ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ K. SZÉCHY,
G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XVI FASCICULI 1—2

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1957

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Bankkonto Nr.43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Tomus XVI.

J. Barta : Circular Plate Uniformly Loaded on a Diameter — Die längs eines Durchmessers gleichmässig belastete Kreisplatte — Plaque circulaire uniformément chargée suivant un diamètre — *Й. Барта:* Круглая плита, равномерно нагруженная вдоль одного диаметра 399

J. Barta : Quelques formules pratiques pour le calcul statique des poutres Langer — Praktische Formeln zur statischen Berechnung des Langerschen Balkens — Practical Formulae for the Stress Analysis of the Langer Girder — *Й. Барта:* Практические формулы для статических расчетов балки Лангера 407

M. Blahó, T. Faragó : Determination of Higher Order Partial Derivatives of the Velocity Function from Known Values along a Stream-line — Über die Berechnung der Ableitungen höherer Ordnung der Geschwindigkeitsfunktion aus bekannten Werten entlang einer Stromlinie — Sur le calcul des dérivées d'ordre supérieur de la fonction de la vitesse à partir de valeurs connues le long d'une ligne aérodynamique — *М. Блахо* и *Т. Фараго :* О вычислении частных производных высшего порядка функции скорости, исходя из известной вдоль обтекаемой линии величины 363

T. Boldizsár : The Thermal Field of the Earth's Crust and its Influence on the Ventilation of Deep and Hot Mines — Das Wärmefeld der Erdkruste und sein Einfluss auf die Bewetterung tiefer und warmer Bergwerke — Le champ thermique de l'écorce terrestre et son effet sur l'aérage de mines profondes et chaudes — *Т. Больдижар:* Температурное поле земной коры и ее влияние на вентиляцию глубоких и теплих рудников 415

P. Csonka : Stress Analysis of Block Steps with Grooved Joints — Die Berechnung der in Nuten aufliegenden Blocktreppenstufen — Calcul de marches d'escalier en blocs, aux joints entaillés — *П. Чонка:* Работа блочных лестничных ступеней, сопряженных пазом 195

A. Domony : Der Einfluss kleiner Mengen von Legierungskomponenten bzw. Verunreinigungen auf einzelne technologische Eigenschaften des Aluminiums — The Effect of Small Quantities of Alloying Elements and Impurities on some Physical Properties of Aluminium — L'effet d'une quantité réduite des éléments constituants et des impuretés sur quelques propriétés physiques de l'aluminium — *А. Домонь:* Влияние малых количеств легирующих элементов и примесей на некоторые технологические свойства алюминия 153

J. Eisler : Quelques problèmes fondamentaux de la limitation des cours-circuits — Einige grundsätzliche Fragen der Kurzschlussbegrenzung — Some Basic Problems of the Limitation of Shortcircuits — *Я. Эйзлер:* Некоторые теоретические проблемы ограничения токов замыкания 105

G. Fodor, G. Temes : Differentiating and Integrating Circuits — Differenzierende und integrierende Stromkreise — Circuits de différentiation et d'intégration — *Д. Фодор* и *Г. Темеш:* Дифференцирующие и интегрирующие цепи 73

B. Grega : The Movement of the Padding Machine's Looper — Die Bewegung des Schlingenfängers der Pikiermaschine — Le mouvement du boucleur de la machine à piquer — *Б. Грега:* Движение петлителя подшип вочной машины 219

I. Hazay : Azimutreduktion zwischen zwei Erdellipsoiden — Azimuthal Reduction between two Terrestrial Ellipsoids — Réduction azimutale entre deux ellipsoïdes terrestres — *И. Хазаи:* Редукция азимута между двумя эллипсоидами Земли 353

Gy. Heller, L. Rosta: Recherches sur la détermination du poids-frein des locomotives — Untersuchungen über die Lokomotivbremslast — Investigations of Locomotive Brake Load — *Дь. Хеллер* и *Л. Рошта:* Исследования в связи с определением тормозного груза локомотива 45

L. Jeníček: Die Bedeutung der Leichtmetalle in Eisenlegierungen — The Importance of Light Metals in Ferrous Alloys — L'importance de métaux légers dans les ferro-alliages — *И. Еничек:* Значение легких металлов в железных сплавах 117

V. Lovass-Nagy, Ch. Szendy: Application of the Matrix Calculus to the Investigation of Transformers in Arbitrary Connection — Die Aufstellung von Transformatoren-grundgleichungen mit Hilfe der Matrizenrechnung — Équations de transformateurs établies par la méthode des matrices — *В. Ловаш-Надь* и *К. Сенди:* Выведение основных уравнений трансформаторов при помощи матричного исчисления.. 311

F. J. Lecznar: The Transformation of Hematite (α-Fe_2O_3) into Ferromagnetic Iron Oxide (γ-Fe_2O_3) — Der Übergang des Roteisenerzes in ferromagnetisches Eisenoxyd — La transformation de l'hématite (α-Fe_2O_3) en oxyde de fer ferro magnétique (γ-Fe_2O_3) — *Ф. Й. Лецнар:* Преобразование гематита (α-F_2O_3) в окись железа (γ-Fe_2O_3)..... 383

A. Masin, D. Tlustá, M. Mrázek: Nichtnadeliges Gefüge einer Fe-Mn-C-Legierung nach Abschreckung von 1150°C und nachfolgender Tiefkühlung — Non-martensitic Structure of an Fe-Mn-C Alloy after Quenching at 1150°C and Subsequent Deep-cooling — Texture non-martensitique d'un alliage de Fe-Mn-C après trempe à 1150°C et refroidissement à basse température — *А. Машин, Д. Тлуста* и *М. Мразек:* Немартенситная структура в Fe-Mn-C сплавах, образовавшаяся вследствие закалки и отпуска 205

T. Murányi: Scientific Foundations of Highway System Planning — Die verkehrswissenschaftlichen Grundlagen der Strassennetzplanung — La science de la circulation, comme base de l'étude des projets de voies publiques — *Т. Мураньи:* Основы проектирования шоссейных дорог 13

D. A. Petrow: Einige Probleme der Forschung nach neuen Leichtmetallegierungen — Some Problems of Research on New Light Metal Alloys — Quelques problèmes des recherches sur des alliages nouveaux de métaux légers — *Д. А. Петров:* Некоторые вопросы в области развития легких сплавов 121

B. Pogány: Les problèmes de l'angle de frottement et de la rhéologie dans la théorie de la poussée des terres — Fragen des Reibungswinkels und der Rheologie in der Erddrucktheorie — Problems of Friction Angle and of Rheology in the Earth Pressure Theory — *Б. Погань:* Проблемы угла трения и реологии в теории давления грунтов 3

J. Schey: Die Erscheinungen bei der Warmverformung des Aluminiums — On Hot Working of Aluminium — Sur le travail à chaud de l'aluminium — *Й. Шей:* Явления при горячей обработке алюминия 131

J. Szabó: Application of the Matrix Theory to the Calculation of Continuous Beams — Anwendung der Matrizenrechnung zur Berechnung durchlaufender Träger — Sur une application du calcul matric dans l'analyse des poutres continues — *Я. Сабо:* Расчет неразрезных балок на основе теории матриц 175

T. Szentmártony, A. Verba: Investigation on the Velocity Field of a Non-rotating Impeller, with Dismounted Blades, by Means of an Electrolytic Tank — Untersuchung im elektrolytischen Trog des Geschwindigkeitsfeldes eines stehenden, unbeschaufelten Laufrades — Examen dans le bac electrolytique du champ de vitesse dans uns roue hydraulique stationnaire, depourvue d'aubage — *Т. Сентмартони* и *А. Верба:* Исследование пространства скорости неподвижного безлопастного рабочего колеса при помощи электролитной ванны 371

T. Szirtes: Ein Problem der Regelung von Fahrzeugdieselmotoren — A Regulation Problem of Automotive Diesel Engines — Un problème de réglage de moteurs Diesel pour véhicules — *Т. Сиртеш:* Одна из проблем регулирования транспортных дизельмоторов 233

B. Szőke : Forces Acting in the Bucket of the Elevator — Die im Becher des Becherförderers wirksamen Kräfte — Le jeu de forces dans le godet d'élévateur — *Б. Сёке:* Действие сил в ковшах элеватора 163

A. Tárczy-Hornoch : Zur Ausgleichung der kontinentalen Triangulierungsnetze — On the Adjustment of Continental Triangulation Nets — Sur la compensation de réseaux de triangulation continentaux — *А. Тарци-Хорнох:* К уравниванию континентальных триангуляционных сетей 429

Z. Terplán : Dynamische Untersuchung von ebenen Getrieben auf Grund graphischer Darstellung — Dynamic Examination of Mechanisms in Plane Motion — Examen dynamique de mécanismes se mouvant dans le plan — *З. Терплан:* Динамическое исследование механизмов, движущихся в плоскости 255

G. Tóth, V. Pósa : Festigkeit und Elastizität des Leders bei verschiedenen Beanspruchungen — Strength and Elasticity of Finished Leathers at Different Stresses — Résistances et modules d'élasticité de cuirs apprêtés — *Г. Тот* и *В. Поша:* Прочность и эластичность выделанных кож при различных нагрузках 291

Buchbesprechung — Book Review — Compte rendu de livres — Обзор книг 211

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XVI

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1957

LES PROBLÈMES DE L'ANGLE DE FROTTEMENT ET DE LA RHÉOLOGIE DANS LA THÉORIE DE LA POUSSÉE DES TERRES

Prof. B. POGÁNY (Krakow)

[Manuscrit présenté le 11 novembre 1953]

En ce qui suit, je désire attirer l'attention sur deux insuffisances des méthodes courantes en mécanique des sols et des formules publiées dans la littérature, tout en indiquant la possibilité de leur élimination.

Une de ces insuffisances est due au fait que *l'angle de frottement* est le paramètre le plus important dans la détermination des valeurs de la poussée des terres. Or, la détermination en laboratoire de l'angle de frottement interne étant un procédé fort compliqué et présentant nombre de difficultés, la dispersion des valeurs obtenues est très grande. L'angle de frottement d'un même sol déterminé à l'aide de divers instruments, n'est pas seulement fonction de la teneur en eau du sol, de la forme et des dimensions géométriques de l'échantillon, de la température, de la vitesse de l'application de la charge et de la pression extérieure, mais dépend aussi d'une série de facteurs encore inconnus. Cela rend non seulement incertaine la comparaison des valeurs obtenues par divers instruments, mais encore conduit, lors d'un examen effectué avec un même instrument, à une multitude de chiffres dont l'évaluation basée sur la statistique mathématique et le calcul des probabilités est souvent fort problématique. Au cours de mes essais, je pensais déterminer l'angle de frottement interne par un essai de cisaillement direct (instrument de CASAGRANDE et KREY) et un instrument triaxial de compression, mais l'évaluation rationnel des résultats expérimentaux, tant par la méthode des grands nombres que par celle du calcul des probabilités, se heurta à de grandes difficultés. On connaît les nombreux travaux expérimentaux systématiques effectués par TERZAGHI, HVORSLEV, TIEDMANN, A. CASAGRANDE et d'autres — mais on sait également combien on est encore loin d'avoir ici une solution satisfaisante. A mon avis, la valeur de l'angle de frottement interne ne pourrait être caractérisée que par une fonction très complexe et par l'utilisation de nombreux paramètres : cependant l'action de ces paramètres n'étant pas sans ambiguïté, il en résulte, en définitive, que la variation de l'angle de frottement interne n'est pas uniforme (lente) et n'est peut-être même pas continue.

Certains signes portent à croire qu'il s'agit ici plutôt de changements en quantums. Dans l'étude physique des matières plastiques, il existe une ten-

dance se proposant d'éliminer l'angle de frottement interne du nombre des caractéristiques des matières plastiques synthétiques. C'est surtout dans la littérature anglaise qu'on rencontre de pareilles études, vers la fin de la deuxième guerre mondiale. La chimie et la physique des matières plastiques synthétiques, développées à une cadence incroyable par l'industrie de guerre dans tous les pays belligérants, ont obligé les physiciens et les chimistes à étudier un certain nombre de problèmes technologiques relatifs à ces matières. Parmi les travaux relevant de ce domaine, il faut mentionner la *Strukturmechanik* (1948) de Hans UMSTÄTTER, dont l'exposé n'embrasse cependant ni le problème des milieux granulés cohérents, ni celui des milieux pulvérulents. Ses analyses sont caractérisées par une connaissance approfondie des disciplines physico—chimique et mathématique. Il est rare qu'on trouve mention dans son travail, de l'angle de frottement interne, c'est plutôt la notion de *viscosité* qui y figure en tant que paramètre caractéristique de la matière. Ce paramètre tient déjà un rôle dominant dans la mécanique de NEWTON. La viscosité n'est pas une constante, mais est fonction de la température et de la poussée, tandis que l'angle de frottement interne a été considéré jusqu'à présent comme étant indépendant aussi bien de l'atmosphère que de la poussée.

Il a été rappelé combien de fois TERZAGHI, maître de la théorie classique de la poussée des terres avait essayé, tant par la modification de la méthode expérimentale, que par la recherche d'une autre méthode mathématique de réduire la dispersion dans les problèmes relatifs à l'angle de frottement interne et de créer par là l'ordre nécessaire à une solution fonctionnelle plus stricte. Il n'y a pas réussi. Nous devons choisir une autre voie. Il faut, dans la mesure du possible, éliminer l'utilisation de l'angle de frottement interne en tant que paramètre constant et lui substituer d'autres paramètres plus sensibles et, pouvant être mesurés de façon moins compliquée et plus sûre.

La deuxième insuffisance de la théorie de la poussée des terres relève du problème des *murs de soutènement*. Elle résulte du fait que l'étude ne tient pas compte ici de l'influence du *temps*. La littérature relative aux murs de soutènement et aux divers accidents de construction cite de nombreux exemples prouvant que ces murs sont absolument stables dans les premières années qui suivent la construction mais que plus tard — généralement au bout de 6 à 8 ans — il commence à s'y manifester, surtout en cas de sols argileux, des fissures et des ruptures représentant une menace incessante à leur stabilité.

J'essaierai par la suite, d'introduire dans l'étude le paramètre du temps et de résoudre le calcul de la poussée des terres à l'aide d'une méthode *rhéologique*, ce qui veut dire, en d'autres termes, que dans les formules connues de la poussée des terres je désire prendre en considération l'effet du *temps* sur la poussée. Pour faciliter la compréhension de ce qui suit, je voudrais d'abord mettre en lumière la différence entre les déformations plastiques et les déformations élastiques. Jusqu'à la limite de plasticité, il'y a dans le domaine élastique une *relation sans*

ambiguïté entre les déformations et les tensions, c'est-à-dire chaque état de tension n'a qu'une déformation correspondante et chaque déformation ne correspond qu'à une tension. Au-delà de la limite de plasticité par contre, chaque état de tension a plusieurs déformations correspondantes — en réalité un nombre infini — et chaque déformation possède un nombre infini de valeurs de tension corespondantes. Le rapport ici n'est pas sans ambiguïté. Dans ce domaine, il faut introduire en plus de la tension et de la déformation, la coordonnée du temps, sans laquelle le phénomène appelé «fluage» ou déformation lente (Kriechen), ne peut pas être compris. Le problème du fluage a joué ces derniers temps un grand rôle dans la théorie des constructions en béton armé. Dans les problèmes du béton l'état de tension qui résulte du fluage peut être approché par trois procédés mathématiques. L'un d'eux consiste en l'introduction de la *fonction de fluage* (Kriechfunktion), par laquelle, en tant que fonction de correction, on a essayé d'égaliser les différences entre les résultats d'expériences et les calculs. Dans la littérature du béton, on connaît les fonctions de fluage données par les auteurs suivants : Straub 1931, Thomas 1935, Shank 1935, Roos 1937, Mc Henry 1948 et Friedrich 1950. Une autre possibilité plus générale et ayant une plus grande valeur théorique est la méthode de Michelson (1917) qui tente de faire disparaitre les différences entre résultats théoriques et expérimentaux à l'aide d'une seule équation. En y substituant les constantes physiques correspondantes, l'équation peut être appliquée pour le plomb, l'étain, le zinc, le fer, le cuivre, le marbre, le caoutchouc, la gélatine, etc.

Malgré cela, le procédé de Michelson ne possède pas non plus un caractère de loi naturelle.

La troisième façon de procéder, fort supérieure au point de vue théorique et physique aux méthodes précédentes et dans laquelle les relations établies ont le caractère d'une loi naturelle, fut formulée pour la première fois par Maxwell (Phil. Trans. Roy. Soc. 1868). Maxwell pose pour l'état élastique l'équation suivante :

$$\sigma = E^* \varepsilon$$

dont la dérivée selon le temps est

$$\frac{d\sigma}{dt} = E^* \frac{d\varepsilon}{dt}$$

où σ peut représenter indifféremment la tension de compression, de traction ou de cisaillement, ε la déformation spécifique dans ces états de tension et t le paramètre du temps. La valeur E^* à l'opposé du module d'élasticité de Young, n'est pas une constante ici. Si $E' = E = \text{const.}$ et σ est la tension de traction ou compression, on obtient la loi de Hooke.

Pour l'état plastique, MAXWELL donne l'expression suivante

$$\frac{d\sigma}{dt} = E^* \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma}{T}$$

où T est un temps constant, fonction de la structure de la matière, dont le rôle sera expliqué plus tard. En transformant l'équation on aura

$$E^* \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T}$$

Si $\sigma = \text{const.}$

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

et

$$E^* \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{T}$$

Si $T = \infty$ on se trouve dans le cas de la matière idéalement élastique :

$$E^* \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$$

Si ε n'est pas fonction du temps, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une déformation spécifique de valeur constante dans le temps ;

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$$

et on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{T} = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dt}{T}$$

d'où

$$\sigma = c\, e^{-\frac{t}{T}} = E^* \varepsilon\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Si $t = T$ on trouve

$$\sigma = E^* \varepsilon \frac{1}{e}$$

soit T est le temps pendant lequel la valeur de la tension $E^*\varepsilon$ baisse jusqu'à sa fraction e (temps de relaxation). L'équation peut s'écrire également

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^*} e^{\frac{t}{T}}$$

Si $T \neq 0$ et $t = 0$, on obtient

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^*}$$

ce qui représente la valeur de la déformation spécifique au commencement du temps (pour $t = 0$ temps).

La loi générale établie précédemment peut être considérée comme la combinaison de deux lois naturelles : l'une est la loi fondamentale du cisaillement

$$\tau = G\gamma$$

où γ est la variation d'angle ayant lieu lors du cisaillement, G le module du cisaillement ; l'autre est l'équation de viscosité selon Newton :

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}$$

où

u = vitesse
y = profondeur
η = viscosité.

En appliquant au cisaillement l'équation

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E^*} e^{\frac{t}{T}}$$

dans laquelle σ et ε signifient n'importe quelle tension, ou la déformation correspondante, l'équation peut s'écrire dans la forme suivante :

$$\gamma = \frac{\tau}{G^*} e^{t \frac{G^*}{\eta}}$$

Pour que les deux équations soient identiques en cas de cisaillement, il faut satisfaire à la condition

$$\frac{G^*}{\eta} = \frac{1}{T}$$

c'est-à-dire

$$\eta = G^* T$$

resp.

$$G^* = \frac{\eta}{T}$$

La valeur de γ peut être également écrite

$$\gamma = \frac{T}{\eta} \tau e^{t \frac{G^*}{\eta}}$$

Compte tenu de ce que l'effort maximum de cisaillement vaut

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

on suppose que les tensions σ_1 et σ_2 sont proportionnelles, de sorte que par analogie à la pression de repos de TERZAGHI on peut écrire

$$\sigma_2 = K\sigma_1$$

où cependant la valeur de K n'est pas le facteur de la pression de repos, et n'est pas nécéssairement une valeur constante.

A la base de ce qui précède, on écrira donc

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 (1-K)}{2}$$

ce qui, substitué dans la formule de γ donne

$$\gamma_{\max} = \frac{T}{\eta} \frac{\sigma_1 (1-K)}{2} e^{t \frac{G^*}{\eta}}$$

En multipliant chaque côté par G^*, on obtient les ordonnées de la courbe limite de MOHR :

$$\tau = \frac{T}{\eta} G^* \frac{\sigma_1 (1-K)}{2} e^{t \frac{G^*}{\eta}}$$

On a donc déduit la valeur de la tension de cisaillement en fonction des constantes caractéristiques du sol, en fonction du temps et de la première tension principale. La relation des valeurs de σ et τ déterminée par l'équation — compte tenu de la loi $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = K$ — peut être considérée dans le système des coordonnées (σ, τ) comme l'équation d'une courbe séparant les états de tension élastique et plastique. Cette courbe limite n'est donc pas identique à la courbe d'enveloppe de COULOMB—MOHR. K a cessé d'être constant et sa valeur peut être déterminée expérimentalement dans les deux domaines, comme fonction de la tension. A la base de ces considérations, l'angle

$$tg\,\varphi = \frac{\tau}{\sigma}$$

qui est la valeur caractérisant l'état de tension limite, peut être interprété pour n'importe quelle valeur corrélative de σ et τ. A titre d'approximation, cette valeur peut être employée comme équivalente à l'angle de frottement figurant dans les anciennes théories de la poussée des terres, et de cette manière-là on peut se faire une idée de la variation temporelle de la poussée des terres. En effet, selon ce qui précède

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\tau}{\sigma} = \left[\frac{G^* T}{2}(1 - K)\right]\frac{1}{\eta}\,e^{t\frac{G^*}{\eta}} = K\frac{1}{\eta}\,e^{t\frac{G^*}{\eta}}$$

Ainsi on est arrivé à éliminer l'angle de frottement interne de l'analyse de la poussée des terres, et on a obtenu à la place une fonction contenant la valeur de la viscosité, c'est-à-dire un paramètre variable. K et G peuvent être considérés constants dans les conditions moyennes. Au lieu des fonctions de l'état élastique ou plastique, indépendantes du temps on introduit donc une fonction rhéologique tenant compte du phénomène du fluage. L'angle φ peut donc être substitué dans les équations de COULOMB

$$E_a = \frac{h^2\gamma}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

resp.

$$E_p = \frac{h^2\gamma}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

qui sont les formules de la *poussée*, resp. de la *butée* des terres.

En connaissance des constantes figurant dans les formules ci-dessus, on peut donc calculer les valeurs des poussées. Cependant ces constantes, assez

difficilement accessibles aux mesures directes et dont l'étude expérimentale est toujours loin d'être satisfaisante, ne peuvent pas être appliquées sans difficultés dans la pratique. La valeur de T représente une question à part ; elle ne peut pas être définie par des moyens purement mathématiques. T est par définition le temps au bout duquel la tension σ retombe à la fraction e de sa valeur initiale.

Ceci signifie qu'en considérant comme constante la valeur de la déformation, le module d'élasticité du sol diminue jusqu'à la fraction e du module initial. Cette valeur T, intimement liée aux propriétés physiques du sol, doit être déterminée expérimentalement dans chaque sol. Or, étant donné que l'état exigé par la définition ne s'établit qu'après un certain temps, cette détermination ne peut se faire que par extrapolation. Bien que l'extrapolation ne soit pas une méthode mathématique impeccable, on aura toujours la possibilité d'effectuer des mesures de contrôle en cas de constructions plus anciennes. Pour T, 25 à 75 années peuvent être prises comme valeur probable.

La valeur de K figurant dans la formule de $\mathrm{tg}\varphi$ peut être déterminée par a formule suivante :

$$K = \frac{T}{2} G^* (1 - K)$$

Les limites pratiques de G^* sont de 10—200 kg/cm^2, K peut prendre des valeurs situées entre 0,2 et 1.

La formule contient encore la valeur de la viscosité indiquée pour différentes températures par le tableau 1.

Le temps (t) étant calculé en années, les valeurs de la viscosité sont également indiquées dans la dimension cm^{-1} g année^{-1}

Tableau I

Rapports de la viscosité (η) et de la température (ϑ)

ϑ	cm$^{-1}\eta$ g année^{-1}	$1/\eta$
0°	575 040	$1{,}74 \cdot 10^{-6}$
5°	485 760	$2{,}06 \cdot 10^{-6}$
10°	408 240	$2{,}45 \cdot 10^{-6}$
16°	355 200	$2{,}82 \cdot 10^{-6}$
18°	337 600	$2{,}98 \cdot 10^{-6}$
20°	321 280	$3{,}11 \cdot 10^{-6}$
22°	306 240	$3{,}28 \cdot 10^{-6}$
24°	292 800	$3{,}42 \cdot 10^{-6}$

A l'aide des données on peut calculer la valeur de φ resp. de tg φ et par là on peut résoudre le problème définitif en substituant la valeur de φ dans la formule de Coulomb.

Exemple 1. Soit $K = 0{,}60$ $G^* = 40$ kg/cm^2 $\vartheta = 5°$ C $T = 25$ années

En ce cas

$$K = 0{,}2 \cdot 10^6$$

du tableau

$$\frac{1}{\eta} = 2{,}06 \cdot 10^{-6}$$

soit

$$\frac{K}{\eta} = 0{,}2 \cdot 10^6 \cdot 2{,}06 \cdot 10^{-6} = 0{,}512$$

de sorte que

$$e\,\frac{G^*}{\eta} = 1{,}086$$

d'où

$$\operatorname{tg}\varphi \cdot 0{,}512 \cdot 1{,}086\ t$$

En cas de différentes valeurs de t les résultats sont indiqués par le tableau suivant :

t	3 années	5 années	6 années	8 années
φ	33°15′	37°43′	40°01′	44°44′
$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$	0,2910	0,2411	0,2174	0,1739
$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$	3,425	4,148	4,599	5,752

Selon l'interprétation donnée à φ dans la présente étude à C, le domaine plastique grandit donc avec le temps.

Exemple 2. Soit $K = 0{,}60$ $G^* = 16$ kg/cm^2 $\vartheta = 5°$ C $t = 75$ années.

En ce cas

$$K = 0{,}24 \cdot 10^6 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\eta} = 2 \cdot 206 \cdot 10^{-6}$$

d'où

$$\frac{K}{\eta} = 0{,}4964$$

et

$$\operatorname{tg}\varphi = 0{,}4964 \cdot 1{,}068\ t$$

Pour les mêmes valeurs de t on obtient les résultats suivants :

t	3 années	5 années	6 années	8 années
φ	26°48′	36°57′	39°10′	42°32′
$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$	0,3785	0,2493	0,2361	0,1933
$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$	2,692	4,011	4,235	5,173

On voit que les formules déduites plus haut peuvent être appliquées sans aucune difficulté. On détourne de cette façon le problème de la mesure directe de l'angle de frottement interne.

RÉSUMÉ

Les deux principaux problèmes de la théorie de la poussée des terres sont la détermination de *l'angle de frottement* des sols et la prise en considération du *facteur temps*. L'auteur cherche à résoudre ces problèmes par la méthode de la *rhéologie ;* la relation établie entre la résistance au cisaillement et le temps permet de déterminer la variation de la poussée dans le temps, en introduisant dans les formules la valeur de la *viscosité*, fonction de la température et de la poussée.

La relation définie des tensions normales et de cisaillement donne une courbe séparant les tensions élastiques et plastiques. La détermination expérimentale des constantes figurant dans les équations se heurte encore à des difficultés. L'auteur indique des valeurs numériques pour les limites pratiques et illustre l'application de la méthode par des exemples numériques.

FRAGEN DES REIBUNGSWINKELS UND DER RHEOLOGIE IN DER ERDDRUCK-THEORIE

Prof. B. POGÁNY, Krakow

ZUSAMMENFASSUNG

Zwei Hauptfragen der Erddrucktheorie sind die Bestimmung des *Reibungswinkels* von Böden und die Berücksichtigung des *Zeitfaktors*. Es wird die Lösung dieser Probleme nach der Methode der *Rheologie* gesucht : die Scherfestigkeit wird mit der Zeit in Beziehung gebracht, wodurch die Bestimmung der zeitlichen Veränderung des Erddruckes ermöglicht wird, indem der von der Temperatur und auch von dem Druck abhängige Wert der *Viskosität* in die Formeln eingeführt wird.

Der ermittelte Zusammenhang von Normal- und Scherspannungen gibt eine Kurve, welche die elastischen und die plastischen Spannungen voneinander trennt.

Die Bestimmung der in den Gleichungen vorkommenden Konstanten stösst zu Zeit auf Schwierigkeiten. Nach der Angabe von Zahlenwerten für die praktischen Grenzen wird ein Zahlenbeispiel für die Anwendung des Verfahrens angeführt.

PROBLEMS OF FRICTION ANGLE AND OF RHEOLOGY IN THE EARTH PRESSURE THEORY

Prof. B. POGÁNY, Krakow

SUMMARY

Two main problems of the earth pressure theory are the determination of the *friction angle of soils* and the consideration of the *time factor*. The solution of these problems is sought in the paper by methods of rheology ; correlating shearing strength with time and giving thus means of determination of the time variation of earth pressure, introducing into the formulae the value of *viscosity* depending on temperature and on pressure as well.

The defined correlation of normal and of shearing stresses yields a curve that separates elastic and plastic stresses from each other.

Experimental determination of the constants figuring in the equations meets diffuculties for the time being. Numerical values are given on practical limits, and a numerical example is presented on the application of the method.

ПРОБЛЕМЫ УГЛА ТРЕНИЯ И РЕОЛОГИИ В ТЕОРИИ ДАВЛЕНИЯ ГРУНТОВ

Б. ПОГАНЬ (Краков)

РЕЗЮМЕ

Две основные проблемы теории давления грунтов — определение угла трения грунтов и учет фактора времени. Автор пытается найти решение этих проблем при помощи метода реологии ; выводит зависимость между сопротивлением срезу и временем, таким образом позволяет определить изменение во времени давления грунтов, введя в уравнения величину вязкости, зависящую от господствующих температур и давлений.

Определенная зависимость между нормальными напряжениями и напряжениями среза дает такую кривую, которая отделяет друг от друга упругие и пластичные напряжения. Опытное определение фигурирующих в уравнениях постоянных временно еще сталкивается с затруднениями. Для практических пределов автором приведены числовые данные, далее дается числовой пример применения предлагаемого метода.

SCIENTIFIC FOUNDATIONS OF HIGHWAY SYSTEM PLANNING

T. MURÁNYI

HIGHWAY RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST, HUNGARY

[Manuscript received 23rd May, 1955]

Symbols

T_a = ADT (annual average of daily traffic)
$t_{(x)}$ = data observed during x hours
$a_{(x)}$ = daily multiplicator factor
b = weekly factor
c = monthly factor
$\bar{y}$ = sample mean
μ = mean value of entire volume
σ = standard deviation of the components of the entire volume
σ_S = standard deviation of sample means
n = number of sample-groups
e = standard error
e_p = probable error
ε = deviation percentages of samples from the true value of the ADT
v = variation coefficient
t_{24} = full day's traffic
e_l = standard error of small random sample means
e_S = standard error of small systematic sample means
$T_a^{(1)}$ = ADT of motorcycles
$T_a^{(2)}$ = ADT of passenger cars
$T_a^{(3)}$ = ADT of trucks and buses
$T_a^{(4)}$ = ADT of horse-drawn vehicles
$T_p^{(30)}$ = 30th peak hour traffic volume
$T_p^{(50)}$ = 50th peak hour traffic volume
n_{51} = factor of traffic increase

Among the main objectives of the development of the main road system is the adaptation of roads to the needs of traffic with a view to safe, rapid and economic communication. To this end, the traffic which the roads have to accomodate, must be known. Hence, one of the main tasks of traffic research appears to be the collection of scientific data by means of which traffic requirements and the rate and trend of their development may be determined. The extent of transportation needs is a result of the causes underlying traffic. These causes are inherent in the private lives, cultural needs, public functions and economic activities of the population. Hence, the extent of needs for transportation, its manifestation and the trend of its development may be most simply expressed in terms of the satisfied needs, in other words of traffic operations.

Traffic planning should begin by investigating the relative need. Traffic, being an issue of the life of the individuals and of the community, is a living, ever changing, progressive phenomenon. Its varying fluctuation may be observed

within a single day, when the hours of low traffic volume are succeeded by high peak volumes during the rush hours, but it may also be noted spread over the days of the week or the months of the year.

Besides the fluctuations within a single year, another phenomenon should not be overlooked, namely developmental trends should be followed up from year to year. Traffic development investigation is of primary importance in Hungary, where the character of highway traffic is about to take a decisive turn : horse-drawn vehicles being rapidly supplanted by motor vehicles, the needs of which fundamentally affect highway traffic.

The characteristic behaviour of traffic is revealed in the variation of its daily and weekly fluctuations, seasonal changes and the general trend of its development.

The above mentioned movements in catering for transportation needs obey certain demonstrable laws. The examinations conducted in 1955 into the laws governing the course, specific behaviour and interrelations of the satisfied traffic demand were a valuable contribution to scientific traffic research in Hungary.

I. Sampling employed to determine the laws governing highway traffic fluctuation

Sampling is a generally adopted method for the accurate, prompt and economical estimation of "populations" in a variety of economic fields. Empirical results derived by this method concerning traffic in Europe are scant, and therefore traffic engineers are not familiar with this method and are reluctant to employ it. In order to work out the most suitable method of applied statistical induction, it became necessary to undertake test counts in 1954. The data to be reported below have been derived from the analysis of the traffic at 8 experimental counting stations. At Budapest, counting was carried on over 365 days. The points were located on sections of various main routes in the outskirts of towns. The count was effected by the kind and direction of vehicles, and the data were recorded hourly.

The experimental investigation of traffic disclosed that the variation of traffic was governed by strict, mathematically definable laws. In awareness of the factors characterising the periodical fluctuations the entire traffic volume may be appraised with a high degree of accuracy, in a short time and most economically from data obtained from counts taken over a few hours at appropriate times and by the right method.

The annual average volume of vehicle traffic at any intersection (T_a) may be obtained from the data observed during a few hours — say x hours — (t_x) from equation

$$Ta = t_{(x)} a_{(x)} b \cdot c \quad \text{(vehicle/day)} \qquad (1)$$

The value of the daily multiplicator ($a_{(x)}$) characterizing the distribution of the daily traffic volume over the hours of the day, of the weekly factor *(b)* expressing the daily fluctuation of the weekly volume of traffic, and finally of the monthly factor *(c)* showing monthly changes of the annual volume of traffic may be best estimated by a representative statistical method : that of sampling.

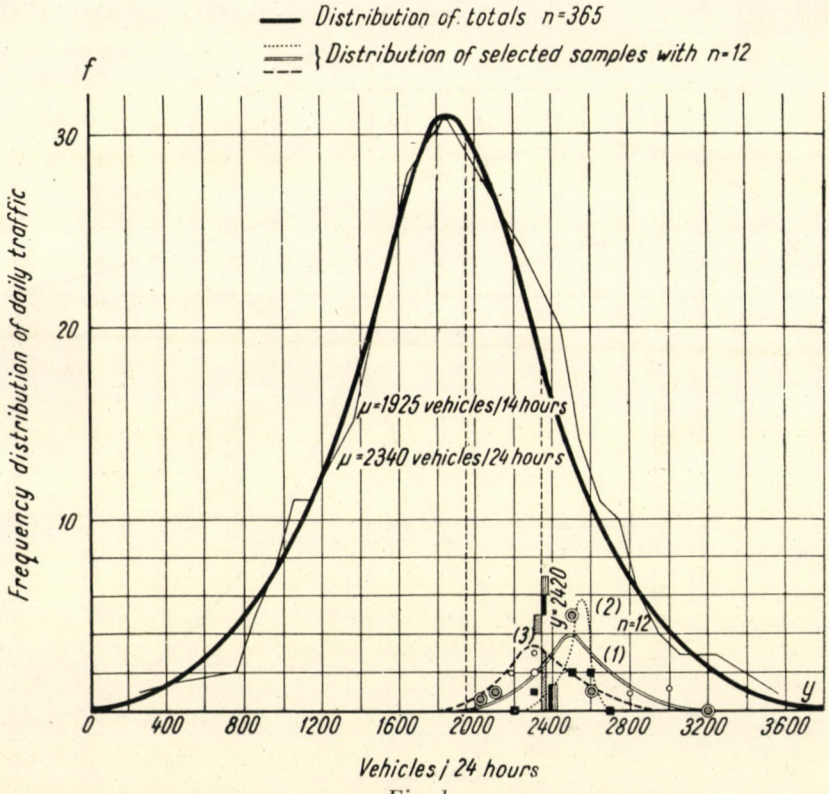


Fig. 1

The method is actually a statistical induction, i. e. a mathematical method working with assumptions based on the theory of probabilities.

In other words, the method of traffic research to be discussed below is a form of general induction by which the probability of the estimated results may be calculated in advance. The method has to meet the provision that the mean value of the sample means derived from all imaginable counts (y) should equal the mean value of the entire volume of traffic examined (μ).

In statistical induction, the distribution of the arithmetic mean of the samples has a definite character, and — in accordance with the statistical definition of the law of averages — it is virtually normal, if the number of the samples is sufficiently large. According to empirical findings, if picked at random,

samples should never number less than 30—40, but preferably 400—500 or even more.

Test sample survey showed, however, that even at small sampling, the counted values corrected by the multiplicators in formula (1) yielded practically dependable data. The term "small sampling" means samples numbering n = 3—4—12, etc. as dictated by working requirements. Fig. 1 shows the daily distribution of the annual traffic volume surveyed at the experimental station

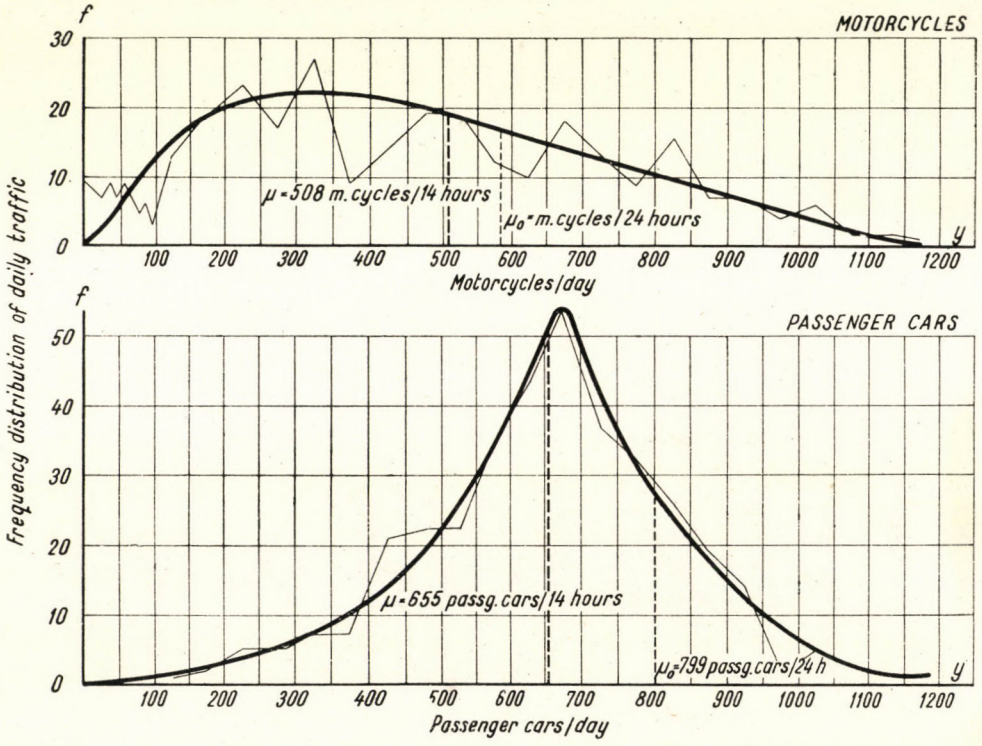


Fig. 2

at Budapest, and the distribution of the volume of three sample groups of n = 12 chosen counts each. The distribution of the various vehicles shows substantial divergence. Fig. 2 shows the daily frequency distribution of the annual traffic volume of motorcycles and passenger cars, while Fig. 3 that of motor trucks. Note the abnormal asymmetric curve representing the daily traffic of motorcycles, which is highly sensitive to weather, while the diagram of hourly traffic fluctuation values show an approximately normal distribution and a symmetrical shape (Fig. 4), for the individual components, such as the vehicles involved and the traffic operations performed, practically comply largely with the criteria of normal distribution.

In the light of the above, the correlation of the mean values of the selected samples *(y)* and of the examined traffic volume (μ) can be determined. It may be stated with predictable probability that the arithmetic mean of the entire volume of traffic examined (μ) will fall on either side ($\pm$) of the mean value of the selected counts within a range of error that may be determined with full accuracy as the function of the dispersion of the samples and the given percentage of probability.

The distribution of the mean values of large sample groups being normal, it permits of calculating the ratio of the contingent samples in the given arbit-

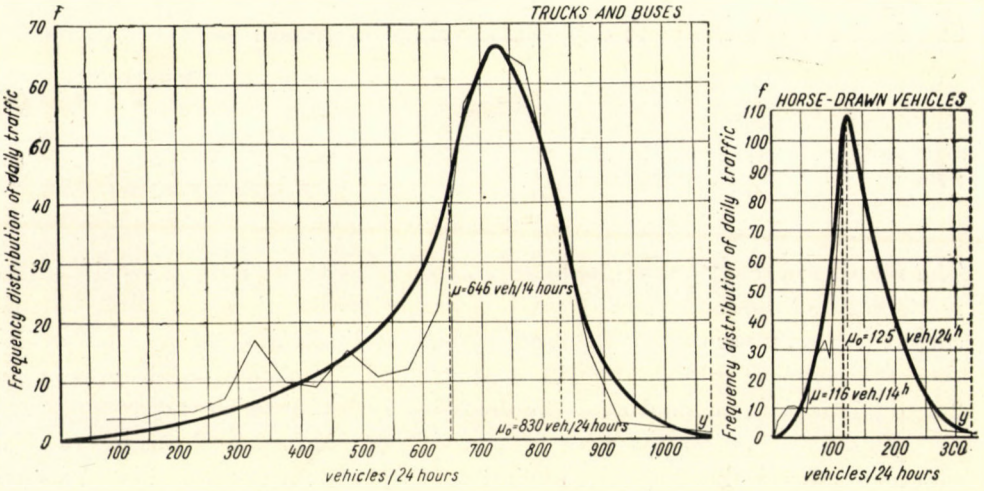


Fig. 3

rary realm on either side ($\pm$) of (μ). By systematic sampling, a normal distribution of the mean values may be obtained even from small groups of samples.

From results obtained from counts made to determine the volume of traffic, the dispersion characteristics of the aggregate examined can be calculated. It is known that the standard deviation obtained from the frequency of the component parts of a population is characteristic of its dispersion. Standard deviation (σ) is given by formula

$$\sigma = \sqrt{\frac{[(y)^2 f]}{n} - \bar{y}^2} \tag{2}$$

A definite relationship exists between the standard deviation of sample means (σ_s) and the average standard deviation (σ) of the population examined, viz :

$$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

where n = the number of the sample = counts. On the base of expression (3), the standard deviation of the samples may be estimated in anticipation from the dispersion data of the population. In Hungary, national traffic estimations are made by calculating the multiplicators out of the means of n = 12 counts, hence according to formula (3), the standard deviation of the mean values of a group of 12 samples :

$$\sigma_s' = \frac{835}{\sqrt{12}} = 241 \text{ veh/day, or } \sigma_s'' = \frac{60{,}8}{\sqrt{12}} = 17{,}6 \text{ veh/hr}$$

Standard error of the most dependable values observed :

$$e = \pm \frac{\sigma s}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

and the value of "probable" error :

$$e_p = \pm 0{,}6745\, e$$

The relation means that — assuming distribution to be normal — the arithmetic mean of the samples will deviate from the arithmetic mean of the volume sought (μ) in 50 per cent of the cases within the limits of $\pm e_p$. At ± 1 e deviation, this value of probability will amount to 68,27 per cent, at an error of $\pm$ 2 e to 95,45 per cent, and at $\pm$ 3 e deviation to 99,73 per cent.

Generally, estimation with 95 per cent probability well meets practical requirements ; in that case the deviation of sample means from actual values is $\pm$ 1,96 e, or round $\pm$ 2 e.

In awareness of the standard deviations concerning the entire volume of traffic, formula (4) will help to make preliminary estimates concerning the rate of the standard error of the factors derived from the mean values of n = 12 samples observed at main sampling stations.

$$e' = \pm \frac{241}{\sqrt{12}} = \pm 70 \text{ veh/day, and } e'' = \pm \frac{17{,}6}{\sqrt{12}} = 5{,}1 \text{ veh/hr}$$

On the base of the standard errors, we may state with 95,5 per cent probability that the average value of the annual traffic volume will yield the same rates of $\pm$ 2 e = $\pm$ 140 vehicles/day, and $\pm$ 10,2 vehicles/hr in 95,5 cases out of 100 samples, providing the samples are adjusted by the multiplicators derived from the mean value of 12 counts. The variation coefficient values, in percentage of the entire traffic volume are

$$v = 100 \frac{e}{\mu} = 3{,}65 \text{ per cent.}$$

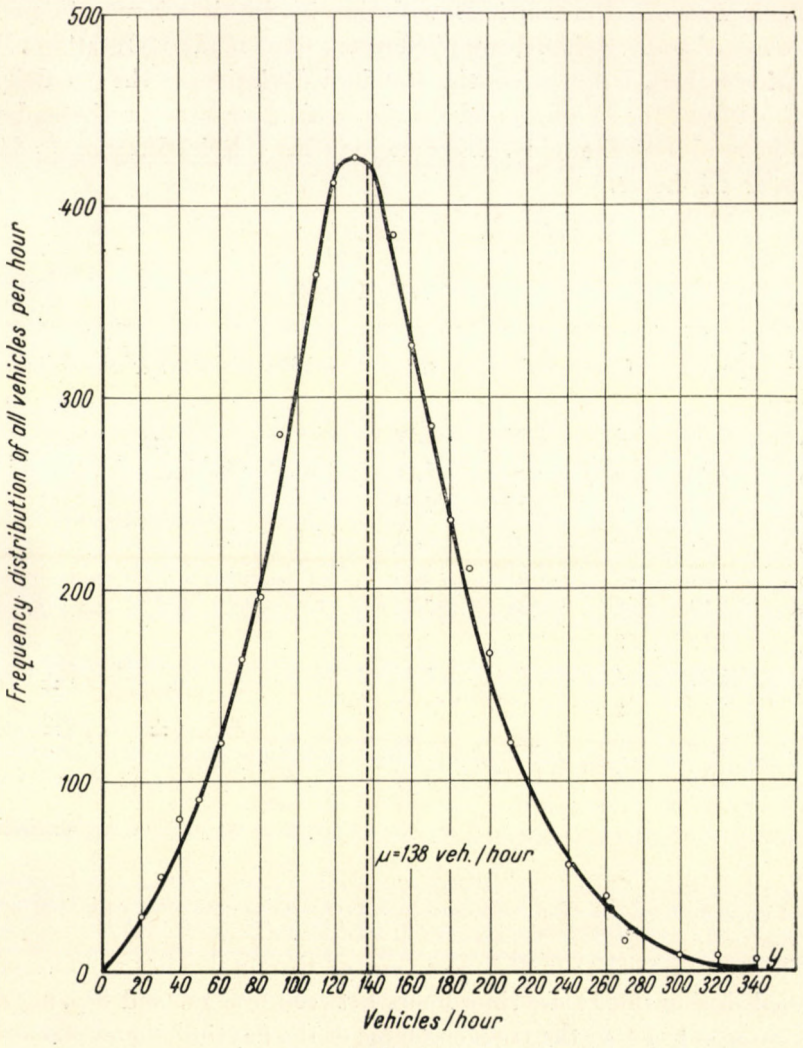


Fig. 4

The presumable values of the standard errors deduced from the dispersion of the entire volume are most favourable, and as a result the sampling method promises to yield good results when applied to the estimation of the traffic volume.

Laws governing the hourly fluctuation of daily traffic

The first part of the tests was concerned with the problem of how the error limits within which the volume and build-up of 24 hours' traffic could be estimated from 14 hours of daytime traffic.

Table I shows the traffic flow during 14 daytime hours, in percentage of the 24 hours' traffic volume, compiled from counts made at 8 stations. Extreme distribution values, frequencies, the standard deviation of the a_{14} daily factor (σ_s) derived from the samples, and the size of the sample means' standard error *(e)* can be read from the table. The data have been derived from $n = 34$ counts made over 24 hours.

Table I

$1 = \frac{100\, t_{14}}{t_{24}}$	$\frac{1}{1} = a_{14}$	f	$a_{14}f$	a_{14}^2	$f(a^2_{14})$	Calculation of the standard deviation and of the standard error
76%	1,31	4	5,24	1,72	6,88	$\bar{y}_{14} = \frac{[a_{14}f]}{[p]} = \frac{42,12}{34} = 1,24$
77%	1,30	0	—	1,69	0,00	
78%	1,28	2	2,56	1,64	3,28	$\frac{1}{\bar{y}_{14}} = 80,7\%$
79%	1,27	4	5,08	1,61	6,44	
80%	1,25	10	12,50	1,56	15,60	$\sigma_s = \sqrt{\frac{52,20}{34} - 1,24^2} = 0,063$
81%	1,24	2	2,48	1,54	3,08	
82%	1,22	2	2,44	1,48	2,96	
83%	1,20	4	4,80	1,44	5,76	$e_{14} = \pm \frac{0,063}{\sqrt{34}} = \pm 0,011$
84%	1,19	2	2,38	1,42	2,84	$2e_{14} = \pm 0,02 = \pm 1,6\%$
85%	1,18	0	—	1,39	0,00	
86%	1,16	4	4,64	1,34	5,36	$\bar{\mu}_{14} = \bar{y}_{14} \pm 2e = 1,22—1,26$
		34	42,12		52,20	At 95,5 p. c. probability

The tests reveal that 80,7 per cent of the total daily volume of traffic is handled during the 14 daytime hours between 6 a. m. and 8 p. m., and that in 95,5 cases out of 100, the traffic volume of the daytime hours reaches 79—82 per cent. A very large number of samples were worked up to determine the relation of the traffic tested over 8 hours (t_8) and the full day's traffic (t_{24}). Table II shows the results derived from $n = 54$ samples drawn from the cumulative count records of the testing points.

From Table II's data we may state with 95,5 per cent probability that the traffic flow through the various road sections during 8 of daytime hours in both directions amounts to 49—54 per cent of the total daily traffic volume.

The standard error of the daily multiplicator may be reduced if the laws of traffic fluctuations on the variously loaded roads are determined separately. The relative experiments gave the following formulas for the relation of the 8 hour and 24 hour traffic volumes on various kinds of roads :

100—300 vehicles/day on roads where the bulk of traffic is made up of horse-drawn vehicles

$$t_{24} = 1{,}91 \; t_8^{(6\ a.\ m.—2\ p.\ m.)} \tag{5}$$

301—700 vehicles/day on roads where traffic is composed of horse-drawn and motor vehicles

$$t_{24} = 1{,}99 \; t_8^{(6—10\ a.\ m.+\ 2—6\ p.\ m.)} \tag{6}$$

Over 700 vehicles/day, overwhelmingly motor vehicles

$$t_{24} = 2{,}03 \; t_8^{(7—11\ a.\ m.\ +\ 2—6\ p.\ m.)} \tag{7}$$

Thes standard error of the daily multiplication factors in equations (5) to (7), calculated from the results of a very high number of samples, was about $e_8 = \pm$ 1 per cent in general.

Table II

$l = \frac{100\,t_8}{t_{24}}$	$\frac{1}{l} = a_8$	f	$a_8 f$	a_8^2	$f(a_8^2)$	Calculation of the standard deviation and of the standard error
45%	2,22	2	4,44	4,92	9,84	$\bar{y}_s = \frac{104{,}64}{54} = 1{,}935$
46%	2,17	0	0,00	4,70	0,00	
47%	2,12	2	4,24	4,48	8,96	$\frac{1}{\bar{y}_s} = 51{,}6\%$
48%	2,08	6	12,48	4,32	25,92	
49%	2,04	8	16,32	4,16	33,28	$\sigma_v = \sqrt{\frac{207{,}22}{54} - 1{,}935^2} = 0{,}3$
50%	2,00	2	4,00	4,00	8,00	
51%	1,96	10	19,60	3,84	38,40	$e_8 = \pm \frac{0{,}3}{\sqrt{54}} = \pm\ 0{,}041$
52%	1,92	8	15,36	3,69	29,52	
53%	1,89	2	3,78	3,57	7,14	$2e_8 = \pm\ 4{,}2\%$
54%	1,85	6	11,10	3,42	20,52	
55%	1,82	2	3,64	3,31	6,62	$\bar{\mu}_8 = \bar{y}_8 \pm 2e = 1{,}86 — 2{,}02$
56%	1,78	6	9,68	3,17	19,02	At 95,5 p. c. probability
57%	1,76	0	0,00	3,10	0,00	
		54	104,64		207,22	

Daily fluctuation of the weekly traffic volume

Table III shows the daily changes of weekly multiplicators during the winter months observed at a major station in the outskirts of Budapest, and the same referred to the annual average of the highway system.

Table III

Days of the week	Budapest		Weekly multiplicator applicable to the highway system		
	mark	value	value	e p. c.	2 e p. c.
Sunday	b_0	1,12	1,21	±6,2	±12,4
Monday.....	b_1	1,07	1,03	±1,4	
Tuesday	b_2	1,01	1,00	±2,1	
Wednesday.....	b_3	1,03	0,94	±2,0	±3,7
Thursday	b_4	1,00	1,00	±1,6	
Friday	b_5	0,96	0,94	±2,1	
Saturday	b_6	0,86	0,95	±1,6	±3,2

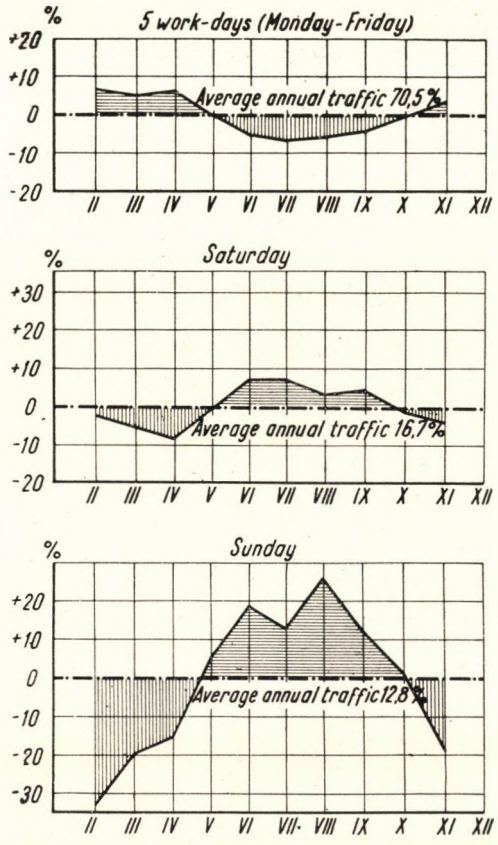


Fig. 5

The values of the volume of traffic in the various workdays expressed in weekly averages show no excessive seasonal fluctuation.

Fig. 5 shows the monthly fluctuation of the weekly traffic volume tested in the outskirts of Budapest on national highway No. 7. Average fluctuation of the traffic on the 5 workdays from Monday to Friday amounted to $\pm$ 6,5 per cent. Traffic fluctuation on Saturday is more subject to seasonal effects, but in spite of the week-end traffic, fluctuation did not exceed $\pm$ 8 per cent. Sunday's traffic is, however, vigorously affected by tourist traffic bound for Lake Balaton. The traffic of the winter months amounts to only 65 per cent of the annual average number of vehicles passing on Sundays, while in the peak season, in August, the volume of traffic exceeds the annual average value of Sunday traffic by 26 per cent.

Monthly fluctuation of the traffic volume

The monthly fluctuation of the volume of traffic is as typical of road traffic as the seasonal changes observed in railway traffic. Fig. 6 is a diagram of the average fluctuation in the volume of traffic observed at 8 different stations of the highway system. An analysis of the fluctuation of the volume of traffic shows that the monthly fluctuation illustrated in Fig. 6 obeys strict laws. Table IV has been compiled from the values of the multiplicator for May derived from 16 samplings.

Table IV

C_5	f	c_5f	c_5^2	f (c_5^2)	Calculation of the standard deviation and of the standard error
0,8	2	1,6	0,64	1,28	$\bar{y}_5 = \frac{16{,}90}{16} = 1{,}01$
0,9	2	1,8	0,81	1,62	
1,0	8	8,0	1,00	8,00	
1,1	2	2,2	1,21	2,42	$\sigma_5 = 0{,}04 = 0{,}20$
1,2	0	0,0	1,44	0,00	
1,3	2	2,6	1,69	3,38	$e_5 = \pm \frac{0{,}20}{\sqrt{16}} = \pm 0{,}05$
	16	16,2		16,90	$2e_5 = \pm 8{,}3\%$

The standard errors of the monthly factors determined by traffic counts over 16 days at 8 stations in diverse parts of the country are most favorable.

Besides the monthly multiplicators referred to the main highway system, Table V contains the monthly factors computed for the experimental station at Budapest out of n = 365 counts, moreover for comparative purposes, the factors referring to the State Highway System of Ohio, USA.

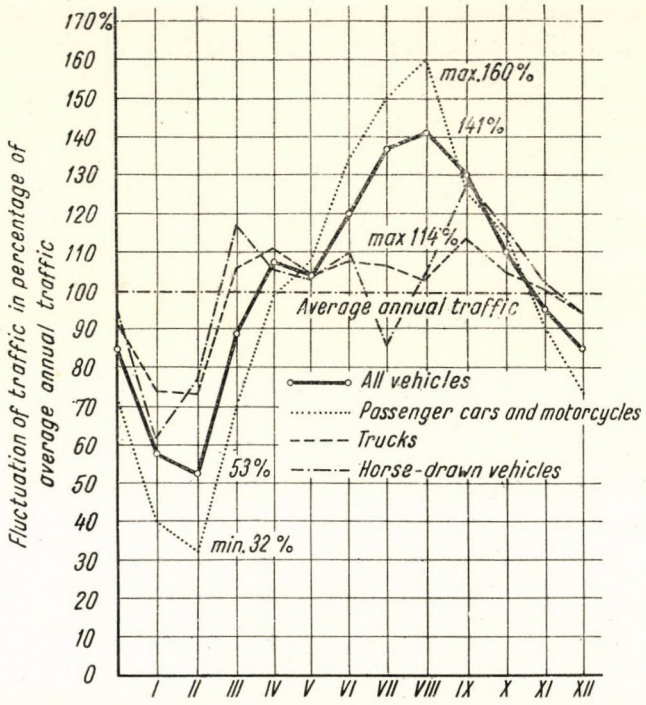


Fig. 6

Table V

Months	Monthly factors referred to provincial main roads			Budapest	Ohio, USA
	c	$\pm e$	$\pm 2e\%$*	C	c
January	1,81	0,08	13,4%	1,84	1,22
February	2,12	0,15	25,0%	2,03	1,19
March	1,20	0,00	0,0%	1,23	1,10
April	0,98	0,00	0,0%	1,12	0,99
May	1,01	0,05	8,3%	0,93	0,95
June	0,94	0,06	10,0%	0,82	0,92
July	0,94	0,04	7,5%	0,69	0,91
August	0,90	0,02	4,2%	0,66	0,88
September	0,88	0,00	0,0%	0,82	0,88
October	1,11	0,09	15,0%	0,90	0,93
November	1,10	0,00	0,0%	1,13	1,03
December	1,24	0,02	4,2%	1,28	1,11

* Percentages refer to the average of column c.

The similarity of the monthly factors referring to roads of diverse types of traffic shown in the table, as well as the slightness of their standard errors confirms that with the aid of the regular pattern of traffic fluctuation the annual average number of vehicles passing a point of the road can be estimated with a high degree of accuracy even from "short counts".

Comparative accuracy of traffic volume estimation by systematic and random sampling

In the brief survey of the theory of random sampling, reference has been made to the circumstance that the standard error of the sample mean values was inversely related to the root of the number of samples (Formula (4)). With regard to the steady periodical change of traffic volume within the year, this assumption should be adopted concerning traffic sampling with certain reservations only. By analyzing the result of some 200 daily counts made over 365 days at the station at Budapest, it was convincingly stated that the standard errors of the sample groups' mean values could not be essentially reduced by increasing the number of samples. The reason herefore is the ever changing character of traffic — the subject of the counts —, as a result of which repeated counts necessarily yield different results on every occasion (Fig. 5). Two positive statements derive from the result of the tests, viz :

(1) Surveying the standard errors of small random sample means — in other words of 24 hours' counts made in different months — they are found to average about $e_r = \pm 10{,}5$ per cent, providing the samples were taken from counts of different months and their number was between $n = 2$—12. Correcting the measured results of the same days by multiplying with the factors derived according to the laws governing traffic fluctuations, the standard error of the sample means will be reduced to $e_s = \pm 4{,}0$ per cent. Calculating the $\frac{e_r}{e_s}$ ratio — in other words the ratio of standard errors of samples taken with a definite purpose or at random — for groups containing different numbers of samples within the range of $n = 2$—12, the result obtained will be approximately constant, averaging $\frac{e_r}{e_s} = 2{,}6$. This value of the correlation of standard errors is an evidence of the good applicability of small samples drawn with a definite purpose.

(2) A significant result of the tests is the recognition of the circumstance that by increasing the number of repetitions, the accuracy of the annual averages is greatly improved, in other words, the error of determination may be reduced by increasing the number of repetitions.

Traffic analyses also convincingly prove that the mean values of 24 hours' samples adjusted by the factors characteristic of the weekly and monthly fluctuations of the traffic volume approximated the entire volume of the traffic surveyed with far less error than did the means of crude counts.

The relative results of our examinations are shown in Figs. 7 and 8. The diagrams represent the errors of the results derived by the two different methods as functions of the number of repetitions. The errors of annual averages derived from counts at ten stations belong to each number of repetitions. The

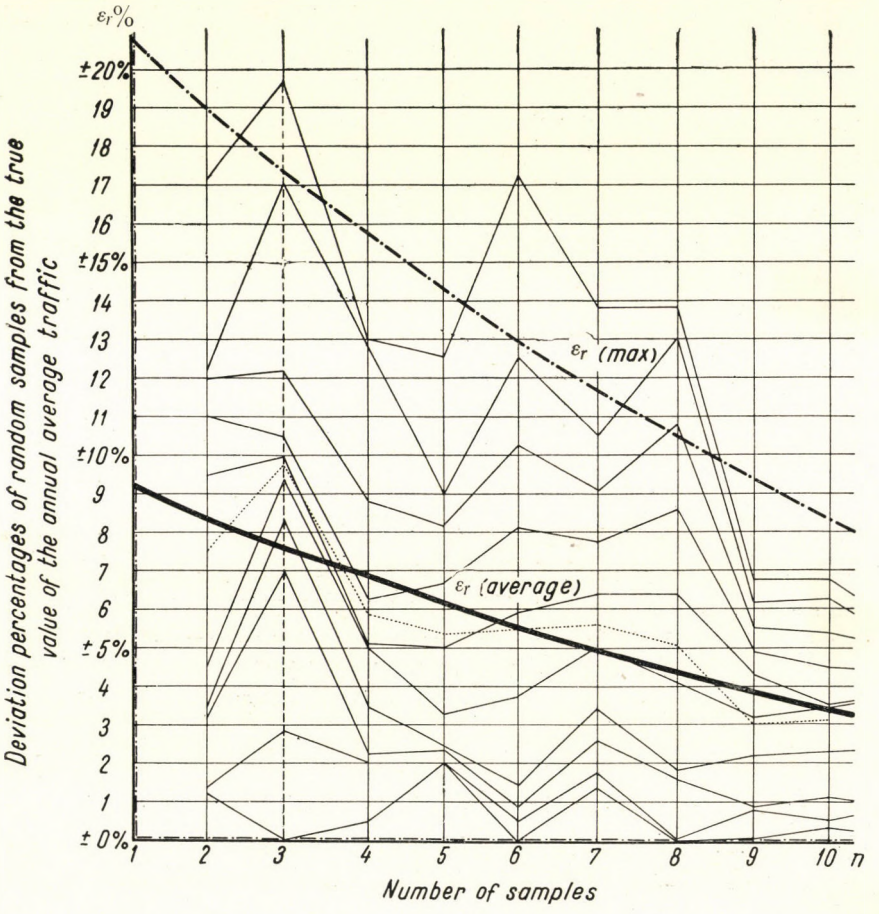


Fig. 7

distribution of the errors is located on a curve steeply declining in the direction of the rising number of repetitions.

A comparison of the corresponding average values of error derived from results obtained by the two different methods indicates that at any arbitrary number of repetitions, errors committed in sampling with some definite purpose were 60 per cent lower than the errors of random sampling. It is also characteristic of the data of e_s curves seen in Fig. 7 that the error of the mean of a sample group consisting of n = 3 counts was in 70 per cent between 0—3 per

cent, in 20 per cent between 3—5 per cent, and only at 10 per cent of the stations did the annual average deviate from the actual value by 5—10 per cent. Finally, the tests showed that the maximum error of sampling with a definite purpose was smaller than the average errors resulting from random sampling.

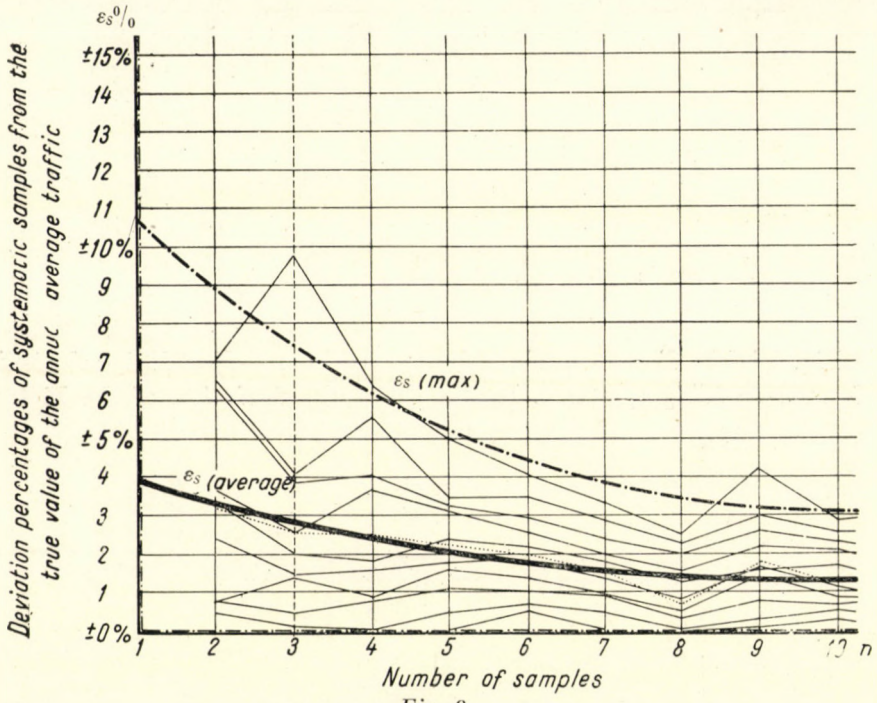


Fig. 8

Stratified systematic sampling

The accuracy of traffic research built up on the principle of statistical induction can be considerably improved by subjecting the distribution relations of the traffic operations examined to individual scrutiny, splitting them up into various strata.

Such strata are the different kinds of vehicles involved in the traffic. Is the sampling done separately for the various kinds of vehicles, the laws governing traffic fluctuation can be derived for each kind of vehicle, and thus the entire volume of the traffic will be obtained by summarizing the part amounts of the annual average traffic volume of all kinds of vehicle. Another stratification is achieved by sorting the traffic according to direction, separately examining the properties of "out"-bound and "in"-bound traffic. It is therefore convenient to determine the value of the daily, weekly and monthly factors separately according to direction.

Table VI shows the values of the daily factors obtained for the different kinds of vehicles from sampling over 365 days at the main sampling station at Budapest.

Table VI

Vehicle	14 hours' traffic 6 a. m.—8 p. m.	a_{14}	24 hours' traffic	
			veh/365 days	veh/day
Motorcycles	185,395	1,15	213,400	586
Passenger cars.....	239,410	1,22	291,400	799
Trucks and buses...	236,130	1,28	302,000	830
Horse-drawn veh. ..	42,175	1,11	46,600	125
Total:	703,110	1,21	853,400	2340

Fig. 9 is the diagram of the volume of traffic handled during the 14 daytime hours according to strata. It also shows the deviation of the 14 hours'

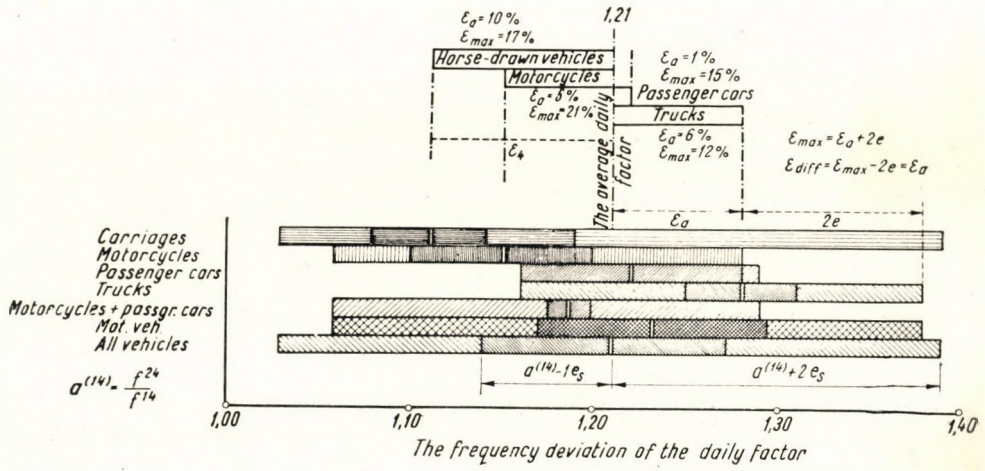


Fig. 9

daily factors of the various kinds of vehicles from the daily factor of the total traffic volume.

The dispersion of the monthly multiplication factors according to kinds of vehicles also essentially affects the degree of accuracy that may be attained by sampling. Table VII is a compilation of the factors variable according to kinds of vehicle, observed at the main Budapest counting station. Above all, the extent of the monthly fluctuation of motorcycle traffic was found to diverge from that of other vehicles.

Carrying the method over into practice, in particular if the traffic analyses were undertaken to survey passenger and goods traffic flow according to point of departure and destination (origin-destination study), it will become necessary to enlarge the expression of the relation between the number of vehicles counted and the annual average traffic volume formulated against (4), with regard to the various kinds of vehicles involved, viz :

$$T_a^{(1-4)} = T_a^{(1)} + T_a^{(2)} + T_a^{(3)} + T_a^{(4)} = t_x^{(1)} a_x^{(1)} b^{(1)} c^{(1)} +$$
$$+ t_x^{(2)} a_x^{(2)} b^{(2)} c^{(2)} + t_x^{(3)} a_x^{(3)} b^{(3)} c^{(3)} +$$
$$+ t_x^{(4)} a_x^{(4)} b^{(4)} c^{(4)} \qquad (8)$$

where :

$T_a^{(1)}$ the annual average of the daily motorcycle traffic observed at the sampling station (motorcycle/24 hrs)

$T_a^{(2)}$ annual average of the daily passenger car traffic observed at the counting station (passenger car/24 hrs)

$T_a^{(3)}$ annual average of the daily traffic of trucks and buses observed at the counting station (trucks and buses/24 hrs)

$T_a^{(4)}$ annual average of the daily traffic of horse-drawn vehicles observed at the counting station (carts/24 hrs)

Table VII

Months	Values of the monthly factors of				
	Motorcycles	Passenger cars	Trucks and buses	Horse-drawn vehicles	Total traffic volume
January	10,30	1,54	1,32	1,47	1,84
February	15,45	1,60	1,50	1,66	2,03
March	2,47	1,06	1,03	1,06	1,23
April	1,48	1,01	0,98	1,58	1,12
May	0,87	0,92	0,94	1,26	0,93
June	0,68	0,83	0,90	1,17	0,82
July	0,51	0,72	0,86	0,80	0,69
August	0,43	0,74	0,90	0,95	0,66
September	0,61	1,01	0,92	0,75	0,82
October	0,84	1,03	0,90	0,65	0,90
November	1,57	1,11	1,00	0,75	1,13
December	2,69	1,14	1,02	1,03	1,28

Fig. 10 is a comparative diagram of the standard errors computed from results of n = 60 samples, as derived from the total traffic volume according

to formula (4) and from yearly mean traffic volumes obtained by summarizing the share of the various kinds of vehicles in the traffic volume according to expression (8) respectively ; the deviation of the values thus obtained against

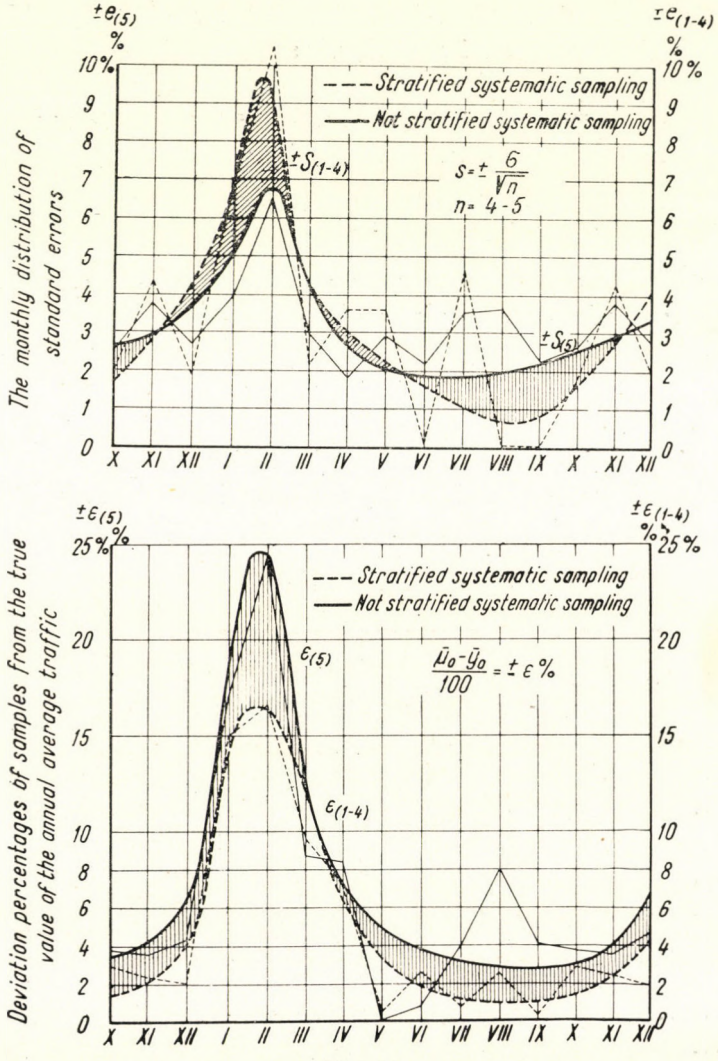


Fig. 10

the exact values has likewise been plotted. The curves refer to the means of 5 samplings performed in the 12 months.

Fig. 11 show the monthly changes of the standard errors separately for each kind of vehicle, and also for the total traffic volume. The diagram represents the standard errors of the means of sample groups of $n = 5$ tests chosen

in the different months. The standard error drawn in dash-dot line refers to the means of one sampling per month, i.e. altogether 12 samplings. Obviously, samples taken from the traffic of the winter months are not characteristic of

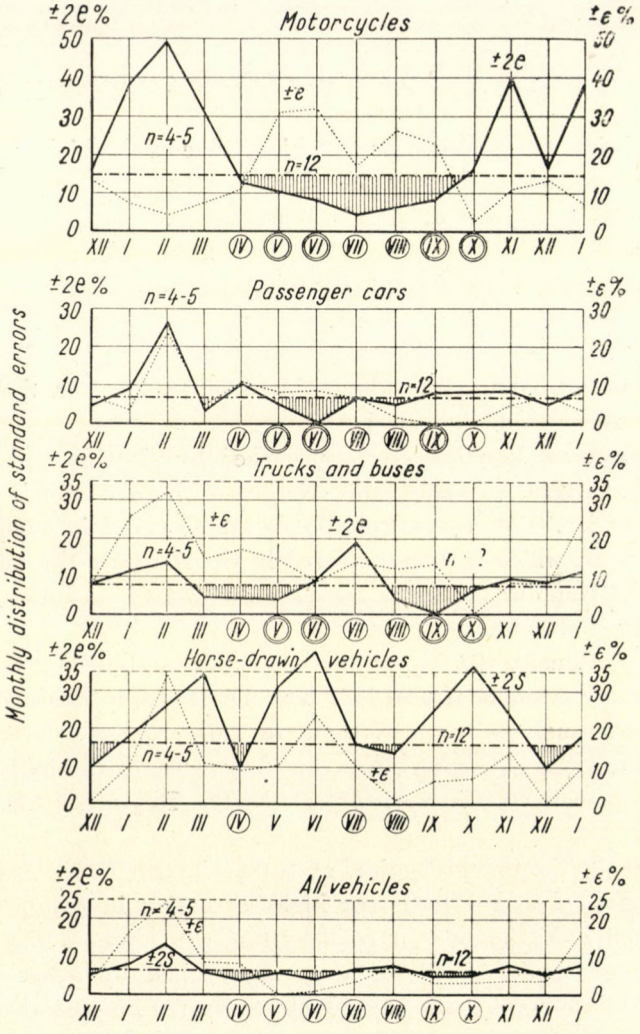


Fig. 11

the overall volume of traffic. Due to this, the mean value of small sample groups ($n = 5$) taken in the summer months — more suitable for the work of counting — more accurately determines the entire traffic volume than that of larger samples ($n = 12$) burdened with the results of counts that are not typical of the traffic under examination.

The study of the traffic flow made it possible to make practical use of the results of research, and along with it to elaborate an accurate, prompt and economical method of "short" traffic counts to be applied to the analysis of most different urban and highway traffic patterns.

II. Determination of the traffic volume for highway design

Research into the problem as to which value of the highly variable traffic volumes should be adopted as standard load on outlying sections of the rural highway system, is of great economic consequence.

The strong fluctuation of the traffic flow discussed in the foregoing chapter is responsible for the road capacity being put to a severe test, particularly during the peak hours of rush seasons. From the view point of safe and economical transportation, and last but not least of the cost of road construction, it is most essential to determine the volume of traffic, for the smooth flow of which the roads should be designed.

The correct solution may be approached by plotting and analyzing the yearly traffic pattern, covering the continuous hourly traffic count during the whole year, i. e. 8760 hours. Peak loads are observed in comparatively few hours of the year, which is demonstrated in the shape of the curve, the steep branch of which runs out as soon as after the 30—50th hour into a gently sloping line gradually flattening.

Very few annual traffic counts necessary for establishing the 30th highest hour of traffic are available in Europe. The US Highway Research Board made extensive traffic analyses to throw light on this problem, the result of which was that in the USA, the ratio between the traffic of the 30th highest hour and the average daily traffic varied between 12—16 per cent, averaging round 15 per cent.

The above ratio, though typical of traffic in the USA, must not be indiscriminately adopted as the basis for highway design in Europe, which has a decisive influence on the cost of road system development.

In Europe, similar problems were approached by other methods. E. g. in Switzerland, in designing the rural highway system, in the absence of annual traffic figures, traffic volume estimation of the 30th highest hour of the year was attempted from curves drawn of the traffic observed at stations over 203 hours. The relative assumptions were founded on the geometrical similarity of the American yearly traffic patterns drawn up for various lengths of time. The counts obtained over 203 hours were applied to the whole year. The 30th hour wanted being 1:290th part of the year, they assumed that the 30th hour was located at the $\frac{203}{290}$-th point of the curve plotted from the 203 hours' counts, i. e.

0,7 hour, which approximately coincides with the peak of the 203 hours' counts. Accordingly in the design of the Swiss road system, the highest hourly mean observed every 2 hours was adopted for standard traffic load. (Conclusive Report on Traffic Counts in 1948/49)

In Hungary, the following attempts were made to estimate the 30th hour value.

Starting from the counted results of 8 stations, it was examined whether a geometrical similarity prevailed between the indentical points of curves plotted over a short period — 200—300 hours — and the yearly traffic patterns plotted over 8760 hours. From the results derived from a large number of tests it was stated that the curve sections between 20—60 hours, which should be taken into account as far as road design is concerned, show a geometrical similarity; hence, the 8760 hours' curve can be plotted by transforming the yearly traffic pattern from curves of "short" counts.

In Table VIII the data of two curves drafted from figures observed at the station at Budapest are shown together with the ratios of the ordinates pertaining to identical abscissas. The ratios of the values between the 20—60th hours show no excessive fluctuation.

Table VIII

Length of the traffic pattern curve			
Length of time	252 hours	8760 hours	
	y^{252}	y^{8760}	$\frac{y^{8760}}{y^{252}}$
hr	Vehicle/hr	Vehicle/hr	
1	435	760	1,75
5	300	705	2,35
10	220	650	2,95
15	200	600	3,00
23	180	515	2,86
30	170	460	2,71
43	160	410	2,56
63	150	375	2,50
85	140	350	2,50
105	130	330	2,54
127	120	310	2,44
150	110	290	2,64
175	100	275	2,75
230	72	255	3,54

The degree of the curves' similarity is characterized by the standard error of the mean $k = \frac{y^{8760}}{y^{252}}$ ratio.

In Table IX the standard deviation and standard error of the coefficient of transformation were compiled from n = 39 samples at the Budapest experimental station.

Table IX

$k = \frac{y^{8760}}{y^{252}}$	f	fk	k^2	$f(k^2)$
2,5	15	37,5	6,25	93,7
2,6	6	15,6	6,75	40,5
2,7	3	8,1	7,30	21,9
2,8	6	16,8	7,85	47,0
2,9	3	8,7	8,40	25,2
3,0	6	18,0	9,00	54,0
	$[f] = 39$	$[fk] = 104,7$		$[fk(^2)] = 282,3$

$$k = \frac{104,7}{39} = 2,68 \qquad \sigma_S = \sqrt{\frac{282,3}{39} = -2,68^2} = 0,24$$

$$e = \pm \frac{0,24}{\sqrt{39}} = \pm 0,04 \qquad 2e = \pm 3\%$$

$\mu = k \pm 2e = 2,60—2,76$ with 95,5 per cent probability.

The value of the coefficient of transformation referred to the curve sections between the 10th and 175th hours is $k = 2,68$. The value of the standard error, in percentage of coefficient "k"

$$e = \pm 1,5 \text{ per cent.}$$

The deviation of the points of the curve plotted theoretically by transformation from the actual value has been tabulated in Table X.

Similar tests were made concerning a whole family of curves plotted from traffic samples taken on most different days over 200 hours. As a result, the sections between the 20—60th hours of the 200 hours' and 8760 hours' curves were found to show an affinity determined by coefficient $k = 2.4$, with a standard error of $e = \pm 0.5$ per cent. Once the degree of geometrical similarity has been established, the theoretical curves of the 8760 hours' traffic of main national highways Nos. 1—8 could be drawn up from the 200 hours' curves plotted at the stations on the roads concerned (Fig. 12).

The theoretical curves show also the hourly peaks observed during the 252 hours' counting. The ordinates of the 252 hours' peaks intersect the yearly

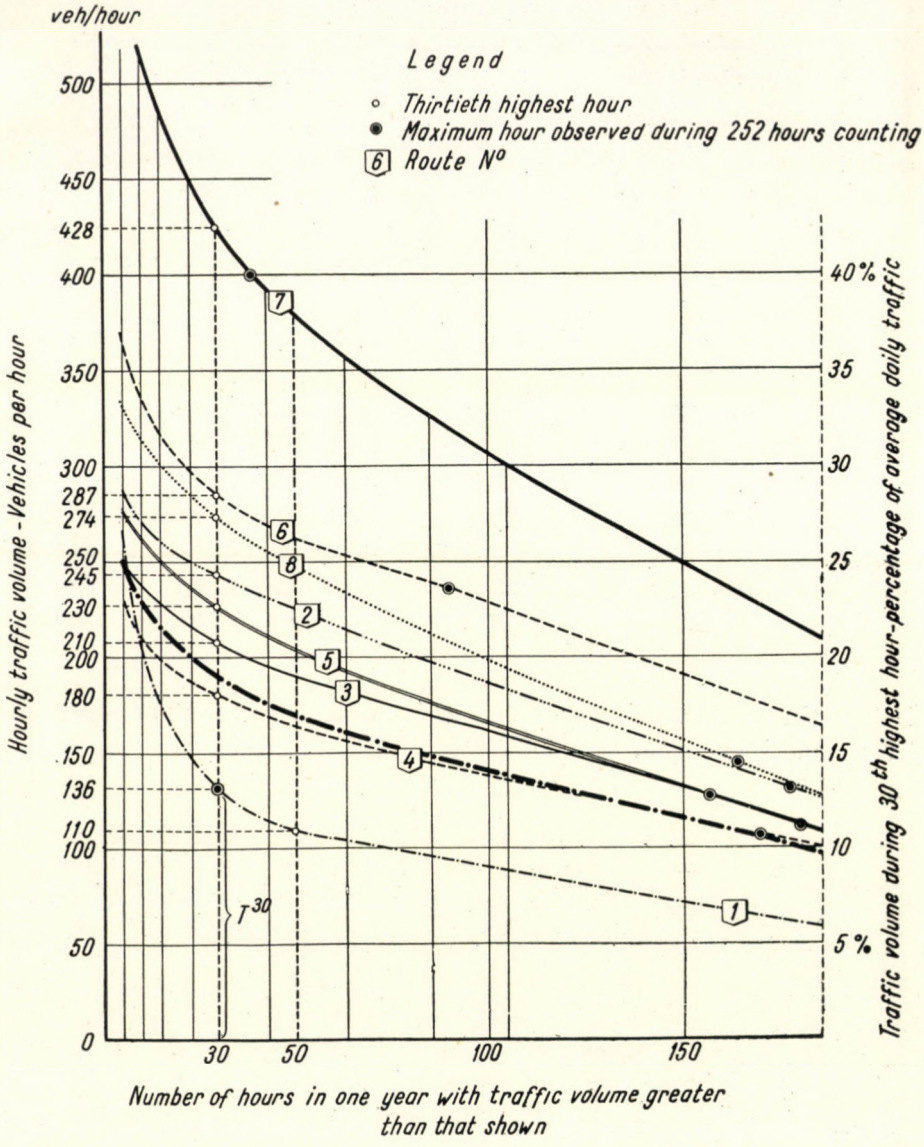


Fig. 12

traffic patterns at different hours, wherefrom the conclusion derives that in contrast to some Swiss assumptions, the value of the peak hour observed during 203 hours cannot be considered identical with the traffic volume of the 30th hour.

From the transformed yearly traffic patterns, the traffic volumes of the 30th and 50th hour observed at the stations can be directly determined. Table

Table X

Length of time Hr	y_{max}^{8760} Vehicle/hr	Deviation from the actual curve	
		Vehicle/hr	Per cent
1	1135	+375	+49,5
5	780	+ 75	+10,6
10	574	— 76	—11,7
15	522	— 78	—12,8
23	470	— 45	— 8,7
30	434	— 26	— 5,6
43	417	+ 7	+ 1,7
63	392	+ 17	+ 4,5
85	365	+ 15	+ 4,3
105	339	+ 9	+ 2,7
127	313	+ 3	+ 1,0
150	287	+ 3	+ 1,0
175	261	+ 14	+ 5,1
230	255	± 0	± 0,0

XI gives the traffic volume of the 30th and 50th hour of 9 stations in percentage of the annual averages.

Table XI

No. of highway	Annual average of daily traffic. Vehicle/day	Value of the 30th hour		Value of the 50th hour	
		Vehicle/hr	Per cent	Vehicle/hr	Per cent
1.	715	136	19,1	110	15,4
2.	1325	245	18,5	226	17,1
3.	1150	210	18,2	190	16,5
4.	1015	180	17,8	164	16,2
5.	1220	230	18,8	204	16,7
6.	1560	287	18,4	262	16,8
7.	2230	428	19,2	378	17,0
8.	1210	274	22,6	248	20,5
Budapest	2340	460	19,6	410	17,5
			18,7		16,7

According to the transformed curves, the following relations between the 30th and 50th hour traffic volumes and the annual average traffic can be

written :

$$T_p^{30} = 0{,}187\, T_a \tag{9}$$

$$T_p^{50} = 0{,}167\, T_a \tag{10}$$

$$T_p^{30-50} = 0{,}18\, T_a \tag{11}$$

The standard error of expression (11) : $e_p = \pm 2{,}6$ per cent, which proves that the traffic level of the 30—50th hour on rural highways may be adopted for the standard traffic load also under traffic conditions ruling in Hungary, upon which highway design may be based.

The nationwide traffic census of 1955/56 will yield the data needed for plotting the traffic pattern of 252 hours' traffic on 75 roads of different types and traffic loads. From these curves, the 30th and 50th hour traffic flow passing 75 stations will be obtainable without the need for costly counts over 365 days. These data are deemed to be sufficient to determine the standard traffic load of Hungary's highway system.

The trend of highway traffic

Evidently, the movements brought forth by satisfying the everyday transportation demand of the population may be foreseen only in awareness of their intrinsic coherences and the laws to which such movements obey. This is even more so concerning the study of the future development of traffic needs, more specifically of future trends of highway traffic.

The correct estimation of the volume of future traffic, in other words a forecast of traffic development is no easy matter, thus obviously, the conclusions derived abroad by methods of the science of transportation which is still in its infancy, are not convincing enough.

In spite of that, a reassuring solution should be found for the problem, for highway design is bound to be unsatisfactory, unless it is founded on correctly estimated values of future highway traffic.

In Europe, the expected level of traffic is generally concluded on from the estimated size of the motor vehicle fleet, and the expected density is expressed in the number of the heads of population per motor vehicle.

Factor *(n)* representing the ratio of the presumable motor vehicle fleet, and the one actually operated at the time of planning, is adopted for the basis of road design :

$$n_{54} = \frac{T_{70}}{T_{54}} \tag{12}$$

The probabilities of the future development of motor vehicle fleet in Hungary have been appraised against the background of the data referring to the

quarter of a century between 1928—1953.* From statistical analyses covering the 25 years' development of highway, railway, water and air traffic, the estimated density of the Hungarian motor vehicle fleet, built up on the trends indicating the outline of traffic development, would be at least 50 heads per motor vehicle by 1970, the targeted first lap of highway development.

Should the Hungarian road system be designed with the aid of the multiplicator characterising the increase in the motor vehicle fleet, on the base of expression (11), in 1970 the standard traffic load would amount to

$$T_{p\,70}^{30/50} = n_{54}\, T_{54}^{(24)}\, 0{,}18 \tag{13}$$

Substituting for the 24 hours' traffic volume (T^{24}) the traffic volume of the 8 busiest daytime hours, the above equation (13) can be written from formula (7) as

$$T_{p\,70}^{30/50} = 2 \cdot n_{54}\, T_{54}^{(8)} \cdot 0{,}18 \tag{14}$$

Expressing the standard load referred to the average hour of the 8 daytime hours' traffic :

$$\frac{T_{54}^{(8)}}{8} = t_{a54}\,(\text{vehicles/hr}) \quad \text{and}$$

$$T_{54}^{(8)} = 8\, t_{a54}\,(\text{vehicles/hr})$$

respectively. Substituting the above notation into equation (14) :

$$T_{p\,70}^{30/50} = 16 \cdot n_{54} \cdot t_{a54} \cdot 0{,}18 = 3\, n_{54}\, t_{a54} \tag{15}$$

The factor in equation (15) is the ratio of the motor vehicle fleet corresponding to 50 heads/vehicle density and of the fleet on hand in 1954, the value of which is $n_{54} = 4$. Computed from the factor of the motor vehicle fleet, the standard load on the Hungarian road system would be

$$T_{p\,70}^{30/50} = 12\, t_{a54}\,\text{vehicles/hr} \tag{16}$$

Accordingly, from the view point of highway design, the 12-fold value of the annual hourly average computed from the means of the 8 busiest daytime hours should be regarded as standard traffic load.

Are the results derived by the above method correct for the years 1954—1970, the method should also yield correct characteristics for the development

* See the author's treatise "Közúti közlekedés és városrendezés I." (Road Traffic and Town Planning) published by the Post-graduate Training Institute for Engineers, Budapest, 1954. In Hungarian.

in the period 1928—1954, which may be checked against the statistical data on hand. In the light of the analyses it appears that the rate of increase in highway traffic in Hungary was not characterized by the growth of the motor vehicle fleet. Namely, in the period 1928—1954, the Hungarian fleet of motor vehicles increased to about threefold, while at the same time motor vehicle traffic rose 6—7-fold. The traffic of horse-drawn vehicles — which still amounts to 27,7 per cent of the total of Hungary's mainroad traffic — diminished by 1953 to 54 per cent of the 1928 level. The increase of the total traffic volume over Hungary's road system amounted in the years 1928—1953 to 1,5-fold. In the relative analyses, the statistics have been reduced to passenger car traffic units.

The different kinds of vehicles show highly varied trends of development when examined in terms of metric tons of load. While the tonnage of load of the highway system increased 2,4-fold on an average, the load tonnage increase of motor vehicles was 9,0-fold, and that of horse-drawn vehicles 0,52-fold.

The study of 25 years' statistics of the Hungarian highway system shows that the extent of the variation of the traffic volume is not characterized by the increase of the motor vehicle fleet — as far as either capacity or load tonnage are concerned. It follows therefrom that the figures of the estimated density of the motor vehicle fleet alone are insufficient for the determination of the presumable traffic load.

The foregoing made it necessary to work out a method of road design more suited for local conditions in Hungary.

Determination of the presumable traffic volume based on trends

Judging from the trend of highway traffic, the daily traffic of the Hungarian highway system is estimated to be 15,3 million vehicle-kilometers by the year 1970. To reach this value, the required number of motor vehicles should be at least 220,000 — due attention being paid to the various trends of motor vehicles and horse-drawn vehicles, passenger cars and trucks. This size of motor vehicle fleet corresponds to the density of 50 heads/vehicle, of the 1970 population. Working on the initial assumption that the future volume of highway traffic is determined by the trend of the traffic increase, it is obvious that the trend of the total traffic on the highway system is actually the mean of the trends determined for the development of several hundred road sections building up the highway network. Hence, under certain conditions on the base of the 25 years of past development, trends that can be drawn for the individual road sections are characteristic of the presumable volume of traffic on the various sections.

Where the traffic load on some road section is available, the trend of traffic development can be drawn up. From the equation of the trends, the presumable rate of the traffic of any year can be calculated for each road section separately,

reduced to passenger car units :

$$T = y^{(II)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{17}$$

On the basis of formula

$$n_{82} = \frac{T_{70}}{T_{28}} \tag{18}$$

the increase in the traffic volume reckoned from the year of planning, derived from the two extreme values of the trends :

$$n_{54} = \frac{T_{70}}{T_{54}} \tag{19}$$

in other words, the multiplication factor of the traffic increase can be calculated.

Solving equation (19) for the expected value of the 1970 traffic volume :

$$T_{70} = n_{54} T_{54}$$

Substituting into equation (18)

$$n_{28} = n_{54} \frac{T_{54}}{T_{28}}$$

Solving the above for n_{54} :

$$n_{54} = n_{28} \frac{T_{28}}{T_{54}} \tag{20}$$

T_{54} can be derived from T_{28} with the aid of the percentile value of the annual traffic development in the following manner :

$$T_{54} - T_{28} \left(1 + 26 \frac{x}{100}\right) = T_{28} (1 + 0{,}26\, x) \tag{21}$$

where 26 = the number of years between 1954—1928, x the annual development of the traffic in percentage.

Substituting expression (21) into (20),

$$n_{54} = n_{28} \frac{T_{23}}{T_{28} (1 + 0{,}26x)} = n_{28} \frac{1}{1 + 0{,}26\, x} \tag{22}$$

Expressing the value of x with the data of T_{70} and T_{28}:

$$T_{70} = T_{28}\left(1 + 42\,\frac{x}{100}\right)$$

wherefrom

$$x = \frac{100\,(T_{70} - T_{28}\,)}{42\,T_{28}}\,) \tag{23}$$

Substituting the value of x derived from (23) into equation (22)

$$n_{54} = n_{28}\,\frac{1}{1 + 0{,}26\left[\dfrac{100\,(T_{70} - T_{28})}{42\,T_{28}}\right]} \tag{24}$$

Developing the relation in the denominator:

$$1 + 0{,}26\left[\frac{100(T_{70} - T_{28})}{42\,F_{28}}\right] = 1 + \frac{26\,(T_{70} - T_{28})}{42\,F_{28}} = 1 + 0{,}62\,\frac{T_{70} - T_{28}}{F_{28}} =$$

$$= 1 + 0{,}62\,(n_{28} - 1) = 1 + 0{,}62\,n_{28} - 0{,}62 = \underline{0{,}38 + 0{,}62\,n_{28}}$$

Substituting the value thus derived into equation (24), the factor of traffic volume increase for the years 1954—1970

$$n_{54} = \frac{n_{28}}{0{,}38 - 0{,}62\,n_{28}} \tag{25}$$

On the basis of equation (25), the factor of the traffic volume increase was calculable for a number of Hungary's highway sections. The relative calculations yielded

$$n_{a54} = 1{,}57$$

for the factor of traffic increase on the sections examined, with a minimum of fluctuation.

To sum up, the future traffic development of the main Hungarian traffic system is not characterized by the vehicle multiplicator deriving from the 4-fold growth of the motor vehicle fleet, but rather by the multiplicator of the increase in the traffic volume. Substituting the value of the traffic volume increase factor into equation (15) specific of highway design:

$$T_{p70}^{30/50} \simeq 3n_{54}\,t_{a54} = 4{,}7\,t_{a54}\ \text{(passenger car/hr)} \tag{26}$$

Considering the expected composition of the traffic, from the angle of road capacity

one vehicle should be taken into account at the rate

of 1,43 passenger cars, in other words,

one passenger car $= \frac{1}{1{,}43} = 0{,}70$ vehicle. Converting the t_{a54} passenger car/hr value to vehicle/hour, the standard load

$$T_{p70}^{30/50} = 3t_{a54} \text{ vehicles/hour} \tag{27}$$

A comparison of the results derived from equations (16) and (27) confirmed numerically that highway planning using the vehicle fleet multiplicators was wrong. Had the presumable traffic been estimated on the basis of the increase in the vehicle fleet, it would have entailed a 4-fold overdimensioning of the highway capacity.

The correct estimation of the volume of traffic serving for the basis of highway design has great economic significance. The capital invested into road building is recovered in savings in transportation on the improved roads. The efficacy of the investments is therefore influenced partly by the roadbuilding costs, and partly by the vehicle-kilometers covered and tons transported per km. Thus, the correct choice of the traffic volume, on which road capacity should be based, permits of determining the optimal amount of investments.

REFERENCES

Public Roads Administration: Manual of Procedures for the Metropolitan Area Traffic Studies. 1946. Washington.

DAVID P.—FLAJOLIET B.: Le comptage de la circulation routière. La Route, 1952. No. 212.

RUCKLI ROBERT: Strassenverkehrsanalyse. Schweizerische Bauzeitung, 1952. No. 23—24.

LYNCH, JOHN T.: Traffic Planning Studies in American Cities. Public Roads, 1945. Vol. 24 No. 6.

JENNY, MARCEL: Verkehrs-Frequenzzählungen als Projektierungsunterlagen für Strassen und Plätze. Strasse und Verkehr, 1953. No. 2.

Die Schweizerischen Verkehrszählungen 1948/49. Schlussbericht. Vereinigung Schweiz. Strassenfachmänner. Zürich 1951.

Traffic Engineering Handbook, Institute of Traffic Engineers, Yale University, New Haven, Conn. 1950.

CUNNINGHAM, H. E.: Analysis of Short Count Methods in Measuring Traffic Flow. Highway Research Board, Proceedings 1945. Washington, D. C.

GREENSHIELDS, B. D.—WEIDA, F. M.: Statistics with Applications to Highway Traffic Analyses. Eno Foundation. Saugatuck, Conn. 1952.

MURÁNYI, T.: Irányelvek az 1955/56. évi forgalomszámlálások végrehajtásához. Principles of Execution of the 1955/56 Census 1955, Budapest. Manuscript, in Hungarian.

MURÁNYI, T.: Honnan-hová tanulmányok. 1955, Budapest. Manuscript. (Origin-Destination Study. In Hungarian).

MURÁNYI, T.: Theorie und Technik der Sampling Methode bei den Strassenverkehrszählungen. 1956, Budapest. Manuscript.

KÁDAS, C.: A statisztikai indukció. (Statistical Induction) 1948. Statisztikai Szemle. Budapest. In Hungarian.

SCHLUMS, J.: Verkehrserhebungen — eine wichtige Grundlage städtebaulicher Planungen. Strasse und Autobahn. 1953. Jahrg. IV. No. 2.

SCHLUMS, J.: Systematische Untersuchungen zur Verbesserung des städtischen Strassenverkehrs. Verkehr und Technik. 1951. Heft 1.

FEUCHTINGER, M. F.: Die Berechnung signalgesteuerter Knotenpunkte des Strassenverkehrs. (Schriftenreihe der Forschungsgesellschaft für das Strassenwesen e. V. Köln.) Heft 12.
GRABE, W.: Leistungsermittlung von nicht lichtsignalgesteuerten Knotenpunkten des Strassenverkehrs. (Schriftenreihe der Forschungsgesellschaft für das Strassenwesen e. V. Köln.) Heft 11.
BOUTET, D.: Strassenbautechnik der Gegenwart. 1951. Verlag Leemann, Zürich.
MURÁNYI, T.: Közúti közlekedés és városrendezés I. (Road Traffic and Town Planning I.) Post-graduate Training Institute for Engineers 1953—54. Budapest. In Hungarian.
NEUMANN: Der neuzeitliche Strassenbau. Berlin.
VÁSÁRHELYI, B.: Útépítéstan. (Highway Construction) In Hungarian. Budapest, 1955.
MURÁNYI, T.: A forgalomingadozások törvényei. (Laws of Traffic Fluctuations) In Hungarian. Közlekedéstudományi Szemle, 1955.

SUMMARY

The coordination of the needs of traffic with the operating condition of roads is among the foremost aims of highway development, and therefore it is the foundation of correct traffic policy. The determination of traffic needs, the necessity of recording traffic changes, the scientific definition of permissible traffic loads are required by the steadily increasing economic significance of road transportation.

The sampling method is seldom applied in Europe for estimating traffic operations, and even if so, it is used for minor traffic analyses only. From data derived from counting tests carried on throughout a year in Hungary, and from the analysis of the results, the method of how to apply sampling to counts over the entire highway system of the country, standard errors, etc. could be established.

The traffic volume of the 30 peak hours for which road capacity should be designed can likewise be well estimated from "short counts" — within predeterminable limits of error.

The correct estimation of the presumable volume of traffic is a basic condition of the proper use of road construction appropriations, and consequently of a sound investment policy. The rate of increase in the motor vehicle fleet is in itself an insufficient criterion of the expected traffic volume, which is crucial for the proper choice of technical road characteristics. The trends derived from the statistical data of traffic operations over a number of years give a better clue to the presumable traffic load of the various road sections surveyed, especially for brief periods.

*

DIE VERKEHRSWISSENSCHAFTLICHEN GRUNDLAGEN DER STRASSENNETZ-PLANUNG

T. MURÁNYI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Koordinierung der Bedürfnisse des Verkehrs mit den Betriebsverhältnissen der Strassen gehört zu den wichtigsten Zielsetzungen der Entwicklung des Strassennetzes und bildet infolgedessen die Grundlage für jede richtige Verkehrspolitik. Die stets grössere volkswirtschaftliche Bedeutung des Strassenverkehrs erfordert die Erfassung der Verkehrsbedürfnisse, die Notwendigkeit einer Registrierung der im Verkehr eintretenden Veränderungen und die wissenschaftliche Bestimmung der zulässigen Inanspruchnahme der Strassen durch den Verkehr.

Das Stichproben- (Sampling-) Verfahren zur Erfassung der Massenerscheinungen im Verkehr wird in Europa selten und nur bei kleineren Verkehrsuntersuchungen angewandt. Aus den Angaben der in Ungarn versuchsweise ein Jahr hindurch durchgeführten Erhebungen sowie aus der Auswertung der Ergebnisse liessen sich die beim Stichprobenverfahren für das Strassennetz des ganzen Landes anzuwendende Zählmethode, die dabei auftretenden Fehlergrenzen usw. feststellen.

Die als Basis für die Dimensionierung dienende Menge des 30stündigen Spitzenverkehrs kann aus sog. „Kurzzählungen" mit dem Stichprobenverfahren — innerhalb vorher bestimmbarer Fehlergrenzen — ebenfalls gut geschätzt werden.

Die exakte Feststellung der zu erwartenden Grösse des zukünftigen Verkehrs ist die Grundbedingung für die richtige Verwendung der Strassenbaukredite und somit für eine rationelle Investitionspolitik. Die Kenntnis der Zunahme des Kraftwagenparks genügt an sich nicht, um die auf die richtige Auswahl der technischen Kennziffern der Strassen einen so ausschlaggebenden Einfluss ausübende Grösse des zukünftigen Verkehrs beurteilen zu können. Die aus den mehrjährigen statistischen Angaben berechenbaren Trendlinien der Verkehrsentwicklung ergeben für jeden untersuchten Strassenabschnitt die zu erwartende Verkehrsbelastung in guter Näherung.

LA SCIENCE DE LA CIRCULATION, COMME BASE DE L'ÉTUDE DES PROJETS DE VOIES PUBLIQUES

T. MURÁNYI

RÉSUMÉ

L'accord entre les exigences de la circulation et les conditions d'exploitation des voies est l'un des buts les plus importants du dévéloppement du réseau routier. Il s'ensuit qu'il doit être à la base même de la bonne politique des transports. L'importance économique toujours grandissante des transports routiers entraine la nécéssité d'évaluer les besoins de la circulation, de tenir compte des changements de la circulation et de définir scientifiquement le trafic permis sur les routes.

La méthode de recensement dite „sampling" est employée en Europe sur une petite échelle seulement, et rarement, pour évaluer les phénomènes de masse de la circulation. Les recensements expérimentaux faits en Hongrie pendant une année et l'analyse de leurs résultats ont permis d'établir la méthode de l'application du „sampling" aux recensements s'étendant sur le réseau du pays entier, la précision pouvant être obtenue, etc.

Le trafic des 30 heures les plus chargées a pu être bien apprécié par des recensements par „sampling" dits „courts", entre les limites d'erreurs déterminées d'avance.

Une condition fondamentale de l'utilisation correcte des crédits de construction des routes et du développement d'une politique économique des investissements, est la détermination exacte du volume futur de la circulation. Il ne suffit pas de connaître seulement l'accroissement du nombre des automobiles pour porter un jugement sur le volume futur de la circulation, qui est d'importance primordiale pour le choix des caractéristiques techniques des routes. Les tendances du développement que l'on peut calculer à partir des données statistiques relatives au développement de la circulation, s'étendant sur plusieurs années, donnent avec bonne approximation — surtout pour le futur proche — la circulation anticipée de chaque section de route examinée.

ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ШОССЕЙНЫХ ДОРОГ

Т. МУРАНЬИ

РЕЗЮМЕ

Согласование требований движения с эксплоатационными условиями дорог относится к важнейшим целям развития сетей, поэтому оно представляет собой основу правильной транспортной политики. Определение транспортных нужд, необходимость учета происходящих на транспорте изменений и научное определение максимально допускаемой транспортной нагрузки дорог становятся необходимыми вследствие все возрастающего народнохозяйственного значения транспорта по шоссейным дорогам.

Метод взятия пробы для определения явлений массового транспорта применяется в Европе редко и лишь при исследованиях небольшого транспортного движения. На основе данных, проводившихся в Венгрии в течение одного года опытного счета и анализа полученных результатов, можно было определить способ применения метода взятия пробы при счете, распространяющемся на всю дорожную сеть Венгрии, далее возможные пределы погрешностей и т. д.

Основная величина движения транспорта 30 наиболее максимальных часов, служащая основой расчета, может быть также оценена с достаточной точностью — в пределах предварительно определенных границ погрешностей — по данным т. н. «кратких» счетов при помощи метода взятия пробы.

Правильное определение ожидаемой в будущем величины движения транспорта представляет собою основное условие правильного использования ссуд на дорожное строительство и, одновременно с этим, формирования экономически правильной политики капитальных вложений. Данные о росте автопарка сами собой еще недостаточны для оценки количества движения транспорта в будущем, действующего столь решительным образом на правильный выбор технических характеристик дорог. Тенденции (тренды), которые можно определить расчетным методом по статистическим данным многолетнего развития мощности движения транспорта, с хорошим приближением дают ожидаемую нагрузку движения транспорта на каждом исследованном дорожном участке — особенно за небольшой период времени.

RECHERCHES SUR LA DÉTERMINATION DU POIDS-FREIN DES LOCOMOTIVES

GY. HELLER et L. ROSTA

DIRECTION DES CHEMINS DE FER HONGROIS, BUDAPEST

[Manuscrit présenté le 12 août, 1955]

Introduction

Le développement technique a rendu nécessaire d'introduire, dans les services du MÁV (Chemins de Fer Hongrois), la notion du poids-frein des locomotives. La question s'est donc posée de savoir de quelle manière les valeurs du poids-frein des différents types de locomotives doivent être déterminées. Comme on le sait, les prescriptions internationales ne se rapportent qu'à la détermination du poids-frein des véhicules. Les méthodes de détermination du poids-frein des locomotives, employées par les différentes sociétés de chemins de fer nous étant en partie inconnues, ou se révélant — comme on le verra plus loin — inexactes, nous avons décidé de résoudre ce problème en partant de nos propres considérations.

En ce qui suit, nous exposons brièvement nos recherches théoriques et — là où cela nous semblera nécessaire — les résultats de nos essais, ainsi que la méthode finalement mise au point.

1. Examen de la notion du poids-frein

Afin de pouvoir mesurer toute l'étendue du problème, examinons avant tout la notion internationale du poids-frein.

Pour déterminer le poids-frein des *véhicules* utilisés dans le trafic ferroviaire international on dispose, comme on sait, de méthodes internationales unitaires. Ces méthodes sont différentes, selon qu'il s'agit de véhicules freinés de

a) train de marchandises,
b) train de voyageurs
c) véhicules à freins de haute-puissance.

Vu l'époque de sa rédaction, l'article ne tient pas compte des changements en préparation concernant la détermination expérimentale des poids-frein, mais ceci n'influence nullement l'essentiel de nos considérations.

a) *Poids-frein pour trains de marchandises*

Le poids-frein pour trains de marchandises est déterminé par la relation indiquée dans a décision No. 544 de l'U.I.C. (modifiée conformément à nos signes):

$$B_m = \Sigma P_{i\,\max} \cdot \frac{10}{7} \cdot \gamma_p \qquad [\text{kg}] \tag{1}$$

où B_m kg est le poids-frein du véhicule examiné, $P_{i\,\max}$ kg la pression aux sabots engendrée et faisant partie de l'effet de freinage entièrement développé, et γ_p un coefficient pris d'un tableau caractérisant le système de freins et la pression aux sabots.

Il ressort de l'équation (1) que le poids-frein en régime marchandises d'un véhicule est égal à son poids à vide (ou son poids de changement de position) au cas où la somme des pressions aux sabots est 0,7 fois plus grande que le poids à vide (ou le poids de changement de position) et $\gamma_p = 1$. C'est l'interpretation quantitative la plus claire — bien entendu non la seule correcte — du poids-frein pour trains de marchandise.

La valeur de γ_p est déterminée par l'éq.

$$\gamma_p = \gamma_{pa} \cdot \gamma_{pt} \ [1] \tag{2}$$

Parmi les facteurs de la multiplication au côté droit de l'éq. (2) le premier :

$$\gamma_{pa} = f_1 \text{ (valeur relative de l'à-coup de première, } P_{i\,\max}) \ [1] \tag{3}$$

le deuxième :

$$\gamma_{pt} = f_2 \text{ (temps de remplissage du cylindre à frein, } P_{i\,\max}) \ [1] \tag{4}$$

La valeur de γ_p est donc en fin de compte :

$$\gamma_p = f_3 \text{ (valeur relative de l'à-coup de première, } P_{1\,\max}\text{, temps de remplissage du cylindre de frein) } [1] \tag{5}$$

Vu que dans un système de freins pour train de marchandises, la valeur relative de l'à-coup de première, et le temps de remplissage du cylindre de frein sont donnés, nous pouvons écrire qu'à l'intérieur d'un système de freins

$$\gamma_p = f_4 \ (P_{i\,\max}) \ [1] \tag{6}$$

ce qui signifie que pour un véhicule donné

$$\gamma_p = \text{constante} \ [1] \tag{7}$$

par conséquent

$$B_m = \text{constante} \ [\text{kg}] \tag{8}$$

Dans le cas de freins pour trains de marchandises, et pour une position donnée du dispositif vide-chargé, le poids-frein est donc une constante, indépendante de la vitesse et du poids de chargement. Seuls les freins automatiques à dispositif vide-chargé constituent une exception à cette règle, puisqu'ici le poids-frein varie continuellement, sans palier, en fonction du poids de chargement.

Par la force de l'habitude, la validité des éq. (7) et (8) nous semble au premier abord évidente, alors qu'elle ne l'est guère. Rappelons seulement que les durées de stationnement sont différentes suivant les conditions de service. Dans le cas de freins pour trains de marchandises, dont l'effet ne se développe que lentement, cela signifie que le facteur α^2_m, caractérisant l'intensité du système de freinage, a des valeurs différentes (cf.: GY. HELLER : Sur les caractéristiques de freinage des véhicules de chemin de fer. Acta Technica Hung., t. XII., fasc. 1—2). Or la notion de poids-frein nous est ici précisément d'un grand secours, en permettant de considérer un système de freinage d'intensité moyenne, qui varie en réalité entre de larges limites, comme ayant un caractéristique constant. L'erreur commise de cette façon peut être corrigée lors de l'élaboration des tableaux de freinage. Ceci veut dire que les agents de la traction, souvent peu

qualifiés, ne doivent s'occuper que du poids-frein, apparemment simple, tandis que les difficultés théoriques assez considérables, ayant trait à l'application des freins pour trains de marchandises sont à résoudre uniquement par des specialistes experts de la notion du poids-frein et des tableaux de freinage.

b) *Poids-frein des trains de voyageurs*

Les problèmes du poids-frein pour trains de voyageurs sont également réglés par la décision No. 544 de l'U.I.C. La détermination du poids-frein est généralement basée sur les résultats du parcours d'arrêt obtenus par des freinages à partir des vitesses de 100 km/h ou 120 km/h. Les essais doivent être exécutés à l'aide soit d'un train de 60 essieux, composé de véhicules du

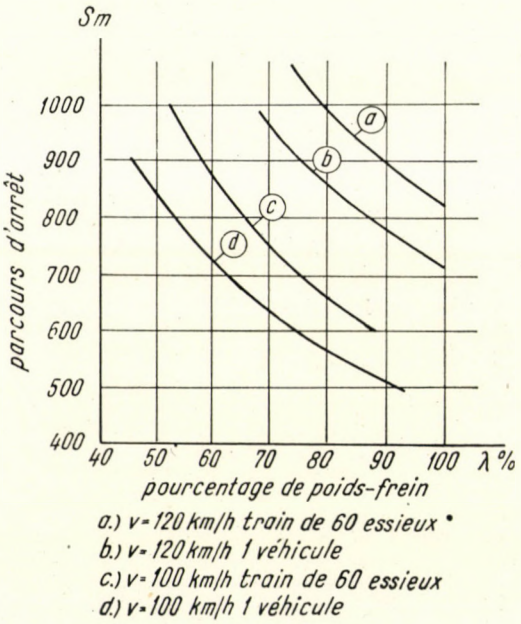


Fig. 1

type examiné (et remarqué par une locomotive non freinée), soit d'un seul véhicule décroché après accélération de la locomotive et freiné par le frein de secours. La courbe correspondant à la moyenne des parcours d'arrêt de plusieurs freinages effectués dans des conditions et à une vitesse analogues (fig. 1.) donne un pourcentage de poids-frein, à partir duquel, en connaissant le poids total du train ou du véhicule, on peut déterminer le poids freiné ou le poids-frein d'un véhicule freiné.

En l'absence d'une voie convenable, il est cependant exceptionnellement permis de déterminer le poids-frein pour trains de voyageurs à la base de la relation

$$B_v = \Sigma P_{i\max} \cdot k \text{ [kg]} \tag{9}$$

où, à part des signes connus,

$$k = f_5 (P_{i\max}) \text{ [1]} \tag{10}$$

On voit que le temps de remplissage, caractéristique des différents systèmes de freins, n'a aucune influence sur la valeur du poids-frein pour trains de voyageurs. La raison en est que la perte de temps survenant en conséquence du remplissage varie en général entre 1,0 à 1,5 sec et que les écarts de l'ordre d'un dixième de seconde entre les différents systèmes de freins

peuvent être négligés. En connaissant le nombre des sabots de frein du véhicule, nous pouvons donc écrire :

$$B_v = f_6 (P_{i\,max}) \text{ [kg]} \tag{11}$$

c'est-à-dire *la valeur du poids-frein pour trains de voyageurs reste constante, indépendamment non seulement de la vitesse et du poids de chargement* (pour un véhicule et une position chargé donnés), *mais également du systeme de freins.*

Quant aux freins pour trains de voyageurs, tout comme pour les freins pour trains de marchandises, (position chargé définie d'un véhicule donné)

$$B_v = \text{constant [kg]} \tag{12}$$

c) *Poids-freins à haute puissance.*

La manière de déterminer le poids-frein des véhicules munis de freins à haute puissance est fixée par la décision No. 546 de l'U.I.C. Pour les véhicules dont la vitesse permise est de 140 km/h, il faut établir des valeurs particulières de poids-frein pour les vitesses 120 km/h et de 140 km/h, et pour ceux ayant une vitesse permise de 120 km/h, une seule : celle de 120 km/h. En ce cas, contrairement aux freins pour trains de voyageurs, le poids-frein ne doit être déterminé que par la voie expérimentale, au moyen d'un train de 60 essieux composé de véhicules du type examiné. Entre l'arrêt de parcours S m, mesuré à la vitesse v km/h et le pourcentage du poids-frein, λ, la décision mentionnée établit la relation suivante :

$$S = \frac{4 \cdot 24 v^2}{\lambda \dfrac{57 \cdot 5\, v}{v - 20} + 0 \cdot 05\, v} \text{ [m]} \tag{13}$$

L'éq. (13) peut être transformée de manière à répondre davantage à nos besoins :

$$\lambda = 0{,}0737 \frac{v^2}{S} - 1{,}475 \frac{v}{S} - 0{,}00087\, v + 0{,}0174 \text{ [I]} \tag{14}$$

De la relation (14) il ressort clairement qu'au cas de freins à haute puissance — contrairement au poids-frein pour trains de voyageurs et trains de marchandises — le poids-frein varie en fonction de la vitesse. Ceci est dû au fait que les tableaux de freinage les véhicules à freins à haute puissance sont basés sur la notion du poids-frein pour trains de voyageurs. La pression aux sabots, en cas de freins pour trains de voyageurs, peut être considérée avec une bonne approximation comme constante dans les cas intéressant les tableaux de freinage. Ce n'est pas le cas pour les freins à haute puissance où, comme on le sait, la pression aux sabots n'est pas la même au-dessous et au-dessus d'une certaine vitesse limite. Par conséquent, plus la vitesse à partir de laquelle on freine est grande, plus le poids de l'effort spécifique de freinage kg/kg plus grand, engendré par la pression spécifique aux sabots, sera élevé. Ainsi donc le poids-frein augmente avec la vitesse et pour un système de freins et des sabots donnés, le poids-frein n'est pas constant, mais

$$B_r = f_7 (v) \text{ [kg]} \tag{15}$$

Ceci représente une grande différence par rapport à la notion de poids-frein des trains de voyageurs et trains de marchandises.

2. Conditions imposées à la notion internationale de poids-frein de véhicules et de locomotives

Ayant passé en revue les notions internationales de poids-frein, nous pouvons constater que non seulement leurs valeurs ne sont pas identiques, mais qu'elles présentent aussi certaines différences fondamentales. Sur les locomotives, on trouve aussi bien le freinage pour trains de marchandises et trains de voyageurs que les freins à haute puissance. En cherchant la manière

de déterminer les poids-freins différents des locomotives, il faut avant tout voir s'il n'y a pas lieu d'appliquer les prescriptions internationales telles quelles aux locomotives. Examinons donc encore une fois chaque type de poids-frein séparément.

1. Les freins des locomotives et des tenders correspondent en général, comme on le sait, aux freins des trains de voyageurs. A l'aide du dispositif «marchandises-voyageurs» (M—V) le frein employé sur la locomotive ou le tender peut cependant être transformé pour *régime «marchandises»*. En position «marchandises» (M), le frein du tender produit dans le cylindre de frein l'à-coup de première, tandis que le frein de la locomotive ne fait qu'allonger, pour des raisons connues le temps de remplissage du cylindre de frein, sans produire l'à-coup de première.

D'après ce qui précède, on peut affirmer que la méthode prescrite par l'U.I.C. pour véhicules ne convient pas à la détermination du poids-frein des locomotives de trains de marchandises, vu que

a) en position M du dispositif M—V la valeur de γ_p ne peut même pas être déterminée, l'absence de l'à-coup de première rendant l'interprétation de γ_{pa} impossible ;

b) la valeur du coefficient de frottement glissant est fortement influencée par la pression superficielle spécifique p kg/cm^2 engendrée sur les surfaces frottantes. C'est ce phénomène qui explique que

$$\gamma_p = f_4(P_{i\,\max}). \quad [1] \tag{6}$$

Dans l'éq. (6) on commet cependant la négligence de supposer tacitement la validité de la relation

$$p = \text{constante} \cdot P \ [\text{kg/cm}^2]. \tag{16}$$

Pour les véhicules, cette simplification représente une négligence tolérée, parce que la forme du sabot du frein du véhicule est limitée, sinon sans équivoque, du moins de très près par des règles. Ce n'est pas le cas pour les locomotives et les tenders. Les dimensions des ces sabots sont ici entièrement différentes (généralement plus grandes), leur forme géométrique est autre, le plus souvent il y a freinage de boudin. Quant à la question de savoir combien ces facteurs influencent le coefficient de frottement glissant, celle-ci ne doit pas être examinée plus amplement, vu nos connaissances actuelles sur les sabots.

c) La décision de l'U.I.C. ne contient, de valeurs de γ_p qu'entre les limites $P = 800 - 3000$ kg de pression aux sabots, quoique les pressions des essieux soient en général plus grandes chez les locomotives que chez les véhicules. De plus, une paire de roues n'y est freinée normalement que par 2 sabots, tandis

que dans les véhicules elle l'est par 4. Par conséquent, la valeur des pressions aux sabots des locomotives se trouve généralement en dehors des limites traitées par l'U.I.C, (par ex. pour la locomotive sér. V. 40 du MÁV : P = 6600 kg).

d) La construction de la timonerie des locomotives est très variée et surtout différente de la timonerie des véhicules. Son rendement varie par conséquent entre de larges limites pour les différentes séries. Le rendement mécanique de la timonerie de construction démodée peut avoir une valeur $\eta_{mech} = 0{,}6$ environ, avec une timonerie moderne on peut atteindre un rendement de $\eta_{mech} = 0{,}8 - 0{\cdot}98$. (Le rendement de la timonerie du frein d'une voiture bien entretenue varie entre $\eta_{mech} = 0{\cdot}90 - 0{,}98$.)

On voit donc que la méthode de l'U.I.C. ne se prête pas à la détermination du poids-frein des locomotives pour trains de marchandises.

2. La triple-valve ordinaire de la locomotive en position P. diffère quelque peu du point de vue du retard causé par le temps de remplissage du cylindre de frein de la triple-valve des *freins pour trains de voyageurs*, par suite de l'absence d'accélération lors du freinage rapide. La triple-valve à action rapide du tender représente en soi-même un frein pour trains de voyageurs. Pour des raisons que nous exposerons plus loin, la triple valve ordinaire n'empêche pas par elle même l'utilisation des méthodes internationales. Le fait que les prescriptions de l'U.I.C. ne peuvent néanmoins pas être appliquées sans modification à des locomotives peut se ramener aux causes suivantes :

a) D'aprés la méthode expérimentale de l'U.I.C., le poids-frein d'une locomotive de train de voyageurs doit être déterminé par des freinages à partir des vitesses de 100 km/h. et 120 km/h. Bien entendu ce n'est possible qu'en cas de locomotives pouvant circuler à ces vitesses. Pour les locomotives dont la vitesse prescrite est plus faible, cette méthode se révèle donc inutilisable.

b) Pour les poids-frein des trains de voyageurs, on a l'équation déjà connue

$$k = f_5(P_{i\,\max})\ [1] \tag{10}$$

qui — pareillement au cas du poids-frein des trains de marchandises — suppose la validité au moins approximative de la relation

$$p = \text{constante} \cdot P[\text{kg/cm}^2] \tag{16}$$

signifiant une négligence non-tolérée en cas de locomotives. Il s'ensuit que pour la détermination du poids-frein des locomotives de trains de voyageurs, la méthode de calcul de l'U.I.C. n'est pas non plus applicable.

3. Le poids-frein des locomotives munis de freins à haute puissance ne peut pas être déterminé par la méthode de l'U.I.C. En effet, les relations (13) et (14) se rapportent à des trains de 60 essieux et non à une seule locomotive ou un véhicule.

En conclusion, on peut donc dire, qu'à l'exception de certains cas, les méthodes de l'U.I.C. ne peuvent pas être employées pour la détermination des poids-frein des locomotives.

Ajoutons que les autres méthodes connues par nous et que nous n'exposerons pas ici, faute de place, sont également loin d'apporter une solution parfaite à la question.

3. Établissement d'une méthode pour la détermination du poids-frein des locomotives

Les valeurs de poids-frein que nous fixerons pour les locomotives, doivent être naturellement telles qu'on puisse leur appliquer les tableaux de freinage plus ou moins adoptés sur le plan international. Cela signifie que la méthode à établir doit se baser sur le système constitué des diverses notions de poids-frein valables pour les véhicules.

Le point de départ nous est donc donné d'avance : *si un véhicule, à pourcentage de poids-frein établi selon les prescriptions internationales, et une locomotive quelconque exécutent un arrêt à vitesse donnée, dans des conditions de service et avec des parcours d'arrêt identiques, leurs pourcentages de poids-freins seront nécesseirement les mêmes.* Cette hypothèse est la pierre angulaire de la méthode que nous allons exposer. Ajoutons que si elle paraît être évidente, la réalité est pourtant loin d'être aussi simple et le champ de la validité de notre hypothèse devra être soigneusement délimité.

La première chose à faire sera donc de choisir un véhicule ayant un poids x vide réduit et une grande capacité de charge, muni d'un dispositif «voyageurs-marchandises», et dont nous connaissons le poids-frein en régime de trains de voyageurs et de trains marchandises. Avec ce véhicule étalon, en variant le poids de chargement de zéro au maximum possible, on procède à des essais à partir de différentes vitesses, sur une voie plane et droite, en régimes voyageurs et marchandises. Moyennant une série d'essais assez longue on obtient de cette façon une famille de courbes pour chacun des deux régimes (voire schéma de principe fig. 2.) où à chaque parcours d'arrêt et à chaque vitesse correspond une valeur du pourcentage de poids-frein.

On a vu plus haut que pour les véhicules

$$B_m = \text{constante [kg]} \tag{8}$$

resp.

$$B_v = \text{constante [kg]} \tag{12}$$

c'est-à-dire la valeur du poids frein en régime «marchandises» ou «voyageurs» est pour un même véhicule, constante. Il nous faut donc avant tout vérifier

si, en employant la famille de courbes de la fig. 2. pour la détermination du poids-frein des locomotives, on obtient réellement des valeurs de poids-frein constantes pour une même locomotive en cas de vitesses et de pourcentages de poids-freins différents. Il s'agit de savoir, en d'autres termes, si les éq. (8) et (12) sont valables aussi pour le poids-frein de locomotives déterminé de cette façon.

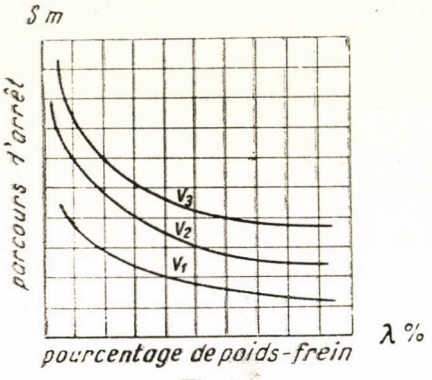


Fig. 2

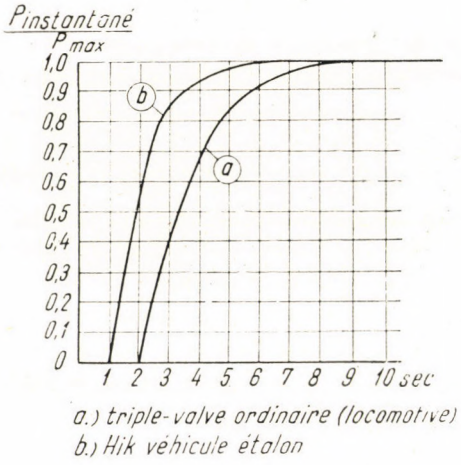


Fig. 3

Les relations (8) et (12) ne sont valables que pour les locomotives dans lesquelles chaque poids total a un poids total correspondant du véhicule étalon, pour lequel en supposant une vitesse et des conditions de voie identiques, la relation

$$\frac{1}{s}\int_0^s R_{\text{locomotive}} \cdot ds = \frac{1}{s}\int_0^s R_{\text{véhicule étalon}} \cdot ds \,[\text{kg/t}] \qquad (17)$$

est valable. Dans l'éq. (17) $s.m$ est le parcours d'arrêt identique aux deux côtés de l'équation, R kg/t l'effort total (non la pression aux sabots!) spécifique, instantané de freinage, engendré par le système de freins du véhicule en question. La validité de la condition paraissant évidente nous nous abstiendrons de sa justification détaillée.

Quand la condition de l'éq. (17) est-elle valable? Pour pouvoir répondre à cette question, nous devons examiner de plus près la composition et la variation de l'effort total spécifique de freinage R kg/t.

L'effort spécifique total de freinage est composé de deux parties principales :

$$R = R_1 + R_2 \ [\text{kg/t}] \tag{18}$$

où R_1 kg/t est l'effort de freinage engendré par le système de freins, R_2 kg/t celui provenant de la résistance du véhicule.

On sait fort bien que la valeur de R_2 dépend de facteurs multiples (par ex. vitesse, pression aux sabots, forme du sabot et température). Parmi ceux-ci c'est la pression aux sabots qui présente ici le plus d'intérêt, vu que dans la première phase du freinnge, plus ou moins longue suivant le système de freins, elle varie en fonction du temps. Dans la pratique, et en négligeant pour le moment l'influence de R_2, l'éq. (17) ne peut donc avoir une validité générale que si la cadence du développement de la pression aux sabots de la locomotive examinée et du véhicule étalon est identique, c'est-à-dire si la condition

$$\left(\frac{P_{\text{instantané}}}{P_{\max}}\right)_{\text{locomotive}} = \left(\frac{P_{\text{instantané}}}{P_{\max}}\right)_{\text{véhicule}} \tag{1}$$

est satisfaite à chaque instant du freinage.

Cette condition n'est en général *pas valable*. En régime marchandises du frein de la locomotive cela est évident, parce que dans ce régime le processus de remplissage du cylindre de frein produit par le frein de la locomotive est différent de celui des systèmes de freins admis sur le plan international (donc différent aussi du système de freins du véhicule étalon). Bienque dans une plus petite mesure, notre constatation reste aussi valable pour le régime «voyageurs» du frein de la locomotive. Il ressort en effet de la fig. 3. que la triple-valve ordinaire qui, même lors du freinage rapide ne produit pas de dépression dans la conduite principale, a besoin pour presser les sabots contre les bandages d'un temps plus long que la triple-valve normale d'un train de marchandises. Cela signifie qu'avant le commencement du freinage proprement dit, les organes de serrage de la locomotive munie d'une triple-valve ordinaire ne développent pas d'effort de freinage pendant un temps pouvant dépasser de 2 à 3 sec. celui admis pour les véhicules munis d'un frein normal pour trains de voyageurs.

Ni l'éq. (19) ni l'éq. (17) ne sont donc valables, et dans le cas de vitesses variables, le poids-frein de la locomotive ne sera pas constant.

L'importance quantitative et les conséquences de ce fait seront traîtées en détail à propos des différents types de systèmes de freins.

La résistance spécifique R_2 kg/t du véhicule est pour un véhicule et une voie donnés, fonction de la vitesse :

$$R_2 = \text{fonction}\,(v) \qquad [\text{kg/t}] \qquad (20)$$

La valeur de R_2 est à son tour composée de deux parties :

$$R_2 = R_2' + R_2'' \,[\text{kg/t}]. \qquad (21)$$

Le premier membre de la somme figurant au côté droit représente la résistance intérieure, ainsi que celle provenant du roulement sur les rails, le deuxième membre représente la résistance à l'air. La valeur de R_2' qui, comme on sait, varie à peu près en raison directe de la vitesse est plus grande pour les locomotives que pour les véhicules, à cause de l'absence chez ces derniers des pertes, produites par le mécanisme moteur de la locomotive.

Quant à la résistance spécifique de l'air R_2'' la situation n'est pas aussi simple. En effet, la résistance à l'air totale d'un véhicule roulant seul, à une vitesse donnée, ne dépend pas de sa masse, mais des dimensions de sa surface de projection perpendiculaire au sens du roulement, ainsi que de sa forme. De deux véhicules identiques aux deux points de vue mentionnés et ne différant que par leur masse, c'est le véhicule dont la masse est plus petite qui possèdera une valeur R_2'' plus grande, vu qu'en ce cas la même résistance de l'air se répartit sur une masse plus petite. Il s'ensuit qu'au cas du wagon de marchandises à deux essieux, employé pour la prise des courbes de base servant à la détermination du poids-frein, la valeur de R_2'' est considérablement plus grande que dans le cas des locomotives lourdes ; cette circonstance égalise en partie les valeurs R_2' inférieures du véhicule étalon.

Dans un train, la valeur de R_2' n'est naturellement pas modifiée par rapport au véhicule isolé. R_2' par contre diminue considérablement ; en effet la surface frontale du grand train étant à peu près égale à celle du véhicule isolé, on trouve considérablement moins de résistance à l' air pour 1 tonne du train. Dans le train, c'est donc la valeur de R_2' qui domine, de sorte que la valeur R_2 de la locomotive est baucoup plus grande que celle des véhicules.

La fig. 4 représente les courbes de résistance spécifique obtenues en fonction de la vitesse (R_2 kg/t) d'une locomotive tender jumelée à deux cylindres, à disposition d'essieux l'Cl' sér. 342 MÁV et celle du wagon de marchandises étalon couvert, à deux essieux et boite à glissier, chargé à un pourcentage de poids-frein environ égal $\grave{a}$ celui de la locomotive. Les courbes pleines représentent

les valeurs R_2 kg/t correspondant à la vitesse donnée, les courbes de résultats les moyennes

$$R_{2m} = \frac{1}{s}\int_0^s R_2\, ds \text{ [kg/t]} \tag{22}$$

relatives à la course libre effectuée à partir de la vitesse donnée (donc à l'arrêt sans fonctionnement du frein). Nous avons estimé intéressant de tracer les

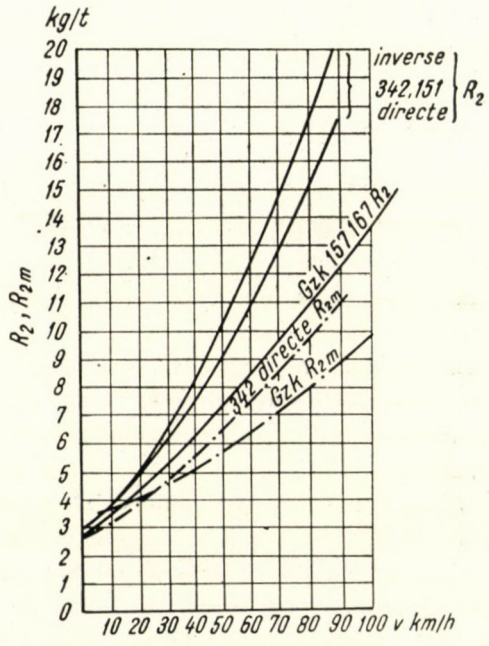


Fig. 4

valeurs de R_2 correspondant à la course libre dans les deux sens de marche de la locomotive sér. 342.

On constate que — probablement à cause des plus grandes valeurs de R_2''—les valeurs de R_2 sont quelque peu plus élevées en position inverse qu'en position directe.

Notons encore que la locomotive sér. 342 — courte, haute et ne possédant pas de tender — a des valeurs de R_2 généralement élevées par rapport aux autres séries de locomotives.

[1] Notons, que la valeur de R_{2m}, à cause des ralentissements variant de manière différente, n'est pas rigoureusement identique en freinage et en course libre.

Les valeurs de $R_{2\,\text{locomotive}}$ et $R_{2\,\text{véhicule étalon}}$, ainsi que celles de $R_{2m\,\text{locomotive}}$ et $R_{2m\,\text{véhicule étalon}}$ ne sont donc en général pas identiques de sorte que la valeur du poids-frein B kg ne peut non plus être constante en fonction de la vitesse.

En ce qui précède, nous avons examiné pourquoi la condition posée dans l'éq. 17.

$$\frac{1}{s}\int_0^s R_{\text{locomotive}} \cdot ds = \frac{1}{s}\int_0^s R_{\text{véhicule étalon}} \cdot ds\,[\text{kg/t}] \tag{17}$$

n'est pas satisfaite en réalité dans toutes les circonstances. On va voir par la suite ce que cela signifie dans les différents cas.

a) *Poids-frein des locomotives de trains de voyageurs*

Pour déterminer le poids-frein des locomotives de trains de voyageurs, il faut employer la famille de courbes de la fig. 5. obtenue à la suite du freinage du véhicule étalon.

On sait cependant que la relation (17) n'est pas absolument valable même en cas de freinages en régime voyageurs.

α. Lors de l'essai effectué en vue de la détermination du poids-frein, la locomotive a une longue course de cylindre de frein (pour une course max. de 200 mm, elle est de 170 mm, et pour une course max. de 100 mm, de 100 mm). Dans ces conditions, il peut arriver que le temps de perte au début du freinage soit d'env. 2 sec plus long que celui survenant au freinage du véhicule étalon, dans des conditions analogues. Cela signifie que plus la durée de stationnement sera courte, (c'est-à-dire plus la vitesse à partir de laquelle on freine est faible) plus le temps de perte rapporté à la durée de stationnement sera important et le pourcentage de poids-frein et le poids-frein de la locomotive seront plus faibles. En d'autres termes, le pourcentage du poids-frein augmente dans ces cas avec la durée de stationnement. Il apparaît donc immédiatement que — contrairement aux apparences — le fonctionnement trop retardé réduit le pourcentage du poids-frein non par la diminution, mais plutôt par l'augmentation de la vitesse, puisque, pour un parcours d'arrêt donné, ce sont précisément les grandes vitesses qui sont accompagnées de courtes durées de freinage. En effet, pour un parcours d'arrêt donné, les faibles vitesses sont accompagnées de plus faibles pourcentages de poids-frein et de plus longues durées de stationnement. Si, par contre, le train est freiné à un pourcentage de poids-frein constant, non seulement la durée de stationnement, mais aussi la longueur du parcours d'arrêt diminue avec la vitesse.

Lors de la détermination du poids-frein des *trains de voyageurs*, il faut donc déterminer le pourcentage de poids-frein et le poids-frein accompagnant

la plus courte durée de stationnement qui puisse se produire, compte tenu d'une distance de 400, 700 ou éventuellement 1000 m entre le signal avancé et le signal d'arrêt («parcours d'arrêt»).

Au cas où la locomotive isolée, dans les conditions de voie permises ou données, s'arrête à partir de la vitesse maximum à l'intérieur du parcours d'arrêt,

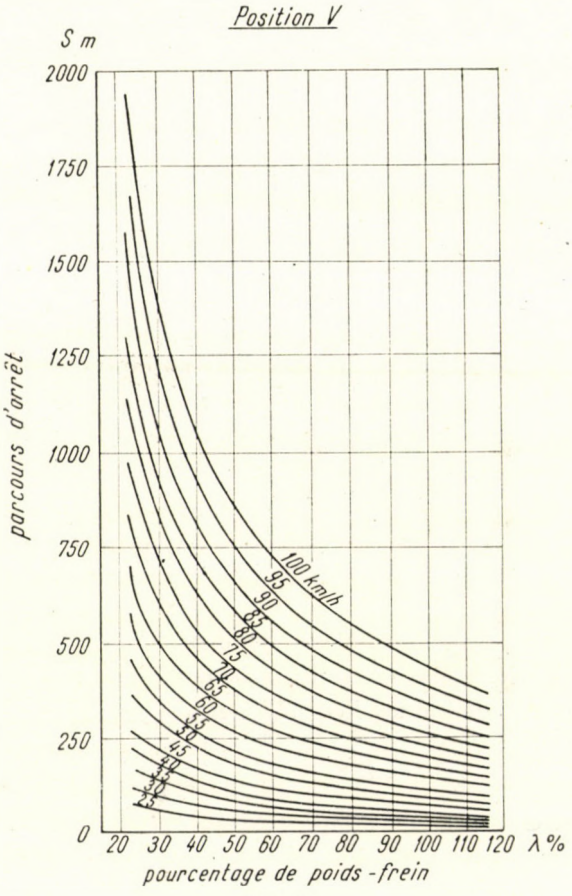


Fig. 5

il faut déterminer le poids-frein à la vitesse maximum, puisque c'est alors qu'on a — compte tenu du parcours d'arrêt donné — la plus courte durée de stationnement.

Si, par contre, la locomotive ne s'arrête pas à la plus grande vitesse à l'intérieur du parcours d'arrêt, le problème — du moins en principe — devient moins simple. Dans ce cas, en effet, si la locomotive roule à sa vitesse maximum, une partie du poids-frein manquant est remplacée du train, c'est-à-dire le train s'arrête à la même vitesse sur un parcours d'arrêt et en un temps plus

court que la locomotive isolée. Dans ce cas, il serait donc en principe incorrect de détermier le poids-frein par le freinage à vitesse maximum de la locomotive ; l'examen devrait être fait à partir de la vitesse donnant précisément le parcours d'arrêt prescrit. L'expérience cependant montre que nos locomotives, s'arrêtent même à partir de leur vitesse permise maximum, à l'intérieur du parcours d'arrêt donné, ou qu'elles ne dépassent celui-ci que de 10 à 15% tout au plus. Ces petites différences de durée peuvent être tranquillement négligées. Il est intéressant de noter qu'en cas de locomotives à vapeur, les provisions diminuant, le parcours d'arrêt et la durée de stationnement diminuent aussi, si bien que le poids-frein sera également un peu réduit. Au point de vue de la sécurité du trafic, cela ne représente aucun danger, puisque le poids total diminuant dans une plus grande mesure implique l'augmentation de la valeur de pourcentage du poids-frein.

β. Examinons également l'influence que les différences de résistance entre la véhicule étalon et la locomotive exercent sur le poids-frein. La valeur de la résistance de la locomotive est, comme on sait, généralement plus grande que celle du véhicule étalon, mais la valeur absolue de la différence diminue rapidement. Si donc, en négligeant pour le moment l'influence des retards de valeurs différentes, on détermine le poids-frein de la locomotive, à partir d'une vitesse donnée, on obtient — précisément comme résultat de la définition —

$$\frac{R_{m\ \text{locomotive}}}{R_{m\ 1\ \text{véhicule étalon}}} = 1\ [\text{kg/kg}]. \tag{23}$$

Si, par contre, on détermine le poids-frein pour une vitesse inférieure à la vitesse originale, alors, en comparaison avec le véhicule étalon à faible chargement, figurant déjà dans l'éq. (23) au lieu de

$$\frac{R_{m\ \text{locomotive}}}{R_{m\ 1\ \text{véhicule étalon}}} < 1\ [\text{kg/kg}] \tag{24}$$

on aura

$$\frac{R_{m\ \text{locomotive}}}{R_{m\ 2\ \text{véhicule étalon}}} = 1\ [\text{kg/kg}] \tag{25}$$

où le pourcentage de poids-frein du véhicule étalon chargé à l'indice 2, ainsi que celui de la locomotive seront plus faibles que l'original.

Pour mieux illustrer ce que cela représente au point de vue quantitatif prenons l'exemple de la locomotive sér. 342, en nous servant des données présentées en fig. 4.

Le parcours d'arrêt de la locomotive, pour une vitesse permise de 90 kg/h (v = 25 m/sec) et un poids total de 69,800 kg, est de 690 m. Ce parcours d'arrêt

est accompagné à la vitesse mentionnée de 48% de poids-frein. Les valeurs relatives au véhicule étalon de la fig. 4. ont été prises pour 49,5% de poids-frein, et sont donc également valables, avec une trés bonne approximation, pour 48%. Pour les freinages effectués à partir de la vitesse de 90 km/h la fig, 4. nous apprend que

$$R_{2m\ \text{locomotive}} = 10{,}7\ \text{kg/t}.$$

et

$$R_{2m\ \text{véhicule étalon}} = 8{,}9\ \text{kg/t}$$

En cas de freinages à partir d'une vitesse v m/sec sur un parcours s m donné, en supposant que 8% de l'énergie engendrée par le roulement du système à freiner s'accumulent dans les masses tournantes, une simple déduction nous permet d'écrire :

$$R_m = 0{,}055\ \frac{v^2}{s}\ [\text{kg/t}]. \tag{26}$$

En vertu de notre définition de base et compte tenu de l'éq. 26., on peut écrire :

$$R_{m\ \text{locomotive}} = R_{m\ \text{véhicule étalon}} =$$

$$= 0{,}055\ \frac{25^2}{690} = 0{,}0498\ \text{kg/kg} = 49{,}8\ \text{kg/t}.$$

Le système de freins proprement dit produit donc, en cas d'une locomotive, un effort de freinage moyen

$$R_{1m\ \text{locomotive}} = 49{,}8 - 10{,}7 = 39{,}1\ \text{kg/t}$$

et en cas d'un véhicule étalon

$$R_{1m\ \text{véhicule étalon}} = 49{,}8 - 8{,}9 = 40{,}9\ \text{kg/t}.$$

En cas d'une vitesse de 50 km/h ($v = 13{,}9$ m/sec), donc bien plus faible que la précédente, les valeurs de R_{2m} du diagramme 4. seront les suivantes :

$$R_{2m\ \text{locomotive}} = 6{,}2\ \text{kg/t} \quad \text{et} \quad R_{2m\ \text{véhicule étalon}} = 5{,}6\ \text{kg/t}.$$

Le parcours d'arrêt du véhicule étalon pour la vitesse de 50 kg/h et — naturellement — un pourcentage de poids-frein constant sera $s = 175$ m. Selon

l'éq. (26)

$$R_{m\ \text{véhicule étalon}} = 0{,}055\,\frac{13{,}9^2}{175} = 0{,}0605\ \text{kg/kg} = 60{,}5\ \text{kg/t}\,.$$

Il s'ensuit que

$$R_{1m\ \text{véhicule étalon}} = 60{,}5 - 6{,}5 = 54{,}9\ \text{kg/t}\,.$$

On sait d'autre part que le rapport des efforts de freinage spécifiques produits par les systèmes de freins la locomotive et du véhicule est

$$\frac{R_{1m\ \text{locomotive}}}{R_{1m\ \text{véhicule étalon}}} = \frac{39{,}1}{40{,}9} = 0{,}956\,.$$

Pour une vitesse de 50 km/h, l'effort de freinage spécifique total de la locomotive est donc

$$R_{m\ \text{locomotive}} = 0{,}956 \cdot 54{,}9 + 6{,}2 = 58{,}7\ \text{kg/t}\,.$$

A cela correspond, pour la locomotive

$$s' = \frac{R_{m\ \text{véhicule étalon}}}{R_{m\ \text{locomotive}}} \cdot s = \frac{60{,}5}{58{,}7} \cdot 175 = 180{,}5\ \text{m}$$

et (dans le diagramme 5), 47% de poids-frein au lieu du pourcentage initial, de 48%, cet écart, déja minime, se trouve encore compensé du fait de la circonstance connue, qu'en cas d'une distance signal avancé — signal d'arrêt et un parcours d'arrêt donnés, les moindres vitesses sont accompagnées de plus grandes durées de stationnement, et l'influence nuisible du temps de perte est relativement plus faible.

On voit que les effets des phénomènes traîtés sous α et β sont opposés. Ce fait a une conséquence avantageuse, à savoir que pour un parcours d'arrêt constant (cas présentant un intérêt spécial au point de vue de la sécurité du trafic) *le poids-frein des trains de voyageurs est, avec une bonne approximation, indépendant de la vitesse.* Il est en tout cas opportun de déterminer en général le poids-frein des trains de voyageurs par un freinage rapide à partir de la plus grande vitesse de la locomotive, car il en ressort immédiatement s'il faut limiter la vitesse de la locomotive isolée.

Il faut noter que dans certaines séries de locomotives (surtout de locomotives-tenders), le poids-frein semble être souvent considérablement plus petit pour des vitesses faibles que pour des vitesses plus grandes. La raison en est que sur les locomotives-tenders, toute la masse du véhicule est naturellement

freinée par la triple-valve ordinaire ayant un plus grand retard. — Au cas où l'on ne freine pas selon le parcours d'arrêt du tableau de freinage, mais selon un pourcentage de pression aux sabots constant, ce fait provoque une diminution apparente du poids-frein. Dans une moindre mesure, il faut aussi compter avec le fait que la résistance spécifique des locomotives-tenders est particu-

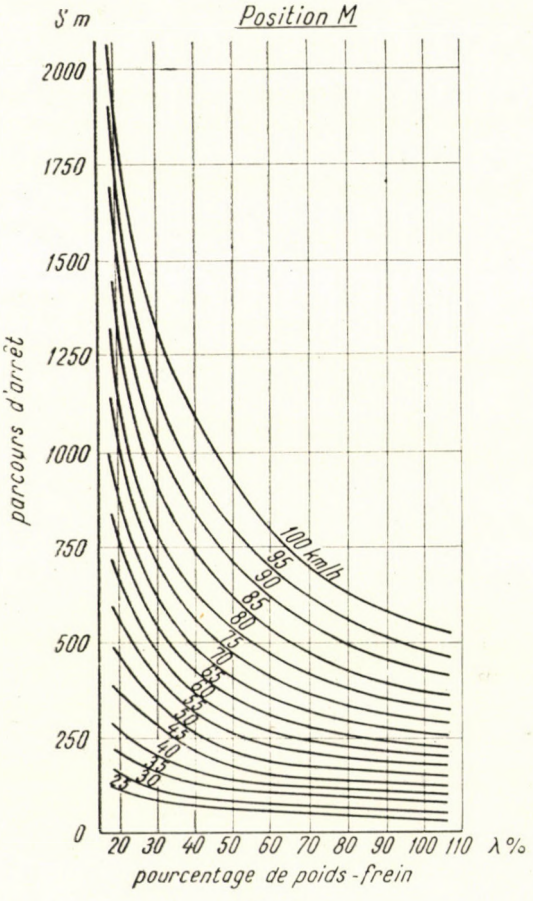


Fig. 6

lièrement grande, ce qui, aux termes du point β, entraîne pour les vitesses faibles une diminution du poids-frein.

b) *Poids-frein des locomotives de trains de marchandises*

Pour déterminer le poids-frein des locomotives de trains de marchandises on se sert de la famille de courbes de la fig. 6., correspondant au freinage en régime marchandises du véhicule étalon.

En ce cas cependant les conditions sont plus compliquées que quand il s'agit du freinage de trains de voyageurs, vu que la condition

$$\frac{1}{s}\int_0^s R_{\text{locomotive}} \cdot \mathrm{d}s = \frac{1}{s}\int_0^s R_{\text{voiture étalon}} \cdot \mathrm{d}s \quad [\text{kg/t}] \tag{17}$$

n'est pas de validité générale. Il ne faut pas oublier en effet, que la triple-valve ordinaire et le dispositif M—V en position M de la locomotive ne produisent pas d'à-coups de première. Il en résulte que — surtout pour les courses de cylindre de frein plus longues, nécessaires pour la mesure du poids-frein — pendant 6 à 10 sec. environ le sabot ne se presse pas contre le bandage, car la pression du cylindre de frein augmente lentement et n'est pas capable de produire un effort de piston pouvant vaincre la résistance de frottement du piston du cylindre de frein et de la timonerie. En cas d'une triple-valve ordinaire et de la position M du dispositif M—V, la cadence du développement de la pression du cylindre de frein — ou en première approximation grossière, la pression aux sabots — correspond à la courbe *a* de la fig. 7. La courbe *c* de la même figure illustre la cadence de développement des pressions aux sabots de frein du véhicule étalon. Notons que le facteur

$$\alpha^3 = \frac{P_{\text{inst.}}}{P^{*}_{\text{max}}} \quad [\text{kg/kg}] \tag{27}$$

figurant en ordonnée du diagramme 7. indique la grandeur de la valeur instantanée de la pression aux sabots, P, rapportée à la valeur maximum (cf. ouvrage cité plus haut).

Sur les tenders, quand la triple-valve ordinaire et le dispositif M—V sont en régime marchandises, le développement en fonction du temps de la pression aux sabots est représenté par la courbe *b* de la fig. 7. On voit que la courbe *b* ressemble bien plus à la courbe *c* du véhicule étalon que la courbe *a* de la locomotive. Le temps de remplissage des cylindres de freins du tender est en effet beaucoup plus court que celui des cylindres de la locomotive, et en outre, le dispositif M—V en position M crée un à-coup de première.

Rappelons cependant que l'effort de freinage n'est pas directement proportionnel aux pressions aux sabots. C'est pourquoi la base de comparaison correcte entre le véhicule étalon et la locomotive (avec tender) à examiner est fourni par l'intensité moyenne de l'effort de freinage (et *non* de la pression aux sabots!) rapportée à sa valeur maximum. L'intensité moyenne est représentée par α^2_m (cf. ouvrage cité).

Le développement des valeurs α^2_m correspondant aux courbes *a*, *b*, *c*, est naturellement aussi fort différent.

Il ressort de ce qui précède que la détermination du poids-frein des locomotives de trains de marchandises nécessite des considérations dépassant les cadres de la méthode de la détermination du poids-frein des trains de voyageurs. Néanmoins le problème est en son essence identique à celui traîté sous le point *a.* du chapitre précédent. Nous devons toujours reconnaître comme valable la constatation faite plus haut, à savoir que *le poids-frein minimum, compte tenu du parcours d'arrêt donné, accompagne la durée minimum de stationnement* — le

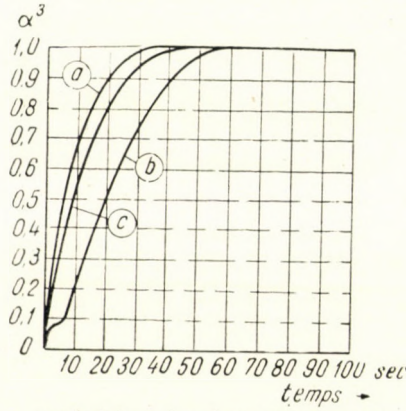


Fig. 7

temps de perte étant, au début du freinage, plus grande pour la locomotive que pour le véhicule étalon.

Au cas, d'ailleurs rare, où la locomotive en régime marchandises s'arrête à partir de sa vitesse maximum permise (c'est-à dire en vertu des règlements du MÁV : 90 km/h au max. pour locomotives de ligne principale et 60 km/h pour locomotives de ligne secondaire) à 700, resp. 400 m, le poids-frein en régime marchandises obtenu lors de l'essai peut être utilisé sans plus.

Si la locomotive s'arrête à partir de la vitesse choisie conformément à ce qui a été dit à l'alinéa précédent, à une distance inférieure au parcours d'arrêt constituant la base du tableau de freinage, *le poids-frein caractéristique* au point de vue de la sécurité du trafic sera supérieur à la valeur expérimentale, tandis qu'au cas inverse il lui sera inférieur, de sorte que *le poids-frein brut* obtenu lors de l'essai demande à être corrigé ultérieurement.

Supposons que la locomotive s'arrête à partir de la vitesse décisive au point de vue du poids-frein des trains de marchandises en un temps t, sur un parcours d'arrêt s ; la famille de courbes de la fig. 6. donne un pourcentage

de poids-frein λ. Pour une vitesse donnée en cas de $0^0/_{00}$, on trouve un pourcentage de poids-frein λ dans le tableau de freinage. La durée de stationnement du train freiné à un pourcentage de poids-frein λ est encore inconnu. Le moyen le plus opportun de surmonter cette difficulté consiste à déterminer d'abord par *la voie théorique* la valeur de $T_{1\ théor}$ et $T_{2\ théor}$, puisqu'en connaissance de celles-ci, la relation

$$T_2 = \frac{T_{2\,théor}}{T_{1\,théor}} \cdot T_1 \ [\text{sec}] \tag{28}$$

permet de déterminer la valeur plus exacte de T_2. Du fait qu'on n'a employé que la relation des valeurs $T_{2théor}$ et $T_{1théor}$ et non la valeur calculée de T_2, l'erreur éventuelle de la méthode de calcul a été plus ou moins éliminée et celle qui peut encore se produire est d'importance réduite.

La méthode employée pour la détermination de $T_{2\,théor}$ et $T_{1\ théor}$ a été exposée en détail dans l'étude citée à plusieurs reprises, de sorte que nous jugeons inutile d'y revenir. Mentionnons cependant qu'en cas de grandes courses de cylindre de frein nécessaires pour la mesure du poids-frein, le sabot de frein de la locomotive, en position M du dispositif M—V, n'est pressé contre le bandage qu'après environ 10 sec, au lieu des 2 sec habituelles (et valables aussi pour le véhicule étalon et le tender). La valeur de la durée de stationnement accessoire, t_{acc}, figurant dans l'éq.

$$T = t' + t_{acc} \ [\text{sec}] \tag{29}$$

doit être établie à 10 sec.

Il faut particulièrement veiller au tracé des courbes de fonctions

$$\alpha_m^2 = \text{fonction}\,(t) \ [1] \tag{30}$$

et

$$\beta = \text{fonction}\,(t) \ [\text{sec}] \tag{31}$$

puisque celles-ci, dans le cas présent, sont loin d'être identiques avec les courbes représentées par la fig. 1. de l'étude précitée. Les valeurs des fonctions (30) et (31) doivent être déterminées à part pour la locomotive et (en cas de locomotives avec tender) pour le tender. En effectuant le tracé, il faut partir des courbes *a* et *b* de la fig. 7., mais dans le cas de la locomotive, le centre du système des coordonnées, sera, pour chaque courbe, déplacé de 8 sec vers la droite, vu les durées accessoires de $10-2 = 8$ sec plus longues que les valeurs habituelles. En cas de locomotives avec tender nous commettons ainsi, bien entendu, une erreur, parce que le tender freine en conséquence de l'à-coup de première — quoique dans une petite mesure — déjà après environ 2 sec. L'erreur est égalisée

si, au cours du calcul on admet, 9, au lieu de 10 sec pour la durée de stationnement accessoire.

Les valeurs de α^2_m et β tracées de cette façon-là pour la locomotive et le tender sont représentées par les fig. 8. et 9.

Le diagramme peut être utilisé sans modification aucune pour les locomotives-tenders, locomotives à moteur et locomotives électriques. En cas de locomotives avec tender, les valeurs correspondant à la valeur t des fig. 8. et 9. doivent être prises, en bonne approximation, avec leur moyenne pondérée par la pression aux sabots de la locomotive et du tender rapportée au total des pressions aux sabots ; ces nouvelles valeurs sont reportées sur un nouveau diagramme, les valeurs de β étant déterminées en partant d'elles. De cette

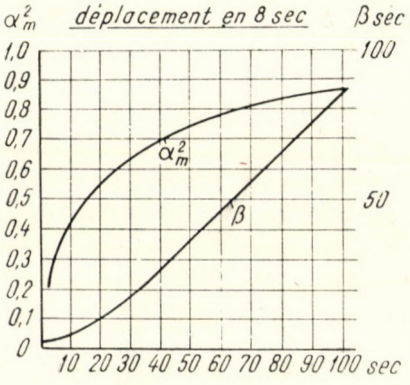


Fig. 8

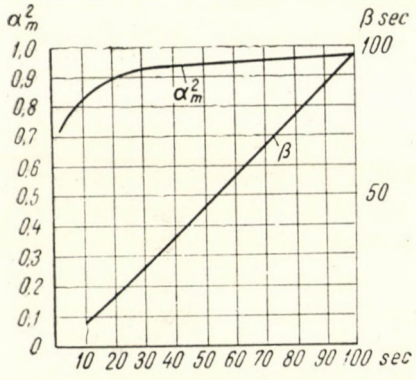


Fig. 9

façon-là on obtient pour chaque série de locomotives avec tender des courbes résultantes α_R et β_R.

Notons qu'en négligeant les valeurs éventuellement différentes de la pression superficielle spécifique aux sabots et en considérant seulement la valeur de la pression aux sabots, nous avons commis une faute de principe. Mais cette négligeance, peu importante, représente une simplification.

A l'aide de la courbe résultante, les valeurs de $t'_{2\ théor}$ et $t'_{1\ théor}$, ainsi que les valeurs de $\alpha^2_{m\,R_2}$ et $\alpha^2_{m\,R_1}$ y correspondant peuvent être déterminées de la manière exposée en détail dans notre étude antérieure.

On sait d'ailleurs qu'à chaque freinage effectué avec la locomotive à étalonner et à chaque durée de stationnement relevée lors du freinage correspondent une valeur de base α_{mR} et une valeur de base α^2_m base du véhicule étalon. Le développement des valeurs de base α^2_m et β_{tase} en fonction du temps est représenté dans le fig. 10. Au cas où la valeur de t_{acc} serait pour la locomotive et le véhicule étalon également de 2 sec, donc identique et relativement peu importante, on pourrait écrire avec une bonne approximation que le rapport des efforts de freinage moyens produits par les systèmes de freins de la locomotive et du

véhicule étalon est, lors de freinages à partir de la même vitesse de trains ayant un pourcentage de poids-frein différent :

$$\frac{R_{1\,m\,2}}{R_{1\,m\,1}} = \frac{\dfrac{a^2_{m\,R\,2}}{a^2_{m\ \text{étalon}\ 2}}}{\dfrac{a^2_{m\,R\,1}}{a^2_{m\ \text{étalon}\ 1}}} = \frac{a^2_{m\,R\,2} \cdot a^2_{m\ \text{étalon}\ 1}}{a^2_{m\,R\,1} \cdot a^2_{m\ \text{étalon}\ 2}} \cdot = X \quad [1] \qquad (32)$$

Dans notre cas, la valeur de t_{acc} n'est pas insignifiante (de 9 à 10 sec. pour la locomotive), et n'est même pas identique pour la locomotive et le véhicule étalon. Néanmoins, en admettant comme valable l'éq. (32), on ne

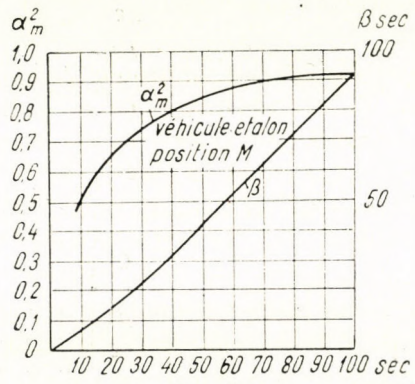


Fig. 10

commet pas de faute sérieuse, parce que dans le nouveau rapport (X) formé des quotients

$$\frac{a^2_{m\,R\,2}}{a^2_{m\ \text{étalon}\ 2}}$$

et

$$\frac{a^2_{m\,R\,1}}{a^2_{m\ \text{étalon}\ 1}}$$

l'erreur systématique des fractions dans le numérateur et le dénominateur devient secondaire.

Dans les limites étroites dont il faut tenir compte lors du calcul, la famille de courbes de la fig. 6. peut être considérée avec une bonne approximation comme une hyperbole, si bien qu'on peut enfin écrire la valeur corrigée du poids-frein de la locomotive de trains de marchandises :

$$A_m = X \cdot B_{m\ \text{brut.}} \quad [\text{kg}] \qquad (33)$$

La divergence de $R_{2\ \text{locomotive}}$ et $R_{2\ \text{véhicule}}$ modifie la valeur du poids-frein même en régime marchandises. Son effet cependant — tout en ayant une plus grande importance à cause du poids-frein, inférieur en régime marchandises qu'en régime voyageurs — peut être négligé. En effet, en cas d'une locomotive ayant une faible vitesse permise, il n'y a pas de grande différence entre le pourcentage de poids-frein de la locomotive et le pourcentage maximum pouvant se produire à $0^0/_{00}$. Si, par contre, la locomotive ne peut s'arrêter à la plus grande vitesse possible en régime marchandises que sur un parcours supérieur à celui fixé par le tableau de freinage, l'éq. (32) s'avère, à cause des valeurs de R_2 invariables, quelque peu inexacte à l'avantage de la sécurité. Celle-ci augmente encore par le fait que, pour des raisons connues, la durée de stationnement diminue par rapport à celle de la locomotive isolée dans une petite mesure que le rapport des pourcentages du poids-frein, ce qui signifie que nous avons un peu sous-estimé le poids-frein des trains de voyageurs obtenu.

On voit donc que la détermination du poids-frein est beaucoup plus compliquée pour une locomotive de trains de marchandises que pour celles des trains de voyageurs, et que surtout, *le poids-frein de la locomotive de trains de marchandises n'est pas constant en fonction de la vitesse. Comme poids-frein caractéristique* de la locomotive il faut *fixer le poids-frein minimum* obtenu dans les cas importants du point de vue de la sécurité du trafic. Cela signifie que dans la majorité des cas, on sous-estime un peu le poids-frein de nos locomotives de trains de marchandises, ce qui en réalité n'est pas aussi désagréable qu'il nous semble. Des poids-frein supérieurs à ceux inscrits ne sont, en effet obtenus qu'en cas de vitesses plus faibles, où de toute façon la locomotive se freine elle-même, mais le freinage du train par la locomotive est interdit comme pouvant causer une rupture du train. Pour les plus grandes vitesses, nécessitant effectivement le poids-frein de la locomotive, le poids-frein n'est pas du tout, ou très peu inférieur à la valeur inscrite.

c) *Poids-frein en cas de freins à haute puissance*

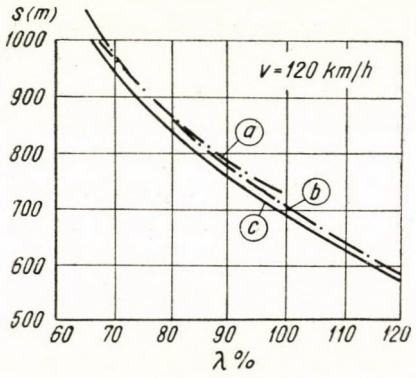
Comme nous l'avons dit, la valeur du poids-frein en cas de freins à haute puissance ne peut non plus être déterminée par la mêthode de l'U.I.C., sous sa forme originale. Cependant le problème peut être résolu selon l'initiative de ZEMAN. En effet, selon les expériences de ZEMAN, l'équation valable pour des trains de 60 essieux, connue de la décision No. 546 de l'U. I. C.

$$S = \frac{4{,}24\, v^2}{\lambda \dfrac{57{,}5\, v}{v - 20} + 0{,}05\, v}\ [m] \qquad (33)$$

peut être appliquée à un véhicule isolé (dans notre cas une locomotive), avec la modification suivante :

$$S = \frac{4{,}24\, v^2}{\lambda \dfrac{57{,}5\, v}{v - 36} + 0{,}05\, v} \; [m] \,. \tag{34}$$

Sur la fig. 11. nous avons représenté la courbe correspondant à l'éq. (34) ainsi que celle relative au freinage d'un wagon de voyageurs à partir d'une vitesse de 120 km/h, à pourcentage de poids-frein variable.



a.) UIC véhicule
b.) MÁV locomotive
c.) Zeman locomotive

Fig. 11

On voit que la courbe de ZEMAN s'écarte assez considérablement de la courbe de l'U. I. C. Aucune explication ne pouvant être fournie de ce fait, il semble opportun d'écrire l'éq. (34) sous la forme corrigée suivante :

$$S = \frac{4{,}24\, v^2}{\lambda \dfrac{57{,}5\, v}{v - 34} + 0{,}05 v} \; [m] \tag{35}$$

ou sous la forme plus appropriée :

$$\lambda = 0{,}0738 \frac{v^2}{S} - 2{,}51 \frac{v}{S} - 0{,}00087\, v - 0{,}0295 \; [1] \tag{36}$$

En portant la courbe correspondant du paramètre $v = 120$ km/h de l'éq. (36) sur la fig. 11., on constate qu'elle coïncide assez bien avec la courbe

de l'U. I. C. et ce n'est qu'au cas de grands pourcentages de poids-frein qu'elle fournit des pourcentages quelque peu inférieurs à ceux de la méthode de l'U. I. C. pour véhicules.

On sait que, pour des raisons connues, le poids-frein à haute puissance n'est pas non plus constant pour les véhicules mais varie en fonction de la vitesse.

4. Exemples pratiques pour la détermination du poids-frein des locomotives

Au chap. 3. on a exposé en détail les principes dont l'application permet de déterminer le poids-frein des locomotives. Les exemples suivants illustreront la mise en application des méthodes élaborées.

Exemple 1.

Déterminons le poids-frein de la locomotive sér. 424 en régimes voyageurs et marchandises. Les principales caractéristiques de la locomotive sont les suivants :

Poids de la locomotive en service		85 100 kg
poids du tender		58 900 kg
poids total		144 000 kg
somme des pressions aux sabots en cas d'une course de 170 mm	en position M et V de la locomotive	17 300 kg
	V	16 100 kg
	M du tender	15 100 kg
η mech = 0,6		
somme des surfaces des sabots de frein	locomotive	3 400 cm²
	tender	3 000 cm²

Sur la locomotive il y une triple-valve ordinaire avec dispositif M—V, et sur le tender une triple-valve à action rapide avec dispositif M—V. La vitesse max. permise : $v_{max} = 90$ kg/h.

On sait que le poids-frein de la locomotive *en régime voyageurs* n'est pas déterminé à partir d'une vitesse rigoureusement établie. Il est cependant utile de choisir à cette fin la vitesse max. permise, $v = 90$ km/h. Les essais ont donné, comme moyenne de plusieurs mesures effectuées à partir de la vitesse indiquée un parcours d'arrêt $S = 780$ m. Selon la fig. 5., cette valeur correspond à un pourcentage de poids-frein $\lambda = 40{,}5$. Compte tenu du poids total de la locomotive lors des essais, le poids-frein de la locomotive en régime voyageurs est : $B_v = 0{,}405 \cdot 144\,000 = 57\,800$ kg $= 57{,}8$ t $= 58$ *t*.

La vitesse caractéristique pour la détermination du poids-frein brut *en régime marchandises* est également de 90 km/h, parce que sur les lignes principales du MÁV c'est la vitesse max. permise pour les trains circulant avec un freinage en régime marchandises. A partir de cette vitesse on obtient, comme moyenne de plusieurs mesures, un parcours d'arrêt $S = 950$ m et une durée stationnement $T = 67$ sec. D'après la fig. 6., le pourcentage de poids-frein correspondant à ce parcours d'arrêt, en cas d'une vitesse de 90 km/h, est $\lambda_{brut} = 32\%$. Du tableau de freinage pour 700 m du MÁV, on constate qu'en cas de $0\,‰$ la vitesse de 90 km/h a comme valeur correspondante 93%. La durée min. possible de stationnement correspond donc (approximativement) à ce tableau. A l'aide de calculs que nous n'exposons pas ici en détail, on peut déterminer le parcours d'arrêt et la durée de stationnement correspondant aux deux pourcentages de poids-freins :

$$S_{32} = 1054 \text{ m} \qquad T_{32\ théor} = 73 \text{ sec}$$

$$S_{93} = 602 \text{ m} \qquad T_{93\ théor} = 37{,}5 \text{ sec}$$

Aux termes de la relation (28) la durée de stationnement correspondant à 93% de poids-frein est

$$T_{93} = \frac{37{,}5}{73} \cdot 67 = 34{,}4 \text{ sec}$$

Notons que les résultats obtenus par le calcul montrent que le rendement de la timonerie de la locomotive est supérieur aux 60% supposés. On sait cependant qu'en considération des rapports utilisés, cette circonstance n'influence que très peu la valeur du poids-frein cherché.

Avant de poursuivre, il faut tracer la courbe moyenne α^2_{mR} valable pour la locomotive et le tender pris comme véhicule unique, compte tenu d'une part des fig. 8. et 9. et d'autre part des pressions aux sabots de la locomotive et du tender considérées sous le rapport du poids. Les poids entrant en ligne de compte lors de la détermination de la moyenne sont :

$$\text{locomotive : } \frac{17\,300}{17\,300 + 15\,100} = 0534$$

$$\text{tender : } \frac{15\,100}{17\,300 + 15\,100} = 0{,}466$$

La courbe ainsi obtenue est représentée par la fig. 12.

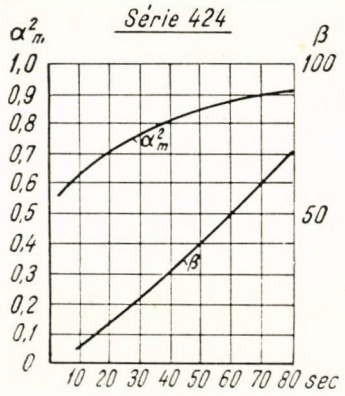


Fig. 12

A la base de l'éq. 32. on sait que

$$X = \frac{\alpha^2_{mR_2} \cdot \alpha^2_{m\,\text{étalon}\,1}}{\alpha^2_{mR_1} \cdot \alpha^2_{m\,\text{étalon}\,2}} \text{ [1]}$$

Les valeurs α^2_{mR} sont celles de la locomotive, les valeurs α^2_m étalon celles du véhicule étalon. A cause des différentes valeurs de la durée de stationnement accessoire il faut, en déterminant la valeur des intensités relatives, prendre en considération en cas de la locomotive

$$t_{\text{loc }1} = 67 - 10 = 57 \text{ sec et } t_{\text{loc }2} = 34{,}4 - 10 = 24{,}4 \text{ sec}$$

et en cas du véhicule étalon

$$t_{\text{ét }1} = 67 - 2 = 65 \text{ sec et } t_{\text{ét }2} = 34{,}4 - 2 = 32{,}4 \text{ sec}$$

A la base des fig. 10. et 12. on aura donc

$$\alpha^2_{mR1} = 0{,}87 \qquad \alpha^2_{mR2} = 0{,}73$$

Ainsi $\alpha^2_{R\text{étalon}\,1} = 0{,}87 \qquad \alpha^2_{R\text{étalon}2} = 0{,}745$

$$X = \frac{0{,}73 \cdot 0{,}87}{0{,}87 \cdot 0{,}745} = 0{,}98$$

Compte tenu du fait que lors des essais, le poids total de la locomotive et du tender était, à cause des provisions diminuées, $Q = 143\ 100$ kg, le poids-frein caractéristique des trains de marchandises :

$$B_m = \lambda_{brut} \cdot X \cdot Q = 0{,}32 \cdot 0{,}98 \cdot 143\ 100 = 44\ 900 \text{ kg} = 44{,}9 \text{ t} = 45\ t.$$

Exemple 2.

Déterminons le poids-frein à haute puissance de la locomotive électrique sér. V 55, d'un poids total de 92 000 kg, en cas d'un freinage à partir de la vitesse $v = 125$ km/h. en position R du système de freins.

Dans les conditions indiquées, la locomotive s'arrête sur un parcours d'arrêt $S = 862$ m. Le pourcentage de poids-frein correspondant sera, (selon l'éq. 36.).

$$\lambda = 0{,}0738 \cdot \frac{125^2}{862} - 2{,}51 \cdot \frac{125}{862} - 0{,}00087 \cdot 125 - 0{,}0295 = 0{,}894 = 89{,}4\%$$

Ainsi donc en position R du frein, en freinant à partir d'une vitesse de 125 km/h, le poids-frein à haute puissance de la locomotive sera :

$$B_R = 0{,}894.\ 92\ 000 = 82\ 250 \text{ kg} = 82{,}25 \text{ t} = 82\ t$$

LITTÉRATURE

HELLER, GY. : Sur les caractéristiques de freinage des véhicules de chemin de fer. (Acta Technica Tomus XII. Fasciculi 1—2, 1955.)

HILDEBRAND : Die Entwicklung der selbsttätigen Einkammer-Druckluftbremse bei den europäischen Vollbahnen. (Berlin 1927, Ergänzungsband 1939).

REINECKE—SCHÖNING : Wie ermittelt man das Bremsgewicht von Lokomotiven bei den nicht bundeseigenen Eisenbahnen des öffentlichen Verkehrs? (Verkehr und Technik 1954 V. 5.)

ZEMAN—CINNER : Zpráva c. 197. výzkumu brzdovych vah lokomotivy a tendrů dvounapravovych motoru a privesnych vozů (V. U. Z. Praha).

RÉSUMÉ

Dans la première partie de l'étude, les auteurs examinent brièvement, en général et en principe la notion du poids-frein et, dans le cadre de celle-ci, les différents poids-frein des véhicules. Ils passent ensuite aux difficultés relatives à l'interprétation de la notion de poids-freins des locomotives et aux différentes possibilités d'interprétation, puis exposent en détail la méthode élaborée pour la détermination du poids-frein des locomotives du MÁV. En terminant ils présentent quelquels exemples concrets.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE LOKOMOTIVBREMSLAST

GY. HELLER und L. ROSTA

ZUSAMMENFASSUNG

Der erste Teil des Aufsatzes befasst sich mit der Untersuchung des allgemeinen, prinzipiellen Begriffes der Bremslast. In diesem Rahmen werden verschiedene Begriffe des Wagenbremsgewichts untersucht. Hierauf wird auf die Schwierigkeiten und die Möglichkeiten der Deutung des Begriffes der Lokomotivbremlast übergegangen und das für die Lokomotiven der Ungarischen Staatsbahnen (MÁV) ausgearbeitete Verfahren der Bremslastbestimmung erörtert. Schliesslich werden einige konkrete Beispiele angeführt.

INVESTIGATIONS ON LOCOMOTIVE BRAKE LOAD

GY. HELLER and L. ROSTA

SUMMARY

The first part of the paper deals with the general definition of brake load in principle. Different concepts of railcar brake load are investigated in this context. Afterwards difficulties and possibilities of the interpretation of engine brake load are treated, and the method of determination of brake load elaborated for the MÁV (Hungarian State Railways) engines is presented. Some actual examples are given as a conclusion.

ИССЛЕДОВАНИЯ В СВЯЗИ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ ТОРМОЗНОГО ГРУЗА ЛОКОМОТИВА

ДЬ. ХЕЛЛЕР и Л. РОШТА

РЕЗЮМЕ

Первая часть работы кратко занимается общим теоретическим исследованием понятия тормозного веса. В рамках этого исследуются различные понятия тормозного веса вагонов. После чего автор переходит к изложению затруднений и различных возможностей трактовки понятия тормозного груза локомотивов, затем дается детальное описание метода, разработанного для определения тормозного груза локомотивов Государственных железных дорог Венгрии. В заключительной части демонстрируется несколько конкретных примеров.

DIFFERENTIATING AND INTEGRATING CIRCUITS

G. FODOR and G. TEMES

DEPARTMENT FOR THE THEORY OF ELECTRICITY, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received 8th April, 1955]

I. The fundamental equation of differentiating and integrating circuits

The demand for applying voltages proportional to the derivative (or to the integral) of some pulsating voltage may arise in connection with the most different technical problems. In telecommunication chiefly differentiating circuits are used, because the begin and the end of the differentiated signal are generally sharper than the original signal ; hence they are better suited for use as trigger pulses. In such a case it is obviously not essential for the output signal of the differentiator to be perfect, so generally we are satisfied with the simplest circuit. But if the derivative or the integral of the primary signal is needed for measuring or for controlling purposes, we must aim at the highest possible precision.

Subsequently we will investigate first the possibilities for designing differentiator and integrator circuits, and then the limits of realizing them.

In our computations we will use the Laplace transformation for passing from functions of time to quantities depending on the p complex variable and we will make our calculations in the p region. (Time functions will be denoted by capital lettres, p region functions by small letters.)

The problem consists therefore in devising such a circuit that connecting to it $U_1(t)$ or $u_1(p)$ voltage, the secondary voltage will be

$$U_2 = \tau \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} \qquad \text{or} \qquad u_2 = p\tau\, u_1 \tag{1a}$$

respectively

$$U_2 = \frac{1}{\tau} \int_0^t U_1 \,\mathrm{d}t \quad \text{or} \qquad u_2 = \frac{1}{p\tau}\, u_1 \tag{1b}$$

Let us examine the L-network of Fig. 1. The ratio of the voltages in the p region can be written with the aid of the p region impedances :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{z_2}{z_2 + z_1} = \frac{\frac{z_2}{z_1}}{1 + \frac{z_2}{z_1}}$$

The condition for perfect differentiation, or integration as the case may be, are

$$\frac{u_2}{u_1} = p\tau \qquad \text{or} \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{p\tau}, \text{ respectively .}$$

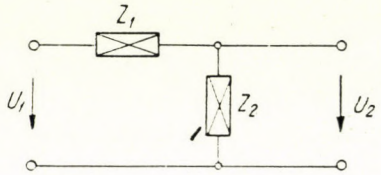


Fig. 1. General L-net work

From this we get the following conditions for the ratio of the impedances in the p region :

for a differentiator $$\frac{z_2}{z_1} = -\frac{p\tau}{1 - p\tau} \tag{2a}$$

for an integrator $$\frac{z_2}{z_1} = \frac{p\tau}{p\tau - 1} . \tag{2b}$$

The condition for the impedances cannot be satisfied with passive elements because of the presence of the negative member ; therefore the exact solution is complicated. But if we are satisfied with approximate solutions, the problem may be solved with passive elements too.

II. Approximate methods for solving the fundamental equation

Let us examine first the possibilities for finding an approximate solution. The condition for ideal differentiating is

$$\frac{z_2}{z_1} = -\frac{p\tau}{1 - p\tau} . \tag{2a}$$

If the value of τ is small, it can be supposed that $|p\tau| \ll 1$ and therefore the condition (2a) can be developed into a geometrical series of ratio $p\tau$:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{p\tau}{1 - p\tau} = p\tau \left[1 + (p\tau) + (p\tau)^2 + \ldots\right] \tag{3a}$$

Similarly, for an integrator $1/|p\tau| \ll 1$ in the case of a large value of τ and thus the condition (2b) can be developed into a geometrical series with ratio $1/p\tau$:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{p\tau - 1} = \frac{1}{p\tau} \frac{1}{1 - \frac{1}{p\tau}} = \frac{1}{p\tau}\left[1 + \frac{1}{p\tau} + \frac{1}{(p\tau)^2} + \ldots\right] \tag{3b}$$

If we replace the impedance fraction by a Taylor series, the voltage ratio can also be developed into a Taylor series. In the case of a differentiator :

$$\frac{u_2}{u_1} = p\tau\left[1 + a_1 p\tau + a_2 (p\tau)^2 + \ldots\right]$$

while for an integrator :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{p\tau}\left[1 + \frac{a_1}{p\tau} + \frac{a_2}{(p\tau)^2} + \ldots\right].$$

Let us express the difference between the real and the ideal output signals

$$u_2 - p\tau\, u_1 = \left[a_1 (p\tau)^2 + a_2 (p\tau)^3 + \ldots\right] u_1$$

$$u_2 - \frac{1}{p\tau} u_1 = \left[\frac{a_1}{(p\tau)^2} + \frac{a_2}{(p\tau)^3} + \ldots\right] u_1$$

As according to our supposition $|p\tau|$ or, respectively, $1/|p\tau|$ is smaller than unity, the difference between the ideal and the real signal is so much the less, the smaller are the a_k coefficients. Amongst them, the value of the coefficient with the smallest index is decisive. E. g. if we succeed in making $a_1 = 0$, this will be a better approximation, independently of the value of a_2, than with a finite value of a_1.

All these considerations are correct only if the development into a series is justified, i. e. if $|p\tau|$ or, respectively, $1/|p\tau|$ is less than unity. However small (respectively large) we choose the value of τ, the condition will not be fulfilled if $|p|$ itself is large (or small). Hence in the case of a differentiating circuit for a large p, in the case of an integrating circuit for a small value of p, the development in a series is not authorized. According to a theorem of the Laplace transformation, to the $p \to \infty$ region corresponds the $t \to 0$ region and conversely. It follows from this that the signal of the differentiating circuit strongly departs from the ideal at its begin, the signal of the integrating circuit departs from it at its end. As an approximation we may state that the signal of the circuit until $t = \tau$ (or, respectively, from it onward) strongly departs from the ideal. So finally it is the time constant which essentially determines that moment, from which onward (or until which) the output signal is conform to the ideal signal.

The subsequent calculations will always be carried out for the p region, but when appreciating the results we must not forget the above points of view.

After this, we will investigate in which way can be realized the (3a,b) conditions for the impedance fractions, if we approximate the Taylor series on the right side by different Taylor polynomials of increasing degree.

1. First approximation

Let us take on the right side a first degree Taylor polynomial. Then

$$\frac{z_2}{z_1} \cong p\tau \qquad \text{or} \qquad \frac{z_2}{z_1} \cong \frac{1}{p\tau} . \tag{4a, b}$$

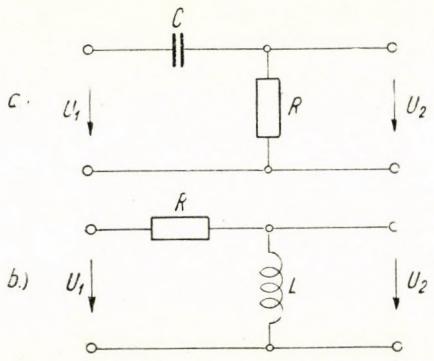


Fig. 2. The simplest differentiating circuits. *a) C—R* differentiator ; *b) R—L* differentiator

The possible ways for satisfying this are, in the case of a differentiator :

$$z_1 = \frac{1}{pC}; \qquad z_2 = R; \qquad \tau = RC$$

$$z_1 = R; \qquad z_2 = pL; \qquad \tau = \frac{L}{R} \tag{5a}$$

In the case of an integrator :

$$z_1 = R; \qquad z_2 = \frac{1}{pC}; \qquad \tau = RC$$

$$z_1 = pL; \qquad z_2 = R; \qquad \tau = \frac{L}{R} \tag{5b}$$

(Fig. 3) In both cases the first alternative is easier to realize, because a no-loss condenser is easier to make than a no-loss inductance. (In Sec. III. we will deal with the influences exerted by the not ideal condition of the elements.)

The ratio of the voltages in the p region is

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\dfrac{z_2}{z_1}}{1 + \dfrac{z_2}{z_1}} = \frac{p\tau}{1 + p\tau} \cong p\tau\,(1 - p\tau) \tag{6a}$$

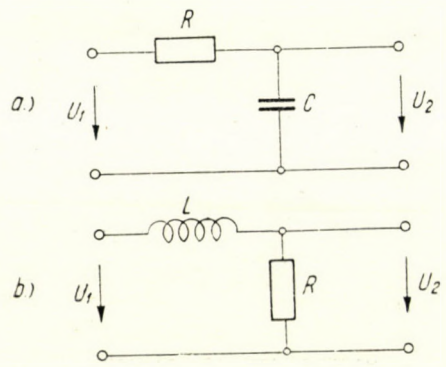


Fig. 3. The simplest integrating circuits. *a) R—C* integrator ; *b) L—R* integrator

or respectively

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\dfrac{1}{p\tau}}{1 + \dfrac{1}{p\tau}} \cong \frac{1}{p\tau}\left(1 - \frac{1}{p\tau}\right) . \tag{6b}$$

The ratio of the voltages is the better an approximation of the ideal $p\tau$ or $1/p\tau$ value, the more $|p\tau|$ or $1/|p\tau|$ can be neglected with respect to unity. On the error of differentiation or integration the influence of this member is dominating, therefore one must aim at reducing it.

The most obvious solution is to choose a small time constant τ for differentiating circuits and a big one for integrating circuits. But in these cases the secondary signal will be proportionally smaller. The better this circuit differentiates (or integrates) the more it attenuates the signal. On the other hand, the circuit elements of the differentiator must not be chosen so small that they are comparable to the stray elements (resistance, inductance or capacitance of leads etc.).

2. *Second approximation*

Let us take into consideration a second member of the $\frac{z_2}{z_1}$ series. In the case of a differentiator

$$\frac{z_2}{z_1} \cong p\tau\,(1 + p\tau)\ . \tag{7a}$$

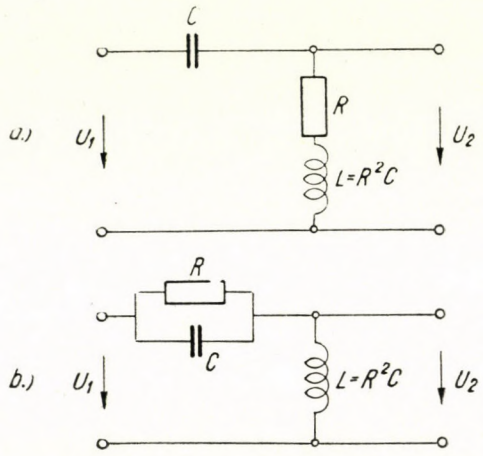


Fig. 4. The best differentiating circuits which can be realized with passive elements. *a) C—R—L* differentiator ; *b) R—C—L* differentiator

The possible realizations of this can be found by further development of the first approximation (Fig. 2).

$$z_1 = \frac{1}{pC}; \qquad z_2 = R + pL; \qquad \tau = RC = \frac{L}{R}$$

$$z_1 = R \times \frac{1}{pC} = \frac{R}{1 + pCR}; \qquad z_2 = pL; \qquad \tau = RC = \frac{L}{R} \tag{8a}$$

It is worth paying attention to the fact that only two of the three parameters can be chosen independently, the third one is already given by the relation

$$L = R^2 C$$

(Fig. 4). The first of the two alternatives is more suitable for practical applications, since there the resistance of the inductance does not disturb because of the resistor connected in series with it.

If developed into a series, the condition for the integrating circuit takes the following form :

$$\frac{z_2}{z_1} \cong \frac{1}{p\tau}\left(1 + \frac{1}{p\tau}\right). \tag{7b}$$

This can be realized by :

$$z_1 = R \times pL\,; \qquad z_2 = \frac{1}{pC}\,; \qquad \tau = RC = \frac{L}{R}$$

$$z_1 = pL\,; \qquad z_2 = R + \frac{1}{pC}\,; \quad \tau = RC = \frac{L}{R} \tag{8b}$$

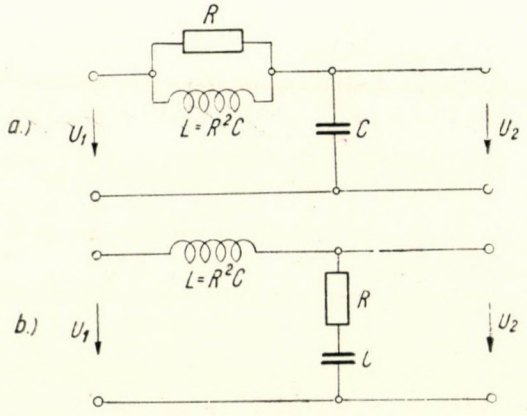


Fig. 5. The best integrating circuits which can be realized with passive elements. *a) R—L—C* integrator ; *b) L—R—C* integrator

(Fig. 5). Here as well there subsists the equation $L = R^2C$ between the parameters. But realization of the networks is a difficult problem. On the one hand, for both there would be necessary a pure inductance, on the other hand we are conducted to a large value of the inductance because of the large τ. One can help this somewhat by chosing R (from which L depends in quadratic ratio) relatively small, and C relatively large.

The ratio of the voltages in the p region in the case of a differentiating circuit is :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\dfrac{z_2}{z_1}}{1 + \dfrac{z_2}{z_1}} = \frac{p\tau\,(1 + p\tau)}{1 + p\tau\,(1 + p\tau)} \cong p\tau\left[1 - (p\tau)^2\right] \tag{9a}$$

In the case of an integrating circuit :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{z_2}{z_1}}{1+\frac{z_2}{z_1}} = \frac{\frac{1}{p\tau}\left(1+\frac{1}{p\tau}\right)}{1+\frac{1}{p\tau}\left(1+\frac{1}{p\tau}\right)} \cong \frac{1}{p\tau}\left[1-\frac{1}{(p\tau)^2}\right]. \tag{9b}$$

These approximations are better than the previous ones (6a, b), inasmuch as the error factor there is $(p\tau)^2$ and $1/(p\tau)^2$ instead of $p\tau$ and $1/p\tau$, the former being always smaller than the latter because of the small values of τ or $1/\tau$, respectively. Now it is true as well that for a small t the signal of the differentiating circuit, for a large t the signal of the integrating circuit departs from the ideal one.

The inductance inserted into the differentiating circuit makes the signal steeper, therefore the circuit is suited for producing trigger pulses too. The steepness is determined by the ratio of the maximum output signal to the time pertaining to it. One may show that in the case of a voltage step input the average steepness of the output signal, defined in this way, is the greatest if $L = R^2C$, which condition is equal to that for the inductance providing optimum differentiating conditions (Ref. 9.).

3. *Possibilities for better approximations*

In the condition for the impedance fraction, let us consider now one more member of the series. Then for a differentiating circuit :

$$\frac{z_2}{z_1} \cong p\tau\left[1+(p\tau)+(p\tau)^2\right] = p\tau+(p\tau)^2+(p\tau)^3$$

and for an integrating circuit

$$\frac{z_2}{z_1} \cong \frac{1}{p\tau}\left[1+\frac{1}{p\tau}+\frac{1}{(p\tau)^2}\right] = \frac{1}{p\tau}+\frac{1}{(p\tau)^2}+\frac{1}{(p\tau)^3}$$

But it can be shown that for an impedance written in the form of a rational fraction, the absolute value of the difference between the degrees of the numerator and the denominator cannot be larger than 1, therefore the condition equation cannot be satisfied by passive elements (Ref. 6, 11).

It would be obvious to look for a better approximation by using a more general quadrupole for our network instead of an L-net work. But if — conformingly with the conditions which have been so far used — the signal is supplied by an ideal voltage generator (active short circuit) and an ideal voltage registrator (measuring gap) receives it, the T-or Π-networks are not of a more general

character than an L-network. The secondary side of the T-network is ineffective, because there flows no current, while the primary side of the Π-network is shunted by the voltage generator. For the general X-network one may prove as well, after some calculations, that it gives no better approximation, and because of attenuation the amplitude of the output signal even decreases.

From the above it follows that from passive elements one cannot construct better differentiating or integrating arrangements than those described in section 2.

4. *Special networks with passive elements*

As has been remarked, the quality of differentiation or integration cannot be improved by the use of a more general quadripole. But the more general

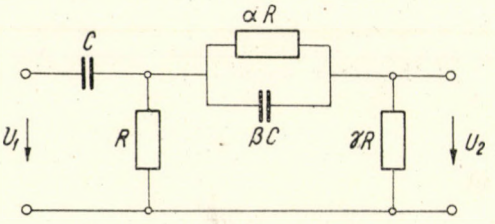


Fig. 6. Special differentiating network with passive elements

quadrupoles may be used for eliminating the inductance, which is disagreable chiefly in the case of integrators.

Let us investigate the circuit shown in Fig. 6. By elementary calculations it can be shown that, using the designation $RC = \tau$:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{\gamma p\tau}\left[1 + \gamma + \alpha\frac{1 + p\tau}{1 + \alpha\beta p\tau} + \gamma\, p\tau\right].$$

Developing into a series and supposing that $|p\tau| \ll 1$

$$\frac{u_1}{u_2} \simeq \frac{1}{\gamma p\tau}\left[(1 + \alpha + \gamma) + (\gamma + \alpha - \alpha^2\beta)\, p\tau + \alpha^2\beta\,(\alpha\beta - 1)\,(p\tau)^2\right]$$

The member which is linear in $p\tau$ can be eliminated if

$$\beta = \frac{\gamma + \alpha}{\alpha^2}.$$

Then

$$\frac{u_2}{u_1} \cong \frac{\gamma p\tau}{1+\gamma+\alpha+\dfrac{\alpha+\gamma}{\alpha}\gamma p^2\tau^2} \cong p\tau\,\frac{\gamma}{1+\alpha+\gamma}\left[1-\frac{\gamma+\alpha}{1+\gamma+\alpha}\,\frac{\gamma}{\alpha}\,p^2\tau^2\right].$$

The error member can be reduced by increasing α but then the "amplitude' decreases. Let us introduce the time constant

$$\tau' = \frac{\gamma}{1+\gamma+\alpha}\,\tau$$

by which the "attenuation" is defined. Then

$$\frac{u_2}{u_1} \cong p\tau'\left[1-f(\alpha,\gamma)\,(p\tau')^2\right]. \tag{10a}$$

The coefficient of the error member is

$$f(\alpha,\gamma) = \frac{(\gamma+\alpha)\,(1+\gamma+\alpha)}{\alpha}.$$

Its value increases steadily with γ, but as a function of α it has a minimum, which is easily shown, at

$$\alpha_0 = \sqrt{\gamma+\gamma^2}.$$

The optimal case is thus

$$\alpha_0 = \sqrt{\gamma+\gamma^2} \qquad \beta_0 = \frac{\gamma+\sqrt{\gamma+\gamma^2}}{\gamma+\gamma^2}$$

$$f(\alpha_0,\gamma) = 1+2\gamma+2\sqrt{\gamma+\gamma^2}. \tag{11}$$

The value of the error member is the smallest in the case of $\gamma = 0$, *i.e.* $f(\alpha_0) = 1$ (the same as with the *CRL*-differentiator). But then $\tau' = 0$, and obviously from Equ. (10a) the output signal is identically zero. The larger γ, the larger is the output signal, but the larger is the error member too. E. g. in the case of $\gamma = 1$,

$$\alpha_0 = \sqrt{2} = 1{,}41 \qquad \beta_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{1+1} = 1{,}21$$

$$\tau_0' = \frac{\tau}{1+1+\sqrt{2}} = \frac{RC}{3{,}41}$$

$$f(\alpha_0, 1) = 5{,}82\,.$$

The error member does not contain a linear member, but the coefficient of the quadratic member is of necessity larger than in the case of a *CRL*-differentiator and thus its output signal is worse.

An integrating circuit working on a similar principle can be seen in Fig. 7. Here

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{p\tau}{\gamma}\left[1+\gamma+\alpha\,\frac{1+\dfrac{1}{p\tau}}{1+\dfrac{\alpha\beta}{p\tau}}+\frac{\gamma}{p\tau}\right].$$

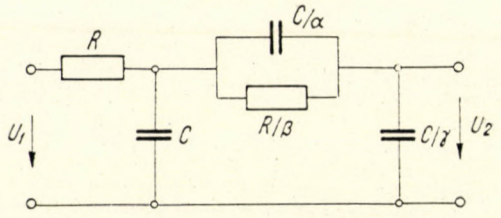


Fig. 7. Integrating network with passive elements (Wiegand—Hansen integrator)

As we develop into series according to $1/p\tau$, we have here a form which is exactly the same as with a differentiating circuit. Finally, we get the following form :

$$\frac{u_2}{u_1} \cong \frac{1}{p\tau'}\left[1 - f(\alpha,\gamma)\,\frac{1}{(p\tau')^2}\right] \qquad (10b)$$

$$\tau' = \tau\,\frac{1+\gamma+\alpha}{\gamma}\,.$$

The error member f (α, γ) and the dependence of α and β on γ are the same as has been discussed for the differentiator. Again the coefficient of the quadratic error member can only be larger than that of the *RCL*-integrator, which it is impossible to realize — as we have seen — because of the single inductance.

The integrator discussed here is referred to as Wiegand—Hansen integrator in literature 10. We did not succeed in procuring the original paper. The reference starts from the values $\alpha = \gamma = 1$ and deduces $\beta = 2$ for an optimum. Then the coefficient of the error member is 6 and $\tau' = 3\tau$. On the base of the more general deduction shown here, an integrating circuit better than this can be devised with smaller elements.

5. *Circuits with electron tubes*

The basic problem of the differentiators and integrators made of passive elements is that they give either a distorted, or a strongly reduced output signal, depending on the value of the time constant. It is an obvious idea to choose a time constant guaranteeing a good output signal and to amplify the small signal which is got in this way. But such a circuit is sensitive to the distortion and to the noises of the amplifier. This prejudicious effect is reduced (because of the high negative feedback) by the circuit arrangement using the Miller effect, shown in Fig. 8. The phase shifting of the amplifier is $\varphi = \tau$, its gain is $A \gg 1$. Writing the circuit equations for the p domain, and resolving them, we get

$$\frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{1+\frac{p\tau}{A+1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{A}} p\tau \cong -p\tau \qquad \tau = RC\,. \tag{12a}$$

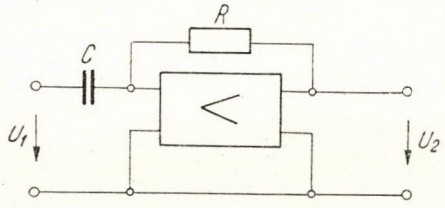


Fig. 8. Miller differentiator

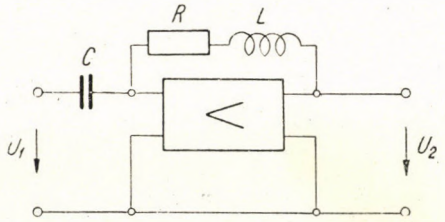


Fig. 9. C—R—L differentiator making use of the Miller effect

The relation has the same form as in the case of a simple C—R differentiator (6a), but the time constant drops to its $(A+1)$ th part without any essential change of amplitude. Now instead of $p\tau$, $\frac{p\tau}{A+1}$ must be negligible with respect to unity.

The feedback can also be combined with a C—R—L circuit (Fig. 9). The circuit equations are :

$$\frac{u_2}{u_1} = -\frac{A}{A+1} p\tau \frac{1+p\tau'}{1+\frac{p\tau}{A+1}+\frac{p^2\tau\tau'}{A+1}}, \qquad \tau = RC\,, \qquad \tau' = \frac{L}{R}\,.$$

Developing into a series, supposing that $|p\tau| \ll 1$ and $|p\tau'| \ll 1$

$$\frac{u_2}{u_1} \cong -\frac{A}{A+1} p\tau \left[1 - \frac{p\tau}{A+1} + p\tau' - 2\,\frac{p^2\tau\tau'}{A+1} + \frac{p^2\tau^2}{(A+1)^2}\right].$$

By appropriate selection of the parameter the members which are linear in p may be eliminated :

$$\tau' = \frac{\tau}{A+1} \qquad \text{or else} \qquad L = \frac{R^2 C}{A+1} .$$

Then

$$\frac{u_2}{u_1} \cong - \frac{1}{1+\frac{1}{A}} p\tau \left[1 - \left(\frac{p\tau}{A+1}\right)^2\right]. \tag{13a}$$

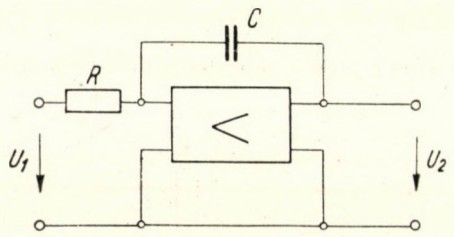


Fig. 10. Miller integrator

The coefficient of the error member has thus decreased from 1 to $1/(A+1)^2$.

On a similar basis, we may devise an integrator with feedback amplifier (Fig. 10). For this

$$\frac{u_2}{u_1} = - \frac{1}{1+\frac{1}{A}} \cdot \frac{1}{p\tau} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{(A+1)\,p\tau}} . \tag{12b}$$

Now unity must be negligible not with respect to $|p\tau|$ but with respect to $(A+1)\ |p\tau|$. This means that a condenser with smaller capacity i. e. of higher quality can be used.

As the negative feedback produced by condenser C makes the circuit very stabile, the gain (A) of the arrangement can be increased by positive feedback (Fig. 11). The circuit has a cathode-follower output and therefore a small output impedance.

If the generator which produces the input signal cannot be considered as a voltage source, the use of a cathode-follower differentiator with large input impedance is indicated (Fig. 12). The signal appearing on the output is $\frac{\mu}{\mu+1} RC$ times the derivative of the input signal, the time constant of the circuit is $\frac{R+R_p}{\mu+1} C$ (Ref. 4.). A cathode-follower differentiator can be realized also with an $R-L$ arrangement (Fig. 13.). This is capable also without a grid resistance to produce derivatives of both signs. By interchanging R and L we get the cathode-follower integrator. The disadvantage of both these circuits containing an inductance is that the conductive

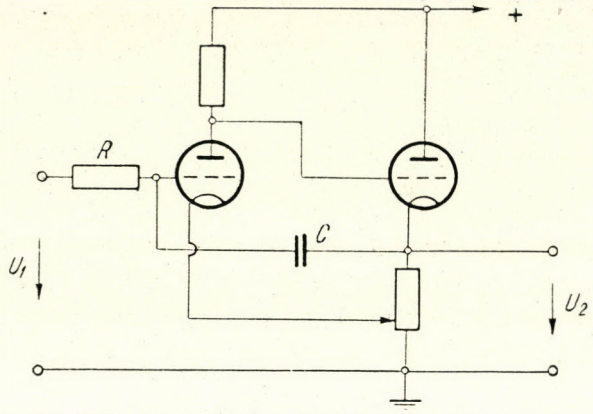


Fig. 11. Miller integrator combined with positive feedback

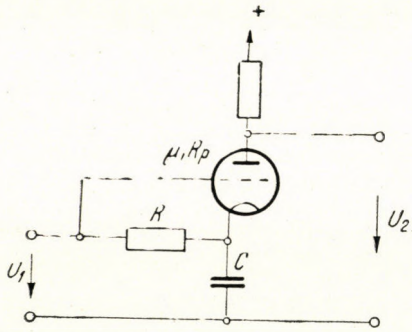


Fig. 12. Cathode-follower differentiator with *C*—*R* circuit

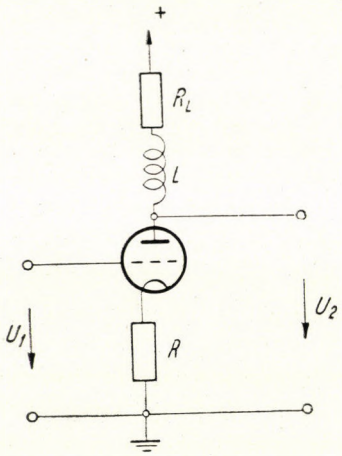


Fig. 13. Cathode-follower differentiator with *R*—*L* circuit

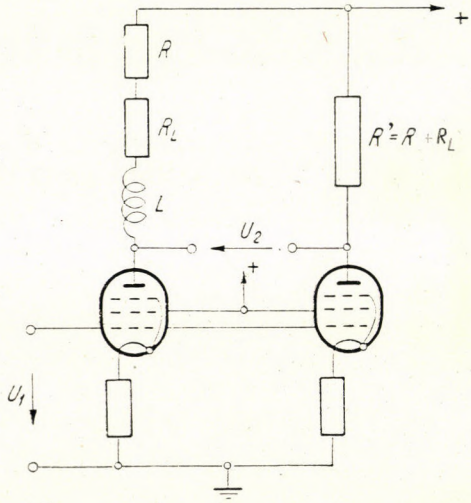


Fig. 14. Symmetrical differentiator

resistance (R_L) of the coil influences its operation. The action of the resistance of the coil can be eliminated by the symmetrical circuit of Fig. 14. The resistances in the anode circuits of the two tubes (considering also R_L) are equal, and hence they do not influence the voltage measurable across the two anodes.

III. Influence of the non-ideal character of the elements

We have remarked already that the quality of differentiation or integration is influenced also by the non-ideal condition of the elements. From these, we will examine in detail four : the leakage of the condenser, the stray capacitances of the elements, the resistance of the coil and the action of the terminating impedance.

1. Condenser leakage

The leakage of the condenser can be taken into account by considering a resistance R′ in parallel with the condenser. In the case of a differentiating

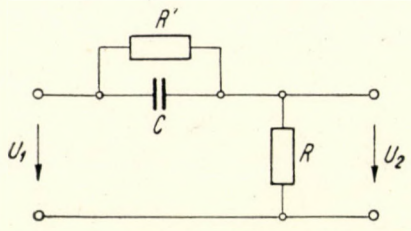


Fig. 15. Influence of condenser leakage on a differentiator

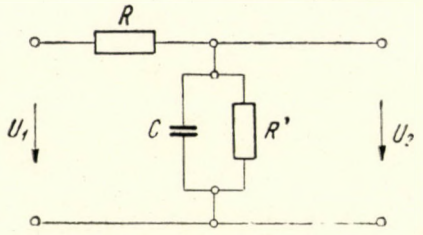


Fig. 16. Influence of condenser leakage on an integrator

circuit the situation is shown in Fig. 15. The ratio of the voltages will be:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{R}{R + R' \times 1/pC} = \frac{p\tau(1+p\tau')}{p\tau(1+p\tau') + p\tau'} = 1 - \frac{1}{\tau}\,\frac{1}{p + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'}\right)}\,;\quad \tau = RC;\quad \tau' = R'C.$$

In the case of zero leakage $\tau' = \infty$. For the usual designs, τ is of the order of magnitude of about $10^{-4} \sim 10^{-7}$s, while τ' is of the order of magnitude of $10 \sim 10^4$ s. Even in the worst case there is a difference of five orders of magnitude between the two data. So $1/\tau'$ can confidently be neglected with respect to $1/\tau$, i. e. the action of leakage can be neglected. The situation is worse in the case of an integrating circuit, (Fig. 16.), where we aim at a large time constant. When integrating long signals, the condition $\tau \ll \tau'$ can be realized only with very good condensers.

2. *Stray capacitance*

Let us examine the action of stray capacitances. Let us represent the stray capacity of the C—R differentiator by the capacitance C' in parallel with the resistance (Fig. 17). Then

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{R \times \dfrac{1}{pC'}}{R \times \dfrac{1}{pC'} + \dfrac{1}{pC}} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{p}{p + \dfrac{1}{\gamma\tau}};$$

$$\tau = RC;\ \gamma = 1 + \frac{C'}{C} > 1.$$

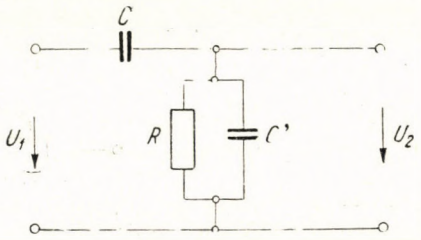


Fig. 17. The influence of stray capacitance in the case of a differentiator

Without stray capacitances $\gamma = 1$. The action of the stray capacitances is that the "amplitude" of the secondary signal is reduced to its γth part, while its time constant increases γ-times. Because for differentiating circuits we aim at as small a time constant as possible, both actions have a detrimental influence on the functioning of the circuit and therefore we must strive to reduce the stray capacitances. It is easily shown that in the case of a C—R—L differentiator the condition equation for the inductance is

$$L = \gamma R^2 C; \quad \tau_1 = \gamma RC = \gamma\tau = \frac{L}{R}$$

and thus

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{p^2 + \dfrac{p}{\tau_1}}{p^2 + \dfrac{p}{\tau_1} + \dfrac{1}{\tau_1^2}} \cong p\tau[1 - \gamma^2(p\tau)^2] \tag{14}$$

the error member therefore increases γ^2 times. As in the case of a differentiating circuit C is small, this action often cannot be neglected.

In integrating circuits — because of the large condensers used there — the action of the stray capacitances generally can be neglected.

The above results can be understood directly by taking into account the primary (active) short circuit.

3. *Coil resistance*

The influence of the coil resistance must only be examined in connection with the L—R—C integrating circuit, where in principle a single inductance

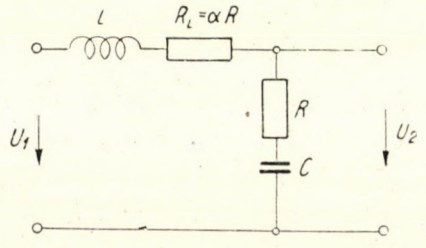


Fig. 18. The influence of coil resistance in an L—R—C integrating circuit

would be needed. Let us complete the circuit diagram of Fig. 5*b* by the resistance $R_L = \alpha R$ of the coil (Fig. 18.). Then

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{R + \dfrac{1}{pC}}{(1+\alpha)R + pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{1}{p\tau} \frac{1 + \dfrac{1}{p\tau'}}{1 + \dfrac{1+\alpha}{p\tau} + \dfrac{1}{p^2\tau\tau'}}$$

$$\tau = \frac{L}{R}\,; \quad \tau' = RC\,.$$

Developing this into a series, supposing $|\,p\tau\,| \gg 1$ and $|\,p\tau'\,| \gg 1$

$$\frac{u_2}{u_1} \cong \frac{1}{p\tau}\left[1 + \left(\frac{1}{\tau'} - \frac{1+\alpha}{\tau}\right)\frac{1}{p} - \left(\frac{2+\alpha}{\tau\tau'} - \frac{(1+\alpha)^2}{\tau^2}\right)\frac{1}{p^2}\right].$$

The linear member disappears if

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1+\alpha}{\tau}\,; \quad L = (1+\alpha)R^2C.$$

Then

$$\frac{u_2}{u_2} \cong \frac{1}{p\tau}\left|1 - \frac{1+\alpha}{(p\tau)^2}\right| \tag{15}$$

The coefficient of the error member is larger than in the ideal case ($\alpha = 0$), but in principle it can easily be reduced below the coefficient of the error member of the Wiegand—Hansen type integrator (II.4., Equ. 11.). But considering that in the interest of an inductance as small as possible we must aim at an R as small as possible, this condition can be realized only with the aid of a large condenser.

4. *Terminating impedance*

Let us consider now also the impedance z_0 which terminates a differentiating, or an integrating, quadrupole (Fig. 19). The ratio of the primary to the secondary voltage is

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{z_2 \times z_0}{z_1 + z_2 \times z_0} = \frac{z_2 z_0}{z_1(z_2 + z_0) + z_2 z_0} \tag{16}$$

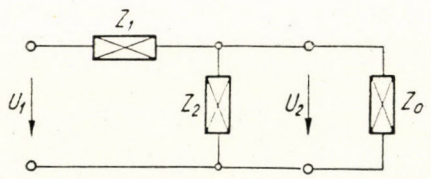


Fig. 19. Taking into account the terminating impedance

The impedance z_0 depends on the character of the charge. Mostly it can well be represented by a resistance and a capacitance in parallel, so

$$z_0 = R_0 \times \frac{1}{pC_0} = \frac{R_0}{1 + pR_0C_0} \tag{17}$$

If the differentiating circuit is a simple C—R circuit (Fig. 2a), an elementary calculation shows that

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{p\tau'}{1 + p\tau'\left(1 + \dfrac{C_0}{C}\right)} \cong p\tau'\left[1 - p\tau'\left(1 + \frac{C_0}{C}\right)\right] \tag{18a}$$

$$\tau' = \frac{\tau}{1 + R/R_0} = \frac{\tau}{1 + \tau/R_0C} < \tau$$

The equation directly shows that under the influence of the terminating impedance the signal amplitude diminishes, because $\tau' < \tau$. The amplitude decrease is the smaller, the smaller is R and the larger is C, with the same time constant $RC = \tau$. At the same time the linear coefficient of the error member increases with respect to the ideal termination. We will introduce the time constant determining the distortion

$$\tau_1 = \tau' \left(1 + \frac{C_0}{C}\right) = \tau \frac{1 + \frac{C_0}{C}}{1 + \frac{R}{R_0}} \tag{19a}$$

So finally

$$\frac{u_2}{u_1} \cong p\tau'[1 - p\tau_1]$$

In the case of $\tau < \tau_0$ a small resistance, in the case of $\tau > \tau_0$ a large resistance gives a smaller distortion for the same product $\tau = RC$, where $\tau_0 = R_0 C_0$.

By a similar calculation it can be shown that in the case of a C—R—L-differentiator (Fig. 4.a.) the same principles are valid as for a C—R-differentiator. The time constant which determines the distortion is

$$\tau_1 = \tau \sqrt{\frac{1 + \frac{C_0}{C}}{1 + \frac{R}{R_0}}}$$

and is of the same form as for a C—R-differentiator, therefore the consequences drawn there are valid here as well.

In the case of a simple R—C integrator (Fig. 3.a) with a calculation similar to the former one

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{p\tau'} \frac{1}{1 + \frac{1}{p\tau'}\left(1 + \frac{R}{R_0}\right)} \cong \frac{1}{p\tau'}\left[1 - \frac{1}{p\tau'}\left(1 + \frac{R}{R_0}\right)\right] \tag{18b}$$

$$\tau' = \tau \left(1 + \frac{C_0}{C}\right) > \tau .$$

By the action of the terminating impedance the signal amplitude decreases also in this case. The amplitude reduction is the smaller, the smaller is R and the larger is C, in the same way as for a differentiator. The time constant decisive

for the distortion is

$$\tau_1 = \frac{\tau'}{1+\frac{R}{R_0}} = \tau \frac{1+\frac{C_0}{C}}{1+\frac{R}{R_0}} \tag{19b}$$

It is of the same form as in the case of the differentiator. The small distortion is also ensured by a large time constant τ_1, thus in the case of $\tau < \tau_0$ a large resistance, in the case of $\tau > \tau_0$ a small resistance gives a smaller distortion.

If the time constant of the differentiatior is smaller (the time constant of the integrator is larger) than the time constant of the terminating impedance — as in general the case is — the best signal is obtainable by a large capacity and a small resistance, from the point of view of both amplitude and distortion.

IV. Ideal differentiators and integrators

1. *Principles*

As we have seen in chapter I., (Equ. 2a,b), perfect differentiation or integration can be obtained with the L-network shown in Fig. 1, if in the case of a differentiator

$$\frac{z_2}{z_1} = -\frac{p\tau}{1-p\tau} \tag{2a}$$

in the case of an integrator

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{p\tau - 1} \tag{2b}$$

The easiest way to satisfy these equations is the following :
In the case of a differentiator

$$z_1 = \frac{1}{pC} + (-R); \quad z_2 = R \quad \tau = RC \qquad \text{(Fig. 20a)}$$

$$z_1 = R + (-pL); \quad z_2 = pL \quad \tau = \frac{L}{R} \qquad \text{(Fig. 20b)}$$

$$z_1 = \frac{1}{pC}; \quad z_2 = R \times \left(-\frac{1}{pC}\right) \quad \tau = RC \qquad \text{(Fig. 20c)}$$

$$z_1 = R; \quad z_2 = pL \times (-R) \quad \tau = \frac{L}{R} \qquad \text{(Fig. 20d)}$$

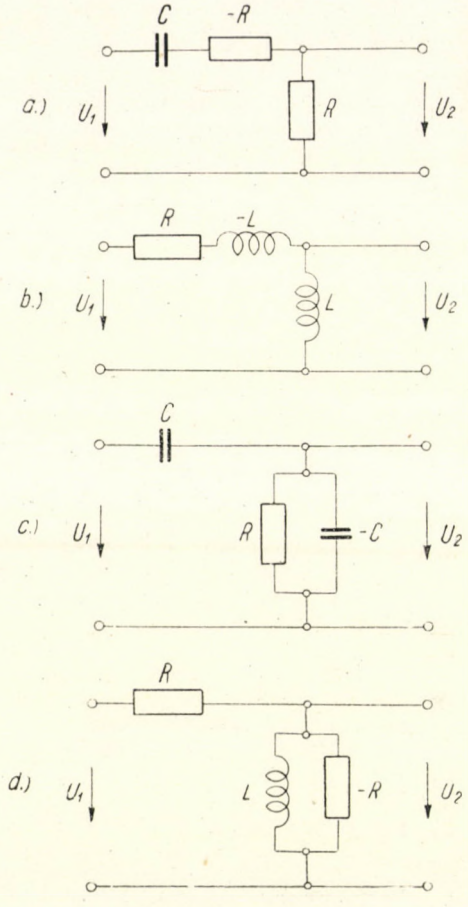


Fig. 20. Ideal differentiators

In the case of an integrator

$$z_1 = R + \left(-\frac{1}{pC}\right); \quad z_2 = \frac{1}{pC} \quad \tau = RC \qquad \text{(Fig. 21}a\text{)}$$

$$z_1 = pL + (-R); \quad z_2 = R \quad \tau = \frac{L}{R} \qquad \text{(Fig. 21}b\text{)}$$

$$z_1 = R; \quad z_2 = \frac{1}{pC} \times (-R) \quad \tau = RC \qquad \text{(Fig. 21}c\text{)}$$

$$z_1 = pL; \quad z_2 = R \times (-pL) \quad \tau = \frac{L}{R} \qquad \text{(Fig. 21}d\text{)}$$

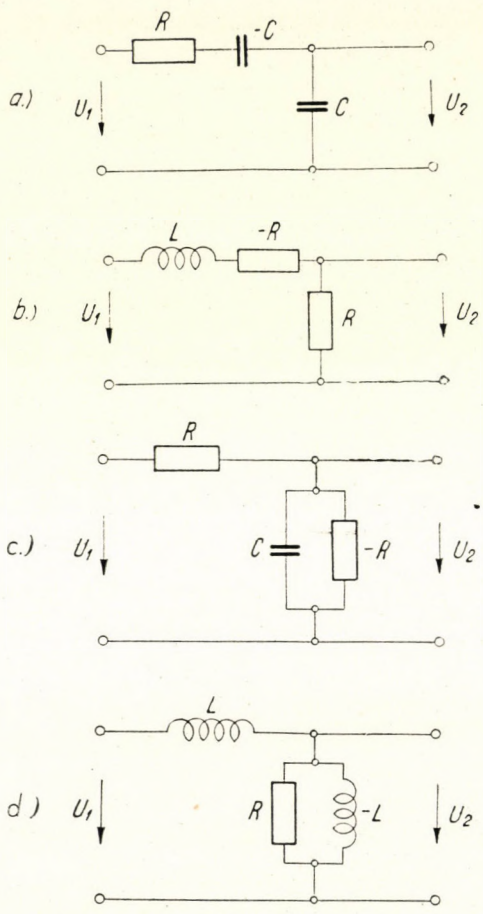


Fig. 21. Ideal integrators

The resistance $-R$ signifies an element the voltage on which is at every instant proportionate to the current passing through it, but is of opposite direction to the latter. In a similar way must be understood $-pL$ and $-\frac{1}{pC}$. Fundamentally we are therefore concerned with generators, which cannot be built up of passive elements, but can be realized with an electron tube circuit. In such a case we must not stipulate any condition for τ, therefore the secondary signal can be got already in amplified state.

The circuit arrangements of Fig. 20. and 21. are a further development of the circuits shown in Fig. 2. and 3. with the aid of negative impedance connected in series or in parallel. The coils having always some resistance, therefore of the differentiators only a) and *c)* variants can be realized, and for integrators also the *b)* variant, but the negative resistance must be $-(R + R_L)$. The integra-

ting circuit 21c. is specially worth of attention, because the condenser leakage can there be compensated as well.

2. *Means of realization*

We have remarked that an element with negative characteristics can be realized with the aid of an electron tube circuit, but the simple insertion of such an element is not possible for stability reasons [Ref. 12]. Therefore a

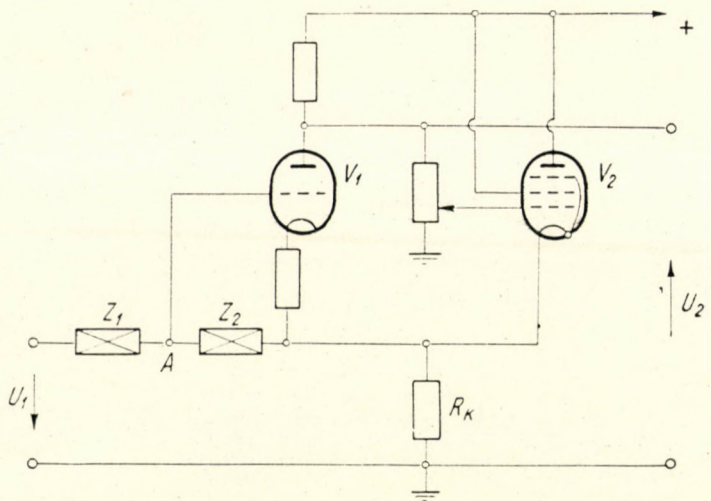


Fig. 22. One possibility of realizing ideal differentiators and integrators

negative element must be executed by some other means. For connection in series, an element with negative characteristics and of sufficient stability can be easily established by the circuit of Fig. 22. The voltage appearing on the impedance Z_2 is amplified by the tube V_1 which also reverses its phase. The current of the tube V_2 controlled by it reintroduces this voltage, with the aid of the resistance R_k, with opposite sign and (in the case of correct adjustment) with the same amplitude in the Z_2—R_k series circuit. The resistance appears therefore in the circuit as $-Z_2$.

From what has been said, in the case of a differentiating circuit :

$$z_1 = \frac{1}{pC}; \; z_2 = R$$

and in the case of an integrating circuit :

$$z_1 = R; \quad z_2 = \frac{1}{pC}$$

(when calculating the time constant, the resistance R_k must naturally be taken into account). As the impedance which must be compensated, z_2, gives in the case of a differentiating as well as of an integrating circuit the output voltage, this can be taken off in amplified form from the anode of the tube V_1.

The operation of the circuit can be checked by measuring the voltage between point A and earth. In the case of correct adjustment the alternating current impedance between the two points is zero and so there cannot appear alternating voltage either.

V. Comparison of the operation of the different circuits

For comparing the working of the various types of differentiators, we have shown in Fig. 23, on the base of calculations, the signals produced by the action of a non-ideal voltage step. The equation of the non-ideal voltage step is :

$$U_1 = U_0(1 - e^{-at}) \quad t > 0$$

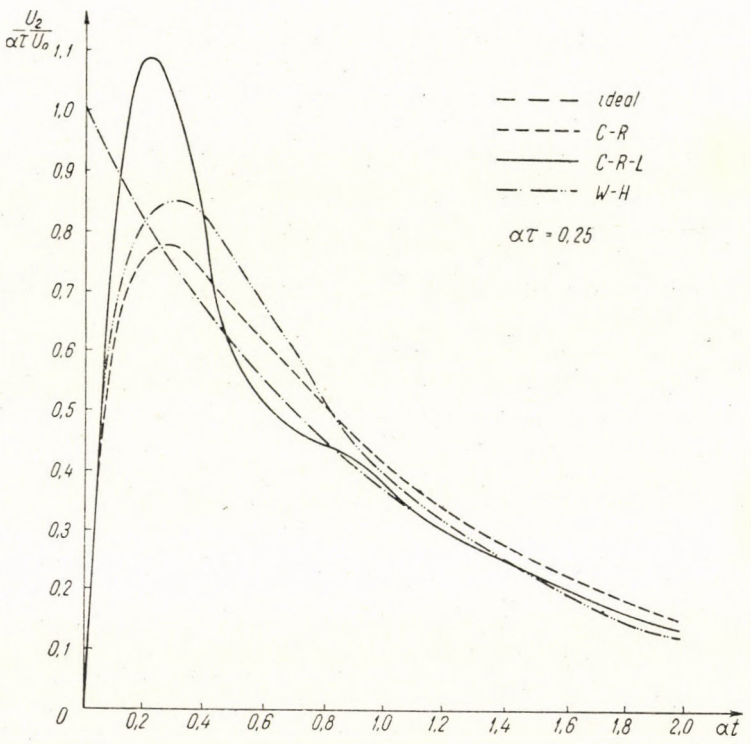


Fig. 23. Output signals of differentiators under the action of a non-ideal step-input

1. The derivative of the input signal
2. Signal of a C—R differentiator
3. Signal of a C—R—L differentiator
4. Signal of a Wiegand—Hansen type differentiator

where α is the reciprocal of the generator time constant. The curves shown in the figure refer to the case when the time constant of the differentiating circuit is a quarter of the generator time constant, i. e. $\alpha\tau = 0{,}25$.

In Fig. 24, we show the influence of the stray capacitance in the case of

$$\frac{C'}{C} = 0{,}2 \text{ i. e. } \gamma = 1{,}2.$$

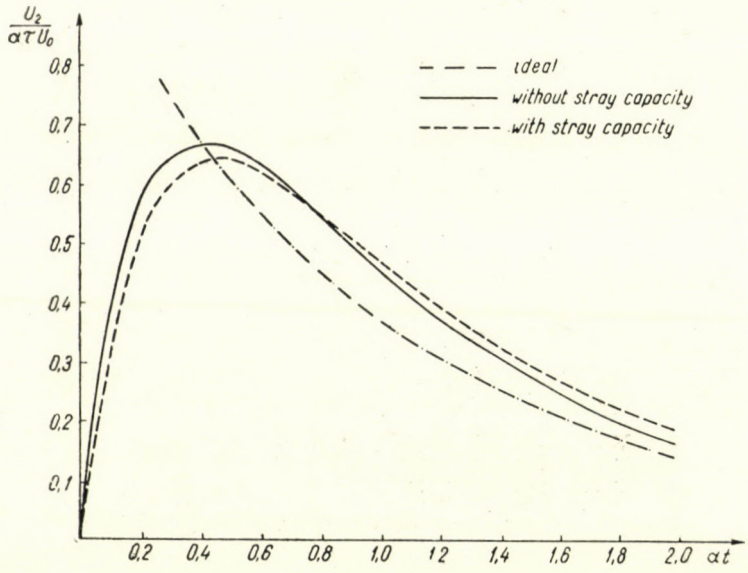


Fig. 24. The influence of stray capacitances on differentiators

For comparing the working of the integrators we show in Fig. 25 the secondary signals arising from the action of the linear input signal

$$U_1 = U_0 \alpha t$$

In Fig. 26, we show the effect of the condenser leakage for the cases of $R' = 5R$ and of $R' = R$.

The operation of the realized networks is shown by the oscillograms I—V. The time constant of the differentiating circuits was 4 μs, that of the integration circuits was 2250 μs. The frequency of recurrence of the input signal was 1 kHz, thus the time of one period was 1000 μs.

Table I shows the input signals which were used : *a)* square signal, *b)* saw-tooth signal. The oscillograms marked *a)* refer to square input, those marked *b)* to saw-tooth input. The gain of the output signals refers to that of the input signals as a reference.

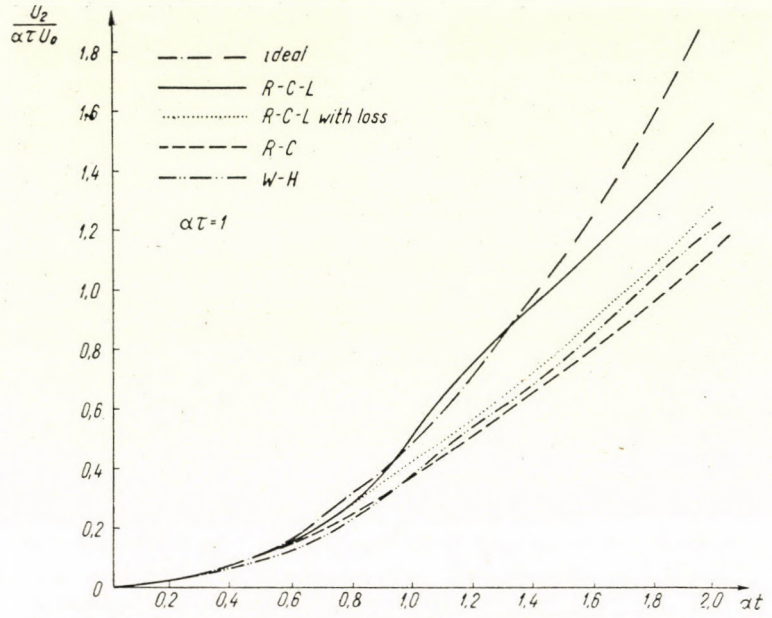


Fig. 25. The operation of integrators in the case of a linear input signal

1. The integral of the input signal
2. The signal of an R—C integrator
3. The signal of a lossles R—C—L integrator
4. The signal of a Wiegand—Hansen integrator
5. Signal of an R—C—L integrator, taking into account the resistance of the coil, in the case of $R_L = 3R$ (aperiodic limit)

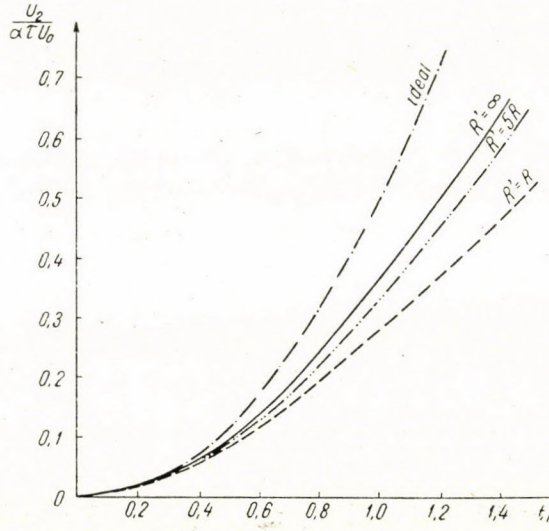


Fig. 26. The influence of condenser leakage on integrators

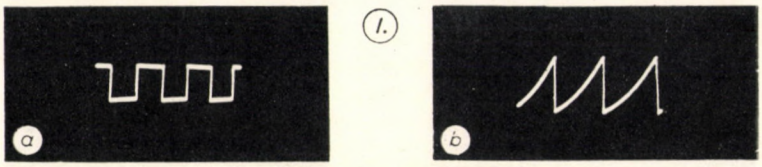


Table I. Input signals

Table II shows the output signals supplied by the various differentiating circuits.

The oscillograms show quite well the theoretically deduced phenomena. From the circuits containing passive elements, the *C—R—L*-differentiator shows the largest signal, but this contains also oscillations (with a spread signal these can be made to show up on the oscillograph). The signal of the cathode-follower circuit also shows the detrimental action of the oscillations. The best and chiefly the largest signal is furnished by the ideal differentiator.*

On table III can be seen the output signals of the various integrating circuits. The theoretically determined influences can be seen very well (e. g. in Fig. 2*b*, the natural oscillations of the circuit are shown very well).

In table IV, we demonstrate the effects discussed in sections III., para. 4 of this paper. In the case of the differentiating circuit shown in the 1st oscillogram R is small and C is large, in the case of the 2nd oscillogram the inverse is true. In both cases the product RC is the same and $\tau < \tau_0$. The 3rd and the 4th oscillograms show the effect of the terminating impedance, for $\tau > \tau_0$. It can be seen that with a large capacity we get a better signal of larger amplitude.

Table V shows the action of differentiation followed by integration, theoretically we should get back the original input signal.

The ideal circuits nearly perfectly reproduce the input signal (Table I).

* For the ideal differentiator and the ideal integrator — for the sake of easier comparison — U_2 has been obtained not like shown in Fig. 22, but from the terminals of the resistance R_k shown there. From the output terminals according to Fig. 22., the output signal can be taken off with an amplitude 15 times larger.

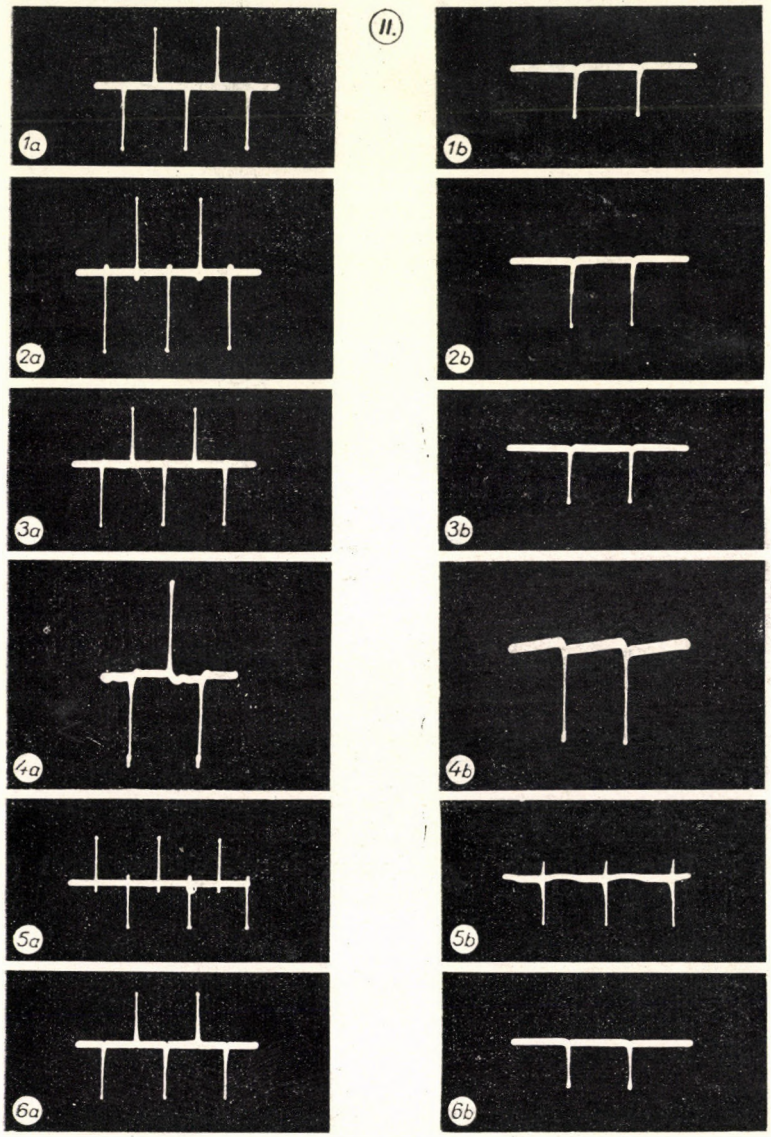


Table II. Output signals of differentiating circuits

1. Oscillogram : $C - R$ differentiator (Fig. 2*a*, gain 3)
2. Oscillogram : $C—R—L$ differentiator (Fig. 4*a*, gain 3)
3. Oscillogram : Wiegand—Hansen differentiator (Fig. 6, gain 3)
4. Oscillogram : cathode-follower differentiator (Fig. 12, gain 1,5)
5. Oscillogram : symmetrical differentiator (Fig. 14, gain 3)
6. Oscillogram : ideal differentiator (Fig. 22, gain 1,5)

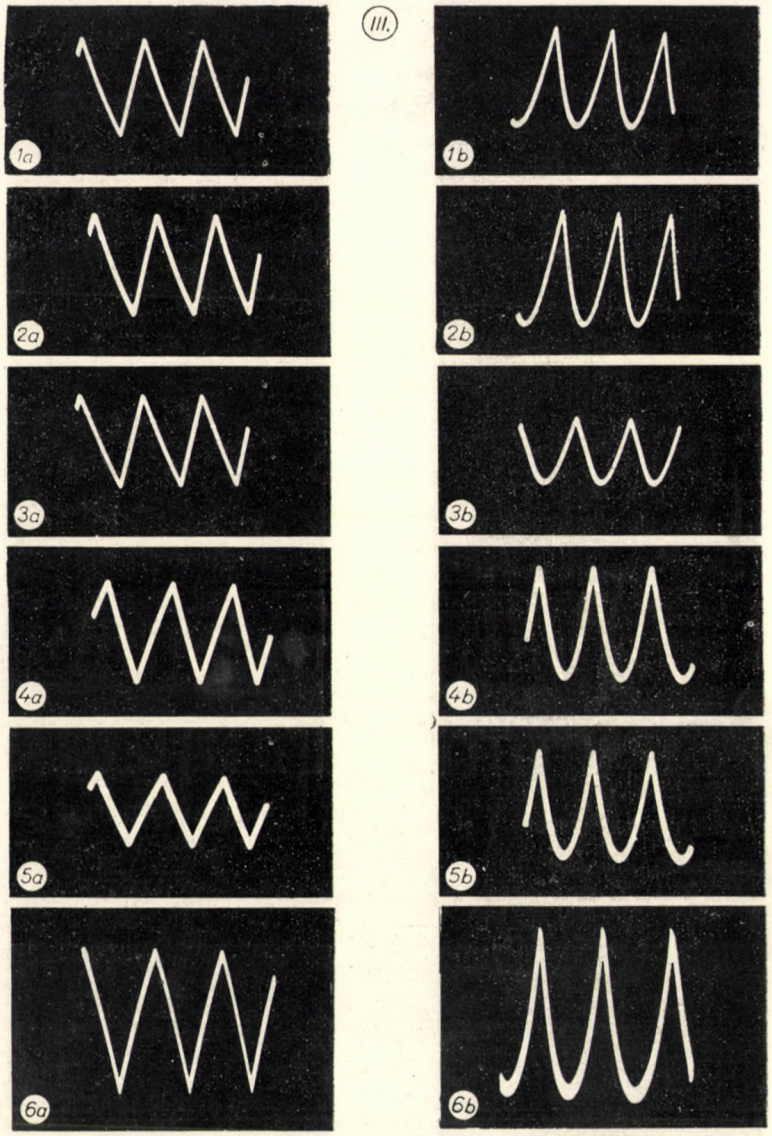


Table III. Output signals of integrating circuits

1. Oscillogram : *R*—*C* integrator (Fig. 3*a*, gain 30)
2. Oscillogram : *L*—*R*—*C*— integrator (Fig. 5, gain 30)
3. Oscillogram : Wiegand—Hansen insegrator (Fig. 7, gain 30)
4. Oscillogram : Miller integrator (Fig. 10, gain 3)
5. Oscillogram : twin-feedback integrator (Fig. 11, gain 1,5)
6. Oscillogram : ideal integrator (Fig. 22, gain 1,5)

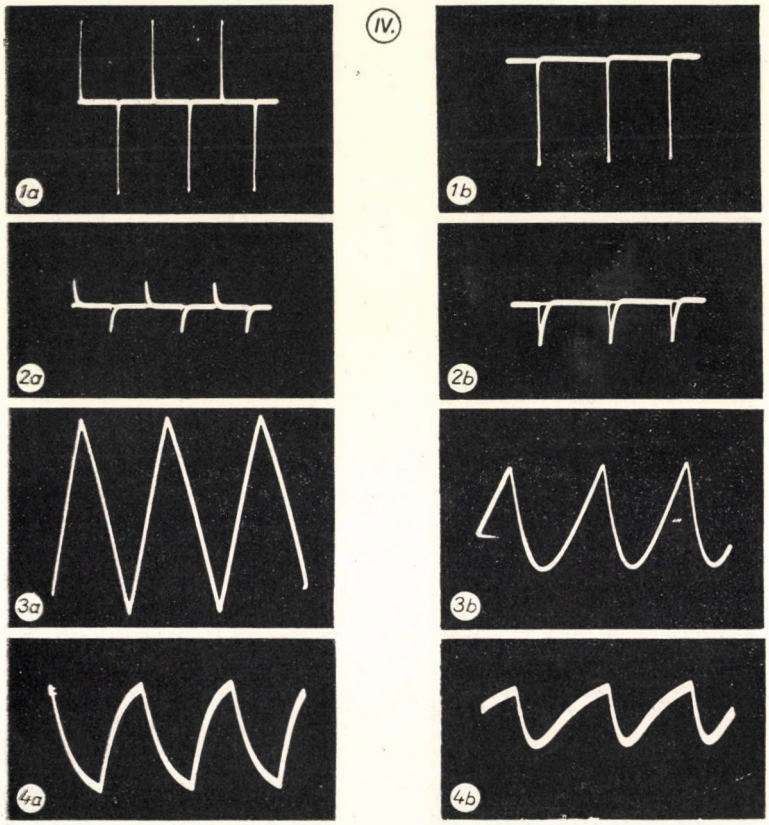


Table IV. The influence of the terminating impedance on the output signals of differentiating and integrating circuits

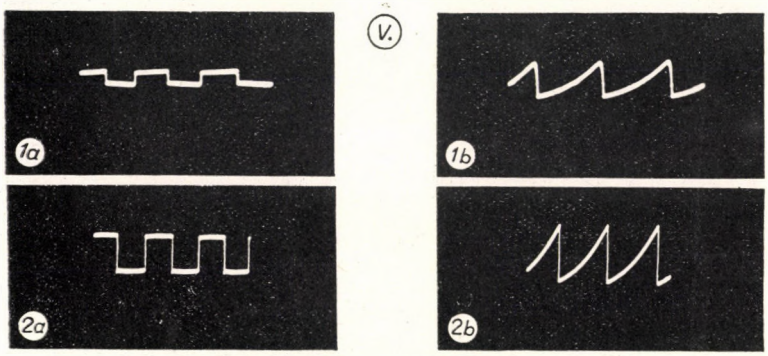


Table V. The differentiated and re-integrated signal

1. Oscillogram : C—R differentiator — R—C integrator (gain 300)
2. Oscillogram : ideal integrator — ideal differentiator (gain 3)

REFERENCES

1. GREENWOOD, MAC RAE and HOLDAN: Electronic Instruments MIT 21.
2. B. CHANCE, HUGHES, MC NICHON, SAYRE and WILLIAMS: Waveforms MIT 19.
3. SIMONYI K.: Elméleti villamosságtan. (Tankönyvkiadó). Theoretical Electricity.
4. G. P. OHMAN: Square-Wave Differentiating Circuit Analysis. Electronics 1954 VIII.
5. R. L. FORD: Differentiating Circuits. Electronic Engineering 1953. XII.
6. SZENTIRMAY GY.: Passzív hálózatok paramétereinek valós és képzetes része közti kapcsolat, Híradástechnika 1954. I. (Relation between the real and the imaginary part of the parameters of passive networks).
7. M. T. TUCKER: A Note on Electronic Analogue Integration and Differentation. Elect. Engineering 1953. XI.
8. S. BRANDON: Electronic Analogue Integration and Differentiation. Elect. Engineering 1953. I.
9. FODOR—TEMES: Differenciáló áramkörök. Híradástechnika 1955. II. (Differentiating circuits).
10. H. WITTKE: Elektrische Integrationsverfahren. Frequenz 1955. II.
11. H. W. BODE: Network Analysis and Feedback Amplifier Design (D. Van Nostrand, New York 1945)
12. FODOR GY.: Nem-lineáris áramkörök stabilitása. Híradástechnika 1955. VI. (The Stability of Non-linear Circuits)

SUMMARY

In the paper, differentiating and integrating circuits consisting of active and of passive elements are treated on the basis of uniform principles.

The authors establish the theory of the further development of the known circuits consisting of passive elements, and the optimum relations between the parameters of these circuits. They show that these are also the best circuits which can be composed of passive elements. With the aid of more complicate circuits, the various circuit elements are easier to realize. By the use of active elements the operation of the circuits can be improved. The authors determine the effects of the stray elements and of the terminating impedance, and indicate how to take them into account when designing the circuits.

With the use of electron tubes, circuits can be designed which theoretically operate in an ideal way. The authors have developed several methods for realizing them.

The calculations are confirmed by the oscillographic investigation of the output signals of circuits having the same time constant and receiving the same input signal.

DIFFERENZIERENDE UND INTEGRIERENDE STROMKREISE

G. FODOR und G. TEMES

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit werden aus aktiven und aus passiven Elementen bestehende differenzierende und integrierende Stromkreise auf einer einheitlichen Grundlage behandelt.

Die Verfasser bestimmen auf theoretischem Weg die Art und Weise der Weiterentwicklung der bekannten, aus passiven Elementen bestehenden Schaltungen und die optimalen Beziehungen zwischen den Parametern der so entstehenden Stromkreise. Sie weisen nach, dass diese Stromkreise zugleich die aus passiven Elementen herstellbaren bestmöglichen Schaltungen sind. Mit Hilfe von Kunstschaltungen können die Elemente der Stromkreise leichter verwirklicht werden, während sich eine Verbesserung der Wirkungsweise der Schaltungen durch Verwendung von aktiven Elementen erreichen lässt. Die Verfasser bestimmen die Wirkung der Streuelemente und der Abschlussimpedanz und deren Berücksichtigung beim Entwurf der Stromkreise.

Theoretisch ist es möglich, mit Hilfe von Elektronenröhren Stromkreise mit idealer Wirkungsweise herzustellen. In der vorliegenden Arbeit werden mehrere von den Verfassern entwickelte Verfahren zu deren Ausführung erörtert.

Die Berechnungen werden durch oszillographische Untersuchungen an Ausgangssignalen von Schaltungen unterstützt, die gleiche Zeitkonstanten aufweisen und mit gleichen Eingangssignalen gespeist werden.

CIRCUITS DE DIFFÉRENTIATION ET D'INTÉGRATION

G. FODOR et G. TEMES

RÉSUMÉ

L'étude traite sur une base unifiée des circuits de différentiation et les circuits d'intégration, composés d'éléments actifs et passifs.

Les auteurs déterminent par des méthodes théoriques les possibilités du développement des circuits connus, composés d'éléments passifs, ainsi que les relations optimales entre les paramètres des circuits dévelopés ainsi. Ils montrent que ce sont en même temps les meilleurs circuits pouvant être construits à partir des éléments passifs. Par l'emploi d'artifices de montage, les éléments des circuits sont plus faciles à réaliser, tandis que par l'emploi d'éléments actifs le fonctionnement des circuits peut être amélioré. Les auteurs ont déterminé l'influence des éléments dérivés et de l'impédance de bouclage ainsi que la façon de laquelle ils doivent être pris en considération lors de l'étude d'un circuit.

À l'aide de circuits électroniques on peut construire, des circuits à fonctionnement théoriquement, idéal. Les auteurs ont établi plusieurs procédés pour leur réalisation.

Les calculs sont appuyés par les essais à l'oscillographe des signaux de sortie de circuits construits avec la même constante de temps et alimentés par le même signal d'entrée.

ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ И ИНТЕГРИРУЮЩИЕ ЦЕПИ

Д. ФОДОР и Г. ТЕМЕШ

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются как дифференцирующие, так и интегрирующие цепи, состоящие из активных и пассивных элементов.

Авторы теоретическим путем определили метод дальнейшего развития известных схем, состоящих из пассивных элементов, и оптимальную зависимость между параметрами получающихся таким образом цепей. Показано, что эти схемы одновременно являются лучшими схемами, которые возможно составить из пассивных элементов. При помощи специальных схем можно легче реализировать элементы цепей. Применением активных элементов можно улучшить работу схем. Установлено влияние рассеянных элементов и запирающего импеданса, далее учет последних при проектировании схем.

При помощи схем на электронных лампах можно составить принципиально идеально работающие цепи. Разработан ряд методов составления таких цепей.

Расчеты подтверждаются анализом осциллограммами выходных сигналов схем, построенных с идентичными постоянными времени и питаемых идентичными входными сигналами.

QUELQUES PROBLÈMES FONDAMENTAUX DE LA LIMITATION DES COURS-CIRCUITS

J. EISLER

DOCTEUR DES SC. TECHNIQUES

INSTITUT DES CENTRALES ET DES CHEMINS DE FER ÉLECTRIQUES DE L'UNIVERSITÉ TECHNIQUE DE BUDAPEST

[Manuscrit présenté le 12 septembre 1955]

I. Introduction

L'idée de la limitation des courts-circuits n'est pas nouvelle, on s'en est occupé beaucoup dès les débuts de l'électrotechnique. Plus tard, après l'avènement des interrupteurs à grande puissance et après la réalisation des transformateurs et installations résistant aux effets dynamiques, il semblait qu'il ne restait aucun problème important à résoudre et que les méthodes qui s'étaient développées convenaient, de sorte que l' intérêt se porta sur d'autres questions, par exemple sur celle des surtensions. Cependant après avoir examiné les difficultés qui surgissent ces derniers temps de plus en plus fréquemment, il serait peut-être intéressant de s'occuper à nouveau du problème de la limitation des courants de court-circuit, en tant que problème fondamental.

Ceci paraît utile de plusieurs points de vue. Examinons les raisons tour à tour et regardons ce qui, en général, semble justifier la limitation.

II. Raisons qui semblent justifier la limitation

1. L'augmentation des puissances de court-circuit a été poussée par endroits, par l'établissement des interconnexions, les réseaux régionaux, à un tel degré qu'on est obligé d'employer des interrupteurs d'une puissance d'interruption hors de proportion avec la puissance de service, et qui sont donc relativement chers, et leur essai exige des installations de laboratoire importantes.

2. L'augmentation de la puissance de court-circuit lors des aggrandissements, nécessite souvent la modification coûteuse des installations anciennes, avant tout le changement des interrupteurs.

3. Dans les installations à tension moyenne ou basse, il faut employer souvent, à cause des puissances de court-circuit élevées des barres omnibus, des interrupteurs et des coupe-circuit à puissance de coupure élevée, donc coûteux.

4. Dans les petits postes des réseaux mis à terre directement, l'établissement d'un réseau de terre peut devenir nécessaire. Il faut combattre les diffi-

cultés relatives à l'isolement convenable des câbles de commande et téléphoniques, lors de l'élévation du potentiel d'un court-circuit du poste. Il faut prendre aussi des mesures préventives pour empêcher que les objets métalliques en contact avec le réseaux de terre de la station, ou pénétrant seulement sur son terrain (rails de chemin de fer, gaines métalliques des câbles, conduites d'eau), transmettent la tension qui se produit lors des courts-circuits élevées, à des points éloignés.

5. Les forces dynamiques engendrées par des courants de court-circuit élevés demandent des machines et des installations de plus en plus massives, qui, encore que techniquement possibles, causent des frais supplémentaires, inutiles par ailleurs. Cette difficulté est très sensible, par exemple, pour les transformateurs de courant. C'est surtout cette circonstance qui justifie la tendance à l'emploi de plus en plus généralisé des transfoi mateurs de courant type «barre», les seuls à être entièrement résistant aux courts-circuits.

En cas de courts-circuits des allongements permanents se produisent dans les enroulements des transformateurs; ces allongements sont additionnels et causent tôt ou tard une panne du transformateur.

6. Les surchauffements causées par les grands courants de court-circuit peuvent conduire à des défauts d'isolement permanents et additionnels, même si à l'occasion du court-circuit il ne s'est produit aucun défaut apparent.

On sait que la durée de vie des isolants décroît très vite avec la température. Suivant certains auteurs, la durée de vie T change en fonction de la température suivant la formule $T_\vartheta = T_{110}\, 2^{\frac{110-\vartheta}{8}}$. Si nous n'acceptons pas sans réserves la formule en ce qui concerne les valeurs numériques. il ne fait pas de doute qu'elle représente correctement le caractère du vieillissement.

En s'échauffant à 200—250° C lors des courts-circuits et en se refroidissant ensuite lentement, les isolations peuvent donc vieillir de façon considérable pendant le temps de réchauffement et de refroidissement. Ce phenomène peut être important surtout pour l'isolation des transformateurs et des câbles, et pour le dimensionnement de ces derniers il est indiqué de considérer non seulement l'échauffement lors des circuits normales.

7. Les courants de court-circuit importants peuvent causer là où surgissent des défauts, des destructions secondaires très grandes et étendues et même des explosions.

Il nous semble superflu de continuer l'énumeration des raisons qui justifient la limitation des courts-circuits ; nous renvoyons à la littérature technique, qui traite abondamment de tous ces phenomènes. Ces quelques exemples étaient nécessaires du fait que les différents auteurs considèrent souvent la grandeur des courants de court-circuit comme donné par la disposition même de l'installation. Du point de vue des calculs c'est, bien entendu, correct et nécessaire, mais peut-être l'attention n'est-elle pas toujours attirée suffisamment sur

le fait qu'il peut être utile d'examiner comment on pourrait diminuer un courant de court-circuit, avant de le prendre comme base du dimensionnement, et réaliser ainsi une installation moins onéreuse et plus sûre en service. Arrivé à ce point, la question se pose pour ainsi dire automatiquement : où, dans quelle mesure, et de quelle manière est-il intéressant de limiter la valeur des courants de court-circuit au delà de ce qui est réalisé avec les méthodes actuelles.

III. En ce qui concerne la question de savoir dans quel endroit une limitation peut-elle devenir nécessaire, nous essayons de donner un critère simple, en faisant observer que l'on peut trouver évidemment un critère beaucoup plus parfait. Suivant la proposition, cette limitation peut devenir nécessaire partout

où $$\frac{N_z}{N_n} > \frac{100}{\varepsilon_{tr}} .$$

(N_z est la puissance de court-circuit, N_n la puissance de service nominale pour laquelle l'installation a été dimensionnée, ε_{tr} la tension de court-circuit du transformateur à puissance nominale N_n). Est-il *vraiment intéressant* d'employer des limitations, et lesquelles, — c'est ce que décident les calculs économiques. Pour ces calculs il faut considérer le maintien de la tension, le coût des pertes dans le dispositif de limitation, les frais d'investissement pour les cas différents, les conséquences économiques du changement de la sécurité de service.

Le critère proposé peut être justifie par la considération que tous les objets installés dans une ligne *sans dérivation*, alimentée par un transformateur donné, doivent pouvoir supporter le courant de court-circuit de ce transformateur, car dans ce cas, sa réduction sera possible par augmentation de la chute de tension. Dans le cas mentionné le rapport des puissances de court-circuit et de la puissance nominale ne doit pas dépasser la valeur donnée par le critère proposé.

Dans le cas de dérivations nombreuses il paraît probable qu'il n'est pas économique de dimensionner *chaque dérivation*, sans égard à sa puissance de court-circuit égale à celle de la ligne d'alimentation, qui transmet une puissance de service beaucoup plus grande. La proposition concernant le critère n'est pas basée sur des calculs, mais sur ces considérations. Pour en juger plus facilement il paraît utile de résumer les méthodes basées sur les moyens utilisés d'habitude. Des exemples permetteront de nous faire une idée exacte des circonstances rencontrées dans la pratique.

Nous allons commencer par un réseau à basse tension, par exemple celui d'une installation industrielle. (Fig. 1.) Supposons qu'il y ait deux dérivations de 500 kVA et cent de 10 kVA. Évidemment la puissance de court-circuit de toutes les dérivations sera la même $\left(\frac{2}{5}\ 100 = 40\ \text{MVA}\right)$. Le rapport $\frac{N_z}{N_n}$ est de 80 dans le cas de dérivations de 500 kVA et de 4000 dans le cas des dérivations de 10 kVA, donc beaucoup plus élevé que $\frac{100}{\varepsilon_{tr}} = \frac{100}{5} = 20$. Conformément au

critère, il paraît donc intéressant de s'occuper de la limitation. Indépendamment du critère, il est évident dans ce cas, qu'il ne semble pas être économique de protéger les dérivations de 10 kVA, par exemple, avec des appareils d'interruption ayant une puissance de rupture double de celui des interrupteurs du transformateur d'alimentation de 1 MVA. Nous pouvons y remédier — comme on le sait — en subdivisant les barres complètement ou à travers des bobines de réactance. Mais, par là, la puissance de court-circuit peut être réduite tout au plus de la moitié, donc le rapport $\frac{N_z}{N_n}$ deviendra 40 resp. 2000. Le dernier chiffre surtout est visiblement trop grand encore. On peut obtenir une reduction encore

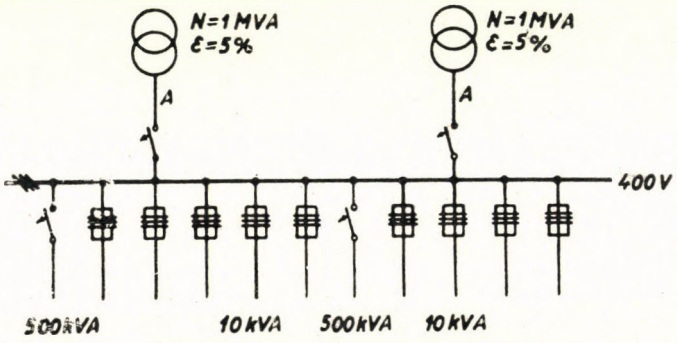


Fig. 1. Possibilité de limitation à basse tension

plus importante en inserant une bobine de réactance à l'endroit A. Quelle valeur doit-elle avoir? Ceci dépend évidemment de la puissance de court-circuit des interrupteurs, qui peuvent être utilisés économiquement dans les dérivations de 10 kVA. Il est évidemment utile de séparer l'enclenchement et la coupure en service normal, de la rupture des court-circuits. Supposons que nous employions dans ce dernier cas des coupe-circuit à fusibles Dz, dont la puissance de coupure est de 10 kA, donc

$$\sqrt{3} \cdot 10 \cdot 0{,}4 = 7 \text{ MVA} = 7000 \text{ kVA}.$$

C'est à cette valeur qu'il faut réduire la puissance de court-circuit de 40,000 kVA (20,000 kVA dans le cas de barres subdivisées). De l'équation

$$N_n \frac{100}{\varepsilon_{tr} + \varepsilon_f} = N_z$$

il s'ensuit que

$$\varepsilon_f = \frac{N_n \cdot 100}{N_z} - \varepsilon_{tr}.$$

En introduisant les données numériques, la réactance nécessaire de la bobine de réactance en A sera

$$\varepsilon_f = \frac{200\,000}{7000} - 5 = 23{,}5\,\%$$

et dans le cas des barres subdivisées, elle sera de

$$\varepsilon_f = \frac{100\,000}{7000} - 5 = 9{,}5\,\%$$

Il est bien évident que du point de vue de maintien de la tension, même la deuxième valeur est trop grande, tandis que la première, en cas de barres non

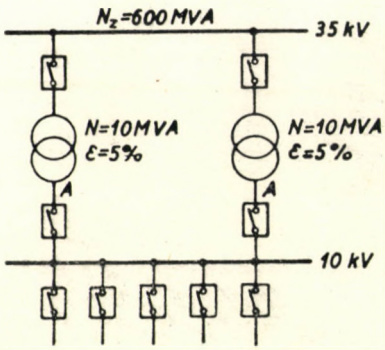


Fig. 2. Un possibilité de limitation à haute tension

subdivisées, est tout simplement inadmissible. Cette solution ne serait utilisable qu'avec un régulateur de tension. La troisième possibilité est l'emploi de bobines de réactance insérées dans chaque dérivation de 10 kVA, par lesquelles nous pouvons atteindre notre but aux prix de chutes de tension $\frac{10}{2000}$ fois (respectivement $\frac{10}{1000}$ fois) plus petites, et par surcroît, les bobines seront beaucoup plus petites et meilleur marché. Il est par contre vrai qu'au lieu de 2 bobines de 1000 kVA chacune, on aura besoin de 100 bobines de 10 kVA.

Comme deuxième exemple, examinons une sous-station avec des dérivations de 10 kV, alimentée par un réseau de 35 kV et 600 MVA de puissance de court-circuit. (Fig. 2.) La puissance de court-circuit aux barres de 10 kV, et par là même aux dérivations, est de 240 MVA. Il n'est pas très interessant de réduire cette puissance au-dessous de 200 MVA, ce qui peut pourtant être obtenu par l'insertion des bobines de réactance en A, sans abaisser trop la tension. Ici c'est donc cette

solution qui semble plus économique au lieu de bobines de réactance insérées dans les dérivations, parce qu'il faut beaucoup moins de bobines.

Par contre, si la puissance de toute la sous-station est petite par rapport au réseau, il semble plus utile d'insérer des bobines de réactance dans l'alimentation.

Ce qui vient d'être dit peut évidemment s'appliquer en principe aussi aux dérivations de 120 kV. En résumant ce chapître, nous pouvons constater que les méthodes employées aujourd'hui tendent à réduire les puissances de court-circuit en suivant deux chemins. L'un : *la réduction des puissances* par sectionnement du réseau ; l'autre : *l'accroissement de l'impédance*, en somme l'emploi de *bobines de réactance*. La première méthode a le désavantage de réduire l'élasticité de l'exploitation du réseau ; la deuxième rend plus difficile le maintien de la tension. Cette difficulté n'est pas considérable avec les bobines placées dans les *dérivations*.

Il faut insister de nouveau sur le fait que toutes ces méthodes sont connues et que nous les employons en partie ; mais peut-être nous ne les utilisons pas avec assez déliberation. Nous sommes inclinés à considérer les puissances de court-circuit comme des données auxquelles il faut s'accomoder en augmentant les puissances des disjoncteurs, au lieu de nous efforcer à réduire ces puissances dès l'étude de l'installation.

IV. Afin de préparer nos propositions de limitation des courts-circuits qui seront exposées au chapître suivant, essayons d'analyser de manière un peu plus approfondie nos méthodes de *protection* contre les courts-circuits. Ceci paraît nécessaire, car le but de la *limitation* des courts-circuits est de faciliter la protection contre les courts-circuits.

L'essentiel de la protection contre les courts-circuits est la rupture des courants de court-circuit par des interrupteurs ou des coupe-circuit. Examinons d'abord le cas des interrupteurs. A première vue, leur rôle ressemble à celui des parafoudres. Mais une différence essentielle et de principe est, que l'interrupteur permet le développement complet du courant de court-circuit, que l'action dynamique de celui-ci s'exerce entièrement, que l'interrupteur limite seulement la durée du court-circuit, alors que le parafoudre réduit aussi *l'amplitude* de la surtension à la tension de fonctionnement, ou à la tension résiduelle. Ce qui correspond de ce point de vue au parafoudre c'est plutôt le coupe-circuit, lequel, en principe, paraît convenir beaucoup mieux pour la protection contre les court-circuits que l'interrupteur, car il limite le courant de court-circuit. Un autre désavantage de principe des interrupteurs à puissance moindre est qu'il sont en mème temps des éléments de connexion, servant à la coupure et à la fermeture de courant de service ; il remplissent donc deux fonctions différentes. Ceci conduit, dans certains cas, à des desseins forcés et peut-être pas tout à fait économiques, surtout si la puissance de court-circuit du disjoncteur est plus grande par rapport à sa puissance de service, et les coupures de la puissance

de service sont plus fréquentes par rapport à celles de la puissance de court-circuit. Ceci est justement le cas des interrupteurs construits pour des puissances nominales réduites et des puissances de court-circuit élevées. Dans un cas semblable, il semble être plus judicieux au moins théoriquement, de séparer les deux fonctions, et d'employer, par exemple, un coupe-circuit et un sectionneur de puissance comme ceci se fait en effet à certains endroits.

Passons maintenant aux coupe-circuits.

Si le domain d'application des coupe-circuits s'étendait davantage, il paraîtrait justifié de demander au coupe-circuit utilisé pour limiter les courants de court-circuit — en plus des conditions bien connues — en premier lieu de commencer la rupture le plus tôt possible, sans causer par là une surtension plus grande de l'admissible. Il semble que le temps nécessaire pour un changement de fusible peut être réduit de beaucoup à l'aide de dispositions appropriées et déjà connues. On pourrait donc qualifier le coupe-circuit combiné avec un sectionneur de moyen idéal pour les dérivations de petite puissance. Le champ d'application des interrupteurs resterait donc la coupure des grandes puissances de service et des grandes puissances de court-circuit proportionnelles à celles-ci, et, en plus, des puissances miniatures où la puissance de court-circuit est petite par elle-même, sa limitation ne présentant pas d'intérêt et les efforts dynamiques étant insignifiants (par exemple les branchements domestiques). Dans ces dernières installations le coupe-circuit sert plutôt de sectionneur ; la protection proprement dite contre les courts-circuits peut être assurée par le petit disjoncteur moderne tout seul.

V. A la base de ce qui vient d'être dit, voyons maintenant comment se présenterait l'organe spécialisé de limitation des courts-circuits proprement dit et dont les caracteristiques correspondraient à celles des parafoudres. Il est évident qu'il ne devrait pas influencer le fonctionnement normal, de même que le parafoudre ne l'influence pas. En cas de court-circuit il devrait, par contre, fonctionner assez vite pour que le courant de court-circuit n'augmente pas au-dessus d'une certaine valeur admise. Une autre condition est que cet organe de limitation devrait être prêt à fonctionner tout de suite après la fin du court-circuit, de la même façon que le parafoudre. On voit que le coupe-circuit répond aux premières deux conditions, mais non à la troisième. La bobine de réactance répond à la deuxième et à la troisième, mais non à la première. Le disjoncteur répond à la première et à la troisième condition, mais non à la deuxième.

A présent nous sommes déjà à même de faire des propositions quant à la méthode de la limitation des court-circuits et aux dispositifs nécessaires.

1. Il semble qu'il faille considérer plus souvent que jusqu'ici la possibilité de séparer la coupure des courts-circuits de la coupure en service normal.

2. Là où une interruption de service de courte durée n'est pas impossible et où il existe des coupe-circuit correspondant à l'intensité du courant et à la tension de service, il paraît avantageux de les employer comme moyen de limi-

tation des courts-circuits, le cas échéant sous forme de coupe-circuit multiple et, avec possibilité de déconnexion. Il est utile d'empécher aussi l'interruption d'une seul phase.

3. Là où le réseau peut être divisé en plusieures parties avec des charges à peu près égales, l'emploi des bobines de réactance jumelées peut présenter certains avantages. (Fig. 3.)

4. Avec des puissances nominales, pour lesquelles il existe des coupe-circuits, nous pouvons employer, par exemple, une bobine de réactance shuntée

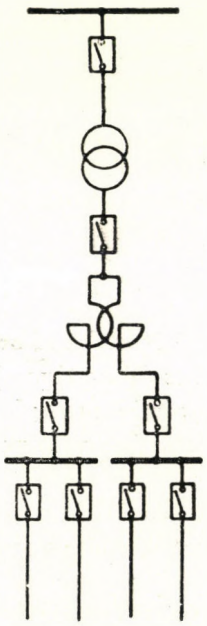


Fig. 3. Bobine de réactance joumelé

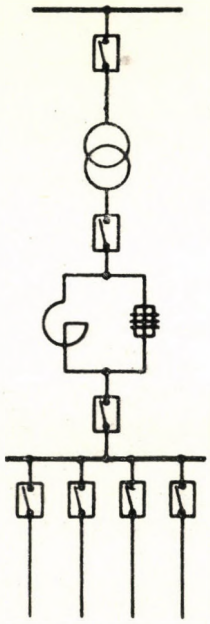


Fig. 4. Bobine de réactance en parallèle avec un coupe circuit

par un coupe-circuit et réunir ainsi les avantages de la bobine de réactance et du coupe-circuit. (Fig. 4.)

5. Là où la puissance nominale est si grande qu'il n'y a plus de coupe-circuit, on peut utiliser par exemple un interrupteur très rapide (brevet de F. KESSELRING, voir «A», fig. 5.). Nous ne pouvons pas éliminer ainsi les actions dynamiques, mais nous pouvons obtenir que les autres interrupteurs puissent être à puissances moindres, et, éventuellement, on peut même employer des sectionneurs à puissance. L'interrupteur (de signe «B») sur la figure est un sectionneur à puissance servant à couper et à fermer la puissance de service.

6. En plus des appareils énumérés, on peut s'imaginer encore d'autres moyens de limitation des courts-circuits, plus parfait évidemment, par exemple des impédances non linéaires etc. Il est probable que si les électriciens trouvent

acceptable l'idée de la limitation des courts-circuits, dans la forme qui vient d'être esquissée, des moyens de limitation des court-circuits plus parfaits que ceux qui ont été énumérés pourrant être développés. Une possibilité nouvelle peut être (dans les circuits à basse tension) le limiteur mentionné par M. BOUVIER (RGÉ, 1955. p. 591.)

Pour finir, il paraît intéressant de rappeler une question fondamentale étroitement liée à la limitation des courts-circuits.

Comme nous l'avons mentionné, il est probable que si le principe de la limitation des courts-circuits est accepté, on pourra établir des critères meilleurs et proposer des méthodes beaucoup plus parfaites.

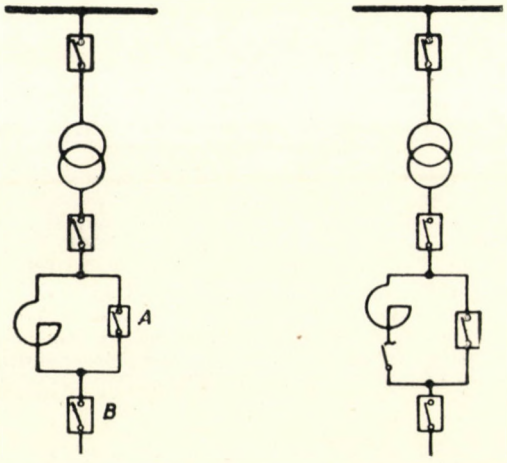


Fig. 5a—b. Bobine de réactance en parallèle avec un disjoncteur

Si cependant nous voulons mettre à profit les avantages de la limitation des courts-circuits aussi dans le domaine économique, nous allons évidemment dimensionner certaines parties de l'installation pour des courants de court-circuit plus petits que ceux qui ont été considéres jusqu'ici. Il se pose alors la question suivante : peut-on permettre qu'en cas d'un défaut éventuel du dispositif de limitation des courts-circuits, lorsque le courant de court-circuit *total*, donc pas limité, circule dans cette partie de l'installation, qui à été dimensionnée pour le courant de court-circuit limité, subisse des dommages. Ce scrupule semble évidemment justifié pour chaque moyen de limitation des courts-circuits, mais ceux-ci sont pourvus d'une protection de réserve, tandis que les moyens de limitation proposés dans le travail présent n'en possèdent aucune.

LITTÉRATURE

1. Biermanns : Überströme in Hochspannungsanlagen. Springer, Berlin 1920.
2. Biermanns : Hochleistung und Hochspannung. Hauser, München 1949.
3. Langer : Bedeutung des Kurzschlussproblems für Planung und Betrieb elektrischer Netze (Elektrizitätswirtschaft Bd. 54 (1955) S. 414—418, 444—448.
4. Bouvier : La protection contre les courants de court-circuit dans les installations à basse tension. R. GÉ, 1955. p. 591.
5. Eisler : Zárlatkorlátozás, Elektrotechnika 1952 10. sz.

RÉSUMÉ

Pour faciliter la protection contre les court-circuits, il semble nécessaire de s'occuper de la limitation des courts-circuits, pour les raisons suivantes :

1. La puissance d'interruption requise est hors de proportion avec la puissance normale de service, surtout dans les dérivations.

2. Les effets dynamiques et thermiques des courants de court-circuit élevés constituent un danger grave pour les installations, dans les systèmes mis à terre directement ; des mesures de protection onéreuses sont nécessaire à cause de l'élévation de la tension. L'auteur propose, un critère permettant de juger quand il *peut* y avoir besoin de limitation. Ce sont les calculs économiques qui décident si on *limitera* réellement.

Après avoir analysé les méthodes de limitation utilisées aujourd'hui au moyen d'exemples, l'auteur fait des propositions concernant leur développement futur. Essentiellement il s'agirait de l'extension de l'utilisation des coupe-circuit, de l'emploi plus fréquent de la combinaison sectionneur de puissance coupe-circuit, et de l'introduction des bobines de réactance shuntée par des coupe-circuits ou des disjoncteurs rapides, ainsi que de l'introduction des bobines de réactance jumelées comme moyen de limitation des courts-circuits.

Finalement, l'auteur attire l'attention sur le défaut théorique des moyens de limitation, qui est le manque d'une protection de réserve.

EINIGE GRUNDSÄTZLICHE FRAGEN DER KURZSCHLUSSBEGRENZUNG

J. EISLER
Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Erleichterung des Kurzschlussschutzes erscheint es notwendig, sich mit der Frage der Begrenzung der Kurzschlussströme zu beschäftigen, und zwar aus den folgenden Gründen :

1. Die erforderliche Unterbrechungsleistung ist besonders in den Abzweigungen im Vergleich zur Betriebsleistung unverhältnismässig gross.

2. Die dynamische und thermische Wirkung der hohen Kurzschlussströme bildet eine schwere Gefahr für die Einrichtungen, so dass in geerdeten Systemen wegen der Spannungserhöhung kostspielige Sicherheitsvorkehrungen notwendig sind. Der Verfasser schlägt ein Kriterium vor, um beurteilen zu können, wann eine Begrenzung notwendig sein *kann*. Wirtschaftliche Erwägungen entscheiden dann, ob die Begrenzung zur Anwendung gelangt oder nicht.

An Hand von Beispielen werden die derzeit gebräuchlichen Begrenzungsmethoden untersucht und Vorschläge für ihre Weiterentwicklung gemacht. Im wesentlichen handelt es sich um die ausgedehntere Verwendung von Sicherungen, um die häufigere Benutzung der Kombination von Leistungstrennschalter und Sicherung an Stelle von Leistungsschaltern, um die Verwendung von Drosselspulen, die parallel zu Sicherungen oder zu Schnellschaltern liegen, sowie um die Einführung von Zwillingsdrosselspulen als Mittel zur Kurzschlussbegrenzung.

Schliesslich weist der Verfasser auf den grundsätzlichen Nachteil der vorgeschlagenen Begrenzungsmassnahmen hin, nämlich auf das Fehlen eines Deckungsschutzes.

SOME BASIC PROBLEMS OF THE LIMITATION OF SHORT-CIRCUITS

J. EISLER

D. of Techn. Sc.

SUMMARY

In the interest of facilitating the protection against short-circuits, it seems necessary to treat the limitation of short-circuit currents, for the following reasons :

1. The necessary breaking capacity is out of proportion with the operating power, chief.y in the branches.

2. The dynamic and thermal action of the large short-circuit currents gravely endangers the installations, and in earthed systems expensive protection measures are necessary because of the voltage rise. The author proposes a criterium for judging when it is that limitation *may* become necessary. Wether we use limitation indeed, is decided by economic calculations.

The author uses examples for analyzing the presently used limiting methods, and makes proposals for their further development. The essential of these proposals is the more extensive use of fuses, the more frequent use of the power disconnecting swith + fuse combination instead of the circuit breaker, the use of choke coils shunted by fuses or quick-break switches, as well as the introduction of the twin choke coil as a short-circuit limiting device. Finally, the author points out the basic disadvantage of the proposed measures, i. e. the lack of a covering protection.

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ОГРАНИЧЕНИЯ ТОКОВ ЗАМЫКАНИЯ

Д-р техн. наук Я. ЭЙЗЛЕР

РЕЗЮМЕ

С точки зрения облегчения защиты от токов замыкания кажется необходимым заниматься вопросом ограничения токов замыкания, исходя из следующих причин.

1. Требующийся ток разрыва несравненно выше рабочих мощностей особенно на ответвлениях.

2. Динамический и термический эффект сильных токов замыкания сильно угрожает установкам; в случае заземленных систем, вследствие повышения напряжения, необходимо принять дорогостоющие меры защиты. Автор предлагает ввести критерии для определения, в каких случаях может быть необходимым производить ограничение. Вопрос о действительном введении ограничения решается экономическим расчетом.

Применяемые в настоящее время методы ограничения анализируются автором на приводимых им примерах, затем автор вносит предложения по их усовершенствованию. Суть его предложений заключается в распространении применения предохранителей ; вместо прерывателя предлагает более частое применение комбинации трансшальтера + предохранителя ; далее предлагает введение дросселя, шунтированного предохранителем или быстродействующим прерывателем, а также спаренного дросселя для ограничения токов замыкания.

Наконец, автор указывает на теоретические недочеты предложенных ограничивающих устройств, а также на отсутствие перекрывающей защиты.

DIE BEDEUTUNG DER LEICHTMETALLE IN EISENLEGIERUNGEN*

L. JENIČEK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT, PRAG

[Eingegangen am 10. Oktober 1955]

Die Eisenlegierungen und die Leichtmetallegierungen werden in der Regel als Feinde betrachtet, was in ihrer Entwicklung sowie auf dem Gebiet ihrer Verbreitung bis zu einem gewissen Grade auch tatsächlich der Fall ist. Demgegenüber besteht in der Forschung trotzdem eine gewisse Zusammenarbeit und ein Zusammenschluss der Forschungsgebiete. Man könnte hierfür zahlreiche Fälle anführen, doch seien hier mit Rücksicht auf den beschränkten Rahmen nur kurz zwei Beispiele besprochen.

Das erste Beispiel betrifft die *Anwendung des Aluminiums in hitzebeständigen Eisenlegierungen.* Es soll hier jedoch nicht von den kleinen Al-Zugaben die Rede sein, sondern von der vor kurzem in der Tschechoslowakei entwickelten, 30% Al enthaltenden Legierung. Eisenlegierungen mit einem Al-Gehalt von 16% wurden teils zur Erzeugung von Magneten und teils für hitzebeständige Bestandteile ausgearbeitet, und zwar in erster Linie in der Sowjetunion.

Nach dem Zustandsdiagramm von Fe-Al-C liegt die neue tschechoslowakische Legierung im Karbidfeld. Von grösster Bedeutung ist die Einstellung des C-Gehaltes, weil die Legierung sonst instabil ist und binnen 24 Stunden zerbröckelt. Die Zusammensetzung der gebräuchlichen Legierung lautet: 30% Al, 1,5% C, 0,5% Mn, 1% Si; S sowie P jeweils geringer als 0,1%; der Rest Fe. Bei der Herstellung dieser Legierung kann das Eisen im Kupolofen geschmolzen und das Aluminium in der Pfanne zugegeben werden, doch lässt sich in diesem Fall der Al-Gehalt nur mit Schwierigkeiten genau einhalten. Besser ist die Herstellung in Hochfrequenzöfen, wo das Aluminium auch in Form von Abfall verwendet werden kann, da Verunreinigungen von Cu, Si, Mg usw. nicht stören.

Die Wichte der neuen Legierung beträgt 5,6, ihre Hitzebeständigkeit ist bis 1000—1200° C befriedigend, ihre Korrosionsfestigkeit ist auch noch bei solchen Temperaturen vorzüglich. Ausserdem ist auch ihre Neigung zum Krie-

* Auszug des Vortrages auf dem von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 28.—30. September 1955 veranstalteten Kongress für Leichtmetalle. In ungarischer Sprache erschienen in: Kohászati Lapok, **88** (1955) S. 587—88.

chen äusserst gering, so dass diese Eigenschaft günstiger als bei den hochlegierten Cr-Ni-Stählen ist.

Die neue Legierung, die *Piroferal* genannt wird, ist wegen des Aluminiumoxydgehaltes ziemlich schwer zu giessen. Ihre Verformbarkeit und Zerspanbarkeit ist sehr schlecht, so dass sie praktisch nur gegossen werden kann.

Die neue Legierung wurde bei der Erzeugung von Schmelztiegeln, Zementierungskästen und Ofenbestandteilen verwendet. Sie widersteht gut der Korrosionswirkung von Salzen, z. B. dem Kryolith, so dass aus ihr Abstichpfannen für Aluminiumöfen hergestellt werden. Das Piroferal lässt sich überraschend gut schweissen und eignet sich deswegen auch zur Herstellung von Rohren. Die Wärmeausdehnung der Legierung ist recht gross, sie beträgt etwa das Zwanzigfache des Eisens.

Das zweite Beispiel, das hier angeführt werden soll, ist die *Anwendung des Magnesiums im Grauguss*. Diese Frage wird hier deshalb angeschnitten, weil bei dem üblichen Impfverfahren, das bei 1100° C mit metallischem Magnesium ausgeführt wird, die Ausbeute bloss etwa 60% ausmacht. Im Interesse der Erhöhung der Ausbeute werden in der Tschechoslowakei derzeit Versuche mit einem Druck von 5—6 Atm. angestellt, die bereits sehr gute Ergebnisse zeitigten. Man kann sich leicht vorstellen, dass diese Methode bei richtiger Berücksichtigung der Parameter auch auf anderen Gebieten zu interessanten Resultaten führen kann und dass man auch bei der Raffination der Aluminiumlegierungen durch die Anwendung von Druck zu überraschenden Ergebnissen gelangen wird.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit berichtet über eine Eisenlegierung mit 30% Al-Gehalt, die in der Tschechoslowakei unter dem Namen *Piroferal* entwickelt wurde und in erster Linie für hitzebeständige Bestandteile angewandt wird. Die Hitzebeständigkeit dieser Legierung ist selbst bei 1200° C noch zufriedenstellend und ihre Korrosionsfestigkeit ist als vorzüglich zu bezeichnen. Im zweiten Teil der Arbeit wird kurz die Verwendung von Magnesium im Grauguss erwähnt.

THE IMPORTANCE OF LIGHT METALS IN FERROUS ALLOYS

L. JENIČEK, Praha

SUMMARY

A ferrous alloy containing 30% Al is described, elaborated in Czechoslovakia under the name of *Piroferal* intended principally as a heat resisting alloy. Its heat resistance is satisfactory even at 1200° C, and its resistance to corrosion is excellent. The second part of the paper briefly mentions the use of magnesium in grey castings.

L'IMPORTANCE DE MÉTAUX LÉGERS DANS LES FERRO-ALLIAGES

L. JENIČEK, Praha

RÉSUMÉ

Un ferro-alliage contenant 30% d'Al a été mis au point en Tchécoslovaquie sous le nom de *Piroferal*, destiné, en premier lieu à servir comme alliage réfractaire. Sa tenue est satisfaisante même à une température de 1200° C et sa résistance à la corrosion est excellente. La seconde partie de l'étude mentionne brièvement l'emploi du magnésium en fontes grises.

ЗНАЧЕНИЕ ЛЕГКИХ МЕТАЛЛОВ В ЖЕЛЕЗНЫХ СПЛАВАХ

Л. ЕНИЧЕК (Прага)

РЕЗЮМЕ

Сообщается о железном сплаве, содержащем 30% алюминия, который разработан в Чехословакии и известен под названием «пироферал» и используется, в первую очередь, для термостойких целей. Термостойкость этого сплава удовлетворительна и при температуре 1200°С, сопротивление коррозии весьма высоко. Во второй части сообщения кратко отмечается использование магния для отливок из серого чугуна.

EINIGE PROBLEME DER FORSCHUNG NACH NEUEN LEICHTMETALLEGIERUNGEN*

D. A. PETROW

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
INSTITUT FÜR HÜTTENWESEN DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN DER UdSSR, MOSKAU

[Eingegangen am 10. Oktober 1955]

Im Jahre 1954 war es gerade ein Jahrhundert her, dass SAINT-CLAIRE-DEVILLE zuerst metallisches Aluminium herstellte und somit die Grundlage für die industrielle Gewinnung des Aluminiums schuf. Anfänglich diente das Aluminium bei der Herstellung verschiedener Gegenstände als Ersatz für Gold und andere Edelmetalle, da ja auch sein Preis sehr hoch war. In den ersten 10 Jahren wurden insgesamt 10 t Aluminium erzeugt, während die Aluminiumproduktion im Jahre 1954 bereits mehr als 3 000 000 t ausmachte. Der Preis des Aluminiums sank von anfänglich 144 000 $/t auf 165 $/t.

Einer der wichtigsten Faktoren für die günstigen Eigenschaften des Aluminiums ist die Tatsache, dass es auch in grosser Reinheit hergestellt werden kann, so dass es sowohl in Form von Reinmetall als auch in Form von Legierungen über Eigenschaften verfügt, wie sie sich beim Hüttenaluminium von üblicher Reinheit nicht erreichen lassen. Solche Eigenschaften sind die natürliche Alterung der Al-Cu-Legierungen, die ausgezeichnete Verformbarkeit und vorzügliche Korrosionsfestigkeit des Aluminiums von 99,999% Reinheit.

Durch Raffination des Hüttenaluminiums kann ein Aluminium von 99,99% Reinheit hergestellt werden. Eine noch grössere Reinheit lässt sich sowohl beim Aluminium als auch bei anderen Metallen mit neuen, modernen Verfahren erzielen. Diese Verfahren beruhen auf dem Umstand, dass sich die Verunreinigungen im flüssigen und im festen Metall in einem unterschiedlichen Ausmass lösen. Durch entsprechende Einstellung lässt es sich erreichen, dass der wenige Verunreinigungen enthaltende Kristall diese in der Schmelze vor sich herschiebt. Die hierbei gebräuchlichen zwei Verfahren sind *a)* die Methode von CZOCHRALSKI, nämlich das langsame Herausziehen der wachsenden Kristalle aus der Schmelze und *b)* das schichtenweise Schmelzen bzw. die Rekristallisation. Bei dem letzteren Verfahren schmelzt ein entlang der Längsachse des Metallblocks verschobenes Heizelement immer eine dünne Schicht ab und erreicht ebenfalls die obige Wirkung. Wird diese Operation mehrere Male ausgeführt, so lässt

* Gekürzter Text des Vortrages auf dem von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 28.—30. September 1955 veranstalteten Kongresses für Leichtmetalle. In ungarischer Sprache erschienen in: Kohászati Lapok, **88** (1955) S. 533—535.

sich ein hochreines Metall herstellen. Die Ausziehgeschwindigkeit bei der Methode *a)* und die Verschiebungsgeschwindigkeit bei der Methode *b)* ist ziemlich niedrig, sie beträgt bloss einige zehntel oder hundertstel mm/min.

Die Wirksamkeit des Reinigungsprozesses kann durch die Verteilung der Verunreinigungen, d. h. durch den Faktor K charakterisiert werden, der den Quotienten des Verunreinigungsgehaltes von fester und flüssiger Phase darstellt ($K = c_{fe}c_{fl}$). Der Wert dieses Faktors ist natürlich je nach dem Metall

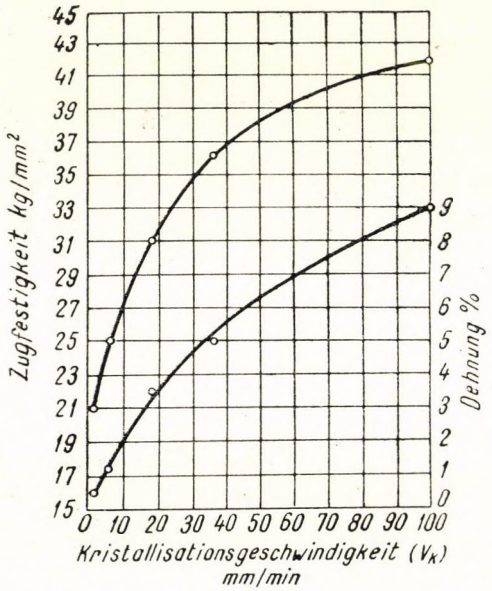


Abb. 1. Der Zusammenhang zwischen den mechanischen Eigenschaften und der Kristallisationsgeschwindigkeit von gegossenem Dural

und je nach den Verunreinigungen verschieden. Mit solchen Verfahren ist es bereits gelungen, Aluminium von 99,9999 und 99,99999% Reinheit herzustellen.

Die günstigen Eigenschaften eines aus einem Reinmetall oder einer Metallegierung angefertigten Gegenstandes hängen ausser von der Reinheit auch stark von der Beschaffenheit des Gussblocks ab. Die Herstellung von qualitativ hochstehenden Gussblöcken ist eine der wichtigsten Aufgaben des Hüttenmannes. Um dies zu erreichen, wurde in den letzten zwei Jahrzehnten der halb- und völlig kontinuierliche Blockguss bei intensiver Wasserkühlung entwickelt. Bei diesem erhält man ein Gefüge mit sehr feinen Dendriten, in dem die Verunreinigungen in einer sehr günstigen Form, nämlich in der von kleinen Teilchen gleichmässig verteilt sind. Die Grundmasse der Legierung ist eine bildsame feste Lösung, in der die Legierungskomponenten und die Verunreinigungen mehr oder minder gleichförmig verteilt sind.

Die Qualität solcher Blöcke kann laut Abb. 1 charakterisiert werden, wo auf der Abszisse die Erstarrungsgeschwindigkeit aufgetragen wird. Auf diese Weise entspricht die linke Seite des Diagramms dem Guss mit Luftkühlung und die rechte dem kontinuierlichen Guss. Wie ersichtlich ist im letzteren Fall nicht nur die Zugfestigkeit, sondern auch die Dehnung wesentlich besser, wodurch wiederum die bildsame Verformbarkeit verbessert wird.

Das bedeutendste Hindernis für eine gleichförmige Verteilung der Legierungskomponenten besteht in der bereits erwähnten Tatsache, dass die Lösung

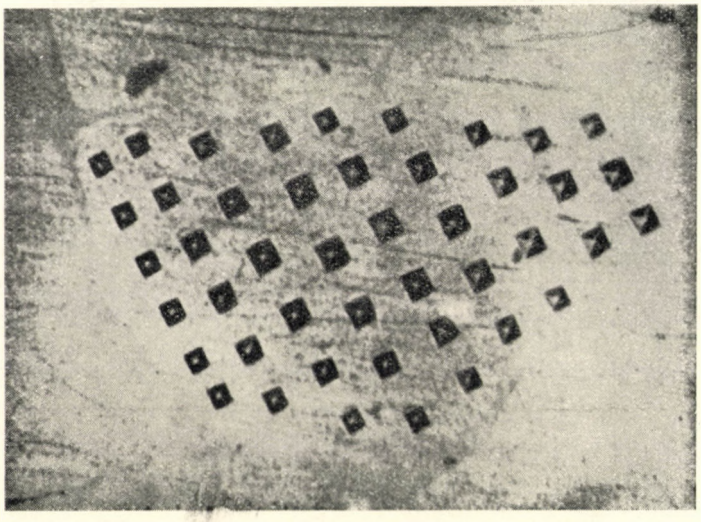


Abb. 2. Mikroaufnahme des Korngefüges einer 4% Cu enthaltenden Al-Cu-Legierung mit den von der Mikrohärtemessung stammenden Eindrücken

der Komponenten in der festen und in der flüssigen Phase in einem jeweils anderen Ausmass stattfindet. Das Ergebnis dieser Lösung ist die Trennung innerhalb der Körnchen, was darin zum Ausdruck kommt, dass sich die Verunreinigungen hauptsächlich an den Korngrenzen anreichern. Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Körner mit einem Mikrohärtemesser prüft (Abb. 2). Die Eindrücke sind in der Mitte der Körner grösser, da hier die Härte geringer ist und hier weniger Verunreinigungen sind, während die Lage am Rande der Körner umgekehrt ist.

Bei den kontinuierlich gegossenen Blöcken konnte eine neuartige Erscheinung beobachtet werden, die mit der ungleichförmigen, inhomogenen Verteilung der Verunreinigungen zusammenhängt. Bei der Kristallisation (Abb. 3) lässt sich im Falle einer sorgfältigen Prüfung eine sich periodisch wiederholende, parallele Linienschar beobachten, wo die Linien einige zehntel mm voneinander entfernt sind. Der Grund für diese Erscheinung wird verständlich, wenn man

den sich bei der Kristallisation abspielenden Prozess an Hand des Zustandsdiagramms untersucht. Die durch den wachsenden Kristall verdrängten Verunreinigungen häufen sich an der Kristallisationsfront an und verursachen hier eine Anreicherung der Schmelze. Der Erstarrungspunkt der angereicherten Schmelze ist weit niedriger, wie dies auch aus Abb. 4 hervorgeht (hier ist l_1 der zum Kristall von der Zusammensetzung s_1 gehörige Liquiduspunkt und l_1'



Abb. 3. Makroaufnahme des Längsschnittes eines Blockes aus 1,2% Mn enthaltender Al-Mn-Legierung. Halbkontinuierlicher Guss

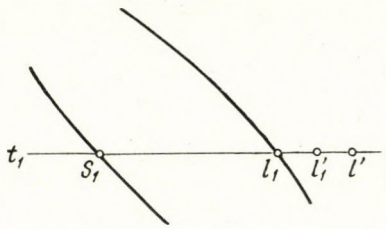


Abb. 4. Die Verschiebung der Zusammensetzung der Legierung gegen das ungesättigte Feld zu bei Anreicherung der Verunreinigungen an der Kristallisationsfront

und l' die an Verunreinigungen angereicherte Schmelze). Eine solche an Verunreinigungen angereicherte Schmelze erstarrt bei einer niedrigen Temperatur, wobei sie eventuell nicht einmal mit der Grundmasse der Schmelze in Berührung kommt. Die Wiederholung dieser Erscheinung führt zu der obenerwähnten periodischen inhomogenen Verteilung der Verunreinigungen.

Die Veränderung der Mikrohärte einer nach der Methode von CZOCHRALSKI hergestellten Al-Cu-Legierung mit 4% Cu-Gehalt bei verschiedenen Ausziehgeschwindigkeiten ist in Abb. 5 veranschaulicht. Bei einer Geschwindigkeit von 2,5 mm/min ist die auf die periodische Inhomogenität zurückzuführende Härteveränderung ziemlich beträchtlich, während sie bei einer Ausziehgeschwindigkeit von 0,06 mm/min ziemlich geringfügig ist.

Ähnliche Erscheinungen wurden auch von amerikanischen Forschern in radioaktive Verunreinigungen enthaltenden Germaniumkristallen festgestellt und solche findet man auch dann, wenn man die Mikrostruktur von Aluminiumlegierungen nach einer sorgfältigen Ätzung untersucht. An der in Abb. 3 gezeigten Legierung wurden auch Mikrohärtemessungen durchgeführt, deren Ergeb-

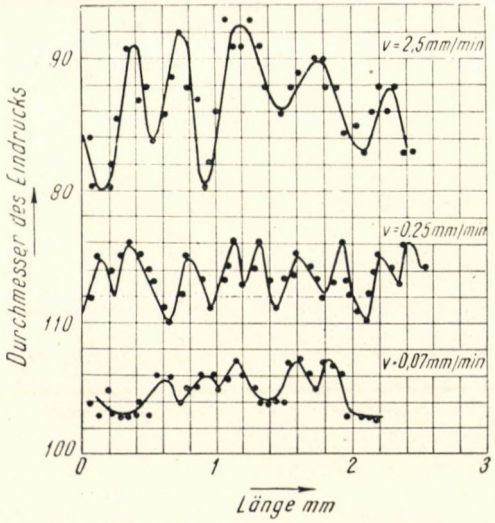


Abb. 5. Die Veränderung der Mikrohärte entlang des Längsschnitts des Blockes bei periodischer inhomogener Verteilung der Verunreinigungen

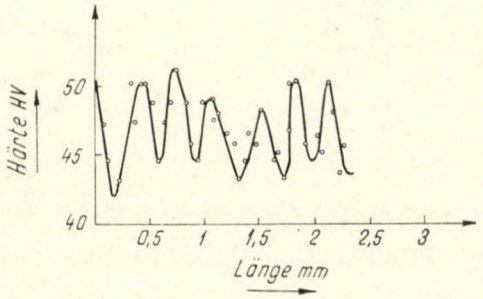


Abb. 6. Die Veränderung der Mikrohärte im Falle des Blockes der Abb. 3

nisse in Abb. 6 dargestellt sind. Gut ersichtlich ist die sich periodisch wiederholende Mikrohärte-Wellenlinie.

Mit der inhomogenen Verteilung der Verunreinigungen lässt sich auch die Ausbildung der sog. Substruktur der Metalle erklären, wofür ein Beispiel in Abb. 7 vorgeführt wird. Die Abbildung stellt die Mikrostruktur einer Al-Cu-Legierung mit 1,5% Cu-Gehalt dar ; die Legierung wurde gleichfalls nach der Methode von CZOCHRALSKI hergestellt.

Leider kann hier diese Frage wegen des beschränkten Rahmens nicht mit jener Ausführlichkeit erörtert werden, die sie verdient. Die Wahrnehmung dieser periodischen Ausscheidungserscheinung ist nämlich sowohl für die Theorie als auch für die Praxis von ausserordentlicher Bedeutung und wird nach ihrer Anwendung auf den kontinuierlichen Guss wahrscheinlich zu wichtigen Folgerungen führen.

Es soll nun die Entwicklung der Aluminiumlegierungen einer Untersuchung unterzogen werden. Hierbei seien in erster Linie jene Legierungen erörtert,

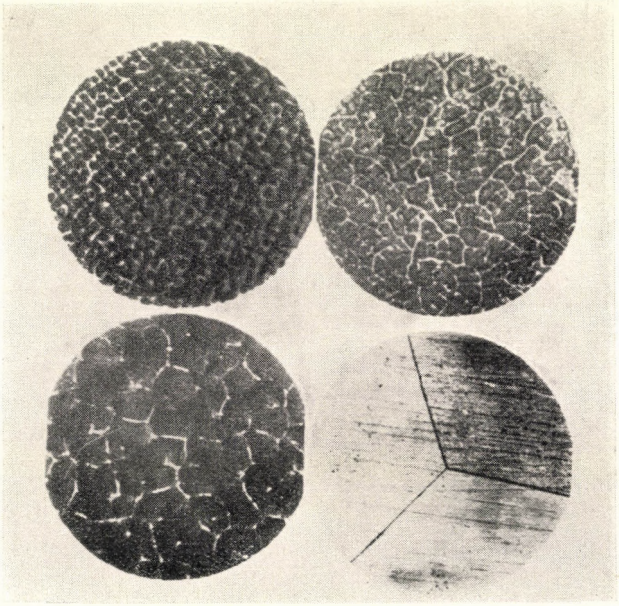


Abb. 7. Substruktur einer 1,5% Cu enthaltenden Al—Cu-Legierung

die eine grosse Festigkeit, eine hohe Ermüdungsgrenze und eine betriebssichere Inanspruchnahme gewährleisten.

Die Legierungen von hoher Festigkeit beruhen bei allen Werkstoffen — ebenso wie beim Stahl — auf festen Lösungen. Das Aluminium bildet solche feste Lösungen vor allem mit Zink, Silber, Magnesium, Kupfer und einigen anderen Elementen.

Die erste wichtigere hochfeste Legierungsgruppe ist die von WILM im Jahre 1907 eingeführte Dural-Gruppe, die Legierung Al-Mg-Cu-Mn. In diesen Legierungen wurde anfänglich 0,4—0,8% Mg verwendet, später jedoch das Dreifache dieser Mengen. Bei den Durallegierungen mit niedrigem Mg-Gehalt war die die Festigkeit hervorrufende Phase das $CuAl_2$, während bei jenen mit höherem Mg-Gehalt die Festigkeit durch die aus den drei Komponenten Al, Cu und Mg bestehende Verbindung verursacht wurde. Nach betrieblicher Her-

stellung solcher Legierungen konnten Zugfestigkeiten von 22—48 kg/mm² erreicht werden.

Während des zweiten Weltkrieges wurde die Legierungsgruppe Al-Mg-Zn ausgearbeitet und dann zu der Legierungsgruppe Al-Mg-Zn-Cu weiterentwickelt. Letztere weist auch im künstlich gealterten Zustand, falls die Alterung durch richtige Wärmebehandlung erzielt wurde, eine gute Korrosionsfestigkeit auf, die besser als die der Al-Mg-Zn-Legierungen ist. Die Zugfestigkeit solcher Legierungen beträgt 52—60 kg/mm².

Aus der Weiterentwicklung der Durallegierungen entstanden die Superdurale, die sich durch einen höheren Cu-Gehalt — bei sorgfältig eingestelltem Si-Gehalt — auszeichnen. In solchen Legierungen tritt ausser der Mg_2Si- und $CuAl_2$-Phase auch noch eine Phase mit vier Komponenten auf (W-Phase), deren Zusammensetzung sich durch die Formel $Al_2CuMgSi$ annähern lässt.

Mit der Entwicklung der Düsenflugzeuge stellte sich ein neues Problem. Ausser der grossen Festigkeit wird nämlich noch verlangt, dass die Legierungen selbst bei einer Erwärmung auf 120—150° C nicht ihre Festigkeit einbüssen. Von diesem Gesichtspunkt aus sind die Al-Mg-Zn-Cu-Legierungen unvorteilhaft, da sie ihre Festigkeit über 120° C verlieren. Infolgedessen kommen nur die Al-Cu-Mg-Mn-Legierungen in Betracht und auch diese nur im künstlich gealterten Zustand, weil bei natürlicher Alterung um 100—130° C eine Umkristallisation auftritt, die die Korrosionsfestigkeit stark beeinträchtigt. Es ist zweckmässig, vor der Alterung eine Kaltverformung von einigen Prozenten durch Walzen oder Recken vorzunehmen, wodurch auch die Zugfestigkeit und der Korrosionswiderstand erhöht werden.

Im Prinzip kann man sich auch die Verwendung anderer Legierungen bei der Herstellung von Düsenflugzeugen vorstellen; so wurde im Jahre 1952 in den Vereinigten Staaten vorgeschlagen, die bekannten Rolls-Royce-Legierungen (RR—57: mit Cu- und Mn-Zusatz; RR—58: mit Cu-, Fe-, Mg- und Ni-Zusatz) für diesen Zweck zu erproben.

Die Anforderungen auf dem Gebiete der Düsenflugzeuge sind derzeit jedoch bereits so hoch, dass es nicht mehr möglich ist, sie mit Aluminiumlegierungen zu befriedigen. Aus diesem Grunde ist ein neuer ernsthafter Konkurrent aufgetreten, das Titan. Mit den Titanlegierungen lassen sich Eigenschaften erzielen, an die man beim Aluminium nicht einmal im Traum gedacht hätte. Ihr Schmelzpunkt liegt höher und sie verlieren auch nicht so leicht ihre Festigkeit, so dass damit die Aluminiumlegierungen aus einem bedeutenden Gebiet vorläufig verdrängt erscheinen.

Zur Anwendung der Aluminiumlegierungen auf neuen Gebieten sind alle Reserven auszunutzen, die noch überhaupt nicht oder erst in einem nicht genügendem Ausmass erschlossen wurden.

Ein solche Reserve ist z. B. die Verwendung als Überzug. Der Überzug verbessert den Korrosionswiderstand und die technologischen Eigenschaften,

allerdings vermindert er die Festigkeit. Auf dem Gebiete der Überzüge ist noch viel Forschungsarbeit zu leisten. So ist z. B. eine Verminderung der Dicke des Überzuges durchaus möglich. Früher wurde einheitlich 5% benutzt, heute beträgt die Dicke des Überzuges bei dünneren Platten als 2 mm bereits 4% und bei dickeren nur 2%. Es fragt sich, inwieweit hier Legierungen zur Anwendung gelangen können, weil sie die Produktion erschweren, die Oberflächenqualität der Platten verschlechtern und die Festigkeit nur in einem geringen Ausmass erhöhen.

Zur weiteren Erhöhung der Festigkeit bedarf es einer gesteigerten Zugabe der wichtigeren Legierungskomponenten, gegebenenfalls auf Kosten einer anderen Komponente (Cu, Mg, Zn). Von Bedeutung sind auch die eine grössere Homogenität bewirkenden kornverfeinernden Zusätze (Ti, Zr usw.).

Es sind noch kurz auch die Al-Mg-Legierungen zu erwähnen, die höchstens 5—6% Mg enthalten. Die Festigkeit dieser ist wesentlich geringer als die der vergütbaren, dagegen ist ihre Schweissbarkeit weit besser. Diese Eigenschaften machen sie auf zahlreichen Anwendungsgebieten zu ernsthaften Konkurrenten der hochfesten, vergütbaren Legierungen. Eine bedeutende Unzulänglichkeit ist indessen, dass sie bei einem höheren Mg-Gehalt unter Spannung gegenüber Korrosion empfindlich sind und stärker kriechen.

Einer der wichtigsten Faktoren der Weiterentwicklung der Legierungen ist die gründlichere Untersuchung der Technologie und der physikalisch-chemischen Prozesse bei ihrer Herstellung, vom Guss der Blöcke angefangen.

Im vorstehenden wurden lediglich einige Fragen gestreift, die für die Weiterentwicklung der Leichtmetallegierungen von Wichtigkeit sein dürften.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Verfasser erörtert die Probleme der Herstellung von hochreinem Aluminium, die in gegossenen Leichtmetallblöcken stattfindende Kristallisation, vor allem aber das Verhalten der Verunreinigungen, deren Einfluss er durch die Messung der Mikrohärte untersuchte. Im weiteren berichtet er über die Entwicklung der Al-Cu-, Al-Cu-Mg-, Al-Cu-Mg-Mn-, Al-Mg-Zn- und schliesslich der sog. Superdurallegierungen und über ihre Anwendung in Düsenflugzeugen, die er infolge des Auftauchens der Titanlegierungen bis zu einem gewissen Grade als überholt betrachtet. Bedeutende Entwicklungsmöglichkeiten sieht er dagegen in den Al-Mg-Legierungen und im allgemeinen auf Grund einer eingehenderen Untersuchung der mit der Produktion zusammenhängenden physikalisch-chemischen und technologischen Prozesse.

SOME PROBLEMS OF RESEARCH ON NEW LIGHT METAL ALLOYS

D. A. PETROV, Moscow
D. of Eng. Sc.

SUMMARY

The paper treats the production of highpurity aluminium, the crystallization taking place in cast light metal ingots, more particularly the behaviour of impurities, the effect of which is investigated by measuring micro-hardness. In the following the development of the Al-Cu, Al-Cu-Mg, Al-Cu-Mg-Mn, Al-Mg-Zn and finally of the so-called superdural alloys and their use

in jet-aircraft is treated, which is now considered to some extent already as outdated because of the appearance of titanium alloys. A great possibility of development is seen for Al-Mg alloys and in general in the more intensive investigation of physico-chemical and technological processes of manufacture.

QUELQUES PROBLÈMES DES RECHERCHES SUR DES ALLIAGES NOUVEAUX DE MÉTAUX LÉGERS

D. A. PETROW, Moscou
Docteur des sc. techn.

RÉSUMÉ

L'étude traite de la production de l'aluminium extra-pur, de la cristallisation ayant lieu dans des lingots coulés et surtout la conduite des impuretés, dont l'influence est étudiée par le mesurage de la micro-dureté. Dans la suite l'auteur expose le développement des alliages de Al-Cu, Al-Cu-Mg, Al-Cu-Mg-Mn, Al-Mg-Zn et enfin de l'alliage nommé superdural ainsi que leur emploi dans les avions à réaction qu'il considère maintenant dans une certaine mesure comme dépassé en conséquence de l'apparition des alliages du titane. L'auteur voit une grande possibilité du développement dans le domaine des alliages de Al-Mg et en général de l'examen plus approfondi des processus physico-chimiques et technologiques de la fabrication.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ В ОБЛАСТИ РАЗВИТИЯ ЛЕГКИХ СПЛАВОВ

Д-р техн. наук Д. А. ПЕТРОВ (Москва)

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена получению очень чистого металлического алюминия, далее кристаллизации, происходящей в слитках из легких металлов, а в основном поведению примесей, влияние которых исследовалось измерением микротвердости. В остальной части работы излагается развитие сплавов Al—Cu, Al—Cu—Mg, Al—Cu—Mg—Mn, Al—Mg—Zn и, наконец, т. н. супердюральных сплавов и их применение для строительства реактивных самолетов, что автор считает уже устаревшим до некоторой степени вследствие изобретения титановых сплавов. Автор считает, что серьезное развитие может иметь место для сплавов Al—Mg и, вообще, в отношении более основательного исследования физико-химических и технологических процессов, связанных с производством.

DIE ERSCHEINUNGEN BEI DER WARMVERFORMUNG DES ALUMINIUMS*

J. SCHEY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE, LEHRSTUHL FÜR BILDSAME VERFORMUNG UND HÜTTENMASCHINENKUNDE, MISKOLC

[Eingegangen am 10. Oktober 1955]

Die mit der Warmverformung der Metalle verbundenen Erscheinungen wurden in den letzten drei Jahrzehnten schon von mehreren Forschern untersucht. Im Laufe dieser Versuche wurde die Warmfestigkeit der Metalle bei Zug- [1] bzw. Druckbeanspruchungen [2, 3] und die Härte bei verschiedenen Temperaturen [4] gemessen sowie die Rekristallisation während oder nach der Warmverformung untersucht [5, 6].

In den angeführten Aufsätzen finden sich schon zahlreiche wichtige Feststellungen bezüglich der Natur der Warmverformung, so z. B. auch jene, dass im Laufe der Warmverformung des Aluminiums im allgemeinen keine Rekristallisation auftreten sollte [1, 5]. Immerhin wurden keine so umfassenden Versuche durchgeführt, dass alle Erscheinungen der Warmverformung in ihren Zusammenhängen untersucht worden wären. Auf diesen Umstand ist auch jene in der Praxis weit verbreitete Auffassung zurückzuführen, wonach die Warmverformung aus zwei im einzelnen verhältnismässig wohlbekannten Vorgängen, nämlich aus Verfestigung und Rekristallisation besteht, wobei die letztere früher oder später der Verformung nachfolgt.

Die hier beschriebenen Untersuchungen verfolgten das Ziel, auf Grund systematischer Versuche ausgedehntere Kenntnisse bezüglich der Grunderscheinungen, die während der Warmverformung des Aluminiums auftreten, zu erlangen.

1. Versuchsmethode

Die Verformung erfolgte im Laufe der Versuche durch Stauchen zwischen ebenen Flächen, Strangpressen und Walzen, um den praktischen Verformungsverhältnissen bestmöglich nahezukommen.

Die zur Stauchung gelangenden zylindrischen Proben hatten einen Durchmesser von 20 mm und eine Höhe von ebenfalls 20 mm. Die Blöcke, die strang-

* Vorgetragen auf dem von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 28. bis 30. September 1955 in Budapest veranstalteten Kongress für Leichtmetalle. In ungarischer Sprache veröffentlicht in Kohászati Lapok Bd. **88** (1955) S. 579/586.

gepresst wurden, besassen einen Durchmesser von 30 mm und eine Höhe von 40 mm. Die Walzblöcke waren keilartig ausgebildet: ihre Länge betrug 100 mm, ihre Breite 40 mm, ihre Dicke am schmaleren Ende 6 und am dickeren Ende 12 mm.

Verwendet man für die Versuche gezogenes oder gewalztes Material, so stösst man bei der Identifizierung der Struktur auf Schwierigkeiten, da die infolge der Verschiebung der Korngrenzen bzw. durch Wachstum der neuen Kristallkeime entstandenen Strukturen schwer voneinander zu unterscheiden sind. Die verwendeten Proben wurden deshalb im allgemeinen in Kokillen mit entsprechenden Abmessungen gegossen. Nur zu Vergleichszwecken wurden einige von gezogenem Stangenmaterial abgeschnittene Proben gestaucht.

Die Zusammensetzung der Versuchsmaterialien war folgende:

	Cu	Fe	Mn	Mg	Si	Ti
gegossen	0,040	0,18	—	—	0,26	—
gezogen	0,095	0,46	0,01	—	0,31	0,022

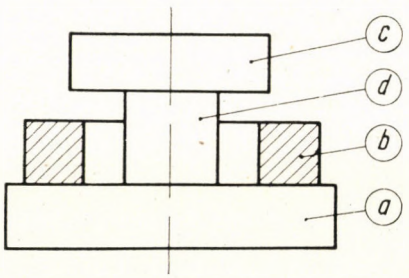


Abb. 1. Stauchwerkzeug: *a* Grundplatte; *b* Ring; *c* Deckplatte; *d* Probekörper

Die aus dem gezogenen Material angefertigten Proben wurden vor dem Versuch 6 Stunden lang bei einer Temperatur von 500° C geglüht.

Stauchen und Pressen erfolgten auf einer 35-t-Zerreissmaschine.

Die gestauchten Proben mussten vor einer raschen Abkühlung, die sonst infolge ihrer kleinen Abmessungen eingetreten wäre, bewahrt werden. Sie wurden deshalb zusammen mit dem dreiteiligen Stauchwerkzeug auf die Versuchstemperatur erwärmt. Nach dem Stauchen wurde das Probestück samt dem Werkzeug in den Ofen zurückgebracht oder durch zeitliche Verschiebung des Ringes (*b*) in einem neben der Unterplatte (*a*) stehenden Wasserbecken abgekühlt (Abb. 1).

Das Strangpressen erfolgte mit einem früher beschriebenen Versuchsrezipienten [7], der konstant auf der Temperatur des Pressens gehalten wurde. Zur Feststellung der Struktur des gepressten Materials wurden die aus dem Werkzeug austretenden Stangen in einen mit Wasser gefüllten Behälter geführt (Abb. 2).

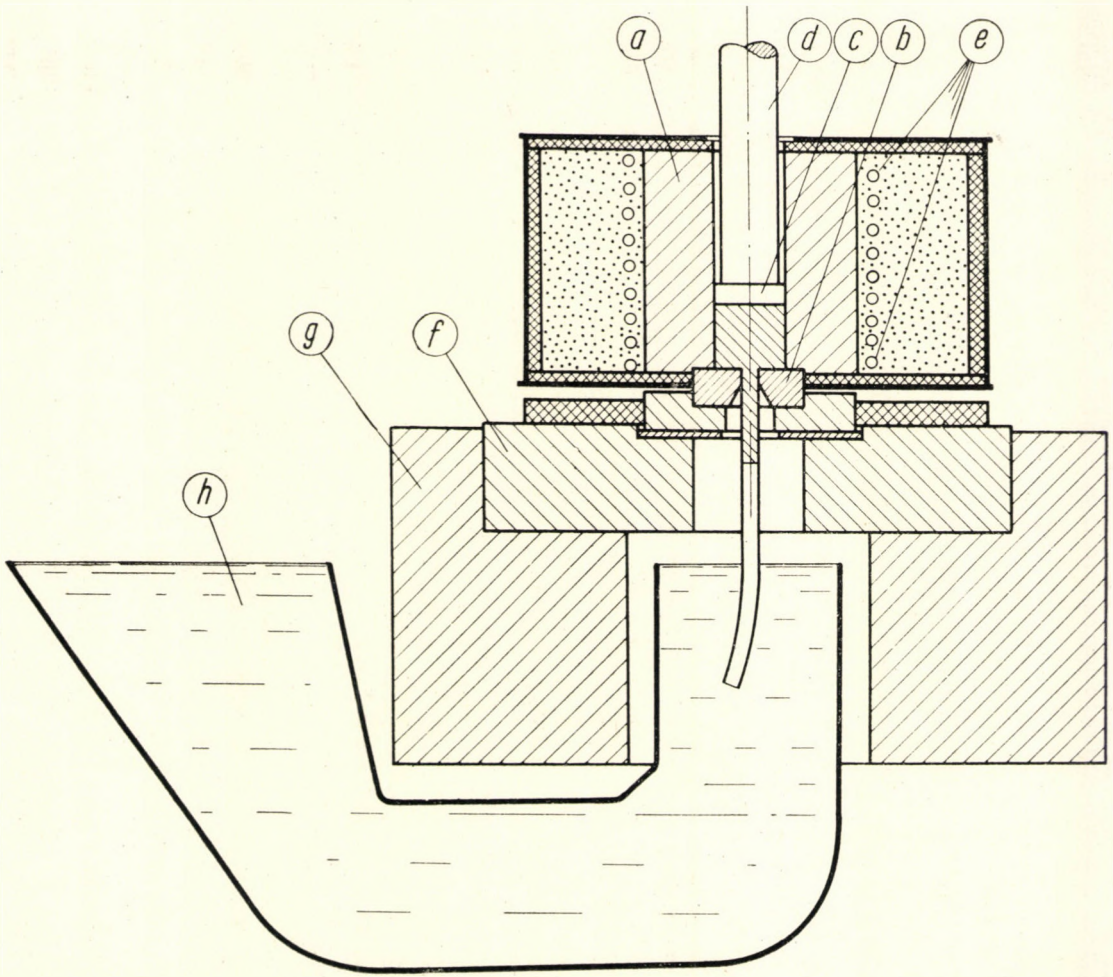


Abb. 2. Versuchsanordnung für das Pressen von Drähten: *a* Aufnehmer; *b* Presswerkzeug; *c* Pressscheibe; *d* Pressdorn; *e* Heizwiderstand; *f* Grundplatte; *g* Presstisch der Zerreissmaschine; *h* Wasserbecken

Das Walzen erfolgte auf einem Versuchs-Duowalzwerk mit 150 mm Walzendurchmesser und 60 U/Min. Das gewalzte Stück kam unmittelbar nach Verlassen des Walzspaltes entweder ins Wasser oder zurück in den elektrisch beheizten und auf konstanter Temperatur gehaltenen Ofen. Die Proben waren im letzteren Falle insgesamt höchstens 4—5 Sekunden lang ausserhalb des Ofens.

2. Versuchsergebnisse

Die Versuche werden hier zur besseren Übersicht gemäss den einzelnen Verformungsarten gesondert besprochen.

a) *Stauchversuche*

Die zylindrischen Proben wurden auf verschiedenen Temperaturen — zwischen 20 und 650° C — mit verschiedenen Verformungsgeschwindigkeiten — zwischen 0,2 und 5 mm/s — und Reduktionen — zwischen 10 und 70% Höhenabnahme — gestaucht. Ein Teil der Proben wurde unmittelbar nach der Verformung sofort in Wasser abgekühlt, der andere Teil für verschiedene Zeitspannen in einen Ofen mit der Temperatur des Stauchens zurückgelegt. Ungefähr die Hälfte der Stauchungen erfolgte zwischen geschliffenen trockenen Werkzeugoberflächen. Ein Teil der parallelen Proben wurde mit kolloidalem Graphit geschmiert.

Im Laufe der Versuche wurde der Kraftbedarf des Stauchens gemessen und registriert. Die gestauchten Proben wurden entzweigefräst und zur Feststellung ihrer Makrostruktur geätzt. Die Ätzung erfolgte mit einer Lösung, die HF, HCl und HNO_3 enthielt.

Die Vickershärte der Proben wurde entlang der Diagonale des Querschnittes, im allgemeinen an 3 Stellen, und ausserdem an den Endflächen der Körper gemessen.

Die zwischen trockenen Flächen gestauchten Proben zeigten eine charakteristische Tonnenform. Die Formänderung war in der Achse der Proben wegen der inhomogenen Deformation nicht überall gleich ; die tatsächliche Formänderung wurde an der Deformation von Schrauben, die in einige Proben eingetrieben waren, gemessen. Die tatsächliche Formänderung beträgt bei einer höchstens 30 %igen Höhenabnahme und beim Pressen bei einer Temperatur von 500° C in der obenliegenden Schicht, die 2 mm breit ist, 4—15%, in der Mitte hingegen 35—45%. Da das Ziel der Untersuchungen die Feststellung qualitativer Zusammenhänge war, werden im folgenden immer die Durchschnittswerte der Höhenabnahme der Körper als Formänderung angegeben.

Der grösste Teil der mit kolloidalem Graphit geschmierten Proben war auch nach dem Stauchen noch praktisch zylindrisch.

Da die Hydraulik der gegebenen Zerreissmaschine nur die Einstellung einer konstanten Verformungsgeschwindigkeit ermöglichte, steigt die Formänderungsgeschwindigkeit während des Stauchens immer mehr an. Der absolute Wert der Geschwindigkeit ist aber so klein, dass dieser Umstand keine bemerkenswerte Vergrösserung des Kraftbedarfs zur Folge hat.

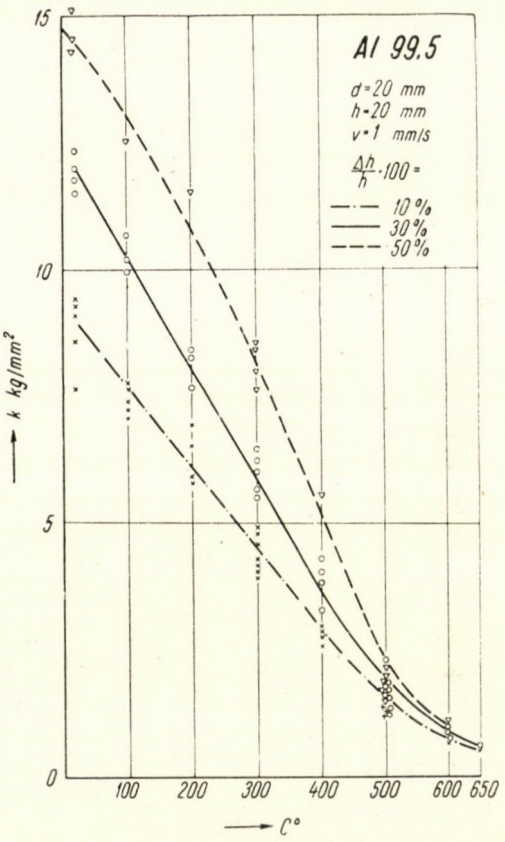


Abb. 3. Verformungswiderstand beim Stauchen von gegossenen Aluminiumprobekörpern

In Abb. 3 sind die aus den bei 10, 30, bzw. 50% Verformung gemessenen Kräften berechneten Werte des Formänderungswiderstandes in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen. Diese Werte beziehen sich auf Probestücke, die unmittelbar nach dem Stauchen in Wasser abgekühlt wurden.

Zur Klärung der Vorgänge, die sich während der Pausen zwischen den einzelnen Verformungsoperationen abspielen, wurden mehrere Proben mit einer Gesamthöhenabnahme von 10, 30, 50 bzw. 70% so verformt, dass die Verformung zuerst immer nur bis 10% Höhenabnahme erfolgte, die Proben hernach für 1, 2, 4, 8 bzw. 16 Minuten in den Ofen zurückgelegt, bis 30% Höhen-

abnahme weiter verformt, wieder in den Ofen zurückgelegt wurden usw. Die bei dieser Art der Verformung auftretenden Kräfte waren innerhalb der Grenzen der Versuchsgenauigkeit den Werten der Abb. 3 gleich.

In den Querschnitten der gegossenen Proben kann man nach einer Makroätzung sehr gut die eventuell eintretende Rekristallisation in der groben, stengelkristallartigen Struktur verfolgen.

Die Deformation der einzelnen Kristallite ist nach einer Höhenabnahme von 10, 30 bzw. 50% noch recht gut wahrnehmbar (Abb. 4/a—c).

Nach einer Höhenabnahme von 70% sind die einzelnen Kristallite in der Mitte, also an der zumeist deformierten Stelle, schon äusserst gestreckt, die Struktur sieht der der kaltverformten Metallen ähnlich (Abb. 4/d). Die bei einer Temperatur von 500° C und mit 1 mm/s. Geschwindigkeit, mit 10—70% Höhenabnahme verformten und nach der Verformung sofort abgekühlten Proben der Abb. 4 zeigen in keinem Falle eine Rekristallisation. Um festzustellen, ob nach der Verformung irgendwelche Gitterstörungen zurückgeblieben sind, die zur Rekristallisation führen, wurden die entzweigeschnittenen Proben 16 Minuten lang auf eine Temperatur von 500° C erwärmt. Nach der Erwärmung findet man in den Proben neue Kristallite; die Ausbreitung der rekristallisierten Zone steigt mit dem Verformungsgrad an (Abb. 4/e—h).

Bei einer Temperatur von 20—650° C und mit einer Geschwindigkeit $v = 1$ mm/s verformte und sofort in Wasser abgekühlte, gegossene Proben zeigten bei keiner Temperatur eine Rekristallisation (Abb. 5 und 6, Bild a—d). Wurden dieselben Proben jedoch 16 Minuten lang bei einer Temperatur von 500° C geglüht, so trat eine Rekristallisation ein, deren Ausmasse bei höher werdenden Warmverformungstemperaturen immer mehr abnehmen (Abb. 5 und 6, Bild e—h). Die bei 20° C (Zimmertemperatur) verformten Proben sind vollkommen rekristallisiert, in den bei 100 und 200° C Temperatur verformten findet man an den weniger verformten Stellen immer mehr grosse Kristallite. In den bei 300° C Temperatur verformten Proben kann man an den Endflächen schon sehr deutlich die nicht umgewandelten Kristallite der gegossenen Struktur erkennen. In den bei 400, 500 bzw. 600° C verformten Proben wird das rekristallisierte Gebiet immer kleiner, bis es bei einer Verformungstemperatur von 650° C völlig verschwindet.

Auch bei jenen Proben ist keine Rekristallisation während der Verformung zu beobachten, die unter sonst völlig gleichen Umständen einer 50%igen Höhenabnahme unterworfen wurden. Nach einer Erhitzung während 16 Minuten auf 500° C weist die bei 200° C verformte Probe noch im ganzen Querschnitt ein feinkristallines Rekristallisationsgefüge auf. In der bei 400° C verformten Probe findet man Reste des Gussgefüges und in den bei 600 bzw. 650° C verformten Proben erstreckt sich die Rekristallisation nur mehr auf die Mitte.

Zu Vergleichszwecken wurden auch Proben bei einer Temperatur von 20 bis 650° C gestaucht, die aus gezogenem Stangenmaterial angefertigt waren. Neue

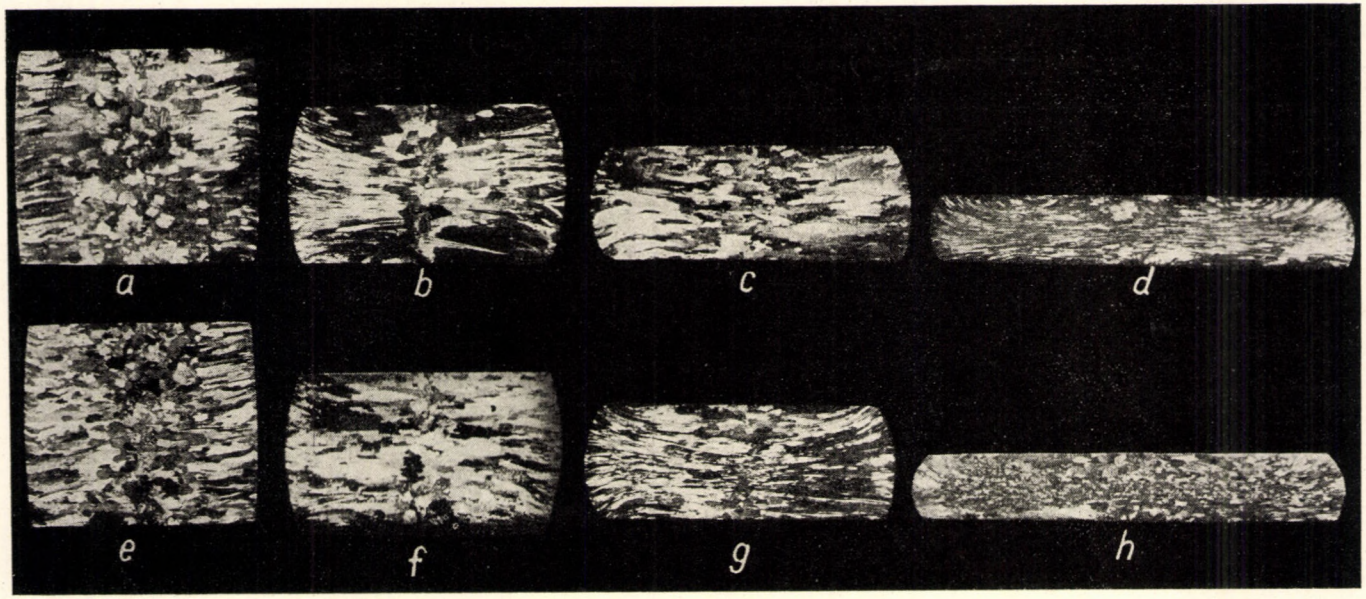


Abb. 4. Gefüge der bei 500° C gestauchten *(a—d)* und nach Abkühlung nochmals erhitzten *(e—h)* gegossenen Al-Probekörper (1,5×)

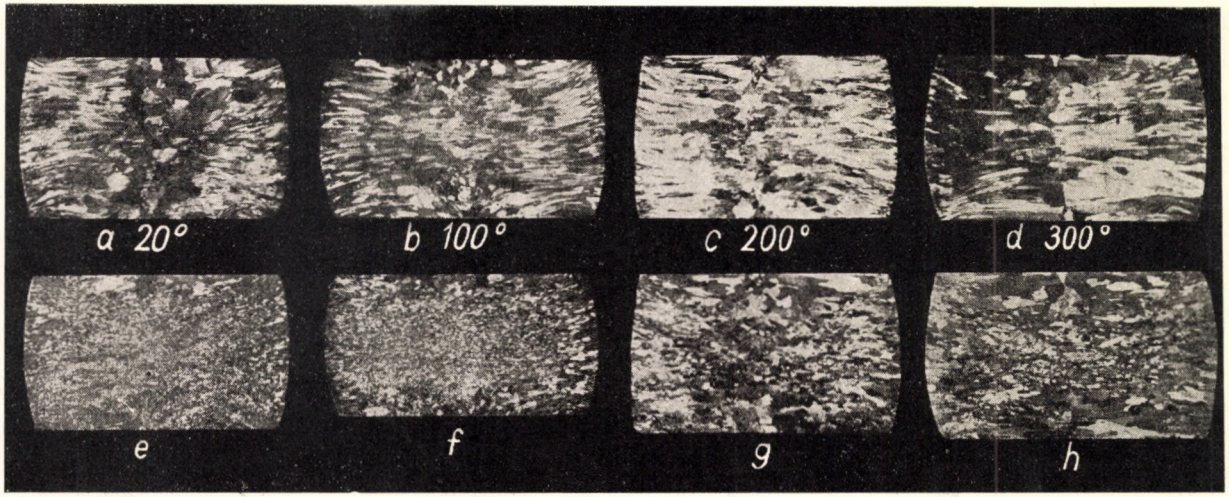


Abb. 5. Gefüge der bei verschiedenen Temperaturen bis 30% gestauchten *(a—d)* und nachher auf 500° C erhitzten *(e—h)* gegossenen Al-Probekörper (1,4×)

Kristallite sind in keiner der Proben vorzufinden (Abb. 7/a—d und 8/a—c). Die Proben wurden mit einer Geschwindigkeit $v = 1$ mm/s bis zu einer Höhenabnahme von 30% gestaucht und hernach sofort in Wasser abgekühlt. Wurden diese Proben nachträglich 16 Minuten lang bei einer Temperatur von 500° C geglüht, so findet man, dass sogar die bei 200° C Temperatur verformten Körper feinkörnig rekristallisieren (mit Ausnahme des Materials des Druckkegels, das nur wenig verformt wurde). Das rekristallisierte Gebiet vermindert sich mit grösser werdenden Stauchungstemperaturen immer mehr, die Druckkegel zeichnen sich infolge ihrer unveränderten Struktur immer klarer ab und die Rekristallisation erstreckt sich schliesslich in der bei 600° C verformten Probe nur auf einen kleineren Teil des Querschnittes (Abb. 7/e—h und 8/d—f).

Zur Feststellung der Ausmasse der Rekristallisation, mit der man während der Pausen zwischen den einzelnen Verformungsgängen zu rechnen hat, wurden mehrere Proben nach der Verformung für verschiedene Zeitspannen in den auf konstanter Temperatur gehaltenen Ofen zurückgelegt. Die bei einer Temperatur von 500° C und mit einer Höhenabnahme von 30% verformten Proben wurden 8, 32 Sekunden, 1, 2, 4, 8, 16 bzw. 32 Minuten lang in einen Ofen mit einer Temperatur von 500° C gelegt, hernach in Wasser abgekühlt ; in keiner dieser Proben konnten Spuren von Rekristallisation entdeckt werden. Die Abb. 9/a—b zeigt als Beispiel das Gefüge der 16 bzw. 32 Minuten warm gehaltenen Proben. Werden dieselben Probestücke nach dem Abkühlen nochmals während 32 Min. auf 500° C erhitzt, so tritt eine Rekristallisation auf (Abb. 9/c—d), aber in einem etwas kleineren Ausmasse als in der unmittelbar nach der Warmverformung abgekühlten Probe (Abb. 6/f).

Zur weiteren Klärung dieser Erscheinung wurden ähnliche Versuche auch mit den gezogenen Proben durchgeführt. In Proben, die bei einer Temperatur von 500° C, mit einer Höhenabnahme von 30% verformt und dann für verschiedene Zeitspannen (zwischen 8 Sekunden und 32 Minuten) auf konstanter Temperatur gehalten wurden, konnte man nur dann neue Kristallite feststellen, wenn sie 16 bzw. 32 Minuten lang warm gehalten waren (Abb. 10/a—b).

Werden die Proben nach dem Abkühlen nochmals auf 500° C 16 Minuten lang erhitzt, so rekristallisiert die ganze Schnittfläche mit Ausnahme der Druckkegel (Abb. 10/c—d), doch ist das Gefüge grobkörniger als bei der unmittelbar nach dem Stauchen abgekühlten Probe (Abb. 8/e).

Von den stufenweise verformten Proben sollen hier nur die Gefügebilder zweier bei 500° C mit einer Geschwindigkeit von 1 mm/s bis zu einer Höhenabnahme von insgesamt 70% gestauchten Proben gezeigt werden. Die eine lag jeweils 1 Minute lang (Abb. 11/a), die andere immer 16 Minuten lang im Ofen (Abb. 11/b), u. zw. nach einer Gesamthöhenabnahme von 10, 30 bzw. 50%. Eine Rekristallisation ist nicht einmal in jener Probe wahrzunehmen, die sich jeweils 16 Minuten lang im Ofen befand, trotzdem die Pausen zwischen den Teilverformungen insgesamt 48 Minuten ergeben.

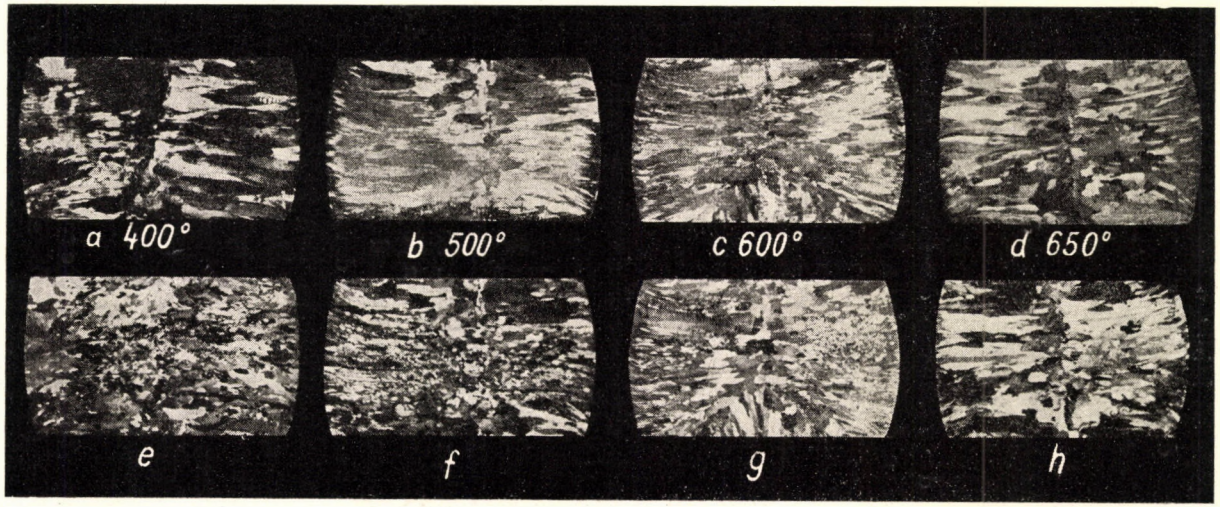


Abb. 6. Gefüge der bei verschiedenen Temperaturen bis 30% gestauchten *(a—d)* und nachher auf 500° C erhitzten *(e—h)* gegossenen Al-Probekörper (1,4×)

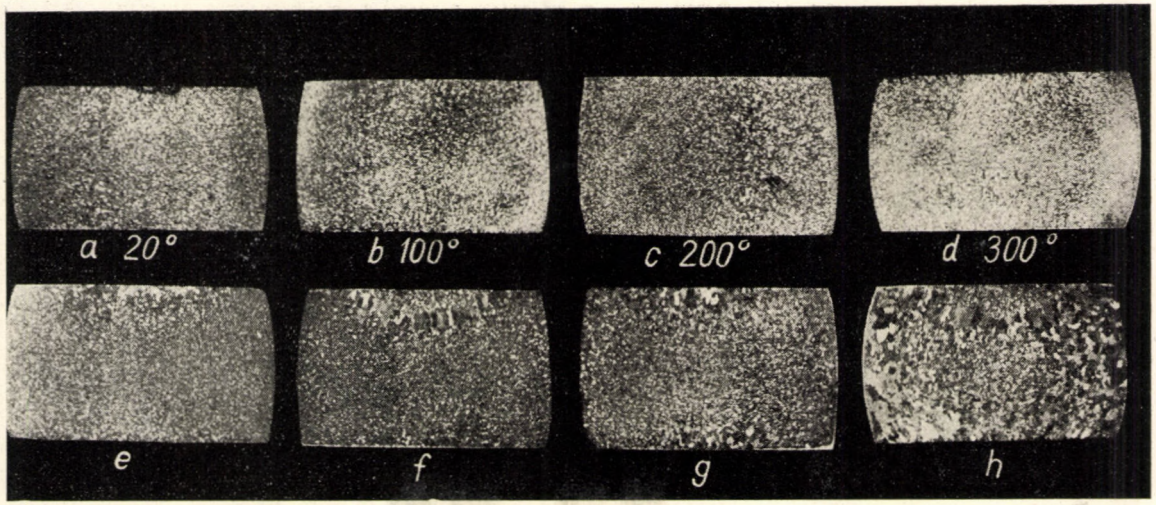


Abb. 7. Gefüge der bei verschiedenen Temperaturen bis 30% gestauchten *(a—d)* und nachher auf 500° C erhitzten *(e—h)* Probekörper aus gezogenem Aluminium (1,4×)

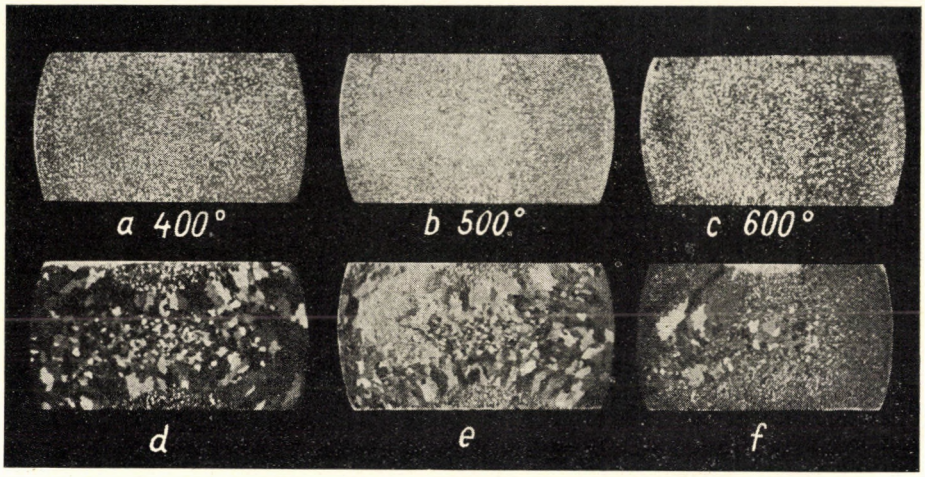


Abb. 8. Gefüge der bei verschiedenen Temperaturen bis 30% gestauchten *(a—c)* und nachher auf 500° C erhitzten *(d—f)* Probekörper aus gezogenem Aluminium (1,4×)

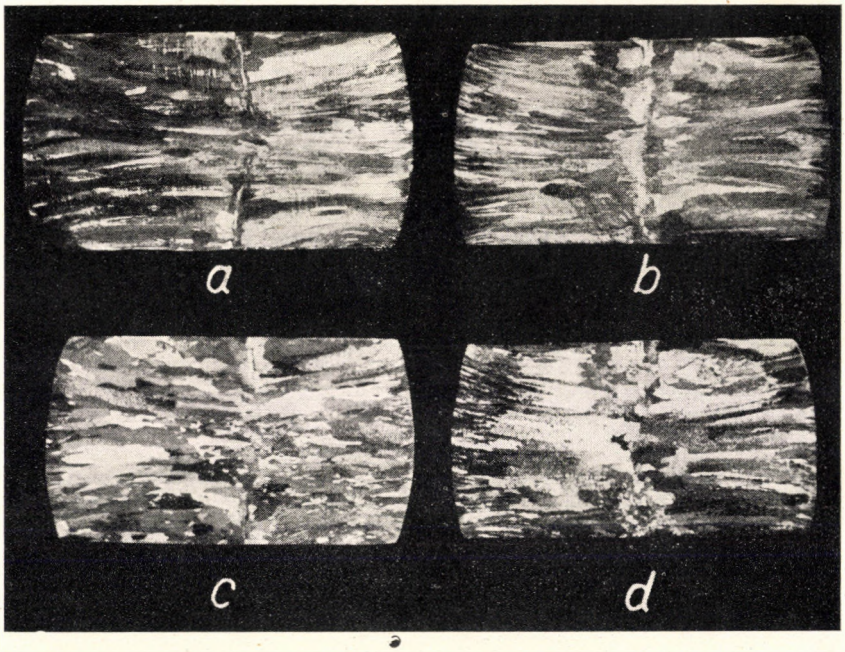


Abb. 9. Gefüge der nach der Verformung bei 500° C warmgehaltenen *(a—b)* und nach Abkühlung nochmals erhitzten *(c—d)* gegossenen Probekörper (2×)

Die Wirkung der Verformungsgeschwindigkeit konnte mit der verwendeten Zerreissmaschine nur bis höchstens $v = 5$ mm/s geprüft werden. Die bei einer Temperatur von 500° C mit $v = 0{,}2$—5 mm/s Geschwindigkeit bis zu einer Höhenabnahme von 50% gestauchten Proben zeigten in keinem Falle eine Rekristallisation.

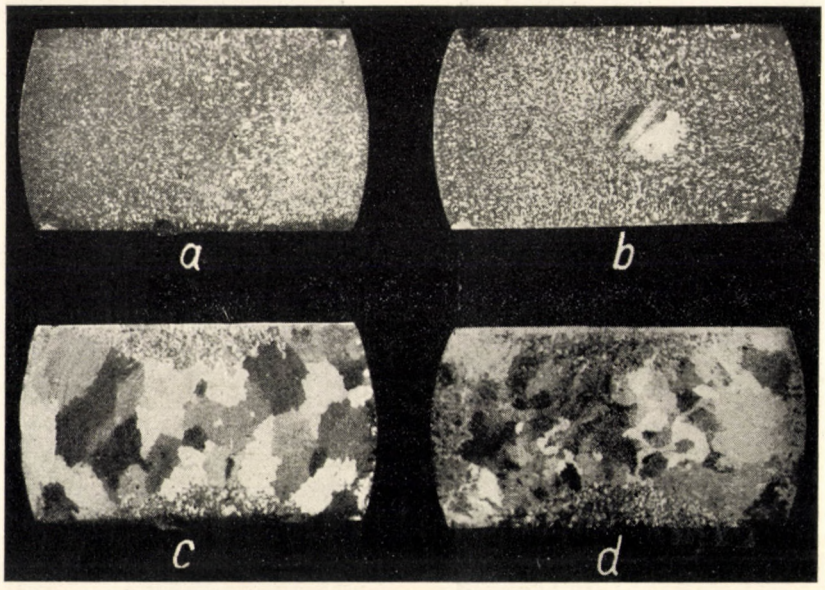


Abb. 10. Gefüge der nach der Verformung bei 500° C warmgehaltenen *(a—b)* und nach Abkühlung nochmals erhitzten *(c—d)* gezogenen Probekörper (2×)

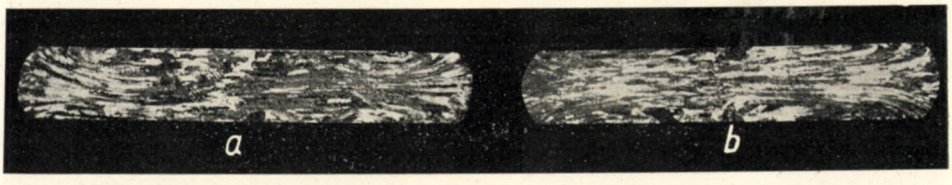


Abb. 11. Gefüge der bei 500° C stufenweise verformten Probekörper (1,5×)

b) *Pressversuche*

Die schon erwähnten, gegossenen Blöcke mit 30 mm Durchmesser und 40 mm Länge wurden mit der Versuchsstrangpresse bei Temperaturen von 350—550° C mit einer Pressdorngeschwindigkeit $v = 1$ mm/s mit Abnahmen zwischen 86 und 99% verformt.

Die bei einer Temperatur von 500° C mit einer — um einen Vergleich mit den Stauchversuchen zu ermöglichen — verhältnismässig kleinen (86%igen)

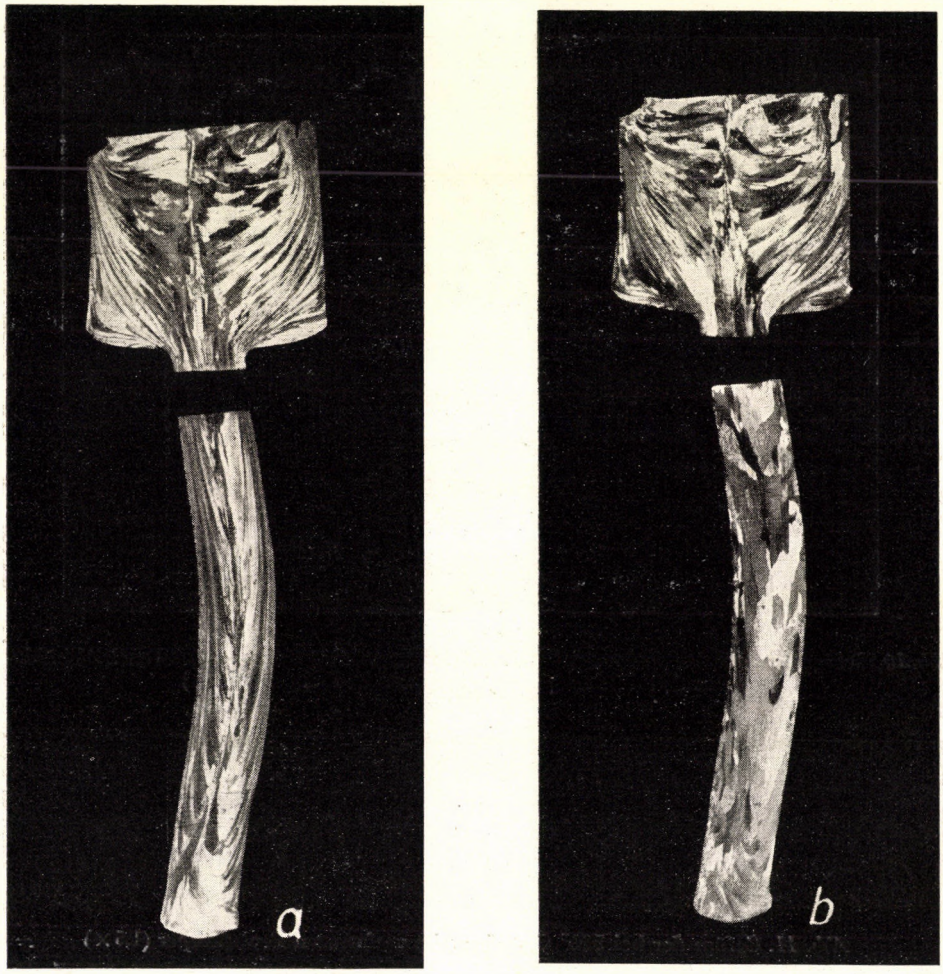


Abb. 12. Probekörper nach dem Strangpressen *(a)* und nach neuerlicher Erhitzung *(b)* (1×)

Querschnittsabnahme gepressten Stangen zeigten keine Rekristallisation, nicht einmal im Blockrest (Abb. 12/a). Wurden die abgekühlten Proben 32 Minuten lang bei einer Temperatur von 500° C geglüht, so konnten in der gepressten Stange sowie in jenem Teil des Blockes, der gleich neben der Öffnung des Werkzeuges bzw. an der Wand des Rezipienten lag, neue grosse Körner festgestellt werden (Abb. 12/b).

In einer bei einer Temperatur von 450° C mit einer Abnahme von 93% gepressten Stange ist keine Spur der Rekristallisation wahrzunehmen, auch

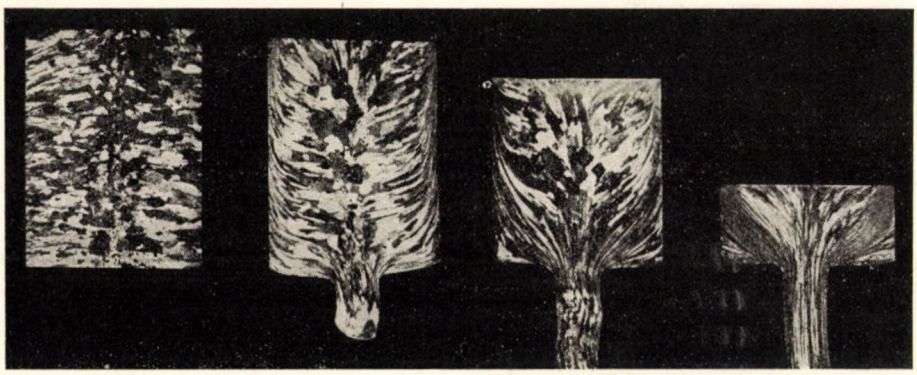


Abb. 13. In verschiedenem Ausmass ausgepresste Probekörper (0,8×)

nicht in dem Blocke, der bis zum Beginn der Stangenbildung bzw. zu $^1/_3$ oder $^2/_3$ Länge ausgepresst wurde (Abb. 13).

Zur besseren Annäherung an die praktischen Verhältnisse wurden auch Stangen mit einer Abnahme von 99% gepresst. Die schon vorhin erwähnten dicken Stangen wurden zusammen mit den Blockresten ungefähr 1 Minute nach der Beendigung des Pressens in Wasser abgekühlt, während die dünnen Drähte mit 3 mm Durchmesser in einen Wasserbehälter liefen. Der Wasserspiegel lag 400 mm weit vom Ende des Werkzeuges, so dass die Drähte binnen 4 Sekunden abgekühlt wurden. Die Struktur war nach elektrolytischem Polieren und einer Ätzung mit einer HF-haltigen Lösung die folgende :

1. Die bei einer Temperatur von 550° C gepressten Proben rekristallisierten in ihrem vollen Querschnitt ; ein Unterschied zwischen Anfang, Mitte und Ende des Drahtes konnte nicht festgestellt werden, auch nicht zwischen den parallelen Proben (Abb. 14/a).

2. Die Struktur des bei einer Temperatur von 500° C gepressten Drahtes ist völlig gleich wie bei jenen Drähten, die bei 550° C gepresst wurden, die Rekristallisation erstreckte sich auf den vollen Querschnitt. Auch in der Korngrösse findet sich kein entscheidender Unterschied (Abb. 14/b).

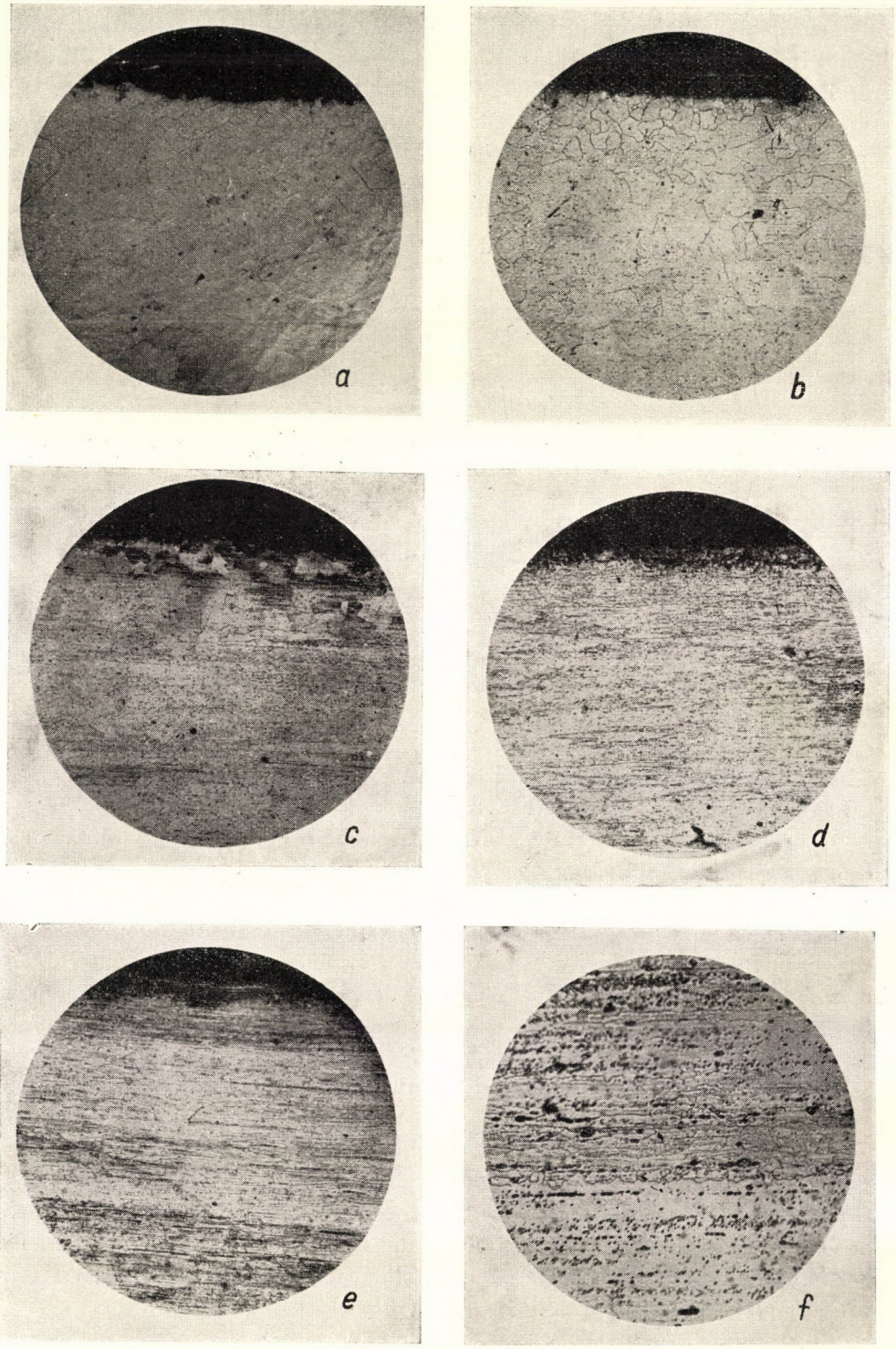


Abb. 14. Das Gefüge der bei verschiedenen Temperaturen verpressten Drähte (25×)

3. Die Struktur ist beim Pressen bei einer Temperatur von 450° C nicht mehr homogen. Am Rande des Schliffes (an der Oberfläche des Drahtes) zeigt sich eine Rekristallisation, in der Mitte hingegen befinden sich lang ausgedehnte Kristalle (Abb. 14/c).

4. Die bei einer Temperatur von 400° C gepressten Drähte scheinen bei kleineren Vergrösserungen in ihrem vollen Querschnitte stark gestreckt zu sein (Abb. 14/d), bei grösseren Vergrösserungen kann man jedoch an der Oberfläche des Drahtes eine schmale rekristallisierte Zone wahrnehmen.

5. Die bei einer Temperatur von 350° C gepressten Drähte haben eine Struktur, welche der des bei 400° C gepressten Drahtes ähnlich sieht. Die rekristallisierte Zone ist jedoch sehr schmal und die Mehrheit der Kristalle ist sehr stark gestreckt (Abb. 14/e). In Abb. 14/d ist das Gefüge der Drahtmitte in 250facher Vergrösserung wiedergegeben.

c) *Walzversuche*

Die Proben wurden in der hier beschriebenen Versuchsreihe nur zu Vergleichszwecken mit den gestauchten Proben verwalzt.

Die bei einer Temperatur von 300, 400 bzw. 500° C auf 6 mm abgewalzten und dann sofort in Wasser abgekühlten keilartigen Proben wiesen keine Rekristallisation auf (Abb. 15/a), auch nicht jene, die bei einer Temperatur von 500° C verwalzt und hernach für 1, 4 bzw. 16 Minuten in den Ofen zurückgelegt wurden. Nach Erhitzung der rasch abgekühlten Proben während 16 Minuten auf 500° C trat eine Rekristallisation nur in dem über 40% verformten Teil der Keilprobe auf. Die Korngrösse des neu entstandenen Gefüges ist dem der gegossenen Struktur annähernd gleich.

Zum Vergleich wird auch der Querschnitt einer bei Zimmertemperatur auf 6 mm verwalzten, sodann bei einer Temperatur von 500° C 16 Minuten lang geglühten Keilprobe gezeigt (Abb. 15/b).

3. Auswertung der Versuchsergebnisse

Auf Grund der im vorhergehenden Punkt geschilderten Ergebnisse kann man bezüglich der Rekristallisation, die während oder nach der Warmverformung des Aluminiums vor sich geht, folgendes feststellen:

In Proben, die im untersuchten Temperaturbereich von 20 bis 650° C mit kleinen Formänderungsgeschwindigkeiten in einer Grössenordnung von $1.10^{-1}\ s^{-1}$ bis zu einer Höhenabnahme von höchstens 70% gestaucht und nach der Verformung sofort abgekühlt wurden, zeigt sich keine Rekristallisation (Abb. 4—8 und 11). Das gilt auch für jene gegossenen Probestücke, die nach

der Verformung für eine Zeit von 4 Sekunden bis 32 Minuten in den Ofen zurückgelegt wurden (Abb. 9) oder eine stufenweise Verformung erlitten (Abb. 11). Ähnlicherweise trat keine Rekristallisation während der Warmverformung durch Strangpressen mit geringen (86—93%igen) Querschnittsabnahmen (Abb. 12. und 13.) auf und auch nicht beim Warmwalzen mit einer Formänderungsgeschwindigkeit von einer Grössenordnung von 1.10^1 s^{-1} bis zu höchstens 50% Dickenabnahme (Abb. 15/a).

Auf Wirkung einer nachträglichen Erwärmung tritt in allen obenerwähnten Proben eine Rekristallisation auf; die neue Struktur ist erwartungsgemäss um so gröber, je kleiner die vorausgegangene Verformung und je höher deren Temperatur war. Eine bei höherer Temperatur durchgeführte Verformung

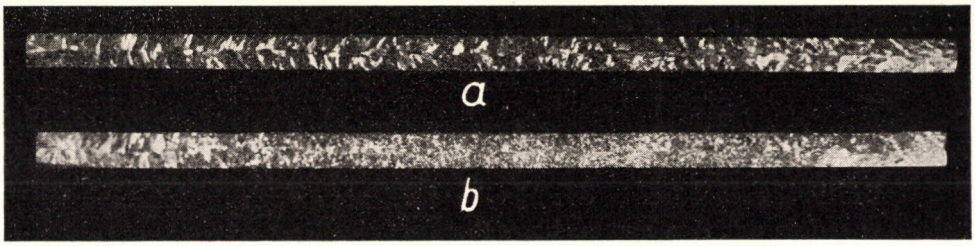


Abb. 15. Das Gefüge einer bei 500° C gewalzten *(a)* und einer nach dem Kaltwalzen auf 500° C erhitzten *(b)* Keilprobe (0,75×)

bewirkt also — im Einklang mit früheren Feststellungen anderer Forscher [1] — ebenso eine Verfestigung, wie die bei Zimmertemperatur durchgeführte Verformung; der Unterschied liegt nur im Ausmass der Verfestigung.

Gegen alle Erwartung führt jedoch diese Verfestigung auch nach einer 32 Minuten lang andauernden, der Verformung folgenden und vom technischen Gesichtspunkt aus gesehen schon lang geltenden Glühung zu keiner Rekristallisation in der gegossenen Probe (Abb. 9). Es scheint also — besonders im Falle jener Proben, die nur schwach (bis zu 30%) verformt wurden —, dass auch die auf die Verformung folgende Abkühlung eine grosse Rolle spielt. Es ist anzunehmen, dass die Spannungen, die während der Abkühlung auftreten, sowie auch jene, die infolge der mechanischen Bearbeitung der Proben entstehen, die Wirkung der Verfestigung unterstützen und im Laufe der nachträglichen Glühung eine Rekristallisation beschleunigen. Die gezogenen Probestäbe rekristallisierten viel früher als die gegossenen.

Durch Pressen bei 500° C mit einer Abhahme von 99% — die auch für Betriebsverhältnisse als kräftig angesehen werden kann — erhält man einen Draht mit rekristallisiertem Gefüge (Abb. 14/a—b).

Auf Grund der obenangeführten Tatsachen kann man nun die Frage der Umwandlung des Gussgefüges in eine warmverformte Struktur näher

betrachten. In der technischen Praxis versteht man unter dem Begriff des warmverformten Metalls im allgemeinen ein Material mit rekristallisiertem Gefüge.

Wie aber durch die Versuche bestätigt wird, ist die Rekristallisation keine unbedingt nötige Begleiterscheinung der Warmverformung: sie unterbleibt sehr oft auch im Falle der praktischen bildsamen Verformungsarten. So geschieht z. B. das Blechwalzen meistens mit ziemlich kleinen Dickenabnahmen, demgemäss bleibt die Rekristallisation aus und das Gefüge des warmgewalzten Bleches besteht oft aus typisch »kaltverformten« stark gestreckten Kristallen. Eine rekristallisierte Struktur entsteht in solchen Blechen nur nach einer nachträglichen Glühung.

Vergleicht man die Werte des Formänderungswiderstandes beim Stauchen auf verschiedenen Temperaturen (Abb. 3), so findet man, dass eine grössere Formänderung bei jeder Temperatur nur durch eine grössere Spannung bewirkt werden kann. Dies beweist auch, dass eine Verfestigung bei jeder Temperatur stattfindet, wenn auch in verschiedenem Grade. Die Erhöhung der Spannung ergibt sich zum Teil aus der Art der Deformation; das Vorhandensein und das Ineinanderdringen der Druckkegel ist besonders im Gefüge der nachträglich erwärmten Stauchproben gut ersichtlich.

Die Änderung der Verformungsfestigkeit des Aluminiums in Abhängigkeit von der Temperatur kann demnach nicht mit einer einzigen Kurve beschrieben werden. Der Verformungswiderstand ist bei jeder Temperatur von der Formänderung abhängig; die Gesamtheit der Anfangspunkte dieser Kurven ergibt die Verformungsfestigkeit des unverformten Aluminiums bei verschiedenen Temperaturen. Diese letztere Kurve wird am besten durch die Kurve des Verformungswiderstandes bei 10%iger Höhenabnahme (Abb. 3) angenähert; diese ist innerhalb der Grenzen der praktischen Warmverformungstemperaturen nahezu linear. Nach einigen Veröffentlichungen soll die Verformungsfestigkeit des Aluminiums in Abhängigkeit von der Temperatur wesentlich anders verlaufen. Der Grund dafür ist darin zu suchen, dass jene Kurven auch die Auswirkung der Verfestigung und der Form der Probe widerspiegeln. Dieses Problem soll in einer weiteren Abhandlung näher besprochen werden.

Die Härte der nach der Verformung in Wasser abgekühlten Proben wird zunächst bei grösser werdenden Temperaturen allmählich kleiner, ist aber von einer Temperatur von 400—450° C an praktisch unverändert. Die Härte entspricht im letzteren Falle der der gegossenen Struktur.

In der vorhergegangenen Diskussion ist einfach die Tatsache festgestellt worden, dass bei einer Verformung bei immer grösser werdenden Temperaturen eine Verfestigung eintritt, deren Betrag jedoch immer kleiner wird. Der Verformungswiderstand selbst fällt bei der Erhöhung der Temperatur sehr stark ab, so z. B. bei Erhöhung der Temperatur von 400° C auf 500° C auf ungefähr die Hälfte.

Eine Verminderung des Verformungswiderstandes könnte derart erklärt werden, dass bei jeder Temperatur dieselbe Verfestigung zustande kommt, dass aber ihre Wirkung bei höheren Temperaturen durch die Erholung schon während der Verformung zum Teil aufgehoben wird. Das würde aber auch bedeuten, dass während längerer Pausen zwischen den einzelnen Verformungsgängen auch bei niedrigeren Temperaturen — z. B. bei 300° C — eine Erholung eintreten sollte. Dagegen konnte an den bei 300° C stufenweise bis zu einer Höhenabhnahme von 70% deformierten und zwischen den einzelnen Operationen 16 Minuten lang geglühten Proben derselbe Verformungswiderstand gemessen werden wie bei einer kontinuierlichen Verformung unter sonst gleichen Umständen.

Die nahezu gleiche Härte der oberhalb von 400° C verformten Proben weist auch darauf hin, dass die Verminderung des Verformungswiderstandes nicht die Folge einer Erholung sein kann. Es scheint die Richtigkeit jener Annahme viel wahrscheinlicher, dass der Mechanismus der Warmverformung von dem der Kaltverformung abweicht bzw. dass ein Teil der gebundenen Versetzungen im Laufe der Verformungen bei höheren Temperaturen sofort aufgelöst wird.

Es stellt sich demnach die Frage, was unter dem Begriff der Warmverformung des Aluminiums zu verstehen ist.

Es war zu sehen, dass die Rekristallisation nicht eine unbedingt nötige Begleiterscheinung der Warmverformung ist, denn sie kann zwar unter entsprechenden Umständen — hohe Temperatur und grosse Stichabnahme — auftreten, doch kann sie unter anderen Umständen auch völlig ausbleiben. Die Rekristallisation ist demnach keineswegs als ein Kriterium für die Warmverformung zu betrachten.

Wollte man den Begriff der Warmverformung damit definieren, dass während ihr die Erholung die Wirkung der Verfestigung völlig aufhebt, so müsste man hinzufügen, dass dies im Falle des Aluminiums nur für Temperaturen sehr nahe dem Schmelzpunkte und auch nur für kleinere Abnahmen gültig ist.

Will man nun den Temperaturbereich der Warmverformung dort abgrenzen, wo die Erholung die Verfestigung teilweise abbaut, so muss die Definition um den Begriff des Verfestigungsvermögens erweitet werden. Nach Messungen von ALDER und PHILLIPS [3] ist das Verfestigungsvermögen eines Aluminiums mit einem Reinheitsgrad von 99% im Temperaturbereich von −120 bis +150° C praktisch konstant (wenigstens im Formänderungsbereich von 20 bis 50%), bei höheren Temperaturen hingegen immer kleiner.

Gemäss den schon früher dargelegten Tatsachen ist es unwahrscheinlich, dass die Verminderung des Verfestigungsvermögens in ihrem vollen Ausmasse durch die Erholung hervorgerufen wird. Der Begriff der Erholung kann aber vollkommen fallen gelassen werden, so dass sich die Definition der Warmverformung folgenderweise gestaltet :

Eine Verformung des Aluminiums kann als Warmverformung betrachtet werden, wenn bei der angewandten Temperatur das Verfestigungsvermögen kleiner ist als in der grossen Kälte. Auf Grund der hier besprochenen Versuche hat die Warmverformung keine anderen unterscheidenden Kennzeichen. Es muss noch der Begriff der »grossen Kälte« näher beschrieben werden ; ihre absolute Temperatur ist selbstverständlich auch von der Reinheit des Aluminiums abhängig. Im Falle der üblichen technischen Aluminiumsorten (mit einem Reinheitsgrad von 99 bzw. 99,5%) muss man schon die Zimmertemperatur als eine solche betrachten, die Anfangstemperatur der Warmverformung liegt bei etwa 200° C.

Ich möchte an dieser Stelle den Akademikern A. GELEJI und J. VERŐ, die viele Anregungen zu meiner Arbeit gaben und mich mit ihren wertvollen Ratschlägen unterstützten, meinen Dank ausdrücken.

SCHRIFTTUM

1. F. SAUERWALD, G. ELSNER : ZS. Physik, **44** (1927), S. 36—57.
2. A. v. ZEERLEDER, R. IRMANN, E. v. BURG : Aluminium, **18** (1936), S. 41—48.
3. J. F. ALDER, V. A. PHILLIPS : J. Inst. Metals, **83** (1954), S. 80—86.
4. F. SAUERWALD, K. KNEHANS : Z. anorg. allg. Chemie, **140** (1924), S. 227—242.
5. R. KARNOP, G. SACHS : Z. Physik, **42** (1927), S. 283—301.
6. A. E. v. ARKEL, M. G. v. BRUGGEN : ZS. Physik, **42** (1927), S. 795—806.
7. A. GELEJI : Acta Technica Hung., X. (1955), S. 187—220.

ZUSAMMENFASSUNG

Zur Klärung der Vorgänge, die sich während der Warmverformung des Aluminiums abspielen, wurden Proben — die meisten gegossen — aus Aluminium von 99,5% Reinheit gestaucht, gepresst und gewalzt, u. zw. bei Temperaturen zwischen 20 und 650° C.

Die bis zu einer Stichabnahme von höchstens 70% gestauchten und verwalzten, sowie bis höchstens 94% gepressten Proben zeigten im Laufe der Warmverformung keine Rekristallisation. Bei den warmverformten Körpern erfolgt auf Wirkung einer nachträglichen Glühung eine Rekristallisation, die beweist, dass auch während der Warmverformung eine Verfestigung eintritt.

Der Verformungswiderstand wird bei höher werdenden Temperaturen allmählich immer kleiner und dasselbe zeigt sich auch im Falle des Verfestigungsvermögens — oberhalb einer bestimmten Temperatur ; die Härte der Proben, die bei Temperaturen oberhalb von 400° C verformt und in Wasser rasch abgekühlt wurden, ist hingegen praktisch konstant. Diese Beobachtungen lassen es als wahrscheinlich erscheinen, dass die Warmverformung nicht als eine einfache Aufeinanderfolge von Verfestigung und Erholung aufzufassen ist.

Auf Grund der Versuche ist das abnehmende Verfestigungsvermögen das einzige Kennzeichen der Warmverformung des Aluminiums.

ON HOT WORKING OF ALUMINIUM

J. SCHEY

Cand. of Eng. Sc.

SUMMARY

To clear phenomena taking place in the hot working of aluminium, Al-99,5% test specimens, mostly cast, were upset, extruded and rolled at temperatures of 20—650° C.

Specimens upset and rolled up to 70% reduction and those extruded at 94% reduction in area showed no recrystallization during hot working. In hot-worked specimens recrystallization

took place under the effect of subsequent heating, evidencing that work-hardening takes place in hot working as well.

Resistance to deformation continued to decrease with the increase of temperature all too, the hardening power; the hardness of test specimens, worked above 400° C and quenched in water remaining, on the other hand, practically constant. These observations confirm the opinion that hot working cannot be conceived simply as a sequence of work-hardening and recovery.

On the basis of experiments the only characteristic of the hot working of aluminium is the decrease of hardening power.

SUR LE TRAVAIL À CHAUD DE L'ALUMINIUM

J. SCHEY

Cand. des sc. techn.

RÉSUMÉ

Pour éclairer les processus ayant lieu au cours du travail à chaud de l'aluminium, des éprouvettes — en majorité coulées — ont été refoulées, étirées et laminées à des températures de 20—650° C.

Dans les éprouvettes refoulées et laminées jusqu'à une réduction de 75% au maximum, ainsi que dans celles étirées jusqu'à une réduction de 94% au maximum, aucune recristallisation n'a eu lieu au cours du travail à chaud. Sous l'effet du réchauffage des éprouvettes travaillées à chaud une recristallisation s'est présentée démontrant que le travail à chaud est également accompagné de durcissement.

La résistance à la déformation diminue jusqu'au bout avec l'élévation de la température, de même que — au-dessus d'une certaine température — l'aptitude au durcissement; d'autre-part, la dureté des éprouvettes travaillées au-dessus de 400° C et refroidies dans l'eau reste pratiquement uniforme. Ces observations confirment l'opinion que le travail à chaud ne peut pas être conçu simplement comme une succession des durcissement et de l'amollissement.

A la base des essais la seule caractéristique du travail à chaud de l'aluminium est la diminutrion de l'aptitude au durcissement.

ЯВЛЕНИЯ ПРИ ГОРЯЧЕЙ ОБРАБОТКЕ АЛЮМИНИЯ

Канд. техн. наук Й. ШЕЙ

РЕЗЮМЕ

Для выяснения процессов, происходящих при горячей обработке алюминия, производились опыты по прессовке, прокатке и высадке образцов алюминия чистотой 99,5% (в преобладающем большинстве алюминиевого литья) при температрах 20—650° С.

На образцах, — высаженных и прокатанных макс. до 75% обжатия, а также прессованных с обжатием макс. 94%, — в процессе горячей обработки не наблюдалось рекристаллизации. На подвергнутых горячей обработке образцах под воздействием последующего подогрева имела место рекристаллизация, этим удостоверяя, что и при горячей обработке происходит твердение.

Сопротивление обработки во всех случаях падает с ростом температуры, таким же образом — сверх определенной области температур — также и твердение; твердость образцов, обработанных при температурах выше 400° С и охлажденных водой, практически же одинакова. Эти наблюдения говорят за то, что горячую обработку нельзя представить себе просто как следующие друг за другом твердение и отпуск.

На основе проведенных опытов единственной характерной чертой горячей обработки алюминия является снижение способности к твердению.

DER EINFLUSS KLEINER MENGEN VON LEGIERUNGSKOMPONENTEN BZW. VERUNREINIGUNGEN AUF EINZELNE TECHNOLOGISCHE EIGENSCHAFTEN DES ALUMINIUMS

A. DOMONY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DIE METALLINDUSTRIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 10. Oktober 1955]

1. Die Wirkung verschiedener Legierungskomponenten auf die elektrische Leitfähigkeit des Aluminiums

Die Wirkung der einzelnen Legierungskomponenten auf die elektrische Leitfähigkeit des Aluminiums ist heute schon eine bekannte und gut bearbeitete Frage. Demnach entspricht einem

Eisen- oder Borgehalt von 0,5% eine ungefähr 0,5 Ohm. mm^2/km betragende Widerstandsvergrösserung;

Titan- oder Vanadiumgehalt von 0,01% eine ungefähr 0,3 Ohm. mm^2/km betragende Widerstandsvergrösserung;

ersten 0,05%igen Siliziumgehalt (im Aluminium gelöst) eine ungefähr 0,5 Ohm. mm^2/km betragende Widerstandsvergrösserung.

jedem weiteren, im Aluminium gelösten 0,01% Siliziumgehalt eine ungefähr 0,1 Ohm. mm^2/km betragende Widerstandsvergrösserung.

jedem weiteren, im Aluminium nicht gelösten 0,01% Siliziumgehalt eine ungefähr 0,02 Ohm. mm^2/km betragende Widerstandsvergrösserung;

Viel weniger war jedoch die Frage untersucht worden, welche Wirkung das gleichzeitige Vorhandensein von mehreren Verunreinigungen auf die elektrischen Eigenschaften des Aluminiums ausübt.

Zur Feststellung der gleichzeitigen Wirkung einiger Legierungskomponentengruppen auf die elektrische Leitfähigkeit des Aluminiums wurde von uns die elektrische Leitfähigkeit verschiedener Aluminiumdrähte untersucht, die aus Metall von verschiedenem Fe + Si-, Fe + B- sowie Ti + B-Gehalt bestanden. Die Hälfte der gepressten Stangen, die gleicher Zusammensetzung waren und unter gleichen Verhältnissen gepresst wurden, wurde vor der weiteren Kaltbearbeitung (Ziehen) 6 Stunden lang bei einer Temperatur von 320° C geglüht und langsam abgekühlt (sogenannte FIELDsche segregierende Wärmebehandlung), während die andere Hälfte im gepressten Zustande zur weiteren Verarbeitung kam. Die bei 10 mm Durchmesser geglühten sowie nicht geglühten

Pressdrähte wurden unter gleichen Verhältnissen zu Drähten mit 2,5 mm Durchmesser gezogen. Auf Grund der Versuche kann festgestellt werden (siehe Tabelle I), dass die Wärmebehandlung nur auf die Leitfähigkeit der Si-haltigen Metalle eine bedeutendere Wirkung ausübt. Diese Wirkung ist jedoch von dem relativen Silizium- und Eisengehalt völlig unabhängig und auch der absolute Wert des Siliziumgehaltes spielt keine entscheidende Rolle.

Tabelle I

Zusammensetzung in %				Elektr. Leitfähigkeit des fertigen Drahtes in Ohm. mm²/km, aus	
				gepressten	geglühten
Fe	Si	B	Ti	Pressstangen gezogen	
0,003	0,002	—	—	26,8	26,8
0,003	0,05	—	—	27,8	27,4
0,003	0,08	ca. 0,01	—	27,4	27,2
0,43	0,005	—	—	27,5	27,4
0,40	0,004	ca. 0,01	—	27,3	27,3
0,34	0,15	—	0,015	29,6	29,0
0,19	0,14	Spuren	<0,005	28,4	28,1

Die Wirksamkeit der Wärmebehandlung und die Leitfähigkeit des Drahtes hängen von dem Zustande des im Aluminium befindlichen Siliciums ab. Befand sich das Silizium vor der Wärmebehandlung in gelöstem Zustande (infolge höherer Giesstemperatur, rascher Abkühlung, höherer Presstemperatur oder grösserer Pressgeschwindigkeit), so ist der spezifische Widerstand der nicht wärmebehandelten Drähte ziemlich gross, und man kann mit der segregierenden Wärmebehandlung eine verhältnismässig bedeutende Verbesserung der Leitfähigkeit erzielen. Wenn sich hingegen vorhergehend die Umstände des Metalls so ausgebildet haben, dass der gelöste Teil des Siliziums verhältnismässig klein ist und der grösste Teil des Siliziums in der Form von Ausscheidungen vorliegt, dann ist die elektrische Leitfähigkeit der nicht wärmebehandelten Drähte schon in ihrem Anfangszustande ziemlich gut und die Wärmebehandlung zeigt keine bedeutendere Wirkung auf die elektrischen Eigenschaften.

Eine vorhergehende Wärmebehandlung der Pressdrähte hat im Falle von Eisen- bzw. Bor- oder Fe + B-haltigen Metallen keine bedeutende Wirkung auf die elektrische Leitfähigkeit der fertigen Drähte. Die Zugabe von Bor hat keinen Einfluss auf die elektrische Leitfähigkeit der eisenhaltigen Materialien.

Dagegen ist das gleichzeitige Vorhandensein von Titan und Bor vom Standpunkte der elektrischen Eigenschaften des Metalls viel vorteilhafter, als wenn nur Titan allein im Metall vorhanden wäre.

Ergebnisse, die zum Teil auf dem Gebiet der Kornverfeinerung des Aluminiums, zum Teil auf anderen Gebieten erzielt wurden, scheinen zu beweisen, dass zwischen dem geschmolzenen Aluminium und den in diesem befindlichen Titanatomen eine günstige Wechselwirkung auftritt, die eine Erklärung für die ausserordentlich grosse Kornverfeinerungsfähigkeit des Titans gibt [1]. Die Titanatome der Aluminiumschmelze können die Wechselwirkung der Aluminiumatome so sehr stören, dass das Energiegleichgewicht in Richtung der im festen Zustande befindlichen, also keine freie Wärmebewegung ausführenden Atome verschoben wird. Diese Verschiebung der Energie macht die Ausbildung eines feinkörnigen Gefüges möglich. Mit einer ähnlichen Beweisführung kann man auch die Wechselwirkung der Titan- und Boratome, die in verhältnismässig sehr kleinem Anteil vorhanden sind, erklären. Einen Beweis für diese Annahme wird durch die Tatsache geliefert, dass Titan und Bor in der Aluminiumschmelze immer Titanboride bilden, auch dann, wenn sie in sehr kleiner Konzentration vorkommen, sodann auch dadurch, dass die Titanboride im Aluminium unlöslich sind. Auch die Leitfähigkeitsmessungen erbringen den Beweis, dass im Falle des Vorhandenseins einer entsprechenden Menge Bor das Titan aus der für die elektrische Leitfähigkeit ungünstigen festen Al-Ti-Lösung in einer Form ausgeschieden wird, die im Aluminium unlöslich ist (wahrscheinlich in der Form von Titanboriden) [2]. Sind Ti und B gleichzeitig vorhanden, so fällt die Löslichkeit des Titans im Aluminium stark zurück. Die kornverfeinernde Wirkung der Titanboride ist ausserdem kleiner, als die einer entsprechenden Menge Titan allein [3]. Die Erklärung für diese Erscheinung ist auch in der Wechselwirkung zwischen den Titan- und Boratomen der Aluminiumschmelze zu suchen. Das Vorhandensein von Bor führt nämlich zur Veränderung der Energieverhältnisse der Titanatome. Die die Kristallisation und die Ausbildung des Makrogefüges beeinflussende Wirkung der kleinen Mengen von Titanboriden ist infolge der Aufhebung der Wirkung der Titanatome kleiner als die einer gleichen Menge Titan.

2. Der Zusammenhang zwischen der Zusammensetzung des Metalles und der durch die Kaltverformung ausgeübten Verfestigung

Die Wirkung kleiner Mengen von Legierungsbestandteilen auf die Kaltverformbarkeit des Aluminiums bildet eine auch heute noch umstrittene Frage. Nach der Auffassung von MASING [4] können schon in sehr kleinen Mengen vorhandene Verunreinigungen, von einer Grössenordnung von 0,01%, die Verformbarkeit des Aluminiums beeinflussen. Es ist eine noch umstrittene Frage, wie die in gleicher und kleiner Menge, aber in fester Lösung bzw. in Form von Ausscheidungen vorliegenden Legierungsbestandteile die Verfestigungskurven und die endgültigen Festigkeitswerte des Materials beeinflussen.

Anlässlich unserer früheren Versuche wurde festgestellt [5—6], dass die Festigkeit des Reinstaluminiums (99,99%) in erster Linie durch die Gesamtmenge der im Metall vorhandenen Legierungselemente beeinflusst wird. Die Zugabe kleiner Mengen Titan oder Bor hat keine bedeutende Auswirkung auf die endgültigen Festigkeitswerte des Metalles.

Wir haben unsere neueren Untersuchungen auf den Zustand der Legierungskomponenten sowie auf die Feststellung der Wirkung der in den verschiedenen Zuständen vorhandenen Zugaben auf die Kaltverformbarkeit des Materials erweitert. Zu diesem Zweck wurden die unter gleichen Verhältnissen gegossenen und auf 10 mm Durchmesser gepressten Stangen in zwei Gruppen geteilt und ihre Verfestigungskurven bei der Kaltverformung miteinander verglichen ; die Hälfte wurde unmittelbar nach dem Strangpressen weitergezogen, der andere Teil hingegen nach einer segregierenden Wärmebehandlung, die 6 Stunden lang bei einer Temperatur von 320° C dauerte. Die Zusammensetzung der Versuchsmaterialien geht aus Tabelle II hervor, die Verfestigungskurven sind in den Abbildungen 1—6 dargestellt.

Tabelle II

Bezeichnung des Materials	Zusammensetzung des Materials in %			
	Fe	Si	Ti	B
F	0,003	0,002	0,002	—
1	0,10	0,003	—	—
2	0,22	0,004	—	—
3	0,43	0,003	—	—
S	0,005	0,06	—	—
SB	0,005	0,09	—	ung. 0,01
20	0,43	0,13	0,015	—
12	0,34	0,13	0,010	—
B	0,41	0,10	$<$0,005	ung. 0,01

Die Ergebnisse der Versuche können in den folgenden Punkten zusammengefasst werden :

1. Bei gleicher Reduktion ist die endgültige Festigkeit der Drähte, die aus wärmebehandelten Presstangen gezogen wurden, wegen des weicheren, eine kleinere Festigkeit besitzenden Ausgangsmaterials um 1 kg/mm^2 kleiner als die der unbehandelten Drähte.

2. Der Charakter der Verfestigungskurve des Reinstalluminiumdrahtes ist so, dass die Kurve eine ständige ansteigende Tendenz zeigt, ganz unabhängig vom Wärmebehandlungszustand der Pressstangen (Kurve *F*).

3. Der Charakter der Verfestigungskurve des mit Eisen legierten Reinstaluminiumdrahtes sieht dem des Reinstaluminiumdrahtes ähnlich, obzwar der absolute Wert der Festigkeit etwas höher liegt (Kurven *F*, *1*, *2*, *3*).

4. Der Charakter der Verfestigungskurve des mit Silizium legierten Reinstaluminiumdrahtes hängt von dem Wärmebehandlungszustand des Ausgangspressdrahtes ab, also von der Verteilung des Siliziums im Grundmetall

(in der Form einer festen Lösung oder von Ausscheidungen). Die Kurve des behandelten Materials ist gleichmässiger, die Verfestigung ist auch im Falle von grossen Reduktionen nicht so schroff, wie im Falle des unbehandelten Materials (Kurven *S*, *SB*). Die Zulegierung des Bors hat keine bedeutendere Auswirkung auf den Charakter der Kurven.

5. Die Verfestigungskurven der aus unbehandelten Pressstangen hergestellten Drähte steigen im Falle von Fe + Si + Ti + V-haltigem Hütten-

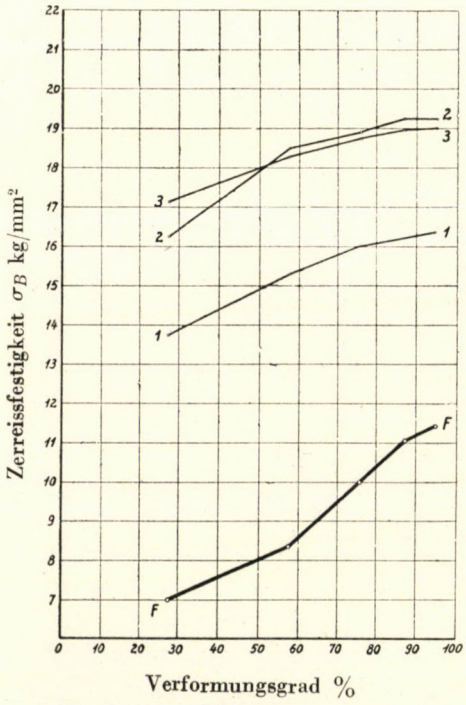


Abb. 1/a — Verfestigungskurven von raffiniertem und Fe-haltigen Aluminium. Gepresst.

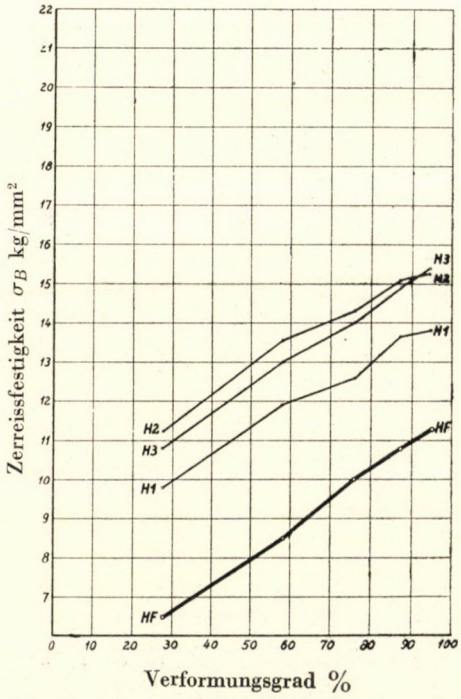


Abb. 1/b — Verfestigungskurven von raffiniertem und Fe-haltigen Aluminium. Wärmebehandelt.

aluminium bei grösser werdenden Reduktionen — grösser als ungefähr 75—85% — steil an. Die Kurven der wärmebehandelten Materialien sind hingegen gleichmässiger, obzwar sie im Durchschnitt steiler sind (Kurven *12*, *13*). Der Charakter der Kurven ist denen im Punkt 4. besprochenen ähnlich.

6. Der Charakter der Verfestigungskurven des mit Bor behandelten Metalls (Ti, V und B nur in Spuren) steht dem der Fe-haltigen näher (Punkt 3.) als dem des Hüttenaluminiums (Punkt 5.).

Aus der Zusammenfassung der Versuchsergebnisse geht hervor, dass der *Charakter* der Verfestigungskurven von der Zusammensetzung des Metalls bzw. bei gleicher Zusammensetzung von der Verteilung der Legierungskomponenten

im Grundmetall abhängt. Die im Aluminium unlöslichen, zu Ausscheiduneng führenden Legierungskomponenten ändern nichts am Charakter der Verfestigungskurve des reinen Metalls (gleichmässige Verfestigungskurve). Dagegen ändern die in feste Lösung gehenden Zusätze den Charakter der gleichmässigen Verfestigungskurven so ab, dass die Festigkeit nach einer grösseren Reduktion in erhöhtem Masse ansteigt (anfangs flachere, bei den letzten Reduktionen steil ansteigende Kurve).

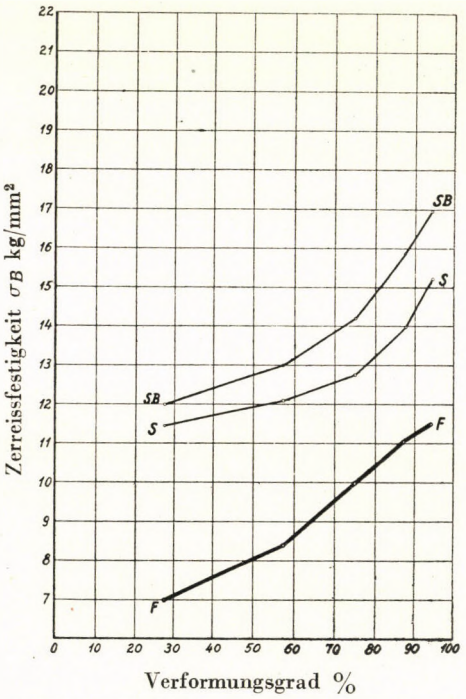


Abb. 2/a — Verfestigungskurven von raffiniertem und Si- sowie Si+B-haltigen Aluminium. Gepresst

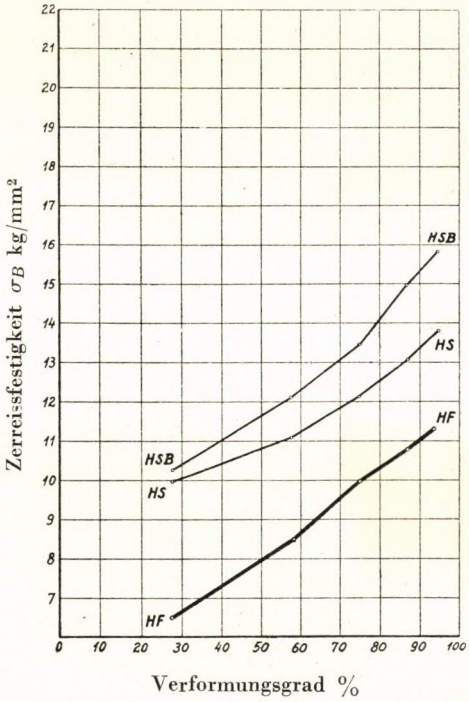


Abb. 2/b — Verfestigungskurven von raffiniertem und Si- sowie Si+B-haltigen Aluminium. Wärmebehandelt

Eine theoretische Erklärung für den Unterschied, der sich bei den Verfestigungskurven zeigte, kann durch die Anwendung des Gedankens der neuen, für den Fall der Einkristalle ausgearbeiteten Versetzungstheorie gegeben werden. Die Ausscheidungen konzentrieren eine grosse Anzahl von Fremdatomen in sich. Diese Agglomerierung verursacht im Gitter des Grundmetalles nur vereinzelte Spannungsanhäufungen. Dagegen bedingen die im Grundmetall gelösten Verunreinigungen nicht nur vereinzelte, sondern sich fast auf das ganze Volumen erstreckende Deformationen, da sie im Gitter des Grundmetalls gleichmässig verteilt sind. Die auf Wirkung einer äusseren Spannung in Bewegung geratene

Versetzung versucht den Stellen der Spannungsanhäufungen, die die Bewegung der Versetzungen verhindern, auszuweichen. Nach den aus dem gesammelten Versuchsmaterial gemachten Erfahrungen hat es den Anschein, als ob die festen Lösungen mit geringer, homogener Spannungsanhäufung ein grösseres Hindernis für die Bewegung der Versetzungen bedeuten als ein Gefüge mit Ausscheidungen, die wenige, aber im einzelnen weit bedeutendere Spannungsanhäufungen verursachen.

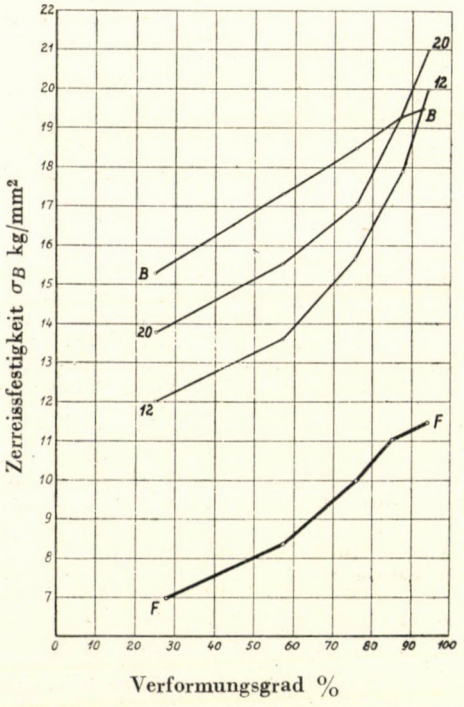


Abb. 3/a — Verfestigunskurven von raffiniertem und Hüttenaluminium sowie mit Bor behandeltem Hüttenaluminium. Gepresst

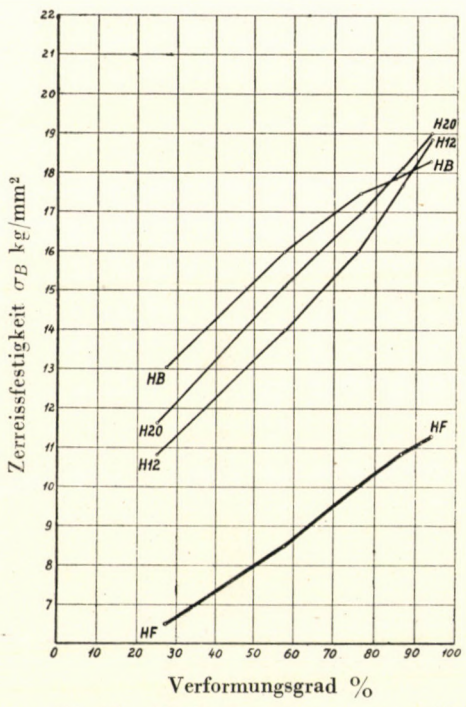


Abb. 3/b — Verfestigungskurven von raffiniertem und Hüttenaluminium sowie mit Bor behandeltem Hüttenaluminium. Wärmebehandelt

Ausführliche Berechnungen [7] haben bewiesen, dass das Vorhandensein von Legierungskomponenten in einer Menge nur von 0,001—0,01% die Verformbarkeit der Metalle schon stark beeinflussen kann. Es ist deshalb verständlich, dass das im Aluminium in einer Menge von ungefähr 0,1% vorhandene Silizium auf die Verfestigung des Aluminiumgrundmetalles eine grosse Wirkung ausübt, deren Ausmass davon abhängt, ob es in fester Lösung oder in der Form von Ausscheidungen vorliegt (siehe den Ablauf der Kurven der wärmbehandelten bzw. unbehandelten Proben mit der Bezeichnung *S*, *SB*, *12* und *20*).

Mit derselben Erscheinung lässt sich auch erklären, warum der Gang der Kurven des Ti- und V-haltigen Hüttenmetalls sowie des B-haltigen, Ti- und V-armen Metalls voneinander abweicht. Titan und Vanadin bilden in der Gegenwart von entsprechenden Mengen Bor im Aluminium praktisch unlösliche Ti- bzw. V-Boride. Dementsprechend führt die Gegenwart des Bors zur Aufhebung der Löslichkeit des Titans und Vanadins im Aluminium, was anscheinend nicht nur durch die Leitfähigkeit, sondern auch durch den Charakter der Verfestigungskurven bewiesen wird.

Die Löslichkeit des Siliziums im Aluminium in der Gegenwart einer entsprechenden Menge Bor ist eine noch nicht geklärte Frage. Auf Grund der bisherigen Versuchsergebnisse scheint es wahrscheinlich zu sein, dass das Bor auch die Wirkung des Siliziums auf die elektrische Leitfähigkeit und Verfestigung des Aluminiums beeinflusst.

SCHRIFTTUM

1. A. Domony und K. R. Vassel: The Influence of Some Alloying Constituents on the Structure of Cast Aluminium. Acta Technica Hung. **XII.** Heft. 1—2. (1955), S. 157—164.
2. A. Domony und K. R. Vassel: Titánnal és vanádiummal szennyezett aluminium villamos vezetőképességének bóros kezeléssel történő javítása. (Die Verbesserung der elektrischen Leitfähigkeit des mit Ti und V verunreinigten Aluminiums. Nur ungar.) A Magy. Tud. Ak. Műsz. Tud. Oszt. Közl. **III** (1952) S. 267—281.
3. A. Domony: Kismennyiségű ötvözők, ill. szennyezők hatása az Al egyes technológiai tulajdonságaira. (Einfluss kleiner Mengen von Legierungskomponenten bzw. Verunreinigungen auf einzelne technologische Eigenschaften des Aluminiums. Nur ungar.) Kohászati Lapok. **10 (88),** (1955) S. 571—574.
4. G. Masing: Lehrbuch der allgemeinen Metallkunde. Springer-Verlag, Berlin, 1950.
5. A. Domony und K. R. Vassel: A titán és bór hatása az alumínium villamos vezetőképességére, szemcseméretére és szilárdságára. (Die Wirkung des Titans und Bors auf die elektrische Leitfähigkeit, Korngrösse und Festigkeit des Aluminiums. Nur ungar.) A Magy. Tud. Ak. Műsz. Tud. Oszt. Közl. **VIII** (1953). S. 629—647.
6. K. R. Vassel: A nagyon tiszta alumínium gyártási feldolgozásmódja és fontosabb tulajdonságai. (Die Technologie und die wichtigsten Eigenschaften des Reinstaluminiums. Nur ungar.) A Magy. Tud. Ak. Műsz. Tud. Oszt. Közl. **XII.** (1954) S. 377—394.
7. A. H. Cotrell: Theory of Dislocations. Pergamon Press Ltd. London, 1953.

ZUSAMMENFASSUNG

1. Die elektrische Leitfähigkeit des Aluminiums hängt in erster Linie von dem Gehalt der im Metall gelösten Legierungskomponenten, wie Silizium, Titan und Vanadin ab. Kleine Mengen des gelösten Siliziums können mit Wärmebehandlung, die des gelösten Titans (bzw. Vanadins) mit der Zugabe von Bor aus der festen Lösung entfernt werden.

2. Der absolute Wert der bei der Kaltbearbeitung des Metalles bestimmten Verfestigungskurven hängt von der Menge der vorhandenen Verunreinigungen, ihr *Charakter* hingegen von der Verteilung der Legierungskomponenten im Metall ab. Der Charakter der Verfestigungskurven der Metalle, die kleine Mengen Ausscheidungen enthalten, entspricht dem der Verfestigungskurve des Reinstaluminiums. Im Falle einer festen Lösung mit ungefähr 0,01—0,1% Fremdmetallgehalt ändert sich der Charakter der Verfestigungskurve. Zur Erklärung der im Charakter der Verfestigungskurven festgestellten Unterschiede kann die Theorie der Versetzungen herangezogen werden.

THE EFFECT OF SMALL QUANTITIES OF ALLOYING ELEMENTS AND IMPURITIES ON SOME PHYSICAL PROPERTIES OF ALUMINIUM

A. DOMONY
Cand. of Techn. Sc.

SUMMARY

1. The electrical conductivity of aluminium depends mainly on the quantity of the dissolved elements in the matrix, of such as silicon, titanium and vanadium. The removal of small quantities of dissolved silicon from the solid solution may be accomplished by suitable heat-treatment, while that of dissolved titanium or vanadium by the addition of boron.

2. The absolute values of the plots tensile strength against reduction by cold-working depend on the quantity of the impurities present, while their *character* on the distribution of the alloying elements within the metal. The character of the strain hardening curves of aluminium, containing small quantities of segregated elements, is the same as that of the high purity aluminium. The character of the strain hardening curve of aluminium, containing some 0,01—0,1% alloying elements in solid solution, is somewhat different. The alteration of the character of the strain hardening curves might be explained with the help of the theory of dislocations.

L'EFFET D'UNE QUANTITÉ RÉDUITE DES ÉLÉMENTS CONSTITUANTS ET DES IMPURETÉS SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DE L'ALUMINIUM

A. DOMONY
Cand. des sc. techniques

RÉSUMÉ

1. La conductibilité électrique de l'aluminium dépend principalement de la quantité dissolue de l'élément constituant dans la masse métallique — tels que le silicium, le titane et le vanadium. Une quantité réduite du silicium dissout peut être éliminée du cristal mixte par un traitement thermique correspondant, pendant que celle du titane ou vanadium par l'introduction de bore.

2. Les valeurs absolues de la courbe résistance à la rupture/réduction, prise au cours de l'écrouissage du métal, dépendent de la quantité des impuretés présentes, leur caractère, par contre, de la distribution des éléments constituants dans le métal. Le caractère de la courbe résistance/réduction d'un métal, contenant une quantité réduite des ségrégations, est le même que celui de l'aluminium de haute pureté. Le caractère de la courbe résistance/réduction d'un métal, contenant quelques 0,01—0,1% d'un élément constituant dans la forme d'un cristal mixte, est différent. Les différences du caractère de la courbe résistance/réduction peuvent être expliquées par la théorie des dislocations.

ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ КОЛИЧЕСТВ ЛЕГИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ПРИМЕСЕЙ НА НЕКОТОРЫЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛЮМИНИЯ

Канд. техн. наук А. ДОМОНЬ

РЕЗЮМЕ

1. Электрическая проводимость алюминия зависит, в первую очередь, от количества легирующих элементов, растворенных в металлической основе (напр., кремний, титан, ванадий). Устранение малых количеств растворенного кремния можно производить путем термической обработки, а малые количества титана (и, соответственно, ванадия) можно удалять введением бора.

2. Кривые наклепа, снятые при холодной деформации металла, указывают по своей абсолютной величине на количество присутствующих в металле примесей, а по характеру изменения на распределение легирующих элементов. Характер кривых наклепа металлов, содержащих малое количество выделении, по существу сходится с кривой для алюминия высокой чистоты. Кривая наклепа металла, содержащего легирующие элементы в количестве от 0,01 до 0,1% в виде твердого раствора имеет характер — отличный от вышеописанного. Расхождения в характере кривых наклепа можно толковать при помощи теории дислокаций.

FORCES ACTING IN THE BUCKET OF THE ELEVATOR

B. SZŐKE

[Manuscript received 12th December, 1955]

I. The force field of the rotary system

The force acting on any point of plane τ rotating about optional axis t at angular velocity ω and n revolutions per minute (Fig. 1a.), passes through that point S of the vertical drawn at center of rotation O, which lies above the latter at the following vertical distance :

$$OS = h = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9{,}81 \cdot 30^2}{n^2 \pi^2} = \frac{895}{n^2} \qquad (1)$$

(Fig. 1*a*. and 1*b*)

This h height is a constant independent of radius r and its magnitude is univocally determined by angular velocity ω (or n revolutions per minute). The force field of the rotary system is hence a bundle of rays the apex of which (hereafter : the pole) is point S, marked out at height h.

From vector diagram 1*b* it is clear, that resultant R of force of gravity G and of centrifugal force C acting on any material point of position P and mass m of plane τ, starts from origine S_1 of weight-force G. By reason of similitude of the triangles SPO and $S_1P_1O_1$ maybe written with notations of the fig. :

$$h : r = G : C = mg : mr\omega^2$$

from which equation (1) follows.

The vector of the resultant, acting on point P during the rotation, changes in the same way as the generating line of the oblique cone of apex S_1 in vector diagram 1*b*. The magnitude of resultant R can therefore be expressed as a function of the angle of rotation from rightangled triangles $S_1M_1P_1$ and $S_1M_1O_1$ and also from the general triangle $P_1M_1O_1$. With notations of the figures and taking into consideration the expressions :

$$\overline{S_1P_1}^2 = R^2 = \overline{S_1M_1}^2 + \overline{P_1M_1}^2 = G^2 \sin^2 \lambda_0 + C^2 + \overline{O_1M_1}^2 - 2C\,\overline{O_1M_1} \cos \varphi$$

and since :

$$O_1 M_1 = G \cos \lambda_0$$

we have :

$$R^2 = G^2 + C^2 - 2\,G\,C \cos \lambda_0 \cos \varphi \tag{2}$$

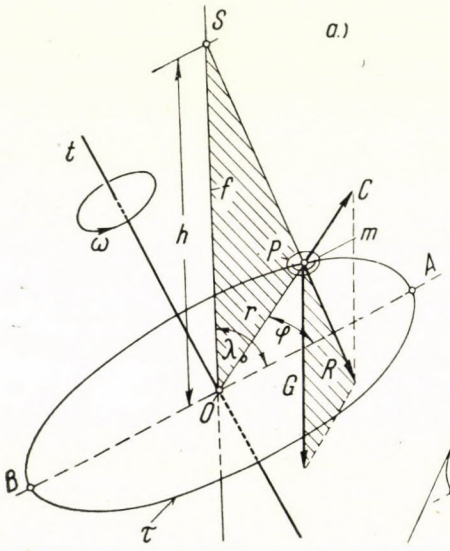


Fig. 1a. Force field of point system rotating about axis *t*

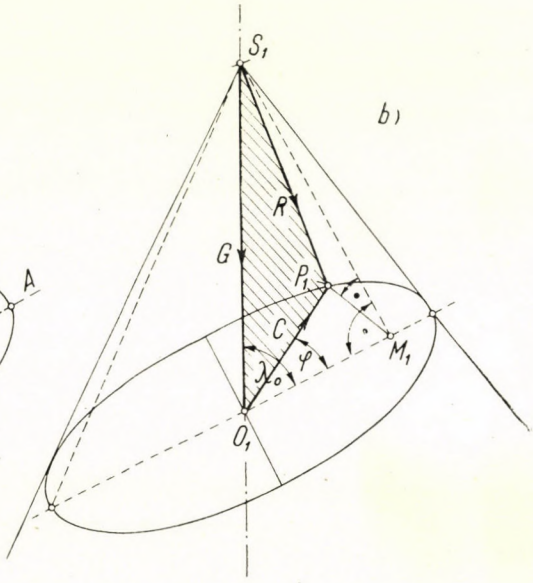


Fig. 1b. Vector diagram of resultant *R*

In case of the elevator, the angle λo included between the vertical and the plane of rotation disappears, so that substituting $\cos \lambda_0 = 1$.

$$R^2 = G^2 + C^2 - 2\,G\,C \cos \varphi \tag{3}$$

II. A single wheat grain in the bucket-elevator. Discharge of the grain from the slow-moving elevator

If we examine the discharge in relation with a material particle (e. g. a grain of wheat), it can be ascertained by straight aspect that in case of low numbers of revolution the wheat grain rolls down the back wall of the bucket (Fig. 2.), in case of high numbers of revolution, however, when the centrifugal force predominates in the resultant, the grain is flung out along the front (outer) wall. (Fig. 3.) The third case would be the horizontal discharge of the grain.

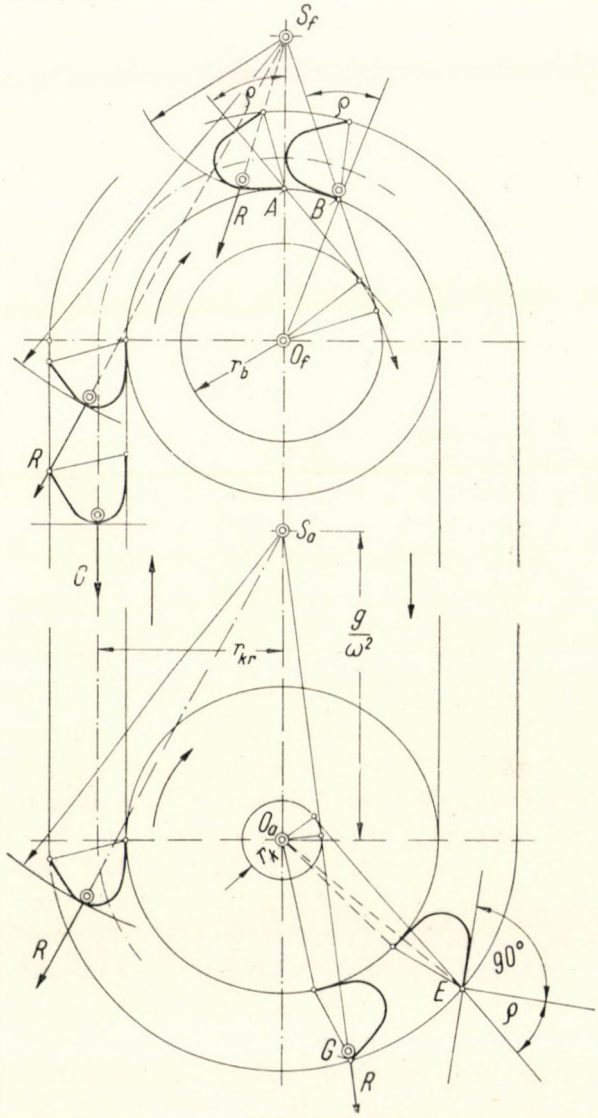


Fig. 2. Limit positions of pick-up and discharge in slow-run

If we call the circle of radius r_{kr} — belonging to the deepest point of the vertically rising bucket — the central circle of the bucket elevator, the centre of which coincides with that of the wheel, then — considering equation (1) :

$$\frac{h}{r_{kr}} = \frac{g}{r_{kr}\,\omega^2} \tag{4}$$

we get a ratio, which is characteristic of the functioning of the elevator.

In case this ratio is greater than unity, we may call the elevator *slow-moving*, when, however, it is less than unity, that is the pole S lies within the circle of radius r, we may call the elevator *fast-moving*.

Let us examine now at which position of the bucket the discharge occurs, when the elevator is slow-moving?

The single wheat grain in the bucket (Fig. 2.) always strives to occupy a place as far as possible from pole S_f or S_a. We can find this farthest place, drawing a tangent circle to the bucket with point S_f or S_a as centre. In the upward moving bucket only the vertically downward directed weight-force acts on the grain, which therefore strives to assume the deepest point in the bucket, in the plain sense of the word. In the moment the bucket rides on the head-wheel, the centrifugal force asserts itself too and so the "deepest point" becomes the point of contact of the tangent circle, drawn from pole S_f to the bucket.

If there were no friction between the grain and the wall of the bucket, the grain would immediately occupy this position at the instant the bucket passes over the head wheel. In fact the movement can only take place, if the direction of the acting force passes out of the friction cone, that is, if the direction of the force includes with the normal drawn to the wall of the bucket at that point, an angle greater than friction angle ϱ.

In Fig. 2. we indicated resultant force S_fB, which includes with radius O_fB the angle ϱ. This discharge position can be drawn in the following manner: to the radius, belonging to the point A of the belt-pulley we draw — as to one leg of an angle, the other side of the friction angle ϱ at vertex A, and to this we draw from centre O_f the tangent circle, wit radius r_b. The tangent, drawn from pole S_f to this circle cuts out point B from the circle of the head-wheel, which has to be reached by point A of the bucket rim, to allow the grain to roll down.

III. Pick-up of the grain in the slow-moving elevator

Let us follow the course of the bucket on the footwheel. Regarding the lowest position of the bucket, it can be ascertained that the grain only remains on the front edge E of the bucket, if the latter occupies a position at which the force acting on the edge is *within the friction cone.*

The tangent circle, of radius r_k, belonging to the friction angle, is drawn again to point E of the front edge. To this a tangent from point S_a is drawn, and we get point G of intersection on the head-circle of the bucket. As soon as the edge E of the bucket reaches position G, the grain is caught in the bucket and — as mentioned before — tends invariably to occupy the place farthest from pole S_a in the bucket.

During a single turnaround of the bucket, we distinguish two stages in the position of the grain: during the time the bucket gets from position G to position B, it catches the grain, but during the time it gets from B to G it can no longer hold it.

IV. Pick-up and discharge of the grain in the fast-moving elevator

Let us consider now the case of the fast-moving elevator, when pole S_a or S_f is placed inside the central circles of the bucket.

Fig. 3. demonstrates the force effects at the various bucket-positions. We can ascertain on the basis of this figure first of all that no such bucket-positions exist in the fast-moving case, in which the acting force could press the grain against the back inner wall of the bucket, so that the grain can only be held by the front (outer) wall.

The discharge of the grain occurs exactly at the position where resultant R includes just friction angle ϱ with normal n and is inclined outward from the normal. Let us draw again the circle of radius r_k, which again contacts the generating line of the friction cone. If one draws from point S_f and S_a to this circle *two tangents*, so two points are cut out from the *head circle* of the bucket. The bucket edge passes through one of these points at the instant of "discharge of the grain", through the other point at the instant of the "pick-up of the grain". (Points A_k and A_m). With regard to the figure the following can be stated:

The normal n and the centrifugal forces C include with each other the same angle at every position of the bucket. This angle is exactly equivalent to angle γ in the bottom of the bucket, their legs being at right angles.

At the lowest and at the highest position, the resultant force and the centrifugal force fall into the same vertical line and this vertical closes just the same angle with the normal as the angle in the bottom of the bucket. It follows that in case the angle in the bottom of the bucket is equal to the friction angle ($\gamma = \varrho$) the pick-up would occur at the lowest, the discharge of the grain at the edge of the bucket in the highest position.

Angle δ included by centrifugal force C and resultant R, differs in magnitude at the successive bucket positions. Angle α included by normal n and resultant R, to be considered from the point of view of the discharge of the grain, can be obtained in the two rising quadrants of the circle, by substracting angle δ from the angle in the bottom γ, in the two descending quadrants, however,

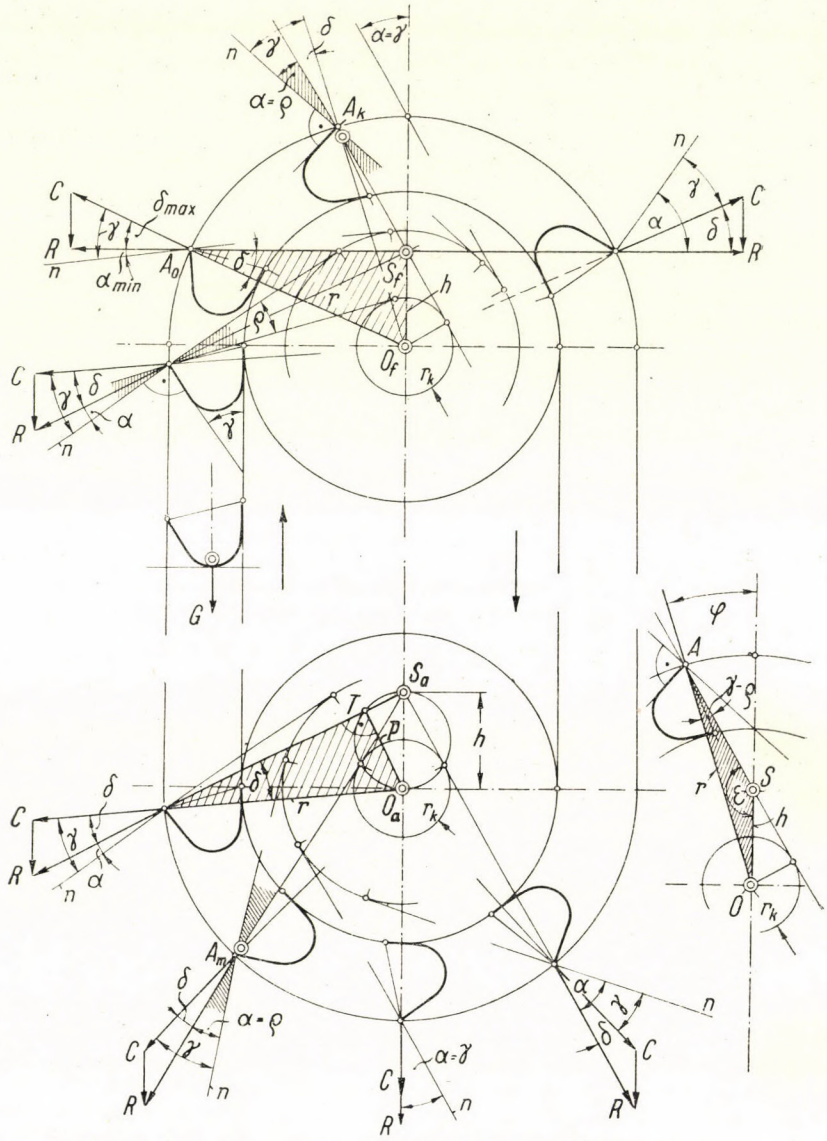


Fig. 3. Limit positions of pick-up and discharge in fast-run

by adding angle δ to it. Consequently at the symmetrical bucket positions on the right and left side, the difference between the α angles, included by the resultant and the normal, is exactly $2\,\delta$.

Angle α is the smallest in the ascending quadrant of the circle — and the pick-up of the grain the surest, there where angle δ is largest. However, the vector of the Thales-circle $O_aT = p = r \sin \delta$, drawn on $O_aS_a = O_fS_f = h$

diameter, furnishes information regarding the variations of angle δ, that is : p is largest when point T reaches S_f, and at this position $p = OS_f$ and the perpendicular resultant R is horizontal. (See shaded triangles of Fig. 3.)

The intersection A_0 of the horizontal drawn from point S_f with the head circle is a notable point regarding the functioning of the entire elevator. Because if at position $\alpha > \varrho$ there is no such bucket position, neither on the head, nor on foot wheel, where the grain remains caught, so that discharge occurs all around.

The horizontal drawn across point S_a or S_f plays also another important role : namely, if two such resultants are drawn from point S_a or S_f, which are — in relation to that horizontal — the reflected images of each other, then the bottom-lines p, belonging to these resultants, are also reflected images, which signifies that to the above mentioned resultants pertain identical δ angles. At the direction of forces symmetrical to the horizontal through the pole, the relations of grain-retaining together with angle α are also identical.

V. Special bucket positions

When tangents are drawn from pole S_f or S_a to the base circle of radius r_k of the friction cone, the following special cases are possible :

1. Radius r_k of the base circle of discharge angle σ, has exactly the same height as h. In this case only one tangent can be drawn, this means that the positions of pick-up and discharge are reduced to one point, that is in position $\alpha_{\min}$, (point A_0).

2. $r_k > h$; in such case no tangent can be drawn, thus neither pick-up nor discharge bucket-position exists. In this case $\alpha_{\min} = \gamma - \delta_{\max} > \varrho$ and so the angle in the bottom $\gamma > \delta_{\max} + \varrho$.

3. $r = r \sin (\gamma - \varrho) = 0$; that is, the, generating line of the friction cone, used for the construction, passes exactly through centre O. In such case the base-circle is reduced to a point, $\gamma = \varrho$ and as mentioned before the discharge of the grain occurs at the peak point and the pick-up at the lowest point.

4. If $\gamma < \varrho$ and $r_k < h$, the construction yields always *two points of contact*, but in such cases both bucket positions — the discharge and the pick-up — fall to the right side, on the two descending quadrants of the circle.

5. If $\gamma < \varrho$ and $r = h$, then the starting points of discharge and of pick-up are reduced to one point, at $\alpha_{\max}$, on the right side of the horizontal, passing through point S.

6. Finally, when in the bottom of the bucket angle $\gamma < \varrho$ and $r_k > h$, there occurs no discharge, but the grain remains in the bucket, that is : it gets into the elevator-casing.

The results of the construction can also be elucidated by simple calculation. From triangle OSA namely

$$\sin OSA = \frac{OA \sin SAO}{OS}$$

that is

$$\sin \varepsilon = \frac{r \sin (\gamma - \varrho)}{h} \tag{5}$$

where

$$r_k = r \sin (\gamma - \varrho) \tag{6}$$

and so equation (5) includes all above discussed cases. The angle of rotation ε belonging to radius r is :

$$\varphi = 180^\circ - \varepsilon - \gamma + \varrho. \tag{7}$$

VI. The method of relative rolling

If, in examining the play of forces, it is desired to draw the bucket only once, it is supposed that the bucket stands still and that pole S rotates in the opposite sense. It is expedient to draw — according Fig. 4. — the *reflected image* of the bucket in the vertical plane, giving point S the actual sense of rotation, because in that case radius OS will indicate the proper position of the bucket.

Fig. 4. illustrates the case of the slow-moving elevator. This figure (leaving off the vertical belt-strings) shows the head- and the foot-wheel, pushed together, on a common shaft O. The straight line m_1, which is inclined at friction angle ϱ to normal n_1 of the front wall of the bucket, intersects rotary circle s of pole S at point S_1. Radius OS_1 on the head circle of the bucket intersects, at point A_1 the position of the bucket at the moment of pick-up. Triangle OA_1S is namely the reflected image of triangle OAS_1.

The case, where the grain rolls down from point B of the back (inner) wall, can be constructed in a like manner. This is determined by the point of intersection S_2 of the straight line m_2 and of the circle s. Radius OS_2 cuts out the discharge point B_2 on the foot circle of the bucket.

This method has the great advantage of furnishing a perspicuous picture for the case when it is desired to examine the behaviour of the chosen bucket-style for various numbers of revolutions. (At high numbers of revolutions, when the radius of circle s is still short, straight line m_1 does not intersect the circular paths.) At n number of revolutions, when the radius of circle s just touches straight line m_1, the points of pick-up and of discharge shrink to a single point. If the number of revolutions per minute further diminishes, there are two

separate points for pick-up and for discharge, and as long as the rotating pole S travels in the field of the friction cone, the grain at the edge point A of the bucket is caught by the force acting on it from point S.

An inward directed displacement can only occur at such numbers of revolutions, at which the circle s touches the line m_1', of the friction cone. At a further decrease of the number of revolutions, circle s will already intersect the straight

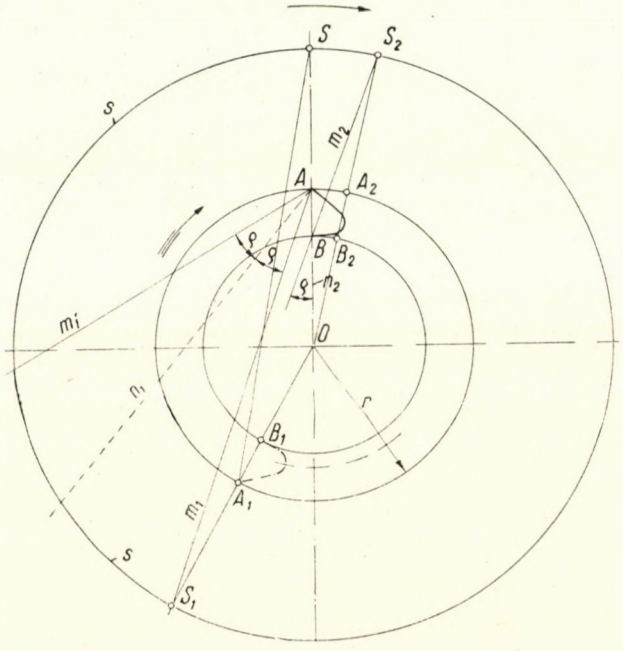


Fig. 4. Investigation of the bucket, drawn as reflected image, imagined at standstill, at given number of revolutions

line m_1', and in the corresponding bucket position the grain drops back from edge A to the bottom of the bucket, from where the subsequently arising forces press it against the back inner wall; so ultimately the before mentioned „rolling" occurs.

In case the grain is not placed on edge A of the bucket, but at a more inward point of the front wall, then — drawing the generating line m_1 belonging to this point, it becomes manifest that with given number of revolutions the position of pick-up takes place sooner than that of discharge.

REFERENCES

1. Á. G. PATTANTYUS : Szállítóberendezések. 1951. (Transportation Equipment) (Hungarian)
2. Á. G. PATTANTYUS : Gyakorlati Áramlástan. 1951. (Practical Theory of Flow) (Hungarian)
3. I. SASFI : Elevátorok. 1955. (Elevators) (Hungarian)
4. J. KOLOSTORI : Malomipari gépek. 1952. (Flour Mill Machinery) (Hungarian)
5. L. CSIZMAZIA : A malomipar technológiája. 1937. (Technology of Flour-milling) (Hungarian)
6. *П. С. Козмин:* Машины непрерывного транспорта. Москва 1948.
7. *К. В. Апферов:* Ковшевые элеваторы. Машиностроение Том 9. Москва 1950.
8. H. AUMUND : Hebe- und Förderanlagen. Berlin. 1950.
9. G. v. HANFFSTENGEL : Die Förderung von Massengütern. Berlin. 1921.
10. HORST MEY : Fliessarbeit und Förderung von Massengütern. Halle. 1951.
11. C. MICHENFELDER : Handbuch der Fördertechnik. Leipzig. 1950.
12. F. V. HETZEL : Belt Conveyors and Elevators. New York. 1949.
13. R. A. TAYLOR : Elevators and skip hoists. London. 1950.
14. LEO HOPF : Taschenbuch für Müllerei. 1938.
15. „Hütte" des Ingenieurs Taschenbuch.
16. C. A. STRÖMBERG : Ingenjörshandboken. Stockholm. 1947.
17. B. SZŐKE : A felvonóról. Malomújság 1939. 9. No. 13. 20. (On Elevators) (Hungarian)
18. B. SZŐKE : A serleges felvonók sebességének hatása a felvonók kiöntésére. Élelmezési Ipar 1951 évf. No. 5. (The author's name by misprint as "Theibsz József") (Effect of bucket speed on the discharge of elevators) (Hungarian)
19. HERMANNS : Die Entwicklung des Becherförderers. Fördertechnik 1909. S. 141.
20. DR. H. GEHLE : Förderprobleme des Mühlenbaues und ihre Lösung. Mühlenzeitung 1950. No. 10.
21. Ing. H. E. : Gleitblech am Elevatorkopf. Die Mühle 1950. Heft 17. u. 1951 Heft 10.

SUMMARY

The forces acting on material points in the plane rotating around an optional axis in the field of parallel gravitational forces form one bundle of rays, converging to a point situated at height g/ω^2 above the point of rotation of the plane. In the case of the elevator the field of forces becomes a row of rays. According whether this "pole" is situated inside or outside of the medium circle of the buckets, slow-mowing and fast-mowing elevators are distinguished. The play of forces is examined with regard to the wheat grain, placed on the front or back edge of the bucket, for the edge points are important from the point of view of the pick-up and the beginning of the discharge of the grain. These points are easily located : To the normal at the edge point of the bucket drawn at any place of the wheel, the generating line of the friction cone is drawn, and to the latter a tangent circle is drawn from the centre of rotation. The tangents, drawn from the pole to this basecircle of friction cut out the sought points. In fast-mowing elevators both pickup and discharge occur at the front edge-point of the bucket. The possible special cases are expressed by the following equation too :

$$\sin \varepsilon = \frac{r \sin (\gamma - \varrho)}{h} .$$

If it is desirable to know how a certain style of bucket will behave at various revolutions, the bucket's reflected image and the two generating lines of the friction cone of the edge are drawn. The pole is imagined to rotate and the points of intersection of the circles of rotation, pertaining to various numbers of revolutions, and of the generating lines are used for the determination of the characteristic points.

DIE IM BECHER DES BECHERFÖRDERERS WIRKSAMEN KRÄFTE

B. SZŐKE

ZUSAMMENFASSUNG

Die Kräfte, die auf materielle Punkte einer sich um eine beliebige Achse im parallelen Schwerkraftfeld drehenden Ebene einwirken, bilden ein Strahlenbündel, das in einem Punkt in der Höhe von g/ω^2 über dem Drehpunkt der Ebene zusammenläuft. Im Falle des Becherförderers ist es das Kraftfeld, das ein Strahlenbüschel bildet. Je nachdem dieser Pol ausserhalb

oder innerhalb des Bechermittelkreises fällt, unterscheidet man langsam- bzw. schnellaufende Becherförderer. Der Verfasser untersucht das Kräftespiel an Hand des auf der Vorder- und der Hinterkante sitzenden Weizenkorns, da für die Aufnahme und für den Beginn der Ausschüttung die Kantenpunkte von Belang sind. Die Aufnahme- (Schöpfen-) und Ausschüttungs- (Auswurf-) Stellen lassen sich leicht bestimmen. Im Kantenpunkte des auf einer beliebigen Stelle der Gurtenscheibe angenommenen Bechers wird zur Normale die Erzeugende des Reibungskegels aufgezeichnet und zu letzterem ein Berührungskreis vom Drehungsmittelpunkt gezogen. Die vom Pole aus zu diesem Reibungsgrundkreis gezogenen Tangenten schneiden nämlich die gesuchten Punkte aus dem Drehungskreis der Kante heraus. Bei schnellaufenden Becherförderern findet sowohl die Aufnahme wie die Ausschüttung am Kantenpunkte der Vorderseite statt. Die möglichen Sonderfälle werden auch durch die folgende Gleichung ausgedrückt :

$$\sin \varepsilon = \frac{r \sin (\gamma - \varrho)}{h} .$$

Das Verhalten einer gewissen Becherform bei verschiedenen Drehzahlen kann auch auf die folgende Weise untersucht werden : Der Becher wird als Spiegelbild aufgezeichnet, es werden die beiden Erzeugerlinien des Reibungskegels der Kante gezogen und der Pol wird als umlaufend vorgestellt, worauf die Schnittpunkte der zu den verschiedenen Drehzahlen gehörigen Umdrehungskreise mit den Erzeugerlinien zur Bestimmung der kennzeichnenden Punkte herangezogen werden.

LE JEU DE FORCES DANS LE GODET D'ÉLÉVATEUR

B. SZŐKE

RÉSUMÉ

Les forces agissant sur les points matériels d'un plan tournant autour d'un axe quelconque dans le champ de forces parallèles de gravitation forment un faisceau de rayons convergeant à un point à la hauteur de g/ω^2 au dessus du centre de rotation du plan. En cas d'un élévateur à godets ce champ de forces embrasse la forme d'un faisceau de rayons. Suivant que ce pôle tombe en dehors ou en dedans du cercle central des godets, ou aura affaire avec un élévateur à marche lente ou rapide. Le jeu de forces est examiné sur un grain de blé assis sur l'arête de devant et de derrière, les points de l'arête étant importants pour la réception et pour le commencement de la décharge. Les endroits de réception et de décharge, peuvent facilement être déterminés : A la normale du point d'arête d'un godet pris à un endroit quelconque du tambour on trace la génératrice du cône de friction. A cette génératrice un cercle tangentiel est construit autour de l'axe de rotation. Les tangentes tracées à partir du pôle à ce cercle basique de friction découpent en effet du cercle de rotation de l'arête les points cherchés. Dans l'élévateur à marche rapide la réception aussi bien que la décharge s'accomplissent sur le point de l'arête de devant. Les cas spéciaux possibles sont aussi exprimés par l'équation :

$$\sin \varepsilon = \frac{r \sin (\gamma - \varrho)}{h} .$$

La marche d'une forme de godet donnée pour des nombres de tours différents peut être examinée aussi si en traçant le godet en image réfléchie, on construit les deux génératrices du cône de friction de l'arête, puis, imaginant le pôle toounant, on se sert des points d'intersection des cercles de rotation, correspondant à des nombres de tours différents, avec les génératrices pour la détermination des points caractéristiques.

ДЕЙСТВИЕ СИЛ В КОВШАХ ЭЛЕВАТОРА

Б. СЁКЕ

РЕЗЮМЕ

Силы, действующие на материальные точки плоскости, вращающейся в поле параллельных сил тяжести вокруг произвольной оси, образуют пучок силовых линий, опирающийся на такую точку, которая находится над точкой вращения плоскости на высоте g/ω^2. В случае элеватора это силовое поле преобразуется в ряд пучков. В зависимости от того,

что размещается ли этот «полюс» вне или внутри среднего круга ковшей, следует различать быстроходные или медленные элеваторы. Игра сил исследуется при помощи зерен, находящихся на переднем и заднем краях ковша, так как с точки зрения приема и выброса важны края. Места приема и выброса можно легко найти при помощи касательного круга, построенного вокруг оси вращения, относящегося к образующей конуса трения, построенного на нормали в крайней точке ковша, начерченного в любом пункте барабана, ибо касательные на полюсах к этому основному кругу трения отсекают от круга вращения края искомые точки. В случае быстроходных элеваторов как прием, так и выброс происходит с края передней части. Встречающиеся возможные специальные случаи выражает также уравнение:

$$\sin \varepsilon = \frac{r \sin (\gamma - \varrho)}{h} .$$

Поведение некоторой определенной формы ковша при различных числах оборотов можно исследовать также путем вычерчивания ковша в зеркальном изображении, построив две образующие конуса трения края и принимая полюс вращающимся; для определения характерных точек используются точки пересечения кругов вращения, соответствующих различным числам оборотов, и образующие.

APPLICATION OF THE MATRIX THEORY TO THE CALCULATION OF CONTINUOUS BEAMS

J. SZABÓ

[Manuscript received 5th December, 1955]

Ample literature is available on the calculation of continuous beams, and tables satisfying every requirement provide material aid for structural engineers. In general, the CLAPEYRON equations are not employed for the determination of the equilibrium of forces acting on continuous beams, for even in special cases, where the tables cannot be used to good advantage, it is more expedient to employ the Cross method of moment distribution. In spite of that, by the method to be discussed below, the relation between the moments at the supports and the load on continuous beams of equal spans and uniform cross section has been written on the base of the CLAPEYRON equations, demonstrating that $\mathbf{A}^{-1}$, the inverse of the coefficient matrix **A** in the matrix equation

$$\mathbf{A}\,\mathbf{m} = \mathbf{w} \tag{1}$$

corresponding to the system of linear equations expressing the relation may be easily set up* and consequently the moments at the supports ($\mathbf{m}$) can be directly expressed as a function of the load ($\mathbf{w}$):

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{w} \tag{2}$$

For understanding and applying the method, the elementary knowledge of the matrix theory, readily accessible by engineers, is sufficient [1, 2, 3]. Chapter I. of this paper demonstrates the construction of matrix equations for rigidly supported, Chapter II. for elastically supported beams, Chapter III. the expressions derived by limits, applicable to beams of infinite length or having an infinite number of supports —, and finally Chapter IV. illustrates the numerical application of the method.

The author followed the way indicated by J. EGERVÁRY [4], endeavouring to present the advantages of the matrix calculus.

* A similar tendency may be found in B. H. RASMUSSEN's treatise (Bygningsstatiske Meddelser 21st year, No. 4, 1950) where the author determines the inverse matrix of Clapeyron's system of equations for various loads.

I

In the literature,* the CLAPEYRON equations defining the relation between the moments at the supports (m_k) and the load (w_k) on rigidly supported continuous beams with equal spans and of uniform cross section are frequently written in the form :

$$m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = w_k \tag{3}$$

The member on the right side of the above equation, w_k representing the ***load*** may be expressed by the following formulas — depending of the various load conditions :

a) Concentrated load in the spans next to the kth support (Fig. 1)**

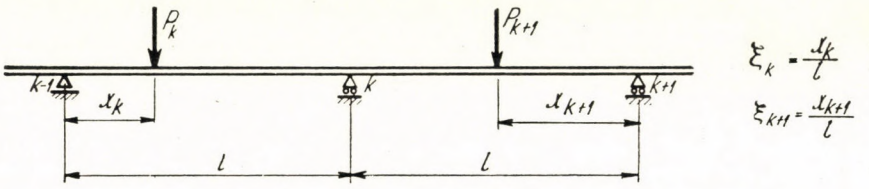


Fig. 1

$$w_k = -l\left[\sum_{(k)} P_k\,(\xi_k - \xi_k^3) + \sum_{(k+1)} P_{k+1}\,(\xi_{k+1} - \xi_{k+1}^3)\right] \tag{4}$$

b) Uniformly distributed load over sections of the spans next to the kth support (Fig. 2.) :

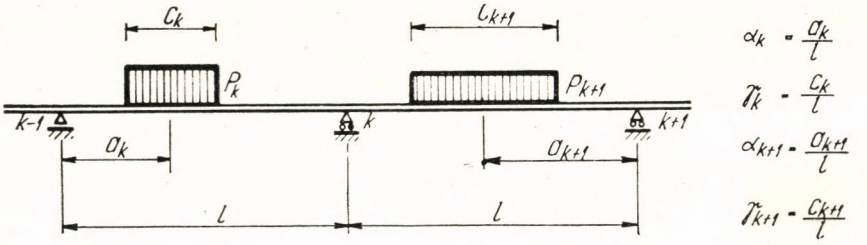


Fig. 2

$$w_k = -l^2\left[p_k\,\alpha_k\,\gamma_k\left(1 - \alpha_k^2 - \frac{\gamma_k^2}{4}\right) + p_{k+1}\,\alpha_{k+1}\,\gamma_{k+1}\left(1 - \alpha_{k+1}^2 - \frac{\gamma_{k+1}^2}{4}\right)\right]^{***} \tag{5}$$

* E. g. [5], p. 307.

** In Figs. 1 and 2, x_k and x_{k+1} are the distances of the points of attack of forces (P_k, P_{k+1}), in spans k and $k+1$ respectively, from supports $k-1$ and $k+1$ (in other words, nearest to k). Similar interpretation should be given to the distance (a_k, a_{k+1}) of distributed loads p_k and p_{k+1} from supports $k-1$ and $k+1$ respectively.

*** Relationship (5) implies (4) as well, as evidenced by values obtained after substitution of $P_k = l p_k\,\gamma_k$ and $P_{k+1} = l p_{k+1}\,\gamma_{k+1}$ and passing to limits $c_k \to 0$, $c_{k+1} \to 0$.

c) Settlement of supports k and of the adjoining ones (Fig. 3.) :

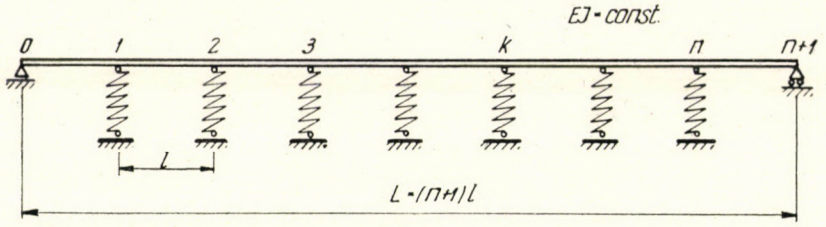


Fig. 3

$$w_k = -\frac{6EJ}{l^2}(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) \tag{6}$$

d) Non-uniform rise of temperature (difference between the temperature of the upper side of the beam and of its lower side) will be $\triangle t$, hence the difference of unit elongation of the upper and lower side will be $\alpha_1 \Delta_t$:

$$w_k = 6EJ\frac{\alpha_t \Delta t}{h} \tag{7}$$

(where α_t is the coefficient of thermal expansion of the beam's material, and h the depth of the beam ; J is the moment of inertia of the cross-section and E the modulus of elasticity of the beam's material).

On the basis of equation (3), the matrix equation including the unknown moments at the supports $(m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots, m_n)$ and loads $(w_1, w_2, \ldots, w_k, \ldots w_n)$ is

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{w} \tag{8}$$

where :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

From the expression under (8)

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{w} = \mathbf{B}\,\mathbf{w} \tag{9}$$

is obtained, and thus in awareness of matrix **B**, the moments at the supports can be explicitely expressed as functions of the load. The determination of matrix **B** should present no difficulty, in view of the fact that **B** may be expressed as a

function of the well-known continuant matrix C,* viz :

$$\mathbf{B} = \varphi(\mathbf{C}) = \mathbf{A}^{-1} = (6\mathbf{E} + \mathbf{C})^{-1} \tag{10}$$

or

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k)\mathbf{U}_k = \sum \frac{1}{6+\lambda_k}\mathbf{U}_k \tag{11}$$

respectively, where :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

The characteristic roots of matrix C :

$$\lambda_k = -4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)} \tag{12}$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

The characteristic vectors of matrix C: **

$$\mathbf{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\begin{bmatrix} \sin\dfrac{k\pi}{n+1} \\ \sin\dfrac{2k\pi}{n+k} \\ \vdots \\ \sin\dfrac{nk\pi}{n+1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_k^* = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\sin\frac{k\pi}{n+1}, \sin\frac{2k\pi}{n+1}, \dots, \sin\frac{nk\pi}{n+1}\right] \tag{13}$$

* E. g. see [3], pp. 456—457.

** It will be readily seen that

$$\mathbf{u}_i^* \cdot \mathbf{u}_k = \begin{cases} 0, & \text{where } i \neq k \\ 1, & \text{where } i = k \end{cases}$$

because

$$\mathbf{u}_k^* \cdot \mathbf{u}_k = \frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\sin\frac{ij\pi}{u+1}\sin\frac{kj\pi}{n+1} = \qquad ; [m = i-k]$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\left[\cos\frac{mj\pi}{n+1} - \cos\frac{(m+2k)j\pi}{n+1}\right]$$

and

$$\sum_{j=1}^{n}\cos jx = \frac{1}{2}\sin(n+1)x \cdot \operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \cos^2\frac{n+1}{2}x.$$

The projector matrices of matrix **C** are:

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k^* \; ; \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{U}_k = \mathbf{E} \right) . \tag{14}$$

Writing expressions (8) and (9) in scalar form:

$$\left.\begin{aligned} 4m_1 + m_2 &= w_1 \\ m_1 + 4m_2 + m_3 &= w_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ m_{n-1} + 4m_n &= w_n \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= b_{11}\, w_1 + b_{12}\, w_2 + \ldots + b_{1n}\, w_n \\ m_2 &= b_{21}\, w_1 + b_{22}\, w_2 + \ldots + b_{2n}\, w_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ m_n &= b_{n1}\, w_1 + b_{n2}\, w_2 + \ldots + b_{nn}\, w_n \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

where $\mathbf{b}_{ij}$ is equal to the element in the ith row and jth column of matrix **B**, and as such, can be also directly written, provided expressions (11)—(14) are known:

$$b_{ij} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \dfrac{ik\pi}{n+1} \cdot \sin \dfrac{jk\pi}{n+1}}{6 - 4 \sin^2 \dfrac{k\pi}{2(n+1)}} \tag{17}$$

Formula (17) may also be written in the form

$$b_{ij} = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos (i-j)\, \alpha_k - \cos (i+j)\, \alpha_k}{2 + \cos \alpha_k} \tag{18}$$

$$\left(\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1} \right) .$$

As far as we know, formulas (17) and (18) have not been quoted in literature in this form. However, in Chapter III of this treatise it is demonstrated that in the case of a girder considered as having an infinite number of spans, formula (18) includes the results published in the pertinent literature.*

* E. g. see [6], p. 144.

II

The continuous beam of equal spans and uniform cross section shown in Fig. 3 rests on rigid supports on either end, its intermediary supports permit, however, of elastic, vertical displacement proportionate to the reactions. Using the symbols employed in Chapter I, let **r** be the column matrix of the reactions (positive pointing upward), and **y** the column matrix of the sinking of supports (positive pointing downward), moreover let η be the sinking of supports arising from the unit reaction, viz :

$$\mathbf{y} = \eta \mathbf{r} \,. \tag{19}$$

Denoting the load deriving from *a)*, *b)*, and *d)* type loads in Chapter I above by $\mathbf{w}_e$, the load **w** to be introduced into equation (8) is obtained by adding load $\mathbf{w}_e$ and the load produced by deflection **y**. In other words, taking into consideration equation (6),

$$\mathbf{w} = -\frac{6EJ}{l^2}\,\mathbf{C}\,\mathbf{y} + \mathbf{w}_e \tag{20}$$

or, considering equation (19)

$$\mathbf{w} = -\eta\,\frac{6EJ}{l^2}\,\mathbf{C}\,\mathbf{r} + \mathbf{w}_e \tag{21}$$

Reaction **r** may, however, be expressed as the sum of the reactions $\mathbf{r}'$ and $\mathbf{r}''$; $\mathbf{r}'$ denotes the reaction force arising on two supports, assuming the beams to be supported at two ends, while $\mathbf{r}''$ denotes the reaction forces arisen from the multiple supported condition. Thus

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}'' \tag{22}$$

where :

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \\ \vdots \\ r_n' \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{r}'' = \begin{bmatrix} r_1'' \\ r_2'' \\ r_3'' \\ \vdots \\ r_n'' \end{bmatrix}; \quad r_k' = \sum_{(k)} P_k \xi_k + \sum_{(k+1)} P_{k+1} \xi_{k+1} \tag{23}$$

(see Fig. 1)

and

$$r_k'' = \frac{1}{l}\,(m_{k-1} - 2m_k + m_{k+1})$$

$$\mathbf{r}'' = \frac{1}{l}\,\mathbf{C}\,\mathbf{m} \tag{24}$$

Hence, taking into account formula (24) and substituting formula (22) into (21) on the basis of expression (8)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{w} = -\eta \frac{6EJ}{l^2} \mathbf{C} \left(\mathbf{r}' + \frac{1}{l} \mathbf{C} \cdot \mathbf{m} \right) + \mathbf{w}_e \tag{25}$$

can be written, wherefrom

$$\mathbf{m} = \left\{ \mathbf{A} + \eta \frac{6EJ}{l^3} \mathbf{C}^2 \right\}^{-1} \cdot \left\{ -\eta \frac{6EJ}{l^2} \mathbf{C}\mathbf{r}' + \mathbf{w}_e \right\} \tag{26}$$

or

$$\mathbf{m} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \tag{27}$$

is the matrix equation of elastically supported continuous beams. Matrix **B** in equation (27) depends solely on the rigidity of the given continuous beam and the elasticity of the supports, and in the light of Chapter I. above, it may be directly written up by calling to aid the canonic form of the known continuant matrix **C**, $\left(\text{introducing the notation } \zeta = \eta \frac{6EJ}{l^3}\right)$:

$$\mathbf{B} = \sum \frac{1}{6 + \lambda_k + \zeta \lambda_k^2} \mathbf{U}_k = \sum \varphi(\lambda_k) \mathbf{U}_k \tag{28}$$

Besides, the column matrix depending on **t** load

$$\mathbf{t} = l \left(-\zeta \mathbf{C}\mathbf{r}' + \frac{1}{l} \mathbf{w}_e \right) \tag{29}$$

can be determined at the given loading.

It will be readily seen that equation (27) includes equation (9) in the special case where $\zeta = 0$ (the case of rigid supports).

Note : The advantages of the above described calculation of rigidly or elastically supported beams are particularly obvious where the $\mathbf{U}_k$ projector matrices of the **C** continuant matrices of various orders are available in tabulated form. In that case, the calculation of matrix **B** is reduced to the determination of the values of function $\varphi(\lambda_k)$ and to the addition of the projector matrices multiplied by the scalar.

In the case of the beam of an infinite number of equal spans, the expression in formula (18) of the b_{ij} coefficients on the right side of the simultaneous equations (16), after introduction the notation $\Delta\alpha = \frac{\pi}{n+1}$ and $\alpha_k = k \cdot \Delta\alpha$

passes over into

$$b_{ij} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\alpha\to 0}} \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\cos(i-j)\alpha_k - \cos(i+j)\alpha_k}{2+\cos\alpha_k} \Delta\alpha = \tag{30}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(i-j)\alpha - \cos(i+j)\alpha}{1+\frac{1}{2}\cos\alpha} d\alpha$$

definite integral, the value of which is*

$$b_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[(\sqrt{3}-2)^{i-j} - (\sqrt{3}-2)^{i+j} \right] . \tag{31}$$

Furthermore, where $i = j$,

$$b_{jj} = \frac{1-(\sqrt{3}-2)^{2i}}{2\sqrt{3}} \tag{32}$$

and is j „large enough," in other words $(\sqrt{3}-2)^{2j} \to 0$,

then

$$b_{jj} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{and} \quad b_{j,j\pm m} = \frac{(\sqrt{3}-2)^m}{2\sqrt{3}} \tag{33}$$

The equations against (33) express the relation demonstrated by another way in the literature, namely that the relation of the moments at the supports pertaining to an unloaded span of a beam having an infinite number of equal spans is equal to $(\sqrt{3}-2)$** Based on formulas (31)—(33), the moment at the kth intermediary support of a beam assumed to have an infinite number of equal spans may be calculated by formula

$$m_k = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[w_k - \frac{w_{k-1}+w_{k+1}}{\sqrt{3}+2} + \frac{w_{k-2}+w_{k+2}}{(\sqrt{3}+2)^2} + \right. \tag{34}$$

$$\left. + \ldots + (-1)^n \frac{w_{k-n}+w_{k+n}}{(\sqrt{3}+2)^n} \right] .$$

* E. g. see [7] p. 181, formula No 3451/1.
** E. g. see [6] pp. 142—145.

III

Let the following two numerical examples serve for illustrating the above. For easy comparison and checking, the numerical data have been taken from the works of F. Stüssi [6] and L. Palotás [8].

a) Let us determine the moments at the supports of the continuous beam shown in Fig. 4. at a given load. To calculate matrix **B**, the characteristic values

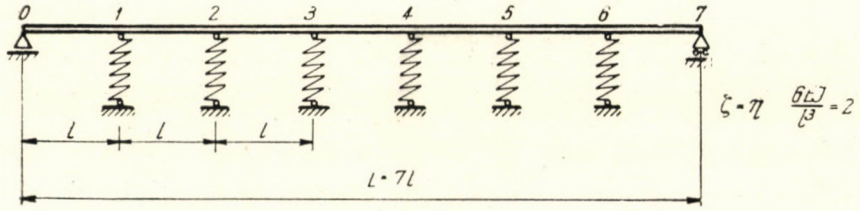


Fig. 4

and vectors of continuant matrix **C** of sixth order will be necessary. Taking into account expressions (12) and (13), and introducing the

$$\text{notations} \begin{cases} a = \sin \dfrac{\pi}{7} = 0{,}4338838 \\ b = \sin \dfrac{2\pi}{7} = 0{,}7818315 \\ c = \sin \dfrac{3\pi}{7} = 0{,}9749279 \end{cases}$$

these values will be :

$$\lambda_1 = -0{,}1980624 \qquad \lambda_4 = -2{,}4450418$$
$$\lambda_2 = -0{,}7530204 \qquad \lambda_5 = -3{,}2469796$$
$$\lambda_3 = -1{,}5549582 \qquad \lambda_6 = -3{,}8019376$$

$$\mathbf{u}_1 = \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \\ -a \\ -c \\ -b \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{u}_3 = \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{bmatrix} c \\ a \\ -b \\ -b \\ a \\ c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_4 = \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{bmatrix} c \\ -a \\ -b \\ b \\ a \\ -c \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{u}_5 = \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{bmatrix} b \\ -c \\ a \\ a \\ -c \\ b \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{u}_6 = \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{bmatrix} a \\ -b \\ c \\ -c \\ b \\ -a \end{bmatrix}$$

Moreover, where the value of $\zeta = 2$, from (28)

$$\varphi(\lambda_k) = \frac{1}{6 + \lambda_k + 2\lambda_k^2}$$

k	1	2	3	4	5	6
$\varphi(\lambda_k)$	0,17003	0,1567	0,1077	0,0645	0,0419	0,0321

$$\mathbf{B} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 9{,}234 & 4{,}359 & 0{,}618 & -0{,}388 & -0{,}286 & -0{,}087 \\ 4{,}359 & 9{,}852 & 3{,}970 & 0{,}333 & -0{,}476 & -0{,}286 \\ 0{,}618 & 3{,}970 & 9{,}567 & 3{,}883 & 0{,}333 & -0{,}388 \\ -0{,}388 & 0{,}333 & 3{,}883 & 9{,}567 & 3{,}970 & 0{,}618 \\ -0{,}286 & -0{,}476 & 0{,}333 & 3{,}970 & 9{,}852 & 4{,}359 \\ -0{,}087 & -0{,}286 & -0{,}388 & 0{,}618 & 4{,}359 & 9{,}234 \end{bmatrix}.$$

For example, let g = constant uniformly distributed load over the entire length of the beam be

$$r'_k = gl \qquad w_{ek} = -\frac{gl^2}{2}.$$

Introducing the notation

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and taking into account that

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{c}=\begin{bmatrix}-2&1&0&0&0&0\\1&-2&1&0&0&0\\0&1&-2&1&0&0\\0&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&-2&1\\0&0&0&0&1&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

on the base of formula (29)

$$\mathbf{t}=\frac{g\,l^2}{2}\cdot\begin{bmatrix}+3\\-1\\-1\\-1\\-1\\+3\end{bmatrix}$$

hence, from equation (27)

$$\mathbf{m}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{t}=\frac{gl^2}{8}\cdot\begin{bmatrix}+0{,}9254\\-0{,}0584\\-0{,}6825\\-0{,}6825\\-0{,}0584\\+0{,}9254\end{bmatrix}$$

which is in agreement with the result on page 162 of [6].

The influence lines of the moments at the supports may be simply and rapidly plotted by determining first the ordinates at the points of support on the base of **t**'s expression according to formula (29). Where the load is at the the kth support, $w_{e_k}=0$ and $r'_k=P$, hence in that case $\mathbf{t}=-\zeta l P\mathbf{C}.\mathbf{e}_k$, where $\mathbf{e}_k$ is a column matrix, the kth element of which is 1 and the others zero. According to this, column matrix $\mathbf{C}.\mathbf{e}_k$ is equal to the kth column of matrix **C**. It follows indirectly herefrom that each row of square matrix

$$\frac{1}{P}\mathbf{M}=-\zeta l\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$$

yields the ordinates of the points of support of the influence lines pertaining to the various moments at the supports: (in the case where $\zeta = 2$).

$$\frac{1}{P}\mathbf{M} = l \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0,282} & \mathbf{-0,023} & \mathbf{-0,055} & \mathbf{-0,022} & \mathbf{-0,002} & \mathbf{+0,002} \\ -0,023 & \mathbf{-0,227} & \mathbf{-0,045} & \mathbf{-0,057} & \mathbf{-0,021} & -0,002 \\ -0,055 & -0,045 & \mathbf{-0,226} & \mathbf{-0,043} & -0,057 & -0,022 \\ -0,022 & -0,057 & -0,043 & -0,226 & -0,045 & -0,055 \\ -0,002 & -0,021 & -0,057 & -0,045 & -0,227 & -0,023 \\ +0,002 & -0,002 & -0,022 & -0,055 & -0,023 & +0,282 \end{bmatrix} \tag{35}$$

(Matrix **M** being centro-symmetrical, it is enough to calculate the elements printed in **heavy** type.)

In view of the fact that under the influence of the first member on the right side of expression (29) **t** varies linearly, if the ordinates of the diagrams of moments plotted on the basis of (35) are connected by a straight line, it will only be necessary to add the correction member corresponding to $\mathbf{w}_e$ to the intermediary ordinates corresponding to the connecting straight line. The correction members may be readily determined, for the column matrix of adjustment $\Delta\mathbf{t}$ pertaining to a given position of P consists invariably of only two elements.

In the light of the above, let us e. g. plot the diagrams of the moment at the third support. (Fig. 5.)

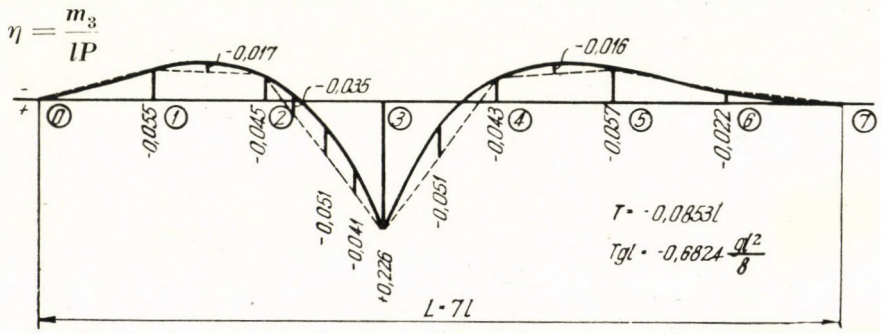


Fig. 5

b) Let us determine the value of the moments at the supports in the case of continuous beams where the extreme supports are not rigid, but a vertical dislocation of the extent of $\eta_1, \neq 0$ per unit of support reaction arises on them. The elasticity of the extreme supports and their vertical elastic dislocation respectively can be estimated by OSTENFELD's method — comparison with the

standard girder which has rigid end supports. Accordingly, the unknown displacements $x_1 = y_0$, $x_2 = y_{n+1}$ can be determined from equations of condition

$$\begin{aligned} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + a_{10} &= 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + a_{20} &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

where

a_{10}, a_{20} mean the reactions arising on the extreme supports under the effect of a given load;

a_{11}, a_{12} mean the reactions produced on the left side support by unit dislocation corresponding to x_1 and x_2 displacements of unknown extent respectively;

a_{21}, a_{22} mean the same reactions as above, arising on the extreme right side support.

These quantities may be determined with the aid of the moments calculated on the base of equations

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{(0)} &= \mathbf{B}\,\mathbf{t}_{(0)} \\ \mathbf{m}_{(1)} &= \mathbf{B}\,\mathbf{t}_{(1)} \\ \mathbf{m}_{(2)} &= \mathbf{B}\,\mathbf{t}_{(2)} \end{aligned} \tag{37}$$

taking into account that

$\mathbf{m}_{(0)}$ = the column matrix of the moments at the supports caused by the given load

$\mathbf{m}_{(1)}$, $\mathbf{m}_{(2)}$ = the column matrix of moments produced by unit displacement of the supports. In view of the prevailing symmetry, it is enough to determine either $\mathbf{m}_{(1)}$ or $\mathbf{m}_{(2)}$.

From equations of condition (36)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{-a_{11}a_{10} + a_{12}a_{20}}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \\ x_2 &= \frac{-a_{11}a_{20} + a_{12}a_{20}}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$x_1 = y_0$, $x_2 = y_{n+1}$ displacements of supports can be obtained by calculation, and the column matrix of the moments at the supports can be written in the form

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{(0)} + x_1\,\mathbf{m}_{(1)} + x_2\,\mathbf{m}_{(2)} \tag{39}$$

The above method yields a formula independent of the number of supports. which affects merely the determination of matrix **B** and column matrix of load **t**,

For simplified numerical calculation and for clearness, in the following the determination of the equilibrium of forces acting on a single crossbeam of a single-span bridge and four main girders will be demonstrated. The example was drawn from L. PALOTÁS' treatise on lattice trusses [8]. ($l = 2{,}5$ m, P = 1 t load on the second support.) (Fig. 6)

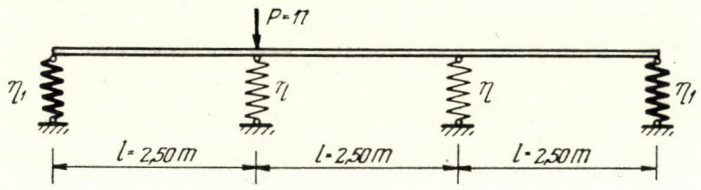


Fig. 6

Data :

Span of the main girders : $L = 18{,}00$ m
Moment of inertia of the side main girders : $Js = 0{,}298$ m^4
Moment of inertia of the intermediary main girders : $J_f = 0{,}2065$ m^4
Moment of inertia of the cross beam : $J_{kt} = 0{,}0615$ m^4

$$\zeta = \eta \frac{6EJ_{kt}}{l^3} = \frac{L^3}{48EJ_f} \frac{6EJ_{kt}}{l^3} = \left(\frac{L}{l}\right)^3 \frac{J_{kt}}{8J_f} = 13{,}9$$

$$\frac{J_{\prime}}{J_s} = 0{,}693 = \frac{\eta_1}{\eta}$$

Matrix B is determined in the following manner :

$$\lambda_1 = -4 \sin^2 \frac{\pi}{6} = -1 \qquad \mathbf{u}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -4 \sin^2 \frac{2\pi}{6} = -3$$

$$\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda_k) = \frac{1}{6 + \lambda_k + \zeta \lambda_k^2}$$

$$\varphi(\lambda_1) = 0{,}053\,; \quad \varphi(\lambda_2) = 0{,}0078$$

$$\mathbf{B} = 0{,}053 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} + 0{,}0078 \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix}3{,}04 & 2{,}26\\ 2{,}26 & 3{,}04\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}_{(0)} = \mathbf{B}\mathbf{t}_{(0)}$$

$$\frac{1}{l}\mathbf{t}_{(0)} = -\zeta\mathbf{C}\mathbf{r}'_{(0)} + \frac{1}{l}\mathbf{w}_e\,;\ (\mathbf{w}_e = 0)\,;\ \mathbf{r}'_{(0)} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix};\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix}-2 & +1\\ +1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{l}\mathbf{t}_{(0)} = 13{,}9\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}_{(0)} = \frac{13{,}9}{100}\begin{bmatrix}3{,}04 & 2{,}26\\ 2{,}26 & 3{,}04\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix} l = 0{,}139 \cdot \begin{bmatrix}3{,}82\\ 1{,}48\end{bmatrix} \cdot l \quad (tm)$$

Reactions arising on the end supports :

$$a_{10} = 0{,}139 \cdot 3{,}82 = 0{,}54\ (t)\,;\ a_{20} = 0{,}139 \cdot 1{,}48 = 0{,}20\ (t)$$

Moments at the supports arising from unit displacement x_1, x_2

$$\mathbf{m}_{(1)} = \mathbf{B}\,\mathbf{t}_{(1)}$$

$$\frac{1}{l}\mathbf{t}_{(1)} = -\zeta\,\mathbf{C}\,\mathbf{r}'_{(1)} + \frac{1}{l}\mathbf{w}_e \qquad (\mathbf{r}'_{(1)} = 0) \qquad \frac{1}{l}\mathbf{w}_e = \frac{\zeta}{\eta}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}_{(1)} = \frac{1}{100}\,\frac{\zeta}{\eta}\begin{bmatrix}3{,}04 & 2{,}26\\ 2{,}26 & 3{,}04\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix} \cdot l = \frac{1}{100}\,\frac{\zeta}{\eta}\begin{bmatrix}-3{,}04\\ -2{,}26\end{bmatrix} l =$$

$$= \frac{1}{\eta_1}\,0{,}139 \cdot 0{,}693\begin{bmatrix}-3{,}04\\ -2{,}26\end{bmatrix} l\,.$$

Reactions arising at the end supports

$$a_{11} = -\frac{1}{\eta_1} - \frac{3{,}04}{100}\,\frac{\zeta}{\eta} = -\frac{1}{\eta_1}\left(1 + \frac{3{,}04 \cdot 0{,}693}{100}\,\zeta\right) = -\frac{1}{\eta_1}\,1{,}29$$

$$a_{12} = -\frac{1}{\eta_1}\,0{,}22$$

$$x_1 = 0{,}405\,\eta_1 \qquad x_2 = 0{,}086\,\eta_1$$

Computation of final moments:

$$\mathbf{m} = 0{,}139 \cdot l \left\{ \begin{bmatrix} 3{,}82 \\ 1{,}48 \end{bmatrix} + 0{,}693 \cdot 0{,}405 \begin{bmatrix} -3{,}04 \\ -2{,}26 \end{bmatrix} + 0{,}693 \cdot 0{,}086 \begin{bmatrix} -2{,}26 \\ -3{,}04 \end{bmatrix} \right\}$$

$$l = 2{,}50\, m\,; \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0{,}985 \\ 0{,}230 \end{bmatrix} (tm)\ .$$

(Numerical values — calculated with a slide-rule — are in good agreement with the results of the numerical example on page 332 of [8].)

REFERENCES

1. AITKEN, A. C.: Determinants and matrices. (Edinburgh and London, 1942.)
2. PALOTÁS, L.: Civil Engineer's Handbook, Vol. I. II/E. Matrix Calculus (In Hungarian) pp. 85—92. (Technical Publishing House, Budapest, 1955.)
3. EGERVÁRY, J.: On the canonical representation of matrix functions and some applications of it. (Hungarian) (Bulletin of the Department III. for Mathematical and Physical Sciences of the Hungarian Academy of Sciences, 3. 1953. pp. 417—458.)
4. EGERVÁRY, J.: Application of the Matrix Theory to the Calculation of Chain Bridges (In Hungarian) (Bulletin of the Institute of Applied Mathematics of the Hungarian Academy of Sciences, Vol. III., 1954, pp. 9—23.)
5. SCHLEICHER, F.: Taschenbuch für Bauingenieure (Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1949.)
6. STÜSSI, F.: Baustatik II. Band (Verlag Birkhaeuser, Basel, 1954)
7. *Рыжик, И. М. и Традштейн, И. С.:* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (Гос. издат. тех.-теор. лит. Москва-Ленинград 1951)
8. PALOTÁS, L.: Calculation of Lattice Girders (Hungarian) (Publishing House for Communications, Budapest, 1953.)

SUMMARY

The determination of redundant constraints of statically indeterminate bar and beam structures (X_i) — supposing that in the course of the calculation of the unknowns the principle of superposition can be applied — is achieved in general with the aid of the linear system of n equations of the form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = w_i \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ formed of the coefficients a_{ij} of the system of equations is quadratic and symmetrical. The solution of the system of equations can be written by n formulas of the form $X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} w_j$. Matrix $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ that can be composed of coefficients b_{ij} on the right side of the solution formulas is also quadratic and symmetrical and is equal to the reciprocal of matrix $\mathbf{A}$: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. The paper demonstrates that the matrix $\mathbf{A}$ of the linear system of equations describing the connection between unknown support moments and loads of rigidly or elastically supported continuous beams of equal spans, and of constant cross sections, can be written as a function of a well known continuant matrix $\mathbf{C}$, and thus the determination of the reciprocal matrix $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ is easily executable with the aid of the canonic form of matrix $\mathbf{C}$. In case of rigid supports the elements of matrix $\mathbf{B}$ are also directly determinable by the formula

$$b_{ij} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{ik\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{jk\pi}{n+1}}{6 - 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}}$$

In case of rigidly supported continuous beams that may be considered as having an „infinite number" of spans, the elements of matrix **B** are given by the formula

$$b_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{3}} [(\sqrt{3} - 2)^{i-j} - (\sqrt{3} - 2)^{i+j}]$$

Here $(b_{ij} = b_{ji}; \geqq j)$

Advantages of the method are demonstrated on numerical examples, such as the design of the moment influence diagrams of an elastically supported eightspan girder and the calculation of the support moments of the cross girder of a four-girder bridge.

ANWENDUNG DER MATRIZENRECHNUNG ZUR BERECHNUNG DURCHLAUFEN DER TRÄGER

J. SZABÓ

ZUSAMMENFASSUNG

Die als unbekannt gewählten Verbindungskräfte (X_i) statisch unbestimmter Stab- und Balkenkonstruktionen lassen sich im allgemeinen — vorausgesetzt dass der Grundsatz der Superposition im Laufe der Berechnung der Unbekannten geltend gemacht werden kann — mit Hilfe eines linearen Systems von n Gleichungen von der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = w_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots ; n).$$

bestimmen. Die aus den Koeffizienten a_{ij} des Gleichungssystems gebildete Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ist quadratisch und symmetrisch. Die Lösung des Gleichungssystems lässt sich mit Hilfe von Formeln von der Form $X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} w_j$ anschreiben. Die aus den auf der rechten Seite der Lösungsgleichungen vorkommenden Koeffizienten b_{ij} bildbare Matrix $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ist ebenfalls quadratisch und symmetrisch und ist gleich der Reziproken der Matrix $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Es wird bewiesen, dass die Matrix **A** des die Beziehung zwischen den unbekannten Stützenmomenten und der Belastung von steif oder elastisch gestützten durchlaufenden Balkenträgern gleicher Stützweite und unveränderlichen Querschnittes beschreibenden linearen Gleichungssystems als Funktion einer wohlbekannten kontinuanten Matrix **C** geschrieben werden kann. Somit lässt sich die Reziproke von **A**, die Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, mit Hilfe der kanonischen Form der Matrix **C** leicht bestimmen. Für steife Auflager sind die Elemente der Matrix **B** mit der Formel

$$b_{ij} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{ik\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{jk\pi}{n+1}}{6 - 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}}$$

auch unmittelbar ermittelbar. Für steif aufliegende Durchlaufträger, die als „unendlich viele" Öffnungen besitzend betrachtet werden können, werden die Elemente der Matrix **B** aus der Formel

$$b_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(\sqrt{3} - 2)^{i-j} - (\sqrt{3} - 3)^{i+j}]$$

erhalten $(b_{ij} = b_{ji}, \; i \geqq j)$

Vorteile des Verfahrens werden zahlenmässig an dem Entwurf der Momenteneinflusslinien eines elastisch aufliegenden Trägers mit 8 Öffnungen und an der Berechnung der Stützenmomente des Querträgers einer Brücke mit 4 Hauptträgern vorgeführt.

SUR UNE APPLICATION DU CALCUL MATRICIL DANS L'ANALYSE DES POUTRES CONTINUES

J. SZABÓ

RÉSUMÉ

La détermination des forces de liaison (X_i), prises pour inconnues dans l'analyse de constructions hyperstatiques, peut se faire — pourvu qu'au cours du calcul des inconnues le principe de la superposition soit applicable — à l'aide du système d'équations linéaires composé de n équations de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = w_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

La matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ formée des coefficients a_{ij} du système d'équations est quadratique et symétrique. La solution du système d'équatios peut être écrite en n formules de la forme

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} w_{ij}$$

La matrice $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ qu'on peut former des coefficients b_{ij} figurant sur le côté droit des formules de solution est aussi quadratique et symétrique, et elle est égale à la réciproque de la matrice $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. L'étude fait la preuve de ce que la matrice $\mathbf{A}$ du système d'équations linéaires exprimant le rapport entre les moments inconnus sur les appuis et la charge de la poutre continue sur appuis rigides ou élastiques peut être écrite comme la fonction d'une matrice continuante $\mathbf{C}$ bien connue, ainsi que la détermination de la réciproque de la matrice $\mathbf{A}$, c'est-à-dire de la matrice $B = \mathbf{A}^{-1}$ se fera facilement à l'aide de la forme canonique de la matrice $\mathbf{C}$. En cas d'appuis rigides les éléments de la matrice $\mathbf{B}$ peuvent être déterminés directement aussi par la formule

$$b_{ij} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \dfrac{ik\pi}{n+1} \cdot \sin \dfrac{jk\pi}{n+1}}{6 - 4 \sin^2 \dfrac{k\pi}{2(n+1)}}$$

En cas des poutres continues sur appuis rigides, dont le nombre de travées peut être pris pour „infini", les éléments de la matrice $\mathbf{B}$ sont obtenues par la formule

$$b_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{3}} [(\sqrt{3} - 2)^{i-j} - (\sqrt{3} - 2)^{i+j}]$$

où $(b_{ij} = b_{ji} ; \; i \geq j)$.

Les avantages de la méthode sont présentés par la construction des lignes d'influence des moments de 8 travées continues sur appuis rigides et par le calcul des moments sur appuis d'une pièce de pont (entretoise) d'un pont à deux poutres principales.

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Я. САБО

РЕЗЮМЕ

Определение сил связи (X_i), статически неопределенных конструкций из стержней и балок, принятых в качестве неизвестных, — предполагая, что при вычислении неизвестных можно применить принцип суперпозиции, — можно выполнить при помощи системы линейных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = w_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

состоящей из n уравнений. Матрица, составленная из коэффициентов a_{ij} системы уравнений вида $A = [a_{ij}]$, является квадратичной и симметричной. Решение систем уравнений может быть выражено при помощи n формул вида

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j.$$

Матрица вида $B = [b_{ij}]$, получающаяся из коэффициентов b_{ij}, находящихся в правой части формул, является также квадратичным и симметричным и равна обратной дроби матрицы A, то есть $B = A^{-1}$. В работе показано, что матрицу A системы линейных уравнений, описывающих зависимость между опорными моментами и нагрузкой неразрезных балок с равными пролетами и постоянным сечением, на жестких или упругих опорах, можно записать в качестве функции хорошо известной матрицы с континуумом C и таким образом определение обратной дроби матрицы A, т. е. определение матрицы $B = A^{-1}$ можно выполнить при помощи канонического вида матрицы C. В случае жестких опор элементы матрицы B можно определить также непосредственно при помощи формулы

$$b_{ij} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{ik\pi}{n+1} \cdot \sin \frac{jk\pi}{n+1}}{6 - 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}}.$$

В случае же неразрезных балок с жесткими опорами, которые можно принять в качестве балок с «бесконечно большим числом» пролетов, элементы матрицы B получаются по формуле

$$b_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{3}} [(\sqrt{3} - 2)^{i-j} - (\sqrt{3} - 2)^{i+j}],$$

т. е. ($b_{ij} = b_{ji}$; $i \geqq j$). Преимущество предлагаемого метода демонстрируется автором на примере построения эпюры момента неразрезной балки на 8 упругих опорах и расчета опорных моментов поперечной балки моста с 4-мя главными балками.

STRESS ANALYSIS OF BLOCK STEPS WITH GROOVED JOINTS

Prof. P. CSONKA

D. OF ENG. SC.

DEPARTEMENT FOR STRUCTURAL ANALYSIS, UNIVERSITY OF BUILDING SCIENCES AND COMMUNICATIONS, BUDAPEST

[Manuscript received 21st February, 1956]

1. Introduction

This paper deals with the calculation of block steps of straight, supported stairs, where the steps are connected together with grooved joints. (Fig. 1.) Structural engineering practice considers such steps as beams simply supported at both ends and neglects the working together of steps joining one another. This method of calculation takes as point of departure too disadvantageous assumptions, therefore the elaboration of a calculatory method is desired, which takes account of the unquestionable concerted action of the steps.

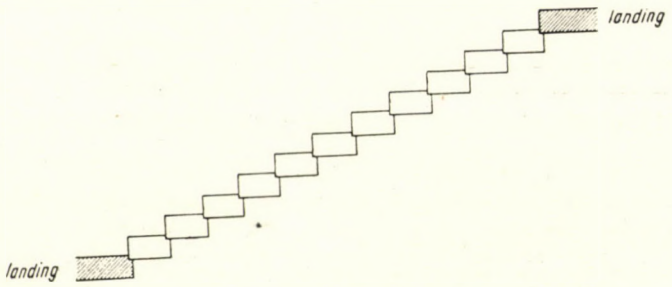


Fig. 1. Cut of a flight of stairs consisting of block steps with grooved joints

Previously to this paper F. CHMELKA dealt with the play of forces on straight flights of stairs [1], but his paper did not relate to supported but to hanging steps. He treates steps connected with each other without any grooves, while the present paper deals with the case of stairsteps connected by grooved joints. The statical behaviour of such steps is very similar to that of structures consisting of parallel beams of similar shape, placed close together, and joined chainlike with hinges [2].

2. Assumptions. Specifications

Taking account of the relatively small dimensions of grooves and nosings of the profile, the steps of the flight of stairs examined are assumed without appreciable error of calculation to be prisms of uniform size and of rectangular

cross-section. The steps are assumed to be freely supported on their ends, that is, are free to rotate about the theoretical sloping line supporting the flight of stairs, but the cross-sections over the supports are not free to rotate about the axis line of the step.

Grooves of the steps are replaced in the calculations by an axial straight line, the *shoulder line*, located antimetrically relatively to the axis of the step. The steps are assumed to be in contact only along these lines. Shoulder lines are considered frictionless hinges around which contiguous steps can freely rotate relatively to each another (Fig. 2.) Similar linkage is supposed at the juncture of the top and bottom steps with the landings. Landing slabs are assumed to be rigid structures not exposed to settlement.

The material of the steps is assumed to be perfectly elastic. Furthermore, the cross-sectional shape of the steps is supposed to suffer no deformation

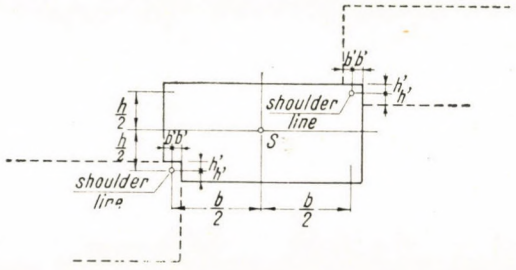


Fig. 2. Indication of shoulder lines

under load, and the state of restraint of the profile versus warping is supposed to exert no appreciable influence on the play of forces acting on the structure.

3. Basic equation of the problem

Steps are numbered from 1 to n from bottom upward. The bottom shoulder line of the i-th step is numbered i-1, its top shoulder line i. (Fig. 3.)

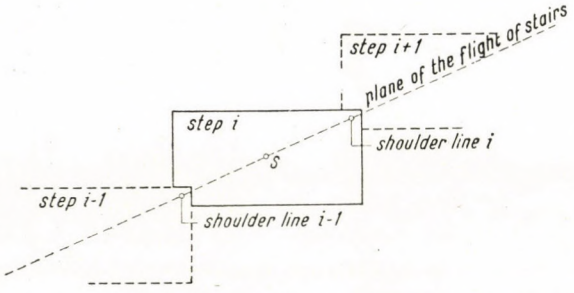


Fig. 3. Nomenclature of symbols

Steps are stressed in flexure normal to the plane of the flight and in torsion. No flexure is possible parallel to the flight of stairs, for because of the

assumed rigidity of the landings the points of the shoulder lines cannot suffer displacement parallel to the plane of the flight. Since according to these, bending forces parallel to the flight plane are in advance balanced, it is sufficient to consider only loads and shoulder forces normal to the plane of flexure, and torsional couples acting on the steps.

In the course of investigations bending forces normal to the plane of the flight of stairs as well as torsional forces are replaced by forces acting on the shoulder lines of the steps, normal to the plane of the flight (Fig. 4.). In the case of the i-th step the unit value of these loads, referred to unit length of the shoulder lines are expressed by functions

$$a_i = a_i(x), \qquad b_i = b_i(x),$$

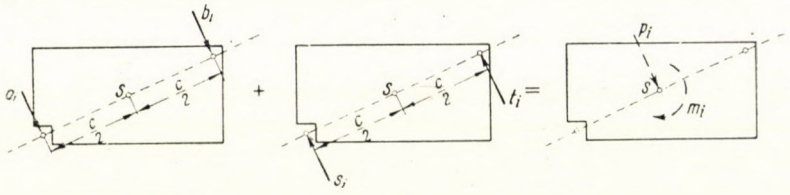


Fig. 4. Unit values of flexural and torsional forces

while the unit values of reactions referred to unit length of the shoulder lines are described by

$$s_i = s_i(x), \qquad t_i = t_i(x).$$

With these notations the unit values of forces causing flexure normal to the plane of the flight of stairs and the torsional forces can be expressed thus :

$$p_i = a_i + b_i - s_i - t_i, \tag{1}$$

$$m_i = \frac{c}{2}(-a_i + b_i + s_i - t_i). \tag{2}$$

The shoulder lines of the i-th step suffer under the load displacement normal to the plane of the flight (Fig. 5.) :

$$\zeta_{i-1} = \zeta_{i+1}(x), \quad \zeta_i = \zeta_i(x).$$

Consequently points located on the axis line of the steps suffer translation

$$w_i = \frac{1}{2}(\zeta_i + \zeta_{i-1}), \tag{3}$$

and the cross-sections rotate about the axis of the step through angle

$$\varphi_i = \frac{1}{c}(\zeta_i - \zeta_{i-1}) . \tag{4}$$

Between the functions of displacement $w_i = w_i(x)$ and $\varphi_i = \varphi_i(x)$ of the i-th step, and the functions of the loading of the step $p_i = p_i(x)$ and $m_i = m_i(x)$

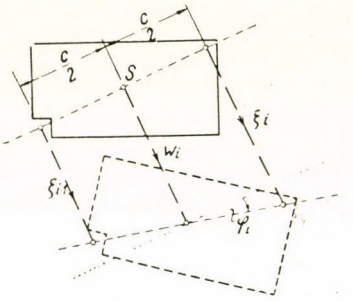


Fig. 5. Rotation and translation of the cross-section of the step

subsist the following simple relations known from the Strength of Materials :

$$p_i = EJ\, w_i'' , \tag{5}$$

$$m_i = - GJ_0\, \varphi_i'' . \tag{6}$$

In these formulas EJ signifies the flexural rigidity of the step normal to the plane of the flight, and GJ_0 is its torsional rigidity toward twisting in the plane normal to the axis of the step.

With consideration of (1) and (2) the former formulas may be written also as follows :

$$a_i + b_i - s_i - t_i = EJ\, w_i'' ,$$

$$- a_i + b_i + s_i - t_i = - \frac{2GJ_0}{c}\, \varphi_i'' ,$$

From these two equations

$$s_i = a_i - \frac{EJ}{2}\, w_i''' - \frac{GJ_0}{c}\, \varphi_i'' , \tag{7a}$$

$$t_i = b_i - \frac{EJ}{2}\, w_i''' + \frac{GJ_0}{c}\, \varphi_i'' . \tag{7b}$$

Similar formulas can be set up for shoulder forces of the i + 1-th step (Fig. 6.) :

$$s_{i+1} = a_{i+1} - \frac{EJ}{2} w_{i+1}''' - \frac{GJ_0}{c} \varphi_{i+1}'', \tag{7c}$$

$$t_{i+1} = b_{i+1} - \frac{EJ}{2} w_{i+1}''' + \frac{GJ_0}{c} \varphi_{i+1}''. \tag{7d}$$

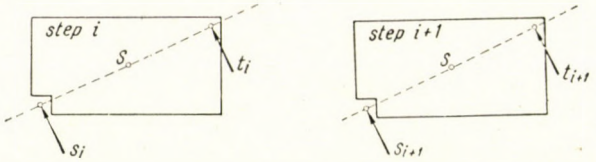


Fig. 6. Shoulder forces of the i-th and of the $i + 1$-th step

Of course, forces t_i and s_{i+1} acting on the i-th shoulder must balance each other, that is the condition

$$t_i + s_{i+1} = 0$$

has to be met. This condition may be written after substitution of values in (7b) and (7c) in the following form :

$$\frac{EJ}{2} (w_i''' + w_{i+1}''') + \frac{GJ_0}{c} (-\varphi_i'' + \varphi_{i+1}'') = a_i + b_i .$$

From this in consideration of (3) and (4) the following relation is obtained :

$$\frac{EJ}{4} (\zeta_{i+1}'''' + 2\zeta_i'''' + \zeta_{i-1}'''') + \frac{GJ_0}{c^2} (\zeta''_{i+1} - 2\zeta_i'' + \zeta''_{i-1}) = q_i . \tag{8}$$

In this $q_i = q_i(x)$ means the specific value of the load on the common shoulder line of the i-th and of the $i + 1$-th steps

$$q_i = a_i + b_i .$$

Equation (8), the *basic equation* of the problem has to be satisfied for each intermediate shoulder line.

4. General solution of the problem

For the solution of the problem equation (8) has to be put down for each intermediate shoulder line, and the system of equations thus obtained has to be solved for the unknown displacements ζ_i in consideration of initial conditions.

Apart from some especially simple cases the solution cannot be expressed in a closed form. Therefore the load functions $q_i = q_i(x)$ are expanded in a Fourier series and the sought solution is composed of the part solutions corresponding to the individual Fourier members.

If the origin of coordinates x is placed in the cross section over one support and the positive x axis is pointed against the cross-section over the other, ordinates of the cross-sections over supports are $x = 0$ and $x = l$. In this system of coordinates the load functions $q_i = q_i(x)$ are expanded into Fourier series, whose optional m-th member

$$q_{im} = Q_{im} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad Q_{im} = \text{const.} \tag{9}$$

The displacement functions $\zeta_i = \zeta_i(x)$ are expanded into series of similar structure. The m-th member of these series :

$$\zeta_{im} = Z_{im} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad Z_{im} = \text{const.} \tag{10}$$

By this appears that displacement funtions ζ_{im} comply individually with initial conditions relative to the cross sections over supports, for

$$\zeta_{im}(0) = \zeta_{im}(l) = 0,$$

$$\zeta''_{im}(0) = \zeta''_{im}(l) = 0.$$

Now it has to be assured only that displacement functions under (10) comply with basic equation (8) of the problem too. For this formulas (9) and (10) have to be substituted into basic equation (8) of the problem. Thereby after some arrangement and after the simplification by the trigonometric member the following condition of validity of the equations is obtained :

$$(Z_{i+1,\,m} + 2Z_{i,\,m} + Z_{i-1,\,m}) - \frac{4GJ_0\,l^2}{m^2\,\pi^2\,c^2\,EJ}(Z_{i+1,\,m} - 2Z_{i,\,m} + Z_{i-1,\,m}) = \frac{4Q_{im}\,l^4}{m^4\pi^4 EJ}.$$

By introducing the notations

$$k_m = \frac{2}{m\pi c}\left(\frac{GJ_0}{EJ}\right)^{1/2} > 0, \tag{11}$$

$$Z_{im} = \frac{Q_{im}\,l^4}{m^4\,\pi^4\,EJ}, \tag{12}$$

the latter may also be written thus :

$$(1 - k_m^2)\, Z_{i+1,\,m} + 2\,(1 + k_m^2)\, Z_{i,\,m} + (1 - k_m^2)\, Z_{i-1,\,m} = 4 Z_{im}^{*} \,. \qquad (13)$$

In this equation Z_{im}^{*} is nothing but the maximum deflection of the axis line of the step loaded as in Fig. 7. by

$$q_{im}^{*} = q_{im}$$

made independent of its neighbours and restrained against sidesway. Value k_m figuring in equation (13) is equal to the ratio of flexural and torsional shoulder line dislocations, in the case of the step made independent of its neighbours and restrained against sidesway, as Fig. 8. shows.

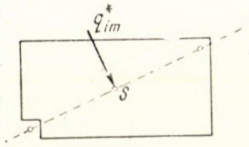


Fig. 7. Step, loaded along its axis, made independent of its neighbours

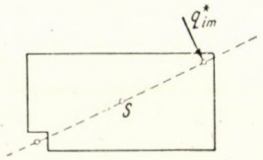


Fig. 8. Step, loaded along one of its shoulder lines, made independent of its neighbours

Obviously equation (13) has to be satisfied in case of all intermediate shoulder lines. In each of the equations that can thus be set up, there exist values Z_i pertaining to three contiguous shoulder lines. To determine these equation (13) has to be treated as a difference equation of second order. Thereby the determination of shoulder displacement ζ_i may be reduced in the case of the loading system described by equation (9) to the solution of the afore-mentioned difference equation. In the general case the sought shoulder dislocations are obtained by summing the dislocations corresponding to the individual Fourier members.

5. Stress analysis

With shoulder displacement ζ_i determined, the problem may be regarded as solved, because stresses caused by loads on the steps can be calculated by routine formulas of the Strength of Materials. The bending moment arising in the steps is namely (Fig. 9.)

$$M_i = - EJ\, w_i'' \,,$$

or with consideration of (3):

$$M_i = -\frac{EJ}{2}(\zeta_i'' + \zeta_{i-1}''). \tag{14}$$

On the other hand, the torsional moment arising in the steps

$$M_{it} = +GJ_0\varphi_1',$$

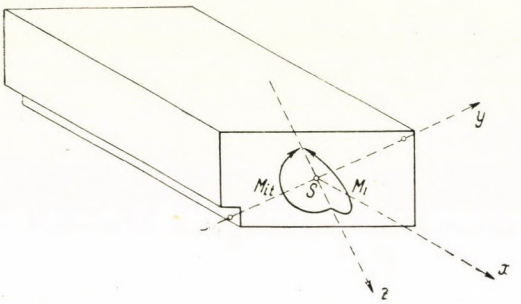


Fig. 9. Flexural and torsional couples acting on the *i*-th step

or, with regard to (4)

$$M_{it} = +\frac{GJ_0}{c}(\zeta_1' - \zeta_{i-1}'). \tag{15}$$

A special paper will present the application of the afore-explained calculation method to routine loading cases.

REFERENCES

1. CHMELKA, F.: Über die Beanspruchung freitragender Stiegenstufen. *Österreichische Bauzeitschrift 9* (1954) pp. 45—54.
2. CSONKA, P.: Über frei aufliegende, längs eines einzigen Zwischenbalkens belastete Balkenketten. *Beton u. Eisen 35* (1936), pp. 187—195.
3. BLEICH, F.—MELAN, E.: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik. Berlin und Wien, 1927. Verlag von Julius Springer.

SUMMARY

The paper deals with the analysis of forces on straight flights of stairs whose block steps are connected together and with the stair landings considered as rigid by grooved joints. In the course of investigations grooves of the steps are replaced by straight lines parallel with the axis of the steps and antimetric relative to this axis, and it is supposed that the steps are free to rotate about these lines, called shoulder lines. Similar joints are supposed between the landings and the top and the bottom steps respectively.

Displacements of the shoulder lines normal to the plane of the flight of stairs are taken for unknown. Describing conditions of identical deformations, the paper establishes correlations between displacements of the shoulder lines of two contiguous steps and the unit load applied to the common shoulder lines. This relationship, the basic equation of the problem, having been set up for each intermediate shoulder line, equations are obtained from which the unknown displacements of the shoulder lines can be determined with consideration of initial conditions.

In the analysis of the problem it is expedient to develop load functions of the shoulder lines, and their displacement functions into Fourier series, and compose the solution of part solutions pertaining to the individual Fourier members. In the case of the loading system corresponding to each of the Fourier numbers in its turn, the basic equation of the problem can be treated as a difference equation of second order and solved according to rules relative to such equations.

DIE BERECHNUNG DER IN NUTEN AUFLIEGENDEN BLOCKTREPPENSTUFEN

Prof. P. CSONKA
Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz behandelt die Berechnung von geradläufigen Treppen, deren Blockstufen mittels Nuten aufeinander und auf den als starr betrachteten Treppenabsätzen aufliegen. Im Laufe der Berechnung werden die Nuten der Treppenstufen durch Geraden ersetzt, die parallel zu deren Achsen und antimetrisch zu der Achse der Stufen liegen, wobei angenommen wird, dass sich die Treppenstufen um diese Geraden (Schulterlinien) gelenkartig, frei verdrehen können. Eine ähnliche Beziehung wird zwischen den Auf- bzw. Austrittstufen und den Treppenabsätzen vorausgesetzt.

Als Unbekannte werden die auf den Treppenlauf rechtwinkligen Verschiebungen der Schulterlinien betrachtet. Bei Aufstellung der Bedingungen für gleiche Verschiebungen wird eine Beziehung festgestellt, wodurch Zusammenhänge zwischen den Verschiebungen von zwei Nachbarstufen und der auf ihre gemeinsame Schulterlinie entfallenden spezifischen Last bestimmt werden. Diese Beziehung — die Grundgleichung der Aufgabe — wird für alle dazwischenliegenden Schulterlinien angeschrieben, woraus sich die unbekannten Schulterlinienverschiebungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen bestimmen lassen.

Im Laufe der Lösung der Aufgabe ist es zweckmässig, die Last- und Verschiebungsfunktionen der Schulterlinien in Fourier-Reihen zu entwickeln und die Lösung aus den den einzelnen Fourier-Gliedern entsprechenden Teillösungen zusammenzusetzen. Im Falle von Lastsystemen, die den einzelnen Fourier-Gliedern entsprechen, kann die Grundgleichung der Aufgabe als eine Differenzengleichung zweiter Ordnung betrachtet und den entsprechenden Regeln gemäss behandelt werden.

CALCUL DE MARCHES D'ESCALIER EN BLOCS, AUX JOINTS ENTAILLÉS

Prof. P. CSONKA
Docteur des sc. techniques

RÉSUMÉ

L'étude examine les forces agissant dans les escaliers à rampes droites, dont chaque marche en bloc est jointe à la suivante et aux paliers considérés rigides par l'intermédiaire d'une entaille. Au cours des calculs les entailles des marches sonst substituées par des lignes parallèles aux axes des marches, placées d'une manière antimétrique par rapport à ces axes. Les marches sont supposées de se détourner librement sur ces lignes — lignes d'épaulement —, à la manière d'articulations. Les mêmes jointures sont supposées entre les paliers de l'escalier d'une part et la marche de départ ou bien la marche de trapan d'autre part.

Les déplacements des lignes d'épaulement perpendiculaires au plan de la volée de l'escalier sont considérés comme inconnus. En fixant les conditions de déplacements identiques, on établit les relations entre les déplacements des lignes d'épaulement de deux marches contiguës et la charge spécifique agissant sur la ligne d'épaulement commune. Après avoir établi cette relation — l'équation fondamentale du problème —, pour toutes les lignes d'épaulement intermédiaires, on obtient des équations dont les déplacements inconnus peuvent être déterminés en considérant les conditions initiales.

Au cours du traitement du problème il est utile de développer les fonctions des chargements et des déplacements des lignes d'épaulement en séries de Fourier et de composer la solution des solutions correspondant aux membres Fourier individuels. En cas d'un système de charges correspondant à chacun des membres Fourier, l'équation fondamentale du problème peut être traitée comme une équation de différences de deuxième ordre selon les règles relatives à celle ci.

РАБОТА БЛОЧНЫХ ЛЕСТНИЧНЫХ СТУПЕНЕЙ, СОПРЯЖЕННЫХ ПАЗОМ

Д-р техн. наук П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Разбирается расчет таких прямомаршевых лестниц, блочные ступени которых между собой и с принятыми жесткими площадками сопрягаются пазом. В процессе расчета пазы ступеней замещаются прямыми, проходящими параллельно к оси ступеней, расположенных кососимметрично к оси ступеней, и предполагается, что ступени вокруг этих линий — плечевых линий — могут шарнирообразно свободно поворачиваться. Предполагается также подобная связь между нижней и верхней ступенями и площадками.

Смещение плечевых линий перпендикулярно к плоскости лестничного марша принимается как неизвестное. Записывая критерии идентичных смещений, устанавливается зависимость между смещением плечевых линий двух соседних ступеней и величиной удельной нагрузки на общие плечевые линии. Составив такую зависимость — основное уравнение задачи — для всех промежуточных плечевых линий, получаются такие уравнения, по которым, учитывая начальные условия, можно определить неизвестные плечевые смещения.

В процессе решения задачи целесообразно функции нагрузки и сдвига плечевых линий разложить в ряды Фурье и решение собрать из решений, соответствующих отдельным членам ряда Фурье ; исходное уравнение задачи можно трактовать как дифференциальное уравнение второй степени и решать по соответствующим правилам.

VORBERICHT — PRELIMINARY REPORT — RAPPORT PRÉLIMINAIRE — ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ СООБЩЕНИЕ

NICHTNADELIGES GEFÜGE EINER Fe—Mn-C-LEGIERUNG NACH ABSCHRECKUNG VON 1150° C UND NACHFOLGENDER TIEFKÜHLUNG

A. MASIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND DARSTELLENDE GEOMETRIE DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE, PRAG
D. TLUSTÁ und M. MRÁZEK
INSTITUT FÜR STAHLFORSCHUNG, FACHANSTALT DES MINISTERIUMS FÜR HÜTTEN UND ERZBERGWERKE

[Eingegangen am 14. Februar, 1956]

In dieser Mitteilung soll über ein unbekanntes nichtnadeliges Gefüge berichtet werden, dessen Anwesenheit neben normalem Martensit in Proben einer Legierung aus 94% Fe, 5% Mn und 1% C (andere Elemente der spektrographischen Analyse gemäss in Spuren) festgestellt wurde.

Die Legierung wurde unter Verwendung von hochreinen Metallen in einem Hochfrequenz-Vakuumofen erschmolzen. Der 3,5 kg schwere Block wurde vollständig durchgeschmiedet und aus ihm eine Stange von 13 × 13 mm Durchschnitt hergestellt. Aus der Stange wurden Prismen von 10 × 10 × 30 mm verfertigt und diese in einem Ofen mit Argonschutzatmosphäre eine Stunde bei 1100° C geglüht. Nach Ausglühen und Abkühlung auf 20° C wurden die Proben auf 1150° C erhitzt und von dieser Temperatur in Öl abgeschreckt. Nach Abschreckung wurden je drei Muster in einer Mischung von CO_2 und Methylalkohol auf 0°, −10°, −20°, −30°, −50°, −80° C und in flüssiger Luft auf −193° C unterkühlt. Die Proben wurden 45 Minuten in den Bädern belassen. Danach wurden sie zur mikroskopischen Untersuchung auf Schmirgelpapier angeschliffen und auf einer Filzscheibe mit Al_2O_3 in wässriger Suspension (destilliertes Wasser) poliert. Die polierte Schliffoberfläche wurde dann mit Nital geätzt.

Das Gefüge der abgeschreckten Probe war rein austenitisch. Mit sinkender Temperatur tritt ein fortschreitendes Ausscheiden martensitischer Plättchen ein und bei Proben, die auf 0°, −10° und −15° C unterkühlt wurden, erschien in der Mikrostruktur ausser normalen martensitischen Plättchen auch dieses unbekannte nichtnadelige Gefüge.

Dieser Gefügebestandteil erscheint entweder lokalisiert in einzelnen Austenitkörnern (Abb. 1) oder nimmt ganze Zonen, ohne Rücksicht auf die Austenitkörner (Abb. 2) ein.

Die unregelmässigen und mehr oder weniger abgerundeten Teilchen haben eine bestimmte Anordnung, jedoch ohne deutliche Beziehung zu den Richtungen, in denen Martensit ausscheidet. An einigen Stellen bildeten sich nur einzelne Reihen (Abb. 2), oft kommt jedoch es zur Verbindung einzelner Teilchen zu

kompakten Gebilden. An jenen Stellen, wo sich der Martensit und das nichtnadelige Gefüge ausgeschieden haben, lässt sich gleichzeitig feststellen, dass das neue Gefüge durch den anwesenden Martensit nicht beeinflusst wird und dass es die Martensitnadeln ohne Beziehung zu ihrer Orientation umgibt. Es entsteht also wahrscheinlich unabhängig vom Martensit.



Abb. 1. Nichtnadeliges Gefüge in einzelnen Austenitkörnern (800×)

Abb. 3 zeigt ein anderes Aussehen dieses nichtnadeligen Gefüges. Einzelne Teilchen sind in genauen parallelen Reihen angeordnet, wobei die Dimensionen und die Orientation von zwei Nachbarkörnern sehr verschieden sind. Ausser der Anordnung in einzelnen parallelen Reihen, die an ein paralleles Gleitlinienbündel in einem Austenitkorn erinnern, ist auch eine nichtparallele Reihenanordnung zu erkennen, als ob die Teilchen in gleicher Richtung schräg aus diesen Gleitlinien herauswüchsen.

Das Korn, das an diese zwei Körner mit nichtnadeligem Gefüge grenzt, weist kein nichtnadeliges Gefüge, sondern nur normale martensitische Nadeln auf.

Bei Tiefkühlung unter —15°C kam das nichtnadelige Gefüge nicht vor.

Die Härte dieses Gefüges, gemessen mit einem Zeiss-Hanemann-Mikrohärteprüfer, liegt zwischen der Austenit- und Martensithärte, und zwar näher der letzteren (siehe Tabelle I).

Die Form und Anordnung des nichtnadeligen Gefüges, das sich gleichzeitig mit Martensit vorfindet, erinnert an das „X-Gefüge", das von HANKE und HENKEL [1] in einer gehärteten Fe-Legierung (1,4% C, 1,75% Cr, 0,45% Mn und 0,2 V) festgestellt wurde. Auch seine zwischen Austenit und Martensit liegende Härte stimmt mit der des X-Gefüges gut überein.

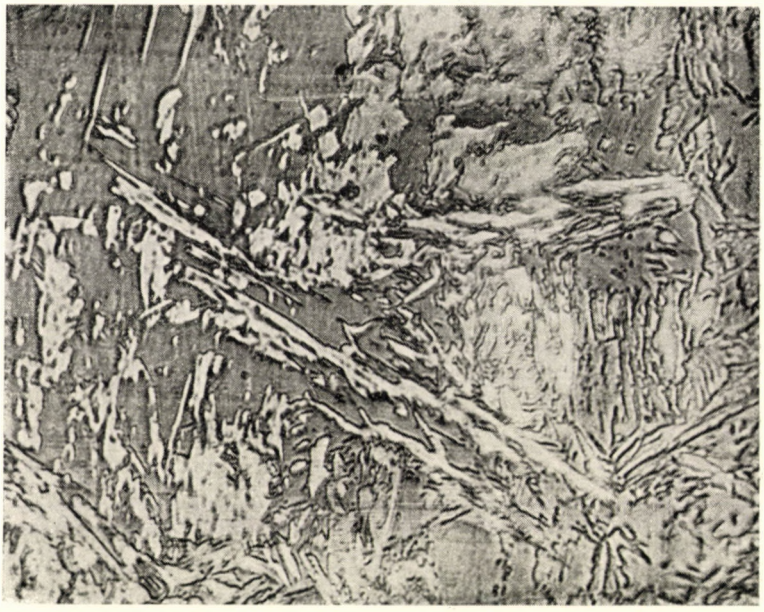


Abb. 2. Zusammenhängendes Gebiet des nichtnadeligen Gefüges, unabhängig von Austenitkörnern (800×)

Tabelle I.

Mikrohärte einzelner Gefügebestandteile

Gefügebestandteil	Hm g/μ^2					
	1. Messung	2. Messung	3. Messung	4. Messung	5. Messung	∅
Martensit	967	897	921	906	968	932
Nichtnadeliges Gefüge	793	736	787	748	770	767
Austenit	513	532	547	515	530	527

Belastung 10 g

Seine Existenz ist jedoch durch die Temperatur von —20°C, bei der es nicht mehr auftritt, beschränkt. Dagegen liegen die Existenzgrenzen des X-Gefüges, bei denen dieses nicht mehr erschien, nach HANKE und HENKEL bei 200° und 193°C.

Es entsteht einerseits die Frage, ob es sich um einen neuen Gefügetyp handelt, der sich neben normalem Martensit in diesen (bzw. auch in anderen) Legierungen nach Abschreckung und Tiefkühlung bildet, oder nur um eine nichtnadelige Martensitform, und anderseits, wie der Entstehungsmechanismus dieses Gefüges beschaffen ist.



Abb. 3. Verschiedene Anordnung des nichtnadeligen Gefüges in zwei austenitischen Nachbarkörnern (400×)

Die Lösung dieser Fragen wird erst nach der mikroröntgenographischen Bestimmung der kristallographischen Struktur, an der zur Zeit gearbeitet wird, möglich sein. Die erwähnten Fragen sollen in dieser Zeitschrift noch weiter behandelt werden.

SCHRIFTTUM

1. E. Hanke und O. Henkel: Das Gefüge „X". Wissenschaftliche Berichte, Heft 64, 1953.

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wird über ein unbekanntes nichtnadeliges Gefüge berichtet, dessen Anwesenheit neben normalem Martensit in Proben einer Legierung aus 94% Fe, 5% Mn und 1% C nachgewiesen wurde.

NON-MARTENSITIC STRUCTURE OF AN Fe-Mn-C ALLOY AFTER QUENCHING AT 1150° C AND SUBSEQUENT DEEP-COOLING

A. MASIN, D. TLUSTÁ and M. MRÁZEK, Praha

The paper presents a so far unknown structural element, different from needle-shaped martensite, established, besides normal martensite, in an alloy of 94% Fe, 5% Mn and 1% C, after quenching at 1150° C and subsequent deep-cooling.

TEXTURE NON-MARTENSITIQUE D'UN ALLIAGE DE Fe-Mn-C APRÈS TREMPE À 1150° C ET REFROIDISSEMENT À BASSE TEMPÉRATURE

A. MASIN, D. TLUSTÁ et M. MRÁZEK, Praha

L'étude présente un élément de texture jusqu'ici inconnu, différent de la martensite à aiguilles, qu'on a pu constater dans un alliage à 94% de Fe, 5% de Mn et 1% de C, auprès de la martensite normale, après trempe à 1150° C et fort refroidissement consécutif.

НЕМАРТЕНСИТНАЯ СТРУКТУРА В Fe—Mn—C СПЛАВАХ, ОБРАЗОВАВШАЯСЯ ВСЛЕДСТВИЕ ЗАКАЛКИ И ОТПУСКА

А. МАШИН, Д. ТЛУСТА, М. МРАЗЕК (Прага)

РЕЗЮМЕ

В статье описывается элемент структуры, до сих пор неизвестный и отличающийся от иглообразного мартенсита, который можно было показать в сплаве с содержанием 94% Fe, 5% Mn и 1% C наряду с нормальным мартенситом — после закалки и отпуска.

BUCHBESPRECHUNG — BOOK REVIEW — COMPTE RENDU DE LIVRES
ОБЗОР КНИГ

ENZYKLOPÄDIE DES EISENHÜTTENWESENS VI. ROHEISENERZEUGUNG

(Vaskohászati Enciklopédia VI. Nyersvasgyártás)
Herausgeber: *A. Geleji*

Mitarbeiter: A. Claus, E. Cotel†, Z. Horváth, E. Kiss, B. Simon, L. Visnyovszky.
Schriftleiter: A. Schleicher.
Akadémiai Kiadó, Budapest 1955, 764 S., 441 Abb., 5 Beilagen, Preis Ft. 120,—

Mit der Herausgabe der Enzyklopädie des Eisenhüttenwesens wünscht die Ungarische Akademie der Wissenschaften den ungarischen Fachleuten eine Bücherreihe in die Hand zu geben, die das gesamte Material des Eisenhüttenwesens umfasst und das von Fachleuten mit wissenschaftlicher Vorbildung und praktischen Fachkenntnissen geschrieben wurde. Der zuletzt erschienene VI. Band behandelt die Roheisenerzeugung, wobei er ausführlich in alle ihre Einzelheiten eingeht. Obwohl im ausländischen Schrifttum zahlreiche Bücher erschienen sind, die sich mit der Roheisenerzeugung befassen, berücksichtigt das Werk unter Beachtung der ungarischen Gegebenheiten die neuesten theoretischen und praktischen Gesichtspunkte.

Das umfangreiche Material wird in 11 Kapiteln und zahlreichen Abschnitten behandelt, wobei auch viele Fragen erörtert werden, die sich in anderen ähnlichen Werken nicht finden. Neben praktischen Hinweisen wird die Theorie ausführlich zusammengefasst und dabei die grosse Bedeutung der Thermodynamik und Thermochemie in den Eisenverhüttungsprozessen gebührend berücksichtigt.

Die einzelnen Kapitel sind folgende:

1. Die Eisensorten und ihre Bedeutung.
2. Die geschichtliche Entwicklung der Eisenerzeugung.
3. Die Stoffe der Roheisenerzeugung.
4. Die theoretische und praktische Beschreibung der im Hochofen ablaufenden Prozesse.
5. Die thermodynamische Untersuchung der im Hochofen ablaufenden Prozesse.
6. Der Aufbau und die Einrichtungen des Hochofens.
7. Der Arbeitsgang der Roheisenerzeugung.
8. Die Verwertung der Hochofenschlacke.
9. Der Energie- und Wärmehaushalt des Hochofens.
10. Die Kontrolle des Betriebes des Hochofens.
11. Besondere Verhüttungsverfahren.

Ausser einem ausführlichen Text bringt das Werk 441 Abbildungen und 5 Beilagen, die sehr zur Verständlichkeit der Ausführung beitragen.

Der I. Band der Enzyklopädie („Rohstoffe des Eisenhüttenwesens"), der jetzt erschienene VI. Band sowie der in nächster Zukunft erscheinende Band „Erzaufbereitung" umfassen das Thema der Roheisenerzeugung in seinem ganzen Umfang und stellen infolgedessen einen hervorragenden Leitfaden sowohl für den Theoretiker als auch für den Praktiker auf dem Gebiete der Eisenverhüttung dar.

Die Ausstattung des Werkes ist als repräsentativ zu bezeichnen, in drucktechnischer Beziehung lässt es kaum Wünsche offen, so dass es in vollem Ausmass das von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften angestrebte Ziel erfüllt. Die ungarische Technik ist auf diese Weise um ein ausgezeichnetes einschlägiges Werk bereichert worden, das gleichzeitig auch eine wichtige Grundlage für den höheren Unterricht bilden dürfte.

M. Szele

ENCYCLOPAEDIA OF FERROUS METALLURGY VI. MANUFACTURE OF PIG IRON

(Vaskohászati Enciklopédia. VI. Nyersvasgyártás)

Chief Editor: *A. Geleji*

Authors: A. Claus, Late E. Cotel, Z. Horváth, E. Kiss, B. Simon, L. Visnyovszky.
Editor: A. Schleicher.
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955. 764 p., 441 figs., 5 insets. Price Ft 120.—

With the publication of the Encyclopaedia of Ferrous Metallurgy the Hung. Academy of Sciences wish to place at the disposal of Hungarian metallurgists a series of textbooks covering the entire field of ferrous metullurgy, written by experts with thorough scientific background and practical knowledge. The recently published volume VI. comprises the manufacture of pig iron extending on all details. Though text books on pig iron manufacture appear in great numbers abroad, this work encompasses the latest theoretical and practical viewpoints with consideration of Hungarian conditions.

The extensive subject matter is treated in 11 chapters and numerous subchapters, comprising topics not dealt with in other similar books. Besides practical advice, theory is summed up in detail, considering the great importance of dynamics and thermodynamics in metallurgical processes.

The chapters are the following:

1. Grades of pig iron and their importance.
2. Short history of pig iron manufacture.
3. Basic materials of the manufacture of pig iron.
4. Theoretical and practical investigation of the processes taking place in the blast furnace.
5. Thermodynamic investigation of the processes taking place in the blast furnace.
6. Construction and appliances of the blast furnace.
7. The working process of pig iron manufacture.
8. Utilization of blast furnace slag.
9. Power and heat economy of the blast furnace.
10. Control of blast furnace operation.
11. Special metallurgical processes.

The ample text is elucidated by 441 figures, 5 insets, and this rich illustrative material is very helpful to comprehension.

The Vol. I. of the Encyclopaedia, "Raw Materials of Ferrous Metallurgy", the volume now published, and the volume "Ore Dressing" encompass the full subject-matter of pig iron making and are an excellent aid to the practical and the theoretical metallurgist.

The get-up of the book is very representative, it hardly shows any shortcomings from the point of view of printing technique and fully serves the purpose aimed at by the Hung. Academy of Sciences Hungarian metallurgical engineers have thus got an excellent textbook which will also form an important basis of higher education.

M. Szele

ENCYCLOPÉDIE SIDÉRURGIQUE. VI. FABRICATION DE LA FONTE BRUTE

(Vaskohászati Enciklopédia. VI. Nyersvasgyártás)

Rédacteur en chef: *A. Geleji*

Collaborateurs: Alajos Claus, Ernő Cotel†, Zoltán Horváth, Ervin Kiss, Béla Simon, László Visnyovszky. Rédacteur: Aladár Schleicher.
Akadémiai Kiadó, Budapest 1955, 764 p. 441 fig. 5 hors-texte. Prix Ft 120,—.

En publiant l' Encyclopédie Sidérurgique, l' Académie Hongroise des Sciences désire mettre entre les mains des spécialistes hongrois une série d'ouvrages embrassant tout le domaine de la métallurgie du fer, de la plume de spécialistes disposant de connaissances théoriques et pratiques approfondies. Le tome VI. récemment paru traîte de la fabrication de la fonte brute en s'étendant sur les questions de détail de la fabrication. Cet ouvrage exposant les derniers

points de vue théoriques et pratiques, compte tenu des conditions hongroises, vient compléter utilement le nombre considérable de livres traîtant de la fabrication de la fonte brute, qui paraissent dans la littérature étrangère.

Divisé en 11 chapitres, l'ouvrage s'étend sur de nombreux problèmes omis par les ouvrages analogues. Tout en donnant des directives à la pratique, il laisse une grande place à la théorie, tenant compte de l'importance de la thermodynamique et de la thermochimie dans les procéssus métallurgiques.

Voici les chapitres de l'ouvrage :

1. Les différentes sortes de fer et leur importance
2. Développement historique de la fabrication du fer
3. Les matières de la fabrication de la fonte brute
4. Élements theoriques et pratiques des processus ayant lieu dans le haut-fourneau
5. Examen thermodynamique des processus ayant lieu dans le haut-fourneau
6. Construction et installations du haut-fourneau
7. Étapes de la fabrication de la fonte brute
8. Utilisation du laitier des hauts-fourneaux
9. Exploitation d'énergie et de chaleur dans le haut-fourneau
10. Contrôle du fonctionnement des hauts-fourneaux
11. Procédés métallurgiques spéciaux.

L'ouvrage volumineux est illustré par 441 figures et 5 hors-texte facilitant la compréhension du texte. Le tome I. de l'Encyclopédie, qui vient de paraître sous le titre: „Matières premières de la métallurgie du fer" et le tome suivant consacré à la „Préparation des minerais", qui paraîtra sous peu, embrassent le domaine de la fabrication de la fonte brute dans toute son étendue et peuvent servir de guide utile aux spécialistes de la théorie et de la pratique.

L'ouvrage dont la présentation esmpeccable et dont la technique d'impression ne laisse presque rien à désirer, satisfait entièrement au but que s'était fixé par la publication l'Académie Hongroise des Sciences. La littérature technique hongroise se trouve enrichie par son édition d' une excellente oeuvre technique pouvant servir également de base à l'enseignement supérieur.

M. Szele

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК ЧЕРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ VI. ПРОИЗВОДСТВО ШТЫКОВОГО ЧУГУНА

(VASHOHÁSZATI ENCIKLOPÉDIA, VI. NYERSVASGYÁRTÁS)

Главный редактор: А. ГЕЛЕЙИ

Авторы: А. Клаус, Э. Котель, З. Хорват, Э. Киш, Б. Шимон, Л. Вишньовски. под редакцией А. Шлейхер

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955 г., 764 стр., 441 рис., 5 приложений, цена 120 фор.

Изданием энцклопедического справочника черной металлургии Академия наук Венгрии предполагает предоставить в распоряжение венгерских специалистов такой энциклопедический справочник, состоящий из целой серии книг, который будет охватывать все области черной металлургии и который будет составлен научно подготовленными специалистами, обладающими производственным опитом. Недавно вышедший из печати шестой том энциклопедического справочника занимается вопросом производства штыкового чугуна, охватывая все вопросы производства чугуна. Хотя в заграничной литературе сейчас появляется большое число книг, посвященных вопросам производства чугуна, данный труд, учитывая венгерскую действительность, охватывает новейшие теоретические и практические положения.

Обширный материал рассматривается в 11 главах и ряде подглав и охватывает ряд таких вопросов, которые в других подобных трудах не рассматриваются. Наряду с практическими указаниями детально охвачены также теоретические положения, учитывая большое значение термодинамики и термохимии в процессах черной металлургии.

Книга разбита на следующие главы:

1. Виды железа и их значение.
2. Историческое развитие производства железа.
3. Сырье доменного производства.
4. Теоретическая и практическая трактовка процессов, происходящих в доменных печах.
5. Термодинамический анализ процессов, происходящих в доменных печах.
6. Конструкция и оборудование доменной печи.
7. Процесс производства штыкового чугуна.
8. Утилизация шлака доменной печи.
9. Энергетический и тепловой режим доменной печи.
10. Контроль режима работы доменной печи.
11. Специальные металлургические процессы.

В книге в качестве иллюстрации дается 441 рис., кроме этого 5 приложений; эта богатая иллюстрация в значительной мере способствует пониманию рассматриваемого предмета.

Первый том энциклопедического справочника черной металлургии «Сырье черной металлургии», вышедший в настоящее время из печати VI том, атакже выходящий в ближайшем будущем том «Рудоподготовка» полностью охватывают весь круг вопросов по производству чугуна, и для специалистов практиков и теоретиков будут служить отличным руководством в их работе.

Книга хорошо оформлена, с полиграфической точки зрения почти не имеется недочетов, полностью удовлетворяет предъявленные Академией наук Венгрии требования. Таким образом, венгерская техническая общественность получила отличную техническую книгу, которая одновременно будет важным пособием для высшего технического образования.

М. Селе

E. Vadász

ANALYTISCHE GEOLOGIE

(Elemző földtan)

Akadémiai Kiadó, Budapest 1955, 516 S., 216 Abb. Preis: Ft. 80,—

Die kürzlich erschienene «Analytische Geologie» von E. VADÁSZ gehört zu jener Art der Lehr- und Handbücher, die das Material der Wissenschaft nicht nur zusammenzufassen und zu konservieren beabsichtigen, sondern deren Anliegen es ist, unsere wissenschaftliche Anschauungsweise zu fördern und die Anschauung des Verfassers von Welt und Wissenschaft auf den Leser zu übertragen.

Der Weg, der bei der Erörterung des grundlegenden Stoffes der Geologie im Laufe der Analyse beschritten wird, folgt der Linie der Erfassung von *Stoff*, *Form* und *Vorgang* und versucht, hinter dem toten Material die Erscheinungen zu erschliessen. Diese konsequente Linienführung gewährleistet einen stabilen Rahmen für das Werk, wobei das Hauptgewicht immer auf die Hervorhebung des *gedanklichen Elementes* gelegt wird.

Einen bedeutenden Schritt auf dem Gebiete des Fortschritts in unserer geologischen Anschauungsweise bedeutet es, dass der Verfasser neben dem seit langem dogmatischen erstarrten Begriff des Aktualismus auch die im Laufe der geologischen Zeiten eingetretenen quantitativen und qualitativen Veränderungen der die geologischen Geschehnisse beeinflussenden Faktoren in Betracht zieht.

In der «Analytischen Geologie» wird die *Entstehung* der Gesteine als geologischer Vorgang in den Mittelpunkt der Behandlung gestellt. Abweichend von den allgemeinen geologischen Lehrbüchern steht bei der Erörterung der geologischen Kräfte am Anfang nicht die Analyse der Tätigkeit der inneren Kräfte, sondern die der äusseren Kräfte. Zahlreiche neue oder bisher nur wenig bekannte Angaben bereichern das Kapitel über «Vorgang und Ergebnis der Gesteinsbildung», dessen Inhalt mehr enthält, als aus dem Titel hervorgeht. In dieses Kapitel baut der Verfasser auch jenen Stoff ein, der in den Lehrbüchern im Rahmen der Besprechung der exogenen Kräfte zusammengefasst zu werden pflegt. Von den exogenen Faktoren wurde vielleicht die eingehendste Behandlung dem geologisch wichtigsten, der geologischen Tätigkeit des Meeres

zuteil. Die Umgebung, die Vorgänge und die Ergebnisse der zerstörenden, materialfördernden und aufbauenden Tätigkeit und der Sedimentbildung vereinigen sich in der Schilderung des Verfassers zu einem organischen Ganzen.

Im Laufe der chronologischen Reihe der geologischen Prozesse gelangt man so zur Beschreibung jener Vorgänge, die unter dem Namen Diagenese zusammengefasst werden, so dass sich das wissenschaftliche Bild des Lesers über die Entstehung der Sedimentgesteine vervollständigt.

Danach greift der Verfasser tiefer in die Erdkruste hinein, in das Gebiet der Tätigkeit der inneren Kräfte, die zusammen mit den äusseren gleicherweise an der Bildung wie an der Bewegung der Materie teilnehmen.

Die Besprechung der Tätigkeit der inneren geologischen Kräfte setzt mit einer Schilderung der Prozesse des Plutonismus und Vulkanismus ein, wobei die natürlichen Zusammenhänge dieser beiden unter verschiedenen Umständen auftretenden Erscheinungen hervorgehoben werden. Im Rahmen dieses Kapitels werden stets die das Rückgrat der Arbeit darstellenden petrogenetischen Gesichtspunkte in den Vordergrund gestellt.

Die Erscheinungen des Magmatismus setzt der Verfasser letztlich stets mit den strukturellen Erscheinungen der Erdkruste und ihren Ursachen in Beziehung und geht hiermit auf die Erörterung der Lehre von der Struktur und den Bewegungen der Erdkruste über.

Mit den Formänderungen der Substanz der Erdkruste ist jenes Ergebnis der dynamischen Wirkungen verknüpft, das durch eine gegebenenfalls völlige Umordnung der Atome zu einer neuen Gesteinsbildung führt. In vollkommener Konsequenz tritt auch hier der sich durch das ganze Werk hindurchziehende Gedanke der Verflechtung von «Zerstörung und Aufbau» zutage, indem der Verfasser die «zerstörende dislokative Umwandlung» und die «schöpferische dislokative Umwandlung» nebeneinander stellt.

Die «Analytische Geologie» von E. VADÁSZ lehrt uns zu sehen und zu denken. Sie bereichert unser einschlägiges Schrifttum mit neuen Farben und Werten und wird noch lange Zeit befruchtend auf das neue ungarische geologische Denken wirken.

F. Horusitzky

E. Vadász

ANALYTIC GEOLOGY

(Elemző földtan)

Akadémiai Kiadó, Budapest. 516 pages, 216 figures. Price Forint 80,—

„Analytic geology" by Elemer Vadász, published recently, belongs to that category of text- and handbooks which not merely compile and preserve the material of science but also aim at advancing our scientific outlook and transplant to the reader the author's concepts of science and those of the world at large.

The way by which a discussion of the essential parts of geology, through analysis, proceeds, follows the line of an approach to the knowledge of its substance, form and process and seeks to open up the manifestations everywhere, behind the dead material. This consistent line of approach gives the work a definite setting.

Everywhere the author lays the main stress on the notional element.

It is a marked step forward in the advancement of our concepts of geology that besides the principle of "actualism" passing for a long time as a stiff dogma, the book takes into consideration the variation in quantity and quality of factors determining geological events throughout the geological ages.

In the chapter on dynamic geology, rock-formation is dealt with as a geological process and put into the center of the discussion. Unlike the textbooks on geology in general, the author's book opens up with an analysis of the operation of the internal and not the external forces.

The chapter on "The process and result of rock-formation" is enriched by several new data or such as have been little known so far. It contains more than its title would permit one to anticipate. The material usually treated in text-books under the heading of exogenous forces is dealt with in this chapter.

The subject expounded perhaps at the greatest length among the external factors is the geological activity of the sea, an external force highest in importance, geologically. The disintegrating, carrying and building activities are organically interrelated with the study of the sediment-formation, its environment, processes and results.

In pursuing the succession of geological processes, we come to the treatment of processes known under the term of rock-formation or diagenesis and this completes the reader's scientific conception of the genesis or mode of formation of sedimentary rocks.

Now the author goes deeper entering the crust of the earth, the scene of internal forces operating there which, joined by external forces, take their parts both in the production of materials and in moving them.

The author now gives a description of internal geological operations by presenting the processes of plutonism and volcanism, laying special stress on the natural interdependence between the two phenomena taking place under different conditions. Withing the framework of this chapter, prominence is invariantly given to the rockforming (petrogenetic) aspects of the issue, constituting the backbone of the work.

The phenomena of magmatism are, in ultimate analysis, accounted for by the tectonic phenomena of the earth's crust and their causes; then the author proceeds to the discussion of the tectonics and kinetics of the crust of the earth.

The deformation of the material of the earth's crust is organically joined by the result of dynamic metamorphism that might lead up to new rock-formation by a complete re-arrangement of the molecular material. The idea of "disintegration and expansion" interlaced as they are, constitute a dominating note throughout the whole work, in placing "disintegrating transformation by dislocation" and "creative transformation by dislocation" side by side.

The "Analytic Geology" by Elemer Vadász teaches us to acquire vision and to think. Literature has been enriched by a work striking a fresh note and of considerable value which for a long time to come will be giving impulse to new ways of thinking to Hungarian geologists.

F. Horusitzky

E. Vadász

GÉOLOGIE ANALYTIQUE

(Elemző földtan)

Akadémiai Kiadó, Budapest, 516 p. 216 fig. Prix. Ft 80·—

La «Géologie analytique», récemment parue de la plume d'Elemér Vadász, se réclame de la famille des manuels et ouvrages d'enseignement qui ne se contentent pas de résumer et de conserver l'acquis d'une science, mais aspirent à enrichir le lecteur de vues nouvelles, en l'invitant à suivre les conceptions propres à l'auteur.

Le chemin que suit l'exposé des sujets fondamentaux de la géologie passe par l'analyse de la *matière*, de la *forme* et des *processus*, l'auteur ayant pour but de révéler l'existence de phénomènes derrière la matière inerte. C'est ce tracé logique qui assure des cadres bien définis à l'ouvrage.

L'auteur tient à accentuer partout le rôle de l'élément spéculatif. Il élargit notre conception géologique en tenant compte, à côté du principe de «l'actualisme» qui figurait pendant longtemps comme un dogme, des changements quantitatifs et qualitatifs des facteurs régissant les évènements géologiques au cours des temps géologiques.

Dans la partie traîtant de la *géologie dynamique*, la *formation* des roches, en tant que processus géologique, figure au centre de l'exposé. A la difference des manuels de géologie générale, l'analyse des forces géologiques commence aux forces endogènes et non aux forces exogènes.

Nombre de données presque ou totalement inconnues jusqu'à présent enrichissent le chapitre intitulé «Le processus de la formation des roches et ses résultats» qui embrasse un sujet plus vaste que ne l'indique son titre. C'est ici que l'auteur parle de problèmes dont les livres d'enseignement traitent habituellement dans le cadre de l'analyse des forces exogènes.

Parmi les facteurs exogènes, c'est la mer, facteur exogène le plus important au point de vue géologique, dont la fonction a fait l'objet de l'étude la plus détaillée. Le travail *destructeur*, *transporteur* et *constructeur* d'une part et l'*entourage*, les *processus* et les *résultats* de la sédimentation d'autre part, sont traités dans leurs relations organiques.

En suivant l'ordre des processus géologiques, on arrive à l'analyse des processus connus généralement sous le nom de lapidification de roches ou diagenèse, qui vient compléter la conception scientifique que le lecteur a pu se faire de la formation des roches sédimentaires.

L'auteur, examinant ensuite la profondeur de l'écorce terrestre arrive dans le domaine de l'activité des forces interne qui participent à côté des forces externes dans la production et le transport de la matière. Il commence l'exposé par les processus du plutonisme et du volcanisme, en appuyant sur les relations naturelles de ces deux phénomènes s'opérant dans des conditions différentes. Les points de vue *petrogénétiques* constituant l'armature de l'ouvrage sont constamment accentués dans ce chapitre. L'auteur établit finalement des relations entre les phéno-

mènes du magmatisme et les phénomènes structuraux de l'écorce terrestre et leur causes, puis passe à la *théorie structurale et à la cinétique de l'écorce terrestre.* C'est un rapport organique qui relie les changements d'état de la matière de l'écorce terrestre aux résultats des effets dynamiques conduisant par une modification parfois complète de la matière des molécules à la formation de nouvelles roches. Ici encore, l'auteur reste fidèle à son idée de l'entrelacement »de la destruction et de la création» dont l'œuvre entière est pénétrée, en juxtaposant «la transformation dislocatrice destructive» et la «transformation dislocatrice créatrice».

La Géologie analytiqe d'Elemér Vadász nous apprend à voir et à réfléchir. Elle enrichit notre littérature technique de valeurs toutes nouvelles et exercera encore longtemps un effet fécondant sur les nouvelles études géologiques hongroises.

F. Horusitzky

Э. Вадас

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОЛОГИЯ

(E. Vadász: Elemző földtan)

Akadémiai Kiadó, Будапешт, 516 стр., 216 рис., цена 80 фор.

Недавно вышедшая из печати книга Элемера Вадас «Аналитическая геология» относится к тому виду учебников и справочников, которые не только обобщают и фиксируют собранный наукой материал, но и развивают дальше наш научный взгляд, и желают передать читателю научный взгляд и мировоззрение автора.

В процессе анализа рассматривается основной материал геологии, и при этом читатель ознакомляется с материалом, формой и процессом и при этом автор старается вскрыть явления, происходящие в мертвом веществе. Эта последовательность выдерживается с начала до конца во всей работе.

Основной упор во всей книге делается на подчеркивание элемента мышления. В качестве значительного шага вперед в области прогресса геологического взгляда в Венгрии можно сказать, что наряду с догматически застывшей теорией актуализма учитывается также количественное и качественное изменение факторов в течение геологических эпох, влияющих на геологические явления.

При разборе динамической геологии образование пород – как геологический процесс ставится в центр обсуждения. Отклоняясь от общих учебников по геологии, анализ действия геологических сил начинается не с анализа внутренних, а внешних сил.

Глава «процесс и результат образования пород» обогащается рядом новых или до сих пор малоизвестных данных; материал этой главы распространяется на более обширный материал чем это явствует из наименования главы. В эту главу входит также материал, который обычно в учебниках рассматривается при изложении действия эксогенных сил.

Среди внешних факторов наиболее детально рассматривается, пожалуй, геологическое действие геологически важнейшего внешнего фактора, т.е. геологического действия морей. Трактовка разрушающей, двигающей и созидающей деятельности и знание среды, процессов и результатов образования осадочных пород связываются органически.

Следуя шаг за шагом за геологическими процессами читатель постепенно ознакомляется с процессами, которые рассматриваются под названием породообразования или диагенезиса, таким образом давая полную картину читателю об образовании седиментарных пород.

После чего автор рассматривает более глубокие зоны земной коры, т. е. область действия внутренних сил, которые совместно со внешними силами обоюдно участвуют в производстве и перемещение материала.

Изложение внутренних геологических действий сил начинается с демонстрации процессов плутонизма и вулканизма, подчеркивая естественные связи между двумя явлениями, происходящими в различных условиях. В рамках этой главы на первый план выходят всегда петрогенетические соображения, представляющие собою хребет данной работы.

Явления магматизма автор в конечном счете связывает со структурными явлениями земной коры, и их причинами, и с этим переходит к рассмотрению структуры земной коры и ее динамики.

Органически связывается с изменением форм материала земной коры тот результат динамических воздействий, который приводит к образованию новых пород при вероятно

возможном полном перегруппировании материала молекул. С полной последовательностью и здесь проявляется мысль, проходящая красной чертой через всю работу, взаимосвязи «разрушения и возникновения», когда рядом друг с другом ставятся «разрушающее дислокационное преобразование» и «созидающее дислокационное преобразование».

Аналитическая геология Элемера Вадас учит видеть и думать читателя.

Ф. Хорушицки

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1956. VII. 24. — Terjedelem: 19,25 (A/5) ív, 110 ábra

Akadémiai Nyomda, Budapest — 40076/57 — Felelős vezető: Puskás Ferenc

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be typed and addressed to :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica, is 110 forints a volume. Orders may be placed with „Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newpapers (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction et écrits à la machine à l'adresse suivante.

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Compte-courant No. : 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, французском, английском и немецком языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи (в напечатанном на машинке виде) следует направлять по адресу :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181), или его заграничные представительства и уполномоченные.

55,— Ft

INDEX

B. Pogány : Les problèmes de l'angle de frottement et de la rhéologie dans la théorie de la poussée des terres — Fragen des Reibungswinkels und der Rheologie in der Erddrucktheorie — Problems of Friction Angle and of Rheology in the Earth Pressure Theory — *Б. Погань:* Проблемы угла трения и реологии в теории давления грунтов 3

T. Murányi : Scientific Foundations of Highway System Planning — Die verkehrswissenschaftlichen Grundlagen der Strassennetzplanung — La science de la circulation, comme base de l'étude des projets de voies publiques — *Т. Мураньи:* Основы проектирования шоссейных дорог 13

Gy. Heller, L. Rosta : Recherches sur la détermination du poids-frein des locomotives — Untersuchungen über die Lokomotivbremslast — Investigations of Locomotive Brake Load — *Дь. Хеллер* и *Л. Рошта:* Исследования в связи с определением тормозного груза локомотива 45

G. Fodor, G. Temes : Differentiating and Integrating Circuits — Differenzierende und integrierende Stromkreise — Circuits de différentiation et d'intégration — *Д. Фодор* и *Г. Темеш:* Дифференцирующие и интегрирующие цепи 73

J. Eisler : Quelques problèmes fondamentaux de la limitation des cours-circuits — Einige grundsätzliche Fragen der Kurzschlussbegrenzung — Some Basic Problems of the Limitation of Shortcircuits — *Я. Эйзлер:* Некоторые теоретические проблемы ограничения токов замыкания 105

I. Jeníček : Die Bedeutung der Leichtmetalle in Eisenlegierungen — The Importance of Light Metals in Ferrous Alloys — L'importance de métaux légers dans les ferro-alliages — *И. Еничек:* Значение легких металлов в железных сплавах 117

D. A. Petrow : Einige Probleme der Forschung nach neuen Leichtmetallegierungen — Some Problems of Research on New Light Metal Alloys — Quelques problèmes des recherches sur des alliages nouveaux de métaux légers — *Д. А. Петров:* Некоторые вопросы в области развития легких сплавов 121

J. Schey : Die Erscheinungen bei der Warmverformung des Aluminiums — On Hot Working of Aluminium — Sur le travail à chaud de l'aluminium — *Й. Шей:* Явления при горячей обработке алюминия 131

A. Domony : Der Einfluss kleiner Mengen von Legierungskomponenten bzw. Verunreinigungen auf einzelne technologische Eigenschaften des Aluminiums — The Effect of Small Quantities of Alloying Elements and Impurities on some Physical Properties of Aluminium — L'effet d'une quantité réduite des éléments constituants et des impuretés sur quelques propriétés physiques de l'aluminium — *А. Домонь:* Влияние малых количеств легирующих элементов и примесей на некоторые технологические свойства алюминия 153

B. Szőke : Forces Acting in the Bucket of the Elevator — Die im Becher des Becherförderers wirksamen Kräfte — Le jeu de forces dans le godet d'élévateur — *Б. Секе:* Действие сил в ковшах элеватора 163

J. Szabó : Application of the Matrix Theory to the Calculation of Continuous Beams — Anwendung der Matrizenrechnung zur Berechnung durchlaufender Träger — Sur une application du calcul matriccil dans l'analyse des poutres continues — *Я. Сабо:* Расчет неразрезных балок на основе теории матриц 175

P. Csonka : Stress Analysis of Block Steps with Grooved Joints — Die Berechnung der in Nuten aufliegenden Blocktreppenstufen — Calcul de marches d'escalier en blocs, aux joints entaillés — *П. Чонка:* Работа блочных лестничных ступеней, сопряженных пазом 195

A. Masin, D. Tlustá, M. Mrázek : Nichtnadeliges Gefüge einer Fe—Mn—C-Legierung nach Abschreckung von 1150° C und nachfolgender Tiefkühlung — Non-martensitic Structure of an Fe—Mn—C Alloy after Quenching at 1150° C and Subsequent Deep-cooling — Texture nonmartensitique d'un alliage de Fe—Mn—C après trempe à 1150° C et refroidissement à basse température — *А. Машин, Д. Тлуста* и *М. Мразек:* Немартенситная структура в Fe—Mn—C сплавах, образовавшаяся вследствие закалки и отпуска 205

Buchbesprechung — Book Review — Compte rendu de livres — Обзор книг 211

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
I. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XVI FASCICULI 3—4

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1957

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, englischer, französischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Bankkonto Nr.43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

THE MOVEMENT OF THE PADDING MACHINE'S LOOPER

B. GREGA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS No. V., TECHNICAL UNIVERSITY
BUDAPEST

[Manuscript received 18th April, 1955]

In the industry, the looper of the padding machine is adjusted to the needle movement by varying the length of the arm denoted in the following by d. By varying arm length d, the loop take-off or its turning over can be accelerated or retarded respectively.

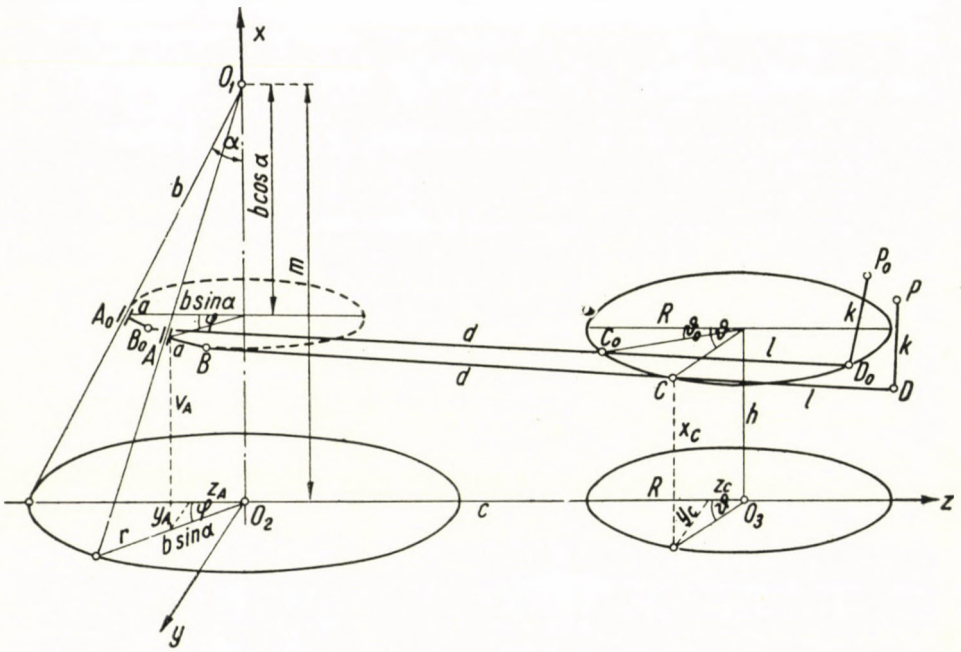


Fig. 1

The course described by the looper's point is a closed three-dimensional curve. In this paper, we seek to formulate the question of that curve in order to enlighten with its aid the manner of thread laying in stitch formation. Through arm a tracing a course forming the ride of a cone, fixed to a disk attached to the main shaft of the padder at an acute angle, the padder actuates a rod of $d + l$

length, which in turn moves looper k attached to it ; the free end of the looper (point P) describes a closed space curve. At any moment during movement, points O, A, B and C lie in the same plane (Fig. 1).

Let the origin of the system of coordinates be O_2, axis z lie in the plane of the centres of rotation O_1, O_2 and O_3, x be the axis of the cone generated by rotation of base radius r, and axis y be normal to them. (Fig. 2/a and 2/b.)

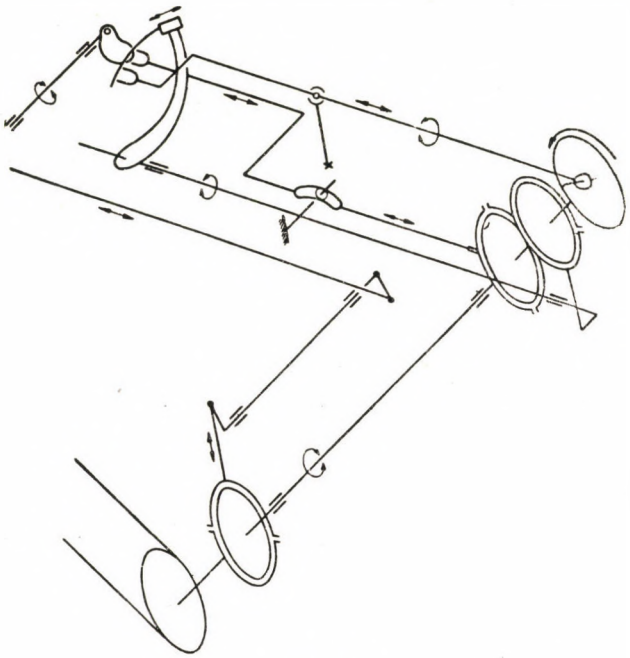


Fig. 2a

Let us denote the initial position of the tip of the arm by B_0, one of its arbitrary positions by B, and let the initial position of the tip of rod d attached to the arm be C_0, and the position corresponding to B, position C. Moreover, let the angle enclosed on arc of radius R corresponding to rotational angle φ of the cone's base radius r, be $\hat{v}$. Seeking to set up the equation of the closed space curve described by the looper's point, we endeavoured to determine the correlation between rotational angles φ and $\hat{v}$. First, the equation of the plane traversing points $O_1(x_1, y_1, z_1)$, $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ and $C(x_C, y_C, z_C)$ was to be determined. From these points, the coordinates of points O_1, A and C can be directly written. Namely, reading off the Fig. 3., the coordinates of point O_1 are :

$$x_1 = m$$
$$y_1 = 0$$
$$z_1 = 0 .$$

The coordinates of point A :

$$x_A = m - b \cdot \cos \alpha$$
$$y_A = b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi$$
$$z_A = -b \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi$$

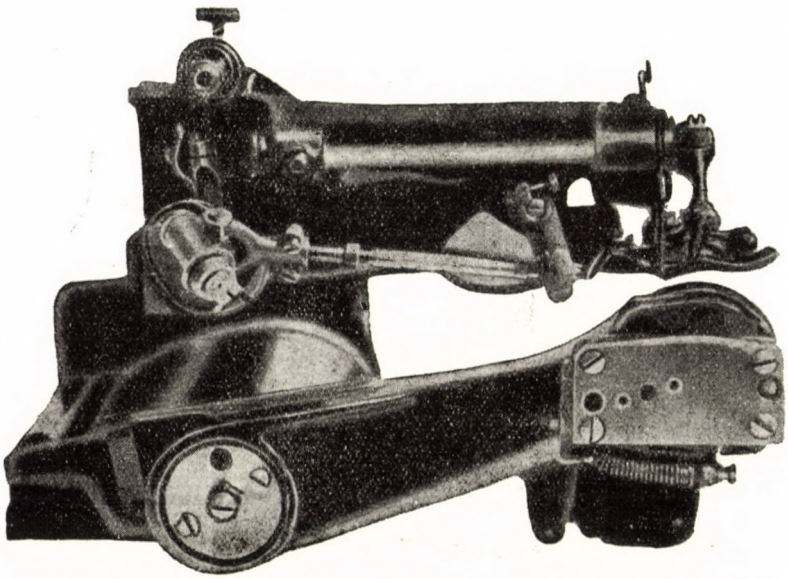


Fig. 2b

and the coordinates of point C :

$$x_C = h$$
$$y_C = R \cdot \sin \vartheta$$
$$z_C = c - R \cos \vartheta \ .$$

Denoting the coordinates of the moving point in the plane defined by points O_1, A and C by ξ, η and ζ, the equation of the plane sought will be

$$\begin{vmatrix} \xi - x_A & \eta - y_A & \zeta - z_A \\ x_1 - x_A & y_1 - y_A & x_1 - x_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

or

$$[(y_1 - y_A)(z_C - z_A) - (z_1 - z_A)(y_C - y_A)](\xi - x_A) + [(z_1 - z_A)(x_C - x_A) - (x_1 - x_A)(z_C - z_A)](\eta - y_A) + [(x_1 - x_A)(y_C - y_A) - (y_1 - y_A)(x_C - x_A)](\zeta - z_A) = 0$$

and

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 = 0, \quad \text{respectively, where}$$

$$A_1 = (y_1 - y_A)(z_C - z_A) - (z_1 - z_A)(y_C - y_A)$$

$$B_1 = (z_1 - z_A)(x_C - x_A) - (x_1 - x_A)(z_C - z_A)$$

$$C_1 = (x_1 - x_A)(y_C - y_A) - (y_1 - y_A)(x_C - x_A)$$

$$D_1 = -\{[(y_1 - y_A)(z_C - z_A) - (z_1 - z_A)(y_C - y_A)]x_A + [(z_1 - z_A)(x_C - x_A) - (x_1 - x_A)(z_C - z_A)]y_A + [(x_1 - x_A)(y_C - y_A) - (y_1 - y_A)(x_C - x_A)]z_A\}$$

where the coordinates of points O_1, A and C should be substituted. As $B(x_B, y_B, z_B)$ lies on the plane determined by points O_1, A and C, the coordinates should be determined by locating normal vector $\bar{n}$ at A of the plane pertaining to the points O_1, A and C, and the vectorial product of vectors $\overrightarrow{AO_1} = \bar{u}$ and $\bar{n}$ will be a vector $\bar{v}$ located in the plane of points O_1, A and C, and therefore will contain also point B. By establishing the directional cosines of vector $\bar{v}$, the coordinates of point B can be derived.

Following the above train of thought, we begin by calculating the directional cosines λ_1, λ_2, λ_3 of vector $\overrightarrow{AO_1} = \bar{u}$. These are :

$$\lambda_1 = \frac{x_1 - x_A}{b} = \frac{b \cdot \cos\alpha}{b} = \cos\alpha$$

$$\lambda_2 = \frac{y_1 - y_A}{b} = \frac{-b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi}{b} = -\sin\alpha \cdot \sin\varphi$$

$$\lambda_3 = \frac{z_1 - z_A}{b} = \frac{b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi}{b} = \sin\alpha \cdot \cos\varphi$$

Thereafter we determine the directional cosines of normal vector $\bar{n}$ of the plane determined by points O_1, A and C. Reading from the planar equation, the directional cosines sought are found to be in proportion to the determinants of the second order of matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1 - x_A & y_1 - y_A & z_1 - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{Vmatrix}$$

Writing in detail:

$$\left\| \begin{matrix} b \cdot \cos\alpha & -b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi & b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi \\ h - m + b \cdot \cos\alpha & R \cdot \sin\vartheta - b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi & c - R \cdot \cos\vartheta + b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi \end{matrix} \right\|$$

If the directional cosines of the planar normal vector $\bar{n}$ are ν_1, ν_2, ν_3,

$$\nu_1 \cdot |\bar{n}| = \begin{vmatrix} -b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi & b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi \\ R \cdot \sin\vartheta - b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi & c - R \cdot \cos\vartheta + b \cdot \sin\alpha \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi & b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi \\ R \cdot \sin\vartheta & c - R \cdot \cos\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= -b \cdot c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi + R \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi -$$

$$- R \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi = -b \cdot c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi + R \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\varphi - \vartheta) .$$

$$\nu_2 \cdot |\bar{n}| = \begin{vmatrix} b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi & b \cdot \cos\alpha \\ c - R \cdot \cos\vartheta + b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi & h - m + b \cdot \cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi & b \cdot \cos\alpha \\ c - R \cdot \cos\vartheta & h - m \end{vmatrix} =$$

$$= (h - m) \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi - (c - R \cdot \cos\vartheta) \cdot b \cdot \cos\alpha .$$

$$\nu_3 \cdot |\bar{n}| = \begin{vmatrix} b \cdot \cos\alpha & -b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi \\ h - m + b \cdot \cos\alpha & R \cdot \sin\vartheta - b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b \cdot \cos\alpha & -b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi \\ h - m & R \cdot \sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= R \cdot b \cdot \cos\alpha \cdot \sin\vartheta + (h - m) \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi .$$

Finally, the directional cosines of vector $\bar{v}$ are derived.

The directional cosines of vectors $\bar{u}$ and $\bar{n}$ being already known, the directional cosines μ_1, μ_2, μ_3 of vector $\bar{v}$, which is normal to them, are proportionate to the determinants of second order of matrix

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ \nu_1 \nu_2 \nu_3 \end{matrix} \right\|$$

Hence:

$$\mu_1 |\bar{v}| = \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{|\bar{n}|} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \nu_2 \cdot |\bar{n}| & \nu_3 |\bar{n}| \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|\bar{n}|} \cdot -\sin\alpha \cdot \sin\varphi \,|\, h(-m) b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi - (c - R\cos\vartheta) b \cdot \cos\alpha$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\varphi\ Rb\cdot\cos\alpha\cdot\sin\vartheta+(h-m)\,b\cdot\sin\alpha\sin\varphi\,|=$$

$$=\frac{1}{|\bar{n}|}\cdot[b\cdot c\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\varphi-R\cdot b\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos(\varphi-\vartheta)-$$

$$-(h-m)\,b\cdot\sin^2\alpha]=\frac{1}{|\bar{n}|}\cdot f_1(\varphi,\ \vartheta)$$

$$\mu_2\cdot|\bar{v}|=\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ \nu_3 & \nu_1\end{vmatrix}=\frac{1}{|\bar{n}|}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ \nu_3\cdot|\bar{n}| & \nu_1\cdot|\bar{n}|\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|\bar{n}|}\cdot\Big|\sin\alpha\cdot\cos\varphi\ R\cdot b\cdot\cos\alpha\cdot\sin\vartheta+(h-m)\,b\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi$$

$$\cos\alpha-b\cdot c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi+Rb\cdot\sin\alpha\cdot\sin(\varphi-\vartheta)\Big|=$$

$$=\frac{1}{|\bar{n}|}\cdot[R\cdot b\cdot\sin^2\alpha\cos\varphi\cdot\sin(\varphi-\vartheta)-b\cdot c\cdot\sin^2\alpha\cos\varphi\sin\varphi-$$

$$-R\cdot b\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\vartheta-(h-m)\cdot b\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\varphi]=\frac{1}{|\bar{n}|}\cdot f_2(\varphi,\vartheta).$$

$$\mu_3\cdot|\bar{v}|=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \nu_1 & \nu_2\end{vmatrix}=\frac{1}{|\bar{n}|}\cdot\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \nu_1|\bar{n}| & \nu_2|\bar{n}|\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|\bar{n}|}\cdot\Big|\cos\alpha-b\cdot c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi+R\cdot b\cdot\sin\alpha\cdot\sin(\varphi-\vartheta)$$

$$-\sin\alpha\cdot\sin\varphi\,(h-m)\cdot b\cdot\sin\alpha\cdot\cos\varphi-(c-R\cos\vartheta)\,b\cdot\cos\alpha\,|=$$

$$=\frac{1}{|\bar{n}|}\cdot[(h-m)\,b\cdot\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\varphi+R\cdot b\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin\varphi\cdot\sin(\varphi-\vartheta)-$$

$$-b\cdot c\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin^2\varphi-(c-R\cos\vartheta)\,b\cdot\cos^2\alpha]=\frac{1}{|\bar{n}|}\cdot f_3(\varphi,\ \vartheta).$$

In awareness of the directional cosines μ_1, μ_2, μ_3 of vector $\bar{v}$, the coordinates of point $B(x_B, y_B, z_B)$ are

$$x_B=x_A+a\cdot\cos\alpha_v$$

$$y_B=y_A+a\cdot\cos\beta_v$$

$$z_B=z_A+a\cdot\cos\gamma_v$$

where α_v, β_v, γ_v denote the directional angles of vector $\bar{v}$.

Taking into account the coordinates of point $A(x_A, y_A, z_A)$ and the value of the directional cosines of vector $\bar{v}$, the coordinates of point B will be obtained from the following expressions :

$$x_B = m - b \cdot \cos\alpha + a \cdot \mu_1 = m - b \cdot \cos\alpha + \frac{a}{|\bar{n}| \cdot |\bar{v}|} \cdot f_1(\varphi, \vartheta)$$

$$y_B = b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi + a \cdot \mu_2 = b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi + \frac{a}{|\bar{n}| \cdot |\bar{v}|} \cdot f_2(\varphi, \vartheta)$$

$$z_B = -b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi + a \cdot \mu_3 = -b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi + \frac{a}{|\bar{n}| \cdot |\bar{v}|} \cdot f_3(\varphi, \vartheta)$$

The value of the coefficient of proportion $\frac{1}{|\bar{n}| \cdot |\bar{v}|}$ can be determined. Namely

$$\mu_1 = \frac{1}{|\bar{n}| \cdot |\bar{v}|} \cdot f_1(\varphi, \vartheta)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{|\bar{n}| \cdot |\bar{v}|} \cdot f_2(\varphi, \vartheta)$$

$$\mu_3 = \frac{1}{|\bar{n}| \cdot |\bar{v}|} \cdot f_3(\varphi, \vartheta)$$

Adding up the squares of the directional cosines

$$1 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \frac{1}{\{|\bar{n}| \cdot |\bar{v}|\}^2} \cdot \{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2\}$$

wherefrom the coefficient of proportion :

$$\frac{1}{|\bar{n}| \cdot |\bar{v}|} = \frac{1}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} .$$

Hence, the coordinates of point B are :

$$x_B = m - b \cdot \cos\alpha + a \cdot \frac{f_1(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}}$$

$$y_B = b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi + a \cdot \frac{f_2(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi,)]^2}}$$

$$z_B = -b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi + a \cdot \frac{f_3(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} .$$

The relation between rotational angles φ and ϑ is obtained by forming the square of the distance between points $B(x_B, y_B, z_B)$ and $C(x_C, y_C, z_C)$:

$$d^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 ,$$

or in detail :

$$d^2 = \left\{ - m + b \cdot \cos\alpha + h - a \cdot \frac{f_1(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}^2 +$$

$$+ \left\{ -b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi + R \cdot \sin\vartheta - a \cdot \frac{f_2(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}^2 +$$

$$+ \left\{ -R \cdot \cos\vartheta + c + b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi - a \cdot \frac{f_3(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}^2 .$$

Taking the distance between points C and D of arm of d direction for $\underline{l}$, in awareness of the coordinates of point B and of the directional cosines of $\underline{d}$, also the coordinates of point $D(x_D, y_D, z_D)$ can be written, viz :

$$x_D = x_B + (d + 1) \cdot \cos\alpha_d$$
$$y_D = y_B + (d + 1) \cdot \cos\beta_d$$
$$z_D = z_B + (d + 1) \cdot \cos\gamma_d$$

where $\cos\alpha_d$, $\cos\beta_d$, $\cos\gamma_d$ denote the directional cosines of vector $\underline{d}$. As, however, the directional cosines of that vector are

$$\cos\alpha_d = \frac{x_C - x_B}{d} =$$

$$= \frac{1}{d} \cdot \left\{ b \cdot \cos\alpha + h - m - a \cdot \frac{f_1(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}$$

$$\cos\beta_d = \frac{y_C - y_B}{d} =$$

$$= \frac{1}{d} \cdot \left\{ R \cdot \sin\vartheta - b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi - a \cdot \frac{f_2(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}$$

$$\cos\gamma_d = \frac{z_C - z_B}{d} =$$

$$= \frac{1}{d} \cdot \left\{ c + b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi - R \cdot \cos\vartheta - a \cdot \frac{f_3(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\} .$$

Taking into account the directional cosines and the coordinates of point $B(x_B, y_B, z_B)$

$$x_D = m - b \cdot \cos\alpha + a \cdot \frac{f_1(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} +$$

$$+ \frac{d+l}{d} \cdot \left\{ b \cdot \cos\alpha + h - m - a \cdot \frac{f_1(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}$$

$$y_D = b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi + a \cdot \frac{f_2(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} +$$

$$+ \frac{d+l}{d} \cdot \left\{ R \cdot \sin\vartheta - b \sin\alpha \cdot \sin\varphi - a \cdot \frac{f_2(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}$$

$$z_D = -b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi + a \cdot \frac{f_3(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} +$$

$$+ \frac{d+l}{d} \cdot \left\{ c + b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi - R \cdot \cos\vartheta - a \frac{f_3(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}$$

or, after reducing the formula, the coordinates of point D

$$x_D = \frac{1}{d} \cdot \left\{ l \cdot b \cdot \cos\alpha + (d+l) \cdot h - m \cdot l - a \cdot l \cdot \frac{f_1(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}$$

$$y_D = \frac{1}{d} \cdot \left\{ (d+l) \cdot R \cdot \sin\vartheta - l \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi - a \cdot l \cdot \frac{f_2(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}$$

$$z_D = \frac{1}{d} \cdot \left\{ l \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi + (d+l)(c - R \cdot \cos\vartheta) - \right.$$

$$\left. - a \cdot l \cdot \frac{f_3(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right\}.$$

Finally, expressing the coordinates of the looper's point $P(x\,y\,z)$ as the function of rotational angle φ, the system of equations obtained yields the parametric system of equations of the three-dimensional curve described by the looper's point.

For the sake of broad generalization, we assume that vector $\overrightarrow{DP} = \bar{k}$ forms angle ε with plane O_1AC, in arbitrary sense. $\overrightarrow{DP}$ being a straight line, it traverses point $D(x_D, y_D, z_D)$ of the plane
therefore

$$A_1 x_D + B_1 y_D + C_1 z_D + D_1 = 0\,.$$

On the other hand, the system of equations of the straight line DP :

$$y_D = B_2 x_D + B_3$$
$$z_D = C_2 x_D + C_3 .$$

From the latter three systems of equations, the coordinates of the intersection of the plane and of the straight line D

$$x_D = - \frac{B_1 B_3 + C_1 C_3 - D_1}{A_1 + B_1 B_2 + C_1 C_2}$$

$$y_D = \frac{A_1 B_3 + C_1 (C_2 B_3 - B_2 C_3) + D_1 B_2}{A_1 + B_1 B_2 + C_1 C_2}$$

$$z_D = \frac{A_1 C_3 + B_1 (B_2 C_3 - C_2 B_3) + D_1 C_2}{A_1 + B_1 B_2 + C_1 C_2} .$$

In the above system of equations, B_2, B_3, and C_2, C_3 are unknown. To solve the system for these unknowns, an additional equation is needed. The directional cosines of the normal $\bar{n}$ and vector $\overrightarrow{DP} = \bar{k}$ of plane $O_1 A C$ being

$$\nu_1 = \cos \alpha_n = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

$$\nu_2 = \cos \beta_n = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

$$\nu_3 = \cos \gamma_n = \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}},$$

and

$$\cos \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{1 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\cos \beta_k = \frac{B_2}{\sqrt{1 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\cos \gamma_k = \frac{C_2}{\sqrt{1 + B_2^2 + C_2^2}}$$

respectively, therefore

$$\sin \varepsilon = \cos (90^\circ - \varepsilon) = \cos \alpha_n \cdot \cos \alpha_k + \cos \beta_n \cdot \cos \beta_k + \cos \gamma_n \cdot \cos \gamma_k ,$$

or, after substituting the directional cosines

$$\sin \varepsilon = \frac{A_1 + B_1 B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)\,(1 + B_2^2 + C_2^2)}} .$$

Adding the above expression to the system expressing the coordinates of the intersection of plane O_1AC and of vector $\overrightarrow{DP} = \bar{k}$, and solving for the unknowns B_2, B_3, C_2 and C_3, the form of solutions obtained

$$B_2 = F_1(\varphi,\ \vartheta)$$

$$B_3 = F_2(\varphi,\ \vartheta)$$

$$C_2 = F_3(\varphi,\ \vartheta)$$

$$C_3 = F_4(\varphi,\ \vartheta),$$

by means of which the directional cosines of vector $\overrightarrow{DP} = \bar{k}$

$$\cos \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{1 + [F_1(\varphi,\ \vartheta)]^2 + [F_3(\varphi,\ \vartheta)]^2}}$$

$$\cos \beta_k = \frac{F_1(\varphi,\ \vartheta)}{\sqrt{1 + [F_1(\varphi,\ \vartheta)]^2 + [F_3(\varphi,\ \vartheta)]^2}}$$

$$\cos \gamma_k = \frac{F_3(\varphi,\ \vartheta)}{\sqrt{1 + [F_1(\varphi,\ \vartheta)]^2 + [F_3(\varphi,\ \vartheta)]^2}} .$$

Once the directional cosines of vector $\overrightarrow{DP} = \bar{k}$ have been derived, with their use the coordinates of the point $P(x\,y\,z)$ of the looper

$$x = x_D + k \cdot \cos \alpha_k$$

$$y = y_D + k \cdot \cos \beta_k$$

$$z = z_D + k \cdot \cos \gamma_k$$

or, in detail:

$$x = \frac{1}{d} \cdot \left\{ l \cdot b \cdot \cos\alpha + (d+l) \cdot h - ml - al \cdot \frac{f_1(\varphi, \vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_2(\varphi, \vartheta)]^2 + [f_3(\varphi, \vartheta)]^2}} + \right.$$

$$\left. + k \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + [F_1(\varphi, \vartheta)]^2 + [F_3(\varphi, \vartheta)]^2}} \right.$$

$$y=\frac{1}{d}\cdot\left\{(d+l)R\cdot\sin\vartheta-l\cdot b\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi-a\cdot l\cdot\frac{f_2(\varphi,\vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi,\vartheta)]^2+[f_2(\varphi,\vartheta)]^2+[f_3(\varphi,\vartheta)]^2}}\right\}+$$

$$+k\cdot\frac{F_1(\varphi,\vartheta)}{\sqrt{1+[F_1(\varphi,\vartheta)]^2+[F_3(\varphi,\vartheta)]^2}}$$

$$z=\frac{1}{d}\cdot\left\{l\cdot b\cdot\sin\alpha\cdot\cos\varphi+(d+l)(c-R\cdot\cos\vartheta)-\right.$$

$$\left.-al\cdot\frac{f_3(\varphi,\vartheta)}{\sqrt{[f_1(\varphi,\vartheta)]^2+[f_2(\varphi,\vartheta)]^2+[f_3(\varphi,\vartheta)]^2}}\right\}+k\cdot\frac{F_3(\varphi,\vartheta)}{\sqrt{1+[F_1(\varphi,\vartheta)]^2+[F_3(\varphi,\vartheta)]^2}}.$$

Solving the relation of the function derived for the span $\overline{BC}=d$ between rotational angles φ and ϑ for ϑ, $\vartheta=f(\varphi)$, by means of which ϑ may be eliminated from the latter system of equations, yielding the parametric system of equations of the space curve described by the looper's point $P(x\,y\,z)$ in the form

$$x=\Phi_1(\varphi)$$
$$y=\Phi_2(\varphi)$$
$$z=\Phi_3(\varphi)$$

As after the elimination of the angular functions of ϑ, each member of the equations contains only the values of sin φ and cos φ, not however φ itself, this means that the coordinates of the moving point take up the same values after each turn, that is to say at each $\varphi+2k\pi$ (where $k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm\ldots$) in other words, the three-dimensional curve thus formed becomes closed.

Ultimately, introducing time as a parameter and substituting $\varphi=\omega t$ after having eliminated the angular functions of ϑ, the equation of the movement of the point describing the three-dimensional curve will be obtained.

On the base of the system of equations thus derived, the exact location of the looper's point along its course can be established at any moment, and in awareness of it, the manner of laying the thread becomes clear for technicians.

REFERENCES

1. A. Vékássy: Ruhaipari géptan (Machinery of the Clothing Industry) II. 1952. In Hungarian.
2. Bekleidung und Wäsche. 1954 Nos. 11—12. 1955 Nos. 11—12.

SUMMARY

In stitch formation, it is most important to know the point at which the looper is to be found at any moment during its movement. The paper deals with the movement of the looper. Departing from the movement of the conic disc fastened to the shaft of the padding machine, the equation expressing the movement of the looper's point is analytically derived. It is demonstrated that the course described by the looper is a closed space curve, and the time factor as a parameter being included in the equations, the locus that the looper's point will

reach on its course after a given time can be predicted. The equations obtained yield also the analysis of the effect of various arm lengths and angles of inclination, and in awereness of them the manner of thread laying appears to be clarified.

DIE BEWEGUNG DES SCHLINGENFÄNGERS DER PIKIERMASCHINE

B. GREGA

ZUSAMMENFASSUNG

Beim Pikierstich ist es von grosser Bedeutung zu wissen, an welchem Punkt seiner Laufbahn der Schlingenfänger während seiner Bewegung angelangt ist. Der Aufsatz befasst sich mit der Schlingenfängerbewegung. Von der Bewegung der an die Maschinenachse befestigten konischen Scheibe ausgehend wird die Bewegungsgleichung der Schlingenfängerspitze analytisch aufgestellt. Es wird ermittelt, dass deren Laufbahn eine geschlossene Raumkurve ist, und da ein Zeitparameter in den Gleichungen vorkommt, kann man vorausbestimmen, an welchem Punkt ihrer Laufbahn die Schlingenfängerspitze nach Ablauf einer gegebenen Zeit angelangt ist. Auf Grund der aufgestellten Gleichungen lässt sich auch der Einfluss verschiedener Armlängen und Fallwinkel ermitteln, in dessen Kenntnis die Art der Fadenlegung als geklärt betrachtet werden kann.

LE MOUVEMENT DU BOUCLEUR DE LA MACHINE À PIQUER

B. GREGA

RÉSUMÉ

Au piqué il est très important de savoir à quel point de son parcours le boucleur est arrivé. L'étude s'occupe du mouvement du boucleur. Prenant pour point de départ le mouvement du disque conique fixé à l'arbre de la machine on établit l'équation analytique du mouvement de la pointe du boucleur. On trouve que ce trajectoire est une courbe d'espace close, et puisque dans les équations figure un paramètre de temps, on peut prédéterminer à quel point de son trajectoire la pointe arrivera dans un temps donné. A la base des équations établies on peut aussi déterminer l'effet de longueurs différentes du bras et de son inclinaison, dans la connaissance duquel la manière de la mise du fil peut être considérée comme éclaircie.

ДВИЖЕНИЕ ПЕТЛИТЕЛЯ ПОДШИВОЧНОЙ МАШИНЫ

Б. ГРЕГА

РЕЗЮМЕ

При образовании строчки очень важно знать — в каком месте своего пути находится петлитель. В статье рассматривается движение петлителя. Исходя из движения прикрепленного к оси машины конического диска, аналитическим путем выводится уравнение движения кончика петлителя. Доказывается,что траектория этого движения — замкнутая пространственная кривая, а ввиду того, что в уравнении в качестве одного из параметров фигурирует также время, можно предварительно установить : в какой точке своей траектории будет находиться через определенное время рабочий кончик петлителя. На основе выведенных уравнений можно анализировать также влияние измерения длины рычага и угла наклона. А зная все эти данные, метод нитепрокладывания также можно считать уясненным.

EIN PROBLEM DER REGELUNG VON FAHRZEUGDIESELMOTOREN

T. SZIRTES

FAHRZEUG-ENTWICKLUNGS INSTITUT, BUDAPEST

[Eingegangen am 12. August 1955]

Eine wichtige, an Dieselmotoren gestellte Forderung ist ihre sogenannte Elastizität. Unter diesem Begriff versteht man die Eigenschaft des Motors, durch kleine Drehzahlschwankungen auf Belastungsänderungen zu reagieren. Demnach kann beim Vergleich zweier Motoren derjenige als elastischer betrachtet werden, bei dem eine gewisse Belastungssteigerung eine kleinere Drehzahlverminderung verursacht.

Daraus folgt, dass sich das Ausmass der Elastizität aus der Steilheit der Drehmomentkurve ergibt.

Bei einer gewissen Drehzahl erhält man das Motordrehmoment bekanntlich aus folgender Gleichung:

$$M = Z \cdot \eta_g \cdot F_{\text{mkg}} \qquad (1)$$

Hier bedeutet:

G das Volumen des je Takt und Zyklus eingeführten Kraftstoffes

η_g = den wirtschaftlichen Wirkungsgrad

Z = einen Koeffizienten, dessen Wert von den Eigenschaften des Motors und des Kraftstoffes abhängig ist.

Soll das Drehmoment verändert werden, so ändert sich in der erwähnten Gleichung natürlicherweise nur G. Die Änderung von G bedeutet die Steuerung der Einspritzpumpe, die zugleich die einzige Regelweise des Motors ist.

Die Verschiebung von G nach rechts von dem später zu bestimmenden Regelpunkt (nach den höheren Drehzahlen zu) ist von den Eigenschaften des Reglers, nach links dagegen von den weiteren Eigenschaften der Einspritzpumpe und des Motors abhängig. Demnach hängt die — hinsichtlich der Elastizität bedeutende — Form der Kurve $M = M(n)$ von der Form der Kurve $G = G(n)$ ab (n = Motordrehzahl).

Der Verfasser stellte sich die Aufgabe festzustellen, welche Faktoren den Ablauf der Kurve $G = G(n)$ und dadurch die Elastizität des Motors bestimmen.

Die angestellten Untersuchungen wurden an sog. Drehkolben-Einspritzpumpen durchgeführt, die in Ungarn meistverbreitet sind und deren Regler sog. Fliehkraftregler sind.

I

Abb. 1 zeigt den Aufbau des Modells, an dem die Untersuchungen durchgeführt wurden. Das mit der Einspritzpumpenwelle gemeinsam umlaufende Fliehgewicht wird durch die Zentrifugalkraft entgegen der wirkenden Federkraft nach aussen bewegt. Diese Bewegung wird durch das schematisch dar-

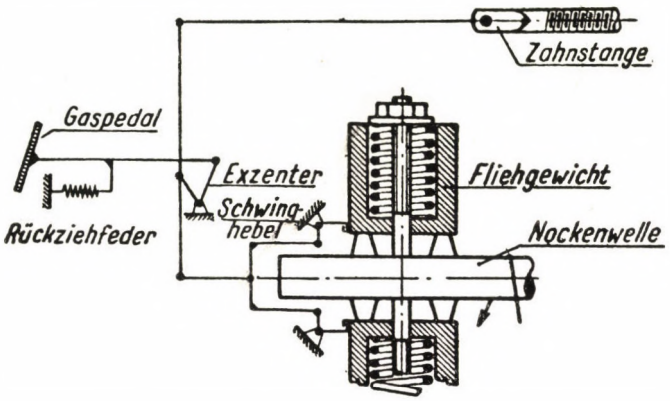


Abb. 1. Kinematik der Einspritzpumpe

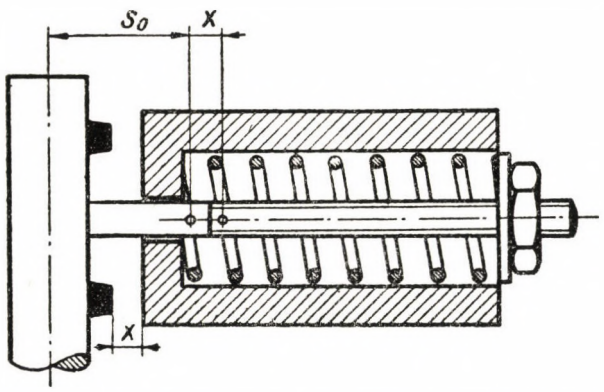


Abb. 2. Das Fliehgewicht bewegte sich von der Ausgangstellung um die Entfernung x

gestellte Gestänge auf die Regelstange übertragen, die sich nun ebenfalls verschiebt, wodurch die Einspritzmenge G vermindert wird.

Aus der Gestängeanordnung folgt, dass der Vorgang bei jeglicher Stellung des Gaspedals in gleicher Weise stattfindet. Nur der zahlenmässige Wert der maximalen Einspritzmenge vermindert sich beim Freilassen des Gaspedals.

Bei einer gewissen Drehzahl n bezieht das Fliehgewicht die Gleichgewichtsstellung nach Abb. 2. (In Abb. 2 wurde einfachheitshalber nur eine Feder ge-

zeichnet. In Wirklichkeit werden 2, bzw. 3 Federn angewandt. Es kann bewiesen werden, dass 2 oder 3 Federn im Regelbereich jederzeit durch eine einzige Feder ersetzt werden können.) Angenommen sei, dass sich das Fliehgewicht von der Ausgangstellung um die Entfernung x bewegt hat. Gleichgewicht kann nur dann bestehen, wenn sich die Zentrifugalkraft und die Federkraft ausgleichen.

Die Zentrifugalkraft ist

$$C = m\,(s_0 + x) \cdot \omega^2 \qquad \text{kg} \quad (2)$$

worin m = die Masse des Fliehgewichts (kg · sec²/m)

s_0 = Entfernung des Fliehgewichtschwerpunktes von der Umdrehungsachse in Ausgangsstellung (m)

ω = Winkelgeschwindigkeit 1/sec.

Die Federkraft ist

$$R = k_1\,(e + x) \qquad \text{kg} \quad (3)$$

worin k_1 = Federkonstante (kg/m)

e = Vorspannung der Feder (m)

Wie gesagt, ist

$$C = R$$

bzw.

$$m\,(s_0 + x)\,\omega^2 = k_1\,(c + x)\,.$$

Aus dieser Gleichung wird

$$x = \frac{k_1 \cdot e - m \cdot s_0 \cdot \omega^2}{m \cdot \omega^2 - k_1} \cdot m \qquad (4)$$

Da in der Praxis im allgemeinen mit der Drehzahl gerechnet wird, setzt man an Stelle von $\omega_1 - n$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} \qquad \omega^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{3600} \cdot n^2 = k_2 \cdot n^2$$

wo $$k_2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{3600} = 10{,}96 \cdot 10^{-3} \qquad \left(\frac{\text{Min}}{\text{sec}}\right)^2 \quad \text{ist.}$$

Wird nun dieser Wert in Gleichung (4) gesetzt, so ergibt sich

$$x = \frac{k_1 e - m \cdot s_0 \cdot k_2 \cdot n^2}{m \cdot k_2 \cdot n^2 - k_1} \qquad \text{m.} \quad (5)$$

Führt man die Konstante $k_3 = k_2 \cdot m$ ein und multipliziert Zähler und Nenner mit -1, so ergibt sich

$$x = \frac{s_0 \cdot k_3 \cdot n^2 - k_1 \cdot e}{k_1 - k_3 \cdot n^2}. \qquad \text{m.} \quad (6)$$

Wird nun der Zähler und Nenner durch k_3 dividiert und die Konstante

$$k_4 = \frac{k_1}{k_3}$$

eingeführt, so erhält man

$$x = \frac{s_0 \cdot n^2 - k_4 \cdot e}{k_4 - n^2} \qquad \text{m.} \quad (7)$$

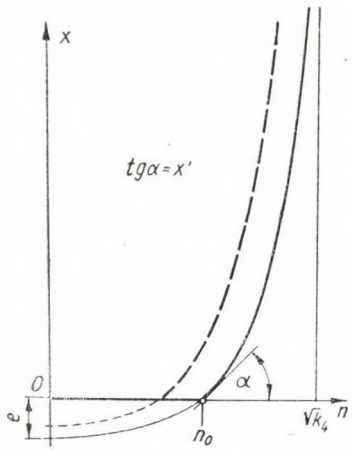


Abb. 3

Bei Darstellung in einem Koordinatensystem, dessen Abszisse die Motorendrehzahl, und dessen Ordinate x anzeigt, gelangt man zur Kurve laut Abb. 3.

Die charakteristischen Punkte dieser Kurve ergaben sich aus folgenden Erwägungen:

1. Bei $n = 0$ ist $x = -e$
2. Auf der Achse n liegt n_0 an der Stelle, wo die rechte Seite der Gleichung verschwindet.

$$s_0 \cdot n^2 - k_4 \cdot e = 0$$

woraus

$$n_0 = \sqrt{k_4 \frac{e}{s_0}} \qquad \text{1/Min.} \quad (8)$$

3. Die zur Achse x parallele Asymptote der Kurve schneidet die Achse n bei einer Drehzahl, wo der Nenner der rechten Seite verschwindet

$$k_4 - n^2 = 0 .$$

Daraus folgt

$$n = \sqrt{k_4} \qquad 1/\text{Min.} \quad (9)$$

Wie aus Abb. 3 ersichtlich, ist $x < 0$ wenn $n < n_0$, wo ersteres natürlich keine physikalische Bedeutung hat, da der niedrigste Wert von $x = 0$ ist. Daraus folgt, dass zwischen n_0 und 0 die Kurve mit der Abszisse n zusammenfällt, sowie, dass bei $n = n_0$ die Kurve einen Brechungspunkt besitzt.

Schliesslich ergibt sich die in Abb. 3 fettgedruckte Kurve. Zu jeder Vorspannung e gehört eine andere Kurve, d. h. bei Änderung der Vorspannung wird auf eine andere Kurve übergesprungen.

Aus der Gleichung (8) ist ersichtlich, dass die Lage von n_0 durch Änderung der Vorspannung e leicht beeinflussbar ist ; e ist nämlich unter dem Wurzelzeichen, d. h., dass die Änderung von n_0 mit der Quadratwurzel der Änderung von e proportional ist.

Es ist interessant, dass die höchstmögliche Drehzahl $n_{max} = \sqrt{k_4}$ von der Federvorspannung unabhängig ist. Wie oben angeführt, ist nämlich

$$\sqrt{k_4} = \sqrt{\frac{k_1}{m \cdot k_2}} \qquad 1/\text{Min.},$$

darin ist k_1 die Federkonstante, m die Masse des Fliehgewichtes und k_2 eine dimensionslose Zahl.

1. *Beispiel :* Bei den in Ungarn meist gebräuchlichen PAL-Pumpen sind die entsprechenden Werte folgende :

Federkonstante

$$k_1 = 3300 \text{ kg/m.}$$

Masse des Fliehgewichtes

$$m = \frac{G}{g} = \frac{0{,}71}{9{,}81} = 0{,}0724 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}}$$

worin G das Gewicht des Fliehgewichtes (710 gr)
g die Erdbeschleunigungskonstante 9,81 m/sec^2
$k_2 = 10{,}96 \cdot 10^{-3}$ (min./sec)^2 ist.
Daraus folgt

$$\sqrt{k_4} = \sqrt{\frac{k_1}{m \cdot k_2}} = 2040 \quad 1/\text{Min} .$$

Bei Viertaktmotoren beträgt die Einspritzpumpendrehzahl die Hälfte der Motordrehzahl, die höchstmögliche Motordrehzahl bei der PAL-Einspritzpumpe beträgt also

$$n_{\max} = 4080 \qquad \text{1/Min.}$$

Dies ist natürlich die äusserste Grenze. In Wirklichkeit kann die Kurbelwellendrehzahl niemals diesen hohen Wert erreichen, da zu dieser Drehzahl ein unendlich grosser Fliehgewichtausschlag gehört, was schon deshalb nicht

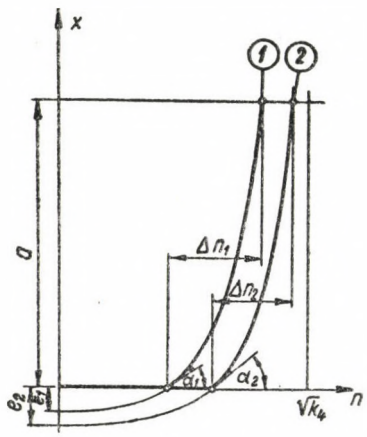


Abb. 4

möglich ist, da die Feder völlig zusammengedrückt jede weitere Bewegung der Fliehgewichte verhindert.

Zu jedem Fliehgewichtausschlag x gehört ein gegebener Einspritzmengenabfall, es ist daher nicht gleichgültig, welche Drehzahlsteigerung durch diesen Mengenabfall verursacht wird.

In Abb. 4 sind 2 Kurven dargestellt, die sich auf 2 verschiedene Vorspannungen e_1 und e_2 der gleichen Feder beziehen.

Ist der Fliehgewichtausschlag von der Ausgangstellung z. B. a (das einem genau gegebenen Einspritzmengenabfall entspricht), so beträgt die Drehzahl im Punkt $x = a$

$$n_a = \sqrt{k_4 \frac{a+e}{a+s_0}} \qquad \text{1/Min.} \quad (10)$$

Diese Gleichung ergab sich, indem der Verfasser in (7) $x = a$ setzte und schliesslich die Drehzahl (n_a) ausdrückte. Auf Grund der Abbildung ist

$$\Delta_n = n_a - n_0 \qquad \text{1/Min.} \quad (11)$$

Setzt man nun an Stelle von n_a den Wert von (10) und an Stelle von n_0 den Wert von (8), so ist

$$\Delta_n = \sqrt{k_4}\left(\sqrt{\frac{a+e}{a+s_0}} - \sqrt{\frac{e}{s_0}}\right) \qquad 1/\text{Min}. \quad (12)$$

Nun muss entschieden werden, ob bei Änderung (z. B. Steigerung) der Vorspannung e die Regeldrehzahl steigt oder fällt.

Um diese Frage beantworten zu können, wird folgende Derivation der Gleichung (12) auf e durchgeführt:

$$\frac{d}{de}\Delta n = \sqrt{k_4}\left(\frac{1}{2(a+s_0)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a+e}{a+s_0}}} - \frac{1}{2s_0\sqrt{\frac{e}{s_0}}}\right). \qquad (13)$$

Ist die Summe des Ausdruckes in Klammer negativ, so fällt Δn bei Steigerung von e, im entgegengesetzten Falle steigt Δn. Es kann nun bewiesen werden, dass jene Summe in jedem Falle negativ ist. Da $k_4 > 0$, ergibt sich die Voraussetzung

$$\frac{1}{2(a+s_0)\sqrt{\frac{a+e}{a+s_0}}} < \frac{1}{2s_0\sqrt{\frac{e}{s_0}}}.$$

Dessen Reziproke

$$2(a+s_0)\sqrt{\frac{a+e}{a+s_0}} > 2s_0\sqrt{\frac{e}{s_0}} \text{ ist.}$$

Weiter geordnet:

$$(a+s_0)^2\left(\frac{a+e}{a+s_0}\right) > s_0^2\,\frac{e}{s_0}$$

$$(a+s_0)(a+e) > s_0$$

$$a^2 + ae + as_0 > 0\,.$$

Da jedes Glied auf der linken Seite positiv ist, ist die Voraussetzung erfüllt und die Feststellung begründet.

Daraus folgt, dass bei Steigerung der Vorspannung der Regeldrehzahlbereich zusammenschrumpft. Im Falle der Kurve 2 in Abb. 4, da

$$e_2 > e_1\,, \quad \text{folgt:} \quad \Delta n_2 < \Delta n_1\,.$$

2. *Beispiel.* Es soll ein Fliehgewichtausschlag von 2 mm = 0,002 m angenommen werden, entsprechend einem Mengenabfall von 25 mm³. Weiterhin sei die gebräuchliche Vorspannung 10 mm = 0,01 m. Bei PAL-Pumpen beträgt s_0 = 0,0375 m. Mit diesen Werten wird

$$\Delta n_1 = 2040 \left(\sqrt{\frac{0{,}002 + 0{,}01}{0{,}002 + 0{,}0375}} - \sqrt{\frac{0{,}010}{0{,}0375}} \right) =$$

$$= 70{,}95 \div 142 \text{ Motorumdrehungen.}$$

Vergrössert man nun die Vorspannung um 2 mm auf 12 mm = 0,012 m, so wird

$$\Delta n_2 = 2040 \left(\sqrt{\frac{0{,}002 + 0{,}012}{0{,}002 + 0{,}0375}} - \sqrt{\frac{0{,}012}{0{,}0375}} \right) =$$

$$= 60{,}58 \div 121 \text{ Motorumdrehungen.}$$

Die Differenz

$$\Delta n_1 - \Delta n_2 = 142 - 121 = 21$$

Motorumdrehungen, was rund 15% Verminderung des Regeldrehzahlbereiches ergibt. Die Regelbeginndrehzahl (Position des Regelpunktes) ist im ersten Falle

$$n_{0,1} = \sqrt{k_1 \frac{e_1}{s_0}} = 2040 \sqrt{\frac{0{,}01}{0{,}0375}} = 1053 =$$

$$= 2106 \text{ Motorumdrehungen.}$$

Im zweiten Falle

$$n_{0,2} = \sqrt{k_4 \frac{e_2}{s_0}} = 2040 \sqrt{\frac{0{,}012}{0{,}0375}} = 1153 =$$

$$= 2306 \text{ Motorumdrehungen.}$$

Die Differenz beträgt

$$n_{0,2} - n_{0,1} = 200 \text{ Motorumdrehungen,}$$

also rund 9%.

Aus diesem Beispiel ist klar zu ersehen, dass die Steilheit der Drehmomentkurve mit der Steigerung der Federvorspannung wächst. Ist man nicht durch sonstige Umstände gebunden und kann man die Betriebsdrehzahl zwischen gewissen Grenzen frei wählen, so lässt sich mittels Vorspannung der Feder die Elastizität des Motors (Steilheit der Drehmomentkurve) empfindlich beeinflussen.

Schwieriger ist es die Elastizität zu steigern, falls die Regelanfangsdrehzahl, der sog. Regelpunkt im voraus festliegt.

Vor der Erläuterung der in diesem Falle zu befolgenden Methode deriviert man — vorläufig ohne es zu begründen — die Gleichung (7)

$$\frac{d}{dn} \cdot x = 2 \cdot n \cdot k_1 \frac{s_0 - e}{(k_4 - n^2)^2} \qquad \text{m. Min.} \quad (14)$$

Schreibt man nun statt n, n_0, so erhält man die Steigung der Kurve im Regelpunkt. Setzt man nun den Wert von n_0 (8) in den Ausdruck (14), so erhält man, geordnet

$$x_{n=n_0} = 2\sqrt{k_4 \frac{e}{s_0}} \cdot \frac{s_0^2}{k_4(s_0 - e)} \qquad \text{m. Min.} \quad (15)$$

Ist nun $s_0 > e$ (und diese Bedingung erfüllt sich in jedem Falle), so wächst x' mit der Steigerung der Federvorspannung. Das ist leicht einzusehen: Die rechte Seite der Gleichung (15) ist die Summe einer Multiplikation dreier Faktoren. Bei Steigerung der Vorspannung wächst der zweite und dritte. Folglich wächst auch deren Multiplikationssumme. Diese Erscheinung kann auf der Abb. 4 auch genau verfolgt werden, wo $a_1 < a_2$ ist, weil $e_1 < e_2$. Gleichung (15) bedeutet also, dass durch Steigerung der Vorspannung die Anfangssteigung der Kurve wächst, wodurch die Steilheit der ganzen Kurve, folglich auch die Elastizität wächst.

Nach Voraussetzung des Verfassers muss $x_n' = n_0$ so vergrössert werden, dass inzwischen $n_0 = \sqrt{k_4 \frac{e}{s_0}}$ unverändert bleibt (der Regelpunkt). Diese Anforderung bedeutet, dass der Wert des dritten Faktors der rechten Seite der Gleichung (15) so vergrössert wird, dass dabei der Wert des zweiten Faktors unverändert bleibt.

Um diese Aufgabe zu erfüllen, setzt man den Wert

$$k_4 = \frac{k_1}{m \cdot k_2}$$

in Gleichung (15)

$$x_{n=n_0} = 2 \cdot \sqrt{\frac{k_1 \cdot e}{m \cdot k_2 \cdot s_0}} \cdot \frac{s_0^2 \cdot m \cdot k_2}{k \cdot (s_0 - e)} \qquad \text{m. Min.} \quad (16)$$

Man versuche zuerst eine schwächere Feder. Die schwächere Feder bedeutet, dass die Federkonstante k_1 sich um Δk_1 auf $(k_1 - \Delta k_1)$ vermindert. Da aber das zweite Glied der rechten Seite unverändert bleiben muss, ist Steigerung der Vorspannung nötig. e wird also um Δe auf $(e + \Delta e)$ vergrössert, dadurch bleibt das zweite Glied unverändert.

Das dritte Glied wächst einerseits, da der eine Faktor (k_1) des Nenners kleiner wird, anderseits verkleinert es sich, da der andere Faktor des Nenners wächst [e wächst auf $(e + \Delta e)$, von s_0 muss also eine grössere Zahl subtrahiert werden]. Die Frage ist nun, ob das dritte Glied der Gleichung (16) sich verkleinert oder wächst. Um diese Frage zu beantworten, wird eine einfache Rechnung durchgeführt.

Das zweite Glied der Gleichung (16) bleibt konstant wenn

$$k_1 \cdot e = \text{konstant},$$

es wird daher

$$(k_1 - \Delta k_1)(e + \Delta e) = k_1 e \qquad \text{kg} \quad (17)$$

und daraus

$$(e + \Delta e) = \frac{k_1}{k_1 - \Delta k_1} \cdot e \qquad \text{m.} \quad (18)$$

Der veränderte Wert von $x'_{n=n_0}$ ist $x'^*_{n=n_0}$

$$x'^*_{n=n_0} = 2 \cdot \sqrt{\frac{(k_1 - \Delta k_1)(e + \Delta e)}{m \cdot k_2 \cdot s_0}} \cdot \frac{k_2 \cdot s_0^2 \cdot m}{(k_1 - \Delta k_1)[s_0 - (e + \Delta e)]}.$$

Die Werte von $e + \Delta e$ aus (18) und von $(k_1 - \Delta k_1)(e + \Delta e)$ aus (17) eingesetzt, sind

$$x'^*_{n=n_0} = 2 \sqrt{\frac{k_1 \cdot e}{m \cdot k_2 \cdot s_0}} \cdot \frac{k_2 \cdot s_0^2 \cdot m}{(k_1 - \Delta k_1)\left(s_0 - \frac{k_1}{k_1 - \Delta k_1} \cdot e\right)} \cdot \qquad (19)$$

Vom Verfasser wird behauptet, dass

$$x'^*_{n=n_0} > x'_{n=n_0} \quad \text{ist.} \qquad (20)$$

Dies ist leicht zu beweisen.

Die rechte Seite der Gleichung (16) besteht aus zwei Gliedern. Beide Glieder sind bestimmt grösser als die entsprechenden Glieder in (19)

$$(k_1 - \Delta k_1)\left(s_0 - \frac{k_1}{k_1 - \Delta k_1} \cdot e\right) < k_1 (s_0 - e)$$

weil

$$k_1 - \Delta k_1 < k_1$$

und

$$s_0 - \frac{k_1}{k_1 - \Delta k_1} e < s_0 - e \quad \text{ist.} \qquad (21)$$

Letztere Gegenüberstellung ist darum wahr, weil

$$\frac{k_1}{k_1 - \Delta k_1} > 1 \quad \text{ist.}$$

Damit wird die Behauptung des Verfassers (20) bestätigt. Aus alldem folgt, dass bei Anwendung einer schwächeren Feder, bei gleichzeitiger Festlegung des Regelpunktes durch entsprechende Änderung der Vorspannung, die Elastizität des Motors wächst.

3. Beispiel. In Beispiel 2 wird gezeigt, dass bei einem Fliehgewichtausschlag von 2 mm (entsprechend einer Dosisverminderung von 25 mm³) der Drehzahlbereich, in welchem dieser Dosisabfall erfolgt, etwa 142 Motorumdrehungen entspricht.

In diesem Beispiel ist der Wert der Federkonstante $k_1 = 3300$ kg/m und die Vorspannung $e = 10$ mm. Wird die Federkonstante k_1 von 3300 auf 2500 vermindert, so muss natürlicherweise die Vorspannung e entsprechend vergrössert werden, um den Regelpunkt an gleicher Stelle zu behalten.

Den veränderten Wert der Vorspannung ergibt Gleichung (18):

$$e^* = \frac{k_1}{k_1^*} \cdot e \tag{22}$$

mit den entsprechenden Zahlenwerten wird

$$e^* = \frac{3300}{2500} \cdot 0{,}01 = 0{,}0132 \text{ m}.$$

Der Vorspannungswert der Feder stieg also von 10 auf 13,2 mm.

Die zur weiteren Berechnung nötigen Konstanten sind:

$$k_2 = k_2^* = 10{,}96 \cdot 10^{-3} \text{ (Min/sec)}^2$$

$$k_3 = k_3^* = 0{,}793 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{Min}^2/\text{m}$$

$$k_4^* = k_1^*/k_3^* = (2500/0{,}793) \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 153 \cdot 10^6 \text{ 1/Min}^2$$

$$\sqrt{k_4^*} = 1775 \text{ 1/Min Einspritzpumpendrehzahl.}$$

Die Lage des Regelpunktes

$$n_0 = \sqrt{k_4^*} \sqrt{\frac{e^*}{s_0}} - 1775 \sqrt{0{,}352} = 1053 \div 2106 \text{ Motorumdrehungen}$$

ist natürlich gleich dem Originalwert.

Der veränderte Regeldrehzahlbereich ist somit

$$\Delta n^* = \sqrt{k_4^*} \sqrt{\frac{a + e^*}{a + s_0}} - n_0^* = 1104 - 1053 =$$

$$= 51 \div 102 \text{ Motorumdrehungen.}$$

Der Regeldrehzahlbereich ist demnach von 142 auf 102 geschrumpft.

Der Unterschied beträgt 40 Umdrehungen, also rund 28,5%. Die Verminderung der Federkonstante ist 3300 — 2500 = 800 kg/m, das sind nur 24%. Daraus ist der günstige Umstand zu ersehen, dass das Regeldrehzahlbereich sich in höherem Grade verkleinert als die Federkonstante.

Eine andere Methode der Elastizitäts-Steigerung ist die Vergrösserung der Fliehgewichtsmasse oder der Schwerpunktentfernung.

Das Benutzen von Material entsprechenden spezifischen Gewichtes, z. B. die Ausfüllung von Bohrungen im Fliehgewicht mit Blei, vergrössert m und s_0 gleichzeitig.

In diesem Falle wird der Regelpunkt ebenfalls durch entsprechende Änderung der Vorspannung festgelegt.

Der Übersicht wegen wird der Ausdruck der Steilheit der Kurve im Regelpunkt nochmals niedergeschrieben.

$$x'_{n=n_0} = 2\sqrt{\frac{k_1 \cdot e}{m \cdot s_0 \cdot k_2}} \cdot \frac{s_0^2 \cdot m \cdot k_2}{k_1 (s_0 - e)} \qquad \text{m. Min.} \quad (16)$$

Bleibt die Lage des Regelpunktes unverändert, so ändert sich der Wert des zweiten Gliedes natürlicherweise nicht. Dies erreicht man durch Vergrösserung der Vorspannung e. Es wird also

$$\frac{k_1 \cdot e}{m \cdot s_0 \cdot k_2} = \frac{k_1 (e + \Delta e)}{(m + \Delta m)(+ \Delta s s_{0\,0}) k_2} \qquad (23)$$

da e auf $(e + \Delta e)$, m auf $(m + \Delta m)$ und s_0 auf $(s_0 + \Delta s_0)$ wuchs. Geordnet wird nun

$$e + \Delta e = \frac{(m + \Delta m)(s_0 + \Delta s_0)}{m \cdot s_0} \cdot e \qquad \text{m.} \quad (24)$$

Der Wert der rechten Seite der Gleichung (16) ändert sich, falls die Fliehgewichtsmasse m und die Schwerpunktdistanz s_0 vergrössert wird.

Dies wird etwas eingehender untersucht.

Der veränderte Wert des dritten Gliedes der rechten Seite in Gleichung (16) ist

$$\frac{(m + \Delta m)(s_0 + \Delta s_0)^2 k_2}{k_1 [(s_0 + \Delta s_0) - (e + \Delta e)]} . \qquad (25)$$

Verfasser behauptet, dass dessen Wert grösser ist als der Originalwert

$$\frac{m \cdot s_0^2 \cdot k_2}{k_1 (s_0 - e)} .$$

Somit ist

$$\frac{(m + \Delta m)(s_0 + \Delta s_0)^2 k_2}{k_1 [(s_0 + \Delta s_0) - (e + \Delta e)]} > \frac{m \cdot s_0^2 \cdot k_2}{k_1 (s_0 - e)} . \qquad (26)$$

Es kann also festgestellt werden : Durch Vergrösserung der Fliehgewichtsmasse und deren Schwerpunktdistanz kann die Elastizität des Motors gesteigert werden, falls die Lage des Regelpunktes durch Steigerung der Vorspannung fixiert wird.

Diese Steigerung ist aber, wie aus folgendem Zahlenbeispiel ersichtlich, leider nicht bedeutend.

4. Beispiel. Die untenstehende Skizze zeigt eines der Fliehgewichte des Reglers der Pal-Einspritzpumpe (Abb. 5).

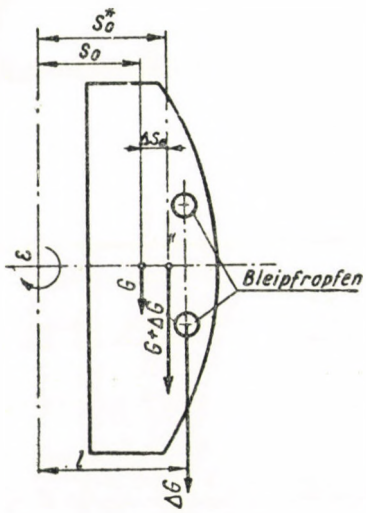


Abb. 5

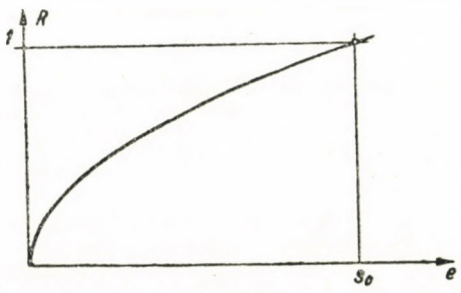


Abb. 6

In Entfernung l von der horizontalen 0 Achse wurden in das Eisenmaterial des Fliehgewichts je zwei 15 mm tiefe Bohrungen ⌀ 6 mm gebohrt. Diese Bohrungen werden dann mit Blei ausgegossen. Da das spezifische Gewicht des Bleis grösser als jenes des Eisens ist, wächst die Masse und die Schwerpunktdistanz des Reglersystems.

Der Unterschied der spezifischen Gewichte beträgt

$$\Delta\gamma = \gamma_{\text{Blei}} - \gamma_{\text{Eisen}} = 11340 - 7800 = 3540 \text{ kg/m}^3 .$$

Der Rauminhalt der 4 Bohrungen ist

$$V = \frac{0{,}6^2 \cdot \pi}{4} \cdot 1{,}5 \cdot 4 = 1{,}696 \text{ cm}^3 = 1{,}696 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

der Gewichtanstieg

$$\Delta G = V \cdot \Delta\gamma = 1{,}696 \cdot 3540 \cdot 10^{-6} \approx 0{,}006 \text{ kg}$$

der Massenanstieg

$$\Delta m = \frac{\Delta G}{g} \quad \frac{0{,}006}{9{,}81} = 0{,}000612 \qquad \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}} .$$

Die veränderte Masse

$$m^* = m + \Delta m = 0{,}0723 + 0{,}000612 = 0{,}073 \quad \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}} .$$

Die veränderte Schwerpunktlage ergibt folgenden Zusammenhang:
Das Moment der Gewichtskräfte auf Punkt 0 bezogen

$$G \cdot S_0 + \Delta G \cdot l = (G + \Delta G) S_0^*$$

und daraus wird

$$S_0^* = \frac{G \cdot S_0 + \Delta G \cdot l}{G + \Delta G}$$

worin:

G	$= 0{,}71$	kg	Gewicht des Fliehgewichtes
S_0	$= 0{,}0375$	m	die originale Schwerpunktdistanz
ΔG	$= 0{,}006$	kg	Gewichtszuwuchs der Fliehgewichte
l	$= 0{,}0475$	m	Entfernung der Bleipfropfen von der Drehachse
$G + \Delta G$	$= 0{,}716$	kg	das angewachsene Gewicht des Fliehgewichtes.

Mit diesen Zahlwerten wird

$$S_0^* = \frac{0{,}710 \cdot 0{,}0375 + 0{,}006 \cdot 0{,}0475}{0{,}716} = 37{,}58 \text{ mm} .$$

Die bei der Berechnung benötigten Konstanten sind in folgendem angeführt:
(Die veränderten Werte werden auch hier mit Stern-Index bezeichnet.)
Die Federkonstante

$k_1 = k_1^* = 3300$ kg/m
$k_2 = k_2^* = 10{,}96 \cdot 10^{-3}$ (Min./Sec.)^2

$$k_3^* = m^* \cdot k_2^* = 0{,}073 \cdot 10{,}96 \cdot 10^{-3} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg} \cdot \text{Min}^2}{\text{m}}$$

$k_4^* = k_1^*/k_3^* = 4125000$ 1/Min^2.
$\sqrt{k_4^*} = 2031$ 1/Min.

Nach Gleichung (24) ist die veränderte Vorspannung

$$e^* = \frac{m^* \cdot S_0^*}{m \cdot S_0} \cdot e = \frac{0{,}073 \cdot 0{,}03758}{0{,}0723 \cdot 0{,}0375} \cdot 0{,}01 = 10{,}17 \text{ mm}.$$

Der Zuwachs der Vorspannung ist daher

$$\Delta e = 0{,}17 \text{ mm} .$$

Lage des Regelpunktes

$$n_0^* = \sqrt{k_4^*} \sqrt{\frac{e^*}{S_0^*}} = 1053 = 2106 \text{ Motorumdrehungen}$$

Dies ergibt sich zwangsläufig, da eine von Verfassers Voraussetzungen die Fixierung des Regelpunktes war.

Der Regeldrehzahlbereich in dem sich Dosisabfall von 25 mm³ abspielt ist

$$\Delta_n^* = \sqrt{k_4^*}\sqrt{\frac{a+e^*}{a+s_0}} - n_0 = 2031\sqrt{\frac{0{,}002+0{,}01017}{0{,}002+0{,}03758}} -$$

$$-1053 \cong 70 \div 140 \qquad \text{Umdr.}$$

Daraus ist zu ersehen, dass die Erreichung der minimalen und vernachlässigbaren Differenz (142—140 = 2) nicht die angewandte Mühe lohnt. Dieser Weg ist daher nicht gangbar.

Wie sieht es nun aus, wenn man die Möglichkeit hat, das Fliehgewichtsmaterial im voraus zu bestimmen?

5. Beispiel. Wenn anstatt von Eisen mit dem spez. Gewicht von 7800 kg/m³, Messing von 8700 kg/m³ benützt wird, gestaltet sich die Lage folgendermassen:

Ist der Rauminhalt der Fliehgewichte konstant, so ist das Verhältnis der Massen zueinander gleich dem Verhältnis der spezifischen Gewichte:

$$\frac{m^*}{m} = \frac{\gamma_{\text{Messing}}}{\gamma_{\text{Eisen}}} .$$

Daraus wird

$$m^* = \frac{\gamma_{\text{Messing}}}{\gamma_{\text{Eisen}}} \cdot \text{m} = \frac{8700}{7800} \cdot 0{,}0723 = 0{,}08064 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}}$$

und

$$k_3^* = m^* \cdot k_2^* = 0{,}08064 \cdot 10{,}96 \cdot 10^{-3} = 0{,}8838 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg} \cdot \text{Min}^2}{\text{m}} .$$

Da

$$k_1 = 3300 \text{ kg/m (unverändert)}$$

ist

$$k_4^* = \frac{k_1^*}{k_3^*} = \frac{3300}{0{,}8838} \cdot 10^3 = 3{,}733800 \qquad 1/\text{Min.}^2$$

und

$$\sqrt{k_4^*} = 1932 \qquad 1/\text{Min.}$$

Da $S^* = S_0$, wird gemäss Gleichung (24) die veränderte Vorspannung

$$e^* = \frac{m^*}{m} \cdot e = \frac{0{,}08064}{0{,}0723} \cdot 0{,}01 = 0{,}011153 \text{ m} = 11{,}15 \text{ mm}.$$

Der Vorspannungszuwachs ist also

$$\Delta e = e^* - e = 11{,}15 - 10 = 1{,}15 \text{ mm}.$$

In diesem Falle bleibt der Regelpunkt natürlicherweise an der gleichen Stelle (Grundvoraussetzung).

Der Regeldrehzahlbereich ist

$$\Delta n^* = \sqrt{k_4^*}\sqrt{\frac{a+e^*}{a+S_0}} - n_0 = 1114 - 1053 =$$

$$= 61 \div 122 \text{ Motorumdrehungen.}$$

In diesem Falle also ergibt sich schon eine gewisse Verminderung.
Der Anstieg des spez. Gewichtes beträgt 11%.
Der Drehzahlabfall beträgt etwas über 14%.

Vergrössert man die Masse der Fliehgewichte auf irgendeine Weise, so verschiebt sich der Regelpunkt nach links (den niedrigen Drehzahlen zu).

Soll die Lage des Regelpunktes trotzdem festgehalten werden, so bestehen dazu zwei Möglichkeiten :

1. Die bereits beschriebene Methode der Erhöhung der Federvorspannung.

2. Vergrösserung der Regelfederkonstante. Die erste Methode, wie aus dem Zahlenbeispiel ersichtlich, ergibt nur im Falle eines bedeutenden Massenanstiegs die entscheidende Zunahme der Elastizität.

Die zweite Methode, wie dies leicht bewiesen werden kann, ergibt die Abnahme der Elastizität.

II

Auf Grund obiger Ausführungen empfiehlt es sich, einige Kennzahlen einzuführen, durch welche die Einspritzpumpe bzw. deren Regler gekennzeichnet werden soll.

Wie man sah, wird der Regeldrehzahlbereich nach oben durch die Einspritzpumpendrehzahl

$$n_n = \sqrt{k_4} = \sqrt{\frac{k_1}{m \cdot k_2}} \quad \text{begrenzt.}$$

Diese ist von der Federvorspannung unabhängig. (Erreicht aber die Vorspannung die völlige Zusammendrückung der Feder, so ändert sich k_1 Federkonstante natürlich sprunghaft.)

Es liegt nun auf der Hand, dass diese Drehzahl die Grenzdrehzahl der Einspritzpumpe genannt und sie mit n_h bezeichnet wird. Die Benennung zeigt den Umstand, dass zu dieser Drehzahl ein unendlich grosser Ausschlag der Fliehgewichte gehört und die Dosis gleich 0 ist, ganz unabhängig von der Übersetzung und Ausgangsstellung der die Fliehgewichte und Regelstange verbindenen Kinematik.

(Im Fachschrifttum wird dieser Punkt manchmal auch »astatischer Punkt« genannt. Diese Benennung zeigt, dass in diesem Punkt die Stabilität des Reglers aufhört.)

Die Grenzdrehzahl der Vierzylinder-PAL-Einspritzpumpe (wie aus Beispiel 1 ersichtlich) beträgt

$$n_n = 4080 \quad \text{1/Min. Motorumdrehungen.}$$

Die Regeldrehzahl wird nach unten (den niedrigen Drehzahlen zu) durch die mit dem Regelpunkt charakterisierte Drehzahl begrenzt.

Dies ist jene Drehzahl, bei welcher die Fliehkraft des Fliehgewichtes gleich der Federkraft der vorgespannten Feder wird.

Der Regelpunkt soll mit n_r bezeichnet werden.

$$n_r = \sqrt{k_4} \sqrt{\frac{e}{s_0}} \quad \text{1/Min.}$$

Der Regelpunkt bei der Vierzylinder-PAL-Einspritzpumpe (bei einer Vorspannung von z. B. 10 mm) ist

$$n_r = 1053 \div 2106 \quad \text{Motorumdrehungen/Min.}$$

In diesem Falle wird also durch den Regler unter 2106 Umdrehungen die Einspritzmenge nicht geregelt. (Von der sog. Leerlaufregelung soll später gesprochen werden.)

Wie aus der Formel ersichtlich, befindet sich im Ausdruck von n eine Zahl (e), deren Wert innerhalb gewisser Grenzen leicht geändert werden kann. Deshalb ist n_r nicht nur die Kennzahl des Reglers, sondern charakterisiert eher die Einstellung des Motors.

Eine veränderte Einstellung bedeutet nämlich veränderte Motoreigenschaften, wodurch die Lage des Regelpunktes hauptsächlich vom Standpunkt des Motors von Bedeutung ist. Es soll ein einfaches Beispiel erwähnt werden: Durch Änderung der die Lage des Regelpunktes bestimmenden Vorspannung e kann im Betriebsdrehzahlbereich leicht ein Unterschied von einigen hundert Umdrehungen erzielt werden.

Der Regeldrehzahlbereich ist jener scharf begrenzte Bereich, binnen welchem die auf die Fliehgewichte wirkende Federkraft mit der Fliehkraft das Gleichgewicht hält.

Dieses Intervall wird nach unten durch den Regelpunkt, nach oben durch die Grenzdrehzahl begrenzt. Links vom Regelpunkt ist die Federkraft überall grösser als die Fliehkraft, wodurch die Fliehgewichte in der Ausgangsstellung beharren. Der Regler beteiligt sich nicht an der Regelung des Motors. Rechts von der Grenzdrehzahl ist die Fliehkraft grösser als die Federkraft, wodurch sich der Ausschlag der Fliehgewichte über alle Grenzen hinaus steigert.

Daraus folgt, dass sich die Fliehgewichte des Reglers nur rechts vom Regelpunkt und links von der Grenzdrehzahl in Gleichgewichtslage befinden können. Deshalb wird dieser zweifach begrenzte Bereich Regeldrehzahlbereich genannt.

Betriebsdrehzahlbereich werden zusammenfassend alle Drehzahlen genannt, bei welchen der Motor stabil in Betrieb gehalten werden kann.

Der Betriebsdrehzahlbereich enthält jederzeit jenen Teil des Regeldrehzahlbereiches, in welchem dem Motor noch genügend Kraftstoff zur Überwindung

des inneren Widerstandes zugeführt wird. (Zum Leerlauf der Motoren Csepel D—413 und D—613 wird eine Dosis von ca. 25 mm³ benötigt.)

Der Betriebsdrehzahlbereich enthält ausserdem noch einen Teil des Feldes links vom Regelpunkt. Die Steilheit der Drehmomentkurve (im Regeldrehzahlbereich) wird offensichtlich umso grösser, je näher der Regelpunkt und die Grenzdrehzahl zueinander liegen.

Daher erscheint es als zweckmässig, diese Steilheit mit dem Verhältnis zwischen n_r und n_h auszudrücken. Dies geschieht durch Aufstellung einer Bruchzahl, deren Zähler die Regelpunktdrehzahl und Nenner die Grenzdrehzahl ist. Daraus folgt, dass der Maximalwert dieser Zahl höchstens 1 sein kann. Ein Motor bzw. ein Regler kann demnach als umso elastischer betrachtet werden, je näher der Zahlenwert dieser Kennzahl zu 1 ist.

Diese Kennzahl mit der Bezeichnung R nennt der Verfasser »Elastizität des Reglers«.

$$R = \frac{n_r}{n_n}.$$

Da aber

$$n = \sqrt{k_4}\sqrt{\frac{e}{s_0}} \qquad \text{1/Min.}$$

und

$$n_n = \sqrt{k_4}$$

wird

$$R = \sqrt{\frac{e}{s_0}}. \qquad (27)$$

Betrachtet man diesen Zusammenhang genauer, so erscheint die früher erwähnte Tatsache, dass nämlich die Elastizität mit der Steigerung der Vorspannung zunimmt, sofort einfacher.

Da die Erhöhung der Vorspannung die Verschiebung nach rechts des Regelpunktes mit sich zieht, folgt aus (27) der bereits angeführte Satz, dass bei der entsprechenden Regelpunkt-Drehzahlsteigerung die Elastizität zunimmt.

Die Formel (27) ermöglicht eine allgemeingültige Formulierung der Elastizitäts-Steigerungsmöglichkeiten: Die Voraussetzung der Elastizitätssteigerung ist die Erhöhung des Wertes von e/s_0. Ist ausserdem die Lage des Regelpunktes festgesetzt, dann kommt noch eine Zusatzbedingung dazu, dass nämlich e/s_0 in der Weise anwachsen soll, dass der Wert

$$n_r = \sqrt{k_4}\sqrt{\frac{e}{s_0}}$$

konstant bleibt.

Daraus folgt, dass in diesem Falle k_4 vermindert werden muss.

Aus den Beispielen im Absatz I ergibt sich nun folgender Wert der Elastizität R:

a) Elastizität der PAL-Fahrzeugeinspritzpumpe, wenn Regelpunkt 2106/Min. ist

$$R = 0{,}516\,.$$

b) Wird die Vorspannung der Feder von 10 auf 12 mm erhöht, so wird

$$R = 0{,}565$$

(Die Differenz beträgt 10%.)

c) Wird die Federkonstante von 3300 kg/m auf 2500 kg/m vermindert, so bleibt der Regelpunkt nur dann an der gleichen Stelle, wenn die Vorspannung von 10 auf 13,2 mm erhöht wird.

Dann wird

$$R = 0{,}593\,,$$

dies ist der bisher höchste Wert (15% Zuwachs).

d) Im Falle der Anwendung der erwähnten Bleipfropfen ergibt sich folgende Lage:

Originale Vorspannung	$e = 10$ mm
Veränderte Vorspannung	$e^* = 10{,}17$ mm
Original Schwerpunktdistanz	$s_0^* = 37{,}5$ mm
Veränderte Schwerpunktdistanz	$s_0 = 37{,}58$ mm
Original-Elastizität	$R = 0{,}516$
Veränderte-Elastizität	$R^* = 0{,}519$

Der Elastizitäts-Zuwachs ist — wie zu erwarten war — sehr gering (0,5%).

e) Wird das Material der ganzen Fliehgewichte ausgetauscht, so wird

Originale Vorspannung	$e = 10$ mm
Veränderte Vorspannung	$e^* = 11{,}15$ mm
Originale Schwerpunktdistanz	$s_0 = 37{,}5$ mm
Veränderte Schwerpunktdistanz	$s_0 = s^* = 37{,}5$ mm

(da die geometrischen Masse unverändert blieben)

Original-Elastizität	$R = 0{,}516$
Veränderte Elastizität	$R = 0{,}545$

Der Zuwachs ist nun 5,5%.

f) Will man die Lage des Regelpunktes (im Fall des Beispiels 4) so festsetzen, dass die Federkonstante k_1 verkleinert wird, dann vermindert sich die

Elastizität. Der Wert $\frac{e}{s_0}$ (da in diesem Falle die Vorspannung konstant bleibt) vermindert sich nämlich im Falle der Steigerung von s_0.

Es ist nun zu ersehen, dass die Elastizität des Reglers — durch Einführung des Wertes R — mit einer konkreten Zahl gekennzeichnet werden kann. Je näher dieser Zahlenwert zu 1 kommt, umso näher kommt man zum idealen Regler, der die Motordrehzahl bei jeglicher Belastung auf gleicher Höhe zu erhalten vermag.

Wie ersichtlich, wächst die Elastizität R anfangs schnell, später aber in geringerem Masse. Bei $R = 0$ wo die Vorspannung auch gleich 0 ist, ist der Anstieg unendlich. Beim grösstmöglichem e ($e_{max} = s_0$) ist der Anstieg am kleinsten.

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wird die sog. Elastizität des Motors geprüft, welche von der Eigenschaft des Motors, dass zu grossen Belastungsänderungen kleine Drehzahlunterschiede gehören, gekennzeichnet wird.

Daraus folgt, dass die Steilheit des sogen. fallenden Teiles der Drehmomentkurve diese Eigenschaft eindeutig charakterisiert.

Eingehend befasst sich die Studie mit dem Problem, welche Verfahren für die Steigerung der Steilheit zur Verfügung stehen und es wird erklärt:

1. Ist die maximale Betriebsdrehzahl des Motors nicht von vornherein gegeben (kann also der Regelpunkt beliebig verschoben werden), so lässt sich die Elastizität am einfachsten durch Vermehrung der Vorspannung steigern. Die sich einstellende — zum Regelpunkt gehörende — Drehzahländerung ist der Quadratwurzel der Spannungsänderung proportional.

2. Ist die Umdrehungszahl des Motors gegeben, der Ort des Regelpunktes also bestimmt, sind zwei Fälle möglich:

a) Mit der Schwächung der Feder und gleichzeitigen Steigerung der Vorspannung ist die auftretende Elastizitätszunahme bedeutend.

b) Mit der Vermehrung der Masse des Fliehgewichtes wächst die Elastizität gleichfalls, u. z. im grossen ganzen proportional. Daraus folgt, dass sich nur eine wesentliche Massenvermehrung lohnt.

3. Der Ort des Regelpunktes wird bei gegebenem Regler ausschliesslich vom Mass der Federspannung bestimmt.

Nachher werden eingehend einige mit der Motorenregelung verknüpfte Begriffe definiert und neue Begriffe eingeführt u. z.

a) der Regelpunkt,
b) die Grenzdrehzahl,
c) der Regeldrehzahlbereich,
d) der Betriebsdrehzahlbereich und
e) die Elastizität des Reglers.

Die Kenntnis dieser Begriffe ermöglicht die betriebsmässige Vergleichung der einzelnen Motoren bzw. Dieseleinspritzpumpen.

Diese Kennwerte sind nicht in allen Fällen von einander unabhängig und es müssen oft fein abgewogene Kompromisse geschlossen werden, um die günstigsten Verhältnisse möglichst anzunähern.

A REGULATION PROBLEM OF AUTOMOTIVE DIESEL ENGINES

T. SZIRTES

SUMMARY

The paper discusses the stability of the engine. This property is characterised by slight differences of speed at big load oscillations.

It follows from the above that this quality is unequivocally characterised by the steepness of the so-called descending branch of the torque curve.

The treatise examines in detail the methods by which the steepness of the curve can be increased. It expounds the following :

1. Where the highest operating speed of the engine is not given previously (in other words where the control point can be freely shifted), stability can be most simply increased by the additional prestressing of the governor spring. The resultant change in the number of revolutions — pertaining to the control point arising — is proportionate to the square root of the modification of the pre-stressing of the spring.

2. Where the number of revolutions is given, and thus the locus of the control point is fixed, there are two cases possible :

a) by designing the spring for smaller load and at the same time increasing its pre-tension the stability can be substantially increased,

b) increasing the flywheel mass also raises the stability, that is, about linearly. Hence, only a substantial increase in volume is expedient.

3. The locus of the control point for a given governor is determined solely by the extent of prestressing the spring.

The paper proceeds giving detailed definitions for some notions encountered in engine regulation, and introduces a few novel notions, viz :

a) the control point,
b) the limit number of revolutions of the regulation,
c) the range of the number of revolutions of regulation,
d) the range of the operating number of revolutions of regulation,
e) the governor's stability.

The knowledge of these data permits the operational comparison of the different engines and diesel injection pumps respectively.

The above characteristics are not always independent of one another. Delicate compromises must frequently be made in order to adequately approach the working conditions most favourable from a certain point of view.

UN PROBLÈME DE RÉGLAGE DE MOTEURS DIESEL POUR VÉHICULES

T. SZIRTES

RÉSUMÉ

L'étude examine la souplesse du moteur, caractérisée par une marche avec de petites fluctuations du nombre de tours pour une grande variation des charges. Il s'ensuit que l'angle d'inclinaison de la branche descendante de la courbe du couple moteur caractérise cette qualité sans ambiguité. L'étude traite en détail les méthodes dont on dispose pour augmenter la valeur de l'angle d'inclinaison. Au cours de l'exposé il est démontré que :

1. Si le nombre de tours minimum n'est pas donné préalablement — c'est-à-dire si l'on peut déplacer le point du réglage — la souplesse du moteur peut être augmentée par la pré-tension du ressort du régulateur. Le changement du nombre de tours correspondant au point de réglage est proportionnel au carré du changement de la pré-tension du ressort.

2. Si le nombre de tours du moteur est donné, c'est-à-dire si le point de réglage est fixé, deux cas peuvent se présenter :

a) L'augmentation de la souplesse par l'affaiblissement du ressort accompagné par l'augmentation de sa pré-tension est considérable.

b) L'augmentation de la masse du volant entraine une augmentation à peu près proportionelle de la souplesse. Il s'ensuit que seulement une augmentation considérable de la masse du volant vaut la peine d'être effectuée.

3. Pour un régulateur donné la position du point de réglage est fixée uniquement par le degré de la pré-tension du ressort.

Dans la suite quelques notions relatives au réglage de moteurs sont définies en détail, et quelques nouvelles notions sont introduites, notamment :

a) le point de réglage,
b) le nombre de tours limite du réglage,
c) le domaine des nombres de tours du réglage,
d) le domaine des nombre de tours du réglage en régime,
e) la souplesse du régulateur.

La connaissance de ces notions permet de comparer le régime des différents moteurs et des pompes d'injection des moteurs Diesel.

Ces caractéristiques ne sont pas tout à fait indépendantes les unes des autres. Souvent il faut se payer de raisons pour approcher autant que possible l'état qui d'un certain point de vue, est le plus avantageux.

ОДНА ИЗ ПРОБЛЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ДИЗЕЛЬМОТОРОВ

Т. СИРТЕШ

РЕЗЮМЕ

Исследуется упругость мотора. Упругость характеризуется тем свойством мотора, что значительные изменения нагрузки вызывают небольшое изменение числа оборотов. Отсюда следует, что крутость низходящей ветви эпюры моментов безошибочно характеризует это свойство.

В статье подробно рассматривается выявление способов, имеющихся в распоряжении для увеличения этой крутости. В связи с этим устанавливает, что :

1. Если максимальное число оборотов предварительно не установлено (значит, точку регулирования можно передвигать) простейшим способом повышения упругости будет увеличение напряжения пружины регулятора. Полученное таким образом — соответственно точке регулирования — изменение числа оборотов пропорционально квадратному корню изменения начального натяга пружины.

2. Если число оборотов мотора установлено, то есть место регулирования закреплено, имеются две возможности :

а) В случае нарастания утяжеленной части грузика упругость также возрастает, но примерно только пропорционально. Поэтому стоит заниматься только значительным увеличением массы грузика.

3. Место точки регулирования при данном регуляторе определяет исключительно размер начального натяга пружины.

После этого дается точное определение некоторых используемых в области регулирования моторов понятий и вводятся новые, а именно :

а) Точка регулирования.
б) Предельное число оборотов регулирования.
в) Диапазон числа оборотов регулирования.
г) Диапазон эксплоатационного числа оборотов.
д) Упругость регулятора.

Зная эти понятия, становится возможным производить производственное сравнение моторов и дизельных топливных насосов.

Эти характеристики не всегда независимы друг от друга. Очень часто приходится итти на самые разнообразные компромиссы для того, чтобы соответствующим образом приблизиться с определенной точки зрения к самому выгодному состоянию.

DYNAMISCHE UNTERSUCHUNG VON EBENEN GETRIEBEN AUF GRUND GRAPHISCHER DARSTELLUNG

Prof. Dr. Ing. Z. TERPLÁN

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR MASCHINENELEMENTE DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT FÜR DIE SCHWERINDUSTRIE
MISKOLC

[Eingegangen am 9. Juni 1955]

1. Einleitung

Bei der Untersuchung des *Funktionierens* der meisten Getriebe wird der Maschineningenieur die folgenden Fragen stellen :

1. Was für Kurven beschreiben die verschiedenen Glieder des Getriebes?

2. Wie gross ist die Geschwindigkeitsänderung des geführten Gliedes bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit oder Geschwindigkeit des Anfangsgliedes?

3. Wie gross muss das Triebmoment oder die Triebkraft am führenden Glied bei einer gegebenen Belastung des geführten Gliedes sein?

4. Wie gross ist der Wirkungsgrad, mit dem man rechnen kann?

5. Wie lassen sich der Massenausgleich und die konstante Winkelgeschwindigkeit des Anfangsgliedes verwirklichen?

Wenn man das Getriebe auch *dimensionieren* muss, sind vorher folgende Aufgaben zu lösen :

1. Man hat in jedem Punkt der Glieder des Getriebes die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und die durch die auftretenden Kräfte verursachte Inanspruchnahme zu kennen.

2. Man hat ferner die Geschwindigkeiten bzw. Winkelgeschwindigkeiten sowie die Schliesskräfte der die Glieder des Mechanismus verbindenden kinematischen Paare zu kennen.

3. Man muss die Werte der durch die Glieder übertragenen Leistung bestimmen.

4. Schliesslich muss man die Grösse der Ausgleichsmassen oder des Schwungrades berechnen, die notwendig sind, um den vorgeschriebenen Ungleichheitsgrad aufrechtzuerhalten.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun, durch Gliederung der sich in einer Ebene bewegenden Getriebe in elementare Gruppen die obigen Probleme durch graphische Darstellung, d. h. in anschaulicher Weise zu lösen.

Eingangs sollen einige Grundbegriffe der Getriebe kurz zusammengefasst werden.

1. Das Getriebe wird von einzelnen *Gliedern* gebildet, die *aus festen Körpern bestehen* und so miteinander verbunden sind, dass sie sich gegeneinander verschieben können (z. B. die in Abb. 1 dargestellte Shapingmaschine, wo die das Getriebe bildenden Glieder durch dickere Linien hervorgehoben sind).

2. Das Merkmal des festen Körpers vom Gesichtspunkt des Getriebes ist, dass die Entfernung zweier seiner gewählten Punkte voneinander im Laufe der Verschiebung konstant bleibt,

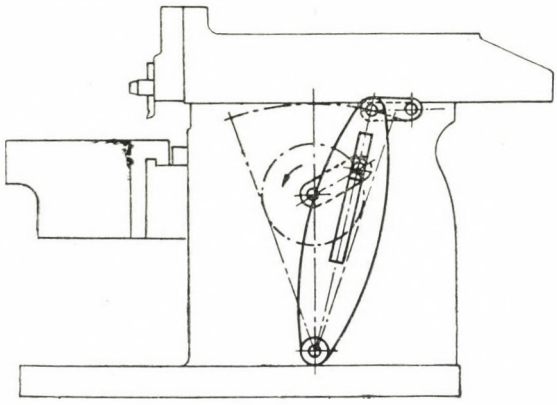


Abb. 1. Grundlegende Darstellung einer Shapingmaschine (die Glieder des den Werkzeughalter antreibenden Getriebes sind durch dickere Linien hervorgehoben)

dass also der Körper als starr zu betrachten ist. Aus diesem Grunde sollen im nachstehenden die Glieder des Getriebes durch *Linien* ersetzt werden (s. Abb. 2, die ein sog. grundsätzliches Linienschema des in Abb. 1 gezeigten Getriebes ist). Wenn ein Glied mit mehr als zwei anderen

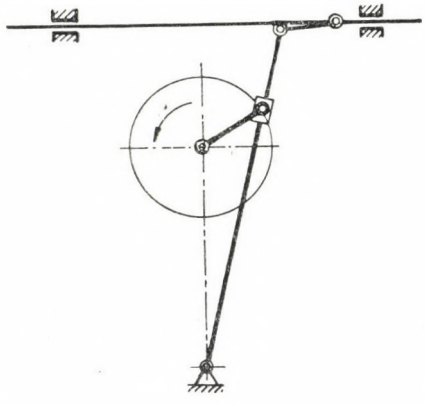


Abb. 2. Grundsätzliche Skizze des in Abb. 1 gezeigten, dick ausgezogenen Getriebes

Gliedern verbunden ist, dann stellt man auf dem einfachen Schema den festen Körper anstatt durch eine Linie durch ein Vieleck dar. Dieses Vieleck besteht aus soviel Seiten, wie die Zahl der miteinander verbundenen Glieder beträgt.

3. Die Glieder des Getriebes können miteinander durch eine Punkt-, Linien- oder Oberflächenberührung verbunden sein (Abb. 3). Die miteinander in Verbindung stehenden Elemente sollen im folgenden *kinematische Paare* genannt werden. In Abb. 4 findet sich eine tabellarische Übersicht sämtlicher möglichen kinematischen Paare, wobei gleichzeitig angegeben wird, wie viele Einschränkungen bzw. Freiheitsgrade bei jeder Möglichkeit bestehen.

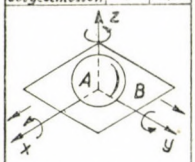
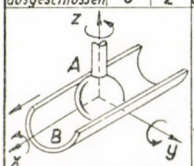
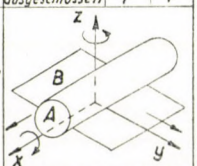
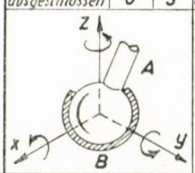
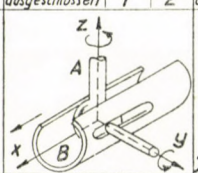
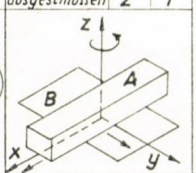
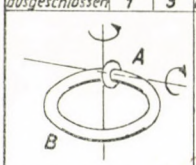
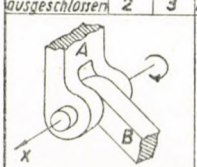
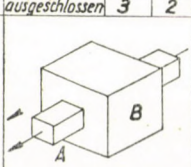
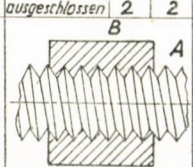
Klasse der kinematischen Paare	Zahl der Einschränkungen	Zahl der Freiheitsgrade	Arten			
			I. Art	II. Art	III. Art	IV. Art
I	1	5	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 3 2 ausgeschlossen 0 1 			
II	2	4	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 3 1 ausgeschlossen 0 2 	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 2 2 ausgeschlossen 1 1 		
III	3	3	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 3 0 ausgeschlossen 0 3 	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 2 1 ausgeschlossen 1 2 	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 1 2 ausgeschlossen 2 1 	
IV	4	2	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 2 0 ausgeschlossen 1 3 	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 1 1 ausgeschlossen 2 2 		
V	5	1	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 1 0 ausgeschlossen 2 3 	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 0 1 ausgeschlossen 3 2 	Zahl der Bew. / Rot. / Transl. verblieben 0 0 ausgeschlossen 2 2 	Schraub 1

Abb. 4. Klassifizierung der kinematischen Paare nach **Artobolewskij**

4. Unter *Einschränkung* sei die Behinderung der Beweglichkeit in der Richtung irgendeiner Koordinatenachse oder um eine Koordinatenachse verstanden, während der *Freiheitsgrad* die Zahl der noch verbleibenden freien Beweglichkeiten des kinematischen Paares angibt. Da die Zahl der Beweglichkeiten eines festen Körpers im Raume sechs und in der Ebene drei beträgt, ist die Summe der Freiheitsgrade und Einschränkungen bei räumlichen kinematischen Paaren gleich sechs und bei ebenen kinematischen Paaren gleich drei.

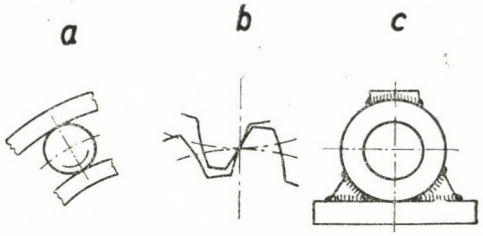


Abb. 3. Die Glieder des Getriebes können durch *a) Punkt-*, *b) Linien-* oder *c) Flächenberührung* miteinander in Verbindung stehen

5 Die fortlaufende Verbindung der Glieder mit den kinematischen Paaren wird *kinematische Kette* genannt (Abb. 5).

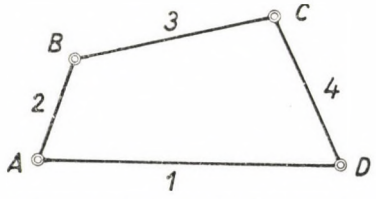


Abb. 5. Geschlossene viergliederige kinematische Kette

6. Die kinematische Kette wird dann zu einem *Getriebe*, wenn man eines ihrer Glieder an eine als unbeweglich zu betrachtende Grundlage fixiert (s. Abb. 6, wo die in Abb. 5 gezeigte, sog. geschlossene kinematische Kette durch Fixierung des Gliedes *1* zu einem Getriebe umgewandelt wurde).

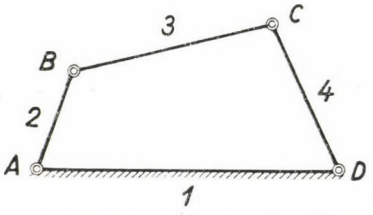


Abb. 6. Viergliederiges Getriebe

7. In den nachstehenden Ausführungen seien die folgenden *Bezeichnungen* verwendet:
a) die Glieder seien mit arabischen Ziffern bezeichnet;
b) die kinematischen Paare mit Grossbuchstaben;
c) die Zahl sämtlicher Glieder des Getriebes mit dem Buchstaben n;
d) die Zahl der im Getriebe vorkommenden kinematischen Paare mit dem Buchstaben p (dessen unterer Index die Zahl der Einschränkungen ausdrückt);
e) die Freiheitsgrade des Getriebes mit dem Buchstaben w.

8. Nicht nur bei den kinematischen Paaren kann man von Einschränkungen und Freiheitsgraden sprechen, sondern auch bei Getrieben. Will man den Freiheitsgrad eines Getriebes feststellen, so hat man vor der Summe der Freiheitsgrade sämtlicher $(n-1)$ beweglichen Glieder (bei jedem Glied 6) die Zahl der durch die Kopplung in das Getriebe eingeführten Ein-

schränkungen abzuziehen. Die Zahl der letzteren wird durch die Zahl der kinematischen Paare und deren Einschränkungen bestimmt. Der Freiheitsgrad eines Getriebes lässt sich also durch folgende Formel ausdrücken:

$$w = 6\,(n-1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1\,. \tag{1}$$

Für ein ebenes Getriebe nimmt diese Formel folgende Gestalt an:

$$w = 3\,(n-1) - 2p_2 - p_1\,. \tag{2}$$

Der Freiheitsgrad des in Abb. 6 gezeigten, sog. viergliederigen, *ebenen* Getriebes beträgt z. B., da $n = 4$, $p_2 = 4$ und $p_1 = 0$ ist:

$$w = 3\,(4-1) - 2\cdot 4 - 1\cdot 0 = 1\,.$$

Dies bedeutet, dass das Getriebe ein einziges Anfangsglied (mit dem Freiheitsgrad 1) hat. In der Abb. 6 kann z. B. das Glied 2 oder 4 Anfangsglied sein, wobei die vorgegebene Bewegung dieses Anfangsgliedes die Bewegung sämtlicher Glieder des Getriebes bestimmt.

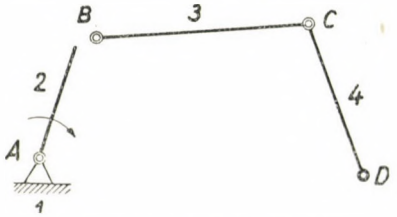


Abb. 7. Abtrennung der elementaren zweigliederigen Gruppe von einem viergliederigen Getriebe

9. Die ebenen Getriebe pflegt man z. B. nach der Gruppe einzuteilen, die abgetrennt werden kann, ohne dass sich der *ursprüngliche* Freiheitsgrad des Getriebes verändern würde. Demgemäss kann also der Freiheitsgrad der abtrennbaren Gruppe nur Null betragen. Der Freiheitsgrad solcher Gruppen mit k abtrennbaren Gliedern lässt sich bei richtiger Anwendung der Beziehung (2) — da jedes Glied der Gruppe ein bewegliches Glied ist — folgendermassen berechnen:

$$w = 3\,k - 2\,p_2\,.$$

(Man rechnet hier deshalb nicht mit p_1, weil man die Getriebe mit p_1 vor ihrer Klassifizierung zu Getrieben umwandelt, die nur p_2 haben, s. Punkt 10.) Die am einfachsten abtrennbare Gruppe wird *elementare Gruppe* genannt. Diese besteht aus zwei Gliedern und drei kinematischen Paaren. Eine solche ist z. B. die durch die Glieder 3 und 4, ferner durch die kinematischen

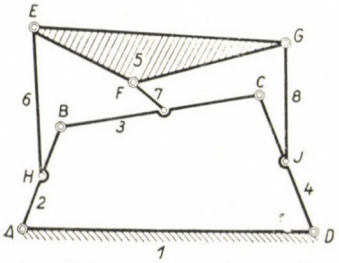


Abb. 8. Das Getriebe der Abb. 6 ergänzt durch eine viergliederige Gruppe

Paare B, C und D gebildete elementare Gruppe in Abb. 7. Hier ist C das innere, B und D das äussere kinematische Paar. Nach Abtrennung dieser elementaren Gruppe verbleibt von dem in Abb. 6 dargestellten Getriebe nur noch das Anfangsglied 2, dessen Freiheitsgrad 1 ist, d. h. dieser hat sich nach Abtrennung der elementaren Gruppe nicht geändert.

Von dem in Abb. 2 ersichtlichen Getriebe lassen sich zwei elementare Gruppen abtrennen.

Von dem in Abb. 8 gezeigten Getriebe können eine verwickeltere und eine elementare Gruppe abgetrennt werden. Die verwickeltere Gruppe besteht aus vier Gliedern und sechs kinematischen Paaren. Ihr Freiheitsgrad ist Null, sie ist also abtrennbar, aber nicht weiter zerlegbar.

Für das ganze Getriebe ist immer die verwickeltste abtrennbare Gruppe kennzeichnend.

10. Wenn das kinematische Paar eine linienförmige Berührung bedeutet, wird das Getriebe häufig *Nockengetriebe* genannt. Dieses lässt sich auf ein Getriebe zurückführen, in dem es nur sich flächenförmig berührende kinematische Paare gibt. Die Tatsache, dass das sich linienförmig berührende kinematische Paar *eine* Einschränkung hat, kann auch als negativer Freiheitsgrad aufgefasst werden. Die zu lösende Aufgabe besteht nun im folgenden : wie viele Glieder und kinematische Paare mit 2 Einschränkungen ergeben *einen* negativen Freiheitsgrad, also :

$$-1 = 3x - 2p_2$$

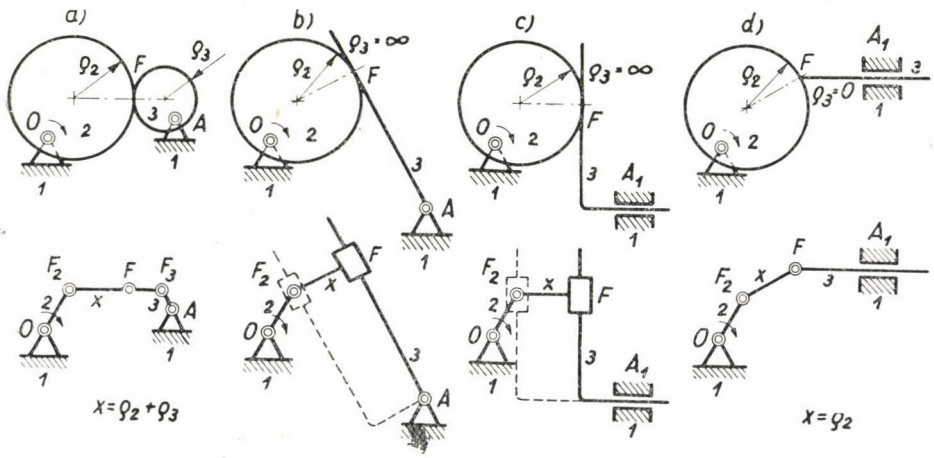


Abb. 9. Die einfachsten Nockengetriebe und ihre grundsätzlichen schematischen Darstellungen

Die einfachste Lösung erhält man, wenn man $x = 1$ und $p_2 = 2$ setzt. In Abb. 9 sind die einfachsten Nockengetriebe und darunter ihre modifizierten Abbildungen in Linien zu sehen. Diese Vereinfachung kann auch bei jedem beliebigen ebenen Getriebe vorgenommen werden, so dass die Lösung der weiteren Probleme die gleiche wie in den vorherigen Punkten ist.

Besteht das Nockenprofil des Nockengetriebes aus mehreren Kreisbogen, so hat jeder Kreisbogen ein eigenes Ersatzgetriebe, da ja der Radius des Kreisbogens in der Länge der x Glieder eine wesentliche Rolle spielt. Eine weitere Bemerkung ist, dass in jedem Punkt des Nockenprofils, der ein Berührungspunkt von verschiedenen Kreisbogen (oder eines Kreisbogens und Geraden) ist, zwangsläufig zwei Ersatzgetriebe gezeichnet werden können. Die Folge hiervon ist wiederum, dass sich die Beschleunigung des geführten Gliedes des Nockengetriebes in diesen Punkten sprunghaft verändert.

Eine weitere Modifikation in den schematischen Darstellungen ist in jenen Fällen zu sehen, wo der geometrische Mittelpunkt des eine Translationsbewegung ausführenden kinematischen Paares nicht mit einem Gelenk zusammenfällt (s. die gestrichelte Darstellung). Die Notwendigkeit einer solchen modifizierten Darstellung ist im Aufbau des Geschwindigkeitsplanes nach Kolonne *d)* in Abb. 10 begründet.

Im folgenden sollen nur jene *ebenen Getriebe* erörtert werden,

a) die aus einer an ein, zwei oder drei Anfangsglieder angeschlossenen elementaren oder um einen Grad verwickelteren, viergliederigen Gruppe bestehen;

b) wo die kinematischen Paare der zweigliederigen (elementaren) oder viergliederigen Gruppen (nach der in Punkt 10 geschilderten Vereinfachung) entweder eine Dreh- oder eine Translationsbewegung ausführen.

2. Kinematische Untersuchung von ebenen einfachen Getrieben

Als *einfach* wird ein ebenes Getriebe bezeichnet, das aus einer sich an ein oder zwei Anfangsglieder anschliessenden elementaren Gruppe besteht.

In der obersten Reihe der Abb. 10 sind verschiedene Varianten der elementaren Gruppe ersichtlich, und zwar in folgender Reihenfolge :

a) alle drei kinematischen Paare führen eine Drehbewegung aus ;

b) das innere kinematische Paar führt eine Translations-, die beiden äusseren Paare dagegen eine Rotationsbewegung aus ;

c) das eine äussere kinematische Paar führt eine Translations-, das andere äussere und das innere eine Rotationsbewegung aus ;

d) das eine äussere kinematische Paar führt eine Drehbewegung, das andere äussere und das innere eine Translationsbewegung aus ;

e) das innere kinematische Paar führt eine Drehbewegung, die beiden äusseren dagegen eine Translationsbewegung aus.

Die elementare Gruppe mit drei, eine Translationsbewegung ausführenden kinematischen Paaren soll hier nicht behandelt werden, weil sie nicht den für die übrigen Fälle ableitbaren Gesetzmässigkeiten unterliegt.

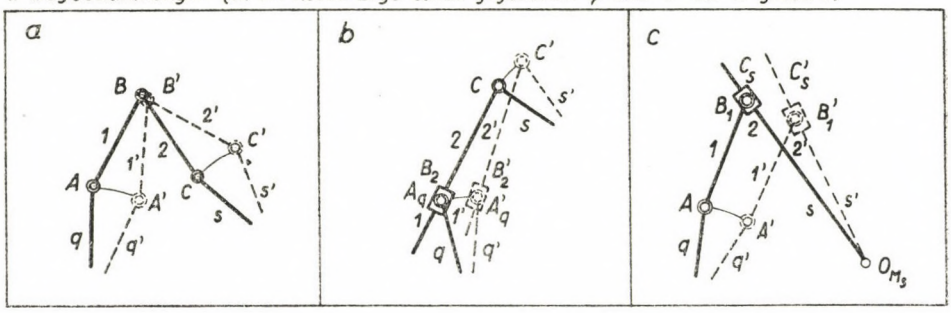
In der obersten Reihe der Abb. 10 wurden die äusseren kinematischen Paare der elementaren Gruppe an die Anfangsglieder q und s gekoppelt, deren Bewegung gegeben ist. Auf diese Weise ist also die von den Anfangsgliedern q und s nach der Zeitspanne Δt eingenommene Lage bekannt. Dadurch lässt sich die nach der Zeitspanne Δt eingenommene Lage des Punktes B des inneren kinematischen Paares in den Fällen *a)*, *b)* und *c)* durch einen einfachen Kreisbogenschnitt bestimmen, während im Falle *d)* das Glied 2 so auf dem in der neuen Lage s' befindlichen zu verschieben ist, dass der ursprünglich von den Gliedern 1 und 2 eingeschlossene Winkel unverändert bleibt. Im Falle *e)* befindet sich die sich aus den neuen Lagen q' und s' von q und s ergebende Lage von B in der unveränderten Entfernung h_q und h_s, d. h. man hat in der Entfernung h_q und h_s eine Parallele zur Lage q' und s' zu ziehen, wobei deren Schnitt B' ergibt. In den Fällen *c)*, *d)* und *e)* sieht man auch die Bezeichnungen O_{Mq} und O_{Ms}. Diese Punkte sind die sog. Momentanpole der untersuchten Lage.

In der zweiten (mittleren) Reihe der Abb. 10 sind die *Geschwindigkeitspläne* der gleichen elementaren Gruppen zu sehen, wobei angenommen wird, dass die Geschwindigkeit der Anfangsglieder q und s gegeben ist, und zwar der Einfachheit halber der Einheit entspricht (z. B. soll die Grösse der Geschwindigkeiten v_A und v_C 1 m/s betragen). Das Konstruktionsprinzip der Geschwindigkeitspläne bei diesen Getrieben beruht auf der Annahme, dass die Geschwindigkeit des Punktes B durch folgende Vektorgleichungen gegeben ist :

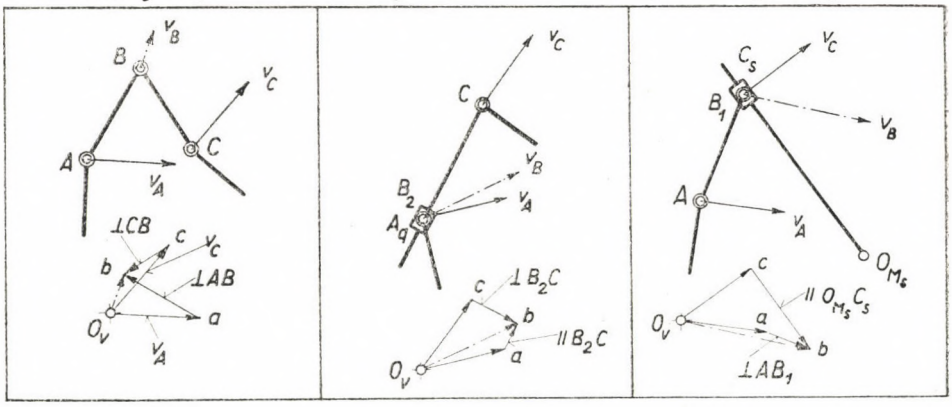
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{BC}\,, \tag{3}$$

Allgemeine kinematische Untersuchung von zweigliederigen Gruppen

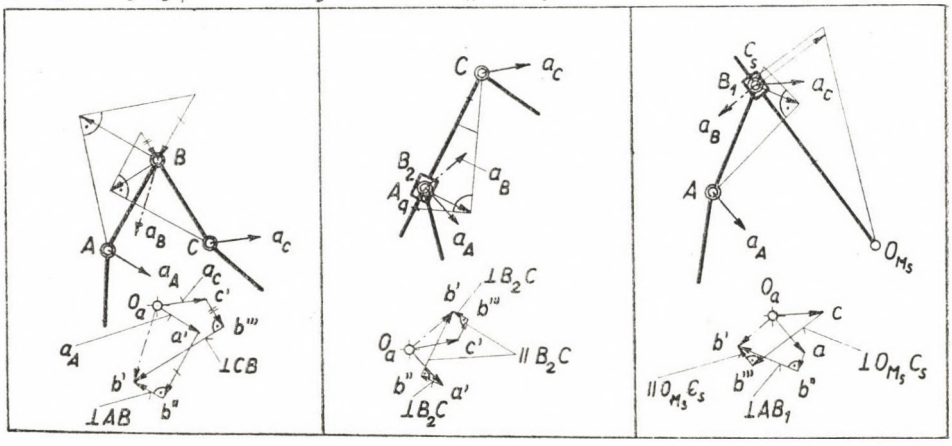
1. Wegbestimmungen (in der neuen Lage eines gegebenen q' und s' sei B' gesucht)



2. Geschwindigkeitspläne mit den angenommenen Geschwindigkeiten v_A und v_C

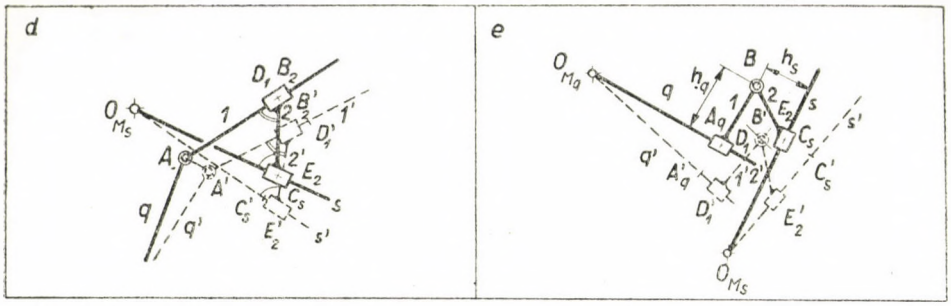


3. Beschleunigungspläne mit angenommenem a_A und a_C und mit den Geschwindigkeitsplänen

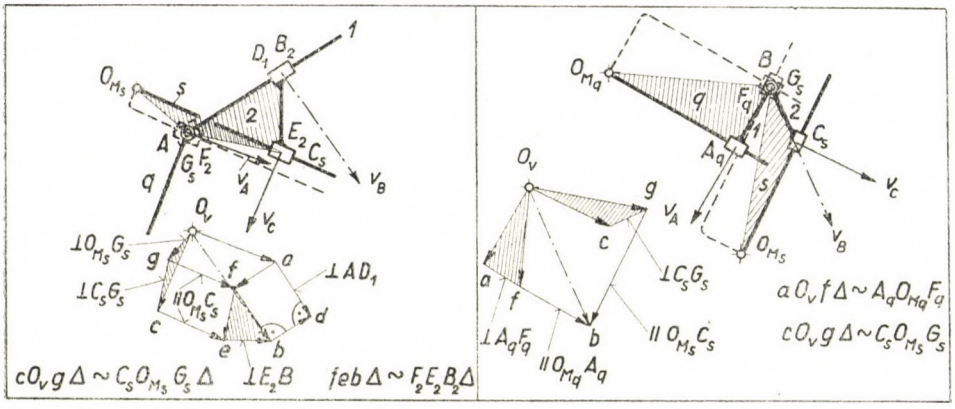


Allgemeine kinematische Untersuchung von zweigliedrigen Gruppen

1. Wegbestimmungen (in der neuen Lage eines gegebenen q' und s' sei B' gesucht)



2. Geschwindigkeitspläne mit den angenommenen Geschwindigkeiten v_A und v_C.



3. Beschleunigungspläne mit angenommenem a_A und a_C und mit den Geschwindigkeitsplänen

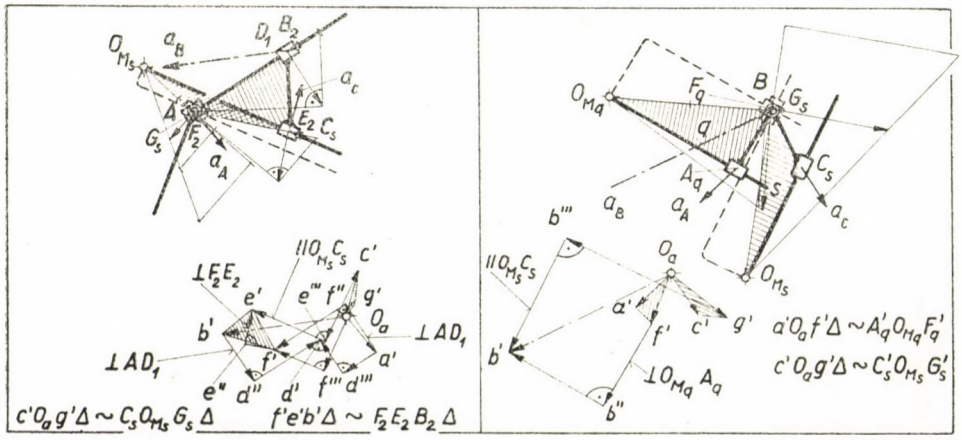


Abb. 10. Die Ermittlung des Weges, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung von zweigliederigen Gruppen im Falle beliebig beweglicher Anfangsglieder, ausschliesslich durch Konstruktion

wo $\mathbf{v}_{BA}$ und $\mathbf{v}_{BC}$ sog. relative Geschwindigkeitsvektoren darstellen. Der Vektor $\mathbf{v}_{BA}$ bedeutet die relative Geschwindigkeit des Punktes B bezogen auf den Punkt A als Zentrum und der Vektor $\mathbf{v}_{BC}$ gleichfalls die relative Geschwindigkeit des Punktes B, nur diesmal auf den Punkt C bezogen. Die Verschiebungsrichtung des Punktes B gegen den Punkt A bzw. C gibt die Richtung der relativen Geschwindigkeiten an. Die graphische Darstellung der beiden Vektorgleichungen (3) ist deshalb möglich, weil ausser den gegebenen Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{v}_C$ auch die Richtung der relativen Geschwindigkeiten v_{BA} und $\mathbf{v}_{BC}$ bekannt ist (z. B. kann im einfachsten Falle der Abb. 10. im Falle 2/*a* die Richtung der relativen Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{BA}$, d. h. die Richtung der auf den Punkt A bezogenen Geschwindigkeit des Punktes B nur senkrecht zur Geraden $\overline{AB}$, und ähnlicherweise die Richtung von $\mathbf{v}_{BC}$ nur senkrecht zur geraden $\overline{BC}$ sein). Es sei nun der Aufbau des Geschwindigkeitsplanes derselben Abbildung aufmerksam verfolgt. Man zeichnet von einem beliebigen Pol O_v ausgehend die bekannten Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{v}_C$ nach Richtung und Grösse (in der Abb. die Vektoren $\overrightarrow{O_v a}$ und $\overrightarrow{O_v c}$). Danach zieht man auf Grund der Vektorgleichungen (3) von a die Richtung von $\mathbf{v}_{BA}$ und von c die Richtung von $\mathbf{v}_{BC}$. Da die von den Punkten a und c aus gezogenen Richtungen jede für sich und unabhängig voneinander die geometrischen Orte der Endpunkte der möglichen Vektoren $\mathbf{v}_B$ sind, kann bei Berücksichtigung der Gleichungen (3) der Endpunkt von $\mathbf{v}_B$ nur im Schnittpunkt der beiden Richtungen, d. h. im Punkte b liegen, so dass $\mathbf{v}_B = \overrightarrow{O_v b}$.

Ganz ähnlich ist die Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes in den Fällen 2/*b* und 2/*c* der Abb. 10, nur ist darauf zu achten, dass im Falle *b)* die Verschiebung des Punktes B gegen den Punkt A parallel zum Glied 2 und im Falle *c)* die des Punktes B gegen den Punkt C parallel zum Anfangsglied s zu erfolgen hat.

Die Fälle *d)* und *e)* sind etwas eingehender zu erörtern. Fällt nämlich das eine Translationsbewegung ausführende kinematische Paar nicht mit einem eine Rotation ausführenden kinematischen Paar zusammen, so stösst die oben geschilderte unmittelbare Bestimmung der Geschwindigkeit eines Punktes (z. B. B_2) des inneren kinematischen Paares auf Schwierigkeiten. Zuerst erweisen sich die bisher gebrauchten Bezeichnungen mit Buchstaben als unzulänglich. Im Falle 2/*d* sei z. B. der sich mit B_2 deckende Punkt des Gliedes 1 mit D_1 und der sich mit C_2 deckende Punkt des Gliedes 2 mit E_2 bezeichnet. Danach ist ein solcher Punkt des Gliedes 2 zu suchen, dessen Geschwindigkeit sich durch die Aufstellung von zwei Vektorgleichungen bestimmen lässt. Dieser Punkt ist der sich mit A deckende Punkt des Gliedes 2, der mit F_2 bezeichnet wurde. Man könnte dies auch so formulieren, dass das Glied 2 in den Punkt A zusammenschrumpft (s. die gestrichelte Darstellung der Abb.). So wird man natürlich die Geschwindigkeit eines neuen Punktes des Gliedes 2 suchen, der mit F_2 bezeichnet

werden kann. Da sich in der schematischen Darstellung auch das Anfangsglied s in einer anderen Lage befindet, ist es zweckmässig, seinen sich mit A und F_2 deckenden Punkt mit dem Buchstaben G_s hervorzuheben.

Durch Annahme dieser neuen Bezeichnungen lässt sich die Geschwindigkeit des Punktes F_2 durch folgende Vektorgleichungen ermitteln

$$\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{FA} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_F = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{FG} . \tag{4}$$

Da die Richtung des Vektors $\mathbf{v}_{FA}$ parallel zum Glied 1 und die Richtung des Vektors $\mathbf{v}_{FG}$ parallel der Führung des Gliedes s verläuft, kann man den Punkt f des Geschwindigkeitsplanes auf Grund des vorherigen Gedankenganges rasch konstruieren.

In Kenntnis des Punktes f des Geschwindigkeitsplanes lässt sich dann die Stelle e der Geschwindigkeit des Punktes E_2 im Geschwindigkeitsplan konstruieren, da

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{EC} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_E = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{EF} . \tag{5}$$

Der Vektor $\mathbf{v}_C$ ist die Geschwindigkeit des Punktes C_s des Anfangsgliedes s. Da bereits die Geschwindigkeit von zwei Punkten des Anfangsgliedes s bekannt ist (die des Punktes O_{Ms} ist Null und $\mathbf{v}_G$ ist bekannt), wird in einem dritten Punkt, nämlich im Punkte C_s die Geschwindigkeit folgendermassen bestimmt :

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{CO} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{CG} . \tag{6}$$

In der zeichnerischen Darstellung ist $\mathbf{v}_C$ senkrecht zur Führungsrichtung des Anfangsgliedes s und $\mathbf{v}_{CG}$ senkrecht zur Geraden $\overline{C_sG_s}$. Der auf dem Geschwindigkeitsplan konstruierte Punkt c muss mit den bereits bekannten Punkten O_v und g ein *ähnliches* Dreieck ergeben, wie das aus den Punkten O_{Ms}, G_s und C_s des Getriebes gebildete Dreieck. Dieses wichtige Ergebnis soll im folgenden noch öfters herangezogen werden (Satz von MEHMKE).

In Kenntnis der Punkte f und c lassen sich die Vektorgleichungen (5) auflösen, weil die Richtung von $\mathbf{v}_{EC}$ parallel zur Führung des Gliedes s und die von $\mathbf{v}_{EF}$ senkrecht zur Geraden $\overline{E_2F_2}$ verläuft.

Mit der obenerwähnten Methode der ähnlichen Dreiecke erhält man $F_2E_2B_2\triangle \sim feb\triangle$. Die fehlende Geschwindigkeit des Punktes B_2 des Gliedes 2 findet sich im Geschwindigkeitsplan. Schliesslich kann man mit den Vektorgleichungen

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{DA} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{DB} \tag{7}$$

den Ort d des Punktes D_1 im Geschwindigkeitsplan konstruieren.

Im Falle 2/*e* geht man in ähnlicher Weise vor, d. h. 1. man ergänzt die Bezeichnungen der kinematischen Paare (s. D_1 und E_2), 2. bringt man die eine

Translationsbewegung ausführenden kinematischen Paare in Deckung mit dem eine Rotation ausführenden kinematischen Paar (s. die gestrichelte Darstellung) und 3. verwendet man an den Gliedern, die sich jetzt mit dem rotierenden kinematischen Paar decken, neue Bezeichnungen, d. h. man bezeichnet die in B zusammenfallenden Punkte der Anfangsglieder q und s mit den Buchstaben F_q und G_s.

Durch die Auflösung der Vektorgleichungen

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{BF} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_{BG} \tag{8}$$

(der Vektor $\mathbf{v}_{BF}$ verläuft parallel zum Anfangsglied q und der Vektor $\mathbf{v}_{BG}$ zum Anfangsglied s) lässt sich sofort die Geschwindigkeit des Punktes B ermitteln.

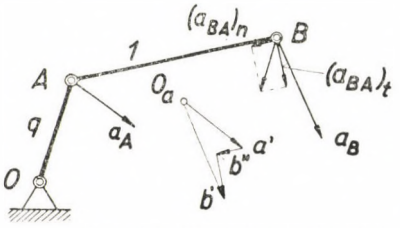


Abb. 11. Bestimmung der resultierenden Beschleunigung durch eine Vektorgleichung

In der dritten (untersten) Reihe der Abb. 10 sind die *Beschleunigungspläne* der gleichen elementaren Gruppen veranschaulicht, wobei vorausgesetzt wird, dass die Beschleunigungen der Anfangsglieder q und s gegeben sind.

Vor der Erörterung der Beschleunigungspläne der einzelnen Varianten der elementaren Gruppen sollen aber noch zwei wichtige mechanische Gesetzmässigkeiten behandelt werden.

a) Bei Verbindung von zwei Gliedern mit einem rotierenden kinematischen Paar (s. Abb. 11) kann z. B. die Beschleunigung des Punktes B des Gliedes 1 durch folgende Vektorgleichung ausgedrückt werden:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{BA})_n + (\mathbf{a}_{BA})_t \,, \tag{9}$$

wo $\mathbf{a}_{BA}$ die relative Beschleunigung, $(\mathbf{a}_{BA})_n$ deren Komponente in normaler und $(\mathbf{a}_{BA})_t$ deren Komponente in tangentialer Richtung ist. Bei ihrer Berechnung erhält man (wenn man die Winkelgeschwindigkeit mit ω_1 und die Winkelbeschleunigung mit ε_1 bezeichnet):

$$(a_{BA})_n = l_{BA}\omega_1^2 = \frac{v_{AB}^2}{l_{BA}} \quad \text{und} \quad (a_{BA})_t = l_{BA}\,\varepsilon_1 \,. \tag{10}$$

Von diesen beiden Komponenten lässt sich die Beschleunigungskomponente $(a_{BA})_n$ in Kenntnis von v_{BA} und l_{BA} berechnen, während die Richtung von $(a_{BA})_t$ bekannt ist (senkrecht auf die vom Drehpunkt zum untersuchten Punkt gezogene Gerade).

Um im folgenden von den dazwischenliegenden Rechnungen absehen zu können, wird in Abb. 12. die schnelle Konstruktion von $(a_{BA})_n$ vorgeführt, wenn l_{BA} und v_{BA} bekannt sind. Auf die den Endpunkt von v_{BA} mit A verbindende Gerade wird eine Senkrechte gezogen, die l_{BA} schneidet. Auf diese Weise erhält man in der Länge der geraden Strecke $\overline{b''B}$ den Absolut-

wert von $(a_{BA})_n$. Die Richtigkeit der Konstruktion kann durch die Ähnlichkeit der Dreiecke ABb und bBb'' bewiesen werden. Die Richtung von $(a_{BA})_n$ weist immer gegen den Drehpunkt zu (zentripetale Beschleunigung).

In der Abb. 11 wurde gesondert der *Beschleunigungsplan* gezeichnet, und zwar wurden hier von dem beliebigen Punkt O_a ausgehend laut Vektorgleichung (9) die Vektoren $\mathbf{a}_A$,$(\mathbf{a}_{BA})_n$ und $(\mathbf{a}_{BA})_t$ gezeichnet, so dass sich $\mathbf{a}_B = \overline{O_a b'}$ ergab.

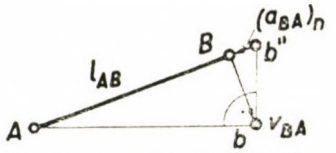


Abb. 12. Bestimmung der zentripetalen Beschleunigung durch Konstruktion

b) Untersucht man zwei Glieder, die mit einem eine Translationsbewegung ausführenden kinematischen Paar verbunden sind (wobei das Glied q rotiert, während das Glied 1 im Vergleich zum Glied q eine Translationsbewegung ausführt) in der in Abb. 13 dargestellten Lage

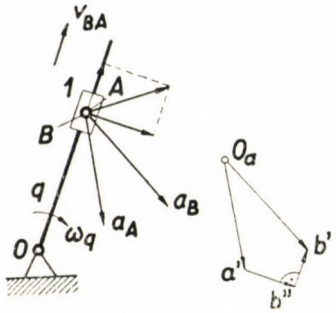


Abb. 13. Bestimmung der resultierenden Beschleunigung in einem rotierenden System durch Vektorgleichungen

und sucht man die Beschleunigung des Punktes B des Gliedes 1, so kann man folgende Vektorgleichungen ansetzen (der Punkt A ist ein Punkt der Geraden q) ;

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{BA})_C + (\mathbf{a}_{BA})_t \,. \tag{11}$$

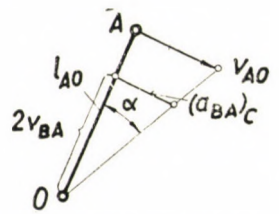


Abb. 14. Bestimmung des Absolutwertes der Coriolis-Beschleunigung durch Konstruktion

$(\mathbf{a}_{BA})_n = 0$, da die relative Bahn eine Gerade ist, die deshalb auch nicht angeschrieben wurde! Die Komponente in tangentialer Richtung der relativen Beschleunigung ist $(a_{BA})_t$, ihre Richtung stimmt mit der Richtung der Translationsbewegung überein. $(a_{BA})_C$ ist dagegen die sog. CORIOLIS-Beschleunigung, deren Richtung aus dem vektoriellen Produkt

$$(\mathbf{a}_{BA})_C = 2\,\omega_1 \times \mathbf{v}_{BA} \tag{12}$$

auf Grund der Rechtehandregel festgestellt werden kann oder die sich bei ebenen Problemen auch so ermitteln lässt, dass man den Vektor $\mathbf{v}_{BA}$ an der untersuchten Stelle im Drehsinn der Winkelgeschwindigkeit um 90° verdreht.

Da die Berechnungen laut Gleichung (12) im nachstehenden womöglich vermieden werden sollen, wird in Abb. 14 die schnelle graphische Darstellung des Absolutwertes der CORIOLIS-Beschleunigung vorgeführt. Da bei ebenen Getrieben $\boldsymbol{\omega}_1$ stets senkrecht zu $\mathbf{v}_{BA}$ ist, ergibt sich

$$(a_{BA})_C = 2\,\omega_1\,v_{BA} = 2\,\frac{v_{AO}}{l_{AO}}\,v_{BA}\,, \tag{13}$$

oder

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{AO}}{l_{AO}} = \frac{(a_{BA})_C}{2\,v_{BA}}\,. \tag{14}$$

Verbindet man also den Punkt O mit dem Endpunkt von v_{AO} (s. Abb. 14), so beträgt der von dieser Linie und von l_{AO} eingeschlossene Winkel : α. Trägt man ferner in der Wirkungslinie von l_{AO} das Doppelte der relativen Geschwindigkeit v_{BA} auf und zieht dazu eine Senkrechte, so schneidet das zum Winkel α gehörige Linienstück auf Grund der Formel (14) $(a_{BA})_C$ aus.

In der Abb. 13 wurde ähnlich wie in Abb. 11 gesondert auch der Beschleunigungsplan gezeichnet.

In Kenntnis dieser beiden Konstruktionen lassen sich nunmehr bereits auch die Beschleunigungspläne der Abb. 10 überblicken. Der Fall 3/*a* ist der einfachste. Vom Pol O_a ausgehend werden die bekannten Beschleunigungen a_A und a_C gezeichnet (s. die Längen $\overline{O_a a'}$ und $\overline{O_a c'}$ in der Abb.). Hernach werden die relativen Geschwindigkeiten v_{BA} und v_{BC} aus dem Geschwindigkeitsplan auf den Punkt B der elementaren Gruppe umgezeichnet, sodann mit der in Punkt *a)* geschilderten Konstruktionsmethode die Absolutwerte der zentripetalen Bechleunigungen $(a_{BA})_n$ und $(a_{BC})_n$ bestimmt und diese von den Punkten a' bzw. c' ausgehend parallel zur Richtung der Glieder 1 bzw. 2 aufgetragen (s. die Punkte b'' und b''' des Beschleunigungsplanes). Von diesen zwei Punkten aus zieht man Parallelen zu der Richtung der tangentialen Beschleunigungen. Da diese Geraden unabhängig voneinander die geometrischen Orte des Endpunktes der gesuchten Beschleunigung sind, kann b' nur auf den Schnittpunkt der beiden Geraden fallen, so dass der Vektor $\mathbf{a}_B$ dieser Beschleunigung aus $\overline{O_a b'}$ hervorgeht, da ja

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{BA})_n + (\mathbf{a}_{BA})_t \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + (\mathbf{a}_{BC})_n + (\mathbf{a}_{BC})_t\,. \tag{15}$$

Im Falle 3/*b* ist bei Bewegung des Punktes B im Vergleich zum Punkte A auch die CORIOLIS-Beschleunigung vorhanden, die mit Hilfe der aus dem Geschwindigkeitsplan abgelesenen relativen Geschwindigkeiten v_{BC} und v_{BA} am Getriebe selbst konstruiert wurde. Die als Ergebnis erhaltene CORIOLIS-Beschleunigung $(a_{3A})_C$ wird von dem Endpunkt a' des vom Punkte O_a gezogenen Beschleunigungsvektors $\mathbf{a}_A$ in der mit der oben geschilderten Methode bestimmten Richtung aufgetragen und so der Punkt b'' erhalten. Die weitere Konstruktion des Beschleunigungsplanes erfolgt in ähnlicher Weise wie oben ($\mathbf{a}_B = \overline{O_a b'}$).

Im Falle 3/*c* bedeutet die Suche des Momentanpoles O_{M_s} des sich verschiebenden Gliedes *s* eine gesonderte Mehrarbeit im Vergleich zu den vorherigen

Bestimmungen. Sonst ist die Konstruktion des Beschleunigungsplanes ähnlich wie weiter oben.

In den Fällen 3/*d* und 3/*e* wird zuerst — ähnlich wie bei der Methode der Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes — eine schematische Skizze angefertigt (s. die mit gestrichelten Linien ausgezogene Skizze), wonach die Bezeichnungen ergänzt werden. Übrigens stimmt die Reihenfolge des Aufbaus des Beschleunigungsplanes genau mit den Schritten beim Aufbau des Geschwindigkeitsplanes überein, d. h. dass man z. B. im Falle 3/*d* nach der Bestimmung der Beschleunigungen von F_2 und dann von E_2 die Beschleunigungen von B_2 und D_1 ermittelt (s. die Konstruktion der Punkte f', e', b' und d' des Beschleunigungsplanes).

In der Abb. 15 wurden verschiedene Varianten der elementaren Gruppen mit *einem* Anfangsglied und in Abb. 16 mit *zwei* Anfangsgliedern verbunden und die Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungswerte der so erhaltenen Getriebe vom Freiheitsgrad $w = 1$ bzw. $w = 2$ mit Hilfe der beschriebenen Methode für einen allgemeinen Fall bestimmt.

3. Kinematische Untersuchung von verwickelteren ebenen Getrieben

Unter verwickelteren ebenen Getrieben werden — wie bereits erwähnt — jene Getriebe verstanden, unter deren abgetrennten Gruppen sich auch verwickeltere, d. h. nicht nur elementare, sondern z. B. auch schon viergliederige Gruppen finden.

Die einfachste solche »verwickeltere« abgetrennte Gruppe ist in Abb. 17 ersichtlich (s. die Abtrennung in Abb. 8, wo eine viergliederige und eine zweigliederige Gruppe abtrennbar sind). In den freien Gelenken der freien Hebelarme sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gegeben. Die Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne lassen sich am besten so zeichnen, dass man die Punkte L_{13}, L_{21} und L_{32} des Mittelpunktsgliedes ermittelt, indem man durch Verlängerung der freien Hebelarme die Schnittpunkte sucht. Das sowjetische technische Schrifttum nennt diese Punkte »Assur-Punkte«. Der Gang der Konstruktion der Geschwindigkeits- und Beschleunigungspläne ist mit den Bezeichnungen der Abbildung und den bereits geschilderten Hilfssätzen folgender:

1. Nach der Wahl eines »Assur-Punktes« (z. B. L_{13}) kann man die Geschwindigkeit bzw. die Beschleunigung dieses Punktes wie folgt schreiben:

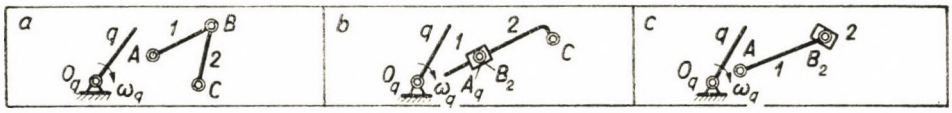
$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{LD}\,; \qquad \mathbf{a}_L = \mathbf{a}_D + (\mathbf{a}_{LD})_n + (\mathbf{a}_{LD})_t\,; \qquad (\mathbf{a}_{LD})_n = (\mathbf{a}_{AD})_n + (\mathbf{a}_{LA})_n\,;$$

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{LF}\,; \qquad \mathbf{a}_L = \mathbf{a}_F + (\mathbf{a}_{LF})_n + (\mathbf{a}_{LF})_t\,; \qquad (\mathbf{a}_{LF})_n = (\mathbf{a}_{CF})_n + (\mathbf{a}_{LC})_n\,.$$

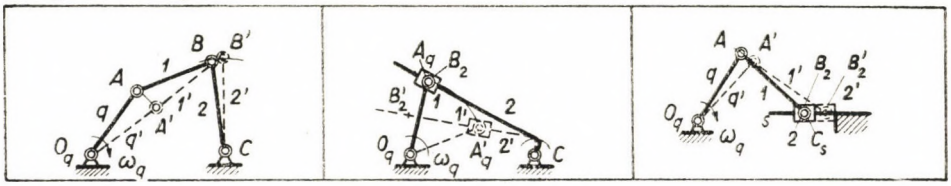
Zuerst ist es zweckmässig, im Geschwindigkeitsplan (oberster, mit a) bezeichneter Teil der Abb.) den Punkt L_{13} zu konstruieren und dann in Kennt-

Kinematische Untersuchung von zweigliederigen an ein Anfangsglied angeschlossenen Gruppen

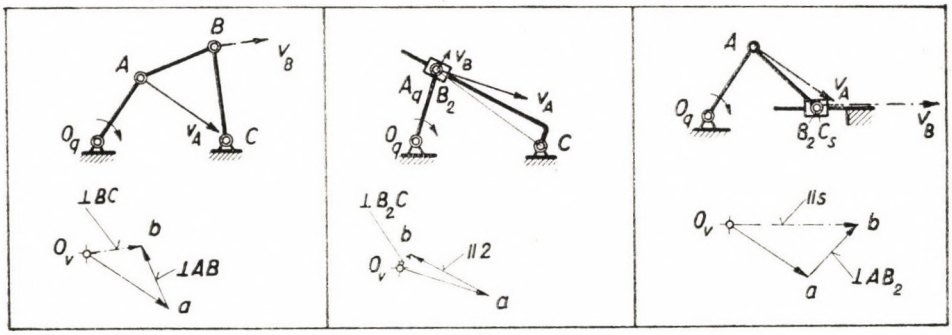
1 Anschlußskizze



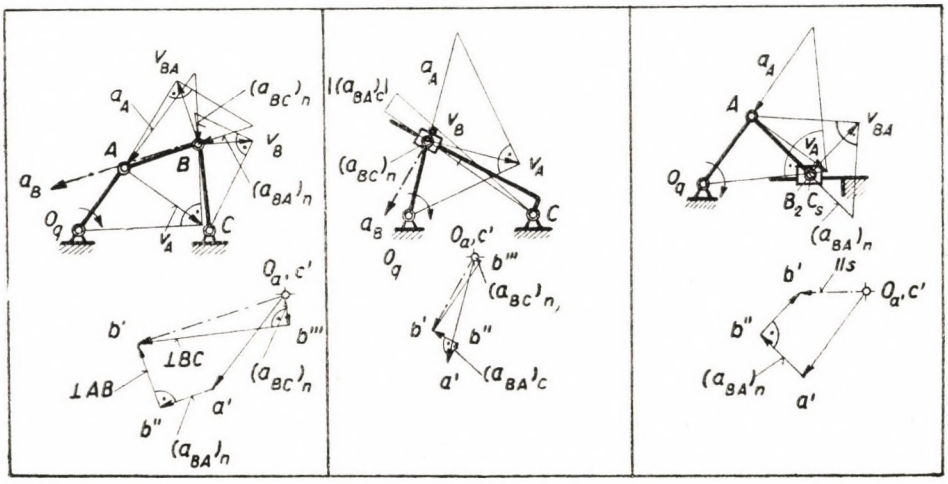
2 Wegbestimmungen



3 Geschwindigkeitspläne bei Annahme von v_A = const.

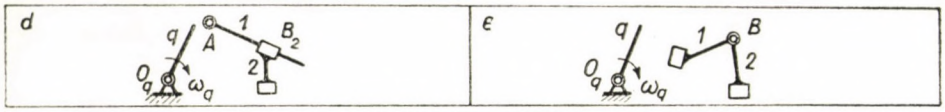


4 Beschleunigungspläne bei Verwendung der Geschwindigkeitspläne



Kinematische Untersuchung von zweigliederigen an ein Anfangsglied angeschlossenen Gruppen

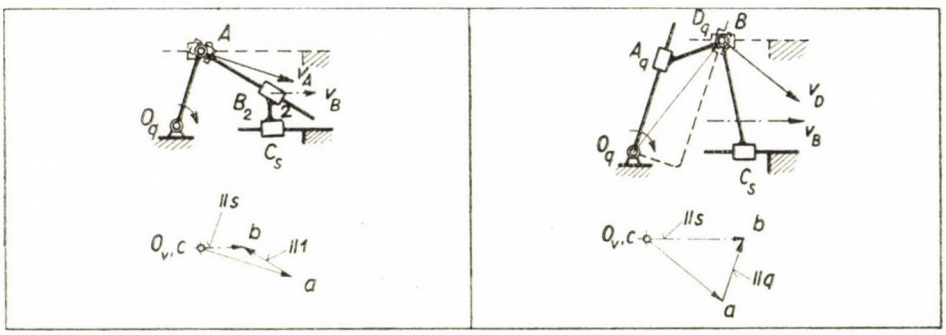
1. Anschlußskizze



2. Wegbestimmungen



3 Geschwindigkeitspläne bei Annahme von $v_A = const$



4. Beschleunigungspläne bei Verwendung der Geschwindigkeitspläne

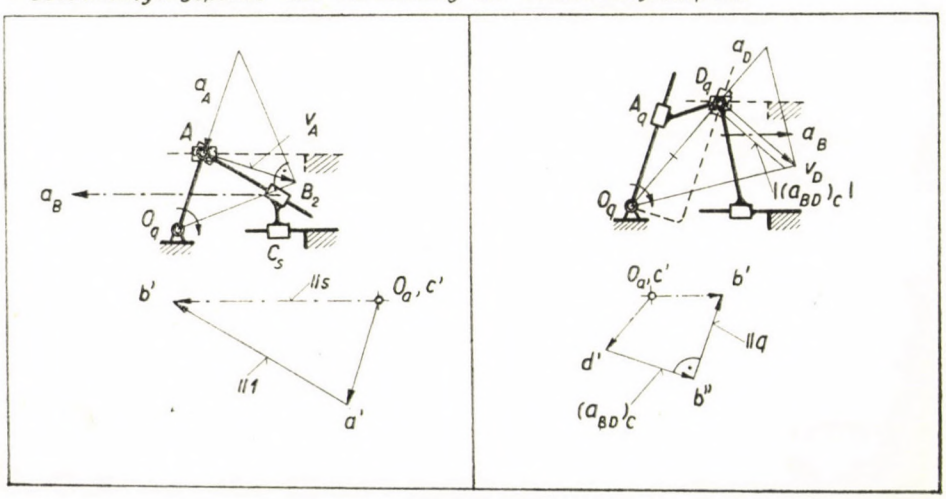
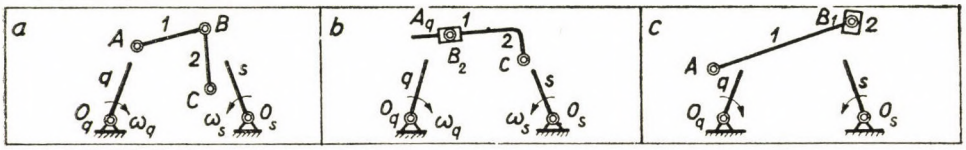


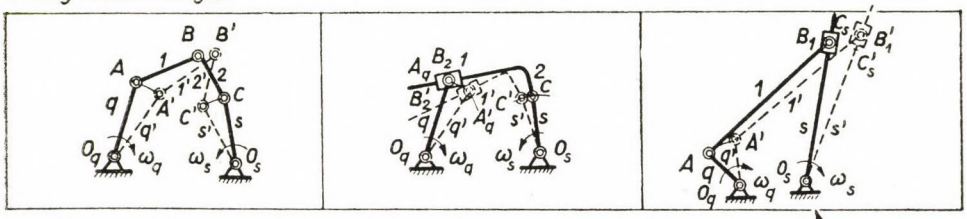
Abb. 15. Bestimmung des Weges, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung von zweigliederigen, an ein Anfangsglied angeschlossenen Gruppen, ausschliesslich durch zeichnerische Konstruktion

Kinematische Untersuchung von zweigliederigen an zwei Anfangsglieder angeschlossenen Gruppen

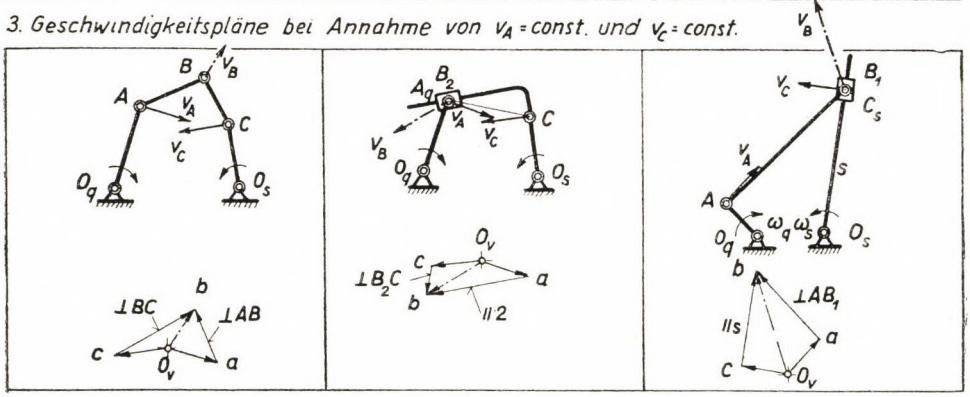
1. Anschlußskizze



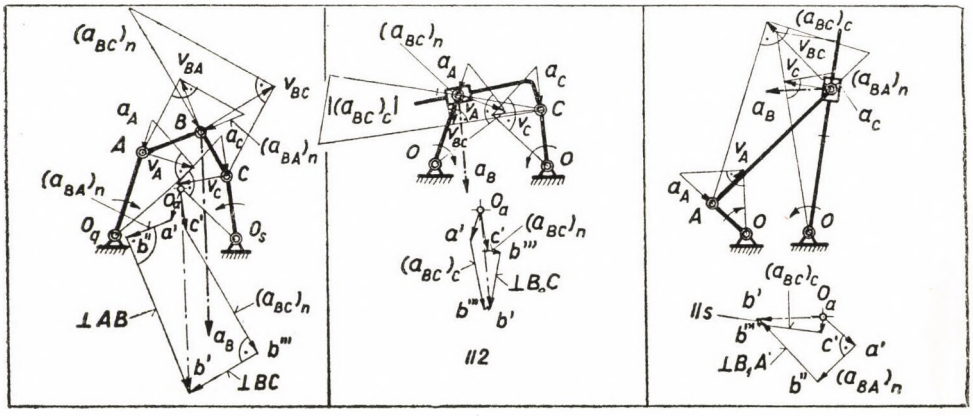
2. Wegbestimmungen



3. Geschwindigkeitspläne bei Annahme von v_A = const. und v_C = const.

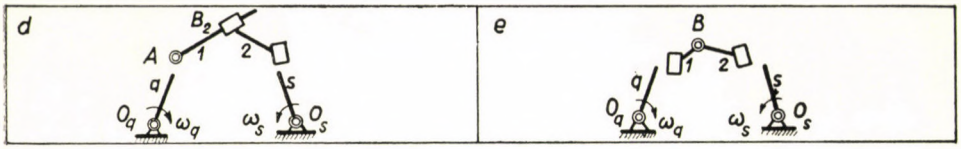


4. Beschleunigungspläne bei Verwendung der Geschwindigkeitspläne

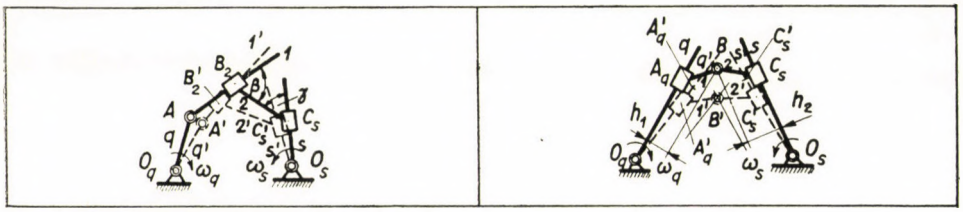


Kinematische Untersuchung von zweigliederigen an zwei Anfangsglieder angeschlossenen Gruppen

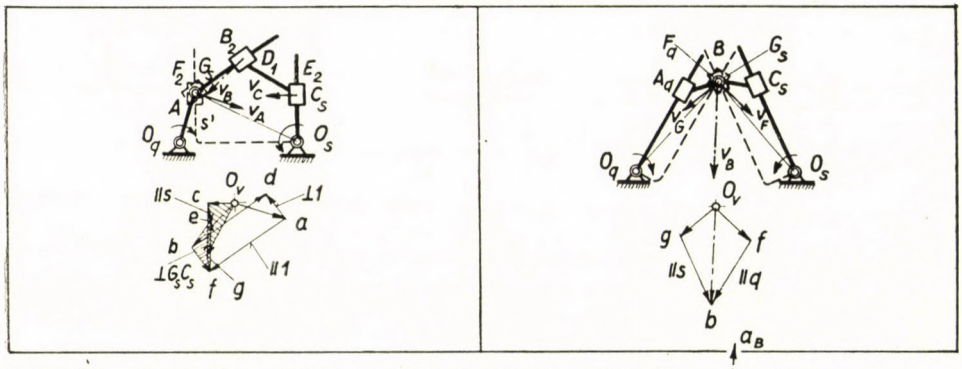
1. Anschlußskizze.



2. Wegbestimmungen.



3. Geschwindigkeitspläne bei Annahme von v_A = const. und v_C = const.



4. Beschleunigungspläne bei Verwendung der Geschwindigkeits- pläne

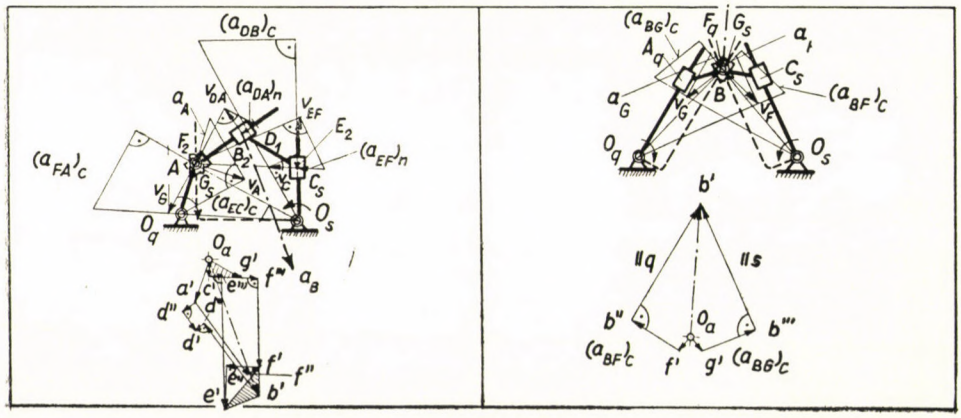


Abb. 16. Bestimmung des Weges, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung von zweigliederigen an zwei Anfangsglieder angeschlossen Gruppen ausschliesslich durch zeichnerische Konstruktion

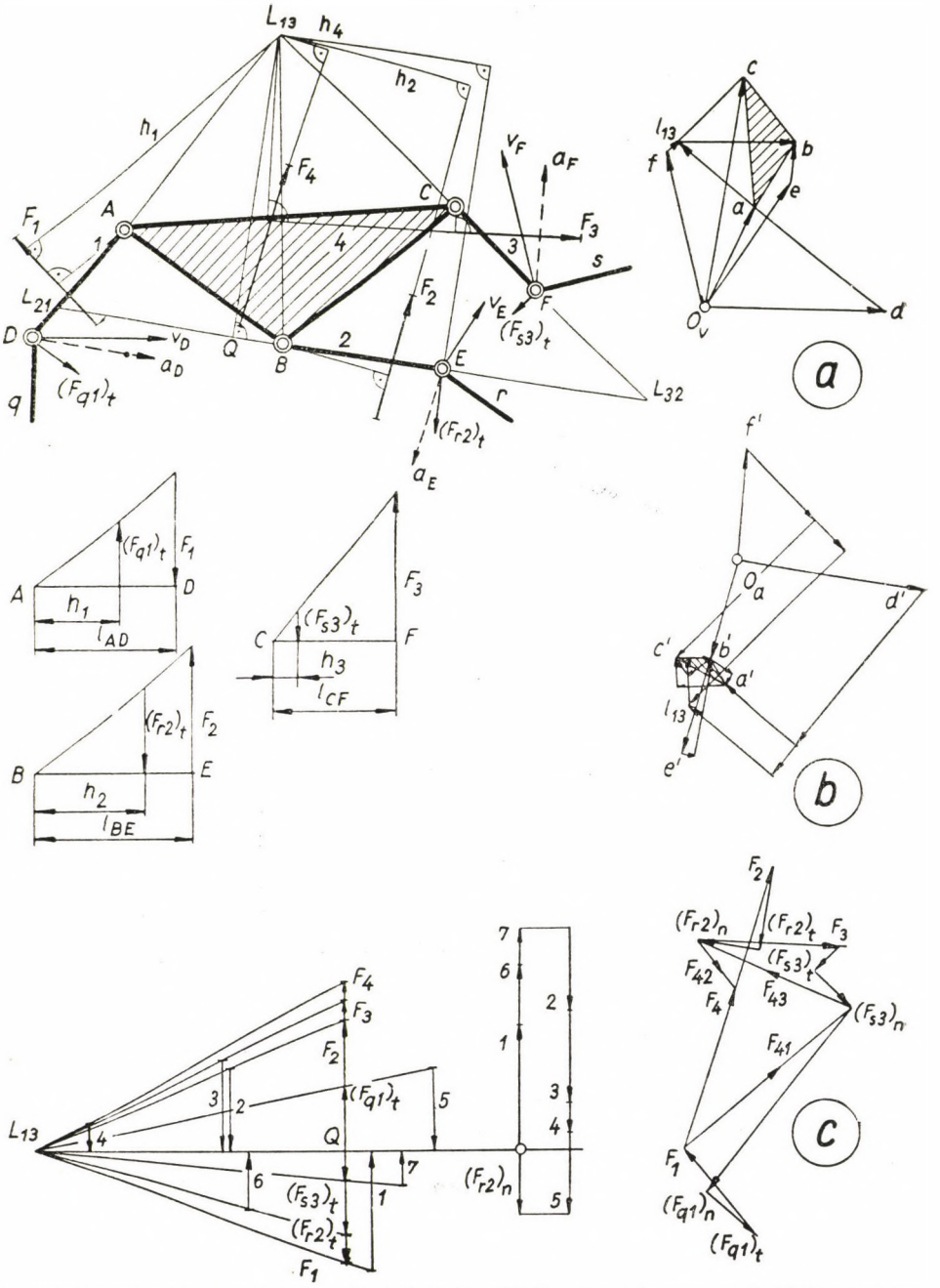


Abb. 17. Konstruktion des (a) Geschwindigkeits-, (b) Beschleunigungs- und (c) Kraftplanes einer viergliederigen abgetrennten Gruppe

nis der relativen Geschwindigkeiten v_{AD}, v_{LA}, ... die relativen Beschleunigungskomponenten in der Normalrichtung $(a_{LD})_n$, $(a_{LF})_n$ festzustellen (in der Abb. 17 wurden zwar diese Detailkonstruktionen ausgeführt, aber nicht eingezeichnet). In Kenntnis dieser beiden Geschwindigkeiten lässt sich nun im Beschleunigungsplan der Ort von l'_{13} bestimmen.

2. Sind die Punkte l_{13} und l'_{13} bekannt, so hat man :

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_L + \mathbf{v}_{BL}\,; \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_L + (\mathbf{a}_{BL})_n + (\mathbf{a}_{BL})_t\,;$$
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{BE}\,; \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_E + (\mathbf{a}_{BE})_n + (\mathbf{a}_{BE})_t\,.$$

Mit der bekannten Methode können also auch die Punkte b und b' im Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsplan ermittelt werden.

3. In Kenntnis der Punkte b und b' lassen sich nunmehr a bzw. a', ferner c und c' mit Hilfe folgender Vektorgleichungen bestimmen :

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB}\,; \qquad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{AB})_n + (\mathbf{a}_{AB})_t\,;$$
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{AD}\,; \qquad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_D + (\mathbf{a}_{AD})_n + (\mathbf{a}_{AD})_t\,.$$
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}\,; \qquad \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{CB})_n + (\mathbf{a}_{CB})_t\,;$$
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{CF}\,; \qquad \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_F + (\mathbf{a}_{CF})_n + (\mathbf{a}_{CF})_t\,.$$

Eine gute Kontrolle ist hierbei, dass die Dreiecke abc und $a'b'c'$ ähnlich dem Dreieck ABC sind.

In jenem Falle, wo ein rotierendes kinematisches Paar durch ein solches ersetzt wird, das eine Translationsbewegung ausführt, ändert sich die Reihenfolge der Lösung nicht, es ist nur fallweise zu untersuchen, ob nicht auch die Coriolis-Beschleunigung an Stelle oder neben der normalen Beschleunigungskomponente auftritt.

Auf die Abb. 17 soll übrigens noch im Laufe der dynamischen Untersuchung zurückgekommen werden.

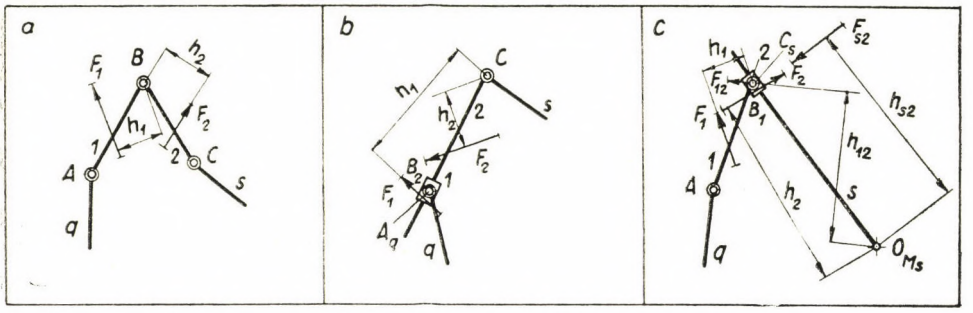
4. Das Kräftegleichgewicht der abgetrennten Gruppen von ebenen Getrieben

Die Abb. 18 zeigt wiederum die verschiedenen, schon im Punkt 2 aufgezählten Varianten der elementaren Gruppen bei Verbindung mit beliebigen Anfangsgliedern q und s. Die Glieder 1 und 2 der elementaren Gruppen sind durch die äussere Kraft $\mathbf{F}_1$ bzw. $\mathbf{F}_2$ belastet. Es sind die in den kinematischen Paaren auftretenden Schliesskräfte zu bestimmen.

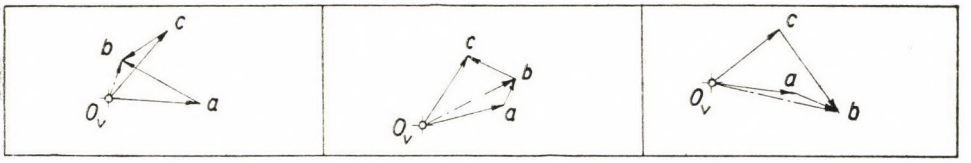
Die Tatsache, dass die abgetrennten Gruppen den Freiheitsgrad Null haben, enthält zugleich die Bedingung der statischen Bestimmtheit. Demgemäss befindet sich also jede abgetrennte Gruppe gesondert im Gleichgewicht, was bedeutet, dass die gestellte Aufgabe lösbar ist.

Allgemeine dynamische Untersuchung von zweigliederigen Gruppen

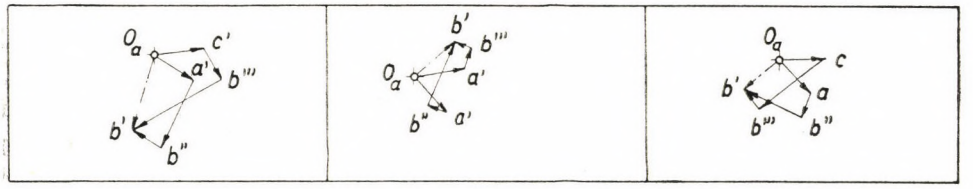
1 Belastungen von zweigliederigen Gruppen



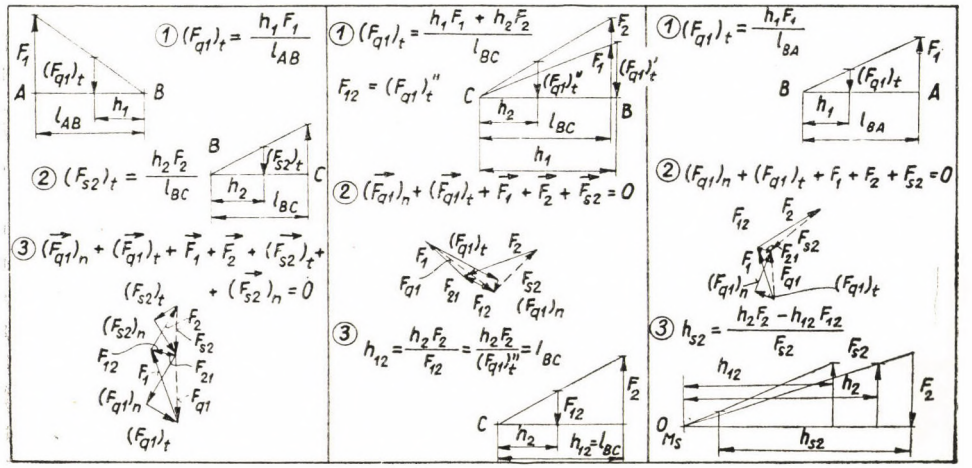
2 Geschwindigkeitspläne mit den angenommenen Geschwindigkeiten v_A und v_C



3 Beschleunigungspläne mit angenommenem a_A und a_C und mit den Geschwindigkeitsplänen.

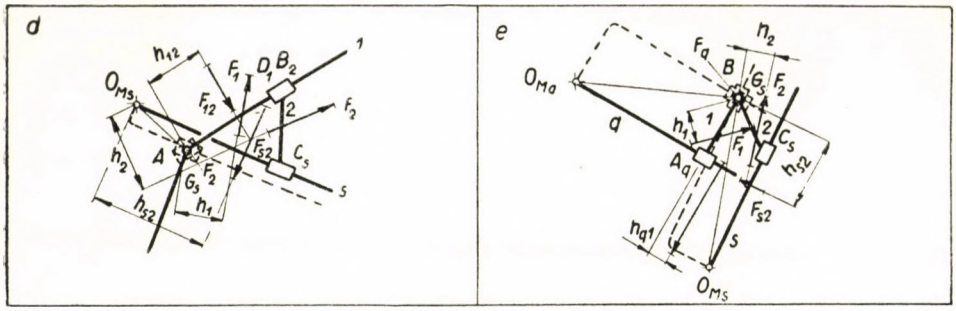


4 Kraftpläne und Lösungen der Momentengleichungen für die angenommenen Belastungen.



Allgemeine dynamische Untersuchung von zweigliederigen Gruppen

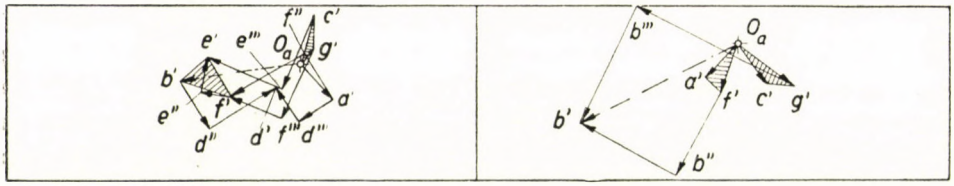
1 Belastungen von zweigliederigen Gruppen



2 Geschwindigkeitspläne mit den angenommenen Geschwindigkeiten v_A und v_C



3 Beschleunigungspläne mit angenommenem a_A und a_C und mit den Geschwindigkeitsplänen



4 Kraftpläne und Lösungen der Momentengleichungen für die angenommenen Belastungen

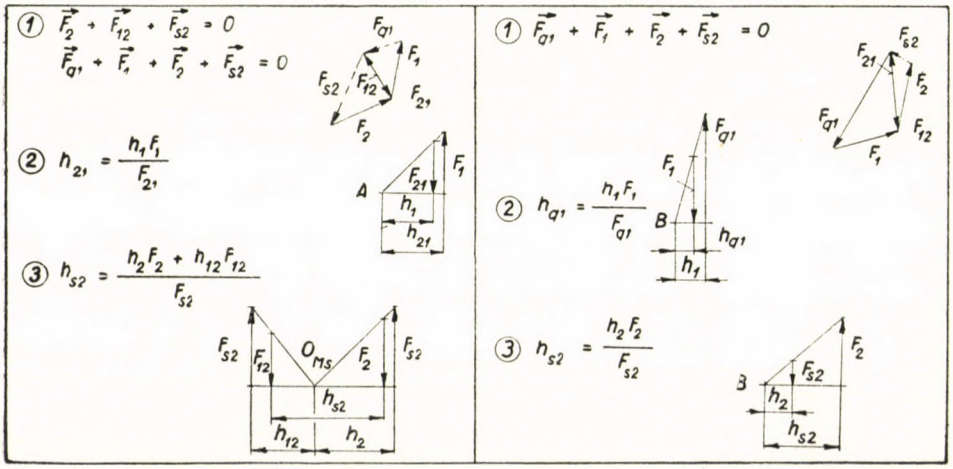


Abb. 18. Bestimmung der in den kinematischen Paaren von zweigliederigen Gruppen auftretenden Stütz- (Reaktions-) Kräfte durch zeichnerische Konstruktion bei gegebenen äusseren Kräften

Unter den mehreren *Konstruktionsmethoden* wird bei der in der Abb. 18 angewandten Methode beim Suchen der unbekannten Schliesskraft des rotierenden Zapfens zuerst ihre in der Stabrichtung verlaufende und dann ihre senkrecht hierzu verlaufende Komponente bestimmt. Die Wirkungslinie der gesuchten Schliesskraft geht nämlich bei Vernachlässigung des Reibungswiderstandes sicher durch den geometrischen Mittelpunkt des Zapfens hindurch. Im Falle von kinematischen Paaren, die eine Translationsbewegung ausführen, ist die Stützkraft bei Vernachlässigung des Reibungswiderstandes sicher senkrecht zur Richtung der relativen Verschiebung, der Ort ihrer Wirkungslinie kann aus dem Gleichgewicht der Momente ermittelt werden.

In den Kolonnen der Abb. 18 sind die Konstruktionen der sog. *Kraftpläne* für die verschiedenen Varianten der elementaren Gruppen ersichtlich. Bei jeder Variante der elementaren Gruppen sind angeführt :

a) die Reihenfolge der Lösung ;

b) die notwendigen Gleichungen des Momenten- bzw. Kräftegleichgewichts ;

c) die notwendigen zeichnerischen Lösungen.

In der Abb. 18 finden sich zwei Arten von Konstruktionen :

1. Die Bestimmung der unbekannten Schliesskraftkomponente aus den Momentengleichungen wurde durch die das bekannte *Hebelgesetz* benutzende Konstruktion gelöst. Diese kann auch in jenen Fällen gut angewandt werden, wenn in der Gleichung des Momentengleichgewichts mehr als zwei Momente vorkommen [s. die Kolonne *b)*]. Der Ort der Schliesskraft eines eine Translationsbewegung ausführenden kinematischen Paares lässt sich im Falle von 3 Kräften am einfachsten durch jene Gesetzmässigkeit des auf ein Glied einwirkenden, im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystems feststellen, dass sie sich in einem Punkte schneiden müssen. Im Falle von mehr als 3 Kräften wird auch hier das Hebelgesetz zur Konstruktion herangezogen.

2. Die auf eine elementare Gruppe oder auf ein Glied wirkenden Kräfte müssen im Falle von Gleichgewicht ein geschlossenes Vieleck bilden. Diese Gesetzmässigkeit ermöglicht es, den Kraftplan Schritt für Schritt aufzubauen.

Bei der Konstruktion der Kraftpläne werden die Indizes der in den kinematischen Paaren auftretenden Stützkräfte so bezeichnet, dass man an die erste Stelle das Zeichen jenes Gliedes setzt, dessen Wirkung auf das untersuchte Glied gesucht wird, wobei das Zeichen des untersuchten Gliedes an die zweite Stelle im Index kommt. So bedeutet z. B. $(F_{q1})_t$ folgendes : Die Kraftwirkung des Gliedes q in tangentialer Richtung auf das Glied 1. Die Richtung der Tangente ist im untersuchten Fall senkrecht zum Gliede 1.

Zurückkommend auf die Abb. 17, in der auf die Glieder der viergliederigen, verwickelteren abgetrennten Gruppe die Kraft $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ und $\mathbf{F}_4$ wirkt, so kann in ihr der Kraftplan folgenderweise konstruiert werden.

1. Aus den Gleichungen des Momentengleichgewichts lassen sich die tangential gerichteten Stützkraftkomponenten der freien Gelenke wie folgt berechnen :

$$(F_{q1})_t = \frac{h_1 F_1}{l_1}; \qquad (F_{r2})_t = \frac{h_2 F_2}{l_2}; \qquad (F_{s3})_t = \frac{h_3 F_3}{l_3}$$

(s. die entsprechenden Konstruktionen der Abb. 17).

2. Die in einem der freien Gelenke auftretende, in Stabrichtung gerichtete, d. h. normalgerichtete Kraft kann aus der für den »Assur-Punkt« L_{13} aufgestellten Momentengleichung bestimmt werden :

$$(F_{r2})_n = -\frac{M_{L13}}{h_{r2}}$$

(s. die entsprechende Konstruktion in Abb. 17, bei der die Wirkung jedes Momentes gesondert untersucht wurde, wobei man $(F_{r2})_n$ durch die richtige Summierung dieser Wirkungen erhielt).

Aus der angesetzen Vektorgleichung

$$(\mathbf{F}_{q1})_n + (\mathbf{F}_{q1})_t + \mathbf{F}_1 + (\mathbf{F}_{r2})_n + (\mathbf{F}_{r2})_t + \mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_{s3})_n + (\mathbf{F}_{s3})_t + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = 0$$

sind die Glieder $(\mathbf{F}_{q1})_n$ und $(\mathbf{F}_{s3})_n$ von unbekannter Grössenordnung, aber bekannter Richtung konstruierbar (s. den Kraftplan *c)* der Abb. 17).

4. Die in den Gelenken A, B und C auftretenden Stützkräfte sind auf Grund der für die Glieder 1, 2 und 3 aufstellbaren, folgenden Vektorgleichungen aus dem Kraftplan ablesbar :

$$\mathbf{F}_{q1} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{41} = 0;$$
$$\mathbf{F}_{r2} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{42} = 0;$$
$$\mathbf{F}_{s3} + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_{43} = 0.$$

Hiermit wurde die vollständige Untersuchung der abgetrennten Gruppe in einer gegebenen Lage durchgeführt.

5. Die auf ein Glied des Getriebes wirkende Trägheitskraft

Es sei das in Abb. 19 dargestellte Glied mit der Masse m untersucht, dessen Beschleunigungsplan in dieser Lage bekannt ist. Bekannt sind ferner der Ort des Schwerpunkts (der Ort von S lässt sich in Kenntnis der geometrischen Ausgestaltung des Gliedes durch Konstruktion bestimmen) und das auf den Schwer-

punkt bezügliche, mit J_S bezeichnete Trägheitsmoment. Es sei angenommen, dass das Glied eine Symmetrieebene besitzt und dass diese mit der Bewegungsebene zusammenfällt, ferner dass die Schwerpunktsachse senkrecht zur Bewegungsebene verläuft. In Kenntnis von m und J_S, sowie der Beschleunigungen können die im Schwerpunkt des Gliedes wirkende Trägheitskraft $F_i = -ma_S$ und das durch die den Schwerpunkt herum drehenden Trägheitskräfte $M_i = -\varepsilon J_S$ verursachte Moment berechnet werden.

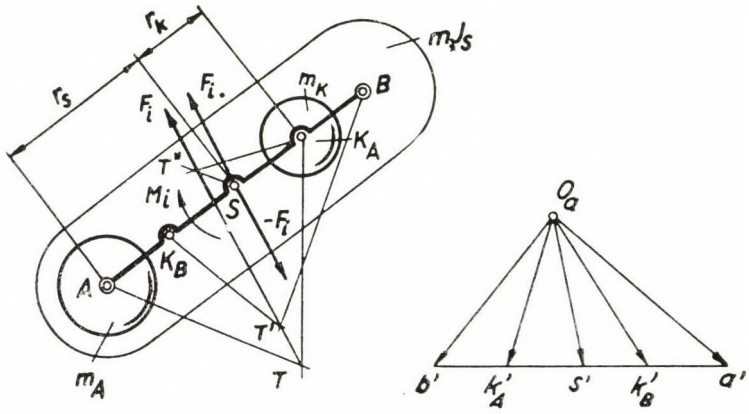


Abb. 19. Allgemeine Skizze des einen Gliedes des Getriebes und Beschleunigungsplan des Gliedes. Am Gliede zeigt die Bezeichnung S den Schwerpunkt, die Bezeichnung K_A den Schwingungsmittelpunkt an. In der Abbildung ist die Konstruktion der Angriffspunkte (T, T' und T'') der während einer gegebenen Bewegung des Gliedes auftretenden Trägheitskraft dargestellt

In diesen zwei Beziehungen ist F_i die Trägheitskraft in kg, m die Masse in kg s²/m, a_S die Beschleunigung des Schwerpunkts in m/s², ε die Winkelbeschleunigung des Gliedes in 1/s² und J_S das Trägheitsmoment des Gliedes, bezogen auf den Schwerpunkt S in mkg s² (alles technische Einheiten).

Wenn man nun die Masse m z. B. so auf zwei Orte reduzieren will, dass das eine Glied in den Punkt A gelange, dann lässt sich bei Befriedigung der folgenden für reduzierte Massen geltenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m_A + m_K &= m\,; \\ m_A r_S - m_K r_K &= 0\,; \\ m_A r_S^2 + m_K r_K^2 &= J_S\,, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

der Wert von m_A, m_K und r_K, d. h. der Ort der anderen reduzierten Masse wie folgt berechnen:

$$r_K = \frac{J_S}{r_S m}. \tag{16}$$

Dies bedeutet, dass der Ort der anderen reduzierten Masse gerade in den für A genommenen sog. *Schwingungsmittelpunkt* fällt.

Die beiden reduzierten Massen sind:

$$m_A = \frac{r_K}{r_S + r_K} m \qquad \text{und} \qquad m_K = \frac{r_S}{r_S + r_K} m.$$

In Kenntnis der reduzierten Massen ist dagegen

$$m_A \mathbf{a}_A + m_K \mathbf{a}_K = m\mathbf{a}_S = -\mathbf{F}_i, \tag{17}$$

d. h. der Ort von F_i lässt sich mit den im Beschleunigungsplan gegebenen Trägheitsrichtungen konstruieren. Im Beschleunigungsplan können nämlich die Punkte von s' und k' mit der Methode der Konstruktion eines relativen Beschleunigungsplanes gefunden werden, d. h. die Gerade AB wird von S im gleichen Verhältnis geschnitten wie die relative Beschleunigung $a'b'$ von s', ferner K_A im gleichen Verhältnis wie k'_A. Die Wirkungslinie des Vektors $\mathbf{F}_i$ der Trägheitskraft geht also durch den Angriffspunkt T hindurch. Die Wirkungslinie von $\mathbf{F}_i$ ist naturgemäss dieselbe, wenn man den Punkt B frei wählt und die Konstruktion sinngemäss von da ausgehend ausführt (s. den Punkt T'). Greift $\mathbf{F}_i$ im festgestellten Ort an, so enthält es auch die auf seinen Schwerpunkt ausgeübten Momente der Trägheitskräfte.

Abb. 19 behandelt das eine *allgemeine Bewegung* ausführende Glied des Getriebes. Es gibt aber auch *einfachere Bewegungen* ausführende Glieder des Getriebes:

1. Wenn das Glied eine geradlinige Bewegung ausführt, muss man nicht die Masse reduzieren, die Trägheitskraft $F_i = -ma_S$ wirkt im Schwerpunkt der bewegten Masse und $M_i = 0$, weil es keine Rotation ausführt.

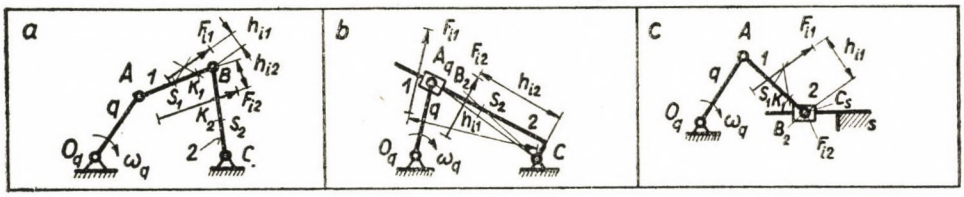
2. Wenn sich das Glied um seinen Schwerpunkt verdreht, dann ist $F_i = 0$, weil sich der Schwerpunkt am gleichen Ort befindet und $M_i = -\varepsilon J_S$.

3. Wenn das Glied um eine stehende Achse rotiert und die Rotationsachse nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, dann fällt T im Sinne der oben geschilderten Konstruktion von Abb. 19 mit K zusammen (a_A ist nämlich gleich Null), der Angriffspunkt von F_i fällt also gerade in den Punkt K.

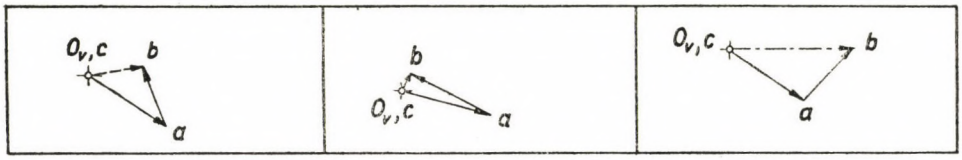
Beim Glied von allgemeiner Bewegung kommt es häufig vor, dass der Punkt T bzw. T' in der Konstruktion sehr entfernt zu liegen kommt. In diesem Fall kann man den Ort von F_i auch so bestimmen, dass man die Bewegung des

Dynamische Untersuchung von zweigliederigen an ein Anfangsglied angeschlossenen Gruppen

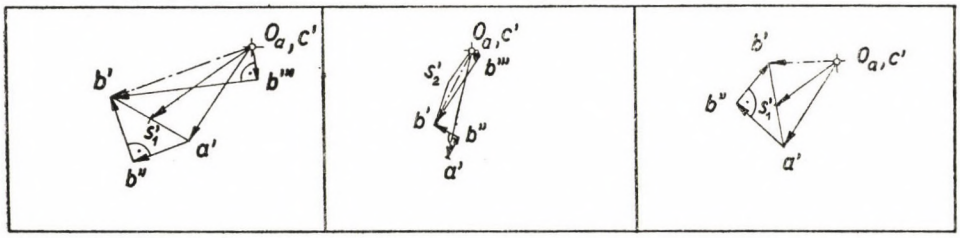
1. Die Getriebe mit der Konstruktion des Ortes der Trägheitskräfte



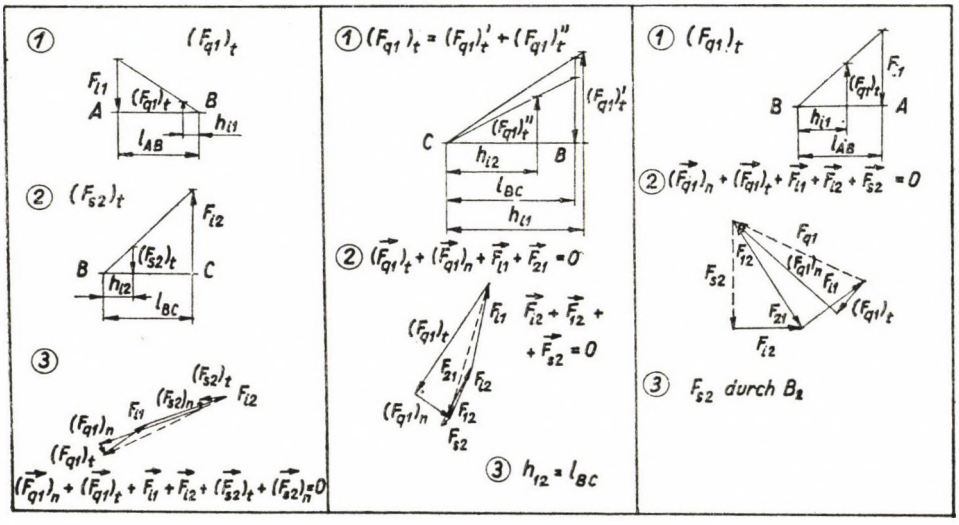
2. Geschwindigkeitspläne bei Annahme von v_A = const.



3. Beschleunigungspläne bei Verwendung der Geschwindigkeitspläne.

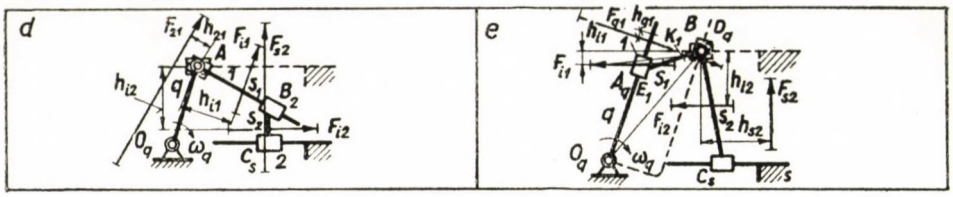


Kraftpläne und Lösungen der Momentengleichungen für die angenommenen Belastungen

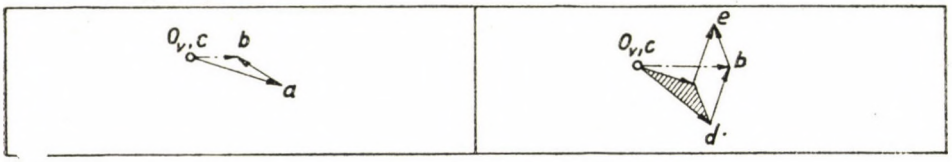


Dynamische Untersuchung von zweigliederigen an ein Anfangsglied angeschlossenen Gruppen

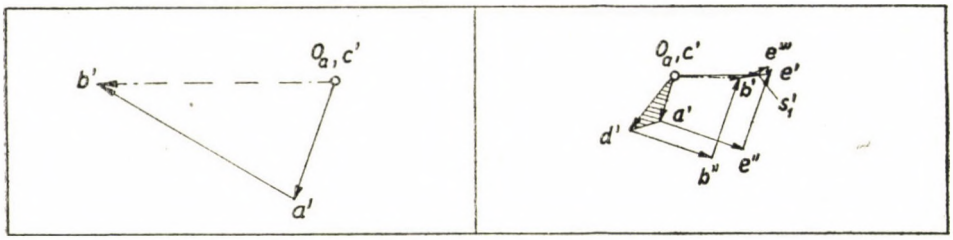
1. Die Getriebe mit der Konstruktion des Ortes der Trägheitskräfte.



2 Geschwindigkeitspläne bei Annahme von v_A = const.



3. Beschleunigungspläne bei Verwendung der Geschwindigkeitspläne.



4. Kraftpläne und Lösungen der Momentengleichungen für die angenommenen Belastungen.

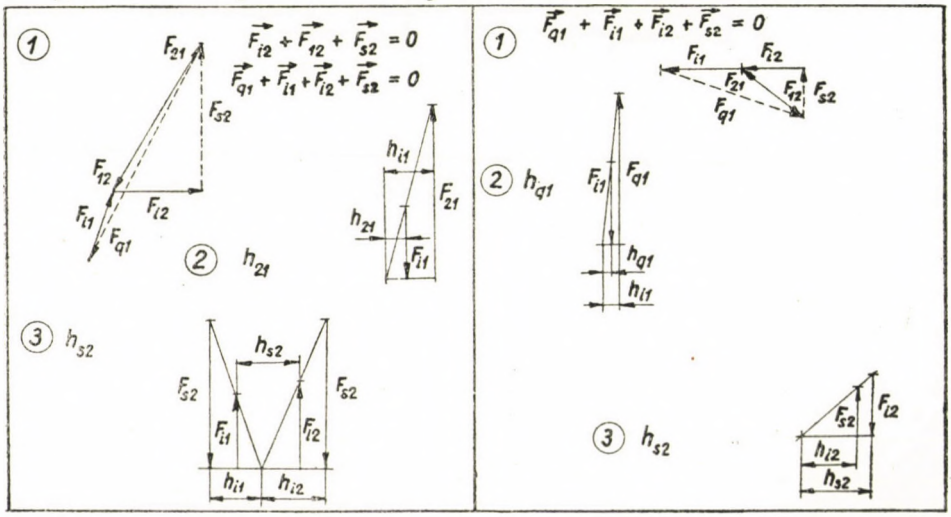
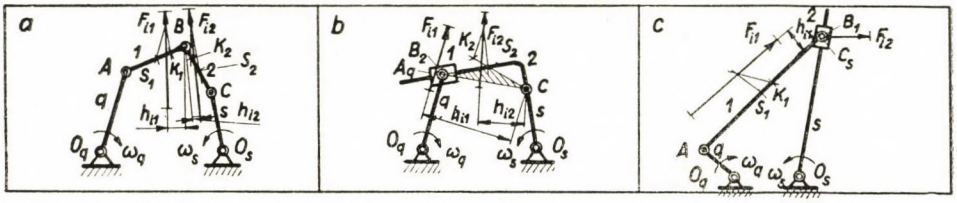


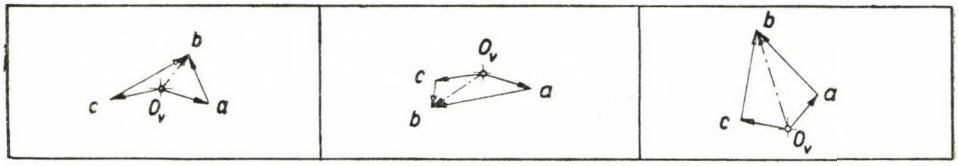
Abb. 20. Die Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Kraftpläne von zweigliederigen, an ein Anfangsglied angeschlossenen Gruppen im Falle von Leerlauf. Die Bestimmung der Kraftpläne erfolgte mit Hilfe des Konstruktionsverfahrens

Dynamische Untersuchung von zweigliederigen an zwei Anfangsglieder angeschlossenen Gruppen

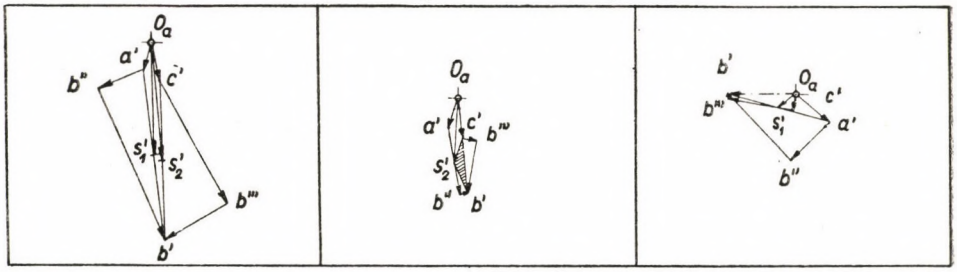
1. Die Getriebe mit der Konstruktion des Ortes der Trägheitskräfte



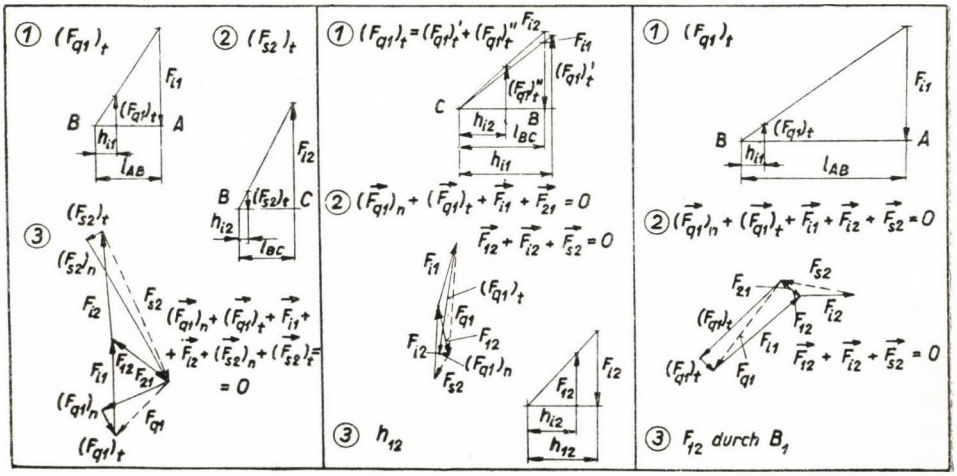
2. Geschwindigkeitspläne bei Annahme von v_A = const und v_C = const.



3. Beschleunigungspläne bei Verwendung der Geschwindigkeitspläne

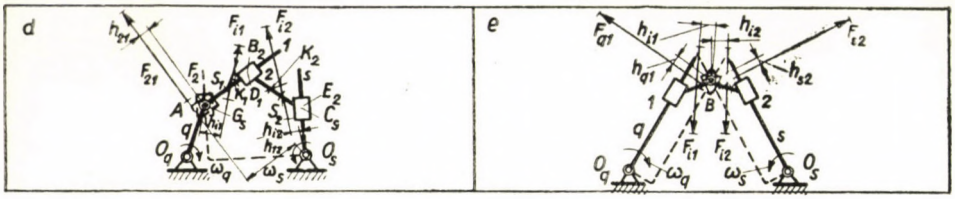


4. Kraftpläne und Lösungen der Momentengleichungen für die angenommenen Belastungen

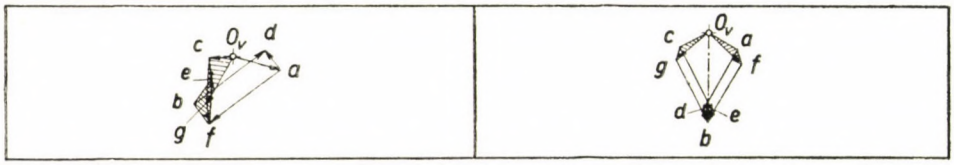


Dynamische Untersuchung von zweigliederigen an zwei Anfangsglieder angeschlossenen Gruppen

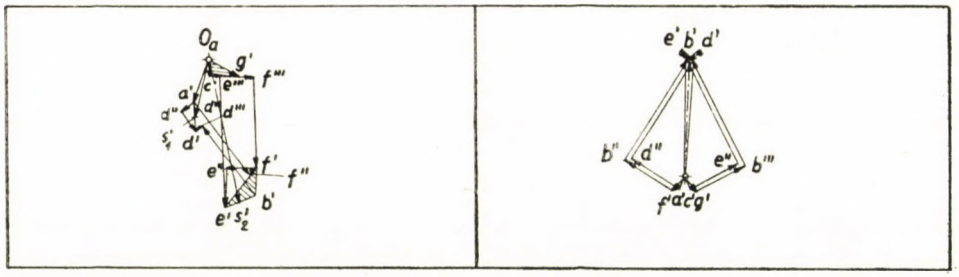
1. Die Getriebe mit der Konstruktion des Ortes der Trägheitskräfte



2. Geschwindigkeitspläne bei Annahme von v_A = const und v_C = const



3 Beschleunigungspläne bei Verwendung der Geschwindigkeitspläne.



4. Kraftpläne und Lösungen der Momentengleichungen für die angenommenen Belastungen.

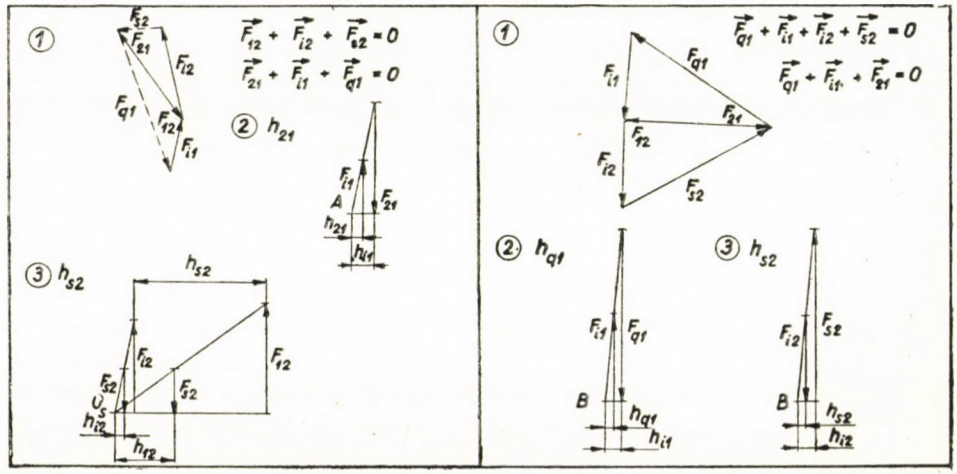


Abb. 21. Die Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Kraftpläne von zweigliederigen, an zwei Anfangsglieder angeschlossenen Gruppen im Falle von Leerlauf. Die Bestimmung der Kraftpläne erfolgte mit Hilfe des Konstruktionsverfahrens

Gliedes als Resultierende einer Translations- und einer Rotationsbewegung auffasst. Bei Translationsbewegung des Gliedes führt jeder seiner Punkte, also auch der Punkt S eine gleiche Bewegung wie der Punkt A aus. Die Richtung der Beschleunigung der Trägheitskraft des Punktes S stimmt mit der Beschleunigungsrichtung des Punktes A überein (s. den obigen Punkt 1). Das Glied rotiert ausserdem um den Punkt S, wobei im Sinne des obigen Punktes 3 die Trägheitskraft durch den Punkt K_A hindurchgehen muss und ihre Richtung mit der Richtung der aus dem Beschleunigungsplan ersichtlichen Beschleunigung a_{KS} übereinstimmt. Der Schnittpunkt T'' der beiden Richtungen bezeichnet wieder den Ort von F_i (s. die Konstruktion des Punktes T'' der Abb. 19). Im nachstehenden soll auch diese Konstruktion in den gegebenen Beispielen angewandt werden.

6. Dynamische Untersuchung von einfachen ebenen Getrieben

In Abb. 20 sind wiederum die bereits in Abb. 15 erörterten, mit einem Anfangsglied verbundenen elementaren Gruppen mit ihrem Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsplan dargestellt. Mit Hilfe der Beschleunigungspläne und nach Bestimmung der Schwerpunkte und Schwingungsmittelpunkte der Glieder seien zuerst die Orte von F_i gesucht. Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, dass sich der Schwerpunkt des Anfangsgliedes im Drehpunkt befindet, was durch Massenausgleichung immer erreicht werden kann.

Nach Auftragen der Trägheitskräfte kann man mit Hilfe der im Zusammenhang mit der Abb. 18 geschilderten Konstruktionsprinzipien die Kraftpläne zu den sog. Leerlauf-Gleichgewichtsstellungen konstruieren.

Die Abb. 21 zeigt die bereits geschilderten, mit *zwei* Anfangsgliedern verbundenen elementaren Gruppen zusammen mit ihren Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- bzw. nach Auftragung der Trägheitskräfte mit ihren sog. Leerlaufkraftplänen.

Im Falle einer äusseren Kraft oder eines äusseren Momentes ist der Gang der Konstruktion der Kraftpläne derselbe. Die Aufgabe kann aber auch so gelöst werden, dass man für die äussere Kraft bzw. für das äussere einen gesonderten Kraftplan ohne Berücksichtigung der Trägheitskräfte aufstellt und dann die beiden Kraftpläne superponiert.

Die aus den Kraftplänen ablesbaren Kräfte $\mathbf{F}_{q1}$ (bzw. $\mathbf{F}_{s2}$) sind im Punkte A (bzw. C) des Anfangsgliedes auszuüben. Da nun die vorliegenden Untersuchungen für *Leerlauf* durchgeführt wurden, kann es vorkommen, dass sich das Anfangsglied zu einem getriebenen bzw. geführten Glied umwandelt. Dies wird durch den von den Vektoren $\mathbf{v}_A$ (bzw. $\mathbf{v}_C$) und $\mathbf{F}_{q1}$ (bzw. $\mathbf{F}_{s2}$) im Punkte A (bzw. C) eingeschlossenen Winkel bestimmt. Ist dieser Winkel Null oder kleiner als 90°, so bleibt das Anfangsglied das treibende Glied, beträgt er jedoch 180° oder fällt er zwischen 90° und 180°, so wird es zu einem geführten Glied.

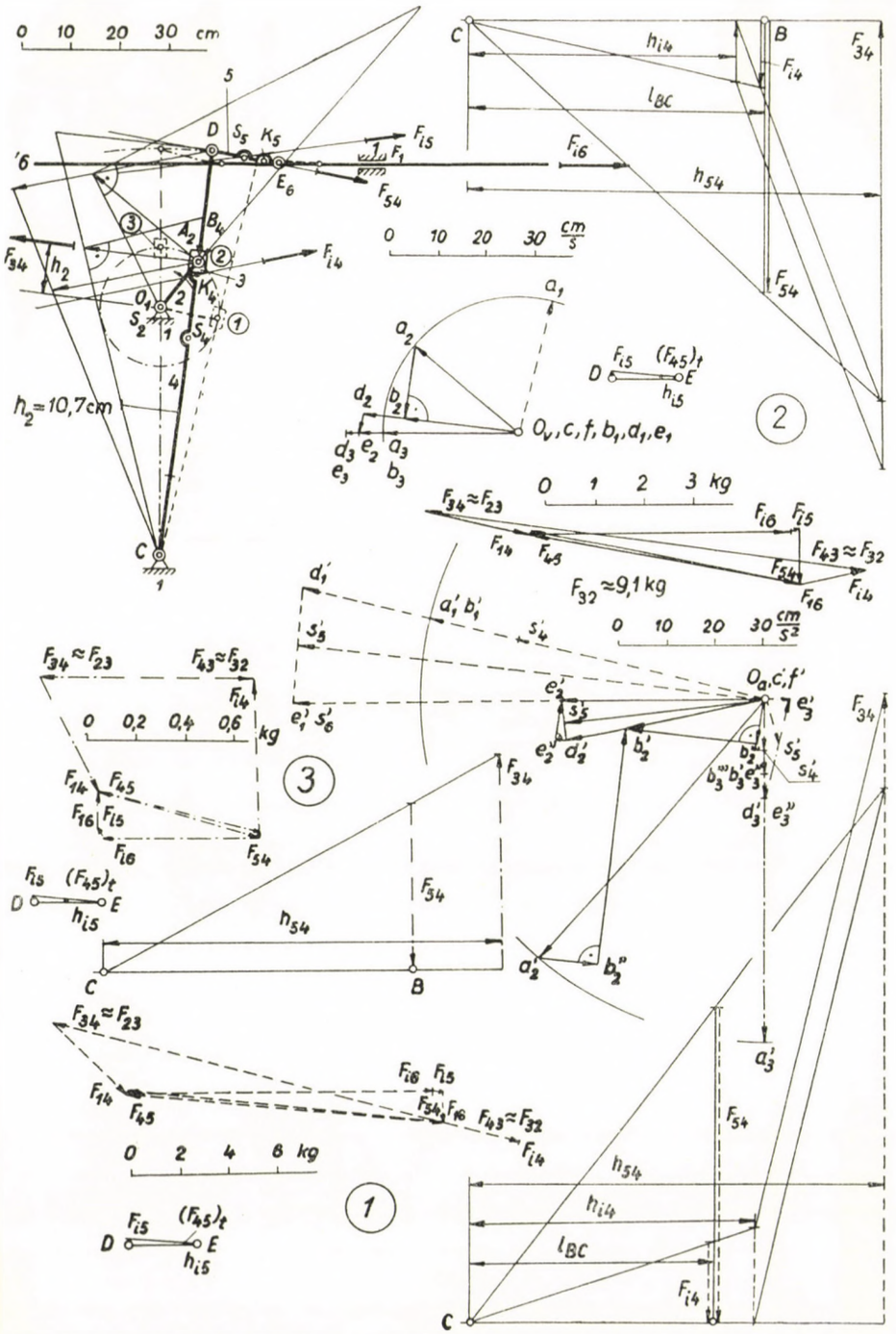


Abb. 22. Dynamische Untersuchung eines Getriebes, das den Werkzeughalter einer Shapingmaschine antreibt. Die Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Kraftpläne in 1. Toten-Punkt-Stellung ; 2. beliebiger Stellung ; 3. spezieller Stellung. (In der schematischen Darstellung des Getriebes sind die notwendigen Hilfskonstruktionen nur in 2 Stellung eingezeichnet.)

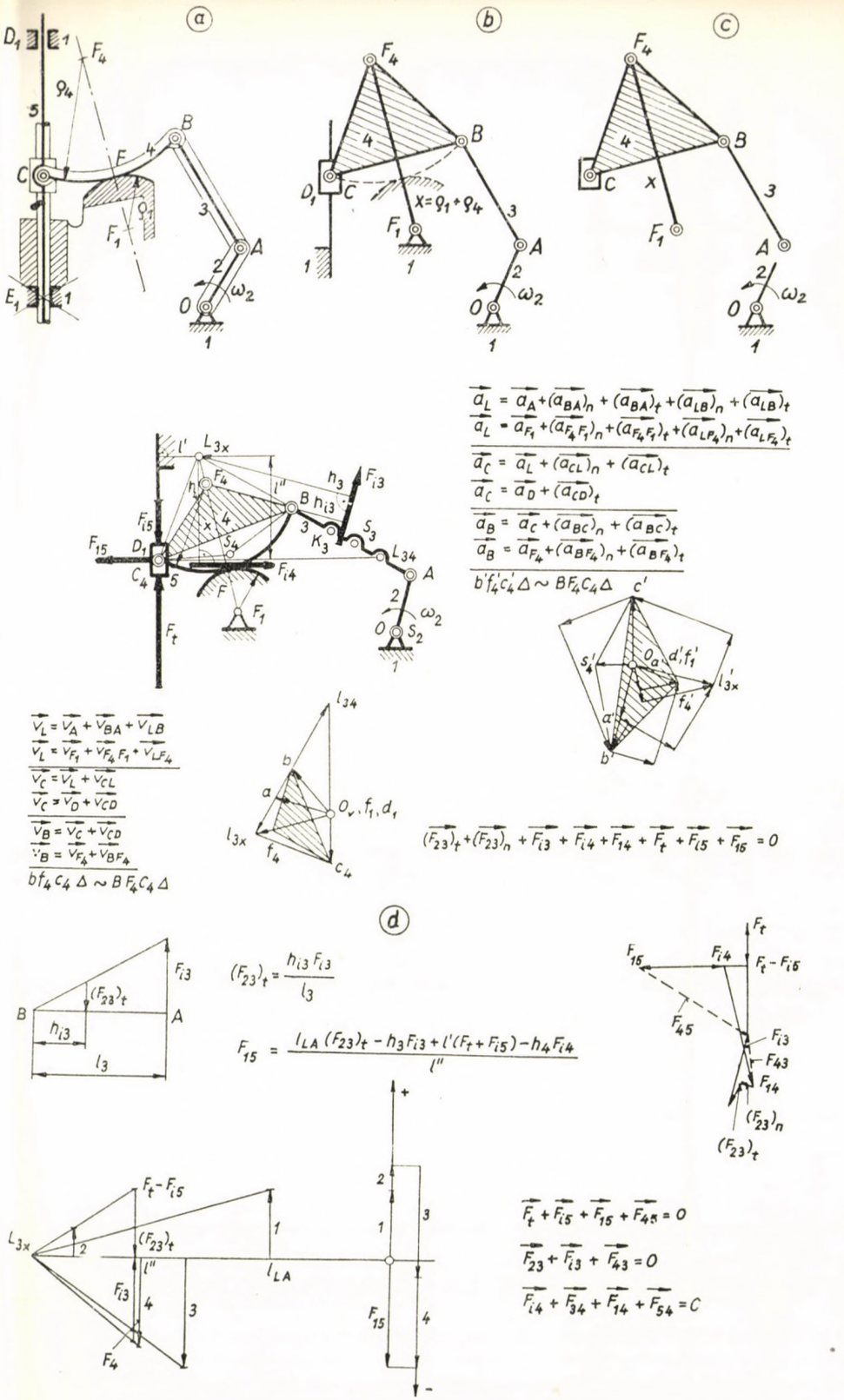


Abb. 23. Dynamische Untersuchung eines Nockengetriebes. *a)* Schematische Darstellung des Getriebes ; *b)* modifizierte Darstellung des Getriebes ; *c)* Abtrennung des viergliederigen Getriebes ; *d)* der Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Kraftplan des Getriebes in einer gegebenen Stellung des Kurbelarmes

7. Beispiele für die dynamische Untersuchung von ebenen Getrieben

Um die praktische Anwendung der obigen Ausführungen zu zeigen, sollen im nachstehenden die Teilaufgaben von zwei Beispielen gelöst werden. Zur Lösung beider Beispiele ist es notwendig, den Massstab für die Länge, Geschwindigkeit, Beschleunigung bzw. Kraft zu wählen. Es ist jedoch darauf zu achten, dass vom Längen-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsmassstab nur zwei beliebig gewählt werden können, während der dritte das Gesetz

$$a = v^2 s^{-1}$$

zu befriedigen hat.

Beispiel Nr. 1. Untersuchung des den Werkzeughalter einer Shapingmaschine antreibenden Getriebes. Aus der vollständigen Lösung dieser Aufgabe sollen hier nur die folgenden Einzelheiten besprochen werden, und zwar die dynamische Untersuchung in einer beliebigen und zwei speziellen Stellungen des Getriebes (Abb. 22).

Die Abb. 22 enthält die massstabtreue Darstellung des Getriebes aus Abb. 1 und 2 mit den Längen-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Kraftmassstäben. Das Getriebe wurde in einer beliebigen Stellung gezeichnet. Die hauptsächlichen Kennzahlen sind : $l_{CF} = 810$ mm, $l_{CO} = 510$ mm, $l_{CD} = 840$ mm, $l_{DE} = 130$ mm, $r_2 = 120$ mm, $l_{CS_4} = 447$ mm, $l_{CK_4} = 578$ mm, $l_{DS_5} = 65$ mm, $l_{DK_5} = 116{,}8$ mm, $n_2 = 23/\text{min.}$, $G_3 \approx 0$ kg, $G_4 = 58{,}5$ kg, $G_5 = 3{,}76$ kg, $G_6 = 125$ kg.

Im Fall 2 der Abbildung wurden der Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Kraftplan samt den notwendigen Hilfskonstruktionen für eine beliebige Lage konstruiert.

Im Falle 1 der Abbildung sind die notwendigen Konstruktionen für die dynamische Untersuchung in einem toten Punkt des Schwinghebels, im Fall 3 für die Mittelstellung des Schwinghebels zu sehen. Alle drei dynamischen Untersuchungen beziehen sich auf Leerlauf.

Mit Hilfe der aus dem Beschleunigungsplan ablesbaren Beschleunigungen lassen sich auf Grund von $F_{\text{i}} = ma_S$ die folgenden Trägheitskräfte (in kg) berechnen :

	Fall		
	1	2	3
$F_{\text{i}4}$	3,10	1,37	0,66
$F_{\text{i}5}$	0,38	0,16	0,04
$F_{\text{i}6}$	12,60	5,35	0,63

Würde man die geschilderte Konstruktion für noch mehrere Stellungen des Anfangsgliedes ausführen, so könnten aus den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplänen z. B. die sog. phoronomischen Kurven für jeden beliebigen Punkt jedes beliebigen Gliedes gezeichnet werden. Aus den Kraftplänen liesse sich dann nicht nur der Kraft- bzw. Momentenbedarf der Antriebseite ablesen, sondern auch die polaren Diagramme der Veränderungen der bei kinematischen Paaren auftretenden Kräfte.

Beispiel Nr. 2. Untersuchung eines Nockengetriebes. Das in Abb. 23 schematisch dargestellte Nockengetriebe pflegt man zur Ventilsteuerung von Kolbendampfmaschinen zu benutzen. Das Getriebe hat den Freiheitsgrad 1. Da es auch eine nockenförmige Ausbildung besitzt, ist es zweckmässig, im Sinne der Ausführungen in Punkt 2, 10 ein modifiziertes Schema zu zeichnen. Der Nockenteil dieses Getriebes stimmt im Prinzip mit dem Fall *a)* in Abb. 9 überein. Der Nockenteil wird also in der modifizierten Darstellung durch ein Glied mit zwei rotierenden kinematischen Paaren ersetzt (s. Abb. 23b*)*. Die Teilskizze *c)* zeigt die Abtrennung. Man hat es also bei der einzigen abtrennbaren Gruppe mit einem viergliederigen verwickelteren Getriebe zu tun. Die abgetrennte viergliederige Gruppe unterschiedet sich nur insofern von der in Abb. 17, dass eine ihrer freien kinematischen Paare eine Translationsbewegung ausführt.

Die Teilskizze *d)* der Abb. 23 zeigt den Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Kraftplan in einer beliebigen Stellung des Getriebes. Da dieses Beispiel nur eine prinzipielle Lösung vorführt, wurde keinerlei Massstab angenommen.

SCHRIFTTUM

1. И. И. Артоболевский: Теория механизмов и машин. Москва, 1951.
2. J. Beggs: Mechanism. Los Angeles, 1951.
3. F. Dyson: Principles of Mechanism. London, 1951.
4. С. Н. Кожевников: Теория механизмов и машин. Москва, 1949.
5. O. Kraemer: Getriebelehre. Karlsruhe, 1950.
6. R. Kraus: Getriebelehre. Berlin, 1951.
7. N. Rosenauer—A. Willis: Kinematics of Mechanisms. Sidney, 1953.

ZUSAMMENFASSUNG

Unter den eingangs angegebenen Zielsetzungen wird in der vorliegenden Abhandlung die dynamische Untersuchung ausschliesslich auf Grund der graphischen Darstellung durchgeführt. Der grosse Vorteil der graphischen Darstellung besteht in ihrer Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit, während als Nachteil ihre Ungenauigkeit anzuführen ist. Da aber zur Lösung der eingangs erwähnten Aufgaben keine allzu grosse Genauigkeit erforderlich ist, wird das Konstruktionsverfahren in den meisten Fällen entsprechen. In der vorliegenden Abhandlung wurde von einer Erörterung der folgenden Fragen Abstand genommen: *a)* Wie lässt es sich durch Ausbalancierung der Massen erreichen, dass der Schwerpunkt des Anfangsgliedes tatsächlich in den Rotationsmittelpunkt gelange? *b)* Wie gross muss die Schwungmasse sein, damit die Geschwindigkeitsschwankungen des Anfangsgliedes zwischen vorgeschriebenen Grenzen bleiben?

DYNAMIC EXAMINATION OF MECHANISMS IN PLANE MOTION

Z. TERPLÁN

Cand. of Eng. Sc.

SUMMARY

Out of objects enumerated in the Introductory the paper has executed the basic dynamic examination by a *purely graphical method*, the advantages of which are illustrativeness and lucidity, while its handicap is lack of precision. However, since no excessive accuracy is required in the solution of the problems enumerated, the graphical method is practicable in most of the cases. Excluded have been from treatment: *a)* Balancing of masses to assure that the centre of gravity of the first member of the system coincide with the true centre of rotation, *b)* determination of the rotating mass required to keep fluctuations of angular velocity of the first member within specified limits.

EXAMEN DYNAMIQUE DE MÉCANISMES SE MOUVANT DANS LE PLAN

Z. TERPLÁN

Cand. des Sc. Techn.

RÉSUMÉ

Parmi les objectifs énumérés dans l'introduction l'auteur a exécuté l'examen dynamique fondamental par un *procédé purement graphique* ayant l'avantage d'être clairement exposé et facile à embrasser, et le désavantage de manquer de précision. Pourtant, comme la solution des problèmes énumérés ne demande pas de précision excessive, la méthode graphique con-

viendra dans la plupart des cas. L'étude ne s'occupe pas des questions suivants *a)* balancement des masses pour assurer que le centre de gravité du premier membre coincide avec le centre de rotation, *b)* détermination de la masse-volant nécessaire pour maintenir l'oscillation de la vitesse angulaire du premier membre entre des limites précisées.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В ПЛОСКОСТИ

Канд. техн. наук З. ТЕРПЛАН

РЕЗЮМЕ

Из числа перечисленных в введении задач выполнены основные динамические исследования исключительно методом построения. Большое преимущество метода построения — его наглядность и отчетливость, а недостаток — неточность. Но учитывая, что перечисленные в введении задачи не требуют слишком высокой точности, метод построения в большинстве случаев является удовлетворительным. Не занимается исследование следующими вопросами: *а)* каким образом можно достичь уравновешиванием массы положения, при котором центр тяжести исходного члена располагается действительно в центре вращения; *б)* какая маховая масса требуется для того, чтобы колебание угловой скорости исходного члена осталось бы в допустимых пределах.

FESTIGKEIT UND ELASTIZITÄT DES LEDERS BEI VERSCHIEDENEN BEANSPRUCHUNGEN*

G. TÓTH

DOKTOR DER CHEMISCHEN WISSENSCHAFTEN, LEDERFABRIK, PÉCS

und

V. PÓSA

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DIE LEDERINDUSTRIE, ABTEILUNG FÜR QUALITÄTSKONTROLLE, BUDAPEST

[Eingegangen am 11. Nov. 1955]

Zur Charakterisierung der Beschaffenheit des Leders werden zahlreiche Festigkeitskennwerte herangezogen (Reiss-, Stichausreiss-, Weiterreissfestigkeit u. a. m.) und ebenso Elastizitätsmoduln, deren Zusammenhang untereinander bisher Gegenstand zahlreicher Untersuchungen war. Nach KANAGY [1] besteht zwischen Naht- und Weiterreissfestigkeit eine enge Beziehung, während diese Werte mit der Zugfestigkeit nur in kleinerem Ausmass korrelieren. Die Ausdrucksformen dieser Kennwerte sind nicht einheitlich ; so zeigen die Zugfestigkeiten der Leder Werte um 250—350 kg/cm^2, die Stichausreiss- und Nahtfestigkeiten um 10—30 kg/mm und die Weiterreissfestigkeiten um 2—5 kg/mm, so dass ein unmittelbarer Vergleich dieser Festigkeiten Schwierigkeiten bereitet. Die Verfasser haben sich deshalb entschlossen, die Festigkeitsindexe in der in der Statik gebräuchlichen Form von kg/cm^2 auszudrücken.

In ihren vorjährigen Untersuchungen [2] wurde von den Verfassern andererseits nachgewiesen, dass die bei den verschiedenen Beanspruchungen (Dehnung, Biegung, Druck) gemessenen Elastizitätsmoduln der Leder nicht übereinstimmen. KOHLRAUSCH [3] teilt die unterschiedlichen Beanspruchungen in zwei Hauptgruppen, und zwar unterscheidet er nur Dehnungs- und Gleit- (Schub-, Torsions-) Elastizitätsmoduln. Bei homogenen isotropen Materialien sind die Werte der Biegungs- und Druckmoduln mit dem Elastizitätsmodul der Dehnung identisch. Die bei Schub- und Torsionsbeanspruchung gemessenen Moduln von homogenen isotropen Materialien sind kleiner als erstere Werte. Infolge seiner faserigen Struktur verhält sich das Leder nicht so wie homogene isotrope Materialien und zeigt auch grössere Streuungen.

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit dem Zusammenhang zwischen den bei verschiedenen Beanspruchungen gemessenen Festigkeitswerten und den Elastizitätsmoduln, wobei der Druck-Elastizitätsmodul, der bei Schubbeanspruchung (Abscheren) gemessene Elastizitätsmodul sowie die Messung der Schub-, Stichausreiss- und Weiterreissfestigkeit eingehend behandelt werden

* Vortrag gehalten in der Sitzung der Wissenschaftlichen Vereinigung der Lederindustrie am 4. November 1955.

sollen. Es konnte bewiesen werden (Tabelle VII), dass bei einheitlich gewählter Ausdrucksform die Zerstörungsfestigkeiten bei verschiedener Beanspruchung — mit Ausnahme der Druckfestigkeit — die gleiche Grössenordnung haben, die Elastizitätsmoduln aber von einander abweichen.

Verhalten des Leders bei Druck

Abb. 1 zeigt das Prinzip des zur Messung des Druckes des Leders gebrauchten Apparates*. Die Zusammenhänge zwischen der beim Druck auftretenden Spannung und der Deformation wurden an den mit Hilfe eines Dynamometers

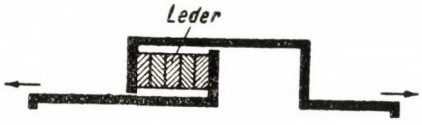


Abb. 1

aufgenommenen Diagrammen untersucht. Diese Diagramme sind um so steiler, ein je grösserer Druck ausgeübt wird, und ihre Form hängt auch davon ab, ob sich das Leder in seitlicher Richtung ausdehnen kann. Bei einem grossen

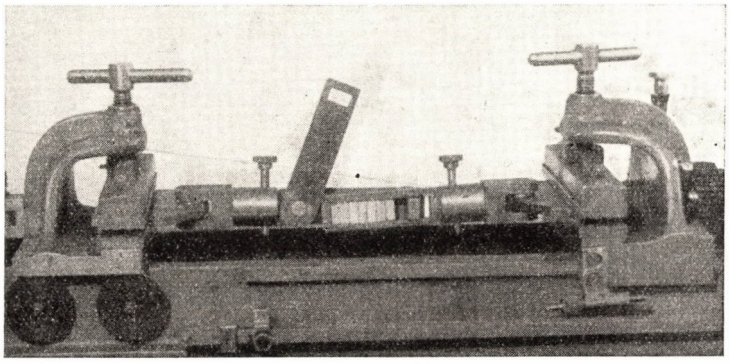


Abb. 2

Teil der angestellten Versuche wurde die seitliche Ausdehung des Leders ermöglicht, weil die so gewonnenen Werte für das Leder kennzeichnender sind. Bei weichen Ledersorten steigt das Diagramm am Anfang langsam an und wird bald immer steiler; bei Sohlenlederarten ist es fast gerade (Abb. 3).

* *I. Vági* hat den Druckapparat in der Weise abgeändert, dass der Schwerpunkt des Aufliegens des Leders mit der Richtung der Druckkraft zusammenfällt (Abb. 2).

Dem Druck ist das Sohlenleder beim Gehen ausgesetzt, das Pickerleder bei starken Schlägen und im allgemeinen jedes Leder bei Biegungen. Nach ZAKATOWA [4] steht der Abnutzungswiderstand des Sohlenleders auch mit der Druckfestigkeit im Zusammenhang. In der Praxis wird auch der Grad der Prallheit nach dem auf die Blösse ausgeübten Druck beurteilt. Das *Sowjetische Forschungsinstitut der Leder- und Schuhindustrie* [5] empfiehlt den Wert des Druck-Elastizitätsmoduls als Index des Aufquellens anzuwenden, auf Grund folgender Formel:

$$E = \frac{T \cdot K}{T - T_1} \tag{1}$$

wo T die Dicke des Leders ohne Druck,

T_1 die Dicke des Leders nach dem Druck,

K den Druck bedeutet (bei ihren Versuchen wurden 0,7 kg/cm² angewendet und den angestellten Versuchen zufolge bewegt sich der E-Wert der in verschiedenen Quellstadien befindlichen Leder zwischen 2—10 kg/cm²).

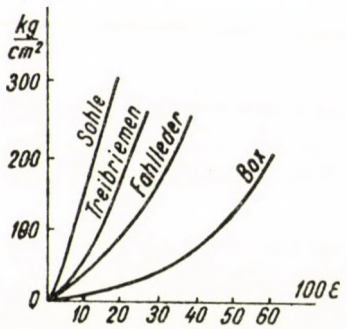


Abb. 3

Da das Spannungs-Druckdiagramm (Abb. 3) keine Gerade bildet, so kann der Druck nicht durch einen einzigen Punkt dieser Kurve, *sondern nur durch die ganze Kurve gekennzeichnet werden.* Deshalb ist es richtiger, den Druck-Elastizitätsmodul als Richtungstangente der einzelnen Punkte der Kurve zu definieren, u. zw. auf Grund der Formel

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha \tag{2}$$

wo σ die Spannung ($= P/f$),

ε die spezifische Deformation ($=\gamma/l$),

λ die Deformation der Ledersäule,

l die Länge des Versuchskörpers,

α den Neigungswinkel der Tangenten verschiedener Punkte des Diagramms bedeutet.

Besteht zwischen Spannung und Deformation kein linearer Zusammenhang (z. B. bei weicherem Leder), so ist der Wert des Druck-Elastizitätsmoduls eine Funktion der Deformation und

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \neq \frac{\sigma}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Die Form der Berechnung mit Hilfe des Richtungstangens hat den Vorteil, dass man für die geraden Abschnitte der Kurve überall gleiche Werte von E bekommt. Es ist klar, dass der Zusammenhang zwischen Druck und Spannung in diesen Abschnitten konstant ist. In der Lederindustrie ist es ausserdem gebräuchlich, den Elastizitätsmodul aus den Verhältnissen der Ordinaten und Abszissen zu berechnen [5], [2], nach der Formel

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{P}{f} \cdot \frac{l}{\lambda}. \tag{4}$$

Bei dieser Berechnung ändert sich der Wert E auch dann ständig, wenn er aus dem geraden Abschnitt berechnet wird, der im Spannungs-Druckdiagramm auf den ersten nichtlinearen Abschnitt folgt. Für die Wahl des Berechnungsvorganges dürfte jedoch das angestrebte Ziel ausschlaggebend sein. Bei Berechnung der Dehnung einzelner Teile des Stiefeloberleders z. B. wurde die Bestimmung der Moduln aus den Koordinaten mit Erfolgt angewandt [2].

Um den Wert des Druck-Elastizitätsmoduls mit den Elastizitätsmoduln anderer Beanspruchungen vergleichen zu können, muss darauf geachtet werden, dass der Vergleich bei gleichen Deformationen erfolgt. Der Elastizitätsmodul für Biegung wurde bei einer Spannweite gemessen, die 25mal so gross war als die Dicke (b) des Leders. Wird der Versuchskörper um 90° gebogen, so beträgt die spezifische Deformation in den äusseren Schichten ungefähr 3%. Nach vorgenommenen Untersuchungen [2] ist nämlich

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} = \frac{b\pi}{4l} = 0{,}0314\,. \tag{5}$$

Will man also den Elastizitätsmodul für Biegung mit denjenigen für Dehnung und Druck vergleichen, so müssen die Elastizitätsmoduln aus den ersten Abschnitten der Dehnungs- und Druckdiagramme des Leders berechnet werden.

Der Elastizitätsmodul für Biegung wird ausserdem nach einer gewissen Anzahl von Biegungen gemessen. Für den Vergleich müssen deshalb die Ledermuster vor Aufnahme des Dehnungs- und Druckdiagrammes auf ihrer ganzen Oberfläche einer gewissen Ermüdung ausgesetzt werden. Dies geschieht so, dass man die Ledermuster 20mal auf einer Walze biegt, deren Durchmesser 25mal so gross ist wie die Lederdicke, u. zw. abwechselnd von der Narbenseite und von der Fleischseite. Die Erfahrung zeigt, dass diese geringe Ermüdung die Form der Dehnungs- und Druckdiagramme kaum verändert.

In der Tabelle I werden die Dehnungs-, Druck- und Biegungs-Elastizitätsmoduln verschiedener Lederarten gebracht. Die untersuchten Leder sind Erzeugnisse der Lederfabrik in Pécs, und es werden die Durchschnittsergebnisse der Untersuchungen von je 20 Ledermustern mitgeteilt. Wie aus der Tabelle I ersichtlich, ist bei kleinen Beanspruchungen der Wert des Elastizitätsmoduls für Dehnung bei allen Lederarten grösser als der Druckmodul. Der Biegungsmodul steht gewöhnlich zwischen diesen beiden Werten, da bei der Biegung Dehnungs- und Druckbeanspruchung zusammen auftreten. Bei zunehmendem Druck erhöht sich der Wert des Druck-Elastizitätsmoduls progressiv, eine Erscheinung, die mit der Porösität des Leders zusammenhängt. Bei grösserer Druckbeanspruchung erreicht der Elastizitätsmodul den Wert des Biegungsmoduls, in einigen Fällen übertrifft er ihn sogar.

Tabelle I

Nr.	Leder	Dehnungs-		Biegungs-	Druck-	
		Elastizitätsmodul (kg/cm²)				
		bei 3%iger Dehnung	bei 1 kg/mm² Belastung	bei 25facher Spannweite	bei 3%iger Deformation	bei 1 kg/mm² Beiastung
1	Rindbox	176	780	85	64	790
2	Fahlleder	160	790	95	80	720
3	Rahmencroupon	420	950	280	280	710
4	Goodyear Brandsohle	900	1250	700	200	630
5	Treibriemencroupon, kalt geschmiert	1000	1110	690	190	770
6	Nähvache, gewalzt, trocken	1800	1900	820	705	2680
7	Nähvache, gewalzt, nach 24 stündigem Einweichen	850	1180	305	150	900
	Nähvache, ungewalzt:					
8	Ganzer Querschnitt, trocken	1000	1480	580	290	850
9	Narbenschicht, trocken	260	530	—	170	405
10	Mittelschicht, trocken	825	825	750	660	780
11	Fleischschicht, trocken	1540	1540	800	780	850

Die Werte der Druck-Elastizitätsmoduln hängen auch von der Richtung der Beanspruchung ab, besonders bei solchen Lederarten, die während ihrer Zurichtung (Stossen, Walzen, Bügeln) in bestimmter Richtung stärkerem Druck ausgesetzt waren. Ein Unterschied zwischen der parallelen bzw. senkrechten Richtung zur Narbenfläche wurde besonders bei gewalztem Sohlenleder festgestellt. Vor dem Walzen ist der Unterschied geringer. Da beim Messen des Elastizitätsmoduls für Dehnung die Beanspruchung mit der Narbenschicht parallel auftritt, wurden bei Sohlenleder zum Vergleich diese Werte berücksichtigt. Bei Oberledern ist zuweilen der Unterschied kaum wahrnehmbar und deshalb sind in der Tabelle I der einfacheren Messmethode wegen senkrecht zur Narbe gemessene Werte angegeben.

Das Verhalten der einzelnen Lederschichten bei verschiedenen Beanspruchungen weicht voneinander beachtlich ab und der Zusammenhang der Werte der drei Elastizitätsmoduln ist zuweilen kompliziert. Die Narbenschicht dehnt sich viel stärker und kann leichter zusammengedrückt werden, als die mittlere oder die Fleischschicht. Der niedrigere Modul der Narbenschicht beeinflusst auch in grossem Mass die Elastizität der Biegung. Bei Sohlenledern wächst der Biegungselastizitätsmodul nach Entfernung der Narbenschicht erheblich. Die Gestaltung des Wertes des Biegungsmoduls kann also durch Messen des Dehnungs- und Druck-Elastizitätsmoduls der Lederschichten erklärt werden.

Anmerkung. Es kommt vereinzelt vor, dass der Druck-Elastizitätsmodul ein wenig grösser ist als der Biegungsmodul. Den Grund dafür sehen die Verfasser in folgender Erscheinung : War während der Zurichtung des Leders die Narbenschicht grossem Druck (Walzen) ausgesetzt, so steigt dadurch der Druckmodul des gesamten Lederquerschnittes stark an, während sich beim Biegen die Dehnungsfähigkeit der Narbenschicht nicht im gleichen Mass verringert. Der Elastizitätsmodul der Dehnung der Narbenschicht ist in diesem Fall niedriger als der Druckmodul der Fleischschicht. So haben z. B. die Verfasser bei einem Nähvache folgende Werte gemessen:

Biegungs-Elastizitätsmodul beim ganzen Querschnitt	850	kg/cm²
Druck-Elastizitätsmodul beim ganzen Querschnitt bei 3%iger Deformation	910	«
Dehnungs-Elastizitätsmodul der Narbenschicht bei 3%iger Deformation	510	«
Druck-Elastizitätsmodul der Fleischschicht bei 3%iger Deformation	1100	«

Scherbeanspruchung des Leders

Eine beim Leder wenig untersuchte Beanspruchung ist das Abscheren, für das charakteristisch ist, dass sich beide Seiten des beanspruchten Quer-

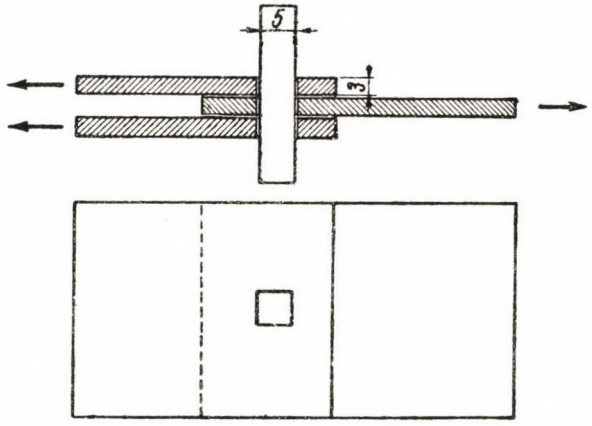


Abb. 4

schnittes gegeneinander zu verschieben suchen, dass sie zu verrutschen trachten. Typischer Scherbeanspruchung sind beispielsweise die Nieten unterworfen. Obgleich reines Abscheren selten vorkommt, kann bei der Messung der Naht- und Stichausreissfestigkeit des Leders doch von Abscheren gesprochen werden. Einer Scherbeanspruchung ist z. B. das Rahmenleder ausgesetzt weil das Oberleder die eine Seite des Nahtquerschnittes, die Sohle dagegen ihre andere Seite in entgegengesetzter Richtung zu verschieben trachtet. Diese Beanspruchungen sind aber zu einem beachtlichen Teil mit Biegung verbunden und deshalb für die Messung der Scherfestigkeit nicht direkt anwendbar. Die Scherfestigkeit der Leder wurden in unseren Versuchen in ähnlicher Weise wie für die Nieten gemessen. Zwei Querschnitte des Versuchskörpers in der Abb. 4 ($2f = 50$ mm²)

sind zwischen drei eng zusammengefassten Platten auf Abscheren beansprucht, wobei die 3 mm starken Stahlplatten zwischen die Backen der Reissmaschine eingespannt sind.

Die Scherfestigkeit beträgt :

$$\tau_S = \frac{P}{2f} . \tag{6}$$

Aus der Tabelle II ist zu ersehen, dass die Scherfestigkeiten verschiedener Lederarten in die gleiche Grössenordnung fallen wie die Zugfestigkeiten.

Tabelle II

	Scherfestigkeit (τ_S)
Rindbox	261 kg/cm²
Fahlleder	268 «
Rahmencroupon	310 «
Goodyear Brandsohle	260 «
Treibriemencroupon kalt geschmiert	270 «
Nähvachecroupon gewalzt, trocken	264 «
Nähvachecroupon gewalzt, nach 24 stündigem Einweichen.	233 «

Aus dem Richtungstangens des Scherdiagrammes kann auch der Gleit-Elastizitätsmodul, der ungefähr dem Druck-Elastizitätsmodul entspricht, berechnet werden.

Auch bei der Messung der Naht- und Stichausreissfestigkeiten ist das Leder mit Scherung verbundener gemischter Beanspruchung ausgesetzt.

Bei der Messung der Stichausreissfestigkeit auftretende Beanspruchungen

Bei der Messung der Stichausreissfestigkeit (Schnallenreissfestigkeit) bestehen komplizierte Zusammenhänge. Der Querschnitt *a b* rechts vom Dorn in der Abb. 5 ist gleichfalls auf Scherung beansprucht. In entgegengesetzter Zugrichtung des Dorns bestreben sich andere Teile des Leders von zwei Seiten, den Querschnitt zurückzuhalten. Auf Grund des eigentümlichen Verhaltens des Leders sowie der nicht festen Einspannung entsteht auch hier nur ein Scherungsquerschnitt, obgleich der Durchmesser des Dornes 1—3 mm beträgt. Die beim Ausreissen auftretende maximale Kraft wird durch die Entfernung von »a« massgebend beeinflusst.*

* HERFELD [6] nimmt die Entfernung »a« mit 5 mm, MITTON [7] mit 25 mm an.

Beträgt die Entfernung a 10—30 mm, so wirkt diese Kraft zufolge der Plastizität und Biegefähigkeit des Leders nicht gleichmässig auf den Querschnitt $a\,b$; in einem vom Dorn weiter entfernten Querschnittelement ist die Spannung kleiner, während sie in dem näher beim Dorn befindlichen Teil grösser ist.

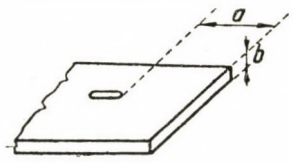


Abb. 5

Zunächst tritt also das Reissen in den letzteren Teilen auf. Ändert man bei Fahlleder von 2,8 mm Dicke die Entfernung a zwischen 2 mm und 20 mm, so wächst die Stichausreisskraft von 19 kg bis 56 kg (Dorndurchmesser 3 mm, Abb. 6). Bei einer verzehnfachten Vergrösserung des Querschnittes wächst also die für das Ausreissen erforderliche Kraft nur auf das Dreifache, was beweist, dass im letzteren Fall die Kraft nicht gleichmässig auf den ganzen Quer-

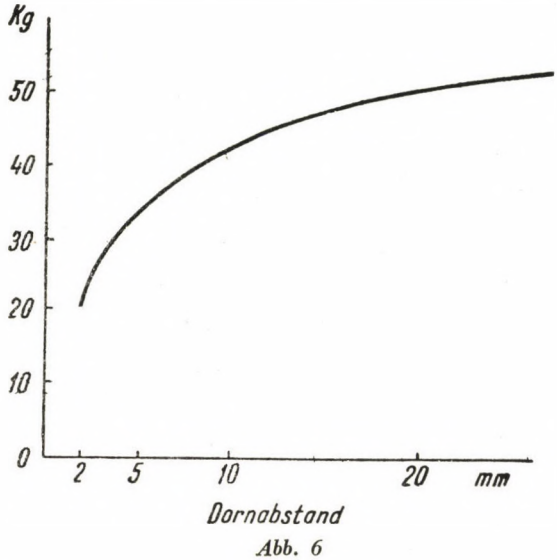


Abb. 6

schnitt einwirkt. Im Anfang ändert sich die Kraft P proportional der Entfernung a, wird aber eine gewisse Grenze überschritten, so wächst der Wert von P bei weiterer Vergrösserung von a nur noch in ganz geringen Masse. Bei genügend grosser Entfernung a findet man, dass die Stichausreisskraft P konstant bleibt, was beweist, dass die Kraft von dem Querschnitt $a\,b$ schon unabhängig ist,

wenn dieser einen bestimmten Wert überschreitet; »a« kann schon also als konstant angesehen werden. Die Stichausreissfestigkeit $\left(\frac{P}{b}\right)$ wird auf die Dicke des Leders bezogen, [6] weil

$$\tau_a = \frac{P}{ab} = \text{konst.} \frac{P}{b} . \tag{7}$$

Der in kg/cm² ausgedrückte Wert der Stichausreissfestigkeit kann auf Grund folgender Erwägungen berechnet werden:

Man wähle die Entfernung a so, dass die Werte a und P einander proportional sind. Die Ausreissversuche sollen mit einem Dorn von 1 mm ∅ durchgeführt werden, damit man einen einzigen Scherungsquerschnitt bekommt [6]. Die Ansatzstelle des Dornes soll nicht durch Lochen, sondern durch Einschneiden ausgebildet werden, so wie beim Weiterreissen. Aus der auf diese Weise gemessenen Stichausreisskraft kann auf Grund der Formel

$$\tau_a = \frac{P}{ab} \tag{8}$$

die in kg/cm² ausgedrückte Stichausreissfestigkeit berechnet werden, die mit den Scherfestigkeiten (Tabelle III) gut übereinstimmt.

Tabelle III

	Dornabstand a (mm)	Zerstörungsfestigkeit aus den Ausreisswerten berechnet
Rindbox	1,0—1,5	348 kg/cm²
Fahlleder	2,0—3,0	315 «
Rahmencroupon	2,0—4,0	302 «
Goodyear Brandsohle	2,0—4,0	223 «
Treibriemencroupon kalt geschmiert	2,0—4,0	280 «
Nähvachecroupon gewalzt, trocken	2,0—5,0	266 «
Nähvachecroupon gewalzt, nach 24 stündigem Einweiche	2,0—2,5	300 «

In besonderen, sehr zahlreichen Versuchsreihen wurden für alle Ledersorten die der Abb. 6 gemässen Zusammenhänge festgestellt und bei der Berechnung der Stichausreissfestigkeit diejenigen Werte benutzt, bei denen die Ausreisskraft noch proportional dem Dornabstand war.

Bei geschmeidigeren Ledern kommt es vor, dass der Wert der so berechneten Stichausreissfestigkeit ungefähr das Doppelte der Reissfestigkeit erreicht.

Das trifft dann zu, wenn die Entfernung a kleiner ist als die Dicke des Leders und infolge der starken Dehnung starke Ausbeulungen und Schleifen entstehen (Abb. 7). Die Querschnitte beider Seiten der Schleifen sind ungefähr gleich $a\,b$, weshalb auf eine Seite der Schleife nur die Hälfte der Zugkraft P fällt. Das Ausreissen erfolgt, wenn die Zugkraft den doppelten Wert derjenigen Kraft erreicht, die zum Zerreissen des Querschnittes $a\,b$ nötig ist. In diesem Fall erreicht die auf Querschnitt $a\,b$ bezogene Stichausreissfestigkeit den doppelten Wert der Zugfestigkeit. In Tabelle III ist für Boxleder die Hälfte dieses Grenzwertes angegeben. Dieser Grenzfall tritt nur bei starker Dehnung ein, häufig kommt es aber vor, dass bei kleinen Werten von a die auf die Querschnittseinheit bezogene Stichausreissfestigkeit grösser ist als die Zugfestigkeit, was bedeutet, dass zwischen reinem Abscheren und Zerreissen mit Schleifenbildung ein Übergang besteht.

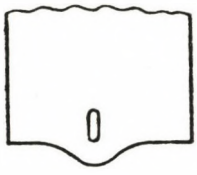


Abb. 7

Bei der in der bisherigen Praxis üblichen Messung der Stichausreissfestigkeit tritt also eine sehr komplizierte Beanspruchung auf (6, 7, 8). Die auf den Dorn wirkende Kraft belastet nicht gleichmässig den ganzen Querschnitt, sondern sie verteilt sich je nach der Dehnung des Leders auf kleinere bzw. grössere Flächen. Die Vergrösserung der Dehnung des Leders führt meistens deshalb zur Vergrösserung der nötigen Ausreisskraft.

Beim Messen der Stichausreissfestigkeit (ausgedrückt in kg/cm^2) bekommt man nur dann zuverlässige Werte, wenn der Dornabstand sorgfältig gewählt wird. Die auf die Dicke des Leders bezogene Ausreisskraft, die eine direkte Kenngrösse der Beanspruchung durch Schnallen und Nähte ist, gewährt der Schuhindustrie auch bei konstanten Dornabständen guten Aufschluss über die Qualität.

Messung der Nahtfestigkeit

Bei der Messung der Nahtfestigkeit (Abb. 8) kommt es im Querschnitt zwischen den Punkten $a\,b$ zum Abscheren, es tritt aber ausser dem Abscheren auch Biegung und Dehnung auf, weil der gescherte Querschnitt nicht fest eingespannt ist. Durch die nicht feste Einspannung und die Dünne des Drahtes sowie das eigentümliche Verhalten des Leders entsteht jedoch nur ein Scherungsquerschnitt.

Die Nahtfestigkeit wurde bisher auf die Dicke des Leders bezogen angegeben. KANAGY [1] bezog neuerdings die Nahtfestigkeit auf den zur Entfernung $a\,b$ gehörenden Querschnitt (Abb. 8) und gab für Oberleder vier verschiedene Formeln an, die den Zusammenhang der Zugfestigkeit mit der Nahtfestigkeit kennzeichnen. MITTON [9] hat sich mit den bei der Messung der Nahtfestigkeit der Sohlenleder auftretenden Veränderungen eingehend beschäftigt und festgestellt, dass die auf die Fasern wirkende Scherkraft (P) dort am grössten ist,

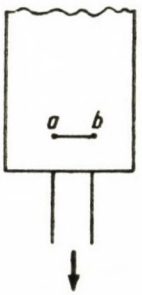


Abb. 8

wo der Faden den kleinsten Biegungsradius (r) besitzt; die im Faden auftretende Spannung aber

$$T = P \cdot r\,. \tag{9}$$

Bei kleinem Wert (r) verursacht die gleiche Spannung grössere Scherkraft und deshalb schneidet der Faden zuerst die scharfen Kanten ein. MITTON zieht daraus die Schlussfolgerung, dass die Zugkraft nur proportional der Stichweite und von der Dicke des Leders unabhängig ist, wenn die Dicke des Leders grösser ist als die Hälfte der Stichweite ($b > d/2$). Ist dagegen $b < d/2$, dann ist die Zugkraft nur zur Dicke des Leders proportional und von der Stichweite unabhängig.

MITTON hat die Nahtfestigkeit so gemessen, dass die Zugrichtung des Fadens zur Lederfläche senkrecht war. Bei Messung der Nahtfestigkeit [1] ist im allgemeinen die Zugrichtung des Fadens parallel zur Narbenschicht. Bei den nachstehend besprochenen Versuchen wurde die Zugrichtung des Fadens senkrecht zur Lederfläche genommen. Die Verfasser wiederholten die MITTONschen Versuche öfters, doch konnten diese Zusammenhänge nicht bestätigt werden. Vielmehr wurde gefunden, dass die Kraft ähnlich wie beim Ausreissen zuerst proportional der Stichlänge anwächst, während später die Kurve immer flacher wird. Bei den von uns ausgeführten Versuchen konnte die Stichlänge nur in sehr engen Grenzen gesteigert werden, weil das Stahlband gerissen war. Abb. 9 zeigt die Ausreisskraft in kg bei verschiedenen Lederarten und verschiedenen Stichweiten. Tabelle IV enthält dagegen die Stichfestigkeit derselben

Leder bei verschiedenen Stichweiten in kg/cm². Mit der Vergrösserung der Stichweite verringert sich anscheinend die Festigkeit, weil die Kraft den ganzen Querschnitt nicht gleichmässig belastet. Bei geschmeidigen Ledern wurde die Erfahrung gemacht, dass genau so wie beim Ausreissen die auf den Querschnitt bezogene Festigkeit bei kleinen Stichweiten ungefähr doppelt so gross ist wie die Zugfestigkeit. Diese Erscheinung dürfte seine Erklärung in den für das

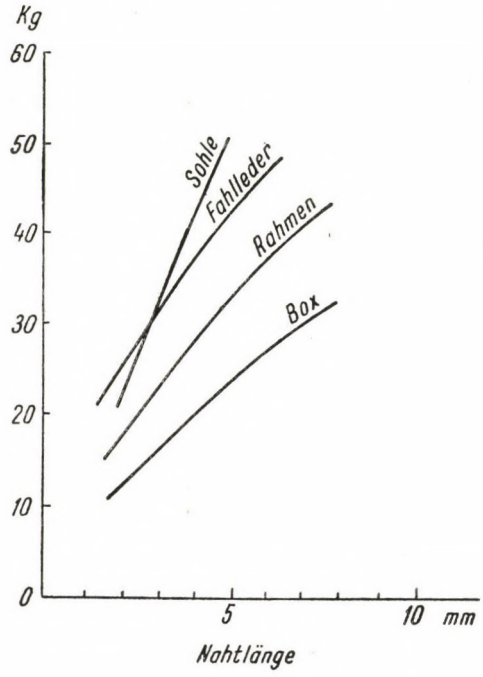


Abb. 9

Ausreissen gegebenen Ursachen finden. In diesem Fall muss die Zugkraft wegen der Schleifenbildung auf den doppelten Wert des zum Abstand *a b* gehörigen Querschnittes bezogen werden.

Tabelle IV

Stichlänge mm	Stichfestigkeit kg/cm²			
	Box	Fahlleder	Rahmencroupon	Sohlencroupon
2,5	500	417	293	230
3,0	445	355	265	236
4,0	416	315	241	229
5,0	400	280	227	233
6,0	375	260	212	
7,0	357	243	202	
8,0	354	229	191	

Durch experimentelles Feststellen der Stichfestigkeit ist man auch in der Lage, die optimale Nahtfestigkeit graphisch zu bestimmen. Trägt man auf die Abszisse die Stichweite und auf die Ordinate die Belastbarkeit des Fadens pro 100 mm Nahtlänge in kg auf, so erhält man die punktierte Linie in der Abb. 10. Bestimmt man ausserdem die Stichfestigkeit, z. B. für 1,2 mm dickes Boxleder bei verschiedenen Stichweiten, so ergeben die auf 100 mm Nahtlänge fallenden Kräfte die gestrichelte Linie. In ähnlicher Weise bestimmt man auch die Stichfestigkeit von 2,8 mm dickem Rahmenleder und 4 mm dicken Sohlenleder (strichpunktierte

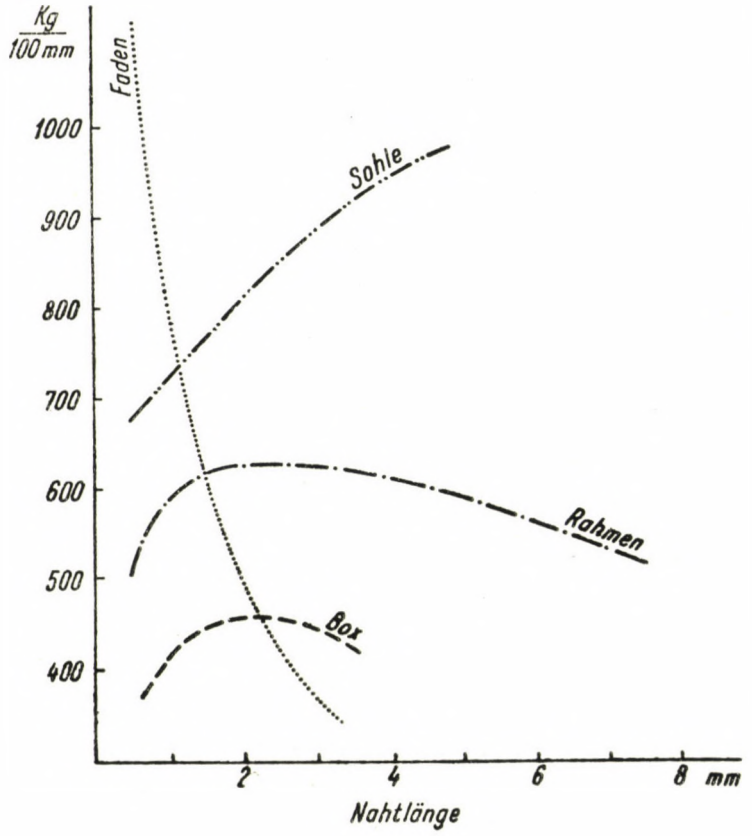


Abb. 10

Linie mit 1 bzw. 2 Punkten). Die Linien der zum Ausreissen von Box-, Rahmen- und Sohlenledern nötigen Kräfte liegen übereinander. Die optimale Stichweite wird dort sein, wo sich die am tiefsten liegende Linie des Boxlederns mit der Belastungslinie des Fadens schneidet.

Die Anzahl der Stiche pro 100 mm hängt auch von der Nadelstärke ab. Bei den besprochenen Versuchen wurde für den Durchmesser der Nadel 1,4 mm, für den Durchmesser der von der Nadel gebildeten Löcher jedoch 0,68 mm gewählt. Nach Versuchen von ENGELSMANN [10] ist die optimale Stichweite doppelt so gross wie der Nadeldurchmesser, was mit unseren Berechnungen gut übereinstimmt.

Bei der Nahtfestigkeit ist die Belastung des beanspruchten Querschnittes wegen der verschiedenen Biegungsradien des Fadens ungleichmässiger als beim Ausreissen, weshalb der Wert derselben in kg/cm² ausgedrückt nur bei steiferen Lederarten brauchbar ist.

Torsionsbeanspruchung des Leders

Infolge der beim Tragen der Schuhe auftretenden komplizierten Beanspruchungen sind einzelne Teile des Leders häufig Torsion unterworfen. Als Torsionsbeanspruchung kann die Bestimmung der Weiterreissfestigkeit des Leders bezeichnet werden (Abb. 11). Beim Weiterreissen werden beide Schenkel des Ledermusters in entgegengesetzter Richtung auseinandergezogen, wodurch in der Fortsetzung der Schnittfläche im nicht eingeschnittenen Teil des Leders

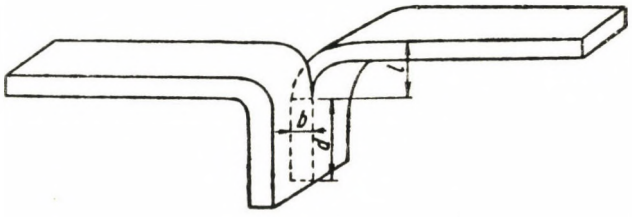


Abb. 11

eine Torsionsbeanspruchung entsteht. Bei Rechteckquerschnitt beträgt die Torsionsbeabspruchung

$$\tau_t = \mathrm{K}\,\frac{P \cdot l}{c^2 \cdot d} \tag{10}$$

wo

l = Arm der Kraft P,
c = die kürzere Seite des Querschnittes und
d = die längere Seite des Querschnittes.

Beim Viereckquerschnitt beträgt der Wert der Konstante (K) 4,8 und ändert sich, wenn das Verhältnis $c : d$ sich ändert [11].

Beim Einreissen des Leders entspricht die kürzere Seite des Querschnittes im allgemeinen der Dicke des Leders ($c = b$). Der Wert von l hängt von der Steifheit ab, je steifer das Leder ist, um so grösser ist der Biegungsradius der beiden Schenkel des Musters und um so grösser ist also der Wert von l. Da in der Formel (10) der Wert τ_t vom Produkt $P \cdot l$ abhängt, so ändert sich mit der Änderung des Kraftarmes auch der Wert P. Infolge des Weiterreissens verringert sich der Wert l ständig und nähert sich endlich dem theoretischen Wert $l = b/2$, wo $b =$ die Dicke des Leders bezeichnet. Dementsprechend wächst der Wert von P stufenweise an, was von den Weiterreissdiagrammen gut veranschaulicht wird. Bei weichen Ledern erreicht der Kraftarm sehr rasch den Wert $l = b/2$. Bei steifen Ledersorten ist jedoch $l > b/2$ und ändert sich ausserdem ständig, weshalb man beim Weiterreissen steifer Leder keine zuverlässigen Werte erhält.

Bei den Weiterreissprüfungen der Ledermuster beträgt der Wert d ungefähr 40—50 mm. Auch hier verteilt sich die Kraft nicht gleichmässig über die ganze Fläche $c \cdot d$, genau so, wie bei der Stichausreissfestigkeit, sondern sie belastet diese Fläche ungleichmässig. Vergrössert man den Wert a bei der gleichen Lederart von 2—3 mm angefangen ständig, so wächst die zum Weiterreissen nötige Kraft eine Weile und erreicht schliesslich eine Grenzwert. Dieser Grenzwert ist dadurch gekennzeichnet, dass auf einen Teil des Querschnittes $c \cdot d$ keine Kraft wirkt, so, als ob der Wert von d konstant wäre.

Wenn

$$l = b/2 = c/2$$

so

$$\tau_t = \text{konst.} \frac{P \cdot b/2}{b^2 \cdot d} = k' \frac{P}{b} = k' W \tag{11}$$

wo W die sog. Weiterreissfestigkeit bedeutet [6].

Die sogen. Weiterreissfestigkeit ($W = P/b$) ist nur bei einem genügend grossen Wert von d von der Dicke unabhängig. Bei kleinen Werten von d ($d = b$) steht die zweite Potenz der Lederdicke im Nenner.

Wählt man den in der Formel (10) erscheinenden Wert d angenähert so gross wie die Lederstärke, so kann die Torsionsfestigkeit auf Grund folgender Überlegungen auch für die Querschnittseinheit angegeben werden. Beim Auseinanderreissen der beiden Schenkel des Weiterreissmusters in entgegengesetzter Richtung entsteht im Querschnitt $c \cdot d$ infolge von Torsionsbeanspruchung zum Teil Dehnung, zum anderen Teil jedoch Druck; die eine Hälfte des Querschnittes $c \cdot d$ ist also Dehnung, die andere Hälfte Druck unterworfen. Die Kraft der einen Hälfte des Querschnittes wäre jedoch nur in jenem Falle $P/2$, wo die Elastizitätsmoduln für Dehnung und Druck gleich wären. Ist dies nicht der Fall, so verhalten sich die auf die beiden Hälften des Querschnittes wirkende Druckkraft (P_d) und Zugkraft (P_z) so zueinander, wie die Werte der Elastizitatsmoduln. Also :

$$P_z + P = P$$

und

$$P_z : P_d = E_z : E_d .$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt :

$$P_z = \frac{P}{\frac{E_t}{E_z} + 1} . \tag{12}$$

Da beim Drücken des Leders nur bei sehr grossen Spannungen (über 1500 kg/cm²) Zerstörung auftritt, so erfolgt Weiterreissen dann, wenn die

Spannung in dem Teil des auf Dehnung beanspruchten Querschnittes $\left(\frac{c.d}{2}\right)$ den Wert der maximalen Torsionsspannung erreicht. Wenn

$$l = b/2 = c/2$$

so ist

$$\tau_t = 4{\cdot}8 \frac{P_z \cdot \frac{c}{2}}{c^2 \cdot d/2} = 4{\cdot}8 \frac{P_z}{b \cdot d} \ . \tag{13}$$

Berücksichtigt man auch den Wert der Konstanten bei der Hälfte des auf ein Rechteck mit den Seitenverhältnissen 1 : 2 bezogenen Viereckes, so ergibt sich in der Formel [13] für die Konstante 4,1. Die mitgeteilten Berechnungen wurden jedoch mit dem Wert 4,8 für die Konstante vorgenommen (Tabelle V). Zu den gleichen Ergebnissen gelangt man auch dann, wenn man die Ableitung unter der Voraussetzung durchführt, dass die Zug- und Druckkräfte gleich sind, jedoch die gezogenen und gedrückten Querschnitte nicht.

Beim Weiterreissen weicher Leder kommt es vor, dass wenn der noch nicht weitergerissene Teil nur noch 1 mm beträgt, sich infolge der Biegsamkeit des Leders die Fasern in Richtung der Dehnung orientieren und keine Torsions- sondern reine Dehnungsbeanspruchung entsteht. Deshalb ist es ratsam, beim Berechnen der Weiterreissfestigkeit von weichem Leder die zum Zerreissen des letzten Millimeters nötige Kraft ausser Betracht zu lassen.

Bei Sohlenledern ist der geringeren Biegsamkeit wegen $l > b/2$, weshalb zum Weiterreissen eine kleinere Kraft P nötig ist. Deshalb ist bei Sohlenledern der mit der Formel (13) berechnete Wert τ_t kleiner als in Wirklichkeit.

Tabelle V

	Zerstörungsfestigkeit aus dem Weiterreissen (Torsion) berechnet (τ_t)
Rindbox	252 kg/cm²
Fahlleder	296 «
Rahmencroupon	295 «
Goodyear Brandsohle	225 «
Treibriemencroupon kalt geschmiert	250 «
Nähvachecroupon gewalzt, trocken	90 «
Nächvachecroupon gewalzt, nach 24 stündigem Einweichen.	220 «

Die Tabelle V zeigt die aus der Weiterreisskraft berechneten Torsionsfestigkeiten verschiedener Lederarten. Es wird gezeigt, dass bei nicht harten Ledern der Wert der Torsionsfestigkeit in die gleiche Grössenordnung fällt wie ihre Scher- und Reissfestigkeit. Infolge der komplizierten Beanspruchung ist aber die auf die Flächeneinheit bezogene Festigkeit schwer auszuwerten. Die auf die Lederdicke bezogene Weiterreissfestigkeit leistet als direkte Kennzahl einzelner Beanspruchungen gute Dienste [6], [7].

Die sogen. Weiterreissfestigkeit des Leders (P/b) ist übrigens nicht ganz unabhängig von seiner Dicke, weil nämlich die Richtung der Dehnungs- und Druckkraft nicht von der

Dicke sondern von den mechanischen Eigenschaften des Leders bedingt sind. Ist die Entfernung d genügend gross, so ändert sich der auf Torsion beanspruchte Querschnitt nicht proportional der Dicke des Leders (Abb. 12 und 13). Das Verhältnis der auf Torsion beanspruchten Querschnitte ist also nicht proportional der Lederstärke.

$$b_1 d_1 : b_2 d_2 \neq b_1 : b_2 \qquad \text{und} \qquad P_1 : b_1 \neq P_2 : b_2$$

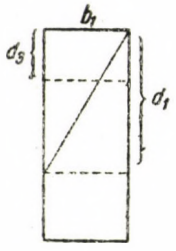


Abb. 12

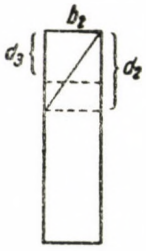


Abb. 13

trotzdem die maximalen Torsionsbeanspruchungen, deren Wert von der Qualität des Materials bedingt, jedoch von der Stärke des Leders unabhängig ist, gleich sind :

$$\tau_t = \text{konst} \frac{P_1}{b_1 \cdot d_1} = \text{konst} \frac{P_2}{b_2 \cdot d_2} . \tag{14}$$

Diesen Tatbestand bei Ledern auszuweisen ist schwer, denn es ist bekannt, dass die beim Spalten des Leders enstehenden Schichten nicht von gleicher Festigkeit sind. Zum experimentellen Nachweis dieser Erscheinung wurden homogene Gummi- und Filzplatten ausgewählt, die nach Aufspalten auf verschiedene Stärken eingerissen wurden. Die Ergebnisse werden in der Tabelle VI gezeigt, aus der zu ersehen ist, dass je dünner das Musterstück ist, umso geringer ist die Weiterreissfestigkeit.

Tabelle VI

Von der Dicke des Materials abhängige Änderung der Weiterreissfestigkeit

Material	Dicke (b)	Kraft (P)	Weiterreissfestigkeit (P/b)
Filz	6 mm	14 kg	2,34 kg/mm
«	12 «	34 «	2,83 «
«	23 «	70 «	3,20 «
Gummi ...	4,2 «	0,5 «	0,12 «
« ...	6,0 «	2,0 «	0,33 «
« ...	10,5 «	5,5 «	0,52 «

Wählt man dagegen den Wert d so klein, dass auch bei verschiedenen Stärken der ganze Querschnitt auf Torsion beansprucht ist, so ist die Entfernung d_3 — die in allen Fällen gleich ist — bekannt. Man kann also die Werte τ_t auch experimentell messen und feststellen, dass sie gleich sind.

Schliesslich enthält die Tabelle VII die Festigkeits- und Elastizitätsmoduln unterschiedlicher Ledersorten. Man sieht, dass bei gleicher Ausdrucksform (kg/cm²) die Zerstörfestigkeiten verschiedener Beanspruchungen ungefähr gleich sind (die Druckfestigkeit ausgenommen), während die Elastizitätsmoduln

voneinander stark abweichen. Der Widerstand der Faserstruktur gegen Deformation in verschiedenen Richtungen ist nämlich nicht gleich.

Tabelle VII

Festigkeits- und Elastizitätsmoduln von Fertigledern bei verschiedenen Beanspruchungen

Fertigleder	Bruchdehnung	Zugfestigkeit	Zerstörungsfestigkeit aus dem Ausreissversuch, gerechnet	Zerstörungsfestigkeit aus dem Weiterreissversuch, gerechnet	Scherfestigkeit	Elastizitätsmodul für Biegung	Elastizitätsmodul für Druck		Elastizitätsmodul für Dehnung		Elastizitätsmodul für Scherung
	%	σ kg/cm²	τ_a kg/cm²	τ_t kg/cm²	τ_S kg/cm²	E_{20} kg/cm²	E3% kg/cm²	E1kg/mm² kg/cm²	E3% kg/cm²	E1kg/mm² kg/cm²	G max. kg/cm²
Rindbox	52	340	348	262	261	85	64	790	176	780	520
Fahlleder	46	290	315	296	268	95	80	720	160	790	490
Rahmencroupon	35	282	302	295	310	280	280	710	420	950	590
Goodyear Brandsohle	25	320	223	225	260	700	200	630	900	1250	450
Treibriemencroupon, kalt geschmiert ..	25	260	280	250	270	690	190	770	1000	1110	405
Nähvachecroupon gewalzt, trocken	15	252	266	90	264	820	705	2680	1800	1900	700
Nähvachecroupon gewalzt, nach 24 stündigem Einweichen	26	276	300	220	233	305	150	900	840	1180	435

SCHRIFTTUM

1. J. R. KANAGY : Jalca 1955, 112.
2. DR. G. TÓTH : Bőr és Cipőtechnika (Leder und Schuhtechnik) 1955, 31.
   DR. G. TÓTH und V. PÓSA : Acta Technica Akademiae Scientiarum Hungaricae, 1955, 419.
   DR. G. TÓTH und DR. V. PÓSA : Bőr és Cipőtechnika (Leder- und Schuhtechnik) 1955. 98.
   DR. G. TÓTH und I. KERESE : Bőr és Cipőtechnika (Leder- und Schuhtechnik), 1955. 4.
3. F. KOHLRAUSCH : Praktische Physik, 1951.
4. M. D. ZAKATOVA, N. V. CSERNOV : A bőrgyártás technológiája (Technologie der Lederfabrikation) Band III, Seite 67, Budapest.
5. A. MIHAJLOV : A bőrgyártás fiziko-kémiai alapjai (Physikalisch-chemische Grundlagen der Lederfabrikation), Band I, Seite 137, Budapest.
6. H. HERFELD : Die Qualitätsbeurteilung von Leder, Lederaustauschwerkstoffen und Lederbehandlungsmitteln, Berlin, 1950. Siehe weiter Referat: Das Leder 1956, 90.
7. R. G. MITTON : Isltc 1948, 310 ; 1950, 81.
   R. G. MITTON, R. H. HALL : Isltc 1950, 66.
8. Magyar Népköztársasági Országos Szabvány 13473—54. (Landesnorm der Ungarischen Volksrepublik.)
9. R. G. MITTON : Isltc 1953, 53.
10. JENŐ ENGELSMANN : Bőr és Cipőtechnika (Leder- und Schuhtechnik) 1952, 136, 166.
11. G. DREYER : Festigkeitslehre und Elastizitätslehre, Leipzig, 1952.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verfasser rechneten verschiedene Festigkeitskennwerte, die der Kennzeichnung der Qualität von Fertigledern dienen, auf eine einheitliche Messeinheit (kg/cm²) um. Sie haben eine Methode zur Messung der reinen Scherfestigkeit ausgearbeitet und aus der Stichausreissfestigkeit sowie den Weiterreissbeanspruchungen die Zerstörungsfestigkeit in kg/cm² berechnet. Die Versuchsumstände wurden von den Verfassern so gewählt, dass die Belastung der beanspruchten Querschnitte gleichmässig ist. Es wurde gezeigt, dass unter bestimmten Bedingungen die Scherfestigkeit, die Nahtfestigkeit, die Stichausreissfestigkeit sowie die bei Weiterreissbeanspruchung gemessene Zerstörungsfestigkeit, in kg/cm² ausgedrückt, in die gleiche Grössenordnung fallen wie die Zugfestigkeit.

Die Verfasser haben sich eingehend mit der Messung des Druck-Elastizitätsmoduls beschäftigt und vergleichende Tabellen veranschaulichen den Zusammenhang der Elastizitätsmoduln für Dehnung, Druck, Biegung und Scherung der verschiedenen Ledersorten. Die unterschiedlichen Elastizitätsmoduln weichen voneinander ab.

STRENGTH AND ELASTICITY OF FINISHED LEATHERS AT DIFFERENT STRESSES

G. TÓTH D. of Chem. Sc. and V. PÓSA

SUMMARY

Various stress indexes used to tax the quality of finished leathers were converted to the same unit of measurement (kg/cm²). A method was elaborated for measuring pure shear stress, and the stitch tear strength and tongue tear strength has been computed in kg/cm². Test conditions were chosen to keep the load on the stressed cross sectional areas uniform. It has been found that shear stress and resistances to rupture at sewing, stitch tear and tongue tear strengths are under definite conditions expressed in kg/cm² of the order of magnitude of the tensile strength.

Measurement of the modulus of elasticity in compression is dealt with in detail, and a comparative tabulation is given on the correlation of compressive, bending and shear moduli of elasticity of various leathers. The various moduli of elasticity differ from one another.

RÉSISTANCES ET MODULES D'ÉLASTICITÉ DE CUIRS APPRÊTÉS

G. TÓTH Docteur des sc. chim. et V. PÓSA

RÉSUMÉ

Les différents indices en usage pour définir la qualité de cuirs apprêtés ont été convertis à la même unité de mesure. Une méthode a été développée pour mesurer la résistance au cisaillement pur, et la résistance à la rupture a été calculée en kg/cm² à partir des contraintes à l'arrachement, et à la rupture continue. Les conditions d'essais ont été choisies de façon à ce que les charges sur les sections fatiguées soient uniformes. On a démontré que les résistances à la rupture aux essais de cisaillement, de couture, de l'arrachement et de rupture continue, exprimées en kg/cm² dans des conditions définies, sont de l'ordre de grandeur de la résistance à la traction.

La mesure du module d'élasticité en compression est traité en détail et un tableau comparatif est présenté pour les rapports des modules d'élasticité en compression, en flexion et en cisaillement. Les différents modules d'élasticité se distinguent l'un de l'autre.

ПРОЧНОСТЬ И ЭЛАСТИЧНОСТЬ ВЫДЕЛАННЫХ КОЖ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ НАГРУЗКАХ

Д-р хим. наук Г. ТОТ и В. ПОША

РЕЗЮМЕ

Различные показатели прочности, используемые для характеристики качества выделанных кож, пересчитаны на идентичную единицу измерения *(кг/см²)*. Авторами

разработан метод измерения чистой прочности на срез; на основе же нагрузок надрыва, а также разрыва определена прочность разрушения в *кг/см²*. Опытные условия выбраны с таким расчетом, чтобы нагрузка на подвергаемые испытаниям сечения была бы равномерной. Авторами показано, что значения прочности как на срез, так и на разрушения, установленные измерениями от нагрузок при шитье, разрыве, надрыве, при определенных условиях выраженные в *кг/см²*, имеют такой же порядок величин, как и прочность на разрыв.

Детально рассматривается вопрос измерения модуля упругости при сжатии и приводится сравнительная таблица, где дается зависимость модуля упругости для различных кож при растяжении, сжатии, изгибе и срезе. Различные модули упругости отклоняются друг от друга.

APPLICATION OF THE MATRIX CALCULUS TO THE INVESTIGATION OF TRANSFORMERS IN ARBITRARY CONNECTION

V. LOVASS-NAGY

DEPARTMENT FOR MATHEMATICS, UNIVERSITY OF BUILDING SCIENCES AND COMMUNICATIONS

and

Ch. SZENDY

D. ENG. SC.

POWER STATION DESIGNING OFFICE, BUDAPEST

[Manuscript received 15th December, 1955]

This paper deals with the basic equation of polyphase transformers (in the general case : m-phase transformers), the investigation of which is based on the following assumptions :

1. In general, the transformers examined are built up of n coils per phase. The coils pertaining to a certain phase (a, b, c, . . . m-phase) are located on one leg of the core or on one group of legs ; the coils are denoted in the order of their location by numbers 1, 2, 3, . . . n. The set of coils bearing the same serial number will be called a coil cycle.

2. The build-up of the transformer shows cyclic symmetry, the coils of different phases, bearing the same serial number, are interchangeable.

3. The dependence of the permeability of the iron core on the magnetic field strength will be neglected, that is, the inductance will be assumed as constant.

4. The core loss will likewise be disregarded.

5. Groups of coils can be formed by series or parallel connection of two or more coil cycles ; let us assume for convenience that the groups of coils connected in series or in parallel belong to consecutive coil cycles. To denote the currents and voltages of the coil group produced by connecting the coil cycles j to k, subscripts "$j \ldots k$" will be used, e. g. : $u_{j \ldots k}$: A variety of connections can be established between coils or coil groups bearing the same serial number of phases a, b, c, . . ., m.

6. The transformers are connected to the main system through terminals pertaining to the different coils ; these terminals are branched off the connections mentioned under 5. above. The terminals pertaining to the various coils will be numbered with the Roman numbers corresponding to the arabic serial numbers of the coils, viz. : I, II, III, etc. ; the terminal pertaining to the k-th coil shall denoted by K, and the one pertaining to the n-th coil by N.

7. From the connections referred to under points 5. and 6. above, the following cases of practical interest will be discussed :

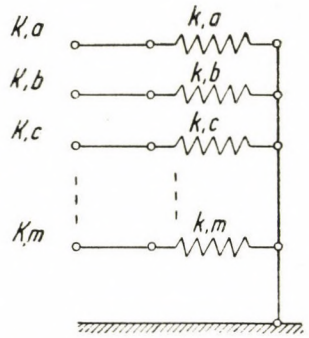


Fig. 1. Star connection of the k-th transformer cycle with directly grounded neutral

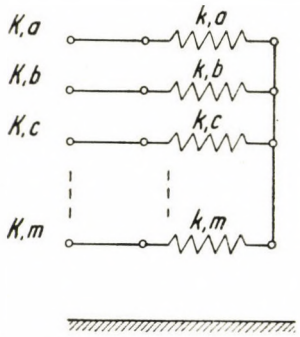


Fig. 2. Star connection of the k-th cycle of the transformer with ungrounded neutral (without ground return)

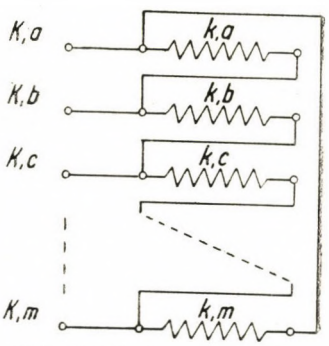


Fig. 3. Polygon connection of the transformer's k-th cycle

a) Star connection with :

α) solidly grounded neutral (see Fig. 1)

β) ungrounded (isolated) neutral (Fig. 2)

b) Polygon connection (in the special case — in three-phase transformers — delta connection, see Fig. 3)

c) Zig-zag connection, connecting in series two coils per phase — in appropriate phase sequence ; one of the ends of the system formed by the series

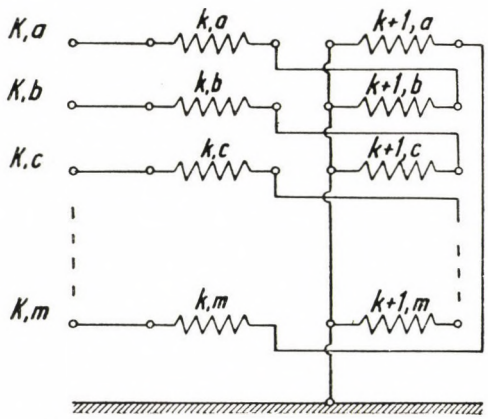


Fig. 4. Zig-zag connection of the transformer's k-th and $(k+1)$-st cycle, with grounded neutral

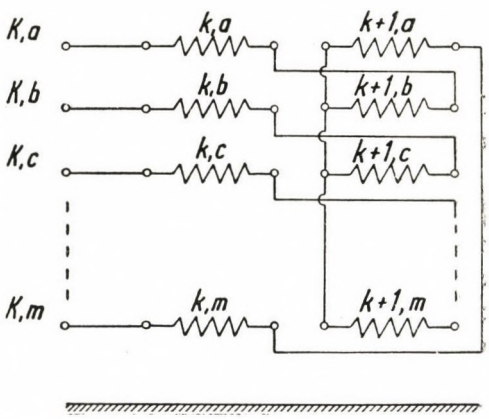


Fig. 5. Zig-zag connection of the transformer's k-th and $(k+1)$-st cycle, with ungrounded neutral

connected coils (belonging to two different phases) is star-connected, while the other ends are led out to the transformer terminals. In that case, the neutral can likewise be

α) grounded (Fig. 4) or

β) ungrounded (Fig. 5).

8. Our examinations cover also auto-transformers, where at least two terminals of the transformer in the same phase are electrically connected. Besides, the individual phases may be interconnected in the manner described under point 7. thus the following connections may be distinguished :

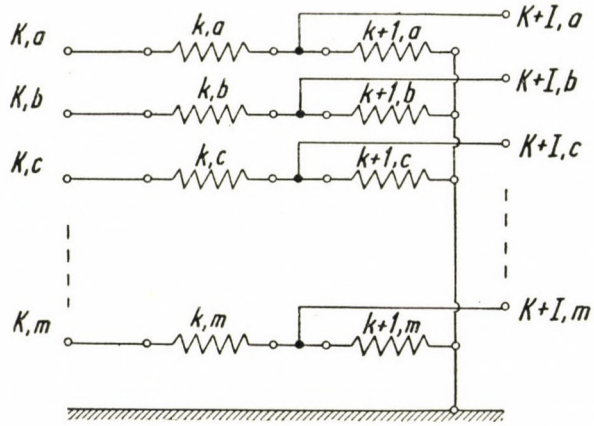


Fig. 6. The auto-transformer's k-th and $(k+1)$-st cycle star-connected, with grounded neutral

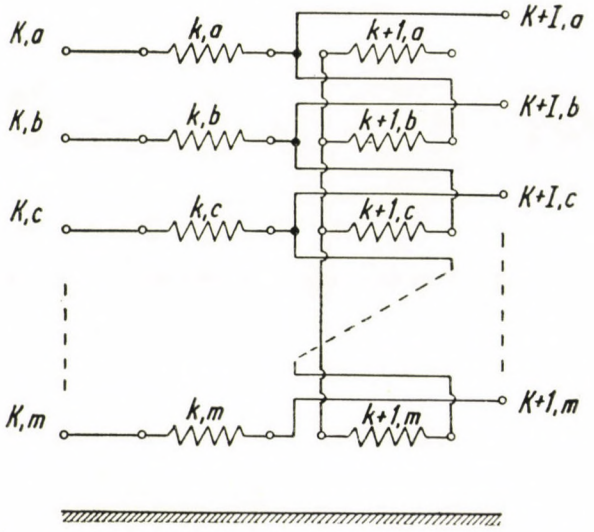


Fig. 7. The auto-transformer's k-th and $(k+1)$-st cycle, star-connected, with ungrounded neutral

a) Star connection with neutral :

α) grounded (Fig. 6) or

α) ungrounded (Fig 7)

b) Polygon connection (in the special case of three-phase transformers : delta connection) (Fig. 8)

c) Zig-zag connection — with regard to point 7/*c* above — with

α) grounded (Fig. 9) or

β) ungrounded neutral (Fig. 10).

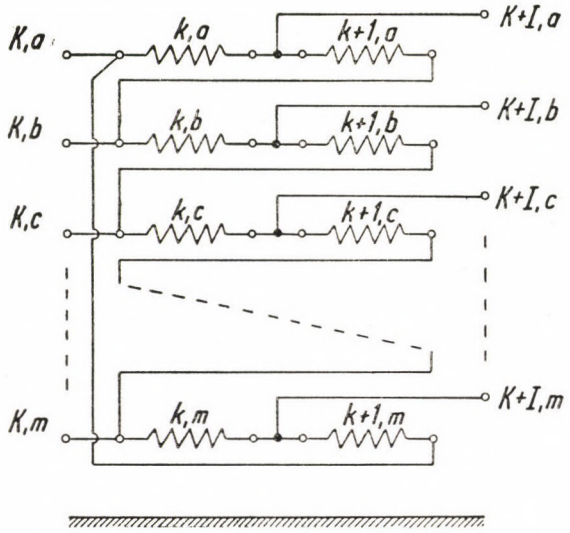


Fig. 8. The auto-transformer's *k*-th and *(k +1)*-st cycle in polygon connection

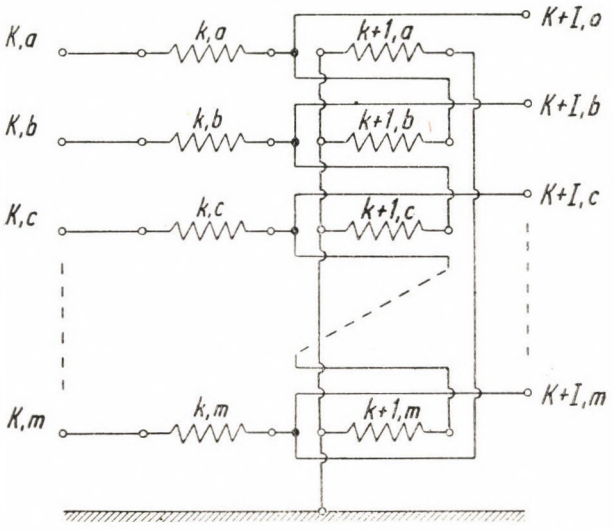


Fig. 9. The auto-transformer's *k*-th and *(k +1)*-st cycle in zig-zag connection, with grounded neutral

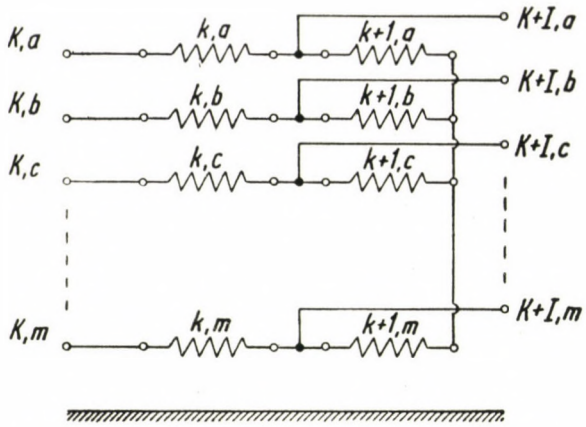


Fig. 10. The k-th and $(k+1)$-st cycle of the auto-transformer in zig-zag connection, with ungrounded neutral

NOTATIONS

A) Scalars

1. Currents :

a) Current *flowing* in through the transformer terminal (the sign of which is assumed to be *positive:*

$$i_{1,1}, i_{1,b}, i_{1,c}, \ldots, i_{1,m}, \ldots, i_{K,a}, i_{K,b}, i_{K,c}, \ldots i_{K,m}, \ldots, i_{N,a}, i_{N,b}, i_{N,c}, \ldots, i_{N,m}.$$

b) Current flowing through the transformer coils (the sign of which is to be defined in each particular case) :

$$i_{1,a}, i_{1,b}, i_{1,c}, \ldots, i_{1,m}, \ldots, i_{k,a}, i_{k,b}, i_{k,c}, \ldots i_{k,m}, \ldots i_{n,a}, i_{n,b}, i_{n,c}, \ldots i_{n,m}.$$

2. Voltages :

a) Voltage of the transformer terminals (to ground) :

$$u_{1,a}, u_{1,b}, u_{1,c}, \ldots, u_{1,m}, \ldots, u_{K,a}, u_{K,b}, u_{K,c}, \ldots, u_{K,m}, \ldots, u_{N,a}, u_{N,b}, u_{N,c}, \ldots, u_{N,m}.$$

b) Voltage across two ends of the transformer coils (the sign of which is to be interpreted in each particular case) :

$$u_{1,a}, u_{1,b}, u_{1,c}, \ldots, u_{1,m}, \ldots, u_{k,a}, u_{k,b}, u_{k,c}, \ldots u_{k,m}, \ldots, u_{n,a}, u_{n,b}, u_{n,c}, \ldots, u_{n,m}.$$

c) Voltage of neutral to ground in the case of star connection with ungrounded neutral or of star connection grounded through a given $Z_{1,st}, \ldots, Z_{n,st}$ impedance :

$$u_{1,st}, u_{2,st}, \ldots, u_{k,st}, \ldots, u_{n,st}.$$

3. Resistances :

The resistance of the kth coil of any phase :

$$r_{ka} = r_{kb} = r_{kc} = \ldots = r_{km} = r_k$$

4. Self-inductances :
The self-inductance of the kth coil of any phase :

$$l_{ka} = l_{kb} = l_{kc} = \ldots = l_{km} = l_k$$

5. Mutual inductances :
a) Mutual inductances between the coils of the same serial numbers (i. e. belonging to the same cycle) may — by virtue of the cyclic symmetry outlined under *a)* — be denoted as follows :
Mutual inductances between the coils of the kth cycle can be tabulated as follows :

		Phase				
		a	b	c	...	m
Phase:	a	———	$m_{1,k}$	$m_{2,k}$	...	$m_{m-1,k}$
	b	$m_{1,k}$	———	$m_{1,k}$	...	$m_{m-2,k}$
	c	$m_{2,k}$	$m_{1,k}$	———	...	$m_{m-3,k}$
	...	.....				
	m	$m_{m-1,k}$	$m_{m-2,k}$	$m_{m-3,k}$	...	———
where		$m_{\nu,k} = m_{m-\nu,k}$				

b) Due to the cyclic symmetry, mutual inductance between two coils of different serial number in the same phase (coils k and l) is the same in all phases, and shall be marked by :

$$l_{kl} = l_{lk}.$$

c) The cyclic symmetry can also be used in denoting the mutual inductance of coils of various serial numbers belonging to different phases (i. e. pertaining to two different cycles), as follows :
The mutual inductances between the cycles of the k-th and l-th coil respectively can be tabulated (in the light of point *b)* above, as follows :

			Coils of the lth cycle				
			Phase				
			a	b	c	...	m
Coils of the kth cycle	Phase	a	$l_{kl} = l_{lk}$	$m_{1,kl}$	$m_{2,kl}$	...	$m_{m-1,kl}$
		b	$m_{1,lk}$	$l_{kl} = l_{lk}$	$m_{1,kl}$	...	$m_{m-2,kl}$
		c	$m_{2,lk}$	$m_{1,lk}$	$l_{kl} = l_{kl}$	...	$m_{m-3,kl}$
		...	.....				
		m	$m_{m-1,lk}$	$m_{m-2,lk}$	$m_{m-3,lk}$	...	$l_{kl} = l_{lk}$

where : $m_{\nu,kl} = m_{\nu,lk}$, $m_{\nu,kl} = m_{m-\nu,kl}$.

6. The capacitance of the coils shall be ignored.

B) Matrices

$$\mathbf{i}_{\text{term}} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_I \\ \vdots \\ \mathbf{i}_N \end{bmatrix}; \mathbf{i}_I = \begin{bmatrix} i_{I,a} \\ \vdots \\ i_{I,m} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{i}_N = \begin{bmatrix} i_{N,a} \\ \vdots \\ i_{N,m} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{i}_{\text{coil}} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_n \end{bmatrix}; \mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} i_{1,a} \\ \vdots \\ i_{1,m} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{i}_n = \begin{bmatrix} i_{n,a} \\ \vdots \\ i_{n,m} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_{\text{term}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix}; \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{1,a} \\ \vdots \\ u_{1,m} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{u}_N = \begin{bmatrix} u_{N,a} \\ \vdots \\ u_{N,m} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u}_{\text{coil}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}; \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{1,a} \\ \vdots \\ n_{1,m} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} u_{n,a} \\ \vdots \\ u_{n,m} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{R} = \langle r_1 \mathbf{E}_m, r_2 \mathbf{E}_m, \ldots, r_n \mathbf{E}_m \rangle$, where $\mathbf{E}_m$ denotes the unit matrix of the m-th order.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} & \ldots & \mathbf{L}_{1n} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \ldots & \mathbf{L}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \mathbf{L}_{n1} & \mathbf{L}_{n2} & \ldots & \mathbf{L}_{nn} \end{bmatrix}, \text{ where}$$

$$\mathbf{L}_{kk} = \mathbf{C}(l_k, m_{1,k}, m_{2,k}, \ldots, m_{m-1,k}) \text{ and}$$

$$\mathbf{L}_{kl} = \mathbf{L}_{lk} = \mathbf{C}(l_{kl}, m_{1,kl}, m_{2,kl}, \ldots, m_{m-1,kl})$$

are symmetrical cyclic matrices, therefore

$$m_{\nu,k} = m_{m-\nu,k} \text{ and } m_{\nu,kl} = m_{m-\nu,kl}$$

respectively.

I

The expression of analytic functions of hypermatrices consisting of cyclic submatrices by means of direct products

Let hypermatrix $\mathbf{A}$ of the $m \times n$th order, consisting of square submatrices of the mth order,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \ldots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

have cyclic matrices for each of its submatrices. In that case, any submatrix

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{0,ij} & a_{1,ij} \ldots a_{m-1,ij} \\ a_{m-1,ij} & a_{0,ij} \ldots a_{m-2,ij} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1,ij} & a_{2,ij} \ldots a_{0,ij} \end{bmatrix}$$

can be set up in canonic form :

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \lambda_{\nu,ij} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_\nu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu^{m-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\alpha}_\nu, \ \ldots \ , \bar{\alpha}_\nu^{m-1}]$$

where

$$\lambda_{\nu,ij} = a_{0,ij} + a_{1,ij}\alpha_\nu + \ \ldots \ + a_{m-1,ij}\,\alpha_\nu^{m-1},$$

$$\alpha_\nu = e^{\frac{2\nu\pi j}{m}}, \ (\nu = 0, \ 1, \ \ldots, \ m-1).$$

Making use of the above canonic form of the cyclic submatrices, obviously, hypermatrix **A** can be written in the following manner, as the sum of direct products :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \begin{bmatrix} \lambda_{\nu,11} & \lambda_{\nu,12} & \ldots & \lambda_{\nu,1n} \\ \lambda_{\nu,21} & \lambda_{\nu,22} & \ldots & \lambda_{\nu,2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{\nu,n1} & \lambda_{\nu,n2} & \ldots & \lambda_{\nu,nn} \end{bmatrix} \times \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_\nu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu^{m-1} \end{bmatrix} [1, \ \bar{\alpha}_\nu, \ \ldots \ , \bar{\alpha}_\nu^{m-1}]$$

As two direct products can be multiplied in the form

$$(\mathbf{U}_1 \times \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{U}_2 \times \cdot \mathbf{V}_2) = \mathbf{U}_1\mathbf{U}_2 \times \cdot \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$$

(providing that $\mathbf{U}_1$ and $\mathbf{U}_2$ and $\mathbf{V}_1$ and $\mathbf{V}_2$ are conformable in the given order), furthermore as

$$[1,\ \bar{\alpha}_\mu,\ \ldots,\ \bar{\alpha}_\mu^{m-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_\nu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu^{m-1} \end{bmatrix} = 0, \text{ ha } \mu \neq \nu$$

and

$$[1,\ \bar{\alpha}_\nu,\ \ldots,\ \bar{\alpha}_\nu^{m-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_\nu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu^{m-1} \end{bmatrix} = m, \text{ obviously}$$

any analytic function of hypermatrix **A** can be represented in the following canonic form

$$f(\mathbf{A}) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} f \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_{\nu,11} & \lambda_{\nu,12} & \ldots & \lambda_{\nu,1n} \\ \lambda_{\nu,21} & \lambda_{\nu,22} & \ldots & \lambda_{\nu,2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_{\nu,n1} & \lambda_{\nu,n2} & \ldots & \lambda_{\nu,nn} \end{bmatrix} \right\} \times \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_\nu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_\nu^{m-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\alpha}_\nu, \ldots, \bar{\alpha}_\nu^{m-1}].$$

In the special case — which is, however, invariably encountered in the mathematical examination of transformers — where all submatrices of hypermatrix **A** are not only cyclic, but at the same time symmetrical as well, i. e. where

$$a_{\nu,jk} = a_{m-\nu,jk}$$

we obtain

$$\lambda_{\nu,jk} = a_{0,jk} + a_{1,jk}(\alpha_\nu + \alpha_\nu^{m-1}) + a_{2,jk}(\alpha_\nu^2 + \alpha_\nu^{m-2}) + \ldots +$$

$$+ \begin{cases} a_{\frac{m-1}{2},jk}\left(\alpha_\nu^{\frac{m-1}{2}} + \alpha_\nu^{\frac{m+1}{2}}\right) & , \text{ if } m \text{ is an odd number} \\ a_{\frac{m}{2},jk}\,\alpha_\nu^{\frac{m}{2}} & , \text{ if } m \text{ is an even number;} \end{cases}$$

moreover, as

$$\alpha_\nu^l + \alpha_\nu^{m-l} = e^{\frac{l\nu 2k\pi j}{m}} + e^{\frac{(m-l)\nu 2k\pi j}{m}} = e^{\frac{l\nu 2k\pi j}{m}} + e^{-\frac{l\nu 2k\pi j}{m}} = 2\cos\frac{l\nu 2k\pi}{m};$$

hence

$$\lambda_{\nu,jk} = a_{0,jk} + 2a_{1,jk}\cos\nu\frac{2k\pi}{m} + 2a_{2,jk}\cos 2\nu\frac{2k\pi}{m} + \ldots +$$

$$+\begin{cases} 2a_{\frac{m-1}{2},jk}\cos\dfrac{m-1}{2}\nu\dfrac{2k\pi}{m}, & \text{if m is an odd number.} \\ a_{\frac{m}{2},jk}(-1)^\nu \qquad\qquad\quad , & \text{if m is an even number.} \end{cases}$$

As, however, it is evident that the relation

$$\lambda_{\nu,jk} = \lambda_{m-\nu,jk}$$

holds good between the eigenvalues of $\mathbf{A}_{jk}$, we can write

$$\mathbf{A}_{jk} = \frac{1}{m}\left\{\lambda_{0,jk}\begin{bmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\1\end{bmatrix}[1,\ 1,\ \ldots,\ 1] + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}}\lambda_{\nu,jk}\left\{\begin{bmatrix}1\\\alpha_\nu\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\alpha_\nu^{m-1}\end{bmatrix}[1,\ \bar{\alpha}_\nu,\ \ldots,\ \bar{\alpha}_\nu^{m-1}] + \begin{bmatrix}1\\\alpha_{m-\nu}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\\alpha_{m-\nu}^{m-1}\end{bmatrix}[1,\ \bar{\alpha}_{m-\nu},\ \ldots,\ \bar{\alpha}_{m-\nu}^{m-1}]\right\}\right\}$$

if m is an odd number, and

$$\mathbf{A}_{jk} = \frac{1}{m}\left\{\lambda_{0,jk}\begin{bmatrix}1\\1\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\1\end{bmatrix}[1,\ 1,\ \ldots,\ 1] + \right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}-1}\lambda_{\nu,jk}\left\{\begin{bmatrix}1\\ \alpha_\nu\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_\nu^{m-1}\end{bmatrix}[1,\ \bar{\alpha}_\nu,\ \ldots,\ \bar{\alpha}_\nu^{m-1}]+\begin{bmatrix}1\\ \alpha_{m-\nu}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_{m-\nu}^{m-1}\end{bmatrix}[1,\ \bar{\alpha}_{m-\nu},\ \ldots,\ \bar{\alpha}_{m-\nu}^{m-1}]\right\}+$$

$$+\lambda_{\frac{m}{2},jk}\left\{\begin{bmatrix}1\\ \alpha_{\frac{m}{2}}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_{\frac{m}{2}}^{m-1}\end{bmatrix}[1,\ \bar{\alpha}_{\frac{m}{2}},\ \ldots,\ \bar{\alpha}_{\frac{m}{2}}^{m-1}]\right\}$$

if m is an even number.

Moreover, as

$$\bar{\alpha}_{m-\nu}=\alpha_\nu$$

$$\alpha_\nu^l+\bar{\alpha}_\nu^l=\cos l\nu\frac{2k\pi}{m}+j\sin l\nu\frac{2k\pi}{m}+\cos l\nu\frac{2k\pi}{m}-j\sin l\nu\frac{2k\pi}{m}=2\cos l\nu\frac{2k\pi}{m}$$

introducing the following brief notations :

$$\mathbf{P}_0=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 1\end{bmatrix}[1,\ 1,\ \ldots,\ 1]=\begin{bmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1 & \ldots & 1\\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ 1 & 1 & \ldots & 1\end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{P}_\nu=\begin{bmatrix}1\\ \alpha_\nu\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_\nu^{m-1}\end{bmatrix}[1,\ \bar{\alpha}_\nu,\ \ldots,\ \bar{\alpha}_\nu^{m-1}]+\begin{bmatrix}1\\ \alpha_{m-\nu}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \alpha_{m-\nu}^{m-1}\end{bmatrix}[1,\ \bar{\alpha}_{m-\nu},\ \ldots,\ \bar{\alpha}_{m-\nu}^{m-1}]$$

$$\mathbf{P}_{\frac{m}{2}} = \begin{vmatrix} 1 \\ \alpha_{\frac{m}{2}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{\frac{m}{2}}^{m-1} \end{vmatrix} [1, \bar{\alpha}_{\frac{m}{2}}, \ \ldots, \ \bar{\alpha}_{\frac{m}{2}}^{m-1}]$$

we can in general write

$$2\mathbf{P}_v = \mathbf{C}\left(2, 2\cos\nu\frac{2k\pi}{m}, \ \ldots, \ 2\cos(m-1)\nu\frac{2k\pi}{m}\right) =$$

$$= 2 \cdot \mathbf{C}\left(1, \ \cos\nu\frac{2k\pi}{m}, \ \ldots, \ \cos(m-1)\nu\frac{2k\pi}{m}\right);$$

Introducing further the following short notation :

$$\Lambda_\nu = \begin{bmatrix} \lambda_{\nu,11} & \lambda_{\nu,12} & \ldots & \lambda_{v,1n} \\ \lambda_{v,21} & \lambda_{\nu,22} & \ldots & \lambda_{\nu,2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \lambda_{\nu,n1} & \lambda_{\nu,n2} & \ldots & \lambda_{\nu,nn} \end{bmatrix}, (\lambda_{jk} = \lambda_{kj})$$

it is clear that an analytical function f (A) of the hypermatrix A can be written in the form

$$f(\mathbf{A}) = \frac{1}{m}\left\{f(\Lambda_0) \times \cdot \mathbf{P}_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\frac{m}{2}-1} f(\Lambda_\nu) \times \cdot \mathbf{P}_\nu + f(\Lambda_{\frac{m}{2}}) \times \cdot \mathbf{P}_{\frac{m}{2}}\right\}$$

if m is an even number,
and

$$f(\mathbf{A}) = \frac{1}{m}\left\{f(\Lambda_0) \times \cdot \mathbf{P}_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} f(\Lambda_\nu) \times \cdot \mathbf{P}_\nu\right\}$$

if m is an odd number. Each element of the $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_\nu$ matrices of the mth order in the above derived f(A) matrix function is a real number, and the matrices $\frac{1}{m}\mathbf{P}_0$ and $\frac{1}{m}\mathbf{P}_\nu$ are projectors (idempotent matrices).

II

A solution of the sytem of differential equations concerning the transformer coils by the matrix calculus

According to Kirchhoff's second law, the linear, inhomogeneous system of differential equations expressing the relation between the currents flowing in the transformers' windings and the voltage between the two ends of the coils with the aid of the the short notations specified above, can be condensed into the matrix equation

$$\mathbf{L}\frac{d}{dt}\mathbf{i}+\mathbf{R}\mathbf{i}=\mathbf{u} \tag{1}$$

At the same time, we can prescribe that — in the case of a given u(t) — column matrix i(t) satisfying differential equation (1) should satisfy the initial condition

$$\mathbf{i}(0)=\begin{bmatrix} i_{1,a,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{1,m,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{n,a,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{n,m,0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{n0} \end{bmatrix}=\mathbf{i}_0 \tag{2}$$

To facilitate the solution in canonic form, the matrix differential equation to be solved and the initial condition can be conveniently written in the form

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{i}\right)+\left(\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\right)\left(\sqrt{\mathbf{R}}\,\mathbf{i}\right)=\left(\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbb{R}}\right)\left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}\mathbf{u} \tag{1.1}$$

and

$$\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i}(0)=\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i}_0 \tag{2.1}$$

respectively, wherefrom — introducing the notations $\mathbf{y}(t)=$

$$=\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i}(t) \text{ and } \mathbf{A}=\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}, \text{ equations}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}+\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{A}\left(\sqrt{\mathbb{R}}\right)^{-1}\mathbf{u} \tag{1.2}$$

and

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{2.2}$$

can be obtained. Clearly, the solution of differential equation (1.2) satisfying the initial condition (2.2) is

$$\mathbf{y}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{A}\left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}\mathbf{u}d\tau\,. \tag{3}$$

If the voltage across the two ends of all coils is the cyclic function of the same cycle of t time, introducing the notation

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_{1,a,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{1,m,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n,a,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n,m,0} \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1,0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{n,0} \end{bmatrix} e^{j\omega t} = \mathbf{u}_0 e^{j\omega t}$$

(where in general, $u_{1,a,0}, \ldots, u_{n,m,0}$ are complex constants), after integrating, the solution (3) can be written in the following form ;

$$\mathbf{y}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\left\{\mathbf{y}_0 + \left[e^{(j\omega\mathbf{E}+\mathbf{A})t} - \mathbf{E}\right]\left[j\omega\mathbf{E} + \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{A}\left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}\mathbf{u}_0\right\}. \tag{3.1}$$

Hence, i(t) function satisfying the original differential equation (1) and initial condition (2) will read :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}(t) = {} & \left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1} e^{-\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\,t}\,\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{i}_0 - \\ & - \left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}\left(\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\right)\left(j\omega\mathbf{E} + \sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1} e^{-\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}\,t}\left(\sqrt{\mathbf{R}}\right)^{-1}\mathbf{u}_0 + \\ & + \left(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{u}_0 e^{j\omega t}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

(It will be seen that, after the transient portion of the solution has dwindled, currents of cycles equal to those of the voltages flow in the coils, which are described by the matrix function

$$(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{u}_0 e^{j\omega t}.$$

In determining the transient portion of the solution, it is of considerable advantage that matrix $\sqrt{\mathbf{R}}\mathbf{L}^{-1}\sqrt{\mathbf{R}}$ is *symmetrical*, for which circumstance the transformation of the original equation (1) into form (1.1) is responsible.)

III

Canonic form of the periodic ("steady state") solution of the matrix differential equation referred to the transformer's coils

As will be seen from formula (4), the periodic "steady state" solution of the matrix differential equation (1) is

$$\mathbf{i}_{coil} = (\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{u}_0 e^{j\omega t}. \tag{5}$$

In the case of a given $\mathbf{u}_0$, for plotting the periodic solution, "coil-impedance matrix"

$$\mathbf{Z}_{coil} = \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}$$

will have to be inverted. Hence, according to the above, Z_{coil} symmetrical hypermatrix consisting of cyclic submatrices will read as

$$\mathbf{Z}_{coil}^{-1} = \frac{1}{m}\sum_{\nu=0}^{m-1} \begin{bmatrix} \xi_{\nu,11} & \xi_{\nu,12} & \dots & \xi_{\nu,1n} \\ \xi_{\nu,21} & \xi_{\nu,22} & \dots & \xi_{\nu,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{\nu,n1} & \xi_{\nu,n2} & \dots & \xi_{\nu,nn} \end{bmatrix}^{-1} \times \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_\nu \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_\nu^{m-1} \end{bmatrix} [1, \bar{\alpha}_\nu, \dots \bar{\alpha}_\nu^{m-1}]$$

where

$$\xi_{\nu,kk} = r_k + (l_k + m_{1,k}\alpha_\nu + \dots + m_{m-1,k}\alpha_\nu^{m-1})\, j\omega\,.$$

and

$$\xi_{\nu,kl} = \lambda_{\nu,lk} = (l_{kl} + m_{1,kl}\alpha_\nu + \dots + m_{m-1,kl}\alpha_\nu^{m-1})\, j\omega\,.$$

For instance, in a 3-phase two-winding transformer

$$\mathbf{R} = \langle r_1\mathbf{E}_3\,,\ r_2\mathbf{E}_3\rangle\,,\ \mathbf{L} = \begin{bmatrix}\mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12}\\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22}\end{bmatrix},\ (\mathbf{L}_{12} = \mathbf{L}_{21})\,;$$

furthermore :

$$\mathbf{L}_{11} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & m_1\\ m_1 & l_1 & m_1\\ u_1 & m_1 & l_1\end{bmatrix},\ \mathbf{L}_{22} = \begin{bmatrix} l_2 & m_2 & m_2\\ m_2 & l_2 & m_2\\ m_2 & m_2 & l_2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{12} = \mathbf{L}_{21} = \begin{bmatrix} l_{12} & m_{12} & m_{12}\\ m_{12} & l_{12} & m_{12}\\ m_{12} & m_{12} & l_{12}\end{bmatrix}.$$

(Namely, in this case we can write

$$m_{1,1} = m_{2,1} = m_1\,,\ m_{1,2} = m_{2,2} = m_2\,,\ m_{1,12} = m_{2,12} = m_{12}\,.)$$

Hence :

$$\xi_{1,11} = r_1 + j\omega\,(l_1 + 2m_1)\,;\ \xi_{2,11} = \xi_{3,11} = r_1 + j\omega\,(l_1 - m_1)$$

$$\xi_{1,22} = r_2 + j\omega\,(l_2 + 2m_2)\,;\ \xi_{2,22} = \xi_{3,22} = r_2 + j\omega\,(l_2 - m_2)$$

$$\xi_{1,12} = \xi_{1,21} = j\omega\,(l_{12} + 2m_{12})$$

$$\xi_{2,12} = \xi_{3,12} = \xi_{2,21} = \xi_{3,21} = j\omega\,(l_{12} - m_{12})$$

as in this case

$$a_0 = 1\,,$$

$$a_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j = a$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j = \bar{a}\,.$$

In this manner, we arrive to the result that the reciprocal of the "coil-impedance matrix" of a 3-phase two-winding transformer (of cyclic symmetry) is

$$\mathbf{Z}_{coil}^{-1} = \frac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix} \xi_{1,11} & \xi_{1,12} \\ \xi_{1,12} & \xi_{1,22} \end{bmatrix}^{-1} \times \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1,\ 1,\ 1] + \right.$$

$$+ \left.\begin{bmatrix} \xi_{2,11} & \xi_{2,12} \\ \xi_{2,12} & \xi_{2,22} \end{bmatrix}^{-1} \times \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ \bar{a} \end{bmatrix} [1,\ \bar{a},\ a,] + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{a} \\ a \end{bmatrix} [1,\ a,\ \bar{a}]\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{\xi_{1,11}\xi_{1,22} - \xi_{1,12}^2} \begin{bmatrix} \xi_{1,22} & -\xi_{1,12} \\ -\xi_{1,12} & \xi_{1,11} \end{bmatrix} \times \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1,\ 1,\ 1] + \right.$$

$$+ \left.\frac{1}{\xi_{2,11}\xi_{2,22} - \xi_{2,12}^2} \begin{bmatrix} \xi_{2,22} & -\xi_{2,12} \\ -\xi_{2,12} & \xi_{2,11} \end{bmatrix} \times \cdot \left[\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ \bar{a} \end{bmatrix} [1,\ \bar{a},\ a] + \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{a} \\ a \end{bmatrix} [1,\ a,\ \bar{a}]\right]\right\}$$

IV

Construction of the basic transformer terminal equations from the relations derived for the coils

As demonstrated above, the correlation of the transformer's coil voltages and coil currents may be expressed by matrix equation (5). As some of the coil cycles can be connected in parallel or in series, the necessity arises to derive the correlation of currents and voltages of coil groups and of coil group cycles respectively. Furthermore, since the independent cycles and the group cycles can be connected in star or in polygon, in the last part of this paper we shall discuss the deduction of the correlation between currents and voltages at the transformer terminals.

For convenient handling, in the process of group formation, the voltages of the independent cycles and group cycles may be considered to be terminal current and terminal voltage values respectively. With this in mind, no special

notations shall be introduced for group voltages and group currents under heading A) below. Under B), however, examining the independent cycles and group cycles in star and polygon connection, the ends of the coil groups shall be considered as independent coils, for their voltage and current values will have already been determined (according to A).

A) *Formation of coil groups by series — or parallel — connection of coils*

a) *Series connection of coils, without intermediary terminal.* Assuming that in a transformer of "n" coils and "m" phases, the kth, $k + 1$st, $k + 2nd$, . . .,

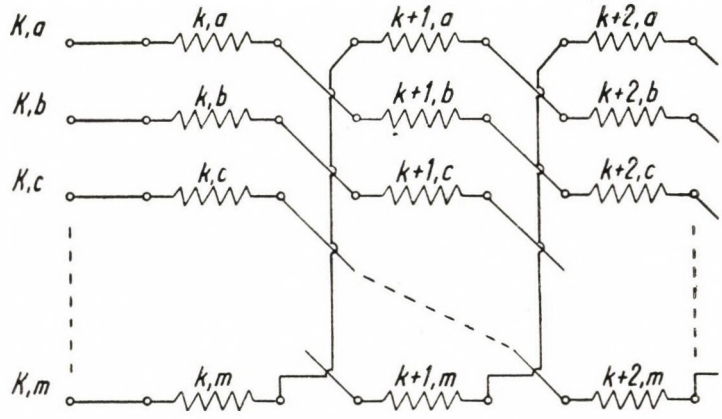


Fig. 11. Series connection of the k-th, $(k+1)$-st, $(k+2)$-nd, ... cycles of the transformer without intermediary taps

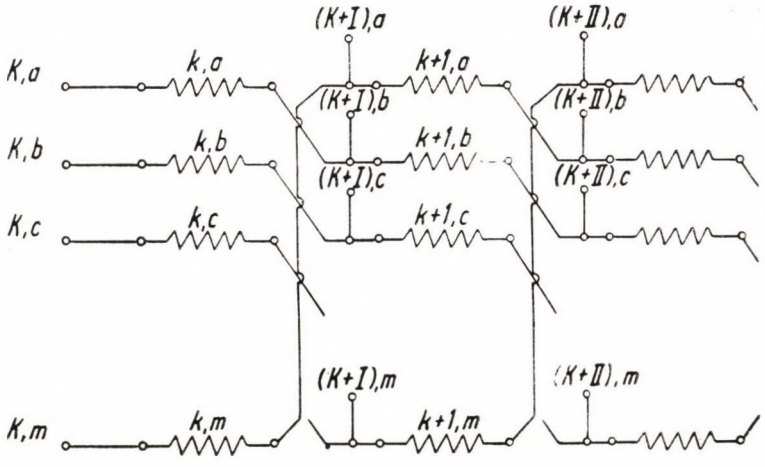


Fig. 12. Series connection of the k-th, $(k + 1)$-st, $(k + 2)$-nd, ... cycles of the transformer with intermediary taps

$k+\nu$ th cycles are connected in series in such manner that phase "a" of the kth cycle is connected to phase "b" of the $k+1$st cycle and further to phase "c" of the $k+2$nd cycle, phase "d" of the $k+3$rd cycle, and so on ; phase "b" of the kth cycle to phase "c" of the $k+1$st, further to phase "d" of the $k+2$nd cycle, and so on ; in other words, the series connections are made in cyclic order (See Fig. 12). In that case, the terminal voltage and terminal current of the system of coils formed by the series-connected cycles can be expressed, in awareness of the coil voltages and coil currents as :

$$\begin{aligned} u_{K,a} &= u_{k,a} + u_{k+1,b} + u_{k+2,c} + \ldots + u_{k+\nu,h} \\ u_{K,b} &= u_{k,b} + u_{k+1,c} + u_{k+2,d} + \ldots + u_{k+\nu,h} \end{aligned} \tag{6}$$

and so on, and

$$\begin{aligned} i_{K,a} &= i_{k,a} = i_{k+1,b} = i_{k+2,c} = \ldots = i_{k+\nu,h} \\ i_{K,b} &= i_{k,b} = i_{k+1,c} = i_{k+2,d} = \ldots = i_{k+\nu,h} \end{aligned} \tag{7}$$

and so on.

Introducing symbol

$$\Omega_m = \mathbf{C}(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

to denote the "primitive cyclic matrix" of the mth order, the above systems of equation may be condensed in the following matrix equations :

$$\mathbf{u}_K = \mathbf{u}_k + \Omega_m \mathbf{u}_{k+1} + \Omega_m^2 \mathbf{u}_{k+2} + \ldots + \Omega_m^\nu \mathbf{u}_{k+\nu}$$

and

$$\mathbf{i}_K = \mathbf{i}_k = \Omega_m \mathbf{i}_{k+1} = \Omega_m^2 \mathbf{i}_{k+2} = \ldots = \Omega_m^\nu \mathbf{i}_{k+\nu}$$

respectively.

Hence, writing the correlation between terminal voltages and coil voltages in matrix form* :

* Here as well as later, we shall repeatedly employ the property of primitive cyclic matrices according to which

$$(\Omega^k)^* = \Omega^{-k}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{u}_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_K \\ \vdots \\ \mathbf{u}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}_m & \boldsymbol{\Omega}_m & \boldsymbol{\Omega}_m^2 & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{\nu-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+\nu} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

Further the relation between terminal currents and coil currents, in matrix form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_k \\ \mathbf{i}_{k+1} \\ \mathbf{i}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_{k+\nu} \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}_m & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{-(\nu-1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\mathrm{I}} \\ \mathbf{i}_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_K \\ \vdots \\ \mathbf{i}_L \end{bmatrix}$$

Introducing the notation

$$\mathbf{T} = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}_m & \boldsymbol{\Omega}_m & \boldsymbol{\Omega}_m^2 & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{\nu-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{E}_m \end{bmatrix}\right\} n - \nu \text{ row}}_{\text{column } n} \qquad (8)$$

the relations between terminal voltages and coil voltages, and terminal currents and coil currents respectively, can be written in the following short matrix form

$$\mathbf{u}_{term} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_{coil} \tag{9}$$

and

$$\mathbf{i}_{coil} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{i}_{term}, \tag{10}$$

thus, the correlation of terminal voltages and terminal currents derived from the correlation of coil voltages and coil currents $\mathbf{u}_{coil} = \mathbf{Z}_{coil} \cdot \mathbf{i}_{coil}$ will be:

$$\mathbf{u}_{term} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}_{coil} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{i}_{term}. \tag{11}$$

Matrix **T** as well as matrices to be introduced hereinafter having a similar role, shall be called "transformation matrices".

The $\mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}_{coil} \cdot \mathbf{T}^*$ matrix product can be conveniently computed by appropriately partitioning the factors. Let us namely partition hypermatrices **T** and $\mathbf{Z}_{coil}$ as follows

$$\mathbf{T} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{E}_{m\times(k-1)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & [\mathbf{E}_m,\ \Omega_m,\ \ldots,\ \Omega_m^{\nu-1}] & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{E}_{m\times(n-k-\nu)} \\ \hline \end{array}$$

and

$$\mathbf{Z}_{coil} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{Z}_{1,\ldots,k-1}^{1,\ldots,k-1} & \mathbf{Z}_{1,\ldots,k-1}^{k,\ldots,k+\nu} & \mathbf{Z}_{1,\ldots,k-1}^{k+\nu+1,\ldots,n} \\ \hline \mathbf{Z}_{k,\ldots,k+\nu}^{1,\ldots,k-1} & \mathbf{Z}_{k,\ldots,k+\nu}^{k,\ldots,k+\nu} & \mathbf{Z}_{k,\ldots,k+\nu}^{k+\nu+1,\ldots,n} \\ \hline \mathbf{Z}_{k+\nu+1,\ldots,n}^{1,\ldots,k-1} & \mathbf{Z}_{k+\nu+1,\ldots,n}^{k,\ldots,k+\nu} & \mathbf{Z}_{k+\nu+1,\ldots,n}^{k+\nu+1,\ldots,n} \\ \hline \end{array}$$

(In the above, by $\mathbf{Z}_{j,\ldots,j+\beta}^{h,\ldots,h+\alpha}$ we denoted the hypermatrix formed by those submatrices of the original $\mathbf{Z}_{coil}$ hypermatric standing in columns within h to $h+\alpha$ and at the same time in rows from j to $j+\beta$.)

In that case we obtain for

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}_{coil} \cdot \mathbf{T}^* =$$

$\mathbf{Z}_{1,\ldots,k-1}^{1,\ldots,k-1}$	$\mathbf{Z}_{1,\ldots,k-1}^{k,\ldots,k+\nu}\begin{bmatrix}\mathbf{E}_m\\ \Omega_m^{-1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \Omega_m^{-(\nu-1)}\end{bmatrix}$	$\mathbf{Z}_{1,\ldots,k-1}^{k+\nu+1,\ldots,n}$
$[\mathbf{E}_m, \Omega_m, \ldots, \Omega_m^{\nu-1}]\,\mathbf{Z}_{k,\ldots,k+\nu}^{1,\ldots,k-1}$	$[\mathbf{E}_m, \Omega_m, \ldots, \Omega_m^{\nu-1}]\,\mathbf{Z}_{k,\ldots,k+\nu}^{k,\ldots,k+\nu}\begin{bmatrix}\mathbf{E}_m\\ \Omega_m^{-1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \Omega_m^{-(\nu-1)}\end{bmatrix}$	$[\mathbf{E}_m, \Omega_m, \ldots, \Omega_m^{\nu-1}]\mathbf{Z}_{k,\ldots,k+\nu}^{k+\nu+1,\ldots,n}$
$\mathbf{Z}_{k+\nu+1,\ldots,n}^{1,\ldots,k-1}$	$\mathbf{Z}_{k+\nu+1,\ldots,n}^{k,\ldots,k+\nu}\begin{bmatrix}\mathbf{E}_m\\ \Omega_m^{-1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \Omega_m^{-(\nu-1)}\end{bmatrix}$	$\mathbf{Z}_{k+\nu+1,\ldots,n}^{k+\nu+1,\ldots,n}$

b) *Series-connected coils with intermediary taps.* Let us assume that the kth, k + 1st, k + 2nd, ..., k + νth cycles of an "m"-phase transformer having "n" coils are connected by linking the a, b, c, ..., m phases in cyclic order (in the manner described under a) above), and that at the same time the connection of any two coils is led to one of the transformer terminals (see Fig. 12). In that case, the number of coil currents and voltages will be equal to the number of terminal currents and voltages. The relations between the terminal voltages and terminal currents, and coil voltages and coil currents respectively (using the Ω_m primitive cyclic matrix of the mth order introduced under a) above) will be :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_K = \mathbf{u}_k + \Omega_m \mathbf{u}_{k+1} + \Omega_m^2 \mathbf{u}_{k+2} + \ldots + \Omega_m^{\nu-1} \mathbf{u}_{k+\nu} \\
&\mathbf{u}_{K+I} = \mathbf{u}_{k+1} \Omega_m + \mathbf{u}_{k+2} + \ldots + \Omega_m^{\nu-2} \mathbf{u}_{k+\nu} \\
&\mathbf{u}_{K+II} = \mathbf{u}_{k+2} + \ldots + \Omega_m^{\nu-3} \mathbf{u}_{k+\nu} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathbf{u}_{K+(\nu)} = \mathbf{u}_{k+\nu}
\end{aligned} \tag{12}$$

and further :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{i}_K = \mathbf{i}_k \\
&\mathbf{i}_{K+I} = -\Omega_m^{-1} \mathbf{i}_k + \mathbf{i}_{k+1} \\
&\mathbf{i}_{K+II} = -\Omega_m^{-1} \mathbf{i}_{k+1} + \mathbf{i}_{k+2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathbf{i}_{K+(\nu)} = -\Omega_m^{-1} \mathbf{i}_{k+\nu-1} + \mathbf{i}_{k+\nu}
\end{aligned} \tag{13}$$

Hence, compounding all correlations between terminal voltages and coil voltages in a single matrix equation,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_{II} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_K \\ \mathbf{u}_{K+I} \\ \mathbf{u}_{K+II} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{K+(\nu)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_m & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{E}_m & \Omega_m & \Omega_m^2 & \ldots & \Omega_m^{\nu-1} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{E}_m & \Omega_m & \ldots & \Omega_m^{\nu-2} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{E}_m & \ldots & \Omega_m^{\nu-3} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbf{E}_m & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+\nu} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

is obtained.

Again, compounding all relations between terminal currents and coil currents in a single matrix equation (taking into account that $\Omega_m^{-1} = \Omega_m^{m-1}$) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_I \\ \mathbf{i}_{II} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_K \\ \mathbf{i}_{K+I} \\ \mathbf{i}_{K+II} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_{K+(\nu)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}_m & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\Omega_m^{m-1} & \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\Omega_m^{m-1} & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_k \\ \mathbf{i}_{k+1} \\ \mathbf{i}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_{k+\nu} \\ \vdots \\ \mathbf{i}_n \end{bmatrix}$$

is obtained.

Moreover, as the following identity obviously holds good :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\Omega_m^{m-1} & \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_m^{m-1} & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\Omega_m^{m-1} & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Omega_m^{m-1} & \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \Omega_m^{2(m-1)} & \Omega_m^{m-1} & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \Omega_m^{(\nu-1)(m-1)} & \Omega_m^{(\nu-2)(m-1)} & \Omega_m^{(\nu-3)(m-1)} & \dots & \Omega_m^{m-1} & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{E}_m \end{bmatrix}$$

therefore, — taking into account that $\mathfrak{Q}_m^m = \mathbf{E}_m$ — evidently :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\mathfrak{Q}_m^{m-1} & \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\mathfrak{Q}_m^{m-1} & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\mathfrak{Q}_m^{m-1} & \mathbf{E}_m \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathfrak{Q}_m^{-1} & \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathfrak{Q}_m^{-2} & \mathfrak{Q}_m^{-1} & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{Q}_m^{-(\nu-1)} & \mathfrak{Q}_m^{-(\nu-2)} & \mathfrak{Q}_m^{-(\nu-3)} & \dots & \mathfrak{Q}_m^{-1} & \mathbf{E}_m \end{bmatrix}$$

Writing the relation between terminal currents and coil currents in the form solved for the column-vector including the coil currents,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_k \\ \mathbf{i}_{k+1} \\ \mathbf{i}_{k+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{k+\nu} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}_m & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{Q}_m^{-1} & \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{Q}_m^{-2} & \mathfrak{Q}_m^{-1} & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{Q}_m^{-(\nu-1)} & \mathfrak{Q}_m^{-(\nu-2)} & \mathfrak{Q}_m^{-(\nu-3)} & \dots & \mathbf{E}_m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_I \\ \mathbf{i}_{II} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_K \\ \mathbf{i}_{K+I} \\ \mathbf{i}_{K+II} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{K+(\nu)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_N \end{bmatrix}$$

Moreover, as $\Omega_m^{-k} = \Omega_m^{m-k}$, introducing the notation

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}_m & \Omega_m & \Omega_m^2 & \dots & \Omega_m^{\nu-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{E}_m & \Omega_m & \dots & \Omega_m^{\nu-2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}_m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \tag{14}$$

(it may be seen that $\mathbf{T}$ is a square matrix of the n.-mth order and $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{E}$), the correlation of terminal voltages and coil voltages and of terminal currents and coil currents respectively can be written in the short matrix forms :

$$\mathbf{u}_{term} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_{coil} \tag{15}$$

and

$$\mathbf{i}_{coil} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{i}_{term} , \tag{16}$$

thus the correlation of terminal voltages and terminal currents may be obtained from relation $\mathbf{u}_{coil} = \mathbf{Z}_{coil} \cdot \mathbf{i}_{coil}$ between coil voltages and coil currents as follows :

$$\mathbf{u}_{term} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}_{coil} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{i}_{term} . \tag{17}$$

In that case (i. e. when the connection of any pair of the series-connected coils is lead out to some transformer terminal), the coefficient matrix $\mathbf{Z}_{term} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}_{coil} \cdot \mathbf{T}^*$ of the matrix equation subsisting between $\mathbf{u}_{term}$ and $\mathbf{i}_{term}$ can, with regard to relationship $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{E}$, be simply inverted, thus :

$$\mathbf{i}_{term} = \mathbf{Z}_{term}^{-1} \mathbf{u}_{term} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}_{coil}^{-1} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{u}_{term} . \tag{18}$$

Note that if the lead of any of the series-connected coils (say the $k + \lambda$th one) is abolished, equation $\mathbf{u}_{term} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}_{coil} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{i}_{term}$ will continue to hold good provided the matrix derived from matrix [14] by either writing zeros in lieu of the $k + \lambda$th row, or by simply omitting these rows, is substituted for $\mathbf{T}$; naturally, the relation $\mathbf{Z}_{term}^{-1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}_{coil}^{-1} \cdot \mathbf{T}^*$ will no longer hold good. By doing so, it becomes also obvious that the „transformation matrix" (8) is nothing but the "transformation matrix" (14) with rows $k + 1$, $k + 2$, ..., $i + \nu$ left out.

c) *Paralleling of coils.* (This may occur e. g. when the transformer is connected with a regulating transformer.) Let us assume that the kth, $k+1$st, ..., $k+\nu$th cycles of an "m"-phase transformer of "n" coils are paralleled in such manner that phase "a" of the k-th cycle is connected to phase "b" of the $k+1$st cycle, to phase "c" of the $k+2$nd cycle, etc., repeating the procedure, starting out from phases "b", "c", ..., "m" of the k-th cycle, in cyclic arrangement. In that case, equations resembling the ones of (6) and (7) under a) can be written for the correlation of coil currents and terminal currents of the paralleled cycles and of the corresponding coil voltages and terminal voltages respectively, with the difference that when paralleled, the relations between the current intensities will take on the shape of the relations as found between voltages connected in series and conversely :

$$\mathbf{i}_K = \mathbf{i}_k + \Omega_m \mathbf{i}_{k+1} + \Omega_m^2 \mathbf{i}_{k+2} + \ldots + \Omega_m^\nu \mathbf{i}_{k+\nu} \tag{19}$$

and

$$\mathbf{u}_K = \mathbf{u}_k = \Omega_m \mathbf{u}_{k+1} = \Omega_m^2 \mathbf{u}_{k+2} = \ldots = \Omega_m^\nu \mathbf{u}_{k+\nu} \tag{20}$$

Hence, making use of matrix $\mathbf{T}$ introduced under [8], the correlation of terminal currents and coil currents can now be written in the form

$$\mathbf{i}_{term} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{i}_{coil} \tag{21}$$

while the correlation of terminal voltages and coil voltages will take on the form

$$\mathbf{u}_{coil} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{u}_{term} \tag{22}$$

and thus the correlation of terminal voltages and terminal currents will be:

$$\mathbf{i}_{term} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z}_{coil}^{-1} \cdot \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{u}_{term} . \tag{23}$$

d) *Transformer made up of coils connected in series and in parallel.* In case some cycles on an "m"-phase transformer consisting of "n" coils are connected in series and simultaneously others of its cycles are paralleled, in accordance with points a), b) and c) above, the correlation of terminal currents and terminal voltages may be obtained from the correlation of coil currents and coil voltages as follows :

Let us assume that the k-th, $k+1$st, ... $k+\nu$-th cycles of the transformer are connected in series, specifically in such manner that the consecutively connected phases in the series-connected cycles alternate in cyclic order, and all series-connected coils are led out to the transformer terminals, further, simultaneously, the phases of the $k+\varrho$-th, $k+\varrho+1$st, ... $k+\varrho+\psi$-th cycles are paralleled alternating in cyclic order.

In that event, the following relationships exist — in line with paragraph a) and b) above — between the series-connected k-th, $k+1$st, ..., $k+\nu$-th cycles :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_K \\ \mathbf{u}_{K+I} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{K+(\nu)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & \boldsymbol{\Omega}_m & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{\nu-1} \\ 0 & \mathbf{E}_m & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{\nu-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{k+\nu} \end{bmatrix} \tag{24}$$

and

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_k \\ \mathbf{i}_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{k+\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 \\ \boldsymbol{\Omega}_m^{-1} & \mathbf{E}_m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \boldsymbol{\Omega}_m^{-(\nu-1)} & \boldsymbol{\Omega}_m^{-(\nu-2)} & \dots & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_K \\ \mathbf{i}_{K+I} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{K+(\nu)} \end{bmatrix} \tag{25}$$

respectively.

Besides, the following relations hold good — in line with paragraph c) above — between the paralleled $k+\varrho$-th, $k+\varrho+1$st, ..., $k+\varrho+\psi$-th cycles :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_K \\ \mathbf{i}_{K+(\varrho)+I} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{K+(\varrho)+(\Psi)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & \boldsymbol{\Omega}_m & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{\Psi-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{k+\varrho} \\ \mathbf{i}_{k+\varrho+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{k+\varrho+\Psi} \end{bmatrix} \tag{26}$$

and

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+\varrho} \\ \mathbf{u}_{k+\varrho+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{k+\varrho+\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 \\ \boldsymbol{\Omega}_m^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \boldsymbol{\Omega}_m^{-(\Psi-1)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{K+(\varrho)} \\ \mathbf{u}_{K+(\varrho)+I} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{K+(\varrho)+(\Psi)} \end{bmatrix} \tag{27}$$

respectively.

Introducing the short notations

$$\mathbf{T}_{series} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & \boldsymbol{\Omega}_m & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{\nu-1} \\ 0 & \mathbf{E}_m & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{\nu-2} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{T}_{par} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & \boldsymbol{\Omega}_m & \dots & \boldsymbol{\Omega}_m^{\Psi-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (28); \ (29)$$

and denoting the coil- and terminal voltages and coil- and terminal currents by

$$\mathbf{u}_{ser\ coil} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{u}_{k+\nu} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{ser\ term} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_K \\ \mathbf{u}_{K+I} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{u}_{K+(\nu)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_{ser\ coil} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_k \\ \mathbf{i}_{k+1} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{i}_{k+\nu} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{i}_{ser\ term} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_K \\ \mathbf{i}_{K+I} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{i}_{K+(\nu)} \end{bmatrix}$$

column matrix symbols, and further the coil- and terminal voltages of paralleled coils by

$$\mathbf{u}_{par\ coil} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+\varrho} \\ \mathbf{u}_{k+\varrho+1} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{u}_{k+\varrho+\Psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{par\ term} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{K+(\varrho)} \\ \mathbf{u}_{K+(\varrho)+I} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{u}_{K+(\varrho)+(\Psi)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_{par\ coil} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{k+\varrho} \\ \mathbf{i}_{k+\varrho+1} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{i}_{k+\varrho+\Psi} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{i}_{par\ term} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{K+(\varrho)} \\ \mathbf{i}_{K+(\varrho)+I} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{i}_{K+(\varrho)+(\Psi)} \end{bmatrix}$$

column matrix symbols, the above relations may be written in the condensed form :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{ser\ term} &= \mathbf{T}_{ser} \cdot \mathbf{u}_{ser\ coil} \\ \mathbf{i}_{ser\ coil} &= \mathbf{T}^{*}_{ser} \cdot \mathbf{i}_{ser\ term} \\ \mathbf{i}_{par\ term} &= \mathbf{T}_{par} \cdot \mathbf{i}_{par\ coil} \\ \mathbf{u}_{par\ coil} &= \mathbf{T}^{*}_{par} \cdot \mathbf{u}_{par\ term} . \end{aligned} \tag{30}$$

Expressing the relationship between $\mathbf{i}_{par\ coil}$ and $\mathbf{u}_{par\ coil}$ from relation

$$\mathbf{i}_{coil} = \mathbf{Z}^{-1}_{coil} \cdot \mathbf{u}_{coil}$$

it can be written in the form of the following matrix equation :

$$\mathbf{i}_{par\ coil} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k+\varrho,1} & \mathbf{Y}_{k+\varrho,2} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\varrho,n} \\ \mathbf{Y}_{k+\varrho+1,1} & \mathbf{Y}_{k+\varrho 1,2} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\varrho+1,n} \\ . & . & \dots & . \\ \mathbf{Y}_{k+\varrho+\Psi,1} & \mathbf{Y}_{k+\varrho+\Psi,2} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\varrho+\Psi,n} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_{coil} \tag{31}$$

where $\mathbf{Y}_{i,j}$ stands for the submatrix of the m-th order in the i-th row and j-th column of hypermatrix $\mathbf{Z}^{-1}_{coil}$. Introducing the symbol

$$\mathbf{Y}_{par} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k+\varrho,1} & \mathbf{Y}_{k+\varrho,2} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\varrho,n} \\ \mathbf{Y}_{k+\varrho+1,1} & \mathbf{Y}_{k+\varrho+1,2} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\varrho+1,n} \\ . & . & \dots & . \\ \mathbf{Y}_{k+\varrho+\Psi,1} & \mathbf{Y}_{k+\varrho+\Psi,2} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\varrho+\Psi,n} \end{bmatrix} \tag{32}$$

we can write equation [31] also in the following short form :

$$\mathbf{i}_{par\ coil} = \mathbf{Y}_{par} \cdot \mathbf{u}_{coil} \tag{33}$$

With the aid of equation [32], the correlation of coil currents and coil voltages may be transcribed into a form permitting the construction of the matrix relation of terminal currents and terminal voltages — as will be seen later. It is namely evident that

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{k+\varrho-1} \\ \mathbf{i}_{par\ coil} \\ u_{k+\varrho+\Psi+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{E}_m & \dots & 0 & & & \\ \cdot & \dots & \cdot & & 0 & \\ 0 & \dots & \mathbf{E}_m & & & \\ \hline & \mathbf{Y}_{par} & & & & \\ \hline & & & \mathbf{E}_m & \dots & 0 \\ & 0 & & \cdot & \dots & \cdot \\ & & & 0 & \dots & \mathbf{E}_m \end{array}\right] \cdot u_{coil} \tag{34}$$

Denoting the square matrix on the right side of equation [34], as the multiplier of u_{coil}, by $\mathbf{T}_y$, the equation can be written :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{k+\varrho-1} \\ \mathbf{i}_{par\ coil} \\ u_{k+\varrho+\Psi+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_y \cdot \mathbf{u}_{coil} \tag{35}$$

It is also clear that

$$\mathbf{u}_{par\ coil} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{k+\varrho,1} & \mathbf{Z}_{k+\varrho,2} & \dots & \mathbf{Z}_{k+\varrho,n} \\ \mathbf{Z}_{k+\varrho+1,1} & \mathbf{Z}_{k+\varrho+1,2} & \dots & \mathbf{Z}_{k+\varrho+1,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \mathbf{Z}_{k+\varrho+\Psi,1} & \mathbf{Z}_{k+\varrho+\Psi,2} & \dots & \mathbf{Z}_{k+\varrho+\Psi,n} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}_{coil} = \mathbf{Z}_{par} \cdot \mathbf{i}_{coil} . \tag{36}$$

where $\mathbf{Z}_{i,j}$ means the submatrix of the m-th order in i-th row and j-th column of hypermatrix $\mathbf{Z}_{coil}$; hence

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{k+\varrho-1} \\ \mathbf{u}_{par\ coil} \\ \mathbf{i}_{k+\varrho+\Psi+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{E}_m & \dots & 0 & \\ \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & \mathbf{E}_m & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\mathbf{Z}_{par}} & \\ \hline & & & \mathbf{E}_m \dots 0 \\ \multicolumn{3}{c|}{0} & \cdot \cdots \cdot \\ & & & 0 \dots \mathbf{E}_m \end{array}\right] \cdot \mathbf{i}_{coil} = \mathbf{T}_z \mathbf{i}_{coil} \tag{37}$$

Therefore

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{k+\varrho-1} \\ \mathbf{i}_{par\ coil} \\ \mathbf{u}_{k+\varrho+\Psi+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}_y \cdot \mathbf{Z}_{coil} \cdot i_{coil} = \mathbf{T}_y \cdot \mathbf{Z}_{coil} \cdot \mathbf{T}_z^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{k+\varrho-1} \\ \mathbf{u}_{par\ coil} \\ \mathbf{i}_{k+\varrho+\Psi+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_n \end{bmatrix} \tag{38}$$

Finally, taking into account the notations introduced above [see (28) and (29)],

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{K-I} \\ \mathbf{u}_{ser\ term} \\ \mathbf{u}_{K+(\nu)+I} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{K+\varrho-I} \\ \mathbf{i}_{par\ term} \\ \mathbf{u}_{K+(\varrho)+(\psi)+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix} =
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\mathbf{E}_m & \dots & 0 & & & & & & \\
\dots & \dots & \dots & & & 0 & & & \\
0 & \dots & \mathbf{E}_m & & & & & & \\
\hline
0 & & & \mathbf{T}_{ser} & & 0 & & & \\
\hline
 & & & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & & & \\
 & 0 & & \dots & \dots & \dots & & 0 & \\
 & & & 0 & \dots & \mathbf{E}_m & & & \\
\hline
0 & & & & & & \mathbf{T}_{par} & & 0 \\
\hline
 & & & & & & \mathbf{E}_m & \dots & 0 \\
 & 0 & & & & & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & 0 & \dots & \mathbf{E}_m
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{k-1} \\ \mathbf{u}_{ser\ coil} \\ \mathbf{u}_{k+\nu-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_{k+\varrho-1} \\ \mathbf{i}_{par\ coil} \\ \mathbf{u}_{k+\varrho+\psi+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \tag{39}
$$

and further

$$
\begin{bmatrix}
\mathbf{i}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{k-1} \\ \mathbf{i}_{ser\ coil} \\ \mathbf{i}_{k+\nu+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{k+\varrho-1} \\ \mathbf{u}_{par\ coil} \\ \mathbf{i}_{k+\varrho+\psi+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_n
\end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
\mathbf{E}_m & \dots & 0 & & & & \\
\dots\dots\dots & & & & & 0 & \\
0 & \dots & \mathbf{E}_m & & & & \\
\hline
0 & & & \mathbf{T}^*_{ser} & & 0 & \\
\hline
 & & & & \mathbf{E}_m & \dots & 0 \\
 & 0 & & & \dots\dots\dots & & \\
 & & & & 0 & \dots & \mathbf{E}_m \\
\hline
0 & & & & & \mathbf{T}^*_{par} & 0 \\
\hline
 & & & & & & \mathbf{E}_m \dots 0 \\
 & 0 & & & & & \dots\dots\dots \\
 & & & & & & 0 \dots \mathbf{E}_m
\end{array}\right]
\begin{bmatrix}
\mathbf{i}_I \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{K-I} \\ \mathbf{i}_{ser\ term} \\ \mathbf{i}_{K+(\nu)+I} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_{K+(\varrho)-I} \\ \mathbf{u}_{par\ term} \\ \mathbf{i}_{K+(\varrho)+(\psi)+I} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_N
\end{bmatrix}
\tag{40}
$$

are obtained.

In order to describe the relations between terminal voltages and terminal currents, let us introduce the notation

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{T}_y \cdot \mathbf{Z}_{coil} \cdot \mathbf{T}_z^{-1} \cdot \mathbf{T}_v^* \tag{41}$$

where $\mathbf{T}_v$ is the square hypermatrix figuring above, containing submatrix row $n-\varrho$ and column n, viz :

$$\mathbf{T}_v = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{matrix}\mathbf{E}_m & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \mathbf{E}_m\end{matrix} & \multicolumn{4}{c}{0} \\ \hline 0 & \mathbf{T}_{ser} & \multicolumn{3}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \begin{matrix}\mathbf{E}_m & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \mathbf{E}_m\end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{0} & \mathbf{T}_{par} & 0 \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{0} & \begin{matrix}\mathbf{E}_m & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \mathbf{E}_m\end{matrix} \end{array}\right| \tag{42}$$

Let us further denote the submatrices of hypermatrix $\boldsymbol{\Theta}$ (consisting of $(n-\psi)\times$ $\times(n-\psi)$ square submatrices of the m-th order) by $\boldsymbol{\Theta}_{i,j}$ and the submatrices (likewise of the m-th order) of hypermatrix $\boldsymbol{\Theta}^{-1} = \boldsymbol{\Phi}$ by $\boldsymbol{\Phi}_{i,j}$. Thereafter we can write :

$$\mathbf{u}_{term} = \mathbf{T}_\Theta \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{T}_\Phi^{-1} \cdot \mathbf{i}_{term} . \tag{43}$$

Here, $\mathbf{T}_\Theta$ and $\mathbf{T}_\Phi$ are the following matrices :

$$\mathbf{T}_\Theta = \left|\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\mathbf{E}_m & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \mathbf{E}_m\end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \boldsymbol{\Theta}_{l,1} \quad \dots \quad \boldsymbol{\Theta}_{l,l-1} & \boldsymbol{\Theta}_{l,l} & \boldsymbol{\Theta}_{l,l+1} \quad \dots \quad \boldsymbol{\Theta}_{l,n-\psi} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \begin{matrix}\mathbf{E}_m & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \mathbf{E}_m\end{matrix} \end{array}\right| \tag{44}$$

$l = k + \varrho$ and

$$\mathbf{T}_{\Phi} = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} \mathbf{E}_m & \ldots & 0 & & & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 & & & \\ 0 & \ldots & \mathbf{E}_m & & & & \\ \hline \boldsymbol{\Phi}_{l,1} & \ldots & \boldsymbol{\Phi}_{l,l-1} & \boldsymbol{\Phi}_{l,l} & \boldsymbol{\Phi}_{l,l+1} & \ldots & \boldsymbol{\Phi}_{l,n-\nu} \\ \hline & & & & \mathbf{E}_m & \ldots & 0 \\ & 0 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & & & & 0 & \ldots & \mathbf{E}_m \end{array}\right] \tag{45}$$

(As will be seen in the l-th row of matrix $\mathbf{T}_{\Theta}$ are the submatrices of the l-th row of matrix $\boldsymbol{\Theta}$, and in the l-th row of matrix $\mathbf{T}_{\Phi}$ the submatrices of the l-th row of matrix $\boldsymbol{\Theta}^{-1} = \boldsymbol{\Phi}$ should be written.)

B) *Connecting coils or coil groups for being lead out to terminals*

a) *Star connection of coils or coil groups consisting of series- parallel- or heterogeneously connected coils.* α) Where one of the ends of cycles (or group cycles) is connected to a solidly grounded neutral, and the other ends are led to the terminals of the transformer, the coil currents will equal the terminal currents and coil voltages will equal terminal voltages, viz :

$$\mathbf{i}_{term} = \mathbf{i}_{coil} \tag{46}$$

and

$$\mathbf{u}_{term} = \mathbf{u}_{coil} . \tag{47}$$

In that case, the relation of terminal voltages and terminal currents can be written in the form

$$\mathbf{u}_{term} = Z_{coil} \cdot \mathbf{i}_{term} . \tag{48}$$

β) Where the k-th cycle (or k-th group cycle) is star-connected and the neutral is grounded through a coil of $\mathbf{Z}_{st,k}$ impedance, which is inductively

uncoupled from all coils, generally the terminal voltages of the k-th cycle (or k-th group cycle) do not equal the coil voltages ; namely, in the passage of current through impedance $\mathbf{Z}_{st,k}$ a voltage drop will set in between the two ends of the coil. This drop should be added to the individual coil voltages in order to obtain the terminal voltages of the individual cycles (cycle groups).

Introducing the notation

$$\mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

(the number of elements of column matrix **e** being equal to the phase number, i. e. m), in accordance with the above we may write :

$$\mathbf{u}_K = \mathbf{u}_k + \mathbf{e}_m u_{st,k} = [\mathbf{E}_m \,,\ \mathbf{e}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ u_{st,k} \end{bmatrix}. \tag{49}$$

As, furthermore :

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{i}_K$$

and evidently, the current flowing through the grounding coil :

$$i_{st,k} = i_{k,1} + i_{k,2} + \ldots + i_{k,m} = \mathbf{e}_m^* \cdot \mathbf{i}_K \,.$$

The two equations above may be condensed in the following equation:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_k \\ i_{st,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m \\ \mathbf{e}_m^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}_K \tag{50}$$

In order to have the submatrices of the hypermatrices in the equations consist of column matrices containing an equal number of elements, let us introduce the notations :

$$\mathbf{u}_{st,k} = \mathbf{e}_m \cdot u_{st,k}$$

and

$$\mathbf{i}_{st,k} = \frac{1}{m} \mathbf{e}_m \cdot i_{st,k} \,.$$

Thereafter, multiplying both sides of equation $i_{st,k} = \mathbf{e}_m^* \cdot \mathbf{i}_K$ by $\mathbf{e}_m$, we obtain :

$$\mathbf{e}_m \cdot i_{st,k} = \frac{1}{m} \cdot \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m^* \cdot \mathbf{i}_K$$

or, introducing notation

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m^* = \mathbf{P}_0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_K \\ \mathbf{i}_{st,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m \\ \underbrace{\mathbf{P}_0}_{m} \end{bmatrix} \mathbf{i}_K \tag{51}$$

and further

$$\mathbf{u}_K = [\mathbf{E}_m , \underbrace{\mathbf{P}_0}_{m}] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{st,k} \end{bmatrix} \tag{52}$$

Further, introducing the notation $\mathbf{Z}_{st,k} = Z_{st,k} \cdot \mathbf{E}_m$, we can write the following matrix relation between voltages and currents in the transformer coils :

$$\mathbf{u}_{coil,f}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{st,k} \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \dots & \mathbf{Z}_{1k} & 0 & \mathbf{Z}_{1,k+1} & \dots & \mathbf{Z}_{1n} \\ & & & \cdot & & & \\ \dots\dots\dots\dots & & & \cdot & \dots\dots\dots\dots & & \\ & & & \cdot & & & \\ \mathbf{Z}_{k1} & \dots & \mathbf{Z}_{kk} & 0 & \mathbf{Z}_{k,k+1} & \dots & \mathbf{Z}_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{Z}_{st,k} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{Z}_{k+1,1} & \dots & \mathbf{Z}_{k+1,k} & 0 & \mathbf{Z}_{k+1,k+1} & \dots & \mathbf{Z}_{k+1,n} \\ & & & \cdot & & & \\ \dots\dots\dots\dots & & & \cdot & \dots\dots\dots\dots & & \\ & & & \cdot & & & \\ \mathbf{Z}_{n1} & \dots & \mathbf{Z}_{nk} & 0 & \mathbf{Z}_{n,k+1} & \dots & \mathbf{Z}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_k \\ \mathbf{i}_{st,k} \\ \mathbf{i}_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{i}_n \end{bmatrix} = \tag{53}$$

$$= \mathbf{Z}_{coil,f}^{(k)} \cdot \mathbf{i}_{coil,f}^{(k)} .$$

If notation

$$\mathbf{T}_f^{(k)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{E}_m \ \ldots \ 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \ \ldots \ \mathbf{E}_m & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\mathbf{P}_0}{m} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{E}_m \ \ldots \ 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \ \ldots \ \mathbf{E}_m \end{matrix} \\ \hline \end{array} \qquad (54)$$

kth column

is introduced, obviously

$$\mathbf{u}_{term} = \mathbf{T}_f^{(k)} \cdot \mathbf{Z}_{coil,f}^{(k)} \cdot \mathbf{T}_f^{(k)} \cdot i_{term} . \qquad (55)$$

b) *Polygon connection of coils or coil groups* consisting of series-, parallel- or heterogenously connected coils. Let the ends of the phases of the k-th cycle (k-th cycle group) be connected with the next ends of the adjacent phase (or phase groups) following in the a, b, c, ..., m cycle order. The ends of the individual phases (phase groups) should be led out to the different transformer terminals. In that case

$$\mathbf{i}_{K,a} = \mathbf{i}_{k,a} - \mathbf{i}_{k,b}$$

$$\mathbf{i}_{K,b} = \mathbf{i}_{k,b} - \mathbf{i}_{k,c}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{i}_{K,m} = \mathbf{i}_{k,m} - \mathbf{i}_{k,m-1}$$

or, introducing square cyclic matrix of the m-th order:

$$\mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -1 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E} - \boldsymbol{\Omega}$$

$$\mathbf{i}_K = \mathbf{C}_m \cdot \mathbf{i}_k .$$

Moreover, evidently

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k,a} &= \mathbf{u}_{K,a} - \mathbf{u}_{K,m} \\ \mathbf{u}_{k,b} &= \mathbf{u}_{K,b} - \mathbf{u}_{K,a} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{u}_{k,m} &= \mathbf{u}_{K,m} - \mathbf{u}_{K,m-1} \end{aligned} \tag{56}$$

that is

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{C}_m^* \cdot \mathbf{u}_K \,. \tag{57}$$

From the above, obviously, if the phases of the k-th cycle (or k-th group cycle) are polygon-connected in the above specified manner, while the phases of all other cycles (group cycles) are star-connected (in case the neutrals are solidly grounded), the following relations can be written between coil voltages and terminal voltages :

Introducing matrix

$$\mathbf{T}_{pol}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_m & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_m & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{C}_m & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \tag{58}$$

which is clearly a hypermatrix of $m \times n$-th order; we shall find that non-zero submatrices are only found on its main diagonal, specifically in the k-th row and column submatrix $\mathbf{C}_m$, and all other submatrices : $\mathbf{E}_m$. With the aid of matrix $\mathbf{T}_{pol}^{(k)}$, the relations between terminal currents and coil currents, and coil voltages and terminal voltages respectively, can be written :

$$\mathbf{i}_{term} = \mathbf{T}_{pol}^{(k)} \cdot \mathbf{i}_{coil} \tag{59}$$

and

$$\mathbf{u}_{coil} = \mathbf{T}_{pol}^{(k)*} \cdot \mathbf{u}_{term} \,. \tag{60}$$

If the phases of all coil cycles (or the phase groups of all coil cycle groups) are connected in the above described manner, i. e. polygon-connected with each other and with the transformer terminal, we can write :

$$\mathbf{i}_{term} = \mathbf{T}_{pol} \cdot \mathbf{i}_{coil} \,. \tag{61}$$

and

$$\mathbf{u}_{coil} = \mathbf{T}_{pol}^{*} \cdot \mathbf{u}_{term} \,, \tag{62}$$

where $\mathbf{T}_{pol}$ is the following square matrix of $m \times n$-th order :

$$\mathbf{T}_{pol} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_m & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{C}_m \end{bmatrix}$$

As matrix $\mathbf{C}_m$ is a singular matrix, that is $|\mathbf{C}_m| = 0$, (that means $\mathbf{T}_{pol}^{(k)}$ as well as $\mathbf{T}_{pol}$ are likewise singular matrices, and thus $|\mathbf{T}_{pol}^{(k)}| = 0$ and $|\mathbf{T}_{pol}| = 0$), in order to be able to go on, the relation obtained for coil currents and coil voltages must be written in the form

$$\mathbf{i}_{coil} = \mathbf{Z}_{coil}^{-1} \cdot \mathbf{u}_{coil} . \tag{64}$$

Namely in that case, using the above expressions, the following results will be obtained :

In case of :

Polygon connection of the k-th cycle (and star connection of the rest of the cycles) :

$$\mathbf{i}_{term} = \mathbf{T}_{pol}^{(k)} \cdot \mathbf{Z}_{coil}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{pol}^{(k)*} \cdot \mathbf{u}_{term} . \tag{65}$$

and in case of

Polygon connection of all cycles :

$$\mathbf{i}_{term} = \mathbf{T}_{pol} \cdot \mathbf{Z}_{coil}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{pol}^{*} \cdot \mathbf{u}_{term} . \tag{66}$$

REFERENCES

1. Frazer, R. A.: Duncan, W. J., Collar, A. R.: Elementary Matrices. University Press, Cambridge, 1938.
2. Aitken, A. C. : Determinants and matrices. Edinburgh and London, Oliver and Boyd, 1948.
3. Egerváry, E. : „On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice dynamics." Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, Tomus XV., Fasc. 3—4, 1954. pp. 211—222.
4. Lovass-Nagy, V. and Győry, T.: Mathematical Analysis of Coupled Oscillatory Circuits with the Aid of the Matrix Calculus. Publications of the Hungarian Academy of Sciences (in Hungarian). Budapest, 1954. Vol. III. Fasc. 1—2, pp. 65—81.
5. Lovass-Nagy: On an applicatinn of Egerváry's hypermatrix-algorism to the mathematical investigation of polyphase transformers. Acta Technica, Tomus XV. (1956). 261/286.

SUMMARY

Steady-state processes in multi-phase transformers, containing several coil-cycles per phase,are investigated at different modes of connection of the coil-cycles. The investigation of this problem by the matrix method leads to a linear matrix equation the solution of which is equivalent to the inversion of the coefficient-matrix. In the cases examined the coefficient-matrix is a hyper-matrix containing only cyclic blocks. A method is presented with the aid of which an arbitrary function of any hyper-matrix consisting of cyclic blocks can be expressed in a simple way as direct products of matrices formed from the own values of the blocks and of the diads formed from the cyclic own vectors pertaining to the corresponding own values. The pesented method is a simple and for numerical calculation suitable solution of the examined electric problem.

DIE AUFSTELLUNG VON TRANSFORMATORENGRUNDGLEICHUNGEN MIT HILFE DER MATRIZENRECHNUNG

V. LOVASS-NAGY
und
Ch. SZENDY,
Doktor der techn. Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Es werden die stationären Vorgänge von Mehrphasen-Transformatoren, bestehend aus mehreren Wicklungszyklen je Phase, für verschiedene Schaltungen der Wicklungszyklen untersucht. Die Behandlung dieses Problems mit der Matrizenrechnung führt zu einer linearen Matrizengleichung, deren Lösung der Inversion der Koeffizientenmatrix gleichwertig ist. In den untersuchten Fällen ist die Koeffizientenmatrix eine Hypermatrix, die aus lauter zyklischen Blöcken besteht. Es wird eine Methode angegeben, mit der sich eine beliebige Funktion der aus zyklischen Blöcken bestehenden Hypermatrix auf einfache Weise als direkte Produkte der aus den Eigenwerten der Blöcke gebildeten Matrizen und der aus den zu den betreffenden Eigenwerten gehörenden zyklischen Eigenvektoren gebildeten Diaden darstellen lässt. Nach diesem Verfahren wird das behandelte elektrotechnische Problem auf eine einfache und für zahlenmässige Berechnungen geeignete Weise gelöst.

ÉQUATIONS DE TRANSFORMATEURS ÉTABLIES PAR LA MÉTHODE DES MATRICES

V. LOVASS-NAGY
et
Ch. SZENDY
Docteur des sc. techn.

RÉSUMÉ

Les phénomènes stationnaires de transformateurs polyphasés, à plusieurs cycles de roulements par phase, son étudiés pour des différentes connections des cycles de roulements. L'étude de ce problème par la méthode des matrices conduit à une équation de matrices linéaire dont la solution est équivalente à l'inversion de la coefficient-matrice. Dans les cas étudiés la coefficient-matrice est une hypermatrice composée purement de blocs cycliques. Une méthode est présentée à l'aide de laquelle une fonction arbitraire d'une hypermatrice quelconque composée de blocs cycliques peut être exprimée simplement par les produits directs des matrices formées des valeurs propres des blocs, et des diades composées des vecteurs cycliques propres appartenant aux valeurs propres correspondantes. La méthode permet de trouver la solution du problème étudié d'une manière simple et appropriée au calcul numérique.

ВЫВЕДЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРАНСФОРМАТОРОВ ПРИ ПОМОЩИ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В. ЛОВАШШ-НАДЬ и д-р техн. наук К. СЕНДИ

РЕЗЮМЕ

Авторы исследовали стационарные процессы многофазных электрических трансформаторов, состоящих из ряда секций обмоток для каждой фазы, в случае различных схем соединения секций обмоток. Исследование этой проблемы с использованием матричного исчисления приводит к линейному матричному уравнению, решение которого является эквивалентным инверсии матричного коэффициента. В исследованных случаях матричный коэффициент представляет собой гиперматрицу, состоящую только из цикличных блоков. Авторы приводят метод, при помощи которого любая функция гиперматрицы, состоящей из цикличных блоков, может быть выражена просто прямым произведением матриц, образованных из собственных значений блоков, и диадов, полученных из цикличных собственных векторов, относящихся к соответствующим собственным значениям, и при помощи этого метода создается простой способ, пригодный для числового решения исследованной электротехнической проблемы.

AZIMUTREDUKTION ZWISCHEN ZWEI ERDELLIPSOIDEN

Prof. I. HAZAY

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR ANGEWANDTE GEODÄSIE, TECHNISCHE UNIVERSITÄT, SOPRON

[Eingegangen am 19. Dezember 1955]

In zwei früheren Abhandlungen [1, 2] wurden eingehend die einzelnen Varianten der Projektion zwischen zwei verschiedenen Erdellipsoiden und ihre Gesetzmässigkeiten erörtert. Für die geodätische Darstellung kommen unter den Projektionen mit verschiedener Verzerrung allein die winkeltreuen (konformen) Projektionen in Betracht, und auch diese nur dann, wenn — bei Voraussetzung, dass das die Originalfläche bildende erste und das als Bildfläche dienende zweite Ellipsoid konzentrisch angeordnet sind (dass ihr Mittelpunkte und die Richtung ihrer Achsen zusammenfallen) — den Meridianen und Parallelkreisen des ersten Ellipsoids auch auf dem zweiten Ellipsoid Meridiane und Parallelkreise entsprechen. Es ist offensichtlich, dass diese zwei letzten Forderungen, wenn die Lage der beiden Ellipsoide zueinander nicht konzentrisch, sondern verschoben und verdreht ist, nicht erfüllt werden können und dass dann dem Gradnetz des als Bildfläche dienenden zweiten Ellipsoids auf der Originalfläche (dem ersten Ellipsoid) die in der Abhandlung [1] definierten und Hilfslängenlinien bzw. Hilfsbreitenlinien genannten Oberflächenkurven entsprechen werden.

Die Ausführungen der vorliegenden Abhandlung beziehen sich nur auf die Projektion zwischen konzentrischen Ellipsoiden für geodätische Zwecke, so dass als Grundbedingung die Winkeltreue verlangt sei, ferner der Umstand, dass den Linien des Gradsystems des einen Ellipsoids, also den Meridianen und Parallelkreisen, auch auf dem zweiten Ellipsoid die Linien des Gradnetzes, also die Meridiane und Parallelkreise entsprechen.

In der Abhandlung [1] wurde bereits erwähnt, dass sich im Schrifttum (z. B. in der Arbeit [3]) Hinweise darauf finden, wonach die Projektion — wenn auch die Abbildung der Meridiane ein Meridian und die Projektion winkeltreu ist — gleichzeitig auch azimuttreu ist. Es wurde ferner ebendort schon darauf hingewiesen, dass diese Behauptung nur annähernd zutrifft, weil sich die Winkeltreue lediglich auf punktweise projizierte wirkliche Abbildungen bezieht. Auf dem zweiten Ellipsoid wird aber nicht mit diesen, sondern mit geodätischen Linien gerechnet, die die Abbildung der Endpunkte auf dem zweiten Ellipsoid verbinden. Obgleich die Abweichung zwischen der punktweise projizierten wirklichen Abbildung der geodätischen Linien des ersten Ellipsoids und den

geodätischen Linien des zweiten Ellipsoids bloss gering ist, tritt an den Endpunkten dennoch die Azimutabweichung auf, die bei Projektionen üblicherweise als Azimutreduktion bezeichnet wird. In Wirklichkeit ist also eine azimuttreue Projektion nicht möglich, wenngleich man gegebenenfalls bei nicht zu grossen Entfernungen von den Azimutreduktionen wegen deren geringfügiger Grösse praktisch absehen kann. Aber auch in diesem Falle ist eine Azimutreduktion im Prinzip stets vorhanden, ausser wenn die beiden Endpunkte der geodätischen Linie auf demselben Meridian oder auf dem Äquator liegen.

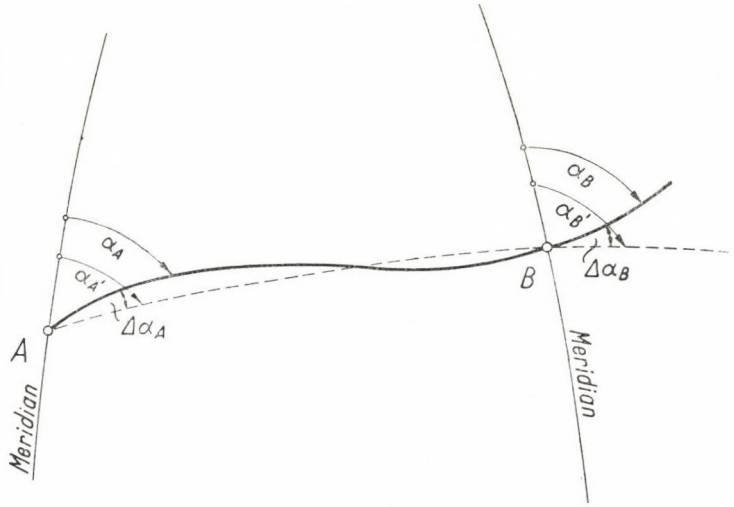


Abb. 1

Die Bestimmung der Azimutreduktion bzw. die Herleitung ihrer Formel wurde in den Abhandlungen [1] und [2] nicht behandelt, da die dort erörterten Untersuchungen ohnehin weitschweifig und langwierig waren. Die Frage der Bestimmung der Azimutreduktion soll also hier gesondert behandelt werden, wobei natürlich auf die in den obigen Abhandlungen ausführlich geschilderten übrigen Gesetze der Projektion Bezug genommen wird.

Es sei nochmals die Definition des Begriffes der Azimutreduktion gegeben: Azimutreduktion nennt man die von dem geodätischen Linienstück der Abbildungsfläche und von der punktweise projizierten wirklichen Abbildung des geodätischen Linienstücks der Originalfläche an den Endpunkten des Linienstücks eingeschlossenen Winkel. In Abb. 1 ist die Abbildung der beiden Endpunkte *(A* und *B)* auf dem zweiten Ellipsoid (auf der Bildfläche) dargestellt, ferner die durch diese hindurchgehenden Meridiane, das zum zweiten Ellipsoid gehörige geodätische Linienstück (die zwischen den Punkten *A* und *B* voll ausgezogene Linie) und die punktweise projizierte wirkliche Abbildung des zum ersten Ellipsoid gehörigen geodätischen Linienstücks (die gestrichelte Linie

zwischen den Punkten A und B). Die Winkel α_A bzw. α_B sind die Azimute der geodätischen Linie des zweiten Ellipsoids, die Winkel α'_A bzw. α'_B die zur Abbildung der geodätischen Linie des ersten Ellipsoids gehörigen Azimute bei den Punkten A und B, während $\Delta\alpha_A$ die am Punkte A und $\Delta\alpha_B$ die am Punkte B erscheinende Azimutreduktion ist. Die Azimutreduktion sei als positiv betrachtet, wenn sie bei Addition zum Azimut der punktweise projizierten Abbildung das Azimut der geodätischen Linie des zweiten Ellipsoids ergibt. In der in Abb. 1 gezeigten Lage ist die Azimutreduktion sowohl beim Punkte A als auch beim Punkte B negativ.

Im weiteren sollen, wo sich dies als notwendig erweist, neben den Indizes A und B auch noch die Indizes 1 und 2 verwendet werden, um auszudrücken, ob sich die betreffende Angabe auf das erste oder das zweite Ellipsoid bezieht.

An beiden Ellipsoiden ist die Differenz zwischen den Azimuten der beiden Endpunkte gleich der zwischen den beiden Punkten bestehenden wirklichen Meridiankonvergenz. Wird die Meridiankonvergenz mit γ bezeichnet, so gelangt dieser Umstand durch die zwei Gleichungen

$$\alpha_{B1} - \alpha_{A1} = \gamma_1 \tag{1}$$

und

$$\alpha_{B2} - \alpha_{A2} = \gamma_2 \tag{2}$$

zum Ausdruck. Zieht man die Gl. (1) von der Gl. (2) ab, so erhält man :

$$(\alpha_{B2} - \alpha_{B1}) - (\alpha_{A2} - \alpha_{A1}) = \gamma_2 - \gamma_1 \,. \tag{3}$$

Die in den Klammern stehenden Werte sind die zu bestimmenden Werte der Azimutreduktion, da die Azimute α'_A und α'_B der auf das zweite Ellipsoid punktweise projizierten Abbildung — angesichts der Tatsache, dass die Projektion winkeltreu und auch die Abbildung des Meridians ein Meridian ist — genau gleich den entsprechenden Azimuten der geodätischen Linie des ersten Ellipsoids sind, d. h. den Werten α_{A1} bzw. α_{B1}. Bezeichnet man die Differenz der zu den beiden Ellipsoiden gehörigen Meridiankonvergenzen wie folgt mit G

$$\gamma_2 - \gamma_1 = G \tag{4}$$

so lässt sich die Gl. (3) in der Form

$$\Delta\alpha_B - \Delta\alpha_A = G \tag{5}$$

schreiben.

Für die Beziehung zwischen den beiden Azimutreduktionen wurde also bereits eine Gleichung aufgestellt. Die noch notwendige zweite Gleichung kann

aus der bekannten Grundgleichung der geodätischen Linien, aus dem CLAIRAUTschen Satz hergeleitet werden. Laut dieses Satzes ist es für die geodätische Linie auf jeder beliebigen Drehfläche charakteristisch, dass für jeden beliebigen Punkt die Gleichung

$$r \sin \alpha = c \,(\text{constans}) \tag{6}$$

gilt. Hier bedeutet r den Radius des durch einen beliebigen Punkt der geodätischen Linie hindurchgehenden Parallelkreises und α das Azimut der geodätischen Linie in demselben Punkt.

Es sei nun dieser Satz bei den Punkten A und B für beide Ellipsoide angewandt:

$$r_{A1} \sin \alpha_{A1} = c_1 \qquad r_{B1} \sin \alpha_{B1} = c_1 \tag{7}$$

und

$$r_{A2} \sin \alpha_{A2} = c_2 \qquad r_{B2} \sin \alpha_{B2} = c_2 \,. \tag{8}$$

Aus den beiden Gleichungspaaren kann man die Beziehung

$$r_{A1} \sin \alpha_{A1} - r_{A2} \sin \alpha_{A2} = r_{B1} \sin \alpha_{B1} - r_{B2} \sin \alpha_{B2} \tag{9}$$

aufstellen. Da

$$\alpha_{A2} = \alpha_{A1} + \Delta\alpha_A \quad \text{und} \quad \alpha_{B2} = \alpha_{B1} + \Delta\alpha_B \tag{10}$$

kann die Gl. (9) auch in der Form

$$r_{A1} \sin \alpha_{A1} - r_{A2} \sin (\alpha_{A1} + \Delta\alpha_A) = r_{B1} \sin \alpha_{B1} - r_{B2} \sin (\alpha_{B1} + \Delta\alpha_B) \tag{11}$$

geschrieben werden.

Wie schon im Zusammenhang mit der Gl. (3) festgestellt wurde, ist

$$\alpha_{A1} = \alpha'_A \quad \text{und} \quad \alpha_{B1} = \alpha'_B$$

d. h. die zum ersten Ellipsoid gehörenden Azimute sind gleich den Azimuten der punktweise projizierten wirklichen Abbildung auf dem zweiten Ellipsoid. Infolgedessen sind die in der Gl. (11) vorkommenden Werte $\Delta\alpha_A$ und $\Delta\alpha_B$ ebenfalls die gesuchten Azimutreduktionen.

Die Azimutreduktionen sind so kleine Werte, dass bei der Reihenentwicklung der Gl. (11) bei α_{A1} bzw. α_{B1} bereits auch die Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung zulässig ist. Führt man die Reihenentwicklung aus, so gelangt man zu der Beziehung

$$\begin{aligned} &r_{A1} \sin \alpha_{A1} - r_{A2} \sin \alpha_{A1} - r_{A2} \cos \alpha_{A1} \cdot \Delta\alpha_A = \\ &= r_{B1} \sin \alpha_{B1} - r_{B2} \sin \alpha_{B1} - r_{B2} \cos \alpha_{B1} \cdot \Delta\alpha_B \end{aligned} \tag{12}$$

bzw.

$$(r_{A1} - r_{A2}) \sin \alpha_{A1} - (r_{B1} - r_{B2}) \sin \alpha_{B1} =$$
$$= r_{A2} \cos \alpha_{A1} \cdot \Delta\alpha_A - r_{B2} \cos \alpha_{B1} \cdot \Delta\alpha_B . \tag{13}$$

Die linke Seite der Gl. (13) ist eine bekannte Grösse (hier kann die Länge des Radius der Parallelkreise aus der Formel $r = N \cos \varphi$ berechnet werden, wo φ die geographische Breite des betreffenden Punktes und N der Querkrümmungsradius im betreffenden Punkt sind. Ferner lassen sich die Winkel α_{A1} und α_{B1} aus den auf dem ersten Ellipsoid angegebenen geographischen Koordinaten der Endpunkte mit Hilfe der entsprechenden ellipsoidischen Berechnung bestimmen, und gleichfalls bekannt sind auch die Koeffizienten der rechten Seite der Gleichung. Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung mit D und die Koeffizienten der rechten Seite mit E und F, so kann die Gl. (13) in der Gestalt

$$E\Delta\alpha_A + F\Delta\alpha_B = D \tag{14}$$

geschrieben werden. Diese Gleichung gibt die zur Bestimmung der beiden Azimutreduktionen notwendige zweite Beziehung.

Aus der Auflösung der Gln. (5) und (14) ergeben sich für die Azimutreduktionen die Formeln

$$\Delta\alpha_A = \frac{D - FG}{E + F} \tag{15}$$

und

$$\Delta\alpha_B = \frac{D + EG}{E + F} . \tag{16}$$

Die Genauigkeit, mit der die Azimutreduktion bestimmt wird, hängt von der Genauigkeit des Wertes G ab, d. h. nach der Formel (4) von der Genauigkeit der Bestimmung der Differenz zwischen den zu den beiden Ellipsoiden gehörigen Meridiankonvergenzen. Laut der Gl. (38) auf S. 92 der Arbeit [4] lässt sich die ellipsoide Meridiankonvergenz aus der Formel

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) \left(1 + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \cos^2 \varphi}{12\varrho^2} V^2 + \frac{b^2}{24\varrho^2} \frac{3 + 8\eta^2 + 5\eta^4}{V^4}\right) \tag{17}$$

berechnen. In dieser Formel sind

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \qquad b = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\eta^2 = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi \qquad V = \sqrt{1 + \eta^2} \tag{18}$$

wo φ_1 und φ_2 die geographische Breite der beiden untersuchten Punkte, λ_1 und λ_2 die geographische Länge dieser beiden Punkte, e' die zweite Exzentrizität des Ellipsoids und ϱ den der analytischen Winkeleinheit entsprechenden Grad- oder Sekundenwert bedeuten, je nachdem, in welchen Einheiten die geographischen Koordinaten in die Formel eingesetzt werden.

Es sei nun auf dem BESSELschen Ellipsoid die Meridiankonvergenz für jene zwei Punkte berechnet, für die folgende Kennzahlen gelten:

$$\varphi_{A1} = 48^\circ\ 0'\ 0{,}0000''$$
$$\varphi_{B1} = 49^\circ\ 0'\ 0{,}0000'' \qquad \lambda_{B1} - \lambda_{A1} = 1^\circ\ 0'\ 0{,}0000''$$

Aus der Gl. (17) ergibt sich die Meridiankonvergenz wie folgt:

$$\gamma_1 = 2696{,}373\ 601'' = 44'\ 56{,}373\ 601''.$$

Es sollen nun nach der Projektionsvariante *g)* der Abhandlung [1] die zwei Punkte auf das KRASOWSKYsche Ellipsoid projiziert werden, und zwar unter der Annahme, dass die geographische Breite des Normalparallelkreises auf dem KRASOWSKYschen Ellipsoid $\varphi_{02} = 47^\circ\ 0'\ 0{,}0000''$ beträgt. Für die Abbildung der beiden Punkte auf dem KRASOWSKYschen Ellipsoid erhält man die Werte:

$$\varphi_{A2} = 48^\circ\ 0'\ 13{,}7548''$$
$$\varphi_{B2} = 49^\circ\ 0'\ 13{,}2869'' \qquad \lambda_{B2} - \lambda_{B1} = 0^\circ\ 59'\ 59{,}768\ 46''$$

Die Meridiankonvergenz beträgt auf dem KRASOWSKYschen Ellipsoid, wenn man sie gleichfalls aus der Gl. (17) berechnet:

$$\gamma_2 = 2696{,}356\ 507'' = 44'\ 56{,}356\ 507''.$$

Der Wert $G = \gamma_2 - \gamma_1$ ergibt sich also folgenderweise:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= 44'\ 56{,}356\ 507'' \\ \gamma_1 &= 44'\ 56{,}373\ 601'' \\ G &= -\ 0{,}017\ 094'' \end{aligned} \tag{19}$$

Viel einfacher, wenngleich weniger genau ist es, die Differenz der Meridiankonvergenzen mit Hilfe der bekannten Formel der Meridiankonvergenz des Fusspunkts zu berechnen. Die bekannte Formel der Meridiankonvergenz des Fusspunkts lautet:

$$\gamma_T = \operatorname{tg} \Delta\lambda \sin \varphi \tag{20}$$

wo $\Delta\lambda$ die Differenz zwischen der geographischen Länge des untersuchten Punktes von der geographischen Breite φ und dem Meridian des Fusspunktes bedeutet. Wendet man diese Formel im vorigen Fall bei beiden Ellipsoiden auf die mittlere Breite der beiden Endpunkte an und betrachtet man $\Delta\lambda$ als die geographische

Längendifferenz der beiden Endpunkte, so gestaltet sich die Formel für jedes der beiden Ellipsoide gesondert wie folgt:

$$\gamma_{T1} = \operatorname{tg} \Delta\lambda_1 \sin \varphi_1 \qquad \gamma_{T2} = \operatorname{tg} \Delta\lambda_2 \sin \varphi_2 \,. \tag{21}$$

Für die Differenz der Meridiankonvergenz der beiden Fusspunkte, die annäherungsweise der Differenz der wirklichen Meridiankonvergenz der beiden Endpunkte gleichgesetzt wird, ergibt sich dann

$$G = \gamma_{T2} - \gamma_{T1} = \operatorname{tg} \Delta\lambda_2 \sin \varphi_2 - \operatorname{tg} \Delta\lambda_1 \sin \varphi_1 \,. \tag{22}$$

Da aber bei der Projektion zwischen zwei Ellipsoiden laut [1]

$$\Delta\lambda_2 = n\Delta\lambda_1 \quad \text{und somit} \quad \operatorname{tg} \Delta\lambda_2 = \operatorname{tg} (n\Delta\lambda_1) \tag{23}$$

ferner da die Werte von $\Delta\lambda$ höchstens einige Grade gross sind und die Grösse der Verhältniszahl n in der Nähe der Einheit liegt, kann die vorige Beziehung auch in der Form

$$\operatorname{tg} \Delta\lambda_2 = n \operatorname{tg} \Delta\lambda_1 \tag{24}$$

geschrieben werden, so dass die Differenz der Meridiankonvergenzen

$$G = \gamma_{T2} - \gamma_{T1} = \operatorname{tg} \Delta\lambda_1 (n \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \tag{25}$$

betragen wird.

Laut der Projektionsvariante *g)* der Abhandlung [1] beträgt bei der bereits erwähnten Lage des Normalparallelkreises

$$n = 0{,}999\,935\,6839 \,.$$

Setzt man die bereits bekannten Werte in die Gl. (25) ein und bezeichnet man das erhaltene Resultat mit G, so gelangt man zu

$$G = -0{,}017\,062'' \,. \tag{26}$$

Wenn man diesen rasch berechenbaren Wert der Gl. (26) mit dem nach langwieriger Rechenarbeit erhaltenen Wert der Gl. (19) vergleicht, ist ersichtlich, dass selbst bei der angenommenen geodätischen Linie von etwa 130 km Länge die Abweichung insgesamt bloss 0,000 032″ ausmacht.

Es seien nun die Azimutreduktionen laut der Gln. (15) und (16) berechnet:

$$D = +\ 0{,}000\,002\,725\,566 \qquad D\varrho'' = +\ 0{,}562\,188''$$

$$E = +\ 35{,}761\,936 \text{ km}$$

$$F = -\ 34{,}762\,027 \text{ km} \,.$$

Zuerst sei der nach Gl. (19) bestimmte Wert des Wertes G genommen

$$G = -\ 0{,}017\,094'' \,.$$

Setzt man diese Angaben in die Formeln (15) und (16) ein, so erhält man die Azimutreduktionen

$$\Delta\alpha_A = -0{,}032\,036'' \qquad \text{und} \qquad \Delta\alpha_B = -0{,}049\,130''. \tag{27}$$

Nunmehr soll der nach Gl. (26) ermittelte Wert von G genommen werden:

$$G = -0{,}017\,062.$$

In diesem Falle ergeben sich auf Grund der Formeln (15) und (16) die Azimutreduktionen

$$\Delta\alpha_A = -0{,}030\,935'' \qquad \Delta\alpha_B = -0{,}047\,999''. \tag{28}$$

Zwischen den zwei Azimutreduktionen, die mit den auf zweierlei Weise berechneten Werten von G erhalten wurden, zeigt sich eine Differenze von 0,001 101″ bzw. 0,001 131″, also liegt die Abweichung zwischen den in den Gln. (27) und (28) gewonnenen Werten in einer Grössenordnung von nur 0,001″.

Es wurden ferner mit der genauesten zur Verfügung stehenden Formel (mit Hilfe der Normalschnitte der Ellipsoide) auf beiden Ellipsoiden auch die Azimute selber berechnet. Das Ergebnis war:

$$\alpha_{A1} = 33^\circ\,14'\,0{,}647\,588'' \qquad \alpha_{B1} = 33^\circ\,58'\,57{,}021\,191''$$
$$\alpha_{A2} = 33^\circ\,14'\,0{,}615\,447'' \qquad \alpha_{B2} = 33^\circ\,58'\,56{,}971\,953''.$$

Die aus diesen Werten berechneten Azimutdifferenzen (die als die genauesten Werte der Azimutreduktionen angesehen werden können) lauten:

$$\Delta\alpha_A = -0^\circ\,0'\,0{,}032\,141'' \qquad \Delta\alpha_B = 0^\circ\,0'\,0{,}049\,238''.$$

Gegenüber diesen Werten weisen die nach Gl. (27) berechneten Azimutreduktionen eine Abweichung von 0,000 105″ bzw. 0,000 108″ und die nach Gl. (28) berechneten eine solche von 0,001 206″ bzw. 0,001 239″ auf.

Die Berechnung des Wertes von G mit Hilfe der Formel (17) darf also in jedem Fall als entsprechend angesehen werden, falls jedoch auch eine Vernachlässigung in der Grössenordnung einer tausendstel Sekunde zulässig ist, so lässt sich auch die Formel (25) anwenden, die den Vorzug aufweist, wesentlich schneller zum Ergebnis zu führen. Bei kurzen Entfernungen (unter 100 km) kann man auch noch die vereinfachte Formel

$$G = \gamma_{T2} - \gamma_{T1} = \Delta\lambda_1 (n \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) \tag{29}$$

heranziehen.

SCHRIFTTUM

1. I. Hazay: Untersuchungen über die Projektion zwischen Ellipsoiden und über die Bestimmung der relativen Lage der Ellipsoide durch Projektion. Acta Technica Hung. **14** (1956) 165/194.

2. I. Hazay: Beiträge zur Bestimmung der Konstanten bei der Projektion zwischen Ellipsoiden. Acta Technica Hung. **14** (1956) 401/423.

3. E. Jung: Vorschlag eines geschlossenen globalen Ellipsoidüberganges. Zschr. f. Vermessungswesen (1952) S. 233—236.

4. W. Jordan—O. Eggert: Handbuch der Vermessungskunde. B III/2. Stuttgart 1941.

ZUSAMMENFASSUNG

In zwei früheren Abhandlungen des Verfassers [1, 2] wurden eingehend die Projektionen zwischen verschiedenen Ellipsoiden behandelt. Die vorliegende Arbeit ergänzt diese Untersuchungen durch die Bestimmung der Azimutreduktion. Diese Frage stellt sich nur bei Projektionen für geodätische Zwecke, also nur bei winkeltreuen Projektionen. Die Azimutreduktionen lassen sich auf Grund der ellipsoiden Meridiankonvergenzen und der auf geodätische Linien bezüglichen CLAIRAUTschen Grundgleichung ermitteln. Die Genauigkeit der Azimutreduktionen hängt von der Genauigkeit ab, mit der die Differenz zwischen den auf die zwei Ellipsoide bezüglichen Meridiankonvergenzen bestimmt wird. Wird eine grössere Genauigkeit angestrebt, so sind die Meridiankonvergenzen nach der Formel (17) der vorliegenden Arbeit zu berechnen. Ist dagegen eine Vernachlässigung in der Grössenordnung von einer tausendstel Sekunde zulässig, so kann die Differenz zwischen den Meridiankonvergenzen laut der Formel (25) oder (29) berechnet werden. Mit den letzteren Formeln ist die Berechnung wesentlich einfacher und schneller.

AZIMUTHAL REDUCTION BETWEEN TWO TERRESTRIAL ELLIPSOIDS

I. HAZAY

D. of Eng. Sc.

SUMMARY

Two earlier papers (1) and (2) dealt in detail with projections between different ellipsoids. The present paper completes them by the determination of azimuthal reductions. This problem arises only in geodetic, that is, in conformal projections. Azimuthal reductions are determinable on the basis of ellipsoidic meridian convergences and of *Clairaut*'s basic equation referring to geodetic lines. The precision of azimuthal reductions depends on the accuracy of the determination of the difference of meridian convergencies relative to the two ellipsoids. If higher precision is aimed at, meridian convergencies are computed by formula (17) of this paper. If omissions of the order of one thousandth of a second are permissible, the difference of meridian convergencies may be computed after formula (25) or (29) of this paper. Calculation by these formulae is substantially simpler and quicker.

RÉDUCTION AZIMUTALE ENTRE DEUX ELLIPSOÏDES TERRESTRES

J. HAZAY

Docteur des sc. techn.

RÉSUMÉ

Deux études (1) et (2) publiées auparavant se sont occupées de la projection entre deux ellipsoïdes. Cette étude les complète par la détermination des réductions azimutales. Ce problème se pose seulement aux projections géodésiques, c'est à dire aux projections conformables (orthomorphiques). Les réductions azimutales peuvent être déterminées à la base de convergences de méridiens ellipsoïdiques et de l'équation fondamentale de CLAIRAUT relative aux lignes géodésiques. L'exactitude des réductions azimutales dépend de la précision de la détermination de la différence des convergences de méridiens relatives aux deux ellipsoïdes. Si l'on vise à une précision plus grande, on calculera les convergences de méridiens selon l'équation (17) de l'étude. Au contraire, si l'on permet une omission de l'ordre d'un millième d'une seconde, on peut calculer les différences des convergences de méridiens selon la formule (25) ou (29) de l'étude. Le calcul à l'aide des dernières formules est beaucoup plus simple et plus rapide.

РЕДУКЦИЯ АЗИМУТА МЕЖДУ ДВУМЯ ЭЛЛИПСОИДАМИ ЗЕМЛИ

Д-р техн. наук И. ХАЗАИ

РЕЗЮМЕ

Предыдущие работы [1] и [2] детально занимались проекциями между различными эллипсоидами. Данная работа дополняет вышеуказанные две работы определением редукций азимута. Этот вопрос возникает только в случае геодезического порядка проекций, следовательно только в случае конформных проекций. Редукции азимута можно определять на основе эллипсоидальных конвергенций меридиана и основного уравнения Клеро, относящегося к геодезическим линиям. Точность редукций азимута зависит от точности определения разности конвергенций меридиана, относящихся к двум эллипсоидам. Если необходимо добиться большей точности, тогда конвергенции меридиана следует вычислять на основе формулы (17) настоящей работы. Если же допускается пренебрежение порядка тысячных долей секунды, тогда разность конвергенций меридиана определяется формулой (25) или (29) настоящей работы. При помощи последних формул вычисления можно выполнить значительно проще и быстрее.

DETERMINATION OF HIGHER ORDER PARTIAL DERIVATIVES OF THE VELOCITY FUNCTION FROM KNOWN VALUES ALONG A STREAMLINE

M. BLAHÓ and T. FARAGÓ

DEPARTMENT OF FLUID MECHANICS, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received 26th January, 1956]*

For the computation of the velocity distribution around airfoils in cascade and of airfoils producing prescribed velocity distribution, respectively, a method entirely different from those so far adopted has been put forward by CHUNG-HUA WU and CURTIS A. BROWN [1]. The essential feature of their method consists in that the velocity field is computed from a velocity distribution known or assumed, respectively, along a streamline, with the aid of a Taylor-polynomial. In the case of two-dimensional flow, this requires partial differential qoutients in one given direction which may be expressed by the total differential quotient, with the application of the laws of continuity, irrotationality and change of state at constant entropy.

For the purpose of this computation, the authors derive the first and second derivatives of the velocity function indicating at the same time that with their method adopted the partial derivatives of higher order may also be derived. They fail, however, to furnish particulars on the subject. In this paper we propose to determine the n-th partial derivatives also and support our formulae by complete induction.

Let function $z = z(x, y)$ be n-times partially differentiable with respect to x and y within the domain considered and let the n-th derivative be continuous as well. Let the equation of a curve-section g in the same range be $y = y(x)$ and y be n-times differentiable function of x.

We now introduce this formula:

$$F(z;\ m) = \frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x} + m\,\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}. \tag{1}$$

and let us compute the value of F at an arbitrary point of curve g by substituting $m = y'(x)$ and express it as follows:

$$[F(z;\ y')]_g = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_g + y'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_g.$$

* Manuscript by T. FARAGÓ giving the solution of the three dimensional problem received in June, 1956.

The right hand side may also be written as the total differential quotient of $z\ (x;\ y(x))$, with respect to x. Thus,

$$[F(z;\ y')]_g = \frac{d}{dx} z(x;\ y(x)) . \tag{2}$$

Let us now differentiate equation (1) partially k-times, with respect to y, m being independent of y. If we consider the continuity of the derivatives, we obtain the following :

$$\frac{\partial^{(k)} F(z;\ m)}{\partial y^{(k)}} = \frac{\partial^{(k+1)} z}{\partial y^{(k)} \partial x} + m \frac{\partial^{(k+1)} z}{\partial y^{(k+1)}} = F\left(\frac{\partial^{(k)} z}{\partial y^{(k)}};\ m\right); (k \leq n-1) . \tag{3}$$

From the foregoing, on the basis of (2) follows :

$$\left[F\left(\frac{\partial^{(k)} z}{\partial y^{(k)}};\ y'\right)\right]_g = \left(\frac{\partial^{(k+1)} z}{\partial y^{(k)} \partial x}\right)_g + y'\left(\frac{\partial^{(k+1)} z}{\partial y^{(k+1)}}\right)_g = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(k)} z}{\partial y^{(k)}}\right)_g . \tag{4}$$

Let us now approach the problem dealt with in the paper quoted above. By marking the velocity components by $u(x, y)$ and $v(x, y)$, further density by ϱ, the following equations will apply to steady, isentropic, two-dimensional, irrotational flow.

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0 ; \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 ; \tag{6}$$

Further,

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{2H_0}\right)^{\frac{1}{k-1}} , \tag{7}$$

where $H_0 = c_p T_0$ is the enthalpy, ϱ_0 the density at $u = v = 0$ and k marks the ratio of specific heats.

Let the foregoing assumptions relating to function z be applicable to functions u and v also, and, further, let $y = y(x)$ indicate a streamline equation which is a function of x, differentiable n-times. Accordingly,

$$y'(x) \cdot (u)_g - (v)_g = 0 . \tag{8}$$

On the basis of (1), formula (6) may be transformed as follows :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + m\frac{\partial v}{\partial y} - m\frac{\partial v}{\partial y} = F(v\,;\ m) - m\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{9}$$

If the fore-going equation is differentiated partially $n-1$ times with respect to y, we come to the following result on having given consideration to (3)

$$\frac{\partial^{(n)} u}{\partial y^{(n)}} = F\left(\frac{\partial^{(n-1)} v}{\partial y^{(n-1)}}\ ;\ m\right) - m\frac{\partial^{(n)} v}{\partial y^{(n)}}. \tag{10}$$

It should be noted that if in equation (9) m is a function of y, we may, by derivating (9) partially with respect to y, leave off from the identity the member containing the two partial derivatives of m. Proceeding the same way at every operation, (10) will hold good none the less.

If we compute the value of both sides at any point of the streamline by substituting $m = y'(x)$, we obtain the following :

$$\left(\frac{\partial^{(n)} u}{\partial y^{(n)}}\right)_g = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)} v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g - y'\left(\frac{\partial^{(n)} v}{\partial y^{(n)}}\right)_g. \tag{11}$$

Substitution having been made from (5) to (9), the following equation is obtained :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F(v\,;\ m) + \frac{m}{\varrho}\left(\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right).$$

Having transformed this according to (1), we get the following :

$$(1+m^2)\frac{\partial u}{\partial y} = F(v\,;\ m) - \frac{m}{\varrho}\cdot\frac{\partial \varrho}{\partial y}\ (mu - v) + \frac{m}{\varrho}F(\varrho u\,;\ m). \tag{12}$$

By substituting (12) in (9),

$$(1+m^2)\frac{\partial v}{\partial y} = mF(v\,;\ m) + \frac{1}{\varrho}\ \frac{\partial \varrho}{\partial y}\ (mu - v) - \frac{1}{\varrho}F(\varrho u\,;\ m) \tag{13}$$

By observing (8) and (2), we obtain from (12) and (13) as follows :

$$(1+y'^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_g = \frac{d(v)_g}{dx} + \frac{y'}{(\varrho)_g}\ \frac{d(\varrho u)_g}{dx}, \tag{14}$$

$$(1+y'^2)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_g = y'\frac{d(v)_g}{dx} - \left(\frac{1}{\varrho}\right)_g\ \frac{d(\varrho u)_g}{dx}. \tag{15}$$

In following the fore-going procedure, the second, third, etc. in general the n-th derivatives with respect to y, are determined the following is obtained :

$$(1+m^2)\frac{\partial^{(n)}u}{\partial y^{(n)}} = F\left(\frac{\partial^{(n-1)}v}{\partial y^{(n-1)}};\ m\right) + m\varrho\,(mu-v)\,\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) +$$

$$+ m\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}F\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}};\ m\right)\frac{\partial^{(n-k)}}{\partial y^{(n-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right); \tag{16}$$

$$(1+m^2)\frac{\partial^{(n)}v}{\partial y^{(n)}} = mF\left(\frac{\partial^{(n-1)}v}{\partial y^{(n-1)}};\ m\right) - \varrho\,(mu-v)\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}F\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}};\ m\right)\frac{\partial^{(n-k)}}{\partial y^{(n-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{17}$$

Proof of (16). The correctness of this formula can be established by concluding from n to $n+1$. As it may be seen, (16) is correct in the case $n=1$. We now have to prove the correctness of the following equation :

$$(1+m^2)\frac{\partial^{(n+1)}u}{\partial y^{(n+1)}} = F\left(\frac{\partial^{(n)}v}{\partial y^{(n)}};\ m\right) + m\varrho\,(mu-v)\,\frac{\partial^{(n+1)}}{\partial y^{(n+1)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) +$$

$$+ m\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}F\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}};\ m\right)\frac{\partial^{(n+1-k)}}{\partial y^{(n+1-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{18}$$

For this purpose, let us differentiate equation (16) with respect to y. We assume that n is a number for which it holds that the derivative $n+1$ still exists according to the conditions assumed. From equation (3) we can see that the derivative of the first member on the right hand side of (16) gives just the first member on the right hand side of (18). By derivating the second member on the right hand side of (16), with respect to y, we obtain the following two members :

$$m\left(m\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\varrho\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + m\,(mu-v)\frac{\partial}{\partial y}\left[\varrho\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right].$$

On the basis of (12) and (13), the first member is as follows :

$$m\left(m\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\varrho\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = mF\,(\varrho u;\ m)\,\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) -$$

$$- m\frac{\partial\varrho}{\partial y}\,(mu-v)\,\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

This compared with the fore-going equation, the derivative of the second member on the right hand side of (16), with respect to y, assumes the following form :

$$\varrho m\,(mu - v)\,\frac{\partial^{(n+1)}}{\partial y^{(n+1)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + mF(\varrho u\,;\ m)\,\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

As it may be seen from the fore-going, the first member is the second expression on the right hand side of (18). If we add the second member to a member obtained by differentiating, with respect to y, the factor containing $\frac{1}{\varrho}$ in the member of coefficient $\binom{n}{1}$ figuring in the sum on the right side of (16), the result will be as follows :

$$mF\,(\varrho u\,;\ m)\,\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + m\binom{n}{1}F\,(\varrho u\,;\ m)\,\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) =$$

$$= m\binom{n+1}{1}F\,(\varrho u\,;\ m)\,\frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

This is the first member of the sum figuring in (18).

Differentiating partially F in the member of the coefficient $\binom{n}{k-1}$ figuring in the sum included in (16) and the factor containing $\frac{1}{\varrho}$ in the member of coefficient $\binom{n}{k}$, both with respect to y, and adding up the two derivatives, we obtain the following :

$$\binom{n}{k-1}F\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}}\,;\ m\right)\frac{\partial^{(n-k+1)}}{\partial y^{(n-k+1)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \binom{n}{k}F\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}}\,;\ m\right)\frac{\partial^{(n-k+1)}}{\partial y^{(n-k+1)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right) =$$

$$= \binom{n+1}{k}F\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}}\,;\ m\right)\frac{\partial^{(n+1-k)}}{\partial y^{(n+1-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

In other words, we have obtained the members figuring in the sum (18), in the case of $k = 2, 3 \ldots\ldots n$. Finally by derivating F with respect to y in the member of coefficient $\binom{n}{n}$ figuring in (16), we get the following :

$$\binom{n}{n}F\left(\frac{\partial^{(n)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(n)}}\,;\ m\right)\cdot\frac{1}{\varrho} = \binom{n+1}{n+1}F\left(\frac{\partial^{(n)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(n)}}\,;\ m\right)\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

This way, all the members figuring in (18) have been included and, accordingly, full evidence has been furnished of the correctness of (16).

Verification of (17) may be established the same way. To be more exact, its correctness immediately follows from (10) with the aid of (16).

At any point of the streamline we obtain from (16) and (17), the following equations by substituting $m = y'(x)$ and by taking (8) into account:

$$(1+y'^2)\left(\frac{\partial^{(n)}u}{\partial y^{(n)}}\right)_g = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g + \\ + y' \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\left[\frac{\partial^{(n-k)}}{\partial y^{(n-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]_g \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}}\right)_g . \tag{19}*$$

$$(1+y'^2)\left(\frac{\partial^{(n)}v}{\partial y^{(n)}}\right)_g = y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g - \\ - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\left[\frac{\partial^{(n-k)}}{\partial y^{(n-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]_g \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}}\right)_g . \tag{20}$$

If ϱ is constant, the following is obtained from equations (19) and (20).

$$(1+y'^2)\left(\frac{\partial^{(n)}u}{\partial y^{(n)}}\right)_g = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g + y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g . \tag{21}$$

$$(1+y'^2)\left(\frac{\partial^{(n)}v}{\partial y^{(n)}}\right)_g = y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}u}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g . \tag{22}$$

Note. If the curve given is not a streamline but meets the requirements in other respects, and the distribution of both components of velocity at any point of this curve is known, the n-th partial derivatives of these components can be evaluated at an arbitrary point of the curve, on the basis of (16) and (17). However, the n-th partial derivative with respect to y of $\frac{1}{\varrho}$ figuring on the right hand side of (16) and (17) should be worked out first, and in this the n-th partial derivatives of the velocity components will present themselves also. From the system of equations thus obtained the n-th partial derivatives may be evaluated.

REFERENCE

1. CHUNG-HUA WU and CURTIS A., BROWN: A Theory of the Direct and Inverse Problems of Compressible Flow Past Cascade of Arbitrary Airfoils. Journ. of the Aeronaut. Sciences, Vol. 19., 1952, No. 3, 183—196.

* If rot $\bar{v} = \text{const} \neq 0$, in case of $n = 1$ on the right hand side of (19) appears: $-(\text{rot } \bar{v})_z$.

SUMMARY

In one of their papers, CHUNG-HUA WU and CURTIS A. BROWN [1] computed by Taylor-polynomial the velocity field from the known velocity distribution past an airfoil. They determined the first and second partial derivatives of the velocity function and pointed out that the method suggested by them allowed the determination of partial derivatives of higher order as well. However, they failed to furnish any further particulars on the subject. In this paper, the n-th partial derivatives have also been determined and the formulae obtained have been supported by complete induction.

If the components of velocity are denoted by $u(x, y)$ and $v(x, y)$, the density by ϱ, and provided that g is a streamline obeying the equation $y = y(x)$, the formulae (19) and (20) are obtained from the partial differential equations applicable to stationary, isenthropic rotation-free two-dimensional flow.

ÜBER DIE BERECHNUNG DER ABLEITUNGEN HÖHERER ORDNUNG DER GESCHWINDIGKEITSFUNKTION AUS BEKANNTEN WERTEN ENTLANG EINER STROMLINIE

M. BLAHÓ and T. FARAGÓ

ZUSAMMENFASSUNG

CHUNG-HUA WU and CURTIS A. BROWN berechnen in einem ihrer Aufsätze [1] das Geschwindigkeitsfeld aus der entlang einer Stromlinie bekannten Geschwindigkeitsverteilung mittels eines Taylor-Polynoms. Sie bestimmen auch die erste und die zweite Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion und bemerken, dass auch Ableitungen höherer Ordnung auf die dargestellte Weise bestimmt werden können, doch geben sie darüber nichts Näheres an. In diesem Aufsatze bestimmen die Verfasser auch die Ableitungen n-ter Ordnung und beweisen ihre Formeln mit voller Induktion.

Wenn die Geschwindigkeitskomponenten mit $u(x, y)$ und $v(x, y)$, die Dichte mit ϱ bezeichnet werden, und g eine Stromlinie bedutet, deren Gleichung $y = y(x)$ ist, so sind aus den auf eine beständige, isentropische, wirbelfreie ebene Strömung bezüglichen partiellen Differentialgleichungen die folgenden Formeln erhältlich:

$$(1+y'^2)\left(\frac{\partial^{(n)}u}{\partial y^{(n)}}\right)_g = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g + y'\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{\partial^{(n-k)}}{\partial y^{(n-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]_g \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(k-1)}}{\partial y^{(k-1)}}\right)_g .$$

$$(1+y'^2)\left(\frac{\partial^{(n)}v}{\partial y^{(n)}}\right)_g = y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{\partial^{(n-k)}}{\partial y^{(n-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]_g \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(k-1)}}{\partial y^{(k-1)}}\right)_g$$

SUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR DE LA FONCTION DE LA VITESSE À PARTIR DE VALEURS CONNUES LE LONG D'UNE LIGNE AÉRODYNAMIQUE

M. BLAHÓ et T. FARAGÓ

RÉSUMÉ

CHUNG-HUA WU et CURTIS A. BROWN calculent dans une de leurs études [1] le champ de vitesse à partir de la distribution de vitesse connue le long d'une ligne aérodynamique à l'aide d'un polynome Taylor. Ils déterminent les dérivées de premier et deuxième ordre de la fonction de vitesse aussi et indiquent que les dérivées d'ordre supérieur peuvent également être détermi-

nées par la méthode suivie dans l'étude, sans toutefois fournir des précisions. Dans l'étude présente les auteurs déterminent également les dérivées d'ordre n et justifient leurs formules par une induction complète.

Si les composantes de la vitesse sont désignées par $u(x, y)$ et $v(x, y)$ la densité par ϱ et si g est une ligne aérodynamique, dont l'équation est $y = y(x)$, on obtiendra les formules suivantes à partir des équations différentielles, relatives à l'écoulement dans le plan, stable, isentropique, sans remous :

$$(1 + y'^2)\left(\frac{\partial_u^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\right)_g = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}_v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g + y' \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\left[\frac{\partial^{(n-k)}}{\partial y^{(n-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]_g \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}}\right)_g .$$

$$(1 + y'^2)\left(\frac{\partial_v^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\right)_g = y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}_v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\left[\frac{\partial^{(n-k)}}{\partial y^{(n-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]_g \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}}\right)_g .$$

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ СКОРОСТИ, ИСХОДЯ ИЗ ИЗВЕСТНОЙ ВДОЛЬ ОБТЕКАЕМОЙ ЛИНИИ ВЕЛИЧИНЫ

М. БЛАХО и Т. ФАРАГО

РЕЗЮМЕ

В одном из своих статей Chung-Hua Wu и Curtis A. Brown (Литература 1) пространство скорости вычисляют полиномом Тейлора, исходя из распределения скорости, известной *вдоль обтекаемой линии*. Определяются первый и второй частные производные функции скорости и указывается, что примененным ими методом можно определить также частные производные высших порядков, но в отношении этого не приводятся данные. В данной статье авторы определяют также n-ные частные производные и свои формулы подтверждают полной индукцией.

Если обозначить составляющие скорости через $u\ (x, y)$ — и $v\ (x, y)$, а плотность через ϱ и g —некоторая обтекаемая линия, формула которой будет $y = y(x)$, тогда из частных дифференциальных уравнений, действительных для стационарного, изентропичного плоскостного скольжения, свободного от кипения и завихрения, получатся следующие формулы :

$$(1 + y'^2)\left(\frac{\partial_u^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\right)_g = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}_v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g + y' \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\left[\frac{\partial^{(n-k)}}{\partial y^{(n-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]_g \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}}\right)_g$$

$$(1 + y'^2)\left(\frac{\partial_v^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\right)_g = y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(n-1)}_v}{\partial y^{(n-1)}}\right)_g - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\left[\frac{\partial^{(n-k)}}{\partial y^{(n-k)}}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]_g \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^{(k-1)}_{(\varrho u)}}{\partial y^{(k-1)}}\right)_g .$$

INVESTIGATION ON THE VELOCITY FIELD OF A NON-ROTATING IMPELLER, WITH DISMOUNTED BLADES, BY MEANS OF AN ELECTROLYTIC TANK

T. SZENTMÁRTONY and A. VERBA

DEPARTMENT OF FLUID MECHANICS, TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received 26th January, 1956]

Introduction

In the design of fans of modern design, the necessity has arisen for an impeller of considerable width, of optimum efficiency. High efficiency involves nearly ideal flow conditions. For design, however, it is necessary to know the intake conditions of the impeller. The question has been under the examination

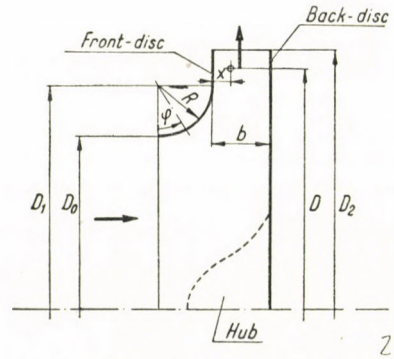


Fig. 1

of the Department of Fluid Mechanics for a long time [4, 5]. Since it would prove a lengthy procedure to seek a solution by a mathematical process, it appears more to the purpose to approach the issue by experiments based on electric analogy provided that flow conditions are ideal. This procedure has proved to be the right one with free intake. If the intake is through a pipe, there should be a confusor inserted before the impeller.

It is known from literature on the subject that there is an analogy between the flow around a solid of revolution and the potential field in an electrolytic tank of varying depths [1, 2, 3]. The velocity to be measured at any point of the flow around a solid of revolution is proportional to the potential gradient measured at the corresponding point of the electrolytic tank, in the direction of the velocity.

The successive measurements described further below, are applied — with the use of an electrolytic tank — in examining the absolute meridian velocity-field prevailing along the inlet fairings and at the places of the blades, respectively.

The measuring arrangements are such as to meet conditions of fluid flow over a non-rotating bladeless impeller. The object of the investigation was to ascertain data which could supply a basis for determining separation, if any, occuring at the inlet fairing and the so-called "undisturbed velocity-field" prevails at the places of the blades.

At given diameter ratio $\left(\frac{D_2}{D_1} = \text{constant}\right)$, (Fig. 1) the velocities depend to a large extent on the width of the impeller and the shape of the hub used. The measurements have, therefore, to supply information on these points.

Experimental equipment

The measurements were taken in the Department of Fluid Mechanics at the Technical University of Budapest, in a wooden electrolytic tank. The water drawn from the tap to the tank represents one "segment" of the impeller. (Figs

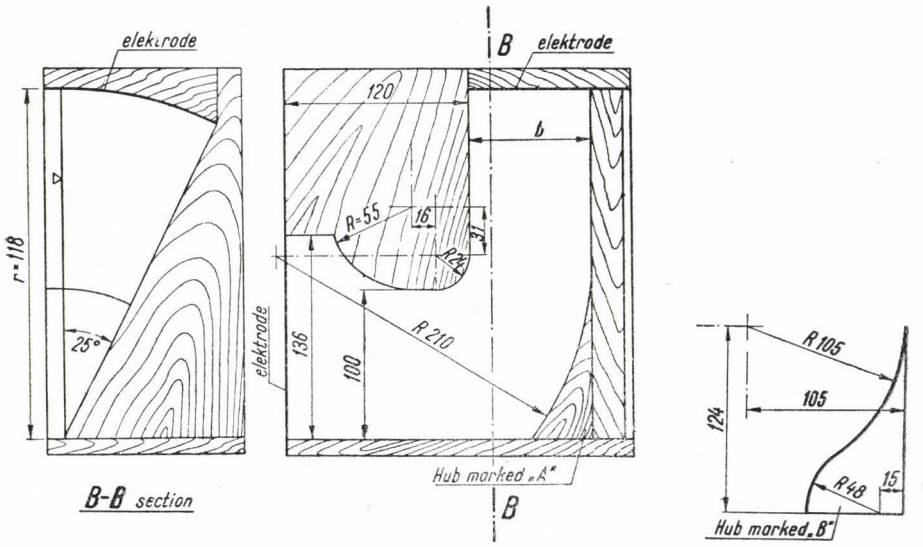


Fig. 2

2—3). This segment will in the following be referred to as "the impeller space". The radius r of the "impeller space" equals 118 mm, whereas the slope angle of the bottom makes 25 degrees with the horizontal. To prevent hydrolysis,

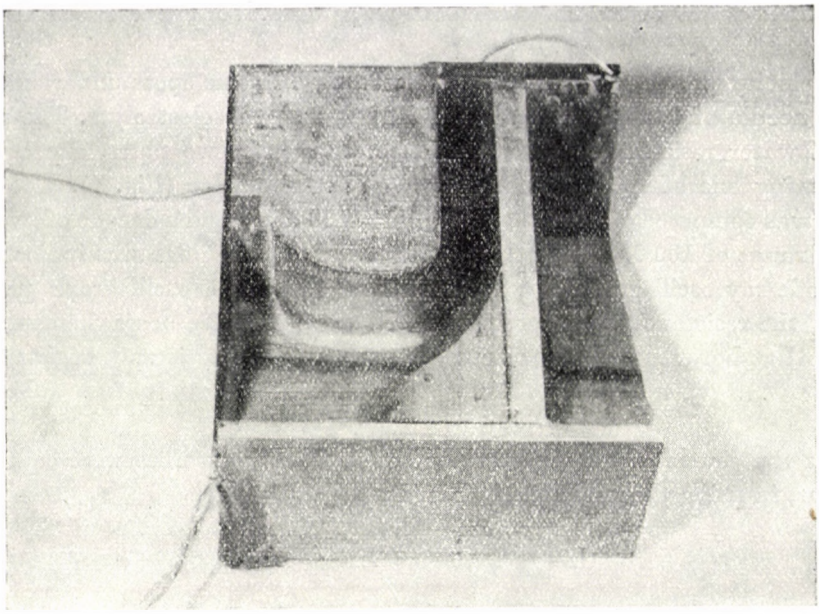


Fig. 3

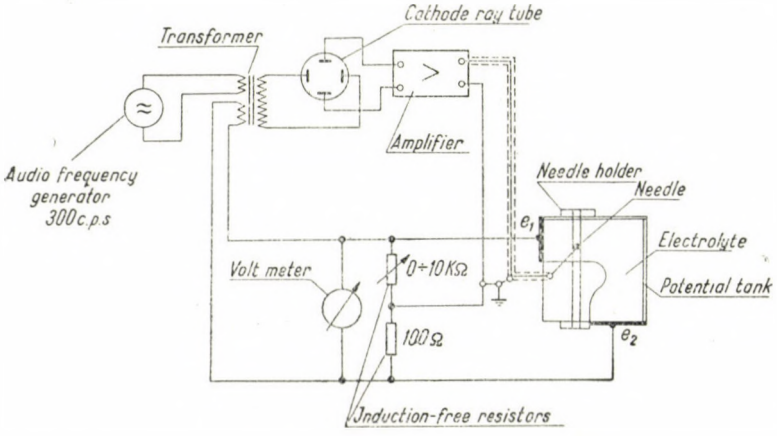

Cathode ray tube
Transformer
Amplifier
Audio frequency
generator
300c.p.s
Needle holder
Needle
e_1
Electrolyte
Potential tank
Volt meter
0÷10KΩ
100Ω
e_2
Induction-free resistors

Fig. 4

a generator of 300 cycles audio-frequency was used. Voltage between the electrodes was 14 *V*.

Velocity was established in an indirect way. At the spots under examination, a needle of 0,25 mm diam. was dipped into the electrolyte. The needle divided water resistance between the electrodes into two parts, one of them constituting one of the branches of a Wheatstone-bridge (Fig. 4). The other branch was composed of a fixed resistor $\Omega_0 = 100$ ohms and a decade of a measurement range of 100 000 — 0,1 Ω. Compensation of the bridge was indicated by a cathode-ray oscillograph of zero-indication. With the oscillograph pointing at zero, the resistance between electrode e_1 and the needle bears the same relation to that between the two electrodes (e_1, e_2) as the resistance registered by the decade (Ω) to the sum of the constant (Ω_0) and the decade resistances $\left(\frac{\Omega}{\Omega_0 + \Omega}\right)$.

In the course of the measurements, the following values were considered constant, in using the notations in Fig. 1 :

$$\frac{D_2}{D_1} = 1{,}3\,; \qquad \frac{R}{D_0} = 0.12$$

The width of the impeller was varied and the hubs changed. Of the two widths measured, one was $b_1 = 81$ mm, the other $b_2 = 32$ mm. The F_0/F_1 values related to them were as follows :

$$\left(F_0 = \frac{D_0^2 \pi}{4}\,; \quad F_1 = D_1 \pi b\right)$$

$$b_1 \text{ refers to : } \frac{F_0}{F_1} = 0.492$$

$$b_2 \text{ refers to , } \frac{F_0}{F_1} = 1.26$$

The dimensions of the two sorts of hubs (marked "A" and "B") used are presented in Fig. 2. Accordingly, we measured six variants, that is, for each width first without hubs and then with hubs, marked "A" and "B".

Discussion of the measurements

The ratios $\frac{\Omega}{\Omega_0 + \Omega}$ formed from the measured Ω values, were plotted at the front disc, back disc and between them, respectively, along the lines $x =$ $=$ constant. The scattering ($\pm$ 2 p. c.) due to inaccuracy of measuring was

smoothed in this diagram by a curve well comforming to the plots and satisfying the constant change in velocity. To secure a higher degree of accuracy, the abscissa was divided into equal parts and a polynome of the fourth degree was laid through the point under examination, as well as through the adjacent

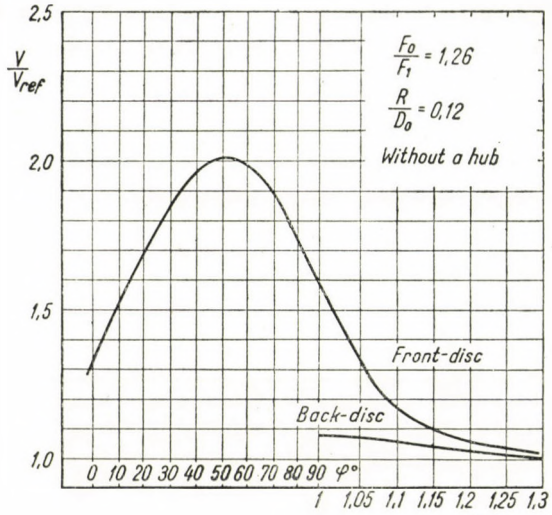


Fig. 5

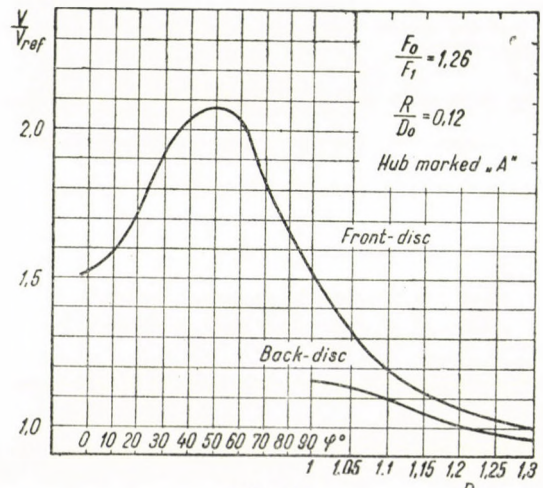


Fig. 6

points to the right and to the left. The slope of the tangent at the points under examination of the polynoms gave a value (v) proportional to the velocity prevailing there. For the purpose of making the obtained values dimensionless,

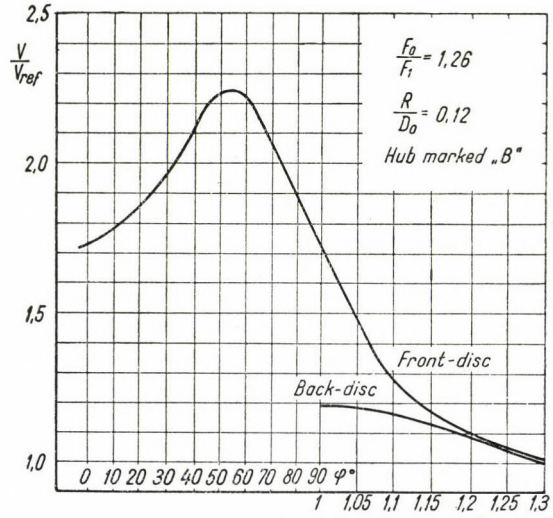


Fig. 7

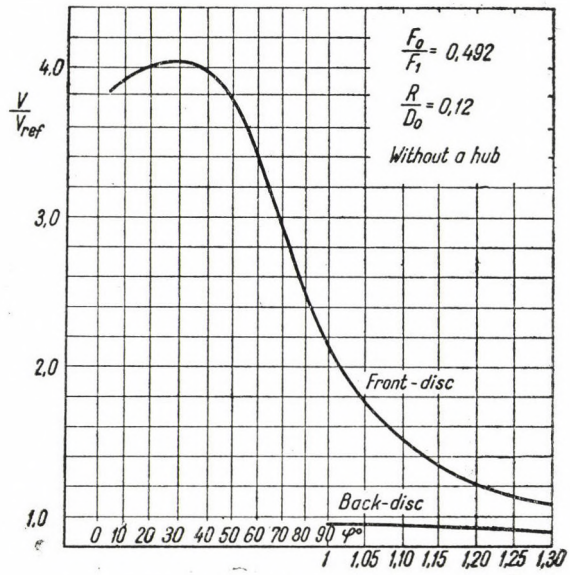


Fig. 8

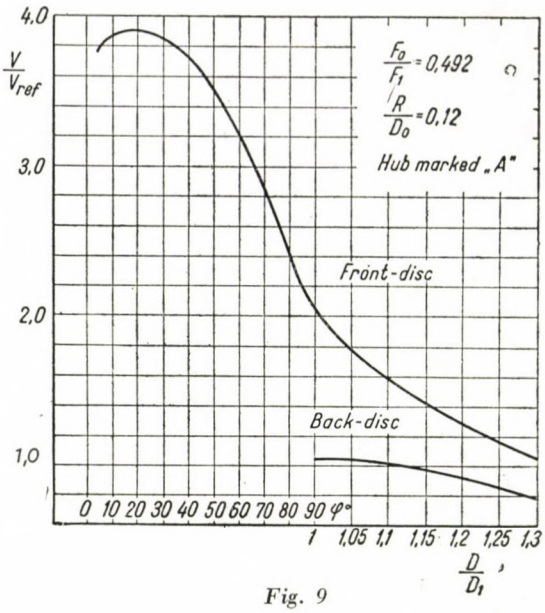

4,0
V/Vref
3,0
2,0
1,0
F0/F1 = 0,492
R/D0 = 0,12
Hub marked „A"
Front-disc
Back-disc
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 φ°
1 1,05 1,1 1,15 1,2 1,25 1,3
D/D1

Fig. 9

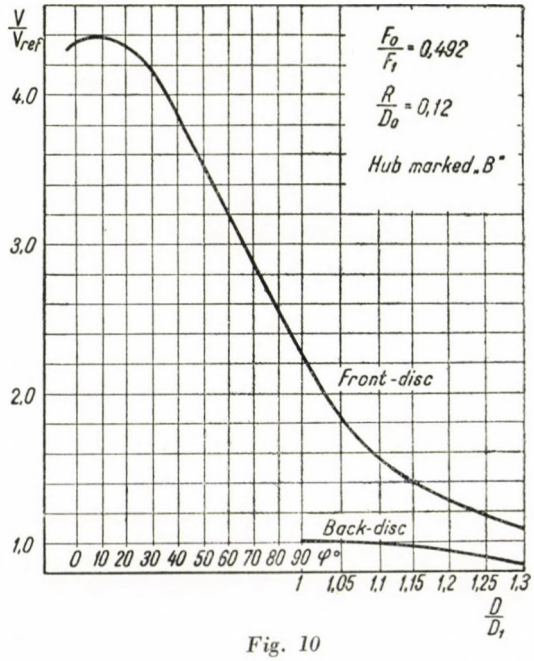

V/Vref
4,0
3,0
2,0
1,0
F0/F1 = 0,492
R/D0 = 0,12
Hub marked „B"
Front-disc
Back-disc
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 φ°
1 1,05 1,1 1,15 1,2 1,25 1,3
D/D1

Fig. 10

this quantity (v) was divided by a reference quantity (v_{ref}), according to the following equation at the place corresponding to D_2:

$$v_{ref} = \int_0^b v \, db$$

In an impeller, by way of analogy, this reference quantity (v_{ref}) corresponds to c_{ref} assuming the value

$$c_{ref} = \frac{Q}{D_2 \pi b};$$

where the quantity delivered is Q.

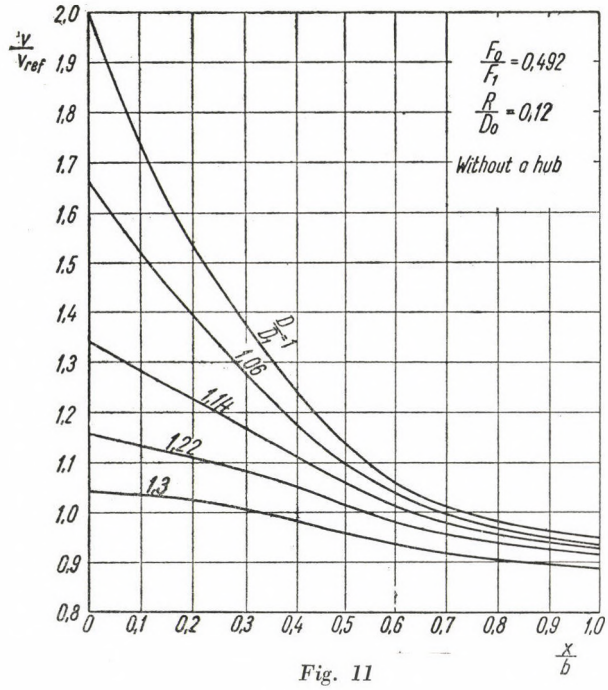


Fig. 11

The values thus computed $\frac{v}{v_{ref}}$ have been plotted in a diagram. In Figs 5 to 10, the distribution of $\frac{v}{v_{ref}}$ along the front and the back discs were plotted for each of the six variants, as a function of the place. The coordinate of the place was described by both the angle φ and the diameter ratio D/D_1, as shown in Fig. 1.

In Figs 11 to 13, the distribution of $\frac{v}{v_{re}}$ was plotted for three variants referring to $F_0/F_1 = 0.492$, as functions of x/b and D/D_1, according to Fig. 1.

In an impeller, the values $\frac{v}{v_{re}}$ figuring in the diagrams (Figs 5 to 13) are equal to $\frac{c}{c_{re}}$ (c is the velocity measured at the point under examination of the impeller.)

Summary of the results

From the results of measurements, the following typical values have been picked out for further use and included in the following tabular statement.

$\frac{F_0}{F_1}$	Hub	$\left(\frac{v}{v_{ref}}\right)_{D_1 f}$	$\left(\frac{v}{v_{ref}}\right)_{D_1 b}$	$\left(\frac{v}{v_{ref}}\right)_{max}$	$\varphi°$ at $\left(\frac{v}{v_{ref}}\right)_{max}$	$\frac{\left(\frac{v}{v_{ref}}\right)_{D_1 f}}{\left(\frac{v}{v_{ref}}\right)_{D_1 b}}$	$\frac{\left(\frac{v}{v_{ref}}\right)_{max}}{\left(\frac{v}{v_{ref}}\right)_{D_1 f}}$
0,492	—	2,11	0,96	4,04	28	2,20	1,92
	A	2,04	1,04	3,90	20	1,96	1,91
	B	2,26	1,01	4,38	9	2,24	1,94
1,26	—	1,57	1,07	2,01	51	1,47	1,28
	A	1,53	1,15	2,07	54	1,33	1,35
	B	1,71	1,19	2,24	54	1,44	1,31

Index D_{1f} figuring at the heading of the tabular statement refers to a point at the front disc ; D_{1b} to that at the back disc, on diameter D_1 whereas "max" refers to the highest velocity obtained at the rounding off of the front disc.

The data contained in the tabular statement permit the following conclusions to be drawn from them.

1. On diameter D_1, that is, the place of the entry edge of the blades, there is an appreciable difference between the meridian velocity measurable at the front and that at the back disc, even with impellers of reduced width.

2. At the place of the blades, advancing in the direction of flow, the velocity undergoes a change which is not in keeping with the average velocity calculable from the increased surface area. It is rapidly diminishing along the front disc but almost constant along the back disc.

The fore-going two points raise the question of a possible twist of the blades.

3. The maximum velocity occurring with a rounded-off front disc, depends primarly on the width of the impeller. In the case under examination, the highest figure measured in an impeller of larger width, was almost the double of that found for a narrow one. The effect of the hub on the value of the maximum meridian velocity was of smaller extent.

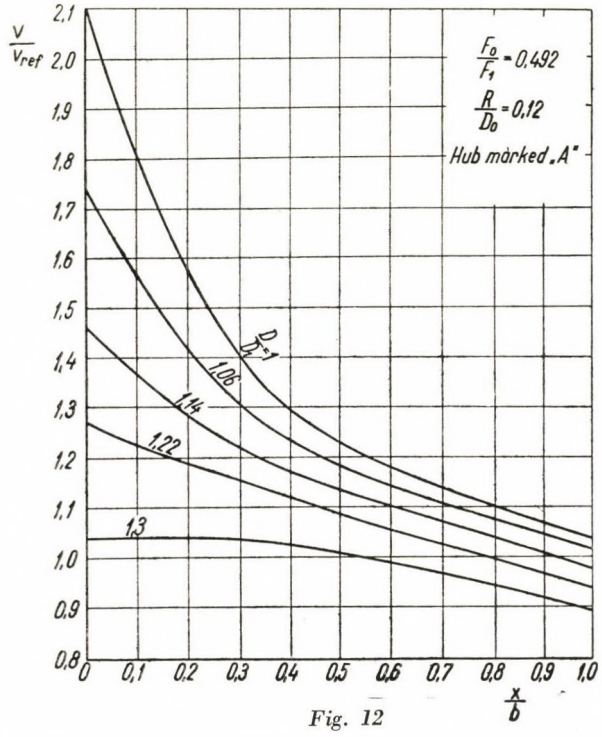


Fig. 12

It may be seen from the tabular statement that, the width being identical, the value of the maximum meridian velocity is by about 10 per cent higher in the case of hub B than with hub A, or with no hub, respectively. The explanation is that the hub marked A is of much slenderer design than that marked B, as it may be seen from Fig. 2.

4. The ratio of the maximum meridian velocity and of the velocity found on diameter D_1 is almost constant and not dependent on the hub. This value is, however, 50 per cent higher with impellers of larger width than with narrow ones.

5. When examining relative velocities, the place of the maximum meridian velocity may be of importance. Measurements show that in the case of a narrow impeller, the place of the maximum is around $\varphi = 53°$ and it undergoes practi-

cally no change. If it is a wider impeller, the value of φ reduces to about one half of that even without a hub. If hubs are employed, this value drops further.

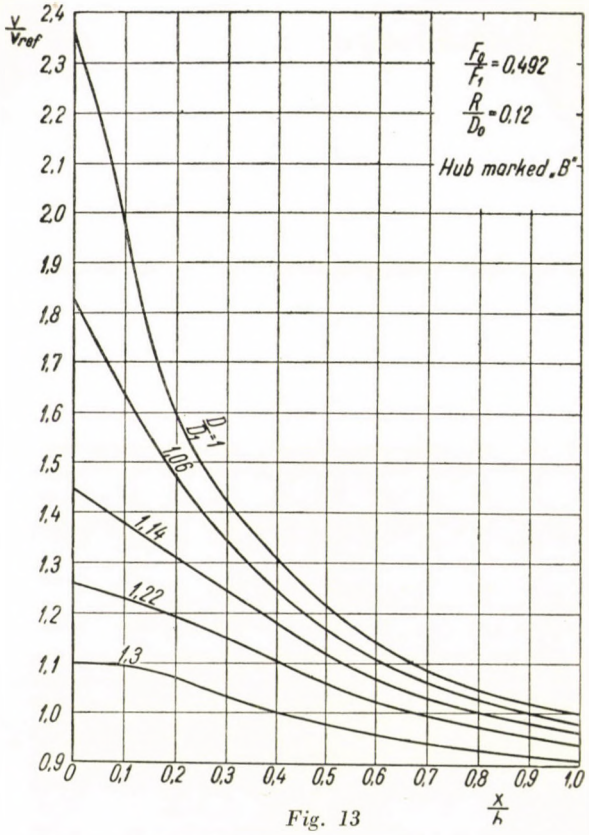


Fig. 13

REFERENCES

1. G. I. Taylor and C. F. Sharman : Problems of Flow in Compressible Fluids. (Proc. Royal Soc. of London, Series A. T. 121, 1928.)
2. L. Malavard : The use of rheo-electrical analogies in certain aerodynamical problems. (Journ. R. Aerodyn. Soc., 1947.)
3. C. Nits : Examination of potential level-flow by the use of an electrolytic tank. (Hungarian Academy of Sciences. Department of Technical Sciences. Records 7/1952, 101/115.)
4. J. Gruber—T. Szentmártony : Étude de l'entrée du fluide dans les roues mobiles des machines hydrauliques centrifuges. (Acta Technica Hung. 3 (1952) 381 (388).
5. T. Szentmártony : Untersuchung der Eintrittsabrundung bei radial durchströmten Laufrädern im elektrolitischen Trog. (Acta Technica Hung. 9 (1954) 355/364.)

SUMMARY

The series of measurements made have been intended to examine, on the basis of an electrical analogy the velocity field of flow through a non-rotating impeller, without blades. The examination intended to establish the effect of the width and of various hubs of the impeller.

UNTERSUCHUNG IM ELEKTROLYTISCHEN TROG DES GESCHWINDIGKEITSFELDES EINES STEHENDEN, UNBESCHAUFELTEN LAUFRADES

T. SZENTMÁRTONY und A. VERBA

ZUSAMMENFASSUNG

In einer Reihe von Untersuchungen die auf Grund der elektrischen Analogie durchgeführt wurden, versuchten die Verfasser das Geschwindigkeitfeld der Strömung durch ein stehendes, unbeschaufeltes Laufrad zu erforschen. Der nähere Gegenstand der Untersuchung war die Ermittlung des Einflusses verschiedener Laufradbreiten und verschiedener Radnabenformen.

EXAMEN DANS LE BAC ELECTROLYTIQUE DU CHAMP DE VITESSE DANS UNE ROUE HYDRAULIQUE STATIONNAIRE, DEPOURVUE D'AUBAGE

T. SZENTMÁRTONY et A. VERBA

RÉSUMÉ

Par une série d'essais basés sur l'analogie rhéoelectrique les auteurs ont étudié le champ de vitesse de l'écoulement à travers une roue hydraulique stationnaire, dépourvue d'aubage. Le but de l'étude a été la détermination de l'effet de l'épaisseur de la roue et de la forme de son moyeu.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА СКОРОСТИ НЕПОДВИЖНОГО БЕЗЛОПАСТНОГО РАБОЧЕГО КОЛЕСА ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОЛИТНОЙ ВАННЫ

Т. СЕНТМАРТОНИ и А. ВЕРБА

РЕЗЮМЕ

Серией измерений производилось исследование пространства скорости потока, проходящего через неподвижное безлопастное рабочее колесо, на основе электрической аналогии. Исследованием ставилась цель определения влияния ширины рабочего колеса и различных ступиц.

THE TRANSFORMATION OF HEMATITE (α-Fe_2O_3) INTO FERROMAGNETIC IRON OXIDE (γ-Fe_2O_3).

F. J. LĘCZNAR

M. S., Ph. D., KRAKÓW

[Manuscript received 11st May, 1956]

Introduction

The ferromagnetic variety of Fe_2O_3, was signified as γ-Fe_2O_3 in order to distinguish it from the ordinary hematite α-Fe_2O_3. The chemical formula is the same as that of the hematite, the basic difference being rather in the structure of the crystal lattice. Hematite appears in hexagonal crystals in forms of rhombohedrons and scalenohedrons, while γ-Fe_2O_3 has a cubic (regular) lattice like magnetite (Fe_3O_4). According to VERWEY [17], gamma-Fe_2O_3 unit cell contains 32 oxygen, and on the average, $21^1/_3$ Fe-atoms, having a defective lattice (1, 13).

Ferromagnetic ferric oxide in comparison with the natural hematite, is thermodynamically unstable with lattice energy higher than in the hematite. This consequently leads to decreasing of this energy and to transformation of space configuration of the atom which corresponds to the lower energy level [3]. This explains why γ-Fe_2O_3 occurs very rarely in its natural form and until now has been found only in Gorzyniec, Poland, as described by H. B. KOSMANN, at Iowa Mountain in California, and near Johannesburg, South Africa, where it was called maghemite by P. A. WAGNER [13].

The earliest recorded observation of the properties of ferromagnetic hematite is that of J. ROBBINS [14] ; the most complete data are given by HILPERT [8], who got ferromagnetic oxide by oxidizing either precipitated magnetite or ferrous hydroxide with the aid of soluble oxidizing agents [6]. R. SOSMAN and E. POSNJAK [7, 15] have confirmed experimentally that ferromagnetic oxide can be obtained by dehydration of lepidocrocite, one of the two crystalline forms of the monohydrate $Fe_2O_3 \cdot H_2O$, while the other form, goethite, yields only paramagnetic Fe_2O_3. Similarly L. A. WELO and O. BAUDISCH [19] obtained γ-Fe_2O_3 by dehydration of gamma ferric oxide hydrate. These investigators [2, 18] heated natural magnetite, Fe_3O_4, above a temperature of 200° C and got γ-Fe_2O_3 with strong magnetic properties. LUYKEN [12] believes that γ-Fe_2O_3 can be obtained from oxides and oxide hydrates by roasting them to magnetite and then subjecting them to cooling in oxidizing atmosphere.

From these various methods of preparing ferromagnetic Fe_3O_4 [4] two may be used to treat minerals by magnetic separation. By the first method hematite or limonite is reduced to magnetite and then by subjecting it to oxidation, the state of Fe_3O_4 passes to the state of γ-Fe_2O_3. By the second method gamma ferric oxide hydrate (γ-$Fe_2O_3 \cdot H_2O$, lepidocrocite) is heated at 250°—300° C [15] so as to produce ferromagnetic γ-Fe_2O_3 [19].

The purpose of this work is to establish some experimental facts for explaining the formation of γ-Fe_2O_3, depending on the temperature and on time, and especially the possibility of the production of maghemite directly from hematite in a reducing atmosphere, and the possibility of obtaining maghemite directly from hematite, avoiding the reduction of it to the stage of Fe_3O_4, and its following oxidation.

Table I

Results of reduction of the hematite spheres

Temp. t° C	Time* minutes	Diam. cm	Thickness of black layer mm	Results of tests
850	0	2	1,5	Reduced and non-reduced magnetic layers.
	5		5	
	10		7	
	15		10	
850	0	3	1	Both layers magnetic.
	5		2	
	10		2,5	
	15		4,1	
	20		6	
	25		8	
	30		15	
850	0	4	0,5	Totally magnetic. Black grains near black layer larger, and in the inner sphere smaller and rarer.
	10		2,5	
	15		3	
	25		4,5	
	35		6	
	45		7	
	55		9	
	70		11,5	
	80		14	
	90		20	
850	0	5	0,5	Totally magnetic. Small black grains in depth 4 mm from the surface of the sphere.
	10		1,5	Black grains everywhere, but in small quantities.
	20		3	
	60		9	
	90		15,5	
	110		23	
900	0	3	1,8	Totally magnetic. Small black grains everywhere.
	5		3,5	
	10		4,5	
	20		9,5	
	25		13,5	
900	0	4	1,5	Totally magnetic. Small black grains everywhere.
	10		3,8	
	20		6	
	40		10,5	
	60		14,3	The surface of sphere weakly magnetic (FeO).
	70		16	
	80		20	The surface ash-black, very weakly magnetic.
900	0	5	1,5	Totally magnetic. Black grains near the black ring.
	20		5,2	Totally megnetic. Larger black grains everywhere.
	40		9	
	60		13	
	80		17	
	95		21	
	100		24	

* From the moment the furnace had reached the prescribed temperature.

I. Phenomena occurring during roasting of hematite in reducing atmosphere

a) The material used was soft hematite (so called hematite "cream") from the Staszic mine in the Słupia Nowa Swiętokrzyskie Mountains [9, 16]. Spheres of 20, 30, 40 and 50 mm diameter were made from this hematite in the following manner. After drying the hematite, it was ground in a mortar with a pestle, taking care not to crush the quartz grains, and was finally screened through a 0,2 mm screen. The fine particles were mixed with water and formed into spheres by hand. Then the spheres were dried in open air for a few days

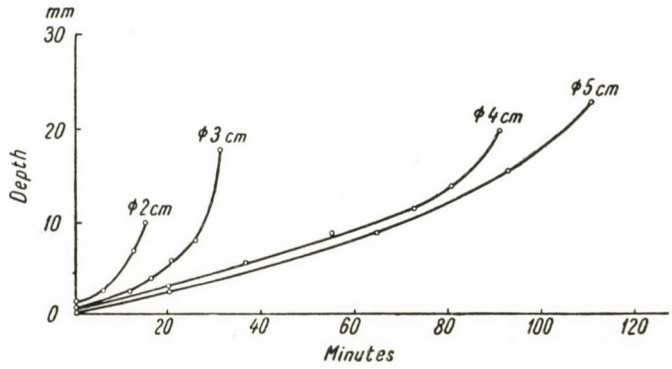


Fig. 1. Depth of the magnetite layer in hematite spheres reduced at 850° C

and then dried in an oven at 150° C. Then the spheres were placed in iron crucibles and surrounded with coke which acted as a reducing agent. The crucibles were placed in an electric furnace at 500° C and heated at 700° C, 750°, 800°, 850° and 900° C, the roasting being carried on for different periods of time. The length of time of roasting was measured from the moment the furnace reached the prescribed temperature. After being heated during the specified time, the hot crucible was removed from the furnace and cooled in air for 20—30 minutes. Then the spheres were removed from the crucibles, cut in half and the thickness of the reduced layer was measured. This sample was also used for a chemical analysis.

Table I gives the results of these tests, showing the thickness of the layer reduced to the magnetic state of Fe_3O_4 and the corresponding roasting time at the various temperatures. In the diagrams (Figs 1, 2) drawn from this table the X-axis represents the time and the Y-axis the thickness of the reduced layer. At short periods of roasting and at low temperature no dark layer of magnetite appeared. But if the period of roasting at higher temperatures was longer, then the spheres were completely reduced to Fe_3O_4, having a black colour throughout the entire sphere. Magnetic separation indicates that this reduced ore has strong magnetic properties, and chemical analysis confirms the constitution of Fe_3O_4.

The black layer very distinctly separated from the unreduced rusty-brown kernel formed on the outside of the spheres at temperatures of 800°, 850° and 900° C and moderate periods of time (Fig. 3). Physical tests of the kernel indicated strong magnetic properties and chemical analysis of a sphere (3 cm dia-

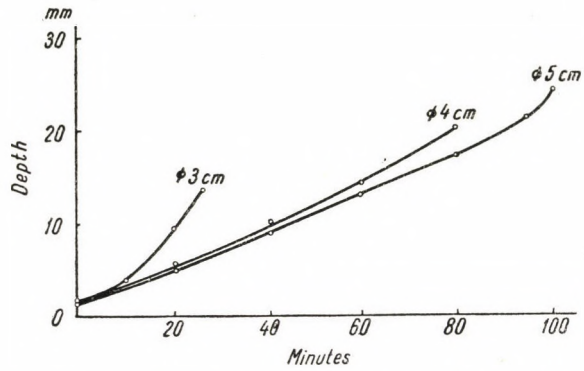


Fig. 2. Depth of the magnetite layer in hematite spheres reduced at 900° C

meter) roasted for 15 minutes at a temperature of 850° C confirmed the composition of $Fe^{++} = 5{,}79\%$ and $Fe^{+++} = 47{,}3\%$. Microscopic analysis, made by Prof. dr. S. Jaskólski, showed the presence of γ-Fe_2O_3 and Fe_3O_4 [10].

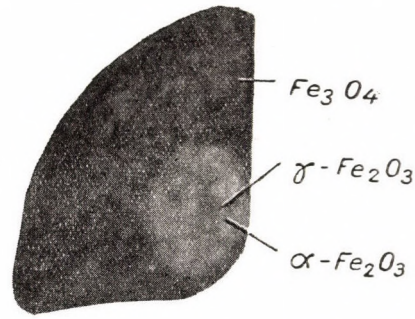


Fig. 3. Cross section of a sphere with magnetite layer and maghemite kernel

b) The next tests showed that, at temp. 700—800° C, in short periods of roasting the layer of the sphere, retaining its colour, had magnetic properties, which decreased toward the centre of the sphere. In a longer time of roasting the magnetic properties appeared in the entire spherical mass. The outside layer became magnetic, Fe_3O_4. The layer grew with the prolongation of the roasting time. Interrupting the process of roasting, we found in the cross section of the sphere an outside black ring of Fe_3O_4 and the kernel transformed into gamma Fe_2O_3.

The measurement of the thickness of the layer reduced to Fe_3O_4 indicates an accelerated growth of Fe_3O_4 toward the centre of the sphere. These phenomena were observed also in the spheres with different diameters, namely that the thickness of the layer was greater in the small spheres than in the larger

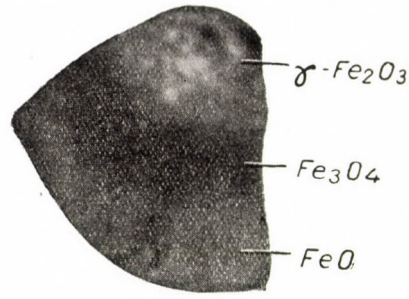


Fig. 4. Formation of layers of FeO, Fe_3O_4, γ-Fe_2O_3 in spheres during reduction

ones. This indicates that the size of ore destined for reduction ought to be limited (for instance to size of 3 cm). This can be explained by the fact [5] that at the surface the total quantity changed is proportional to the surface: volume

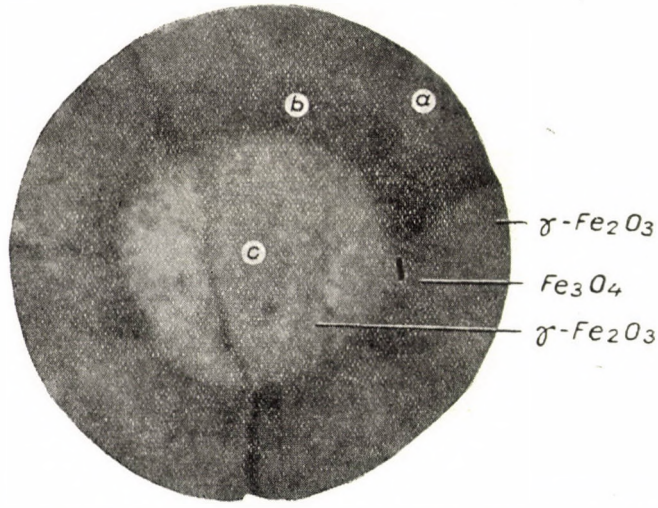


Fig. 5. Formation of outside layers as a result of the cooling of a magnetite sphere

ratio, which means inversely proportional to the radius. Independently of this, the next physico-chemical tests indicated that in the maghemite mass black crystals of magnetite are beginning to form, first near the magnetic ring.

Increasing the following process of reduction, the maghemite kernel was converted into magnetite, and the Fe_3O_4 surface layer was reduced from Fe_3O_4 to FeO (Fig. 4)[11]. A cross section of the sphere shows a sharp difference in colour

between the outside FeO layer and the inner Fe_3O_4. The ferrous oxide has a dark-gray colour whereas the magnetite core is black. Upon further reduction the FeO is reduced to Fe. The surface of the sphere is of sponge iron while the inner core consists of layers of FeO, Fe_3O_4 and γ-Fe_2O_3.

Since the line between the layer of γ-Fe_2O_3 and Fe_3O_4 is very sharp, it is not difficult to measure the thickness of the Fe_3O_4 layer. The line between the γ-Fe_2O_3 and α-Fe_2O_3 layer is not sharp. Maintaining the same length of time of reduction at various temperatures, the maghemite always retains the same colour, but shows increased magnetic properties after a higher temperature treatment.

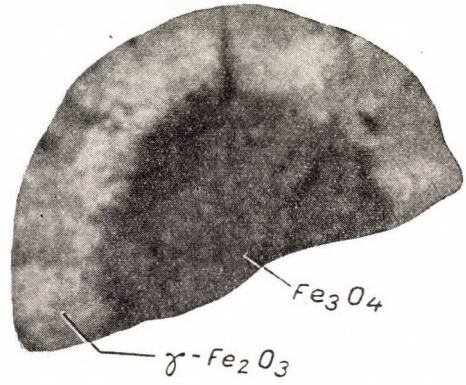


Fig. 6. Oxidation of the magnetite sphere into maghemite

c) The next experiment was made as follows : a sphere with 5 cm diameter was put into a crucible filled with coke and this was placed in a furnace at 500° C and heated to 850° C. After 70 minutes of reduction, the crucible was removed from the furnace, the sphere removed and cooled in air for about 30 minutes. In the inner section there were three strips (Fig. 5). The first exterior ring (a), 7 mm wide, was red and had very strong magnetic properties (γ-Fe_2O_3). The second ring (b) 5 mm wide and increasingly black possessed very strong magnetic properties (Fe_3O_4). The innermost circle (c) of 12 mm radius was brown-rusty, very distinctly separated from the others, and its magnetic properties were somewhat weaker.

The explanation of the development of these phenomena is this : the hematite sphere was reduced to Fe_3O_4 to a depth of 12 mm (Tab. I), the remainder of the spheres' interior crystallized to γ-Fe_2O_3. During the process of cooling the sphere was oxidized from Fe_3O_4 to γ-Fe_2O_3, to a depth of 7 mm only. The rest of the magnetite of 5 mm width was not oxidized. A part of the kernel recrystallized from γ-Fe_2O_3 to α-Fe_2O_3. The remainder retained its state of γ-Fe_2O_3.

The Figs 6, 7 show the different results of the oxidation of the hematite sphere reduced to Fe_3O_4. The sphere (Fig. 7) has four strips. The ring (*a*) is non-magnetic (α-Fe_2O_3), the ring (*b*) is strongly magnetic (γ-Fe_2O_3), the ring (*c*)

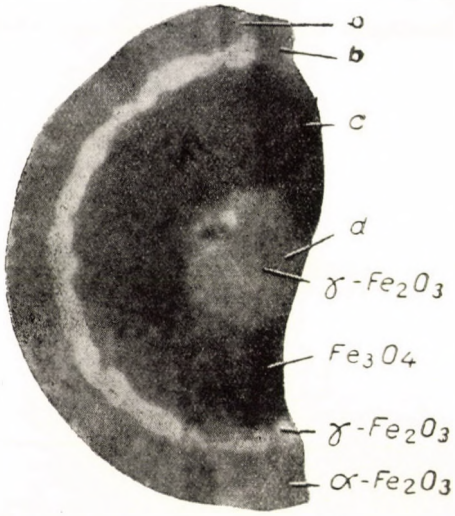


Fig. 7. Formation of oxidizing layers as a result of the cooling of a magnetite sphere

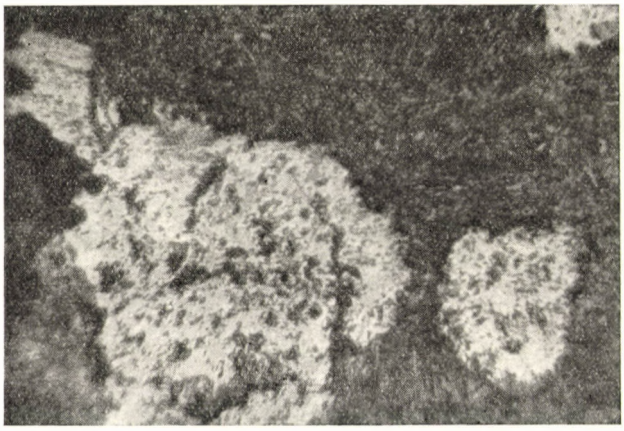


Fig. 8. Microscopic photograph of the ring *(a)* Fig. 7.

is strongly magnetic (Fe_3O_4), and the kernel (*d*) is also magnetic (γ-Fe_2O_3).

The microscopic photograph 8 refers to ring (*a*), photograph 9 to strip (*c*) and photograph 10 to the kernel (*d*).

It appears from above :

1. The stages in the development of the phenomena during roasting in the reducing atmosphere were :

$$\alpha\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow Fe_3O_4$$

$$\alpha\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow \gamma\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow Fe_3O_4$$

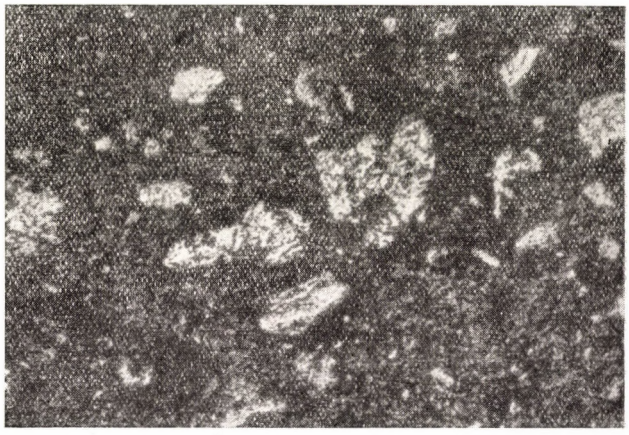


Fig. 9. Miscroscopic photograph of the strip *(c)* Fig. 7

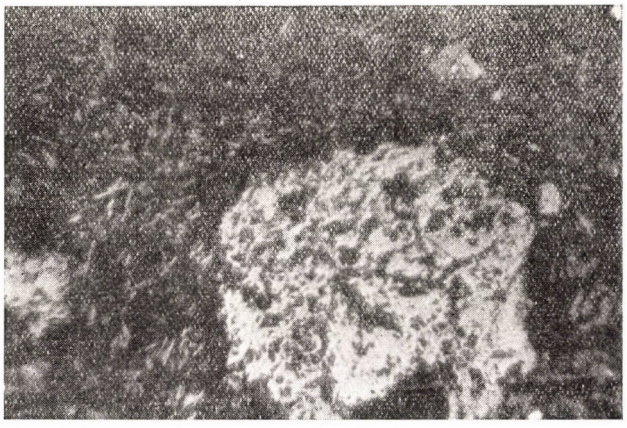


Fig. 10. Miscroscopic photograph of the kernel *(d)* Fig. 7

This fact confirms that, in the reduction of hematite to magnetite, γ-Fe_2O_3 appears as a transitory link.

2. The oxidization of the hematite sphere reduced to Fe_3O_4 leads to :

$$Fe_3O_4 \rightarrow \gamma\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow \alpha\text{-}Fe_2O_3 .$$

II. Transformation of hematite into maghemite during roasting in oxidizing atmosphere

The following tests were made in an oxidizing atmosphere without reducing agent in order to obtain maghemite from hematite. The tests were performed on soft hematite from the Staszic mine as well as on crystalline-grained hematite (specular ore).

1. Soft hematite

The tests on soft hematite were performed in three ways : a) The spheres of hematite of 2, 3, 4 and 5 cm diameter were placed in porcelain, nickel and iron crucibles and heated at 600°, 700°, 800° and 850° C for 0, 5, 10, 15 and 20 minutes. The roasting time was measured from the moment the furnace had reached the prescribed temperature. Then the crucibles were removed from the furnace and *cooled in air*, then the spheres were removed, cut in half and their interior tested (magnetic separation) for magnetic properties. It appeared that only the external layers of the spheres taken from the iron crucible were magnetic, but the kernels of the other spheres were magnetic. *The thickness of the non-magnetic layer decreased with the increase of the diameter of the sphere.* The colour of the non-magnetic part was brownish-violet, and that of the magnetic part brown.

b) The spheres of hematite of the same diameter as in a) were put directly into the furnace and heated under the same conditions of temperature and time as in a). After cooling and cutting of the spheres, the material was tested along the radius of the sphere for magnetic properties. The spheres of 2 cm diameter were not magnetic : those of 3 cm had small magnetic parts in the center ; in the sphere of 4 cm nearly 50% of the mass of the kernel was magnetic, and in the sphere of 5 cm diameter 81,6%.

c) The spheres of hematite were heated as in b), removed from the furnace and subjected to *cooling in a stream of air*. The time of cooling was 3—4 times shorter than before. The spheres showed weak magnetic properties. Namely, the spheres of 2 and 3 cm diameter were non-magnetic, and the spheres of 4 and 5 cm contained in their kernels a small quantity of magnetic particles.

2. Crystalline hematite

a) Small crystals of hematite of metallic glitter were tested for magnetic properties and then placed directly or in a small quartz vessel into the centre of the hematite sphere of 4 and 5 cm and subjected to roasting at temperature of 600° to 850° C for a time of 0 to 10 minutes. The tests confirmed the change of colour to rusty-brown and acquirement of magnetic properties that decreased at 850° C, and when they were suddenly cooled.

It appears from above :

1. Spheres of hematite of 5 cm diameter cooled slowly are more magnetic than the smaller ones.

2. Spheres of hematite rapidly cooled lose the magnetic properties.

3. Spheres of hematite cooled under cover are more magnetic than without a cover.

III. The influence of temperature and time on the forming of maghemite

a) In order to show the influence of thermal treatment on the formation of γ-Fe_2O_3 tests were made on hematite spheres. The spheres of 3 cm diameter were put into a furnace at a given temperature and heated for 10 and 20 minutes.

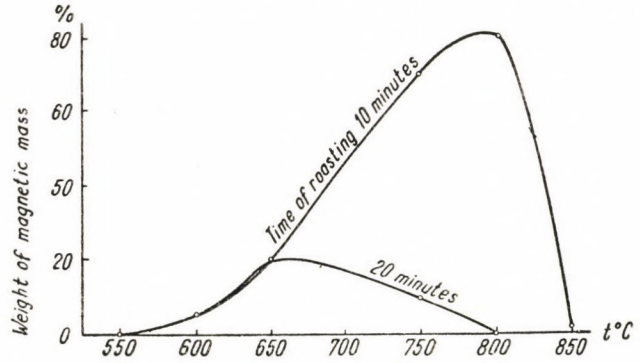


Fig. 11. Diagrams of transformation of the kernel of soft hematite spheres of 3 cm diameter

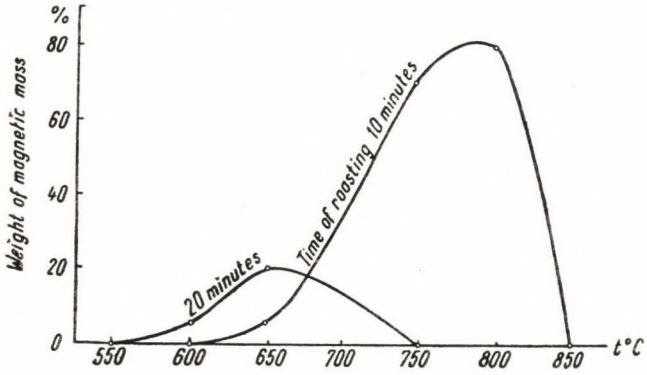


Fig. 12. Diagrams of transformation of the kernel of soft hematite spheres of 2 cm diameter

After the removal from the furnace the spheres were cooled in air and were tested (magnetic separation) for their magnetic properties. It appeared in all cases that the surfaces of the spheres did not possess magnetic properties ; however, their

kernels were partially magnetic, depending on the temperature and heating time. Fig. 11 gives the tests results.

b) The hematite spheres of 2 cm diameter following the same procedure as in a), were put into a covered fire-clay crucible and after heating at given

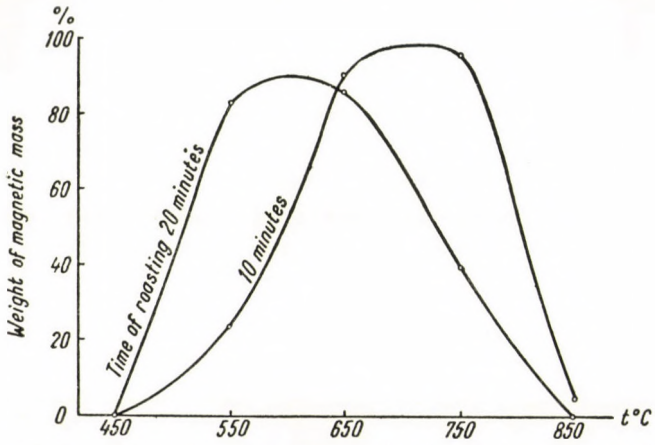


Fig. 13. Diagrams of transformation of the kernel of soft hematite spheres of 5 cm diameter

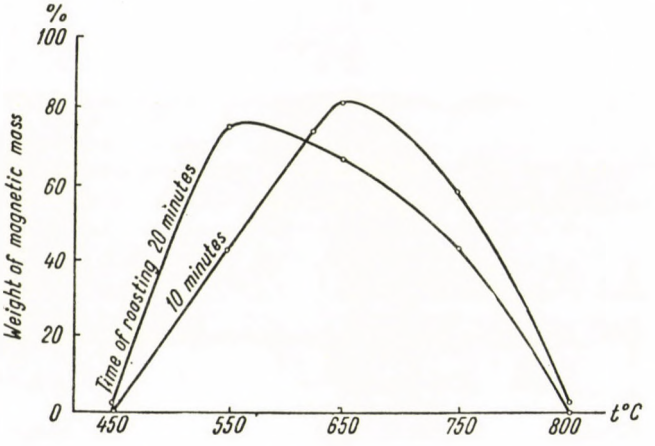


Fig. 14. Diagrams of transformation of crystalline hematite into maghemite

temperatures and times, were further cooled in the crucible in air, and then tested for magnetic properties. Fig. 12 gives the approaching value of magnetic properties in the kernels of the spheres.

c) The hematite spheres of 5 cm diameter were heated as under a). Fig. 13 shows the test results.

d) A small quartz vessel with crystals of hematite was placed into the centre of the hematite sphere of 5 cm diameter and heated under the same condi-

tions as under a). Fig. 14 shows the limits of the temperatures of the transformation into γ-Fe_2O_3 of specular ore and their magnetic quantity.

It appears from above :

1. The temperature of the γ-Fe_2O_3 formation from hematite lies between 550—750° C.

2. The investigation time of the γ-Fe_2O_3 formation lies between 0—20 minutes and depends on the heating temperature and the hematite structure.

IV. The influence of cooling of maghemite on retaining of the crystal lattice

The above results directed attention of the author to the circumstance that the retaining of the crystal lattice of γ-Fe_2O_3 and the elimination of the reverse transformation into hematite depends on heating temperature and cooling velocity.

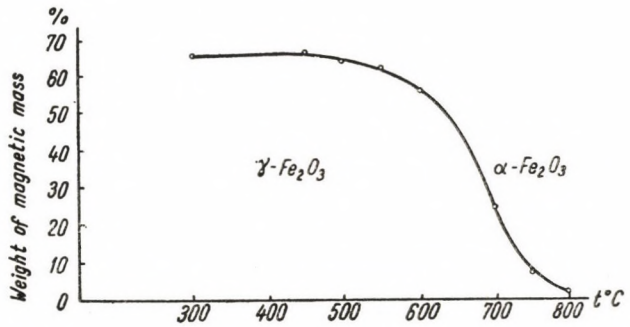


Fig. 15. Diagram of transformation of maghemite into hematite

In order to explain more fully the influence of these factors further tests were conducted as follows : 5 g of maghemite in grains of 0—0,4 mm were placed in an open porcelain crucible in the furnace, heated at 300—800° C for 10 minutes, spilled on the tray for cooling and separated in the electromagnetic separator. The results are given in Fig. 15. These results show the large increase in the quantity of hematite formed during the cooling of maghemite that was heated above 600° C. This, in the author's opinion, may be the consequence of a too rapid a loss of heat. (There is a great difference between the temperature of the heated mass of maghemite and the environment.)

a) In order to ascertain what influence the cover of roasted material exerts against the rapid loss of heat the soft hematite sphere was prepared with 2 g of crystalline hematite of metallic colour in its interior. As a protection against rapid cooling, some quartz powder was used after preliminary roasting it in the furnace. First a quantity of quartz powder was put into the crucible, and then the sphere was plunged into it. After the crucible had been closed, it was put into the furnace at 500° C and heated further to a given temperature. The time

was measured until the furnace reached the prescribed temperature and also for a period of heating at that temperature. Then the crucible was removed from the furnace and cooled until a temperature of almost 40° C was reached.

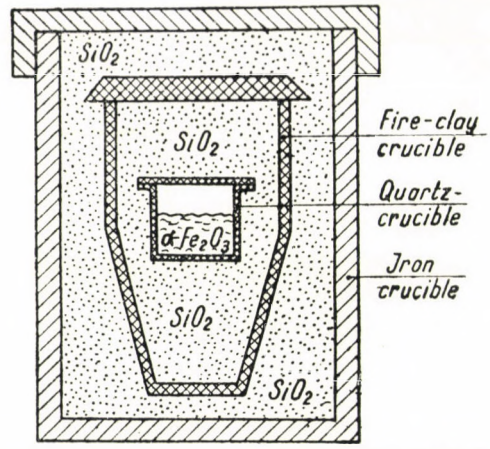


Fig. 16. Arrangement of the crucibles for the roasting

Table II

Results of transformation of iron oxides into maghemite

No	Material	Temp. t° C	Time - minutes			Diameter of sphere cm
			Until prescribed temperature	Heating	Cooling	
1	Crystalline hematite	650°	28	15	60	4
	Nearly 50% has magnetic properties. Colour blood-red. Hematite completely magnetic.					
2	Crystalline hematite	750°	34	10	65	4
	Nearly 85% has magnetic properties. Colour blood-red. Hematite completely magnetic.					
3	Crystalline hematite	850°	37	10	70	5
	Nearly 75% has magnetic properties. Colour blood-red. Hematite completely magnetic.					
4	Synthetic hematite	850°	30	10	70	—
	Completely magnetic. Colour dark brown.					
5	Coarse crystalline hematite ...	850°	30	10	70	—
	Totally magnetic of red colour and metallic lustre.					
6	Limonite	850°	37	10	70	5
	Totally megnetic. Colour dark brown. Hematite magnetic.					
7	Goethite	850°	30	10	70	—
	Totally magnetic. Colour brown.					

Then the spheres were removed from the quartz powder, cut in half, and tested for magnetic properties in the hematite sphere and in the crystalline hematite. Table II No 1, 2, 3 give the results of these tests.

b) Brown synthetic hematite (ferrum oxydatum Fe_2O_3 made by Merck) was poured into a small quartz crucible, and this was placed in a fire-clay crucible containing quartz powder. The fire-clay crucible was covered and was placed in quartz powder in an iron crucible (Fig. 16). This in turn was covered and put into the furnace at 850° C. After lowering of the temperature the iron crucible was heated for 10 minutes. Then it was removed from the furnace and cooled. Table II No 4 gives the results of these tests. Fig. 17 shows a Röntgen

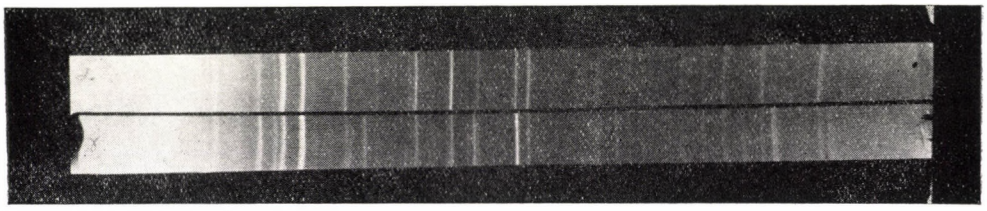


Fig. 17. Röntgen photograph of maghemite transformed from hematite

photograph of the crystalline lattice of hematite and that of hematite transformated to maghemite.

c) Coarse crystalline hematite was heated at 850° C as under b) and as a result of it some of the grains got blood-red, the rest retained a metallic exterior. (Tab. II No 5.)

d) Two grams of powdered limonite were placed in the hematite sphere and the sphere was put into an iron crucible containing quartz powder. Further tests were made as under a). The results are given in the Tab. II No 6.

e) Goetithe, received in 1949 from the Mineralogy Dep. of The Pennsylvania State College and then heated as under b) revealed strong magnetic properties. (Tab. II No 7.)

It appears from the above :

1. Hematite, limonite and goethite placed in the crucibles with quartz cover and heated in the furnace at 650—850° C change their colour and reveal magnetic properties.

2. The quartz cover tends to produce slow cooling, and helps in retaining the magnetic properties in the hematite.

REFERENCES

1. Archarow, W. J. : Oxidation of metals. Metallurgizdat 1946. Swierdlowsk-Moscow.
2. Baudisch, O. and Albrecht, W. H. : Gamma Ferric Oxide Hydrate. J. Am. Chem. Soc. Vol. 54, 1932.
3. Czerski, L. : Topochemistry and Technics. The Chemical Review No 1. Warsaw 1947.

4. DEAN, R. S. and DAVIS C. W. : Magnetic Separation of Ores. U. S. Dept. of the Int. Bureau of Mines. Bulletin 425. 1941.
5. DÜNWALD, H. und WAGNER, C. : Methodik der Messung von Diffusionsgeschwindigkeiten bei Lösungsvorgängen von Gasen in festen Phasen. Z. für phys. Chemie B. 24. 1933.
6. GMELINS Handbuch der anorganischen Chemie. Berlin 1923. Verlag Chemie G. m. b. H.
7. HERROUN, E. F. and WILSON, E. : Ferromagnetic Ferric Oxide. The Proceedings of Phys. Society of London. Vol. 41. 1928—29.
8. HILPERT, S. : Über Beziehungen zwischen chemischer Konstitution und magn. Eigenschaften bei Eisenverbindungen. Berichte der deutsch. Physik Ges. 1909.
9. KUŹNIAR, J. C. : Bulletin No 37. 1933. State Geol. Institute. Warsaw.
10. LĘCZNAR, F. J. : Problem of limonite sand ores preparation. State Scientific. Publication Wrocław 1952.
11. LUBAN, A. P. : Dissociation of oxide compounds in the process of their reduction. Bull. No 9—10. Academy of Sciences. 1943 Moscow.
12. LUYKEN, W. : Die magnetisierende Röstung von Eisenerzen nach Verfahren des K. W. I. Stahl u. Eisen No 39. 1937.
13. MELLOR, J. W.: A Comprehensive Treatise on Inorganic u. Theoretical Chemistry. Vo. XIII. London. 1934.
14. ROBBINS, J.: Magnetic peroxide of Iron. Chem. News. 1. 11—12. 1859.
15. SOSMAN, R. B. and POSNJAK, E.: Ferromagnetic ferric oxide, artificial and natural. J. of the Washington Acad. of Sciences. Vo. 15. 1925.
16. TSCHERMAK, G. and BECKE, F. : Text-Book of Mineralogy. Warsaw. 1931.
17. VERWEY, E. J. W. : Incomplete Atomic Arrangement in Crystals. J. of Chem.-Physics. Vo. 3. 1935.
18. WELO, L. A. and BAUDISCH, O. : The Two Stage Transformation of Magnetite into Hematite. Phylos. Magazine. Ser. 6. Vo. 50. London 1925.
19. WELO, L. A. and BAUDISCH, O. : Ferromagnetism in the Oxide obtained by Dehydration of Gamma Ferric Oxide Hydrate. Phylos. Magazine. Ser. 7. Vo. 17. Part 2. London 1934.

SUMMARY

1. In the process of reduction of hematite the ferromagnetic form γ-Fe_2O_3 appears:

$$\alpha\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow Fe_3O_4$$

$$\alpha\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow \gamma\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow Fe_3O_4$$

2. In the process of oxidation of magnetite appears the ferromagnetic form γ-Fe_2O_3:

$$Fe_3O_4 \rightarrow \gamma\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow \alpha\text{-}Fe_2O_3$$

3. The hematite heated in an oxidizing atmosphere reveals magnetic properties.
4. The magnetic properties of hematite appear at temperatures between 450° · 850° C.
5. Slow cooling under an insulating cover helps in retaining the magnetic properties in the heat treated hematite.

DER ÜBERGANG DES ROTEISENERZES (α-Fe_2O_3) IN FERROMAGNETISCHES EISENOXYD (γ-Fe_2O_3)

F. J. LĘCZNAR

Krakow

ZUSAMMENFASSUNG

1. Bei der Reduktion des Roteisenerzes erscheint die ferromagnetische Form γ-Fe_2O_3:

$$\alpha\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow Fe_3O_4$$

$$\alpha\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow \gamma\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow Fe_3O_4$$

2. Bei der Oxydation des Magnetits tritt die ferromagnetische Form γ-Fe_2O_3 auf:

$$Fe_3O_4 \rightarrow \gamma\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow \alpha\text{-}Fe_3O_3$$

3. Das in einer oxydierenden Atmosphäre erhitzte Roteisenerz zeigt magnetische Eigenschaften.

4. Die magnetischen Eigenschaften des Roteisenerzes zeigen sich bei Temperaturen von 450—850° C.

5. Langsame Abkühlung unter einem Wärmeschutzdeckel fördert die Erhaltung der magnetischen Eigenschaften des Roteisenerzes bei der Wärmebehandlung.

LA TRANSFORMATION DE L'HÉMATITE (α-Fe_2O_3) EN OXYDE DE FER FERROMAGNÉTIQUE (γ-Fe_2O_3)

F. J. LĘCZNAR

Krakow

RÉSUMÉ

1. Dans le procès de réduction de l'hématite il se présente la forme ferromagnétique γ-Fe_2O_3 :

$$\alpha\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow Fe_3O_4$$

$$\alpha\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow \gamma\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow Fe_3O_4$$

2. Dans le procès de l'oxidation de la magnétite apparaît la forme ferromagnétique γ-Fe_2O_3

$$F_3O_4 \rightarrow \gamma\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow \alpha \rightarrow Fe_2O_3$$

3. L'hématite chauffée dans une atmosphère oxydante révèle des propriétés magnétiques.

4. Les propriétés magnétiques de l'hématite se font valoir aux températures entre 450°—850° C.

5. Le refroidissement lent sous un couvercle isolant aide à mainteir les propriétés magnétiques de l'hématite au cours du traitement thermique.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕМАТИТА (α-Fe_2O_3) В ОКИСЬ ЖЕЛЕЗА (γ-Fe_2O_3)

Ф. Й. ЛЕЦНАР (Краков)

РЕЗЮМЕ

1. При восстановлении гематита образуется его ферромагнитная форма γ-Fe_2O_3 :

$$\alpha\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow Fe_3O_4$$

$$\alpha\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow \gamma\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow Fe_3O_4$$

2. При окислении магнетита образуется его ферромагнитное видоизменение $\gamma = Fe_2O_3$:

$$Fe_3O_4 \rightarrow \gamma\text{-}Fe_2O_3 \rightarrow \alpha\text{-}Fe_2O_3$$

3. При накаливании в окисляющей среде у гематита наблюдаются магнитные свойства.

4. Магнитные свойства гематита возникают при 450—850° C.

5. Медленное охлаждение под изолирующим покрытием при термической обработке способствует сохранению магнитных свойств гематита.

CIRCULAR PLATE UNIFORMLY LOADED ON A DIAMETER

J. BARTA

D. ENG. SC.

BUILDING RESEARCH INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received 13th May, 1956]

1. Formulating the problem

Let us consider an elastic circular plate of radius a, uniformly loaded along the x-axis as shown in Figs 1 and 2. The intensity of the load, that is the load per unit length, is denoted by p. In order to determine the deflection w of the plate, produced by this load, we shall apply the methods, which are generally used in the theory of bending of thin plates.

Since the load is distributed only along the x-axis, the deflection w must satisfy the partial differential equation

$$w_{xxxx} + 2\,w_{xxyy} + w_{yyyy} = 0 \tag{1}$$

within the circle everywhere, with the exception of the diameter $y = 0$. Along this diameter the equations

$$\left.\begin{aligned} (M_y)_{y=+0} - (M_y)_{y=-0} &= 0\,, \\ p + (V_y)_{y=+0} - (V_y)_{y=-0} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

must be satisfied. Equations (2) express the equilibrium requirement regarding load p and internal forces. M_y denotes the bending moment, V_y denotes the vertical internal force. Making use of well known formulas [1]

$$\begin{aligned} M_y &= -D\,(w_{yy} + \nu\, w_{xx})\,, \\ V_y &= -D\,[w_{yyy} + (2-\nu)\,w_{xxy}]\,, \end{aligned}$$

equations (2) become

$$\left.\begin{aligned} -(w_{yy} + \nu\, w_{xx})_{y=+0} + (w_{yy} + \nu\, w_{xx})_{y=-0} &= 0\,, \\ p - D\,[w_{yyy} + (2-\nu)\,w_{xxy}]_{y=+0} + D\,[w_{yyy} + (2-\nu)\,w_{xxy}]_{y=-0} &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$D = Eh^3/12\,(1-\nu^2)$ is the flexural rigidity, E is the modulus of elasticity, h is the thickness of the plate, ν is POISSON's ratio. D, E, h, ν, p are constant.

The analytical problem is to find a function w, which should satisfy equation (1) within the circle, with the exception of the diameter $y = 0$, and satisfy equations (3), furthermore satisfy the boundary conditions, too. If the edge of the plate is built in, the boundary conditions are

$$(w)_{r=a} = 0\,, \qquad (w_r)_{r=a} = 0\,. \tag{4}$$

If the edge of the plate is simply supported, the boundary conditions are [2]

$$(w)_{r=a} = 0\,, \qquad (w_{rr} + \nu\, r^{-1} w_r)_{r=a} = 0\,. \tag{5}$$

2. The edge of the plate is built in

Solution in the form of an infinite series. In the case of built-in edge (Fig. 1), the deflection of the plate is

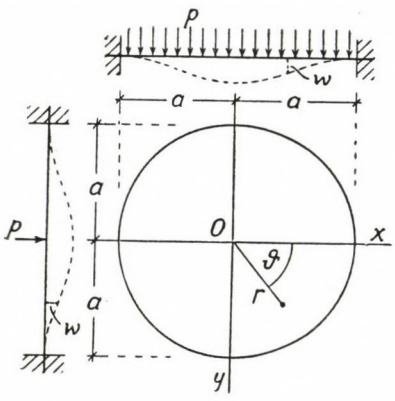


Fig. 1

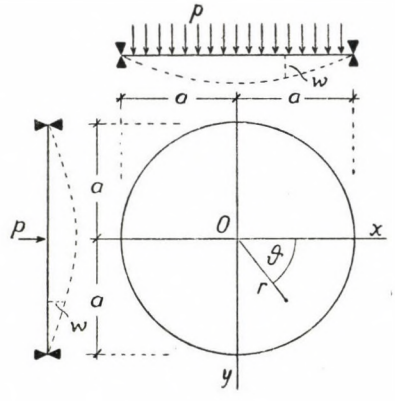


Fig. 2

$$w = \frac{p}{12\,D}\,|y^3| + \frac{p}{\pi D}\left\{\frac{a^3}{18} - \frac{a r^2}{6}\right.$$

$$\left. + \sum_m \left[\frac{a^{3-m}\, r^m}{(9 - m^2)\,(m+1)} + \frac{a^{1-m}\, r^{m+2}}{(m+3)\,(m^2-1)}\right] \cos m\,\vartheta \right\}^{(*)}, \tag{6}$$

$$(m = 2, 4, 6, \ldots)$$

This statement can be proved in the following way. Function (6) is biharmonic, that is, satisfies equation (1) everywhere, with the exception of the diameter

* The author has found formula (6) and also formula (16) in the following manner: he has introduced the sum of the general biharmonic function and particular solution due to the loading, into equations prescribed above, and then compared the coefficient.

$y = 0$. Substituting expression (6) in equations (3), one obtains the identities $0 = 0$ and $0 = 0$. From this fact, it is seen that expression (6) corresponds to the equilibrium requirement regarding load p and internal forces. Introducing expression (6) into equations (4), and utilizing both the formula

$$y = r \sin \vartheta \tag{7}$$

and the Fourier's series

$$|\sin^3 \vartheta| = \frac{4}{3\pi} + \frac{24}{\pi} \sum_m \frac{\cos m\vartheta}{(m^2 - 9)(m^2 - 1)}, \tag{8}$$
$$(m = 2, 4, 6, \ldots)$$

it can be seen, that expression (6) satisfies also the boundary conditions (4).

The maximum deflection occurs at the center of the circle, and obtained from equation (6), is equal to

$$w_0 = \frac{pa^3}{18\pi D}.$$

By using the well-known formulas [2]

$$\begin{aligned} M_x &= -D(w_{xx} + \nu w_{yy}), \\ M_y &= -D(w_{yy} + \nu w_{xx}), \\ M_r &= -D(w_{rr} + \nu r^{-1} w_r + \nu r^{-2} w_{\vartheta\vartheta}), \\ M_t &= -D(r^{-1} w_r + r^{-2} w_{\vartheta\vartheta} + \nu w_{rr}), \end{aligned}$$

we are able to compute the bending moments by introducing expression (6) into these formulas. We find, for instance,

$$(M_x)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = (M_r)_{\substack{r=0 \\ \vartheta=0}} = \frac{3 + 7\nu}{15\pi} pa, \tag{9}$$

$$(M_y)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = (M_r)_{\substack{r=0 \\ \vartheta=\pi/2}} = \frac{7 + 3\nu}{15\pi} pa, \tag{10}$$

$$(M_x)_{\substack{x=a \\ y=0}} = (M_r)_{\substack{r=a \\ \vartheta=0}} = -\frac{pa}{\pi}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \ldots\right]$$
$$= -\frac{2}{3\pi} pa, \tag{11}$$

$$(M_y)_{\substack{x=a \\ y=0}} = (M_\vartheta)_{\substack{r=a \\ \vartheta=0}} = -\frac{2\nu}{3\pi} pa, \tag{12}$$

$$(M_x)_{\substack{x=0\\ y=a}} = (M_\vartheta)_{\substack{r=a\\ \vartheta=\pi/2}} = -\nu\frac{pa}{\pi}\left[-\frac{4}{3}+2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\right)\right]$$

$$= -\nu\frac{pa}{\pi}\left(-\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3\pi}\right)\nu pa\,. \tag{13}$$

$$(M_y)_{\substack{x=0\\ y=a}} = (M_r)_{\substack{r=a\\ \vartheta=\pi/2}} = -\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3\pi}\right)pa. \tag{14}$$

Solution in closed form. The sum of infinite series (6) can be represented in closed form, by the expression

$$w = \frac{p}{12D}|y^3|$$

$$-\frac{p}{24\pi D}(a^3-ar^2)+\frac{p}{24\pi D}(2a^5r^{-2}-3a^3+ar^2)\cos 2\vartheta$$

$$+\frac{p}{48\pi D}\left[3(a^4r^{-1}-2a^2r-r^3)\sin\vartheta\right.$$

$$\left.-(2a^6r^{-3}-3a^4r^{-1}-r^3)\sin 3\vartheta\right]\operatorname{arctg}\frac{2ar\sin\vartheta}{a^2-r^2}$$

$$+\frac{p}{96\pi D}\left[3(a^4r^{-1}-2a^2r+r^3)\cos\vartheta\right.$$

$$\left.-(2a^6r^{-3}-3a^4r^{-1}+r^3)\cos 3\vartheta\right]\log\frac{a^2+r^2+2ar\cos\vartheta}{a^2+r^2-2ar\cos\vartheta}\,. \tag{15}$$

This formula can be obtained from expression (6) in the following manner. One substitutes in expression (6) the identities

$$r^m\cos m\vartheta \equiv \text{real part of } z^m,$$

$$\frac{1}{(9-m^2)(m+1)} \equiv -\frac{1}{12(m+3)}-\frac{1}{24(m-3)}+\frac{1}{8(m+1)},$$

$$\frac{1}{(m+3)(m^2-1)} \equiv \frac{1}{8(m+3)}-\frac{1}{4(m+1)}+\frac{1}{8(m-1)},$$

after this, uses the known rules for manipulation of complex variable $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ and utilizes the power series

$$z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots = \frac{1}{4}\log\frac{1 + r^2 + 2r\cos\vartheta}{1 + r^2 - 2r\cos\vartheta} + \frac{i}{2}\operatorname{arctg}\frac{2r\sin\vartheta}{1 - r^2}.$$

This computation leads to formula (15).

It must be remarked that the computation of the bending moments of the plate in question, by use of the closed expression (15), is not easier than by use of infinite series (6), because the computation of the second derivates of expression (15) becomes complicated and wearisome.

3. The edge of the plate is simply supported

If the edge of the plate is simply supported (Fig. 2) and the Poisson's ratio is ν, then the formula

$$w = \frac{p}{12D}|y^3| + \frac{p}{\pi D}\left\{\frac{(4+\nu)a^3}{18(1+\nu)} - \frac{(2+\nu)ar^2}{6(1+\nu)}\right.$$

$$+ \sum_m \left[\frac{m+4+\nu}{(9-m^2)(m+1)(2m+1+\nu)} a^{3-m} r^m\right.$$

$$\left.\left. + \frac{m+2+\nu}{(m+3)(m^2-1)(2m+1+\nu)} a^{1-m} r^{m+2}\right] \cos m\vartheta\right\}, \qquad (16)$$

$$(m = 2,\ 4,\ 6\ldots.)$$

holds. This statement can be proved in a similar manner as previously, by satisfying the boundary conditions (5) now.

The maximum deflection occurs at the centre of the circle. For it from expression (16), the formula

$$w_0 = \frac{4+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{pa^3}{18\pi D}$$

follows. Such a computation as before gives now

$$(M_x)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0.2071\, pa, \qquad (17)$$

$$(M_y)_{\substack{x=0\\y=0}} = 0.2810\, pa\,, \tag{18}$$

$$(M_r)_{r=a} = (M_x)_{\substack{x=a\\y=0}} = (M_y)_{\substack{x=0\\y=a}} = 0\,, \tag{19}$$

$$(M_y)_{\substack{x=a\\y=0}} = 0.0848\, pa\,, \tag{20}$$

$$(M_x)_{\substack{x=0\\y=a}} = 0.0683\, pa\,. \tag{21}$$

The computation is based on a value of 0,3 for ν.

4. Deriving of formulas (6) and (16) from the influence function

Formulas (6) and (16) were directly put above. They can be obtained, of course, also by use of the influence function. This procedure will be sketched compendiously now. $I(r, \vartheta; R, \Theta)$ is the influence function for the deflection of the plate. R, Θ are the polar coordinates of the point of application of the concentrated unit load. The use of the influence function is based on the principle of superposition. Thus, in the case of the load, which is shown in Figs 1 and 2, the equation

$$w = \int_0^a p\, I(r, \vartheta; R, 0)\, dR + \int_0^a p\, I(r, \vartheta; R, \pi)\, dR \tag{22}$$

holds. The expression for $I(r, \vartheta; R, \Theta)$, if the boundary is a circle, is well-known both in the case of built-in edge [3] and in the case of simply supported edge [4]. By these means, the integrations standing in equation (22), can be carried out. This computation leads to the formulas

$$w = \frac{p}{\pi D}\left\{\frac{r^3}{9} + \frac{a^3}{18} - \frac{ar^2}{6} + \sum_m \left[\frac{2\, r^3}{(m^2-9)(m^2-1)} - \frac{a^{3-m}\, r^m}{(m^2-9)(m+1)} + \frac{a^{1-m}\, r^{m+2}}{(m+3)(m^2-1)}\right] \cos m\vartheta\right\},$$

$(m = 2, 4, 6, \ldots)$

and

$$w = \frac{p}{\pi D}\left\{\frac{r^3}{9} + \frac{(4+\nu)\,a^3}{18\,(1+\nu)} - \frac{(2+\nu)\,ar^2}{6\,(1+\nu)} + \sum_m \left[\frac{2\,r^3}{(m^2-9)\,(m^2-1)}\right.\right.$$

$$\left. - \frac{m+4+\nu}{(m^2-9)\,(m+1)\,(2\,m+1+\nu)}\,a^{3-m}\,r^m\right.$$

$$\left.\left. + \frac{m+2+\nu}{(m+3)\,(m^2-1)\,(2\,m+1+\nu)}\,a^{1-m}\,r^{m+2}\right]\cos m\,\vartheta\right\},$$

$(m = 2, 4, 6, \ldots)$

in the case of built-in edge and in the case of simply supported edge, respectively. After substituting here expressions (7) and (8), the formulas (6) and (16) present themselves.

REFERENCES

1. See f. ex.: S. TIMOSHENKO, Theory of plates and shells. McGraw-Hill, New-York, London, 1940, p. 88 and 90.
2. Ibidem p. 41 and 259.
3. Ibidem p. 268.
4. A. FÖPPL, Die Biegung einer kreisförmigen Platte. Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Jg. 1912, p. 155.

SUMMARY

In this paper, the boundary value problem referring to the plate, which is indicated in the heading, is discussed. The solution of this problem is represented by expressions (6), (15), (16). Some values of the bending moment are expressed by formulas (9)—(14) and (17)—(21).

DIE LÄNGS EINES DURCHMESSERS GLEICHMÄSSIG BELASTETE KREISPLATTE

J. BARTA
Doktor der techn. Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatze wird die Randwertaufgabe der längs eines Durchmessers gleichmässig belasteten Kreisplatte behandelt. Die Lösung dieses Problems ist durch die Formeln (6), (15), (16) angegeben. Einige Werte des Biegungsmomentes sind durch die Formeln (9)—(14) und (17)—(21) ausgedrückt.

PLAQUE CIRCULAIRE UNIFORMÉMENT CHARGÉE SUIVANT UN DIAMÈTRE

J. BARTA
Docteur des sc. techniques

RÉSUMÉ

L'article traite le problème des valeurs au contour concernant une plaque circulaire, si la charge est uniformément répartie sur la longeur d'un diamètre. La solution de ce problème est exprimée par les formules (6), (15), (16). Quelques valeurs du moment fléchissant sont exprimées par les formules (9)—(14) et (17)—(21).

КРУГЛАЯ ПЛИТА, РАВНОМЕРНО НАГРУЖЕННАЯ ВДОЛЬ ОДНОГО ДИАМЕТРА

Д-р техн. наук Й. БАРТА

РЕЗЮМЕ

В данной статье рассматривается задача краевых значений круглой плиты, равномерно нагруженной вдоль одного диаметра. Решение этой проблемы дается формулями (6), (15), (16). Некоторые значения изгибающего момента выражаются формулями (9)—(14) и (17)—(21).

QUELQUES FORMULES PRATIQUES POUR LE CALCUL STATIQUE DES POUTRES LANGER

J. BARTA

DOCTEUR DES SC. TECHN.

INSTITUT SCIENTIFIQUE DU BÂTIMENT, BUDAPEST

[Manuscrit présenté le 14 mai 1956]

Dans cette étude nous nous occupons d'une construction (fig. 1) qui se compose d'une poutre de rigidité (α), d'un arc flexible (β) et de tiges verticales (γ) reliant l'arc à la poutre de rigidité. Une pareille construction

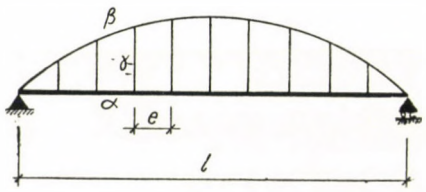


Fig. 1.

est appelée souvent poutre Langer, dénommée de l'ingénieur autrichien J. LANGER qui l'a appliquée la première fois.*

Notations

a voir fig. 6.
b voir fig. 6.
c le coefficient de la dilatation thermique linéaire.
e voir fig. 1.
E le module d'élasticité.
f voir fig. 3.
F_α la surface de la section de la poutre de rigidité.
F_β la surface de la section de l'arc.
F_γ la surface de la section d'une tige verticale.
I_α le moment d'inertie de la section de la poutre de rigidité.
k le calcule selon la formule (1).
K dépend de k, voir le tableau ci-dessous.
l la portée, voir fig. 1.
M_α le moment fléchissant dans la poutre de rigidité.
$M_{\alpha 0}$ le moment fléchissant qui se produirait dans la poutre de rigidité comme dans une poutre ordinaire, si elle était seule, c'est-à-dire, si elle n'était pas liée avec l'arc.
p l'intensité de la charge uniformément répartie, voir figs 4 et 5.

* Voir p. ex. : Hütte, Manuel de l'ingénieur, 26e édition allemande, IIIe vol., p. 72, ou Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Bd. 2, Abt. 4, p. 18.

P la charge concentrée, voir fig. 6.
R se calcule selon la formule (2).
S_α la force axiale dans la poutre de rigidité (la valeur positive signifie la tension).
S_β la force axiale dans l'arc (la valeur positive signifie la compression).
S_γ la force axiale dans une tige verticale (la valeur positive signifie la tension).
t la température de la poutre de rigidité.
t' la température de l'arc et des tiges verticales.
w la flèche au milieu de la poutre de rigidité.
w_0 la flèche au milieu de la poutre de rigidité comme d'une poutre ordinaire, si elle était seule, c'est-à-dire, si elle n'était pas liée avec l'arc.
x voir fig. 3.
X la composante horizontale de S_β
y voir fig. 3.

Hypothèses

En realité, les tiges verticales exercent sur l'arc et sur la poutre de rigidité, des forces isolées (fig. 2) ; mais, pour simplifier le calcul, nous supposons au cours de l'établissement des formules que les tiges verticales sont infiniment rapprochées (fig. 3)*. Nous supposons de plus que l'arc est flexible comme une chaine

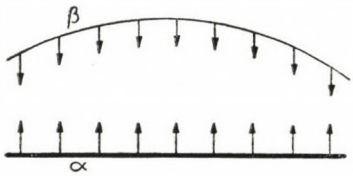


Fig. 2

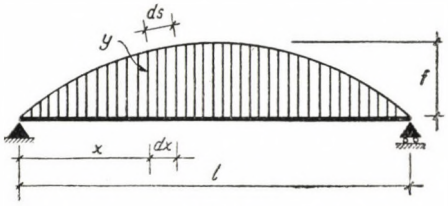


Fig. 3

idéale, et sa forme est une parabole. De même les valeurs c, e, E, F_α, F_β, F_γ, I_α sont constantes. Nous verrons que ces hypothèses permettent l'établissement des formules simples à l'aide desquelles on peut facilement calculer les efforts intérieurs et la flèche.

Formules pour le calcul des efforts intérieurs et de la flèche**

D'abord, on calcule la valeur k selon la formule

$$k = \frac{4f}{l} . \tag{1}$$

Puis, on détermine la valeur K en utilisant le tableau ci-dessous, et on calcule la valeur R selon la formule

$$R = \frac{8f^2}{I_\alpha} + \frac{15}{F_\alpha} + \frac{K}{F_\beta} + \frac{10\,ek^3}{l\,F_\gamma} . \tag{2}$$

* Nous avons pris cette idée de la théorie des ponts suspendus où une hypothèse analogue est usuelle.

** Les formules qui vont être exposées ici, seront prouvées à la fin de l'article.

Tableau 1

k	K	k	K	k	K
0,30	15,68	0,50	16,94	0,70	18,93
0,31	15,73	0,51	17,02	0,71	19,05
0,32	15,78	0,52	17,11	0,72	19,17
0,33	15,83	0,53	17,19	0,73	19,30
0,34	15,88	0,54	17,28	0,74	19,42
0,35	15,93	0,55	17,37	0,75	19,55
0,36	15,99	0,56	17,46	0,76	19,68
0,37	16,05	0,57	17,55	0,77	19,82
0,38	16,11	0,58	17,64	0,78	19,95
0,39	16,17	0,59	17,74	0,79	20,09
0,40	16,23	0,60	17,84	0,80	20,23
0,41	16,29	0,61	17,94	0,81	20,37
0,42	16,36	0,62	18,04	0,82	20,52
0,43	16,42	0,63	18,15	0,83	20,66
0,44	16,49	0,64	18,25	0,84	20,81
0,45	16,56	0,65	18,36	0,85	20,96
0,46	16,64	0,66	18,47	0,86	21,12
0,47	16,71	0,67	18,58	0,87	21,27
0,48	16,79	0,68	18,70	0,88	21,43
0,49	16,86	0,69	18,81	0,89	21,59

k, K, R sont constantes, car elles sont déterminées par les dimensions de la construction. Les autres valeurs se calculent comme suit.

Le moment fléchissant dans la poutre de rigidité,

$$M_a = M_{a0} - y\,X\,. \tag{3}$$

La force axiale dans la poutre de rigidité,

$$S_a = X\,. \tag{4}$$

Le maximum de la force axiale dans l'arc flexible,

$$\max S_\beta = X\sqrt{1 + k^2}\,. \tag{5}$$

La force dans une tige verticale,

$$S_\gamma = \frac{8\,ef}{l^2}\,X. \tag{6}$$

La flèche au milieu de la travée, c'est-à-dire le déplacement vertical du milieu de la poutre de rigidité,

$$w = w_0 - \frac{5\,l^2 f X}{48\,E\,I_a} \tag{7}$$

en négligeant — comme c'est usuel — l'action de la force axiale. Les formules selon lesquelles les valeurs X, M_{a0}, w_0 se calculent dans quatre cas spéciaux, sont les suivantes :

I° — Charge p uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre de rigidité (fig. 4).

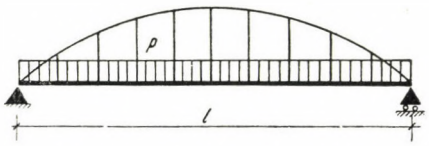


Fig. 4

$$X = \frac{k\,l^3\,p}{4\,I_a\,R}, \tag{8}$$

$$M_{a0} = \frac{p}{2}\,(lx - x^2), \tag{9}$$

$$w_0 = \frac{5\,l^4\,p}{384\,E\,I_a}. \tag{10}$$

II° — Charge p uniformément répartie sur la moitié de la longueur de la poutre de rigidité (fig. 5).

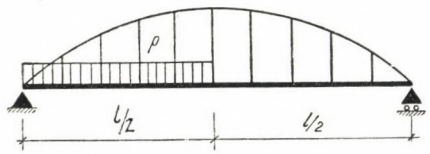


Fig. 5

$$X = \frac{k l^3\,p}{8\,I_a\,R}, \tag{11}$$

$$M_{a0} = \begin{cases} p\left(\dfrac{3\,lx}{8} - \dfrac{x^2}{2}\right) & \text{pour } x \leqq \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{p}{8}\,l\,(l - x) & \text{pour } x \geqq \dfrac{l}{2}, \end{cases} \tag{12}$$

$$w_0 = \frac{5\,p\,l^4}{768\,E\,I_a}\,. \tag{13}$$

III° — Charge concentrée P en un point quelconque de la poutre de rigidité (fig. 6).

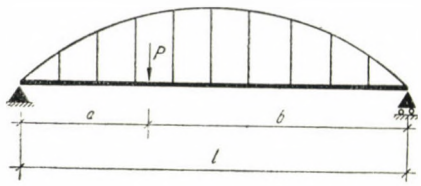


Fig. 6

$$X = \frac{5\,a\,b\,k\,P}{4\,I_a\,R}\left(1 + \frac{a\,b}{l^2}\right), \tag{14}$$

$$M_{a0} = \begin{cases} \dfrac{P\,b}{l}\,x & \text{pour } x \leqq a\,, \\ \dfrac{P\,a}{l}\,(l - x) & \text{pour } x \geqq a\,, \end{cases} \tag{15}$$

$$w_0 = \begin{cases} \dfrac{P\,a\,l^2}{48\,E\,I_a}\left(3 - 4\,\dfrac{a^2}{l^2}\right) & \text{pour } a \leqq \dfrac{l}{2}\,, \\ \dfrac{P\,b\,l^2}{48\,E\,I_a}\left(3 - 4\,\dfrac{b^2}{l^2}\right) & \text{pour } a \geqq \dfrac{l}{2}\,. \end{cases} \tag{16}$$

IV° — Variations de la température. Lorsque la variation de la température n'est pas uniforme, des efforts intérieurs vont prendre naissance. Nous considérons ici le cas où la température de la poutre de rigidité est t, et la température de l'arc et des tiges verticales est t'.

$$X = \frac{15}{R}\,(t' - t)\,cE\,, \tag{17}$$

$$M_{a0} = 0\,, \tag{18}$$

$$w_0 = 0\,. \tag{19}$$

Établissement des formules

En conséquence des hypothèses que nous avons posées préalablement, nous pouvons dire que les tiges verticales exercent sur l'arc et sur la poutre de rigidité des forces dont la répartition est continuelle. q signifie la valeur de ces forces par unité de longueur horizontale. F_γ/e signifie la grandeur de la surface de la section des tiges verticales par unité de longueur horizontale. Nous employons la notation

$$K = \frac{15}{8}\left[(5 + 2k^2)\sqrt{1+k^2} + \frac{3}{k}\,\text{lognat}\left(k + \sqrt{1+k^2}\right)\right]. \tag{20}$$

Le tableau ci-dessus donne les valeurs de K, pour quelques valeurs de k. La composante horizontale de S_β que nous signalons par X, est la quantité statiquement indéterminée. En exprimant l'énergie de déformation en fonction des efforts intérieurs, on trouve

$$V = \int_0^l \frac{M_\alpha^2}{2\,E\,I_\alpha}\,dx + \int_0^l \frac{S_\alpha^2}{2\,E\,F_\alpha}\,dx + \int_{(s)} \frac{S_\beta^2}{2\,E\,F_\beta}\,ds + \int_0^l \frac{q^2\,y}{2\,E\,F_\gamma/e}\,dx\,. \tag{21}$$

Les relations bien connues (3), (4) sont encore valables. Avec

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{dy}{dx} = y'$$

on aurait

$$S_\beta = \frac{X}{\cos\omega} = X\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\omega} = X\sqrt{1+y'^2}, \tag{22}$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx\,. \tag{23}$$

Pour l'arc que nous considérons comme parfaitement flexible, est valable l'équation différentielle

$$q = -\,y''\,X \tag{24}$$

concernant l'équilibre des fils. En posant les expressions (3), (4), (22), (23), (24) dans l'équation (21), nous aurons

$$V = \int_0^l \frac{(M_{\alpha 0} - yX)^2}{2\,E\,I_\alpha}\,dx + \int_0^l \frac{X^2}{2\,E\,F_\alpha}\,dx +$$

$$+ \int_0^l \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\,X^2}{2\,E\,F_\beta}\,dx + \int_0^l \frac{e\,y\,y''^2\,X^2}{2\,E\,F_\gamma}\,dx\,.$$

D'après le théorème de Ménabréa et Castigliano, la grandeur X peut se calculer par la condition

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0 ,$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{\int_0^l \frac{y M_{\alpha 0}}{I_\alpha} dx}{\int_0^l \frac{y^2}{I_\alpha} dx + \int_0^l \frac{1}{F_\alpha} dx + \int_0^l \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{F_\beta} dx + \int_0^l \frac{e\, y\, y''^2}{F_\gamma} dx} . \tag{25}$$

La parabole a pour équation

$$y = 4f\left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] . \tag{26}$$

De la formule (22) il résulte que

$$\max S_\beta = X\sqrt{1+y'(0)^2} = X\sqrt{1+y'(l)^2}$$

qui donnera après substitution de (26), la formule (5). De la formule (24), après substitution de (26), on obtient

$$q = \frac{8f}{l^2} X ,$$

et, en conséquence de la relation $S_\gamma = eq$, l'équation (6). La formule (9) est bien connue. En introduisant les formules (9) et (26) dans l'équation (25), on trouve la formule (8).

On peut établir les autres formules, par la même méthode que nous avons employée ci-dessus.

RÉSUMÉ

L'article démontre comment on calcule très simplement les efforts intérieurs et la flèche de la poutre Langer. Les formules (1), (2), ..., (19) illustrent le procédé.

PRAKTISCHE FORMELN ZUR STATISCHEN BERECHNUNG DES LANGERSCHEN BALKENS

J. BARTA
Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Abhandlung wird ein einfaches Verfahren zur statischen Berechnung des LANGERschen Balkens angegeben. Die inneren Kräfte und die Durchbiegung lassen sich unter Benutzung der Formeln (1), (2), ..., (19) berechnen.

PRACTICAL FORMULAE FOR THE STRESS ANALYSIS OF THE LANGER GIRDER

J. BARTA
D. of Techn. Sc.

The stress analysis of the Langer girder is discussed in a simple way, in this paper. The internal forces and deflection of the girder are expressed by the formulas (1), (2), ..., (19).

ПРАКТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СТАТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ БАЛКИ ЛАНГЕРА

Д-р техн. наук Й. БАРТА

РЕЗЮМЕ

В данной статье излагается простой метод расчета балки Лангера. Внутренние усилия и прогиб могут быть определены при помощи формул (1), (2), ..., (19).

THE THERMAL FIELD OF THE EARTH'S CRUST AND ITS INFLUENCE ON THE VENTILATION OF DEEP AND HOT MINES

Prof. T. BOLDIZSÁR

D. OF ENG. SC.

DEPARTMENT II FOR MINE MACHINERY, TECHNICAL UNIVERSITY, SOPRON

[Manuscript received 31st May, 1956]

I. Introduction

Today all over the world mining proceeds to greater depths, or projects are under consideration to do so, since the mineral wealth of the layers nearer to the surface has either been already exhausted or is just being extracted. This tendency is more clearly visible in mining those minerals that occur in inclined seams or veins for in these instances the mining operations are hindered by continually sinking workings into deeper and deeper depths of the basin in question.

Planning and working hot deep mines, the requirements of health and comfort demand a knowledge of all the facts and means that enable one to compute the temperature rise of the air streaming into the mine, and thus to set up installations, if need be, to decrease air temperature in the working places.

The thermal field of the earth's crust not affected by mining, has been characterized so far by the average of the geothermic gradient *(gg)*, i. e. the reciprocal value of the thermal gradient, this being used to predict the virgin-rock temperature of the deeper layers to be opened up. The virgin-rock temperature is of fundamental importance in computing the heat flow from the rock to the air. In a paper published in 1943 [1], it was pointed out that for theoretical as well as for practical reasons, it would be better to characterize the thermal state of any part of the earth's crust by the quantity of heat *(q)* flowing from the interior towards the surface of the earth (terrestrial heat flow). In possession of such information and knowing the thermal conductivity of the layers (λ), the geothermic gradient can be calculated by means of the equation

$$q = \frac{\lambda}{gg} . \tag{1}$$

Only few reliable data are at hand in the literature on the subject that have been gained by actually measuring the temperature of virgin-rocks and the thermal conductivity of the layers. The measurements taken in boreholes have offered so far only an approximate temperature of the deeper layer. In spite of the enormous number of drillings for exploring and exploiting oil-fields in the United States, BIRCH [2] was unable to use any of their observations to exactly determine the terrestrial heat flow. The same applies to similar investigations elsewhere in other mining districts of the world.

I pointed out in my former papers [1, 3] where I dealt with the conditions in the Pécs-Komló coal-field in Hungary, that measurements taken in mines, if certain conditions were observed, would constitute a satisfactory method to arrive at exact and reproducible values of virgin-rock temperature.

The theoretical investigations to ascertain the temperature rise of air in mine airways due to virgin-rock temperature, are all of a recent date. The practical and satisfactory mathematical model for the computation of heat flow into a mine roadway, is a hollow cylinder surrounded by the infinite space of given thermal conductivity. It was quite late, in 1921, that a solution of Fourier's thermal conductivity differential equation with respect to that model, was given by NICHOLSON [4] on the assumption that the heat transfer factor α was infinitely great. KREMNIEFF [5] suggested a solution in 1952 by considering the value of α. In the same year KŐNIG [6] investigated the annual periodical changes in the temperature of the air streaming into the hollow cylinder, and computed the phase lag of the temperature wave. Their results

have so far not yet found any practical application as they are rather complicated for numerical computations.

A number of erroneous views on the present subject, can be met with in the up-to-date mining literature [e. g. 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14]. The problem has been frequently approached by simply summing up all air temperature rises caused by other factors than rock-heat, and subtracting this from the total, the remaining term is looked upon as being the temperature rise caused by rock-heat [e. g. 15.]. Such a method is obviously incorrect as the quantity of heat flowing from the rocks to the air depends on temperature differences between air and virgin rock.

The methods of NICHOLSON, KREMNIEFF and KÖNIG may be useful for ascertaining the temperature rise of the air in a shaft or roadway when the necessary basic data are available, but they cannot be used for entire mines and not even for sections in a mine. These methods have all failed to come up to practical requirements for the following reasons:

1. As a rule, it cannot be determined exactly how old each roadway may be in a network of roadways constantly expanding. We usually do not know the quantity of air, the temperature and other data of the air expressed as a function of time, although past values essentially affect the present and future flow of heat from the rocks.

2. We do not know about the changes taking place in the content of CO_2 and of vapour in the airstream, though both factors are sources of heat that should not be neglected. For this reason the interrelations employed to establish the effect of these two factors, have been of little practical value.

3. Nothing can be predicted about the future course of deep mine ventilation. We have no means to answer vital questions such as what temperature can be expected some hundred metres deeper, and what steps should be taken to ensure a comfortable environment in the deepened mines.

4. The methods employed up to now, have not been based on a careful investigation of the actual thermal conditions of the rocks. Instead of measuring thermal conductivity and temperature of virgin rock layers, the thermal field has simply been characterised by the average value of the thermal gradient. For this reason the calculations can hardly ever be of necessary accuracy and are often misleading.

II. The thermal field of the earth's crust

Examining the heat exchange between the earth's crust and the atmosphere, it will be observed that a heat current, that may be considered stationary under certain conditions, flows from the interior of the earth towards the surface. This heat current has so far been determined in a few places of the earth only ($q = 0{,}6 - 3{,}1 \cdot 10^{-6}$ cal/cm^2 sec). The temperature of the atmosphere is subjected to periodic changes; approximating the half-yearly average, it can be said that about 10^3 times more heat enters or leaves the surface of the earth caused by atmospheric temperature variation than flows from the interior

towards the surface. For this reason the heat flow of the earth cannot be measured anywhere near its surface.

The needs for reliable plans of deep mining operations peremptorily demand a knowledge of the virgin-rock temperatures in the layers to be opened up. A very serious error will have been made if without knowing the terrestrial heat flow value of the mining district and the thermal conductivity of the layers, we conclude to the virgin-rock temperature of layers with unknown heat conductivity, by simply using the average of the thermal gradient, for more often than not its values were reached by examining entirely different types of layers. The safe way to ascertain the virgin-rock tenperature of the deeper layers, is by investigating the terrestrial heat flow, the thickness of the various layers and their thermal conductivity. Let the depth of the single layers, measured vertically, be denoted by $h_1, h_2 \ldots\ldots h_n$, the temperatures at the top and bottom of the layer-group by T_1 and T_2, then the heat flow passing through a unit surface will be determined by

$$q = \frac{T_2 - T_1}{\int_1^2 \frac{dh}{\lambda}}, \quad \text{or} \quad q = \frac{T_2 - T_1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta h_i}{\lambda_i}} \tag{2}$$

The average value of the geothermic gradient will be

$$gg = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta h_i}{q \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta h_i}{\lambda_i}}. \tag{3}$$

Equation (2) will be of fundamental importance in the computations of heat flow by measuring the virgin-rock temperature and rock conductivity [17].

III. Heat flow and the geothermal field of the earth's crust disturbed by mining

The problem of ventilating deep mines arises at a depth of 500 metres in this country and at 900—1000 metres elsewhere. At these depths only a knowledge of the geothermal field of the earth's crust is required since the influence of the atmosphere near the earth's surface does not play a part at all and can therefore be neglected. It is best to think of the drifts and tunnels in mines as cylindrical cavities driven into the infinite solid mass of the rock. The mathematical model should be thought of as an infinite space characterised by the λ factor of thermal conductivity and and by factor a of thermometric conduc-

tivity, and in which there is a hollow cylinder with radius R. The flow of heat takes place through the walls of the hollow cylinder. Neglecting the flow of heat in the axial direction, the first object of our present investigation is to study and ascertain the distribution of temperature in the immediate surroundings of the cylinder, as well as to establish the rate of heat flow, both expressed as functions of radius and time.

The differential equation of heat conduction is best rendered by cylindrical coordinates such as

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \tag{1}$$

When the temperatures of the two media are of the same value along the bounding planes (factor of heat transfer $\alpha = \infty$), then the initial and boundary conditions are

$$\begin{aligned} t = 0\,; \quad & r = R, \quad && T = T_0 \\ & r > R, && T = T_k \\ t > 0\,; \quad & r = R, && T = T_0 \\ & r = \infty, && T = T_k \end{aligned}$$

As is well-known the solution of the differential equation can be performed by

$$T = e^{-\beta^2 a t}\left[A J_0(\beta r) + B Y_0(\beta r)\right] \tag{2}$$

where J_0 and Y_0 are zero order Bessel functions of the first and second kind. A numerical computation of A and B presents difficulties when the initial and boundary conditions are considered. After repeated transformations according to NICHOLSON [4]

$$T = T_0\left[1 + 2\int_0^\infty e^{-\beta^2 a t}\,\frac{J_0(\beta r)\,Y_0(\beta r_0) - Y_0(\beta r)\,J_0(\beta r)}{Y_0^2(\beta R) + \pi^2 J_0^2(\beta R)}\,\frac{d\beta}{\beta}\right] \tag{3}$$

The equation contains the temperature changes in terms of thermal diffusivity, of time and radius.

The quantity of heat flowing from, or into, the rock through the walls of the drift computed as a function of time per unit-length of the drift, is (λ : factor of thermal conductivity)

$$q = -2\pi R \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} \tag{4}$$

Performing the computation

$$q = 8\,\pi\,ac\,\varrho\,T_0 \int_0^\infty \frac{e^{-\beta^2 at}}{Y_0^2(\beta R) + \pi^2 J_0^2(\beta R)} \frac{d\beta}{\beta} \tag{5}$$

where J_0 and Y_0 are zero order Bessel-functions of the first and second kind; β is the variable of the integral; a is the factor of the rock's thermometric conductivity, c its specific heat and ϱ its density.

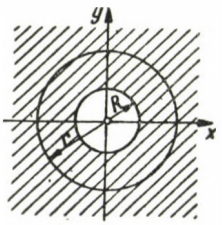


Fig. 1

The above integrals cannot be solved, and can be determined to any approximative exactness only by a rather lengthy numerical computation.

JAEGER and CLARKE [16] solved Equation (5) in the following form

$$q = \lambda\,F(\psi)\,\tau \tag{6}$$

where $\tau = T_k - T_0$, i. e. the difference between the temperatures of the virgin-rock and of the bounding plane.

$$F(\psi) = \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\psi\beta^2}}{\mathcal{J}_0^2(\beta) + Y_0^2(\beta)} \frac{d\beta}{\beta} \tag{7}$$

and $\psi = \dfrac{at}{R^2}$. The authors determined the values for $F(\psi)$ by numerical computation and then arranged them in a table.

An examination of Equation (6) will point to the fact that the quantity of heat flowing into a drift of radius R in a given medium after a given period of time, depends exclusively on the difference of temperature between the virgin rock and the walls of the drift, the latter having been cooled by ventilation. The expression $F(\psi)$ with a given value of (ψ), will remain constant even if the temperature of air in the drift, or what is much the same, the temperature of the wall of the drift varies. This will enable us, later in this paper, to write down differential Equation (11) after we have examined the temperature-rise

of air in the drift. It must, however, be added here that in Equation (6) the expression T_k is the virgin-rock temperature when $r = \infty$. This temperature shows the same values as the temperature of the axis of the drift when being opened up and just before the rock was disturbed by driving.

KREMNIEFF [5] complemented the boundary conditions of differential equation (1) in a way so that when $r = R$, then

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha (T - \Theta) = 0$$

i. e. the quantity of the heat flowing through the walls of the cylinder is restricted by the heat-transfer coefficient α. The solution is

$$\frac{\Theta - T}{\Theta - T_k} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{Y_0\left(\beta \frac{r}{R}\right)\left[\mathcal{J}_0(\beta) + \frac{\beta \lambda}{\alpha R} \mathcal{J}_0(\beta)\right] - \mathcal{J}_0\left(\beta \frac{r}{R}\right)\left[Y_0(\beta) + \frac{\beta \lambda}{\alpha R} Y_1(\beta)\right]}{\left[\mathcal{J}_0(\beta) + \frac{\beta \lambda}{\alpha R} \mathcal{J}_0(\beta)\right]^2 + \left[Y_0(\beta) + \frac{\beta \lambda}{\alpha R} Y_1(\beta)\right]^2} e^{-\psi \beta^2} \frac{d\beta}{\beta} \tag{8}$$

The quantity of heat flowing through the walls of the cylinder is expressed by

$$q = 2\pi \lambda F\left(\psi, \frac{\alpha R}{\lambda}\right) \tau$$

where

$$F\left(\psi, \frac{\alpha R}{\lambda}\right) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\psi \beta^2}}{\left[\mathcal{J}_0(\beta) + \frac{\beta \lambda}{\alpha R} \mathcal{J}_0(\beta)\right]^2 + \left[Y_0(\beta) + \frac{\beta \lambda}{\alpha R} Y_1(\beta)\right]^2} \frac{d\beta}{\beta} \tag{9}$$

From this equation it follows that when $\alpha = \infty$, then Equation (9) is equal to Equation (7).

By employing the α factor, a parameter is introduced that is difficult to determine as to actual numerical values, and it also increases the number of parameters that is already great enough. Since α cannot be expressed in exact terms, the calculation is in no way improved by its introduction.

KREMNIEFF determined the values of $\frac{\Theta - T}{\Theta - T_k}$ and of $F\left(\psi, \frac{a R}{\lambda}\right)$ by two bundles of curves.

I have computed and shown in Figs 2—6 the flow of heat brought about by 1° C difference of temperature upon various types of rocks. From these curves the heat flowing through one meter of the drift wall, can be ascertained as a function of time, and can thus be used for practical application in case of such drift radii that usually occur in mining.

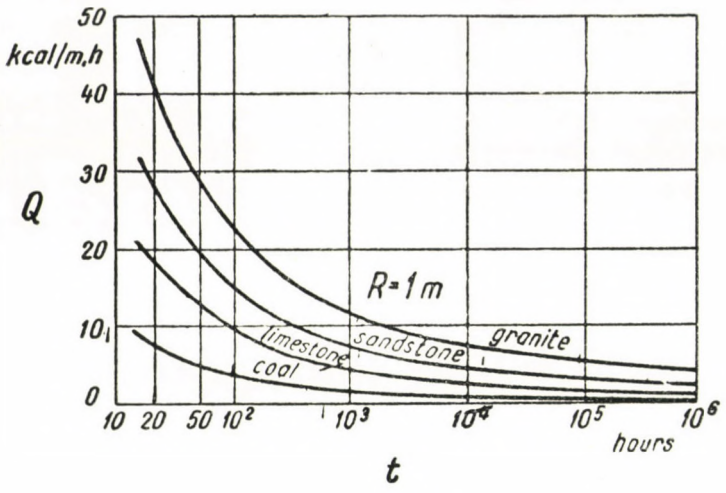


Fig. 2

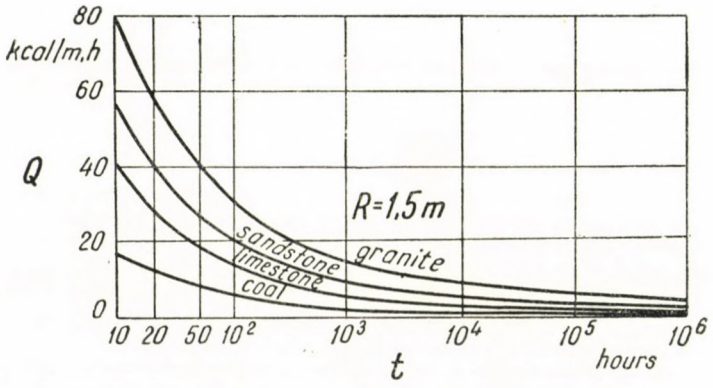


Fig. 3

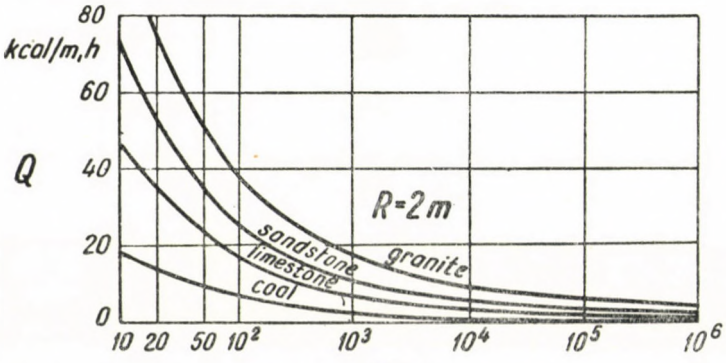


Fig. 4

In must be noticed, however, that the heat flow formula contains a factor denoted by $F(\psi)$ consisting of Bessel-functions and exponential factor to be integrated between the limits of the infinite and zero, and are for this reason rather difficult to use. It would be, therefore, advisable to employ approximate formulae such as the asymptotic approximation of the Bessel-

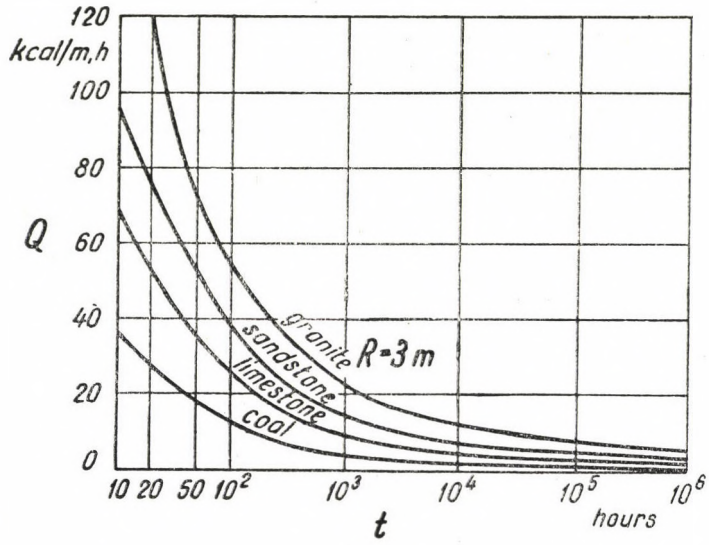


Fig. 5

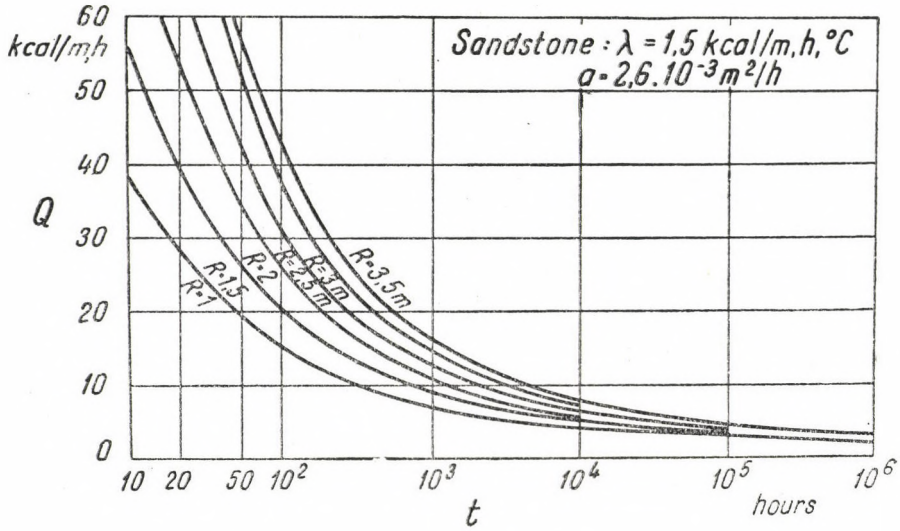


Fig. 6

functions for great absolute values and supplemented by the introduction of the error function

$$q = \lambda\tau\left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{\sqrt{\pi at}}\right)$$

or simply by employing the formula for semiinfinite space

$$q = \frac{\lambda\tau}{\sqrt{\pi at}} .$$

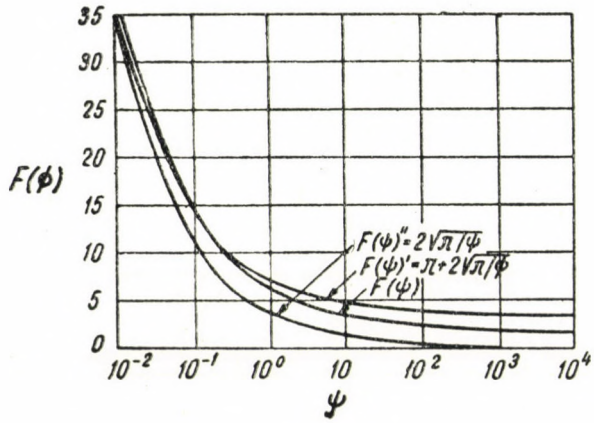


Fig. 7

As can be seen from Fig. 7, neither of these two solutions can be considered as satisfactory. In the first case, namely instead of $F(\psi)$

$$F(\psi)' = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\psi}}$$

while in the second instance

$$F(\psi)'' = \pi + \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\psi}}$$

would stand. A more useful approximation can be achieved by my own approximate relation

$$F(\psi)''' = \frac{\pi}{2} + \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\psi}}$$

which, between certain limits, makes the use of tables superfluous, and from the relations contained in the formula the values of t and even of R, can be ascertained. But even this formula is insufficient for exact computation.

There are other and more complicated approximative power expressions available but even these necessitate the use of tables.

IV. Air-temperature rise in deep dry mines

The temperature of air varies in its passage through mine drifts that have been driven into the crust of the earth. In deep mines the temperature of air is lower than that of the enveloping virgin-rock, and thus the temperature of the air rises. In the present paper we shall exclusively deal with temperature-rise although temperature-drop may also occur when the temperature of the mine air is above that of the virgin-rock. The method of computation is the same in both cases.

Let the difference in temperature between the air and the virgin-rock be denoted by $\tau = T_k - T_0$, the initial value of which is $\tau_0 = T_{k0} - T_{00}$. Let z be one of the coordinate axes lying in the axis of the cylindrical drift, R the radius of the cylinder, λ the factor of thermal conductivity, V the volume of air passing through the drift in unit time and c_p its specific heat. Along dz length of the drift, the quantity of heat passing will be qdz and that will warm the air by $\frac{q\,dz}{Vc_p}$ °C. The differential change of τ is proportional to the quantity of heat passing through a dz length of the drift but it varies inversely with the quantity of air and specific heat. Excluding any other thermal effects, for a horizontal drift, or to be more exact for a drift in the plane of the geoisotherms, the differential equation will obtain the form

$$d\tau = -\frac{q}{V \cdot c_p}\,dz. \tag{10}$$

Initial condition : when $z = 0$, $\tau = \tau_0$. In view of Equation (6)

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{\lambda \cdot F(\psi)}{V \cdot c_p}\,dz. \tag{11}$$

Considering the initial condition the solution will be

$$\tau = \tau_0 \exp\left(-\frac{\lambda \cdot F(\psi) \cdot z}{V \cdot c_p}\right). \tag{12}$$

The temperature of the drift wall will not stay constant along the z coordinate under the influence of an air-stream in the drift. As a result of this air-stream, heat will flow parallel to the axis of the cylinder. Equation (12) was derived from Equation (6), but in the latter the expression of the heat-current in axial direction had not been included. The axial heat-flow may be passed over, as in actual mining applications the radial thermal gradient is usually by about two orders of magnitude greater than the axial gradient.

In dry shafts the case is somewhat more complicated. Rock temperature increases with depth and the air is warmed up by compression too. Taking the change in rock temperature as being linear, and introducing the heat equivalent of mechanical work $A = \frac{1}{427}$ kcal/mkg, the quantity of heat deriving from the adiabatic compression of air, is equal to the thermal equivalent of the changes in the potential energy of the air and can be expressed as

$$\gamma \cdot A \cdot V \cdot dz$$

in a shaft of dz length, where γ is the specific weight of the air. The quantity of the heat is positive in a down-cast shaft (negative in an up-cast shaft), and thus it has to sum up with the heat flowing from the rocky layers bounding the shafts. In this instance instead of Equation (10)

$$d\tau = -\left(\frac{A\gamma}{c_p} + \frac{q}{V \cdot c_p}\right) dz$$

where $q = \lambda \cdot F(\psi) \cdot \tau$ and $\tau = (T_k - T_0)$. T_k varies with the depth of the shaft: $T_k = T_{k1} + \frac{z}{gg}$. Initial condition when $z = 0$, then $T = T_{00}$.

The solution of the linear differential equation of the first order, considering the initial conditions, takes the form

$$\tau = \left[\tau_0 - \frac{V \cdot c_p}{\lambda \cdot F(\psi)} \left(\frac{1}{gg} - \frac{A\gamma}{c_p}\right)\right] \exp\left(-\frac{\lambda \cdot F(\psi) \cdot z}{V \cdot c_p}\right) + \\ + \frac{V \cdot c_p}{\lambda \cdot F(\psi)} \left(\frac{1}{gg} - \frac{A\gamma}{c_p}\right). \tag{13}$$

In sloping drifts or shafts with ε angle of inclination

$$\tau = \left[\tau_0 - \frac{V \cdot c_p \sin\varepsilon}{\lambda \cdot F(\psi)} \left(\frac{1}{gg} - \frac{A\gamma}{c_p}\right)\right] \exp\left(-\frac{\lambda \cdot F(\psi) \cdot z}{V \cdot c_p}\right) + \\ + \frac{V \cdot c_p \sin\varepsilon}{\lambda \cdot F(\psi)} \left(\frac{1}{gg} - \frac{A}{c_p}\gamma\right) \tag{14}$$

The temperature of the air streaming in to the intake shaft is subjected to periodical changes along the course of a year. Approximating these changes by a sinus function ($T_{00} = A_0 \sin \omega t$) KÖNIG [6] calculated the amplitude and the phase-lag by the following formula (correcting the sign error) where A_0 and A denote the amplitude of the temperature variations of the air, and

φ_0 and φ the phase lag after the air has passed from the earth's surface through a mine drift of z m length, zero indices denoting initial values

$$A = A_0 \exp\left(-\frac{2\pi\lambda z}{V \cdot c_p} F(\mu)\right) \tag{15}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi\lambda z}{V \cdot c_p} f(\mu) \tag{16}$$

$$F(\mu) = \mu \frac{G_{01}(\mu) \cdot G'_{01}(\mu) + G_{02}(\mu) \cdot G'_{02}(\mu)}{G^2_{01}(\mu) + G^2_{02}(\mu)} \tag{17}$$

$$f(\mu) = -\mu \frac{G_{01}(\mu) \cdot G_{02}(\mu) + G_{02}(\mu) \cdot G'_{01}(\mu)}{G^2_{01}(\mu) + G^2_{02}(\mu)} \tag{18}$$

where $\mu = R\sqrt{\frac{\omega}{a}} = R\sqrt{\frac{2\pi}{aP}}$; G_{01} and G_{02} are Bessel-functions with an imaginary argument, G'_{01} and G'_{02} derivatives of the latter.

My Equations (12), (13) and (14) may be considered as fundamental formulae for the ventilation of deep mines. The basic conclusions to be drawn from these formulae exhibit the principles guiding the practice of ventilating deep mines. Equation (12) is, however, simple only in appearance but is not so in fact, since the symbol $F(\psi)$ is a complicated expression that is determined by a number of factors such as ψ, i. e. the factor of temperature conductivity, as well as the age of the drift (from the beginning of the ventilating process investigated up to the moment of the actual investigation), and it also depends on the radius of the drift assumed to be cylindrical. Summing up : the final temperature of the air streaming in through the walls of mine drifts depends on the following parameters :

$$T_0 = f(T_K, T_{00}, \lambda, c, \varrho, t, R, z, V)$$

which means that the number of variants amounts to nine. The equation is exponential.

No practical attempts have so far been made to clear up the complicated relations between these ten factors influencing air-temperature in dry mines, and no attempts have been made to apply even those results that have so far been obtained.

Equations (12), (13) and (14) give the temperature-rise of air which is the consequence of Equation (6). An important outcome of these formulae consists in the observation that temperature-rise in the air of deep and hot mines depends foremost on the temperature of the virgin-rock: T_k, since the

inflow of heat as well as the rise of air temperature is regulated by $\tau = T_k - T_0$, and because the value of T_0 (= temperature of the air) is determined by the heat endurance of working man and may be considered as a constant. The value of the temperature of virgin-rocks, is unambiguously defined by the quantity of heat streaming from the depths of the earth towards the surface through various layers of known thermal conductivity. Thus the temperature-rise of the air streaming into the drifts, is decisively influenced by the thermal field of the undisturbed crust of the earth. In the Mecsek coal-region of Hungary where we have deep mines the terrestrial heat flow shows high values ($2 \div 3.10^{-6}$ cal/cm^2, sec) [17], and from this it follows that both the virgin-rock temperature and heat-flow from rocks, and consequently, the temperature rise of the air, will show high values.

REFERENCES

1. Boldizsár: A geotermikus gradiens bányászati vonatkozásai. Bányászati és Kohászati Lapok 1943. évf. 20. sz.
2. Birch: The present state of geothermal investigations. Geophysics Vol. XIX. (1954). No. 4. pp. 645—649.
3. Boldizsár: A pécsbányatelepi liasz szénelőfordulás geotermikus viszonyai. Bányászati és Kohászati Lapok 1944. évf. 19—20. sz. pp. 280—287. and 290—296.
4. Nicholson: A Problem in the Theory of Heat Conduction. Proc. Roy. Soc. 1921. Vol. A—100. pp. 226—240.
5. *Кремнев:* Докл. Акад. Наук СССР. 1952. Vol. LXXXV. No. 5. p. 1009.
6. König: Math. Untersuchungen über das Grubenklima. Bergbau Archiv 1952. Jg. 13. Heft 314. pp. 1—14.
7. Stoces—Cernik: Bekämpfung hoher Grubentemperaturen. Berlin 1931.
8. *Щербан:* Основ теории и метод теплов расчетов рудничного воздуха. Москва, 1953.
9. Buch: Die Bedeutung der Wettererwärmung für die Bestimmung der zur Klimatisierung von Abbaubetrieben im Steinkohlenbergbau erforderlichen Kälteleistung. Bergbau Archiv 1955. Heft 2. pp. 1—27.
10. Woropajev: Frage der Bekämpfung hoher Wettertemperaturen in tiefen Gruben. Bergbautechnik. Bd. 4. (1954). p. 334.
11. Neumann: Thermische Vorausberechnungen vor dem Einsatz örtlicher Klimaanlagen in Abbaustreben. Bergbautechnik Bd. 5. (1955) p. 470.
12. van Heerden: A Problem of Unsteady Heat Flow in Connexion with the Air Cooling of Collieries. Proc. General Discussion on Heat Transfer 1951. Inst. Mech. Eng. London 1951.
13. Heise—Drekopf: Die Bildung der Grubentemperaturen und die Möglichkeit der Beeinflussung. Glückauf 1924. p. 587.
14. Lehmann: Der Einfluss des Kältemantels und des Ausgleichmantels etc. Glückauf 1924. p. 107.
15. Jansen: Die Erwärmung der Wetter etc., Glückauf 1927. p. 6.
16. Jaeger—Clarke: Proc. Roy. Soc. Edinburgh 1942. Vol. 61. p. 229.
17. Boldizsár: Measurement of Terrestrial Heat Flow in Coal Mining District of Komló. Acta Technica Ac. Sci. Hung. Tom. XV. Fasc. 1—2. pp. 219—228.

SUMMARY

Calculations on the temperature rise of mine air based on the exact solution of the differencial equation of heat conduction show that the heat flow from the rock into the airways and the temperature rise of air depends on the value of terrestrial heat flow. The thermal gradient and its reciprocal value the so called geothermic gradient is insufficient to describe properly the thermal field of the earth's crust. Predicting future temperature conditions of deep mine workings is uncertain, if the value of terrestrial heat flow and rock conductivities are not previously determined.

DAS WÄRMEFELD DER ERDKRUSTE UND SEIN EINFLUSS AUF DIE BEWETTERUNG TIEFER UND WARMER BERGWERKE

Prof. T. BOLDIZSÁR

Doktor der technischen Wissenschaften

ZUSAMMENFASSUNG

Die auf der strengen Lösung der Differentialgleichung der Wärmeleitung beruhenden Berechnungen der Temperaturerhöhung zeigen, dass der Wärmefluss vom Gebirge in den Wetterstrom und die Temperaturerhöhung vom Werte der irdischen Wärmeströmung abhängen. Die thermische Gradient und ihr Reziprokwert, die geothermische Tiefenstufe, genügen nicht, um das Wärmefeld der Erdkruste genau zu bestimmen. Die Vorhersage der Temperaturverhältnisse tiefer Grubenbaue ist unsicher, wenn der Wert der irdischen Wärmeströmung und die Wärmeleitfähigkeit des Gebirges nicht vorausbestimmt werden.

LE CHAMP THERMIQUE DE L'ÉCORCE TERRESTRE ET SON EFFET SUR L'AÉRAGE DE MINES PROFONDES ET CHAUDES

Prof. T. BOLDIZSÁR

Docteur des sc. techn.

RÉSUMÉ

Le calcul de l'élévation de la temperature de l'atmosphère basé sur la solution exacte de l'équation différentielle de la conduction de la chaleur démontre que l'écoulement de la chaleur à partir de la roche dans les galeries d'aérage et l'élévation de la temperature dépendent de la valeur de l'écoulement de la chaleur terrestre. Le degré thermique et sa valeur réciproque appelée degré géothermique ne suffisent pas à caractériser le champ thermique de l'écorce terrestre. La prévision des conditions de temperature des travaux de mines profondes est incertaine, si la valeur de l'écoulement de la chaleur terrestre et la conductibilité des terrains ne sont pas déterminées préalablement.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЗЕМНОЙ КОРЫ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ВЕНТИЛЯЦИЮ ГЛУБОКИХ И ТЕПЛЫХ РУДНИКОВ

Проф. д-р техн. наук Т. БОЛЬДИЖАР

РЕЗЮМЕ

Расчеты по нагреву рудничного воздуха, основывающиеся на строгом решении дифференциальных уравнений теплопроводности, показывают, что количество тепла, входящего в горные выработки, и связанный с этим нагрев рудничного воздуха зависит от количества тепла, движущегося из недр Земли в сторону поверхности. Точное описание температурного поля земной коры не может быть осуществлено при помощи использованного до сего времени температурного градиента, или же обратной его величины — геотермического градиента. Расчет температуры более глубоких слоев является неопределенным и часто неправильным, если определение не основывается на знании величины теплового тока Земли и теплопроводности отдельных слоев. Поэтому важно определить тепловой ток Земли для горных районов.

ZUR AUSGLEICHUNG DER KONTINENTALEN TRIANGULIERUNGSNETZE*

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH

MITGLIED DER UNGAR. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 14. Juli 1956]

Das Problem der Ausgleichung der kontinentalen Triangulierungsnetze ist sehr aktuell geworden, zumal die Internationale Geodätische Assoziation im Mai dieses Jahres in München in der Frage der Ausgleichung des Europäischen

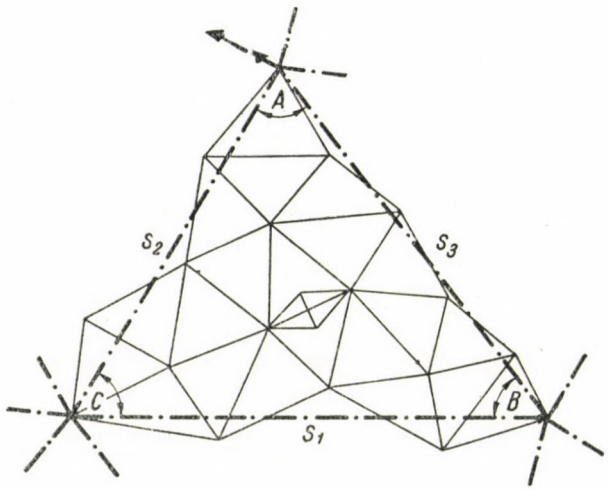


Abb. 1

Triangulierungsnetzes eine eigene Reunion abhielt. Von den Ergebnissen dieser Reunion konnten wir bisher nur wenig erfahren. Das aufgeworfene Problem der Ausgleichung beschäftigte uns in gemeinsamer Arbeit mit Prof. HAZAY schon seit einigen Jahren (Vgl. [1, 2, 3, 4, 5]), wobei der Gedanke, zur grösseren Genauigkeit an Stelle der Heranziehung von Ketten flächenhaft auszugleichen, von Hazay stammt und wir zur möglichsten Sicherung der Unabhängigkeit der Winkel der Grossdreiecke die HELMERTschen und EGGERTschen Gedanken von den äquivalenten Beobachtungen [6, 7] sinngemäss auf unser Problem angewandt und ergänzt haben.

Jetzt wollen wir einen Schritt weitergehen.

* Vorläufiger Bericht.

Die Erfahrung lehrt, dass die Einführung von Streckenbedingungen die Stabilität des Dreiecksnetzes wesentlich zu erhöhen imstande ist. Dies dürfte auch der Grund gewesen sein, weshalb KOCHMANSKI und BATKIEWICZ [8] die aus den kleinen Dreiecken berechneten Seitenlängen in die Ausgleichung des fingierten Netzes I. Ordnung eingeführt haben, allerdings ohne Rücksichtnahme darauf, dass die abgeleiteten Seiten voneinander nicht unabhängig sind.

Wir glauben, dass die Abhängigkeit der hergeleiteten Grössen weder im fingierten Netz I. Ordnung noch in den übergeordneten Dreiecken der kontinentalen Netze, die wir vornehmlich betrachten wollen, vernachlässigt werden kann, so dass es gerechtfertigt erscheint zu untersuchen, wie man vorzugehen hat, falls man in die Ausgleichung gleichzeitig fingierte Winkel und Seitenlängen einführt, natürlich unter möglichster Berücksichtigung des Umstandes, dass sie voneinander nicht unabhängig sind.

Zu unserer folgenden Untersuchung nehmen wir an, dass in den einzelnen abzuleitenden übergeordneten Dreiecken von etwa 150—200 km Seitenlängen etwa dem Schwerpunkt entsprechend je eine Grundlinie gemessen wurde (Abb. 1). Dann können durch sinngemässe Erweiterung der HELMERT-EGGERTschen Gedankengänge die 6 Grössen des Grossdreiecks durch die fingierten Verbesserungen $\lambda_1 \ldots\ldots \lambda_6$ wie folgt ausgedrückt werden.

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{I}} &= A'_{\mathrm{I}} + \alpha'_{1/\mathrm{I}}\lambda_{1/\mathrm{I}} + \alpha'_{2/\mathrm{I}}\lambda_{2/\mathrm{I}} + \alpha'_{3/\mathrm{I}}\lambda_{3/\mathrm{I}} + \alpha'_{4/\mathrm{I}}\lambda_{4/\mathrm{I}} + \alpha'_{5/\mathrm{I}}\lambda_{5/\mathrm{I}} + \alpha'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} \\
B_{\mathrm{I}} &= B'_{\mathrm{I}} + \beta'_{2/\mathrm{I}}\lambda_{2/\mathrm{I}} + \beta'_{3/\mathrm{I}}\lambda_{3/\mathrm{I}} + \beta'_{4/\mathrm{I}}\lambda_{4/\mathrm{I}} + \beta'_{5/\mathrm{I}}\lambda_{5/\mathrm{I}} + \beta'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} \\
C_{\mathrm{I}} &= C'_{\mathrm{I}} + \gamma'_{3/\mathrm{I}}\lambda_{3/\mathrm{I}} + \gamma'_{4/\mathrm{I}}\lambda_{4/\mathrm{I}} + \gamma'_{5/\mathrm{I}}\lambda_{5/\mathrm{I}} + \gamma'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} \qquad (1) \\
S_{1/\mathrm{I}} &= S'_{1/\mathrm{I}} + \delta'_{4/\mathrm{I}}\lambda_{4/\mathrm{I}} + \delta'_{5/\mathrm{I}}\lambda_{5/\mathrm{I}} + \delta'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} \\
S_{2/\mathrm{I}} &= S'_{2/\mathrm{I}} + \varepsilon'_{5/\mathrm{I}}\lambda_{5/\mathrm{I}} + \varepsilon'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} \\
S_{3/\mathrm{I}} &= S'_{3/\mathrm{I}} + \xi'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}}
\end{aligned}
$$

Der Index I drückt die Zugehörigkeit zum Grossdreieck I aus, die Grössen A'_{I}, B'_{I}, C'_{I}, $S'_{1/\mathrm{I}}$, $S'_{2/\mathrm{I}}$, $S'_{3/\mathrm{I}}$, sind aus der Ausgleichung des Grossdreiecks I erhaltene Werte, die durch die Ausgleichung des Grossdreiecksystems weitere Verbesserungen erhalten. Bei Anschreibung dieser Verbesserungen in der in Gl. (1) angegebenen Form können die aus der ersten Ausgleichung erhaltenen Werte, A'_{I}, B'_{I}, C'_{I}, $S'_{1/\mathrm{I}}$, $S'_{2/\mathrm{I}}$, $S'_{3/\mathrm{I}}$ als voneinander unabhängige Beobachtungen behandelt werden, vorausgesetzt, dass die Koeffizienten $\alpha'_{1/\mathrm{I}}, \alpha'_{2/\mathrm{I}} \ldots \beta'_{2/\mathrm{I}}, \beta'_{3/\mathrm{I}} \ldots$ bestimmten Bedingungen entsprechen. Sie sind bekanntlich (vgl. [5 ; S. 404—406]) aus den reziproken Gewichten der aus der ersten Ausgleichung erhaltenen Werte A'_{I}, B'_{I}, C'_{I}, $S'_{1/\mathrm{I}}$, $S'_{2/\mathrm{I}}$, $S'_{3/\mathrm{I}}$ bestimmbar. Wollen wir auch die Fehler der gemessenen Grundlinien selbst berücksichtigen, so ist allerdings eine kleine Ergänzung erforderlich. Von dieser kann jedoch meist Abstand genommen wer-

den, da die durch die Winkelfehler verursachten Unsicherheiten in den berechneten Grossdreieckseiten gewöhnlich bei weitem überwiegen.

Betrachtet man nun die Ausgleichung des Grossdreiecksystems, so sind dann bei n Punkten (Abb. 2) $n-1$ Dreiecke mit je 6 fingierten Beobachtungen vorhanden, die wir mit den Indizes I, II ... in den einzelnen Dreiecken unterscheiden wollen. Zur Bestimmung der ersten beiden Punkte zueinander ist eine Länge erforderlich, zu jener der übrigen Punkte je 2 Beobachtungen. Mithin ist die Zahl z der überschüssigen Beobachtungen in diesem Falle:

$$z = 6(n-1) - 2(n-2) - 1 = 4n - 3 . \tag{2}$$

Im Falle der Abb. 2 ist mithin $z = 25$, d. h. durch Einführung der fingierten

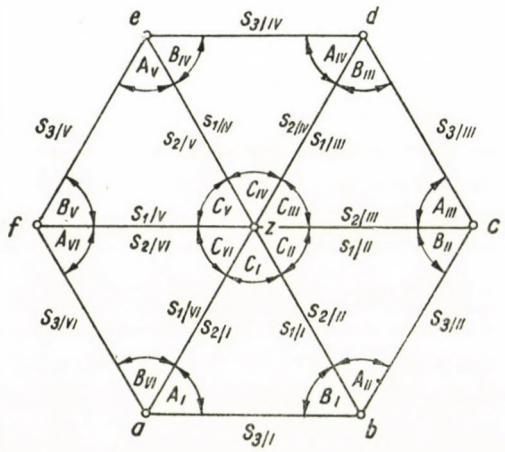


Abb. 2

Seiten erhöht sich die Überschüssigkeit auf das Mehrfache, wodurch auch die Genauigkeit merklich gesteigert wird. Die Bedingungsgleichungen sind dabei:

6 Bedingungsgleichungen für die Dreieckswinkelsummen.

1 Bedingungsgleichung für den Horizontabschluss im Zentrum.

6 Bedingungsgleichungen für die Gleichheit der Längen: (3)

$$S_{1/I} = S_{2/II},\ S_{1/II} = S_{2,III},\ S_{1/III} = S_{2/IV},\ S_{1/IV} = S_{2/V},\ S_{1/V} = S_{2/VI},\ S_{1/VI} = S_{2/I} .$$

12 Bedingungsgleichungen für die Längen: in jedem Dreieck zwei Längenbedingungsgleichungen von der Bauart (unter Voraussetzung ebener Dreiecke, die wir bei grösseren Längen durch Einführung eines entsprechenden Projektionssystems erhalten können. Vgl. [9; S. 422—423]):

$$\frac{S_1}{\sin A} \sin B = S_2 \qquad \text{und} \qquad \frac{S_1}{\sin A} \sin C = S_3 .$$

Drückt man nach Gl. (1) für ein jedes Grossdreieck die endgültigen Werte mit Hilfe der aus dem entsprechenden Grossdreieck hergeleiteten Werte A', B', C', S'_1, S'_2, S'_3 sowie der fingierten Verbesserungen λ aus und führt man diese in die nach (2) bzw. (3) gegebenen Bedingungsgleichungen ein, so können letztere streng ausgeglichen werden, vorausgesetzt, dass die Beobachtungswerte der einzelnen Dreiecke nur zur Herleitung jeweils eines einzigen fingierten Grossdreiecks verwendet werden. Auf die Ausgleichung des übergeordneten Netzes selbst nach den bedingten Beobachtungen und auf die weiteren Berechnungen erübrigt es sich, hier näher einzugehen.

Die grosse Zahl der Bedingungsgleichungen, zu den bei astronomischen Ortsbestimmungen noch weitere Bedingungen treten, macht es wünschenswert zu untersuchen, ob man nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen nicht rascher zum Ziele kommt.

In einem jeden Dreieck sind 3 Winkel und 3 Seiten, d. h. 6 $(n-1)$ in Abb. 2, also 36 abgeleitete fingierte Beobachtungen gegeben. Dies gibt 6 $(n-1)$, in diesem Falle 36 Vermittlungsgleichungen von den Formen:

$$\begin{aligned} S_{2/1} &= \sqrt{(x_z - x_a)^2 + (y_z - y_a)^2} \\ S_{1/VI} &= \sqrt{(x_z - x_a)^2 + (y_z - y_a)^2} \\ S_{3/1} &= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4}$$

(im Falle der Abb. 2 18 Gleichungen ähnlicher Bauart).

$$\begin{aligned} \text{Ferner: } A_1 &= \operatorname{arctg} \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} - \operatorname{arctg} \frac{y_z - y_a}{x_z - x_a} \\ B_1 &= \operatorname{arctg} \frac{y_z - y_b}{x_z - x_b} - \operatorname{arctg} \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} \\ C_1 &= \operatorname{arctg} \frac{y_a - y_z}{x_a - x_z} - \operatorname{arctg} \frac{y_b - y_z}{x_b - x_z} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4a}$$

(Im Falle der Abb. 2 ergeben sich 18 weitere Gleichungen dieser Bauart).

Dabei müssen die Koordinaten eines Punktes und die Richtung einer Seite gegeben oder angenommen werden. Falls diese der Punkt a und die Richtung (ab) sind, so erscheinen 2 $(n-1)$, also im Falle der Abb. 2 die x-, y-Koordinaten von b, c, d, e, f und z als Unbekannte. Zwischen den Koordinaten von b besteht allerdings noch die Zwangsbedingung:

$$\operatorname{tg}(ab) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \tag{5}$$

so dass die Anzahl der unabhängigen Unbekannten $2(n-1)-1=2n-3$ und die Zahl der Überschüssigkeit auch hier $4n-3$, also bei 36 Vermittlungsgleichungen 25 sein wird.

Ersetzen wir nun in Gl. (4) und (4a) die Grössen S und A, B, C im Sinne der Gl. (1), so haben wir den Fall »bedingte Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten« vor uns, wobei zwischen den ungemessenen Unbekannten eine in Gl. (5) ausgedrückte Zwangsbedingung besteht. Die Lösung dieser Ausgleichsgruppe gaben wir vor Jahren in [10] an. Im vorliegenden Falle ist die Lösung bei Einführung von Näherungswerten x_{0b}, y_{0b}, sowie deren unbekannten Zuschlägen δx_b, δy_b sehr einfach, denn aus Gl. (5) ergibt sich dann:

$$\delta y_b = \operatorname{tg}(ab)\,\delta x_b + \operatorname{tg}(ab)\,(x_{0b} - x_a) - (y_{0b} - y_a)\,. \tag{6}$$

Führen wir auch in den Gln. (4) und (4a) Näherungswerte für die Koordinaten der unbekannten Punkte ein und ersetzen darin δy_b nach Gl. (6), so haben wir den Fall der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten vor uns (vgl. [11; S. 183—185]), wobei im vorliegenden Falle 11 ungemessene Unbekannte und 36 Bedingungsgleichungen auftreten. Dies bedeutet zusammen $36+11=47$ zu bestimmende Unbekannte, so dass die Zurückführung dieser abgeleiteten fingierten Beobachtungen auf den Fall der vermittelnden Beobachtungen auf diese Weise länger wird, wenn auch die dabei erhaltenen mittleren Fehler der einzelnen Koordinaten im Vergleich zur Methode der bedingten Beobachtungen als vorteilhaft anzusehen sind.

Die Verhältnisse werden etwas günstiger, wenn man durch entsprechend genaue Methoden die Längen der übergeordneten Dreiecke unmittelbar misst. Die instrumentelle Entwicklung geht sicherlich in dieser Richtung. Dann kann man in Gl. (4) den beobachteten Längen unmittelbar die unabhängigen Verbesserungen zuordnen, wonach nur noch die Gl. (4a) für die fingierten Beobachtungen übrig bleiben, wobei man in diesem Falle in Gl. (1) mit 3 verschiedenen λ auskommt. Da aber — wieder im Falle der Abb. 2 — die Anzahl der Bedingungsgleichungen 36 und die der ungemessenen Unbekannten 11 bleibt, vermindert sich die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten zunächst noch nicht. Es werden aber die ersten 18 Normalgleichungen mit je einer Korrelate sehr einfach.

Bedenken wir aber, dass man in dem geschilderten Fall im Sinne der Gl. (1) allgemein

$$\begin{aligned} A &= A' + \alpha'_1\lambda_1 + \alpha'_2\lambda_2 + \alpha'_3\lambda_3 \\ B &= B' \qquad\quad + \beta'_2\lambda_2 + \beta'_3\lambda_3 \\ C &= C' \qquad\qquad\quad + \gamma'_3\lambda_3 \end{aligned} \tag{7}$$

schreiben kann, so ist es einfach, daraus für jedes Grossdreieck getrennt λ_1, λ_2 und λ_3 als Funktionen von A, B und C auszudrücken und bei sinngemässer

Einführung der Gl. (4a) reine Vermittlungs- bzw. Verbesserungsgleichungen mit nur jeweils einer Verbesserung zu erhalten. Dann haben wir aber nur 11 Normalgleichungen aufzulösen.

Man kann die soeben geschilderte Methode auch auf jenen Fall anwenden, wo alle 6 Bestimmungsstücke der Dreiecke als fingierte Beobachtungen im Sinne der Gl. (1) ausgedrückt werden. Aus je 6 Gleichungen eines jeden Dreiecks werden dann λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 und λ_6 als Funktionen von A, B, C, S_1, S_2 und S_3 ausgedrückt. Ersetzt man letztere Grössen im Sinne der Gln. (4) und (4a), so hat man reine Vermittlungsgleichungen bzw. Verbesserungsgleichungen mit je einer Verbesserung vor sich, deren Berechnung bekannt ist. Dies gibt die Möglichkeit, die Berechnung mit fingierten Beobachtungen allgemein auf den Fall der vermittelnden Beobachtungen zurückzuführen, vorausgesetzt, dass letzterer Fall — bei vielen fingierten Beobachtungen und wenig Unbekannten — für die Lösung günstiger erscheint. In Netzen mit Winkel- und Längenbedingungsgleichungen ist diese Zurückführung in der Regel zweckmässiger.

SCHRIFTTUM

1. Beszámoló a felsőgeodézia terén folyó vizsgálatokról. Műszaki Tud. Oszt. Közleményei, Bd. I. S. 50—52.
2. Bericht über die im Gang befindlichen Untersuchungen auf dem Gebiet der höheren Geodäsie (Russ. mit deutsch. engl. franz. Zfg.). Acta Technica Hungarica, Bd. III. S. 267—269.
3. Bericht über im Gang befindliche Untersuchungen auf dem Gebiet der höheren Geodäsie in Ungarn. Vermessungstechnik, 1954. S. 78.
4. Hazay: Az országos és kontinentális háromszögelési hálózatok kiegyenlítéséről. A Műszaki Tud. Oszt. Közleményei, Bd. III. S. 439—448.
5. Hazay: Über Ausgleichung von Landestriangulierungsnetzen und kontinentalen Triangulierungsnetzen. Acta Technica Hungarica, Bd. VI. S. 399—408.
6. Helmert: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. II. Aufl. (1907) S. 213—227.
7. Jordan—Eggert: Handbuch der Vermessungskunde. Bd. III/2. (1941) S. 453—455.
8. Batkiewicz: Obliczenie sieci triangulacyjnej zbudowanej z trójkatów »wyliczeniowych«. Geodezja i Kartografia, 1955. S. 169—180.
9. Über die Ausgleichung von Streckennetzen. Acta Technica Hungarica, Bd. VIII. S. 399—423.
10. Über eine weitere Ausgleichsgruppe. Soproner Mitteilungen, 1948—1949, S. 325—332.
11. Jordan—Eggert: Handbuch der Vermessungskunde. Bd. I. (1935).

ZUSAMMENFASSUNG

Die Genauigkeit des zur Ausgleichung kontinentaler Triangulierungsnetze früher angegebenen Verfahrens lässt sich steigern, wenn neben den Winkeln der Grossdreiecke auch die Seitenlängen in die Ausgleichung eingeführt werden. Dies wird erreicht, indem man in jedem abgeleiteten Grossdreieck auch eine Grundlinie misst. In die einzelnen Grossdreiecke sind somit gemäss Gleichungen (1.) 6 fingierte Verbesserungen einzuführen, um in dem aus Grossdreiecken bestehenden Netz Winkel und Längen als voneinander unabhängige Werte ausgleichen zu können. Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen führt auf diese Weise zu viel Normalgleichungen.

Eine einfachere Lösung wird durch die Ausgleichung nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen ermöglicht, wenn die Unbekannten die Koordinaten x, y der Punkte sind und wenn die fingierten Verbesserungen der einzelnen Grossdreiecke gesondert als Funktionen der Koordinaten der Punkte ausgedrückt werden.

ON THE ADJUSTMENT OF CONTINENTAL TRIANGULATION NETS

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH

Member of the Hungarian Academy of Sciences

SUMMARY

The precision of the formerly presented method of adjustment of continental triangulation nets can be boosted, if besides the angles of the big triangles the side lengths are also introduced into the adjustment. This will be attained if in each derived big triangle a base is also measured. Into the big triangles are thus 6 fictive corrections according to equations 1. to be introduced, so that in the net consisting of big triangles, angles and lengths may be adjusted as values independent of one another. Adjustment after conditional observations thus leads to many normal equations.

A simpler solution is obtained by the adjustment according to indirect observations, if the unknowns are coordinates x, y of the points, and if the fictive adjustments of the individual big triangles are expressed separately as functions of the coordinates of the points.

SUR LA COMPENSATION DE RÉSEAUX DE TRIANGULATION CONTINENTAUX

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH

Membre de l'Académie Hongroise des Sc.

RÉSUMÉ

L'exactitude de la méthode de compensation de réseaux de triangulation continentaux exposée plus tôt peut être augmentée si à côté des angles des grands triangles les longueurs des côtés sont aussi introduites dans la compensation. On y arrive en mesurant dans chaque grand triangle déduit une base aussi. Dans les grands triangles individuels il faut ainsi introduire corrections fictives selon les équations 1. pour que par la compensation du réseau consistant de grand triangles on puisse compenser les angles et les longueurs comme des valuers indépendantes les unes des autres. La compensation selon les mesurages conditionnés conduira ainsi à beaucoup d'équations normales.

On obtiendra une solution plus simple par la compensation selon des observations indirectes, si les inconnues sont les coordonnées x, y des points, et si les corrections fictives des grands triangles individuels sont exprimées séparément en fonction des coordonnées des points.

К УРАВНИВАНИЮ КОНТИНЕНТАЛЬНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ СЕТЕЙ

Академик А. ТАРЦИ-ХОРНОХ

РЕЗЮМЕ

Точность ранее сообщенного метода уравнивания континентальных триангуляционных сетей может быть увеличена, если наряду с углами больших треугольников при уравнивании вводить также длину сторон. Это можно достигнуть путем измерения для каждого выведенного большого треугольника одной базисной линии. Для отдельных больших треугольников необходимо ввести 6 фиктивных поправок по уравнениям 1, чтобы уравниванием сети, состоящей из больших треугольников, можно было бы производить уравнивание углов и длин — как независимых друг от друга величин.

Таким образом, уравнивание по условным измерениям приводит к большому числу нормальных уравнений.

Более простое решение получится при уравнивании по вспомогательным наблюдениям, если неизвестными являются координаты точек x,y и фиктивные поправки отдельных больших треугольников выражаются отдельно в функции координат точек.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1956. VIII. 31. — Terjedelem: 19 (A/5) ív, 113 ábra, 1 melléklet

Akadémiai Nyomda, Budapest, Gerlóczy u. 2. — 40540/57 — Felelős vezető: Puskás Ferenc

INDEX

B. Grega : The Movement of the Padding Machine's Looper — Die Bewegung des Schlingenfängers der Pikiermaschine — Le mouvement du boucleur de la machine à piquer — *Б. Грега*: Движение петлителя подшивочной машины 219

T. Szirtes : Ein Problem der Regelung von Fahrzeugdieselmotoren — A Regulation Problem of Automotive Diesel Engines — Un problème de réglage de moteurs Diesel pour véhicules — *Т. Сиртеш :* Одна из проблем регулирования транспортных дизельмоторов 233

Z. Terplán : Dynamische Untersuchung von ebenen Getrieben auf Grund graphischer Darstellung — Dynamic Examination of Mechanisms in Plane Motion — Examen dynamique de mécanismes se mouvant dans le plan — *З. Терплан:* Динамическое исследование механизмов, движущихся в плоскости 255

G. Tóth, V. Pósa : Festigkeit und Elastizität des Leders bei verschiedenen Beanspruchungen — Strength and Elasticity of Finished Leathers at Different Stresses — Résistances et modules d'élasticité de cuirs apprêtés — *Г. Тот* и *В. Поша:* Прочность и эластичность выделанных кож при различных нагрузках 291

V. Lovass-Nagy, Ch. Szendy : Application of the Matrix Calculus to the Investigation of Transformers in Arbitrary Connection — Die Aufstellung von Transformatorengrundgleichungen mit Hilfe der Matrizenrechnung — Équations de transformateurs établies par la méthode des matrices — *В. Ловашш-Надь* и *К. Сенди:* Выведение основных уравнений трансформаторов при помощи матричного исчисления 311

I. Hazay : Azimutreduktion zwischen zwei Erdellipsoiden — Azimuthal Reduction between two Terrestrial Ellipsoids — Réduction azimutale entre deux ellipsoides terrestres — *И. Хазаи:* Редукция азимута между двумя эллипсоидами Земли 353

M. Blahó, T. Faragó : Determination of Higher Order Partial Derivatives of the Velocity Function from Known Values along a Streamline — Über die Berechnung der Ableitungen höherer Ordnung der Geschwindigkeitsfunktion aus bekannten Werten entlang einer Stromlinie — Sur le calcul d'une dérivée d'ordre supérieur de la fonction de la vitesse à partir de valeurs connues le long d'une ligne aérodynamique — — *М. Блахо* и *Т. Фараго:* О вычислении частных производных высшего порядка функции скорости, исходя из известной вдоль обтекаемой линии величины 363

T. Szentmártony, A. Verba : Investigation on the Velocity Field of a Non-rotating Impeller, with Dismounted Blades, by Means of an Electrolytic Tank — Untersuchung im elektrolytischen Trog des Geschwindigkeitsfeldes eines stehenden, unbeschaufelten Laufrades — Examen dans le bac electrolytique du champ de vitesse dans uns roue hydraulique stationnaire, depourvue d'aubage — *Т. Сентмартони* и *А. Верба:* Исследование пространства скорости неподвижного безлопастного рабочего колеса при помощи электролитной ванны 371

F. J. Lecznar : The Transformation of Hematite (α-Fe_2O_3) into Ferromagnetic Iron Oxide (γ-F_2O_3) — Der Übergang des Roteisenerzes in ferromagnetisches Eisenoxyd — La transformation de l'hématite en oxyde de fer ferro magnétique — *Ф. Й. Лецнар:* Преобразование гематита (α-Fe_2O_3) в окись железа (γ-Fe_2O_3) 383

J. Barta : Circular Plate Uniformly Loaded on a Diameter — Die längs eines Durchmessers gleichmässig belastete Kreisplatte — Plaque circulaire uniformément chargée suivant un diamètre — *Й. Барта:* Круглая плита, равномерно нагруженная вдоль одного диаметра 399

J. Barta : Quelques formules pratiques pour le calcul statique des poutres Langer — Praktische Formeln zur statischen Berechnung des Langerschen Balkens — Practical Formulae for the Stress Analysis of the Langer Girder — *Й. Барта:* Практические формулы для статических расчетов балки Лангера 407

T. Boldizsár : The Thermal Field of the Earth's Crust and its Influence on the Ventilation of Deep and Hot Mines — Das Wärmefeld der Erdkruste und sein Einfluss auf die Bewetterung tiefer und warmer Bergwerke — Le champ thermique de l'écorce terrestre et son effet sur l'aérage de mines profondes et chaudes — *T. Больдижар:* Температурное поле земной коры и ее влияние на вентиляцию глубоких и теплых рудников 415

A. Tárczy-Hornoch : Zur Ausgleichung der kontinentalen Triangulierungsnetze — On the Adjustment of Continental Triangulation Nets — Sur la compensation de réseaux de triangulation continentaux — *A. Тарци-Хорнох:* К уравниванию континентальных триангуляционных сетей 429

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up one volume.

Manuscripts should be addressed to :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica, is 110 forints a volume. Orders may be placed with „Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newpapers (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en un volume.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante :

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Compte-courant No. : 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу :

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest, VI., Magyar Ifjúság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

55,— Ft