppe der zur Absteckung von 90° geeigneten Prismen. Es mag hier bemerkt werden, dass die Zulässigkeit der unsymmetrischen Lage und der veränderbaren Grösse der beiden beim Schnitt der Winkelschenkel entstehenden Winkel — im Gegensatz zu BAUERNFEIND — bereits KRUSPÉR 1869 erkannt hat [14 ; S. 70]. Es zeigt sich bei dieser Drehung, dass das in Bild 3 dargestellte

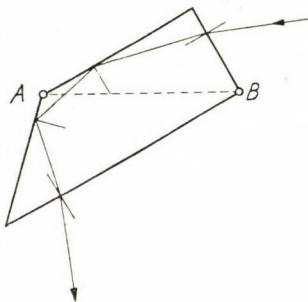


Abb. 7

Prisma auch durch Drehung der Winkel nach Bild 6 entsteht, jedoch ist in diesem Falle der spiegelnde Winkel 135° und es ist daher hier keine Versilberung erforderlich (Bild 7). Auf Grund unserer früheren Erörterungen haben wir jenen Fall vor uns, bei welchem neben den Winkeln von 45° und 90° auch die beiden anderen Winkel (135° und 270°) in dem geforderten Verhältnis 1 : 2 zueinander stehen. Wenn ein Winkel wie 270° in Bild 6 auswärts zu liegen kommt, so ist in bezug auf die Winkel des Vierecks selbstverständlich der Ergänzungswinkel zu nehmen.

b) Einzelprismen zur Absteckung von 45°

Die Absteckung von 45° hat bekanntlich neben der Absteckung des rechten Winkels deshalb Bedeutung, weil dadurch die Entfernung des Punktes von der Messlinie unmittelbar an der Messlinie abgelesen werden kann. Dieser Umstand kann bei Hindernissen, wie Gräben, Wasser oder grossem Verkehr von Nutzen sein.

Im Sinne der einleitenden Erörterungen ist zur Absteckung von 45° ein Prisma mit den Winkeln 22,5° und 45° erforderlich. Die um die Punkte *A* und *B* drehbaren Winkel sind auf Bild 8 dargestellt. In dieser symmetrischen Lage können die Ecken in *A* und *B* weitgehend abgeschnitten werden (vgl.

Bild 8), so dass dieses Winkelprisma sehr kleine Abmessungen annimmt. Wenn die beiden unteren oder oberen Winkelschenkel zusammenfallen, entsteht das bekannte Halbpentagon (Bild 9), bei welchem nur der kürzere Schenkel des $22,5^\circ$ -Winkels versilbert werden muss.

Nun kann aber der Winkel von 45° auch durch $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, durch $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ und durch $360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$ abgesteckt werden, wie dies auch aus Bild 10 zu entnehmen ist.

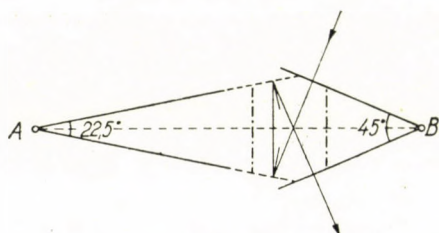


Abb. 8

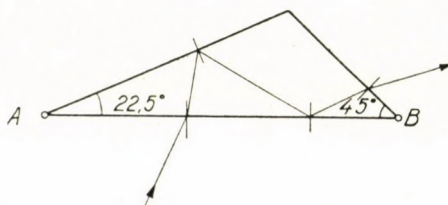


Abb. 9

Bei 135° sind die erforderlichen Winkel $67,5^\circ$ und 135° , deren symmetrische Lage in Bild 11 zu sehen ist. Auch hier können zwei Schenkel entweder zusammenfallen oder zueinander senkrecht stehen. Nur bei stark brechendem Glas kann hier eine Totalreflexion erreicht werden.

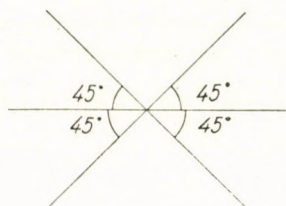


Abb. 10

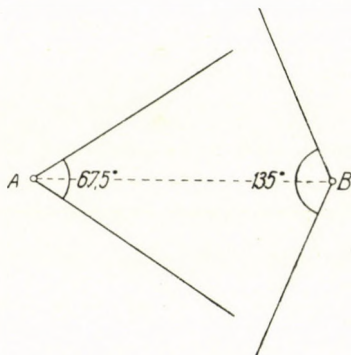


Abb. 11

Betrachtet man den Winkel von 225° , so liefert dieser mit $112,5^\circ$ bereits eine Totalreflexion, wie dies aus Bild 12 entnommen werden kann. Eine brauchbare spezielle Form entsteht hier z. B. dann, wenn die oberen oder unteren Schenkel der beiden Winkel sich unter 90° schneiden. Bemerkte sei hier, dass der doppelte Winkel von $112,5^\circ$ nur 225° und nicht auch 45° sein kann; deshalb kann in dem Bild 9 der Winkel $112,5^\circ$ nicht zur Absteckung von 45° verwendet werden.

Verwendet man endlich zur Absteckung den Winkel von 315° , so ist der spiegelnde Winkel $157,5^\circ$ und es entsteht das in Abb 13 dargestellte Bild. Auch

hier können Sonderfälle entstehen, von welchen wir jenen Fall, bei welchem die entsprechenden Schenkel zueinander normal stehen, eigens erwähnen wollen. In Zusammenhang mit der Absteckung von 45° durch totalreflektierendes Prisma

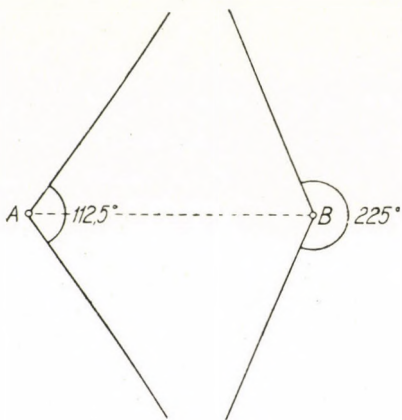


Abb. 12

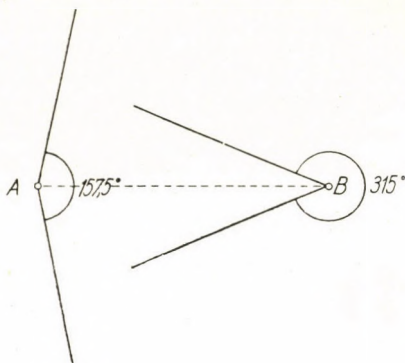


Abb. 13

sei bemerkt, dass HÄRPFER 1950 nur diese Absteckung mit Hilfe von $157,5^\circ$ und diese als neue Methode erwähnt [15], obwohl dieselbe bereits von BAUERNFEIND [12; S. 188] beschrieben wurde und nachher VOGLER die günstigste Form dieses Prismas in Kombination mit der Absteckung anderer Winkel untersuchte [16; S. 310].

c) Einzelprismen zur Absteckung von 180°

Im Sinne dieser vorangehenden Erörterungen muss hier der spiegelnde Winkel 90° und der zu den austretenden Strahlen gehörige brechende Winkel 180° sein (Bild 14). Hier entsteht gleichfalls ein rechtwinkliges Dreieck wie in Bild 2, jedoch liegen die beiden Winkelschenkel des 180° -Winkels hier in der Hypotenuse und nicht wie dort in der Kathete AB . Die beiden anderen Winkel können hier beliebig sein, weshalb der Querschnitt des von PORRO für die Einstellung in einer Geraden ausgegebenen Alineators [17; S. 119] ein beliebiges — und nicht nur gleichschenkliges — rechtwinkliges Dreieck sein kann (Bild 15). Bei dem Alineator von BODOLA ist die obere oder untere Hälfte der Hypotenuse versilbert [8; S. 150], wodurch dieser Teil gleichzeitig zur Absteckung von rechten Winkeln verwendet werden kann. In dem zum Alineator gehörigen Prismenteil sind die Katheten versilbert. Dies bedeutet also eine Verbindung der Verwendungen des einfachen Winkelprismas zur Absteckung von 180° und 90° im Sinne der Bilder 2 und 14. Dieser aus d. J. 1893 stammende BODOLASche Vorschlag ist somit wesentlich älter als der ähnliche Gedanke von MEZYSKI [19]

aus d. J. 1903. Hier mag bemerkt werden, dass die beiden Katheten des zur Einstellung in der Geraden dienenden Prismenteiles nicht unbedingt versilbert werden müssen, weil nach Bild 15 das Prisma leicht so gehalten werden kann,

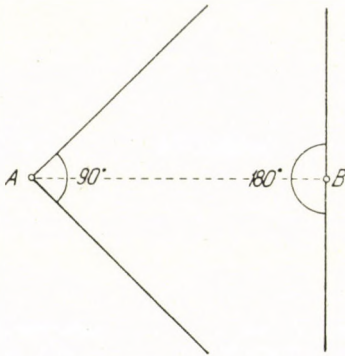


Abb. 14

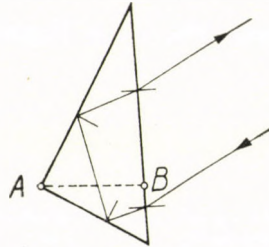


Abb. 15

dass an beiden Katheten Totalreflexion entsteht. Bei gleich grossen Katheten hält man die Hypothenuse genähert normal zur Geraden.

Jene Absteckung von 180° durch Einzelprismen, die durch die Absteckung aneinander reichender rechter Winkel entstehen, wollen wir nach den Doppelprismen besonders untersuchen.

2. Doppelprismen

Diese dienen fast ausschliesslich zur gleichzeitigen Aufstellung in der Geraden und zur Absteckung des rechten Winkels. Der Erfinder des Doppelprismas aus zwei einfachen Winkelprismen, des sog. Prismenkreuzes ist gleichfalls BAUERNFEIND. Bei seinem ersten Prismenkreuz von 1851 dienten die versilberten Hypothenusenflächen nur zur einfachen Spiegelung [1] und es entstand ein, die Spiegel durch Prismen ersetzendes Spiegelkreuz, welches nur zur Aufstellung in der Geraden, nicht aber zur Fusspunktbestimmung geeignet war. Diese Verwendung ist aber in bezug auf die Prismen auch nicht neu, da sie nur einen besonderen Fall des von STEINHEIL 1834 veröffentlichten Prismenkreuzes darstellt (Astron. Nachrichten, Bd. 11. [1834] S. 43—48 u. 105—109), wie darauf bereits JORDAN 1893 hinwies [20]. Grundsätzlich neu und praktisch wichtig ist sein aus d. J. 1868 stammendes zweites Prismenkreuz (beschrieben ein Jahr später in [4; S. 160—161]), das aus der Zusammensetzung zweier, die doppelt gespiegelten Lichtstrahlen verwendenden Prismen entstand (Bild 16) und so zur Aufstellung in der Geraden die Summe zweier rechter Winkel verwendet, d. h. das Prismenkreuz ist auch zur Absteckung von rechten Winkeln oder zum Aufsuchen von Fusspunkten geeignet.

Aber auch das **BAUERNFEINDSche** Prismenkreuz zweiter Art hat noch Nachteile, so z. B. jenen Nachteil, dass die Lichtstrahlen an verschiedenen Stellen der beiden Prismen eintreten und so keine Gerade bilden (vgl. Bild 16).

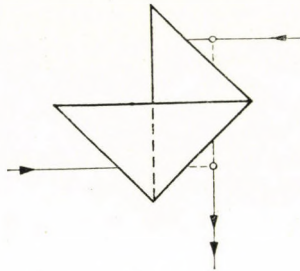


Abb. 16

Deshalb ist die von **STARKE** und **KAMMERER** um 1887 getroffene Anordnung besser, bei welcher die rechten Winkel übereinander liegen (Bild 17). Zwei weitere Kombinationen der einfachen Winkelprismen stammen von **BOHN**.

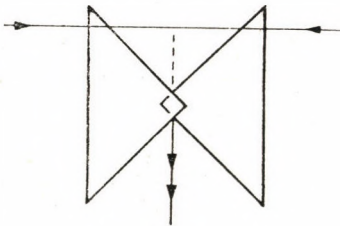


Abb. 17

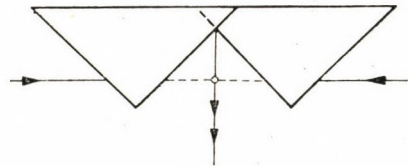


Abb. 18

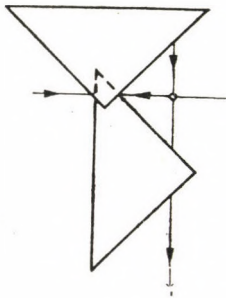


Abb. 19

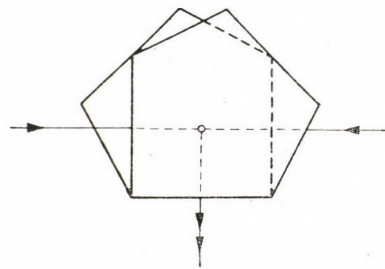


Abb. 20

Die erste nach Bild 18 entstand 1888 (vgl. [18]); bei dieser liegen zwei Winkel von 45° übereinander, welche Anordnung später auch von **SCHNELLENS** verwendet wurde [22]. Bei der anderen, aus d. J. 1889 (vgl. [23]) liegt der rechte und ein 45° grosser Winkel in einer anderen Form, wie in Bild 16 übereinander (Bild 19). Diese spätere Kombination ist weniger bequem als die erstere.

In den letzten Jahren des vorigen und in den ersten Jahren dieses Jahrhunderts erschienen die zuerst von HENSOLDT [34], dann von ROST und ZEISS hergestellten Doppelpentagonalprismen (Bild 20), die später auch von anderen Firmen erzeugt wurden. Sie haben gegenüber den einfachen Winkelprismen einige Vorteile, wie grösseres Gesichtsfeld und grössere Lichtstärke, jedoch sind sie den Prismenkombinationen mit 135gradigen Winkeln insofern unterlegen, als letztere Prismen keine Versilberung brauchen und deshalb nicht fahl werden können.

Das erste Doppelprisma, das ganz ohne Versilberung arbeitete, ist jenes von STÜTZER, das von HENSOLDT in den Handel gebracht wurde [10] und das aus zwei Prismen nach Bild 7 entstehend, in Bild 21 zu sehen ist. Die Licht-

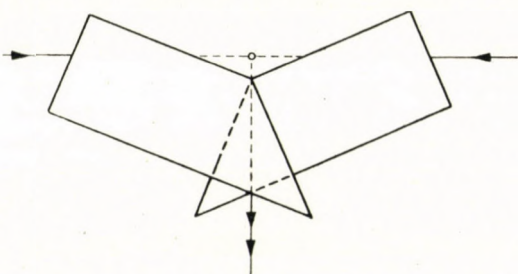


Abb. 21

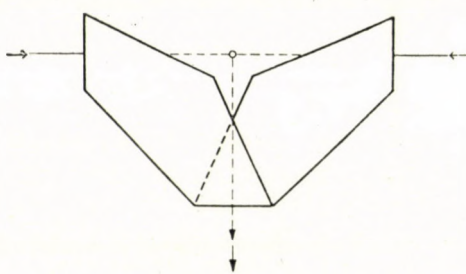


Abb. 22

strahlen fallen zwar nicht senkrecht auf die Eintrittsflächen, jedoch wird der hierdurch verursachte Lichtverlust dadurch wettgemacht, dass der Lichtstrahl durch Totalreflexion an den nicht versilberten Flächen abgelenkt wird.

Das obengenannte HENSOLDT—STÜTZERSche Doppelprisma (Kreuzvisier) wurde nicht lange erzeugt, denn schon 1921 empfahl HOHENNER die Kombination zweier in Abb. 6 dargestellter sog. WOLLASTONScher Prismen [24], bei welchen neben der Totalreflexion im Innern der Prismen die eintretenden Lichtstrahlen genähert normal auf die entsprechenden Prismenflächen fallen (Bild 22). Weil HOHENNER der Erfinder dieses Doppelprismas (Kreuzvisiers) ist, dürfte es angezeigt sein, dieses Doppelprisma als das HENSOLDT—HOHENNERSche oder noch besser HOHENNER—HENSOLDTSche zu nennen. Dieses Doppelprisma dürfte das beste bisherige Doppelprisma sein.

3. Doppelprismen ersetzende Einzelprismen

Trotz der grossen Vorzüge des HENSOLDT—HOHENNERSchen Doppelprismas bleibt das Bestreben die Doppelprismen durch ein einziges Prisma zu ersetzen, aufrecht.

Schon BAUERNFEIND und dann VOGLER beschäftigten sich viel mit diesem Problem. Die BAUERNFEINDSche Lösung [12 ; S. 197, Abb. 160] ist noch unzu-

friedenstellend, da die Stelle, die zur Verhinderung des Lichtstrahlaustrittes versilbert werden sollte (bei BAUERNFEIND der Punkt 2), nicht versilbert werden kann, weil von der anderen Seite der Lichtstrahl wieder hier eintreten muss. VOGLER hat dann dieses Prisma durch Verwendung eines entsprechenden Querschnittes verbessert ([27] und [16; S. 310, Abb. 110]). Unser Bild 23 zeigt den VOGLERSchen Strahlengang, der eigentlich der Vereinigung der Strahlengänge der Abb. 3 und 7 entspricht. Die Lösung ist besser als die BAUERNFEIND-

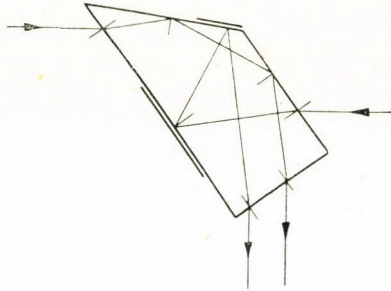


Abb. 23

sche, jedoch erfordert sie an zwei Stellen Versilberung und auch die asymmetrische Haltung erweist sich als unbequem. Auch die VOGLERSche Lösung konnte sich nicht durchsetzen.

Es mag bemerkt werden, dass VOGLER auch den Fall behandelt [16; S. 309], wie man mit einem einfachen Winkelprisma ohne Hilfspunkt sich in einer Geraden aufstellen und den Fusspunkt aufsuchen bzw. den rechten Win-

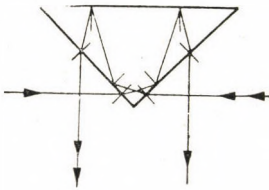


Abb. 24

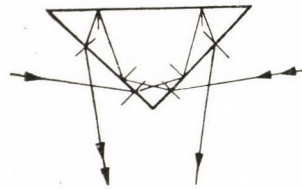


Abb. 25

kel abstecken kann. Auf Grund des Bildes 24 ist die Benutzung naheliegend, da hier die zwei — durch doppelte Spiegelung rechte Winkel gebenden — Winkel von 45° vorhanden sind. Unser unabhängig von VOGLER entwickeltes Verfahren ist etwas anderes. Es ist zunächst klar, dass das Erscheinen der Absteckstäbe der beiden Endpunkte in der Nähe der beiden Scheitel der 45 gradigen Winkel noch keine Aufstellung in der Geraden bedeutet (vgl. Bild 25). Dies wird nur dann erreicht, wenn die beiden austretenden Lichtstrahlen miteinander parallel sind, d. h. senkrecht zur Geraden die Bilder der beiden Absteckstäbe praktisch auf denselben Punkt zeigen. Deshalb verschiebt VOGLER das Prisma der Hypo-

thenuse entlang ein wenig und überzeugt sich so davon, ob die doppelt reflektierten Bilder der Absteckstäbe auf denselben Punkt zeigen. Nach unserer eigenen Erfahrung verschieben sich die Bilder der Absteckstäbe bei Näherung zur Geraden allmählig gegen den 90° -Scheitel und nach der Erreichung der Grenze der doppelten Reflexion verschwinden sie. Wenn man aber jetzt das Prisma einmal im Sinne des Uhrzeigers und dann im entgegengesetztem Sinne ein wenig verdreht, so erscheint zuerst das doppelt reflektierte Bild des rechten, nachher des linken Absteckstabes ganz in der Nähe des Scheitels des 90 gradigen Winkels und man kann sich so leicht überzeugen, ob sie auf denselben Punkt zeigen. Wenn ja, so ist man auf der Geraden und bewegt sich jetzt auf dieser, bis der gemeinsame Punkt auf jenen Absteckstab zeigt, dessen Fusspunkt gesucht wird. Beide Verfahren erfordern ziemliche Übung und sind nicht rasche Methoden, weshalb sie sich nicht durchgesetzt haben. Eine Versilberung der Hypothenuse des einfachen Prismas ist natürlich auch hier erforderlich.

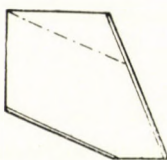


Abb. 26

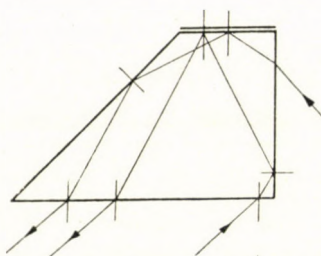


Abb. 27

Später, 1918 machte GRÜNERT einen anderen Vorschlag [28]. Danach (Bild 26) wird beim Pentagonalprisma der 45 gradige Winkelscheitel nicht normal zur Halbierungslinie, sondern parallel zu dem einen selbst und setzt sich aus zwei Stücken zusammen : die Trennungsfläche geht vom Scheitel des rechten Winkels aus und ist parallel zu dem verkürzten kürzeren Winkelscheitel des 45 gradigen Winkels. Im oberen Teil der Trennungsfläche sind die beiden Teile zusammengekittet und sie wirken daher zusammen wie ein Pentagonalprisma. Im unteren Teil fehlt die Verkittung und die Trennungsfläche bringt ein dem sog. WOLLANSTONSchen Prisma ähnliches Prisma mit 135° hervor, das zur Absteckung des zweiten rechten Winkels dient. — Wir haben keine Kenntnis, ob dieses Prisma jemals im Handel war, wahrscheinlich nicht und dies wäre auch nicht verwunderlich, weil neben der Versilberung auch Verkittung erforderlich ist. Dann ist es aber einfacher, ein übereinander angeordnetes Pentagonal- und WOLLASTONSches Prisma mit ihren waagerechten Berührungsflächen zusammenzukitten.

Eine grundsätzlich andere Lösungsmöglichkeit entsteht dann, wenn man sich entsprechend der Abb. 14 erinnert, dass jede gerade Fläche eines Prismas

aus zwei miteinander 180° einschliessenden Ebenen entstehend angesehen werden kann und wenn dabei noch ein Winkel von 90° und 45° vorhanden ist, so kann dieses Prisma mit entsprechend grossen Abmessungen auch als Alineator dienen. Man kann also mit dem Prisma nicht nur nach Bild 7 den rechten, sondern auch den 180° gradigen Winkel abstecken bzw. sich in einer Geraden aufstellen. Diese Verwendung zeigt Bild 27, wobei nur die kürzere parallele Fläche zu versilbern ist. Dieses Prisma gilt in diesem Falle als ein entartetes fünfeckiges Prisma mit einem Winkel von 180° .

Es mag bemerkt werden, dass auch andere Prismen, die zur Absteckung zu 90° dienen, bei Verwendung dieses oder eines anderen rechten Winkels am

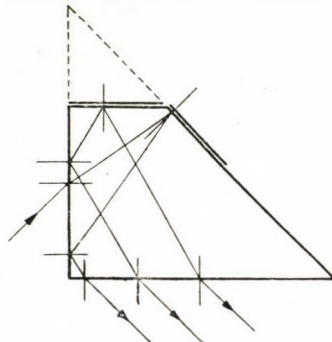


Abb. 28

Prisma im obigen Sinne *gleichzeitig* zur Absteckung von 180° herangezogen werden können. Ja es kann auch dasselbe Prisma in anderer Verwendungsform dazu dienen, wie dies eine Erweiterung des Prismas nach Bild 4 zum Alinement zeigt (Bild 28). Das Prisma hier erfordert an zwei Stellen Versilberungen.

*

Bei allen bisher behandelten Lösungen der Aufstellung in einer Geraden mit gleichzeitiger Fusspunktbestimmung durch ein einziges Prisma musste letzteres asymmetrisch zur Geraden gehalten werden und erforderte an einer oder zwei Stellen Versilberung der Flächen. Im Folgenden wollen wir eine Lösung mit einem symmetrisch zu haltenden Prisma versuchen, das keine Versilberung erfordert.

Ohne Versilberung kann der rechte Winkel beiderseits nur mit Hilfe zweier spiegelnder Winkel von 135° abgesteckt werden. Bei symmetrischer Anordnung kann weiters ihre Handhabung während der Absteckung nur so erfolgen, dass die Symmetrielinie normal zur Geraden steht oder mit dieser zusammenfällt. Zur Vermeidung der Farbenstreuung sind weiters zwei gleichfalls symmetrisch anzuordnende 90° gradige brechende Winkel erforderlich. Diesen Forderungen entspricht das im Bild 29 dargestellte Prisma, das aus einem Prisma mit quadratischem Querschnitt durch zur Diagonale paralleles Abschneiden von zwei gegenüberliegenden Ecken entsteht.

Bei der Wahl der Abmessungen ist in Betracht zu ziehen, dass die bei a eintretenden Lichtstrahlen an der Fläche DE , die bei b eintretenden an DC austreten müssen. Dies erfordert eine bestimmte Länge des Prismas, die eine Funktion der Brechungsahl des Glases ist. Bei $n = 1,6$ ergeben sich die im Bild 29 dargestellten Werte, wobei es genügt nur den Weg des bei a eintretenden Strahles zu untersuchen, weil der Weg des bei b eintretenden Strahles spiegel-

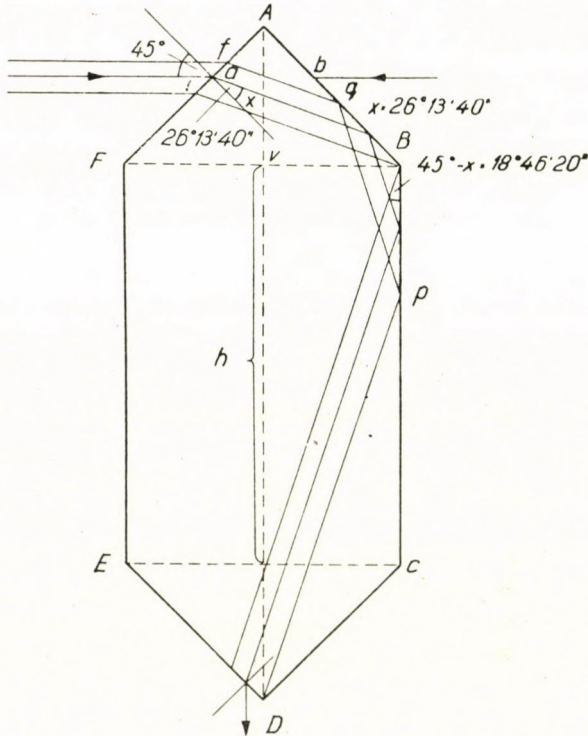


Abb. 29

bildlich gleich ist. Wenn die Diagonale des ursprünglichen Quadrates des Prismas im Vergleich zur Breite im Verhältnis 2,43 : 1 steht, d. h. einer Prismenlänge von 5 cm eine Prismenbreite von 2,06 cm entspricht, so wird der Streifen der doppelt reflektierten Lichtstrahlen durch die beiden äusseren Lichtstrahlen bestimmt. Dabei ist der bei b eintretende Lichtstrahl deshalb der untere äussere, weil dieser unmittelbar bei B noch auf die Fläche AB fallend von dort gleichfalls unmittelbar bei B auf BC reflektiert wird und so seinen Weg in der gezeichneten Weise fortsetzt.

Die untere l - und obere a -Grenze kann auch berechnet werden. Bei $n = 1,6$ bildet der auf AF unter 45° fallende Lichtstrahl nach der Brechung den Winkel x mit dem Einfallslot, der aus :

$$\sin x = \frac{\sin 45^\circ}{1,6}$$

sich in $26^{\circ}13'40''$ ergibt. Dieser Winkel ist gleichzeitig auch der Winkel, den der gebrochene Lichtstrahl mit der Seite AB einschliesst. Man kann so aus dem Dreieck FBI die Länge IF berechnen, weil der bei B befindliche Winkel $45^{\circ} - x = 18^{\circ}46'20''$ ist. Die Lage des Punktes f kann andererseits wie folgt bestimmt werden: Wenn die Breite BF des Prismas mit v , die Länge BC mit h bezeichnet wird, so erhält man die Gesamtlänge AD des Prismas in:

$$AD = h + v.$$

Der bei D noch austretende Lichtstrahl wird an der Seite BC bei p reflektiert. Daher:

$$Bp = h + \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \operatorname{ctg}(45^{\circ} - x).$$

Daraus:

$$Bq = Bp \frac{\sin(45^{\circ} - x)}{\sin x}$$

und:

$$Al = v \frac{1}{\sqrt{2}} - Bq.$$

Endlich:

$$Af = Aq \operatorname{tg} x.$$

In unserem Falle wird $h = 5,00 - 2,06 = 2,94$ cm,
 $Bp = 2,94 + 1,03 - 1,03 \operatorname{ctg} 18^{\circ}46'20'' = 0,94$ cm;

$$Bq = 0,94 \frac{0,3219}{0,4418} = 0,684 \text{ cm};$$

$Aq = 1,4564 - 0,684 = 0,7724$ cm; $Af = 0,772 \cdot 0,4925 = 0,387$ cm;
 $Al = AB \operatorname{tg} x = 1,4564 \cdot 0,4925 = 0,774$ cm und $lf = 3,87$ mm.

Bei der geringen Breite des Prismas ist letztere Grösse und so das Gesichtsfeld schon merklich und nicht kleiner, als bei den üblichen Kombinationen der einfachen Prismen, z. B. bei der nach Bild 17; dabei arbeitet dieses Prisma mit Totalreflexion.

Will man den Streifen der doppelt reflektierten Lichtstrahlen und damit das Gesichtsfeld immerhin vergrössern, so kann dies bei gegebener Brechungszahl des Glases zunächst durch Vergrösserung der Länge erfolgen, weil dadurch der bei f eintretende und D austretende doppelt reflektierte obere Lichtstrahl weiter gegen A verschoben wird. Die untere Streifengrenze bei l kann deshalb nicht verschoben werden, weil sonst der Lichtstrahl nicht auf AB , sondern auf BC fallen würde und so der zur Absteckung von 90° erforderliche Winkel von 135° sich nicht auswirken könnte.

Es gibt aber noch eine andere Möglichkeit zur Vergrösserung des Lichtstrahlenstreifens und zur Verkleinerung der Prismenlänge, und dies ist die Verwendung eines Glases mit grösserer Brechungszahl. Bei $n = 1,80$ und bei einem Verhältnis $2,4912 : 1$ der Prismenlänge zur Prismenbreite erweitert sich z. B. der Lichtstrahlenstreifen bis zum 90° gradigen Scheitel des Prismas (vgl. Bild 30) und man erhält bei einer Prismenlänge von 5 cm eine Breite von 2,01 cm. Dies ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\sin x = \frac{\sin 45^{\circ}}{1,8} \text{ und } x = 23^{\circ} 07' 52''.$$

Der Winkel bei B wird hier: $45^\circ - x = 21^\circ 52' 08''$, weshalb die Projektion des unmittelbar bei A ein- und unmittelbar bei D austretenden Lichtstrahls auf AD

$$2 \frac{v}{2} \operatorname{ctg} 21^\circ 52' 08'' = 2,4914 v$$

wird. Die diesem Wert entsprechende AI -Länge rechnet sich folglich in:

$$AB \operatorname{tg} x = v \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} 21^\circ 52' 08'' = 0,2838 v.$$

Bei $n = 2$ würde man für $x = 20^\circ 42' 17''$, für $45^\circ - x = 24^\circ 17' 43''$ und für $AD = 2,216 v$ erhalten, was einem Prisma mit noch besserer Form entspricht.

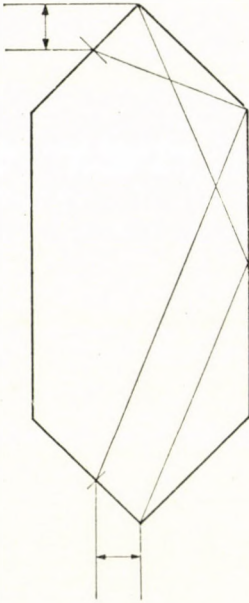


Abb. 30

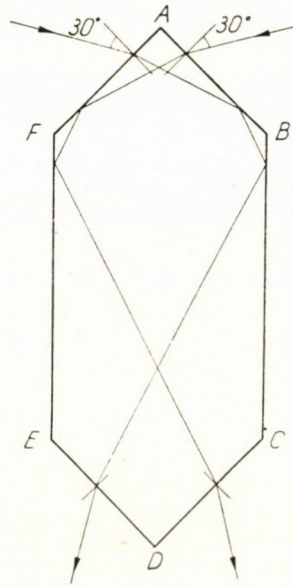


Abb. 31

Es sei hier bemerkt, wie dies schon aus den angestellten Erörterungen hervorgeht, dass nur die bei B und F liegenden 135 gradigen, sowie die durch AF und ED , bzw. AB und CD gebildeten abgeschnittenen rechten Winkel des Bildes 29 eine genaue Herstellung erfordern. Die übrigen Winkel, so z. B. der bei A liegende rechte Winkel, können Fehler auch von einigen Graden haben.

Wir müssen hier darauf hinweisen, dass jene Lichtstrahlen, die nicht unter 45° , sondern unter einem kleineren Winkel auf den um A liegenden Prismenteil fallen, nicht in der Nähe von D , sondern davon um so weiter austreten, je kleiner die Winkel als 45° sind (Bild 31). Diese Abweichung kann aber nur so weit gehen, bis der gebrochene Strahl die Fläche AB , der austretende die Fläche DE noch trifft. Die Abweichung kann beiderseits bis etwa 30° anwachsen, welcher Umstand die Verwendung des Prismas wesentlich erleichtert. Es muss allerdings bemerkt werden, dass der divergierende Austritt der Lichtstrahlen die nacheinander

folgende Beobachtung des Prismas von zwei Seiten erfordert. Es ist deshalb zur Aufstellung in einer Geraden besser, wenn die Lichtstrahlen unter einem grösseren Winkel als 45° auf das Prisma fallen und konvergierend austreten. Will man sich also in der Verbindungsgeraden zweier in der Natur durch Absteckstäbe gegebener Punkte aufstellen, so ist es besser, dieser sich rückwärtsgehend zu nähern, weil in diesem Falle schon weit von der Verbindungsgeraden die Bilder der Absteckstäbe an den Flächen DC und DE erscheinen. Je mehr man sich der Geraden nähert, um so näher rücken die Bilder dem Scheitelpunkt D . Jetzt hält man das Prisma so, dass D zwischen den Bildern der beiden Absteckstäbe in der Mitte zu liegen kommt und weiter rückwärtsgehend bleibt man dort stehen, wo die beiden Absteckstabbilder sich in D konzentrieren. Das Überschreiten der Geraden zeigt das Verschwinden der Bilder beider Absteckstäbe sofort und deutlich an. Das Aufsuchen des Fusspunktes erfolgt in bekannter Weise durch Bewegung auf der Geraden, bis das Bild der beiden Absteckstäbe in D mit dem in der Natur unmittelbar gesehenen Absteckstab zusammenfällt. Das in der eigenen Werkstätte hergestellte Versuchsexemplar hat dies auch praktisch bestätigt. Zum Einüben der neuartigen Verwendung war eine halbe Stunde genug.

Man kann sich mithin mit einem einzigen Prisma, das keine Versilberung braucht und symmetrisch gehalten werden kann, ohne Hilfspunkt in einer Geraden aufstellen und gleichzeitig daran den Fusspunkt eines dritten Punktes bestimmen.

Neben den soeben erwähnten Vorteilen müssen auch die Nachteile dieses Prismas erwähnt werden. Das Einfallen der Lichtstrahlen unter 45° verringert die Lichtstärke, doch wird dieser Umstand z. B. im Vergleich zum Doppelpentagonalprisma durch die Totalreflexion kompensiert. Der Eintritt unter 45° vergrössert auch den Einfluss der Schlifffehler. Doch ist diese Vergrösserung nach den Untersuchungen von PRANDTL, JORDAN, SAMEL und LAUMEYER ([29 ; S. 429] u. [31 ; S. 4]) bei 45° nur etwa 30% grösser als beim senkrechten Einfallen und daher leicht zu ertragen. Endlich soll angeführt werden, dass die eintretenden und austretenden Lichtstrahlen sich zwar beiderseits eindeutig aber nicht in der Mitte des Prismas, sondern in der Nähe von A schneiden. Um den Lotungsfehler auszuschalten bzw. klein zu halten, soll daher auch der Senkel, bzw. der Lotstab in der Nähe von A befestigt werden (vgl. Bilder 34—35), wodurch auch dieser Nachteil ausgeschaltet werden kann.

Es mag hier bemerkt werden, dass das Mass der Abweichung von der Geraden aus der Entfernung der Bilder der beiden Absteckstäbe vom Scheitelpunkt D entnommen bzw. die beiden Schenkel beiderseits von D entsprechend graduiert werden können, wodurch das Prisma in gewissem Sinne eventuell auch zur Absteckung gewisser Kreisbögen geeignet sein könnte.

Hat das Glas kleinere Brechungszahl als zuvor angenommen also etwa $n = 1,5$, so kann die Länge des Prismas nur durch die Vergrösserung des Ein-

fallswinkels vermindert werden. Vergrößert man diesen von 45° auf 55° , so wird hier $x = 33^\circ$, der Winkel bei A ist jetzt 110° und der Winkel in q aus $180^\circ - 110^\circ - (90^\circ - 33^\circ)$ gleich 13° , in p gleich 32° . Dies ermöglicht in Bild 32 eine wesentlich geringere Prismenlänge und eine gefälligere Prismenform, obwohl die Vergrößerung des Einfallswinkels keinesfalls vorteilhaft erscheint.

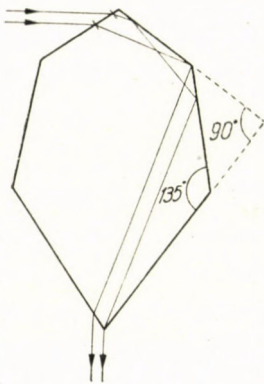


Abb. 32

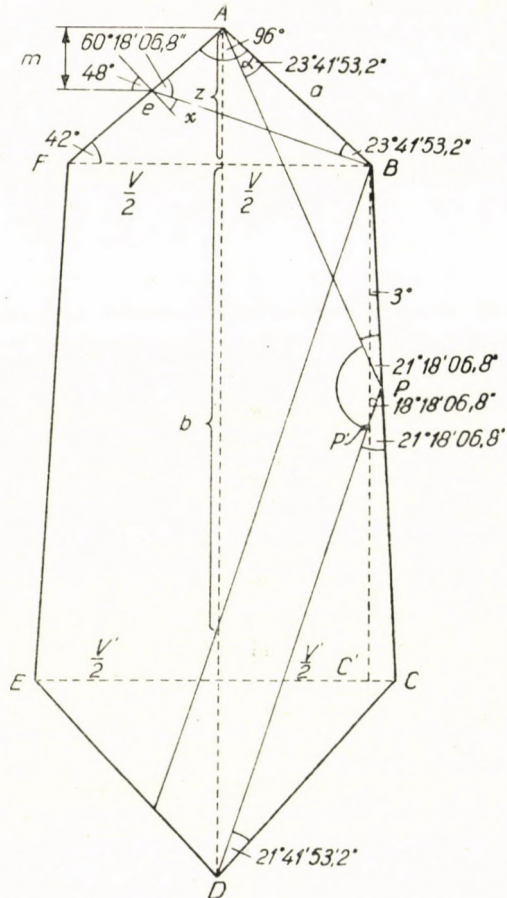


Abb. 33

Der Einfallswinkel von 55° liegt immerhin unterhalb der von LORBER angegebenen Grenze von 60° (vgl. [32; S. 418]), bei welcher die Fehler auch noch erträglich sind: der Absteckfehler von $57''$ bei 45° vergrößert sich bei 60° nur auf $81''$. Im übrigen kann bei $n = 1,5$ schon ein Einfallswinkel von 48° eine ziemlich gute Prismenform ermöglichen, wie dies Abb. 33 zeigt. Da wir in der Tat diese ausgeführt haben, sollen deren Rechenergebnisse etwas ausführlicher und genauer angeführt werden.

Aus Bild 33 folgen :

$$\sin x = \frac{\sin 48^\circ}{1,5} = 0,4954299 \quad \text{und} \quad x = 29^\circ 41' 53,2''$$

$$z = \frac{v}{2} \operatorname{tg} 42^\circ = 0,4502020 v, \quad a = AB = \frac{v}{2 \cos 42^\circ} = v \frac{\sin 42^\circ}{\sin 96^\circ} = 0,6728163 v.$$

$$BP = a \frac{\sin 23^\circ 41' 53,2''}{\sin 21^\circ 18' 06,8''} = 0,7443715 v$$

$$BP' = BP \frac{\sin 158^\circ 41' 53,2''}{\sin 18^\circ 18' 06,8''} = 0,8611345 v$$

$$b = \frac{v}{2} \operatorname{ctg} 18^\circ 18' 06,8'' = 1,5116930 v$$

$$AD = z + b + BP' = 2,8230296 v$$

$$DP' = \frac{v}{2} \frac{1}{\sin 18^\circ 18' 06,8''} = 1,5922361 v$$

$$PP' = BP \frac{\sin 3^\circ}{\sin 18^\circ 18' 06,8''} = 0,1240588 v$$

$$DP = DP' + PP' = 1,7162949 v$$

$$CP = DP \frac{\sin 23^\circ 41' 53,2''}{\sin 135^\circ} = 0,9755374 v$$

$$BC = BP + CP = 1,7199090 v \quad CC' = BC \sin 3^\circ = 0,0900131 v$$

$$CE = v' + 2CC' = 1,1800263 v$$

$$v = 0,8474387 v'$$

$$AD = 2,3923446 v'$$

Die Streifenbreite m wird in diesem Falle :

$$m = Ae \sin 42^\circ = a \frac{\sin 23^\circ 41' 53,2'' \sin 42^\circ}{\sin (90^\circ - 29^\circ 41' 53,2'')} = 0,3095937 a = 0,6728163 \cdot 0,3095937 v = 0,2077 v.$$

Bei $v = 2$ cm ergibt sich daraus für m rund 4 mm.

Die Länge dieses Prismas ist also rund die 2,4fache von CE.

. Nimmt man dagegen ein Glas mit $n = 1,8$ so ergeben sich beim Einfallswinkel 48° :

$$x = 24^\circ 23' 04,2'' \quad z = 0,4502020 v$$

$$BP = 0,4736622 v \quad b = 1,1436114 v$$

$$BP' = 0,6297123 v \quad PP' = 0,0618816 v$$

$$DP' = 1,2481373 v \quad BC = 1,0579726 v$$

$$CP = 0,5843104 v \quad v = 0,9003006 v'$$

$$v' = 1,1107401 v \quad AD = 2,1235256 v$$

$$DP = 1,3100189 v \quad CC' = 0,0553700 v$$

$$AD = 1,9118114 v.$$

Diese Werte liefern ein Prisma von noch besserer Form.

Das nach Bild 33 hergestellte Prisma zur Aufstellung in der Geraden und zur Bestimmung des Fusspunktes zeigen die Bilder 34 u. 35. Das Prisma

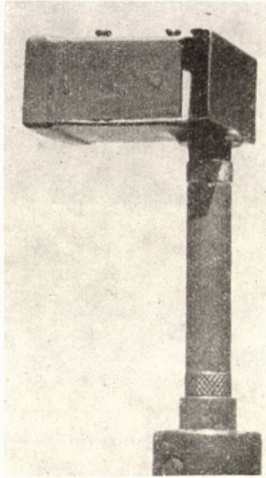


Abb. 34

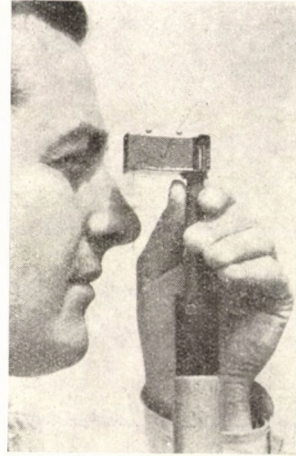


Abb 35

wurde zur vorteilhaften Verwendung mit einer Umhüllung versehen, die in der Nähe von *A* beiderseits entsprechende Öffnungen hat. *A* ist auch von vorne vorteilhaft mit Umhüllung zu versehen. Bei *D* liegt die Öffnung beiderseits der Symmetrielinie.

4. Prismenkombinationen zur Bestimmung der Fusspunkte bei 90° und 45°

Unseres Wissens war J. KONDÉR der erste, der ein Prismensystem konstruierte, das neben der Aufstellung in einer Geraden ohne Hilfspunkt- und üblicher Fusspunktbestimmung auch die beiderseitige Bestimmung der »Fusspunkte« bei 45° ermöglichte [30]. Letztere bedeuten eine Projektion der fraglichen Punkte unter 45° auf die Gerade und ermöglichen so die mittelbare Bestimmung an der Geraden der direkt nicht immer messbaren Normalabstände. Es kann sich auch — zwar seltener — die Notwendigkeit ergeben, die beiderseitigen Fusspunkte unter 45° zu bestimmen.

KONDÉR hat nun das HENSOLDT—HOHENNERSche Doppelprisma (Kreuzvisier) zur beiderseitigen Absteckung von 45° bzw. zum beiderseitigen Aufsuchen der Fusspunkte unter 45° oben und unten mit einem Halbpentagon ergänzt, weshalb sein Prismensystem die in Bild 36 angegebene Form annahm. Der dadurch erzielte Vorteil ist aber nicht ohne Nachteile. Es gesellen sich zunächst zu dem totalreflektierenden HENSOLDT—HOHENNERSchen Doppelprisma versilberte Halbpentagone. Ebenso erscheint die Verwendung von vier

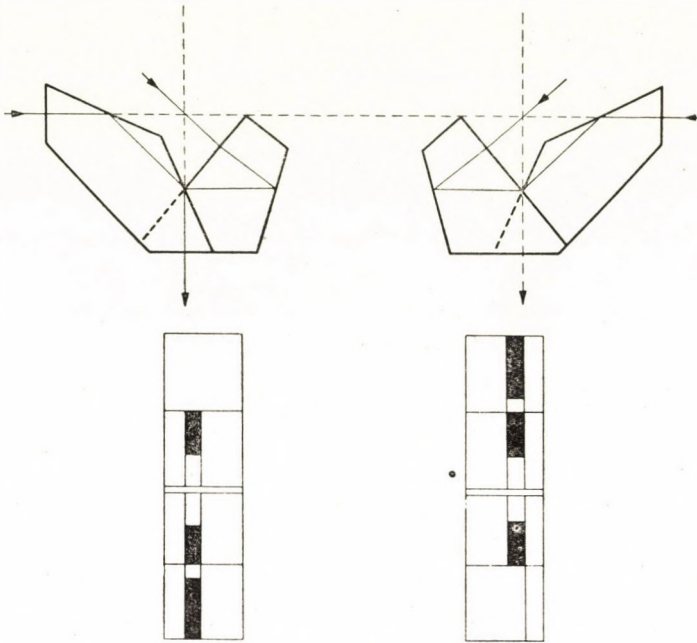


Abb. 36

übereinander liegenden Prismen sowohl in der Erscheinungsform, als auch in der Verwendung als unbequem.

Der zuletzt angeführte Nachteil kann dadurch leicht behoben werden, dass man die beiden Halbpentagone mit ihren versilberten Flächen nebeneinander legt, wie dies Abb. 37 zeigt. Bei $n = 1,6$ ergibt sich dann aus

$$\sin x = \frac{\sin 22,5^\circ}{1,6}$$

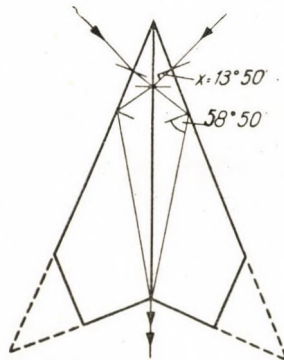


Abb. 37

der Wert x in $13^{\circ}50'$. Wie man sieht, verlassen die in der Nähe der Winkelscheitel von $22,5^{\circ}$ eintretenden Lichtstrahlen die Prismen in der Nähe der $112,5$ gradigen Winkelscheitel, weshalb die Deckung der Bilder der Absteckstäbe leicht zu erreichen ist, zumal man in der Regel die beiden Winkel von 45° nicht gleichzeitig abstecken muss. Die Scheitel der Winkel von 45° sind überflüssig und können abgeschnitten werden, wodurch das Prismensystem eine bessere Form erhält. Es sei bemerkt, dass je nach der Lage des zum Winkel von 45° gehörigen Punktes (ob dieser rechts oder links zu suchen ist) man durch eine kleine Verdrehung im Sinne bzw. entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers erreichen kann, dass die Bilder der beiden Absteckstäbe der Geraden im HENSOLDT—HOHENNERSchen Doppelprisma sich ein wenig von der Mitte verschieben

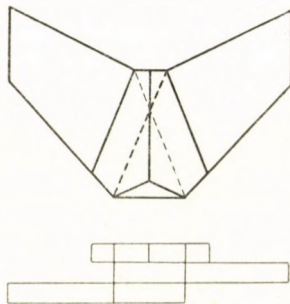


Abb. 33

und so besser mit dem im entsprechenden Halbpentagon erscheinenden Absteckstabbild in Deckung gebracht werden können. Durch die entsprechende Wahl der Prismenabmessungen kann auch erreicht werden, dass die Schnittpunkte der eintretenden und austretenden Strahlen der Halbpentagone mit dem Schnittpunkt der Strahlen des HENSOLDT—HOHENNERSchen Doppelprismas zusammenfallen. Die Strahlen der 45 gradigen Winkel sind zwar nicht normal zu den entsprechenden Flächen der Halbpentagone, jedoch beträgt die Abweichung nur $22,5^{\circ}$, welcher Umstand als günstig zu bezeichnen ist.

Das mit dem HENSOLDT—HOHENNERSchen Doppelprisma zusammengesetzte Doppelhalbpentagon zeigt Bild 38. Wir haben ein solches aus dem von MOM gelieferten KONDÉRSchen Prismensystem hergestellt und die Versuche zeigten dessen Brauchbarkeit.

Man kann aber die Halbpentagone mit dem im Bild 29 bzw. 33 angegebenen Prisma zusammensetzen und durch entsprechende Wahl der Abmessungen auch hier das Zusammenfallen der Strahlenschnittpunkte erreichen. Die Bilder 39—41 zeigen das mit dem Prisma nach Bild 29 bzw. 33 zusammengesetzte Doppelhalbpentagon. Es wurde im Ungarischen Optischen Forschungslaboratorium hergestellt und die Abmessungen des Gehäuses betragen $43-34-25$ mm.

Wenn man das Auge nahe an den Augenschlitz hält, so ist das Gesichtsfeld genug gross, ohne dass das Prismensystem unförmig oder zu gross wäre.

Die Prismensysteme nach Bild 38 oder Bilder 39—41 haben noch immer den Nachteil, dass die versilberten Teile mit der Zeit fahl werden können. Es ist deshalb zu erwägen, ob man nicht auch die Winkel von 45° durch totalreflektierende Prismen abstecken könnte. Dies kann man bei dem Prismensystem nach Bild 36 leicht dadurch erreichen, dass an Stelle der Halbpentagone die beiden sog. WOLLASTONSchen Prismen mit je einem totalreflektierenden

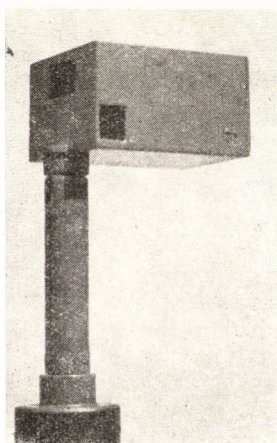


Abb. 39

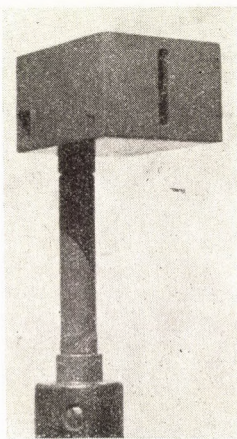


Abb. 40

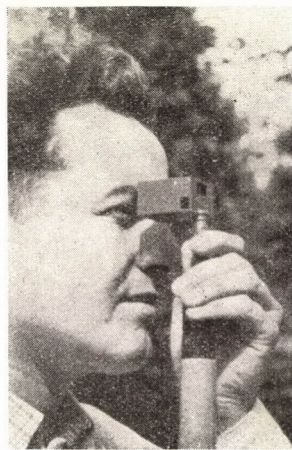


Abb. 41

Prisma nach Bild 12 zusammengesetzt werden. Den rechten Teil dieser Zusammensetzung zeigt Bild 42. Der symmetrische linke Teil wurde der besseren Übersicht halber weggelassen. Die Schnittpunkte der eintretenden und austretenden Strahlen sind nahe zueinander und dies ist auch günstig. Nachteilig erscheint, dass der Punkt, dessen Fusspunkt unter 45° gesucht wird, hinten liegt, d. h. man diesem den Rücken kehrt, jedoch ist dies nur eine Sache der Gewohnheit.

Durch die oben angegebene Lösung wurde aber die Etagenzahl des Prismensystems nicht verringert. Wir suchen daher eine Lösung, bei der neben Totalreflexion die beiden Prismen für die Winkel von 45° so nebeneinander gelegt werden können, wie die beiden Halbpentagone in Bild 37. Eine solche Möglichkeit gibt die Verdoppelung des nach Bild 13 bestimmten Prismas mit $157,5^\circ$. Um die günstigste Form dieses Prismas für den vorliegenden Fall zu bestimmen, nimmt man die beiden Schenkel der $157,5$ gradigen Winkel als gleich gross an. Wird angestrebt, dass der unmittelbar am oberen Ende des Schenkels auffallende Lichtstrahl auf den anderen Schenkel unmittelbar an dessen Ende auffalle, so ist in der Verbindung der Schenkelen der Weg des Lichtstrahles im Prisma bestimmt. Nimmt man die Berührungsfläche der beiden

Prismen symmetrisch, d. h. normal zur Verbindungsgeraden an, so sind dadurch auch die Richtungen der beiden unter 45° zur Geraden eintretenden Lichtstrahlen bestimmt. Bei Kenntnis des Lichtweges innerhalb und ausserhalb der Prismen können auch die Lagen der brechenden Ebenen bestimmt werden. Aus dem Umstand, dass die beiden Schenkel des $157,5$ gradigen Winkels innerhalb der Prismen unter dem gleichen, also $11^\circ 15'$ grossen Winkel getroffen werden müssen, ergeben sich daraus bei $n = 1,6$ die Einfallswinkel in $18^\circ 11' 20''$. Für Winkel der oberen brechenden Flächen mit den ersten Flächen für die

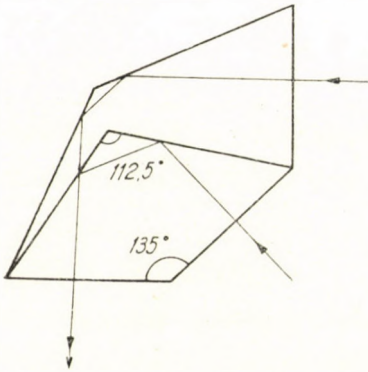


Abb. 42

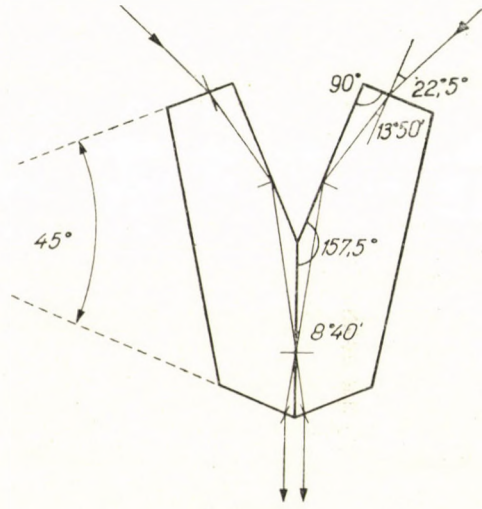


Abb. 43

zweifache Reflexion sind daher $85^\circ 41' 40''$ und die unter 45° einfallenden Lichtstrahlen bilden mit den Einfallsloten einen Winkel von rund 18° , welcher Umstand sowohl für die Lichtstärke als auch bezüglich der Schlieffehler günstig ist. Bei dieser Anordnung ist auch das Gesichtsfeld optimal. Wird der Winkel zwischen der oberen brechenden Fläche und der ersten Fläche der zweifachen Reflexion in 90° gewählt wie in Abb. 43, so sind die Verhältnisse zwar etwas ungünstiger, jedoch ist der Winkel von $22,5^\circ$ mit dem Einfallslot noch immer sehr vorteilhaft.

Der grösste Teil der Scheitel der 45 gradigen Winkel ist überflüssig und wird vorteilhaft abgeschnitten. Man kann dieses Prismenpaar bzw. Doppelprisma nach Bild 43 entweder mit dem HENSOLDT—HOHENNERSchen Doppelprisma nach Bild 22, oder aber mit dem Prisma nach Bild 29 bzw. Bild 33 verbinden. Im ersten Falle erhält man zwar drei Prismenetagen übereinander, jedoch alle mit Totalreflexion, also ohne Versilberung. Im zweiten Falle sind nur zwei Prismenetagen vorhanden und gleichfalls durchwegs mit Totalreflexion. Durch entsprechende Wahl der Prismenabmessungen kann man die Schnitt-

punkte der ein- und austretenden Lichtstrahlen bei allen Prismen fast ganz zusammenfallen lassen und so die dadurch entstehenden Fehler beinahe gänzlich ausmerzen.

Durch Verwendung von einspringenden Winkeln können noch weitere Prismenkombinationen angegeben werden, die aus der Verschmelzung zweier oder mehrerer der behandelten Prismen entstehen. Unter Hinweis auf unsere ungarische Studie wollen wir auf diese hier nicht eingehen.

SCHRIFTTUM

1. BAUERNFEIND : Theorie und Gebrauch des Prismenkreuzes. München, 1851. Verlag Palm.
2. BAUERNFEIND : Reflexionsprismen mit constanten Ablenkungswinkeln. München, Akad. Sitzungsber. 1865. Bd. I, S. 344—348.
3. BAUERNFEIND : Über eine neue Eigenschaft des Prismas der Camera lucida und : Über ein neues Spiegelprisma mit constanten Ablenkungswinkeln. München. Akad. Sitzungsber. 1868. Bd. I, S. 491—497.
4. BAUERNFEIND : Nachträgliche Bemerkungen über die zu geodätischen Zwecken dienenden Spiegelprismen. Akad. Sitzungsber. 1869. Bd. I, S. 159—161.
5. BAUERNFEIND : Neue Eigenschaften des Prismas der Camera lucida. München. Akad. Sitzungsber. 1869.
6. BAUERNFEIND : Eine neue Eigenschaft des Wollaston'schen Spiegelprismas. Annalen d. Physik, 1868 (2), S. 169—172.
7. BAUERNFEIND : Ein neues Spiegelprisma mit constanten Ablenkungswinkeln. Annalen d. Physik, 1868 (2) S. 172—175.
8. BODOLA : A prizmatikus tükörrendszerekröl és a háromélű prizmakróll, különös tekintettel a szögkitűzésre. (Über prismatische Spiegelsysteme und Dreikantprismen mit besonderer Berücksichtigung der Winkelabsteckung). Magy. Mérn. és Épít. Egly. Közl. 1893. S. 58—66, 99—110 u. 145—150.
9. PRANDTL : Ein neues Instrument zum Abstecken von rechten Winkeln. Zeitschrift f. Vermessungsw. 1890. S. 462—467.
10. HAMMER : Hensoldt's Kreuzvisier. Zeitschr. f. Instrumkde. 1921. S. 190—191. u. Lüdemann : Das Kreuzvisier von Stützer. Allg. Vermess. Nachr. 1924. S. 129—130.
11. OLTAY : Geodézia (Geodäsie) Bd. II. (2) 1937.
12. BAUERNFEIND : Elemente der Vermessungskunde. Bd. I. (6), Stuttgart, 1879.
13. SCHELLENS : Kritische Betrachtung der gebräuchlichen Winkelprismenformen. Geodätische Woche, Köln, 1925. S. 230—250.
14. KRUSPÉR : Földmérten. (Vermessungskunde) Pest 1869.
15. HÄRPFER : Zur Theorie des vierseitigen Winkelprismas. Allg. Vermess. Nachr. 1950. S. 110—112.
16. VOGLER : Lehrbuch der praktischen Geometrie. Bd. I Braunschweig, 1885.
17. SALMOJRACHI : Instrumenti e metodi moderni di Geometria applicata. Milano, 1884.
18. BOHN : Über Winkelprismen und ihren Gebrauch zur Einschaltung von Punkten in eine Gerade. Zeitschrift f. Instrumkde. 1888, S. 359—362.
19. v. MEZYNSKI : Prisma zum Abstecken rechter und gestreckter Winkel. Allg. Verm. Nachr. 1903. S. 324—325.
20. JORDAN : Die Prismentrommel von Steinheil. Zeitschr. f. Vermessungsw. 1893. S. 52—54.
21. LORBER : Über das neue Prismenkreuz von Starke & Kammerer. Zeitschr. f. Instrumkde. 1888. S. 283—286.
22. SCHELLENS : Über die Zentrierung des Strahlenknotenpunktes beim Bauernfeind'schen Prisma und die Anwendung auf das Doppelprisma. Zeitschr. f. Vermess.-wes. 1906. S. 457—463.
23. BOHN : Ein neues Prismenkreuz. Zeitschr. f. Instrumkde. 1889. S. 62—64.

24. HOHENNER: Über das »Kreuzvisier Hensoldt Modell 1924« und den regelmässigen Fehler einiger neueren Winkelprismen. *Allg. Vermess. Nachr.* 1926. S. 244—247.
25. DOLEŽAL: Über das Pentagonalprisma und seine Verwendung. *Österr. Zeitschr. f. Vermess.-wes.* 1908. S. 370—378.
26. HAMMER: Winkelprismen von Hensoldt für 90° , 180° und 45° . *Zeitschr. f. Instrumkde.* 1898. S. 22.
27. VOGLER: Über die beste Form vier- und fünfseitiger Winkelprismen. *Der Civilingenieur.* 1876. S. 271—295.
28. GRÜNERT: Ein neues Doppelprisma. *Zeitschr. f. Vermess.-wes.* 1918. S. 128—129.
29. SAMEL: Über Winkelprismen. *Allg. Vermess. Nachr.* 1926. S. 425—431.
30. PORONYI: A Kondér-féle négyes szögprizma. (Das Kondérsche vierseitige Winkelprisma) A Magy. Állami Földmérés Közleményei 1949. S. 136—137.
31. LAUMEYER: Winkelprismen und ihre Schlifffehler. Bonn 1937.
32. LORBER: Über die Genauigkeit der Instrumente zum Abstecken von rechten Winkeln. *Zeitschr. f. Instrumkde.* 1888. S. 381—388. u. 412—419.
33. HRDLÍČKA—BLUMOVÁ: Pravoúhlý vytyčovací hranol. *Zeměměřičtvi.* 1951. S. 18—21.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Studie leitet die möglichen Arten der in der Geodäsie verwendeten Winkelprismen systematisch her. Der spiegelnde Winkel der mit doppeltreflektierendem Lichtstrahl arbeitenden Winkelprismen beträgt die Hälfte des abzusteckenden Winkels, während der Brechungswinkel mit dem abzusteckenden bzw. dem Supplementärwinkel übereinstimmt. Bei dieser Gebundenheit gibt es zum Abstecken von Winkeln von 90° , 45° und 180° eine ganze Reihe von Winkelprismen, unter denen sich auch solche befinden, die bisher im Fachschrifttum nicht besprochen wurden. (z. B. in den Bildern 5, 8, 11, 12).

Das Alinement und die Absteckung des rechten Winkels ohne Hilfspunkt kann anstatt mit Doppelprismen auch mit einem einfachen Winkelprisma bewerkstelligt werden. Die Bilder 27, 28, 29, 32, 33, 34 und 35 zeigen dafür neue Lösungen.

Neben dem Alinement und der Absteckung des rechten Winkels geben die Bilder 37, 38, 39, 40, 41, 42 und 43 neue Lösungen zum Abstecken von doppelseitigen Winkeln von 45° an.

ON ANGLE PRISMS USED IN SURVEYING

A. TÁRCZY-HORNOCH

SUMMARY

Possible types of angle prisms used in surveying are expounded in a system. The angle of reflection of angle prisms operating with double-reflected light is half of the angle to be laid out, its angle of refraction is, on the other hand, equal to the angle to be laid out or to its supplemental angle. With this limitation quite a number of angle prisms are found to lay out angles of 90° , 45° and 180° , among them such as have not yet been dealt with in literature. (Par example those in Figs. 5, 8, 11, 12).

Alinement and layout of right angles can be executed, instead of double-prisms, with one prism too. New solution of this are presented in Figs. 27, 28, 29, 32, 33, 34 and 35.

Besides alinement and the layout of right angles new solutions of the layout of bilateral angles of 45° are shown in Figs. 37, 38, 39, 40, 41, 42 and 43.

SUR LES ÉQUERRES PRISMATIQUES UTILISÉES EN GÉODÉSIE

A. TÁRCZY-HORNOCH

RÉSUMÉ

L'étude déduit les types possibles d'équerres prismatiques utilisées en géodésie. L'angle de réflexion des prismes aux rayons doublement réfléchis est la moitié de l'angle à tracer, d'autre part, leur angle de réfraction est égal à l'angle à tracer ou à son supplément. Avec cette restriction, on a toute une série d'équerres à prismes pour tracer des angles de 90° , de 45° et de 180° ; dont plusieurs n'ont pas encore été traitées en littérature. (Par exemple celles des figs. 5, 8, 11, 12.)

On peut exécuter l'alignement et le traçage d'angles droits avec un prisme au lieu de prismes doubles, sans points auxiliaires. Sur ce point, des solutions nouvelles sont présentées sur les figs. 27, 28, 29, 32, 33, 34 et 35.

En plus de l'alignement et du traçage d'angles droits, les figs. 37, 38, 39, 40, 41, 42 et 43 donnent des solutions nouvelles pour le traçage d'angles de 45° bilatéraux.

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ УГЛОМЕРНЫХ ПРИЗМАХ

А. ТАРЦИ-ГОРНОХ

РЕЗЮМЕ

Систематизируются возможные виды угломерных призм, используемых в геодезии. Угол отражения угломерных призм, работающих с двукратно преломленным световым лучом, составляет половину разбиваемого угла, а угол преломления равен разбиваемому углу, т. е. суплементу углу. При этих ограничениях для разбивки углов в 90° , 45° и 180° получается целый ряд угломерных призм, а среди них таких, которые до сих пор не фигурировали в технической литературе. (См. рис. 1а, 5, 8, 11, 12).

Установку на прямую и разбивку прямого угла можно выполнить и без репера вместо спаренных угломерных призм — одной угломерной призмой. Новые решения приводятся на рис. 27, 28, 29, 32, 33, 34 и 35.

Наряду с установкой на прямую и разбивкой прямого угла даются новые решения для разбивки угла 45° на рис. 37, 38, 39, 40, 41, 42 и 43.

PURE BENDING OF LATTICE TRUSSES WITH PARALLEL CHORDS

Prof. P. CSONKA
D. ENG. SC.

DEPARTMENT FOR STRUCTURAL ANALYSIS, UNIVERSITY FOR BUILDING SCIENCES AND COMMUNICATIONS,
BUDAPEST

[Manuscript received January 12, 1957]

1. Introduction

The flexure problem of the truss with parallel chords and a lattice system similar to that presented in Fig. 1., is being dealt with. The truss to be investigated has chords of uniform cross-section, its lattices are distributed in a uniform gridwork, are of uniform cross-section, but inclined in two opposite senses. Such truss is, for instance, the pinned truss used in timber constructions, with web built up of series of boards arranged in two or more layers, inclined in opposite senses.

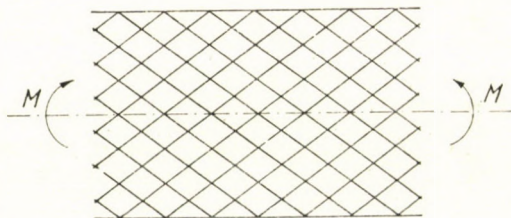


Fig. 1. Lattice truss with parallel chords

The afore-mentioned trusses are statically highly indeterminate, wherefore their analysis meets substantial mathematical difficulties. In view of these difficulties this analysis is restricted to the investigation of *pure bending* instead of that of the general case of flexure. In this simple case external forces attack truss ends only, their resultants form on both truss ends couples acting in planes parallel to the plane of the girder. Forces are distributed on truss ends in a way that under their effect bars of equal position suffer equal deformations.

2. Assumptions. Notation

It is stipulated that the gridwork of the truss be symmetrical to the middle axis of the truss, and that lattice bars of opposite inclination meet the chords at common joints. The longitudinal middle axis of the truss will be called its

axis of strength, sections passing through the joints perpendicularly to this axis will be called *cross-sections*.

Geometrical data of the gridwork are denoted according to Fig. 2. Joints of lattice bars are numbered from top downward from $i = -k$ to $i = +k$ by serial numbers. The serial number of joints falling into the middle axis is $i = 0$.

For shape, material qualities and the degree of deformation of the bars the routine assumptions of the Strength of Materials are considered as valid. The dead weight of bars and deformations due to shear are disregarded.

The modulus of elasticity of the material of the bars is denoted by E , the cross-sectional areas of the chord- and of the lattice-bars by F_0 and F , respectively,

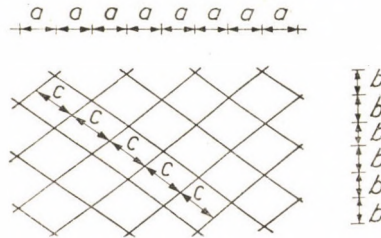


Fig. 2. Geometry of gridwork

the moments of inertia of the cross-sections of F_0 and F with respect to the axis at right angle to the plane of the truss by J_0 and J .

The examination is extended only to the determination of the interior forces generated by the loading and to the deformation produced. The problem of stability of the state of equilibrium is not dealt with.

In the course of investigations two different cases are distinguished according to whether the bars are built up of independent sections extending from joint to joint, or whether they are continuous. In the first case the connections are considered as hinged, in the second case as rigid-jointed.

3. Bars built up of sections independent from joint to joint. Joints are hinged

In this case a statically indeterminate truss is dealt with in the bars of which only normal forces arise under the effect of loading. For the determination of interior forces start is made from a simple deformation *geometrically* possible. The aim is to determine what value is to be attributed to the free parameter describing this deformation, if this deformation has to be made possible from the *statical* point of view too.

The interior forces

Let the investigation be executed on one section of the truss bounded at the top by a sectional plane passing along the axis of the truss and perpendicular to its plane, laterally by two contiguous cross-sectional planes. Suppose

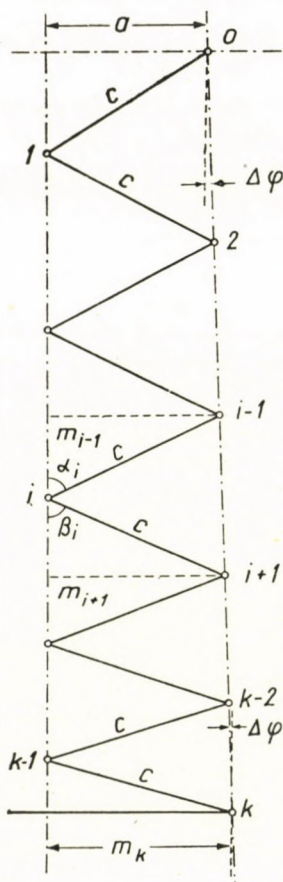


Fig. 3. The examined truss section after deformation

that the length of lattice bars, and the distance of points on the axis of strength, do not change in the course of deformation, while cross-sections of the truss remain plane after deformation too. In this case the deformation of the examined truss section takes place according to Fig. 3.

In the case at hand from the figure may be read

$$m_k \cong a \left(1 + k \frac{b}{a} \Delta\varphi \right),$$

therefore the unit elongation of the bottom chord bar,

$$\varepsilon_0 = k \frac{b}{a} \Delta\varphi,$$

and the tensional force arising in the bottom chord bar

$$N_0 = \frac{kbE}{a} F_0 \Delta\varphi. \quad (1)$$

In the top chord a compressive force, opposite to the pull acting in the bottom chord, is produced.

Since lattice bars do not suffer changes of length, normal forces in them are of zero value.

Examination of equilibrium

The problem of the equilibrium of joints has first to be examined. This is a very simple investigation, for the lattice bars do not exert any forces either on intermediate or to marginal joints. The equilibrium of intermediate joints

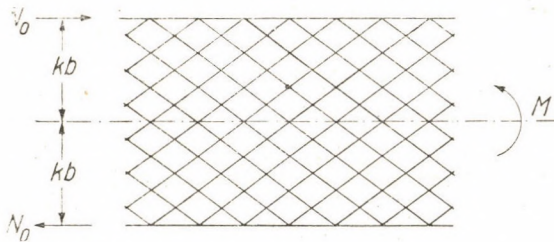


Fig. 4. Interior and exterior forces

is thus secured beforehand, and the same may be said of joints of the chords, the two chord bar forces acting on the same joint being opposite to each other.

Now it has to be found only what angular rotation $\Delta\varphi$ comes about between two neighbouring cross-sections under the effect of moment couple M . From Fig. 4 may be read

$$M = 2kbN_0.$$

The value (1) of force N_0 substituted into this formula

$$M = 2k^2b^2E F_0 \frac{\Delta\varphi}{a}.$$

Hence

$$\Delta\varphi = \frac{aM}{EJ^*}, \quad (2)$$

where

$$EJ^* = 2k^2b^2EF_0 \quad (3)$$

is the *bending stiffness* of the truss.

Thereby it has been proved that the supposed geometrically possible deformation is also statically possible, provided that the value of $\Delta\varphi$ is chosen in conformity with formula (2).

4. Bars are continuous, rigid-jointed

In this case the structure dealt with is strictly speaking no more a braced truss but a framework the grid of which is alike to that of the afore-treated lattice trusses. For the solution of the problem start will be made again from a *geometrically* possible simple deformation, and it will be proved that with proper choice of free parameters the deformation will satisfy the *statical* requirements too.

The interior forces

The investigations are executed on a section of the truss bounded (on the top) by a sectional plane passing along the axis of the truss at right angle to its plane, laterally by two neighbouring cross-sectional planes. As a trial it will be supposed that the cross-sections of the truss keep their original plane state and the joints arrange themselves after deformation in a way indicated on Fig. 5. According to the supposed deformation the unit change of length of lattice bars is proportional to the distance of their centre point from the axis of strength of the truss. Of geometric data inscribed in the figure values of ε and of $\Delta\varphi$ may for the time being be chosen at will.

On the basis of simple geometric relations that can be read from Fig. 5,

$$m_i \cong a \left(1 + i \frac{b}{a} \Delta\varphi \right), \quad (4)$$

$$m_k \cong a \left(1 + k \frac{b}{a} \Delta\varphi \right). \quad (5)$$

Angles included between the oblique bars and the cross-sectional planes are also calculable at once

$$\sin \alpha_i = \frac{m_{i-1}}{c \left(1 + \frac{2i-1}{2} \varepsilon \right)},$$

$$\cos \alpha_i = (1 - \sin^2 \alpha_i)^{1/2}.$$

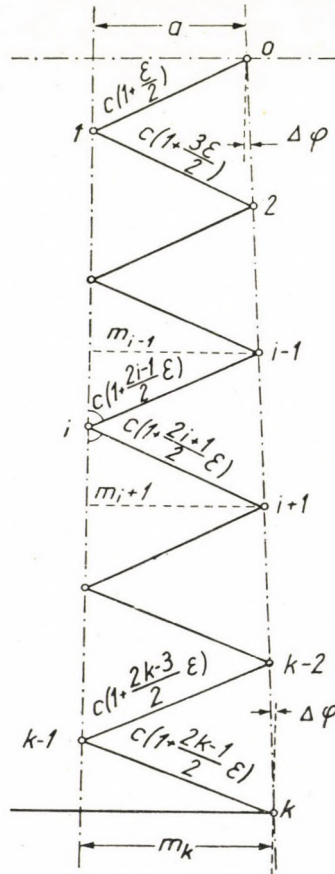


Fig. 5. Relative position after deformation of joints of the truss section investigated

Known values substituted, with consideration of $\Delta\varphi$ and ε being small compared with unity, it is found that

$$\sin \alpha_i = \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \left[(i-1) \frac{b}{a} \Delta\varphi - \frac{2i-1}{2} \varepsilon \right],$$

$$\cos \alpha_i = \frac{b}{c} - \frac{a^2}{bc} \left[(i-1) \frac{b}{a} \Delta\varphi - \frac{2i-1}{2} \varepsilon \right].$$

Thus the increment of angle α_i in comparison with the original angle α

$$\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha \cong \sin(\alpha_i - \alpha) = \frac{b}{c} \sin \alpha_i - \frac{a}{c} \cos \alpha_i,$$

that is, with consideration of the previous values,

$$\Delta\alpha_i = \frac{a}{b} \left[(i-1) \frac{b}{a} \Delta\varphi - \frac{2i-1}{2} \varepsilon \right]. \tag{6}$$

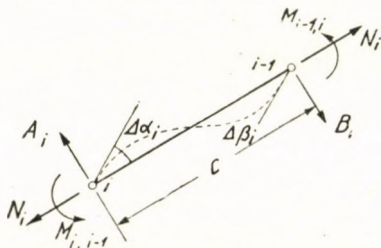


Fig. 6. Forces acting on lattice bar section between joints i and $(i-1)$.

With knowledge of $\Delta\alpha_i$ the increment of angle β_i as compared with the original angle β can also be given at once. Namely according to Fig. 5.

$$\Delta\beta_i = \Delta\alpha_i + \Delta\varphi,$$

so that

$$\Delta\beta_i = \frac{a}{b} \left[i \frac{b}{a} \Delta\varphi - \frac{2i-1}{2} \varepsilon \right]. \tag{7}$$

According to the assumption the bars are rigid-jointed, that is, the angles α and β included between the tangents of the bar axes at the joints and the cross-sectional planes can not change in the course of deformation. This stipulation means that on bar section $i, i-1$ the tangents to the axis lines at the joints have to be rotated in relation to the chord connecting the joints by angles $\Delta\alpha_i$ and $\Delta\beta_i$ respectively Fig. 6. Moments of the couples producing these angular rotations

$$M_{i,i-1} = \frac{2aEJ}{bc} \left[(3i-2) \frac{b}{a} \Delta\varphi - \frac{6i-3}{2} \varepsilon \right], \tag{6}$$

$$M_{i-1,i} = \frac{2aEJ}{bc} \left[(3i-1) \frac{b}{a} \Delta\varphi - \frac{6i-3}{2} \varepsilon \right], \tag{7}$$

and the corresponding reactions

$$A_i = B_i = (2i - 1) \frac{6aEJ}{bc^2} \left(\frac{b}{a} \Delta\varphi - \varepsilon \right). \quad (8)$$

Besides the above efforts normal forces are also acting on the bar section examined. Their value

$$N_i = \frac{2i - 1}{2} EF \varepsilon. \quad (9)$$

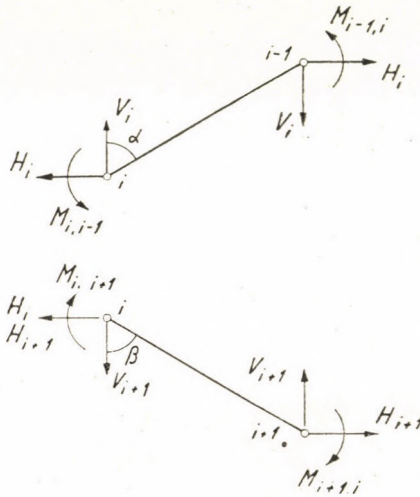


Fig. 7. Forces acting on bar sections i , $i - 1$ and i , $i + 1$

In the following will be sought still the vertical and horizontal components of forces acting on the arbitrary i -th joint as well as the moments of couples acting on bar ends converging in the i -th joint. The values of these are at the i -th joint of bar i , $i - 1$ (Fig. 7a)

$$\left. \begin{aligned} H_i &= (2i - 1) \left[\frac{6bEJ}{c^3} \Delta\varphi + \left(\frac{aEF}{2c} - \frac{6aEJ}{c^3} \right) \varepsilon \right] \\ V_i &= (2i - 1) \left[\frac{6aEJ}{c^3} \Delta\varphi - \left(\frac{bEF}{2c} + \frac{6a^2EJ}{bc^3} \right) \varepsilon \right] \\ M_{i,i-1} &= \frac{2aEJ}{bc} \left[(3i - 2) \frac{b}{a} \Delta\varphi - \frac{6i - 3}{2} \varepsilon \right] \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

and at the i -th joint of bar i , $i + 1$ (Fig. 7b)

$$\left. \begin{aligned} H_{i+1} &= (2i + 1) \left[\frac{6bEJ}{c^3} \Delta\varphi + \left(\frac{aEF}{2c} - \frac{6aEJ}{c^3} \right) \varepsilon \right] \\ V_{i+1} &= (2i + 1) \left[\frac{6aEJ}{c^3} \Delta\varphi - \left(\frac{bEF}{2c} + \frac{6a^2EJ}{bc^3} \right) \varepsilon \right] \\ M_{i+1,i} &= \frac{2aEJ}{bc} \left[(3i + 2) \frac{b}{a} \Delta\varphi - \frac{6i + 3}{2} \varepsilon \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

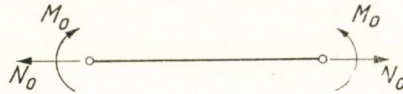


Fig. 8. Forces acting on the bottom chord bar

Finally, normal force N_0 acting on the bottom chord bar and moment M_0 of the bending couple acting on the bottom chord bar have to be determined (Fig. 8). The values of these are :

$$N_0 = \frac{mk - a}{a} EF_0 = \frac{kbEF_0}{a} \Delta\varphi, \quad (12)$$

$$M_0 = \frac{EJ_0}{a} \Delta\varphi. \quad (13)$$

In the top chord bar the normal force is the opposite of that acting in the bottom chord bar, while the bending moment is identical to the bending moment in the bottom chord bar.

Examination of equilibrium

Equilibrium conditions of joints will first be dealt with. On this occasion — because of the existing symmetry — it is sufficient to consider vertical force components only. The sum of these — whether the question is that of extreme or of intermediate joints — will always vanish if

$$\frac{6aEJ}{c^3} \Delta\varphi - \left(\frac{bEF}{2c} + \frac{6a^2EJ}{bc^3} \right) \varepsilon = 0,$$

or if

$$\varepsilon = \frac{12abJ}{b^2c^2F + 12a^2J} \Delta\varphi. \quad (14)$$

Now only the value of $\Delta\varphi$ will have to be determined and in a way that the sum of moments of couples acting on the cross-section balance the given moment M of exterior forces. This calculation will be executed in connection with Fig. 9. Of quantities figuring here the values of N_0 and M_0 are known from before, and the values of force N_i^* and of couple M_i^*

$$N_i^* = H_{i,i+1} + H_{i,i-1},$$

$$M_i^* = M_{i,i+1} - M_{i,i-1}.$$

The above quantities may be written with consideration of (10) and (11) thus :

$$N_i^* = 4i \left[\frac{6bEJ}{c^3} \Delta\varphi + \left(\frac{aEF}{2c} - \frac{6aEJ}{c^3} \right) \varepsilon \right],$$

$$M_i^* = \frac{2aEJ}{bc} \left(\frac{4b}{a} \Delta\varphi - 3\varepsilon \right).$$

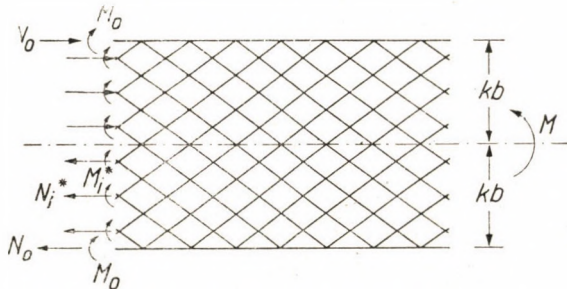


Fig. 9. Interior and exterior forces

Herefrom by substitution of (14) the formulas

$$N_i^* = inEF \Delta\varphi, \quad (15)$$

$$M_i^* = mEJ \frac{\Delta\varphi}{a} \quad (16)$$

are obtained, where

$$n \equiv \frac{24bcJ}{b^2c^2F + 12a^2J}, \quad (17)$$

$$m \equiv \frac{b^2c^2F + 3a^2J}{b^2c^2F + 12a^2J}. \quad (18)$$

Hereafter the way may be taken to the calculation of bending moment M . If k is an even number

$$M = 2M_0 + 2kbN_0 + kM_i^* + \\ + 2b[N_1^* + 3N_3^* + \dots + (k-1)N_{k-1}^*],$$

or with consideration of (12), (13), (15) and (16)

$$M = \frac{2 EJ_0}{a} \Delta\varphi + \frac{2 k^2 b^2 EF_0}{a} \Delta\varphi + \frac{k m EJ}{a} \Delta\varphi + 2 b [1^2 + 3^2 + \dots + (k-1)^2] n EF \Delta\varphi. \quad (19)$$

If, on the other hand k is an odd number,

$$M = 2 M_0 + 2 k b N_0 + k M_i^* + 2 b [2 N_2^* + 4 N_4^* + \dots + (k-1) N_{k-1}^*],$$

or

$$M = \frac{2 EJ_0}{a} \Delta\varphi + \frac{2 k^2 b^2 EF_0}{a} \Delta\varphi + \frac{k m EJ}{a} \Delta\varphi + 2 b [2^2 + 4^2 + \dots + (k-1)^2] n EF \Delta\varphi. \quad (20)$$

The sum of the series figuring in brackets of formulas (19) and (20) is

$$\frac{k}{6} (k^2 - 1),$$

and thus whether k is an even or an odd number

$$\Delta\varphi = \frac{a M}{EJ^*}, \quad (21)$$

where

$$EJ^* = E \left[2 J_0 + 2 k^2 b^2 F_0 + k m J + \frac{k (k^2 - 1)}{3} a b n F \right]. \quad (22)$$

The latter quantity expresses the *bending stiffness* of the truss.

The comparison of formulas (3) and (22) leads to the statement that the bending stiffness of the truss was in the case treated under 4 greater than in that under 3. Accordingly, the chords are in the case 4 much less stressed under the effect of exterior forces than in the case investigated under 3. Therefore lattice trusses with parallel chords, if the continuity of bare and the rigidity of their joints are secured, are preferably calculated as frameworks instead of trussed girders.

SUMMARY

This paper deals with pure bending of lattice trusses with parallel chords. A basic assumption of treatment is that the truss is symmetrical in reference to the axis of strength, the distances of lacings are equal, and bars of the same assignment are of equal cross-sectional area. Two cases are distinguished: whether the bars consist of independent sections from joint to joint, or they are continuous. In the first case connections are considered as hinged, in the latter case as rigid-jointed.

The paper makes its start from simple deformation geometrically possible. The free parameters characterizing these deformations are determined so that the interior forces corresponding to the supposed deformations also satisfy conditions of equilibrium.

It is demonstrated that the lattice trusses with parallel chords are preferably calculated instead of the theory of trussed girders by the theory of frameworks, provided that the continuity of bars and the rigidity of their joints are secured.

REINE BIEGUNG ENGMASCHIGER FACHWERKTRÄGER MIT PARALLELEN GURTEN

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz befasst sich mit der reinen Biegung engmaschiger Fachwerkträger mit parallelen Gurten. Die grundsätzliche Bedingung der Behandlung ist, dass der Träger in Bezug auf seine Achse symmetrisch ist, der Abstand der Füllungsstäbe gleichbleibend und die Stäbe derselben Bestimmung gleichen Querschnittes sind. Es werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem die Füllungsstäbe aus selbständigen Abschnitten von Knotenpunkt zu Knotenpunkt bestehen, oder aber durchlaufend ausgebildet sind. Im ersten Falle sind die Verbindungen gelenkig, im zweiten Falle werden sie als ecksteif betrachtet.

Die Behandlung nimmt ihren Ausgang aus geometrisch möglichen einfachen Formänderungen. Die diese Verformungen charakterisierenden freien Parameter werden durch die Annahme bestimmt, dass die den angenommenen Verformungen entsprechenden inneren Kräfte auch die Gleichgewichtsbestimmungen erfüllen.

Es wird bewiesen, dass sich die Berechnung engmaschiger Fachwerkträger mit parallelen Gurten anstatt der Theorie der Fachwerkträger zweckmässiger nach der Rahmentheorie durchführen lässt, vorausgesetzt dass die kontinuierliche Ausbildung der Stäbe und die Ecksteifheit der Verbindungen gesichert sind.

FLEXION SIMPLE DES POUTRES PARALLÈLES À TREILLIS MULTIPLES

P. CSONKA

RÉSUMÉ

Cette étude traite de la flexion simple des poutres parallèles à treillis multiples. L'auteur part de supposition que la poutre est symétrique par rapport à l'axe de résistance, que les mailles du grillage sont égales, et que les barres de même service ont les mêmes sections transversales. L'étude distingue deux cas, selon que les poutres comportent des sections indépendantes de joint à joint, ou bien sont continues. Dans les premier cas, les joints sont articulés, dans le second ils sont regardés comme rigides.

L'étude prend son départ de déformations simples, géométriquement possibles. Les paramètres libres caractérisant ces déformations sont déterminés de sorte que les forces intérieures correspondant aux déformations supposées satisfassent aussi à la condition d'équilibre.

L'étude démontre qu'il est utile d'effectuer le calcul des poutres parallèles à treillis multiples selon la théorie d'ossatures, au lieu de la théorie de poutres à treillis, à condition que la continuité des barres et la rigidité des joints soient assurées.

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ МНОГОКРАТНО-РЕШЕТЧАТЫХ БАЛОК
С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЯСАМИ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Данная работа посвящена чистому изгибу балок с многократной обрешеткой и параллельными поясами. Основное условие рассмотрения предмета заключается в том, что балка в отношении оси прочности представляет собою симметричную конструкцию, расстояние между стержнями обрешетки — неизменно, стержни же, играющие идентичную роль, по сечению идентичны. В работе рассматриваются два случая в зависимости от того, что стержни состоят ли из самостоятельных участков, охватывающих части от узла до узла, или же является непрерывным. В первом случае соединения являются шарнирными, а во втором случае принимаются в качестве жестких для углов.

Работа исходит из геометрически возможных простых деформаций. Свободные параметры, характеризующие эти деформации, определяются с таким расчетом, чтобы внутренние силы, соответствующие предположенным деформациям, удовлетворяли также условия равновесия.

В работе показана, что расчет балок с многократной обрешеткой и параллельными поясами вместо теории решетчатых балок целесообразно производить по теории рам, предполагая, что непрерывность стержней и их жесткое соединение на углах обеспечены.

EINE NEUE BERECHNUNGSMETHODE FÜR KOMPLIZIERTE, STARK GESÄTTIGTE MAGNETISCHE KREISE

Prof. O. BENEDIKT

KORRESPONDIERENDES MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR SPEZIELLE ELEKTRISCHE MASCHINEN DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 3. April 1957]

Im folgenden berichtet der Verfasser von einer neuen, von ihm nomographisch genannten Berechnungsmethode [1].

Diese nomographische Methode dient zur schnellen und dabei genauen Berechnung von stark gesättigten und komplizierten magnetischen Kreisen von elektrischen Maschinen und Apparaten und ermöglicht die Lösung vieler, bisher für unlösbar gehaltenen, praktisch wichtiger Aufgaben.

Es entsteht zunächst die Frage: Welche Schwierigkeiten treten bei der Berechnung von gesättigten, verwickelten magnetischen Kreisen auf?

Bei der Berechnung von elektrischen Stromkreisen kann im allgemeinen vorausgesetzt werden, dass zwischen den elektrischen Potentialdifferenzen und der Stromdichte linearer Zusammenhang besteht, was die Lösung der folgenden drei grundlegenden Aufgaben in ausserordentlicher Weise vereinfacht:

1. Im Falle von gegebenen Widerständen und Strömen ist die Verteilung des elektrischen Potentials zu bestimmen.
2. Bei gegebenen Spannungen und Widerständen ist die Grösse und die Verteilung der hervorgerufenen elektrischen Ströme zu bestimmen.
3. Bei gegebenen elektrischen Potentialdifferenzen sind derartige Abmessungen und Formen der Widerstände zu bestimmen, bei denen der Strom eine bestimmte Grösse annimmt.

Bei der Berechnung von stark gesättigten magnetischen Kreisen ergibt sich ein vollkommen verschiedenes Bild, da zwischen der magnetischen Induktion und der Feldstärke ein komplizierter, nichtlinearer Zusammenhang besteht.

Untersuchen wir zum Beispiel jenen verhältnismässig einfachen Fall der magnetischen Berechnungen, wo der keilförmige ferromagnetische Körper nach Abb. 1 von einem magnetischen Fluss Φ durchflossen wird, dessen Betrag in jedem Querschnitt des Körpers gleich gross ist.

Wenn U die magnetische Potentialdifferenz — weiterhin einfach Spannung genannt — zwischen dem kleinsten und grössten Querschnitt des Körpers ist,

so gilt offenbar die folgende Gleichung :

$$U = \int_{x=0}^{x=h} H_x dx = \int_0^h f(B_x) dx = \int_0^h f\left(\frac{\Phi}{b_x l}\right) dx. \quad (1)$$

Hierbei bedeuten :

l — die Länge des Körpers,

h — die Höhe des Körpers,

b_x — die Breite des in der Höhe x befindlichen Querschnittes des Körpers.

$$H_x = f\left(\frac{\Phi}{b_x l}\right) \quad (2)$$

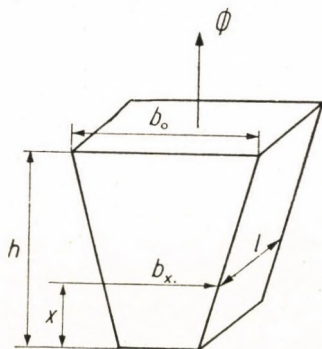


Abb. 1

st die magnetische Feldstärke, welche ihrerseits eine komplizierte Funktion der magnetischen Induktion $B_x = \frac{\Phi}{b_x l}$ ist. (3)

Wenn wir das Verhältnis $\frac{U}{\Phi}$ den magnetischen Widerstand des gegebenen Körpers nennen, dann zeigt die Formel (1) augenfällig, wie schwer es ist den Wert dieses Widerstandes zu berechnen, selbst in dem gegebenen sehr einfachen Fall. Es sind hier solche Größen zu integrieren, deren Abhängigkeit von x nicht analytisch ausgedrückt werden kann. Es bleibt nur ein Weg, nämlich die numerische Integration, was jedoch langwierige Berechnungen erfordert.





Allerdings ist die Meinung verbreitet, wonach in den bei elektrischen Maschinen praktisch vorkommenden Fällen es genügt, H_x und B_x für vier Querschnitte zu bestimmen und vorausgesetzt werden kann, dass die Feldstärke in jedem Abschnitt sich linear mit der Höhe verändert.

RICHTER [2] seinerseits vertritt die Ansicht, dass die wahre Verteilung der Feldstärke H_x durch eine Parabel zweiten Grades ersetzt werden kann und

dass es genügt, H_x und B_x für nur drei Querschnitte zu bestimmen und dann die Werte von U nach der SIMPSONSchen Regel zu berechnen.

Um die Richtigkeit diesen zwei international üblichen Berechnungsverfahren zu überprüfen, habe ich die folgenden Berechnungen durchgeführt: für die in Tafel I dargestellten ferromagnetischen Körper von verschiedener

Tafel I

	α	$H_{z\max}$	I. Methode	II. Methode	Genaue Methode
1	2	3	4	5	6
	0,66	1130	834	867	681
	0,66	1130	700	726	435
	0,4	2250	1161	1194	543
	0,4	2250	1143	1146	306

Gestalt und verschiedener magnetischer Beanspruchung wurde mit den erwähnten zwei Methoden die in ihnen hervorgerufene Spannung U berechnet. Die Ergebnisse sind in Spalte 4 und Spalte 5 angeführt. Diese Ergebnisse wurden mit den wahren Werten von U verglichen, welche wir so erhielten, dass die Zahl der Querschnitte für welche die Grösse der Induktion und der Feldstärke berechnet werden müssen, bis zu jener Grenze vergrössert wurde, bei welcher eine weitere Erhöhung der Anzahl schon keine wesentliche Änderung des Ergebnisses zur Folge hatte. Diese Ergebnisse, welche schon als ganz genau betrachtet werden können, sind in Spalte 6 angeführt.

Es ist zu ersehen, dass selbst für einen solchen, in der ersten Zeile gekennzeichneten keilförmigen Körper, für welchen das Verhältnis des kleinsten zum grössten Querschnitts α gleich 0,66 ist, d. h. nicht viel kleiner als eins, und noch bei verhältnismässig kleiner magnetischer Belastung, mit einer grössten Feldstärke von etwa 1100 A/cm, die üblichen Verfahren 23% und 27% Fehler ergeben. Beim gleichen Wert von α und bei der gleichen magnetischen Belastung, jedoch im Falle einer anderen, in Zeile 2 angeführten Form des Körpers wachsen die Fehler schon auf 61% und 67% an. Wenn α kleiner ist und die Belastung grösser, so machen bei einem keilförmigen Körper die Fehler bis zu 114% und 120% aus, bei anders geformten Körpern sogar bis zu 273% und 274%.

Wenn wir noch ergänzend erwähnen, dass die in Spalte 6 angeführten genauen Ergebnisse in jedem Fall mittels 22 Rechenoperationen erhalten wurden, so wird klar, dass selbst in den erwähnten allereinfachsten Fällen der magnetischen Berechnungen ausserordentlich langwierige und zeitraubende Arbeit nötig ist, falls wir genaue Resultate erzielen wollen.

Aus dem Gesagten ist ohne weiteres klar, um wieviel verwickelter und langwieriger die Lösung der zweiten grundlegenden Aufgabe ist, nämlich die Ermittlung von Φ zu einer bestimmten Spannung U . Ein beliebiger Fluss Φ muss angenommen werden, auf die oben beschriebene mühselige Weise muss die zugehörige Spannung U ermittelt werden und die Rechnung muss so lange wiederholt werden, bis sich ein Wert von U ergibt, der mit dem angenommenen Wert übereinstimmt. Wenn wir voraussetzen, dass bloss der erste Wert zu klein ist, der zweite bereits zu gross ist, und dass schon die dritte Annahme sich als richtig erweist, so müssen selbst in einem so günstigen Fall ungefähr 60 Rechenoperationen durchgeführt werden, wie aus dem Gesagten zu ersehen ist.

Betrachten wir nun die Frage der Lösung der dritten grundlegenden Aufgabe. Hier handelt es sich um eine derartige Bestimmung der Abmessungen und der Gestalt des magnetischen Körpers, dass der magnetische Widerstand des Körpers dem geforderten Wert entspricht, d. h. dass bei einer gegebenen magnetischen Spannung ein bestimmter Fluss den Körper durchfliesst. Diese Aufgabe hat sich bisher als unlösbar erwiesen, ja dieses Problem wurde, eben wegen seiner Kompliziertheit, meines Wissens noch nicht einmal aufgeworfen.

Auf dem Gebiet der elektrischen Stromkreise kann jedoch eine analoge Aufgabe, nämlich die Bestimmung der Abmessungen eines elektrischen Leiters derart, dass eine gegebene Spannung darin einen gegebenen Strom hervorruft, jeder Student lösen. Darüber hinausgehend, wenn wir eine Abmessung des die Lösung der Aufgabe darstellenden elektrischen Leiters verändern, so können wir mit Hilfe einer einfachen Rechnung auch die anderen Abmessungen derart verändern, dass der Widerstand unverändert bleibt. Diese Aufgabe, nämlich einen Widerstand durch einen anderen zu ersetzen, der eine andere Gestalt hat, jedoch bei einer beliebigen Potentialdifferenz gleichen Widerstand aufweist, kommt auf dem Gebiet der Elektrotechnik häufig vor und kann in einfacher Weise gelöst werden. Die Ersetzung eines magnetischen Körpers von gegebener Gestalt und Grösse durch einen magnetischen Körper von anderer Gestalt und Grösse derart, dass bei einem beliebigen Fluss — ich betone, bei beliebigem Fluss — der magnetische Widerstand der beiden Körper gleich ist, stellt eine Aufgabe dar, die nicht nur bisher unlösbar war, sondern als Problem bisher noch nie formuliert wurde.

Es ist klar, dass auf dem Gebiet der Elektrotechnik die Möglichkeit der Umwandlung eines Widerstandes in einen anderen gleichwertigen Widerstand die Berechnung eines beliebig komplizierten Stromkreises ermöglicht. Demgegenüber hat jedoch die Tatsache, dass auf dem Gebiet der magnetischen Berechnun-

gen die erwähnte Möglichkeit der Umwandlung auf Grund der international üblichen Berechnungsmethode nicht vorhanden war, diese ausser Stande gesetzt, noch verwickeltere Aufgaben zu lösen.

Eine derartige Aufgabe ist zum Beispiel: Ersatz von in Reihe oder parallel geschalteten magnetischen Körpern von verschiedener Gestalt durch einen einzigen, von magnetischem Standpunkt gleichwertigen Körper; weiters der Ersatz von in Serie geschalteten Nuten durch eine resultierende Nut; oder die Bestimmung des Einflusses der Sättigung eines Polschuhes auf die Verteilung der magnetischen Induktion; die Berechnung des infolge der Sättigung entstehenden Querflusses in den Nuten; Bestimmung der genauen Grösse oder des Entstehungsortes der zusätzlichen Verluste, usw.

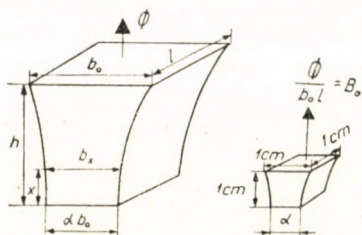


Abb. 2

Eben deswegen hoffe ich, dass eine von mir in der Sowjetunion ausgearbeitete, nomographische Berechnungsmethode auf das Interesse der massgebenden Fachleute zählen kann.

Zuerst möge der Grundgedanke des neuen Verfahrens erörtert werden, sowie seine Anwendung zur Lösung der erwähnten drei grundlegenden Aufgaben.

Die Breite b_x eines beliebigen Querschnitts des auf der linken Seite von Abb. 2 dargestellten Körpers kann offenbar durch die folgende Formel (4) ausgedrückt werden:

$$b_x = b_0 \cdot f_1 \left(\frac{x}{h} \right) \quad (4)$$

wo b_0 die Breite des grössten Querschnitts ist und $f_1 \left(\frac{x}{h} \right)$ eine Funktion von x . Daher ist laut Formel (5)

$$U = \int_0^h f \left(\frac{\Phi}{b_0 l f_1 \left(\frac{x}{h} \right)} \right) dx \quad (5)$$

Wie diese letztere Formel zeigt, hängt die Spannung U einerseits vom Fluss Φ ab, andererseits von den Abmessungen und der geometrischen Gestalt.

Nehmen wir an, dass es gelingen würde, eine Schar von Kurven, wie in Abb. 3, zu konstruieren, wo jede Kurve einem Körper von anderer Form und Gestalt entsprechen würde und für diesen Körper das Verhältnis von Fluss (Abszisse) und Spannung (Ordinate) darstellen würde. Dann könnten wir die erwähnten drei Grundaufgaben der magnetischen Berechnung leicht lösen. In der Tat könnten wir für einen gegebenen Körper, d. h. eine gegebene Kurve, leicht zu einem gegebenen Fluss die entsprechende Spannung feststellen, weiters eben so einfach zu einer gegebenen Spannung die Grösse des Flusses. Sogar die dritte Aufgabe, welche für das übliche Verfahren unlösbar ist, könnten wir ebenso leicht lösen, wäre doch zu einer gegebenen Ordinate und Abszisse sofort

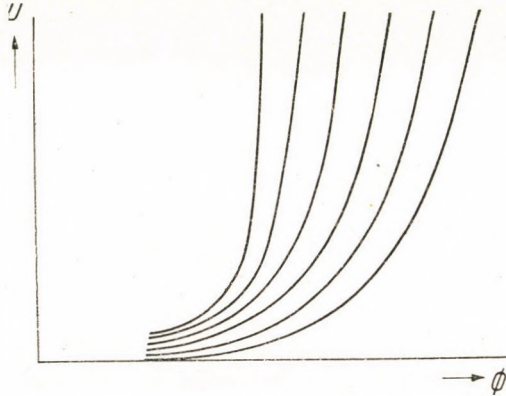


Abb. 3

die entsprechende Kurve zu finden, d. h. die Gestalt und Dimensionen des Körpers.

Die Konstruktion von derartigen Kurven wirft jedoch die folgende Frage auf: damit nur eine Schar von derartigen Kurven benötigt werde, darf die Spannung U ausser vom Flusse Φ nur noch von einem einzigen Wert abhängen.

In der Wirklichkeit jedoch, wie auch Formel (5) zeigt, hängt der Wert von U ausser von Φ noch von b_0, l, h und $f_1\left(\frac{x}{h}\right)$ ab, d. h. von vier beliebigen Parametern.

Diese Schwierigkeit wird dadurch behoben, dass der Begriff des »Einheitskörpers« eingeführt wird.

Die schon erwähnte Formel (5) für den Wert von U kann nämlich wie folgt aufgeschrieben werden:

$$\frac{U}{h} = \int_0^1 f\left(\frac{B_0}{f_1\left(\frac{x}{h}\right)}\right) d\left(\frac{x}{h}\right) \quad (6)$$

Zur Veranschaulichung und Bestimmung dieses Zusammenhanges möge ein gewisser Faktor eingeführt werden. Die Bestimmung dieses im folgenden mit ϱ bezeichneten Faktors werden wir zunächst am Beispiel des in Abb 5. dargestellten keilförmigen Einheitskörpers darlegen.

Nehmen wir an, dass die Induktion sich entlang der Höhe des Körpers gemäss den Abszissen der Kurve 1—2—3 verteilt, welche mit grosser Genauigkeit als Parabel zweiter Ordnung angenommen werden kann. Die Verteilung der zugehörigen Feldstärke zeigt die Kurve 1'—3' der Abb. 6.

Nunmehr stellen wir uns die folgende Aufgabe: Ersetzen wir den gegebenen Einheitskörper durch einen derartigen Körper von anderer Gestalt, in welchem die Induktion vom kleinsten Wert B_0 angefangen nicht gemäss der abgebildeten Kurve 1—2—3 (Abb. 5) ansteigt, sondern gemäss der Geraden 1—4 bis zu einem

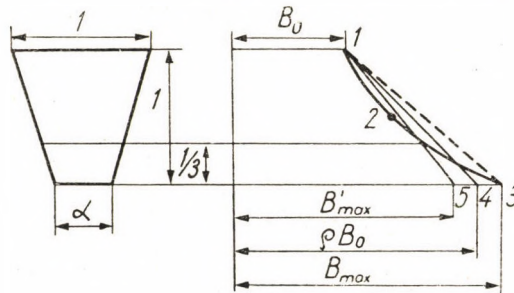


Abb. 5

ϱ -mal grösseren Wert ϱB_0 . Dabei muss jedoch die Grösse von ϱ so bestimmt werden, dass die durchschnittliche Feldstärke die frühere bleibt, obwohl sich selbstverständlich die Feldstärke in diesem Fall in anderer Weise, z. B. gemäss der Kurve 1'—4' (Abb. 6) verteilen wird. Eben deswegen werden wir den neuen Körper einen gleichwertigen Einheitskörper nennen.

Im ersten Augenblick scheint es, als ob es aussergewöhnlich schwer wäre die Gerade 1—4 zu finden und den Wert von ϱ zu berechnen. Ausserdem ist von vornherein klar, dass bei anderen Werten von B_0 und $\frac{U}{h}$ der Wert von ϱ nicht mehr genau gleich dem früheren sein wird. Es kann jedoch gezeigt werden, dass die gesuchte Gerade 1—4 (Abb. 5) bei beliebiger magnetischer Belastung immer zwischen zwei Grenzlagen liegt. Die eine Grenzlage ist die gestrichelt gezeichnete Linie 1—3, die andere ist die Gerade 1—5, welche die Parabel 1—2—3 im Punkt mit der Ordinate $1/3$ schneidet. Ausserdem kann angenommen werden, dass die gesuchte Gerade 1—4 desto näher zur oberen Grenze 1—3 liegt, d. h. dass das Verhältnis des Abschnittes 4—5 zum Abschnitt 3—5 desto näher zur Einheit sein wird, je grösser die Induktion des kleinsten Querschnittes im Ver-

hältnis zu B_0 ist, mit anderen Worten, je grösser ϱ ist. Man kann annehmen, dass einem mittleren Wert von ϱ ein mittlerer Wert des genannten Verhältnisses entspricht, nämlich $1/2$. Auf Grund derartiger Erwägungen erhalten wir für ϱ die folgende Formel, mit deren Hilfe ϱ aus dem bekannten Verhältnis α der Querschnitte leicht berechnet werden kann :

$$\varrho = 1,8 \frac{1 + 7\alpha - 2\alpha^2}{-1 + 7,4\alpha + 4,4\alpha^2} \quad (7)$$

Ich möchte auf die Tatsache aufmerksam machen, dass mit der Einführung der Begriffe des gleichwertigen Einheitskörpers und des den Körper charakterisierenden Faktors ϱ wir bereits einen ausserordentlich grossen Schritt in jener Richtung getan haben, welche dazu führt, dass die Berechnungsverfahren für

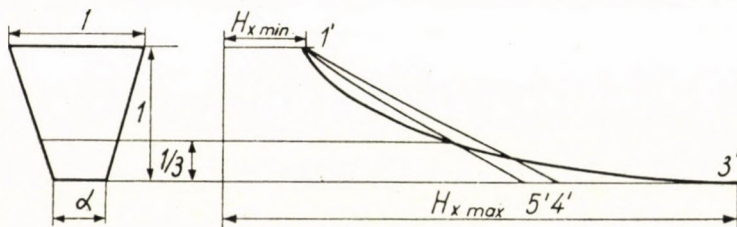


Abb. 6

magnetische Kreise sich in Bezug auf Einfachheit den Berechnungsverfahren der elektrischen Stromkreise nähern.

Was nämlich bis jetzt in so grossem Masse die magnetischen Berechnungen erschwert hat, war die folgende Tatsache : bei der Berechnung der elektrischen Kreise kann der Einfluss der Masse und der Gestalt des Leiters, welche durch den Begriff des elektrischen Widerstands gekennzeichnet wird, praktisch als konstant angenommen werden. Demgegenüber wird der Einfluss der Masse und der Gestalt eines ferromagnetischen Feldes auf die magnetischen Kenngrössen, welcher durch den Begriff des magnetischen Widerstands gekennzeichnet werden kann, bei verschiedenen magnetischen Belastungen verschieden sein.

Da es uns jedoch gelungen ist, den Einheitskörper durch einen anderen gleichwertigen Einheitskörper zu ersetzen, in welchem alles, was sich auf die geometrische Gestalt des Körpers bezieht, durch den Faktor ϱ gekennzeichnet ist, wobei — dies wünsche ich nochmals zu betonen — ϱ nicht von der magnetischen Belastung abhängt, können wir den bisher nur in vollkommen abstrakter Form bestehenden Begriff des magnetischen Widerstands konkretisieren, vermittels der durch ein entsprechendes ϱ gekennzeichneten Kurve, auf welcher für jeden beliebigen Wert von U oder Φ sofort der Wert des magnetischen Widerstandes $\frac{U}{\Phi}$ gefunden werden kann.

Bis jetzt haben wir mit Hilfe der Kurven nur die magnetischen Verhältnisse von keilförmigen Körpern charakterisiert.

Auf ähnliche Weise kann der die geometrische Gestalt charakterisierende Faktor ϱ für den Körper mit konvexer parabolischer Mantelfläche nach Abb. 7, oder den Körper mit konkaver parabolischer Mantelfläche nach Abb. 8 gefunden werden, ferner für solche Formen, welche von Kreisbögen begrenzt werden (Abb. 9), wie z. B. halbgeschlossene Nuten, oder in Eisen vorgesehene Lüftungskanäle, weiters für solche Körper, welche auf der einen Seite von einer konvexen, auf der anderen Seite von einer konkaven Fläche begrenzt werden (Abb. 10), usw.

Auf diese Weise gelingt es, ferromagnetische Einheitskörper von der verschiedensten Gestalt durch einen einzigen, leicht berechenbaren Faktor ϱ zu charakterisieren. Wir haben also erreicht, dass wir den Zusammenhang zwischen der geometrischen Form und den magnetischen Eigenschaften ver-



Abb. 7

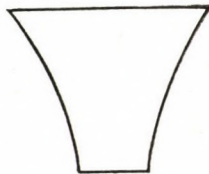


Abb. 8



Abb. 9



Abb. 10

mittels einer einzigen Kurvenschar laut Abb. 4 charakterisieren können, wo die Abszisse die kleinste Induktion B_0 ist, die Ordinate die mittlere Feldstärke $\frac{U}{h}$ und wo jede Kurve einem bestimmten Wert ϱ entspricht. Es möge nochmals die Tatsache betont werden, dass mit Hilfe dieser Kurvenschar nicht nur für gegebene Werte von ϱ und B_0 der Wert von $\frac{U}{h}$ bestimmt werden kann, oder zu gegebenem ϱ und $\frac{U}{h}$ der Wert von B_0 , sondern dass genau so einfach zu gegebenem B_0 und $\frac{U}{h}$ der entsprechende Wert von ϱ gefunden werden kann. Das bedeutet nicht nur, dass wir die auf die Bestimmung der geometrischen Form bezügliche dritte grundlegende Aufgabe gelöst haben, sondern auch, dass irgendein resultierender Wert von ϱ nicht nur für eine bestimmte Form Geltung hat, sondern für viele verschiedene Formen und daher viele verschiedene Varianten der Lösung gibt.

Gehen wir jetzt zur Lösung von noch komplizierteren Aufgaben über. Beginnen wir mit dem Problem der in Reihe geschalteten magnetischen Widerstände.

Auf dem Gebiet der elektrischen Stromkreise gilt der Ersatz von beliebig vielen in Reihe geschalteten Widerständen durch einen einzigen gleichwertigen Widerstand als elementare Aufgabe.

Auf dem Gebiet der magnetischen Berechnungen begegnen wir in der Praxis ebenfalls ausserordentlich oft solchen Fällen, wo Eisenkörper in Bezug auf den magnetischen Fluss in Reihe geschaltet sind.

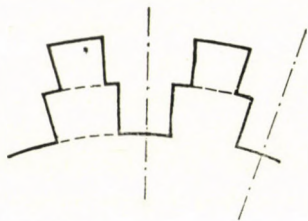


Abb. 11

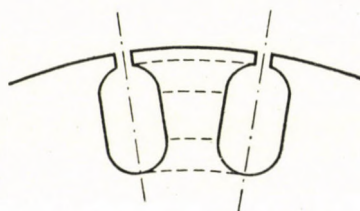


Abb. 12

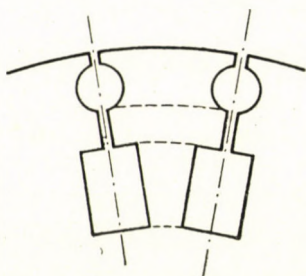


Abb. 13

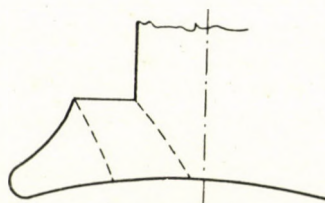


Abb. 14

Z. B. können die in Abb. 11, 12 und 13 dargestellten, in elektrischen Maschinen oft als Zähne vorkommenden ferromagnetischen Körper als aus verschiedenen in Reihe geschalteten Eisenkörpern zusammengesetzt betrachtet werden. Ähnlich ist die Sachlage bei dem in Abb. 14 dargestellten Polschuh. Nichtsdestoweniger war die, der üblichen elektrischen Berechnungsaufgabe entsprechende, magnetische Berechnungsaufgabe bisher nicht lösbar und so kompliziert, dass bis jetzt noch niemand diese Aufgabe auch nur formuliert hat.

Ich denke hier an die folgende Aufgabe :

Ersatz von in Reihe geschalteten ferromagnetischen Körpern von bestimmter Form und Grösse, durch einen einzigen Körper von derartiger Form und Grösse, in welchem nicht nur ein einziger gleichwertiger Fluss Φ , sondern jeder beliebige durch diesen resultierenden Körper fließende Fluss Φ eine ebensolche Spannung U hervorruft wie in den sämtlichen in Reihe geschalteten Körpern zusammengenommen.

In diesem Zusammenhang muss einem eventuell möglichen Missverständnis vorgebeugt werden. Jemand könnte sagen: die erwähnte Aufgabe ist doch längst bekannt, als die Anwendung des Ohmschen Gesetzes auf magnetische Kreise in Form einer einfachen Gleichung, wonach

$$\sum R_m = R_{m_{res}} \quad (8)$$

ist.

Diese Gleichung zeigt in der Tat, dass man sich einen solchen resultierenden magnetischen Widerstand denken kann — ich betone, denken kann — welcher mit der Summe von verschiedenen gegebenen Widerständen gleichwertig ist. Von Übel ist bloss, dass die klassische Theorie nie gezeigt hat, wie dieser fiktive Widerstand zu finden ist, und sich auch nie die Aufgabe gestellt hat, welche Gestalt und Abmessungen dieser Widerstand anzunehmen hat und — was das wichtigste ist — ob überhaupt eine solche Form und solche Abmessungen existieren, für welche die erwähnte Gleichwertigkeit für ein beliebiges U und ein beliebiges Φ besteht.

Mit Hilfe der erwähnten Kurvenschar kann dieses Problem schnell und genau gelöst werden.

Stellen wir uns zwei Körper von verschiedener Gestalt und mit den Höhen h_I und h_{II} vor. Auf Grund der oben erwähnten Formeln können die entsprechenden Werte von Q_I und Q_{II} berechnet werden. Die entsprechenden linearen Verteilungen der Induktion zeigen die Geraden 1—2 und 3—4 in Abb. 15.

Es kann bewiesen werden, dass die Geraden 1—2 und 3—4 durch die Gerade 5—6 ersetzt werden können, d. h. die zwei erwähnten Körper können durch einen einzigen resultierenden Körper von der resultierenden Höhe $h_{r\ s} = h_I + h_{II}$ ersetzt werden, in welchem die Induktion gemäss der Geraden 5—6 vom Wert $B_{0\ r\ s}$ bis zum Wert $Q_{r\ s}$, $B_{0\ r\ s}$ ansteigt derart, dass der zum neuen Körper gehörige Wert von U gleich ist der Summe der zu den beiden Körpern gehörigen Werte U .

Die erwähnten Werte Q_{res} und B_{0res} können in folgender Weise einfach bestimmt werden:

Für einen bestimmten Fluss wird der im ersten Körper hervorgerufene Wert B_{0I} berechnet (Abb. 16) und auf der entsprechenden Kurve Q_I wird der entsprechende Wert von $\frac{U_I}{h_I}$ bestimmt. In ähnlicher Weise wird auf Grund des im zweiten Körper hervorgerufenen Wertes B_{0II} und der entsprechenden Kurve Q_{II} der Wert $\frac{U_{II}}{h_{II}}$ berechnet. Hieraus wird die mittlere Feldstärke $\frac{U_{res}}{h_{res}}$ berechnet. Dieser Wert, als Ordinate, bestimmt auf verschiedenen möglichen Kurven für Q verschiedene Werte von B_{0res} ; dieser Wert ergibt daher nicht nur die Lösung des Problems, sondern unendlich viele mögliche Lösungen, unter denen nach Belieben gewählt werden kann.

Es ist klar, dass dieses Verfahren im wesentlichen immer gleich bleibt, wieviel Widerstände auch immer in Reihe geschaltet sind und durch einen einzigen Körper ersetzt werden müssen. Auf diese Weise kann daher auch in den Bildern 11, 12, 13 und 14 dargestellten Fällen das Problem der Berechnung der magnetischen Verhältnisse in einfacher Weise gelöst werden.

In den bisher untersuchten Fällen können die klassischen Verfahren — wie wir gesehen haben — nicht die schwierigen Probleme bewältigen, welchen

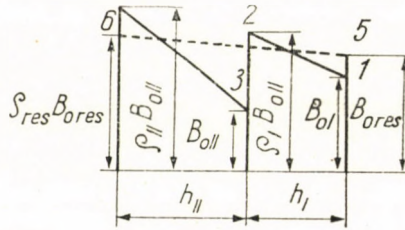


Abb. 15

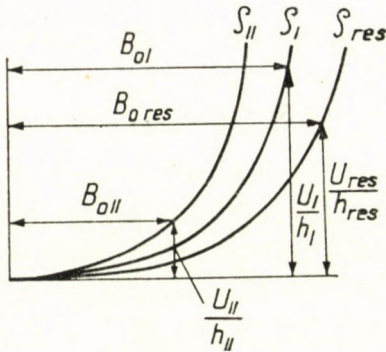


Abb. 16

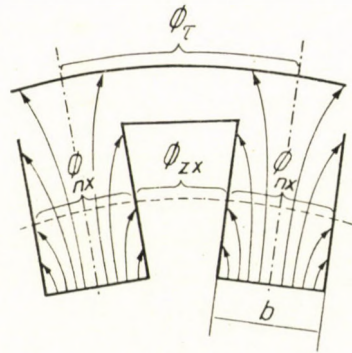


Abb. 17

wir begegnen, obwohl wir der Einfachheit halber angenommen haben, dass die Grösse des Flusses Φ in jedem beliebigen Querschnitt des Eisenkörpers gleich ist, was normaler Weise nicht der Fall ist. Eben deswegen stehen die klassischen Methoden vor noch viel grösseren Schwierigkeiten, wenn auch die Tatsache berücksichtigt werden soll, dass ein gewisser Teil des Flusses einen mit dem Eisen parallel geschalteten nicht ferromagnetischen Raum durchfliesst. Hier tritt die Schwierigkeit auf, dass die genaue Verteilung der beiden Flüsse, nämlich das Verhältnis des Zahnflusses Φ_{zx} zum Nutenfluss Φ_{nx} in der Höhe x im vornhinein nicht bekannt ist.

Das einfachste Beispiel für so einen Fall, wenn von einem keilförmigen Zahn und einer parallelwandigen Nut die Rede ist, zeigt Abb. 17.

Die in Abb. 17 dargestellte Verteilung der Induktion kann durch eine solche gleichwertige, in Abb. 18 dargestellte Verteilung ersetzt werden, bei welcher die Induktion überall gleich ist, nämlich von der Grösse $0,4\pi \frac{U}{h}$. Die Bedingung für die Gleichwertigkeit ist nur, dass die wahre Breite b der Nut mit einem Faktor ζ multipliziert werden muss. Dieser Faktor ist eine Funktion des schon öfters erwähnten Faktors ϱ , welche Zahlentafel II zeigt. Daraus folgt, dass die zusam-

Tafel II

ϱ	ζ
1	1
1,2	1,15
1,4	1,45
1,6	2
1,8	2,6
2	3,2
2,2	3,8
2,4	4,45
2,6	5,2

mengefasste magnetische Wirkung der Nut und des Zahns auf die in Abb. 4 dargestellte Weise folgendermassen berücksichtigt werden kann: Wir bestimmen die zum Faktor ϱ gehörige Kurve ζ , es sei dies z. B. die Kurve OC , und bestimmen den Wert von ζ welcher ϱ entspricht. Das Verhältnis der Nutenbreite zur grössten Zahnbreite multiplizieren wir mit dem Faktor ζ , und aus der in Abb. 4 durch den Ursprung des Koordinatensystems gehenden Geradenschar wählen wir jene aus, deren Tangens diesem Ausdruck entspricht, z. B. die Gerade OD . Dann erhalten wir zu jedem beliebigen gegebenen Wert $\frac{U}{h}$ als Ordinate, sofort den Zahnfluss, den Nutenfluss und den der Zahnteilung entsprechenden Gesamtfluss, als den Abschnitten CL , LM und MC proportionale Werte. Umgekehrt, wenn der Gesamtfluss, d. h. die Grösse der Strecke MC gegeben ist, bekommen wir sofort den Wert $\frac{U}{h}$ als die Ordinate des Punktes C .

Wenn es sich um eine Nut von anderer Gestalt handelt, so gehen wir in gleicher Weise vor, d. h. wir ersetzen sie durch eine solche parallelwandige Nut, deren Abmessungen diejenigen der gegebenen Nut dort am besten annähern, wo die magnetische Belastung am grössten ist.

Auf Grund der bisherigen Ergebnisse können wir die auftauchenden verwickelten Probleme auch in dem — in Abb. 19 dargestellten — Fall lösen, wo

die Maschine nicht nur eine Schicht Zahnnuten hat, sondern zwei solche Schichten auf jeder Seite des Luftspaltes, wie z. B. kompensierte Gleichstrom- oder Wechselstrom-Kommutatormotoren, Asynchronmaschinen, mit Dämpferwindungen versehene Synchronmaschinen, usw.

Wenn in so einem Fall das eine, aus Zahn und Nut bestehende Gebiet mit dem zweiten aus Zahn und Nut bestehenden Gebiet in Reihe geschaltet ist, so können die zwei Zähne auf Grund der im Vorausgehenden entwickelten Methode durch einen einzigen Zahn ersetzt werden. In analoger Weise können

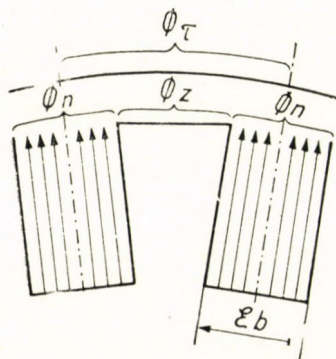


Abb. 18

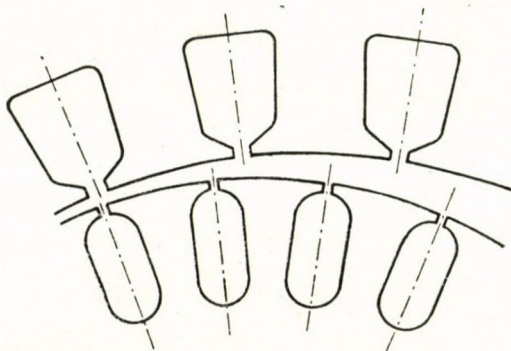


Abb. 19

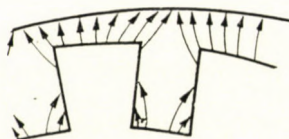


Abb. 20

wir die beiden Nuten durch eine Nut ersetzen und im weiteren gehen wir so vor, als ob wir nur mit einer Zahn-Nuten-Schicht zu tun hätten.

Noch grössere Schwierigkeiten verursacht es vom Standpunkt der klassischen Theorie, wenn der nicht ferromagnetische Raum nicht nur parallel, sondern — in Gestalt eines Luftspaltes — auch in Reihe geschaltet ist, wie dies Abb. 20 zeigt. Bisher haben wir vorausgesetzt, dass wir entweder den Fluss Φ oder die Spannung U im vorhinein kennen. Im Falle des in Reihe geschalteten Luftspaltes wissen wir im allgemeinen jedoch nicht im voraus, wie sich die Spannung der ganzen aktiven Schichte auf den Luftspalt und den Zahn verteilt; wenn ausserdem der Luftspalt nicht gleichförmig ist, so wissen wir im vorhinein auch das nicht, wie sich der Gesamtfluss der Maschine auf die einzelnen Zähne verteilt.

Der klassischen Theorie verursacht der erwähnte Fall besonders grosse Schwierigkeiten dann, wenn auch die magnetisierende Wirkung jener Erregungen

in Betracht gezogen werden muss, welche unter Belastung in den Nuten entstehen.

Diese Aufgaben löst die nomographische Methode in sehr einfacher Weise. Nehmen wir an, dass die magnetische Spannung U_0 zwischen den Punkten A und B (Abb. 21) gegeben ist, und zwar bereits mit Berücksichtigung der an der gegebenen Stelle wirkenden Ankerrückwirkung. Bestimmen wir laut Abb. 4 die dem Faktor ϱ entsprechende Kurve, z. B. die Kurve OC . Berechnen wir weiters den Faktor ζ und bestimmen wir die zu der gegebenen Nutengrösse gehörige Gerade OM . Suchen wir auf letzterer jenen Punkt D auf, welcher zur Ordinate $\frac{U_0}{h}$ hat. Berechnen wir weiters die Abszisse OF so, dass sie zur Grösse des effektiven Luftspaltes umgekehrt proportional ist. Die Gerade DF ,

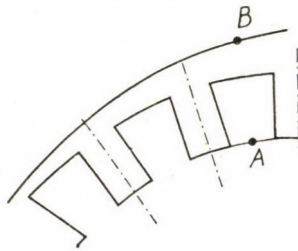


Abb. 21

welche die Punkte D und F verbindet, schneidet die Kurve ϱ in jenem Punkt C , dessen Ordinate die mittlere Zahnfeldstärke $\frac{U}{h}$ darstellt. Die Abschnitte ML , LC und MC ergeben weiters den Nutenfluss, den Zahnfluss und den ganzen Zahn-Nuten-Fluss. Umgekehrt, wenn wir eine Maschine konstruieren und wünschen, an einer gegebenen Stelle eine bestimmte Luftspaltinduktion zu erhalten, d. h. einen gewissen Wert MC , so bestimmen wir mit Bezug auf die zu untersuchende Stelle des Luftspaltes den Punkt C auf der Kurve ϱ derart, dass wir den gewünschten Wert von MC erhalten. Die Gerade DC schneidet die Abszissenachse im Punkte F . Die Abszisse dieses Punktes bestimmt diejenige Grösse des Luftspaltes an der gewünschten Stelle, welche notwendig ist, um der Luftspaltinduktion den gewünschten Wert zu erteilen.

Wie wir sehen, ist es vom Standpunkt der Anwendung des neuen Verfahrens vollkommen gleichgültig, ob der Luftspalt gleichförmig oder nicht gleichförmig ist, weiters auch, ob die Maschine belastet oder unbelastet ist. Wenn der Luftspalt nicht gleichförmig ist, so bedeutet dies bloss, dass zu verschiedenen Punkten des Luftspaltes Punkte F mit verschiedenen Abszissen gehören. Der Einfluss der eventuellen Belastung der Maschine auf die Berechnung äussert sich nur darin, dass zu verschiedenen Punkten des Luftspaltes

jeweils ein Punkt mit einer anderen Ordinate D gehört. In beiden Fällen wird die Lage der Geraden DF für verschiedene Stellen des Luftspalts eine andere sein, die Einfachheit des nomographischen Verfahrens bleibt jedoch immer dieselbe.

Beispiele für die mit diesem Verfahren erzielten praktischen Ergebnisse sind die folgenden :

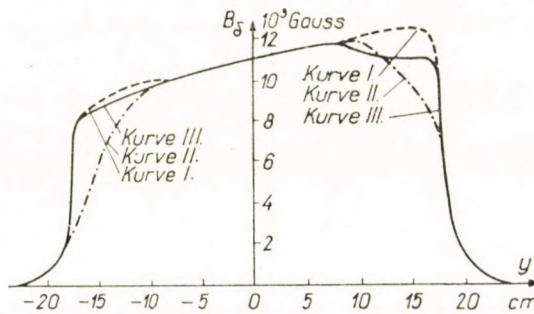


Abb. 22

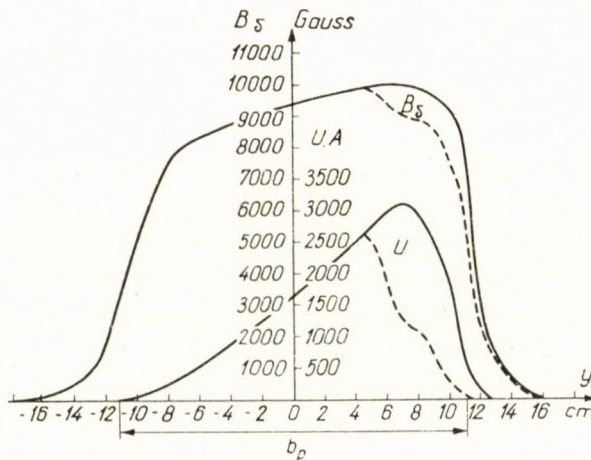


Abb. 23

Kurve III in Abb. 22 zeigt die Verteilung der Luftspaltinduktion in einem Gleichstrom-Zugmotor Type DPE-340 einer sowjetischen Elektrolokomotive, beim Stundenstrom. Kurve I zeigt, wie sich die Luftspaltinduktion unter den gleichen Betriebsverhältnissen verteilen würde, wenn sich die Polschuhe nicht sättigen würden. Man sieht, dass auf der einen Seite — wo die Anker rückwirkung die Sättigung des Polschuhes vergrößert — der Unterschied ziemlich gross ist, während er auf der anderen Seite ziemlich klein ist. Kurve II zeigt eine viel gleichmässige Induktionsverteilung, welche vom Gesichtspunkt

der Grösse der zusätzlichen Verluste viel günstiger ist. Jene Luftspaltform, welche zur Erzielung der abgebildeten Induktionsverteilung notwendig ist, wurde nomographisch bestimmt.

Abb. 23 zeigt die Verteilungskurven der magnetischen Zahnspannungen U und der Luftspaltinduktion B_δ eines Gleichstrom-Zugmotors Type DK 103 A eines sowjetischen Triebwagens, welche Kurven V. A. SCHILOWSKI [3] in seiner in Moskau erschienenen Kandidatendissertation unter Benützung der nomographischen Methode bestimmt hat. Die gestrichelte Kurve für B_δ zeigt die wirkliche Verteilung von B_δ und die ausgezogene jene Verteilung, welche zustande kommen würde, wenn der Polschuh nicht gesättigt wäre. Die beiden anderen Kurven stellen die entlang der Zähne des Rotors entstehenden magne-

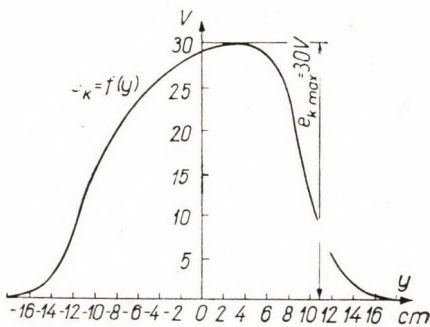


Abb. 24

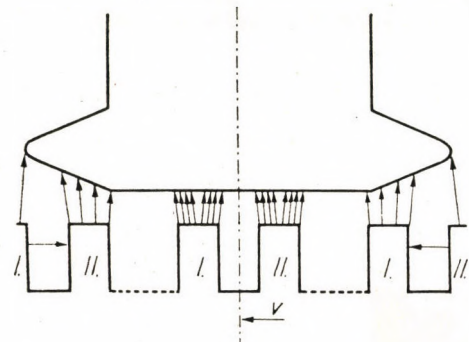


Abb. 25

tischen Spannungen U dar, und zwar einmal mit Einfluss der Sättigung des Polschuhs und einmal ohne diesen Einfluss.

Die nomographisch erhaltene Abb. 24 zeigt, wie sich entlang des Kommutators des letztgenannten Motors die zwischen benachbarten Segmenten entstehenden Spannungen verteilen.

Da die Anwendung des nomographischen Verfahrens die Feststellung der genauen Verteilung der Induktion ermöglicht, können wir nicht nur die genaue Grösse der Eisenverluste berechnen, sondern auch ihre wahrscheinliche Verteilung, wo ihr Maximum ist und wovon die Möglichkeit ihrer Verringerung abhängt.

Es ist oft zweckmässig, die nomographische Methode mit analytischen Methoden zu kombinieren. Ein Beispiel für die Anwendung der so zustandekommenden, von mir nomographisch-analytisch genannten Methode ist das Problem der Berechnung des durch die Sättigung hervorgerufenen Nutenquerflusses. Das Wesentliche dieses Problems zeigt Abb. 25 für den Fall des Leerlaufs. Wenn die Spannung U des unter dem rechten Polschuh liegenden Zahnes I grösser ist als die Spannung des Zahnes II, so entsteht ein Zahnquerfluss zwi-

schen den beiden Zähnen. Dieser Fluss hört auf, wenn die beiden Zähne unter die Mitte des Polschuhes gelangen und wechselt seine Richtung unter dem linken Polschuh. Der ausserordentlich schnelle Wechsel der erwähnten Zahnflüsse verursacht manchmal in den Leitern grosse Wirbelstromverluste. Eben deswegen suchen bekannte Wissenschaftler, wie z. B. OLLENDORFF in seinem Buch »Potentialfelder der Elektrotechnik« [4] oder DREYFUSS in einer 1917 im Archiv für Elektrotechnik erschienenen 60-seitigen Arbeit [5] und einer 1918 in derselben Zeitschrift erschienenen 32-seitigen Arbeit [6] schon seit langem die Lösung dieses Problems, es gelang jedoch nicht, dieselbe zu finden. DREYFUSS bemerkt am Ende seiner erwähnten zweiten Arbeit [6] selbst:

»Weder Theorie noch Experiment vermochten bisher über diese verwickelten Verhältnisse Klarheit zu verbreiten . . . Denn bei Belastung verzerrt die Ankerrückwirkung das Luftspaltfeld . . . Die Verhältnisse liegen somit in

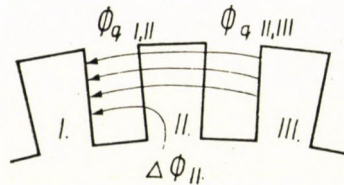


Abb. 26

jeder Beziehung neuartig und es wäre eine verdienstvolle Arbeit . . . dem Geheimnis der zusätzlichen Belastungsverluste auf die Spur zu kommen.«

Wenn wir die Frage stellen, was auf Grund der bisher dargelegten Ausführungen der klassischen Theorie solche Schwierigkeiten bereitet hat, so können wir zwei Gründe anführen. Der eine ist, dass — wie wir gesehen haben — es bis jetzt fast unmöglich war, die zu verschiedenen Zähnen gehörigen Werte von U zu bestimmen. Dazu jedoch, um die Grösse des Nutenflusses zu kennen, welcher der Differenz der Spannungen U für zwei Zähne entspricht, müsste man die Werte U selbst noch genauer kennen. Aber zu dieser allgemeinen Unzulänglichkeit der klassischen Theorie kommt im gegebenen konkreten Fall noch die folgende viel grössere Schwierigkeit: Nehmen wir an, dass wir die Werte von U für die einzelnen Zähne bereits kennen (Abb. 26). Wenn nun die Differenz zwischen den Werten von U des II. und des III. Zahnes kleiner ist als die Differenz der zu den Zähnen I und II gehörigen Spannungen, d. h. wenn der von Zahn III zu Zahn II gerichtete Nutenquerfluss $\Phi_{q\ II,III}$ kleiner ist als der von Zahn II zu Zahn I gerichtete Nutenquerfluss, $\Phi_{q\ I,II}$ so schliesst sich die Differenz $\Delta\Phi_{II}$ zwischen den beiden Flüssen — wie wir sehen — über den am meisten gesättigten Teil des Zahnes II. Dies bedeutet aber, dass der von uns bereits als bekannt angesehene Wert U für den zweiten Zahn sich um einen uns noch unbekanntem Betrag ΔU ändern wird. Dasselbe bezieht sich auf die sämt-

lichen Zähne, weil überall der betreffende Wert U sich um einen Wert ΔU von unbekannter Grösse vergrössern oder verkleinern wird. Nachdem jedoch die Nutzenflüsse der Differenz der Spannungen U der benachbarten Zähne proportional sind, wird die Grösse der Nutzenflüsse unter der Einwirkung der Werte ΔU in unbekannter Richtung und in unbekanntem Ausmass sich verändern. Dieser Effekt muss jedoch in verwickelter Weise auf die Werte von ΔU zurückwirken, sind doch die Zahnflüsse welche die Differenz der Nutzenflüsse bilden und die Werte ΔU hervorrufen, nicht mehr die alten...

Die beschriebene nomographisch-analytische Methode löst dieses Problem in einfacher Weise. Man kann zeigen, dass die Grösse des Nutzenquerflusses zwischen Zahn I und II , $\Phi_{qI, II}$, sich aus der folgenden Formel ergibt :

$$\Phi_{qI, II} = C [(U_I \pm \Delta U_I) - (U_{II} \pm \Delta U_{II})] \quad (9)$$

wo C für eine bestimmte Zahnform konstant ist. Daraus folgt, dass der den Zahn II durchdringende Flux $\Delta \Phi_{II}$ mit Hilfe der folgenden Gleichungen berechnet werden kann :

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_{II} = C \{ & [(U_I \pm \Delta U_I) - (U_{II} \pm \Delta U_{II})] - \\ & - [(U_{II} \pm \Delta U_{II}) - (U_{III} \pm \Delta U_{III})] \} \end{aligned} \quad (10)$$

Andererseits ruft der Flux $\Delta \Phi_{II}$, welcher die grösste Induktion des Zahnes vergrössert, die kleinste Induktion jedoch nicht beeinflusst, dieselbe Wirkung hervor, wie wenn der zum Zahn gehörige Wert q sich um einen Wert Δq geändert hätte, wobei Δq_{II} proportional zu $\Delta \Phi_{II}$ ist, d. h. wir erhalten die folgende Formel :

$$\Delta q_{II} = C' \Delta \Phi_{II} \quad (11)$$

Schliesslich kann man die zufolge von Δq auftretende Spannungsdifferenz ΔU durch die folgende Formel ausdrücken :

$$\Delta U = \frac{dU}{dq} \Delta q \quad (12)$$

Wenn wir

$$C' C \left(\frac{dU}{dq} \right) = M \quad (13)$$

schreiben, so bekommen wir die Gleichung

$$\Delta U_{II} = M_{II} [(U_I - 2 U_{II} + U_{III}) \pm (\Delta U_I - 2 \Delta U_{II} + \Delta U_{III})] \quad (14)$$

den Wert von U können wir — wie bekannt — auf nomographischem Wege in einfacher Weise bestimmen. Den Wert von $\frac{dU}{dq}$ finden wir auch nomographisch,

wenn wir in der Nähe des Punktes C die Grösse der Veränderung von U bestimmen, welche eine gewisse Veränderung ρ hervorruft.

Wir erhalten also eine Gleichung, in welcher der Wert von M und die Werte von U bekannt sind und drei Werte ΔU unbekannt sind. Wenn wir für jeden folgenden Zahn die ähnliche Gleichung aufstellen und in Betracht ziehen, dass in der Kommutationszone U und ΔU gleich Null sind, so bekommen wir so viele Gleichungen, als Unbekannte.

Auf diese Weise können wir daher die sämtlichen Werte ΔU in einfacher Weise berechnen, und schliesslich auch die gesuchten Werte der Nutenquerflüsse Φ_q .

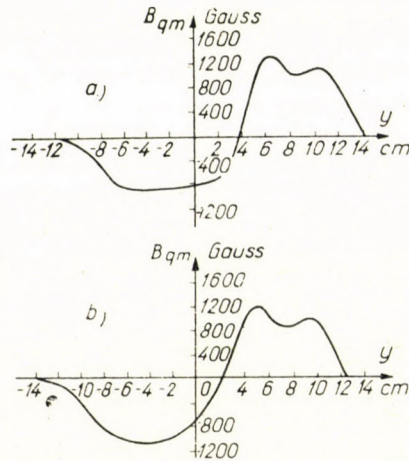


Abb. 27

Mit Hilfe der beschriebenen nomographisch-analytischen Methode wurde die Verteilung der in den Nuten des sowjetischen Zugmotors Type DMP 151 entstehenden Nutenquerflüsse entlang des Umfanges festgestellt, wie dies Abb. 27a zeigt. Als Ordinate ist die mittlere Induktion der erwähnten Nutenflüsse B_{qm} aufgetragen.

Die Berechnung bezieht sich nicht auf den Leerlauf, sondern auf den Fall der Belastung, also auf jenen Fall welcher laut DREYFUSS [6] für die klassischen Methoden unlösbare Schwierigkeiten bedeutet. Auf umso grösseres Interesse darf daher wohl die in Abb. 27b dargestellte tatsächliche Verteilung rechnen, welche mittels in die Nuten eingelegter schleifenförmiger Leiter gemessen wurde. Wie man sieht, sind die beiden Kurven im wesentlichen gleich. Da die erwähnten Nutenflüsse auf eine eventuelle Veränderung der Zahnspannungen in ausserordentlich empfindlicher Weise reagieren, ist die im gegebenen Fall erhaltene Übereinstimmung offensichtlich der beste Beweis für die vollkommen hinreichende Genauigkeit der neuen Methode.

SCHRIFTTUM

1. O. B. *Бенедикт*: Номографический метод расчета сложных сильно насыщенных магнитных цепей электрических машин. Госэнэргоиздат. Москва 1953.
2. RICHTER: Elektrische Maschinen. Bd. I. Verlag Birkhauser, Basel 1951.
3. SCHILOWSKI: Kandidatendissertation (Moskau).
4. OLLENDORF: Potentialfelder der Elektrotechnik. Verlag Springer, Wien 1952.
5. DREYFUSS: Die Berechnung des Nutzenquersfeldes in unbelasteten Dynamoankern. Archiv für Elektrotechnik 1917, p. 165.
6. DREYFUSS: Wirbelstromverluste in massiven Ankerleitern bei Leerlauf. Archiv für Elektrotechnik 1918. p. 327.

ZUSAMMENFASSUNG

Die zur Berechnung von stark gestättigten, verwickelten magnetischen Kreisen bisher benützten »klassischen« Verfahren ermöglichten im wesentlichen bloss die Lösung einer grundlegenden Aufgabe: Bestimmung der Verteilung der magnetischen Potentiale, wenn die geometrische Konfiguration und die Verteilung der Induktion gegeben sind. Der Verfasser beschreibt eine von ihm »nomographisch« genannte neue Methode, mit deren Hilfe auch zwei andere grundlegende Probleme gelöst werden können.

Das eine solche Problem ist die Bestimmung jener Induktionsverteilung, welche bei gegebener geometrischer Konfiguration eine gewünschte Potentialverteilung sichert. Das andere Problem, welches wegen seiner Kompliziertheit bis jetzt nicht einmal formuliert wurde, ist folgendes: eine derartige geometrische Konfiguration zu suchen, welche zugleich die gewünschte Induktionsverteilung und die gewünschte Potentialverteilung ergibt. Der Verfasser zählt viele, im Zusammenhang mit elektrischen Maschinen und Apparaten vorkommende Probleme der magnetischen Berechnung auf, welche bisher praktisch unlösbar waren, nunmehr aber nomographisch einfach und genau gelöst werden können.

Der Verfasser beschreibt praktische Ergebnisse der nomographischen Berechnung, darunter auch solche, deren hohe Genauigkeit durch Versuchsergebnisse bewiesen wurde.

A NOVEL METHOD FOR THE COMPUTATION OF COMPLICATED AND HIGHLY SATURATED MAGNETIC CIRCUITS

O. BENEDIKT

SUMMARY

The "classical" methods used so far for the computation of complicated, highly saturated magnetic circuits were basically suited only for solving one of the basic problems: to determine the distribution of the magnetic potentials, if the geometric configuration and the distribution of induction are known. The author presents a new method, called by him "nomographic", which is suitable for solving also two other basic problems.

The one such problem is: to determine the distribution of induction, which assures at a given geometric configuration the desired distribution of potentials. The other problem, which, for reason of its complexity, has not even been formulated so far, is the following: to find a geometric configuration, which simultaneously gives the desired distribution of induction and the desired distribution of potentials.

The author enumerates many problems connected with electric machines and apparatus, which have been insoluble so far and can be solved now by the nomographic method, simply as well as precisely.

The author also presents practical results of nomographic computation, amongst them such ones the high precision of which has been proved by the results of measurements.

MÉTHODE DE CALCUL NOUVELLE DES CIRCUITS MAGNÉTIQUES COMPLIQUÉS,
À SATURATION ÉLEVÉE

O. BENEDIKT

RÉSUMÉ

Les méthodes «classiques» utilisées jusqu'à présent pour le calcul des circuits magnétiques compliqués et à saturation élevée, ne permettaient, en somme, que la solution d'un seul problème fondamental: la détermination de la répartition des potentiels magnétiques, si la configuration géométrique et la répartition de l'induction sont données. L'auteur décrit une méthode nouvelle, dénommée par lui «nomographique», à l'aide de laquelle on peut résoudre deux autres problèmes fondamentaux.

L'un de ceux-ci consiste à déterminer une répartition des induction assurant la répartition désirée des potentiels, la configuration géométrique étant donnée. L'autre problème, qui n'a pas encore formulé, à cause de sa complexité, consiste à chercher une configuration géométrique telle que la répartition des inductions et la répartition des potentiels désirées soient assurées simultanément.

L'auteur énumère de nombreux problèmes relatifs aux circuits magnétiques des machines et appareils électriques, pratiquement insolubles jusqu'ici, lesquels peuvent être résolus maintenant par la méthode nomographique, de façon simple et avec précision.

L'auteur présente aussi des résultats pratiques de la méthode nomographique, dont plusieurs essais pratiques ont confirmé l'exactitude.

НОВЫЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ И СИЛЬНО НАСЫЩЕННЫХ
МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

O. БЕНЕДИКТ

РЕЗЮМЕ

«Классические» методы, использованные до сих пор для расчета сложных сильно насыщенных магнитных цепей, позволили решить до существу лишь одну основную задачу. А именно: определить распределение магнитных потенциалов, если даны геометрическая конфигурация и распределение индукции. Автор демонстрирует в своем сообщении т. н. «номографический» метод, с помощью которого представляется возможным решить также две других основных задач.

Одна из этих задач заключается в определении распределения индукции, которое в случае данной геометрической конфигурации обеспечивает желательное распределение потенциала. Вторая же задача, которая из-за своей сложности до сих пор даже не ставилась, заключается в том, что необходимо найти такую геометрическую конфигурацию, которая одновременно обеспечивает как желательное распределение индукции, так и желательное распределение потенциала.

С применением предлагаемого метода в статье автор приводит множество таких магнитных проблем, встречающихся в связи с электрическими машинами и аппаратами, которые до сих пор практически были неразрешимыми, однако теперь могут быть решены номографически, и при этом просто и точно.

Автор приводит практические результаты номографического метода и, в том числе такие, высокую точность которых доказывают практические опыты.

CONTRIBUTION TO THE ESTIMATION OF M_s FROM THE COMPOSITION OF STEELS

J. A. VERÓ

MEMBER OF THE HUNG. ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received May 9, 1957].

Synopsis

A series of familiar equations attributes a linear dependence of the M_s temperature of steels from their carbon content, this relation, however, differs distinctly from linearity according to the experimental results by GRENINGER. A quadratic form of equation: $M_s(^{\circ}\text{C}) = 520 - (360 - 50 C) \cdot C$ is presented which is claimed to be correct from 0,1 to 1,4% C within the limits of the usual experimental error.

Previous work

About ten years ago several empirical equations were developed to calculate the temperature of martensite formation from the chemical composition of steel, or more correctly from the composition going into the transformation process. The equations proposed by different authors (1-6) in their original form and in addition as transformed to deliver M_s in Centigrades are first listed as follows.

PAYSON and SAVAGE [1]:

$$M_s(^{\circ}\text{F}) = 930 - 570 C - 60 \text{ Mn} - 50 \text{ Cr} - 30 \text{ Ni} - 20 \text{ Si} - 20 \text{ Mo} - 20 \text{ W} \quad (\text{Ia})$$

$$M_s(^{\circ}\text{C}) = 500 - 316 C - 33 \text{ Mn} - 28 \text{ Cr} - 17 \text{ Ni} - 11 \text{ Si} - 11 \text{ Mo} - 11 \text{ W} \quad (\text{Ib})$$

ROWLAND and LYLE [2]:

$$M_s(^{\circ}\text{F}) = 930 - 600 C - 60 \text{ Mn} - 50 \text{ Cr} - 30 \text{ Ni} - 20 \text{ Si} - 20 \text{ Mo} - 20 \text{ W} \quad (\text{IIa})$$

$$M_s(^{\circ}\text{C}) = 500 - 333 C - 33 \text{ Mn} - 28 \text{ Cr} - 17 \text{ Ni} - 11 \text{ Si} - 11 \text{ Mo} - 11 \text{ W} \quad (\text{IIb})$$

GRANCE and STEWART [3]:

$$M_s(^{\circ}\text{F}) = 1000 - 650 C - 70 \text{ Mn} - 70 \text{ Cr} - 35 \text{ Ni} - 50 \text{ Mo} \quad (\text{IIIa})$$

$$M_s(^{\circ}\text{C}) = 538 - 341 C - 39 \text{ Mn} - 39 \text{ Cr} - 19 \text{ Ni} - 28 \text{ Mo} \quad (\text{IIIb})$$

NEHRENBERG [4]:

$$M_s(^{\circ}\text{F}) = 930 - 540 \text{ C} - 60 \text{ Mn} - 40 \text{ Cr} - 30 \text{ Ni} - 20 \text{ Si} - 20 \text{ Mo} \quad (\text{IVa})$$

$$M_s(^{\circ}\text{C}) = 500 - 300 \text{ C} - 33 \text{ Mn} - 22 \text{ Cr} - 17 \text{ Ni} - 11 \text{ Si} - 11 \text{ Mo} \quad (\text{IVb})$$

Lately STEVEN and HAYNES [5] made an extensive revision of the existing equations and comparing the calculated M_s temperatures with the results of own experimental determinations on 65 low alloy steels in the 0,32 to 0,44% C range, it was found necessary to develop a further formula in the following form:

STEVEN and HAYNES [5]:

$$M_s(^{\circ}\text{F}) = 1042 - 853 \text{ C} - 60 \text{ Mn} - 30 \text{ Cr} - 30 \text{ Ni} - 38 \text{ Mo} \quad (\text{Va})$$

$$M_s(^{\circ}\text{C}) = 561 - 474 \text{ C} - 33 \text{ Mn} - 17 \text{ Cr} - 17 \text{ Ni} - 21 \text{ Mo} \quad (\text{Vb})$$

All these equations I—V are of the additive type and this means they consider the effect of the single alloying elements perfectly separately from each other. Accordingly, it is supposed that by the presence of a given amount of a certain alloying element in the steel the line representing the dependence of M_s upon carbon content is shifted downwards, but retains its original direction and shape. At the same time, the equations suggest that the M_s temperature is connected with the carbon content in a linear manner, for the first two terms of the equations I—V, giving the M_s temperatures of pure Fe—C-alloys have the following common form:

$$M_s = a - bC$$

where a and b are constants to which different authors attributed differing values.

There is a further equation of the multiplying type proposed by CARAPPELLA [6]:

$$M_s(^{\circ}\text{F}) = 925 \cdot (1 - 0,620 \text{ C}) (1 - 0,092 \text{ Mn}) (1 - 0,033 \text{ Si}) (1 - 0,045 \text{ Ni}) \cdot \\ \cdot (1 - 0,070 \text{ Cr}) (1 - 0,029 \text{ Mo}) (1 - 0,018 \text{ W}) (1 + 0,12 \text{ Co}) \quad (\text{VI})$$

for pure Fe—C-alloys, taking the amount of the metallic alloying elements 0:

$$M_s(^{\circ}\text{F}) = 925 \cdot (1 - 0,620 \text{ C}) = 925 - 572 \text{ C} \quad (\text{VIa})$$

$$M_s(^{\circ}\text{C}) = 496 - 319 \text{ C} \quad (\text{VIb})$$

Again a linear interconnection of M_s with the carbon content is supposed. There is, however, a difference in comparison to the additive equations I—V: CARAPPELLA's multiplying type of equation implies an effect to a given carbon content which varies with the number, quality and quantity of the metallic alloying elements also. This feature of CARAPPELLA's equation, however, is neglected in the following considerations.

Comparison of the equations I to V with existing experimental results

Most authors [1 to 4] used the experimental determinations of M_s by GRENINGER [7]; these results, however, constitute a distinctly curved line, as it is shown by the heavy line in the Fig. 1. The heavy experimental curve

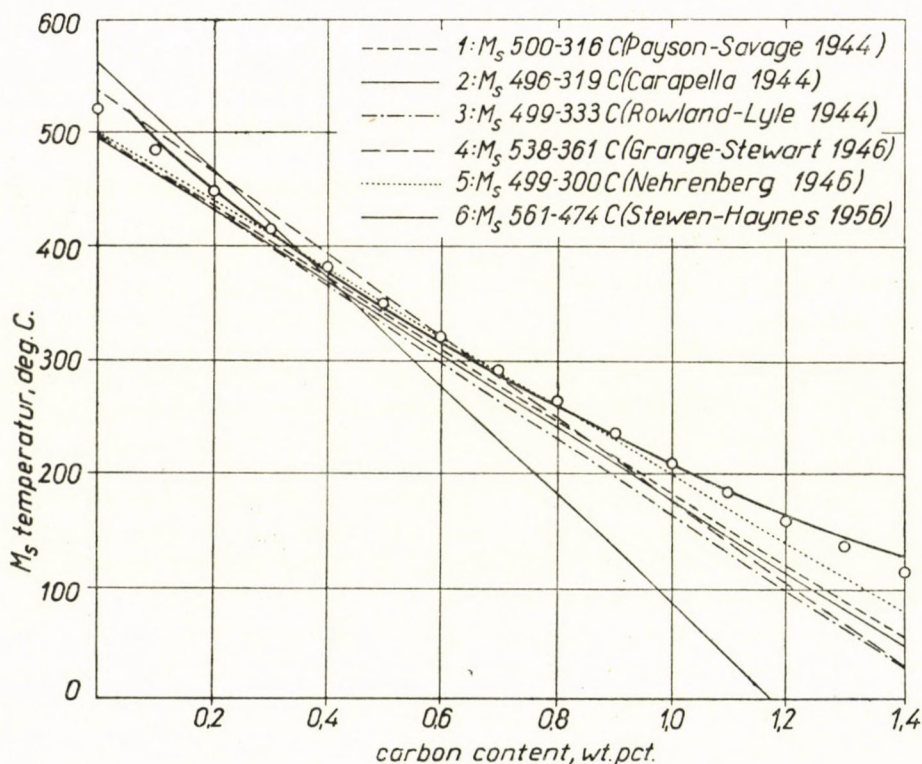


Fig. 1

in Fig. 1 was drawn on basis of a photographic enlargement of the Fig. 3 on page 265. in the ASM Metals Handbook, 1948., because GRENINGER's original paper [7] was not accessible to the author. Herein six straight lines are also drawn, representing the first two terms of the equations Ib to VIb as the expres-

sions for the effect of carbon content upon the M_s temperature. The following observations can be made.

The lines 1, 2 and 3, corresponding to the equations Ib, VIb and IIb run below the experimental curve in their full length, that is these equations deliver a low M_s temperature for every carbon content. The line 4 crosses the heavy line once at about 0,1% and then at about 0,7% carbon content; the formula IIIb accordingly results an M_s temperature a little too high for carbon contents from 0,2 to 0,7%, but otherwise a too low value; the divergence is as great as 20° C at 0,4–0,5% C and above 0,7% it increases with the increase of carbon content. At 1,4% C the divergence becomes as great as 90° C. The line 5 as the plot of NEHRENBURG's equation IVb practically coincides with the experimental curve from 0,3 to 0,8% C, but at carbon contents lower, than 0,2 and higher, than 1% there is a divergence increasing up to 40–50° C. STEVEN and HAYNES' equation Vb appears in Fig. 1 as the steep line 6 which crosses the experimental curve at about 0,35% C; for lower and higher carbon contents there is a considerable divergence. The formula Vb evidently is useful only for carbon contents lying close to the point of intersection, say for 0,3 to 0,4% for which it was derived.

The mentioned equations of the linear type are correct at best within certain limits in regard to the carbon content and this limitation must be borne in mind when they are to be used. As best of all NEHRENBURG's formula is correct from 0,3 to 0,8% C, that is for compositions most frequent in steels to be quenched.

A quadratic equation for M_s

It is evident that the distinctly curved line showing the dependence of the experimentally determined M_s temperatures upon the carbon content can be more precisely expressed by a quadratic equation; hereby a satisfying agreement of calculated and experimental M_s values for the whole range of carbon contents may be obtained.

Three points of the experimental curve shown in Fig. 1 were used to derive a parabolic equation; the three points, characterised by their coordinates were: $M_s = 450^\circ \text{C}$ for 0,2%, 322° for 0,6% and 160° for 1,2% carbon content. The equation has the form

$$M_s(^{\circ}\text{F}) = 968 - (650 - 90 \text{ C}) \cdot \text{C} \quad (\text{VIIa})$$

$$M_s(^{\circ}\text{C}) = 520 - (360 - 50 \text{ C}) \cdot \text{C} \quad (\text{VIIb})$$

Values of M_s calculated with this equations VIIb are presented in the Fig. 1 by open circles; there is a practical coincidence within the range for which the formula was developed, but the limits of satisfying correctness extend

from 0,1 to 1,4% carbon content also. In this range the divergence from the experimental results does not grow beyond 10 °C. Consequently, this formula is considered sufficiently correct for the whole range of steels to be quenched and the limitations inherent in the linear equations can be cleared away.

It may appear, perhaps, as an exaggeration to propose a parabolic equation for the calculation of M_s temperatures. It will, however, surely be useful in deriving more reliable factors for the metallic components of steels. The quadratic term in the equation VIIb increases from 1° C to 72° C with the increase of the carbon content from 0,2 to 1,4%; this term being neglected in the linear equations, the divergence arising herefrom surely altered the factors for manganese, nickel, chromium, etc. derived by previous authors.

REFERENCES

1. P. PAYSON and C. H. SAVAGE: Trans. Amer. Soc. Metals, 33 (1944), 261.
2. E. S. ROWLAND and S. R. LYLE: Trans. Amer. Soc. Metals, 37 (1946), 27.
3. R. A. GRANCE and H. M. STEWART: Trans. Amer. Inst. Min. Met. Eng. 167 (1946) 467.
4. A. E. NEHRENBURG: Trans. Amer. Inst. Min. Met. Eng. 167 (1946) 494.
5. W. STEVEN and A. G. HAYNES: Journ. Iron Steel Inst. 183 (1956) 349.
6. L. A. CARAPPELLA: Metal Progress, 46 (1944) 108.
7. A. B. GRENINGER: Trans. Amer. Inst. Min. Met. Eng. 30 (1942) 1.

SUMMARY

The first two terms in the equations Ib two VIb which express the lowering effect of carbon content upon the M_s temperature were compared with the results of GRENINGER's experimental determinations. NEHRENBURG's equation IVb was found the best approximation for carbon contents from 0,3 to 0,8%. A parabolic equation of the form

$$M_s (^{\circ}\text{C}) = 520 - (360 - 40 C) \cdot C$$

is derived which is sufficiently correct within the limits from 0,1 to 1,4% carbon content.

BEITRAG ZUR BERECHNUNG DES M_s AUS DER ZUSAMMENSETZUNG DES STAHLER

J. VERÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Die im Schrifttum unter 1—6. aufgeführten Verfasser schlagen vor, die Anfangstemperatur der Martensitbildung M_s aus der Zusammensetzung des Stahles mittels einer Formel zu berechnen, worin der Einfluss des Kohlenstoffgehalts durch ein lineares Glied ausgedrückt wird. In Abhängigkeit vom Kohlenstoffgehalt ändert sich jedoch die Temperatur M_s gemäss den Versuchsergebnissen GRENINGERS [7] entschieden nach einer Kurvenlinie. Der Aufsatz schlägt daher für den Ausdruck des Einflusses des Kohlenstoffgehaltes ein Glied zweiten Grades von der Form

$$M_s (^{\circ}\text{C}) = 520 - (360 - 50 C) C$$

vor.

Diese Gleichung gibt den Einfluss von C zwischen 0,1 und 1,4% den Versuchsergebnissen gut entsprechend an. Die Abweichung ist nicht grösser als der mögliche Fehler der versuchsmässigen Bestimmung von M_s .

CONTRIBUTION AU CALCUL DE M_s À PARTIR DE LA TENEUR EN CARBONE DE L'ACIER

J. VERŐ

RÉSUMÉ

Les auteurs énumérés sous les numéros [1—6.] de notre bibliographie proposent le calcul de la température initiale M_s de la formation de la martensite à partir de la teneur en C de l'acier par une formule, dans laquelle l'effet du carbone est exprimé par un membre linéaire. Cependant, en fonction de la teneur en carbone, la température M_s varie selon une courbe, conformément aux résultats d'essais de GRENINGER [7]. Pour l'expression de l'effet de la teneur en C, l'auteur propose un membre quadratique de la forme

$$M_s (C^\circ) = 520 - (360 - 50 C) C$$

Cette équation exprime l'effet du carbone entre 0,1 et 1,4%, offre une bonne concordance avec les résultats d'essais. La différence ne dépasse pas la valeur de l'erreur possible de la détermination expérimentale de M_s .

К ВЫЧИСЛЕНИЮ M_s НА ОСНОВЕ СОСТАВА СТАЛИ

Й. ВЕРЕ

РЕЗЮМЕ

Авторы перечисленные в литературном списке [1—6], предлагают вычислить начальную температуру M_s образования мартенсита с помощью такой формулы, в которой влияние содержания углерода выражено линейным членом. Однако, температура M_s в функции содержания углерода — согласно опытным данным Гренингера [7] — определенно изменяется по кривой линии. Поэтому в работе предлагается использовать для выражения влияния содержания углерода член второй степени в виде

$$M_s (C^\circ) = 520 - (360 - 50 C) C ;$$

это уравнение устанавливает влияние C в пределах 0,1—1,4% — при хорошем совпадении с опытными результатами; отклонение не превышает возможных погрешностей опытного определения M_s .

EINE NEUE WALZTHEORIE

Prof. Dr. A. GELEJI

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 9. Juni 1957]

Der Forscher, der die erste Formel zur Berechnung des Walzdruckes im Jahre 1911 aufgestellt hat, war MAX HERRMANN [1]. Er entfaltete seine Walztheorie im Zusammenhange mit den klassischen Walzversuchen die im Jahre 1909 von J. PUPPE [2] durchgeführt wurden. Die HERRMANNsche Formel wurde im Jahre 1916 von KARL LÁNG korrigiert und ergänzt. HERRMANN und LÁNG waren beide Professoren der Budapester Technischen Hochschule. Auf ihren Grundgedanken wurde die erste Walztheorie von TH. VON KÁRMÁN[3] im Jahre 1925 aufgebaut, die fast allen späteren theoretischen Untersuchungen zum Ausgangspunkt diente. Die ersten Forscher, die uns einen Einblick in die Kräfte im Walzspalt durch Experiment verschafft haben, waren ERICH SIEBEL und WERNER LUEG im Jahre 1933. Sie haben den Verlauf des Verformungswiderstandes längs des Einspannbogens bzw. an der Druckfläche durch Versuch ermittelt.

Bei der Ausarbeitung der KÁRMÁNschen Walztheorie wurde folgendes vorausgesetzt:

1. Das Walzstück mit quadratischem Querschnitt von der Anfangsstärke h_1 wird zwischen glatten zylindrischen Walzen mit den Halbmessern R auf die Stärke h_2 ausgewalzt, wobei auf das Walzgut weder Zug noch Bremsung wirkt (Bild 1).

2. Während des Stiches entsteht keine Breitung.

3. Der Reibungsbeiwert μ ist längs der gedrückten Flächen konstant.

4. Die zu der Längsachse des Stückes vertikalen Querschnitte verbiegen sich während des Stiches nicht, sondern sie bleiben eben.

5. Die Walzen verformen sich nicht elastisch längs der gedrückten Flächen.

6. Der gewalzte Werkstoff ist homogen, und bei der Verformung entsteht darin keine elastische Deformation.

7. Als Fließbedingung ist bei v. KÁRMÁN die Schubspannungsbedingung benutzt:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = k_f$$

oder nach der Schreibweise v. KÁRMÁNS :

$$p - \sigma = k_f.$$

8. Die Verformungsfestigkeit längs der gedrückten Flächen ist konstant.
9. Die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen ist konstant.

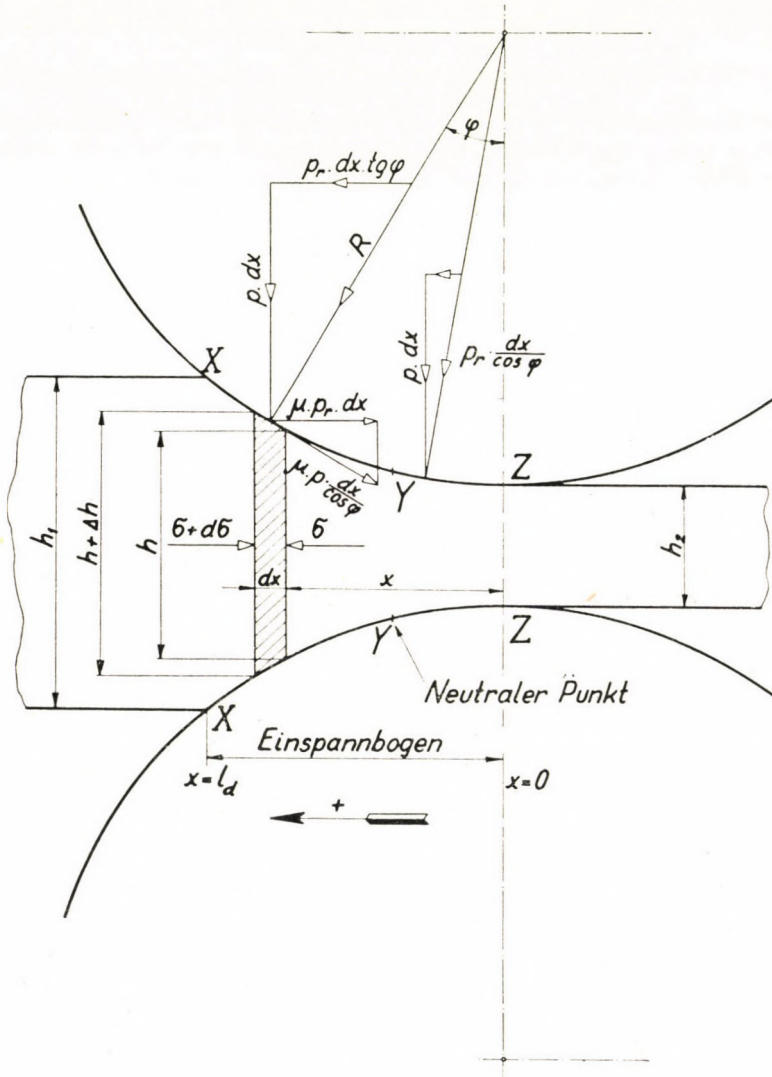


Bild 1

Mit den aus Bild 1 ersichtlichen Bezeichnungen und unter der Voraussetzung, dass der radiale Druck p_r (Verformungswiderstand) mit dem vertikalen Druck p ersetzt werden kann und x im Verhältnis zu R klein ist, ergibt

sich nach KÁRMÁN die Gleichgewichtsbedingung für ein Volumenelement $h \cdot dx$ (von der Breite 1) :

$$\frac{d\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{dx} = p (\sin \varphi \mp \mu \cdot \cos \varphi). \quad (1)$$

Diese Gleichung kann auch in der folgenden Form geschrieben werden :

$$\frac{d\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{dx} = p \cdot \cos \varphi \cdot (\operatorname{tg} \varphi \mp \operatorname{tg} f). \quad (2)$$

Es wurde von KÁRMÁN weiters angenommen, dass $\cos \varphi (=) 1$ gesetzt werden kann, und so wird

$$d\left(\frac{\sigma h}{2}\right) = p \cdot (\operatorname{tg} \varphi \mp \operatorname{tg} f) \cdot dx. \quad (3)$$

Diese Gleichungen, als KÁRMÁNsche Gleichungen bezeichnet, dienen zur Grundlage für mehrere Walztheorien (TRINKS [4], ZELIKOW [5], NÁDAI [6, 7] usw.).

Die Verteilung des Verformungswiderstandes längs des Einspannbogens laut der KÁRMÁNschen Gleichungen ist aus Bild 2 ersichtlich. In dem Eintritts- und Austrittsquerschnitt ist $p = k_f$, d. h. der Verformungswiderstand ist der Verformungsfestigkeit gleich. Von dem Eintrittsquerschnitt bis zur Fliessscheide wächst der Druck p (Verformungswiderstand), da die längs des Einspannbogens auftretenden Reibungskräfte im Walzgut horizontale Druckspannungen hervorrufen. Gleichfalls wächst der Verformungswiderstand von dem Austrittsquerschnitt bis zur Fliessscheide. Der maximale Verformungswiderstand entsteht im neutralen Querschnitt in der Fliessscheide.

Die Walztheorien von TRINKS, NÁDAI und ZELIKOW sind — wie gesagt — alle auf die KÁRMÁNschen Gleichungen aufgebaut. Diese Theorien gehen von den gemeinsamen Voraussetzungen aus, dass die vertikalen Querschnitte des Walzgutes während der Walzung ebene Flächen bleiben, und dass die Walzen mit Ausnahme des neutralen Querschnitts (der Fliessscheide) auf dem Walzgut gleiten. Die Veränderung des Verformungswiderstandes ($p = k_x$) längs des Einspannbogens wird von KÁRMÁN nur auf die σ -Druckspannungen zurückgeführt, die in der Längsachsenrichtung des Walzgutes durch die bei der Gleitung der Walzenflächen auf dem Walzgut entstehenden Reibungskräfte hervorgerufen werden. Durch diese Reibungskräfte wird im Walzgut in Richtung der Längsachse eine positive und eine negative (H_1 und H_2) Kraft hervorgerufen

(Bild 3). Diese Kräfte halten aber einander im neutralen Querschnitt (in der Flie遥scheide) das Gleichgewicht. Wenn also das Walzgut durch die Reibungs-

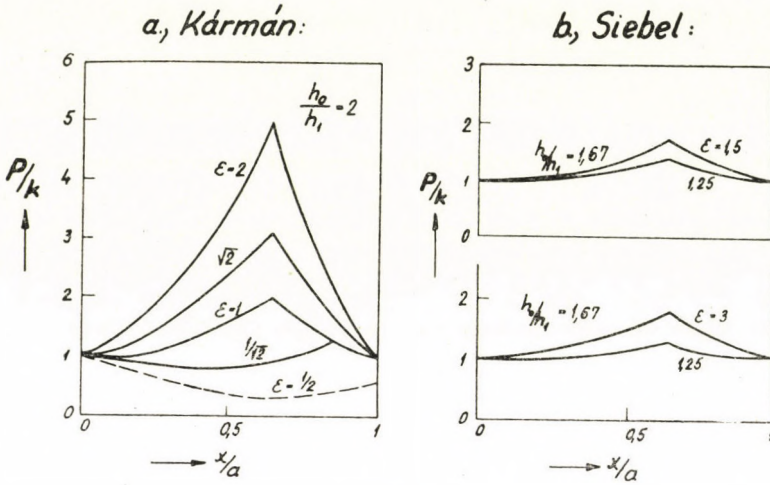


Bild 2

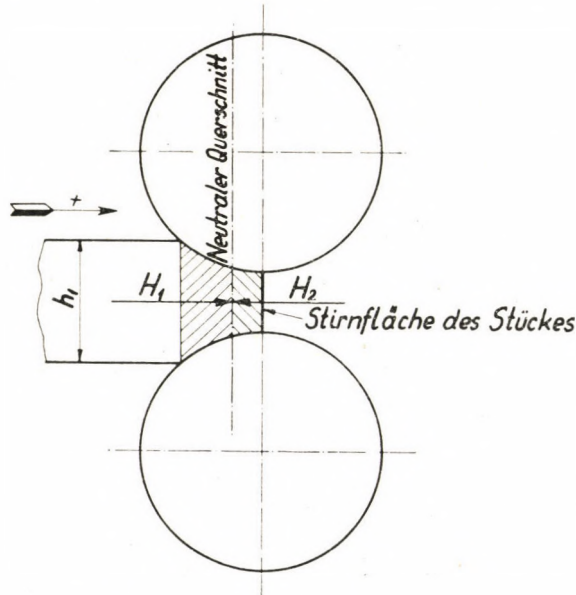


Bild 3

kräfte in den Walzspalt eingezogen wird, entsteht das Gleichgewicht der Kräfte H_1 und H_2 im Augenblick, wo die Stirnfläche des Walzgutes den Austrittsquerschnitt erreicht. Wenn ausser den Kräften H_1 und H_2 keine andere Kraft zur

Weiterbeförderung des Walzgutes vorhanden wäre, so könnte das Walzgut überhaupt nicht durch den Walzspalt gehen, sondern würde bei dem Austrittsquerschnitt hängen bleiben. Da die KÁRMÁNsche Vorstellung bzw. die Gleichungen nur die zwischen den Walzen und dem Walzgut entstehenden Reibungskräfte in Betracht ziehen, ist diese Vorstellung, wie wir sehen, für die Erklärung des Entstehens der Kräfte im Walzspalt und folglich auch für deren Berechnung ungenügend.

Eine neuere Theorie wurde von E. OROWAN ausgearbeitet [8], die sich von den Theorien von KÁRMÁN, NÁDAI und anderen insoweit unterscheidet, als hier weder Gleitreibung noch homogene Kompression vorausgesetzt wird.

Diese Walztheorie ist auf den PRANDTLschen Untersuchungen über die Bewegung einer plastischen Masse zwischen zwei parallelen reibenden Platten aufgebaut [9]. Es wird dabei vorausgesetzt, dass der gewalzte Werkstoff während der Verformung sich nicht erhärtet, eine bestimmte Fließgrenze hat, und an den Druckplatten haftet, dass also keine Gleitung längs der Druckflächen entsteht. Bei dem Ausbau dieser Walztheorie wurden weiters die folgenden Voraussetzungen angenommen:

1. Bei der Walzung tritt keine Breitung auf.

2. Der Einspannwinkel ist klein. (Diese Voraussetzung ist die Folge davon, dass der Walzprozess dem Druckprozess gleichgesetzt wird, wo die ebenen Druckplatten mit einem kleinen Winkel zueinander neigen.)

3. Bei der Ableitung der Spannungsverteilung wird vorausgesetzt, dass die Lösung von NÁDAI für die Spannungsverteilung längs der Druckflächen nicht nur in dem Fall richtig ist, wenn der gedrückte Werkstoff sich in der Öffnungsrichtung der gegeneinander geneigten Druckflächen bewegt, sondern auch wenn die Bewegung des Werkstoffes entgegengesetzt gerichtet ist [10]. Eine weitere Voraussetzung ist, dass die Gleitung auch von der Haftung abgeleitet werden kann, wenn ausser den Grenzflächen auch imaginäre Haftflächen vorausgesetzt werden.

In Wirklichkeit sind die ersten zwei Bedingungen nur beim Walzen von dünnen Blechen erfüllt, die dritte Bedingung müsste experimentell erwiesen werden, was aber bisher nicht geschehen ist.

Sollte die OROWANSche Theorie experimentell noch bestätigt werden, dann würde bei deren praktischer Anwendung immer noch die Schwierigkeit bestehen, dass bei den Berechnungen statt der Fließgrenze der homogenen Kompression die Fließgrenze der inhomogenen Kompression verwendet werden müsste.

Die neueste Walztheorie stammt von G. S. MICAN (1954) [11]. In dieser Theorie wird dem auf den Einspannbogen bezogenen Reibungshügel die Druckspannungskurve überlagert. Der Reibungshügel wird mit Hilfe der KÁRMÁNschen Gleichungen bestimmt [3], die Druckspannungskurve mit Hilfe der von MICAN geänderten PRANDTLschen Gleichungen [9] ermittelt, unter der Voraussetzung, dass der Einspannbogen durch zwei parallele Geraden vertreten wird

(Bild 4). Bei der Ableitung dieser Theorie nahm MICAN dieselben vereinfachenden Voraussetzungen an, wie KÁRMÁN bei der Ableitung seiner Theorie.

Die Arbeit von MICAN ist ein ernster Schritt in Richtung der richtigen Bestimmung der im Walzspalt auftretenden Kräfte. Auch weist MICAN richtig darauf hin, dass die KÁRMÁNsche Vorstellung zur Lösung des Problems ungenügend ist. Die MICANsche Theorie ist aber auch nur eine auf Analogien aufgebaute Näherungstheorie, da die Verformungswiderstandskurve nicht aus der Analyse der Vorgänge im Walzspalt abgeleitet, sondern gewissermassen ausser acht gelassen wird. Diese Theorie ist nur bei konstanter Verformungsfestigkeit (bei Warmwalzung) verwendbar, beim Kaltwalzen dagegen nicht.

Alles was hier über die KÁRMÁNsche, OROWANSche und MICANsche Walztheorien kurz gesagt wurde, deutet dahin, dass das Problem des Verformungswiderstandes beim Walzen noch nicht als gelöst betrachtet werden kann. Die bisherigen Theorien haben noch zahlreiche Probleme der Mechanik des Walzens nicht geklärt, so z. B. den Zusammenhang zwischen den Begleiterscheinungen des Walzens (Breitung, Voreilung) und dem Verformungswiderstand, obwohl diese Erscheinungen, wie wir sehen werden, auf die Verteilung und Grösse des Verformungswiderstandes von grossem Einfluss sind. In der nachstehend dargestellten Walztheorie werden diesen Begleiterscheinungen besondere Beachtung geschenkt.

Die neue Walztheorie

Werden bei dem einfachsten Walzvorgang, also wenn das Walzgut einen rechteckigen Querschnitt und die Walzen glatte zylindrische Form haben, die kinematischen Verhältnisse zum Gegenstand einer Untersuchung gemacht, so findet man, dass längs der gedrückten Flächen jedes Flächenelement der Walzen auf dem mit ihm in Berührung kommenden Flächenelement des Walzgutes gleitet (rutscht). Vor dem neutralen Querschnitt werden die Flächenelemente der Walzen im Verhältnis zu den mit ihnen in Berührung kommenden Flächenelementen des Walzgutes vorwärtseilen, hinter dem neutralen Querschnitt dagegen zurückbleiben. Im neutralen Querschnitt entsteht zwischen der Walzenoberfläche und der Stückoberfläche keine relative Verschiebung (Rutschung), sie laufen gemeinsam.

Die relative Gleitgeschwindigkeit zwischen den einzelnen Walzenflächenelementen und den mit diesen in Berührung stehenden Flächenelementen des Stückes kann mit der folgenden Formel ausgedrückt werden (Bild 4):

$$v_r = v_k \cdot \left(1 - \frac{h_2}{h} \cdot \frac{\delta}{c \cos \varphi} \right). \quad (4)$$

Hier ist v_k die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen, v_1 die Eintrittsgeschwindigkeit und v_2 die Austrittsgeschwindigkeit des Walzstückes, h_1 die

Höhe des eintretenden und h_2 die Höhe des austretenden Stückes, b_1 die Breite des eintretenden und b_2 die Breite des austretenden Stückes, α der Greifwinkel, φ ein beliebiger Winkel zwischen Ein- und Austrittsquerschnitt; h bezeichnet die Höhe des zu dem Winkel φ gehörenden Zwischenquerschnittes und

$$\delta = \frac{v_2}{v_k} \quad (5)$$

ist der Voreilungskoeffizient.

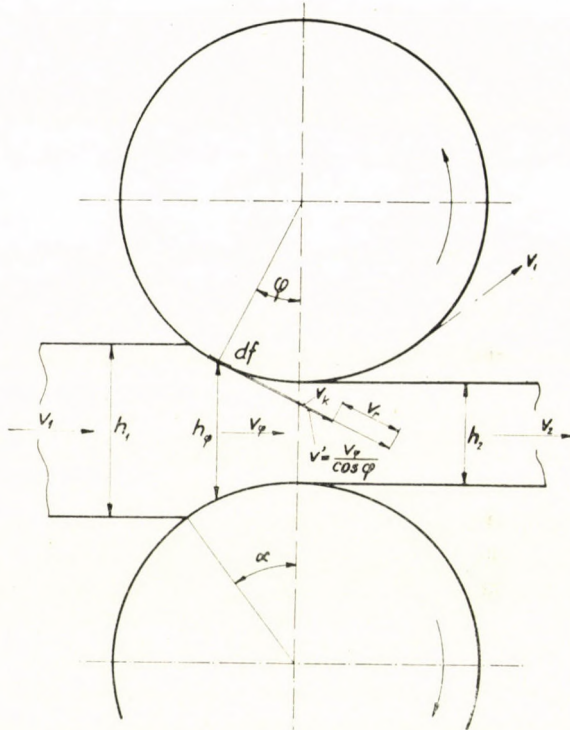


Bild 4

Die Änderung der Relativgeschwindigkeit v_r längs des Einspannbogens nach Formel (4) ist im Bild 5 zu sehen.

Winkel φ_0 , der die Lage des neutralen Querschnittes (der Fließscheide) bestimmt, kann aus Formel (4) berechnet werden, und ist :

$$\varphi_0 = \arccos \frac{(2r + h_2) + \sqrt{(2r + h_2)^2 - 8 \cdot r \cdot h_2 \cdot \delta}}{4r} \quad (6)$$

Das gewalzte Stück von quadratischem Querschnitt ändert sich im Walzspalt von der Breite b_1 auf die Breite b_2 . Die absolute Breitung ist

$$\Delta b = b_2 - b_1 \quad (7)$$

Die Ursache des Breitens ist die folgende.

Die Geschwindigkeit v_s des Werkstoffflusses durch den neutralen Querschnitt in Richtung der Walzung ist gleich der zu der Fließscheide gehörenden

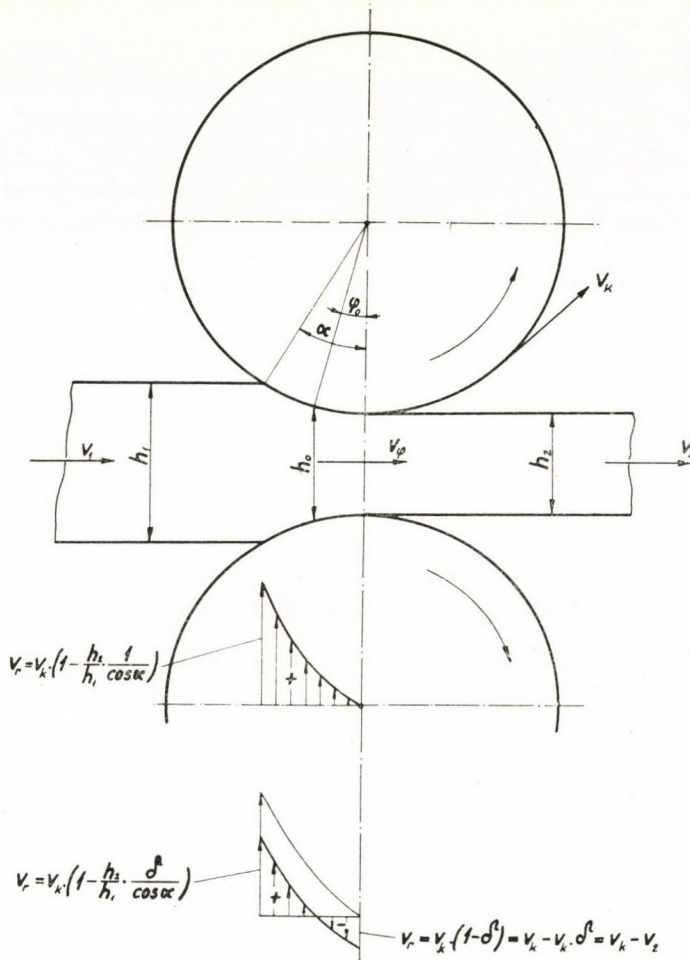


Bild 5

und in Richtung der Walzung fallenden Projektion der Walzenumfangsgeschwindigkeit (Bild 6):

$$v_s = v_k \cdot \cos \varphi_0. \quad (8)$$

Im neutralen Querschnitt entsteht also zwischen der Walzenoberfläche und der Stückoberfläche keine relative Verschiebung, sie laufen gemeinsam.

Die Lage der Fließscheide in dem Walzspalt ändert sich während des Stiches nicht. Der Winkel φ_0 bleibt also während des Stiches konstant.

Beim Stich tritt das Walzgut mit dem Querschnitt $h_1 \cdot b_1$ durch die Eintrittsebene in den Walzspalt. Wenn keine Breitung entstände, dann könnte durch den neutralen Querschnitt nur ein Walzgut mit dem Querschnitt $h_s \cdot b_1$ durchlaufen; hier bedeutet h_s die Höhe des neutralen Querschnittes, $h_s < h_1$ (Bild 6).

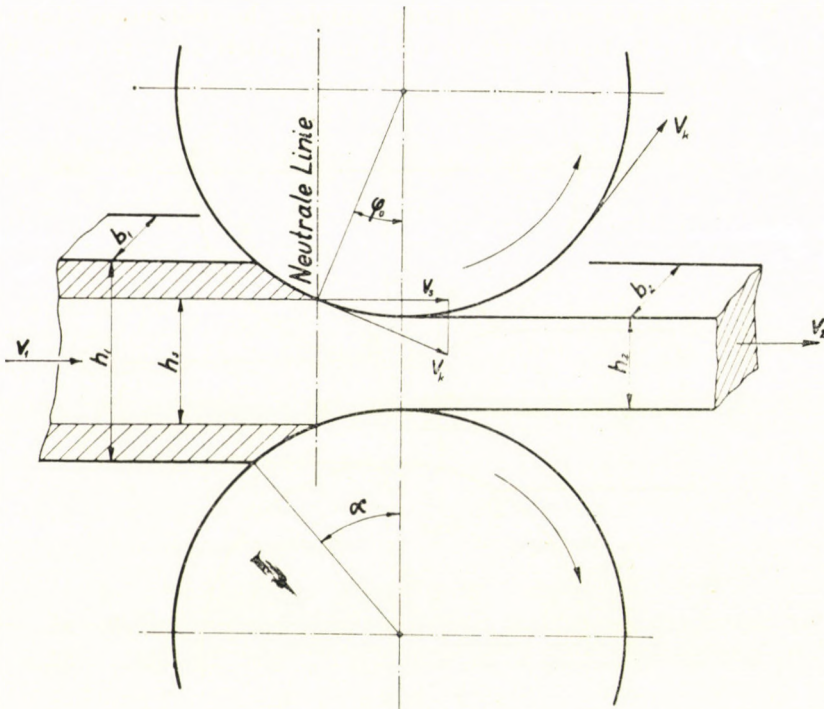


Bild 6

Da zwischen zylindrischen Walzen immer eine Breitung entsteht, läuft durch den neutralen Querschnitt sekundlich ein Werkstoffvolumen von

$$V_s = h_s \cdot b_s \cdot v_s = h_s \cdot b_s \cdot v_k \cdot \cos \varphi_0 \quad (9)$$

durch.

Gleichung (9) kann auch folgenderweise geschrieben werden :

$$V_s = h_s \cdot b_1 \cdot v_s + (b_s - b_1) \cdot h_s \cdot v_s. \quad (10)$$

Hier ist

$$\Delta V = (b_s - b_1) \cdot h_s \cdot v_s = (b_s - b_1) \cdot h_s \cdot v_k \cdot \cos \varphi_0 \quad (11)$$

das Werkstoffvolumen, das in Breitung übergeht. Die Breitung ist also

$$\Delta b_s = (b_s - b_1) = \frac{\Delta V}{h_s \cdot v_s} . \quad (12)$$

Praktisch hat sich beinahe die ganze Breitung bereits bei der Erreichung des neutralen Querschnitts (d. h. der Fliessscheide) entfaltet.

In Wirklichkeit kann die Breitung infolge der teilweisen Haftung des Werkstoffes an der Walzenoberfläche nicht ungehindert auftreten. Das Walzgut

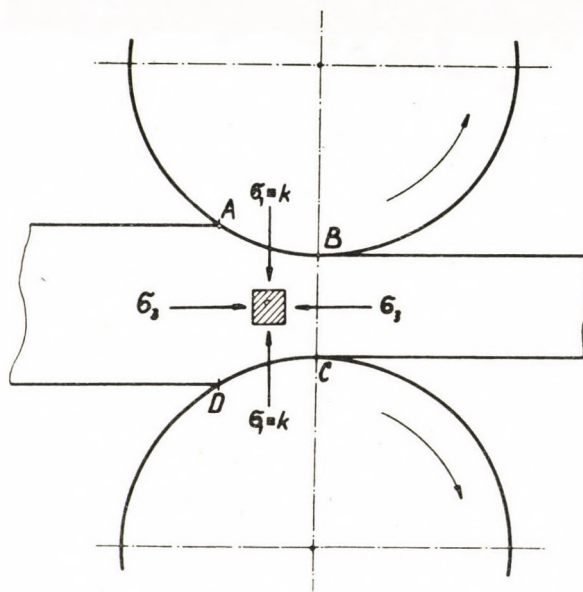


Bild 7

haftet nämlich teilweise an den Walzen, was die Werkstoffbewegung innerhalb einer Breitenzone nur rückwärts, nicht aber seitwärts ermöglicht. Nur in den zwei Randzonen kann der Werkstoff dem Walzdruck auch seitlich ausweichen [12, 13].

Zum Zustandekommen der Walzung ist es notwendig, dass zwischen den Walzen und dem Walzgut eine Reibung stattfindet. Die Kraft, durch die ein Stab durch die Walzen gezogen wird, ist die an den Walzenflächen auftretende Reibung.

Das Vorwärtsgleiten bzw. das Zurückbleiben der Walzenflächen auf den gedrückten Flächen des Stückes erzeugt in dem gewalzten Stücke Kräfte, die in der Walzrichtung wirken. Es sind zum grossen Teil diese Kräfte, die die dritte Hauptspannung σ_3 in dem gedrückten Teil des gewalzten Stückes hervorrufen

(Bild 7). Diese Reibungskräfte trachten zusammen mit den Druckkräften der Walzen das gewalzte Stück durch den Walzspalt durchzuzwingen, u. zw. mit einer Geschwindigkeit (v_2) die grösser ist, als die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen (v_k). Die in der Walzrichtung wirkenden Kräfte, die durch die Reibungskräfte hervorgerufen werden, können nach Bild 8 und Bild 9 ermittelt werden.

Die in der Walzrichtung auftretenden horizontalen Kräfte sind :

$$dH = 2 (\mu \cdot dN \cdot \cos \varphi \mp dN \cdot \sin \varphi) . \tag{13}$$

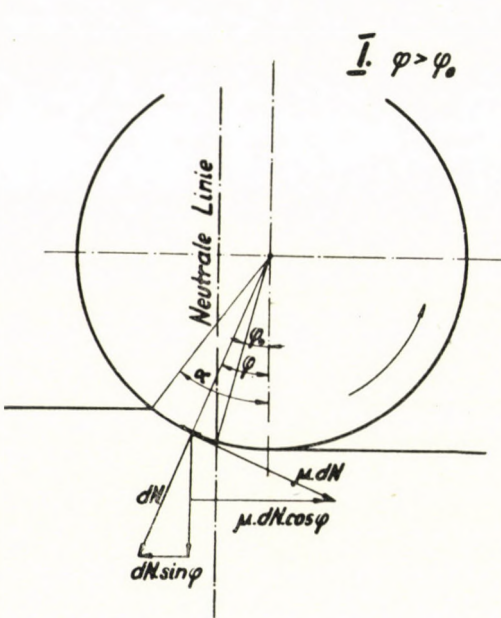


Bild 8

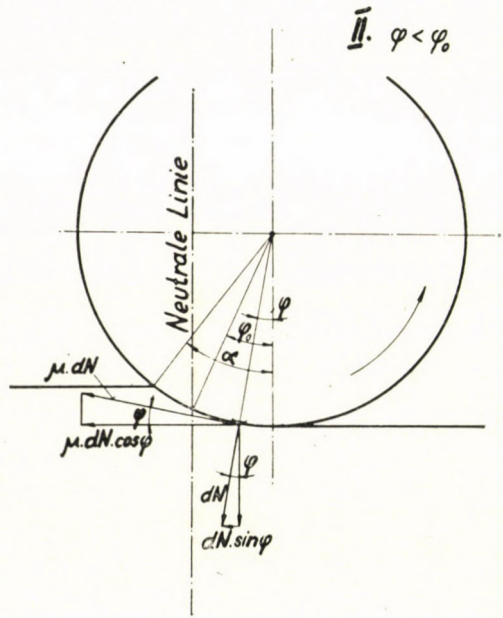


Bild 9

Hier ist die auf das Flächenelement df wirkende Normalkraft

$$dN = k \cdot df = k \cdot b \cdot r \cdot d\varphi , \tag{14}$$

wo k den Verformungswiderstand, b die Breite des Flächenelements df und r den Halbmesser der Walzen bedeutet.

Die Grösse der Voreilung wird durch den Gleichgewichtszustand der Kräfte dH_1 und dH_2 bestimmt (Bild 10). Die Kräfte H_1 und H_2 halten einander in der neutralen Linie d. h. in demjenigen Querschnitt des gewalzten Stückes das Gleichgewicht, der zu dem Winkel φ_0 gehört, also dort, wo die Walzenflächenelemente und Stückflächenelemente aneinander nicht gleiten, sondern wo $v_r = 0$ ist. An dieser Stelle ändert sich das Vorzeichen der Relativgeschwindigkeit

keit v_r (Bild 5). Die in der Walzrichtung wirkende Kraft H_1 ist :

$$H_1 = \int_{\alpha}^{\varphi_0} dH_1 = 2 \int_{\alpha}^{\varphi_0} (\mu \cdot dN \cdot \cos \varphi - dN \cdot \sin \varphi) \quad (15)$$

und die Kraft H_2 ist :

$$H_2 = \int_0^{\varphi_0} dH_2 = 2 \int_0^{\varphi_0} (\mu \cdot dN \cdot \cos \varphi + dN \cdot \sin \varphi). \quad (16)$$

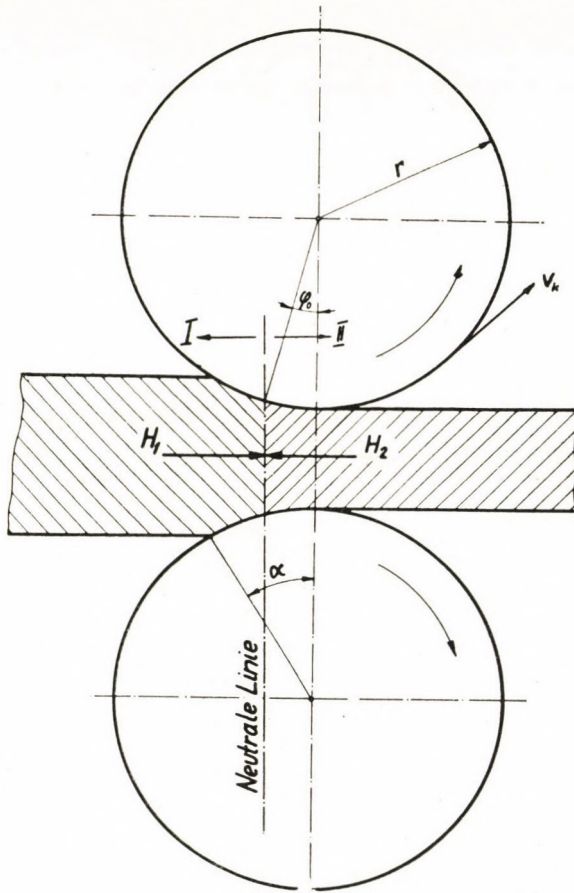


Bild 10

Da bei φ_0 die Kraft $H_1 = H_2$ ist, kann geschrieben werden :

$$\int_{\varphi_0}^{\alpha} dN \cdot (\mu \cdot \cos \varphi - \sin \varphi) - \int_0^{\varphi_0} dN \cdot (\mu \cdot \cos \varphi + \sin \varphi) = 0. \quad (17)$$

Diese Gleichung bestimmt die Grösse des Winkels φ_0 bzw. die Grösse der Voreilung.*

Für praktische Zwecke kann die Voreilung mit guter Annäherung berechnet werden, wenn vorausgesetzt wird, dass der Verformungswiderstand k an den gedrückten Flächen konstant ist. Unter dieser Voraussetzung kann geschrieben werden :

$$\int_{\varphi_0}^{\alpha} k \cdot b \cdot r \cdot d\varphi (\mu \cdot \cos \varphi - \sin \varphi) - \int_0^{\varphi_0} k \cdot b \cdot r \cdot d\varphi \cdot (\mu \cdot \cos \varphi + \sin \varphi) = 0, \quad (18)$$

da $k = \text{konstant}$ ist,

$$\int_{\varphi_0}^{\alpha} (\mu \cdot \cos \varphi - \sin \varphi) \cdot d\varphi - \int_0^{\varphi_0} (\mu \cdot \cos \varphi + \sin \varphi) \cdot d\varphi = 0, \quad (19)$$

woraus

$$\sin \varphi_0 = \frac{\mu \cdot \sin \alpha - (1 - \cos \alpha)}{2 \cdot \mu}, \quad (20)$$

und so ist

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{\mu \cdot \sin \alpha - (1 - \cos \alpha)}{2 \cdot \mu}. \quad (21)$$

Ist der Winkel φ_0 bekannt, so kann der Voreilungskoeffizient bestimmt werden :

$$\delta = \frac{v_2}{v_k} = \frac{[h_2 + 2r(1 - \cos \varphi_0)] \cdot \cos \varphi_0}{h_2}. \quad (22)$$

Wenn wir die Verhältnisse im Walzspalt näher untersuchen, dann werden wir dessen gewahr, dass ausser den von den Reibungskräften (Bild 8, 9) hervorgerufenen Kräften H_1 und H_2 im Walzspalt noch eine andere Kraft gegenwärtig sein muss. Wenn in dem Walzspalt ausser den Kräften H_1 und H_2 keine andere Kraft zur Weiterbeförderung des Walzgutes vorhanden wäre, so könnte das Walzgut den Walzspalt überhaupt nicht passieren, sondern würde bei dem Austrittsquerschnitt hängen bleiben (Bild 3). Die Kräfte H_1 und H_2 sind nämlich in dem neutralen Querschnitt im Gleichgewicht, als die Stirnfläche

* Da $v_r = v_k \cdot \left(1 - \frac{h_2}{h} \cdot \frac{\delta}{\cos \varphi}\right)$ und $\varphi = \varphi_0$ ist, so ist $h = h_s$ und $v_r = 0$, und so beträgt

$$\delta = \frac{h_s}{h_2} \cdot \cos \varphi_0 = \frac{[h_2 + 2r \cdot (1 - \cos \varphi_0)] \cdot \cos \varphi_0}{h_2}. \quad (22)$$

$\delta = \frac{v_2}{v_k}$ ist der Voreilungskoeffizient.

In Gleichung (23) ist p_s die auf den neutralen Querschnitt wirkende spezifische Druckspannung, h_s die Höhe und b_s die Breite des neutralen Querschnittes.

Woher stammt diese Druckkraft P bzw. Druckspannung p_s ? Im Zusammenhang mit Bild 6 haben wir schon darauf hingewiesen, dass der durch den quadra-

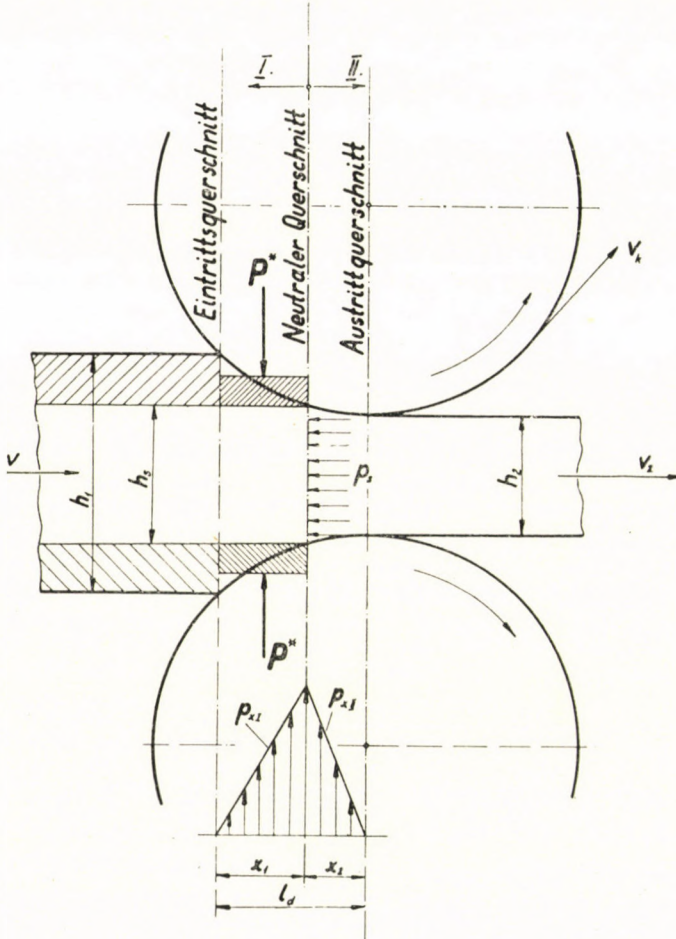


Bild 12

tischen Eintrittsquerschnitt $h_1 \cdot b_1$ zwischen den Walzspalt eintretende Werkstoff durch den quadratischen neutralen Querschnitt $h_s \cdot b_s$ nur dann durchgehen kann, wenn ein Teil des gewalzten Werkstoffes in die Breitung des Walzgutes übergeht. Da der Abstand x_1 sich zwischen dem Eintrittsquerschnitt und dem neutralen Querschnitt während des Stiches nicht ändert, so entsteht bei der Zusammendrückung des Werkstoffprismas (a b c d), das sich zwischen diesen Querschnitten befindet, die Druckspannung p_1 längs des Eintrittsquerschnitts,

sowie die Druckspannung p_s längs des neutralen Querschnitts (Bild 12). Zwischen Eintritts- und Austrittsquerschnitt entsteht also im Walzgut in der Längsachsenrichtung eine Spannung p , die höchstwahrscheinlich ihren maximalen Wert im neutralen Querschnitt erreicht (Gleichung 23) und im Eintritts- sowie im Austrittsquerschnitt gleich Null ist ($p_1 = p_2 = 0$, Bild 12).

Der Verformungswiderstand längs des Einspannbogens ist laut der Fließbedingung (Bild 13) :

$$k_x = k_{fx} + \sigma_{3x}. \quad (24)$$

Hier ist k_x der Verformungswiderstand, k_{fx} die Verformungsfestigkeit, σ_{3x} die im Walzspalt in der Walzrichtung auftretende dritte Hauptspannung im Abstand x von dem Eintritts- oder Austrittsquerschnitt, je nachdem, ob wir den Verformungswiderstand vor oder hinter dem neutralen Querschnitt bestimmen wollen. Diese dritte Hauptspannung ist nach den Gleichungen (15) und (16) vor dem neutralen Querschnitt :

$$\sigma_{3xI} = \frac{2r}{h_x} \cdot \int_{\alpha}^{\varphi} k_{mI} \cdot (\mu \cdot \cos \varphi - \sin \varphi) \cdot d\varphi + p_{xI}, \quad (25)$$

hinter dem neutralen Querschnitt :

$$\sigma_{3xII} = \frac{2r}{h_x} \cdot \int_0^{\varphi} k_{mII} (\mu \cdot \cos \varphi + \sin \varphi) \cdot d\varphi + p_{xII}. \quad (26)$$

In diesen Gleichungen ist k_m der mittlere Verformungswiderstand längs des durch die zwei Integrationsgrenzen bestimmten gedrückten Bogens. Einfachheitshalber nehmen wir an, dass dieser mittlere Verformungswiderstand vor dem neutralen Querschnitt mit praktischer Annäherung zu

$$k_{mI} = \frac{k_{fI} + k_{xI}}{2} \quad (27)$$

und hinter dem neutralen Querschnitt zu

$$k_{mII} = \frac{k_{f2} + k_{xII}}{2} \quad (28)$$

gesetzt werden kann.

In den Gleichungen (27) und (28) ist k_{f1} die Verformungsfestigkeit des gewalzten Werkstoffes vor dem Stich, k_{f2} die Verformungsfestigkeit nach dem Stich ; k_{xI} bezeichnet den Verformungswiderstand im Abstand x von dem

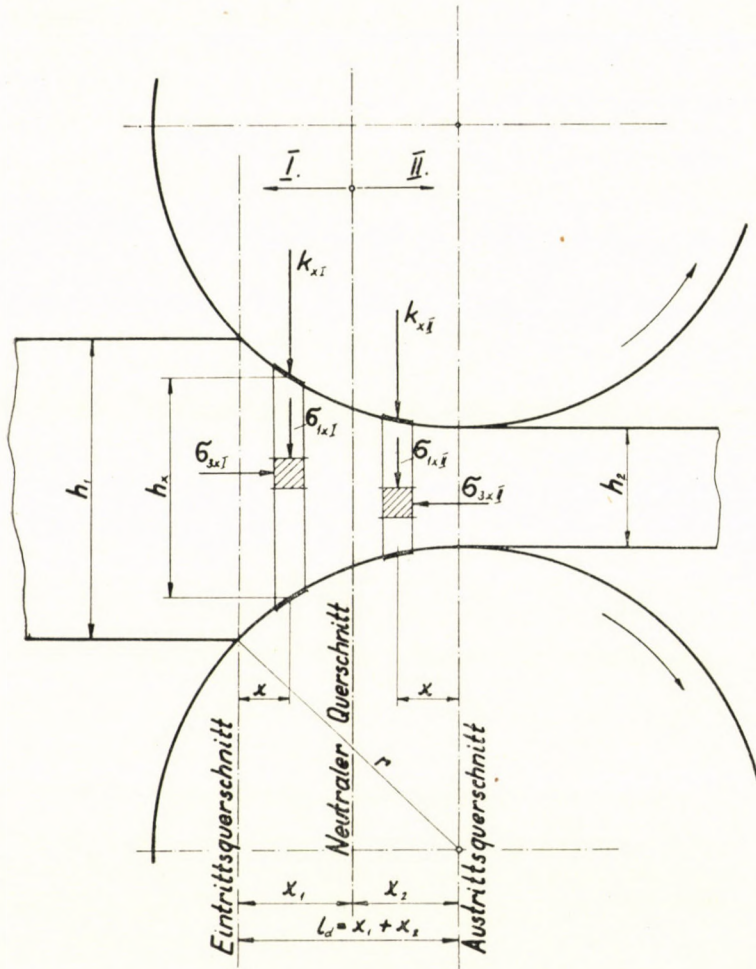


Bild 13

Eintrittsquerschnitt und k_{xII} im Abstand x von dem Austrittsquerschnitt (Bild 13, 14 und 15).

Die mittleren Verformungswiderstände k_{mI} und k_{mII} können als konstanten vor das Integralzeichen gestellt werden, also :

$$\sigma_{3xI} = (k_{fI} + k_{xI}) \cdot \frac{r}{h_x} \cdot \int_{\varphi}^{\alpha} (\mu \cdot \cos \varphi - \sin \varphi) \cdot d\varphi \cdot d\varphi + p_{xI} \quad (29)$$

und

$$\sigma_{3xII} = (k_{f2} + k_{xII}) \cdot \frac{r}{h_x} \cdot \int_0^{\varphi} (\mu \cdot \cos \varphi + \sin \varphi) \cdot d\varphi + p_{xII} \quad (30)$$

Demnach ist der Verformungswiderstand in der Entfernung x vom Eintrittsquerschnitt (vor dem neutralen Querschnitt):

$$k_{xI} = k_{fxI} + \sigma_{3xI} = k_{fxI} + (k_{f1} + k_{xI}) \cdot \frac{r}{h_x} \int_{\varphi}^{\alpha} (\mu \cdot \cos \varphi - \sin \varphi) \cdot d\varphi + p_{xI} \quad (31)$$

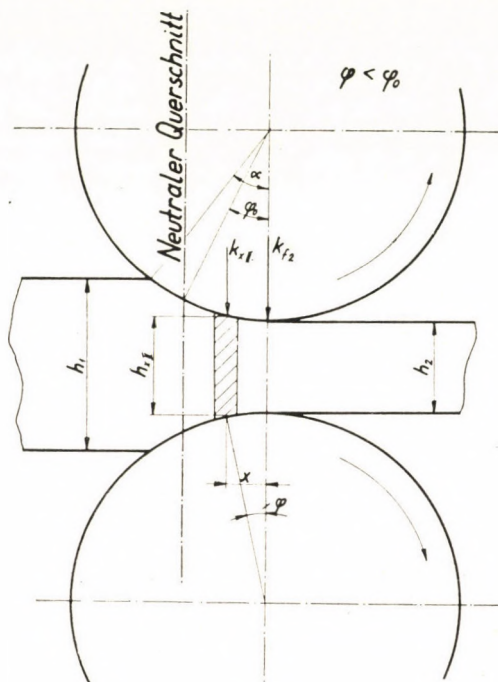


Bild 14

und in der Entfernung x vom Austrittsquerschnitt (hinter dem neutralen Querschnitt):

$$k_{xII} = k_{fxII} + (k_{f2} + k_{xII}) \cdot \frac{r}{h_x} \cdot \int_0^{\varphi} (\mu \cdot \cos \varphi + \sin \varphi) \cdot d\varphi + p_{xII} \quad (32)$$

In den Gleichungen (31) und (32) bedeuten k_{fxI} und k_{fxII} die Verformungsfestigkeit des gewalzten Stückes in der Entfernung x vom Eintritts- bzw. vom Austrittsquerschnitt im Stückerzeugnis vor bzw. hinter dem neutralen Querschnitt.

Nach Durchführung der verschiedenen Rechenoperationen erhält man:

$$k_{xI} = \frac{k_{fxI} + k_{f1} \cdot \frac{r}{h_x} [\mu \cdot (\sin \alpha - \sin \varphi) - (\cos \varphi - \cos \alpha)]}{1 - \frac{r}{h_x} \cdot [\mu \cdot (\sin \alpha - \sin \varphi) - (\cos \varphi - \cos \alpha)]} + p_{xI} \quad (33)$$

und

$$kx_{II} = \frac{k_{f_{xII}} + k_{f_2} \cdot \frac{r}{h_x} [\mu \cdot \sin \varphi + (1 - \cos \varphi)]}{1 - \frac{r}{h_x} [\mu \cdot \sin \varphi + (1 - \cos \varphi)]} + p_{xII}. \quad (34)$$

Nach Bild 16 ist

$$x = r \cdot (\sin \alpha - \sin \varphi) \quad (35)$$

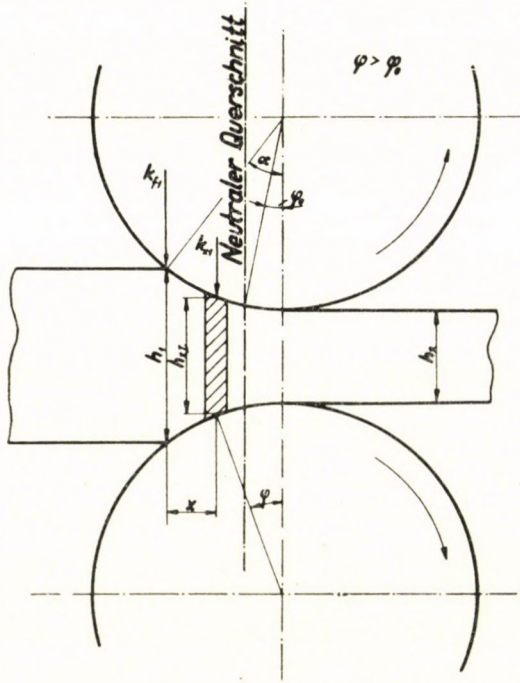


Bild 15

und

$$x \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = r \cdot (\cos \varphi - \cos \alpha), \quad (36)$$

worin

$$\frac{\beta_1}{2} = \frac{\alpha + \varphi}{2} \quad \text{bzw.} \quad \beta_1 = \alpha + \varphi \quad (37)$$

ist. Weiterhin ist

$$h_x = (2r + h_2) - 2r \cdot \cos \varphi = h_2 + 2r(1 - \cos \varphi). \quad (38)$$

Laut Bild 17 ist

$$x = r \cdot \sin \varphi \quad (39)$$

und

$$x \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = r \cdot (1 - \cos \varphi), \quad (40)$$

ferner

$$\frac{\beta_{11}}{2} = \frac{\varphi}{2} \quad \text{bzw.} \quad \beta_{11} = \varphi \quad (41)$$

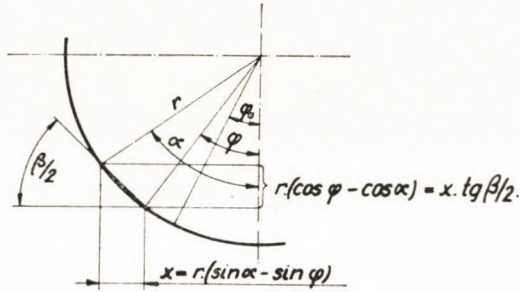


Bild 16

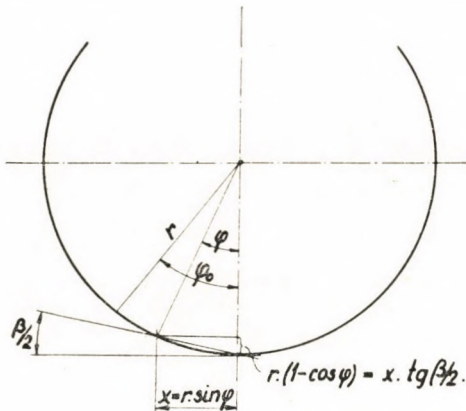


Bild 17

und

$$h_x = 2r + h_2 - 2r \cdot \cos \varphi. \quad (42)$$

An Hand der Bilder 16 und 17 können die Gleichungen (33) und (34) auf folgende Form gebracht werden :

$$k_{x1} = \frac{k_{fx1} + k_{f1} \cdot \frac{x}{h_x} \cdot \left[\mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \right]}{1 - \frac{x}{h_x} \cdot \left[\mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \right]} + p_{x1} \quad (43)$$

und

$$k_{xII} = \frac{k_{fxII} + k_{f2} \cdot \frac{x}{h_x} \cdot \left[\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} \right]}{1 - \frac{x}{h_x} \cdot \left[\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} \right]}, \quad (44)$$

wo $\beta_I = \alpha + \varphi$ und $\beta_{II} = \varphi$ ist, wo ferner vor dem neutralen Querschnitt

$$h_x = h_1 - 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_I}{2} \quad (45)$$

und hinter dem neutralen Querschnitt

$$h_x = h_2 + 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} \quad (46)$$

beträgt.

Die Exponentialfunktionsform der Gleichungen (43) und (44) ist

$$k_x = k_{fi} \cdot e^{\frac{2 \cdot \left(\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} \right)}{h_x} \cdot \frac{k_{fi}}{k_{fxi}} \cdot x} + p_{xi}, \quad (47)$$

wo $i = 1$ oder 2 , bzw. I oder II.

Da vor dem neutralen Querschnitt

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_I}{2} = \frac{2l_d - x}{2r} \quad (48)$$

und hinter dem neutralen Querschnitt

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} = \frac{x}{2r} \quad (49)$$

ist, die mit der Formel (47) ausgedrückte Funktion kann vor bzw. hinter dem neutralen Querschnitt folgenderweise aufgeschrieben werden :

$$k_{xI} = k_{fI} \cdot e^{\frac{2 \left[\mu - \frac{2l_d - x}{2r} \right]}{h_x} \cdot \frac{k_{fI}}{k_{fxI}} \cdot x} + p_{xI} \quad (50)$$

und

$$k_{xII} = k_{f2} \cdot e^{\frac{2 \left[\mu + \frac{x}{2r} \right]}{h_x} \cdot \frac{k_{f2}}{k_{fxII}} \cdot x} + p_{xII} \quad (51)$$

In den Formeln (43), (44) bzw. (47), (50) und (51) sind p_{xI} und p_{xII} unbekannt. Zur Ermittlung der Funktionen p_{xI} und p_{xII} ist die Kenntnis der Spannung p_s nötig. Die Ermittlung der Spannung p_s geschieht unter der Voraussetzung, dass die zur Herausdrückung des hinter dem neutralen Querschnitt befindlichen Stückteiles a b c d (Bild 18) nötige Kraft (Gl. 23)

$$P = p_s \cdot h_s \cdot b_s = k_{zm} \cdot (F + \mu \cdot Q) \quad (52)$$

ist. In dieser Gleichung bezeichnet die rechte Seite in vereinfachter Form die Kraft, die nötig ist, einen Stab durch einen Ziehspalt durchzudrücken [14]. Gleichung (52) bezeichnet also

$$F = (h_s - h_2) \cdot b_2 \quad (53)$$

die Querschnittsabnahme,

$$Q = 2 \cdot x_2 \cdot b_2 \quad (54)$$

die arbeitenden Flächen des Ziehspaltes, μ den Reibungskoeffizienten, k_{zm} den mittleren Verformungswiderstand beim Durchdrücken einer Stange durch eine Ziehdüse (einen Ziehspalt). Der hinter dem neutralen Querschnitt befindliche Walzspalt wirkt als ein Ziehspalt, durch den die gewalzte Stange mit einer Geschwindigkeit (v_2) durchgedrückt wird, die grösser ist, als die Walzenumfangsgeschwindigkeit (v_k). Aus Gleichung (52) ergibt sich bei Verwendung der Gleichungen (53) und (54) der spezifische Druck, der am neutralen Querschnitt wirkt, zu

$$p_s = \frac{k_{zm}}{h_s} \cdot [(h_s - h_2) + 2 \cdot \mu \cdot x_2]. \quad (55)$$

Hier ist

$$2r + h_2 = 2r \cdot \cos \varphi_0 + h_s, \quad (56)$$

und so ist

$$2r(1 - \cos \varphi_0) = h_s - h_2, \quad (57)$$

weilers

$$x_2 = r \cdot \sin \varphi_0. \quad (58)$$

Mit Verwendung von den Gleichungen (56), (57) und (58) erhält man den spezifischen Druck auf den neutralen Querschnitt:

$$p_s = \frac{2r \cdot k_{zm}}{h_s} \cdot [(1 - \cos \varphi_0) + \mu \cdot \sin \varphi_0]. \quad (59)$$

Der mittlere Verformungswiderstand beim Durchdrücken einer Stange durch eine Ziehdüse (einen Ziehspalt) ist

$$k_{zm} = \frac{k_{fm}}{1 - \frac{F + \mu \cdot Q}{2 f_s}}, \quad (60)$$

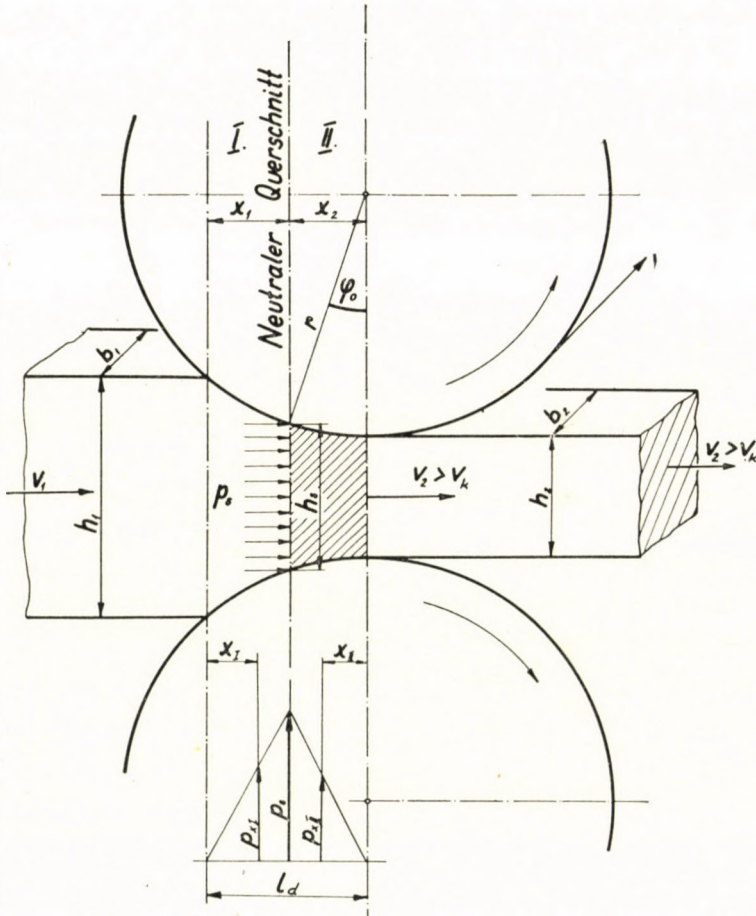


Bild 13

wo

$$f_s = h_s \cdot b \quad (61)$$

den neutralen Querschnitt bedeutet.

Der mittlere Verformungswiderstand kann mit Hilfe der Gleichungen (53), (54) und (61) folgenderweise geschrieben werden :

$$k_{zm} = \frac{k_{fm}}{1 - \frac{[(h_s - h_2) + 2 \mu \cdot x_2]}{2 h_s}} = \frac{k_{fm}}{1 - \frac{(h_s - h_2) + 2 \mu \cdot x_2}{2 h_s}}. \quad (62)$$

Hier ist

$$k_{fm} = \frac{k_{fs} + k_{f2}}{2}, \quad (63)$$

wo k_{fs} die Verformungsfestigkeit im neutralen Querschnitt und k_{f2} die Verformungsfestigkeit im Austrittsquerschnitt bedeutet.

Die Druckspannung p ist im neutralen Querschnitt gleich p_s , im Eintritts- und Austrittsquerschnitt gleich Null. Wir nehmen an, dass die Spannung p sowohl vor, wie auch hinter dem neutralen Querschnitt annähernd linear verläuft. Unter dieser Voraussetzung ist sowohl vor, wie auch hinter dem neutralen Querschnitt im Abstand x von dem Eintritts- oder Austrittsquerschnitt

$$p_{xi} = \left(\frac{p_s}{x_i} \right) \cdot x, \quad (64)$$

wo $i = I$ oder II (Bild 18) ist.

Im Sinne der obigen Ausführungen beträgt der Verformungswiderstand des Walzens vor dem neutralen Querschnitt, wenn der gewalzte Werkstoff an den Walzenflächen nirgends haftet :

$$k_{xI} = \frac{k_{fxI} + k_{f1} \cdot \frac{x}{h_x} \left(\mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \right)}{1 - \frac{x}{h_x} \cdot \left(\mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \right)} +$$

$$+ x \cdot \left\{ \frac{(k_{fs} + k_{f2}) \cdot [(1 - \cos \varphi_0) + \mu \cdot \sin \varphi_0]}{\sin \varphi_0 \cdot (h_2 - 2r \cdot \mu \cdot \sin \varphi_0)} \right\}, \quad (65)$$

hinter dem neutralen Querschnitt:

$$k_{xII} = \frac{k_{fxII} + k_{f2} \cdot \frac{x}{h_x} \cdot \left(\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} \right)}{1 - \frac{x}{h} \cdot \left(\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{II}}{2} \right)} +$$

$$+ x \cdot \left\{ \frac{(k_{fs} + k_{f2}) \cdot [(1 - \cos \varphi_0) + \mu \cdot \sin \varphi_0]}{(\sin \alpha - \sin \varphi_0) (h_2 - 2r) \cdot \mu \cdot \sin \varphi_0} \right\}. \quad (66)$$

Die mit den Formeln (65) und (66) berechnete Verteilung des Verformungswiderstandes den Einspannbogen entlang ist aus Bild 19 ersichtlich.

Die mit den Formeln (65) und (66) ausgedrückten Funktionen des Verformungswiderstandes sind gültig, solange zwischen den Walzenflächen und

den von ihnen gedrückten Stückflächen kein Haften auftritt, also solange die Walzenflächen an den gedrückten Stückflächen gleiten, d. h. solange

$$k_x \leq \frac{\xi}{\mu'} \cdot k_f \tag{67}$$

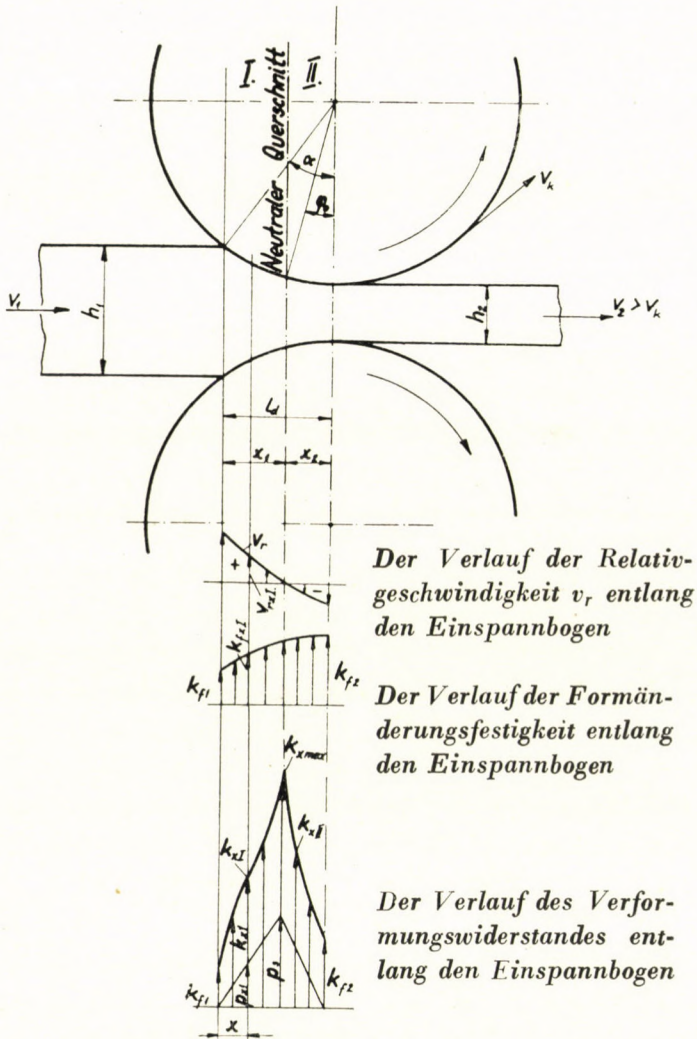


Bild 19

ist, da die Voraussetzung für das Haften

$$\mu' \cdot k_x = \xi \cdot k_f = \tau_{\max} \tag{68}$$

ist.

Hier ist $\xi = 0,58$, und im Walzspalt ist

$$\mu' = \mu \mp \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2}, \quad (69)$$

wo $i = \text{I}$ oder II ist.

Die Grenze des Haftgebietes liegt vor dem neutralen Querschnitt (der Fließscheide) dort, wo

$$k_{x_{01}} \leq \frac{\xi}{\mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_{\text{I}}}{2}} \cdot k_f \quad (70)$$

und hinter dem neutralen Querschnitt dort, wo

$$k_{x_{02}} \leq \frac{\xi}{\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{\text{II}}}{2}} \cdot k_f \quad (71)$$

ist. Der Abstand der Grenze des Haftgebietes von dem Eintrittsquerschnitt ist x_{01} und der von dem Austrittsquerschnitt x_{02} (Bild 20). Das Haftgebiet wird durch die Ebenen ad und bc begrenzt. Das Werkstoffprisma, das zwischen diese Grenzflächen fällt, trachtet bei der Zusammendrückung sich in die Breite auszudehnen, dabei übt es auf die Grenzfläche ad einen Druck von

$$P_1 = p_1 \cdot b_{x_{01}} \cdot h_{x_{01}} \quad (72)$$

und auf die Grenzfläche bc einen Druck von

$$P_2 = p_2 \cdot b_{x_{02}} \cdot h_{x_{02}} \quad (73)$$

aus. Hier bezeichnen p_1 und p_2 den spezifischen Druck an den Grenzflächen.

Wenn wir voraussetzen, dass die Spannung p_x ihren Höchstwert auch im Haftgebiet in dem neutralen Querschnitt erreicht, und diese Spannung im Ein- und im Austrittsquerschnitt gleich Null ist, wenn wir weiters voraussetzen, dass die Spannung p_x sich in dem Haftgebiet sowohl vor, wie auch hinter dem neutralen Querschnitt linear verändert, dann beträgt der Höchstwert von p_x im neutralen Querschnitt:

$$p_{sM} = \frac{P_2}{x_{02}} \cdot x_2. \quad (74)$$

Die Voraussetzung ist jedoch viel wahrscheinlicher, dass die Spannung p_x ihren Höchstwert zwar im neutralen Querschnitt erreicht, doch nicht linear, sondern parabolisch verläuft, wie aus Bild 21 ersichtlich ist.

Die Parabel im Bild 21 berührt die Geraden AC und BC in den Punkten D und E ; die Gerade DE ist ein konjugierter Durchmesser der Parabel. Die Parabel wird aus der Voraussetzung ermittelt, dass $CG = GF$ und $DF = FE$ ist; die Gerade \bar{u} , welche durch den Punkt G hindurchgeht und parallel zu der Geraden DE ist, ist eine Tangente von der Parabel.

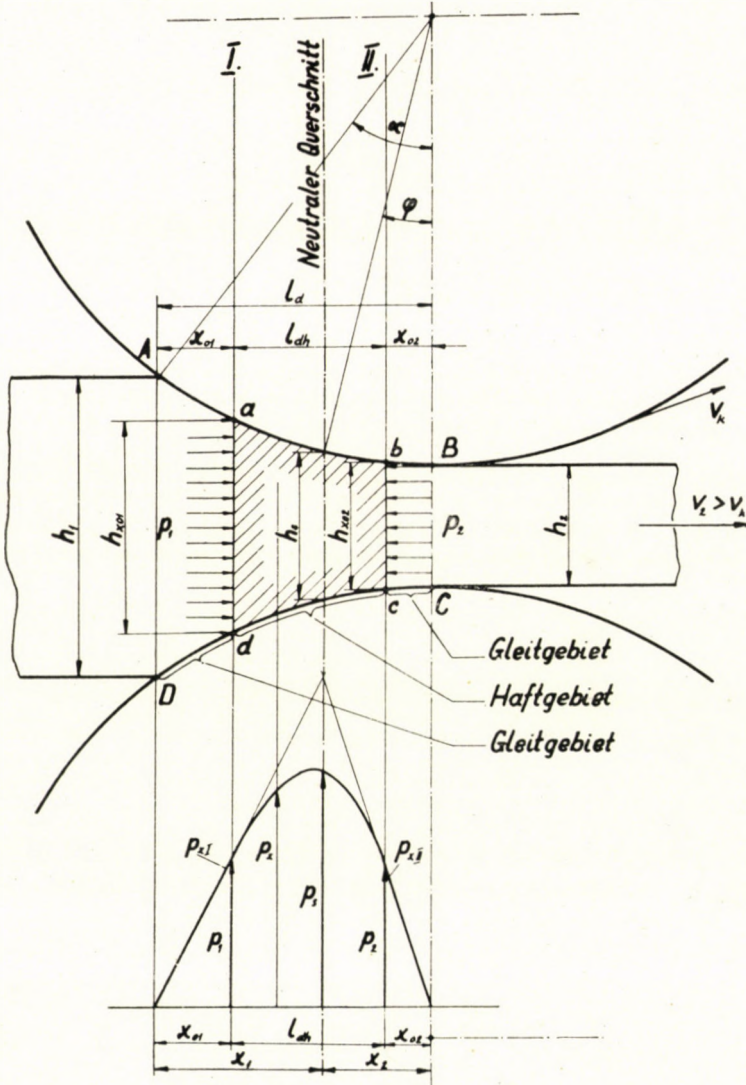


Bild 20

Der Verformungswiderstand kann ausserhalb des Haftgebiets, also im Eintrittsquerschnitt bis zum Abstand x_{o1} und vom Austrittsquerschnitt bis zum Abstand x_{o2} mit den Formeln (65) und (66) berechnet werden. Wie schon

oben gesagt, sind diese Formeln nur in beiden Gleitgebieten gültig, also soweit

$$k_x \leq \frac{\xi}{\mu'} \cdot k_f \quad (67)$$

ist. An den Grenzen des Haftgebietes ist [15]

$$\mu' \cdot k_{x_{0i}} = \xi \cdot k_f = \tau_{\max} \cdot \quad (68)$$

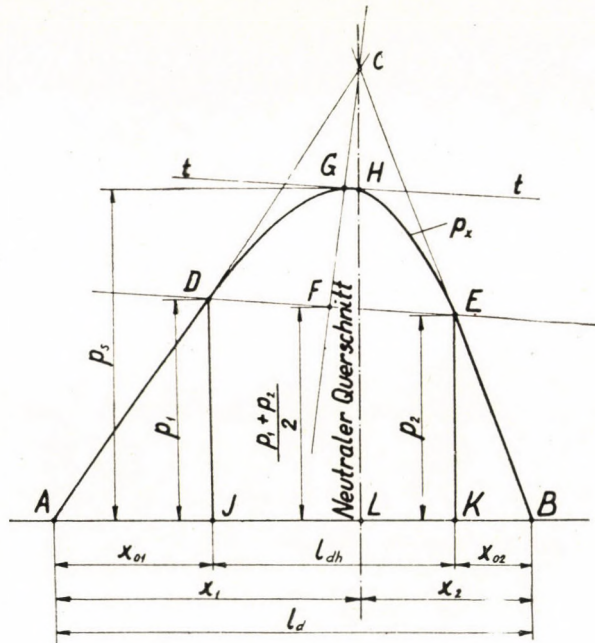


Bild 21

Wird der Einfluss der im gewalzten Stück auftretenden axialen Druckspannung p_x ausser acht gelassen, dann kann geschrieben werden, dass im Haftgebiet

$$\frac{dk_x^*}{dx} = \frac{2\tau}{h_x} \quad (75)$$

ist. An den Grenzen des Haftgebietes, wo $x = x_{0i}$ ($i = 1$ oder 2) ist, beträgt

$$\left(\frac{dk_x^*}{dx} \right)_{x=x_{0i}} = \frac{2 \cdot \tau_{\max}}{h_{x_{0i}}} \quad (76)$$

An den Grenzen des Haftgebietes ist $\mu' \cdot k_x = \tau_{\max} = \tau_0$. Es ist bisher nicht bekannt nach welchem Gesetz τ_x in dem Haftgebiet sich ändert. Nach Auffassung einiger Forscher ist τ_x in der Fliessscheide gleich Null [16], nach Auffassung anderer Forscher dagegen ist τ_x in der Fliessscheide gleich $\tau_{\max} = \tau_0$ [17]. In erster Annäherung wird im allgemeinen angenommen, dass τ_x sich im Haftgebiet linear verändert. Wenn wir nun annehmen, dass τ_x im neutralen Querschnitt weder Null noch $\tau_x = \tau_0$ ist, sondern voraussetzen, dass

$$\tau_s = \lambda \cdot \tau_0, \quad (77)$$

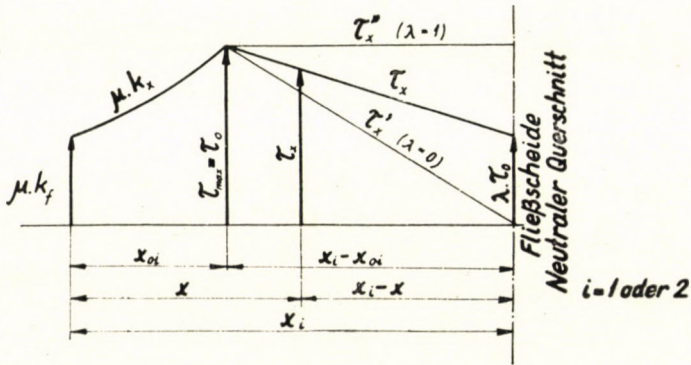


Bild 22

$$\text{wo} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (78)$$

ist, dann können wir annehmen, dass im Haftgebiet

$$\tau_x = \frac{x_1 - \lambda x_{0i}}{x_1 - x_{0i}} \cdot \tau_0 - \frac{(1 - \lambda) \cdot \tau_0}{x_1 - x_{0i}} \cdot x \quad (79)$$

ist (Bild 22).

Gleichung (75) kann also folgenderweise aufgeschrieben werden :

$$\frac{dk_x^*}{dx} = \frac{2 \cdot \tau_0}{h_x} \cdot \left(\frac{x_i - \lambda x_{0i}}{x_i - x_{0i}} \right) - \frac{2 \cdot \tau_0}{h_x} \cdot \left(\frac{1 - \lambda}{x_i - x_{0i}} \right) \cdot x. \quad (80)$$

Da

$$\mu \cdot k_{x0} = \tau_0 = \xi \cdot k_f,$$

ist, wird

$$\frac{dk_x^*}{dx} = \frac{2\xi \cdot k_f}{h_x} \cdot \left(\frac{x_1 - \lambda x_{0i}}{x_i - x_{0i}} \right) - \frac{2\xi \cdot k_f}{h_x} \cdot \left(\frac{1 - \lambda}{x_i - x_{0i}} \right) \cdot x, \quad (81)$$

wo $i = 1$ oder 2 .

Wir begehen keinen grösseren Fehler, wenn wir bei der Lösung der Gleichung (81) in erster Annäherung

$$h = h_x = \frac{h_{x_{ot}} + h_s}{2} = \text{Konst.} \quad (82)$$

setzen, wo $i = 1$ oder 2 . Dann ist die Lösung der Gleichung (81) die folgende:

$$\begin{aligned} k_x^* - k_{x_{ot}}^* &= \frac{2\xi \cdot k_{fm}}{h} \cdot \left(\frac{x_i - \lambda x_{0i}}{x_i - x_{0i}} \right) \int_{x_{ot}}^x dx - \frac{2\xi \cdot k_{fm}}{h} \cdot \left(\frac{1 - \lambda}{x_i - x_{0i}} \right) \cdot \int_{x_{ot}}^x x \cdot dx = \\ &= \frac{2\xi \cdot k_{fm}}{h} \cdot \left[\left(\frac{x_i - \lambda x_{0i}}{x_i - x_{0i}} \right) \cdot (x - x_{0i}) - \left(\frac{1 - \lambda}{x_i - x_{0i}} \right) \cdot \left(\frac{x^2 - x_{0i}^2}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (83)$$

also ist

$$\begin{aligned} k_x^* &= k_{x_{ot}}^* + \frac{2\xi \cdot k_{fm}}{h \cdot (x_i - x_{0i})} \cdot \left[(x_i - \lambda \cdot x_{0i}) \cdot (x - x_{0i}) - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \lambda) \cdot \left(\frac{x^2 - x_{0i}^2}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (84)$$

wo $i = 1$ oder 2 ist, je nachdem, ob wir den Verformungswiderstand vor oder hinter dem neutralen Querschnitt bestimmen wollen.

In Formel (84) ist

$$k_{fm} = \frac{k_{fx_{ot}} + k_{fx}}{2} \quad (85)$$

die mittlere Verformungsfestigkeit im Abstand $x = x_{0i}$.

Den tatsächlichen Verformungswiderstand erhalten wir, wenn wir auch noch die Druckspannung p_x in Rechnung ziehen:

$$k_x = k_x^* + p_x, \quad (86)$$

also ist

$$\begin{aligned} k_x &= k_{x_{ot}} + \frac{2\xi \cdot k_{fm}}{h \cdot (x_i - x_{0i})} \cdot \left[(x_i - \lambda \cdot x_{0i}) \cdot (x - x_{0i}) - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \lambda) \left(\frac{x^2 - x_{0i}^2}{2} \right) \right] + p_{x_i} \end{aligned} \quad (87)$$

wo $i = 1$ oder 2 ist.

Hier ist

$$k_{x_{0i}} = \frac{\xi \cdot k_{fm}}{\mu'}, \quad (88)$$

wo

$$\mu' = \mu \pm \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2}$$

ist, und k_{fm} die mittlere Verformungsfestigkeit im Gleitgebiet bedeutet.

Der Verformungswiderstand (Gl. 87) erreicht seinen höchsten Wert bei $x = x_1$ oder $x = x_2$:

$$k_{x \max} = k_{x_{0i}} + \frac{2\xi \cdot k_{fm}}{h \cdot (x_i - x_{0i})} \cdot \left[(x_i - \lambda \cdot x_{0i}) \cdot (x_i - x_{0i}) - (1 - \lambda) \cdot \frac{x_i^2 - x_{0i}^2}{2} \right] + p'_s, \quad (89)$$

also ist

$$k_{x \max} = k_{x_{0i}} + \frac{\xi \cdot k_{fm}}{h} \cdot (1 + \lambda) \cdot (x_i - x_{0i}) + p_s \quad (90)$$

wo $i = 1$ oder 2 ist.

Wenn $\lambda = 0$, dann ist

$$k_{x \max} = k_{x_{0i}} + \frac{\xi \cdot k_{fm}}{h} \cdot (x_i - x_{0i}) + p_s,$$

wenn $\lambda = 1$, dann ist

$$k_{x \max} = k_{x_{0i}} + \frac{2\xi \cdot k_{fm}}{h} (x_i - x_{0i}) + p_s.$$

Bei praktischen Rechnungen kann mit Annäherung $\lambda = 0,5$ angenommen werden (Bild 23).

Um die Funktion k_x bzw. $k_{x \max}$ bestimmen zu können, ist es unbedingt nötig den Winkel φ_0 bzw. die Abstände x_1, x_2, x_{01} und x_{02} zu kennen. Der Winkel φ_0 bzw. die Abstände x_1 und x_2 bestimmen die Stelle des neutralen Querschnittes (der neutralen Linie), der Fließscheide; die Abstände x_{01} und x_{02} geben die Grenzen der Gleitgebiete bzw. des Haftgebietes an.

k_x gleich sein. Es muss also

$$k_{xI \text{ max}} = k_{xII \text{ max}} \quad (91)$$

sein. Laut Gleichung (90) ist also

$$k_{x_{01}} + \frac{\xi \cdot k_{fmx_{01}}}{h_1} (1 + \lambda) \cdot (x_1 - x_{01}) = k_{x_{02}} + \frac{\xi \cdot k_{fmx_{02}}}{h_{11}} (1 + \lambda) \cdot (x_2 - x_{02}). \quad (92)$$

In dieser Gleichung sind

$$\left. \begin{aligned} k_{x_{01}} &= \frac{\xi}{\mu'} \cdot k_{fmx_{01}} = \frac{\xi \cdot k_{fmx_{01}}}{\mu - \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}} \\ k_{x_{02}} &= \frac{\xi}{\mu''} \cdot k_{fmx_{02}} = \frac{\xi \cdot k_{fmx_{02}}}{\mu + \operatorname{tg} \frac{\beta_{11}}{2}} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{die Verformungsfestigkeiten an beiden} \\ \text{Grenzen des Haftgebietes.} \end{array}$$

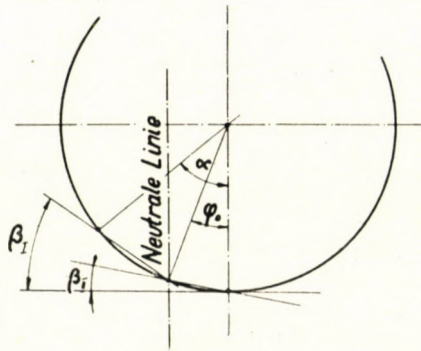


Bild 24

$k_{fmx_{c1}}$ und $k_{fmx_{02}}$ sind die mittleren Verformungsfestigkeiten im I. bzw. II. Gleitgebiet.

Die Grenzen des Haftgebietes (der Gleitgebiete) können mit der Formel

$$x_{0i} = \frac{h_i \cdot (\xi - \mu)}{\mu \cdot \left(\mu \pm 3 \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} \right) + \xi \cdot \left(\mu \pm \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} \right)} \quad (93)$$

bestimmt werden [18], wo $i = 1$ oder 2 bzw. I oder II ist.

Hier kann β und β_{11} aus Bild 24 annähernd ermittelt werden.

In Gleichung (92) ist weiters

$$h_1 (=) \frac{h_1 + h_s}{2}$$

$$h_{II} (=) \frac{h_2 + h_s}{2}$$

und

$$l_d = x_1 + x_2 \quad (94)$$

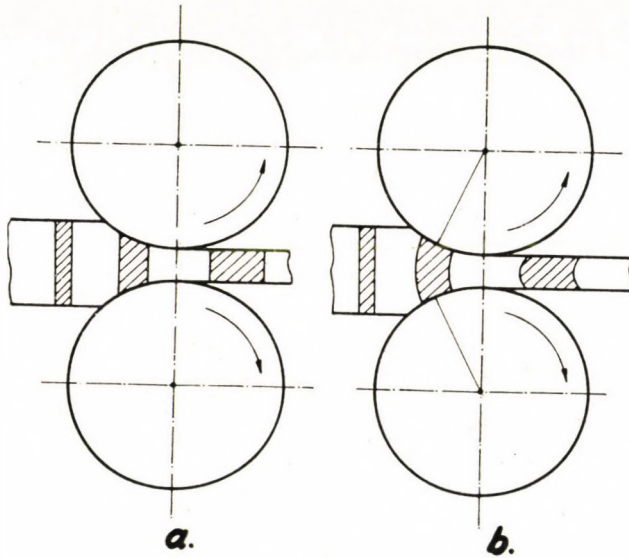


Bild 25

Die Stelle der neutralen Linie kann also mit Hilfe der Gleichungen (92), (93) und (94) bestimmt werden.

Die oben abgeleiteten Formeln (65), (66) und (87) des Verformungswiderstandes geben nur dann der Wirklichkeit entsprechende Werte, wenn sich im Walzspalt während des Walzens die zu der Längsachse des gewalzten Stückes vertikal liegenden Querschnitte sich nicht verbiegen, sondern Ebenen bleiben (Bild 25a).

Um die Verbiegung der Querschnitte des gewalzten Stückes und die damit zusammenhängenden Werkstoffverschiebungen (Bild 25b) hervorzurufen, ist ein Mehrbetrag des Verformungswiderstandes nötig. Bei der Bestimmung des Walzdruckes bzw. des Verformungswiderstandes muss man also auch den Kraftmehrbetrag hinzurechnen, der erforderlich ist, damit die Längsfasern des gewalz-

ten Stückes aus ihrer ursprünglich axialen Richtung in der Richtung, die dem jeweiligen Neigungswinkel φ entspricht, umgeleitet werden (Bild 26).

Diesen Vorgang kann man als Scherung vor dem Eintritt in den Walzspalt auffassen, so dass man diese Arbeit zu jener im Walzspalt einfach hinzuzählen kann. Diese zusätzliche innere Arbeit in der Volumeneinheit beträgt [19]:

$$A_i = \sigma_g \cdot \delta_g. \quad (95)$$

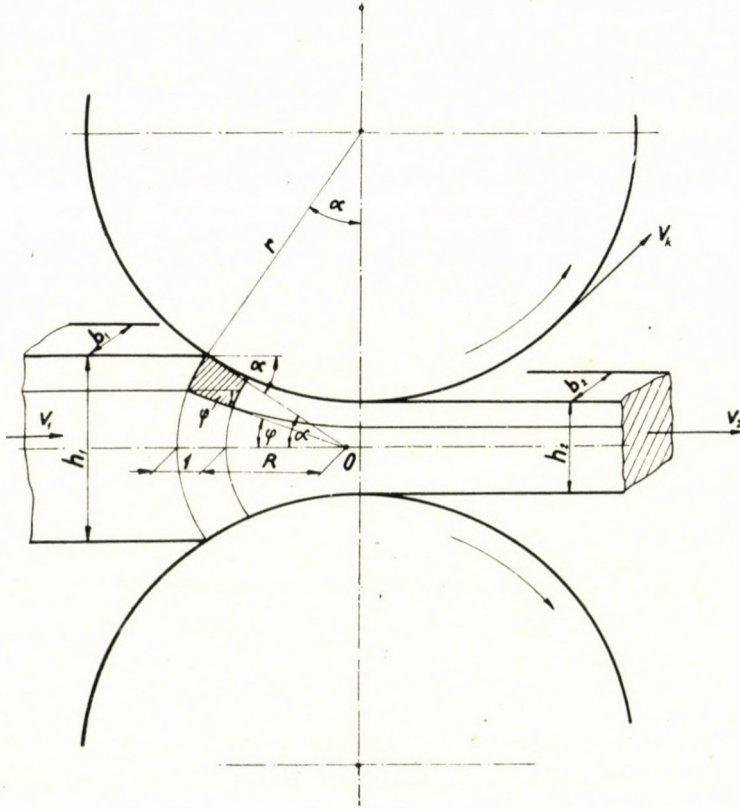


Bild 26

Weil aber die Vergleichsspannung vor dem Eintritt in den Walzspalt

$$\sigma_g = \tau \cdot \sqrt{3} = k_f \quad (96)$$

und die Vergleichsdehnung [19]

$$\delta_g = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} = \frac{\varphi}{\sqrt{3}} \quad (97)$$

ist, wird

$$A_i = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \cdot \varphi. \quad (98)$$

Auf die ganze Stückstärke und die Länge 1 bezogen (Volumen $V = 2 \cdot \alpha \cdot R \cdot 1$) erhält man dann (Bild 26):

$$\int_{(V+2\alpha R)} A_i \cdot dV = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot k_f \cdot R \cdot \int_0^\alpha \varphi \cdot d\varphi = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \cdot R \cdot \alpha^2, \quad (99)$$

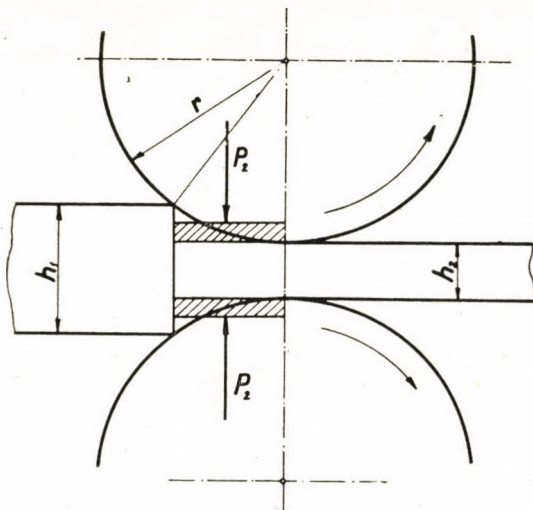


Bild 27

bzw. für das gesamte Materialvolumen V :

$$\int_{(V)} A_i \cdot dV = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \cdot \alpha \cdot V.$$

Die gesamte Walzarbeit setzt sich also aus zwei Teilen zusammen. Ein Teil (P_1) des Walzdruckes (P) bringt die Stärkenverminderung, der andere Teil (P_2) die inneren Materialverschiebungen hervor:

$$P = P_1 + P_2. \quad (100)$$

Der mittlere Verformungswiderstand setzt sich auch aus zwei Teilen zusammen:

$$k_m = k_{am} + k_{sm}. \quad (101)$$

Hier ist $k_m = \frac{P}{l_d}$ der gesamte mittlere Verformungswiderstand, $k_{am} = \frac{P_1}{l_d}$ derjenige Teil des mittleren Verformungswiderstandes, der die Verformungsarbeit und $k_{sm} = \frac{P_2}{l_d}$ derjenige Teil, der die inneren Materialverschiebungen hervorruft.

Der Walzdruck P_2 der die inneren Materialverschiebungen hervorbringt, kann aus der folgenden Gleichung berechnet werden (Bild 27):

$$P_2 \cdot \Delta h (=) \frac{k_f}{\sqrt{3}} \cdot a \cdot V. \quad (102)$$

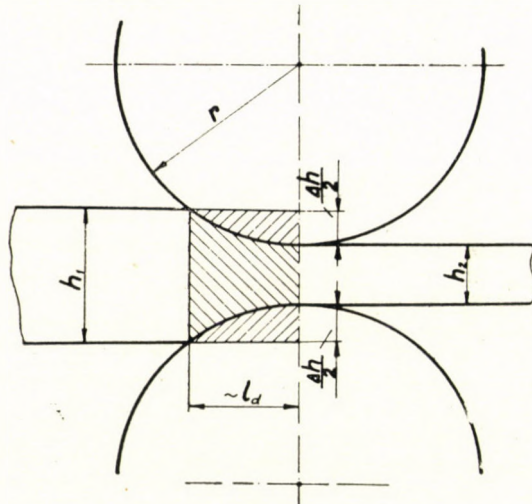


Bild 28

Daraus ist

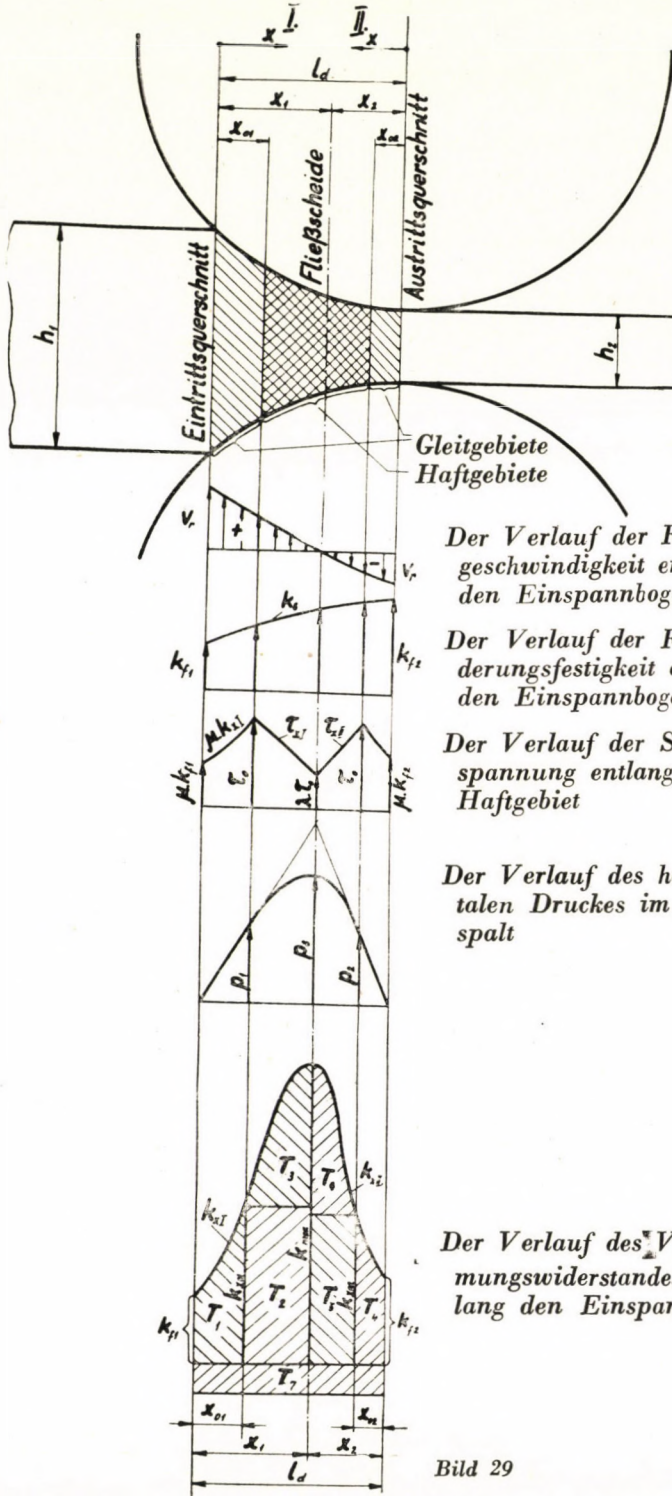
$$P_2 = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \cdot a \cdot \frac{V}{\Delta h}. \quad (103)$$

Da vorausgesetzt wird, dass die Breite des Stückes $b = 1$ ist, beträgt das im Walzspalt sich befindende Stückvolumen annähernd (Bild 28):

$$V = h_1 \cdot l_d - 2 \cdot \frac{\Delta h}{2} \cdot l_d \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} (h_1 \Delta h) \cdot l_d = \frac{2}{3} \cdot h_2 \cdot l_d. \quad (104)$$

Demgemäss ist der zusätzliche mittlere Verformungswiderstand, der nötig ist im Stück innere Materialverschiebungen zustande zu bringen:

$$k_{sm} = \frac{P_2}{l_d \cdot b} = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \cdot a \cdot \frac{V}{l_d \cdot \Delta h} = \frac{k_f}{\sqrt{3}} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot l_d \cdot \frac{h_2}{l_d \cdot \Delta h}, \quad (105)$$



Der Verlauf der Relativgeschwindigkeit entlang den Einspannbogen

Der Verlauf der Formänderungsfestigkeit entlang den Einspannbogen

Der Verlauf der Schubspannung entlang das Haftgebiet

Der Verlauf des horizontalen Druckes im Walzspalt

Der Verlauf des Verformungswiderstandes entlang den Einspannbogen

Bild 29

und so ist

$$k_{sm} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot k_f \cdot \alpha \cdot \frac{h_2}{\Delta h} \quad (106)$$

Da

$$\alpha = \frac{l_d}{r}, \quad (107)$$

Verformungswiderstandsverlauf im Walzspalt beim
Warmwalzen von Aluminium (Al 99,5)
(Berechnet)

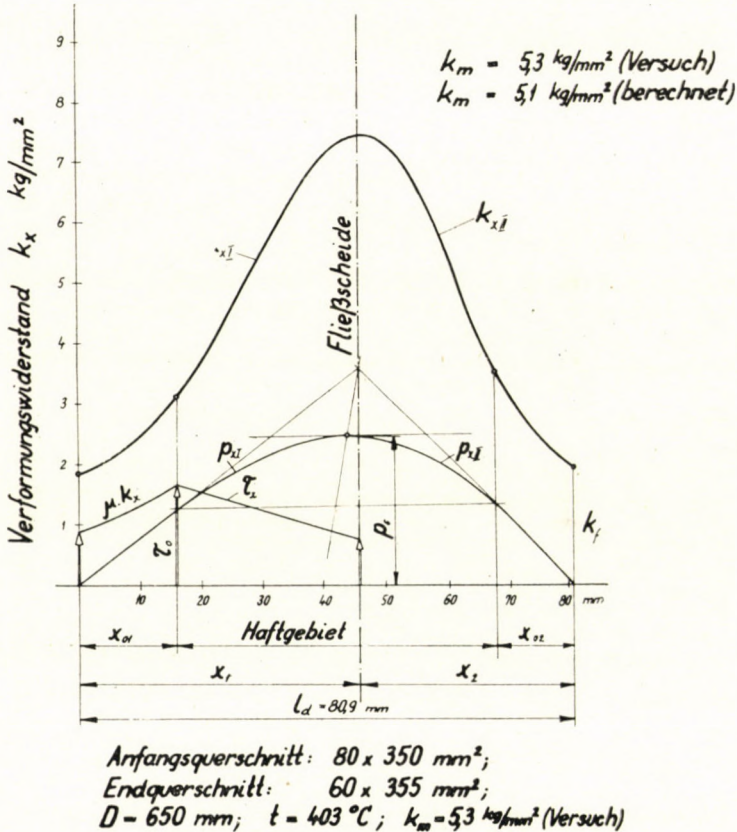


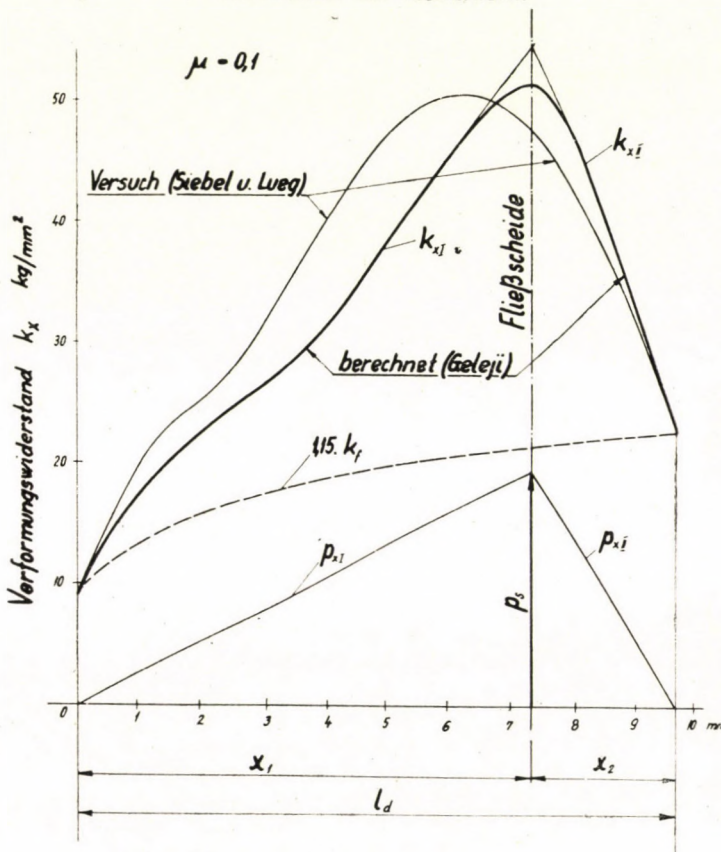
Bild 30

kann geschrieben werden, dass der Mehrbetrag des Verformungswiderstandes, der zum Hervorrufen der inneren Materialverschiebungen nötig ist,

$$k_{sm} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot k_f \cdot \left(\frac{l_d}{r}\right) \cdot \frac{h_2}{\Delta h} \quad (108)$$

beträgt.

Verformungswiderstandsverlauf im Walzspalt beim
Kaltwalzen von Aluminium.



Anfangsquerschnitt: $2 \times 30 \text{ mm}^2$;
Endquerschnitt: $1 \times 30,8 \text{ mm}^2$;
 $D = 180 \text{ mm}$.

Bild 31

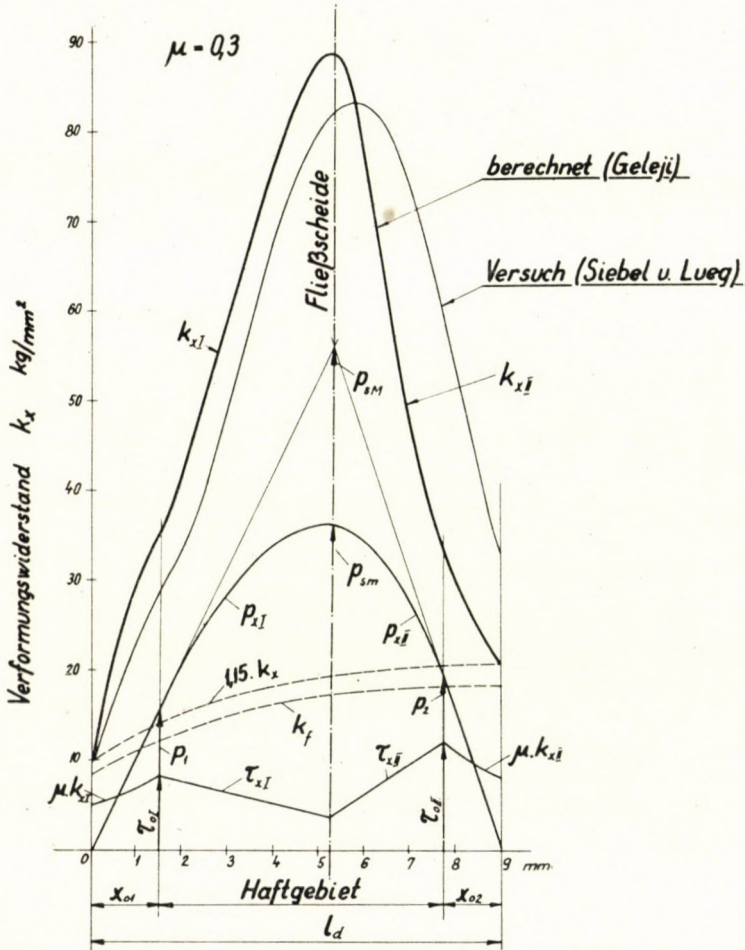
Die Berechnung des mittleren Verformungswiderstandes kann an Hand von Bild 29 erfolgen. Demnach ist der mittlere Verformungswiderstand

$$k_m = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7}{l_d} \quad (109)$$

$$T_1 = \left(\frac{k_{f1} + k_{x_{01}}}{2} \right) \cdot x_{01}, \quad (110)$$

$$T_2 = k_{x_{01}} \cdot (x_1 - x_{01}), \quad (111)$$

Verformungswiderstandsverlauf im Walzspalt beim Kaltwalzen von Aluminium.



Anfangsquerschnitt: $2.0 \times 30 \text{ mm}^2$;
 Endquerschnitt: $1.1 \times 32.3 \text{ mm}^2$; $D = 180 \text{ mm}$.

Bild 32

$$T_3 = \frac{2}{3} \cdot (k_{x_{\max}} - k_{x_{01}}) \cdot (x_1 - x_{01}), \quad (112)$$

$$T_4 = \left(\frac{k_{f2} + k_{x_{02}}}{2} \right) \cdot x_{02}, \quad (113)$$

$$T_5 = k_{x_{02}} \cdot (x_2 - x_{02}), \quad (114)$$

$$T_6 = \frac{2}{3} \cdot (k_{x_{\max}} - k_{x_{02}}) \cdot (x_2 - x_2), \quad (115)$$

$$T_7 = k_{sm} \cdot l_d. \quad (116)$$

Bild 30 zeigt den berechneten Verlauf des Verformungswiderstandes beim Warmwalzen von Aluminium. Der aus diesem Diagramm berechnete mittlere Verformungswiderstand weicht von dem experimentell bestimmten um 1,2 kg ab.

Die Bilder 31 und 32 zeigen nebeneinander den von SIEBEL und LUEG experimentell bestimmten und den berechneten Verlauf des Verformungswiderstandes beim Kaltwalzen von Aluminiumband.

SCHRIFTTUM

1. M. HERRMANN: Walzarbeit und Walzdruck. Stahl u. Eisen, 1911. S. 1706—1711.
2. J. PUPPE: Versuche zur Ermittlung des Kraftbedarfes an Walzwerken. Düsseldorf, 1909, Verlag Stahleisen.
3. TH. v. KÁRMÁN: Beitrag zur Theorie des Walzvorganges. Z. angew. Math. Mech. 5 (1925). S. 139—141.
4. TRINKS, W.: New theories on hot mill deformations, obtained by experimental rolling. Blast Furnace and Steel Plant. Vol. 13, 1915. pp. 276—77.
5. ZELIKOW, A. I.: Effect of external friction and tension on the pressure of the metal on the rolls in rolling. Metallurg, No. 6, 1939. pp. 61—76.
6. NÁDAI, A.: The rolling process. Paper before Amer. Soc. for Steel, Treating, Sept. 1930.
7. NÁDAI, A.: The forces required for rolling steelstrip under tension. Journal of Applied Mechanics, pp. A54—A62, Amer. Soc. Mech. Eng. June 1939.
8. OROWAN, E.: The calculation of roll pressure in hot and cold flat rolling. Proc. J. Mech. E., vol. 150, 1943. No. 4, pp. 140—167.
9. PRANDTL, L.: Vortrag Marburg, Z. ang. Math. Mech., Heft 6. 1923.
NÁDAI, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids. Mac Graw-Hill, New-York, 1950. S. 533—538.
10. NÁDAI, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids. McGraw-Hill, New York 1950. S. 533—538.
11. MICAN, G. S.: A New Theory of Hot Rolling. Iron and Steel Engineer, May 1954. pp. 55—71. Siehe auch: Eine neue Walztheorie, Stahl u. Eisen 76 (1956), S. 350—352.
12. GELEJI, A.: Berechnung der Breitung und Voreilung beim Walzen. Acta Technica, Budapest, IX (1954), S. 443/458.
13. GELEJI, A.: Die Berechnung der Kräfte und des Arbeitsbedarfes bei der Formgebung im bildsamen Zustande der Werkstoffe. Akademischer Verlag, Budapest 1955. S. 120—131.
14. GELEJI, A.: Die Berechnung der Kräfte und des Arbeitsbedarfes usw. S. 263. Gl. 42,10 und 43,7.
15. GELEJI, A.: Die Berechnung der Kräfte und des Arbeitsbedarfes usw. S. 33.
16. KÖRBER, FR. u. EICHINGER, A.: Die Grundlagen der bildsamen Verformung. Mitt. d. K. W. Inst. f. Eisenforschung, Bd. XXII, 1940. Lieferung 5, Abhandl. 395. S. 57—80.
17. UNKSOV, E. P.: Novoje v tehnologiji gorjacskej stampovki, Moskva, Masgiz 1948. S. 190.
18. GELEJI, A.: Die Berechnung der Kräfte und des Arbeitsbedarfes usw. S. 33.
19. KÖRBER, FR., u. EICHINGER, A.: Die Grundlagen der bildsamen Verformung. Mitt. d. K. W. Inst. f. Eisenforsch. Bd. XXII, 1940. Lief. 5. Abh. 395, S. 64, Gl. 11 u. S. 63, Gl. 7.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Artikel bespricht zunächst kurz die bedeutendsten Walztheorien. Es wird darauf hingewiesen, dass die KÁRMÁNSche Vorstellung bzw. die Gleichungen v. KÁRMÁNS zu r richtigen Bestimmung der im Walzspalt auftretenden Kräfte nicht genügen, dass ferner die Theorien OROWANS und MICANS auf Analogien aufgebaut worden sind, und die Umstände, die die Begleiterscheinungen des Walzens (Breitung, Voreilung) hervorrufen, ausser acht lassen, obwohl in diesen Umständen der Schlüssel zur richtigen Bestimmung der Kräfte im Walzspalt liegt.

Durch die in diesem Artikel vorgeführte neue Walztheorie werden die Ursachen der Breitung und der Voreilung erklärt, und dabei auf die Kräfte hingewiesen, die im Walzspalt tatsächlich auftreten, und deren Wirkung bisher bei der Bestimmung des Verformungswiderstandes nicht in Rechnung gezogen wurde.

Nach dieser neuen Walztheorie ist der Verformungswiderstand an jeder beliebigen Stelle des Einspannbogens gleich der Summe der Verformungsfestigkeit des gewalzten Werkstoffes und der Druckfestigkeit, die in der Walzrichtung, in dem vertikalen Querschnitt des gewalzten Stückes auftritt, u. zw. in demjenigen Querschnitt, der zu der eben untersuchten Stelle des Einspannbogens gehört.

Diese Druckspannung, die wie gesagt, im Walzspalt in der Walzrichtung auftritt, stammt aus Komponenten zweierlei Ursprungs. Die eine Komponente stammt daher, dass die bei der Walzung an den Druckflächen entstehenden Reibungskräfte in Richtung der Längsachse des gewalzten Stückes zwei gegeneinander gerichtete Druckkräfte hervorrufen, die einander im neutralen Querschnitt das Gleichgewicht halten. Die andere Komponente der Druckspannung entsteht dadurch, dass das im Walzspalt zwischen dem Eintrittsquerschnitt und dem neutralen Querschnitt sich befindende Werkstoffprisma bei seiner Zusammendrückung auf den neutralen Querschnitt in Walzrichtung eine Druckkraft (Druckspannung) ausübt, welche Druckkraft den hinter dem neutralen Querschnitt befindlichen Teil des gewalzten Stückes durch den Austrittsquerschnitt mit einer Geschwindigkeit aus dem Walzspalt hinaustreibt, die grösser ist als die Umfangsgeschwindigkeit der Walzen; das Stück tritt also mit einer Voreilung aus dem Austrittsquerschnitt.

Alle drei Druckspannungen, die im Walzspalt in der Walzrichtung wirken, erreichen ihren maximalen Wert in der Fliessscheide (im neutralen Querschnitt).

Zu dem Verformungswiderstand, der aus der Verformungsfestigkeit und aus den im Walzspalt in der Walzrichtung wirkenden Druckspannungen ermittelt worden ist, muss noch der Verformungswiderstand hinzugerechnet werden, der zum Hervorrufen der inneren Materialverschiebungen (Verbiegung der vertikalen Querschnitte) erforderlich ist.

Die vorgeführte Theorie ist sowohl beim Warmwalzen, wie auch beim Kaltwalzen gültig, und ermöglicht die Ermittlung des Verformungswiderstandes an jedem Punkt des Einspannbogens.

NEW THEORY OF ROLLING

A. GELEJI

SUMMARY

The most important theories of rolling (Kármán, Orowan and Mican) are first treated critically and it is pointed out why and to what degree Kármán's assumption is insufficient for the determination of forces arising in rolling, further that the Orowan and Mican's theories, making their start from analogies at the determination of forces, disconsider circumstances that produce the accompanying phenomena of rolling (enlargement and forward slip) which are a key to the proper interpretation and determination of the forces arising in the rolling gap.

The theory of rolling here presented explains the causes of enlargement and forward slip and at the same time points out what forces are to be considered at the determination of the resistance, to deformation, and the occurrence of what forces has been disconsidered by the explanations of the theories so far presented. The short sumup of the theory is the following:

The resistance to forming in rolling at any point of the compressing surface of the rolls consists of the sum of the yield strength of the rolled material and of the compressive stress acting at the vertical cross section of the piece, belonging to the place in question.

This compressive stress, acting in the direction of the axis of the rolled piece, consists of two components of different origin.

One component originates from the fact that frictional forces arising in the rolling gap between the rolls and the piece produce in the direction of the longitudinal axis of the piece two compressive forces of opposite sign, which balance each other in the neutral cross section.

The other component of the compressive force acting in the direction of the axis of the piece arises from the fact that at the compression of the column of material between the cross section of entry and the neutral section in the rolling gap the side of this column of material coinciding with the neutral cross section exerts compression on the part of the piece behind the neutral cross section, and extrudes it through the cross section of exit from between the rolls at a velocity higher than the peripheral velocity of the rolls, that is, with a forward slip.

All three compressive forces attain their maxima in the neutral cross section.

To the resistance of deformation determined from the yield strength and the compressive forces acting in the direction of the longitudinal axis of the piece has to be added the surplus resistance to forming required for distortion of vertical cross sections in the rolling gap (for producing internal displacements of material).

The theory holds for both hot and cold rolling, that is, with the aid of the deduced formulae the resistance to forming can be calculated for any point of the compressed arc in rolling both a material of invariable yield strength and a material hardening during rolling.

UNE NOUVELLE THÉORIE DU LAMINAGE

A. GELEJI

RÉSUMÉ

L'étude donne d'abord le compte rendu et la critique des principales théories du laminage (Kármán, Orowan et Mican) et démontre les raisons et la mesure de l'insuffisance de l'hypothèse fondamentale de Kármán pour la détermination des forces se présentant au laminage. L'auteur souligne aussi que les théories d'Orowan et de Mican, se basant sur des analogies lors de la détermination des forces, ne tiennent pas compte des circonstances produisant les phénomènes accessoires du laminage (élargissement et glissement), qui donnent la clef de l'interprétation et de la détermination correctes des forces se produisant au cours du laminage.

La théorie du laminage ici présentée explique les causes de l'élargissement et du glissement, et indique les forces devant être considérées pour déterminer la résistance à la déformation au laminage, ainsi que les forces dont les théories n'ont tenu, jusqu'à présent, aucun compte dans leurs explications. Voici un bref résumé de la nouvelle théorie :

La résistance aux déformations mesurée lors du laminage, et considérée à un point quelconque de la surface de compression des cylindres, est la somme de la résistance à l'écoulement de la matière laminée et de l'effort de compression agissant dans la section verticale de la pièce appartenant au point en question.

Cet effort de compression agissant dans la direction de l'axe longitudinal de la pièce laminée, est constituée par deux composantes d'origine différente.

L'une des composantes résulte du fait que les forces de friction prenant naissance dans l'interstice des cylindres, entre ceux-ci et la pièce elle-même, produisent, dans la direction de l'axe longitudinal de la pièce, deux forces de compression de signe contraire, lesquelles s'équilibrent l'une l'autre, dans la section neutre.

L'autre composant de l'effort de compression agissant dans la direction de l'axe de la pièce résulte du fait que dans l'interstice des cylindres, lors de la compression de la colonne de matière entre la section de l'entrée et la section neutre, le côté de cette colonne de matière correspondant à la section neutre exerce une pression sur la partie de la pièce se trouvant derrière la section neutre, et la refoule d'entre les cylindres, à travers la section neutre, avec une vitesse plus grande que celle de la vitesse périphérique des cylindres, par suite de quoi il se produit un glissement.

Les trois efforts de compressions atteignent leur maxima dans la section neutre.

À la résistance aux déformations calculée à partir de la résistance à l'écoulement (limite apparente d'élasticité) de la matière et des efforts de compression agissant dans la direction de l'axe longitudinal de la pièce, il faut additionner l'excès de la résistance aux déformations nécessaire, dans l'interstice, pour fléchir les sections verticales (provoquer les mouvements intérieurs de la matière).

La théorie est valable pour le laminage à chaud aussi bien que pour le laminage à froid, les formules déduites permettent de calculer la résistance aux déformations pour un point quelconque de l'arc comprimé.

НОВАЯ ТЕОРИЯ ПРОКАТКИ

А. ГЕЛЕЙИ

РЕЗЮМЕ

В работе сначала дается краткое изложение важнейших теорий прокатки (Карман, Орован и Мицан), затем эти теории подвергаются критике и указывается, что почему и насколько недостаточно предположение Кармана для определения усилий, возникающих при прокатке, теории же Орована и Мицина, исходя из аналогий при определении усилий, не учитывают те условия, которые создают сопровождающие явления прокатки (раздача и опережение) и которые дают ключ для правильного объяснения и определения возникающих в прокатном ручье усилий.

Рассматриваемая теория прокатки дает объяснение причин раздачи и опережения и одновременно с этим указывает на то, что какие именно усилия необходимо учитывать при определении сопротивления деформации прокатки и какие возникающие усилия не учитывались существовавшими до сих пор теориями при объяснении. Данная теория прокатки впрочем кратко гласит следующим образом.

Сопротивление деформации при прокатке в любом месте поверхности сжатия прокатных валков соответствует сумме прочности деформации прокатываемого материала и напряжения сжатия детали, действующего в вертикальном сечении, относящемся к данному месту.

Это напряжение сжатия, которое действует в направлении продольной оси прокатываемой детали, состоит из слагающих двоякого рода.

Одна из таких слагающих происходит от того, что усилия трения, возникающие в прокатном ручье между прокатными валками и прокатываемой деталью, создают вдоль продольной оси обрабатываемой детали два усилия сжатия, противоположные по знаку и которые в нейтральном сечении поддерживают друг друга в равновесии.

Другая слагающая напряжения сжатия, действующая в направлении оси обрабатываемой детали, происходит от того, что при сжатии в прокатном ручье столба материала, находящегося между входным и нейтральным сечениями, сторона этого столба, совпадающая с нейтральным сечением, давит на часть детали, находящуюся за нейтральным сечением, и эту часть через выходное сечение выдавливает между прокатными валками со скоростью, превышающей окружную скорость прокатных валков, т. е. выдавливает с опережением.

Все три напряжения сжатия достигают максимума в нейтральном сечении.

К сопротивлению деформации, определенному на основе прочности деформации и напряжений сжатия, действующих в направлении продольной оси прокатываемой детали, необходимо прибавить также дополнительное сопротивление деформации, которое необходимо в прокатном ручье для изгиба вертикального сечения (для создания внутреннего сдвига материала).

Теория действительна как в случае горячей, так и холодной прокатки, т. е. с помощью выведенных формул при прокатке материалов как с неизменяющейся прочностью деформации, так и твердеющих материалов представляется возможным определить сопротивление деформации в любом пункте сжатой дуги.

IN MEMORY OF ANTHONY KERPELY SEN. (1837—1907)

Prof. A. SCHLEICHER

D. ENG. SC.

[Manuscript received June 26, 1957]

This is to commemorate ANTHONY KERPELY SEN. celebrated professor of Ferrous Metallurgy at the famous Hungarian High School of Mines of old renown at Selmec, formerly Hungary, Corresponding Member of the Hungarian Academy of Sc., General Manager of the Iron and Steelworks of the Hungarian State, on the 50-est anniversary of his death [1].

Far ahead of his time he elaborated in 1878 a method of testing the hardness of steel rails, essentially identical with the LUDWIK cone hardness test that turned up 25 years later, or the still later ROCKWELL hardness testing method [2]. At the same time he published his hot breaking test to conclude from the appearance of fracture to the conditions of the refining process, the composition and quality of the steel. Previously already in 1876 he had investigated microscopically the structure of iron and steel.

From an international viewpoint an outstanding work is his "Layout and Equipment of Ironworks", published in German at Leipzig in 7 volumes of text, drawings and plans [3].

His best-known literary work is the yearbook: "Reports on the Progress of Ferrous Metallurgy", founded in 1866 and edited by him for 20 years in German [4].

KERPELY was in his age not only a great scientist of ferrous metallurgy but also an excellent practical expert of his art. He reformed a substantial part of the Hungarian iron industry, took out Austrian, German and Hungarian patents on the solution of practical problems, such as the reduction of the sulphur, arsenic, antimony, phosphorus and copper content of wrought iron and steel, on forming calcareous and magnesian rocks to a plastic mass by acetic acid treatment, on the design of a double puddling furnace with regenerators.

KERPELY's fertile literary and professional activities were held in high esteem not only by his Hungarian fatherland, but also by the technical press and by professional men of other countries. E. g. the leadership of the famous World Exhibition at Vienna of 1873 requested him to demonstrate the importance of iron on the occasion of the exposition [5].

This brief commemoration was given an opportunity only by the 50-iest anniversary of KERPELY's death. For more particulars reference is made on an appreciation written in German [6], and it is pointed out that the Hungarian Academy of Science will hold on this occasion a ceremonious meeting to commemorate him and will publish in print a detailed review of his work.

A. KERPELY Senior is not to be mixed up with his son, ANTHONY KERPELY Junior, who made his name known by his gasproducers with rotating grate [7].

REMARKS

1. This commemoration was given an opportunity also by the circumstance that the Düsseldorf periodical *Stahl und Eisen* used to commemorate at the begin of every year in a commendable way excellent authors and experts in metallurgy who died 50 years before the begin of that year or were born 100 years before. From the last such list published on pp. 43/45 of Vol. 77., 1957 KERPELY's name was unfortunately left out. It is evident that such lists are difficult to compose and can hardly be perfect internationally. However, it is regrettable that the letter of the author of these lines of 23 October, 1956, addressed to the editor of the said periodical in that matter has not been taken into consideration probably because it did not reach its destination in consequence the October 1956 events in Hungary.
2. The large number of KERPELY's papers were mostly published in German, this one under the title: *Über Eisenbahnschienen. Versuche und Studien. Leipzig 1878.*
3. *Die Anlage und Einrichtung der Eisenhütten. Leipzig, 1873—1884. Verlag Arthur Felix.*
4. *Berichte über die Fortschritte der Eisenhüttenkunde. Verlag Arthur Felix, Leipzig.*
5. *Das Eisen auf der Wiener Weltausstellung. Mit 16 Holzschnitten und 4 litographischen Tafeln. Schemnitz, Verlag A. Joerges, 1873.*
6. E. COTEL: Anton Ritter von Kerpely's (des Älteren) Wirkung auf die Entwicklung der ungarischen Eisenindustrie und der Eisenhüttenkunde. University of Technical and Economic Sciences, Publications of the Department of Mining and Metallurgy, Sopron (Hungary), Vol. IX., 1937, pp. 68/76.
7. A. KERPELY Jr. was general manager of the Austrian Alpine Mining Corp; the Düsseldorf Society of German Iron Metallurgists (Verein deutscher Eisenhüttenleute) awarded to him the Carl Lueg Memorial Medal in 1914. When the medal was handed to his delegate at the May 3, 1914 session of the society, the chairman addressed KERPELY as an Austrian (*Stahl und Eisen* 34 [1914] 824), which is of course, an error, for he declared himself a Hungarian until his death in 1917.

SUMMARY

Commemoration of ANTHONY KERPELY SEN., excellent Hungarian professor of Ferrous Metallurgy on the occasion of the 50-th anniversary of his death.

ZUM GEDÄCHTNIS VON ANTON KERPELY d. Ä. (1837—1907)

A. SCHLEICHER

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Erinnerung an den hervorragenden ungarischen Professor des Eisenhüttenwesens Anton Kerpely d. Ä., anlässlich des 50sten Jahrestages seines Ablebens.

EN MÉMORIE DE A. KERPELY SEN. (1837—1907)

SCHLEICHER

RÉSUMÉ

Commémoration du souvenir de l'excellent professeur hongrois de la métallurgie du fer A. Kerpely sen. à l'occasion du 50^e anniversaire de sa mort.

ВОСПОМИНАНИЯ АНТАЛА КЕРПЕЛИ (СТ.)

A. ШЛЕЙХЕР

РЕЗЮМЕ

Воспоминания о выдающемся венгерском металлурге — профессоре Антале Керпели (ст.) по случаю 50-летия со дня его смерти.

A kiadásért felel az Akadémiai kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1957. VIII. 22. — Terjedelem: 21,50 (A/5) ív, 136 ábra

Akadémiai Nyomda Gerlóczy u. 2. — 43267/57 — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be addressed to :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу :

Acta Technica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest VI., Népköztársaság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

I N D E X

- IGNÁCZ, P.: The Load Capacity of Transformers in Asymmetrical Operation — Die Belastbarkeit von Transformatoren bei Schiefelast — La capacité de charge des transformateurs en opération asymétrique — П. Игнац: Нагружаемость трансформаторов при асимметричном режиме 3
- ZAJTA, A.: Untersuchungen über die Verallgemeinerungen der Newton-Raphsonschen Wurzelapproximation (II) — Investigation on the Generalization of the Newton-Raphson Root Approximation Method (II) — Recherches sur la généralisation de la méthode de Newton et Raphson pour l'approximation des racines (II) — А. Зайта: Исследования в области обобщения Ньютон—Рафсоновского метода приближенного определения корней. II 25
- И. Вереш: Исследования поведения содержащегося в кольском фосфате титана в процессе магнитной сепарации — VERES, I.: Untersuchungen über das Verhalten des Ti-Gehaltes von Kola-Phosphat bei der magnetischen Scheidung — Investigations on the Behaviour of the Ti-content of Kola Phosphate at Magnetics Separation — Recherches sur le comportement de la teneur en titane du phosphate de Kola, lors de la séparation magnétique 61
- HANGOS, I.: Influence of Binders upon Surface Brightness of Cathode-ray Tube Screens — Einfluss des Bindemittels auf die Oberflächenhelligkeit von Kathodenstrahlröhrenschirmen — Effet du liant sur l'éclat de surface des écrans de tubes à rayons cathodiques — И. Хангош: Влияние связующего вещества на поверхностную яркость экранов катодных трубок 67
- MARSCHALKÓ, B.—BARNA, J.: Über das Viskositätstemperatur-Verhalten von Flüssigkeiten und dessen Funktionen — The Viscosity-temperature Ratio of Liquids and its Application for the Characterization and Identification of Liquids — Le rapport viscosité-température des liquides, et son application à la caractérisation et l'identification des mélanges de liquides — Б. Маршалко и Я. Барна: Зависимость между вязкостью и температурой жидкостей и применение этой зависимости для характеристики и идентификации смесей жидкостей 85
- BALOGH, A.: Ermittlung der Eigenschwingungszahlen bei Torsionsschwingung mit äusserer Dämpfung — Determination of the Number of Self-oscillations of Torsional Oscillation with External Damping — Détermination du nombre d'oscillations propres en oscillation torsionnelle, en cas d'amortissement extérieur — А. Балог: Определение числа собственных колебаний торсионных колебаний с помощью внешнего демпфирования 105
- MILLNER, T.—SASS, L.: Einfluss geringer Mengen von Verunreinigungen auf die Warmhärte des Wolframmetalls — Influence of Small Quantities of Impurities on the Warm Hardness of Tungsten — L'influence de petites quantités d'impuretés sur la dureté à chaud du tungstène métallique — Т. Мильнер и Л. Шаш: Влияние небольших количеств примесей (присадок) на твердость металлического вольфрама 115
- TÁRCZY-HORNOSCH, A.: Über die Winkelprismen der Geodäsie — On Angle Prisms used in Surveying — Sur les équerres prismatiques utilisées en géodésie — А. Тарци-Горнох: О геодетических угломерных призмах 127
- CSONKA, P.: Pure Bending of Lattice Trusses with Parallel Chords — Reine Biegung engmaschiger Fachwerkträger mit parallelen Gurten — Flexion simple de poutres parallèles à treillis multiples — П. Чонка: Чистый изгиб многократно-решетчатых балок с параллельными поясами 155
- BENEDIKT, O.: Eine neue Berechnungsmethode für komplizierte, stark gesättigte magnetische Kreise — A Novel Method for the Computation of Complicated and Highly Saturated Magnetic Circuits — Méthode de calcul nouvelle des circuits magnétiques compliqués, à saturation élevée — О. Бенедикт: Новые методики расчета сложных и сильно насыщенных магнитных цепей 169
- VERŐ, J. A.: Contribution to the Estimation of M_s from the Composition of Steels — Beitrag zur Berechnung des M_s aus der Zusammensetzung des Stahles — Contribution au calcul de M_s à partir de la teneur en carbone de l'acier — Я. Вереш: К вычислению M_s на основе состава стали 193
- GELEJI, A.: Eine neue Walztheorie — New Theory of Rolling — Une nouvelle théorie du laminage — А. Гелейи: Новая теория прокатки 199
- SCHLEICHER, A.: In Memory of Anthony Kerpely Sen. (1837—1907) — Zum Gedächtnis von Anton Kerpely d. Ä. (1837—1907) — En mémoire de A. Kerpely sen. (1837—1907) — А. Шлейхер: Воспоминания Антала Керпели (Ст.) (1837—1907) 245

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY
G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XIX

FASCICULI 3—4



1958

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V. ALKOTMÁNY UTCA 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V. Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

A PRACTICAL SOLUTION FOR STIFFENED SUSPENSION BRIDGES OF VARIABLE INERTIA MOMENT AND ITS APPLICATION TO INFLUENCE-LINE ANALYSIS

J. SZIDAROVSKY
HIGHWAY AND RAILROAD PLANNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received 5th May, 1956]

1. Introduction

In the history of suspension bridges ropes, chains or cables figured as the exclusive supporting elements of the first suspension bridges. Later on, we can find some sort of stiffening elements bearing the deck, but no consideration of this was made in structural analysis. So this should be regarded as the calculation system for *unstiffened suspension bridges*.

It is this system on which was based the calculation of the Budapest Széchenyi chain-bridge in the middle of the last century.

In the later designs, however, there has already been taken due regard of the stiffening truss, and dimensioning was based on assumptions as usual in elastic calculations. In calculating suspension bridges, this may be taken for the so called *Elastic Theory*. Among assumptions of this kind one can find too, that truss deflects under load to so small an extent that analysis of forces in static calculations may be based on quantities characteristic of the shape of the unloaded truss. In general, this assumption has been justified. E.g. we do disregard the change due to loading in the length of the arm, when calculating the stress of the truss-chord.

Calculation of the Budapest "Elizabeth" bridge was also based on the Elastic Theory, taking advantage also of results of investigations carried on by ANTHONY KHERNDL, professor of Technical University at Budapest and academician.

Already at the end of the last century it was pointed out by investigators that the effect of deflection is not negligible in the calculation of suspension bridges, even they went to the length of putting down differential equations as a way of considering the effect of the vertical deflection and they did resolve the differential equation in case the moment of inertia of truss, and so its stiffness too, was constant. Designing of this kind, based on the *Deflection Theory*, has resulted, especially with stiffening trusses, in stresses much smaller than those obtained through calculation based on the Elastic Theory. Results of the Deflection Theory were also applied, in the reconstruction of the Budapest "Széchenyi" chain-bridge in 1948.

Calculation as applied to suspension bridges on the basis of the Deflection Theory, was not welcome to all engineers for taking longer time than when applied to other types of bridges and also for the necessity of further neglects beyond conventional in the analysis of trusses.

A good deal has been said, in the course of calculating suspension bridges, about considering the effect of change in the moment of inertia, in particular. A way of dealing with it is that the truss is divided into sections, within which the stiffness of the truss may be taken for constant, and so no difficulty was met in calculations. This procedure, which requires complying with two connection conditions for each section, implies the determination of integral constants in one equation system. This way, however, is a very cumbersome one as constants are to be calculated with great precision.

The other way might have been the application of the procedure proposed by "Runge" for the solution of differential equations that cannot be worked out in closed form.

According to a third way, solution presents itself in the form of a "Fourier" series, although determination of the Fourier constants can only result from solution of an equation system containing a number of unknowns.

The procedures mentioned are not known to have been used in practical design up to the present, for they eliminate the effect of one assumption only, leaving behind in the calculation the rest of uncertainties, on the one hand, and they require an additional amount of surplus work, on the other hand.

2. Notations

In our coordinate system the positive "x" points to the right, the positive y and η point downwards.

The moment is positive if its rotation is clockwise, in case the resultant acts to the left of the section.

The resultant force is positive when pointing upwards.

Under assumptions as above :

$$- E I \frac{d^3 \eta}{dx^3} = V = \text{vertical resultant force}$$

$$E \cdot I \frac{d^4 \eta}{dx^4} = p = \text{distributed force}$$

$$- E I \frac{d^2 \eta}{dx^2} = M = \text{bending moment}$$

By cable-force is meant the horizontal projection of the pull in the cable.

H_w = cable-force due to part of the dead load not affecting the stiffening truss.

H = increment of cable-force due to other effects, such as the remainder of dead load, temperature change, live load

M = moment of stiffening truss on the basis of the Deflection Theory.

M_0 = moment on the basis of the Elastic Theory. (In case of a continuous stiffening truss, consideration of moments at supports is based on values calculated by the Deflection Theory.)

V and V_0 = relate to the vertical resultant force later called as shear force, such as M or M_0 respectively, to moment

q = relates to distributed force, such as M_0 relative to moments

p = external distributed load

η = vertical deflection of the stiffening truss

I = moment of inertia of stiffening truss

E = modulus of elasticity of the stiffening truss

E_c = modulus of elasticity of the cable

L_s L_t = cable-length functions (equ. 6.01)

w = part of dead load without any effect on the stiffening truss. (This part of dead load, is carried by the cable only.)

l = length of span

F_0 = sectional area of cable

x = abscissa

y = ordinate of the cable without live load at mean temperature

$$c^2 = \frac{H_w + H}{E J}$$

$S(x)$ = function. One particular solution of the homogeneous form of differential equation 3.03 (par. 4.1).

$C(x)$ = as above

$U(x)$ = function. One particular solution of differential equation 3.03. (par. 4.1).

A, B = dimensionless constants

$a^c, b^c, \alpha^c, \beta^c$ = constants in function $C(x)$

$a^s, b^s, \alpha^s, \beta^s$ = constants in function $S(x)$

$a^u, b^u, \alpha^u, \beta^u$ = constants in function $U(x)$

k = subscript referring to section "k"

$m(x)$ = ordinate of moment influence-line

$v(x)$ = ordinate of shear-force influence-line

η_H = ordinate of H cable-force influence-line

p = subscript referring to influence line due to effect of $P = 1^p$.

q = subscript referring to influence-line due to effect of distributed force

$q = 1^q$

c = index referring to continuous truss

h = distance between hangers.

3. Differential equation of suspension bridges

3.1. Differential equation of the suspended part of the stiffening truss

A practical method in calculating suspension bridges will be demonstrated here.

In calculating the part of the bridge suspended on the cable, we make the well-known basic differential equation by "Rode" as the starting point. In this way:

$$[E J \eta''] - [H_w + H] [\eta' (1 + y'^2)]' = H y'' + p = q.$$

Notations are explained in chapter 2.

It is noted here that, in case of assuming $(H + H_w)$ to be constant, the principle of superposition holds good.

After some alteration :

$$M'' - \left[(1 + y'^2) \int \frac{H_w + H}{EJ} M dx \right]' = -Hy'' - p = -q. \quad (3,01)$$

In the strict sense of the word, this equation is not a differential equation, but it may be turned into a linear differential equation of second order. Thus, the general relations of linear differential equations of second order are valid for it also. For the sake of simplicity, the basic equation as in Equ. 3,01 will be called further on a differential equation.

3.2. Differential equation of the unsuspended part of the stiffening truss

In many of the suspension bridges, for reasons partly of statics partly of construction, the stiffening truss is not suspended on the part next to the

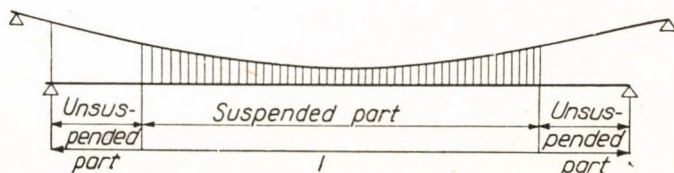


Fig. 1

supports (Fig. 1). At this part, the differential equation becomes simpler and takes the form, characteristic of a beam girder, of

$$M'' = -p = -q. \quad (3,02)$$

The differential equation as in Equ. 3.02, is a special case of that of Equ. 3,01, if $H_w = H = 0$.

In conformity with equations 3.01 and 3.02, the differential equation of a suspension bridge for both the suspended and the unsuspended part of the stiffening truss is:

$$M'' - \lambda \left[(1 + y'^2) \int \frac{H_w + H}{EJ} M dx \right]' = -\lambda Hy'' - p = -q, \quad (3,03)$$

where $\lambda = 1$ for the suspended part, $\lambda = 0$ for the unsuspended one.

Or, to put in an other form:

$$M'' + \lambda [(1 + y'^2) (H_w + H) \eta']' = -\lambda Hy'' - p = -q. \quad (3,04)$$

4. Solution of differential equations

4.1. Choice of particular solutions

Supposing general solution of the differential equation 3.03,

$$M = AC(x) + BS(x) + U(x) \quad (4,01)$$

In this relation, the $C(x)$ and $S(x)$ functions of the dimension of bending moments, may be regarded as solutions, linearly independent of each other, of the homogeneous form of differential equation as in Equ. 3.03. On the other hand, the $U(x)$ function of the dimension of a bending moment is a particular solution of the unhomogeneous form, "A" and "B" are, in turn, dimensionless constants.

Choice of the particular solution of $C(x)$ and $S(x)$ is made, further on, so as to be

$$C(0) = 1 \quad (4,02)$$

$$C'(0) = 0 \quad (4,03)$$

and

$$S(0) = 0 \quad (4,04)$$

$$S'(0) = 1 \quad (4,05)$$

Statical interpretation of this is given as follows.

Function $C(x)$ is chosen so that it should produce solution of the homogeneous form, in other words, the moment on the stiffening truss, due to the effect of the positive unit moment at $x = 0$, acts as the only external loading to the left of the cross-section, at locus x , chosen at random.

The distributed load :

$$q = 0 \quad (4,06)$$

the shear-force and moment, at $x = 0$

$$V(0) = 0 \quad (4,07)$$

$$M(0) = 1\text{tm} \quad (4,08)$$

As regards the moment on the stiffening truss, in turn,

$$M(x) = C(x) \quad (4,09)$$

Thus,

$$C(0) = 1\text{tm}$$

$$C'(0) = 0$$

The $S(x)$ function is chosen so that it should produce solution of the homogeneous form, in other words, the moment on the stiffening truss, due to the effect of the unit shear-force at $x = 0$, acts as the only external loading to the left of cross section x .

The distributed load :

$$q = 0 \quad (4,10)$$

The shear-force and moment, at the place of $x = 0$:

$$V(0) = 1^t \quad (4,11)$$

$$M(0) = 0 \quad (4,12)$$

The moment on the stiffening truss :

$$M(x) = S(x) \quad (4,13)$$

Thus,

$$S(0) = 0$$

$$S'(0) = 1^t$$

Each of moments $C(x)$ and $S(x)$ can be produced on the stiffening truss of a two hinged suspension span, if loads from hangers, to be found on the right side of the differential equation, acting upwards, will be compensated by distributed load $-Hy''$ which acts downwards.

In producing moment $C(x)$, the stiffening truss is to be loaded at $x = 0$ by unit moment, and the stiffening truss shall be loaded to the right of the chosen "x" cross-section so that no support-reaction should rise at $x = 0$.

In producing moment $S(x)$, it is required for loading to the right of "x" cross-section that the support-reaction at $x = 0$ should be 1 ton.

In case the inertia moment of the stiffening truss is constant and value y'^2 in differential equation (3,03) is neglected beside the unity, furthermore, the stiffening truss is suspended on the full length of the span, neglecting dimensions,

$$C(x) = Ch \, cx \quad (4,14/a)$$

$$S(x) = \frac{1}{c} Sh \, cx \quad (4,14/b)$$

Namely, $Ch \, cx$ and $Sh \, cx$ are dimensionless quantities.

4.2. The model-bridge as the basis of calculation

Let us divide the suspended part of the stiffening truss into as many sections as to make possible that distributed load "p" due to dead-load, furthermore, quantities Hy'' and $(1 + y'^2)$, as well as the inertia moment of the stiffening truss may be taken, with the precision required, for constant within each of the sections. It is also required for each particular solution of the differential equation 3.03 that they should satisfy connection conditions. In consequence of this, it has been attained that the full solution, too, satisfies connection conditions. In this method of calculation, values of constants of the following sections are directly obtained from values of constants of the previous section relative to each particular solution, and resolving of equation systems deriving from connection conditions meets no special difficulty.

It is to be noted, that the differential equation is rather insensitive to the change of EJ and $(1 + y'^2)$, and, so, no too great a density of division need be applied.

This procedure would, of course, be suitable not only for calculation of suspension bridges but might also be extended to solutions of all such problems

in which result is produced by solution of linear differential equation of non-constant coefficient.

Calculation is executed not on the bridge itself but on a model on which the cable undergoes no horizontal deflection, nevertheless,

- a) 1. the inertia-moment of the stiffened truss,
2. loading, q , and
3. quantity $(1 + y_k'^2)$

are constant within each section on the suspended part of the bridge, and alter by leaps at the section points. This means that the cable-force on our model alters by leaps bringing about concentrated loading of hangers acting on the stiffening truss at section points. Because of this, a gradual alteration comes about in shear-forces at the section points ;

b) the cable-force on the unsuspended part of the bridge is not $H + H_w$ but $(H + H_w)(1 + y_2'^2)$, in which y_2 is the average value of the cable-tangent on the first suspended section.

4.3. Particular solutions for the suspended part of the stiffening truss

Within each section, let us say on section k , on the model specified under 4.2. $EJ_k (1 + y_k'^2)$ and q_k , are constants. The differential equation along section k as in Equ. (3.01), is

$$M'' - C_k^2 M = - q_k \quad (4,15)$$

where

$$C_k^2 = \frac{H_w + H}{E J_k} (1 + y_k'^2) . \quad (4,16)$$

The general solution of this differential equation is :

$$M_k = a_k e^{C_k X} + b_k e^{-C_k X} + \frac{q_k}{c_k^2} . \quad (4,17)$$

Equ. (4,17) may be written in a form as (4,01). In this case, e.g.

$$U(x) = a_k^u e^{C_k X} + b_k^u e^{-C_k X} + \frac{q_k}{c_k^2} . \quad (4,18)$$

The form of functions $C_{(x)}$ and $S_{(x)}$ is the same, except that instead of a_k^u and b_k^u there are to be written a_k^c and b_k^c , and a_k^s and b_k^s respectively, furthermore, $q_k = 0$.

In the stiffening truss of our model neither leap in moment nor break in slope takes place. (That no leap can take place in deflection, we shall revert to it later.)

Each particular solution and slope that can be derived from it is expected to comply with these. At section point k at x_k (between sections $k-1$ and k), the vertical shear force relative to section $k-1$ is V_{k-1} , that relative to k is $V_k = V_{k-1} + \Delta V_k$. As no change arises in the value of η' here, by making use of formula (5,05):

$$\eta'_k = \frac{V_{0k-1} - V_{k-1}}{(H_w + H)(1 + y_{k-1}'^2)} = \frac{V_{0k} - V_{k-1} - \Delta V_k}{(H_w - H)(1 + y_k'^2)}$$

From this:

$$\Delta V_k = \frac{(V_{0k-1} - V_{k-1})(y_{k-1}'^2 - y_k'^2)}{1 + y_{k-1}'^2} \quad (4,19)$$

as $V_{0k-1} = V_{0k}$.

By the same formula are to be defined changes of the resultant in functions $C_{(x)}$, $S_{(x)}$ and $U_{(x)}$. In this, V_{k-1} and ΔV_k are alternately indexed c , s , u , and $V_0 = 0$ for functions $C_{(x)}$ and $S_{(x)}$.

Formula (4,19) may also be deduced on the ground that the value of cable-force changes, and so stiffening truss is loaded by a concentrated force.

By reason of the above, it may be written for function $U(x)$ at section point:

$$U_k(x_k) = U_{k-1}(x_k)$$

and

$$U'_k(x_k) = U'_{k-1}(x_k) + \Delta V_k^u \quad (4,20)$$

Similar equations hold good also for functions $C(x)$ and $S(x)$.

By employing (4,18):

$$a_k^u = \frac{1}{2e^{C_k X_k}} \left[a_{k-1}^u \frac{C_k + C_{k-1}}{C_k} e^{C_{k-1} X_k} + b_{k-1}^u \frac{C_k - C_{k-1}}{C_k} e^{-C_{k-1} X_k} + \frac{q_{k-1}}{C_{k-1}^2} - \frac{q_k}{C_k^2} + \frac{\Delta V_k^u}{C_k} \right] \quad (4,21)$$

$$b_k = \frac{1}{2e^{-C_k X_k}} \left[a_{k-1}^u \frac{C_k - C_{k-1}}{C_k} e^{C_{k-1} X_k} + b_{k-1}^u \frac{C_k + C_{k-1}}{C_k} e^{-C_{k-1} X_k} + \frac{q_{k-1}}{C_{k-1}^2} - \frac{q_k}{C_k^2} - \frac{\Delta V_k^u}{C_k} \right] \quad (4,22)$$

Likewise can they be written for functions $C(x)$ and $S(x)$, too, but indices of constants a_{k-1} , b_{k-1} , as well as of ΔV_k , are c and s respectively here, and $q_{k-1} = q_k = 0$.

In favour of satisfying conditions (4,02)–(4,05), with the stiffening truss suspended at the beginning of the span,

$$\begin{aligned} a_1^c &= 0,5 \\ b_1^c &= 0,5 \\ a_1^s &= \frac{0,5}{c_1} \\ b_1^s &= -\frac{0,5}{c_1} \end{aligned}$$

The values of a_1 and b_1 are theoretically optional. It is reasonable, however, to make choice of their values so that at $x = 0$ should be $U(0) = U'(0) = 0$ in other words,

$$a_1 = b_1 = -\frac{q_1}{2c_1^2} \quad (4,23)$$

Such a choice is reasonable as, in calculating a two-hinged stiffening truss, there presents itself $A = 0$ in solution as per (4,01), thus, only one constant value of integration has to be defined on the one hand, and constant B obtained indicates the extent of the left-side resultant, on the other hand.

4.4 Particular solutions for the unsuspended part of the stiffening truss

Differential equation (3,02) may be resolved by integration, thus :

$$M = - \int \int p(x) dx dx + \alpha x + \beta \quad (4,24)$$

in which α and β are constants, dimensioned in tons and as bending moment, respectively.

In this solution inertia moment of the stiffening truss plays no part and, thus, it may be taken for one section of the unsuspended part in the determination of the moment.

Solution as per formula (4,24) may be written also in the form asunder (4,01).

In this case

$$C(x) = \alpha^c x + \beta^c \quad (4,25)$$

$$S(x) = \alpha^s x + \beta^s \quad (4,26)$$

$$U(x) = - \int \int p(x) dx dx + \alpha^u x + \beta^u \quad (4,27)$$

In order to comply with conditions (4,02—4,05), in case the stiffening truss is not suspended at the beginning of the span,

$$\alpha^c = 0$$

$$\beta^c = 1$$

$$\alpha^s = 1$$

$$\beta^s = 0$$

α^u and β^u are in turn optional constants.

It is reasonable, however, to count with values

$$\alpha^u = \beta^u = 0 \quad (4,28)$$

alike the form in Equ. (4,23).

At the connection of the suspended and unsuspended parts of the stiffening truss the respective values of both moment and resultant are equal. The same should be postulated in each particular solution, too. When proceeding from the unsuspended section to the suspended one of the stiffening truss, so α^u and β^u become known, and

$$\begin{aligned} a_k = \frac{1}{2 e^{C_k X_k}} \left[- \int \int p(x) dx dx - \frac{1}{C_k} \int p(x) dx - \frac{q_k}{C_k^2} + \right. \\ \left. + \alpha^u \left(x_k + \frac{1}{C_k} \right) + \beta^u \right] \end{aligned} \quad (4,29)$$

$$\begin{aligned} b_k^u = \frac{1}{2 e^{-C_k X_k}} \left[- \int \int p(x) dx dx + \frac{1}{C_k} \int p(x) dx - \frac{q_k}{C_k^2} + \right. \\ \left. + \alpha^u \left(x_k - \frac{1}{C_k} \right) + \beta^u \right] \end{aligned} \quad (4,30)$$

as it is easy to see, at the connection of the two sections. The same applied to $C_{(x)}$, since $\alpha^c = 0$, $p = 0$ and $\beta^c = 1$,

$$a_k^c = \frac{1}{2 e^{C_k X_k}} \quad (4,31)$$

$$b_k^c = \frac{1}{2 e^{-C_k X_k}} \quad (4,32)$$

The same applied to $S(x)$, since $a^s = 1$, $p = 0$ and $\beta^s = 0$

$$a_k^s = \frac{x_k + \frac{1}{C_k}}{2 e^{C_k x_k}} \quad (4,33)$$

$$b_k^s = \frac{x_k - \frac{1}{C_k}}{2 e^{-C_k x_k}} \quad (4,34)$$

When proceeding from the suspended section to the unsuspended one of the stiffening truss, a_k^u and b_k^u become known. In this case

$$a^u = U'(x_k) \quad (4,35)$$

and

$$\beta^u = U(x_k) - x_k U'(x_k) \quad (4,36)$$

The afore-said hold also good when determining constants $C_{(x)}$ and $S_{(x)}$.

5. Moment, resultant, loading of hangers and deflection

After having written down the solution of differential equation in the form of Equ. (4,01), internal forces and deflection can be determined with knowledge of the particular solutions.

Calculation to be executed refers to a two-hinged stiffening truss.

Even in the case of a continuous stiffening truss, the two-hinged truss is chosen for primary truss, and the effect of continuity may be considered by the same procedure as in the case of a continuous girder.

Moment:

$$M = AC(x) + BS(x) + U(x)$$

But at $x = 0$ and $x = l$, $M = 0$. As $C(0) = 1^{tm}$, $S(0) = 0$, the two constants can be determined.

$$A = \frac{-U(0)}{1^{tm}} \quad (5,01)$$

and with knowledge of A

$$B = -\frac{AC(l) + U(l)}{S(l)} \quad (5,02)$$

If constants of function U has been chosen so that $U(o) = 0$ (see formulae (4,23) and (4,28)), then

$$A = 0 \quad \text{and} \quad B = - \frac{U(l)}{S(l)}.$$

Auxiliary functions $C'(x)$, $S'(x)$ and $U'(x)$ at section points are not continuous.

Nearly exact values might be obtained for section point if it were taken for an infinitely short section and value y' taken into consideration on this section by its corresponding value.

Value appropriate to the purpose might be obtained too, if it is taken for equal to the arithmetical mean of the function value determinable at section points on the basis of the two sections.

In this way, also the value of differential quotients $C'(x)$, $S'(x)$ and $U'(x)$ relative to section points, has been determined, and thereby each function has only one value at point x .

If at $x = o$ also moment $M(o)$ is acting (continuous stiffening truss)

$$A = \frac{M(o) - U(o)}{l \, tm}. \quad (5,03)$$

With knowledge of A , the value of B can already be determined on the basis of (5,02).

Shear-force is the differential quotient of bending moment:

$$V = M' = A C'(x) + B S'(x) + U'(x). \quad (5,04)$$

Differential quotients $C'(x)$, $S'(x)$ and $U'(x)$ can be produced by differentiation of the forms of functions $C(x)$, $S(x)$ and $U(x)$, detailed in formulae under (4.18) and (4,25—4,27), respectively.

The loading of the hanger consists of two components:

- of
1. dead load,
 2. live load and loading due to temperature changes.

The first is the product of the multiplication of the dead weight of the stiffening truss by the distance between cables, the second is the change in shear-force on the previous length.

The slope of the stiffening truss on the suspended part can be defined on the basis of Equ. (3,04). Integrated, after some alteration it is

$$V(x) + (H_w + H) \eta'(1 + y'^2) = V_0(x) = - \int q \, dx.$$

From this the slope is

$$\eta' = \frac{V_0(x) - V(x)}{(H_w + H)(1 + y'^2)}. \quad (5,05)$$

On the unsuspended part of the stiffening truss, by making use of (3,02)

$$\eta' = - \int \frac{M(x)}{EJ} dx + \gamma. \quad (5,06)$$

The value of the slope on the basis of both Equ. (5,05) and (5,06) is the same at the connection of suspended and unsuspended parts.

When proceeding from the unsuspended part to the suspended one,

$$\gamma = \frac{V_0(x_k) - V(x_k)}{(H_w + H)(1 + y_k'^2)} + \int_0^{x_k} \frac{M(x)}{EJ} dx. \quad (5,07)$$

The lower boundary of the integral under (5,06) is 0, the upper one is the abscissa of cross-section x under examination.

Proceeding from the suspended part to the unsuspended one of stiffening truss,

$$\gamma = \frac{V_0(x_k) - V(x_k)}{(H_w + H)(1 + y_{k-1}'^2)}. \quad (5,08)$$

The vertical deflection can be produced, too, as the integral of the slope. At $x = 0$, the initial values of $\eta(0) = 0$ and of the calculated $\eta'(0)$ may be taken as starting points.

The deflection on the suspended part of stiffening truss, deduced from (5,05)

$$\eta = \int \frac{V_0(x) - V(x)}{(H_w + H)(1 + y'^2)} dx. \quad (5,09)$$

Along each section, $y_k'^2$ is constant and, so, after integration:

$$\eta = \frac{M_0(x) - M(x)}{(H_w + H)(1 + y_k'^2)} + \Delta \eta_k \quad (5,10)$$

in which the value of $\Delta \eta_k$ can be defined on the assumption that at section points the value of deflection to be defined on the basis of both sections, is the same.

Let deflection at the end of section $k - 1$ be $\eta(x_k)$. On the other hand, at the beginning of section k , it is determined by equation (5,09),

$$\eta(x_k) = \frac{M_0(x_k) - M(x_k)}{(H_w + H)(1 + y_k'^2)} + \Delta \eta_k.$$

From this

$$\Delta \eta_k = \eta(x_k) - \frac{M_0(x_k) - M(x_k)}{(H_w + H)(1 + y_k'^2)} \quad (5,11)$$

Proceeding from the unsuspended part to the suspended one,

$$\eta = - \int \int \frac{M}{EJ} dx dx + \gamma x + \delta. \quad (5,12)$$

At $x = 0$, $\eta(0) = 0$, and so $\delta = 0$

Thus, $\eta(x_k)$ can be defined, and the value of $\Delta \eta_k$ can be determined on the basis of (5.11).

Proceeding from the suspended part to the unsuspended one, with knowledge of the well-known deflection $\eta(x_k)$ at the section point, on the basis of (5,12),

$$\delta = \eta(x_k) - \gamma x_k. \quad (5,13)$$

At the end of the calculation, results are checked by the postulate that at $x = l$ should be $\eta(l) = 0$.

There will be a difference, an error of closure in other words, even in case of precise calculation, due to the fact, that the assumption of load from suspension being distributed — when a longer part is not suspended at the beginning or end of the span — is incorrect from the point of view of deformation.

Namely, the slope and the vertical deflection of the cable and stiffening truss at the place of x_k is the same. The cable undergoes no deformation up to the point of its suspension, and the stiffening truss does undergo deformation as far as the support. Therefore, the vertical deflection of cable and stiffening truss at the support and at the beginning of suspension can be equal only, if the tangent of the cable changes at the beginning of the suspension.

The deflection produced on the horizontally projected length of the cable x_k by this angle of deviation, is

$$\eta = - \int \int_0^{x_k} \frac{U(x)}{EJ} dx dx.$$

According to Fig. 2

$$s \approx \frac{x_k}{\cos \varphi_{k-1}}$$

$$v = s \varepsilon$$

$$\eta \approx \frac{v}{\cos \varphi_{k-1}} \approx \frac{x_k \varepsilon}{\cos \varphi_{k-1}}$$

Thus,

$$\varepsilon = - (1 + y)_{k-1}^2 \frac{\int_0^{x_k} \frac{U(x)}{EJ} dx}{x_k} \tag{5,14}$$

Should it come about in the course of calculation, that the afore-mentioned error of closure is not negligible, in calculating auxiliary functions $C(x)$, $S(x)$ and $U(x)$, a concentrated force at the junction of the suspended and unsuspended parts of

$$P = (H_w + H) \varepsilon = (H_w + H) (1 + y_{k-1}^2) \frac{\int_0^{x_k} \frac{U(x)}{EJ} dx}{x_k} \tag{5,15}$$

has to be taken into consideration, which pulls the stiffening truss upwards at place x_k , in case of $U(x)$ being positive.

Namely, according to Fig. 2

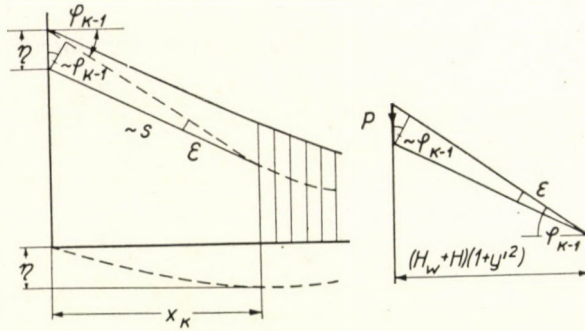


Fig. 2

$$P = \varepsilon (H_w + H)$$

Force $-P$, reaction of force P , is acting on the cable, and brings about there angular rotation

$$\varepsilon = \frac{P}{(H_w + H)} \tag{5,16}$$

Thereby, the vertical deflection of the cable and stiffening truss will be equal both at the support and at the beginning of the suspended part. The same holds good for auxiliary functions $C(x)$ and $S(x)$, too.

In consequence of this, a leap of P value comes about in the shear-force at the junction of the suspended and unsuspended parts, which should be considered in defining constants of functions $U(x)$, $S(x)$ and $C(x)$.

When proceeding from the suspended part to the unsuspended one, under the joint influence of vertical force P acting on the stiffening truss at section point x_k , and of moment $U^*(x)$ calculated without vertical force P , the vertical deflection, occurring at the support owing to deformation of section $l - x_k$ of the stiffening truss, is

$$\eta = - \int \int_{x_k}^l \frac{U_{(x)}^*}{EJ} dx dx - \int \int_{x_k}^l \frac{P(x-x_k)}{EJ} dx dx \quad (5,17)$$

The same vertical deflection comes into being in the cable, if at x_k

$$P = \frac{(H_w + H)(1 + y_{k+1}'^2)}{l - x_k} \eta = \frac{(H_w + H)}{l - x_k} (1 + y_{k+1}'^2) \left[\int \int_{x_k}^l \frac{U_{(x)}^*}{EJ} dx dx + \int \int_{x_k}^l \frac{P(x-x_k)}{EJ} dx dx \right] \quad (5,18)$$

concentrated force is acting.

And from this

$$P = \frac{(H_w + H)(1 + y_{k+1}'^2)}{l - x_k} \frac{\int \int_{x_k}^l \frac{U_{(x)}^*}{EJ} dx dx}{1 - \frac{(H_w + H)(1 + y_{k+1}'^2)}{k+1} \int \int_{x_k}^l \frac{x-x_k}{EJ} dx dx} \quad (5,19)$$

In the correct auxiliary function, also the influence of force P has to be considered. Therefore, its value, on the part of $x > x_k$,

$$U(x) = U^*(x) + P(x-x_k). \quad (5,20)$$

The same applies to auxiliary functions $C(x)$ and $S(x)$, according to the sense.

6. Calculation of the cable-force and of the hanger

The cable-force can be defined either by strain energy method or by taking the starting-point that distance between the extreme anchorage points of the cable does not change either under effect of loading or under temperature influence.

The two systems are conducive to the same results, and if quantity of η'' beside y'' is neglected,

$$\frac{HL_s}{E_c F_0} + \omega t L_t = - \sum \int_0^l y'' \eta dx \quad (6,01)$$

will be obtained, a well-known relation, where ω is the heat-expansion coefficient of the cable material, t is the temperature change, for the rest of notations chapter 2 accounts.

The method, as discussed, of the solution of the differential equation may be made use of in any conventional system of calculation. Further on, it will be applied to the procedure of calculation by influence lines.

7. Influence-lines

Producing an influence line by the Elastic Theory is carried out as follows. In this way, the differential equation

$$M = \bar{M} - Hy = 0$$

where \bar{M} is the moment arising on the two-hinged truss. The moment results from the total of the moment on the two-hinged truss and of the effects due to the cable-force. Therefore, the right side consists of two components, one is the effect of external loading, the other is the effect due to the cable.

The influence-line is to be separately determined for values of \bar{M} and Hy . The influence-line due to \bar{M} will be m_p , that due to Hy , m_q .

The influence-line due to \bar{M} is making the moment-influence-line of the two-hinged truss, in other words, it is a triangular influence-line the peak of which is at the cross-section z in question.

Thus, the moment acting at x under the effect of force $P = 1^t$, is at cross-section z

$$m_p = \frac{z}{l} (l - x) \quad z \geq x$$

$$m_p = \frac{l - z}{l} x \quad \text{on section } z \leq x$$

The value of cable-force increment, due to the effect of force $P = 1^t$ acting at x , is indicated by influence-line $\eta(x)$. Thus, the influence-line resulting from value Hy :

$$m_q = \eta_H(x) y(z).$$

The full influence-line:

$$m = m_p + m_q.$$

Similar consideration will be applied to the influence-line to be determined on the basis of the Deflection Theory, too.

The principle of superposition is not governing the latter, except when $(H_w + H)$ is constant. The influence-line will be determined for value $(H_w + H)$ taken for granted.

7.1 Influence-line on the two-hinged stiffening truss

7.11. Moment influence-line

The quantity related to loading on the right side of the differential equation 3.03, consists, alike the former, of two components :

1. of the quantity related to the direct effect due to external loading, in other words, to live load and to the accidental increase of dead-load ;
2. of loading owing to the increment of cable force.

In case of a two-hinged truss, the former load is identical with loading according to the Elastic Theory.

Support moments being different in case of a continuous truss, the constants of integration, arising at integrating the right side, take up other values as initial ones.

First, the effect of external loading will be examined.

The stiffening truss will be loaded at x by concentrated force $P = 1^t$. On the left side section, moment to arise at z

$$m_p(z) = A_l C_l(z) + B_l S(z). \quad (7,01)$$

The moment of a two-hinged truss, at $x = 0$ is

$$m_p(0) = 0,$$

therefore, $A_l = 0$.

In case of a symmetric stiffening truss, the moment on the right-side section will be determined in a similar way. In this case, the abscissa of the cross-section is $l - z$ and moment

$$m_p(z) = B_r S(l - z). \quad (7,02)$$

The moment under force $P = 1^t$ acting at x , is of the same magnitude on both sections, while there arises a unit leap in the resultant and a change of sign takes place owing to progress in the opposite sense

$$V_{pl}(x) = 1 - V_{pr}(l - x).$$

Putting them to use,

$$B_l S(x) = B_r S(l - x)$$

$$B_l S'(x) = 1 - B_r S'(l - x).$$

From these two equations :

$$B_l = \frac{S(l-x)}{S'(x)S(l-x) + S(x)S'(l-x)} . \quad (7,03)$$

$$B_r = \frac{S(x)}{S'(x)S(l-x) + S(x)S'(l-x)} . \quad (7,04)$$

After substitution in (7,01) and (7,02) respectively, moment (Fig. 3)

$$m_p(x) = \frac{S(l-x)}{S'(x)S(l-x) + S(x)S'(l-x)} S(z) \quad \text{on section } z \leq x \quad (7,05)$$

$$m_p(x) = \frac{S(x)}{S'(x)S(l-x) + S(x)S'(l-x)} S(l-z) . \quad z \geq x \quad (7,06)$$

In conventional calculations, when suppositions enumerated in chapter 4,1 are also assumed, as

$$S(x) = \frac{1}{c} Sh cx \quad S'(x) = Ch cx$$

so moment (Fig. 3)

$$m_p(x) = \frac{Sh c(l-x)}{c Sh cl} Sh cz \quad \text{on section } z \leq x \quad (7,07)$$

or

$$m_p(x) = \frac{Sh cx}{c Sh cl} Sh c(l-z) \quad z \geq x . \quad (7,08)$$

In case the stiffening truss is not symmetric, the moment on the right side section

$$m_p(z) = A_r C(z) + B_r S(z) . \quad (7,09)$$

As $m(l) = 0$ at $x = l$, therefore

$$0 = A_r C(l) + B_r S(l) .$$

From this there can be determined factor of $C(x)$

$$A_r = -B_r \frac{S(l)}{C(l)} . \quad (7,10)$$

$$A_l = 0 . \quad (7,11)$$

By putting to use connection-conditions already discussed,

$$B_l S(x) = B_r S(x) + A_r C(x) = B_r \left[S(x) - \frac{S(l)}{C(l)} C(x) \right]$$

$$B_l S'(x) = 1 - B_r S'(x) - A_r C'(x) = 1 - B_r \left[S'(x) - \frac{S(l)}{C(l)} C'(x) \right].$$

Factors of $S(z)$ derived from these two equations,

$$B_l = \frac{S(x) - \frac{S(l)}{C(l)} C(x)}{S(x) \left[S'(x) - \frac{S(l)}{C(l)} C'(x) \right] + S'(x) \left[S(x) - \frac{S(l)}{C(l)} C(x) \right]} \quad \text{on section } z \leq x. \quad (7,12)$$

$$B_r = \frac{S(x)}{S(x) \left[S'(x) - \frac{S(l)}{C(l)} C'(x) \right] + S'(x) \left[S(x) - \frac{S(l)}{C(l)} C(x) \right]} \quad . \quad z \geq x. \quad (7,13)$$

The moment of the stiffening truss due to vertical force $P = 1^t$ acting at x , is produced by equations as above.

The other loading is due to the real increase of the cable-force.

According to equation (3,03), this loading is $q_0 = -Hy''$ being uniformly distributed along each section.

In case of increment of cable-force $H = 1^t$, in other words, under the effect of distributed load $y'' \cdot 1^t$, moment

$$m_q(x) = AC(x) + BS(x) + U(x),$$

where function $U(x)$ can be determined for the afore-said loading on the basis of chapt. 4,3-5. If choice is made of the initial value of function $U(x)$ in a way that $U(0) = 0$, as $m_q = 0$ at $x = 0$, therefore $A = 0$

$$m_q(x) = BS(x) + U(x) \quad (7,14)$$

$m_q(l) = 0$ at $x = l$, from this

$$B = -\frac{U(l)}{S(l)}. \quad (7,15)$$

This substituted, moment

$$m_q(x) = -\frac{U(l)}{S(l)} S(x) + U(x). \quad (7,16)$$

In conventional calculations

$$U(x) = \frac{q}{c^2} (1 - Ch cx) \quad (7,17)$$

$$m_q(x) = \frac{q}{c^2} (1 - Ch cx) + B Sh cx.$$

But $m_q = 0$ at $x = l$ and thus,

$$B = \frac{q}{c^2} \frac{Ch cl - 1}{Sh cl} = \frac{q}{c^2} Th \frac{cl}{2}.$$

Substituted, as $q = -\frac{8f}{l^2}$ in case $H = 1^t$,

$$m_q(x) = -\frac{8f}{c^2 l^2} \left[Th \frac{cl}{2} Sh cx - Ch cx + 1 \right]. \quad (7,18)$$

In case cable-force $H = 1^t$, the moment is $m_q(x)$. This multiplied by the increment of the cable-force, we can obtain the moment due to the cable-force on the undeflected truss.

On determinig the influence-line, the moment to arise under effect of $P = 1^t$ acting at x , will be sought for place z . Ordinate $\eta_H(x)$ belonging to x will produce on the basis of formula (7,36) the value of the increment of force H to arise under the effect of $P = 1^t$ acting there. Thus, moment $m_q(z)$, arising at z , multiplied by the increment of force H , yields the moment due to increment of force H .

The moment due to increment of force H to arise under the effect of force P acting at x , is according to (7,16) and (7,36) (Fig. 3) at z

$$m_{qH}(x) = \eta_H(x) \left[U(z) - \frac{U(l)}{S(l)} S(z) \right]. \quad (7,19)$$

In the case of conventional calculations

$$m_{qH}(x) = -\eta_H \frac{8f}{c^2 l^2} \left[Th \frac{cl}{2} Sh cz - Ch cz + 1 \right]. \quad (7,20)$$

This moment added to the moment due to force $P = 1^t$ calculated on the basis of formulas (7,01—7,13), gives the influence-line ordinate of cross-section z of the stiffening truss (Fig. 3)

$$m(x) = m_p(x) + m_{qH}(x). \quad (7,21)$$

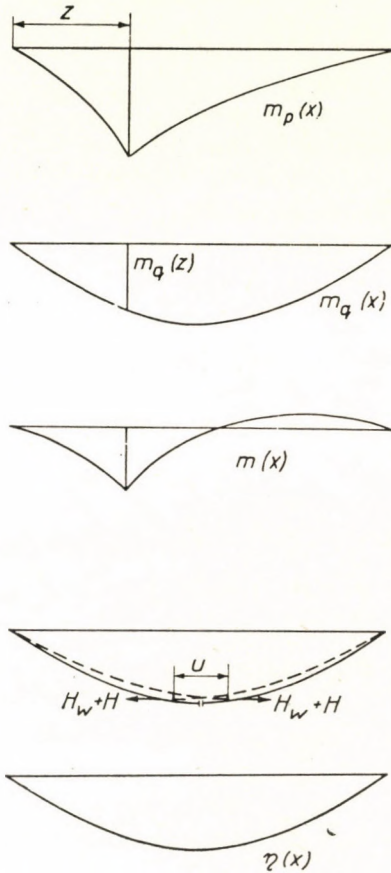


Fig. 3

7,12 The resultant influence-line

The resultant arising at place z of the stiffening truss is the first differential quotient of the moment produced by force $P = 1^t$ acting at x .

Under effect of external loading, the stiffening truss being symmetric, after differentiation of the resultant (7,01) and (7,02), respectively,

$$v_p(x) = B_1 S'(x) \quad \text{on section } z \leq x \quad (7,22)$$

$$v_p(x) = B_r S'(l - x) \quad z \geq x. \quad (7,23)$$

In conventional calculations

$$v_p(x) = \frac{Sh c(l-x)}{Sh cl} Ch cz \quad z \leq x \quad (7,24)$$

$$v_p(x) = \frac{Sh cx}{Sh cl} Ch c(l-z) \quad z \geq x. \quad (7,25)$$

Or in the case of the stiffening truss being asymmetric, it can be determined by differentiation of (7,01) and (7,09), respectively.

Under the effect of distributed load $y'' \cdot 1^t$, the resultant can be determined by differentiation of (7,16)

$$v_q(x) = -\frac{U(l)}{S(l)} S'(x) + U'(x). \quad (7,26)$$

In conventional calculations

$$v_q(x) = -\frac{8f}{c^2 l^2} \left[Th \frac{cl}{2} Ch cx - Sh cx \right]. \quad (7,27)$$

The resultant from the increment of force H arising under the effect of $P = 1^t$ acting at z , is at x , alike Equ. (7,19),

$$v_{qH}(x) = \eta_H(x) \left[U'(z) - \frac{U(l)}{S(l)} S'(z) \right]. \quad (7,28)$$

In the case of conventional calculations

$$v_{qH}(x) = -\eta_H(x) \frac{8f}{c^2 l^2} \left[Th \frac{cl}{2} Ch cx - Sh cx \right]. \quad (7,29)$$

And the resultant influence-line

$$v(x) = V_p(x) + v_{qH}(x). \quad (7,30)$$

7.13. Deflection influence-line

Deflection and slope can be determined on the basis of formulae under par. 5.

Under the effect of external force $P = 1^t$ acting at x , the moment is yielded by formulae (7,01—7,13). The value of moment $M_0(x)$ is, in turn,

$$m_{p0}(x) = \frac{l-z}{l}x \quad \text{on section } x \leq z \quad (7,31)$$

$$m_{p0}(x) = \frac{z}{l}(l-x) \quad x \geq z. \quad (7,32)$$

Under the effect of loading $y'' \cdot 1^t$ due to influence of the increment of force $H = 1^t$, the moment can be determined as per equations (7,14–7,18). For determination of $\eta_q(x)$, the moment is

$$m_{q0}(x) = y \cdot 1^t. \quad (7,33)$$

7,14. Cable-force influence-line

The cable-force influence-line can be produced as the vertical deflection of the stiffening truss under the effect of the relative unit dislocation brought about in the intersected cable.

The cable will be imagined to be intersected (Fig. 3) and the cable force to be increased from $H_w + H$ to $H_w + H + \Delta H$.

Under the effect of the increment of force H , the vertical deflection of stiffening truss can be determined on the basis of discussions under 7,13.

The relative deflection due to the increase of cable-force $\Delta H = 1^t$ between points of the cable intersected, is easy to see.

$$u = \frac{L_s}{E_c F_0} + \Sigma \int_0^l y'' \eta_q dx. \quad (7,34)$$

In conventional calculations, being $y'' = -\frac{8f}{l^2}$

$$u = \frac{L_s}{E_c F_0} - \Sigma \frac{8f}{l^2} \int \eta_q dx. \quad (7,35)$$

In the case of unit increment of cable-force ΔH , the relative deflection is u , thus, in the case of unit relative dislocation, the increment of cable-force ΔH is $\frac{1}{u}$.

Consequently, the influence-line (Fig. 3) is

$$\eta_H(x) = \frac{\eta_q(x)}{u}. \quad (7,36)$$

7,15. Loading of hangers

Hangers are loaded by distributed load, acting on the cable over the distance between two hangers. Stress on hangers is influenced by the dead load affecting only the cable by the live loads and by the change of temperature.

The distributed load stressing the cable

$$q + w = - (H_w + H) [y'' + \{\eta'(1 + y'^2)\}'].$$

The bulk of stress on hangers is due to the first component, while only a smaller percentage is represented by the other one. For this reason, no greater precision must be aimed at in determining the other component, and the effect due to change in $(1 + y'^2)$ may be disregarded.

$$q + w = - (H_w + H) y'' - (H_w + H) \eta''(1 + y'^2).$$

As

$$\eta'' = - \frac{M}{E J}$$

and

$$w = - H_w y'',$$

the increment of the distributed load

$$q = - H y'' + \frac{(H_w + H)(1 + y'^2)}{E J} M.$$

Moment $m(x)$ at z , to arise at constant cable-force $(H_w + H)$ under the effect of force $P = 1^t$ acting at x , as well as H are already known. Thus, the influence-line of distributed load with a view to 4,16

$$q(x) = - \eta_H y'' + c^2 m(x). \quad (7,37)$$

Values $y'' = 0$ and $c = 0$ being substituted, on the unsuspended part of stiffening truss, indeed,

$$q(x) = 0.$$

The load on one hanger,

$$s(x) = [- \eta_H y'' + c^2 m(x)] h, \quad (7,38)$$

where h is the distance between hangers.

7.2. Influence-line on the continuous stiffening truss

Influence-lines for bridges of two-hinged stiffening truss can be determined on the basis of (7,11—7,15).

In the case of a continuous stiffening truss, also the effect of continuity shall be observed.

Under the effect of force $P = 1^t$ acting at x , slope develops above supports of the two-hinged primary system of the stiffening truss and, thus, a relative slope arises between the end-points above the same support of the two neighbouring two-hinged stiffening trusses. This relative slope is undone by the moment arising at supports.

In the case of a two-hinged truss, the effects arising at place z have been separately determined. They are :

1. the stress on the stiffening truss under the effect of external force $P = 1^t$ acting at x without the effect of distributed load Hy'' due to the increment of cable-force H ;

2. the stress on the stiffening truss at z under the effect of distributed load $y'' \cdot 1^t$ due to increment of cable-force $H = 1^t$;

3. the value of the increment of cable-force H under the effect of force $P = 1^t$ acting at x . The two latter being multiplied and added to the first one, the actual effect is obtained.

In case of a continuous stiffening truss, the same analysis is to be executed on the continuous truss. Therefore, the effect of continuity is to be solved for all the three cases.

First internal forces due to support moment and deformation will be determined, then the continuous stiffening truss will be solved.

7.21. Effect of the support moment

On the left side of a two-hinged stiffening truss, external moment M will be acting. Under external loading like this, the moment can easily be determined. As differential equation (3,03) is homogeneous, moment

$$M = A C(x) + B S(x) . \quad (7,39)$$

At $x = 0$ $M(0) = M$ and, as $C(0) = 1$ tm, furthermore, $S(0) = 0$, so from 7,39

$$M = A \cdot 1 \text{ tm}$$

from which

$$A = \frac{M}{1 \text{ tm}} . \quad (7,40)$$

At $x = l$ $M = 0$, therefore, with a view to equations (7,39) and (7,40)

$$B = - \frac{M}{1 \text{ tm}} \frac{C(l)}{S(l)} . \quad (7,41)$$

With knowledge of the moment, slope and deflection can be determined with the aid of formulae under 5.

This calculation shall be executed on all spans.

In case the stiffening trusses in the side-spans are not suspended, the internal forces as well as the slope and the vertical deflection can be determined in the usual manner for unit moment arising at the support.

7.22. Solution of the continuous stiffening truss

Further on, calculation will be executed on a three-span stiffening truss which is symmetric in relation to the centre of the middle-span.

Under the effect of the unit positive moment acting on the left-side support of the middle-span — as a two-hinged truss —, the slope at the left-side support

$$\eta' = \mu_2 \quad (7.42)$$

at the right side support

$$\eta' = \nu_2. \quad (7.43)$$

In this way, under the effect of the unit negative moment acting at the right side support, the slope at the right and the left side support, respectively, is

$$\eta' = -\mu_2 \quad (7.44)$$

and

$$\eta' = -\nu_2. \quad (7.45)$$

Under the effect of the unit positive moment arising at the left side support of the right side span as a two-hinged truss, slope at the left side support is

$$\eta' = \mu_1. \quad (7.46)$$

Likewise, the slope under effect of the unit negative moment arising above the right side support of the first span,

$$\eta' = -\mu_1. \quad (7.47)$$

In a system consisting of two-hinged trusses, the stiffening truss in the left side span above support 1 will be loaded by external moment $-M_1$, the middle span above support 1 by $+M_1$, that in the second span above support 2 by $-M_2$, that in the third span above the second support by M_2 .

According to (7.42) and (7.43), slope at the right-side of the middle-span

$$\operatorname{tg} \alpha = M_1 \nu_2 - M_2 \mu_2. \quad (7.48)$$

The slope arising at the left side of the right side span

$$\operatorname{tg} \beta = M_2 \mu_1. \quad (7.49)$$

On account of continuity $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ and, thus

$$M_2 = M_1 \frac{\nu_2}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (7.50)$$

The slope at the left side of the middle-span

$$\operatorname{tg} \gamma = M_1 \mu_2 - M_2 \nu_2 = M_1 \left(\mu_2 - \frac{\nu_2^2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \quad (7,51)$$

The slope above the right side support of the left side span, according to (7,47)

$$\operatorname{tg} \delta = -M_1 \mu_1 \quad (7,52)$$

The moment influence line can be produced in a way too, that a unit relative slope is inserted at the place examined and, so, the figure of the vertical deflection arisen will be identical with influence line looked for.

In the case of a unit relative slope above support 1

$$\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \delta = 1$$

to say,

$$M_1 \left(\mu_2 - \frac{\nu_2^2}{\mu_1 + \mu_2} \right) + M_1 \mu_1 = 1$$

From this

$$M_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - \nu_2^2} \quad (7,53)$$

On the basis of (7,50), respectively,

$$M_2 = \frac{\nu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - \nu_2^2} \quad (7,54)$$

With knowledge of moments M_1 and M_2 , the influence-line of the left side moment (x measured from the left side support)

$$m_1(l_1 - x) = M_1 \eta(l_1 - x) \quad (7,55)$$

where $\eta(x)$ is the vertical deflection arising under the effect of unit moment acting at $x = l_1$. The subscript refers to the No of span. Because of symmetry $\eta_1(l_1 - x) = \eta_3(x)$.

The moment influence-line in the middle span, in much the same way, is

$$m_2(x) = M_1 \eta_2(x) + M_2 \eta_2(l_2 - x) \quad (7,56)$$

In the third span

$$m_3(x) = M_2 \eta_1(x) \quad (7,57)$$

7.23. Moment influence-line

The influence-line of support moment being known, the rest of influence lines can be produced easily.

The span under examination taken for a two-hinged one, the influence-line of cross-section z becomes known. This influence-line has to be increased by the effect due to the support moment depending on loading and on its place.

In the case of the moment influence-line, the effect of support moment at cross-section z is sought for.

The value of the moment arising at z examined, under the effect of external moment $M = 1$ acting at the left side of the middle-span, can be determined on the basis of formulae (7,39 - 7,41), and its value

$$m_m(z) = C(z) - \frac{C(l)}{S(l)} S(z) \tag{7,58}$$

Moment $m_1(l_1 - x)_1$ as under (7,55) shall be multiplied by this factor in order to obtain the effect of continuity on the left-side. As the moment influence-line of support 2 is a reflected image of that of support 1, the effect of continuity at the right-side support marked 2 is obtained if x is substituted by $(l_2 - x)$ and z by $(l_2 - z)$.

First, the value of the moment without the effect of distributed force $H y''$, arising at x under the effect of force $P = 1^t$, will be determined.

The moment influence line of the continuous truss can be produced as the amount of the three effects. They are: the effect on the two-hinged stiffening truss, and those raised by two support moments. Thus, by putting to use Equ. (7,55 - 7,58), the influence line for the middle-span (No 2)

$$m_{p2}^c(x) = m_{p2}(x) + m_{m2}(z) m_2(x) + m_{m2}(l_2 - z) m_2(l_2 - x) \tag{7,59}$$

for the left side span (No 1)

$$m_{p1}^c(l_1 - x) = m_{p1}(l_1 - x) + m_{m1}(l - z) m_1(l - x) \tag{7,60}$$

for the right side span (No 3)

$$m_{p3}^c(x) = m_{p1}(x) + m_{m1}(z) m_1(x). \tag{7,61}$$

Formulae (7,14), (7,20), account for the influence-line of the two hinged stiffening truss, arising under the effect of distributed load $y'' \cdot 1^t$.

Support moment M_q due to continuity can be determined by loading the corresponding section of the influence-line of the support moment by distributed load $y'' \cdot 1^t$.

On account of symmetry assumed, the two support moments M_q are equal to each other. With regard to (7,55) and (7,58), the moment arising at z in the middle-span

$$m_{q2}^c(z) = m_{q2}(z) + M_q [m_{m2}(z) + m_{m2}(l_2 - z)]. \tag{7,62}$$

In the right side span

$$m_{q3}^c(z) = m_{q1}(z) + M_q m_{m1}(z). \tag{7,63}$$

For the left side span, for z , $1 - z$ is to be substituted.

It is to be noted that the same value may be obtained through loading the influence-lines as under (7,55 - 7,57) by distributed load $y'' = 1^t$.

The influence-line of the cable-force, determined by Equ. (7,73), multiplied by the value, as factor, of the moment under (7,62 - 7,63) yields the influence-line $H y''$ which should be added to the influence line of force $P = 1^t$ as under (7,59 - 7,61).

Thus, moment influence line

$$m^c(x) = m_p^c(x) + \eta_H^c(x) m_q^c(z). \tag{7,64}$$

7.24. Resultant influence-line

The determination of the resultant influence-line is carried out in much the same way as that of the moment influence-line.

The influence-line on a two-hinged truss is produced by formula (7,30), under the effect of force $P = 1^t$.

The influence-line of the support moment can be determined on the basis of formulae (7,55 - 7,57).

Under the effect of unit support moment, and after differentiation adequately executed, the resultant on the basis of (7.39 — 7.41).

$$m'_m(x) = C'(x) - \frac{C(l)}{S(l)} S'(x). \quad (7,65)$$

Its value at z

$$m'_m(z) = C'(z) - \frac{C(l)}{S(l)} S'(z). \quad (7,66)$$

The influence-line of $P = 1^t$, without the effect of Hy'' , is for the middle span

$$v_{p2}^c(x) = v_{p2}(x) + m'_{m2}(z)m_2(x) + m'_{m2}(l-z)m_2(l-x). \quad (7,67)$$

For the extreme span

$$v_{p3}^c(x) = v_{p1}(x) + m'_{m1}(z)m_1(x). \quad (7,68)$$

Under the effect of distributed load $y'' 1^t$, the resultant at the middle-span

$$v_{q2}^c(z) = v_{q2}(z) + M_q [m'_{m2}(z) - m'_{m2}(l-z)]. \quad (7,69)$$

At the extreme span

$$v_{q3}^c(z) = v_{q1}(z) + M_q m'_{m1}(z). \quad (7,70)$$

The resultant influence-line, like the moment influence-line,

$$v^c(x) = v_p^c(x) + v_q^c(z)\eta_H(x). \quad (7,71)$$

7.25. Deflection influence-line

The deflection influence-line $\eta(x)$ of the two-hinged primary system of the stiffening truss is already known from force $P = 1^t$, without effect Hy'' , according to Equ. (7.31 — 7.32).

The value, to be determined according to (5.05 — 5.13), of the vertical deflection of point z under the effect of unit support moment ($M = 1^m$) as under (7.39 — 7.41), is $\eta_q^c(x)$.

The deflection influence-line of the continuous stiffening truss, in a manner similar to the previous ones,

$$\eta^c(x) = \eta_p^c(x) + \eta_H^c(x)\eta_q^c(z). \quad (7,72)$$

7.26. Cable-force influence-line

The influence-line of the cable-force will be determined as discussed in point 7.14.

The vertical deflection of the stiffening truss (7.72), under the effect of $H = 1^t$, is $\eta_q^c(x)$. The relative deflection on the cable imagined to be intersected, is μ^c . This value is correctly given by (7.35), but $\eta_q^c(x)$ should be substituted for $\eta_q(x)$.

The deflection influence-line

$$\eta_H^c(x) = \frac{\eta_q^c(x)}{\mu^c}. \quad (7,73)$$

7.27. Hanger influence-line

Formula (7.38) is valid for the hanger in this case, too. So

$$s^c(x) = [-\eta_H^c(x)y'' + c^2 m^c(x)]h. \quad (7,74)$$

7.3. *The effect of permanent loading*

Permanent loading taking into consideration e.g. the part of dead load taken by cable and stiffening truss together, is going on in the same way as in other structures calculated on the basis of the influence line ; i.e. the influence-lines are to be loaded by permanent load.

7.4. *The effect of temperature change*

The cable will be imagined to be intersected (Fig. 3).

The relative deflection to arise at the place of intersection under the effect of temperature change,

$$\Delta l = \omega t L_t. \quad (7,75)$$

The relative deflection, just here, due to unit cable-force increment, is u (or u' resp.). In the case of increment of cable-force H_t , the relative deflection

$$\Delta l = H u. \quad (7,76)$$

The cable not being intersected, there cannot arise any relative displacement, consequently the sum of deflections according to equations (7.75) and (7.76) is 0. Of this the increment of cable-force due to temperature change is

$$H_t = - \frac{\omega t L_t}{u}. \quad (7,77)$$

7.5. *Analysis by influence-lines*

With the knowledge of influence-lines, stresses and deformations can already be determined. Determining the moment of the stiffening truss for instance, can be performed as follows.

Having determined the moment influence line of cross-sections z under examination for cable-forces $(H_w + H_1)$, $(H_w + H_2)$,, $(H_w + H_n)$, assumed to be permanent, one can obtain the design moments $M_1, M_2, \dots M_n$ and the design load positions $h_1, h_2, \dots h_n$. It is to be noted that in the design moments is contained also the part of permanent load which is taken by cable and stiffening truss together (7.3 §).

By loading the cable-force influence-line by the design load positions $h_1, h_2, \dots h_n$, the cable-force increments $H_1^*, H_2^*, \dots H_n^*$ are obtained, inclusive also of the increase of dead load and of the effect of temperature change.

H^* and M , pertaining to the value of $(H_w + H) = 0$, are values according to the Elastic Theory.

On Fig. 4a, the increments of the aforesaid cable-forces H_1^* , H_2^* , ... H_n^* have been represented as functions of $(H_w + H_1)$, ... $(H_w + H_n)$. This refers to the case when the loading, under consideration, is decisive from the view-point of moments under the cable-force assumed. Of these the cable-

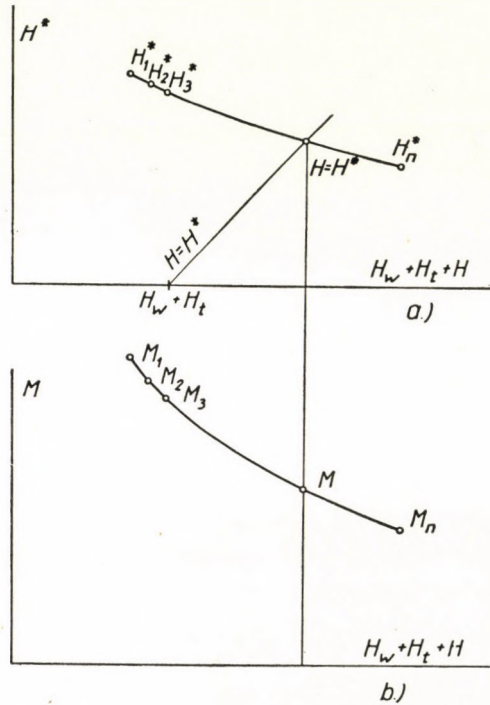


Fig. 4

force H_i is valid where $H_i = H_i^*$. This cable-force H_i is obtained if the straight line at 45° representing relation $H = H^*$, get sintersected by the line of the function of the cable-force H plot. Moment to be in force relates to $H^* = H$.

Moments $M_1 \dots M_n$ have been plotted as design moments on Figure 4b as functions of $(H_w + H)$.

In static calculations based on influence-lines, the influence-line is determined at values $(H_w + H)$ differently assumed, at intermediate sections values will be interpolated linearly. In case the values of H have been assumed densely enough, this procedure of calculation may be regarded as fairly accurate from the view-point of practical calculation. In bridges where the percentile change of the cable-force is greater, there is need for a great number of points to be determined. This means, however, a good deal of excess work, especially when the changes of the moment of inertia on the stiffening truss is taken into consideration.

On the basis of the above, it is reasonable to interpolate with the aid of a parabola of second degree.

This requires determination of effect in values of three cable-forces.

The relation between effect and cable-force is, however, not of second degree. Supposing this deviation to be of third degree (Fig. 5), the error in this case is

$$\Delta = g_1 (H - H_1)(H + H_1)(H - 0) = g_1 H^3 - g_1 H_1^2 H \tag{7.78}$$

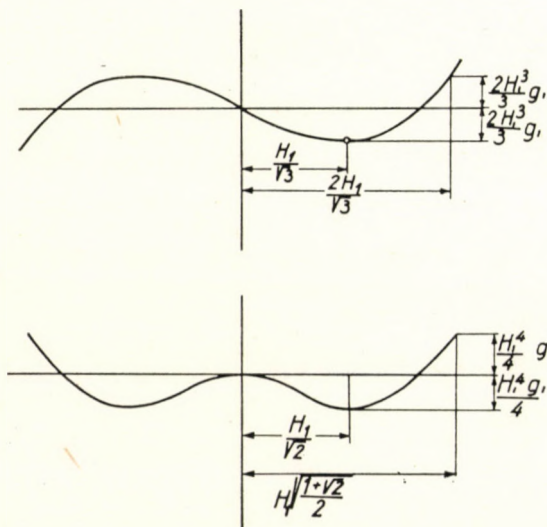


Fig. 5

where g_1 is constant. The place of the extreme value

$$0 = \frac{d\Delta}{dH} = 3 g_1 H^2 - g_1 H^2 \text{ from which } H = \pm \frac{H_1}{\sqrt{3}}$$

and the maximum error on section between $-H_1$, and $+H_1$, after value of H being substituted for (7.78),

$$\Delta = \pm \frac{2 H_1^3}{3 \sqrt{3}} g_1 .$$

The same error comes into being in the cable-force

$$H = 2 \frac{H_1}{\sqrt{3}} \sim 1,15 H_1 \tag{7.79}$$

too.

Supposing the error to be of fourth degree (Fig. 5), so the error

$$\Delta = g_2 (H - H_1)(H + H_1)(H - 0)^2 = g_2 H^4 - g_2 H_1^2 H^2$$

Determining, likewise, the minimum deviation at $H = \frac{H_1}{\sqrt{2}}$,

$$\Delta = \frac{H_1^4}{4} g_2.$$

Just so great is the error in the cable-force

$$H = H_1 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} \sim 1,1 H. \quad (7,80)$$

As $\frac{1}{1,15} \sim 0,87$ and $\frac{1}{1,1} \sim 0,91$ are near enough to each other, so for parabolic interrelations of both third and fourth degree it can safely be stated that the maximum error at the internal and external points should be equal if it were determined at the middle of the cable-force values that may come in question, and at points falling in with 0,9 of the distance measured from the middle toward the boundary points.

After this preliminary explanation, if the section of the cable-force that may be considered, is between $H_{\max} - H_{\min}$, so it is well worth to determine the influence-lines for the mean-value of cable-force

$$H_k = \frac{H_{\max} + H_{\min}}{2} \quad (7,81)$$

as well as for cable-forces

$$H_1 = H_k - 0,9 \frac{H_{\max} - H_{\min}}{2} \quad (7,82)$$

and

$$H_2 = H_k + 0,9 \frac{H_{\max} - H_{\min}}{2}. \quad (7,83)$$

It is to be noted that, as force H_i is to some extent dependent on the assumed cable-force ($H_w + H$) (namely, in equation (7.76) u is the function of the cable-force), the determination of the cable-force takes place by gradual approach, to say, with knowledge of the cable-force, the value of H will be determined by starting from corrected cable-force H_i .

Of course, the parabola and the intersection of the straight line can be determined by calculation or by the graphical method.

8. Example

The result of our investigations will be applied to a two-hinged suspension bridge only the middle part of which is suspended.

In this example, resort is made only to the steps which deviate from those applied in conventional calculations.

The middle-span of bridge, $l = 300$ m; the two side spans, 60 m each, are unsuspended

$$H_w = 3000 \text{ t.}$$

The inertia moment of the stiffening truss is variable, as indicated by Fig. 6. The span will be divided into 5 parts.

Inertia moment on parts 2, 3 and 4, is taken for constant, and the actual change of inertia moment, in conformity with the figure, on parts 1 and 5, is considered.

Parts 1 and 5. $x = 0-60$ m, or $x = 240-300$ m, as the unsuspended part, $y' = 0,25$.
 Parts 2 and 5. $x = 60-90$ m, or $x = 210-240$ m.

$$y'' = 3,10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$x = 60 \text{ m } y' = 0,25, x = 90 \text{ m, } y' = 0,16, 1 + y'^2_{mean} = 1,045433 \dots$$

$$I_2 = 0,51428 \text{ m}^4$$

Part 3. $x = 90-210$ m, $y'' = -2,66 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$.
 $x = 90 \text{ m, } y' = 0,16, x = 150 \text{ m, } y' = 0, 1 + y'^2_{mean} = 1,00085,$
 $J_3 = 0,41371 \text{ m}^4$.

In the calculation, value $H_w + H = 5000 \text{ t}$ is reckoned with (see formula 4,16).

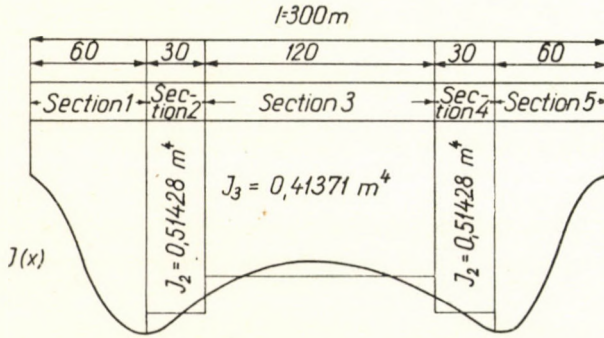


Fig. 6

$$c_2 = c_4 = \sqrt{\frac{5000 \cdot 1,04543}{2,1 \cdot 10^7 \cdot 0,514282}} = \sqrt{4 \cdot 84 \cdot 10^{-4}} = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{5000 \cdot 1,0085}{2,1 \cdot 10^7 \cdot 0,41371}} = \sqrt{5,76 \cdot 10^{-4}} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$$

Determination of auxiliary quantities

$$\frac{c_3 + c_2}{c_3} = \frac{2,4 + 2,2}{2,4} = 1,91667 \dots$$

$$\frac{c_3 - c_2}{c_3} = 0,083333$$

$$\frac{c_4 + c_3}{c_4} = 2,09091 \dots$$

$$\frac{c_4 - c_3}{c_4} = -0,090909 \dots$$

$$y_2'^2 - y_3'^2 = 0,045433 - 0,0085 = 0,036933$$

$$y_3'^2 - y_4'^2 = -0,036933$$

$$\frac{y_2'^2 - y_3'^2}{1 + y_2'^2} = \frac{0,036933}{1,045433} = 0,03533$$

$$\frac{y_3'^2 - y_4'^2}{1 + y_3'^2} = -\frac{0,036933}{1,0085} = -0,03662$$

$$V_0(x) = 0$$

It is to be noted that the effect of deformation of cable and of stiffening truss being different from each other on the unsuspended part (formulae 5.14 — 5.20), has been neglected. This neglect, under given circumstances, is not justified, for in the case of a reaction of 1 ton

$$\int_0^{60} \int \frac{S(x)}{EJ} dx dx = 0,672 \cdot 10^{-2}, \text{ thus}$$

$$P = (H_w + H) \frac{\int \frac{S(x)}{EJ} dx dx}{x_k} (1 + y_k'^2)^2 =$$

$$= 5000 \frac{0,672 \cdot 10^{-2}}{60} (1 + 0,25^2)^2 = 0,635 \text{ t.}$$

The necessary correction has not been, however, taken into consideration in the calculation for our example, in the interest of lucidity.

Determination of auxiliary function $S(x)$

On the basis of par. 4,4, $\alpha^s = 1$, $\beta^s = 0$. Thus, as

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1}{2,2 \cdot 10^{-2}} = 45,45 \dots m$$

by putting to use Equations (4,33) and (4,34) (values of $e^{c_2 x_2}$ and $e^{-c_2 x_2}$ from Table I).

$$a_2^s = \frac{x_2 + \frac{1}{c_2}}{2 e^{c_2 x_2}} = \frac{x_2 + \frac{1}{c_2}}{2 e^{1,32}} = \frac{60 + 45,45}{2 \cdot 3,7434} = 14,0854 \text{ tm}$$

$$b_2^s = \frac{x_2 - \frac{1}{c_2}}{2 e^{-c_2 x_2}} = \frac{60 - 45,45}{2 \cdot 0,26714} = 27,2244 \text{ tm.}$$

Determination, as per 30 m, of the value of the function, as well as the determination of constants on the boundary of the suspended part are indicated in table No I (see formulae 4,18 — 4,22).

On part 5 (formulae 4,35 — 4,36)

$$\alpha^s = 79,0942$$

$$\beta^s = 3479,707 - 79,0942 \times 240 = -15502,901.$$

Thus, on part 5

$$S(x) = 79,094 x - 15502,901$$

Determination of auxiliary function $U(x)$

Function $U(x)$ will be determined for distributed load $1^t y''$.

At the first section $q_1 = 0$

At the second section $q_2 = 1^t y'' = -3,10^{-3}$

At the third section $q_3 = 1^t y'' = -2,66 \cdot 10^{-3}$

Table II
Calculation of function $U(x)$

Section	x	e	ex	e^{ex}	e^{-ex}	$\frac{C_k+C_{k-1}}{C_k}$	$\frac{C_k-C_{k-1}}{C_k}$	$\frac{C_k+C_{k-1}}{C_k} a_{k-1} e^{C_{k-1}x_k}$	$\frac{C_k-C_{k-1}}{C_k} a_{k-1} e^{-C_{k-1}x_k}$	$\frac{C_k+C_{k-1}}{C_k} b_{k-1} e^{-C_{k-1}x_k}$	$\frac{C_k-C_{k-1}}{C_k} b_{k-1} e^{-C_{k-1}x_k}$	$V_0(x)$	$V_0(x)-V_k(x)$	$\frac{y_{k-1}^2 - y_k^2}{1+y_{k-1}^2}$	ΔV_k	$\frac{\Delta V_k}{C_k}$	$\frac{q_{k-1}}{C_{k-1}^2} - \frac{q_k}{C_k^2}$	Total of columns Nos. : 9, 12, 17, 18	$2e^{C_k x_k}$	a_k	Total of columns Nos. : 10, 11, -17, 18	$2e^{-C_k x_k}$	b_k	$a_k e^{C_k x_k}$	$b_k e^{-C_k x_k}$	$\frac{q_k}{C_k^2}$	$U(x)$	$a_k e^{C_k x_k} - b_k e^{-C_k x_k}$	V_k	$U'(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
																											0		0	
																											0		0	
																				0,827904				11,6013					0	
																								3,099176	3,099171	-6,19835	0,000003	0,000005	0	
																								5,99626	1,60179		1,39970	4,39447	0,096678	
								11,49285	0,49969	3,07010	0,13348	-0,1596	-0,256278		-0,0090543	-0,37726	-1,58029	9,66878		0,557529	2,36676		10,26126						0,092151	
																								4,83439	1,18338		1,39971	3,65101	0,087624	
																								9,93182	0,57602		5,88975	9,35580	0,224539	
																								19,84692	0,28038	-4,61806	15,50924	19,56654	0,469575	
																								41,92005	0,13647		37,43846	41,48358	0,995606	
																								86,12150	0,06643		81,56987	86,05507	2,06532	
								180,0723	-7,82931	0,138899	-0,006039	0,1596	-1,90572		0,069787	3,172136	1,58029	184,8187		0,910527	-9,28226		-471,047						2,10025	
																								92,41303	-4,64113		81,57355	97,05416	2,13519	
																								178,8002	-2,3988	-6,19835	170,2030	181,19895	3,98638	
																													3,98638	
																													3,98638	
																													3,98638	

Checking : $V_1(60) = 0 = V_2(60)$
 $V_3(90) + \Delta V_3 = 0,0966783 - 0,0090543 = 0,087624 = V_3(90)$
 $V_3(210) + \Delta V_4 = 2,06532 + 0,06979 = 2,13511 \sim 2,13519 = V_4(210)$
 $V_4(240) = 3,98638 = V_5(240)$

Nb.: Columns Nos. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15, 20 and 23 identical with those of Table I, are not filled in.

Table I
Calculation of function $S(x)$

Section	x	c	cx	ecx	e^{-cx}	$\frac{C_k+C_{k-1}}{C_k}$	$\frac{C_k-C_{k-1}}{C_k}$	$\frac{C_k+C_{k-1}}{C_k} a_{k-1} e^{C_{k-1}xk}$	$\frac{C_k-C_{k-1}}{C_k} a_{k-1} e^{C_{k-1}xk}$	$\frac{C_k+C_{k-1}}{C_k} b_{k-1} e^{-C_{k-1}xk}$	$\frac{C_k-C_{k-1}}{C_k} b_{k-1} e^{-C_{k-1}xk}$	$V_0(x)$	$V_0(x)-V_k(x)$	$\frac{y_{k-1}^2 - y_k^2}{1+y_{k-1}^2}$	ΔV_k	$\frac{\Delta V_k}{C_k}$	$\frac{q_{k-1}}{C_k^2} - \frac{q_k}{C_k^2}$	Total of columns Nos.: 9, 12, 17, 18	$2e^{C_k xk}$	a_k	Total of columns Nos.: 10, 11, 17, 18	$2e^{-C_k xk}$	b_k	$a_k e^{C_k xk}$	$b_k e^{-C_k xk}$	$\frac{q_k}{c_k^2}$	$S(x)$	$\frac{a_k e^{C_k xk} - b_k e^{-C_k xk}}{C_k}$	V_k	$S'(x)$				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31				
1	0																									0	0			1				
	30	0																								0	30			1				
	60																									0	60			1				
																			14,0854				27,2244											
2	60	$2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}$	1,32	3,7474	0,26714																										1			
	90		1,98	7,2427	0,13807																					52,72728	7,27272	0	60	45,45456	10			
						1,91667	0,08333	195,532	8,5014	7,2045	0,3132	0	-2,16166	0,03533	-0,076371	-3,1821	0	192,663	17,3422	11,1095	18,8880	0,23065	81,8904								2,12348			
3	90	$2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}$	2,16	8,6711	0,115325																													
	120		2,88	17,816	0,056135																													
	150		3,60	36,598	0,027324																													
	180		4,32	75,189	0,01330																													
	210		5,04	154,470	0,006474																													
						2,09091	-0,09091	3588,177	-156,0075	1,1085	-0,0482	0	-41,1733	-0,03662	1,50777	68,5348	0	3656,664	202,988	18,0142	-223,4338	0,019706	-11338,6									41,9272		
4	210	$2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}$	4,62	101,494	0,009853																													
	240		5,28	196,37	0,005092																													
5	240	0																								0	3479,707					79,0942		
	270																									0	5852,533					79,0942		
	300																									0	8225,359					79,0942		

Checking: $V_1(60) = 1,0 = V_2(6)$
 $V_2(90) + \Delta V_2 = 2,16166 - 0,07637 = 2,08529 \approx 2,08530 = V_3(90)$
 $V_3(210) + \Delta V_3 = 41,1733 + 1,5078 = 42,6811 = V_4(210)$
 $V_4(240) = 79,0942 = V_5(240)$

$$\frac{q_2}{c_2^2} = \frac{-3 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 84 \cdot 10^{-4}} = -6,19835 = \frac{q_4}{c_4^2}$$

$$\frac{q_3}{c_3^2} = -\frac{2 \cdot 66 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 76 \cdot 10^{-4}} = -4,61806$$

$$\frac{q_2}{c_2^2} - \frac{q_3}{c_3^2} = -1,58029$$

$$\frac{q_3}{c_3^2} - \frac{q_4}{c_4^2} = 1,58029$$

The values of function $V_0(x)$:

External load acting on the two-hinged truss:

a) the two extreme sections (sections 1 and 5), 60 m long each, are unloaded.

b) loading of the 120 m long middle section (section 3)

$$q_3 = 2,66 \cdot 10^{-3} \text{ t/m}$$

c) loading of the sections (sections 2 and 4) 30 m long each, between sections a, and b,

$$q_2 = -3 \cdot 10^{-3} \text{ t/m}$$

At $x = 0$, reaction from this $V_0(0) = -0,2496 \text{ t}$, at $x = 90 \text{ m}$, shear-force $V_0(90) = -0,1596 \text{ t}$, at $x = 210 \text{ m}$, shear-force $V_0(210) = 0,1596 \text{ t}$

According to formula (4.28),

$$\beta_1^U = \beta_1^U = 0$$

from formula (4.29), as $p = 0$,

$$a_2^U = -\frac{1}{2 e^{c_2 x_2}} \frac{q_2}{c_2^2} = \frac{6,19835}{2,37434} = 0,827904$$

$$b_2^U = -\frac{1}{2 e^{-c_2 x_2}} \frac{q_2}{c_2^2} = \frac{6,19835}{2 \cdot 0,26714} = 11,6013$$

Determination, as per 30 m, of the value of the function as well as the determination of constants on the section boundaries of the suspended part are indicated in Table II.

On section 5.

$$\alpha_5^U = U'(x) = 3,98638$$

$$\beta_5^U = U(x) - xU'(x) = 170,2030 - 240 \cdot 3,98638 = -786,52812$$

Thus, on section 5.

$$U(x) = 3,98638 x - 786,52812$$

For example, the moment influence line of cross-section $z = 120 \text{ m}$ will be determined

Influence-line m_p

With the knowledge of auxiliary functions $S(x)$ and $U(x)$, the influence line m_p may be determined with the aid of formulae (7.05) and (7.06).

The auxiliary quantities have been determined in Table III. Owing to the Rode's effect, value $S(x)S'(l-x) + S'(x)S(l-x)$ is not constant.

Calculation for ordinates of influence-line m_p , relating to $z = 120 \text{ m}$, is contained in Table IV.

Table III

$$S(x) S'(l-x) + S'(x) S(l-x)$$

x	l-x	S(x)	S'(x)	S(x) S'(l-x)	$D =$	$\frac{S(x)}{D}$
					$S(x) S'(l-x) + S'(x) S(l-x)$	
1	2	3	4	5	6	7
0	300	0	1	0	8225,36	0
30	270	30	1	2372,83	8225,36	0,0036473
60	240	60	1	4745,65	8225,36	0,0072945
90	210	105,775	2,12348	4434,83	8080,02	0,013091
120	180	202,50	4,6392	4054,31	7934,54	0,025521
150	150	408,80	9,7037	3966,87	7933,74	0,051527
180	120	836,40	20,0213	3880,23	7934,54	0,105413
210	90	1716,61	41,927	3645,19	8080,02	0,21245
240	60	3479,71	79,094	3479,71	8225,36	0,42305
270	30	5852,53	79,094	5852,53	8225,36	0,71152
300	0	8225,36	79,094	8225,36	8225,36	1,0

Table IV

$$m_p(x) \quad z = 120$$

$$S(z) = 202,50$$

$$S(l-z) = 836,40$$

	x	$\frac{S(x)}{D}$	$\frac{m_p}{D} = \frac{S(x)}{D} S(l-z)$	$\frac{m_p}{D} = \frac{S(l-x)}{D} S(z)$
1	2	3	4	5
$x \leq z$	0	0	0	
	30	0,0036473	3,05056	
	60	0,072945	6,10113	
	90	0,013091	10,9492	
	120	0,025521	21,3460	21,3461
$x \geq z$	150	0,051527		10,4342
	180	0,105413		5,16806
	210	0,21245		2,65091
	240	0,42305		1,47714
	270	0,71152		0,73857
	300	1,0		0

Table V

$$m_q(z) \quad \frac{U(l)}{S(l)} = \frac{409,386}{8225,36} = 0,0497712$$

z	S(z)	$-\frac{U(l)}{S(l)} S(z)$	U(z)	m_q
1				
0	0	0	0	0
30	30	-1,49314	0	-1,49314
60	60	-2,98627	0	-2,98627
90	105,775	-5,26455	1,39970	-3,86485
120	202,50	-10,07867	5,88975	-4,18892
150	408,80	-20,34647	15,50924	-4,83723

Determination of moment m_q

Calculation in accordance with formula (7.16) has been carried out in Table V. Span and its loading being symmetric, only half the bridge is covered by calculation.

$$\frac{U(l)}{S(l)} = \frac{409 \cdot 3859}{8225,359} = 0,0497712$$

Thus, reaction $R = -0,0497712$ t.

Determination of deflection η_q

Deflection being symmetric in relation to $x = 150$ m, calculation made covers half the bridge only. After the result of the moment, arising on the two-hinged truss under the influence of external loading q , has been determined (see Table VI) the tangent for $x_2 = 60$ m, formula (5.05) is

$$\eta'(60) = \frac{V_0(60) - V(60)}{(H_w + H)(1 + \gamma_2'^2)} = \frac{-0,2496 + 0,049771}{5227,17} = -3,8229 \cdot 10^{-5}$$

Table VI

$\eta_q(x)$

x	q	$V_0(x)$	$M_0(x)$	$m_q(x)$	$M_0(x) - m_q(x)$	$1 + \gamma_k'^2$
1	2	3	4	5	6	7
0	0	-0,2496	0	0	0	1,045433
30	0	-0,2496	-7,488	-1,49314	-5,99486	
60	$-3 \cdot 10^{-3}$	-0,2496	-14,976	-2,98627	-11,98973	
90		-0,1596	-21,114	-3,86485	-17,24915	
120	$-2,66 \cdot 10^{-3}$	-0,0798	-24,705	-4,18892	-20,51608	1,0085
150		0	-25,902	-4,83723	-21,06477	

x	$\frac{(H+H_w)}{(1+\gamma_k'^2)}$	$\frac{M_0(x) - m_q(x)}{(H_w + H)(1 + \gamma_k'^2)}$	$\gamma x - \int_0^x \frac{M}{EJ} dx$	$\Delta \eta$	$\eta_q(x)$
1	8	9	10		
0		0	0		0
30			$-1,5134 \cdot 10^{-3}$ $-2,7969 \cdot 10^{-3}$		$-1,5134 \cdot 10^{-3}$
60	5227,17	$-2,2937 \cdot 10^{-3}$ $-3,2999 \cdot 10^{-3}$		$-0,5032 \cdot 10^{-3}$	$-2,7969 \cdot 10^{-3}$
90		$-3,4207 \cdot 10^{-3}$			$-3,8031 \cdot 10^{-3}$
120	5042,50	$-4,0686 \cdot 10^{-3}$		$-0,3824 \cdot 10^{-3}$	$-4,4510 \cdot 10^{-3}$
150		$-4,1774 \cdot 10^{-3}$			$-4,5598 \cdot 10^{-3}$

On the unsuspended part, in the case of reaction R

$$M_0(x) = R \cdot x$$

$$\int_0^{30} \frac{Rx}{EJ} dx = 0,9810^{-4} R$$

$$\int_0^{60} \frac{Rx}{EJ} dx = 2,8010^{-4} R = - 1,396 \cdot 10^{-5}$$

$$\int_0^{30} \int \frac{Rx}{EJ} dx dx = 10,5 \cdot 10^{-4} R = - 5,2260 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

$$\int_0^{60} \int \frac{Rx}{EJ} dx dx = 67,2 \cdot 10^{-4} R = - 3,3446 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

On the basis of formula (5.07)

$$\gamma = \eta'(60) + \int_0^{60} \frac{Rx}{EJ} dx = - 3,8229 \cdot 10^{-5} - 1,3960 \cdot 10^{-5} = - 5,2189 \cdot 10^{-5}$$

According to formula (5.12)

$$\begin{aligned} \eta_2(60) &= - \int_0^{60} \int \frac{Rx}{EJ} dx dx + 60 \gamma = 3,3446 \cdot 10^{-4} - 5,2189 \cdot 60 \cdot 10^{-5} = \\ &= 3,3446 \cdot 10^{-4} - 31,3134 \cdot 10^{-4} = - 27,9688 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

$$\eta_2(30) = - \int_0^{30} \int \frac{Rx}{EJ} dx dx + 30 \gamma = 0,5226 \cdot 10^{-4} - 15,6567 = - 15,1341 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

The values of deflection regarding the other point have been determined in Table VI.

Horizontal deflection u

With due regard to formula (7,34), integrated value of $\int_0^{\eta_q(x)} y'' dx$ has been determined in Table VII. and

$$\frac{L_s}{E_c F} = 2,883 \cdot 10^{-4}.$$

Thus,

$$u = 2,883 \cdot 10^{-4} + 19,7533 \cdot 10^{-4} = 22,636 \cdot 10^{-4}.$$

The cable-force influence-line

Calculation based on formula (7,36) has been made in Table VII.

Influence-line m_{qH}

Calculation based on formula (7,16) is contained in Table VIII.

Table VII

$\eta_H(x)$

x	y''	$\eta_q(x)$	$y'' \eta_q(x)$	$\frac{\eta_H^{(x)} = \eta_q(x)}{\mu}$
1	2	3	4	5
0		0		0
30		$-1,5134 \cdot 10^{-3}$		0,66858
60		$-2,7969 \cdot 10^{-3}$	$8,3907 \cdot 10^{-6}$	1,2356
90	$-3 \cdot 10^{-3}$	$-3,8031 \cdot 10^{-3}$	$11,4093 \cdot 10^{-6}$ $10,1162 \cdot 10^{-6}$	1,6801
120	$2 \cdot 66 \cdot 10^{-3}$	$-4,4510 \cdot 10^{-3}$	$11,8997 \cdot 10^{-6}$	1,9663
150		$-4,5598 \cdot 10^{-3}$	$12,1291 \cdot 10^{-6}$	2,0144

$$\int_0^{300} y'' \eta_q(x) dx = 30(8,3907 + 11,4093 + 10,1162 + 11,8997 + 11,8997 + 12,1291)10^{-6} = 30 \cdot 65,8447 \cdot 10^{-6} = 1,9753 \cdot 10^{-3}$$

Table VIII

$m(x)$

$z = 120, m_q(z) = m_q(60) = -4,18892$

x	$\eta_H(x)$	$\eta_H(x)m_q(z)$	$m_p(x)$	$m(x)$
1	2	3	4	5
0	0	0	0	0
30	0,66858	-2,8006	3,0506	0,2500
60	1,2356	-5,1758	6,1011	0,9253
90	1,6801	-7,0378	10,9492	3,9114
120	1,9663	-8,2367	21,3460	13,1093
150	2,0144	-8,4382	10,4342	1,9960
180		-8,2367	5,1681	-3,0686
210		-7,0378	2,6509	-4,3869
240		-5,1758	1,4771	-3,6987
270		-2,8006	0,7386	-2,0620
300		0	0	0

The moment influence-line

Calculation is indicated in table VIII (see formula 7,21).

The values of cable-force and bending moment-influence lines are seen on Fig. 7.

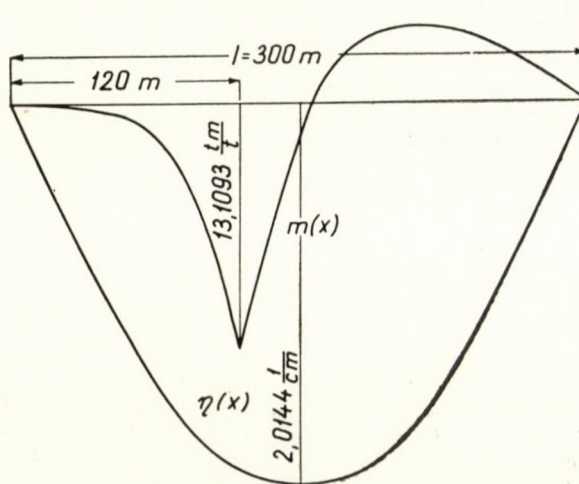


Fig. 7

REFERENCES

- RODE : New Deflection Theory, 1930.
 STEINMANN : A Generalized Deflection Theory for Suspension Bridges, Transact. ASCE, 1935.
 ASPLUND : On the Deflection Theory of Suspension Bridges, 1943.
 SELBERG : Design of Suspension Bridges, 1946.
 PEERY : An Influence-Line Analysis for Suspension Bridge, ASCE, Proc. 1954.

SUMMARY

A practical method has been worked out by the present study for the calculation of suspension bridges, which renders possible to consider the change of inertia moment of the stiffening truss, furthermore, the so-called Rode's effect, the uneven distribution of dead load, as well as the fact that the part of stiffening truss next to the support is unsuspended. A method for taking into account the combined effect mentioned above, has not yet been treated in literature.

This rather complicated way of calculation is performed by dividing the linear differential equation of second order with variable coefficients, serving for the purpose of solution, into sections, where the coefficients within each section may be considered to be constant. The solution of equation systems with many unknowns owing to boundary and connection conditions, is simplified, in turn, by handling boundary and connection conditions separated. Thereby, there is need only for solving equation systems consisting of two equations with two unknowns.

In the second part of the study, the system for solution is extended to calculation by influence-lines and, finally, its application is demonstrated by an example.

PRAKTISCHE LÖSUNG DER BERECHNUNG EINER HÄNGEBRÜCKE
 MIT VERSTEIFUNGSBALKEN VON VERÄNDERLICHEM INERTIEMOMENT
 UND IHRE ANWENDUNG BEI DER BERECHNUNG MITTELS EINFLUSSLINIEN

J. SZIDAROVSKY

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit entwickelt eine praktische Methode zur Berechnung von Hängebrücken. Die Methode ermöglicht es, die Änderung des Inertiomentes des Versteifungsbalkens, sowie die sog. Rode-sche Wirkung, die ungleiche Verteilung des Eigengewichtes zu berücksichtigen und gleichzeitig die Wirkung des Umstandes zu ermitteln, dass der Versteifungsbalken in unmittelbarer Nähe der Auflagerung nicht aufgehängt ist. Eine Methode, welche die obigen Faktoren berücksichtigt, ist in der Literatur noch nicht veröffentlicht worden.

Der Verfasser löst diese komplizierte Berechnungsaufgabe, indem er die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten in Intervalle aufteilt, innerhalb welcher die Koeffizienten durch Konstanten ersetzt werden können. Das von den Anschluss- und Randbedingungen gelieferte Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten wird durch die gesonderte Behandlung der Anschluss- und Randbedingungen vereinfacht, wodurch nur Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten gelöst werden müssen.

Der zweite Teil der Arbeit erstreckt die Methode auf die Berechnung mittels Einflusslinien und zeigt ihre Anwendung an Hand eines Beispiels.

SOLUTION PRATIQUE POUR LE CALCUL D'UN PONT SUSPENDU À POUTRE
DE RAIDISSEMENT ET MOMENT D'INERTIE VARIABLE ET SON APPLICATION
AU CALCUL PAR LIGNES D'INFLUENCE

J. SZIDAROVSKY

RÉSUMÉ

L'auteur développe une méthode pratique pour le calcul de ponts suspendus, permettant de prendre en considération la variation du moment d'inertie de la poutre de raidissement, de même que l'effet dit de Rode, la répartition inégale du poids propre, ainsi que de déterminer l'effet résultant du fait que la poutre de raidissement n'est pas suspendue dans le voisinage immédiat de l'appui. Une méthode semblable, tenant compte de ces facteurs n'a pas été publiée dans la littérature.

L'auteur résoud le calcul compliqué de façon à diviser l'équation différentielle de deuxième ordre au coefficient variable en des sections à l'intérieur desquelles les coefficients peuvent être remplacés par des constantes. Il simplifie le système d'équations fourni par les conditions aux liaisons et au contour en traitant séparément les unes et les autres, n'ayant ainsi à résoudre que des systèmes d'équations à deux inconnues.

La deuxième partie de l'étude étend la méthode au calcul par des lignes d'influence et illustre son application par un exemple.

ПРАКТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВИСЯЧЕГО МОСТА
С ПЕРЕМЕННЫМ МОМЕНТОМ ИНЕРЦИИ
И ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТОВ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

Я. СИДАРОВСКИ

РЕЗЮМЕ

В данной работе дается практический метод расчета висячих мостов, который позволяет учитывать изменение момента инерции распорной балки, далее учет т. н. эффекта Рода, учета неравномерного распределения собственного веса, а также определить эффект, происходящий от того, что распорная балка не подвешена в непосредственной близости к опоре. Такой метод, который учитывает вышесказанное, еще не рассматривался в литературе.

Сложная математическая задача решается таким образом, что дифференциальное уравнение второй степени переменного взаимодействия разбивается на такие участки, в пределах которых коэффициенты можно заменить постоянными. Система уравнений с многими известными, которая происходит от условий соединений и окрестных условий, упрощается с тем, что условия соединений и окрестные условия трактуются отдельно, и поэтому необходимо решать системы уравнений, содержащие только по две неизвестных.

Вторая часть работы распространяет предлагаемую методику для вычисления с помощью линий влияния; применение методики демонстрируется на одном примере.

THE GENERALIZATION OF SOME RELATIONS OF THE FOUR-TERMINAL THEORY BY MEANS OF HYPERMATRICES

P. BAJCSAY

DEPARTMENT FOR MATHEMATICS V., TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

and

V. LOVASS-NAGY

DEPARTMENT FOR MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BUILDING SCIENCES AND COMMUNICATIONS, BUDAPEST

[Manuscript received 4th August, 1956]

I. Introduction

It is known that, with the aid of the matrix calculus, simple and clear relations between the voltages and current-intensities of four-terminal networks can be set up. The matrix calculus offers likewise simple and clear formulae in respect of the voltages and currents of cascade-connected quadripole structures [1, 4]. It is also known that a system of two parallel lines can be approximately replaced by a cascaded structure of four-terminals, and that, with the aid of the limiting process, from the approximate relations thus obtained it is possible to produce certain particular solutions of the so-called equation of telegraphy [1, 4, 5].

By utilizing some recent results of the matrix theory in regard to the spectral decomposition of hypermatrices composed of commutable blocks [6], the authors propose to set up in the present paper certain relations describing the voltages and currents of multipoles that are cascade-connected and have an arbitrary number of phases; they also wish to demonstrate how, with the aid of the limiting process, it is possible to derive from such relations certain particular solutions of the equation of telegraphy regarding multiphase transmission systems.

$2(m + 1)$ -poles, constructed as per Fig. 1, will be analyzed in the following. Each of the $2(m + 1)$ -poles in question consists of a "zero-phase" and, further, of m -"phases", all of the latter being constructed according to the same pattern from elements with the same electric constant and having a cyclically symmetrical spacial arrangement. By the cascade connection of such $2(m + 1)$ -poles (v. Fig. 2) it is possible to construct a proximate model of any m -phase cyclically symmetrical transmission system provided with a neutral line.

It will be demonstrated below that it is possible to reduce the relations representing the stationary voltages and currents of $2(m + 1)$ -poles constructed according to Fig. 1, as also the systems obtained by their cascade-connection, to the well-known formulae which represent four-terminal networks composed of

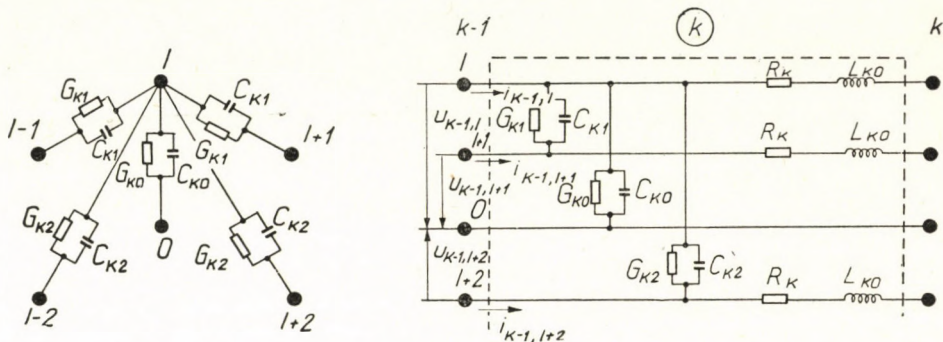


Fig. 1

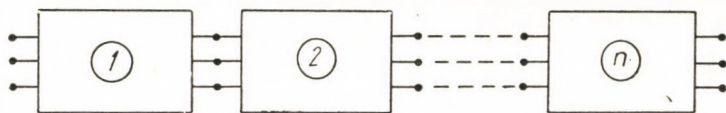


Fig. 2

one of the phases and the zero phase and the formulae of systems produced by a cascade connection of such quadripole structures, while the relations for the m -phase transmission system obtained by the limiting process from the formulae deduced in respect of a system of cascade-connected $2(m + 1)$ -poles can be reduced to the known, analogously calculated relations representing monophasic transmission lines.

II. Notations

$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$... square matrix composed of the scalar elements a_{ij} ;

$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}$... square hypermatrix composed of the blocks \mathbf{A}_{ij} ;

\mathbf{A}^{-1} - - - - - inverse of \mathbf{A} ;

\mathbf{A}^* - - - - - the conjugate transpose of \mathbf{A} ;

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}$ - - - - - column matrix;

$\mathbf{b}^* = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ — — — — — row matrix;

$\mathbf{A} \cdot \times \mathbf{B} = [\mathbf{A}b_{ij}]$; $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ — — — — — } direct products;

$\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{B} = [a_{ij} \mathbf{B}]$; $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ — — — — — }

$\langle d_i \rangle = \langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ — — — — — diagonal matrix;

$\mathbf{E}_n = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$ — — — — — unit matrix of the n th order;

$\mathbf{C} (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ — — — — — cyclic matrix of the n th order.

Let us further denote the electric constants, voltages and current intensities of a system of n cascade-connected $2(m+1)$ -poles as follows:

$R_k \dots$ ohmic resistance of a phase of the k th $2(m+1)$ -pole;

$L_{k0} \dots$ self inductance of a phase of the k th $2(m+1)$ -pole;

$L_{k\nu} \dots$ mutual inductance between the l th and $(l \pm \nu)$ th phases of the k th $2(m+1)$ -pole;

$C_{k0} \dots$ capacitance between a phase of the k th $2(m+1)$ -pole and the zero phase;

$C_{k\nu} \dots$ capacitance between the l th and $(l \pm \nu)$ th phases of the k th $2(m+1)$ -pole;

$G_{k0} \dots$ leakance between a phase of the k th $2(m+1)$ -pole and the zero phase;

$G_{k\nu} \dots$ leakance between the l th and $(l \pm \nu)$ th phases of the k th $2(m+1)$ -pole;

$u_{kl} \dots$ voltage difference between the l th phase and the zero phase on the terminal connecting the k th and $(k+1)$ th $2(m+1)$ -poles;

$i_{kl} \dots$ intensity of current flowing from the l th phase of the k th $2(m+1)$ -pole to the l th phase of the $(k+1)$ th $2(m+1)$ -pole.

These constants, voltages and current intensities can be compounded in the following square and column matrices:

$$\mathbf{R}_k = \langle R_k, R_k, \dots, R_k \rangle = R_k \cdot \mathbf{E}_m;$$

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{C} (L_{k0}, L_{k1}, \dots, L_{k,m-1});$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{C} \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} C_{k\nu}, -C_{k1}, \dots, -C_{k,m-1} \right);$$

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{C} \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} G_{k\nu}, -G_{k1}, \dots, -G_{k,m-1} \right);$$

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ \vdots \\ u_{km} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_k = \begin{bmatrix} i_{k1} \\ i_{k2} \\ \vdots \\ i_{km} \end{bmatrix}.$$

Further:

$\lambda_{k\nu} \dots$ ν -th eigenvalue of the \mathbf{L}_k matrix;

$\kappa_{k\nu} \dots$ ν -th eigenvalue of the \mathbf{K}_k matrix;

$\gamma_{k\nu} \dots$ ν -th eigenvalue of the \mathbf{G}_k matrix.

III. Some matrix relations used for the solution of the electrotechnical problems raised

a) Canonical representation of the analytic function of symmetrical square matrices of the 2nd order

The roots of the characteristic equation of the matrix

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

composed of arbitrary scalar elements a , b and c , are obviously

$$\mu_1 = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}; \quad \mu_2 = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Let us use the short notation $\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2 = d$. If, relying on the identity $\left(\frac{c-a}{2\sqrt{d}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{d}}\right)^2 = 1$, we introduce the notations $\frac{c-a}{2\sqrt{d}} = \cos 2\varphi$ and $\frac{b}{\sqrt{d}} = \sin 2\varphi$, we can obviously represent the canonical decomposition of the \mathbf{M} matrix as

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mu_1 \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} [\cos \varphi, -\sin \varphi] + \mu_2 \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} [\sin \varphi, \cos \varphi] = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Thus, if $f(z)$ expresses an arbitrary analytic function of the variable z , we can write the canonical form of the $f(\mathbf{M})$ matrix function as follows:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{M}) &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\mu_1) & 0 \\ 0 & f(\mu_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi \cdot f(\mu_1) + \sin^2 \varphi \cdot f(\mu_2) & -\cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \{f(\mu_1) - f(\mu_2)\} \\ -\cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \{f(\mu_1) - f(\mu_2)\} & \sin^2 \varphi \cdot f(\mu_1) + \cos^2 \varphi \cdot f(\mu_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hence, by utilizing well-known trigonometric identities, we have

$$f(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \left\{ (f(\mu_1) + f(\mu_2)) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{f(\mu_1) - f(\mu_2)}{2\sqrt{d}} \begin{bmatrix} c-a & -2b \\ -2b & a-c \end{bmatrix} \right\}. \quad (1)$$

b) *Representation of the analytic function of hypermatrices composed of cyclic blocks, by means of direct products*

Supposing all blocks of the hypermatrix

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}$$

of the $2m$ -th order, composed exclusively of square blocks of the m -th order, to be cyclic, any

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{C}(q_{0,ij}, q_{1,ij}, \dots, q_{m-1,ij})$$

block can be expressed (v., for instance, [7] p. 452) in the canonical form

$$\mathbf{Q}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \varrho_{\nu,ij} \mathbf{w}_{\nu} \mathbf{w}_{\nu}^*,$$

where

$$\varrho_{\nu,ij} = \sum_{\sigma=0}^{m-1} q_{\sigma,ij} \omega_{\nu}^{\sigma} \quad \text{and} \quad \mathbf{w}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_{\nu} \\ \vdots \\ \omega_{\nu}^{m-1} \end{bmatrix}; \quad \omega_{\nu} = e^{j \frac{2\pi\nu}{m}}.$$

It is evident that, by utilizing the above canonical representation of the cyclic blocks, the hypermatrix \mathbf{Q} can be written as the sum of direct products in the following form :

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \begin{bmatrix} \varrho_{\nu,11} & \varrho_{\nu,12} \\ \varrho_{\nu,21} & \varrho_{\nu,22} \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{w}_{\nu} \mathbf{w}_{\nu}^*.$$

Moreover, since the multiplication of two direct products can be performed in the following form : $(\mathbf{U}_1 \times \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{U}_2 \times \cdot \mathbf{V}_2) = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \times \cdot \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2$ (provided that $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ and $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ are conformable in the given order) and

$$\frac{1}{m} \mathbf{w}_i^* \mathbf{w}_j = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

any $f(\mathbf{Q})$ analytic function of the hypermatrix \mathbf{Q} can be expressed as the sum of direct products in the following manner :

$$f(\mathbf{Q}) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} f \left\{ \begin{bmatrix} \varrho_{\nu,11} & \varrho_{\nu,12} \\ \varrho_{\nu,21} & \varrho_{\nu,22} \end{bmatrix} \right\} \times \cdot \mathbf{w}_{\nu} \mathbf{w}_{\nu}^*. \quad (2)$$

IV. Matrix equation of a system of cascade-connected $2(m + 1)$ -poles

Let us take n pieces of cyclically symmetrical $2(m + 1)$ -poles, each built up from ohmic resistances, induction coils and condensers as shown in Fig. 1. Let us further connect them in a cascaded structure and suppose that all $2(m + 1)$ -poles are inductively and capacitively isolated from one another. It follows from Kirchhoff's so-called "second law" [8] that the stationary and transient processes of such a system can be represented by the following linear inhomogeneous simultaneous differential equations of constant coefficient :

$$\begin{aligned}
 u_{kl} - u_{k-1,l} &= R_k i_{kl} + \sum_{\nu=0}^{m-1} L_{k\nu} D i_{k,\nu+1}; \\
 i_{kl} - i_{k-1,l} &= - \sum_{\nu=0}^{l-1} G_{k\nu} u_{k-1,\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{m-1} G_{k\nu} u_{k-1,l} - \sum_{\nu=l+1}^{m-1} G_{k\nu} u_{k-1,\nu+1} - \\
 &- \sum_{\nu=0}^{l-1} C_{k\nu} D u_{k-1,\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{m-1} C_{k\nu} D u_{k-1,l} - \sum_{\nu=l+1}^{m-1} C_{k\nu} D u_{k-1,\nu+1}, \quad (3a, 3b)
 \end{aligned}$$

where $D = \frac{d}{dt}$ (see, for instance, [9] pp 46 and 156) and $k = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, m$.

The system of simultaneous equations under (3a) and (3b) can be written in a simpler form by condensing the resistances, inductances, capacitances and leakances which belong to the same $2(m + 1)$ -pole, further the currents flowing through those terminals of the same $2(m + 1)$ -pole which bear the same serial number, and, finally, the voltages on the terminals of the same serial number, into a quadratic matrix of the m -th order and into column matrices composed of m elements.

After a suitable arrangement of the matrix equations thus obtained, we have :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_k - (\mathbf{R}_k + D\mathbf{L}_k) \mathbf{i}_k &= \mathbf{u}_{k-1}; \\
 \mathbf{i}_k &= (\mathbf{G}_k + D\mathbf{K}_k) \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{i}_{k-1}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4a, 4b)
 \end{aligned}$$

If we introduce the notations

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & -(\mathbf{R}_k + D\mathbf{L}_k) \\ 0 & \mathbf{E}_m \end{bmatrix}; \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 \\ \mathbf{G}_k + D\mathbf{K}_k & \mathbf{E}_m \end{bmatrix}; \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{i}_k \end{bmatrix}$$

it is possible to represent the simultaneous equations (4a) and (4b) as follows :

$$\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{x}_{k-1}; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (5)$$

whence :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k \mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{X}_k \mathbf{x}_{k-1}, \quad (6)$$

where, in consideration of (2), it is obvious that

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &= \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m + (\mathbf{R}_k + D \mathbf{L}_k) (\mathbf{G}_k + D \mathbf{K}_k) & \mathbf{R}_k + D \mathbf{L}_k \\ \mathbf{G}_k + D \mathbf{K}_k & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} \begin{bmatrix} 1 + (\mathbf{R}_k + D \lambda_{kv}) (\gamma_{kv} + D \varkappa_{kv}) & \mathbf{R}_k + D \lambda_{kv} \\ \gamma_{kv} + D \varkappa_{kv} & 1 \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{w}_v \mathbf{w}_v^*. \end{aligned} \quad (7)$$

It is clear from the above that, in a system composed of cascade-connected $2(m+1)$ -poles, the voltages (\mathbf{u}_n) and the currents (\mathbf{i}_n) as produced at the terminals bearing the index n can, with the aid of the voltages (\mathbf{u}_0) and currents (\mathbf{i}_0) as at appearing the terminals bearing the index 0, be represented as

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{i}_n \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^n \mathbf{X}_k \mathbf{x}_0 = \prod_{k=1}^n \mathbf{X}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{i}_0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

It will be found convenient to produce the column matrices \mathbf{u}_k and \mathbf{i}_k in the form

$$\mathbf{u}_k = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{v=0}^{m-1} u_{kv} \mathbf{w}_v \quad (9a)$$

and

$$\mathbf{i}_k = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{v=0}^{m-1} i_{kv} \mathbf{w}_v, \quad (9b)$$

where

$$u_{kv} = \sqrt{m} \mathbf{w}_v^* \mathbf{u}_k; \quad i_{kv} = \sqrt{m} \mathbf{w}_v^* \mathbf{i}_k.$$

It is evident that in this case

$$\mathbf{x}_k = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{v=0}^{m-1} \begin{bmatrix} u_{kv} \\ i_{kv} \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{w}_v. \quad (10)$$

Let us add that the representation of the voltages and currents as under (9a) and (9b) is just a generalization of what is known in the theory of three-phase circuits as the "method of symmetrical components" [10, 11].

By utilizing equations (7) and (10), we obtain from equation (8) the following relation in respect of the generalized symmetrical components of the voltages and currents :

$$\begin{bmatrix} u_{nlv} \\ i_{nlv} \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^n \begin{bmatrix} 1 + (R_k + D \lambda_{kv}) (\gamma_{kv} + D \varkappa_{kv}) & R_k + D \lambda_{kv} \\ \gamma_{kv} + D \varkappa_{kv} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0lv} \\ i_{0lv} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Therefore, in the special case of identical cascade-connected $2(m+1)$ -poles series, i.e. when

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = \dots = R_n = R; \\ L_{1v} &= L_{2v} = \dots = L_{nv} = L_v; \\ C_{1v} &= C_{2v} = \dots = C_{nv} = C_v; \\ G_{1v} &= G_{2v} = \dots = G_{nv} = G_v; \\ \lambda_{1v} &= \lambda_{2v} = \dots = \lambda_{nv} = \lambda_v; \\ \varkappa_{1v} &= \varkappa_{2v} = \dots = \varkappa_{nv} = \varkappa_v; \\ \gamma_{1v} &= \gamma_{2v} = \dots = \gamma_{nv} = \gamma_v, \end{aligned}$$

formula (11) leads as to the following relation :

$$\begin{bmatrix} u_{nlv} \\ i_{nlv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (R + D \lambda_v) (\gamma_v + D \varkappa_v) & R + D \lambda_v \\ \gamma_v + D \varkappa_v & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} u_{0lv} \\ i_{0lv} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

or, introducing the notations

$$\bar{\varepsilon}_v = \begin{bmatrix} 1 + (R + D \lambda_v) (\gamma_v + D \varkappa_v) & R + D \lambda_v \\ \gamma_v + D \varkappa_v & 1 \end{bmatrix};$$

$$\xi_{nlv} = \begin{bmatrix} u_{nlv} \\ i_{nlv} \end{bmatrix}; \quad \xi_{0lv} = \begin{bmatrix} u_{0lv} \\ i_{0lv} \end{bmatrix}$$

we have

$$\xi_{nlv} = \bar{\varepsilon}_v^n \xi_{0lv}. \quad (13)$$

V. Derivation, by means of the limiting process, of the currents and voltages of m -phase transmission lines from the relations deduced in respect of systems composed of cascade-connected $2(m+1)$ -poles

Let us assume an m -phase transmission line (which contains also a neutral line) to have the length H . Let us also assume that the individual lines of the transmission system are arranged as per Fig. 3, i.e. each of the m phase lines is

placed equidistantly on a circular cylinder constructed around the neutral line. Let us finally assume the material constants and dimensions of the individual phase lines to be identical.

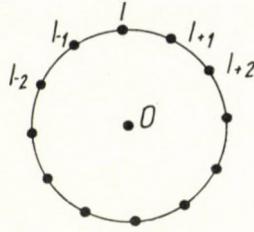


Fig. 3

Let us use the following notations for the electric constants of the phase lines as referred to the unity of length :

ohmic resistance : R_e ;

self inductance : L_{e0} ;

mutual inductance between the coil of the l -th phase line and the neutral line, and the coil of the $(l \pm \nu)$ th phase line and the neutral line : $L_{e\nu}$;

capacitance between a phase line and the neutral line : C_{e0} ;

capacitance between the l -th and $(l + \nu)$ th phase line : $C_{e\nu}$;

leakance between a phase line and the neutral line : G_{e0} ;

leakance between the l -th and $(l + \nu)$ th phase line : $G_{e\nu}$.

Let us also use the symbols i_l for the intensity of current flowing in the l th phase line, and u_l for the voltage as referred to the neutral line at a given point of the l th phase line. Both i_l and u_l are functions of space and time. It is assumed in the following that i_l and u_l are pure harmonic functions, of identical periods, of the time t so that we can represent i_l as $I_l(x)e^{j\omega t}$ and u_l as $U_l(x)e^{j\omega t}$, where "j", appearing in the exponent of the function, is the imaginary unit, while $I_l(x)$ and $U_l(x)$ are, in general, complex functions of the real x co-ordinate.

The values of the functions at the point of supply ($x = 0$) and the point of consumption ($x = H$), respectively, are these :

$$I_l(0) = I_{il} ; \quad U_l(0) = U_{il} ;$$

$$I_l(H) = I_{fl} ; \quad U_l(H) = U_{fl} .$$

If we compound functions $I_l(x)$ and $U_l(x)$ in a column matrix each, and expand these matrices — as was done in the case of equations (9a) and (9b) —

with respect to the column matrices $\frac{1}{\sqrt{m}} \mathbf{w}_\nu$, we can write :

$$\mathbf{U}_l(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{v=0}^{m-1} U_{lv}(x) \omega_v^{l-1} \quad (14a)$$

$$\mathbf{I}_l(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{v=0}^{m-1} I_{lv}(x) \omega_v^{l-1}, \quad (14b)$$

where $l = 1, 2, \dots, m$.

If we divide the transmission line into n equal sections and regard each of them as a $2(m+1)$ -pole with the electric constants :

$$R = R_e \frac{H}{n}; \quad L_v = L_{ev} \frac{H}{n}; \quad C_v = C_{ev} \frac{H}{n}; \quad G_v = G_{ev} \frac{H}{n},$$

we can derive from formula (12) — substituting $D = j\omega$ — the following *approximate* relation between the generalized symmetrical components of the values of the functions $U_l(x)$ and $I_l(x)$ at the point of supply and the point of consumption :

$$\begin{bmatrix} U_{flv} \\ I_{flv} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 + (R_e + j\omega \lambda_{ev}) (\gamma_{ev} + j\omega \kappa_{ev}) \frac{H^2}{n^2} & (R_e + j\omega \lambda_{ev}) \frac{H}{n} \\ (\gamma_{ev} + j\omega \kappa_{ev}) \frac{H}{n} & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} U_{tlv} \\ I_{tlv} \end{bmatrix} \quad (15)$$

where $\lambda_{ev}, \kappa_{ev}, \gamma_{ev}$, mean the eigenvalues of the cyclic matrices produced from the elements L_{ev}, C_{ev} and G_{ev} .

Introducing the following short notations :

$$\Phi_v = \begin{bmatrix} 1 + (R_e + j\omega \lambda_{ev}) (\gamma_{ev} + j\omega \kappa_{ev}) \frac{H^2}{n^2} & (R_e + j\omega \lambda_{ev}) \frac{H}{n} \\ (\gamma_{ev} + j\omega \kappa_{ev}) \frac{H}{n} & 1 \end{bmatrix};$$

$$\varphi_{flv} = \begin{bmatrix} U_{flv} \\ I_{flv} \end{bmatrix}; \quad \varphi_{tlv} = \begin{bmatrix} U_{tlv} \\ I_{tlv} \end{bmatrix}$$

we can produce the relation under (15) in a short form :

$$\varphi_{flv} \approx \Phi_v^n \varphi_{tlv}. \quad (16)$$

Obviously, the Φ_v matrix can be represented as the product of a diagonal matrix (Φ_{dv}) and a symmetrical matrix (Φ_{sv}):

$$\Phi_v = \Phi_{dv} \cdot \Phi_{sv},$$

where

$$\Phi_{dv} = \frac{n}{H} \begin{bmatrix} (\gamma_{ev} + j \omega \kappa_{ev})^{-1} & 0 \\ 0 & (R_e + j \omega \lambda_{ev})^{-1} \end{bmatrix}$$

and

$$\Phi_{sv} = \frac{H}{n} \begin{bmatrix} (\gamma_{ev} + j \omega \kappa_{ev}) \left\{ 1 + (R_e + j \omega \lambda_{ev})(\gamma_{ev} + j \omega \kappa_{ev}) \frac{H^2}{n^2} \right\} (R_e + j \omega \lambda_{ev})(\gamma_{ev} + j \omega \kappa_{ev}) \frac{H}{n} & \\ (R_e + j \omega \lambda_{ev})(\gamma_{ev} + j \omega \kappa_{ev}) \frac{H}{n} & R_e + j \omega \lambda_{ev} \end{bmatrix}.$$

Taking the above into consideration, equation (16) can obviously be written as

$$\Phi_{dv}^{-\frac{1}{2}} \varphi_{flv} \approx \{ \Phi_{dv}^{\frac{1}{2}} \Phi_{sv} \Phi_{dv}^{\frac{1}{2}} \}^n \Phi_{dv}^{-\frac{1}{2}} \varphi_{tlv}$$

or

$$\varphi_{flv} \approx \Phi_{dv}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}_v^n \Phi_{dv}^{-\frac{1}{2}} \varphi_{tlv}, \tag{17}$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_v &= \Phi_{dv}^{\frac{1}{2}} \Phi_{sv} \Phi_{dv}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + (R_e + j \omega \lambda_{ev})(\gamma_{ev} + j \omega \kappa_{ev}) \frac{H^2}{n^2} & \frac{H}{n} \sqrt{(R_e + j \omega \lambda_{ev})(\gamma_{ev} + j \omega \kappa_{ev})} \\ \frac{H}{n} \sqrt{(R_e + j \omega \lambda_{ev})(\gamma_{ev} + j \omega \kappa_{ev})} & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

or, introducing the notations :

$$Z_{ev} = R_e + j \omega \lambda_{ev} \quad \text{and} \quad Y_{ev} = \gamma_{ev} + j \omega \kappa_{ev},$$

as

$$\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 1 + Z_{ev} Y_{ev} \frac{H^2}{n^2} & \frac{H}{n} \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} \\ \frac{H}{n} \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} & 1 \end{bmatrix}.$$

By going back to formula (1) we obtain

$$\mathbf{F}_v^n = \frac{1}{2} \left\{ (\mu_{v1}^n + \mu_{v2}^n) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \right.$$

$$+ \frac{\mu_{v1}^n - \mu_{v2}^n}{n(\mu_{v1} - \mu_{v2})} \left[\begin{array}{cc} Z_{ev} Y_{ev} \frac{H^2}{n} & 2H \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} \\ 2H \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} & -Z_{ev} Y_{ev} \frac{H^2}{n} \end{array} \right],$$

further

$$\begin{aligned} \Phi_{dv}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}_v^n \Phi_{dv}^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left\{ (\mu_{v1}^n + \mu_{v2}^n) \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] + \right. \\ &+ \frac{\mu_{v1}^n - \mu_{v2}^n}{n(\mu_{v1} - \mu_{v2})} \left[\begin{array}{cc} Z_{ev} Y_{ev} \frac{H^2}{n} & 2H Z_{ev} \\ 2H Y_{ev} & -Z_{ev} Y_{ev} \frac{H^2}{n} \end{array} \right] \left. \right\}, \end{aligned}$$

where

$$\mu_{v2}^n = \left(1 + \frac{Z_{ev} Y_{ev} H^2}{2n^2} \right) \mp \frac{H}{n} \sqrt{Z_{ev} Y_{ev} \left(1 + \frac{Z_{ev} Y_{ev} H^2}{4n^2} \right)}.$$

With the aid of the limiting process $n \rightarrow \infty^*$, we obtain the following *exact* identity from the *approximate* identity (17):

$$\begin{bmatrix} U_{flv} \\ I_{flv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch H \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} & \sqrt{\frac{Z_{ev}}{Y_{ev}}} sh H \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} \\ \sqrt{\frac{Y_{ev}}{Z_{ev}}} sh H \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} & ch H \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{tlv} \\ I_{tlv} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

* If we assume that

$$\mu_{v1} = e^{-a_v} \quad \text{and} \quad \mu_{v2} = e^{a_v},$$

we have:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha_v = H \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\mu_{v1} - \mu_{v2}) = -2H \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{v1}^n = e^{-H \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}}}$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{v2}^n = e^{H \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}}}.$$

It is clear that the $U_{lv}(x)$ and $I_{lv}(x)$ functions ($0 \leq x \leq H$) are given by the following formula :

$$\begin{bmatrix} U_{lv}(x) \\ I_{lv}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} x & \sqrt{\frac{Z_{ev}}{Y_{ev}}} sh \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} x \\ \sqrt{\frac{Y_{ev}}{Z_{ev}}} sh \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} x & ch \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{tlv} \\ I_{tlv} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Therefore, taking into consideration relations (14a), (14b) and (19), the stationary voltages and currents can be calculated in the following manner as functions of the generalized symmetrical components of space, time, as well as of the voltages and currents at the point of supply :

$$\begin{bmatrix} u_l(x, t) \\ i_l(x, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{j\omega t} \sum_{v=0}^{m-1} \omega_v^{l-1} \begin{bmatrix} ch \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} x & \sqrt{\frac{Z_{ev}}{Y_{ev}}} sh \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} x \\ \sqrt{\frac{Y_{ev}}{Z_{ev}}} sh \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} x & ch \sqrt{Z_{ev} Y_{ev}} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{tlv} \\ I_{tlv} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Take, for example, the case of an uniform three-phase transmission system with cyclic symmetry :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e &= \langle R_e, R_e, R_e \rangle; \\ \mathbf{L}_e &= \mathbf{C} \langle L_{e0}, L_{e1}, L_{e1} \rangle; \\ \mathbf{K}_e &= \mathbf{C} \langle C_{e0} + 2 C_{e1}, -C_{e1}, -C_{e1} \rangle; \\ \mathbf{G}_e &= \mathbf{C} \langle G_{e0} + 2 G_{e1}, -G_{e1}, -G_{e1} \rangle. \end{aligned}$$

Therefore, in the given case :

$$\begin{aligned} Z_{e0} &= R_e + j \omega (L_{e0} + 2 L_{e1}); \\ Z_{e1} = Z_{e2} &= R_e + j \omega (L_{e0} - L_{e1}); \\ Y_{e0} &= G_{e0} + j \omega C_{e0}; \\ Y_{e1} = Y_{e2} &= G_{e0} + 3 G_{e1} + j \omega (C_{e0} + 3 C_{e1}). \end{aligned}$$

Since, in the present case, (applying the usual notation of the third roots of unity) $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \varepsilon$, $\omega_2 = \bar{\varepsilon}$, we have

$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

In the case of given $U_{t1}e^{j\omega t}$, $U_{t2}e^{j\omega t}$, $U_{t3}e^{j\omega t}$ voltages at the supply point and $I_{t1}e^{j\omega t}$, $I_{t2}e^{j\omega t}$, $I_{t3}e^{j\omega t}$ currents at the supply point we have :

$$u_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ ch \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (U_{t1} + U_{t2} + U_{t3}) + \right. \\ \left. + ch \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (2U_{t1} - U_{t2} - U_{t3}) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{Z_{e0}}{Y_{e0}}} sh \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (I_{t1} + I_{t2} + I_{t3}) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{Z_{e1}}{Y_{e1}}} sh \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (2I_{t1} - I_{t2} - I_{t3}) \right\} \cdot e^{j\omega t};$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ ch \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (U_{t1} + U_{t2} + U_{t3}) + \right. \\ \left. + ch \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (-U_{t1} + 2U_{t2} - U_{t3}) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{Z_{e0}}{Y_{e0}}} sh \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (I_{t1} + I_{t2} + I_{t3}) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{Z_{e1}}{Y_{e1}}} sh \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (-I_{t1} + 2I_{t2} - I_{t3}) \right\} \cdot e^{j\omega t};$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ ch \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (U_{t1} + U_{t2} + U_{t3}) + \right. \\ \left. + ch \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (-U_{t1} - U_{t2} + 2U_{t3}) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{Z_{e0}}{Y_{e0}}} sh \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (I_{t1} + I_{t2} + I_{t3}) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{Z_{e1}}{Y_{e1}}} sh \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (-I_{t1} - I_{t2} + 2I_{t3}) \right\} \cdot e^{j\omega t};$$

$$i_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{\frac{Y_{e0}}{Z_{e0}}} sh \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (U_{t1} + U_{t2} + U_{t3}) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{Y_{e1}}{Z_{e1}}} sh \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (2U_{t1} - U_{t2} - U_{t3}) + \right. \\ \left. + ch \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (I_{t1} + I_{t2} + I_{t3}) + \right. \\ \left. + ch \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (2I_{t1} - I_{t2} - I_{t3}) \right\} \cdot e^{j\omega t};$$

$$i_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{\frac{Y_{e0}}{Z_{e0}}} sh \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (U_{t1} + U_{t2} + U_{t3}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\frac{Y_{e1}}{Z_{e1}}} \operatorname{sh} \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (-U_{t1} + 2U_{t2} - U_{t3}) + \\
& + ch \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (I_{t1} + I_{t2} + I_{t3}) + \\
& + ch \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (-I_{t1} + 2I_{t2} - I_{t3}) \left. \right\} \cdot e^{j\omega t}; \\
i_3(x, t) = & \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{\frac{Y_{e0}}{Z_{e0}}} \operatorname{sh} \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (U_{t1} + U_{t2} + U_{t3}) + \right. \\
& + \sqrt{\frac{Y_{e1}}{Z_{e1}}} \operatorname{sh} \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (-U_{t1} - U_{t2} + 2U_{t3}) + \\
& + ch \sqrt{Z_{e0} Y_{e0}} x \cdot (I_{t1} + I_{t2} + I_{t3}) + \\
& \left. + ch \sqrt{Z_{e1} Y_{e1}} x \cdot (-I_{t1} - I_{t2} + 2I_{t3}) \right\} \cdot e^{j\omega t}.
\end{aligned}$$

REFERENCES

1. FELDTKELLER, R.: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. 5. Auflage (1948). S. Hirzel Verlag, Leipzig.
2. OLLENDORF, F.: Die Welt der Vektoren. (1950) Springer. Wien.
3. DENIS—PAPIN, M. and KAUFMANN, A.: Cours de calcul matriciel appliqué. Éd. Albin Michel. Paris (1951).
4. CAUER, W.: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. 2. Auflage. Akademie-Verlag. Berlin (1954).
5. SHEN, D. W. C.: Synthesis of uniform transmission line. Electronic Engineering, London. (1953) pp. 287 to 289.
6. EGÉRVÁRY, J.: On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics. Acta Scientiarum Mathematicarum. Szeged. 15 (1954) pp. 211—22.
7. EGÉRVÁRY, J.: Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról (Canonical representation of matrix-functions and some applications of it). M. Tud. Akadémia III. osztályának közleményei (Publications of the IIIrd Section of the Hungarian Academy of Sciences). Vol. III, number 4. Budapest (1953) pp 417 to 458.
8. SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik. III. Elektrodynamik. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1949) p. 140.
9. FRAZER, R. A., DUNCAN, W. J. and COLLAR, A. R.: Elementary matrices. Cambridge. University Press (1952).
10. WAGNER, C. F. and EVANS, R. D.: Symmetrical components. Mc Graw-Hill Book Comp. New York-London (1933).
11. WANGER, W.: Symmetrische Komponenten für Mehrphasensysteme. Archiv für Elektrotechnik. XXIX. (1935) pp. 683—688.

SUMMARY

It is known [5] that certain particular solutions of the so-called equation of telegraphy, namely those referring to single-phase lines, can be produced as the limiting values of relations deduced in respect of cascaded structures of quadripoles. Utilizing recent results obtained by the theory of hypermatrices, the present paper presents the deduction of some relations which express the voltages and currents of a system composed of cascade-connected $2(m+1)$ -poles. From these relations, particular solutions of the equation of telegraphy in respect of multiphase lines are derived by means of the limiting process.

It is demonstrated in the paper that the relations which represent the voltages and currents of $2(m+1)$ -poles arranged according to Fig. 1, as also those of a system obtained by their cascade-connection can be expressed by the well-known formulae which represent four-terminal networks composed of a phase and the zero phase, as also systems obtained by the cascade-connection of such quadripole structures. Again, the results derived for m -phase lines by means of the limiting process from relations representing systems of cascade-connected $2(m+1)$ -poles can be reduced to the familiar formulae regarding analogously calculated single-phase lines.

VERALLGEMEINERUNG EINIGER BEZIEHUNGEN DER VIERPOLTHEORIE MITTELS HYPERMATRIZENRECHNUNG

P. BAJCSAY u. V. LOVASS-NAGY

ZUSAMMENFASSUNG

Es ist bekannt [5], dass gewisse auf Einphasenleitungen bezügliche partikuläre Lösungen der sog. Telegraphengleichung sich als Grenzwerte von für ein aus Vierpolen in Kettenschaltung bestehendes System abgeleiteten Beziehungen darstellen lassen. Der gegenwärtige Aufsatz, indem derselbe von neueren Ergebnissen der Hypermatrizentheorie Gebrauch macht, leitet einige solche Beziehungen ab, welche die Spannungen und Stromstärken irgendeines aus $2(m+1)$ -Polen bestehenden Systems beschreiben. Mittels Grenzüberganges aus diesen Ergebnissen werden die Partikularlösungen der auf Mehrphasenleitungen bezüglichen Telegraphengleichung erreicht.

Es wird gezeigt, dass die Beziehungen, welche die Spannungen und Stromstärken der gemäss Abb. 1. aufgebauten $2(m+1)$ -Pole, ferner des durch deren Kettenschaltung erhaltenen Systems liefern, sich auf die bekannten Zusammenhänge der durch eine Phase und die Null-phase gebildeten Vierpole, bezw. des durch Kettenschaltung solcher Vierpole erhaltenen Systems zurückführen lassen. Andererseits sind die sich aus den für das aus $2(m+1)$ -Polen in Kettenschaltung gebildete System abgeleiteten Beziehungen mittels Grenzüberganges für m -Phasenleitungen ergebenden Zusammenhänge auf die auf eine in analoger Weise berechnete Einphasen-Fernleitung bezüglichen bekannten Ergebnisse zurückführbar.

GÉNÉRALISATION DE QUELQUES RAPPORTS DE LA THÉORIE DE QUADRIPÔLES PAR CALCUL HYPERMATRICIEL

P. BAJCSAY et V. LOVASS-NAGY

RÉSUMÉ

Il est connu [5] que certaines solutions particulières de l'équation dite «des télégraphistes» peuvent être trouvées comme valeurs limites de rapports dérivés pour un système de quadripôles en cascade. En se servant des derniers résultats de la théorie hypermatricielle, les auteurs deduisent quelques rapports représentant les voltages et les intensités de courants d'un système quelconque composé de $2(m+1)$ pôles en cascade. A partir de ces résultats les auteurs faisant le calcul de limites obtiennent les solutions particulières de l'équation des télégraphistes de lignes polyphasées.

L'étude démontre que les rapports fournissant les voltages et les intensités des courants d'un système de $2(m+1)$ pôles en cascade peuvent être réduits aux relations connues de quadripôles formés de l'une des phases et de la phase zéro, ou bien du système obtenu par couplage en cascade de tels quadripôles. D'autre part, les rapports obtenus comme valeurs limites pour les lignes m -phasées à partir des relations dérivées pour le système de $2(m+1)$ pôles en cascade peuvent être ramenés aux résultats connus relatifs aux lignes de transmission monophasées calculées d'une manière analogue.

ОБОБЩЕНИЕ С ГИПЕРМАТРИЦАМИ НЕКОТОРЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ
ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНОЙ ТЕОРИИ

П. БАЙЧАИ и В. ЛОВАШ-НАДЬ

РЕЗЮМЕ

Известно (5), что определенные партикулярные решения телеграфных уравнений, касающиеся однофазного проводника, могут быть получены в качестве предельных значений зависимостей, выведенных в систему, состоящую из последовательно соединенных четырехполюсников. В данной работе, используя вновь достигнуты в теории гиперматриц результаты, выводятся некоторые такие зависимости, которые описывают напряжения и силы тока некоторой последовательно соединенной системы, построенной из $2(m+1)$ полюсов. Используя эти результаты, получают партикулярные решения телеграфных уравнений, относящихся к многофазным проводникам.

В работе показано, что $2(m+1)$ полюсы, построенные по приведенной на рис. 1 схеме, далее зависимости, дающие напряжения и силы тока системы, получающийся при их последовательном соединении, могут быть сведены к зависимостям четырехполюсников, образованных одной фазой и нулем, т. е. к известным зависимостям системы, получающейся при последовательном соединении таких четырехполюсников. Из зависимостей, выведенных для системы, состоящей из $2(m+1)$ полюсов, могут быть сведены к m -фазному проводнику, а зависимости, получающиеся при переходах, могут быть сведены к известным результатам, касающимся однофазных линий передач, рассчитанных аналогичным образом.

NEW METHOD FOR THE CALCULATION OF THE NATURAL FREQUENCIES OF TORSIONAL VIBRATION

A. BALOGH

[Manuscript received 30th August, 1956]

Introductory

To obtain the natural frequencies of torsional vibration without damping, the frequency equation is used and is deduced from the frequency determinant it being developed in the usual manner.

In the discussion further below, a property of the frequency determinant will be developed with which it will be possible to obtain a new simplified frequency equation. The advantages of this method will be shown by several practical and numerical examples.

General discussion. The following procedure on the frequency determinant in a generalized case for n masses (rotating discs) would be very extent. Therefore, it will be more convenient to choose the frequency determinant for five masses. The procedure can then be applied similarly to frequency determinant for any masses and degrees.

The nomenclature is as follows :

B_n denotes the frequency determinant, the index n is the number of the masses, w the angular velocity from which the natural frequencies can be calculated in a simple and well known manner.

$$u_{nm} = \frac{c_n}{I_m} \tag{1}$$

c_n denotes the stiffness of the connecting shaft, I_m the moment of inertia of the masses.

We obtain with these notations for the frequency determinant of five masses :

$$B_5 = \begin{vmatrix} w^2 - u_{11} & u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & w^2 - u_{12} - u_{22} & u_{22} & 0 & 0 \\ 0 & u_{23} & w^2 - u_{23} - u_{33} & u_{33} & 0 \\ 0 & 0 & u_{34} & w^2 - u_{34} - u_{44} & u_{44} \\ 0 & 0 & 0 & u_{45} & w^2 - u_{45} \end{vmatrix} \tag{2}$$

The determinant developed in the usual manner, we obtain the frequency expres-

sion and if this is equated to zero, we obtain the frequency equation. Of course this can be generalized for any masses.

We introduce the following notation :

$$w^2 - u_{n-1,n} - u_{n,n+1} = W_{n-1,n,n+1} \quad (3)$$

further

$$\frac{u_{n,n+1}}{w^2 - u_{n-1,n} - u_{n,n+1}} = \frac{u_{n,n+1}}{W_{n-1,n,n+1}} = W_{n-1,n,n+1-n,n+1} \quad (4)$$

Both (3) and (4) contain w^2 and vary with it.

Let us modify the determinant (2) in the following manner :

1. The last column of the determinant will be added to the last but one,
2. The last but one row of the determinant multiplied with -1 should be added to the last row and the determinant 1. becomes :

$$B_5 = \begin{vmatrix} w^2 - u_{11} & u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & w^2 - u_{12} - u_{22} & u_{22} & 0 & 0 \\ 0 & u_{23} & w^2 - u_{23} - u_{33} & u_{33} & 0 \\ 0 & 0 & u_{34} & w^2 - u_{34} & u_{44} \\ 0 & 0 & -u_{34} & u_{34} & w^2 - u_{44} - u_{45} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Developing the determinant (5) after the last column, we obtain :

$$B_5 = W_{445} B_4 - u_{44} \begin{vmatrix} w^2 - u_{11} & u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & w^2 - u_{12} - u_{22} & u_{22} & 0 \\ 0 & u_{23} & w^2 - u_{23} - u_{33} & u_{33} \\ 0 & 0 & -u_{34} & u_{34} \end{vmatrix} \quad (6)$$

The last column of the determinant (6) shall be added to the preceding column and afterwards developed in accord with the last row. We obtain the following :

$$B_5 = W_{445} \cdot B_4 - u_{34} \cdot u_{44} \cdot B_3. \quad (7)$$

It follows from (7) that the computation of the determinant for five masses is reduced to such a one of three and four masses.

Consider this result for the general case of n masses and we shall obtain :

$$B_n = W_{n-1,n-1,n} \cdot B_{n-1} - u_{n-2,n-1} \cdot u_{n-1,n-1} \cdot B_{n-2}. \quad (8)$$

For the case that $B_n = 0$ that is, the frequency determinant for the masses n are zero, we obtain :

$$\frac{B_{n-1}}{B_{n-2}} = \frac{u_{n-2, n-1} \cdot u_{n-1, n-1}}{W_{n-1, n-1, n}} . \quad (6)$$

The roots of the frequency equation in the generalized case of n masses satisfies the expression (9) but there are already two frequency expressions for $n-1$ and $n-2$ masses.

Now we shall apply the theorem in (8) to deduce the simplified frequency equation.

Application. For several rotating masses we shall apply the equation (8) and at the same time we shall deduce the new formula for the frequency equation.

The case of two masses

The equation (8) becomes :

$$B_2 = w^2 - u_{11} - u_{12} = W_{112} \quad (10)$$

and the frequency equation becomes :

$$B_2 = 0 . \quad (11)$$

The case of three masses

The equation (8) becomes :

$$B_3 = (w^2 - u_{22} - u_{23}) B_2 - u_{12} \cdot u_{22} \quad (12)$$

and the frequency equation becomes :

$$B_3 = W_{112} \cdot W_{223} - u_{12} \cdot u_{22} . \quad (13)$$

For three masses the frequency equation becomes :

$$B_3 = 0$$

and hence

$$W_{112} \cdot W_{223} = u_{12} \cdot u_{22} \quad (14)$$

or

$$\frac{u_{12} \cdot u_{22}}{W_{112} W_{223}} = 1 = W_{112-12} \cdot W_{223-22} . \quad (14a)$$

The case of four masses

The equation (8) becomes :

$$B_4 = W_{334} \cdot B_3 - u_{23} \cdot u_{33} \cdot B_2 . \quad (15)$$

Substituting B_2 from (10) and B_3 from (13) we obtain :

$$B_4 = W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{334} - u_{12} \cdot u_{22} \cdot W_{334} - u_{23} \cdot u_{33} \cdot W_{112}. \quad (16)$$

For four masses the frequency equation $B_4 = 0$ and from this we obtain :

$$W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{334} = u_{12} \cdot u_{22} \cdot W_{334} + u_{23} \cdot u_{33} \cdot W_{112}.$$

The frequency equation thus becomes :

$$W_{112-12} \cdot W_{223-22} + W_{223-23} \cdot W_{334-33} = 1 \quad (17)$$

or with (4) :

$$\frac{u_{12}}{w^2 - u_{11} - u_{12}} \cdot \frac{u_{22}}{w^2 - u_{22} - u_{23}} + \frac{u_{23}}{w^2 - u_{22} - u_{33}} \cdot \frac{u_{33}}{w^2 - u_{33} - u_{34}} = 1 \quad (17a)$$

The case of five masses

The equation (8) becomes :

$$B_4 \cdot W_{445} = B_5 + u_{34} \cdot u_{44} \cdot B_3. \quad (18)$$

Substituting B_3 from (13) and B_4 from (16) we obtain :

$$\begin{aligned} W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{334} \cdot W_{445} - u_{12} \cdot u_{22} \cdot W_{334} \cdot W_{445} \\ - u_{23} \cdot u_{33} \cdot W_{112} \cdot W_{445} \\ - u_{34} \cdot u_{44} \cdot W_{112} \cdot W_{223} \\ - u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{34} \cdot u_{44} = B_5 \end{aligned} \quad (19)$$

for five masses the frequency equation $B_5 = 0$ and from this we obtain :

$$\begin{aligned} W_{112-12} \cdot W_{223-22} + W_{223-23} \cdot W_{334-33} + W_{334-34} \cdot W_{445-44} - \\ - W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{334-34} \cdot W_{445-44} = 1 \end{aligned} \quad (20)$$

and this is the frequency equation for 5 masses to calculate the natural frequencies. Suppose next that all the masses and shaft stiffnesses are equal with the exception of the first mass and stiffness (multi-crank engine with four cylinders) for this simplified case we obtain :

$$u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u \quad (21)$$

and

$$W_{223-22} = W_{223-23} = W_{334-33} = W_{334-34} = W_{445-44} = W = \frac{u}{w^2 - 2u}. \quad (22)$$

Equation (20) becomes :

$$W_{112-12} \cdot W (1 - W^2) + 2W^2 = 1 \quad (23)$$

and this equation is really — under the given conditions — a very simple one.

The case of six masses

The equation (8) becomes :

$$B_5 \cdot W_{556} = B_6 + u_{45} \cdot u_{55} \cdot B_4. \quad (24)$$

Substituting B_4 from (16) and B_5 from (19), we obtain :

$$\begin{aligned} & W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{334} \cdot W_{445} \cdot W_{556} - u_{12} \cdot u_{22} \cdot W_{334} \cdot W_{445} \cdot W_{556} \\ & \quad - u_{23} \cdot u_{33} \cdot W_{112} \cdot W_{445} \cdot W_{556} \\ & \quad - u_{34} \cdot u_{44} \cdot W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{556} \\ & \quad + u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{34} \cdot u_{44} \cdot W_{556} \\ & - u_{45} \cdot u_{55} (W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{334} - u_{12} \cdot u_{22} W_{334} - u_{23} \cdot u_{33} \cdot W_{112}) = B_6 \end{aligned} \quad (25)$$

and the equation ultimately becomes :

$$\begin{aligned} & W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{334} \cdot W_{445} \cdot W_{556} - u_{12} \cdot u_{22} \cdot W_{334} \cdot W_{445} \cdot W_{556} \\ & \quad - u_{23} \cdot u_{33} \cdot W_{112} \cdot W_{445} \cdot W_{556} \\ & \quad - u_{34} \cdot u_{44} \cdot W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{556} \\ & \quad - u_{45} \cdot u_{55} \cdot W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{334} \\ & \quad + u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{34} \cdot u_{44} \cdot W_{556} \\ & \quad + u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{45} \cdot u_{55} \cdot W_{334} \\ & \quad + u_{23} \cdot u_{33} \cdot u_{45} \cdot u_{55} \cdot W_{112} = B_6 \end{aligned} \quad (26)$$

for six masses the frequency equation $B_6 = 0$ and from this we obtain :

$$\begin{aligned} & W_{112-12} \cdot W_{223-22} + W_{223-23} \cdot W_{334-33} + W_{334-34} \cdot W_{445-44} + \\ & \quad + W_{445-45} \cdot W_{556-55} - \\ & \quad - W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{334-34} \cdot W_{445-44} \\ & \quad - W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{445-45} \cdot W_{556-55} \\ & \quad - W_{223-23} \cdot W_{334-33} \cdot W_{445-45} \cdot W_{556-55} = 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Similarly, as in the previous case if in the case of a multi-crank engine with five cylinders the masses and stiffnesses are equal, we obtain :

$$u_{22} = u_{23} = \dots = u_{56} = u$$

and

$$W_{223-22} = W_{223-23} = \dots = W_{556-55} = W = \frac{u}{w^2 - 2u}$$

equation (27) becomes (Table I) :

$$W_{112-12} \cdot W (1 - 2W^2) + 3W^2 - W^4 = 1. \quad (28)$$

For multi-crank engine with four cylinders for which all the masses and stiffnesses are equal, we obtain (Table II) :

$$W_{112-12} \cdot W_{223-22} (1 - 2W^2) + W_{223-23} \cdot W (1 - W^2) + 2W^2 = 1 \quad (28a)$$

then for this case :

$$u_{33} = u_{34} = \dots = u_{56} = u$$

and :

$$W_{334-33} = W_{334-34} = \dots = W_{556-55} = W = \frac{u}{w^2 - 2u} .$$

(28) and (28a) are the new frequency equations for six rotating masses, a form simplified for multi-crank engines.

Without the terms (multi-crank engines) with the number of the rotating masses, the frequency will of course be longer but if we consider the last case with six masses only, the developing of the frequency determinant is not a simple procedure and if the number of the masses grows to a further point, the difficulties will be greater.

From the previous cases we deduce the following conclusions :

1. The product of values appears always in pairs (two factors),
2. One index of the two factors in a pair of u is always the same on the same place. (For example : $u_{12} \cdot u_{22}$)
3. The product of u and W has indices. The first two of the indices never agree with one another.

In the case of six masses, we dealt with the problem in detail. For the following masses and cases we are going to have this shortened as no novel feature of the matter can be developed.

The case of seven masses

The equation (8) becomes :

$$B_6 \cdot W_{667} = B_7 + u_{56} \cdot u_{66} \cdot B_5. \quad (29)$$

Substituting B_5 and B_6 we obtain :

$$\begin{aligned}
 B_7 = & W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{334} \cdot W_{445} \cdot W_{556} \cdot W_{667} - u_{12} \cdot u_{22} \cdot W_{334} \cdot W_{445} \cdot W_{556} \cdot W_{667} \\
 & - u_{23} \cdot u_{33} \cdot W_{112} \cdot W_{445} \cdot W_{556} \cdot W_{667} - u_{34} \cdot u_{44} \cdot W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{556} \cdot W_{667} \\
 & - u_{45} \cdot u_{55} \cdot W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{334} \cdot W_{667} - u_{56} \cdot u_{66} \cdot W_{112} \cdot W_{223} \cdot W_{334} \cdot W_{445} \\
 & + u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{34} \cdot u_{44} \cdot W_{556} \cdot W_{667} + u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{45} \cdot u_{55} \cdot W_{334} \cdot W_{667} \\
 & + u_{23} \cdot u_{33} \cdot u_{45} \cdot u_{55} \cdot W_{112} \cdot W_{667} + u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{56} \cdot u_{66} \cdot W_{334} \cdot W_{445} + \\
 & + u_{23} \cdot u_{33} \cdot u_{56} \cdot u_{66} \cdot W_{112} \cdot W_{445} + u_{34} \cdot u_{44} \cdot u_{56} \cdot u_{66} \cdot W_{112} \cdot W_{223} - \\
 & - u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{34} \cdot u_{44} \cdot u_{56} \cdot u_{66} \tag{30}
 \end{aligned}$$

If $B_7 = 0$, we obtain :

$$\begin{aligned}
 & W_{112-12} \cdot W_{223-22} + W_{223-23} \cdot W_{334-33} + W_{334-34} \cdot W_{445-44} + \\
 & \quad + W_{445-45} \cdot W_{556-55} + W_{556-56} \cdot W_{667-66} \\
 & - W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{334-34} \cdot W_{445-44} - W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{445-45} \cdot W_{556-55} \\
 & - W_{223-23} \cdot W_{334-33} \cdot W_{445-45} \cdot W_{556-55} - W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{556-56} \cdot W_{667-66} \\
 & - W_{223-23} \cdot W_{334-33} \cdot W_{556-56} \cdot W_{667-66} - W_{334-34} \cdot W_{443-44} \cdot W_{556-56} \cdot W_{667-66} \\
 & + W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{334-34} \cdot W_{445-44} \cdot W_{556-56} \cdot W_{667-66} = 1 \tag{31}
 \end{aligned}$$

We shall continue our investigation with 8 masses.

The case of eight masses

The equation (8) becomes :

$$B_7 \cdot W_{778} = B_8 + u_{67} \cdot u_{77} \cdot B_6 \tag{33}$$

With $B_8 = 0$, we obtain :

$$\begin{aligned}
 & W_{112-12} \cdot W_{223-22} + W_{223-23} \cdot W_{334-33} + W_{334-34} \cdot W_{445-44} + W_{445-45} \cdot W_{556-55} \\
 & \quad + W_{556-56} \cdot W_{667-66} + W_{667-67} \cdot W_{778-77} \\
 & - W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{334-34} \cdot W_{445-44} \\
 & - W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{445-45} \cdot W_{556-55} \\
 & - W_{223-23} \cdot W_{334-33} \cdot W_{445-45} \cdot W_{556-55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{556-56} \cdot W_{667-66} \\
& - W_{223-23} \cdot W_{334-33} \cdot W_{556-55} \cdot W_{667-66} \\
& - W_{334-34} \cdot W_{445-44} \cdot W_{556-56} \cdot W_{667-66} \\
& - W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{667-67} \cdot W_{778-77} \\
& - W_{334-34} \cdot W_{445-44} \cdot W_{667-67} \cdot W_{778-77} \\
& - W_{445-45} \cdot W_{556-55} \cdot W_{667-67} \cdot W_{778-77} \\
& - W_{223-23} \cdot W_{334-33} \cdot W_{667-67} \cdot W_{778-77} \\
& + W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{334-34} \cdot W_{445-44} \cdot W_{667-67} \cdot W_{778-77} \\
& + W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{445-45} \cdot W_{556-55} \cdot W_{667-67} \cdot W_{778-77} \\
& + W_{223-23} \cdot W_{334-33} \cdot W_{445-45} \cdot W_{556-55} \cdot W_{667-67} \cdot W_{778-77} \\
& + W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W_{334-34} \cdot W_{445-44} \cdot W_{556-56} \cdot W_{667-66} = 1.
\end{aligned} \tag{34}$$

For multi-crank engine with seven masses but with :

$$u = u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = \dots = u_{67}$$

the equation (31) becomes (Table I):

$$W_{112-12} \cdot W(1 - 3W^2 + W^4) + 4W^2 - 3W^4 = 1 \tag{32}$$

For multi-crank engine with eight masses but with :

$$u = u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = \dots = u_{78}$$

the equation (34) becomes (Table I) :

$$W_{112-12} \cdot W(1 - 4W^2 + 3W^4) + 5W^2 - 6W^4 + W^6 = 1 \tag{35}$$

and the modified form of the equation (35) is :

$$W_{112-12} \cdot W(1 - 4W^2 + 3W^4) + W^2(5 - 6W^2 + W^4) = 1 \tag{36}$$

Both equations (32) for seven masses and equation (35) for eight masses relating to multi-crank engines, are of a rather simple form as far as computation goes.

For the calculation the following procedure is recommended :

For multi-crank engine after the calculation of

$$u, u_{11} \text{ and } u_{12}$$

we are assuming an arbitrary, that is, an estimated value of w^2 and computing with it W and W_{112-12} .

Substituting all these values in the foregoing equation of a new form as sample for eight masses in equation (35) and if the left side becomes 1 or nearly 1, we have found the right w^2 from which the natural frequency is calculated. The method of setting out this calculation in a tabular form is recommended, in applying the principle of the regula falsi.

For three to eight rotating masses, we have calculated the frequency equation and have simplified them for multi-crank engines. The last results with one independent mass (for example, flywheel, coupling, etc.) are arranged in a tabular form. (See Table I.)

For two independent masses we have arranged Table II.

In both cases the number of members in the frequency equation are the same.

The practical application of the deduced and calculated frequency equation will be shown in Table III where the natural frequencies, that is, the angular velocities are calculated for five masses using the equation from Table I. In the chapter *Practical Exercises* we shall compare the result with that obtained when applying other methods. In this way we shall introduce the control of the results obtained which is of course very important.

Table I

The frequency equations for multi-crank engines with one independent mass

$$u_{11} = \frac{c_1}{I_1}, \quad u_{12} = \frac{c_1}{I_2}, \quad u = \frac{c}{I_2} = \frac{c}{I} = u_{22} = u_{23} = \dots$$

$$W = \frac{u}{w^2 - 2u}, \quad W_{112-12} = \frac{u_{12}}{w^2 - u_{11} - u_{12}}$$

For the frequency equation we obtain :

- For 9 masses : $W_{112-12} \cdot W(1 - 5W^2 + 6W^4 - W^6) + 6W^2 - 10W^4 + 4W^6 = 1$
- For 8 masses : $W_{112-12} \cdot W(1 - 4W^2 + 3W^4) + 5W^2 - 6W^4 + W^6 = 1$
- For 7 masses : $W_{112-12} \cdot W(1 - 3W^2 + W^4) + 4W^2 - 3W^4 = 1$
- For 6 masses : $W_{112-12} \cdot W(1 - 2W^2) + 3W^2 - W^4 = 1$
- For 5 masses : $W_{112-12} \cdot W(1 - W^2) + 2W^2 = 1$
- For 4 masses : $W_{112-12} \cdot W + -W^2 = 1$
- For 3 masses : $W_{112-12} \cdot W = 1$

To facilitate our further investigations, for the left side in the equations of Tables I and II we shall use only the denotation :

$$\bar{B}_n$$

n is the number of the masses of the system.

For 9 masses : See the last chapter.

Independent masses are for example : flywheel, coupling, etc.

Table II

The frequency equation for multi-crank engines with two independent masses

$$u_{11} = \frac{c_1}{I_1}, \quad u_{12} = \frac{c_1}{I_2}, \quad u_{22} = \frac{c_2}{I_2}, \quad u_{23} = \frac{c_2}{I_3},$$

$$u = \frac{c}{I_3} = \frac{c}{I} = u_{33} = u_{34} = \dots$$

$$W_{112-12} = \frac{u_{12}}{w^2 - u_{11} - u_{12}}, \quad W_{223-22} = \frac{u_{22}}{w^2 - u_{22} - u_{23}}, \quad W_{223-23} = \frac{u_{23}}{w^2 - u_{22} - u_{23}}$$

$$W_{334-33} = W_{334-34} = \dots = W = \frac{u}{w^2 - 2u}$$

For the frequency equation we obtain :

$$\text{For 9 masses : } W_{112-12} \cdot W_{223-22} (1 - 5W^2 + 6W^4 - W^6) + W_{223-23} (1 - 4W^2 + 3W^4) \\ W + 5W^2 - 6W^4 + W^6 = 1$$

$$\text{For 8 masses : } W_{112-12} \cdot W_{223-22} (1 - 4W^2 + 3W^4) + W_{223-23} (1 - 3W^2 + W^4) W \\ + 4W^2 - 3W^4 = 1$$

$$\text{For 7 masses : } W_{112-12} \cdot W_{223-22} (1 - 3W^2 + W^4) + W_{223-23} (1 - 2W^2) W + 3W^2 - W^4 = 1$$

$$\text{For 6 masses : } W_{112-12} \cdot W_{223-22} (1 - 2W^2) + W_{223-23} (1 - W^2) W + 2W^2 = 1$$

$$\text{For 5 masses : } W_{112-12} \cdot W_{223-22} (1 - W^2) + W_{223-23} \cdot W + W^2 = 1$$

$$\text{For 4 masses : } W_{112-12} \cdot W_{223-22} + W_{223-23} \cdot W^2 = 1$$

$$\text{For 3 masses : } W_{112-12} \cdot W_{223-22} = 1$$

Table III

Practical application

Numerical examples for 5 masses in the case of four equal loads and three equal stiffnesses for multi-crank engines with four cylinders.

The system has the following specification :

For the shaft : $I_p = 600 \text{ cm}^4$, $G = 8,3 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$

$$l_1 = 25 \text{ cm}, \quad l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = 1 = 20 \text{ cm}$$

For the masses : $I_1 = 1500 \text{ kgcmsec}^2$ and

$$I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I = 200 \text{ kgcmsec}^2$$

The stiffnesses of the shaft:

$$c_1 = \frac{600 \cdot 8,3 \cdot 10^5}{25} = 20 \cdot 10^6 \text{ kgcm}$$

$$c_2 = c_3 = c_4 = c = \frac{600 \cdot 8,3 \cdot 10^5}{20} = 25 \cdot 10^6 \text{ kgcm}$$

$$u_{11} = \frac{c_1}{I_1} = \frac{20 \cdot 10^6}{1500} = 1,33 \cdot 10^4 \text{ 1/sec}^2$$

$$u_{12} = \frac{c_1}{I_2} = \frac{20 \cdot 10^6}{200} = 10 \cdot 10^4 \text{ 1/sec}^2$$

$$u = \frac{c}{I} = \frac{c_2}{I_2} = \frac{25 \cdot 10^6}{200} = 12,5 \cdot 10^4 \text{ 1/sec}^2$$

With the equation from Table I:

$$\bar{B}_5 = W_{112-12} \cdot W (1 - W^2) + 2 W^2$$

In referring to the data mentioned above, we obtain:

$$W_{112-12} = \frac{u_{12}}{w^2 - u_{11} - u_{12}} = \frac{10}{w^2 - 11,3}, \quad W = \frac{u}{w^2 - 2u} = \frac{12,5}{w^2 - 25}$$

which are all non-dimensional.

For example with $w^2 = 2 \cdot 10^4$ we obtain:

$$W_{112-12} = -1,08, \quad W = -0,54, \quad W^2 = 0,29$$

and we have:

$$\bar{B}_5 = -1,08(-0,54)(1 - 0,29) + 0,58 = 0,995$$

We shall continue the calculation of \bar{B}_5 with estimating of w^2 and the results are arranged in tabular form, with which it is possible to avoid errors. If $\bar{B}_5 = 1$ or with high degree of accuracy equated 1, we shall find the angular velocity w for calculating the natural vibration of the torsional vibration.

w^2	W_{112-12}	W	\bar{B}_5
1 · 10 ⁴	-0,97	-0,52	0,905
2 · 10 ⁴	-1,08	-0,54	0,995
3 · 10 ⁴	-1,2	-0,57	1,102
4 · 10 ⁴	-1,37	-0,6	1,245
5 · 10 ⁴	-1,58	-0,625	1,38
6 · 10 ⁴	-1,87	-0,66	1,565
10 · 10 ⁴	-7,7	-0,84	3,7
11,3 · 10 ⁴	∞		∞

From this group we obtain:

$$w^2 = 2 \cdot 10^4$$

to calculate the natural frequency. The result obtained is accurate for practical purposes. We shall continue this tabular statement in a similar manner.

w^2	W_{112-13}	W	\bar{B}_5
$11,5 \cdot 10^4$	50	- 0,92	-5,2
$12 \cdot 10^4$	14,3	- 0,95	0,75
$12,05 \cdot 10^4$	13,3	- 0,965	0,97
$12,1 \cdot 10^4$	12,5	- 0,97	1,35
$12,2 \cdot 10^4$	11,1	- 0,98	1,48
$13 \cdot 10^4$	5,9	- 1,05	2,82
$15 \cdot 10^4$	2,7	- 1,25	5,01
$20 \cdot 10^4$	1,15	- 2,5	27,50
$25 \cdot 10^4$		∞	∞

In this group we obtain

$$w^2 = 12,05 \cdot 10^4$$

to calculate the natural frequency. Further we have :

w^2	W_{112-12}	W	\bar{B}_5
$20 \cdot 10^4$	0,535	2,5	5,5
$40 \cdot 10^4$	0,35	0,83	2,385
$43 \cdot 10^4$	0,316	0,7	1,09
$45 \cdot 10^4$	0,295	0,62	0,883
$50 \cdot 10^4$	0,258	0,5	0,597

In this group we obtain :

$$w^2 = 43 \cdot 10^4$$

As the third angular velocity for calculating the third natural frequency from it and the fourth and the last angular velocity for calculating the natural frequency, will be arrived at in the same manner. It implies no novel feature.

Practical exercises

With numerical examples and control of the result.

Example for three masses

The system has the following specification :

$$u_{11} = 1,33 \cdot 10^4, u_{12} = 2 \cdot 10^4, u_{22} = 1,43 \cdot 10^4, u_{23} = 2,4 \cdot 10^4$$

The natural frequencies of this system are given by the equation : [1], under literature.

$$w^4 - w^2(u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23}) + u_{11}(u_{22} + u_{23}) + u_{12} \cdot u_{23} = 0$$

Substituting the numerical data in this equation, this becomes :

$$w^4 - w^2(1,33 + 2 + 1,43 + 2,4) 10^4 + 1,33(1,43 + 2,4) 10^8 + 2 \cdot 2,4 \cdot 10^8 = 0$$

or

$$w^4 - 7,16 \cdot 10^4 w^2 + 9,9 \cdot 10^8 = 0$$

The quadratic equation in w^2 has two roots :

$$w_1^2 = 5,25 \cdot 10^4 \text{ and } w_2^2 = 1,87 \cdot 10^4$$

With these roots using (14) we obtain :

$$\bar{B}_3 = W_{112-12} \cdot W_{223-22} = \frac{u_{13} \cdot u_{22}}{(w^2 - u_{11} - u_{12}) \cdot (w^2 - u_{22} - u_{23})}$$

With w_1 we obtain :

$$\frac{2 \cdot 1,43}{(5,25 - 3,32) \cdot (5,25 - 3,83)} = 1$$

and with w_2 :

$$\frac{2 \cdot 1,43}{(1,87 - 3,32) \cdot (1,87 - 3,83)} = 1$$

and in this manner we have control of the results obtained above.

Example for four masses

The system has the following specification :

$$u_{11} = 1,33 \cdot 10^4, u_{12} = 2 \cdot 10^4, u_{22} = 2,5 \cdot 10^4, u_{23} = 8,3 \cdot 10^4, u_{33} = u_{34} = u = 5,5 \cdot 10^4$$

With the following notation :

$$k_{34} = 5,5 \cdot 10^4$$

$$u_{33} + k_{34} = k_{334} = 11 \cdot 10^4$$

$$u_{23} + k_{334} = k_{234} = 19,3 \cdot 10^4$$

$$u_{22} + k_{234} = k_{2234} = k_{22-4} = 21,8 \cdot 10^4$$

$$u_{12} + k_{22-4} = k_{12-4} = 23,8 \cdot 10^4$$

$$u_{11} + k_{12-4} = k_{11-4} = 25,13 \cdot 10^4$$

Substituting the numerical data in the frequency equation [1], we obtain :

$$w^6 - w^4 \cdot 25,13 \cdot 10^4 + w^2 (1,33 \cdot 21,8 + 2 \cdot 19,3 + 2,5 \cdot 11 + 8,3 \cdot 5,5) 10^8 - [1,33 (2,5 \cdot 11 + 8,3 \cdot 5,5) + 2 \cdot 8,3 \cdot 5,5] 10^{12} = 0$$

The result of the computation is as follows :

$$w^6 - w^4 \cdot 25,13 \cdot 10^4 + w^2 \cdot 140 \cdot 10^8 - 188 \cdot 10^{12} = 0$$

Denotating:

$$U = w^6 + w^2 \cdot 140 \cdot 10^8 \quad \text{and} \quad V = w^4 \cdot 25,13 \cdot 10^4 + 188 \cdot 10^{12}$$

$$U = V$$

This way it is made easy to find one root with the theorem of the regula falsi :

$$w_1^2 = 2 \cdot 10^4$$

Considering this root, it remains a quadratic equation which may be solved by the ordinary rules and we obtain :

$$w_2^2 = 5,32 \cdot 10^4 \text{ and } w_3^2 = 17,68 \cdot 10^4$$

To justify these results we shall use the equation (17) and we obtain :

$$\begin{aligned} \text{for } w_1^2 \quad W_{112-12} \cdot W_{223-22} &= \frac{u_{12} \cdot u_{22}}{(w_1^2 - u_{11} - u_{12}) \cdot (w_1^2 - u_{22} - u_{23})} = \\ &= \frac{2 \cdot 2,5}{(2 - 3,33) \cdot (2 - 10,8)} = \frac{5}{11,7} = 0,43 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} W_{223-23} \cdot W_{334-33} &= \frac{u_{23} \cdot u_{33}}{(w_1^2 - u_{22} - u_{23}) \cdot (w_1^2 - u_{33} - u_{34})} = \\ &= \frac{8,3 \cdot 5,5}{(2 - 10,8) \cdot (2 - 11)} = \frac{45,5}{8,8 \cdot 9} = 0,57 \end{aligned}$$

The results added, we obtain :

$$0,43 + 0,57 = 1$$

For w_2^2 with the same expressions as before :

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 2,5}{(5,32 - 3,33) \cdot (5,32 - 10,8)} &= \frac{-5}{10,96} = -0,47 \\ \frac{8,3 \cdot 5,5}{(5,32 - 10,8) \cdot (5,32 - 11)} &= \frac{45,5}{31,2} = 1,46 \end{aligned}$$

The results added, we obtain :

$$-0,47 + 1,46 = 0,99$$

For w_3^2 with the same expression as before :

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 2,5}{(17,68 - 3,33) \cdot (17,68 - 10,8)} &= \frac{5}{90} = 0,098 \\ \frac{8,3 \cdot 5,5}{(17,68 - 10,8) \cdot (17,68 - 11)} &= \frac{45,5}{46} = 0,99 \end{aligned}$$

The results added, we obtain :

$$0,098 + 0,99 = 1,088$$

and in this manner we have controlled the results obtained above.

Example for five masses

The system has the following specification :

$$u_{11} = 0,087 \cdot 10^4, \quad u_{12} = 0,103 \cdot 10^4, \quad u_{22} = 0,133 \cdot 10^4, \quad u_{23} = 13,2 \cdot 10^4$$

$$u = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = 17,3 \cdot 10^4$$

With the following denotations :

$$u = 17,3 \cdot 10^4 = I k_{45} \cdot 17,3 \cdot 10^4 = 299 \cdot 10^8 = A_{34-5}$$

$$2u = 34,6 \cdot 10^4 = I k_{445} \cdot 17,3 \cdot 10^4 + 299 \cdot 10^8 = 898 \cdot 10^8 = A_{33-4}$$

$$3u = 51,9 \cdot 10^4 = I k_{345} \cdot 13,2 \cdot 10^4 + 898 \cdot 10^8 = 1583 \cdot 10^8 = A_{23-5}$$

$$4u = 69,2 \cdot 10^4 = I k_{33-5} \cdot 0,133 \cdot 10^4 + 1583 \cdot 10^8 = 1592 \cdot 10^8 = A_{22-5}$$

$$u_{23} + 4u = 13,2 \cdot 10^4 + 69,2 \cdot 10^4 = 82,4 \cdot 10^4 = k_{23-5}$$

$$u_{22} + k_{23-5} = 0,133 \cdot 10^4 + 82,4 \cdot 10^4 = 82,53 \cdot 10^4 = k_{22-5}$$

$$u_{12} + k_{22-5} = 0,103 \cdot 10^4 + 82,53 \cdot 10^4 = 82,63 \cdot 10^4 = k_{12-5}$$

$$u_{11} + k_{12-5} = 0,087 \cdot 10^4 + 82,63 \cdot 10^4 = 82,72 \cdot 10^4 = k_{11-5}$$

Substituting these numerical data in the frequency equation, we obtain : [1]

$$w^8 - w^6 \cdot 82,72 \cdot 10^4 + w^2 (0,087 \cdot 82,53 + 0,103 \cdot 82,4 +$$

$$+ 1592) 10^8 - w^2 (0,087 \cdot 1592 + 0,103 \cdot 1583 + 0,133 \cdot 898 + 13,2 \cdot 299) 10^8 +$$

$$+ 0,087 (0,133 \cdot 898 + 13,2 \cdot 299) 10^{16} + 0,103 \cdot 13,2 \cdot 299 \cdot 10^{16} = 0$$

After the arithmetical operation we obtain :

$$w^8 - w^6 \cdot 82,72 \cdot 10^4 + w^4 1608 \cdot 10^8 - w^2 4378 \cdot 10^{12} + 788 \cdot 10^{16} = 0$$

By applying the theorem of the regula falsi, we obtain two roots of this equation :

$$w_1^2 = 0,187 \cdot 10^4 \text{ and } w_2^2 = 3 \cdot 10^4$$

Only with these two roots we shall continue our control of calculation using expression (20).
With w_1^2 we obtain:

$$W_{112-12} \cdot W_{223-22} = \frac{u_{12} \cdot u_{22}}{(w_1^2 - u_{11} - u_{12}) \cdot (w_1^2 - u_{22} - u_{23})} = \frac{0,103 \cdot 0,133}{(0,187 - 0,19) \cdot (0,187 - 13,33)} = 0,35$$

$$W_{223-23} \cdot W = \frac{u_{23} \cdot u}{(w_1^2 - u_{22} - u_{23}) \cdot (w_1^2 - 2u)} = \frac{13,2 \cdot 17,3}{(0,187 - 13,33) \cdot (0,187 - 34,6)} = 0,507$$

$$W_{334-34} \cdot W_{445-44} = W^2 = \frac{17,3^2}{(0,187 - 34,6)^2} = 0,252$$

$$W_{112-12} \cdot W_{223-22} \cdot W^2 = 0,35 \cdot 0,252 = 0,088$$

The final result is (Table II):

$$0,35 + 0,507 + 0,252 - 0,088 = 1,021$$

With w_2^2 we obtain in the same manner :

$$\frac{0,103 \cdot 0,133}{(3 - 0,19) \cdot (3 - 13,33)} = \frac{0,0137}{-25} = -0,00047$$

$$\frac{13,2 \cdot 17,3}{(3 - 13,33) \cdot (3 - 34,6)} = \frac{299}{326} = 0,7$$

$$\frac{299}{(3 - 34,5)^2} = \frac{299}{998} = 0,3$$

0,00047 · 0,3 can be neglected and the final result is :

$$0,7 + 0,3 - 0,00047 = 0,99953$$

and in this manner we have justified the results obtained as above.

Another example for five masses. For five masses we shall obtain by the method described in [1] under literature, frequency equation solved at the same time but only for two roots. With the formula (9) we shall control these results using the third (B_3) and fourth (B_4) frequency expressions which are lower than the original frequency equation.

The system has the following specification :

$$u_{11} = 1,33 \cdot 10^4, \quad u_{12} = 2 \cdot 10^4, \quad u_{22} = 3,3 \cdot 10^4, \quad u_{23} = 16,5 \cdot 10^4$$

$$u = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = 12,5 \cdot 10^4$$

The frequency equation obtained by the method described in [1] under literature, is as follows :

$$u = 12,5 \cdot 10^4 = I k_{45} \cdot 12,5 \cdot 10^4 = 156 \cdot 10^8 = A_{345}$$

$$2u = 25 \cdot 10^4 = I k_{445} \cdot 12,5 \cdot 10^4 + 156 \cdot 10^8 = 468,5 \cdot 10^8 = A_{33-5}$$

$$3u = 37,5 \cdot 10^4 = I k_{345} \cdot 16,5 \cdot 10^4 + 468,5 \cdot 10^8 = 1087 \cdot 10^8 = A_{23-5}$$

$$4u = 50 \cdot 10^4 = I k_{33-5} \cdot 3,3 \cdot 10^4 + 1087 \cdot 10^8 = 1252 \cdot 10^8 = A_{22-5}$$

$$u_{23} + 4u = 16,5 \cdot 10^4 + 50 \cdot 10^4 = 66,5 \cdot 10^4 = k_{23-5}$$

$$u_{22} + k_{23-5} = 3,3 \cdot 10^4 + 66,5 \cdot 10^4 = 69,8 \cdot 10^4 = k_{22-5}$$

$$u_{12} + k_{22-5} = 2 \cdot 10^4 + 69,8 \cdot 10^4 = 71,8 \cdot 10^4 = k_{12-5}$$

$$u_{11} + k_{12-5} = 1,33 \cdot 10^4 + 71,8 \cdot 10^4 = 73,13 \cdot 10^4 = k_{11-5}$$

$$w^8 - w^6 \cdot 73,13 \cdot 10^4 + w^4 (1,33 \cdot 69,8 + 2 \cdot 66,5 + 1252) 10^8 -$$

$$- w^2 (1,33 \cdot 1252 + 2 \cdot 1057 + 3,3 \cdot 468,5 + 16,5 \cdot 156) 10^{12} +$$

$$+ 1,33 (3,3 \cdot 468,5 + 16,5 \cdot 156) 10^{16} + 2 \cdot 16,5 \cdot 156 \cdot 10^{16} = 0$$

After the arithmetical operation we obtain :

$$w^8 - w^6 \cdot 73,13 \cdot 10^4 + w^4 \cdot 1478 \cdot 10^8 - w^2 \cdot 7956 \cdot 10^{12} + 10 \cdot 650 \cdot 10^{16} = 0$$

By applying the theorem of regula falsi, we obtain two roots of this equation. More roots are not necessary because these give no novel feature for our computation. These roots are as follows:

$$w_1^2 = 2,05 \cdot 10^4 \text{ and } w_2^2 = 5,16 \cdot 10^4$$

Now we shall set up the frequency expressions as follows: B_3 and B_4 [1] under literature, using the data given above:

$$B_3 = w^4 - w^2 \cdot k_{11-3} + u_{12} \cdot k_{223} + u_{12} \cdot k_{23}$$

and we have the following:

$$k_{11-3} = 1,33 + 2 + 3,3 + 16,5 = 23,23 \cdot 10^4$$

$$k_{22-3} = 3,3 + 16,5 = 19,8 \cdot 10^4, \quad k_{23} = u_{23} = 16,5 \cdot 10^4$$

Substituting these results in B_3 , we obtain:

$$w^4 - 23,23 \cdot 10^4 + 1,33 \cdot 19,8 \cdot 10^8 + 2 \cdot 16,5 \cdot 10^8 = B_3 = w^4 - w^2 \cdot 23,23 \cdot 10^4 + 59,4 \cdot 10^8$$

For B_4 we obtain under literature [1]:

$$B_4 = w^6 - w^4 \cdot k_{11-4} + w^2 (u_{11} \cdot k_{22-4} + u_{12} \cdot k_{23-4} + u_{22} \cdot k_{33-4} + u_{23} \cdot k_{34}) - \\ - [u_{11} (u_{22} \cdot k_{33-4} + u_{23} \cdot k_{34}) + u_{12} \cdot u_{23} \cdot k_{34}]$$

In this expression we have:

$$k_{34} = u_{34} = 12,5 \cdot 10^4$$

$$k_{334} = 2u = 25 \cdot 10^4$$

$$k_{23-4} = u_{23} + k_{334} = (16,5 + 25) \cdot 10^4 = 41,5 \cdot 10^4$$

$$k_{22-4} = u_{22} + k_{23-4} = (3,3 + 41,5) \cdot 10^4 = 44,8 \cdot 10^4$$

$$k_{12-4} = u_{12} + k_{22-4} = (2 + 44,8) \cdot 10^4 = 46,8 \cdot 10^4$$

$$k_{11-4} = (1,33 + 46,8) \cdot 10^4 = 48,13 \cdot 10^4$$

Substituting them in B_4 , it becomes:

$$B_4 = w^6 - w^4 \cdot 48,13 \cdot 10^4 + w^2 (1,33 \cdot 44,8 + 2 \cdot 41,5 + 16,5 \cdot 12,5 + \\ + 3,3 \cdot 25) 10^8 - [1,33 (3,3 \cdot 25 + 16,5 \cdot 12,5) + 2 \cdot 16,5 \cdot 12,5] 10^{12}$$

After the arithmetical operation we obtain:

$$B_4 = w^6 - w^4 \cdot 48,13 \cdot 10^4 + w^2 \cdot 431,18 \cdot 10^8 - 793 \cdot 10^{12}$$

Substituting all these values in equation (9):

$$\frac{B_4}{B_3} = \frac{u_{34} \cdot u_{44}}{w^2 - u_{44} - u_{45}}$$

using the two roots w_1 and w_2 , and dividing them by 10^{12} , we obtain

$$\frac{\frac{w^6}{10^{12}} - \frac{w^4}{10^8} 48,13 + \frac{w^2}{10^4} 431 - 793}{\frac{w^4}{10^{12}} - \frac{w^2}{10^8} 23,23 + \frac{59,4}{10^4}} = \frac{12,5^2}{\frac{w^2}{10^8} - \frac{25}{10^4}}$$

Substituting:

$$w_1^2 = 2,05 \cdot 10^4, w_1^4 = 4,2 \cdot 10^8, w_1^6 = 8,615 \cdot 10^{12}$$

we obtain:

$$\frac{8,62 - 4,2 \cdot 48,13 + 2,05 \cdot 431 - 793}{\frac{4,2}{10^4} - \frac{2,05 \cdot 23,23}{10^4} + \frac{59,4}{10^4}} = -6,8 \cdot 10^4$$

and

$$\frac{156}{\frac{2,05}{10^4} - \frac{25}{10^4}} = -6,85 \cdot 10^4$$

We shall repeat this computation with the second root:

$$w_2^2 = 5,16 \cdot 10^4, w_2^4 = 25,63 \cdot 10^8, w_2^6 = 137,39 \cdot 10^{12}$$

In the same manner as above:

$$\frac{137,4 - 26,63 \cdot 48,13 + 5 \cdot 16 \cdot 431 - 793}{\frac{26,63}{10^4} - \frac{5,16 \cdot 23,23}{10^4} + \frac{59,4}{10^4}} = -8,2 \cdot 10^4$$

and

$$\frac{156}{\frac{5,16}{10^4} - \frac{25}{10^4}} = -7,9 \cdot 10^4$$

Although the difference between these two results is permitted, yet a little correction might be recommended.

Example for seven masses

The system has the following specification:

$$u_{11} = 0,068 \cdot 10^6, u_{12} = 14,65 \cdot 10^6$$

$$u = u_{22} = u_{23} = \dots = u_{67} = 21,4 \cdot 10^6$$

With the equation (32) (Table I) we shall control the angular velocity

$$w^2 = 9,6 \cdot 10^6$$

Obtained by an other method, we have:

$$W_{112-12} = \frac{u_{12}}{w^2 - u_{11} - u_{12}} = \frac{14,65}{9,6 - 14,718} = -2,86$$

and for

$$W = \frac{u}{w^2 - 2u} = \frac{21,4}{9,6 - 42,8} = -0,65$$

Hence: $W^2 = 0,423$, $W^3 = -0,274$, $W^4 = 0,178$, $W^5 = -0,115$ we obtain:

$$\begin{aligned}\bar{B}_7 &= 2,85 \cdot 0,65 (1 - 3 \cdot 0,65^2 + 0,65^4) + 4 \cdot 0,65^2 - 3 \cdot 0,65^4 = \\ &= 1,86 (1 - 3 \cdot 0,423 + 0,178) + 1,672 - 0,534 = 0,97\end{aligned}$$

The result is satisfactory.

Example for eight masses

The system has the following specification:

$$\begin{aligned}u_{11} &= 1,33 \cdot 10^4, \quad u_{12} = 2 \cdot 10^4, \quad u_{22} = 3,3 \cdot 10^4, \quad u_{23} = 33 \cdot 10^4 \\ u &= u_{33} = u_{34} = \dots = u_{78} = 50 \cdot 10^4\end{aligned}$$

All these data are taken from [1] under literature. The frequency expression is taken from Table II and to use it we shall calculate at first on

$$w^2 = 107 \cdot 10^4$$

The following term:

$$\begin{aligned}W_{112-12} &= \frac{2}{107 - 3,33} = 0,0192, \quad W_{223-23} = \frac{3,3}{107 - 36,3} = 0,0465 \\ W_{223-23} &= 0,465 \quad W = \frac{50}{107 - 100} = 7,1, \quad W^2 = 50, \quad W^4 = 2500\end{aligned}$$

With this result we obtain:

$$\bar{B}_8 = 0,0192 \cdot 0,0465 (1 - 200 + 7500) + 0,465 \cdot 7,1 (1 - 150 + 2500) + 200 - 7500 = 456$$

For

$$w^2 = 107,5 \cdot 10^4$$

we obtain:

$$W_{112-12} = 0,019, \quad W_{223-22} = 0,0463, \quad W_{223-23} = 0,463$$

$W = 6,7$, $W^2 = 45$, $W^4 = 2025$ and substituting these values in the frequency expression:

$$\begin{aligned}\bar{B}_8 &= 0,0,9 \cdot 0,0463 (1 - 180 + 6075) + 0,463 \cdot 6,7 (1 - 135 + 2025) + \\ &+ 180 - 6075 = -24\end{aligned}$$

Between the two w^2 lies the right value of it, but with approximation we can choose

$$w^2 = 107,5 \cdot 10^4$$

The frequency equation of a system with any number of masses

In the foregoing cases we developed one by one the frequency expressions which were deduced from the frequency determinant denoted by $B_n \cdot n$ is the number of the masses of the system. $B_n = 0$ is their frequency equation.

Generalizing the problem and using the results obtained, we will investigate whether it is possible to develop the frequency equation for a system of any masses.

The solution of this problem we shall show on a system of nine masses.

We have already observed — taking also in consideration the three conditions on page 316 — that the number of the members in the frequency equations are always by one less than the masses of the system. Therefore, for a system with nine masses, every member has eight factors. It follows that if, for example, in a member the factors of u are six, the same of W are two. It is also sufficient to occupy ourselves with the pairs of u as with these the forms of the members are fully known.

For a system of nine masses, the first member contains only W with positive signs. The following members have already one, two, three and four pairs of u . We shall develop only the pairs of u .

We will now deal with the problem of a system of nine masses.

The case of nine masses

We shall carry out the construction of the frequency expression from which the frequency equation can be deduced.

1. First member-group. Contains only W . The factors of the members are eight. The sign. of the member is positive.

2. Second member-group. The u pairs in this group are :

$$u_{12} \cdot u_{22}$$

$$u_{23} \cdot u_{33}$$

$$u_{34} \cdot u_{44}$$

$$u_{45} \cdot u_{55}$$

$$u_{56} \cdot u_{66}$$

$$u_{67} \cdot u_{77}$$

$$u_{78} \cdot u_{88}$$

The number of the members is seven, and each has six factors of W . The sign of these members is negative.

3. Third member-group. These members have already two pairs of u :

$$u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{34} \cdot u_{44}$$

$$u_{23} \cdot u_{33} \cdot u_{45} \cdot u_{55}$$

$$u_{34} \cdot u_{44} \cdot u_{56} \cdot u_{66}$$

$$u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{45} \cdot u_{55}$$

$$u_{23} \cdot u_{33} \cdot u_{56} \cdot u_{66}$$

$$u_{34} \cdot u_{44} \cdot u_{67} \cdot u_{77}$$

$$u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{56} \cdot u_{66}$$

$$u_{23} \cdot u_{33} \cdot u_{67} \cdot u_{77}$$

$$u_{34} \cdot u_{44} \cdot u_{78} \cdot u_{88}$$

$$\begin{array}{ll}
 u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{67} \cdot u_{77} & u_{23} \cdot u_{33} \cdot u_{77} \cdot u_{78} \\
 u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{78} \cdot u_{88} & \\
 u_{45} \cdot u_{55} \cdot u_{67} \cdot u_{77} & \\
 u_{45} \cdot u_{55} \cdot u_{78} \cdot u_{88} & \\
 & u_{56} \cdot u_{66} \cdot u_{78} \cdot u_{88}
 \end{array}$$

The rule to form the pairs is clear. The sign of these members is positive.

4. Fourth member-group. Contains three pairs of u , with negative signs. The number of the W factors is 2.

$$\begin{array}{ll}
 u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{34} \cdot u_{44} \cdot u_{55} \cdot u_{56} & u_{23} \cdot u_{33} \cdot u_{45} \cdot u_{55} \cdot u_{67} \cdot u_{77} \\
 u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{34} \cdot u_{44} \cdot u_{67} \cdot u_{77} & u_{23} \cdot u_{33} \cdot u_{45} \cdot u_{55} \cdot u_{78} \cdot u_{88} \\
 u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{34} \cdot u_{44} \cdot u_{87} \cdot u_{88} & u_{23} \cdot u_{33} \cdot u_{56} \cdot u_{66} \cdot u_{78} \cdot u_{88} \\
 u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{45} \cdot u_{55} \cdot u_{67} \cdot u_{77} & \\
 u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{45} \cdot u_{55} \cdot u_{78} \cdot u_{88} & \\
 u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{56} \cdot u_{66} \cdot u_{78} \cdot u_{88} & \\
 & u_{34} \cdot u_{44} \cdot u_{56} \cdot u_{66} \cdot u_{78} \cdot u_{88}
 \end{array}$$

5. Fifth member-group. Contains four pairs of u , without W , with positive signs.

$$u_{12} \cdot u_{22} \cdot u_{34} \cdot u_{44} \cdot u_{56} \cdot u_{66} \cdot u_{78} \cdot u_{88}$$

It is impossible to produce further groups.

In considering the five groups we observe that it is the first member only to have no u and the last of it is without a W . In the subsequent members the pairs of u grow and at the same time the W diminishes.

REFERENCES

1. A. BALOGH: The computation of the natural frequencies of torsional vibrations with the frequency equation. Bulletins of the Technical Section of the Hungarian Academy of Sc., Budapest. Vol. XV, No. 1 — 4 p. 91. (Torziós lengés önlengésszámának számítása, a karakterisztikus egyenlettel.) And Vol. XVIII, No. 1—4 p. 171 (Hungarian).
2. A. BALOGH: Ein neues Verfahren zum Ermitteln der Eigenschwingungszahlen von Torsionsschwingungen. V. D. I. Z. 1955, p. 178.
3. W. KAMM: Das Kraftfahrzeug, p. 71.

SUMMARY

The author published two theorems for the calculation of the natural frequencies [1,2]. In this paper he publishes a third theorem which is developed by the continuant determinant. This method is superior to the theorem known until now if some of the rotating masses and the stiffnesses of the shafts are equal which is the case with multi-crank engines. This theorem is of course applicable to the control of the results obtained in another manner.

For practical purposes he has made calculation of several examples and has made use of the following papers already published and the methods employed by them.

BEITRAG ZUR BERECHNUNG DER EIGENSCHWINGUNGSZAHLEN
VON TORSIONSSCHWINGUNGEN

A. BALOGH

ZUSAMMENFASSUNG

Die Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Torsionsschwingungen wurde vom Verfasser in zwei Lösungen veröffentlicht [1, 2]. Im vorliegenden Aufsatz wurde eine dritte Methode auf Grund einer hier abgeleiteten Eigenschaft der Continuant-Determinanten entwickelt. Diese Methode hat wegen seiner Einfachheit besonders dann eine Berechtigung — wie es auch den praktischen Fällen entspricht — wenn mehrere Massen und die entsprechende Steifigkeiten der Welle gleich sind. Natürlich kann diese Methode auch zur Kontrolle solcher Ergebnisse, die auf andere Weise ermittelt wurden, verwendet werden.

Für die praktische Anwendung wurden mehrere Beispiele berechnet und es wurden auch die Ergebnisse und Methoden der schon angeführten Aufsätze benützt.

CONTRIBUTION À LA DÉTERMINATION DE LA FRÉQUENCE PROPRE
DES OSCILLATIONS DE TORSION

A. BALOGH

RÉSUMÉ

Deux méthodes de calcul de la fréquence propre des oscillations de torsion ont déjà été proposées par l'auteur. Le présent article expose une troisième méthode basée sur l'une des thèses y exposées, concernant les déterminantes continues. L'avantage de cette méthode, par rapport aux méthodes déjà connues, est sa simplicité dans le cas où — conformément à la pratique — figurent plusieurs constantes de masse et de ressort égales. On peut naturellement l'utiliser pour la vérification de fréquences propres calculées par d'autres méthodes quelconques.

Du point de vue des applications pratiques, l'auteur a élaboré divers exemples, où il a utilisé les résultats et méthodes des études précédemment publiées.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУТИЛЬНЫХ
КОЛЕБАНИЙ

A. БАЛОГ

РЕЗЮМЕ

Автором ранее было изложено два метода вычисления числа собственных колебаний крутильных колебаний (1, 2). В данной работе излагается третий метод, который исходит из одной теоремы непрерывных детерминант, выведенной в данной работе. Этот метод по сравнению с применявшимися до сих пор методами из-за его простоты имеет преимущество тогда, когда фигурирует ряд равных масс и пружинных постоянных, что соответствует практическому случаю. Естественно, что данный метод можно использовать также для проверки числа собственных колебаний, вычисленного с помощью любого другого метода.

С точки зрения практической применимости было использовано ряд примеров и для данной цели были использованы результаты и методы нижеперечисленных и уже опубликованных работ.

DAS SPANNUNGSFELD IM STREIFEN EINES ZUGBEANSPRUCHTEN T-FÖRMIGEN FLACHSTABES

I. HUSZÁR

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE, LEHRSTUHL FÜR MECHANIK, MISKOLC

[Eingegangen am 14. September 1956]

Bei der Lösung von Elastizitätsproblemen ergibt sich oft die Schwierigkeit, dass man die Randbedingungen nicht genügend kennt. In der Praxis löst man die Aufgabe durch gewisse — möglichst einfache — Voraussetzungen. Eine theoretisch richtige Methode ist es, auf irgend eine Art die Randbedingungen durch Messungen festzustellen und danach mit Hilfe derselben die Lösung zu suchen. Der Verfasser untersuchte beispielsweise ein ebenes Problem, bei dem die fehlenden Randbedingungen durch Spannungsoptik festgestellt wurden.

Der Zweck dieser Arbeit ist die Bestimmung des Spannungsfeldes, welches in dem unendlich langen Streifen eines flachen Stabes von gleichbleibender Dicke (Abb. 1) durch Zug ausgebildet wird.

Es wird angenommen, dass der betrachtete Körper homogen und isotrop ist, sein Stoff dem Hookeschen Gesetz gehorcht und der durch die Beanspruchung entstehende Spannungszustand die Proportionalitätsgrenze nicht überschreitet. In diesem Falle gelten die Grundgleichungen der Elastizitätslehre.

Ein weiterer Vorbehalt ist, dass die Dicke (d) des Körpers gegenüber den in der Ebene xy liegenden Dimensionen klein sei. Dementsprechend kann man die Spannungskomponenten in der Richtung von z vernachlässigen, d. h. man kann mit einem ebenen Spannungszustand rechnen.

*

Mit Hilfe der Grundgleichungen der Elastizitätslehre kann die Spannungsanalyse bloss mit mathematischen Methoden vorgenommen werden.

Bei einer Platte gleichförmiger Dicke, wenn sie eine mit der Ebene xy parallele Mittelebene besitzt und wenn sich in ihr ein zweiachsiger Spannungszustand befindet (also $\sigma_z^* = 0 = \tau_{zx}^* = \tau_{zy}^*$), kann man nachweisen, dass

$$\sigma_x^* = \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy}^* = - \frac{\partial^2 F^*}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y^* = \frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2}, \quad (1)$$

wo

$$F^* = F(x, y) + \frac{\nu}{1 + \nu} \left(\frac{d^2}{24} - \frac{z^2}{2} \right) \Delta F(x, y) \quad [1] \quad (2)$$

(ν bedeutet die Poissonsche Konstante)

und

$$\Delta \Delta F = 0. \quad (3)$$

Umgekehrt aber kann man behaupten, dass die Beanspruchung zweiachsig sein wird, wenn man die Belastung am Rande der Platte diesen Ausdrücken gemäss verwirklicht.

Der gleiche Fall ist mit guter Annäherung im geprüften Gebiet auch dann gegeben, wenn die gleichmässige Belastung p und q in genügender Entfernung von dieser Stelle verwendet wird [2] (Siehe Abb. 1).

Ist nämlich die Belastung im Unendlichen, so stimmen die Spannungen in genügender Entfernung von der Durchgangsstelle — entsprechend dem De Saint Venantschen Prinzip — mit den Werten p und q überein. Lässt man diese also wie äussere Kräfte wirken, so ist das den Beziehungen (1), (2) und (3) just angepasst.

Die mittleren Spannungen ergeben sich in der Richtung der Achse z durch

$$\sigma_x = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} \sigma_x^* dz = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (4)$$

die in Kenntnis der Airyschen Spannungsfunktion $F = F(x, y)$ ausgerechnet werden können.

Mit der Verkleinerung der Dimension d nimmt die Abweichung der Mittelwerte im Vergleich zu den in der Richtung z gerechneten Spannungswerten selbstverständlich ab, und man kann sie im Falle sehr dünner Platten mit guter Annäherung vernachlässigen.

Im Folgenden wird mit diesen Mittelwerten gerechnet werden.

Zur Lösung des gegebenen Problems ist es also nötig, die mit den Randbedingungen übereinstimmende biharmonische Funktion F zu suchen [3].

Mit Ausnahme des Querschnittes $y = 0$ bei dem man weder von den Spannungen noch von der Verzerrung ein Bild gewinnt, kann man die Randbedingungen einfach aufschreiben. Das bedeutet das einzige Hindernis der Lösung auf rein analytischem Wege.

In Anbetracht dessen, dass es sich um ein ebenes Spannungsverhältnis handelt, kann die Analyse im Versuchswege verhältnismässig leicht durchgeführt werden.

Diese Messungen hat der Verfasser mit Spannungsoptik durchgeführt [4], [5].

*

Die Abb. 2 zeigt die Abmessungen des Modells. Seine Belastung erfolgte mit Hilfe der in die Bohrungen A und B eingepassten Bolzen durch die Zug-

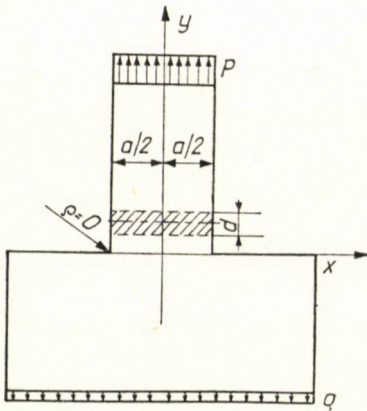


Abb. 1

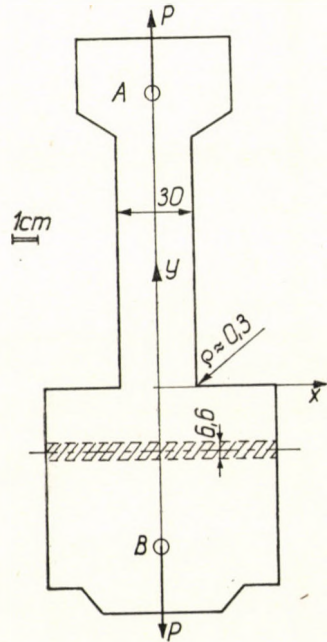


Abb. 2

kraft $P = a \cdot d \cdot p = 124 \text{ kg}$. Die Entfernung der Bohrungen wurde so gewählt, dass im größeren Abschnitt zwischen der Bohrung und der Kerbe der Spannungszustand mit guter Annäherung dem einachsigen Zug entspricht. In diesem Falle stimmt nämlich nach dem De Saint Venantschen Prinzip die Belastung mit den Anfangsbedingungen überein.

Verfasser hat als Modellstoff «Juralit» (ein Kunstharz mit Phenol-Formaldehyd-Basis) und Plexiglas verwendet. Ersteres dient zur Aufnahme der Isochromaten ($m = \text{konst.}$), letzteres zur Aufnahme der Isoklinen ($\varphi = \text{konst.}$).

Abb. 3 stellt die Kuverschar von Isochromaten, Abb. 4 die von Isoklinen dar. Die an die Isochromaten geschriebenen Zahlen bedeuten die Werte von m . Die an den Isoklinen befindlichen Daten zeigen die Neigung der Haupttrichtung 1 gegen die Achse x . Da nach Abb. 4 im Bereich $y > \frac{2}{3} a$ $\varphi \approx 90^\circ$, so kann mit der Schubspannung $\tau \equiv 0$ gerechnet werden, was bedeutet, dass $\sigma_x \equiv \sigma_2 \equiv 0$

ist. Andererseits zeigt das Bild 3, dass hier $m = \text{konst.} \approx 3,1$ ist. Es ist dann $\sigma_y = \sigma_1 = \text{konst.}$ Das entspricht dem Fall, bei welchem wie vorausgesetzt wurde ein einachsiger Spannungszustand sich in einem Teil des Streifens befindet.

Die durch die Isoklinenschar konstruierten Hauptspannungstrajektorien sind in dem Abb. 5 veranschaulicht. Die Ergebnisse der Spannungsanalyse werden in den Querschnitten $y = \text{konst.}$ durch die Abb. 6–15, in den Querschnitten $x = \text{konst.}$ in den Abb. 16–19 gezeigt. Die Linien, welche die einzelnen Querschnitte darstellen, wurden auch in den Bildern 3 und 4 eingezeichnet.

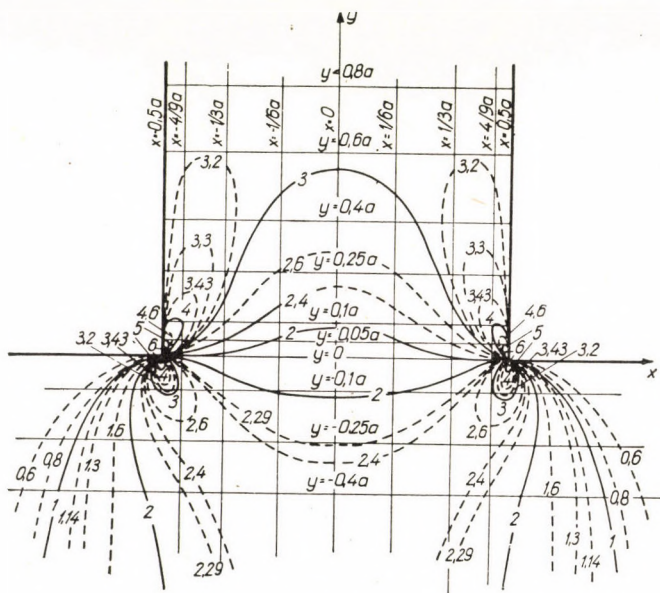


Abb. 3

In den Abb. 20–22 wurden die Spannungen σ_x, σ_y, τ der Anschaulichkeit halber perspektivisch dargestellt.

Aus den Diagrammen geht sehr gut hervor, dass sich die störende Wirkung der Kerbe in dem Streifen praktisch bis $y = 0,6 a$ ausbreitet, aber darüber hinaus kann man sich mit einem Spannungszustand $\sigma_1 = p = \text{konst.}, \sigma_2 = 0 = \tau$ also mit reinem Zug beschäftigen.

Bestimmt man durch Messungen die Kurven σ_y und σ_x im Querschnitt $y = 0$, so kann das Problem auch auf analytischem Weg gelöst werden, weil diese Kurven die fehlenden Randbedingungen liefern.

K. GIRKMANN beschäftigte sich mit dem Fall, bei dem im Querschnitt $y = 0$ die Verschiebung in Ypsilon-Richtung $v = 0$ und $\varepsilon_x = 0$ ist, der Kopf unten starr aufgefasst wird [6]. Vergleicht man seine Lösung mit den Ergeb-

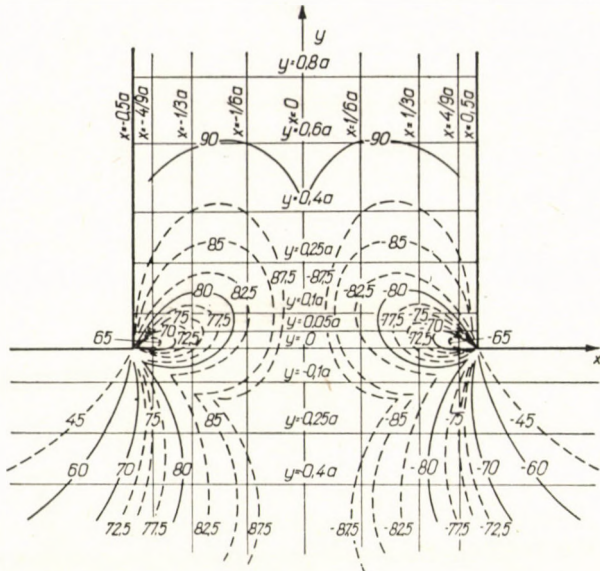


Abb. 4

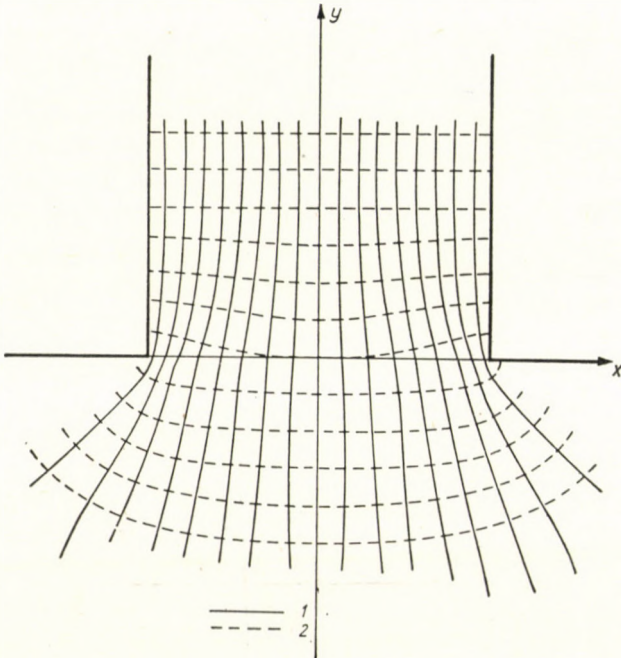


Abb. 5

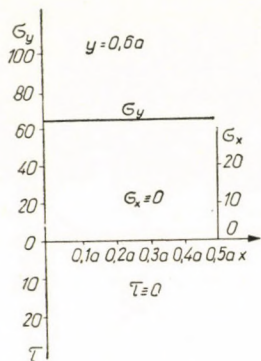


Abb. 6

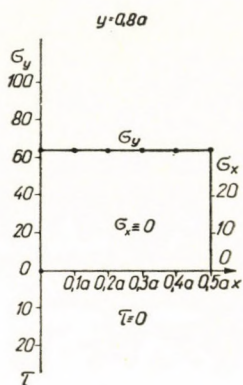


Abb. 7

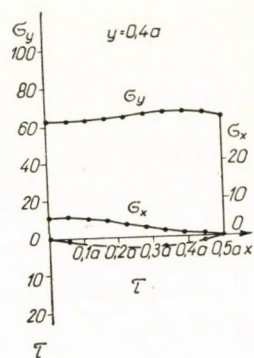


Abb. 8

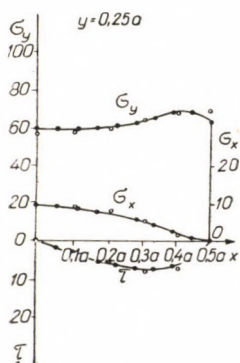


Abb. 9

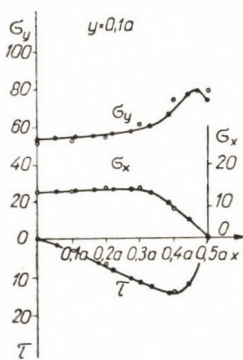


Abb. 10

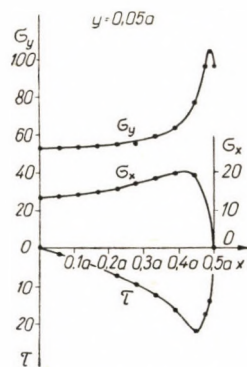


Abb. 11

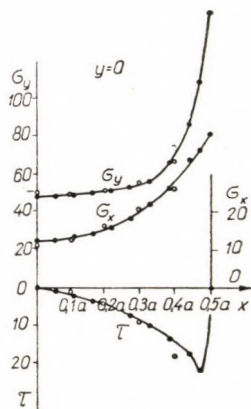


Abb. 12

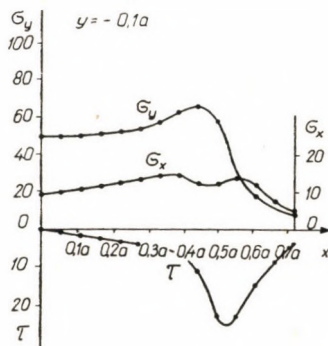


Abb. 13

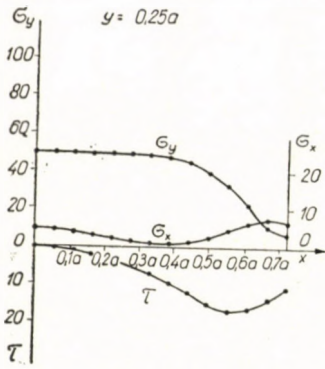


Abb. 14

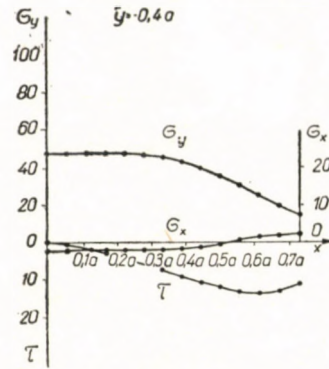


Abb. 15

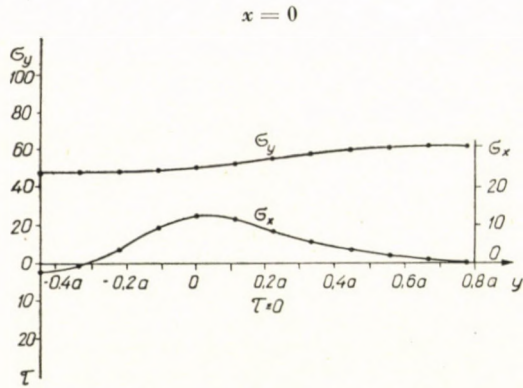


Abb. 16

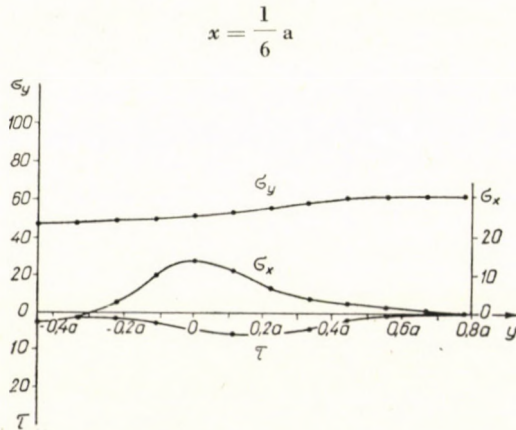


Abb. 17

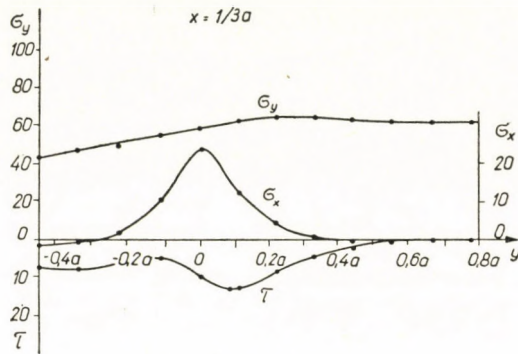


Abb. 18

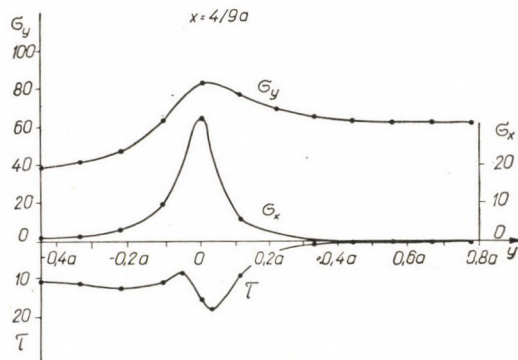


Abb. 19

nissen der Spannungsoptik, so kann besonders im Querschnitt $y = 0$ für die Werte σ_x und σ_y eine Abweichung festgestellt werden. Deshalb ist es richtiger, die Starrheit des Querschnittes $y = 0$ fallen zu lassen und auch den Kopf der Wirklichkeit angepasst elastisch aufzufassen. Das entspricht auch eher den praktischen Problemen, weil es Brauch ist, Maschinenelemente aus denselben oder fast denselben Stoffen, gleichgültig, ob aus einer Platte oder durch Schweißen aus zwei Teilen, herzustellen. Man kann nämlich von vornherein davon absehen, dass die Dicke des Kopfteiles im Verhältnis zu d gross ist, weil dann der Spannungszustand beim Übergang auch annähernd nicht zweiachsig wäre.

Weil bei Zunahme von y die Spannungen in den einzelnen Querschnitten mit den nach ersterem Verfahren berechneten Spannungen immer besser übereinstimmen, ist es zweckmässig, es mit ähnlichen Spannungsfunktionen zu probieren, die eher den im Querschnitt $y = 0$ gemessenen Werten näherkommen.

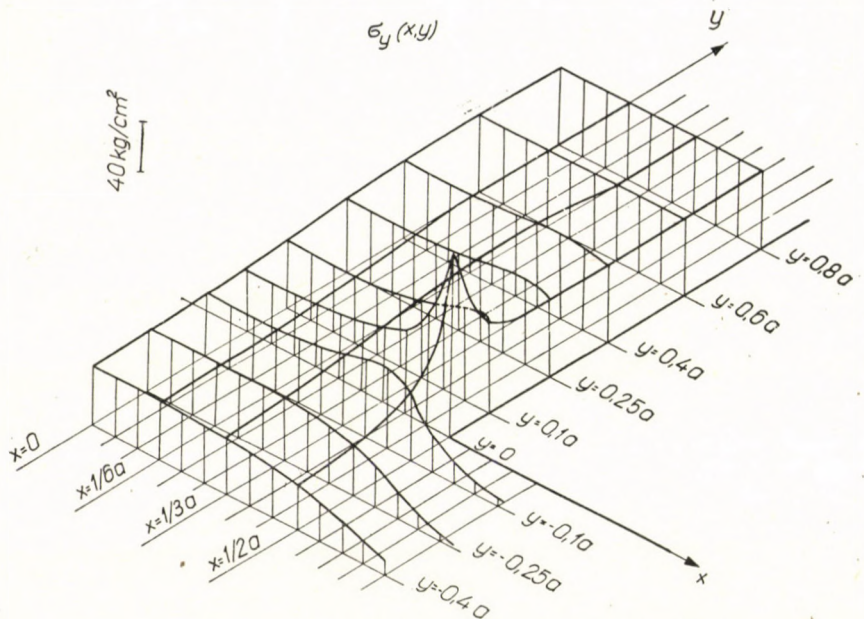


Abb. 20

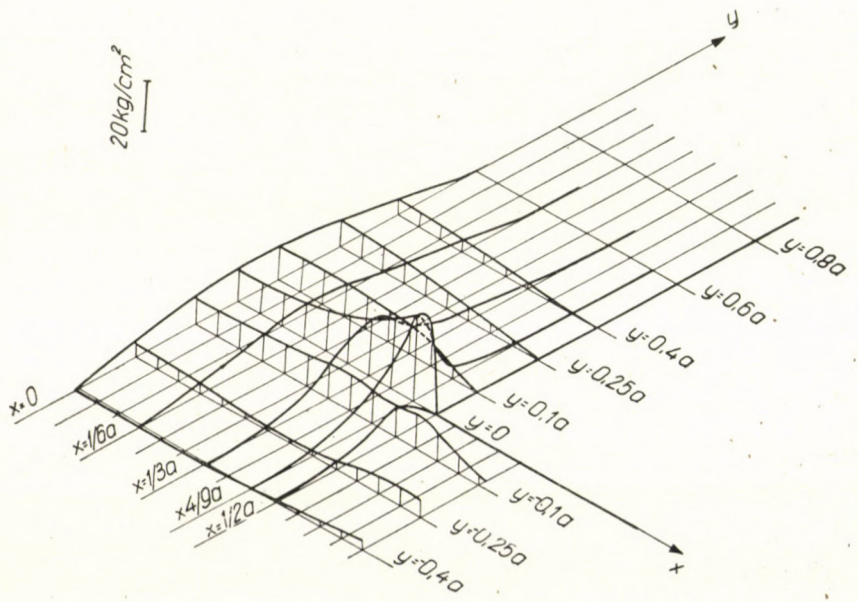


Abb. 21

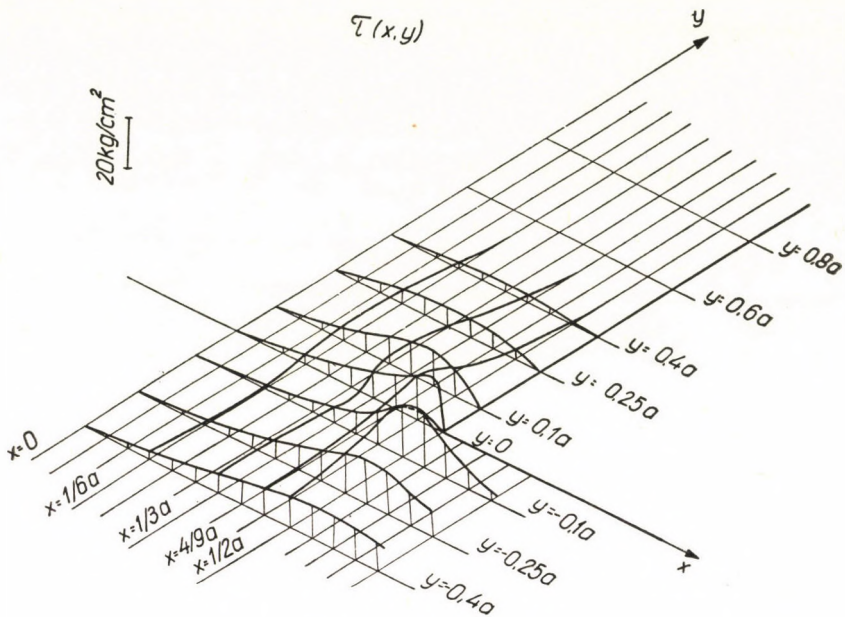


Abb. 22

Die Airysche Spannungsfunktion ergibt sich aus drei Teilen :

$$F = F_0 + F_1 + F_2 . \quad (5)$$

Der erste Teil entspricht dem von der störenden Einwirkung der Kerbe unabhängigen Spannungszustand, d. h. F_0 stellt den reinen Zug dar :

$$F_0 = \frac{1}{2} p x^2 . \quad (6)$$

Die beiden anderen Glieder berücksichtigen gerade die störende Wirkung :

$$F_1 = \sum_n \frac{1}{a_n^2} (A_n + B_n a_n y) e^{-a_n y} \cos a_n x , \quad (7)$$

wo

$$a_n = n \frac{\pi}{a} ; \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (8)$$

Der in diesem Ausdruck erscheinende Faktor $e^{-a_n y}$ entspricht dem Umstand, dass die störende Wirkung mit zunehmendem y rasch abnimmt und

in genügender Entfernung vom Querschnitt $y = 0$ mit guter Annäherung vernachlässigt werden darf.

$$F_2 = \int_0^\infty \frac{1}{\beta^2} (C \operatorname{ch} \beta x + \beta x D \operatorname{sh} \beta x) \cos \beta y d\beta. \tag{9}$$

Die Spannungswerte sind aus der Airyschen Spannungsfunktion auszurechnen :

$$\sigma_{x0} = 0, \tag{10}$$

$$\sigma_{y0} = p, \tag{11}$$

$$\tau_0 = 0. \tag{12}$$

$$\sigma_{x1} = \sum_n [A_n + B_n (a_n y - 2)] e^{-a_n y} \cos a_n x, \tag{13}$$

$$\sigma_{y1} = - \sum_n [A_n + B_n a_n y] e^{-a_n y} \cos a_n x, \tag{14}$$

$$\tau_1 = - \sum_n [A_n + B_n (a_n y - 1)] e^{-a_n y} \sin a_n x. \tag{15}$$

$$\sigma_{x2} = - \int_0^\infty [C \operatorname{ch} \beta x + D \beta x \operatorname{sh} \beta x] \cos \beta y d\beta, \tag{16}$$

$$\sigma_{y2} = \int_0^\infty [(2D + C) \operatorname{ch} \beta x + D \beta x \operatorname{sh} \beta x] \cos \beta y d\beta, \tag{17}$$

$$\tau_2 = \int_0^\infty [(D + C) \operatorname{sh} \beta x + D \beta x \operatorname{ch} \beta x] \sin \beta y d\beta. \tag{18}$$

Der Symmetrie gemäss sollen σ_x und σ_y eine gerade, τ aber soll eine ungerade Funktion sein. Das wird mit der Aufnahme erfüllt.

Die Randbedingungen :

$$x = \pm a/2, \quad \sigma_x = 0, \tag{19}$$

$$x = \pm a/2, \quad \tau = 0, \tag{20}$$

$$y = 0, \quad \sigma_y = \sigma_{y*} f_1(x), \tag{21}$$

$$y = 0, \quad \sigma_x = \sigma_{x*} f_2(x), \tag{22}$$

$$y = \infty, \quad \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = p. \tag{23}$$

Von der Erfüllung der letzteren Beziehung kann man sich sofort überzeugen, denn es ist $\sigma_{x0} = 0$ und $\sigma_{y0} = p$; anderseits im Falle $y \rightarrow \infty, e^{-a_n y} \rightarrow 0$ d. i. $\sigma_{x1} \rightarrow 0, \sigma_{y1} \rightarrow 0$ gleichfalls $\sigma_{x2} \rightarrow 0, \sigma_{y2} \rightarrow 0$.

Die Randbedingungen können nicht durch die Kombination einfacher Funktionen mit den Veränderlichen x bzw. y in geschlossener Form erfüllt werden. In diesem Fall gelangt man zum Ziel, wenn man die Spannungsfunktionen als unendliche Reihen aufstellt. Dies erklärt den Versuch, F_1 bzw. F_2 durch solche Ausdrücke zu lösen.

Die Randbedingung (19) ergibt sich in der Form $\sigma_{x_2} = 0$, weil $\sigma_{x_0} = 0$ und $\sigma_{x_1} = 0$, es gilt nämlich $\cos a_n x = \cos \left(\pm n \frac{\pi}{2} \right) = 0$. Da das bei jedem Wert von y erfüllt wird, muss der Ausdruck unter dem Integralzeichen Null sein, d. i.:

$$C = -D \beta \frac{a}{2} \operatorname{th} \beta \frac{a}{2}. \quad (24)$$

Die Randbedingung (20) kann man nach einigen Umformungen benutzen [6].

$$\tau_1 = - \int_0^{\infty} \sin \beta y \left[\frac{2}{\pi} \sum_n A_n \frac{\beta}{a_n^2 + \beta^2} \sin n \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_n B_n \frac{\beta (a_n^2 - \beta^2)}{(a_n^2 + \beta^2)^2} \sin n \frac{\pi}{2} \right] d\beta. \quad (25)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung (24) ergibt sich

$$\tau_2 = \int_0^{\infty} \sin \beta y \frac{D}{2 \operatorname{ch} \beta \frac{a}{2}} [\beta a + \operatorname{sh} \beta a] d\beta. \quad (26)$$

Da $\tau_0 = 0$, erhält man die Randbedingung wie folgt:

$$\tau_1 + \tau_2 = 0. \quad (27)$$

Das gilt aber bei jedem Wert von y , so soll

$$D = \frac{4}{\pi} \frac{\beta \operatorname{ch} \beta \frac{a}{2}}{\beta a + \operatorname{sh} \beta a} \left[\sum_n A_n \frac{1}{a_n^2 + \beta^2} \sin n \frac{\pi}{2} + \sum_n B_n \frac{a_n^2 - \beta^2}{(a_n^2 + \beta^2)^2} \sin n \frac{\pi}{2} \right] \quad (28)$$

sein.

Die Randbedingung (21) wurde auch mit einigen Umformungen verwendet [6]. Die einzelnen Spannungskomponenten sind

$$\sigma_{y_0} = \frac{4}{\pi} p \sum_n \frac{1}{n} \sin n \frac{\pi}{2} \cos a_n x, \quad (29)$$

$$\sigma_{y1} = - \sum_n A_n \cos a_n x, \tag{30}$$

$$\sigma_{y2} = \frac{8}{a} \int_0^\infty \sum_n D \frac{\alpha_n^3}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} ch \beta \frac{a}{2} \sin n \frac{\pi}{2} \cos a_n x d \beta. \tag{31}$$

Die Funktion $f_1(x)$ ist mit der Fourierschen Reihe durch:

$$f_1(x) = H \sum_n \gamma_n \cos a_n x, \tag{32}$$

gegeben, so gilt es bei jedem Wert von x

$$\sigma_{y0} + \sigma_{y1} + \sigma_{y2} = \sigma_{y*} H \sum_n \gamma_n \cos a_n x. \tag{33}$$

Es folgt dann

$$\frac{4}{\pi} p \frac{1}{n} \sin n \frac{\pi}{2} - A_n + \frac{8}{a} \int_0^\infty D \frac{\alpha_n^3}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} ch \beta \frac{a}{2} \sin n \frac{\pi}{2} d \beta = \sigma_{y*} H \gamma_n. \tag{34}$$

Die Randbedingung (22) kann man auch mit Umformungen verwerten [6]. Die einzelnen Spannungskomponenten sind wie folgt:

$$\sigma_{x0} = 0, \tag{35}$$

$$\sigma_{x1} = \sum_n (A_n - 2 B_n) \cos a_n x, \tag{36}$$

$$\sigma_{x2} = \frac{8}{a} \int_0^\infty \sum_n D \frac{\alpha_n \beta^2}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} ch \beta \frac{a}{2} \sin n \frac{\pi}{2} \cos a_n x d \beta. \tag{37}$$

Man schreibe $f_2(x)$ in Form einer Fourierschen Reihe auf:

$$f_2(x) = J \sum_n \delta_n \cos a_n x, \tag{38}$$

so ist

$$\sigma_{x1} + \sigma_{x2} = \sigma_{x*} J \sum_n \delta_n \cos a_n x, \tag{39}$$

woraus

$$A_n - 2 B_n + \frac{8}{a} \int_0^\infty D \frac{\alpha_n \beta^2}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} ch \beta \frac{a}{2} \sin n \frac{\pi}{2} d \beta = \sigma_{x*} J \delta_n. \tag{40}$$

Mit Hilfe der durch die Randbedingungen gewonnenen Beziehungen können die in der Spannungsfunktion vorkommenden Konstanten A_n , B_n , C und D bestimmt werden.

Um die Ausrechnung durchzuführen, ist es zweckmässig, weitere Umformungen vorzunehmen.

Setzt man die Beziehung (28) in die Ausdrücke (34) und (40) ein, so ergibt sich mit Gleichung (24) und mit Einführung einer neuen Veränderlichen $t = \beta a$

$$\frac{4}{\pi} p \frac{1}{n} - \frac{A_n}{\sin n \frac{\pi}{2}} + 16 n^3 \pi^2 \sum_k A_k \sin k \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \Omega \psi_{n,k} dt -$$

$$- 16 n^3 \pi^2 \sum_k B_k \sin k \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \Omega \Psi_{n,k} dt = \sigma_{y*} H \frac{\gamma_n}{\sin n \frac{\pi}{2}}, \quad (41)$$

$$- \frac{2 B_n}{\sin n \frac{\pi}{2}} + \frac{A_n}{\sin n \frac{\pi}{2}} + 16 n \sum_k A_k \sin k \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \Omega \varphi_{n,k} dt -$$

$$- 16 n \sum_k B_k \sin k \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \Omega \Phi_{n,k} dt = \sigma_{x*} J \frac{\delta_n}{\sin n \frac{\pi}{2}}. \quad (42)$$

Die Bedeutung der in den einzelnen Integralen vorkommenden Funktionen ist wie folgt:

$$\Omega = \frac{1 + cht}{t + sht} t, \quad (43)$$

$$\psi = \frac{1}{(n^2 \pi^2 + t^2)^2} \frac{1}{k^2 \pi^2 + t^2}, \quad (44)$$

$$\Psi = \frac{1}{(n^2 \pi^2 + t^2)^2} \frac{t^2 - k^2 \pi^2}{(k^2 \pi^2 + t^2)^2}, \quad (45)$$

$$\varphi = \frac{t^2}{(n^2 \pi^2 + t^2)^2} \frac{1}{k^2 \pi^2 + t^2}, \quad (46)$$

$$\Phi = \frac{t^2}{(n^2 \pi^2 + t^2)^2} \frac{t^2 - k^2 \pi^2}{(k^2 \pi^2 + t^2)^2}, \quad (47)$$

wo

$$k = 1, 3, 5, \dots \quad (48)$$

Die Auflösung der Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten erfolgt in zwei Schritten und es wird mit der Ausrechnung der Integrale begonnen :

$$\int_0^\infty \Omega \psi_{n,k} dt = \int_0^\infty t \psi_{n,k} dt + \int_0^\infty (\Omega - t) \psi_{n,k} dt. \quad (49)$$

Die Integration des ersten Gliedes ist in geschlossener Form möglich. Man gelangt zu folgenden Ergebnissen :

$$J_{\psi_{n,k}} = \int_0^\infty t \psi_{n,k} dt = \frac{1}{2 \pi^4 (n^2 - k^2)} \left(\frac{1}{n^2 - k^2} \ln \frac{n^2}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n \neq k; \quad (50)$$

$$= \frac{1}{4 \pi^4 n^4}, \quad n = k; \quad (51)$$

$$J_{\Psi_{n,k}} = \int_0^\infty t \Psi_{n,k} dt = \frac{1}{2 \pi^4 (n^2 - k^2)^2} \left(\frac{n^2 + 3 k^2}{n^2 - k^2} \ln \frac{n^2}{k^2} - \frac{3 n^2 + k^2}{n^2} \right), \quad n \neq k; \quad (52)$$

$$= - \frac{1}{12 \pi^4 n^4}, \quad n = k; \quad (53)$$

$$J_{\varphi_{n,k}} = \int_0^\infty t \varphi_{n,k} dt = \frac{1}{2 \pi^2 (n^2 - k^2)^2} \left(\frac{k^2}{k^2 - n^2} \ln \frac{n^2}{k^2} + 1 \right), \quad n \neq k; \quad (54)$$

$$= \frac{1}{4 \pi^2 n^2}, \quad n = k; \quad (55)$$

$$J_{\Phi_{n,k}} = \int_0^\infty t \Phi_{n,k} dt = \frac{1}{2 \pi^2 (n^2 - k^2)^2} \left(\frac{k^2 + 3 n^2}{k^2 - n^2} k^2 \ln \frac{n^2}{k^2} + 3 k^2 + n^2 \right), \quad n \neq k; \quad (56)$$

$$= \frac{1}{12 \pi^2 n^2}, \quad n = k. \quad (57)$$

Das Ausrechnen des zweiten Gliedes wurde im graphischen Verfahren durchgeführt. Es gilt $t \rightarrow \infty$, $(\Omega - 1) \rightarrow 0$. Da es $\Omega - t = -0,00816$ schon im Falle $t = 10$ gibt, kann diesem Wert gegenüber $t = 10$ vernachlässigt werden. So darf das Intergral im allgemeinen nur im Intervall $0 \leq t \leq 10$ durchgeführt werden. Auf Grund der numerischen Ergebnisse gelten mit guter Annäherung

$$\int_0^{\infty} \Omega \psi_{n,k} dt = \int_0^{\infty} t \psi_{n,k} dt. \quad (58)$$

Gleicherweise gilt es auch bei Ψ, φ, Φ .

Die Kurven der im Querschnitt $y = 0$ gemessenen Spannungen (σ_x und σ_y) werden der Vereinfachung halber durch

$$\sigma_{y*} f_1(x) \approx \sigma_{y*} (1 + \varkappa ch \lambda x), \quad (59)$$

$$\sigma_{x*} f_2(x) \approx \sigma_{x*} ch \mu x \quad (60)$$

angenähert. Abb. 23 zeigt die Übereinstimmung der so gewählten (mit o bezeichneten) und der gemessenen (mit \cdot dargestellten) Kurven.

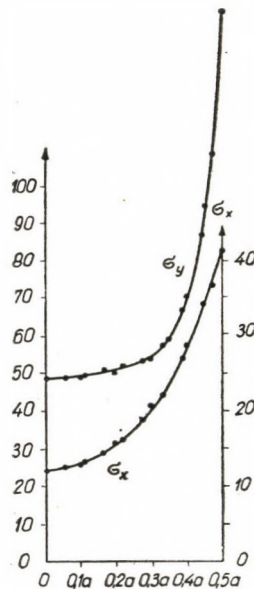


Abb. 23

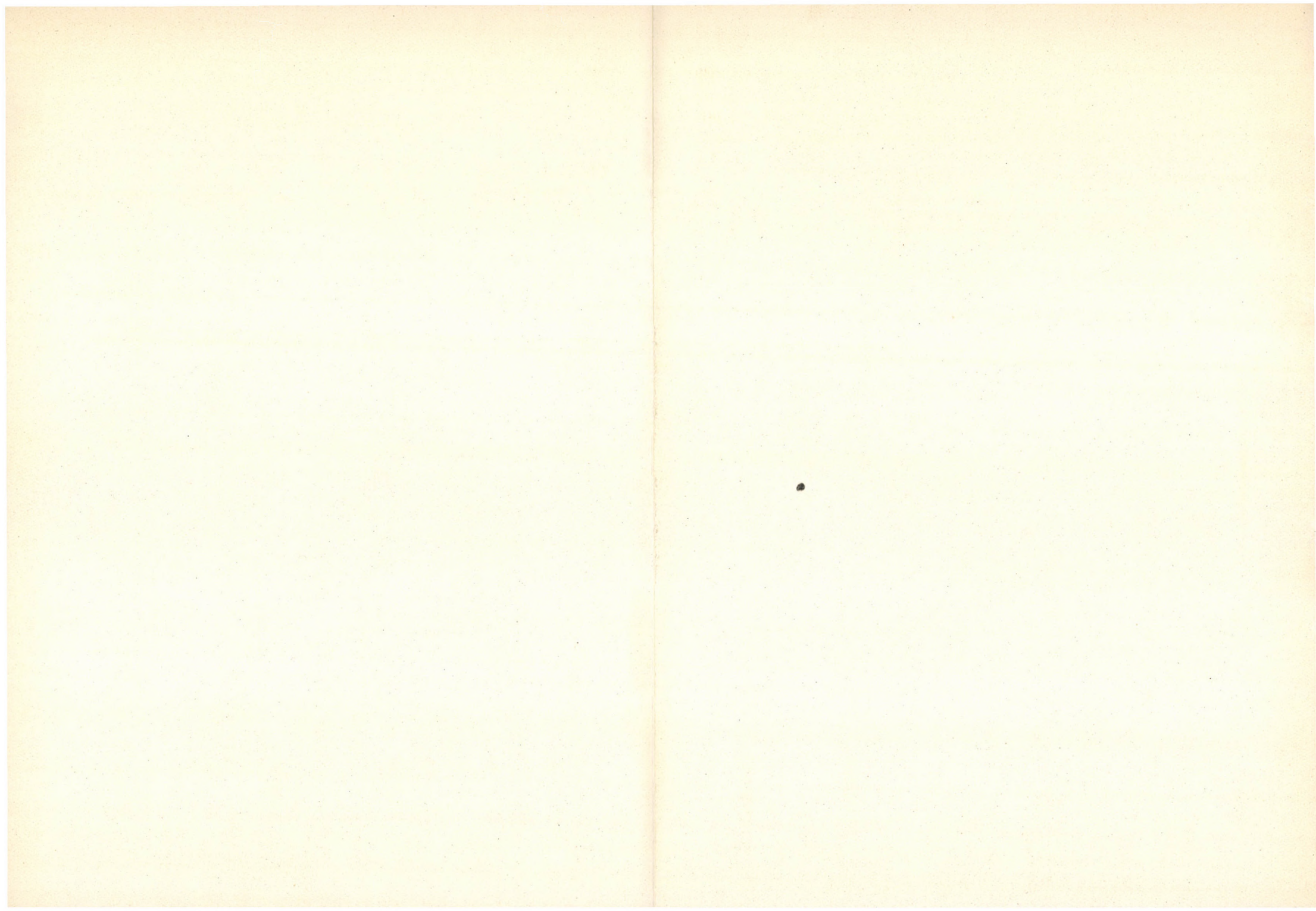
Die gewählten Funktionen ergeben sich durch Fouriersche Reihen

$$\begin{aligned} \sigma_{y*} f_1(x) &= \sigma_{y*} H \sum_n \gamma_n \cos a_n x = \sigma_{y*} 4 \sum_n \sin n \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\pi} \frac{1}{n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varkappa}{a} ch \lambda \frac{a}{2} \frac{a_n}{a_n^2 + \lambda^2} \right) \cos a_n x, \dots \end{aligned} \quad (61)$$

$$\sigma_{x*} f_2(x) = \sigma_{x*} J \sum_n \delta_n \cos a_n x = \sigma_{x*} \frac{4}{a} ch \mu \frac{a}{2} \sum_n \sin n \frac{\pi}{2} \frac{a_n}{a_n^2 + \mu^2} \cos a_n x \dots \quad (62)$$

Tafel II

n	A_{n1}	A_{n3}	A_{n5}	A_{n7}	A_{n9}	A_{n11}	A_{n13}	A_{n15}	B_{n1}	B_{n3}	B_{n5}	B_{n7}	B_{n9}	B_{n11}	B_{n13}	B_{n15}	=
1	-0,5947	-0,0734	+0,0291	-0,0154	+0,0096	-0,0065	+0,0047	-0,0035	+0,2188	-0,0546	+0,0250	-0,0140	+0,0089	-0,0062	+0,0046	-0,0034	-11,9993
	+1,4053	-0,1491	+0,0710	-0,0500	+0,0350	—	—	—	-2,1351	-0,0210	+0,0250	—	—	—	—	—	+21,2008
3	+0,4473	+0,8648	+0,0648	-0,0384	+0,0243	—	—	—	-0,0333	-0,0450	+0,0350	-0,0300	—	—	—	—	+ 5,9222
	+0,2205	-1,1351	+0,0900	-0,0650	—	—	—	—	-0,1638	+2,0450	-0,0093	-0,0027	—	—	—	—	+14,9725
5	+0,3974	-0,1510	-0,9189	-0,0503	+0,0375	—	—	—	-0,1081	-0,0156	+0,0270	-0,0240	—	—	—	—	+ 9,4827
	+0,1462	-0,1078	+1,0810	-0,0620	+0,0530	—	—	—	-0,1253	+0,0590	-2,0270	-0,0120	—	—	—	—	+ 9,8664
7	+0,3515	-0,1527	+0,0883	+0,9420	+0,0405	—	—	—	-0,1443	+0,0063	+0,0162	-0,0193	—	—	—	—	+ 9,5862
	+0,1085	-0,0878	+0,0707	-1,0579	+0,0460	—	—	—	-0,0986	+0,0586	-0,0338	+2,0193	—	—	—	—	+ 7,2436
9	+0,3145	-0,1491	+0,0912	-0,0621	-0,9550	—	—	—	-0,1479	+0,0211	+0,0065	-0,0138	+0,0150	—	—	—	+ 8,7988
	+0,0862	-0,0735	+0,0619	-0,0525	+1,0450	—	—	—	-0,0805	+0,0546	-0,0366	+0,0233	-2,0150	—	—	—	+ 5,6992
11	+0,2850	-0,1440	+0,0919	-0,0645	+0,0479	+0,9632	—	—	-0,1457	+0,0309	-0,0015	-0,0083	+0,0113	-0,0123	—	—	+ 7,8851
	+0,0713	-0,0630	+0,0547	-0,0477	+0,0417	-1,0368	—	—	-0,0678	+0,0500	-0,0355	+0,0250	-0,0173	+2,0123	—	—	+ 4,6907
13	+0,2610	-0,1381	+0,0909	-0,0653	+0,0494	-0,0386	-0,9688	—	-0,1418	+0,0375	-0,0077	-0,0036	+0,0082	-0,0101	+0,0104	—	+ 7,0487
	+0,0608	-0,0550	+0,0489	-0,0434	+0,0387	-0,0346	+1,0312	—	-0,0584	+0,0456	-0,0343	+0,0255	-0,0190	+0,0141	-2,0104	—	+ 3,9824
15	+0,2411	-0,1324	+0,0896	-0,0656	+0,0505	-0,0400	+0,0327	+0,9730	-0,1368	+0,0419	-0,0126	+0,0004	+0,0052	-0,0078	+0,0088	-0,0090	+ 6,3308
	+0,0530	-0,0487	+0,0441	-0,0398	+0,0359	-0,0325	+0,0296	-1,0270	-0,0513	+0,0418	-0,0328	+0,0254	-0,0197	+0,0152	-0,0117	+2,0090	+ 3,4589



Mit Hilfe des vorher gesagten können die Gleichungen (41) und (42) mit den Werten der ausgerechneten Integrale numerisch aufgeschrieben werden.

Die in diesen Gleichungen befindlichen Konstanten sind in der Tafel I zusammengefasst.

Tafel I

σ_{y*}	48,5 kg/cm ²	σ_{x*}	12,0 kg/cm ²
H	4,0	J	13,671/a
\varkappa	0,00221	μ	3,8/a
λ	15/a	p	62 kg/cm ²

Bei der Aufschreibung der Gleichungen fällt es in die Augen (siehe Tafel II), dass die Glieder von Indexzahlen $k > n$ im Vergleich zu den grössten Gliedern $k = n$ kleine Werte besitzen, deshalb kann man sie in erster Annäherung vernachlässigen. Das so gewonnene Gleichungssystem wird durch Annäherung aufgelöst, indem man $n = 1-15$ entsprechend einsetzt.

Die durch die Auflösung des Gleichungssystems sich ergebenden Konstanten findet man in der Tafel III.

Tafel III

A_1	+ 21,8052	B_1	+ 4,4216
A_3	- 4,1015	B_3	+ 3,0481
A_5	- 0,8973	B_5	- 3,7399
A_7	+ 2,2524	B_7	+ 3,5134
A_9	- 2,3660	B_9	- 3,0747
A_{11}	+ 2,1399	B_{11}	+ 2,5969
A_{13}	- 1,8477	B_{13}	- 2,2137
A_{15}	+ 1,5680	B_{15}	+ 1,9030

In Kenntnis der Konstanten ist es möglich, mit Hilfe der Beziehungen (10-18) die Spannungswerte in jedem Punkte zu bestimmen.

*

In vier Querschnitten $y = 0$, $y = 0,1a$, $y = 0,25a$, $y = a$ wurden σ_x , σ_y , τ ausgerechnet.

Die Bestimmung von σ_{x1} , σ_{y1} , τ_1 kann man verhältnismässig leicht durchführen, diejenige von σ_{x2} , σ_{y2} , τ_2 aber nur mit graphischen Integralen.

Die in den Punkten der oben genannten Querschnitte bestimmten Werte sind in der Tafel IV zusammengefasst und in Bildern 6, 9, 10, 12 mit dem Zeichen σ dargestellt.

Tafel IV

χ	x	σ_{x0}	σ_{x1}	σ_{x2}	σ_x	σ_{y0}	σ_{y1}	σ_{y2}	σ_y	τ_0	τ_1	τ_2	τ
0,00a	0,0a	0	+ 5,67	+5,06	+10,73	+62	-18,55	+ 5,36	+48,81	0	0	0	0
	0,1a	0	+ 7,04	+5,55	+12,59	+62	-18,31	+ 6,12	+49,81	0	- 1,80	0	- 1,80
	0,2a	0	+10,49	+5,58	+16,07	+62	-17,93	+ 7,18	+51,25	0	- 4,30	0	- 4,30
	0,3a	0	+14,74	+5,90	+20,64	+62	-17,23	+11,00	+55,77	0	- 9,10	0	- 9,10
	0,4a	0	+18,51	+7,75	+26,26	+62	-13,98	+18,00	+66,02	0	-18,70	0	-18,70
	0,5a	0	+ 0,00	+0,00	+ 0,00	+62	- 0,00	—	—	0	—	0	0
0,10a	0,0a	0	+ 7,96	+4,61	+12,57	+62	-15,78	+ 5,70	+51,92	0	0	0	0
	0,1a	0	+ 8,25	+4,66	+12,91	+62	-15,58	+ 6,00	+52,42	0	- 2,66	-0,21	- 2,87
	0,2a	0	+ 9,00	+4,73	+13,73	+62	-14,64	+ 7,28	+54,64	0	- 6,08	-0,37	- 6,45
	0,3a	0	+ 9,13	+4,75	+13,88	+62	-11,47	+10,00	+60,53	0	-10,95	-0,48	-11,43
	0,4a	0	+ 5,54	+3,04	+ 8,58	+62	- 3,47	+15,78	+74,31	0	-15,23	+0,94	-14,29
	0,5a	0	+ 0,00	+0,00	+ 0,00	+62	- 0,00	+16,55	+78,55	0	-13,05	—	0
0,25a	0,0a	0	+ 7,09	+2,26	+ 9,35	+62	-11,58	+ 6,60	+57,02	0	0	0	0
	0,1a	0	+ 6,93	+2,10	+ 9,03	+62	-11,10	+ 6,20	+57,10	0	- 2,76	-0,01	- 2,75
	0,2a	0	+ 6,28	+1,72	+ 8,00	+62	- 9,50	+ 6,90	+59,40	0	- 5,53	+0,12	- 5,41
	0,3a	0	+ 4,73	+0,62	+ 5,35	+62	- 6,59	+ 8,50	+63,91	0	- 7,93	+0,50	- 7,43
	0,4a	0	+ 2,33	-0,86	+ 1,47	+62	- 2,94	+ 8,70	+67,76	0	- 9,11	+2,10	- 7,01
	0,5a	0	+ 0,00	-0,00	+ 0,00	+62	- 0,00	+ 8,10	+70,10	0	- 9,18	—	0
1,00a	0,0a	0	+ 1,17	-1,21	- 0,04	+62	- 1,52	+ 1,73	+62,21	0	0	0	0
	0,1a	0	+ 1,11	-1,18	- 0,07	+62	- 1,44	+ 1,53	+62,09	0	- 0,43	+0,44	+ 0,01
	0,2a	0	+ 0,93	-0,86	+ 0,07	+62	- 1,21	+ 1,20	+61,99	0	- 0,81	+0,88	+ 0,07
	0,3a	0	+ 0,67	-0,62	+ 0,05	+62	- 0,86	+ 0,70	+61,84	0	- 1,10	+1,28	+ 0,18
	0,4a	0	+ 0,35	-0,28	+ 0,07	+62	- 0,45	+ 0,40	+61,95	0	- 1,27	+1,36	+ 0,09
	0,5a	0	+ 0,00	-0,00	+ 0,00	+62	- 0,00	+ 0,00	+62,00	0	- 1,33	—	0

Die berechneten und gemessenen Werte stimmen sehr gut überein; bei der Bestimmung der Konstanten in den Gleichungen (41) und (42) bzw. bei der ganzen Spannungsrechnung genügt also die Verwendung der Glieder $n = 1-15$.

Die einzige kritische Stelle ist der Eckpunkt, hier sind die grössten Abweichungen der Spannungswerte. So muss dieses Problem ein wenig genauer betrachtet werden.

Die Abweichungen zwischen den bei der Umgebung des Eckpunktes gemessenen und ausgerechneten Spannungswerten haben folgende Ursachen. In den Rechnungen spielen die Fourierschen Reihen eine wichtige Rolle, für die die Punkte $x = \pm a$ kritische Stellen sind, hier besitzen nämlich diese Reihen den Wert 0. Zur Gewinnung präziser Ergebnisse in der Nähe der Ecke muss man noch mehr Glieder von n berücksichtigen, was natürlich die Rechnerarbeit sehr anwachsen lässt.

Bei der Bearbeitung des Modells muss man darauf verzichten, dass die Kerbe mit dem Radius $\rho = 0$, d. i. ganz scharf ausgebildet werde, weil das praktisch unmöglich ist. (Nach Abb. 2 ist der Durchgangsradius $\rho = 0,03$ cm.) Das bedeutet, dass die im Querschnitt $y = 0$ gemessenen Ergebnisse nicht die Randbedingungen der ursprünglich angenommenen Aufgabe geben, d. h. die so gewonnenen Randbedingungen sind nur Annäherungen.

Es soll noch bemerkt werden, dass bei dem Durchgang $\rho = 0$ unendliche Spannungswerte von σ_y auftreten würden, wenn der Stoff unendlich elastisch wäre.

In der Tat entsteht beim Erreichen der Streckgrenze natürlich ständige Formveränderung, wodurch also die Verhältnisse auch dann durch Versuche nicht geklärt würden, wenn der Übergang $\rho = 0$ verwirklicht werden könnte.

Die Ergebnisse zusammenfassend kann man sagen, dass abgesehen von den singulären Eckpunkten, bzw. einem engen Bereich die analytischen und die durch Messungen gewonnenen Werte gut übereinstimmen; diese Übereinstimmung beweist die Richtigkeit der Lösung der gestellten Aufgabe.

SCHRIFTTUM

1. H. NEUBER: Kerbspannungslehre. Berlin. 1937. Springer.
2. J. W. GECKELER: Elastostatik. (Handbuch der Physik. VI. Mechanik der elastischen Körper). Berlin 1928. Springer.
3. K. GIRKMANN: Flächentragwerke. Wien. 1948. Springer.
4. G. MESMER: Spannungsoptik. Berlin. 1939. Springer.
5. M. M. FROCHT: Photoelasticity. New-York. I. 1941. II. 1948. John Wiley and Sons.
6. K. GIRKMANN: Geschweisster Anschluss eines zugbeanspruchten Flachstabes bei behinderter Verformung. (Österreichisches Ingenieur-Archiv. Band IX., Heft 2—3. S. 118—126.) Wien. 1955. Springer.

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, das im Streifen eines T-förmigen Flachstabes gleichbleibender Stärke entstehende Spannungsfeld zu bestimmen.

Man kann die Spannungsanalyse mit Hilfe der Grundgleichungen der Elastizitätslehre vornehmen, unter den Randbedingungen fehlt aber die zur Durchgangsstelle vom Kopf zum Streifen gehörige. GIRKMANN löst dieses Problem durch die Voraussetzung, dass die fragliche Durchgangsstelle starr ist. Richtiger ist es, auch den Querschnitt als elastisch anzunehmen. Dementsprechend hat der Verfasser hier die fehlenden Spannungen mit Spannungsoptik bestimmt. Mit dieser Hilfe hat er sodann die Airysche Spannungsfunktion festgestellt.

Die gute Übereinstimmung der auf optischem Wege und durch mathematische Lösung gewonnenen Spannungswerte bestätigt die Richtigkeit der Spannungsanalyse.

STRESS FIELD DUE TO LOAD TENSION IN THE LEG OF A T-SHAPED FLAT BAR

I. HUSZÁR

SUMMARY

The author undertakes the determination of the stress field arising in the leg of a constant-thickness T-shaped bar.

With the aid of the fundamental equations of elasticity, the stress analysis may be carried out. But from the boundary conditions is missing the condition belonging to the transition between the head and the leg. GIRKMANN resolves the problem by supposing that the transition is rigid. However, it is more correct to consider the transmission as being elastic, too. According to this, the author has determined here the missing stresses by photoelasticity and with the aid of it, the Airy stress function.

The fact that the stress values obtained by the optical method conform well with the stress values obtained by computation, confirms the correctness of the stress analysis.

LE CHAMP DE TENSION APPARAISSANT DANS LA TIGE D'UNE BARRE PLATE EN T, PROVOQUÉ PAR UNE CHARGE DE TRACTION

I. HUSZÁR

RÉSUMÉ

Notre intention est la détermination du champ de tension apparaissant dans la tige d'une barre plate en T. Nous pouvons procéder à l'analyse de tension à l'aide des équations fondamentales de la théorie de l'élasticité. Parmi les conditions fondamentales périmétriques, il manque cependant celle se rapportant au passage de la tête à la tige. GIRKMANN a résolu le problème en supposant que la transition en question est rigide. Il est plus exact de considérer également cette section comme élastique. Conformément à cette hypothèse, l'auteur a déterminé les tensions manquantes par des essais optiques de tension et a établi ensuite à l'aide de cette méthode la fonction de tension d'Airy.

La bonne concordance des valeurs de tension gagnées ainsi par la méthode optique, avec celles de la solution mathématique, prouve l'exactitude de cette méthode.

ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЕ В ПРОДОЛГОВОЙ ЧАСТИ Т-ОБРАЗНОГО ПЛОСКОГО СТЕРЖНЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ РАСТЯГАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ

Т. ХУСАР

РЕЗЮМЕ

Ставится целью определение поля напряжений, возникающего в продолговатой части Т-образного плоского стержня неизменной толщины.

С помощью основных уравнений теории упругости можно выполнить анализ напряжений. Однако, среди окружных условий недостает условие, относящееся к переходу между продолговатой и поперечной частью. Гиркман решает проблему при предположении, что данный переход является жестким. Правильнее же принять и это сечение упругим. Соответственно этому с помощью оптического анализа напряжений установлены недостающие здесь напряжения. Затем с помощью этого определена функция напряжений Айри.

Хорошее совпадение значений напряжений, полученных оптическим путем, и значений напряжений математического решения подтверждает правильность анализа напряжений.

EINE BESCHLEUNIGUNGSANLAGE MIT EINEM KASKADENGENERATOR VON 800 kV.

Prof. K. SIMONYI

PHYSIKALISCHES FORSCHUNGSINSTITUT DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST

[Eingegangen am 21. September 1956]

Wie aus den Literaturangaben [1, 2, 3] hervorgeht, wird im allgemeinen der Kaskadengenerator mit einer Spannung von ungefähr 1 MV den kleineren Spannungswerten gegenüber bevorzugt. Eine nähere Analyse zeigt jedoch [4], dass sein zweckmässigster Anwendungsbereich zwischen 300 und 700 kV liegt.

Unsere hierbeschriebene erste Anlage (Bild 1.) wurde auch zuerst für 1 MV gebaut, jedoch später um eine Stufe auf 800 kV erniedrigt, um Durchschläge zur Decke zu verhüten und die Fokussierungsschwierigkeiten zu mindern. Die ganze Anlage wurde in unserer Abteilung konstruiert und montiert, abgesehen von handelsmässig erreichbaren Einzelstücken, wie Ventile, Kondensatoren, u. s. w.

Eine Stufe des Kaskadengenerators (Bild 2.) besteht aus zwei Kondensatoren älteren Fabrikates nach MEIROWSKY, mit einer Kapazität von $0,01 \mu\text{F}$ und aus zwei Siemens-Vakuumentilröhren mit einer Heizleistung von 120 Watt und einer Sperrspannung von 230 kV. Die Kapazität des an den Transformator angeschlossenen Kondensators beträgt $0,02 \mu\text{F}$. Die Höchstspannung einer einzigen Stufe hat den Wert von 200 kV. Die Primärspannung des Transformators wird von einem Umformer geliefert, welcher durch Einstellen der vom Netz durch einen Gleichrichter erhaltenen Erregerspannung zwischen 0 und 300 V regulierbar ist. Zwecks Minderung des Spannungsabfalls ist die Frequenz üblicherweise $f = 500 \text{ s}^{-1}$ gewählt. Der Maximalwert der Sekundärspannung des Transformators ist 100 kV. Bei diesen Daten beträgt der Spannungsabfall 8400 V/mA und die Welligkeit 2000 V/mA .

Die im Schrifttum beschriebenen Kaskadengeneratoren unterscheiden sich in erster Linie in der Ausbildung des Hochspannungsfeldes, ferner in der Art der Röhrenheizung von einander. Heute wird fast ausschliesslich das durch die Philips-Werke eingeführte Modell mit oberer Schutzelektrode der separaten Endelektrode bevorzugt. Diese letztere Lösung bietet den Vorteil einer kleineren Bauhöhe, die vorher erwähnte sichert jedoch eine grössere Homogenität des Feldes. Die Heizung der Ventilröhren erfolgt entweder durch isoliert angetriebene Dynamos, oder durch Hochfrequenzheizung. Das Problem der Heizung

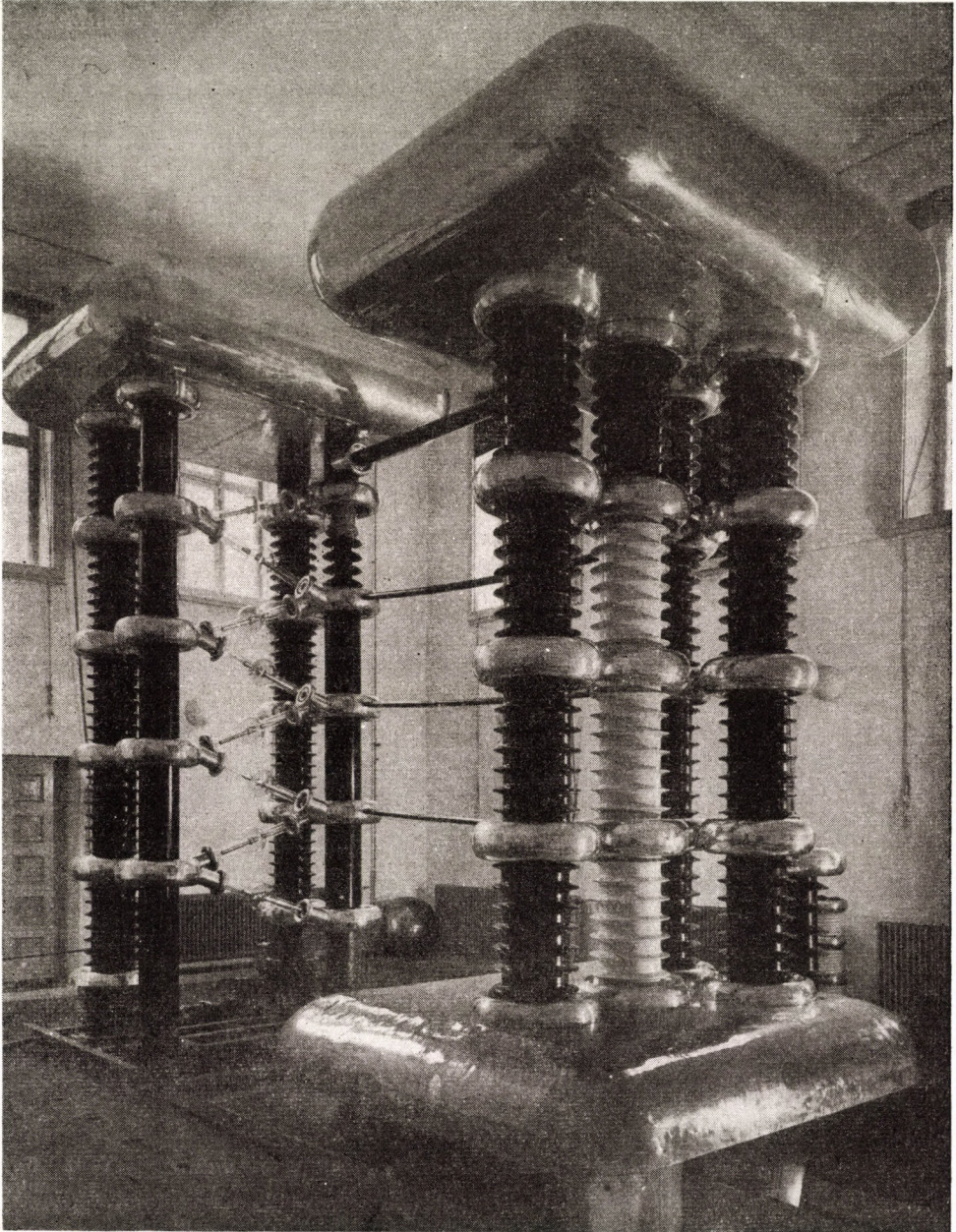
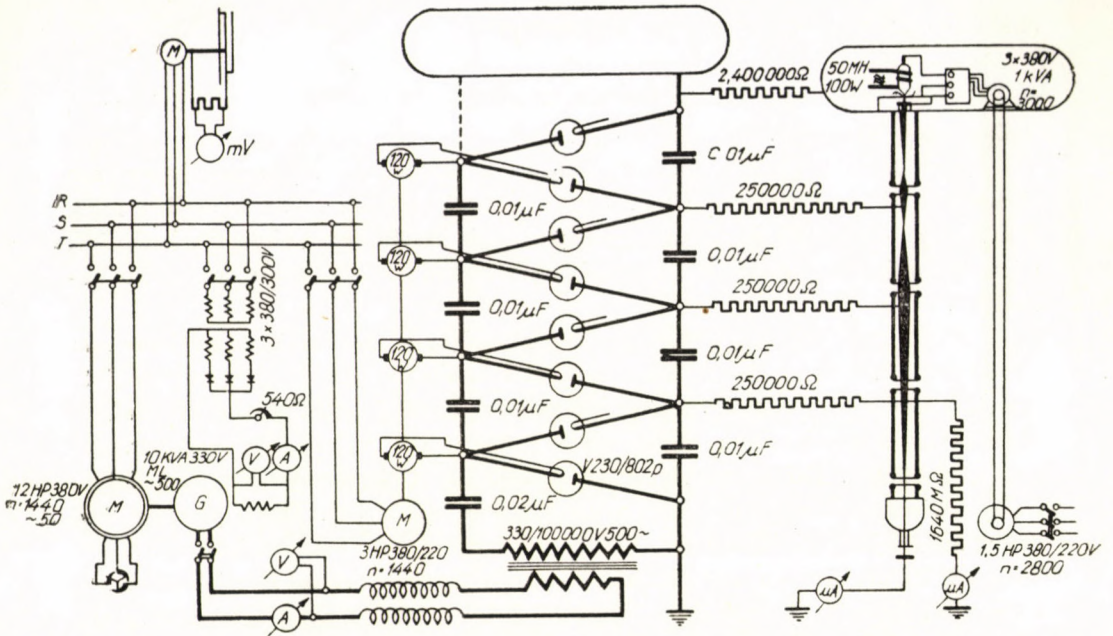


Bild 1. Lichtbild der 800 kV Beschleunigungsanlage



Eild 2a. Vereinfachte Schaltung der ganzen Anlage

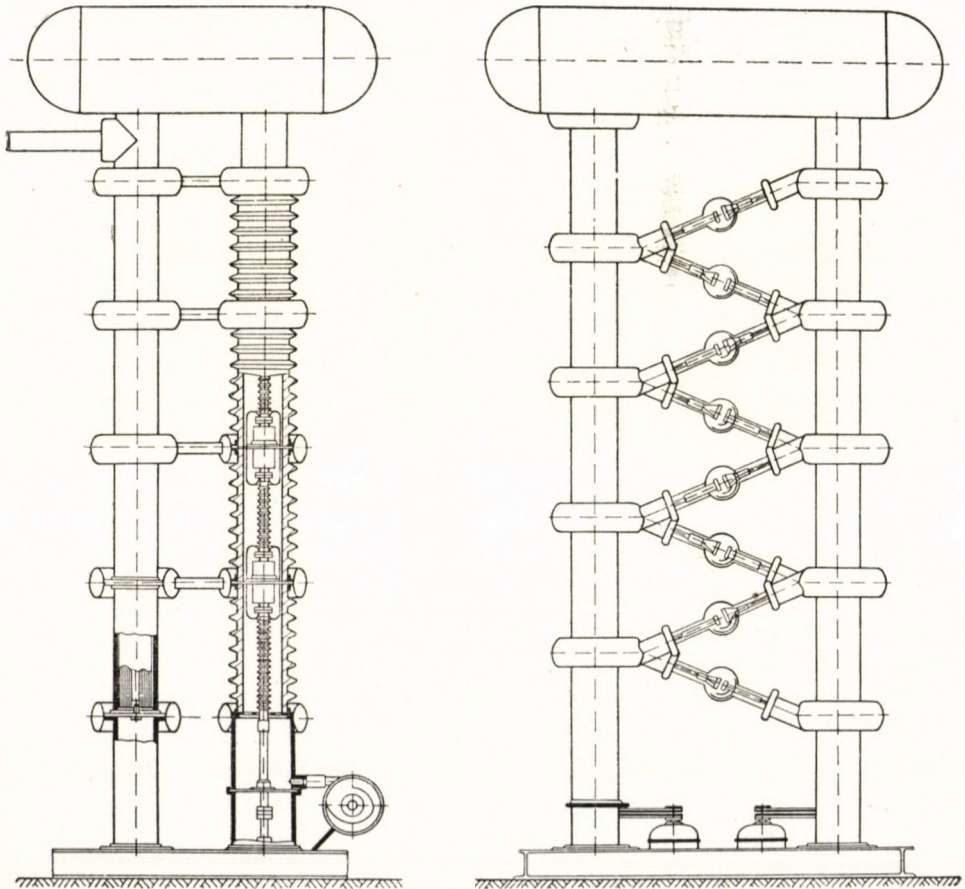


Bild 2b. Mechanische Konstruktion

wird bei der neuesten Lösung, durch die Anwendung von Trockengleichrichtern, vollkommen beseitigt.

Von technischem Gesichtspunkte aus kann die Dynamoheizung am einfachsten verwirklicht werden. Unsere Abteilung hat zwar neuerlich auch den Bau eines 600 kV Kaskadengenerators mit Hochfrequenzheizung beendet, wir wollen jedoch über die hierbei erworbenen Erfahrungen anderswo berichten.

Die Anordnung der Dynamos und Montierung der Isolierachse kann auf die in Bild 3. dargestellte Weise erfolgen. Zwecks der mechanischen Stabilität des Apparates wird eine Stufe im allgemeinen durch je zwei parallelgeschaltete Kondensatoren geschaffen; somit besteht die ganze Anlage notwendigerweise aus vier Säulen. Bei dieser Anordnung sind die Heizgeneratoren natürlicherweise zwischen den beiden Säulen angebracht (Bild 3a). Die Dynamos sind leicht zugänglich, die Höhe der Anlage wird durch sie nicht beeinflusst. Einen Nachteil bildet jedoch der verhältnismässig geräuschvolle Betrieb und der Umstand, dass die Ventilröhren direkten Schütterungen ausgesetzt sind. Ganz alleinstehend ist die Siemens-Konstruktion. Die innerhalb der als konzentrische Zylinder ausgebildeten Kondensatoren aufsteigende Achse sichert einen geräuschlosen Betrieb und stellt eine einfache und stabile mechanische Konstruktion dar (Bild 3c). Hingegen wird die Bauhöhe etwas grösser und Reparatur, oder Austausch der Bestandteile scheinen nicht einfach zu sein. Die mechanische Stabilität der Konstruktion 3b ist zwar nicht ausreichend, die Konstruktion selbst ist jedoch sehr einfach. Die Montage erfordert das Abnehmen der Abrundungen an heiklen Stellen und die Ventilröhren leiden durch die Erschütterungen.

Die von uns gewählte Konstruktion (siehe Bild 2 und detaillierten Anriss im Bild 3d) entspricht den Anforderungen grosser mechanischer Stabilität, verhältnismässiger Geräuschlosigkeit und separater Kühlmöglichkeit, ihre Montierbarkeit ist jedoch nicht als glücklich zu bezeichnen. Die Reguliervorrichtungen der Dynamos sind zwar auch ohne Abnehmen der Abrundungen zugänglich, Reparatur und Reinigung der Dynamos sind jedoch nur nach vollkommener Zerlegung der Säulen möglich. Mit Rücksicht auf die für die Dynamos garantierte lange Lebensdauer scheint dies nicht gefährlich zu sein, da die Anlage sowieso jährlich plangemäss gereinigt und zerlegt wird. Bis heute hat sich dies (bei einer Betriebszeit von zwei Jahren) als genügend erwiesen. Nötigenfalls kann das Gerät ohne besondere Schwierigkeit dem Typ 3a gemäss umgebaut werden, den ich auf Grund der bisherigen Erfahrungen für die beste Konstruktion halte.

Die Berechnung des elektrischen Feldes ist nur mit einer ziemlich groben, von verschiedenen Seiten her erfolgten Näherung möglich. Die auf diese Weise erhaltenen Dimensionen wurden durch Aufbau einer Stufe experimentell kontrolliert.

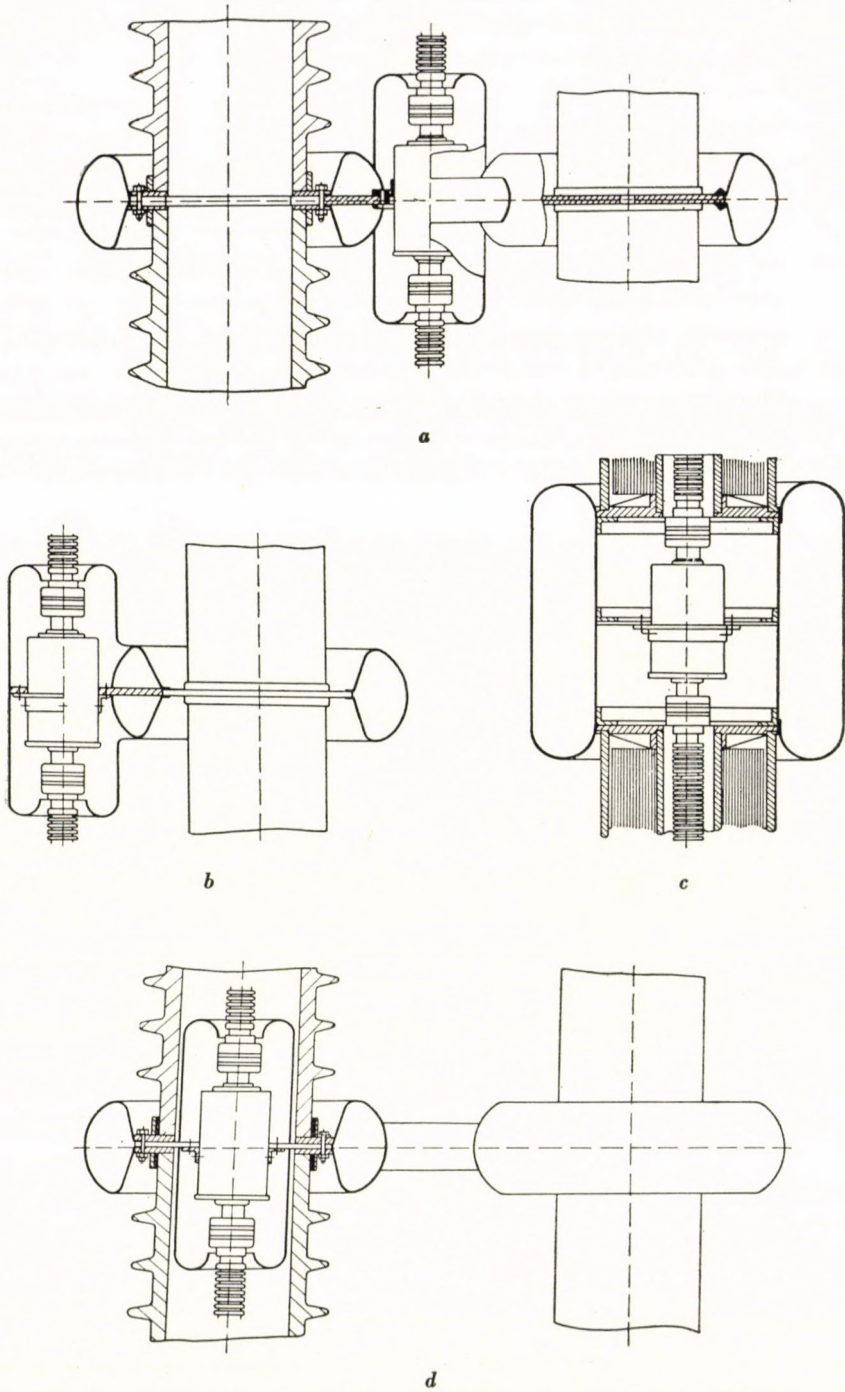


Bild 3. Verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten für Einbau der Heizdynamos.
 (Bild »d« zeigt die von uns durchgeführte Konstruktion.)

Die Einzelteile der Achsenverbindung sind aus Bild 2 ersichtlich. Der Antriebsmotor ist ausserhalb der Säule angebracht, nachdem er innerhalb der Säule bei Durchschlägen oft in Kurzschluss geraten ist. Hiedurch wurde gleichzeitig auch ein glatterer Gang der Einrichtung erreicht.

Die Spannung der ersten Generatorstufe wird mit einem in Ölbad befindlichem, aus Ingelen-Fabrikaten konstruiertem, bis zu 250 kV anwendbarem Messwiderstand von 1640 M Ω gemessen. Die Eichung dieses Widerstandes haben wir mit einer Kugelfunkenstrecke von 15 cm bzw. 75 cm Durchmesser, unmittelbar im Bereiche der Messspannung vorgenommen, nachdem die einzelnen Teile des Widerstandes bereits bei niedrigeren Spannungen geeicht worden sind. Zur Kontrolle dienen Spannung und Erregerstrom der Primärseite und ausserdem ein Rotationsvoltmeter, der die Spannung des ganzen Generators misst und bei niedrigeren Spannungen unmittelbar mit dem Widerstandspannungsmesser verglichen worden ist. Weitere Einzelheiten über die Spannungsanlage siehe [6, 7].

Das Beschleunigungsrohr befindet sich laut Anordnung (Bild 4.) zwischen den drei Tragsäulen der oberen Elektrode. Ein Widerstand, der ursprünglich für Messzwecke bestimmt war und sich in einer der Tragsäulen befindet, sichert den Erdanschluss der oberen Elektrode. In der zweiten Tragsäule sind die zur Regulierung dienenden Seidenschnüre angebracht, während die dritte Säule das Antriebsband des zur Energieversorgung der oberen Elektrode dienenden Generators enthält. Dieses Isolierband zeigt eine merkliche Tendenz, als ein selbsterregender Van de Graaff-Generator zu arbeiten. Hiedurch kann die obere Elektrode selbst im Falle der Ausschaltung der Speisespannung des Kaskadengenerators einen beträchtlichen Spannungswert erreichen, der manchmal auch einige Hundert kV betragen kann; dies vermag, mit Rücksicht auf die Kondensatoren, auch ernste Betriebsunfälle zu verursachen, insofern die nötigen Vorsichtsmassregeln nicht rechtzeitig getroffen werden.

Das Evakuieren des Beschleunigungsrohres erfolgt mittels einer Öldiffusionspumpe mit einer Sauggeschwindigkeit von 1500 l/sec, jedoch ohne jede Kühlfalle.

Die Fokussierungsprobleme liessen sich nur mit der sorgfältigsten Montierung lösen. Nach Bild 5. hat es sich als zweckmässig erwiesen, das Tragglied der Elektrode gesondert zu befestigen. Ebenso wichtig ist, dass die radiale Verschiebbarkeit und die Kippbarkeit der einzelnen Elektroden gesichert werden. Über weitere Einzelheiten siehe [8, 9].

Als Ionenquelle haben wir wegen der geringen Ionenstreuung und des hohen Atomionengehaltes die Hochfrequenz-Ionenquelle (Bild 6) gewählt [10, 13].

Der Strahlengang ist im Bild 2 zu sehen. Es besteht die Möglichkeit, die Hochfrequenz-Ionenquelle mit einer Oliphant'schen Ionenquelle [14] zu ersetzen, ohne damit die Fokussierungsbedingungen zu verändern.

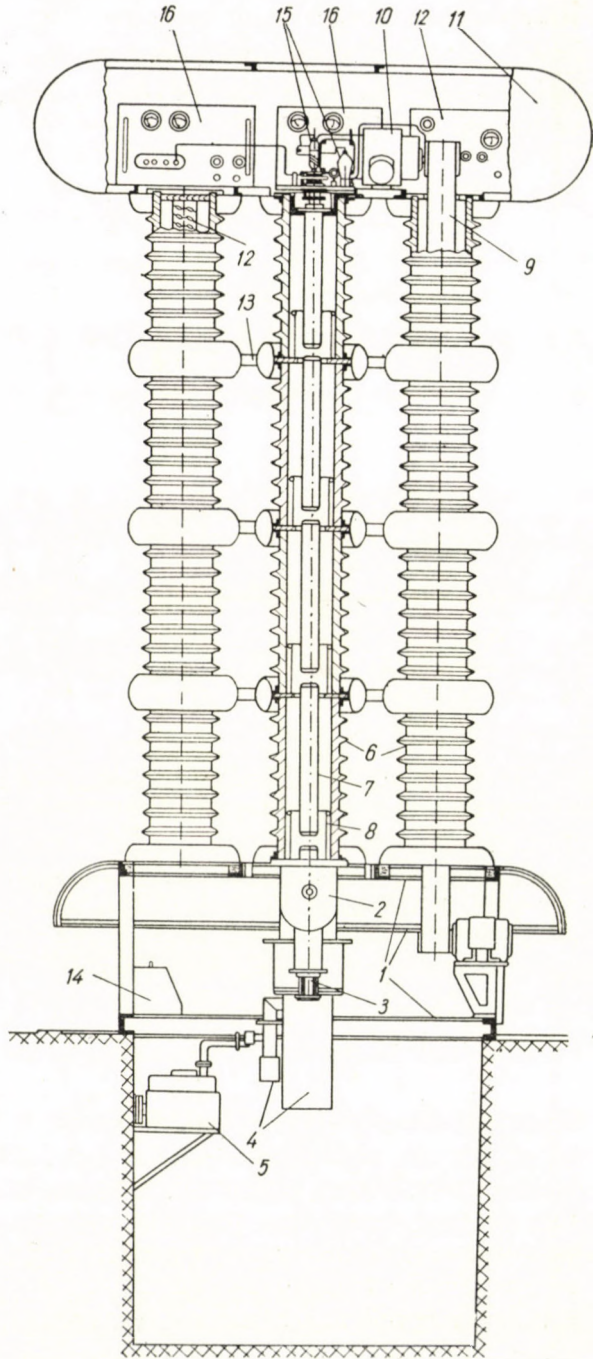


Bild 4. Aufbau des Beschleunigungsteiles: 1 Trägerkonstruktion. 2 Absaugerohr. 3 Auffänger des Beschleunigungsrohres. 4 Diffusionspumpe. 5 Vorvakuumpumpe. 6 Porzellanisolatoren. 7 Beschleunigungselektroden. 8 Abschirmungselektroden. 9 Antriebband des 3×380 V Generators. 10 3×380 V Generator. 11 Obere Elektrode. 12 Ableitwiderstand in Öl. 13 Elektrische Verbindungen. 14 Vakuummeter. 15 Hochfrequenz-Ionenquelle und Oszillator. 16 Spannungsquelle der Absaugespannung der Ionenquelle. 17 Spannungsquelle des Oszillators. 18 Spannungsquelle der Vorfokussierung

Der Maximalwert des erhaltenen Targetstroms betrug $500 \mu\text{A}$; bei einer Spannung von 600 kV kann betriebsmässig $300 \mu\text{A}$ erreicht werden. Es erfolgten Beschleunigungen mit einer maximalen Energie von über 700 keV , jedoch etwas geringerer Stromstärke. Die Spannung wurde durch Vakuumdurchschläge begrenzt. Es erwies sich als notwendig, dieses Problem ausführlich zu untersuchen [15, 16].

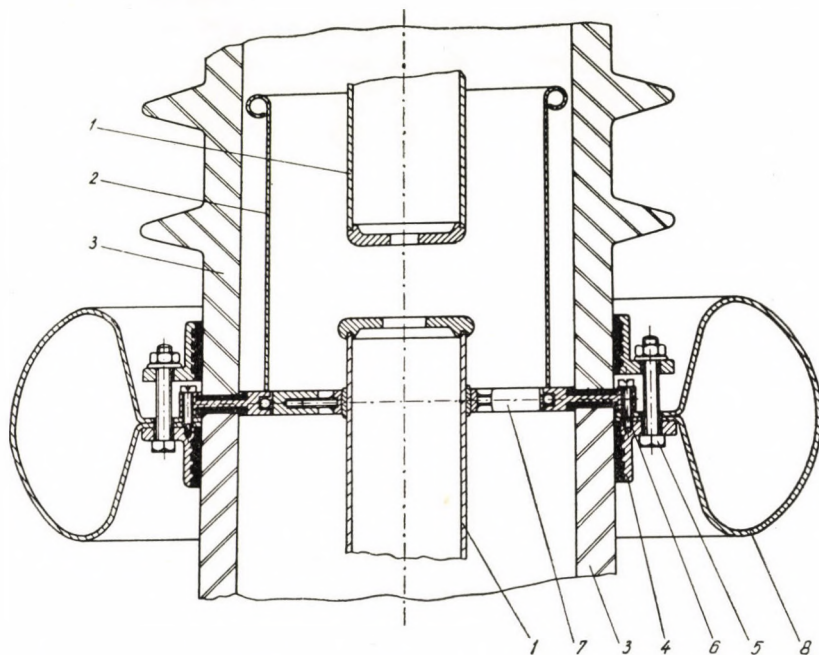


Bild 5. Das elektrische Linsensystem der Beschleunigung und Fokussierung. 1 Beschleunigungselektroden. 2 Abschirmungselektrode. 3 Porzellanisolator. 4 Ringförmiges Zwischenglied. 5 Verbindungsschraube. 6 Stellschrauben des Zwischengliedes. 7 Kugelgelenk-Stellschraube der Elektroden. 8 Abschirmungskörper

Ich ergreife noch die Gelegenheit, um meinen Dank denjenigen auszusprechen, die durch ihre Mitwirkung das Zustandekommen der hier beschriebenen Anlagen gefördert haben. So waren J. ERŐ und G. SCHMIDT bei den ersten Beschleunigungsexperimenten tätig. Die Ionenquelle ist den Experimenten von J. ERŐ zu verdanken. I. MÉREY hat bei den Konstruktions- und Ausführungsarbeiten des Kaskadengenerators, E. PÁZTOR, J. ROÓSZ und Frau SIEGLER bei dem Zustandekommen der Beschleunigungsanlage mitgewirkt.

Von den Aussenmitarbeitern war G. VARGA derjenige, der vor dem Krieg den ersten Kaskadengenerator in Ungarn konstruierte: der Umformer und der Transformator sind seinem Apparat entnommen.

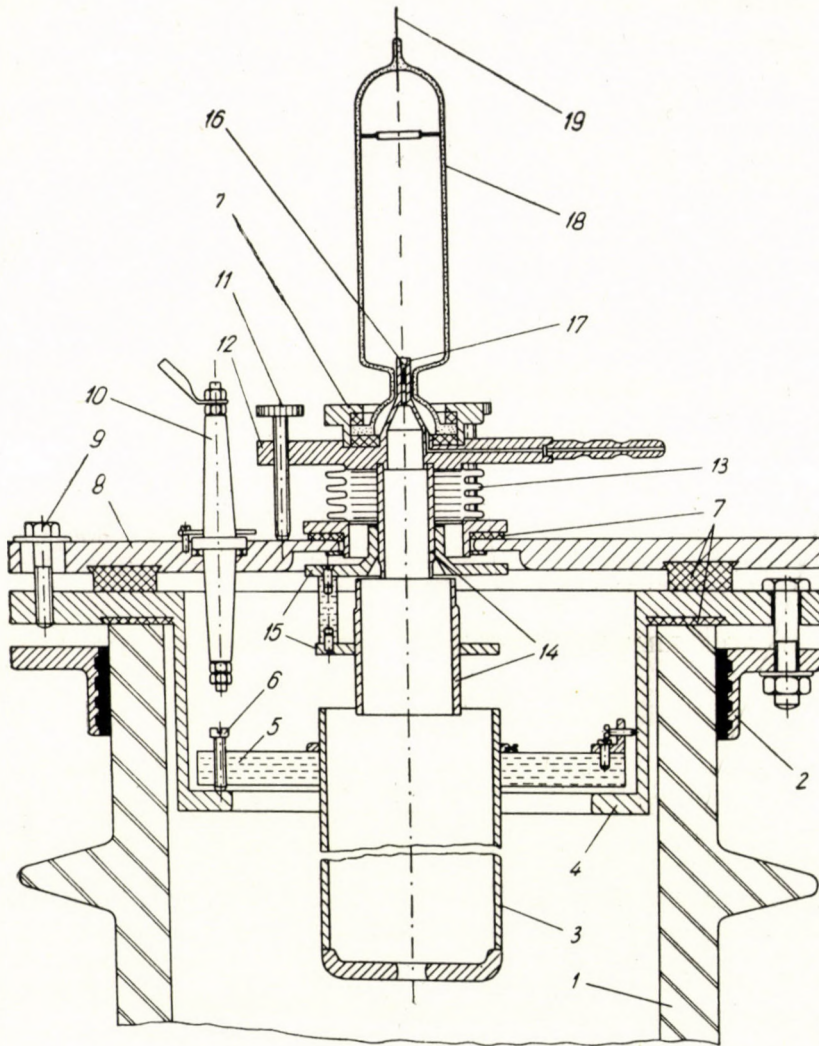


Bild 6. Anriß der Ionenquelle und des Vorfokussierungssystems. 1 Porzellanisolator. 2 Zwischenring. 3 Erste Beschleunigungselektrode. 4 Montierungseinsatz. 5 Befestigungsplatte der Elektroden aus Plexiglas. 6 Stellschrauben der Elektroden. 7 Vakuumdichtungen. 8 Abschlussplatte des Beschleunigungsrohres. 9 Schrauben der Abschlussplatte. 10 Hochspannungsdurchführungen. 11 Stellschrauben der Ionenquelle. 12 Unterlagplatte der Ionenquelle. 13 Tombak Federkörper. 14 Zylinder der Vorfokussierungslinse. 15 Montierungsplatte der Zylinder. 16 Absaugeröhrchen der Ionenquelle. 17 Quarzröhrchen. 18 Ionenquelle. 19 Wolframelektrode

Ein besonderer Dank soll noch der mechanischen und Schwachstromwerkstatt unserer Abteilung für die Verfertigung der Apparate ausgesprochen werden.

SCHRIFTTUM

1. E. W. TITTERTON : Nucl. 1952. May. pp. 28.
2. C. MILEIKOWSKY — R. T. PAULI : Arkiv för Fysik Band. 4. nr. 12 pp. 287.
3. W. E. BURCHAM : Nature 160 (1942) p. 316.
4. K. SIMONYI : Acta Technica, XV/1—2, 1956
5. T.J. DOUMA, H. D. J. BREKOO : Philips Techn. Rev. 11 (1949) pp. 173.
6. I. MÉREY : M. Fiz. Folyóirat. III, pp 489—496
7. I. MÉREY : KFKI Közl. 2 (1954) p. 520.
8. E. PÁSZTOR — Á. SIEGLER : Magy. Fiz. Folyóirat. III, pp 497—513
9. E. PÁSZTOR, Á. SIEGLER : KFKI Közl. 2 (1954) p. 529.
10. P. C. THONEMANN : Proc. Phys. Soc. 61 (1948) pp. 483.
11. C. D. MOAK, H. REESE, W. M. GOOD : Nucl. 1951. No. 3. pp. 18.
12. J. ERŐ : Dissertation 1954.
13. J. ERŐ : Acta Phys. 1955. VI.
14. M. OLIPHANT, E. RUTHERFORD : Proc. Roy. Soc. 17. 141. 1933.
15. R. I. VAN DE GRAAFF—I. G. TRUMP : J. Appl. Phys. 18 (1947).
16. G. SCHMIDT : Acta Phys. (unter Druck)

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine Anlage beschrieben, welche von der Abteilung für Atomphysik des Physikalischen Forschungsinstitutes der Ungarischen Akademie der Wissenschaften im Jahre 1953 konstruiert und gebaut wurde. Es werden einige Einzelheiten, welche von den in der betreffenden Literatur befindlichen Lösungen abweichen — wie die Heizung der Ventilröhren, Ionen-fokussierung usw. — ausführlicher diskutiert.

AN ACCELERATING PLANT WITH A 800 kV CASCADE GENERATOR

K. SIMONYI

SUMMARY

The paper describes an installation designed and constructed by the Atomphysics Division of the Central Physical Research Institute. Some aspects are treated in detail, which are different from the solutions published in literature, such as, e. g., the heating of the rectifier tubes, the ion focussing, etc.

UNE INSTALLATION D'ACCÉLÉRATION AVEC UN GÉNÉRATEUR EN CASCADE DE 800 kV

K. SIMONYI

RÉSUMÉ

L'auteur décrit une installation étudiée et construite par le Département de Physique Atomique de l'Institut Central de Recherches Physiques. Quelques questions de détail sont traitées de près, tel que, par exemple, le chauffage des tubes redresseurs, la focalisation des ions, etc., questions dont la solution est différente des solutions qui ont été publiées auparavant.

УСКОРИТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО С 800 КВ КАСКАДНЫМ ГЕНЕРАТОРОМ

К. ШИМОНИ

РЕЗЮМЕ

В статье дается описание устройства, сконструированного и построенного Отделением атомной физики Центрального физического исследовательского института. Более подробно рассматриваются отдельные детальные вопросы, которые отличаются от решений, описанных в соответствующей специальной литературе, как, например, накал выпрямительных ламп, фокусировка ионов и т. д.

DURCH ZUNDERBILDUNG VERURSACHTE GEFÜGE- VERÄNDERUNGEN UND TECHNOLOGISCHE FEHLER IN DER WARMGEWALZTEN BRONZE BZ 5

Z. HEGEDÜS

CSEPEL EISEN- UND METALLWERKE, BUDAPEST-CSEPEL

[Eingegangen am 16. Oktober 1956]

Die Bronze Bz 5 (MNOSZ 710-52) wird derzeit meistens kalt gewalzt. Beim Kaltwalzen ist infolge der niedrigen Reduktion und dem häufig notwendig werdenden Weichglühen die Produktion gering und deshalb wurden überall zahlreiche Versuche zum Warmwalzen der Bronzesorten Bz 5 angestellt. Die Fabrikationsversuche waren mit vielfachen Schwierigkeiten verbunden und unter diesen war die Bildung von Oberflächenrissen und das Überlappen am unangenehmsten. Die vorliegende Studie bezweckt, diese Fehlererscheinungen zu untersuchen.

Beim Warmwalzen bilden sich bei der ersten Reduktion auf den Plattenoberflächen feine Querrisse, dieser Fehler hat sich bei den allermeisten Warmwalzversuchen gezeigt.

Auch beim Kaltwalzen treten gelegentlich Oberflächenrisse auf, sie werden bei ungenügendem Abfräsen, Porosität unter der Rinde und oberflächiger Zinnanreicherung verursacht. Nach EWIG-DAUES [1] können Oberflächenrisse auch die Folge unrichtigen AbfräSENS sein, nach seiner Meinung reisst die Schneide des Fräasers die an der Grenze der α -Kristalle befindlichen harten $\alpha + \delta$ -Eutektoiden heraus und die Gefügauflockerung an den Kristallgrenzen kann beim Walzen Risse und Überlappen verursachen. Die beim Warmwalzen entstandenen Risse sind nicht mit den erwähnten Ursachen zu erklären, im Umkreis dieser Risse findet man auch interessante Gefügeveränderungen, die auf andere Fehlerquellen verweisen.

Der vom Zunder ausgefüllte Riss wird von einer an Zinn verarmten Schicht umgeben. Die sorgfältige metallographische Untersuchung des an Zinn verarmten Teiles hat das Vorhandensein mehrerer Gefügezonen ergeben (Bild 1). Die an Zinn verarmten α -Kristalle der Bronze nehmen beim Ätzen mit FeCl_3 eine hellere Farbe an. Unmittelbar neben dem Oxyd erscheint eine dünne, schwer ätzbare feinkörnige Schicht und auf diese folgt eine gleichmässig dicke, an Zinn gänzlich verarmte, reichlich sekundäres SnO_2 enthaltende Zone. Die an Einschlüssen reiche Schicht ist auch an einem ungeätzten Schliff gut zu beobachten, sie folgt genau der Form des eingewalzten Oxydeinschlusses (Bild 2). Schliesslich folgt ein teilweise an Zinn verarmter Teil, der beim Ätzen sich

heller färbt und stufenweise in das Grundgefüge übergeht. Diese charakteristischen und interessanten Gefügeveränderungen sind auch in kleinerem Mass bei den mit Oxyd ausgefüllten Rissen und an der Oberfläche der kaltgewalzten und weichgeglühten Bz 5-Platten zu beobachten.

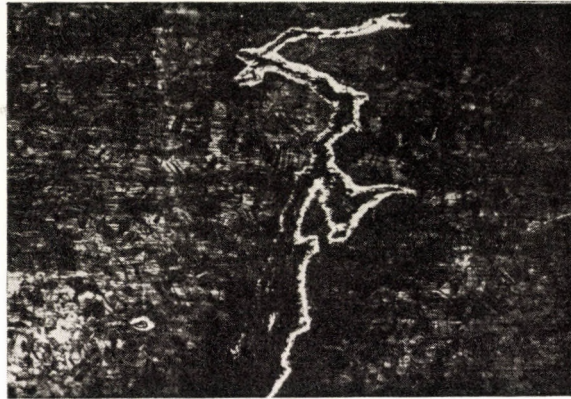


Bild 1. Mit Zinnverarmung und Bildung von sekundärem SnO_2 verbundene Gefügeveränderung der übergelappten Oberfläche warmgewalzter Bronze Bz 5. $V = 20 \times$, Ätzung: salzsaueres FeCl_3

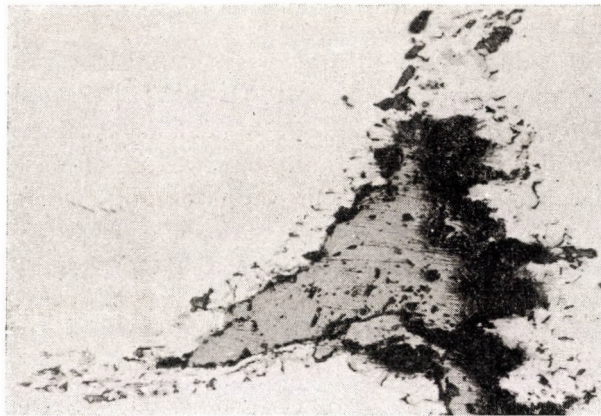


Bild 2. Bildung von sekundärem SnO_2 längs des eingewalzten CuO -Einschlusses. $V = 150 \times$. Ungeätzt

Die vom Oxyd verursachten Gefügeveränderungen, d. h. die Bildung von SnO_2 regten den Verfasser zur eingehenden Untersuchung der Oberflächengefüge beim Warmwalzen rissig gewordener Blöcke an.

Die ersten Untersuchungen ergaben, dass sich unter dem Zunder der homogenisierten Blöcke eine SnO_2 -haltige Oberflächenschicht bildet. Die

weiteren Forschungen hatten den Zweck, die Entstehungsverhältnisse der oberflächigen, an Zinn verarmten einschlusshaltigen Schicht sowie den Zusammenhang zwischen dieser und den Oberflächenrissen aufzuhellen.

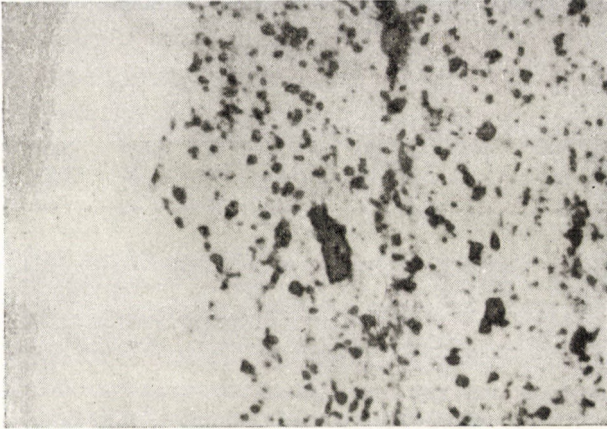


Bild 3. Sekundäres SnO_2 enthaltende Schicht auf der Oberfläche eines beim ersten Stich eingerissenen Bronzeblockes. $V=800 \times$ Ungeätzt

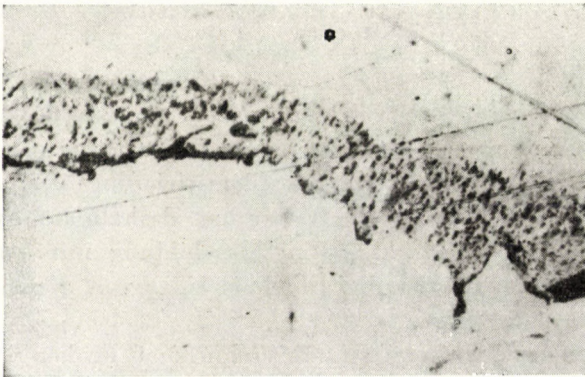


Bild 4. Sekundäres SnO_2 enthaltende Schicht auf der Oberfläche eines homogenisierten Bz 5-Blockes. $V = 600 \times$. Ungeätzt

Die versuchsweise innerhalb von 1–2 Stunden bei $800\text{--}870^\circ\text{C}$ homogenisierten Blöcke erlitten nach den ersten Stichen starke Risse, in mehreren Fällen zerbröckelten sie auch in Querrichtung. Oberflächenteile der beschädigten Blöcke waren von vielen groben, sekundäres SnO_2 enthaltenden Schichten bedeckt (Bilder 3 und 4.). Auf diese groben und scharf abgegrenzten Schichten folgten viele winzige, meistens nur bei Dunkelfeldbeleuchtung sichtbare

punktförmige Einschlüsse enthaltende Schichten (Bild 5.). Die kleineren Risse endeten meistens in der punktartigen Einschlusschicht. Grobe und punktartige Einschlüsse kamen auch in geringerem Ausmass in den bei 700—750° C durch 3—6 Stunden homogenisierten Blöcken vor.

Beim Ätzen hat es sich ergeben, dass grobe Einschlusssteile an Zinn gänzlich verarmt waren, während in punktartigen Einschlusschichten die Zinnverarmung nur zum Teil eintrat.



Bild 5. Feine punktartige Einschlüsse in der teilweise zinnverarmten Zone. Dunkelfeldbeleuchtung, $V = 600 \times$. Ungeätzt

Die optischen Eigenschaften des groben Einschlusses deckten sich restlos mit denen des im Kupfer und in Bronzen vorkommenden SnO_2 [3].

Eine unmittelbare mikroskopische Identifizierung der punktähnlichen Einschlüsse ist nicht gelungen. Der Verfasser hat deshalb auf experimentellem Weg geprüft, ob die punktförmige Einschlussbildung mit der Oberflächenoxydation zusammenhängt oder das Ergebnis einer von dieser unabhängigen Gefügeveränderung ist.

Die an der Oberfläche sorgfältig abgeschliffenen Proben wurden im elektrischen Ofen durch zwei Stunden in oxydierender Atmosphäre bei 800° C warmbehandelt und nach erfolgter Abkühlung und dem Abblättern des Zunders wurden sie poliert und mikroskopisch untersucht. Auf der Oberfläche erschien die wohlbekannte grobe SnO_2 -haltige und an Zinn verarmte Schicht. Nachher wurden die Stücke mehrmals auf allerfeinstem Papier geschliffen und poliert und gleichzeitig wurde die Oberflächenschicht stufenweise entfernt. Nach jedem Schleifen und Polieren wurden die Stücke mikroskopisch untersucht. Unter der groben SnO_2 -haltigen Schicht erschienen die punktförmigen Einschlüsse.

Diese Untersuchungen haben ergeben, dass die Bildung der punktförmigen, teilweise an Zinn verarmten Einschlusschicht mit der Verzunderung zusammen-

hängt und dass die Einschlüsse wahrscheinlich ganz winzige SnO_2 -Kristalle sind. Die Bildung des groben oberflächigen SnO_2 sowie des feinen punktförmigen Einschlusses ist mit der Diffusion des O_2 verbunden und entspricht der von C. S. SMITH [4] beschriebenen Zwischenschicht. Seiner Auffassung nach oxydiert bei Messing und Bronze infolge der Diffusion des O_2 bei höherer Temperatur nur der Legierungskomponent heraus, während das Grundmetall zurückbleibt, es wird höchstens nur wenig O_2 in der festen Lösung aufgenommen. Verfasser hat ferner untersucht, ob in der Bildung von grobem SnO_2 nur das in der α -Phase gelöste Sn teilnimmt oder aus der Legierung weiteres Sn in beachtlicher Menge in die an Zinn verarmte Zone diffundiert und dort oxydiert.

Sorgsam bearbeitete und polierte Bronzeproben wurden bei 700, 800 und 850° C verzundert und nachher wurde die Zusammensetzung und Struktur des Zunders untersucht und ebenso die Dicke und das Gefüge der entstandenen an Zinn verarmten Schicht.

Die Röntgen-Strukturuntersuchung des Zunders nach DEBYE—SCHERRER ergab Cu_2O , CuO und wenig SnO_2 .

Zusammensetzung der benutzten Bronzeproben: $\text{Cu} = 92,9\%$, $\text{Sn} = 6,3\%$, $\text{Pb} < 0,01\%$, $\text{Sb} = 0,016\%$, $\text{Fe} = \text{Sp}$, $\text{Zn} < 0,01\%$, $\text{Cd} < 0,01\%$, $\text{Bi} < 0,002\%$, $\text{P} = 0,19\%$, $\text{Ni} = 0,03\%$, $\text{Mn} < 0,01\%$, $\text{Al} < 0,01\%$.

Tafel der Ergebnisse der Verzunderungsversuche :

Temperatur	Zeit	Sn-Gehalt des Zunders
700° C	1 Stunde	6,2%
	3 »	6,2%
	6 »	6,3%
800° C	1 »	5,8%
	2 »	6,1%
850° C	1 »	6,3%
	2 »	6,1%

Die Versuche haben bewiesen, dass der Sn-Gehalt des Zunders praktisch gleich ist dem Sn-Gehalt der Bronze, im Zunder konnte also eine beachtlichere Diffusion von Sn nicht erfolgen. Der Umstand, dass auch nach längerer Zeit der Sn-Gehalt des Zunders nicht zunahm, als die unter der Oberfläche befindliche Einschlussschicht von SnO_2 schon oxydieren konnte, lässt den Schluss zu, dass in dieser Oberflächenschicht eine bedeutendere Menge von Sn auch nicht diffundierte. SnO_2 löst sich weder in Kupfer noch in CuO — Cu_2O . SnO_2 vermindert weder das Tempo der Verzunderung noch bildet es eine Schutzschicht.

In der stark oxydierenden Ofenatmosphäre geht die Verzunderung der Bronze in zwei Etappen vonstatten. Zuerst oxydiert der Sn-Gehalt des α -Kristalls und erst nach völliger Zinnverarmung tritt die Oxydation des Kupfers ein. An jenen Stellen wo der partielle Druck des Sauerstoffs gross ist, bildet sich grobes, kantiges SnO_2 , während die α -Kristalle ganz an Zinn verarmen.

An den Stellen mit niedrigerem partiellen Druck entsteht während der teilweisen Zinnverarmung winziges SnO_2 .

Die eingewalzten bzw. Risse ausfüllenden Einschlüsse von CuO reduzieren sich bei hoher Temperatur zu Cu_2O und das infolge der Reaktion $\text{CuO} \rightarrow \text{Cu}_2\text{O} + \text{O}$ freiwerdende O diffundiert in die Bronze, während der Sn -Gehalt des α zu SnO_2 oxydiert, das eine vielästige Form annimmt. Nach völliger Reduktion des CuO sinkt der partielle Druck des O_2 stark und ist nunmehr unfähig, das in der zinnverarmten Schicht zurückgebliebene Sn zu oxydieren. Bei längerer Warmbehandlung reduziert der schwächere Einschluss von Cu_2O vollständig und seine frühere Stelle ist nur durch das viele sekundäre SnO_2 sowie durch die örtliche Zinnverarmung zu erkennen.

SCHRIFTTUM

1. K. EWIG-DAUES : Zeitschrift für Metallkunde **24** (1932) 214/220.
2. J. VERŐ : Általános Metallográfia (Allgemeine Metallographie) II. Akadémiai Kiadó, Budapest 1956.
3. P. SZÉKI—Z. HEGEDÜS : Acta Technica **4** (1952), p. 293/303.
4. ULICK R. EVANS : Korrosion, Passivität und Oberflächenschutz von Metallen, Berlin 1939.
5. G. MASING : Lehrbuch der Allgemeinen Metallkunde, Berlin 1950.

ZUSAMMENFASSUNG

Die bei den ersten Stichen des Warmwalzens entstehenden Oberflächenrisse geringer Tiefe hängen mit der in der Atmosphäre des Ofens infolge der Bildung von SnO_2 entstehenden Zinnverarmung zusammen. Die Verzunderung erfolgt in zwei Abstufungen. Zuerst oxydiert der Sn -Gehalt des α -Kristalls zu SnO_2 und erst nach völliger Zinnverarmung verzundert das Kupfer. Die Zinnverarmung überholt in Raum und Zeit die Oxydation des Kupfers. Die Stärke der zinnverarmten Schicht wechselt in Abhängigkeit von der homogenisierenden Temperatur und Zeitdauer. Form und Abmessung des sekundären SnO_2 wechseln in Abhängigkeit vom vorhandenen partiellen Druck des O_2 .

CHANGES OF STRUCTURE AND MANUFACTURING FAULTS CAUSED BY SCALING, IN HOT-ROLLED Bz5 BRONZE

Z. HEGEDÜS

SUMMARY

Surface cracks formed at the first passes of hot-rolling are connected with de-tinning of the surface and formation of SnO_2 in the atmosphere of the oxidizing furnace. The formation of scale proceeds in two steps. First, the Sn content of the α -crystal oxidizes into SnO_2 and only after complete de-tinning, the copper oxidizes. The de-tinning precedes the oxidation in space and time. The thickness of the de-tinned layer is a function of the homogenization temperature and the time. The form of the secondary SnO_2 and its dimension varies as a function of the partial pressure of the O_2 being there.

AL TÉRATIONS STRUCTURALES ET DÉFECTUOSITÉS DE FABRICATION
PROVOQUÉES PAR L'OXYDATION DU BRONZE Bz 5 LAMINÉ À CHAUD

Z. HEGEDÜS

RÉSUMÉ

Les fentes superficielles de petite profondeur, se formant lors de la première phase de laminage à chaud, sont en relation avec la réduction d'étain accompagnée d'une formation de SnO_2 dans l'atmosphère du four d'oxydation. L'oxydation s'effectue en deux phases. Premièrement, la teneur en Sn du cristal α s'oxyde en SnO_2 , et ce n'est qu'après réduction complète de l'étain qu'a lieu l'oxydation du cuivre. La réduction de l'étain précède l'oxydation du cuivre dans l'espace et dans le temps. L'épaisseur de la couche d'étain réduite varie en fonction de la température et du temps d'homogénéisation. La forme et les dimensions du SnO_2 secondaire varient suivant la pression partielle de l' O_2 présent.

ИЗМЕНЕНИЯ СТРУКТУРЫ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ДЕФЕКТЫ, ВЫЗВАННЫЕ
ВСЛЕДСТВИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ОКАЛИНЫ В СЛУЧАЕ ГОРЯЧЕКАТАННОЙ
БРОНЗЫ Bz 5

З. ХЕГЕДЮШ

РЕЗЮМЕ

Неглубокие поверхностные трещины, образующиеся при первых пропусках в случае горячей прокатки, связаны с потерей олова на поверхности, связанной, в свою очередь, с образованием SnO_2 в атмосфере кислой печи. Образование окалины происходит в две ступени. Сначала окисляется содержание Sn α -кристалла в SnO_2 и только после полной потери олова происходит образование окалины меди. Потеря олова как в пространстве, так и во времени предшествует окислению меди. Толщина потерявшего олова слоя изменяется в функции температуры гомогенизации и времени. Форма и размер первичной SnO_2 изменяется в зависимости от парциального давления присутствующего O_2 .

TEMPERATURE DROP OF INCOMPRESSIBLE FLUIDS RISING IN BOREHOLES

Prof. T. BOLDIZSÁR
D. ENG. SC.

DEPARTMENT II FOR MINE MACHINERY, TECHNICAL UNIVERSITY, SOPRON

[Manuscript received 12th January, 1957]

In geothermic research and in oil production it is important to know the temperature regimen of the fluid: of water and oil, rising in drill holes. While the temperature of the stagnant fluid column in the hole rapidly attains the rock temperature, that of the fluid flowing in the hole may substantially differ from the virgin rock temperature. For the determination of the terrestrial heat flow knowledge of the virgin rock temperature is necessary. The productive capacity of oil wells is affected by the viscosity distribution of the flowing oil; on the other hand, the latter is a function of the temperature distribution.

The fluid rising in a vertical cylindrical drill hole enters the hole at given depth mostly at a temperature identical with the strata temperature, i. e. the virgin rock temperature. Supposing uniform thermal conductivity the temperature of the undisturbed strata decreases linearly. The heat of the rising fluid is partly transferred to the strata, while the temperature of the fluid drops. However, according to experience, the temperature of the fluid flowing from the well is from the place of entry upward always higher than the strata temperature.

Let along a length dz of the drill hole the heat quantity flowing from the fluid into the rock be $q \cdot dz$. If the volume of fluid flowing in the well in unit time is V , its specific heat c , then the temperature drop of the incompressible fluid will be $\frac{q \cdot dz}{Vc}$, that is, if T_F is the temperature of the fluid, then

$$dT_F = - \frac{q \cdot dz}{Vc} . \quad (1)$$

The heat quantity (q) flowing in along unit length of the drill hole in unit time may be computed if the partial differential equation of heat conduction is solved for the case of a hollow cylinder immersed into an infinite space characterized by given thermal conductivity and diffusivity, and the temperature gradient on the cylinder wall is calculated (1). Suppose that the heat transfer coefficient $\alpha = \infty$, that is, nothing obstructs the heat flow between liquid and casing, as well as between casing and rock (transition resistance to heat conduc-

tion is zero), then at a given difference of temperature the amount of heat flowing into the rock on unit length

$$q = \lambda \cdot F(\psi) \cdot \tau \quad (2)$$

where λ is the coefficient of thermal conductivity of the rock, τ is the difference of temperature of the cylinder wall and of the virgin rock. In the case on hand

$$\tau = T_F - T_R,$$

$$F(\psi) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\psi\beta^2}}{J_0^2(\beta) + Y_0^2(\beta)} \cdot \frac{d\beta}{\beta}, \quad (3)$$

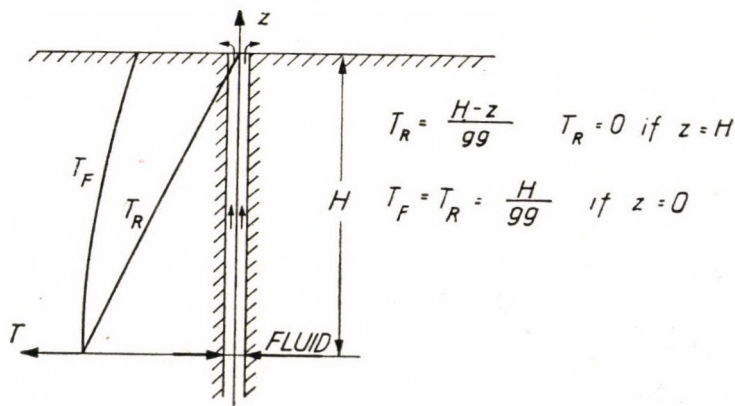


Fig. 1

where $\psi = \frac{a t}{R^2}$, a is the coefficient of thermal diffusivity of the rock, t is the time that has elapsed since the start of fluid flow, R the diameter of the drill hole, J_0 and Y_0 are zero order Bessel functions of the first and second kind, β the variable of the integral. The value of $F(\psi)$ can be taken from tabulations (2).

The problem can also be solved with the aid of the heat transfer coefficient (3). In this case instead of $F(\psi)$ the value of $F\left(\frac{\alpha R}{\lambda}, \psi\right)$ has to be calculated with. Instead of equation (3) the use of the following formula gives a good approximation (4).

$$F(\psi) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\psi}}.$$

On the other hand, the determination of α for a given case is not easy, and the condition $\alpha = \infty$ suits very well practical requirements.

After substitution the differential equation is as follows :

$$dT_F = - \frac{\lambda F(\psi)}{Vc} \left(T_F - \frac{H-z}{gg} \right) dz, \quad (4)$$

where $T_R = \frac{H-z}{gg}$, gg is the geothermic gradient ; the coordinate system is chosen in a way that if $z=H$, $T_R = 0$. Initial condition

$$\text{if } z = 0, \quad T_F = T_R = \frac{H}{gg}. \quad (5)$$

The solution of the common linear differential equation taking into consideration the initial condition is (Fig. 1)

$$T_F = \frac{H-z}{gg} + \frac{Vc}{\lambda F(\psi) gg} \left[1 - \exp \left(- \frac{\lambda F(\psi) z}{Vc} \right) \right]. \quad (6)$$

From this the difference between the fluid and rock temperatures

$$\tau = \frac{Vc}{\lambda F(\psi) gg} \left[1 - \exp \left(- \frac{\lambda F(\psi) z}{Vc} \right) \right]. \quad (7)$$

The temperature of the water flowing out at the well head if the annual mean surface temperature is T_0

$$T_F^H = T_0 + \frac{Vc}{\lambda F(\psi) gg} \left[1 - \exp \left(- \frac{\lambda F(\psi) z}{Vc} \right) \right]. \quad (8)$$

The temperature of the water flowing out can be easily measured, and with its knowledge the equivalent geothermic gradient and the temperature of the layer producing the liquid are calculable

$$gg = \frac{Vc}{\lambda F(\psi) (T_F^H - T_0)} \left[1 - \exp \left(- \frac{\lambda F(\psi) H}{Vc} \right) \right] \quad (9)$$

whence

$$T_R = T_0 + \frac{H}{gg}. \quad (10)$$

The temperatures figuring in equations (8) and (9) are actually measurable values.

The temperature of the fluid flowing out determined by equation (8) depends on the following quantities:

Thickness and coefficient of conductivity of the strata.

Specific weight and specific heat of the strata.

Radius of the drill hole.

Time that has elapsed since the begin of flow.

Quantity and specific heat of the fluid.

Depth from the surface of the producing level.

Annual mean temperature of the surface.

Value of the terrestrial heat flow.

The value of the terrestrial heat flow in a given series of beds determines the value of the geothermic gradient, and the temperature of the aquifer. The value of the geothermic gradient to be taken into account

$$gg = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta h_i}{q \sum_{i=1}^n \frac{\Delta h_i}{\lambda_i}}$$

where λ_i is the thermal conductivity of layers of Δh_i thickness, and q is the value of the terrestrial heat flow (4).

Let according to equation (7) the temperature difference of the outflowing fluid and of the rock be examined as function of the depth of the drill hole (that is, if $z = H$). Fig. 2 has been plotted according to investigations in the Great Hungarian Plain on the basis of the probable mean thermal conductivity ($\lambda = 1$ kcal/m, hour, deg. C), geothermic gradient (21 m/deg. C) and inner diameter of casing $R = 10$ cm. If the fluid discharge is small (500 lit/hr) the outflow temperature of water differs but little from the rock temperature at the surface (approximately the yearly mean temperature of the air), that is, the temperature of water flowing in from the depth drops very much. The temperature of the fluid flowing out increases with time. In case of higher discharges (5000 lit/hr) the temperature of the fluid flowing out differs very much from the surface rock temperature, and the temperature towards the depth increases but little.

Very instructive is Fig. 3 illustrating the temperature of water flowing in a 1000 m deep well as a function of depth. Characteristic of the temperature regimen is that at the discharge of a small amount of water, the lines of the water and of the original rock temperature are running parallel after the narrow initial section. The same was observed at measurements taken in a 840 m deep well near Colorado Springs (L. V. Hart No. 1. Wildcat) [5]. At higher discharge rates, conversely, the water temperature in the well changes but little. With time the water temperature rises all along the depth of the drill hole, because

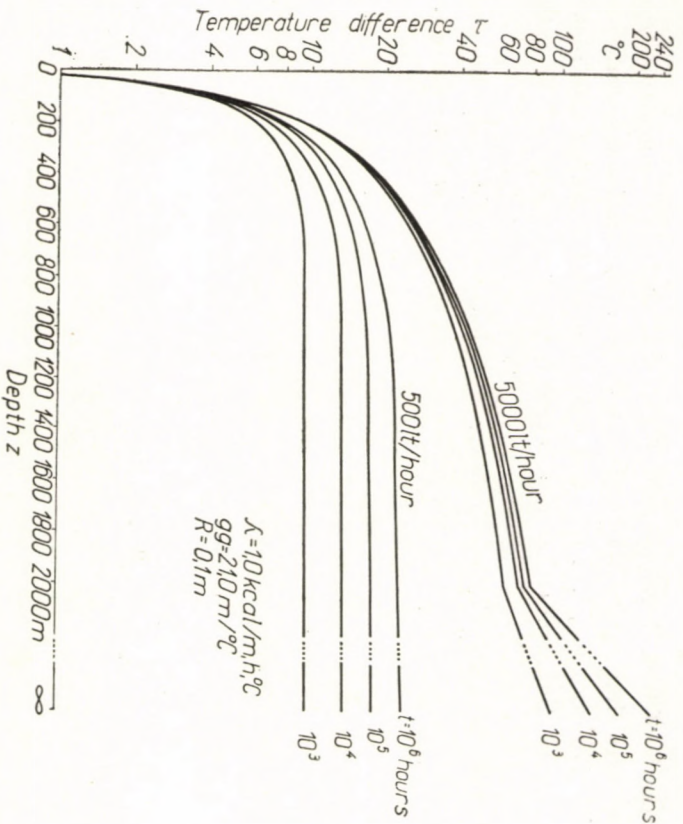


Fig. 2

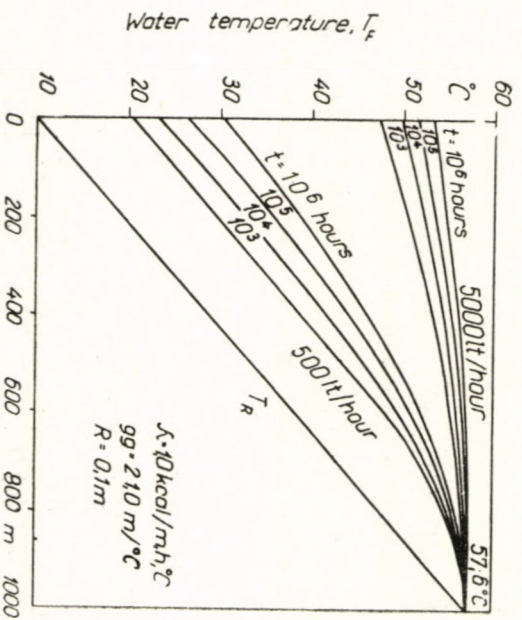


Fig. 3

a hot mantle of rock develops around the well, and the temperature gradient decreases with time on the wall of the drill hole. The stationary state develops only after infinite time, i. e. the drill hole embedded in an infinite rock heats up the surrounding strata after $t = \infty$ time to the temperature of the inflowing water.

At the execution of geothermic investigations very often only the temperature and discharge rate of the water flowing out from the well are known. With

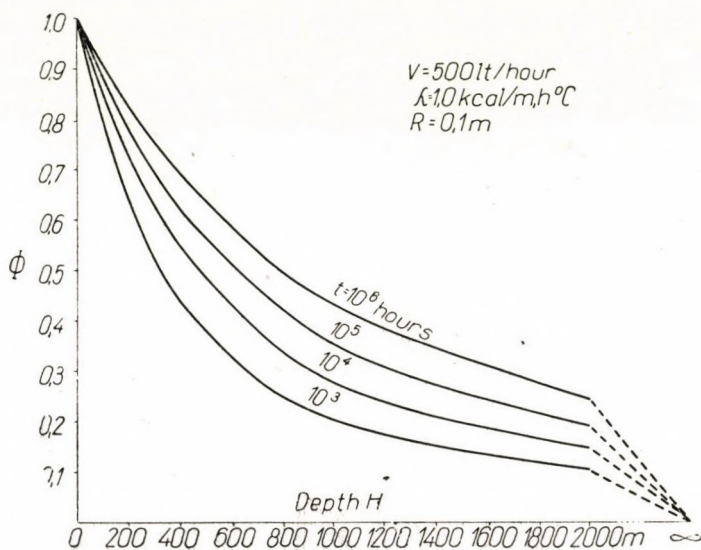


Fig. 4

knowledge of the thermal conductivity coefficient the virgin rock temperature at the depth of the inflow can be determined. By multiplying numerator and denominator of equation (9) by H (depth of the aquifer), $\frac{H}{T_F^H - T_0}$ being the so-called apparent geothermic gradient (gg'), the value of the correct geothermic gradient,

$$gg = \Phi \cdot gg' \quad (11)$$

where the value of the correction factor is

$$\Phi = \frac{Vc}{\lambda F(\psi)H} \left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda F(\psi)H}{Vc}\right) \right]. \quad (12)$$

Fig. 4 shows the correction factor as a function of depth with the thermal conductivity coefficient given in Fig. 2. With the aid of the temperature of

the water flowing out, measured at Colorado Springs, as quoted, as well as of the heat conductivity data given by BIRCH [5] the values of Φ and of gg have been computed. The calculated values are in fair agreement with the geothermic gradient calculated from the temperature measured in the depth.

In the above investigations the thermal conductivity of rocks was supposed to be constant. In practical cases calculations should be made with the equivalent thermal conductivity and geothermic gradient. The fluid was supposed to originate from a certain thin layer and to enter the drill hole at the virgin rock temperature of that depth. These restrictions are not necessary, and it is possible to execute the calculations sectionwise in the case of strata of greatly varying thermal conductivities. The same method may be applied in the case of multiple-zone inflow. If the fluid enters the well with a temperature differing from that of the layer, the differential equation may also be solved with corresponding initial condition. Finally the effect of the expansion of gases contained in the fluid may also be considered, if the degree of expansion as the function of depth of the drill hole is known.

REFERENCES

1. JAEGER CLARKE : Proc. Roy. Soc. of Edinburg 1942. Vol. 61. p. 229.
2. INGERSOLL—ZOBEL—INGERSOLL : Heat Conduction, Madison 1954. p. 248.
3. KREMNYEV : Dokl. Akad. Nauk USSR 1952. Vol. LXXXV, No. 5. p. 1009.
4. BOLDIZSÁR : The influence of the thermal field of the earth's crust on the warming up of the air in deep and hot mines. Acta Technica Acad. Scient. Hung. Tom. XVI. Fasc. 3—4. pp. 108—126.
5. BIRCH : Temperature and heat flow in a well near Colorado Springs. Am. J. Sci. 1947. Vol. 245. pp. 733—753.

SUMMARY

By solving the differential equation of heat conduction in cylindrical coordinates it is possible to compute the temperature distribution of fluids flowing upward in boreholes. The solution given is suitable for the determination of the virgin rock temperature in the depth from the temperature of the outflowing fluid. Temperature distribution determines viscosity distribution in oil wells and thus the oil production of the well. Numerical examples illustrate the method employed.

TEMPERATURERNIEDRIGUNG DER IN BOHRLÖCHERN AUFSTEIGENDEN FLÜSSIGKEITEN

T. BOLDIZSÁR

ZUSAMMENFASSUNG

Die in Zylinderkoordinaten angeschriebene Differentialgleichung der Wärmeleitung ermöglicht die Berechnung der Temperatur der in Bohrlöchern aufsteigenden Flüssigkeiten. Die vom Verfasser mitgeteilte Lösung eignet sich zur Berechnung der ursprünglichen Gesteinstemperatur in der Tiefe, wo die Flüssigkeit ins Bohrloch einströmt, wenn die Temperatur der ausströmenden Flüssigkeit bekannt ist. Da die Temperaturverteilung der im Bohrloch strömenden Flüssigkeit auch die Verteilung der Viskosität bestimmt, kann man Schlüsse ziehen auf die Ergiebigkeit von Ölbohrlöchern und auf die Änderung der Ergiebigkeit. Das Verfahren wird auch durch Zahlenbeispiele aus der Praxis illustriert.

LA DIMINUTION DE TEMPÉRATURE DES LIQUIDES MONTANT DU TROU DE FORAGE

T. BOLDIZSÁR

RÉSUMÉ

L'équation différentielle de conductibilité thermique inscrite sur les coordonnées cylindriques, permet de déterminer la température des liquides montant du trou de forage. La solution donnée par l'auteur permet la détermination de la température minéralogique d'origine à la profondeur où le liquide afflue au trou de forage, la température du liquide s'écoulant étant connue. Comme la répartition de température du liquide affluant dans le trou de forage détermine également la répartition de viscosité, on peut tirer, certaines conclusions relatives à la production des puits pétrolifères et les variations de celle-ci en fonction du temps. Des exemples numériques pratiques illustrent la méthode de calcul proposée par l'auteur.

СНИЖЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЖИДКОСТЕЙ, ПОДНИМАЮЩИХСЯ В БУРОВЫХ СКВАЖИНАХ

Т. БОЛЬДИЖАР

РЕЗЮМЕ

Решение дифференциального уравнения теплопроводности при нанесении на цилиндрические координаты позволяет определить температуру жидкостей, поднимающихся в буровых скважинах. Сообщенное решение позволяет вычислить действительную температуру породы, зная температуру выходящей жидкости, для той глубины, на которой жидкость входит в буровую скважину. Так как температура жидкости, движущейся в буровой скважине, определяет также вязкость, то можно сделать вывод в отношении дебита нефтяных скважин и изменения дебита во времени. Метод демонстрируется также практическими числовыми примерами.

TRANSFORMATION OF A THREE-PHASE ALTERNATING-CURRENT SYSTEM WITH THE AID OF MATRIX CALCULUS

CH. SZENDY

D. ENG. SC.

POWER STATIONS ENGINEERING INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received 25th January, 1957]

For the investigation of dissymmetrical conditions of three-phase alternating-current systems serves the symmetrical components method, proposed by FORTESCUE [1] and worked out in detail by WAGNER and EVANS [2]. With similar intentions E. CLARK [3] introduced the α , β components method and PARK [4] the d , q components for electric machines. In the course of later developments, the *positive plus negative and the positive minus negative components* were developed. KRON [5] used the tensor calculus for the calculation of electric systems.

In this paper, utilizing expressions valid for the hypermatrices developed by EGERVÁRY [6--9] with the aid of the matrix calculus related to the tensor calculus, a generalized transformation is developed which embraces the transformations used hitherto as some of its special cases.

1. Utilization of the impedance hypermatrix

In a three-phase system, the relation between the currents and the voltages of n elements can be written as follows :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{Z}_{11} \mathbf{i}_1 + \mathbf{Z}_{12} \mathbf{i}_2 + \dots + \mathbf{Z}_{1n} \mathbf{i}_n \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{Z}_{21} \mathbf{i}_1 + \mathbf{Z}_{22} \mathbf{i}_2 + \dots + \mathbf{Z}_{2n} \mathbf{i}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_n &= \mathbf{Z}_{n1} \mathbf{i}_1 + \mathbf{Z}_{n2} \mathbf{i}_2 + \dots + \mathbf{Z}_{nn} \mathbf{i}_n \end{aligned} \quad (1,1)$$

where

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{ia} \\ u_{ib} \\ u_{ic} \end{bmatrix} \text{ is the column vector formed by the } \\ \text{phase voltages of the } i\text{-th element}$$
$$\mathbf{i}_j = \begin{bmatrix} i_{ja} \\ i_{jb} \\ i_{jc} \end{bmatrix} \text{ is the column vector formed by the } \\ \text{phase currents of the } j\text{-th element}$$

$$\mathbf{Z}_{ij} = \begin{bmatrix} z_{ij,aa} & z_{ij,ab} & z_{ij,ac} \\ z_{ij,ba} & z_{ij,bb} & z_{ij,bc} \\ z_{ij,ca} & z_{ij,cb} & z_{ij,cc} \end{bmatrix} \text{ the impedance matrix between the phase values of the } i\text{-th and } j\text{-th element.}$$

In hypermatrix form, the relation (1.1) will be (1.2)

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z} \mathbf{i} \quad (1,2)$$

where

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \text{ is the voltage hyper-column vector} \quad (1,3)$$

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_n \end{bmatrix} \text{ is the current hyper-column vector} \quad (1,4)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{1n} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{2n} \\ \mathbf{Z}_{n1} & \mathbf{Z}_{n2} & \mathbf{Z}_{nn} \end{bmatrix} \text{ is the impedance hypermatrix} \quad (1,5)$$

The individual elements of the electric system are *regular*, if the \mathbf{Z}_{ij} impedance matrices are cyclic (circulant) matrices, thus

$$Z_{ij,aa} = Z_{ij,bb} = Z_{ij,cc}$$

$$Z_{ij,ab} = Z_{ij,bc} = Z_{ij,ca}$$

$$Z_{ij,ac} = Z_{ij,ba} = Z_{ij,cb}$$

and thus

$$\mathbf{Z}_{ij} = \begin{bmatrix} Z_{ij,aa} & Z_{ij,ab} & Z_{ij,ac} \\ Z_{ij,ac} & Z_{ij,aa} & Z_{ij,ab} \\ Z_{ij,ab} & Z_{ij,ac} & Z_{ij,aa} \end{bmatrix} = \mathbf{C}(Z_{ij,aa}, Z_{ij,ab}, Z_{ij,ac}) \quad (1,6)$$

Inasmuch the \mathbf{Z}_{ij} impedance matrix refers to a *passive* element of the circuit, the \mathbf{C} cyclic matrix is *symmetrical*, i. e. $Z_{ij,ab} = Z_{ij,ac}$. In the case of an *active element*, the \mathbf{C} cyclic matrix is in *general not symmetrical*.¹

Supposing that the electrical system is *regular*, and thus consists of regular elements, the (1.5) impedance hypermatrix can be decomposed, using the proper-

¹ *Passive elements* of the electrical system: transmission lines, cables, transformers, reactors; *active elements*: generators, motors, converting machine groups. One component may consist of more elements, e. g. primary and secondary winding of a transformer.

ties of the non-symmetrical cyclic matrix of the individual elements (blocks) into the sum of the following direct products:²

$$\mathbf{Z}_0 = \Lambda \times \cdot \omega_0 \omega_0^* + \Lambda_1 \times \cdot \omega_1 \omega_1^* + \Lambda_2 \times \cdot \omega_2 \omega_2^* \quad (1,7)$$

where

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \bar{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (1,8)$$

are the latent vectors of the cyclic matrix of third order ($\varepsilon = e^{j\frac{2\pi}{3}}$)

thus

$$\omega_2 = \bar{\omega}_1.$$

Therefore the dyadic products are:

$$\omega_k \omega_k^* = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-jk\frac{2\pi}{3}} \\ e^{jk\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, e^{jk\frac{2\pi}{3}}, e^{-jk\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, 2$$

Furthermore:

$$\Lambda_k = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{(k)} & \lambda_{12}^{(k)} & \dots & \lambda_{1n}^{(k)} \\ \lambda_{21}^{(k)} & \lambda_{22}^{(k)} & \dots & \lambda_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1}^{(k)} & \lambda_{n2}^{(k)} & \dots & \lambda_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (1,9)$$

$$k = 0, 1, 2$$

where $\lambda_{ij}^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2$) are the latent roots of the cyclic blocks \mathbf{Z}_{ij} , therefore

$$\lambda_{ij}^{(k)} = z_{ij,aa} + z_{ij,ab} e^{-jk\frac{2\pi}{3}} + z_{ij,ac} e^{jk\frac{2\pi}{3}} \quad (1,10)$$

$$k = 0, 1, 2$$

and thus

$$\lambda_{ij}^{(0)} = z_{ij,aa} + z_{ij,ab} + z_{ij,ac}$$

$$\lambda_{ij}^{(1)} = z_{ij,aa} - \frac{z_{ij,ab} + z_{ij,ac}}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} (z_{ij,ab} - z_{ij,ac})$$

$$\lambda_{ij}^{(2)} = z_{ij,aa} - \frac{z_{ij,ab} + z_{ij,ac}}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} (z_{ij,ab} - z_{ij,ac}).$$

² In electrical engineering the positive phase sequence is differing from the mathematical sequence, therefore $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ is interchanged.

Let us multiply the matrix equation (1.7) with the hypermatrices $\mathbf{E}_n \times \cdot \omega_0^*$, $\mathbf{E}_n \times \cdot \omega_1^*$, $\mathbf{E}_n \times \cdot \omega_2^*$ (\mathbf{E}_n is the unit matrix of order n), then the matrix equation of order $3n$ is decomposed into the following three matrix equations of order n :³

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_n \times \cdot \omega_k^*) \mathbf{u} &= \Lambda_k (\mathbf{E}_n \times \cdot \omega_k^*) \mathbf{i} \\ k &= 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Let us introduce the following notation :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k)} &= (\mathbf{E}_n \times \cdot \omega_k^*) \mathbf{u}, \\ \mathbf{i}^{(k)} &= (\mathbf{E}_n \times \cdot \omega_k^*) \mathbf{i} \end{aligned} \quad (1.11)$$

so the three matrix equations become

$$\mathbf{u}^{(k)} = \Lambda_k \mathbf{i}^{(k)}. \quad (1.12)$$

Further transformation of the Λ_k matrix of order n is unnecessary, because it consists only of scalar components and therefore the relations can be measured on a (single-phase) network model.

We abridge the $\mathbf{u}^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$ voltage and $\mathbf{i}^{(0)}$, $\mathbf{i}^{(1)}$, $\mathbf{i}^{(2)}$ current components :

$$\mathbf{u}^{(\omega)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(\omega)} \\ \mathbf{u}_2^{(\omega)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^{(\omega)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}^{(\omega)} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1^{(\omega)} \\ \mathbf{i}_2^{(\omega)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_n^{(\omega)} \end{bmatrix}$$

where

$$\mathbf{u}_i^{(\omega)} = \begin{bmatrix} u_i^{(0)} \\ u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_j^{(\omega)} = \begin{bmatrix} i_j^{(0)} \\ i_j^{(1)} \\ i_j^{(2)} \end{bmatrix}$$

From (1.11):

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{u}^{(\omega)} = \mathbf{E}_n \times \cdot \mathbf{S}^* \mathbf{u}, \quad \mathbf{i}^{(\omega)} = \mathbf{E}_n \times \cdot \mathbf{S}^* \mathbf{i} \quad (1.13)$$

where

$$\mathbf{S}^* = \begin{bmatrix} \omega_0^* \\ \omega_1^* \\ \omega_2^* \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

³ Because

$$(\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \times \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \times \cdot \mathbf{BD}$$

which introduced into (1.8), will give

$$\mathbf{S}^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\varepsilon} & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \bar{\varepsilon} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

From the values $\mathbf{u}^{(\omega)}$, $\mathbf{i}^{(\omega)}$ can be determined also \mathbf{u} , \mathbf{i} , if we multiply (1.13) by $\mathbf{E}_n \times \cdot \mathbf{S}$, ω_0 , ω_1 , ω_2 being latent vectors, $\mathbf{S}\mathbf{S}^* = \mathbf{E}_n$ therefore

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}_n \times \cdot \mathbf{S}\mathbf{u}^{(\omega)}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{E}_n \times \cdot \mathbf{S}\mathbf{i}^{(\omega)} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \bar{\varepsilon} \\ 1 & \bar{\varepsilon} & \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

From (1.13), (1.15), (1.16), (1.17)

$$u_i^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{ia} + u_{ib} + u_{ic}) \quad (1.18)$$

$$u_i^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{ia} + \varepsilon u_{ib} + \bar{\varepsilon} u_{ic})$$

$$u_i^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_{ia} + \bar{\varepsilon} u_{ib} + \varepsilon u_{ic})$$

$$u_{ia} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_i^{(0)} + u_i^{(1)} + u_i^{(2)}) \quad (1.19)$$

$$u_{ib} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_i^{(0)} + \bar{\varepsilon} u_i^{(1)} + \varepsilon u_i^{(2)})$$

$$u_{ic} = \frac{1}{\sqrt{3}} (u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)} + \bar{\varepsilon} u_i^{(2)}) .$$

Obviously, the $u_i^{(0)}$, $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$ voltage components are the same as the *symmetrical components* used hitherto, or rather differ from them only by the factor $\sqrt{3}$. In a similar way, the $i_j^{(0)}$, $i_j^{(1)}$, $i_j^{(2)}$ current components may be established, only in the place of u_i , i_j must be introduced.

2. Decomposition of an impedance hypermatrix consisting of passive elements

In the case of passive elements,

$$z_{ij,ab} = z_{ij,ac}$$

therefore the \mathbf{C} cyclic matrix elements are symmetrical, therefore

$$\lambda_{ji}^{(1)} = \lambda_{ij}^{(2)} \text{ thus}$$

$$\Lambda_1 = \Lambda_2.$$

In consequence, the expression (1.7) can be written as

$$\mathbf{Z} = \Lambda_0^* \times \cdot \omega_0 \omega_0^* + \Lambda_1 \times \cdot (\omega_1 \omega_1^* + \omega_2 \omega_2^*).$$

In this expression the sum of dyade products $\omega_1 \omega_1^* + \omega_2 \omega_2^*$ can be replaced by the sum of dyade products formed from such latent vectors $\mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\eta$, which may be produced by linear transformation of the latent vectors ω_1, ω_2 . The impedance matrix formed by the new latent vectors is

$$\mathbf{Z} = \Lambda_0 \times \cdot \omega_0 \omega_0^* + \Lambda_1 \times \cdot (\mathbf{v}_\xi \mathbf{v}_\xi^* + \mathbf{v}_\eta \mathbf{v}_\eta^*) \quad (2,1)$$

where

$$\mathbf{v}_\xi = \xi_1 \omega_1 + \xi_2 \omega_2 \quad (2,2)$$

$$\mathbf{v}_\eta = \eta_1 \omega_1 + \eta_2 \omega_2,$$

which written in hypermatrix form gives

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_\xi \\ \mathbf{v}_\eta \end{bmatrix} = \mathbf{T} \times \cdot \mathbf{E}_3 \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (2,2')$$

where

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{T}| \neq 0.$$

According to the above condition,

$$\mathbf{v}_\xi \mathbf{v}_\xi^* + \mathbf{v}_\eta \mathbf{v}_\eta^* = \omega_1 \omega_1^* + \omega_2 \omega_2^*$$

which is in hypermatrix form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_\xi^* \\ \mathbf{v}_\eta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \end{bmatrix}.$$

Obviously, this relation is fulfilled by the transformation (2.2') only in the case of

$$\mathbf{T} \mathbf{T}^* = \mathbf{E}_2$$

i. e. the transformation is accomplished according to *unitary* (orthogonal) matrix. Because of

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{T}|} \begin{bmatrix} \eta_2 & -\xi_2 \\ -\eta_1 & \xi_1 \end{bmatrix},$$

the components of the unitary matrix fulfil the following condition :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -|\mathbf{T}| \xi_2 \\ \eta_2 &= |\mathbf{T}| \xi_1. \end{aligned}$$

After ω_1 and ω_2 , \mathbf{v}_ξ and \mathbf{v}_η are also latent vectors, on the base of (2.2)

$$\begin{aligned} \xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 &= 1 \\ \eta_1 \bar{\eta}_1 + \eta_2 \bar{\eta}_2 &= 1 \end{aligned}$$

in this case it is necessary that

$$|\mathbf{T}| |\mathbf{T}^*| = 1$$

the condition of which is

$$|\mathbf{T}| = e^{j\gamma}$$

where γ is an arbitrary real number.

Thus

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ -\bar{\xi}_2 e^{j\gamma} & \bar{\xi}_1 e^{j\gamma} \end{bmatrix}, \mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 & -\bar{\xi}_2 e^{-j\gamma} \\ \bar{\xi}_2 & \bar{\xi}_1 e^{-j\gamma} \end{bmatrix}. \quad (2,3)$$

The \mathbf{v}_ξ , \mathbf{v}_η latent vectors appearing in the decomposition of the impedance matrix (2.1) may thus be derived from the product of the hypermatrix $\mathbf{T} \times \mathbf{E}_3$ (formed from the \mathbf{T} unitary matrix of second order) with the latent vectors of the symmetrical components ω_1 , ω_2 . Thus the linear relation between the latent vectors \mathbf{v}_ξ , \mathbf{v}_η and ω_1 , ω_2 is

$$\mathbf{v}_\xi = \xi_1 \omega_1 + \xi_2 \omega_2 \quad (2,4)$$

$$\mathbf{v}_\eta = -\bar{\xi}_2 e^{j\gamma} \omega_1 + \bar{\xi}_1 e^{j\gamma} \omega_2$$

$$\omega_1 = \bar{\xi}_1 \mathbf{v}_\xi - \bar{\xi}_2 e^{j\gamma} \mathbf{v}_\eta \quad (2,5)$$

$$\omega_2 = \bar{\xi}_2 \mathbf{v}_\xi + \bar{\xi}_1 e^{j\gamma} \mathbf{v}_\eta$$

where

$$\xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 = 1.$$

Introducing the notation

$$\xi_1 = \rho_1 e^{j\delta_1} \quad (2,6)$$

$$\xi_2 = \rho_2 e^{j\delta_2}$$

and using (1.8), from (2.6) we get

$$\rho_2 = \sqrt{1 - \rho_1^2}. \quad (2,7)$$

The unit vectors of the components ξ , η designated on the base of the relation (2.4) are therefore

$$\mathbf{v}_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \rho_1 e^{j\delta_1} + \sqrt{1 - \rho_1^2} e^{-j(-\delta_2)} \\ \rho_1 e^{j(-\frac{2\pi}{3} + \delta_1)} + \sqrt{1 - \rho_1^2} e^{-j(\frac{2\pi}{3} - \delta_2)} \\ \rho_1 e^{j(\frac{2\pi}{3} + \delta_1)} + \sqrt{1 - \rho_1^2} e^{-j(\frac{2\pi}{3} - \delta_2)} \end{bmatrix} \quad (2,8)$$

$$\mathbf{v}_{\eta} = -\frac{e^{j\gamma}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \rho_1^2} e^{-j\delta_2} & -\rho_1 e^{-j\delta_1} \\ \sqrt{1 - \rho_1^2} e^{j(-\frac{2\pi}{3} - \delta_2)} & -\rho_1 e^{-j(-\frac{2\pi}{3} + \delta_1)} \\ \sqrt{1 - \rho_1^2} e^{j(\frac{2\pi}{3} - \delta_2)} & -\rho_1 e^{-j(\frac{2\pi}{3} + \delta_1)} \end{bmatrix}.$$

3. Decomposition of an impedance matrix consisting of active and passive elements in dyade products formed by vectors ω_0 , \mathbf{v}_{ξ} , \mathbf{v}_{η}

Expression (1.7) may be transformed in the following way :

$$\mathbf{Z} = \Lambda_0 \times \cdot \omega_0 \omega_0^* + \frac{1}{2} (\Lambda_1 + \Lambda_2) \times \cdot (\omega_1 \omega_1^* + \omega_2 \omega_2^*) + \frac{1}{2} (\Lambda_1 - \Lambda_2) \times \cdot (\omega_1 \omega_1^* - \omega_2 \omega_2^*).$$

When introducing in the above equation (2.5), it becomes

$$\mathbf{Z} = \Lambda_0 \times \cdot \omega_0 \omega_0^* + \frac{1}{2} [(\Lambda_1 + \Lambda_2) - (\Lambda_1 - \Lambda_2) (\xi_1 \bar{\xi}_1 - \xi_2 \bar{\xi}_2)] \times \cdot \mathbf{v}_{\xi} \mathbf{v}_{\xi}^* - (\Lambda_1 - \Lambda_2) \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 e^{j\gamma'} \times \cdot \mathbf{v}_{\xi} \mathbf{v}_{\eta}^* - (\Lambda_1 - \Lambda_2) \xi_1 \xi_2 e^{-j\gamma'} \times \cdot \mathbf{v}_{\eta} \mathbf{v}_{\xi}^* + \frac{1}{2} [(\Lambda_1 + \Lambda_2) - (\Lambda_1 - \Lambda_2) (\xi_2 \bar{\xi}_2 - \xi_1 \bar{\xi}_1)] \times \cdot \mathbf{v}_{\eta} \mathbf{v}_{\eta}^*. \quad (3,1)$$

This may be rearranged and written as

$$\mathbf{Z} = \Lambda_0 \times \cdot \omega_0 \omega_0^* + \Lambda_2 \times \cdot (\mathbf{v}_\xi \mathbf{v}_\xi^* + \mathbf{v}_\eta \mathbf{v}_\eta^*) + \\ + (\Lambda_1 - \Lambda_2) \cdot (\xi_1 \bar{\xi}_1 \mathbf{v}_\xi \mathbf{v}_\xi^* - \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 e^{j\gamma} \mathbf{v}_\xi \mathbf{v}_\eta^* - \xi_1 \xi_2 e^{-j\gamma} \mathbf{v}_\xi \mathbf{v}_\xi^* + \xi_2 \bar{\xi}_1 \mathbf{v}_\eta \mathbf{v}_\eta^*) \quad (3.1')$$

In this case, the canonical form of the impedance matrix ceases with respect to the vectors ω_0 , \mathbf{v}_ξ , \mathbf{v}_η , because the dyadic products $\bar{\xi}_1 \mathbf{v}_\eta^*$ and $\mathbf{v}_\eta \mathbf{v}_\xi^*$ appear too. The voltage and current components may be won in a way similar to (1.13) and (1.16), only

$$\mathbf{u}^{(v)} = \mathbf{E}_n^* \times \cdot \mathbf{V}^* \mathbf{u}, \quad \mathbf{i}^{(v)} = \mathbf{E}_n^* \times \cdot \mathbf{V}^* \mathbf{i} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}_n^* \times \cdot \mathbf{V} \mathbf{u}^{(v)}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{E}_n^* \times \cdot \mathbf{V} \mathbf{i}^{(v)}$$

where

$$\mathbf{u}^{(v)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(v)} \\ \mathbf{u}_2^{(v)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^{(v)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}^{(v)} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1^{(v)} \\ \mathbf{i}_2^{(v)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_n^{(v)} \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{u}_i^{(v)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^{(0)} \\ \mathbf{u}_i^{(\xi)} \\ \mathbf{u}_i^{(\eta)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_j^{(v)} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_j^{(0)} \\ \mathbf{i}_j^{(\xi)} \\ \mathbf{i}_j^{(\eta)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = [\omega_0, \mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\eta].$$

Similarly to (1.7) and (2.1), the expression (3.1) does not decompose into three relations of order n independent from each other (cf. 1.11). If we premultiply Equ. (3.1) by the hypermatrices $\mathbf{E}_n \times \cdot \omega_0^*$, $\mathbf{E}_n \times \cdot \mathbf{v}_\xi^*$, $\mathbf{E}_n \times \cdot \mathbf{v}_\eta^*$ we obtain the matrix equation

$$\mathbf{u}^{(0)} = \Lambda_0 \mathbf{i}^{(0)} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}^{(\xi)} = \frac{1}{2} [(\Lambda_1 + \Lambda_2) - (\Lambda_1 - \Lambda_2) (\xi_1 \bar{\xi}_1 - \xi_2 \bar{\xi}_2)] \mathbf{i}^{(\xi)} - (\Lambda_1 - \Lambda_2) \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 e^{j\gamma} \mathbf{i}^{(\eta)}$$

$$\mathbf{u}^{(\eta)} = -(\Lambda_1 - \Lambda_2) \xi_1 \xi_2 e^{-j\gamma} \mathbf{i}^{(\xi)} + \frac{1}{2} [(\Lambda_1 + \Lambda_2) - (\Lambda_1 - \Lambda_2) (\xi_2 \bar{\xi}_2 - \xi_1 \bar{\xi}_1)] \mathbf{i}^{(\eta)}.$$

The relation concerning the voltage and current components $\mathbf{u}^{(v)}$, $\mathbf{i}^{(v)}$ can be written in the form of the matrix equation

$$\mathbf{u}^{(v)} = \sum \mathbf{i}^{(v)} \quad (3.5)$$

From Equ. (1.2) and (3.5) it is obvious, considering also the transformation (3.2)⁴, that

$$\sum = \mathbf{E}_n \times \cdot \mathbf{V}^* \mathbf{Z} \mathbf{E}_n \times \cdot \mathbf{V}. \quad (3.6)$$

⁴Equ. (1.2) must be multiplied from the right by the matrix $\mathbf{E}_m \times \cdot \mathbf{V}^*$ and because $\mathbf{V} \mathbf{V}^* = \mathbf{E}_3$ (unitary and orthogonal vectors).

Hence

$$\begin{aligned} \Sigma = & \left[\begin{array}{c} \langle \lambda_{11}^{(0)}, \lambda_{11}^{(0)}, \lambda_{11}^{(1)} \rangle \dots \langle \lambda_{1n}^{(0)}, \lambda_{1n}^{(1)}, \lambda_{1n}^{(2)} \rangle \\ \vdots \\ \langle \lambda_{n1}^{(0)}, \lambda_{n1}^{(1)}, \lambda_{n1}^{(2)} \rangle \dots \langle \lambda_{nn}^{(0)}, \lambda_{nn}^{(1)}, \lambda_{nn}^{(2)} \rangle \end{array} \right] + \\ & + \left[\begin{array}{c} \langle 0, (\lambda_{11}^{(1)} - \lambda_{11}^{(2)}) \left[\begin{array}{c} \bar{\xi}_1 \\ -\bar{\xi}_2 e^{-j\gamma} \end{array} \right] [\xi_1, -\bar{\xi}_2 e^{j\gamma}] \rangle \dots \langle 0, (\lambda_{1n}^{(1)} - \lambda_{1n}^{(2)}) \left[\begin{array}{c} \bar{\xi}_1 \\ -\bar{\xi}_2 e^{-j\gamma} \end{array} \right] [\xi_1, -\bar{\xi}_2 e^{j\gamma}] \rangle \\ \langle 0, (\lambda_{n1}^{(1)} - \lambda_{n1}^{(2)}) \left[\begin{array}{c} \bar{\xi}_1 \\ -\bar{\xi}_2 e^{-j\gamma} \end{array} \right] [\xi_1, -\bar{\xi}_2 e^{j\gamma}] \rangle \dots \langle 0, (\lambda_{nn}^{(1)} - \lambda_{nn}^{(2)}) \left[\begin{array}{c} \bar{\xi}_1 \\ -\bar{\xi}_2 e^{-j\gamma} \end{array} \right] [\xi_1, -\bar{\xi}_2 e^{j\gamma}] \rangle \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

where

$$\xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 = 1.$$

The impedance hypermatrix is given by the sum of two hypermatrices. The blocks of the first are diagonal matrices, therefore between the $(0, \xi, \eta)$ components there is no interaction. But in the second term the blocks of the passive elements are zero, as for these $\lambda_{ij}^{(1)} = \lambda_{ij}^{(2)}$, while for active elements, there appears an interaction between the components ξ and η , on the base of the matrices

$$(\lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)}) \begin{bmatrix} \xi_1 \bar{\xi}_1 & -\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 e^{j\gamma} \\ -\bar{\xi}_1 \xi_2 e^{-j\gamma} & \xi_2 \bar{\xi}_2 \end{bmatrix}.$$

From the above one may deduce that

a) an electric system consisting of regular elements, when transformed $0, \xi, \eta$ components, is decomposed into three independent parts — excepting the symmetric components (where $\xi_2 = 0$) — if there are only passive elements in the system,

b) in the active elements appears an interaction between the components ξ and η corresponding to the matrix

$$(\lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)}) \begin{bmatrix} \xi_1 \bar{\xi}_1 & -\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 e^{j\gamma} \\ -\bar{\xi}_1 \xi_2 e^{-j\gamma} & \xi_2 \bar{\xi}_2 \end{bmatrix}.$$

The scalar ξ_1 may be an arbitrary complex number, ξ_2 can be determined by the equation $\xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 = 1$. Introducing (2.7), this matrix can be written in the form

$$(\lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)}) \begin{bmatrix} \rho_1^2 & -\rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2} e^{j(\gamma - \delta_1 - \delta_2)} \\ -\rho_1 \sqrt{1 - \rho_1^2} e^{-j(\gamma - \delta_1 - \delta_2)} & 1 - \rho_1^2 \end{bmatrix}.$$

c) If the electric system is modelled on a network analyser, it is necessary to connect in an appropriate manner the ξ and η component networks at the regular active elements, because of the interaction between these elements. The usual model network is a passive structure in which the interactions are symmetric (not Hermitian, where the symmetry appears between complex conjugate values). It follows from this that such a transformation may be applied directly to the network analyser which fulfils the following conditions :

$$\gamma = \delta_1 + \delta_2 \quad (3,8)$$

or
$$\gamma = \delta_1 + \delta_2 + \pi .$$

If this conditions is not fulfilled, direct instrument readings on the analyser consisting of passive elements are not sufficient and network computation is necessary as well. The computation may be replaced by special devices (e. g. electron tubes) inserted in the network analyser.

In Equ.(3.7), the \sum hypermatrix can be expressed, carrying out the addition and introducing Equ. (2.7), by the block matrix Ξ_{ij} of the individual elements ij

$$\sum = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \cdots & \Xi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_{n1} & \cdots & \Xi_{nn} \end{bmatrix}$$

where

$$\Xi_{ij} = \langle \lambda_{ij}^{(0)}, \Pi_{ij} \rangle = \begin{bmatrix} \lambda_{ij}^{(0)} & \\ & \Pi_{ij} \end{bmatrix} \quad (3,9)$$

$$\Pi_{ij} = \begin{bmatrix} \varrho_1^2 \lambda_{ij}^{(1)} + (1 - \varrho_1^2) \lambda_{ij}^{(2)} & -\varrho_1 \sqrt{1 - \varrho_1^2} e^{j(\gamma - \delta_1 - \delta_2)} (\lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)}) \\ -\varrho_1 \sqrt{1 - \varrho_1^2} e^{-j(\gamma - \delta_1 - \delta_2)} (\lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)}) & (1 - \varrho_1^2) \lambda_{ij}^{(1)} + \varrho_1^2 \lambda_{ij}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3,10)$$

4. Dissymmetrical conditions of an electric system consisting of regular elements

The phase values of the currents and voltages of the electric system consisting of regular elements can be transformed to 0, ξ , η components on the base of Equ. (3.2). In some places of the regular system may appear such an irregular connection which cannot be expressed by the cyclic matrix C . The places where this connection appears, are called fault locations. The fault location appears according to the network circuit because of *parallel faults* (e. g. short circuits) and *series faults* (e. g. open circuits).

The dissymmetrical faults cannot be expressed by the cyclic matrix C , therefore the network transformed into components 0 , ξ and η must be conveniently connected at the fault locations. As for the various faults, the following can be stated:

4.1 Line to ground fault, two conductors open (Figs. 1 and 2)

The two faults may be described in the same way. The difference between them is only that the short circuit (parallel fault) appears between the phase

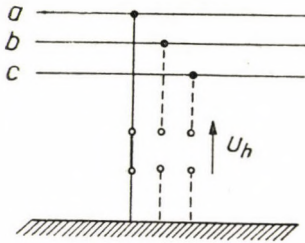


Fig. 1. Line to ground fault in phase a

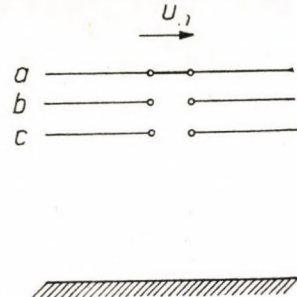


Fig. 2. Two conductors open (b and c)

conductor and the ground, the open circuit (series fault) in the phase conductor. The faults shown in Figs. 1 and 2

$$\begin{aligned} u_{f,a} &= 0 \\ i_{f,b} &= 0 \\ i_{f,c} &= 0. \end{aligned} \quad (4,1)$$

On the base of (3.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_f &= \mathbf{V} \mathbf{u}_f^{(0)} \\ \mathbf{i}_f^{(0)} &= \mathbf{V}^* \mathbf{i}_f, \end{aligned} \quad (4,2)$$

where

$$\mathbf{V} = [\omega_0, \mathbf{v}_\xi, \mathbf{v}_\eta].$$

Because of $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, and introducing

$$\mathbf{v}_\xi = \begin{bmatrix} v_{\xi,a} \\ v_{\xi,b} \\ v_{\xi,c} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_\eta = \begin{bmatrix} v_{\eta,a} \\ v_{\eta,b} \\ v_{\eta,c} \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & v_{\xi,a} & v_{\eta,a} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & v_{\xi,b} & v_{\eta,b} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & v_{\xi,c} & v_{\eta,c} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

From (4.1, 2 and 3)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} u_0 + v_{\xi,a} u_{\xi} + v_{\eta,a} u_{\eta} = 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{i_0}{\sqrt{3}} = \frac{i_{\xi}}{v_{\xi,a}} = \frac{i_{\eta}}{v_{\eta,a}}$$

which means that the networks of the components must be connected in the way shown in Fig. 3.

In the case of a transformer, the turn ratio can be only a real value.

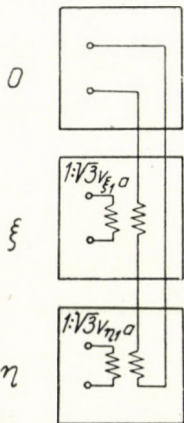


Fig. 3. Connection of the 0, ξ , η component networks in case of the faults shown in Figs. 1 and 2

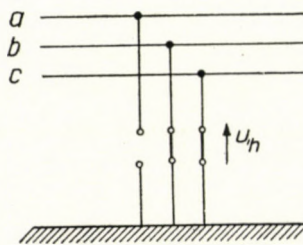


Fig. 4. Two lines to ground fault in phases b and c

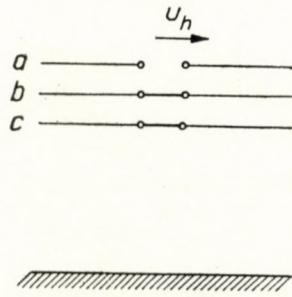


Fig. 5. Two conductors open in phase a

(4.2) Two-line to ground fault one-conductor open (Figs. 4 and 5)

These two faults may also be discussed in a way similar to the discussion of the above. In the case of other phases, cyclic variation should be used. In this case

$$\begin{aligned} u_{f,b} &= 0 \\ u_{f,c} &= 0 \\ i_{f,a} &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

(From 4.2, 3 and 5)

$$\frac{u_0}{\sqrt{3}} = \frac{u_\xi}{v_{\xi,a}} = \frac{u_\eta}{v_{\eta,a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} i_0 + v_{\xi,a} i_\xi + v_{\eta,a} i_\eta = 0. \tag{4,6}$$

But from this follows that the 0, ξ , η component networks must be connected according to Fig. 6. In this case too, only in the case of real $v_{\xi,a}$ and $v_{\eta,a}$ the use of a transformer is possible. If, on the contrary, $v_{\xi,a}$ and $v_{\eta,a}$ are not real values, the transformer is only *symbolic* therefore computation or some other special device (e. g. electronics) are necessary.

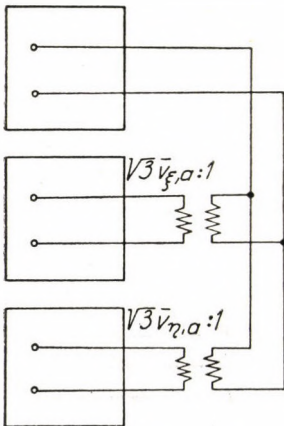


Fig. 6. Connection of the 0, ξ , η component networks in case of the faults shown in Figs. 4 and 5

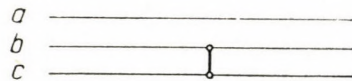


Fig. 7. Line to line fault in phases b and c

(4.3) *Line to line fault* (Fig. 7)

If the short-circuit arises between phases b and c

$$u_b = u_c \tag{4,7}$$

$$i_a = 0$$

$$i_b = -i_c.$$

From (4.2, 3 and 7)

$$(v_{\xi,b} - v_{\xi,c}) u_\xi + (v_{\eta,b} - v_{\eta,c}) u_\eta = 0$$

$$i_0 = 0$$

$$v_{\xi,a} i_\xi + v_{\eta,a} i_\eta = 0$$

Because of

$$\mathbf{V} \mathbf{V}^* = \mathbf{E}_3 \quad \text{and} \quad |\mathbf{V}| = 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (v_{\xi,b} - v_{\xi,c}) = -\bar{v}_{\eta,a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (v_{\eta,b} - v_{\eta,c}) = \bar{v}_{\xi,a}.$$

It follows from this that

$$\frac{u_{\xi}}{\bar{v}_{\xi,a}} = \frac{u_{\eta}}{\bar{v}_{\eta,a}} \tag{4,8}$$

$$v_{\xi,a} i_{\xi} + v_{\eta,a} i_{\eta} = 0.$$

According to (4,8) the 0, ξ , η component networks must be connected according to Fig. 8. A transformer can be used only for real values of $v_{\xi,a}$ $v_{\eta,a}$. In the case of short circuits between other phases, the indices must be changed cyclically.

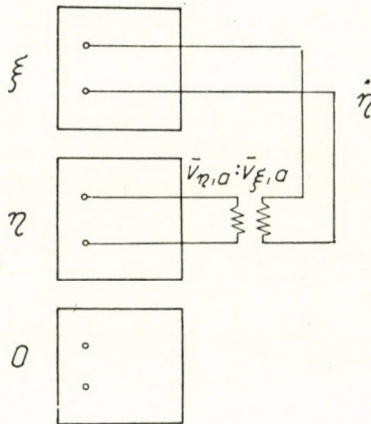


Fig. 8. Connection of the 0, ξ , η component networks in case of the fault shown in Fig. 7

(4.4) Influence of the impedance at the fault locations

In the case of the faults discussed in points (4.1–3), there was no impedance inserted. Insertion of impedance may be done e. g. according to Fig. 9, where the short circuit arises symbolically at the fault location after insertion of a regular impedance. In case of the series fault shown in Fig. 10, the regular impedance Z_h can be short-circuited by a single-phase break.

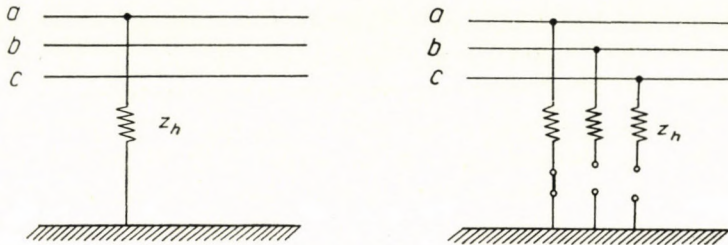


Fig. 9. Impedance inserted at the location of the line to ground fault

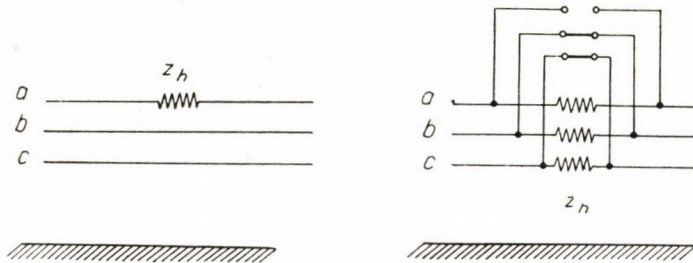


Fig. 10. Series fault of impedance Z_h

In more complicated case the fault-location impedance matrix must be established; let this be \mathbf{Z}_h . This matrix must be transformed according to the relation (3.6). In this case the fault impedance matrix for the components $0, \xi, \eta$ will be

$$\mathbf{E}_h = \mathbf{V}^* \mathbf{Z}_h \mathbf{V}. \quad (4,9)$$

The $0, \xi, \eta$ component networks must be connected at the fault points according to the matrix \mathbf{E}_h .

5. Considerations concerning the choice of the components $0, \xi, \eta$

At the fault locations, regular electrical systems decomposed into components $0, \xi, \eta$ must be interconnected according to the rules discussed in para. (4.1—4). On the network analyser connection is possible only with transformers having a real value of turn ratio. If the turn ratio is a complex number, phase shifting is necessary in addition to the turn ratio: but this can be solved on the network analyser only by repeated trial, or computations must be made for the network reduced to the fault location. In both cases the work is simplified

if only one transformer has a complex turn ratio, because in that case the phase shift must be adjusted, or the computations made, only for one place.

Choice of the components $0, \xi, \eta$ according to the principles outlined above is one point of view. The other point of view is, that active elements can be modelled on the network analyser only if condition (3.8) can be fulfilled. If that is not the case, again the problem must be solved by trial and error on the model network, or by insertion of active elements (e. g. electron tubes) or by calculation of the system reduced to the element in question. The two points of view can be satisfied in certain cases by the choice of appropriate components, but if between different phases short-circuit occurs at several places, both points of view cannot be satisfied simultaneously. May be that the phase shifting at the fault location used for one component is the simpler solution, or to the contrary, the modelling of the active elements by active elements of the model network (e. g. electron tube) leads to simplification. In each case one must decide which components are the most suitable.

According to the above, phase shifting at the fault may be obviated if in the phase for which the fault is symmetrical, the components of the latent vectors (w_0, v_ξ, v_η) are real numbers. E. g., if the fault is symmetrical with respect to phase a , the values $v_{\xi,a}, v_{\eta,a}$ must be real. This condition for the fault location can be satisfied if

a) in the case of a fault in any phase,

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \xi_2 \quad \text{thus} \\ \varrho_1 &= \varrho_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \delta_1 &= -\delta_2 \end{aligned} \quad (5,1)$$

furthermore $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

The above statement can be proved from (2.4)

b) in the case of a fault symmetrical to phase k , condition a), or $\xi_2 = 0$

$$\xi_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}k} \quad (5,2)$$

is a real number, thence

$$\delta_1 = j \frac{2\pi}{3} k$$

and

$$\gamma = 0.$$

In the case of any phase fault the *fault location condition* can be satisfied, if phase shifting must be used only for one component (e. g. η). In that case the components of \mathbf{v}_ξ or of \mathbf{v}_η must be real.

At worst, only for the component η phase shifting may be necessary, if

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \bar{\xi}_2 \\ \text{5.3 thus} \quad \varrho_1 = \varrho_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \delta_1 &= -\delta_2 \end{aligned} \quad (5,3)$$

but differently from (5.1), γ can be an arbitrary real number.

At worst, for the ξ component only phase shifting is necessary, if

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\bar{\xi}_2 \\ \text{thus} \quad \varrho_1 = \varrho_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \delta_1 &= \pi - \delta_2 \end{aligned} \quad (5,4)$$

γ is an arbitrary real number.

The *condition (3.8) for the active elements* and the conditions for the *fault locations* can be fulfilled simultaneously only by the relation (5.2). It follows from this, that phase shifting at fault locations and introduction of not passive elements into the network analyser representing active elements or the computations replacing this method can be avoided only if all faults of the electrical system are symmetrical to one phase only. This condition can be fulfilled only for *symmetrical components* established for the appropriate phase ($\varrho_1 = 1$, $\delta_1 = j \frac{2\pi}{3} k$, $\delta_2 = 0$, $\gamma = 0$).

If the electrical system does not contain active elements, or if it is sufficient to use instead of the impedances $Z_{ij,ab}$ and $Z_{ij,ac}$ only their mean values, condition (5.1) gives a satisfactory solution, especially if on the various places faults arise which are symmetrical to different phases. Introducing, on the base of (2.4) and (5.1) $\delta_1 = -\delta_2 = \delta$, we obtain the components 0, x, y [10].

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_x = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \cos \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_y = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \sin \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (5,5)$$

In this case the interaction between the components x and y at the active elements will not be symmetrical, because expression (3.10) will be the following

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{ij}^{(1)} + \lambda_{ij}^{(2)} & -j(\lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)}) \\ j(\lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)}) & \lambda_{ij}^{(1)} + \lambda_{ij}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (5,6)$$

Replacing the latent roots of the symmetrical components — the impedances of zero, positive and negative sequence — by the relation (1.10), the matrix Π_{ij} be written also with the phase impedances.

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2z_{ij,aa} - z_{ij,ab} - z_{ij,ac} & \sqrt{3}(z_{ij,ab} - z_{ij,ac}) \\ -\sqrt{3}(z_{ij,ab} - z_{ij,ac}) & 2z_{ij,aa} - z_{ij,ab} - z_{ij,ac} \end{bmatrix}. \quad (5,6')$$

If we introduce in the relation (5.5) the value $\delta = 0$, we get the α and β components proposed by E. CLARK. The latent vectors are

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_\beta = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \quad (5,7)$$

The expression of the matrix (5.6) remains unchanged. One advantage of the 0, α , β components is that $v_{\beta\alpha} = 0$, thus if the fault is symmetrical to the phase a , only the networks of components 0 and α must be connected. Therefore, if all faults are symmetrical to the a phase, it is unnecessary to represent the β component network.

The condition for the *active elements* (3.8) and the partial condition for the fault locations (5.3 and 5.4) can be satisfied both in the case of a fault in any phase. Permitting phase shifting for component η , $\gamma = 0$ or π must be introduced into Equ. (5.3). In the case of $\gamma = \pi$ we obtain the components x, iy [10], the latent vectors of which are

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_x = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \cos \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_y = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \sin \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix}. \quad (5,8)$$

At the active elements, the interaction between the components x and y will be symmetrical. From Equ. (3.10)

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{ij}^{(1)} + \lambda_{ij}^{(2)} & \lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)} \\ \lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)} & \lambda_{ij}^{(1)} + \lambda_{ij}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (5,9)$$

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2z_{ij,aa} - z_{ij,ab} - z_{ij,bc} & j\sqrt{3}(z_{ij,ab} - z_{ij,ac}) \\ j\sqrt{3}(z_{ij,ab} - z_{ij,ac}) & 2z_{ij,aa} - z_{ij,ab} - z_{ij,bc} \end{bmatrix}. \quad (5,9')$$

If we introduce into Equ. (5.8) $\delta = 0$, we get the so-called *positive plus negative and positive minus negative, modified symmetrical components*. The vectors are:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_+ = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_- = \frac{2j}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \quad (5,10)$$

In this case too, if there is a fault symmetrical to phase a , *only* the 0 and + component networks must be connected.

It can be seen from the above that the transformations used hitherto for the computation of three-phase a. c. networks are special cases of the components 0, ξ , η developed in the present paper. Table I shows the relation between the various transformations and the generalized transformation (using Equ. 2.8). The vector of the 0-component of each transformation is the same, i. e.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

The transformations listed in the Table may be divided into three main groups:

- the generalized *symmetrical* components,
- the x, y components and
- the x, iy components. If $\delta = 0$, we get in the three main groups,
- the symmetrical components, or
- the α, β components, or

Table I

Name and symbol of components	Components according to Equ. (2,8)				Latent vectors		Matrix Π_{ij} , for components ξ, η , for active elements (Equ. 3,10)
	ϱ_1	δ_1	δ_2	γ	v_ξ	v_η	
Generalized symmetrical (0,1 δ , 2 δ)	1	δ		0	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{j\delta} \\ e^{j(\delta - \frac{2\pi}{3})} \\ e^{j(\delta + \frac{2\pi}{3})} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{-j\delta} \\ -j(\delta - \frac{2\pi}{3}) \\ e^{-j(\delta + \frac{2\pi}{3})} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda_{ij}^{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{ij}^{(2)} \end{bmatrix}$
Symmetrical (0, 1, 2)	1	0		0	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$	
0, x, y	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	δ	$-\delta$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \cos(\delta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\delta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$	$\frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \sin(\delta - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\delta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ $a = \lambda_{ij}^{(1)} + \lambda_{ij}^{(2)}$ $b = j(\lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)})$
0, a, β	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$	
0, x, iy	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	δ	$-\delta$	π	$\frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \cos(\delta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\delta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$	$\frac{2j}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \sin(\delta - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\delta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ $a = \lambda_{ij}^{(1)} + \lambda_{ij}^{(2)}$ $b = \lambda_{ij}^{(1)} - \lambda_{ij}^{(2)}$
Positive + + negative positive - - negative (0, +, -)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	π	$\frac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\frac{2j}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$	

the positive + negative, positive - negative components, respectively. It is practical to use $\delta = 0$ in the case of the faults being symmetrical to the a phase. Thus in the case of faults symmetrical to phase b, it is desirable to use $\delta = \frac{2\pi}{3}$, in case of faults symmetrical to phase c, $\delta = -\frac{2\pi}{3}$ should be chosen, or to write down the components instead of starting from phase a, starting from the phase in question in the same cyclic order.

In Table II have been grouped those properties of the different transformations, which refer to the connection of the transformed 0, ξ , η component networks at the active elements of the system and at the fault locations.

Table II

Designations of components	Connection between components at active elements	Connection of the networks at faults, if the faults are symmetrical	
		only for phase a	for any phase
Symmetrical components	none	by passive element (transformer) in general between all three components	by phase shifting in general between two components
α, β components	not symmetrical	by passive element (transformer) without phase shifting	
		only between two components	
positive + negative and positive-negative components	symmetrical (with passive element)	with passive element (transformer) only between two components	phase shifting but only at one component

The connection of the $0, \xi, \eta$ component networks in the case of a fault symmetrical to one phase ($i = a, b, c$) is shown in Fig. 11, based on Figs. 3, 6, and 8. $v_{\xi,i}$ and $v_{\eta,i}$ are the i -th phase components of the latent vectors $\mathbf{v}_{\xi}, \mathbf{v}_{\eta}$. E. g. for components $0, \alpha, \beta$, the b phase component is $v_{\xi,b} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, v_{\eta,b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Inasmuch at the fault location arises a complicate fault impedance \mathbf{Z}_h which cannot be classified according to Fig. 11, it is practical to consider the following points when choosing the components ξ and η . For this, one may use the fact that the $\mathbf{v}_{\xi} \mathbf{v}_{\xi}^* + \mathbf{v}_{\eta} \mathbf{v}_{\eta}^*$ dyadic sum gives a projector \mathbf{Q} which projects the voltage and current vectors $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ on the plane of the latent vectors, the so-called basic plane. The latent vector \mathbf{w}_0 is normal to this basic plane (zero-sequence axis).

a) Inasmuch one latent vector of the fault impedance of the fault location is in the basic plane, it is practical to choose this latent vector for one latent vector of the transformation, i. e. as \mathbf{v}_{ξ} , because after transformation, the fault impedance matrix gets separated for this component.

b) If the latent vector of the fault is not in the basic plane, it is practical to choose the latent vector so that it lies at least in the plane formed by the latent vectors of the fault impedance (*fault plane*), or so that it is orthogonal to one latent vector of the fault place, because in this way too, the mutual connections at the fault locations can be reduced.

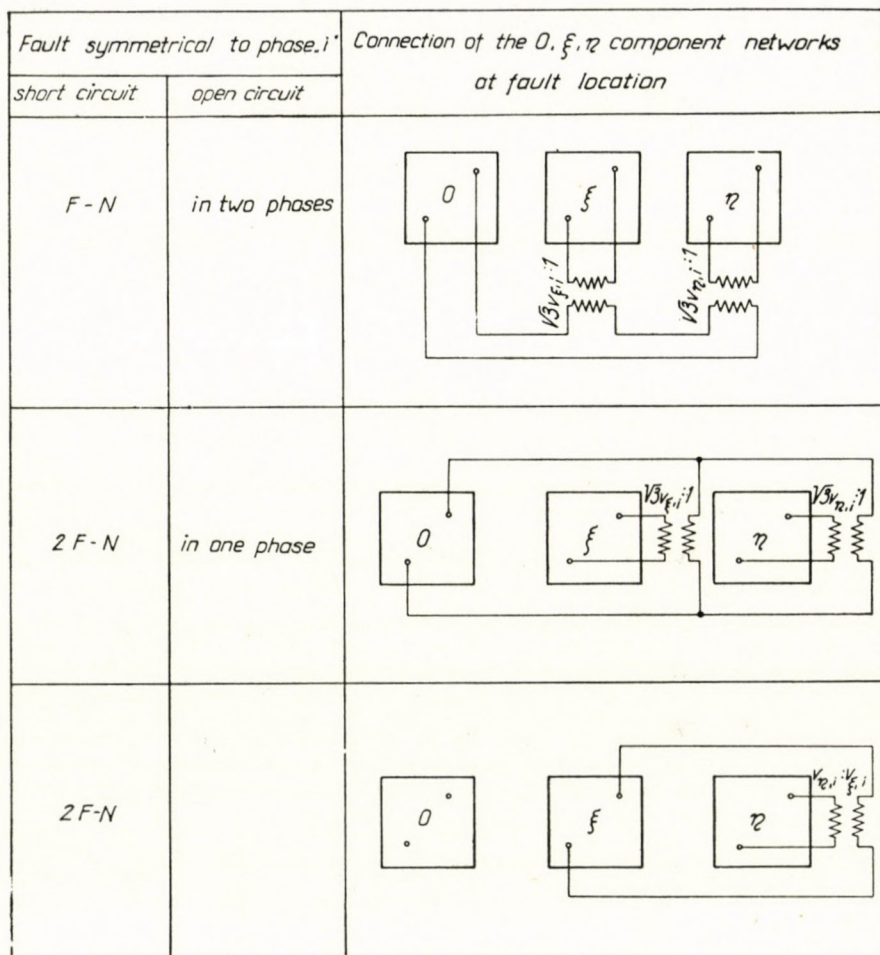


Fig. 11. Connection of the $0, \xi, \eta$ component networks in the case of different faults

REFERENCES

1. FORTESCUE: Method of Symmetrical coordinates to Solution of Polyphase Networks. AIEE Trans. 37. 1918, p. 1027—1115.
2. WAGNER—EVANS: Symmetrical Components Applical to the Solution of Unbalanced Electrical Circuits. Mc Graw-Hill. 1933.
3. E. CLARK: Circuit Analysis of A. C. Power Systems. Wiley and Son. N. Y. 1950.
4. PARK: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines. AIEE 1929, p. 716.
5. G. KRON: Tensor Analysis of Networks. Wiley and Son. N. Y. 1939.
6. E. EGERVÁRY: On a property of projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions. Acta Sc. Math. Tom XV. Fasc. I. Szeged, 1953.
7. E. EGERVÁRY: On hypermatrices whose blocks are commutable on pairs and their application in lattice-dynamics. Acta Sc. Math. Tom XV. Fasc. 3—4. Szeged, 1954.
8. LOVASS NAGY V.: On an Application of Egerváry's Hypermatrix-Algorithm to the Mathematical Investigation of Polyphase Transformers. Acta Technica A. S. Hungaricae. 1956. Tom. XV. p. 261—286.
9. F. YA. GANTMAKHER: Teoriya Matrirts. Moscow, 1953.
10. CH. SZENDY: Háromfázisú váltakozóáramú rendszer transzformációjának elmélete (Theory of transformation of a three-phase a. c. system). Dissertation for obtaining the Degree of Doctor of Engineering Sciences. Budapest, 1953.

SUMMARY

The impedance matrix of the regular elements of a three-phase electrical system is a circulant matrix, therefore the same latent vectors belong to the blocks. The impedance hypermatrix is thus expressed by the matrices formed from the latent values of the various blocks and the sum of the direct products of the dyades formed from the latent vectors belonging together. Transformed to its latent vectors, the three-phase system is decomposed into three systems independent from each other. For *passive* elements not containing rotating machines, only one of the latent vectors is fixed, the position of the two other can be changed, maintaining the conditions of orthogonality. The components obtained in this way are called by the author the $0, \xi, \eta$ components. The components used so far: α and β components, modifiable symmetrical components ("positive plus negative, positive minus negative") are special cases of the $0, \xi, \eta$ components. With active elements containing rotating machines, the system transformed to $0, \xi$ and η components is decomposed only into two systems independent from each other. Between the ξ and η components appears an interaction which ceases only in the case of the symmetrical components. The basic cases of the non-regular elements are the symmetrical short-circuits and the open lines. For these cases, the connection of the $0, \xi, \eta$ components can be determined. Finally, the author compares the different transformations.

TRANSFORMATION VON DREIPHASEN-WECHSELSTROMSYSTEMEN
MIT HILFE DER MATRIZENRECHNUNG

K. SZENDY

ZUSAMMENFASSUNG

Die Impedanzmatrix der regulären Elemente von elektrischen Dreiphasensystemen ist zyklisch, daher gehören zu den einzelnen Blöcken dieselben Eigenvektoren. Hieraus ergibt sich, dass die Impedanz-Hypermatrix durch die Summe der aus den Eigenwerten der einzelnen Blöcke gebildeten Matrizen und der Direktprodukte der aus den zusammengehörigen Eigenvektoren gebildeten Dyaden ausgedrückt wird. Das auf die Eigenvektoren transformierte Dreiphasensystem zerfällt in drei voneinander unabhängige Systeme. Bei *passiven* Elementen welche keine rotierenden Maschinen enthalten, ist nur der eine Eigenvektor fixiert, die Lage der beiden anderen kann unter Beibehaltung der Orthogonalitätsbedingungen verändert werden. Die so gewonnenen Komponenten nennt der Verfasser $0, \xi, \eta$ Komponenten. Die bisher üblichen symmetrischen Komponenten, α und β Komponenten, modifizierte symmetrische Komponenten ("positiv plus negativ, positiv minus negativ") sind Sonderfälle der $0, \xi, \eta$ Komponenten.

Bei aktiven Elementen, welche rotierende Maschinen enthalten, zerfällt das auf die $0, \xi, \eta$ Komponenten transformierte System nur in zwei voneinander unabhängige Systeme. Zwischen den Komponenten ξ und η erscheint eine Wechselwirkung, die nur im Falle von symmetrischen Komponenten aufhört. Die grundlegenden Fälle der irregulären Elemente sind die asymmetrischen Kurzschlüsse und die Unterberechnungen von Phasen. Für diese Fälle kann die Zusammenschaltung der $0, \xi, \eta$ Komponenten bestimmt werden. Zum Schluss vergleicht der Verfasser die verschiedenen Transformationen.

TRANSFORMATION D'UN SYSTÈME ALTERNATIF TRIPHASÉ À L'AIDE DU CALCUL DES MATRICES

Ch. SZENDY

RÉSUMÉ

La matrice des impédances des éléments réguliers d'un système électrique triphasé est cyclique, c'est pourquoi les mêmes vecteurs propres appartiennent aux différents blocs. En conséquence, l'hypermatrice des impédances est exprimée par la somme des matrices formées par les valeurs propres des différents blocs, et des produits directs des dyades formées par les vecteurs propres connexes. Par suite de la diagonalisation, le système triphasé est décomposé en trois systèmes indépendants. Aux éléments *passifs* ne contenant pas de machines tournantes, seulement l'un des vecteurs propres est fixé, la position des deux autres peut être variée, tout en maintenant les conditions d'orthogonalité. Les composantes ainsi obtenues sont nommées $0, \xi, \eta$ par l'auteur. Les composantes symétriques, les composantes α et β , et les composantes symétriques modifiées («composantes positive plus négative, composantes positive moins négative») sont des cas spéciaux des composantes $0, \xi, \eta$. Aux éléments actifs contenant des machines tournantes, le système transformé aux composantes $0, \xi, \eta$ n'est décomposé qu'en deux systèmes indépendants. Entre les composantes ξ et η il se produit une action mutuelle, qui ne disparaît que dans le cas des composantes symétriques. Les cas fondamentaux des éléments irréguliers sont constitués par les cour-circuits asymétriques et les coupures des phases. Pour ces cas, l'interconnexion des composantes $0, \xi, \eta$ peut être déterminée. L'auteur compare ensuite les différentes transformations.

ТРАНСФОРМАЦИЯ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С ПОМОЩЬЮ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

К. СЕНДИ

РЕЗЮМЕ

Матрица импеданса систематических элементов трехфазной электрической системы является циклической, поэтому для отдельных блоков действительны те же собственные векторы. Вследствие этого гиперматрица импеданса выражается суммой прямых множеств диадов, и матриц, образованных из собственных значений отдельных блоков. Трансформируя на собственные векторы, трехфазная система распадается на три независимые друг от друга системы. В случае пассивных элементов, не содержащих вращающейся машины, фиксированным является только один собственный вектор, а два остальных вектора в отношении своего положения могут изменяться при сохранении условия ортогональности. Полученные таким образом слагающие автор называет слагающими $0, \xi, \eta$. Используемые до сих пор симметричные слагающие, т. е. слагающие α и β , являются модифицированными симметричными слагающими («положительные + отрицательные, положительные — отрицательные» слагающие), представляющими собою специальные случаи слагающих $0, \xi, \eta$. В случае активных элементов, содержащих вращающиеся машины, система, трансформирующая на слагающие $0, \xi$ и η , распадается только на две независимые друг от друга системы. Между слагающими ξ и η имеет место взаимодействие, которое прекращается лишь в случае симметричных слагающих. Основные случаи несистематических элементов представляет собою асимметричные замыкания и разрыв фаз. В отношении их можно определить объединением слагающих $0, \xi, \eta$. Автор, наконец, сравнивает отдельные трансформации.

SUBSTITUTION METHOD FOR THE APPROXIMATE ANALYSIS OF STABILITY PROBLEMS OF PLANE FRAMED TRUSSES WITH RIGID JOINTS

Prof. P. CSONKA
D. ENG. SC.

DEPARTMENT FOR STRUCTURAL ANALYSIS, UNIVERSITY OF BUILDING SCIENCES AND COMMUNICATIONS

[Received on 31st January, 1957]

1. Introduction

Methods of the Theory of Elasticity are, in general, very cumbersome when applied to stability problems of rigid-jointed framed trusses. Therefore such approximate methods as allow a substantial simplification of calculatory work, are of great practical importance. The following procedure — the *substitution method* — aims at the same goal.

The method to be presented substitutes for the framed truss to be investigated a bar, the conditions of support and loading, as well as of elasticity of which are similar to those of the given truss. Thereby the facility offers itself to solve some problems of stability in relation to the framed truss by known formulae relative to simple bars.

The application of the substitution method requires the generalization of some concepts known from the theory of strength of bars. These concepts have to be defined first.

2. Definition of the prismatic framed truss

By *bar* a structural element is meant whose longitudinal dimension is substantially greater than its cross-sectional dimensions. The simplest kind of bar is: the *prismatic bar* with straight axis. In the case of the prismatic bar its parts cut out by cross-sectional planes at equal axial distances are of equal shape.

By *framed truss* a structure of bars rigidly jointed to one another is meant whose longitudinal dimension is substantially greater than its cross-sectional dimensions. If all bar axes of the framework lie in a common plane and the truss is of symmetrical structure in relation to this plane, a *plane* framed truss is spoken of. A framed truss consisting of *sections*, i. e. of parts of equal shape arranged along a straight line, will be called, with extension of the meaning of the term "prismatic", a *prismatic framed truss* (Fig. 1).

In the following only trusses considered as prismatic according to the aforesaid will be dealt with.

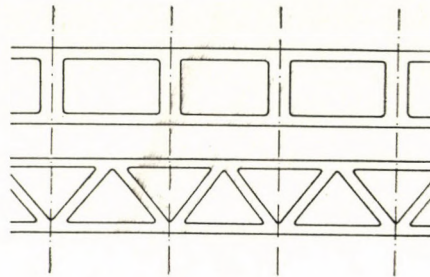


Fig. 1. Prismatic framed trusses

3. Basic cases of loadings

In the theory of strength of prismatic bars the special kinds of loadings are conventionally called *basic cases of loadings*. Such cases are e. g. : *pure tension (compression)*, *pure bending*, and *pure torsion*. In these cases equal conditions of deformation and of stress are reigning on sections of equal length of the prismatic bar.

In the family of prismatic *framed trusses* it is expedient to regard some special modes of loading as *basic cases of loadings*. Such will be called here the cases in which equal deformations, that is, equal inner forces develop in all sections of equal shape of the truss. With this nomenclature, even in the case of prismatic framed trusses, the terms of *pure tension (compression)*, *pure bending* and *pure torsion* may be spoken of.

The case of *pure shear* will be treated in a special paper.

4. Definition of rigidity

In the theory of strength of the prismatic *bar* the *rigidity* of the bar toward different loadings is conventionally described by the effort producing unit deformation. By unit deformation is meant in case of pure tension unit elongation (contraction), in case of pure bending unit curvature of the bar axis, in case of pure torsion unit angle of twist per unit length of the bar.

In the case of a prismatic *framed truss* the concept of *rigidity* may be interpreted similarly to that of the prismatic bar. The difference is only that in the place of unit deformation its average value has to be substituted. The latter is found by dividing the deformation measured on the section by the length of the latter. Accordingly :

a) in the case of *pure tension (compression)* the rigidity of the framed truss is expressed by the ratio

$$D = \frac{N}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Here N denotes the magnitude of the tensional (compressive) force and ε the ratio of the change of length, measured on the section, and of the length of the section.

b) In the case of *pure bending*, according to the two principal directions of the cross section (Fig. 2) the rigidity of the framed truss is expressed by

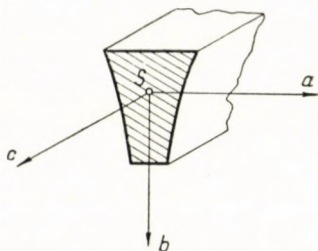


Fig. 2. Principal directions a, b, c

$$A = \frac{M_a}{\varkappa_a}, \quad (2)$$

and

$$B = \frac{M_b}{\varkappa_b}. \quad (3)$$

In the above formulas M_a and M_b are moments of bending couples acting in planes at right angles to principal axes a and b , \varkappa_a and \varkappa_b denote the average curvatures caused by couples M_a and M_b respectively. The average curvature is obtained by division of the angular rotation, presenting itself between the terminal surfaces of the section of the bar, by the length of the latter.

c) In the case of *pure torsion* the rigidity of the framed truss is

$$C = \frac{M_c}{\vartheta}. \quad (4)$$

In this formula M_c denotes the torque and ϑ the average value of unit twist caused by it. The latter is determined by dividing the angle of twist presenting itself between the terminal surfaces of the section by its length.

5. The principle of substitution

With knowledge of the stiffness characteristics of prismatic framed trusses, in the course of treatment of specific problems the framed truss can be replaced with good approximation by a prismatic bar the stiffness characteristics of which

equal those of the framed truss. However, it must be noticed, that the behaviour of the framed trusses is essentially influenced by the shearing forces, so that in cases, when these are of considerable values, the deformations caused by them are, in contrary to the case of prismatic bars, of fundamental importance.

The replacement of the prismatic *framed truss* by a prismatic *bar* of similar rigidity greatly facilitates the solution of some problems of stability. The case is especially simple if a problem is treated for which formulas, tabulations are

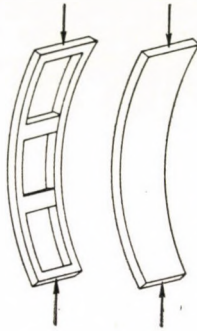


Fig. 3. Buckling of the framed truss and of the substituted bar



Fig. 4. Buckling problem not solvable by the substitution method

available in engineering textbooks. In this case the formulas or tabulated data are directly applicable to the framed truss.

Of course, the substitution of the prismatic bar for the prismatic framed truss is only permissible if the deformation of the framed truss takes place similarly to that of the bar to be substituted for it (Fig. 3). Therefore in cases when the framed truss suffers only local deformation, that is the axis of the truss is not deflected, or the plan of the truss is not distorted (Fig. 4), the principle of substitution cannot be applied.

The error resulting from the application of the substitution method is the smaller, the more the deformation of the substituted bar resembles that of the framed truss. Accordingly from the point of view of potential error it is in general favourable if the number of truss sections is high, that is if the length of the individual section is small in relation to the length of the truss. In case of fewer than three sections the application of the substitution method is not commendable.

6. Comparison of the exact and of the substitution method

For the comparison of the processes and of the results of the exact and of the substitution method the critical compressive force of the Vierendeel girder pictured in Fig. 3 will be treated more in detail. For the sake of simplicity cross bars and parts of the chords joining them will be considered as perfectly rigid.

Because of the supposed rigidity of cross bars the solution of the buckling problem to be treated is essentially identical with that of the problem outlined in Fig. 5.

This is namely the case of the bar of straight axis, subject to axial compression, which is composed of alternating rigid (blackened) and elastic (white) stretches. The bar is composed of three sections of equal shape, that is according

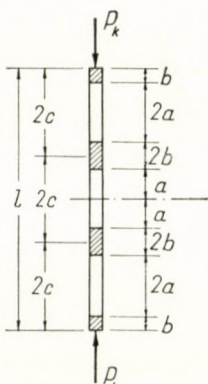


Fig. 5. Bar consisting of rigid and of elastic sections

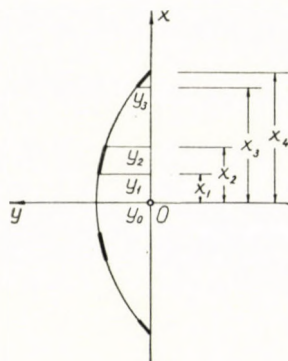


Fig. 6. Deflected shape of the bar

to the more general nomenclature of Chapter 2 it may be considered as prismatic. On the elastic stretches of the bar the moment of inertia of the cross-sectional surface of the bar relevant from the standpoint of buckling :

$$I_0 = \text{const.}$$

In the course of treatment of the problem the *exact* value of the critical compressive force will first be determined. For this start is made from the known differential equation

$$y'' + \omega^2 y = 0. \tag{5}$$

In this formula $y = y(x)$ is the ordinate of the buckled bar axis, and the meaning of coefficient ω^2 is

$$\omega^2 = \frac{P_{cr}}{EJ}, \tag{6}$$

where E is the coefficient of elasticity, and J is the substitute moment of inertia of the bar cross sections. On the elastic stretches of the bar

$$EJ = EJ_0, \tag{7}$$

and on the rigid ones

$$EJ = \infty. \quad (8)$$

The solution of the differential equation (5) is on stretch $0 \div x_1$ of the bar (Fig. 6)

$$y = y_0 \cos \omega x,$$

so that

$$y_1 = y_0 \cos \omega a,$$

$$y'_1 = -y_0 \omega \sin \omega a.$$

On stretch $x_1 \div x_2$ of the bar its axis is straight, therefore

$$y = y_1 + xy'_1,$$

and thus

$$y_2 = y_0 (\cos \omega a - 2 \omega b \sin \omega a),$$

$$y'_2 = -y_0 \omega \sin \omega a.$$

On the next stretch $x_2 \div x_3$ of the bar

$$y = y_2 \cos \omega (x - x_2) - \frac{y'_2}{\omega} \sin \omega (x - x_2),$$

and accordingly

$$y_3 = y_0 (\cos 3 \omega a - 2 \omega b \sin \omega a \cdot \sin 2 \omega a),$$

$$y'_3 = y_0 \omega (-\sin 3 \omega a + 2 \omega b \sin \omega a \cdot \sin 2 \omega a).$$

On stretch $x_3 \div x_4$ of the bar

$$y = y_3 + by'_3.$$

Finally at locus $x = x_4$ the ordinate of buckling has to equal zero:

$$y(x_4) = 0.$$

Known values substituted and after some rearrangement

$$2 \omega b \sin \omega a (\cos 2 \omega a - \omega b \sin 2 \omega a) - (\cos 3 \omega a - \omega b \sin 3 \omega a) = 0. \quad (9)$$

If minimum possible ω value, ω_{\min} , is calculated from this equation, the critical

compressive force is obtained — with consideration of (6) and (7) — by the following formula :

$$P_{cr} = \omega_{\min}^2 EJ_0. \tag{10}$$

This is the exact value of the critical force.

Now let be demonstrated the procedure of calculation in case of application of the *substitution method*. In that case the bending stiffness of the substituted bar has to be determined first, namely that for pure bending in the plane

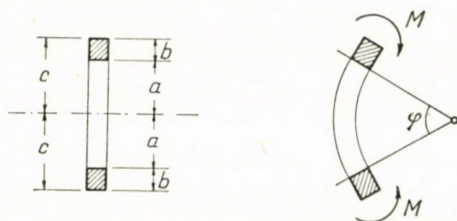


Fig. 7. The investigated bar section before and after buckling

of buckling. This calculation is executed on the bar section illustrated in Fig. 7. On the elastic stretch of $2a$ length the curvature of the bar axis

$$\kappa_0 = \frac{\varphi}{2a} = \frac{M}{EJ_0},$$

that is, the average curvature between the terminal surfaces of the bar section at distance $2c$

$$\kappa = \frac{a}{c} \kappa_0 = \frac{a}{c} \frac{M}{EJ_0}.$$

Thus the *bending stiffness* of the bar in case of pure bending in the plane of buckling

$$B = \frac{c}{a} EJ_0. \tag{11}$$

The substitution method now consists in replacement of the inhomogeneous bar consisting of rigid and elastic parts by such an homogeneous bar whose bending stiffness equals the value of (11) B . Afterwards the critical compressive force of the substituted bar is determined from Euler's formula :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 B}{l^2}. \tag{12}$$

The force thus obtained is the average approximate value sought for of the critical compressive force of the original bar.

7. Numerical example

Calculations of Chapter 6 will be executed for case

$$a = 0,9 c, \quad b = 0,1 c.$$

For the determination of the *exact* value of the critical compressive force equation (9) has to be set up first:

$$0,2 c \omega \sin 0,9 c \omega (\cos 1,8 c \omega - 0,1 c \omega \sin 1,8 c \omega) - (\cos 2,7 c \omega - 0,1 c \omega \sin 2,7 c \omega) = 0.$$

The minimum ω value satisfying this trigonometric equation:

$$\omega_{\min} = \frac{0,55165}{c}.$$

The value of ω_{\min} known, the *exact* value of the critical compressive force is computed from formula (10):

$$P_{cr} = 0,3043 \frac{EJ_0}{c^2}.$$

For the determination of the *approximate* value of the critical force the *substitution method* is applied. For this bending stiffness B of the bar is first determined, and that with the aid of formula (11). The result of calculation:

$$B = 1,111 EJ_0.$$

Hereafter the *approximate* value of the critical compressive force may be computed from formula (12):

$$P_{cr} = 0,3046 \frac{EJ_0}{c^2}.$$

The results of the exact and of the approximate methods confronted, it is found that in the case at hand the error committed through application of the substitution method is insignificant, altogether only 0,1%. The relatively low value of the error is due to the fact, that the deformation of the substituted bar hardly differs from that of the original one.

REFERENCES

1. HENCKY, H.: Darmstadt 1920. Habilitationsschrift.
2. SCHWERTNER, A.: Die Knickung im Lichte der Methode der elastischen Punkte. Acta Technica Hung. 12 (1955), pp. 245—273.
3. CSONKA, P.: Die Knickung geradachsiger Stäbe bei Behandlung mit der Methode der elastischen Punkte. Acta Technica Hung. 12 (1955), pp. 275—287.

SUMMARY

The paper presents a method for the approximate solution of stability and of other problems of plane framed trusses composed of sections of equal shape and properties arranged along a straight line. The essentials of the method is: the substitution of a simple prismatic bar for the framed truss. For this purpose a bar has to be used whose support and loading, as well as tensional (compressive), bending or torsional rigidity is similar to that of the original truss.

The analysis is completed by a numerical example that facilitates the numerical determination of the error resulting from the application of the substitution method. In the case of the example examined the error committed is insignificant.

 SUBSTITUTIONSVERFAHREN ZUR ANNÄHERNDEN LÖSUNG
 VON STABILITÄTSPROBLEMEN EBENER RAHMENTRÄGER

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz behandelt ein Verfahren durch welches Stabilitätsprobleme von entlang einer Geraden aneinandergereihten, aus Teilen gleicher Form und gleicher Eigenschaften bestehenden ebenen Rahmenträger gelöst werden können. Der Rahmenträger wird durch einen einfachen prismatischen Stab ersetzt, dessen Unterstützungs- und Belastungsverhältnisse, sowie Steifigkeitskennwerte gegenüber Zug (Druck), Biegung, bzw. Drehung jener des ursprünglichen Trägers gleich sind.

Der Aufsatz wird durch ein Zahlenbeispiel ergänzt, an Hand dessen die aus der Anwendung des Substitutionsverfahrens hervorgehenden Fehler zahlenmässig ermittelt werden können. Im Falle des untersuchten Beispiels ist der begangene Fehler bedeutungslos.

 PROCÉDÉ DE SUBSTITUTION POUR LA SOLUTION APPROXIMATIVE
 DES PROBLÈMES DE STABILITÉ DES PORTIQUES MULTIPLES OU TREILLIS

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'auteur fait connaître un procédé qui se prête à la solution approximative des problèmes de stabilité dans le cas des portiques multiples ou treillis, constituées d'éléments de forme et de propriétés identiques, disposés le long d'une droite. L'essentiel du procédé est le remplacement du portique par une simple barre prismatique dont l'appui et la charge, de même que la rigidité à la traction (compression), flexion, resp. torsion sont égales à ceux de la construction originale.

L'article est complété par un exemple numérique servant à la détermination numérique de l'erreur résultant de l'application du procédé de substitution. Dans le cas de l'exemple étudié l'erreur commise est insignifiante.

 ЗАМЕЩАЮЩИЙ МЕТОД ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОЙ ТРАКТОВКИ ЗАДАЧ СТАБИЛЬНОСТИ,
 КАСАЮЩИХСЯ ПЛОСКОСТНЫХ ФЕРМ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

В статье описывается такой метод, который пригоден для приближенного решения задач стабильности и прочих задач плоскостных ферм, состоящих из идентичных по форме и свойствам частей, расположенных друг за другом вдоль прямой. Суть предлагаемого

метода заключается в следующем : замещение фермы простым призматическим стержнем. Для этой цели необходимо использовать такой стержень, опора и нагрузка которого, а также жесткость по отношению к растяжению (сжатию), изгибу и, соответственно, кручению является аналогичным по сравнению с оригинальной фермой.

Работа дополняется числовым примером, который позволяет численно определить погрешность от применения замещающего метода. В случае исследованного примера допущенная погрешность незначительна.

LOCATION OF THE MAN SHAFT AND TIME LOST IN UNDERGROUND TRAVEL

J. ZAMBÓ

D. ENG. SC.

DEPARTMENT OF MINE WORKING, UNIVERSITY FOR THE HEAVY INDUSTRY, SOPRON

[Manuscript received on 9th March, 1957]

The place of the man shaft (shaft used for access) has an important part in the time lost in travelling underground. The problem has not yet been treated analytically in mining literature. SEVIAKOV [1] deals with the problem only in annex to the minimum-problem of underground transportation of mineral. He finds that the optimum location of the man shaft is found in a way similar to the determination of the optimum position of the main winding (drawing) shaft. In the Hungarian mining literature B. VARGHA [2] investigates the problem and with careful, illustrative numerical tables and diagrams points out its great importance. His method of treatment is numerical, not analytical, hence not general. Notwithstanding, he arrives at several conclusions which have at most been instinctively felt and applied by the practical miner, but without calculation of their economic advantages.

The aim of this paper is to give relationships of general validity for the optimal location of the man shaft and for the time loss in access to workings and the way back.

First a mining area of rectangular shape is supposed. In reality such a working area is seldom found. Notwithstanding, it is expedient to deal with it, for general laws may thus be recognized with simpler relationships. Moreover relationships established can be made practical use of in the case of nearly rectangular working areas too.

In general, the shape of the working area of a shaft is irregular. Therefore, the relationships are to be sought that can be applied with practically satisfactory accuracy to working areas of irregular shape as well.

The dip of the mineral bed is of importance in the analysis. Flat beds will be treated separately from highly inclined ones, though, as will be shown, the essential features of both are the same.

The man shaft is at an arbitrary point P of the rectangular mining area (Fig. 1). The strike of the mineral body is parallel to the longer side A , the dip parallel to the shorter side B of the rectangle. The origin of the provisional system of coordinates $((x_0; y_0))$ coincides with point P . At an arbitrary place of the mining area a differential area $dx_0; dy_0$ is cut out. From the bottom of

the man shaft to the differential area the distance of x_0 along the strike and the distance of y_0 along the dip has to be travelled; on the way back, the same. The differential time of travel necessary for extracting the differential area is :

$$dt = 2 \frac{\xi M \cdot \gamma}{q \cdot v_s} (x_0 + \nu \cdot y_0) dx_0 \cdot dy_0 = 2 c (x_0 + \nu y_0) dx_0 \cdot dy_0 \quad (1)$$

ξ is the coefficient of recovery or the ratio of the economically exploitable and of the actual mineral reserves. M is the thickness of the mineral body, γ its

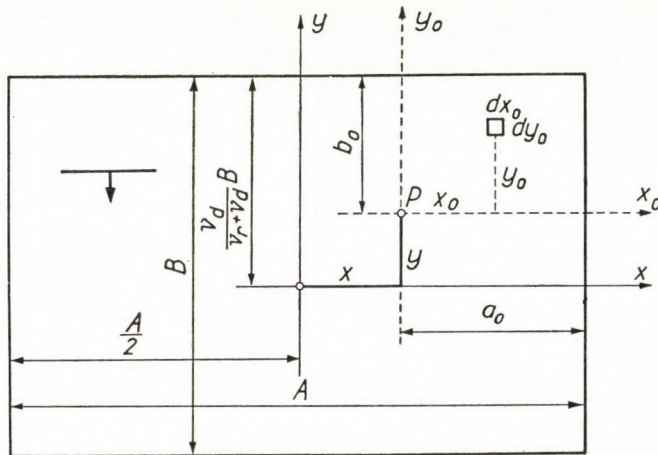


Fig. 1

weight per unit volume, q is the modified, average output per manshift referred to the entire service life of the shaft. The latter is higher than the output per manshift as understood conventionally, because part of the underground workers do not go as far as the place of extraction, but travel only part of the way leading there before and after the working shift. To these belong onsetters (bottomers), engine-men, etc. around the shaft, part of the men employed in haulage. v_s is the average speed of underground travel before and after the shift. ν is a relative number.

Let the speed of travel on the rise of the bed be v_r , the same on the dip be v_d . The ratio of the area served by the raise (slope, slant or incline to the rise)

$$\nu_r = \frac{v_s}{v_r} \quad \text{and} \quad \nu_d = \frac{v_s}{v_d}, \quad \text{respectively.} \quad (2)$$

Numbers ν_r and ν_d are under given conditions functions of α , the angle of dip of the mineral body. In general $\nu_d > \nu_r$ because in working to the rise

workers have to go up at the beginning of the shift and come down the plane at shift end, while in dip workings the reverse is the case.

In writing the differential equation a constant or at least practically invariable bed thickness was supposed, and accordingly, other data included in coefficient c are also practically invariable. It is also assumed that the working place is reached on the strike and on the rise or dip by the shortest way.

On the basis of the differential equation and of the Fig. the underground travel time required for mining out the working area is expressed :

$$t = 2c \left\{ \int_{x_0=-(A-a_0)}^{x_0=a_0} \int_{y_0=0}^{y_0=b_0} (x_0 + v_r y_0) dx_0 dy_0 + \int_{x_0=-(A-a_0)}^{x_0=a_0} \int_{y_0=-(B-b_0)}^{y_0=0} (x_0 + v_d \cdot y_0) dx_0 dy_0 \right\} \quad (3)$$

After execution of the operation,

$$t = c \{ [a_0^2 + (A - a_0)^2] B + v_r \cdot b_0^2 A + v_d (B - b_0)^2 A \}. \quad (4)$$

The first member of the equation expresses the time of travel on the strike (t_s), the second that on the rise (t_r), the third on the dip (t_d), that is :

$$t = t_s + t_r + t_d. \quad (5)$$

Let the minimum of t be sought as a function of a_0 and b_0 . The partial derivative of t with respect to a_0 and b_0 will therefore be formed and equated to zero :

$$\frac{\partial t}{\partial a_0} = c [2a_0 - 2(A - a_0)] = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial t}{\partial b_0} = c [2v_r \cdot b_0 - 2v_d (B - b_0)] A = 0.$$

According to the second partial derivative, the minimum is in question in both cases, that is

$$a_{0\text{min}} = \frac{A}{2} \quad (7)$$

$$b_{0\text{min}} = \frac{v_d}{v_r + v_d} \cdot B$$

From the last equation follows :

$$\frac{\nu_r}{\nu_d} = \frac{T_d}{T_r} = \frac{Q_d}{Q_r} \quad (8)$$

where T_d is the surface of the area developed to the dip, T_r that developed to the rise, Q_d and Q_r are the exploitable mineral reserves of the respective areas.

Fundamental conclusions can already be drawn on the relations thus far deduced. 1. *In the formula of time of travel the times of travel on the strike, on the rise and on the dip present themselves separately.* 2. *As it was to be expected, the time of travel may be expressed by the static moment of the mineral reserves of the area.* The time of travel on the strike of the area is on both sides expressed by the static moment of the mineral reserves of the area multiplied by coefficient $2c' = \frac{2\xi}{qv_s}$ and referred to the dip line passing through the shaft. In relation to the area developed to the rise and the dip, respectively, the static moment is referred to the line of strike passing through the shaft, and the coefficients are $2\nu_r c'$ and $2\nu_d c'$, respectively. 3. *The optimal place of the man shaft is determined by the satisfaction of two conditions. According to one, the optimal point is on the dip line bisecting the working area of the shaft. The other condition is satisfied, if the line of strike passing through the optimal point divides in two the mineral reserves of the mining area in a way that the ratio of the two parts is the inverse of their ν values.* If $\nu_r = \nu_d$, the optimal place of the shaft is in the centre.

The deduced formulae hold for constant c values. If c changes, average values weighted according to c have to be calculated with, as will be shown later.

Let the provisional system of coordinates be shifted parallel to its original position so that its origin coincide with the optimal location of the man shaft. Let therefore the following be substituted into equation (4).

$$a_0 = \frac{A}{2} - x \quad (8a)$$

and

$$b_0 = \frac{\nu_d}{\nu_r + \nu_d} B - y$$

After the substitutions, the following relationship holds in the final system of co-ordinates :

$$t = c \left\{ \left(\frac{A^2}{2} + 2x^2 \right) B + \left[\frac{\nu_r \cdot \nu_d}{\nu_r + \nu_d} B^2 + (\nu_r + \nu_d)y^2 \right] A \right\} \quad (9)$$

At $x = 0$ and $y = 0$ the minimum time of underground travel is of course obtained :

$$t_{\min} = c \left(\frac{A^2}{2} B + \frac{v_r \cdot v_d}{v_r + v_d} AB^2 \right). \quad (10)$$

The same result is attained if in equation (4) $a_{0\min}$ and $b_{0\min}$ are substituted for a_0 and b_0 .

Let the percentile value of

$$\eta \% = 100 \frac{t}{t_{\min}} \quad (11)$$

be formed, the pertinent values be substituted and the equation be reduced to zero :

$$2 Bx^2 + (v_r + v_d) Ay^2 + \frac{100 - \eta}{100} \left(\frac{A^2}{2} B + \frac{v_r \cdot v_d}{v_r + v_d} AB^2 \right) = 0. \quad (12)$$

This relationship is the central equation of a family of ellipses according to η . Let it be written in the conventional form, too :

$$\frac{\eta - 100}{200} A \left(\frac{A}{2} + \frac{v_r \cdot v_d}{v_r + v_d} B \right) \frac{x^2}{100(v_r + v_d)} + \frac{\eta - 100}{100(v_r + v_d)} B \left(\frac{A}{2} + \frac{v_r \cdot v_d}{v_r + v_d} B \right) \frac{y^2}{100(v_r + v_d)} = 1 \quad (13)$$

The semi-major and semi-minor axes of the ellipse are as functions of a , b and η :

$$a = \pm \sqrt{\frac{\eta - 100}{200} A \left(\frac{A}{2} + \frac{v_r \cdot v_d}{v_r + v_d} B \right)} \quad (14)$$

and

$$b = \pm \sqrt{\frac{\eta - 100}{100(v_r + v_d)} B \left(\frac{A}{2} + \frac{v_r \cdot v_d}{v_r + v_d} B \right)}. \quad (15)$$

The ellipse is the locus of all points, that is of man shafts to which pertain equal durations of underground travel. The family of ellipses represented in Fig. 2 shows the percentile configuration of time loss. The case of the man shaft located at the optimal point denotes 100%. Approaching the borders, especially the corners, the time loss rapidly increases. It can be laid down as a fact that it suffices practically to approach the optimal locus with the man

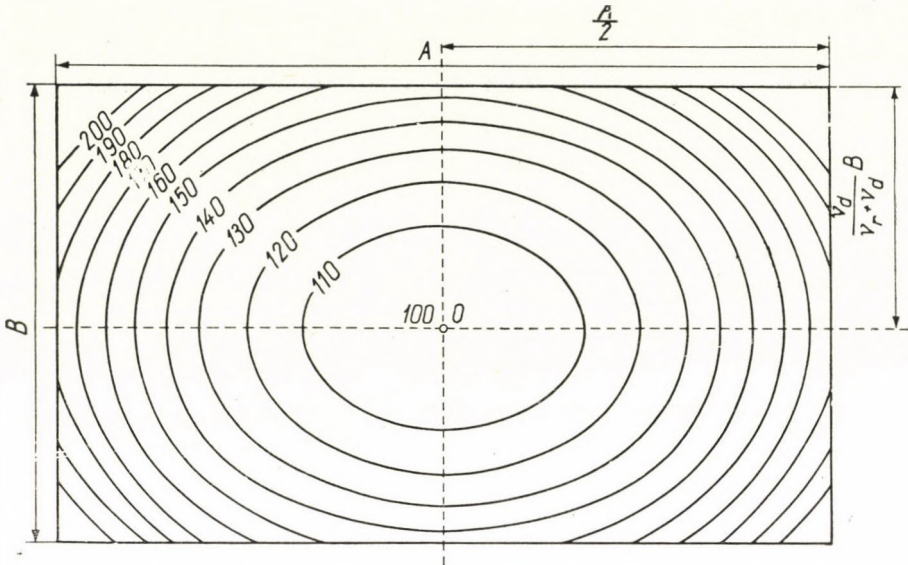


Fig. 2

shaft. It is therefore also certain that the uncertainty of data assumed for the determination of the optimal location of the man shaft involves a practically still admissible divergence.

In Fig. 3 the most characteristic points are presented. Let at the same time be denoted, for simplification, by λ the ratio of the dip and of the strike lines of the mining area by λ that is:

$$\lambda = \frac{B}{A} \tag{16}$$

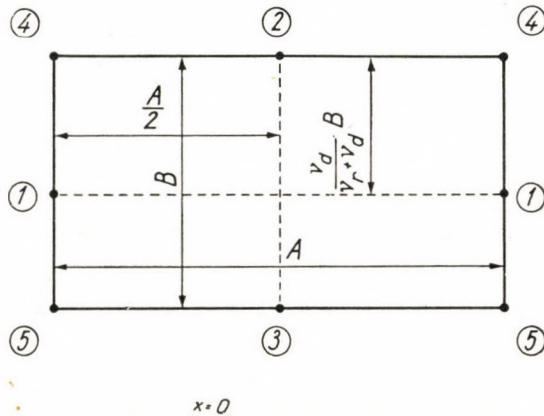


Fig. 3

Let the time losses for the man shafts located at the characteristic points expressed in per cents be tabulated comparatively (Table I).

Table I

Symbol	Co-ordinates		Percentile loss of time (η)		
	of the point		$v_s \neq v_r \neq v_d$	$\alpha > 0^\circ$	$\alpha = 0^\circ$
	x	y			
0	0	0	100		100
1	$\frac{A}{2}$	0	$200 \frac{v_r + v_d + v_r \cdot v_d \cdot \lambda}{v_r + v_d + 2 v_r \cdot v_d \cdot \lambda}$		$100 \frac{\lambda + 2}{\lambda + 1}$
2	0	$\frac{v_d}{v_r + v_d} B$	$200 \frac{\frac{1}{2}(v_r + v_d) + (v_r \cdot v_d + v_d^2) \cdot \lambda}{v_r + v_d + 2 v_r \cdot v_d \cdot \lambda}$		$100 \frac{2 \lambda + 1}{\lambda + 1}$
3	0	$\frac{v_r}{v_r + v_d} B$	$200 \frac{\frac{1}{2}(v_r + v_d) + (v_r \cdot v_d + v_r^2) \cdot \lambda}{v_r + v_d + 2 v_r \cdot v_d \cdot \lambda}$		$100 \frac{2 \lambda + 1}{\lambda + 1}$
4	$\frac{A}{2}$	$\frac{v_d}{v_r + v_d} B$	$200 \frac{v_r + v_d + (v_r \cdot v_d + v_d^2) \cdot \lambda}{v_r + v_d + 2 v_r \cdot v_d \cdot \lambda}$		200
5	$\frac{A}{2}$	$\frac{v_d}{v_r + v_d} B$	$200 \frac{v_r + v_d + (v_r \cdot v_d + v_r^2) \cdot \lambda}{v_r + v_d + 2 v_r \cdot v_d \cdot \lambda}$		200

For this the coordinates of characteristic points are substituted into equation (12) and $\eta\%$ is expressed. On the basis of the table it may be stated that within the mining area the most unfavourable location of the man shaft is at the corner point (4) of the tract to the rise. Somewhat more favourable is the case, when the man shaft is located at the corner (5) of the tract to the dip. Relatively more favourable than both is the loss in travel time, if the man shaft is placed on the bisectrix of the tract to the rise or to the dip at the boundary (2 and 3 respectively), or if the man shaft is laid out at the border on the strike line passing through the optimal point (1). The loss of underground travel time of the man shaft located to the rise (2) or to the dip (3) at the boundary is equal to that placed at the boundary on the line of strike (1), if

$$\lambda = \frac{v_r + v_d}{2 v_d^2} \quad \text{or} \quad \lambda = \frac{v_r + v_d}{2 v_r^2} \quad (17)$$

If the value of λ is greater than these, the case of the man shaft placed at the boundary on the strike is relatively more favourable and vice versa.

In the tabulation data of horizontal measures ($\alpha = 0^\circ$) are also found. As a curiosity may be mentioned that the man shaft located at the corner point causes a loss of time double to that placed at the optimum point.

There is more or less uncertainty in the data required for the numerical evaluation of the time of underground travel. This is natural, because the question is that of planning.

The coefficient of recovery (ξ) the modified output underground (q), the speed of travel on the strike and on the dip (v_s, v_r, v_d) are planned according to actual data of mines worked under similar conditions of the deposit. As regards the modified underground output (q) some estimate will anyway remain necessary to some extent, it is doubtless only that it will lie between the output at the working face and the overall underground output. With good approximation it will be the arithmetic mean of both.

Of the modified underground output its average referred to the full life of the mine has to be computed. If the depletion of the working area advances toward the boundary, loss of time of travel will be less at the beginning of the life of the mine, the productive time will be longer. Later this proportion changes to the detriment of the productive time. In the case of working by the retreating system the situation is the reverse. The most accurate method is to calculate for each tract with a particular modified output, in which case it is no other than the modified underground output pertaining to the centre of gravity of the mineral reserves of that tract. A simple practical method is, however, to take the average of the modified output figures pertaining to the centres of gravity of the different tracts weighted by their mineral reserves. Thus the requirement can be satisfied that to the longer productive time within one shift corresponds a higher underground output, while to a shorter time a lower one. With other words, during the time of longer travel the effect of higher output is solved by averaging.

According to the more precise method, equation (4) takes the form :

$$t = [c_{s1} \cdot a_0^2 + c_{s2} (A - a_0)^2] B + v_r \cdot c_r \cdot b_0^2 \cdot A + v_d \cdot c_d (B - b_0)^2 \cdot A \quad (18)$$

where c_{s1} is the coefficient corresponding to the centre of gravity of the area on the right of the dip line passing through the man shaft, c_{s2} the coefficient corresponding to the centre of gravity of the area on the left, c_r and c_d are the same relative to working to the rise and dip workings, respectively.

By the practically admissible method, the following value is reckoned with

$$c = \frac{c_{s1} \cdot Q_{s1} + c_{s2} \cdot Q_{s2} + c_r \cdot Q_r + c_d \cdot Q_d}{Q} \quad (19)$$

where Q stands for the mineral reserves of the entire mine, while Q_{s1}, Q_{s2}, Q_r, Q_d stand for those of the respective areas.

If the more exact method is followed, coefficient c cannot be regarded as constant in search for the extreme value. However, since the uncertainty of

other factors is substantially greater, a practically sufficient precision is attained if c is regarded as constant, its dependence on a_0 and b_0 being disregarded.

Travel speeds depend on the dip, on the cross-sectional area, and state of the roads of ingress and egress and on climatic conditions of the mine atmosphere. Travel speed on the strike is in general from 2900 to 4300 m/hr. There are no dependable data yet available for travel speeds on the rise or on the dip.

Reference can be made to SEVIAKOV only. He made a tabulation on the basis of data of the Donetz basin. Therein he gives the time in seconds spent on 1 m of walking on the rise or dip in dependence of the angle of dip. Mr. B. VARGHA in his already quoted paper already uses the average of the walk up and down. Publication of the table can be dispensed with, since the data listed therein evidence that the cumulative average speed (m/hr) of the walk on the rise or dip can be expressed by the formula :

$$v_r = \frac{3600}{9,3 \bar{a}^2 + 0,93} \quad (20)$$

where \bar{a} is the angle of dip in arc measure. The denominator of the formula gives the time required for a walk of 1 m as a function of α . If $\alpha = 0^\circ$, the speed of travel on the strike is :

$$v_s = \frac{3600}{0,93} \quad (21)$$

According to equation (2) :

$$v_r = \frac{v_s}{v_r} = 10 \bar{a}^2 + 1 \quad (22)$$

The value of v_d is always higher by 10–20%. Of course, the above relationship may vary according to local conditions.

The average thickness of the mineral body (M) and the average weight per unit volume (γ) of the mineral is mostly known from drill holes. There may be some uncertainty in these two data.

The time of hoisting or lowering men in the shaft has not been included into the time of underground travel. If the mineral bed is flat, and the surface nearly level, the otherwise simply calculable winding time has no essential influence on the optimal point of location. In other cases there subsists the possibility of comparing the different alternatives.

If mechanical haulage of men is planned on horizontal roads, this has to be accounted for in the determination of the value of c , namely v_s is greater in this case. It is also supposed in the formulae that the working place is reached by the shortest way. On the other hand, they hold in the case too, when there are alternating stretches on the strike and on the dip along the way of travel.

It does not matter if these routes are composed of parts because the cumulative lengths of travel on the strike or on the rise or dip remains unaltered. It is not stipulated that men travel first the entire way on the strike and afterwards on the rise or dip, or vice versa. After one stretch on the strike may follow another on the dip line and so on. Of course, diagonal walk way is also possible. In this case the two sides of the rectangular triangle are replaced by the hypotenuse. This is not the same in principle, but the difference may be practically neglected.

From the afore-said it is evident that there may be more or less uncertainty in the quantitative determination of the underground time of travel. In relative comparisons the uncertainty is much less.

For an example let serve the following data : $A = 3\ 000\text{ m}$; $B = 1\ 800\text{ m}$; $\xi = 0,9$; $M = 6\text{ m}$; $\gamma = 1,4\text{ t/m}^3$; $q = 1,6\text{ t/shift}$. $v_s = 3\ 800\text{ m/hr}$; $\alpha = 12^\circ$. Let values of v be calculated first :

$$v_r = 10 \hat{\alpha}^2 + 1 = 10 \cdot 0,21^2 + 1 = 1,44$$

$$v_d = 1,2 v_r = 1,2 \cdot 1,44 = 1,73$$

The two lengths fixing the optimal point :

$$a_0 = \frac{A}{2} = \frac{3000}{2} = 1\ 500\text{ m}$$

$$b_0 = \frac{v_d}{v_r + v_d} B = \frac{1,73}{1,44 + 1,73} \cdot 1\ 800 = 982\text{ m.}$$

The time of underground travel is in the case of the man shaft located at the optimal point :

$$t_{\min} = \frac{0,9 \cdot 6 \cdot 1,4}{1,6 \cdot 3\ 800} \left(\frac{3\ 000^2}{2} - 1\ 800 + \frac{1,44 \cdot 1,83}{1,44 + 1,73} 3\ 000 \cdot 1\ 800^2 \right) =$$

$$= 19\ 569\ 760 = 19,6\text{ million hours.}$$

The underground travel times for the man shaft located at the characteristic points is tabulated. % proportions are included in Table II.

Table II

Symbol of point	0	1	2	3	4	5
Time in million hrs	19,6	29,6	31,0	27,5	41,0	37,5
%	100	151	158	140	210	192

Relationships established for a rectangular mining area are, no doubt, useful. They especially enlighten basic principles in the comparison of different shaft locations. However, practice lays other claims too ; the area may be

irregular, or if it approaches the shape of a rectangle, the strike line may be not parallel to the side of the rectangle. Therefore, we have to deal with the optimal location of the man shaft of a mining area of irregular shape and with the determination of underground time of travel. In connection with this, with the aid of the relationships of the latter, the laws of such a rectangular mining area can be found whose strike line is not parallel to one side of the rectangle. In the discussion of the rectangular mining area three basic principles have

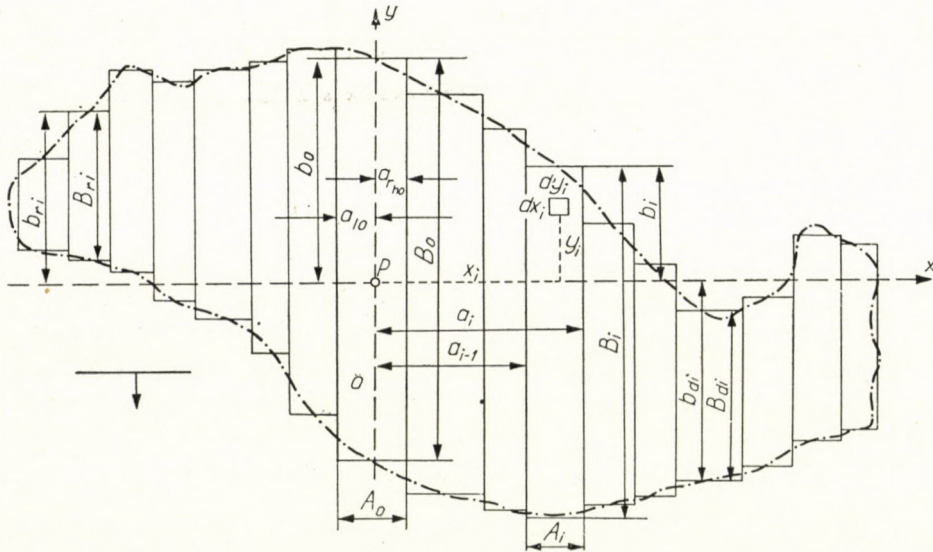


Fig. 4

been fixed: the territorial separability of the time of travel, the principle of the application of the static moment, and two condition equations of the optimal point. It is presumable that these three principles also hold for the mining area of irregular shape, but this has to be made sure beyond all doubt. The following mathematical analysis only aims at supporting the general validity of the three basic principles. This once proved, the solution of any other problem becomes very simple.

The surface of the irregular mining area is dissected into strips parallel to the general dip line (Fig. 4). The width of the strips is variable and such as to make the irregular working area approach the rectangular shape as much as possible. Let the man shaft be located at point P in strip marked O . The total number of strips is N . The average line of strike passing through the man shaft chosen at an arbitrary point intersects n strips, that is, divides them into rise and dip portions. n_r is the number of strips in the portion of the tract to the rise, n_d that in that falling to the dip. These are thus not intersected by the

general line of strike. Intersected as well as not intersected strips may occur both on the right and on the left hand side, when

$$n_{r_h} + n_l + 1 = n \quad (23)$$

and

$$n_{rr_h} + n_{rl} = n_r$$

further

$$n_{dr_h} + n_{dl} = n_d$$

Of course, the following relation also holds

$$n + n_r + n_d = N = N_{r_h} + N_l \quad (24)$$

Let us mark at some arbitrary place the differential area by $dx_i dy_i$ marked out. The differential time of travel necessary for its exploitation is simply expressed :

$$dt = 2c(x_i + v y_i) dx_i dy_i. \quad (25)$$

The constant c coefficient is supposed in the differential equation. Accordingly, ξ , M , γ and v_s are constant values at all points, the angle of dip of the bed (α) is invariable and the q value may be regarded as an average for the entire service life of the shaft.

Let the underground travel time necessary for working out all the mineral of the area be written

$$\begin{aligned}
 t = 2c \left\{ \sum_1^{n_l} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_0^{b_i} (x_i + v_r \cdot y_i) \cdot dx_i dy_i + \sum_1^{n_{rl}} \int_{a_{r_i-1}}^{a_{r_i}} \int_{b_{r_i}-B_{r_i}}^{b_{r_i}} (x_i + v_r y_i) dx_i dy_i + \right. \\
 \left. + \sum_1^{n_l} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_0^{B_i-b_i} (x_i + v_d \cdot y_i) dx_i dy_i + \sum_1^{n_{dl}} \int_{a_{d_i-1}}^{a_{d_i}} \int_{b_{d_i}-B_{d_i}}^{b_{d_i}} (x_i + v_d y_i) dx_i dy_i + \right. \\
 \left. + \int_{-a_{l_0}}^{a_{r_h^0}} \int_0^{b_0} (x_0 + v_r \cdot y_0) dx_0 dy_0 + \int_{-a_{l_0}}^{a_{r_h^0}} \int_0^{B_0-b_0} (x_0 + v_d y_0) dx_0 dy_0 \right\} \quad (26)
 \end{aligned}$$

Let the symbolic notations be developed. As an example the first member is presented

$$\sum_1^{n_l} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_0^{b_i} (x_i + v_r \cdot y_i) dx_i dy_i = \sum_1^{n_{r_h}} \int_{x_{rhi}=a_{rhi-1}}^{x_{rhi}=a_{rhi}} \int_{y_{rhi}=0}^{y_{rhi}=b_i} (x_{rhi} + v_r y_{rhi}) dx_{rhi} dy_{rhi} +$$

$$+ \sum_1^{n_l} \int_{x_{li}=a_{li-1}}^{x_{li}=a_{li}} \int_{y_{li}=0}^{y_{li}=b_{li}} (x_{li} + v_r y_{li}) dx_{li} dy_{li} \tag{27}$$

The development of the other symbolic notations is executed in the same way.

Let the double determinate integrals be solved. The following relations will also be considered :

$$a_i^2 - a_{i-1}^2 = (a_i + a_{i-1})(a_i - a_{i-1}) = (2 a_i - A_i) A_i \tag{28}$$

further

$$b_i^2 - (b_i - B_i)^2 = (2 b_i - B_i) B_i .$$

As a result, the following equation is obtained :

$$\begin{aligned} t = c & \left\{ \sum_1^{n_{rh}} A_{rhi} [(2 a_{rhi} - A_{rhi}) B_{rhi} + v_r b_{rhi}^2 + v_d (B_{rhi} - b_{rhi})^2] + \right. \\ & + \sum_1^{n_{rrh}} A_{rrhi} [(2 a_{rrhi} - A_{rrhi}) B_{rrhi} + v_r (2 b_{rrhi} - B_{rrhi}) B_{rrhi}] + \\ & + \sum_1^{n_{drh}} A_{drhi} [(2 a_{drhi} - A_{drhi}) B_{drhi} + v_d (2 b_{drhi} - B_{drhi}) B_{drhi}] + \\ & + \sum_1^{n_l} A_{li} [(2 a_{li} - A_{li}) B_{li} + v_r b_{li}^2 + v_d (B_{li} - b_{li})^2] + \\ & + \sum_1^{n_{rl}} A_{rli} [(2 a_{rli} - A_{rli}) B_{rli} + v_r (2 b_{rli} - B_{rli}) B_{rli}] + \\ & + \sum_1^{n_{dl}} A_{dli} [(2 a_{dli} - A_{dli}) B_{dli} + v_d (2 b_{dli} - B_{dli}) B_{dli}] + \\ & \left. + (a_{rh^0}^2 + a_{l0}^2) B_0 + v_r b_0^2 \cdot A_0 + v_d (B_0 - b_0)^2 A_0 \right\} . \tag{29} \end{aligned}$$

Let now turn to the determination of the optimal location of the man shaft. For this, partial derivatives of t will be formed with respect to a_{rh^0} ; $a_{rh^1} \dots$, a_{rh^n} ; a_{rrh^1}, \dots , a_{rrh^n} ; a_{drh^1}, \dots , a_{drh^n}

$$\frac{\partial t}{\partial a_{rh^0}} + \sum_1^{n_{rh}} \frac{\partial t}{\partial a_{rhi}} + \sum_1^{n_{rrh}} \frac{\partial t}{\partial a_{rrhi}} + \sum_1^{n_{drh}} \frac{\partial t}{\partial a_{drhi}} = B_0 a_{rh^0} + \sum_1^{n_{rh}} A_{rhi} B_{rhi} \tag{30}$$

The similar manipulation is executed for the left side :

$$\frac{\partial t}{\partial a_{l0}} + \sum_1^{n_l} \frac{\partial t}{\partial a_{li}} + \sum_1^{n_{rl}} \frac{\partial t}{\partial a_{rli}} + \sum_1^{n_{dl}} \frac{\partial t}{\partial a_{dli}} = - \left\{ B_0 a_{l0} + \sum_1^{n_l} A_{li} B_{li} \right\} . \tag{31}$$

On the basis of the last two equations and with consideration of the opposite signs of the right and left sides

$$B_0 a_{r_h^0} + \sum_1^{N_{r_h}} A_{r_{hi}} B_{r_{hi}} = B_0 a_{l_0} + \sum_1^{N_l} A_{li} B_{li} \quad (32)$$

that is

$$T_{sr_h} = T_{sl}.$$

This relation is one condition equation of the optimal location of the man shaft. It is satisfied, if at constant thickness of the bed the location of the shaft is on the bisectrix dip line of the mining area. Either we start adding the strips from the right or from the left, one finds the bisectrix dip line in that strip in which half of the working area has been passed over.

Within this strip may be calculated the values $a_{r_h^0 \min}$ and $a_{l_0 \min}$:

$$a_{r_h^0 \min} = \frac{\sum_1^{N_l} A_{li} \cdot B_{li} - \sum_1^{N_{r_h}} A_{r_{hi}} B_{r_{hi}} + A_0 B_0}{2 B_0} \quad (33)$$

and

$$a_{l_0 \min} = \frac{\sum_1^{N_{r_h}} A_{r_{hi}} B_{r_{hi}} - \sum_1^{N_l} A_{li} B_{li} + A_0 B_0}{2 B_0} \quad (34)$$

Let the other condition equation of the optimal place of the man shaft be also determined. In this case there is no more need to divide the mining area into right and left halves, therefore equation (29) may be written in a condensed form :

$$t = c \left\{ \sum_1^{N-1} A_i (2 a_i - A_i) B_i + (a_{r_h^0}^2 + a_{l_0}^2) B_0 + v_r \left[\sum_1^n A_i b_i^2 + \sum_1^{n_r} A_{ri} (2 b_{ri} - B_{ri}) B_{ri} \right] + v_d \left[\sum_1^n A_i (B_i - b_i)^2 + \sum_1^{n_d} A_{di} (2 b_{di} - B_{di}) B_{di} \right] \right\} \quad (35)$$

that is

$$t = t_s + t_r + t_d$$

Let now partial derivatives of t with respect to $b_1, \dots, b_n; b_{r1}, \dots, b_{rn}; b_{d1}, \dots, b_{dn}$ be formed, these added and their sum equated to zero

$$\sum_1^n \frac{\partial t}{\partial b_i} + \sum_1^{n_r} \frac{\partial t}{\partial b_{ri}} + \sum_1^{n_d} \frac{\partial t}{\partial b_{di}} = v_r \left\{ \sum_1^n A_i b_i + \sum_1^{n_r} A_{ri} B_{ri} \right\} - v_d \left\{ \sum_1^n A_i (B_i - b_i) + \sum_1^{n_d} A_{di} B_{di} \right\} = 0. \quad (36)$$

In differentiating, it had to be taken into consideration that b_{di} is of opposite, that is, negative sense in relation to b_{ri} . With the latter equation the other condition of the optimal place of the man shaft is also given

$$\frac{v_r}{v_d} = \frac{\sum_1^n A_i (B_i - b_i) + \sum_1^{n_d} A_{di} B_{di}}{\sum_1^n A_i b_i + \sum_1^{n_r} A_{ri} B_{ri}} = \frac{T_d}{T_r}. \quad (37)$$

The optimal place of the man shaft is on the line of strike that bisects the mining area in a way that the area to the dip and that to the rise is proportional to the ratio of v_r and v_d .

The two condition equations are satisfied by one point, the optimum location of the man shaft. The bisectrix strike line that divides the mining area in the relation of $\frac{v_r}{v_d}$ is found in the case of a mining tract of irregular shape by planimentering. In practice the areas are estimated by the eye and the first division is checked by planimentering. If the divergence is not too great, the difference strip can be calculated with sufficient precision by the width of which the approximately drawn dividing line has to be shifted.

If the thickness of the bed is practically not constant, the mineral reserves of the mining area are divided by vertical planes laid along dip lines. In this case, areas are replaced by volumes or weights. The weights are imagined to be accumulated on centroidal lines, travel distances are distances between the centroidal lines on the strike or dip and the shaft. The imaginary concept of accumulation on the gravity line is based on the principle of equilibrium of static moments, therefore the amount of weight concentrated on the centroidal line represents the actually positioned weights.

The part areas in limit position denote the corresponding areas of irregular shape. The same refers to part quantities. At the same time in the place of the centroidal lines of part areas and part quantities enters the centroidal line of the area or of the quantity.

On the basis of the afore-said the two condition equations also hold for ratios of mineral quantities

$$Q_{srh} = Q_{sl} \quad (38)$$

and

$$\frac{v_r}{v_d} = \frac{Q_d}{Q_r}.$$

From equation (35) it is evident that in the relationships the time of travel on the strike, on the rise and on the dip appears entirely separated in

a mining area of irregular shape as well. It may be seen also that the time of travel on the dip is calculated similarly to that on the rise, the difference lies only in the factors ν_r and ν_d , respectively.

According to equation (29) — as it was to be foreseen — the principle of static moment also holds for a mining area of irregular shape. Equations (32), (37) and (38) prove, on the other hand, that the two condition-equations of the optimal point are independent of the shape of the mining area.

After a general verification of the three basic principles — as has been afore-mentioned — further investigations have been essentially simplified.

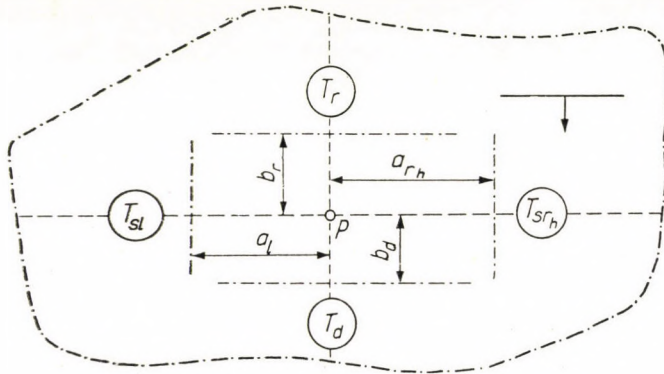


Fig. 5

Before special cases are treated, let the case of the irregular mining area be viewed once more, but this time expressly in the light of the three basic principles.

In the case of Fig. 5 may be written :

$$t = 2c (T_{srh} a_{rh} + T_{sl} a_l + \nu_r T_r b_r + \nu_d T_d b_d) \quad (39)$$

If the thickness of the bed is variable, areas are replaced by their respective mineral reserves, and the distances of the centroidal lines are substituted by the distances of the centroidal lines of the mineral reserves.

Of course, coefficient c also changes.

Let the partial derivatives of t with respect to a_{rh} and a_l be formed, and their sum be equated to zero :

$$\frac{\partial t}{\partial a_{rh}} = 2c T_{srh} \quad (40)$$

$$\frac{\partial t}{\partial a_l} = -2c T_{sl} .$$

From the two equations follows :

$$T_{srh} = T_{sl} \quad \text{and} \quad Q_{srh} = Q_{sl}. \tag{41}$$

Let now the partial derivatives of t with respect to b_r and b_d be formed, and their sum be equated to zero :

$$\frac{\partial t}{\partial b_r} = 2c v_r T_r \tag{42}$$

$$\frac{\partial t}{\partial b_d} = 2c v_d T_d$$

$$\frac{v_r}{v_d} = \frac{T_d}{T_r} \quad \text{or} \quad \frac{v_r}{v_d} = \frac{Q_d}{Q_r}. \tag{43}$$

According to these results, similar to the former have been arrived at. Let now the special cases be investigated.

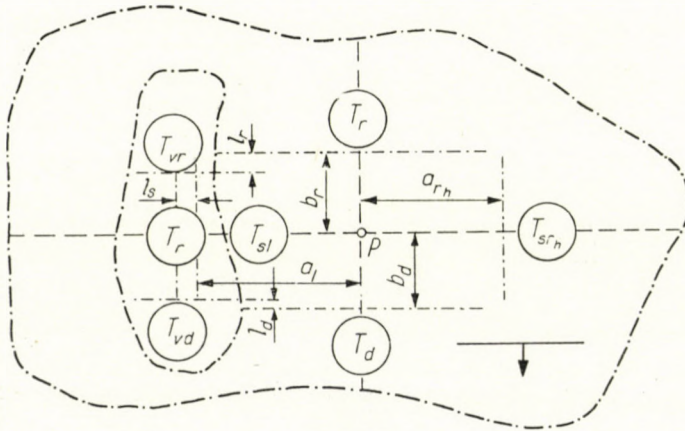


Fig. 6

The case may occur when there is an unproductive spot in the mining area. This is shown in Fig. 6. The area of the tract without that spot is T_a , that of the barren spot T_v . The actual area :

$$T = T_a - T_v \tag{44}$$

The time of travel for a man shaft located at an arbitrary point :

$$t = 2c \{ T_{srh} a_{rh} + T_{sl} a_l + v_r T_r b_r + v_d T_d b_d - [T_v (a_l \pm l_d) + v_r T_{vr} (b_r \pm l_r) + v_d T_{vd} (b_d \pm l_d)] \}. \tag{45}$$

From relations

$$\frac{\partial t}{\partial a_{rh}} = 2c T_{srh}$$

and

$$\frac{\partial t}{\partial a_l} = -2c(T_{sl} - T_v) \quad (46)$$

as well as from

$$\frac{\partial t}{\partial b_r} = 2c v_r (T_r - T_{vr})$$

and

$$\frac{\partial t}{\partial b_d} = -2c v_d (T_d - T_{vd})$$

are obtained the two condition equations of the optimal point :

$$T_{srh} = T_{sl} - T_v \quad (47)$$

and

$$\frac{v_r}{v_d} = \frac{T_d - T_{vd}}{T_r - T_{vr}}.$$

The two latter equations express that the former laws deduced for the optimal point also hold for a mining area of irregular shape. The mining area may consist of two or several tracts. According to Fig. 7, the mining area is composed of two tracts (T_I and T_{II}). The time of travel for a man shaft located at an arbitrary place :

$$t = 2c \{ T_{I srh} a_{I rh} + T_{II} (a_{I rh} + l_s) + T_{I l} a_{I l} + v_r [T_{I r} b_{I r} + T_{I r} (b_{I r} \pm l_r)] + \\ + v_d [T_{I d} b_{I d} + T_{II d} (b_{I d} \pm l_d)] \}. \quad (48)$$

By the analogy of the afore-said, it can simply be demonstrated that the two condition-equations of the optimal point hold in this case too.

Especially in the case of the mining area of two or more tracts it frequently occurs that their strike is different. In the case of Fig. 8 the time of travel for the man shaft of arbitrary location

$$t = 2c \{ T_I a_l + T_{II} (l_s + l_p) + v_r [T_{I r} b_{I r} + T_{II r} (b_{I r} \pm l_r)] + \\ + v_d [T_{I d} b_{I d} + T_{II d} (b_{I d} \pm l_d)] \}. \quad (49)$$

By the above-followed method of seeking extreme values it can simply be proved that the two condition-equations of the optimal point hold in this case, as well. The second condition-equation fixes at the same time the location of point *A*.

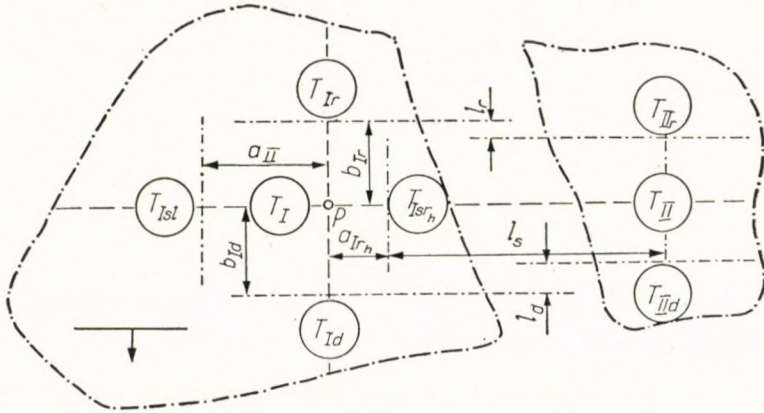


Fig. 7

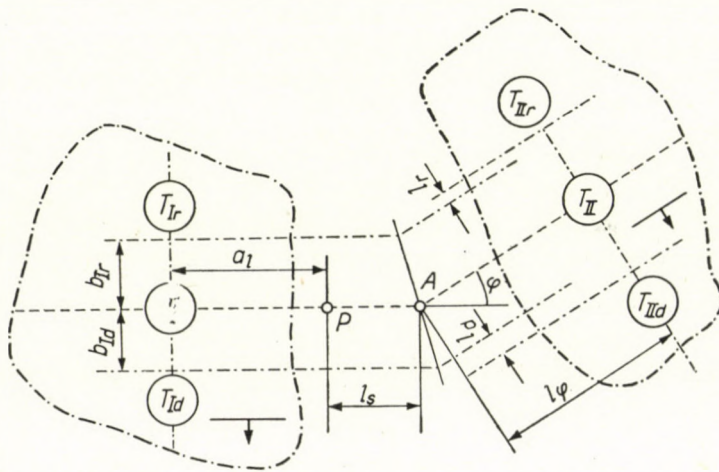


Fig. 8

It has been earlier referred to that the solution of the problem of the mining area of irregular shape also involves the solution of the problem of a tract of rectangular shape in which the strike is not parallel to one side of the rectangle. Halving along the strike and proportional division along the dip, unequivocally determines the optimal location of the shaft. The time of travel of a man shaft of any location can simply be written down by the application of the principle of static moments.

So far only one mineral bed has been supposed. If there are several beds parallel to one another the two condition-equations of the optimal point are as follows :

$$\sum_1^m c_i T_{srhi} = \sum_1^m c_i T_{sli} \quad \text{or} \quad \sum_1^m c'_i Q_{srhi} = \sum_1^m c'_i Q_{sli}$$

and

$$\frac{v_r}{v_d} = \frac{\sum_1^m c_i T_{di}}{\sum_1^m c_i T_{ri}} = \frac{\sum_1^m c'_i Q_{di}}{\sum_1^m c'_i Q_{ri}} \tag{50}$$

m denotes here the number of mineral beds. These condition-equations also hold, if the tracts of the different beds are different. The time of travel of the shaft located at any point can also be expressed by the application of the general principal of static moments so that the individual beds are treated separately.

If in the mining area there are mineral bodies of different average thickness, or such can be distinguished, the pertaining c values may be different too. This circumstance has to be taken account of, in writing down the condition-equations and in applying the principle of static moments.

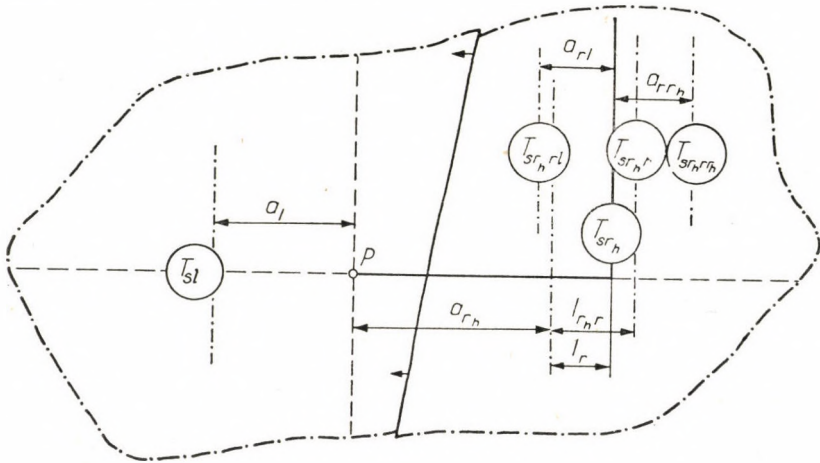


Fig. 9

So far it has been supposed that the workings can be approached on the strike and the dip by the shortest way. Let be investigated whether the place of the optimal point changes, if in the different tracts of the mining area the workings are approached on the strike and the dip, but not by the shortest way? Let an example be chosen according to Fig. 9. On the right hand tract of the mining area (T_{srh}), the area beyond the fault has been split up by a raise

(T_{sr_r}) into two panels ($T_{sr_r r_h}$) and ($T_{sr_r l}$). It is sufficient, if the location of the shaft is sought only in relation to the minimum of travel time on the strike: Let the shaft be at an arbitrary point P . The time of travel on the strike .

$$t_s = 2c \{ T_{sl} a_l + T_{sr_h} a_{r_h} - T_{sr_h} (a_{r_h} + l_{r_h}) + T_{sr_h} (a_{r_h} + l_r) + T_{sr_h l} a_{rl} + T_{sr_h r_h} a_{rr_h} \} \tag{51}$$

where $a_l, a_{r_h}, a_{r_n} + l_{r_h}$ are the distances from the shaft of the centroidal lines on the dip of areas $T_{sl}, T_{sr_h}, T_{sr_h r_h}, a_{rl}$ and a_{rr_h} are, on the other hand, the distances from the raise of the centroidal lines on the dip of panels $T_{sr_h l}$ and $T_{sr_h r_h}$. Let the partial derivative of t_s be formed according to a_l and a_{r_h} , and equated to zero :

$$\frac{\partial t}{\partial a_l} = 2c T_{sl} \tag{52}$$

$$\frac{\partial t}{\partial a_{r_h}} = -2c (T_{sr_h} - T_{sr_h} + T_{sr_h}) .$$

that is the condition-equation of optimum is :

$$T_{sr_h} = T_{sl} . \tag{53}$$

That is, the rule of halving holds here too. However, it has to be interpreted in the way that the shaft is then optimally located with regard to travel on the strike, if starting from the shaft to the right and to the left, while travelling right and left, the same mineral quantity is extracted. In the same way the validity of the second condition-equation can be demonstrated for the case, if not on the strike but on the dip line we depart from the shortest route. Of course, the time of travel is in both cases longer than in cases of the shortest walks.

Fig. 10 shows two examples. There are two mineral beds in the irregular mining area.

Characteristic features are tabulated (Table III).

Table III

	ξ	M	γ	q	v_s	α	c	ν	
		m	t/m ³	t/shift	m/hr	0		ν_r	ν_d
Bed I	0,92	1,8	1,34	1,7	3800	11	0,0003435	1,37	1,64
Bed II	0,84	3,7	1,41	1,5	3800	11	0,0007688	1,37	1,64

Values of c_l and c_{ll} have been calculated after equation (1), value of ν from equation (22), that is ν_d has been taken by 20% greater than ν_r .

In connection with this example, the numerical and partly also the graphical method is presented.

The mining area is in both mineral beds divided into strips parallel to the general strike. The more strips are taken, the more exact will be method, but of course the more will be the time spent on calculation or on graphic construction. Values taken from the graph and values computed therefrom are also tabulated (Table IV).

The individual cA_iB_i values are added in both beds, beginning with 1., one after another, so that the adding is executed in parallel in both beds. When the adding has reached the 3rd strip in bed I, and the 6th strip in bed II, the sum (866,5) is only by 15,955 less than half (887,455) of the total. By addition of another strip half of the total would have been surpassed. The bisectrix is at distance a from the right border of strip 3 of bed I. According to the graph, the following relationship can be written down ($l = 40$ m) :

$$c_I B_{I4} a + c_{II} B_{II7} (a + l) = 15,955 .$$

By substitution of the corresponding values, the result is :

$$a = - 11,68 \text{ m} .$$

The negative sign indicates that the value of a is to be measured off backwards. Herewith one condition-equation has been satisfied.

On the basis of the other condition-equation the optimal point is designated on the dip bisectrix by given value $b_{0\min}$. According to the graph,

$$b_i = b_{0\min} + d_i . \quad (54)$$

Let this equation be substituted into equation (37)

$$b_{0\min} = \frac{v_d \left(\sum_1^n A_i B_i + \sum_1^{n_d} A_i B_i \right) - v_r \sum_1^{n_r} A_i B_i - \sum_1^n A_i d_i}{(v_r + v_d) \sum_1^N A_i} - \frac{\sum_1^N A_i d_i}{\sum_1^N A_i} . \quad (55)$$

According to the preliminary proportional division, the dividing strike line cuts all the strips. With consideration of this and of the two beds the following relationship holds for the case at hand :

$$b_{0\min} = \frac{v_d \left(c_I \sum_1^{n_I} A_i B_i + c_{II} \sum_1^{n_{II}} A_i B_i \right) - c_I \sum_1^{n_I} A_i d_i + c_{II} \sum_1^{n_{II}} A_i d_i}{(v_d + v_r) \left(c_I \sum_1^{n_I} A_i + c_{II} \sum_1^{n_{II}} A_i \right) - c_I \sum_1^{n_I} A_i + c_{II} \sum_1^{n_{II}} A_i} . \quad (56)$$

Table IV

Mark of strip		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
A_i m	Bed I	86	244	177	185	193	192	174	88	74		1413
	Bed II	124	223	179	270	184	172	191	186	190	171	1890
B_i m	Bed I	800	1043	1076	1109	1151	1194	1238	1117	884		
	Bed II	246	455	680	951	1096	1078	937	833	1036	1024	
cA_iB_i	Bed I	23,63	87,42	65,42	70,47	76,31	78,75	73,99	33,76	22,47		532,22
	Bed II	23,45	78,01	93,58	197,40	155,04	142,55	137,59	119,12	151,33	134,62	1232,69
d_i m	Bed I	-180	- 83	+ 35	+134	+237	+339	+442	+368	+160		
	Bed II	-460	-390	-292	-169	- 40	+ 58	0	- 52	+211	+259	
cA_id_i	Bed I	- 5,29	- 6,96	+ 2,13	+ 8,52	+ 15,71	+ 22,36	+ 26,42	+ 11,12	+ 4,07		+ 78,08
	Bed II	-43,85	-66,86	-40,18	-35,08	- 5,66	+ 7,67	0	- 7,44	+ 30,82	+ 34,05	-126,53

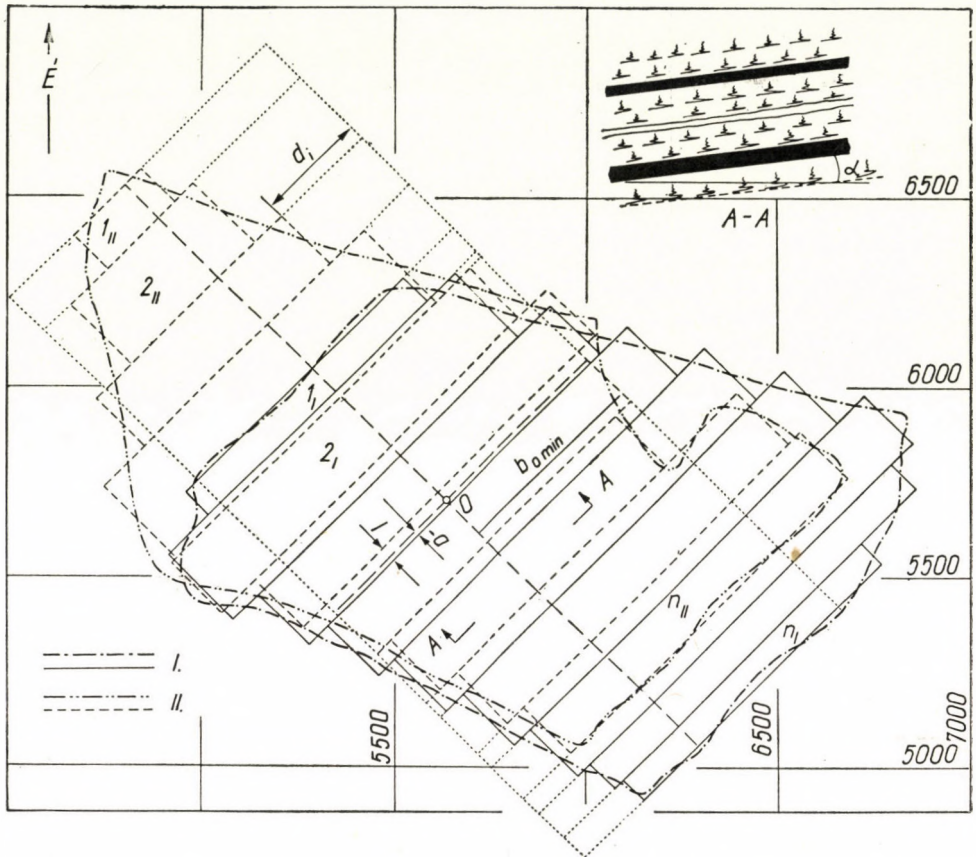


Fig. 10

Substitution of data taken from the graph leads to the result :

$$b_{0\min} = \frac{1,64}{1,37 + 1,64} \frac{532,22 + 1232,69}{0,4854 + 1,4530} - \frac{78,08 - 126,53}{0,4854 + 1,4530} = 521,1 \text{ m.}$$

For a check the value of $B_0 - b_{0\min}$ may be calculated in the same way. It has to be pointed out that the calculation of the optimal point in this sense cannot be applied after the same pattern. Namely, equation (55) is only applicable if by preliminary approximate division it has been found already, which strips are intersected by the strike line locating the actual optimal point, which fall into the area to the rise and to the dip. Therefore, the procedure is suitable in many cases only for refinement or checking.

Let the time of travel for the shaft located at the optimal point be computed. The calculation is made more lucid by tabulation. On the basis of the table the time of travel pertaining to the optimal point is expressed according to equation (35) :

Table V

(with multiplier 10^6)

Symbol of strip	r_{h_1}	r_{h_2}	r_{h_3}	r_{h_4}	r_{h_5}	r_{h_6}	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	0	Σ
$A_i(2a_i - A_i)B_i$	Bed I	42,75	130,26	222,68	288,08	157,21	115,22	146,24	62,24					1164,68
	Bed II	79,23	174,67	218,59				42,39	117,90	266,69	181,08	191,73	68,23	1340,51
$A_i b_i^2$	Bed I	79,39	110,92	142,04	161,40	69,56	34,33	46,83	10,01				54,74	709,22
	Bed II	40,93	101,83	104,06				57,68	42,59	33,47	9,40	3,83	0,46	51,87
$A_i(B_i - b_i)^2$	Bed I	38,11	29,79	21,41	13,15	4,57	3,05	89,28	18,11				47,84	265,31
	Bed II	24,63	17,55	10,17				42,81	69,57	96,84	36,39	23,40	4,24	33,04
In bed I: $B_0(a_{rh^0}^2 + a_{i0}^2) = 29,55$ In bed II: $B_0(a_{rh^0}^2 + a_{i0}^2) = 25,55$														

$$t = 10^6 \left\{ (1164,68 + 29,55 + 709,22 v_r + 265,31 v_d) c_I + (1340,51 + 25,55 + 446,12 v_r + 358,64 v_d) c_{II} \right\}$$

After substitution of values of c and v :

$$t \cong 2\,870\,000 \text{ hours}$$

The partly graphical procedure is illustrated in Fig. 11. The surface of the two beds is determined by planimetry T_I and T_{II} . By reason of this the value of

$$c_I T_I + c_{II} T_{II} = 1\,756$$

is obtained, from which follows:

$$T'_{r_h} = T'_I = 878, \quad \text{moreover } T'_r = 958 \quad \text{and} \quad T'_d = 798.$$

By successive approximation the dip and the strike lines are sought, which assure proportional division. Hereby the optimum position of the shaft (O) is located.

The centroidal lines pertaining to tracts T_{r_h} and T_I are determined graphically by means of rope polygons. The forces acting in the gravity centers of the individual strips have been taken proportional to values

$$c A_i (2 a_i - A_i) B_i.$$

In the designation of the centroidal lines of areas T_r and T_d another method has been applied. The distance of the centroidal line of the area to the rise is:

$$s_r = \frac{c_I \sum_1^{n_I} T_{ri} s_i + c_{II} \sum_1^{n_{II}} T_{Ii} s_i}{c_I \sum_1^{n_I} T_{ri} + c_{II} \sum_1^{n_{II}} T_{Ii}} = 305 \text{ m}$$

that in the area to the dip

$$s_d = \frac{c_I \sum_1^{n_I} T_{di} s_i + c_{II} \sum_1^{n_{II}} T_{dii} s_i}{c_I \sum_1^{n_I} T_{di} + c_{II} \sum_1^{n_{II}} T_{dii}} = 225 \text{ m}$$

where s_i always denotes the distance of the centre of gravity the strip from the strike passing through the O -point. T_{ri} and T_{di} denote the areas of the strip to the rise and to the dip. Of course, s_r and s_d can be determined also graphically, as above, by means of the rope polygon.

According to equation (39) the travel time for the optimal point can now be expressed:

$$t = 2 \left\{ 878 (415 + 430) + 1,37 \cdot 958 \cdot 305 + 1,64 \cdot 798 \cdot 225 \right\} \cong 2\,870\,000 \text{ hours}$$

Similarly, can be expressed the time of travel if the shaft is located at an arbitrary point. Let the man shaft be at point B .

Coefficients c_I and c_{II} taken into consideration, the centroidal strike line referred to the entire mining area is at 943 m from point B . Since point B is located on the dip line passing through point O , the travel time on the strike is invariable. After these preliminary remarks may be written:

$$t = 2 \left\{ 878 (415 + 430) + 1,64 \cdot 1\,756 \cdot 943 \right\} \cong 6\,915\,000 \text{ hours}$$

It has been supposed that the shaft is sunk as deep as the mineral bed or its continuation. Thus in oblique direction there is travel to the dip only. The man shaft located at *B* requires even in possession of relatively small mineral reserves 4 045 000 hours more travel time against the optimal point.

The case may frequently occur that for reasons of working techniques it is expedient to locate the air (fan) shaft at the boundary to the rise. Using

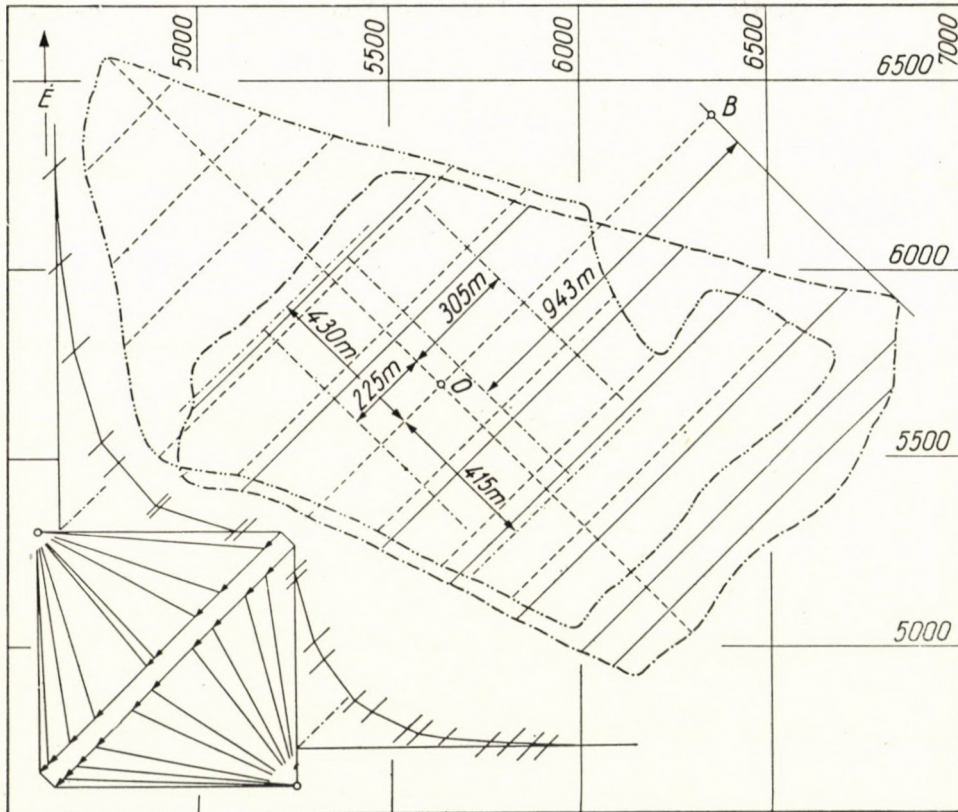


Fig. 11

it for access in no more advantageous, therefore men will be conveyed through the winding shaft or, if this is not practicable, a man shaft will be sunk at the optimal point. The economic evaluation of such lay-out can be executed by calculating travel times. There exists namely the possibility of confronting the amortization of costs of investment of the man shaft with costs due to excess time loss in underground travelling:

Of course, as regards investment, the situation is the most favourable if the shaft located at point *O* is at the same time winding mineral and men too. It can be easily demonstrated that, from the view-point of underground haulage

too, point O is an optimum. For smaller mines this speaks for further use of winding with cages. In case of large mines and great depths the winding shaft located in the region of the optimal point will be a skip shaft and the man shaft sunk beside it will be a cage shaft. Large mines of shallow depth may solve the problem of winding products and men in a shaft with cages.

Analysis of this and of similar problems would lead very far and is therefore not dealt with in detail in this paper.

After treating significant features of flat measures, characteristics of highly inclined mineral body will be dealt with. The solution of this problem is greatly simplified because the separability of travel time on strike and on dip, as well as the principle of static moment, unconditionally subsists here, too. In view of the cross-cut (cross-measure drift) system of highly inclined workings its influence on the two condition equations has to be investigated.

Let the layout of highly inclined (rear) workings be quite general according to Fig. 12. The time of travel referred to the entire mining area of a shaft located at an arbitrary point can be expressed in the following way :

$$\begin{aligned}
 t = & \sum_1^{m-1} \left\{ c_i Q_{r_{hi}} (2l_i + d_i + v_i s_{di} + s_{sr_{hi}}) + c_i Q_{li} (2l_i + d_i + v_i s_{di} + s_{sli}) \right\} + \\
 & + \sum_1^{n-1} \left\{ c_i Q_{r_{hi}} (2l_i + d_i + v_i s_{di} + s_{sr_{hi}}) + c_i Q_{li} (2l_i + d_i + v_i s_{di} + s_{sli}) \right\} + \\
 & + c_0 Q_{r_{h0}} (l_{1m} + l_{1n} + v_0 s_{d0} + s_{sr_{h0}}) + c_0 Q_{l0} (l_{1m} + l_{1n} + v_0 s_{d0} + s_{slo}) \quad (57)
 \end{aligned}$$

where

$$c_i = \frac{\xi_i}{q_i v_s} \quad (58)$$

moreover $Q_{r_{hi}}$ is the quantity of exploitable mineral reserves of the right hand side of the level, Q_{li} is the quantity of the exploitable mineral reserves on its left hand, l_i the length of the cross-cut of the level, d_i is the projection of the distance between levels, s_{di} is the distance of the centroidal strike line of Q_i from the airway of the level, $s_{sr_{hi}}$ is the distance of the centroidal dip line of $Q_{r_{hi}}$, s_{sli} that of Q_{li} from the axis of the cross-measure drift, m the number of hanging wall cross-cuts, n the number of foot-wall cross-cuts.

The relationship refers to the case when the panel of mineral between two levels is approached by the airway and left by the haulage road. Between the two roads travel downward takes only place, the value of v has therefore to be considered in this sense only.

By seeking extreme values, the two condition equations of the optimal point can be determined.

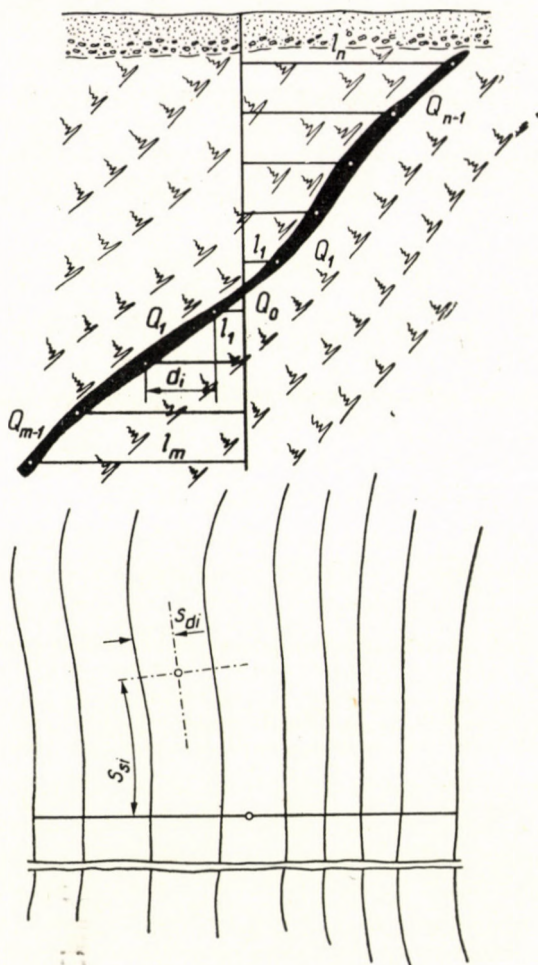


Fig. 12

Let first be written

$$\sum_1^{m-1} \frac{\partial t}{\partial s_{rhi}} + \sum_1^{n-1} \frac{\partial t}{\partial s_{rhi}} + \frac{\partial t}{\partial s_{rA0}} = \sum_1^{m-1} c_i Q_{rhi} + \sum_1^{n-1} c_i Q_{rhi} + c_0 Q_{rA0} \quad (59)$$

further

$$\sum_1^{m-1} \frac{\partial t}{\partial s_{li}} + \sum_1^{n-1} \frac{\partial t}{\partial s_{li}} + \frac{\partial t}{\partial s_{l0}} = - \left\{ \sum_1^{m-1} c_i Q_{li} + \sum_1^{n-1} c_i Q_{li} + c_0 Q_{l0} \right\}.$$

One condition-equation of the optimal point is thus :

$$\sum_1^{m-1} c_i Q_{rhi} + \sum_1^{n-1} c_i Q_{rhi} + c_0 Q_{rA0} = \sum_1^{m-1} c_i Q_{li} + \sum_1^{n-1} c_i Q_{li} + c_0 Q_{l0}. \quad (60)$$

The optimal point is on the dip bisectrix of the mining area weighted according to the coefficient c .

For the other condition-equation will be written in the second place

$$\sum_1^{m-1} \frac{\partial t}{\partial l_i} + \frac{\partial t}{\partial l_{1m}} = 2 \sum_1^{m-1} c_i Q_i + c_0 \cdot Q_0$$

further

(61)

$$\sum_1^{n-1} \frac{\partial t}{\partial l_i} + \frac{\partial t}{\partial l_{1n}} = - \left\{ 2 \sum_1^{n-1} c_i Q_i + c_0 \cdot Q_0 \right\}.$$

The other condition-equation of the optimal point is :

$$\sum_1^{m-1} c_i Q_i = \sum_1^{n-1} c_i Q_i. \quad (62)$$

The second condition-equation shows that in steep seams opened up by cross-cuts the location of the optimal point is independent of the dip of the bed or of its variation.

If the mineral reserves of the individual levels are equal or may be taken practically for such and if besides this there is no difference between coefficients c on the different levels, the second condition-equation takes the very simple form :

$$m = n \quad (63)$$

that is, the man shaft will be at the optimal point as long as the number of hanging wall and of footwall cross-cuts is equal.

If besides the latter conditions the extensions of levels along the strike is also equal, the first condition-equation also takes a very simple form

$$Q_{rh} = Q_l = \frac{Q}{2} \quad (64)$$

that is, the optimal point is on the dip line halving the mineral reserves. Without any mathematical proof it is evident that the two condition-equations hold according to their sense for the case as well, when there are several beds, not only one, or there exists a group of beds. In this case only the roof of the topmost bed will correspond to the roof of the unique bed. The same refers to the floor or footwall.

Fig. 13 presents the case when the main haulage roads on the strike are driven in the footwall measures of the mineral bed or group of beds. For instance, the travel time for level No. II may be expressed thus :

$$t_{II} = c_{II} \left\{ Q_{r_{hII}} [2(l_{II} + r_{II} + d_{II}) + v_{II} \cdot s_{dII} + s_{sr_{hII}}] + Q_{iII} [2(l_{II} + r_{II} + d_{II}) + v_{II} s_{dII} + s_{sII}] \right\}. \quad (65)$$

It is sufficient to write so much, for it is evident that the optimal location of the shaft is in this case too only a function of $s_{sr_{hi}}(s_{sr_{hII}})$, of s_{sli} (s_{sII}) or of $l_i(l_{II})$. This means that the two condition-equations hold for this case too.

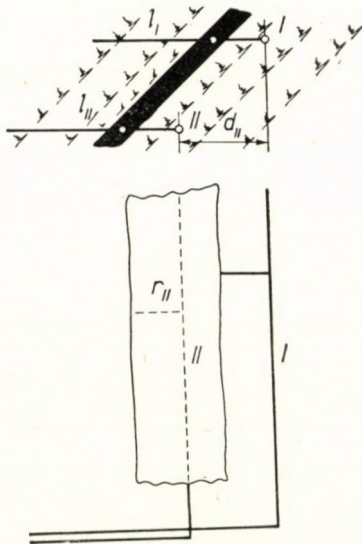


Fig. 13

Similarly, the validity of the two condition-equations can be demonstrated for the case, when the main haulage roads on the strike are driven in the roof measures of the mineral, or even amid the mineral beds, or in some one of the group.

Finally, it may be laid down that the three basic principles also hold for highly inclined measures. With their aid all other special problems can be solved.

REFERENCES

1. L. D. SEVIAKOV: Principles of Planning Deep Mine Layouts. 113 §. pp. 272—274. (Translated from Russian into Hungarian.) Publishing House for the Heavy Industry, 1951.
2. B. VARGHA: Correlations between Size, Shape and Layout of the Working Area of a Shaft. Bányászati Lapok — Journal of Mining, 1956, No. 3. (Hungarian)

SUMMARY

The paper gives general mathematical relationships for the location of the man shaft (shaft of access) and of the time loss of underground travel.

In the first part a rectangular mining area is assumed, the longer side of which is parallel to the general strike and the shorter side with the dip. Mathematical deductions lead to the following three basic statements :

1. In the relationship of the time of travel the periods of walking along the strike, up and down the dip appear separately.

2. Travel times are proportional to the static moment of areas, or of their mineral reserves, respectively, referred to the strike and dip line passing through the shaft.

3. The optimum position of the manshaft is located on the dip line bisecting the mining area of the shaft or its mineral reserves, respectively, and on a strike line that divides the mining area, or its mineral reserves into two parts proportional to the pertinent mean speeds of circulation.

The validity of the three basic principles is also verified for a mining area of general shape, and with their aid special cases are investigated. Finally, the special features of steep measures are investigated.

DER ANSETZPUNKT DES EINFAHRSCHACHTES UND DER ZEITVERLUST
DER FAHRUNG UNTERTAGE

J. ZAMBÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz gibt allgemeine mathematische Zusammenhänge für die Lage des Einfahrschachtes und den Zeitverlust des Fahrens untertage.

In dem ersten Teile wird ein rechtwinkliges Schachtfeld angenommen, dessen längere Seite dem Durchschnittstreichen und dessen kürzere Seite dem Durchschnittseinfällen parallel liegt. Es ergeben sich folgende drei Grundsätze aus den mathematischen Ableitungen :

1. In der Beziehung der Zeit der Fahrung untertage erscheinen die Fahrungszeiten im Streichen, auf Bremsbergen und in Gesenkkeldern gesondert.

2. Die Fahrungszeiten sind dem statischen Moment der Abbauflächen, bzw. deren Mineralbestände, bezogen auf die durch den Schacht führende Streich- und Einfall-linie proportional.

3. Der optimale Ansetzpunkt des Einfahrschachtes liegt auf der das Schachtfeld, bzw. dessen Mineralvermögen halbierenden Einfall-linie, und auf der Streichlinie, die das Schachtfeld bzw. dessen Mineralvermögen derart in zwei Teile teilt, dass sie im Verhältnisse der bezüglichen mittleren Fahrungsgeschwindigkeiten zueinander stehen.

Der Verfasser beweist die Gültigkeit der drei Grundsätze auch für ein Schachtfeld beliebiger Form, und untersucht mit deren Hilfe einige Sonderfälle. Schliesslich werden die Besonderheiten der steilen Lagerung untersucht.

LA POSITION DU Puits D'ACCÈS ET LA PERTE DE TEMPS DUE À LA CIRCULATION
SOUTERRAINE

J. ZAMBÓ

RÉSUMÉ

L'étude donne des relations mathématiques générales sur la position du puits d'accès et la perte de temps due à la circulation souterraine.

Dans la première partie, on suppose un champs d'exploitation rectangulaire dont le côté plus long est parallèle à la direction générale du gisement, et dont le côté plus court est parallèle à son pendage. Des déductions mathématiques, il résulte les trois principes suivants :

1. Sous le rapport du temps de circulation, les périodes de circulation dans les champs d'exploitation par plans inclinés et en descenderie apparaissent séparément.

2. Les temps de circulation sont proportionnels au moment statiques des aires ou ressources minérales des champs d'exploitation rapportés aux lignes de direction et de pendage passant par le puits.

3. La position optimum du puits d'accès est située sur la ligne de pendage bisectrice du champ du puits ou de ses ressources minérales, et sur la ligne de direction partageant ce champ ou ses ressources minérales en deux parts proportionnelles aux vitesses moyennes de circulation γ relatives.

La validité de ces trois principes est aussi démontrée pour un champs d'exploitation de puits d'une forme générale, puis quelques cas spéciaux sont examinés à l'aide de ces principes. Les particularités des couches fortement inclinées sont enfin traitées par l'auteur.

РАСПОЛОЖЕНИЕ ОПУСКНОЙ ШАХТЫ И ПОТЕРИ ВРЕМЕНИ ПЕРСОНАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Я. ЗАМБО

РЕЗЮМЕ

В работе дается общая математическая зависимость для определения места закладки опускной шахты и потери времени персонального движения.

В первой части предполагается шахтное поле такой прямоугольной формы, длинная сторона которой параллельна среднему простиранию, а короткая сторона — среднему восстанию. На основе математических выводов можно вывести три основных теоремы.

1. В зависимости времени персонального движения отдельно фигурирует время персонального движения по простиранию, наклонного и террасного полей.

2. Время персонального движения пропорционально статическому моменту, относящемуся к линии простирания и восстания, проходящего через шахту площадей и, соответственно, минеральной залежи.

3. Оптимальное место закладки опускной шахты находится на линии падения и восстания, делящем на две части шахтное поле и, соответственно, минеральные залежи, которая линия разделяет шахтное поле и, соответственно, минеральные залежи на две части с таким расчетом, что их пропорция идентична пропорции соответствующих им скоростям движения.

Автор и для шахтного поля общей формы подтверждает три основные теоремы, затем с их помощью исследует специальные случаи; наконец занимается свойствами крутых наклонных залежей.

IN MEMORIAM JOSEPH GESZTI

Prof. B. GUTENBERG

CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SEISMOLOGICAL LABORATORY, PASADENA, CALIFORNIA, USA

[Manuscript received April, 1957]

Joseph GESZTI was born in Budapest in 1878. At the age of about 22 years he graduated as mechanical engineer and later worked as designing engineer. In addition, he became fascinated by questions connected with the earth's history and structure and in his free time, apparently mainly in the evening or even at night, he did extensive research to increase his and our knowledge of the processes which have produced the present structure of the earth. Starting at the age of 50 years he published a number of important papers concerning the development of the earth. In many respects his methods and conclusions were far ahead of those of his time and consequently did not find the attention which they deserved. While some of his assumptions and results are now obsolete, others have been restated later independently by other scientists.

In his first major publication (1929) he discussed effects of plastic deformations on processes in the earth's crust. Pertinent laboratory data, provided mainly by the fundamental research of Th. v. KÁRMÁN had "furnished proof for the fact" that rocks under high pressure "are subject to the same rules of plastic deformation as metals." For processes involving plastic deformation GESZTI formulated fundamental principles including the following: The volume of a given body can be taken as constant during plastic deformation; plastic deformation requires stress differences in excess of the strength which resists plastic deformation; plastic deformation proceeds in such a way that the required energy is a minimum considering the limitations by the given conditions.

GESZTI applied these rules to processes involving plastic deformation in the earth's crust. If, for example, a portion of the crust is compressed, the material must gradually move upward in the upper, downward in the lower part, and these two parts must be separated by a surface which does not change its position ("Fließscheide"). He pointed out that on the assumption that during such processes isostatic equilibrium is approximately maintained the ratio of the material pressed above the surface to that forming the root ("Tiefenwulst") depends on the densities involved.

In this investigation GESZTI discussed a variety of geological and geophysical problems. For example, he pointed out, that an increase of strain beyond

the breaking strength in a layer at depth results in a sudden change in the stress pattern and in earthquakes (p. 62). He also discussed problems involved in the contraction theory and emphasized that in the investigation of shortening of the earth's crust during formation of mountains all three dimensions must be considered. It is not permissible, to "straighten out" folds or mountains above the earth's surface to find the contraction of the earth, as has been done frequently, but the change in the whole crust must be taken into account. This has been pointed out again recently, e. g. by BULLARD (1951). GESZTI calculated that the contraction of the crust necessary to form the Alps was only about 16 per cent of the present width, and not a hundred per cent or even more, as had been claimed previously.

In a second publication (1929a) GESZTI discussed the origin of ocean basins. During an early stage of the earth, when temperatures at the surface were high, most water existed in the form of vapor in the atmosphere. With increasing cooling of the earth's surface, water began to condense and accumulated in those portions of the solid crust where the surface was at the lowest elevations. The increase in weight in these regions of the first oceans was accompanied and followed by isostatic movements. The condensation of the water must have produced an additional rise of the continents, since their weight is balanced by the weight of the ocean bottom plus that of the water. GESZTI investigated in detail such processes as well as effects of cooling and contraction of the deeper layers.

In a following publication (1930) GESZTI discussed reasons for the existence of higher and lower parts of the earth's surface at the time when the water started to condense. He assumed that originally a layer of sial surrounded about evenly simatic material. Thermodynamic processes which he attributed to inhomogeneities of the sial caused slow currents in which light surface material moved from warmer to colder regions, heavier deeper material in the opposite direction. Consequently, in warmer areas the thickness of the sialic cover decreased and sima came closer to the surface. Isostatic processes then resulted in a sinking of the heavier blocks with thin sial cover and an uplift of the lighter future continents with a relatively thick sial layer. Finally, the condensing water increased the differences in surface levels as GESZTI had pointed out in his earlier publication.

In 1931 GESZTI continued this investigation. He tried to explain the processes which brought about the formation of the crustal layers (sial, sima, peridotitic layer) by differentiation of an original silicate melt. He pointed out that the boundary between the granitic and basaltic layer in the continents is probably not over 50 km deep, since otherwise too much heat would be produced by the relatively high radioactivity in the granitic layer. He also discussed again the differences in densities of the sial and sima layers and the corresponding differences in the thickness of the continental blocks.

A detailed discussion of processes which may have been involved in the crystallization of the earth's crust and of probable numerical values of pertinent

constants led him to the following conclusions: The approximately homogeneous outer part of the earth separated at still high temperatures into an upper silicate layer and the lower heavy silicate-sulfide melt (p. 30). The silicate layer later separated into the upper sial layer and the lower sima. These differentiations occurred in the gravity field of the earth, mainly while the material was still molten.

With increasing cooling, differentiation by crystallization started which required an impulse for its beginning. As GESZTI discussed in detail, the necessary conditions were not met equally well in all regions. Consequently, differences resulted between the speed of the processes in various parts of the crust which produced the original contrasts between the future continental and oceanic structures. Thus, the continents owe their origin to physical-chemical molecular properties of the silicate melt. They are areas of the earliest differentiation processes. Their size depended mainly on the properties of the original magma and on the developing horizontal differences in temperature gradients, while their thickness was influenced by the increase in density of the crystals during phase changes, by the viscosity and density of the melts, and especially by the melting point of the first products of differentiation.

The last point in GESZTI's conclusions (p. 38) includes the statement that "the thickness of the crust depends on the increase in density of the crystals during phase changes". While it seems from the context that GESZTI had in mind primarily the change from the molten to the crystalline phase, it is not impossible that he anticipated here much more recent findings that changes from one solid phase to another may play an important role in the processes involving the earth's crust.

In his last publication (1937) GESZTI went still farther back in the earth's history and investigated the separation of the earth's interior into mantle and core. He assumed that originally the earth was a chemically homogeneous body at a temperature above the critical point. Cooling disturbed this equilibrium in the peripheric portions only. Near the surface subsequently components precipitated which separated in the gravity field. On the other hand, in the deep interior insignificant changes in the temperature and small gravitational forces combined with high pressure and resulted in great stability. Thus, at an early time in the earth's history an upper zone of separation surrounded a deeper portion which still consisted of the original mixture.

It was not possible that relatively small "drops" of heavy material, for example iron, "rained" down to great depths as had been suggested earlier. A relatively small heavy mass can not overcome the resistance of the deeper material under the high pressure existing there. The smallest mass which a body of heavier material must have to move downward inside the earth under the effect of gravity depends mainly on the plasticity of the deeper medium and the pressure at the given depth. The difficulty for diffusion of iron through the

material of the earth's interior was discussed later, without reference to GESZTI's publication, for example by KUHN and RITTMANN (1941) and by UREY (1951, p. 270; 1952). GESZTI believed that gradually small amounts of iron could accumulate to a large iron body which finally could break through the original melt towards the central portion of the earth.

At the earth's surface, great changes must have accompanied such deep seated revolutionary processes. GESZTI suggested that each geological epoch started with such movements of "iron oceans" towards deeper parts of the earth and that then long periods of relative tranquillity followed while iron accumulated at a relatively small depth, until again a mass large enough for a new breakthrough had gathered. He discussed in detail consequences of these hypothetical processes. For example, GESZTI pointed out that iron masses accumulating eccentrically could have produced polar movements and changes in climate. Transgressions and regressions could indicate the time scale of the oscillations produced by the repetitions of the deep seated processes. Moreover, the one-sided location of continents could have been produced during early geological times by the movement of the "iron oceans", which may have broken through the deeper portions of the earth repeatedly in the same general region and may have started crustal currents towards the area below which they moved downward.

Tangential forces in the surface layers during these revolutions could have been involved in the formation of folded mountains. Relatively narrow zones of the crust should have been subject to larger tangential stresses than other areas; this resulted in greater mobility there and finally in geosynclines. Negative gravity anomalies in these geosynclines could be accounted for by the smaller density of the sediments which extend to great depth; this explanation has been supported by recent observations.

In course of time the length of the periods (each of which included the formation of an "iron ocean" in the earth and its sinking to the core) should have increased, and finally these processes should practically cease thus ending the major phase of geotectonic activity in the earth.

After 1937, GESZTI's investigations were slowed down by the increasing threat to the peace of the world. He was an ardent foe of Nazi domination, and after an unsuccessful attempt to escape to Sweden, he went into hiding. During the last days of the siege of Budapest in 1944, he was betrayed and taken to the headquarters of the Nazi Party from where he never returned. A scientist, whose investigations of the complicated problems of the earth's history had been highly successful and promised further valuable results, had been murdered by extremist foes of humanity.

The author is indebted for bibliographic information to Dr. V. CONRAD (former editor of *Gerlands Beiträge zur Geophysik*), Dr. A. GELEJI (chief editor, Hungarian Academy of Sciences), and Mr. O. P. GESZTI (son of Mr. Joseph GESZTI).

Major publications of Joseph Geszti

All following publications appeared in Gerlands Beiträge zur Geophysik :

1929. Zusammenschub der Erdrinde. Bd. 21, S. 36—78.

1929a. Zur Frage der Entstehung der Kontinente und Ozeane. Bd. 22, S. 353—384.

1930. Die Entstehung der Kontinente. Bd. 27, S. 1—25.

1931. Die Entstehung der Kontinente (Fortsetzung). Bd. 31, S. 1—39.

1937. Schichtungsvorgang in einem inhomogenen schweren Weltkörper hoher Temperatur. Bd. 49, S. 26—65, 232.

REFERENCES

- BULLARD, E. C. : Remarks on deformation of the earth's crust. Transactions, Amer. Geophys. Union, vol. 32, p. 520, 1951.
- KUHN, W. and A. RITTMANN, Über den Zustand des Erdinnern und seine Entstehung aus einem homogenen Urzustand. Geolog. Rundschau, Bd. 32, S. 225, 1941.
- UREY, H. C., The origin and development of the earth and other terrestrial planets. Geochimica and Cosmochimica Acta, vol. 1, pp. 209—277, 1951.
- UREY, H. C., The Planets. Yale University Press, 1952, pp. 87—92.

PRO MEMORIAM JOSEPH GESZTI

Prof. B. GUTENBERG, Pasadena, California

ZUSAMMENFASSUNG

1878 in Budapest geboren, erwarb er mit 22 Jahren das Maschineningenieurdiplom, um späterhin sich als Konstrukteur zu betätigen. Neben dieser Tätigkeit bezeugte er ein lebhaftes Interesse für Fragen der Erdgeschichte und Erdstruktur. In seinen freien Stunden, widmete er sich seinen Forschungen. Indem er seine Kenntnisse vervollkommnete, brachte er Licht in manche Fragen der Erdstrukturbildung. Er war in seinen Forschungsmethoden und Folgerungen seiner Zeit in mancher Hinsicht voran, und so geschah es, dass ihm nicht die gebührende Anerkennung zuteil wurde.

In seiner ersten grösseren Publikation (1929) behandelte er nebst geophysischen Problemen, die Auswirkungen der plastischen Umwandlungen der Erdkruste, wobei er die fundamentalen Regeln dieser Prozesse aufstellte.

Ferner hat er erkannt, dass die Schrumpfungstheorie bei der Gebirgsbildungstheorie angewandt, sich auf drei Dimensionen stützen muss.

In einer anderen Arbeit (1929) befasste er sich mit der Entstehung des Ozeanbeckens. In einer 1930 erschienen Veröffentlichung forschte er nach den Ursachen, die zur Zeit der Wasserdampfkondensation die Hebungen und Senkungen der Erdoberfläche begründeten. In weiteren Forschungen suchte er (1931) jene Prozesse zu erläutern, die zur Erdkrustenbildung beitrugen. In seiner 1937 publizierten letzten Arbeit hat er in Folge stets eingehenderer Studien, die Spaltung der Erde zu Schale und Kern untersucht. Die durch ihn behandelten und teils oder zur Gänze gelösten Fragen wurden späterhin auch durch andere Autoren behandelt, jedoch ohne jede Bezugnahme auf Geszti.

Als unerbittlicher Feind des Nationalsozialismus, wurde er 1944, in den letzten Tagen der Belagerung von Budapest, durch die Nazi festgenommen und hingerichtet. Ein hervorragender Gelehrter wurde ermordet, der in seinen Forschungen verwickelte geologische Fragen beleuchtete und dessen Wirksamkeit zu weiteren Ergebnissen als Ausgangspunkt dienen kann.

EN MÉMOIRE DE JOSEPH GESZTI

Prof. B. GUTENBERG, Pasadena, Californie

RÉSUMÉ

József Geszti est né en 1878, à Budapest. A l'âge de 22 ans il obtient le diplôme d'ingénieur-mécanicien et travailla, par la suite, comme ingénieur-constructeur.

Outre son travail d'ingénieur, il se passionna pour l'étude de problèmes touchant la genèse et la structure de la Terre. Ses loisirs, et souvent une partie de ses nuits passèrent à des

à des recherches assidues portant sur les processus de formation de la structure actuelle du globe. Ajoutons que ses méthodes d'investigation et ses déductions ont sur plus d'un point devancé les résultats scientifiques de son époque, ce qui fut sans doute cause du relativement peu d'intérêt qui fut alors accordé à ses travaux.

Sa première publication importante (1929) traite de l'effet des déformations plastiques se produisant dans l'écorce terrestre. Geszti a établi les règles fondamentales des processus étant à l'origine de ces déformations et a soulevé, dans la même étude, des problèmes géophysiques. En parlant de la théorie de la contraction, il a bien vu la nécessité de considérer les trois dimensions, lors de son application à la théorie de la formation des montagnes.

Dans une autre publication, parue la même année, Geszti étudia le problème de la formation du bassin océanique. L'année suivante, il chercha à établir, dans une nouvelle étude, les causes du dénivèlement de la surface du globe terrestre à l'époque de la condensation des vapeurs d'eau.

En 1931, Geszti poursuivit ses recherches. Il tenta de donner une explication des processus ayant contribué à la constitution de l'écorce terrestre. Dans sa dernière publication parue en 1937, il chercha à remonter encore plus loin dans l'histoire du globe, en examinant le problème de la séparation en une couche superficielle et un noyau central. Certains problèmes soulevés par Geszti, et dont il donna des solutions parfois définitives, ont été repris, dans la suite, par d'autres auteurs ayant omis de se référer à ses publications.

Geszti fut un ennemi implacable du régime hitlérien. Aussi, aux derniers jours du siège de Budapest, en 1944, fut-il arrêté et exécuté par les nazis. On a perdu en lui un savant éminent, dont les recherches si fructueuses sur l'histoire du globe étaient une brillante promesse pour l'avenir.

ВОСПОМИНАНИЯ О ЙОЖЕФЕ ГЕСТИ

Проф. Б. ГУТЕНБЕРГ (Пасадена, Калифорния)

РЕЗЮМЕ

Йожеф Гести родился в Будапеште в 1878 году. В 22 летнем возрасте он получил диплом инженера — механика, затем он работал в качестве инженера — конструктора.

Наряду с выполняемой им повседневной работой он исключительно сильно заинтересовался вопросами, связанными с историей и структурой Земли. Вечерами, в свободное от работы время, часто даже ночью он упорно работал над своими исследованиями, чтобы с этим продвинуть вперед как свои знания, так и знания науки в отношении тех процессов, при происшествии которых формировалась современная структура Земли. Следует отметить, что его методы исследований и сделанные им выводы во многих отношениях превзошли научные достижения его эпохи, и таким образом могло произойти, что на них не обратили внимание в такой степени, в какой они этого заслуживали.

В первом его опубликованном крупном труде (1929) разбирается вопрос о действии пластичных деформаций, происходящих в коре земли. Для процессов, охватывающих пластичные деформации, Гести вывел фундаментальные правила. В этой своей работе он занимался также геофизическими проблемами. Он обратил внимание читателей и на то, что что в связи с теорией компрессии — если применить ее для теории образования гор — необходимо учитывать все три размерности.

В другом его сообщении Гести рассматривает проблему возникновения дна океанов. В сообщении, опубликованном им в 1930 году, он исследует причины, вследствие которых в эпоху конденсации водяного пара имелись возвышенные и погруженные части на поверхности земли.

В 1931 году продолжал свои исследования. Им была сделана попытка дать объяснение тем процессам, которые способствовали образованию коры Земного шара. В последнем его сообщении, опубликованном в 1937 году он пошел еще дальше в области исследования истории Земли, и он исследовал разобщение Земли, как единого целого, на оболочку и ядро. Поднятые Гести проблемы, которые им частично или полностью уже были решены, позднее изучались также другими авторами, однако при этом не ссылаясь на сообщения Гести.

Гести был непреклонным врагом нацистского режима. Так могло случиться, что в последние дни осады Будапешта в 1944 году нацисты арестовали и убили его. Они покончили с жизнью такого выдающегося ученого, исследования которого в области очень сложных вопросов истории Земли были очень успешными, и работы которого служили для достижения дальнейших успехов.

I N D E X

- Szidarovszky, J.* : A Practical Solution for Stiffened Suspension Bridges of Variable Inertia Moment and its Application to Influence-Line Analysis — Praktische Lösung der Berechnung einer Hängebrücke mit Versteifungsbalken von veränderlichem Inertiemoment und ihre Anwendung bei der Berechnung mittels Einflusslinien — Solution pratique pour le calcul d'un pont suspendu à poutre de raidissement et moment d'inertie variable et son application au calcul par lignes d'influence — Я. Сидаровски: Практическое решение висячего моста с переменным моментом инерции и применение для расчетов линий влияния 249
- Bajcsay, P.—Lovass-Nagy, V.* : The Generalization of some Relations of the Four-terminal Theory by Means of Hypermatrices — Verallgemeinerung einiger Beziehungen der Vierpoltheorie mittels Hypermatrizenrechnung — Généralisation de quelques rapports de la théorie de quadripoles par calcul hypermatriciel — П. Байцаи и В. Ловаш-Надь: Обобщение с гиперматрицами некоторых зависимостей четырехполюсной теории 293
- Balogh, A.* : New Method for the Calculation of the Natural Frequencies of Torsional Vibration — Beitrag zur Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Torsionsschwingungen — Contribution à la détermination de la fréquence propre des oscillations de torsion — А. Балог: К определению числа собственных колебаний крутильных колебаний 311
- Huszár, I.* : Das Spannungsfeld im Streifen eines zugbeanspruchten T-förmigen Flachstabes — Stress Field due to Tensile Load in the Leg of a T-shaped Flat Bar — Le champ de tension apparaissant dans la toge d'une barre plate en T, provoqué par une charge de traction — И. Хусар: Поле напряжений, возникающее в продолговатой части Т-образного плоского стержня под воздействием растягивающей нагрузки 333
- Simonyi, K.* : Eine Beschleunigungsanlage mit einem Kaskadengenerator von 800 kV — An Accelerating Plant with a 800 kV Cascade Generator — Une installation d'accélération avec un générateur en cascade de 800 kV — К. Шимони: Ускорительное устройство с 800 кВ каскадным генератором 353
- Hegedüs, Z.* : Durch Zunderbildung verursachte Gefügeveränderungen und technologische Fehler in der warmgewalzten Bronze Bz 5 — Changes of Structure and Manufacturing Faults Caused by Scaling, in Hot-rolled Bz 5 Bronze — Altérations structurales et défauts de fabrication provoqués par l'oxydation du bronze Bz5 laminé à chaud — З. Хегедюш: Изменения структуры и производственные дефекты, вызванные вследствие образования окалины в случае горячекатанной бронзы Bz 5 363
- Boldizsár, T.* : Temperature Drop of Incompressible Fluids Rising in Boreholes — Temperaturerniedrigung der in Bohrlöchern aufsteigenden Flüssigkeiten — La diminution de température des liquides montant du trou de forage — Т. Больдижар: Снижение температуры жидкостей, поднимающихся в буровых скважинах 371
- Szendy, Ch.* : Transformation of a Three-phase Alternating-current System with the Aid of Matrix Calculus — Transformation von Dreiphasen-Wechselstromsystemen mit Hilfe der Matrizenrechnung — Transformation d'un système alternatif triphasé à l'aide du calcul — К. Сенди: Трансформация трехфазной системы переменного тока с помощью матричного исчисления 379

- Csonka, P.* : Substitution Method for the Approximate Solution of Stability Problems of Plane-framed Trusses with Rigid Joints — Substitutionsverfahren zur angenäherten Lösung von Stabilitätsproblemen ebener Rahmenträger — Procédé de substitution pour la solution approximative des problèmes de stabilité des portiques multiples ou treillis — *П. Чонка*: Замещающий метод для приближенной трактовки задач стабильности, касающихся плоскостных ферм 405
- Zambó, J.* : Location of the Man Shaft and Time Lost in Underground Travel — Der Ansetzpunkt des Einfahrschachtes und der Zeitverlust der Fahrung untertage — La position du puits d'accès et la perte de temps due à la circulation souterraine — *Я. Замбо*: Расположение опускной шахты и потери времени персонального движения 415
- Gutenberg, B.* : In Memoriam Joseph Geszti — Pro Memoriam Joseph Geszti — En mémoire de Joseph Geszti — *Б. Гутенберг*: Воспоминания о Йожефе Гести 459

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume. Manuscripts should be addressed to :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

